Apèndix G

La funció g(r) del sistema bidimensional sense interacció

La funció g(r) del sistema sense interacció es defineix de la següent manera:

$$g(r) = 1 - \frac{l^2(k_F r)}{\nu}$$

on ν és la degeneració del sistema: 1 per al polaritzat i 2 per al no polaritzat. La funció $l(k_F r)$ és la integral:

$$l(k_F r) = \frac{\nu}{(2\pi)^2 \sigma} \int_0^{k_F} d\vec{k} e^{i\vec{k}\vec{r}}$$

Pot demostrar-se fàcilment que

$$\int_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi} d\varphi e^{ikr\cos\varphi} = 2\pi J_0(kr)$$

Amb aquest resultat es pot reescriure *l* com:

$$l(k_F r) = \frac{\nu}{(2\pi)^2 \sigma} 2\pi \int_0^{k_F} kJ_0(kr)dk$$

i substituint a *g(r)* queda:

$$g(r) = 1 - \frac{1}{\nu} \frac{4\nu^2\pi^2}{(2\pi)^4 \sigma^2} \left(\int_0^{k_F} kJ_0(kr)dk \right)^2$$

Per fer aquesta integral és bo emprar el canvi de variable: $t = \frac{k}{k_F}$ ja que a les taules es troba el següent resultat (Gradsthein 6.561, 5 pàgina 683):

$$\int_0^1 x^{\nu+1} J_\nu(ax)dx = \frac{1}{a} J_{\nu+1}(a) \quad , \quad \mathrm{Re}(\nu) > -1$$

transformant-la així la integral fàcilment queda resolta:

$$\int_0^1 k_F t J_0(tk_F r) k_F dt = k_F^2 \int_0^1 tJ_0(tk_F r)dt = \frac{k_F}{r} J_1(k_F r)$$

Finalment s’obté:

$$g(r) = 1 - \frac{\nu}{4\pi^2\sigma^2} \frac{k_F^2}{r^2} \left(J_1(rk_F) \right)^2$$

Per al cas no polaritzat, $\nu=2$ i $k_F^2=2\pi\sigma$. Per al cas totalment polaritzat, $\nu=1$ i $k_F^2=4\pi\sigma$. Això ens dóna per a tots dos sistemes un mateix resultat, en el qual i per diferenciar-lo dels resultats obtinguts per càlcul, indicarem explicitament que es tracta del sistema lliure:

$$g^{lliure}(r) = 1 - \frac{1}{\pi\sigma}\frac{J_1(k_F r)^2}{r^2}$$

S'observa que la funció per a totes les densitats convergeix cap a un mateix valor, $\frac{1}{2}$, quan la distància tendeix a zero. Això pot demostrar-se senzillament amb un desenvolupament en sèrie de J_1:

$$J_1(rk_F) = \frac{rk_F}{2}\sum_{t=0}^{\infty}\frac{\left(-\frac{1}{4}r^2k_F^2\right)^t}{t!\,\Gamma(1+t+1)} = \frac{rk_F}{2}\left[\frac{1}{1\cdot\Gamma(2)} + \frac{-\frac{r^2k_F^2}{4}}{1\cdot\Gamma(3)} + \ldots\right]$$

en el qual es troba el límit per a r petites:

$$\lim_{r\to 0}\left(1 - \frac{1}{\pi\sigma}\frac{J_1(rk_F)^2}{r^2}\right) =$$

$$= \lim_{r\to 0}\left(1 - \frac{1}{\pi\sigma}\frac{1}{r^2}\left[\frac{rk_F}{2}\left(\frac{1}{\Gamma(2)} - \frac{r^2k_F^2}{4\Gamma(3)} + \ldots\right)\right]^2\right) = 1 - \frac{1}{\pi\sigma}\frac{k_F^2}{4\Gamma(2)^2} = 0.5$$

En el treball es fan servir també les funcions de correlació parcials corresponents a les parelles de partícules up-up i up-down. Aquestes estan relacionades amb la funció total per l'eqüació:

$$g^{lliure}(r) = \frac{1}{2}\left(g_{\uparrow\uparrow}(r) + g_{\uparrow\downarrow}(r)\right)$$

i les funcions parcials són:

$$g_{\uparrow\uparrow}^{lliure}(r) = 1 - \frac{2}{\pi\sigma}\frac{J_1(k_F r)^2}{r^2}$$

$$g_{\uparrow\downarrow}^{lliure}(r) = 1$$