SOBRE INMERSIONES ISOMETRICAS DE VARIEDADES RIEMANNIANAS EN ESPACIOS EUCLIDEOS

V° B°

Memoria presentada por Don CARLOS CURRAS BOSCH

para optar al grado de DOCTOR EN MATEMATICAS

UNIVERSIDAD DE BARCELONA   FACULTAD DE MATEMATICAS   1977

$\beta_{ia}=0$,para $1\leq i\leq k, k+1\leq a\leq n$.Luego $\{V_1,\ldots,V_k\}$ es invariante por ϕ_t en $x_2=x_2(q),\ldots,x_n=x_n(q)$.

Así pues podemos tomar a lo largo de $x_2=x_2(q),\ldots,x_n=x_n(q)$, $V_i'=\phi_t(V_i)$,con lo que $L_X V_i'=0$ y $A(V_i')=\alpha_1 V_i'$,ya que $\alpha_1=\ldots=\alpha_k$.

Se razona igual para las restantes α.

Es evidente que la base de campos $V_1',\ldots V_n'$,así construida es diferenciable,ya que sobre la subvariedad $x_1=0$ lo era y se prolonga a través de las curvas integrales de X,a fin de que sea invariante por ϕ_t.

Vamos a probar ahora que X isometría infinitesimal de M,es la restricción de una isometría infinitesimal del espacio euclídeo,si y solo si los tensores A_i, s_{jk},definidos localmente tienen derivada de Lie respecto a X nula.

Empezaremos viéndolo para codimensión uno y después lo probaremos para cualquier codimensión.

<u>Lema III-2.-Sea M variedad Riemanniana de dimensión n, inmersa isométricamente en R^{n+1}.Sea U entorno de p,punto de M, en el que tenemos definido el tensor de Weingarten A.</u>

<u>Tesis.-Existe V entorno de p,$V\subset U$,y $r_o>0$,tal que la aplicación $x\longrightarrow x+r\xi_x$,de V en un entorno tubular de V,es un diffeomorfismo local para cada r con $r<r_o$.</u>

<u>Demostración.</u>- Los autovalores de $A,\alpha_1,\ldots,\alpha_n$,son funcio-

nes diferenciables. Tomando W entorno de p compacto $W\subset U$, en él las funciones $\alpha_1,\dots,\alpha_n$, alcanzan máximo en valor absoluto k. Tomando $V=\mathring{W}$, la aplicación en V, $x\longrightarrow x+r\xi_x$, lleva el campo V_i, que es el campo tal que $A(V_i)=\alpha_i V_i$, a $\bar{V}_i=V_i+r\alpha_i V_i=(1+r\alpha_i)V_i$.

Tomando $r_o=1/k$, si $r<r_o$, como $|r\alpha_i|=|r||\alpha_i|<r_o k=1$, resulta $1+r\alpha_i\neq 0$ y la aplicación es un diffeomorfismo local.

Consecuencia de este Lema es que para cada punto p podemos encontrar un entorno V de p y un número r tal que la aplicación $\begin{array}{l} V\times(-r,r)\longrightarrow R^{n+1} \\ (x,t)\longrightarrow x+t\xi_x \end{array}$ es un diffeomorfismo en la imagen.

<u>Teorema III-1.-Sea M variedad Riemanniana de dimensión n, inmersa isométricamente en R^{n+1}. Sea p punto de M y U entorno de p, en el que tenemos definido el tensor de Weingarten A.</u>

<u>Si X es una isometría infinitesimal de M tal que $L_X A=0$.</u>

<u>Tesis.-Existe un entorno de p V, $V\subset U$, de forma que en este entorno X es la restricción de una isometría infinitesimal de R^{n+1}.</u>

<u>Demostración</u>.-En U tenemos definido ξ campo unitario normal a la variedad, que extendemos a un entorno tubular de U, de forma que $\xi_{x+r\xi_x}=\xi_x$; entorno tubular en el que se cumple la condición del Lema anterior.

Este campo ξ tiene asociado un subgrupo uniparamétrico por el que los puntos x de U van a $x+t\xi_x$. El campo invariante por ξ que sobre U es X, es $\bar{X}=X+tA(X)$.

Vamos a probar que este campo $\bar{X}$ es una isometría infinitesimal de R^{n+1}.

Para ello tomamos en U los campos ortonormales en que A diagonaliza, $V_1,\ldots,V_n$, con $L_X V_i=0$. Si es necesario se reduce el tamaño del entorno.

Por construcción $L_\xi \bar{X}=0$. Si ϕ_t es el subgrupo uniparamétrico de $\bar{X}$ y ψ_s el de ξ, tenemos $\psi_s\circ\phi_t=\phi_t\circ\psi_s$.

Extendemos los campos V_i, al entorno tubular de forma que siendo $\bar{V}_i$ dichas extensiones se cumpla $L_\xi \bar{V}_i=0$, para lo cual $\bar{V}_i=V_i+rA(V_i)$.

Ahora biem como $\psi_s\circ\phi_t=\phi_t\circ\psi_s$, resulta $L_{\bar{X}}\bar{V}_i=0$.

Para ver que $\bar{X}$ es una isometría infinitesimal de R^{n+1} bastará que probemos: $L_{\bar{X}}(\xi\cdot\xi)=L_{\bar{X}}\xi\cdot\xi+\xi\cdot L_{\bar{X}}\xi$, $L_{\bar{X}}(\xi\cdot\bar{V}_i)=L_{\bar{X}}\xi\cdot\bar{V}_i+\xi\cdot L_{\bar{X}}\bar{V}_i$, $L_{\bar{X}}(\bar{V}_i\cdot\bar{V}_j)=L_{\bar{X}}\bar{V}_i\cdot\bar{V}_j+\bar{V}_i\cdot L_{\bar{X}}\bar{V}_j$.

La primera y la segunda son inmediatas, para la tercera hay que considerar si $i\neq j$, encuyo caso $\bar{V}_i\cdot\bar{V}_j=0$, y evidentemente se cumple, si $i=j$ $L_{\bar{X}}(\bar{V}_i\bar{V}_i)=L_{\bar{X}}(1+2r\alpha_i+r^2\alpha_i^2)=0$, ya que $X(\alpha_i)=0$.

Teorema III-2.-Sea M variedad Riemanniana de dimensión n, conexa e inmersa isométricamente en R^{n+1}.

Sea X isometría infinitesimal de M, tal que para cada punto p de M, existe U entorno de p y A tensor de Weingarten definido em este entorno, de forma que $L_X A=0$.

Tesis.-X es la restricción de una isometría infinitesimal del espacio euclídeo a la variedad.

Demostración.- Por el Teorema III-1, sabemos que para cada punto de M existe un entorno en el cual X es la restricción de una isometría infinitesimal de R^{n+1}. Sean U y V dos de tales entornos abiertos de forma que $U \cap V \neq \emptyset$. La intersección de los entornos tubulares nos dará un entorno tubular de $U \cap V$, en el cual observando las extensiones de X vemos que será la misma. Ahora bien si dos isometrías infinitesimales de un espacio euclídeo coinciden en un abierto deben ser la misma. Como M es conexa tendremos que $\bar{X}$ será una isometría infinitesimal de R^{n+1} cuya restricción a M será X.

Vamos a dar ahora la generalización del resultado anterior para cualquier codimensión.

<u>Teorema III-3.-Sea M variedad Riemanniana de dimensión n, inmersa isométricamente en R^{n+n_o}. Sea X isometría infinitesimal de M. Si p es un punto de M y U un entorno de p, en el que tenemos definidos los tensores del fibrado normal A_i, s_{jk}, tales que $L_X A_i = 0$, $L_X s_{jk} = 0$.</u>

<u>Tesis.-Existe un entorno de p V, $V \subset U$, de forma que en este entorno X es la restricción de una isometría infinitesimal de R^{n+n_o}.</u>

<u>Demostración.</u>-En U tenemos definidos los campos unitarios normales $\xi_1, \ldots, \xi_{n_0}$. Estos campos los extendemos a un entorno tubular de U en R^{n+n_o}, de la forma siguiente: como queremos que

$(\xi_i,\xi_j)=0$,definimos ξ_j a lo largo de ξ_i por traslado paralelo euclídeo,y lo mismo para ξ_i a lo largo de ξ_j.Esto podremos realizarlo en un entorno tubular,cuya existencia probaremos más adelante.

Sea Y un campo en U,queremos que la extensión que designaremos por la letra $\bar{Y}$,cumpla $L_{\xi_i}\bar{Y}=0$,para i de 1 a n_o.Si y_t es una curva integral de Y,su transformada por el subgrupo uniparamétrico de ξ_i,será $y_t+r\xi_{iy_t}$,cuyo campo tangente es $Y+rA_i(Y)+r\ s_{ij}(Y)\xi_j=\bar{Y}$.

Lo hecho a lo largo de ξ_i,podemos hacerlo a lo largo de cualquier dirección normal.Si en p consideramos la dirección normal $a_1\xi_1+\dots+a_{n_o}\xi_{n_o}$,con $a_1^2+\dots+a_{n_o}^2=1$.Se considera el campo $a_1\xi_1+\dots+a_{n_o}\xi_{n_o}$,cuya derivada de Lie respecto X es cero ya que los a_i son constantes.Es fácil ver que a lo largo de esta dirección la expresión de $\bar{Y}$ es $Y+ra_1A_1(Y)+\dots+ra_{n_o}A_{n_o}(Y)+$ $+r\ a_is_{ij}(Y)\xi_j$.

Vamos a probar ahora que las distribuciones $\{\xi_1,\dots,\xi_{n_0}\}$ $\{T(M)+ra_1A_1(T(M))+\dots+ra_{n_o}A_{n_o}(T(M))+r\ a_is_{ij}(T(M))\xi_j\}$,son involutivas y complementarias.

Para ello veremos que la aplicación de $T_q(M)$ en $T_{q+r\xi_q}(R^{n+n_o})$ por la que $V\longrightarrow V+rA(V)$,domde A es el tensor de Weingarten asociado a la dirección normal ξes inyectiva si $r<r_o$.Para ver la existencia de r_o,se considera $V_1,\dots,V_n$,base ortonormal de

campos en un entorno de p. Las funciones $||\bar\nabla_{V_i} V_j||$ son funciones diferenciables en el entorno, por tanto están acotadas superiormente en un entorno compacto W contenido en el anterior; sea k dicha cota superior. Se toma $V=\mathring{W}$.

$$||\bar\nabla_{V_i} V_1||^2 > (A_1(V_i)V_1)^2+\ldots+(A_{n_o}(V_i)V_1)^2.$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$||\bar\nabla_{V_i} V_n||^2 > (A_1(V_i)V_n)^2+\ldots+(A_{n_0}(V_i)V_n)^2.$$

De lo que resulta $||A_j(V_i)||^2<||\bar\nabla_{V_i} V_1||^2+\ldots+||\bar\nabla_{V_i} V_n||^2<nk^2$. Luego $||A_j(V_i)||<\sqrt{n}k$.

Sea V unitario $V=\alpha_1 V_1+\ldots+\alpha_n V_n$, $\alpha_1^2+\ldots+\alpha_n^2=1$. Como $A_j(V)= =\alpha_1 A_j(V_1)+\ldots+\alpha_n A_j(V_n)$. $||A_j(V)||<\alpha_1||A_j(V_1)||+\ldots+\alpha_n||A_j(V_n)||< <n\sqrt{n}k$.

En la aplicación $V \longrightarrow V+r(a_1A_1(V)+\ldots+a_nA_n(V))$, tenemos que la norma del segundo sumando de la imagen es $<rn^2\sqrt{n}\, k$. Tomando $r_o=1/(n^2\sqrt{n}\, k)$. Para todo r tal que $r<r_o$, la aplicación anterior será inyectiva.

De aquí resulta que para $r<r_0$, la aplicación $V \longrightarrow V+rA(V)+ +r\, a_i s_{ij}(V)\xi_j$, seguirá siendo inyectiva.

Así pues es posible encontrar un entorno de p, que por comodidad, llamaremos U y un R>0, tal que la aplicación definida en $Ux(-R,R)^{n_o}$ con imagen en R^{n+n_o}, por la que $(q,t_1,\ldots,t_{n_o})$ tiene por imagen $q+t_1\xi_{1q}+\ldots+t_{n_o}\xi_{n_oq}$, es un diffeomorfismo. Con lo que queda probado que las dos distribuciones son involutivas

Es una comprobación rutinaria el ver que se cumple $L_{\xi_i}\bar{V}=0$, en todos los puntos del entorno tubular de V.

Para probar que $\bar{X}$ es una isometría infinitesimal de R^{n+n_o}, consideramos un punto cualquiera $q=x+r\xi_x$, para ξ cierta dirección normal en x, para no complicar los cálculos supondremos $\xi=\xi_1$. Sea $V_1,\ldots,V_n$, base en la que A_1, diagonaliza y cumple $L_X V_i=0$, hemos de probar que se cumple:

$$L_{\bar{X}}(\xi_i\cdot\xi_j)=L_{\bar{X}}\xi_i\cdot\xi_j+\xi_i\cdot L_{\bar{X}}\xi_j.$$

$$L_{\bar{X}}(\bar{V}_\alpha\cdot\xi_i)=L_{\bar{X}}\bar{V}_\alpha\cdot\xi_i+\bar{V}_\alpha\cdot L_{\bar{X}}\bar{\xi}_i.$$

$$L_{\bar{X}}(\bar{V}_\alpha\cdot\bar{V}_\beta)=L_{\bar{X}}\bar{V}_\alpha\cdot\bar{V}_\beta+\bar{V}_\alpha\cdot L_{\bar{X}}\bar{V}_\beta.$$

La primera es inmediata, para ver la segunda hay que considerar $\bar{V}_\alpha\cdot\xi_i=rs_{1i}(V_\alpha)$ y $L_{\bar{X}}(\bar{V}_\alpha\xi_i)=rL_X s_{1i}(V_\alpha)=0$, y como $L_{\bar{X}}\bar{V}_\alpha=0$, ya que los subgrupos uniparamétricos de $\bar{X}$ y ξ_i conmutan y $L_{\bar{X}}\xi_i=0$ por construcción, vemos que la segunda también se cumple. Para la tercera $\bar{V}_\alpha\cdot\bar{V}_\beta=(1+ra_\alpha)(1+ra_\beta)\delta_{\alpha\beta}+r^2\ s_{1j}(V_\alpha)s_{1j}(V_\beta)$, por tanto bastará ver que $L_X(a_\alpha)=0$, lo que sabemos se verifica ya que los a_α son los autovalores de A_1.

Por tanto $\bar{X}$ es una isometría infinitesimal.

<u>Teorema III-4.-Sea M variedad Riemanniana de dimensión n, conexa, inmersa isométricamente en R^{n+n_o}.</u>

<u>Sea X isometría infinitesimal de M, tal que para cada punto p de M, existe U entorno de p en el que tenemos definidos</u>

los tensores del fibrado normal A_i, s_{jk}, de forma que $L_X A_i = 0$, $L_X s_{jk} = 0$.

Tesis.-X es la restricción de una isometría infinitesimal de R^{n+n_o} a la variedad.

La demostración es análoga a la del Teorema III-2.

Antes de pasar al estudio de los casos en que a partir de las isometrías infinitesimales de la variedad sean restricción de isometrías infinitesimales del espacio euclídeo,podemos deducir la rigidez de las inmersiones;vamos a estudiar algunas propiedades de las isometrías infinitesimales del espacio euclídeo.

§2.Grupos uniparamétricos de las isometrías infinitesimales del espacio euclídeo.

Vamos a empezar estudiando las matrices reales antisimétricas.Sea (a_{ij}),con $a_{ij}=-a_{ji}$,correspondiendo a ϕ endomorfismo de E espacio vectorial real con un producto escalar definido en él.

Podemos considerar que det.$(a_{ij})\neq 0$,ya que si es cero podemos considerar el ortogonal del Núcleo y restringir ϕ a él. Así pues podemos estudiar (a_{ij}) con determinante distinto de cero y un número par de filas y columnas,ya que si fuese impar el determinante sería cero.

Proposición III-2.-Sea ϕ endomorfismo antisimétrico en E espacio vectorial real,con un producto escalar definido en él, con det.$\phi\neq 0$.

Tesis.-Existe una base ortonormal de E,en la que la expresión de ϕ es:

$$\phi=\begin{pmatrix} 0 & a_1 & 0 & \dots & 0 \\ -a_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & & \\ \cdot & \cdot & & 0 & a_n \\ 0 & 0 & & -a_n & 0 \end{pmatrix}$$

Demostración.- Complexificamos E y lo representamos por $E_{\mathbb{C}}$,el cual tiene dimensión real 2n y dimensión compleja n.

Sea v vector propio de valor propio complejo λ(λ no puede ser real).$\phi(v)=\lambda v$.$\overline{\phi(v)}=\bar{\phi}(\bar{v})=\bar{\lambda}\bar{v}$.Luego $\bar{v}$ es vector propio de valor propio $\bar{\lambda}$.

Para v hay dos posibilidaes $v=ie_2$,o,$v=e_1+ie_2$.Si $v=ie_2$, $\phi(v)=\lambda ie_2$,$\phi(\bar{v})=\phi(-ie_2)=-\phi(ie_2)=-\lambda ie_2=\lambda(-ie_2)$.Luego $\bar{v}$ es vector propio de valor propio λ,$\lambda=\bar{\lambda}$,por tanto λ es real lo que es absurdo.v tampoco puede ser $e_1+i\alpha e_1$,con α real,ya que tendríamos

$$\left.\begin{array}{l}\phi(e_1+i\alpha e_1)=\lambda e_1+i\lambda\alpha e_1 \\ \phi(e_1-i\alpha e_1)=\bar{\lambda}e_1-i\bar{\lambda}\alpha e_1\end{array}\right\} \longrightarrow \phi(e_1)=1/2\left((\lambda+\bar{\lambda})e_1+\alpha i(\lambda-\bar{\lambda})e_1\right).$$

Y e_1 sería vector propio de valor propio real.

Por tanto $v=e_1+ie_2$,con e_1 y e_2 linealmente independientes.

$\phi(v)\cdot\bar{v}=\lambda v\cdot\bar{v}=-v\cdot\phi(\bar{v})=-\bar{\lambda}v\cdot\bar{v}$.Como $v\cdot\bar{v}=e_1^2+e_2^2$,resulta que

$\lambda+\bar{\lambda}=0$ y λ es imaginario puro.

El subespacio $\{v,\bar{v}\}$, es invariante por ϕ, es fácil ver que $\{v,\bar{v}\}^{\perp}$ también lo es, en el cual se vuelve a hacer el mismo razonamiento y llegamos a $E_c=E_1\perp E_2\perp\ldots\perp E_n$. Donde cada subespacio E_i, es de dimensión compleja dos y tiene traza real también de dimensión dos, E_i es el subespacio anulado por $\phi^2+a_i^2$.

En E_i, consideramos e_i unitario, e_i real, $\phi(e_i)$ es de norma r_i, $r_i^2=\phi(e_i)\cdot\phi(e_i)=-e_i\cdot\phi^2(e_i)=-e_i\cdot(-a_i^2e_i)=a_i^2$.

$1/a_i\cdot\phi(e_i)$ es unitario y $\phi(1/a_i\cdot\phi(e_i))=1/a_i\cdot\phi^2(e_i)=-a_ie_i$.

Por tanto la expresión de $\phi|E_i$ es:

$$\phi|E_i=\begin{pmatrix}0 & -a_i\\ a_i & 0\end{pmatrix}$$

Vamos a pasar ahora al estudio de los grupos uniparamétricos de las isometrías infinitesimales de R^n.

Según sabemos una base de $i(R^n)$ es : $(-x_2,x_1,0,\ldots,0)$, $(-x_3,0,x_1,0,\ldots,0),\ldots,(0,\ldots,0,-x_n,x_{n-1}),(1,0,\ldots,0),\ldots,(0,\ldots,0,1)$.

Si Z es una isometría infinitesimal de R^n, para hallar su grupo uniparamétrico tendremos que resolver: $dX/dt=AX+b$, donde A es una matriz antisimétrica y b un vector. Sea B de $O(n)$, tal que BAB^{-1} adopta la forma canónica estudiada anteriormante, que designaremos por $\bar{A}$.

Tomando $Y=BX$, se tiene $dY/dt=BdX/dt=BAB^{-1}Y+Bb=\bar{A}Y+\bar{b}$.

Para resolver ésto, bastará con resolver cada una de las cajas cuadradas $dy_i/dt=a_iy_{i+1}+b_i$, $dy_{i+1}/dt=-a_iy_i+b_{i+1}$. La solución es:

$$\begin{pmatrix} y_i(t) \\ y_{i+1}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos a_it & \operatorname{sen} a_it \\ -\operatorname{sen} a_it & \cos a_it \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_{io} & -b_{i+1}/a_i \\ y_{i+1o}+b_i/a_i & \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{i+1}/a_i \\ -b_i/a_i \end{pmatrix}$$

Efectuando la traslación $z_i=y_i-b_{i+1}/a_i$, $z_{i+1}=y_{i+1}+b_i/a_i$.

$$\begin{pmatrix} z_i(t) \\ z_{i+1}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos a_it & \operatorname{sen} a_it \\ -\operatorname{sen} a_it & \cos a_it \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} z_{io} \\ z_{i+1o} \end{pmatrix}$$

Si es $a_i=0$, tendremos $dx_i/dt=b_i$, luego $x_i(t)=b_it+x_{io}$.

Proposición III-3.-Para toda isometría infinitesimal de R^n, podemos encontrar un sistema ortonormal de referencia en el que la expresión de su grupo uniparamétrico sea:

$$\phi_t \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos a_1t & -\operatorname{sen} a_1t & 0 \ldots\ldots & & & 0 \\ \operatorname{sen} a_1t & \cos a_1t & 0 \ldots\ldots & & & 0 \\ 0 & 0 & \ldots\ldots & & & 0 \\ \cdot & \ldots & \cos a_kt & -\operatorname{sen} a_kt & 0 \ldots & 0 \\ \cdot & \ldots & \operatorname{sen} a_kt & \cos a_kt & 0 \ldots & 0 \\ \cdot & \ldots & 0 & 0 & 1 0 \ldots & 0 \\ \cdot & \ldots\ldots & & & 0 1 0 . & 0 \\ 0 & 0 \ldots\ldots & & & & 0 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \\ b_{2k+1} \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

Como consecuencia de esta proposición, enunciamos:

Lema III-3.-Sea M variedad Riemanniana compacta y conexa, de dimensión n,inmersa isométricamente en R^{n+k}.Sea X isometría infinitesimal de M que es la restricción de una de R^{n+k}.

Existe una referencia ortonormal de R^{n+k} en la que la expresión del grupo uniparamétrico de dicha isometría es como la de la Proposición anterior,pero con todas las b iguales a cero.

----

§3.Rigidez a partir de las isometrías infinitesimales.

Vamos a dedicarnos al estudio de cuándo dos inmersiones isométricas pueden ser rígidas,a partir de que sus isometrías infinitesimales sean restricción de isometrías infinitesimales del espacio euclídeo ambiente.

Empezaremos viendo un resultado para superficies,en cuya demostración se utilizan técnicas no generalizables a dimensión mayor.

Teorema III-5.-Sea M variedad Riemanniana de dimensión dos,compacta y conexa,que admite dos inmersiones isométricas inyectivas en R^3,ϕ_1 y ϕ_2.

Si X es una isometría infinitesimal de M,que es la restricción ,para ambas inmersiones,de una isometría infinitesimal de R^3.

Tesis.-ϕ_1 y ϕ_2 son mutuamente rígidas.

Demostración.-Designamos por $\bar{X}_1,\bar{X}_2$,las isometrías infinitesimales de R^3,que restringidas a $\phi_1(M)$ y $\phi_2(M)$,dan la isometría X.Los grupos uniparamétricos asociados a $\bar{X}_1$ y $\bar{X}_2$,son grupos de rotaciones alrededor de un eje fijo.

Por medio de una isometría de R^3 hacemos coincidir estos ejes,por lo que podemos suponer que es el eje x_3.

$\bar{X}_1=(-kx_2,kx_1,0)$,$\bar{X}_2=(-qx_2',qx_1',0)$.Vamos a ver que k=q,para ello supongamos que $|k|>|q|$.Se toma $1/k\bar{X}_1=(-x_2,x_1,0)$,$1/k\bar{X}_2=$ $=(-q/kx_2',q/kx_1',0)$.

Si ϕ_t y ψ_t son los grupos uniparamétricos de $1/k\bar{X}_1$ y $1/k\bar{X}_2$ respectivamente,sus expresiones son:

$$\phi_t=\begin{pmatrix} \cos t & \operatorname{sen} t & 0 \\ -\operatorname{sen} t & \cos t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \psi_t=\begin{pmatrix} \cos q/kt & \operatorname{sen} q/kt & 0 \\ -\operatorname{sen} q/kt & \cos q/kt & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Sea ψ la isometría de $\phi_1(M)$ en $\phi_2(M)$,dada por $\phi_2\phi_1^{-1}$.Sea p cualquier punto de M.$\phi_{2\pi}(p)=p$,luego $\psi_{2\pi}(\psi(p))=\psi(p)$,portanto q/k=1.Luego podemos suponer $\bar{X}_1=(-x_2,x_1,0)$,$\bar{X}_2=(-x_2',x_1',0)$.

Si $p=(x_1,x_2,x_3)$ y $\psi(p)=(x_1',x_2',x_3')$,como $||\bar{X}_{1p}||=||\bar{X}_{2p}||$,tendremos $x_1^2+x_2^2=x_1'^2+x_2'^2$.

Tomando coordenadas cilíndricas (r,θ,z),$\bar{X}_1$ y $\bar{X}_2$ son el campo D_θ.

Sea ahora V_1 y V_2 los campos unitarios en M perpendiculares a $\bar{X}_1$ y $\bar{X}_2$ respectivamente.Estos campos cumplen $L_XV_i=0$,ya que X es una isometría infinitesimal de M.las expresiones para V_1 y V_2 serán$V_1=-kD_r+\sqrt{1-k^2}\ D_z$,$V_2=-qD_r+\sqrt{1-q^2}\ D_z$.Como $||\bar{X}_1||=$ $=||\bar{X}_2||=r$,$V_1(||\bar{X}_1||)=-k$,$V_2(||\bar{X}_2||)=-q$,luego en los puntos de M se cumple $k=q$.

Sean p y $\psi(p)$,que por una isometría de R^3(giro en el plano (x_1,x_2),traslación segun la dirección x_3)podemos considerar que coinciden,luego también coincidirán $\phi_t(p)$ con $\psi_t(p)$..

Las curvas integrales de V_1 y V_2 serán:$(r_1(t)\cos\theta,r_1(t)\operatorname{sen}\theta,$ $,z_1(t))$,$(r_2(t)\cos\theta,r_2(t)\operatorname{sen}\theta,z_2(t))$. $V_1=(\dot{r}_1\cos\theta,\dot{r}_1\operatorname{sen}\theta,\dot{z}_1)$, $V_2=(\dot{r}_2\cos\theta,\dot{r}_2\operatorname{sen}\theta,\dot{z}_2)$,tenemos que $\dot{r}_1^2+\dot{z}_1^2=\dot{r}_2^2+\dot{z}_2^2$,y como $\dot{r}_1=\dot{r}_2$(recordemos $k=q$),$\dot{z}_1^2=\dot{z}_2^2$.Ahora puede ocurrir $\dot{z}_1=\dot{z}_2$ y como $z_1(0)=z_2(0)$ será $z_1=z_2$ para valores de t en un entorno de $t=0$.Si fuese $\dot{z}_1=-\dot{z}_2$,basta cambiar la orientación del eje x_3 en la segunda inmersión para que sea $\dot{z}_1=\dot{z}_2$.

Por tanto ambas inmersiones coinciden en un entorno de p.

Sea ahora un punto cualquiera de M q,lo unimos con p por un camino,por ejemplo la geodésica mínima.El conjunto de puntos en este camino $\bar{x}(t)$,con $\bar{x}(0)=p$,$\bar{x}(1)=q$,para los que ϕ_1 y ϕ_2 no coinciden tienen su parámetro acotado inferiormente,luego existirá un ínfimo t_o,$\bar{x}(t_o)=r$,pero del análisis anterior resulta que si en r $z_1\neq z_2$,se sigue verificando en un entorno,lo que va en contra del carácter de ínfimo de r.

Así pues ambas inmersiones coinciden.

Ahora bien esta demostración utiliza recursos propios de R^3 no generalizables a dimensión mayor. Otra forma de probar el mismo resultado con una técnica aplicable a variedades de dimensión mayor, puede ser:

En primer lugar que X es dirección de curvatura para ambas inmersiones es fácil de probar. Sea $\xi_1=(a_1,a_2,a_3)$, el campo normal unitario para la primera inmersión definido en un entorno de un punto. Como $L_{\bar{X}_1}\xi_1=0$, tenemos que a lo largo de una curva integral de $\bar{X}_1$ por un punto de la variedad será: $(\cos t a_1+\operatorname{sen} t a_2, -\operatorname{sen} t a_1+\cos t a_2, a_3)$, por tanto $\bar{\nabla}_{\bar{X}_1}\xi_1=(-a_2,a_1,0)$. Como $(-x_2,x_1,0)(a_1,a_2,a_3)=0$, tenemos que $(a_1,a_2)\perp(-x_2,x_1)$, luego $(a_1,a_2)=\lambda(x_1,x_2)$ y por tanto $\bar{\nabla}_{\bar{X}_1}\xi_1=\lambda(-x_2,x_1,0)$, luego X es dirección de curvatura para la primera inmersión. De la misma forma se vería para la segunda inmersión.

Vamos a ver ahora que las curvaturas principales, segun X, coinciden para ambas inmersiones. Sea p punto de M y consideremos: $\xi_{1p}(||\bar{X}_1||)=D_r\sqrt{(x_1+ra_1)^2+(x_2+ra_2)^2}\,|_{r=0}=1/\sqrt{x_1^2+x_2^2}(a_1x_1+a_2x_2)$. Luego $\xi_{1p}(||\bar{X}_1||)=1/\sqrt{x_1^2+x_2^2}(x_1,x_2,0)\cdot(a_1,a_2,a_3)$. De la misma forma veríamos $\xi_{2p}(||\bar{X}_2||)=1/\sqrt{x_1'^2+x_2'^2}(x_1',x_2',0)\cdot(a_1',a_2',a_3')$.

Pero los campos $1/\sqrt{x_1^2+x_2^2}(x_1,x_2,0)$, $1/\sqrt{x_1'^2+x_2'^2}(x_1',x_2',0)$ son de norma uno y si consideramos las expresiones anteriores que expresan la variación de la norma de X para campos tangentes a la variedad tiene que dar lo mismo para ambas inmersiones, luego también ha de dar lo mismo en dirección normal.

$\xi_{1p}(||\bar{X}_1||)=D_r(||X+rA_1(X)||)=D_r(|1+r\lambda_1|||X||)|_{r=0}=\lambda_1||X||.$

$\xi_{2p}(||\bar{X}_2||)=D_r(||X+rA_2(X)||)=D_r(|1+r\lambda_2|||X||)|_{r=0}=\lambda_2||X||.$

Por tanto $\lambda_1=\lambda_2$. Si en el entorno de un punto fuese $\lambda_1=\lambda_2=0$ en dicho entorno se cumpliría $x_1=x_2=0$, lo que es absurdo por ser igual a dos la dimensión de la variedad. Por tanto podemos suponer $\lambda_1\neq 0$, y por consiguiente los tensores de Weingarten son los mismos para ambas inmersiones y en consecuencia las inmersiones serán mutuamente rígidas.

Con vistas a obtener resultados similares al anterior para dimensión mayor, necesitamos:

Lema III-4.-En $R^{2n}(R^{2n+1})$, sean $\phi_1,\dots,\phi_k$, k endomorfismos antisimétricos independientes que conmutan.

Tesis.-Existe una base de R_c^{2n} (R_c^{2n+1}), en la que $\phi_1,\dots,\phi_k$, son simultaneamente diagonalizables y sus expresiones son:

Para R_c^{2n}

$$\phi_1=\begin{pmatrix} ia_1 & 0 & \cdots & & & 0 \\ 0 & -ia_1 & 0 & \cdots & & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & 0 & \cdots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \cdots & \cdots & ib_1 & 0 \\ \vdots & & \cdots & \cdots & 0 & -ib_1 \end{pmatrix},\dots,\ \phi_k=\begin{pmatrix} ia_k & 0 & \cdots & & & 0 \\ 0 & -ia_k & 0 & \cdots & & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & 0 & \cdots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \cdots & \cdots & ib_k & 0 \\ \vdots & & \cdots & \cdots & 0 & -ib_k \end{pmatrix}$$

Y para R_c^{2n+1} la expresión es la misma con las filas y columnas 2n+1, con ceros.

Demostración.-Los endomorfismos $\phi_1,\dots,\phi_k$, som diagonalizables en R_c^{2n} (R_c^{2n+1}) y como conmutan es sabido que son diagonalizables simultaneamente(es un simple ejercicio de cálculo ver que para R_c^{2n+1} el último(en la matriz)vector del núcleo es común a todos.).

Como consecuencia de ello podemos enunciar:

Lema III-5.-En $R^{2n}(R^{2n+1})$ sean $\phi_1,\dots\phi_k$,k endomorfismos antisimétricos independientes que conmutan.

Tesis.-Existe una base ortonormal de $R^{2n}(R^{2n+1})$,en la que las expresiones de $\phi_1,\dots,\phi_k$,son:

Para R^{2n}.

$$\phi_1=\begin{pmatrix} 0 & a_1 & 0 & \dots\dots & 0 \\ -a_1 & 0 & \dots\dots & & \\ 0 & \dots\dots & & & \\ \dots\dots & & & & \\ \dots\dots & & & 0 & b_1 \\ 0 & 0 & \dots\dots & -b_1 & 0 \end{pmatrix},\dots,\phi_k=\begin{pmatrix} 0 & a_k & 0 & \dots\dots & 0 \\ -a_k & 0 & \dots\dots & & 0 \\ 0 & \dots\dots & & & \\ \dots\dots & & & & \\ \dots\dots & & & 0 & b_k \\ 0 & 0 & \dots & -b_k & 0 \end{pmatrix}$$

Para R^{2n+1},las mismas expresiones con las últimas filas y columnas todas cero.

Lema III-6.-Sean $X_1,\dots,X_n$,n isometrías infinitesimales de R^{2n} (R^{2n+1})tales que restringidas a una subvariedad compacta que no puede encontrarse en la intersección de dos hiperplanos, dan n isometrías infinitesimales de la subvariedad independientes en algún punto de ella,con corchetes de Lie todos cero sobre la subvariedad.

Tesis.-Existe una referencia ortonormal de $R^{2n}(R^{2n+1})$,en la que las expresiones de $X_1,\dots,X_n$,son n combinaciones linea-

<u>les adecuadas de, para el caso de R^{2n} $Y_1=a_1(-x_2,x_1,0,\dots,0),\dots,$ $,Y_n=a_n(0,\dots,0,-x_{2n},x_{2n-1})$. Para el caso de R^{2n+1} de $Y_1=a_1(-x_2,x_1,0,\dots,0),\dots,Y_n=a_n(0,\dots,0,-x_{2n},x_{2n-1},0)$.</u>

<u>Demostración</u>.- Solo la vamos a dar para R^{2n}, ya que para R^{2n+1} es análoga.

Sean $X_i=\psi_i(x_1,\dots,x_{2n})+(\alpha_1^i,\dots,\alpha_{2n}^i)$, con ψ_i antisimétrica. $[X_i,X_j]=[\psi_i,\psi_j](x_1,\dots,x_{2n})+(\psi_j(\alpha_1^i,\dots,\alpha_{2n}^i)-\psi_i(\alpha_1^j,\dots,\alpha_{2n}^j))$.

Como ésto ha de anularse en la subvariedad, si en $[\psi_i,\psi_j](x_k)$ hay alguna componente no idénticamente nula, deberán haber como mínimo dos y M se encontraría en la intersección de dos hiperplanos lo que va en contra de la hipótesis. Por tanto $[\psi_i,\psi_j]=0$, para todo i,j.

Por Lema III-5, existe una base ortonormal de R^{2n}, en la que :$X_1=(-a_1x_2,a_1x_1,\dots,-b_1x_{2n},b_1x_{2n-1})+(\beta_1^1,\dots,\beta_{2n}^1)$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$X_n=(-a_nx_2,a_nx_1,\dots,-b_nx_{2n},b_nx_{2n-1})+(\beta_1^n,\dots,\beta_{2n}^n)$.

De forma que $\begin{vmatrix} a_1 & \dots & b_1 \\ \vdots & & \vdots \\ a_n & \dots & b_n \end{vmatrix} \neq 0$.

Ya que si fuese cero, o un campo sería combinación lineal de los otros, lo que va en contra de la hipótesis, o una combinación lineal de los anteriores sería $(\gamma_1,\dots,\gamma_{2n})$, con γ_i constantes, lo que es absurdo por ser compacta la subvariedad.

Por tanto podemos obtener $Y_1,\dots,Y_n$, cuyas expresiones serán: $Y_1=a_1(-x_2,x_1,0,\dots,0)+(\alpha_1^1,\alpha_2^1,0,\dots,0)$

$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$

$Y_n=a_n(0,\dots,0,-x_{2n},x_{2n-1})+(0,\dots,0,\alpha_{2n-1}^n,\alpha_{2n}^n)$.

Efectuando traslaciones adecuadas en los planos (x_1,x_2), $\dots,(x_{2n-1},x_{2n})$,resulta:(no cambiaremos las letras para no complicar la notación)

$Y_1=a_1(-x_2,x_1,0,\dots,0),\dots,Y_n=a_n(0,\dots,0,-x_{2n},x_{2n-1})$.

Teorema III-6.-Sea M variedad Riemanniana de dimensión 2k-1 (2k),conexa y compacta,que tiene dos inmersiones isométricas inyectivas ϕ_1 y ϕ_2 en $R^{2k}(R^{2k+1})$.Sean $X_1,\dots,X_k$,k isometrías infinitesimales de M,tales que $[X_i,X_j]=0$,para todo i,j, y en algún punto de M dim.$\{X_1,\dots,X_k\}=k$.

Si para ambas inmersiones $X_1,\dots,X_k$,son la restricción de k isometrías infinitesimales del espacio euclídeo.

Tesis.- ϕ_1 y ϕ_2,son mutuamente rígidas.

Demostración.-Solo vamos a demostrarlo para R^{2k},el caso de R^{2k+1} se demuestra igual.

Aplicando el Lema III-6,podemos encontrar dos referencias ortonormales de R^{2k},en las que las expresiones de los X_i serán:

$X_1=(-x_2,x_1,0,\dots,0),\dots,X_k=(0,\dots,0,-x_{2k},x_{2k-1})$.

De hecho se tratará de combinaciones lineales adecuadas de $X_1,\dots,X_k$,aunque los seguiremos designando igual,para no complicar la notación.

También tendremos:

$$X_1' = (-a_1x_2', a_1x_1', -b_1x_4', b_1x_3', \ldots, -d_1x_{2k}', d_1x_{2k-1}')$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$X_k' = (-a_kx_2', a_kx_1', -b_kx_4', b_kx_3', \ldots, -d_kx_{2k}', d_kx_{2k-1}')$$

Sobre M se cumple $X_i' \cdot X_j' = 0$, siempre que $i \neq j$, luego sobre M tendremos:

$$a_1a_2(x_1'^2 + x_2'^2) + b_1b_2(x_3'^2 + x_4'^2) + \ldots + d_1d_2(x_{2k-1}'^2 + x_{2k}'^2) = 0$$
$$a_1a_3(x_1'^2 + x_2'^2) + b_1b_3(x_3'^2 + x_4'^2) + \ldots + d_1d_3(x_{2k-1}'^2 + x_{2k}'^2) = 0$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$a_{k-1}a_k(x_1'^2 + x_2'^2) + b_{k-1}b_k(x_3'^2 + x_4'^2) + \ldots + d_{k-1}d_k(x_{2k-1}'^2 + x_{2k}'^2) = 0.$$

Si de estas ecuaciones hubiese dos de independientes, la variedad no tendría dimensión $2k-1$, luego

$$(*) \qquad \text{rango}\begin{pmatrix} a_1a_2 \ldots\ldots d_1d_2 \\ \cdot \ \ldots\ldots \ \cdot \\ a_{k-1}a_k \ldots d_{k-1}d_k \end{pmatrix} = 0 \text{ ó } 1.$$

Si el rango es uno, supongamos $a_1a_2 \neq 0$, como $a_1a_2(x_1'^2 + x_2'^2) + \ldots = 0$, se cumple sobre la variedad, deberá ser, por ejemplo, $b_1b_2 \neq 0$. Así pues a_1, a_2, b_1, b_2 son distintos de cero.

Imponiendo que los menores de orden dos, obtenidos a partir de las columnas encabezadas por a_1a_2 y b_1b_2, son cero, resulta: $a_2b_3 = a_3b_2, \ldots, a_2b_k = a_kb_2, a_1b_3 = a_3b_1, \ldots, a_1b_k = a_kb_1$.

Puede ocurrir a) que $(a_1, b_1), \ldots, (a_k, b_k)$ sean todos proporcionales,lo que va en contra de que $\begin{vmatrix} a_1\ldots d_1 \\ \ldots\ldots \\ a_k\ldots d_k \end{vmatrix} \neq 0$.

(b) que $(a_3,b_3)=\ldots=(a_k,b_k)=0$ y $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0$. En este caso del hecho de que el determinante de la matriz de coeficientes sea distinto de cero y que el rango de la matriz (*) sea uno resulta que la matriz de coeficientes ha de ser:

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & 0\ldots0 \\ a_2 & b_2 & 0\ldots0 \\ 0 & 0 & \\ \cdot & \cdot & \\ 0. & 0 & \end{pmatrix}$$

En la matriz cuadrada rayada hay en cada fila un solo elemento distinto de cero.

Los campos X_1', X_2', serán: $X_1'=(-a_1x_2', a_1x_1', -b_1x_4', b_1x_3', 0,\ldots,0)$, $X_2'=(-a_2x_2', a_2x_1', -b_2x_4', b_2x_3', 0,\ldots,0)$.

Por cierre de las órbitas de X_1 y X_2, deberán ser a_1,b_1,a_2,b_2 elementos de Z. Podemos considerar, sin que sea ninguna restricción, que a_1 y b_1 son positivos.

Tomando :

$a_2X_1'-a_1X_2'=(0,0,(a_1b_2-a_2b_1)x_4', -(a_1b_2-a_2b_1)x_3', 0,\ldots,0)$.

$b_2X_1'-b_1X_2'=((a_2b_1-a_1b_2)x_2', -(a_2b_1-a_1b_2)x_1', 0,\ldots,0)$.

$a_2X_1-a_1X_2=(-a_2x_2, a_2x_1, a_1x_4, -a_1x_3, 0,\ldots,0)$

$b_2X_1-b_1X_2=(-b_2x_2, b_2x_1, b_1x_4, -b_1x_3, 0,\ldots,0)$.

Otra vez por cierre de órbitas, como para valor del parámetro igual a $2\pi/(a_1b_2-a_2b_1)$, el grupo uniparamétrico de $a_2X_1'-a_1X_2'$

actúa como la identidad,tendremos que $a_1/(a_1b_2-a_2b_1)$, $a_2/(---)$, $b_1/(---)$, $b_2/(---)$,han de ser enteros.

Por tanto $a_1b_2-a_2b_1/(a_1b_2-a_2b_1)^2$ ha de ser entero,luego $a_1b_2-a_2b_1=\pm 1$.

Como $X_1'X_2=0$,resulta que $a_1a_2(x_1'^2+x_2'^2)+b_1b_2(x_3'^2+x_4'^2)=0$,en M. De $(a_2X_1'-a_1X_2')(b_2X_1'-b_1X_2')=0$,resulta que lo mismo valdrá para $a_2X_1-a_1X_2$ y $b_2X_1-b_1X_2$,por tanto $a_2b_2(x_1^2+x_2^2)+a_1b_1(x_3^2+x_4^2)=0$.Luego a_2 y b_2 han de ser de sigmos contrarios.pero en $a_1b_2-a_2b_1$ los dos sumandos son del mismo signo y su suma es ± 1,lo que es absurdo.

Por tanto el rango de (*) ha de ser cero y como el determinante de los coeficientes ha de ser distinto de cero deberá haber un solo elemento no nulo en cada fila,luego podemos poner $X_1'=(-a_1x_2',a_1x_1',0,\ldots,0),\ldots,X_k'=(0,\ldots,0,-a_kx_{2k}',a_kx_{2k-1}')$.

Por cierre de órbitas $a_1=1,\ldots,a_k=1$.Luego $X_1'=(-x_2',x_1',0,\ldots,0)$, $\ldots,X_k'=(0,\ldots,0,-x_{2k}',x_{2k-1}')$.

Sea ξ_1 el campo unitario normal a M,respecto a ϕ_1,definido en un entorno adecuado,$\xi_1=(\alpha_1,\ldots,\alpha_{2k})$.Como ξ_1 es invariante por X_1,a lo largo de una curva integral de X_1,ξ_1 será $(\cos t\alpha_1+\operatorname{sen} t\,\alpha_2,-\operatorname{sen} t\alpha_1+\cos t\alpha_2,\alpha_3,\ldots,\alpha_{2k})$.POr tanto $\bar\nabla_{X_1}\xi_1=(\alpha_2,-\alpha_1,0,\ldots,0)$.Como $(\alpha_1,\alpha_2)(-x_2,x_1)=0$,resulta que $(\alpha_1,\alpha_2)=\lambda(x_1,x_2)$,luego $(\alpha_2,-\alpha_1)=\lambda(-x_2,x_1)$,por consiguiente $\bar\nabla_{X_1}\xi_1=\lambda X_1$.Por tanto X_1 es dirección de curvatura,de la misma forma lo veríamos para $X_2,\dots X_k, X'_1,\dots,X'_k$.

Sea ξ_2 el campo normal a M por ϕ_2, $\xi_2=(\alpha'_1,\dots,\alpha'_{2k})$,

$\xi_1(||X_1||)=D_r\sqrt{(x_1+r\alpha_1)^2+(x_2+r\alpha_2)^2}\,|_{r=0}=1/\sqrt{x_1^2+x_2^2}(x_1,x_2,0,\dots,0)(\alpha_1,\dots)$

$\xi_2(||X'_1||)=D_r\sqrt{(x'_1+r\alpha'_1)^2+(x'_2+r\alpha'_2)^2}\,|_{r=0}=1/\sqrt{x'^2_1+x'^2_2}(x'_1,x'_2,0,\dots)(\alpha'_1,\dots)$.

Como que estos productos escalares dan lo mismo según direcciones tangentes correspondientes para ambas inmersiones, deberán dar lo mismo en dirección ξ_1 y ξ_2, ya que los campos $1/\sqrt{x_1^2+x_2^2}(x_1,x_2,0,\dots,0)$, $1/\sqrt{x'^2_1+x'^2_2}(x'_1,x'_2,0,\dots,0)$ son unitarios.

Pero

$\xi_1(||X_1||)=D_r(||X_1+r\lambda_1X_1||)_{r=0}=D_r(|1+r\lambda_1|\,||X_1||)_{r=0}=\lambda_1$.

$\xi_2(||X'_1||)=D_r(||X'_1+r\lambda'_1X'_1||)_{r=0}=D_r(|1+r\lambda'_1|\,||X'_1||)_{r=0}=\lambda'_1$.

Luego $\lambda_1=\lambda'_1$. De la misma forma veríamos $\lambda_i=\lambda'_i$, para todo i, si alguna de estas λ_i es no nula tendremos $A_1=A'_1$. Si todas son cero tendremos $\alpha_1=\alpha_2=\dots=\alpha_{2k}=0$, lo que es absurdo(en el caso de R^{2k+1} tendríamos $\xi=(o,\dots,0,1)$ y $A_1=A'_1=0$).

Luego $A_1=A'_1$ y por tanto ϕ_1 y ϕ_2 son mutuamente rígidas.

La generalización de este resultado a codimensión mayor no nos es posible sin hipótesis suplementarias. La cuestión está en ver que las expresiones para $X'_1,\dots,X'_k$ son $(-x'_2,x'_1,0,\dots)$, $\dots,(0,\dots,0,-x'_{2k},x'_{2k-1})$. Pero para llegar a ésto, recordemos que en Lema III-6, exigíamos que la subvariedad no se encontrase en la intersección de dos hiperplanos y además en el Teorema anterior sabíamos que no podía haber dos ecuaciones de la forma $a_1a_2(x_1'^2+x_2'^2)+\ldots=0$, que fuesen independientes, ya que la codimensión era uno, pero ahora podría ocurrir ésto sin llegar a ningún absurdo en relación a la codimensión.

Vamos a enunciar sin demostración, ya que es consecuencia de lo anterior.

Lema III-7.- Sea M variedad Riemanniana de dimensión $\geq k+1$ y $\leq 2k$, compacta y conexa, que tiene k isometrías infinitesimales $X_1,\ldots,X_k$, que cumplen $[X_i,X_j]=0$ y en algún punto de M son independientes.

Si ϕ_1 y ϕ_2 son dos inmersiones isométricas inyectivas en R^{2k+1}, de forma que en cada inmersión $X_1,\ldots,X_k$ son la restricción de k isometrías infinitesimales de R^{2k+1} y además para cada inmersión la subvariedad no está contenida en la intersección de dos hipercuádricas.

Tesis.-Existen en R^{2k+1} dos sistemas de referencia ortonormales, para cada inmersión, de forma que:

$$X_1=(-x_2,x_1,0,\ldots,0) \qquad X_1'=(-x_2',x_1',0,\ldots,0)$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$X_k=(0,\ldots,0,-x_{2k},x_{2k-1},0) \qquad X_k'=(0,\ldots,0,-x_{2k}',x_{2k-1}',0).$$

Lema III-8.-Sea M variedad Riemanniana de dimensión n, con una isometría infinitesimal X. Dos inmersiones isométricas en

R^{n+k} ϕ y ϕ'.De forma que para cada inmersión X es la restricción de una isometría infinitesimal de R^{n+k} de la forma $X=(-x_2,x_1,0,\ldots,0)$ para ϕ y $X'=(-x'_2,x'_1,0,\ldots,0)$ para ϕ'.

Tesis.-X es dirección de curvatura para cualquier dirección normal en cualquiera de las inmersiones.

Elegidos $\xi_1,\ldots,\xi_k$,referencia ortonormal del fibrado normal para la primera inmersión,existe $\xi'_1,\ldots,\xi'_k$,referencia ortonormal del fibrado normal para ϕ',de forma que $A_i(X)=A'_i(X)$, siempre que $||X||\neq 0$.

Demostración.-Sea ξ_p vector normal para ϕ en un punto.Podemos considerar un campo ξ ,tal que en el punto coincida con el vector dado y $L_X\xi=0$.$\xi_p=(\alpha_1,\ldots,\alpha_{n+k})$.

A lo largo de una curva integral de X por el punto p $\xi=(\cos t\alpha_1+\operatorname{sen} t\alpha_2,-\operatorname{sen} t\alpha_1+\cos t\alpha_2,\alpha_3,\ldots,\alpha_{n+k})$.

$\nabla_X\xi_p=(\alpha_2,-\alpha_1,0,\ldots,0)$ y ya sabemos que ésto es igual a λX.De la misma forma lo veríamos para ϕ'.

$\xi\ (||X||)=1/\sqrt{x_1^2+x_2^2}(x_1,x_2,0,\ldots,0)(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_{n+k})$

Si ξ' es normal a $\phi'(M)$.

$\xi'(||X'||)=1/\sqrt{x_1'^2+x_2'^2}(x'_1,x'_2,0,\ldots,0)(\alpha'_1,\ldots,\alpha'_{n+k})$.

Como los campos $1/\sqrt{x_1^2+x_2^2}(x_1,x_2,0,\ldots,0)$ y $1/\sqrt{x_1'^2+x_2'^2}(x'_1,x'_2,0,\ldots)$ son unitarios y sus productos escalares por campos en dirección tangente dan lo mismo,vemos que si $\xi_1,\ldots,\xi_k$,es una referencia ortonormal,existe $\xi'_1,\ldots,\xi'_k$,de forma que los productos escalares dan lo mismo,pero de aquí se deduce,según ya hemos probado,que $A_i(X)=A'_i(X)$.

Teorema III-7.-Sea M variedad Riemanniana,compacta y conexa de dimensión n,.Con $X_1,\dots,X_k$,isometrías-~~infinit~~esimales tales que $(X_i,X_j)=0$,para todo i,j,y existe algun punto de M en el que som independientes.

Sean ϕ_1 y ϕ_2 dos inmersiones isométricas inyectivas en R^{2k+1},de forma que $\phi_1(M)$ y $\phi_2(M)$ no están contenidas en la intersección de dos hipercuádricas y para cada inmersión $X_1,\dots,X_k$,son la restricción de k isometrías infinitesimales de R^{2k+1}.

Sabiendo que $k+1\leq n\leq 2k$.

Tesis.-ϕ_1 y ϕ_2 son mutuamente rígidas.

Demostración.-Existen dos sistemas de referencia ortonormales en R^{2k+1},en los que

$$X_1=(-x_2,x_1,0,\dots,0) \qquad X'_1=(-x'_2,x'_1,0,\dots,0)$$

$$\dots\dots\dots \qquad \dots\dots\dots$$

$$X_k=(0,\dots,0,-x_{2k},x_{2k-1}) \qquad X'_k=(0,\dots,0,-x'_{2k},x'_{2k-1})$$

Ya sabemos que $X_1,\dots,X_k,X'_1,\dots,X'_k$,son direcciones de curvatura y se verifican igualdades entre entre las curvaturas principales en la forma expresada em Lema III-8.

Si en un entorno de cierto punto todas las curvaturas principales de $X_1,\ldots,X_k$,fuesen nulas deberá ser que $(-x_2,x_1,0,\ldots,0),(x_1,x_2,0,\ldots,0),\ldots,(0,\ldots,0,-x_{2i},x_{2i-1},0,\ldots,0)$, $(0,\ldots,0,x_{2i-1},x_{2i},0,\ldots,0)$ den vectores del espacio tangente. A lo sumo habrá 2q,con $2q\leq n$ y $X_{q+1}=\ldots=X_k=0$,La inmersión de hecho tiene lugar en un espacio euclídeo de dimensión $2k+1-2(k-q)=$ $=2q+1$.Pero $2q+1\leq n+1$,luego si la inmersión no es en codimensión cero,debe ser $2q+1=n+1$,la inmersión es en codimensión uno en cuyo caso ya sabemos que los tensores de Weingarten coinciden.

Si por ejemplo alguna curvatura principal de X_1 no es cero,podemos elegir $\xi_1,\ldots,\xi_{2k+1-n}$,en un entorno,de forma que $A_1(X_1)=\lambda_1X_1=0,A_2(X_1)=\ldots=A_{2k+1-n}(X_1)=0$.Con lo cual $A_1=A_1'$.

Si las curvaturas principales para $X_2,\ldots,X_k$,según $A_2,\ldots$ $,A_{2k+1-n}$,fuesen todas cero,tendríamos que $(-x_2,x_1,0,\ldots,0)$, $(x_1,x_2,0,\ldots,0),\ldots,(0,\ldots,0,x_{2i-1},x_{2i},0,\ldots,0)$,darían un subespacio de dimensión $2q\leq n+1,X_{q+1}=\ldots=X_k=0$.La inmersión de hecho tiene lugar en un espacio euclídeo de dimensión $2k+1-$ $-2(k-q)=2q+1$.Pero $2q+1\leq n+2$,luego si la inmersión no es en codimensión uno,caso ya visto,ha de ser $2q+1=n+2.2q=n+1$ y como $(-x_2,x_1,\ldots)\ldots$,dan en cada punto $T(M)+\xi_1$,resulta de observar que en esta distribución la derivación covariante es interna,la codimensión de hecho es uno y en este caso ya hemos visto que $A_1=A_1'$.

Así pues podemos suponer que X_2 tiene curvatura principal segun ξ_2 no nula y nula para los restantes,de lo que resulta $A_1=A_1'$, $A_2=A_2'$.

Supongamos que fuesen $A_1=A_1',\ldots,A_r=A_r'$.Si todas las curvaturas principales de los X_i,segun $A_{r+1},\ldots,A_{2k+1-n}$ fuesen cero en un entorno,tendríamos $(-x_2,x_1,0,\ldots,0),\ldots,(0,\ldots,0,x_{2i+1},x_{2i},0,\ldots,0)$ dan un subespacio de dimensión $2q\leq n+r$. Como $X_{q+1}=\ldots=X_k=0$,la dimensión del espacio euclídeo ambiente es $2q+1$.Pero $2q+1\leq n+r+1$,luego si la codimensión no es r, debe ser $2q+1=n+r+1$.Como $2q=n+r$,y la derivación covariante en $(-x_2,x_1,0,\ldots,0),\ldots,(0,\ldots,0,x_{2i-1},x_{2i},0,\ldots,0)$ es interna,la codimensión es r y por tanto $A_1=A_1',\ldots,A_{2k+1-n}=A_{2k+1-n}'$.

Si no todas las curvaturas principales de X_i fuesen cero en un entorno podríamos obtener $A_{r+1}=A'_{r+1}$.

Así pues para ambas inmersiones los tensores de Weingarten coinciden y es un simple ejercicio de cálculo ver que $s_{ij}=s_{ij}'$.Por tanto ϕ_1 y ϕ_2 son mutuamente rígidas.

CAPITULO IV. CONSTRUCCION DE INMERSIONES ISOMETRICAS A PARTIR DE LAS ISOMETRIAS INFINITESIMALES DE LA VARIEDAD.

Vamos a probar que en algunos casos sencillos, a partir de las isometrías infinitesimales de la variedad, podemos construir inmersiones isométricas en espácios euclídeos, de forma que dichas isometrías infinitesimales sean restricción de isometrías infinitesimales del espacio euclídeo ambiente.

§1. Construcción de la inmersión para variedades de dimensión dos.

Proposición IV-1.-Sea M variedad Riemanniana de dimensión dos y X isometría infinitesimal de M.

Si p es un punto de M en el cual X no se anula y tampoco se anula la curvatura de Gauss.

Tesis.-Existe U entorno de p y $\phi:U\longrightarrow R^3$, inmersión isométrica, de forma que X es la restricción de una isometría infinitesimal de R^3.

Demostración.-Denominamos $||X||=\lambda$ y vamos a calcular los símbolos de Christoffel en un entorno de p, para la referencia $1/\lambda X,Y$, donde Y es el campo unitario normal a X.

Como Y es unitario y X es una isometría infinitesimal $L_X Y=0.\ [1/\lambda X,Y]=Y(\lambda)/\lambda\cdot 1/\lambda X=\nabla_{1/\lambda X}Y-\nabla_Y 1/\lambda X$. Como $\nabla_{1/\lambda X}Y\perp Y$ y $\nabla_Y 1/\lambda X\perp X$, resulta $\nabla_{1/\lambda X}Y=Y(\lambda)/\lambda\cdot 1/\lambda X,\nabla_Y 1/\lambda X=0$.

Asociando a $1/\lambda X,Y$, los índices 1,2, respectivamente, tenemos: $\Gamma_{12}^{1}=Y(\lambda)/\lambda,\Gamma_{21}^{2}=0$.

La curvatura de Gauss será:

$<\nabla_{1/\lambda X}\nabla_Y 1/\lambda X-\nabla_Y\nabla_{1/\lambda X}1/\lambda X-\nabla_{[1/\lambda X,Y]}1/\lambda X,Y>=<-\nabla_Y(\Gamma_{11}^{2}Y)-\nabla_{Y(\lambda)/\lambda 1/\lambda X}1/\lambda X,$ $,Y>=-Y(\Gamma_{11}^{2})-Y(\lambda)/\lambda\Gamma_{11}^{2}=Y^2(\lambda)/\lambda$.

Vamos a ver que podemos encontrar un tensor (1,1), $A=\begin{pmatrix} a_1 & 0\\ 0 & a_2\end{pmatrix}$ diagonalizando en la base $1/\lambda X,Y$, que nos dé una inmersión isométrica de cierto entorno de p en R^3.

Para ello A deberá cumplir las ecuaciones de Gauss y Codazzi $(\nabla_{1/\lambda X}A)Y=(\nabla_Y A)1/\lambda X,\nabla_{1/\lambda X}(a_2 Y)-A(\nabla_{1/\lambda X}Y)=\nabla_Y(a_1 1/\lambda X)-A(\nabla_Y 1/\lambda X)$, $1/\lambda X(a_2)Y+a_2\Gamma_{12}^{2}1/\lambda X-a_1\Gamma_{12}^{1}1/\lambda X=Y(a_1)1/\lambda X$, de lo que resulta:

$$X(a_2)=0\ ,\ (a_2-a_1)\Gamma_{12}^{1}=Y(a_1).$$

Como $a_1 a_2$ ha de ser la curvatura de Gauss y por tanto $X(a_1 a_2)=0$, de $X(a_2)=0$, deducimos que también deberá cumplirse $X(a_1)=0$. Por tanto vemos que si este tensor A nos da inmersión isométrica ,X será la restricción de una isometría infinitesimal de R^3.

Para que A nos dé una inmersión isométrica necesitamos que a_1 cumpla: $(\chi_G/a_1-a_1)\Gamma_{12}^{1}=Y(a_1)$,ecuación diferencial en a_1 que localmente admite solución. Como $[X,Y]=0$, esta solución estará definida en un entorno de p. Si hacemos $a_1=Y(\lambda)/\lambda$, es inmediato comprobar que es solución.

Como la curvatura de Gauss no es cero en p, seguirá no siéndolo en un entorno, luego a_1 ha de ser distinto de cero y por tanto a_2, queda completamente determinado.

Si en p fuese $Y(\lambda)=0$, no podríamos tomar el valor indicado anteriormante como solución.

Para globalizar el resultado anterior exigiremos que la variedad sea simplemente conexa, para poder definir a partir del tensor (1,1) la inmersión según vimos en el capítulo 0. Que M sea orientable, a fin de tener definido el campo Y unitario perpendicular a X, partiendo de una elección de Y en un punto de M. Que el conjunto de puntos en que X se anula sea vacío. Que el conjunto de puntos en que la curvatura de Gauss se anula tenga interior vacío, para evitar problemas con la determinación de a_2.

<u>Proposición IV-2.- Sea M variedad Riemanniana de dimensión dos, simplemente conexa, orientable, tal que el conjunto de puntos en que se anula la curvatura de Gauss tiene interior vacío.</u>

<u>Si X es una isometría infinitesimal de M, que no se anula en ningun punto</u>

<u>Tesis.-Existe una inmersión isométrica de M en R^3, de forma que X es la restricción de una isometría infinitesimal de</u>

$\underline{R^3}$.

Demostración.- Se ha de ver que podemos definir A en toda la variedad.Como es orientable tendremos definidos en cada punto X e Y y por tanto $Y(\lambda)/\lambda=a_1$.Además el conjunto de puntos en que $Y(\lambda)=0$,tiene interior vacío ya que de lo contrario $\chi_G=0$ en un abierto de M,lo que va contra la hipótesis,por tanto tendremos definidos en M a_1,a_2 y por tanto A,como M es simplemente conexa tendremos la inmersión isométrica.

Vamos a construir ahora inmersiones en R^5,para variedades de dimensión tres que tengan dos isometrías infinitesimalesX,Y, tales que $[X,Y]=0,X\cdot Y=0$;de forma que X eY sean restricción de isometrías infinitesimales del espacio euclídeo ambiente.

§2.Construcción de la inmersión para variedades de dimensión tres.

Proposición IV-3.-Sea M variedad Riemanniana de dimensión tres,X e Y isometrías infinitesimales de M,con $[X,Y]=0.X\cdot Y=0$.

Si p es un punto de M en el que según $Z\perp\{X,Y\}$ tenemos $Z(||X||)=0$ y $Z(||Y||)=0$,y en p X e Y son distintos de cero.

Tesis.-Existe U entorno de p y $\phi:U\longrightarrow R^5$,inmersión isométrica,tal que X e Y son restricción de isometrías infinitesimales de R^5.

Demostración.-Denominamos $\lambda=||X||,\mu=||Y||$,como X e Y son isometrías infinitesimales con corchete de Lie cero,es inmediato ver que $X(\lambda)=Y(\lambda)=X(\mu)=Y(\mu)=0$.

Sea Z campo normal unitario, $Z\perp\{X,Y\}$, definido en V entorno de p. Como X e Y son isometrías infinitesimales $L_X Z=L_Y Z=0$.

Vamos a calcular los símbolos de Christoffel para esta referencia, asignando índices 1,2,3, a $1/\lambda X, 1/\mu Y, Z$, respectivamente.

$[1/\lambda X, Z]=Z(\lambda)/\lambda 1/\lambda X=\nabla_{1/\lambda X}Z-\nabla_Z 1/\lambda X$, de lo que resulta:

$\Gamma_{13}^{1}=Z(\lambda)/\lambda$, $\Gamma_{31}^{3}=0, \Gamma_{13}^{2}=\Gamma_{31}^{2}$. De la misma forma veríamos que

$\Gamma_{23}^{2}=Z(\mu)/\mu$, $\Gamma_{32}^{3}=0$, $\Gamma_{23}^{1}=\Gamma_{32}^{1}$.

$[1/\lambda X, 1/\mu Y]=0=\nabla_{1/\lambda X}1/\mu Y-\nabla_{1/\mu Y}1/\lambda X$, luego $\Gamma_{12}^{1}=\Gamma_{21}^{2}=0, \Gamma_{12}^{3}=\Gamma_{21}^{3}$.

Como $\Gamma_{12}^{3}=-\Gamma_{13}^{2}=-\Gamma_{31}^{2}=\Gamma_{32}^{1}=\Gamma_{23}^{1}=-\Gamma_{21}^{3}$, tenemos $\Gamma_{ij}^{k}=0$, para i,j,k distintos.

Las curvaturas seccionales son: $R_{ijkl}=0$, cuando hay tres subíndices distintos.

$$R_{1212}=\frac{Z(\lambda)Z(\mu)}{\lambda\cdot\mu} , \quad R_{1313}=Z^2(\lambda)/\lambda , \quad R_{2323}=Z^2(\mu)/\mu .$$

Vamos a encontrar en un entorno de p, $U\subset V$, dos tensores (1,1), A_1, A_2 y un tensor (0,1) s_{12}, que cumplan las ecuaciones de Gauss, Codazzi y Ricci, y las expresiones de los tensores A_1, A_2 en la base indicada anteriormente sea:

$$A_1=\begin{pmatrix} a_1 & 0 & 0 \\ 0 & a_2 & 0 \\ 0 & 0 & a_3 \end{pmatrix}, \quad A_2=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & b_2 & 0 \\ 0 & 0 & b_3 \end{pmatrix}$$

Como $a_1 a_2=R_{1212}=Z(\lambda)/\lambda \; Z(\mu)/\mu$. Tomaremos $a_1=Z(\lambda)/\lambda$, $a_2=Z(\mu)/\mu$. Es inmediato ver que $X(a_1)=Y(a_1)=X(a_2)=Y(a_2)=0$.

Las ecuaciones de Codazzi nos dan:

(1) $s_{21}(Y)=0$,(2) $1/\lambda X(b_2)=s_{21}(1/\lambda X)a_2$,(3)$b_3\Gamma_{13}^1=-s_{21}(Z)a_1$, (4)$1/\lambda X(b_3)=s_{21}(1/\lambda X)a_3$,(5)$1/\mu Y(b_3)=s_{21}(1/\mu Y)a_3$,(6)$(b_3-b_2)\Gamma_{23}^2=$ $=Z(b_2)-a_2s_{21}(Z)$,(7)$Y(a_1)=0$,(8)$1/\lambda X(a_2)=s_{12}(1/\lambda X)b_2$, (9)$1/\lambda X(a_3)=s_{12}(1/\lambda X)b_3$,(10)$(a_3-a_1)\Gamma_{13}^1=Z(a_1)$,(11)$1/\mu Y(a_3)=0$, (12)$(a_3-a_2)\Gamma_{23}^2=Z(a_2)-s_{12}(Z)b_2$.

De (8) resulta $s_{12}(X)=0$,de (2) $X(b_2)=0$,de (4) $X(b_3)=0$, de (5) $Y(b_3)=0$,,de (9) $X(a_3)=0$.Como $Y(R_{2323})=0$ y se cumple $Y(a_2)=Y(a_3)=Y(b_3)=0$,deberá ser $Y(b_2)=0$.

De (3) $s_{12}(Z)=b_3$.Es inmediato comprobar que $ds_{12}=0$,luego se cumplirá la ecuación de Ricci.

Hay que determinar a_3,b_2,b_3.Como $a_1a_3=R_{1313}=Z^2(\lambda)/\lambda$, $a_3=Z^2(\lambda)/Z(\lambda)$,y evidentemente $X(a_3)=Y(a_3)=0$.

Nos queda por ver que se cumplen (6),(10) y (12).

(10) $(a_3-a_1)\Gamma_{13}^1=Z(a_1)$,sustituyendo los valores indicados antes vemos que se cumple.

(12)$(a_3-a_2)\Gamma_{23}^2=Z(a_2)-s_{12}(Z)b_2=Z(a_2)-b_3b_2$.Sustituyendo valores y reemplazando b_2b_3 por $R_{2323}-a_2a_3$,vemos que se verifica.

(6) nos sirve para calcular b_2 y b_3.En efecto (6) nos da $(b_3-b_2)\Gamma_{23}^2=Z(b_2)+a_2b_3$,de lo cual $-b_2Z(\mu)/\mu=Z(b_2)$,o sea $Z(b_2)/b_2=$ $=-Z(\mu)/\mu$,tomaremos $b_2=1/\mu$.

$$b_3=R_{2323}-a_2a_3/b_2=\mu\left(\frac{Z^2(\mu)}{\mu}-\frac{Z(\mu)}{\mu}\,\frac{Z^2(\lambda)}{Z(\lambda)}\right).$$

Con ésto hemos determinado A_1,A_2,s_{12},cumpliendo las ecuaciones de Gauss,Codazzi y Ricci,con lo que tenemos la inmersion isométrica.

Para globalizar el resultado anterior vamos a exigir que la variedad sea simplemente conexa y orientable por las razones ya expuestas en §1.Que X e Y no se anulen en ningún punto de M y que el conjunto de pintos en que $Z(\lambda)=0$ ó$Z(\mu)=0$,tenga interior vacío.En estas condiciones podemos enunciar:

Proposición IV-4.-Sea M variedad Riemanniana de dimensión 3, simplemente conexa y orientable,X e Y isometrías infinitesimales con $X\cdot Y=0$, $[X,Y]=0$,que no se anulan en ningún punto de M y el conjunto de puntos en que $Z(||X||)=0$ ó $Z(||Y||)=0$ tiene interior vacío.

Tesis.- Existe $\phi:M \longrightarrow R^5$,inmersión isométrica,de forma que X e Y son restricción de isometrías infinitesimales de R^5.

Demostración.- Análoga a la de la Proposición IV-2.

Alexander,S.(1).Reducibility of Euclidean inmersions of low codimension.Journal of Diff.Geom.,3-1,March 1969, pág.69-83.

Alexander,S.-Maltz,R.(1).Isometric inmersions of Riemannian products in Euclidean space.No publicado.

Allendoerfer,C.B.(1).Rigidity for spaces of class greather than one.Amer.J.Math.61,1939,pág.633-644.

Bishop,R.L.(1).The holonomy algebra of inmersed manifolds of codimension two.Journal of Diff.Geom.2-4,December 1968,pág,347-355.

Blanuša,D.(1)Uber die Einbettung hyperbolischer Raume in Euklidische Raume.Monatshefte fur Math.59,1966.

Chern,S.S.-Kuiper,N.H. (1).Some theorems on the isometric imbedding of compact Riemannian manifolds in Euclidean space.Ann.of Math.56,1952,pág.422-430.

Erbacher,J.(1).Reduction of the codimension of an isometric inmersion,Journal of Diff.Geom.5-3 4,June 1971,pág. 333-341.

Goldstein,R.A.-Ryan,P.J(1)Infinitesimal rigidity of submanifolds, Journal of Diff.Geom.10,1975,pág.49-60.

Kobayashi,S.(1).Holonomy groups of hypersurfaces,Nagoya Math.

J.10,1956,pág.9-14.

Kobayashi,S.-Nomizu,K.(1),Foundations of Diff.Geom.,Vol.I,Interscience Publishers.

Kobayashi,S.-Nomizu,K.(2).Foundations of Diff.Geom.,Vol.II, Interscience Publishers.

Kuiper,N.H.-Chern.S.S.(1).Vease Chern-Kuiper(1).

Lichnerowicz,A.(1).Geometrie des groupes de transformations, Dunod,Paris 1958.

Lynge.W.C.(1).Ideal descomposition of Killing and holomorfic vector fields,Journal of Diff.Geom.8,1973,pág.249-256.

Maltz,R.-Alexander,S.(1).Vease Alexander-Maltz(1).

Moore,J.D.(1).Isometric inmersions of Riemannian products, Journal of Diff,Geom.5-1 2,March 1971,pág.159-168.

Moore,J.D.(2).Isometric inmersions of space forms in space forms, Pacific Journal of Math.,40-1,1972,pág.157-166.

Moore,J.D.(3).Reducibility of isometric inmersions,Proc.of the Amer.Math.Soc.34-1,July 1972,pág.229-232.

Nash,J.(1).C^1-isometric imbeddings,Ann.of Math.60-3,November 1954,pág.383-395.

Nash,J.(2).The imbedding problem for Riemannian manifolds,Ann. of Math.63-1,January 1956,pág.20-63.

Nomizu,K.-Kobayashi,S.(1).Vease Kobayashi-Nomizu(1).

Nomizu,K.-Kobayashi,S.(2).Vease Kobayashi-Nomizu(2).

Sacksteder,R.(1).The rigidity of hypersurfaces,Journal of Math. and Mech.11-6,1962,pág.929-939.

Sasaki,S.(1)A global formulation of the fundamental theorem of the theory of surfaces in three dimensional Euclidean space,Nagoya Math.Journal 13,1958,pág.69-82.

Szczarba,R.H.(1). On existence and rigidity of isometric inmersions,Bull.Amer.Math.Soc. 75,1969,pág.783-787.

Szczarba,R.H.(2).On isometric inmersions of Riemannian manifolds in Euclidean space,Bol.Soc.Brasil Mat.1,1970,pág.31-45.

Tompkins,C.(1). Isometric imbeddings of flat manifolds in Euclidean spaces,Duke Math.Journal 5,1939,pág.58-61.

UNIVERSIDAD DE BARCELONA

Leida esta Memoria el día 20 de Jun[illegible] de 1972 en la Facultad de Matemáticas, ante el siguiente Tribunal:

PRESIDENTE

VOCALES

Fue calificada de Sobresaliente "cum laude"