

~~Duplicado 14.187~~



ACERCA DEL GENERO VIRTUAL DE
LAS SUPERFICIES ALGEBRAICAS

R. 14.606



SECCIÓ DE MATEMÀTIQUES X

Vº Bº
[Signature]

Tesis
CAS

Memoria presentada por
D. Eduardo Casas Alvero
para optar al grado de
Doctor en Matemáticas.

Universidad de Barcelona, Facultad de Matemáticas, 1975.



los sucesivos entornos de C comunes a ambas superficies, similar a la clásica de Noether que expresa la multiplicidad de intersección de dos curvas planas en función de los puntos, ordinarios o infinitamente próximos, que les son comunes. En particular se tendría una interpretación de las curvas en los sucesivos entornos en el mismo sentido de las definiciones de [6], libro cuarto, cap. I, y estaría justificada la denominación de curvas en los sucesivos entornos o curvas infinitamente próximas (a C)¹.

¹ Dos son las definiciones más usuales de puntos infinitamente próximos en curvas planas: la que toma cada uno de estos puntos como una clase de equivalencia de ramas de curva presentando un cierto orden de contacto con la que está en estudio y la que los define por transformaciones cuadráticas ([6], libro cuarto, capítulos I, II). La propiedad fundamental de tales puntos es que permiten expresar la multiplicidad de intersección de dos curvas como suma de los productos de multiplicidades de los puntos comunes. Esta propiedad queda directamente de manifiesto en la primera definición y aparece bajo el segundo punto de vista al considerar la fórmula que relaciona la multiplicidad de intersección de dos curvas con la de sus transformadas por una transformación cuadrática.

A diferencia del caso de las curvas, son muchas las transformaciones monoidales centradas en una curva múltiple de una superficie y no parece justificable generalizar directamente definiendo las curvas infinitamente próximas como componentes de la transformada de la curva múltiple por una transformación monoidal centrada en ella sino que, cualquiera que sea la definición, las curvas infinitamente próximas deben permitir expresar la multiplicidad de intersección de la misma forma en que lo permiten los puntos infinitamente próximos para curvas planas.

CAPITULO V. LA VARIACION DE GENERO VIRTUAL.

En este capítulo se obtiene una primera determinación de la variación del género virtual de una superficie al someterla a una transformación del tipo de las que hemos definido en los dos capítulos anteriores. Tomaremos como género aritmético virtual de una superficie (S, θ) el entero $\chi(\theta) - 1$ siendo $\chi(\theta)$ la característica de Euler-Poincaré, suma alternada de las dimensiones de los grupos de cohomología de S con coeficientes de θ .

§1. Variación del género virtual por proyección.

Comencemos con un resultado bien conocido que asegura la invariancia de la característica de Euler-Poincaré por el functor imagen directa asociado a un morfismo afín.

Proposición V.1. ([8], cap. III, §1.3.2). Si Y es un esquema y $\psi: X \rightarrow Y$ un morfismo afín, para todo θ_X -módulo casi coherente F , los derivados por la derecha, $R^q \psi_*$, del functor imagen directa cumplen $R^q \psi_*(F) = 0$, para todo $q > 0$.

Corolario V.2. ([8], cap. III, §1.3.3). Con las notacio-

nes anteriores, el homomorfismo canónico $H^p(Y, \psi_*(F)) \rightarrow H^p(X, F)$
es un isomorfismo.

En nuestro caso, si $\pi: Z \rightarrow S$ es una de las proyecciones definidas en los capítulos anteriores, π es afín al ser finito y $\chi(\theta_Z) = \chi(\pi_*\theta_Z)$. El morfismo canónico inducido por π , $\theta_S \rightarrow \pi_*\theta_Z$ es inyectivo, identificaremos θ_S con su imagen en $\pi_*\theta_Z$. Podemos considerar la sucesión exacta de haces de θ_S -módulos

$$0 \rightarrow \theta_S \rightarrow \pi_*\theta_Z \rightarrow \pi_*\theta_Z/\theta_S \rightarrow 0$$

de la que se deduce, por la aditividad de la característica de Euler-Poincaré,

$$\chi(\theta_Z) = \chi(\pi_*\theta_Z) = \chi(\theta_S) + \chi(\pi_*\theta_Z/\theta_S)$$

es decir, designando por p_Z, p_S los géneros virtuales de Z y S ,

$$p_Z = p_S + \chi(\pi_*\theta_Z/\theta_S)$$

2. La variación de género virtual en la transformación en superficie C. M.

Tratemos en primer lugar el caso en que Z es la transformada C. M. de S , $Z = S_{cm}$, $\pi = \omega$ y x_1, \dots, x_m los puntos no C. M. de S .

Si consideramos la sucesión exacta

$$0 \rightarrow \theta \xrightarrow{\gamma} \omega_{*\theta_{cm}} \rightarrow \omega_{*\theta_{cm}}/\theta \rightarrow 0 \quad (1)$$

donde θ y θ_{cm} son los haces estructurales de S y S_{cm} , al ser ω un isomorfismo salvo en los puntos x_1, \dots, x_m , la inclusión γ es igualdad en fibra salvo en x_1, \dots, x_m de donde el haz $\omega_{*\theta_{cm}}/\theta$ está concentrado en x_1, \dots, x_m . El conductor de ω , anulador de $\omega_{*\theta_{cm}}/\theta$, tiene como primos asociados los haces de ideales correspondientes a los puntos x_1, \dots, x_m ya que $(\omega_{*\theta_{cm}}/\theta)_x$ es no nulo si y solo si x es uno de los x_i .

En particular $\chi(\omega_{*\theta_{cm}}/\theta) = \dim_k H^0(\omega_{*\theta_{cm}}/\theta) = \sum_i \dim_k (\omega_{*\theta_{cm}}/\theta)_{x_i}$ y resulta el

Teorema V.3. La diferencia entre géneros virtuales $P_{S_{cm}} - P_S$ es siempre no negativa y se anula si y solo si $S = S_{cm}$, es decir, S es C. M.

Demostración. Hemos observado ya que $P_{S_{cm}} - P_S$ coincide con $\sum_i \dim_k (\omega_{*\theta_{cm}}/\theta)_{x_i}$ que es positivo o nulo. La anulación fuerza $(\omega_{*\theta_{cm}}/\theta)_{x_i} = 0$ para todo i con lo que $\omega_{*\theta_{cm}}/\theta = 0$ y γ es la igualdad.

Consideremos ahora la traza sobre S de una hipersuperficie cualquiera H que no contenga a S . Se trata de una subvariedad de S determinada por un haz de ideales localmente principal Φ . Los primos minimales de Φ son todos de altura uno pero Φ puede presentar alguna componente primaria cu-

yo radical sea de altura dos; ello ocurre si y solo si la hipersuperficie pasa por algún punto no C. M.: Si θ_x es C. M., $\Phi_x = f_x \theta_x$, de ser f_x no inversible, tiene todos los primos asociados de altura uno. En cambio, en uno de los x_i , si $\Phi_{x_i} = f_{x_i} \theta_{x_i}$ es un ideal propio, el ideal maximal \underline{m}_{x_i} de θ_{x_i} es primo asociado de Φ_{x_i} . La traza de la hipersuperficie H sobre S es una subvariedad de S cuyas componentes son todas de dimensión uno salvo si H pasa por alguno de los x_i en cuyo caso este aparece como componente sumergida de la intersección. Designemos por Φ_1 el haz de ideales intersección de las componentes primarias de altura uno de Φ ; $\Phi = \Phi_1$ si y solo si H no pasa por ningún x_i y en cualquier caso $\Phi_x = (\Phi_1)_x$ para $x \neq x_i$, $i = 1, \dots, m$. La subvariedad de S definida por Φ_1 es la parte uno-dimensional de la traza de H sobre S . Nos referiremos a ella como la curva cortada por H sobre S .

Si \underline{m}_i es el haz de ideales del punto x_i , $(\underline{m}_i)_x = \theta_x$ para $x \neq x_i$, $(\underline{m}_i)_{x_i} = \underline{m}_{x_i}$, hemos advertido ya que el conductor κ de ω tiene a los \underline{m}_i como primos asociados con lo que, para ciertos μ_i , $\bigcap_i \underline{m}_i^{\mu_i} \subseteq \kappa$. Tomemos la hipersuperficie H de modo que $\Phi \subseteq \underline{m}_i^{\mu_i}$ para cada i . Basta para ello elegir una superficie cualquiera que pase por los x_i , de ecuación homogénea $F(X_0, \dots, X_s) = 0$ y tomar como H la dada

por la ecuación $F(X_0, \dots, X_s)^\mu = 0$ con $\mu \geq \max(\mu_i)$, o también, tomar una hipersuperficie que presente una multiplicidad o un orden de contacto con S suficientemente alto en cada x_i . Resultará entonces $\phi \subset \kappa$ y, multiplicando tensorialmente por θ/ϕ la sucesión exacta (1) resulta la sucesión también exacta

$$\theta/\phi \rightarrow \omega_{*\theta_{cm}}/\phi\omega_{*\theta_{cm}} \rightarrow \omega_{*\theta_{cm}}/\theta \rightarrow 0 \quad (2)$$

Proposición V.4. $\phi\omega_{*\theta_{cm}} \cap \theta = \phi_1$.

Demostración. Basta comprobar la igualdad para los abiertos de un recubrimiento afín de S . Tomemos el recubrimiento de modo que ϕ sea principal en cada uno de los abiertos. Sean U uno de los abiertos del recubrimiento, $A = \theta(U)$, $fA = \phi(U)$, $A_{cm} = \Gamma_U \omega_{*\theta_{cm}} = \Gamma_{\omega^{-1}(U)} \theta_{cm}$. Es bien sabido que la restricción de $\omega_{*\theta_{cm}}$ a U es el tildado de A_{cm} como A -módulo y sabemos también que la inclusión $A \rightarrow A_{cm}$ induce igualdad entre los localizados en primos de altura uno de A y A_{cm} . Como todos los localizados de A_{cm} son C. M., los primos asociados a fA_{cm} son todos de altura uno y por ello

$$fA_{cm} = A_{cm} \left(\bigcap_{\underline{P}} f(A_{cm})_{\underline{P}} \right)$$

donde \underline{P} recorre los primos de altura uno de A_{cm} . De ahí resulta

$$fA_{cm} \cap A = A \cap \left(\bigcap_{\underline{P}} f(A_{cm})_{\underline{P}} \right) = A \cap \left(\bigcap_{\underline{P}} fA_{\underline{P}} \right)$$

dado que los localizados en primos de altura uno de A y A_{cm}

coinciden, supuesto que en el último término \underline{p} recorre los primos de altura uno de A . En definitiva $fA_{cm} \cap A$ es la intersección de las componentes primarias de fA de primo asociado de altura uno: $fA_{cm} \cap A = \Phi_1(U)$ de donde la igualdad del enunciado.

Corolario V.5. La sucesión exacta (2) induce la

$$0 \rightarrow \theta/\Phi_1 \rightarrow \omega_{*}\theta_{cm}/\Phi\omega_{*}\theta_{cm} \rightarrow \omega_{*}\theta_{cm}/\theta \rightarrow 0 \quad (3)$$

El primer término de la sucesión exacta es el haz estructural de la que hemos llamado curva cortada por la hipersuperficie H sobre S . Interpretemos el segundo término:

Lema V.6 $\Phi_1\omega_{*}\theta_{cm} = \Phi\omega_{*}\theta_{cm}$.

Demostración. Bastará probar que en cada abierto afín U donde Φ sea principal vale la igualdad. Utilizando las mismas notaciones que en V.4, debemos probar que $\Phi_1(U)A_{cm} = fA_{cm}$. Una de las inclusiones es trivial, por otra parte, para cada primo \underline{p} de altura uno en A , $\Phi_1(U)A_{\underline{p}} = fA_{\underline{p}}$ ya que las componentes correspondientes a primos de altura uno de $\Phi_1(U)$ y fA coinciden. Resulta así que para cualquier $g \in \Phi_1(U)$, $g/f \in A_{\underline{p}}$ cualquiera que sea \underline{p} de altura uno en A . Recordando que A_{cm} es intersección de sus localizados en primos de altura uno y que estos coinciden con los de A , $g/f \in A_{cm}$, es decir, $g \in fA_{cm}$ y se sigue la igualdad.

Tendremos:

$$\Phi \omega_* \theta_{cm} = \Phi_1 \omega_* \theta_{cm} = \omega_* \Phi_1 \theta_{cm}$$

de donde, por la exactitud de ω_* al actuar sobre haces casi-coherentes (V.1), el término central de (3) aparece como

$$\omega_*(\theta_{cm}/\Phi_1 \theta_{cm})$$

esto es, la imagen directa del haz estructural de la transformada¹ por ω de la curva cortada por H sobre S . Ello proporciona una primera caracterización de la variación de género virtual por transformación de una superficie en superficie C. M.

Teorema V.7. La diferencia de género virtual entre la transformada C. M. y la propia superficie iguala la diferencia de géneros virtuales entre cualquier curva cortada sobre S por una hipersuperficie que pase con multiplicidad suficientemente alta por los puntos no C. M. de \mathcal{S} , y su transformada en S_{cm} .

¹ Puesto que $\Phi_1 \theta_{cm} = \Phi \theta_{cm}$, está claro que $\Phi_1 \theta_{cm}$ es localmente principal (como haz de ideales de θ_{cm}) y, al ser S_{cm} C. M., define una curva en S_{cm} cuyo haz estructural es el cociente del de S_{cm} por el de ideales. Del hecho que ω es un isomorfismo salvo en un número finito de puntos, se deduce fácilmente que ω induce una proyección birracional de la curva transformada en la original (componente a componente en el caso de ser reducibles).

Demostración. Basta calcular a partir de la sucesión (3):

$$\begin{aligned}
 p_{S_{cm}} - p_S &= \chi(\omega_{*}\theta_{cm}/\phi\omega_{*}\theta_{cm}) - \chi(\theta/\phi_1) = \\
 &= \chi(\omega_{*}(\theta_{cm}/\phi_1\theta_{cm})) - \chi(\theta/\phi_1) = \\
 &= \chi(\theta_{cm}/\phi_1\theta_{cm}) - \chi(\theta/\phi_1) = 1 - p' - 1 + p \\
 &= p - p'
 \end{aligned}$$

designando por p el género virtual de la curva cortada por la hipersuperficie en S y por p' el de su transformada.

Consideremos ahora una nueva hipersuperficie que pase por todos los puntos no C. M. de S pero que no contenga a S . Sea Ψ el haz de ideales localmente principal que determina la traza de dicha hipersuperficie sobre S . Por hipótesis Ψ_{x_i} es un ideal propio de θ_{x_i} , $\Psi_{x_i} \subset \mathfrak{m}_{x_i}$. Para n lo bastante grande Ψ^n estará contenido en el conductor y el haz Ψ^n puede tomar el papel de ϕ en la sucesión (3). La intersección de las componentes primarias correspondientes a primos de altura uno de Ψ^n es por definición $\Psi^{(n)}$ con lo que la sucesión (3) se transforma en la sucesión exacta

$$0 \rightarrow \theta/\Psi^{(n)} \rightarrow \omega_{*}\theta_{cm}/\Psi^n\omega_{*}\theta_{cm} \rightarrow \omega_{*}\theta_{cm}/\theta \rightarrow 0$$

Transformando el término central como hemos hecho anteriormente, tenemos la sucesión

$$0 \rightarrow \theta/\Psi^{(n)} \rightarrow \omega_{*}(\theta_{cm}/\Psi^n\theta_{cm}) \rightarrow \omega_{*}\theta_{cm}/\theta \rightarrow 0$$

y podemos enunciar

Teorema V.8. La variación de género virtual $p_{S_{cm}} - p_S$
se expresa en la forma

$$p_{S_{cm}} - p_S = \chi(\theta_{cm}/\psi^n \theta_{cm}) - \chi(\theta/\psi^{(n)})$$

para n mayor que un cierto n_0 , donde ψ es el haz localmente principal de la traza sobre S de una hipersuperficie cualquiera que pasa por todos los puntos no C. M. de S y no contiene a S . También, si ξ es el haz de ideales de la curva cortada por la hipersuperficie sobre S (i. e. la parte uno-dimensional de la subvariedad definida por ψ)

$$p_{S_{cm}} - p_S = \chi(\theta_{cm}/\xi^n \theta_{cm}) - \chi(\theta/\xi^{(n)})$$

para $n > n_0$.

Demostración. Asegurada ya la primera parte del enunciado, para comprobar la segunda basta observar que $\psi^{(n)} = \xi^{(n)}$ y $\psi^n \theta_{cm} = \xi^n \theta_{cm}$ ambas igualdades debidas a que en puntos de altura uno coinciden las fibras de ψ^n y ξ^n .

§3. La variación de género virtual en la transformación $S \leftarrow \bar{S}$.

Supongamos ahora, como en el capítulo IV, que la superficie S es C. M.: nos ocuparemos de determinar la diferencia entre el género virtual de S y el de su transformada \bar{S} .

Seguiremos utilizando todas las notaciones del capítulo IV, en particular C será la curva reducida en la que se ha centrado la transformación y C' , de haz de ideales \underline{a} , la elegida como centro de la dilatación $S \leftarrow S'$.

Lema V.9. El conductor κ de la proyección $S \xrightarrow{\bar{\pi}} \bar{S}$ tiene como primos asociados los haces de ideales correspondientes a las componentes de C que son múltiples en S .

Demostración. Bastará examinar la situación en un abierto afín cualquiera $U \subset S$. Sean $A = \theta(U)$, $\bar{A} = \bar{\pi}_* \bar{\theta}(U) = \bar{\theta}(\bar{\pi}^{-1}(U))$. $\kappa(U)$ es el conductor de la extensión $A \rightarrow \bar{A}$, por III.4 sabemos que los primos asociados de $\kappa(U)$ son exactamente aquellos ideales \underline{p} de altura uno en A para los que la extensión $\Sigma^{-1}A \rightarrow \Sigma^{-1}\bar{A}$ ($\Sigma = A - \underline{p}$) no es la igualdad o, lo que es lo mismo, si \underline{p} corresponde a $x \in U$, $\Sigma^{-1}A = \theta_x$, $\Sigma^{-1}\bar{A} = (\bar{\pi}_* \bar{\theta})_x$ y x es un punto de altura uno en el que $\bar{\pi}$ no induce isomorfismo. Aplicando IV.3 estos son los puntos genéricos de las componentes de C cuyos anillos locales difieren de su semi-local en el primer entorno lo que equivale a decir que sean no regulares (Northcott [15]) y correspondan por tanto a una componente de C múltiple en S .

Sea \underline{b} el haz de ideales de una curva en S sujeto a las siguientes condiciones:

- a) Las componentes de C lo son de la curva definida por

\underline{b} , esto es, la descomposición de \underline{b} en primarios es $\underline{b} = \underline{p}_1 \cap \dots \cap \underline{p}_r \cap \underline{q}_{r+1} \cap \dots \cap \underline{q}_m$ donde los \underline{p}_i son los primos correspondientes a las componentes de C y los \underline{q}_j son primarios cuyo radical no está entre los \underline{p}_i .

b) La transformada de la curva en \bar{S} , definida por el haz de ideales $\underline{b}\bar{\theta}$, es localmente principal (en \bar{S}).

Se observa inmediatamente que tales condiciones son satisfechas por el ideal \underline{a} de la curva auxiliar C' . Baste advertir que siendo C' el centro de la dilatación $S \leftarrow S'$, el haz de ideales de su transformada en S' es ya localmente principal y lo propio ocurre en $\bar{S} = S'_{cm}$.

Por el lema V.9, cualquier potencia \underline{b}^n con n bastante alto está contenida en el conductor κ . De ahí que de la sucesión exacta

$$0 \rightarrow \theta \rightarrow \bar{\pi}_* \bar{\theta} \rightarrow \bar{\pi}_* \bar{\theta} / \theta \rightarrow 0$$

podamos deducir, por producto tensorial por θ / \underline{b}^n , la sucesión exacta

$$\theta / \underline{b}^n \rightarrow \bar{\pi}_* \bar{\theta} / \underline{b}^n \bar{\pi}_* \bar{\theta} \rightarrow \bar{\pi}_* \bar{\theta} / \theta \rightarrow 0$$

suponiendo n lo bastante alto como para que $\underline{b}^n \subset \kappa$.

Proposición V.10. La traza de $\bar{\pi}_* \underline{b}^n \bar{\theta} = \underline{b}^n \bar{\pi}_* \bar{\theta}$ sobre θ es $\underline{b}^{(n)}$ con tal de que n sea lo bastante alto.

Demostración. Sea x un punto cualquiera de S . Probaremos que $\underline{b}_x^{(n)} = \underline{b}_x^n (\bar{\pi}_* \bar{\theta})_x \cap \theta_x$. La conclusión es obvia si x es el punto genérico de S . Analicemos el caso en que x sea

un punto de altura uno: si x corresponde a una de las componentes de C , en virtud de IV.6 los anillos locales $\bar{\theta}_y$, con $y \in \bar{\pi}^{-1}(x)$ son los anillos en el primer entorno de θ_x , de ahí que $(\bar{\pi}_* \bar{\theta})_x = \bigcap_y \bar{\theta}_y$ sea el anillo semilocal en el primer entorno de θ_x , $R(\theta_x)$. Teniendo en cuenta la condición de que los primos correspondientes a C son componentes primarias de \underline{b} , \underline{b}_x es el ideal maximal de θ_x y un resultado de Northcott ([15] teoremas 5 y 10) asegura que, para n bastante alto,

$$\underline{b}_x^n R(\theta_x) \cap \theta_x = \underline{b}_x^n = \underline{b}_x^{(n)}$$

con lo que vale el enunciado para x . Si x no corresponde a ninguna componente de C , $\bar{\pi}$ es isomorfismo en un entorno de x y $\underline{b}_x^n = \underline{b}_x^n (\bar{\pi}_* \bar{\theta})_x \cap \theta_x$; la hipótesis de que la curva transformada de la definida por \underline{b} fuera localmente principal fuerza que \underline{b}_x sea principal con lo cual $\underline{b}_x^{(n)} = \underline{b}_x^n = \underline{b}_x^n (\bar{\pi}_* \bar{\theta})_x \cap \theta_x$.

Comprobado el resultado en los puntos de altura uno, sea x un punto cerrado de S . θ_x es un anillo local de dimensión dos cuyos localizados en primos de altura uno son los anillos locales de los puntos genéricos de las curvas irreducibles que pasan por x . Es inmediato comprobar que también en este caso $(\bar{\pi}_* \bar{\theta})_x$ es semilocal, sus localizados en ideales maximales son los $\bar{\theta}_{x_i}$ si $\bar{\pi}^{-1}(x) = \{x_1, \dots, x_m\}$. Resulta inmediatamente

$$\underline{b}_x^n (\bar{\pi}_* \bar{\theta})_x = \bigcap_i \underline{b}_x^n \bar{\theta}_{x_i}$$

Cada uno de los $\underline{b}_x^{n\bar{\theta}} = (\underline{b}^{n\bar{\theta}})_{x_i}$ es principal, todos sus primos asociados son de altura uno y tenemos

$$\underline{b}_x^{n\bar{\theta}} = \bigcap_{z_i \in \underline{x}} \underline{b}_{z_i}^{n\bar{\theta}} = \bigcap_{z_i} (\underline{b}^{n\bar{\theta}})_{z_i}$$

donde z_i recorre los puntos (de altura uno) genéricos de las curvas irreducibles de \bar{S} que pasan por x_i , correspondientes a los ideales primos de altura uno de $\bar{\theta}_{x_i}$. Recordando que θ_x es intersección de sus localizados en primos de altura uno por ser C. M.,

$$\theta_x \cap \underline{b}_x^{n(\bar{\pi} * \bar{\theta})} = \left(\bigcap_y \theta_y \right) \cap \left(\bigcap_z (\underline{b}^{n\bar{\theta}})_z \right)$$

donde y recorre los puntos genéricos de las curvas irreducibles que pasan por x , correspondientes a los primos de altura uno de θ_x , z recorre los puntos genéricos de las curvas irreducibles de \bar{S} que pasan por alguno de los x_i , esto es, las antiimágenes por $\bar{\pi}$ de los puntos y . De ahí que, asociando,

$$\begin{aligned} & \left(\bigcap_y \theta_y \right) \cap \left(\bigcap_y \left(\bigcap_{z \in \bar{\pi}^{-1}(y)} (\underline{b}^{n\bar{\theta}})_z \right) \right) = \\ & = \left(\bigcap_y \theta_y \right) \cap \left(\bigcap_y (\bar{\pi} * \underline{b}^{n\bar{\theta}})_y \right) = \\ & \bigcap_y \left(\theta_y \cap (\bar{\pi} * \underline{b}^{n\bar{\theta}})_y \right) = \bigcap_y \underline{b}_y^n \end{aligned}$$

si n es lo bastante alto, pero

$$\bigcap_y \underline{b}_y^n = \bigcap_y \underline{b}_x^n \theta_y = \underline{b}_x^{(n)}$$

y queda probada, para todo $x \in S$, la relación

$$\underline{b}_x^{(n)} = \theta_x \cap \underline{b}_x^{n(\bar{\pi} * \bar{\theta})}$$

Corolario V.11. La sucesión exacta (4) induce la

$$0 \rightarrow \theta/\underline{b}^{(n)} \rightarrow \bar{\pi}_* \bar{\theta} / \bar{\pi}_* \underline{b}^{n\bar{\theta}} \rightarrow \bar{\pi}_* \bar{\theta} / \theta \rightarrow 0 \quad (5)$$

para n suficientemente grande.

Deducimos de aquí una expresión de la diferencia de géneros virtuales de \bar{S} y S similar a la de V.8 que alcanzará su versión definitiva en el capítulo VI.

Teorema V.12. Si p_S es el género virtual de S , $p_{\bar{S}}$ el de \bar{S} , se tiene

$$p_{\bar{S}} - p_S = \chi(\bar{\theta}/\underline{b}^{n\bar{\theta}}) - \chi(\theta/\underline{b}^{(n)})$$

para n suficientemente alto.

Demostración. Sabemos ya que $p_{\bar{S}} - p_S = \chi(\bar{\pi}_* \bar{\theta} / \theta)$. Basta ahora usar la sucesión (5) observando que, por la exactitud de $\bar{\pi}_*$ sobre $\bar{\theta}$ -módulos coherentes, $\bar{\pi}_* \bar{\theta} / \bar{\pi}_* \underline{b}^{n\bar{\theta}} \simeq \bar{\pi}_*(\bar{\theta}/\underline{b}^{n\bar{\theta}})$ y $\chi(\bar{\pi}_* \bar{\theta} / \bar{\pi}_* \underline{b}^{n\bar{\theta}}) = \chi(\bar{\pi}_*(\bar{\theta}/\underline{b}^{n\bar{\theta}})) = \chi(\bar{\theta}/\underline{b}^{n\bar{\theta}})$ (V.1 y V.2).

Los resultados obtenidos permiten ahora completar los del capítulo IV probando que la existencia en cada punto $x \in C$ de un elemento f que cumple las condiciones de IV.1 equivale a que la dilatación de S en C sea finita.

Proposición V.13. Suponiendo que la dilatación $S \xrightarrow{\hat{f}} \hat{S}$ de S en C es finita, la transformada C. M. de \hat{S} , \hat{S}_{cm} , coincide con \bar{S} .

Demostración. Basta ver que \hat{S}_{cm} verifica las condiciones del teorema IV.5. Es obvio que \hat{S}_{cm} es C. M., afín sobre S al ser finita sobre S , y que la proyección $\hat{S}_{cm} \rightarrow S$ induce un isomorfismo entre el complementario de C y el de su transformada. Sea y el punto genérico de una de las componentes de C : dado que la fibra en y del haz de ideales de C es el ideal maximal de θ_y , es inmediata la existencia en θ_y de un elemento f que cumple las condiciones de IV.1. De ahí que, por IV.2, exista un entorno afín U de y de modo que si $\hat{\theta}$ es el haz estructural de \hat{S} , $\hat{\theta}(\hat{\pi}^{-1}(U)) = A[f_i/f]$ donde $A = \theta(U)$, y los f_i generan el ideal de C en A . Basta ahora proceder como en la demostración de IV.5 para probar que los anillos locales de los puntos de $\hat{\pi}^{-1}(y)$ son los anillos en el primer entorno de θ_y y lo mismo ocurre sobre \hat{S}_{cm} ya que la transformación en superficie C. M. no altera los anillos locales de dimensión uno.

Teorema V.14. (Recíproco de IV.3). Si la dilatación de S en C es finita, para cada punto $x \in C$ existe un elemento $f \in \theta_x$ que cumple las condiciones de IV.1.

Demostración. Si \underline{c} es el haz de ideales de C en S , probemos en primer lugar que el haz de ideales $\underline{c}\bar{\theta}$ es localmente principal y puede generarse, en cada punto $y \in \bar{\pi}^{-1}(x)$, $x \in S$, por un mismo elemento de θ_x . Bastará demostrar que lo mismo ocurre con $\underline{c}\hat{\theta}$, teniendo en cuenta que $\bar{S} = \hat{S}_{cm}$ por

V.13.

Sean $x \in S$ y U un entorno afín de x en S , A el anillo correspondiente y \underline{c} el ideal de C en A , supuesto generado por elementos $f_1, \dots, f_m \in A$. $\hat{\pi}^{-1}(U) = \text{Proj } \Delta_{\underline{c}} A$. Los puntos y_1, \dots, y_r de $\hat{\pi}^{-1}(x)$ corresponden a r ideales homogéneos de $\text{Proj } \Delta_{\underline{c}} A$ cuya reunión no puede ser $\bigoplus_{n>0} \underline{c}^n$. Existe pues un elemento $f \in \underline{c}$ que, interpretado como de grado uno en $\Delta_{\underline{c}} A$, no pertenece a ninguno de tales ideales. El abierto afín $D_+(f)$ es un entorno afín de y_1, \dots, y_r cuyo anillo es $A[f_i/f]$. Inmediatamente $\underline{c}A[f_i/f] = fA[f_i/f]$ y lo propio ocurre en los $\hat{\theta}_{y_i}$ que son localizados de $A[f_i/f]$.

Aplicando ahora V.10, sabemos que $\pi_* \underline{c}^n \bar{\theta} \cap \theta = \underline{c}^{(n)}$ para n grande, en fibra en un punto cualquiera x ,

$$(\pi_* \underline{c}^n \bar{\theta})_x \cap \theta_x = \underline{c}_x^n (\pi_* \bar{\theta})_x \cap \theta_x = \underline{c}_x^{(n)}$$

Teniendo en cuenta que $(\pi_* \bar{\theta})_x$ es un anillo semilocal cuyos localizados en ideales maximales son los $\bar{\theta}_y$ para $y \in \pi^{-1}(x)$, es obvio que el generador antes elegido para los $(\underline{c}\bar{\theta})_y$ genera $\underline{c}_x (\pi_* \bar{\theta})_x$ y $\underline{c}_x^n (\pi_* \bar{\theta})_x = f^n (\pi_* \bar{\theta})_x$. Podemos tomar n_0 lo bastante grande para que $f^n (\pi_* \bar{\theta})_x \cap \theta_x = \underline{c}_x^{(n)}$ y además f^n sea del conductor de la extensión $\theta_x \rightarrow (\pi_* \bar{\theta})_x$ para $n > n_0$. Resulta entonces $f \underline{c}_x^{(n)} = \underline{c}_x^{(n+1)}$ para $n > n_0$. En efecto, si $g \in \underline{c}_x^{(n)}$, $fg \in \theta_x$ y $fg \in f^{n+1} (\pi_* \bar{\theta})_x$ con lo que $fg \in \underline{c}_x^{(n+1)}$.

Recíprocamente, si $g \in \underline{c}_x^{(n+1)}$, $g = f^{n+1}h$ con $h \in (\overline{\pi_*\overline{\theta}})_x$, por hipótesis f^n es del conductor y tendremos $g = f(f^n h)$ donde $f^n h$ es de θ_x y a la vez de $f^n(\overline{\pi_*\overline{\theta}})_x$, es decir de $\underline{c}_x^{(n)}$.

Finalmente, utilizando V.10, obtenemos la siguiente proposición que determina un caso en el que la superficie S' , obtenida de S por dilatación en C' , es C. M. y se hace innecesaria la segunda transformación $S' \leftarrow \overline{S}$.

Proposición V.15. Si S es una superficie C. M. y C' es la curva auxiliar elegida en el capítulo IV, de haz de ideales \underline{a} , la superficie S' obtenida de S por dilatación en C' es C. M. si para todo n , $\underline{a}^n = \underline{a}^{(n)}$.

Demostración. Supongamos que S' no es C. M., si y es un punto en el que S' no es C. M., forzosamente $y \in \pi^{-1}(C)$ ya que $S - C \approx S' - \pi^{-1}(C)$. Sean U un entorno afín de $\pi(y)$ en las condiciones de IV.2, θ' el haz estructural de S' , A , A' ($= A[f_i/f]$), \overline{A} los anillos correspondientes a U , $\pi^{-1}(U)$, $\overline{\pi}^{-1}(U)$ y, finalmente, \underline{a} el ideal $\underline{a} = \underline{a}(U) \subset A$.

Obviamente $A \subset A' \subset \overline{A}$. Si \underline{m} es el ideal maximal de A' correspondiente a y , forzosamente $f \in \underline{m}$ ya que f genera en A' el ideal de la transformada de C' . Sabiendo que $\frac{A'}{\underline{m}} = \theta'_y$ no es C. M., \underline{m} es primo asociado de fA' , existe $g \in A'$

tal que $(fA':g) = \underline{m}$; cualquiera que sea n , $(f^{n+1}A':f^n g) = \underline{m}$ y si n es lo bastante alto para que f^n está en el conductor de la extensión $A \rightarrow A'$, $f^n g \in A$ y el transportador en A $(f^{n+1}A' \cap A : f^n g)$ coincide con $\underline{m} \cap A$ que es el ideal maximal de A correspondiente a $\pi(y)$. Resulta pues que $f^{n+1}A' \cap A$ es un ideal de A que tiene un ideal maximal como primo asociado. Observando que $\underline{a}A' = fA'$, y por ello, $\underline{a}^{n+1}A' = f^{n+1}A'$, obviamente $\underline{a}^{n+1} \subset f^{n+1}A'$. Por otro lado, en V.10 hemos probado que $f^{n+1}\bar{A} \cap A = \underline{a}^{(n+1)}$ para n bastante alto, de donde $f^{n+1}A' \cap A \subset \underline{a}^{(n+1)}$. Concluimos pues que $\underline{a}^{n+1} \neq \underline{a}^{(n+1)}$ puesto que de coincidir, $\underline{a}^{(n+1)} = f^{n+1}A' \cap A$ y este presenta un ideal maximal como primo asociado.

CAPITULO VI. LA FUNCION ASOCIADA A UNA CURVA.

En las expresiones obtenidas en el capítulo anterior para la variación de género virtual (teoremas V.8 y V.12) aparecen términos de la forma $(\theta/\underline{a}^{(n)})$ donde θ es el haz estructural de una superficie y \underline{a} el haz de ideales de una curva sobre ella. Convendremos en llamar a la función $F(n) = \chi(\theta/\underline{a}^{(n)})$ función asociada a la curva sobre la superficie. Tal definición es, desde luego, generalizable al caso de una variedad y una subvariedad cualesquiera pero no trataremos aquí mas que el caso de las curvas que es el que se relaciona con la variación del género.

Se observa fácilmente que la función asociada a una curva es una generalización del polinomio de Hilbert-Samuel de un anillo local: si en lugar de tomar el haz de ideales \underline{a} de una curva se toma, en una variedad algebraica cualquiera, el haz de ideales \underline{m} de un punto cerrado x , el haz cociente θ/\underline{m}^n está concentrado en el punto x . Siendo \underline{m}_x un ideal maximal no cabe distinguir entre $\underline{m}_x^{(n)}$ y \underline{m}_x^n y

$$\chi(\theta/\underline{m}^n) = \dim_k H^0(\theta/\underline{m}^n) = \dim_k \theta_x / \underline{m}_x^n$$

que es el polinomio de Hilbert-Samuel del anillo local θ_x .

§1. Resultados auxiliares.

En lo que sigue nos resultará de utilidad el

Lema VI.1. Si A es un anillo noetheriano íntegro y \underline{a} y \underline{b} son dos ideales de A de modo que los ideales primos asociados a cualquiera de ellos son todos de altura uno, distintos los de uno y otro ideal, entonces las componentes primarias de $\underline{a} \cap \underline{b}$ coinciden con las componentes primarias con primo asociado de altura uno de \underline{ab} .

Demostración. Si $\underline{a} = \underline{a}_1 \cap \dots \cap \underline{a}_m$, $\underline{b} = \underline{b}_1 \cap \dots \cap \underline{b}_s$ son las descomposiciones en primarios de \underline{a} , \underline{b} , es obvio que al ser $\text{rad}(\underline{a}_i) \neq \text{rad}(\underline{b}_j)$ para i, j cualesquiera, la descomposición en ideales primarios (reducida) de $\underline{a} \cap \underline{b}$ es $\underline{a} \cap \underline{b} = \underline{a}_1 \cap \dots \cap \underline{a}_m \cap \underline{b}_1 \cap \dots \cap \underline{b}_s$.

Por otra parte, si un ideal primo \underline{p} contiene a \underline{ab} , debe contener a \underline{a} o a \underline{b} y reciprocamente; de ahí que los ideales primos minimales entre los que contienen a \underline{ab} sean precisamente los ideales primos minimales de \underline{a} o de \underline{b} o, lo que es lo mismo, los ideales primos asociados a \underline{a} o a \underline{b} , es decir, los asociados a $\underline{a} \cap \underline{b}$. Sea \underline{p} un ideal primo asociado a \underline{a} : la componente \underline{p} -primaria de \underline{ab} será $A \cap (\underline{ab} A_{\underline{p}})$, pero $\underline{b} \not\subset \underline{p}$ ya que al ser \underline{p} de altura uno, si $\underline{b} \subset \underline{p}$, \underline{p}

sería primo asociado de \underline{b} contra la hipótesis: $\underline{b}A_{\underline{p}} = A_{\underline{p}}$ de donde $A \cap (\underline{ab}A_{\underline{p}}) = A \cap (\underline{a}A_{\underline{p}})$ que es la componente \underline{p} -primaria de \underline{a} o, equivalentemente, de $\underline{a} \cap \underline{b}$. Lo mismo se prueba para un primo asociado a \underline{b} .

Corolario VI.2. Si A es un anillo noetheriano íntegro en el que los ideales primos asociados a cualquier ideal principal no nulo son todos de altura uno, en particular un anillo local o afín de una superficie C. M., dados $a, b \in A$, si los ideales (a) , (b) carecen de primos asociados comunes, $(ab) = (a) \cap (b)$.

Demostración. Basta observar que todos los ideales primos asociados a $(ab) = (a)(b)$ son de altura uno, al ser (ab) principal, y aplicar el lema anterior.

§2. Género de las curvas reducibles sobre una superficie.

Estableceremos a continuación algunos resultados relativos a curvas localmente principales sobre superficie C. M. que son conocidos, por lo menos cuando la superficie es no singular (caso en que toda curva es localmente principal). Suponiendo las curvas localmente principales las singularidades de la superficie no representan ninguna dificultad.

Supongamos dadas dos curvas localmente principales C_1 , C_2 sobre una superficie C. M. S , sean ξ y ζ los haces

de ideales correspondientes: llamamos $C_1 + C_2$, curva compuesta por C_1 y C_2 , a la definida por el haz de ideales $\xi\zeta$, cada ecuación local de $C_1 + C_2$ es producto de ecuaciones locales de C_1 y C_2 con lo que nuestra definición coincide con las usuales.

Aplicando localmente VI.2 se prueba inmediatamente que si C_1 y C_2 no tienen componentes en común, i. e., ningún haz de ideales primos es a la vez asociado a ξ y a ζ , $\xi\zeta = \xi \cap \zeta$ y se tiene una sucesión exacta de θ -módulos (θ haz estructural de S)

$$0 \rightarrow \theta/\xi\zeta \rightarrow \theta/\xi \oplus \theta/\zeta \rightarrow \theta/\xi+\zeta \rightarrow 0$$

de donde se obtiene

$$\chi(\theta/\xi\zeta) = \chi(\theta/\xi) + \chi(\theta/\zeta) - \chi(\theta/\xi+\zeta)$$

El haz $\theta/\xi+\zeta$ está concentrado en los puntos de intersección de C_1 y C_2 que son en número finito al carecer las curvas de componentes comunes. Por ello

$$\chi(\theta/\xi+\zeta) = \dim_k H^0(\theta/\xi+\zeta) = \sum_{x \in C_1 \cap C_2} \dim_k \theta_x / \xi_x + \zeta_x$$

y llamaremos a este número, como es habitual en las superficies no singulares, número de intersección de C_1 y C_2 , designándolo por $(C_1.C_2)$. Observese que $(C_1.C_2)$ coincide con el número de puntos de $C_1 \cap C_2$ en el caso en que todas las intersecciones sean simples, i. e., $\dim_k \theta_x / \xi_x + \zeta_x = 1$.

Resulta así la expresión bien conocida del género virtual de la curva compuesta $C_1 + C_2$ en función de los de sus partes y el número de intersección de las mismas:

$$1 - p_{C_1+C_2} = 1 - p_{C_1} + 1 - p_{C_2} - (C_1 \cdot C_2)$$

§3. Representación de una curva de la superficie como intersección parcial.

Sea C una curva localmente principal sobre la superficie S , ξ su haz de ideales y consideremos una hipersuperficie H tal que el haz localmente principal que determina la traza de H en S tenga a las componentes primarias de ξ entre las suyas. Ello equivale a decir que la traza C' de H en S consta de la curva C y otra curva C'' sin componentes comunes con C . La existencia de tal hipersuperficie se establece fácilmente: Sean $\theta_1, \dots, \theta_r$ los anillos locales correspondientes a cada una de las componentes de C , i. e., las fibras del haz estructural de S en los puntos genéricos de las componentes de C . Si U es un abierto afín que contiene a cada uno de estos puntos, de anillo $A = \theta(U)$, el localizado de A en el sistema multiplicativo complementario de la unión de los ideales primos correspondientes a las componentes de C , llamémosle θ_0 , es un anillo semilocal de dimensión uno cuyos localizados en ideales maximales son los

θ_i , $i = 1, \dots, r$. Si $\underline{a} = \theta(U)$ es el ideal de C en A , sabemos que $\underline{a}\theta_i$ es principal para $i = 1, \dots, r$ de donde, aplicando I.3, $\underline{a}\theta_0$ es principal: $\underline{a}\theta_0 = (f)$. Si S está sumergida en un espacio proyectivo $P_m(k)$, θ_0 es cociente del anillo semilocal Ω_0 formado por los cocientes $\frac{F(X_0, \dots, X_m)}{G(X_0, \dots, X_m)}$ con F, G formas del mismo grado en las coordenadas de $P_m(k)$, $G(X_0, \dots, X_m)$ no idénticamente nula en ninguna de las componentes de C . Supongamos que f proviene al cociente de la fracción F/G de dicho anillo. La hipersuperficie H de ecuación $F(X_0, \dots, X_m) = 0$ cumple las condiciones requeridas: tomando un sistema de referencia en $P_m(k)$ de manera que ninguna componente de C esté contenida en alguno de los hiperplanos $X_i = 0$, las $F(X_0, \dots, X_m)/X_i^\mu$ (μ grado de F) son ecuaciones de la hipersuperficie en cada uno de los abiertos afines $X_i \neq 0$. Por la elección de la referencia, $F(X_0, \dots, X_m)/X_i^\mu$ es un elemento de Ω_0 para cada $i = 0, \dots, m$. Las imágenes g_i en el cociente θ_0 difieren entre sí y de f por multiplicación por un inversible de θ_0 . Resulta así $g_i\theta_j = \underline{a}\theta_j$ en cada uno de los puntos genéricos de las componentes de C y para todo i . Con ello entre las componentes primarias del haz de ideales generado por los g_i en S están las del haz de ideales de C .

En las condiciones en las que hemos elegido la hipersuperficie H diremos que C (curva localmente principal sobre S) es intersección parcial de la hipersuperficie H con la superficie S . La intersección de las componentes primarias del haz de ideales de la traza de H sobre S que no son componentes del haz de ideales de C es el haz de ideales de una curva C'' sobre S a la que llamaremos complemento de C respecto de la intersección de S, H .

Lema VI.3. Si C es una curva localmente principal sobre S , intersección parcial de S con una hipersuperficie H , la curva complementaria C'' respecto de la intersección de H, S es también localmente principal. La traza de H en S es $C + C''$ y C, C'' carecen de componentes comunes.

Demostración. Basta razonar en un entorno de cada punto x de S . Sea U un entorno afín de x , de anillo A , donde los ideales de C y de la intersección C' de H con S sean principales, engendrados respectivamente por $f_1, g \in A$.

Por hipótesis las componentes primarias de $f_1 A$ lo son de $g A$. Sean $f_1 A = \underline{q}_1 \cap \dots \cap \underline{q}_r$, $g A = \underline{q}_1 \cap \dots \cap \underline{q}_r \cap \underline{q}'_1 \cap \dots \cap \underline{q}'_s$ las descomposiciones respectivas en ideales primarios. Siendo $g \in f_1 A$, $g = f_1 f_2$ y teniendo en cuenta que al localizar en $\text{rad}(\underline{q}_i)$, $i = 1, \dots, r$, f_1 y g generan el mismo ideal, resulta que f_2 es inversible en tales localizados y ninguno

de los ideales primos asociados de f_1A lo es de f_2A . Aplicando VI.2, $gA = f_1A \cdot f_2A = f_1A \cap f_2A$. Si f_2A se descompone en ideales primarios, $f_2A = \underline{q}_1'' \cap \dots \cap \underline{q}_h''$, se tendrá $gA = \underline{q}_1 \cap \dots \cap \underline{q}_r \cap \underline{q}_1'' \cap \dots \cap \underline{q}_h''$ con $\text{rad}(\underline{q}_i) \neq \text{rad}(\underline{q}_j'')$ para cada i, j . Se trata pues de una descomposición reducida y por la unicidad de las componentes primarias, $h = s$, los \underline{q}_i'' coinciden con los \underline{q}_j' y $f_2A = \underline{q}_1' \cap \dots \cap \underline{q}_s'$.

4. Número de autointersección.

Sea C una curva localmente principal sobre S , representada como intersección parcial de S con una hipersuperficie H . Designemos por C'' la curva complementaria de C respecto de esta intersección. Si H' es otra hipersuperficie del mismo grado que H , las trazas de H, H' sobre S son linealmente equivalentes¹; suponiendo que la traza C' de H' sobre S no tiene componentes en común con $S \cap H$, podemos lla-

¹ Es obligado señalar que algunos autores usan una definición que difiere sensiblemente de la clásica: si nos centramos en el caso de curvas sobre una superficie, en el sentido clásico se dice que C y C' , curvas sobre S , son linealmente equivalentes cuando existe una función racional sobre S cuyos ceros definen C y cuyos polos definen C' . No se excluye que dicha función pueda resultar indeterminada a lo largo de alguna curva debido a que el sistema de curvas de valor constante de dicha función presente una parte fija (véase [5],

mar número de autointersección de C a $(C.C) = (C.C') - (C.C'')$.
 Puede probarse la independencia de la definición respecto de la elección de H, H' directamente pero esta resultará consecuencia del cálculo de la función asociada a C .

§5. Cálculo de la función asociada a una curva localmente principal sobre S .

Podemos emprender ahora el cálculo de la función asociada a una curva localmente principal, sea esta C , supongámosla representada como intersección parcial de S con una hipersuperficie H . Llamemos ξ al haz de ideales de C y ζ al de su complemento C'' que es también localmente principal. $\xi\zeta = \xi \cap \zeta$ será el haz de ideales de $C + C''$, traza de H sobre S . Sea ϕ el haz de ideales de la traza, C' , en S .

cap. I) En cambio, la definición de equivalencia lineal de divisores de Cartier (véase por ejemplo [12] lect. 9) exige que tal función sea regular en todos los puntos de S salvo en los de C' , lo que equivale a que los haces de ideales localmente principales que definen C y C' sean isomorfos como θ -módulos. Utilizando la segunda definición se observa inmediatamente que la serie lineal cortada sobre una cúbica con nodo es completa mientras que en el sentido clásico es bien sabido que dicha serie no es completa ya que la cúbica no es normal. La equivalencia lineal utilizada en nuestro caso responde a la definición más estricta por lo que puede entenderse de cualquiera de las dos maneras.

de una hipersuperficie H' elegida como en el § anterior. Es inmediato que Φ y $\xi\zeta$ son isomorfos como θ módulos, basta observar que lo son los haces de ideales de H, H' en el espacio: el isomorfismo se obtiene multiplicando por el cociente de las ecuaciones homogéneas de H y H' . Las potencias simbólicas de cualquiera de estos haces de ideales coinciden con las ordinarias al tratarse de haces localmente principales (II.1). Calculando:

$$\begin{aligned} \chi(\theta/\xi^{n+1}\zeta) &= \chi(\theta) - \chi(\xi^{n+1}\zeta) = \\ &= \chi(\theta) - \chi(\xi^n\xi\zeta) = \chi(\theta) - \chi(\xi^n\theta\xi\zeta) = \\ &= \chi(\theta) - \chi(\xi^n\theta\Phi) \end{aligned}$$

la última igualdad debida al isomorfismo inducido por el ya señalado $\xi\zeta \approx \Phi$.

Por otra parte, dado que la curva definida por ξ^{n+1} y C'' , definida por ζ , carecen de componentes en común,

$$\chi(\theta/\xi^{n+1}\zeta) = \chi(\theta/\xi^{n+1}) + \chi(\theta/\zeta) - \chi(\theta/\xi^{n+1}+\zeta)$$

Resulta pues

$$\chi(\theta/\xi^{n+1}) = \chi(\theta) - \chi(\xi^n\theta\Phi) - \chi(\theta/\zeta) + \chi(\theta/\xi^{n+1}+\zeta) \quad (1)$$

Teniendo en cuenta que $\xi^n\theta\Phi \approx \xi^n\Phi$,

$$\begin{aligned} \chi(\theta) - \chi(\xi^n\theta\Phi) &= \chi(\theta/\xi^n\Phi) = \\ \chi(\theta/\xi^n) + \chi(\theta/\Phi) - \chi(\theta/\xi^n+\Phi) \end{aligned}$$

aplicando de nuevo la fórmula del género de una curva reducible. Llevada esta última igualdad a (1), resulta

$$\begin{aligned} \chi(\theta/\xi^{n+1}) - \chi(\theta/\xi^n) &= \\ &= \chi(\theta/\phi) - \chi(\theta/\zeta) + \chi(\theta/\xi^{n+1} + \zeta) - \chi(\theta/\xi^n + \phi) \end{aligned} \quad (2)$$

Si atendemos al tercer sumando, el haz $\theta/\xi^{n+1} + \zeta$ está concentrado en el número finito de puntos de intersección de C y C'' ; así $\chi(\theta/\xi^{n+1} + \zeta) = \sum_x \dim_k \theta_x / \xi_x^{n+1} + \zeta_x$, extendida la suma a los puntos de $C \cap C''$. Si en uno de estos puntos $\xi_x = f\theta_x$, $\zeta_x = g\theta_x$, designando por A al cociente $\theta_x/g\theta_x$ y por \bar{f} la clase de f módulo $g\theta_x$, tendremos $\dim_k \theta_x / \xi_x^{n+1} + \zeta_x = \dim_k A / \bar{f}^{n+1}$ y, por un cálculo inmediato $\dim_k A / \bar{f}^{n+1} = (n+1)\dim_k A / \bar{f} = (n+1)\dim_k \theta_x / \xi_x + \zeta_x$. De ahí que se obtenga

$$\begin{aligned} \chi(\theta/\xi^{n+1} + \zeta) &= (n+1)\chi(\theta/\xi + \zeta) = \\ &= (n+1)(C.C'') \end{aligned}$$

De forma análoga resulta

$$\chi(\theta/\xi^n + \phi) = n(C.C')$$

Observando además que $\phi \approx \xi\zeta$ implica $\chi(\theta/\phi) = \chi(\theta/\xi\zeta)$, la relación (2) se convierte en

$$\begin{aligned} \chi(\theta/\xi^{n+1}) - \chi(\theta/\xi^n) &= \\ &= \chi(C+C'') - \chi(C'') + (n+1)(C.C'') - n(C.C') = \\ &= \chi(C) - n(C.C) \end{aligned}$$

Basta ahora sumar para obtener la función asociada a C sobre S :

$$F(n) = \chi(\theta/\xi^n) = -\frac{1}{2}(C.C)n^2 + (1-p_C + \frac{1}{2}(C.C))n$$

escribiendo $\chi(C) = 1 - p_C$ donde p_C es el género virtual de C .

Del cálculo resulta en particular el carácter polinómico de la función asociada a una curva localmente principal sobre una superficie $C. M.$. Se observa que la anterior definición de $(C.C)$ queda justificada al aparecer $(C.C)$ en la función asociada que por definición no depende más que de la curva y la superficie.

§6. La diferencia $p_S - p_{S_{cm}}$.

Volvamos ahora a los resultados del capítulo V. Con la introducción de la función asociada a una curva el teorema V.8 se enuncia, suponiendo ahora que S es una superficie irreducible no necesariamente $C. M.$: la diferencia $p_S - p_{S_{cm}}$ entre el género virtual de S y el de su transformada $C. M.$ es, para n suficientemente alto, la diferencia entre el valor de la función asociada a la curva cortada sobre S por una hipersuperficie que pasa por todos los puntos no $C. M.$ y el valor de la función asociada a la transformada, en S_{cm} , de dicha curva.

do las transformaciones a las que actúan sobre los puntos x_1, \dots, x_h y sus transformados, se obtendrá, en lugar de S_{cm} una superficie S_{x_1, \dots, x_h} , finita sobre S , isomorfa a S salvo en los puntos x_1, \dots, x_h cuyos únicos puntos no C. M. son los que corresponden a x_{h+1}, \dots, x_m .

Considerando ahora en S una subvariedad localmente principal que contenga a los puntos x_1, \dots, x_h , su parte uno-dimensional será una curva y es posible probar, como en V.8, que la función asociada a dicha curva difiere de la asociada a su transformada en S_{x_1, \dots, x_h} , para valores altos de n , en la diferencia de géneros virtuales entre ambas superficies. La curva transformada es localmente principal y pueden aplicarse, con algunas modificaciones, los cálculos que hemos efectuado para una curva localmente principal sobre una superficie C. M., utilizando que dicha curva transformada no pasa por los puntos no C. M. de S_{x_1, \dots, x_h} . Resulta con ello un análogo de VI.4 que asegura el carácter asintóticamente polinómico de la función asociada, el término independiente del polinomio correspondiente es la diferencia entre el género virtual de S y el de S_{x_1, \dots, x_h} .

El caso de las curvas sobre S que no pasan por ninguno de los puntos no C. M. se reduce inmediatamente al de curvas sobre una superficie C. M. ya que la función asociada a una

de estas curvas coincide con la función asociada a su transformada en S_{cm} .

§7. La diferencia $p_S - p_{\bar{S}}$.

Si examinamos ahora el teorema V.12, resulta que la diferencia de géneros virtuales $p_{\bar{S}} - p_S$ entre la superficie transformada y la original viene dada también como diferencia de valores, para n suficientemente alto, de dos funciones asociadas: $(\theta/\underline{b}^{(n)})$ es la función asociada a la curva definida por \underline{b} y $(\bar{\theta}/\underline{b}^{n\bar{\theta}})$ lo es de su transformada por $\bar{\pi}$ ya que, al ser $\underline{b\bar{\theta}}$ localmente principal, $\underline{b}^{n\bar{\theta}} = (\underline{b\bar{\theta}})^n = (\underline{b\bar{\theta}})^{(n)}$. Se observa además que esta última es un polinomio en n de grado dos carente de término independiente, utilizando de nuevo que $\underline{b\bar{\theta}}$ es localmente principal.

De ahí el

Teorema VI.5. Sea S una superficie C. M., C una curva reducida de S , \bar{S} la transformada de S respecto de C , Si C'' es una curva cualquiera sobre S entre cuyas componentes se hallan las de C y cuya transformada en \bar{S} es localmente principal, la función asociada a C'' en S es, para n suficientemente alto, un polinomio en n de grado dos cuyo término independiente es la diferencia $p_S - p_{\bar{S}}$ entre los géneros virtuales de S y \bar{S} . Los otros dos términos del polinomio coinciden con los correspondientes en la función asocia-

da a la transformada de C'' .

En particular resulta

Corolario VI.6. El término independiente del polinomio que corresponde a la función asociada a C'' depende únicamente de C .

El papel de C'' en el teorema anterior puede desempeñarlo, en cualquier caso, una cualquiera de las curvas auxiliares C' , en las condiciones de IV.4, utilizadas para definir la transformación intermedia $S \leftarrow S'$.

Los resultados del final del capítulo V aseguran que si la dilatación de S con centro en C es finita, la propia C puede tomarse en lugar de C' puesto que verifica las condiciones de IV.4, hecho que utilizaremos en el capítulo X.

También puede tomar C el lugar de C'' si su transformada en \bar{S} es localmente principal, en cualquiera de los dos casos¹ resulta que la función asociada a C es, para n suficientemente alto, un polinomio en n cuyo término independiente es la diferencia de géneros $p_S - p_{\bar{S}}$.

¹ En la demostración de V.14 se ha visto que si la dilatación en C es finita, la transformada de C en \bar{S} es localmente principal, cabe la posibilidad de que el recíproco sea también cierto y los dos casos citados sean en realidad uno solo.

En lo que se refiere al caracter asintoticamente polinómico de la función asociada a una curva reducida sobre S , este queda asegurado en el caso en que la dilatación centrada en la curva sea finita, el polinomio correspondiente es de grado dos y su término independiente depende tan solo de las componentes de la curva que sean múltiples en S , resultando nulo si no existieran. La demostración de esta última afirmación es inmediata sin más que atender a la caracterización de IV.6.

Hemos observado ya (capítulo IV) que si S es una superficie irreducible cualquiera, tomando primero su transformada C. M., S_{cm} , y efectuando a partir de ella un número finito de transformaciones centradas en curvas múltiples se alcanza la normalizada S . Los teoremas VI.4 y VI.5 determinan la variación de género virtual en cada paso, como el término independiente del polinomio que corresponde a una función asociada a una curva sobre la superficie a transformar.

CAPITULO VII. REPRESENTACION DE CURVAS EN EL ESPACIO.

Dedicamos el resto de la memoria al cálculo de la función asociada en algunos casos particulares con vistas a obtener una expresión efectiva de algunas variaciones de género virtual. En este capítulo obtendremos algunos resultados que nos son necesarios, relativos a representación de curvas del espacio proyectivo tridimensional como intersección de superficies.

§1. Diversos puntos de vista sobre la definición de intersección de variedades algebraicas.

Conviene en primer lugar precisar la definición de variedad intersección de otras: desde luego no podemos admitir una definición meramente conjuntista diciendo que una subvariedad W de una variedad V es intersección de otras subvariedades V_1, \dots, V_m cuando el espacio subyacente a W lo sea de los subyacentes a V_1, \dots, V_m . Tal definición equivale a ignorar toda la estructura de una variedad algebraica que está superpuesta al espacio subyacente y ha sido ya rehusada por los au-

tores clásicos de la escuela italiana¹.

Supongamos por un momento que V sea afín de anillo A . Sean \underline{b} el ideal correspondiente a la subvariedad W y $\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_m$ los correspondientes a V_1, \dots, V_m . El hecho de que el conjunto subyacente a W sea intersección de los subyacentes a V_1, \dots, V_m equivale a que el radical de \underline{b} coincida con el de $\underline{a}_1 + \dots + \underline{a}_m$ pero ambos ideales pueden diferir en sus primos asociados (correspondientes a componentes sumergidas) o en sus componentes primarias.

En particular, en la discusión de [6], libro V, capítulo 5°, sobre la posibilidad de representación de la quintica de Vahlen como intersección de tres superficies, se calcula el número de puntos de intersección ulterior de tres superficies que pasan por la quintica, este resulta positivo y se observa que si, para una elección particular de estas superficies, los puntos de intersección ulterior cayeran todos sobre la quintica, tampoco en este caso deberá entenderse esta como intersección de tres superficies: la intersección sería entonces una variedad reducible una de cuyas partes es la quintica, las restantes son un número finito de puntos sumergidos en la curva. Este mismo problema puede verse tratado en [27] en co-

¹Citemos al respecto la distinción de Severi entre intersección e interferencia de variedades algebraicas ([27] pag. 224). No deja de resultar sorprendente la comparación con [4], pag. 216.

nexión con la representación de Perron ([19]) de la mencionada curva como intersección de tres superficies, donde se rechaza tal representación por las razones ya apuntadas y se calcula además la multiplicidad con que aparecen en la intersección las componentes sumergidas que ya hemos mencionado. Lo mismo podría decirse con referencia al resultado más general de Kneser [9]¹.

La consideración, en el marco de la teoría de esquemas, de variedades algebraicas no reducidas nos permite manejar con precisión lo que en otros términos se entendía como variedades contadas con una cierta multiplicidad y distinguir entre dos variedades con el mismo conjunto subyacente².

Si ahora V es una variedad algebraica cualquiera y V_1, \dots, V_m son su variedades de V dadas por haces de ideales $\underline{a}_1,$

¹ Una lectura atenta de los textos citados de Enriques-Chisini y Severi muestra muestra que tales autores estaban muy lejos de plantearse el problema de la representación de una curva como intersección de superficies en un sentido meramente conjuntista, por demás contradictorio con el espíritu general de la geometría algebraica; no parece por ello aplicable a dichos autores lo expresado en el prólogo (pag. 12) de [1].

² Véase la discusión de [7] (pag. 18) sobre la necesidad de considerar variedades definidas por ideales no radicales.

\dots, \underline{a}_m , llamaremos intersección de V_1, \dots, V_m a la subvariedad de V definida por el haz de ideales $\underline{a}_1 + \dots + \underline{a}_m$, señalando que tal subvariedad no tiene por que ser reducida ni pura y puede presentar componentes sumergidas.

Tal definición está de acuerdo con el concepto de intersección manejado por Severi en la memoria ya citada [27], donde se exige, para representar una curva irreducible no singular del espacio, que esta aparezca como intersección "simple y completa" de varias superficies: decir que la intersección sea completa equivale a exigir que la curva sea intersección de las superficies en un sentido meramente conjuntista y la simplicidad de la intersección equivale a que, según las definiciones de la memoria citada, las superficies se corten con multiplicidad uno en cada uno de los puntos de la curva. Desde nuestro punto de vista, ello evita que el ideal que define, en cada punto, la intersección difiera del de la curva por el hecho de ser primario y no primo o por presentar alguna componente sumergida, puesto que en cualquiera de los dos casos resultaría una multiplicidad de intersección de las superficies en algún punto mayor que uno.

Desde un punto de vista más actual, la intersección definida aparece como el producto de V_1, \dots, V_m en la categoría de las subvariedades de V , con ello es una intersección en el sentido abstracto de la teoría de categorías.

§2. Curvas localmente intersección de dos superficies.

Designemos por C una curva del espacio proyectivo $P_3(k)$. Sea Ω el haz estructural del espacio proyectivo, \underline{I} el haz de ideales correspondiente a C . Diremos que la curva C es localmente intersección de dos superficies en uno de sus puntos x cuando el ideal \underline{I}_x de Ω_x admita un sistema de dos generadores.

Sea U un entorno afín de x en $P_3(k)$ que no contenga otras componentes de C que las que pasan por x , A el anillo correspondiente e \underline{I} el ideal de C en A . Ω_x es un localizado de A , $\underline{I}_x = \underline{I}\Omega_x$ y si la curva es localmente intersección de dos superficies en x podemos suponer que los dos generadores f_1, f_2 de \underline{I}_x están en A . Resulta entonces que las componentes primarias de \underline{I} y las del ideal $f_1A + f_2A$ que están contenidas en el ideal \underline{m}_x correspondiente a x coinciden, ya que al localizar en \underline{m}_x , $(f_1 + f_2)\Omega_x = \underline{I}_x = \underline{I}\Omega_x$. Elijiendo un elemento $g \in A$, no nulo, contenido en todas las componentes primarias de $f_1A + f_2A$ no contenidas en \underline{m}_x y no perteneciente a \underline{m}_x , el abierto afín $D(g)$ de $\text{spec } A = U$ es un entorno afín de x y en su anillo A_g el ideal de la curva, $\underline{I}A_g$, y el generado por f_1, f_2 coinciden. Resulta así que existe un entorno afín de x en el que la curva es intersec-

ción de dos superficies (las de ideales f_1A_g, f_2A_g en $D(g)$). Recíprocamente es obvio que de verificarse tal condición el ideal \underline{I}_x admite dos generadores.

Nota: los resultados de este capítulo se referirán exclusivamente a curvas que son, localmente en cada uno de sus puntos, intersección de dos superficies.

Para justificar la introducción del concepto de curva localmente intersección de dos superficies en cada punto comprobaremos en primer lugar que la familia de tales curvas contiene todas aquellas curvas irreducibles que presentan singularidades planas, en particular todas las curvas no singulares¹.

§3 Algunos lemas.

Recordemos en primer lugar que si θ_x es el anillo local de un punto de una curva cualquiera y \underline{m}_x su ideal maximal, se llama espacio tangente de Zariski a la curva en x al es-

¹ Un ejemplo sencillo de curva que no es localmente intersección de dos superficies en uno de sus puntos es el ya citado de Northcott, [18] pag. 29 . Basta observar que no hay coincidencia entre potencias ordinarias y simbólicas para el ideal en el origen y aplicar II.2. Pueden verse también los ejemplos de Macaulay en [2].

pacio vectorial sobre $k = \theta_x / \underline{m}_x$, $\underline{m}_x / \underline{m}_x^2$. La dimensión del espacio tangente de Zariski es uno si y solo si x es un punto no singular de la curva. Se observa también que tal dimensión viene siempre mayorada por la del espacio proyectivo en el que se suponga sumergida la curva. Un resultado de Samuel ([20]) asegura la posibilidad de sumergir en un espacio afín de dimensión n ($n \geq 2$) un cierto entorno de un punto de una curva con tal que la dimensión del espacio tangente de Zariski en el punto sea menor o igual a n . Nosotros tomaremos este resultado en la forma del

Lema VII.1 (Samuel). Sea C una curva irreducible del espacio proyectivo $P_3(k)$, x un punto de C en el que el espacio tangente de Zariski tiene dimensión menor o igual que dos. Existe una proyección sobre $P_2(k)$ desde un punto de $P_3(k)$ que induce isomorfismo entre el anillo local de C en x y el de su proyección en el punto correspondiente a x .

De Abhyankar ([1] pag. 65), adaptando su resultado al caso local, tenemos:

Lema VII.2. Sea B_n el localizado de $k[X_1, \dots, X_n]$ en el ideal correspondiente al origen, B_m el localizado de $k[X_1, \dots, X_m]$ también en el ideal correspondiente al origen. Supongamos $m \leq n$, sea σ la inclusión $B_m \rightarrow B_n$ y a un

ideal de B_n . Si σ induce isomorfismo $\bar{\sigma}: B_m/\underline{a} \cap B_m \rightarrow B_n/\underline{a}$, tomando $F_i \in B_m$ tales que $F_i \equiv X_i \pmod{\underline{a}}$, $i = m+1, \dots, n$, el ideal \underline{a} está engendrado por los elementos de $\underline{a} \cap B_m$ y los $F_i - X_i$, $i = m+1, \dots, n$.

La demostración sigue la de Abhyankar con las necesarias modificaciones.

Demostración. Sea $\underline{a}' = (\underline{a} \cap B_m)B_n + \sum_i (F_i - X_i)B_n$. Se observa inmediatamente que $\underline{a}' \cap B_m = \underline{a} \cap B_m$. Resulta entonces

$$B_n/\underline{a} \cong B_m/\underline{a} \cap B_m = B_m/\underline{a}' \cap B_m \xrightarrow{\delta} B_n/\underline{a}' \quad (1)$$

donde δ es el morfismo inducido por σ .

Si tomamos $\bar{z} \in B_n/\underline{a}'$, vendrá representado por una fracción, $z = P/Q$ con $P, Q \in k[X_1, \dots, X_n]$, $Q(0, \dots, 0) \neq 0$. Teniendo en cuenta que los F_i elegidos cumplen $F_i \equiv X_i \pmod{\underline{a}'}$ por la definición de \underline{a}' , resulta obvio que $P'(X_1, \dots, X_m) = P(X_1, \dots, X_m, F_{m+1}, \dots, F_n) \equiv P(X_1, \dots, X_n) \pmod{\underline{a}'}$ y también $Q'(X_1, \dots, X_m) = Q(X_1, \dots, X_m, F_{m+1}, \dots, F_n) \equiv Q(X_1, \dots, X_n) \pmod{\underline{a}'}$. Además, si $Q'(X_1, \dots, X_m)$ se anulara para $X_1 = \dots = X_m = 0$, como los F_i son también nulos en el origen, $Q(0, \dots, 0) = 0$ contra la hipótesis $P/Q \in B_n$. De ahí que Q' sea inversible en B_m y P'/Q' de lugar a una antiimagen de \bar{z} por δ . Comprobado ya que δ es isomorfismo, basta observar que el isomorfismo compuesto en (1) conmuta con las proyecciones al co-

ciente para deducir de $B_n/\underline{a}' \simeq B_n/\underline{a}$ la igualdad $\underline{a}' = \underline{a}$.

En el caso particular en que $n = 3$, $m = 2$ y \underline{a} es el ideal en el origen de una curva del espacio, $\underline{a} \cap B_2$ será un ideal principal, correspondiente a la proyección de la curva sobre el plano de los dos primeros ejes. Si G es la ecuación (local) de la proyección de la curva en el plano, $GB_2 = \underline{a} \cap B_2$, con las hipótesis del lema resulta \underline{a} generado por G y una fracción de la forma $X_3 - F(X_1, X_2)$ lo que equivale a una representación monoidal, localmente en el origen, de la curva como intersección del cilindro $G(X_1, X_2) = 0$ y el monoide $X_3 = F(X_1, X_2)$.

Proposición VII.3. Si C es una curva de $P_3(k)$ y x un punto de C en el que el espacio tangente de Zariski es de dimensión menor o igual que dos, C es localmente intersección de dos superficies en x , supuesto que C sea irreducible.

Demostración. Por VII.1 existe una proyección en un plano que induce isomorfismo entre el anillo local de C en x y el de su proyección en el punto correspondiente. Basta tomar un sistema de coordenadas apropiado para aplicar VII.2 y obtener la ya mencionada representación monoidal de C localmente en x .

Se observa que toda curva no singular de $P_3(k)$ es, en particular, localmente intersección de dos superficies en ca-

da uno de sus puntos.

§4. Primera representación de curvas por intersección de superficies.

Probaremos en el § siguiente que si una curva C es localmente intersección de dos superficies en cada uno de sus puntos, existe una superficie que pasa por C y sobre la que C es localmente principal. A tal fin demostraremos la

Proposición VII.4. Si C es una curva de $P_3(k)$, localmente intersección de dos superficies en cada uno de sus puntos, existe un recubrimiento de C por dos abiertos afines U_1, U_2 de $P_3(k)$ y cuatro superficies del mismo grado, S_1, S_2, S_3, S_4 , de modo que C es intersección de S_1 y S_2 en U_1 mientras lo es de S_3 y S_4 en U_2 .

Demostración. Sean C_1, \dots, C_s las componentes de C y sea U un abierto afín del espacio que corte a cada una de ellas, tomemos puntos $x_i \in C_i \cap U$, $i = 1, \dots, s$. Llamaremos A al anillo correspondiente a U y \underline{a} al ideal de A que define la curva en U . Si designamos por Ω el haz estructural de $P_3(k)$, por hipótesis $\underline{a}\Omega_{x_i} = (f_i, g_i)\Omega_{x_i}$ para cada i . En virtud de I.2 existen $f, g \in A$ tales que $\underline{a}\Omega_{x_i} = (f, g)\Omega_{x_i}$ $i = 1, \dots, s$. Si consideramos el ideal (f, g) del anillo A , se trata de un ideal que define una curva en U que se expre-

sa como C más una segunda curva sin parte común con C . En efecto: las componentes primarias de (f,g) contenidas en alguno de los ideales maximales \underline{m}_i de A correspondientes a los puntos x_i coinciden con las de \underline{a} , dado que al localizar en \underline{m}_i , $\underline{a}_{\underline{m}_i} = \underline{a}_{\Omega_{x_i}} = (f,g)_{\Omega_{x_i}} = (f,g)_{\underline{m}_i}$. Teniendo en cuenta que cada componente primaria de \underline{a} está contenida en alguno de los \underline{m}_i , resulta $(f,g) = \underline{a} \cap \underline{q}_1 \cap \dots \cap \underline{q}_r$ donde los \underline{q}_j son primarios, no contenidos en ningún \underline{m}_i . Consideremos además un plano, de ecuación homogénea $H = 0$, que, cortando a U , no pase por ninguno de los x_i , sea \underline{h} el ideal correspondiente al plano en A . El ideal $\underline{q}_1 \cap \dots \cap \underline{q}_r \cap \underline{h}$ no está contenido en ninguno de los \underline{m}_i y podemos elegir un elemento $\ell \in \underline{q}_1 \cap \dots \cap \underline{q}_r \cap \underline{h} - \underline{m}_1 \cup \dots \cup \underline{m}_s$. Sea U_1 el abierto afín $U_1 = D(\ell) \subset \text{spec } A = U$ y A_1 el anillo correspondiente, localizado de A en el sistema multiplicativo de las potencias de ℓ . Resulta inmediatamente, por la elección de ℓ , que el ideal generado por f, g en A_1 coincide con el de C , \underline{a}_{A_1} . Escribiendo $f = F_1/G$, $g = F_2/G$ donde F_1, F_2, G son polinomios homogéneos del mismo grado, G no nulo en ningún punto de U_1 , la intersección de las superficies de ecuaciones $F_1 = 0, F_2 = 0$ es, en U_1 , la curva C . Se observa además que los grados de F_1, F_2 pueden aumentarse indefinidamente sin más que multiplicar, en las fracciones anteriores,

numerador y denominador por H lo que equivale a añadir a las superficies nuevas componentes disjuntas con U_1 .

El abierto U_1 corta a cada una de las componentes de C , por tanto $C - U_1$ se reducirá a un número finito de puntos, sean y_1, \dots, y_m . Repitiendo el proceso anterior a partir de los puntos y_1, \dots, y_m , se obtendrá un abierto U_2 , entorno afín de los y_i , donde C es intersección de dos nuevas superficies $F_3 = 0$, $F_4 = 0$. La arbitrariedad en los grados permite tomar las cuatro superficies del mismo grado.

No se concluye de la proposición que las cuatro superficies obtenidas se corten en C globalmente, ello solo es cierto en el entorno $U_1 \cup U_2$ de C . En general la intersección de estas cuatro superficies puede constar de C y otras componentes fuera de $U_1 \cup U_2$.

§5. Existencia de una superficie sobre la que C es localmente principal.

Teorema VII.5. Si C es una curva de $P_3(k)$, localmente intersección de dos superficies en cada uno de sus puntos, existe una superficie reducible S que pasa por C tal que C es localmente principal sobre S .

Demostración. Cualquiera que sea la superficie S el haz de ideales de C es principal, generado por 1 fuera de C .

Hace falta pues ocuparse tan solo de los puntos de C .

Designemos por θ el haz estructural de S , por Ω el de $P_3(k)$, si x es un punto cualquiera de C , θ_x es cociente de Ω_x por una ecuación local f_x de S . El hecho de que el ideal de C en θ_x sea principal equivale a que el de C en Ω_x admita un sistema de dos generadores uno de los cuales sea f_x .

Debemos probar pues la existencia de una superficie S que pase por C de modo que su ecuación local en cada uno de los puntos de C pueda formar parte de un sistema de dos generadores del ideal de C en el punto.

Observemos en primer lugar que si A es un anillo local, \underline{m} su ideal maximal y $\underline{a} = (f, g)$ un ideal generado por dos elementos, tomando $\ell \in \underline{a}$, $\ell = af + bg$, basta que a ó b sean inversibles en A para que \underline{a} admita un sistema de dos generadores del que forme parte ℓ : en efecto, si por ejemplo $a \notin \underline{m}$, $f = a^{-1}\ell - a^{-1}bg$ y $(f, g) = (\ell, g)$.

Consideremos el sistema lineal engendrado por las cuatro superficies de la proposición VII.4 y sean U_1, U_2 los abiertos considerados en la misma. Probaremos que una superficie genérica $\lambda_1 F_1 + \lambda_2 F_2 + \lambda_3 F_3 + \lambda_4 F_4 = 0$ del sistema lineal considerado cumple la condición del enunciado.

Sabemos que $F_1/G, F_2/G$ generan el ideal de C en el

abierto U_1 , se tendrán pues expresiones

$$F_3/G = A/M \cdot F_1/G + B/M \cdot F_2/G$$

$$F_4/G = C/M \cdot F_1/G + D/M \cdot F_2/G$$

con A, B, C, D, M polinomios homogéneos, M no nulo en ningún punto de U_1 . Una ecuación en U_1 de la superficie $F = \lambda_1 F_1 + \lambda_2 F_2 + \lambda_3 F_3 + \lambda_4 F_4 = 0$ será

$$F/G = (\lambda_1 + \lambda_3 A/M + \lambda_4 C/M) F_1/G + (\lambda_2 + \lambda_3 B/M + \lambda_4 D/M) F_2/G$$

Para que tal superficie cumpla la condición requerida en U_1 basta que los términos $\lambda_1 + \lambda_3 A/M + \lambda_4 C/M$ y $\lambda_2 + \lambda_3 B/M + \lambda_4 D/M$ no se anulen simultáneamente en ningún punto de $C \cap U_1$. De ocurrir esto en un punto x tendríamos

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= -\lambda_3 A/M(x) - \lambda_4 C/M(x) \\ \lambda_2 &= -\lambda_3 B/M(x) - \lambda_4 D/M(x) \end{aligned} \quad (2)$$

Interpretando $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4)$ como coordenadas homogéneas de un punto, al variar x en $C \cap U_1$ el punto $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4)$ sujeto a las relaciones (2) describe parte de una superficie y por lo tanto es posible elegir $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ de modo que no se verifiquen simultáneamente las (2). El mismo razonamiento puede hacerse respecto de U_2 , con ello, para una elección genérica de los λ_i , sobre la superficie de ecuación homogénea $\lambda_1 F_1 + \lambda_2 F_2 + \lambda_3 F_3 + \lambda_4 F_4 = 0$, C es localmente princi-

pal. Una adecuada elección de F_1, F_2, F_3, F_4 permite asegurar que el sistema lineal no está formado por las superficies de un haz y una superficie genérica es por tanto irreducible en virtud del teorema de Bertini. Puede procederse también ampliando el sistema con una nueva superficie irreducible que pase por C con lo que la superficie genérica de este último sistema lineal estará en las condiciones requeridas.

§6 Representación de una curva como intersección de cuatro superficies.

El teorema anterior nos permite generalizar a curvas localmente intersección de dos superficies en cada uno de sus puntos, el clásico teorema que afirma que toda curva no singular del espacio es intersección de cuatro superficies ([6] libro V capítulo 5º, o [27] página 238).

Como señala Severi en la memoria ya citada [27] (pag. 266), la teoría clásica de curvas en el espacio se refiere a curvas no singulares, ejemplos de Macaulay (véase [2]) muestran que el teorema es falso para curvas cualesquiera. De todas formas la demostración de [6] no garantiza la no aparición en la intersección de componentes sumergidas y, aun cuando parece referirse a curvas no singulares por el uso que hace del género, no queda claro en las hipótesis que así sea. [27] es mucho más preciso en la hipótesis y la demostración.

Teorema VII.6. Si C es una curva de $P_3(k)$, localmente intersección de dos superficies en cada uno de sus puntos, C es intersección de cuatro superficies.

Demostración. Bastará probar que existe una superficie S que pasa por C de tal manera que el ideal de C en S viene generado, en cada punto de S , por las ecuaciones locales (reducidas módulo el ideal de S) de tres superficies que pasan por C . A tal fin consideremos una superficie S , irreducible, que pase por C de modo que C sea localmente principal sobre S . Seguiremos en S un proceso parecido al de la demostración de VII.4. Sean x_1, \dots, x_s puntos elegidos en cada componente de C , U un abierto afín de S que contenga a x_1, \dots, x_s y A el anillo correspondiente. Si \underline{a} es el haz de ideales de C en S , por hipótesis cada \underline{a}_x , $x \in S$, es principal. Aplicando I.3 resulta que existe $f \in A$ tal que $f\theta_{x_i} = \underline{a}_{x_i}$ para cada $i = 1, \dots, s$ (se designa por θ el haz estructural de S). Al igual que en la demostración de VII.4, el ideal fA difiere del de C en componentes primarias no contenidas en ninguno de los ideales \underline{m}_i correspondientes a los x_i . Puede por tanto reducirse U a un abierto afín U_1 , con $x_i \in U_1$, $i = 1, \dots, s$, de modo que el ideal de C en U_1 venga generado por f .

Dado que U_1 corta a cada una de las componentes de C ,

$C - U_1$ es un conjunto finito: $C - U_1 = \{y_1, \dots, y_m\}$. Por otra parte, al ser $S - U_1$ un subconjunto propio y cerrado de S , se tratará de una subvariedad cuyas componentes tendrán dimensión menor o igual que uno. Sean z_i , $i = 1, \dots, r$, puntos elegidos en cada una de las componentes de $S - U_1$. Como en el caso anterior es posible determinar un abierto U_2 que contenga a los y_i , z_j de modo que el ideal de C en U_2 sea principal, generado por un cierto g . Se observa que f , g son imágenes en el cociente (por el ideal de S) de ciertas funciones racionales F_1/G_1 , F_2/G_2 donde F_1, F_2, G_1, G_2 son polinomios homogéneos, G_1 no nulo en ningún punto de U_1 y G_2 no nulo en ningún punto de U_2 . Consideremos las superficies $F_1 = 0$, $F_2 = 0$ y una tercera $F_3 = 0$ que pase por C sin pasar por ninguno de los puntos de $S - U_1 \cup U_2$. Ello es posible porque, por contener U_2 puntos de cada componente de $S - U_1$, $S - U_1 \cup U_2$ se reduce a un número finito de puntos. Ecuaciones locales de cualquiera de las tres superficies pertenecen al ideal de C ya que las tres superficies pasan por C . En cualquier punto de U_1 la ecuación local de $F_1 = 0$ genera el ideal de C en S , lo mismo ocurre en el abierto U_2 con las ecuaciones locales de $F_2 = 0$ y finalmente en los puntos de $S - U_1 \cup U_2$ la ecuación local de $F_3 = 0$ es inversible y genera el ideal de C en estos puntos (que están fuera de C) pues este es todo el anillo local. Resulta con ello que la intersección de las tres superficies con S es C .

CAPITULO VIII. LA FUNCION ASOCIADA A UNA CURVA EN EL ESPACIO.

Designemos por C una curva de $P_3(k)$ localmente intersección de dos superficies en cada uno de sus puntos y sean Ω el haz estructural de $P_3(k)$, \underline{A} el haz de ideales de C en $P_3(k)$. Al igual que sobre una superficie puede considerarse, cualquiera que sea C , la función asociada en el espacio, $F(n) = (\Omega/\underline{A}^{(n)})$. Probaremos en este capítulo que tal función, para curvas localmente intersección de dos superficies en cada punto, es polinómica y la calcularemos explícitamente.

Sea S una superficie irreducible que pasa por C de forma que C es localmente principal sobre S (VII.5). Designemos por θ el haz estructural de S y por \underline{a} el haz de ideales de C en S que, por hipótesis, es localmente principal. Llamaremos \underline{I} al haz de ideales de S en $P_3(k)$, se trata también de un haz localmente principal. En virtud de la proposición II.1, tanto para \underline{A} como para \underline{a} , las potencias simbólicas coinciden con las ordinarias.

En el capítulo V hemos calculado la función asociada a C en S :

$$\chi(\theta/\underline{a}^n) = -\frac{1}{2}(C.C)n^2 + (1 - p_C + \frac{1}{2}(C.C))n$$

donde el número de autointersección se entiende, desde luego, calculado en S . De la sucesión exacta de haces

$$0 \rightarrow \underline{I} + \underline{A}^n / \underline{A}^n \rightarrow \underline{\Omega} / \underline{A}^n \rightarrow \theta / \underline{a}^n \rightarrow 0$$

resulta

$$\chi(\underline{\Omega} / \underline{A}^n) = \chi(\theta / \underline{a}^n) + \chi(\underline{I} + \underline{A}^n / \underline{A}^n) \quad (1)$$

El primer término es ya conocido; por lo que respecta al segundo, obviamente se tiene un isomorfismo

$$\underline{I} + \underline{A}^n / \underline{A}^n \simeq \underline{A}^n / \underline{I} \cap \underline{A}^n$$

Probemos en primer lugar que $\underline{I} \cap \underline{A}^n = \underline{I} \underline{A}^{n-1}$: si x es un punto cualquiera de $P_3(k) - C$ la igualdad es obvia puesto que $\underline{A}_x^n = \underline{A}_x^{n-1} = \underline{A}_x = \underline{\Omega}_x$. Si $x \in C$, $\underline{A}_x = (f_x, g_x)$ donde f_x genera \underline{I}_x y g_x genera, al cociente por \underline{I}_x , \underline{a}_x . La hipótesis de que \underline{A}_x corresponde a una curva asegura que todos sus ideales primos asociados son de altura dos con lo que g_x no puede ser divisor de cero módulo f_x . Si un múltiplo de f_x es de \underline{A}_x^n , se tendrá una expresión

$$f_x f' = a_{n,0} g_x^n + a_{n-1,1} g_x^{n-1} f_x + \dots + a_{0,n} f_x^n$$

Reduciendo módulo f_x , $\bar{0} = \bar{a}_{n,0} \bar{g}_x^n$ de donde $a_{n,0} \in (f_x)$ y el coeficiente f' se expresa como elemento de \underline{A}_x^{n-1} . Resulta $\underline{A}^n \cap \underline{I} \subset \underline{A}^{n-1} \underline{I}$ y la otra inclusión es obvia. Tenemos pues,

$$\underline{I}/\underline{I} \cap \underline{A}^n = \underline{I}/\underline{IA}^{n-1} \approx \Omega/\underline{A}^{n-1} \otimes_{\Omega} \underline{I}$$

Si designamos ahora por \underline{I}' el haz de ideales de una superficie S' del mismo grado que S , $\underline{I} \approx \underline{I}'$, isomorfismo de Ω -módulos obtenido mediante multiplicación por el cociente de las ecuaciones homogéneas de ambas superficies. Elijamos S' de modo que corte a C en un número finito de puntos. Se tendrá

$$\Omega/\underline{A}^{n-1} \otimes_{\Omega} \underline{I} \approx \Omega/\underline{A}^{n-1} \otimes_{\Omega} \underline{I}' \approx \underline{I}'/\underline{I}'\underline{A}^{n-1}$$

Del hecho de que S' no contiene ninguna de las componentes de C , resulta que \underline{I}' no está contenido en ninguno de los haces de ideales primos asociados a A que son exactamente los de $\underline{A}^{(n-1)} = \underline{A}^{n-1}$, ello permite demostrar fácilmente ¹ que $\underline{I}'\underline{A}^{n-1} = \underline{I}' \cap \underline{A}^{n-1}$ de donde

$$\underline{I}'/\underline{I}'\underline{A}^{n-1} = \underline{I}'/\underline{I}' \cap \underline{A}^{n-1} = \underline{I}' + \underline{A}^{n-1} / \underline{A}^{n-1}$$

y podemos considerar la sucesión exacta

$$0 \rightarrow \underline{I}' + \underline{A}^{n-1} / \underline{A}^{n-1} \rightarrow \Omega/\underline{A}^{n-1} \rightarrow \Omega/\underline{A}^{n-1} + \underline{I}' \rightarrow 0$$

Se tendrá por lo tanto

¹ En efecto, si $\underline{I}'_x = (h_x)$, h_x no pertenece a ninguno de los primos asociados a \underline{A}_x , es decir, $h_x \in \Sigma$ designando por Σ el complementario en Ω_x de la unión de dichos ideales, si $ah_x \in \underline{A}_x^{n-1}$, entonces $a \in (\Sigma^{-1} \underline{A}_x^n) \cap \Omega_x = \underline{A}_x^{(n)}$ y en nuestro caso $\underline{A}_x^{(n)} = \underline{A}_x^n$.

$$\chi(\underline{\Omega}/\underline{A}^n/\underline{A}^n) = \chi(\underline{\Omega}/\underline{A}^{n-1}) - \chi(\underline{\Omega}/\underline{A}^{n-1} + \underline{I}') \quad (2)$$

El haz $\underline{\Omega}/\underline{A}^{n-1} + \underline{I}'$ está concentrado en un número finito de puntos y

$$\chi(\underline{\Omega}/\underline{A}^{n-1} + \underline{I}') = \sum_x \in S' \cap C \dim_k \underline{\Omega}_x / \underline{A}_x^{n-1} + \underline{I}'_x$$

Si S' corta a C con multiplicidad μ_x en un punto x , (es decir, $\dim_k \underline{\Omega}_x / \underline{A}_x^{n-1} + \underline{I}'_x = \mu_x$), calculando resulta

$$\dim_k \underline{\Omega}_x / \underline{A}_x^{n-1} + \underline{I}'_x = \frac{1}{2}(n+1)n\mu_x$$

Más fácil resulta el cálculo si se toma S' como una superficie formada por planos pasando todos por una recta disjunta con C y que cortan a C transversalmente.

En cualquier caso, si δ es el orden de C y m el de S , $m\delta = \sum_x \mu_x$ y

$$\chi(\underline{\Omega}/\underline{A}^{n-1} + \underline{I}') = \frac{1}{2}\delta m(n+1)n$$

De ahí, utilizando (1) y (2)

$$\begin{aligned} \chi(\underline{\Omega}/\underline{A}^n) - \chi(\underline{\Omega}/\underline{A}^{n-1}) &= \chi(\theta/\underline{a}^n) - \frac{1}{2}\delta m(n+1)n = \\ &= -\frac{n^2}{2}((C.C) + \delta m) + n(1 - p_C + \frac{1}{2}((C.C) + \delta m)) \end{aligned}$$

Sumando

$$\chi(\underline{\Omega}/\underline{A}^n) = -\frac{n^3}{6}((C.C) + \delta m) + \frac{n^2}{2}(1 - p_C) + \frac{n}{6}(3 - 3p_C + (C.C) + \delta m)$$

Se hace necesario ahora independizar el resultado de la superficie auxiliar S , dedicaremos el próximo capítulo a ello probando que $(C.C) + \delta m = 2p_C - 2 + 4\delta$ con lo que quedará pro-

bado el

Teorema VIII.1. Si C es una curva de $\mathbb{P}_3(k)$, de haz de ideales A , localmente intersección de dos superficies en cada uno de sus puntos, llamando δ al orden de C y p_C a su género virtual, la función asociada a C en $\mathbb{P}_3(k)$ es el siguiente polinomio en n

$$\chi(\Omega/\underline{A}^n) = -\frac{1}{6}(2p_C - 2 + 4\delta)n^3 + \frac{1}{2}(1 - p_C)n^2 + \frac{1}{6}(1 - p_C + 4\delta)n$$

CAPITULO IX. LA IGUALDAD $(C.C) + \delta m = 2p_C - 2 + 4\delta$.

Demostraremos en este capítulo que si C es una curva de $P_3(k)$, localmente intersección de dos superficies en cada punto, y S una superficie que pasa por C de modo que C sea localmente principal sobre S , se tiene $(C.C) + \delta m = 2p_C - 2 + 4\delta$, donde el número de autointersección $(C.C)$ está calculado sobre S , m es el orden de S y δ y p_C son, respectivamente, el orden y el género virtual de C . El resultado es conocido cuando la superficie S es no singular, véase por ejemplo [32] §11, teniendo en cuenta que el sistema canónico de una superficie no singular de orden m de $P_3(k)$ viene cortado por las superficies de orden $m - 4$. Una extensión de la demostración a nuestro caso, posiblemente válida en característica cualquiera, exigiría la consideración, sobre curvas y superficies singulares, de un cierto sistema canónico virtual al modo del considerado en [25], capítulo IV para ciertas curvas singulares. De este modo quizás pudiera extenderse la relación clásica entre el sistema canónico de una curva, el sistema característico y la traza del sistema

canónico de la superficie en la curva.

El resultado se establecerá en primer lugar para curvas no singulares, extendiéndose después a curvas reducidas para probarlo finalmente en el caso general.

§1. Caso de una curva no singular.

Es esencial observar en primer lugar que, cualquiera que sea la superficie S (C localmente principal sobre S) el entero $(C.C) + \delta m$ depende tan solo de C y su inmersión en el espacio, puesto que en el capítulo anterior ha aparecido como coeficiente de uno de los términos de la función asociada y esta es independiente de S . Resulta así que para probar en general la igualdad $(C.C) + \delta m = 2p_C - 2 + 4\delta$ basta hacerlo para una elección particular de la superficie S sobre la que C sea localmente principal.

Proposición IX.1. Si C es irreducible y no singular,
vale la igualdad $(C.C) + \delta m = 2p_C - 2 + 4\delta$.

Demostración. Puesto que basta comprobar la igualdad para una superficie, utilizando un resultado de Severi, [27], pag. 239, existe una superficie no singular S que pasa por C , forzosamente C es localmente principal sobre S y para una tal superficie el resultado es bien conocido (ver el ya citado [32] §11).