UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA

Programa de doctorat de Matemàtica Aplicada

CONTRIBUCIÓ A L'ESTUDI DELS MORFISMES ENTRE OPERADORS D'INDISTINGIBILITAT. APLICACIÓ AL RAONAMENT APROXIMAT.

Autor: Dionís Boixader Ibáñez
Director: Joan Jacas Moral

Capítol 5.
Estructura dels operadors extensionals.

Sumari:

S'estudia l'estructura dels operadors extensionals i dels operadors d'inferència extensionals com a reticles complets. Es determinen aplicacions entre espais d'operadors que tenen justament als operadors extensionals (respectivament als operadors d'inferència extensionals) com a punts fixos, permetent així l'aplicació del Teorema del Punt Fix de Tarksi. Aquestes aplicacions, a més de caracteritzar-los, permet determinar els operadors extensionals (respectivament operadors d'inferència extensionals) que afiten superior i inferiorment un operador qualsevol de forma òptima. A continuació, es donen teoremes d'interpolació i representació d'operadors extensionals (respectivament d'inferència extensionals) mitjançant regles difuses, i es proposen mecanismes de Raonament Aproximat Interpolatiu. Finalment, es considera el problema de la interpolació i representació aproximada, i se n'estableix els corresponents teoremes.

Aportacions d'aquesta memòria:

Tots els resultats d'aquest capítol són nous. Per la seva aplicació al Raonament Aproximat Interpolatiu, en destaquen:

- Teoremes d'Interpolació i Representació (Teoremes 5.2.1 a 5.2.10).
- Teorema d'Interpolació Aproximada (Teorema 5.3.3).

Per la seva importància estructural, en destaquen:

- Teoremes de Caracterització d'Operadors Extensionals (Teoremes 5.1.19, 5.1.15, 5.1.20, 5.1.24 i 5.1.28)

5.1 El reticle dels operadors extensionals

Considerem la classe de tots els operadors entre $[0,1]^U$ i $[0,1]^V$, $\mathrm{OP} = \{\mathcal{C}/\mathcal{C} : [0,1]^U \to [0,1]^V\}$. En OP definim la relació:

$$\mathcal{C}_1 \leq \mathcal{C}_2 \text{ si, i només si, } \mathcal{C}_1(A) \leq_V \mathcal{C}_2(A) \text{ per tot } A \in [0,1]^U.$$

La relació $\leq$ és una relació d'ordre parcial. Si definim les operacions $\vee$ i $\wedge$ de la manera natural,

$$\begin{aligned} \mathcal{C} &= \mathcal{C}_1 \vee \mathcal{C}_2, \text{ si, i només si, } \mathcal{C}(A) = \mathcal{C}_1(A) \vee \mathcal{C}_2(A) \\ \mathcal{C} &= \mathcal{C}_1 \wedge \mathcal{C}_2, \text{ si, i només si, } \mathcal{C}(A) = \mathcal{C}_1(A) \wedge \mathcal{C}_2(A) \end{aligned}$$

per tot $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2 \in \mathrm{OP}$ i $A \in [0,1]^U$, llavors és una simple comprovació veure que $(\mathrm{OP} \leq, \vee, \wedge)$ és un reticle, amb suprem i ínfim $\vee$ i $\wedge$, respectivament. Si $\{\mathcal{C}_i\}_{i\in I} \subseteq \mathrm{OP}$ és una família d'operadors, també utilitzarem les notacions

$$\begin{aligned} \bigvee\{\mathcal{C}_i/i \in I\} &= \bigvee_{i\in I} \mathcal{C}_i = \mathop{\mathrm{SUP}}_{i\in I} \mathcal{C}_i \\ \bigwedge\{\mathcal{C}_i/i \in I\} &= \bigwedge_{i\in I} \mathcal{C}_i = \mathop{\mathrm{INF}}_{i\in I} \mathcal{C}_i \end{aligned}$$

A continuació es demostra que OE_T i OIE_T són subreticles complets de $(\mathrm{OP}, \leq, \vee, \wedge)$, (i.e. estables per ínfims i suprems de famílies arbitràries d'elements), satisfent les següents inclusions:

$$\mathrm{OIE}_T \subseteq \mathrm{OE}_T \subseteq \mathrm{OP}, \text{per qualsevol t-norma contínua } T.$$

Lema 5.1.1. Sigui $\{\mathcal{C}_i\}_{i\in I}$ una família d'operadors extensionals. Llavors $\mathcal{C} = \bigwedge_{i\in I} \mathcal{C}_i$ és operador extensional.

Demostració. S'ha de provar que $\overline{E}_V^T(\mathcal{C}(A), \mathcal{C}(A')) \geq \overline{E}_U^T(A, A')$, per tot $A, A' \in [0,1]^U$. Per $v \in V$, es té:

$$\begin{aligned} \hat{T}(\mathcal{C}(A)(v)|\mathcal{C}(A')(v)) &= \hat{T}\left(\mathop{\mathrm{INF}}_{i\in I} \mathcal{C}_i(A)(v))\middle| \mathop{\mathrm{INF}}_{i\in I} \mathcal{C}_i(A')(v)\right) = \\ &\underset{(*)}{=} \mathop{\mathrm{INF}}_{i\in I} \hat{T}\left(\mathop{\mathrm{INF}}_{j\in I} \mathcal{C}_j(A)(v)|\mathcal{C}_i(A')(v)\right) \geq \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\underset{(**)}{\geq} \operatorname*{INF}_{i\in I} \hat{T}\,(\mathcal{C}_i(A)(v)|\mathcal{C}_i(A')(v)) \geq \\
&\geq \operatorname*{INF}_{i\in I} E_T(\mathcal{C}_i(A)(v), \mathcal{C}_i(A')(v)) \geq \\
&\geq \operatorname*{INF}_{i\in I} \left(\operatorname*{INF}_{v\in V} E_T(\mathcal{C}_i(A)(v), \mathcal{C}_i(A')(v)) \right) = \\
&= \operatorname*{INF}_{i\in I} \overline{E}^T_V\,(\mathcal{C}_i(A), \mathcal{C}_i(A')) \underset{(***)}{\geq} \overline{E}^T_U(A, A').
\end{aligned}
$$

(*) segueix del fet que $\hat{T}(x|y)$ és monòtona creixent i contínua per la dreta respete la variable y.

(**) $\hat{T}(x|y)$ és monòtona decreixent respecte la variable x.

(***) $\mathcal{C}_i$ és operador extensional, per cada $i \in I$.

De forma totalment anàloga es demostra que $\hat{T}\,(\mathcal{C}(A')(v)|\mathcal{C}(A)(v)) \geq \overline{E}^T_U(A, A')$, i d'ambdues, $E_T(\mathcal{C}(A')(v), \mathcal{C}(A)(v)) \geq \overline{E}^T_U(A, A')$.

Finalment, donada l'arbitrarietat de $v \in V$, es té:

$$\overline{E}^T_V(\mathcal{C}(A'), \mathcal{C}(A)) = \operatorname*{INF}_{v\in V} E_T\,(\mathcal{C}(A')(v), \mathcal{C}(A)(v)) \geq \overline{E}^T_U(A, A'). \quad \blacksquare$$

Lema 5.1.2. Sigui $\{\mathcal{C}_i\}_{i\in I}$ una família d'operadors extensionals. Llavors $\mathcal{C} = \bigvee_{i\in I} \mathcal{C}_i$ és operador extensional.

Demostració. S'ha de provar que $\overline{E}^T_V(\mathcal{C}(A), \mathcal{C}(A')) \geq \overline{E}^T_U(A, A')$, per tot $A, A' \in [0,1]^U$. Per tot $v \in V$, es té:

$$
\begin{aligned}
\hat{T}\,(\mathcal{C}(A)(v)|\mathcal{C}(A')(v)) &= \hat{T}\left(\operatorname*{SUP}_{i\in I} \mathcal{C}_i(A)(v) |\, \operatorname*{SUP}_{i\in I} \mathcal{C}_i(A')(v) \right) = \\
&\underset{(*)}{=} \operatorname*{INF}_{i\in I} \hat{T}\left(\mathcal{C}_i(A)(v) |\, \operatorname*{SUP}_{j\in I} \mathcal{C}_j(A')(v) \right) \\
&\underset{(**)}{\geq} \operatorname*{INF}_{i\in I} \hat{T}\,(\mathcal{C}_i(A)(v)|\mathcal{C}_i(A')(v)) \geq \\
&\geq \operatorname*{INF}_{i\in I} E_T(\mathcal{C}_i(A)(v), \mathcal{C}_i(A')(v)) \geq \\
&\geq \operatorname*{INF}_{i\in I} \left(\operatorname*{INF}_{v\in V} E_T(\mathcal{C}_i(A)(v), \mathcal{C}_i(A')(v)) \right) = \\
&= \operatorname*{INF}_{i\in I} \overline{E}^T_V\,(\mathcal{C}_i(A), \mathcal{C}_i(A')) \underset{(***)}{\geq} \overline{E}^T_U(A, A').
\end{aligned}
$$

Les anteriors desigualtats segueixen dels fets:

(*) $\hat{T}(x|y)$ és monòtona creixent i contínua per l'esquerra respecte a la variable x.

(**) $\hat{T}(x|y)$ és monòtona creixent respecte a la variable y.

(***) $\mathcal{C}_i$ és operador extensional, per cada $i \in I$.

De forma totalment anàloga es demostra que $\hat{T}\,(\mathcal{C}(A')(v)|\mathcal{C}(A)(v)) \geq \overline{E}_U^T(A, A')$, i d'ambdues, $E_T(\mathcal{C}(A')(v), \mathcal{C}(A)(v)) \geq \overline{E}_U^T(A, A')$.

Finalment, donada l'arbitrarietat de $v \in V$, es té:

$$\overline{E}_V^T(\mathcal{C}(A'), \mathcal{C}(A)) = \operatorname*{INF}_{v \in V} E_T\,(\mathcal{C}(A')(v), \mathcal{C}(A)(v)) \geq \overline{E}_U^T(A, A'). \quad \blacksquare$$

Els dos lemes anteriors proven:

Proposició 5.1.3. OE_T és un subreticle complet de $(\mathrm{OP}, \leq, \wedge, \vee)$. ■

Aquesta propietat s'extén fàcilment a OIE_T.

Lema 5.1.4. Sigui $\{\mathcal{C}_i\}_{i \in I}$ una família d'operadors d'inferència. Llavors:

(a) $\mathcal{C} = \bigwedge_{i \in I} \mathcal{C}_i$ és operador d'inferència

(b) $\mathcal{C} = \bigvee_{i \in I} \mathcal{C}_i$ és operador d'inferència

Demostració. Trivial. ■

Com a conseqüència dels lemes anteriors, es té:

Proposició 5.1.5. OIE_T és un subreticle complet de OE_T.

De forma anàloga al que passava amb els generadors d'una T-indistingibilitat, els operadors extensionals venen caracteritzats pel fet de ser punts fixos d'uns operadors més generals, que actuen sobre la classe OP de tots els operadors $\mathcal{C} : [0,1]^U \to [0,1]^V$.

Considerem l'aplicació

$$\begin{array}{rccc} \Psi : & \mathrm{OP} & \longrightarrow & \mathrm{OP} \\ & \mathcal{C} & \longmapsto & \Psi(\mathcal{C}) \end{array}$$

on $\Psi = \bigwedge_{\mu \in [0,1]^U} \overline{S}_{\mu\mathcal{C}(\mu)}$.

O sigui:

$$\begin{array}{rcl} \Psi(\mathcal{C}) : [0,1]^U & \longrightarrow & [0,1]^V \\ A & \longmapsto & \Psi(\mathcal{C})(A) \end{array}$$

definit per $\Psi(\mathcal{C})(A) = \bigwedge_{\mu \in [0,1]^U} \overline{S}_{\mu\mathcal{C}(\mu)}(A)$, per tot $A \in [0,1]^U$, o el que és el mateix,

$$\Psi(\mathcal{C})(A)(v) = \operatorname*{INF}_{\mu \in [0,1]^U} \overline{S}_{\mu\mathcal{C}(\mu)}(A)(v),$$

per tots $A \in [0,1]^U$, $v \in V$.

(Recordem que $\overline{S}_{\mu\mathcal{C}(\mu)}(A)(v) = \hat{T}\left(\overline{E}_U^T(A,\mu)|\mathcal{C}(\mu)(v)\right)$, per tots $A \in [0,1]^U$, $v \in V$.)

Lema 5.1.6. Per tot $\mathcal{C} \in$ OP, $\Psi(\mathcal{C}) \leq \mathcal{C}$.

Demostració. $\Psi(\mathcal{C})(A) = \bigwedge_{\mu \in [0,1]^U} \overline{S}_{\mu\mathcal{C}(\mu)}(A)$, per tot $A \in [0,1]^U$.

En particular, per $\mu = A$, $\overline{S}_{A\mathcal{C}(A)}(A) = \mathcal{C}(A)$ (Teorema 4.3.11), d'on $\Psi(\mathcal{C})(A) \leq \mathcal{C}(A)$, per tot $A \in [0,1]^U$. ∎

Lema 5.1.7. Si $\mathcal{C} \leq \mathcal{C}'$ llavors $\Psi(\mathcal{C}) \leq \Psi(\mathcal{C}')$, per $\mathcal{C}, \mathcal{C}' \in$ OP qualssevol.

Demostració. Donats $A, \mu \in [0,1]^U$ qualssevol es té:

$$\overline{S}_{\mu\mathcal{C}(\mu)}(A) = \hat{T}\left(\overline{E}_U^T(A,\mu)|\mathcal{C}(\mu)\right) \leq \hat{T}(\overline{E}_U^T(A,\mu)|\mathcal{C}'(\mu)) = \overline{S}_{\mu\mathcal{C}'(\mu)}(A),$$

d'on $\overline{S}_{\mu\mathcal{C}(\mu)} \leq \overline{S}_{\mu\mathcal{C}'(\mu)}$ i, per tant,

$$\Psi(\mathcal{C}) = \bigwedge_{\mu \in [0,1]^U} \overline{S}_{\mu\mathcal{C}(\mu)} \leq \bigwedge_{\mu \in [0,1]^U} \overline{S}_{\mu\mathcal{C}'(\mu)} = \Psi(\mathcal{C}'). \quad ∎$$

Proposició 5.1.8. $\Psi(\mathcal{C})$ és extensional, per tot $\mathcal{C} \in$ OP.

NOTA: Aquesta proposició es pot obtenir com a corol·lari del Lema 5.1.3. En donem, però, una demostració directa que no es basa en aquest lema.

La finalitat d'això és poder obtenir una demostració diferent del propi Lema 5.1.1. com a conseqüència del Teorema del Punt Fix de Tarski.

Demostració. Donat $\mathcal{C} \in$ OP, s'ha de veure que $\overline{E}_V^T(\Psi(\mathcal{C}(A), \Psi(\mathcal{C})(A')) \geq \overline{E}_U^T(A, A')$, per tots $A, A' \in [0,1]^U$. Fixat $v \in V$, suposem que $\Psi(\mathcal{C})(A')(v) \geq \Psi(\mathcal{C})(A)(v)$.

En aquest cas,

$$\begin{aligned}
E_T(\Psi(\mathcal{C})(A')(v), \Psi(\mathcal{C})(A)(v)) &= \hat{T}(\Psi(\mathcal{C})(A')(v) | \Psi(\mathcal{C})(A)(v)) = \\
&= \hat{T}\left(\operatorname*{INF}_{\mu\in[0,1]^U} \overline{S}_{\mu\mathcal{C}(\mu)}(A')(v) \middle| \operatorname*{INF}_{\mu\in[0,1]^U} \overline{S}_{\mu\mathcal{C}(\mu)}(A)(v)\right) = \\
&= \operatorname*{INF}_{\mu\in[0,1]^U} \hat{T}\left(\operatorname*{INF}_{\nu\in[0,1]^U} \overline{S}_{\nu\mathcal{C}(\nu)}(A')(v) | \overline{S}_{\mu\mathcal{C}(\mu)}(A)(v)\right) \geq \\
&\geq \operatorname*{INF}_{\mu\in[0,1]^U} \hat{T}(\overline{S}_{\mu\mathcal{C}(\mu)}(A')(v), \overline{S}_{\mu\mathcal{C}(\mu)}(A)(v)) \geq \\
&\geq \operatorname*{INF}_{\mu\in[0,1]^U} E_T(\overline{S}_{\mu\mathcal{C}(\mu)}(A')(v), \overline{S}_{\mu\mathcal{C}(\mu)}(A)(v)) = \\
&\geq \operatorname*{INF}_{\mu\in[0,1]^U} E_T \operatorname*{INF}_{v\in V} E_T(\overline{S}_{\mu\mathcal{C}(\mu)}(A')(v), \overline{S}_{\mu\mathcal{C}(\mu)}(A)(v)) = \\
&= \operatorname*{INF}_{\mu\in[0,1]^U} \overline{E}_V^T(\overline{S}_{\mu\mathcal{C}(\mu)}(A'), \overline{S}_{\mu\mathcal{C}(\mu)}(A)) \geq \\
&\geq \operatorname*{INF}_{\mu\in[0,1]^U} \overline{E}_U^T(A', A) = \overline{E}_U^T(A', A).
\end{aligned}$$

Si, en canvi, $\Psi(\mathcal{C})(A')(v) \leq \Psi(\mathcal{C})(A)(v)$, desigualtats del tot semblants a les anteriors porten a $E_T(\Psi(\mathcal{C})(A')(v), \Psi(\mathcal{C})(A)(v)) \geq \overline{E}_U^T(A', A)$.

Finalment, donada l'arbitrarietat de $v \in V$, es té:

$$\overline{E}_V^T(\Psi(\mathcal{C})(A'), \Psi(\mathcal{C})(A)) = \operatorname*{INF}_{v\in V} E_T(\Psi(\mathcal{C})(A')(v), \Psi(\mathcal{C})(A)(v)) \geq \overline{E}_U^T(A', A),$$

tal i com es volia. ■

Teorema 5.1.9. (Primer de caracterització de OE$_T$)

$\mathcal{C} \in \mathrm{OE}_T$ si, i només si, $\Psi(\mathcal{C}) = \mathcal{C}$.

Demostració. Suposem $\mathcal{C} \in \mathrm{OE}_T$. Llavors, segons el teorema 4.3.11 $\mathcal{C}(A) \leq \overline{S}_{\mu\mathcal{C}(\mu)}(A)$, per tot $A \in [0,1]^U$, per tots $A, \mu \in [0,1]^U$. Per tant, $\mathcal{C}(A) \leq \bigwedge_{\mu\in[0,1]^U} \overline{S}_{\mu\mathcal{C}(\mu)}(A)$ d'on, tenint en compte la proposició anterior, resulta $\mathcal{C}(A) = \bigwedge_{\mu\in[0,1]^U} \overline{S}_{\mu\mathcal{C}(\mu)}(A) = \Psi(\mathcal{C})(A)$. El recíproc s'obté immediatament com a conseqüència de la Proposició 5.1.8.

A continuació en donem, però, una prova directa.

$\Leftarrow$) Volem veure que per tots $A, A' \in [0,1]^U$, es té $\overline{E}_V^T(\mathcal{C}(A), \mathcal{C}(A')) \geq \overline{E}_U^T(A, A')$.

Suposem, donat $v \in V$, que $\mathcal{C}(A')(v) \geq \mathcal{C}(A)(v)$. Llavors

$$\begin{aligned}
E_T(\mathcal{C}(A)(v), \mathcal{C}(A')(v)) &= \hat{T}\,(\mathcal{C}(A')(v)|\mathcal{C}(A)(v)) = \\
&= \hat{T}\left(\operatorname*{INF}_{\mu\in[0,1]^U} \overline{S}_{\mu\mathcal{C}(\mu)}(A')(v)|\mathcal{C}(A)(v)\right) \geq \\
&\geq \hat{T}\left(\overline{S}_{A\mathcal{C}(A)}(A')(v)|\mathcal{C}(A)(v)\right) = \\
&= \hat{T}\left(\overline{S}_{A\mathcal{C}(A)}(A')(v)|\overline{S}_{A\mathcal{C}(A)}(A)(v)\right) \geq \\
&\geq E_T\left(\overline{S}_{A\mathcal{C}(A)}(A')(v), \overline{S}_{A\mathcal{C}(A)}(A)(v)\right) \geq \\
&\geq \operatorname*{INF}_{v\in V}\left(\overline{S}_{A\mathcal{C}(A)}(A')(v), \overline{S}_{A\mathcal{C}(A)}(A)(v)\right) = \\
&= \overline{E}_V^T\left(\overline{S}_{A\mathcal{C}(A)}(A'), \overline{S}_{A\mathcal{C}(A)}(A)\right) \geq \overline{E}_U^T(A', A).
\end{aligned}$$

Si, en canvi, $\mathcal{C}(A')(v) < \mathcal{C}(A)(v)$, tindrem

$$\begin{aligned}
E_T(\mathcal{C}(A)(v), \mathcal{C}(A')(v)) &= \hat{T}(\mathcal{C}(A)(v)|\mathcal{C}(A')(v)) = \\
&= \hat{T}\left(\operatorname*{INF}_{\mu\in[0,1]^U} \overline{S}_{\mu\mathcal{C}(\mu)}(A)(v)|\mathcal{C}(A')(v)\right) \geq \\
&\geq \hat{T}\left(\overline{S}_{A'\mathcal{C}(A')}(A)(v)|\mathcal{C}(A')(v)\right) = \\
&= \hat{T}\left(\overline{S}_{A'\mathcal{C}(A')}(v)|\overline{S}_{A'\mathcal{C}(A')}(A')(v)\right) \geq \\
&\geq E_T\left(\overline{S}_{A'\mathcal{C}(A')}(A)(v), \overline{S}_{A'\mathcal{C}(A')}(A')(v)\right) \geq \\
&\geq \operatorname{INF} \overline{E}_V^T\left(\overline{S}_{A'\mathcal{C}(A')}(A)(v), \overline{S}_{A'\mathcal{C}(A')}(A')\right) \geq \\
&\geq \overline{E}_U^T(A, A')
\end{aligned}$$

D'ambdues, $E_T(\mathcal{C}(A)(v), \mathcal{C}(A')(v)) \geq \overline{E}_U^T(A, A')$ i, donada l'arbitrarietat de $v \in V$, $\overline{E}_V^T(\mathcal{C}(A), \mathcal{C}(A')) = \mathrm{INF}_{v\in V}(\mathcal{C}(A)(v), \mathcal{C}(A')(v)) \geq \overline{E}_U^T(A, A')$. ■

Corol·lari 5.1.10.

(a) Im $\Psi = \mathrm{OE}_T$.

(b) Ψ és idempotent (i.e. $\Psi^2 = \Psi$).

Demostració. Segueix immediatament de la proposició 5.1.7 i del Teorema 5.1.8. ■

El teorema 5.1.9, a més de caracteritzar els operadors extensionals, permet la determinació de l'operador menys específic entre tots els extensionals que afiten inferiorment un operador donat.

Proposició 5.1.11. Per tot $\mathcal{C} \in O$, $\Psi(\mathcal{C}) = \bigvee\{S \in \mathrm{OE}_T / S \leq \mathcal{C}\}$.

Demostració. Segons el lema 5.1.6 i la proposició 5.1.8 $\Psi(\mathcal{C})$ és extensional i satisfà $\Psi(\mathcal{C}) \leq \mathcal{C}$. Per tant, $\Psi(\mathcal{C}) \leq \bigvee\{S \in \mathrm{OE}_T / S \leq \mathcal{C}\}$.

Sigui $\mathcal{C}' \in \mathrm{OE}_T$ tal que $\mathcal{C}' \leq \mathcal{C}$. Llavors, pel teorema 5.1.9 i el lema 5.1.11

$$\mathcal{C}' = \Psi(\mathcal{C}') \leq \Psi(\mathcal{C}), \text{ d'on } \Psi(\mathcal{C}) \geq \bigvee\{S \in \mathrm{OE}_T / S \leq \mathcal{C}\}$$

i, d'ambues desigualtats,

$$\Psi(\mathcal{C}) = \bigvee\{S \in \mathrm{OE}_T / S \leq \mathcal{C}\} \quad \blacksquare$$

L'operador Φ que s'introdueix seguidament proporciona resultats anàlegs a l'operador Ψ, però en termes de fites superiors.

Considerem

$$\begin{array}{rcl} \Phi : OP & \longrightarrow & OP \\ \mathcal{C} & \longmapsto & \Phi(\mathcal{C}) \end{array}$$

on

$$\begin{array}{rcl} \Phi(\mathcal{C}) : [0,1]^U & \longrightarrow & [0,1]^V \\ A & \longmapsto & \Phi(\mathcal{C})(A) \end{array}$$

definit per $\Phi(\mathcal{C})(A)(v) = \mathrm{SUP}_{\mu \in [0,1]^U} \underline{S}_{\mu\mathcal{C}(\mu)}(A)(v)$, per tot $v \in V$.

O sigui, $\Phi(\mathcal{C}) = \bigvee_{\mu \in [0,1]^U} \underline{S}_{\mu\mathcal{C}(\mu)}$.

Recordem que $\underline{S}_{\mu\mathcal{C}(\mu)}(A)(v) = T\left(\overline{E}_U^T(A,\mu), \mathcal{C}(\mu)(v)\right)$, per tots $v \in V$, $\mu, A \in [0,1]^U$.

Lema 5.1.12. Per tot $C \in O$, $\Phi(C) \geq C$.

Demostració. $\Phi(C)(A) = \bigvee_{\mu \in [0,1]^U} \underline{S}_{\mu C(\mu)}(A)$, per tot $A \in [0,1]^U$. En particular, per $\mu = A$, $\underline{S}_{AC(A)}(A) = C(A)$, d'on $\bigvee_{\mu \in [0,1]^U} \underline{S}_{\mu C(\mu)}(A) \geq C(A)$, per tots $v \in V$, $A \in [0,1]^U$. ∎

Lema 5.1.13. Si $C \leq C'$, llavors $\Phi(C) \leq \Phi(C')$, per $C, C' \in O$ qualssevol.

Demostració. Donats $A, \mu \in [0,1]^U$ es té:

$$\begin{aligned} \underline{S}_{\mu C(\mu)}(A) &= T\left(\overline{E}_U^T(A,\mu), C(\mu)\right) \leq \\ &\leq T\left(\overline{E}_U^T(A,\mu), C'(\mu)\right) = \underline{S}_{\mu C'(\mu)}(A) \end{aligned}$$

d'on $\underline{S}_{\mu C(\mu)} \leq \underline{S}_{\mu C'(\mu)}$ i, per tant,

$$\Phi(C) = \bigvee_{\mu \in [0,1]^U} \underline{S}_{\mu C(\mu)} \leq \bigvee_{\mu \in [0,1]^U} \underline{S}_{\mu C'(\mu)} = \Phi(C') \qquad ∎$$

Proposició 5.1.14. $\Phi(C)$ és extensional, per tot $C \in OP$.

NOTA: Aquest resultat es pot obtenir per aplicació directa del lema 5.1.2. En donem, però una demostració que no es basa en aquest lema. La finalitat d'això és poder obtenir una demostració diferent del lema 5.1.4 com a corol·lari del teorema Tarski.

Demostració. Donat $C \in O$ s'ha de veure que $\overline{E}_V^T(\Phi(C)(A), \Phi(C)(A')) \geq \overline{E}_U^T(A, A')$ per tots $A, A' \in [0,1]^U$,

Fixat $v \in V$, suposem que $\Phi(C)(A')(v) \geq \Phi(C)(A)(v)$.

En aquest cas,

$$\begin{aligned} E_T(\Phi(C)(A')(v), \Phi(C)(A)(v)) &= \hat{T}\left(\Phi(C)(A')(v) \middle| \Phi(C)(A)(v)\right) = \\ &= \hat{T}\left(\operatorname*{SUP}_{\mu \in [0,1]^U} \underline{S}_{\mu C(\mu)}(A')(v) \middle| \operatorname*{SUP}_{\mu \in [0,1]^U} \underline{S}_{\mu C(\mu)}(A)(v)\right) = \\ &= \operatorname*{INF}_{\mu \in [0,1]^U} \hat{T}\left(\underline{S}_{\mu C(\mu)}(A')(v) \middle| \operatorname*{SUP}_{\mu \in [0,1]^U} \underline{S}_{\nu C(\nu)}(A)(v)\right) \geq \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\geq \operatorname*{INF}_{\mu\in[0,1]^U} \hat{T}\left(\underline{S}_{\mu C(\mu)}(A')(v)\middle|\underline{S}_{\mu C(\mu)}(A)(v)\right) \geq \\
&\geq \operatorname*{INF}_{\mu\in[0,1]^U} E_T\left(\underline{S}_{\mu C(\mu)}(A')(v), \underline{S}_{\mu C(\mu)}(A)(v)\right) \geq \\
&\geq \operatorname*{INF}_{\mu\in[0,1]^U} \operatorname*{INF}_{v\in V} E_T\left(\underline{S}_{\mu C(\mu)}(A')(v), \underline{S}_{\mu C(\mu)}(A)(v)\right) \geq \\
&\geq \operatorname*{INF}_{\mu\in[0,1]^U} \overline{E}_U^T(A', A) = \overline{E}_U^T(A', A).
\end{aligned}
$$

Si, en canvi, $\Phi(\mathcal{C})(A')(v) \leq \Phi(\mathcal{C})(A)(v)$, desigualtats del tot semblants a les anteriors porten a $E_T(\Phi(\mathcal{C})(A')(v), \Phi(\mathcal{C})(A)(v)) \geq \overline{E}_U^T(A', A)$.

Finalment, donada l'arbitrarietat de $v \in V$, es té:

$$\overline{E}_V^T(\Phi(\mathcal{C})(A'), \Phi(\mathcal{C})(A)) = \operatorname*{INF}_{v\in V} E_T(\Phi(\mathcal{C})(A')(v), \Phi(\mathcal{C})(A)(v)) \geq \overline{E}_U^T(A', A),$$

tal i com es volia. ■

Teorema 5.1.15. (Segon de caracterització de OE$_T$)
$\mathcal{C}$ $\in$OE$_T$ si, i només si, $\Phi(\mathcal{C}) = \mathcal{C}$.

Demostració. Suposem $\mathcal{C}$ $\in$OE$_T$. Llavors, segons el Teorema 4.3.16, $\mathcal{C}(A) \geq \underline{S}_{\mu C(\mu)}(A)$, per tot $A, \mu \in [0,1]^U$. Per tant, $\mathcal{C}(A) \geq \bigvee_{\mu\in[0,1]^U} E_{\mu C(\mu)}(A)$ i $\mathcal{C}(A) = \bigvee_{\mu\in[0,1]^U} E_{\mu C(\mu)}(A)$.

El recíproc s'obté immediatament de la Proposició 5.1.14.

Això no obstant, donem també una demostració directa.

Volem veure que, per tots $A, A' \in [0,1]^U$, es té $\overline{E}_V^T(\mathcal{C}(A), \mathcal{C}(A')) \geq \overline{E}_U^T(A, A')$.

Suposem, donat $v \in V$, que $\mathcal{C}(A')(v) \geq \mathcal{C}(A)(v)$. Llavors

$$
\begin{aligned}
E_T(\mathcal{C}(A)(v), \mathcal{C}(A')(v)) &= \hat{T}\left(\mathcal{C}(A')(v)|\mathcal{C}(A)(v)\right) = \\
&= \hat{T}\left(\mathcal{C}(A')(v)\middle| \operatorname*{SUP}_{\mu\in[0,1]^U} E_{\mu C(\mu)}(A)(v)\right) \geq \\
&\geq \hat{T}\left(\mathcal{C}(A')(v)\middle|E_{A'C(A')}(A)(v)\right) = \\
&= \hat{T}\left(E_{A'C(A')}(A')(v)\middle|E_{A'C(A')}(A)(v)\right) \geq \\
&\geq E_T\left(E_{A'C(A')}(A')(v)\middle|E_{A'C(A')}(A)(v)\right) \geq \\
&\geq \overline{E}_V^T\left(E_{A'C(A')}(A'), E_{AC(A')}(A)\right) \geq \overline{E}_U^T(A', A).
\end{aligned}
$$

Si, en canvi, $\mathcal{C}(A')(v) < \mathcal{C}(A)(v)$ tindrem

$$\begin{aligned}
E_T(\mathcal{C}(A)(v), \mathcal{C}(A')(v)) &= \hat{T}(\mathcal{C}(A)(v)|\mathcal{C}(A')(v)) = \\
&= \hat{T}\left(\mathcal{C}(A)(v)|\operatorname*{SUP}_{\mu} \underline{S}_{\mu\mathcal{C}(\mu)}(A')(v)\right) \geq \\
&\geq \hat{T}(\mathcal{C}(A)(v)|\underline{S}_{A\mathcal{C}(A)}(A')(v)) = \\
&= \hat{T}(\underline{S}_{A\mathcal{C}(A)}(A)(v)|\underline{S}_{A\mathcal{C}(A')}(A')(v)) \geq \\
&\geq E_T(\underline{S}_{A\mathcal{C}(A)}(A)(v)|\underline{S}_{A\mathcal{C}(A)}(A')(v)) \geq \\
&\geq \overline{E}^T_V(\underline{S}_{A\mathcal{C}(A)}(A), \underline{S}_{A\mathcal{C}(A)}(A')) \geq \overline{E}^T_U(A, A').
\end{aligned}$$

D'ambdues $E_T(\mathcal{C}(A)(v), \mathcal{C}(A')(v)) \geq \overline{E}^T_U(A, A')$, i, donada l'arbitrarietat de $v \in V$,

$$\overline{E}^T_V(\mathcal{C}(A), \mathcal{C}(A')) = \operatorname*{INF}_{v\in V} E_T(\mathcal{C}(A)(v), \mathcal{C}(A')(v)) \geq \overline{E}^T_U(A, A'). \quad \blacksquare$$

El segon teorema de caracterització permet d'establir l'operador extensional més específic entre tots els extensionals que afiten superiorment un operador donat.

Proposició 5.1.16. Per tot $\mathcal{C} \in OP$, $\Phi(\mathcal{C}) = \bigwedge\{S \in \mathrm{OE}_T / S \geq \mathcal{C}\}$.

Demostració. Segons el lema 5.1.12 i la proposició 5.1.14 $\Phi(\mathcal{C})$ és extensional i $\Phi(\mathcal{C}) \geq \mathcal{C}$. Per tant, $\Phi(\mathcal{C}') \geq \bigwedge\{S \in \mathrm{OE}_T / S \geq \mathcal{C}\}$.

D'altra banda, donat $\mathcal{C}' \in \mathrm{OE}_T$, tal que $\mathcal{C}' \geq \mathcal{C}$, segons el teorema 5.1.15 i el lema 5.1.13, $\mathcal{C}' = \Phi(\mathcal{C}') \geq \Phi(\mathcal{C})$. D'aquí $\Phi(\mathcal{C}) \leq \bigwedge\{S \in \mathrm{OE}_T / S \geq \mathcal{C}\}$ i, d'ambdues desigualtats, $\Phi(\mathcal{C}) = \bigwedge\{S \in \mathrm{OE}_T / S \geq \mathcal{C}\}$. $\blacksquare$

A posteriori, els teoremes de caracterització d'operadors extensionals proporcionen una nova demostració del fet que $(\mathrm{OE}_T, \leq)$ és un subreticle complet de $(OP, \leq)$. En efecte, tant Φ com Ψ són operadors monòtons de $(0P, \leq)$ en si mateix, i el conjunt dels seus punts fixos és OE_T. Per tant, també aquí es pot aplicar el Teorema del Punt Fix de Tarksi, que assegura que el conjunt dels punts fixos és un subreticle complet.

Els operadors d'inferència extensional, també es caracteritzen pel fet de ser punts fixos d'operadors que actuen sobre OP. Per ells es poden demostrar resultats anàlegs als obtinguts pels operadors extensionals.

Considerem l'aplicació

$$\begin{array}{rcl} M : \mathrm{OP} & \longrightarrow & \mathrm{OP} \\ \mathcal{D} & \longmapsto & M(\mathcal{D}) \end{array}$$

on $M = \bigwedge_{\mu \in [0,1]^U} \overline{C}_{\mu\mathcal{D}(\mu)}$.

O sigui:

$$\begin{array}{rcl} M(\mathcal{D}) : [0,1]^U & \longrightarrow & [0,1]^V \\ A & \longmapsto & M(\mathcal{D})(A) \end{array}$$

definit per $M(\mathcal{D})(A) = \bigwedge_{\mu \in [0,1]^U} \overline{C}_{\mu\mathcal{D}(\mu)}(A)$, per tot $A \in [0,1]^U$, o, el que és el mateix,

$$M(\mathcal{D})(A)(v) = \operatorname*{INF}_{\mu \in [0,1]^U} \overline{C}_{\mu\mathcal{D}(\mu)}(A)(v),$$

per tots $A \in [0,1]^U$, $v \in V$.

(Recordem que $\overline{C}_{\mu\mathcal{D}(\mu)}(A)(v) = \hat{T}\left(\overline{E}^T_U(A,\mu)|\mathcal{D}(\mu)(v)\right)$, per tots $A \in [0,1]^U$, $v \in V$).

Lema 5.1.17. Per tot $\mathcal{D} \in \mathrm{OP}$, $M(\mathcal{D}) \leq \mathcal{D}$.

Demostració. $M(\mathcal{D})(A) = \bigwedge_{\mu \in [0,1]^U} \overline{C}_{\mu\mathcal{D}(\mu)}(A)$, per tot $A \in [0,1]^U$.

En particular, per $\mu = A$, $\overline{C}_{A\mathcal{D}(A)}(A) = \mathcal{D}(A)$ (teorema 4.3.2) d'on $M(\mathcal{D})(A) = \bigwedge_{\mu \in [0,1]^U} \overline{C}_{\mu\mathcal{D}(\mu)}(A) \leq \mathcal{D}(A)$, per tot $A \in [0,1]^U$. ■

Lema 5.1.18. Si $\mathcal{D} \leq \mathcal{D}'$, llavors $M(\mathcal{D}) \leq M(\mathcal{D}')$, per $\mathcal{D}, \mathcal{D}' \in \mathrm{OP}$ qualssevol.

Demostració. Donats $A, \mu \in [0,1]^U$ qualssevol, es té:

$$\begin{aligned} \overline{C}_{\mu\mathcal{D}(\mu)}(A) &= \hat{T}\left(\operatorname*{INF}_{u \in U} \hat{T}(A(u)|\mu(u))|\mathcal{D}(\mu)\right) \leq \\ &\leq \hat{T}\left(\operatorname*{INF}_{u \in U} \hat{T}(A(u)|\mu(u))|\mathcal{D}'(\mu)\right) = \overline{C}_{\mu\mathcal{D}(\mu)}(A) \end{aligned}$$

d'on $\overline{C}_{\mu\mathcal{D}(\mu)} \leq \overline{C}_{\mu\mathcal{D}(\mu')}$ i, per tant,

$$M(\mathcal{D}) = \bigwedge_{\mu \in [0,1]^U} \overline{C}_{\mu\mathcal{D}(\mu)} \leq \bigwedge_{\mu \in [0,1]^U} \overline{C}_{\mu\mathcal{D}'(\mu)} = M(\mathcal{D}'). \quad ■$$

Proposició 5.1.19. $M(\mathcal{D})$ és operador d'inferència extensional, per tot $\mathcal{D} \in OP$.

NOTA: Aquesta proposició es pot obtenir com a corol·lari del lema 5.1.2. En donem, però, una demostració directa que no es basa en aquest lema. La finalitat d'això és poder obtenir una demostració diferent del propi lema 5.1.3. com a conseqüència del Teorema del Punt Fix de Tarski.

Demostració. És evident que $M(\mathcal{D})$ és operador d'inferència, perquè és ínfim d'operadors d'inferència. En quant a l'extensionalitat, s'ha de veure que

$$\overline{E}_V^T(M(\mathcal{D})(A), M(\mathcal{D})(A')) \geq \overline{E}_U^T(A, A'), \quad \text{per tot } A, A' \in [0,1]^U.$$

Fixat $v \in V$, suposem que $M(\mathcal{D})(A')(v) \geq M(\mathcal{D})(A)(v)$.

En aquest cas,

$$\begin{aligned}
E_T(M(\mathcal{D})(A')(v), M(\mathcal{D})(A)(v)) &= \hat{T}(M(\mathcal{D})(A')(v) | M(\mathcal{D})(A')(v)) = \\
&= \hat{T}\left(\operatorname*{INF}_{\mu \in [0,1]^U} \overline{\mathcal{C}}_{\mu\mathcal{D}(\mu)}(A')(v) \middle| \operatorname*{INF}_{\mu \in [0,1]^U} \overline{\mathcal{C}}_{\mu\mathcal{D}(\mu)}(A)(v)\right) = \\
&= \operatorname*{INF}_{\mu \in [0,1]^U} \hat{T}\left(\operatorname*{INF}_{\nu \in [0,1]^U} \overline{\mathcal{C}}_{\nu\mathcal{D}(\nu)}(A')(v) \middle| \overline{\mathcal{C}}_{\mu\mathcal{D}(\mu)}(A)(v)\right) = \\
&= \operatorname*{INF}_{\mu \in [0,1]^U} \hat{T}\left(\overline{\mathcal{C}}\mu\mathcal{D}(\mu)(A')(v) \middle| \overline{\mathcal{C}}_{\mu\mathcal{D}(\mu)}(A)(v)\right) \geq \\
&\geq \operatorname*{INF}_{\mu \in [0,1]^U} E_T\left(\overline{\mathcal{C}}\mu\mathcal{D}(\mu)(A')(v), \overline{\mathcal{C}}_{\mu\mathcal{D}(\mu)}(A)(v)\right) \geq \\
&\geq \operatorname*{INF}_{\mu \in [0,1]^U} \operatorname*{INF}_{v \in V} E_T\left(\overline{\mathcal{C}}\mu\mathcal{D}(\mu)(A')(v), \overline{\mathcal{C}}_{\mu\mathcal{D}(\mu)}(A)(v)\right) = \\
&= \operatorname*{INF}_{\mu \in [0,1]^U} \overline{E}_V^T\left(\overline{\mathcal{C}}\mu\mathcal{D}(\mu)(A'), \overline{\mathcal{C}}_{\mu\mathcal{D}(\mu)}(A)\right) \geq \\
&\geq \operatorname*{INF}_{\mu \in [0,1]^U} \overline{E}_U^T(A, A') = \overline{E}_U^T(A', A)
\end{aligned}$$

Si, en canvi, $M(\mathcal{D})(A')(v) \leq M(\mathcal{D})(v)$, desigualtats del tot semblants a les anteriors porten a $E_T(M(\mathcal{D})(A')(v), M(\mathcal{D})(A)(v)) \geq \overline{E}_U^T(A', A)$.

Finalment, donada l'arbitrarietat de $v \in V$, es té:

$$\begin{aligned}
\overline{E}_V^T(M(\mathcal{D})(A'), M(\mathcal{D})(A)) &= \operatorname*{INF}_{v \in V} E_T(M(\mathcal{D})(A')(v), M(\mathcal{D})(A)(v)) \geq \\
&\geq \overline{E}_U^T(A', A)
\end{aligned}$$

tal i com es volia. ■

Teorema 5.1.20. (Primer de caracterització de OIE$_T$)
$\mathcal{D}$ $\in$OIE$_T$ si, i només si, $M(\mathcal{D}) = \mathcal{D}$.

Demostració. Suposem $\mathcal{D}$ $\in$OIE$_T$. Llavors, segons el teorema 4.3.2, $\mathcal{D}(A) \leq \overline{\mathcal{C}}_{\mu\mathcal{D}(\mu)}(A)$, per tots $A, \mu \in [0,1]^U$. Per tant, $\mathcal{D}(A) \leq \bigwedge_{\mu\in[0,1]^U} \overline{\mathcal{C}}_{\mu\mathcal{D}(\mu)}(A) = M(\mathcal{D})(A)$ d'on tenint en compte el lema 5.1.17 es conclou $\mathcal{D}(A) = M(\mathcal{D})(A)$.

Pel recíproc, és suficient aplicar la proposició anterior. ■

L'operador N proporciona resultats anàlegs a l'operador M, però en termes de fites inferiors.

Considerem l'aplicació

$$\begin{aligned} N: \mathrm{OP} &\longrightarrow \mathrm{OP} \\ \mathcal{D} &\longmapsto N(\mathcal{D}) \end{aligned}$$

on $N = \bigvee_{\mu\in[0,1]^U} \underline{\mathcal{C}}_{\mu\mathcal{D}(\mu)}$.
O sigui:

$$\begin{aligned} N(\mathcal{D}): [0,1]^U &\longrightarrow [0,1]^V \\ A &\longmapsto N(\mathcal{D})(A) \end{aligned}$$

definit per $N(\mathcal{D})(A) = \bigvee_{\mu\in[0,1]^U} \underline{\mathcal{C}}_{\mu\mathcal{D}(\mu)}(A)$, per tot $A \in [0,1]^U$, o, el que és el mateix,

$$N(\mathcal{D})(A)(v) = \operatorname*{INF}_{\mu\in[0,1]^U} \underline{\mathcal{C}}_{\mu\mathcal{D}(\mu)}(A)(v),$$

per tots $A \in [0,1]^U$, $v \in V$.

(Recordem que $\underline{\mathcal{C}}_{\mu\mathcal{D}(\mu)}(A)(v) = T\left(\mathrm{INF}_{u\in U}\, \hat{T}(\mu(u)|A(u)), \mathcal{D}(\mu)(v)\right)$, per tots $A \in [0,1]^U$, $v \in V$).

Lema 5.1.21. Per tot $R \in$ OP, $N(\mathcal{D}) \geq \mathcal{D}$.

Demostració. $N(\mathcal{D})(A) = \bigvee_{\mu\in[0,1]^U} \underline{\mathcal{C}}_{\mu\mathcal{D}(\mu)}(A)$, per tot $A \in [0,1]^U$.

En particular, per $\mu = A$, $\underline{\mathcal{C}}_{A\mathcal{D}(A)}(A) = \mathcal{D}(A)$, d'on $\bigvee_{\mu\in[0,1]^U} \underline{\mathcal{C}}_{\mu\mathcal{C}(\mu)}(A) \geq \mathcal{D}(A)$. ■

Lema 5.1.22. Si $\mathcal{D} \leq \mathcal{D}'$, llavors $\Phi(\mathcal{D}) \leq \Phi(\mathcal{D}')$, per $\mathcal{D}, \mathcal{D}' \in$ OP qualssevol.

Demostració. Donats $A, \mu \in [0,1]^U$ es té:

$$\begin{aligned} \underline{\mathcal{C}}_{\mu\mathcal{D}(\mu)}(A) &= T\left(\operatorname*{INF}_{u\in U} \hat{T}(\mu(u)|A(u)), \mathcal{D}(\mu)\right) \leq \\ &\leq T\left(\operatorname*{INF}_{u\in U} \hat{T}(\mu(u)|A'(u)), \mathcal{D}(\mu)\right) = \\ &= \underline{\mathcal{C}}_{\mu\mathcal{D}(\mu)}(A), \end{aligned}$$

d'on $\underline{\mathcal{C}}_{\mu\mathcal{D}(\mu)} \leq \underline{\mathcal{C}}_{\mu\mathcal{D}'(\mu)}$ i, per tant,

$$N(\mathcal{D}) = \bigvee_{\mu\in[0,1]^U} \underline{\mathcal{C}}_{\mu\mathcal{D}(\mu)} \leq \bigvee_{\mu\in[0,1]^U} \underline{\mathcal{C}}_{\mu\mathcal{D}'(\mu)} = N(\mathcal{D}') \quad \blacksquare$$

Proposició 5.1.23. $N(\mathcal{D})$ és operador d'inferència extensional, per tot $R \in$ OP.

NOTA: Aquest resultat es pot obtenir per aplicació directa del lema 5.1.2. En donem, però una demostració que no es basa en aquest lema. La finalitat d'això és poder obtenir, a posteriori, una prova diferent dels lemes 5.1.2 i 5.1.3 com a corol·lari del Teorema del Punt Fix de Tarski.

Demostració. És evident que $N(\mathcal{D})$ és operador d'inferència, perquè és ínfim d'operador d'inferència.

En quant, a l'extensionalitat, s'ha de veure que

$$\overline{E}_V^T\,(N(\mathcal{D})(A), N(\mathcal{D})(A')) \geq \overline{E}_U^T(A, A') \quad \forall A, A' \in [0,1]^U,$$

Fixat $v \in V$, suposem que $N(\mathcal{D})(A')(v) \geq N(\mathcal{D})(A)(v)$.

En aquest cas,

$$\begin{aligned} E_T\,(N(\mathcal{D})(A')(v), N(\mathcal{D})(A)(v)) &= \hat{T}\left(N(\mathcal{D})(A')(v) \middle| N(\mathcal{D})(A)(v)\right) = \\ &= \hat{T}\left(\operatorname*{SUP}_{\mu\in[0,1]^U} \underline{\mathcal{C}}_{\mu\mathcal{D}(\mu)}(A')(v) \middle| \operatorname*{SUP}_{\mu\in[0,1]^U} \underline{\mathcal{C}}_{\mu\mathcal{D}(\mu)}(A)(v)\right) = \\ &= \operatorname*{INF}_{\mu\in[0,1]^U} \hat{T}\left(\underline{\mathcal{C}}_{\mu\mathcal{D}(\mu)}(A')(v) \middle| \operatorname*{SUP}_{\nu\in[0,1]^U} \underline{\mathcal{C}}_{\nu\mathcal{D}(\nu)}(A)(v)\right) \geq \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\geq \operatorname*{INF}_{\mu\in[0,1]^U} \hat{T}\left(\mathcal{C}_{\mu\mathcal{D}(\mu)}(A')(v)\middle|\mathcal{D}_{\mu\mathcal{D}(\mu)}(A)(v)\right) \geq \\
&\geq \operatorname*{INF}_{\mu\in[0,1]^U} E_T\left(\mathcal{C}_{\mu\mathcal{D}(\mu)}(A')(v), \mathcal{C}_{\mu\mathcal{D}(\mu)}(A)(v)\right) \geq \\
&\geq \operatorname*{INF}_{\mu\in[0,1]^U} \operatorname*{INF}_{v\in V} E_T\left(\mathcal{C}_{\mu\mathcal{D}(\mu)}(A')(v), \mathcal{C}_{\mu\mathcal{D}(\mu)}(A)(v)\right) = \\
&= \operatorname*{INF}_{\mu\in[0,1]^U} \overline{E}^T_U(\mathcal{C}_{\mu\mathcal{D}(\mu)}(A), \mathcal{C}_{\mu\mathcal{D}(\mu)}(A')) \geq \\
&\geq \operatorname*{INF}_{\mu\in[0,1]^U} \overline{E}^T_U(A, A') = \overline{E}^T_U(A, A').
\end{aligned}$$

Si, en canvi, $N(\mathcal{D})(A')(v) \leq N(\mathcal{D})(A)(v)$, desigualtats del tot semblants a les anteriors porten a $E_T\left(N(\mathcal{D})(A')(v), N(\mathcal{D})(A)(v)\right) \geq \overline{E}^T_U(A', A)$.

Finalment, donada l'arbitrarietat de $v \in V$, es té:

$$\begin{aligned}
\overline{E}^T_V\left(N(\mathcal{D})(A'), N(\mathcal{D})(A)\right) &= \operatorname*{INF}_{v\in V} E_T\left(N(\mathcal{D})(A')(v), N(\mathcal{D})(A)(v)\right) \geq \\
&\geq \overline{E}^T_U(A', A),
\end{aligned}$$

tal i com es volia. ■

Teorema 5.1.24. (Segon de caracterització de OIE$_T$)
$\mathcal{D}$ $\in$OIE$_T$ si, i només si, $N(\mathcal{D}) = D$.

Demostració. Suposem $\mathcal{D}$ $\in$OIE$_T$. Llavors, segons el Teorema 4.3.15, $\mathcal{D}(A) \geq \mathcal{C}_{\mu\mathcal{D}(\mu)}(A)$, per tots $A \in [0,1]^U$, $\mu \in [0,1]^U$. Per tant, $\mathcal{D}(A) \geq \bigvee_{\mu\in[0,1]^U} \mathcal{C}_{\mu\mathcal{D}(\mu)}(A)$ i com que $\mathcal{C}_{A\mathcal{D}(A)}(A) = \mathcal{D}(A)$, en particular, $\mathcal{D}(A) = \bigvee_{\mu\in[0,1]^U} \mathcal{C}_{\mu\mathcal{D}(\mu)}(A)$.

El recíproc s'obté immediatament de la proposició 5.1.23. ■

El Segon Teorema de caracterització permet d'establir l'operador més específic entre tots els d'inferència extensionals que afiten superiorment un operador donat.

Proposició 5.1.25. Per tot $\mathcal{D} \in$ OP, $N(\mathcal{D}) = \bigwedge\{\mathcal{C}$ $\in$OIE$_T/\mathcal{C} \geq \mathcal{D}\}$.

Demostració. Segons el lema 5.1.21 i la proposició 5.1.23 $N(\mathcal{D})$ és extensional i $N(\mathcal{D}) \geq \mathcal{D}$. Per tant, $N(\mathcal{D}) \geq \bigwedge\{\mathcal{C}$ $\in$OIE$_T/\mathcal{C} \geq \mathcal{D}\}$.

D'altra banda, donat $\mathcal{D}'$ $\in$OIE$_T$, tal que $\mathcal{D}' \geq \mathcal{D}$, segons el teorema 5.1.24 i el lema 5.1.22, $\mathcal{D}' = N(\mathcal{D}') \geq N(\mathcal{D})$, i d'aquí $N(\mathcal{D}) \leq \bigwedge\{\mathcal{C} \in \text{OIE}_T / \mathcal{C} \geq \mathcal{D}\}$. D'ambdues desigualtats, $N(\mathcal{D}) = \bigwedge\{\mathcal{C} \in \text{OIE}_T / \mathcal{C} \geq \mathcal{D}\}$. ∎

A posteriori, els teoremes de caracterització d'operadors extensionals proporcionen una nova demostració del fet que $(\text{OIE}_T, \leq)$ és un subreticle complet de $(\text{OP}, \leq)$. En efecte, tant M com N són operadors monòtons de $(\text{OP}, \leq)$ en sí mateix, i el conjunt dels seus punts fixos és OIE_T. Per tant, també aquí es pot aplicar el Teorema del Punt Fix de Tarksi, que assegura que el conjunt dels punts fixos de N o M (i.e. OIE_T) és un subreticle complet.

Definició 5.1.26. Una família $\{\mu_i\}_{i\in I} \subset [0,1]^U$ és una **cadena totalment ordenada** per $\leq$ (l'ordre puntual en $[0,1]^U$) si, i només si, $\mu_i \leq \mu_j$ o $\mu_j \leq \mu_i$ per tots $i, j \in I$.

Definició 5.1.27. Un operador $\mathcal{C} : [0,1]^U \to [0,1]^V$ és **extensional sobre cadenes totalment ordenades** si, i només si, la restricció de $\mathcal{C}$ a qualsevol cadena totalment ordenada és extensional.

Teorema 5.1.28. (Tercer de caracterització) $\mathcal{C} \in \text{OIE}_T$ si, i només si, $\mathcal{C}$ és operador d'inferència i és extensional sobre cadenes totalment ordenades.

Demostració. El directe és obvi.

Pel recíproc,

$$\begin{aligned} \overline{E}_V^T(\mathcal{C}(A), \mathcal{C}(A')) &\underset{(*)}{=} \overline{E}_V^T(\mathcal{C}(A) \wedge \mathcal{C}(A'), \mathcal{C}(A) \vee \mathcal{C}(A')) \geq \\ &\underset{(**)}{\geq} \overline{E}_V^T(\mathcal{C}(A \wedge A'), \mathcal{C}(A \vee A')) \geq \\ &\geq \overline{E}_U^T(A \wedge A', A \vee A') = E_U^T(A, A'), \end{aligned}$$

per tots $A, A' \in [0,1]^U$.

(*) segueix del fet que, si $\mathcal{C}$ és operador d'inferència,

$$\mathcal{C}(A \wedge A') \leq \mathcal{C}(A) \wedge \mathcal{C}(A') \leq \mathcal{C}(A) \vee \mathcal{C}(A') \leq \mathcal{C}(A \vee A'),$$

i (**) és conseqüència de la proposició 3.2.15. ∎

5.2 Teoremes de Representació

Una objecció que se sol formular a CRI, no importa quin tipus de CRI, és que a partir d'una sola regla "si A llavors B", es dedueix totes les possibles regles "si A' llavors B'", per qualsevol $A' \in [0,1]$. Com es pot mantenir que, a partir d'una sola observació (formulada en forma de regla), es conegui tota la relació de dependència entre els universos U i V, (formulada com una relació $R : U \times V \rightarrow [0,1]$)?

La resposta a aquesta objecció s'ha de buscar en el marc del raonament aproximat. Quant més diferents són les hipòtesis A i A', menys específica és la tesi associada $B' = \mathrm{CRI}(A')$ i, per tant, menys informació conté.

(Obviament, tant l'objecció com la resposta poden ser també formulades als operadors d'inferència introduïts al capítol anterior).

Aquesta resposta és, però, qualitativa. Donat un mecanisme d'inferència, –CRI, Operador Natural d'Inferència, o qualsevol altre–, el problema està en quantificar la pèrdua d'especifitat en les tesis derivades. Cal poder assegurar que, si en comptes d'una sola regla, es disposa d'un conjunt de regles "si A_i llavors B_i" $(i \in I)$, llavors les tesis associades a hipòtesis A_i, $(i \in I)$ obtingudes via el mecanisme d'inferència que estem fent servir a partir d'una regla particular "si A_{i_0} llavors B_{i_0}", siguin sempre menys específiques que les tesis B_i $(i \in I)$ que apareixin a les pròpies regles.

En la literatura, es fa referència als sistemes descrits per un conjunt de regles com a sistemes de regles paral·leles [Dubois & Prade, 97].

En aquest capítol provarem que, si les regles "si A_i llavors B_i", $(i \in I)$, han estat donades de forma extensional, (per exemple, si provenen de l'extensió f^* d'una funció $f : U \rightarrow V$), llavors l'operador natural simetritzat és òptim respecte a la condició precedent. Si, a més, ens restringim a la classe dels operadors d'inferència extensionals, llavors l'operador òptim és justament l'operador natural d'inferència.

Des d'un punt de vista purament estructural, les consideracions precedents donen lloc als teoremes d'interpolació i representació en OE_T i OIE_T.

Donat $\mathcal{S} : [0,1]^U \rightarrow [0,1]^V$ un operador extensional, considerem la família de regles "si A_i llavors B_i", $(i \in I)$, $A_i \in [0,1]^U$, $B_i \in [0,1]^V$ i $B_i = \mathcal{S}(A_i)$ per tot $i \in I$. Ens referirem a aquest fet dient que les regles han estat generades a través de $\mathcal{S}$.

Notarem per $\overline{\mathcal{S}}_i$ l'operador natural simetritzat associat a la regla i. O sigui:

$$\begin{array}{rcl} \overline{\mathcal{S}}_i : [0,1]^U & \longrightarrow & [0,1]^V \\ A & \longmapsto & \overline{\mathcal{S}}_i(A) \end{array}$$

on $\overline{\mathcal{S}}_i(A)(v) = \hat{T}(\overline{E}_U^T(A, A_i)|B_i(v))$, per tot $v \in V$.
Considerem també:

$$\begin{array}{rcl} \overline{\mathcal{S}} : [0,1]^U & \longrightarrow & [0,1]^V \\ A & \longmapsto & \overline{\mathcal{S}}(A) \end{array}$$

definit per $\overline{\mathcal{S}}(A)(v) = \mathrm{INF}_{i \in I} \overline{\mathcal{S}}_i(A)(v)$, per tot $v \in V$.
O sigui: $\overline{\mathcal{S}} = \bigwedge_{i \in I} \overline{\mathcal{S}}_i$.
En aquesta situació, es té:

Teorema 5.2.1. (Primer d'interpolació en OE_T)

(a) $\mathcal{S} \leq_V \overline{\mathcal{S}}$

(b) $\overline{\mathcal{S}}(A_i) = B_i$, per tot $i \in I$ (i.e. $\overline{\mathcal{S}}$ interpola totes les regles).

(c) $\overline{\mathcal{S}}$ és un operador T-extensional.

(d) $\overline{\mathcal{S}}$ és el menys específic respecte $\leq_V$ satisfent (b) i (c).

Demostració.

(a) Com que les regles han estat generades a través de $\mathcal{S}$, es té: $\mathcal{S}(A_i) = B_i$, per tot $i \in I$. Però per cada regla "si A_i llavors B_i" en particular, $\overline{\mathcal{S}}_i$ és el menys específic operador extensional satisfent aquesta condició, i per tant, $\mathcal{S} \leq_V \overline{\mathcal{S}}_i$, per tot $i \in I$, d'on $\mathcal{S} \leq_V \bigwedge_{i \in I} \overline{\mathcal{S}}_i = \overline{\mathcal{S}}$.

(b) Per cada $j \in I$, es té $\overline{\mathcal{S}}_j(A_j) = B_j$, i per tant

$$\overline{\mathcal{S}}(A_j) = \bigwedge_{i \in I} \overline{\mathcal{S}}_i(A_j) \leq_v B_j.$$

Però, segons (a), també es té $\overline{\mathcal{S}}(A_j)_v \geq \mathcal{S}(A_j) = B_j$, i d'ambdues resulta $\overline{\mathcal{S}}(A_j) = B_j$.

(c) Conseqüència del lema 5.1.1.

(d) Si $\mathcal{S}'$ satisfà (b) i (c), podem considerar que les regles han estat generades a través de $\mathcal{S}'$ i aplicar (a), d'on $\mathcal{S}' \leq_v \overline{\mathcal{S}}$.

Així, el teorema d'interpolació d'OE$_T$ estableix que qualsevol operador extensional es pot interpolar com a ínfim d'operadors extensionals, mantenint sempre els nivells d'especificitat en la interpolació per sota de l'operador donat. Aquesta propietat caracteritza els operadors extensionals.

Teorema 5.2.2. (Primer de representació en OE$_T$)
$\mathcal{S} : [0,1]^U \rightarrow [0,1]^V$ és operador T-extensional si, i només si, existeix una família de regles "si A_i llavors B_i", $i \in I$, satisfent $\mathcal{S} = \bigwedge_{i \in I} \overline{\mathcal{S}}_i$.

Demostració. Pel directe s'aplica el teorema 5.2.1 amb $I = [0,1]^U$, i regles "si A llavors $\mathcal{S}(A)$".

El recíproc s'obté del lema 5.1.1, tenint en compte que $\overline{\mathcal{S}}_i$ és extensional, per tot $i \in I$. ■

Així, el teorema 5.2.2 posa de manifest que els operadors T-extensionals constitueixen una classe d'operadors representable com a ínfim d'operadors naturals simetritzats, de forma totalment anàloga a com un operador de T-indistingibilitat E ho és a partir de T-indistingibilitats elementals E_h.

El primer teorema de representació justifica la següent definició:

Definició 5.2.3. L'operador natural simetritzat associat a un conjunt de regles "si A_i llavors B_i", $i \in I$, serà

$$\overline{\mathcal{S}} = \bigwedge_{i \in I} \overline{\mathcal{S}}_i$$

on $\overline{\mathcal{S}}_i$ és l'operador natural simetritzat associat a la regla $i \in I$.

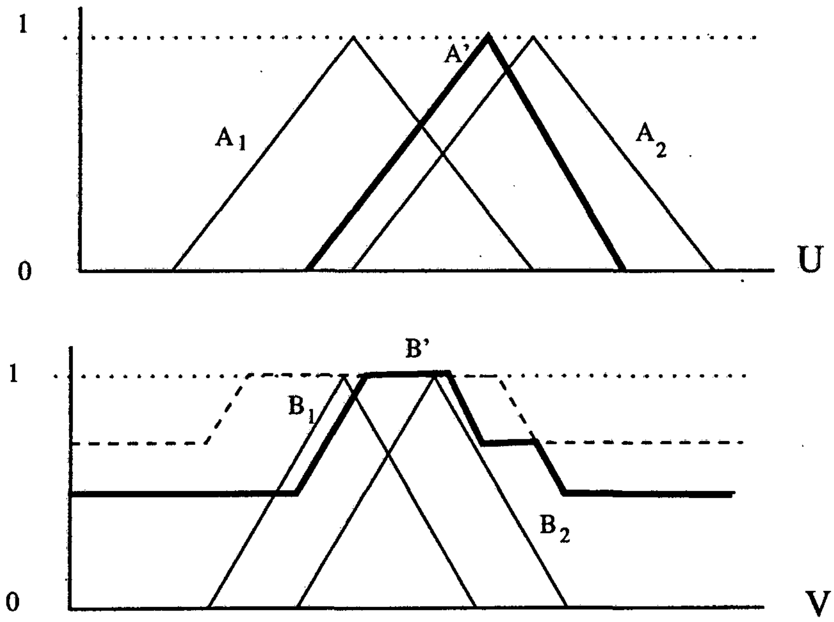

Figura 5.1. L'Operador Natural Simetritzat $\overline{S}$ associat a dues regles.

Per la simetria entre $\wedge$ i $\vee$ en el reticle $(\mathrm{OE}_T, \leq, \wedge, \vee)$, es pot obtenir resultats anàlegs als anteriors respecte al suprem d'operadors.

Notem per $\underline{S}_i$ el més específic dels operadors extensionals associat a la regla "si A_i llavors B_i", $i \in I$, i.e.

$$\begin{array}{rcl} \underline{S}_i : [0,1]^U & \longrightarrow & [0,1]^V \\ A & \longmapsto & \underline{S}_i(A) \end{array}$$

on $\underline{S}_i(A)(v) = T(\overline{E}_U^T(A, A_i), B_i(v))$, per tot $v \in V$.

Considerem també

$$\begin{array}{rcl} \underline{S} : [0,1]^U & \longrightarrow & [0,1]^V \\ A & \longmapsto & \underline{S}(A) \end{array}$$

definit per $\underline{S}(A)(v) = \mathrm{SUP}_{i \in I}\, \underline{S}_i(A)(v)$, per tot $v \in V$.

O sigui: $\underline{S} = \bigvee \underline{S}_i$.

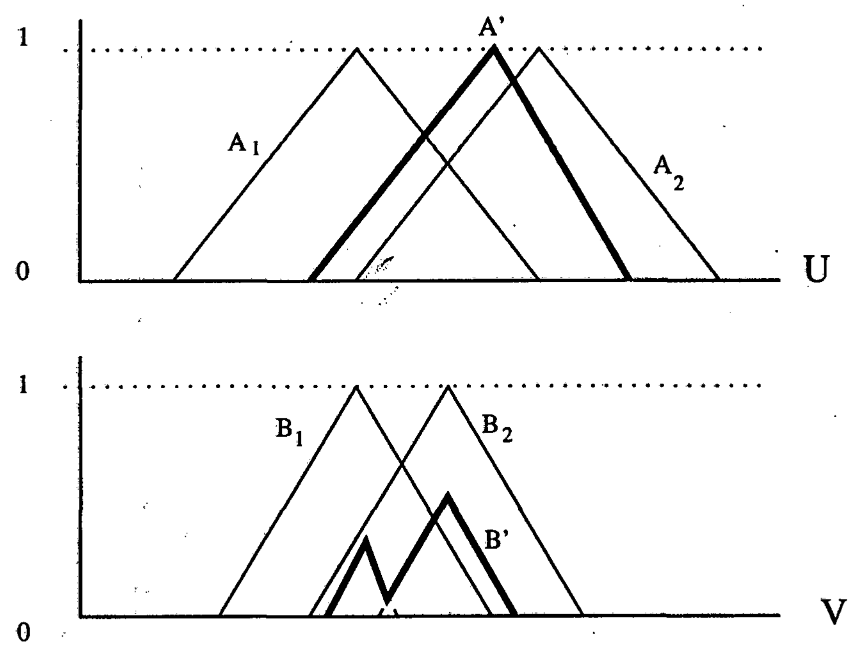

Figura 5.2. L'operador $\underline{S}$ associat a dues regles.

En aquesta situació, es té:

Teorema 5.2.4. (Segon d'Interpolació en OE_T)

(a) $\underline{\mathcal{S}} \leq_V \mathcal{S}$

(b) $\underline{\mathcal{S}}(A_i) = B_i$, per tot $i \in I$ (i.e. $\underline{\mathcal{S}}$ interpola totes les regles).

(c) $\underline{\mathcal{S}}$ és un operador T-extensional.

(d) $\underline{\mathcal{S}}$ és el més específic respecte $\leq_V$ satisfent (b) i (c).

Demostració.

(a) Com que $\mathcal{S}$ és extensional i $\mathcal{S}(A_i) = B_i$, (les regles han estat generades a través de $\mathcal{S}$), llavors $\underline{\mathcal{S}}_i \leq \mathcal{S}$, (Teorema 4.3.16).

Per tant, $\underline{\mathcal{S}}_i \leq_V \mathcal{S}$, per tot $i \in I$, d'on $\underline{\mathcal{S}} = \bigvee_{i \in I} \underline{\mathcal{S}}_i \leq_V \mathcal{S}$.

(b) Per cada $j \in I$, es té $\underline{S}_j(A_j) = B_j$, i per tant

$$\underline{S}(A_j) = \bigvee_{i \in I} \underline{S}_i(A_j) \geq_v B_j.$$

Però, segons (a), també es té $\underline{S}(A_j) \leq_v \mathcal{S}(A_j) = B_j$, i d'ambdues resulta $\underline{S}(A_j) = B_j$.

(c) Conseqüència del lema 5.1.2.

(d) Si $\mathcal{S}'$ satisfà (b) i (c), podem considerar que les regles han estat generades a través de $\mathcal{S}'$ i aplicar (a), d'on $\underline{S} \leq \mathcal{S}'$.

■

Teorema 5.2.5. (Segon de Representació en OE$_T$)
$\mathcal{S} : [0,1]^U \rightarrow [0,1]^V$ és operador T-extensional si, i només si, existeix una família de regles "si A_i llavors B_i", $i \in I$, satisfent $\mathcal{S} = \bigvee_{i \in I} \underline{S}_i$.

Demostració. El directe és conseqüència del teorema 5.2.4 amb $I = [0,1]^U$, i regles "si A llavors $\mathcal{S}(A)$".

El recíproc s'obté del lema 5.1.2, tenint en compte que $\underline{S}_i$ és operador extensional, per tot $i \in I$. ■

Es disposa de teoremes d'interpolació i representació del tot semblants als anteriors en la classe OIE$_T$ dels operadors d'inferència extensionals.

Sigui $\mathcal{C} : [0,1]^U \rightarrow [0,1]^V$ un operador d'inferència extensional (i.e. $\mathcal{C} \in$OIE$_T$), i considerem una família de regles associada "si A_i llavors B_i", $A_i \in [0,1]^U$, $B_i \in [0,1]^V$, i $B_i = \mathcal{C}(A_i)$, per tot $i \in I$.

Ens referirem a aquest fet dient que les regles han estat generades a través de $\mathcal{C}$.

Notarem per $\overline{\mathcal{C}}_i$ l'operador natural d'inferència associat a la regla $i \in I$. O sigui:

$$\begin{aligned} \overline{\mathcal{C}}_i : [0,1]^U &\longrightarrow [0,1]^V \\ A &\longmapsto \overline{\mathcal{C}}_i(A) \end{aligned}$$

on $\overline{\mathcal{C}}_i(A)(v) = \hat{T}\left(\mathrm{INF}_{u \in U} \hat{T}(A(u)|A_i)(u))|, B_i(v)\right)$, per tot $v \in V$.

Considerem també

$$\begin{aligned} \overline{\mathcal{C}} : [0,1]^U &\longrightarrow [0,1]^V \\ A &\longmapsto \overline{\mathcal{C}}(A) \end{aligned}$$

definit per $\overline{\mathcal{C}}(A)(v) = \mathrm{INF}_{i\in I}\overline{\mathcal{C}}_i(A)(v)$, per tot $v \in V$.
O sigui: $\overline{\mathcal{C}} = \bigwedge_{i\in I}\overline{\mathcal{C}}_i$.
En aquesta situació, es té:

Teorema 5.2.6. (Primer d'interpolació en OIE$_T$)

(a) $\mathcal{C} \leq_V \overline{\mathcal{C}}$

(b) $\overline{\mathcal{C}}(A_i) = B_i$, per tot $i \in I$ (i.e. $\overline{\mathcal{C}}$ interpola totes les regles).

(c) $\overline{\mathcal{C}}$ és operador d'inferència T-extensional (i.e.. $\overline{\mathcal{C}}$ $\in$OIE$_T$).

(d) $\overline{\mathcal{C}}$ és el menys específic respecte $\leq_V$ satisfent b) i c).

Demostració.

(a) Per tot $i \in I$, $\mathcal{C} \leq \overline{\mathcal{C}}_i$ (teorema 4.3.2) i, per tant,

$$\mathcal{C} \leq \mathop{\mathrm{INF}}_{i\in I}\overline{\mathcal{C}}_i = \overline{\mathcal{C}}.$$

(b) Per cada $j \in I$, es té $\overline{\mathcal{C}}_j(A_j) = B_j$, i per tant

$$\overline{\mathcal{C}}(A_j) = \mathop{\mathrm{INF}}_{i\in I}\overline{\mathcal{C}}_i(A_j) \leq B_j.$$

Però, segons (a), també es té que $\overline{\mathcal{C}}(A_j)_v \geq \mathcal{C}(A_j) = B_j$, i d'ambdues resulta $\overline{\mathcal{C}}(A_j) = B_j$, per tot $j \in I$.

(c) Conseqüència de la proposició 5.1.5.

(d) Si $\mathcal{C}'$ satisfà (b) i (c), podem considerar que les regles han estat generades a través de $\mathcal{C}'$ i aplicar (a), d'on $\mathcal{C}' \leq_v \overline{\mathcal{C}}$. ■

Teorema 5.2.7. (Primer de representació en OIE$_T$)
$\mathcal{C} : [0,1]^U \rightarrow [0,1]^V$ és operador d'inferència extensional (i.e. $\mathcal{C}$ $\in$OIE$_T$) si, i només si, existeix una família de regles "si A_i llavors B_i", $i \in I$, satisfent $\mathcal{C} = \bigwedge_{i\in I} \overline{\mathcal{C}}_i$.

Demostració. El directe és conseqüència del Teorema 5.2.4 amb $I = [0,1]^U$, i regles "si A llavors $\mathcal{C}(A)$".

El recíproc s'obté de la proposició 5.1.5 tenint en compte que $\overline{\mathcal{C}}_i$ és operador d'inferència extensional, per tot $i \in I$. ■

El primer teorema de representació justifica la següent definició:

Definició 5.2.8. L'Operador Natural d'Inferència associat a un conjunt de regles "si A_i llavors B_i", $i \in I$, serà:

$$\overline{\mathcal{C}} = \bigwedge_{i\in I} \overline{\mathcal{C}}_i$$

on, per tot $i \in I$, $\overline{\mathcal{C}}_i$ és l'Operador Natural d'Inferència associat a la regla.

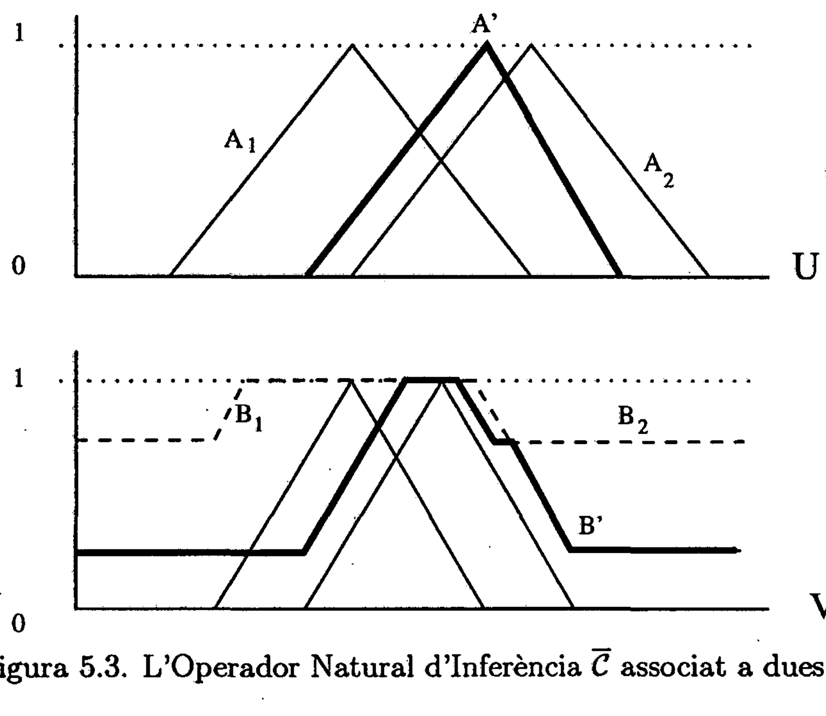

Figura 5.3. L'Operador Natural d'Inferència $\overline{\mathcal{C}}$ associat a dues regles.

Els corresponents teoremes d'interpolació i representació per suprems s'obtenen a partir dels operadors $\underline{\mathcal{C}}_i$ associats a cada regla "si A_i llavors B_i", $i \in I$ definits com:

$$\begin{array}{rcl} \underline{\mathcal{C}}_i : [0,1]^U & \longrightarrow & [0,1]^V \\ A & \longmapsto & \underline{\mathcal{C}}_i(A) \end{array}$$

on $\underline{\mathcal{C}}_i(A)(v) = T\left(\mathrm{INF}_{u \in U}\, \hat{T}(A(u)|A_i(u)), B(v)\right)$ per tot $v \in V$.

Considerem també

$$\begin{array}{rcl} \underline{\mathcal{C}} : [0,1]^U & \longrightarrow & [0,1]^V \\ A & \longmapsto & \underline{\mathcal{C}}(A) \end{array}$$

amb $\underline{\mathcal{C}}(A)(v) = \mathrm{SUP}_{i \in I}\, \underline{\mathcal{C}}_i(A)(v)$, per tot $v \in V$. O sigui: $\underline{\mathcal{C}} = \bigvee \underline{\mathcal{C}}_i$.

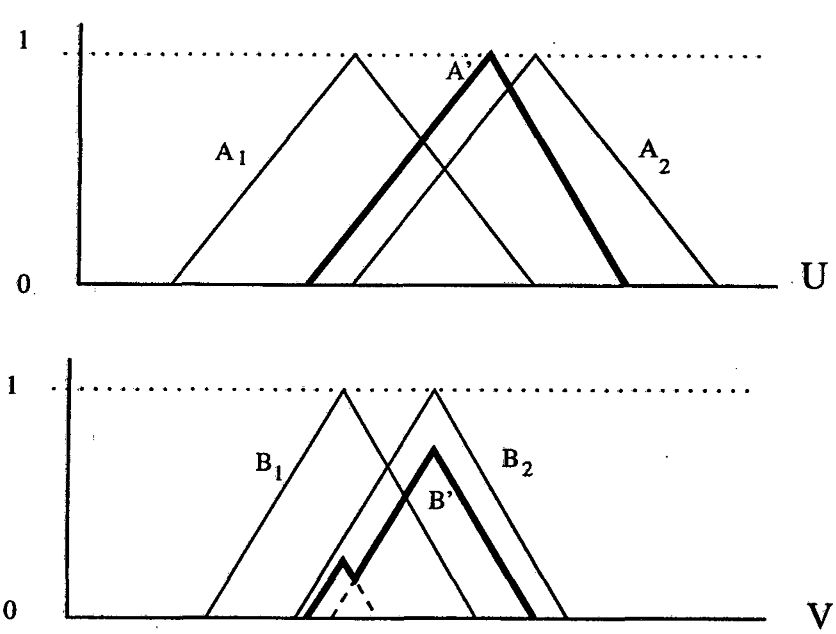

Figura 5.4. L'operador $\underline{\mathcal{C}}$ associat a dues regles.

En aquesta situació, es té:

Teorema 5.2.9. **(Segon d'interpolació en OIE$_T$)**

(a) $\underline{\mathcal{C}} \leq_V \mathcal{C}$

(b) $\underline{\mathcal{C}}(A_i) = B_i$, per tot $i \in I$ (i.e. $\underline{\mathcal{C}}$ interpola totes les regles).

(c) $\underline{\mathcal{C}}$ és operador d'inferència T-extensional.

(d) $\underline{\mathcal{C}}$ és el més específic respecte $\leq_V$ satisfent (b) i (c).

Demostració.

(a) Com que $\mathcal{C}$ és operador d'inferència extensional i $\mathcal{C}(A_i) = B_i$, (les regles han estat generades a través de $\mathcal{C}$), llavors $\underline{\mathcal{C}}_i \leq \mathcal{C}$, per tot $i \in I$, (Teorema 4.3.15). Per tant, $\underline{\mathcal{C}}_i = \bigvee_{i\in I} \underline{\mathcal{C}}_i \leq_V \mathcal{C}$.

(b) Per cada $j \in I$, es té $\underline{\mathcal{C}}_j(A_j) = B_j$, i per tant

$$\underline{\mathcal{C}}(A_j) = \bigvee_{i\in I} \underline{\mathcal{C}}_i(A_j) \geq_v B_j.$$

Però, segons (a), també es té $\underline{\mathcal{C}}(A_j) \leq_v \mathcal{C}(A_j) = B_j$, i d'ambdues, resulta $\underline{\mathcal{C}}(A_j) = B_j$, per tot $j \in I$.

(c) Conseqüència de la proposició 5.1.5.

(d) Si $\mathcal{C}'$ satisfà (b) i (c), podem considerar que les regles han estat generades per $\mathcal{C}'$ i aplicar (a), d'on $\underline{\mathcal{C}} \leq \mathcal{C}'$.

■

Teorema 5.2.10. **(Segon de representació en OIE$_T$)**
$\mathcal{C} : [0,1]^U \to [0,1]^V$ és operador T-extensional si, i només si, existeix una família de regles "si A_i llavors B_i", $i \in I$, satisfent $\mathcal{C} = \bigvee_{i\in I} \underline{\mathcal{C}}_i$.

Demostració. El directe és conseqüència del teorema 5.2.8 amb $I = [0,1]^U$, i regles "si A llavors $\mathcal{C}(A)$".

El recíproc s'obté de la proposició 5.1.5, tenint en compte que $\underline{\mathcal{C}}_i$ és operador d'inferència extensional, per tot $i \in I$. ■

Dels quatre teoremes d'interpolació precedents, tant sols el Primer d'interpolació en OIE_T (Teorema 5.2.6) admet per sí mateix una interpretació clara en termes de Raonament Aproximat Interpolatiu. D'una banda, l'operador $\overline{\mathcal{C}}$ introduït és operador d'inferència, i això garanteix que l'especificitat en la informació flueixi de forma coherent entre $[0,1]^U$ i $[0,1]^V$. D'altra banda, és el menys específic (i.e. el que assumeix menys informació addicional) entre tots els de la seva classe que interpolen les regles.

Ara bé: tots quatre operadors introduïts en els teoremes d'interpolació tenen una interpretació clara si els considerem per parelles. En efecte, com que $\underline{\mathcal{S}} \leq \overline{\mathcal{S}}$, la parella $[\underline{\mathcal{S}}, \overline{\mathcal{S}}]$ determina un interval respecte l'ordre $\leq$ en $\{\mathrm{OP}, \leq, \wedge, \vee\}$ de manera que qualsevol operador extensional $\mathcal{S}$ que hagi pogut generar les regles "si A_i llavors B_i" a interpolar, ha de satisfer necessàriament $\mathcal{S} \in [\underline{\mathcal{S}}, \overline{\mathcal{S}}]$. Això acota la família de possibles operadors extensionals que pot determinar un conjunt de regles donat.

L'altre parella la formen $[\underline{\mathcal{C}}, \overline{\mathcal{C}}]$, i satisfà la mateixa propietat que $[\underline{\mathcal{S}}, \overline{\mathcal{S}}]$ respecte a un $\mathcal{C}$ desconegut que ha generat les regles, sota la hipòtesi que $\mathcal{C}$ és operador d'inferència extensional.

5.3 Especifitat de les regles i interpolació aproximada

L'ordre puntual entre difusos (definició 2.2.1) indueix una ordenació en les regles "si A llavors B", $A \in [0,1]^U$, $B \in [0,1]^V$.

Si representem la regla "si A llavors B" per $(A,B) \in [0,1]^U \times [0,1]^V$, aquesta ordenació ve definida per:

$$(A,B) \leq (A',B') \text{ si, i només si, } A' \leq_U A \text{ i } B \leq_V B'.$$

La relació $\leq$ és un ordre parcial, i $(\mathcal{R}_U^V, \leq, \wedge, \vee)$ és un reticle amb:

$$\mathcal{R}_U^V = \{(A,B) \ / \ A \in [0,1]^U, B \in [0,1]^V\}$$

$(A,B) \wedge (A',B') = (A \vee A', B \wedge B')$,
$(A,B) \vee (A',B') = (A \wedge A', B \vee B')$,
per tots $(A,B), (A',B') \in \mathcal{R}_U^V$.

La interpretació de la relació $\leq$ introduïda en $\mathcal{R}_U^V$ és ben clara: que $(A,B) \leq (A',B')$ significa que la regla "si A llavors B" és més específica (i.e. conté més informació) que la regla "si A' llavors B'".

Definició 5.3.1. Si $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2 : [0,1]^U \to [0,1]^V$ són operadors d'inferència, direm que $\mathcal{C}_1$ és més específic que $\mathcal{C}_2$ si $\mathcal{C}_1(A) \leq_V \mathcal{C}_2(A)$, per tot $A \in [0,1]^U$.

Proposició 5.3.2. Si $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2 : [0,1]^U \to [0,1]^V$ són operadors d'inferència, són equivalents:

(a) $\mathcal{C}_1$ és més específic que $\mathcal{C}_2$

(b) $(A, \mathcal{C}_1(A)) \leq (A, \mathcal{C}_2(A))$, per tot $A \in [0,1]^U$.

Demostració. Trivial. ■

Així, $\mathcal{C}_1$ és més específic que $\mathcal{C}_2$ si, i només si, $\mathcal{C}_1$ genera regles més específiques que $\mathcal{C}_2$.

En un procés de descripció d'un sistema exterior a través de regles difuses, les primeres observacions efectuades generaran regles molt poc específiques. El mecanisme d'interpolació de les regles hauria de garantir que les noves regles obtingudes a mesura que es disposa de més informació puguin ser afegides a la base de regles i interpolades sense entrar en contradicció amb la interpolació de les anteriors, sinó només augmentant-ne l'especifitat. Aquesta propietat està garantida si les regles s'estenen a través de l'Operador Natural d'inferència associat.

Sigui $\mathcal{C} : [0,1]^U \to [0,1]^V$, i considerem una família de regles "si A_i llavors B_i", $i \in I$, tals que $(A_i, \mathcal{C}(A_i)) \leq (A_i, B_i)$, per tot $i \in I$. Com que les regles donades són menys específiques que les obtingudes a través de $\mathcal{C}_1$, es pot pensar que descriuen aproximadament l'operador $\mathcal{C}$.

Considerem l'Operador Natural d'Inferència associat a les regles "si A_i llavors B_i", $i \in I$, $\mathcal{C}^* = \bigwedge_{i \in I} \mathcal{C}_i^*$, amb

$$\mathcal{C}_i^*(A)(v) = \hat{T}\left(\operatorname*{INF}_{u \in U} \hat{T}(A(u)|A_i(u))|B(v)\right),$$

per tot $v \in V$, $A \in [0,1]^U$.

Considerem també l'Operador Natural d'Inferència associat al conjunt de regles "si A_i llavors $\mathcal{C}(A_i)$", $i \in I$, $\overline{\mathcal{C}} = \bigwedge_{i \in I} \overline{\mathcal{C}}_i$, amb

$$\overline{\mathcal{C}}_i(A)(v) = \hat{T}\left(\operatorname*{INF}_{u \in U} \hat{T}\left(A(u)|A_i(u)\right)\left|\mathcal{C}(A_i)(v)\right.\right),$$

per tots $v \in V$, $A \in [0,1]^U$.

Teorema 5.3.3. (D'interpolació aproximada)
En la situació precedent, $\mathcal{C} \leq \overline{\mathcal{C}} \leq \mathcal{C}^*$.

Demostració. $\mathcal{C} \leq \overline{\mathcal{C}}$ és conseqüència del teorema 4.3.2.
A més, com que $\overline{\mathcal{C}}_i \leq \mathcal{C}_i^*$, també $\overline{\mathcal{C}} = \bigwedge_{i \in I} \overline{\mathcal{C}}_i \leq \bigwedge_{i \in I} \mathcal{C}_i^* = \mathcal{C}^*$. ∎