UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA

Programa de doctorat de Matemàtica Aplicada

CONTRIBUCIÓ A L'ESTUDI DELS MORFISMES ENTRE OPERADORS D'INDISTINGIBILITAT. APLICACIÓ AL RAONAMENT APROXIMAT.

Autor: Dionís Boixader Ibáñez
Director: Joan Jacas Moral

Capítol 3.
Morfismes i estructura dual.

Sumari:

S'introdueix un **principi de dualitat** entre els elements d'un conjunt X i els subconjunts difusos de X ($[0,1]^X$), que permet interpretar elements com a difusos i viceversa. Aquí, el terme dualitat no té cap relació amb les Ternes de De Morgan (Capítol 1), sinó que fa referència al sentit habitual que rep en l'estudi d'altres estructures matemàtiques, això és: dualitat punt-aplicació. Es defineix morfisme i morfisme feble (extensional), i s'estructura el conjunt H_E dels generadors amb la T-indistingibilitat natural en $[0,1]^X$ com a operador de T-indistingibilitat dual de (X, E). Finalment, s'estudia el comportament dels morfismes respecte a la dualitat.

Aportacions d'aquesta memòria:

Tots els resultats i gran part dels conceptes exposats en aquest capítol són nous dins el marc de les T-indistingibilitats. En destaquen:

- Principi de dualitat (bidual).
- Operador de T-indistingibilitat dual.
- Morfisme dual.

- Generadors i morfisme dual: bases i dimensió (Proposició 3.3.4 a Corol·lari 3.3.13).
- L'operador de T-indistingibilitat dual i ϕ_E (Proposició 3.4.1.).
- Morfisme dual com a morfisme invers (Teorema 3.4.10).
- Punts fixos (Teoremes 3.4.13 i 3.4.14).

3.1 Principi de dualitat

Un punt especialment molest en la teoria dels conjunts difusos es troba en el fet que no es pugui parlar pròpiament de conjunts difusos, sinó només de subconjunts difusos. Aquests subconjunts difusos ho són respecte d'un conjunt més gran (univers de discurs) que sempre és un conjunt clàssic, format per elements en sentit clàssic.

En aquesta secció s'introdueix un principi de dualitat entre elements en sentit clàssic i subconjunts difusos, que permet interpretar elements com a difusos i viceversa, trencant d'aquesta manera la assimetria del plantejament inicial.

En un primer nivell, la dualitat s'introdueix com un concepte del tot independent de possibles operadors de T-indistingibilitat definits sobre X. Més endavant es veurà que aquests operadors són sempre del tot compatibles amb l'estructura dual.

ADVERTÈNCIA. En tot aquest capítol, el terme **dualitat** no té **cap relació** amb la dualitat a través de funcions de negació (Ternes de De Morgan) exposada al Capítol 1.

Definició 3.1.1. Una família H de subconjunts difusos de X ($H \subseteq [0,1]^X$) és **separadora** per X si per qualssevol $x, y \in X$ ($x \neq y$), existeix $h \in H$ tal que $h(x) \neq h(y)$.

Per qualsevol $H \subseteq [0,1]^X$, es considera l'aplicació $B_H : X \rightarrow [0,1]^H$ tal que, per cada $x \in X$, $B_H(x)$ és el subconjunt difús definit sobre H per:

$$\begin{array}{rcl} B_H(x) : H & \longrightarrow & [0,1] \\ h & \longmapsto & B_H(x)(h) = h(x) \end{array}$$

NOTACIÓ. Si no hi ha ambigüitat respecte al conjunt H considerat, notarem $B_H(x) = x^{**}$. En conseqüència, $B_H(x)(h) = x^{**}(h) = h(x)$.

Proposició 3.1.2. *B_H és injectiva si, i només si, H és una família separadora per X.*

Demostració. Si B_H és injectiva, per qualssevol $x \neq y$, es té que $x^{**} \neq y^{**}$. Per tant, existirà $h \in H$ tal que $x^{**}(h) \neq y^{**}(h)$, i.e. $h(x) \neq h(y)$, d'on resulta que H és separadora.

D'altra banda, si H és família separadora per X i $x^{**} = y^{**}$ per alguns x, y de X, llavors $x^{**}(h) = y^{**}(h)$ per tot $h \in H$, i.e. $h(x) = h(y)$ per tot $h \in H$ d'on $x = y$. ■

La proposició anterior estableix que, donada una família separadora H de subconjunts difusos de X, l'aplicació B_H indueix una identificació entre els elements $x \in X$ i els elements $x^{**} \in [0,1]^H$, i és en base a aquesta identificació que s'estableix el següent principi:

Principi de dualitat

Tot element $x \in X$ es pot interpretar com un difús sobre H, identificant-lo amb x^{**} (via B_H).

Així, els elements "crisp" de l'univers de discurs X porten implícita la condició de subconjunts difusos si es considera una família separadora de subconjunts difusos H sobre X.

Si $X = \{x_1, ..., x_n\}$ és finit, és habitual representar un difús h sobre X per un vector $(h(x_1), ..., h(x_n))$, i una família de difusos $H = \{h_1, ..., h_n\}$ per una matriu $M = (m_{ij})$, $i = 1 \div m$, $j = 1 \div n$, on els vectors $(h_i(x_1), ..., h_i(x_n))$, $i = 1 \div m$, es disposen com a files (i.e. $m_{ij} = h_i(x_j)$). Seguint aquest conveni, la matriu transposada M^T és la representació dels elements de X com a subconjunts difusos (files), i els de H com a punts (columnes).

Fins aquí s'ha vist que X es pot identificar amb un subconjunt de $[0,1]^H$ via B_H, de manera que $[0,1]^H$ és una extensió conjuntista (en sentit clàssic) de X. Ara bé: en general B_H no és exhaustiva, i es planteja la necessitat de buscar una interpretació pels elements de $\chi = [0,1]^H - B_H(X)$. Una manera natural de fer-ho és, donat un $\alpha \in \chi$, afegir un nou element a al conjunt X, $X' = X \cup \{a\}$, i estendre el domini de cada $h \in H$ a $X' = X \cup \{a\}$ definint $h(a) = \alpha(h)$.

Formalment, fixat $\wedge \subseteq \chi$, es considera un conjunt A (disjunt amb X) i una bijecció:

$$\begin{array}{rcl} b : \wedge & \longrightarrow & A \\ \alpha & \longmapsto & b(\alpha) = a \end{array}$$

Si $X' = X \cup A$, es defineix

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{ext}_\wedge : H & \longrightarrow & [0,1]^{X'} \\ h & \longmapsto & \mathrm{ext}_\wedge(h) = h' \end{array}$$

on $h'(x) = x$, per tot $x \in X$, i $h'(a) = \alpha(h)$ (on $a = b(\alpha)$), per tot $a \in A$. Notant $H' = \mathrm{ext}_\wedge(H)$, es té:

Proposició 3.1.3. $B_{H'} \longrightarrow [0,1]^{H'}$ és injectiva i

$$B_{H'}(u) = \begin{cases} u^{**}, & \text{si } u \in X \\ \alpha, & \text{si } u = b(\alpha). \end{cases}$$

Demostració. Elemental, per la pròpia construcció. ■

En particular, queda justificada la notació $\alpha = a^{**}$ si $a = b(\alpha)$.

Fins aquí no s'ha fet cap referència a possibles relacions difuses o d'altres possibles estructures definides en X, i només s'ha pres en consideració una família separadora $H \subseteq [0,1]^X$ qualsevol.

A la pròxima secció es veurà que l'estructura de T-indistingibilitat és compatible amb la dualitat entre elements i subconjunts difusos tal i com s'ha exposat fins aquí. L'objectiu final és dotar $[0,1]^H$ d'una estructura com a operador de T-indistingibilitat de manera que pugui ser considerat una extensió natural de (X, E) com a T-indistingibilitat via B_H.

3.2 Operador de T-indistingibilitat dual

En tot el que segueix se suposa que T és una t-norma contínua per l'esquerra respecte les dues variables per separat.

Definició 3.2.1. Siguin (X, E) i (Y, F) dos operadors de T-indistingibilitat. Una aplicació $\varphi : X \to Y$ és un **morfisme** si $F(\varphi(x_1), \varphi(x_2)) = E(x_1, x_2)$, per qualssevol $x_1, x_2 \in X$.

Clarament, la composició de morfismes és un morfisme.

Definició 3.2.2. Direm que (Y, F) és una **extensió** de (X, E) si existeix un morfisme injectiu $\varphi : X \to Y$.

En la definició precedent, l'extensió s'obté identificant x amb $\varphi(x)$, per a tot $x \in X$. Convé adonar-se que si E és T-indistingibilitat separadora en X, llavors qualsevol morfisme $\varphi : X \to Y$ és injectiu.

Definició 3.2.3. Un isomorfisme entre (X, E) i (Y, F) és un morfisme $\varphi : X \rightarrow Y$ bijectiu.

Si dos operadors de T-indistingibilitat són isomorfs, ho notarem per $(X, E) \cong (Y, E)$. Dos operadors de T-indistingibilitat isomorfs són, essencialment, el mateix operador presentat sota notacions diferents. A més, φ és isomorfisme si, i només si, φ^{-1} és isomorfisme.

Tota relació de T-indistingibilitat $E : X \times X \rightarrow [0,1]$ és, en definitiva, una operació binària en X valorada en un conjunt exterior ($[0,1]$). Per tal de definir una estructura dual, sembla raonable establir condicions que determinin un subconjunt adequat d'aplicacions de X en el conjunt de valoració $[0,1]$, dotat amb l'estructura d'operador de T-indistingibilitat natural E_T. Atès que, en general, no existeixen isomorfismes entre (X, E) i $([0,1], E_T)$ (només en el cas unidimensional existeixen morfismes injectius), s'ha de buscar algun tipus de condició més feble.

Definició 3.2.4. Si (X, E) i (Y, F) són operadors de T-indistingibilitat direm que una aplicació $\varphi : X \rightarrow Y$ és **extensional (o morfisme feble)** si satisfà:

$$F(\varphi(x_1), \varphi(x_2)) \geq E(x_1, x_2), \text{ per tots } x_1, x_2 \in X$$

Proposició 3.2.5. Considerem (X, E), $([0,1], E_T)$ i H_E (el conjunt dels generadors de E).

Llavors:

$$H_E = \{h : X \rightarrow [0,1] \ / h \text{ és extensional}\}.$$

Demostració. Per la pròpia definició de H_E. ∎

El Teorema de Representació estableix que qualsevol T-indistingibilitat E és generada per una família H de subconjunts difusos de X. El Principi de Dualitat suggereix que, de la mateixa manera, un subconjunt de punts $X_0 \subseteq X$ hauria de generar una T-indistingibilitat sobre $[0,1]^X$, o, per restricció, sobre qualsevol subconjunt $H \subseteq [0,1]^X$.

Proposició 3.2.6. Donat $X_0 \subseteq X$, i $H \subseteq [0,1]^X$, la relació difusa $E(h_1, h_2) = \mathrm{INF}_{x \in X_0} E_T(h_1(x), h_2(x))$, per tot $h_1, h_2 \in H$, és una T-indistingibilitat en H.

Demostració. Si notem $X_0^{**} = B_H(X_0)$, es té:

$$E(h_1, h_2) = \underset{x \in X_0}{\mathrm{INF}}\, E_T(h_1(x), h_2(x)) = \underset{x^* \in X_0^{**}}{\mathrm{INF}}\, E_T(x^{**}(h_1), x^{**}(h_2))$$

i, com que x^{**} són difusos sobre H ($x^{**} : H \to [0,1]$), llavors el Teorema de Representació assegura que E és T-indistingibilitat. ■

La proposició anterior jutifica la següent definició, prenent $X_0 = X$.

Definició 3.2.7. Donat $H \subseteq [0,1]^X$, la **T-indistingibilitat natural** en H és:

$$\overline{E}_X(h_1, h_2) = \underset{x \in X}{\mathrm{INF}}\, E_T(h_1(x), h_2(x))$$

Notació. Si no hi ha ambigüitat respecte al conjunt X, notarem $\overline{E}_X = \overline{E}$.

S'ha de notar que la T-indistingibilitat natural és, per la pròpia definició, separadora en $[0,1]^X$, i per restricció ho es també en qualsevol subconjunt $H \subseteq [0,1]^X$.

Definició 3.2.8. $(H_E, \overline{E})$ serà **l'operador de T-indistingibilitat dual** de (X, E), i el notarem per $(H_E, \overline{E}) = (X, E)^*$.

Per aplicació reiterada de la definició anterior, l'operador **bidual** de (X, E) serà $(X, E)^{**} = (H_E, \overline{E}_X)^* = (H_{\overline{E}_X}, \overline{E}_{H_E})$, on $\overline{E}_{H_E}$ representa la T-indistingibilitat natural en $[0,1]^{H_E}$, i $H_{\overline{E}_X}$ és el conjunt dels generadors de $\overline{E}_X$, i.e.

$$H_{\overline{E}_X} = \{\alpha \in [0,1]^{H_E} \;/\; E_T(\alpha(h_1), \alpha(h_2)) \geq \overline{E}(h_1, h_2), \text{ per tot } h_1, h_2 \in H_E\}.$$

Les següents proposicions mostren que l'estructura dual és compatible amb el principi de dualitat exposat a la secció anterior, relacionant el bidual $(X, E)^{**}$ amb la interpretació dels elements $x \in X$ com a difusos de H_E via B_{H_E}.

Proposició 3.2.9. B_{H_E} és injectiva si, i només si, E és T-indistingibilitat separadora en X.

Demostració. De la proposició 3.1.2. segueix que B_{H_E} és injectiva si, i només si, H_E és família separadora en X, i això és equivalent al fet que E sigui separadora com a T-indistingibilitat. En efecte, com que $E(x, y) =$

$\mathrm{INF}_{h\in H_E} E_T(h(x), h(y))$, llavors si $E(x,y) = 1$ haurà de ser $h(x) = h(y)$ per tot $h \in H_E$, i recíprocament. ■

En tot el que segueix se suposarà que E és T-indistingibilitat separadora, i seguirem identificant X amb $\mathrm{Im}(B_{H_E}) \subseteq [0,1]^{H_E}$.

Teorema 3.2.10.

(a) $B_{H_E} : X \longrightarrow H_{\overline{E}_X}$
$\quad x \longmapsto B_{H_E}(x) = x^{**}$
és morfisme injectiu de (X, E) en $(H_{\overline{E}_X}, \overline{E}_{H_E})$ (on $\overline{E}_{H_E}$ és la T-indistingibilitat natural en $[0,1]^{H_E}$).

(b) $(X, E) \cong \phi_E(B_{H_E}(X), \overline{E}_{H_E})$.

Demostració.

(a) Per començar, s'ha de veure que $B_{H_E}(X) \subseteq H_{\overline{E}_X}$.
En efecte, per construcció $x^{**} \in [0,1]^{H_E}$, i a més,

$$E_T(x^{**}(h_1), x^{**}(h_2)) = E_T(h_1(x), h_2(x)) \geq \overline{E}(h_1, h_2),$$

per qualsevol $x \in X$, $h_1, h_2 \in H_E$, d'on $x^{**} \in H_{\overline{E}_X}$.
D'altra banda,

$$\begin{aligned} \overline{E}_{H_E}(x_1^{**}, x_2^{**}) &= \mathop{\mathrm{INF}}_{h\in H_E} E_T(x_1^{**}(h), x_2^{**}(h)) = \\ &= \mathop{\mathrm{INF}}_{h\in H_E} E_T(h(x_1), h_(x_2)) = E(x_1, x_2), \end{aligned}$$

per qualssevol $x_1, x_2 \in X$.

(b) Conseqüència immediata de (a). ■

Teorema 3.2.11. (De Representació Dual). Sigui $H \subseteq [0,1]^X$, i F una relació difusa en H. Llavors (H, F) és operador de T-indistinguibilitat si, i només si, existeix un conjunt Y tal que $(H, F) \cong (H', \overline{E}_y)$, on $H' \subseteq [0,1]^Y$ i $\overline{E}_Y$ és la T-indistingibilitat natural en H'.

Demostració. Si H_F denota el conjunt dels generadors de F, (i.e. $H_F = \{\alpha : H \to [0,1] \;/\; E_T(\alpha(h_1), \alpha(h_2)) \geq F(h_1, h_2)$ per tots $h_1, h_2 \in H\}$), i $\overline{F}$ és la T-indistingibilitat natural en H_F (i.e. $\overline{F}(\alpha, \beta) = \mathrm{INF}_{h\in H}\, E_T(\alpha(h), \beta(h)))$

$H_{\overline{F}}$ és el conjunt dels generadors de $\overline{F}$

(i.e. $H_{\overline{F}} = \{A : H_F \to [0,1] \;/\; E_T(A(\alpha), A(\beta)) \geq \overline{F}(\alpha, \beta)$, per tots $\alpha, \beta \in H_E\}$) i $\overline{F_{H_F}}$ la T-indistingibilitat natural en $H_{\overline{F}}$

(i.e. $\overline{F_{H_F}}(A, B) = \mathrm{INF}_{\alpha\in H_E}\, E_T(A(\alpha), B(\alpha)))$, llavors el teorema 3.2.10 assegura que $(H, F) \cong (B_{H_F}(H), \overline{F}_{H_F})$.

Així, n'hi ha prou amb prendre $Y = H_F$, $H' = \mathrm{Im}(B_{H_F})$, i l'isomorfisme el proporciona B_{H_F}. El recíproc és trivial. ■

El teorema precedent estableix que qualsevol operador de T-indistingibilitat definit sobre una família de subconjunts difusos és isomorf a algun operador del tipus introduït en la proposició 3.2.6.

Definició 3.2.12. Sigui $H \subseteq [0,1]^X$ una família separadora. Direm que una T-indistingibilitat F en H és **pròpia** si $B_H(X) \subseteq H_F$.

A través de la identificació entre X i $B_H(X)$ que venim fent, la condició de ser propi es pot entendre com un elemental principi de coherència: que tots els punts de X es trobin entre els generadors de F.

Lema 3.2.13. La T-indistingibilitat natural $\overline{E}$ en $H \subseteq [0,1]^X$ és pròpia.

Demostració.

$$\overline{E}(h_1, h_2) = \mathrm{INF}_{x\in X}\, E_T(h_1(x), h_2(x)) = \mathrm{INF}_{x^{**}\in B_H(X)}\, E_T(x^{**}(h_1), x^{**}(h_2))$$

i, per tant, $B_H(X) \subseteq H_{\overline{E}}$. ■

Teorema 3.2.14. (De Caracterització de les T-indistingibilitats pròpies). Si F és una T-indistingibilitat en $H \subseteq [0,1]^X$, són equivalents:

(a) F és pròpia

(b) $F \leq \overline{E}$ (on $\overline{E}$ és la T-indistingibilitat natural en H).

(c) $\mathrm{SUP}_{g\in H}\, T(F(h, g), g(x)) = h(x)$, per tots $x \in X$, $h \in H$.

(d) $\mathrm{INF}_{g\in H}\hat{T}(g(x)|F(h,g)) = h(x)$, per tots $x \in X$, $h \in H$.

Demostració.
(a) $\Leftrightarrow$ (b) Segueix del fet que F és pròpia si, i només si, $B_H(X) \subseteq H_F$.

(a) $\Leftrightarrow$ (c) Aplicant el primer teorema de caracterització dels generadors (Teorema 2.2.3) es té que $\alpha \in H_F$ si, i només si, $\phi_F(\alpha) = \alpha$.

Però $\phi_F(\alpha)(h) = \mathrm{SUP}_{g\in H} T(\alpha(g), F(h,g)) = \alpha(h)$, i prenent $\alpha = x^*$, resulta $\phi_F(x^*)(h) = \mathrm{SUP}_{g\in H} T(x^*(g), F(h,g)) = x^*(h)$, d'on $\mathrm{SUP}_{g\in H} T(g(x), F(h,g)) = h(x)$. ∎

(a) $\Leftrightarrow$ (d) Idèntic raonament basat en el Segon Teorema de Caracterització dels generadors (Teorema 2.2.10). ∎

Així, la T-indistingibilitat natural $\overline{E}$ és la més gran entre les pròpies.

A més, $\overline{E}$ és un operador especialment ben adaptat a l'estructura reticular de $[0,1]^X$, com mostren les següents propietats.

Proposició 3.2.15. Per $h_1, h_2, h_3 \in [0,1]^X$ qualssevol, es té:

(a) Si $h_1 \leq h_2 \leq h_3$ llavors $T(\overline{E}(h_1,h_2), \overline{E}(h_2,h_3)) \leq \overline{E}(h_1,h_3) \leq \leq \mathrm{MIN}\{\overline{E}(h_1,h_2), \overline{E}(h_2,h_3)\}$.

(b) $\overline{E}(h_1 \vee h_2, h_3) \geq \mathrm{MIN}\{\overline{E}(h_1,h_3), \overline{E}(h_2,h_3)\}$

(c) $\overline{E}(h_1 \wedge h_2, h_3) \geq \mathrm{MIN}\{\overline{E}(h_1,h_3), \overline{E}(h_2,h_3)\}$

(d) $\overline{E}(h_1,h_2) = \overline{E}(h_1 \vee h_2, h_1 \wedge h_2)$

(e) $\overline{E}(h_1 \wedge h_2, h_1) = \overline{E}(h_2, h_1 \vee h_2)$

Demostració.

(a) Si $h_1 \leq h_2 \leq h_3$, llavors $h_1(x) \leq h_2(x) \leq h_3(x)$, per tot $x \in X$ i, per tant, $E_T(h_1(x), h_3(x)) \leq \mathrm{MIN}\{E_T(h_1(x), h_2(x)), E_T(h_2(x), h_3(x))\}$ per tot $x \in X$.

(b) Considerem $X = A \cup A'$, on $A = \{x \;/\; h_1(x) \geq h_2(x)\}$ i $A' = A^c\{x \;/\; h_1(x) < h_2(x)\}$.

$$\begin{aligned}
\overline{E}(h_1 \wedge h_2, h_3) &= \operatorname*{INF}_{x\in X} E_T\Big(\mathrm{MIN}\{h_1(x), h_2(x)\}, h_3(x)\Big) = \\
&= \mathrm{MIN}\left\{\operatorname*{INF}_{x\in A} E_T(h_2(x), h_3(x)), \operatorname*{INF}_{x\in A'} E_T(h_1(x), h_3(x))\right\} \geq \\
&\geq \mathrm{MIN}\left\{\operatorname*{INF}_{x\in X} E_T(h_2(x), h_3(x)), \operatorname*{INF}_{x\in X} E_T(h_1(x), h_3(x))\right\} = \\
&= \mathrm{MIN}\left\{\overline{E}(h_2, h_3), E(h_1, h_3)\right\}.
\end{aligned}$$

(c) Anàleg a (b).

(d) $\overline{E}(h_1 \vee h_2, h_1 \wedge h_2) =$

$$\begin{aligned}
&= \operatorname*{INF}_{x\in X} E_T\Big(\mathrm{MAX}\{h_1(x), h_2(x)\}, \mathrm{MIN}\{h_1(x), h_2(x)\}\Big) = \\
&= \mathrm{MIN}\Big\{\operatorname*{INF}_{x\in A} E_T\Big(\mathrm{MAX}\{h_1(x), h_2(x)\}, \mathrm{MIN}\{h_1(x), h_2(x)\}\Big), \\
&\quad , \operatorname*{INF}_{x\in A'} E_T\Big(\mathrm{MAX}\{h_1(x), h_2(x)\}, \mathrm{MIN}\{h_1(x), h_2(x)\}\Big)\Big\} = \\
&= \mathrm{MIN}\left\{\operatorname*{INF}_{x\in A} E_T(h_2(x), h_1(x)), \operatorname*{INF}_{x\in A'} E_T(h_1(x), h_2(x))\right\} = \\
&= \operatorname*{INF}_{x\in X} E_T(h_1(x), h_2(x)) = \overline{E}(h_1, h_2).
\end{aligned}$$

(e) $\overline{E}(h_1 \wedge h_2, h_1) = \mathrm{INF}_{x\in X}\, E_T\,(\mathrm{MIN}\{h_1(x), h_2(x)\}, h_1(x)) =$

$$\begin{aligned}
&= \operatorname*{INF}_{x\in A} E_T\,(h_2(x), h_1(x)) = \\
&= \operatorname*{INF}_{x\in A} E_T\Big(h_2(x), \mathrm{MAX}\{h_1(x), h_2(x)\}\Big) = \\
&= \operatorname*{INF}_{x\in X} E_T\Big(h_2(x), \mathrm{MAX}\{h_1(x), h_2(x)\}\Big) = \\
&= \overline{E}(h_2, h_1 \vee h_2). \quad \blacksquare
\end{aligned}$$

Una altra propietat interessant és que difusos semblants per $\overline{E}$ generen T-indistingibilitats semblants en X. La interpretació d'aquesta propietat en termes de Raonament Aproximat és molt suggerent: criteris semblants indueixen classificacions semblants. El recíproc no és vàlid ja que, per exemple, en molts cassos el criteri oposat via negació indueix la mateixa classificació que el criteri donat.

Proposició 3.2.16. Sigui $\epsilon \in [0,1]$, i $h_1, h_2 \in [0,1]^X$. Si $\overline{E}(h_1,h_2) \geq \epsilon$, llavors $E_T(E_{h_1}(x,y), E_{h_2}(x,y)) \geq T(\epsilon,\epsilon)$.

Demostració. Com que $\epsilon \leq \overline{E}(h_1,h_2) = \text{INF}_{x\in X}\, E_T(h_1(x), h_2(x))$, en particular $\epsilon \leq E_T(h_1(x), h_2(x))$ per tot $x \in X$, de manera que $\epsilon \leq \hat{T}(h_1(x) \mid h_2(x))$ i, per tant, $T(h_1(x),\epsilon) \leq h_2(x)$. D'altra banda, $\epsilon \leq \hat{T}(h_2(x) \mid h_1(x))$ d'on, aplicant el lema 1.2.12, $\hat{T}(\epsilon \mid h_1(x)) \geq h_2(x)$. D'ambdues, $T(h_1(x),\epsilon) \leq h_2(x) \leq \hat{T}(\epsilon|h_1(x))$, per tot $x \in X$. Per simetria, també es tindrà $T(h_2(x),\epsilon) \leq h_1(x) \leq \hat{T}(\epsilon|h_2(x))$, per tot $x \in X$.

Sigui ara $x, y \in X$, i suposem $h_2(x) \leq h_2(y)$ (res canvia en el cas $h_2(x) > h_2(y)$).

$$\begin{aligned}
E_{h_2}(x,y) &= E_T(h_2(x), h_2(y)) = \hat{T}(h_2(y)|h_2(x)) \geq \\
&\geq \hat{T}(\hat{T}(\epsilon|h_1(y))|T(h_1(x),\epsilon)) \underset{(*)}{\geq} \\
&\underset{(*)}{\geq} T(\epsilon, \hat{T}(h_1(y)|T(h_1(x),\epsilon))) \underset{(**)}{\geq} \\
&\underset{(**)}{\geq} T\left(\epsilon, T(\epsilon, \hat{T}(h_1(y)|h_1(x)))\right) = \\
&= T\left(T(\epsilon,\epsilon), \hat{T}(h_1(y)|h_1(x))\right) = \\
&= T\left(T(\epsilon,\epsilon), E_T(h_1(y), h_1(x))\right) = \\
&= T(T(\epsilon,\epsilon), E_{h_1}(x,y)),
\end{aligned}$$

on (*) segueix del segon lema de composició (1.2.21) i (**) del lema d'intercanvi (1.2.16).

De les desigualtats precedents s'ha obtingut que $E_{h_2}(x,y) \geq T(T(\epsilon,\epsilon), E_{h_1}(x,y))$, i per tant, $\hat{T}(E_{h_1}(x,y)|E_{h_2}(x,y)) \geq T(\epsilon,\epsilon)$.

Un raonament idèntic ens portaria a la conclusió que $E_{h_1}(x,y) \geq T(T(\epsilon,\epsilon), E_{h_2}(x,y))$ i, dels dos, $E_T(E_{h_1}(x,y), E_{h_2}(x,y)) \geq T(\epsilon,\epsilon)$. ∎

3.3 Morfisme dual

Definició 3.3.1. L'aplicació dual (o adjunta) de $\varphi : X \to Y$ és

$$\begin{aligned}
\varphi^T : [0,1]^Y &\longrightarrow [0,1]^X \\
\mu &\longmapsto \varphi^T(\mu) = \mu \circ \varphi
\end{aligned}$$

Lema 3.3.2. $(\varphi^T)^T(x^{**}) = (\varphi(x))^{**}$, on $x^{**} = B_H(x)$ amb $H = [0,1]^X$.

Demostració.

$$\begin{array}{rcl} (\varphi^T)^T(x^{**}) : [0,1]^Y & \longrightarrow & [0,1] \\ \mu & \mapsto & \left((\varphi^T)^T(x^{**})\right)(\mu) \end{array}$$

on $\left((\varphi^T)^T(x^{**})\right)(\mu) = (x^{**} \circ \varphi^T)(\mu) = x^{**}\left(\varphi^T(\mu)\right) = x^{**}(\mu\circ\varphi) = (\mu\circ\varphi)(x)$, per tots $x \in X$, $\mu \in [0,1]^Y$.

D'altra banda,

$$\begin{array}{rcl} (\varphi(x))^{**} : [0,1]^Y & \longrightarrow & [0,1] \\ \mu & \mapsto & (\varphi(x))^{**}(\mu) \end{array}$$

on $(\varphi(x))^{**}(\mu) = \mu(\varphi(x))$, per tots $x \in X$, $\mu \in [0,1]^Y$. ■

Proposició 3.3.3.

(a) φ és injectiva si, i només si, φ^T és exhaustiva.

(b) φ és exhaustiva si, i només si, φ^T és injectiva.

(c) φ és bijectiva si, i només si, φ^T és bijectiva.

(d) Si φ és bijectiva, $(\varphi^T)^{-1} = (\varphi^{-1})^T$.

Demostració.

(a) $\Rightarrow$) Suposem φ injectiva. Donat $\nu \in [0,1]^X$, considerem $\mu \in [0,1]^Y$ tal que

$$\mu(y) = \begin{cases} \nu(\varphi^{-1}(y)), & \text{si } y \in \operatorname{Im}\varphi \\ 0, & \text{si } y \notin \operatorname{Im}\varphi. \end{cases}$$

Llavors $\varphi^T(\mu)(x) = \mu(\varphi(x)) = \nu(\varphi^{-1}(\varphi(x))) = \nu(x)$, per tot $x \in X$ i, per tant, $\varphi^T(\mu) = \nu$.

(a) $\Leftarrow$) Suposem φ^T exhaustiva. Llavors, per (b) $\Rightarrow$) es té que $(\varphi^T)^T$ és injectiva. Donats $x_1, x_2 \in X$, considerem x_1^{**} i $x_2^{**} \in [0,1]^{([0,1]^X)}$.

(b) $\Rightarrow$) Suposem φ exhaustiva. Donats $\mu_1, \mu_2 \in [0,1]^Y$, si $\varphi^T(\mu_1) = \varphi^T(\mu_2)$ llavors $\mu_1 \circ \varphi(x) = \mu_2 \circ \varphi(x)$ per tot $x \in X$, i, per la exhaustivitat de φ, $\mu_1(y) = \mu_2(y)$ per tot $y \in X$, d'on $\mu_1 = \mu_2$.

Si $\varphi(x_1) = \varphi(x_2)$, llavors $(\varphi(x_1))^{**} = (\varphi(x_2))^{**}$ i, pel lema 3.3.2, $(\varphi^T)^T(x_1^{**}) = (\varphi^T)^T(x_2^{**})$, d'on $x_1^{**} = x_2^{**}$ i, en conseqüència, $x_1 = x_2$ (B_H és injectiva per $H = [0,1]^X$, lema 3.1.2).

(b) $\Leftarrow$) Suposem φ no exhaustiva. Sigui $y_0 \in Y$ tal que $\varphi(x) \neq y_0$ per tot $x \in X$. Considerem $\mu : Y \to [0,1]$ qualsevol, i $\mu' = Y \to [0,1]$ definit per:

$$\mu'(y) = \begin{cases} \mu(y) & \text{si } y \neq y_0 \\ \mu'(y_0) \neq \mu(y_0) & \text{si } y = y_0. \end{cases}$$

Llavors: $\varphi^T(\mu)(x) = \mu \circ \varphi(x)$ per tot $x \in X$, i $\varphi^T(\mu')(x) = \mu' \circ \varphi(x)$ per tot $x \in X$, d'on $\varphi^T(\mu) = \varphi^T(\mu')$, amb $\mu \neq \mu'$, contra la hipòtesi.

(c) Trivial, a partir de (a) i (b).

(d) Trivial. ∎

Els resultats precedents es basen només en considerar els subconjunts difusos com a aplicacions, i no es fa cap referència a possibles operadors de T-indistingibilitat definits en els conjunts X, Y, o en subconjunts adequats de $[0,1]^X$ i $[0,1]^Y$. L'objectiu d'aquesta secció és estudiar el comportament de l'aplicació dual φ^T quan φ és un morfisme o un morfisme feble (extensional).

En tot el que segueix (X, E) i (Y, F) denotaran dues T-indistingibilitats separadores, i H_E i H_F els respectius conjunts de generadors.

Proposició 3.3.4. $\varphi : X \to Y$ és extensional si, i només si, $\varphi^T(H_F) \subseteq H_E$.

Demostració. Suposem φ extensional. Donats $g \in H_F$ i $x_1, x_2 \in X$,

$$\begin{aligned} E_T\left(\varphi^T(g)(x_1), \varphi^T(g)(x_2)\right) &= E_T\left(g(\varphi(x_1), g(\varphi(x_2)))\right) \geq \\ &\geq F(\varphi(x_1), \varphi(x_2)) \geq E(x_1, x_2) \end{aligned}$$

d'on resulta que $\varphi^T(g) \in H_E$.

D'altra banda, si $\varphi^T(H_F) \subseteq H_E$, llavors

$$\begin{aligned} F\left(\varphi(x_1), \varphi(x_2)\right) &= \operatorname*{INF}_{g \in H_F} E_T(g(\varphi(x)), g(\varphi(x_2))) = \\ &= \operatorname*{INF}_{g \in H_F} E_T(\varphi^T(g)(x_1), \varphi^T(g)(x_2)) \end{aligned}$$

$$\geq \operatorname*{INF}_{h \in H_E} E_T(h(x_1), h(x_2)) = E(x_1, x_2). \quad \blacksquare$$

Proposició 3.3.5. $\varphi : X \to Y$ és morfisme si, i només si, $\varphi^T(H_F) = H_E$.

La demostració es basa en el següent lema

Lema 3.3.6. Sigui F T-indistingibilitat en Y, i sigui $U, V \subseteq Y$ tal que $Y = U \cup V$, $U \cap V = \emptyset$. Llavors, si $g : U \to [0,1]$ és generador de $F_{|U \times U}$, existeix $\overline{g} : Y \to [0,1]$ generador de F tal que $\overline{g}_{|U} = g$.

Demostració. (Lema 3.3.6). Sigui

$$\mu(x) = \begin{cases} g(x), & \text{si } x \in U \\ 0, & \text{si } x \in V \end{cases}$$

i prenem $\overline{g} = \phi_F(\mu) \in H_F$.

Llavors, si $x \in U$ i notem $E = F_{|U \times U}$, $\overline{g}(x) = \phi_F(\mu)(x) =$ $\mathrm{SUP}_{y \in Y} T(\mu(y), E(x,y)) = \mathrm{SUP}_{u \in U} T(\mu(x), E(x,u)) = \phi_E(\mu)(x) = \mu(x) = h(x)$. $\blacksquare$

NOTA. L'extensió $\overline{g}$ de g no és única. Per exemple, se'n pot obtenir una altra aplicant ψ_F a $\mu(x) = \begin{cases} g(x), & \text{si } x \in U \\ 1, & \text{si } x \in V. \end{cases}$

Demostració. (Proposició 3.3.5.) Si φ és morfisme, en particular φ és extensional, i segons la proposició 3.3.4. es té $\varphi^T(H_F) \subseteq H_E$. A més, φ serà injectiva (E separadora) i, per tant, φ^T exhaustiva (proposició 3.3.3). Per tant, donat $h \in H_E$, existirà $g \in [0,1]$ tal que $\varphi^T(g) = h$, i només cal veure que $g \in H_E$.

Si $y_1 = \varphi(x_1)$ i $y_2 = \varphi(x_2)$ llavors

$$\begin{aligned} F(y_1, y_2) &= E(x_1, x_2) \leq E_T(\varphi^T(g)(x_1), \varphi^T(g)(x_2)) = \\ &= E_T(g(\varphi(x_1)), g(\varphi(x_2))) = E_T(g(y_1), g(y_2)), \end{aligned}$$

així que g és generador sobre els elements de Im φ.

Aplicant el lema 3.3.6 amb $U = \mathrm{Im}\varphi$, sigui $\overline{g}$ una extensió de g tal que $g \in H_F$ i $\overline{g}_{|Im\varphi} = g$. Llavors $\varphi^T(\overline{g})(x) = \overline{g}(\varphi(x)) = g(\varphi(x))$, per tot $x \in X$, d'on $(\varphi^T)(\overline{g}) = (\varphi^T)(g) = h$.

Pel recíproc,

$$\begin{aligned} F(\varphi(x_1),\varphi(x_2)) &= \operatorname*{INF}_{g\in H_F} E_T\left(g(\varphi(x_1)),g(\varphi(x_2))\right) = \\ &= \operatorname*{INF}_{\in H_F} E_T\left(\varphi^T(g)(x_1),\varphi^T(g)(x_2)\right) = \\ &= \operatorname*{INF}_{h\in H_E} E_T(h(x_1),h(x_2)) = E(x_1,x_2). \blacksquare \end{aligned}$$

Corol·lari 3.3.7. $\varphi : X \to Y$ és isomorfisme si, i només si, φ^T és bijectiva i $\varphi^T(H_F) = H_E$.

Demostració. Conseqüència elemental de les proposicions 3.3.4 i 3.3.5. ■

Proposició 3.3.8.

(a) Si $\varphi : X \to Y$ és morfisme, llavors per qualsevol sistema generador $S_F \subseteq H_F$ per F, $\varphi^T(S_F) \subseteq H_E$ és sistema generador per E.

(b) Si existeix $S_F \subseteq H_F$ sistema generador per F tal que $\varphi^T(S_F) \subseteq H_E$ és sistema generador per E, llavors φ és morfisme.

Demostració.

(a) Sigui S_F un sistema generador qualsevol per F, i notem $S_E = \varphi^T(S_F)$. Per qualsevol $x_1, x_2 \in X$, es té:

$$\begin{aligned} E(x_1,x_2) &= F(\varphi(x),\varphi(x_2)) = \operatorname*{INF}_{g\in S_F} E_T(g(\varphi(x_1)),g(\varphi(x_2))) = \\ &= \operatorname*{INF}_{g\in S_F} E_T(\varphi^T(g)(x_1),\varphi^T(g)(x_2)) = \\ &= \operatorname*{INF}_{h\in S_E} E_T(h(x_1),h(x_2)) \end{aligned}$$

d'on $S_E \in H_E$ ha de ser sistema generador per E.

(b) Sigui S_F un sistema generador per F tal que $S_E = \varphi^T(S_F)$ és sistema generador per E. Llavors, per qualsevol $x_1, x_2 \in X$,

$$\begin{aligned} F\left(\varphi(x_1),\varphi(x_2)\right) &= \operatorname*{INF}_{g\in S_F} E_T\left(g(\varphi(x_1)),g(\varphi(x_2))\right) = \\ &= \operatorname*{INF}_{g\in S_F} E_T\left(\varphi^T(g)(x),\varphi^T(g)(x_2)\right) = \\ &= \operatorname*{INF}_{h\in S_E} E_T\left(h(x_1),h(x_2)\right) = E(x_1,x_2). \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Corol·lari 3.3.9. $\varphi : X \to Y$ és morfisme si, i només si, φ^T transforma sistemes generadors en sistemes generadors.

Demostració. Trivial. ■

Corol·lari 3.3.10. Si $\varphi : X \to Y$ és morfisme, llavors $\dim E \leq \dim F$.

Demostració. Trivial. ■

Com es desprèn fàcilment de les demostracions anteriors, si φ és morfisme el comportament de φ^T respecte a les bases de F no és del tot regular, i només es pot assegurar que φ^T transforma bases en sistemes de generadors. De fet, el comportament regular respecte a bases caracteritza els isomorfismes.

Corol·lari 3.3.11. Si $\varphi : X \to Y$ és isomorfisme, llavors $\dim E = \dim F$.

Demostració. D'una banda, $\dim E \leq \dim F$. Però també, serà $\dim F \leq \dim E$ perquè φ^{-1} és isomorfisme. ■

Proposició 3.3.12. Sigui $\varphi : X \to Y$ bijectiva. Llavors:

(a) Si φ és isomorfisme, llavors $\varphi^T(B_F) \subseteq H_E$ és base de E, per qualsevol $B_F \subseteq H_F$ base de F.

(b) Si existeix $F_B \subseteq H_F$ base de F tal que $\varphi^T(B_F) \subseteq H_E$ és base de E, llavors φ és isomorfisme.

Demostració.

(a) Sigui $B_F \subseteq H_F$ una base de F. Per la proposició 3.3.8, $\varphi^T(B_F)$ serà un sistema generador de E.

A més, si existís algun sistema generador de E, S_E, tal que $|S_E| < |\varphi^T(B_F)|$, (recordem que $|A|$ és el cardinal d'A), això proporcionaria un sistema generador de F, $(\varphi^{-1})^T(S_E)$ que, per la bijectivitat de $(\varphi^{-1})^T$, hauria de satisfer $|(\varphi^{-1})^T(S_E)| < |B_F|$, contra la hipòtesi que B_F és base. Per tant, $\varphi^T(B_F)$ és base.

(b) φ és bijectiva per hipòtesi. A més, si $B_F \subseteq H_F$ és una base de F tal que $\varphi^T(B_F)$ és base de E, es tindrà

$$\begin{aligned} F(\varphi(x_1), \varphi(x_2)) &= \operatorname*{INF}_{g \in B_F} E_T(g(\varphi(x_1)), g(\varphi(x_2))) = \\ &= \operatorname*{INF}_{g \in B_F} E_T(\varphi^T(g)(x_1), \varphi^T(g)(x_2)) = \\ &= \operatorname*{INF}_{h \in \varphi^T(B_F)} E_T(h(x_1), h(x_2)) = E(x_1, x_2), \end{aligned}$$

per tot $x_1, x_2 \in X$. ■

Corol·lari 3.3.13. $\varphi : X \to Y$ és isomorfisme si, i només si, transforma bases en bases.

Demostració. Trivial. ■

Podem resumir els resultats precedents en un gràfic:

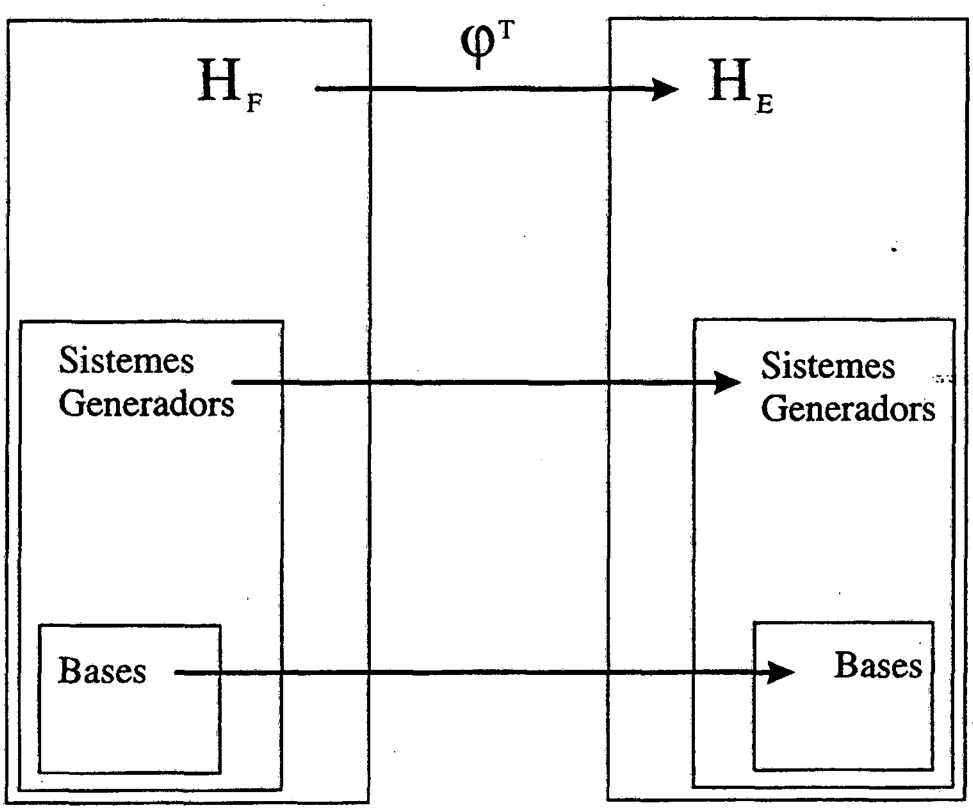

Figura 3.1

Fins aquí s'ha vist que els morfismes febles venen caracteritzats pel fet que $\varphi^T : [0,1]^Y \to [0,1]^X$ indueix, per restricció de domini, una aplicació $\varphi^T : H_F \to H_E$.

Ara, la pregunta natural a fer-se és si φ^T serà o no morfisme feble (o morfisme) entre els corresponents operadors duals $(X,E)^* = (H_E, \overline{E})$ i $(Y,F)^* = (H_F, \overline{F})$, on $\overline{E}$ i $\overline{F}$ notem la T-indistingibilitat natural en $[0,1]^X$ i $[0,1]^Y$, respectivament.

Proposició 3.3.14. $\varphi : X \to Y$ és extensional si, i només si, $\varphi^T : H_F \to H_E$ és extensional.

Demostració. Si φ és extensional, llavors

$$\begin{aligned}
\overline{E}\left(\varphi^T(g_1), \varphi^T(g_2)\right) &= \operatorname*{INF}_{x \in X} E_T\left(\varphi^T(g_1)(x), \varphi^T(g_2)(x)\right) = \\
&= \operatorname*{INF}_{x \in X} E_T\left(g_1 \circ \varphi(x), g_2 \circ \varphi(x)\right) \\
&\geq \operatorname*{INF}_{y \in Y} E_T\left(g_1(y), g_2(y)\right) = \overline{F}(g_1, g_2).
\end{aligned}$$

Recíprocament, si φ^T és extensional en particular $\varphi^T(H_F) \subseteq H_E$ i segons la proposició 3.3.4, això és equivalent a l'extensionalitat de φ. ∎

Corol·lari 3.3.15. Si $\varphi : X \to Y$ és morfisme, llavors $\varphi^T : H_F \to H_E$ és extensional.

Demostració. Conseqüència elemental de la Proposició 3.3.14. ∎

En general, no es pot assegurar que φ^T sigui morfisme, com mostra el següent contraexemple.

Exemple 3.3.16. Donats X conjunt, E T-indistingibilitat en X i $y \notin X$, considerem $Y = X \cup \{y\}$, i $\varphi : X \to Y$ tal que $\varphi(x) = x$, per tot $x \in X$ (φ és la identitat en X).

Naturalment, φ és morfisme per qualsevol operador de T-indistingibilitat F considerat en Y tal que $F_{|X \times X} = E$.

En canvi, donats $g_1, g_2 \in H_F$ tal que $g_1(x) = g_2(x)$ per tot $x \in X$, i $g_1(y) \neq g_2(y)$, llavors $\overline{E}(\varphi^T(g_1), \varphi^T(g_2)) = 1$ (atès que $\varphi^T(g_1) = \varphi^T(g_2)$), però $\overline{F}(g_1, g_2) < 1$ (atès que $g_1(y) \neq g_2(y)$).

Proposició 3.3.17. Si $\varphi^T : H_F \to H_E$ és morfisme, llavors $\varphi : X \to Y$ és extensional.

Demostració. Segons el Corol·lari 3.3.15 $(\varphi^T)^T : H_{\overline{E}} \to H_{\overline{F}}$ és extensional. D'altra banda, pel teorema 3.2.10: $B_{H_E} : X \to H_{\overline{E}}$ i $B_{H_F} : Y \to H_{\overline{F}}$ són morfismes, i pel lema 3.3.2 $(\varphi^T)^T(x^{**}) = (\varphi(x))^{**}$.

Així,

$$\begin{aligned} F(\varphi(x_1), \varphi(x_2)) &= \overline{\overline{(F)}}\left((\varphi(x_1))^{**}, (\varphi(x_2))^{**}\right) = \\ &= \overline{\overline{(E)}}\left((\varphi^T)^T(x_1^{**}), (\varphi^T)^T(x_2^{**})\right) \geq \\ &\geq \overline{\overline{(F)}}(x_1^{**}, x_2^{**}) = E(x_1, x_2). \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Tampoc aquí es pot assegurar que φ sigui morfisme.

Exemple 3.3.18. Sigui E_1 i E_2 dues T-indistingibilitats sobre X, tal que $E_1 < E_2$, i considerem l'aplicació identitat $\varphi : X \to X$ (i.e. $\varphi(x) = x$, per tot $x \in X$). Clarament φ és extensional, respecte E_1 i E_2, però no és morfisme. En canvi, $\varphi^T : H_{E_2} \to H_{E_1}$ és tal que $\varphi^T(g) = g$, per tot $g \in H_{E_2}$ i, per tant φ^T és morfisme.

Proposició 3.3.19. $\varphi : X \to Y$ és isomorfisme si, i només si, $\varphi^T : H_F \to H_E$ és isomorfisme.

Demostració. Segons corol·lari 3.3.7, φ és isomorfisme si, i només si, φ^T és bijectiva i $\varphi^T(H_F) = H_E$. A més, per la proposició 3.3.9, φ^T és extensional.

A més,

$$\begin{aligned} \overline{E}\left(\varphi^T(g_1), \varphi^T(g_2)\right) &= \operatorname*{INF}_{x \in X} E_T\left(\varphi^T(g_1)(x), \varphi^T)g_2)(x)\right) = \\ &= \operatorname*{INF}_{x \in X} E_T\left(g_1 \circ \varphi(x), g_2 \circ \varphi(x)\right) = \\ &= \operatorname*{INF}_{y \in Y} E_T\left(g_1(y), g_2(y)\right) = \overline{F}(g_1, g_2), \end{aligned}$$

per tot $g_1, g_2 \in H_F$.

D'altra banda, segons el que acabem de provar, si φ^T és isomorfisme es tindrà que $\left(\varphi^T\right)^T : H_E \to H_{\overline{F}}$ serà isomorfisme.

I pel lema 3.3.2 i el teorema 3.2.10,

$$\begin{aligned} F(\varphi(x_1), \varphi(x_2)) &= \overline{(\overline{F})}\left((\varphi(x_1))^{**}, (\varphi(x_2))^{**}\right) = \\ &= \overline{(\overline{F})}\left((\varphi^T)^T(x_1^{**}), (\varphi^T)^T(x_2^{**})\right) = \\ &= \overline{(\overline{E})}(x_1^{**}, x_2^{**}) = E(x_1, x_2). \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Si notem per $\mathcal{D}$ l'aplicació que a cada $\varphi : X \to Y$ li fa correspondre el seu dual, (i.e. $\mathcal{D}(\varphi) = \varphi^T$), el següent gràfic il·lustra els resultats precedents

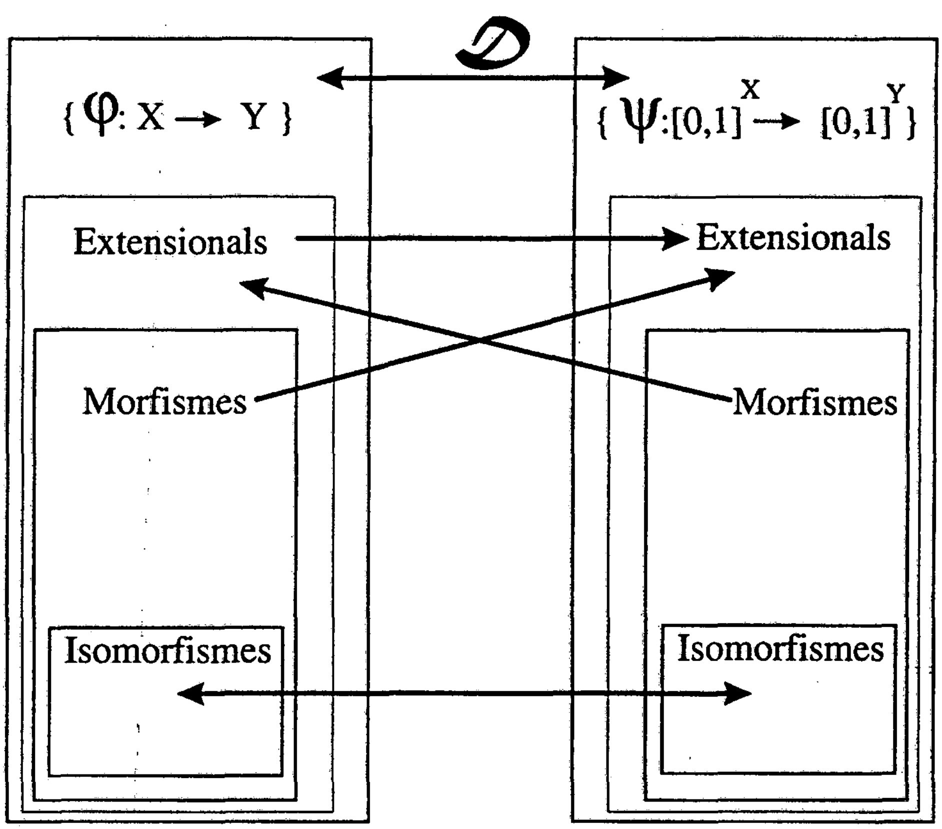

Figura 3.2

3.4 ϕ_E i estructura dual. Punts fixos.

A continuació s'estudia el comportament de la T-indistingibilitat natural $\overline{E}$ a través dels operadors ϕ_E i ψ_E introduïts al capítol 2. En tota aquesta secció suposarem que E és un operador de T-indistingibilitat separador en X.

Recordem que $\{x\}$ denota el subconjunt clàssic format per un únic element ($x \in X$), i que h_x és la columna associada i.e. $h_x : X \to [0,1]$ ve definida per $h_x(y) = E(x,y)$ per tots $x, y \in X$.

Proposició 3.4.1. Sigui $\overline{E}$ la T-indistingibilitat natural en $[0,1]^X$, i E una T-indistingibilitat separadora qualsevol en X. Llavors:

(a) $\phi_E : [0,1]^X \to [0,1]^X$ és extensional respecte $\overline{E}$.

(b) $\psi_E : [0,1]^X \to [0,1]^X$ és extensional respecte $\overline{E}$.

(c) $\overline{E}\left(\phi_E(\{x\}), \phi_E(\{y\})\right) = \overline{E}(h_x, h_y) = E(x,y)$, per tots $x, y \in X$.

Demostració.

(a) Donats $\mu_1, \mu_2 \in [0,1]^X$, s'ha de veure que $\overline{E}\left(\phi_E(\mu_1), \phi_E(\mu_2)\right) \geq \overline{E}(\mu_1, \mu_2)$. Fixat $x \in X$,

$$\begin{aligned}
&\hat{T}\left(\phi_E(\mu_1)(x) \mid \phi_E(\mu_2)(x)\right) = \\
&= \hat{T}\left(\operatorname*{SUP}_{u\in X} T\left(\mu_1(u), E(u,x)\right) \mid \operatorname*{SUP}_{u\in X} T\left(\mu_2(u), E(u,x)\right)\right) = \\
&\underset{(*)}{=} \operatorname*{INF}_{v\in X} \hat{T}\left(T\left(\mu_1(v), E(v,x)\right) \mid \operatorname*{SUP}_{u\in X} T\left(\mu_2(u), E(u,x)\right)\right) \geq \\
&\underset{(**)}{\geq} \operatorname*{INF}_{v\in X} \hat{T}\left(T\left(\mu_1(v), E(v,x)\right) \mid T\left(\mu_2(v), E(v,x)\right)\right) \geq \\
&\underset{(***)}{\geq} \operatorname*{INF}_{v\in X} \hat{T}\left(\mu_1(v) \middle| \mu_2(v)\right) \geq \operatorname*{INF}_{v\in X} E_T(\mu_1(v), \mu_2(v)) = \\
&= \overline{E}(\mu_1, \mu_2)
\end{aligned}$$

on les desigualtats són conseqüència de:

(*) Lema 1.2.12.

(**) $\hat{T}$ és monòtona decreixent respecte la segona variable.

(***) Lema 1.2.10.

De forma anàloga, es té que $\hat{T}\left(\phi_E(\mu_2(x)) \mid \phi_E(\mu_1(x))\right) \geq \overline{E}(\mu_1, \mu_2)$ i d'ambdues, que $E_T\left(\phi_E(\mu_1(x), \phi_E(\mu_2(x)\right) \geq \overline{E}(\mu_1, \mu_2)$.

Finalment, per l'arbitrarietat de $x \in X$,

$$\operatorname*{INF}_{x\in X} E_T\left(\phi_E(\mu_1)(x), \phi_E(\mu_2)(x)\right) = \overline{E}\left(\phi_E(\mu_1), \phi_E(\mu_2)\right) \geq \overline{E}(\mu_1, \mu_2). \blacksquare$$

(b) Donats $\mu_1, \mu_2 \in [0,1]^X$, s'ha de veure que $\overline{E}\,(\psi_E(\mu_1), \psi_E(\mu_2)) \geq \overline{E}(\mu_1, \mu_2)$.
Fixat $x \in X$,

$$\begin{aligned}
&\hat{T}\,(\psi_E(\mu_1)(x) \mid \psi_E(\mu_2)(x)) = \\
&= \hat{T}\left(\operatorname*{INF}_{u\in X} \hat{T}(E(x,u)|\mu_1(u)) \,\Big|\, \operatorname*{INF}_{u\in X} \hat{T}(E(x,u) \mid \mu_2(u))\right) = \\
&\underset{(*)}{=} \operatorname*{INF}_{v\in X} \hat{T}\left(\operatorname*{INF}_{u\in X} \hat{T}\,(E(x,u) \mid \mu_1(u)) \;|\hat{T}(E(x,v) \mid \mu_2(v))\right) \geq \\
&\underset{(**)}{\geq} \operatorname*{INF}_{v\in X} \hat{T}\left(\hat{T}\,(E(x,v) \mid \mu_1(v)) \;|\hat{T}(E(x,v) \mid \mu_2(v)\right) \geq \\
&\underset{(***)}{\geq} \operatorname*{INF}_{v\in X} \hat{T}\,(\mu_1(v)|\mu_2(v)) \geq \operatorname*{INF}_{v\in X} E_T(\mu_1(v), \mu_2(v)) = \overline{E}(\mu_1, \mu_2)
\end{aligned}$$

Semblantment, $\hat{T}\,(\psi_E(\mu_2(x))|\psi_E(\mu_1(x))) \geq \overline{E}(\mu_1, \mu_2)$ i d'ambdues, $E_T\,(\psi_E(\mu_1)(x)), \psi_E(\mu_2)(x)) \geq \overline{E}(\mu_1, \mu_2)$.
Finalment, per l'arbitrarietat de $x \in X$,

$$\operatorname*{INF}_{x\in X} E_T\,(\psi_E(\mu_1)(x), \psi_E(\mu_2)(x)) = \overline{E}(\psi_E(\mu_1), \psi_E(\mu_2)) \geq \overline{E}(\mu_1, \mu_2). \blacksquare$$

(c) $\overline{E}(h_x, h_y) = \mathrm{INF}_{u\in X}\, E_T(h_x(u), h_y(y)) = \mathrm{INF}_{u\in X}\, E_T\,(E(x,u), E(y,u)) = E(x,y)$, (conseqüència del teorema de Representació). ■

En general, no és cert que $\overline{E}\,(\psi_E(\{x\}), \psi_E(\{y\})) = E(x,y)$.

Exemple 3.4.2. $X = \{x_1, x_2, x_3\}$, $T = \text{Ł}$. E definida per la matriu:

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0.9 & 0.1 \\ 0.9 & 1 & 0.2 \\ 0.1 & 0.2 & 1 \end{pmatrix}$$

$\psi_E(\{x_1\}) = (0.1, 0, 0)$
$\psi_E(\{x_2\}) = (0, 0.1, 0)$
$\psi_E(\{x_3\}) = (0, 0, 0.8)$
En particular, $\overline{E}\,(\psi_E(\{x_1\}), \psi_E(\{x_3\})) = 0.2 > E(x_1, x_3) = 0.1$. ■

Corol·lari 3.4.3. $\phi_E : X \longrightarrow H_E$ és morfisme (injectiu) per qualsevol operador de T-indistingibilitat (X, E).

Demostració. ■

Així, la T-indistingibilitat natural permet injectar (X, E) en el seu dual $(X, E)^* = (H_E, \overline{E})$ a través de ϕ_E, amb total independència de quina sigui particular a E considerada en X. Dit d'una altra manera: la T-indistingibilitat natural fa que la semblança entre les columnes de la relació sigui igual a la semblança entre els elements, i això per a qualsevol semblança entre elements.

Aquesta propietat tan interessant no és, però específica de la T-indistingibilitat natural.

Proposició 3.4.4. Sigui F una T-indistingibilitat pròpia definida en $[0,1]^X$. Llavors, per tota T-indistingibilitat E en X, $\phi_E : X \rightarrow H_E$ és morfisme (injectiu).

Demostració. Si F és pròpia, pel Teorema de Representació Dual (3.2.11), existeix Y tal que $X \subseteq Y$, i per cada $h \in [0,1]^X$ existeix una extensió h' de h sobre Y satisfent $F(h_1, h_2) = \mathrm{INF}_{y \in Y} E_T(h'_1(y), h'_2(y))$, per tots $h_1, h_2 \in [0,1]^X$.

Sigui E una T-indistingibilitat en X. Si considerem H'_E format per les extensions h' de $h \in H_E$ sobre Y, podem estendre E sobre tot Y com E' definida per $E'(y_1, y_2) = \mathrm{INF}_{h' \in H'_E} E_T(h'(y_1), h'(y_2))$.

Llavors, donats $x_1, x_2 \in X$,

$$\begin{aligned} F(\phi_{E'}(x_1), \phi_E(x_2)) &= \mathop{\mathrm{INF}}_{y \in Y} E_T(E'(x_1, y), E'(x_2, y)) = \\ &= E'(x_1, x_2) = E(x_1, x_2), \end{aligned}$$

pel Corol·lari 3.4.3. ■

El recíproc de la proposició 3.4.4 no és cert, en general.

Exemple 3.4.5. Per una t-norma T qualsevol, es considera $X = \{x_1, x_2\}$, la T-indistingibilitat en X definida per $E(x_1, x_2) = 0$, i la T-indistingibilitat en $[0,1]^X$, definida per

$$F(h_1, h_2) = E_T(h_1(x_1), h_2(x_1)), \text{ per tots } h_1, h_2 \in [0,1]^X.$$

Llavors $\phi_E(\{x_1\}) = (1,0)$, $\phi_E(\{x_2\}) = (0,1)$, i $F(\phi_E(x_1), \phi_E(x_2)) = 0 = E(x_1, x_2)$, resultant que $\phi_E : X \rightarrow H_E$ és morfisme (respecte E i F).

En canvi, F no és pròpia, atès que x_2^{**} no és generador de F. ■

El corol·lari 3.4.3 justifica a $(X,E)^* = (H_E, \overline{E})$ com a extensió de (X,E).

A continuació es compara aquesta extensió amb una extensió qualsevol de (X,E).

Definició 3.4.6. Si E és una T-indistingiblilitat en X, i $A \subseteq X$, direm que dos elements $x_1, x_2 \in X$, són **indistingibles o simètrics** respecte A si $E(x_1, a) = E(x_2, a)$, per tot $a \in A$.

Si no hi ha elements diferents simètrics respecte A, direm que A **separa punts** en X.

Convé adonar-se que la condició que A separi punts és més feble que no pas que les columnes d'A siguin sistema generador per X.

També s'ha de notar que si $a_1, a_2 \in A$, $(a_1 \neq a_2)$ llavors a_1 i a_2 no són simètrics respecte A, o equivalentment, que X separa punts en X.

La nomenclatura que introdueix aquesta definició ve justificada pel següent lema:

Lema 3.4.7. Sigui E_A la T-indistingibilitat sobre X generada per les columnes d'elements d'A, (i.e., $E_A(x_1,x_2) = \mathrm{INF}_{a\in A}\, E_T(E(a,x_1), E(a,x_2))$). Llavors, x_1, x_2 són indistingibles (o simètrics) respecte A si, i només si, $E_A(x_1,x_2) = 1$.

Demostració. Si per tot $a \in A$ es té $E(a,x_1) = E(a,x_2)$, llavors $E_A(x_1,x_2) = \mathrm{INF}_{a\in A}\, E_T(E(a,x_1), E(a,x_2)) = 1$.

Recíprocament, l'única possibilitat és $E(a,x_1) = E(a,x_2)$ si $E_A(x_1,x_2) = 1$. ■

Proposició 3.4.8. Siguin E i F T-indistingibilitats sobre X i Y, respectivament. Per cada morfisme $\varphi : X \to Y$, existeix $f : Y \to H_E$ satisfent:

(a) $f(Y) \subseteq H_E$ és sistema generador per E.

(b) f és extensional (respecte F i $\overline{E}$)

(c) $f(y_1) = f(y_2)$ si, i només si, y_1 i y_2 són simètrics respecte $\varphi(X)$.

En particular, si $\varphi(X)$ separa punts en Y, f és injectiva.

Demostració. Considerem $f = \varphi^T \circ \phi_F$ (i.e. $f(y) = \varphi^T \circ \phi_F(y) = \phi_F(y) \circ \varphi$, i.e. $f(y) = F(y, \varphi(x))$ per tot $x \in X$).

(a) $\mathrm{INF}_{y \in Y} E_T(f(y)(x_1), f(y)(x_1)) = \mathrm{INF}_{y \in Y} E_T(F(y, \varphi(x_1)), F(y, \varphi(x_2))) = F(\varphi(x_1), \varphi(x_2)) = E(x_1, x_2)$ per tots $x_1, x_2 \in X$.

(b) ϕ_F és morfisme (proposició 3.4.1) i φ^T és extensional (proposició 3.3.14). Per tant, $f = \varphi^T \circ \phi$ extensional.

(c) Si $f(y_1) = f(y_2)$, llavors per tot $x \in X$ $F(y_1, \varphi(x)) = F(y_2, \varphi(x))$, d'on $F_{\varphi(x)}(y_1, y_2) = \mathrm{INF}_{x \in X} E_T(F(\varphi(x), y_1), F(\varphi(x), y_2)) = 1$. Recíprocament, si $F_{\varphi(X)}(y_1, y_2) = 1$, l'única possibilitat és $F(\varphi(x), y_1) = F(\varphi(x), y_2)$ per tot $x \in X$, i.e. $f(y_1) = f(y_2)$. ■

En la situació de la proposició anterior, es té:

Proposició 3.4.9. f és morfisme si, i només si , $\phi_F(\varphi(X)) \subseteq H_F$ és sistema generador per F.

Demostració. Sota qualsevol de les dues condicions es té:

$$\begin{aligned}\overline{E}(f(y_1), f(y_2)) &= \mathop{\mathrm{INF}}_{x \in X} E_T(f(y_1)(x), f(y_2)(x)) = \\ &= \mathop{\mathrm{INF}}_{x \in X} E_T(F(y_1, \varphi(x)), F(y_2, \varphi(x))) = \\ &= F(y_1, y_2)\end{aligned}$$

per tots $y_1, y_2 \in Y$. ■

Sigui $\varphi : X \longrightarrow X$ isomorfisme, i considerem:

$$\begin{aligned}\overline{\varphi} : \phi_E(X) &\rightarrow \phi_E(X) \\ \phi_E(x) &\rightarrow \overline{\varphi}(\phi_E(x))\end{aligned}$$

on $\overline{\varphi}(\phi_E(x)) : X \longrightarrow [0,1]$ i, per tot $u \in X$, $\overline{\varphi}(\phi_E(x))(u) = \phi_E(\varphi(x))(u)$.

Com que $\phi_E : X \rightarrow \phi_E(X) \subseteq H_E$ és isomorfisme, podem identificar cada element $x \in X$ amb la seva imatge per ϕ_E (i.e. la columna de x), i notar simplement $\overline{\varphi} = \varphi$.

D'altra banda, podem considerar $\varphi^T : H_E \rightarrow H_E$ que és isomorfisme (proposició 3.3.18)

$$
\begin{array}{ccc}
H_E & \xleftarrow{\varphi^T} & H_E \\
\uparrow{\scriptstyle \phi_E} & & \uparrow{\scriptstyle \phi_E} \\
X & \xrightarrow{\varphi} & X \\
\downarrow{\scriptstyle \phi_E} & & \downarrow{\scriptstyle \phi_E} \\
H_E & \xrightarrow{\overline{\varphi}} & H_E
\end{array}
$$

Figura 3.3

El següent teorema expressa la relació entre φ i φ^T.

Teorema 3.4.10. Amb les notacions precedents, es té que $\varphi^T = \varphi^{-1}$.

Demostració. Per ser φ^T bijectiva, s'ha de veure que $\varphi^T(\phi_E(\varphi(x))) = \phi_E(x)$, per tot $x \in X$.

(En particular, quedarà provat que $\varphi^T : \phi_E(X) \rightarrow \phi_E(X)$ és bijectiva). Sigui $x \in X$. Llavors, per tot $u \in X$, es té:

$$
\begin{aligned}
\varphi^T(\phi_E(\varphi(x)))(u) &= \phi_E(\varphi(x))(\varphi(u)) = \\
&= E(\varphi(x), \varphi(y)) = E(x, u) = \phi_E(x)(u). \quad \blacksquare
\end{aligned}
$$

La interpretació de φ^T com a inversa de φ evoca inevitablement un resultat similar en la teoria d'Espais Vectorials que l'automorfisme adjunt f^T d'un automorfisme f ortogonal coincideix amb f^{-1} [Castellet & Llerena, 88]. El paral·lelisme, però, no acaba aquí. Si P és la matriu de f en una base ortonormal (aquí, la paraula base fa referència al sentit habitual d'aquest terme en espais vectorials), llavors P^T (la matriu transposada, obtinguda a partir de P canviant files per columnes) és la matriu de f^{-1} en la mateixa base. Amb la notació introduïda en la secció 3.1, en què si $|X| = n$ i $|H| = m$ ($H \subseteq [0,1]^X$), representàvem H per una matriu $M_i = (m_{ij})$, $i = 1 \div n$, $j = 1 \div m$, on $m_{ij} = h_j(y_i)$, podem ara representar l'aplicació $\varphi : H \rightarrow [0,1]^X$ per una matriu $M_\varphi = (m_{ij})$ $i = 1 \div n$, $j = 1 \div m$, tal que $m_{ij} = \varphi(h_j)(x_i)$.

Amb aquest conveni, el paral·lelisme amb la teoria d'Espais Vectorials és sorprenent: si M és la matriu de $\overline{\varphi}$, llavors la matriu de $\varphi^{-1} = \varphi^T$ és, justament, la seva transposada M^T. En efecte,

$$m_{ij} = \overline{\varphi}(\phi_E(x_j))(x_i) = \phi_E(\varphi(x_j))(x_i) = E(x_i, \varphi(x_j)) \quad i = 1 \div n,\ j = 1 \div m$$

mentre que si N és la matriu de φ^T,

$$n_{ij} = \varphi^T(\phi_E(x_j))(x_i) = \phi_E(x_j)(\varphi(x_i)) = E(\varphi(x_i), x_j) \quad i = 1 \div n,\ j = 1 \div m$$

i, per tant, $N = M^T$.

D'altra banda, com que φ és isomorfisme, φ^{-1} també ho és, d'on $n_{ij} = E(\varphi(x_i), x_j) = E(x_i, \varphi^{-1}(x_j))$, $i = 1 \div n$, $j = 1 \div m$, resultant que $N = M^T$ és la matriu de φ^{-1}.

En un altre ordre de coses, el Corol·lari 3.4.3. planteja un problema interessant relatiu a l'estructura dual.

Aplicant reiteradament el corol·lari 3.4.3. a (X, E) i a $(X, E)^* = (H_E, \overline{E})$, es té que $\phi_{\overline{E}} \circ \phi_E : X \to H_{\overline{E}} \subseteq [0,1]^{H_E}$ és un morfisme (injectiu).

D'altra banda, el teorema 3.2.10 assegura que

$$\begin{array}{rcl} B_{H_E} : X & \to & [0,1]^{H_E} \\ x & \mapsto & B_{H_E}(x) = x^{**} \end{array}$$

és també un morfisme (injectiu). La pregunta natural a fer-se és si ambdós morfismes coincideixen. El següent teorema respon a aquesta qüestió.

Teorema 3.4.11. Donat $h \in H_E$, són equivalents:

(a) $\phi_{\overline{E}} \circ \phi_E(x)(h) = x^{**}(h)$

(b) $T\,(h(x_1), h(x_2)) \leq E(x_1, x_2)$, per tots $x_1, x_2 \in X$

(c) Existeix una extensió (Y, F) de (X, E) amb $Y = X \cup \{y\}$, $(y \notin X)$ i $h(x) = F(y, x)$, per tot $x \in X$.

Demostració. (b) $\Rightarrow$(c) Es defineix F com segueix:

$$\begin{array}{ll} F(x_1, x_2) = E(x_1, x_2), & \text{per tots } x_1, x_2 \in X \\ F(x, y) = F(y, x) = h(x), & \text{per tot } x \in X \\ F(y, y) = 1. & \end{array}$$

Per construcció, F és reflexiva i simètrica, i és una extensió d'E.

S'ha de comprovar que F és T-transitiva, i.e. $T(F(u,v),F(v,w)) \leq F(u,w)$, per tots $u,v,w \in Y$. Procedim per casos:

- Si $u=v$, $v=w$ ó $u=w$, és trivial.
- Si $u,v,w \in X$, llavors F i E coincideixen, i E és T-transitiva.
- Si $v=y$, i $u,w \in X$, $T(F(u,y),F(y,w)) = T(h(u),h(w)) \leq E(u,w)$, per hipòtesi.
- Si $u=y$, i $v,w \in X$, $T(F(y,v),F(v,w)) = T(h(v),E(v,w)) \leq h(w) = F(y,w)$, atès que $\hat{T}(h(v)|h(w)) \geq E(v,w)$, perquè h és generador d'E.

(c) $\Rightarrow$ (a) En general, per tots $h \in H_E$ i $x \in X$ es satisfà:

$$\begin{aligned}\phi_{\overline{E}} \circ \phi_E(x)(h) &= \phi_{\overline{E}}(\phi_E(x))(h) = \overline{E}(\phi_E(x),h) = \\ &= \operatorname*{INF}_{u\in X} E_T(\phi_E(x)(u),h(u)) = \operatorname*{INF}_{u\in X} E_T(E(x,u),h(u)) \leq h(x).\end{aligned}$$

D'altra banda, com que $h(x) = F(y,x)$, es té:

$$\begin{aligned}\operatorname*{INF}_{u\in X} E_T(E(x,u),h(u)) &= \operatorname*{INF}_{u\in X} E_T(F(x,u),F(u,y)) \geq \\ &\geq \operatorname*{INF}_{u\in Y} E_T(F(x,u),F(u,y)) = F(x,y) = h(x),\end{aligned}$$

perquè les columnes són un sistema generador per F.

Per tant, $\phi_{\overline{E}} \circ \phi_E(x)(h) = h(x) = x^{**}(h)$.

(a) $\Rightarrow$ (b)) Suposem $\phi_{\overline{E}} \circ \phi_E(x)(h) = \mathrm{INF}_{u\in X} E_T(E(x,u),h(u)) = h(x)$, per tot $x \in X$. Llavors, per tot $u \in X$, es té $\hat{T}(h(u)|E(u,x)) \geq E_T(E(x,u), h(u)) \geq h(x)$ i, per tant, $T(h(x),h(u)) \leq E(u,x)$. ■

Més enllà de la importància en l'estudi de l'estructura dual, el teorema precedent té una interessant interpretació dintre de la teoria de les classificacions difuses (veure Introducció). En aquest context, és habitual considerar els generadors com a criteris segons els quals es classifica i, fixat un generador h, els elements $x \in X$ tals que $h(x) = 1$ són els prototipus del criteri representat per h [Jacas & Valverde]. Segons el Teorema 3.4.11 ((b) i (c)), no tots els generadors $h \in H_E$ provenen de comparar elements respecte a un conjunt d'elements prototípics fixats (dintre o fora del conjunt X considerat), sinó només aquells que satisfan $T(h_1(x), h_2(x)) \leq E(x_1, x_2)$, per tots $x_1, x_2 \in X$. Així es demostra l'existència i es caracteritza els criteris de classificació que no representen les classes d'equivalència difuses (columnes) de cap element, ni dintre de X (cosa ja coneguda) ni tampoc en cap extensió Y de X.

(NOTA: en context clàssic, on E és relació d'equivalència en sentit clàssic, la discussió precedent és trivial).

Per acabar aquest capítol, es caracteritzen els punts fixos de φ i φ^T quan φ és isomorfisme.

Definició 3.4.12. Si $\varphi : X \rightarrow X$ és isomorfisme, els cicles de φ són els conjunts de la forma $\{\varphi^{(k)}(x), k \in \mathbb{Z}\}$.

Si φ és isomorfisme, llavors $E\left(\varphi^{(k)}(x), \varphi^{(k+1)}(x)\right) = E(x, \varphi(x))$, per tot $u \in \mathbb{Z}$ i per tot $x \in X$.

Teorema 3.4.13. (Caracterització dels punts fixos). Si $\varphi : X \rightarrow X$ és isomorfisme, són equivalents:

(a) $h \in H_E$ satisfà $\varphi^T(h) = h$ (i.e. h és punt fix de φ^T).

(b) h és constant sobre els cicles de φ.

A més, en aquest cas, $\overline{E}\left(h, \phi_E(\varphi^{(k)}(x))\right) = \overline{E}(h, \phi_E(x))$, per tot $k \in \mathbb{Z}$.

Demostració. (a) $\Rightarrow$ (b)

Sigui $h \in H_E$ tal que $\varphi^T(h) = h$. Com que $\varphi^T(h) = h \circ \varphi$, resulta $h(x) = h(\varphi(x))$, per tot $x \in X$. Aplicant-ho per $\varphi(x)$, es té $h(\varphi(x)) = h(\varphi^2(x))$, i, recurrentment, $h(x) = h(\varphi^{(k)}(x))$, per tot $k \in \mathbb{Z}^+$.

Com que si h és fix per φ^T també ho és per $(\varphi^T)^{-1} = (\varphi^{-1})^T$ (Proposició 3.3.3.), també es tindrà $h(x) = h(\varphi^{(-k)}(x))$, $k \in \mathbb{Z}^+$.

(b) $\Rightarrow$ (a)

Si $h(x) = h(\varphi^{(k)}(x))$ per tot $k \in \mathbb{Z}$, llavors $\varphi^T(h)(x) = h(\varphi(x)) = h(x)$, per tot $x \in X$, i.e. $\varphi^T(h) = h$.

Finalment, s'ha de veure que si h és fix per φ^T, llavors

$$\overline{E}\left(h, \phi_E(\varphi^{(k)}(x))\right) = \overline{E}(h, \phi_E(x)).$$

$$\begin{aligned}
\overline{E}\,(h, \phi_E(\varphi(x))) &= \operatorname*{INF}_{u\in X} E_T\,(h(u), \phi_E(\varphi(x))(u)) = \\
&= \operatorname*{INF}_{u\in X} E_T\,(h(u), E(\varphi(x), u)) \overset{(*)}{=} \\
&\overset{(*)}{=} \operatorname*{INF}_{u\in X} E_T\,\big(h(\varphi(u)), E(\varphi^2(x), \varphi(u))\big) \overset{(**)}{=} \\
&\overset{(**)}{=} \operatorname*{INF}_{u\in X} E_T\,\big(h(u), E(\varphi^2(x), u)\big) = \overline{E}\,\big(h, \phi_E(\varphi^2(x))\big)
\end{aligned}$$

on $(*)$ segueix del fet que h és constant sobre cicles i φ és isomorfisme, i $(**)$ perquè φ és bijectiva.

El teorema precedent indueix també una caracterització dels punts fixos de φ.

Teorema 3.4.14. (Caracterització dels punts fixos d'un isomorfisme). Si $\varphi : X \to X$ és isomorfisme, són equivalents:

(a) $\varphi(x) = x$.

(b) $\varphi^T(\phi_E(x)) = \phi_E(x)$

Demostració. Evident, a partir del fet que $\varphi^T = \varphi^{-1}$. ■