

UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA

Programa de doctorat de Matemàtica Aplicada

**CONTRIBUCIÓ A L'ESTUDI DELS
MORFISMES ENTRE OPERADORS
D'INDISTINGIBILITAT.
APLICACIÓ AL RAONAMENT
APROXIMAT.**

Autor: Dionís Boixader Ibáñez
Director: Joan Jacas Moral

Introducció.

En la teoria clàssica de conjunts es representa un subconjunt $A \subseteq X$ per la seva funció característica $\mu_A : X \rightarrow \{0, 1\}$ definida per $\mu_A(x) = 1$ si $x \in A$, i $\mu_A(x) = 0$ si $x \notin A$. La funció μ_A representa una propietat que els elements de X poden satisfer ($\mu_A(x) = 1$) o no ($\mu_A(x) = 0$), i no es considera cap altre possible estat dels elements de X respecte a la propietat μ_A . La teoria clàssica de conjunts deriva de la lògica clàssica, on les proposicions admeten només els valors de veritat 0 i 1.

És del tot evident, però, que l'enteniment humà és capaç de formar i manipular conceptes i propietats de naturalesa gradual. El llenguatge natural n'és ple. Una font inesgotable d'exemples són les sensacions i els conceptes que per abstracció se'n deriven. Així, el concepte de temperatura, format a través de les sensacions tèrmiques d'escalfor, tebior, fredor,... amb tota la infinitesa de variants i matisos que el llenguatge humà prova de sintetitzar en uns pocs termes que, vagament emprats, i en presència d'un context ben definit, aporten nivells molt significatius d'informació.

Els conceptes de naturalesa gradual tenen una gran importància en el sistema del coneixement humà. El propi Hume, quan en la seva obra "An Inquiry concerning human understanding" [D. Hume 1748] prova d'establir el principi general de que "les idees simples sempre es deriven de les impressions corresponents", es veu forçat a fer una excepció quan topa amb aquesta mena de conceptes. Concretament, en el capítol segon en que analitza l'origen de les idees proposa el cas hipotètic d'un home que, al llarg dels seus trenta anys de vida, s'ha pogut familiaritzar amb tots els colors, llevat d'un determinat matís de blau que, per casualitat, mai ha pogut veure

“...si es disposa davant seu tots els diferents matisos d'aquest color llevat d'aquell, en *descens gradual* des del més fosc fins

al més clar, és evident que percebrà un buit on falta el matís en qüestió, i tindrà consciència d'una més gran *distància* entre els colors contigus al voltant d'aquell que en qualsevol altre lloc.”

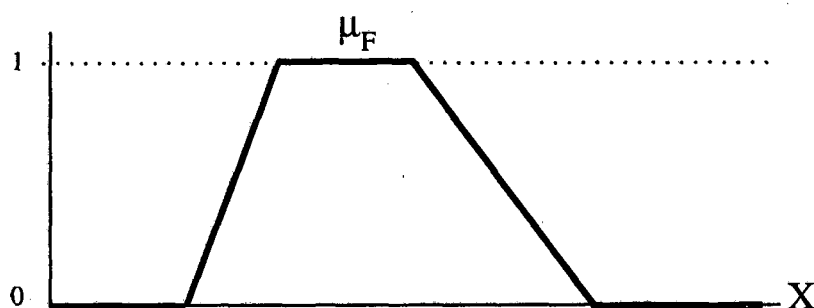
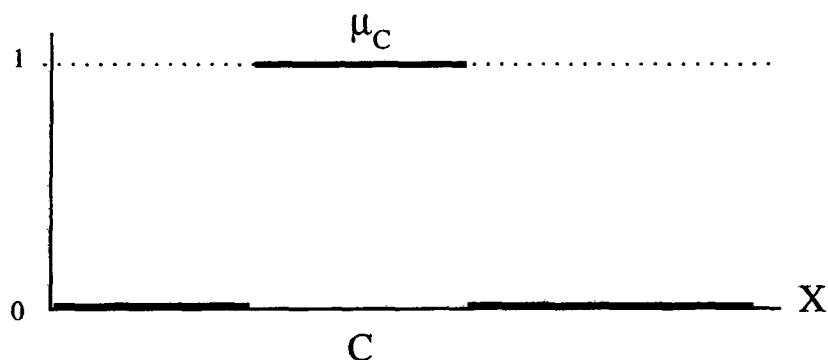
I conclou que l'home serà capaç de fer-se una idea del color absent, encara que mai n'hagi tingut una sensació. La cursiva en la cita anterior no és a l'original, i s'ha afegit per destacar el fet que Hume, ja en l'any 1748, hagués anticipat dues característiques (ordre i distància) que són una constant en tot el modern tractament del tema (que, anticipem-ho, és la Lògica Difusa).

La Lògica Clàssica tracta els conceptes graduals com a famílies de conceptes no graduals, susceptibles de ser només certs o falsos. Així, la noció de temperatura no té una representació formal, però sí el fet que la temperatura T prengui un cert valor $t_0 \in \mathbb{R}$ (i.e. $T = t_0$). Es substitueix la temperatura per la família de fets clàssics $\{T = t / t \in \mathbb{R}\}$. A nivell de les ciències experimentals, (per exemple, en física clàssica), aquesta substitució de conceptes és possible gràcies als sistemes de mesura més i més precisos que substitueixen les sensacions primàries.

Els conceptes graduals, considerats per sí mateixos, són vagues per pròpia naturalesa. La necessitat de disposar d'una teoria formal que permeti representar directament el coneixement vague o incert apareix amb força a partir dels primers treballs de L.A. Zadeh [Zadeh, 65]. Motivats per problemes de control automàtic de sistemes, posa de manifest l'existència de moltes situacions experimentals en què la via de successives determinacions més i més precises dels valors “exactes” de les variables del sistema no condueix enlloc (molts cops, per la pròpia impossibilitat d'efectuar-les). En canvi, constata que, moltes vegades, en aquest tipus de situacions, els operadors humans aconsegueixen un control satisfactori del sistema. Operadors humans que, preguntats sobre com s'ho fan, sempre expressen el seu coneixement del sistema de forma vaga.

Per representar els conceptes graduals, Zadeh introdueix la noció de *conjunt difús* (fuzzy set) a través de la seva funció característica.

La figura mostra la gràfica de la funció característica μ_F d'un conjunt difús F de la recta real, comparant-la a la d'un conjunt clàssic C .



Així, un conjunt clàssic és a un criteri clàssic (per tant, susceptible només de ser cert (1) o fals (0)), el que un subconjunt difús és a un criteri gradual.

En X , (l'univers de discurs), hi ha elements que satisfan el criteri ($\mu_F(x) = 1$), elements que no el satisfan ($\mu_F(x) = 0$), i elements que el satisfan parcialment, amb un cert grau ($0 < \mu_F(x) < 1$). Des del punt de vista lògic, $\mu_F(x)$ es pot interpretar com el valor de veritat de la proposició "x és F".

Hi ha tants subconjunts difusos en X com aplicacions $\mu : X \rightarrow [0, 1]$ (funcions característiques). La impossibilitat de separar un subconjunt difús F de la seva funció característica μ_F , fa que moltes vegades es denoti a ambdós indistintament per F , i s'escrigui $F \in [0, 1]^X = \{\mu / \mu : X \rightarrow [0, 1]\}$.

Aquest mecanisme de representació aparentment tant senzill té una força intuïtiva tan gran, que ha estat l'esperó de gairebé tota la recerca sobre els conceptes graduals en els darrers vint-i-cinc anys, i ha aconseguit d'imposar el terme *fuzzy* (difús), en tots els entorns on intervenen la vaguetat o la

incertesa.

Els problemes que amaga, però, són enormes. Des d'un punt de vista estructural, no es disposa encara d'una lògica difusa formal (a l'estil de la lògica clàssica), en la que els conjunts derivats siguin, precisament, els conjunts difusos (el problema és, precisament, la determinació d'una sintaxi adequada). Sembla clar que els sistemes de Lògica Multivaluada tenen molt a veure amb la solució d'aquest punt, però de moment no se n'ha trobat una explicació plenament satisfactòria.

Des del punt de vista del significat, tampoc hi ha cap interpretació universalment acceptada sobre què volen dir els valors de veritat estrictament entre 0 i 1. Segons Dubois i Prade [Dubois & Prade, 97] "sembla que els fuzzy sets s'han estat utilitzant principalment amb tres tipus de significat, que són 1) preferència, 2) incertesa i 3) semblança".

D'aquests tres, la incertesa dóna lloc a la teoria de les Distribucions de Possibilitat introduïdes per L.A. Zadeh, i és específic de les investigacions d'aquests darrers anys. En canvi, resulta sorprenent veure com la preferència i la semblança ja apareixen en l'exemple exposat per Hume a que ens hem referit anteriorment. En efecte, la preferència està relacionada amb l'ordre, i la semblança amb la distància. I és que, al marge de les interpretacions possibilistes (que, en definitiva, tracten de lligar la vaguetat a fets clàssics pesats amb mesures de possibilitat), l'ordre i la semblança són els trets més genuïns dels conceptes vagues.

Operadors de T-indistingibilitat

Els temes tractats en aquesta memòria s'inclouen clarament en el tercer dels significats: la semblança.

La semblança, com a concepte gradual, és l'extensió a context difús de les relacions d'equivalència clàssiques. Així, dos elements no seran ja equivalents o no, (iguals o diferents respecte a la relació considerada), sinó que se'ls assignarà un grau de semblança. Intuïtivament, una manera de fer-ho és interpretar els elements semblants com a pròxims, i els elements ben diferenciats com a llunyans, en alguna mena d'estructura mètrica.

Així, les semblances no són subconjunts difusos de l'univers de discurs X , sinó *relacions difuses*, $E : X \times X \rightarrow [0, 1]$, (subconjunts difusos del producte cartesià $X \times X$), que indueixen en X alguna noció de proximitat.

En aquesta memòria, es considerarà que la semblança entre elements es quantifica mitjançant un *operador de T-indistingibilitat* [Trillas, 82].

Definició. Donada una t-norma T i un conjunt X , un operador de T-indistingibilitat en X és una relació difusa $E : X \times X \rightarrow [0, 1]$ que satisfà:

1. $E(x, x) = 1$ (Reflexivitat)
2. $E(x, y) = E(y, x)$ (Simetria)
3. $T(E(x, y), E(y, z)) \leq E(x, z)$ (T-transitivitat) per tots $x, y, z \in X$.

Les t-normes [Alsina et al., 83] estenen al cas multivaluat ($[0, 1]$) la connectiva conjunció \wedge de la lògica clàssica, i són operacions $T : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ associatives, commutatives, amb element neutre (1) i que satisfan $T(x, 0) = T(0, x) = 0$, per tot $x \in [0, 1]$.

Si la definició d'operador de T-indistingibilitat s'inverteix la desigualtat en 3 (T-transitivitat), i es canvia l'operació T per la suma habitual en \mathbb{R} , s'obté la desigualtat triangular. Si a més, la Reflexivitat es substitueix per $E(x, x) = 0$, la definició anterior es transforma justament en la d'espai mètric. De fet, les T-indistingibilitats són el concepte dual de les S-mètriques [Jacas, 87], un tipus especial de mètriques generalitzades [Trillas & Alsina, 78].

D'altra banda, si s'interpreta $E(x, y)$ com el valor de veritat de la proposició $p(x, y)$: “ x i y són semblants”, o sigui, $E(x, y) = v(p(x, y))$, llavors la T-transitivitat afirma que $T(v(p(x, y)), v(p(y, z))) \leq v(p(x, z))$, i, segons la interpretació habitual en lògica multivaluada, $v(p(x, y) \wedge p(y, z) \rightarrow p(x, z)) = 1$.

La definició d'operador de T-indistingibilitat té l'encert d'incloure com a casos particulars altres definicions precedents en el temps, com són les Relacions Probabilístiques [Menger, 51] en què la t-norma T és justament el producte, les Semblances en sentit estricte o Likeness [Ruspini, 82] en què $T = L$ (la t-norma de Lukasiewicz, veure exemple 1.1.14) i les Similituds [Zadeh, 71] on $T = \text{MIN}$.

L'exemple de Hume il·lustra com un criteri vague (“ser blau”) indueix una semblança (distància) en l'univers de discurs dels objectes de color. El problema recíproc, consistent en determinar alguns o tots els criteris vagues que poden ser compatibles amb una semblança donada, és de gran importància. En aquesta memòria, seguint [Jacas, 87] [Recasens, 95], es fa referència als criteris compatibles amb un operador de T-indistingibilitat donat E amb el nom de *generadors d'E*, i H_E designa el conjunt de tots ells. Es consi-

dera que la relació entre E i els seus generadors ve donada pel Teorema de Representació [Valverde, 85] i s'estudien propietats estructurals del conjunt H_E .

Finalment, un aspecte estretament relacionat però que cau fora de l'abast d'aquesta memòria, és el de les classificacions difuses (*fuzzy clustering*). Si els operadors de T-indistingibilitat són relacions d'equivalència difuses, aleshores han d'induir particions difuses sobre l'univers de discurs X .

El problema de determinar aquestes particions no és trivial, i no hi ha un criteri unívocament acceptat sobre què cal considerar com a un *fuzzy cluster*. El tema ha estat font d'innombrables treballs d'investigació, (veure, per exemple [Bezdek, 81], [Jacas, 87], [Höhle, 88]), i aquí s'hi fa referència només per la seva importància, tot i que aquesta memòria no hi incideix directament.

Semblances i Raonament Aproximat

Hi ha encara un tercer aspecte que apareix en l'exemple de Hume, i és que els conceptes graduals porten implícita la idea d'*interpolació del coneixement*. Així és: ningú dubta que, sense haver vist mai aquell to específic de blau, l'home en té una idea clara, induïda pel propi concepte vague "ser blau". Aquesta idea (o semblants) apareix sota formes diferents en els moderns sistemes difusos de tractament de la informació. Es complementa amb un principi general, que trobem també formulat en la mateixa obra:

"From causes which appear similar we expect similar effects.

This is the sum of all our experimental conclusions"

Ambdós principis es troben a la base del que actualment s'anomena *Raonament Aproximat*.

No existeix una definició clara del que s'entén per Raonament Aproximat. L'expressió comprén tot un conjunt de tècniques de raonament o gestió de la informació que, d'una forma o altra, poden ser aplicades a situacions per les que no han estat específicament formulades. La lògica difusa, si bé no és l'únic sistema teòric on apareixen models de Raonament Aproximat, proporciona simbolismes i mecanismes efectius per la seva representació i implementació. L'exemple més destacat és, sense cap dubte, la *Regla Composicional d'Inferència (CRI)* [Zadeh, 73] que ha presentat formes diverses segons els autors i les èpoques.

En aquesta memòria, es formalitza el principi de que a fets semblants es corresponen semblants conseqüències a través dels *operadors d'inferència* i dels operadors de *T-indistingibilitat natural* \bar{E} que quantifiquen aquestes semblances. Això permet, d'una banda, analitzar CRI a través d'aquests operadors, i d'altra formular nous mecanismes de Raonament Aproximat diferents de CRI.

Continguts de la memòria

Aquesta memòria s'ha escrit amb l'ànim d'exposar els punts de vista i els resultats nous que l'autor ha pogut obtenir. No s'hi troba, per tant, una descripció detallada de tots els temes que conformen la teoria dels operadors de T-indistingibilitat, el Raonament Aproximat ni, per descomptat, la Lògica Difusa. S'ha glossat només els aspectes necessaris per fer la memòria auto-continguda, i s'ha reforçat l'exposició amb un conjunt ampli de referències bibliogràfiques. L'excel·lència de moltes d'elles fa absolutament innecessari i pretencios l'intent de l'autor de reescriure sobre els mateixos temes amb l'ànim de fer-los entenedors.

La memòria està dividida en dues parts:

- 1) Operadors de T-indistingibilitat (Capítols 1, 2 i 3)
- 2) Aplicacions al Raonament Aproximat (Capítols 4 i 5)

En la primera part s'estudia qüestions relatives a l'estructura dels operadors de T-indistingibilitat.

El **Capítol 1** tracta dels aspectes previs: les t-normes i, sobre tot, les seves quasi-inverses. Són les operacions bàsiques sobre les que es construeixen els operadors de T-indistingibilitat.

En el **Capítol 2** s'estudia l'estructura del conjunt H_E dels generadors d'una T-indistingibilitat E , des del punt de vista reticular i dimensional.

Finalment, el **Capítol 3** està dedicat als morfismes entre operadors de T-indistingibilitat i a l'estructura dual.

A la segona part es proposa un principi general de Raonament Aproximat que es basa en els operadors de T-indistingibilitat. En el **Capítol 4**, s'analitza les diferents formes de CRI a través d'aquest principi, i es proposa nous mecanismes d'inferència diferents de CRI (Operador Natural d'Inferència),

mentre que en el Capítol 5 s'estudia l'estructura dels nous mecanismes introduïts i el seu comportament en interpolació, en presència de múltiples regles.

Cada capítol s'encapçala amb una introducció en forma de sumari i amb un llistat de les aportacions de la memòria (resultats nous).

Terrassa, abril de 1997