

Universitat Politècnica de Catalunya

Departament de Física Aplicada

---

**Inestabilidades térmicas e  
hidrodinámicas ligadas a rupturas de  
simetría en cavidades anulares**

---

Memoria presentada por

**David Pino González**

para optar al grado de Doctor en Ciencias.

Directoras:

**Marta Net i Marcé e Isabel Mercader Calvo**

Barcelona, 2001

A  
*mis padres,  
mi hermano y  
mis abuelos*

## Agradecimientos

Por encima de otras personas quiero agradecer a Marta Net y a Isabel Mercader su ayuda y apoyo sin el cual esta tesis no hubiera salido a la luz. La paciencia que han mostrado a lo largo de estos años y especialmente en la lectura atenta de las diferentes versiones que ha tenido el escrito ha sido imprescindible para finalizar el trabajo. Quiero agradecerles también los consejos que me han dado sobre distintos aspectos de la investigación no necesariamente relacionados con este trabajo.

Quisiera dar las gracias también a Juan Sánchez, ya que sin su ayuda una parte importante de este trabajo no habría sido posible. Sus consejos en el cálculo de las soluciones mediante el método de continuación ha sido imprescindibles. Igualmente quiero agradecer a Joana Prat la ayuda en el cálculo de las soluciones en la aproximación de capa plana.

Agradezco a la Generalitat de Catalunya por concederme una beca FI/FIAP con la que se ha realizado la mayor parte de este trabajo.

Quiero agradecer al CEPBA y al CESCA por concederme tiempo de calculo en sus máquinas.

Durante estos años me han acompañado en el día a día del departamento de Física Aplicada un grupo de personas a las que no puedo dejar de mostrar mi afecto y mi cariño. En muchos casos, y ellos lo saben, han sido más que unos compañeros de trabajo. En primer lugar las personas del Grupo de Fluidos, sin embargo quiero tener un recuerdo especial para Cesca, Iolanda, Angélica, Pilar, Arantxa, Alex, Pablo, Oriol, Abdel ... Mención aparte merecen Silvia, Amador, y últimamente Josep, pues además de estar en el grupo anterior, sin su ayuda, esta tesis, probablemente, no existiría . A Ricard y a Enric les agradezco la facilidad con la que me hacian olvidar las penas y lo facil que ha sido conversar con ellos.

Por último, durante estos años ha habido un gran número de personas que, aunque no lo parezca, me han ayudado de manera muy especial. Todos los amigos que han estado a mi lado siempre que los he necesitado. Gracias sobre todo a Valen, Toni, Marc, Toni, Oriol y muchos otros. Y evidentemente quiero agradecer a mi familia, sobre todo a mis padres y a mi hermano el apoyo y la confianza que han tenido siempre en mi. Un recuerdo especial quiero tener con Miriam, María y Pablo pues ellos han vivido prácticamente conmigo todo este tiempo.

# Índice general

<b>1. Introducción</b>	<b>1</b>
1.1. Convección térmica en sistemas en rotación . . . . .	1
1.2. Objetivos . . . . .	6
<b>2. Formulación del problema</b>	<b>9</b>
2.1. Ecuaciones básicas . . . . .	11
2.1.1. Condiciones de contorno y simetrías del problema . . . . .	13
2.1.2. Estado conductivo . . . . .	14
2.1.3. Adimensionalización de las ecuaciones . . . . .	15
2.2. Método de los potenciales de la velocidad . . . . .	16
2.2.1. Aproximación casigeostrófica en función de los potenciales de la velocidad . . . . .	18
2.3. Formulación de las ecuaciones en variables primitivas . . . . .	21
2.3.1. Aproximación casigeostrófica en variables primitivas . . . . .	22
2.4. Métodos espectrales . . . . .	23
<b>3. Estabilidad del estado conductivo</b>	<b>25</b>
3.1. Ondas de Rossby . . . . .	26
3.2. Linealización de las ecuaciones . . . . .	28
3.3. Análisis numérico de las ecuaciones . . . . .	28
3.3.1. Discretización de las ecuaciones . . . . .	28
3.3.2. Representación gráfica. Fase de la solución . . . . .	31
3.4. Resultados . . . . .	32
3.4.1. Problema no disipativo . . . . .	32
3.4.2. Números de Prandtl moderados . . . . .	35
3.4.3. Números de Prandtl bajos . . . . .	45



3.4.4. Números de Prandtl elevados . . . . .	50
3.4.5. Estabilidad del estado conductivo en función del número de Prandtl . . . . .	55
3.5. Discusión . . . . .	58
<b>4. Ondas térmicas de Rossby</b>	<b>61</b>
4.1. Discretización de las ecuaciones . . . . .	62
4.2. Estabilidad lineal de las ondas térmicas de Rossby no lineales . .	64
4.3. Número de Nusselt y energía del flujo medio . . . . .	65
4.4. Resultados . . . . .	66
4.4.1. Ondas térmicas de Rossby al inicio de la convección . . .	67
4.4.2. Marco general . . . . .	70
Soluciones normales . . . . .	71
Soluciones espirales . . . . .	76
4.4.3. Estabilidad de las soluciones primarias . . . . .	86
4.4.4. Bifurcación subarmónica estacionaria para $\eta = 0,3$ . . . .	99
4.5. Discusión . . . . .	101
<b>5. Soluciones secundarias</b>	<b>103</b>
5.1. Método de integración temporal en variables primitivas . . . . .	104
5.1.1. Discretización espacial . . . . .	104
5.2. Resultados. $\sigma = 0,7$ , $\eta = 0,6$ . . . . .	105
5.2.1. Parámetro de Coriolis $\tau = 2800$ . . . . .	105
5.2.2. Parámetro de Coriolis $\tau = 8000$ . . . . .	114
5.2.3. Parámetro de Coriolis $\tau = 7000$ . . . . .	119
5.3. Caso particular. $\sigma = 0,025$ , $\eta = 0,3$ y $\tau = 2000$ . . . . .	124
5.4. Discusión . . . . .	128
<b>6. Conclusiones</b>	<b>131</b>
<b>A. Condiciones de contorno en las tapas</b>	<b>135</b>
<b>B. Aproximación casigeostrófica</b>	<b>137</b>
<b>C. Ecuaciones en variables primitivas</b>	<b>139</b>
<b>D. Discretización temporal de las ecuaciones</b>	<b>143</b>

Bibliografía

147



# Capítulo 1

## Introducción

### 1.1. Convección térmica en sistemas en rotación

En muchos sistemas geofísicos y astrofísicos, la circulación global de los fluidos está dominada por la existencia de altas rotaciones, gradientes moderados de temperatura y, por supuesto, geometría esférica. Las principales dificultades para estudiar estos sistemas radican en el tratamiento de la curvatura del dominio y en la variación de la dirección del vector gravedad con la latitud, ya que implican utilizar simulaciones tridimensionales para resolver el problema. Por esta razón, sólo en la última década se han conseguido avances significativos en el problema.

Los primeros intentos de encontrar la dependencia asintótica del inicio de la convección térmica a rotaciones elevadas en esferas autogravitantes fueron realizados por Roberts (1968) y Busse (1970). En el primero de estos trabajos, el autor buscó un modo *normal* concentrado en el entorno de una superficie cilíndrica y con velocidad axial simétrica respecto al plano ecuatorial. Con el mismo método, Busse (1970) mostró que el modo más inestable debía ser antisimétrico y corrigió el número de Rayleigh crítico. Además, calculó el número de Rayleigh crítico asumiendo que en un fluido Boussinesq sometido a elevadas rotaciones, el movimiento debía estar dominado por la rotación y, consecuentemente, el teorema de Taylor–Proudman prácticamente se satisfacía en cualquier geometría. Por lo tanto, la convección térmica en una esfera fue tratada como perturbaciones bidimensionales del estado básico axisimétrico (viento térmico) de un anillo en rotación con tapas inclinadas, que corta la esfera a una lati-

tud tal que minimiza el número de Rayleigh, esto es, alrededor de los  $63^\circ$  de latitud. Este método perturbativo proporciona diferentes valores críticos que la teoría asintótica general de Roberts (1968) y Busse (1970), pero describe correctamente la dependencia potencial. La estructura radial de las inestabilidades convectivas, que no fue determinada por los anteriores autores, fue parcialmente resuelta por la teoría débilmente no lineal de Soward (1977). A diferencia de lo supuesto por Busse (1970), en este artículo se considera que la escala de la convección en dirección radial es comparable a la escala en dirección azimutal ( $\partial_r \approx \partial_\theta$ ), pudiendo inclinarse los rollos convectivos en el sentido de la rotación. Además se sugirió que el número de Rayleigh crítico encontrado por ambas teorías subestimaba su valor real.

Los resultados obtenidos fueron comparados con experimentos de laboratorio en los que se estudiaba el inicio de la convección térmica en una capa esférica o en un anillo cilíndrico en rotación (Busse & Carrigan, 1974; Busse & Hood, 1982; Carrigan & Busse, 1983; Azouni, Bolton & Busse, 1986, entre otros). En ambas geometrías, y dentro del rango de parámetros explorados, la convección se desarrolla en forma de columnas *normales*, entendiéndose por *normales*, aquellas columnas que prácticamente no se inclinan en el sentido de la rotación. Éstas están alineadas con el eje de rotación y la dinámica se desarrolla en dos dimensiones excepto, debido a la geometría y/o a las condiciones de contorno, en los límites superior e inferior del dominio (ver la figura 1.1). En estos experimentos se induce la convección mediante un calentamiento radial externo y la fuerza centrífuga simula el campo gravitatorio. La pequeña gravedad real existente provoca inicialmente la formación de un estado axisimétrico que pierde estabilidad mediante la ruptura de la simetría de rotación. El experimento del Spacelab (Hart, Glatzmaier & Toomre, 1986), realizado en condiciones de microgravedad, confirmó que la teoría de Busse (1970) al menos proporciona la descripción dinámica correcta de los modos convectivos. En este experimento se utilizó una celda semiesférica en rotación en la que se impusieron gradientes de temperatura radiales y latitudinales. La gravedad radial se modeló mediante un campo eléctrico que producía una fuerza de polarización radial dependiente de la temperatura. Todas estas evidencias experimentales sugieren que el anillo cilíndrico en rotación con tapas inclinadas y gravedad radial es el modelo más simple que incluye las principales características de la convección térmica en sistemas en rotación.

Las simulaciones numéricas tridimensionales realizadas por Zhang (1992, 1994) también han demostrado recientemente algunas discrepancias importantes con los resultados de Roberts (1968) y Busse (1970). La estimación de la ley potencial asintótica del inicio de la convección para números de Taylor elevados confirma la dependencia potencial. Sin embargo, los coeficientes analíticos pro-

porcionados por el modelo asintótico subestiman el número de Rayleigh crítico, mientras que la frecuencia de oscilación de las ondas se sobreestima. Además, para bajos números de Prandtl la estructura de los modos marginales no es una columna *normal*. Si el fluido presenta un número de Prandtl muy pequeño, la solución dominante es inicialmente un modo inercial confinado cerca de la pared exterior, es decir, la estructura de la convección estará formada por vórtices equatoriales atrapados. Por el contrario, para números de Prandtl moderados, las columnas térmicas pueden, por efecto de la curvatura y de la rotación, rotar en espiral desde los  $63^\circ$  de latitud hacia la región ecuatorial, desviándose, también en este caso, de la convección en forma de columnas *normales*.

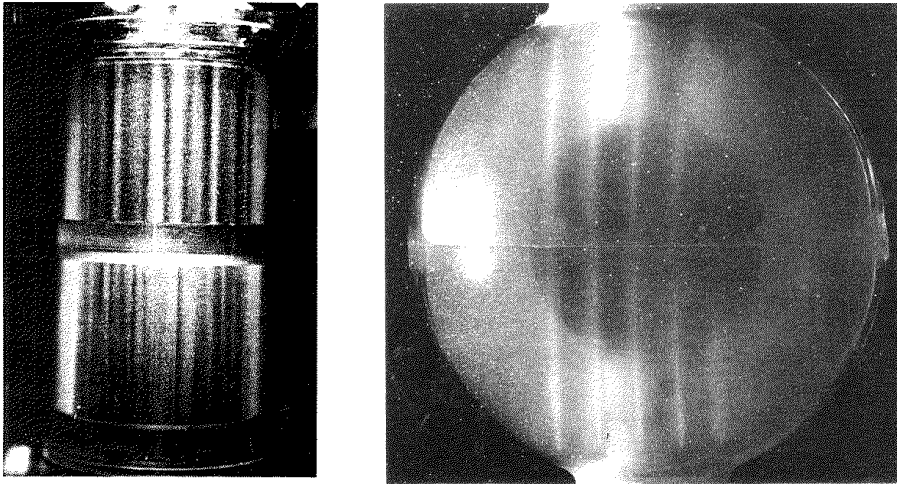


Figura 1.1: Convección inducida por la fuerza centrífuga en un anillo cilíndrico vertical (izquierda) y en una capa esférica autogravitante (derecha) sometidos a un gradiente de temperaturas dirigido hacia el eje de rotación. En el anillo la parte superior muestra la convección en presencia de tapas horizontales, mientras que en la parte inferior las tapas están inclinadas. Para más detalles de cada experimento consultar Busse & Carrigan (1974) y Carrigan & Busse (1983), respectivamente.

Los desacuerdos encontrados en el caso de números de Prandtl moderados fueron explicados por la teoría asintótica de convección térmica en sistemas que giran rápidamente de Yano (1992). En este artículo se utiliza una formulación unificada para sistemas geofísicos autogravitantes y para experimentos de laboratorio dominados por la fuerza centrífuga en el límite de pequeñas inclinaciones de las fronteras respecto al plano ecuatorial. El autor demuestra que las distintas formulaciones son idénticas a primer orden, pero difieren a orden superior en un término que depende del número de Prandtl. La formulación deja al margen los modos confinados en el exterior del dominio y, de este modo, sus resultados

concuerdan muy bien con los de Zhang (1992). Sin embargo, el límite asintótico deja de tener validez para números de Prandtl menores que 0,1.

El modelo del anillo cilíndrico con tapas inclinadas, calentado desde el exterior ha sido utilizado por Busse y colaboradores tanto para el estudio de algunas características dinámicas observadas en las atmósferas de Júpiter y Saturno, como para el análisis de la dinámica de los sistemas en rotación en general (Busse & Or, 1986; Or & Busse, 1987; Schnaubelt & Busse, 1992).

Una propiedad básica de las atmósferas de los planetas mayores es que están limitadas interiormente por la superficie donde se produce la transición entre el hidrógeno molecular y el hidrógeno metálico. Esta superficie actúa como una superficie impenetrable debido al efecto estabilizador de la transición de fase, permitiendo definir un límite inferior de la capa convectiva. Por otra parte, en estos cuerpos, la convección depende del ángulo entre el vector gravedad y el de rotación. En los polos, donde ambos vectores son paralelos, la convección está fuertemente restringida. En este caso, cualquier movimiento vertical viola la condición de Taylor–Proudman y los efectos de fricción son necesarios para salvar la restricción de la rotación. Por el contrario, para latitudes moderadas, las columnas de convección cumplen el teorema de Taylor-Proudman, alineándose paralelamente al eje de rotación. Únicamente las condiciones en los extremos requieren especial consideración. Cuando las fronteras no son paralelas, como ocurre en un planeta o en el anillo cilíndrico con tapas inclinadas, el teorema de Taylor-Proudman no se cumple exactamente, desarrollándose la convección en forma de columnas que precesionan en el sentido de la rotación, son las llamadas *ondas térmicas de Rossby*.

Basándose en estos hechos, Busse (1976) propuso un modelo de convección a escala global para las atmósferas de los planetas mayores. En este modelo se postuló que la estructura de bandas de dichos planetas estaba asociada a los flujos zonales creados por las columnas de convección. Este hecho se confirmó cuando, mediante las observaciones del Voyager (Ingersoll, Beebe, Mitchell, Garneau, Yagi & Müller, 1981), se conocieron los valores de la velocidad media azimutal. Los flujos zonales presentan una simetría en torno al ecuador, predicha por la teoría, para latitudes menores de  $45^\circ$ . Otra predicción del modelo de Busse (1976) era que la estructura de bandas de Saturno debería alcanzar latitudes mayores que en el caso de Júpiter. De nuevo, las observaciones del Voyager confirmaron este punto y demostraron que la correlación norte–sur de los flujos medios se extiende a latitudes mayores debido al menor tamaño del núcleo metálico de Saturno. Estas observaciones también pusieron de manifiesto que Júpiter irradia el doble de la energía que recibe del Sol, lo que, en ausencia de reacciones termonucleares, debe estar relacionado con procesos internos de

convección.

En muchos de los trabajos que utilizan el anillo cilíndrico para estudiar la dinámica de los sistemas en rotación se utiliza la aproximación de capa plana. De esta manera, se pueden desprestigiar los efectos de la curvatura y utilizar coordenadas cartesianas. Cuando las tapas del anillo son horizontales y se consideran condiciones de esfuerzos cortantes nulos en ellas, a partir de rotaciones moderadas, la convección tiene lugar en forma de *columnas térmicas de Taylor* estacionarias y paralelas al eje de rotación. Al considerar que las tapas del anillo están inclinadas, estas columnas dejan de ser estacionarias y viajan en la dirección azimutal con una velocidad angular constante respecto de las paredes laterales. Por lo tanto, este sistema admite soluciones columnares similares a las encontradas en capas esféricas. Sin embargo, con condiciones de contorno simétricas y tapas sin curvatura, la aproximación de capa plana impide la aparición de los modos espirales obtenidos en capas esféricas (Zhang & Busse, 1987; Tilgner, Ardes & Busse, 1997). Para romper la simetría de reflexión respecto del plano medio de la capa y permitir la existencia de modos espirales, Busse & Or (1986) introducen curvatura en las tapas del anillo. Suponiendo condiciones de contorno de esfuerzos cortantes nulos en las paredes, demuestran mediante un análisis numérico, que el modo básico de convección está caracterizado, para las rotaciones estudiadas, una curvatura significativa de las paredes y un amplio rango de números de Prandtl intermedios, por una estructura en forma de doble columna, siendo el flujo medio mayor que el existente en el caso sin curvatura. El análisis de estabilidad de las ondas térmicas simétricas de Rossby en función de la rotación y del número de Prandtl fue realizado por Or & Busse (1987). Los autores analizan los casos de tapas sin y con curvatura. En el primer caso, las soluciones para valores del número de Prandtl del orden de la unidad se inestabilizan mediante una bifurcación estacionaria denominada *mean-flow instability*. Las dos soluciones secundarias que aparecen (una se transforma en la otra mediante una reflexión) presentan un fuerte flujo medio azimutal. Los vórtices convectivos, dependiendo de la solución, están desplazados hacia uno u otro extremo de la capa. Este hecho afecta dramáticamente al transporte de calor, disminuyendo el número de Nusselt a medida que aumenta el número de Rayleigh. Posteriormente, las soluciones sufren una inestabilidad “vacilatoria” (*vacilating instability*) que introduce una segunda frecuencia en el problema. Las soluciones terciarias presentan una variación con el tiempo de la amplitud de la convección. Los autores también encuentran la aparición de una secuencia de doblamiento de periodo al aumentar el número de Rayleigh. Al incorporar la curvatura de las tapas, la inestabilidad que aparece, llamada *double column*, produce una segunda capa de columnas convectivas en la parte exterior del anillo que se desplaza a diferente velocidad.



Schnaubelt & Busse (1992) amplian el análisis numérico al caso de condiciones de contorno de adherencia. En este caso, con tapas sin curvatura se comprobó que para valores moderados del número de Prandtl las ondas térmicas de Rossby se inestabilizaban mediante la inestabilidad de flujo medio. Por el contrario, si el número de Prandtl es elevado la inestabilidad “vacilatoria” es dominante, excepto si se consideran valores excesivamente bajos del parámetro de Coriolis, parámetro que se definirá en el siguiente capítulo. Al considerar tapas curvas, los autores muestran que existe una competencia entre la inestabilidad “vacilatoria” y la convección en forma de doble columna. A medida que aumenta el número de Rayleigh, la dependencia temporal de las soluciones resulta más complicada. La ruta hacia el caos de estas soluciones fue estudiada por Or (1994).

Para valores bajos del número de Prandtl y valores moderados del parámetro de Coriolis el escenario es cualitativamente diferente. Or & Busse (1987); Herrmann & Busse (1997) encuentran que con condiciones de esfuerzos constantes nulos y tapas sin curvatura la primera inestabilidad que presentan las ondas térmicas de Rossby es “vacilatoria”. Al disminuir el valor del número de Prandtl, las ondas térmicas de Rossby dejan de ser estables al inicio de la convección y la región de estabilidad se reduce considerablemente. Si el valor del número de Prandtl se reduce hasta 0,050 (Or & Herrmann, 1995) las ondas térmicas de Rossby son inestables para cualquier valor del número de onda.

## 1.2. Objetivos

En este trabajo se pretende ampliar el conocimiento de la dinámica de los sistemas en rotación mediante el estudio de las soluciones bidimensionales que aparecen en los experimentos de convección térmica en un anillo en rotación con las tapas inclinadas o en algunos sistemas astrofísicos o geofísicos. En dichos experimentos se ha observado que si la rotación es suficientemente elevada, la dinámica del fluido se desarrolla en planos perpendiculares al eje de rotación, tratándose de un problema puramente bidimensional. Para ello se utiliza un modelo similar al de Busse y colaboradores, pero se tiene en cuenta la curvatura real de las paredes, mediante el uso de coordenadas cilíndricas, rompiendo la simetría respecto del plano medio introducida por la aproximación de capa plana. De esta manera, es posible analizar en detalle la dependencia de la dinámica del fluido con la razón de radios del anillo. Este punto es importante ya que, aunque en la última década hayan aparecido trabajos que simulan tridimensionalmente la dinámica de un fluido en una capa esférica, el elevado coste

computacional de estos trabajos hace que no exista un mapa exhaustivo de la dependencia radial de las soluciones con el número de Prandtl. Las condiciones de contorno consideradas son las más cercanas al caso real compatibles con la existencia de un estado conductivo solución de las ecuaciones. Por el mismo motivo, se han considerado pequeñas inclinaciones de las tapas y rotaciones suficientemente elevadas para conservar el término de Coriolis.

La tesis se ha estructurado en seis capítulos. En el capítulo 2 se describe el sistema físico utilizado con las condiciones de contorno escogidas. Se deducen las ecuaciones básicas y se explican las dos formulaciones utilizadas para resolver dichas ecuaciones dependiendo principalmente de la complejidad temporal de la solución.

El capítulo 3 está dedicado al estudio de la estabilidad lineal del estado conductivo. Se ha analizado primero el caso no disipativo para identificar la naturaleza de las diferentes soluciones que pueden aparecer al inicio de la convección. La estabilidad lineal del estado conductivo en el caso disipativo se ha estudiado para tres valores representativos del número de Prandtl y un amplio rango tanto de razones de radios del anillo como de rotaciones.

En el capítulo 4 se describen las soluciones no lineales que bifurcan de los diferentes modos descritos en el capítulo anterior y se estudia su estabilidad. En este capítulo se utilizan técnicas de continuación para encontrar las diferentes soluciones. Mediante un análisis de Floquet se estudia su estabilidad.

El capítulo 5 está dedicado al estudio de las soluciones secundarias que aparecen por la inestabilidad de las soluciones no lineales. Debido a la complejidad de la dependencia temporal de estas soluciones se han calculado integrando temporalmente las ecuaciones. Finalmente, en el capítulo 6 se resume el trabajo realizado.



## Capítulo 2

# Formulación del problema. Tratamiento de las ecuaciones

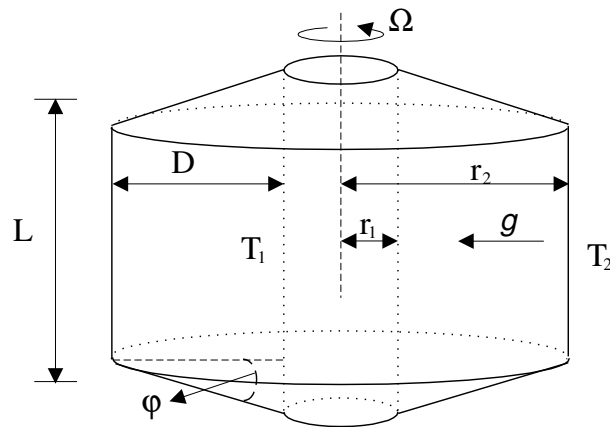


Figura 2.1: Configuración geométrica del anillo, donde se indican los parámetros físicos y geométricos básicos.  $T_1 > T_2$ .

En este capítulo se presenta la formulación de la aproximación casigeostrófica de las ecuaciones de Navier-Stokes (ver también apéndices). La figura 2.1 representa un esquema del recinto en el que se integrarán dichas ecuaciones.

Con el fin de producir una inestabilidad térmica, se supone que el cilindro interior está a una temperatura superior a la del cilindro exterior y que la gravedad está dirigida hacia el eje de rotación del cilindro. De esta manera, el gradiente de temperatura produce una estratificación en el fluido, potencialmente inestable en presencia del campo gravitatorio.

En primer lugar se escriben las ecuaciones en la aproximación de Boussinesq en el sistema de referencia solidario al cilindro. A continuación, se deducen las condiciones de contorno en las paredes laterales y en las tapas, y por su importancia en la dinámica generada, se analizan las simetrías del sistema.

Para una inclinación de las tapas arbitraria no existe estado conductivo. Sin embargo, cuando se supone que las tapas están poco inclinadas respecto de la horizontal ( $\tan \varphi \ll 1$ ), el estado conductivo del anillo con tapa plana puede considerarse una primera aproximación del estado básico del problema que estamos tratando, independientemente de las condiciones cinemáticas de contorno. Por tanto, las ecuaciones también pueden formularse en función de las desviaciones de la temperatura y la velocidad respecto del perfil conductivo.

Una vez adimensionalizadas las ecuaciones, como estamos interesados en el estudio de las soluciones casigeostróficas (dependientes de  $(r, \theta, t)$ ) observadas en el laboratorio, consideramos que a rotaciones muy elevadas las soluciones generales tridimensionales son una perturbación de las soluciones bidimensionales mencionadas anteriormente. No hay que pensar en estas soluciones como soluciones de las ecuaciones de Navier-Stokes bidimensionales o como soluciones del anillo con tapa horizontal, ya que en estos casos el término de Coriolis puede introducirse en el gradiente de presión y el campo de velocidades al inicio de la convección es estacionario independiente de la rotación.

La aproximación casigeostrófica consiste en imponer soluciones del tipo descrito en el párrafo anterior e integrar verticalmente las ecuaciones para eliminar la dependencia vertical, reteniendo sólo los términos de primer orden. Al hacerlo, aparece un parámetro (que llamaremos parámetro de Coriolis) que combina la rotación con la inclinación de las tapas de anillo. Como estamos restringiendo el estudio a rotaciones muy elevadas, el término en el que aparece este parámetro se puede considerar de primer orden y la rotación aparece explícitamente en unas ecuaciones bidimensionales. Este término adicional, que no existe en el problema del anillo con tapas horizontales, rompe la simetría de reflexión respecto de planos verticales que contienen el eje de rotación y genera la precesión azimutal de las ondas térmicas, fundamental para entender los flujos secundarios.

## 2.1. Ecuaciones básicas

La dinámica de un fluido newtoniano en movimiento se puede caracterizar mediante la ecuación de Navier–Stokes, la ecuación de conservación de la masa o ecuación de continuidad y la ecuación de conservación de la energía. Estas tres ecuaciones se escriben, para un fluido de viscosidad dinámica,  $\mu$ , calor específico por unidad de masa a presión constante,  $C_p$ , y conductividad térmica,  $k$ , constantes (independientes del punto), de la siguiente manera

$$\rho \frac{d\mathbf{u}}{dt} = -\nabla p + \mu \nabla^2 \mathbf{u} + \frac{1}{3} \mu \nabla [\nabla \cdot \mathbf{u}] + \mathbf{F}, \quad (2.1a)$$

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \quad (2.1b)$$

$$\frac{dT}{dt} = \frac{\alpha T}{C_p \rho} \frac{dp}{dt} + \frac{1}{C_p \rho} (k \nabla^2 T + \Phi), \quad (2.1c)$$

donde  $\mathbf{u}$  es el campo de velocidades,  $p$  incluye la presión hidrostática y las variaciones de presión debidas al movimiento del fluido,  $\rho$  es la densidad a temperatura  $T$ ,  $\mathbf{F}$  son las fuerzas externas por unidad de volumen que actúan sobre el sistema, en nuestro caso únicamente el término de la gravedad,  $\rho \mathbf{g}$ , y  $\alpha$  el coeficiente de dilatación térmica del fluido. Finalmente,  $\Phi$  representa el calentamiento producido por la potencia disipada por unidad de volumen debido a la viscosidad. Éste se expresa  $\Phi = \tau : e$ , donde  $\tau_{ij} = 2\mu (e_{ij} - \frac{1}{3} e_{ii} \delta_{ij})$ ,  $e_{ij}$  es el tensor velocidad de deformación (ver apéndice A) y  $\tau : e$  indica la doble contracción de los tensores.

En todo el trabajo se estudiará el sistema en la aproximación de Boussinesq. Una explicación detallada de dicha aproximación se puede encontrar en Tritton (1988) y Batchelor (1967) entre otros. En esta aproximación se consideran constantes todas las propiedades del fluido excepto la densidad. Las variaciones de la densidad sólo se tendrán en cuenta en los términos que involucran fuerzas de volumen. Cómo se verá más adelante, las ecuaciones del movimiento se formularán en un sistema de referencia no inercial, y las variaciones de densidad podrán afectar también a las fuerzas de inercia. En la mayoría de los gases y líquidos  $\alpha \approx 10^{-3}, 10^{-4} K^{-1}$ , por tanto si se consideran pequeñas variaciones de la temperatura,  $\alpha \Delta T \ll 1$ , puede suponerse que la densidad depende linealmente de la temperatura de la siguiente manera

$$\rho = \rho_0 (1 - \alpha(T - T_0)) = \rho_0 (1 - \alpha \Delta T) = \rho_0 + \Delta \rho, \quad (2.2)$$

siendo  $\rho_0$  la densidad a una temperatura de referencia arbitraria  $T_0$ . La consecuencia más evidente del desarrollo anterior es que, en este caso, como la

densidad sólo depende de la temperatura a primer orden, la ecuación de continuidad resulta  $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$  y, de este modo, el cuarto término de la ecuación 2.1a es nulo.

Teniendo en cuenta el desarrollo 2.2, se puede expresar el término de la fuerza de gravedad como

$$\mathbf{F} = (\rho_0 + \Delta\rho)\mathbf{g} = -\nabla(\rho_0\tilde{\phi}) + \Delta\rho\mathbf{g},$$

donde se ha escrito el primer sumando como el gradiente de un potencial que sólo depende de  $r$ ,  $\tilde{\phi} = rg + cte$ , que se puede introducir dentro del gradiente de la presión.

Como el fluido está contenido en un recipiente que gira con velocidad  $\boldsymbol{\Omega}$ , el tratamiento de las ecuaciones en el sistema de referencia en rotación ha de incluir los términos correspondientes a la aceleración centrífuga y de Coriolis. Por lo tanto, en este sistema de referencia la derivada material de la velocidad en el sistema fijo resulta

$$\frac{d\mathbf{u}}{dt} = \partial_t \mathbf{u} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = \left( \frac{d\mathbf{u}_R}{dt} \right)_R + \boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}) + 2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{u}_R,$$

donde el subíndice  $R$  indica que las velocidades y la derivada temporal están consideradas en el nuevo sistema de referencia. En la aproximación de Boussinesq cada uno de estos términos tiene un tratamiento diferenciado. El término de la aceleración centrífuga se puede escribir  $(\rho_0 - \rho_0\alpha\Delta T)(\boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r})) = -\rho_0\nabla(\frac{1}{2}\Omega^2 r^2) - \rho_0\alpha\Delta T(\boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}))$ . Definiendo la presión como  $p = p - \frac{1}{2}\rho_0\Omega^2 r^2$ , se puede introducir el primero de los sumandos dentro del gradiente de presión. Por el contrario, la dependencia con la temperatura del segundo hace que no se pueda incluir en el gradiente, debiendo considerarse explícitamente en las ecuaciones. Finalmente, el término de Coriolis  $2\rho\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{u}_R$  no es potencial. Sin embargo, debido a que  $\alpha\Delta T \ll 1$ , la fuerza de Coriolis asociada a las variaciones de la temperatura es despreciable y puede considerarse únicamente el término con densidad constante  $2\rho_0\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{u}_R$ .

La aproximación de Boussinesq también tiene consecuencias en el tratamiento de la ecuación de conservación del calor 2.1c. Tanto el término asociado a las variaciones de presión, como el que tiene en cuenta el calentamiento por disipación de esta ecuación son despreciables frente al término advectivo y no se consideran (Tritton, 1988).

Por lo tanto, las ecuaciones 2.1 que verifica un fluido contenido en el anillo cilíndrico de la figura 2.1, en la aproximación de Boussinesq en el sistema de

referencia solidario al cilindro son

$$\partial_t \mathbf{u} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \nabla^2 \mathbf{u} - \alpha \Delta T \mathbf{g}_e - 2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{u}, \quad (2.3a)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \quad (2.3b)$$

$$\partial_t T + \mathbf{u} \cdot \nabla T = \kappa \nabla^2 T, \quad (2.3c)$$

siendo  $\rho$  la densidad a la temperatura de referencia  $T_0$ ,  $\nu = \mu/\rho$  la viscosidad cinemática y  $\kappa = k/\rho C_p$  la difusividad térmica. También se ha definido una gravedad efectiva constante de la siguiente manera  $\mathbf{g}_e = -g_e \hat{\mathbf{e}}_r$ , con  $g_e = g - \langle |\boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r})| \rangle$  y donde  $\langle \rangle$  representa el promedio a lo largo de la dirección radial. Es importante destacar que en este modelo se supone  $g \gg |\boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r})|$ . En experimentos de laboratorio, en los que la fuerza centrífuga juega el papel de la gravedad radial y el gradiente de temperaturas entre las paredes tiene sentido contrario, la fuerza centrífuga debe ser mucho mayor que la gravedad vertical real para producir el mismo tipo de inestabilidad.

### 2.1.1. Condiciones de contorno y simetrías del problema

Para completar el problema es necesario indicar las condiciones de contorno en las paredes laterales y en las tapas. Si se suponen condiciones de adherencia para la velocidad en las paredes laterales conductoras, las condiciones de contorno se escriben

$$\mathbf{u} = \mathbf{0} \quad \text{en} \quad r = r_1, r_2,$$

$$T(r_1) = T_1, \quad T(r_2) = T_2.$$

Imponiendo esfuerzos cortantes nulos, *stress-free*, y tapas adiabáticas, las condiciones en las tapas inclinadas del anillo cilíndrico resultan

$$\gamma u \pm w = 0, \quad (2.4a)$$

$$(\gamma D_- \pm \partial_z) v = 0, \quad (2.4b)$$

$$(-a \partial_z \pm \partial_r) w + (a \partial_r \pm \partial_z) u = 0, \quad (2.4c)$$

$$\gamma \partial_r T \pm \partial_z T = 0, \quad (2.4d)$$

donde el signo superior corresponde a la tapa de arriba,  $\gamma$  es la tangente del ángulo de inclinación de las tapas respecto a la horizontal  $\varphi$ ,  $a = 2\gamma / (1 - \gamma^2)$  y se ha definido el operador  $D_- = \partial_r - 1/r$ . En el apéndice A se explica en detalle la obtención de estas condiciones de contorno.



El estudio de las simetrías del sistema tiene gran importancia ya que estas afectan tanto a la naturaleza del problema lineal como a las inestabilidades posteriores. En nuestro caso el sistema considerado presenta una simetría de rotación alrededor del eje del anillo. Es decir, el sistema es invariante respecto a rotaciones alrededor de dicho eje, cumpliéndose en coordenadas cilíndricas que si  $(u(r, \theta, z), v(r, \theta, z), w(r, \theta, z), T(r, \theta, z), p(r, \theta, z))$  es solución de las ecuaciones, también lo es  $(u(r, \theta + \theta_0, z), v(r, \theta + \theta_0, z), w(r, \theta + \theta_0, z), T(r, \theta + \theta_0, z), p(r, \theta + \theta_0, z))$ . El grupo de simetría formado por todas las rotaciones de la forma anterior se denomina  $\mathbf{SO}(2)$ . Además, el sistema con las condiciones de contorno anteriores presenta una simetría de reflexión respecto del plano ecuatorial. Se cumple que si  $(u(r, \theta, z), v(r, \theta, z), w(r, \theta, z), T(r, \theta, z), p(r, \theta, z))$  es solución de las ecuaciones, también lo es  $(u(r, \theta, -z), v(r, \theta, -z), -w(r, \theta, -z), T(r, \theta, -z), p(r, \theta, -z))$ . La reflexión respecto al plano ecuatorial genera el grupo de simetría  $\mathbf{Z}_2$ . Por lo tanto, el grupo de simetría del anillo cilíndrico en rotación es  $\mathbf{SO}(2) \times \mathbf{Z}_2$ .

### 2.1.2. Estado conductivo

Con las condiciones de contorno enumeradas anteriormente, no existe una solución con velocidad nula de las ecuaciones 2.3 en coordenadas cilíndricas. Sin embargo, si las tapas están poco inclinadas respecto a la horizontal ( $\gamma \ll 1$ ) e independientemente de las condiciones de contorno de la velocidad en las tapas, existe un estado conductivo de la forma

$$\mathbf{u}_c = 0, \quad T_c(r) = \frac{T_1 - T_2}{\ln \eta} \ln \frac{r}{r_1} + T_1, \quad (2.5)$$

donde se ha definido la razón de radios  $\eta = r_1/r_2$ .

Para estudiar la estabilidad del estado conductivo, se reescribirán las ecuaciones 2.3 considerando la temperatura y la velocidad como desviaciones del perfil conductivo,  $T = T_c + \tilde{T}$  y  $\mathbf{u} = \tilde{\mathbf{u}}$ . De esta manera, se obtiene un sistema de ecuaciones en el que aparecen como variables las fluctuaciones del estado conductivo,  $\tilde{T}$  y  $\tilde{\mathbf{u}}$ . Utilizando las expresiones 2.5, el término gravitatorio se puede escribir en forma de un gradiente de la siguiente manera

$$\alpha \Delta T \mathbf{g}_e = \alpha (T_c + \tilde{T} - T_0) \mathbf{g}_e = \alpha \tilde{T} \mathbf{g}_e + \nabla G,$$

siendo  $G = -\alpha r g_e [T_c - T_0 - (T_1 - T_2)/\ln \eta] + cte$  una función que depende de  $r$  y que se incluye dentro del gradiente de presión. Por último, en la ecuación

2.3c el término que varía es

$$\mathbf{u} \cdot \nabla T = \tilde{\mathbf{u}} \cdot \nabla \tilde{T} + \frac{T_1 - T_2}{r \ln \eta} \tilde{\mathbf{u}} \cdot \hat{\mathbf{e}}_r,$$

y las ecuaciones finales son

$$\partial_t \mathbf{u} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \nabla^2 \mathbf{u} - \alpha g_e T - 2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{u}, \quad (2.6a)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \quad (2.6b)$$

$$\partial_t T + \mathbf{u} \cdot \nabla T = \kappa \nabla^2 T - \frac{T_1 - T_2}{r \ln \eta} \mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{e}}_r, \quad (2.6c)$$

donde se han eliminado las tildes para describir las fluctuaciones de la velocidad y de la temperatura respecto del estado conductivo. Por otra parte, al suponer pequeñas inclinaciones de las tapas, la altura del cilindro  $L$  se puede considerar una constante y se puede definir el parámetro de forma  $\beta = L/D$ , siendo  $D$  la distancia entre los cilindros.

### 2.1.3. Adimensionalización de las ecuaciones

Si se adimensionalizan las ecuaciones 2.6 utilizando como unidad de longitud la separación entre el cilindro interior y el exterior,  $D$ , la escala térmica  $D^2/\kappa$ , como escala temporal y como escala de temperatura la diferencia de temperatura entre las paredes,  $T_1 - T_2$ , las ecuaciones 2.6 se escriben de la siguiente manera

$$\sigma^{-1} (\partial_t \mathbf{u} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}) = -\nabla p + \nabla^2 \mathbf{u} + Ra T \hat{\mathbf{e}}_r - 2\sigma^{-1} \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{u}, \quad (2.7a)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \quad (2.7b)$$

$$\partial_t T + \mathbf{u} \cdot \nabla T = \nabla^2 T - \frac{r^{-1}}{\ln \eta} \mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{e}}_r, \quad (2.7c)$$

en las que se han definido los números adimensionales de Rayleigh y de Prandtl

$$Ra = \frac{\alpha (T_1 - T_2) g_e D^3}{\kappa \nu}, \quad \sigma = \frac{\nu}{\kappa}.$$

Las condiciones de contorno en las paredes laterales se escriben adimensionalizadas de la siguiente manera

$$\mathbf{u} = 0 \quad T = 0 \quad \text{en} \quad r = r_1, r_2, \quad (2.8)$$

no variando las condiciones en las tapas del anillo cilíndrico

De esta manera la dinámica del sistema representada por las ecuaciones 2.7 vendrá determinada por cinco parámetros: el número de Rayleigh,  $Ra$ , el número de Prandtl,  $\sigma$ , la rotación,  $\Omega$ , de la que posteriormente se dará un parámetro apropiado, el parámetro de forma,  $\beta$ , y la relación entre los radios interior y exterior,  $\eta$ .

Se han resuelto numéricamente las ecuaciones 2.7 con las condiciones de contorno 2.4 y 2.8 mediante métodos espectrales. Como se verá más adelante, si se desprecian las capas límites que aparecen en las tapas, el estudio puede ampliarse al caso de condiciones de contorno de adherencia. El análisis de estabilidad lineal del estado conductivo, la obtención de las soluciones no lineales estacionarias en algún sistema de referencia y el estudio de su estabilidad lineal se ha realizado mediante un método de los potenciales de la velocidad. Para analizar la evolución de la solución después de la bifurcación secundaria se ha utilizado una integración temporal de las ecuaciones en variables primitivas.

## 2.2. Método de los potenciales de la velocidad

Debido a la falta de una condición de contorno para la presión, no es trivial el tratamiento del término del gradiente de presión de la ecuación 2.7a. En parte de este trabajo, para resolver este problema, se ha utilizado una formulación en potenciales de la velocidad. Esta formulación elimina dicho término y se basa en la equivalencia entre la ecuación de Navier–Stokes,  $\mathbf{N} = -\nabla p$ , y las cuatro ecuaciones siguientes

$$P_\theta \hat{\mathbf{e}}_\theta \cdot \mathbf{N} = 0, \quad (2.9a)$$

$$P_\theta \hat{\mathbf{e}}_\theta \cdot (\nabla \times \mathbf{N}) = 0, \quad (2.9b)$$

$$(1 - P_\theta) \hat{\mathbf{e}}_z \cdot (\nabla \times \mathbf{N}) = 0, \quad (2.9c)$$

$$(1 - P_\theta) \hat{\mathbf{e}}_z \cdot \left[ \nabla \times (\nabla \times \mathbf{N}) \right] = 0, \quad (2.9d)$$

más la condición adicional en el contorno lateral  $(1 - P_\theta) \hat{\mathbf{e}}_r \cdot (\nabla \times \mathbf{N}) = 0$  (ver Marqués, 1990). En las ecuaciones anteriores  $P_\theta$  es el operador que realiza el promedio azimutal

$$P_\theta G = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} G d\theta.$$

Este método ya ha sido utilizado con éxito en la resolución de otros problemas de convección térmica en rotación. Por ejemplo, Alonso, Net & Knobloch (1995) estudian la estabilidad del estado conductivo de un fluido en el interior de un anillo cilíndrico en rotación, con tapas planas y calentado radialmente usando

una formulación en potenciales de la velocidad. También Goldstein, Knobloch, Mercader & Net (1994) utilizan dicha formulación para estudiar un cilindro en rotación calentado por la parte inferior.

Expresando el campo de velocidades como

$$\mathbf{u} = f\hat{\mathbf{e}}_\theta + \nabla \times (g\hat{\mathbf{e}}_\theta + \psi\hat{\mathbf{e}}_z) + \nabla \times \nabla \times (\phi\hat{\mathbf{e}}_z), \quad (2.10)$$

donde  $g$  y  $f$  no dependen de  $\theta$ ,  $P_\theta\psi = 0$  y  $P_\theta\phi = 0$ , las tres componentes de la velocidad y de la vorticidad,  $\boldsymbol{\omega} = \nabla \times \mathbf{u}$ , resultan

$$\begin{aligned} u &= -\partial_z g + \partial_{rz}^2 \phi + \frac{1}{r} \partial_\theta \psi, & \omega_r &= -\partial_z f + \partial_{rz}^2 \psi - \frac{1}{r} \partial_\theta \nabla^2 \phi, \\ v &= f + \frac{1}{r} \partial_{\theta z}^2 \phi - \partial_r \psi, & \omega_\theta &= -\nabla_-^2 g + \frac{1}{r} \partial_{\theta z}^2 \psi + \partial_r \nabla^2 \phi, \\ w &= D_+ g - \nabla_h^2 \phi, & \omega_z &= -\nabla_h^2 \psi + D_+ f, \end{aligned}$$

donde  $\nabla_-^2 = \nabla^2 - 1/r^2$  con  $\partial_\theta = 0$ ,  $D_+ = \partial_r + 1/r$ , y  $\nabla_h^2 = \nabla^2 - \partial_{zz}^2$  es el operador laplaciano bidimensional.

Utilizando las definiciones anteriores para la velocidad y la vorticidad en función de los potenciales, las ecuaciones 2.9 se escriben

$$(\sigma^{-1} \partial_t - \nabla_-^2) f = 2\sigma^{-1} \Omega \partial_z g - \sigma^{-1} \Upsilon, \quad (2.11a)$$

$$(\sigma^{-1} \partial_t - \nabla_-^2) \nabla_-^2 g = -Ra \partial_z T - 2\sigma^{-1} \Omega \partial_z f + \sigma^{-1} \Sigma, \quad (2.11b)$$

$$(\sigma^{-1} \partial_t - \nabla^2) \nabla_h^2 \psi = \frac{Ra}{r} \partial_\theta T + 2\sigma^{-1} \Omega \partial_z \nabla_h^2 \phi + \sigma^{-1} \Gamma, \quad (2.11c)$$

$$(\sigma^{-1} \partial_t - \nabla^2) \nabla^2 \nabla_h^2 \phi = Ra \partial_z D_+ T - 2\sigma^{-1} \Omega \partial_z \nabla_h^2 \psi - \sigma^{-1} \Xi, \quad (2.11d)$$

donde  $\Upsilon = P_\theta(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{u})_\theta$ ,  $\Sigma = P_\theta[\nabla \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{u})]_\theta$ ,  $\Gamma = (1 - P_\theta)[\nabla \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{u})]_z$  y  $\Xi = (1 - P_\theta)[\nabla \times \nabla \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{u})]_z$  son los términos no lineales de cada ecuación. Las ecuaciones anteriores se han obtenido escribiendo el término advectivo de la forma  $(\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{u} + \frac{1}{2}\nabla|\mathbf{u}|^2$ . De esta manera, al aplicar el operador rotacional en las ecuaciones 2.9b, 2.9c y 2.9d el segundo término es idénticamente nulo y en los términos no lineales sólo aparece el primero. En la ecuación 2.9a se cumple, por la definición de  $P_\theta$ , que  $P_\theta\hat{\mathbf{e}}_\theta\nabla|\mathbf{u}|^2 = 0$ .

Con esta formulación, la ecuación de la temperatura resulta

$$(\partial_t - \nabla^2) T = -\frac{1}{r \ln \eta} \left( \partial_{rz}^2 \phi + \frac{1}{r} \partial_\theta \psi \right) - \Theta, \quad (2.12)$$

donde  $\Theta = \mathbf{u} \cdot \nabla T$  representa los términos no lineales de la ecuación.

Si se utilizan las expresiones de las tres componentes de la velocidad en función de los potenciales, las condiciones de contorno que cierran el problema en las paredes laterales son

$$f = g = \partial_r g = 0, \quad (2.13a)$$

$$\partial_{rz}^2 \phi + r^{-1} \partial_\theta \psi = \partial_r \psi = \nabla_h^2 \phi = 0, \quad (2.13b)$$

y en las tapas

$$-\gamma \partial_z g \pm D_+ g = 0,$$

$$(\gamma D_- \pm \partial_z) f = 0,$$

$$(-a \partial_z \pm \partial_r) D_+ g - (a \partial_r \pm \partial_z) \partial_z g = 0,$$

$$\gamma \left( \partial_{rz}^2 \phi + \frac{1}{r} \partial_\theta \psi \right) \mp \nabla_h^2 \phi = 0, \quad (2.14a)$$

$$(\gamma D_- \pm \partial_z) \left( \frac{1}{r} \partial_{\theta z}^2 \phi - \partial_r \psi \right) = 0, \quad (2.14b)$$

$$-(-a \partial_z \pm \partial_r) \nabla_h^2 \phi + (a \partial_r \pm \partial_z) \left( \partial_{rz}^2 \phi + \frac{1}{r} \partial_\theta \psi \right) = 0. \quad (2.14c)$$

Por su parte, la condición adicional en el contorno lateral en función de los potenciales queda de la siguiente manera

$$r \partial_{rz}^2 \nabla_h^2 \psi - \partial_\theta [\nabla^2 \nabla_h^2 \phi] = 0. \quad (2.15)$$

Para integrar las ecuaciones 2.11 se necesitan cinco condiciones de contorno en las paredes laterales que involucren las funciones  $\phi$  y  $\psi$ . Sin embargo, únicamente tenemos cuatro, las tres condiciones de contorno 2.13b, más la condición de contorno adicional 2.15. La quinta condición necesaria para completar el problema corresponde a la condición de *gauge*. En nuestro caso, se ha escogido  $\phi = 0$  en el contorno lateral.

### 2.2.1. Aproximación casigeostrófica en función de los potenciales de la velocidad

Es conocido (ver Alonso *et al.*, 1995; Greed & Zhang, 1996) que con las condiciones de contorno 2.14, siempre que  $\varphi = 0$  y la rotación sea suficientemente elevada, la convección se establece en forma de columnas de Taylor térmicas, independientes de la coordenada  $z$  y que presentan  $w = 0$ . Si las condiciones de

contorno en las tapas son de adherencia, los efectos viscosos sólo son importantes en una delgada capa de Ekman (Alonso, Net, Mercader & Knobloch, 1999) y el flujo es prácticamente geostrófico. Además los resultados experimentales (Busse & Carrigan, 1974; Azouni *et al.*, 1986) muestran que, con pequeñas inclinaciones de las tapas,  $\gamma \ll 1$ , la estructura básica de convección es una onda azimutal columnar. Por lo tanto, en nuestro caso, buscamos soluciones casigeostróficas de las ecuaciones 2.11 y 2.12. Por este motivo, al igual que en Busse (1986), se desarrollan los potenciales de la velocidad de la forma

$$f = f_0(r, t) + f', \quad \psi = \psi_0(r, \theta, t) + \psi', \quad T = T_0(r, \theta, t) + T', \quad (2.16a)$$

$$g = g', \quad \phi = \phi', \quad (2.16b)$$

donde  $f'$ ,  $\psi'$ ,  $g'$ ,  $\phi'$ , y  $T'$  son de orden  $\gamma$  y dependen de todas las variables.

Por lo tanto, a orden dominante, cada una de las condiciones de contorno 2.13 y 2.14 para los potenciales se puede escribir de la siguiente manera

$$f = g' = \partial_r g' = 0, \quad (2.17a)$$

$$\psi = \partial_r \psi = \nabla_h^2 \phi' = 0 \quad (2.17b)$$

en las paredes laterales. En las tapas las condiciones de contorno resultan

$$\frac{\gamma}{r} \partial_\theta \psi \mp \nabla_h^2 \phi' = 0, \quad (2.17c)$$

$$\partial_{rz}^2 \psi = 0,$$

$$\partial_{\theta z}^2 \psi = 0,$$

cumpléndose idénticamente las dos últimas condiciones. En estas condiciones de contorno se han eliminado los subíndices 0 para describir los términos de primer orden de las funciones  $f$  y  $\psi$ .

Operando de la misma manera, a partir de 2.4d, la condición de contorno para la temperatura en las tapas resulta  $\partial_z T_0 = 0$ , que se cumple idénticamente. Por lo tanto la condición de contorno para la temperatura únicamente es

$$T = 0 \quad \text{en} \quad r = r_1, r_2, \quad (2.18)$$

donde de nuevo se ha eliminado el subíndice 0.

Se sustituyen las expresiones 2.16 en las ecuaciones 2.11 y 2.12, conservando los términos de orden dominante en el límite de elevadas rotaciones y  $\gamma \ll 1$ . Si, de la misma manera que en Or & Busse (1987), se integran las ecuaciones

en la coordenada  $z$  entre los límites  $-\beta/2$  y  $\beta/2$  y se utiliza la condición 2.17c, las ecuaciones 2.11a, 2.11c y 2.12 resultan

$$(\sigma^{-1}\partial_t - \nabla_-^2)f = \frac{P_\theta}{\sigma}[\nabla_h^2\psi \cdot \frac{1}{r}\partial_\theta\psi], \quad (2.19a)$$

$$\begin{aligned} (\sigma^{-1}\partial_t - \nabla_h^2)\nabla_h^2\psi &= \frac{Ra}{r}\partial_\theta T + \tau\frac{1}{r}\partial_\theta\psi + \sigma^{-1}(1 - P_\theta)J(\psi, \nabla_h^2\psi) + \\ &+ \sigma^{-1}\partial_r D_+ f \left( \frac{1}{r}\partial_\theta\psi \right) - \sigma^{-1}f \left( \frac{1}{r}\partial_\theta\nabla_h^2\psi \right), \end{aligned} \quad (2.19b)$$

$$(\partial_t - \nabla_h^2)T = -\frac{1}{r^2 \ln \eta}\partial_\theta\psi + J(\psi, T) - f\left(\frac{1}{r}\partial_\theta T\right). \quad (2.19c)$$

En estas ecuaciones se han suprimido los subíndices 0 para los términos de primer orden y se ha definido el operador jacobiano,  $J$ , como

$$J(\psi, T) = \begin{vmatrix} \partial_r\psi & \frac{1}{r}\partial_\theta\psi \\ \partial_r T & \frac{1}{r}\partial_\theta T \end{vmatrix}.$$

También se ha introducido el parámetro de Coriolis,  $\tau$ , con el que se parametrizará la rotación, de la siguiente manera

$$\tau = \frac{4\Omega_\nu\gamma}{\beta},$$

siendo  $\Omega_\nu = \Omega/\sigma$  la velocidad de rotación en unidades viscosas.

Por el contrario, las ecuaciones para  $g$  y  $\phi$ , 2.11b y 2.11d, no aparecen, ya que todos los términos son al menos de orden  $\gamma$ . En el apéndice B se ofrece una explicación más detallada de la obtención de las ecuaciones 2.19.

Las ecuaciones 2.19 con las condiciones de contorno 2.17 y 2.18 poseen simetría  $\mathbf{SO}(2)$ , esto es, son invariantes bajo rotaciones de la forma

$$R_{\theta_0} : (r, \theta) \rightarrow (r, \theta + \theta_0), \quad (f, \psi, T) \rightarrow (f, \psi, T).$$

Otros autores han analizado el mismo problema para el caso de capa plana (ver Schnaubelt & Busse, 1992). Si se denotan mediante  $y$  y  $x$  las coordenadas azimutal y radial, respectivamente, definidas respecto del plano medio de la capa, el sistema resultante presenta una simetría de traslación en la dirección  $y$ ,  $T_t$ , y una simetría adicional que no presentan las ecuaciones 2.19. Esta simetría es una reflexión de la forma

$$\kappa : (x, y) \rightarrow (-x, y), \quad (f, \psi, T) \rightarrow (f, -\psi, -T).$$

Como consecuencia de la aparición de esta simetría de reflexión, el grupo de simetrías del problema en la aproximación de capa plana es el grupo

$\Gamma = \mathbf{SO}(2) \times \mathbf{Z}_2$ . En este problema, cuando se consideran las perturbaciones de número de onda  $\alpha$ , la bifurcación de Hopf del estado conductivo conduce a soluciones primarias de longitud de onda  $a = 2\pi/\alpha$ . Para los valores considerados del parámetro de Coriolis y para el valor crítico de  $\alpha = \alpha_c$ , estas soluciones periódicas poseen una simetría, que es un elemento  $(\kappa, t_0) \in \Gamma \times \mathbf{S}^1$ , tal que la acción espacial  $\kappa$  es compensada exactamente por el corrimiento de fase  $t_0 = \mathcal{T}/2$ , donde  $\mathcal{T}$  es el periodo de las soluciones. Por lo tanto, las ondas viajeras son invariantes bajo la operación  $T_{a/2}\kappa$ , llamada *shift-reflect*. Estas soluciones han sido llamadas ondas térmicas simétricas de Rossby en los trabajos de Busse y colaboradores, (por ejemplo Or & Busse, 1987; Schnaubelt & Busse, 1992).

Es importante destacar que en las ecuaciones 2.19, debido a la descomposición de la velocidad en función de los potenciales utilizada 2.10, se escribe una ecuación para el promedio azimutal de la velocidad azimutal. De esta manera, únicamente son necesarias dos condiciones de contorno para  $f$ . Si, de la misma manera que otros autores han hecho, la descomposición de la velocidad no tratara de forma independiente dicho promedio, es decir, fuera de la forma  $\mathbf{u} = \nabla \times (\psi(r, \theta, t)\hat{\mathbf{e}}_z) + \tilde{\mathbf{u}}(r, \theta, z, t)$ , sería necesario introducir una condición de contorno adicional para asegurar la periodicidad azimutal del gradiente de presión. Este problema, discutido en profundidad en Marqués (1990), no ha sido tratado adecuadamente en los trabajos de algunos autores. Por ejemplo, en el caso del modelo que nos ocupa en la aproximación de capa plana y con condiciones de contorno rígidas la condición de contorno correcta es la utilizada en el trabajo de Herrmann & Busse (1998).

### 2.3. Formulación de las ecuaciones en variables primitivas

Cuando el número de Rayleigh se hace suficientemente elevado, la aparición de sucesivas bifurcaciones provoca que la dependencia temporal de las soluciones sea complicada, por lo que es necesario utilizar un código de evolución temporal. En este trabajo se ha realizado la integración temporal de las ecuaciones no lineales escritas en función de las variables originales,  $\mathbf{u}$ ,  $p$ . Para integrar las ecuaciones se ha utilizado un método semiimplícito de segundo orden con un esquema de paso fraccionario. En concreto se han tratado implícitamente los términos lineales y explícitamente los términos no lineales (Karniadakis, Israeli & Orszag, 1991). El método semiimplícito presenta una mayor región de estabilidad que los esquemas de tipo Adams, pues sus propiedades de estabilidad prácticamente no varían al aumentar la resolución de la integración. Por otra



parte, al utilizar este tipo de esquema en el marco de los métodos espectrales, la elevada resolución espacial que éstos presentan permite reducir el error casi exclusivamente al que proviene de la discretización temporal.

Uno de los problemas que presentan los métodos de paso fraccionario proviene del tratamiento del término de la presión en la ecuación de Navier–Stokes. Es evidente que la presión satisface una ecuación de Poisson que proviene de la condición de incompresibilidad, pero no es evidente la condición de contorno que debe satisfacer. La forma específica de esta condición juega un papel importante en la aparición de capas límite numéricas erróneas. La condición de contorno utilizada es la propuesta por Karniadakis *et al.* (1991) que minimiza estos errores numéricos.

De la misma manera que en el caso de la formulación en potenciales de la velocidad, previamente a la aplicación del método de integración, se escribirán las ecuaciones en la aproximación casigeostrófica.

### 2.3.1. Aproximación casigeostrófica en variables primitivas

Al igual que en el caso de la formulación en potenciales de la velocidad, se supone que las tres componentes de la velocidad, la presión y la temperatura son desviaciones de las soluciones independientes de la coordenada en la dirección del eje de rotación. Por lo tanto, se pueden escribir las variables de la siguiente manera

$$u = u_0(r, \theta, t) + u', \quad v = v_0(r, \theta, t) + v', \quad w = w', \quad (2.20a)$$

$$p = p_0(r, \theta, t) + p', \quad T = T_0(r, \theta, t) + T', \quad (2.20b)$$

donde  $u'$ ,  $v'$ ,  $w'$ ,  $p'$  y  $T'$  son de orden  $\gamma$  y dependen de todas las variables del problema. Se sustituyen estas expresiones en las ecuaciones 2.7a expresadas en componentes y 2.7c, manteniendo los términos de orden dominante en el límite de elevadas rotaciones y  $\gamma \ll 1$ . Si, mediante 2.4a y 2.7b, se integran dichas ecuaciones en la dirección del vector de rotación entre  $-\beta/2$  y  $\beta/2$ , resulta (ver el apéndice C para una explicación detallada)

$$\begin{aligned} \partial_t u = -\partial_r p + \sigma [\nabla^2 \mathbf{u}]_r + \sigma RaT + \tau \sigma r \int_{\theta} u d\theta + (D_+ v) v \\ - \left( \frac{1}{r} \partial_{\theta} u \right) v, \end{aligned} \quad (2.21a)$$

para la componente radial de la velocidad. Para la componente azimutal la ecuación es

$$\partial_t v = -\frac{1}{r} \partial_\theta p + \sigma [\nabla^2 \mathbf{u}]_\theta - (D_+ v) u + \left( \frac{1}{r} \partial_\theta u \right) u. \quad (2.21b)$$

La ecuación de la componente vertical

$$0 = -\partial_z p + (\partial_z v) v + (\partial_z u) u,$$

se satisface idénticamente pues  $p$ ,  $u$  y  $v$  son independientes de  $z$ . Finalmente, la ecuación para la temperatura se escribe como

$$\partial_t T = \nabla^2 T - \frac{1}{r \ln \eta} u - \left( u \partial_r T + \frac{v}{r} \partial_\theta T \right). \quad (2.21c)$$

En todas estas ecuaciones se ha eliminado el subíndice 0 de la solución independiente de la coordenada axial. En definitiva, las ecuaciones que deben integrarse son 2.21, con las condiciones de contorno 2.8 en el contorno lateral. El método de integración temporal se describe en el apéndice D.

## 2.4. Métodos espectrales

Para resolver numéricamente las ecuaciones, tanto en función de los potenciales como en variables primitivas, se han utilizado técnicas espectrales. Estos métodos representan la solución del problema como una serie truncada de funciones de prueba conocidas de las variables espaciales independientes y utilizan unas funciones test para minimizar el residuo. Dependiendo del tipo de funciones test utilizadas se obtienen diferentes esquemas de resolución. En el esquema de Galerkin las funciones prueba coinciden con las funciones test y satisfacen las condiciones de contorno. La ecuación diferencial se fuerza imponiendo que la integral del residuo por cada función test sea cero. En el método Tau las funciones de prueba no satisfacen individualmente las condiciones de contorno y es necesario considerar nuevas ecuaciones para asegurar que el desarrollo satisface las condiciones de contorno. Finalmente, en el método de colocación las funciones test son delta de Dirac trasladadas, centradas en unos puntos especiales llamados puntos de colocación. Este método impone que la ecuación diferencial se satisfaga exactamente en los puntos de colocación. Una aplicación de los distintos esquemas al caso de la dinámica de fluidos se explica en Canuto, Hussaini, Quarteroni & Zang (1988).

En este trabajo, se ha utilizado un método de Galerkin en la dirección azimutal mediante desarrollos de Fourier. En la dirección radial se ha usado un

esquema pseudoespectral de colocación, en el que se han introducido polinomios de Tchebyshev,  $\mathcal{T}_l(x) = \cos(l \arccos(x))$ ,  $x \in (-1, 1)$  para desarrollar las funciones y los puntos de colocación considerados han sido los de Gauss–Lobatto,  $x_i = \cos(\pi i/L)$ ,  $i = 0, \dots, L$ . Por tanto, el valor de las funciones en los puntos de colocación resulta una función trigonométrica,  $\mathcal{T}_l(x_i) = \cos(\frac{l\pi i}{L})$ , lo que permite utilizar un algoritmo de transformada rápida de Fourier.

Al utilizar los polinomios de Tchebyshev, definidos en el intervalo  $x \in (-1, 1)$ , debe realizarse el cambio de variable en la coordenada radial

$$r = \frac{x + \zeta}{2}, \quad \zeta = \frac{1 + \eta}{1 - \eta}.$$

## Capítulo 3

# Estabilidad del estado conductivo. Soluciones lineales

A diferencia de lo que ocurre en el caso del anillo cilíndrico en rotación con tapas planas y condiciones de contorno libres, que admite como solución una estructura estacionaria en forma de columnas paralelas al eje de rotación, en nuestro caso, la inclinación de las tapas provoca que no se cumpla exactamente el teorema de Taylor–Proudman. Como consecuencia, la solución básica es una estructura columnar que, sin embargo, precesiona en la dirección azimutal formando las llamadas *ondas térmicas de Rossby*.

En este capítulo se analiza numéricamente la estabilidad del estado conductivo cuando se considera un amplio rango de números de Prandtl, razones de radios y parámetros de Coriolis. El capítulo comienza con una explicación de las características de las ondas de Rossby, de gran importancia en oceanografía y meteorología, en la configuración más simple en las que aparecen. A continuación, una vez linealizadas las ecuaciones en torno al estado conductivo, se describe el método espectral utilizado para la discretización espacial. Por último, se hace una descripción exhaustiva de las curvas de estabilidad marginal del estado conductivo y de todos los tipos de modos encontrados dependiendo de los parámetros considerados y se comparan los resultados con estudios previos.

### 3.1. Ondas de Rossby

Si la dinámica del fluido está dominada completamente por la rotación, existe un balance exacto entre la fuerza de Coriolis y la fuerza provocada por la presión, y el flujo es estacionario. Como consecuencia el movimiento es independiente de la coordenada en la dirección del eje de rotación, por lo que todas las partículas situadas en una misma vertical presentan el mismo tipo de movimiento. Este resultado se conoce como el teorema de Taylor–Proudman.

Si se considera un canal con paredes aproximadamente perpendiculares al eje de rotación, pero no exactamente paralelas entre sí (ver la figura 3.1), el teorema de Taylor–Proudman no se cumple exactamente y una partícula desplazada a una posición con diferente altura, presenta una tendencia a sobrepasar su posición anterior, pudiéndose producir una oscilación. Una explicación detallada de este fenómeno puede encontrarse en Tritton (1988) y Pedlosky (1987).

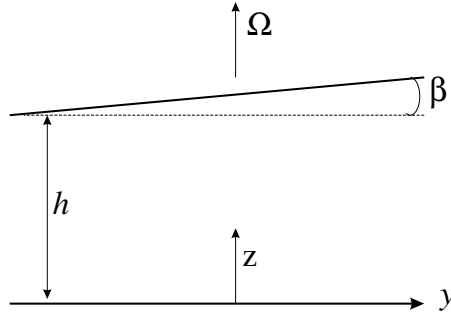


Figura 3.1: Configuración geométrica de un canal en el que se producen ondas de Rossby.

Este movimiento oscilatorio hace que se deba tener en cuenta el término asociado a las variaciones de velocidad con el tiempo en la ecuación de Navier–Stokes. Si se consideran únicamente movimientos de pequeña amplitud y se desprecian los efectos viscosos y no lineales, las ecuaciones que rigen el movimiento del fluido en el canal son

$$\partial_t \mathbf{u} + 2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{u} = -\frac{1}{\rho} \nabla p, \quad \nabla \cdot \mathbf{u} = 0.$$

Según la figura 3.1, en la que la altura,  $h$ , varía uniformemente en la coordenada  $y$ , se cumple

$$\partial_x h = 0, \quad \frac{dh}{dy} = \tan \beta = \gamma,$$

donde  $\gamma$  es una constante pequeña. Si se supone que las ondas mantienen las propiedades del flujo geostrófico en las dos direcciones horizontales, es decir,

$$\partial_z u = \partial_z v = 0,$$

y se tiene en cuenta la ecuación de continuidad,

$$\partial_x u + \partial_y v + \partial_z w = 0,$$

se cumple que  $\partial_z w$  es una constante con respecto a  $z$  y como en  $z = 0$  la velocidad vertical es nula, entonces  $\partial_z w = w_h/h$ , donde  $w_h$  es la velocidad en  $z = h$ . Aplicando la condición de contorno  $\mathbf{v} \cdot \hat{\mathbf{n}} = 0$  en esta pared, se obtiene

$$w_h = \gamma v_h = \gamma v.$$

Por lo tanto, según lo anterior, la ecuación de continuidad resulta

$$\partial_x u + \partial_y v + \frac{\gamma v}{h} = 0.$$

Si se realiza la diferenciación cruzada de las dos componentes de la ecuación del movimiento, suponiendo  $u$  y  $v$  independientes de la coordenada  $y$  y utilizando la anterior ecuación se obtiene

$$\partial_{xt}^2 v - \frac{2\Omega\gamma}{h} v = 0,$$

que es la ecuación de una onda. Si las variaciones de altura son lo suficientemente pequeñas para considerar  $2\Omega\gamma/h$  constante, la ecuación es lineal y admite una solución del tipo

$$v = v_0 \exp(i(\omega t - kx)),$$

con número de onda  $k = 2\Omega\gamma/h\omega$ . Las velocidades de fase y de grupo son respectivamente

$$c_p = \frac{h\omega^2}{2\Omega\gamma}, \quad c_g = -\frac{h\omega^2}{2\Omega\gamma}.$$

Estas ondas tiene las siguientes propiedades:

1. Son ondas lineales siempre que la condición de pequeñas amplitudes sea válida.
2. Son ondas dispersivas.
3. Las dos componentes de la velocidad están desfasadas  $\pi/2$ .
4. Son ondas que se propagan dejando a la derecha las zonas de menor altura.

5. La velocidad de fase y la velocidad de grupo tienen signo contrario.

Las ondas de Rossby tienen gran importancia ya que son un fenómeno habitual en la atmósfera y en el océano. De hecho, hay una equivalencia dinámica exacta entre el efecto producido por la variación de la profundidad y el producido por la variación de la velocidad de rotación local debido a la latitud.

## 3.2. Linealización de las ecuaciones

Como se ha comentado anteriormente, en este capítulo se estudiará, mediante un método de potenciales de la velocidad, la estabilidad lineal del estado conductivo. Si se desprecian los términos no lineales de las ecuaciones 2.19, se obtienen las ecuaciones linealizadas en torno del estado conductivo

$$(\sigma^{-1}\partial_t - \nabla_-^2) f = 0, \quad (3.1a)$$

$$(\sigma^{-1}\partial_t - \nabla^2) \nabla_h^2 \psi = \frac{Ra}{r} \partial_\theta T + \tau \frac{1}{r} \partial_\theta \psi, \quad (3.1b)$$

$$(\partial_t - \nabla^2) T = -\frac{1}{r^2 \ln \eta} \partial_\theta \psi, \quad (3.1c)$$

siendo la ecuación para el modo cero de la temperatura

$$(\partial_t - \nabla^2) T = 0. \quad (3.1d)$$

Las ecuaciones 3.1a y 3.1d son ecuaciones de difusión. Estas ecuaciones no pueden desestabilizar el estado conductivo dando lugar a una solución independiente de  $\theta$  y  $z$ . Por lo tanto, deben resolverse las ecuaciones 3.1b y 3.1c, que corresponden al problema no-axisimétrico, en el que ni la temperatura,  $T$ , ni la función de corriente,  $\psi$ , tienen modo cero azimutal. Las condiciones de contorno que deben satisfacer estas variables son

$$\psi = \partial_r \psi = T = 0 \quad \text{en} \quad r = r_1, r_2. \quad (3.2)$$

## 3.3. Análisis numérico de las ecuaciones

### 3.3.1. Discretización de las ecuaciones

Antes de sustituir los desarrollos para la función de corriente y para la temperatura en las ecuaciones 3.1, se definirá la base de funciones utilizadas en cada

coordenada. En la dirección azimutal, debido al desarrollo de Fourier, la base considerada será  $\{e^{in\theta}\}_{n=-N \div N}$ . En la dirección radial, las siguientes combinaciones de polinomios de Tchebyshev

$$\psi_n(x_i) = \sum_{l=0}^L h_l \mathcal{T}_l(x_i), \quad T_n(x_i) = \sum_{l=0}^L p_l \mathcal{T}_l(x_i),$$

deben satisfacer las condiciones de contorno. Estas condiciones de contorno, 3.2, se escriben

$$T_n(\pm 1) = \sum_{l=0}^L p_l (\pm 1)^l = 0,$$

$$\psi_n(\pm 1) = \sum_{l=0}^L h_l (\pm 1)^l = 0, \quad \partial_x \psi_n(\pm 1) = \sum_{l=0}^L h_l l^2 (\pm 1)^{l+1} = 0.$$

La función de corriente debe satisfacer cuatro condiciones de contorno, lo que permite escribir cuatro coeficientes del desarrollo,  $h_0$ ,  $h_1$ ,  $h_2$  y  $h_3$  en función de los restantes. Por lo tanto, como  $L$  es fijo, se puede encontrar una base de funciones formada por  $(L - 3)$  elementos que verifique el contorno,  $\{h^k(x)\}_{k=4 \div L}$ . Imponiendo que el coeficiente del polinomio de Tchebyshev de orden  $k$  valga 1 y los demás se anulen,  $h_l^k = \delta_{l,k}$ ,  $k, l = 4 \div L$  se obtiene

$$h^k(x) = \begin{cases} \left(\frac{k^2}{4} - 1\right) \mathcal{T}_0(x) - \frac{k^2}{4} \mathcal{T}_2(x) + \mathcal{T}_k(x) & k \geq 4 \text{ par} \\ \frac{1}{8} (k^2 - 9) \mathcal{T}_1(x) - \frac{1}{8} (k^2 - 1) \mathcal{T}_3(x) + \mathcal{T}_k(x) & k > 4 \text{ impar.} \end{cases}$$

Procediendo de la misma manera se obtiene la base de funciones para desarrollar la temperatura. En este caso existen dos condiciones de contorno que permiten escribir los dos primeros coeficientes del desarrollo en función de los demás. La base de funciones,  $\{p^j(x)\}_{j=2 \div L}$  estará formada por  $L - 1$  elementos,

$$p^j(x) = \begin{cases} -\mathcal{T}_0(x) + \mathcal{T}_j(x) & j \geq 2 \text{ par} \\ -\mathcal{T}_1(x) + \mathcal{T}_j(x) & j > 2 \text{ impar.} \end{cases}$$

Ahora ya se pueden desarrollar las perturbaciones como una serie truncada de las funciones base de la forma

$$\psi(x, \theta, t) = e^{\lambda t} \sum_{n=-N}^N \psi_n(x) e^{in\theta} = e^{\lambda t} \sum_{n=-N}^N \sum_{m=4}^L \hat{\psi}_{m,n} h^m(x) e^{in\theta}, \quad (3.3a)$$

$$T(x, \theta, t) = e^{\lambda t} \sum_{n=-N}^N T_n(x) e^{in\theta} = e^{\lambda t} \sum_{n=-N}^N \sum_{l=2}^L \hat{T}_{l,n} p^l(x) e^{in\theta}. \quad (3.3b)$$



De esta manera, el análisis de estabilidad se desacopla para cada modo azimutal  $n$ . Si se sustituyen los desarrollos anteriores para la temperatura y para la función de corriente en las ecuaciones 3.1 se obtiene

$$\lambda\sigma^{-1}\nabla_h^2\psi_n(x) = \nabla_h^4\psi_n(x) + \tau\frac{2in}{x+\zeta}\psi_n(x) + \frac{2in}{x+\zeta}RaT_n(x), \quad (3.4a)$$

$$\lambda T_n(x) = \nabla_h^2 T_n(x) - \frac{4in}{(x+\zeta)^2 \ln \eta} \psi_n(x), \quad (3.4b)$$

donde el operador laplaciano en las nuevas coordenadas se expresa de la siguiente manera

$$\nabla_h^2 = 4 \left[ \partial_{xx}^2 + \frac{1}{x+\zeta} \partial_x - \frac{n^2}{(x+\zeta)^2} \right].$$

Las ecuaciones 3.4 deben cumplirse en los puntos de Gauss-Lobatto. Como al considerar los coeficientes de los desarrollos 3.3,  $\hat{T}_{l,n}$  y  $\hat{\psi}_{m,n}$ , el número de incógnitas para cada modo  $n$  es  $(L-1) + (L-3)$ , sólo es necesario escribir la ecuación de  $T$  en  $(L-1)$  puntos y la de  $\psi$  en  $(L-3)$  puntos. Específicamente estos puntos para la temperatura son  $x_l$ , con  $l = 1 \div L-1$ ; mientras que para la función de corriente  $x_m$ , con  $m = 2 \div L-2$ . De esta manera, el problema de valores propios para cada número de onda azimutal se puede escribir de forma esquemática

$$\lambda B_n x_n = A_n x_n,$$

donde  $B_n$  es una matriz real de dimensión  $(2L-4) \cdot (2L-4)$ ,  $A_n$  es una matriz compleja de igual dimensión y  $x_n = (\hat{\psi}_{m,n}, \hat{T}_{l,n})$  es el vector de incógnitas. El problema se ha solucionado calculando los operadores lineales, invirtiendo la matriz B y calculando los valores propios de la matriz  $B^{-1}A$  utilizando la librería LAPACK.

Fijando el número de Prandtl, el parámetro de Coriolis y la razón de radios, la curva de estabilidad marginal para cada número de onda azimutal viene dada por la solución del problema de valores propios con  $\Re(\lambda) = 0$  que minimiza el número de Rayleigh. Por otra parte  $\Im(\lambda) = \omega$  da la frecuencia de precesión del modo correspondiente al valor propio con parte real nula que minimiza el número de Rayleigh. Por lo tanto, la onda se propaga con una velocidad angular  $-\omega/n$ . Como se ha considerado  $\Omega > 0$ , si  $\omega < 0$  la onda se desplaza en el sentido de la rotación y en sentido contrario si  $\omega > 0$ .

Para calcular las curvas de estabilidad se ha supuesto crítico el valor con  $|\Re(\lambda)| \leq 10^{-7}$ . A partir de  $L = 24$  los valores del número de Rayleigh y de la frecuencia no varían significativamente. Para asegurar la convergencia para cualquier valor de los parámetros, en este capítulo, los resultados se han calculado con 32 modos radiales.

Se ha analizado la estabilidad del estado conductivo para tres fluidos diferentes de números de Prandtl  $\sigma = 0,7, 0,025$  y  $7$ , valores representativos de números de Prandtl moderados, bajos y elevados, respectivamente, tanto en función de la razón de radios ( $\eta \in [0,1,0,9]$ ), como en función de la rotación representada por el parámetro de Coriolis ( $\tau \in [1000,11000]$ ). También se ha estudiado, para  $\eta = 0,5$ , la estabilidad del estado conductivo en función del número de Prandtl.

### 3.3.2. Representación gráfica. Fase de la solución

Para cada uno de los casos que se presentan en este capítulo, se representan, para cada modo azimutal, la curva de estabilidad marginal y las correspondientes frecuencias viscosas,  $\omega/\sigma$ , asociadas al número Rayleigh crítico. A partir de ahora, en este capítulo la frecuencia viscosa se representará por  $\omega$ . Una vez obtenidas estas curvas, se presentan, para algunos casos representativos, las isolíneas de la perturbación de la temperatura y de la función de corriente. La fase,  $\varphi(x)$ , y la amplitud de la función de corriente,  $B(x)$ , solución del problema de valores propios se utilizan como medida de la asimetría de la solución respecto de planos verticales y del confinamiento de los modos, respectivamente.

La solución del problema de valores propios planteado en la sección anterior es, para cada número de onda  $n$ , de la forma

$$\psi(x, \theta, t) = A(x)e^{i(n\theta + \omega t)} + \bar{A}(x)e^{-i(n\theta + \omega t)} = B(x) \sin [n\theta + \omega t + \varphi(x)]$$

y análogamente para la temperatura. Siendo  $\bar{A}$  el complejo conjugado de  $A = A_r + iA_i$ . Variando  $\theta$  entre 0 y 360 se obtienen las isolíneas de la perturbación de la temperatura y de la función de corriente para cada modo  $n$ .

La fase,  $\varphi(x)$ , viene dada por  $\tan \varphi = A_i/A_r$  y está definida salvo una constante. Por lo tanto, se puede escribir la fase de cada solución en función de  $x$  con un origen común. El aspecto de esta fase nos indicará cuánto se separa la solución de la simetría respecto de planos verticales. Por ejemplo, dicha fase es constante y la función de corriente y la temperatura están desfasadas  $\pi/2$  en las columnas de Taylor térmicas. En el anillo cilíndrico tratado en la aproximación de capa plana, con condiciones de esfuerzos cortantes nulos para la velocidad la fase es constante pero el desfase entre función de corriente y temperatura no es  $\pi/2$ . Por último, en las llamadas ondas térmicas simétricas de Rossby (Busse, 1986) la fase es simétrica. La amplitud,  $B(x) = (A_r(x)^2 + A_i(x)^2)^{1/2}$ , está relacionada con el confinamiento de la convección y la estructura radial de la solución. Si el polinomio radial dominante de la temperatura presenta

$l = 2$ , la amplitud de la función propia, tanto de la temperatura como de la función de corriente, tiene un único máximo; si es  $l = 3$  aparecen dos máximos y así sucesivamente.

## 3.4. Resultados

### 3.4.1. Problema no disipativo

Para identificar la naturaleza de las diferentes soluciones que pueden aparecer al inicio de la convección se estudiará primero el problema no disipativo. Si se suponen despreciables los efectos disipativos, en las ecuaciones 3.4 no se deben considerar los términos que involucran  $\nabla_h^4 \psi$  y  $\nabla_h^2 T$ . Solucionando el problema de valores propios, se puede concluir que existe un valor del número de Rayleigh por debajo del cual existen dos familias de ondas estables con diferente frecuencia. En la figura 3.2, en la que se observa claramente este hecho, se representan las curvas de estabilidad marginal para el caso  $\sigma = 0,7$ ,  $\tau = 5000$ ,  $\eta = 0,5$  y  $n = 16$  (la variación de estos parámetros sólo provoca cambios cuantitativos en la gráfica). En esta figura, al igual que en el resto del capítulo,  $l$  hace referencia al índice del polinomio radial dominante de la temperatura. Como se puede observar en la figura, las frecuencias son negativas, es decir, los modos precesionan en el sentido de la rotación. Por lo tanto, dejan a la derecha la zona del anillo de menor altura y cumplen una de las propiedades de las ondas de Rossby no térmicas.

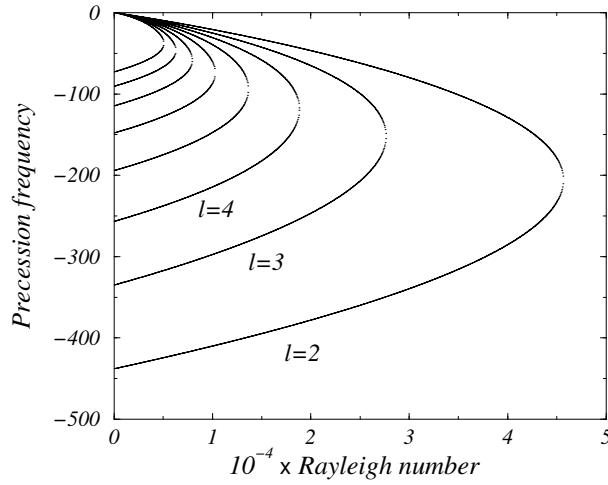


Figura 3.2: Curvas de estabilidad marginal del problema no disipativo para  $\sigma = 0,7$ ,  $\tau = 5000$ ,  $\eta = 0,5$  y  $n = 16$ . El valor de  $l$  indica el índice del polinomio radial dominante.

La rama superior de cada curva corresponde a ondas, cuya frecuencia tiende a cero cuando disminuye la diferencia de temperatura entre las paredes, indicando que son ondas generadas por el gradiente de temperatura. En este caso, el empuje de Arquímedes compensa casi en su totalidad la parte no geostrófica de la fuerza de Coriolis y, por este motivo, las ondas son lentas. Como se puede observar en la figura 3.3, la convección en este tipo de ondas está confinada en la parte exterior del anillo. Por el contrario, la frecuencia de las ondas de las ramas inferiores aumenta a medida que disminuye el empuje de Arquímedes hasta alcanzar la frecuencia de las ondas de Rossby,  $\omega_R$ , para  $Ra = 0$ . Este tipo de ondas son inerciales. En este caso, el balance se produce entre la parte no geostrófica de la fuerza de Coriolis y las rápidas oscilaciones inerciales. El empuje de Arquímedes desempeña un papel secundario, desarrollándose la convección en todo el espacio entre los cilindros (ver la figura 3.3). Si se consideran números de Rayleigh para los que las frecuencias son de orden  $\omega_R/2$ , los tres términos del problema no disipativo que se obtiene de la ecuación 3.4a son del mismo orden y no es posible distinguir ambos tipos de ondas. Para valores mayores del número de Rayleigh las ondas son inestables y es necesario considerar la viscosidad para disipar la energía proporcionada por la diferencia de temperatura de las paredes.

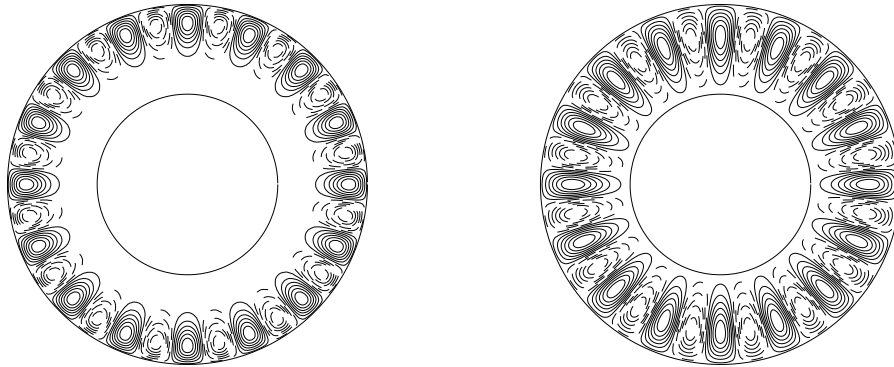


Figura 3.3: Isolíneas de la perturbación de la temperatura del problema no disipativo para el caso  $\sigma = 0,7$ ,  $\tau = 5000$ ,  $\eta = 0,5$ ,  $n = 16$  y  $Ra = 35000$ . A la izquierda se presenta la solución para la rama superior ( $\omega_R = -101$ ) y a la derecha para la inferior ( $\omega_R = -315$ ).

También se han comparado las frecuencias  $\omega$  del caso disipativo con la frecuencia de las ondas de Rossby para diferentes fluidos y rotaciones. En la tabla 3.1 se presentan ambas frecuencias para  $\eta = 0,5$ , dos rotaciones diferentes,  $\tau = 5000$  y  $\tau = 10000$ , y los valores del número de Prandtl considerados,  $\sigma = 0,025$ ,  $0,7$  y  $7$ . En esta tabla se ha calculado la frecuencia,  $\omega$ , correspondiente al valor del número de Rayleigh crítico del modo dominante para los valores de  $\eta$ ,  $\tau$  y  $\sigma$  considerados. Una vez conocido el valor del modo azimutal dominante,  $n$ , se ha calculado el valor de  $\omega_R$  para los valores de los parámetros considerados. Como se esperaba, debido a las altas rotaciones consideradas, para bajos números de Prandtl las frecuencias son similares, indicando que las ondas son principalmente de tipo inercial. Un resultado similar ha sido encontrado por Zhang (1994) en el estudio de una capa esférica en rotación. El autor muestra por medio de un análisis perturbativo, que, para altas rotaciones, el inicio de la convección está inducido por el término de Coriolis. Si  $\sigma = 0,7$ , la frecuencia de las oscilaciones es cercana a  $\omega_R/2$ . Se denominarán modos térmicos a los dominantes para este caso, ya que tanto la rotación como los efectos de la temperatura son necesarios para desestabilizar el estado conductivo. Finalmente, para valores más elevados del número de Prandtl, el término difusivo es del mismo orden que los otros dos. En este caso  $\omega$  y  $\omega_R$  son muy diferentes y no es posible identificar los modos dominantes del problema disipativo a partir de los del problema no disipativo.

$\tau$	$\sigma$	$\omega_R$	$\omega$	$n$
5000	0.025	-730	-678	7
	0.7	-437	-241	16
	7	-417	-42	17
10000	0.025	-1377	-1297	8
	0.7	-835	-373	17
	7	-706	-67	21

Cuadro 3.1: Comparación de las frecuencias,  $\omega$  y  $\omega_R$ , de los modos dominantes de convección del problema disipativo y del no disipativo, respectivamente. Todas las frecuencias se expresan en unidades viscosas. La última columna representa el número de onda azimutal dominante del problema disipativo para los parámetros indicados. La razón de radios es  $\eta = 0,5$ .

Una vez identificados los diferentes modos que aparecen en el problema no disipativo, las tres siguientes secciones de este capítulo están dedicadas al estudio de la estabilidad del estado conductivo en el caso disipativo, para diferentes valores del número de Prandtl.

### 3.4.2. Números de Prandtl moderados

Según Boubnov & Golitsyn (1995) los valores intermedios del número Prandtl se estiman adecuados para simular la convección de algunos objetos de interés astrofísicos, como es el caso de la atmósfera de Júpiter. En el presente trabajo se ha considerado  $\sigma = 0,7$ . En la figura 3.4 se representa la dependencia con el parámetro de Coriolis del número de Rayleigh crítico (izquierda) y de la frecuencia viscosa (derecha) de cada modo azimutal dominante en el intervalo considerado para un valor de la razón de radios  $\eta = 0,5$ . En esta figura, al igual que en el resto del capítulo,  $n$  indica el número de onda azimutal y la línea de trazo más grueso de la gráfica de las frecuencias representa la frecuencia de los modos dominantes para cualquier valor del parámetro de Coriolis.

Los picos que se aprecian en la representación del número de Rayleigh y los saltos entre las líneas de trazo fino de la gráfica de las frecuencias son debidos al cambio de un tipo de modo azimutal,  $n$ , a otro diferente con el mismo número de onda azimutal. Es decir, existe una multiplicidad de modos azimutales agrupados en familias que pueden dominar en un rango diferente de parámetros. En este caso, la misma familia de modos azimutales  $n$  domina consecutivamente hasta un cierto valor de  $\tau$  como se puede observar en la figura 3.5, que es una ampliación de la figura 3.4 para valores del parámetro de Coriolis en torno a  $\tau = 5500$ . Sin

embargo, para  $\tau_c = 5628$  se produce una transición "hacia atrás" en el número de onda azimutal del modo dominante desde  $n = 17$  a  $n = 13$ . A partir de este instante los modos azimutales, que dominan consecutivamente, pertenecen a otra familia. Como consecuencia de este hecho, hay dos soluciones con el mismo número de onda azimutal  $n = 13, 14, 15, 16, 17$ , pertenecientes a familias diferentes que dominan para valores distintos del parámetro de Coriolis. Variando la razón de radios se comprueba cómo el valor del parámetro de Coriolis,  $\tau_c$ , para el que se produce el intercambio, aumenta con  $\eta$ . Así, si  $\eta = 0,3$ ,  $\tau_c = 3353$ , para  $\eta = 0,6$   $\tau_c = 7855$  y finalmente si  $\eta = 0,7$ ,  $\tau_c = 13367$ . Sin embargo, si  $\eta$  es muy bajo no es posible encontrar valor de  $\tau_c$  para el que se produce un cambio de familia de modos dominantes.

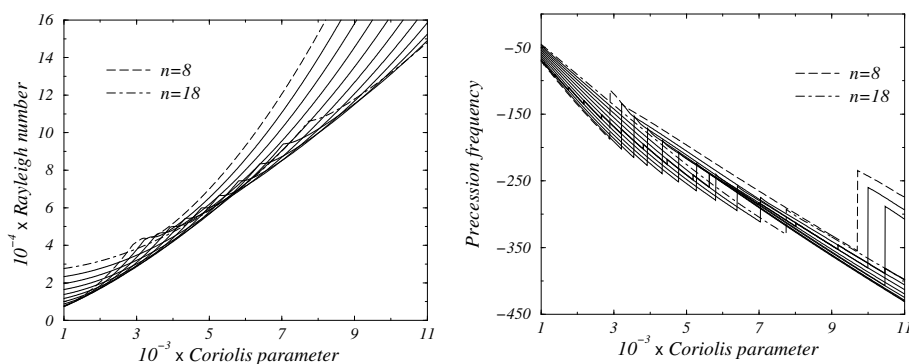


Figura 3.4: Número de Rayleigh crítico (izquierda) y las correspondientes frecuencias (derecha) en función del parámetro de Coriolis,  $\tau$ , para  $\sigma = 0,7$  y  $\eta = 0,5$ .

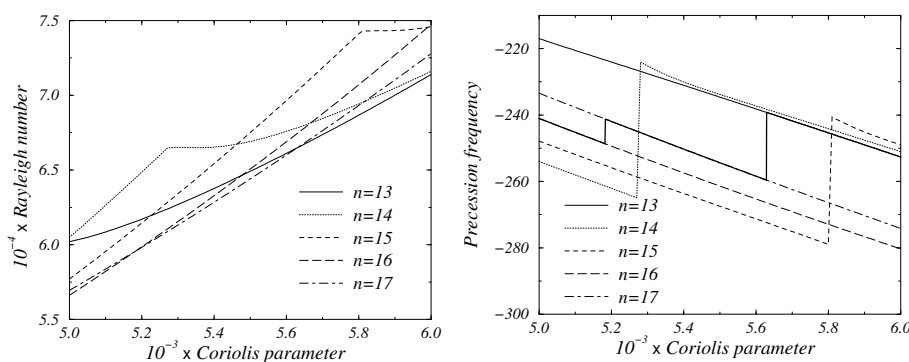


Figura 3.5: Ampliación de la figura 3.4 para valores del parámetro de Coriolis  $\tau \approx 5500$ . Para una mayor claridad sólo se representan los modos dominantes en el intervalo considerado.

La estructura de las dos familias de modos se presenta en la figura 3.6, donde se muestran las isolíneas de la perturbación de la temperatura (mitad superior de la figura) y de la función de corriente (mitad inferior) para el modo dominante  $n = 13$  y dos valores del parámetro de Coriolis diferentes,  $\tau = 3000$  (izquierda) y  $\tau = 6000$  (derecha). La solución para  $\tau = 3000$  es similar a la obtenida por Schnaubelt & Busse (1992) en la aproximación de capa plana con las mismas condiciones de contorno. Siguiendo la nomenclatura propuesta por Zhang (1992), se denominarán a este tipo de soluciones modos columnares *normales*. A pesar de la existencia de la fuerza de Coriolis, este tipo de soluciones mantiene aproximadamente la simetría de reflexión respecto de planos verticales que contienen al eje de rotación. Es decir, estas soluciones están relacionadas con las columnas de Taylor que existen en el caso de considerar tapas horizontales (ver Alonso, Net & Knobloch, 1995). Por el contrario, el segundo tipo de soluciones, que se llamarán modos columnares *espirales*, presenta una estructura muy inclinada en el sentido de la rotación, en la que claramente se ha roto la simetría de reflexión anterior. Otra propiedad importante de este tipo de soluciones radica en el hecho de que la convección se desarrolla principalmente en la parte interior del anillo. Este tipo de solución no se puede encontrar con el mismo modelo en la aproximación de capa plana, ya que, en este caso, las funciones propias dominantes son simétricas respecto al plano medio de la capa convectiva. Para permitir la aparición de los modos *espirales* en dicha aproximación se han de incorporar tapas con curvatura. Busse & Or (1986) expresan dicha curvatura de las tapas mediante una dependencia de la forma  $\gamma = \gamma_0[1 + \epsilon f(x)]$ , donde  $\gamma_0$  es una constante pequeña, rompiéndose, de esta manera, la simetría de reflexión respecto al plano medio de la capa.

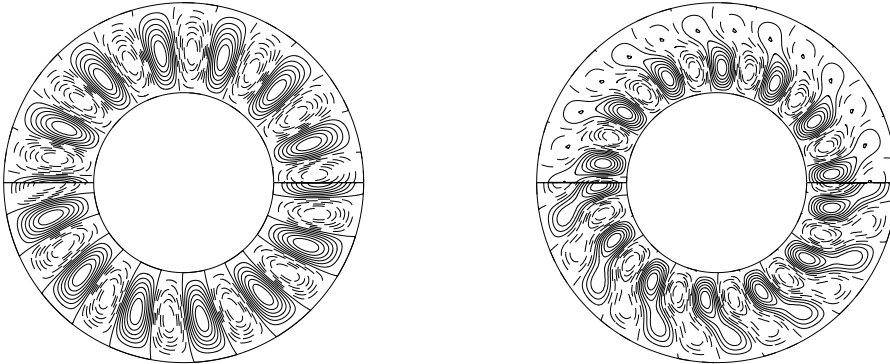


Figura 3.6: Isolíneas de la perturbación de la temperatura (parte superior) y de la función de corriente (parte inferior) correspondientes a los modos dominantes del mismo número de onda azimutal  $n = 13$ , para los parámetros  $\eta = 0,5$ ,  $\sigma = 0,7$ ,  $\tau = 3000$  (izquierda) y  $\tau = 6000$  (derecha).



Para entender la naturaleza de estos modos dominantes, en la figura 3.7b se muestran las isolíneas de la perturbación de la temperatura en los puntos  $c$ ,  $d$  y  $e$  de la figura 3.7a. En esta figura se muestra el número de Rayleigh de los tres primeros modos azimutales  $n = 16$  con diferente estructura radial en función del parámetro de Coriolis para el caso  $\eta = 0,5$ . Las soluciones correspondientes a los puntos  $a$  y  $b$  para  $\tau = 1000$  y  $\tau = 9000$ , respectivamente, son similares a las mostradas a la izquierda y a la derecha de la figura 3.6 respectivamente. Como se puede observar en las isolíneas de la perturbación de la temperatura del punto  $c$ , el segundo modo azimutal  $n = 16$  corresponde a la solución dominada por el polinomio radial  $l = 3$ , que se caracteriza por una estructura de doble columna a bajas rotaciones, que se inclina a medida que aumenta el valor del parámetro de Coriolis (ver las isolíneas de la perturbación de la temperatura para el punto  $d$ ). Finalmente, como se puede observar en la parte inferior de la figura 3.6, para rotaciones muy elevadas, la convección en una doble columna se destruye, permaneciendo confinada principalmente en el entorno de la pared interior. Por el contrario, las isolíneas de la temperatura del punto  $e$  muestran que la rotación también afecta a las soluciones con un número de onda  $n$  elevado y con estructura radial  $l = 2$ , pero el efecto es menos espectacular ya que la dependencia radial no cambia. Por último, comentar que si se fija un valor del número de onda azimutal  $n$  en el rango de parámetros explorado, el modo dominante nunca corresponde a un polinomio radial  $l = 4$  (línea punteada de la figura 3.7a).

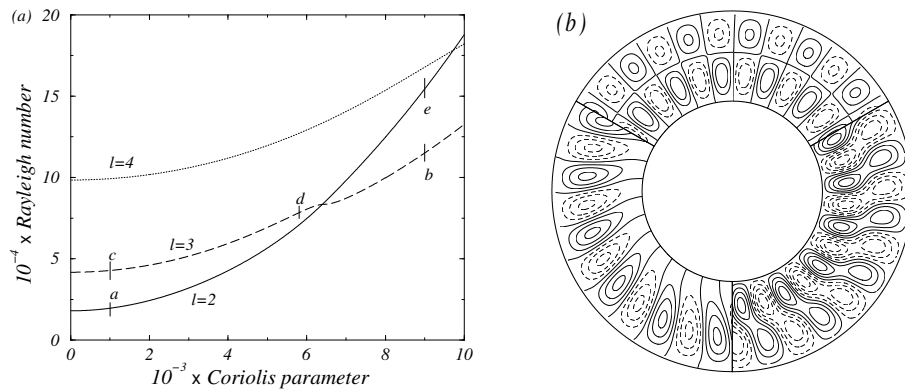


Figura 3.7: (a) Curvas de estabilidad marginal de los tres primeros modos azimutales  $n = 16$  y diferente estructura radial para  $\eta = 0,5$  y  $\sigma = 0,7$ . La línea continua, la discontinua y la punteada corresponden, respectivamente, a los modos con  $l = 2$ ,  $l = 3$  y  $l = 4$  de la estructura radial. (b) Isolíneas de la perturbación de la temperatura en los puntos  $c$ ,  $d$  y  $e$  de la figura 3.7a. En el sentido de las agujas del reloj empezando por la parte superior se representan  $\tau = 1000$ ,  $\tau = 5800$  y  $\tau = 9000$ .

La diferente estructura de los dos tipos de familias de modos dominantes se aprecia con claridad al observar la fase y la amplitud de la función de corriente para diferentes valores del parámetro de Coriolis. En la figura 3.8 se representa la variación de la fase (izquierda) y la amplitud (derecha) de la función de corriente, definida en la sección 3.3.2, de varias soluciones dominantes para  $\eta = 0,5$ . Con el fin de apreciar mejor la variación de la fase, se han representado las gráficas con un origen común en el exterior del cilindro. Como se puede comprobar en la figura, en general, la espiralidad de las soluciones aumenta con la rotación. Sin embargo, es después del cambio de carácter de la solución ( $\tau_c = 5628$ ), cuando se produce un gran aumento en la espiralidad, la estructura radial cambia, apareciendo un segundo máximo en la amplitud y la convección se confina principalmente cerca de la pared interior.

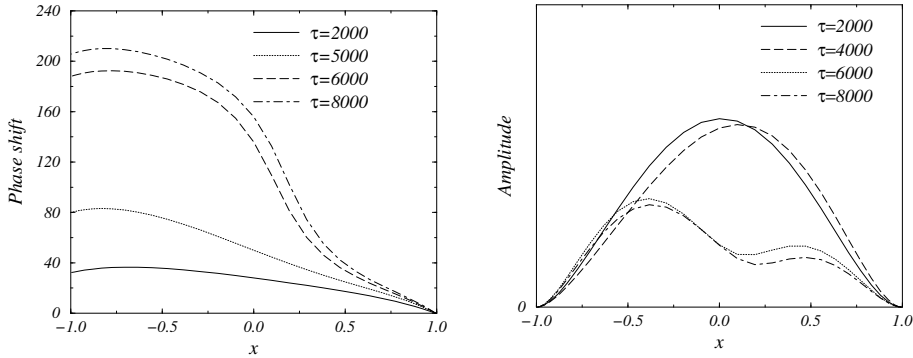


Figura 3.8: Fase,  $\varphi(x)$ , (izquierda) y amplitud,  $B(x)$ , (derecha) de la función de corriente, definidas en la sección 3.3.2 para diferentes valores del parámetro de Coriolis en el caso  $\eta = 0,5$  y  $\sigma = 0,7$ . La pendiente de las curvas de la fase está relacionada con la inclinación de las columnas y la posición del máximo de la amplitud indica la zona donde se concentra la convección. A medida que aumenta  $\tau$ , los modos dominantes para cada valor del parámetro de Coriolis son  $n = 11, 15, 13$  y  $15$ .

Si se estudia la estabilidad del estado conductivo en función de la razón de radios, una vez fijado un valor elevado del parámetro de Coriolis, también aparecen dos familias de modos dominantes. En la figura 3.9 se representa la dependencia con la razón de radios del número de Rayleigh crítico (izquierda) y de la frecuencia (derecha) de cada modo azimutal para  $\tau = 8000$ . Hasta  $\eta = 0,605$  los modos  $n = 4, \dots, 21$  dominan consecutivamente y son *espirales* del mismo tipo que los representados en la parte inferior de la figura 3.6. Para  $\eta_c = 0,605$  se produce el cambio de familia de modos dominantes. El siguiente modo dominante ( $n = 27$ ) es *normal* (ver la parte superior de la figura 3.6) y no dominan nunca los modos  $n = 22, 23, 24, 25, 26$ , como se aprecia con mayor

claridad en la figura 3.10. Por lo tanto, los modos *espirales* son dominantes, en general, para elevadas rotaciones y bajas razones de radios. Se ha comprobado que para  $\sigma = 0,7$  y  $\eta \geq 0,15$ , el cambio de tipo de modo dominante existe siempre que  $\tau \geq 2300$ . Es decir, cuanto menor es la rotación, menor es el valor de  $\eta$  para el que ocurre el salto, dándose el caso de que para valores demasiado pequeños del parámetro de Coriolis no aparece un cambio de familia de modos para  $\eta \geq 0,1$ . Más adelante se presentan los casos  $\tau = 2000$  y  $\tau = 2800$  donde se observará este hecho.

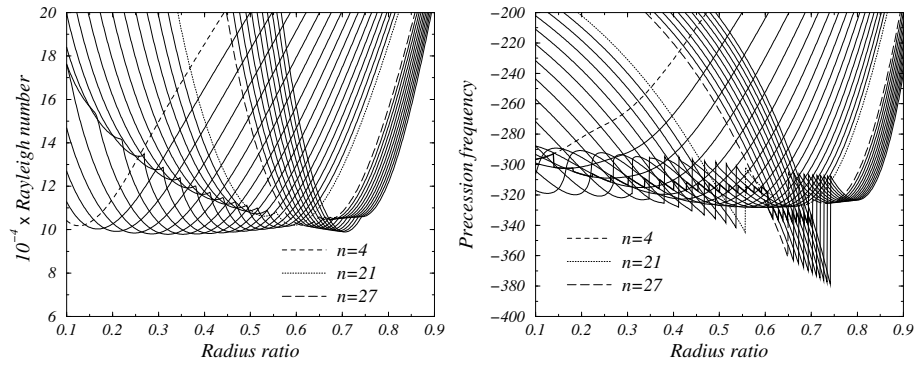


Figura 3.9: Número de Rayleigh crítico (izquierda) y las correspondientes frecuencias (derecha) en función de la razón de radios,  $\eta$ , para  $\sigma = 0,7$  y  $\tau = 8000$ .

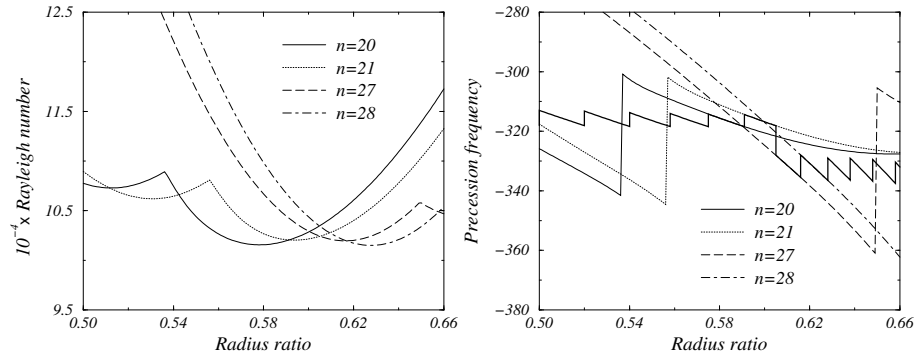


Figura 3.10: Ampliación de la figura anterior en torno a  $\eta = 0,605$ .  $\sigma = 0,7$  y  $\tau = 8000$ . Sólo se representan los modos dominantes.

Sin embargo, los modos *espirales* representados en la figura 3.9 pueden provenir para  $\tau \rightarrow 0$  de modos con estructura radial  $l = 2$  o  $l = 3$ . Es decir, si a partir del valor de  $\eta$  para el cual un modo domina, se sigue el valor propio que ha bifurcado al disminuir  $\tau$ , pueden encontrarse dos comportamientos para

la función propia asociada. Por ejemplo, en la figura 3.9 los modos dominantes  $n = 4, \dots, 10$  presentan una estructura radial  $l = 2$  para  $\tau$  suficientemente bajo. Por el contrario los modos  $n = 11, \dots, 21$  son modos con estructura radial  $l = 3$  para cualquier valor de  $\tau$ . Por lo tanto, para  $\eta \approx 0,35$  hay otro intercambio de soluciones que no es fácilmente detectable ya que las funciones propias se parecen entre sí. En la figura 3.11, que es una ampliación de la figura 3.9 en torno a  $\eta = 0,35$ , puede observarse dicho comportamiento pero en función de la razón de radios. En esta figura se puede apreciar cómo los modos dominantes  $n \leq 10$  no experimentan ningún salto en la frecuencia. Esto quiere decir, que no hay una multiplicidad de modos  $n \leq 10$ , sino que éstos cambian de manera continua desde una estructura *espiral*  $l = 2$  hasta una estructura *normal*  $l = 3$  para valores elevados de la razón de radios. Por el contrario, los modos dominantes  $n > 10$  cambian de estructura radial mediante un salto en la frecuencia y si  $\eta < 0,605$  presentan una estructura radial  $l = 3$  en el intervalo en el que dominan. En general, para un valor suficientemente elevado de  $\tau$ , los modos *espirales* que presentan un número de onda azimutal  $n$  bajo provienen de modos cambiantes de forma continua con la razón de radios, mientras que los modos con  $n$  elevado son soluciones con una estructura radial  $l = 3$  para  $\eta < \eta_c$ . Los resultados de Busse & Or (1986) para un fluido con  $\sigma = 1$ ,  $\tau = 2800$  concuerdan cualitativamente con los descritos anteriormente. Si se considera  $\epsilon = 0,75$  (ver la expresión de la curvatura en la pagina 37), incrementando el número de onda, estos autores también encuentran una transformación en la estructura radial de las soluciones.

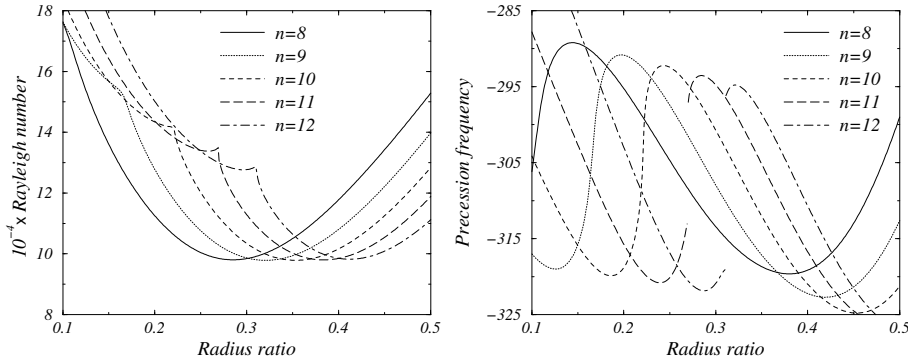


Figura 3.11: Ampliación de la figura 3.9 en torno a  $\eta \approx 0,35$ . Sólo se representan los modos dominantes en el intervalo  $\eta \in [0,263, 0,428]$ .

Como era de esperar, para  $\eta \rightarrow 1$  se observa (ver figura 3.9) como el número de Rayleigh crítico de la convección *normal*,  $Ra_c^{(n)}$ , tiende al número de Rayleigh crítico de las soluciones invariantes por el operador  $T_{a/2\kappa}$  (ver página 20) en

la aproximación de capa plana,  $Ra_c^{(sg1)} = 95444$ . Como el potencial  $\psi$  y el campo de temperatura  $T$  de estos modos es cero en el medio de la capa, se denominarán *segundos armónicos radiales*. Además, el número de onda crítico,  $n_c^{(c)}$ , y la correspondiente frecuencia para  $\eta \lesssim 1$  se pueden estimar haciendo  $n_c^{(c)} \approx \alpha_c^{(sg1)} \bar{r}$ ,  $\omega_c^{(c)} \approx c_c^{(sg1)} / \bar{r}$ , donde  $\alpha_c^{(sg1)}$  y  $c_c^{(sg1)}$  son el número de onda y la correspondiente velocidad de fase crítica en la aproximación de capa plana y  $\bar{r} = \frac{1+\eta}{2(1-\eta)}$  es el radio medio del anillo.

Si obtenemos, para  $\eta \rightarrow 1$ , los modos dominantes de las soluciones *espirales*, puede observarse cómo el número de Rayleigh crítico,  $Ra_c^{(s)}$ , tiende al número de Rayleigh crítico de las soluciones  $\kappa$ -invariantes (ver página 20) en la aproximación de capa plana,  $Ra_c^{(sg2)} = 106329$ , y los correspondientes números de onda azimutales y frecuencia son, en este caso,  $n_c^{(s)} \approx \alpha_c^{(sg2)} \bar{r}$ ,  $\omega_c^{(s)} \approx c_c^{(sg2)} / \bar{r}$ , donde  $\alpha_c^{(sg2)}$  y  $c_c^{(sg2)}$  son el número de onda crítico y la correspondiente velocidad de fase crítica de este armónico. Como los valores de  $\alpha_c^{(sg1)}$  y  $\alpha_c^{(sg2)}$  son diferentes, el número de onda para la convección *normal* y para la *espiral* son diferentes para el mismo valor de  $\eta$ . Cuando el valor de la razón de radios disminuye, el valor del número de Rayleigh crítico para la convección *normal* aumenta, y para  $\eta_c$ , los modos *espirales* empiezan a ser dominantes. El salto "hacia adelante" entre el número de onda para los modos *espirales* dominantes y los *normales* para  $\eta_c$  concuerdan con el hecho que, generalmente,  $\alpha_c^{(sg2)} < \alpha_c^{(sg1)}$ . Un comportamiento similar se ha obtenido en la aproximación de capa plana si se consideran tapas cónicas (Busse & Or, 1986).

Con el fin de resumir los resultados obtenidos en función de  $\eta$  para  $\tau = 8000$ , en la figura 3.12 se representa la fase (izquierda) y la amplitud (derecha) de la función de corriente de cuatro soluciones dominantes para  $\tau = 8000$ . En este caso, la espiralidad aumenta al disminuir la razón de radios. Como se puede observar, el cambio en la estructura radial de la solución se produce al pasar la razón de radios de  $0,6 \rightarrow 0,8$ . Las soluciones correspondientes a  $\eta = 0,2$ ,  $0,4$  y  $0,6$  presentan una estructura radial  $l = 3$ , son fuertemente *espirales* y la convección está confinada en el interior del anillo. Por el contrario, para  $\eta = 0,8$  la estructura radial es  $l = 2$  y la convección es *normal*, desarrollándose en todo el espacio entre los cilindros.

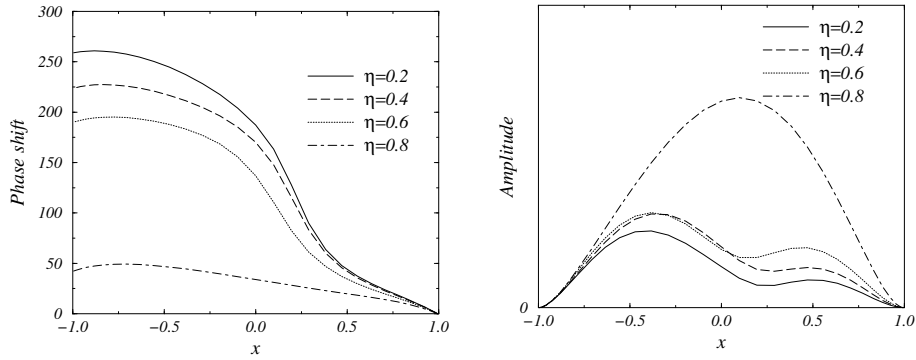


Figura 3.12: Fase,  $\varphi(x)$ , (izquierda) y amplitud de la función de corriente,  $B(x)$ , (derecha) para diferentes valores de la razón de radios en el caso  $\tau = 8000$  y  $\sigma = 0,7$ . En orden creciente los modos dominantes para cada valor de la razón de radios son  $n = 6, 12, 21$  y  $58$ .

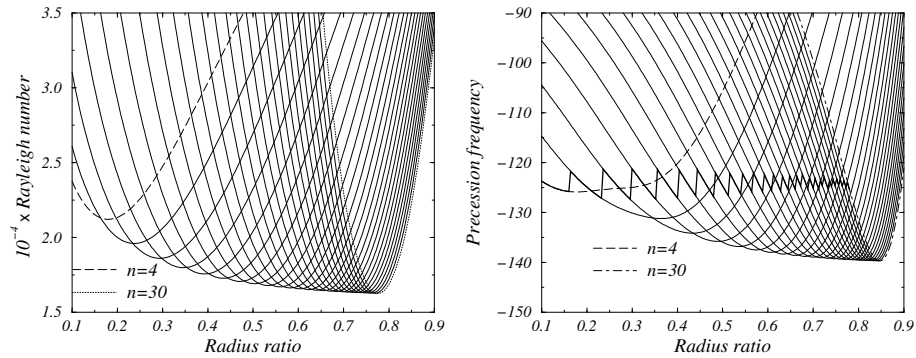


Figura 3.13: Número de Rayleigh crítico (izquierda) y las correspondientes frecuencias (derecha) en función de la razón de radios,  $\eta$ , para  $\sigma = 0,7$  y  $\tau = 2000$ .

Si se consideran valores suficientemente bajos del parámetro de Coriolis, puede ocurrir, como se ha comentado anteriormente, que no exista el valor  $\eta_c$  y todas las soluciones presenten, incluso a bajas razones de radios, una convección *normal*. Esto ocurre, por ejemplo, para  $\tau = 2000$ . En la figura 3.13 se representa la dependencia del número de Rayleigh crítico y de la frecuencia viscosa de cada modo azimutal con la razón de radios. En esta figura se puede observar cómo no aparecen picos en la curva del número de Rayleigh ni saltos en la frecuencia de cada modo. Esto nos indica que, al no haber una evolución continua de un tipo de solución a otro dentro de un mismo modo, todas las soluciones dominantes presentan el mismo tipo de convección *normal*. En la figura 3.14 se aprecia

claramente este hecho. En esta figura se representan, para  $\tau = 2000$ , las isolíneas de la función de corriente y de la temperatura de dos soluciones dominantes correspondientes a dos valores de la razón de radios. Como se puede ver, las dos soluciones presentan una convección que se desarrolla en todo el espacio entre los cilindros.

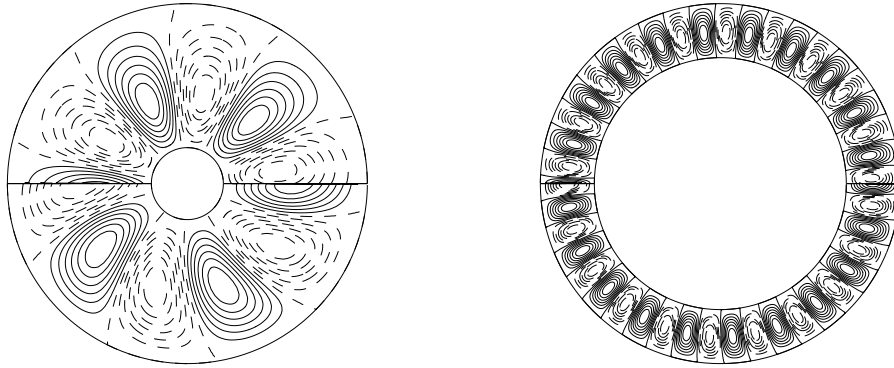


Figura 3.14: Isolíneas de la perturbación de la temperatura (mitad superior) y de la función de corriente (mitad inferior) correspondientes a los modos dominantes  $n = 5$  para  $\eta = 0,2$  (izquierda) y  $n = 21$  para  $\eta = 0,7$  (derecha),  $\sigma = 0,7$  y  $\tau = 2000$ .

Si se aumenta ligeramente el valor del parámetro de Coriolis, este comportamiento se modifica. Al estudiar la estabilidad del estado conductivo en función de  $\eta$  para  $\tau = 2800$ , se observa un comportamiento similar al caso  $\tau = 8000$ , apareciendo un salto "hacia adelante" del modo azimutal dominante. En la figura 3.15 se representa el número de Rayleigh crítico y la frecuencia viscosa de cada modo azimutal en función de la razón de radios una vez fijado  $\tau = 2800$ . En esta figura sólo se presentan los modos que dominan para algún valor de  $\eta$ . En este caso se observa cómo las dos familias de modos son dominantes. Hasta  $n = 4$  los modos son *espirales* y la convección está confinada en el interior del anillo. A partir de  $\eta \approx 0,228$ , valor para el que se produce el salto en el modo azimutal dominante, no dominando el modo azimutal  $n = 5$ , la convección es *normal*. En la figura 3.16 se muestran las isolíneas de la temperatura y de la función de corriente de dos modos que dominan para dos valores de la razón de radios muy cercanos, concretamente  $\eta = 0,2$  y  $\eta = 0,24$ . Puede apreciarse cómo varía el modo de convección.

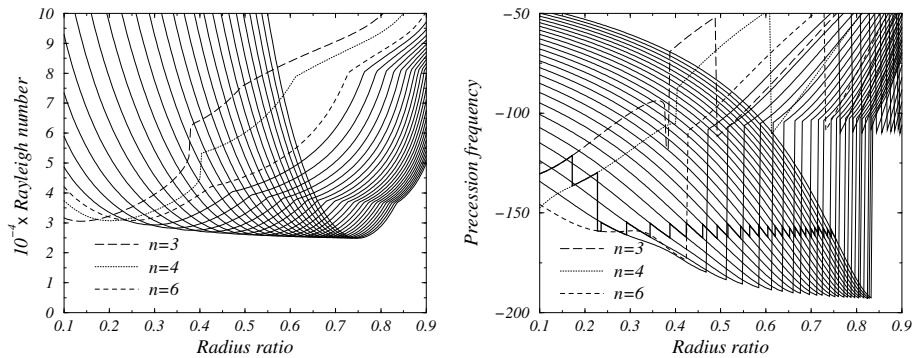


Figura 3.15: Número de Rayleigh crítico (izquierda) y las correspondientes frecuencias (derecha) en función de la razón de radios,  $\eta$ , para  $\sigma = 0,7$  y  $\tau = 2800$ .

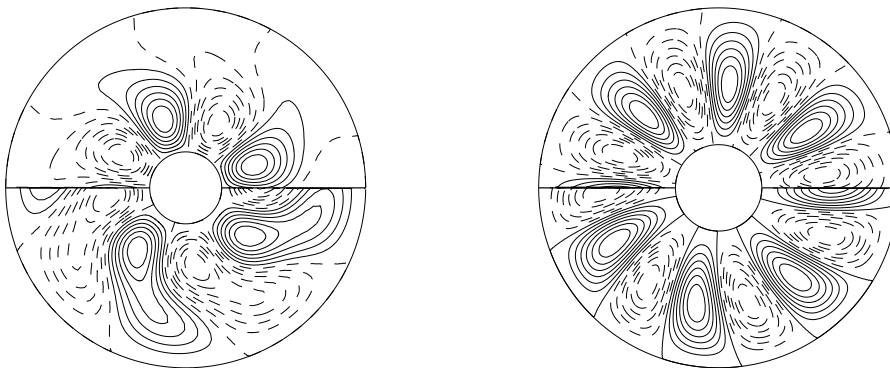


Figura 3.16: Isoléneas de la perturbación de la temperatura (mitad superior) y de la función de corriente (mitad inferior) correspondientes a los modos dominantes  $n = 4$  para  $\eta = 0,2$  (izquierda) y  $n = 7$  para  $\eta = 0,24$  (derecha),  $\sigma = 0,7$  y  $\tau = 2800$ .

### 3.4.3. Números de Prandtl bajos

Como ejemplo de número de Prandtl bajo se ha considerado  $\sigma = 0,025$ . En todos los casos se ha comprobado que las soluciones corresponden a ondas inerciales, solución de la ecuación de Poincaré en dos dimensiones. Los isóneas tanto de la temperatura como de la función de corriente representan columnas, que prácticamente mantienen la simetría de reflexión en planos verticales, siendo  $l = 2$  el modo radial dominante.

En la figura 3.17 se presenta la dependencia del número de Rayleigh y de



la frecuencia con el parámetro de Coriolis para un valor de la razón de radios  $\eta = 0,5$ .

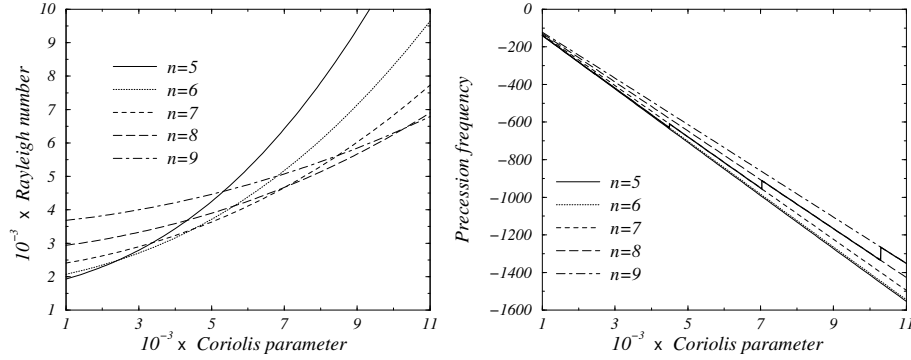


Figura 3.17: Número de Rayleigh crítico (izquierda) y las correspondientes frecuencias (derecha) en función del parámetro de Coriolis,  $\tau$ , para  $\sigma = 0,025$  y  $\eta = 0,5$ .

Como puede observarse en esta figura, las soluciones presentan una mayor escala azimutal de convección que en el caso  $\sigma = 0,7$ . Esto es debido a que la frecuencia de las ondas es tan alta que hace que las fuerzas de fricción no sean necesarias para compensar el término no geostrófico de la ecuación. Aparte de su origen inercial, que hace que la convección se desarrolle en todo el anillo independientemente del valor del parámetro de Coriolis (ver la figura 3.18), no se ha encontrado similitud alguna entre estos modos *normales* y las soluciones atrapadas en el ecuador encontradas por Zhang (1994) y Zhang & Busse (1987) en el estudio de la convección de capas esféricas en rotación sometidas a un calentamiento interno. Según Tilgner, Ardes & Busse (1997) este último tipo de soluciones son dominantes para  $Ta \lesssim \sigma^{-4}$ , siendo  $Ta$  el número de Taylor. Por tanto, para cualquier valor de  $\sigma$  es posible encontrar un valor de la rotación que da lugar a otra forma de convección. De esta manera, la condición de convección tridimensional restringida a bajas latitudes no se cumple para números de Taylor moderados y los modos *espirales* son dominantes. Consecuentemente, la transición de la convección inercial a la térmica es brusca. Sin embargo, en convección anular en rotación, para un valor suficientemente pequeño del número de Prandtl, el mismo modo inercial es dominante para cualquier valor de la rotación. Además, hasta donde se ha podido comprobar, hay un cambio continuo de un modo convectivo al otro. Parece improbable que estas discrepancias sólo puedan ser debidas al diferente modo de calentamiento, ya que las ondas inerciales existen independientemente del gradiente de temperatura.

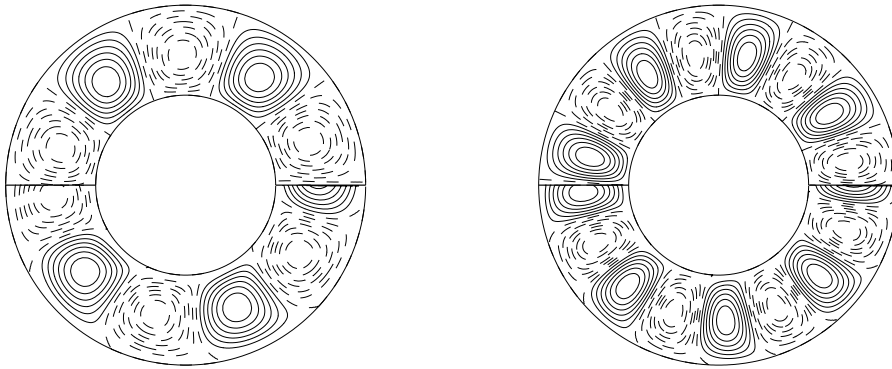


Figura 3.18: Isolneas de la perturbación de la temperatura (parte superior) y de la función de corriente (parte inferior) correspondientes a los modos dominantes  $n = 5$  para  $\tau = 2000$  (izquierda) y  $n = 8$  para  $\tau = 8000$  (derecha). El resto de los parámetros son  $\eta = 0,5$  y  $\sigma = 0,025$ .

Como se ha dicho anteriormente, si se consideran otros valores de la razón de radios la situación es cualitativamente similar. Para  $\eta = 0,3$  (figura 3.19), se puede observar cómo la escala azimutal de la convección es aún mayor, siendo dominantes soluciones con números de onda azimutal menores para el mismo valor del parámetro de Coriolis. Si se fija  $\eta = 0,7$  se produce el efecto contrario (figura 3.20). En ambos casos las soluciones son ondas inerciales.

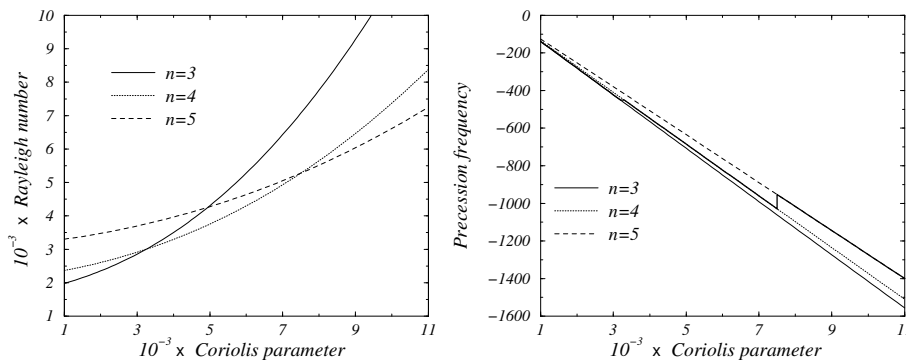


Figura 3.19: Número de Rayleigh crítico (izquierda) y las correspondientes frecuencias (derecha) en función del parámetro de Coriolis,  $\tau$ , para  $\sigma = 0,025$  y  $\eta = 0,3$ .

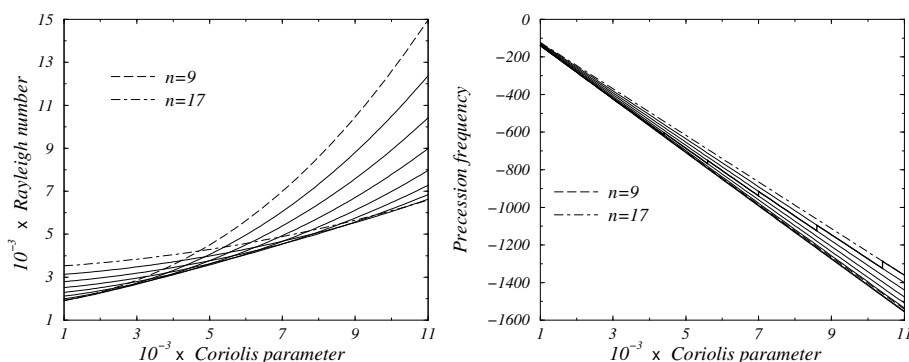


Figura 3.20: Número de Rayleigh crítico (izquierda) y las correspondientes frecuencias (derecha) en función del parámetro de Coriolis,  $\tau$ , para  $\sigma = 0,025$  y  $\eta = 0,7$ .

También se representa en las figuras 3.21 y 3.22 el número de Rayleigh crítico y las correspondientes frecuencias en función de la razón de radios fijados,  $\tau = 2000$  y  $\tau = 8000$ , respectivamente. Como puede verse en las figuras, al aumentar el valor del parámetro de Coriolis, el aspecto de la curva de estabilidad de cada modo azimutal no varía para este valor del número de Prandtl y las soluciones no se ven afectadas, siendo en cualquier caso modos inerciales.

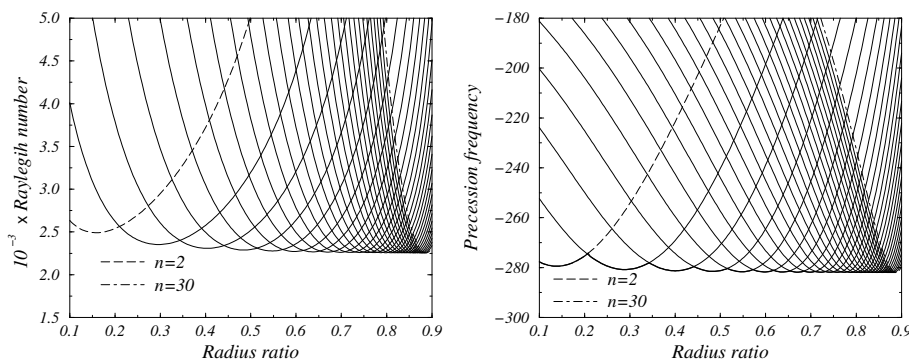


Figura 3.21: Número de Rayleigh crítico (izquierda) y las correspondientes frecuencias (derecha) en función de la razón de radios,  $\eta$ , para  $\sigma = 0,025$  y  $\tau = 2000$ .

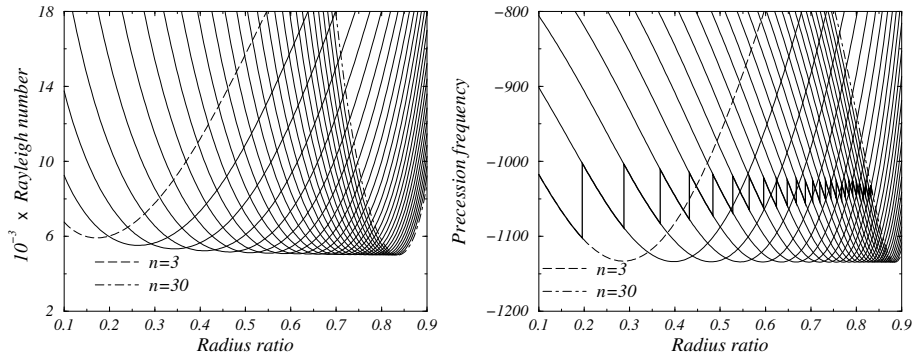


Figura 3.22: Número de Rayleigh crítico (izquierda) y las correspondientes frecuencias (derecha) en función de la razón de radios,  $\eta$ , para  $\sigma = 0,025$  y  $\tau = 8000$ .

Finalmente en la figura 3.23 se representa la fase y la amplitud de la función de corriente, definidas en el apartado 3.3.2, para diferentes valores del parámetro de Coriolis y de la razón de radios. En esta figura se pone de manifiesto que, para este valor del número de Prandtl, en el rango de parámetros estudiados, las soluciones apenas se ven afectadas por la variación de la razón de radios, y por el aumento de la rotación. En cualquiera de los casos considerados, las soluciones son ondas inerciales que prácticamente respetan la simetría respecto del plano medio de la capa, la convección es *normal*, ocupando todo el espacio entre los cilindros y el máximo de la amplitud se produce en el medio de la capa, prácticamente para el mismo valor de la coordenada radial  $x$ .

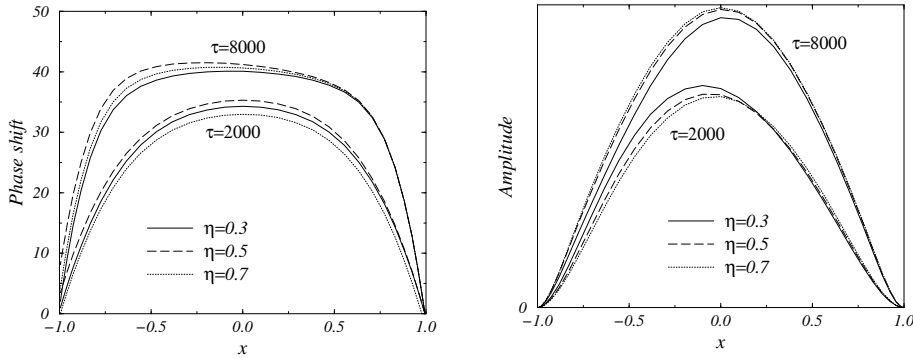


Figura 3.23: Fase,  $\varphi(x)$ , (izquierda) y amplitud,  $B(x)$ , (derecha) de la función de corriente definidas en la sección 3.3.2 para distintos valores del parámetro de Coriolis y de la razón de radios en el caso  $\sigma = 0,025$ . Para  $\eta = 0,3, 0,5$  y  $0,7$  se presentan los modos azimutales dominantes  $n = 3, 5$  y  $10$  si  $\tau = 2000$  y  $n = 5, 8$  y  $15$  si  $\tau = 8000$ , respectivamente.

### 3.4.4. Números de Prandtl elevados

De acuerdo con los resultados expuestos en la sección 3.4.1, al considerar valores del número de Prandtl elevados, el comportamiento de las soluciones cambia de nuevo.

Todos los resultados presentados en esta sección corresponden a fluidos que presentan un número de Prandtl  $\sigma = 7$ . Sin embargo, se ha comprobado que las soluciones hasta  $\sigma = 100$  son similares a las presentadas para  $\sigma = 7$ . En la siguiente sección, donde se estudia la estabilidad del estado conductivo en función únicamente del valor del número de Prandtl, este hecho se mostrará con mayor claridad.

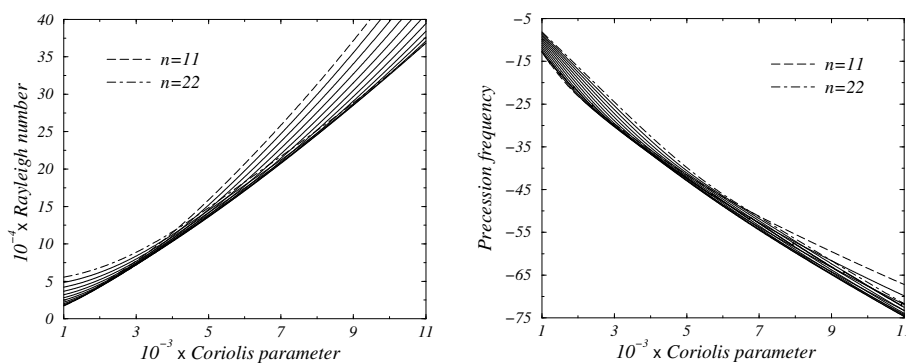


Figura 3.24: Número de Rayleigh crítico (izquierda) y las correspondientes frecuencias (derecha) en función del parámetro de Coriolis,  $\tau$ , para  $\sigma = 7$  y  $\eta = 0,5$ .

En la figura 3.24 se representa, para  $\eta = 0,5$ , las curvas de estabilidad marginal (izquierda) y las correspondientes frecuencias (derecha) en función del parámetro de Coriolis. En general, debido a la disipación, la escala de convección es muy pequeña incluso para valores intermedios de la razón de radios. En el rango de parámetros considerado, los modos dominan consecutivamente desde  $n = 11$  hasta  $n = 22$ . Para números de Prandtl elevados los modos dominantes presentan una frecuencia baja y siempre mantienen la misma estructura radial  $l = 2$ , incluso para valores elevados del parámetro de Coriolis. Para poner de manifiesto este hecho, en la figura 3.25 se representan las isolíneas de la perturbación de la temperatura y de la función de corriente de los modos dominantes para  $\tau = 2000$  (izquierda) y  $\tau = 9000$  (derecha). En esta ocasión las diferencias entre ambas soluciones están causadas por un incremento continuo de la fase,  $\varphi(x)$ , y un confinamiento progresivo de la amplitud,  $B(x)$ , de la función de corriente a medida que aumenta la rotación. Este hecho se observa de manera

clara en la figura 3.26. Al aumentar la rotación, la estructura radial  $l = 2$  se mantiene, la convección se confina en las proximidades de la pared interior y la escala radial tiende a ser comparable a la azimutal.

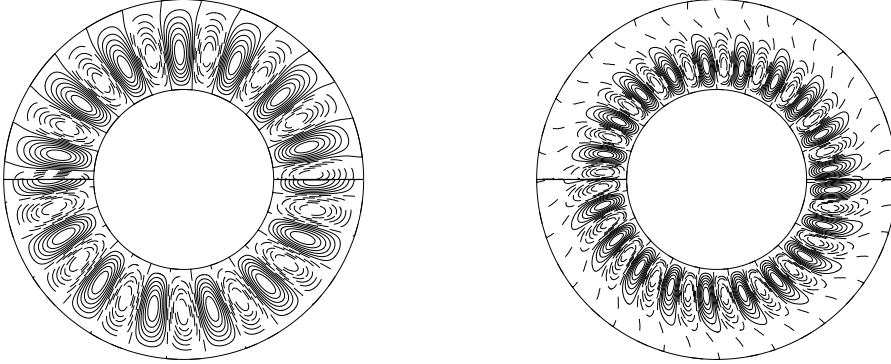


Figura 3.25: Isolíneas de la perturbación de la temperatura (mitad superior) y de la función de corriente (mitad inferior) correspondientes a los modos dominantes para  $\tau = 2000$ ,  $n = 14$  (izquierda) y  $\tau = 9000$ ,  $n = 20$  (derecha).  $\sigma = 7$ ,  $\eta = 0,5$ .

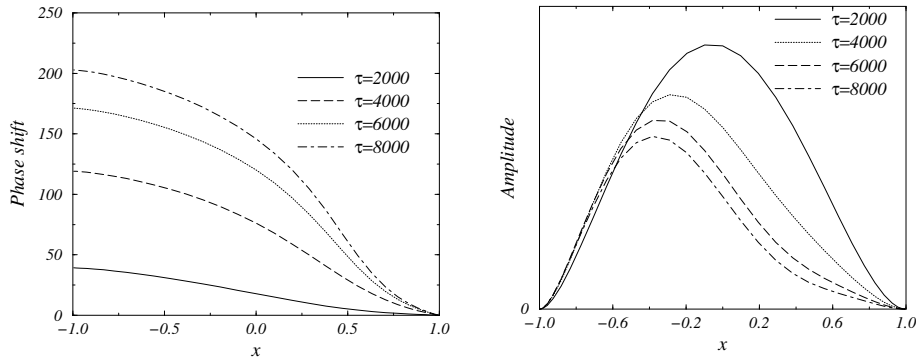


Figura 3.26: Fase,  $\varphi(x)$ , (izquierda) y amplitud,  $B(x)$ , (derecha) de la función de corriente definidas en la sección 3.3.2, para diferentes valores del parámetro de Coriolis en el caso  $\sigma = 7$  y  $\eta = 0,5$ . A medida que aumenta  $\tau$  los modos dominantes representados son  $n = 14, 16, 18$  y  $20$ .

En las figuras 3.27 y 3.28 se representa para  $\tau = 2000$  y  $\tau = 8000$  respectivamente, el número de Rayleigh crítico de los primeros modos azimutales dominantes (izquierda) y sus correspondientes frecuencias (derecha) en función de la razón de radios. En la primera figura se puede observar el cambio de estructura radial para cada modo  $n$ , no siendo dominante en ningún caso modos

con estructura radial  $l = 3$ . Para  $\tau = 8000$ , puede observarse como, en el rango de parámetros considerado, los modos no dominan nunca después de experimentar un salto en la frecuencia. Por lo tanto, todos los modos presentan la misma estructura radial para el valor de  $\eta$  en el que dominan. Este hecho se observa con más claridad en la figura 3.29, donde se representa la fase,  $\varphi(x)$ , (izquierda) y la amplitud,  $B(x)$ , (derecha) de la función de corriente para tres modos dominantes. A medida que aumenta la razón de radios la fase disminuye, es decir los modos son menos *espirales*, y la convección se desarrolla en una región mayor entre los cilindros. Sorprendentemente en este caso las isolíneas de la función propia de los modos, después del cambio en la estructura radial representada en el salto en la frecuencia de cada modo, nos muestran claramente que pertenece a una estructura radial  $l = 4$ , es decir, la convección se desarrolla en todo el espacio entre los cilindros en forma de una triple columna.

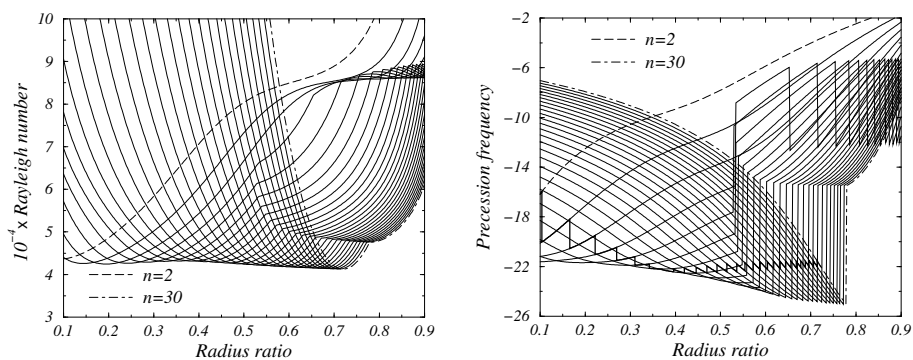


Figura 3.27: Número de Rayleigh crítico (izquierda) y las correspondientes frecuencias (derecha) en función de la razón de radios,  $\eta$ , para  $\sigma = 7$  y  $\tau = 2000$ .

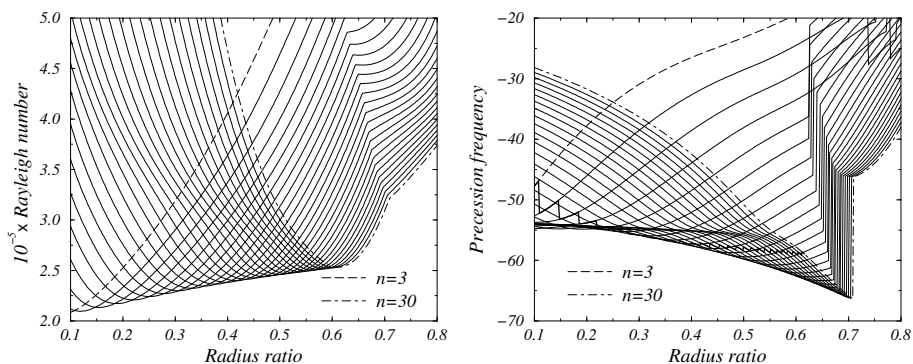


Figura 3.28: Número de Rayleigh crítico (izquierda) y las correspondientes frecuencias (derecha) en función de la razón de radios,  $\eta$ , para  $\sigma = 7$  y  $\tau = 8000$ .

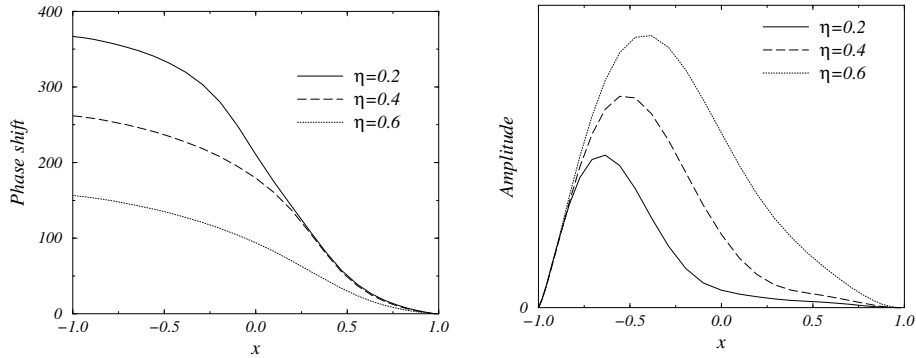


Figura 3.29: Fase,  $\varphi(x)$ , (izquierda) y amplitud de la función de corriente,  $B(x)$ , (derecha) para diferentes valores de la razón de radios en el caso  $\tau = 8000$  y  $\sigma = 7$ . En orden creciente los modos dominantes para cada valor de la razón de radios son  $n = 6, 14$  y  $28$ .

Con el fin de averiguar qué ocurre con el modo radial  $l = 3$ , en la figura 3.30 se representan las curvas de estabilidad de los tres primeros modos  $n = 14$  en función de la razón de radios. En esta figura, se han marcado a la izquierda y derecha de las curvas, la estructura radial de los modos al final del intervalo. Las etiquetas de la figura muestran que el modo  $l = 4$  mantiene su estructura radial a lo largo de la curva punteada. Este modo es dominante en el intervalo  $\eta \in [0,65, 0,87]$ . A partir de este valor de la razón de radios, domina la línea continua del modo  $l = 2$  para razones de radio bajas que evoluciona de manera continua hasta presentar una estructura radial  $l = 3$  para  $\eta \rightarrow 1$ . El pico que presenta esta curva únicamente indica la zona donde la transición de una estructura radial a otra se ha completado. Por otra parte, el modo  $l = 3$  para  $\eta = 0,1$  transforma su estructura radial, presentando una estructura  $l = 2$  para  $\eta \rightarrow 1$ . De esta manera, parece difícil que el modo  $l = 4$  sea dominante en la aproximación de capa plana. Estos modos se distorsionan con la razón de radios de la misma manera que los modos  $n = 4, \dots, 10$  del caso  $\sigma = 0,7$  y  $\tau = 8000$ . Para ver esto con claridad, en la figura 3.31 se representan las isolíneas de la perturbación de la temperatura de las soluciones indicadas en la figura 3.30 para  $\eta = 0,4$  y  $\eta = 0,8$ , respectivamente. Si  $\eta = 0,1$ , todos los modos son *normales*, pues  $n = 14$  es suficientemente elevado. Sin embargo, la parte superior de la figura 3.31, donde se representan las isolíneas correspondientes a los puntos  $a$  y  $e$ , muestra que, a medida que  $\eta$  aumenta, las columnas se confinan en el interior del anillo y se inclinan hasta formarse una estructura similar a la que aparece en el caso  $\sigma = 0,7$ . A continuación, en el sentido de las agujas del reloj, las isolíneas correspondientes a los puntos  $b$  y  $f$  presentan el cambio opuesto. Mientras la casisimetría de reflexión en planos verticales preexistente está completamente



rota, la columna interior empieza a disminuir. Esta situación favorece la conexión de los dos vórtices y la formación de un único vórtice convectivo. Las isolíneas correspondientes a los puntos  $c$  y  $d$  muestran la evolución con la razón de radios del modo radial  $l = 4$  que se ha comentado anteriormente.

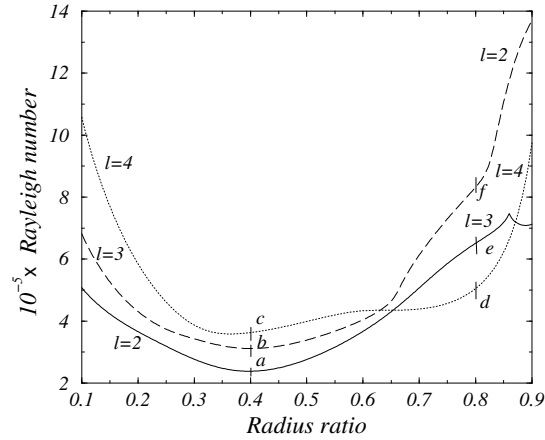


Figura 3.30: Curvas de estabilidad marginal para los tres primeros modos azimutales  $n = 14$  y diferente estructura radial, para  $\tau = 8000$  y  $\sigma = 7$ .

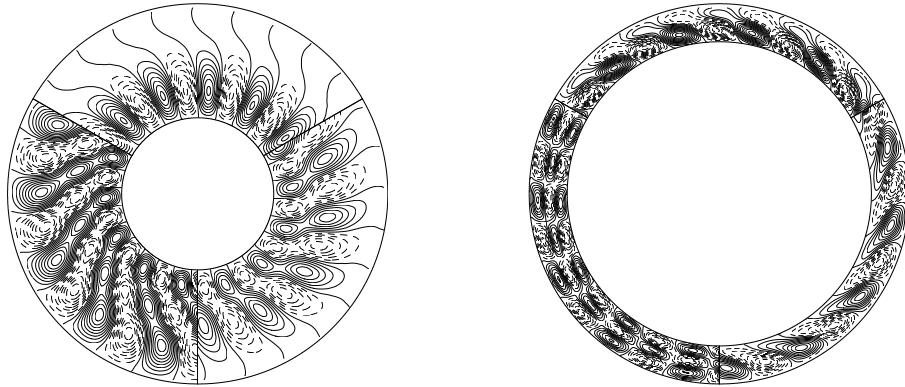


Figura 3.31: En el sentido de las agujas del reloj empezando por la parte superior se representan las isolíneas de la perturbación de la temperatura en los puntos  $a$ ,  $b$ ,  $c$  para  $\eta = 0,4$  (izquierda) y en los puntos  $e$ ,  $f$  y  $d$  para  $\eta = 0,8$  (derecha) de la figura 3.30. El resto de los parámetros son  $n = 14$ ,  $\sigma = 7$  y  $\tau = 8000$ .

Finalmente comentar que, al igual que ocurre para  $\sigma = 0,7$ , los modos que

presentan un número de onda azimutal bajo se transforman a modos *espirales* para un valor menor del parámetro de Coriolis, que los modos con  $n$  elevado. Por lo tanto, para  $\eta = 0,1$  no todos los modos están inclinados. Para  $\eta \rightarrow 1$  esto no es posible pues la simetría impone que no existan modos *espirales*.

### 3.4.5. Estabilidad del estado conductivo en función del número de Prandtl

El objetivo de este apartado es estudiar la estabilidad del estado conductivo en función del número de Prandtl y verificar la existencia de un límite asintótico para  $\sigma$  elevado. En la figura 3.32 se presentan, para  $\eta = 0,5$  y  $\tau = 5000$ , las curvas de estabilidad marginal de los modos dominantes y sus correspondientes frecuencias en función del número de Prandtl. En esta figura, y para el intervalo mostrado,  $\sigma \in [0,01, 10]$ , los modos dominan desde  $n = 6$  hasta  $n = 17$ . Se ha comprobado que  $n = 17$  es el modo azimutal dominante hasta  $\sigma = 100$ . Si  $\sigma \lesssim 0,95$ , los modos dominan consecutivamente hasta  $n = 17$ . El siguiente modo dominante es  $n = 13$ . Este hecho se observa con claridad en la figura 3.33, donde se representan las curvas de estabilidad marginal y las frecuencias de los modos que dominan en torno a  $\sigma \approx 0,95$ . Antes de alcanzar este valor, todas las soluciones dominantes son modos *normales* que presentan una estructura radial  $l = 2$ . A partir de ese valor del número de Prandtl, la convección está confinada principalmente cerca de la pared interior del anillo y los modos *espirales* son dominantes. El cambio que se produce en las soluciones para este valor de  $\sigma$  se puede apreciar claramente en la figura 3.34. En esta figura se representa el modo azimutal  $n = 13$ , dominante para dos valores diferentes del número de Prandtl  $\sigma = 0,27$  y  $0,97$ .

Los modos dominantes para  $\sigma > 0,95$ , sin embargo, pueden ser de dos tipos: modos que han experimentado anteriormente un cambio brusco en el polinomio radial dominante, pasando éste de  $l = 2$  a  $l = 3$ , y modos que han evolucionado de manera continua con  $\sigma$ , confinándose la convección en el interior, pero manteniendo una estructura radial  $l = 2$ . En las figuras 3.35 y 3.36 se representa la fase (izquierda) y la amplitud (derecha) de la función de corriente de dos modos que presentan diferente comportamiento al aumentar  $\sigma$ . En la primera se observa cómo el modo  $n = 11$  cambia su estructura radial, aumentando también el carácter *espiral* al variar ligeramente  $\sigma$  de  $0,402$  a  $0,406$  correspondiente a un cambio de modo. Posteriormente hay una evolución continua al aumentar el número de Prandtl hasta una estructura *espiral*  $l = 2$ . Por el contrario, en la figura 3.36 se observa como el modo  $n = 16$  no cambia su estructura radial  $l = 2$ , pero la espiralidad aumenta y la convección se confina en el interior del

anillo. Coherentemente con los resultados de la sección 3.4.4, para  $\sigma = 10$  ambos modos presentan la misma estructura radial  $l = 2$ , y la convección se desarrolla principalmente cerca de la pared interior del anillo.

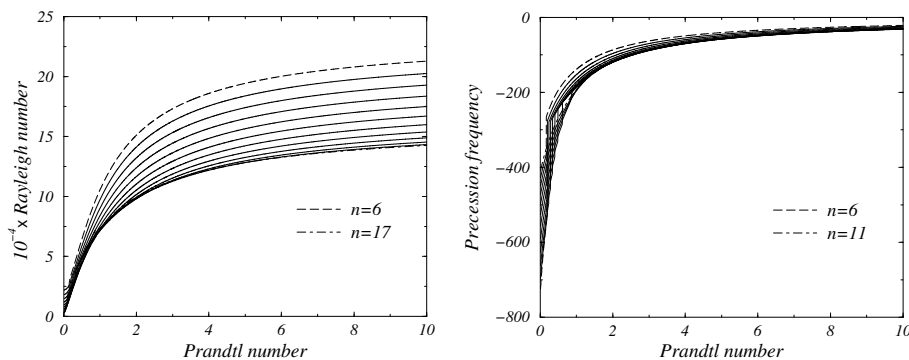


Figura 3.32: Curvas de estabilidad marginal (izquierda) y frecuencias (derecha) en función del número de Prandtl para  $\eta = 0,5$  y  $\tau = 5000$ .

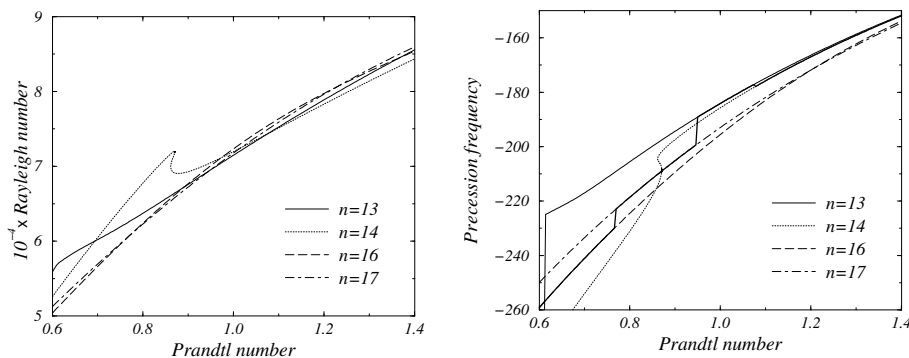


Figura 3.33: Ampliación de la figura 3.32 en torno a  $\sigma = 0,95$ . Sólo se presentan los modos dominantes en el intervalo considerado.

Si se consideran valores menores del parámetro de Coriolis,  $\tau = 2000$ , las soluciones presentan todas la misma estructura radial  $l = 2$  para cualquier valor del número de Prandtl. La convección ocupa todo el espacio entre los cilindros y las columnas de convección no aparecen inclinadas en el sentido de la rotación.

Para cualquiera de estos dos casos, considerados representativos, las soluciones para valores de  $\sigma$  muy elevados son cualitativamente equivalentes a las presentadas en la sección 3.4.4.

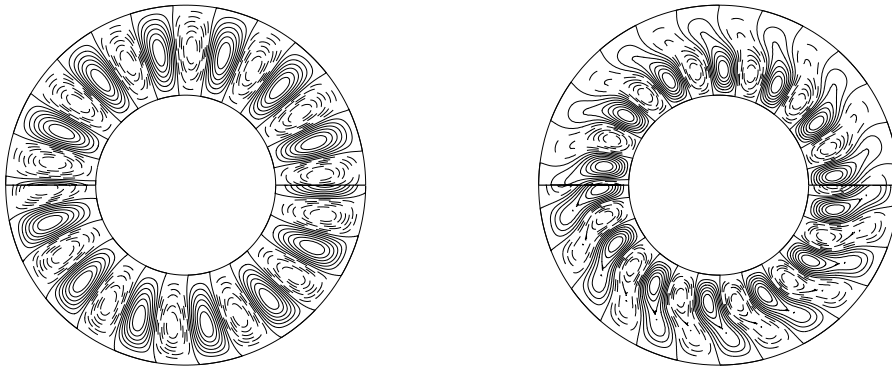


Figura 3.34: Isolíneas de la perturbación de la temperatura (parte superior) y de la función de corriente (parte inferior) del modo  $n = 13$  dominante para  $\sigma = 0,27$  (izquierda) y para  $\sigma = 0,97$  (derecha). El resto de los parámetros son  $\eta = 0,5$  y  $\tau = 5000$ .

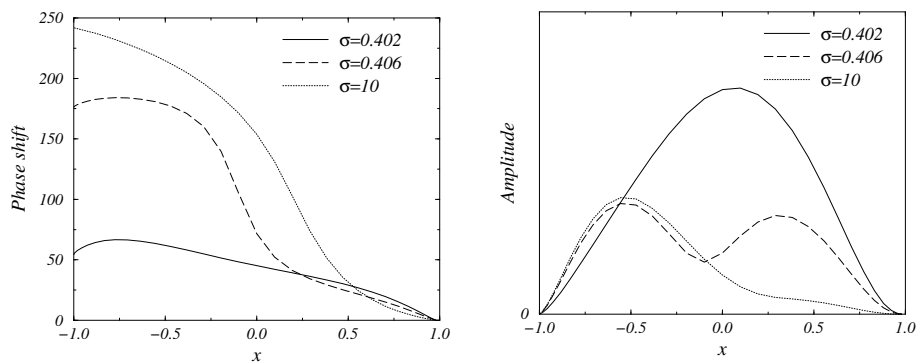


Figura 3.35: Fase,  $\varphi(x)$ , (izquierda) y amplitud,  $B(x)$ , de la función de corriente (derecha) para diferentes valores del número de Prandtl en el caso  $\tau = 5000$ ,  $\eta = 0,5$  y  $n = 11$ .

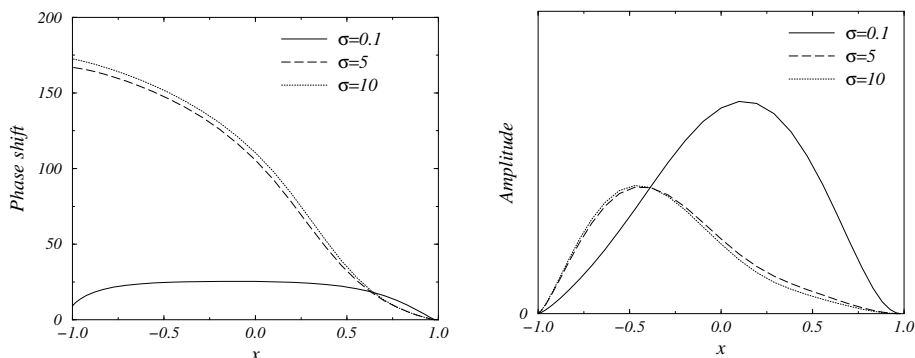


Figura 3.36: Fase,  $\varphi(x)$ , (izquierda) y amplitud,  $B(x)$ , de la función de corriente (derecha) para diferentes valores del número de Prandtl en el caso  $\tau = 5000$ ,  $\eta = 0,5$  y  $n = 16$ .

### 3.5. Discusión

En este capítulo se ha mostrado cómo en un anillo cilíndrico en rotación, al igual que en una capa esférica en rotación, el principio de la convección depende fuertemente del número de Prandtl. Se ha hecho una distinción física entre las inestabilidades hidrodinámicas, dominantes para bajos números de Prandtl y las inestabilidades térmicas, que dominan para números de Prandtl moderados y altos (Pino, Mercader & Net, 2000).

Para resumir el efecto de la rotación en los modos convectivos dominantes, se presenta en la figura 3.37 la fase,  $\varphi(x)$ , definida en la sección 3.3.2, en función de la coordenada radial de algunos modos dominantes, para los tres números de Prandtl estudiados en profundidad y para dos valores diferentes del parámetro de Coriolis,  $\tau = 2000$  y  $\tau = 10000$ . Las líneas punteadas correspondientes a  $\sigma = 0,025$  son prácticamente constantes, excepto cerca de las paredes y la pendiente de las curvas correspondientes a  $\sigma = 0,7, 7, \tau = 2000$  es tan pequeña que, en cualquier caso, las columnas mantienen aproximadamente la simetría de reflexión en planos verticales. Para  $\tau = 10000$ , la pendiente de la fase es  $d\varphi(x)/dx \geq 1$ , lo que indica que hay una tendencia a pasar de modos *normales* a *espirales* a medida que aumenta la rotación. Este último caso cumple la condición de espiralidad definida en Zhang (1992). Sin embargo, de acuerdo con la teoría asintótica de convección térmica en sistemas a elevadas rotaciones de Yano (1992) y los resultados numéricos de Zhang (1992), en geometría esférica, cuanto menor sea el número de Prandtl, mayor es el efecto espiral de las

soluciones *normales*. Por lo tanto, utilizar el anillo cilíndrico en rotación para el estudio de la convección en cuerpos autogravitantes tiene sentido si el comienzo de la convección se puede describir mediante convección columnar no excesivamente espiral. Si no, la morfología de los modos seleccionados y la dinámica subsiguiente puede ser completamente diferente. Obviamente, el límite de validez depende de la rotación.

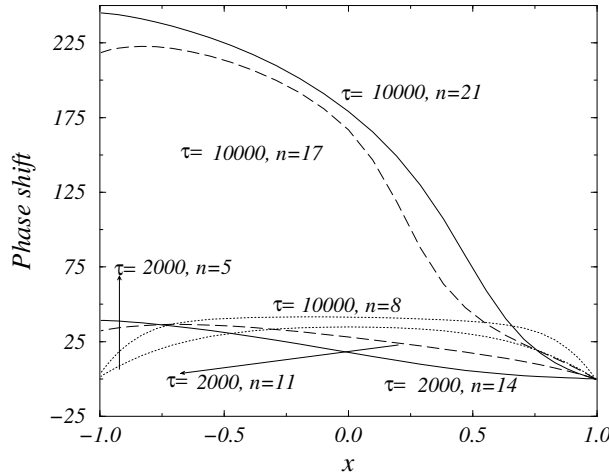


Figura 3.37: Fase,  $\varphi(x)$ , de la función de corriente de los modos dominantes para  $\tau = 2000$  y  $\tau = 10000$ . El resto de los parámetros fijados son  $\eta = 0,5$  y  $\sigma = 7$  (línea continua),  $\sigma = 0,025$  (línea punteada) y  $\sigma = 0,7$  (línea a trazos).

También se han comparado las leyes potenciales del número de Rayleigh crítico y de la frecuencia de nuestros resultados numéricos con las expresiones

$$Ra_c = C(\sigma)\tau^{4/3} \quad \text{and} \quad \omega_c = C(\sigma)\tau^{2/3},$$

obtenidas por Busse & Or (1986) en la aproximación de capa plana. Para  $\sigma = 0,7$ ,  $7$ ,  $\eta = 0,5$  se ha obtenido una ley potencial con exponente 1,26 para  $Ra_c$  y 0,69 para  $\omega_c$ , que concuerdan bastante bien con la ley anterior. Sin embargo, si  $\sigma = 0,025$ , los resultados son 0,76 para  $Ra_c$  y 0,89 para  $\omega_c$ . Suponemos que esto es debido a que la onda de Rossby es, de hecho, una onda topográfica y una pequeña variación en la geometría del dominio tiene una gran influencia en todas las características de la onda. Por otro lado, como una columna de convección se produce por una inestabilidad térmica, y si las condiciones de contorno permiten el mismo tipo de bifurcación, la geometría sólo produce cambios menores en los coeficientes de las leyes potenciales y en la deformación de las columnas. En definitiva, la aproximación de capa plana y la geometría anular deben utilizarse cuidadosamente para números de Prandtl bajos.

De nuestros resultados y de los de otros autores se ha estimado que, para  $\sigma \lesssim O(1)$ , los modos marginales de convección son columnas térmicas ligeramente inclinadas tanto en geometría esférica como anular. Por esta razón, se ha presentado una descripción detallada de la dependencia radial y azimutal de los modos térmicos con la razón de radios y con el parámetro de Coriolis. Es interesante señalar que se han encontrado, en el régimen lineal, modos dominantes inclinados con estructura radial  $l = 2$  y  $l = 3$ , e incluso el modo  $l = 4$  podría ser dominante para otros valores de los parámetros. Si se fija un valor de la razón de radios, los modos *espirales* son dominantes a altas rotaciones, mientras que si se mantiene constante el valor del parámetro de Coriolis, estos modos son dominantes para razones de radios bajas. Por consiguiente, la influencia de la rotación es mayor en las grandes escalas azimutales de convección.

La competencia de los modos azimutales con una estructura radial diferente de la básica,  $l = 2$ , es una indicación de la tendencia del fluido a dividir la zona convectiva en capas de diferente estructura en el régimen no lineal. Para un mejor entendimiento de la convección en los sistemas en rotación, en el próximo capítulo se presentan las soluciones no lineales en forma de ondas viajeras y se analiza su estabilidad lineal.

## Capítulo 4

# Ondas térmicas de Rossby

En el capítulo anterior se ha mostrado cómo, dependiendo del valor de los parámetros, la convección puede desarrollarse formando diferentes estructuras. Se ha hecho una distinción clara entre las inestabilidades hidrodinámicas que aparecen para valores bajos del número de Prandtl y las inestabilidades, esencialmente térmicas, dominantes para números de Prandtl moderados y altos.

En este capítulo se estudian las propiedades no lineales de la convección, que aparece en forma de ondas que precesionan, después de la bifurcación de Hopf del estado conductivo. Como se mostró en el capítulo anterior, para números de Prandtl moderados y altos la inestabilidad está inducida tanto por efectos térmicos como por la rotación, de acuerdo con los resultados obtenidos por Busse & Or (1986). Para números de Prandtl bajos se ha encontrado que, independientemente del valor del parámetro de Coriolis, los modos dominantes de tipo inercial son *normales*. Por lo tanto, los modos lineales para números de Prandtl bajos difieren sustancialmente de los obtenidos en el caso de capas esféricas (Zhang & Busse, 1987; Zhang, 1994). Por otra parte, Tilgner & Busse (1997) mostraron que, aunque la convección *normal* es dominante para valores elevados del número de Prandtl, presenta una débil rotación diferencial fuertemente dependiente de la coordenada en la dirección del eje de rotación. Por lo tanto, la configuración anular debe utilizarse para modelar la dinámica de una corteza esférica preferentemente para fluidos con número de Prandtl del orden de la unidad. En este capítulo se ha considerado  $\sigma = 0,7$ .

La evidencia experimental (Azouni *et al.*, 1986) de que el carácter bidimensional de las soluciones se mantiene hasta números de Rayleigh elevados, hace



posible limitar el estudio no lineal a este caso. Se han buscado las soluciones no lineales en forma de ondas viajeras, independientes de la coordenada axial, solucionando las ecuaciones no lineales escritas en función de los potenciales de la velocidad. Se ha utilizado una técnica de continuación, que permite encontrar soluciones no lineales estacionarias al variar cualquier parámetro del sistema. El análisis de estabilidad lineal de las soluciones se ha realizado mediante un método de Floquet. Con esta técnica se han determinado los diferentes tipos de bifurcación secundaria que tienen lugar en el sistema dependiendo tanto del parámetro de Coriolis, como de la razón de radios del anillo.

### 4.1. Discretización de las ecuaciones

Desarrollando los operadores jacobiano de las ecuaciones no lineales 2.19, se obtiene

$$(\sigma^{-1}\partial_t - \nabla_-^2) f = \sigma^{-1} P_\theta \left[ \nabla_h^2 \psi \cdot \frac{1}{r} \partial_\theta \psi \right], \quad (4.1a)$$

$$\begin{aligned} (\sigma^{-1}\partial_t - \nabla_h^2) \nabla_h^2 \psi &= \frac{Ra}{r} \partial_\theta T + \frac{\tau}{r} \partial_\theta \psi + \frac{\sigma^{-1}}{r} \nabla_-^2 f \partial_\theta \psi \\ &\quad - \frac{\sigma^{-1}}{r} f (\partial_\theta \nabla_h^2 \psi) + \frac{\sigma^{-1}}{r} [\partial_\theta \nabla_h^2 \psi \partial_r \psi - \partial_r \nabla_h^2 \psi \partial_\theta \psi], \end{aligned} \quad (4.1b)$$

$$(\partial_t - \nabla_h^2) T = -\frac{1}{r^2 \ln \eta} \partial_\theta \psi + \frac{1}{r} [\partial_\theta T \partial_r \psi - \partial_r T \partial_\theta \psi] - f \left( \frac{1}{r} \partial_\theta T \right), \quad (4.1c)$$

donde todos los parámetros y operadores ya han sido definidos en el capítulo 2. Estas ecuaciones, excepto en lo que respecta al término de Coriolis, son las mismas que las utilizadas por Alonso (1999) para estudiar la dinámica de las columnas de Taylor no lineales.

Las condiciones de contorno en  $r_1$  y  $r_2$  son

$$f = T = \psi = \partial_r \psi = 0. \quad (4.2)$$

Como se ha visto en el capítulo anterior, la solución en el inicio de la convección es una estructura periódica de número de onda  $n$ , que precesiona a velocidad constante en el sistema de referencia del anillo. Con el fin de obtener este tipo de soluciones no lineales, se han desarrollado las variables  $f$ ,  $\psi$  y  $T$  como combinación lineal de un sistema completo de funciones de la siguiente

manera

$$f(r, t) = \sum_{j=2}^J a_j p^j(x), \quad (4.3a)$$

$$\psi(r, \theta, t) = \sum_{l=1}^N \sum_{j=4}^J b_{l,j} e^{iln(\theta-\omega t)} h^j(x) + c.c., \quad (4.3b)$$

$$T(r, \theta, t) = \sum_{l=0}^N \sum_{j=2}^J c_{l,j} e^{iln(\theta-\omega t)} p^j(x) + c.c., \quad (4.3c)$$

donde la variable  $x$ , relacionada con la coordenada radial, ya ha sido definida anteriormente,  $a_j$ ,  $b_{l,j}$  y  $c_{l,j}$  son coeficientes independientes del tiempo, siendo complejos los dos últimos, y  $\omega$  es la velocidad de precesión de la onda en unidades térmicas. Se cumple que  $\omega = -\omega_{onset}/n$ . Si  $\omega > 0$  la onda se desplaza en el sentido de la rotación y en sentido contrario si  $\omega < 0$ . Las funciones  $h^j(x)$  y  $p^j(x)$  son las combinaciones lineales de polinomios de Tchebyshev que satisfacen las condiciones de contorno en las paredes del anillo definidas en la sección 3.3.1.

Si se realiza el cambio de variable  $\tilde{\theta} = \theta - \omega t$ , se obtiene a partir de las ecuaciones 4.1, un sistema de ecuaciones estacionarias, que se ha resuelto numéricamente mediante una técnica espectral de Galerkin–Fourier en  $\tilde{\theta}$  y un método de colocación en  $x$ . En este caso, debido a la invarianza por rotación de las soluciones, es necesario fijar la fase de la solución imponiendo *a priori* una relación entre los coeficientes y utilizando posteriormente la correspondiente ecuación para determinar la velocidad de precesión.

Para estudiar la dependencia de la solución con el número de Rayleigh, se han obtenido las ondas térmicas de Rossby no lineales como soluciones estacionarias de las ecuaciones de la temperatura y de la función de corriente mediante un método de continuación.

El método de continuación utilizado en este trabajo ha sido desarrollado por J. Sánchez, que lo había aplicado al cálculo de los vórtices de Taylor del problema Taylor–Couette (Sánchez, 1994). Este método permite encontrar las soluciones estacionarias del sistema de ecuaciones 4.1 ( $\mathbf{H}(\mathbf{x}) = 0$ ) de la siguiente manera. Dada un función dependiente del parámetro  $p$ ,

$$\mathbf{H}(\mathbf{x}, p) : \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^{n+1} \longrightarrow \mathbb{R}^n,$$

se estudia la dependencia de las soluciones de la ecuación  $\mathbf{H}(\mathbf{x}, p) = 0$  con el parámetro  $p$ . Para ello, se han de ir resolviendo los sistemas de ecuaciones  $\mathbf{H}(\mathbf{x}, p_m) = 0$ , donde  $p_m = p_0 + m\Delta p$ , tomando como condición inicial la solución del problema anterior. El parámetro respecto del cual se realiza la continuación se trata como una variable más del problema.

## 4.2. Estabilidad lineal de las ondas térmicas de Rossby no lineales

En este trabajo se ha estudiado la estabilidad lineal de las ondas térmicas de Rossby no lineales con número de onda fundamental  $n$  mediante un análisis de Floquet. Según este método (explicado en profundidad en Prat, 1996, cap. 5), para analizar la estabilidad de una solución estacionaria periódica, con longitud de onda fundamental  $2\pi/n$ , se le superpondrán perturbaciones infinitesimales de la forma

$$\psi_m^*(r, \tilde{\theta}, t) = \sum_{l=-N}^N \sum_{j=4}^J b_{l,j}^* e^{i(l+d_m)n\tilde{\theta}} h^j(x) e^{\lambda_m t}, \quad (4.4a)$$

$$T_m^*(r, \tilde{\theta}, t) = \sum_{l=-N}^N \sum_{j=2}^J c_{l,j}^* e^{i(l+d_m)n\tilde{\theta}} p^j(x) e^{\lambda_m t}, \quad (4.4b)$$

donde  $d_m = m/n$ ,  $m$  es un número entero que varía entre 0 y  $n-1$ , y se resolverán los correspondientes problemas de valores propios para cada valor de  $m$ . Si  $m = 0$ , es necesario eliminar del desarrollo de  $\psi_0^*$  el término con índice  $l = 0$  y añadir

$$f^*(r, t) = \sum_{j=2}^J a_j^* p^j(x) e^{\lambda_0 t}. \quad (4.4c)$$

La solución no lineal con número de onda fundamental  $n$  es inestable si, para algún valor de  $m$ , la parte real de  $\lambda_m$  es positiva, de lo contrario es estable. Cuando, para algún valor de  $m$ ,  $\lambda_m$  cruza el eje imaginario se produce una bifurcación.

Dependiendo del valor de  $m$  pueden distinguirse dos tipos de perturbaciones diferentes: las que mantienen la periodicidad espacial de la onda básica y las que la rompen. El caso  $m = 0$  corresponde a perturbaciones con el mismo número de onda fundamental que la solución básica y por lo tanto, la periodicidad espacial se mantiene. Este tipo de perturbaciones se denominarán superarmónicas. En este caso, siempre se obtiene un valor propio cero correspondiente a la solución trivial; otro autovalor nulo indica que la solución ha experimentado un bifurcación silla-nodo.

El caso  $m \neq 0$  es completamente diferente. Como el operador lineal que describe el problema de estabilidad es real, las funciones propias del problema con  $d_{n-m}$  pueden obtenerse conjugando las funciones propias del caso  $d_m$ . De esta manera, para estudiar la estabilidad de las ondas no lineales es necesario considerar únicamente las perturbaciones que presentan  $m \in [1, n/2]$  si  $n$  es

par, y  $m \in [1, (n-1)/2]$  si es impar. Este tipo de perturbaciones con  $d_{m \neq 0}$  se denominarán subarmónicas. De acuerdo con 4.4, si una solución periódica con número de onda fundamental  $n$  y velocidad precesión  $\omega$  experimenta una bifurcación de este tipo [ $\Re(\lambda_m) = 0$ ], se excitan los números de onda  $k_l = ln + m$  y  $k'_l = (l+1)n - m$ , cuyas frecuencias son  $\omega_l = k_l\omega - \Im(\lambda_m)$  y  $\omega'_l = k'_l\omega + \Im(\lambda_m)$ . De esta manera, en una bifurcación de este tipo la periodicidad básica  $2\pi/n$  se rompe, apareciendo una nueva solución de mayor periodo. Las interacciones no lineales entre los diferentes modos azimutales hacen que, a amplitud finita, el número de onda fundamental de la solución bifurcada sea el máximo común divisor de  $m$  y  $n$ .

### 4.3. Número de Nusselt y energía del flujo medio

La magnitud habitual para medir el transporte de calor a través de una superficie en los problemas de convección térmica es el número adimensional de Nusselt. Éste se define como el cociente entre el flujo de calor total,  $\dot{Q}_t$  y el flujo de calor transportado por conducción,  $\dot{Q}_c$ . Estos flujos de calor se pueden calcular definiendo, a partir de la ecuación de la temperatura 2.3c, el vector de densidad de flujo de calor  $\mathbf{J} = \mathbf{u}T - \nabla T$ .

En el caso que nos ocupa, en el que el gradiente conductivo es radial, se considera el flujo de calor a través de la superficie  $r = cte$ . Por otra parte, como debido a la aproximación casigeostrófica no existe dependencia en  $z$ , se puede evaluar el flujo a través de una circunferencia y calcular el flujo total multiplicando por la altura del anillo. La densidad de flujo de calor conductivo ( $\mathbf{u} = 0$ ), independiente de  $\theta$ , resulta

$$\mathbf{J}_c = -\partial_r T_c \hat{\mathbf{e}}_r = -\frac{1}{r \ln \eta} \hat{\mathbf{e}}_r,$$

donde se ha utilizado el perfil de temperaturas del estado conductivo definido en la expresión 2.5. Al ser la densidad de flujo de calor conductivo independiente de  $\theta$ , el promedio del flujo de calor a través de una circunferencia coincide con  $\mathbf{J}_c$ .

De la densidad de flujo de calor total sólo nos interesa la componente radial  $J_{t_r} = \mathbf{u}T - \partial_r T$ . En este trabajo, como se ha considerado el flujo a través del anillo exterior,  $r = r_2$ , ya que aquí  $\mathbf{u} = 0$ , la densidad de flujo de calor en esta

superficie es

$$J_{t_r}(r = r_2) = [-\partial_r T]_{r_2} = [-\partial_r(T' + T_c)]_{r_2} = [-\partial_r T']_{r_2} - \frac{1}{r_2 \ln \eta}.$$

Si se desarrolla en serie de Fourier la desviación del estado conductivo,  $T'$ , al promediar sobre la circunferencia de radio  $r_2$ , el único modo que tiene contribución no nula es el modo cero, resultando el flujo de calor total promediado

$$\dot{Q}_t = \langle J_{t_r} \rangle = [-\partial_r T'_0(r)]_{r_2} - \frac{1}{r_2 \ln \eta},$$

y el número de Nusselt promediado en el exterior del anillo es

$$Nu = \frac{\dot{Q}_t}{\dot{Q}_c} = 1 + r_2 \ln \eta [\partial_r T'_0(r)]_{r_2}. \quad (4.5)$$

En todas las graficas que se presentan en este trabajo se representará el número de Nusselt menos 1, que es el cociente entre el flujo de calor transportado únicamente por convección y el transportado por conducción.

Por otra parte, con el fin de caracterizar la contribución del flujo medio  $f$  al campo de velocidades, se ha introducido el cociente entre la energía cinética del flujo medio  $E_f$  y la energía cinética total  $E_t$

$$r_f = \frac{\langle E_f \rangle}{\langle E_t \rangle}, \quad (4.6)$$

donde ahora el símbolo  $\langle \rangle$  representa el promedio sobre todo el dominio anular, que se escribe

$$\frac{1}{\pi(r_2^2 - r_1^2)} \int_r \int_\theta r dr d\theta$$

## 4.4. Resultados

En esta sección se presentarán las soluciones no lineales que proceden o están relacionados con los modos columnares *espirales* y columnares *normales* identificados en el análisis lineal y se estudiará su estabilidad.

En el rango de parámetros estudiados y para el valor del número de Prandtl considerado en este capítulo,  $\sigma = 0,7$ , es suficiente considerar una resolución  $N = 8$  y  $J = 24$  para obtener tres cifras significativas en el número de Nusselt y en la velocidad de las ondas térmicas de Rossby. Con esta misma resolución, el valor del número de Rayleigh y de  $\mathfrak{S}(\lambda)$  en el punto de la bifurcación se obtienen con cinco y más de cuatro cifras significativas, respectivamente.

#### 4.4.1. Ondas térmicas de Rossby al inicio de la convección

Cuando se consideran perturbaciones de número de onda  $n$ , la bifurcación que experimenta el estado conductivo es una bifurcación de Hopf en un sistema con simetría  $SO(2)$ . De acuerdo con Golubitsky, Stewart & Shaeffer (1985) existe una única rama de soluciones periódicas, formada por ondas que precesionan y que tienen simetría  $Z_n$ , que bifurcan de dicho estado. Este apartado está dedicado únicamente al análisis de esta rama de soluciones primarias que provienen de modos dominantes entre cada una de las dos familias del problema lineal, para los valores fijados de los parámetros.

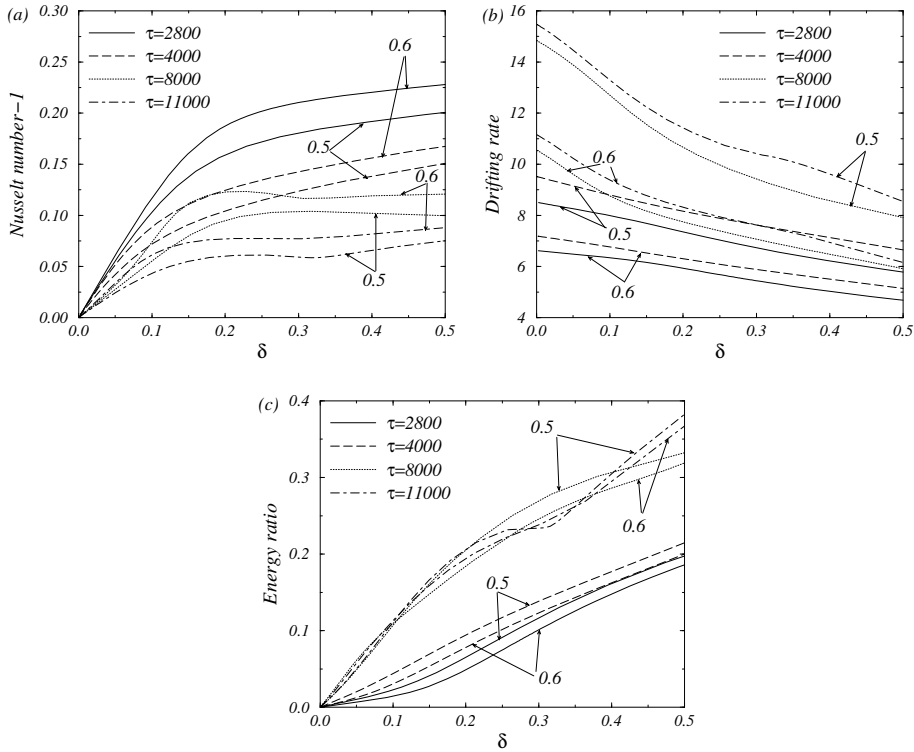


Figura 4.1: (a) Número de Nusselt,  $Nu-1$ , (b) velocidad de precesión,  $\omega$ , y (c) cociente de energía asociada al flujo medio,  $r_f$ , en función del parámetro  $\delta = (Ra - Ra_c)/Ra_c$  de las soluciones que bifurcan del estado conductivo para  $\eta = 0,5, 0,6$  y diferentes valores de  $\tau$ . Las soluciones provienen de los modos dominantes de la estabilidad lineal del estado conductivo, *normales* para  $\tau = 2800, 4000$  y *espirales* para  $\tau = 8000, 11000$ . En todas las gráficas  $\sigma = 0,7$ .

Para analizar la evolución de las ondas térmicas de Rossby no lineales cor-

respondientes a las dos familias de modos lineales, en la figura 4.1 se representa para diferentes valores de  $\tau$  y para las soluciones no lineales que provienen de los modos dominantes que bifurcan del estado conductivo, el número de Nusselt,  $Nu - 1$ , la velocidad de precesión,  $\omega$ , y el cociente de energías cinéticas,  $r_f$ , en función del parámetro de control  $\delta = (Ra - Ra_c)/Ra_c$ . Estas soluciones provienen de diferentes familias de modos. Para  $\tau = 2800, 4000$  las soluciones provienen de modos *normales* y de modos *espirales* para  $\tau = 8000, 11000$ . En la descripción de las soluciones no lineales se llamarán normales a las que provienen de este tipo de modos y soluciones espirales a las que provienen de modos *espirales*. El cambio en la pendiente del número de Nusselt y de  $r_f$  que se observa para  $\tau = 11000$  ( $\eta = 0,5$ ) también aparece para  $\tau = 8000$  y valores mayores de  $\delta$ . Como se puede observar, para soluciones de la misma familia, la eficiencia en el transporte de calor disminuye cuando aumenta  $\tau$ . Este efecto podría deberse al incremento en la velocidad de la onda (ver la figura 4.1b), que dificulta desplazamiento del fluido de la pared caliente a la fría. La pendiente del número de Nusselt para valores pequeños de  $\delta$  también depende del parámetro de Coriolis. Este resultado difiere del encontrado por Busse & Or (1986) en la aproximación de capa plana y condiciones de contorno libres, ya que para estos autores el número de Nusselt era a primer orden independiente del parámetro de Coriolis. En la figura 4.1a se observa también cómo, cuando la razón de radios,  $\eta$ , decrece, el valor del número de Nusselt disminuye para los mismos valores de  $\tau$  y  $\delta$ . De nuevo, este hecho está asociado a un incremento de la velocidad de precesión.

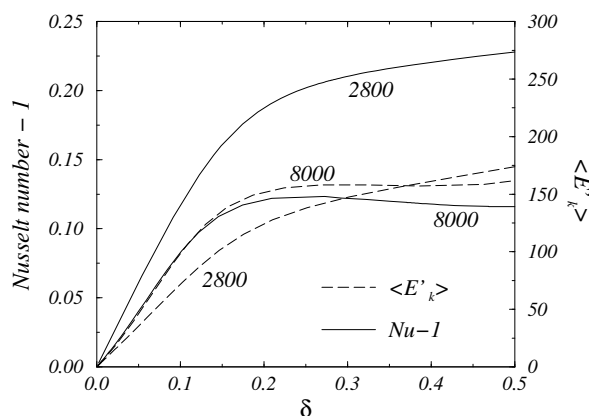


Figura 4.2: Número de Nusselt,  $Nu - 1$ , (línea continua) y  $\langle E'_k \rangle$  (línea a trazos) en función del parámetro  $\delta = (Ra - Ra_c)/Ra_c$  de las soluciones dominantes para  $\sigma = 0,7$ ,  $\eta = 0,5$  y dos rotaciones diferentes, indicadas en cada curva,  $\tau = 2800$  y  $8000$ .

Como la pendiente de la fase de la amplitud compleja,  $d\varphi(x)/dx$ , de los modos *espirales* es mucho mayor que la de los *normales* (ver la figura 3.37), las interacciones no lineales entre aquellos hacen que el término correspondiente al tensor de Reynolds sea mayor y como consecuencia, se produzca un mayor flujo medio (Zhang, 1992). Por lo tanto, la pendiente de  $r_f$  de las soluciones espirales para valores bajos de  $\delta$  es mayor que la de las soluciones normales. Cuando  $\eta$  disminuye de 0,6 a 0,5, se ha comprobado que las soluciones presentan  $d\varphi(x)/dx$  mayor para el mismo valor de  $\tau$ . Esto explica los resultados presentados en la figura 4.1c para las soluciones normales cuando  $\delta$  es pequeño. Sin embargo, para las soluciones espirales la pendiente de  $r_f$  y el promedio de la energía cinética asociada al flujo medio decrece al hacerlo  $\eta$  para valores bajos de  $\delta$ . Esto sugiere que deben considerarse otros factores adicionales al valor de la pendiente de la fase de la amplitud compleja del modo lineal asociado para entender este comportamiento. Es importante remarcar que la energía cinética sin considerar el flujo medio,  $\langle E'_k \rangle$ , tiene una dependencia con el número de Rayleigh similar a la del número de Nusselt, aunque el escalado depende de la solución. Por ejemplo, como se muestra en la figura 4.2, a pesar de que el número de Nusselt de la solución normal para  $\tau = 2800$  es mayor que el de la espiral a  $\tau = 8000$ ,  $\langle E'_k \rangle$  asociada a la solución normal es menor que la de la solución espiral.

Finalmente para mostrar con claridad la mayor eficacia en el transporte de calor de los modos *espirales* al inicio de la convección, en las figuras 4.3a, 4.3b, y 4.3c se representa, respectivamente, el número de Nusselt,  $Nu - 1$ , la velocidad de precesión,  $\omega$ , y el cociente de energías,  $r_f$ , en función del parámetro,  $\delta$ , de las soluciones que bifurcan del modo *normal* y del modo *espiral* con  $n = 37$  para  $\eta = 0,7$  y  $\tau = 8000$ . A pesar de presentar un cociente de energías mayor debido a la mayor espiralidad, las soluciones espirales presentan una mayor eficiencia en el transporte de calor al inicio de la convección. Este hecho puede deberse, aparte de a la menor velocidad de precesión, al mayor grado de correlación entre velocidad radial y temperatura que presentan los modos *espirales*.



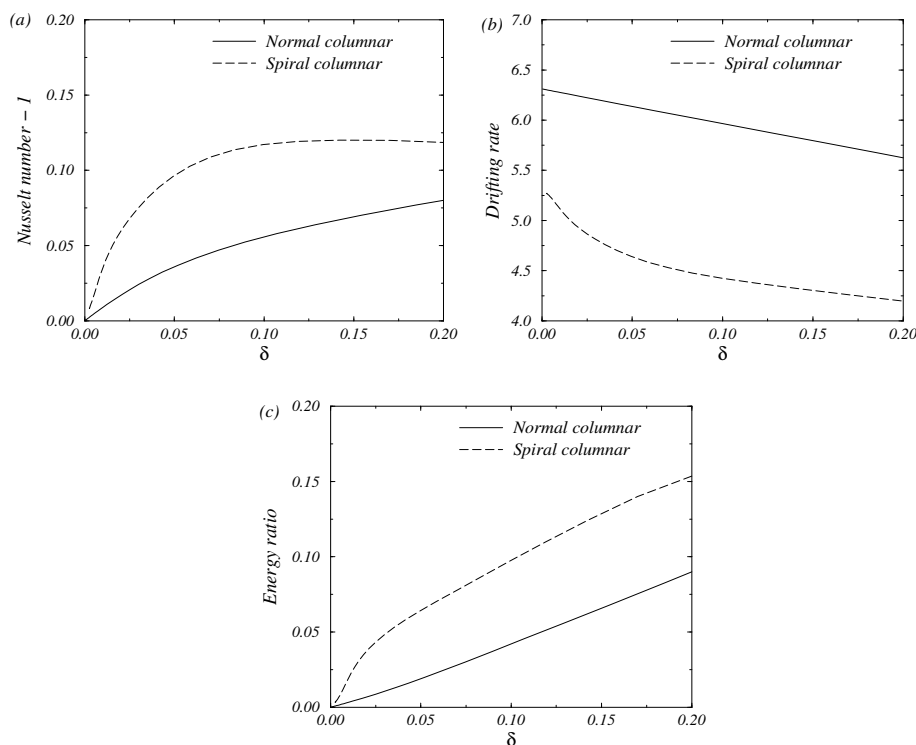


Figura 4.3: (a) Número de Nusselt,  $Nu-1$ , (b) velocidad de precesión,  $\omega$ , y (c) cociente de energía asociada al flujo medio,  $r_f$ , en función del parámetro  $\delta = (Ra - Ra_c)/Ra_c$  de las soluciones que bifurcan del modo *normal* (línea continua) y del modo *espiral* (línea rayada) con número de onda azimutal  $n = 37$  para  $\tau = 8000$  y  $\eta = 0,7$ . En todas las gráficas  $\sigma = 0,7$ .

#### 4.4.2. Marco general

En esta sección se analizan tanto las soluciones que bifurcan del estado conductivo, como otras soluciones que guardan alguna relación con éstas, cuando se consideran valores mayores del parámetro  $\delta$ . Estas soluciones se compararán principalmente con las obtenidas en la aproximación de capa plana con  $\epsilon = 0$  (sin curvatura de las tapas) para analizar el efecto de la ruptura de la simetría respecto al plano medio de la capa. Por este motivo, ha sido necesario calcular las soluciones en dicha aproximación; ésto se ha realizado con las mismas técnicas numéricas se han descrito anteriormente. Las correspondientes ecuaciones pueden encontrarse en los numerosos trabajos de F. H. Busse y colaboradores. Presentaremos a continuación diferentes diagramas de ramificaciones de solu-

ciones asociadas a los modos dominantes *normales* o *espirales*.

### Soluciones normales

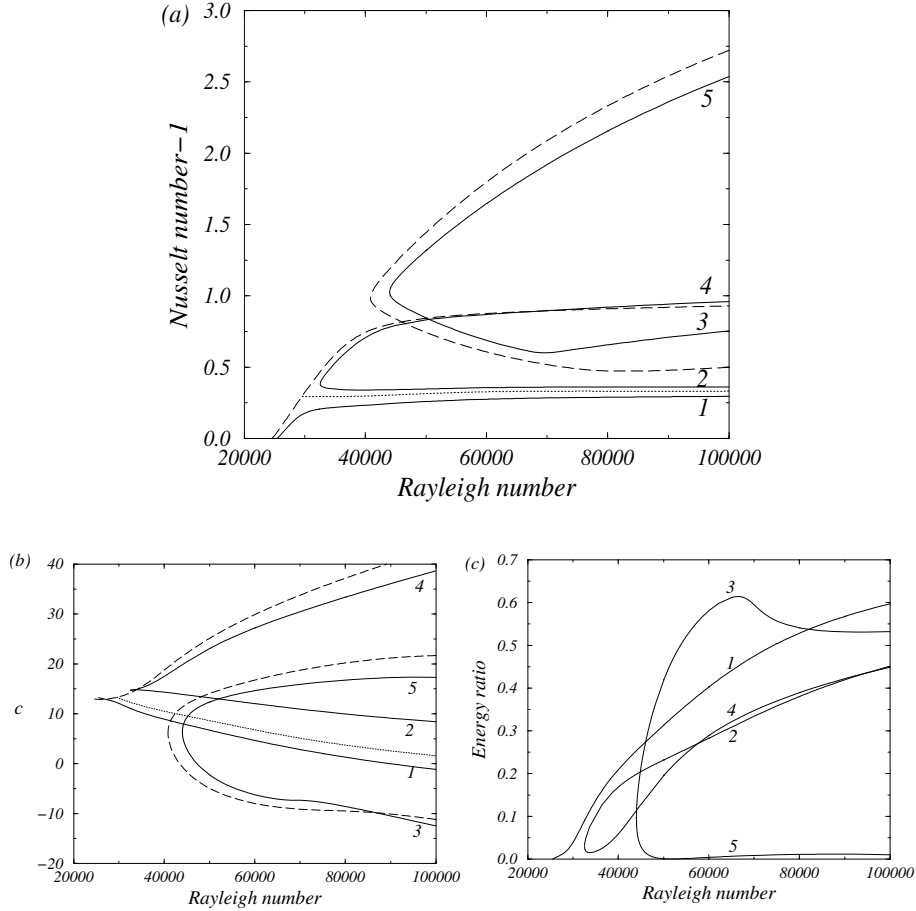


Figura 4.4: (a) Número de Nusselt,  $Nu - 1$ , (b) velocidad de fase lineal,  $c = \omega \bar{r}$ , y (c) cociente entre la energía asociada al flujo medio y la energía cinética total,  $r_f$ , en función del número de Rayleigh,  $Ra$ , de las ondas viajeras. Las líneas continuas corresponden a soluciones de número de onda fundamental  $n = 17$  para un valor de la razón de radios  $\eta = 0,6$ . En (a) y (b) las líneas a trazos (soluciones invariantes por el operador  $T_{a/2\kappa}$ ) y las líneas punteadas corresponden a soluciones del problema en la aproximación de capa plana ( $\alpha_c^{(sg1)} = 8,68$ ). En ambos casos, las soluciones que bifurcan del estado conductivo provienen de los modos dominantes del análisis lineal.  $\tau = 2800$  y  $\sigma = 0,7$ .

En la figura 4.4 se presenta con línea continua el número de Nusselt,  $Nu - 1$ , una estimación de la velocidad de fase lineal,  $c = \omega\bar{r}$ , y el cociente de energías,  $r_f$ , de las soluciones correspondientes a ondas viajeras uniformes con número de onda fundamental  $n = 17$ , para  $\eta = 0,6$  y  $\tau = 2800$ . La solución que bifurca del estado conductivo para un valor del número de Rayleigh  $Ra_c = 25439$  es normal. Con el fin de estudiar la conexión de estas soluciones con las encontradas en la aproximación de capa plana, se ha incluido en las figuras 4.4a y 4.4b, mediante líneas a trazos y punteadas, el número de Nusselt de las soluciones para  $\tau = 2800$  y número de onda  $\alpha_c^{(sg1)} = 8,68$ , que corresponde al valor crítico para este valor del parámetro de Coriolis; el número de Rayleigh crítico es  $Ra_c^{(sg1)} = 24624$ . Las líneas a trazos representan las *ondas térmicas simétricas de Rossby*, soluciones invariantes por el operador  $T_{a/2\kappa}$  (ver página 20,  $a = 2\pi/\alpha$ ) y por lo tanto presentan un flujo medio simétrico. Para este tipo de soluciones, el operador de reflexión  $\kappa$  actúa de la misma manera que una evolución en el tiempo de medio periodo de la onda. La línea punteada representa soluciones que ya no son invariantes por el operador  $T_{a/2\kappa}$ . Esta rama aparece debido a una bifurcación de las soluciones primarias. Ésta es una bifurcación de *pitchfork* que rompe la simetría  $T_{a/2\kappa}$  y que da lugar a la llamada solución de *mean flow* en los trabajos de Or & Busse (1987) y Schnaubelt & Busse (1992). Cuando se considera la curvatura de las paredes, la simetría de reflexión  $\kappa$  se rompe y la bifurcación es imperfecta, como se puede observar en la figura 4.4, desdoblándose la rama punteada en las ramas 1 y 2, ya que proceden de dos soluciones relacionadas por la transformación  $\kappa$  que en la aproximación de capa plana presentan los mismos valores de  $Nu$ ,  $\omega$  y  $r_f$ . Este hecho fue anticipado por Schnaubelt & Busse (1992), en cuyo trabajo la simetría  $\kappa$  se rompe introduciendo tapas cónicas en la aproximación de capa plana.

La curva de soluciones desconectada en la aproximación de capa plana (de nuevo invariantes por el operador  $T_{a/2\kappa}$ ) es una de las curvas resultante de la bifurcación imperfecta que proviene de una bifurcación de *pitchfork* en el problema sin rotación (equivalente al problema de Rayleigh–Bénard). Esta es una bifurcación estacionaria que rompe la simetría de reflexión  $R$  (no existente en el caso  $\tau \neq 0$ )

$$R : (x, y) \rightarrow (x, -y), \quad (f, \psi, T) \rightarrow (-f, -\psi, T)$$

y mantiene la simetría  $T_{a/2\kappa}$ . Esta bifurcación da lugar a soluciones que precesionan tanto en un sentido como en otro con la misma frecuencia (Knobloch, 1996; Mercader, Prat & Knobloch, 2000). Ambas soluciones están relacionadas, para un origen adecuado en la coordenada  $y$ , mediante la simetría de reflexión  $R$ . La velocidad de fase, nula en el punto de la bifurcación, aumenta como la raíz cuadrada de la distancia a este punto. Cuando se incluye el término de Coriolis, la simetría  $R$  se rompe y aparece una bifurcación imperfecta.

En cuanto a la estabilidad de estas ramas, la rama 1 es estable desde el estado conductivo hasta  $Ra = 32539$ ; la rama 2 es estable desde la bifurcación silla-nodo para  $Ra = 32532$  hasta  $Ra = 33785$ . Por lo tanto, dos soluciones estables con el mismo número de onda coexisten para un pequeño rango de valores del número de Rayleigh. En ambos casos la bifurcación es superarmónica. El resto de las ramas de la figura 4.4 son inestables.

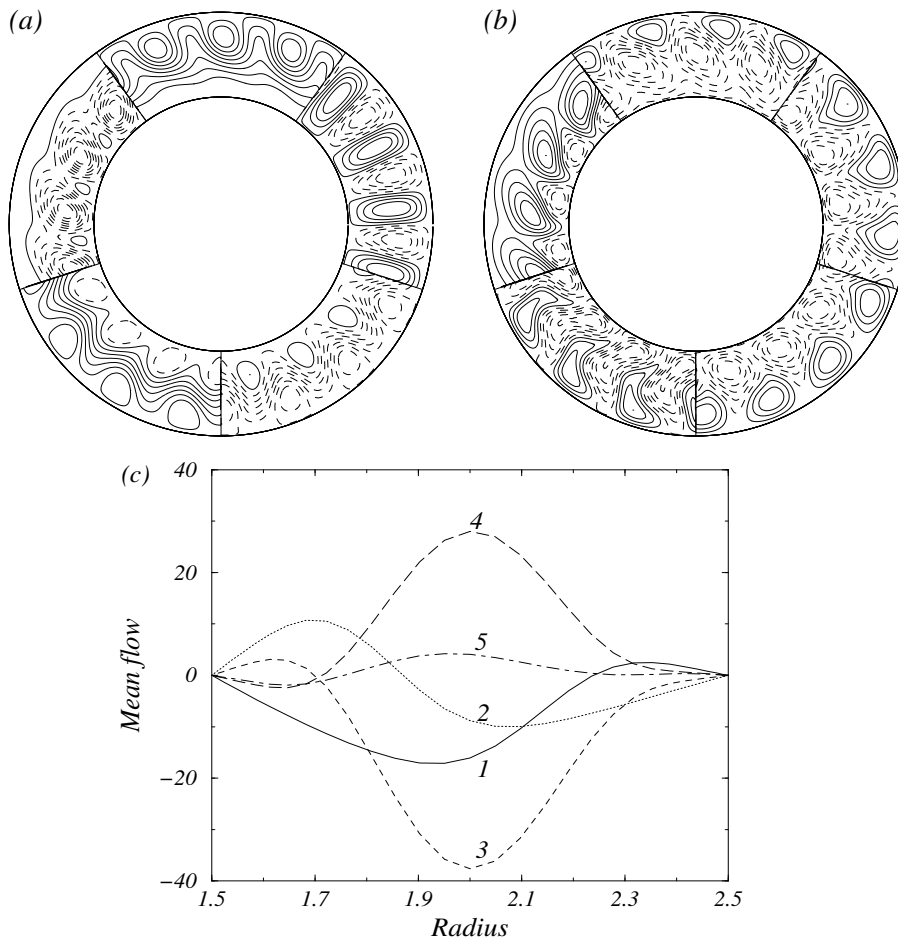


Figura 4.5: En el sistema de referencia del anillo, se representa en un instante fijo (a) las líneas de corriente y (b) las isóneas del campo de temperatura para diferentes soluciones. Empezando por la parte superior y en sentido antihorario, se representan las soluciones correspondientes a las ramas 1, 2, 3, 4 y 5 de la figura 4.4. (c) Flujo medio azimutal de las mismas soluciones.  $Ra = 60000$ ,  $\eta = 0,6$ ,  $n = 17$ ,  $\tau = 2800$  y  $\sigma = 0,7$ .

La figura 4.4b muestra cómo la velocidad de las soluciones de las ramas 1, 2 y 3 decrece a medida que aumenta el número de Rayleigh, presentando las soluciones de las ramas 4 y 5 la tendencia opuesta. Esta figura también muestra cómo, en el rango de valores considerado en la figura, las soluciones de las ramas 1 y 3 cambian el sentido de precesión al aumentar el número de Rayleigh. En la figura 4.4c se aprecia la pequeña contribución del flujo medio a la energía total de las soluciones de la rama 5, y cómo para las soluciones del resto de las ramas esta contribución es aproximadamente del 50 % para valores elevados del número de Rayleigh. Como  $\langle E'_k \rangle$  exhibe un comportamiento con el número de Rayleigh similar al número de Nusselt (ver la figura 4.2), la disminución del número de Nusselt en la rama 3, se acompaña por un fuerte incremento en el valor de  $r_f$  (ver las figuras 4.4a y 4.4c). Este comportamiento también ocurre, aunque menos acusadamente, cuando el número de Nusselt se mantiene prácticamente constante en las ramas 1, 2 y 4.

En las figuras 4.5a y 4.5b se muestran para un instante fijo y en el sistema de referencia del cilindro, las líneas de corriente y las isolíneas del campo de temperatura,  $T$ , de diferentes soluciones para  $Ra = 60000$ . Todas las líneas de corriente representadas en este capítulo corresponden a valores constantes de la función

$$\psi'(r, \tilde{\theta}) = \psi(r, \tilde{\theta}) - \int_{r_1}^r f(r) dr,$$

y por lo tanto  $\psi'$  es cero en la superficie interna del anillo. Las líneas continuas indican valores positivos y las líneas a trazos valores negativos. Empezando por la parte superior y en sentido antihorario, se representan las soluciones correspondientes a las ramas 1, 2, 3, 4 y 5 de la figura 4.4. En todos los contornos que se presentan en este capítulo se ha mantenido el número de niveles, por lo que, el intervalo entre dos niveles para las diferentes soluciones representadas no es el mismo. Las soluciones correspondientes a las ramas 1 y 2 provienen del desdoblamiento de las soluciones de *mean flow* y están caracterizadas por un número de Nusselt bajo, debido al desplazamiento de los vórtices convectivos. Las soluciones de la rama 1 están desplazadas hacia la pared exterior del anillo y el campo de velocidades es ciclónico en relación al sistema en rotación; por el contrario, las soluciones de la rama 2 están confinadas en la región interior del anillo y el campo de velocidades es anticiclónico. La figura 4.5c muestra el correspondiente cizallamiento ciclónico y anticiclónico para las soluciones de las ramas 1 y 2, respectivamente. Las soluciones de las ramas 3 y 4 presentan un fuerte flujo medio en el centro de la capa, retrógrado para las soluciones de la rama 3 y prógrado para las de la rama 4 (ver la figura 4.5c). Los vórtices convectivos están desplazados hacia la parte interior y la parte exterior de la capa, siendo anticiclónicos (ciclónicos) en la parte interior y ciclónico (anticiclónico) en la parte exterior para las soluciones de la rama 3 (4). Las soluciones de la

rama 5 son similares a columnas de Taylor viajeras y presentan un pequeño flujo medio pródigo en el medio de la capa. Como la convección ocupa todo el espacio entre los cilindros, el número de Nusselt para estas soluciones es el mayor. Este último tipo de soluciones fueron también obtenidas por Brummell & Hart (1993) en la aproximación de capa plana y condiciones de contorno sin esfuerzos cortantes en las paredes laterales.

En la figura 4.6a se representa en línea continua la evolución del número de Nusselt con el número de Rayleigh para la solución que proviene del modo dominante del análisis lineal con número de onda fundamental  $n = 37$  para  $\tau = 8000$  y  $\eta = 0,7$ . Este modo también es *normal*. Siguiendo el código de la figura 4.4a, se presenta en línea a trazos y punteada el número de Nusselt de la solución en la aproximación de capa plana para este valor de  $\tau$  y número de onda  $\alpha_c^{(sg1)} = 12,8$ . Las diferentes ramas son equivalentes a las de la figura 4.4. Como puede observarse, al aumentar la rotación, el comportamiento de las ramas se mantiene para valores del parámetro  $\delta$  moderados. Sin embargo, para valores elevados del número de Rayleigh, la solución parece alejarse de la solución de capa plana. En particular, la rama 3 conecta, vía una bifurcación *saddle-node* ( $Ra = 145628$ ) con una rama relacionada con la solución espiral, cuya descripción se realizará más adelante.

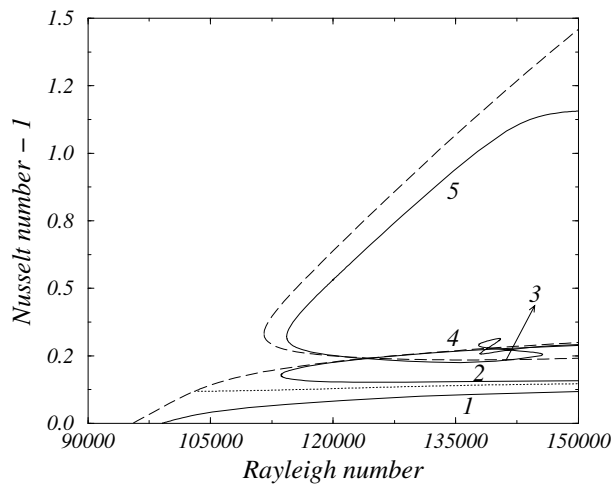


Figura 4.6: Número de Nusselt,  $Nu - 1$ , en función del número de Rayleigh,  $Ra$ , de las ondas térmicas de Rossby. La línea continua corresponde a las soluciones con número de onda fundamental  $n = 37$  para  $\eta = 0,7$ . La línea a trazos (soluciones invariantes por el operador  $T_{a/2\kappa}$ ) y la línea punteada corresponden a soluciones del problema de capa plana ( $\alpha_c^{(sg1)} = 12,8$ ).  $\tau = 8000$  y  $\sigma = 0,7$ .

## Soluciones espirales

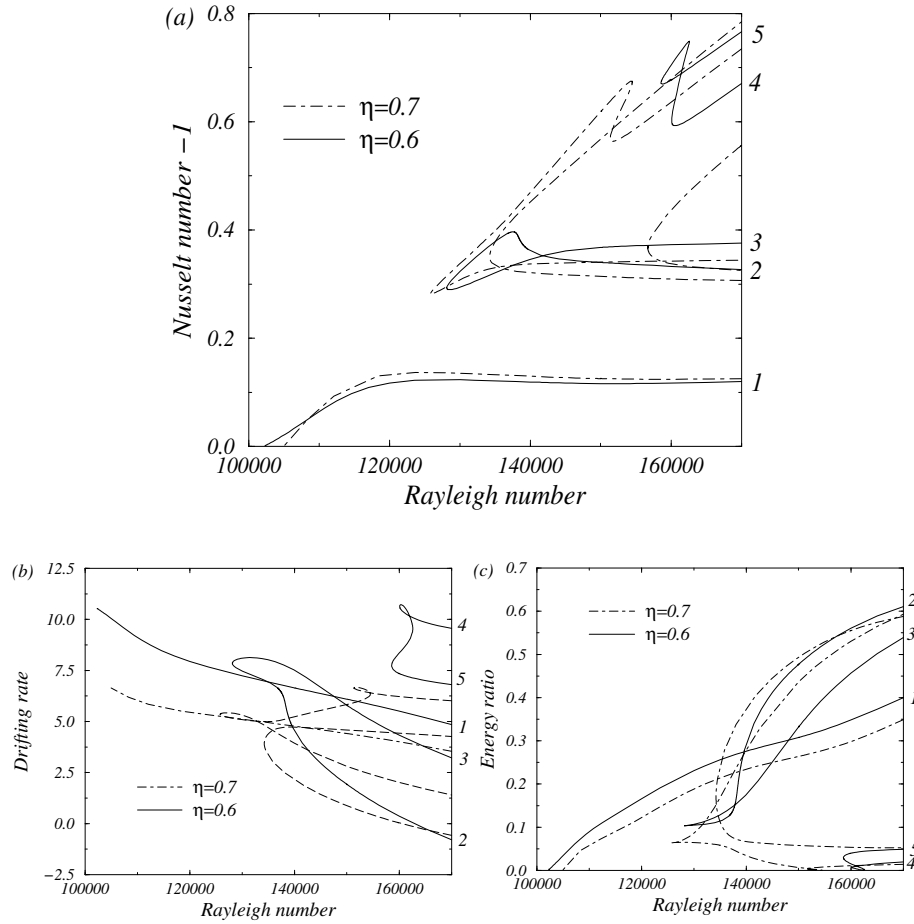


Figura 4.7: (a) Número de Nusselt,  $Nu-1$ , (b) velocidad de precesión,  $\omega$ , y (c) cociente entre la energía asociada al flujo medio y la energía cinética total,  $r_f$ , en función del número de Rayleigh,  $Ra$ , para las ondas viajeras de número de onda fundamental  $n = 21$  y  $\eta = 0,6$  (línea continua) y para las soluciones con  $n = 32$  y  $\eta = 0,7$  (línea punto-rayado). La solución que bifurca del estado conductivo para  $\eta = 0,6$  proviene del modo dominante (*espiral*) para estos parámetros. La solución que bifurca del estado conductivo para  $\eta = 0,7$  proviene del modo dominante entre los *espirales* para estos parámetros.  $\tau = 8000$  y  $\sigma = 0,7$ .

En las figuras 4.7a, 4.7b y 4.7c se representa, respectivamente, mediante una línea continua, el número de Nusselt,  $Nu - 1$ , la velocidad de precesión,  $\omega$  y el cociente de energías,  $r_f$ , de las ondas viajeras con número de onda fundamental

$n = 21$  para  $\eta = 0,6$  y  $\tau = 8000$ . La solución que corresponde a la rama que bifurca del estado conductivo para  $Ra_c = 102156$ , proviene del modo dominante para estos valores de  $\eta$  y  $\tau$ ; este modo es *espiral*. Al igual que en el caso anterior, las soluciones de las ramas que no presentan un incremento del número de Nusselt con el número de Rayleigh, son las que muestran un mayor crecimiento en la contribución de la energía del flujo medio a la energía cinética total. Respecto a la estabilidad de estas soluciones, la única rama estable es la 1, pero sólo en una pequeña región de valores del número de Rayleigh  $Ra < 105517$ . Esto se debe a que el cambio de familia de modos dominantes del análisis de estabilidad del estado conductivo se produce muy cerca de los valores de  $\eta$  y  $\tau$  considerados, y como se verá más adelante, la zona de estabilidad de las soluciones cerca de un cambio en el carácter de la familia dominante se reduce notablemente.

Este diagrama de ramificaciones, a diferencia de lo que ocurría para las soluciones normales, se transforma notablemente cuando  $\eta \rightarrow 1$ . En la misma figura también se representa con líneas punto–raya, las ramas de soluciones análogas a las anteriores con número de onda fundamental  $n = 32$  para  $\eta = 0,7$ . Por ramas análogas se entienden aquellas que, estando relacionadas con el mismo tipo de modo lineal, presentan una estructura similar para el mismo valor del número de Rayleigh. La solución que bifurca del estado conductivo para este valor de la razón de radios ya no proviene del modo dominante (para este valor de  $\eta$  y  $\tau$  el modo dominante es *normal*), sino que proviene del modo dominante entre los *espirales* ( $\eta_c = 0,605$ , para  $\tau = 8000$ ). En esta figura se observa cómo, para  $\eta = 0,6$ , las dos curvas desconectadas están formadas por las ramas 2 – 3 y 4 – 5, mientras que para  $\eta = 0,7$  están formadas por las correspondientes a las ramas 3 – 4 y 2 – 5. Además, para este último valor de  $\eta$  aparece, en el rango de valores considerado en la figura, una nueva curva desconectada. Esta curva existe también para  $\eta = 0,6$ , pero para valores del número de Rayleigh mayores que los representados.

Las figuras 4.8a y 4.8b muestran en un instante y en el sistema de referencia del cilindro, las líneas de corriente y las isolíneas del campo de temperaturas de las diferentes soluciones obtenidas para  $Ra = 170000$ ,  $\eta = 0,6$  y  $\tau = 8000$ . Empezando por la parte superior y en sentido antihorario, se representan los contornos correspondientes a las soluciones de las ramas 1, 2, 3, 4 y 5 de la figura 4.7.



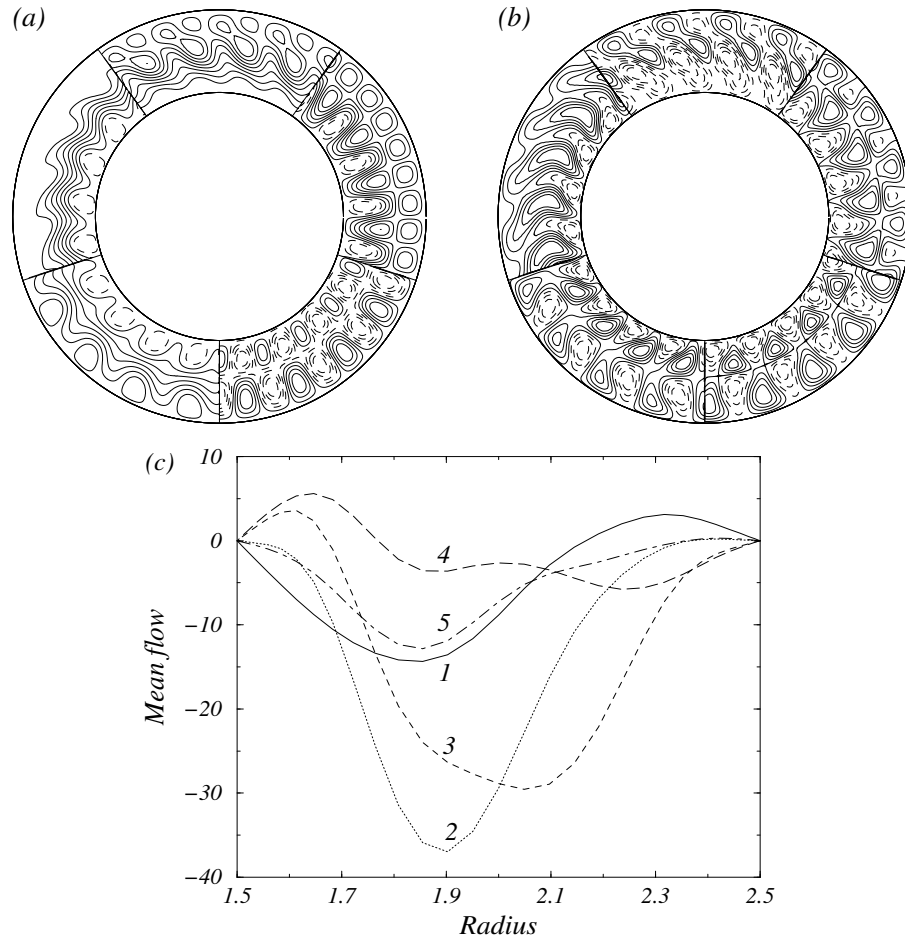


Figura 4.8: En el sistema de referencia del anillo, se representa en un instante fijo (a) las líneas de corriente y (b) las isolíneas del campo de temperatura para diferentes soluciones. Empezando por la parte superior y en sentido antihorario, se muestran las soluciones correspondientes a las ramas 1, 2, 3, 4 y 5 de la figura 4.7. (c) Flujo medio azimutal de las mismas soluciones.  $Ra = 170000$ ,  $\eta = 0,6$ ,  $n = 21$ ,  $\tau = 8000$  y  $\sigma = 0,7$ .

La solución correspondiente a la rama 1, caracterizada por un flujo medio retrógrado en la parte interior mayor que el prógrado existente en la parte exterior (ver la figura 4.8c), presenta, debido al cizallamiento, la estructura espiral desplazada hacia la parte exterior del anillo. Por su parte, las soluciones de la rama 2 poseen un flujo medio retrógrado en el medio de la capa y presentan vórtices convectivos anticiclónicos en la parte interior, permaneciendo el fluido en el exterior del anillo prácticamente en reposo en el sistema de referencia del

anillo. Las soluciones de la rama 3 presentan un flujo medio retrógrado aproximadamente en el medio de la capa y los vórtices convectivos están confinados en el interior y el exterior del anillo, siendo anticiclónicos en la parte interior y ciclónicos en la exterior. Las soluciones correspondientes a las ramas 4 y 5 presentan una cizalladura que no es suficiente para destruir la estructura en forma de doble columna con un efecto espiral es muy pequeño.

Con el fin de asociar estas ramas de soluciones con las existentes en la aproximación de capa plana, se muestra en las figuras 4.9a y 4.9b (las figuras 4.10a y 4.10b son ampliaciones de dos zonas de la figura 4.9a) con líneas a trazos y punteadas, el número de Nusselt,  $Nu - 1$ , y la velocidad de fase lineal ( $c = \omega\bar{r}$ ), en función del número de Rayleigh para las soluciones correspondientes o relacionadas con el *segundo armónico radial* del problema en dicha aproximación. El valor del número de onda crítico de este armónico para  $\tau = 8000$  es  $\alpha_c^{(sg2)} = 11,37$  y el número de Rayleigh crítico es  $Ra_c^{(sg2)} = 106330$ . En este caso, las líneas a trazos representan las soluciones invariantes por la simetría  $\kappa$  y las líneas punteadas representan las ramas de soluciones en las que la única simetría es la asociada a la periodicidad espacial o temporal. Las ramas  $e$  y  $d$  representadas en línea punteada (ver las figuras 4.9a y 4.10a), aparecen como consecuencia de dos bifurcaciones de *pitchfork* que rompen la simetría  $\kappa$  de las ramas  $a$  y  $b$ , respectivamente. Por el contrario, se ha comprobado hasta  $Ra = 300000$  que la línea punteada formada por las ramas  $f - g$  está desconectada. Estas ramas punteadas deben desdoblarse al romper la simetría  $\kappa$ . De nuevo, la curva  $a - b$  es la curva desconectada de una bifurcación imperfecta que resulta de una bifurcación de *pitchfork* en el problema sin rotación. Esta *pitchfork* es una bifurcación estacionaria de una estructura de doble columna que rompe la simetría  $R$  pero mantiene la simetría  $\kappa$ .

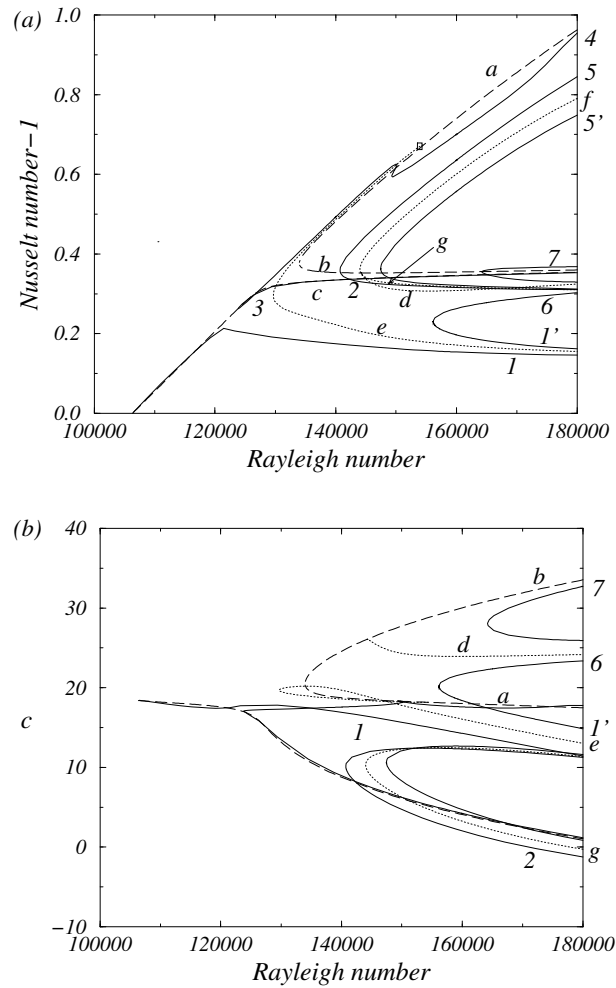


Figura 4.9: (a) Número de Nusselt,  $Nu - 1$ , (b) velocidad de fase lineal,  $c = \omega \bar{r}$ , de las ondas viajeras en función del número de Rayleigh,  $Ra$ . Las líneas continuas corresponden a soluciones con número de onda fundamental  $n = 108$  para una razón de radios  $\eta = 0,9$ . Las líneas a trazos (soluciones invariantes por la simetría  $\kappa$ ) y las líneas punteadas corresponden a soluciones del problema en la aproximación de capa plana ( $\alpha_c^{(sg2)} = 11,37$ ). En ambos casos, las soluciones que bifurcan del estado conductivo tienen el número de onda que corresponde al dominante entre los *espirales* para  $\eta = 0,9$  y al dominante para el *segundo armónico radial* en la aproximación de capa plana.  $\tau = 8000$  y  $\sigma = 0,7$ .

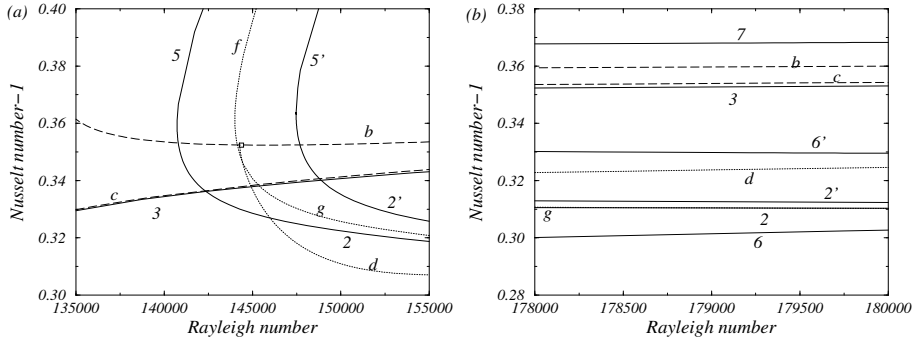


Figura 4.10: Ampliaciones de algunas zonas de la figura 4.9a.

En la figura 4.9 también se representa en línea continua el número de Nusselt y la velocidad de fase lineal de las soluciones que bifurcan del modo dominante entre los *espirales* para  $\eta = 0,9$  ( $n = 108$ ). Las etiquetas de las ramas de la figura 4.9 se han escogido para identificar las ramas de soluciones análogas a las obtenidas para el caso  $\eta = 0,6$  (ver la figura 4.7).

La correspondencia entre las ramas de la aproximación de capa plana y de  $\eta = 0,9$  puede realizarse si se comparan tanto características globales de las soluciones como su estructura para valores elevados del número de Rayleigh. En las figuras 4.11a y 4.11b se muestran, empezando desde la parte superior y en sentido antihorario, las líneas de corriente y las isóneas de la temperatura, respectivamente, de las soluciones de las ramas 1, 1', 2, 2', 6 y 6' de la figura 4.9 para  $Ra = 180000$ . Comparando estos contornos y el flujo medio de estas soluciones representado en la figura 4.11c con los representados en la figura 4.12, donde se muestran las líneas de corriente y las isóneas de la temperatura y el flujo medio azimutal para varias ramas de la figura 4.9, se concluye que estas ramas aparecen de sendos desdoblamientos de las ramas *e*, *g* y *d*. Por su parte, en las figuras 4.13a y 4.13b se representan, empezando por la parte superior y en sentido antihorario, las líneas de corriente y las isóneas del campo de temperaturas, respectivamente, de las soluciones de las ramas 3, 4, 5, 5' y 7. En este caso estas ramas provienen de las ramas *c*, *a*, del desdoblamiento de la rama *f* y de la rama *b*, respectivamente (comparar con las figuras 4.14 y 4.15). A pesar de esto y a diferencia de lo que ocurría en el caso normal, la analogía entre las ramas de la aproximación de capa plana y las del caso  $\eta = 0,9$  no es tan claro para un rango intermedio de valores del número de Rayleigh.

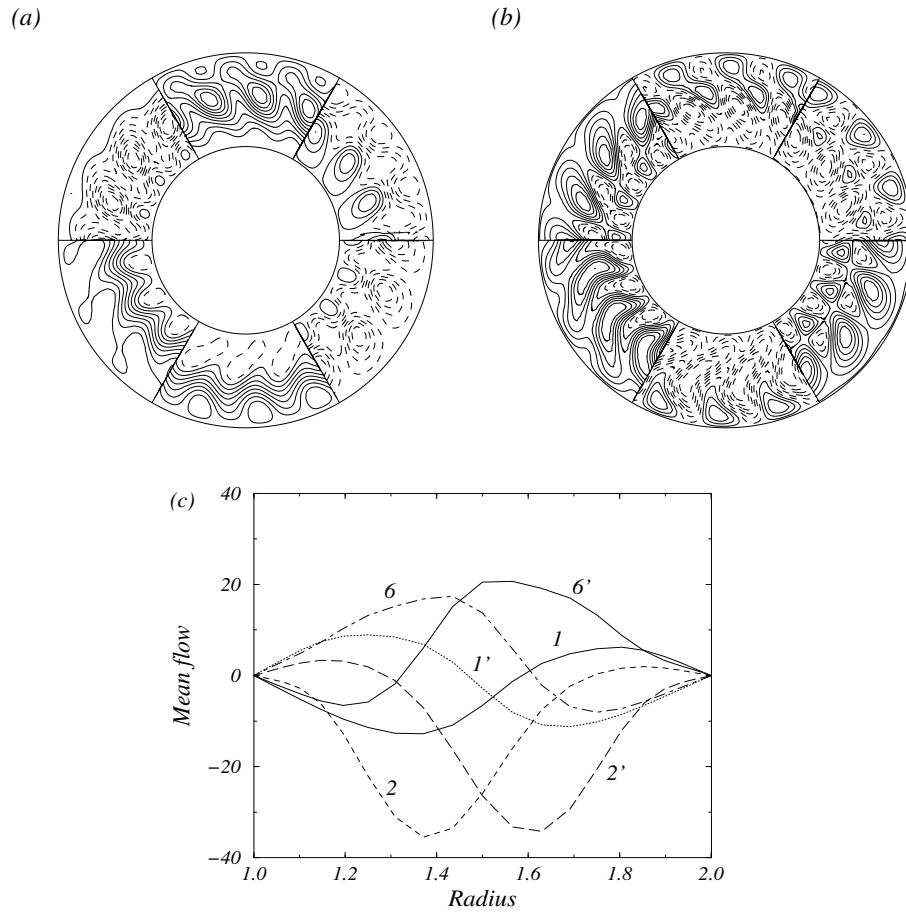


Figura 4.11: En el sistema de referencia del anillo, se representa en un instante fijo (a) las líneas de corriente y (b) las isóneas del campo de temperatura para diferentes soluciones. Empezando por la parte superior y en sentido antihorario, se representan las soluciones correspondientes a las ramas 1, 1', 2, 2', 6 y 6' de la figura 4.9. Estos contornos, con el fin de apreciar con claridad la estructura de la solución, se han dibujado suponiendo  $\eta = 0,5$  y  $n = 18$ . (c) Flujo medio azimutal de las mismas soluciones.  $Ra = 180000$ ,  $\eta = 0,9$ ,  $n = 108$ ,  $\tau = 8000$  y  $\sigma = 0,7$ .

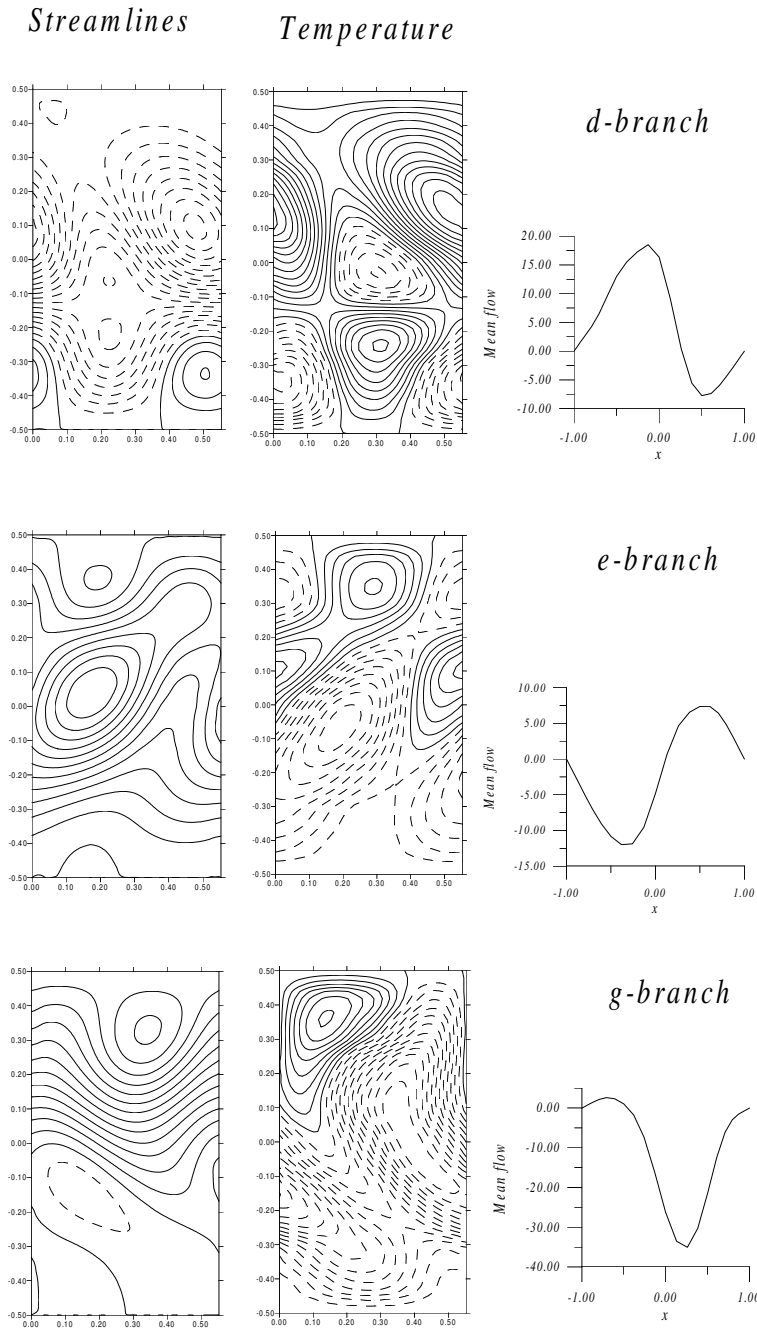


Figura 4.12: Líneas de corriente en el sistema de referencia del anillo, isolíneas de la temperatura y flujo medio azimutal de las ramas *d*, *e* y *g* de la figura 4.9a correspondientes a la aproximación de capa plana.  $Ra = 180000$ ,  $\alpha_c = 11,37$ ,  $\tau = 8000$  y  $\sigma = 0,7$ .

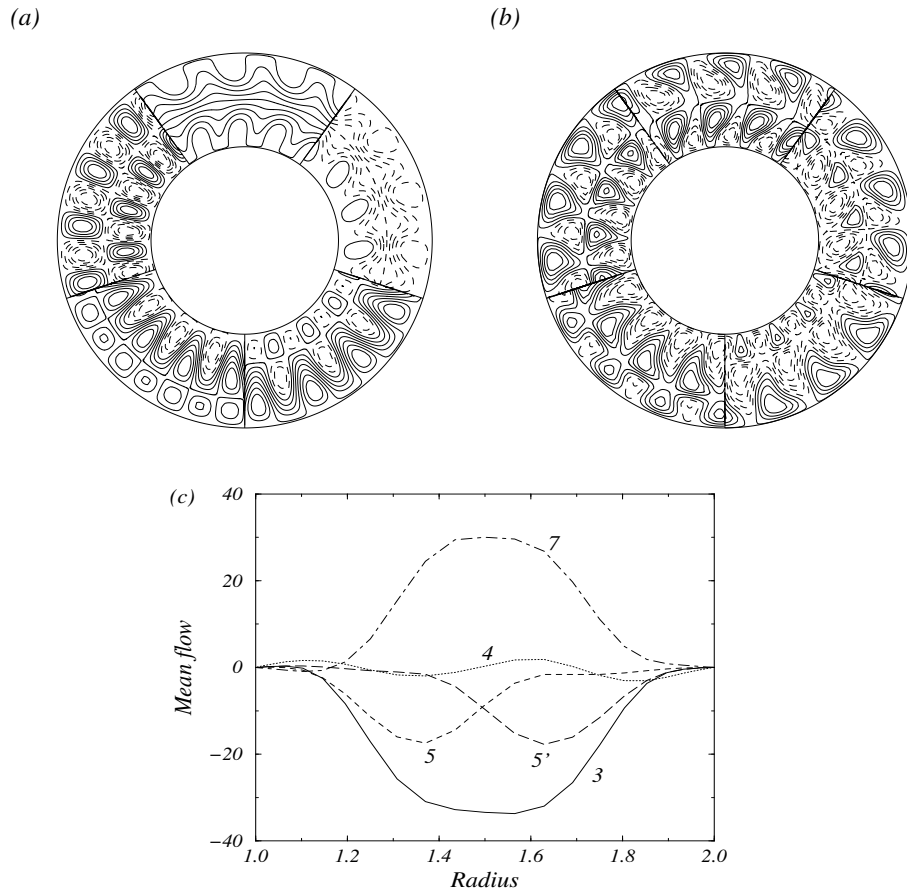


Figura 4.13: En el sistema de referencia del anillo, se representa en un instante fijo (a) las líneas de corriente y (b) las isolíneas del campo de temperatura para diferentes soluciones. Empezando por la parte superior y en sentido antihorario, se representan las soluciones correspondientes a las ramas 3, 4, 5, 5' y 7 de la figura 4.9. En la ejecución de estas figuras, con el fin de poder apreciar con claridad la estructura de la solución, se ha supuesto  $\eta = 0,5$  y  $n = 18$ . (c) Flujo medio azimutal de las mismas soluciones.  $Ra = 180000$ ,  $\eta = 0,9$ ,  $n = 108$ ,  $\tau = 8000$  y  $\sigma = 0,7$ .

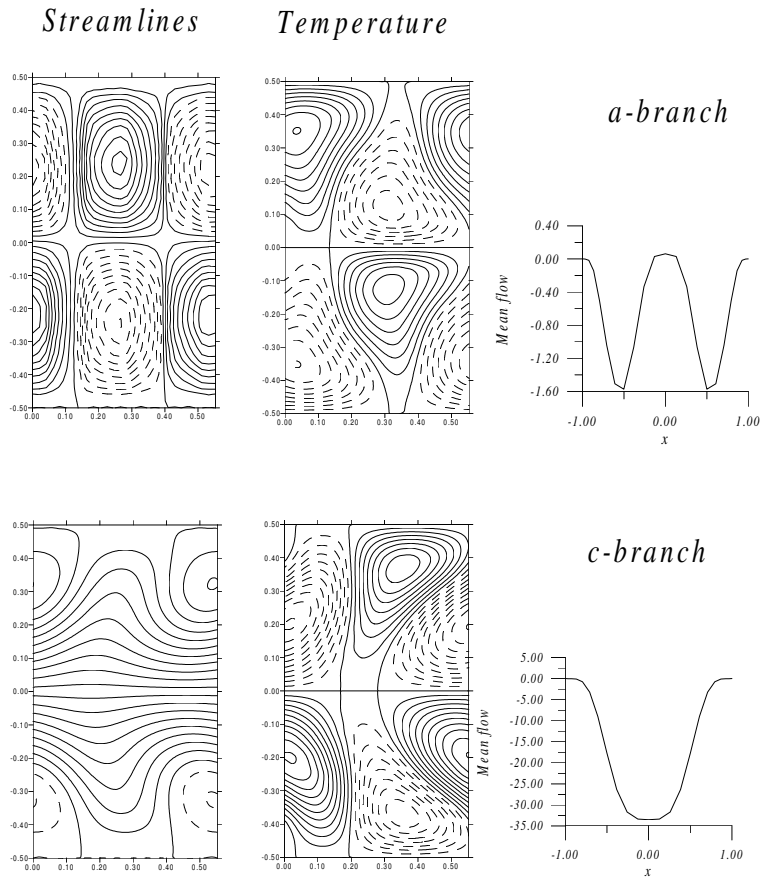


Figura 4.14: Igual que la figura 4.12 para las ramas *a* y *c*.



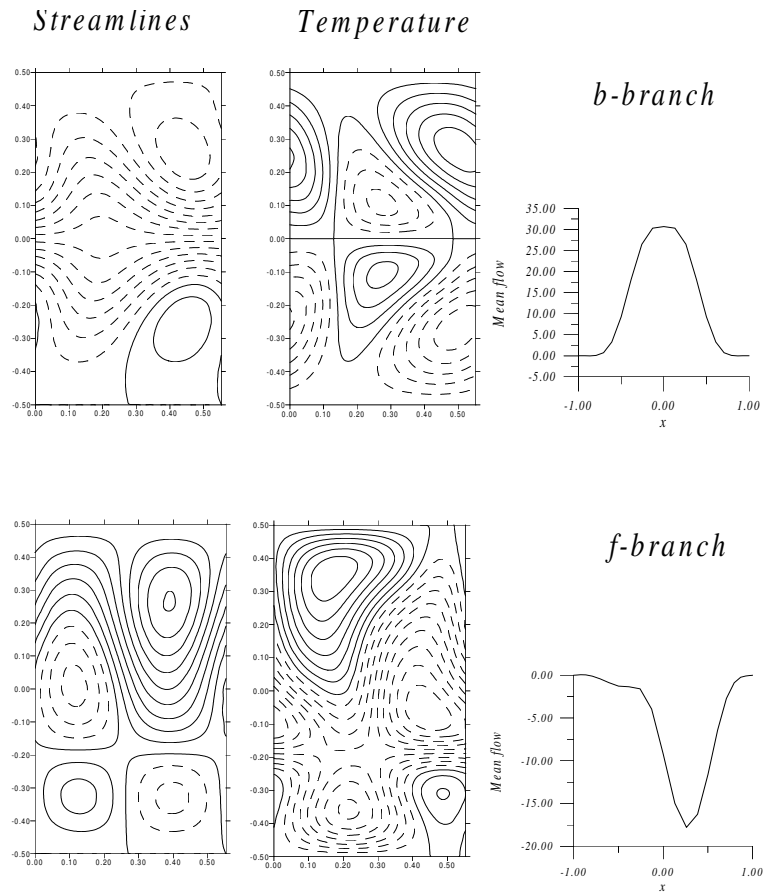


Figura 4.15: Igual que la figura 4.12 para las ramas  $b$  y  $f$ .

Comparando los contornos de las ramas 3 de las figuras 4.4 y 4.7 puede observarse como se parecen estas dos soluciones. Para algunos valores de los parámetros las ramas análogas a éstas, pueden incluso llegar a conectarse. Así por ejemplo, la rama 3 de la figura 4.6 conecta con la rama 3 de la figura 4.9 después de una bifurcación silla-nodo. Tras varias bifurcaciones silla-nodo dicha rama conecta a su vez con la rama análoga a la  $2'$  de la figura 4.9.

#### 4.4.3. Estabilidad de las soluciones primarias

En esta sección se analiza la estabilidad de las soluciones primarias presentadas anteriormente. Se consideran principalmente las soluciones correspondi-

entes a las ramas que bifurcan del estado conductivo y que provienen del modo dominante. En la figura 4.16, en la que se presenta mediante línea continua la curva de estabilidad marginal del estado conductivo en función de la razón de radios para  $\tau = 8000$  (ver la figura 3.9), se indican mediante círculos los valores del número de Rayleigh donde se inestabiliza la solución primaria. El número al lado de cada círculo es el valor de  $d_m$  responsable de la bifurcación. Todas estas soluciones provienen de los modos dominantes para los valores de  $\eta$  escogidos. La figura muestra cómo la región de estabilidad de las soluciones se reduce considerablemente cerca del punto de transición,  $\eta_c = 0,605$ , correspondiente al cruce entre dos familias diferentes de modos dominantes. Cerca de este punto, las soluciones primarias se desestabilizan con un valor finito del parámetro  $d_m$ , independientemente de si provienen de un modo *espiral* o *normal*. Lejos de este punto, para valores bajos o elevados de  $\eta$ , se obtiene una zona donde las soluciones primarias dominantes pierden estabilidad mediante una bifurcación superarmónica ( $d_m = 0$ ). Si se consideran valores de la razón de radios muy cercanos a 1 el valor de  $d_m$  es finito pero relativamente pequeño ( $d_m = 3/420$  para  $\eta = 0,997$ ). Este resultado concuerda con los obtenidos en la aproximación de capa plana para este valor de  $\tau$  y número de onda correspondiente al valor crítico ( $\alpha_c = 12,8$ ). En este caso se ha obtenido  $d \approx 0,007$ , donde los números de onda excitados usando una expresión similar a 4.4 son  $(l + d)\alpha$ . A partir de los valores de  $d_m$  en cada punto de la bifurcación puede saberse, tal y como se ha explicado en la sección 4.2, el valor de los números de onda excitados. Analizando el correspondiente vector propio en el punto de bifurcación se averigua el número de onda de la perturbación que presenta la máxima amplitud y como es su estructura. Se ha analizado para varios casos la estabilidad lineal en el entorno del punto de transición ( $d_m$  finito), obteniéndose que para las soluciones que provienen de modos *espirales* (a la izquierda de  $\eta_c$ ), el máximo de la amplitud del autovector  $(b_{l,j}^*, c_{l,j}^*)$  se obtiene para el índice  $l = 1$  y por lo tanto la perturbación está dominada por una estructura de número de onda  $n + m$ ; siendo ésta *normal*. Para las soluciones que provienen de modos *normales* ( $\eta > \eta_c$ ), el máximo de la amplitud se tiene para el índice  $l = -1$ , y el número de onda dominante en la perturbación es  $n - m$ , siendo la estructura asociada *espiral*. Por lo tanto, se puede concluir que en esta región, cerca del cruce entre las dos familias de modos dominantes, para un valor fijo de  $\eta$ , la solución no lineal que proviene de un modo dominante de un tipo (*normal* o *espiral*) se desestabiliza mediante una perturbación del otro tipo de modo (*espiral* o *normal*), respectivamente. Para valores de la razón de radios alejados de  $\eta_c$ , si  $d_m \neq 0$  la perturbación y el modo del que proviene la solución no lineal son del mismo tipo (*normal* o *espiral*).

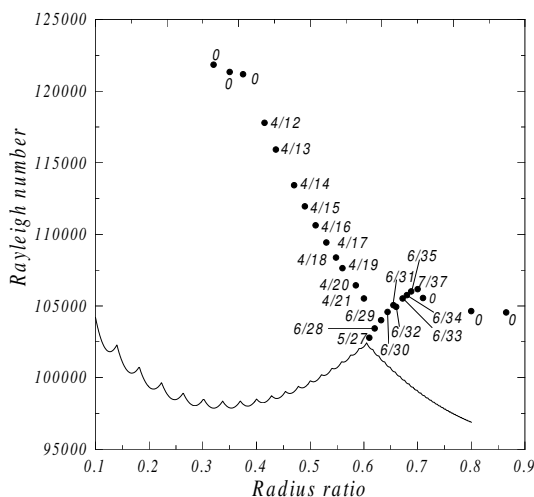


Figura 4.16: Número de Rayleigh crítico,  $Ra$ , en función de la razón de radios,  $\eta$ , para  $\tau = 8000$  y  $\sigma = 0,7$ . Los círculos señalan los valores del número de Rayleigh para el que la solución que bifurca de la curva de estabilidad marginal se inestabiliza. El número al lado de cada círculo indica el valor del parámetro de Floquet,  $d_m$ , para el que la solución pierde estabilidad. En la tabla 4.1 se indican los valores de  $\eta$ ,  $Ra$ ,  $\omega$ ,  $\Im(\lambda)$  y  $d_m$  en los puntos de bifurcación representados en la figura.

Este comportamiento parece ser independiente de los parámetros considerados. En las figuras 4.17a y 4.17b se representan, en línea continua, la curva de estabilidad marginal del estado conductivo en función de la razón de radios y, mediante círculos, los valores del número de Rayleigh donde se inestabiliza la solución primaria para  $\tau = 2800$  y  $\tau = 2000$ , respectivamente. En la primera figura el número de onda del modo *espiral* dominante antes del cruce de familias ( $\eta_c = 0,228$ ) es  $n = 4$ . Después de este punto, el modo *normal* dominante es  $n = 6$ . De nuevo, cerca del punto de transición, la solución no lineal que proviene del modo dominante se desestabiliza con un valor finito de  $d_m$ . Una análisis del vector propio correspondiente al valor propio responsable de la bifurcación, muestra que las soluciones que provienen de un tipo de modo, son desestabilizadas por una perturbación dominada por el otro tipo. Cuando  $\eta$  aumenta, se obtiene una gran zona donde la bifurcación es superarmónica, y, de la misma manera que ocurría en el caso  $\tau = 8000$ , cuando  $\eta$  es cercano a 1, la solución se inestabiliza con un valor pequeño de  $d_m$ , de acuerdo con los resultados de Schnaubelt & Busse (1992) para la estabilidad de la solución de *mean flow*, para este valor de  $\tau$  y número de onda  $\alpha_c = 8,68$ . Para  $\tau = 2000$  (figura 4.17b) no hay un intercambio entre familias de modos dominantes, pero el comportamiento de las soluciones es cualitativamente similar.

$\eta$	$Ra$	$\omega$	$\Im(\lambda)$	$d_m$
0.32	16.33	121853	$\pm 45.52$	0
0.35	14.64	121342	$\pm 44.93$	0
0.375	13.2	121184	$\pm 44.49$	0
0.415	13.11	117795	-24.03	4/12
0.436	12.41	115924	-21.37	4/13
0.47	12.37	113428	-14.06	4/14
0.49	11.85	111954	-11.2	4/15
0.51	11.41	110632	-8.11	4/16
0.53	11.06	109427	-4.87	4/17
0.548	10.7	108383	-2.05	4/18
0.56	10.23	107635	-0.41	4/19
0.585	10.2	106437	4.39	4/20
0.6	9.94	105518	7.72	4/21
0.61	8.55	102779	31.7	5/27
0.62	8.17	103434	40.89	6/28
0.632	7.87	104007	38.12	6/29
0.64	7.56	104154	36.37	6/30
0.652	7.32	104728	33.43	6/31
0.66	7.06	104937	31.61	6/32
0.672	6.87	105523	28.41	6/33
0.68	6.65	105754	26.46	6/34
0.688	6.46	106011	24.47	6/35
0.7	6.06	106168	31.52	7/37
0.71	5.98	105557	$\pm 35.43$	0
0.8	3.96	104637	$\pm 35.66$	0
0.865	2.61	104541	$\pm 36.11$	0

Cuadro 4.1: Valores del número de Rayleigh, de la velocidad de precesión, de  $\Im(\lambda)$  y de  $d_m$  de los puntos de bifurcación representados en la figura 4.16.

En las figuras 4.18a y 4.18b se representan en línea continua la curva de estabilidad marginal en función del parámetro de Coriolis y, mediante círculos, los valores del número de Rayleigh donde la solución que bifurca del estado conductivo pierde estabilidad para  $\eta = 0,3$  y  $\eta = 0,6$ , respectivamente. Cómo se observa en la figura 4.18a, la bifurcación de la solución primaria que proviene de un modo dominante para un valor del parámetro de Coriolis cercano a  $\tau_c$  es subarmónica. Por el contrario, para valores del parámetro de Coriolis lejanos a  $\tau_c \approx 3353$  las soluciones se inestabilizan con  $d_m = 0$  o con  $d_m$  finito, pero pequeño. Aunque no puede apreciarse en la figura 4.18b, este comportamiento se repite para  $\eta = 0,6$  donde  $\tau_c \approx 7855$ , si  $\tau > 11000$ . Por lo tanto, en función

del parámetro de Coriolis, de nuevo las soluciones primarias se inestabilizan con un valor finito de  $d_m$  en torno al valor para el que se produce el cambio de familia de modos dominantes del análisis lineal (Pino, Mercader & Net, 1998).

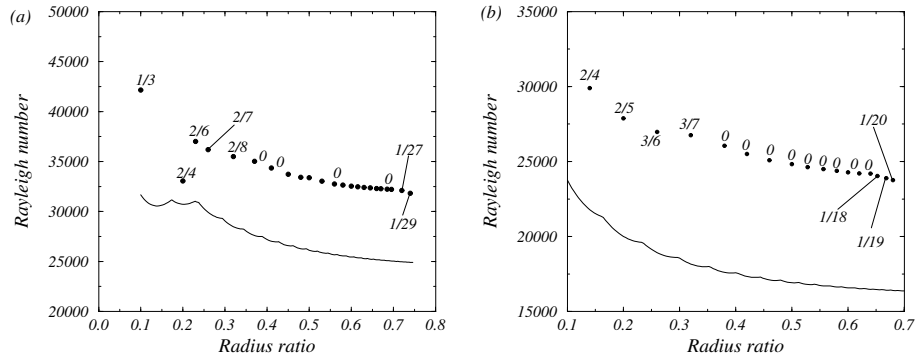


Figura 4.17: Número de Rayleigh crítico,  $Ra$ , en función de la razón de radios,  $\eta$ , para  $\sigma = 0,7$ , (a)  $\tau = 2800$  y (b)  $\tau = 2000$ . Los círculos señalan los valores del número de Rayleigh para el que la solución que bifurca de la curva de estabilidad marginal se desestabiliza. El número al lado de cada círculo indica el valor del parámetro de Floquet,  $d_m$ , para el que la solución pierde estabilidad. En (a) los puntos sin número al lado presentan  $d_m = 0$ .

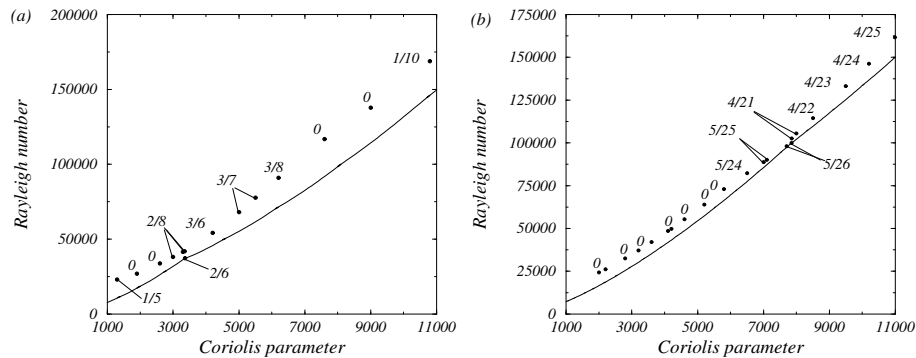


Figura 4.18: Número de Rayleigh crítico en función del parámetro de Coriolis para  $\sigma = 0,7$ , (a)  $\eta = 0,3$  y (b)  $\eta = 0,6$ . Los círculos señalan los valores del número de Rayleigh para el cual la solución que bifurca de la curva de estabilidad marginal se desestabiliza. El número al lado de cada círculo indica el valor de  $d_m$  para el que la solución se desestabiliza. En la tabla 4.2 se presentan los valores de  $Ra$ ,  $\omega$ ,  $\Im(\lambda)$  y  $d_m$  en los puntos de bifurcación representados en (b).

$\tau$	$Ra$	$\omega$	$\Im(\lambda)$	$d_m$
2000	4.23	24276	$\pm 36.97$	0
2200	4.42	26139	$\pm 36.17$	0
2800	5.54	32540	$\pm 36.83$	0
3200	5.95	37175	$\pm 36.52$	0
3600	6.24	42122	$\pm 36.06$	0
4100	6.63	48589	$\pm 35.79$	0
4200	6.82	49805	$\pm 36.05$	0
4600	6.92	55443	$\pm 35.44$	0
5200	7.3	63968	$\pm 35.27$	0
5800	7.6	72960	$\pm 35.08$	0
6500	8.07	82245	25.9	5/24
7000	8.22	88765	29.08	5/25
7100	8.35	90116	29.5	5/25
7700	8.6	98085	32.52	5/26
7850	8.8	99953	33.23	5/26
7855	9.87	102655	10.68	4/21
8000	9.94	105518	7.72	4/21
8500	9.67	114433	2.06	4/22
9500	9.79	133144	-7.6	4/23
0200	9.72	146318	-12.83	4/24
10990	9.71	161660	-18.07	4/25

Cuadro 4.2: Valores del número de Rayleigh, de la velocidad de precesión, de  $\Im(\lambda)$  y  $d_m$  de los puntos de bifurcación representados en la figura 4.18b.

Además de considerar las inestabilidades de las soluciones primarias cuando el número de Rayleigh aumenta desde su valor crítico, también se ha analizado, para un valor fijo del parámetro de Coriolis, la zona de estabilidad de una onda periódica que proviene del modo  $n$  cuando  $\eta$  varía más allá de la zona en la que el modo  $n$  es dominante (estabilidad lateral). En un diagrama número de Rayleigh – razón de radios, la zona de estabilidad lateral de la solución primaria siempre está confinada por curvas que nacen en los puntos de cruce entre la curva de estabilidad marginal del modo  $n$  y las de los modos adyacentes  $n_i$  y  $n_d$ . Si en las proximidades de un cambio de modo dominante, a partir del valor de  $d_m$  responsable de la inestabilidad, se calculan los números de onda excitados, y a partir del correspondiente vector propio se obtiene el número de onda de la perturbación de amplitud mayor, éste siempre corresponde al del modo adyacente en el cruce. Es más, cuando se estima a partir de la parte imaginaria del valor propio la frecuencia de este armónico, se obtiene la del modo adyacente en la bifurcación primaria. Por lo tanto, es la interacción con los modos vecinos, en

nuestro caso nunca resonante ( $\omega/n \neq \omega_{i,d}/n_{i,d}$ ), la responsable de la estabilidad lateral. Sin embargo, la forma de la región de estabilidad varía dependiendo de si el valor de  $\eta$  considerado está o no cerca del cruce entre dos tipos de modos dominantes,  $\eta_c$ . Como se verá más adelante, un análisis similar puede realizarse fijando la razón de radios, en función del parámetro de Coriolis.

Si la solución primaria considerada proviene de un modo dominante para un valor de  $\eta$  lejos del valor  $\eta_c$ , los límites laterales de la zona de estabilidad presentan una forma parabólica, independientemente de si el modo dominante es *normal* o *espiral*. En las figuras 4.19a y 4.19b se presentan mediante círculos las zonas de estabilidad de las soluciones que provienen del modo dominante  $n = 20$  para  $\tau = 2000$  y  $n = 11$  para  $\tau = 8000$ , respectivamente. La primera de estas soluciones proviene de un modo *normal*. La solución dominante en el caso  $\tau = 8000$  proviene de un modo *espiral*. Cuando el valor de  $\eta$  aumenta, los números de onda de los modos dominantes son secuenciales ( $n_i = n - 1$ ,  $n_d = n + 1$ ). De esta manera, el valor de  $d_m$  cerca de la intersección entre las curvas de estabilidad marginal de los diferentes modos es  $d_m = 1/n$  a ambos lados de la región de estabilidad, tanto para  $\tau = 2000$ , como para  $\tau = 8000$ . Al aumentar el número de Rayleigh, se obtiene para ambos tipos de soluciones, que el valor de  $d_m$  en el límite izquierdo de la región de estabilidad aumenta al incrementar  $m$  secuencialmente. Por lo tanto, la perturbación está dominada por los coeficientes asociados a los números de onda de los modos dominantes para los valores de  $\eta$  alcanzados por el límite de la región de estabilidad o incluso, por valores menores. Por el contrario, el límite de la derecha de la región de estabilidad corresponde a valores  $d_m = 1/n$  y la perturbación está dominada por el número de onda  $n + 1$  hasta valores elevados del número de Rayleigh. De hecho, para las soluciones que provienen de modos *normales*, si se tiene en cuenta la relación entre  $n$  y  $\eta$ , y el número de onda  $\alpha$  de las soluciones en la aproximación de capa plana, se obtienen los resultados correspondientes a las inestabilidades laterales de las ondas térmicas de Rossby (Or, 1990; Or & Herrmann, 1995; Herrmann & Busse, 1997, entre otros). Para  $\sigma = 0,7$ , los trabajos mencionados obtienen que, en un diagrama  $Ra - \alpha$ , la región estable está limitada por su parte izquierda por una inestabilidad que presenta valores infinitesimales del parámetro de Floquet y que tiende a incrementar ligeramente el valor de  $\alpha$ , desplazando la solución hacia la región estable cerca del límite izquierdo. Por el contrario, la inestabilidad a la derecha de la región de estabilidad, asociada a valores finitos del parámetro de Floquet, da lugar a una solución con un valor de  $\alpha$  menor que  $\alpha_c$  pero cercano a él. Es importante remarcar que para un valor fijo de  $n$ , aumentar  $\eta$  tiene el efecto de disminuir  $\alpha$  y para un valor fijo de  $\eta$ , aumentar  $n$  aumenta  $\alpha$ .

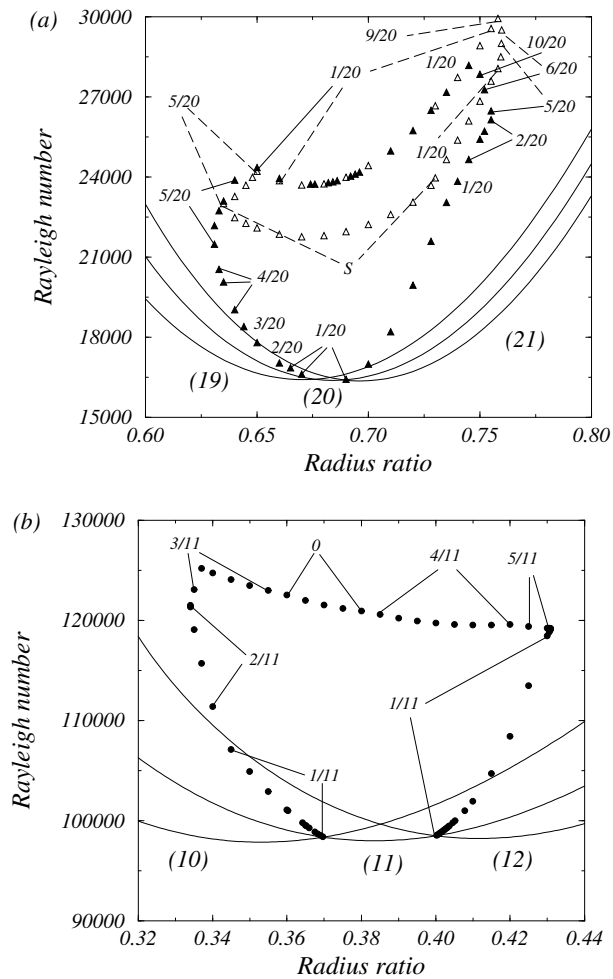


Figura 4.19: Regiones de estabilidad de las soluciones (a) que bifurcan del modo dominante  $n = 20$  para  $\tau = 2000$  y (b)  $n = 11$  para  $\tau = 8000$ . La zona de estabilidad está limitada por círculos, de los que se indica el valor de  $d_m$  responsable de la inestabilidad.  $S$  indica que el límite de estabilidad corresponde a la bifurcación silla-nodo de la curva desconectada del estado conductor. El modo dominante se indica entre paréntesis. En (a) también se presenta la región de estabilidad de una solución que no proviene del estado conductor. En este caso los puntos de bifurcación se indican mediante triángulos blancos. Las líneas continuas (discontinuas) asociadas a un número indican el valor de  $d_m$  en los puntos de bifurcación de las soluciones que (no) provienen del estado conductor.  $\sigma = 0,7$ .



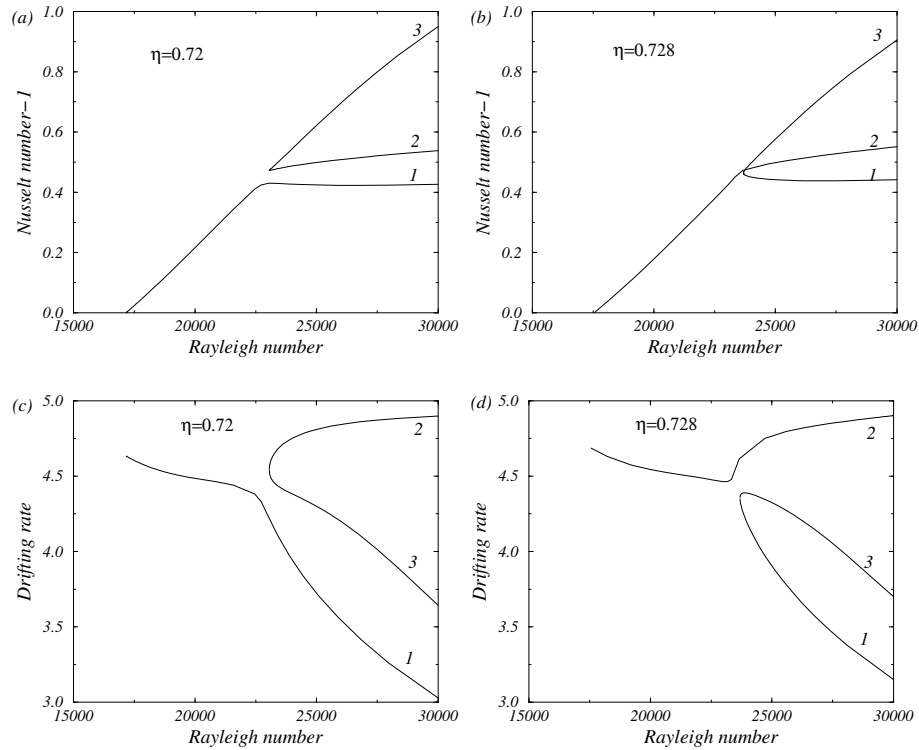


Figura 4.20: Número de Nusselt,  $Nu - 1$ , en función del número de Rayleigh de la solución con número de onda fundamental  $n = 20$  para  $\tau = 2000$ , (a)  $\eta = 0,72$  y (b)  $\eta = 0,728$ . (c) y (d) Respectivamente, velocidad de precesión de las mismas soluciones. Como se puede observar, entre estos dos valores de la razón de radios se produce una bifurcación de *pitchfork* no genérica. La estabilidad de las soluciones de cada rama se puede concluir a partir de la figura 4.19a.  $\sigma = 0,7$ .

En la figura 4.19a también se indica mediante triángulos blancos los límites de estabilidad de las soluciones que pertenecen a una rama equivalente a la rama 2 de la figura 4.4. Por lo tanto, en la intersección de las zonas de estabilidad delimitadas por círculos y triángulos blancos existen dos ondas viajeras estables diferentes con el mismo número de onda. Para  $\eta < 0,72$  la estructura de las soluciones de la rama que bifurca del estado conductivo y de las de la rama desconectada son similares a aquellas que pertenecen a las ramas equivalentes de la figura 4.5 ( $\tau = 2800$ ,  $\eta = 0,6$ ). Es decir, las soluciones que bifurcan del estado conductivo conducen, al aumentar el número de Rayleigh, a soluciones que presentan los vórtices convectivos situados en el exterior de la capa; en las soluciones de la rama desconectada, los vórtices están situados en la parte interior de la capa. Sin embargo, para un valor de  $\eta$  entre 0,72 y 0,728 hay

una bifurcación de *pitchfork* no genérica (figura 4.20), y para  $\eta > 0,728$ , las soluciones que bifurcan del estado conductivo se transforman en soluciones con los vórtices convectivos situados en el interior de la capa, mientras que, para las otras soluciones, el desplazamiento es hacia la parte exterior.

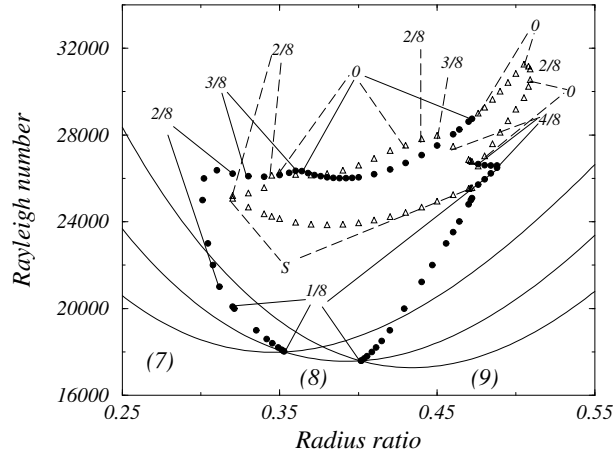


Figura 4.21: Región de estabilidad de las soluciones con  $n = 8$  que bifurcan del modo dominante  $n = 8$  para  $\tau = 2000$ . La zona de estabilidad está limitada por círculos, de los que se indica el valor de  $d_m$  responsable de la inestabilidad.  $S$  indica que el límite de estabilidad corresponde a la bifurcación silla-nodo de la curva desconectada del estado conductivo. El modo dominante se indica entre paréntesis. También se presenta la región de estabilidad de una solución que no proviene del estado conductivo. En este caso los puntos de bifurcación se indican mediante triángulos blancos. Las líneas continuas (discontinuas) asociadas a un número indican el valor de  $d_m$  en los puntos de bifurcación de las soluciones que (no) provienen del estado conductivo.  $\sigma = 0,7$ .

Este comportamiento se repite, si se analiza la estabilidad de una solución que bifurca de un modo dominante para un valor menor de la razón de radios para  $\tau = 2000$ . Por ejemplo, la solución que bifurca del modo *normal*  $n = 8$  presenta una bifurcación de *pitchfork* no genérica para un valor de la razón de radios entre 0,47 y 0,48. En la figura 4.21 se muestra la región de estabilidad de estas soluciones. En este caso se aprecia claramente un intercambio entre las regiones de estabilidad. Sin embargo, se ha comprobado que si  $\tau = 2800$  no es posible encontrar el intervalo en el que se produce la bifurcación de *pitchfork* no genérica, siendo el diagrama de las soluciones similar al de la figura 4.20a.

La forma de los límites laterales de la región de estabilidad de una onda que proviene de un modo dominante para un valor de  $\eta$  cercano a  $\eta_c$  no es parabólica. Para ilustrar este comportamiento, se mostrarán varios casos tanto en función

de  $\eta$  como de  $\tau$ . En las figuras 4.22a y 4.22b se presenta, para  $\tau = 8000$  y  $\tau = 2800$  respectivamente, los límites de estabilidad de las soluciones primarias provenientes del modo *espiral* (círculos) y del modo *normal* (triángulos), que dominan para valores de la razón de radios antes y después de  $\eta_c$ . Para  $\tau = 8000$ , las zonas de estabilidad corresponden a las soluciones de número de onda fundamental  $n = 21$  (espiral) y  $n = 27$  (normal), y para  $\tau = 2800$ ,  $n = 4$  (espiral) y  $n = 6$  (normal). En estas figuras se indican los valores de  $d_m$  responsables de la inestabilidad. Se representan mediante líneas a trazos y continuas algunas curvas marginales de los modos *espirales* y *normales*, respectivamente, cuya interacción es la responsable de las inestabilidades laterales de las soluciones primarias. El número de onda azimutal de los modos representados se indica entre paréntesis.

Para  $\tau = 8000$ , la rama izquierda de la región de estabilidad de la solución que proviene del modo *espiral* ( $n = 21$ ) tiene un perfil aproximadamente parabólico, mientras que la rama derecha es prácticamente independiente del número de Rayleigh; para la solución que proviene del modo *normal* ( $n = 27$ ) se observa un desplazamiento de la región estable hacia valores de  $\eta$  mayores. De los valores de  $d_m$  en esta rama, puede concluirse que es la interacción entre el modo *normal*  $n = 27$  y el *espiral*  $n = 22$  la responsable de este comportamiento. Es importante remarcar que no existe ningún rango de parámetros para el cual las dos ondas,  $n = 21$  y  $n = 27$ , sean estables simultáneamente.

La forma de la región de estabilidad de las soluciones que provienen de dos tipos de modos cerca del punto de transición para  $\tau = 2800$  es completamente diferente. En este caso, la zona de estabilidad de la solución que proviene del modo *espiral* está desplazada hacia la izquierda. La interacción entre el modo *espiral*  $n = 4$  y el *normal*  $n = 6$  da como resultado que la rama de la derecha de la zona de estabilidad de  $n = 4$  se desplace hacia la izquierda ( $d_m = 2/4$ ). Para  $n = 6$ , la rama de la izquierda mantiene el perfil parabólico y los valores de  $d_m$  revelan que son las interacciones entre el modo *normal*  $n = 6$  y los *espirales*  $n = 3$  y  $n = 4$  los que gobiernan este límite de la zona de estabilidad. El límite de la derecha presenta una forma ligeramente convexa, casi vertical. La intersección entre ambas regiones de estabilidad es, en este caso, una pequeña franja a la izquierda de  $\eta_c$ .

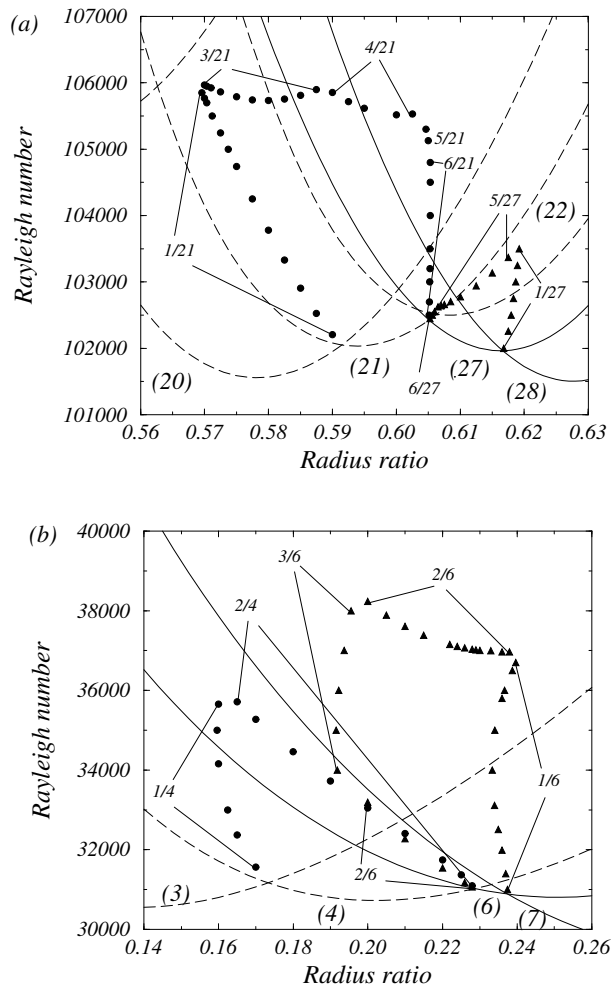


Figura 4.22: Regiones de estabilidad de las soluciones provenientes de los modos dominantes para valores de  $\eta$  antes (*espiral*) y después (*normal*) de  $\eta_c$ , para (a)  $\tau = 8000$  y (b)  $\tau = 2800$ . Los límites de la región de estabilidad antes (después) de  $\eta_c$  están representados por círculos (triángulos). Las curvas de estabilidad marginal del estado conductivo de los diferentes modos, indicados entre paréntesis, están representadas por líneas a trazos (*espirales*) y continuas (*normales*).  $\sigma = 0,7$ .

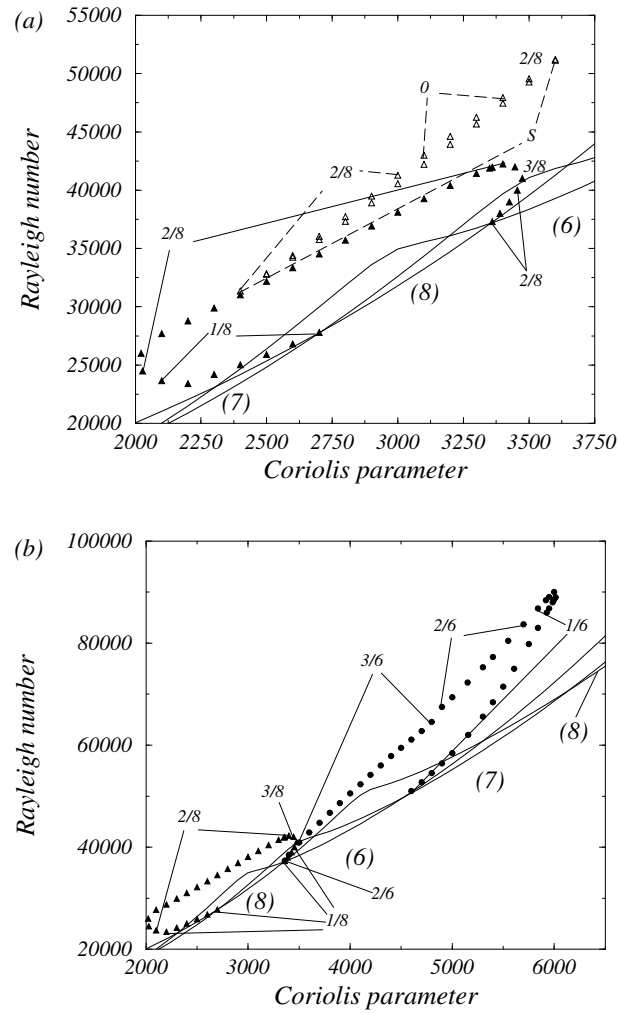


Figura 4.23: (a) Regiones de estabilidad de las soluciones que provienen del modo *normal*  $n = 8$  (triángulos negros) y de las soluciones primarias con el mismo número de onda desconectadas del estado conductivo (triángulos blancos) para  $\eta = 0,3$ . En ambos casos se indican el valor de  $d_m$  en cada punto. Las líneas que indican los valores de  $d_m$  de las soluciones que no bifurcan del estado conductivo son discontinuas.  $S$  indica que el límite de estabilidad corresponde al punto silla-nodo de la curva desconectada. (b) Regiones de estabilidad de las soluciones que provienen de los modos dominantes antes (*normal*) y después (*espiral*) del cambio de carácter de la solución lineal ( $\tau_c \approx 3350$ ). Los límites de las regiones de estabilidad de los modos  $n = 8$  (*normal*) y  $n = 6$  (*espiral*) se representan mediante triángulos y círculos, respectivamente.  $\sigma = 0,7$ .

Si se estudia la forma de la región de estabilidad fijando un valor de la

razón de radios, ésta también varía para las soluciones que provienen de modos dominantes en torno a  $\tau_c$ . Como ejemplo se presenta el caso  $\eta = 0,3$ . En la figura 4.23a se presentan, mediante triángulos negros y blancos, respectivamente, las regiones de estabilidad de las soluciones que provienen del modo *normal* dominante  $n = 8$  y la correspondiente a las soluciones desconectadas para este valor del número de onda. En este caso no existe ningún rango de números de Rayleigh en el que ambas ondas sean simultáneamente estables. En la figura 4.23b se presentan mediante triángulos y círculos, respectivamente, las regiones de estabilidad de las soluciones que provienen de los modos dominantes antes y después de  $\tau_c$ . Como se puede observar estas regiones son completamente diferentes. Para  $\tau > \tau_c$ , la inestabilidad por la izquierda de las soluciones que provienen del modo *espiral* dominante  $n = 6$  está dominada por la interacción con el modo *normal*  $n = 9$ , que hace que la curva esté desplazada hacia valores del parámetro de Coriolis mayores. Por el contrario, la región de estabilidad de la onda periódica con número de onda fundamental  $n = 8$  no parece afectada por la proximidad de  $\tau_c$ .

Para  $\eta = 0,3$ , las soluciones que bifurcan del modo *espiral* dominante  $n = 6$  se inestabilizan para algunos valores del parámetro de Coriolis mediante una bifurcación subarmónica estacionaria ( $\Im(\lambda_m)=0$ ) con  $d_m = 3/6$ . En la siguiente sección se presenta este caso para un determinado valor de  $\tau$  con más detalle.

#### 4.4.4. Bifurcación subarmónica estacionaria para $\eta = 0,3$

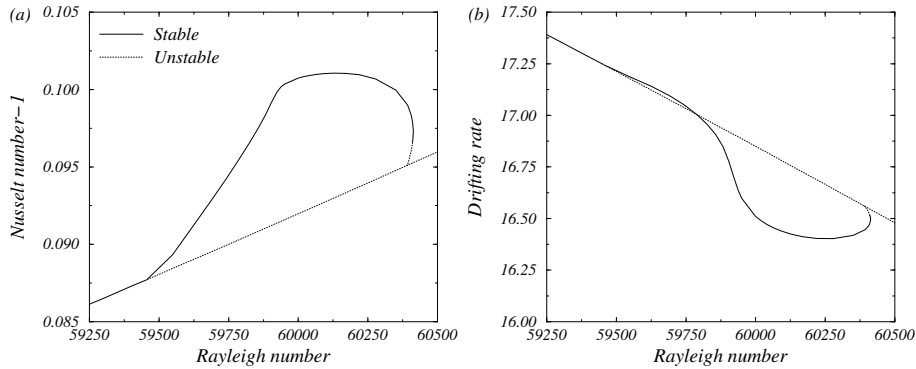


Figura 4.24: (a) Número de Nusselt,  $Nu - 1$ , y (b) velocidad de precesión,  $\omega$ , en función del número de Rayleigh para las soluciones que bifurcan del modo dominante  $n = 6$  para  $\tau = 4500$  y  $\eta = 0,3$ . La inestabilidad de la solución primaria se produce para  $Ra \approx 59498$ .  $\sigma = 0,7$ .

Debido a que la bifurcación subarmónica estacionaria da lugar a una onda viajera, es correcto estudiar la nueva solución mediante técnicas de continuación.

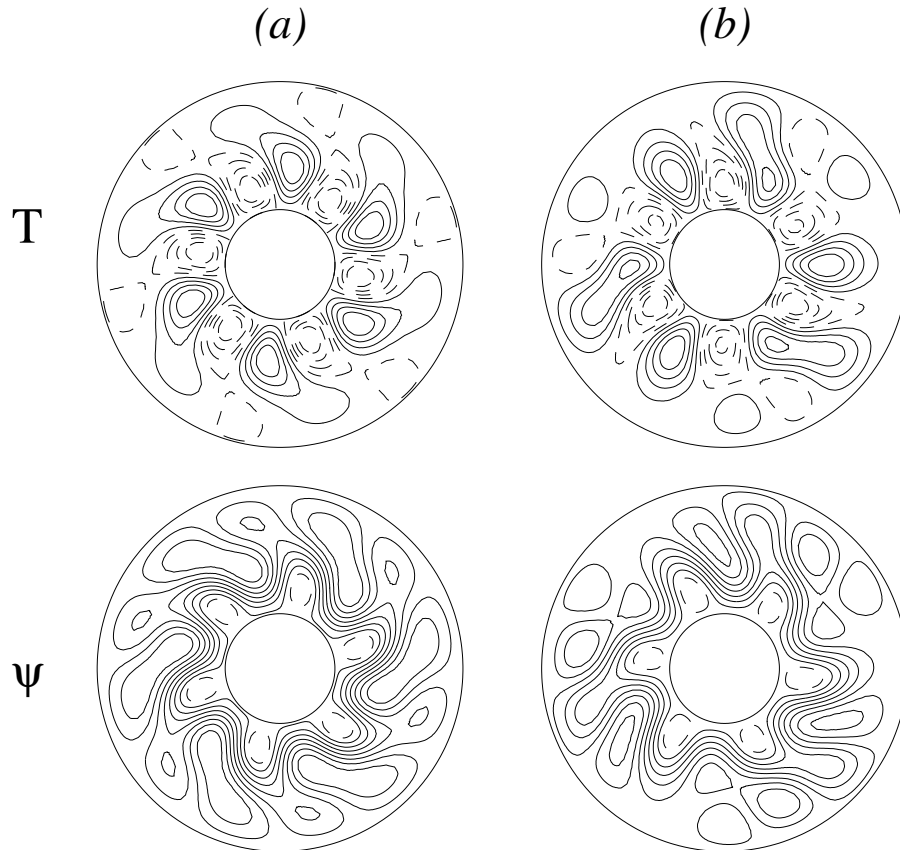


Figura 4.25: En el sistema de referencia que gira con el cilindro se presentan las líneas de corriente y las isolíneas del campo de la temperatura (a) para la solución estable que bifurca del modo dominante  $n = 6$ , para  $Ra = 58000$  y (b) para la solución estable que aparece después de la bifurcación subarmónica estacionaria, para  $Ra = 60000$ ,  $\tau = 4500$ ,  $\eta = 0,3$  y  $\sigma = 0,7$ .

Para  $\eta = 0,3$ , la solución primaria se inestabiliza para  $\tau = 4500$  mediante una bifurcación subarmónica ( $d_m = 3/6$ ) estacionaria. Si se analiza el vector propio en el punto de la bifurcación, se comprueba que el máximo de la amplitud del autovector se obtiene para  $l = 1$  y por lo tanto la perturbación está dominada por una estructura de número de onda 9, siendo ésta de tipo *normal*. Por tanto, aparecerá una nueva solución, que en el punto de la bifurcación tendrá la misma frecuencia y con número de onda 3 (máximo común divisor de 6 y 3). En la

figura 4.24 se representa la variación del número de Nusselt y de la frecuencia con el número de Rayleigh de la solución que bifurca del modo dominante  $n = 6$  para  $\eta = 0,3$  y  $\tau = 4500$ . La nueva solución, estable después de la bifurcación, se inestabiliza posteriormente ( $Ra \approx 60510$ ) mediante una bifurcación silla-nodo. La estructura de la solución antes y después de la bifurcación subarmónica estacionaria se muestra en la figura 4.25. A la izquierda se representan las líneas de corriente y las isolíneas del campo de la temperatura de la solución primaria para  $Ra = 58000$ . Se observan claramente los 6 pares de columnas convectivas inclinadas en el sentido de la rotación y confinadas en el interior del anillo. Estas características corresponden a las soluciones espirales.

La solución estable después de la bifurcación estacionaria es un modo mixto. Esta estructura se puede observar en la figura 4.25b. Ahora la convección aumenta en la parte exterior del anillo, lo que supone un incremento en el transporte de calor como se observa en la figura 4.24.

## 4.5. Discusión

En este capítulo se han analizado numéricamente, utilizando una formulación de función de corriente, las soluciones no lineales relacionadas con cada uno de los tipos de modos dominantes del análisis lineal para  $\sigma = 0,7$  (Pino, Net & Mercader, 2001). Se ha prestado especial atención a las soluciones que bifurcan de los modos dominantes del estado conductivo, pero también se han identificado soluciones que pertenecen a curvas desconectadas y que aparecen como consecuencia de la ruptura de la simetría  $\kappa$  o de la simetría  $R$  al tener en cuenta la curvatura de las paredes del anillo o los efectos de la rotación. En ambos casos se ha estudiado la estabilidad mediante una técnica de Floquet.

Se ha comprobado que, debido al aumento de la velocidad con la rotación, la eficiencia en el transporte de calor de las soluciones que proceden de modos dominantes disminuye al aumentar  $\tau$  para valores pequeños del parámetro  $\delta$ . Sin embargo, a diferencia de lo que ocurre en la aproximación de capa plana y condiciones de contorno libres (Busse & Or, 1986), la eficiencia del transporte de calor al inicio de la convección depende de la rotación. Se ha comprobado que, para el mismo valor de  $n$ ,  $\tau$  y  $\eta$ , las soluciones espirales son más eficientes en el transporte de calor. Una posible explicación a este hecho es la mayor correlación entre la velocidad radial y la temperatura que presentan estos modos sobre los *normales*. Para las soluciones que no bifurcan del estado conductivo, se han encontrado, por una parte, soluciones caracterizadas por un débil flujo medio, una importante eficiencia en el transporte de calor y una estructura en



forma de columna simple o doble poco distorsionada. Por otra parte, existen soluciones cuya energía asociada al flujo medio contiene más del 50 % de la energía cinética incluso para valores menores de  $2Ra_c$ . Sin embargo, considerar condiciones de contorno de adherencia en las paredes laterales puede ser el causante de no obtener soluciones con flujos medios, para valores pequeños de  $\delta$ , tan importantes como los obtenidos por Zhang (1992) en el estudio de capas esféricas con condiciones de contorno de esfuerzos cortantes nulos.

Se ha prestado especial atención en conectar las soluciones del anillo con las obtenidas en la aproximación de capa plana, para averiguar en que casos puede utilizarse esta aproximación. Los resultados presentados muestran que la aproximación de capa plana podría servir para predecir la dinámica en el anillo con paredes curvas, siempre que el modo dominante sea *normal*, y el valor del la razón de radios esté suficientemente alejado de  $\eta_c$  para el valor parámetro de Coriolis considerado. De todas maneras, los efectos de la ruptura de la simetría  $Z_2$  deben tenerse en cuenta para describir el diagrama de ramificaciones y las características de las soluciones relacionadas con los modos *normales*. Cuando el modo dominante es *espiral*, se ha mostrado que la conexión debe realizarse con las soluciones relacionadas con el modo dominante  $\kappa$ -invariante (*segundo armónico radial*) en esta aproximación. Sin embargo, se ha encontrado que para estas soluciones, el diagrama de ramificaciones se transforma significativamente cuando se incluye la curvatura de las paredes y el valor de  $\eta$  disminuye desde el valor asintótico uno.

Respecto a la estabilidad de las soluciones e independientemente del tipo de modos lineales del que bifurquen, se ha demostrado que lejos del cambio de familia de modos dominantes del análisis lineal, las inestabilidades laterales presentan la típica forma parabólica. Lejos de  $\eta_c$ , los valores de  $d_m$  en ambos límites de estabilidad matizan y confirman los resultados obtenidos por Or & Busse (1987), entre otros, en la aproximación de capa plana. Si se aumenta el número de Rayleigh a partir del valor crítico, la solución no lineal se inestabiliza mediante una bifurcación superarmónica o con un valor de  $d_m$  muy pequeño. Por el contrario, en torno a  $\eta_c$  ( $\tau_c$ ) la solución no lineal se inestabiliza con  $d_m \neq 0$  y la forma de los límites laterales de la región de estabilidad ya no es parabólica.

En el siguiente capítulo se presenta la evolución de las soluciones después de la bifurcación secundaria. Debido a la complejidad temporal que presentan, es necesario resolver las ecuaciones mediante una integración temporal.

## Capítulo 5

# Integración temporal. Soluciones secundarias

El objetivo de este capítulo es estudiar la dinámica del fluido cuando las ondas de Rossby térmicas no lineales presentadas en el capítulo anterior se inestabilizan. Para ello se han integrado la ecuación de Navier–Stokes, la ecuación de continuidad y la ecuación de conservación de la energía mediante un método semiimplícito de paso fraccionario. La dinámica espacio–temporal de las soluciones que bifurcan de la onda térmica de Rossby se ha analizado principalmente para valores de  $\sigma = 0,7$  y  $\eta = 0,6$ . Teniendo en cuenta los resultados que se han presentado en capítulos anteriores, se han escogido valores del parámetro de Coriolis que contemplen tanto los diferentes tipos de modos (*normales* o *espirales*) de los que proceden las soluciones primarias, como los diferentes tipos de bifurcaciones secundarias (subarmónicas o superarmónicas). Se ha estudiado la evolución de estas soluciones y las sucesivas bifurcaciones que aparecen al aumentar el número de Rayleigh y el efecto de estas bifurcaciones sobre la eficiencia en el transporte de calor.

Además se presentará un caso con  $\sigma = 0,025$  como ejemplo de solución para bajos números de Prandtl. Este caso se comparará con el equivalente en el caso del anillo con tapas horizontales.

## 5.1. Método de integración temporal en variables primitivas

Al inestabilizarse las ondas térmicas de Rossby, no existe ningún sistema de referencia en el que las soluciones sean estacionarias y por lo tanto, no es posible utilizar el método descrito en el capítulo anterior. Por este motivo, se han integrado temporalmente las ecuaciones 2.21, escritas en función de las dos componentes horizontales de la velocidad, de la presión y de la temperatura con las condiciones de contorno 2.8, mediante un método semiimplícito de segundo orden y un esquema de paso fraccionario, que se explican en el apéndice D.

### 5.1.1. Discretización espacial

Para describir la dependencia radial de las variables se ha utilizado un desarrollo en polinomios de Tchebyshev,  $\mathcal{T}_l(x)$ ,  $l = 0 \div L$ . En la coordenada azimutal la base utilizada ha sido  $\{e^{in\theta}\}_{n=-N/2 \div N/2}$ . Por tanto, las perturbaciones consideradas son de la forma

$$u(x, \theta, t) = \sum_{-N/2}^{N/2-1} \sum_{l=0}^L \hat{u}_{l,n}(t) \mathcal{T}_l(x) e^{in\theta}, \quad (5.1a)$$

$$v(x, \theta, t) = i \sum_{-N/2}^{N/2-1} \sum_{l=0}^L \hat{v}_{l,n}(t) \mathcal{T}_l(x) e^{in\theta}, \quad (5.1b)$$

$$T(x, \theta, t) = \sum_{-N/2}^{N/2-1} \sum_{l=0}^L \hat{T}_{l,n}(t) \mathcal{T}_l(x) e^{in\theta}, \quad (5.1c)$$

donde  $\hat{u}_{l,n} = \hat{u}_{l,-n}^*$ ,  $\hat{T}_{l,n} = \hat{T}_{l,-n}^*$  y  $\hat{v}_{l,n} = -\hat{v}_{l,-n}^*$ . Por lo que, sólo es necesario operar con la mitad de las incógnitas,  $n = 0 \div N/2-1$ . El sistema de ecuaciones se ha resuelto mediante un método de colocación en la dirección radial y un método de Galerkin en la dirección azimutal. Al igual que en el caso de la formulación de la función de corriente, se ha utilizado un esquema pseudoespectral de colocación para evaluar los términos no lineales. Se ha considerado como incógnita el valor de cada coeficiente de Fourier en los puntos de colocación de Gauss-Lobatto,

$$u_{i,n}(t) = \sum_{l=0}^L \hat{u}_{l,n}(t) \mathcal{T}_l(x_i), \quad (5.2a)$$

$$v_{i,n}(t) = \sum_{l=0}^L \hat{v}_{l,n}(t) \mathcal{T}_l(x_i), \quad (5.2b)$$

$$T_{i,n}(t) = \sum_{l=0}^L \hat{T}_{l,n}(t) \mathcal{T}_l(x_i), \quad (5.2c)$$

con  $i = 1 \div L - 1$  y  $n = 0 \div N/2 - 1$ . Nótese que los coeficientes  $\hat{u}_{l,n}$ ,  $\hat{v}_{l,n}$  y  $\hat{T}_{l,n}$  no son independientes ya que las variables  $u$ ,  $v$  y  $T$  deben verificar las correspondientes condiciones de contorno. Por lo tanto, las incógnitas son sólo el valor de los coeficientes en el interior del dominio. Utilizando los desarrollos 5.1 y análogos para las variables intermedias que se definen en el apéndice D y aplicando el método espectral comentado a las ecuaciones D.1, D.2, D.4, D.5 y D.6, se obtienen las ecuaciones discretizadas que deben resolverse con las condiciones de contorno indicadas en el apéndice D. En Alonso (1999) se explica en profundidad la discretización espacial completa de las ecuaciones.

## 5.2. Resultados. $\sigma = 0,7$ , $\eta = 0,6$

### 5.2.1. Parámetro de Coriolis $\tau = 2800$

En este caso y para  $\eta = 0,6$  la solución no lineal que proviene de un modo *normal* se inestabiliza mediante una bifurcación superarmónica ( $d_m = 0$ ). Recordemos que para  $\eta = 0,6$  el cambio de tipo de modos lineales dominantes ocurre para  $\tau_c \approx 7850$  (ver la figura 4.18b). El modo lineal dominante para  $\tau = 2800$  es  $n = 17$  y la solución primaria que de él bifurca se inestabiliza para  $Ra^s \approx 32540$ . Al ser esta bifurcación superarmónica con  $\Im(\lambda_1) \neq 0$ , la solución que bifurca mantiene la estructura periódica espacial y presenta una nueva frecuencia,  $\Im(\lambda_1) = \pm\omega'$ , es decir, dependiendo de la relación entre  $\omega$  y  $\omega'$  podría ser una solución casiperiódica.

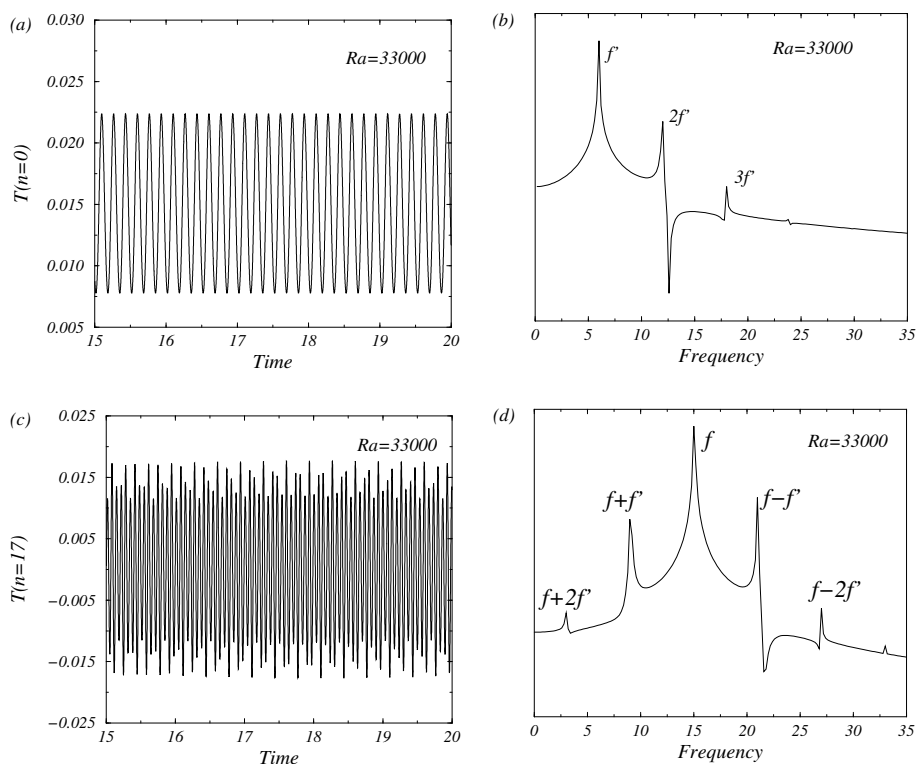


Figura 5.1: (a) Dependencia temporal en un punto del modo azimutal  $n = 0$  de la temperatura y (b) su espectro. (c) y (d) figuras análogas a (a) y (b) para la parte real del modo  $n = 17$ . En esta figura  $f = -15$  y  $f' = 6$ .  $Ra = 33000$ ,  $\tau = 2800$ ,  $\eta = 0,6$  y  $\sigma = 0,7$ .

En la figura 5.1a se muestra la evolución temporal del modo azimutal  $n = 0$  de la temperatura en un punto, para  $Ra = 33000$ . Este modo, constante antes de la bifurcación, oscila ahora periódicamente con la nueva frecuencia, como puede observarse en la figura 5.1b, donde sólo se representa la parte positiva del espectro de la figura 5.1a. En este capítulo se presentarán todos los espectros en escala logarítmica con el fin de apreciar mejor los picos del espectro de frecuencias, y ya que se representan señales reales, sólo mostraremos la parte del espectro correspondiente a las frecuencias positivas, donde cada pico se corresponde con el valor absoluto de la frecuencia indicada. En la figura 5.1c se muestra la evolución temporal en un punto de la parte real del modo azimutal  $n = 17$  de la temperatura para el mismo valor del número de Rayleigh. El correspondiente espectro se muestra en la figura 5.1d. Como puede apreciarse y de acuerdo con la expresión 4.4a, en el espectro del modo  $n = 17$  aparecen dos

nuevos picos en  $f + f'$  y  $f - f'$ , siendo, para este valor del número de Rayleigh,  $f' = 6$  y  $f = -15$ . Esta última frecuencia corresponde a la frecuencia básica del modo azimutal  $n = 17$ , que en el punto de la bifurcación es  $-17\omega_0$ , con  $\omega_0$  la velocidad de precesión de la onda térmica de Rossby. Por lo tanto, la dependencia temporal de los modos azimutales  $n = 0, \pm 17$  de la temperatura en un punto puede expresarse de la siguiente manera

$$T_{i,0}^b = a_0 + a_+ e^{i2\pi f' t} + a_- e^{-i2\pi f' t} + \dots,$$

$$T_{i,17}^b = b_{17} e^{i2\pi f t} + b_{17+} e^{i2\pi(f+f')t} + b_{17-} e^{i2\pi(f-f')t} + \dots,$$

$$T_{i,-17}^b = b_{-17} e^{-i2\pi f t} + b_{-17+} e^{-i2\pi(f+f')t} + b_{-17-} e^{-i2\pi(f-f')t} + \dots,$$

donde se cumple  $a_+ = a_-^*$  y  $b_{-k} = b_k^*$ .

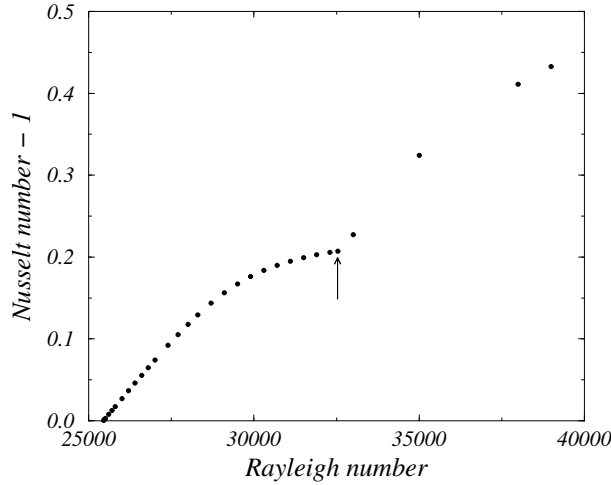


Figura 5.2: Número de Nusselt en función del número de Rayleigh para las soluciones primarias que bifurcan del estado conductivo y de las secundarias que aparecen después de la bifurcación superarmónica (indicada por un flecha) con número de onda  $n = 17$ , para  $\eta = 0,6$ ,  $\tau = 2800$  y  $\sigma = 0,7$ . En esta figura, el número de Nusselt de la solución secundaria se ha calculado promediando en un periodo.

Para analizar de que modo se ve afectado el transporte de calor por la bifurcación, se representa en la figura 5.2 la evolución del número de Nusselt con el número de Rayleigh. Como ya se ha explicado en la sección 4.4.2, la disminución de la pendiente del número de Nusselt antes de la bifurcación se debe al desplazamiento de los vórtices convectivos hacia la parte exterior de la capa (ver la figura 4.5a). Después de la bifurcación las soluciones presentan un fuerte incremento en la eficiencia en el transporte de calor (Pino, Mercader & Net,

1999). Este hecho puede explicarse observando la evolución de las isolíneas de la temperatura y de las componentes de la velocidad durante un periodo del modo azimutal  $n = 0$ .

En las figuras 5.3a, 5.3b y 5.3c se representan, respectivamente, las isolíneas de la temperatura, de la velocidad radial y de la velocidad azimutal en 6 instantes de un periodo del modo azimutal  $n = 0$  para  $Ra = 35000$ . Como puede observarse en estas figuras, después de la bifurcación la convección se reestablece periódicamente en toda la capa. Esto ocurre, principalmente, en los instantes  $3/6$  y  $4/6$  del periodo. En estos momentos el flujo medio, representado en la figura 5.3d, es pequeño. Al aumentar el flujo medio, la convección se confina en el exterior del cilindro. Este desplazamiento de los vórtices convectivos alternativamente hacia ambas paredes hace que la zona en la que el calor se transporta por conducción sea en promedio más pequeña que en las soluciones primarias, aumentando el número de Nusselt. Esta dinámica es similar a las que presentan las soluciones que aparecen después de la *vacilating instability* descrita por Or & Busse (1987) y Schnaubelt & Busse (1992) en la aproximación de capa plana con  $\epsilon = 0$  (ver la expresión de la curvatura de las tapas de la página 37).

Este tipo de convección “vacilatoria” también puede observarse si se realiza un diagrama espacio-temporal de alguna de las variables (mapa de grises). En las figuras 5.4a y 5.4b se representan la evolución temporal (eje Y) y su dependencia con la coordenada  $\theta$  (eje X) de la temperatura y de la velocidad azimutal, respectivamente, para un radio fijo del anillo, en este caso  $r = \frac{r_1+r_2}{2}$ . Al igual que en el resto de los mapas de grises presentados en este capítulo el color blanco corresponde al valor máximo y el negro al valor mínimo de la variable representada. Los instantes en los que se produce un aumento de la velocidad azimutal concuerdan con disminuciones del número de Nusselt, con lo cual la mayor parte de la energía del sistema es cinética.

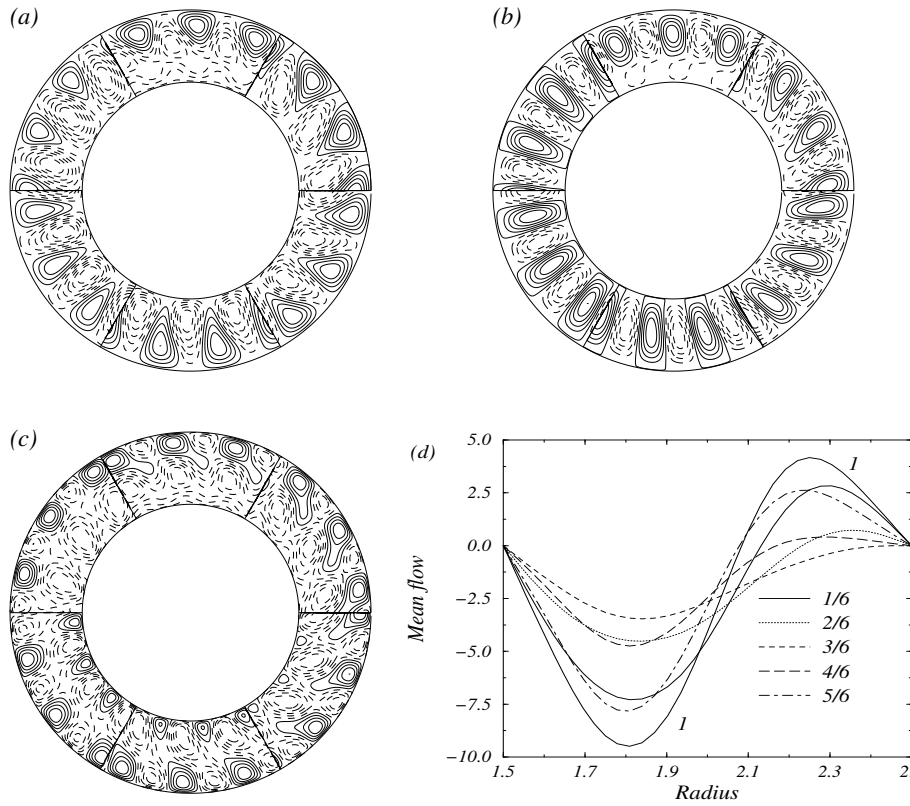


Figura 5.3: Isolíneas (a) de la perturbación de la temperatura, (b) de la velocidad radial y (c) de la velocidad azimutal en seis instantes equiespaciados de un periodo del modo azimutal  $n = 0$ . Empezando por la parte superior de los contornos (a), (b) y (c) y en sentido antihorario se representan los instantes  $1/6, 2/6, \dots, 1$  del periodo. (d) muestra el flujo medio en los 6 instantes. En esta última figura, para evitar confusiones, se ha marcado sobre la curva el instante correspondiente a un periodo completo.  $Ra = 35000$ ,  $\tau = 2800$ ,  $\eta = 0,6$  y  $\sigma = 0,7$ .



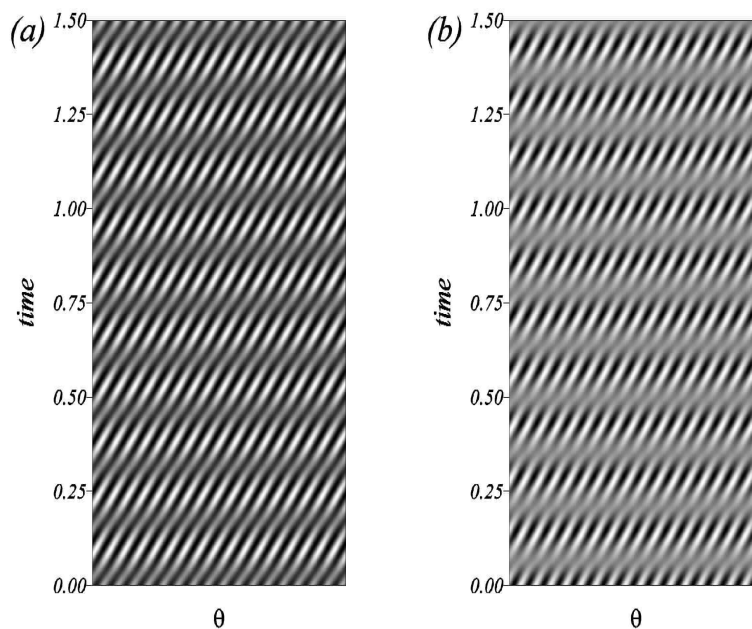


Figura 5.4: Diagrama espacio-temporal (a) de la temperatura y (b) de la velocidad azimutal, en  $r = \frac{r_1+r_2}{2}$ .  $Ra = 35000$ ,  $\tau = 2800$ ,  $\eta = 0,6$  y  $\sigma = 0,7$ .

Al aumentar el número de Rayleigh, para  $Ra \in [37000, 37200]$ , se produce una bifurcación subarmónica como puede verse en la figura 5.5, donde se presenta la amplitud de los diferentes modos azimutales para  $Ra = 37000$ ,  $37200$ ,  $37300$  y  $38000$ . Como puede observarse, muy cerca de la bifurcación los modos desestabilizados que presentan mayor amplitud son los  $17n \pm 1$ . En los espectros de estos modos aparecen combinaciones de  $f$ ,  $f'$  y una nueva frecuencia que se designará por  $f''$ . El espectro del resto de los modos se puede explicar si se tienen en cuenta las interacciones no lineales de estos modos entre sí y/o con los ya existentes. En la figura 5.6 se presenta la dependencia temporal en un punto y el espectro del modo azimutal  $n = 0$  y de la parte real del modo  $n = 17$  de la temperatura para  $Ra = 38000$ . Para este valor del número de Rayleigh, la nueva frecuencia no es detectable todavía en el espectro de estos dos modos, que es similar al de  $Ra = 33000$ , siendo ahora  $f = -14,55$  y  $f' = 9,2$ . Sin embargo, en los espectros de los modos que se han inestabilizado, se obtienen las combinaciones de  $f$ ,  $f'$  y  $f'' = 0,6$  esperadas si se tiene en cuenta la dependencia espacio-temporal de la solución antes de bifurcar, el carácter oscilatorio de la nueva bifurcación y las interacciones no lineales que dan lugar a los diferentes modos. Este hecho se observa en la figura 5.7, donde se representa la dependencia temporal en un punto y los espectros de la parte real de los modos azimutales

$n = 1$ ,  $n = 16$  y  $n = 2$  de la temperatura. La dependencia temporal de estos modos azimutales en un punto cerca de la bifurcación subarmónica es de la siguiente manera

$$T_{i,1} = \alpha_{1-} e^{i2\pi f'' t} + \alpha_{1+} e^{i2\pi(f''+f')t} + \alpha_{1-} e^{i2\pi(f''-f')t} + \dots,$$

$$T_{i,-1} = \alpha_{-1-} e^{-i2\pi f'' t} + \alpha_{-1+} e^{-i2\pi(f''+f')t} + \alpha_{-1-} e^{-i2\pi(f''-f')t} + \dots,$$

$$T_{i,2} = \alpha_{2-} e^{i2\pi 2f'' t} + \alpha_{2+} e^{i2\pi(2f''+f')t} + \alpha_{2-} e^{i2\pi(2f''-f')t} + \dots,$$

$$T_{i,-2} = \alpha_{-2-} e^{-i2\pi 2f'' t} + \alpha_{-2+} e^{-i2\pi(2f''+f')t} + \alpha_{-2-} e^{-i2\pi(2f''-f')t} + \dots,$$

$$T_{i,16} = \alpha_{16-} e^{i2\pi(f-f'')t} + \alpha_{16+} e^{i2\pi(f-f''+f')t} + \alpha_{16-} e^{i2\pi(f-f''-f')t} + \dots,$$

$$T_{i,-16} = \alpha_{-16-} e^{-i2\pi(f-f'')t} + \alpha_{-16+} e^{-i2\pi(f-f''+f')t} + \alpha_{-16-} e^{-i2\pi(f-f''-f')t} + \dots,$$

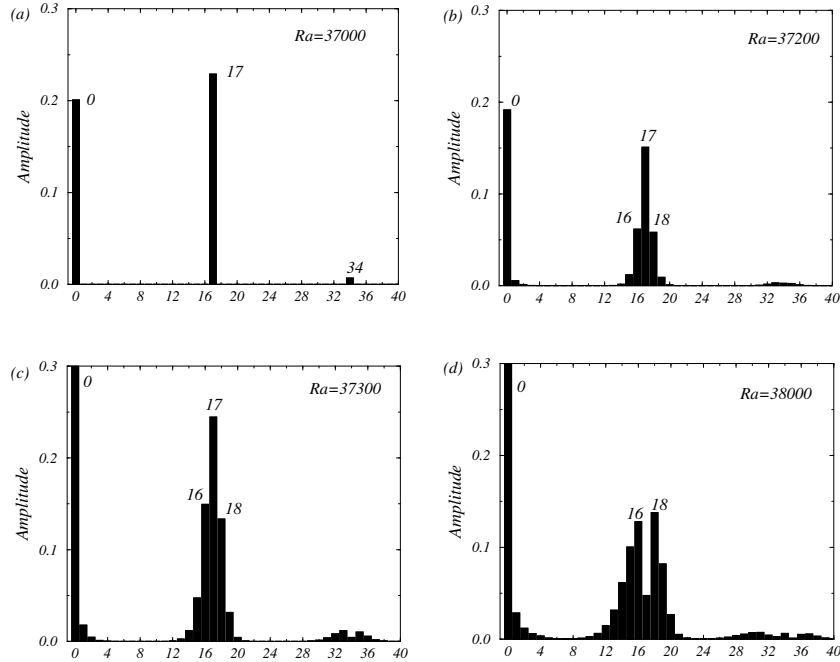


Figura 5.5: Espectros azimutales en un instante de la temperatura de las soluciones para (a)  $Ra = 37000$ , (b)  $Ra = 37200$ , (c)  $Ra = 37300$  y (d)  $Ra = 38000$ .  $\tau = 2800$ ,  $\eta = 0,6$  y  $\sigma = 0,7$ .

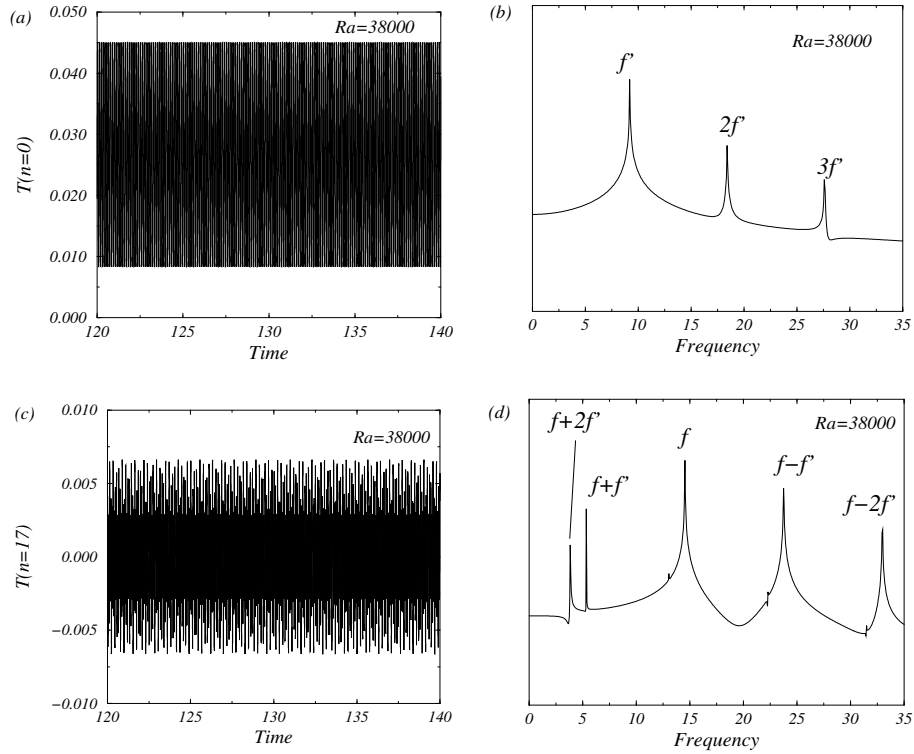


Figura 5.6: (a) Dependencia temporal en un punto del modo azimutal  $n = 0$  de la temperatura y (b) su espectro. (c) y (d) figuras análogas a (a) y (b) para la parte real del modo  $n = 17$ . En esta figura  $f = -14,55$  y  $f' = 9,2$ .  $Ra = 38000$ ,  $\tau = 2800$ ,  $\eta = 0,6$  y  $\sigma = 0,7$ .

El efecto que produce la aparición de la nueva frecuencia puede apreciarse claramente en las figuras 5.8a y 5.8b, donde se presentan los mapas de grises de la temperatura para dos valores diferentes de  $r$ . En estas figuras se observa cómo la parte exterior e interior del anillo se desplazan a diferente velocidad, siendo mayor en el exterior. También se detecta en la figura 5.8a una velocidad de grupo negativa. Esta velocidad puede estimarse a partir de la frecuencia de modos vecinos (Drissi, Net & Mercader, 1999).

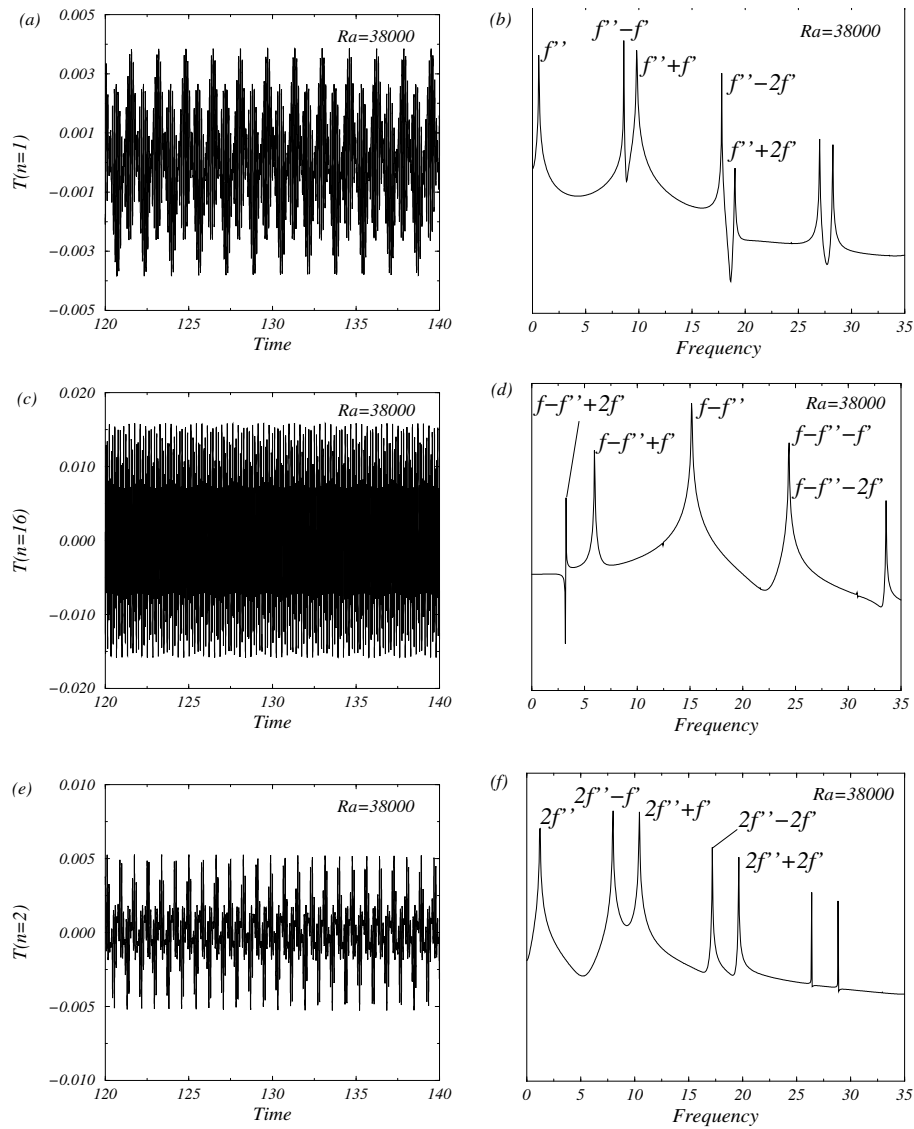


Figura 5.7: (a) Dependencia temporal en un punto de la parte real del modo azimutal  $n = 1$  de la temperatura y (b) su espectro. (c) y (d), (e) y (f) figuras análogas a (a) y (b) para los modos  $n = 16$  y  $n = 2$ , respectivamente.  $f = -14,55$ ,  $f' = 9,2$  y  $f'' = 0,6$ .  $Ra = 38000$ ,  $\tau = 2800$ ,  $\eta = 0,6$  y  $\sigma = 0,7$ .

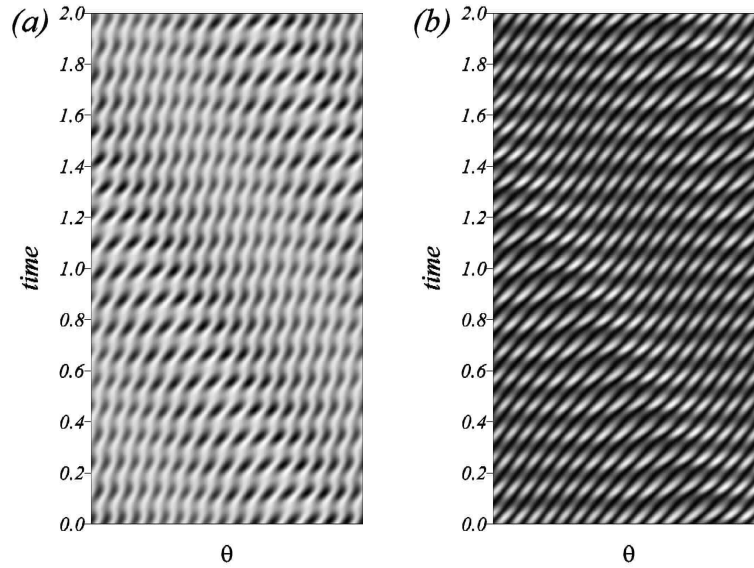


Figura 5.8: Diagrama espacio-temporal de la temperatura (a) en el interior del anillo y (b) en el exterior.  $Ra = 38000$ ,  $\tau = 2800$ ,  $\eta = 0,6$  y  $\sigma = 0,7$ .

### 5.2.2. Parámetro de Coriolis $\tau = 8000$

En este caso, como se indica en la figura 4.18b, la bifurcación ( $Ra^s \approx 105517$ ) es subarmónica con un parámetro de Floquet  $d_m = 4/21$ . Este tipo de bifurcación desestabiliza modos de Fourier con  $n \neq 21$ . Este hecho puede observarse en la figura 5.9, donde se representa la amplitud de los diferentes modos azimutales de Fourier de la temperatura para  $Ra = 107000$ . Los modos azimutales de mayor amplitud son, aparte de  $n = 0$  y  $n = 21$ , distintos de cero antes de la bifurcación, los modos  $n = 4$ ,  $17$  y  $25$ , lo que está de acuerdo con el análisis de estabilidad lineal de las ondas térmicas de Rossby presentado en el capítulo anterior. Para este valor del número de Rayleigh tan cercano a  $Ra^s$ , todos los modos azimutales presentan una oscilación de amplitud muy pequeña, pero distinta de cero y en el modo  $n = 0$ , constante y no nulo antes de la bifurcación, la oscilación es inapreciable con la resolución utilizada. En la figura 5.10 se representa la dependencia temporal en un punto y el espectro de la parte real de los modos azimutales  $n = 4$ ,  $n = 17$  y  $n = 13$  de la temperatura para  $Ra = 107000$ . En esta figura se observa la diferencia de amplitud de los diferentes modos que se ha comentado anteriormente. Esto es debido a que el modo  $n = 13$  se inestabiliza al producirse la interacción entre los modos  $n = 17$  y  $n = 4$ , lo que da lugar a que el modo  $n = 13$  oscile con una frecuencia  $f - 2f'$ . Para este

valor del número de Rayleigh cercano al punto de la bifurcación, las frecuencias se corresponden con las que se deducen del análisis de estabilidad de la onda térmica de Rossby. Así, según se indica en la sección 4.2, la frecuencia del modo azimutal  $n = 4$  en el punto de bifurcación es  $(-4\omega_0 + \Im(\lambda))/2\pi$ , donde  $\omega_0 = 9,94$  es la velocidad de precesión de la onda térmica de Rossby e  $\Im(\lambda) = 7,72$  es la parte imaginaria del valor propio responsable de la inestabilidad en el punto de la bifurcación. De esta manera, se obtiene una frecuencia  $f'_{Floquet} \approx -5,1$ , que aproxima bastante bien la frecuencia obtenida mediante la integración temporal  $f' = -5,9$  (ver la figura 5.10d). Por lo tanto, el flujo resultante es una onda viajera no uniforme.

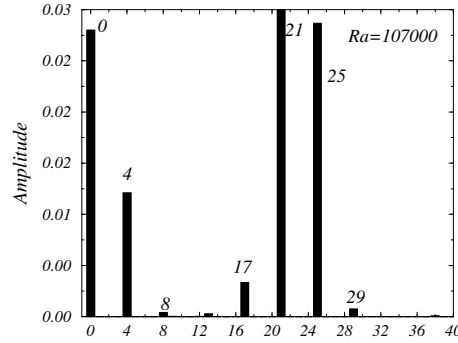


Figura 5.9: Espectro azimutal de la temperatura de la solución para  $Ra = 107000$ .  $\tau = 8000$ ,  $\eta = 0,6$  y  $\sigma = 0,7$

En la figura 5.11 se representan las isolíneas de la perturbación de la temperatura de la solución para  $Ra = 120000$ , en cuatro instantes equidistantes durante un periodo del modo azimutal  $n = 21$ . Las dos componentes de la velocidad presentan una estructura similar a la de la temperatura y no se representan. Como se puede observar, aunque la convección se desarrolla en toda la capa, en la parte exterior del anillo puede identificarse una estructura formada por 25 parejas de vórtices convectivos, mientras que en el interior del anillo se mantiene la estructura básica de 21 parejas de vórtices convectivos. Además, las estructuras en el interior y en el exterior del anillo se desplazan a diferente velocidad. Este hecho se observa claramente en la figuras 5.12a y 5.12b, donde se representa un diagrama espacio-tiempo de la temperatura en un punto cercano a la pared interior y a la pared exterior del anillo, respectivamente. Esta solución presenta una dinámica similar a la llamada *double column convection* obtenida por Schnaubelt & Busse (1992) en la aproximación de capa plana con  $\epsilon = 1$ .

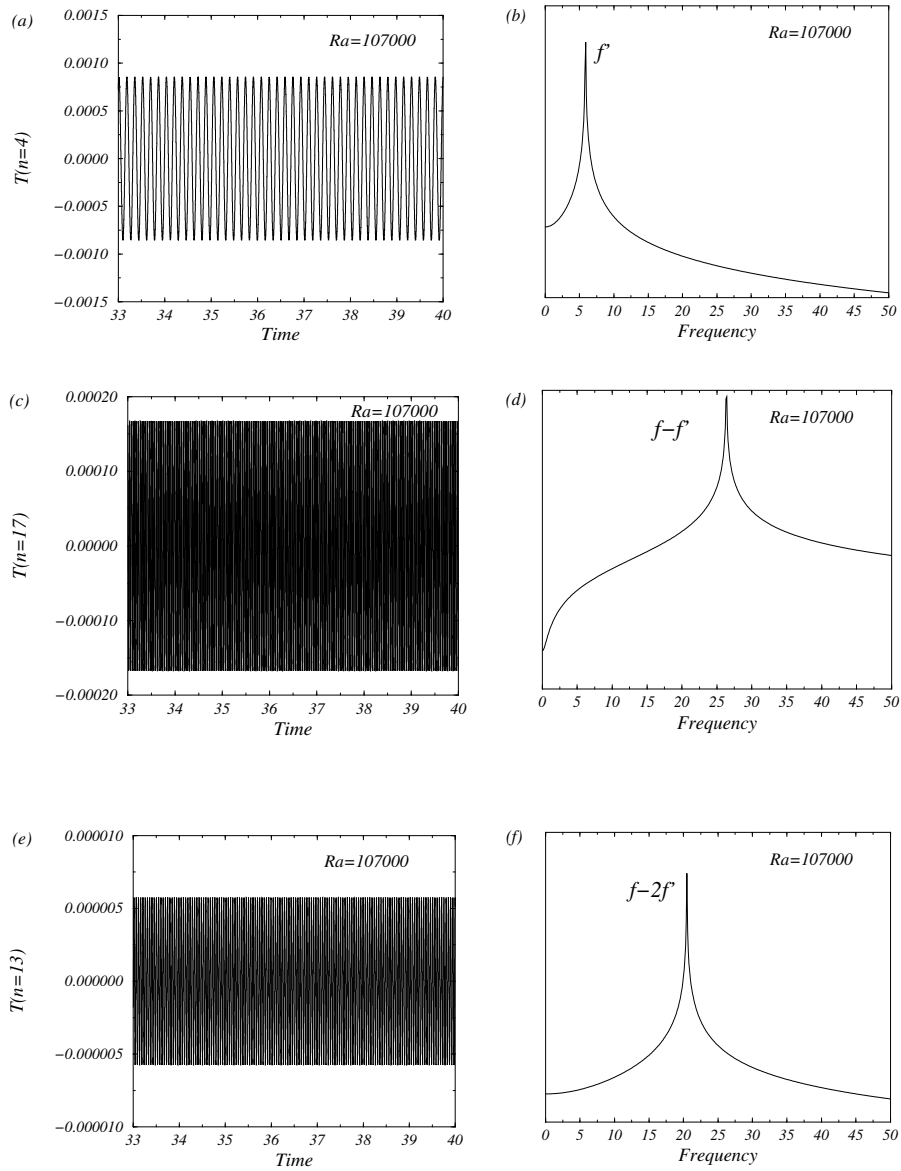


Figura 5.10: (a) Dependencia temporal en un punto de la parte real del modo  $n = 4$  de la temperatura y (b) su espectro. (c) y (d), (e) y (f) figuras análogas a (a) y (b) para la parte real del modo  $n = 17$  y del modo  $n = 13$ . En esta figura  $f = -32,3$  es la frecuencia del modo azimutal  $n = 21$  y  $f' = -5,9$ .  $Ra = 107000$ ,  $\tau = 8000$ ,  $\eta = 0,6$  y  $\sigma = 0,7$ .

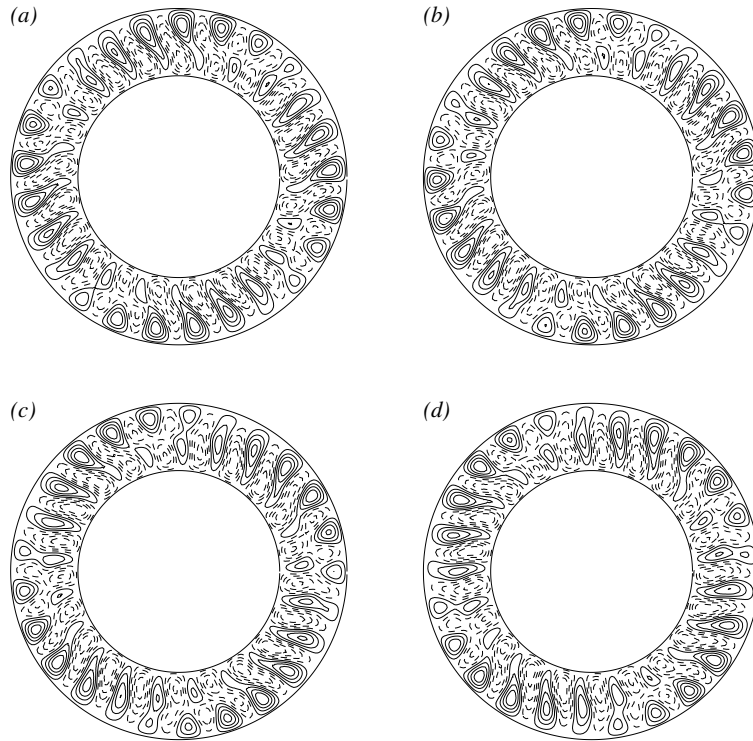


Figura 5.11: Isolíneas de la perturbación de la temperatura de la solución a  $Ra = 120000$  en cuatro instantes equiespaciados del periodo del modo de Fourier azimutal  $n = 21$ .  $\tau = 8000$ ,  $\eta = 0,6$  y  $\sigma = 0,7$

En la figura 5.13, se ha representado el número de Nusselt en función del número de Rayleigh. Puede observarse cómo, en este caso, el aumento en la eficiencia en el transporte de calor de la solución que ha bifurcado es menor que en el caso  $\tau = 2800$ .



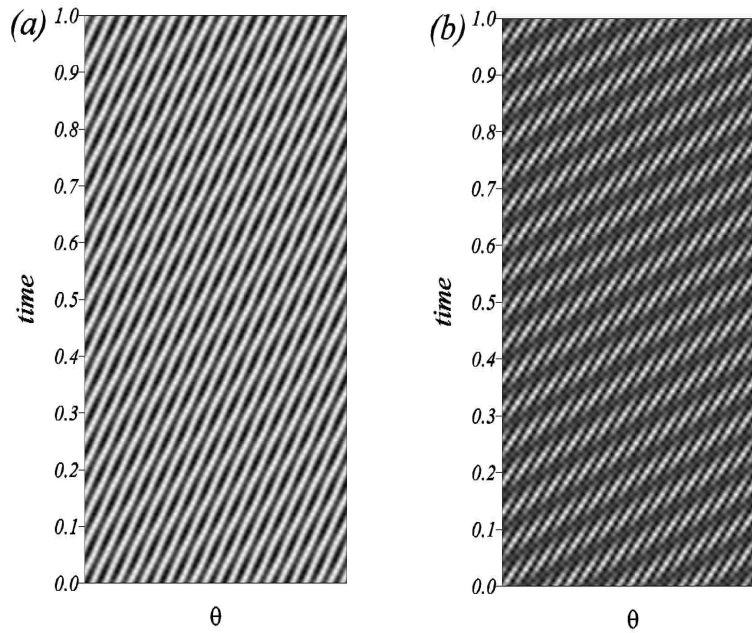


Figura 5.12: Diagrama espacio–temporal de la temperatura (a) en el interior del anillo y (b) en el exterior.  $Ra = 120000$ .  $\tau = 8000$ ,  $\eta = 0,6$  y  $\sigma = 0,7$

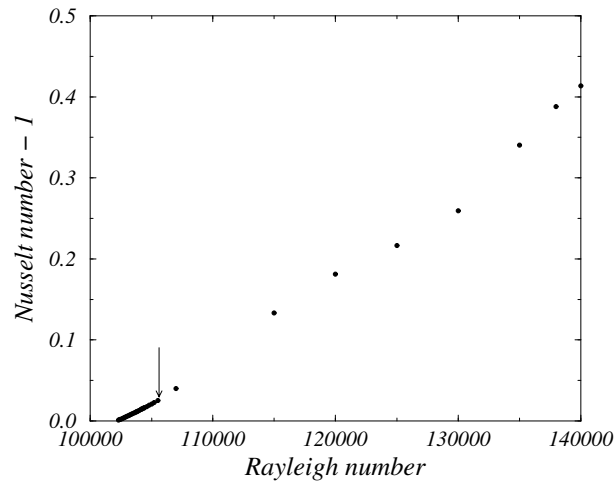


Figura 5.13: Número de Nusselt en función del número de Rayleigh para las soluciones primarias que bifurcan del estado conductivo y de las secundarias que aparecen después de la bifurcación subarmónica (indicada por un flecha) con número de onda  $n = 21$  para  $\eta = 0,6$ ,  $\tau = 8000$  y  $\sigma = 0,7$ .

El último punto representado en la figura anterior corresponde a  $Ra = 140000$ . Para este valor del número de Rayleigh se ha producido una nueva bifurcación ( $Ra^{s^2} \in [138000, 140000]$ ), identificándose en los espectros un nueva frecuencia  $f'' = 22,2$ . En la figura 5.14 se representan los espectros de los modos azimutales  $n = 0, 4$  y  $21$  de la temperatura para  $Ra = 140000$ . Como se puede apreciar en los espectros de los modos  $n = 4, 21$  se observan nuevos picos correspondientes a las frecuencias  $f' \pm f''$  y  $f \pm f''$ , siendo para este valor del número de Rayleigh  $f = -7,7$  y  $f' = -38,1$ .

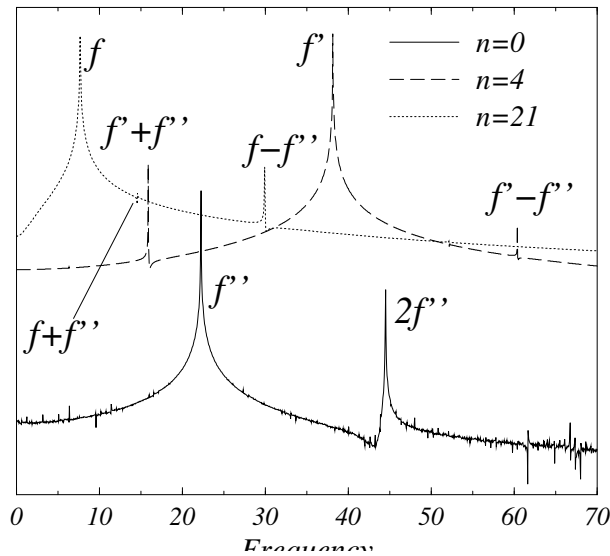


Figura 5.14: Espectro del modo  $n = 0$  y de la parte real de los modos  $n = 4$  y  $21$  de la temperatura para  $Ra = 140000$ . Debido a la pequeña amplitud del modo  $n = 0$ , en su espectro aparecen picos debidos a posibles errores numéricos. En esta figura  $f = -7,7$ ,  $f' = -38,1$  y  $f'' = 22,2$ .  $\tau = 8000$ ,  $\eta = 0,6$  y  $\sigma = 0,7$

### 5.2.3. Parámetro de Coriolis $\tau = 7000$

Para el valor de  $\eta$  considerado y parámetros de Coriolis menores, pero cercanos, a  $\tau_c$  las soluciones que provienen de modos *normales* se inestabilizan mediante una bifurcación subarmónica. En el caso considerado,  $\tau = 7000$ , la bifurcación se produce para  $Ra^s \approx 88765$  con un parámetro de Floquet  $d_m = 5/25$ . Como se ha comentado en el capítulo anterior, el número de onda fundamental de la solución secundaria es el *m.c.d*( $m, n$ ). En este caso, al ser  $m = 5$  un divisor del número de onda del modo *normal* del que proviene ( $n = 25$ ), a diferencia de

lo que ocurría para  $\tau = 8000$ , la solución que bifurca tiene un número de onda fundamental igual a  $m$  y únicamente se desestabilizan los modos azimutales con número de onda  $n = \dot{5}$ . Para el mayor valor del número de Rayleigh estudiado,  $Ra = 96000$ , los únicos modos diferentes de cero continúan siendo los múltiplos de 5, es decir, no se ha producido otra bifurcación.

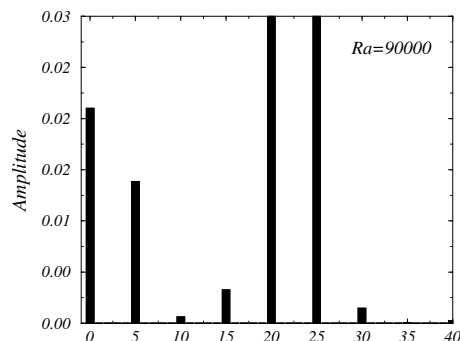


Figura 5.15: Espectro azimutal de la temperatura de la solución para  $Ra = 90000$ ,  $\tau = 7000$ ,  $\eta = 0,6$  y  $\sigma = 0,7$

En la figura 5.15 se representa el espectro azimutal de la temperatura de la solución para  $Ra = 90000$ , donde, cómo ya se ha dicho, únicamente son diferentes de cero los modos azimutales múltiplos de 5. La evolución temporal en un punto y el espectro del modo  $n = 0$  y de la parte real de los modos 5 y 25 de la temperatura para  $Ra = 90000$  se representa en la figura 5.16. Es importante remarcar la pequeña amplitud de la oscilación del modo azimutal  $n = 0$ , que oscila con una frecuencia  $f - 5f'$ , donde  $f = -32,9$  y  $f' = 3,2$ . Este hecho era de esperar si se tienen en cuenta las interacciones no lineales necesarias para producir tal oscilación.

Al igual que ocurría para  $\tau = 8000$ , la bifurcación respeta la estructura de columnas que ocupan todo el espacio entre los cilindros, pero cambia la periodicidad espacial. Para  $Ra = 90000$ , se identifica en el interior del anillo una estructura formada por 20 parejas de vórtices convectivos, mientras que en el exterior se observa el número de vórtices de la solución primaria. Estas estructuras viajan a diferente velocidad. Este hecho se observa claramente en la figura 5.17, donde se representan las isolíneas de la temperatura en cuatro instantes equiespaciados de un periodo del modo azimutal  $n = 25$ . En el mapa de grises de la temperatura en el interior del anillo (figura 5.18a) y en el exterior (figura 5.18b) se puede apreciar la diferente estructura y como la velocidad en el interior es ligeramente mayor que en el exterior.

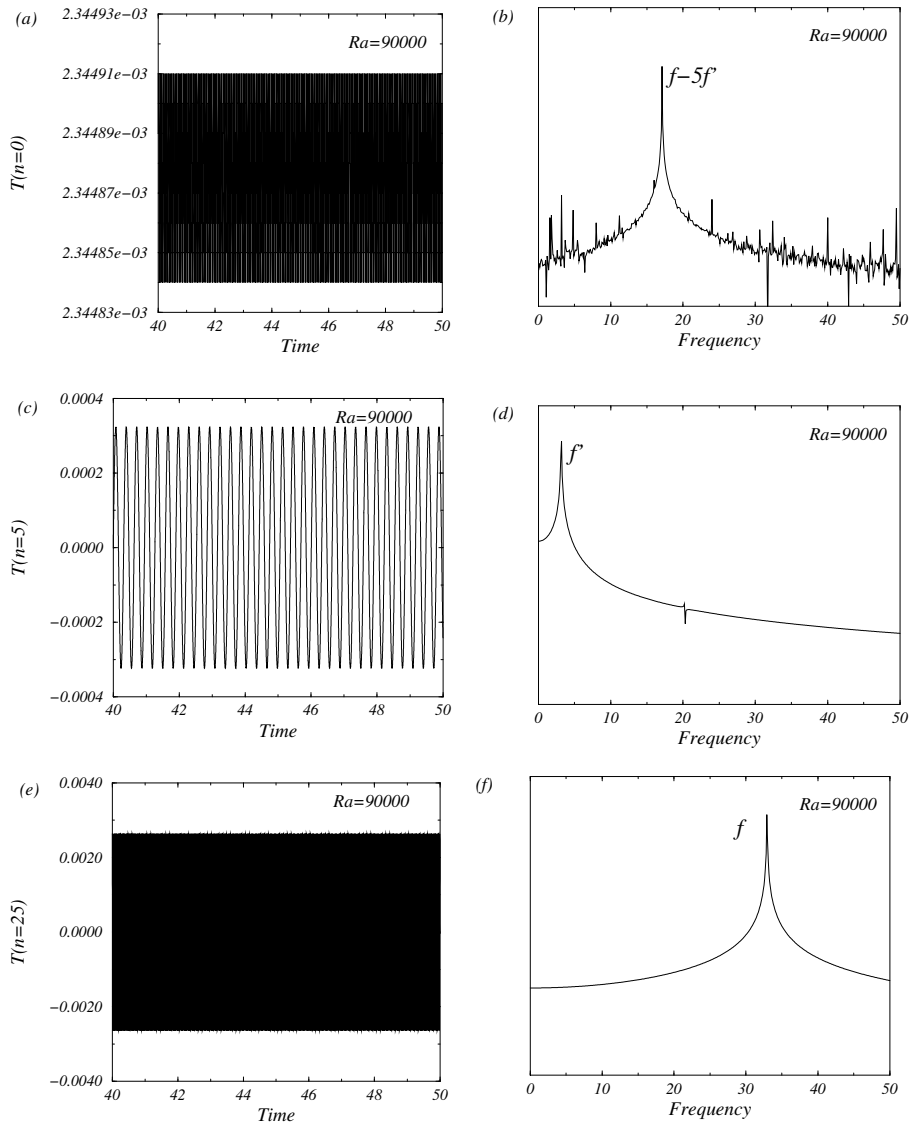


Figura 5.16: (a) Dependencia temporal en un punto del modo de Fourier  $n = 0$  de la temperatura y (b) su espectro. (c), (d) y (e), (f) figuras análogas a (a) y (b) para la parte real de los modos con  $n = 5$  y  $n = 25$ , respectivamente.  $f = -32,9$  y  $f' = 3,2$ .  $Ra = 90000$ .  $\tau = 7000$ ,  $\eta = 0,6$  y  $\sigma = 0,7$

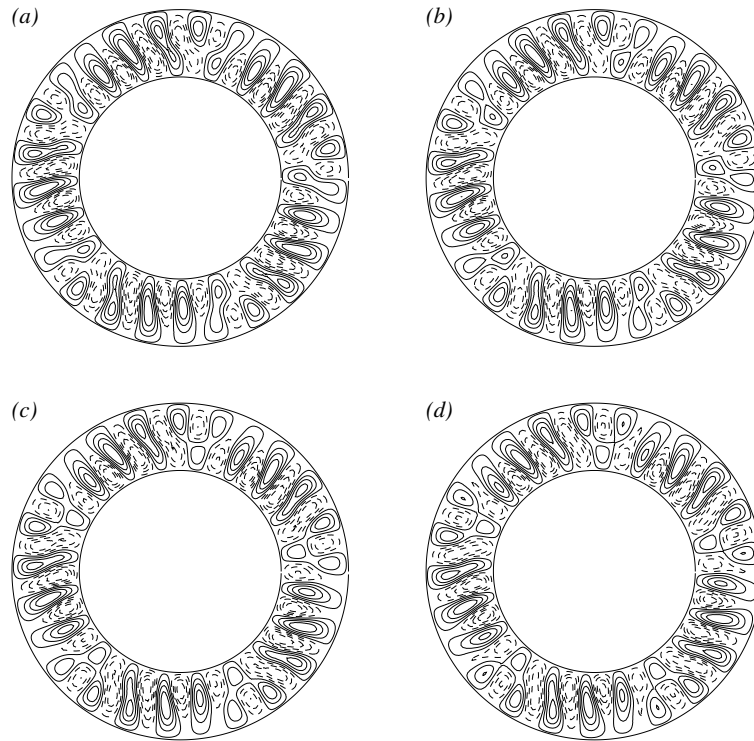


Figura 5.17: Isolíneas de la perturbación de la temperatura de la solución a  $Ra = 90000$  en cuatro instantes equiespaciados del periodo del modo azimutal  $n = 25$ . Las dos componentes de la velocidad presentan una estructura similar.  $\tau = 7000$ ,  $\eta = 0,6$  y  $\sigma = 0,7$

La figura 5.19 muestra cómo, al igual que ocurría para  $\tau = 8000$ , la pendiente del número de Nusselt en función del número de Rayleigh varía después de la bifurcación, pero no tan acusadamente como en el caso  $\tau = 2800$ , Tanto en  $\tau = 7000$ , como  $\tau = 8000$  aparece una solución similar a la denominada *double column convection* en la aproximación de capa plana.

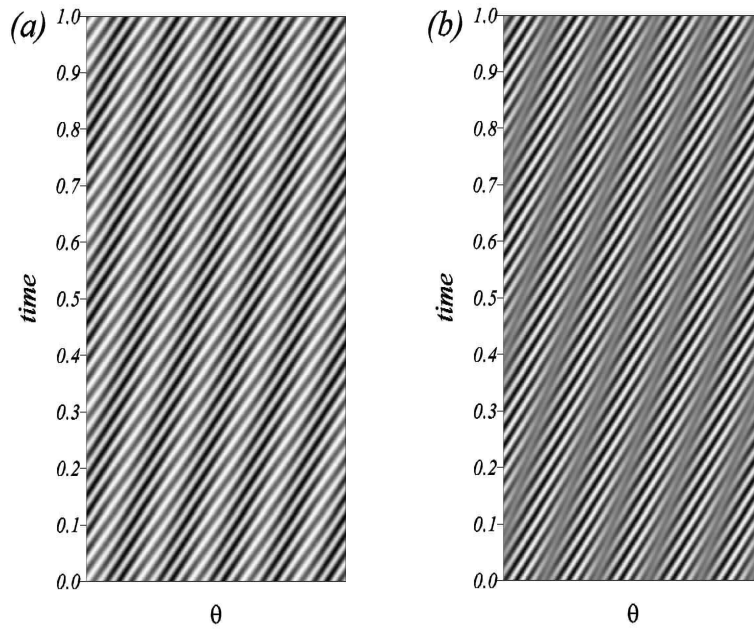


Figura 5.18: Diagrama espacio-temporal de la temperatura (a) en el interior del anillo y (b) en el exterior.  $Ra = 90000$ .  $\tau = 8000$ ,  $\eta = 0,6$  y  $\sigma = 0,7$

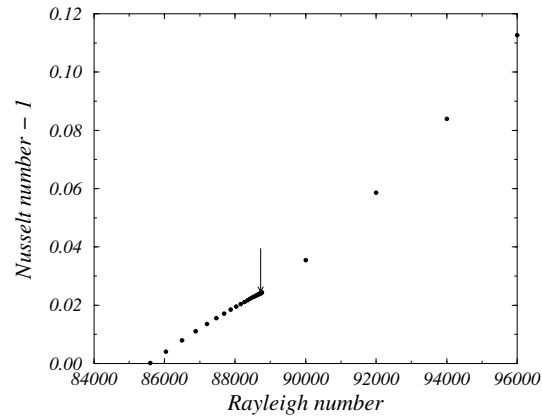


Figura 5.19: Número de Nusselt en función del número de Rayleigh para las soluciones primarias que bifurcan del estado conductivo y de las secundarias que aparecen después de la bifurcación subarmónica (indicada por un flecha) con número de onda  $n = 25$  para  $\eta = 0,6$ ,  $\tau = 7000$  y  $\sigma = 0,7$ . En esta figura, cada punto de la solución secundaria representa el valor medio del número de Nusselt en un periodo.

### 5.3. Caso particular. $\sigma = 0,025$ , $\eta = 0,3$ y $\tau = 2000$

Para completar el trabajo, se ha analizado para los valores de los parámetros indicados en el título de la sección, la dinámica de la solución al aumentar el número de Rayleigh. Como se ha visto en el capítulo 3 la estructura de los modos dominantes cambia al considerar valores bajos del número de Prandtl. En este caso, los modos idominantes mantienen aproximadamente la simetría de reflexión en planos verticales y la convección se desarrolla en toda la capa independientemente del valor del resto de los parámetros. El modo dominante para estos valores de los parámetros tiene un número de onda  $n = 3$ , siendo el Rayleigh crítico  $Ra_c = 2353$ .

Utilizando un método de Floquet se ha estudiado la estabilidad lineal de la solución primaria. En la tabla 5.1 se presentan el número de Rayleigh, el número de Nusselt y la frecuencia de la onda básica en el punto de la bifurcación que proporciona el método de Floquet, así como  $\Im(\lambda_m)$  y el valor de  $d_m$  responsable de la bifurcación en función del número de modos radiales,  $J$ , y azimutales,  $N$ , considerados en el desarrollo de las funciones,  $\psi$  y  $T$  (ver la sección 4.1). Como puede apreciarse, no hay convergencia al aumentar el número de modos, por lo que el análisis en función de los potenciales de la velocidad no da un resultado satisfactorio con la máxima resolución espacial permitida por la memoria de la máquina utilizada. Por este motivo, se ha acotado el punto de bifurcación mediante una integración temporal de las ecuaciones.

$J$	$N$	$Ra$	$Nu - 1$	$\omega$	$\Im(\lambda)$	$d_m$
24	16	16882	1.39	1.26	-69.22	1/3
24	24	19766	1.51	1.39	-67.50	1/3
32	24	20129	1.53	1.33	-72.92	1/3
38	24	19867	1.52	1.33	-72.01	1/3

Cuadro 5.1: Variación de los parámetros en el punto de la bifurcación en función del número de modos considerados en cada coordenada. En la última fila se presentan los resultados correspondientes al mayor número de modos permitidos por la memoria de la máquina.

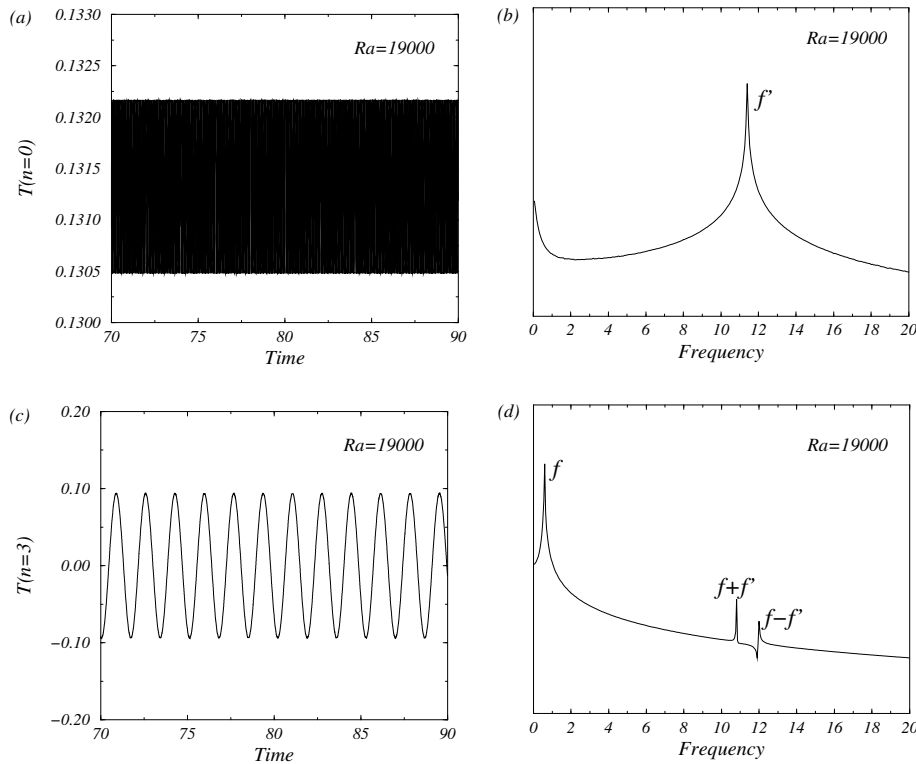


Figura 5.20: (a) Dependencia temporal en un punto del modo de Fourier  $n = 0$  de la temperatura y (b) su espectro. (c) y (d) figuras análogas a (a) y (b) para la parte real del modo  $n = 3$ .  $f = -0,6$ ,  $f' = 11,4$ .  $Ra = 19000$ .  $\tau = 2000$ ,  $\eta = 0,3$  y  $\sigma = 0,025$

Mediante la integración temporal de las ecuaciones se ha detectado una bifurcación superarmónica entre  $Ra = 18000$  y  $Ra = 19000$ , no obtenida para ningún valor de  $J$  y  $N$  mediante el método de Floquet. En la figura 5.20 se muestra la evolución temporal en un punto y espectro del modo de Fourier  $n = 0$  y de la parte real del modo  $n = 3$  de la temperatura para  $Ra = 19000$ . En la figura 5.20b se observa como, análogamente al caso  $\tau = 2800$ , la nueva frecuencia introducida por la bifurcación,  $f'$ , aparece en el espectro del modo  $n = 0$ . En el modo fundamental  $n = 3$  aparecen las frecuencias  $f + f'$  y  $f - f'$ , siendo  $f = -0,6$  y  $f' = 11,4$  para  $Ra = 19000$ . Nótese que, en este caso,  $f' > |2f|$ . Este hecho provoca la aparición de una oscilación prácticamente inapreciable en la evolución temporal del modo  $n = 3$  (ver figura 5.20c). Al ser la bifurcación superarmónica los modos que no son múltiplos de 3 no se excitan. Este hecho puede apreciarse en la figura 5.21, donde se representa el espectro azimutal de la temperatura de la solución para  $Ra = 19000$ .



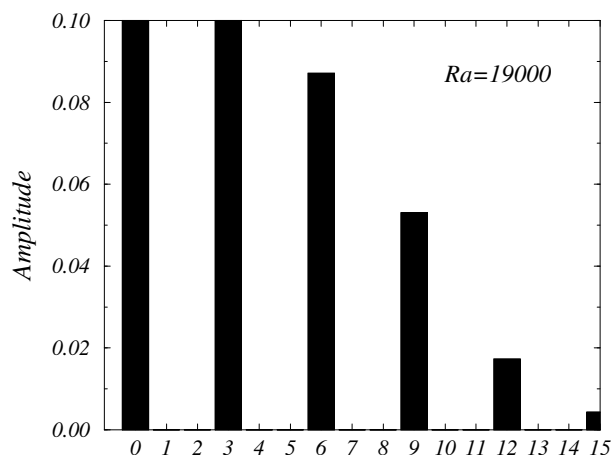


Figura 5.21: Espectro azimutal de la temperatura de la solución a  $Ra = 19000$ . En estas figuras  $f = -0,6$ ,  $f' = 12$  y  $f'' = 0,35$ .  $\tau = 2000$ ,  $\eta = 0,3$  y  $\sigma = 0,025$

Al igual que ocurría en el caso  $\sigma = 0,7$ ,  $\tau = 2800$  y  $\eta = 0,6$ , al aumentar el número de Rayleigh se produce una bifurcación subarmónica que inestabiliza el resto de los modos. Esta bifurcación ocurre para  $Ra^{s2} \in [20000, 21000]$ . En la figura 5.22 se representa la amplitud de los modos azimutales de la temperatura para  $Ra = 21000$ . Como puede observarse, es el modo azimutal  $n = 2$  el que presenta mayor amplitud. Para este valor del número de Rayleigh, la frecuencia introducida por la bifurcación se aprecia no sólo en los espectros de los nuevos modos, sino también en los espectros de los modos preexistentes. Esto se debe a que ahora el número de interacciones no lineales necesarias para que la frecuencia sea detectable en el modo básico es menor que en el caso  $\sigma = 0,7$ ,  $\eta = 0,6$  y  $\tau = 2800$ . Por este motivo, puede realizarse un análisis más detallado de los espectros y las interacciones entre los diferentes modos. En las figuras 5.23a, 5.23b, 5.23c y 5.23d se presentan los espectros de la parte real de los modos  $n = 0, 3, 1$  y  $2$  de la temperatura, respectivamente, para  $Ra = 21000$ . En estas figuras se puede identificar cada pico espectral con una relación entre las tres frecuencias  $f = -0,6$ ,  $f' = 12$  y  $f'' = 0,35$ . Nótese que las frecuencias que aparecen en los espectros de los diferentes modos azimutales se corresponden con las interacciones no lineales que relacionan unos modos con otros.

En la figura 5.24 se presenta en una escala de grises la evolución de la temperatura con el tiempo para  $Ra = 22000$  y dos valores diferentes del radio del anillo. Como puede observarse la solución en el interior del anillo no varía su estructura respecto de la solución para  $Ra = 19000$ . Por el contrario, en el exterior del anillo (figura 5.24b) se puede observar una modulación de frecuencia eleva-

da, relacionada con la frecuencia  $f'$ . En este caso las estructuras en el exterior y en el interior del anillo viajan aproximadamente a la misma velocidad.

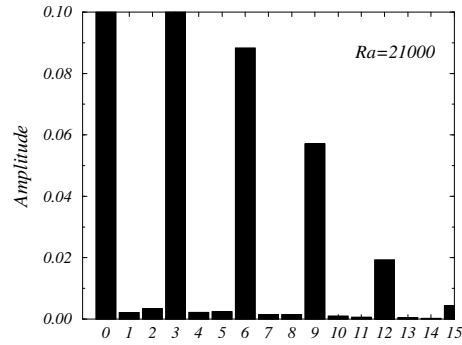


Figura 5.22: Espectro azimutal de la temperatura de la solución a  $Ra = 21000$ .  $\tau = 2000$ ,  $\eta = 0,3$  y  $\sigma = 0,025$

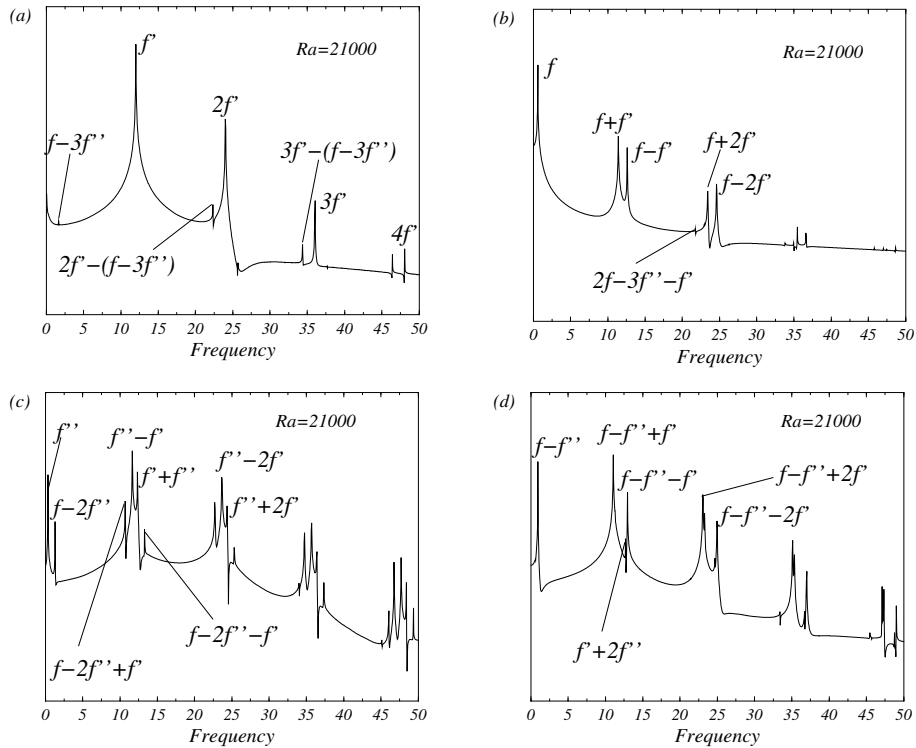


Figura 5.23: Espectro de los modos de Fourier (a)  $n = 0$ , (b)  $n = 3$ , (c)  $n = 1$  y (d)  $n = 2$  de la temperatura para  $Ra = 21000$ .  $\tau = 2000$ ,  $\eta = 0,3$  y  $\sigma = 0,025$

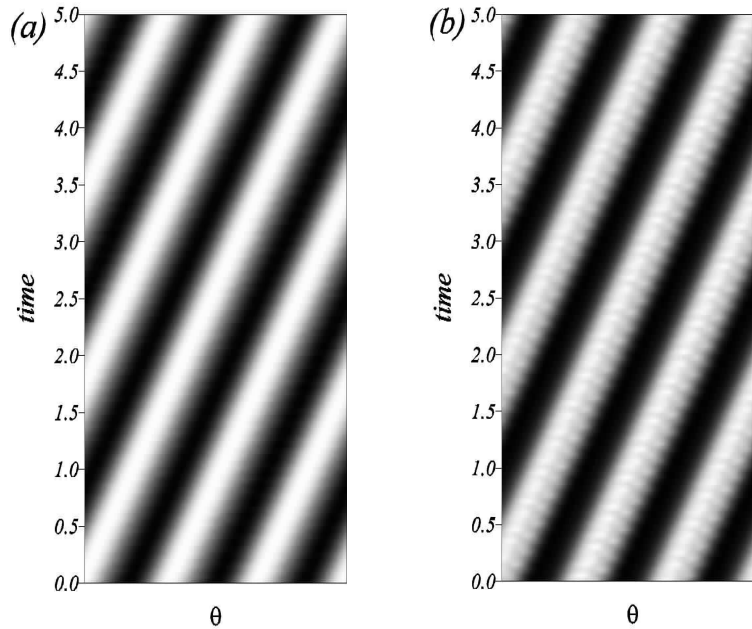


Figura 5.24: Diagrama espacio–temporal de la temperatura (a) en el interior del anillo y (b) en el exterior.  $Ra = 22000$ ,  $\tau = 2000$ ,  $\eta = 0,3$  y  $\sigma = 0,025$

## 5.4. Discusión

En este capítulo se ha estudiado la evolución de algunas soluciones después de la bifurcación secundaria, integrando temporalmente las ecuaciones de Navier–Stokes mediante un código de paso fraccionario pseudoespectral.

Para  $\sigma = 0,7$ ,  $\eta = 0,6$  se han presentado las soluciones que aparecen después de una bifurcación subarmónica de una solución normal y de una espiral. También se ha presentado la evolución de una solución secundaria que proviene de la bifurcación superarmónica de una solución primaria normal. La bifurcación superarmónica encontrada en el caso  $\tau = 2800$  produce una convección “vacilatoria” que aumenta la eficiencia del transporte de calor respecto de la solución primaria. Por el contrario, los dos casos presentados en los que  $d_m \neq 0$ , la convección después de la bifurcación presenta una estructura de doble columna en la que las estructuras en el interior y en el exterior del anillo se desplazan a diferente velocidad. Para estos dos casos, al encontrarnos cerca del valor  $\tau_c$  para el que se produce el cambio de tipo de familia de modos lineales, las interacciones se producen entre soluciones (normales o espirales) y perturbaciones

de tipo contrario (*espirales* o *normales*). Para  $\tau = 8000$  la perturbación es de tipo *normal* con  $n = 25$  y da lugar a una estructura formada por 25 parejas de vórtices convectivos en el exterior del anillo, respetando la estructura básica en el interior. Por su parte, para  $\tau = 7000$  la perturbación es *espiral* con  $n = 20$  y se forma una estructura formada por 20 parejas de columnas en el interior, que es donde se localiza la amplitud máxima de la función propia de la perturbación, respetándose la estructura de la onda de Rossby en el exterior. Por lo tanto, parece que cerca de  $\tau_c$  la forma en la que se desarrolla la convección en la solución secundaria no depende del tipo de solución primaria de la que proviene, ya que en esta zona las interacciones siempre son entre soluciones y perturbaciones de diferente tipo. Al igual que ocurría con la solución primaria, la convección se desarrolla en toda la capa y la bifurcación no provoca un aumento eficiencia del transporte de calor.

La secuencia de las bifurcaciones en el caso  $\sigma = 0,025$ ,  $\eta = 0,3$  y  $\tau = 2000$  es similar al caso  $\sigma = 0,7$ ,  $\eta = 0,6$  y  $\tau = 2800$ . Si comparamos nuestros resultados con los obtenidos en el anillo con tapas horizontales (Alonso, Sánchez & Net, 2000) se pueden observar varias diferencias. En este caso las columnas térmicas estacionarias con número de onda fundamental  $n = 3$  se inestabilizan para valores del número de Rayleigh cercanos al valor crítico mediante una bifurcación de Hopf que rompe la simetría de reflexión. A continuación la solución bifurcada (*pure direction reversing travelling wave*) presenta una bifurcación subarmónica estacionaria que excita modos azimutales con  $n \neq 3$ . Posteriormente existe una bifurcación subcrítica de Neimark–Sacker. Finalmente, para valores del número de Rayleigh no excesivamente elevados se obtiene una solución caótica. En nuestro caso, como las soluciones ya tienen rota la simetría de reflexión, la primera bifurcación únicamente introduce una nueva frecuencia en la solución. Como era de esperar, esta bifurcación aparece para valores mucho mayores del parámetro  $\delta$ , definido en el capítulo 4, que en el caso anterior. Ello da idea del efecto estabilizador de la rotación en la dinámica del fluido. La segunda bifurcación encontrada es subarmónica pero no estacionaria.



# Capítulo 6

## Conclusiones

En el presente trabajo se ha realizado, mediante simulación numérica directa de las ecuaciones de Navier–Stokes, un estudio exhaustivo de la dinámica de un fluido contenido en un anillo cilíndrico con tapas ligeramente inclinadas, que gira rápidamente y sometido a una gravedad y un gradiente de temperatura en la dirección radial. A diferencia de lo realizado por otros autores, se ha introducido la curvatura de las paredes de forma natural mediante la resolución de las ecuaciones en coordenadas cilíndricas. De esta manera, se rompe la simetría  $Z_2$  y se puede estudiar el problema para cualquier relación entre los radios del anillo cilíndrico. Se ha considerado el caso de condiciones de contorno de adherencia en las paredes laterales y esfuerzos cortantes nulos en las tapas del anillo. En este capítulo se indican los resultados más relevantes y los posibles temas de interés en futuros trabajos.

- El análisis de estabilidad lineal del estado conductivo indica que el inicio de la convección depende fuertemente del número de Prandtl. Para números de Prandtl moderados y altos las inestabilidades térmicas son dominantes y se han encontrado dos familias de modos columnares dominantes. Modos en los que la convección se desarrolla principalmente cerca de la pared interior y están inclinados en el sentido de la rotación (*espirales*); y modos prácticamente rectos, en los que la convección se desarrolla en toda la capa (*normales*). Para bajos números de Prandtl todos los modos dominantes son del segundo tipo. Comparando estos resultados con los trabajos de Zhang (1994), Tilgner & Busse (1997), entre otros, en capas esféricas en rotación, se concluye que el modelo del anillo cilíndrico únicamente debe utilizarse para modelar una esfera para números de Prandtl del orden de

la unidad.

- Mediante técnicas de continuación se han analizado las soluciones no lineales relacionadas con los dos tipos de modos lineales para  $\sigma = 0,7$ . Las soluciones encontradas se han comparado con las existentes para el caso de capa plana. Se puede concluir que esta aproximación predice de manera adecuada la dinámica del anillo siempre que el modo dominante sea *normal* y el valor de la razón de radios esté suficientemente alejado de  $\eta_c$ . De todos modos, los efectos de la ruptura de simetría  $Z_2$  deben tenerse en cuenta para describir el escenario de ramas y las características de las soluciones asociadas con los modos *normales*. Sin embargo, si el modo es *espiral* el escenario de ramas se transforma cuando se incluye la curvatura y  $\eta$  disminuye desde  $\eta = 1$ . Análogamente a lo que ocurre en capas esféricas para  $\sigma = 1$ , se ha encontrado que la rotación disminuye la eficiencia en el transporte de calor. Se ha analizado la dependencia del número de Nusselt con el tipo de modo del que proviene la solución no lineal, comprobándose que, para los mismos valores de  $n$ ,  $\tau$  y  $\eta$ , las soluciones que provienen de modos *espirales* son más eficientes en el transporte de calor. Esto puede deberse a la mayor correlación entre la temperatura y la velocidad radial que presentan los modos *espirales*.

También se han considerado soluciones que no bifurcan del estado conductivo, a pesar de que la mayoría de ellas son inestables. Se han encontrado soluciones que presentan un flujo medio azimutal débil con una estructura de simple o doble columna no distorsionada, y soluciones con un elevado flujo medio incluso para valores moderados del parámetro  $\delta$ . Sin embargo, no existen, para valores pequeños de este parámetro, flujos azimutales tan elevados como los encontrados por Zhang (1992) en una capa esférica en rotación. Este hecho puede ser debido a que el autor considera condiciones de contorno de esfuerzos cortantes nulos en la esfera.

El hecho de que las soluciones no lineales estables provengan de modos dominantes para un valor de la razón de radios cercano o lejano a  $\eta_c$  tiene gran influencia en la forma de la región de estabilidad y en el tipo de bifurcación secundaria de las soluciones primarias. Dicha estabilidad lineal se ha analizado mediante una técnica de Floquet. Los resultados obtenidos indican que las soluciones primarias con una razón de radios cercana a  $\eta_c$  (para  $\tau$  fijo), o con parámetro de Coriolis cercano a  $\tau_c$  (para  $\eta$  fija), presentan una bifurcación subarmónica,  $d_m \neq 0$ . En este caso, las soluciones no lineales y las perturbaciones que las inestabilizan son de diferente tipo (*normal* o *espiral*). Por el contrario, las soluciones primarias que provienen de modos columnares *normales* para valores suficientemente mayores que  $\eta_c$  la bifurcación secundaria es superarmónica,  $d_m = 0$  o

subarmónica con parámetro de Floquet muy pequeño.

- Finalmente, se han calculado soluciones secundarias integrando las ecuaciones de Navier–Stokes, de continuidad y de conservación de la energía mediante una evolución temporal de las variables primitivas. Puesto que un estudio en profundidad de la dinámica espacio–temporal de las soluciones secundarias sería muy costoso, se han fijado, para  $\sigma = 0,7$ , unos valores de los parámetros que permiten analizar la influencia que tiene la proximidad a  $\tau_c = 7850$  ( $\eta = 0,6$ ) en la dinámica de estas soluciones. En el caso  $\tau = 2800$  (lejos de  $\tau_c$ ), la solución primaria procedente de un modo *normal*, se transforma al aumentar el número de Rayleigh en una solución en la que la convección se confina en el exterior del anillo. La bifurcación secundaria da lugar a una nueva solución en la que la convección se restablece en toda la capa periódicamente. Esto produce un aumento significativo en el transporte de calor. Los otros casos estudiados  $\tau = 7000$  y  $\tau = 8000$ , corresponden a soluciones secundarias que provienen, respectivamente, de soluciones primarias asociadas a modos *normales* o *espirales* que dominan para valores próximos a  $\tau_c$ . El hecho de que la bifurcación sea subarmónica, que el modo del que proceden las soluciones primarias y la estructura dominante en la perturbación sean de diferente tipo, y el que la bifurcación se produzca cerca de la criticalidad, hacen que la solución secundaria presente una estructura en forma de doble columna; viajando las estructuras en el interior y en el exterior del anillo en dirección azimutal a diferente velocidad. Dependiendo de si la solución primaria proviene de un modo *espiral* o *normal*, la bifurcación respeta el número de vórtices convéctivos en el interior o en el exterior. Por lo tanto, la convección “vacilatoria” y en forma de doble columna descritas por Busse y colaboradores se corresponden, respectivamente, con las dinámicas obtenidas para valores de los parámetros muy lejanos o muy cercanos a  $\tau_c$ . Este hecho sugiere que si se analizaran regiones de parámetros no tan extremos, podrían aparecer dinámicas de tipo muy diferente.

En algunos casos se han analizado también las bifurcaciones terciarias que experimenta la solución. El carácter modal de la solución facilita el análisis de las bifurcaciones y la identificación de las nuevas frecuencias.

La continuación natural del presente trabajo consistiría en analizar las soluciones terciarias para  $\sigma = 0,7$  y otros valores de la razón de radios y del parámetro de Coriolis alejados de  $\eta_c$  o  $\tau_c$  para, de esta manera, tener un mapa más detallado de la posible influencia del tipo de modo lineal y del tipo de bifurcación secundaria en la dinámica de la solución terciaria. El estudio de las soluciones lejos de la criticalidad para valores elevados o bajos del número de



Prandtl también tendría interés como comparación con experimentos de laboratorio, ya que, como se ha mostrado en este trabajo, la dinámica en cavidades esféricas en rotación para estos valores de  $\sigma$  difiere apreciablemente de la obtenida en el caso anular.

## Apéndice A

# Condiciones de contorno en las tapas inclinadas

Considerando que la componente de la velocidad en la dirección normal a la superficie es nula,  $\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{u} = 0$ , con  $\hat{\mathbf{n}} = (\sin \varphi, 0, \pm \cos \varphi)$ , donde  $\varphi$  es el ángulo de inclinación de las tapas respecto de la horizontal, la primera condición de contorno resulta

$$\gamma u \pm w = 0, \quad (\text{A.1})$$

donde el signo superior corresponde a la tapa superior.

También debe cumplirse la condición de esfuerzos cortantes nulos en las tapas. El tensor de tensiones se escribe de la forma

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{pmatrix},$$

donde  $\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + 2\mu(e_{ij} - \frac{1}{3}e_{ii}\delta_{ij})$ , con  $e_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)$ , es el tensor velocidad de deformación en coordenadas cartesianas. En coordenadas cilíndricas este tensor vale

$$\begin{aligned} e_{r\theta} = e_{\theta r} &= \frac{r}{2}\partial_r\left(\frac{v}{r}\right) + \frac{1}{2r}\partial_\theta u, \\ e_{\theta z} = e_{z\theta} &= \frac{1}{2r}\partial_\theta w + \frac{1}{2}\partial_z v, \\ e_{zr} = e_{rz} &= \frac{1}{2}\partial_z u + \frac{1}{2}\partial_r w. \end{aligned}$$

Los esfuerzos sobre las tapas resultan por lo tanto

$$\mathbf{F} = \mathbf{T} \cdot \hat{\mathbf{n}} = \begin{pmatrix} (-p + 2\mu e_{rr}) \sin \varphi \pm 2\mu e_{rz} \cos \varphi \\ 2\mu e_{r\theta} \sin \varphi \pm 2\mu e_{\theta z} \cos \varphi \\ 2\mu e_{rz} \sin \varphi \pm (-p + 2\mu e_{zz}) \cos \varphi \end{pmatrix}.$$

Dos vectores unitarios sobre las tapas son  $\hat{\mathbf{n}}_1 = (0, 1, 0)$  y  $\hat{\mathbf{n}}_2 = (\mp \cos \varphi, 0, \sin \varphi)$ . Los esfuerzos cortantes en las direcciones de estos vectores unitarios se obtienen proyectando  $\hat{\mathbf{n}}_1 \cdot \mathbf{F}$  y  $\hat{\mathbf{n}}_2 \cdot \mathbf{F}$ . Si se desarrollan estas expresiones y se igualan a cero se obtiene

$$e_{r\theta} \sin \varphi \pm e_{\theta z} \cos \varphi = 0,$$

$$-2e_{rz} \cos 2\varphi \pm (e_{zz} - e_{rr}) \sin 2\varphi = 0.$$

Aplicando las definiciones de  $e_{ij}$  en coordenadas cilíndricas (Batchelor, 1967), las condiciones de contorno resultan

$$(\gamma D_- \pm \partial_z) v = 0, \tag{A.2}$$

$$(-a \partial_z \pm \partial_r) w + (a \partial_r \pm \partial_z) u = 0, \tag{A.3}$$

donde se ha definido

$$a = \frac{2\gamma}{1 - \gamma^2}, \quad D_- = \partial_r - \frac{1}{r}.$$

Suponiendo que las tapas son perfectamente adiabáticas la condición de contorno para la temperatura es  $\partial_n T = 0$ . Operando del mismo modo que se hizo con la velocidad, la condición de contorno resulta

$$\gamma \partial_r T \pm \partial_z T = 0. \tag{A.4}$$

## Apéndice B

# Aproximación casigeostrófica en función de los potenciales

Si se utilizan los desarrollos de los potenciales de la velocidad

$$f = f_0(r, t) + f', \quad \psi = \psi_0(r, \theta, t) + \psi', \quad T = T_0(r, \theta, t) + T', \quad (\text{B.1a})$$

$$g = g', \quad \phi = \phi', \quad (\text{B.1b})$$

donde  $f'$ ,  $\psi'$ ,  $T'$ ,  $g'$  y  $\phi'$  son de orden  $\gamma$  y dependen de todas las variables del sistema, las condiciones de contorno en función de los potenciales 2.13 y 2.14a, a orden dominante resultan, respectivamente

$$f = g' = \partial_r g' = 0, \quad (\text{B.2a})$$

$$\psi = \partial_r \psi = \nabla_h^2 \phi' = 0 \quad (\text{B.2b})$$

en las paredes laterales y

$$\frac{\gamma}{r} \partial_\theta \psi \mp \nabla_h^2 \phi' = 0 \quad \text{en } z = \beta/2, -\beta/2, \quad (\text{B.3a})$$

siendo el promedio azimutal de esta ecuación

$$-\gamma \partial_z g \pm D_+ g = 0. \quad (\text{B.3b})$$

Por otra parte, sustituyendo B.1 en las ecuaciones 2.11 y 2.12, manteniendo el orden dominante en cada término en el límite  $\gamma \ll 1$  y  $\Omega\gamma \sim O(1)$  y promediando a lo largo de la coordenada  $z$  entre  $-\beta/2$  y  $\beta/2$ , se obtienen las ecuaciones para las funciones  $f$ ,  $g$ ,  $\psi$ ,  $\phi$  y para la temperatura,  $T$ .

- Ecuación para la función  $f$

$$(\sigma^{-1}\partial_t - \nabla_-^2) f_0 = \frac{2\sigma^{-1}\Omega}{\beta} [g'(\beta/2) - g'(-\beta/2)] + \frac{P_\theta}{\sigma} \left[ \nabla_h^2 \psi_0 \cdot \frac{1}{r} \partial_\theta \psi_0 \right],$$

siendo  $\nabla_-^2 = \nabla^2 - \frac{1}{r^2}$ ,  $\nabla_h^2$  el operador laplaciano bidimensional y  $P_\theta$  el operador que proporciona el modo cero. Si se utiliza la condición de contorno B.3b a orden  $\gamma$ ,  $D_+g' = 0$ , la segunda condición de B.2a y si  $\gamma \ll 1$ , puede suponerse  $g(\pm\beta/2) = 0$ . Por lo tanto, la ecuación para la función  $f$  resulta

$$(\sigma^{-1}\partial_t - \nabla_-^2) f_0 = \frac{P_\theta}{\sigma} \left[ \nabla_h^2 \psi_0 \cdot \frac{1}{r} \partial_\theta \psi_0 \right]. \quad (\text{B.4})$$

- La segunda ecuación es

$$-2\sigma^{-1}\Omega\partial_z f' = 0.$$

Por lo tanto, a orden dominante,  $f'$  es independiente de  $z$ .

- Ecuación para la función  $\psi$

$$\begin{aligned} (\sigma^{-1} - \nabla^2) \nabla_h^2 \psi_0 &= \frac{Ra}{r} \partial_\theta T_0 + \frac{2\sigma^{-1}\Omega}{\beta} [\nabla_h^2 \phi'(\beta/2) - \nabla_h^2 \phi'(-\beta/2)] + \\ &+ \sigma^{-1} \left[ (1 - P_\theta) J(\psi_0, \nabla_h^2 \psi_0) + \partial_r D_+ f_0 \left( \frac{1}{r} \partial_\theta \psi_0 \right) - f_0 \left( \frac{1}{r} \partial_\theta \nabla_h^2 \psi_0 \right) \right]. \end{aligned}$$

Utilizando la condición de contorno B.3a a orden  $\gamma$ ,  $\pm \nabla_h^2 \phi' = \frac{\gamma}{r} \partial_\theta \psi_0$ , la ecuación para la función  $\psi$  resulta

$$\begin{aligned} (\sigma^{-1}\partial_t - \nabla^2) \nabla_h^2 \psi_0 &= \frac{Ra}{r} \partial_\theta T_0 + \tau \frac{1}{r} \partial_\theta \psi_0 + \sigma^{-1} \left[ (1 - P_\theta) J(\psi_0, \nabla_h^2 \psi_0) + \right. \\ &\left. + \partial_r D_+ f_0 \left( \frac{1}{r} \partial_\theta \psi_0 \right) - f_0 \left( \frac{1}{r} \partial_\theta \nabla_h^2 \psi_0 \right) \right] \quad (\text{B.5}) \end{aligned}$$

donde se ha definido el parámetro de Coriolis  $\tau = 4\Omega_\nu \gamma / \beta$ .

- La ecuación de la función  $\phi$  a orden dominante es

$$-2\sigma^{-1}\Omega\partial_z \nabla_h^2 \psi' = 0,$$

y  $\psi'$  es independiente de  $z$  a orden dominante.

- Por último la ecuación para la temperatura es

$$(\partial_t - \nabla_h^2) T_0 = -\frac{1}{r^2 \ln \eta} \partial_\theta \psi_0 + J(\psi_0, T_0) - f_0 \left( \frac{1}{r} \partial_\theta T_0 \right) \quad (\text{B.6})$$

## Apéndice C

# Aproximación casigeostrófica en variables primitivas

Si se escriben las ecuaciones 2.7 en sus distintas componentes en coordenadas cilíndricas y se descompone el término advectivo de la forma  $(\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{u} + \frac{1}{2}\nabla|\mathbf{u}|^2$ , incluyendo este último término en el gradiente de presión, se obtiene

$$\partial_t u = -\partial_r p + \sigma [\nabla^2 \mathbf{u}]_r + \sigma RaT + 2\Omega v - (\partial_z u - \partial_r w) w + \left( D_+ v - \frac{1}{r} \partial_\theta u \right) v,$$

$$\partial_t v = -\frac{1}{r} \partial_\theta p + \sigma [\nabla^2 \mathbf{u}]_\theta - 2\Omega u - \left( D_+ v - \frac{1}{r} \partial_\theta u \right) u + \left( \frac{1}{r} \partial_\theta w - \partial_z v \right) w,$$

$$\partial_t w = -\partial_z p + \sigma \nabla^2 w - \left( \frac{1}{r} \partial_\theta w - \partial_z v \right) v + (\partial_z u - \partial_r w) u,$$

$$D_+ u + \frac{1}{r} \partial_\theta v + \partial_z w = 0,$$

$$\partial_t T = \nabla^2 T - \frac{u}{r \ln \eta} - u \partial_r T - \frac{v}{r} \partial_\theta T - w \partial_z T,$$

donde  $D_+ = \partial_r + 1/r$ .

Sustituyendo las aproximaciones para la velocidad, la presión y la temperatura 2.20 en las ecuaciones anteriores, manteniendo el orden dominante en cada

término y promediando en la coordenada  $z$  entre los límites  $-\beta/2$  y  $\beta/2$ , las ecuaciones para las tres componentes de la velocidad para la temperatura son

$$\begin{aligned} \partial_t u_0 = & -\partial_r p_0 + \sigma [\nabla \mathbf{u}_0]_r + \sigma Ra T_0 + 2\Omega v_0 + \frac{2\Omega}{\beta} \int_{-\beta/2}^{\beta/2} v' dz + \\ & + (D_+ v_0) v_0 - \left( \frac{1}{r} \partial_\theta u_0 \right) v_0, \end{aligned} \quad (\text{C.1})$$

$$\begin{aligned} \partial_t v_0 = & -\frac{1}{r} \partial_\theta p_0 + \sigma [\nabla \mathbf{u}_0]_\theta - 2\Omega u_0 - \frac{2\Omega}{\beta} \int_{-\beta/2}^{\beta/2} u' dz - \\ & - (D_+ v_0) u_0 + \left( \frac{1}{r} \partial_\theta u_0 \right) u_0, \end{aligned} \quad (\text{C.2})$$

$$0 = -\partial_z p_0 + (\partial_z v_0) v_0 + (\partial_z u_0) u_0,$$

que se cumple idénticamente y

$$\partial_t T_0 = \nabla^2 T_0 - \frac{1}{r \ln \eta} u_0 - \left( u_0 \partial_r T_0 + \frac{v_0}{r} \partial_\theta T_0 \right). \quad (\text{C.3})$$

Utilizando la ecuación de continuidad a orden dominante

$$\partial_r(r u_0) + \partial_\theta v_0 = 0, \quad (\text{C.4a})$$

y a orden  $\gamma$

$$\frac{1}{r} \partial_r(r u') + \frac{1}{r} \partial_\theta v' + \partial_z w' = 0, \quad (\text{C.4b})$$

se pueden simplificar los términos que involucran la velocidad angular en las ecuaciones C.1 y C.2.

Según C.4a,  $v_0 = -\int_\theta \partial_r(r u_0) d\theta + c(r) = -\partial_r \left[ \int_\theta (r u_0) d\theta + c'(r) \right]$  y el término  $2\Omega v_0$  de la ecuación C.1 se puede introducir dentro del gradiente de presión definiendo  $p_0^* = p_0 + 2\Omega \int_\theta r u_0 d\theta + 2\Omega c'(r)$  siempre y cuando exista una contribución equivalente en la ecuación C.2. Efectivamente,  $\frac{1}{r} \partial_\theta p_0^* = \frac{1}{r} \partial_\theta p_0 + 2\Omega u_0$ .

Análogamente, a partir de C.4b se obtiene  $v' = -\int_\theta \partial_r(r u') d\theta - r \int_\theta \partial_z w' d\theta + c(r, z)$ . Por lo tanto,

$$\frac{1}{\beta} \int_{-\beta/2}^{\beta/2} v' dz = \frac{1}{\beta} \left[ -\partial_r \int_\theta \int_{-\beta/2}^{\beta/2} r u' d\theta dz + c^*(r) \right] - \frac{r}{\beta} \int_\theta w'|_{-\beta/2}^{\beta/2} d\theta. \quad (\text{C.5})$$

Si se define una presión

$$p_0^{**} = p_0^* + \frac{2\Omega}{\beta} \int_\theta \int_{-\beta/2}^{\beta/2} r u' d\theta dz + \frac{2\Omega}{\beta} c^*(r),$$

con  $c'(r) = -\int_r c^*(r)dr$ , los dos primeros términos de C.5 se pueden introducir en el gradiente de presión ya que  $\frac{1}{r}\partial_\theta p_0^{**}$  resulta exactamente el término que contiene  $u'$  de la ecuación C.2.

Finalmente, si se utiliza la condición de contorno A.1 a orden  $\gamma$ ,  $\gamma u_0 \pm w' = 0$ , el término que contiene  $w'$  resulta

$$-\frac{r}{\beta} \int_\theta w'|_{-\beta/2}^{\beta/2} d\theta = \frac{2r\gamma}{\beta} \int_\theta u_0 d\theta.$$

Si se opera de la misma manera con la ecuación C.2, las ecuaciones de las dos componentes de las dos componentes horizontales de la velocidad en la aproximación casigeostrófica son

$$\begin{aligned} \partial_t u_0 = -\partial_r p_0 + \sigma [\nabla \mathbf{u}_0]_r + \sigma Ra T_0 + \tau \sigma r \int_\theta u_0 d\theta + (D_+ v_0) v_0 - \\ - \left( \frac{1}{r} \partial_\theta u_0 \right) v_0, \end{aligned} \quad (\text{C.6})$$

$$\partial_t v_0 = -\frac{1}{r} \partial_\theta p_0 + \sigma [\nabla \mathbf{u}_0]_\theta - (D_+ v_0) u_0 + \left( \frac{1}{r} \partial_\theta u_0 \right) u_0. \quad (\text{C.7})$$





## Apéndice D

# Discretización temporal de las ecuaciones

Para resolver las ecuaciones 2.21 se ha utilizado un método semiimplícito de segundo orden, incondicionalmente estable, con un esquema de paso fraccionario (Karniadakis *et al.*, 1991). Los términos no lineales se han evaluado corrigiendo el *aliasing* (Canuto *et al.*, 1988) mediante la regla del 3/2. En este apéndice sólo se esbozarán las diferentes etapas de la integración que se explican en profundidad en Alonso (1999).

1. Calcular la temperatura.

En este primer paso se discretiza la ecuación de la temperatura 2.21c, sin olvidar que ninguna de las variables que aparecen depende de la coordenada  $z$ , de la forma

$$\frac{1}{\Delta t} \left( \frac{3}{2} T^{n+1} - 2T^n + \frac{1}{2} T^{n-1} \right) = \nabla^2 T^{n+1} - 2 \frac{u^n}{r \ln \eta} + \frac{u^{n-1}}{r \ln \eta} - [2(\mathbf{u} \cdot \nabla) T]^n + [(\mathbf{u} \cdot \nabla) T]^{n-1},$$

donde  $n$  indica el instante de tiempo. Esta ecuación tiene 2.8 como condición de contorno para la temperatura. Operando se obtiene la ecuación de Hemholtz siguiente

$$\left( \frac{3}{2} - \Delta t \nabla^2 \right) T^{n+1} = 2T^n - \frac{1}{2} T^{n-1} - \frac{\Delta t}{r \ln \eta} (2u^n - u^{n-1}) - \Delta t \left\{ 2[(\mathbf{u} \cdot \nabla) T]^n - [(\mathbf{u} \cdot \nabla) T]^{n-1} \right\}, \quad (\text{D.1})$$

donde el término de la derecha de la igualdad es conocido de instantes anteriores. De este modo se obtiene la temperatura en el paso  $n + 1$ , que debe cumplir  $T^{n+1} = 0$  en el contorno lateral.

2. Avanzar la presión

En esta etapa se evalúa la temperatura como un promedio de las temperaturas en los pasos  $n + 1$  y  $n$ . Discretizando temporalmente las ecuaciones 2.21a y 2.21b se obtiene

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Delta t} \left( \frac{3}{2}u^{n+1} - 2u^n + \frac{1}{2}u^{n-1} \right) &= -\partial_r p^{n+1} + \sigma [(\nabla^2 \mathbf{u})_r]^{n+1} + \\ &+ \frac{\sigma Ra}{2} (T^{n+1} + T^n) + \tau \sigma r \int_{\theta} (2u^n - u^{n-1}) d\theta - \\ &- 2 [((\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u})_r]^n + [((\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u})_r]^{n-1}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Delta t} \left( \frac{3}{2}v^{n+1} - 2v^n + \frac{1}{2}v^{n-1} \right) &= -\frac{1}{r} \partial_{\theta} p^{n+1} + \sigma [(\nabla^2 \mathbf{u})_{\theta}]^{n+1} - \\ &- 2 [((\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u})_{\theta}]^n + [((\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u})_{\theta}]^{n-1}. \end{aligned}$$

La única variable conocida en el instante  $n + 1$  es la temperatura. Para poder evaluar la presión y avanzar la velocidad, se divide la etapa en dos pasos:

- Primero se define una velocidad intermedia  $\hat{\mathbf{u}}$ , nula en el contorno, con divergencia no nula y cuyas componentes cumplen las ecuaciones

$$\begin{aligned} &\frac{1}{\Delta t} \left( \hat{u} - 2u^n + \frac{1}{2}u^{n-1} \right) = \\ &= \frac{\sigma Ra}{2} (T^{n+1} + T^n) + \tau \sigma r \int_{\theta} (2u^n - u^{n-1}) d\theta - \\ &- 2 [((\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u})_r]^n + [((\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u})_r]^{n-1}, \end{aligned} \quad (\text{D.2a})$$

$$\begin{aligned} &\frac{1}{\Delta t} \left( \hat{v} - 2v^n + \frac{1}{2}v^{n-1} \right) = \\ &= -2 [((\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u})_{\theta}]^n + [((\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u})_{\theta}]^{n-1}. \end{aligned} \quad (\text{D.2b})$$

Como esta velocidad intermedia sólo depende de la velocidad y de la temperatura en pasos anteriores, se calcula resolviendo las ecuaciones anteriores.

- Se evalúa la presión definiendo una nueva velocidad, ahora con divergencia nula,  $\mathbf{u}^*$ . Esta nueva velocidad satisface la ecuación

$$\frac{1}{\Delta t} (\mathbf{u}^* - \hat{\mathbf{u}}) = -\nabla p^{n+1}. \quad (\text{D.3})$$

Tomando la divergencia de esta ecuación resulta la ecuación de Poisson

$$\nabla^2 p^{n+1} = \frac{1}{\Delta t} (\nabla \cdot \hat{\mathbf{u}}). \quad (\text{D.4})$$

Para poder resolver esta ecuación es necesaria una condición de contorno. Esta condición de contorno se obtiene proyectando radialmente la ecuación de Navier–Stokes, separando  $\nabla^2 \mathbf{u}$  en dos términos, de la forma  $\nabla (\nabla \cdot \mathbf{u}) - \nabla \times \nabla \times \mathbf{u}$  y tratando el primero de ellos implícitamente y el segundo explícitamente. De esta manera, la condición contorno para la presión resulta

$$\partial_r p^{n+1} = -\frac{\sigma}{r} (2\partial_{r\theta}^2 v^n - \partial_{r\theta}^2 v^{n-1}).$$

Una vez calculada la presión se puede calcular fácilmente la velocidad  $\mathbf{u}^*$  sin más que operar, a partir de la ecuación D.3

$$u^* = \hat{u} - \Delta t \partial_r p^{n+1}, \quad v^* = \hat{v} - \frac{\Delta t}{r} \partial_\theta p^{n+1}. \quad (\text{D.5})$$

### 3. Avanzar la velocidad

Finalmente, se calcula la velocidad en el paso  $n + 1$  a partir de las ecuaciones

$$\frac{1}{\Delta t} \left( \frac{3}{2} u^{n+1} - u^* \right) = \sigma [(\nabla^2 \mathbf{u})_r]^{n+1}, \quad (\text{D.6a})$$

$$\frac{1}{\Delta t} \left( \frac{3}{2} v^{n+1} - v^* \right) = \sigma [(\nabla^2 \mathbf{u})_\theta]^{n+1}. \quad (\text{D.6b})$$

que son las dos componentes de la ecuación de Navier–Stokes en función de las velocidades intermedias. Mediante estas ecuaciones, que se pueden desacoplar fácilmente mediante el cambio de variable  $\tilde{u} = u + iv$  y  $\tilde{v} = u - iv$ , se puede calcular la velocidad en el instante  $n + 1$ .

Este esquema numérico, una vez discretizado espacialmente, dará la evolución de las dos componentes de la velocidad horizontal y de la temperatura.



# Bibliografía

- ALONSO, A. 1999 Convección térmica en un anillo cilíndrico en rotación. PhD thesis, ETSETB. Universitat Politècnica de Catalunya.
- ALONSO, A., NET, M. & KNOBLOCH, E. 1995 On the transition to columnar convection. *Phys. Fluids* **7** (5), 935–940.
- ALONSO, A., NET, M., MERCADER, I. & KNOBLOCH, E. 1999 Onset of convection in a rotating annulus with radial gravity and heating. *Fluid Dyn. Res.* **24**, 133–145.
- ALONSO, A., SÁNCHEZ, J. & NET, M. 2000 Transition to Temporal Chaos in an O(2)–Symmetric Convective System for Low Prandtl Numbers. *Prog. Th. Phys. Supp.* **139**, 315–324.
- AZOUNI, M. A., BOLTON, E. W. & BUSSE, F. H. 1986 Convection driven by centrifugal buoyancy in a rotating annulus. *Geophys. Astrophys. Fluid Dyn.* **34**, 301–317.
- BATCHELOR, G. K. 1967 *An Introduction to Fluid Dynamics*. Cambridge University Press.
- BOUBNOV, B. M. & GOLITSYN, G. S. 1995 *Convection in Rotating Fluids*. Kluwer Academic Press.
- BRUMMELL, N. H. & HART, J. E. 1993 High Rayleigh number  $\beta$ -convection. *Geophys. Astrophys. Fluid Dyn.* **68**, 85–114.
- BUSSE, F. H. 1970 Thermal instabilities in rapidly rotating systems. *J. Fluid Mech.* **44**, 441–460.
- BUSSE, F. H. 1976 A simple model of convection in the Jovian atmosphere. *Icarus* **20**, 255–260.
- BUSSE, F. H. 1986 Asymptotic theory of convection in a rotating cylindrical annulus. *J. Fluid Mech.* **173**, 545–556.

- BUSSE, F. H. & CARRIGAN, C. R. 1974 Convection induced by centrifugal buoyancy. *J. Fluid Mech.* **62**, 579–592.
- BUSSE, F. H. & HOOD, L. L. 1982 Differential rotation driven by convection in a rapidly rotating annulus. *Geophys. Astrophys. Fluid Dyn.* **21**, 59–74.
- BUSSE, F. H. & OR, A. C. 1986 Convection in a rotating cylindrical annulus: thermal Rossby waves. *J. Fluid Mech.* **166**, 173–187.
- CANUTO, C., HUSSAINI, M. Y., QUARTERONI, A. & ZANG, T. A. 1988 *Spectral Methods in Fluid Dynamics*. Springer-Verlag.
- CARRIGAN, C. R. & BUSSE, F. H. 1983 An experimental and theoretical investigation of the onset of convection in rotating spherical shells. *J. Fluid Mech.* **126**, 287–305.
- DRISSI, A., NET, M. & MERCADER, I. 1999 Subharmonic instabilities of Tollmien–Schlichting waves in two-dimensional Poiseuille flow. *Phys. Rev. E* **60** (2), 1781–1791.
- GOLDSTEIN, H. F., KNOBLOCH, E., MERCADER, I. & NET, M. 1994 Convection in a rotating cylinder. Part 1. Linear theory for moderate Prandtl numbers. *J. Fluid Mech.* **248**, 583–604.
- GOLUBITSKY, M., STEWART, I. & SHAEFFER, D. G. 1985 *Singularities and Groups in Bifurcation Theory*, , vol. 2. Springer-Verlag.
- GREED, G. T. & ZHANG, K. K. 1996 Two- and three-dimensional linear convection in a rotating annulus. *Geophys. Astrophys. Fluid Dyn.* **82**, 23–34.
- HART, J. E., GLATZMAIER, G. A. & TOOMRE, J. 1986 Space-laboratory and numerical simulations of thermal convection in a rotating hemispherical shell with radial gravity. *J. Fluid Mech.* **173**, 519–544.
- HERRMANN, J. & BUSSE, F. H. 1997 Convection in a rotating cylindrical annulus. Part 4. Modulations and transition to chaos at low Prandtl numbers. *J. Fluid Mech.* **350**, 209–229.
- HERRMANN, J. & BUSSE, F. H. 1998 Stationary and time dependent convection in the rotating cylindrical annulus with modulated height. *Phys. Fluids* **10** (7), 1611–1620.
- INGERSOLL, A. P., BEEBE, R. F., MITCHELL, J. L., GARNEAU, G. W., YAGI, G. M. & MÜLLER, J. P. 1981 Interaction of eddies and mean zonal flow on Jupiter as inferred from Voyager 1 and 2 images. *J. Geophys. Res.* **86**, 8733–8743.

- KARNIADAKIS, G. E., ISRAELI, M. & ORSZAG, S. A. 1991 High-order splitting methods for the incompressible Navier–Stokes equations. *J. Comput. Phys.* **97**, 414–443.
- KNOBLOCH, E. 1996 Symmetry and instability in rotating hydrodynamic and magnetohydrodynamic flows. *Phys. Fluids* **8** (6), 1446–1454.
- MARQUÉS, F. 1990 On boundary conditions for velocity potentials in confined flows: Application to Couette flow. *Phys. Fluids A* **2** (5), 729–737.
- MERCADER, I., PRAT, J. & KNOBLOCH, E. 2000 The 1:2 mode interaction in Rayleigh–Bénard convection with weakly broken midplane symmetry. *Int. J. of Bifurcation and Chaos*. Enviado.
- OR, A. C. 1990 New phenomena in the Eckhaus instability of thermal Rossby waves. *J. Fluid Mech.* **216**, 613–628.
- OR, A. C. 1994 Chaotic transitions of convection rolls in a rapidly rotating annulus. *J. Fluid Mech.* **261**, 1–19.
- OR, A. C. & BUSSE, F. H. 1987 Convection in a rotating cylindrical annulus. Part 2. Transitions to asymmetric and vacillating flow. *J. Fluid Mech.* **174**, 313–326.
- OR, A. C. & HERRMANN, J. 1995 Anomalous sideband instabilities of thermal Rossby waves at low Prandtl numbers. *Phys. Fluids* **7** (2), 315–323.
- PEDLOSKY, J. 1987 *Geophysical Fluid Dynamics*. Springer–Verlag.
- PINO, D., MERCADER, I. & NET, M. 1998 Nonlinear thermal convection in a fast rotating annulus. In *Nonlinear dynamics and acoustics* (ed. A. Barjau), pp. 80–87.
- PINO, D., MERCADER, I. & NET, M. 1999 Heat flux transport in low mass brown dwarfs. In *Theory and Tests of convection in Stellar Structure* (ed. A. Giménez, E. Guinan & B. Montesinos), vol. 173, pp. 197–200. ASP Conference Series.
- PINO, D., MERCADER, I. & NET, M. 2000 Thermal and inertial modes of convection in a rapidly rotating annulus. *Phys. Rev. E* **61** (2), 1507–1517.
- PINO, D., NET, M. & MERCADER, I. 2001 Thermal Rossby waves in a rotating annulus. Their stability. *Phys. Rev. E*. Enviado.
- PRAT, J. 1996 Generació espontània de vents en règim de convecció tèrmica. PhD thesis, ETSETB. Universitat Politècnica de Catalunya.



- ROBERTS, P. H. 1968 On the thermal instability of a rotating fluid sphere containing heat sources. *Philos. Trans. R. Soc. London. Ser.* **263**, 93–117.
- SÁNCHEZ, J. 1994 Simulación numérica en flujos confinados: estructuras pre-turbulentas. PhD thesis, Universitat de Barcelona.
- SCHNAUBELT, M. & BUSSE, F. H. 1992 Convection in a rotating cylindrical annulus. Part 3. Vacillating and spatially modulated flows. *J. Fluid Mech.* **245**, 155–173.
- SOWARD, A. M. 1977 On the finite amplitude thermal instability of a rapidly rotating sphere. *Geophys. Astrophys. Fluid Dyn.* **9**, 19–74.
- TILGNER, A., ARDES, M. & BUSSE, F. H. 1997 Convection in rotating spherical fluid shells. *Acta Astron. et Geophys. Univ. Comenianae* **XIX**, 337–358.
- TILGNER, A. & BUSSE, F. H. 1997 Finite-amplitude convection in rotating spherical fluid shells. *J. Fluid Mech.* **332**, 359–376.
- TRITTON, D. J. 1988 *Physical Fluid Dynamics*. Oxford University Press.
- YANO, J.-I. 1992 Asymptotic theory of thermal convection in rapidly rotating systems. *J. Fluid Mech.* **243**, 103–131.
- ZHANG, K. K. 1992 Spiralling columnar convection in rapidly rotating spherical fluid shells. *J. Fluid Mech.* **236**, 535–556.
- ZHANG, K. K. 1994 On coupling between the Poincaré equation and the heat equation. *J. Fluid Mech.* **268**, 211–229.
- ZHANG, K. K. & BUSSE, F. H. 1987 On the onset of convection in rotating spherical shells. *Geophys. Astrophys. Fluid Dyn.* **39**, 119–147.