

TESI DOCTORAL

Geometria i mecànica en els models de Gaudí

Una proposta de recuperació amb mitjans informàtics dels mètodes gràfics de càlcul d'estructures voltades que van utilitzar Gaudí i els seus col·laboradors fruit de l'anàlisi evolutiva i històrica a través de la geometria

Volum 2 - ANNEXOS

Doctorand:

Jaume Serrallonga i Gasch,
prof. associat del Dept. d'Estructures a l'Arquitectura

Codirector de tesi:

Dr. Ramon Sastre i Sastre,
Dept. de Construccions Arquitectòniques

Director de tesi:

Dr. Josep Gómez Serrano,
Dept. d'Estructures a l'Arquitectura

Sant Cugat del Vallès, febrer de 2003

Índex Volum 1

Pàg.	
1	Presentació
3	Presentació
11	Agraïments
13	Dedicatòria
15	Part I: Geometria i mecànica abans de Gaudí Recorregut històric
17	1 Introducció
19	1.1 Geometria? Quina geometria?
21	1.2 Orígens de la geometria i de la història
25	1.3 Un petit homenatge recordatori als grans savis i geòmetres grecs
33	2 Paràboles i catenàries
35	2.1 El descobriment de les paràboles i les corbes còniques
45	2.2 De les corbes còniques a les principals superfícies quadràtiques
49	2.3 La geometria mètrica i descriptiva. Dels savis grecs a Monge
55	2.4 El descobriment de les catenàries. De Descartes als germans Bernoulli
59	2.5 Anàlisi de les diferències entre la paràbola i la catenària
63	3 Arcs, voltes, cúpules i estàtica gràfica
65	3.1 Perquè, quan i com de les formes arquejades
69	3.2 El paper dels tractats clàssics en la construcció dels arcs
85	3.3 Disseny d'arcs fins al s. XVIII
95	3.4 La recerca d'una nova teoria dels arcs
113	3.5 Càlcul d'arcs al s. XIX
113	3.5.1 Els pares de la resistència de materials i l'estàtica gràfica
121	3.5.2 Polígon funicular i línia de pressions
126	3.5.3 Desenvolupament de mètodes gràfics
132	3.5.4 El final de l'etapa gràfica i l'inici del càlcul analític del s. XX
135	3.6 El retorn del càlcul gràfic aplicat a les obres de fàbrica

Pàg.

139	Part II: Càlculs gràfics i funiculars en temps de Gaudí
141	4 La formació d'Antoni Gaudí
143	4.1 L'ensenyament primari i secundari
147	4.2 Estudis universitaris
163	4.3 Els professors de Gaudí i altres mestres o arquitectes de referència
163	4.3.1 Professors de Gaudí a la Universitat de Barcelona
172	4.3.2 Professors de Gaudí a l'Escola d'Arquitectura
180	4.3.3 Estudis d'arquitectes on va treballar Gaudí
183	4.4 Continguts de geometria dins del currículum docent
183	4.4.1 Geometria en l'ensenyament secundari
184	4.4.2 Geometria analítica a la Universitat de Barcelona
186	4.4.3 Geometria descriptiva a la Universitat de Barcelona
192	4.4.4 Geometria descriptiva a l'Escola d'Arquitectura
203	4.5 Continguts de mecànica de les formes voltades en la construcció
203	4.5.1 Mecànica racional a la Universitat de Barcelona
204	4.5.2 Mecànica i construcció de Joan Torras i Guardiola
214	4.5.3 Altres apunts i tractats de construcció
226	4.5.4 Altres fonts d'estàtica gràfica i càlcul funicular d'arcs i voltes
239	5 Els models funiculars de Gaudí
241	5.1 Funiculars en dues dimensions
241	5.1.1 Càlculs en el paper i càlculs en l'espai
244	5.1.2 El testimoni de Joan Bergós
249	5.1.3 Altres comentaris estructurals de Bergós respecte de l'obra de Gaudí
255	5.2 Models anteriors i altres qüestions preliminars
265	5.3 El model estereostàtic de la Colònia Güell
269	5.4 El projecte previ de l'església de la Colònia Güell
272	5.4.1 La reconstrucció virtual
280	5.4.2 Càlcul del model virtual mitjançant WinTess
297	5.5 Model de cables per a les naus de la Sagrada Família
303	5.6 Altres models penjants
307	6 Càlcul gràfic dels col·laboradors de Gaudí
313	6.1 Francesc Berenguer i Mestres (1866-1944)
323	6.2 Joan Rubió i Bellver (1871-1952)
323	6.2.1 La figura de Joan Rubió i Bellver
334	6.2.2 Conferència de Joan Rubió sobre la catedral de Mallorca
337	6.2.3 Reconstrucció del càlcul de Rubió
347	6.3 Domènec Sugranyes i Gras (1878-1938)
347	6.3.1 Sugranyes, el continuador de Gaudí
351	6.3.2 Coneixements de construcció i de càlcul gràfic de Sugranyes
352	6.3.3 Càlculs gràfics d'estabilitat de les naus del temple de la Sagrada Família
354	6.3.4 Anàlisi detallada de totes les xifres del càlcul de Sugranyes
375	6.4 Arcs parabòlics en els deixebles i seguidors de Gaudí

Pàg.	
381	Part III: Perspectives de futur 75 anys després de Gaudí
383	7 Proposta de recuperació dels mètodes gràfics d'A. Gaudí per mitjà de la informàtica
385	7.1 Del regle de càlcul a l'ordinador personal
387	7.2 Repertori de programari actual per dibuixar i calcular arcs
387	7.2.1 Programes per dibuixar
394	7.2.2 Programes per calcular
397	7.3 Proposta gràfica per reconèixer i identificar arcs
397	7.3.1 Plantejaments previs
401	7.3.2 Anàlisi d'arcs en obres de Gaudí
415	7.4 Un programa de mostra per dissenyar i calcular arcs de fàbrica
417	7.4.1 El disseny de l'arc
428	7.4.2 Amidament de superfícies i centres de gravetat
430	7.4.3 Càlcul de les reaccions en els suports
434	7.4.4 Verificació dels requisits estructurals: estabilitat, resistència i rigidesa
439	7.5 Càlcul de l'arcada de la font cascada del jardí de la casa Vicens
439	7.5.1 Resum històric del monument
440	7.5.2 Criteris de l'elecció
441	7.5.3 Un exemple per mostrar el programa
453	8 Resum d'aportacions, conclusions i noves vies d'investigació
455	8.1 Resum de les principals aportacions
455	8.1.1 Aportacions al coneixement de les còniques
457	8.1.2 Aportacions al coneixement de la història dels arcs
462	8.1.3 Aportacions al coneixement de la formació de Gaudí
465	8.1.4 Aportacions a la comprensió dels mètodes de Gaudí de càlcul gràfic i funicular
467	8.1.5 Aportacions al coneixement dels models penjants de Gaudí
468	8.1.6 Aportació d'un programa per identificar els arcs de Gaudí
468	8.1.7 Aportació d'un programa per a la recuperació dels mètodes gràfics de càlcul d'arcs
471	8.2 Conclusions
473	8.3 Proposta de noves vies d'investigació

475	9	Bibliografia
477	9.1	Bibliografia general
479	9.2	Tractats de geometria, de mecànica i altres textos sobre el càlcul d'arcs
487	9.3	Bibliografia dels professors de Gaudí
491	9.4	Apunts de classe, làmines d'exercicis i altres manuscrits
495	9.5	Anuaris de l'Associació d'Arquitectes de Catalunya
499	9.6	Tesis doctorals
499	9.6.1	Tesis doctorals consultades
500	9.6.2	Recerca de tesis doctorals sobre Gaudí a la base de dades TESEO
503	9.7	Bibliografia sobre Gaudí
503	9.7.1	Bibliografia bàsica consultada
506	9.7.2	Bibliografia complementària. Recull extensiu de publicacions sobre Gaudí
517	10	Índexs
519	10.1	Índex d'autors
531	10.2	Índex d'il·lustracions, d'animacions i d'arxius vinculats

Índex Volum 2 Annexos

1	Annex 1: Paràboles i catenàries
3	1.1 Deducció de l'equació de la catenària
5	1.2 Deducció de la longitud de la catenària
11	1.3 La catenària en taules
15	1.4 Deducció de l'equació de la paràbola
17	1.5 Paràbola i catenària, corbes úniques
19	1.6 Taules comparatives entre paràbola i catenària
21	Annex 2: Tractats de geometria i estereotomia
23	2.1 Tractat de A.F. Frezier, 1754
53	2.2 Tractat de G. Monge, 1803
57	2.3 Apunts i làmines de Josep Casademunt, ≈1850
69	2.4 Atles de Llorenç Presas, 1851
85	2.5 Tractats de T. Olivier, 1845 i 1852
95	2.6 Tractat de C.F.A. Leroy, 1855
125	2.7 Tractat de A.J. Adhemar, 1858
143	2.8 Exercicis de geometria descriptiva de Macari Planella, 1859-1860
149	2.9 Tractat de J. de la Gournerie, 1860
155	2.10 Exercicis de geometria de Leandre Albareda, 1865-1871
171	2.11 Exercicis de geometria descriptiva d'August Font, 1865-1866
181	2.12 Tractat d'Antoni Rovira i Rabassa, 1897
189	2.13 Làmines de Rafael Masó, 1900-1902
201	2.14 Tractat d'Antonio Elizalde, 1912
203	Annex 3: Tractats de mecànica i construcció
205	3.1 Programa de mecànica racional de Llorenç Presas, 1847
213	3.2 Arcs i voltes segons John Millington, 1848
233	3.3 Apunts de construcció de Macari Planella, 1860
239	3.4 Estàtica gràfica de Hermann Scheffler, 1864
269	3.5 Apunts de mecànica de Joaquim Bassegoda, 1873-1874
279	3.6 Apunts de construcció de Leandre Albareda, 1873-1874, 1874-1875
289	3.7 L'estàtica gràfica de Karl Culmann, 1880
293	3.8 Arcs i voltes segons Müller-Breslau, 1886
323	3.9 Arcs i voltes segons Josep Marvà, 1888
353	3.10 Apunts de construcció de Jaume Bayó, 1897-98
367	3.11 Apunts de resistència de materials, COAC, 1910
391	3.12 Apunts de construcció de Luis Moya (ETSAM), 1924-25
425	3.13 Arcs i voltes segons Domènec Sugranyes, ≈1925
463	Annex 4: Col·laboradors de Gaudí
465	4.1 Conferència de Rubió sobre la catedral de Mallorca
489	4.2 Conferència de Sugranyes sobre la Sagrada Família
503	4.3 Comprovacions dimensionals dels càlculs i cubicatges de Sugranyes
513	4.4 Mètodes d'estàtica gràfica

ANNEX 1

Paràboles i catenàries

- 1.1 Deducció de l'equació de la catenària
- 1.2 Deducció de la longitud de la catenària
- 1.3 La catenària en taules
- 1.4 Deducció de l'equació de la paràbola
- 1.5 Paràbola i catenària, corbes úniques
- 1.6 Taules comparatives entre paràbola i catenària

ANNEX 1.1

Deducció de l'equació de la catenària

A continuació exposem el detall de la deducció de l'equació de la corba catenària.

Si prenem una petita porció de catenària, infinitesimal, de longitud "dS", i considerant "p" el pes per unitat de longitud de cable o cadena, podem establir el sistema de forces en equilibri, grafiat a la fig.2.4. 1.

Per les equacions fonamentals de l'estàtica, igualant a zero els sumatoris de forces horitzontals i verticals, trobem que:

$$\begin{aligned} \sum F_h = 0 &\Rightarrow T \cdot \cos \alpha + \frac{d(T \cdot \cos \alpha)}{dS} = T \cdot \cos \alpha \\ &\Rightarrow \frac{d(T \cdot \cos \alpha)}{dS} = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum F_v = 0 &\Rightarrow T \cdot \sin \alpha + \frac{d(T \cdot \sin \alpha)}{dS} = T \cdot \sin \alpha + p \\ &\Rightarrow \frac{d(T \cdot \sin \alpha)}{dS} - p = 0 \end{aligned}$$

En el punt de la corba x_0 , on la tangent és horitzontal, tindrem una tensió del cable horitzontal de $T_0 = T \cdot \cos \alpha$, i per tant, la component horitzontal de la tensió serà la mateixa per a qualsevol punt de la corba, que sempre serà T_0 . Aleshores $T = T_0 / \cos \alpha$, i per tant, substituint T a l'equació de les forces verticals, tindrem que:

$$\frac{d\left(\frac{T_0}{\cos \alpha} \cdot \sin \alpha\right)}{dS} - p = 0 \Rightarrow T_0 \cdot \frac{d(\tan \alpha)}{dS} = p$$

Si anomenem $m = T_0 / p$, i també $\lambda = \tan \alpha = dy / dx$, aleshores podem escriure, en funció de dx,

$$m \cdot \frac{d\lambda}{dS} = 1 \Rightarrow m \cdot \frac{d\lambda}{\sqrt{dy^2 + dx^2}} = 1 \Rightarrow m \cdot \frac{d\lambda}{\sqrt{dx^2 \cdot \left(1 + \frac{dy}{dx}\right)^2}} = 1 \Rightarrow m \cdot \frac{d\lambda}{\sqrt{1 + \lambda^2}} = dx$$

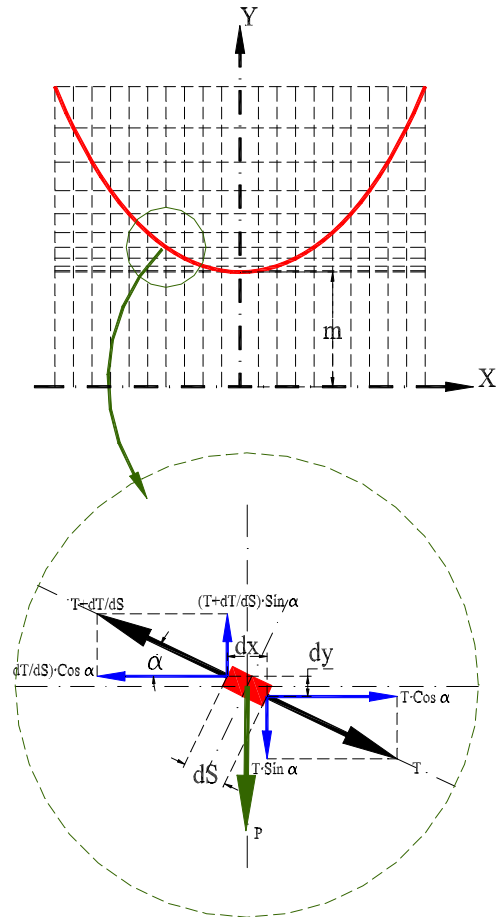


Fig. A.1.1

Integrant la longitud, tindrem que:

$$m \cdot \int_{\lambda_0}^{\lambda} \frac{d\lambda}{\sqrt{1+\lambda^2}} = \int_{x_0}^x dx \Rightarrow m \cdot L_n(\lambda + \sqrt{1+\lambda^2}) = (x - x_0) \Rightarrow \lambda + \sqrt{1+\lambda^2} = e^{\frac{x-x_0}{m}} \quad (a)$$

Per tal d'aïllar “ λ ”, a aquesta equació li sumem la que resulta de racionalitzar l'equació inversa:

$$\frac{1}{\lambda + \sqrt{1+\lambda^2}} = \frac{1}{e^{\frac{x-x_0}{m}}} \Rightarrow \frac{\lambda - \sqrt{1+\lambda^2}}{-1} = e^{-\frac{x-x_0}{m}} \Rightarrow \lambda - \sqrt{1+\lambda^2} = -e^{-\frac{x-x_0}{m}} \quad (b)$$

En integrar la suma de les dues equacions, (a) i (b), ens queda:

$$(a) + (b) \Rightarrow 2 \cdot \lambda = e^{\frac{x-x_0}{m}} - e^{-\frac{x-x_0}{m}} \Rightarrow dy = \frac{1}{2} \cdot \left(e^{\frac{x-x_0}{m}} - e^{-\frac{x-x_0}{m}} \right) \cdot dx$$

$$\int_{y_0}^y dy = \frac{1}{2} \cdot \left(m \int_{x_0}^x \frac{1}{m} \cdot e^{\frac{x-x_0}{m}} \cdot dx - (-m) \int_{x_0}^x -\frac{1}{m} \cdot e^{-\frac{x-x_0}{m}} \cdot dx \right)$$

$$y - y_0 = \frac{m}{2} \cdot \left[e^{\frac{x-x_0}{m}} + e^{-\frac{x-x_0}{m}} \right]_{x_0}^x = \frac{m}{2} \cdot \left(e^{\frac{x-x_0}{m}} + e^{-\frac{x-x_0}{m}} \right) - \frac{m}{2} \cdot (1+1)$$

Fent una translació horitzontal dels eixos, $X = x - x_0$, quedarà l'equació de la catenària, funció del cosinus hiperbòlic:

$$y - y_0 = \frac{m}{2} \cdot \left(e^{\frac{X}{m}} + e^{-\frac{X}{m}} \right) - m = m \cdot \text{Cosh}\left(\frac{X}{m}\right) - m$$

Finalment, podem obtenir la forma més reduïda de l'equació de la catenària si fem una darrera translació vertical del eixos, $Y = y - y_0 + m$, que és la que ens dona l'ordenada “Y” en funció de l'abscissa “X”, essent “m” l'ordenada del vèrtex $V = (0, m)$:

$$Y = \frac{m}{2} \cdot \left(e^{\frac{X}{m}} + e^{-\frac{X}{m}} \right) = m \cdot \text{Cosh}\left(\frac{X}{m}\right)$$

ANNEX 1.2

Deducció de la longitud de la catenària

Coneguda ja l'equació de la catenària ($y = f(x) = m \cdot \text{Cos h}(x/m)$) que ens permet trobar l'altura "y" de qualsevol abscissa "x", podem trobar ara la longitud d'un arc de catenària comprès entre dues abscises "x_a" i "x_b".

La longitud de qualsevol corba f(x) es pot trobar segons la integral següent, on f'(x) és la derivada de la funció:

$$L = \int_{x_a}^{x_b} \sqrt{1 + (f'(x))^2} \cdot dx$$

Com que $f(x) = m \cdot \text{Cos h}(x/m)$, aleshores la derivada $f'(x) = m \cdot (1/m) \cdot \text{Sin h}(x/m)$, i l'expressió de la longitud serà:

$$L = \int_{x_a}^{x_b} \sqrt{1 + \left(\text{Sin h}\left(\frac{x}{m}\right)\right)^2} \cdot dx = \int_{x_a}^{x_b} \text{Cos h}\left(\frac{x}{m}\right) \cdot dx =$$

$$= \left[m \cdot \text{Sin h}\left(\frac{x}{m}\right) \right]_{x_a}^{x_b} = m \cdot \text{Sin h}\left(\frac{x_b}{m}\right) - m \cdot \text{Sin h}\left(\frac{x_a}{m}\right) = m \cdot \text{Sin h}\left(\frac{x_b}{m}\right) + m \cdot \text{Sin h}\left(\frac{|x_a|}{m}\right)$$

Cal tenir en compte que:
 $(\text{Cos h}(x))' = \text{Sin h}(x)$
 $(\text{Sin h}(x))' = \text{Cos h}(x)$

i també que:
 $\text{Cos h}^2(x) - \text{Sin h}^2(x) = 1$

i que:
 $\text{Sin h}(-x) = -\text{Sin h}(x)$
 $\text{Cos h}(-x) = \text{Cos h}(x)$

Hem tingut en compte que els punts $A=(x_a, y_a)$ i $B=(x_b, y_b)$ des dels quals se suspèn la catenària, estan situats de tal manera que el vèrtex $V=(x_0, y_0+m)$ quedi entremig de tots dos, essent (x_0, y_0) l'origen de coordenades (0,0).

En aquest cas, com que $\text{Sin h}(-A) = -\text{Sin h}(A)$, podem escriure el resultat de la integral com la suma dels dos trams de catenària, el de la dreta i el de l'esquerra del vèrtex, considerant les coordenades de les abscises en valor absolut.

Coneguda l'expressió de la longitud de la catenària, ens podem permetre ara de resoldre el problema de trobar l'equació de la catenària coneguts els dos punts $A=(x_a, y_a)$ i $B=(x_b, y_b)$, des dels quals se suspèn la catenària, i la longitud de cable "L" compresa entre tots dos.

Ens interessa resoldre aquest problema pel paral·lelisme analític que té amb la forma de treballar, pràctica i empírica, de Gaudí en els seus models funiculars. Prenent una cadena d'una longitud coneguda i suspesa de dos punts coneguts, Gaudí determinava empíricament la forma de l'arc catenari, el qual invertit donaria forma al seu projecte arquitectònic.

Provem de trobar l'equació analítica d'aquesta corba.

Si $A=(x_a, y_a)$ i $B=(x_b, y_b)$ són dos punts qualssevol, aquesta qüestió esdevé més complexa ja que la catenària queda traslladada de l'origen, i l'equació general seria:

$$(y - y_0) = m \cdot \text{Cosh}\left(\frac{(x - x_0)}{m}\right) \Rightarrow y = y_0 + m \cdot \text{Cosh}\left(\frac{(x - x_0)}{m}\right)$$

en la qual hi ha tres incògnites, la posició del nou origen de coordenades (x_0, y_0) i el paràmetre "m", que ens indicarà la posició del vèrtex, $V=(x_0, y_0+m)$. Per tant, caldrà tres equacions independents.

Cal tenir en compte, però, que les equacions disponibles no són lineals i per tant el sistema no es podrà resoldre amb els clàssics mètodes de Gauss, de Cramer o Jacobi... vàlids només per a sistemes lineals.

Per simplificar el problema es considera que $A = (0, 0)$ i que $B = (\alpha, \beta)$, de tal manera que α i β són sempre coordenades positives. Aquesta simplificació no li treu generalitat al problema; simplement implica traslladar els eixos al punt més baix i, en el cas que l'extrem oposat quedi amb l'abscissa negativa, fer una simetria. En acabat, desfent aquestes transformacions, trobaríem el resultat segons els eixos inicials.

Les tres equacions de què disposem són:

- (1) punt A $(0 - y_0) = m \cdot \text{Cosh}\left(\frac{(0 - x_0)}{m}\right)$
- (2) punt B $(\beta - y_0) = m \cdot \text{Cosh}\left(\frac{(\alpha - x_0)}{m}\right)$
- (3) longitud L $L = m \cdot \text{Sin h}\left(\frac{x_0}{m}\right) + m \cdot \text{Sin h}\left(\frac{(\alpha - x_0)}{m}\right)$

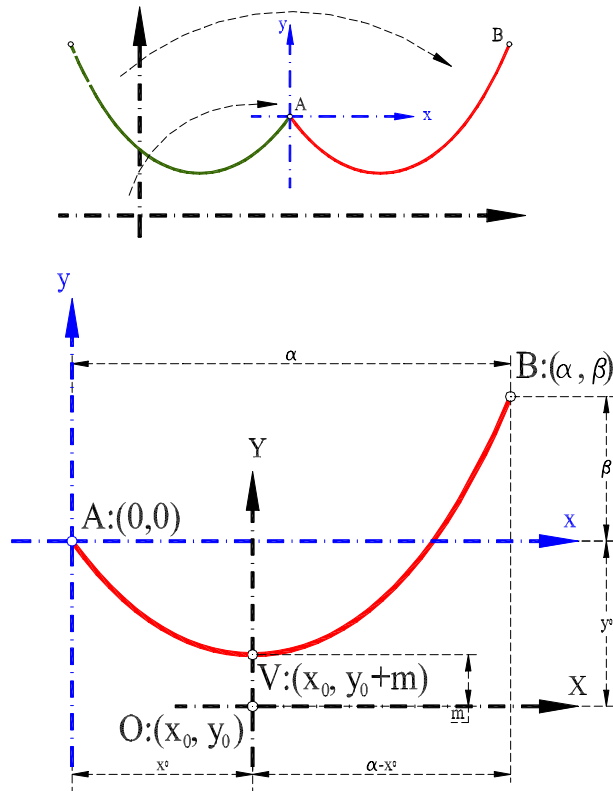


Fig. A.1.2

Les quals també podem escriure en la forma

$$(1) \text{ punt A } -y_0 = \frac{m}{2} \cdot \left(e^{\frac{-x_0}{m}} + e^{\frac{+x_0}{m}} \right)$$

$$(2) \text{ punt B } (\beta - y_0) = \frac{m}{2} \cdot \left(e^{\frac{\alpha - x_0}{m}} + e^{\frac{-\alpha - x_0}{m}} \right)$$

$$(3) \text{ longitud L } L = \frac{m}{2} \cdot \left(e^{\frac{x_0}{m}} - e^{\frac{-x_0}{m}} \right) + \frac{m}{2} \cdot \left(e^{\frac{\alpha - x_0}{m}} - e^{\frac{-\alpha - x_0}{m}} \right)$$

Per eliminar y_0 podem restar (2) – (1):

$$(2) - (1) \quad \beta = \frac{m}{2} \cdot \left(e^{\frac{\alpha - x_0}{m}} + e^{\frac{-\alpha - x_0}{m}} \right) - \frac{m}{2} \cdot \left(e^{\frac{-x_0}{m}} + e^{\frac{+x_0}{m}} \right) = \frac{m}{2} \cdot \left(-e^{\frac{+x_0}{m}} - e^{\frac{-x_0}{m}} + e^{\frac{\alpha - x_0}{m}} + e^{\frac{-\alpha - x_0}{m}} \right)$$

Per eliminar x_0 podem fer les següents operacions. Primer restar i sumar a l'equació (3) l'anterior equació trobada:

$$(3) - ((2) - (1)) \quad (L - \beta) = \frac{m}{2} \cdot \left(2 \cdot e^{\frac{x_0}{m}} + 0 + 0 - 2 \cdot e^{\frac{-\alpha - x_0}{m}} \right)$$

$$(3) + ((2) - (1)) \quad (L + \beta) = \frac{m}{2} \cdot \left(0 - 2 \cdot e^{\frac{-x_0}{m}} + 2 \cdot e^{\frac{\alpha - x_0}{m}} + 0 \right)$$

Si ara multipliquem aquestes dues equacions, aleshores

$$L^2 - \beta^2 = m^2 \cdot \left(-1 + e^{\frac{x_0}{m}} \cdot e^{\frac{\alpha - x_0}{m}} + e^{\frac{-\alpha - x_0}{m}} \cdot e^{\frac{-x_0}{m}} - 1 \right)$$

$$\Rightarrow L^2 - \beta^2 = m^2 \cdot \left(e^{\frac{x_0 + \alpha - x_0}{m}} + e^{\frac{-\alpha + x_0 - x_0}{m}} - 2 \right) = m^2 \cdot \left(e^{\frac{\alpha}{m}} + e^{\frac{-\alpha}{m}} - 2 \right) = m^2 \cdot \left(e^{\frac{\alpha}{2 \cdot m}} - e^{\frac{-\alpha}{2 \cdot m}} \right)^2$$

I per tant, ens queda tota l'equació amb una sola incògnita, en funció de “m”, la resta són paràmetres coneguts. Si ara fem el canvi i anomenem l'exponent “u” ($u = \alpha/2 \cdot m$), tindrem que

$$\sqrt{L^2 - \beta^2} = m \cdot (e^u - e^{-u}) \quad \text{i com que } m = \frac{\alpha}{2 \cdot u}, \text{ aleshores}$$

$$\frac{\sqrt{L^2 - \beta^2}}{\alpha} = \frac{(e^u - e^{-u})}{2 \cdot u} \quad \text{anomenada Fórmula de Poisson}$$

Davant la dificultat d'aïllar “u” per trobar “m”, es va proposar trobar “u” gràficament per intersecció de la corba $y = e^u - e^{-u}$ amb la recta inclinada per l'origen i veurem com és possible una solució diferent del (0,0).¹²

¹² Aquesta funció ($y = e^u - e^{-u} = 2 \cdot \text{Sinh}(u)$) sempre serà la mateixa independentment dels valors de les dades del problema i és per això que alguns tractats de mecànica (Broch, Moigno, Duhamel) tabulaven els valors d'aquesta funció.

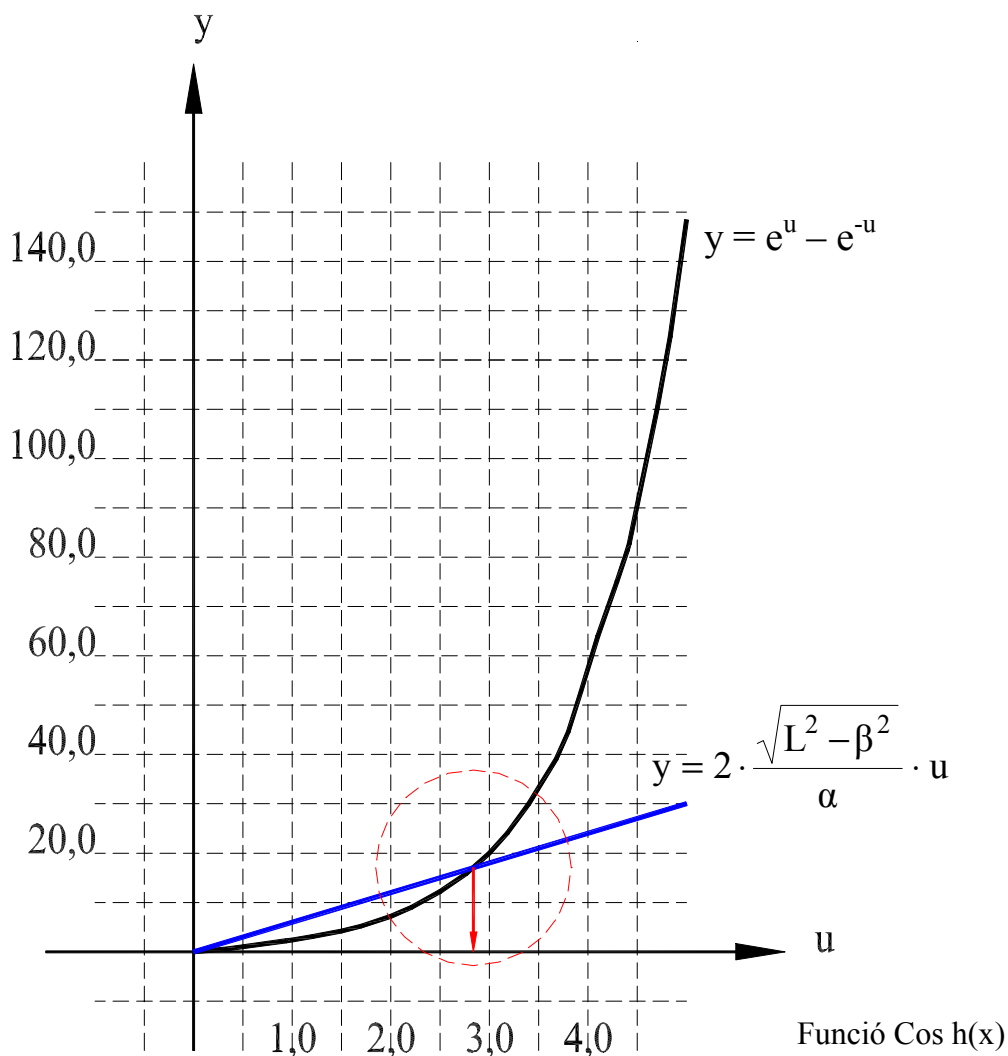


Fig. A.1.3

Per resoldre aquesta equació pot resultar molt més eficaç utilitzar mètodes numèrics d'aproximació de les arrels buscades, com per exemple el mètode de bisecció, el de la secant, el del punt fix o el de la tangent de Newton-Rapson.

A partir de “u” trobarem fàcilment: $m = \alpha / 2 \cdot u$.

Un cop trobada “m” tenim la forma de la catenària analíticament definida, però encara no està col·locada al seu lloc, ja que les coordenades del nou origen (x_0, y_0) són encara dues incògnites.

Una manera de trobar y_0 és utilitzar les expressions de sumes i restes en trigonometria hiperbòlica:

$$\begin{aligned}\operatorname{Cos h}(A+B) &= \operatorname{Cos h} A \cdot \operatorname{Cos h} B + \operatorname{Sin h} A \cdot \operatorname{Sin h} B \\ \operatorname{Cos h}(A-B) &= \operatorname{Cos h} A \cdot \operatorname{Cos h} B - \operatorname{Sin h} A \cdot \operatorname{Sin h} B\end{aligned}$$

Aleshores podem expressar l'equació (2) de la forma:

$$\begin{aligned}(\beta - y_0) &= m \cdot \operatorname{Cos h}\left(\frac{\alpha - x_0}{m}\right) = m \cdot \operatorname{Cos h}\left(\frac{\alpha}{m} + \frac{-x_0}{m}\right) \quad \text{i per tant} \\ (\beta - y_0) &= m \cdot \left[\operatorname{Cos h}\left(\frac{\alpha}{m}\right) \cdot \operatorname{Cos h}\left(\frac{-x_0}{m}\right) + \operatorname{Sin h}\left(\frac{\alpha}{m}\right) \cdot \operatorname{Sin h}\left(\frac{-x_0}{m}\right) \right]\end{aligned}$$

De l'equació (1) sabem que

$$\frac{-y_0}{m} = \operatorname{Cos h}\left(\frac{-x_0}{m}\right)$$

i per altra banda, sabem que

$$\begin{aligned}\operatorname{Cos h}^2 A - \operatorname{Sin h}^2 A &= 1 \quad \Rightarrow \quad \operatorname{Sin h} A = \sqrt{\operatorname{Cos h}^2 A - 1} \\ \text{i per tant} \quad \Rightarrow \quad \operatorname{Sin h}\left(\frac{-x_0}{m}\right) &= \sqrt{\operatorname{Cos h}^2\left(\frac{-x_0}{m}\right) - 1}\end{aligned}$$

Substituint a la nova equació (2), tenim que

$$\begin{aligned}(\beta - y_0) &= m \cdot \left[\operatorname{Cos h}\left(\frac{\alpha}{m}\right) \cdot \frac{-y_0}{m} + \operatorname{Sin h}\left(\frac{\alpha}{m}\right) \cdot \sqrt{\operatorname{Cos h}^2\left(\frac{-x_0}{m}\right) - 1} \right] \\ (\beta - y_0) &= m \cdot \left[\operatorname{Cos h}\left(\frac{\alpha}{m}\right) \cdot \frac{-y_0}{m} + \operatorname{Sin h}\left(\frac{\alpha}{m}\right) \cdot \sqrt{\left(\frac{-y_0}{m}\right)^2 - 1} \right]\end{aligned}$$

Que queda amb una sola incògnita, y_0 , ja que α , β i m són ja paràmetres coneguts, i per tant ja podem resoldre l'equació de segon grau per trobar y_0 :

$$\left[\frac{(\beta - y_0)}{m} - \text{Cos h} \left(\frac{\alpha}{m} \right) \cdot \frac{-y_0}{m} \right]^2 = \text{Sin h}^2 \left(\frac{\alpha}{m} \right) \cdot \left(\left(\frac{-y_0}{m} \right)^2 - 1 \right)$$

$$\frac{\beta^2 - 2\beta \cdot y_0 + y_0^2}{m^2} - 2 \cdot \frac{(\beta - y_0)}{m} \cdot \text{Cos h} \left(\frac{\alpha}{m} \right) \cdot \frac{-y_0}{m} + \text{Cos h}^2 \left(\frac{\alpha}{m} \right) \cdot \frac{y_0^2}{m^2} = \text{Sin h}^2 \left(\frac{\alpha}{m} \right) \cdot \left(\frac{-y_0}{m} \right)^2 - \text{Sin h}^2 \left(\frac{\alpha}{m} \right)$$

$$\left[\frac{1 - 2 \cdot \text{Cos h} \left(\frac{\alpha}{m} \right) + \text{Cos h}^2 \left(\frac{\alpha}{m} \right) - \text{Sin h}^2 \left(\frac{\alpha}{m} \right)}{m^2} \right] \cdot y_0^2 + \left[\frac{-2\beta + 2\beta \cdot \text{Cos h} \left(\frac{\alpha}{m} \right)}{m^2} \right] \cdot y_0 + \left[\frac{\beta^2}{m^2} + \text{Sin h}^2 \left(\frac{\alpha}{m} \right) \right] = 0$$

que finalment, simplificant, quedarà

$$\left[1 - \text{Cos h} \left(\frac{\alpha}{m} \right) \right] \cdot y_0^2 + \left[-\beta + \beta \cdot \text{Cos h} \left(\frac{\alpha}{m} \right) \right] \cdot y_0 + \left[\frac{\beta^2 + m^2 \cdot \text{Sin h}^2 \left(\frac{\alpha}{m} \right)}{2} \right] = 0$$

Coneguda y_0 , per trobar x_0 , podem substituir a l'equació (1)

$$(0 - y_0) = m \cdot \text{Cos h} \left(\frac{(0 - x_0)}{m} \right) = m \cdot \text{Cos h} \left(\frac{x_0}{m} \right) \Rightarrow \text{Arg Cos h} \left(\frac{-y_0}{m} \right) = \frac{x_0}{m}$$

$$\Rightarrow x_0 = m \cdot \text{Arg Cos h} \left(\frac{-y_0}{m} \right)$$

I queda resolt el problema.

ANNEX 1.3

La catenària en taules

Com hem vist, el procés d'obtenció de la corba catenària és complex i val la pena tenir tabulats els valors de diferents punts de la corba. És per això que, a continuació, mostrem una possible manera de tabular la gamma de possibles resultats.

Per utilitzar aquestes taules cal tenir en compte que el primer suport se situa al punt (0,0) i l'altre suport se situa al punt (X_2 , Y_2), essent aquestes dues coordenades positives. Si la longitud considerada de cable és justament $L = 10$ m, aleshores $(X_2, Y_2) = (\alpha, \beta)$, però si no és així ($L \neq 10$ m) aleshores cal trobar α i β per homotècia: $\alpha = X_2 \cdot 10/L$ i igualment $\beta = Y_2 \cdot 10/L$.

Un cop convertit el problema a longitud $L = 10$, aleshores podem entrar a la taula corresponent al valor $\alpha/10$ i després llegir les posicions del vèrtex (x_0 , y_0+m) segons la fila que correspongui al valor β/α .

Finalment, caldrà transformar el resultat obtingut desfent l'homotècia ($X_0 = x_0 \cdot L/10$; $Y_0 = (y_0+m) \cdot L/10$), per trobar la posició del vèrtex de la corba, és a dir, les coordenades del punt amb fletxa màxima, respecte del primer suport (0,0).

L (m)	α (m)	β (m)	x_0 (m)	$y_0 + m$ (m)	α / L	β / α
10,00	0,10	0,00	0,0500	-4,9931	0,01	0,00
10,00	0,10	1,00	0,0493	-4,4931	0,01	10,00
10,00	0,10	2,00	0,0486	-3,9931	0,01	20,00
10,00	0,10	3,00	0,0479	-3,4931	0,01	30,00
10,00	0,10	4,00	0,0471	-2,9930	0,01	40,00
10,00	0,10	5,00	0,0461	-2,4930	0,01	50,00
10,00	0,10	6,00	0,0451	-1,9929	0,01	60,00
10,00	0,10	7,00	0,0437	-1,4928	0,01	70,00
10,00	0,10	8,00	0,0418	-0,9925	0,01	80,00
10,00	0,10	9,00	0,0383	-0,4921	0,01	90,00

L (m)	α (m)	β (m)	x_0 (m)	$y_0 + m$ (m)	α / L	β / α
10,00	1,00	0,00	0,5000	-4,8901	0,10	0,00
10,00	1,00	1,00	0,4888	-4,3900	0,10	1,00
10,00	1,00	2,00	0,4773	-3,8895	0,10	2,00
10,00	1,00	3,00	0,4651	-3,3888	0,10	3,00
10,00	1,00	4,00	0,4517	-2,8876	0,10	4,00
10,00	1,00	5,00	0,4363	-2,3859	0,10	5,00
10,00	1,00	6,00	0,4177	-1,8834	0,10	6,00
10,00	1,00	7,00	0,3932	-1,3798	0,10	7,00
10,00	1,00	8,00	0,3565	-0,8741	0,10	8,00
10,00	1,00	9,00	0,2826	-0,3638	0,10	9,00

L (m)	α (m)	β (m)	x_0 (m)	$y_0 + m$ (m)	α / L	β / α
10,00	2,00	0,00	1,0000	-4,7283	0,20	0,00
10,00	2,00	1,00	0,9719	-4,2279	0,20	0,50
10,00	2,00	2,00	0,9429	-3,7266	0,20	1,00
10,00	2,00	3,00	0,9119	-3,2242	0,20	1,50
10,00	2,00	4,00	0,8774	-2,7207	0,20	2,00
10,00	2,00	5,00	0,8373	-2,2155	0,20	2,50
10,00	2,00	6,00	0,7876	-1,7083	0,20	3,00
10,00	2,00	7,00	0,7201	-1,1977	0,20	3,50
10,00	2,00	8,00	0,6130	-0,6821	0,20	4,00
10,00	2,00	9,00	0,3670	-0,1664	0,20	4,50

L (m)	α (m)	β (m)	x_0 (m)	$y_0 + m$ (m)	α / L	β / α
10,00	3,00	0,00	1,5000	-4,5245	0,30	0,00
10,00	3,00	1,00	1,4497	-4,0237	0,30	0,33
10,00	3,00	2,00	1,3975	-3,5210	0,30	0,67
10,00	3,00	3,00	1,3414	-3,0163	0,30	1,00
10,00	3,00	4,00	1,2783	-2,5092	0,30	1,33
10,00	3,00	5,00	1,2035	-1,9990	0,30	1,67
10,00	3,00	6,00	1,1085	-1,4848	0,30	2,00
10,00	3,00	7,00	0,9734	-0,9651	0,30	2,33
10,00	3,00	8,00	0,7431	-0,4412	0,30	2,67
10,00	3,00	9,00	0,0775	-0,0031	0,30	3,00

L (m)	α (m)	β (m)	x_0 (m)	$y_0 + m$ (m)	α / L	β / α
10,00	4,00	0,00	2,0000	-4,2775	0,40	0,00
10,00	4,00	1,00	1,9211	-3,7760	0,40	0,25
10,00	4,00	2,00	1,8391	-3,2714	0,40	0,50
10,00	4,00	3,00	1,7500	-2,7634	0,40	0,75
10,00	4,00	4,00	1,6484	-2,2514	0,40	1,00
10,00	4,00	5,00	1,5254	-1,7345	0,40	1,25
10,00	4,00	6,00	1,3633	-1,2116	0,40	1,50
10,00	4,00	7,00	1,1199	-0,6832	0,40	1,75
10,00	4,00	8,00	0,6455	-0,1729	0,40	2,00
10,00	4,00	9,00	-	-	0,40	2,25

L (m)	α (m)	β (m)	x_0 (m)	$y_0 + m$ (m)	α / L	β / α
10,00	5,00	0,00	2,5000	-3,9819	0,50	0,00
10,00	5,00	1,00	2,3843	-3,4796	0,50	0,20
10,00	5,00	2,00	2,2633	-2,9724	0,50	0,40
10,00	5,00	3,00	2,1303	-2,4600	0,50	0,60
10,00	5,00	4,00	1,9757	-1,9415	0,50	0,80
10,00	5,00	5,00	1,7823	-1,4160	0,50	1,00
10,00	5,00	6,00	1,5137	-0,8840	0,50	1,20
10,00	5,00	7,00	1,0679	-0,3575	0,50	1,40
10,00	5,00	8,00	0,0792	-0,0013	0,50	1,60
10,00	5,00	9,00	-	-	0,50	1,80

L (m)	α (m)	β (m)	x_0 (m)	$y_0 + m$ (m)	α / L	β / α
10,00	6,00	0,00	3,0000	-3,6278	0,60	0,00
10,00	6,00	1,00	2,8354	-3,1243	0,60	0,17
10,00	6,00	2,00	2,6618	-2,6136	0,60	0,33
10,00	6,00	3,00	2,4676	-2,0951	0,60	0,50
10,00	6,00	4,00	2,2348	-1,5681	0,60	0,67
10,00	6,00	5,00	1,9283	-1,0331	0,60	0,83
10,00	6,00	6,00	1,4611	-0,4984	0,60	1,00
10,00	6,00	7,00	0,4980	-0,0431	0,60	1,17
10,00	6,00	8,00	-	-	0,60	1,33
10,00	6,00	9,00	-	-	0,60	1,50

L (m)	α (m)	β (m)	x_0 (m)	$y_0 + m$ (m)	α / L	β / α
10,00	7,00	0,00	3,5000	-3,1972	0,70	0,00
10,00	7,00	1,00	3,2664	-2,6920	0,70	0,14
10,00	7,00	2,00	3,0165	-2,1762	0,70	0,29
10,00	7,00	3,00	2,7287	-1,6493	0,70	0,43
10,00	7,00	4,00	2,3643	-1,1119	0,70	0,57
10,00	7,00	5,00	1,8339	-0,5715	0,70	0,71
10,00	7,00	6,00	0,8252	-0,0886	0,70	0,86
10,00	7,00	7,00	-	-	0,70	1,00
10,00	7,00	8,00	-	-	0,70	1,14
10,00	7,00	9,00	-	-	0,70	1,29

L (m)	α (m)	β (m)	x_0 (m)	$y_0 + m$ (m)	α / L	β / α
10,00	8,00	0,00	4,0000	-2,6544	0,80	0,00
10,00	8,00	1,00	3,6566	-2,1465	0,80	0,13
10,00	8,00	2,00	3,2792	-1,6227	0,80	0,25
10,00	8,00	3,00	2,8159	-1,0839	0,80	0,38
10,00	8,00	4,00	2,1489	-0,5391	0,80	0,50
10,00	8,00	5,00	0,8397	-0,0614	0,80	0,63
10,00	8,00	6,00	-	-	0,80	0,75
10,00	8,00	7,00	-	-	0,80	0,88
10,00	8,00	8,00	-	-	0,80	1,00
10,00	8,00	9,00	-	-	0,80	1,13

L (m)	α (m)	β (m)	x_0 (m)	$y_0 + m$ (m)	α / L	β / α
10,00	9,00	0,00	4,5000	-1,9071	0,90	0,00
10,00	9,00	1,00	3,9238	-1,3936	0,90	0,11
10,00	9,00	2,00	3,2329	-0,8549	0,90	0,22
10,00	9,00	3,00	2,1567	-0,3093	0,90	0,33
10,00	9,00	4,00	1,2612	-0,0585	0,90	0,44
10,00	9,00	5,00	-	-	0,90	0,56
10,00	9,00	6,00	-	-	0,90	0,67
10,00	9,00	7,00	-	-	0,90	0,78
10,00	9,00	8,00	-	-	0,90	0,89
10,00	9,00	9,00	-	-	0,90	1,00

ANNEX 1.4

Deducció de l'equació de la paràbola

Si en comptes de considerar el pes del cable es considera un pes que es reparteix uniformement al llarg de la seva projecció horitzontal, la corba resultant ja no és una catenària sinó, justament, és una paràbola. Aquest fet és significatiu ja que, per exemple, es pot produir senzillament quan el pes de la llosa horitzontal d'un punt es vol suspendre d'uns cables de pes menyspreable.

Podem demostrar aquest tret distintiu fonamental entre catenària i paràbola fent servir el mateix esquema, raonament i la mateixa nomenclatura que la que hem usat en la demostració de la catenària, però tenint en compte ara que la tensió T creixerà depenent de l'increment de l'abscissa "dx" i no pas de la longitud del cable "dS":

A través de les equacions fonamentals de l'estàtica trobem que:

$$\begin{aligned}\sum F_h = 0 &\Rightarrow T \cdot \cos \alpha + \frac{d(T \cdot \cos \alpha)}{dx} = T \cdot \cos \alpha \Rightarrow \frac{d(T \cdot \cos \alpha)}{dx} = 0 \\ \sum F_v = 0 &\Rightarrow T \cdot \sin \alpha + \frac{d(T \cdot \sin \alpha)}{dx} = T \cdot \sin \alpha + p \Rightarrow \frac{d(T \cdot \sin \alpha)}{dx} - p = 0\end{aligned}$$

Igual que abans, tindrem una tensió del cable horitzontal, de $T_0 = T \cdot \cos \alpha$, en el punt de la corba x_0 , on la tangent és horitzontal, i per tant la component horitzontal de la tensió serà la mateixa per a qualsevol punt de la corba. Substituint $T = T_0 / \cos \alpha$ a l'equació de les forces verticals tindrem que:

$$\frac{d\left(\frac{T_0}{\cos \alpha} \cdot \sin \alpha\right)}{dx} - p = 0 \Rightarrow T_0 \cdot \frac{d(\tan \alpha)}{dx} = p$$

Si anomenem $m = T_0 / p$, i també $\lambda = y' = dy / dx = \tan \alpha$, aleshores podem escriure, en funció de "dx", i integrar,

$$m \cdot \frac{d\lambda}{dx} = 1 \Rightarrow m \cdot d\lambda = dx \Rightarrow m \cdot \int_{\lambda_0}^{\lambda} d\lambda = \int_{x_0}^x dx \Rightarrow m \cdot (\lambda - \lambda_0) = (x - x_0)$$

Substituint " $\lambda = dy/dx$ ", $\lambda_0 = 0$ (pendent horitzontal en el vèrtex), i tornant a integrar,

$$m \cdot \frac{dy}{dx} = (x - x_0) \Rightarrow m \cdot dy = (x - x_0) \cdot dx$$

$$m \cdot \int_{y_0}^y dy = \int_{x_0}^x (x - x_0) \cdot dx \Rightarrow m \cdot (y - y_0) = \left[\frac{(x - x_0)^2}{2} \right]_{x_0}^x$$

$$m \cdot (y - y_0) = \frac{(x - x_0)^2}{2} \Rightarrow (y - y_0) = \frac{(x - x_0)^2}{2 \cdot m}$$

Fent la translació dels eixos al vèrtex ($X=x-x_0$, $Y=y-y_0$), tenim que:

$$Y = \frac{1}{2 \cdot m} (X)^2 \Rightarrow Y = \frac{p}{2 \cdot T_0} (X)^2 \quad \text{que és una paràbola}$$

Aquesta demostració posa de manifest la gran intuïció de Galileu que ja considerarà la paràbola com una bona aproximació de la catenària.

ANNEX 1.5

Paràbola i catenària, corbes úniques

En fer la transformació per homotècia, amb centre a l'origen $(0,0)$, d'una funció qualsevol del pla, $y = f(x)$, obtenim una nova funció, en la qual els valors (x,y) són modificats proporcionalment per un paràmetre K , de tal manera que $K \cdot y = f(K \cdot x)$, que escrivim amb les noves components $y_1 = f(x_1)$.

Amb notació matricial podem escriure aquesta transformació i la seva inversa, així:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} K & 0 \\ 0 & K \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/K & 0 \\ 0 & 1/K \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$$

Per tant, qualsevol funció $y = f(x)$, en transformar-se per homotècia de raó K i centre a l'origen, quedarà com $y_1/K = f(x_1/K)$, o el que és el mateix que $y_1 = K \cdot f(x_1/K)$.

Aquesta estructura és exactament la mateixa que té l'equació de la catenària, que ja hem vist, $y = m \cdot \text{Cosh}(x/m)$, i això demostra que totes les catenàries són homotètiques, semblants, totes tenen la mateixa forma, forma única, igual, per a totes.

En el cas de la paràbola, veient l'equació $y = a \cdot x^2$, hom podria pensar que podria existir una distorsió, o pèrdua de proporció entre x i y , en afectar el paràmetre a a l' x però no a la y . Malgrat tot veurem, de totes maneres, que en estirar una paràbola verticalment, en el sentit de la y , la corba obtinguda torna a ser una paràbola.

Per demostrar aquest fet simplement en tenim prou provant que una paràbola qualsevol sempre es pot transformar, per una homotècia, en l'expressió mínima $y = x^2$.

Com acabem de veure, l'homotècia transformarà l'expressió $y = a \cdot x^2$ en $y_1 = K \cdot a \cdot (x_1/K)^2$, i simplificant podem reduir-la a $y_1 = x_1^2 \cdot a/K$, que torna a ser una paràbola. Així, l'homotècia d'una paràbola és sempre una paràbola, i quan $K = a$, aleshores l'homotècia reduirà qualsevol paràbola a la seva mínima expressió, $y = x^2$, la qual, al seu torn, fent $K_1 = 1/b$, pot transformar-la homotèticament en una altra paràbola qualsevol, $y = b \cdot x^2$.

Així doncs, dues paràboles qualsevols, $y = a \cdot x^2$, $y = b \cdot x^2$, són sempre homotètiques amb una raó de $K = a/b$ que les relaciona.

Per tant, totes les paràboles són també, en essència, iguals. Totes tenen la mateixa forma, igual que la catenària o la circumferència, i es per això que nosaltres diem que la paràbola i la catenària són corbes úniques.

A continuació presentem unes taules per il·lustrar la semblança o diferència entre paràbola i catenària

ANNEX 1.6

Taulas comparatives entre paràbola i catenària

1.6.1 Taula comparativa de valors de les ordenades d'una catenària i d'una paràbola per a unes mateixes abscises (des de $x=-5$ fins a $x=5$), un mateix vèrtex i amb un paràmetre "m" tal que faci la relació llum/ fletxa: $L/fl. = 2$.

catenària		paràbola		diferència	
$y = m \cdot \text{Cosh}(x/m) - m$		$y = n \cdot x^2$		absoluta	relativa
	m = 3,09		n = 0,1999		
x	y	x	y	y	%
-5	4,9995	-5	4,9995	0,0000	0,00%
-4,5	3,8916	-4,5	4,0496	0,1580	4,06%
-4	2,9665	-4	3,1997	0,2332	7,86%
-3,5	2,2000	-3,5	2,4498	0,2498	11,36%
-3	1,5720	-3	1,7998	0,2278	14,49%
-2,5	1,0662	-2,5	1,2499	0,1837	17,23%
-2	0,6692	-2	0,7999	0,1307	19,53%
-1,5	0,3708	-1,5	0,4500	0,0792	21,35%
-1	0,1630	-1	0,2000	0,0370	22,68%
-0,5	0,0405	-0,5	0,0500	0,0095	23,48%
0	0,0000	0	0,0000	0,0000	0,00%
0,5	0,0405	0,5	0,0500	0,0095	23,48%
1	0,1630	1	0,2000	0,0370	22,68%
1,5	0,3708	1,5	0,4500	0,0792	21,35%
2	0,6692	2	0,7999	0,1307	19,53%
2,5	1,0662	2,5	1,2499	0,1837	17,23%
3	1,5720	3	1,7998	0,2278	14,49%
3,5	2,2000	3,5	2,4498	0,2498	11,36%
4	2,9665	4	3,1997	0,2332	7,86%
4,5	3,8916	4,5	4,0496	0,1580	4,06%
5	4,9995	5	4,9995	0,0000	0,00%
Fletxa total de l'arc 5,00 m				Relació Llum / fletxa 2,00	
Llum total de l'arc 10,00 m				Longitud total de l'arc 14,96 m	

Quan comparem arcs de catenària i de paràbola que salven una llum doble de la fletxa o altura de l'arc, la diferència entre una i altra corba és inapreciable. Com més petita sigui l'altura de l'arc respecte de la llum encara més petites es fan les diferències entre catenària i paràbola.

1.6.2 Taula comparativa de valors de les ordenades d'una catenària i d'una paràbola per a unes mateixes abcises (des de $x=-5$ fins a $x=5$), un mateix vèrtex i amb un paràmetre "m" tal que faci la relació llum/ fletxa: $L/fl. = 1$.

catenària		paràbola		diferència	
$y = m \cdot \text{Cosh}(x/m) - m$		$y = n \cdot x^2$		absoluta	relativa
m = 2,03		n = 0,3996			
x	y	x	y	y	%
-5	9,9968	-5	9,9968	0,0000	0,00%
-4,5	7,4118	-4,5	8,0974	0,6857	9,25%
-4	5,4037	-4	6,3980	0,9943	18,40%
-3,5	3,8498	-3,5	4,8984	1,0487	27,24%
-3	2,6552	-3	3,5989	0,9437	35,54%
-2,5	1,7468	-2,5	2,4992	0,7524	43,08%
-2	1,0691	-2	1,5995	0,5304	49,62%
-1,5	0,5806	-1,5	0,8997	0,3191	54,95%
-1	0,2516	-1	0,3999	0,1482	58,90%
-0,5	0,0620	-0,5	0,1000	0,0380	61,33%
0	0,0000	0	0,0000	0,0000	0,00%
0,5	0,0620	0,5	0,1000	0,0380	61,33%
1	0,2516	1	0,3999	0,1482	58,90%
1,5	0,5806	1,5	0,8997	0,3191	54,95%
2	1,0691	2	1,5995	0,5304	49,62%
2,5	1,7468	2,5	2,4992	0,7524	43,08%
3	2,6552	3	3,5989	0,9437	35,54%
3,5	3,8498	3,5	4,8984	1,0487	27,24%
4	5,4037	4	6,3980	0,9943	18,40%
4,5	7,4118	4,5	8,0974	0,6857	9,25%
5	9,9968	5	9,9968	0,0000	0,00%
Fletxa total de l'arc 10,00 m				Relació Llum / fletxa 1,00	
Llum total de l'arc 10,00 m				Longitud total de l'arc 23,70 m	

En aquest cas, amb un arc amb la mateixa llum que l'altura, les diferències entre catenària i paràbola comencen a fer-se notar.

1.6.3 Taula comparativa de valors de les ordenades d'una catenària i d'una paràbola per a unes mateixes abscises (des de $x=-5$ fins a $x=5$), un mateix vèrtex i amb un paràmetre "m" tal que faci la relació llum/ fletxa: **$L/fl. = 0,5$** .

Catenària		paràbola		diferència	
$y = m \cdot \text{Cosh}(x/m) - m$		$y = n \cdot x^2$		absoluta	
$m = 1,49$		$n = 0,7998$			
X	y	x	y	y	%
-5	19,9966	-5	19,9966	0,0000	0,00%
-4,5	13,8795	-4,5	16,1972	2,3177	16,70%
-4	9,5163	-4	12,7978	3,2815	34,48%
-3,5	6,4088	-3,5	9,7983	3,3895	52,89%
-3	4,2025	-3	7,1988	2,9962	71,30%
-2,5	2,6456	-2,5	4,9991	2,3535	88,96%
-2	1,5604	-2	3,1995	1,6391	105,04%
-1,5	0,8229	-1,5	1,7997	0,9768	118,69%
-1	0,3491	-1	0,7999	0,4508	129,11%
-0,5	0,0849	-0,5	0,2000	0,1151	135,65%
0	0,0000	0	0,0000	0,0000	0,00%
0,5	0,0849	0,5	0,2000	0,1151	135,65%
1	0,3491	1	0,7999	0,4508	129,11%
1,5	0,8229	1,5	1,7997	0,9768	118,69%
2	1,5604	2	3,1995	1,6391	105,04%
2,5	2,6456	2,5	4,9991	2,3535	88,96%
3	4,2025	3	7,1988	2,9962	71,30%
3,5	6,4088	3,5	9,7983	3,3895	52,89%
4	9,5163	4	12,7978	3,2815	34,48%
4,5	13,8795	4,5	16,1972	2,3177	16,70%
5	19,9966	5	19,9966	0,0000	0,00%
Fletxa total de l'arc 20,00 m				Relació Llum / fletxa 0,50	
Llum total de l'arc 10,00 m				Longitud total de l'arc 42,86 m	

En aquest cas, amb un arc amb una altura doble que la llum, les diferències entre catenària i paràbola ja són importants.

1.6.4 Taula comparativa de valors de les ordenades d'una catenària i d'una paràbola per a unes mateixes abscises (des de $x=-5$ fins a $x=5$), un mateix vèrtex i amb un paràmetre "m" tal que faci la relació llum/ fletxa: **$L/fl. = 0,25$** .

Catenària		paràbola		diferència	
$y = m \cdot \text{Cosh}(x/m) - m$		$y = n \cdot x^2$		absoluta	
$m = 1,18$		$n = 1,6095$			
x	Y	x	y	y	%
-5	39,9982	-5	39,9982	0,0000	0,00%
-4,5	25,7555	-4,5	32,3985	6,6430	25,79%
-4	16,4459	-4	25,5988	9,1529	55,65%
-3,5	10,3641	-3,5	19,5991	9,2350	89,11%
-3	6,3963	-3	14,3994	8,0031	125,12%
-2,5	3,8155	-2,5	9,9995	6,1840	162,07%
-2	2,1493	-2	6,3997	4,2504	197,76%
-1,5	1,0923	-1,5	3,5998	2,5076	229,57%
-1	0,4509	-1	1,5999	1,1490	254,80%
-0,5	0,1078	-0,5	0,4000	0,2922	271,04%
0	0,0000	0	0,0000	0,0000	0,00%
0,5	0,1078	0,5	0,4000	0,2922	271,04%
1	0,4509	1	1,5999	1,1490	254,80%
1,5	1,0923	1,5	3,5998	2,5076	229,57%
2	2,1493	2	6,3997	4,2504	197,76%
2,5	3,8155	2,5	9,9995	6,1840	162,07%
3	6,3963	3	14,3994	8,0031	125,12%
3,5	10,3641	3,5	19,5991	9,2350	89,11%
4	16,4459	4	25,5988	9,1529	55,65%
4,5	25,7555	4,5	32,3985	6,6430	25,79%
5	39,9982	5	39,9982	0,0000	0,00%
Fletxa total de l'arc 40,00 m				Relació Llum / fletxa 0,25	
Llum total de l'arc 10,00 m				Longitud total de l'arc 82,32 m	

A partir d'aquest cas, amb un arc amb una altura quatre vegades més gran que la llum, les diferències entre catenària i paràbola són molt importants i s'aprecien clarament les dues com a arcs de corbes diferents. En la mesura que l'altura es vagi fent més gran en relació amb la llum, més es notarà aquest fet.

ANNEX 2

Tractats de geometria i estereotomia

- 2.1 Tractat de M. Frezier, 1754
- 2.2 Tractat de G. Monge, 1803
- 2.3 Apunts i làmines de Josep Casademunt, ≈1850
- 2.4 Atlas de Llorenç Presas, 1851
- 2.5 Tractats de Mr. Olivier, 1845 i 1852
- 2.6 Tractat de Mr. Leroy, 1855
- 2.7 Tractat de Mr. Adhemar, 1858
- 2.8 Làmines de Macari Planella, 1859-1860
- 2.9 Tractat de Mr. Gourniere, 1860
- 2.10 Apunts de geometria de Leandre Albareda, 1865-66, 1867, 1870-71
- 2.11 Làmines d'August Font, 1865-1866
- 2.12 Tractat d'Antoni Rovira i Rabassa, 1897
- 2.13 Làmines de Rafael Massó, 1900-1902
- 2.14 Tractat d'Antonio Elizalde, 1912

Selecció de les pàgines més significatives per tal d'il·lustrar l'estat de la qüestió, en els temps de Gaudí estudiant, pel que fa a la geometria descriptiva i les seves aplicacions.

ANNEX 2.1

Tractat de M. Frezier, 1754-1769

Llibre en tres volums, molt complert, localitzat a la biblioteca de l'ETSAB. Exclòs de préstex i de consulta restringida. Cada volum té les làmines desplegable annexades al final.

Títol original: *La Théorie et la pratique de la coupe des pierres et des bois pour la construction des voutes ou traité de stereotomie à l'usage de l'architecture.*

Signatures: R-202/79 R-202/80 R-202/81

Codis de barres: 1400392110 1400392111 1400392112

És una edició nova, corregida i augmentada del seu primer tracta, també en tres volums de 1737. Aquesta edició més antiga, també en tres volums, es localitza a l'ETSAB, a la biblioteca del despatx del director:

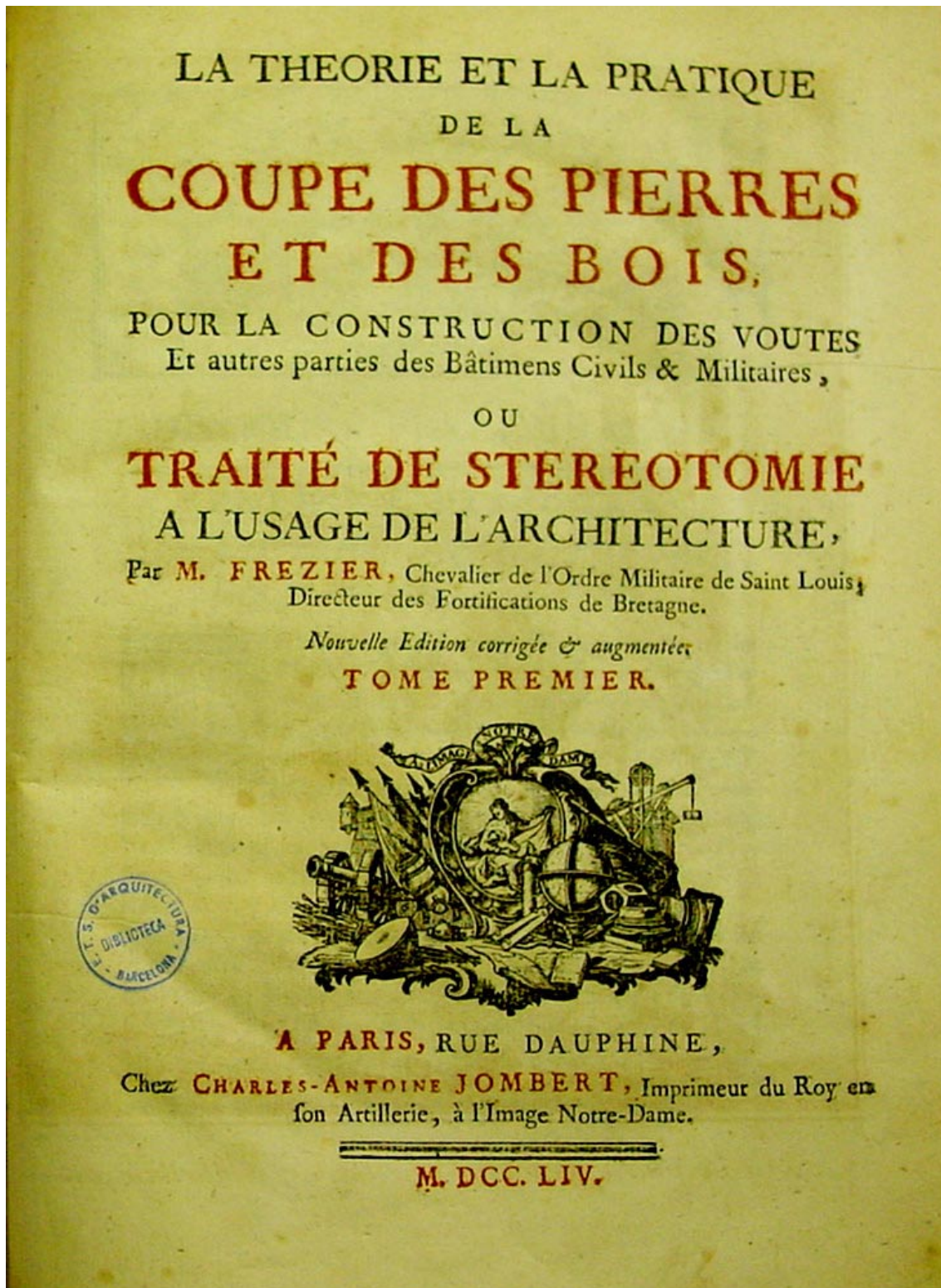
Signatures: R-D-B-IV-1 R- D-B-IV-3 R- D-B-IV-5

Codis de barres: 1210009437 1210009438 1210009439

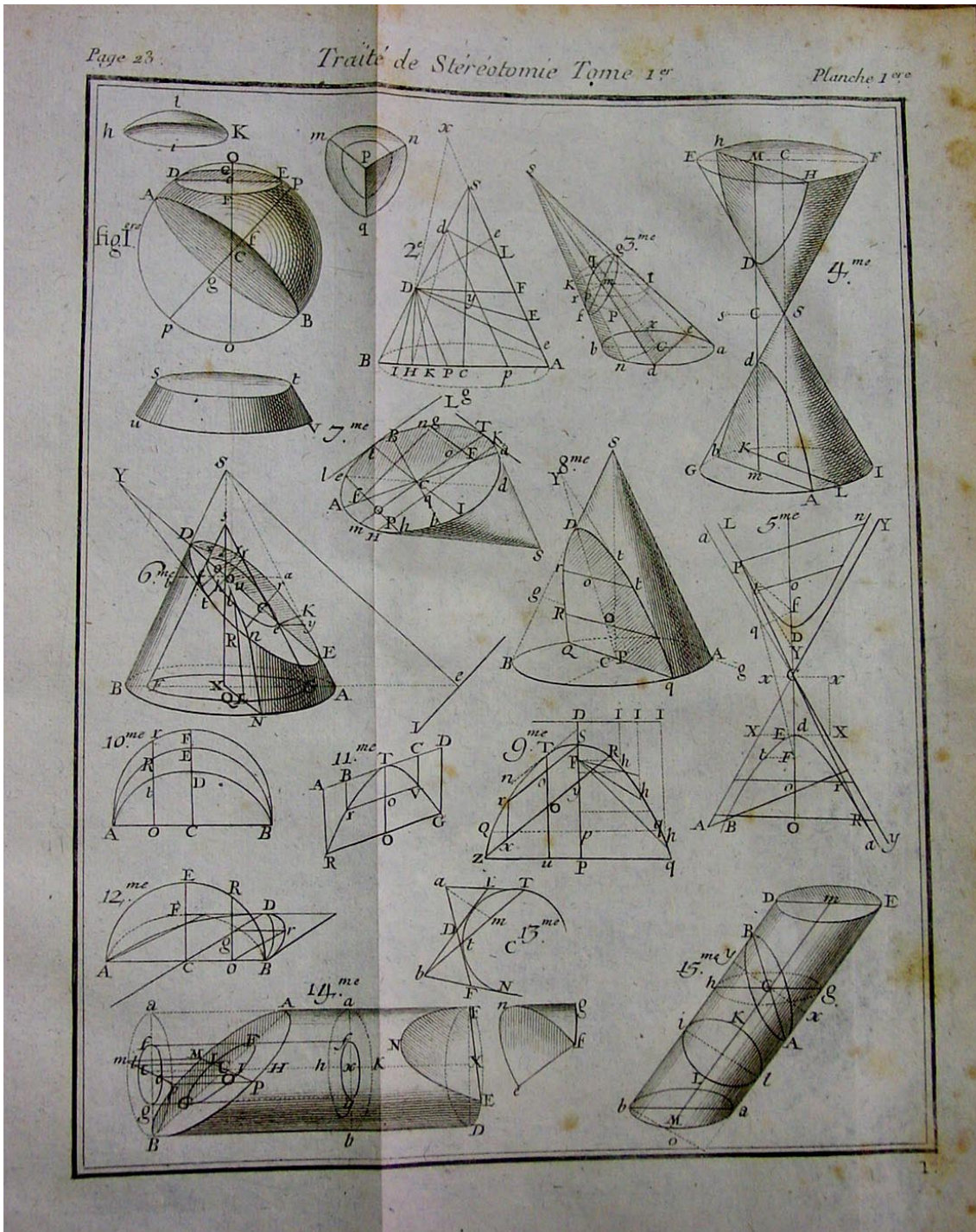
Frezier, tom I, contraportada



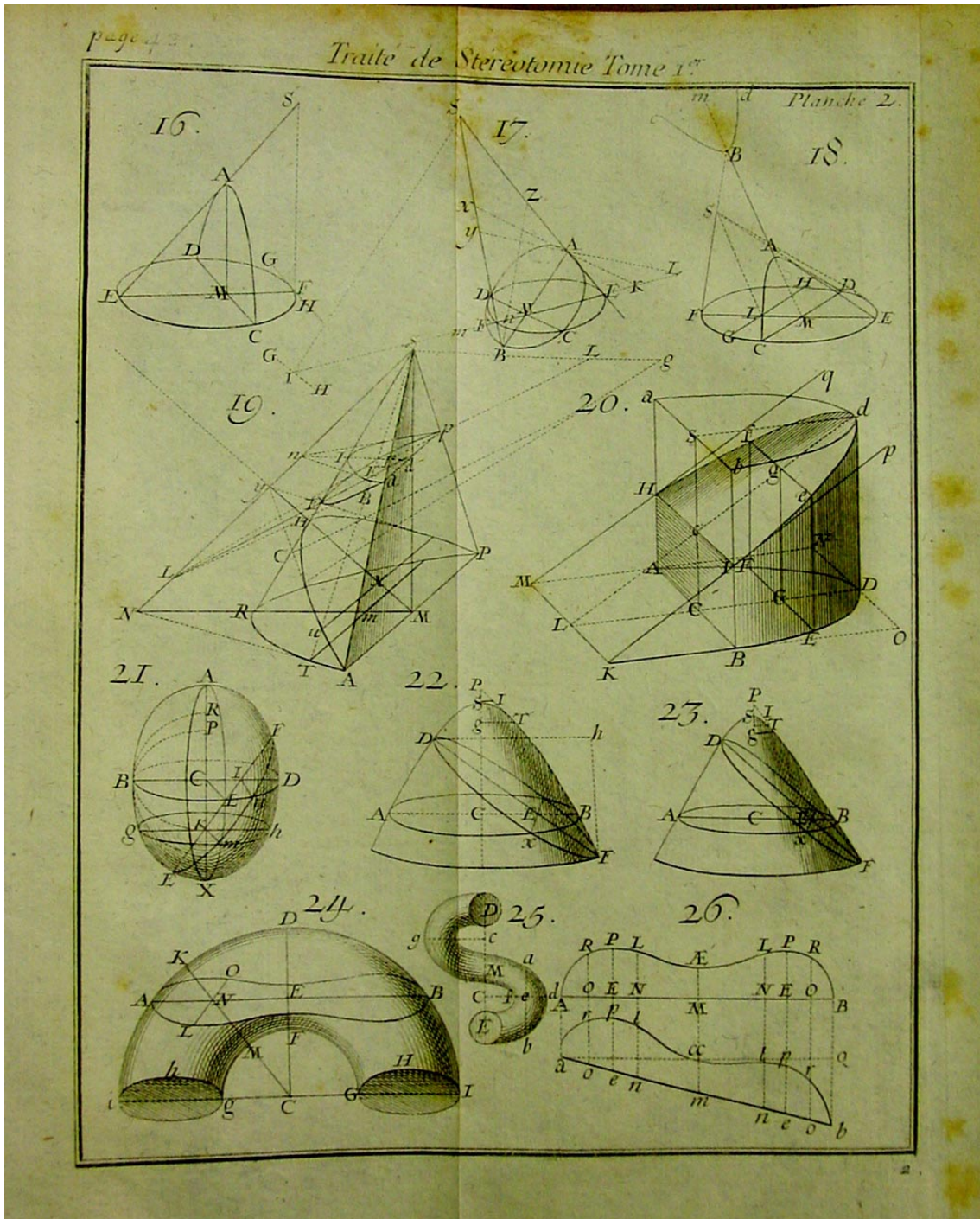
Frezier, tom I, portada



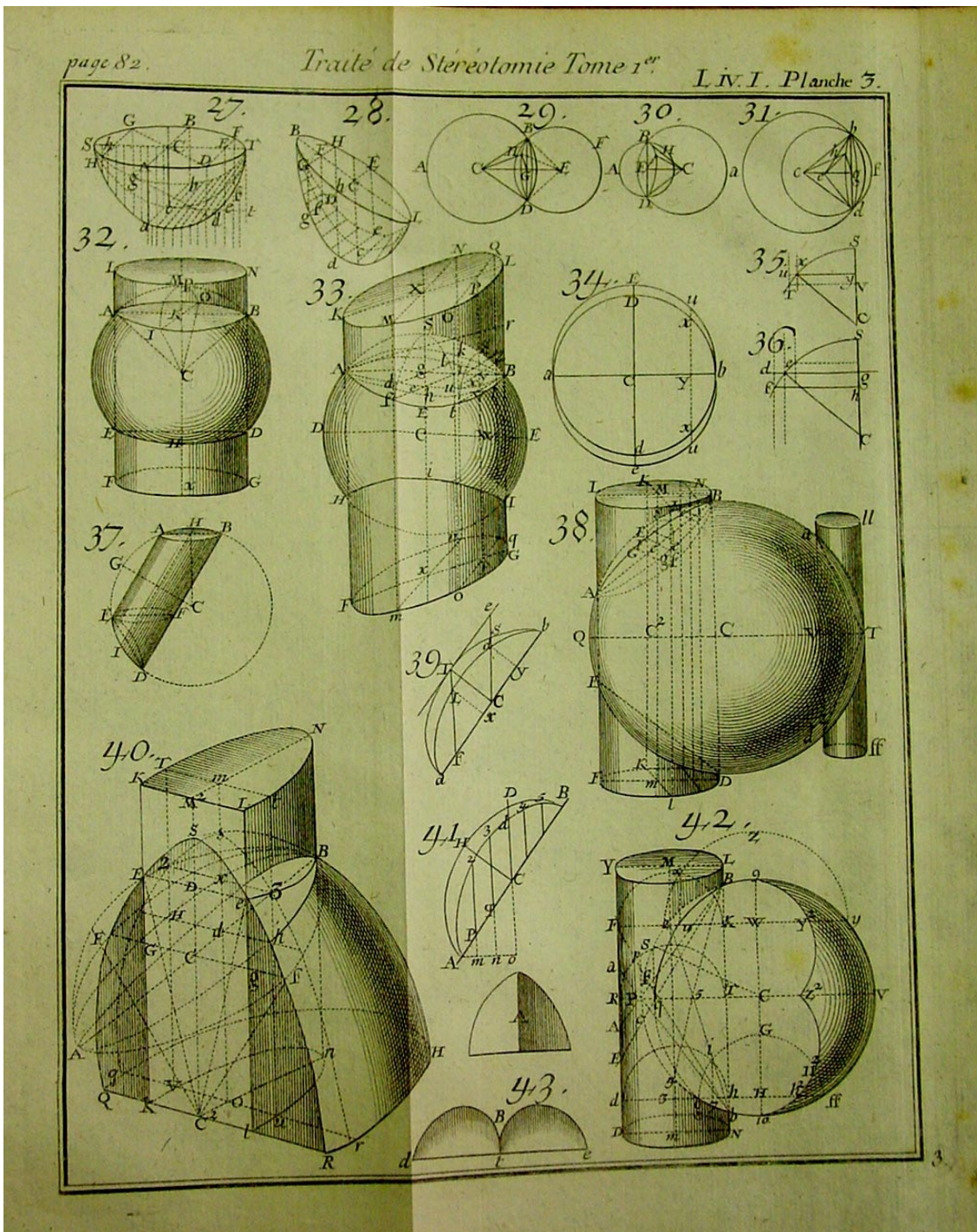
Frezier, pàg.23, tom I, planxa 1



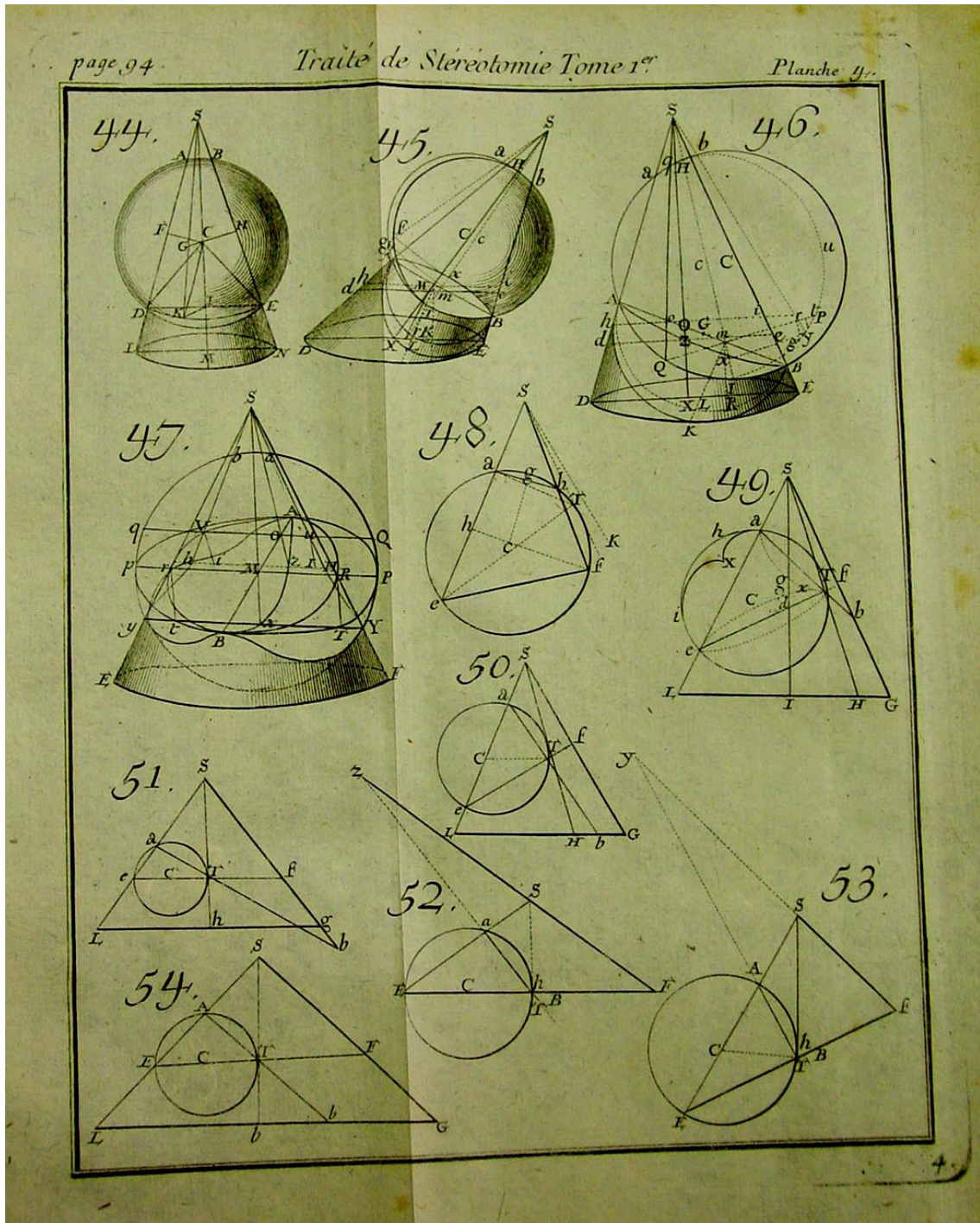
Frezier, pàg.42, tom I, planxa 2



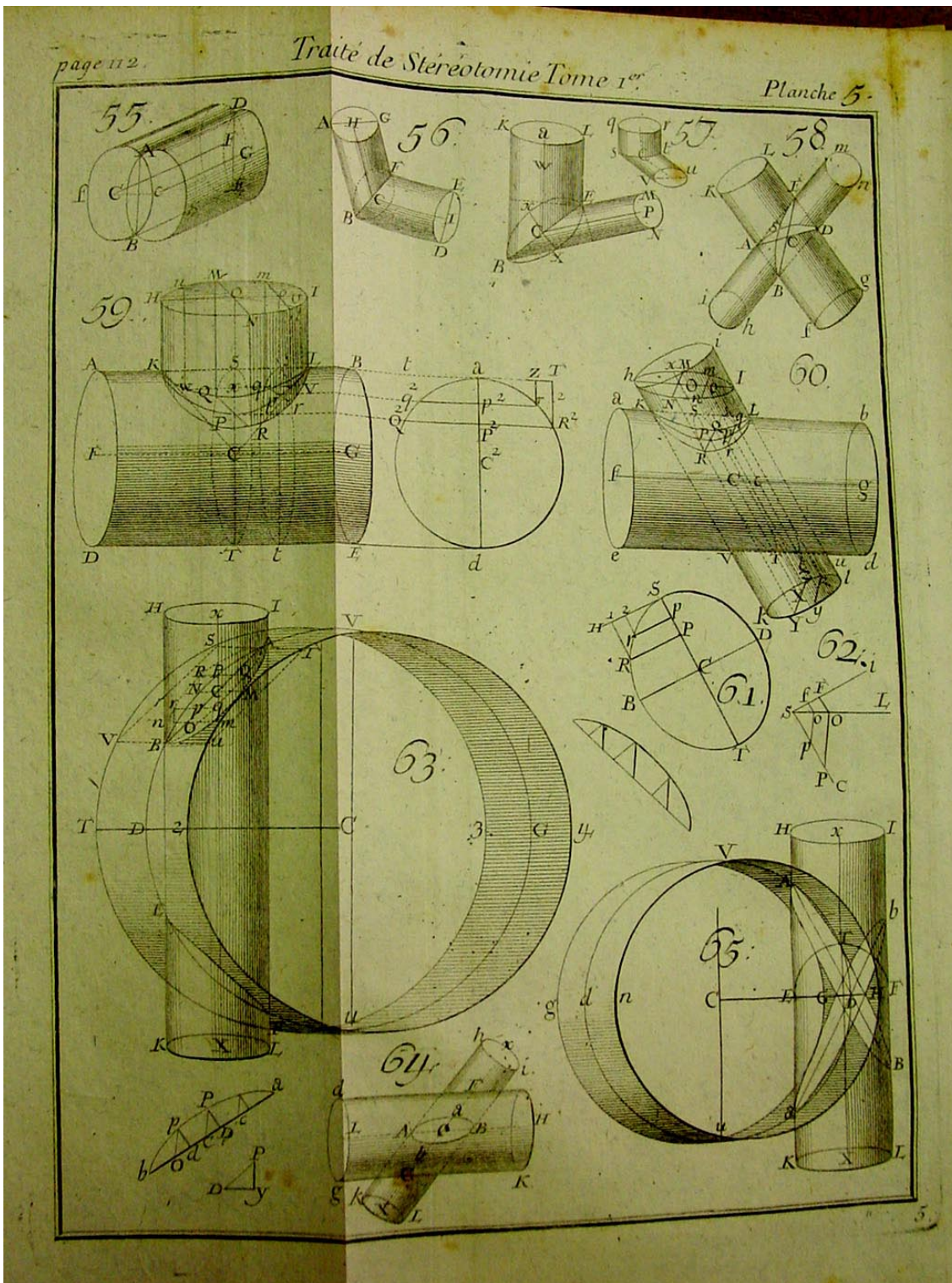
Frezier, pàg.82, tom I, planxa 3



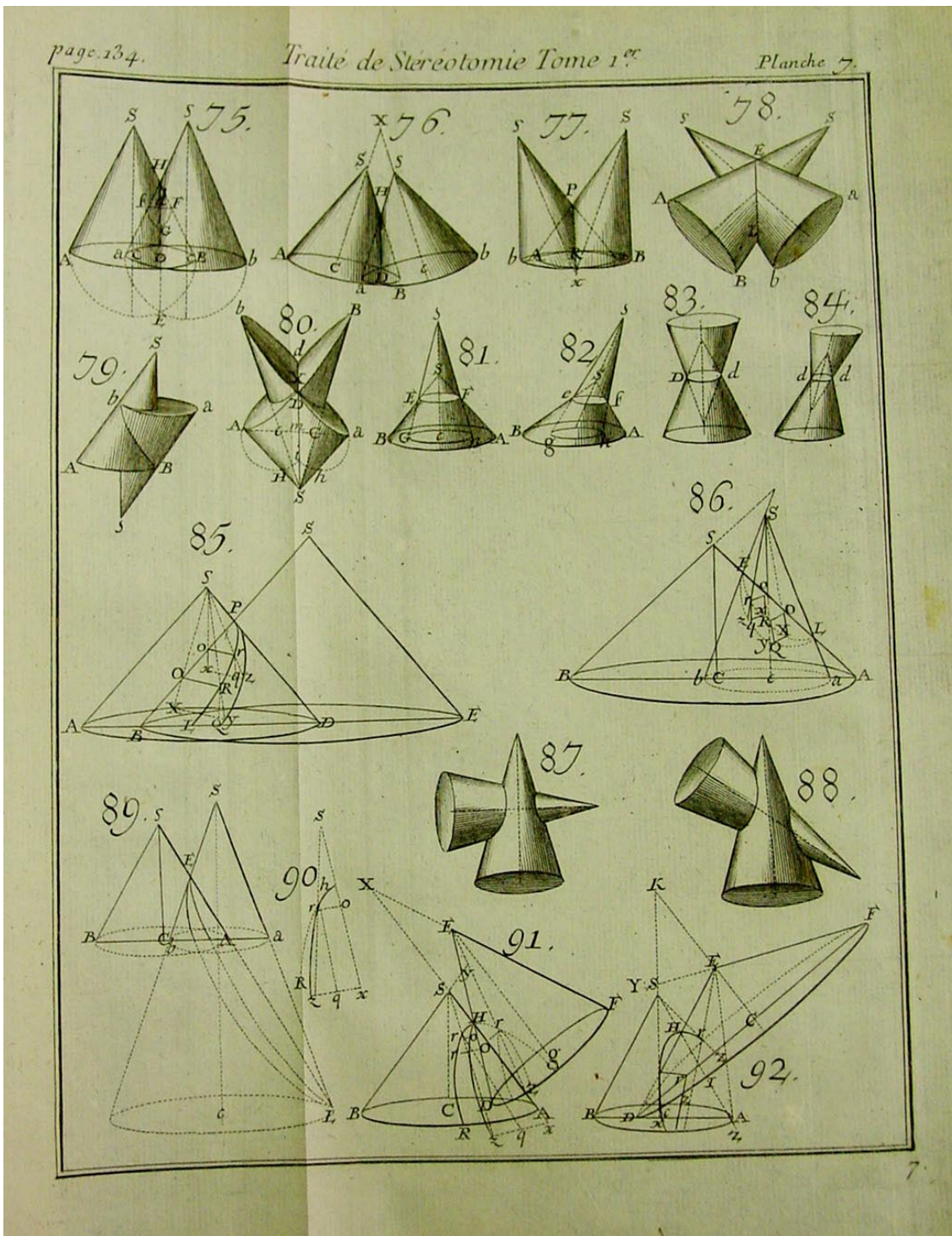
Frezier, pàg.94, tom I, planxa 4



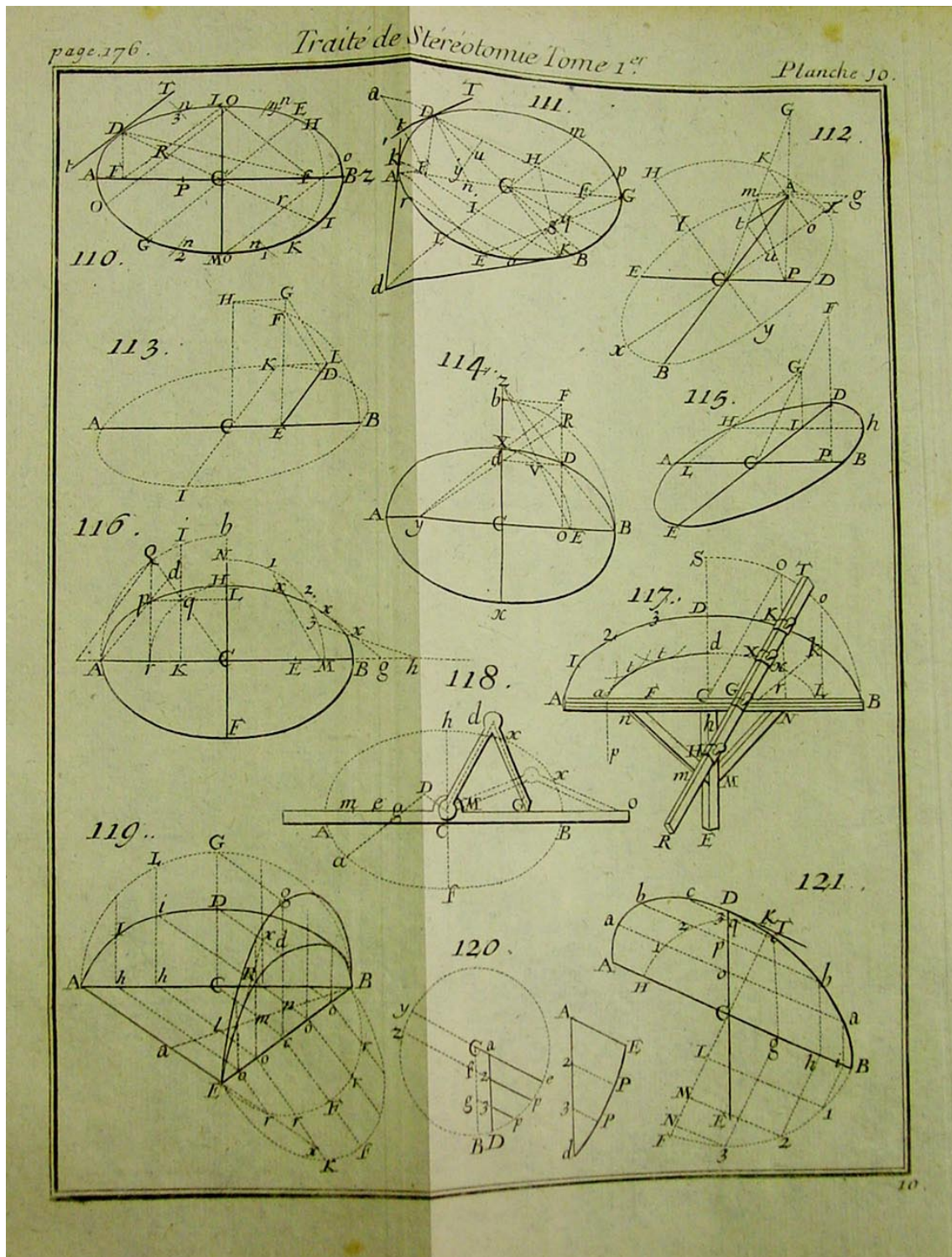
Frezier, pàg.112, tom I, planxa 5



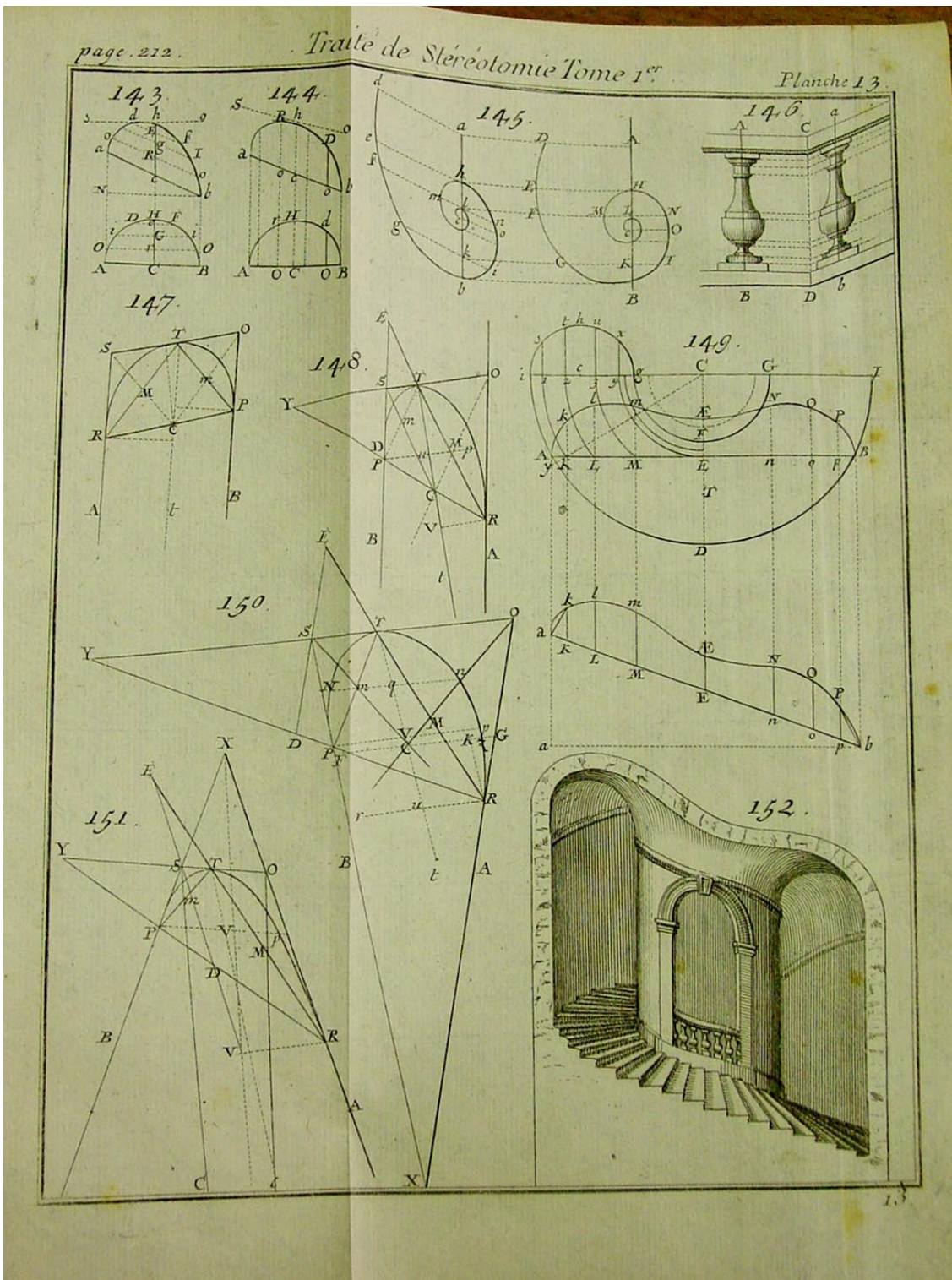
Frezier, pàg.134, tom I, planxa 7



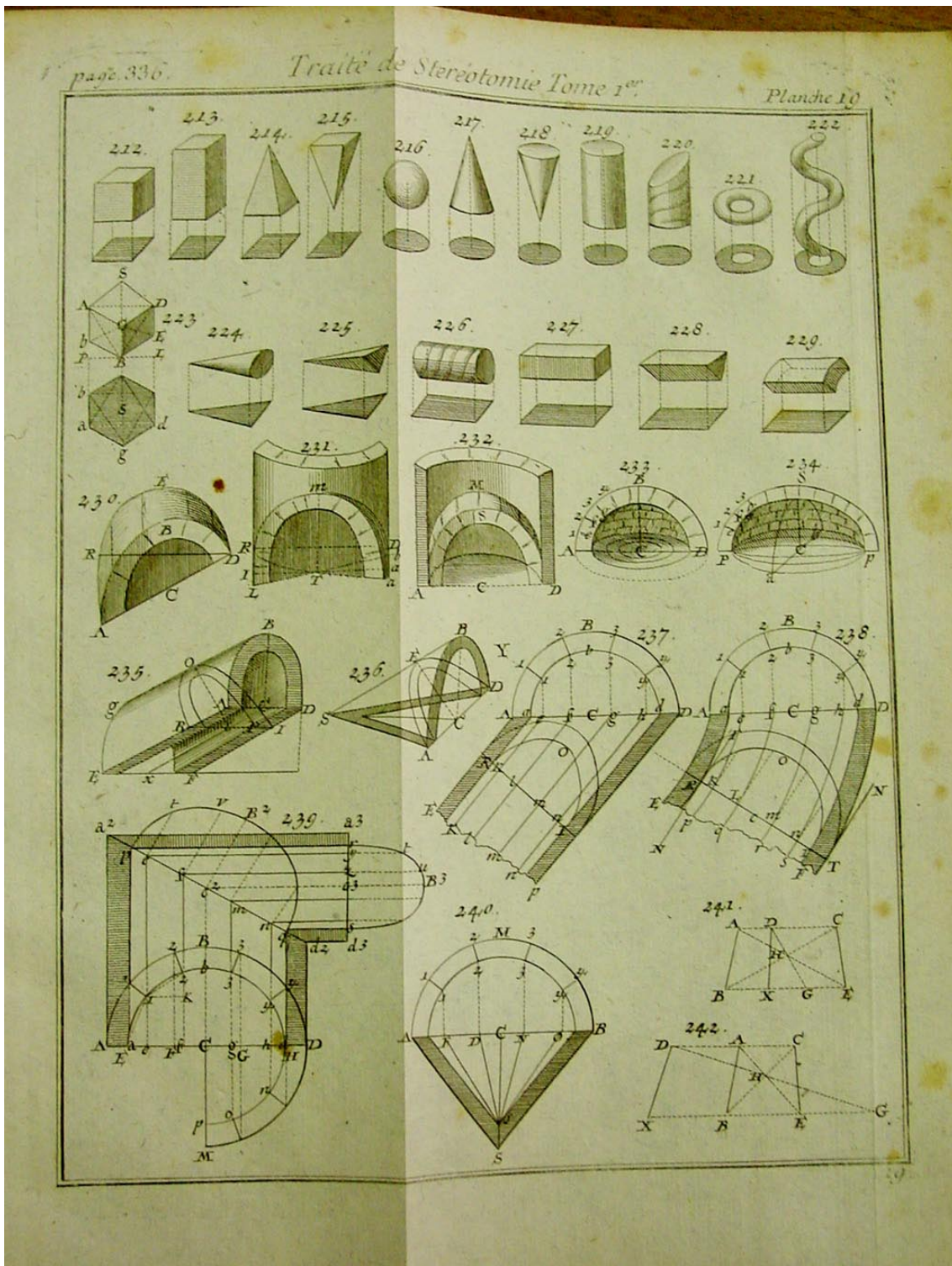
Frezier, pàg.176, tom I, planxa 10



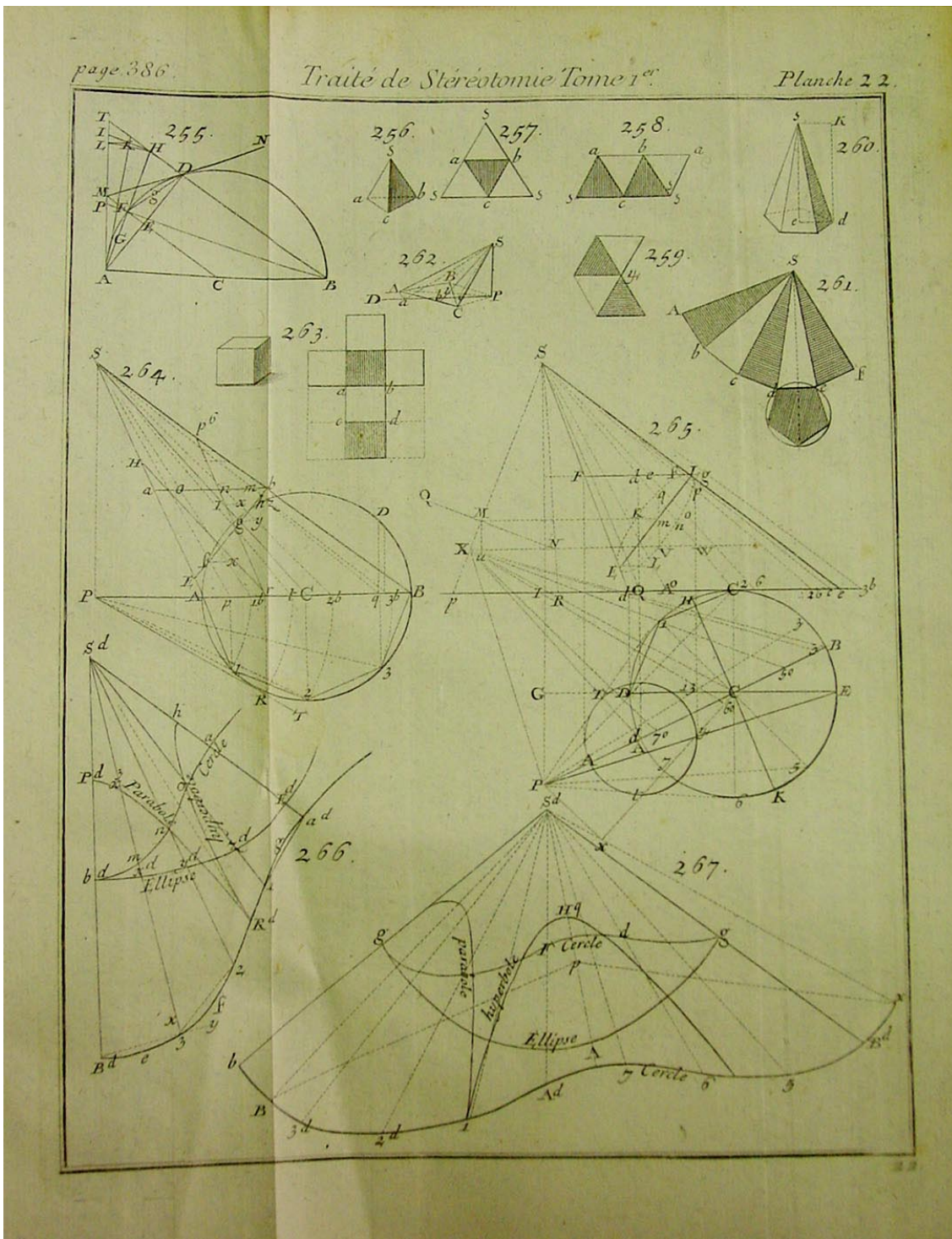
Frezier, pàg.212, tom I, planxa 13



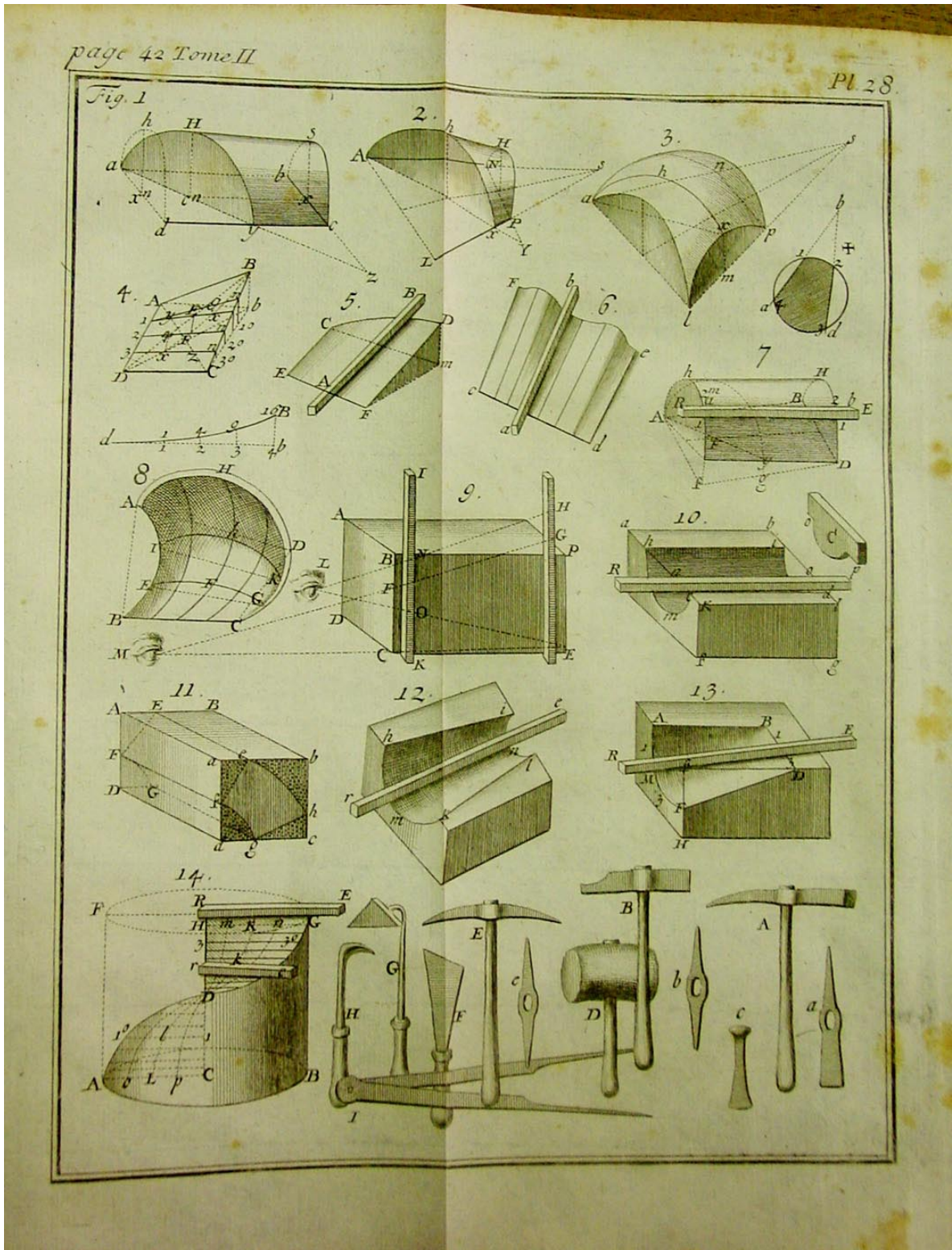
Frezier, pàg.336, tom I, planxa 19



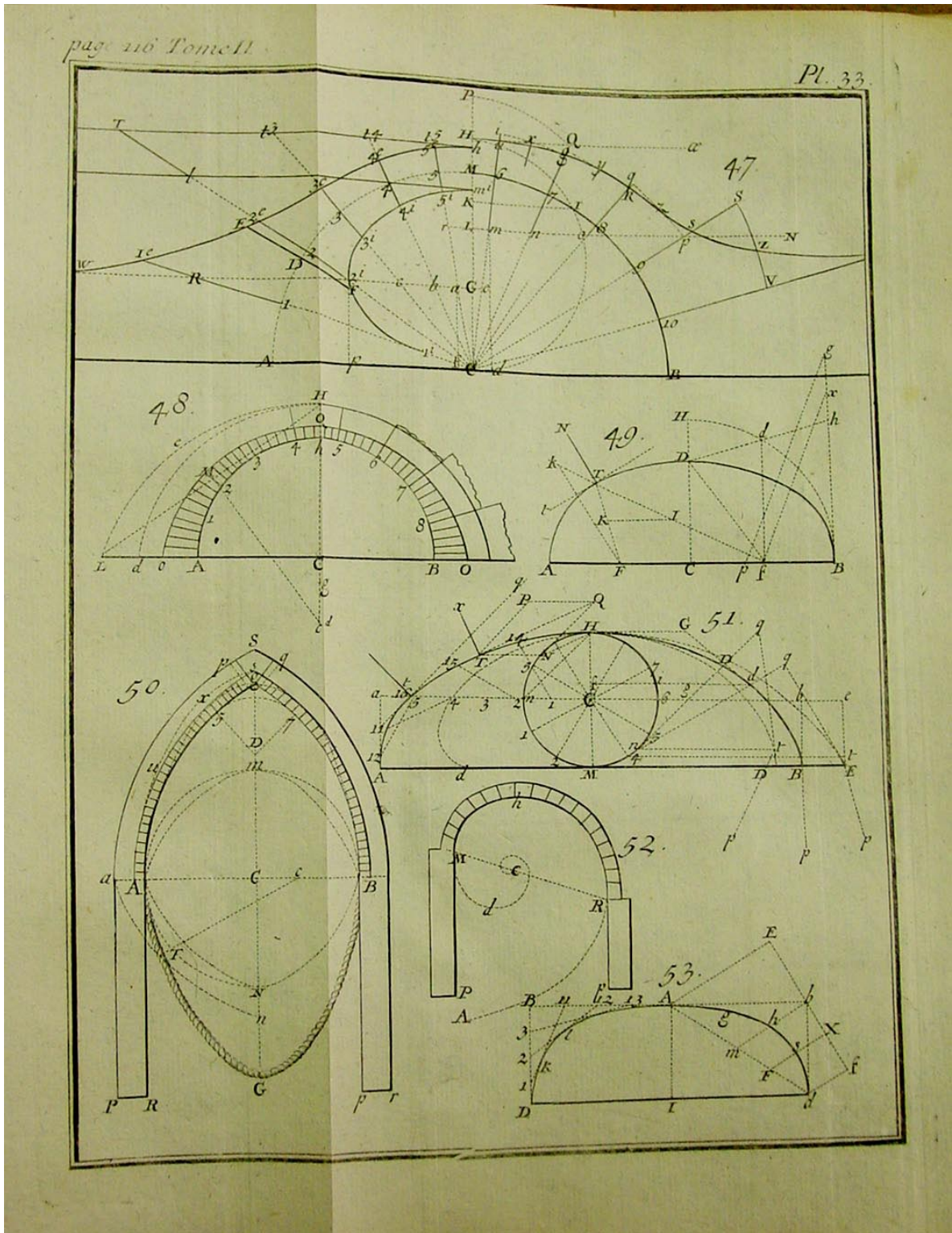
Frezier, pàg.386, tom I, planxa 22



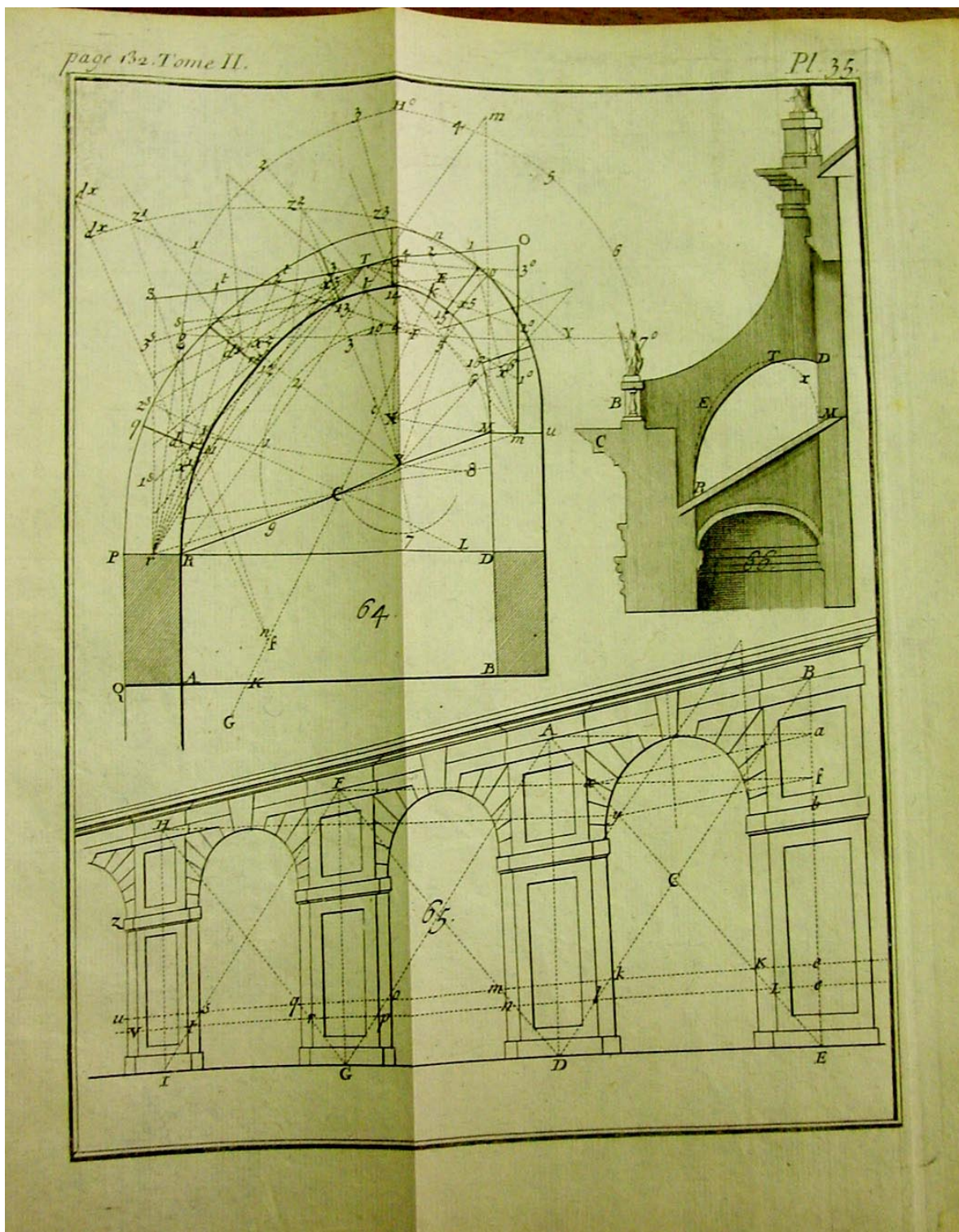
Frezier, pàg.42, tom II, planxa 28



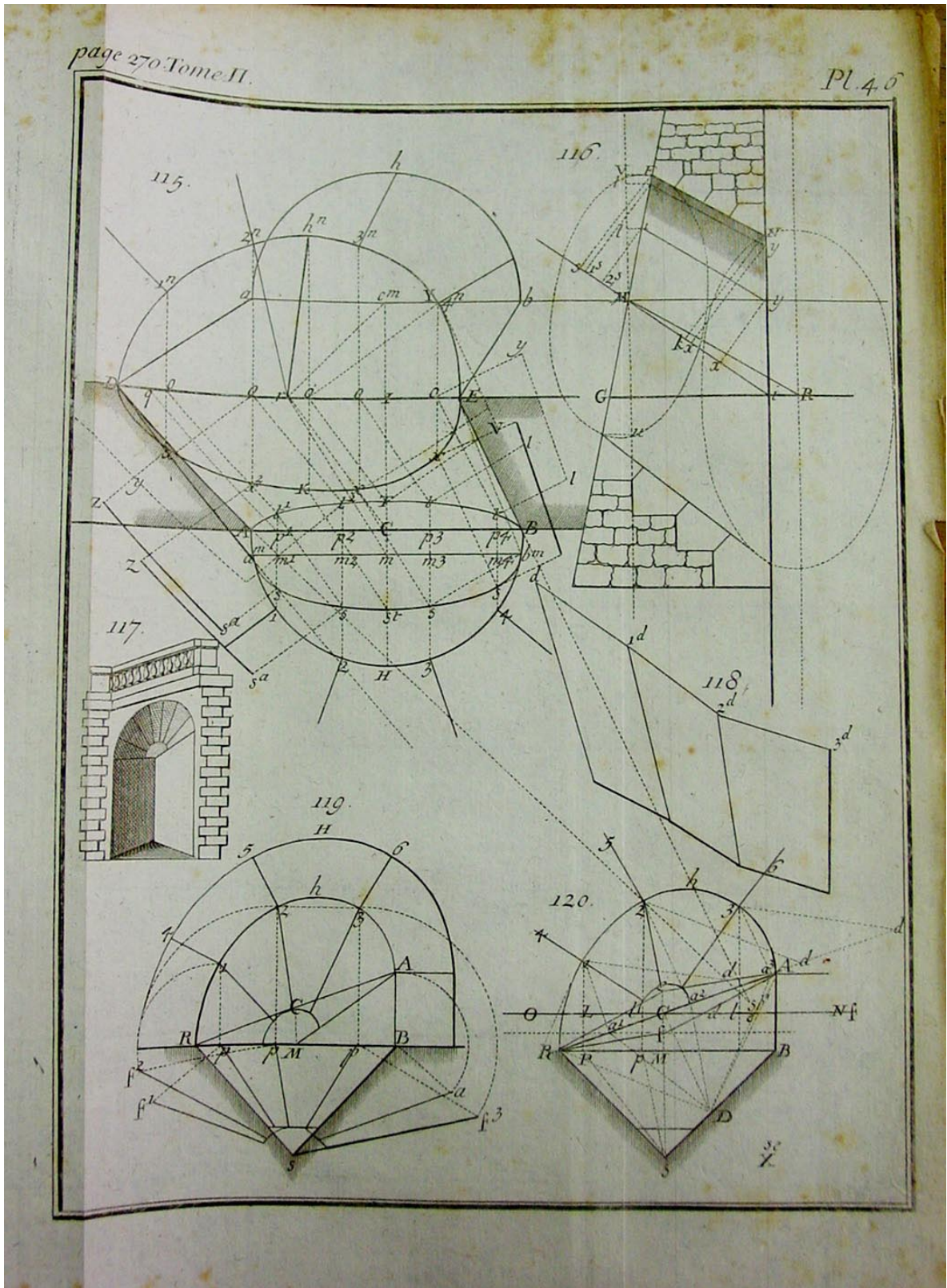
Frezier, pàg.116, tom II, planxa 33



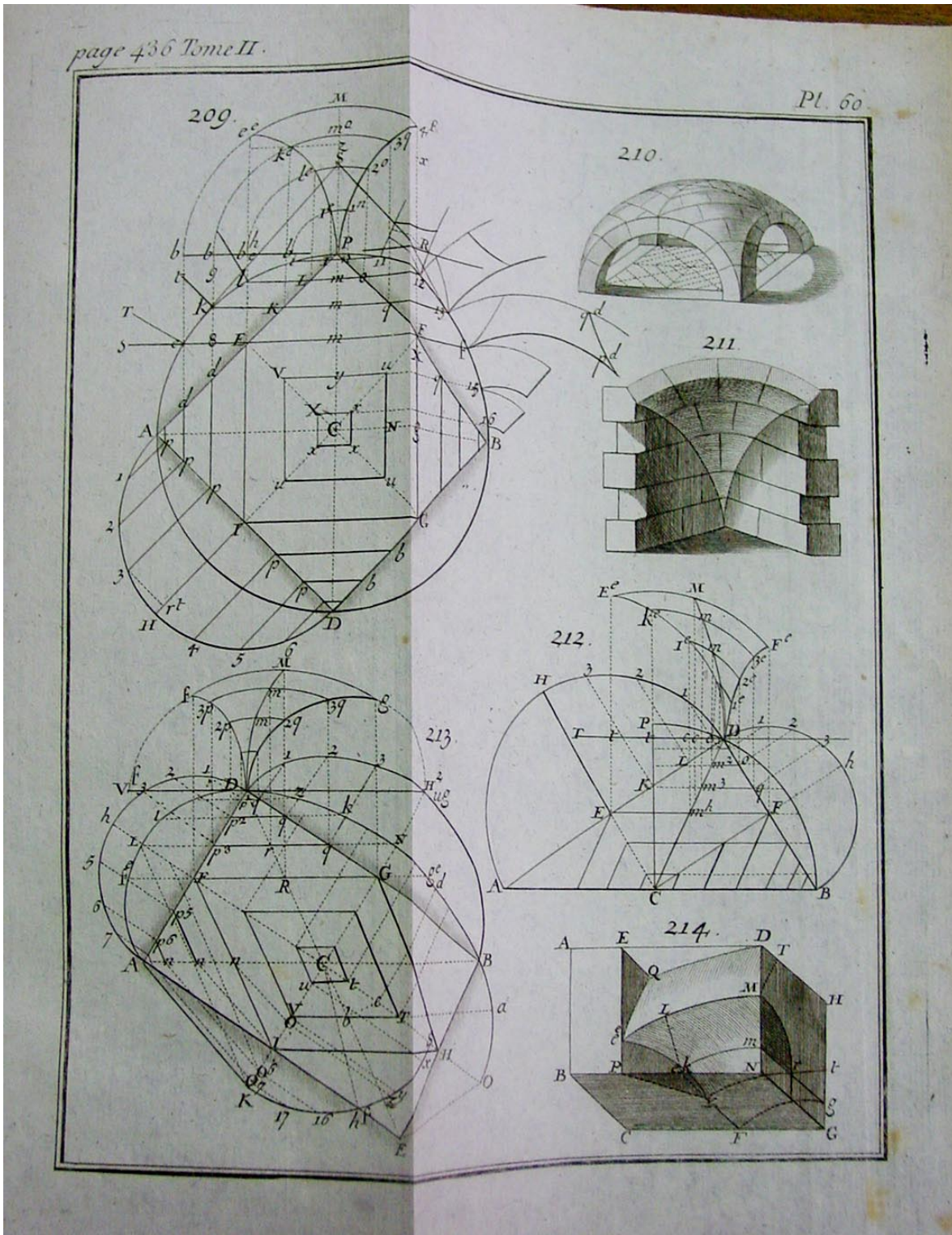
Frezier, pàg.132, tom II, planxa 35



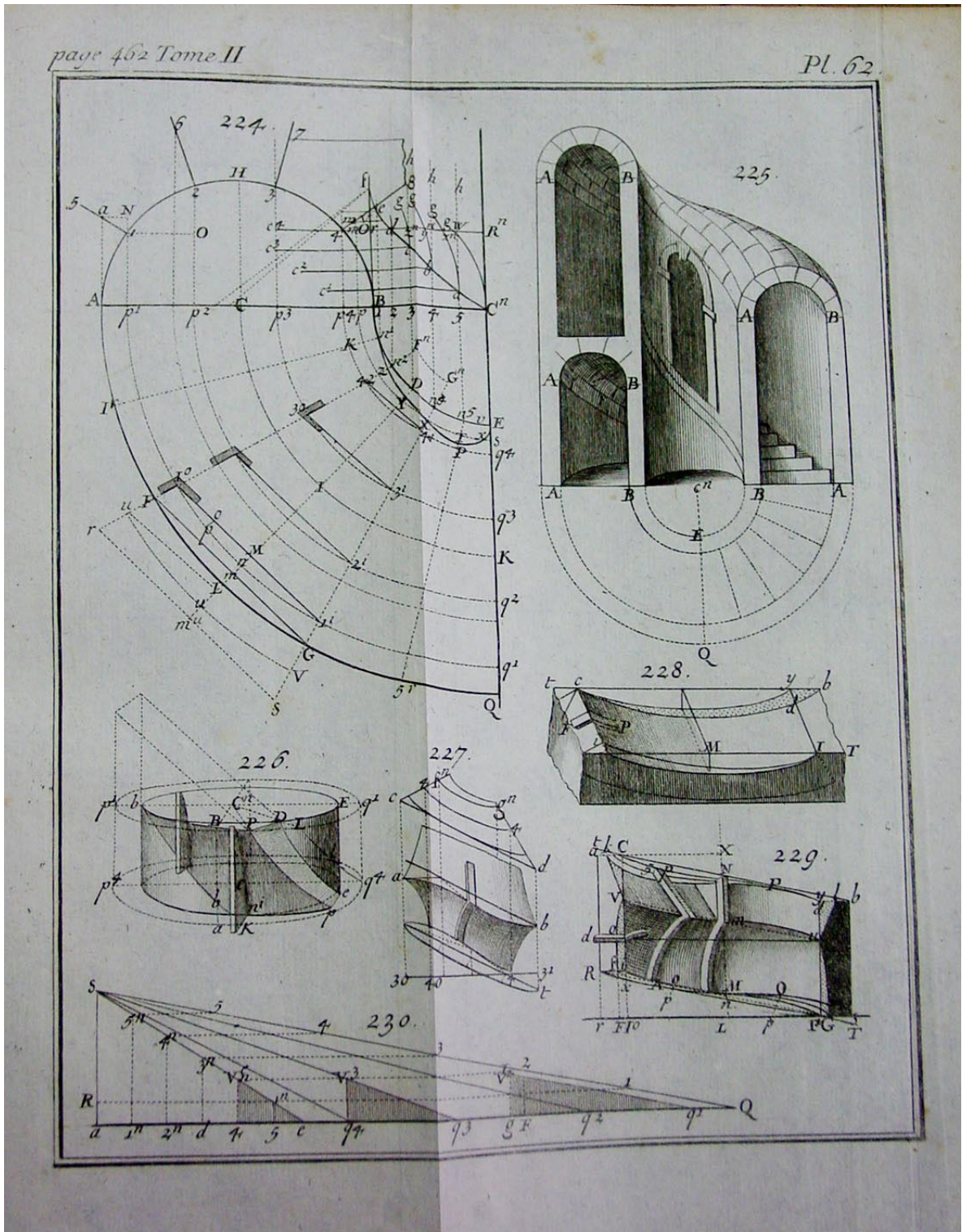
Frezier, pàg.270, tom II, planxa 46



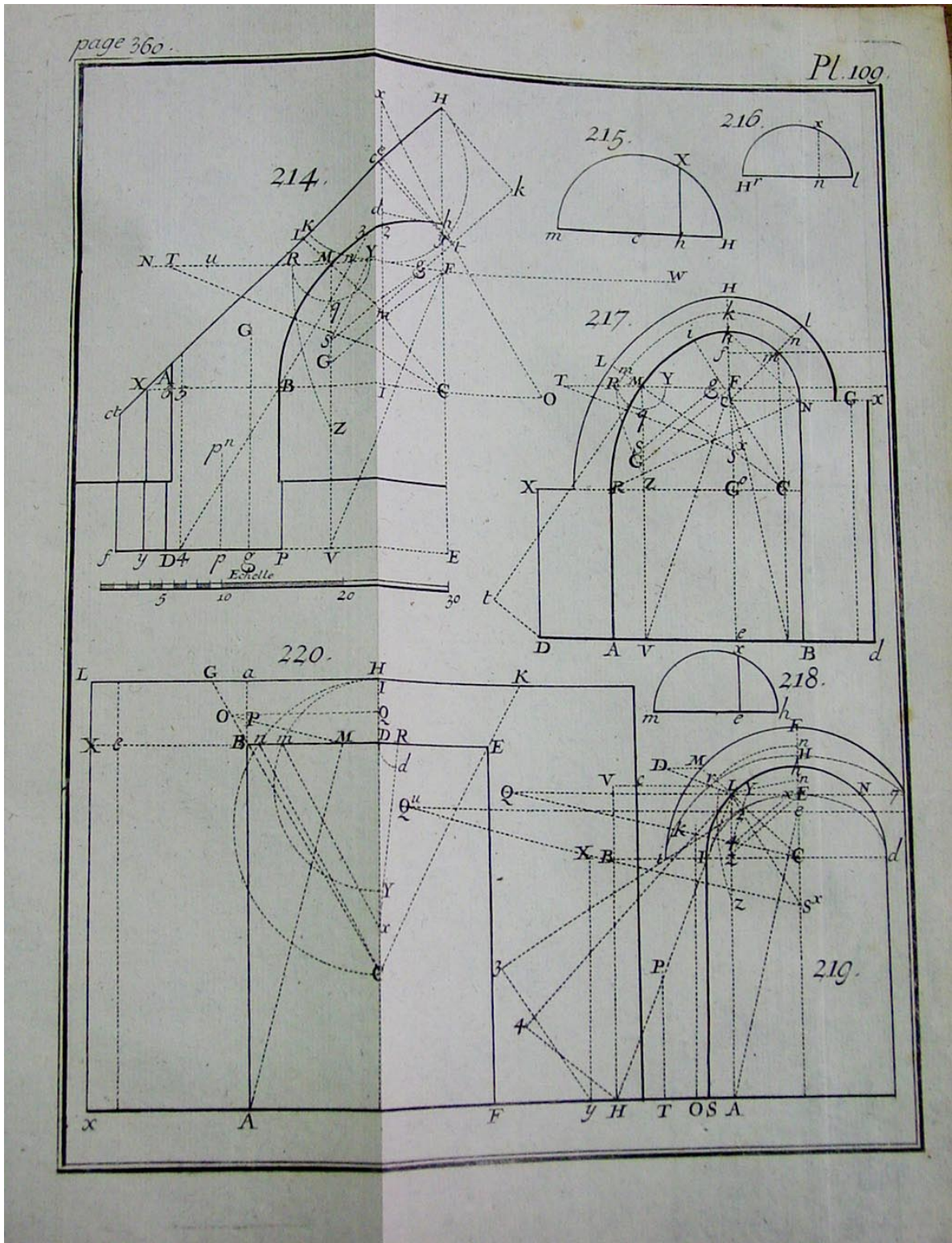
Frezier, pàg.436, tom II, planxa 60



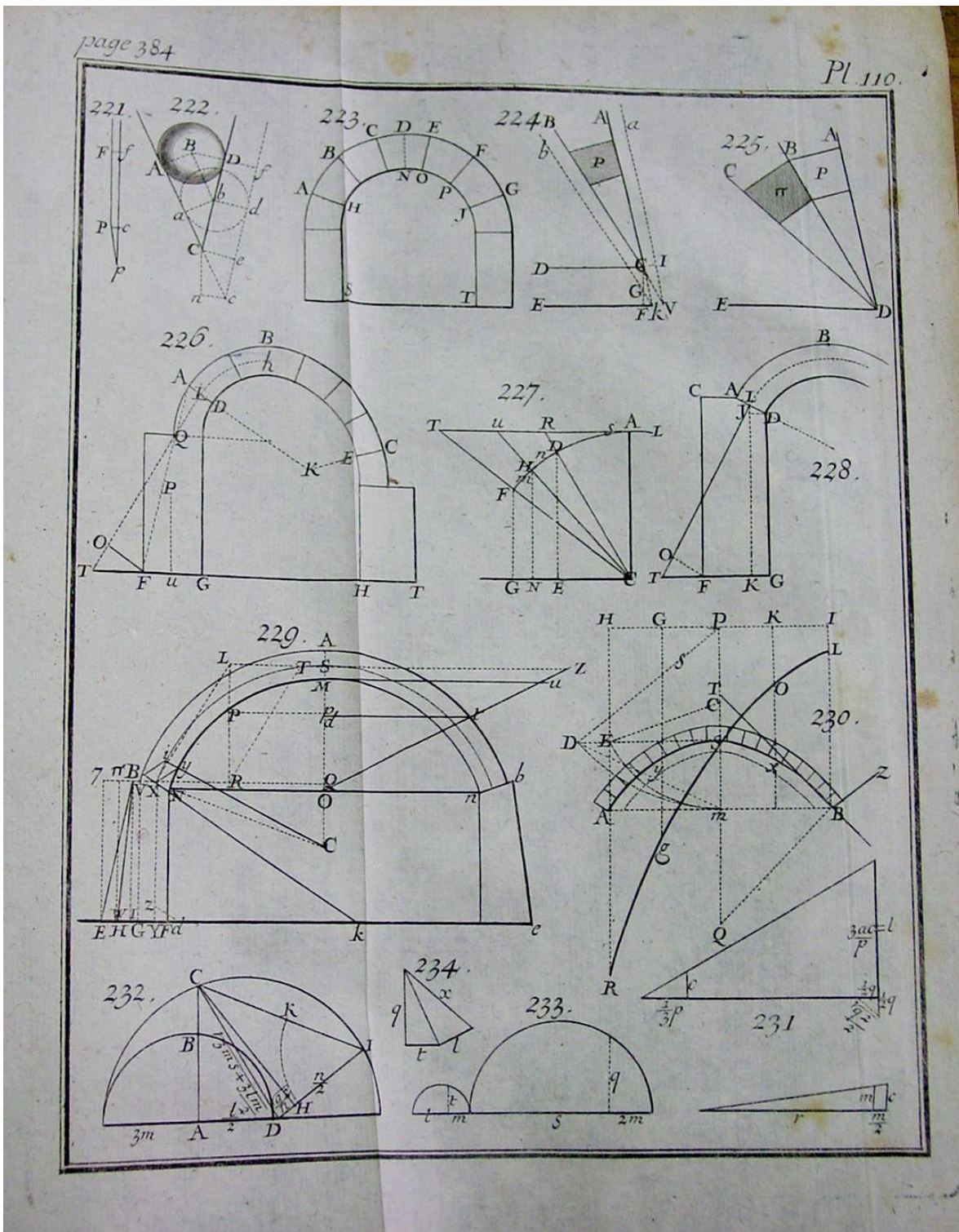
Frezier, pàg.462, tom II, planxa 62



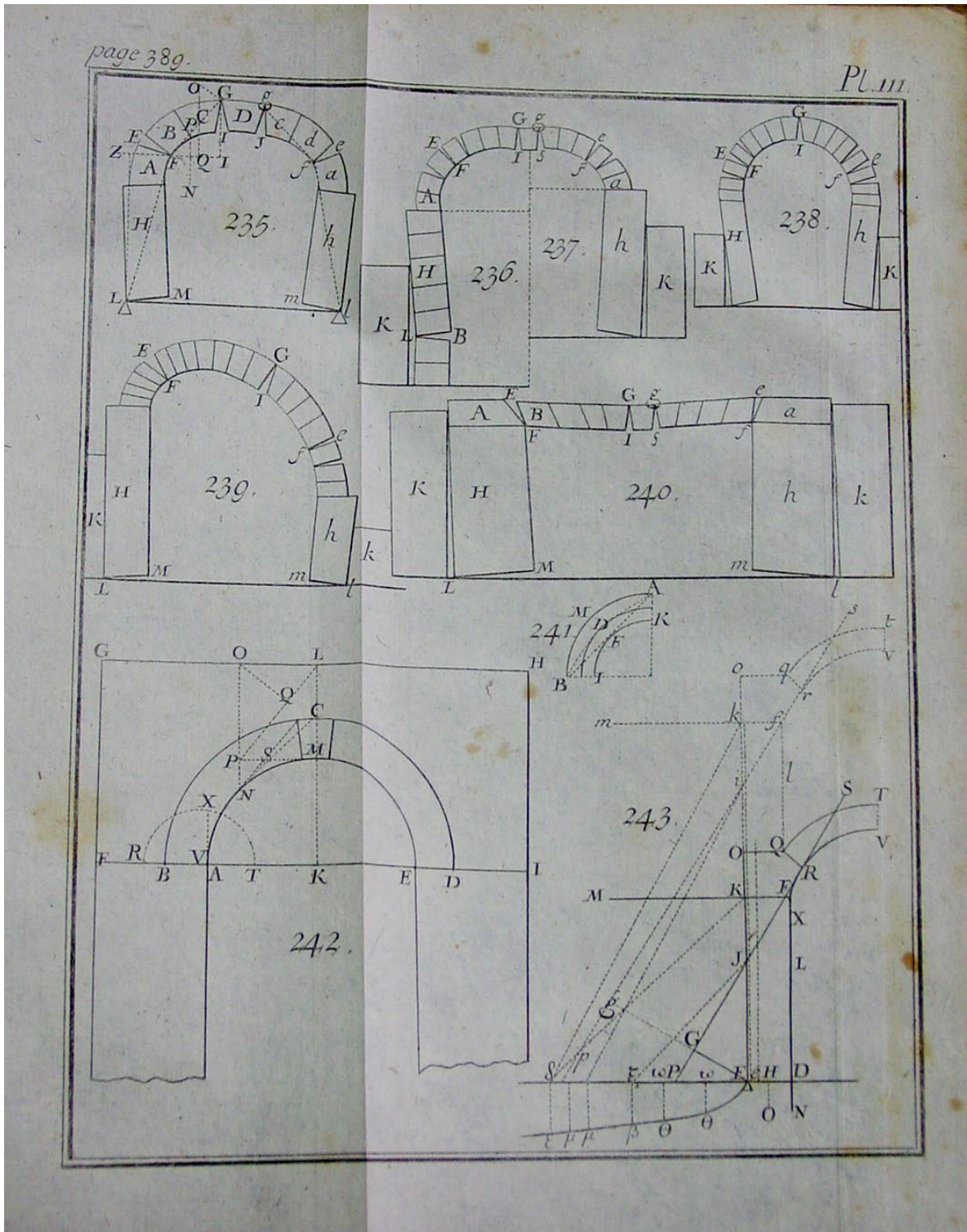
Frezier, pàg.360, tom III, planxa 109



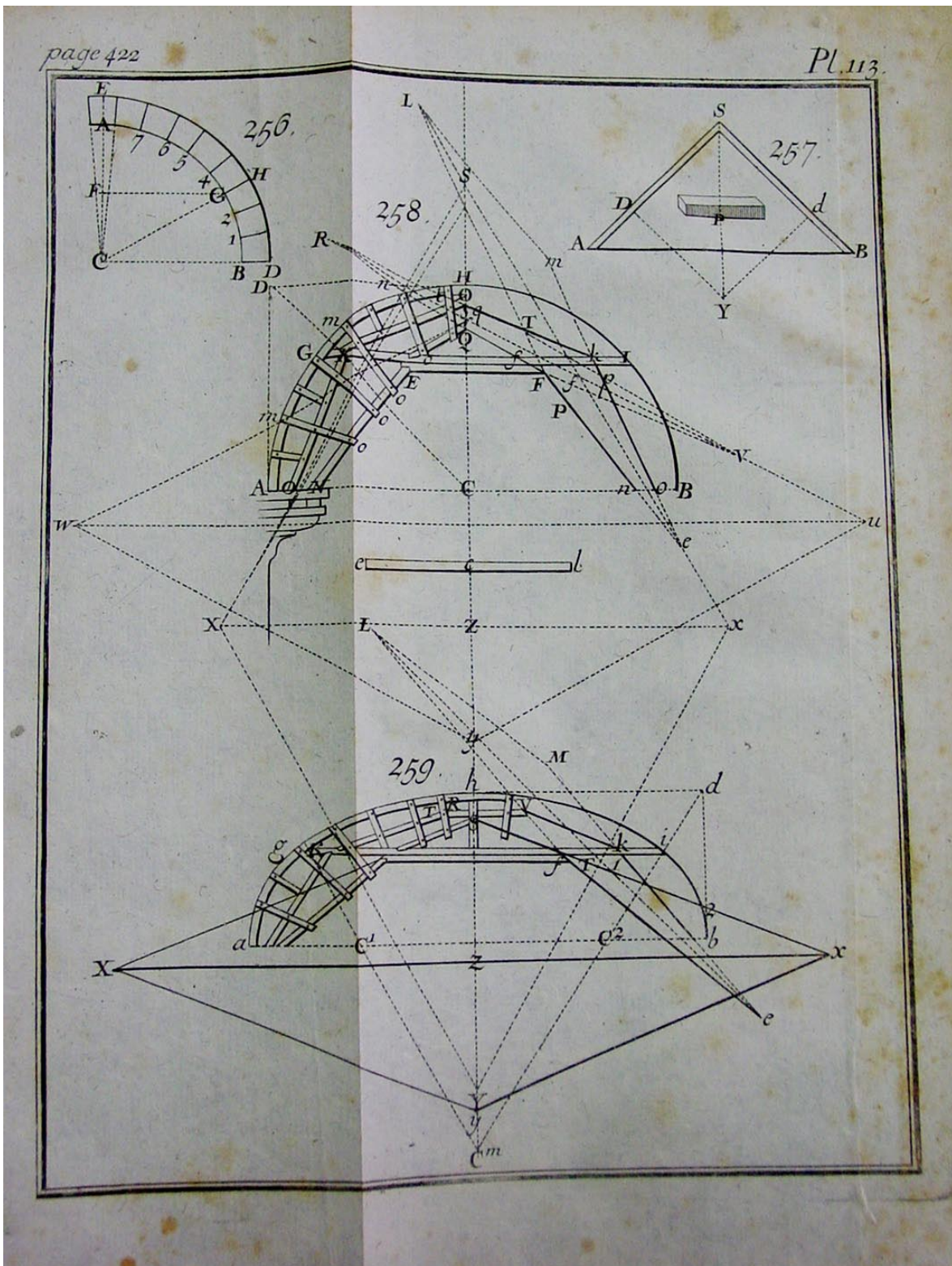
Frezier, pàg.384, tom III, planxa 110



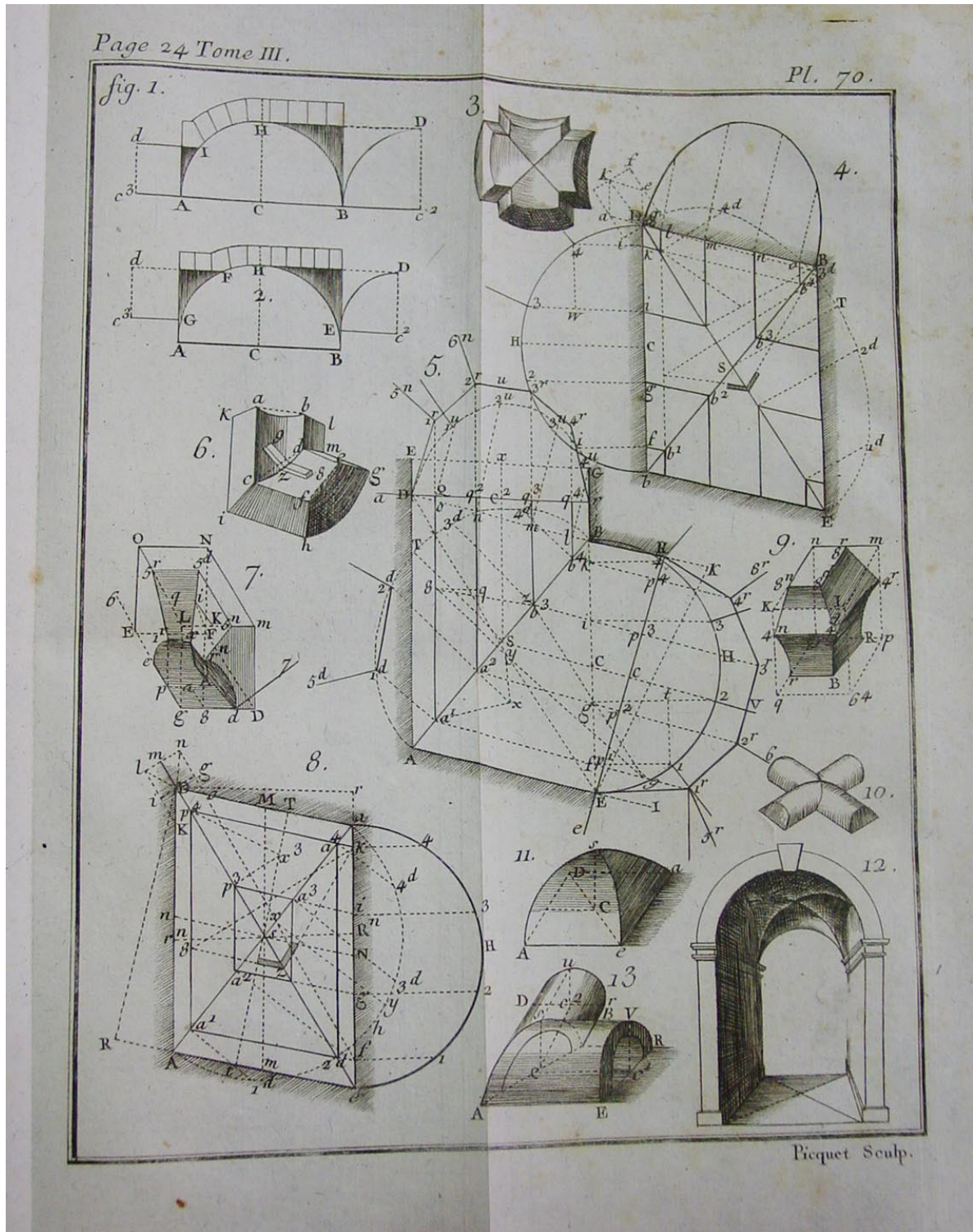
Frezier, pàg.389, tom III, planxa 111



Frezier, pàg.422, tom III, planxa 113



Frezier, pàg.24, tom III, planxa 70



ANNEX 2.2

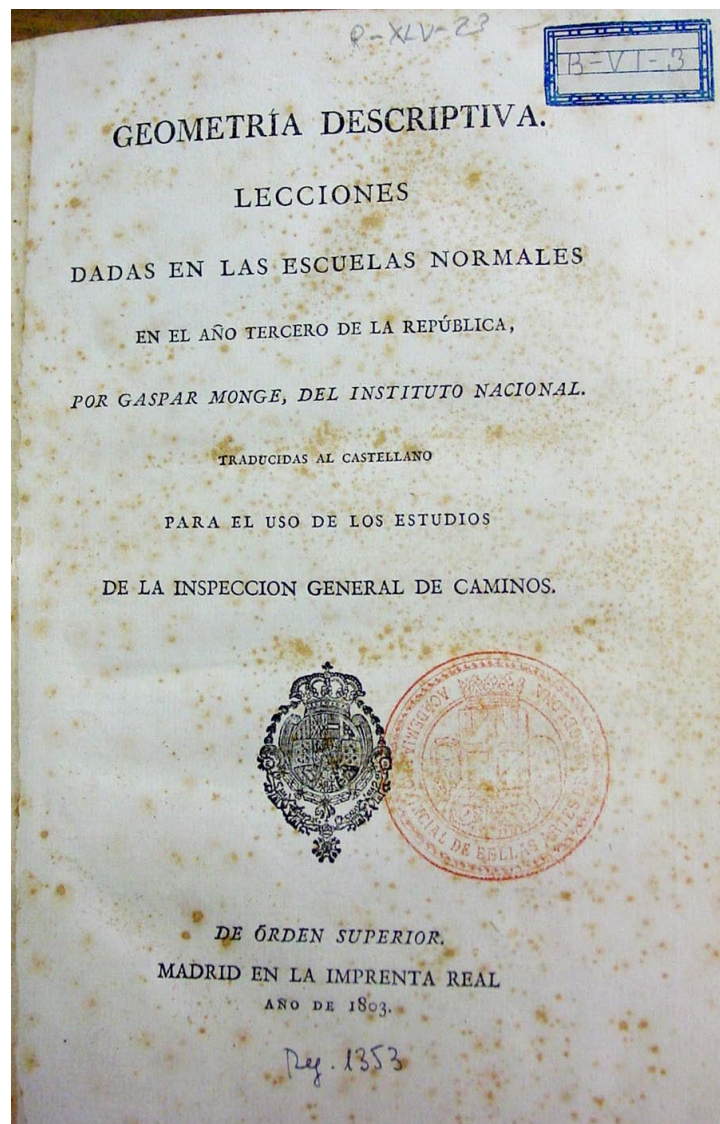
Tractat de G. Monge, 1803

Aquest text, universalment valorat i reconegut, el podem trobar, en molt diverses edicions, a diverses universitats catalanes. A l'escola d'arquitectura podem trobar-hi la reproducció moderna que féu el col·legi d'enginyers de Madrid, en servei de préstec, i també una edició original, traduïda a l'espanyol, datada del 1803, exclòs de préstec i de consulta restringida.

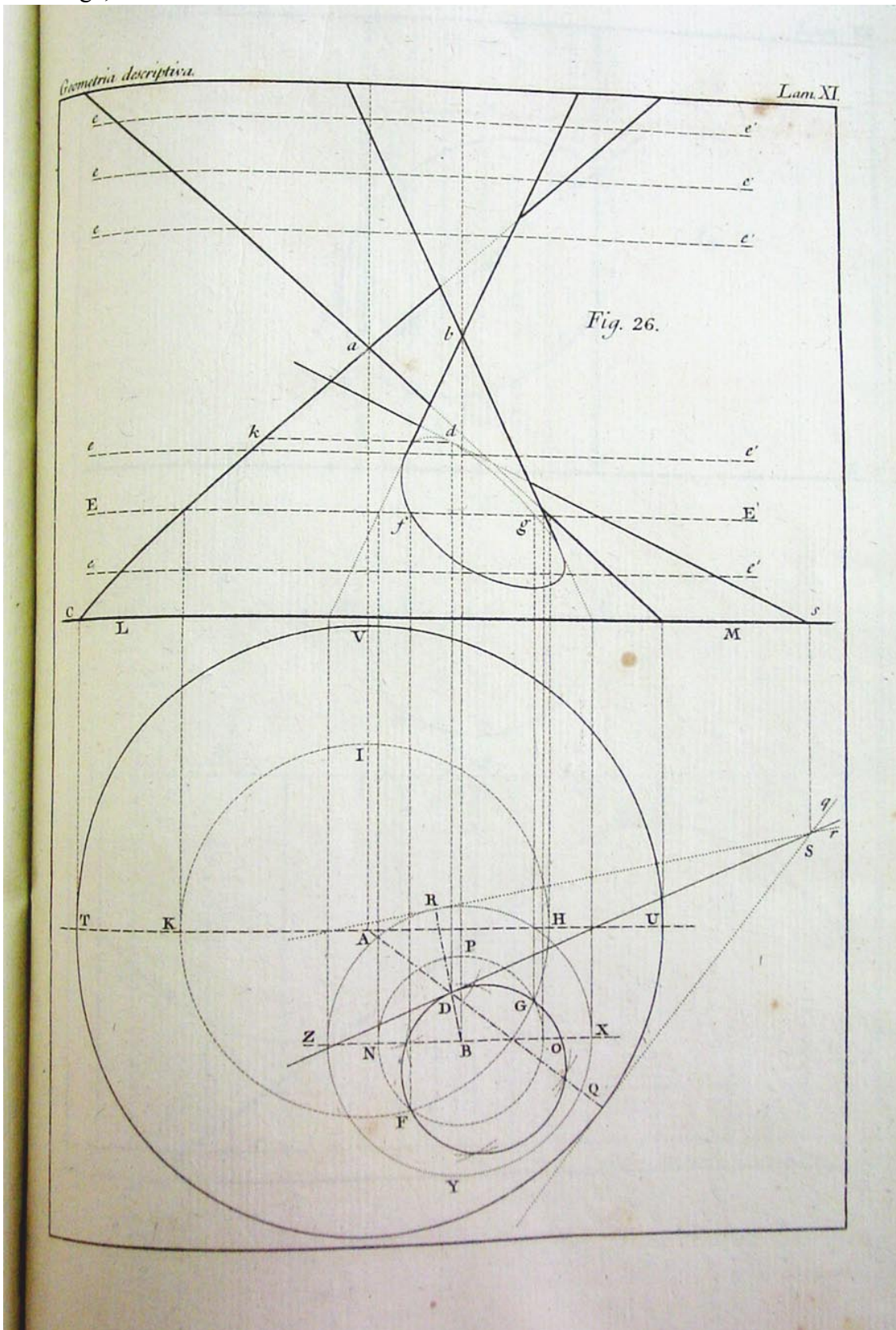
Títol complet: *Geometria descriptiva. Lecciones dadas en las Escuelas Normales por Gaspar Monge*

Signatura: R-XLV-23

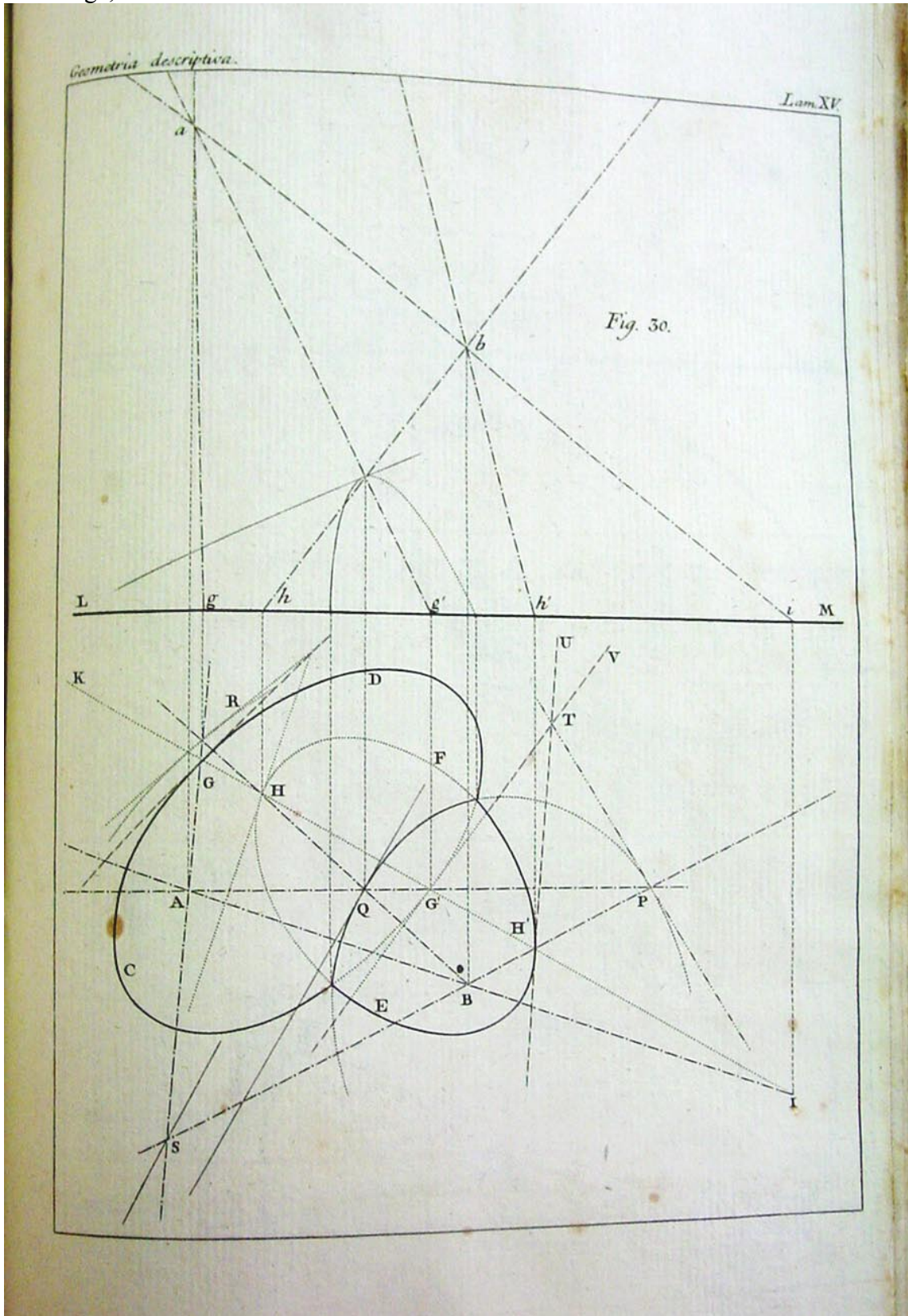
Codi de barres: 1210001353



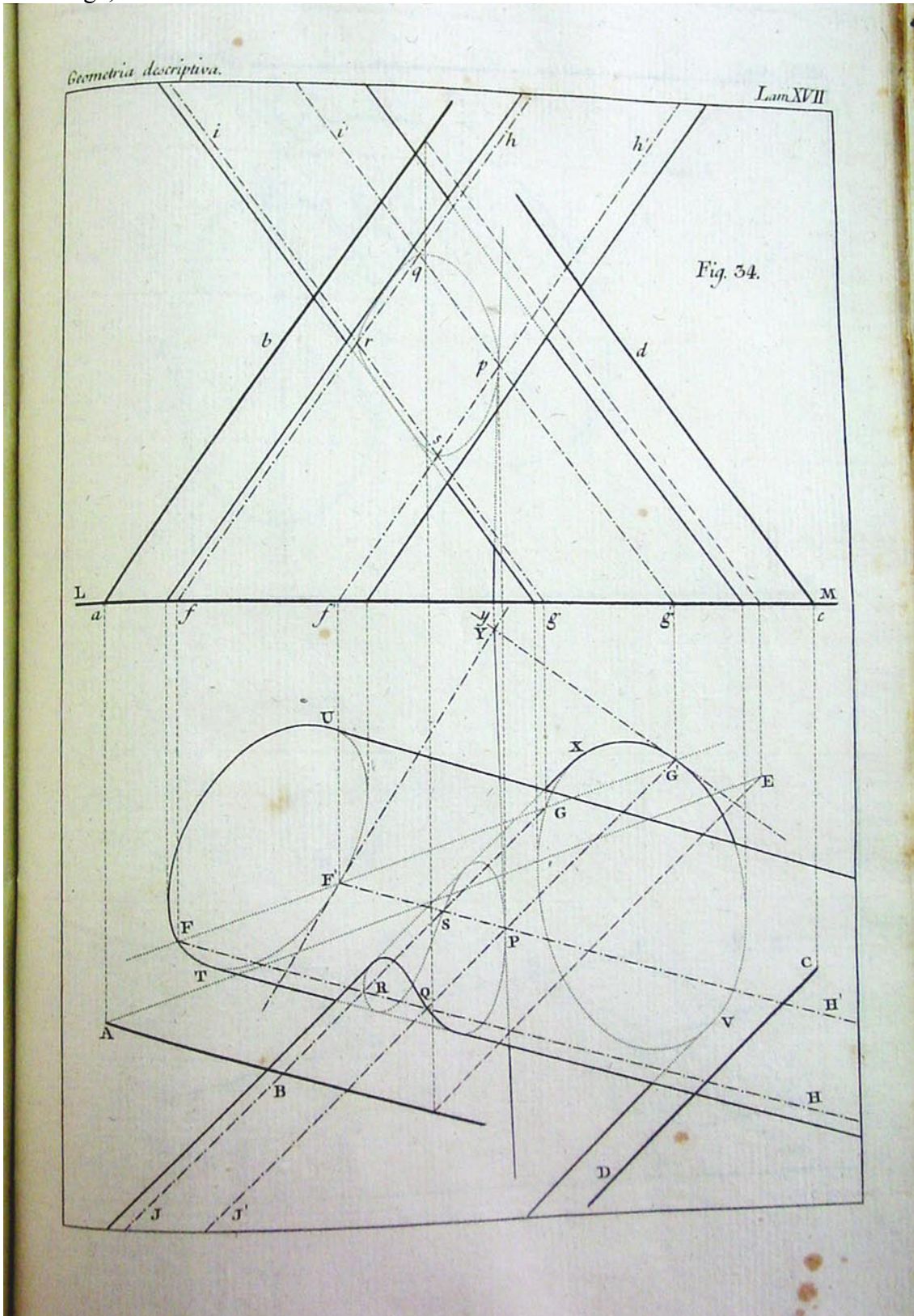
G. Monge, Lámina XI.



G. Monge, Lámina XI.



G. Monge, Lámina XI.



ANNEX 2.3

Apunts i làmines de Josep Casademunt, ≈1850

A la biblioteca de l'ETSAB podem trobar tres exemplars manuscrits de Josep Casademunt sobre geometria descriptiva i un quart exemplar sobre el convent que fou enderrocat per construir el mercat de Santa Caterina de Barcelona.

Dels tres primers volums dos són de text i un de làmines il·lustratives. De fet un dels volums de text és una còpia en net i ampliació de l'altre.

Títol complet: *Geometria descriptiva compuesto por José Casademunt (1804-1868) antiguo director de la Clase de Arquitectura.*

Signatura: R-AP-MAN-9

Codi de barres: 1210001639

Títol complet: *Láminas correspondientes a las lecciones de Geometria descriptiva, Sombras, corte de piedras, corte de madera.*

Signatura: R-AP-MAN-20

Codi de barres: 1210002164

Títol complet: *Lecciones de Geometria descriptiva. Tratado de Sombras. Corte de piedras. Carpinteria o corte de maderas.*

Signatura: R-AP-MAN-10

Codi de barres: 1210010951

Una ullada a les làmines d'aquest curs de geometria descriptiva serveix per fer-se una molt bona idea del contingut docent que impartia Josep Casademunt i Torrents a l'Escola de Mestres d'Obres de Barcelona. En el seu contingut ja es detecta la presència de les corbes còniques i superfícies amb les quals Gaudí treballà. A continuació adjuntem el glossari i una selecció de les làmines més significatives.

Glossari

Geometria descriptiva

- 1.- Representació del punt i la recta.
- 2.- Representació del pla.
- 3.- Pertinença entre punt, recta i pla. Veritables magnituds.
- 4.- Girs.
- 5.- Paral·lelisme.
- 6.- Intersecció de plans. Intersecció de recta i pla. Perpendicularitat.
- 7.- Mímines distàncies. Angles.
- 8.- Angles.
- 9.- Angles.
- 10.- Políedres. Prisma. Piràmide.
- 11.- Seccions planes i desenvolupament del prisma i la piràmide.
- 12.- Intersecció de recta amb prisma i piràmide.

- 13.- Còniques.
- 14.- Tangències. Evolvent
- 15.- Tangències entre circumferències. Rectes tangents per corba d'error.
- 16.- Traçats de les còniques.
- 17.- Cicloide. Epicicloide. Espiral. Arc rampant.
- 18.- Superfícies cilíndriques, còniques i de revolució.
- 19.- Plans tangents.
- 20.- Plans tangents al cilindre.
- 21.- Plans tangents al con.
- 22.- Plans tangents a l'esfera i l'el·lipsoide.
- 23.- Corbes de contacte.
- 24.- Corbes de contacte.
- 25.- Cilindre circumscrit a l'esfera.
- 26.- Corba de contacte entre superfícies de revolució i cilindre.
- 27.- Desenvolupament del cilindre oblicu.
- 28.- Secció i desenvolupament del con oblicu.
- 29.- Intersecció de dos cilindres.
- 30.- Intersecció de dos cons.
- 31.- Intersecció de l'esfera i con i de dues esferes.
- 32.- Hèlix cilíndrica.
- 33.- Epicicloide descrita per rodament d'un con.
- 34.- Generació de superfícies guerxes.
- 35.- Hiperboloide d'un full.
- 36.- Generació i representació del conoide, corn de vaca i helicoide.

Ombres

- 37.- Ombres
- 38.- Ombra del prisma i piràmide.
- 39.- Ombra d'escales.
- 40.- Ombra del cilindre.
- 41.- Ombra Del con.
- 42.- Ombra de l'esfera
- 43.- Ombra de la fornícula esfèrica cilíndrica.
- 44.- Ombra del tor.
- 45.- Ombra del cavet i l'escòcia
- 46.- Ombra de la peanya.
- 47.- Ombra d'un capitell.
- 48.- Punts i arestes brillants.
- 49.- Degradació de tintes.

Perspectiva

- 50.- Perspectiva.
- 51.- Perspectiva cavallera.

Tall de la pedra

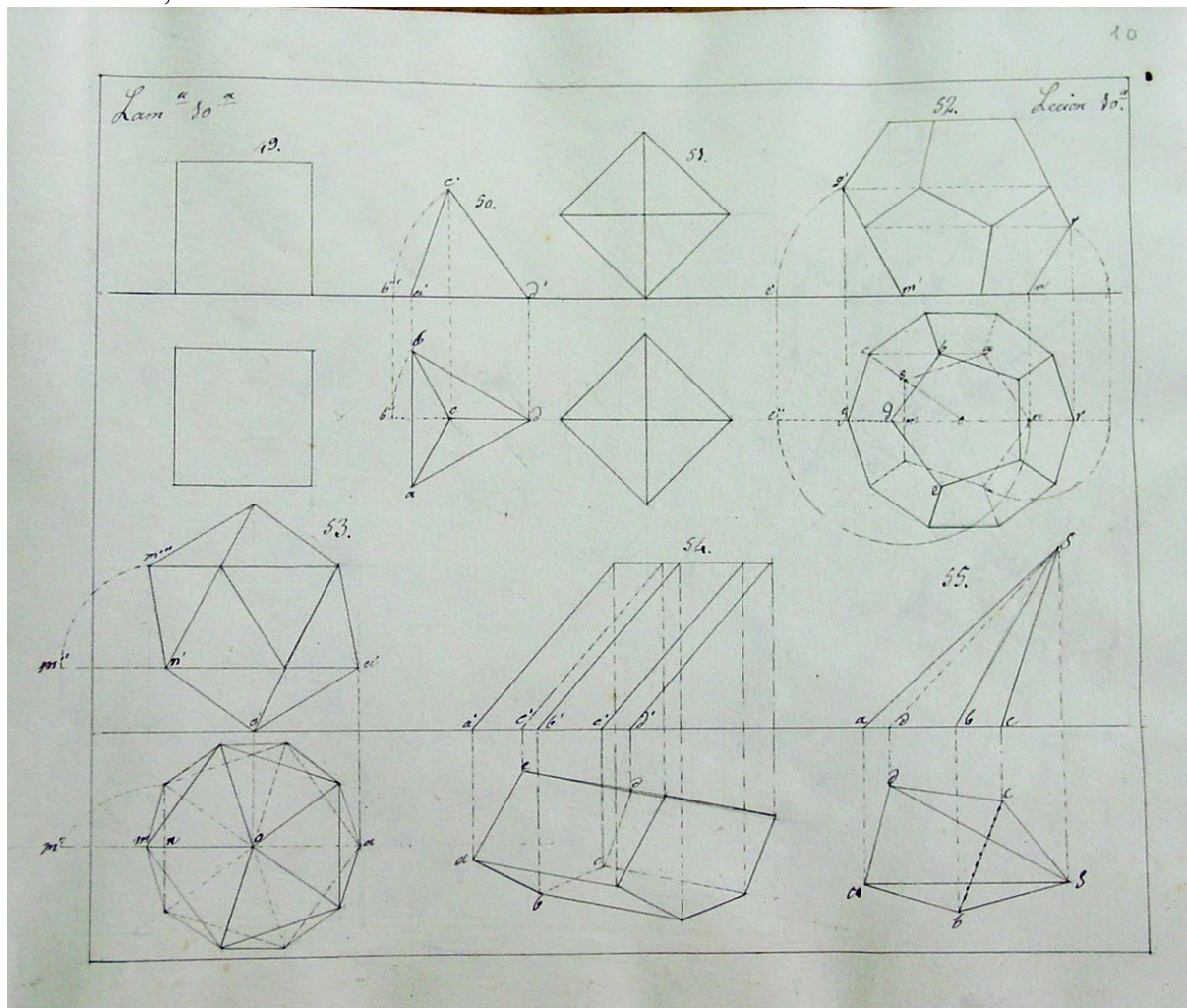
- 52.- Instruments i màquines.
- 53.- Eines del picapedrer.
- 54.- Mur recte. Mur en talús.
- 55.- Mur cilíndric. Mur cònic.
- 56.- Traçat i especejament d'arcs.
- 57.- Arcs adintellats.
- 58.- Voltes.
- 59.- Volta de canó seguit esbiaixat i en talús.
- 60.- Volta de canó seguit esbiaixat per dos costats.
- 61.- Volta de canó en baixada recta.
- 62.- Volta de canó en baixada i en biaix.
- 63.- Volta per aresta.
- 64.- Volta esquifada. Volta de mirall.
- 65.- Volta de canó en colze.
- 66.- Llunet recte.

- 67.- Llnet oblicu.
- 68.- Volta esfèrica.
- 69.- Fornícula esfèrica.
- 70.- Volta de quatre punts.
- 71.- Volta esfèrica a l'encontre de quatre voltes de canó recte.
- 72.- Cap-i-alt escarser. Cap-i-alt de Marsella.
- 73.- Cap-i-alt de Sant Antoni.
- 74.- Escala de trams rectes.
- 75.- Escala de cargol amb ànima.
- 76.- Escala de cargol amb ull.

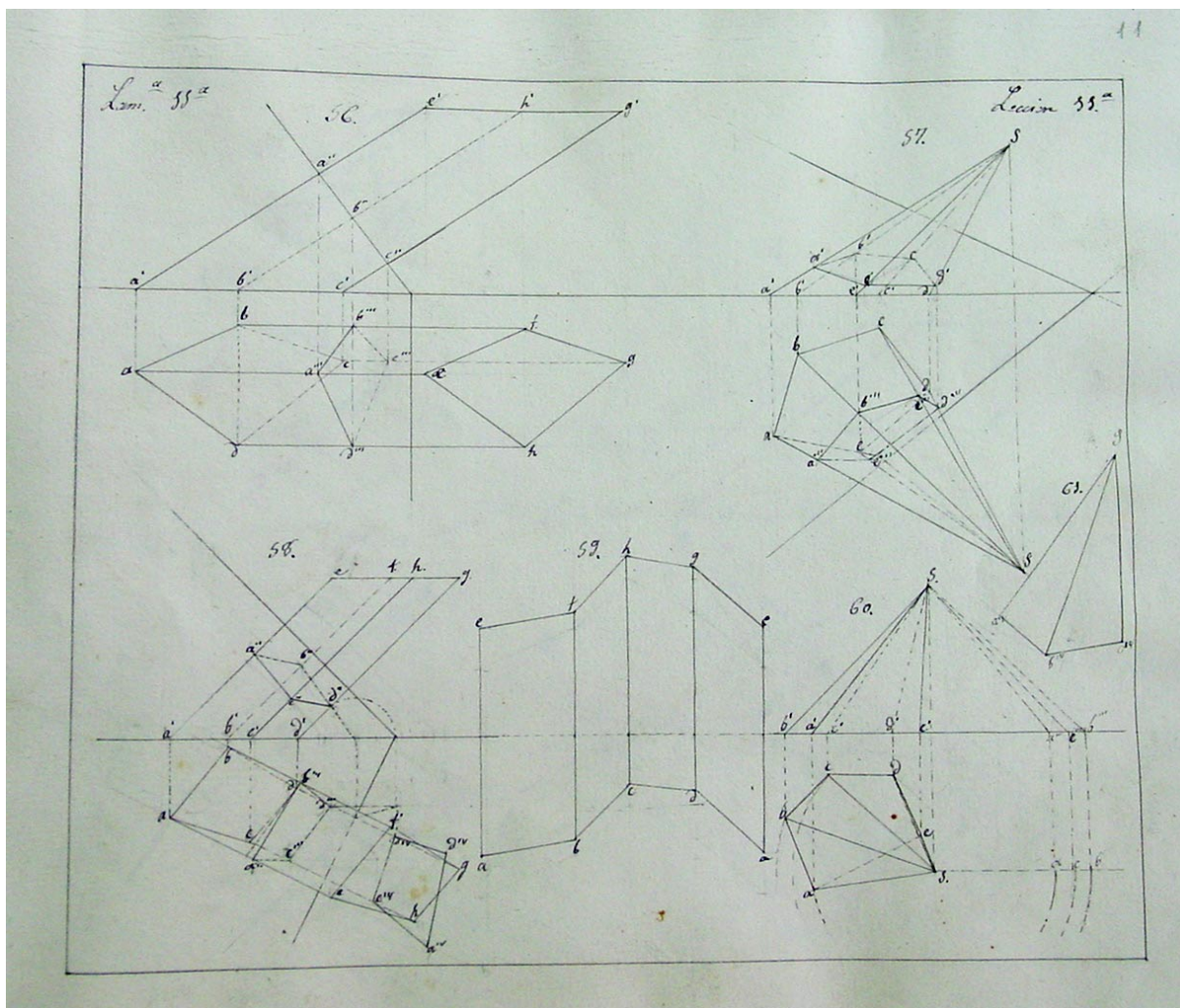
Tall de la fusta

- 77.- Encaixos d'espera.
- 78.- Encaixos de trau i metxa.
- 79.- Encaix de mitja mossa en creu. Encaix de mossa en cua d'oreneta.
- 80.- Emmetxats de pla amb mitja mossa i cua d'oreneta. Ceps.
- 81.- Engalzat. Empalmament en junta de jou.
- 82.- Empalmaments.
- 83.- Entramat de fusta.
- 84.- Embigats de fusta.
- 85.- Armadures de fusta.
- 86.- Armadura de volta esfèrica.

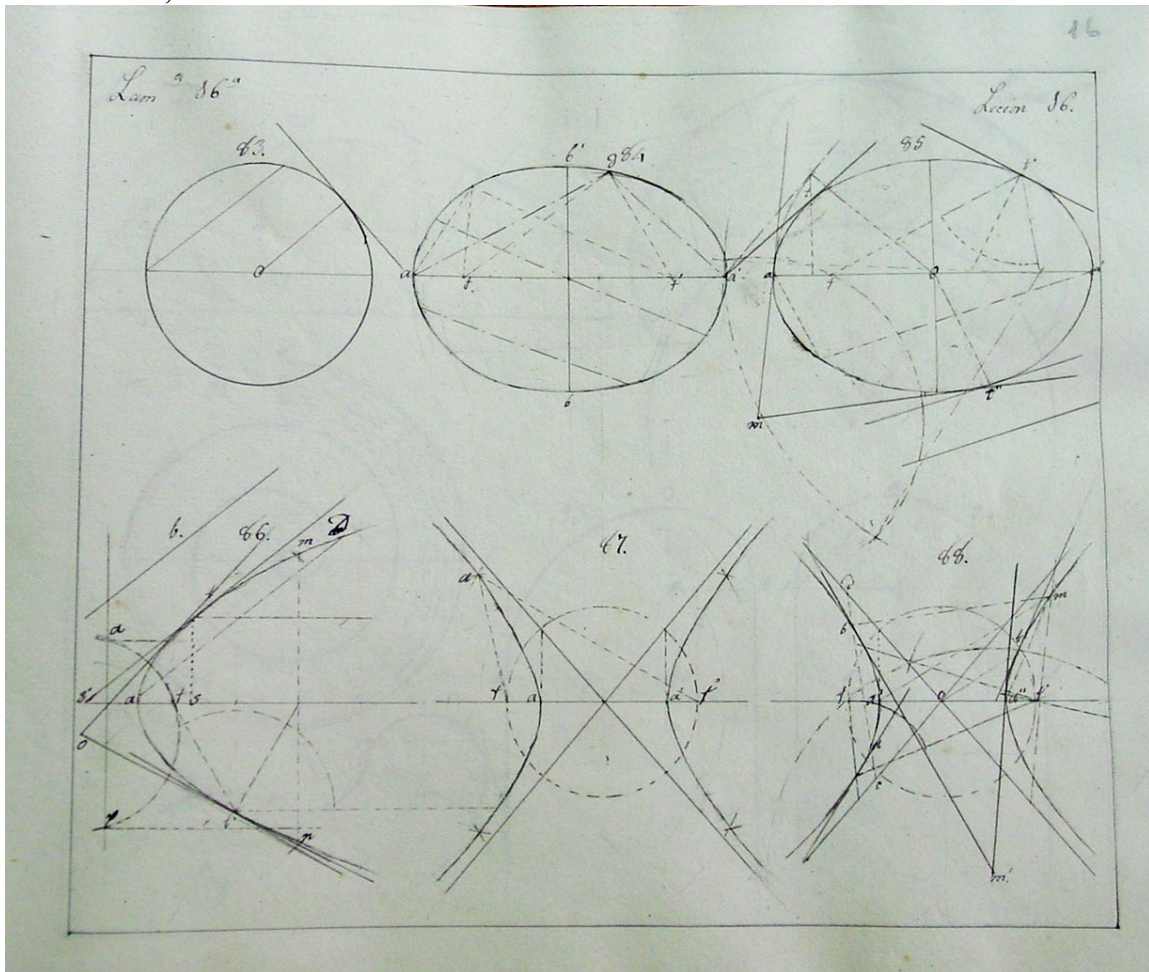
Casademunt, lámina 10.



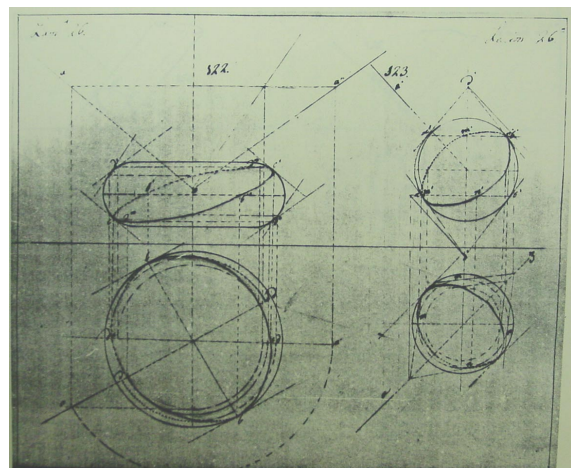
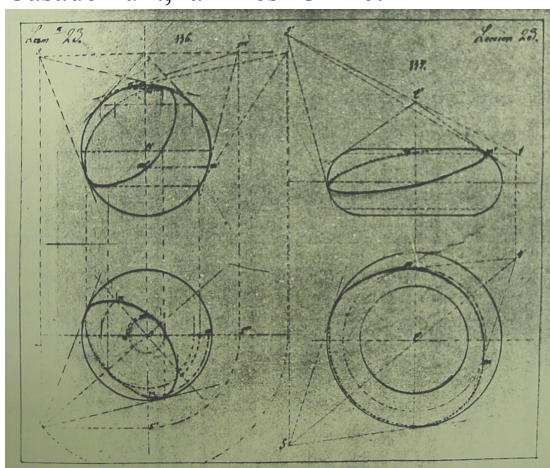
Casademunt, lámina 11.



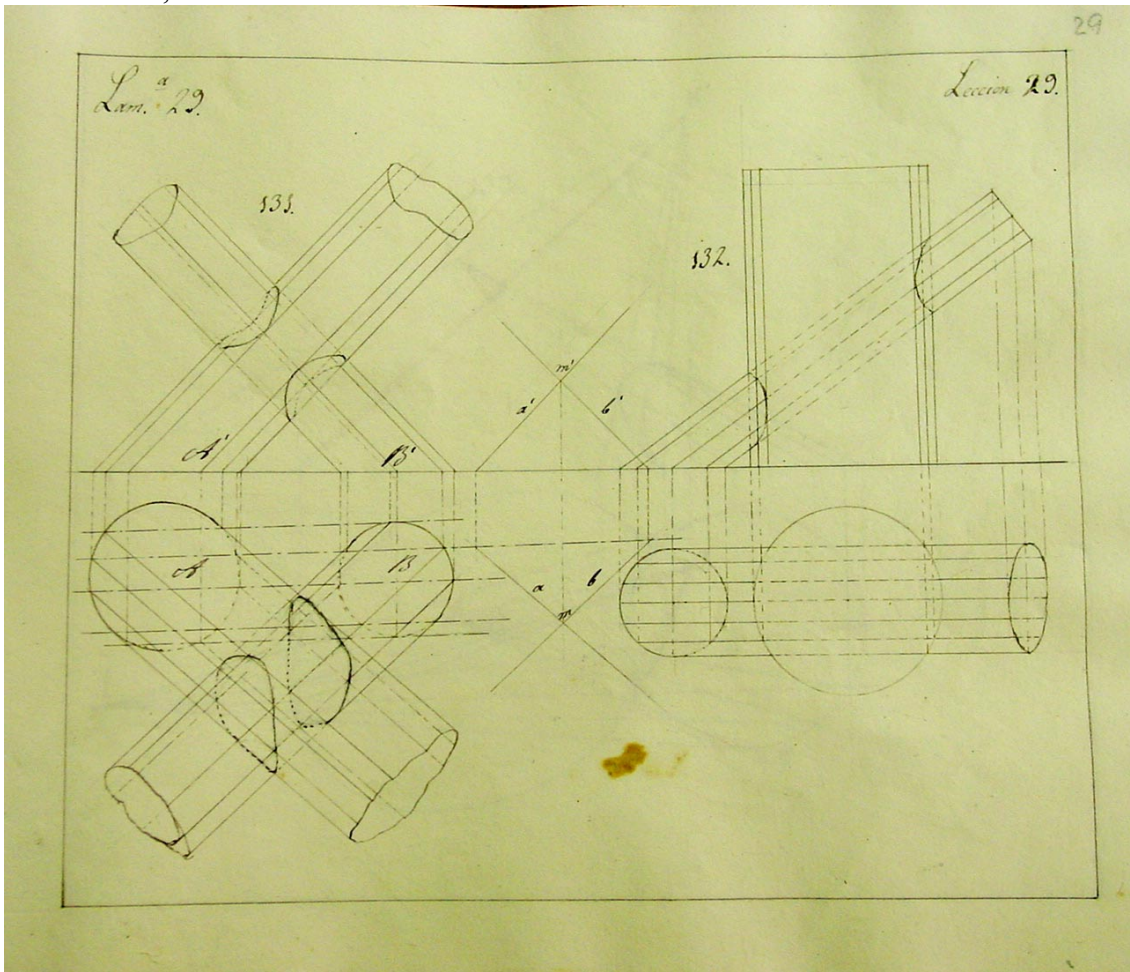
Casademunt, lámina 16.



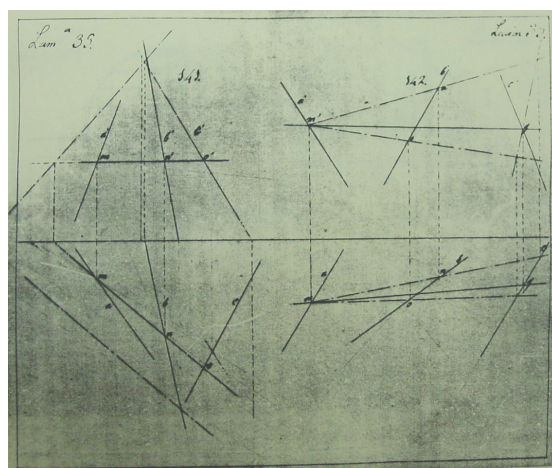
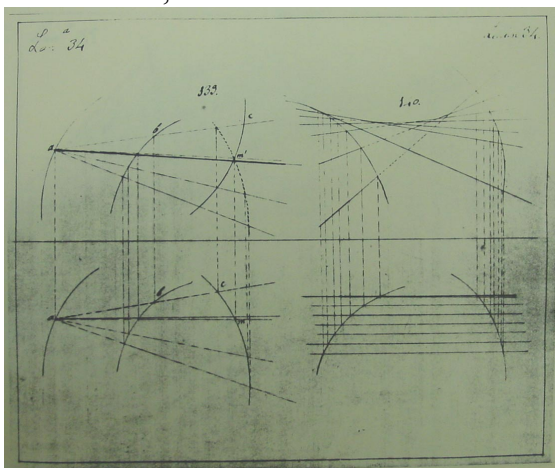
Casademunt, lámines 23 i 26.



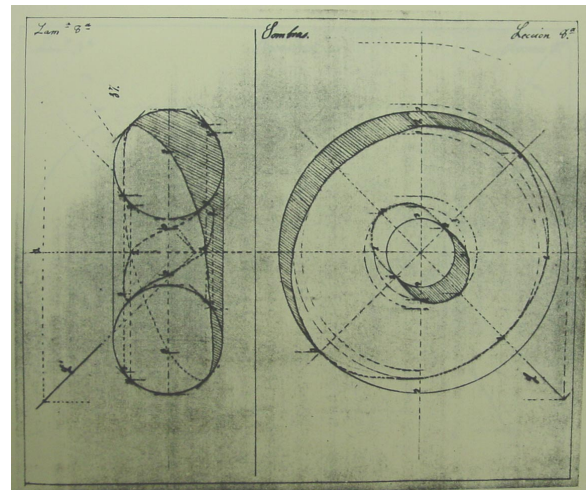
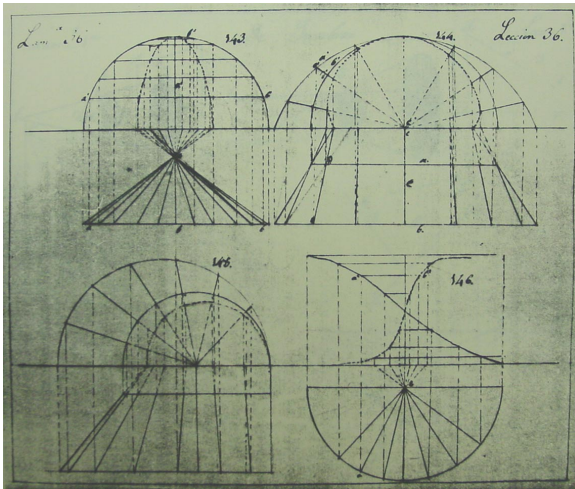
Casademunt, lámina 29.



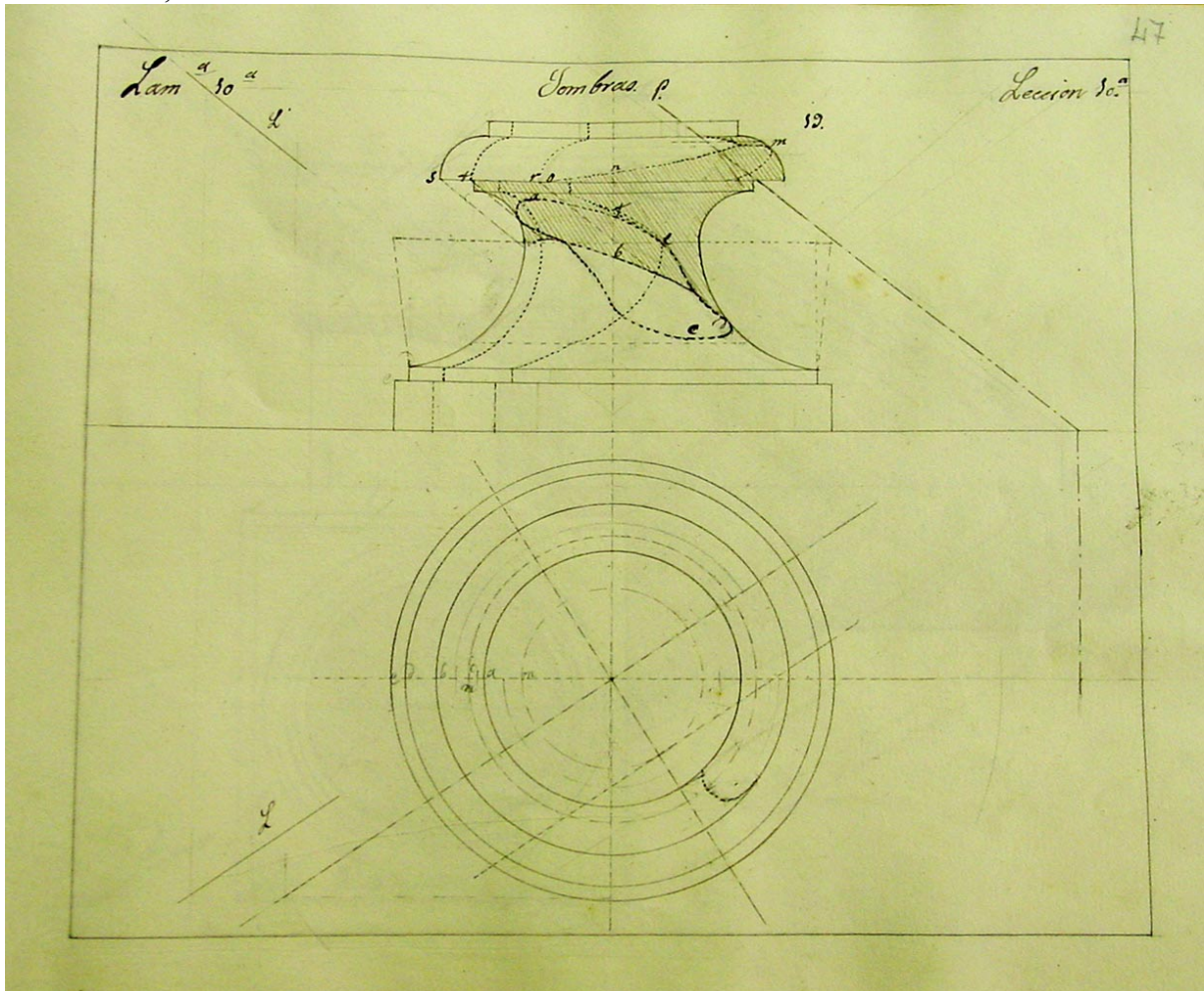
Casademunt, lámines 34 i 35.



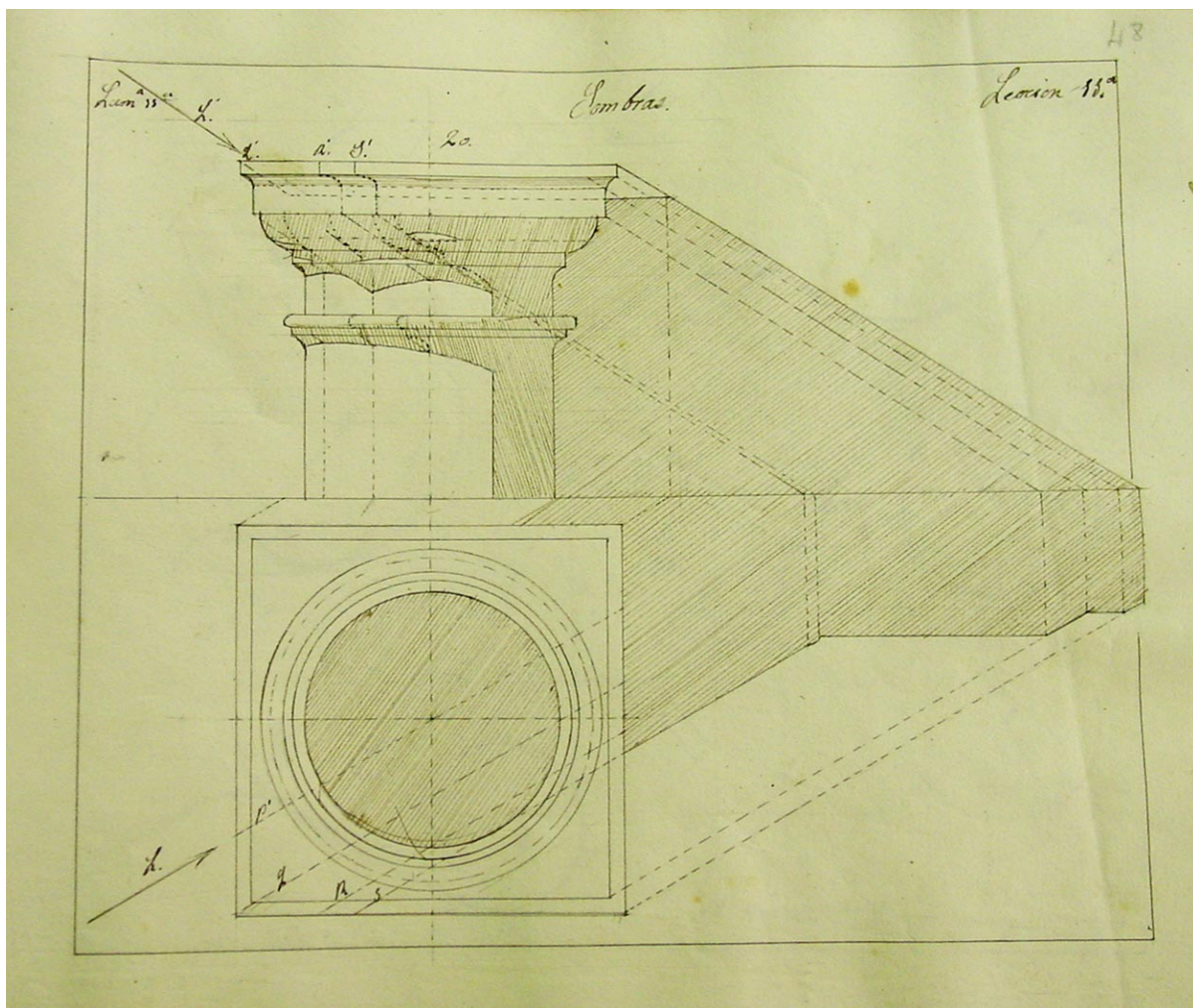
Casademunt, làmines 36 i 44.



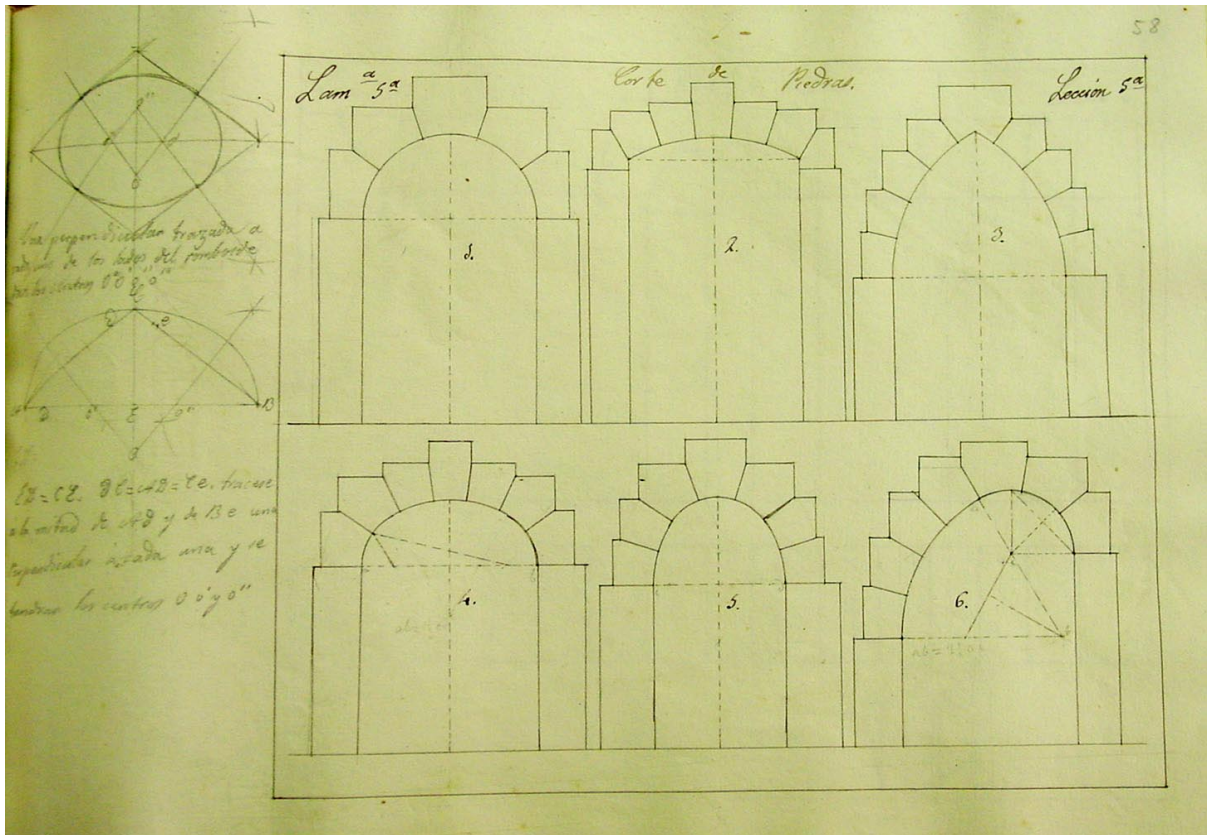
Casademunt, làmina 47.



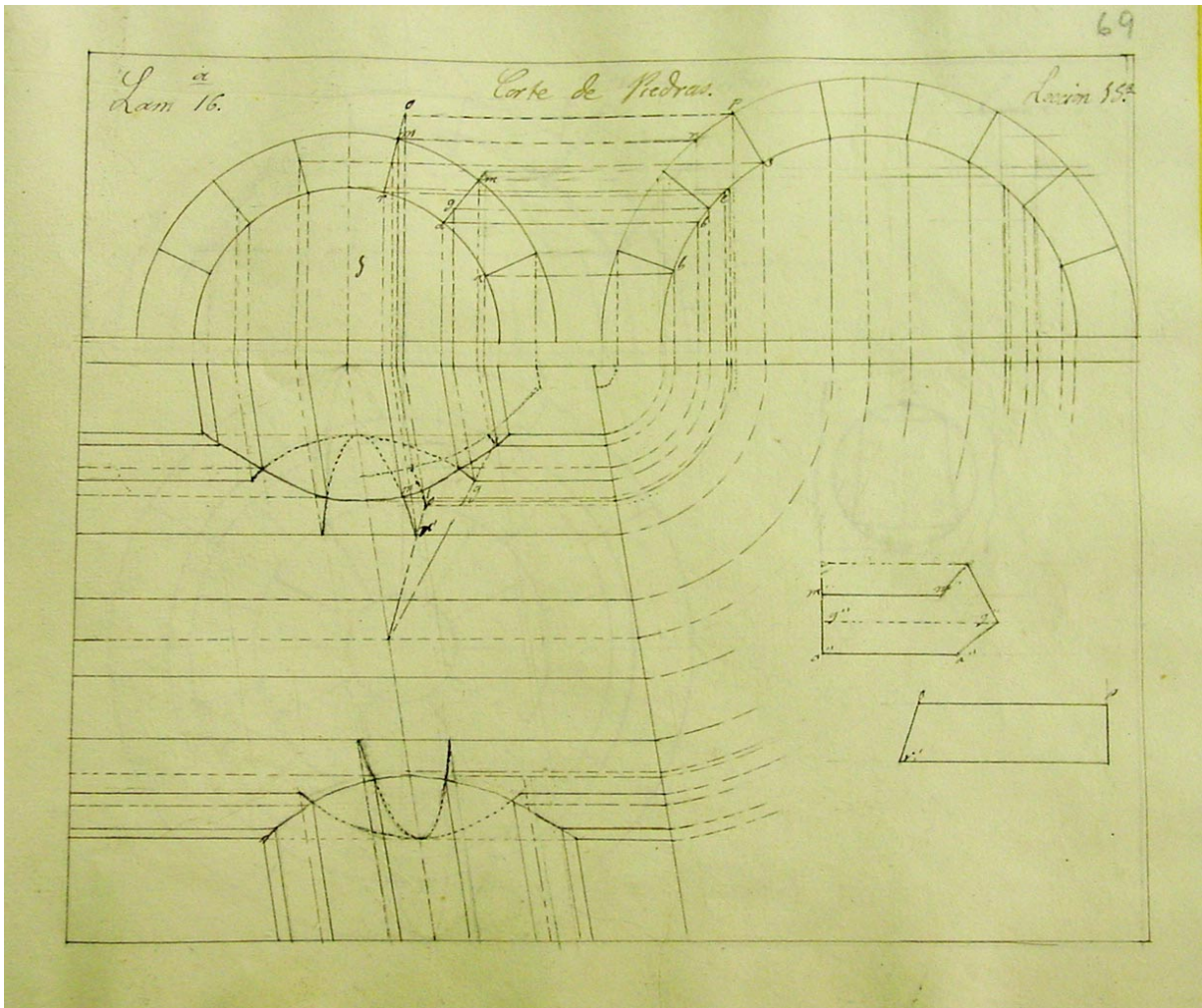
Casademunt, lámina 48.



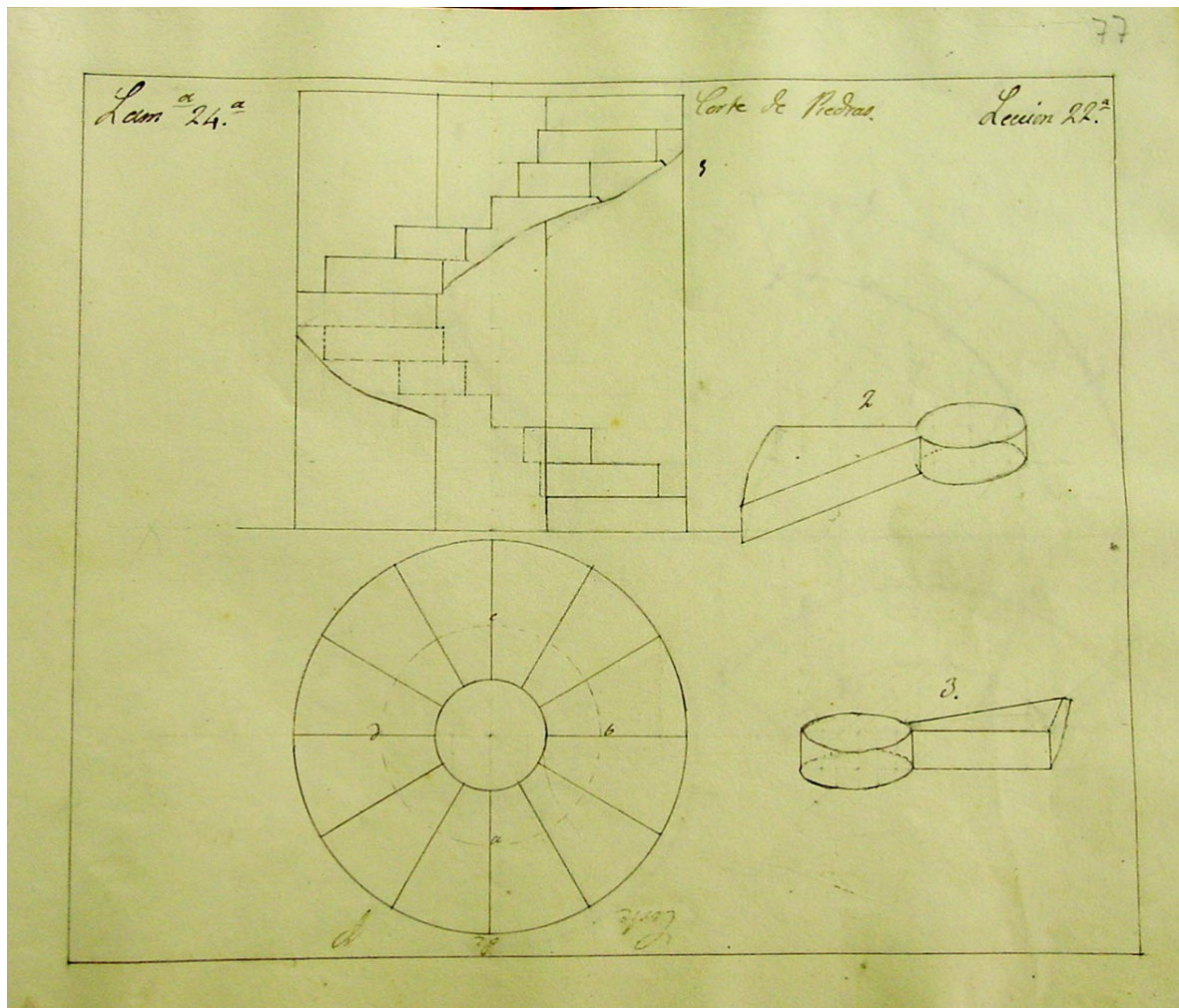
Casademunt, lámina 58, 5ena del tema de Tall de la pedra.



Casademunt, lámina 69, 16ena del tema de Tall de la pedra.



Casademunt, lámina 77, 24ena del tema Tall de la pedra.



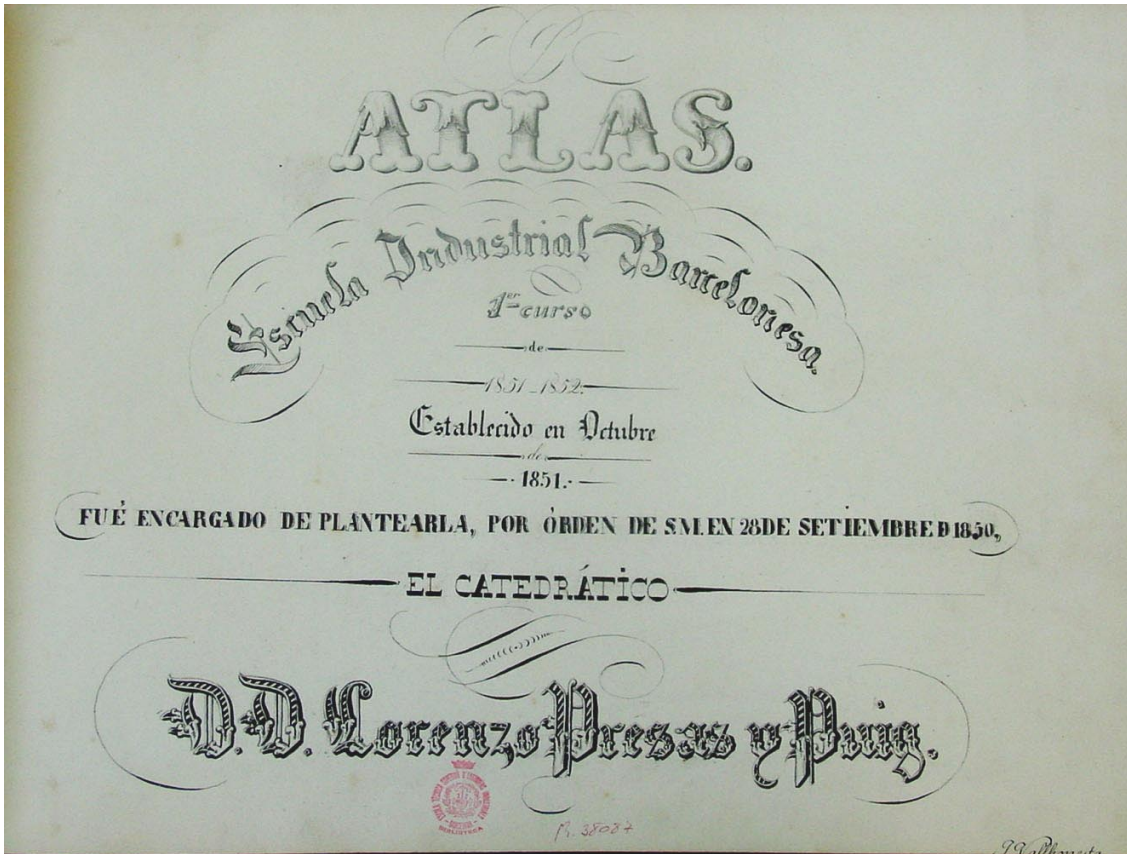
ANNEX 2.4

Atles de Llorenç Presas, 1851

Llibre manuscrit, de gran format, localitzat al fons antic de l'ETSEIB.

Títol complet: *Atlas Escuela Industrial Barcelonesa. 1r curso de 1851-1852. Establecido en octubre de 1851. Fue encargado de plantearla, por orden de S.M. en 28 de setiembre de 1850, el catedrático D. Lorenzo Presas y Puig.*

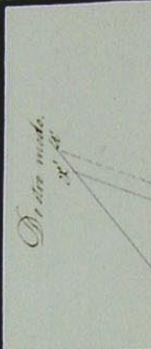
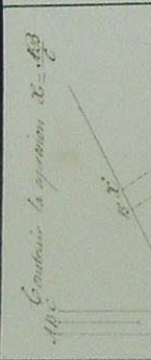
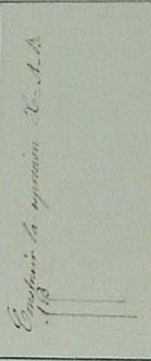
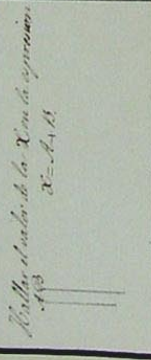

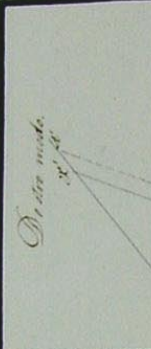
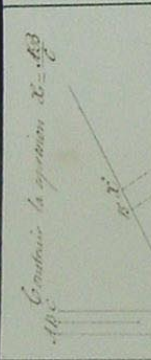
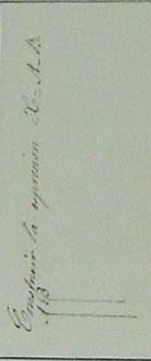
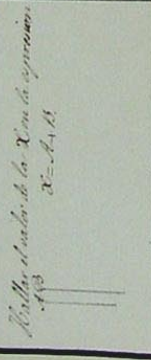

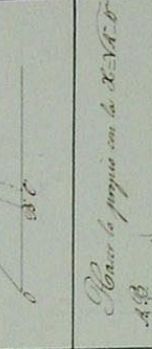
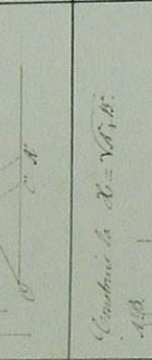
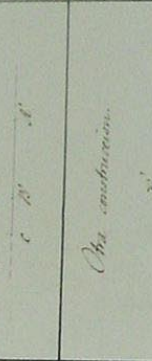
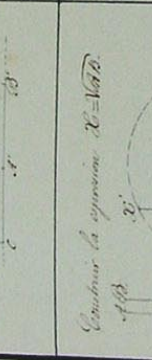

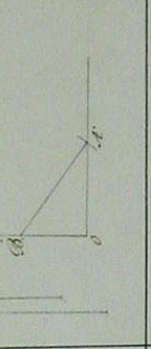
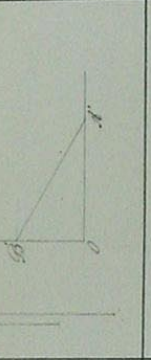
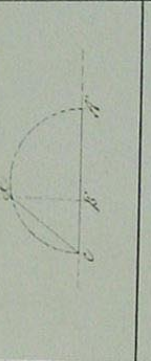
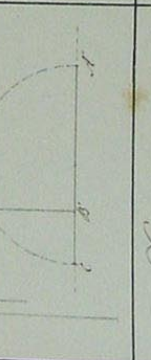

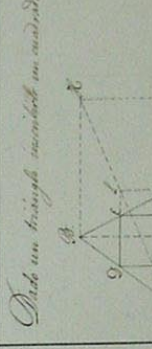
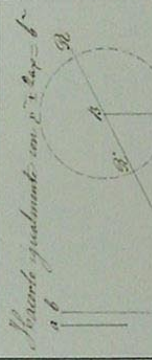
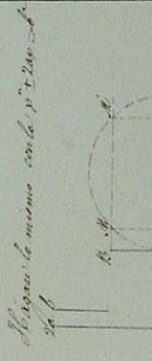
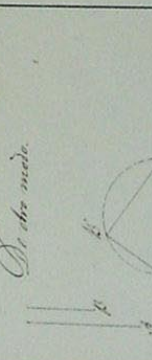

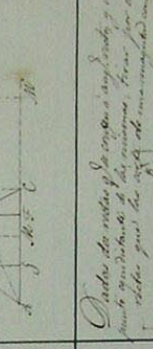
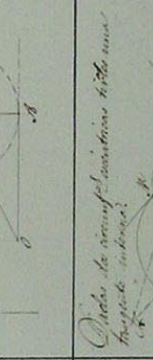
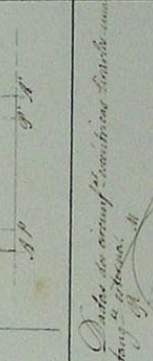
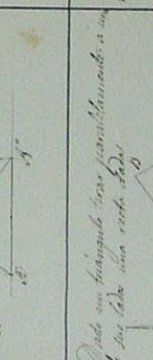

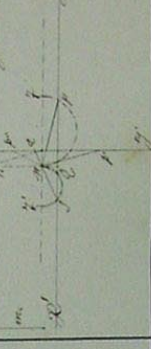
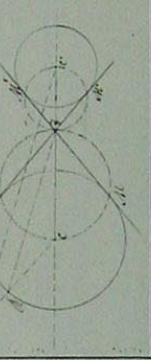
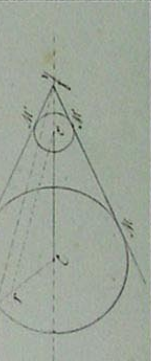
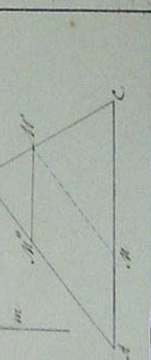

Codi de Barres: 1246438087
CDU: 378.6 (467.11) "18"



Atles, Llorenç Presas, quadre 1

Curso de 1851 a 1852.
Geometria analitica.

Ve.

<p><i>Quarto 1^o</i></p> <p>Divide el lado de la X en la expresion $X = A_1 B_1$</p> 	<p>Empieza la expresion $X = A_1 B_1$</p> 	<p>Empieza la expresion $X = A_1 B_1$</p> 	<p>Empieza la expresion $X = A_1 B_1$</p> 	<p>Empieza la expresion $X = A_1 B_1$</p> 
<p>Divide otro modo.</p> 	<p>Construye la expresion $X = A_1 B_1$</p> 	<p>Construye la expresion $X = A_1 B_1$</p> 	<p>Construye la expresion $X = A_1 B_1$</p> 	<p>Construye la expresion $X = A_1 B_1$</p> 
<p>Construye la expresion $X = A_1 B_1$</p> 	<p>Construye la expresion $X = A_1 B_1$</p> 	<p>Construye la expresion $X = A_1 B_1$</p> 	<p>Construye la expresion $X = A_1 B_1$</p> 	<p>Construye la expresion $X = A_1 B_1$</p> 
<p>Construye la expresion $X = A_1 B_1$</p> 	<p>Construye la expresion $X = A_1 B_1$</p> 	<p>Construye la expresion $X = A_1 B_1$</p> 	<p>Construye la expresion $X = A_1 B_1$</p> 	<p>Construye la expresion $X = A_1 B_1$</p> 
<p>Construye la expresion $X = A_1 B_1$</p> 	<p>Construye la expresion $X = A_1 B_1$</p> 	<p>Construye la expresion $X = A_1 B_1$</p> 	<p>Construye la expresion $X = A_1 B_1$</p> 	<p>Construye la expresion $X = A_1 B_1$</p> 
<p>Construye la expresion $X = A_1 B_1$</p> 	<p>Construye la expresion $X = A_1 B_1$</p> 	<p>Construye la expresion $X = A_1 B_1$</p> 	<p>Construye la expresion $X = A_1 B_1$</p> 	<p>Construye la expresion $X = A_1 B_1$</p> 
<p>Construye la expresion $X = A_1 B_1$</p> 	<p>Construye la expresion $X = A_1 B_1$</p> 	<p>Construye la expresion $X = A_1 B_1$</p> 	<p>Construye la expresion $X = A_1 B_1$</p> 	<p>Construye la expresion $X = A_1 B_1$</p> 

J. Vallmorales

Atles, Llorenç Presas, quadre 3

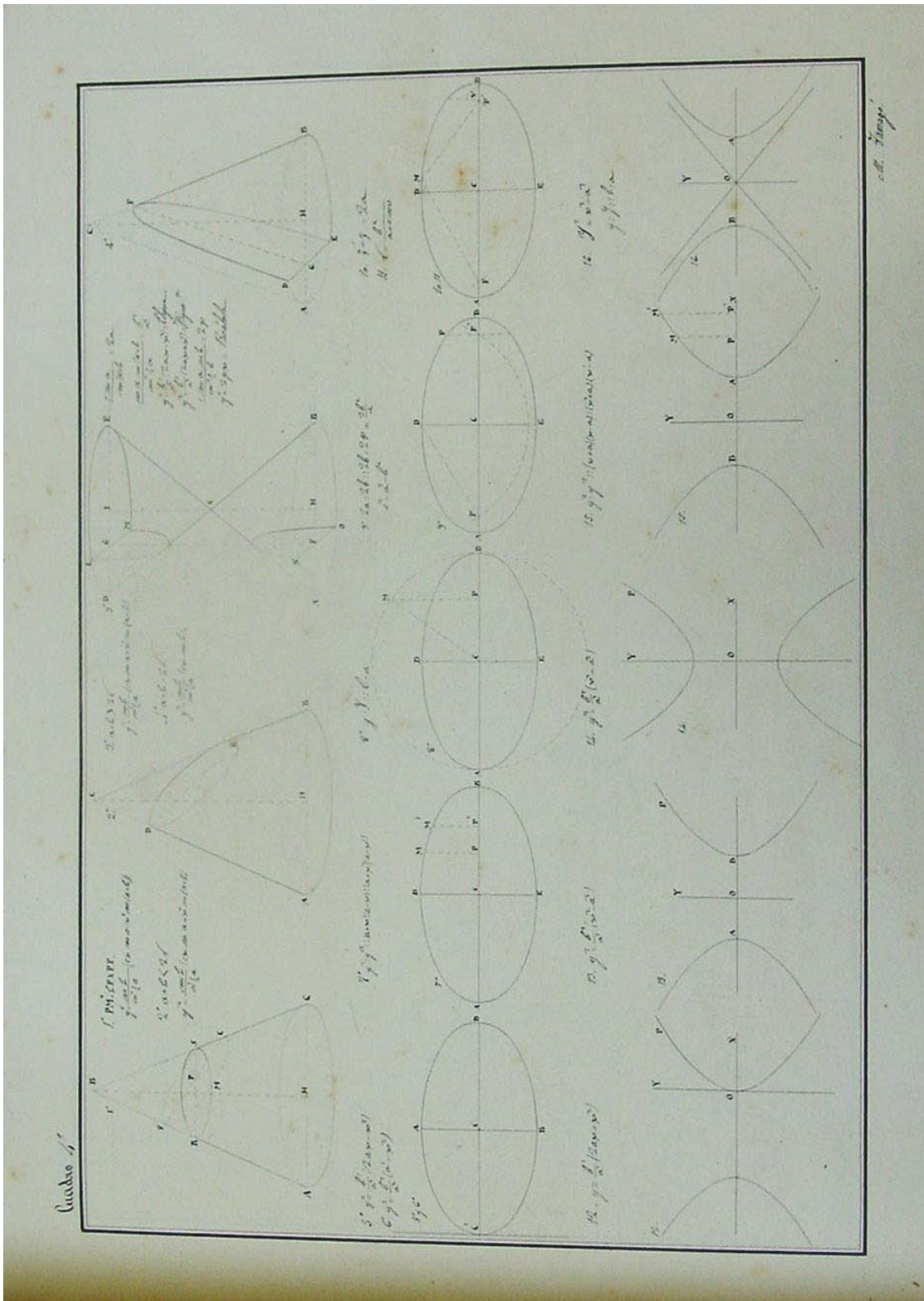
Quadro 3.^o
Geometria Analítica
Transformacion de coordenadas

Caric d'1851 a 1852.

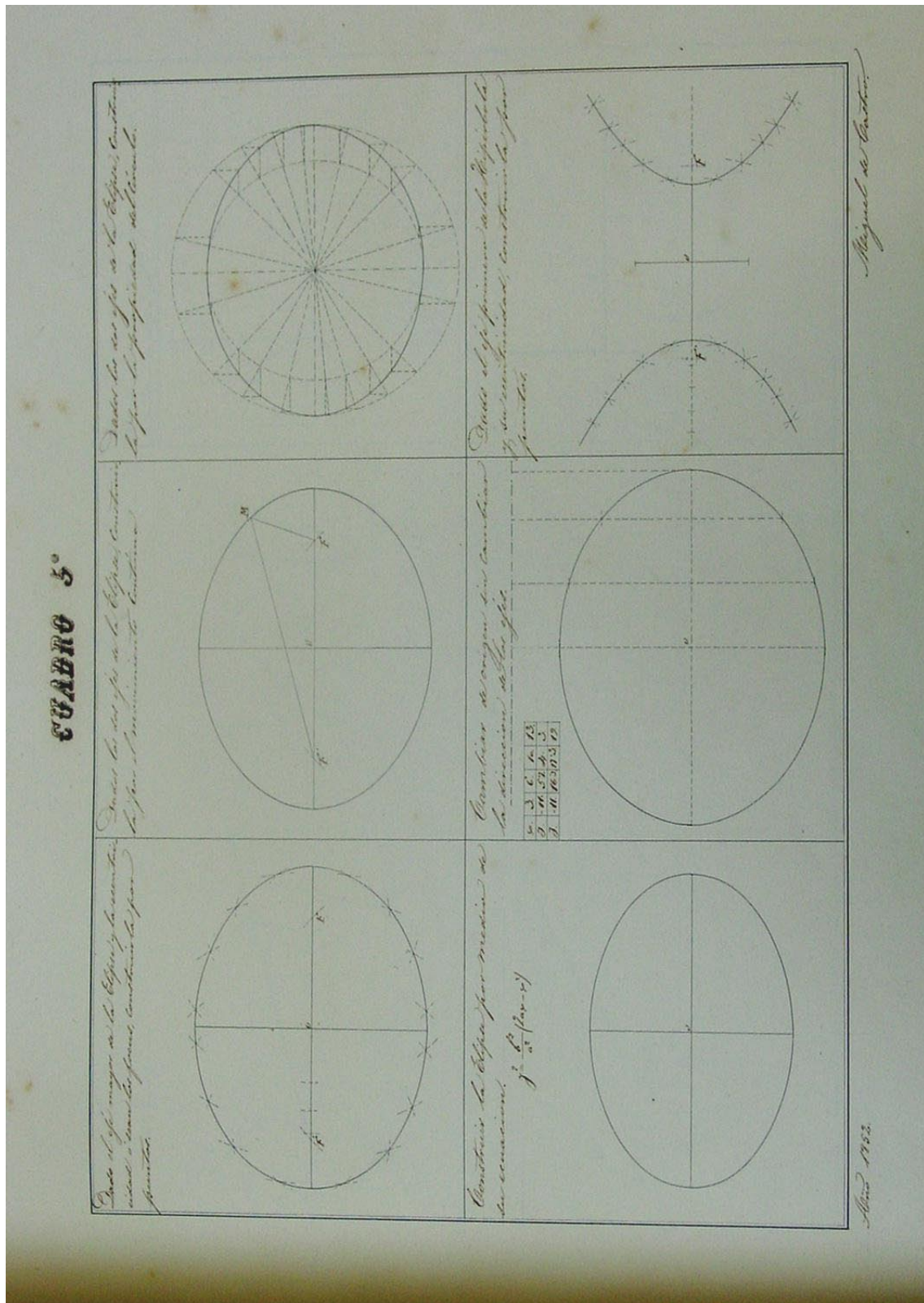
<p>Hallar las coordenadas de un punto cuando se transforma el origen de coordenadas por la traslacion de los ejes.</p> <p>$x = x' + a$ $y = y' + b$</p>	<p>Hallar las formulas de las coordenadas de un punto para pasar de un sistema de ejes oblicuos a otro oblicuo que tenga el mismo origen.</p> <p>$x = x' \cos \alpha + y' \cos \beta$ $y = x' \sin \alpha + y' \sin \beta$</p>	<p>Substituir las formulas de las coordenadas para pasar de un sistema de ejes ortogonales a otro tambien ortogonal que tenga el mismo origen.</p> <p>$x = x' \cos \alpha - y' \sin \alpha$ $y = x' \sin \alpha + y' \cos \alpha$</p>	<p>Dadas las coordenadas rectangulares de un punto hallar sus coordenadas para pasar a un sistema de ejes oblicuos a otro oblicuo.</p> <p>$x = a + x' \cos \alpha$ $y = b + y' \sin \alpha$</p>
<p>Hallar las coordenadas de un punto referido a ejes oblicuos hallar sus coordenadas para pasar a otro tambien oblicuo que no tenga el mismo origen.</p> <p>$x = x' \cos \alpha + y' \cos \beta + a$ $y = x' \sin \alpha + y' \sin \beta + b$</p>	<p>Dadas las coordenadas de un punto referido a ejes oblicuos hallar sus coordenadas para pasar a otro tambien oblicuo que no tenga el mismo origen.</p> <p>$x = x' \cos \alpha + y' \cos \beta + a$ $y = x' \sin \alpha + y' \sin \beta + b$</p>	<p>Dadas las coordenadas rectangulares de un punto hallar sus coordenadas para pasar a un sistema de ejes oblicuos a otro oblicuo.</p> <p>$x = a + x' \cos \alpha$ $y = b + y' \sin \alpha$</p>	<p>Hallar las formulas para pasar de un sistema de ejes oblicuos a otro oblicuo.</p> <p>$x = x' \cos \alpha + y' \cos \beta + a$ $y = x' \sin \alpha + y' \sin \beta + b$</p>

Jaume Balcells.

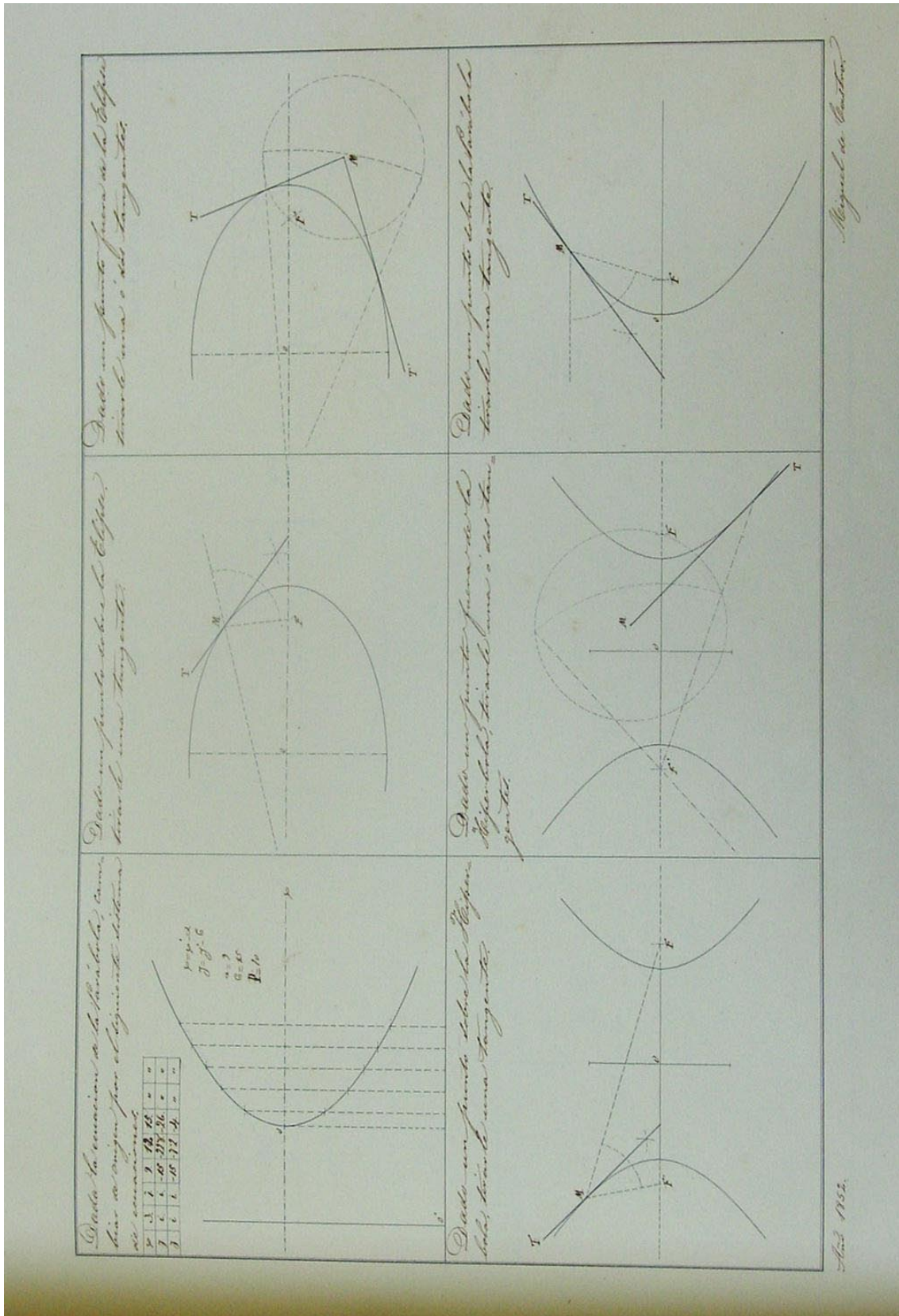
Atles, Llorenç Presas, quadre 4a



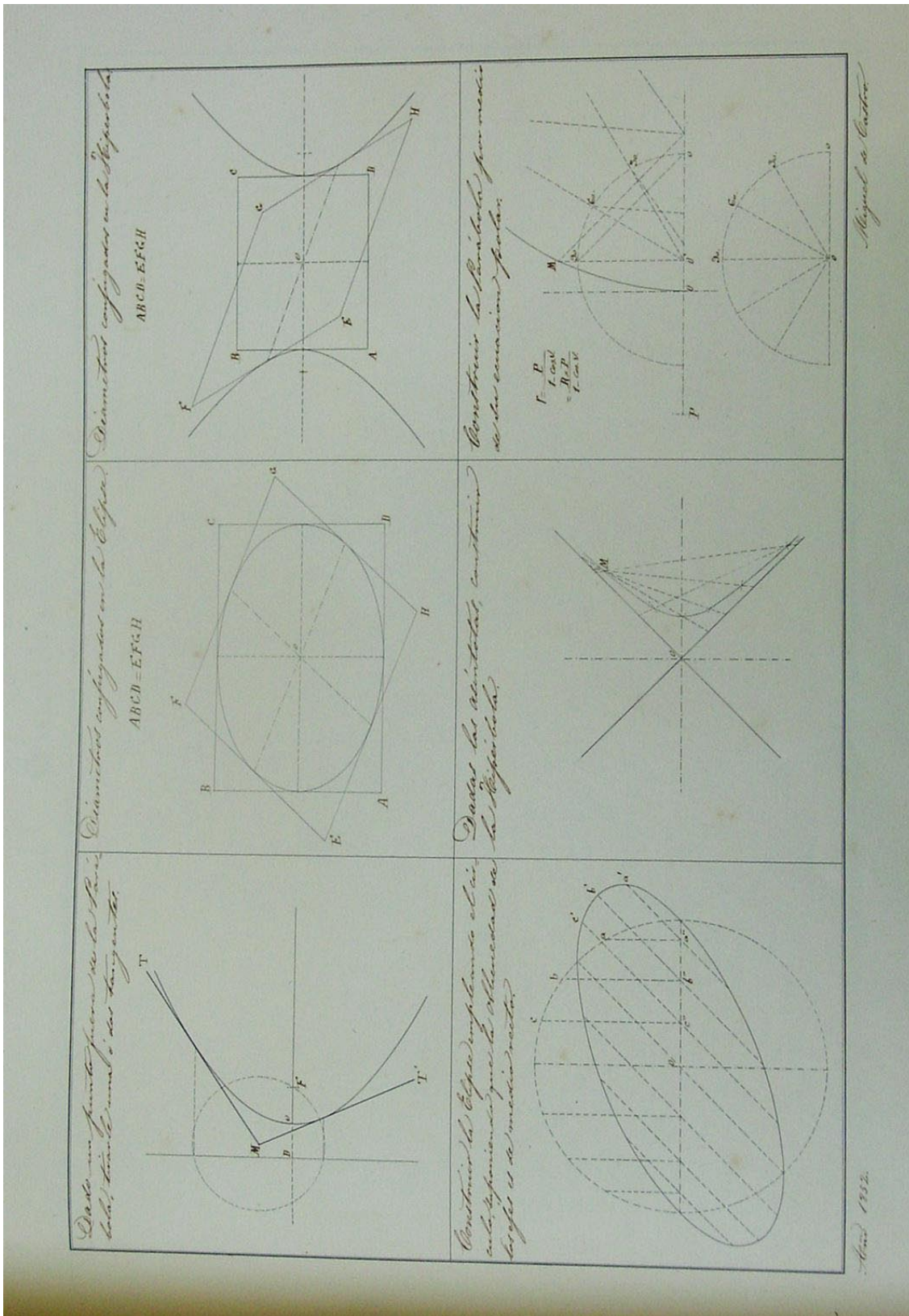
Atles, Llorenç Presas, quadre 5a



Atles, Llorenç Presas, quadre 5c



Atles, Llorenç Presas, quadre 5d



Atles, Llorenç Presas, quadre 6a

Geometria analitica
Curso de 1851 a 1852.

Método de Vallejo para resolver las ecuaciones numéricas de todos los grados.

Superiores.	Inferiores.	Superiores.	Inferiores.	Superiores.	Inferiores.
$a = \dots 13 \dots \dots \dots a = 0'097$	$b = \dots 14 \dots \dots \dots b = 0'056$	$a = 16 \dots \dots \dots a = 1'114$	$b = 17 \dots \dots \dots b = 0'013$	$a = 4 \dots \dots \dots a = -27$	$b = 3 \dots \dots \dots b = 1$
$D = \frac{0'097(13-14)}{0'056-0'097}$	$D = \frac{0'056(14-13)}{0'097-0'056}$	$D = \frac{1'114(17-16)}{0'013-0'114}$	$D = \frac{0'013(16-17)}{0'114-0'013}$	$D = \frac{-27(-4-3)}{-1-(-27)}$	$D = \frac{1(-3-4)}{-27-1}$
$x = \frac{0'097(0'056) + 14 - 0'056(0'097)}{2}$	$x = \frac{0'056(0'097) + 13 - 0'097(0'056)}{2}$	$x = \frac{1'114(0'013) + 17 - 0'013(1'114)}{2}$	$x = \frac{0'013(1'114) + 16 - 1'114(0'013)}{2}$	$x = \frac{-4 + 0'013(-27) - 0'013(27)}{2}$	$x = \frac{-3 + 0'013(-27)}{2}$
$x = 1'013598$	$x = 1'013598$	$x = 1'639339$	$x = 1'639339$	$x = -5'023350$	$x = -5'023350$

Juan Comas

Atles, Llorenç Presas, quadre 6b

Geometria analitica
Curso de 1851 a 1852.

Método de Lagrange para la resolución de las ecuaciones de todos los grados.

Superiores.	Inferiores.	Superiores.	Inferiores.
$a = \dots 13 \dots \dots \dots a = 0'097$	$b = \dots 14 \dots \dots \dots b = 0'056$	$a = 16 \dots \dots \dots a = 1'114$	$b = 17 \dots \dots \dots b = 0'013$
$D = \frac{0'097(13-14)}{0'056-0'097}$	$D = \frac{0'056(14-13)}{0'097-0'056}$	$D = \frac{1'114(17-16)}{0'013-0'114}$	$D = \frac{0'013(16-17)}{0'114-0'013}$
$x = \frac{0'097(0'056) + 14 - 0'056(0'097)}{2}$	$x = \frac{0'056(0'097) + 13 - 0'097(0'056)}{2}$	$x = \frac{1'114(0'013) + 17 - 0'013(1'114)}{2}$	$x = \frac{0'013(1'114) + 16 - 1'114(0'013)}{2}$
$x = 1'013598$	$x = 1'013598$	$x = 1'639339$	$x = 1'639339$

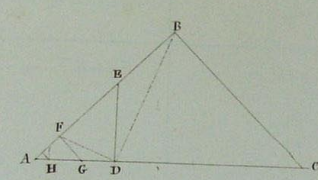
Juan Comas

Atles, Llorenç Presas, quadre 6e

Geometria analitica
Curso de 1851 à 1852.

Cuadro

Hallar la relación de la Diagonal del cuadrado con su lado.

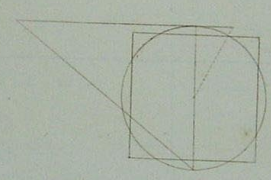


$CD = CB$
 $CD = CH$
 $CD = CH$

$AC = 2.57 = 1.414$
 $AD = 1$

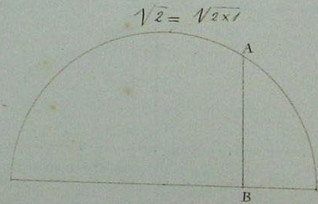
$AC^2 = AB^2 + BC^2 = AB^2 + AB^2 = 2AB^2$
 $2AB^2 = AC^2$
 $AC = \sqrt{2}AB$
 $AC = \sqrt{2} = 1.414$
 AB

Cuadratura del círculo.



$\frac{D}{C} = \frac{R}{\frac{1}{2}C} = \frac{7}{22} = \frac{113}{374}$

$\sqrt{2} = \sqrt{2 \times 1}$



AB. Lado del cuadrado.

Juan Cornudet

Atles, Llorenç Presas, quadre 8a

Calculo diferencial.
Curso de 1851 à 1852.

Cuadro 8º Lami'

Diferenciales sucesivas.	Coeficientes diferenciales de	Aplicacion
$\frac{d^2x}{dx^2} = p$ $\frac{d^3x}{dx^3} = q$ $\frac{d^4x}{dx^4} = r$ $\frac{d^5x}{dx^5} = s$	$\frac{d^2x}{dx^2} = p$ $\frac{d^3x}{dx^3} = q$ $\frac{d^4x}{dx^4} = r$ $\frac{d^5x}{dx^5} = s$	$\frac{d^2x}{dx^2} = 2ax$ $\frac{d^3x}{dx^3} = 2a$ $\frac{d^4x}{dx^4} = 0$ $\frac{d^5x}{dx^5} = 0$
<p>Demstrar que el teorema diferencial de una funcion de dos variables es igual considerando la una constante y la otra variable ó al contrario</p> <p>$(x+y)^m$</p> <p>$\frac{d^2(x+y)^m}{dx^2} = m(m-1)(x+y)^{m-2}$</p>	<p style="text-align: center;">teorema de Taylor.</p> <p>Demstrar dicho teorema, que es la base del calculo diferencial por medio de las funciones sucesivas.</p> <p>$f(x+y) = f(x) + y f'(x) + \frac{y^2}{2!} f''(x) + \frac{y^3}{3!} f'''(x) + \dots$</p>	<p>Demstrar el binomio de Newton por el teorema de Taylor substituyendo de la expresion $(x+y)^n = x^n + \dots$</p> <p>Binomio de Newton</p> <p>$\frac{d^2(x+y)^n}{dx^2} = n(n-1)(x+y)^{n-2}$</p>
<p>Desarrollar la funcion $u = \sqrt{a^2+x^2}$ por medio de la formula que se deduce del teorema de Taylor.</p> <p>$u = a + \frac{1}{2} \frac{x^2}{a} - \frac{1}{8} \frac{x^4}{a^3} + \dots$</p>	<p>$\frac{d^2u}{dx^2} = \frac{x}{a^2}$</p> <p>$\frac{d^3u}{dx^3} = \frac{1}{a^2}$</p> <p>$\frac{d^4u}{dx^4} = -\frac{3x}{4a^4}$</p> <p>$\frac{d^5u}{dx^5} = -\frac{3}{4a^4}$</p>	<p>$\frac{d^2u}{dx^2} = \frac{x}{a^2}$</p> <p>$\frac{d^3u}{dx^3} = \frac{1}{a^2}$</p> <p>$\frac{d^4u}{dx^4} = -\frac{3x}{4a^4}$</p> <p>$\frac{d^5u}{dx^5} = -\frac{3}{4a^4}$</p>
<p>Algunas otras variaciones de derivadas por regla</p>	<p style="text-align: center;">Formula general.</p> <p>$u = u + \frac{du}{dx}x + \frac{d^2u}{2!dx^2}x^2 + \frac{d^3u}{3!dx^3}x^3 + \dots$</p>	<p>$(x+y)^n = x^n + \frac{n}{1}x^{n-1}y + \frac{n(n-1)}{2!}x^{n-2}y^2 + \dots$</p>

José Clavel y Sallent.

Atles, Llorenç Presas, quadre 8b

Curso de 1851 à 1852. Cuadro. 8º Lamina 2ª

Demostar el Teorema de Stirling.
llamado antes de Maclaurin por medio del de Taylor haciendo la $x=0$
y lo que resulta de cada termino del ser miembro igualarlo a $\frac{d^m}{dx^m} f(x)$

$u = f(x+y) \quad u = f(x)$

$u = u \frac{du}{dx} + \frac{d^2 u}{dx^2} \frac{y^2}{2} + \frac{d^3 u}{dx^3} \frac{y^3}{6} + \frac{d^4 u}{dx^4} \frac{y^4}{24} + \dots$

$f(x) = \frac{y^4}{4} + \frac{y^3}{3} + \frac{y^2}{2} + \frac{y}{1} + \dots$

Demostar el Teorema de Stirling del mismo modo que lo demostro Maclaurin.

$u = \frac{y^4}{4} + \frac{y^3}{3} + \frac{y^2}{2} + \frac{y}{1} + \dots$

$\frac{du}{dx} = 0 + 1 + 2y + 3y^2 + 4y^3 + 5y^4 + 6y^5 + \dots$

$\frac{d^2 u}{dx^2} = 0 + 0 + 2 + 2 \cdot 2y + 3 \cdot 2y^2 + 4 \cdot 2y^3 + \dots$

$\frac{d^3 u}{dx^3} = 0 + 0 + 0 + 2 + 2 \cdot 2 + 2 \cdot 2 \cdot 2y + 3 \cdot 2 \cdot 2y^2 + \dots$

En las cuatro series que preceden haremos $x=0$, la 1ª nos dara:

1ª $\frac{d^m}{dx^m} = \dots = A = \frac{y^m}{m!}$

2ª $\frac{d^m}{dx^m} = \dots = B = \frac{y^m}{m!}$

3ª $\frac{d^m}{dx^m} = \dots = C = \frac{y^m}{m!}$

4ª $\frac{d^m}{dx^m} = \dots = D = \frac{y^m}{m!}$

Desarrollar la funcion siguiente por medio del Teorema de Stirling.

$u = (a+x)^n \quad x=0$

$u = \dots = \frac{y^m}{m!} a^{n-m}$

$\frac{du}{dx} = \dots = \frac{y^m}{m!} a^{n-m} m$

$\frac{d^2 u}{dx^2} = \dots = \frac{y^m}{m!} a^{n-m} m(m-1)$

$\frac{d^3 u}{dx^3} = \dots = \frac{y^m}{m!} a^{n-m} m(m-1)(m-2)$

$u = \frac{y^4}{4} + \frac{y^3}{3} + \frac{y^2}{2} + \frac{y}{1} + \dots$

$= a^n + \frac{n}{1} a^{n-1} y + \frac{n(n-1)}{2} a^{n-2} y^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{6} a^{n-3} y^3 + \dots$

Desarrollar otra otra funcion por el mismo Teorema.

$u = (a+x)^n \quad x=0$

$u = \dots = \frac{y^m}{m!} a^{n-m}$

$\frac{du}{dx} = \dots = \frac{y^m}{m!} a^{n-m} m$

$\frac{d^2 u}{dx^2} = \dots = \frac{y^m}{m!} a^{n-m} m(m-1)$

$\frac{d^3 u}{dx^3} = \dots = \frac{y^m}{m!} a^{n-m} m(m-1)(m-2)$

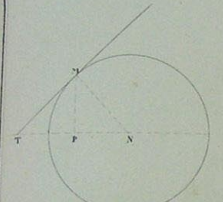
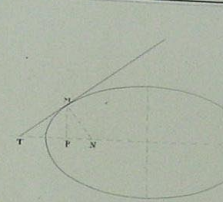
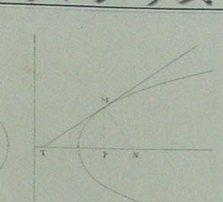
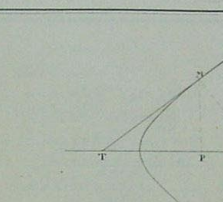
$u = \frac{y^4}{4} + \frac{y^3}{3} + \frac{y^2}{2} + \frac{y}{1} + \dots$

$= a^n + \frac{n}{1} a^{n-1} y + \frac{n(n-1)}{2} a^{n-2} y^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{6} a^{n-3} y^3 + \dots$

Jose Villaverde y Nuñez.

Atles, Llorenç Presas, quadre 10

Cuadro 10. 101

Halla el seno de la tangente en el círculo.

$\text{sen } \theta = \frac{y}{r}$

$\text{sen } \theta = \frac{y}{r}$

$\text{sen } \theta = \frac{y}{r}$

$\text{sen } \theta = \frac{y}{r}$

$\text{sen } \theta = \frac{y}{r}$

$\text{sen } \theta = \frac{y}{r}$

Halla la tangente en la elipse.

$\text{sen } \theta = \frac{y}{r}$

$\text{sen } \theta = \frac{y}{r}$

$\text{sen } \theta = \frac{y}{r}$

$\text{sen } \theta = \frac{y}{r}$

$\text{sen } \theta = \frac{y}{r}$

$\text{sen } \theta = \frac{y}{r}$

Halla la tangente en la parábola.

$\text{sen } \theta = \frac{y}{r}$

$\text{sen } \theta = \frac{y}{r}$

$\text{sen } \theta = \frac{y}{r}$

$\text{sen } \theta = \frac{y}{r}$

$\text{sen } \theta = \frac{y}{r}$

$\text{sen } \theta = \frac{y}{r}$

Halla el seno de la subtangente en la elipse.

$\text{sen } \theta = \frac{y}{r}$

$\text{sen } \theta = \frac{y}{r}$

$\text{sen } \theta = \frac{y}{r}$

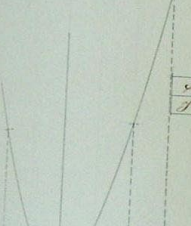
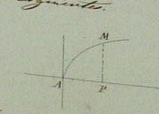
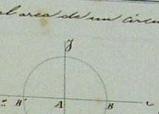
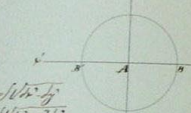
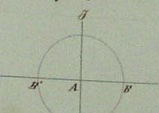
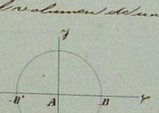
$\text{sen } \theta = \frac{y}{r}$

$\text{sen } \theta = \frac{y}{r}$

$\text{sen } \theta = \frac{y}{r}$

CURSO de 1851 à 1852. M. Carrago.

Atles, Llorenç Presas, quadre 12a

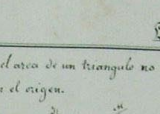
<p>Demuestra la ecuacion anterior de las curvas siguientes</p> <p>$m^2 - m^2 = p^2$ $y = p^2 x^2$ $y = p^2 x^2$</p>  <p>x y</p>	<p>Demuestra la ecuacion anterior de las curvas siguientes</p> <p>$y = p^2 x^2$ $y = p^2 x^2$ $x = p^2 y^2$</p>  <p>x y</p>	<p>Hallar el area del semicirculo</p>  <p>$AB = a$ $AB = a$ $y = \sqrt{a^2 - x^2}$ $y = \sqrt{a^2 - x^2}$ $y = \sqrt{a^2 - x^2}$</p>
<p>Hallar la longitud del arco de la circunferencia</p>  <p>$AB = a$ $AB = a$ $y = \sqrt{a^2 - x^2}$ $y = \sqrt{a^2 - x^2}$</p>	<p>Hallar la superficie del cono</p>  <p>$a = 2\pi y \sqrt{a^2 - y^2}$ $a = 2\pi y \sqrt{a^2 - y^2}$ $a = 2\pi y \sqrt{a^2 - y^2}$</p>	<p>Hallar el volumen del cono</p>  <p>$a = 2\pi y \sqrt{a^2 - y^2}$ $a = 2\pi y \sqrt{a^2 - y^2}$ $a = 2\pi y \sqrt{a^2 - y^2}$</p>

Atles, Llorenç Presas, quadre 12c

Curso de 1551 á 1552.

Cuadro 12^o

Exercicio 1^o

<p>Cuadratura de las Curvas.</p> <p>$y = ax^m$ $y = f^m x^m$ Ecuacion de una familia de parabolae.</p> <p>$dx = y dx$ $y = x^m$ $dx = x dx$</p> <p>$\int dx = \int y dx$ $\int dx = \int f^m x^m dx$ $= \frac{f^m x^{m+1}}{m+1} + C$</p> <p>Dando valores particulares á la (m) y á la (n) podran discutir esta ecuacion.</p>	<p>Demuestra que dados a la (m) y a la (n) el valor (s) resulta un triangulo.</p> <p>$m = 1$ $n = 1$</p> <p>$\int dx = \int f^m x^m dx$ $\int dx = \int \frac{ax^m}{2} dx$ $x = a^m$ $x = 0$ $\frac{ax^m}{2} = C = 0$</p> <p>$\int_0^x dx = \frac{ax^m}{2}$ $= \frac{ax^m}{2} x = \frac{ax^m}{2}$ $= \frac{ax^m}{2} = \text{area del triangulo } PSM$</p>	<p>Hallar el area de un triangulo no estando ninguno vertice en el origen.</p>  <p>$y = ax + b$ $dx = y dx$</p> <p>$dx = (ax + b) dx$ $= ax^2 + b dx$ $= \frac{ax^2}{2} + bx + C$ $x = a$ $x = 0$ $C = 0$</p> <p>$\int_0^a dx = \frac{ax^2}{2} + bx$ $= \frac{a^3}{2} + ba = \frac{a^3}{2} + ab = \frac{a^3 + 2ab}{2}$ $= \frac{a^3 + 2ab}{2} = \text{area del triangulo } PSM$</p>
<p>Hallar el area de un trapezio pasando la recta por el origen.</p> <p>$\int dx = \int y dx = \int ax dx$ $= a \int dx = \frac{ax^2}{2} + C$</p> <p>$x = a$ $x = 0$ $\frac{ax^2}{2} = C = 0$</p> <p>$\int_0^a dx = \frac{ax^2}{2}$ $= \frac{a^3}{2} = \frac{a^3}{2} = \text{area del trapezio } PSM$</p>	<p>Hallar el area del trapezio cuando no pasa por el origen.</p> <p>$\int dx = \int y dx$ $= \int (ax + b) dx$ $= \int ax dx + \int b dx$ $= \frac{ax^2}{2} + bx + C$</p> <p>$x = a$ $x = 0$ $C = 0$</p> <p>$\int_0^a dx = \frac{ax^2}{2} + bx$ $= \frac{a^3}{2} + ba = \frac{a^3}{2} + ab = \text{area del trapezio } PSM$</p>	<p>Hallar el area de un trapezio no pasando la recta por el origen y colocado del modo siguiente.</p> <p>$\int dx = \int y dx$ $= \int (ax + b) dx$ $= \int ax dx + \int b dx$ $= \frac{ax^2}{2} + bx + C$</p> <p>$x = a$ $x = 0$ $C = 0$</p> <p>$\int_0^a dx = \frac{ax^2}{2} + bx$ $= \frac{a^3}{2} + ba = \frac{a^3}{2} + ab = \text{area del trapezio } PSM$</p>

José Vilanova y Juss.

ANNEX 2.5

Tractats de M. T. Olivier, 1843 i 1845

Al fons antic de la biblioteca de l'ETSEIB podem trobar dos llibres de M. Théodore Olivier:
El primer és editat a París el 1843. (1^a edició), i es reedità el 1852 (2^a edició), el 1870 (3^a edició), i el 19--.

Títol complet: *Cours de géométrie descriptive. Pemière partie. Du point, de la droite et du plan.*

Signatura: 515 Oli R-30063

Codi de barres: 1246430063

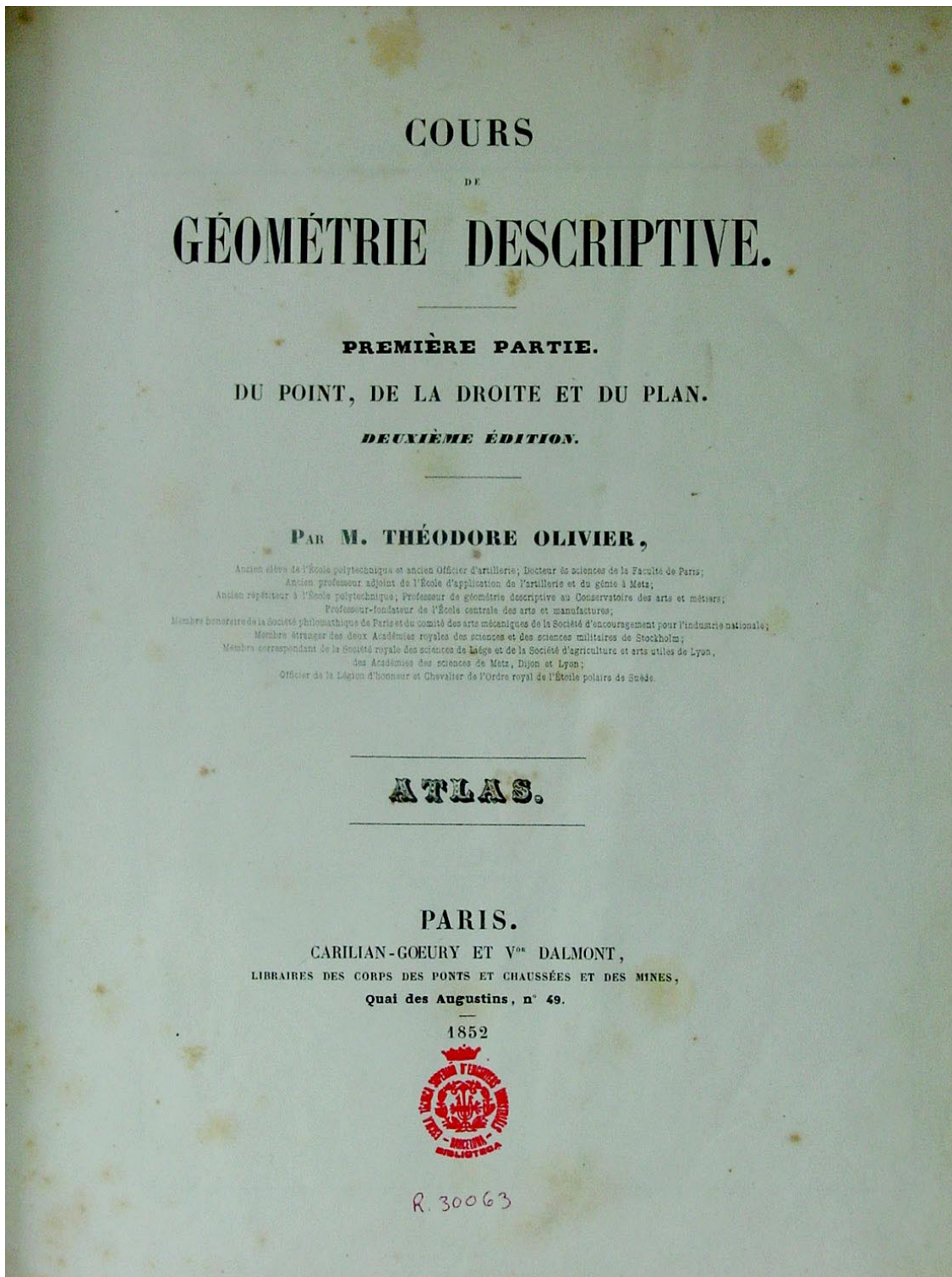
El segon és per complementar el primer. Editat a París, 1845 (1^a edició).

Títol complet: *Compléments de Géométrie Descriptive.*

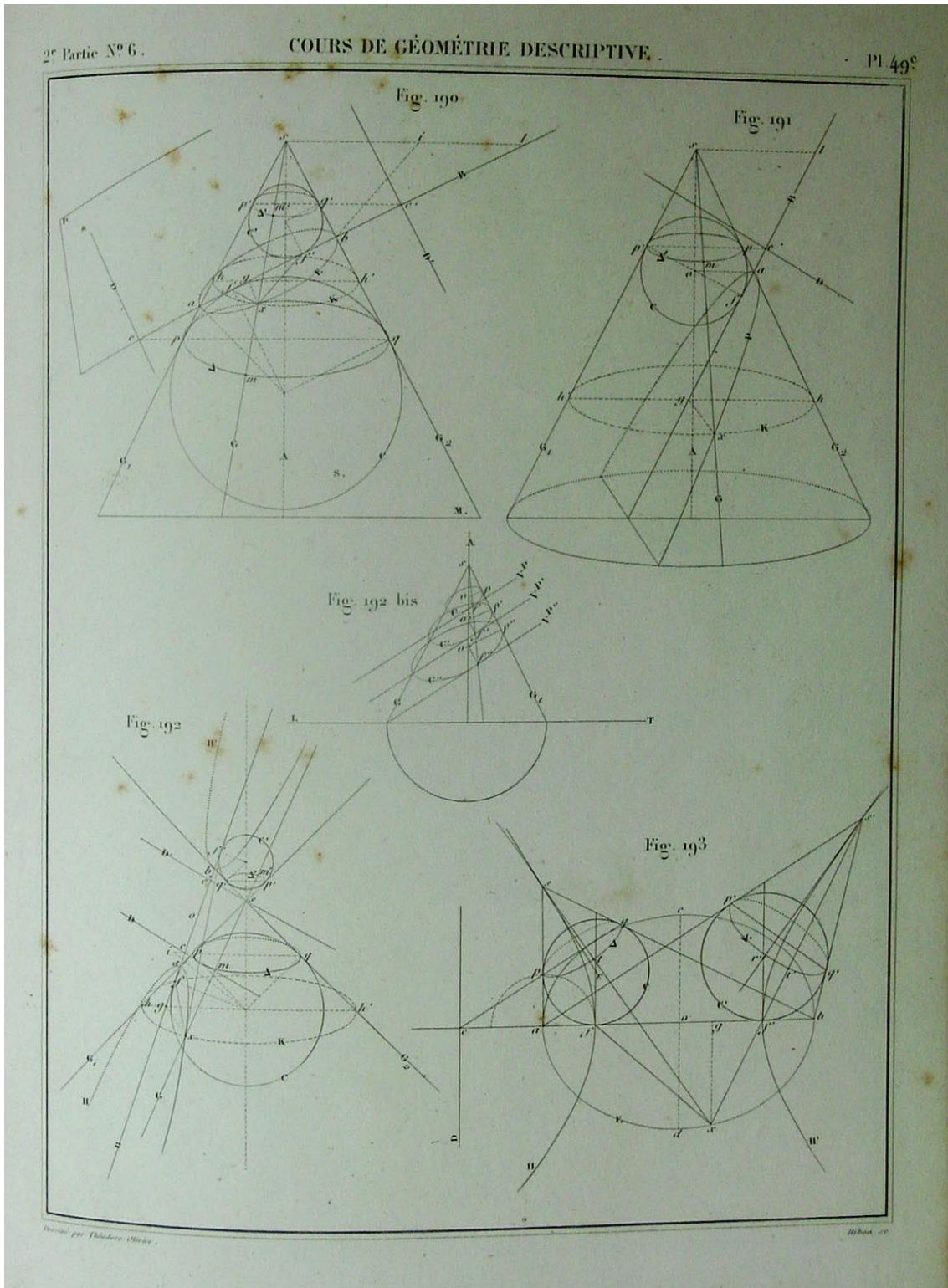
Signatura: 515 Oli R-30062

Codi de barres: 1246430062

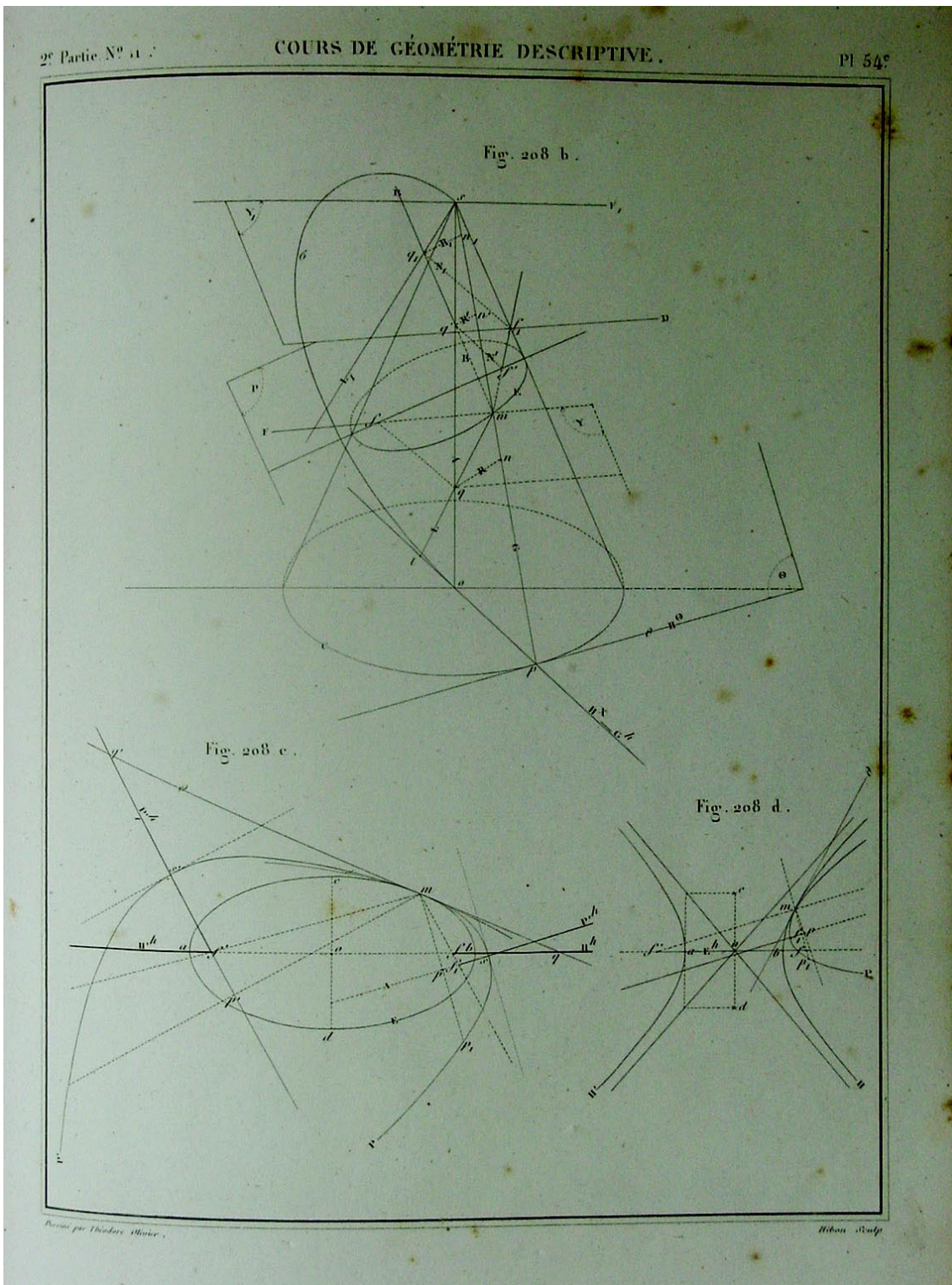
Olivier, Cours de Géométrie descriptive



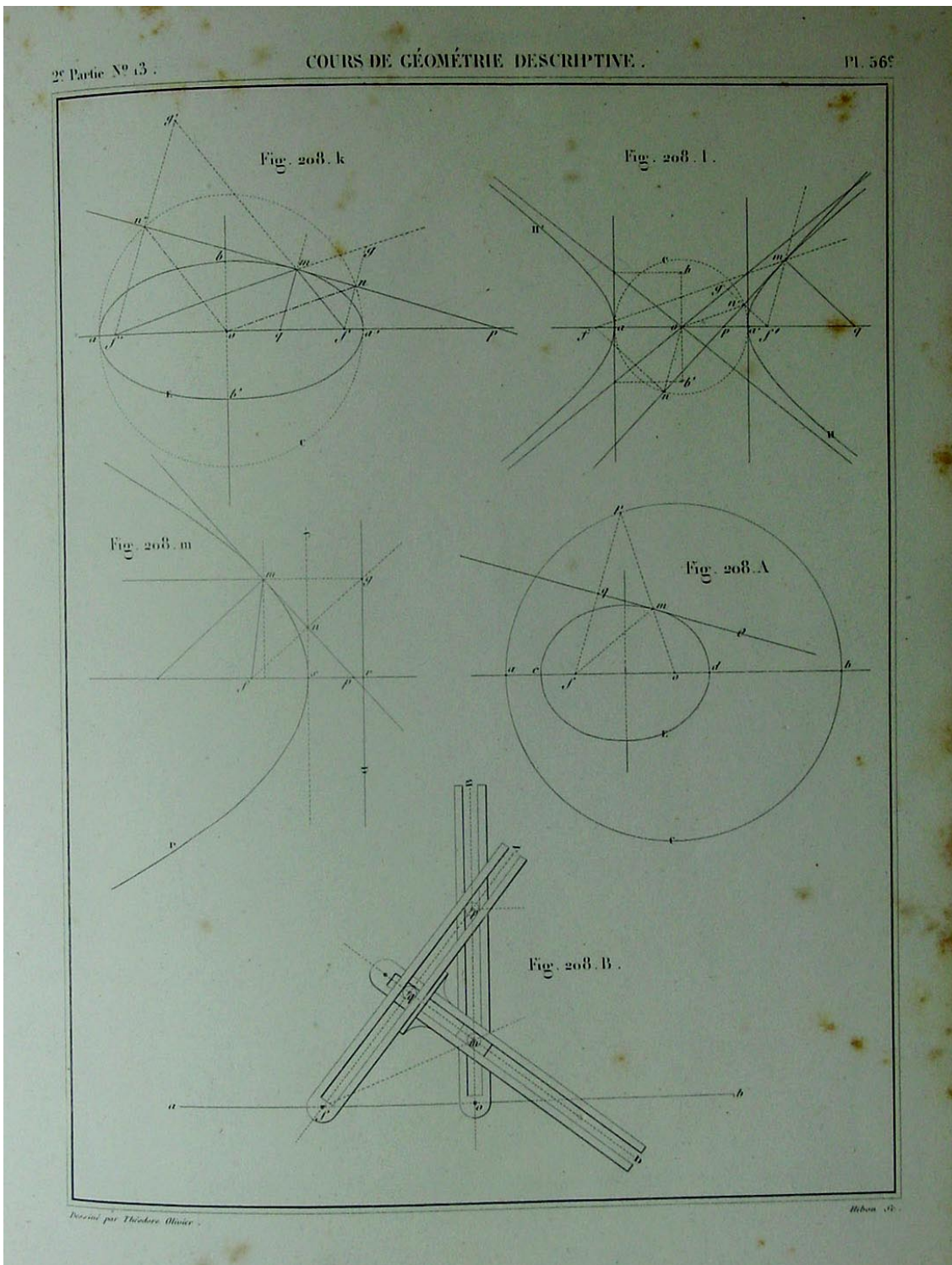
Olivier, Cours de Géométrie descriptive, planxa 49.



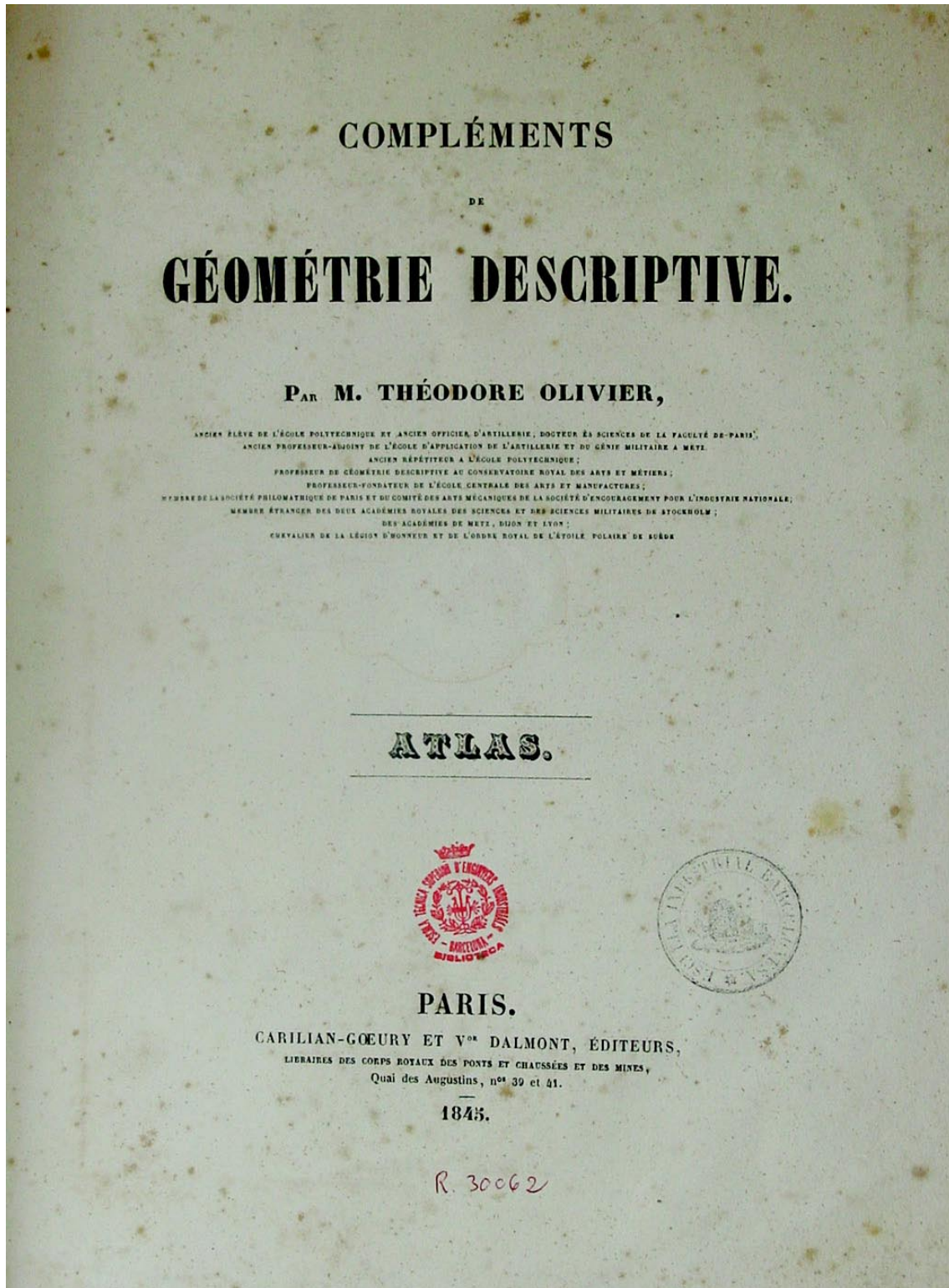
Olivier, Cours de Géométrie descriptive, planxa 54.



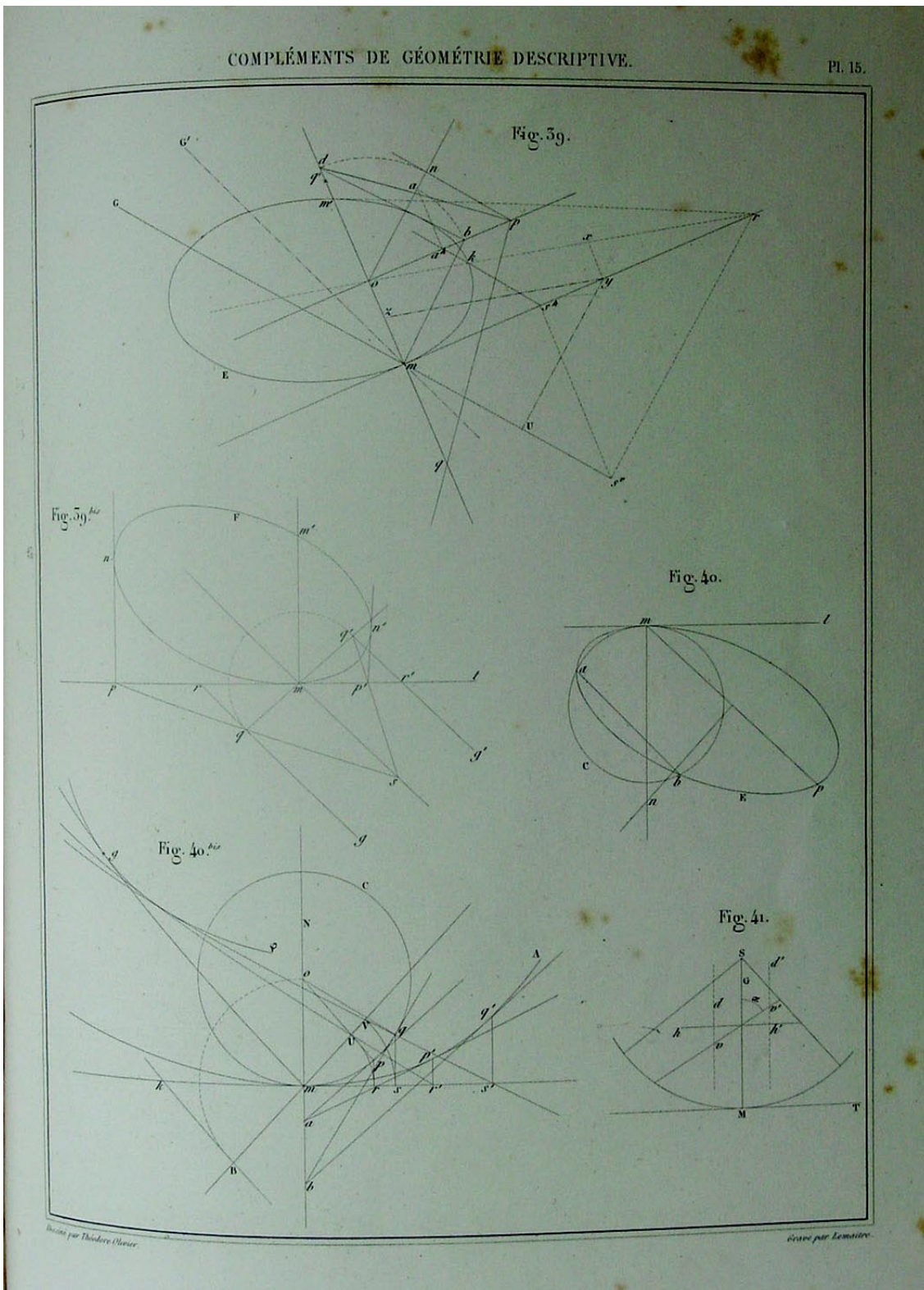
Olivier, Cours de Géométrie descriptive, planxa 56.



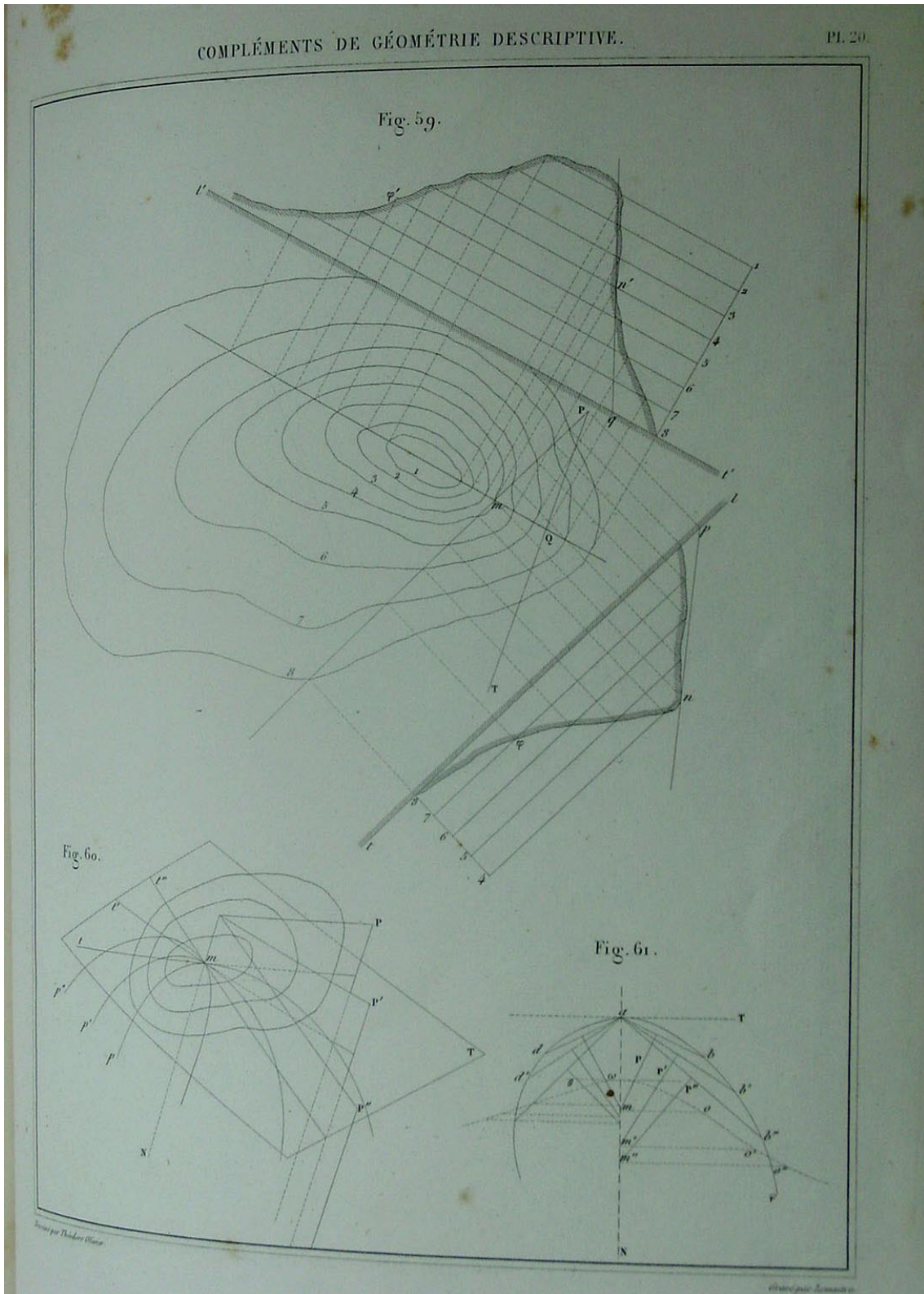
Olivier, Compléments de Géométrie descriptive.



Olivier, Compléments de Géométrie descriptive, planxa 15.



Olivier, Compléments de Géométrie descriptive, planxa 20.



ANNEX 2.6

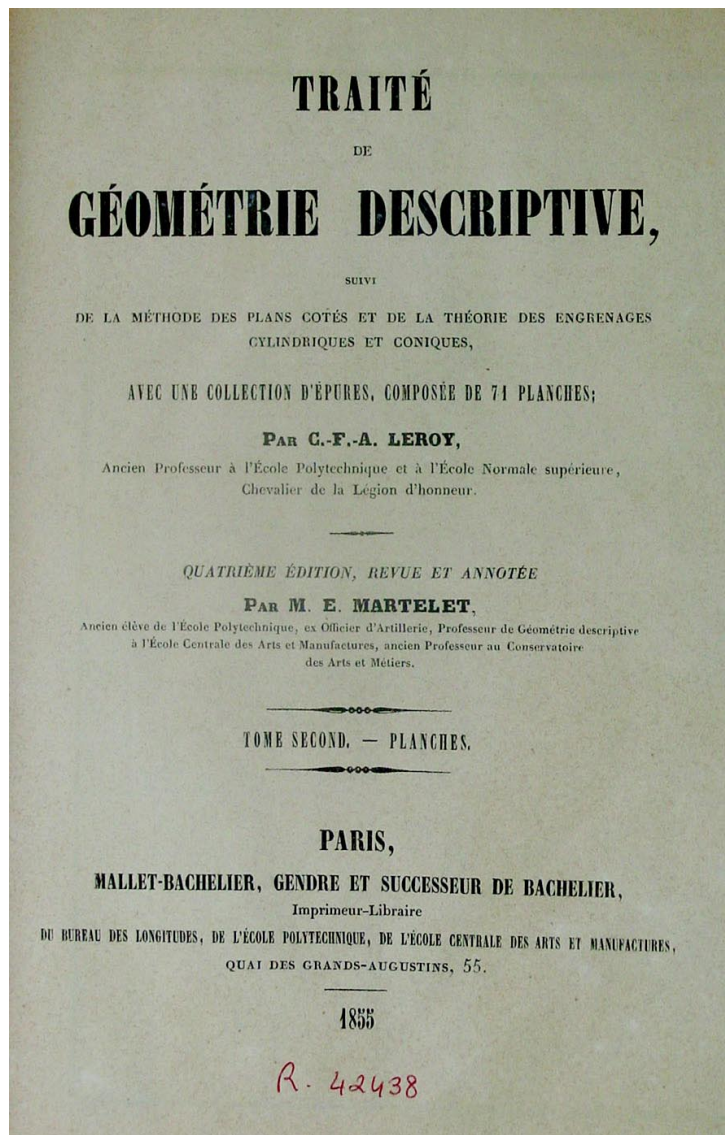
Tractat de C. F. A. Leroy, 1855

Aquest és un llibre clàssic de la geometria descriptiva. Trobem més de 10 exemplars en diferents biblioteques, des de la 3^a edició fins la 15^a. Hem pogut consultar la 4^a edició, de 1855, al fons antic de l'ETSEIB. És un llibre en dos volums, text i làmines.

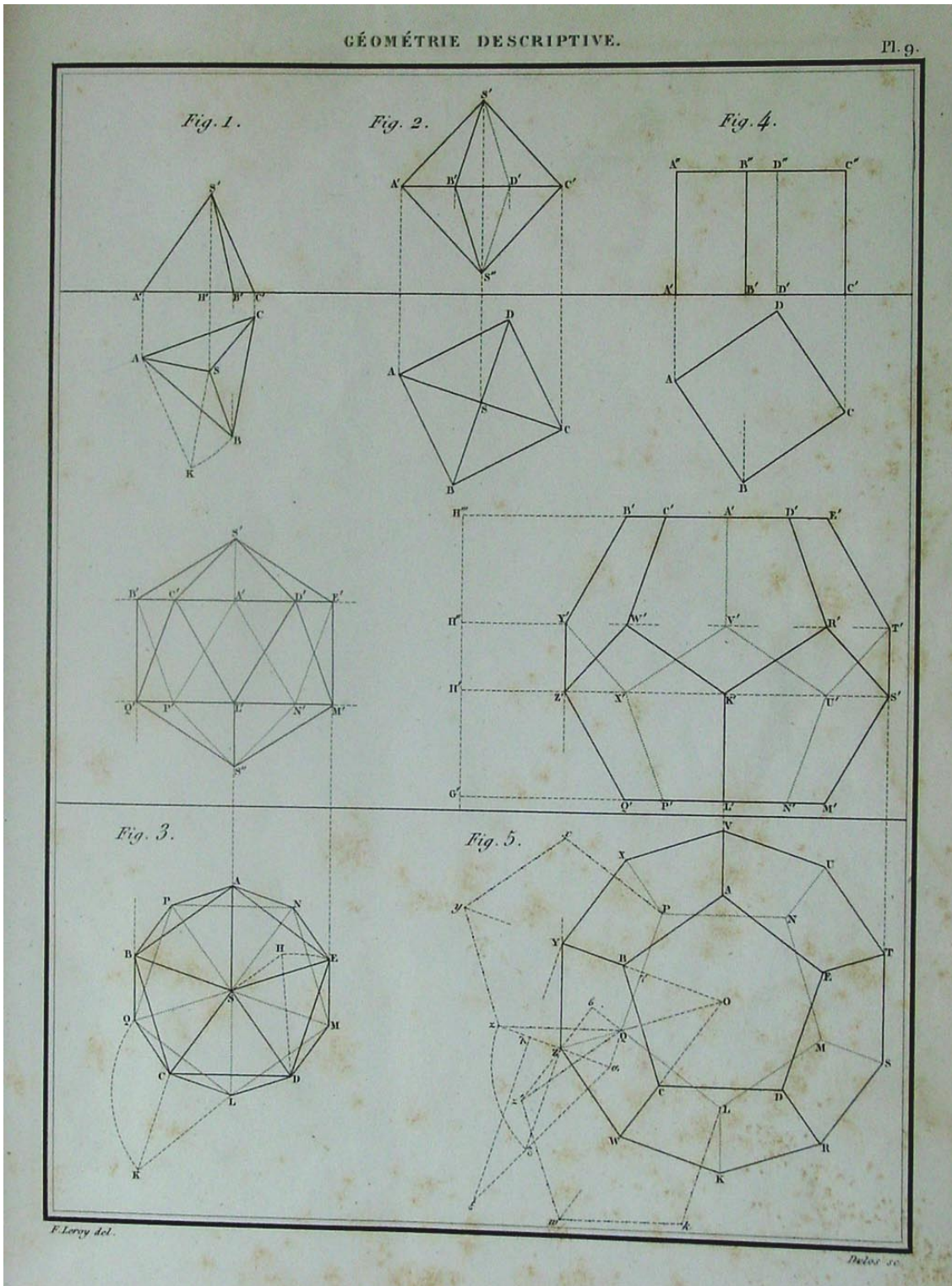
Títol complet: *Traité de géométrie descriptive, suivi de la méthode des plans cotés et de la théorie des engrenages cylindriques et coniques, avec une collection d'épures, composée de 71 planches.*

Signatura: 515 Ler
 Codi de barres: 1246444409 (text)
 1246444410 (làmines)

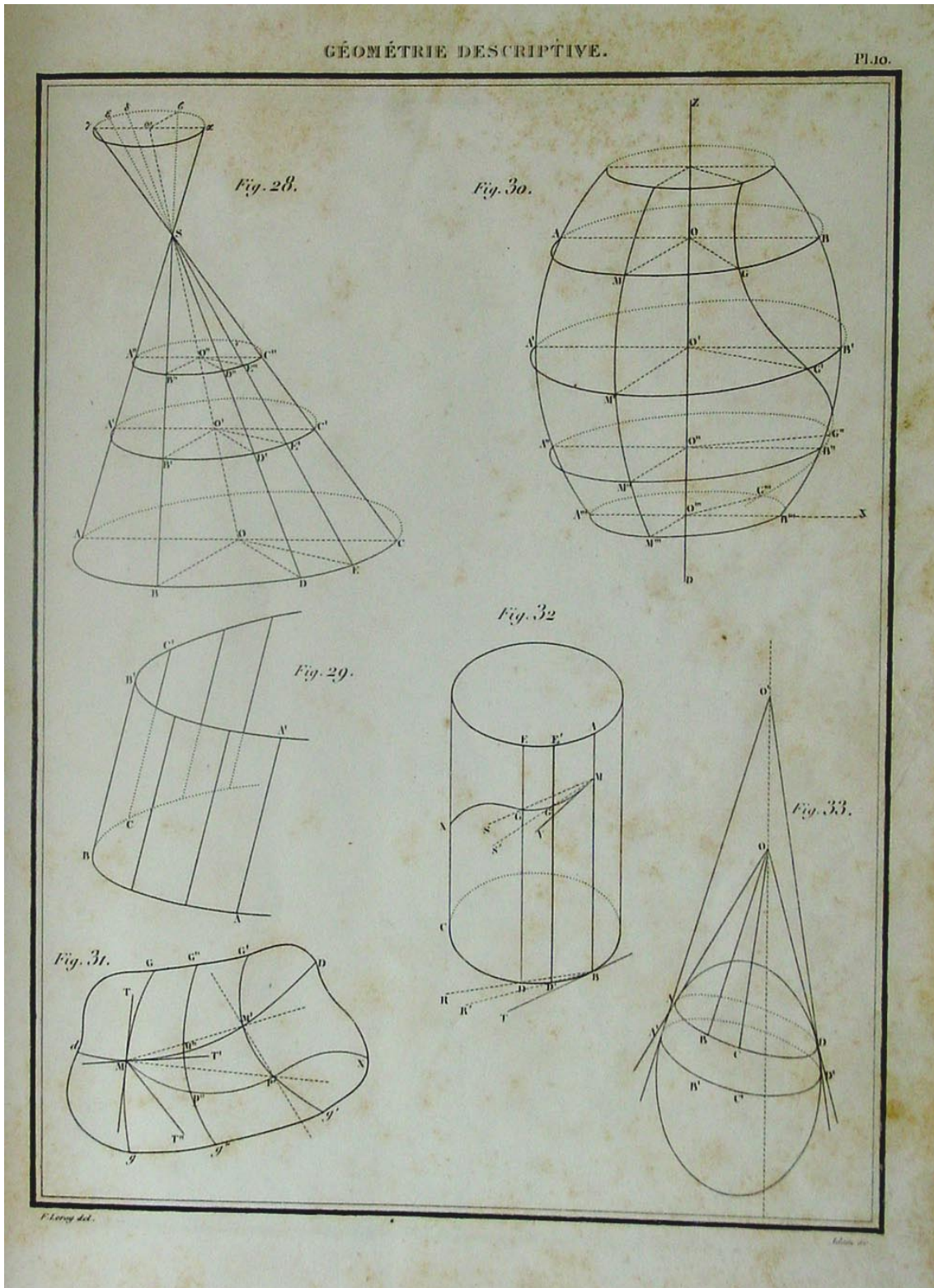
També podem trobar del mateix autor un tractat d'estereotomia.



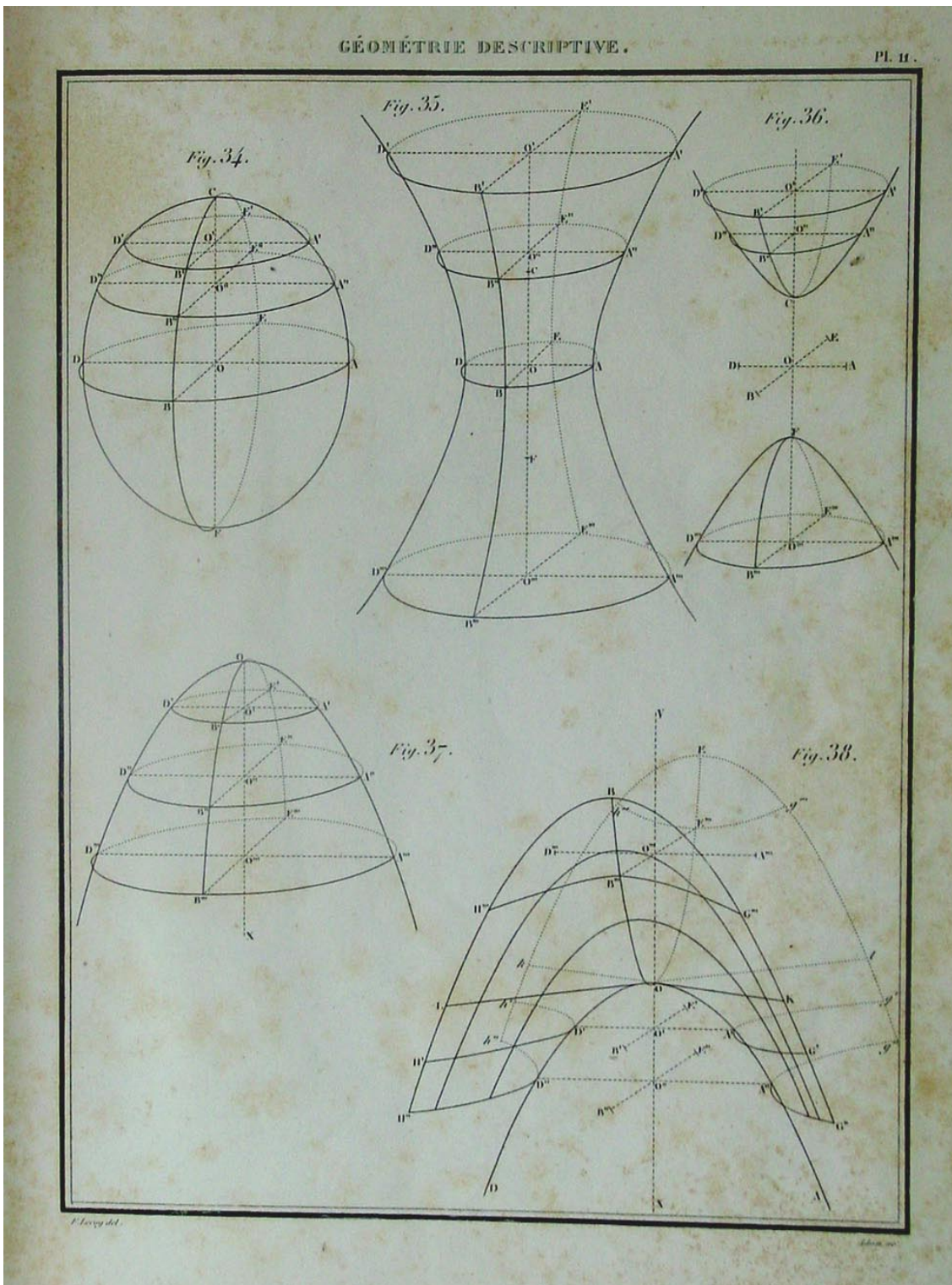
Leroy, planxa 9.



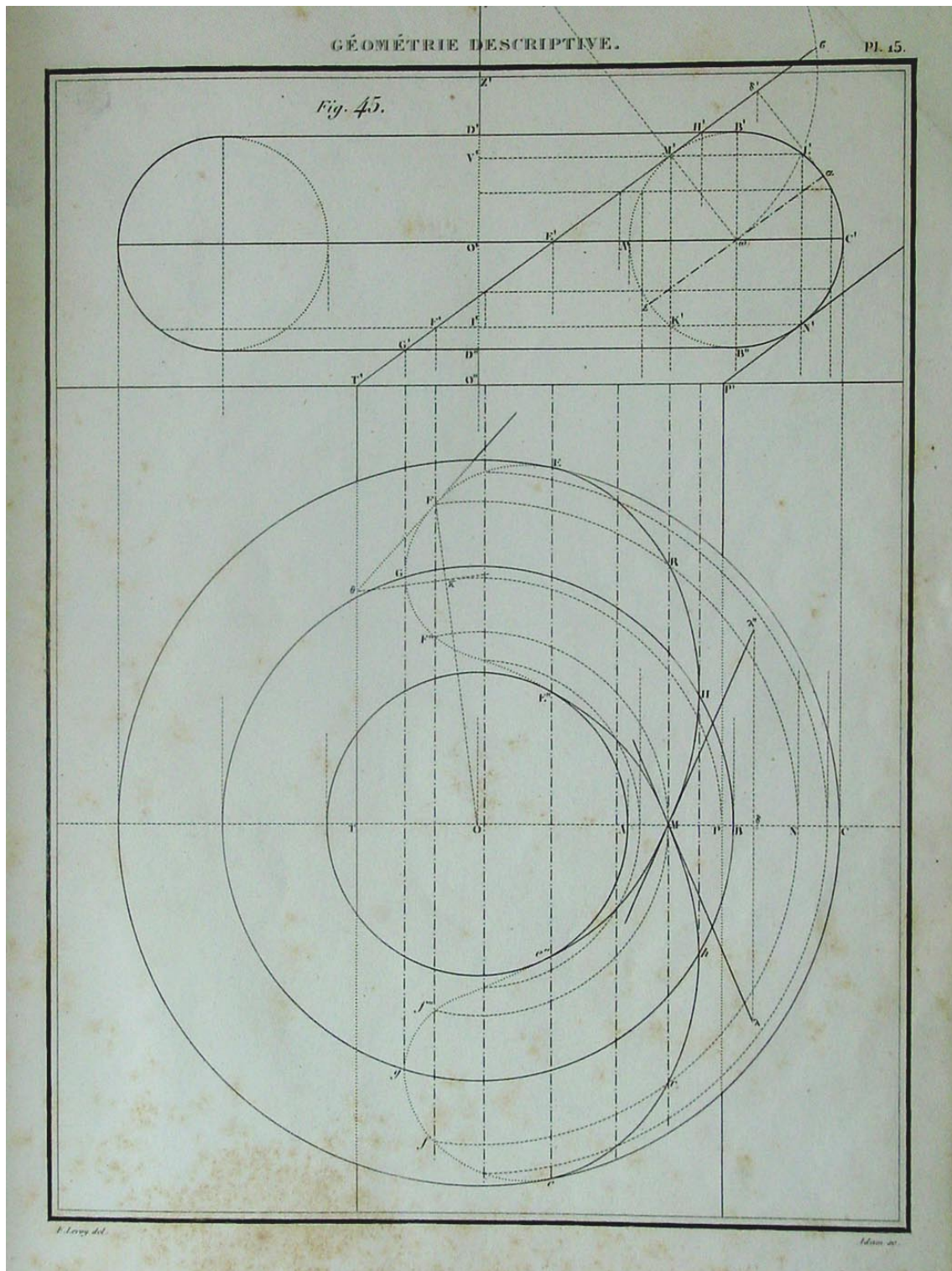
Leroy, planxa 10.



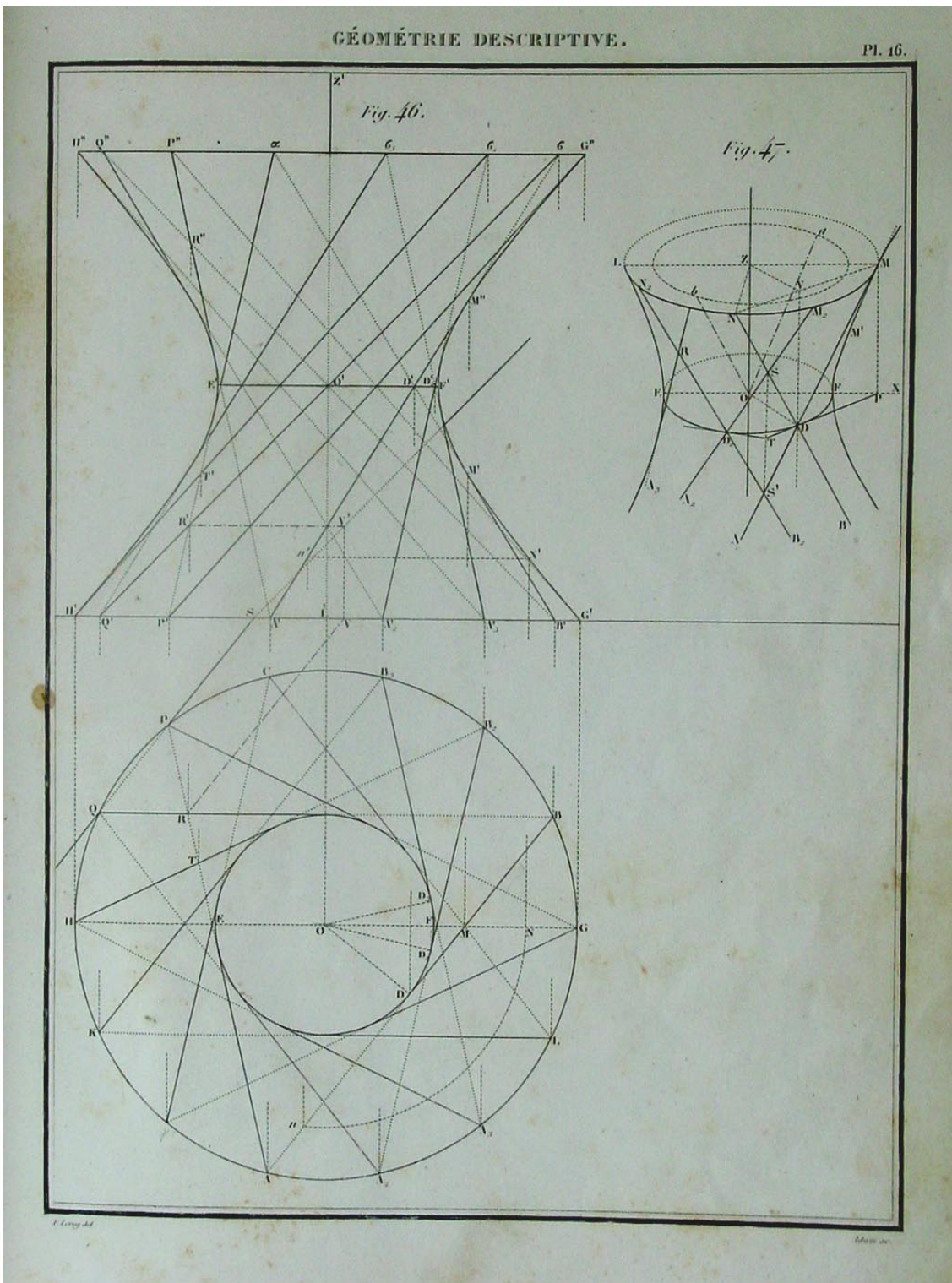
Leroy, planxa 11.



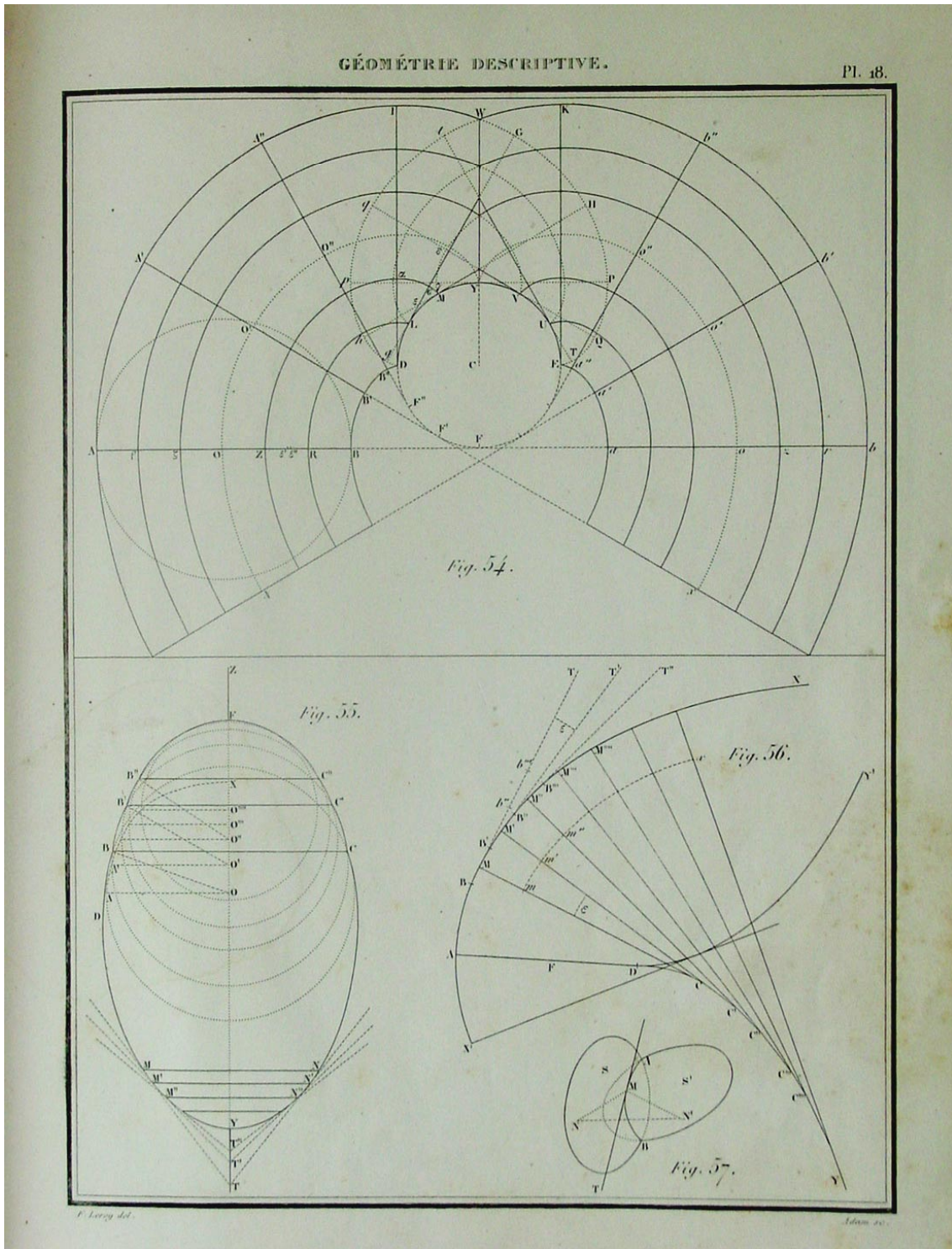
Leroy, planxa 15.



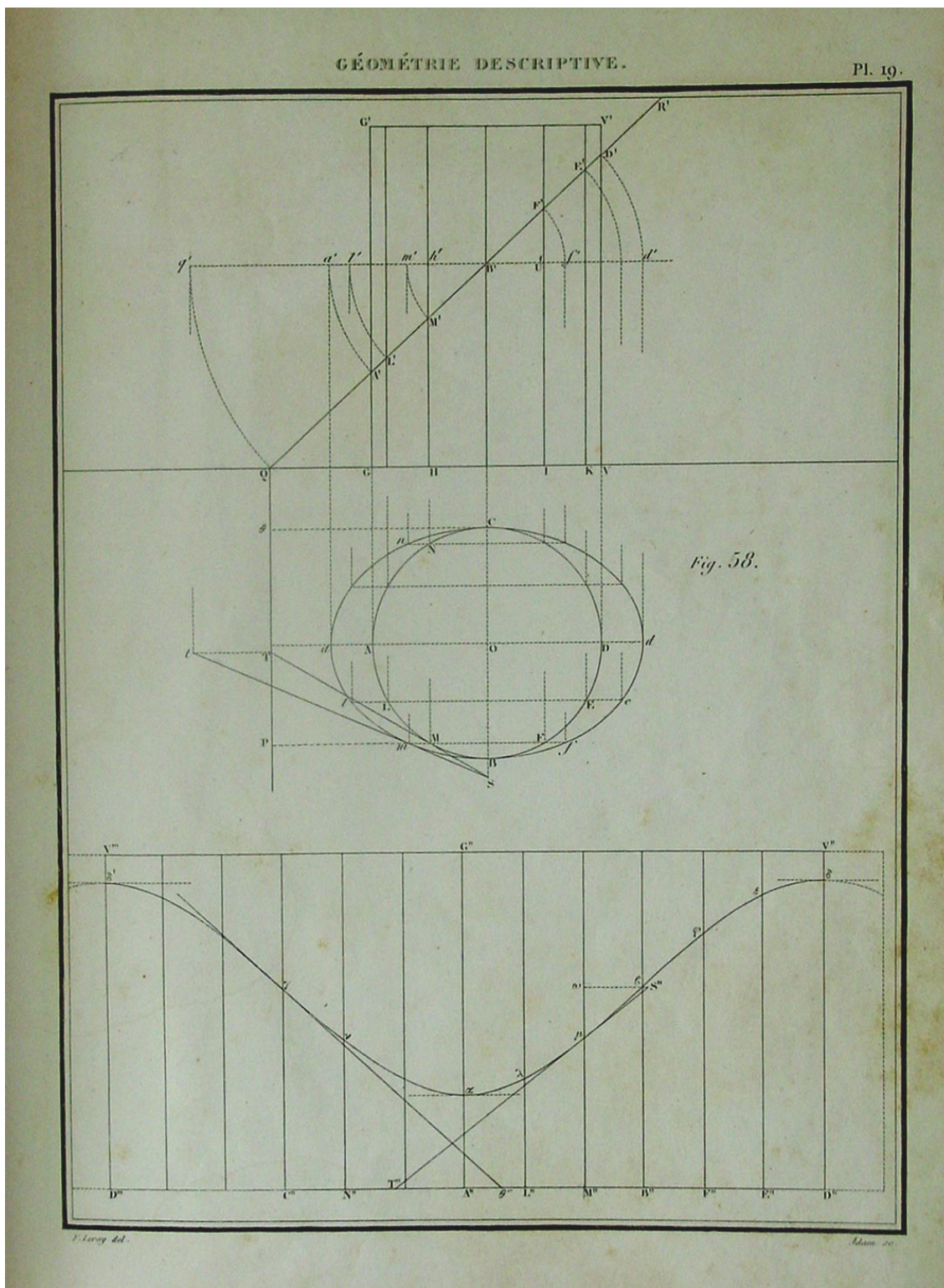
Leroy, planxa 16.



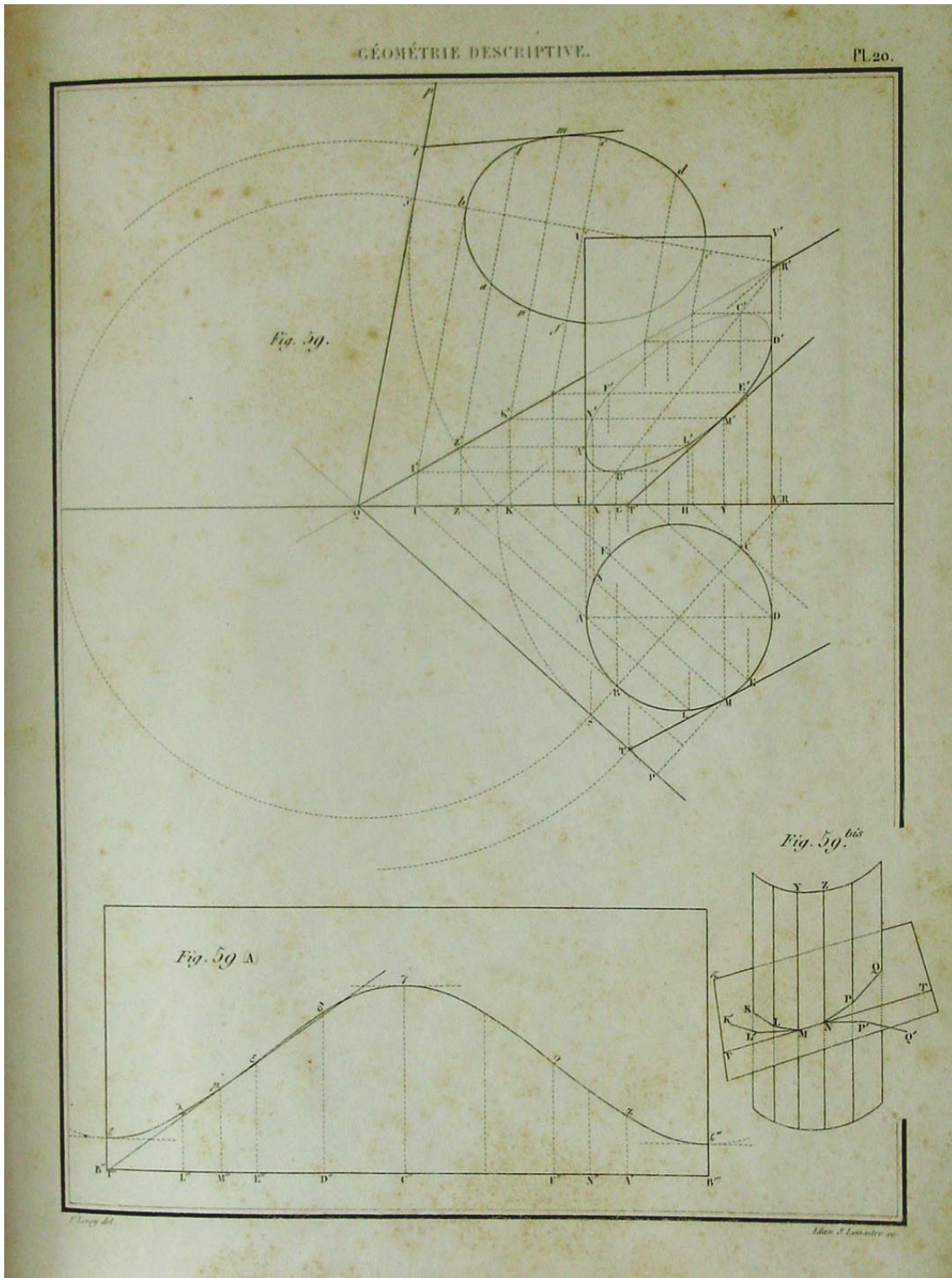
Leroy, planxa 18.



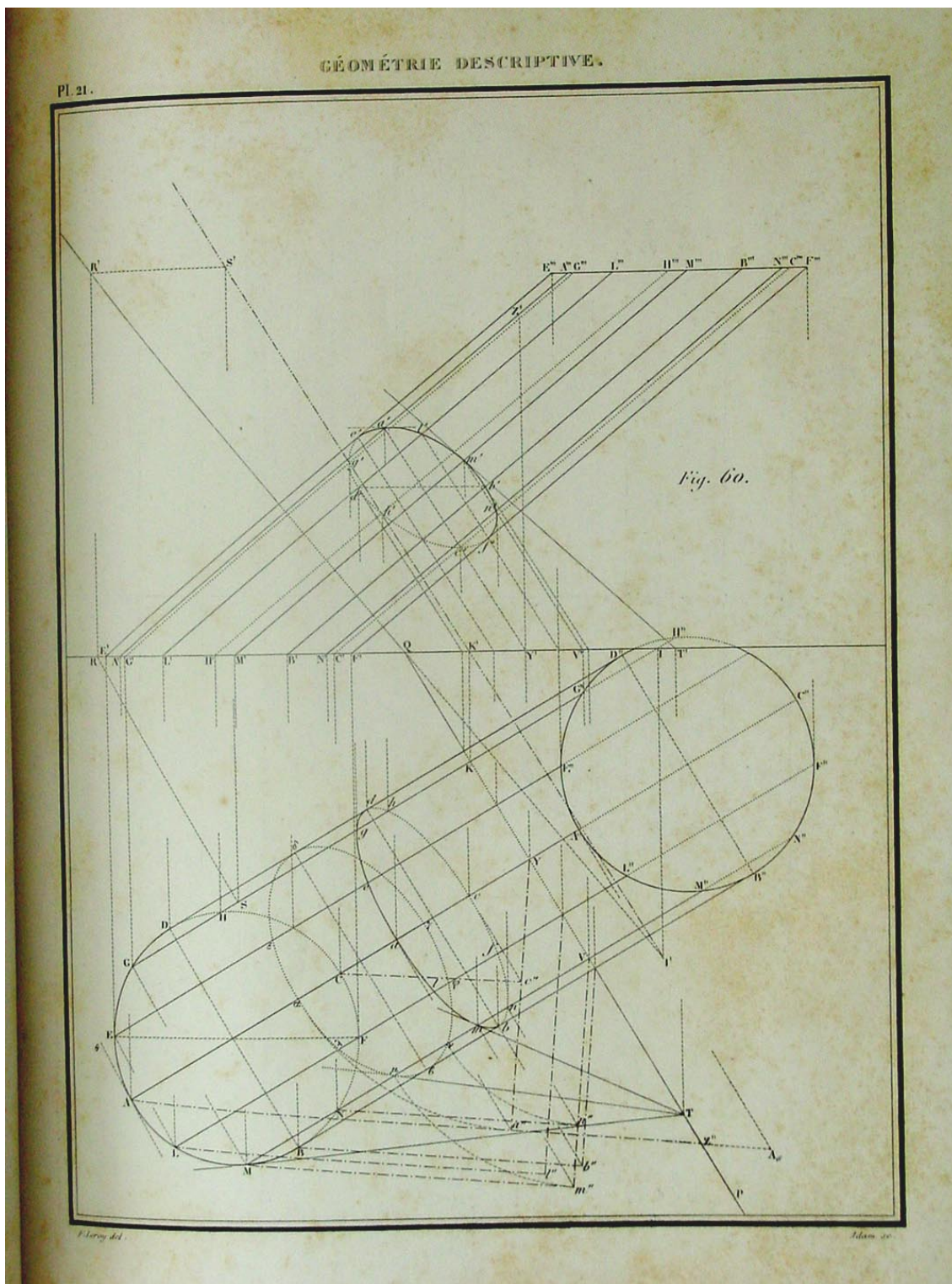
Leroy, planxa 19.



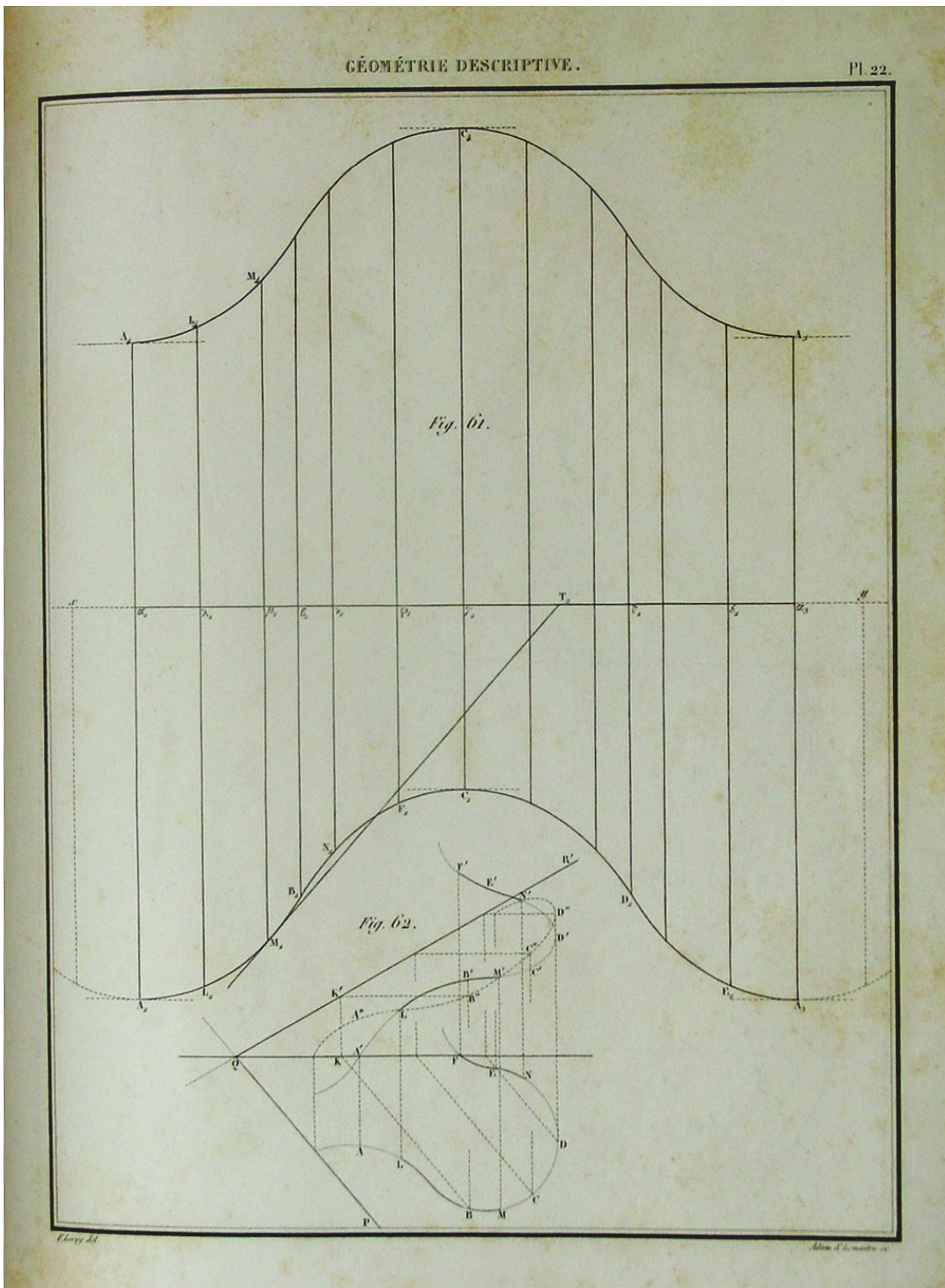
Leroy, planxa 20.



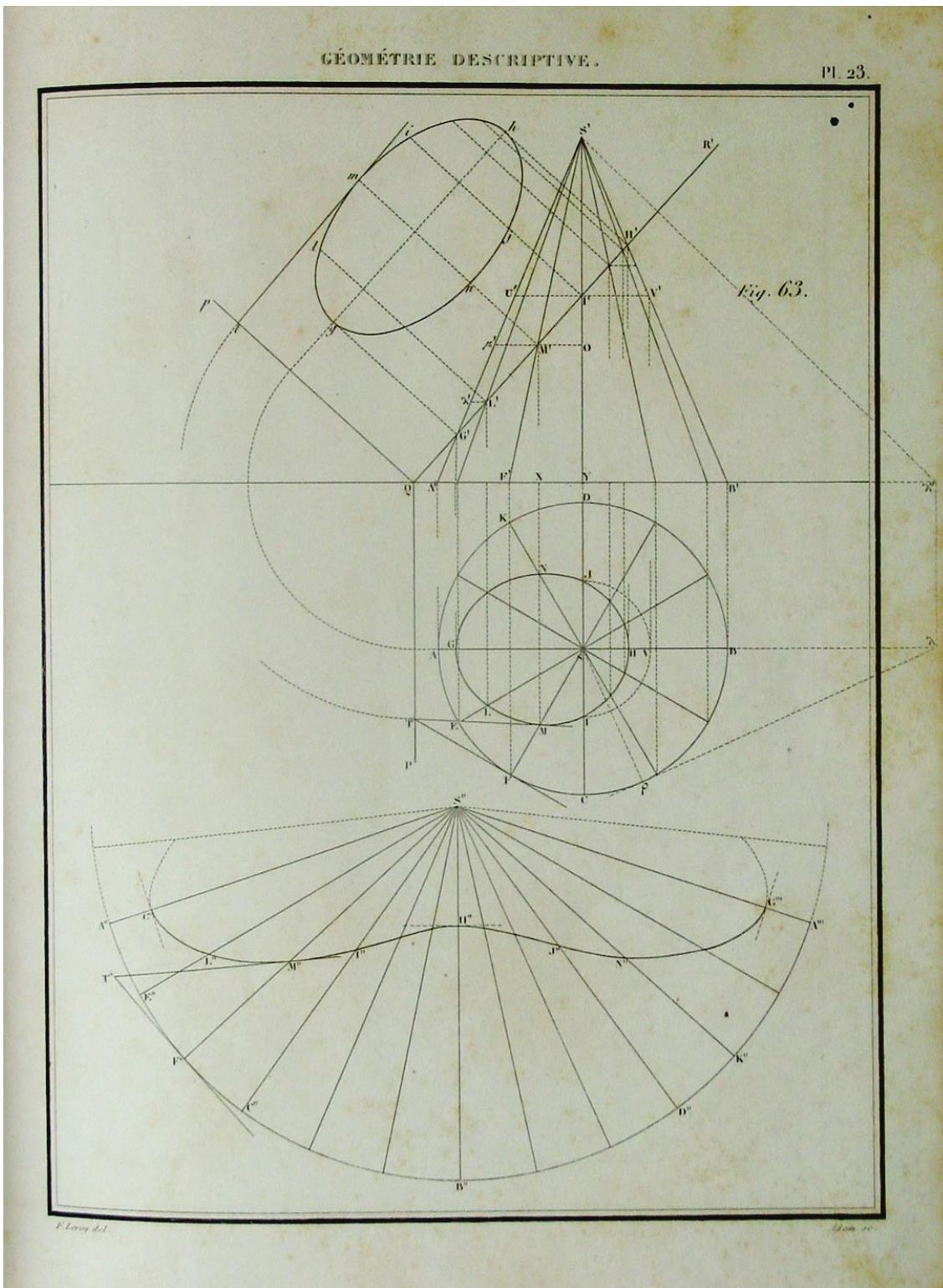
Leroy, planxa 21.



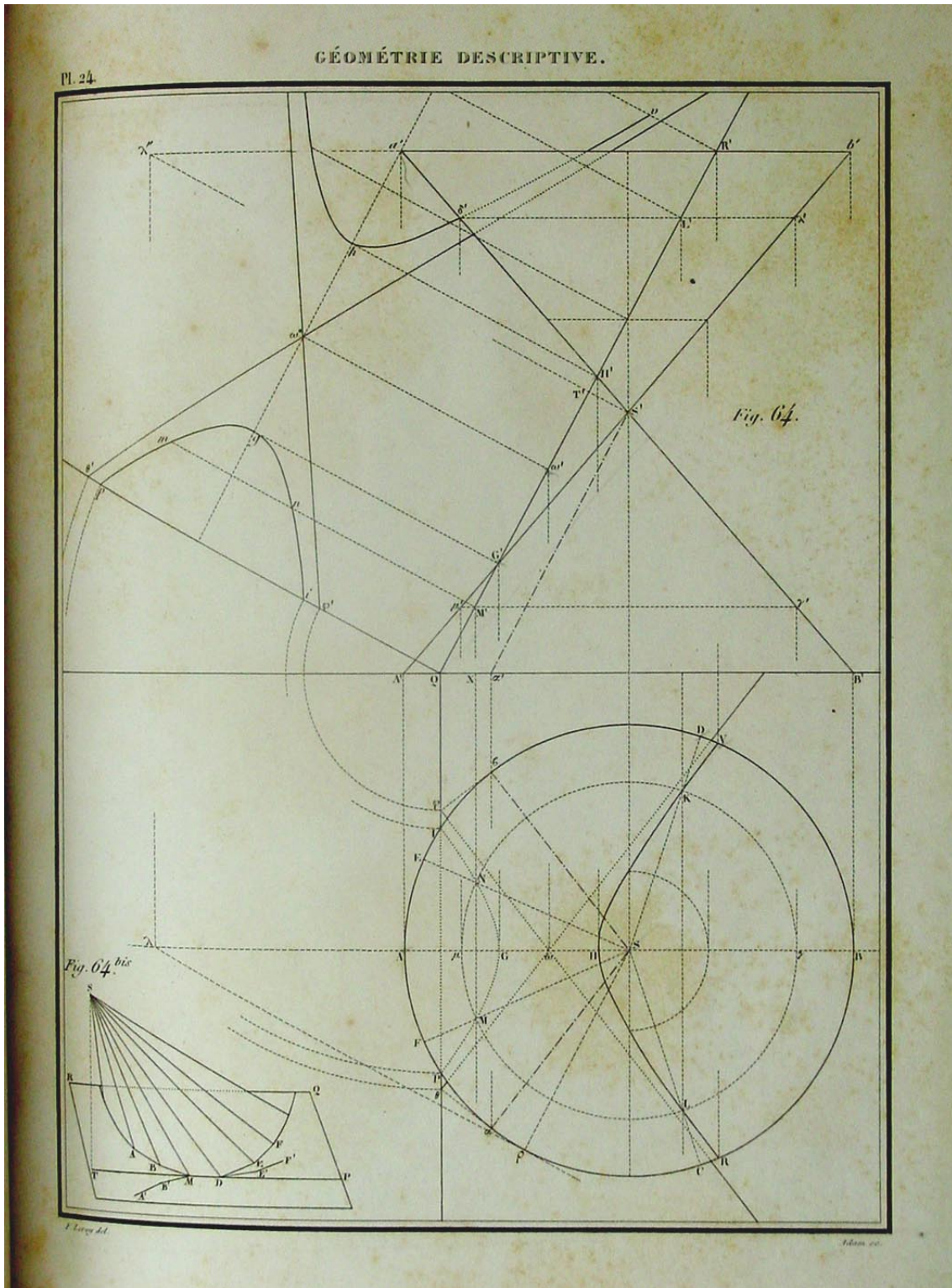
Leroy, planxa 22.



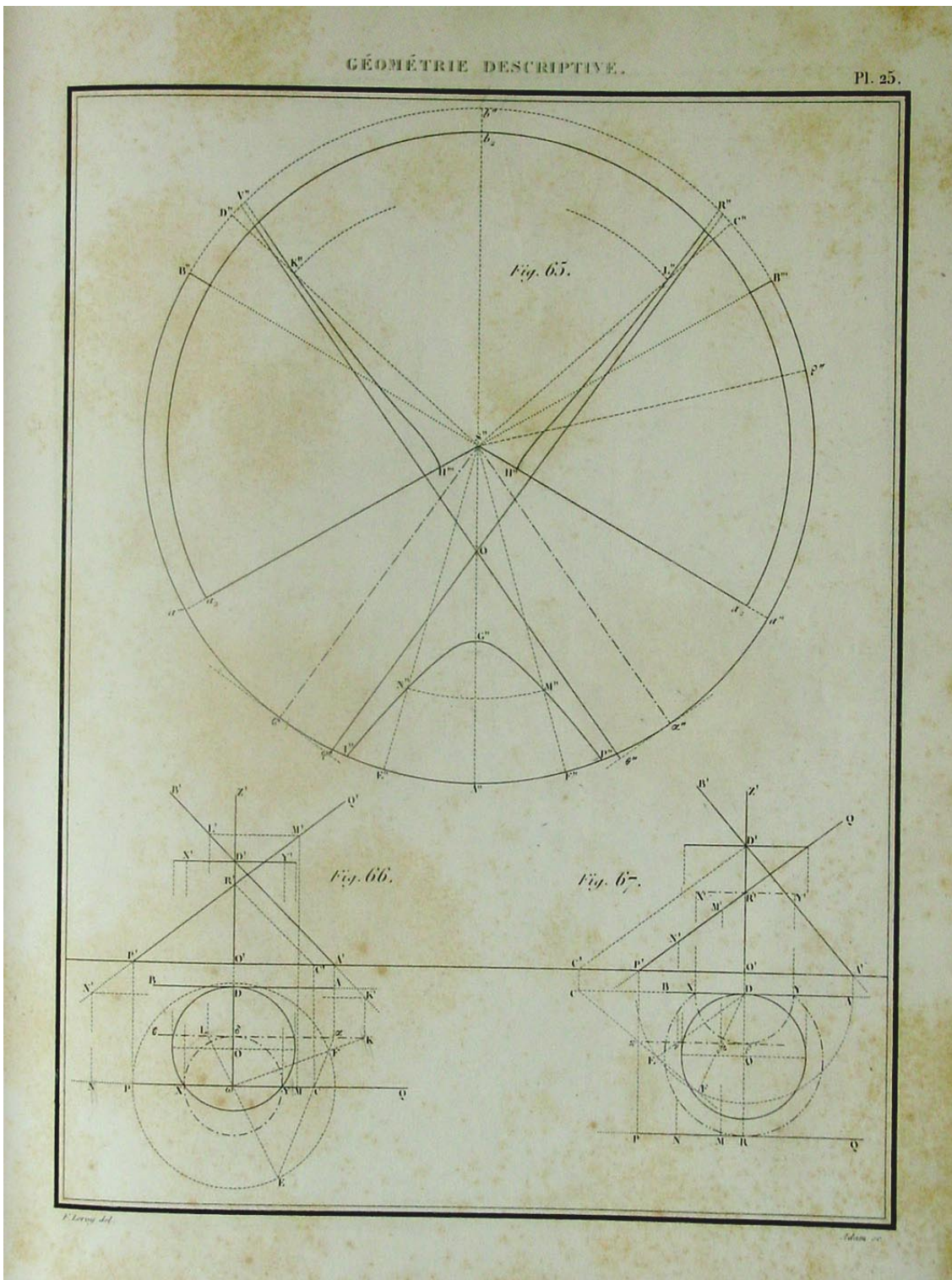
Leroy, planxa 23.



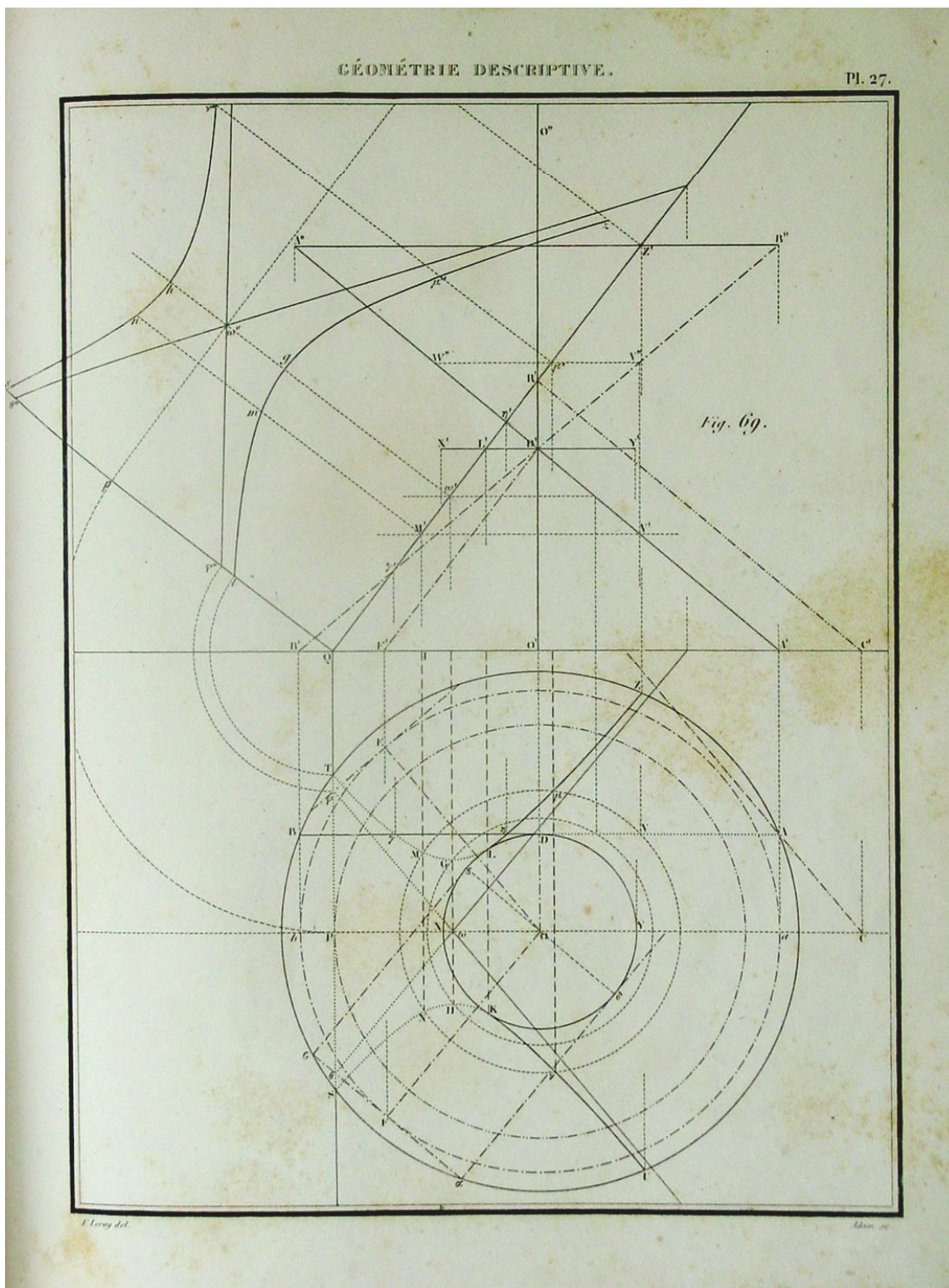
Leroy, planxa 24.



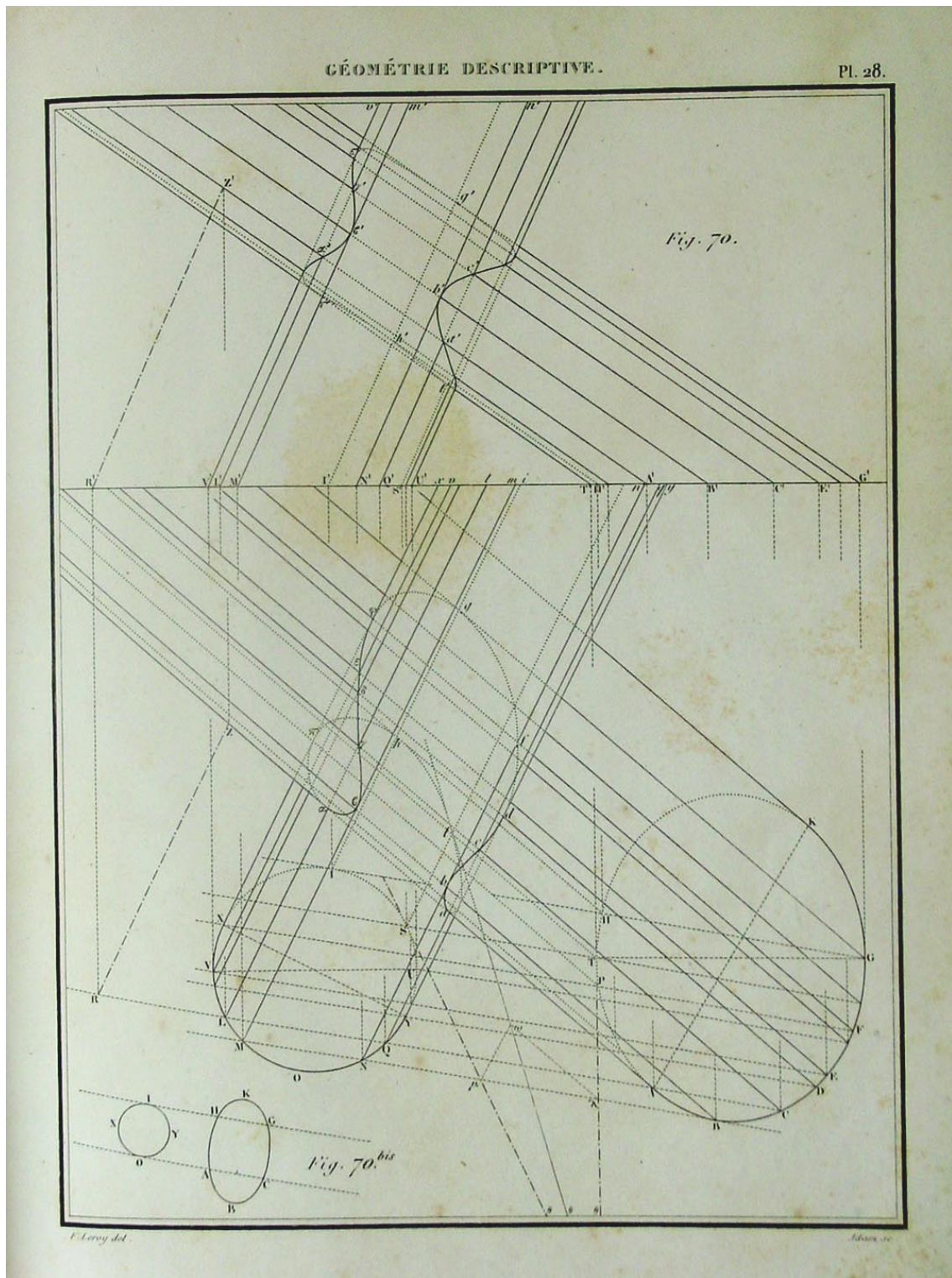
Leroy, planxa 25.



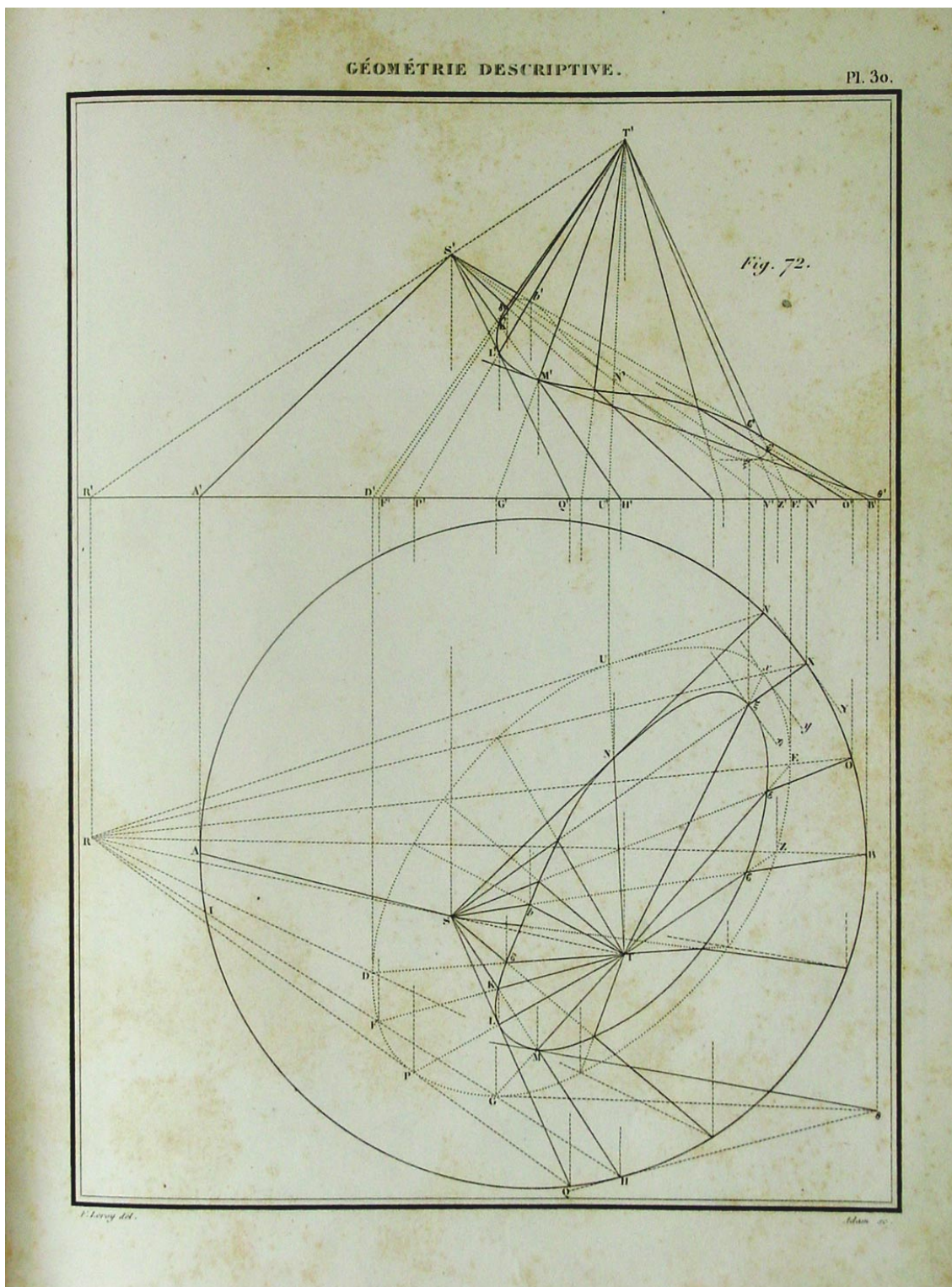
Leroy, planxa 27.



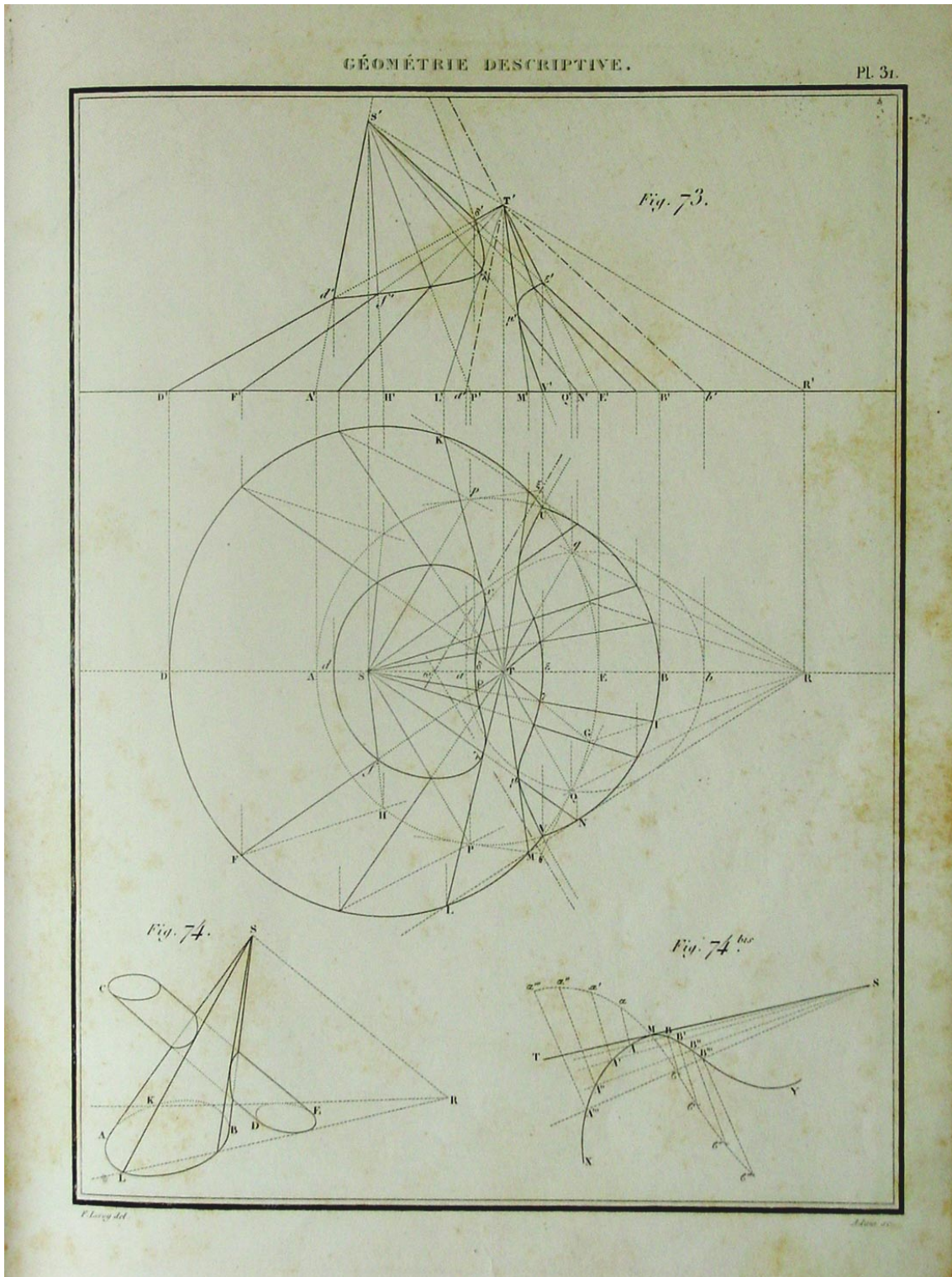
Leroy, planxa 28.



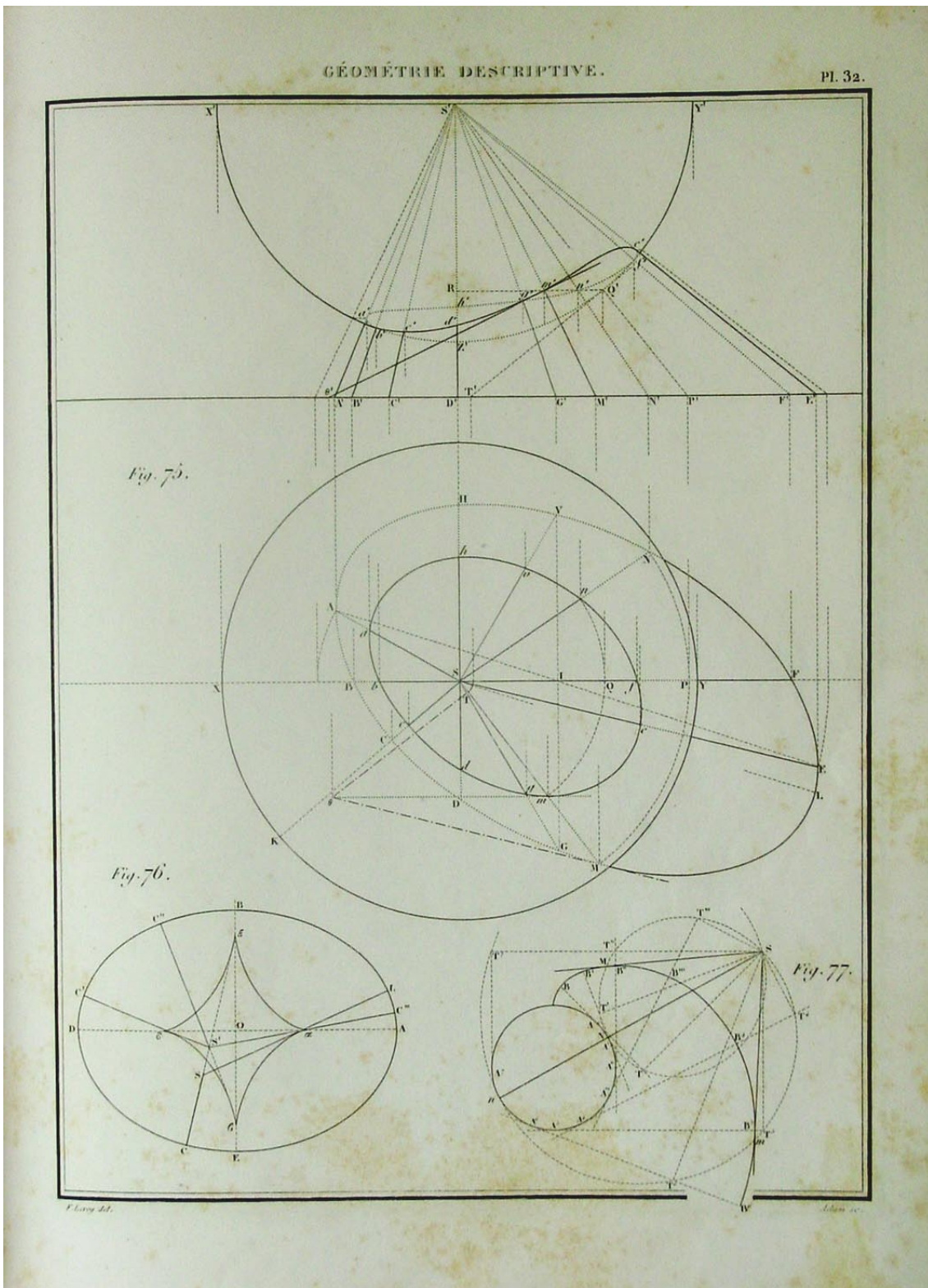
Leroy, planxa 30.



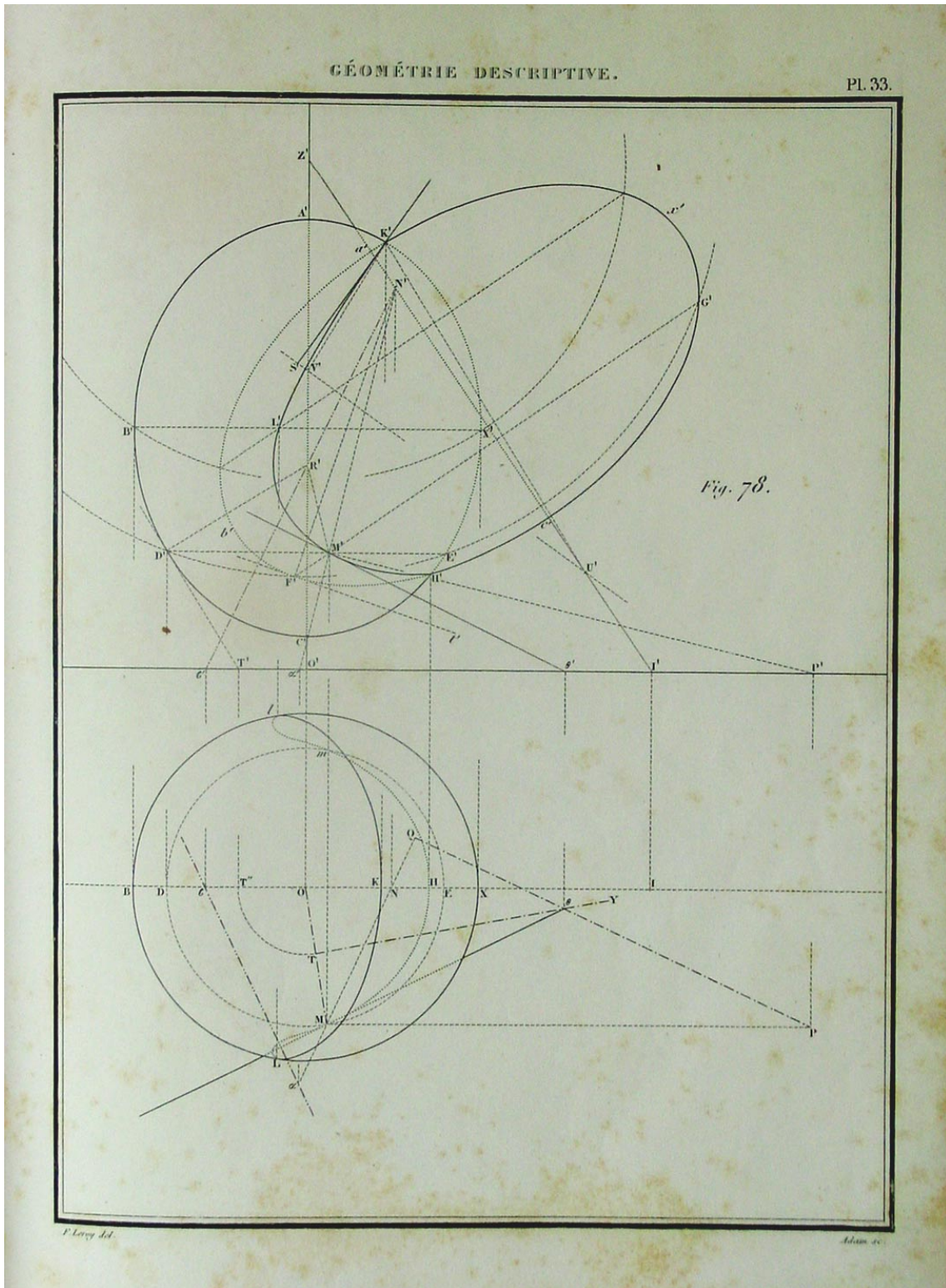
Leroy, planxa 31.



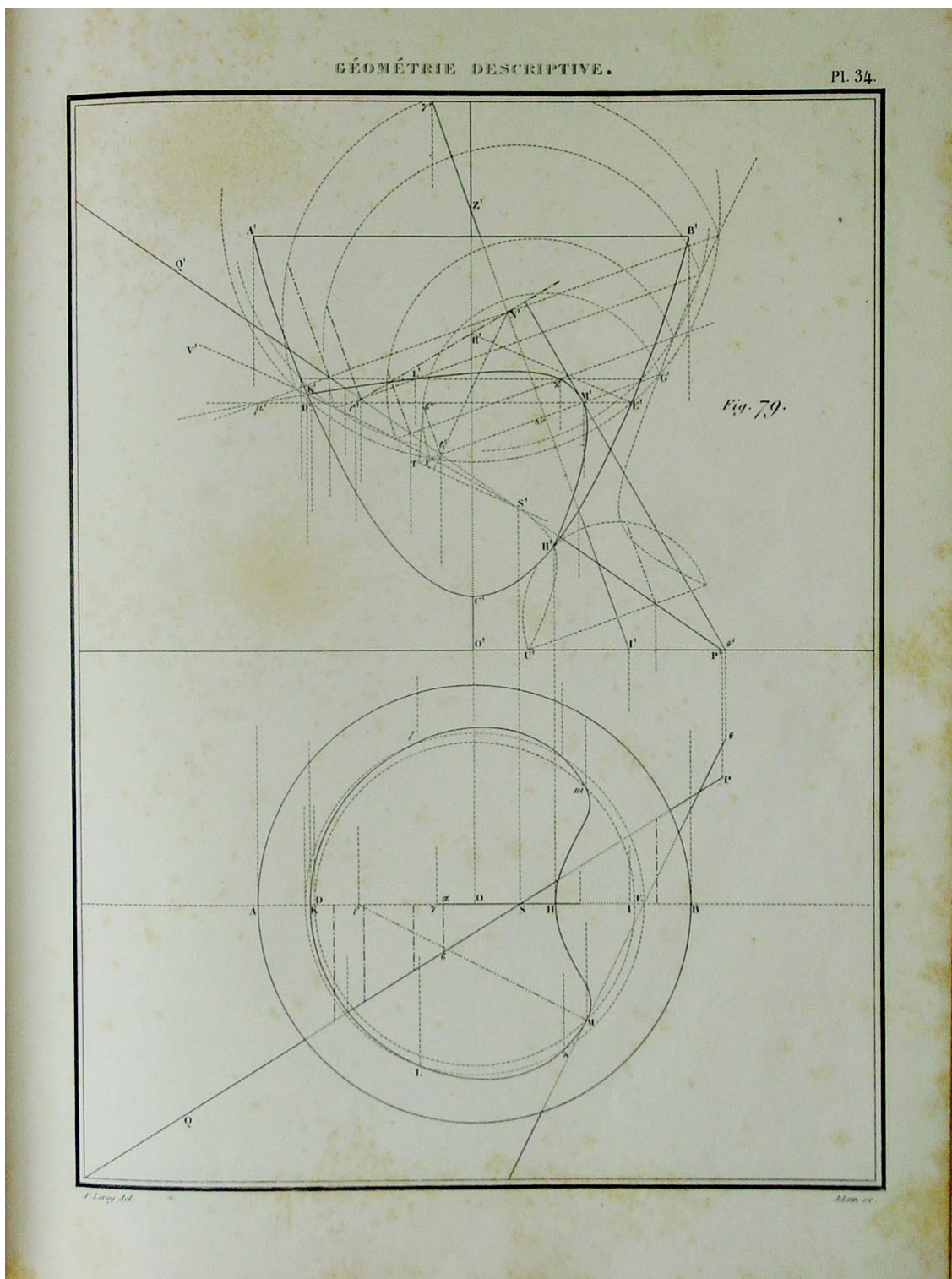
Leroy, planxa 32.



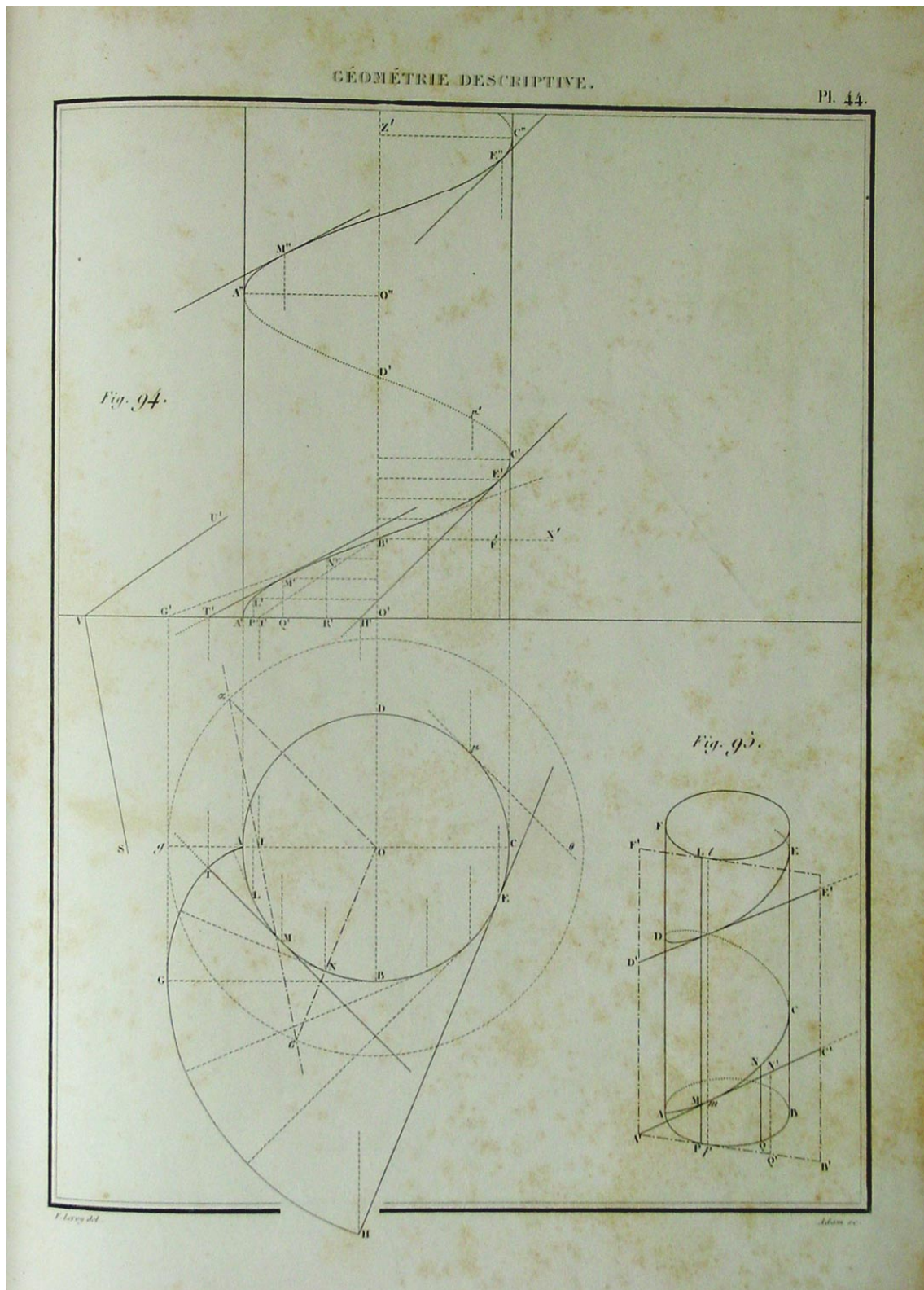
Leroy, planxa 33.



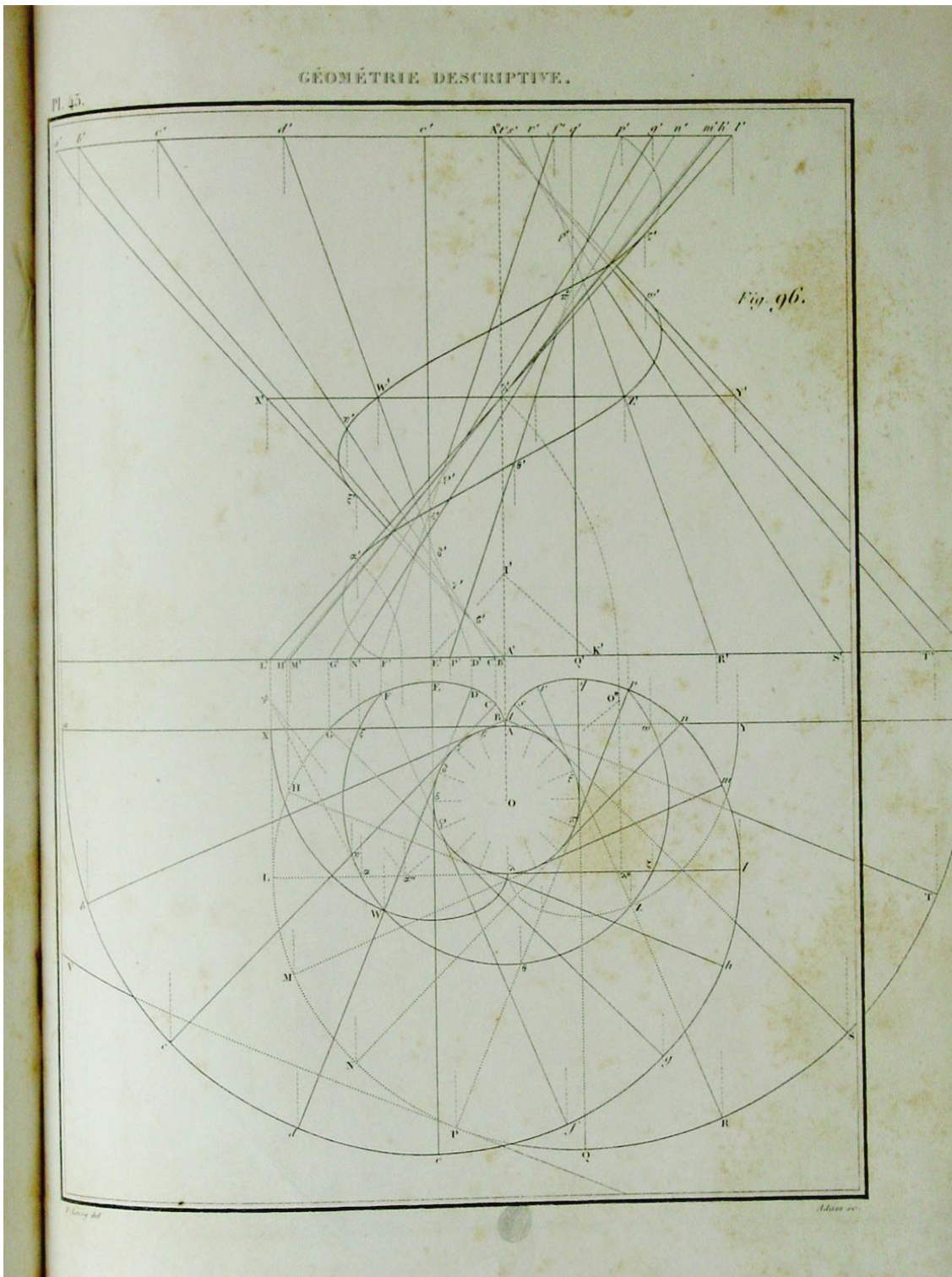
Leroy, planxa 34.



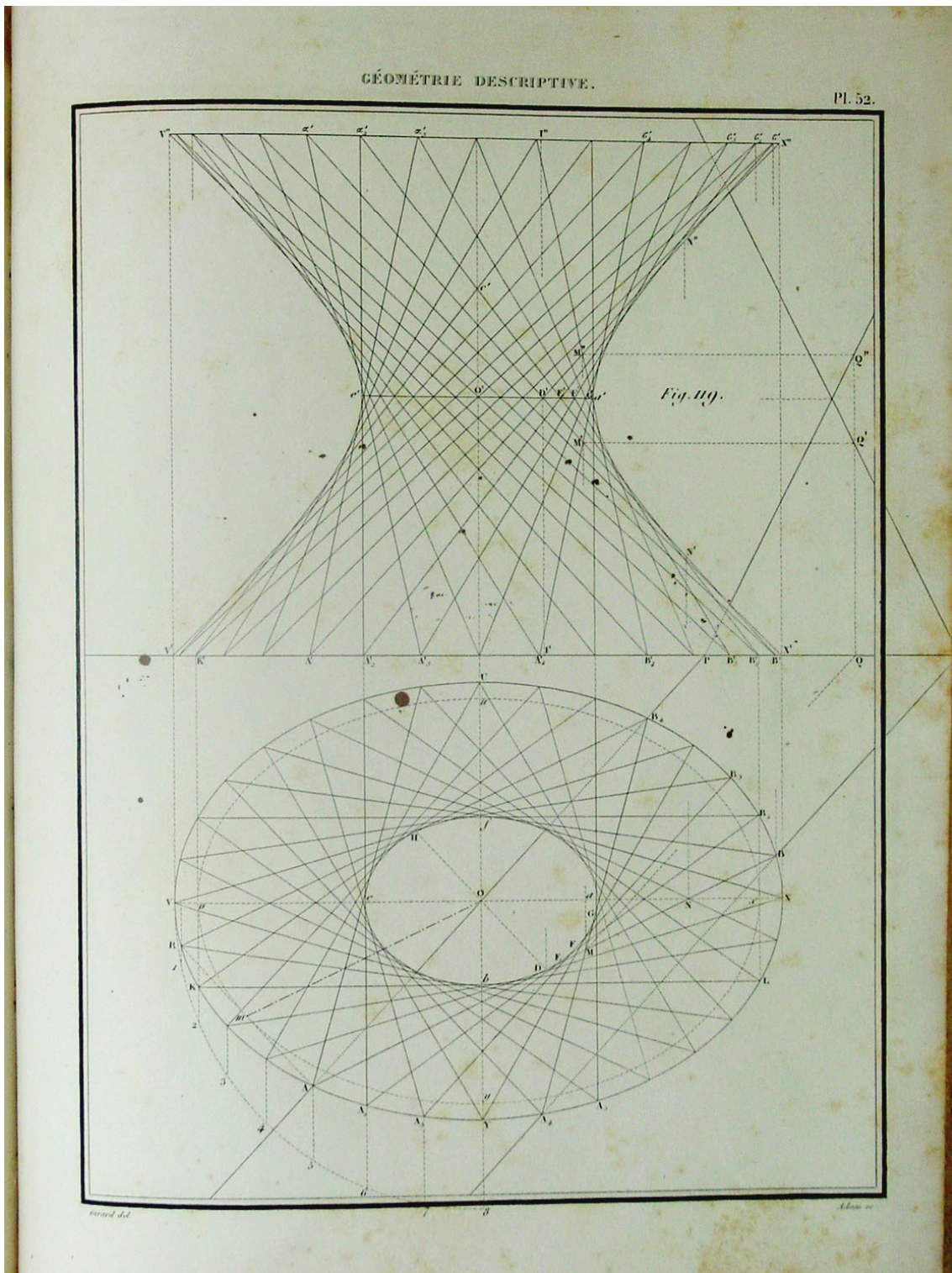
Leroy, planxa 44.



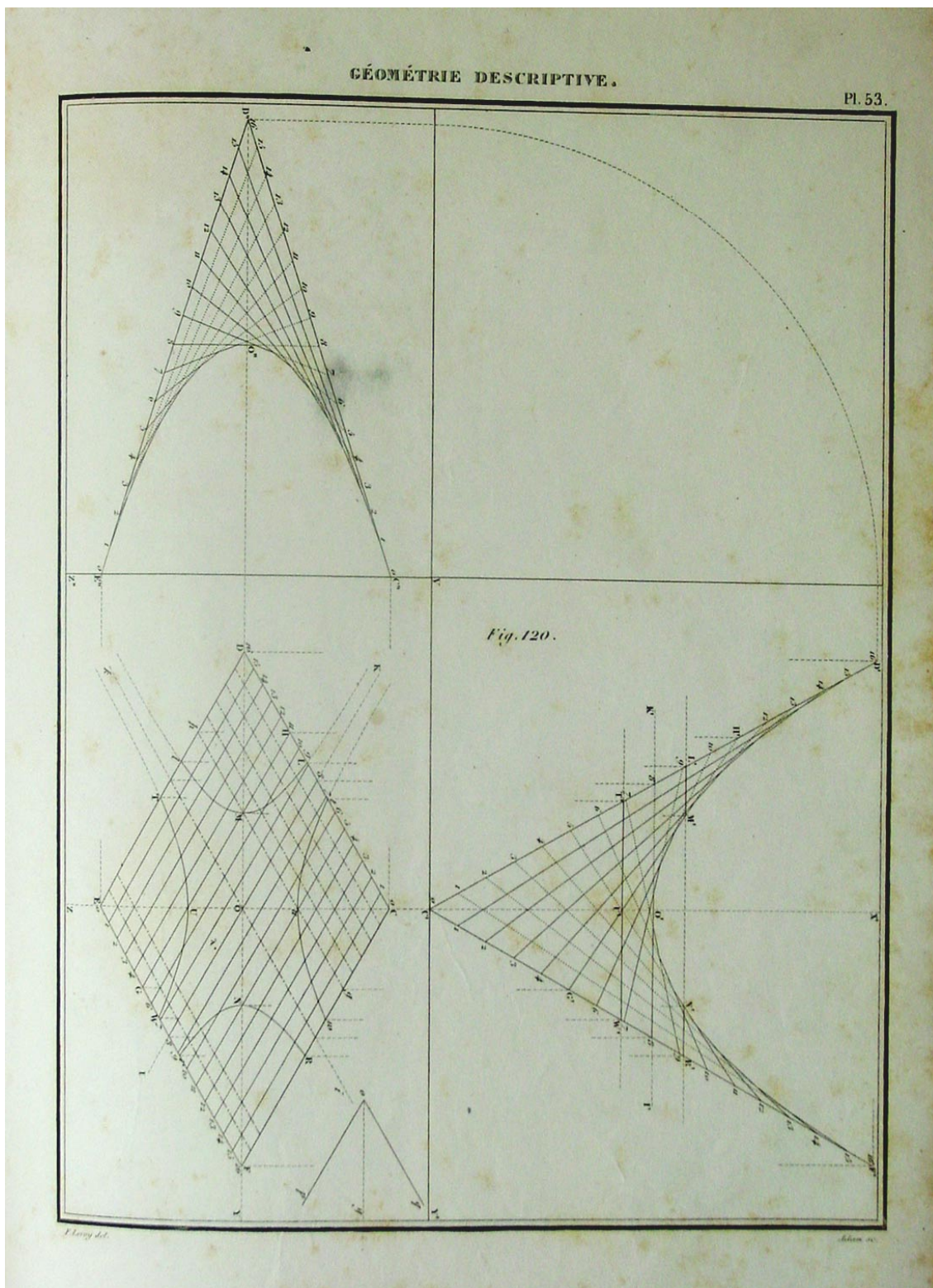
Leroy, planxa 45.



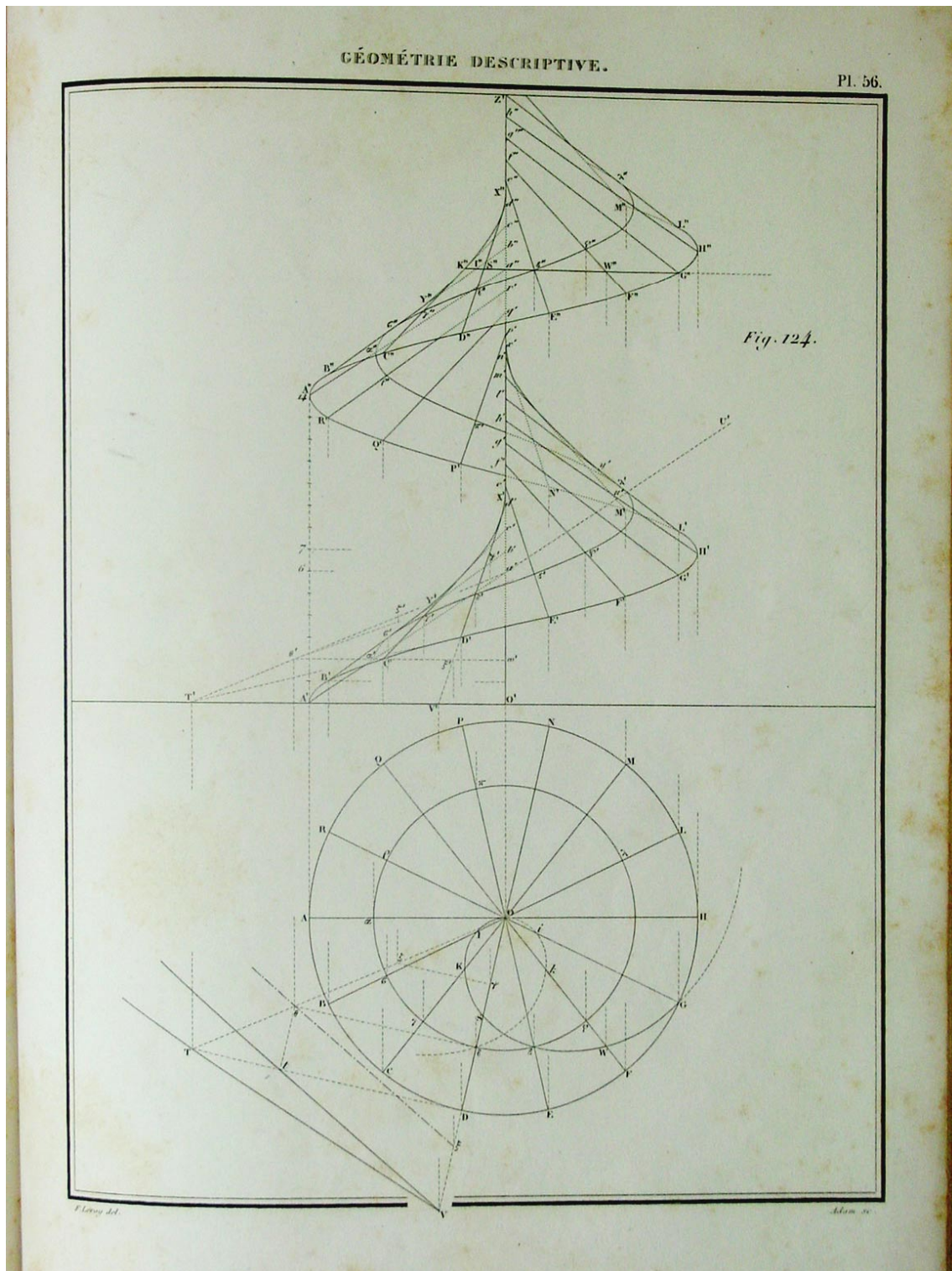
Leroy, planxa 52.



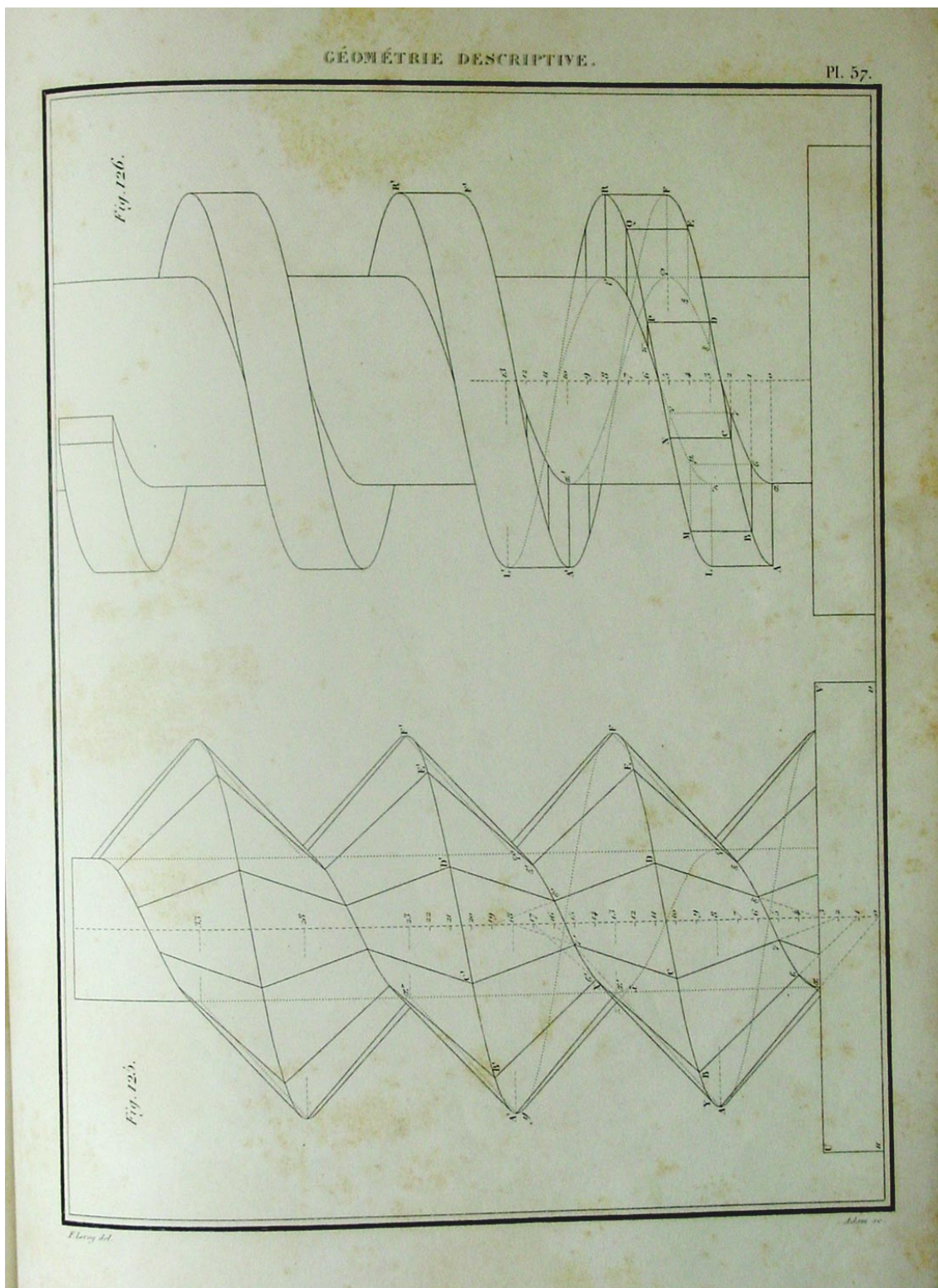
Leroy, planxa 53.



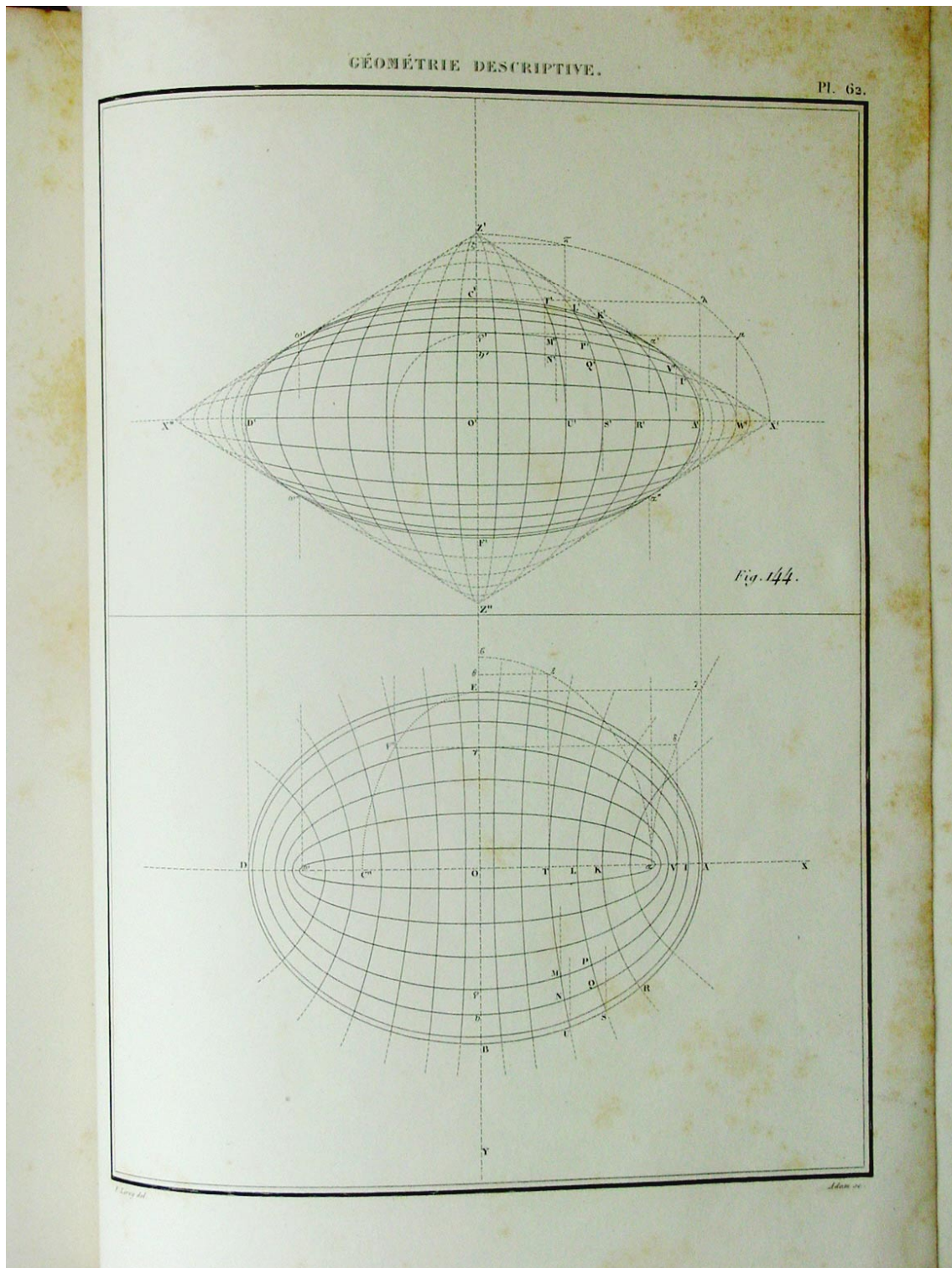
Leroy, planxa 56.



Leroy, planxa 57.



Leroy, planxa 63.



ANNEX 2.7

Tractat de A. J. Adhemar, 1858

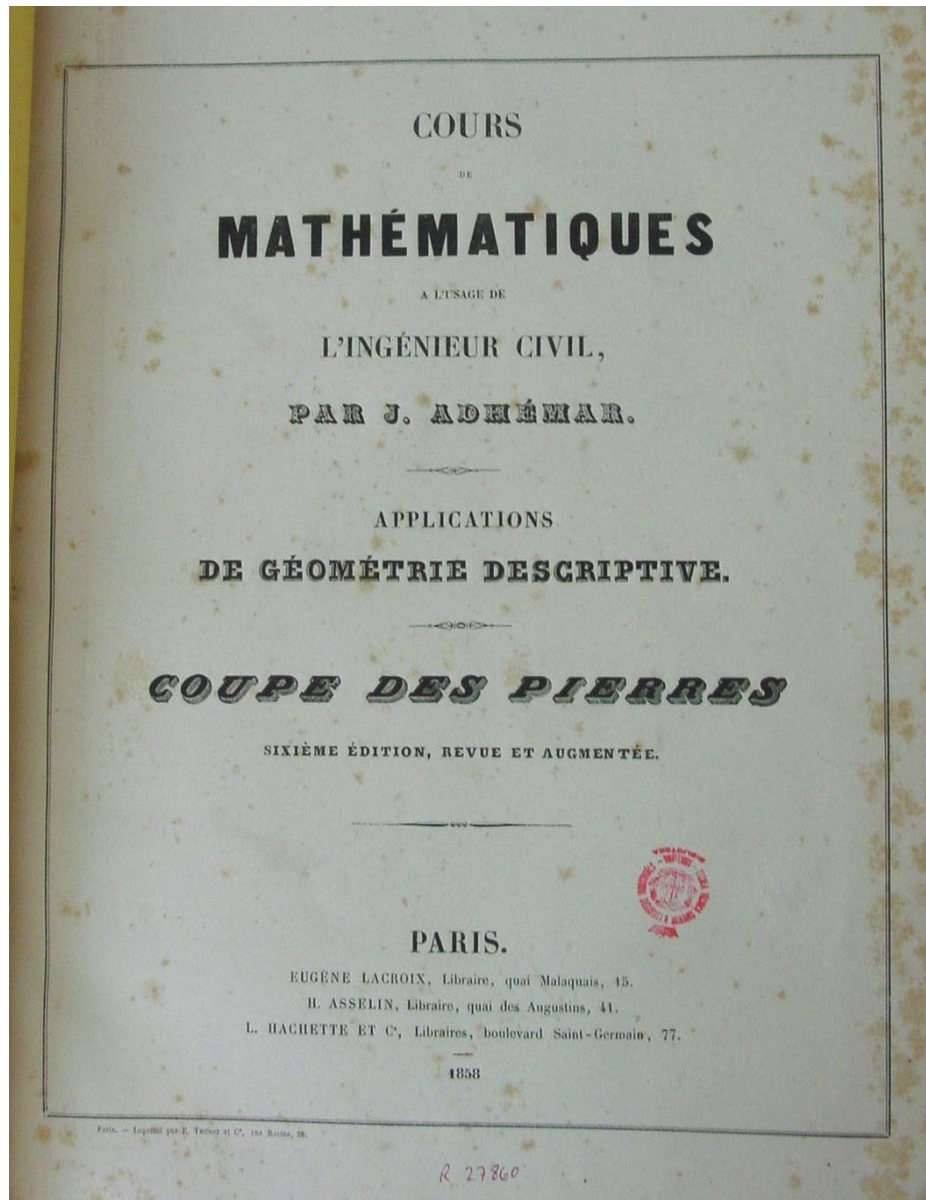
Al fons antic de l'ETSEIB podem veure dos vistosos textos d'Alphonse Joseph Adhemar. Un és un tractat d'estereotomia de la pedra i l'altre d'estereotomia de la fusta.

Títol complet: *Cours de mathématiques a l'usage de l'ingénieur Civil. Applications de géométrie descriptive. Coupe des pierres.*

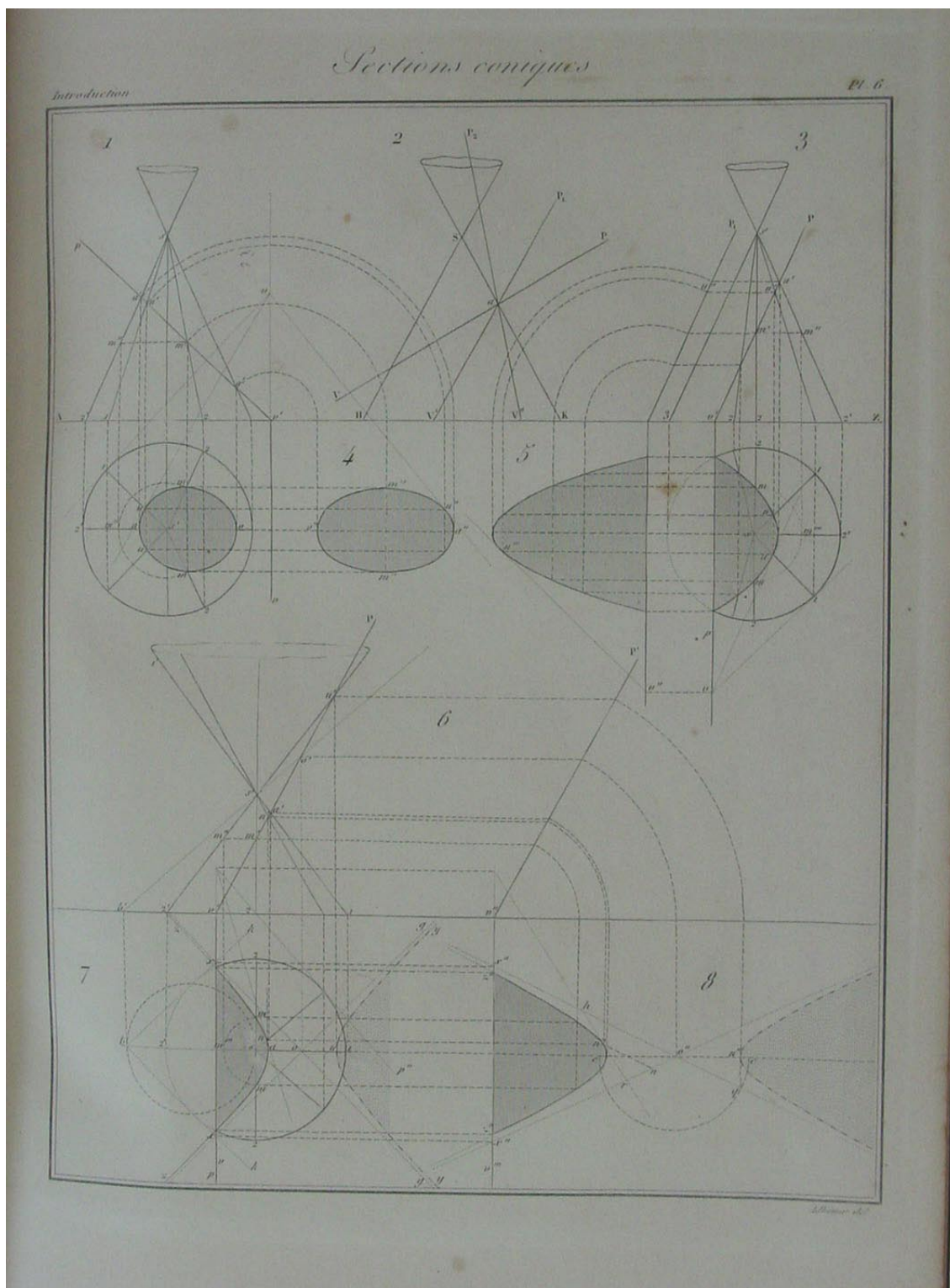
Signatura: 515:679.8.02 Adh Fol R-27860

Codi de barres: 1246427859

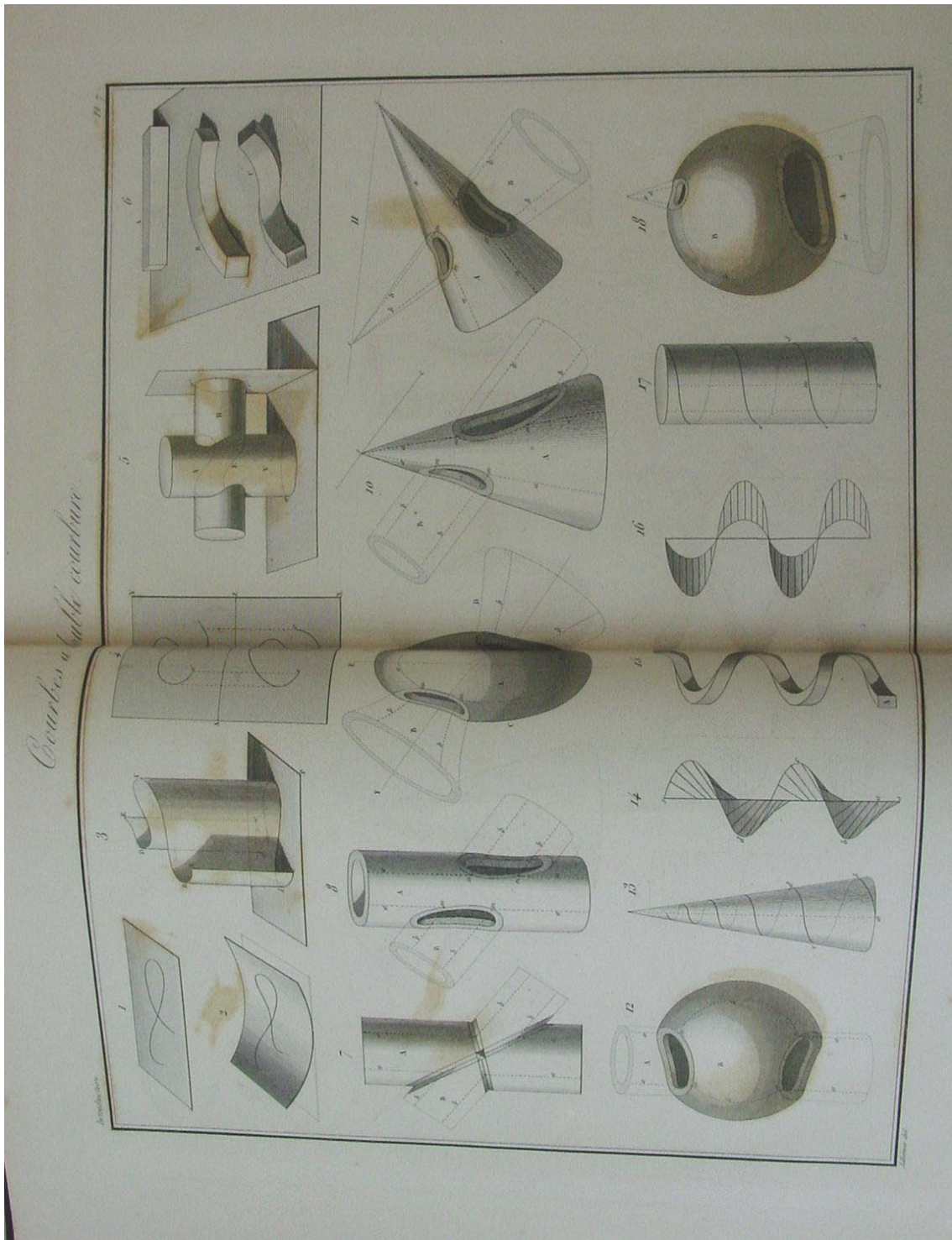
6^a edició, París, 1858.



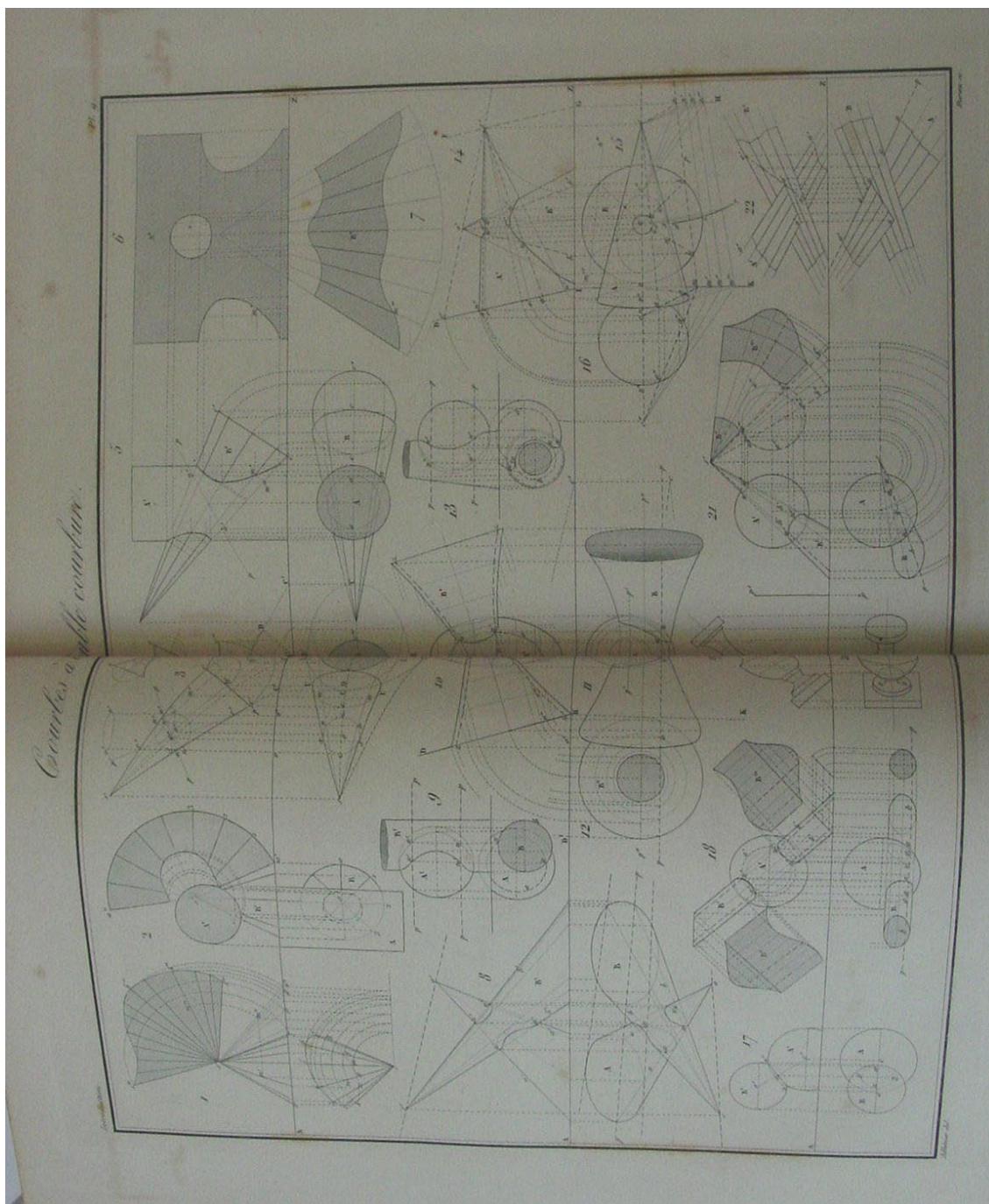
Adhemar, planxa 6



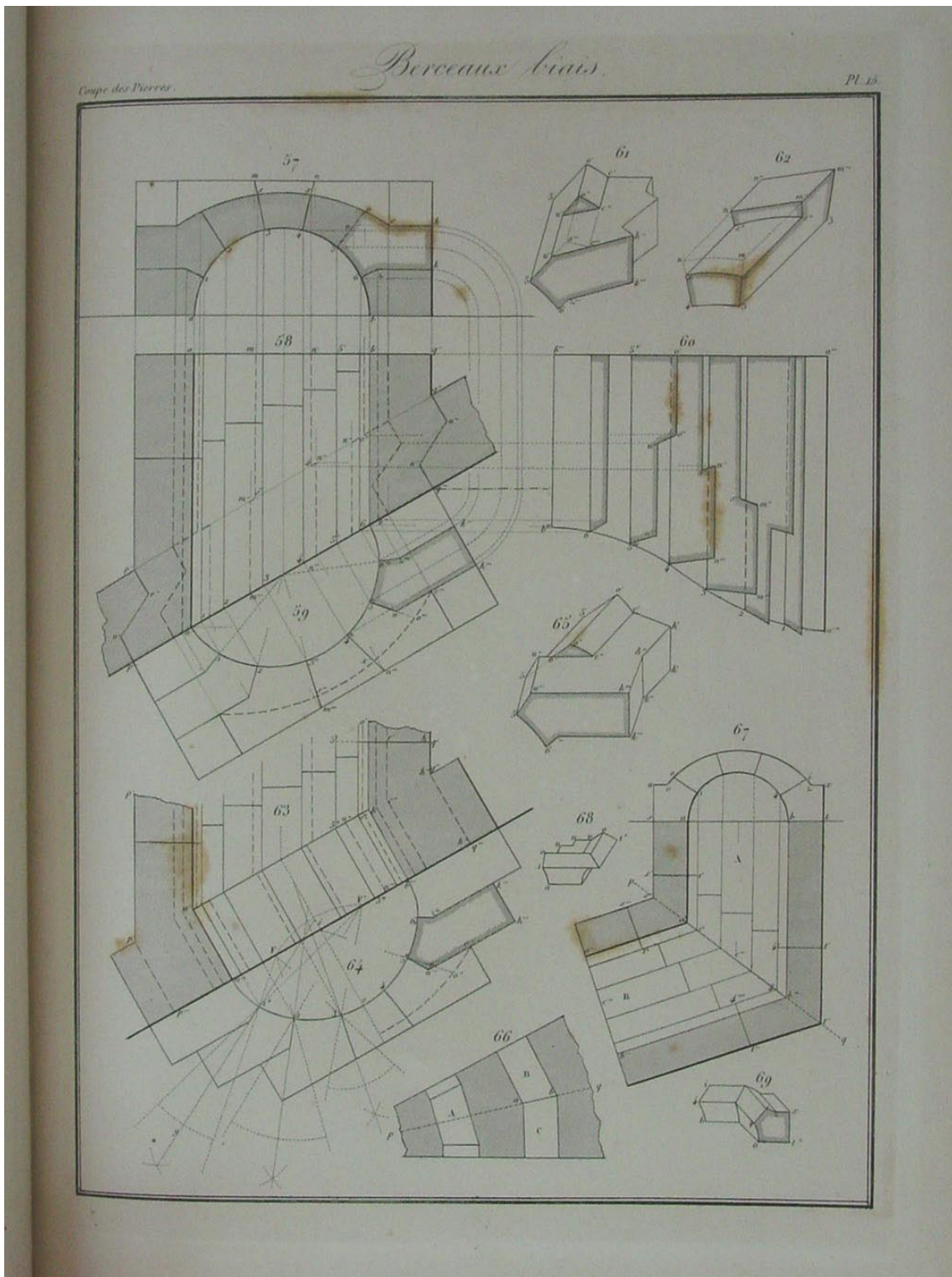
Adhemar, planxa 7



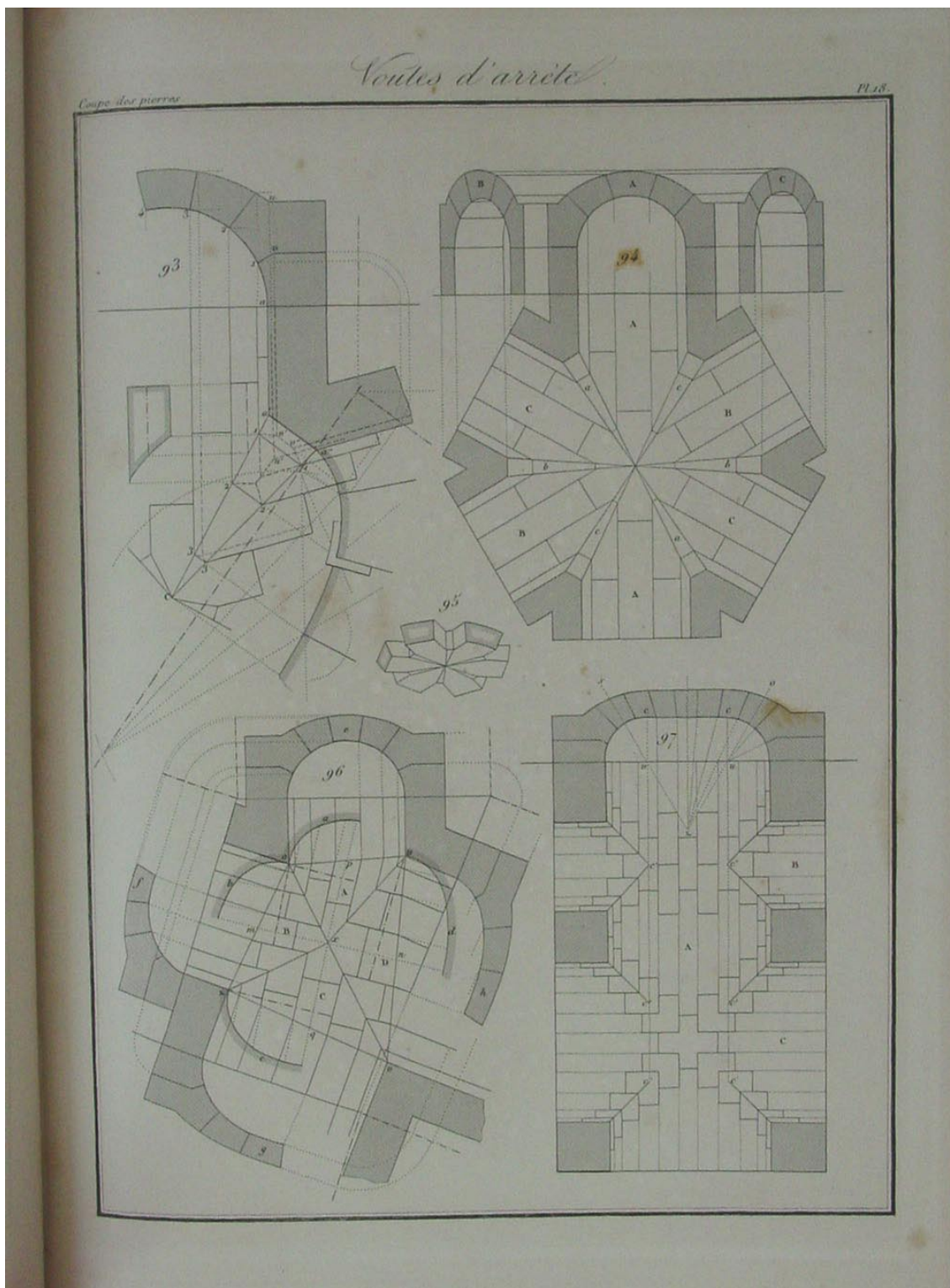
Adhemar, planxa 93



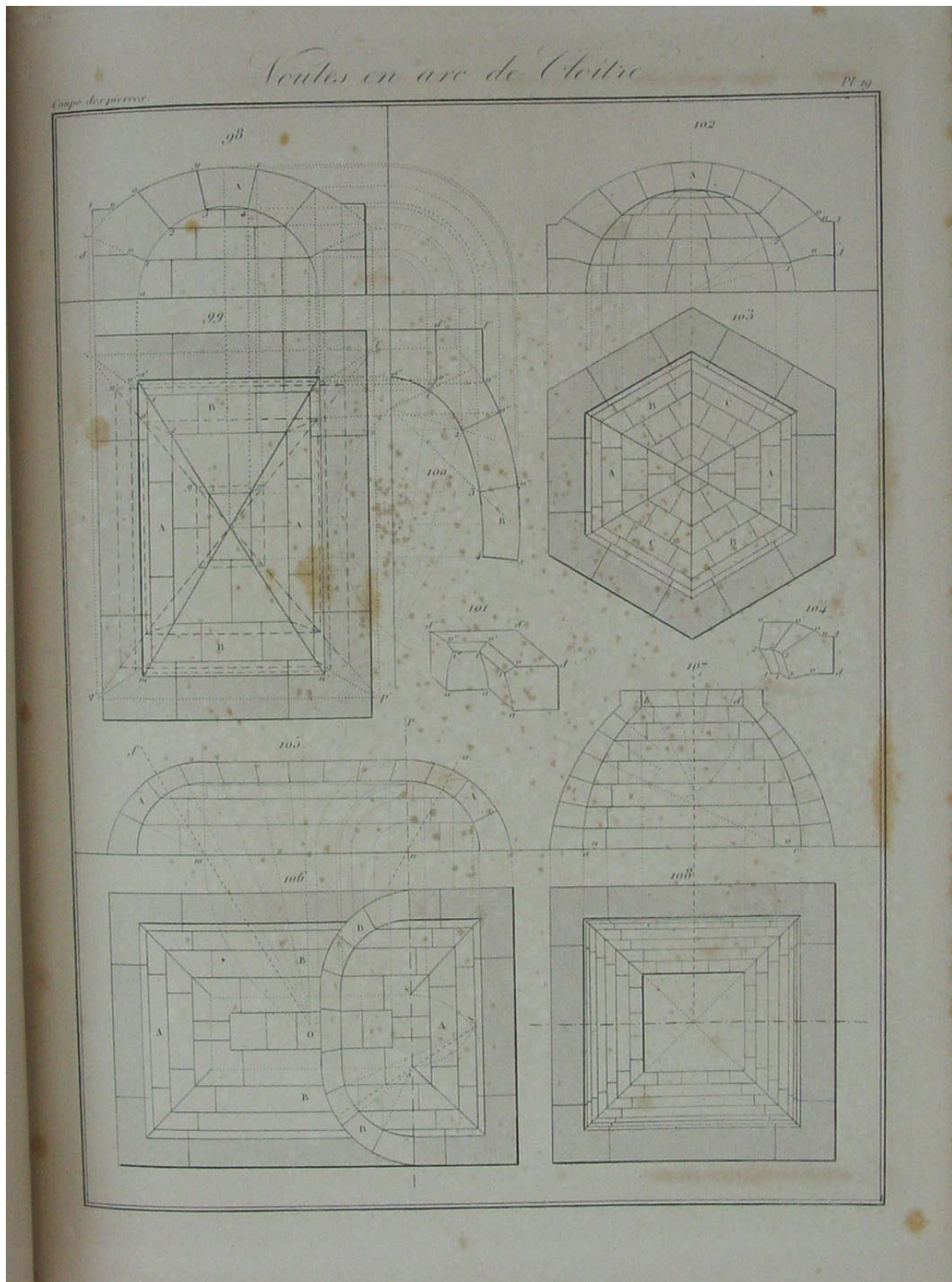
Adhemar, planxa 15



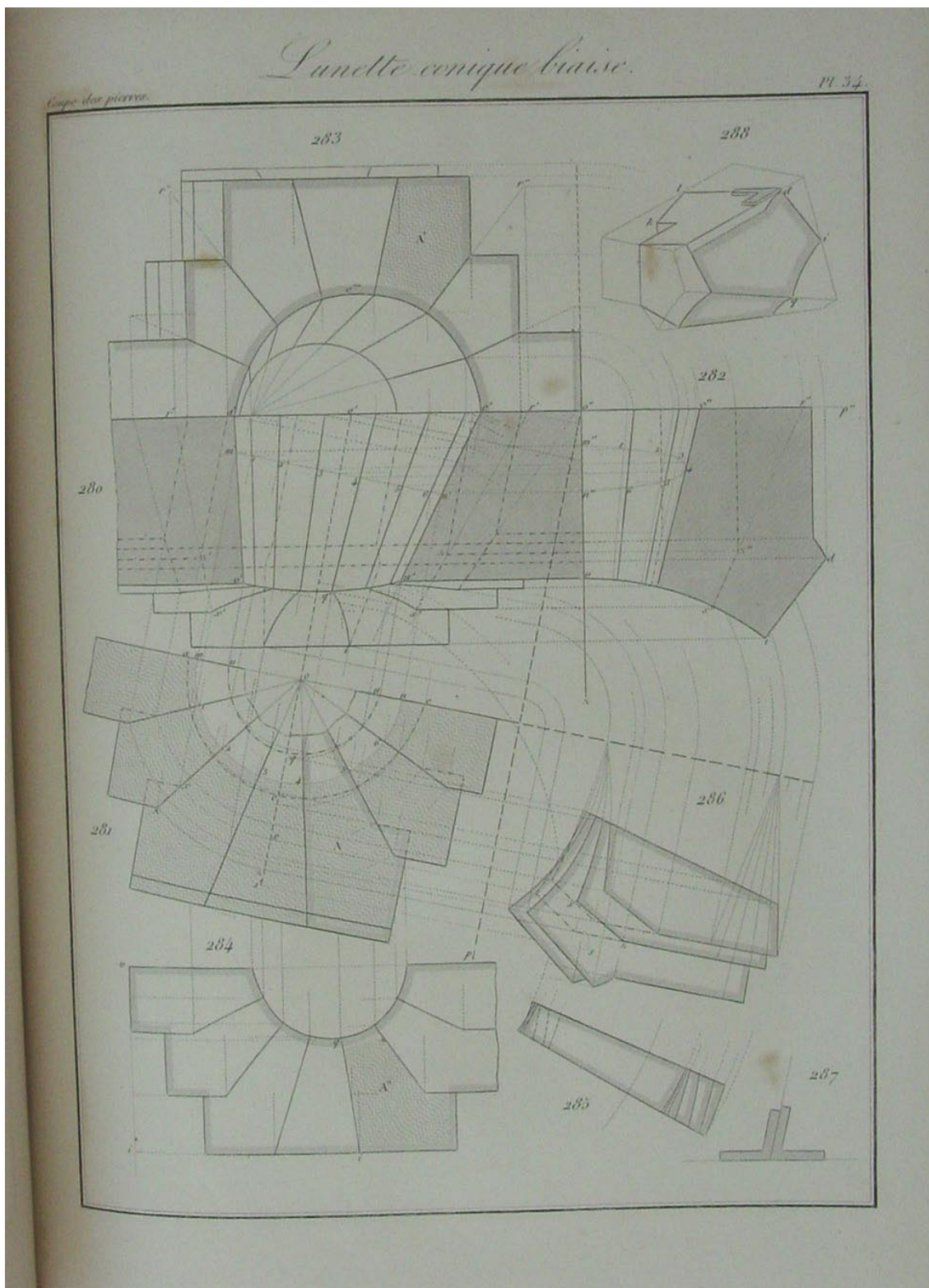
Adhemar, planxa 18



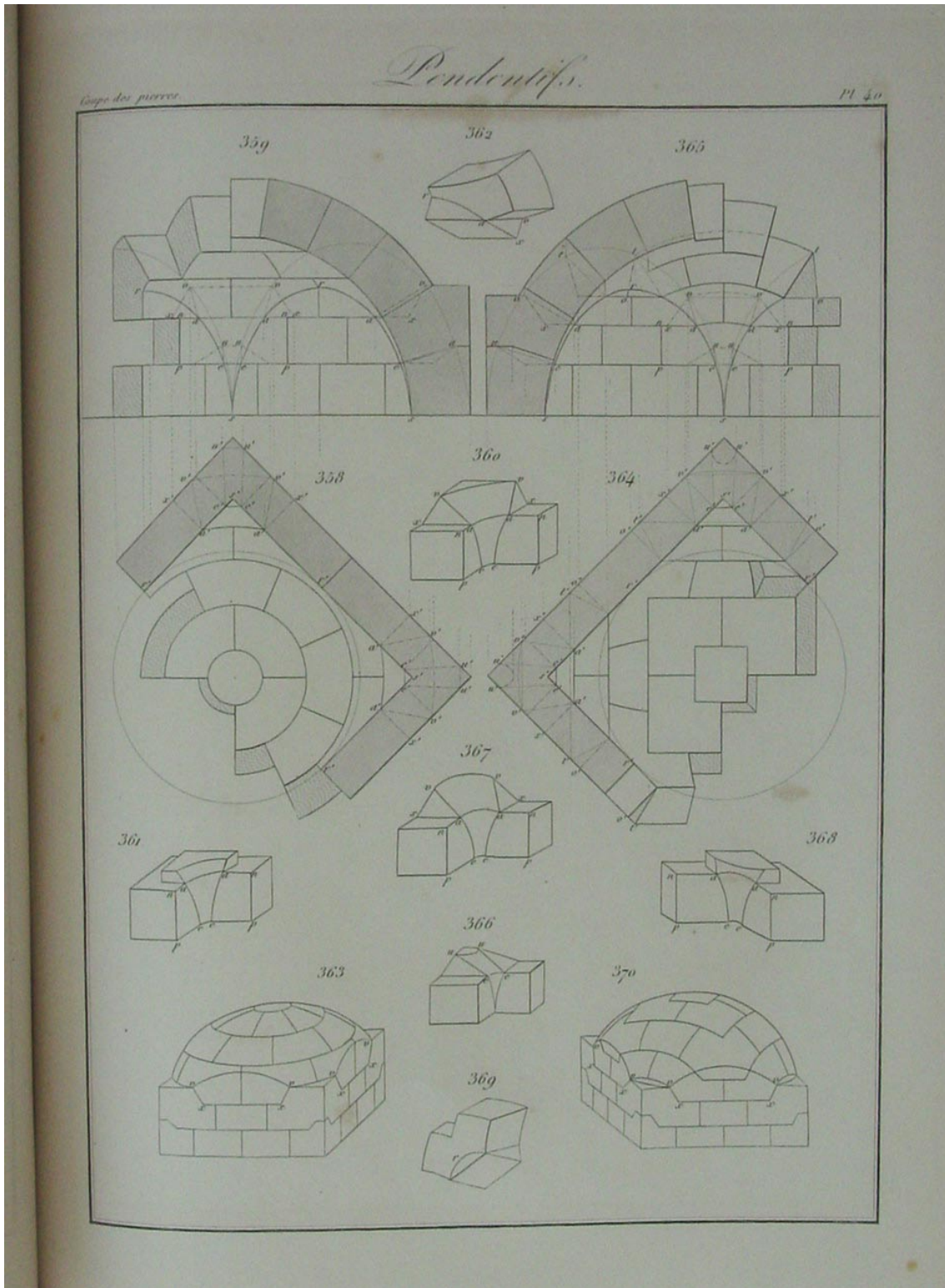
Adhemar, planxa 19



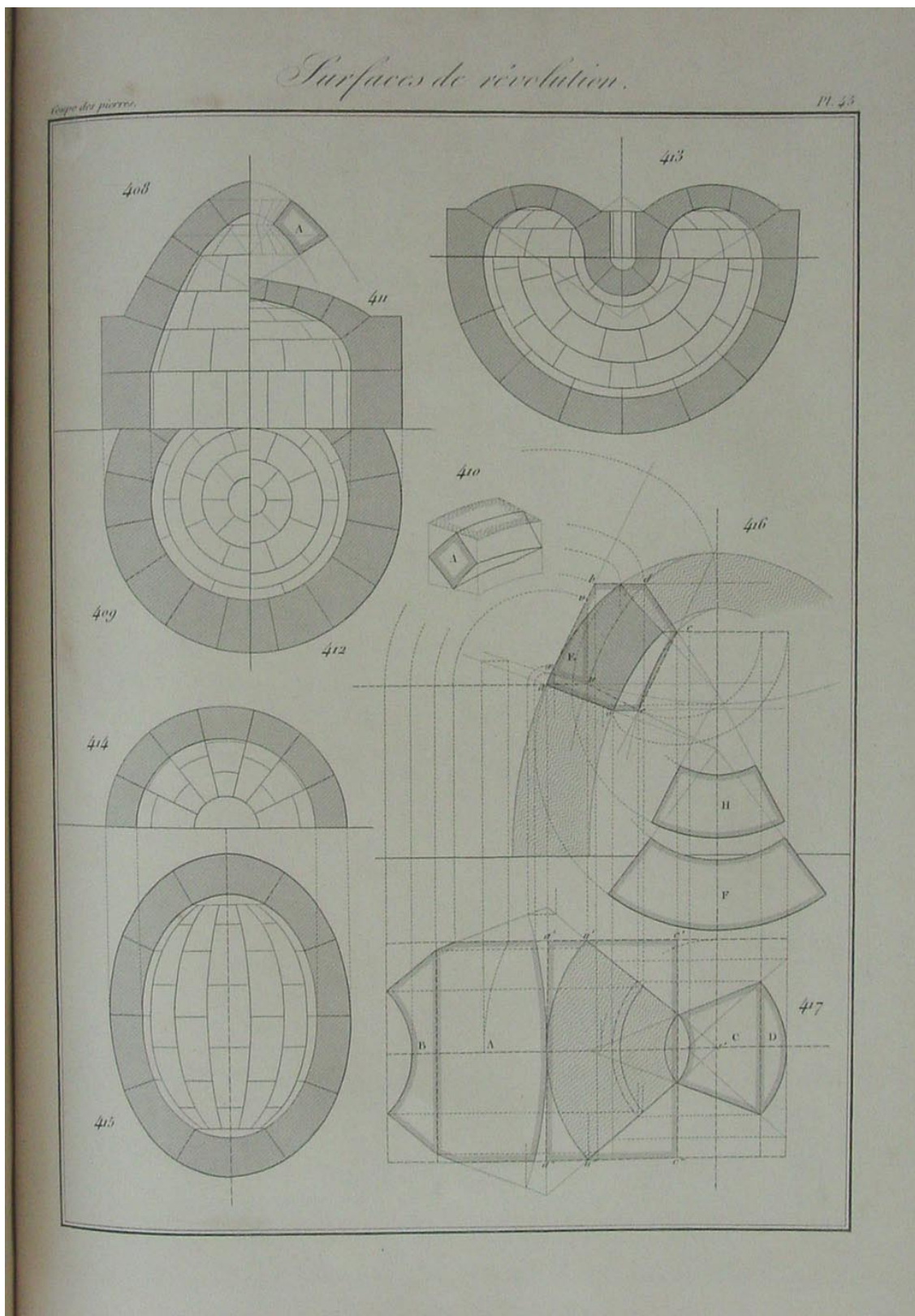
Adhemar, planxa 34



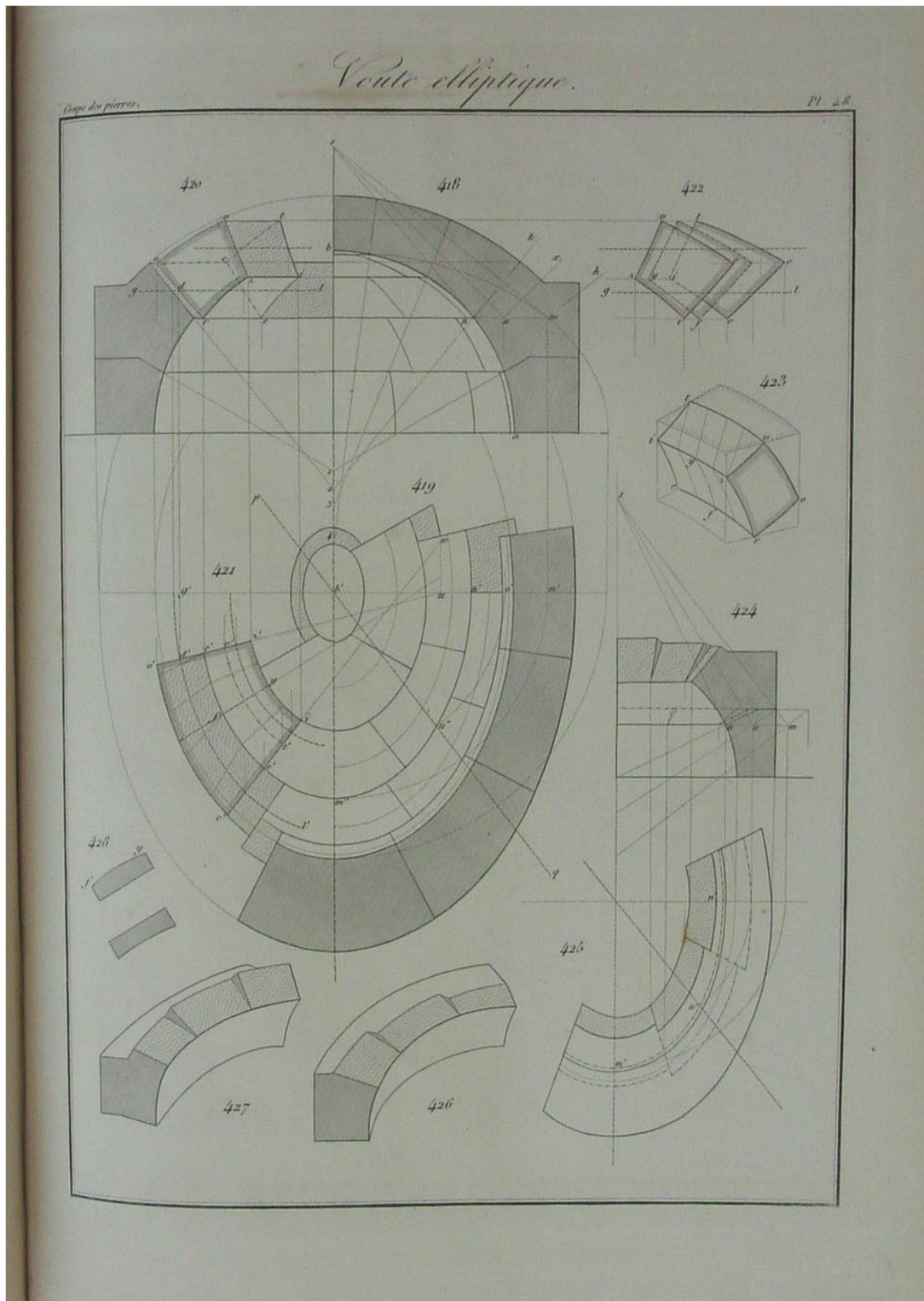
Adhemar, planxa 40.



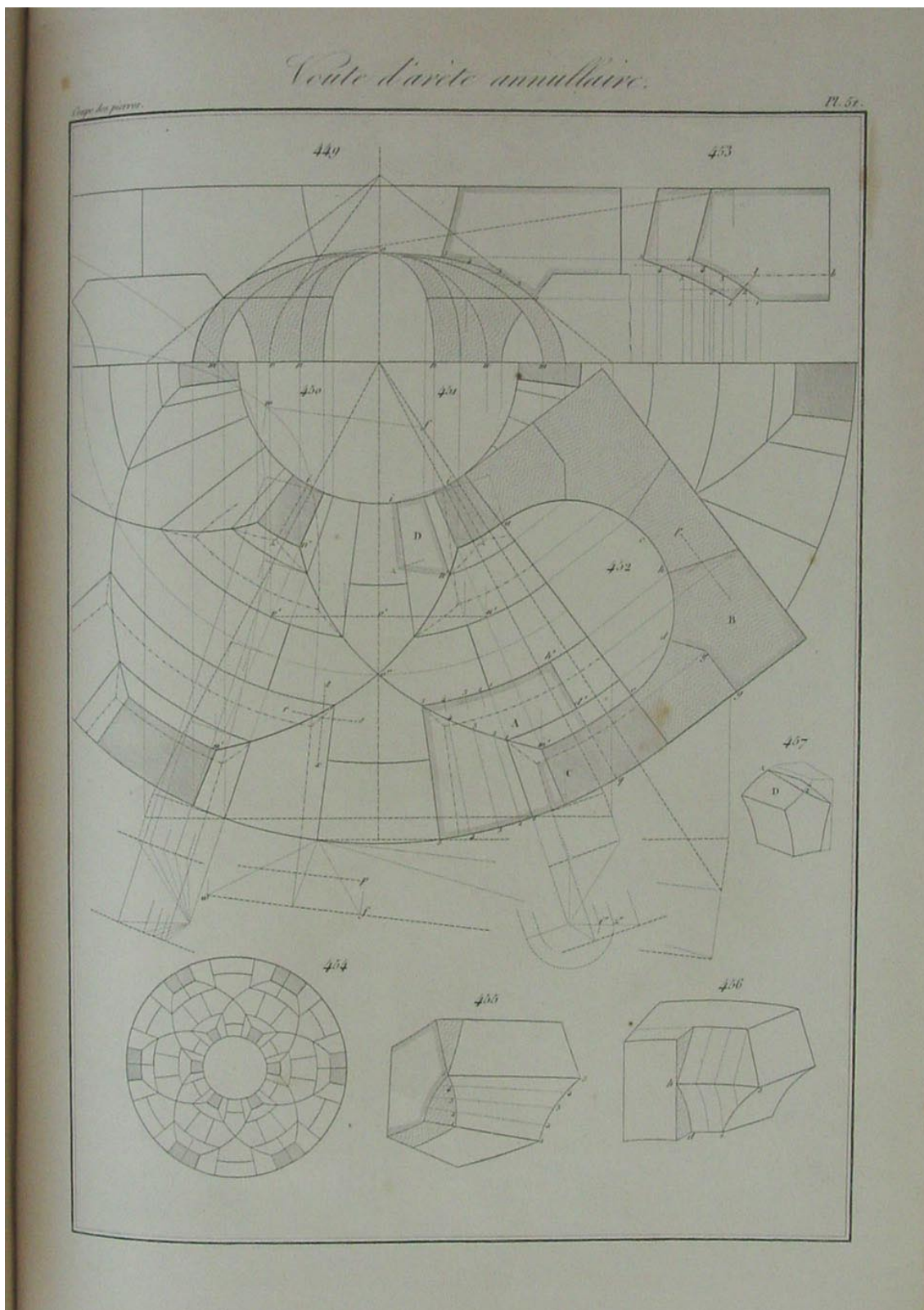
Adhemar, planxa 45.



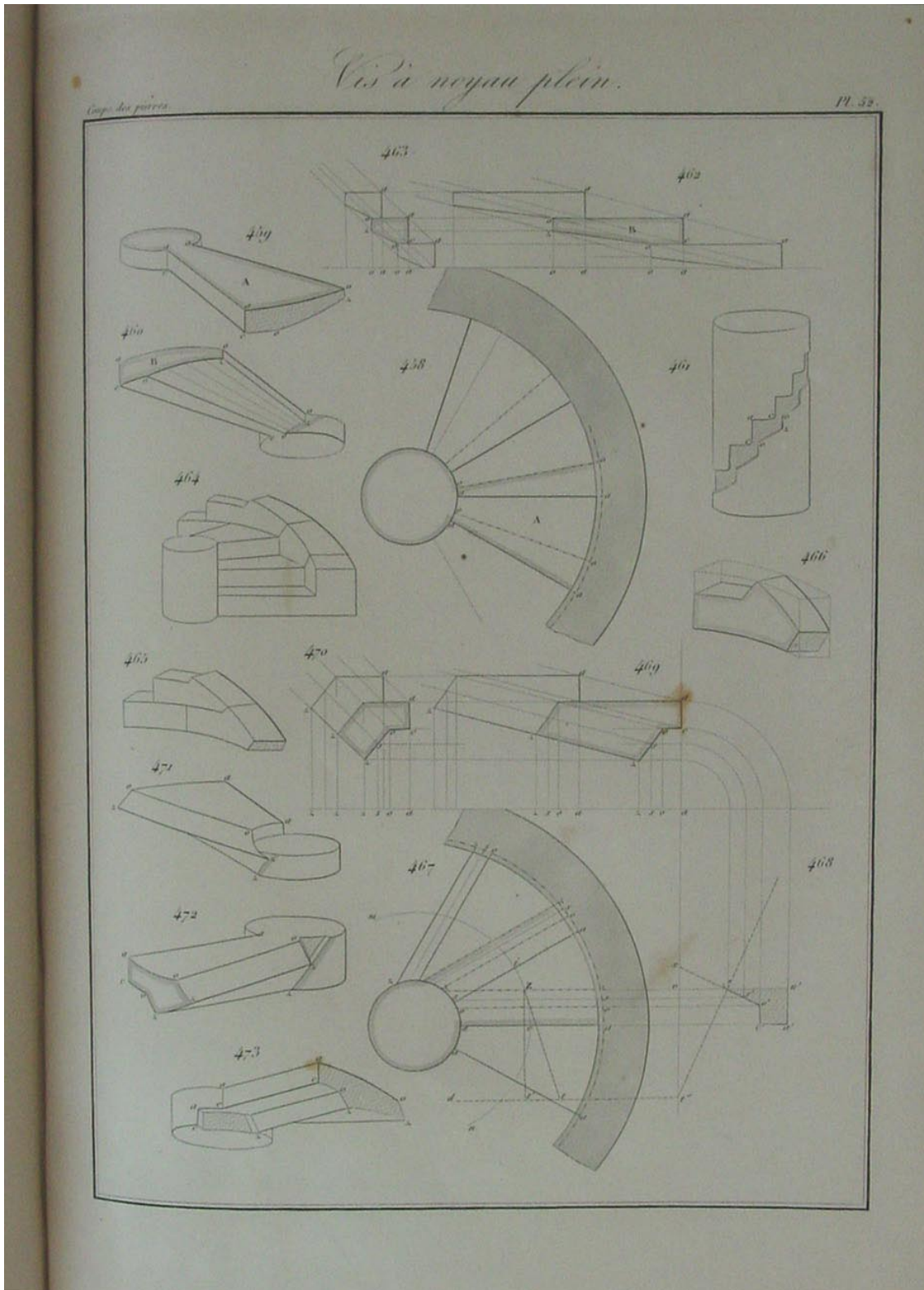
Adhemar, planxa 48.



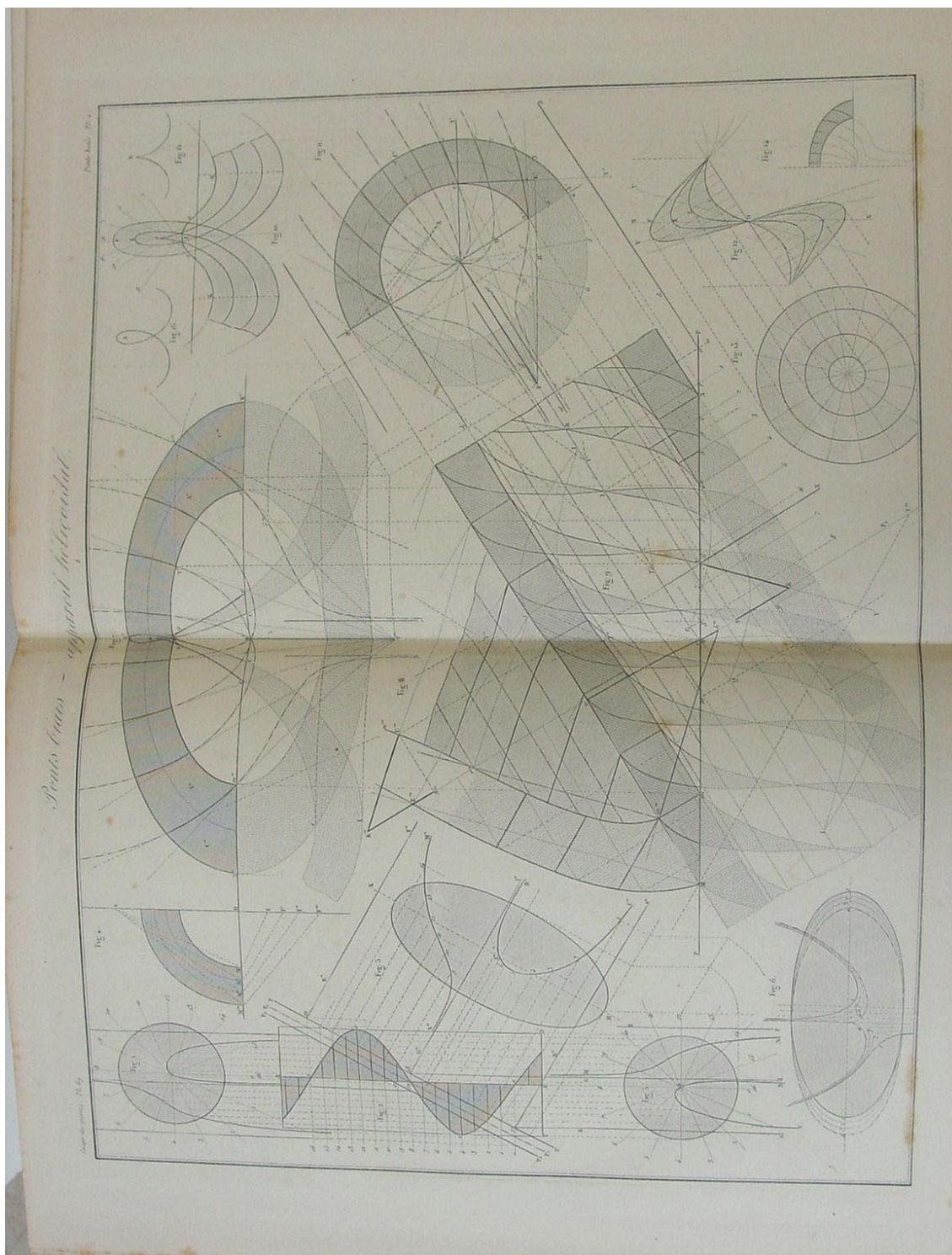
Adhemar, planxa 51.



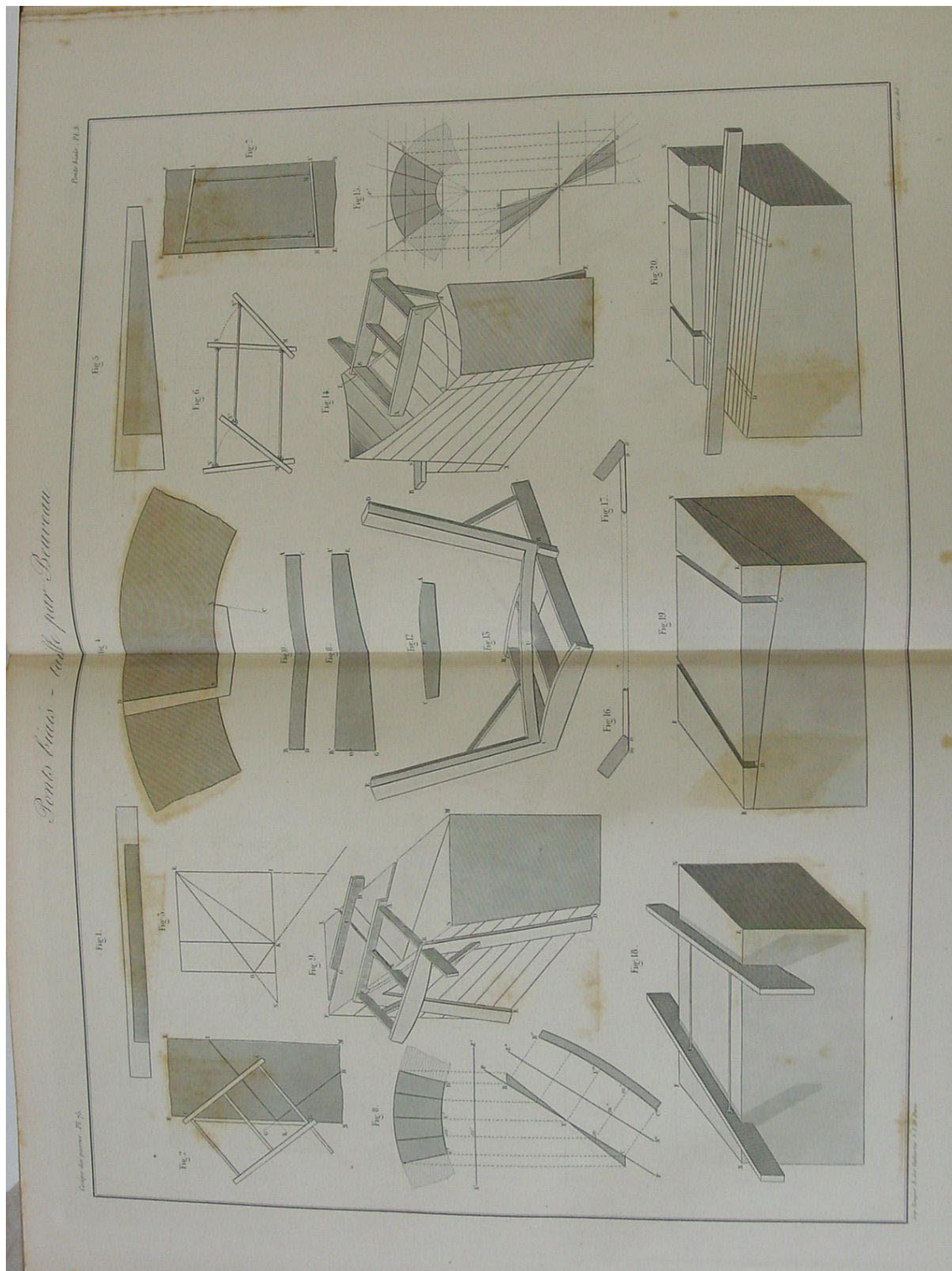
Adhemar, planxa 55.



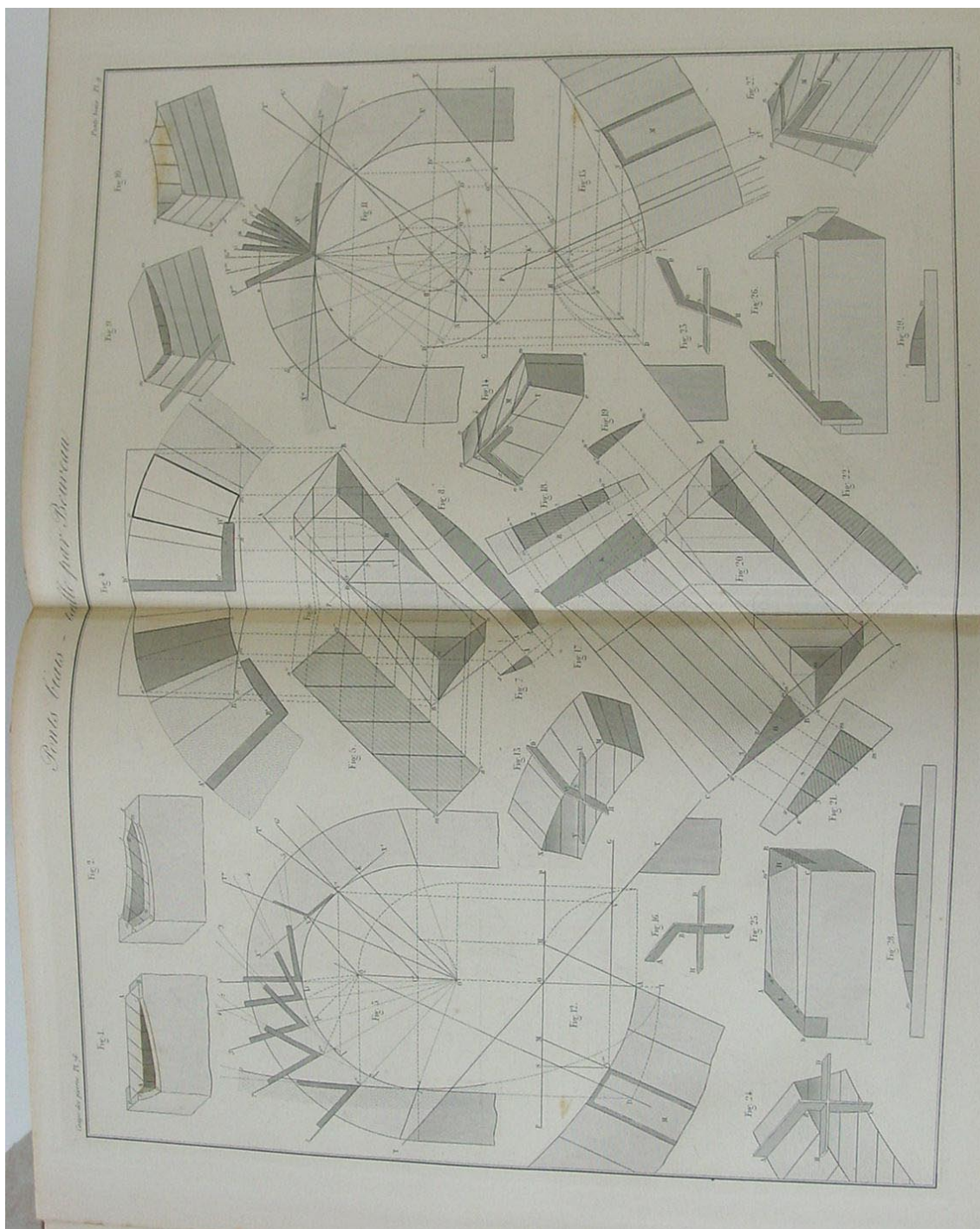
Adhemar, planxa pb.1



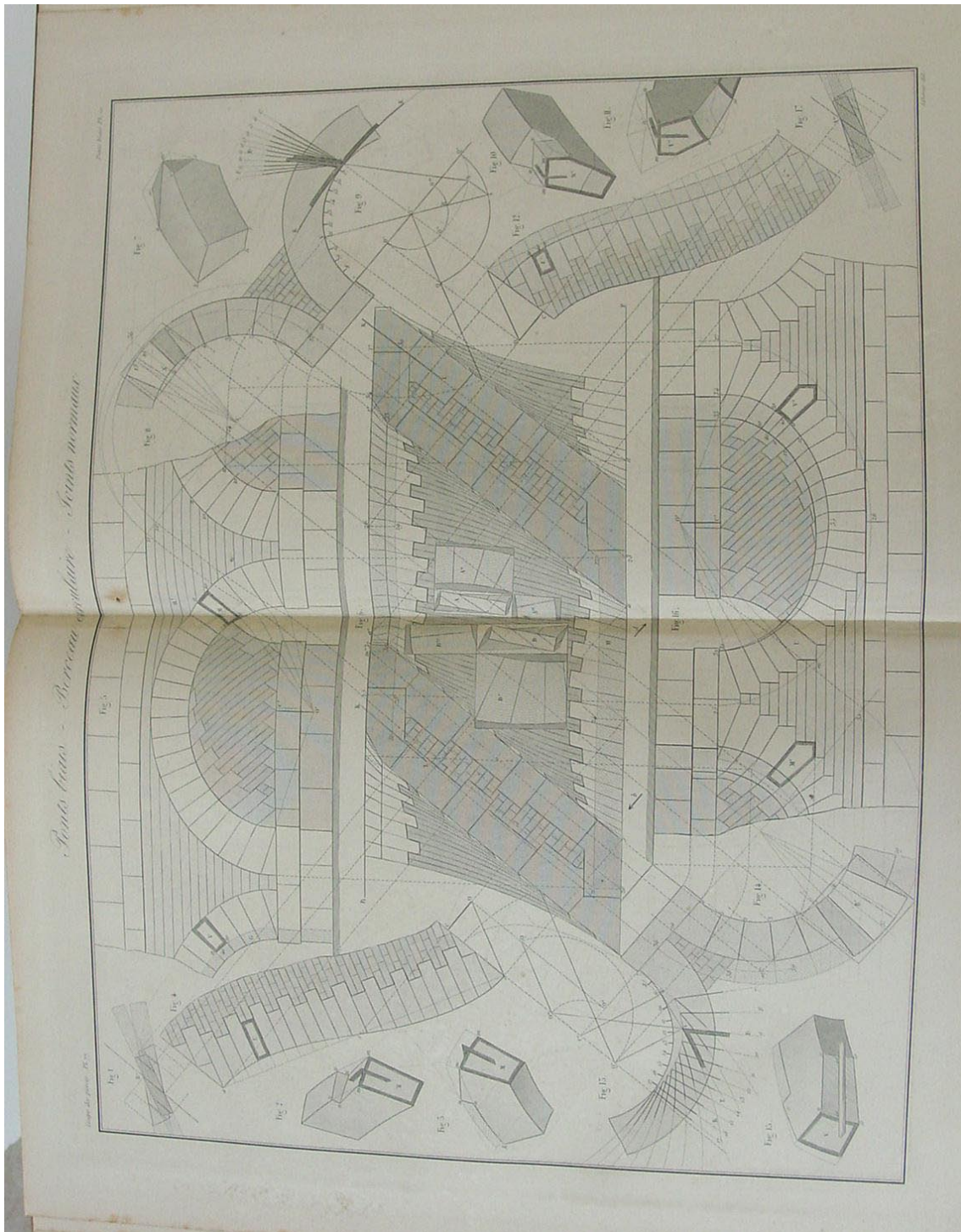
Adhemar, planxa pb.3



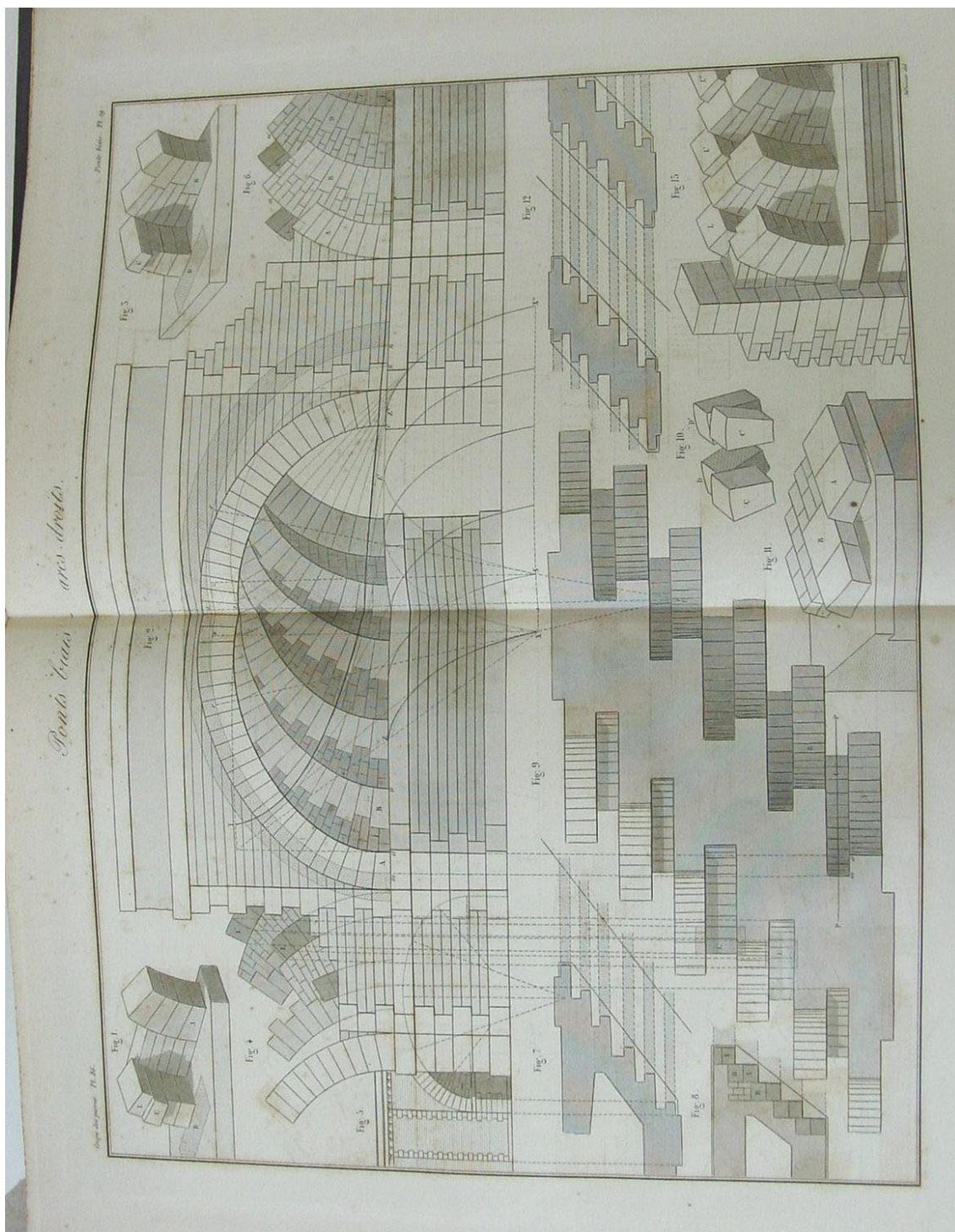
Adhemar, planxa pb.9



Adhemar, planxa pb.10.



Adhemar, planxa pb.19



ANNEX 2.8

Exercicis de Geometria descriptiva de Macari Planella i Roura, 1859-1860.

A la biblioteca de la càtedra Gaudí es conserva aquesta magnífica col·lecció de làmines de gran format (30 cm x 41 cm), delineades a tinta i enquadrades en un sol volum. Corresponen als exercicis de l'assignatura de Geometria descriptiva que realitzà Macari Planella i Roura quan era alumne a l'Escola de Mestres d'Obres de Barcelona, el curs de 1859 a 1860, on era professor Josep Casademunt i Torrents.

A continuació adjuntem el glossari complet i alguna làmina exemplar.

Glossari

Geometria Descriptiva

- 1.- Vistosa portada d'aquesta part de l'àlbum, amb el títol: *Geometria descriptiva y sus aplicaciones*.
- 2.- Sistemes de projeccions. Representació del punt en els quatre angles. Posicions de la recta.
- 3.- Diferents posicions d'un pla.
- 4.- Representació d'un punt que pertany a un pla.
- 5.- Traces d'una recta . Determinar un punt en una recta. Per un punt determinar un pla. Determinar la distància entre dos punts.
- 6.- Abatiment d'una recta.
- 7.- Abatiment d'una recta a una altra posició.
- 8.- Abatiment de dos plans.
- 9.- Abatiment d'un triangle.
- 10.- Paral·lelisme.
- 11.- Determinació d'un pla.
- 12.- Interseccions.
- 13.- Intersecció de plans. Perpendicularitat d'una recta amb un pla.
- 14.- Amidament de distàncies.
- 15.- Amidament de distàncies entre dos plans paral·lels. Angle que formen dues rectes que es tallen.
- 16.- Determinar l'angle diedre que forma una recta amb un pla.
- 17.- Angle que forma una recta amb un pla.
- 18.- Coneguts tres angles plans, a , b , c trobar els tres angles diedres A , B , C .
- 19.- Donats 2 angles plans a , b , i un angle diedre C trobar l'altre pla c i els dos diedres A i B .
- 20.- Conegut l'angle pla a i els dos angles diedres B i C , trobar els altres dos angles plans b i c i el diedre A .
- 21.- Projecció dels políedres i secció per un pla.
- 22.- Seccions.
- 23.- Desenvolupament dels políedres.
- 24.- Desenvolupament d'una piràmide.
- 25.- Intersecció d'una recta amb un políedre.
- 26.- Tangències i evolvent.
- 27.- Circumferències tangents.
- 28.- Rectes tangents per corba d'error.
- 29.- El·lipses.
- 30.- Paràbola.
- 31.- Cicloide. Epicycloide. Corbes de 2 o més centres.
- 32.- Espiral.
- 33.- Idees generals de les superfícies corbes y la seva generació. Teoria del pla tangent.
- 34.- Plans tangents al con, cilindre i esfera.

- 35.- Aplicació a les superfícies cilíndriques i còniques.
- 36.- Pla tangent a la superfície de revolució per un punt de la superfície.
- 37.- Cilindres i cons circumscrits a l'esfera.
- 38.- Determinació de la corba de contacte.
- 39.- Corba de contacte a una superfície de revolució.
- 40.- Intersecció i desenvolupament de la superfície cònica.
- 41.- Intersecció de dues superfícies cilíndriques.
- 42.- Penetració de dos cons.
- 43.- Penetració d'un con i un cilindre.
- 44.- Penetració d'un con amb una esfera.
- 45.- Penetració de l'esfera.
- 46.- Hèlix.
- 47.- Generació de les superfícies guerxes.
- 48.- Representar l'hiperboloide d'un full.
- 49.- Generació i representació del conoide recte, corn de vaca i helizoides guerxos.

Ombres

- 50.- Vistosa portada d'aquesta part, amb el títol: *Aplicación a las sombras*.
- 51.- Ombra dels poliedres.
- 52.- Ombra del cilindre, recte i oblic.
- 53.- Ombra del con.
- 54.- Ombra de l'esfera.
- 55.- Ombra del nínxol cilíndric pla i esfèric.
- 56.- Ombra de la fornícula esfèrica
- 57.- Ombra d'un punt. Ombra d'una recta.
- 58.- Ombra del tor.
- 59.- Ombra del capitell.
- 60.- Degradació de tintes i idees generals dels punts.
- 61.- De la perspectiva paral·lela o caballera.

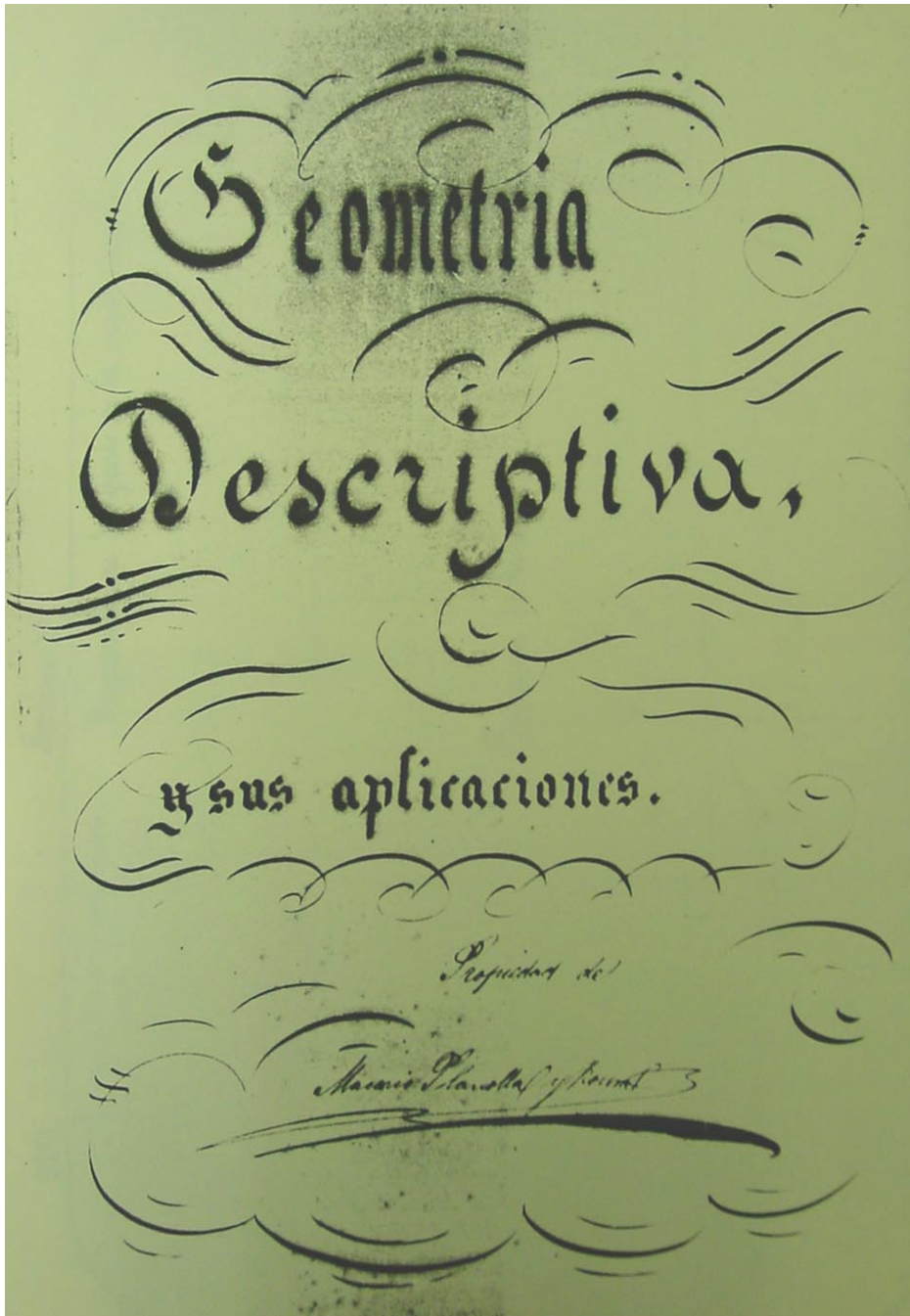
Tall de la pedra

- 62.- Vistosa portada d'aquesta part, amb el títol: *Aplicación a los Cortes de Piedras y Maderas*.
- 63.- Objectius del tall de la pedra.
- 64.- Mur recte.
- 65.- Mur recte en biaix.
- 66.- Mur cilíndric. Mur cònic.
- 67.- Classificació, traçat i espejament dels diferents arcs que s'usen. Semicircular. Escarser. Apuntat. Carpanell.
- 68.- Per tranquil. Rebaixat. Peraltat.
- 69.- Arc adintellat, i les seves variacions. El salta-cavall.
- 70.- Tall fals. Desenvolupament de la clau.
- 71.- Volta cilíndrica. Volta cònica.
- 72.- Volta per aresta. Volta per racó de claustre.
- 73.- Volta esfèrica.
- 74.- Volta amb petxines.
- 75.- Espejament de la volta plana.
- 76.- Canó seguit recte i les seves variants. Primer cas, en biaix.
- 77.- Segon cas, en talús.
- 78.- Tercer cas, en biaix i en talús.
- 79.- Canó seguit en biaix pels dos costats.
- 80.- Canó en baixada recte.
- 81.- Canó en baixada i en biaix.
- 82.- Volta per aresta.
- 83.- Volta esquifada. Espejament de la volta en racó de claustre.
- 84.- Volta de canó en colze.
- 85.- Lluneta recta.
- 86.- Cúpula esfèrica.
- 87.- Espejament del nínxol esfèric.
- 88.- Espejament de la cúpula amb petxines.
- 89.- Arc cap-i-alt escarser recte.

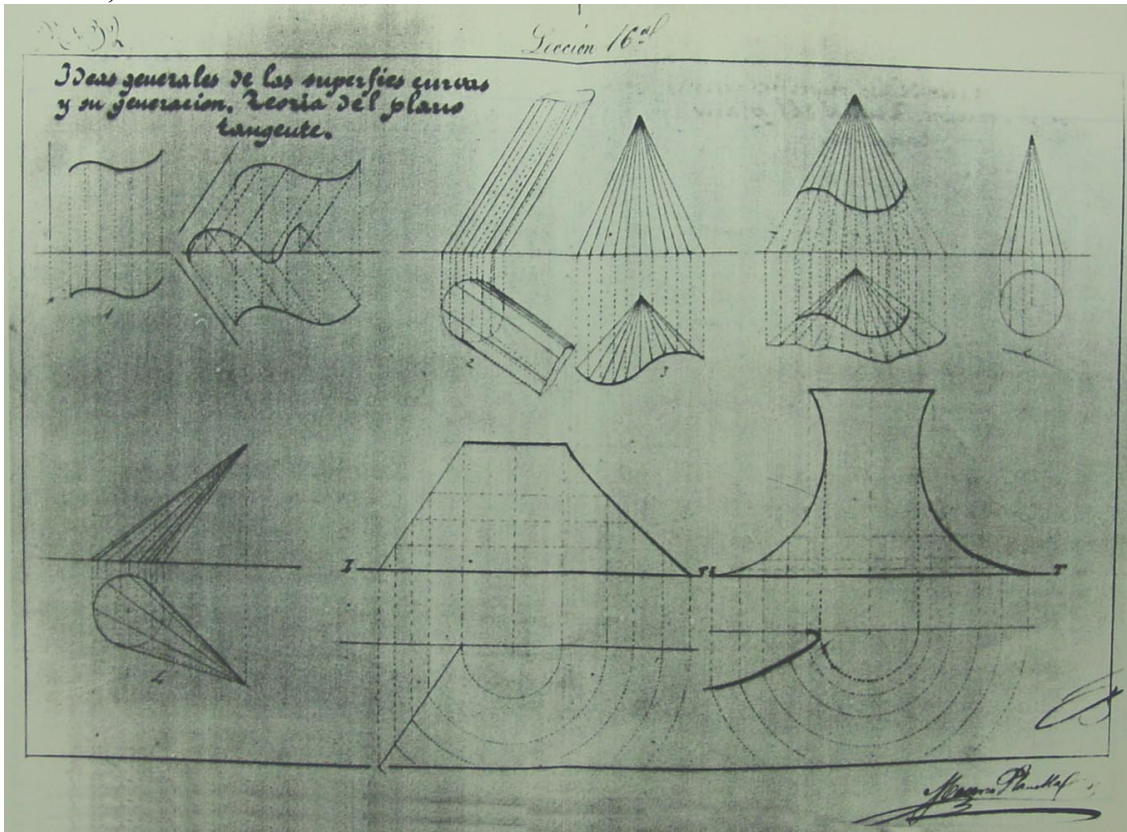
- 90.- Cap-i-alt de Marsella.
- 91.- Arc de Sant Antoni.
- 92.- Escala recta.

Tall de la fusta

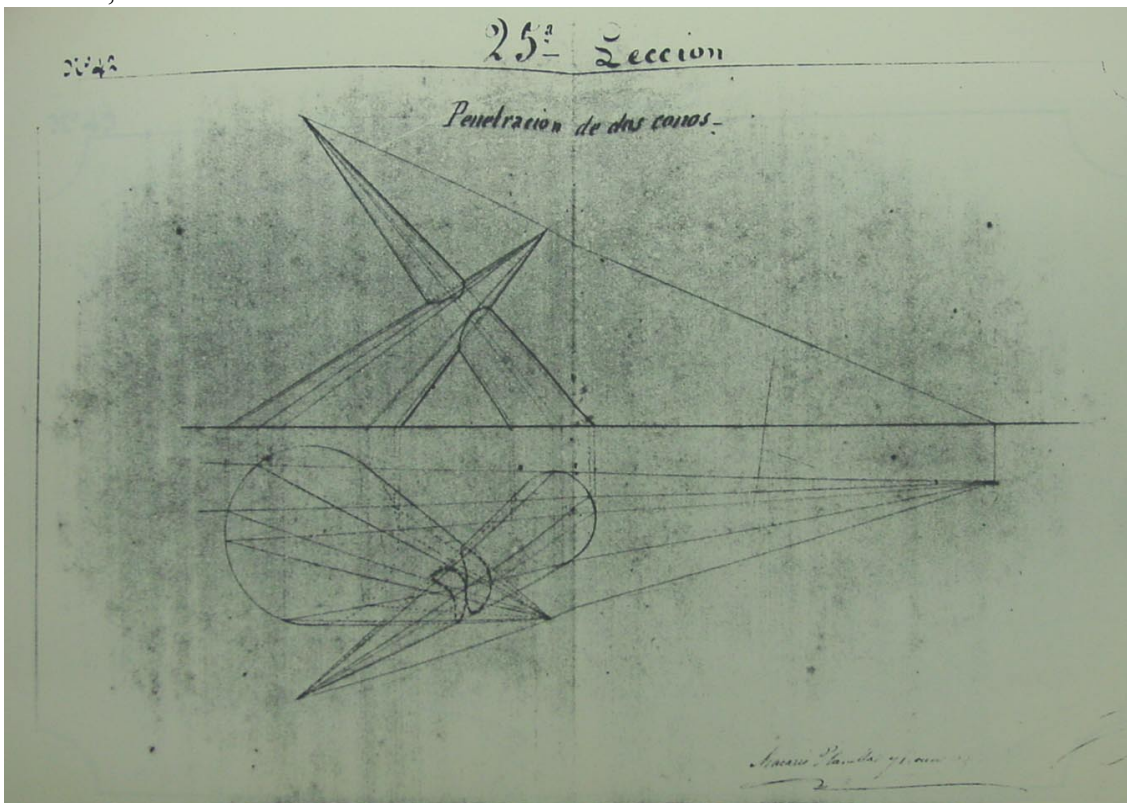
- 93.- Idea dels esnsamblatges, explicació del anomenat esfera i el de caixa i espiga.
- 94.- Ensamblatges a cua d'oreneta i a ceps.
- 95.- Tots els casos d'encadellats i engargolats.



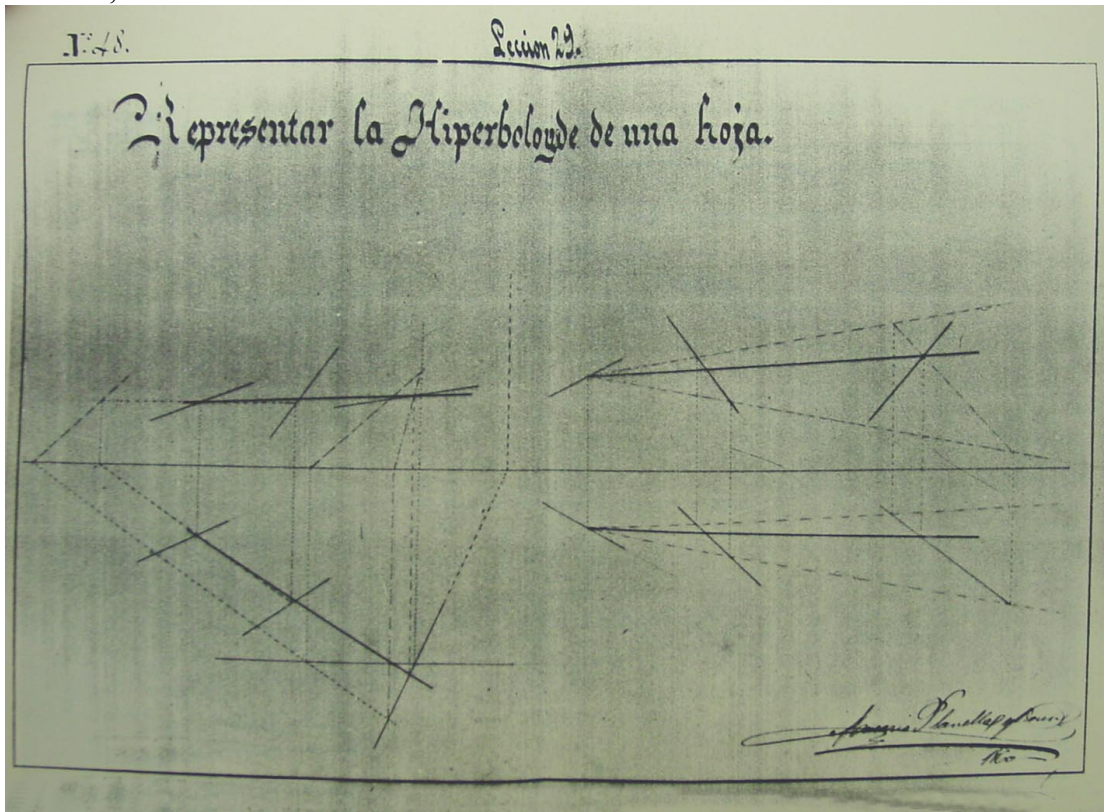
Planella, làmina 33.



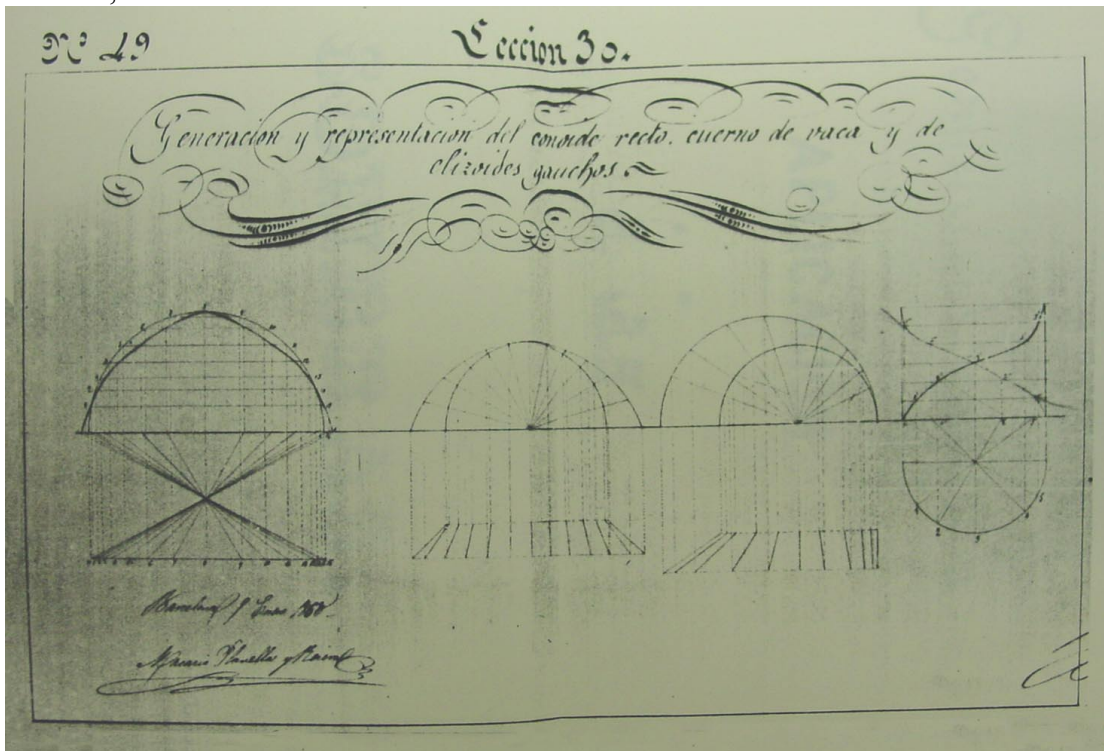
Planella, làmina 42.



Planella, làmina 48



Planella, làmina 49



ANNEX 2.9**Tractat de Joules de la Gourniere, 1860**

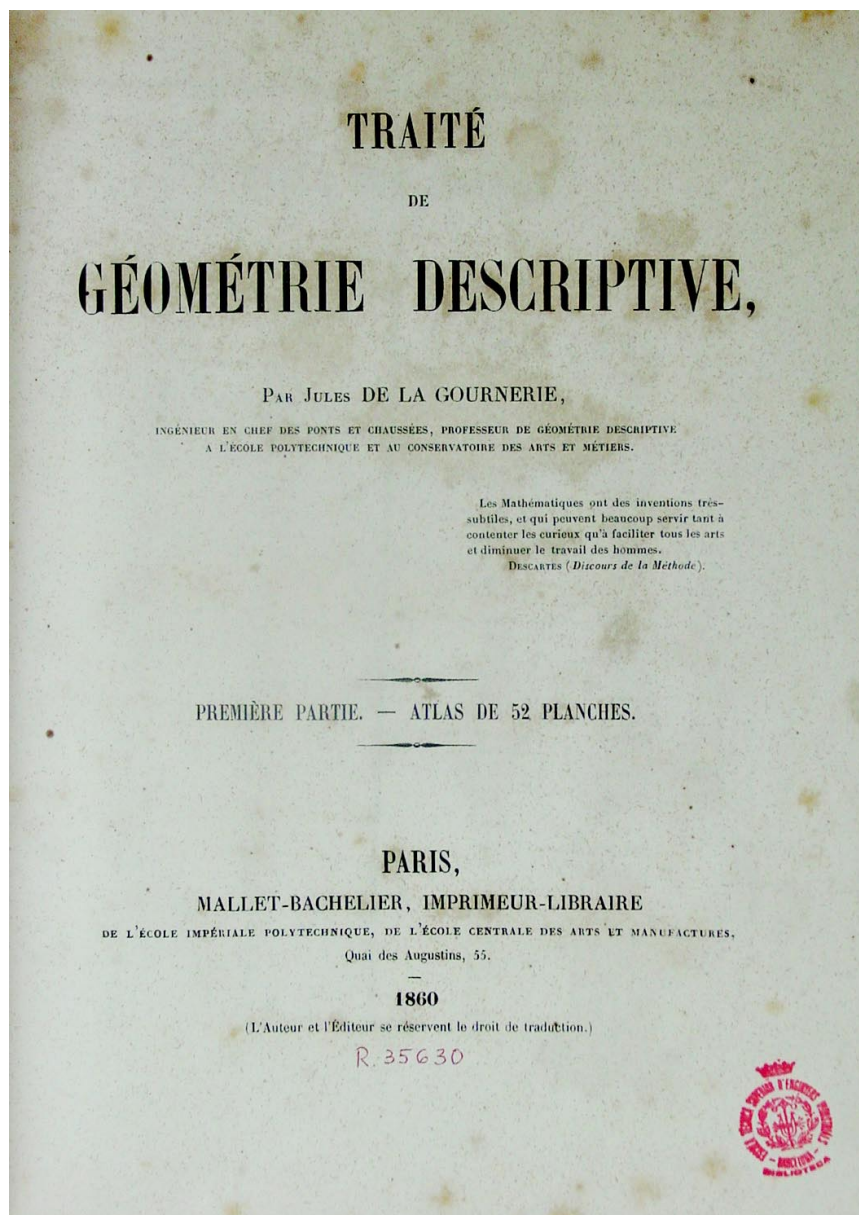
Títol complet: *Traité de géométrie descriptive*

Signatura: 515 LaG R-35630

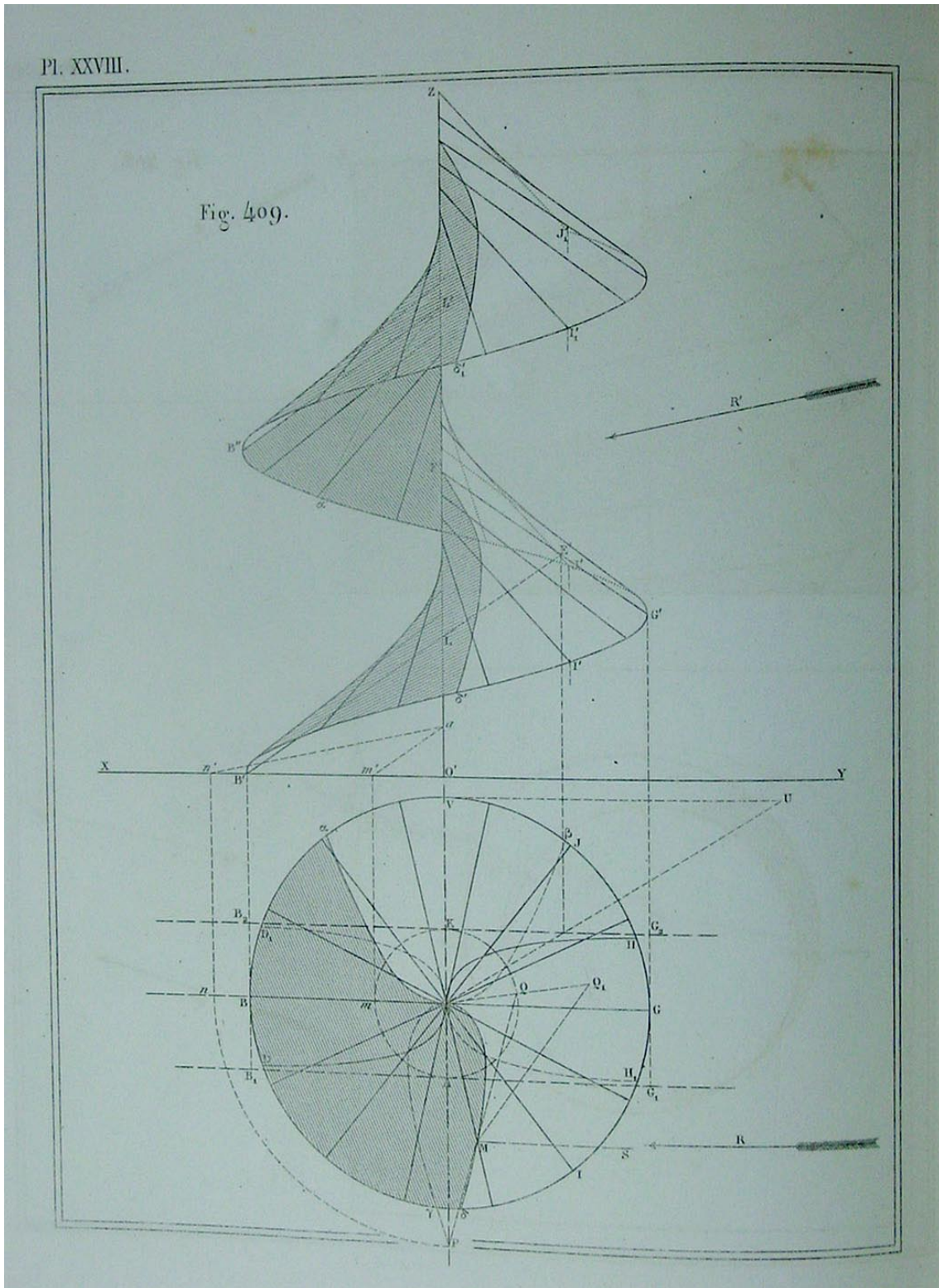
Codi de barres: 1246435630

Editat per Mallet-Bachelier Gauthier-Villars, París, 1860-64.

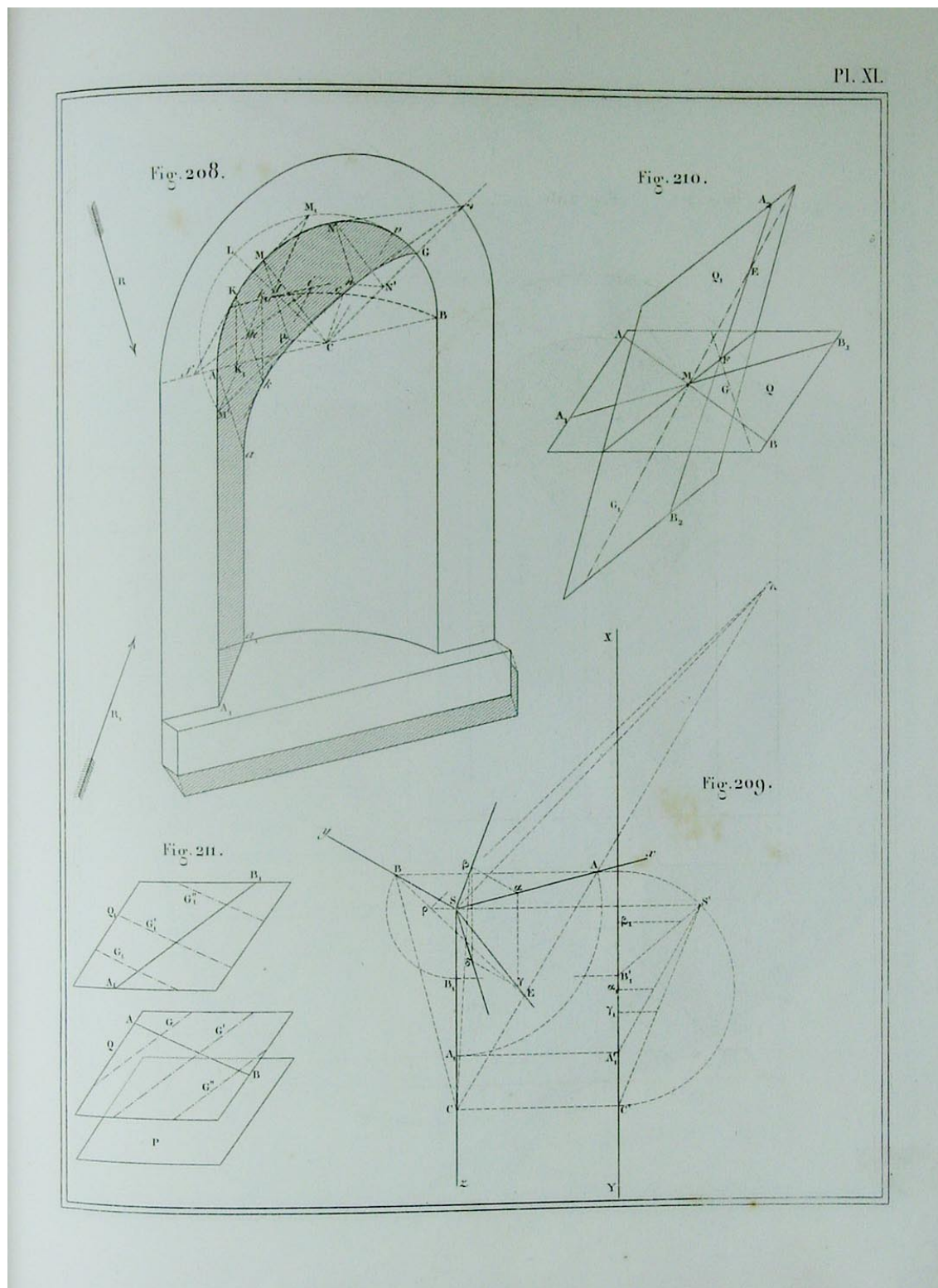
Es reedità el 1873-1880 (2a edició) i el 1891-1901 (3a edició).



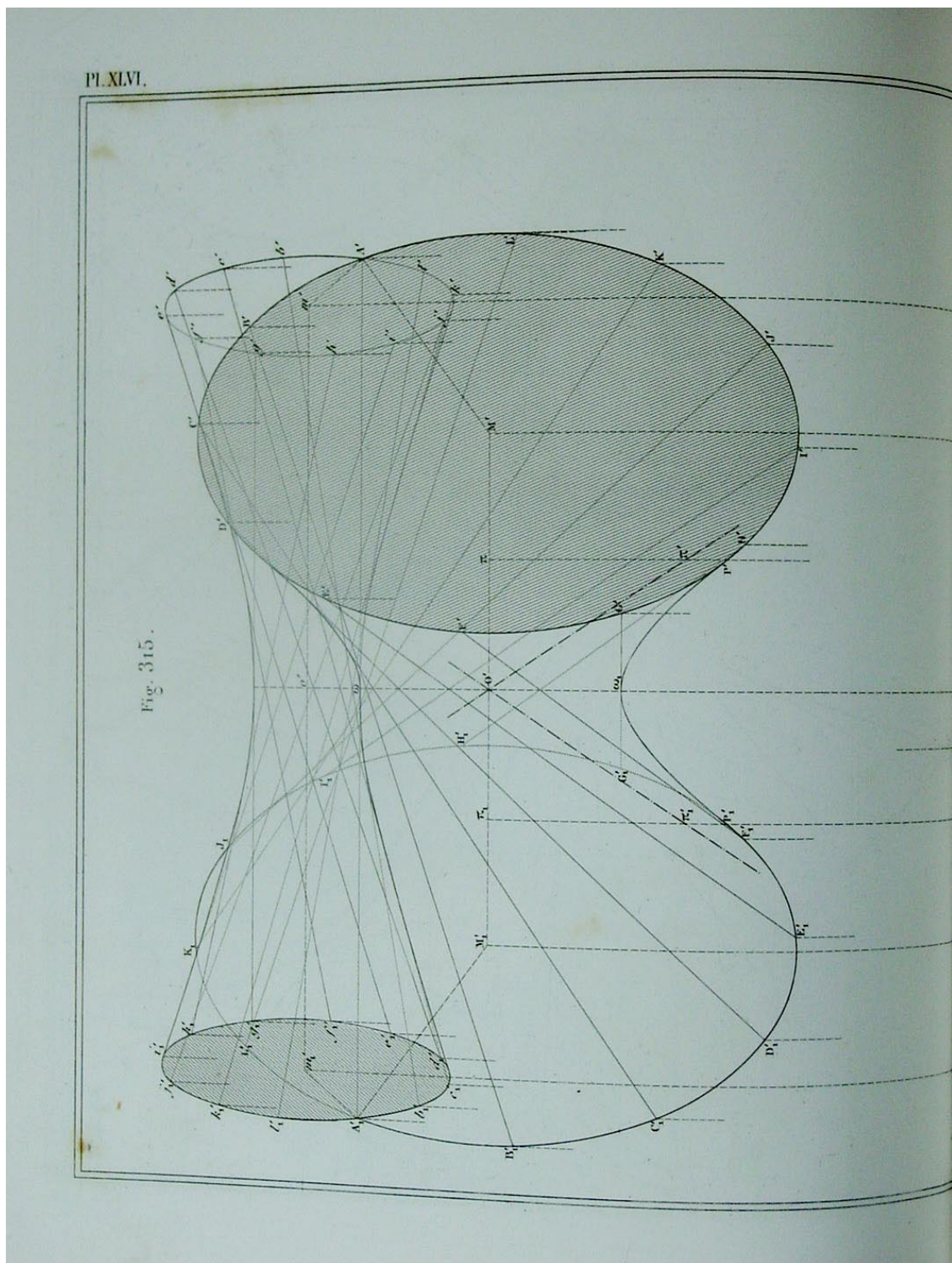
Gourniere, pl. XXVIII.



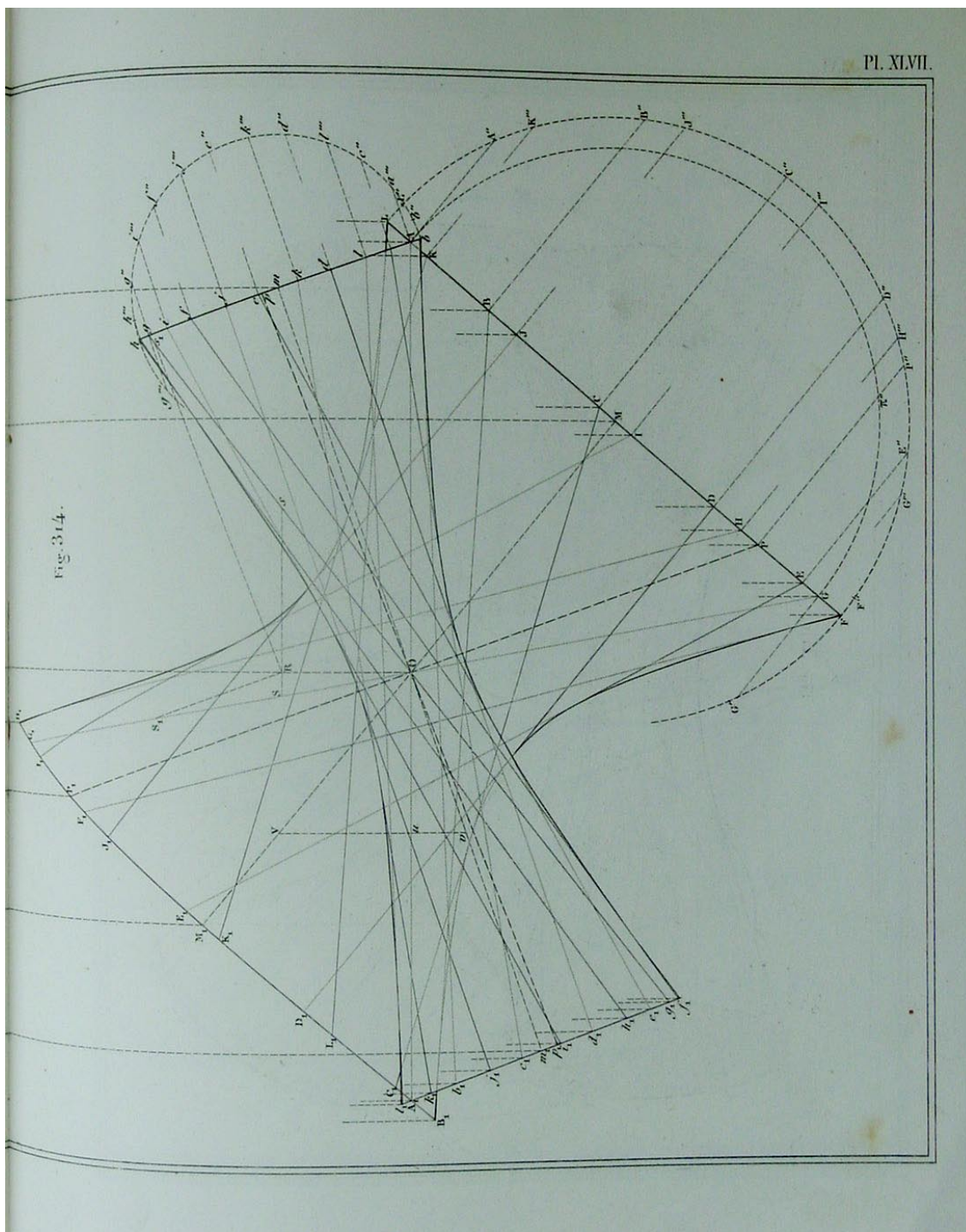
Gourniere, pl. XL.



Gourniere, pl. XLVI.



Gourniere, pl. XLVII.



ANNEX 2.10

Apunts de Geometria de Leandre Albareda, 1865-66, 1867, 1870-71

A la biblioteca de l'ETSAB s'han conservat tres reculls manuscrits de Leandre Albareda de les classes de Geometria. Per les dates que consten als títols es pot deduir que les dues primeres obres corresponen al batxillerat, i la darrera als cursos de descriptiva de la Universitat literària, previs a l'ingrés a l'Escola d'Arquitectura.

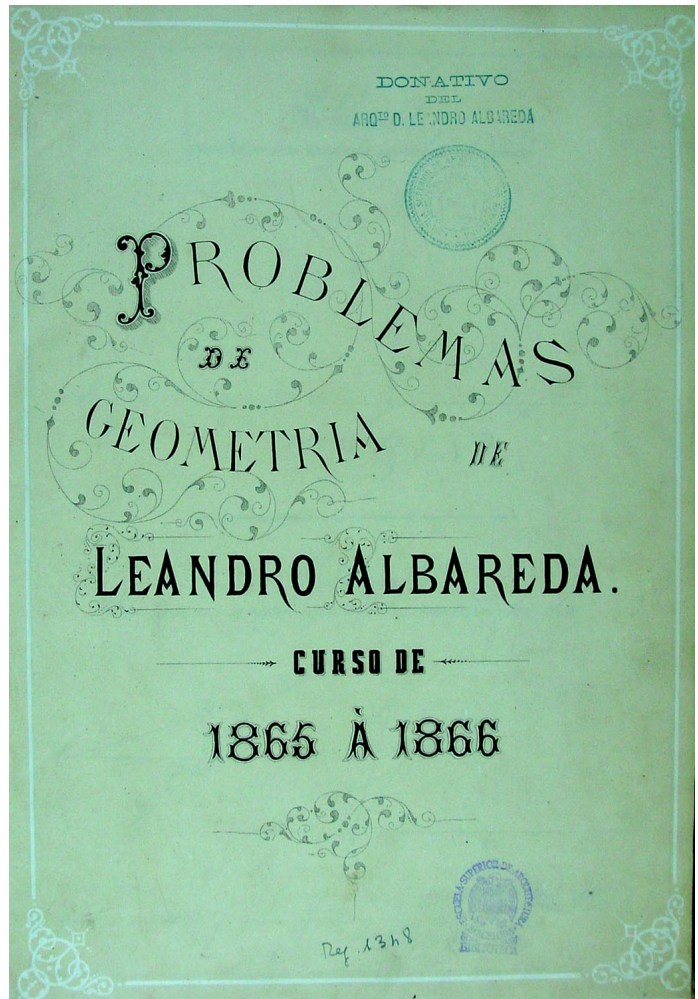
Per ordre d'antiguitat són:

Títol complet: Problemas de geometria. 1865-1866
 Signatura: R-AP-MAN-22
 Codi de barres: 1210001348

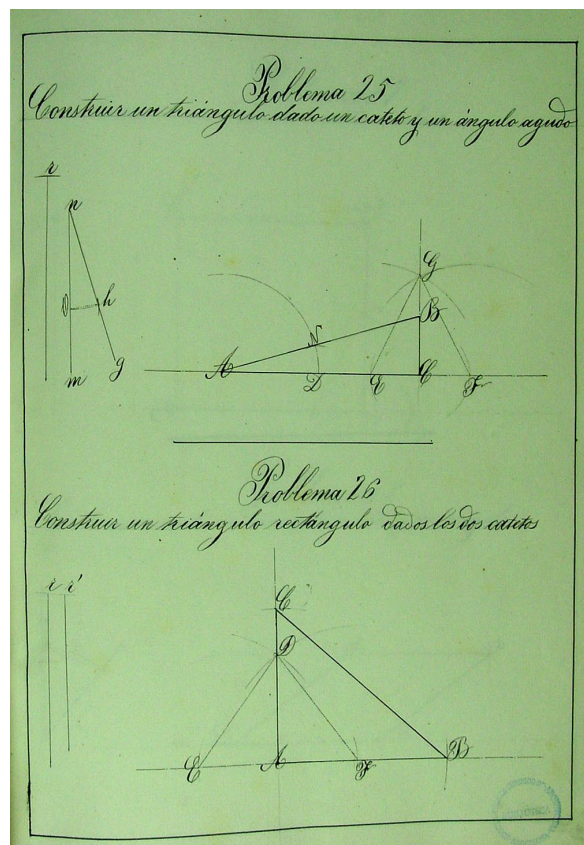
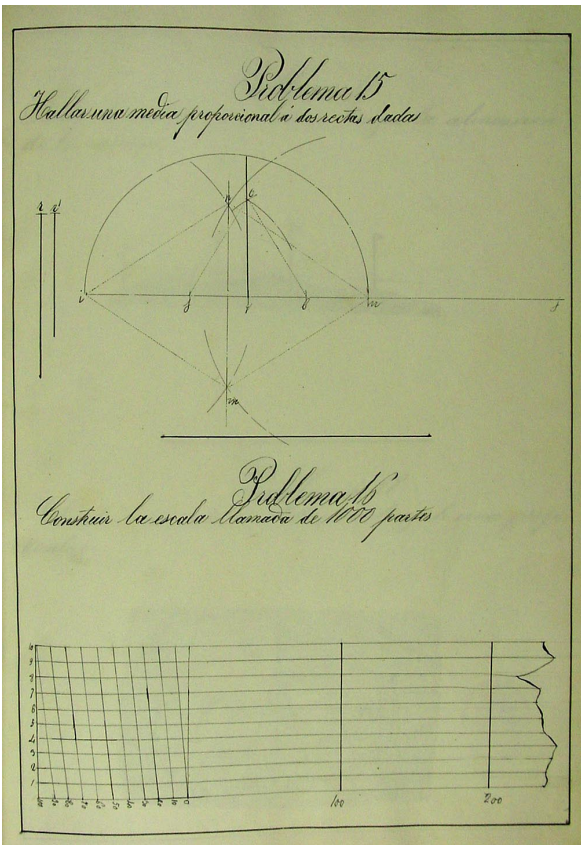
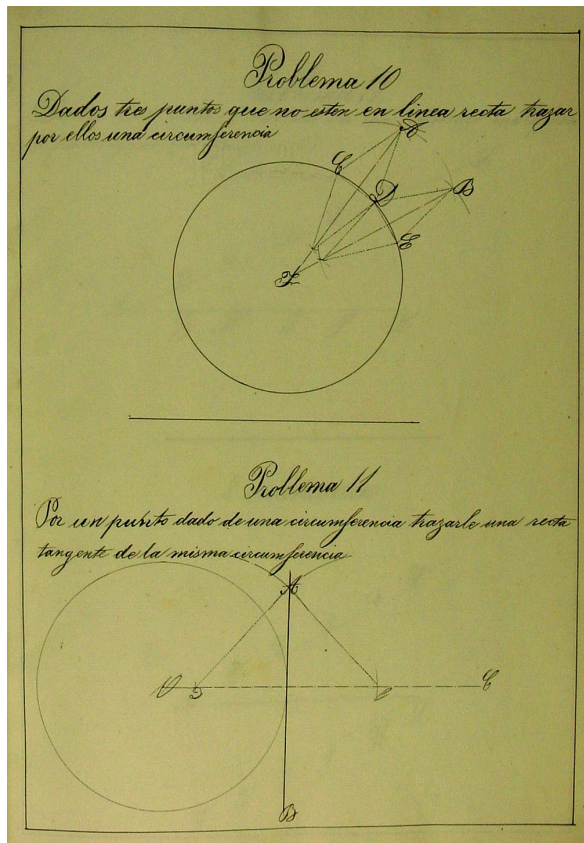
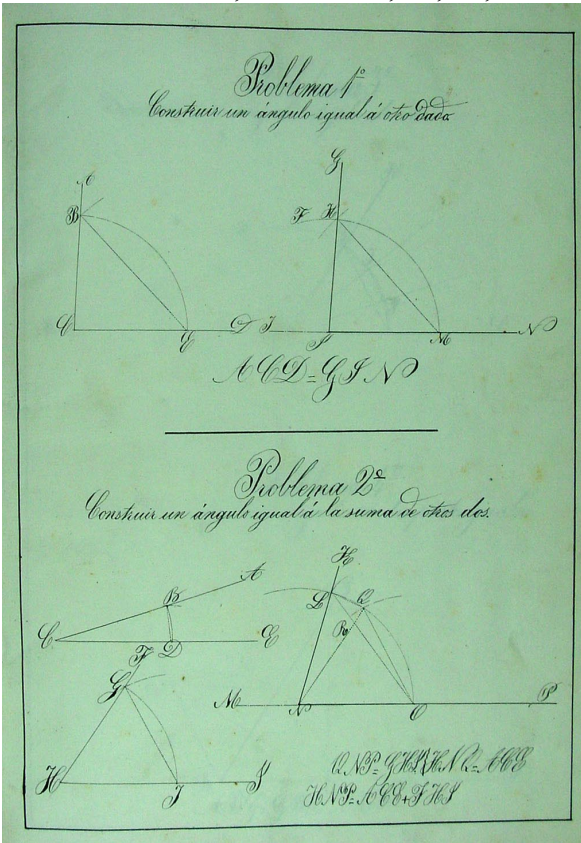
Títol suposat: (Problemas de geometria). 1867
 Signatura: R-AP-MAN-1
 Codi de barres: 1210002182

Títol complet: Problemas de
 descriptiva. 1870-1871
 Signatura: R-AP-MAN-21
 Codi de barres: 1210001886

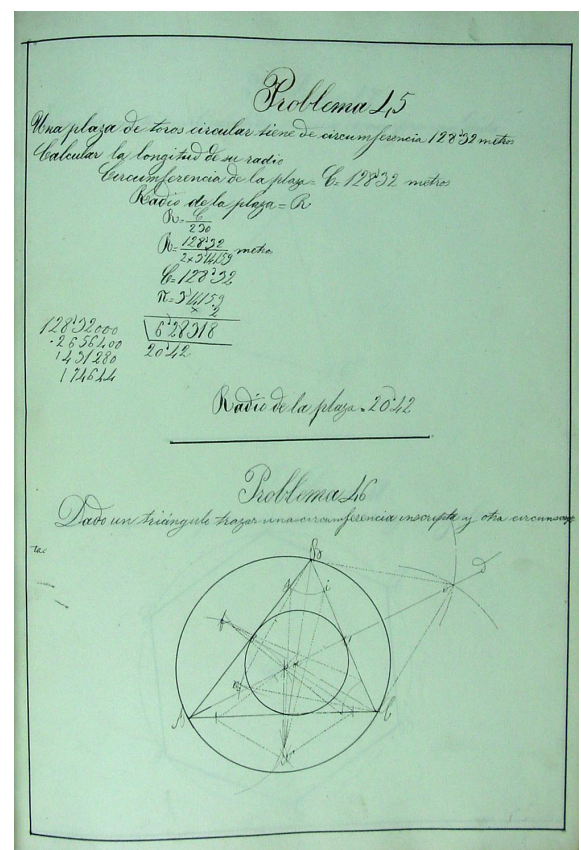
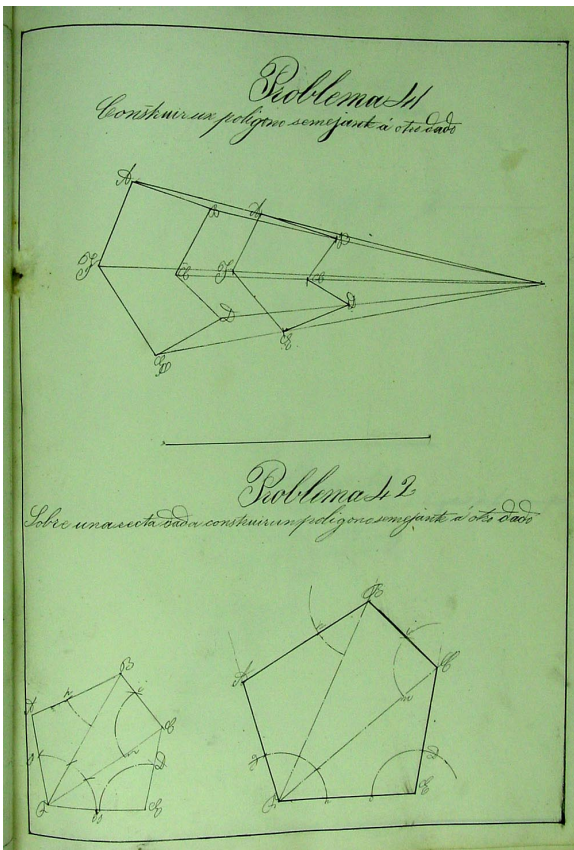
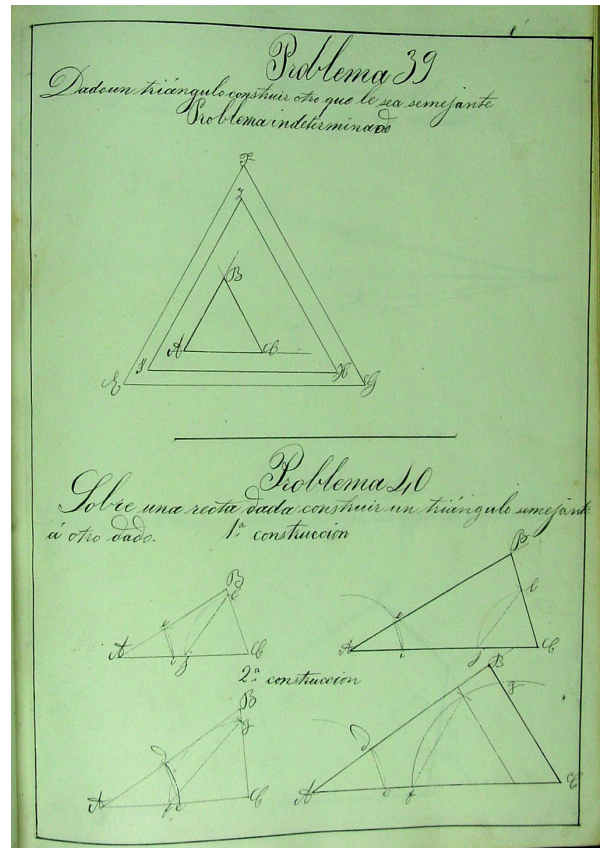
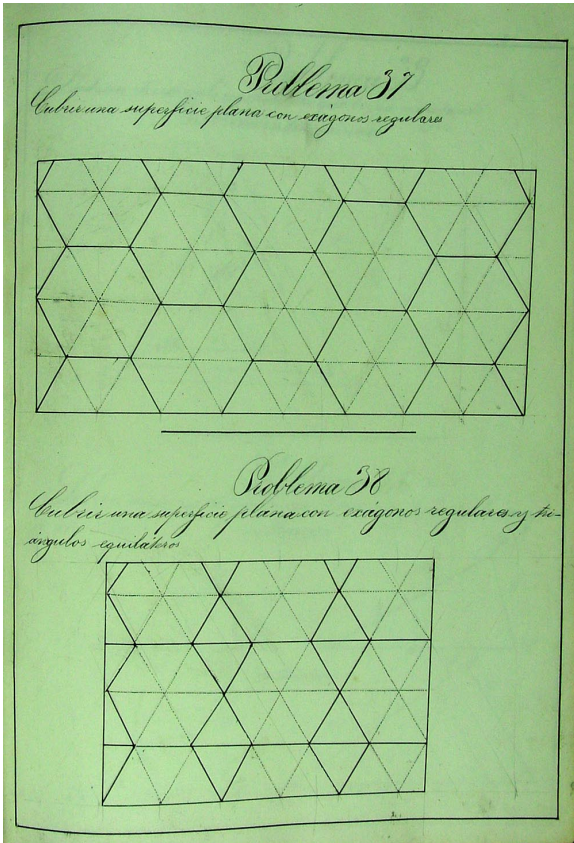
A continuació adjuntem algunes pàgines seleccionades per tal de facilitar la visualització d'aquests continguts de geometria que constituïren els continguts bàsics del batxillerat i primers estudis universitaris que cursà Gaudí.



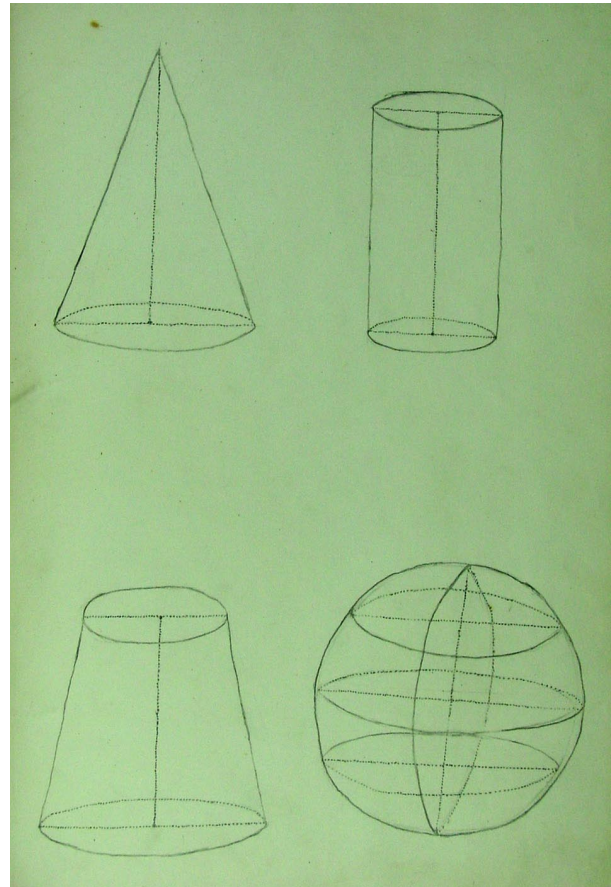
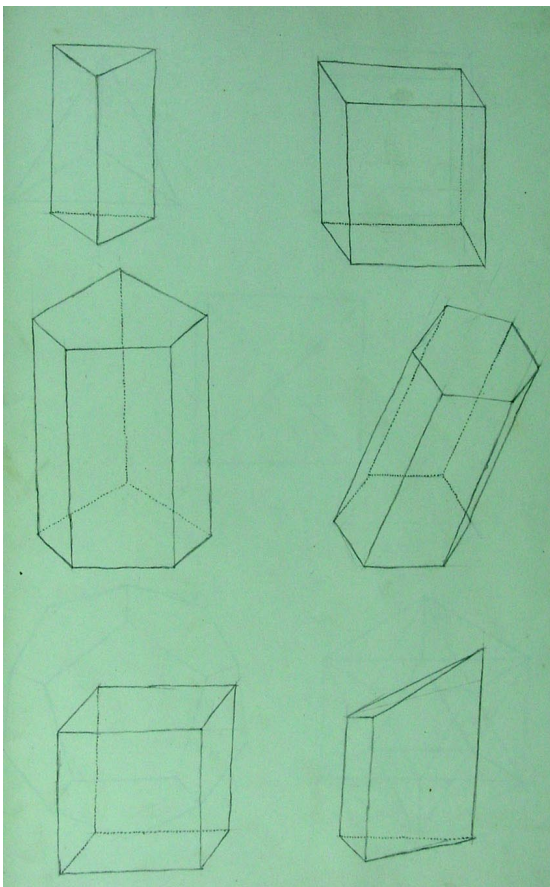
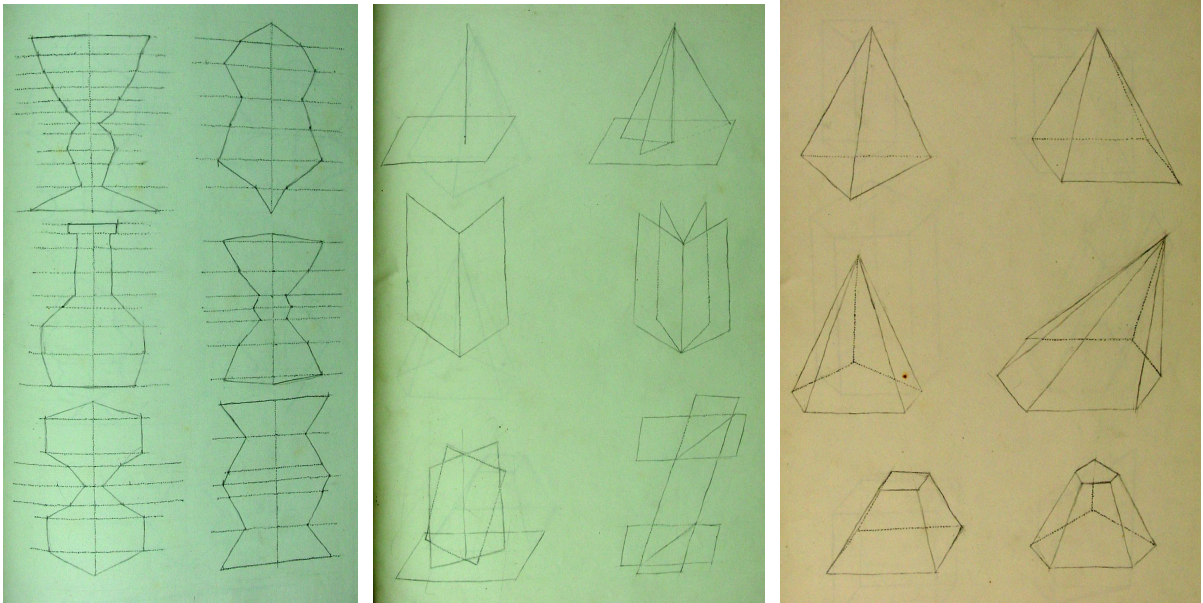
Albareda 1865-66, exercicis 1, 10, 15,25.



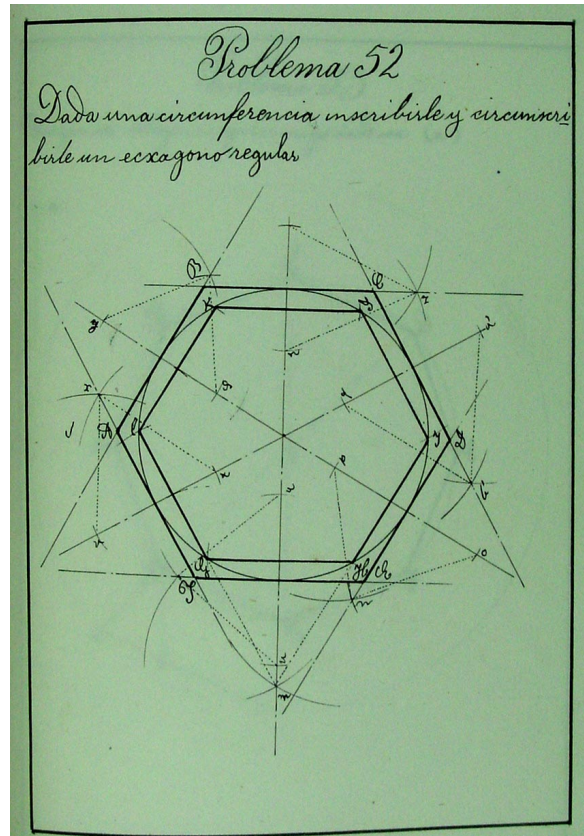
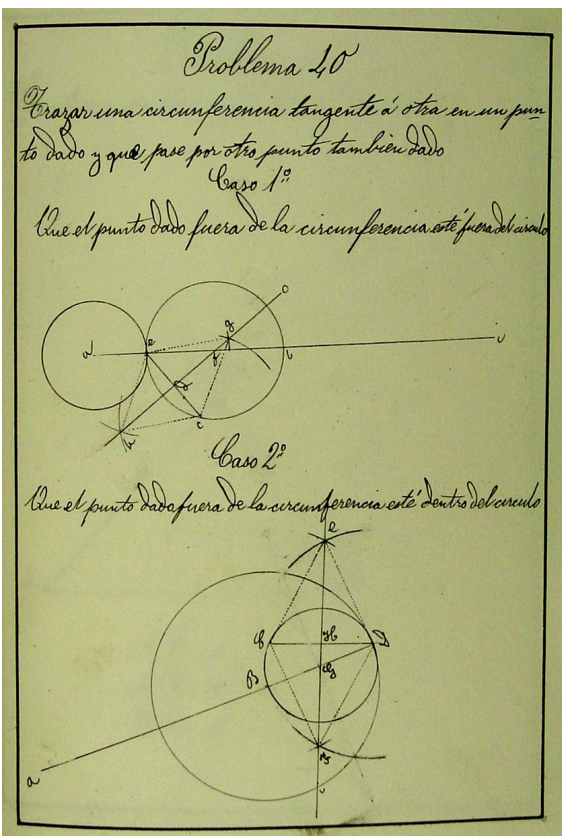
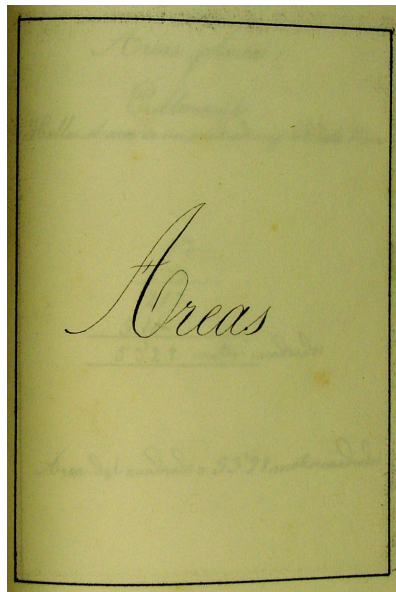
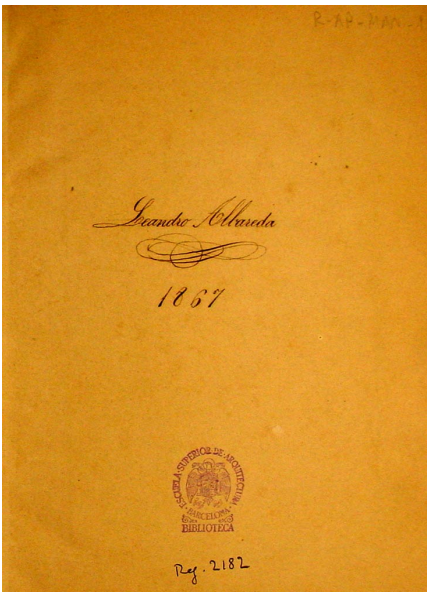
Albareda 1865-66, exercicis 37, 39, 41, 45.



Alguns dibuixos del final del quadern, són realment propis d'estudis anteriors a la universitat.



El segon recull d'exercicis de geometria data del 1867, també de quan Gaudí i Albareda cursaven el batxillerat.



Problema 62

Hallar el número de baldosas rectangulares de 3 por 5 dm que se necesitan para embaldosar un pavimento rectangular de 7³ por 5 metros

$$\begin{array}{r}
 7^3 \quad 0^13 \\
 \hline
 5 \\
 \hline
 3650 \text{ metros} \quad 0^124 \\
 \hline
 125 \quad 1520833 \text{ baldosas} \\
 50 \\
 200 \\
 800 \\
 800
 \end{array}$$

Problema 70

Hallar el área lateral de un prisma oblicuo cuya sección recta es un pentágono regular que tiene 0'07 cm de lado y cuya arista lateral tiene 27 cm

P. de la sección recta = $7 \times 5 = 35 \text{ cm}$

$$\begin{array}{r}
 35 \\
 \hline
 27 \\
 \hline
 245 \\
 70 \\
 \hline
 915 \text{ cm}^2
 \end{array}$$

Problema 75

Hallar el área de una zona esférica correspondiente a una esfera cuyo radio vale 15 cm siendo la altura de dicha zona 7 cm

$R_0 = 0^15 \text{ M}$ } $A = 0^07 \text{ M}$

$$\begin{array}{r}
 314159 \\
 \times 2 \\
 \hline
 628318 \\
 \times 0^15 \\
 \hline
 3141590 \\
 628318 \\
 \hline
 09424770 \\
 0^07 \\
 \hline
 066597390
 \end{array}$$

Problema 80

Hallar el número de metros cuadrados de lamina metálica necesarios para cubrir un chapitel conico cuyo radio de la base vale 32 metros y el lado es m

Formula = $A = \pi R l$

$$\begin{array}{r}
 314159 \times 32 \times 2 \\
 \times 32 \\
 \hline
 628318 \\
 942477 \\
 \hline
 10053088 \\
 \times 1 \\
 \hline
 10212352
 \end{array}$$

Volumenes

Problema 90
 Hallar el volumen de un cono recto y circular cuyo radio de la base vale 18 Dm y la altura 23

$$\pi r^2 h$$

$$18^2 = 324$$

$$\begin{array}{r} 314159 \\ \times 324 \\ \hline 1256636 \\ 628318 \\ 942477 \\ \hline 0101784516 \\ \times 23 \\ \hline 305362548 \\ 203575032 \\ \hline 100234112868 \\ \hline 3006780370956 \end{array}$$

Problema 95
 Hallar el volumen de un obelisco cuadrangular cuyo lado de la base vale 85 cm y la altura 27 cm

$$\frac{1}{3} \times \text{área de la base} \times \text{altura}$$

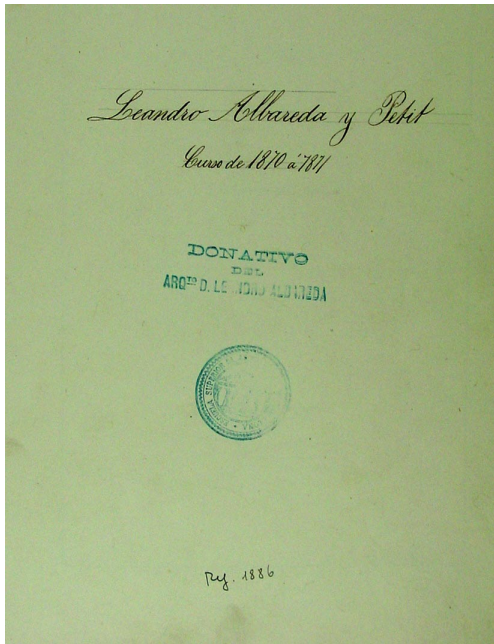
$$\begin{array}{r} 85 \\ \times 85 \\ \hline 125 \\ 680 \\ \hline 7225 \\ \times 90 \\ \hline 650250 \text{ cm}^3 \end{array}$$

Problema 99
 Hallar la capacidad de un cazo emisferico que tiene 7 cm de radio

$$\frac{2}{3} \pi r^3$$

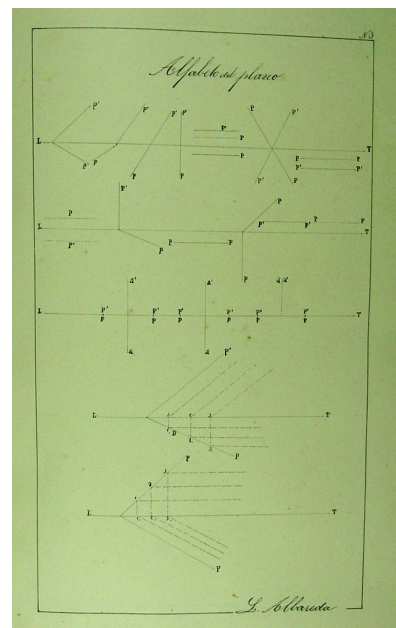
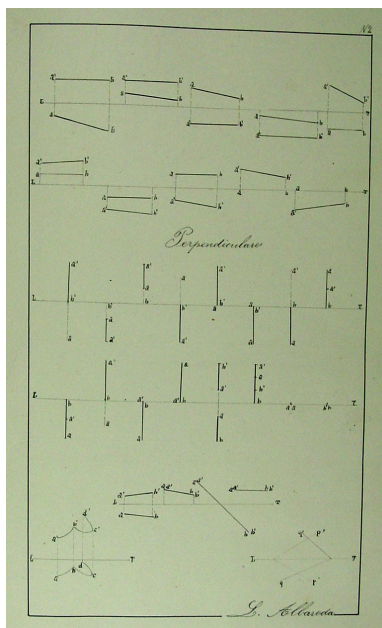
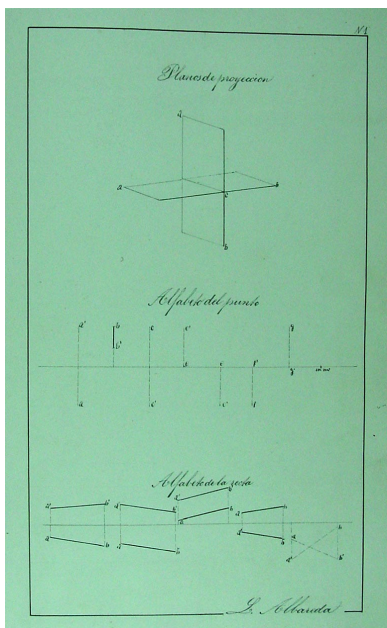
$$7^3 = 343$$

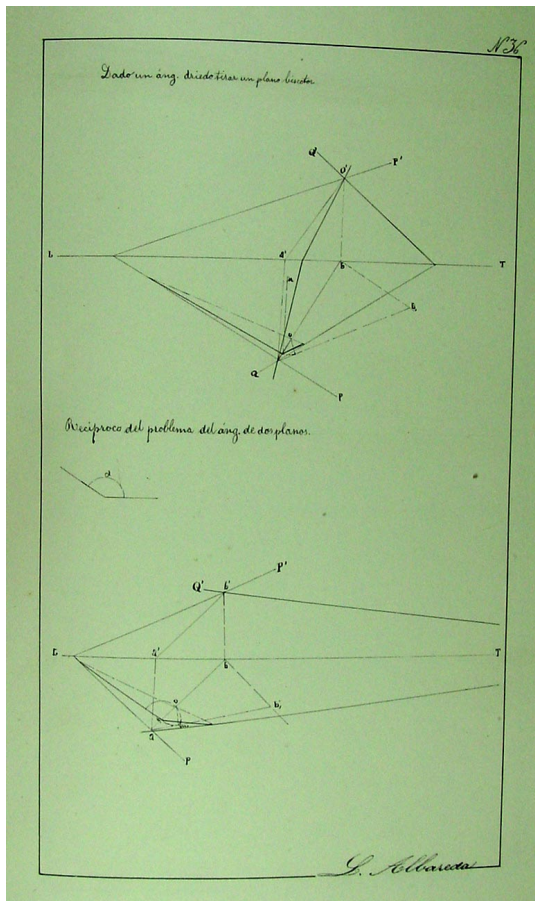
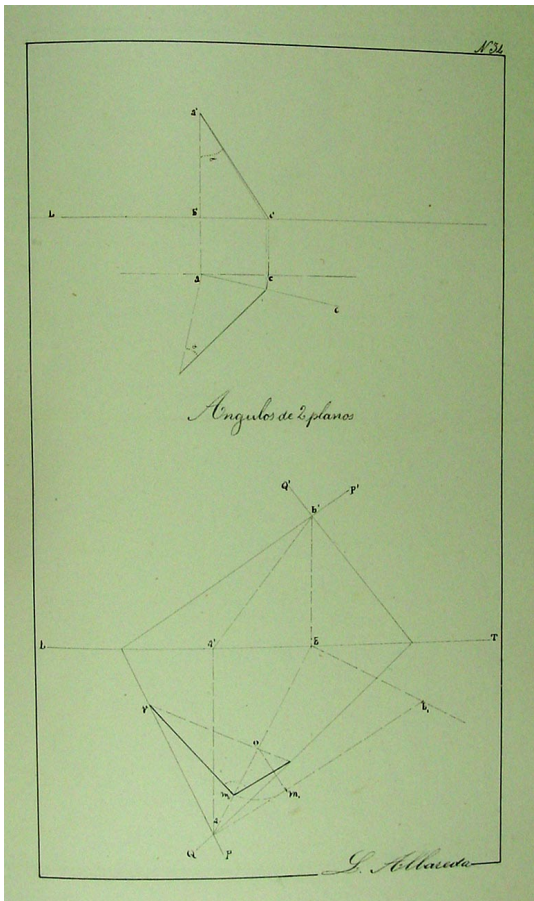
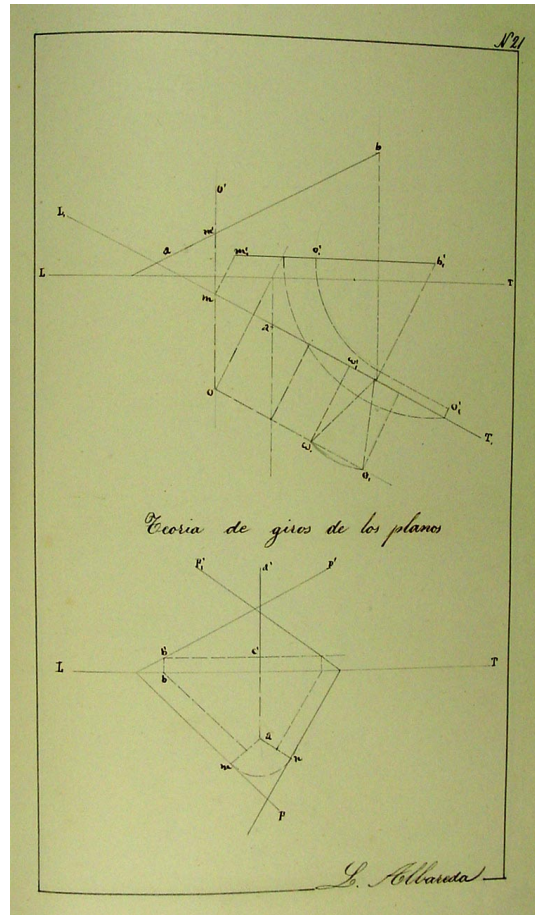
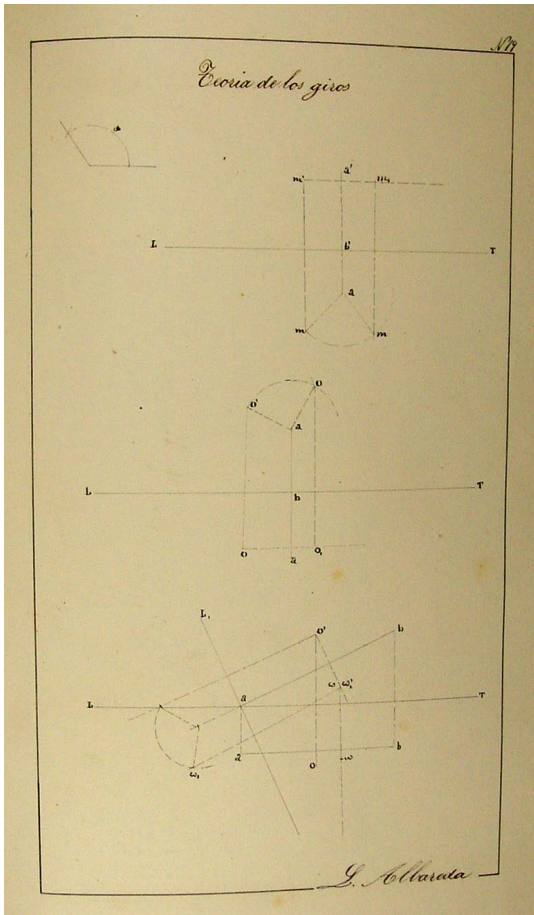
$$\begin{array}{r} 314159 \\ \times 343 \\ \hline 628318 \\ 2199113 \\ 942477 \\ \hline 314159 \\ \times 231026148 \\ \hline 1671837691 \end{array}$$

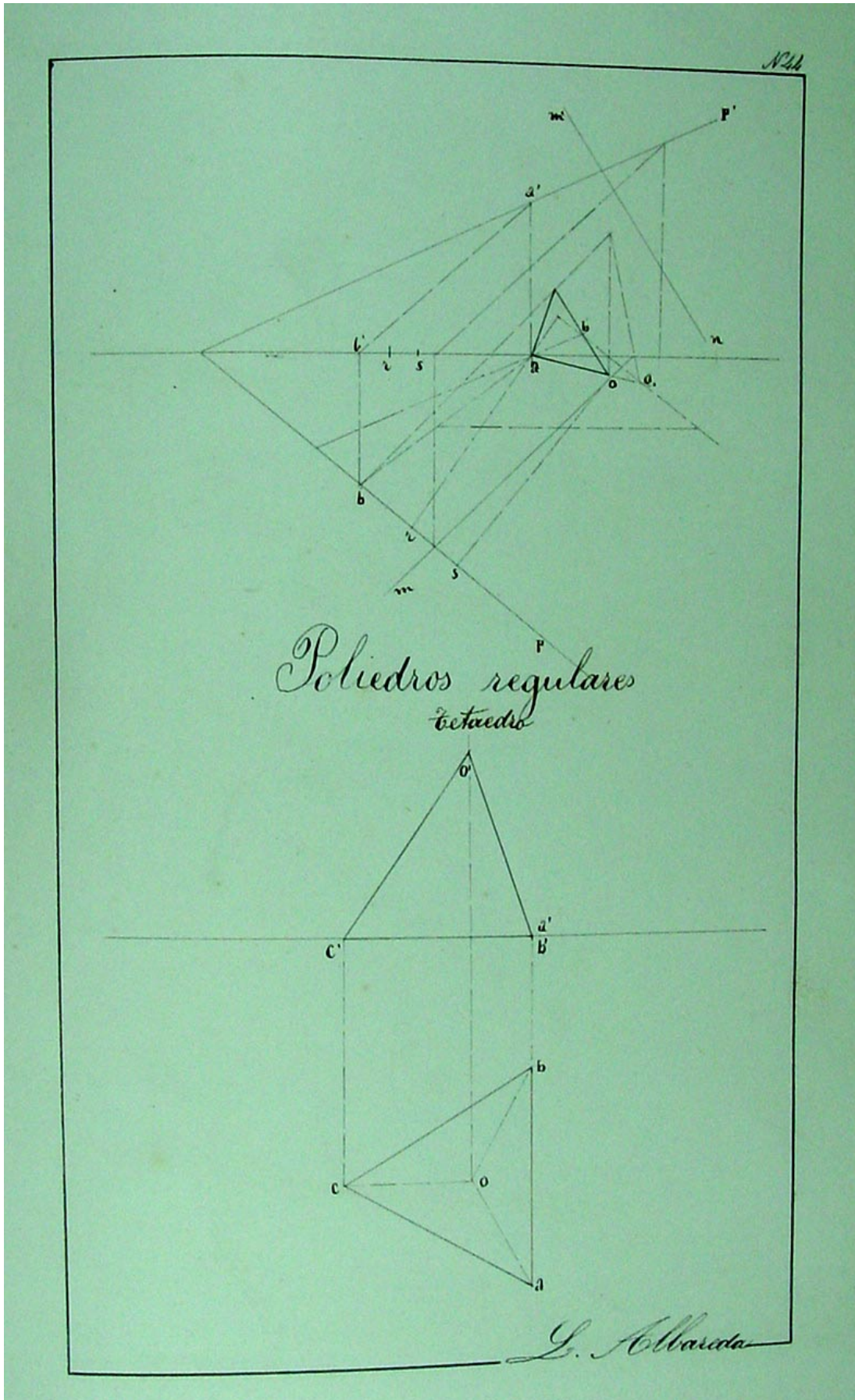


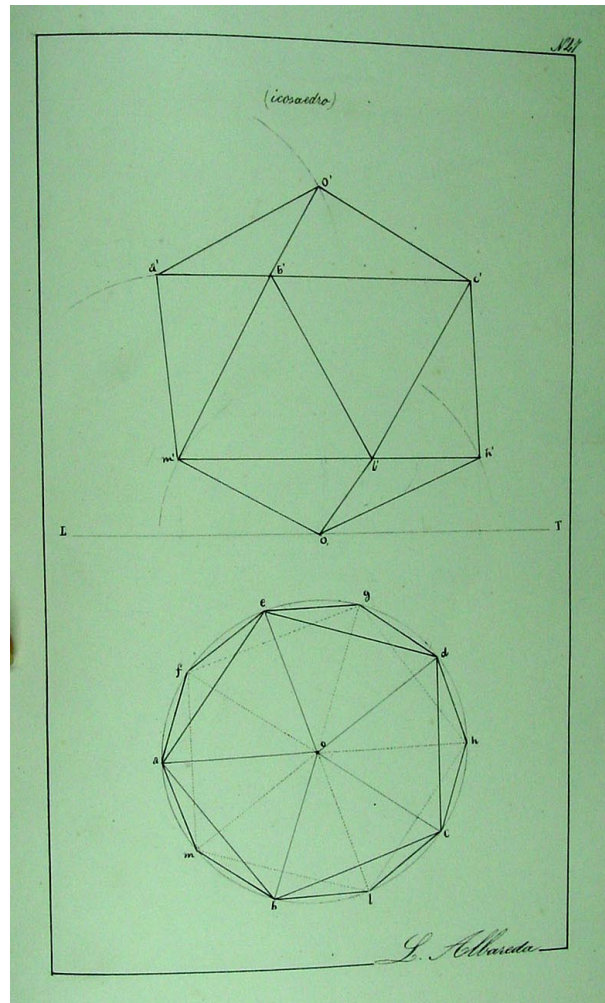
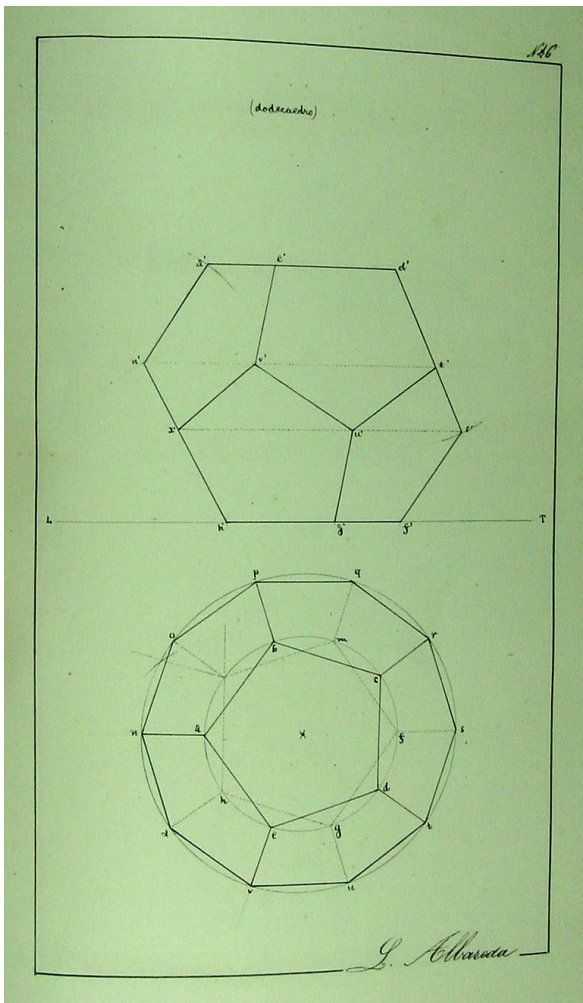
El tercer recull de làmines data del curs 1870-1871, és a dir, quan Albareda i Gaudí ja estaven cursant la Geometria descriptiva a la Univeristat de Barcelona, amb el professor José Castelar. Hem comentat ja que, en aquest cas, no hem trobat exercicis d'extrema vistositat, com veurem en altres col·leccions.

Amb aquestes primeres làmines (1, 2 i 3) detectem una lenta introducció al sistema dièdric. La qual cosa sembla raonable i enllaça amb el nivell de continguts vistos en el batxillerat anterior.

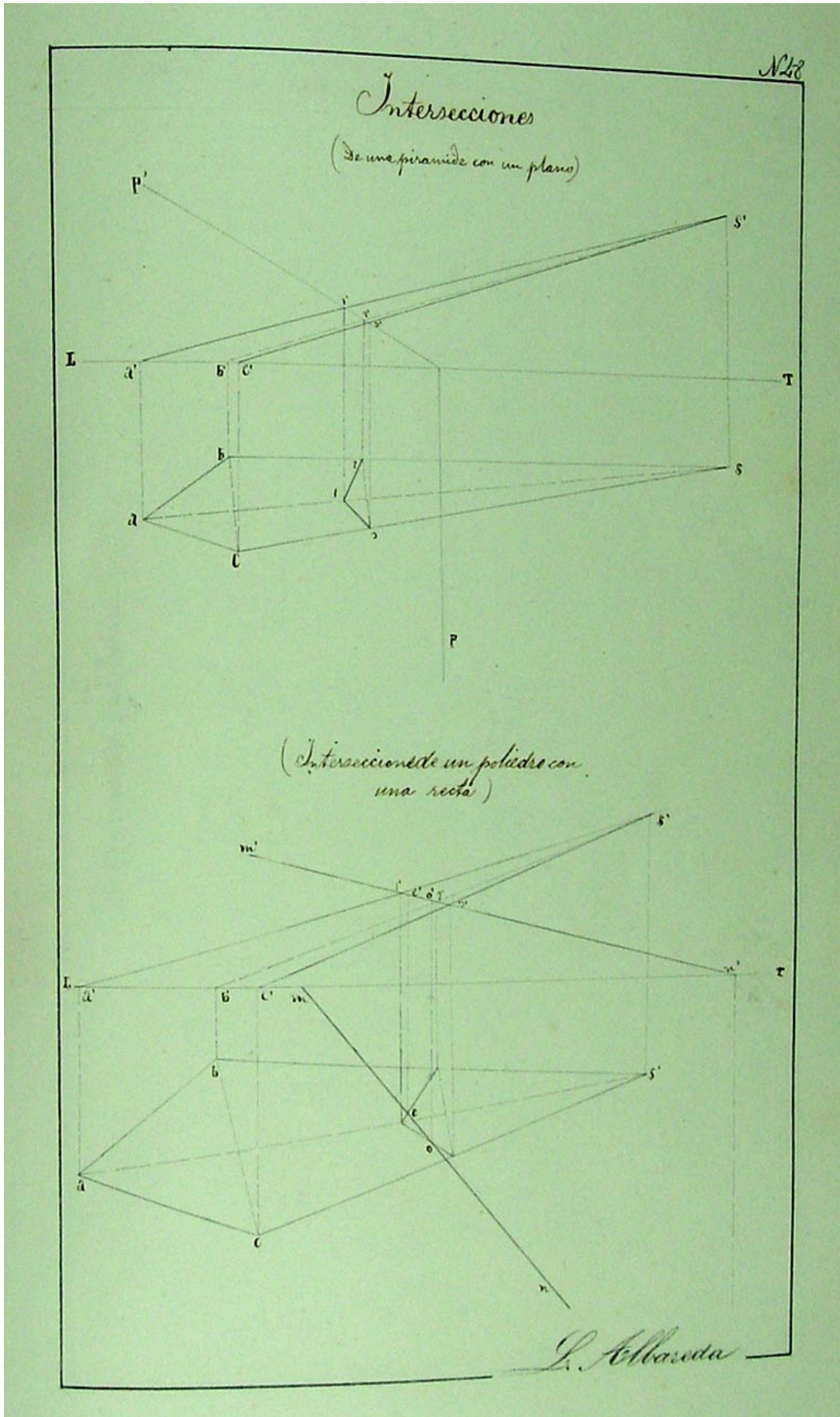


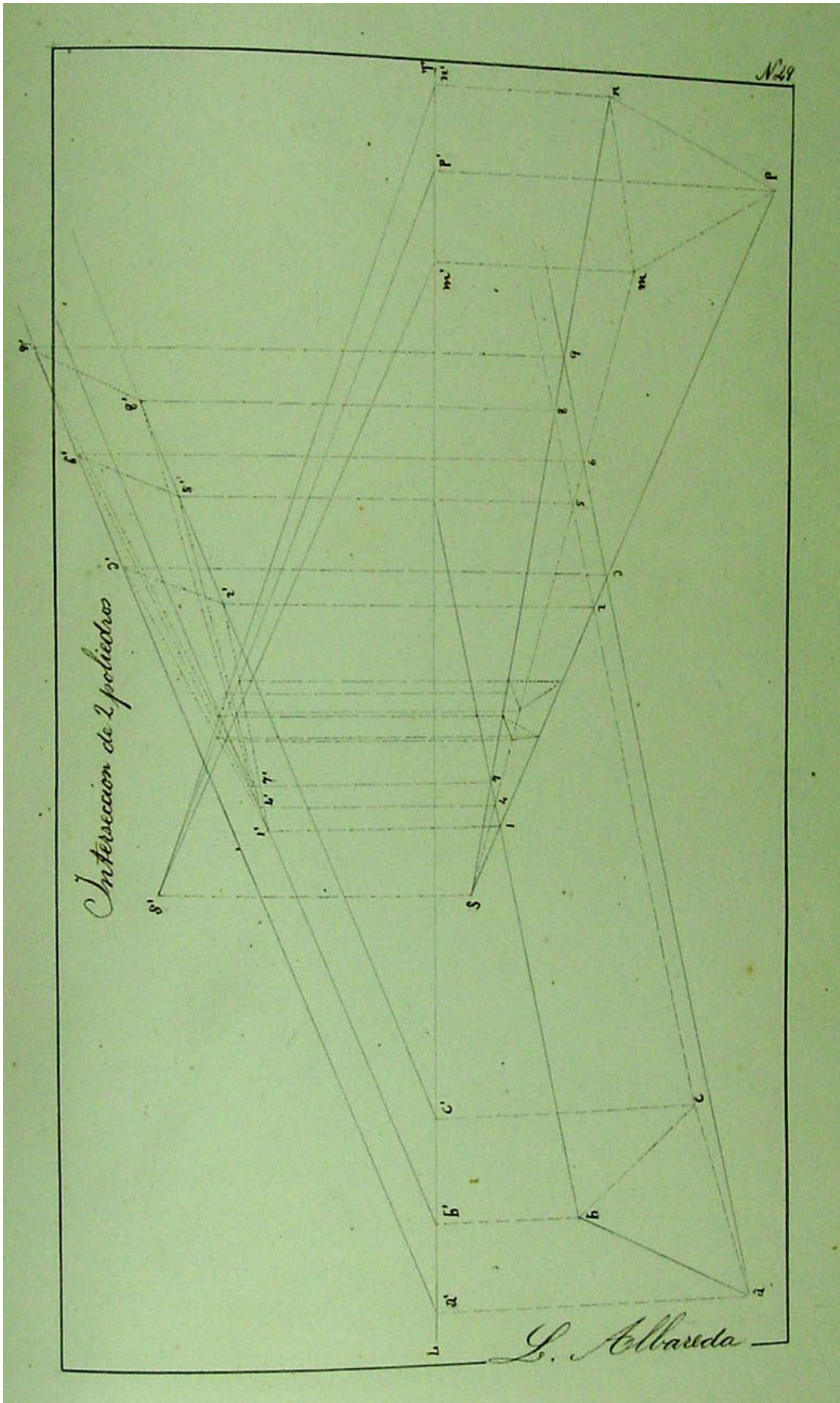


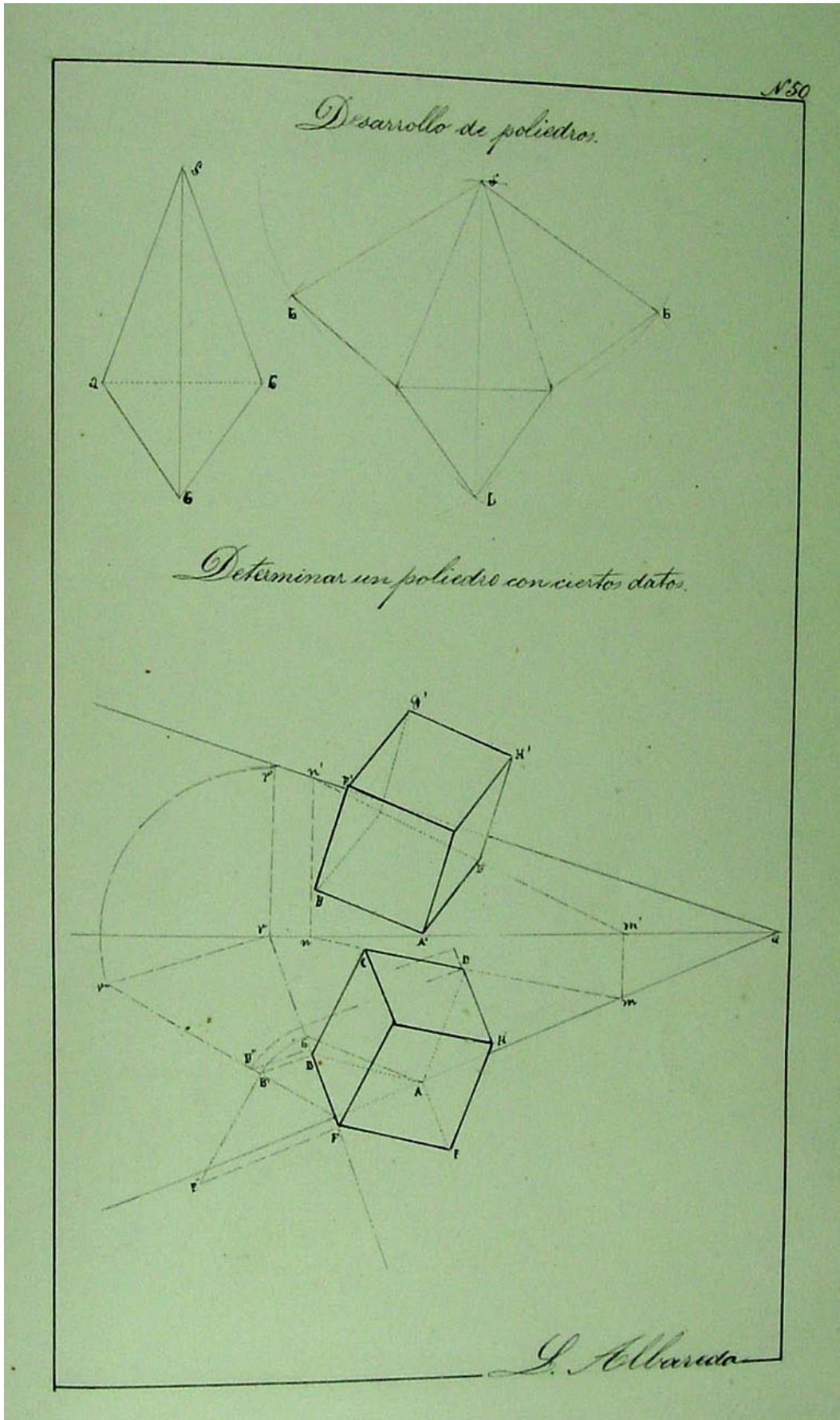




En les darres làmines del curs veiem com, després del tema dels políedres, arriba a resoldre algunes interseccions de piràmides de més dificultat i problemes dels angles diedres.







ANNEX 2.11

Exercicis de Geometria descriptiva d'August Font, 1865-66.

August Font i Carreras, juntament amb Lluís Domènech i Montaner, van ser els professors més joves que va tenir Guadí a l'escola d'arquitectura. Tots dos professors estudiaren a l'escola d'arquitectura de Madrid, i portaren d'allà cap a Barcelona l'experiència docent consolidada cap una escola de nova creació. Els exercicis d'August Font són indicatius del que es cursava a Madrid, del que sabien els professors de Gaudí, i per tant del que podien trasmetre.

Aquesta col·lecció de làmines de gran format (44,5 cm x 31 cm), delineades a tinta i amb la capçalera d'imprempta a cada full, la podem trobar a l'arxiu documental d'August Font a la biblioteca de l'ETSAB. També es poden consultar les còpies d'aquestes làmines a l'annex de la tesi de Josep Bertran.

Reproduïm a continuació el glosari complet i una selecció de làmines per tal de fer-se una idea d'aquell contingut docent.

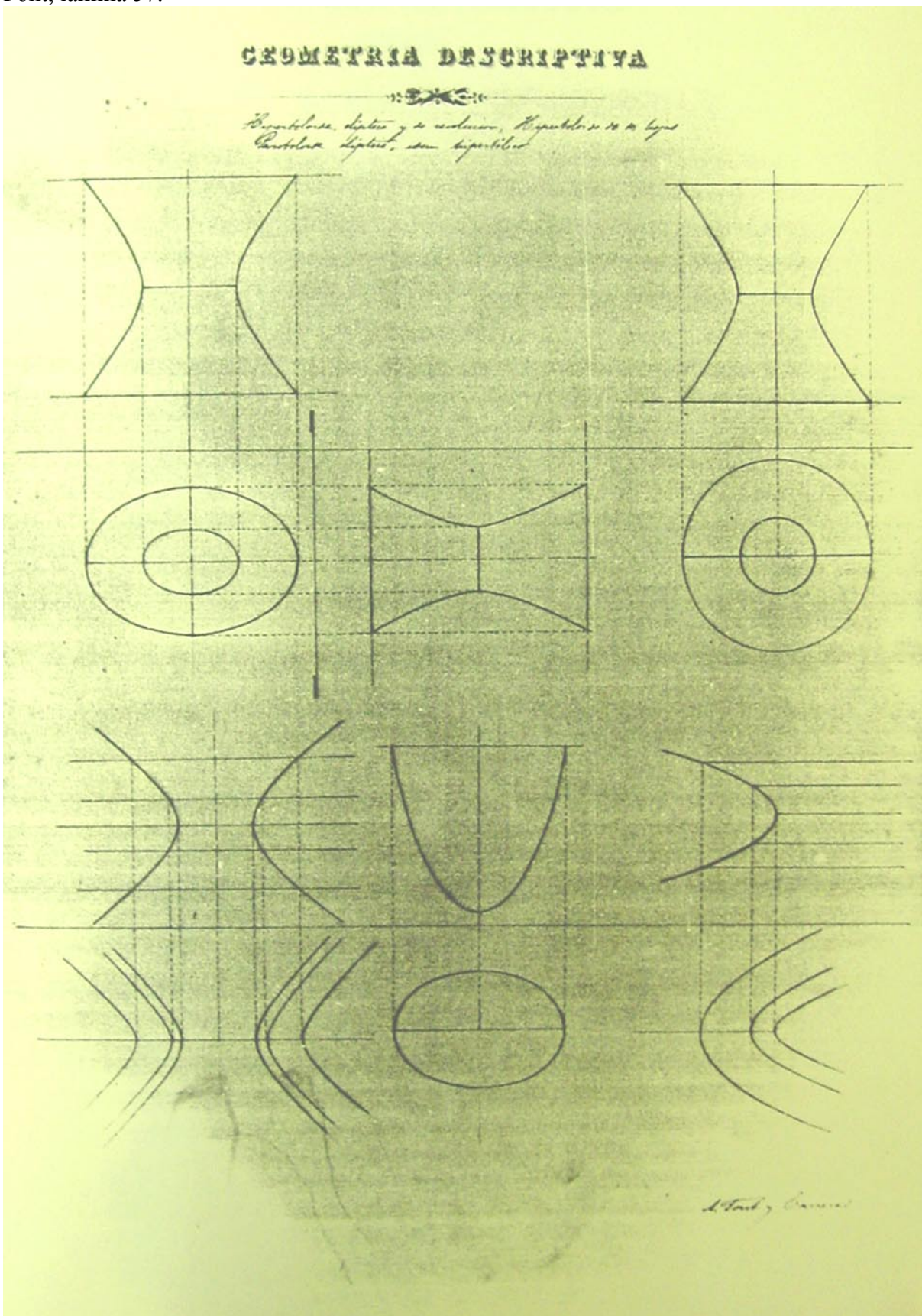
Glossari

- 1.- Mitjans de representació del punt amb dades i resultats.
- 2.- Diverses posicions del punt.
- 3.- rectes obliques i perpendiculars.
- 4.- Rectes que passen per la línia de terra.
- 5.- Rectes paral·leles a un i als dos plans de projecció.
- 6.- Plans.
- 7.- Generació del pla.
- 8.- Donada la projecció horitzontal d'un punt situat en una recta o un pla, trobar la vertical.
- 9.- Continuació de l'anterior.
- 10.- Trobar les traces d'un pla.
- 11.- Donat un pla pels seus tres elements, col·locar una recta en aquest pla. Donada la traça d'un pla i tres elements en ell, trobar l'altra traça.
- 12.- Canvi de plans de rectes.
- 13.- Canvi de plans donats per les seves traces i per rectes que es tallen.
- 14.- Aplicació dels canvis de plans de projecció.
- 15.- Intersecció de plans donats per les seves traces.
- 16.- Intersecció de plans quan les seves traces no es tallen en els límits del dibuix.
- 17.- Intersecció de plans donats per les seves traces, quan aquestes es tallen en els límits del dibuix.
- 18.- Casos particulars en la intersecció de plans.
- 19.- Intersecció de recta i pla donat per les seves traces o per dues rectes.
- 20.- Casos particulars de la intersecció de plans.
- 21.- Gir del punt i de la recta al voltant d'un eix vertical.
- 22.- Girs d'un pla al voltant d'un eix horitzontal o vertical.
- 23.- Donada la projecció horitzontal d'un polígon que és en un pla donat per tres vèrtexs del polígon, determinar la seva projecció vertical i fer-la girar una quantitat donada entorn d'un eix vertical.
- 24.- Girs de rectes i plans al voltant d'un eix paral·lel a un dels plans de projecció.
- 25.- Fer girar un punt, una recta i un pla al voltant d'un eix qualsevol.

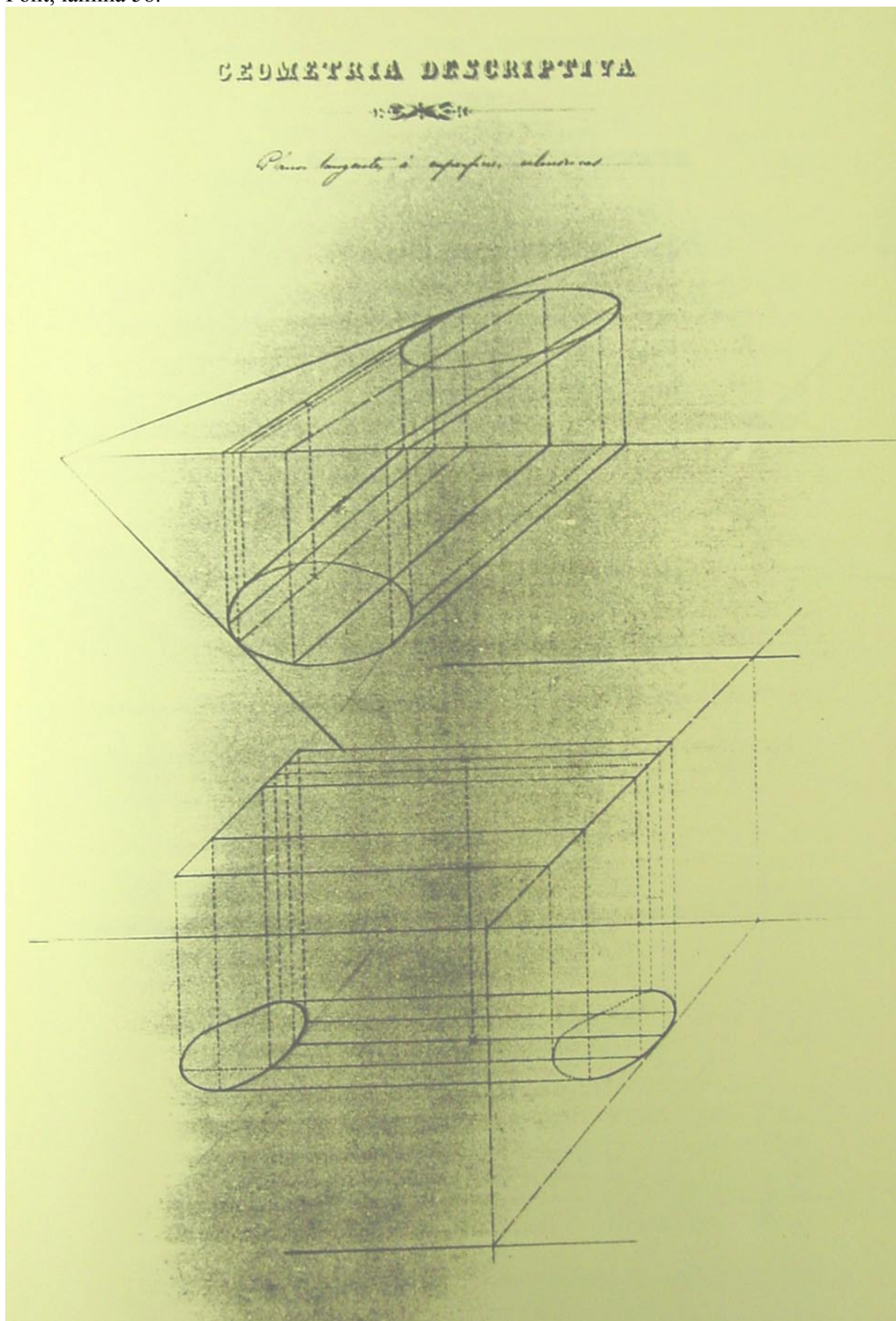
- 26.- Aplicacions del girs de rectes i plans.
- 27.- Coneixent les projeccions d'una recta, trobar la seva veritable magnitud.
- 28.- Paral·lelisme de rectes i plans.
- 29.- Perpendicularitat d'una recta i un pla.
- 30.- Determinar la part vista i la no vista d'una recta perpendicular a un pla.
- 31.- Abatiment d'un punt sobre els plans de projecció i sobre un pla on és construït l'eix donat.
- 32.- Abatiment d'un pla del qual no es coneix res més que la projecció horitzontal, sobre un dels plans de projecció.
- 33.- Abatiment d'un pla per les seves traces o dues rectes.
- 34.- Angles de rectes, bisectriu de l'angle, i bisectriu del suplementari.
- 35.- Trobar l'angle que forma una recta amb un pla.
- 36.- Angles de dos plans donats per les seves traces. Pla bisector, casos particulars.
- 37.- Trobar l'angle i la forma d'un pla amb els de projecció. Pla bisector. Trobar un pla que formi amb un altre un angle donat.
- 38.- Míxima distància d'un punt a un pla, entre plans paral·lels, pel mètode directe.
- 39.- Casos particulars de mínima distància pel mètode directe.
- 40.- Míxima distància per mitjà dels canvis de plans de projecció.
- 41.- Trobar la mínima distància d'un punt a un pla per girs.
- 42.- Míxima distància d'un punt a un pla entre plans paral·lels i per mitjà d'abatiments.
- 43.- Angle triedre. Donats tres dels seus elements determinar els altres tres.
- 44.- Representació de prismes.
- 45.- Reducció d'un angle a l'horitzó i representació de piràmides.
- 46.- Representació del tetràedre, hexàedre i octàedre.
- 47.- Representació de l'icosàedre.
- 48.- Representació del dodecàedre.
- 49.- Secció feta per un pla donat per les seves traces a una piràmide.
- 50.- Trobar la secció d'un pla a una piràmide pentagonal, per mitjà de plans que continguin les arestes i les seves traces horitzontals siguin paral·leles a la del pla secant. Desenvolupament i transformada.
- 51.- Intersecció d'una piràmide i un prisma.
- 52.- Secció d'una piràmide amb un pla, per mitjà de plans projectants de les arestes per trobar la intersecció de cada una amb el pla secant.
- 53.- Trobar la secció d'un pla a un poliedre, per canvi de plans i per girs.
- 54.- Representació de les superfícies cilíndriques.
- 55.- Representació de les superfícies còniques.
- 56.- El·lipsoide el·líptic, el·lipsoide de revolució, esfera.
- 57.- Hiperboloide, el·líptic i de revolució, hiperboloide de dos fulls. Paraboloides el·líptic i paraboloides hiperbòlic.
- 58.- Plans tangents a superfícies cilíndriques.
- 59.- Representació del tor.
- 60.- Plans tangents a superfícies còniques.
- 61.- Plans tangents a superfícies còniques.
- 62.- Plans tangents a una superfície de revolució.
- 63.- Representació de l'hiperboloides de revolució.
- 64.- Secció a un cilindre recte, veritable magnitud.
- 65.- Secció a un cilindre per un pla oblic per plans diametral.
- 66.- Secció a un cilindre recte per pla oblic.
- 67.- Seccions a un cilindre oblic per pla oblic.
- 68.- Un altre mètode de resolució.
- 69.- Un altre mètode de resolució.
- 70.- Secció recta del cilindre oblic, veritable magnitud.
- 71.- Desenvolupament i transformada del cas anterior.
- 72.- Secció a un con oblic per un pla perpendicular al vertical.
- 73.- Seccions còniques. El·lipse.
- 74.- Seccions còniques.
- 75.- Seccions còniques.
- 76.- Secció a un basament.
- 77.- Intersecció de cilindres.
- 78.- Intersecció de con i cilindre.
- 79.- Intersecció de cons.

- 80.- Intersecció de cilindre i esfera.
- 81.- Intersecció de con i esfera.
- 82.- Intersecció d'esferes.
- 83.- Secció de l'esfera.

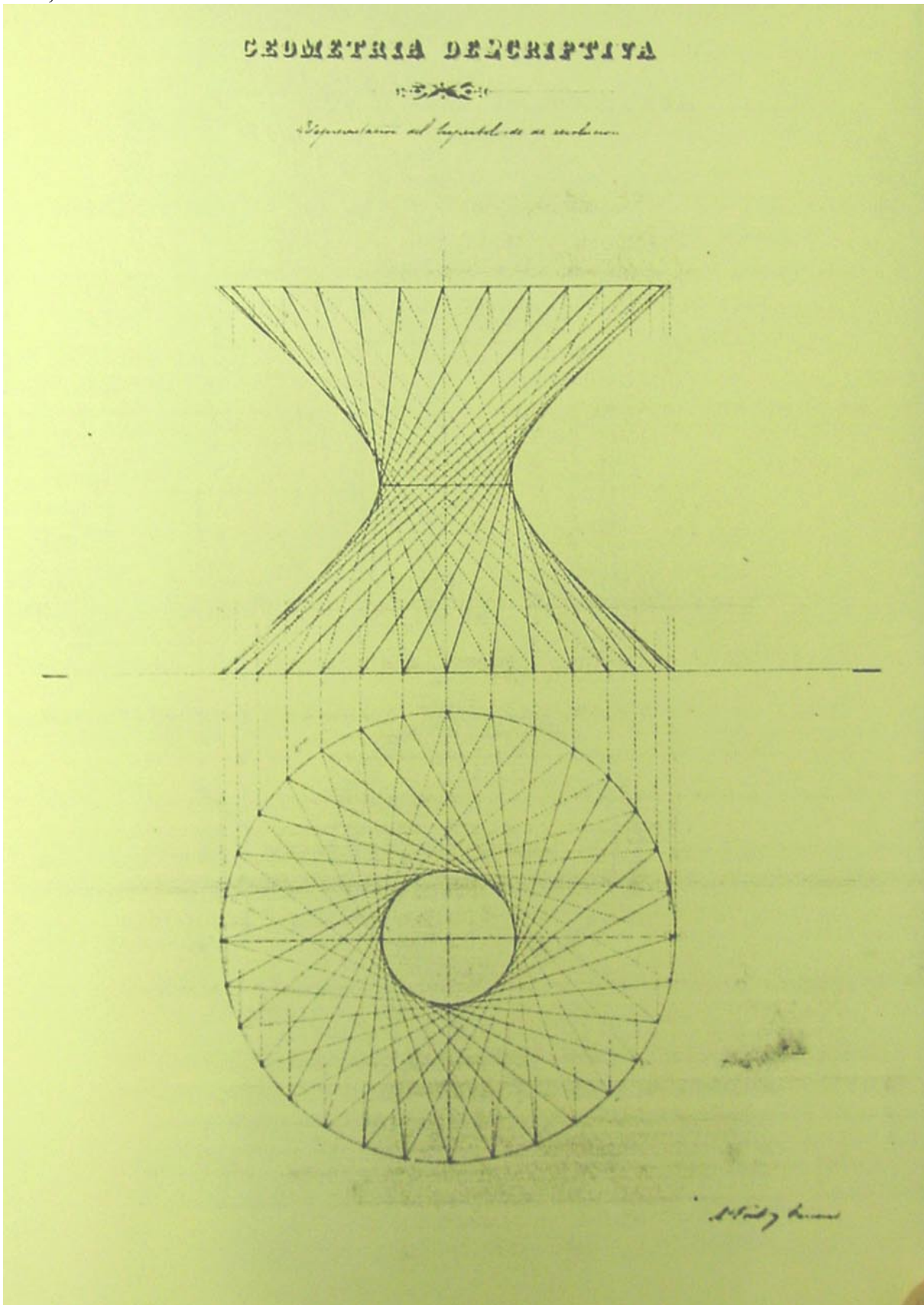
Font, làmina 57.



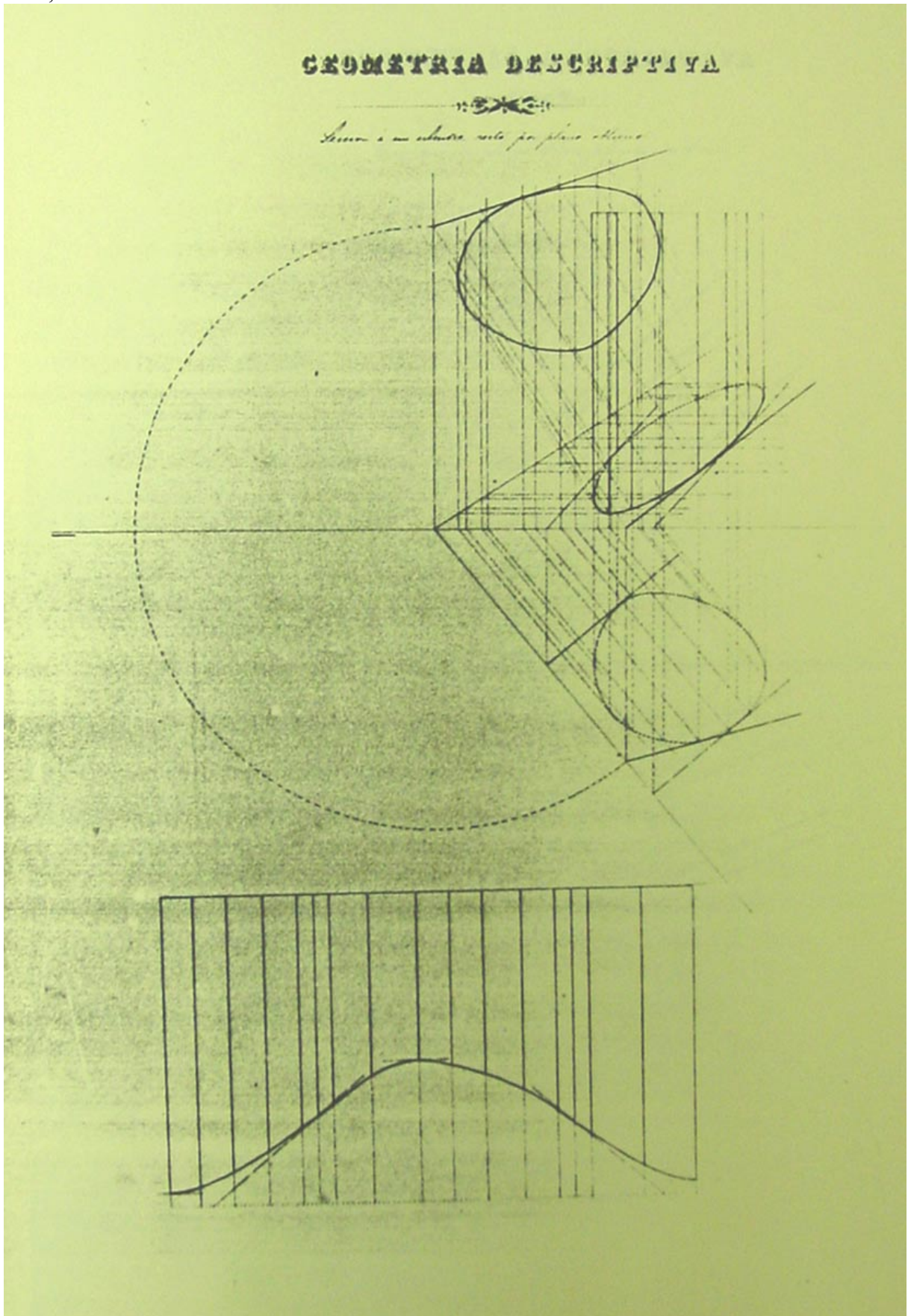
Font, làmina 58.



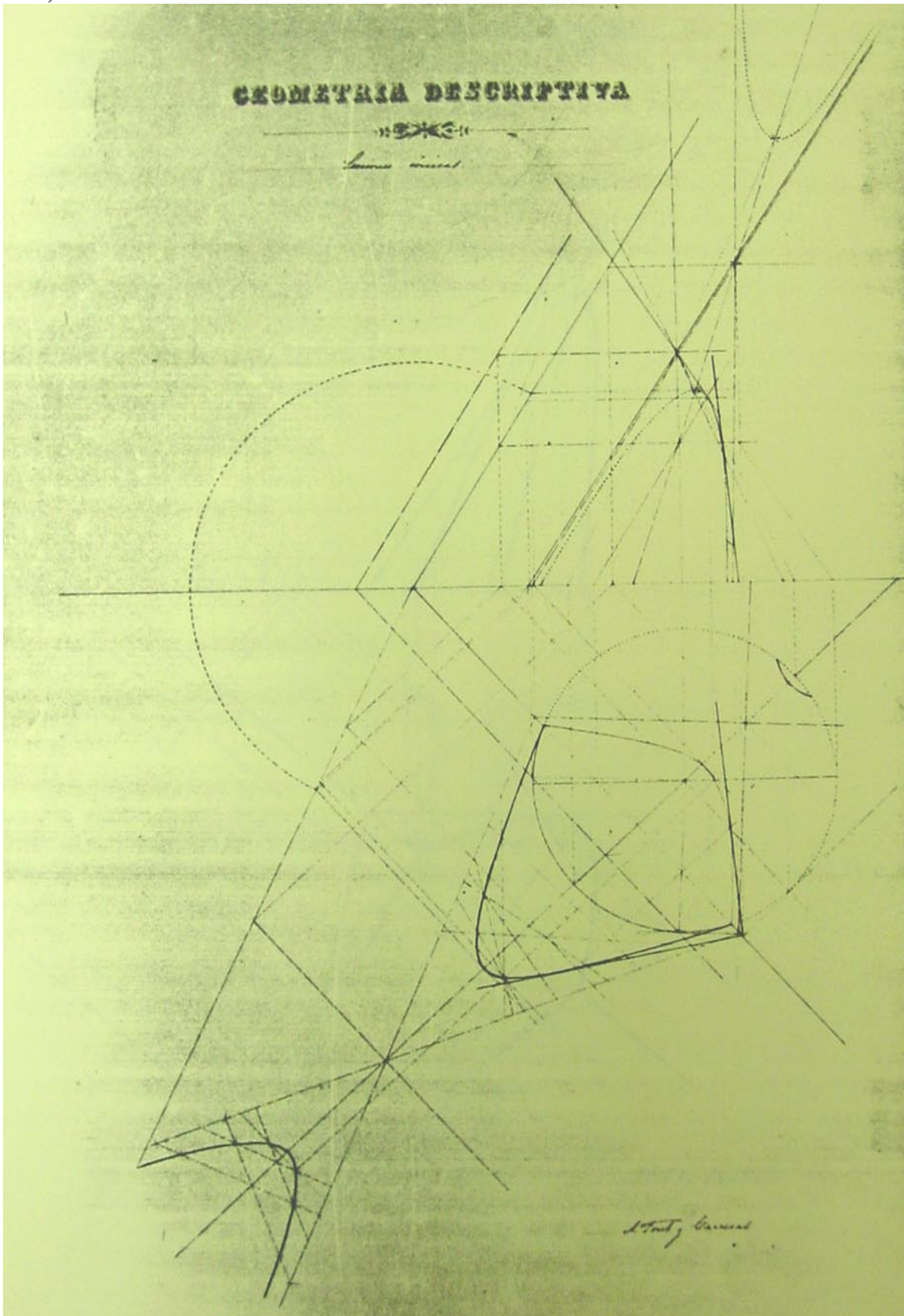
Font, làmina 63.



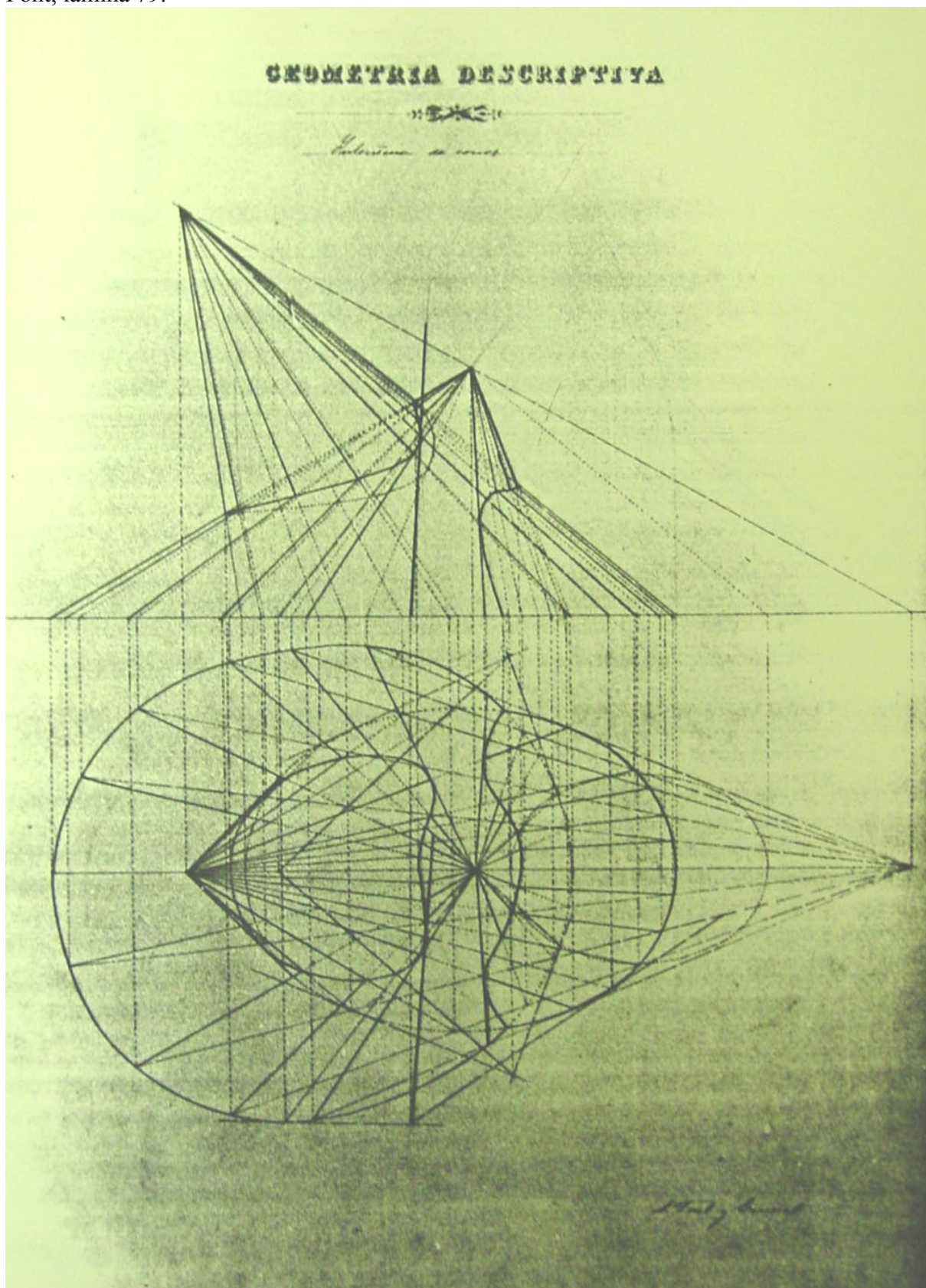
Font, làmina 66.



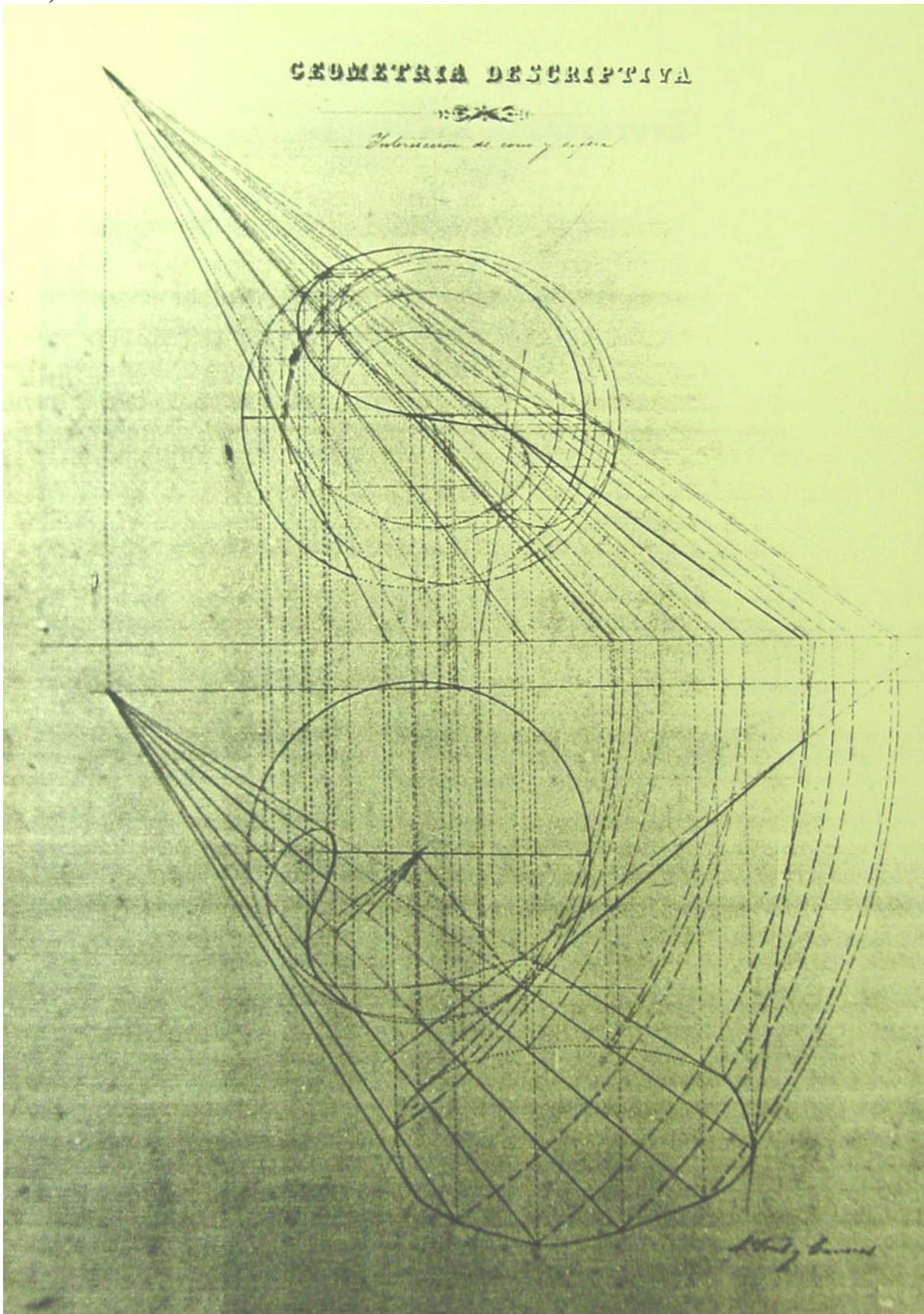
Font, làmina 74.



Font, làmina 79.



Font, làmina 81.



ANNEX 2.12

Tractat d'Antoni Rovira i Rabassa, 1897

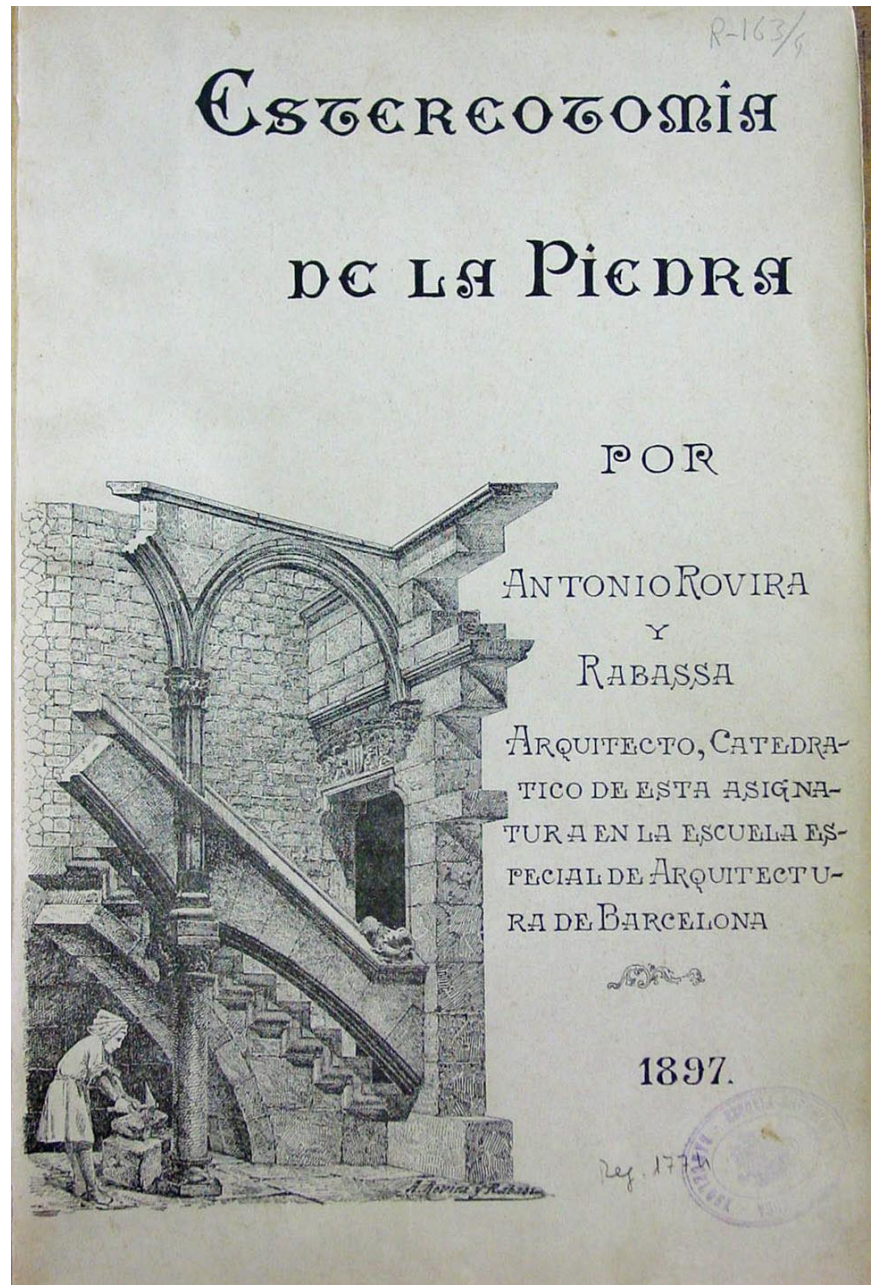
A la biblioteca de l'ETSAB es conserven els dos volums originals de l'obra, exclosos de préstec i de consulta restringida, però hi ha còpies disponibles per al servei de préstec. Els dos volums tenen formats diferents, l'atles és més gros.

Títol complet: *Estereotomia de la pedra*

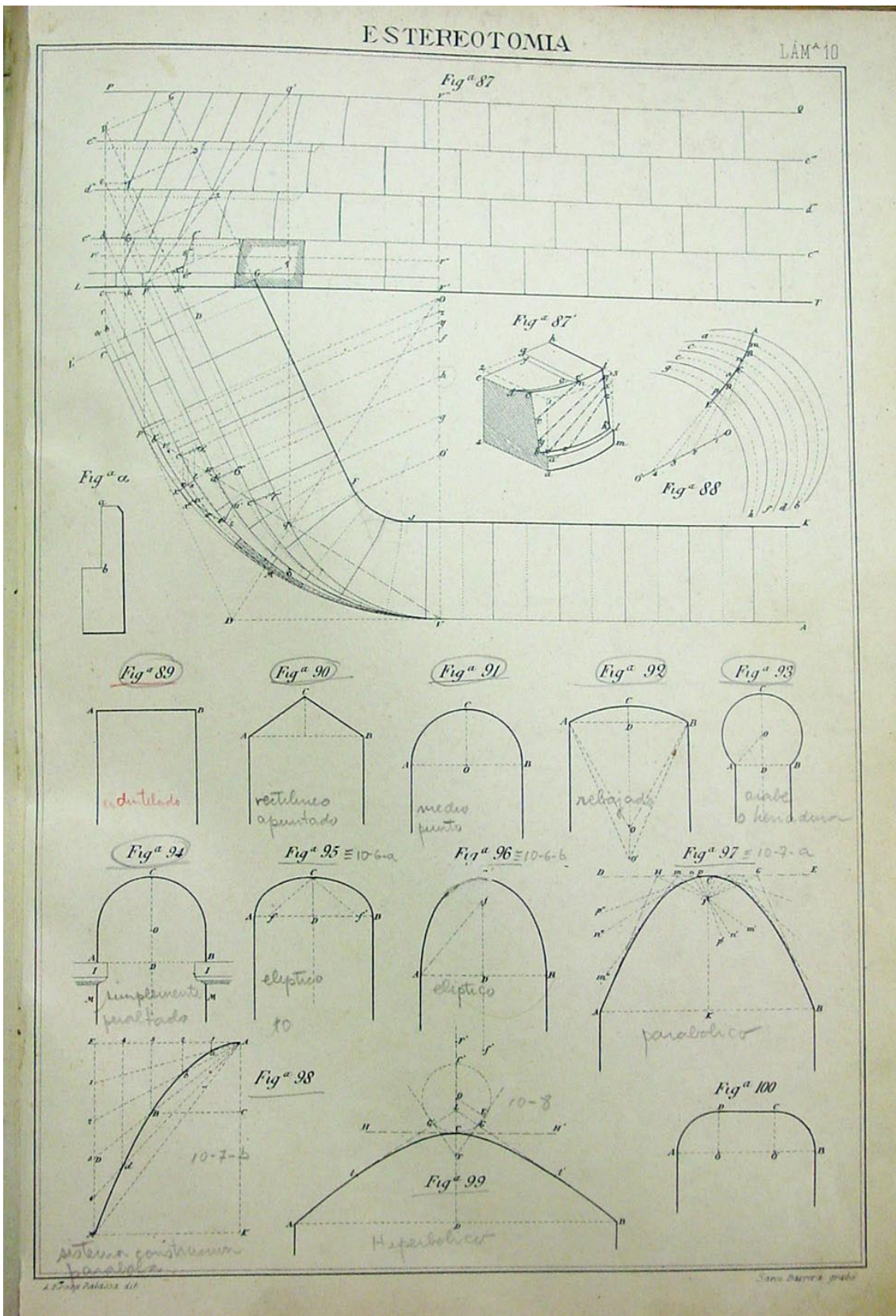
Signatura: R-XXVIII-5 R-163 / 4

Codi de barres: 1210001775 1210001774

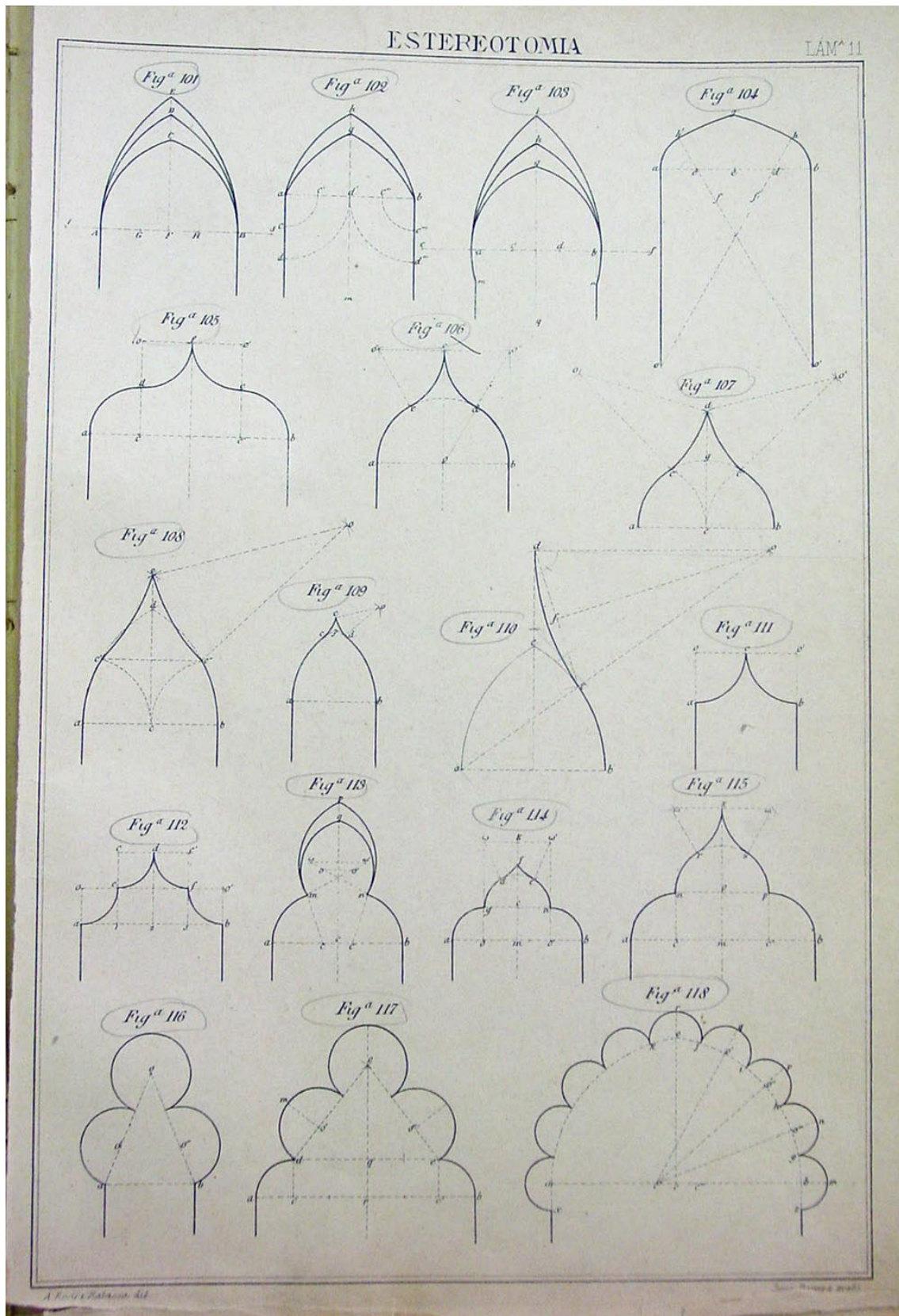
Barcelona, 1897-99



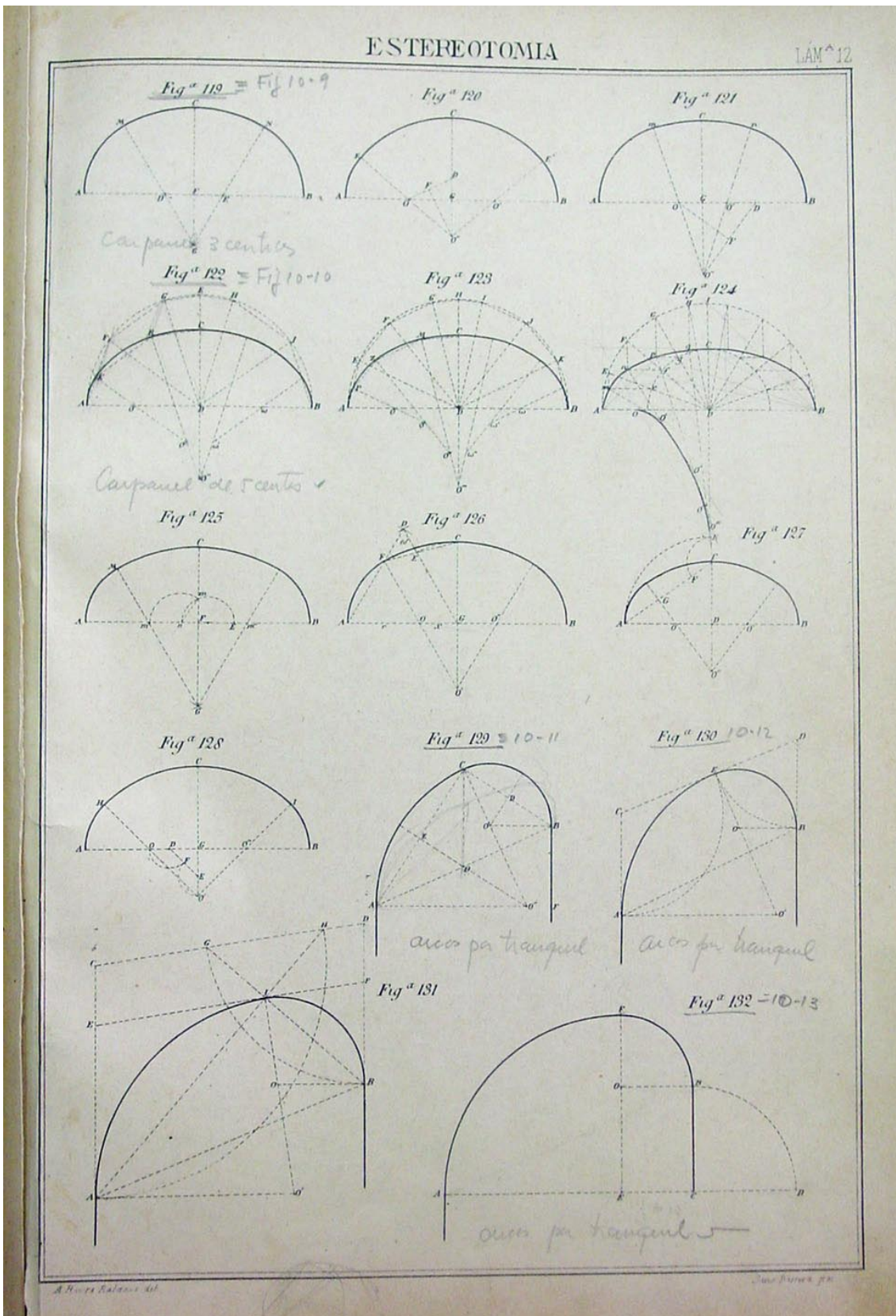
Rovira Rabasa, làmina 10.



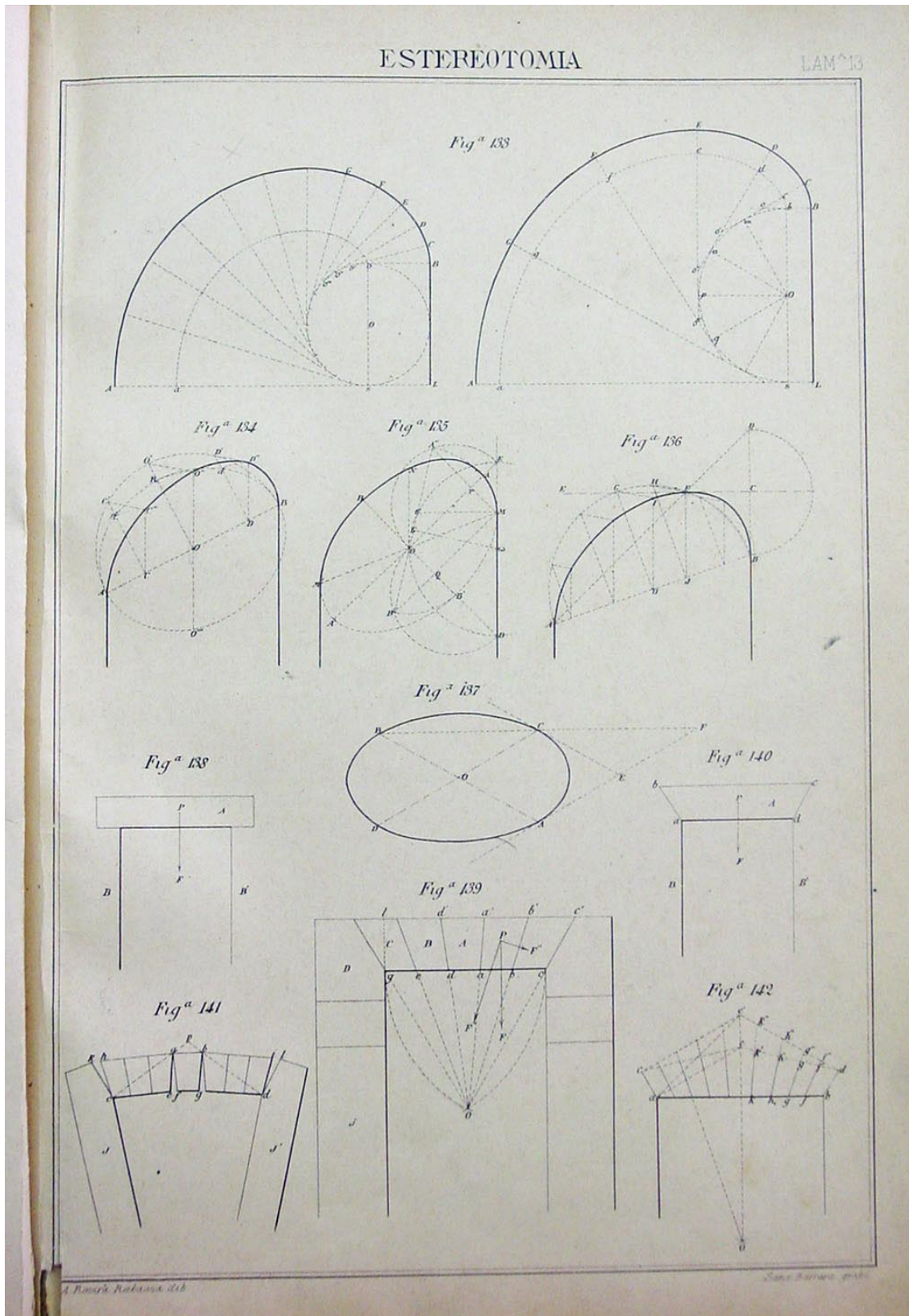
Rovira Rabasa, làmina 11.



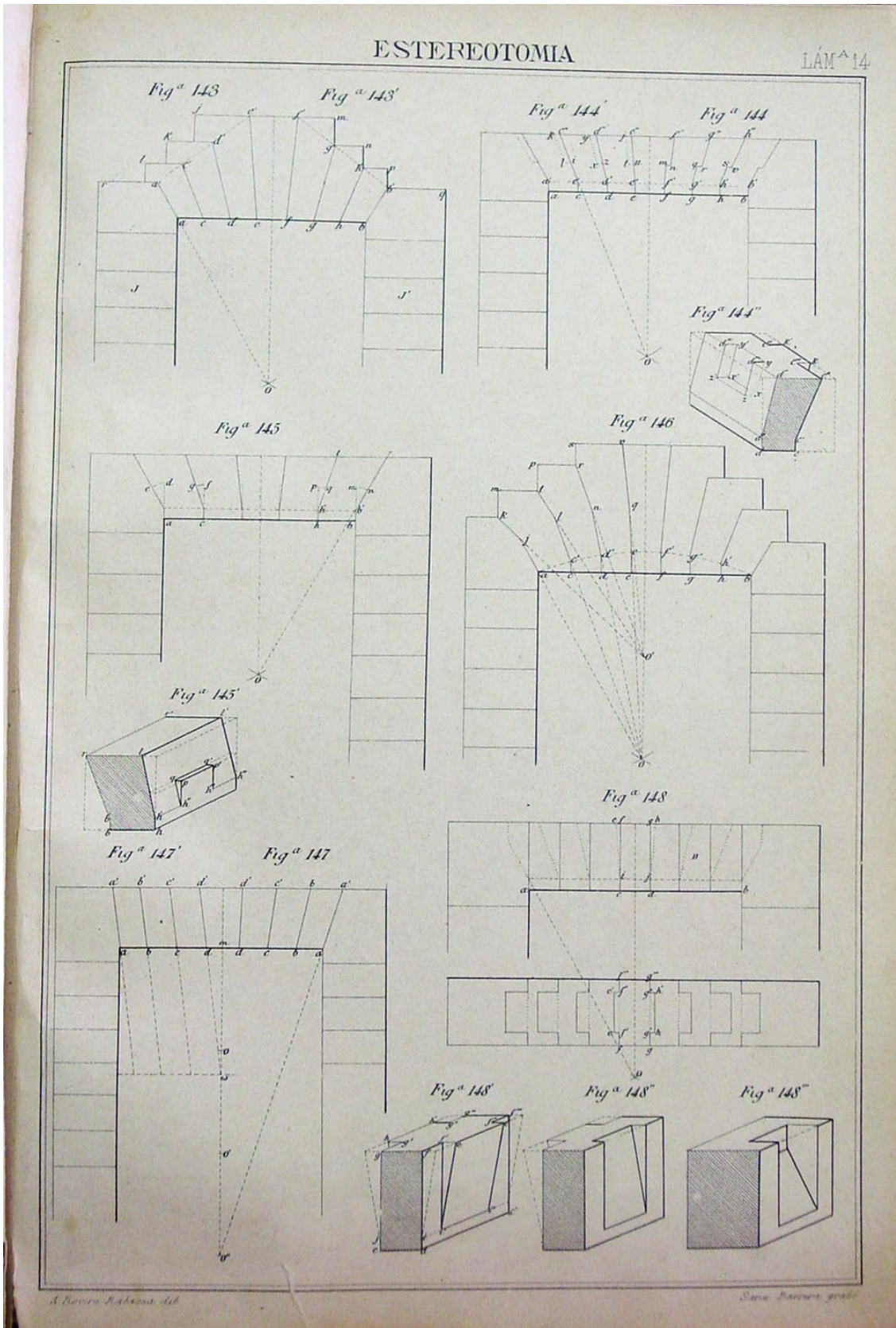
Rovira Rabasa, làmina 12.



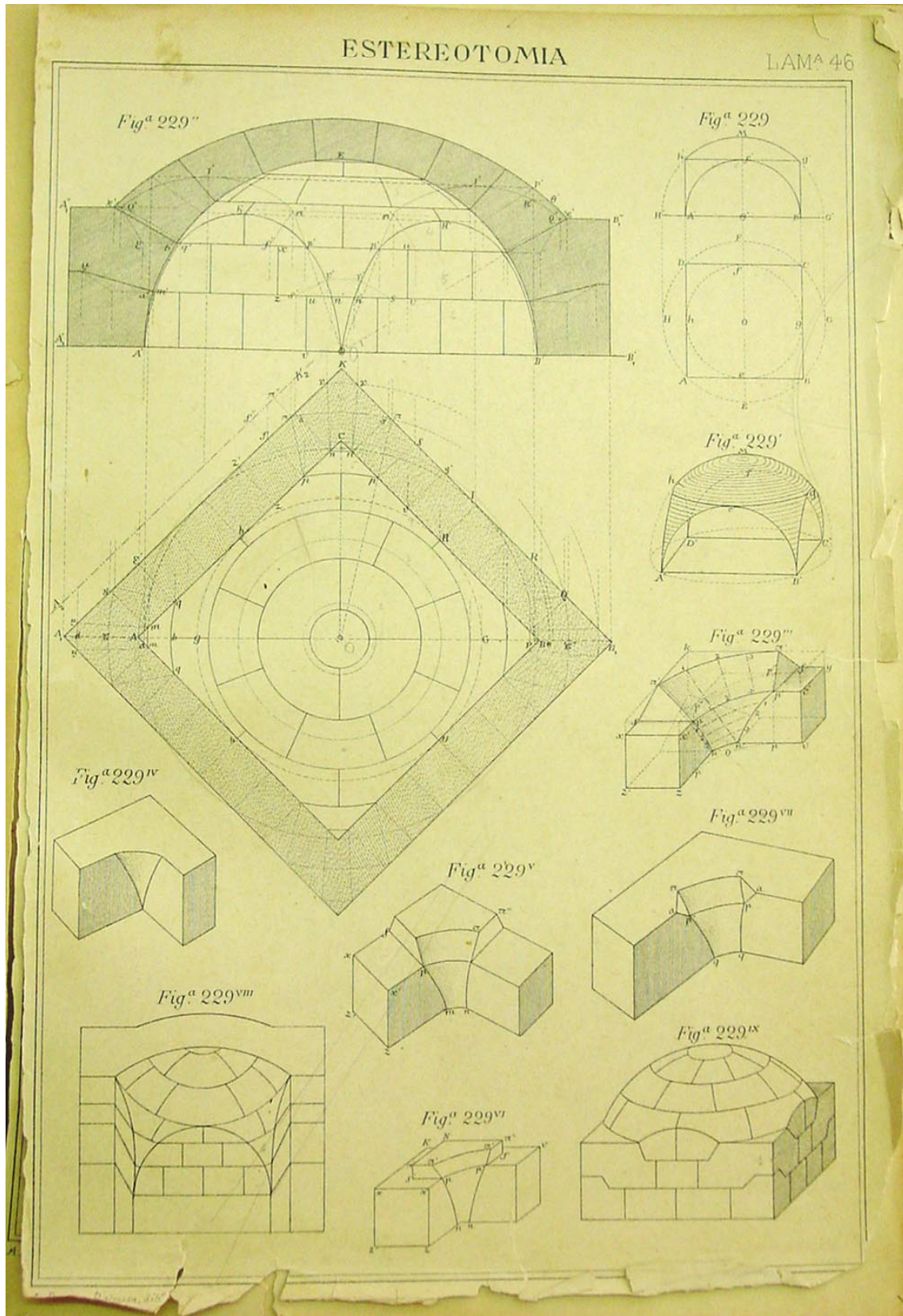
Rovira Rabasa, làmina 13.



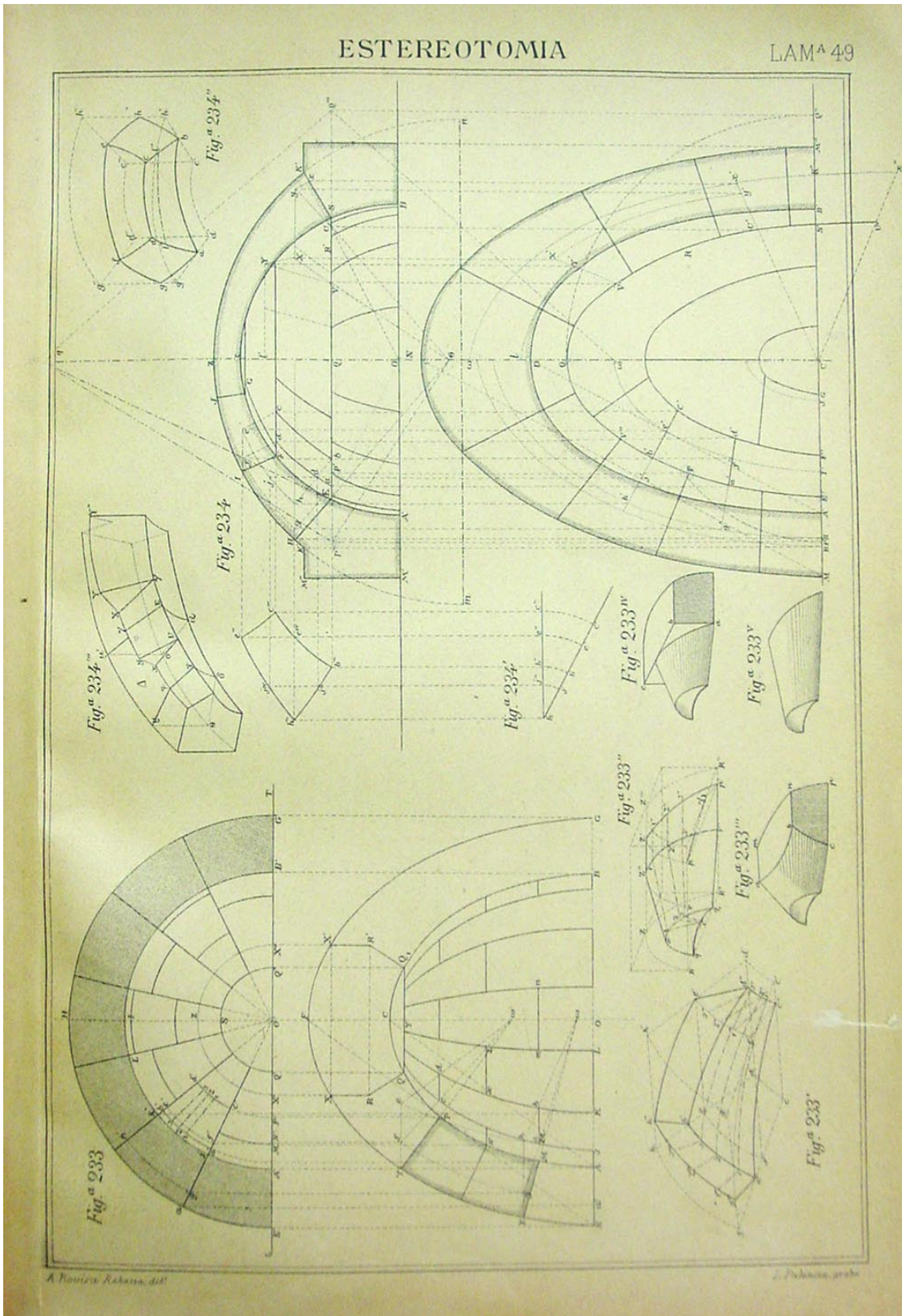
Rovira Rabasa, làmina 14.



Rovira Rabasa, làmina 46.



Rovira Rabasa, làmina 49.



ANNEX 2.13

Làmines de Rafael Massó, 1900-1902

A la biblioteca del Col·legi d'Arquitectes de Catalunya es conserven dues magnífiques col·leccions de làmines de Rafael Massó quan era alumne del professor Antoni Rovira i Rabassa a l'Escola d'Arquitectura de Barcelona.

La primera és formada per làmines de 63,5 cm x 44 cm) i correspon als exercicis de l'assignatura d'Ombres, perspectiva i gnomònica, que cursà el 1900-1901. La segona col·lecció, amb làmines de 49 cm x 31,5 cm, és del curs següent (1901-1902) per a l'assignatura d'Estereotomia de la pedra, la fusta i el ferro.

Les còpies de totes dues col·leccions es poden consultar, també, al volum d'annexos de la tesi de Josep Bertran.

Tot i que siguin més de vint anys després de Gaudí, no deixen de tenir el seu valor indicador del que podia haver cursat amb aquest mateix professor.

Reproduïm a continuació el glossari complet i una selecció representativa de les làmines de la col·lecció.

Glossari

Gnomònica

- 1.- Relotge equatorial construït a 68° de latitud.
- 2.- Relotge horitzontal construït a una latitud de 70°.
- 3.- Relotge vertical septentrional meridional construït a 14° de latitud.
- 4.- Doble relotge format per dos indeclinants, els quadrants dels quals són establerts en dos paràmetres verticals.
- 5.- Relotge vertical declinant occidental meridional. Declinació 20° en una latitud de 0°.
- 6.- Relotge inclinat de 11° i 28' respecte al pla de l'horitzó, construït en el mateix pol.
- 7.- Relotge en una superfície cilíndrica obliqua la qual se suposa ser un tram de muralla que acorda dos murs inclinats.
- 8.- Plec. Núm. 2 del problema anterior.

Ombres

- 9.- a) Trobar l'ombra projectada d'un punt sobre el pla horitzontal de projecció.
b) Donada la recta A , trobar l'a seva ombra projectada.
- 10.- Donats dos punts A i B , trobar l'ombra de les rectes que uneix aquests punts amb els trobats.
- 11.- Donada una recta i dos punts en ella, trobar l'ombra del sistema de rectes resultant.
- 12.- Determinar la corba d'intersecció d'una esfera amb un helicoide normal. Determinar l'ombra de la corba resultant.
- 13.- Trobar la intersecció d'una esfera amb un cilindre oblic. Trobar l'ombra de la corba intersecció.
- 14.- Donada la figura vertical $abcd$, trobar la seva ombra. Donat el cercle horitzontal AB i un punt lluminós S , trobar l'ombra del primer.
- 15.- Donat el prisma i la recta buscar les ombres.
- 16.- Donats quatre punts que siguin vèrtexs d'un paral·lelepíped, construir aquest a l'espai i trobar la seva ombra.
- 17.- El mateix problema que l'anterior, amb la diferència que els quatre punts siguin ara els punts mitjans de les quatre arestes.
- 18.- Complementos als problemes anteriors.

- 19.- Ombra de motlures planes i cilíndriques, corregudes.
- 20.- Ombra d'un canó seguit en sistema ràpid.
- 21.- Ombra d'una obertura sobre parets interiors d'un cilindre horitzontal.
- 22.- Donat un pla i un pentàgon en ell, es demana la construcció sobre del pentàgon d'un dodecaèdre inclinat.
- 23.- Donat un pla i un pentàgon en ell, que representa la base inferior de la piràmide pentagonal d'un icosaèdre, es demana la construcció d'aquest icosaèdre.
- 24.- Donats el dodecaèdre i l'icosaèdre dels dos problemes anteriors, trobar la seva intersecció i després l'ombra combinada de tots dos.
- 25.- Donades les corbes guerxes, buscar la línia divisòria de llum i ombra en la superfície desenvolupable que determinen.
- 26.- Trobar la intersecció i les ombres combinades de dos cilindres oblics.
- 27.- Església d'Athis.
- 28.- Planta.
- 29.- Façana lateral
- 30.- Absis.
- 31.- Tall longitudinal.
- 32.- Tall transversal.
- 33.- Donat un cilindre amb una creu en el seu interior, trobar les ombres pròpies i projectades.
- 34.- Donat un cilindre i un el·lipsoide, trobar la intersecció i les ombres pròpies i projectades.
- 35.- Donada una peanya amb una creu, trobar les ombres pròpies i projectades.
- 36.- Ombra d'una base jònica.
- 37.- Ombra d'una rquivolta.
- 38.- Ombra d'un capitell jònic vist de front.
- 39.- Ombra del capitell jònic.
- 40.- Ombra del capitell jònic.
- 41.- Ombra d'una rosca de filet quadrangular
- 42.- Ombra pròpia i projectada d'una roda d'engranatge cònic.
- 43.- Ombra d'un cargol cònic de filet triangular.
- 44.- Trobar el punt brillant d'un el·lipsoide escalè.

Perspectiva axonomètrica i cavallera

- 45.- Perspectiva axonomètrica d'un monument funerari.
- 46.- Plec núm. 2 del problema anterior.
- 47.- Perspectiva axonomètrica d'una font surtidor destinada a un passeig públic.
- 48.- Plec núm. 2 del problema anterior.
- 49.- Perspectiva cavallera d'una pila baptismal.
- 50.- Plec núm. 2 del problema anterior.
- 51.- Perspectiva del plafó d'una volta de punta d'ametlla.
- 52.- Edicle egipci. Ombra en perspectiva cavallera.
- 53.- Perspectiva axonomètrica amb les ombres del Coliseum Romà o sigui anfiteatre Flavi.
- 54.- Anfiteatre Flavi.

Perspectiva cònica

- 55.- Perspectiva d'un balaustre per mitjà del procediment general.
- 56.- Perspectiva d'un enrajolat compost d'octàgons i quadrats tancats dins d'una faixa adornada.
- 57.- Perspectiva plana d'una habitació destinada a casa rural.
- 58.- Perspectiva cònica d'una creu amb pedestal.
- 59.- Perspectiva d'un parc o jardí.
- 60.- Plec núm. 2 del problema anterior.
- 61.- Perspectiva de la porta d'Autun.
- 62.- Perspectiva de l'interior del temple de Denderah.
- 63.- Temple de Denderah.
- 64.- Perspectiva d'un conjunt de tres carreus.
- 65.- Plec núm. 2 del problema anterior.
- 66.- Perspectiva de cúpules vistes per sota.
- 67.- Plec núm. 2 del problema anterior.
- 68.- Església de Sta. Sofia.
- 69.- Intersecció d'un cilindre amb una esfera.

- 70.- Perspectiva i ombres d'un capitell dòric.
- 71.- Perspectiva i ombra inclinada d'un cilindre i d'un hiperboloide.
- 72.- Perspectiva i ombra combinada d'un gerro.

Perspectiva estereogràfica

- 73.- Perspectiva estereogràfica de l'Imperi de Rússia.

Estereotomia de la pedra

- 74.- Mur recte. Mur destinat a tanca d'un jardí reial.
- 75.- Mur en talús. Especejament òptim per als murs que constitueixen la caixa d'un safareig de forma piramidal.
- 76.- Mur cilíndric recte. Especejament en un mur cilíndric que serveix de base a un monument.
- 79.- Construcció i especejament d'un arc de mig punt situat sobre d'una superfície cilíndrica recta.
- 80.- Construcció i especejament d'un gran arc el·líptic.
- 81.- Construcció i especejament d'un arc carpanell d'un pont.
- 82.- Especejament i aparell d'una portada bizantina.
- 83.- Especejament i aparell d'arcs apuntats d'una arcada claustral.
- 84.- Especejament i aparell d'un arc de ferradura de l'entrada d'un jardí reial.
- 85.- Construcció i aparell d'un arc tranquil-botarell a la part exterior d'una catedral.
- 86.- Construcció i especejament d'un pas cilíndric oblic.
- 87.- Construcció i especejament d'una baixada compresa entre una torre cilíndrica i una cònica.
- 88.- Construcció d'una volta establerta en un mur recte.
- 89.- Construcció d'un cap-i-alt irregular, amb la superfície de l'intradós que sigui del gènere de les envolvents.
- 90.- Especejament en un nínxol esfèric, fent ús de l'especejament de la volta de forn.
- 91.- Construcció d'una volta amb petxines de planta triangular.
- 92.- Perspectiva axonomètrica del problema anterior.
- 93.- Construcció d'una cúpula anular circular.
- 94.- Construcció d'un nínxol el·líptic.
- 95.- Construcció d'una trompa cònica
- 96.- Volta plana de planta quadrada, tancada.
- 97.- Volta de doble aresta, planta quadrada.
- 98.- Perspectiva cavallera d'una volta anular.
- 99.- Lluneta cilíndrica recta, per donar llum penetrant a la volta d'una església.
- 100.- Lluneta produïda per l'encontre d'un canó horitzontal amb un altre en baixada.
- 101.- Lluneta en baixada cilíndrica i recta.
- 102.- Trobar l'equació de la projecció horitzontal de la corba obtinguda per la intersecció d'un con i un cilindre.
- 103.- Continuació del problema anterior.
- 104.- Lluneta produïda per l'encontre de dues voltes còniques esbiaixades.
- 105.- Ombra d'una cúpula esfèrica sostinguda sobre dos arcs torals i dos formerets.
- 106.- Construcció d'una cúpula esfèrica sostinguda per dos arcs torals.

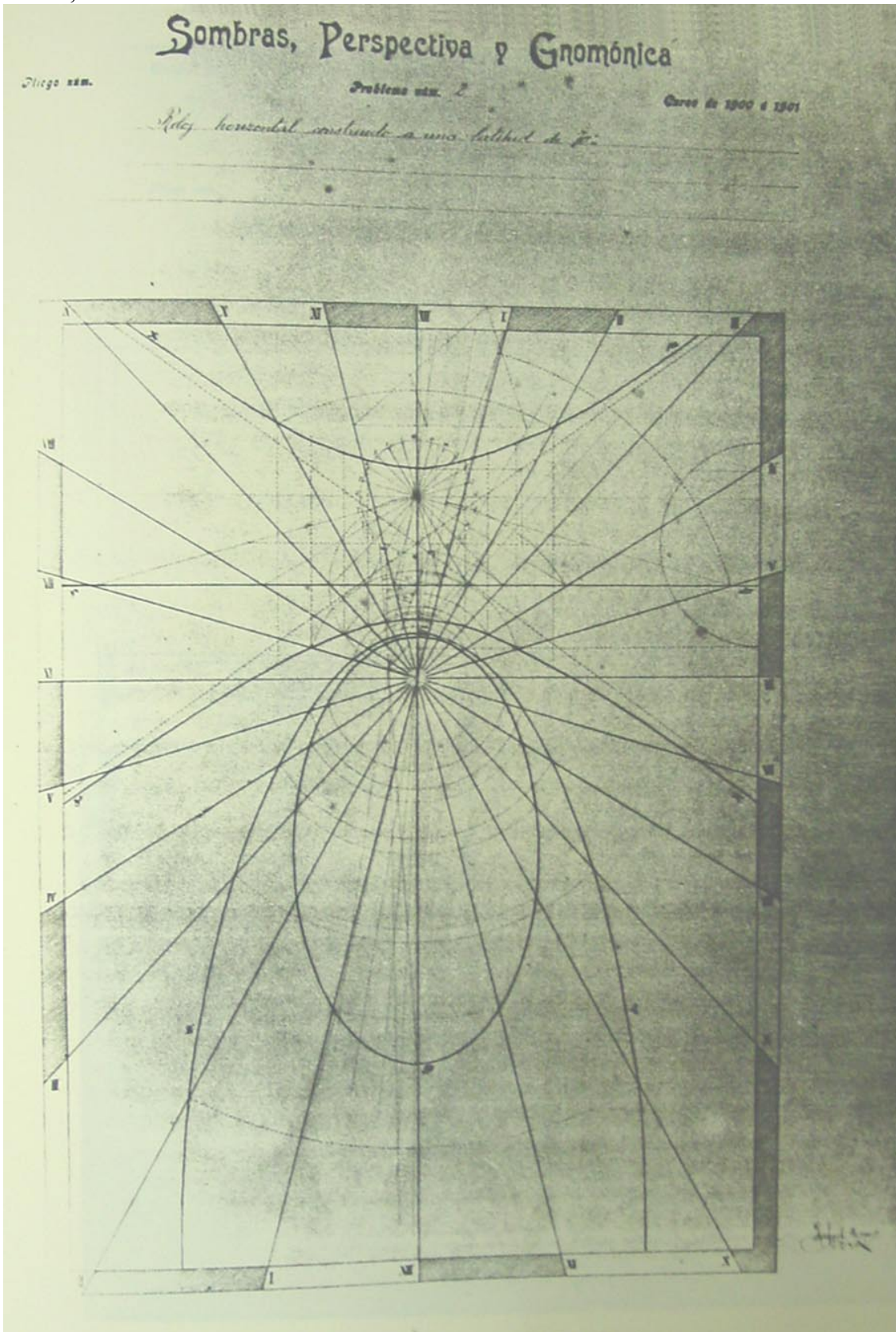
Estereotomia de la fusta

- 107.- Porta vidriera.
- 108.- Dibuix d'un paviment de fusta
- 109.- Porta.

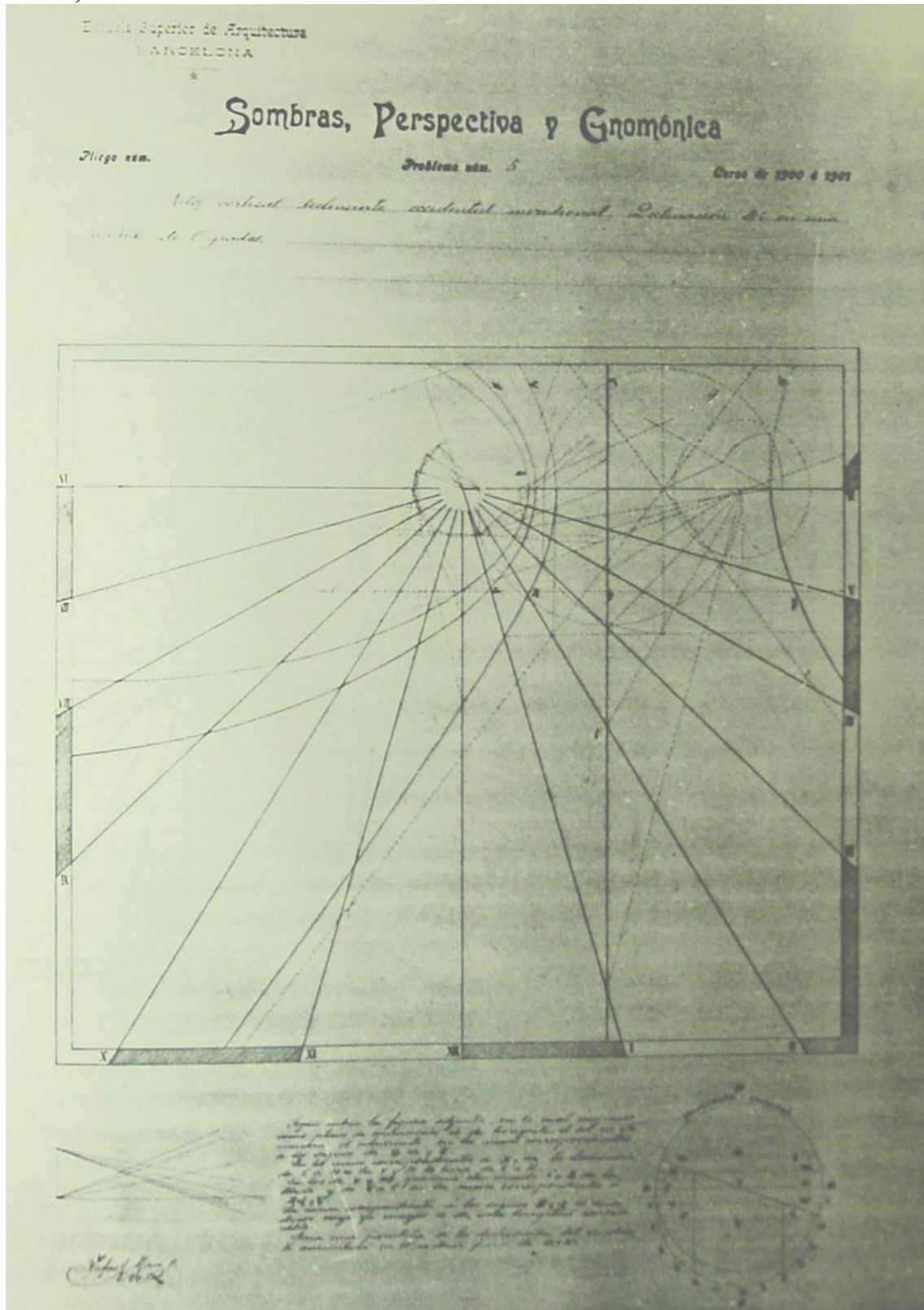
Continuació d'estereotomia de la pedra

- 110.- Construcció i especejament d'una volta gòtica de planta quadrada de clau ortogonal.
- 111.- Construcció i especejament d'una escala destibada al pati d'un palau ducal.
- 112.- Construcció i especejament d'una escala en suspensió, de planta circular.

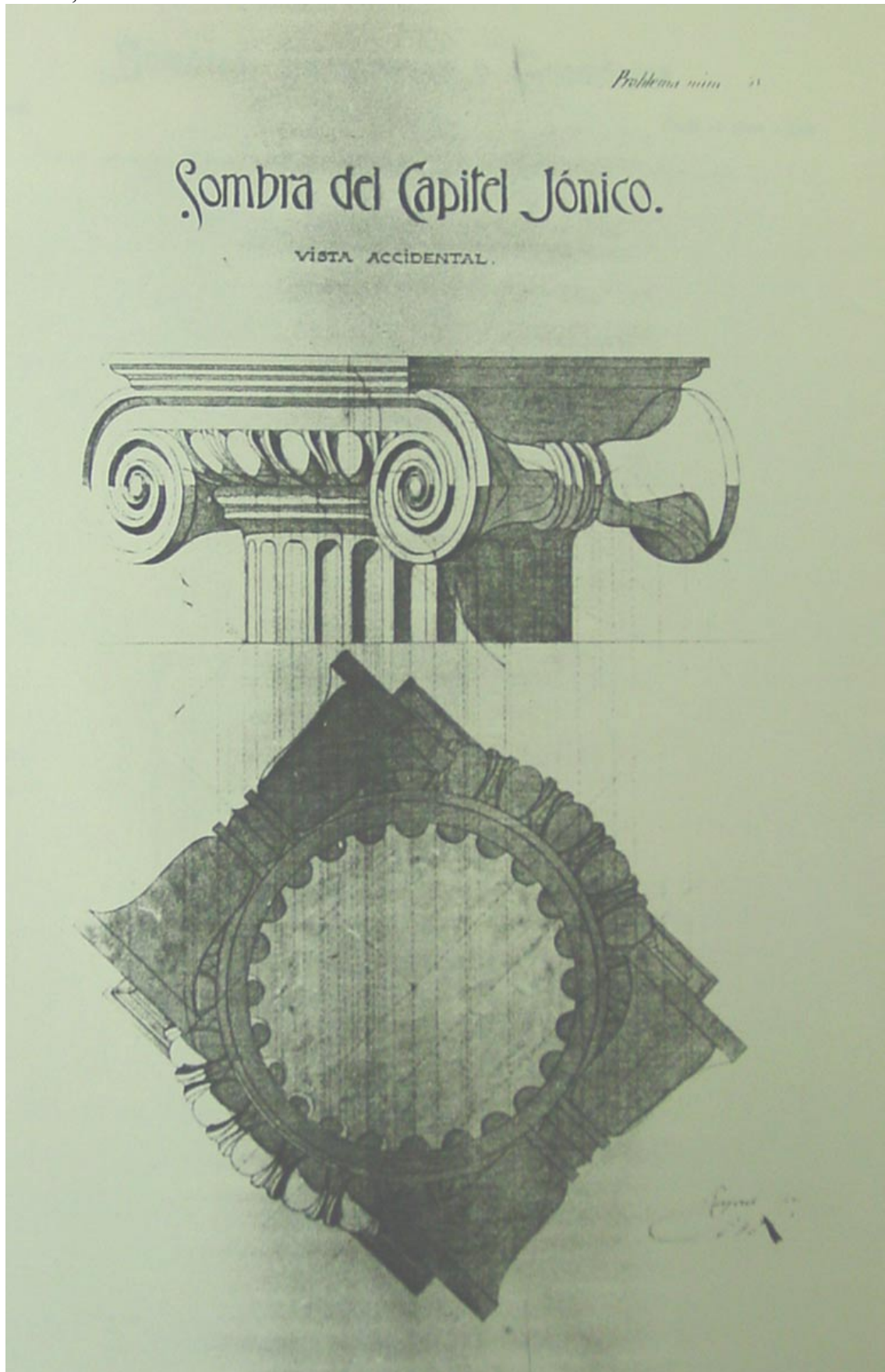
Massó, làmina 2.



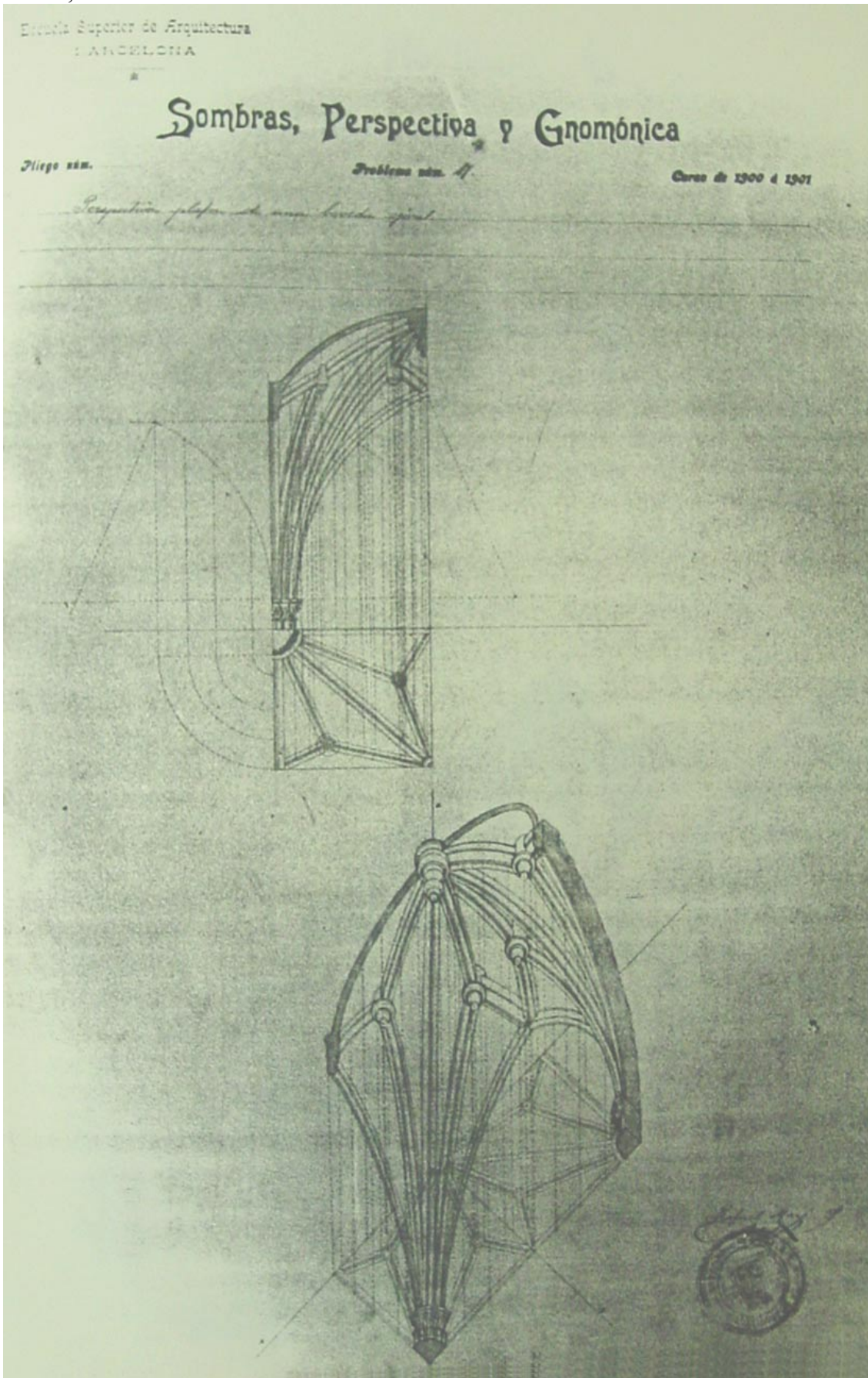
Massó, làmina 5.



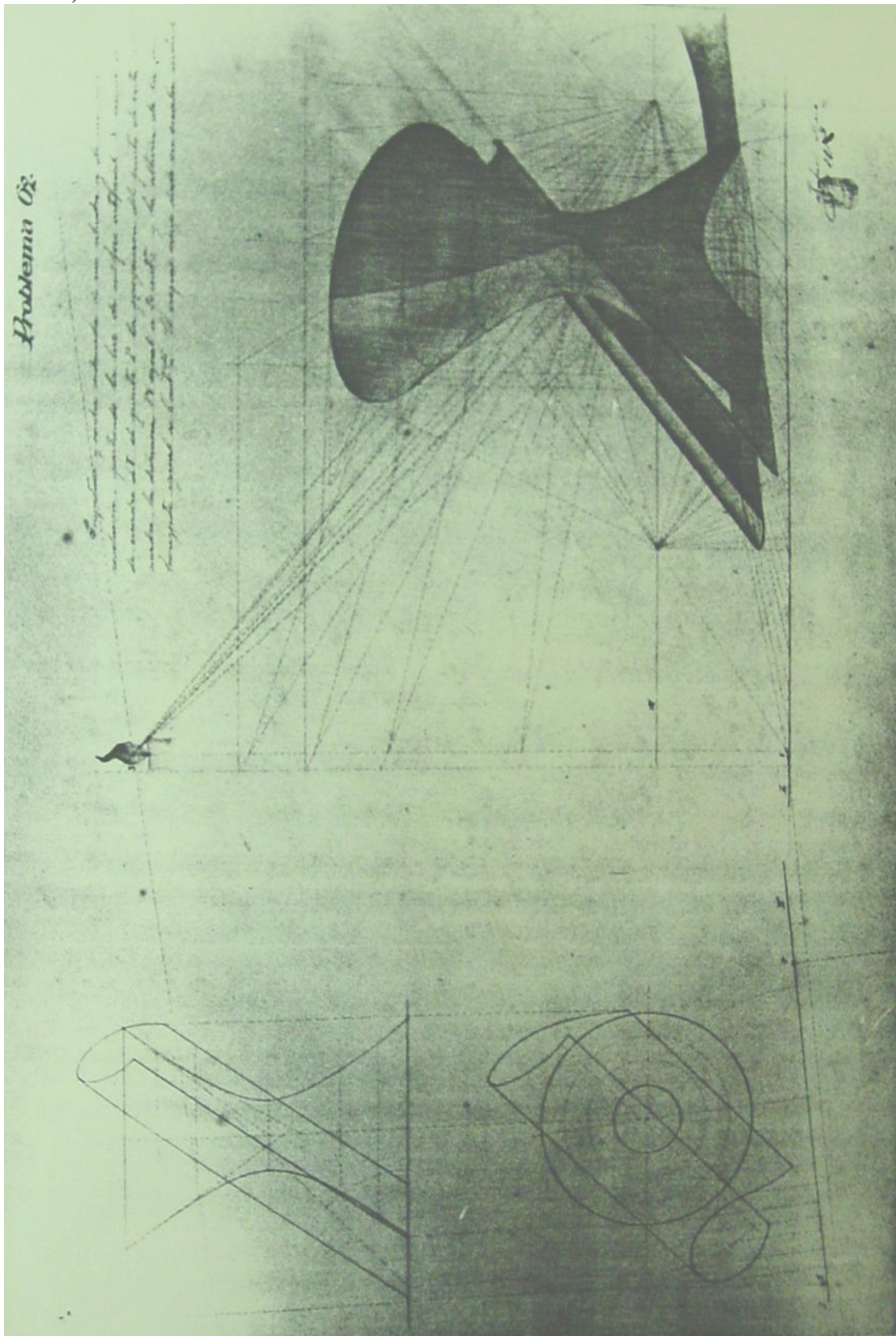
Massó, làmina 40.



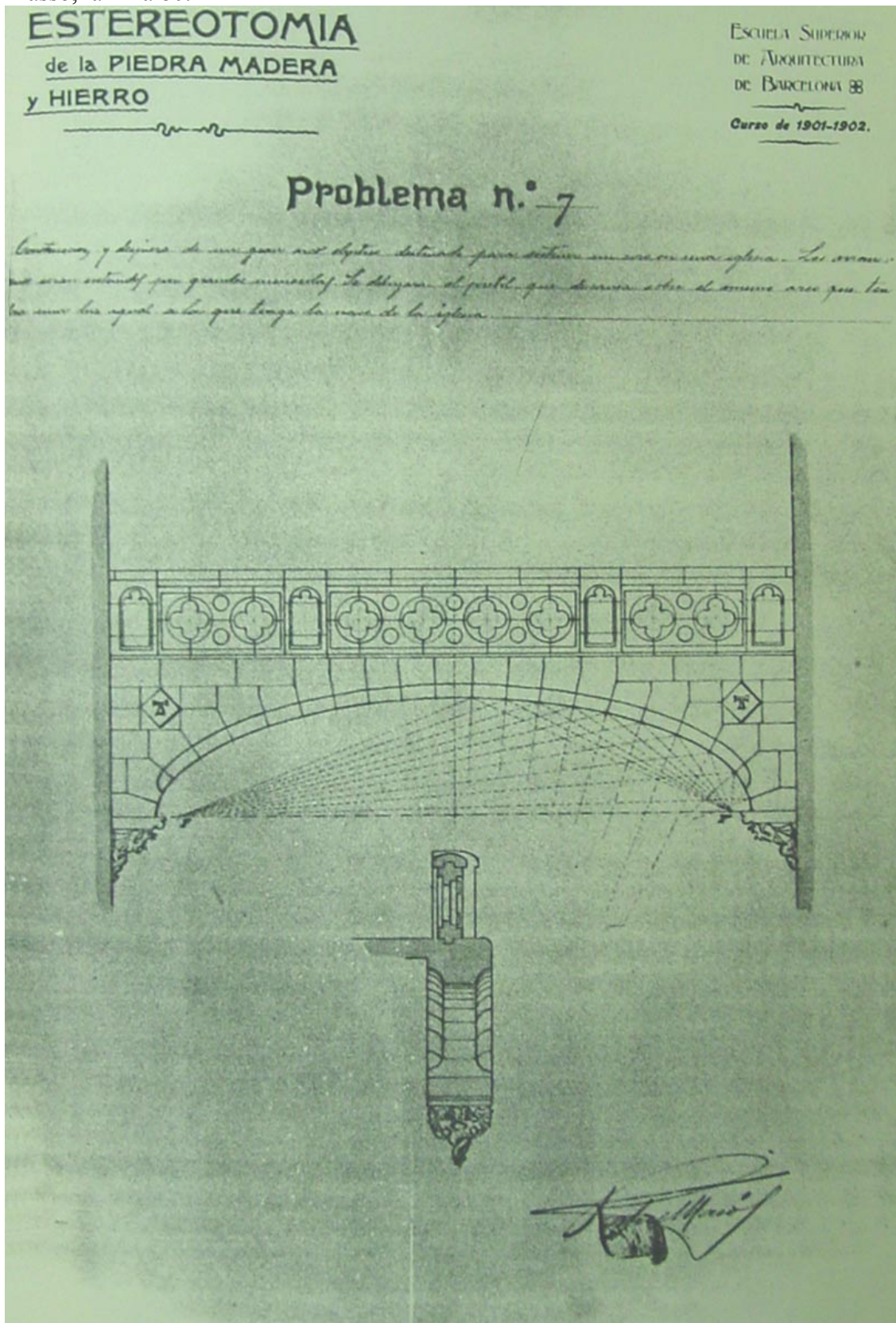
Massó, làmina 51.



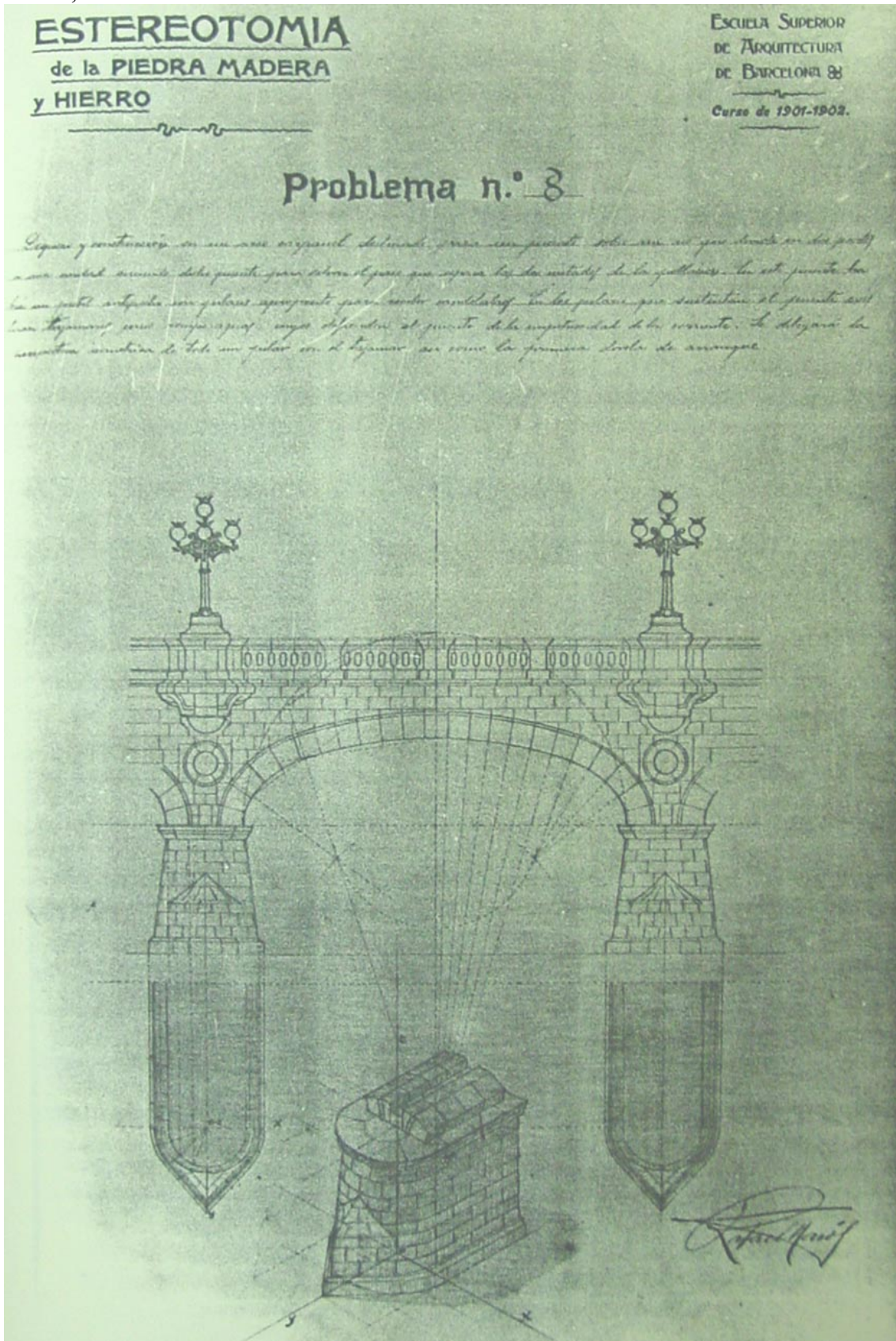
Massó, làmina 71.



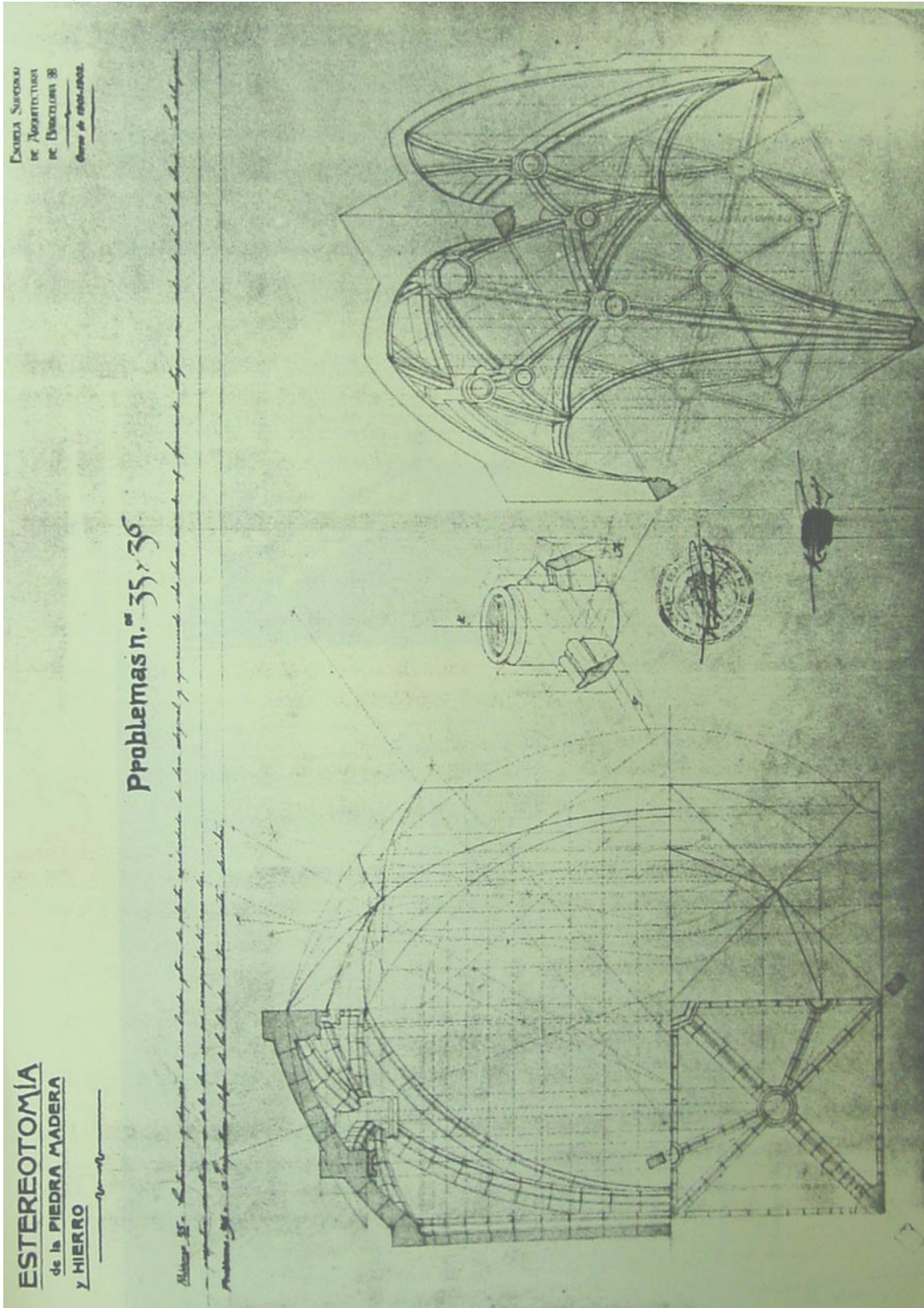
Massó, làmina 80.



Massó, làmina 81.



Massó, làmina 110.



ANNEX 2.14

Tractat d'Antonio Elizalde, 1912

La 1^a edició d'aquest llibre, *Curso de geometria descriptiva*, és de l'any 1873, a Madrid. Coincideix amb l'any d'ingrés a Gaudí a l'ETSAB i hem trobat a la biblioteca PiCalleja del departament de matemàtiques la 5^a edició, de l'any 1912.

Reproduïm a continuació la traducció literal de l'índex per tal de fer notar l'extens tractament de les diverses qüestions i en especial de les corbes i superfícies.

Pròleg

Introducció

PRIMERA PART. Del punt, de la recta del pla i de les seves conivinacions

Capítol I. Representació i notació

Representació del punt

Representació de la recta

Posicions relatives de dues rectes

Representació del pla

Generació del pla

Capítol II. Paral·lelisme, interseccions i perpendicularitat

Paral·lelisme de rectes amb plans i de plans entre si.

Intersecció de plans

Intersecció d'una recta amb un pla

Rectes i plans perpendiculars entre si

Capítol III. Canvis, girs i abatiments

Canvi de plans de projecció

Girs al voltant d'eixos perpendiculars a un dels plans de projecció

Girs al voltant d'eixos no perpendiculars als plans de projecció

Abatiments

Capítol IV. Aplicació de les teories anteriors

Mínimes distàncies

Magnituds i construccions en un pla

Angles de rectes i plans

Angle diedre

Capítol V. Dels políedres

Representació

Desenvolupament de la superfície d'un políedre

Seccions planes dels políedres

Intersecció d'una recta amb un políedre

Intersecció de dos políedres

SEGONA PART. Generació i representació de corbes i supefcies en general.

Capítol VI. De les línies corbes

Principis fonamentals

Punts sinngulars de les corbes planes

Tangents inormals a les corbes planes

Generació i traçat de corbes planes

Representació gràfica de les corbes

Capítol VII. De les superfícies

- Idees generals i principis fonamentals
- Plans tangents i superfícies normals en general
- Generació i representació de les superfícies en general
- Generació i representació de les superfícies desenvolupables
- Generació i representació de les superfícies de revolució
- Generació i representació de les superfícies de segon grau

Capítol VIII. De les superfícies evolvents i desenvolupables

- Superfícies involutes i evolvents
- Superfícies desenvolupables

Capítol IX. Dels plans tangents...

- Plans tangents a una superfície qualsevol quan es coneix el punt de contacte
- Plans tangents a les superfícies desenvolupables per un punt exterior
- Plans tangents a una superfície desenvolupable paral·lels a una recta donada
- Plans i rectes tangents a les superfícies cilíndriques i còniques subjectes a diverses condicions

Capítol X. Interseccions de superfícies

- Mètode general de resolució
- Seccions planes de superfícies
- Interseccions d'una recta amb una superfície
- Interseccions de dues superfícies

TERCERA PART. Plans tangents. Qüestions diverses. Superfícies guerxes. Corbatura...

Capítol XI. Plans tangents a les superfícies per un punt exterior...

- Cons i cilindres circumscrits a les superfícies i determinació de les corbes de contacte
- Plans tangents a les superfícies per un punt exterior
- Plans tangents a les superfícies paral·lels a una recta donada
- Plans tangents a les superfícies passant per una recta donada
- Plans tangents a les superfícies paral·lels a un pla donat
- Plans tangents comuns a diverses superfícies

Capítol XII. Qüestions diverses

- De la hèlix cilíndrica

Capítol XIII. De les superfícies guerxes

- De les superfícies guerxes en general
- Hiperboloide d'un full
- Paraboloide hiperbòlic
- Dels plans tangents a les superfícies guerxes
- Dels conoides i de les superfícies guerxes conegudes amb els noms de corn de vaca o pas oblic
- Dels helicoides guerxats

Capítol XIV. De la corbatura de les línies i superfícies

- De la corbatura de les línies
- Corbatura de les superfícies

Capítol XV. Dels diferents sistemes de projeccions

- Projeccions obliques
- Projeccions axonomètriques

Capítol XVI. Dels plans afitats

- Del punt, de la recta, del pla i les seves combinacions
- Superfícies corbes
- Aplicacions dels plans afitats

ANNEX 3

Textos i apunts de mecànica i construcció

- 3.1 Programa de Mecànica racional, de Llorenç Presas, 1847.
- 3.2 Arcs i voltes segons John Millington, 1848.
- 3.3 Apunts de construcció, de Macari Planella, 1860.
- 3.4 Estàtica gràfica, de Hermann Scheffler, de 1864.
- 3.5 Apunts de mecànica, de Joaquim Bassegoda, 1873-74.
- 3.6 Apunts de construcció, de Leandre Albareda, 1873-74, i 1874-75.
- 3.7 L'estàtica gràfica de Carl Culmann, 1880.
- 3.8 Arcs i voltes segons Müller-Breslau, 1886.
- 3.9 Arcs i voltes segons Josep Marvà, 1888.
- 3.10 Apunts de construcció, de Jaume Bayó, 1897-98.
- 3.11 Apunts de resistència de materials, COAC, 1910.
- 3.12 Apunts de construcció, de Luís Moya (ETSAM), 1924-25.
- 3.13 Arcs i voltes segons Domènech Sugranyes, 1925?.

Selecció de les pàgines més significatives per tal d'il·lustrar l'estat de la qüestió, en temps de Gaudí, pel que fa a la mecànica i construcció de les formes voltades.

ANNEX 3.1

Programa de l'assignatura de Mecànica racional, de Llorenç Presas, 1847.

Es tracta d'un llibret de molt petit format, de 16 pàgines, localitzat a la biblioteca de la RACAB. Reproduïm la transcripció íntegra i literal:

Universidad Literaria de Barcelona
Facultad de Filosofía

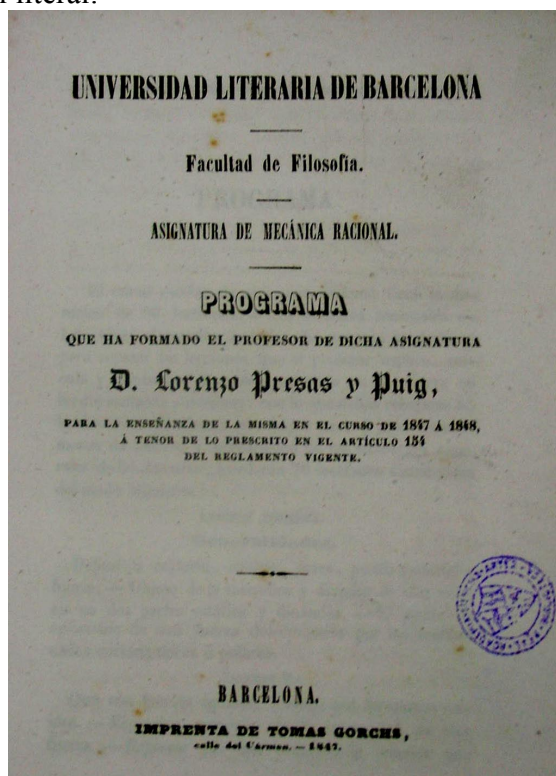
Asignatura de mecánica racional

Programa
Que ha formado el professor de dicha asignatura

D. Lorenzo Presas y Puig

Para la enseñanza de la misma en el curso de 1847 a 1848 a tenor de lo prescrito en el artículo 154 del reglamento vigente.

Barcelona
Imprenta de Tomas Gorchs, calle del Carmen. –
1847



Programa

El curso escolar de mecánica racional tiene la duración de 90 lecciones, a tres lecciones semanales. Los lunes alternados de todas las semanas se destinan para repasar las lecciones que el profesor explica, calcula y demuestra él mismo colocado en la pizarra en las dos semanas anteriores, con lo que deben rebajarse quince lecciones. Si además se rebajan unas 5 para los exámenes de febrero y preparación de los exámenes generales de fin de curso, quedaran 70 lecciones distribuidas del modo siguiente:

Lección 1. Generalidades

Definir la materia, cuerpo, masa, punto material y fuerza. Objeto de la mecánica y división de esta ciencia en dos partes estática y dinámica. El punto de aplicación de una fuerza determinararlo por las coordenadas rectangulares o polares.

Lección 2.

Qué són fuerzas iguales, y cómo nos formamos esta idea. Expresión numérica de la intensidad de una fuerza. Expresar por una ecuación la relación que tienen entre sí los tres ángulos, dependientes, que manifiestan la dirección de una fuerza. También puede representarse por dos ángulos arbitrarios. Expresar un arco de cualquier número de grados en partes del radio.

Lección 3.

Expresar el ángulo formado por dos rectas en valores del coseno. Modificar la ecuación anterior, para el caso del ángulo recto. Transformación de coordenadas rectangulares en polares. Proyección de una recta sobre otra, sobre un plano, y de un área plana sobre un plano. Determinar el valor de dos fuerzas paralelas diferentes y opuestas.

Lección 4.

Principios fundamentales del análisis infinitesimal. Se explica no por los límites, sino por los infinitamente pequeños. Lo que es la diferencial de una variable y la de una función. Definición y notación de la integral definida. Diferenciación de una integral respecto de una cantidad considerada como constante en la integración. Fórmula de las cuadraturas.

Lección 5.

Demostrar que la relación de un arco, infinitamente pequeño, con su cuerda es la unidad. Determinar por medio de fórmulas la tangente a una curva. Elemento diferencial de una curva. Ecuación del plano normal.

Lección 6.

Representar el ángulo de contingencia y radio de curvatura. Ecuación del plano osculador. Coordenadas del centro de curvatura. Ecuación del plano tangente a una superficie curva. Elemento diferencial de la superficie.

Lección 7.

Regla para deducir, una de otra, las fórmulas relativas a tres ejes rectangulares, respecto de cada uno de los cuales todo es semejante en un problema.

Lección 8.

Condiciones generales a las que deben satisfacer las ecuaciones que contienen cantidades de diferente naturaleza.

Lección 9. **Estática**

Composición y equilibrio de las fuerzas aplicadas a un mismo punto material.

Qué se entiende por resultante de un número cualesquiera de fuerzas aplicadas a un mismo punto. Cuál es su valor cuando todas las fuerzas obran sobre una misma recta. Cuál es la resultante de tres fuerzas iguales que dividen el plano en tres espacios de 120° cada uno?

Lección 10.

Hallar el valor y la dirección de dos fuerzas que hacen un ángulo cualesquiera. Regla del paralelogramo de las fuerzas.

Lección 11.

Consecuencias inmediatas que se deducen del teorema del paralelogramo de las fuerzas. Construcción geométrica para determinar en magnitud y dirección la resultante de un número cualesquiera de fuerzas.

Lección 12.

Composición de tres fuerzas rectangulares en una sola y descomposición de ésta en tres fuerzas rectangulares. Cálculo de la resultante de un número cualesquiera de fuerzas dadas.

Lección 13.

Demostrar una propiedad particular de la resultante de un número cualesquiera de fuerzas. Ecuaciones de equilibrio de un punto material enteramente libre. Equilibrio de un punto obligado a permanecer sobre una superficie, y equilibrio de un punto que haya de permanecer sobre una curva dada. Ecuaciones de las velocidades virtuales.

Lección 14.

Del equilibrio en la palanca

Definición de la palanca y su equilibrio. Momento de una fuerza respecto de un punto. Equilibrio de dos fuerzas aplicadas a la palanca. Demostrar que esta ecuación es independiente del ángulo formado por los brazos de la palanca.

Lección 15.

Suponer que las fuerzas que obran a los extremos de una palanca se convierten en paralelas. ¿Dos fuerzas iguales paralelas y contrarias, esto es, que no sean directamente opuestas, qué producen?. ¿Dónde tienen el apoyo? ¿Existe? ¿Hay resultante?

Lección 16.

Equilibrio de muchas fuerzas aplicadas a una palanca. Teorema relativo al momento de la resultante de dos fuerzas. Ecuación de equilibrio de estas fuerzas alrededor de un punto fijo situado en su plano. Manifestar cómo las velocidades virtuales tienen cabida en el equilibrio de la palanca.

Lección 17.

De la composición y equilibrio de las fuerzas paralelas.

Demostración geométrica de la resultante de dos fuerzas paralelas y de su punto de aplicación. Manifestar que ésta misma demostración comprueba la imposibilidad de reducirse a una resultante única, dos fuerzas iguales, paralelas y contrarias. Demostrar que cuando las fuerzas paralelas giran alrededor de sus puntos de aplicación, permaneciendo paralelas, su resultante gira también alrededor de su punto de aplicación. Defínese el centro de las fuerzas paralelas.

Lección 18.

Momento de una fuerza respecto de un plano, su diferencia con el momento de una fuerza respecto de un punto. Demostrar que el momento de la resultante de un número cualquiera de fuerzas, respecto de un plano, es igual a la suma de los momentos de estas fuerzas respecto de este plano. Hallar las ecuaciones que determinan las coordenadas del centro de las fuerzas paralelas.

Lección 19.

Demostrar en qué caso coinciden los dos momentos. Representar las ecuaciones de equilibrio de un sistema de fuerzas paralelas aplicadas a un cuerpo sólido, ya sea libre o retenido por un punto o por un eje fijo.

Lección 20.

Consideraciones generales sobre los cuerpos pesados y acerca los centros de gravedad.

Definir la pesadez, el peso y densidad. Representar por ecuaciones las relaciones que hay entre peso, masa, volumen, densidad e intensidad de pesadez. Definir la grama o gramo, o sea unidad de peso. Relación entre densidad del agua, mercurio y aire, tomando el agua como unidad. Relación entre el mercurio y el aire, eligiendo el aire por unidad.

Lección 21.

El peso proporciona la más cómoda medida de la masa. Lo que es centro de gravedad. Determinación práctica de cualesquiera cuerpos homogéneos o heterogéneos. Ecuaciones que sirven para hallar el centro de gravedad de un cuerpo cuando se conocen los centros de gravedad de sus partes y sus pesos. Refiérese a las masas de cuerpos infinitamente pequeños. Lo que es centro de gravedad de volumen, área y línea.

Lección 22.

Ecuaciones que representan la relación entre las masas infinitamente pequeñas de un cuerpo y las distancias mutuas de estas entre sí y con el centro de gravedad del cuerpo, o sistema entero. Propiedad curiosa del centro de gravedad de un cuerpo libre. Enumeración de casos en que el centro de gravedad es inmediatamente conocido. Ejercicios de las fórmulas anteriores, para hallar el centro de gravedad de un polígono.

Lección 23. **Determinar los centros de gravedad**

Centro de gravedad de las líneas curvas.

Coordenadas del centro de gravedad de una línea cualquiera. Aplicación a una línea recta. A una curva plana. Al círculo y a las tres secciones cónicas.

Lección 24.

Ecuación de la cicloide. Coordenadas del centro de gravedad de una arco cualquiera de esta curva. Regla para determinar el área de una superficie de revolución, cuando sin cálculo, es conocido su centro de gravedad.

Lección 25.

Centro de gravedad de las áreas.

Coordenadas del centro de gravedad de un área cualesquiera. Ejemplo de un área de una superficie plana. Aplicación del centro de gravedad de un triángulo.

Lección 26.

Hallar el centro de gravedad de las tres secciones cónicas- Hallar el de una porción de área de cicloide.

Lección 27.

Centro de gravedad de una zona de una superficie de revolución. Aplíquese a las superficies cóncavas y convexas engendradas por la cicloide. Regla para determinar el volumen de un sólido de revolución, cuando, sin cálculo, es conocido el centro de gravedad del área generatriz. Volúmen de un prisma y de un cilindro truncado.

Lección 28.

Centro de gravedad de los volúmenes.

Centro de gravedad de una pirámide y de un cono cualesquiera. Hallar el centro de gravedad de una pirámide triangular o tetraedro, sin emplear el cálculo integral.

Lección 29.

Centro de gravedad de un cuerpo simétrico alrededor de su eje, y en particular de una elipsoide. Centros de gravedad de un cuerpo de revolución, en particular de los sólidos cóncavos y convexos engendrados por la cicloide. Aplicación de las integrales triples a una porción de esfera. Elemento diferencial de un volúmen expresado por coordenadas polares.

Lección 30. **Dinámica**

Fórmulas del movimiento rectilíneo. Movimiento uniforme, su definición y ecuación. Ejemplo de este movimiento en la rotación de la tierra. Qué es día medio, sidéreo y aparente.

Lección 31.

Qué diferencia hay en la velocidad, entre el movimiento uniforme y variado. Inercia de la materia. Espresar la velocidad de cualquier movimiento. Espresar el espacio corrido en un movimiento infinitamente pequeño, prescindiendo de la velocidad adquirida.

Lección 32.

Movimiento uniformemente acelerado y retardado, su ecuación. La fuerza que lo produce es constante. Movimiento en el vacío. Aceleración variable según los lugares de la tierra. Demostrar que en las fuerzas constantes sus intensidades son entre si como las velocidades producidas en una unidad de tiempo.

Lección 33.

Cuál es la medida de la fuerza en un movimiento variado. Fórmulas del movimiento variado.

Lección 34.

Medidas de las fuerzas atendiendo a las masas

Fuerza de inercia: manifestar la impropiedad de esta expresión. Qué son puntos materiales iguales en masa. Qué es fuerza motriz, su valor en cualquier movimiento. Identidad del movimiento de los cuerpos pesados en cada lugar de la tierra.

Lección 35.

Dada la fuerza motriz deducir la aceleratriz. Definir la cantidad de movimiento, la percusión o impulsión. Condición de la equivalencia de dos percusiones. Comparar un peso a una percusión.

Lección 36.

Ejemplos de movimiento rectilíneo.

Expresar en ecuaciones diferenciales el movimiento rectilíneo, casos de posibilidad de integración. Movimiento vertical de un cuerpo pesado en el vacío.

Lección 37.

Movimiento sobre un plano inclinado.

Lección 38.

Movimiento vertical de un cuerpo pesado en un medio resistente. Modo de determinar el coeficiente de resistencia.

Lección 39.

Ejemplos de soluciones particulares. Movimiento de un cuerpo atraído hacia un punto fijo, ya sea en razón directa de la distancia, ya sea en razón inversa del cuadrado de la distancia.

Lección 40.

Movimiento de un cuerpo atraído sobre dos centros fijos. Cuando estos centros son la luna y la tierra.

Lección 41.

Movimiento curvilíneo.

Fórmulas generales del movimiento curvilíneo.

Lección 42.

Reducir el movimiento curvilíneo a tres ejes rectangulares.

Lección 43.

Explicar la *trayectoria*. Su construcción por puntos. Ecuaciones diferenciales del movimiento curvilíneo. Ecuaciones sobre una superficie o curva dada.

Lección 44.

Consecuencias principales de las fórmulas precedentes.

Principios de las áreas. Elementos diferenciales del área y de la longitud de una curva relacionada a las coordenadas polares. Definir la velocidad angular. Principio de la menor acción.

Lección 45.

De la fuerza centrífuga.

Determinar esta fuerza motriz. Determinar la magnitud y la dirección de la presión ejercida sobre la trayectoria.

Lección 46.

Consecuencias de esta presión. Determinar la fuerza centrífuga después de la consideración del movimiento circular.

Lección 47.

Comparar a la pesadez la fuerza centrífuga en el círculo. Tensión de un hilo cargado de un peso, y girando alrededor de un punto fijo.

Lección 48.

Disminución de la pesadez al ecuador y sobre los diferentes paralelos. Causa que lo produce. A qué se debe el achatamiento de la tierra.

Lección 49.

Ejemplos del movimiento de un punto material sobre una curva o superficie dada.

Oscilación del péndulo simple.

Definir el péndulo simple. Demostrar que la oscilación es la misma en el vacío que en el aire.

Lección 50.

Fórmula diferencial del movimiento de un péndulo simple en el vacío. Caso en que esta fórmula se integra bajo una forma finita. Caso de oscilaciones muy pequeñas.

Lección 51.

Corrección que debe hacerse a las oscilaciones muy pequeñas de los péndulos simples. Reducción en serie del tiempo de una duración de cualesquiera magnitud.

Lección 52.

Movimiento del péndulo simple en el aire. Decrecimiento de las oscilaciones muy pequeñas en progresión geométrica.

Lección 53.

Movimiento del péndulo simple en el aire, suponiendo la resistencia proporcional al cuadrado de la velocidad. Reducción al vacío. La latitud de un lugar es un elemento de longitud de un péndulo para oscilar segundos.

Lección 54.

Movimiento sobre la cicloide.

El tiempo de caída de un punto material pesado sobre la cicloide es independiente del punto de partida. Péndulo cicloidal. En el vacío la cicloide es la curva *tavtochrone*.

Lección 55.

Investigación de la curva *brachystochrone* en el vacío.

Lección 56.

Generalidades acerca el movimiento del péndulo sobre una superficie dada.

Lección 57.

Ejemplos del movimiento de un móvil enteramente libre.

La trayectoria de un punto material en el vacío es una parábola. Ecuaciones del movimiento de un proyectil en el aire.

Lección 58.

Movimiento de los planetas. Leyes de Kepler. Anomalía escéntrica. Movimiento medio. Posición de un planeta respecto de un plano. Su latitud, longitud, ascensión recta y declinación. Nutación.

Lección 59.

Consecuencias de las tres leyes de Kepler. Ecuaciones diferenciales del movimiento de un planeta en un medio resistente. Método de la variación de las constantes arbitrarias por integración de las ecuaciones diferenciales. Resistencia del éter apreciable en los cometas y casi insensible en los planetas.

Lección 60.

Del movimiento de un punto material sujeto a una fuerza central. Cuándo la fuerza es proporcional a la distancia. Cuándo es en razón inversa del cubo de la distancia. Cuándo es en razón inversa del cuadrado de la distancia. Examen especial del movimiento parabólico, y en qué consiste el problema astronómico de la determinación completa de la órbita de un cometa.

Lección 61.

Teoría de los momentos.

Lección 62.

Principio de D'Alambert en que se reducen a simples cuestiones de estática las de dinámica. Choque de cuerpos blandos, pérdida de fuerza viva. Choque de cuerpos elásticos, conservación de las sumas de fuerzas vivas.

Lección 63.

Choque de los cuerpos de cualquier forma.

Lección 64.

Hidrostática.

Ideas generales de hidrostática. Demostrar el principio de las velocidades virtuales, en el equilibrio de un líquido. Del equilibrio de los fluidos pesados.

Lección 65.

Presión sobre el fondo, independiente de la forma del vaso. Leyes de equilibrio. Determinar el centro de presión y probar que es más bajo que el de gravedad.

Lección 66.

Regla del *metacentro* en los cuerpos flotantes. Teoría de las bombas y sus especies. Prensa hidráulica. Sifones. Balanza hidrostática. Areómetros. Manómetros. Barómetros, y otros usos.

Lección 67.

Hidrodinámica.

Su objeto. Comparar las leyes generales del equilibrio de los fluidos con la ley de Mariotte. Expresiones de las componentes de la velocidad de un fluido en un punto e instante dado. Ecuaciones diferenciales del movimiento de los fluidos. Movimiento de un líquido que gira sin cambiar de figura alrededor de un eje fijo.

Lección 68.

Movimiento de los fluidos en un orificio horizontal y de capas paralelas. Presión y velocidad de cada capa. Fórmulas que determinan la presión y la velocidad de cada capa siendo el orificio horizontal.

Lección 69.

Cálculo del gasto del fluido de nivel constante. Cálculo para cuando es variable. El gasto del líquido es diferente si la pared es delgada. Contracción de la vena fluida.

Lección 70.

Movimiento de un fluido elástico que sale de un vaso por un agujero, suponiendo paralelas las capas. Velocidad de la corriente en caso que el orificio sea pequeño.

Libro de texto: Mecánica de Poisson.

Barcelona 29 de setiembre de 1847.

Lorenzo Presas (signatura rubricada)

ANNEX 3.2

Arcs i voltes segons John Millington

Llibre localitzat a la biblioteca de la Càtedra Gaudí, traduït de l'anglès per Mariano Carrillo de Albornoz (enginyer militar), el 1848.

Títol: *Elementos de Arquitectura*.

Primera edició en anglès, a Filadelfia, el 1839.

Les il·lustracions són separades del text en pàgines desplegable al final del llibre.

Segons Joan Bassegoda, aquest llibre era present a la biblioteca de Joan Martorell, on Gaudí, en temps d'estudiant, hi treballà.

Adjuntem, a continuació, la transcripció literal de tot el capítol d'arcs, voltes i ponts.

SECCIÓN II

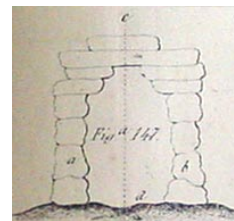
Construcción de arcos, bóvedas y puentes

691.- Descrito ya el modo de fabricar las paredes laterales para el sostenimiento de los arcos, ó las columnas ó pilares necesarios, cuando se trata de fabricar un puente ó acueducto, y el de colocar las cimbras de que necesariamente se ha de hacer uso para sostener los arcos mientras estos se están construyendo sobre aquellas según las reglas prescritas, resta ahora tomar en consideración el arco mismo. Al verificarlo se dividirá la materia en cuatro partes: en la primera se hablará de su forma, expresándose los nombres que se dan a cada una de las partes que lo componen; en la segunda de su estabilidad y presión; en la tercera, de los materiales que deban emplearse en su construcción; y en la cuarta, del método que se ha de seguir en la disposición y colocación de estos materiales.

692.- La forma y dimensiones de los arcos se determinan antes de disponer las cimbras que han de servir para su formación, y por consiguiente, podria parecer muy natural que se hubiera hablado de esta materia en el capítulo en que se describen dichas cimbras; mas en el supuesto que estas pueden hacerse de diversas formas y tamaños, y que la estabilidad, equilibrio y fuerza de los arcos dependen de su propia forma después de retiradas las cimbras, estas consideraciones propiamente corresponden al arco mismo, y por lo tanto se han reservado para este capítulo.

693.- El arco es comparativamente invención moderna, pues que de él no se encuentra vestigio alguno en la arquitectura antigua de los Egipcios ó Persas, ni en los restos Druídicos de la Inglaterra, y parece que solo se servian del umbral ó piedra larga y recta para cubrir la parte superior de las puertas y ventanas sobre que debia continuarse el resto del edificio. En las pirámides de Egipto se encuentran extensos corredores ó galerías que los viajeros describen como arcos; pero no tienen la verdadera forma ni regularidad de tales; pues están formadas en salientes, ó según el término de los trabajadores modernos son corredores volados. Para ello los muros laterales se levantan perpendicularmente hasta la altura necesaria, y luego en vez de seguirlos en direccion vertical, se hace que cada hilada sucesiva de ladrillo ó de piedra sobresalga de la vertical de cada lado, pero cuidando que el centro de gravedad de cada piedra caiga dentro de la línea del paramento del muro, de suerte que las hiladas no tiendan a caerse. Las demás hiladas van sobresaliendo del mismo modo que las anteriores, con lo que se trae el centro de gravedad de la obra superior tan retirado de los muros, que la fábrica vendria a tierra, si no se evitara este accidente construyendo alguna obra sólida sobre la parte posterior de las piedras salientes y de un peso tal, que exceda al de la obra saliente superior; y aquellas piedras han de tener el largo suficiente para que se introduzcan en la obra sólida. Siguiendo este mismo orden, muy pronto se juntan las dos masas salientes, sosteniéndose mutuamente, por lo que no hay que temer su caída, como lo prueba la

existencia de muchos de estos corredores que existen aun en pié en algunos de los edificios mas antiguos. Este modo de construir se verá en la figura 147 que representa una sección transversal de una de las referidas galerías. En esta clase de obra, se cubre el hueco, haciendo que las piedras que han de servir para este efecto sobresalgan por uno ó ambos lados según se quiera, con tal que en el primer caso una pared perpendicular sea más alta que la otra. Así pues, en vez de considerar la parte *b* como pared lateral, supóngase representada por la línea de puntos *cd*; en este caso la cubierta solo se extendería desde la pared *a* formando como un medio arco.



Esta construcción, pues, no tiene la forma, ni se fabrica bajo los mismos principios de los arcos, cuya invención tan hermosa y tan útil para el arte de fabricar, se atribuye generalmente a los griegos, pues se encuentran verdaderos arcos en algunos de sus templos más antiguos. Pero aún estos no parecen haberse empleado, como en las construcciones modernas, con el fin de que sirvieran de adorno, sino con el de obtener resistencia; pues con frecuencia se ocultaban en el interior de las paredes, ó servían para cubrir cloacas. Los frontones ó las figuras triangulares del remate de los techos griegos, han dado tal vez márgen, ó sugerido la idea de la construcción de arcos, pues dos vigas inclinadas y apoyadas la una contra la otra se sostienen mutuamente, siempre que se impida que sus extremos inferiores se resbalen ó escapen hácia fuera; y si del mismo modo se colocan dos fuertes piedras, puede construirse sobre ellas, y resistirían un gran peso.

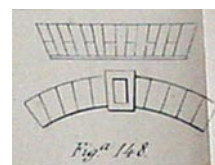
694.- El principio de carpintería, ya recomendado, de introducir puentes horizontales entre los extremos superiores de dos tornapuntas, puede igualmente aplicarse a las obra de piedra, y en este caso se tiene una figura muy parecida a la forma de un arco; y si se supone que cada una de estas piedras está dividida y colocada de modo que formen varios lados de un polígono, se producirá en su consecuencia un arco.

695.- El arco de forma semicircular fue el que adoptaron los Griegos, y es también la que tienen los arcos de los edificios sajones en Inglaterra; es la más fuerte y a la vez más hermosa que se les puede dar. Su fuerza estriba en su arranque ó nacimiento, sobre una línea horizontal que forma su diámetro; por consiguiente la mayor parte del peso obra perpendicularmente en dirección de la gravedad; y por lo tanto tiene poca tendencia a extenderse ó a ejercer presión lateral contra sus estribos: por lo hermoso de su forma es el que juzgan los arquitectos más a propósito para adorno de las obras. Posee las mismas ventajas cuando se aplica a la construcción de puentes, mas no siempre pueden destinarse a este objeto, a causa de la altura a que se elevan sobre los arranques, que debe ser siempre igual a su radio; por cuya circunstancia habria que hacer el camino del puente tan alto (principalmente si este es de un solo arco), que las avenidas ó planos inclinados para llegar al vértice quedarían demasiado pendientes y molestos, a menos que las orillas del rio no estén a una altura considerable sobre el nivel del agua.

696.- Para salvar este inconveniente puede adoptarse un segmento de círculo ó una semielipse, y estas son las formas a que generalmente se recurre, ofreciendo estas sus ventajas é inconvenientes. En ambas se consume mucho menos material que en los arcos semicirculares para cubrir ó abrazar una misma distancia ó espacio; mas la presión lateral del segmento (á cuyo número pertenecen todos los arcos de círculo que tienen menos de 180°) es excesiva y se aumenta rápidamente a proporción que se disminuye la medida angular del largo del arco, por cuyo motivo se requieren en este caso estribos ó apoyos de mayor consistencia para resistir esta fuerza.

697.- Sucede al contrario con los arcos elípticos, pues por ser tan plana su parte superior son débiles por ella si no se cargan los senos con el peso competente para impulsarlos hácia abajo é impedir se suspendan, circunstancia precisa para hacer descender aquella, parte. El logro de este equilibrio perfecto de todas las partes de un arco elíptico prolongado, es por consiguiente materia de grande importancia, y en la que se requiere mucha escrupulosidad y exactitud.

Esta es la forma que comunmente adoptan los prácticos modernos en la construcción de puentes y acueductos ó para cubrir huecos sobre los que haya de construirse alguna obra, y cuando se requiere fuerza y estabilidad. Mas en la arquitectura se usa con frecuencia otra clase de arco en escala menor para cubrir las puertas y ventanas ú otros pequeños huecos, y a la que llaman *adintelado* y a veces *combadó*. Este participa muy poco de las propiedades del arco, y se usa mas bien como adorno que con el fin de deducir fuerza o resistencia de él, pues un umbral común de una sola pieza, del mismo material y de las mismas dimensiones que las del referido arco, en muchos casos le excedería en fuerza. Muéstrase el referido arco en la figura 148 según el órden generalmente adoptado en su construcción, ya sea de ladrillo, ya de piedra; por ella se verá que la parte superior é inferior casi son rectilíneas, aunque siempre se acostumbra darles una ligera vuelta ó comba hácia arriba, pero es tan leve que apenas se percibe; es v. gr., como una elevación ó un seno verso de la línea inferior del arco de 1/2 hasta 1 pulgada en 4 pies.



Por lo único que ha merecido el nombre de arco es por la forma de cuña que llevan todas las piezas que lo componen. Los ladrillos para construir estos arcos se venden bajo la denominacion de *cortados* ó *rozados*,

porque estos se cortan con una sicra ó se pican con una hachuela a propósito, y después se rozan por los lados ó se amuelan en una piedra hasta ponerlos lisos y llanos, haciéndolos concordar exactamente con las líneas angulares préviamente trazadas sobre una plataforma. Estos arcos de ladrillo, por el órden adoptado en su construcción, se llaman raspados, y nunca ocupan todo el grueso de la pared, y como solo sirven de adorno, se les dá únicamente 4 pulgadas de grueso o el ancho de un ladrillo, y la parte del muro que queda por detrás de este la forma un arco ordinario o tosco, ó un umbral de piedra ó de madera.

698.- La palabra o término tosco, cuando es aplicada a un arco de ladrillo, significa que el material con que está formado no se ha rozado ni cortado en figura de cuña, y por lo tanto es el término que se usa para distinguirlos de los raspados o cortados.

699.- Aún hay que hacer mención de otra clase de arco llamado generalmente, aunque con poca propiedad, *arco gótico*, no obstante haberse probado que dicho arco nunca ha sido invención de los godos ni jamás lo usaron en sus construcciones. Mas bien puede llamarse *el estilo u orden apuntado de la arquitectura*, pues este arco se forma por medio de la intersección de varias porciones de círculos, y su parte superior es siempre angular mas o menos abierta. El estilo apuntado tuvo su origen en Italia a mediados del siglo XII, y muy luego se introdujo en Francia y en la Gran Bretaña, en donde fue tan acogido y generalmente adoptado, que algunos escritores lo titulan con bastante impropiedad el órden antiguo inglés, título que no le pertenece porque fue importado del continente de Europa. Su introducción y la preferencia que obtuvo sobre el órden griego anteriormente en uso, parece haber ofendido altamente a alguno de los escritores modernos que han tratado sobre la arquitectura, pues al usar de la voz *gótico* lo hacen satíricamente y aún con desprecio; no obstante, este nombre se conserva y es generalmente usado. De algunos años a esta parte el órden gótico ha tenido muchos partidarios y admiradores entre hombres de conocido gusto, y se ha establecido la moda de imitarlo en los edificios modernos. Puesto que este órden existia mucho antes del descubrimiento y civilización de América, no se encuentran por lo tanto ejemplos originales en los Estados Unidos, y el autor no cree exista en ellos un edificio que pueda decirse sea una copia verdadera de este órden, cuya vista imprima en el alma del espectador las ideas de grandeza y magnificencia de que se siente poseido todo el que entra en la abadia de Westminster, en la capilla de Enrique VII en Londres, en la catedral de York ó en las de Milan, Bruselas y las de muchas ciudades de Europa.

700.- A los principios de la introducción del arco agudo parece no haberse establecido reglas fijas para su construcción, y que solo se reducía a formarlos de dos segmentos de círculo que nacían ó partían desde una línea horizontal é iban a juntarse en la parte superior ó ápice. Sus varias formas se demuestran en la figura 64 de la lámina III. Allí se verá que los dos segmentos que forman el arco están trazados desde los dos centros *a* y *b*, cada uno de los que está colocado a todo el ancho de la ventana y retirados de sus lados con radios *ac* y *bd* que se extienden desde los centros a los lados, opuestos del claro ó luz, lo que dá al arco mucha altura y una punta aguda, y por esto llamado con frecuencia de *punta de lanza*.

En la ventana principal los arcos están trazados con los radios *ef* y *fe*, iguales al ancho del claro ó luz desde los centros *e* y *f* en las líneas verticales que forman sus lados; y si se quiere dividir los huecos de estas ventanas en dos ó más partes, como se verifica con las líneas verticales, se deberan coronar ó rematar aquellas con segmentos que tengan los mismos radios que sirvieron para trazar las partes principales ó externas. Las divisiones verticales como *g*, bien sean rectas ó curvas, se llaman *largueros*, mientras las horizontales se distinguen con el nombre de *traveseros*. Estos arcos, así como otros de diferentes figuras, se formaban antes indistintamente ó sin regla alguna, mas hacia fines del siglo XIII se estableció la segunda forma y fue generalmente adoptada.

A mediados del siglo XV, el arco agudo se alteró en gran manera en Inglaterra, pues era mucho más bajo y su vértice mucho más obtuso, y en vez de formarse con dos segmentos de círculo encontrados, se verificaba con cuatro, dos de los cuales eran de radios mayores que los otros dos, como se ve en la figura, en la puerta principal, y a los que los franceses llaman arcos de cuatro puntos. De estos hay muchos ejemplos en el palacio Real de S. James en Londres, y en muchos otros edificios de igual fecha. Los radios y curvaturas difieren tanto en algunos de estos arcos, que con dificultad se diría haberse observado en su formación órden ó regla fija. En algunos parages aparece como si se hubieran dividido algunas de las puertas por debajo, en cuatro partes iguales; y las curvas mayores, como si estuviesen trazadas desde los puntos *h*, *h*, cada cual a una cuarta parte del ancho del hueco desde los lados y otros dos segmentos menores que forman el nacimiento del arco, parten de los puntos *i*, *i*, tomados al parecer arbitrariamente, aunque en algunos casos el radio es $r/8$ del ancho del hueco. En el reinado de Enrique VIII el arco agudo cayó en desusuo, por haberse hecho ya demasiado común; por consiguiente todas las obras de esta clase que se han construido de aquel tiempo a esta parte, pueden considerarse como meras imitaciones, hijas del gusto y de la fantasia ó capricho de sus directores.

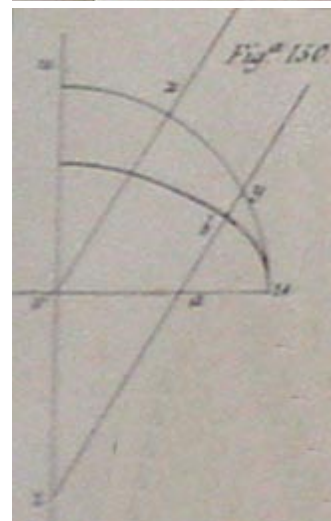
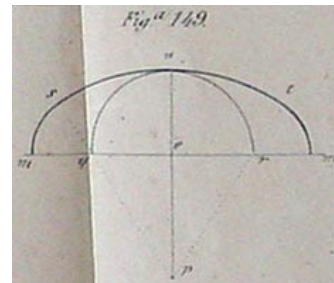
Las referidas formas son las comunmente usadas en el arte de fabricar; pero pueden darse a los arcos varias figuras ó curvas geométricas, tales como la catenaria, ciclóide, parabólica, etc. (nota 134.)

701.- Resta ahora describir el modo de disponer los arcos, dándoles el tamaño que les corresponde, y el modo de trazar y construir las cerchas para las cimbras. Cuando los arcos son pequeños esta operación es sencilla; mas en los de mayor tamaño, cuyos radios están fuera del alcance de toda clase de compases, es más difícil, ó mejor dicho, se requiere más esmero y cuidado. Atando una cuerda delgada en el centro de la curvatura, del largo igual al radio requerido, y haciendo girar el otro cabo ó extremo en rededor de la curva que se intente trazar, mientras se mantiene aquella estirada con igualdad, es al parecer el mejor método y más conveniente para describir una porción de un gran círculo, pues el pedazo de greda ó la pieza afilada de acero que se ata al extremo movable de la referida cuerda, trazará sobre una plataforma cualquier círculo ó segmento de círculo; por lo tanto a este método es al que comunmente se recurre, con la diferencia de que la cuerda se sustituye con un alambre. Aquella no llena el objeto, pues por su elasticidad está expuesta a extenderse ó contraerse demasiado, cuyo efecto se aumenta torciéndose y desenvolviéndose, y por su propiedad hidrométrica se altera su largo cuando se humedece ó pone a secar. En realidad, son tantos los inconvenientes que ofrecen las cuerdas, que es ocioso referirlos una vez que pueden obviarse los más con la sustitución de un alambre de hierro destemplado maleable del diámetro de $1/12$ o $1/10$ de pulgada. Se hace mención de esta clase ú calidad de alambre, porque el templado ó duro que siempre se pule, es menos a propósito, por no poderse manejar tan fácilmente. Este por su elasticidad, no puede estirarse sino haciendo un gran esfuerzo, mientras que el primero es bastante fuerte para resistir la ruerza necesaria para mantenerlo derecho, y estirarlo sin alterarse en nada su largo, prestándose mas a la forma que se le quiera dar, la que conserva todo el tiempo que se juzga necesario. El alambre está sujeto a la extensión y contracción causada por el calor ú el frío, mas su acción dura tan poco, que no hay nada que temer por esta causa. Con este alambre pues, podrá trazarse sobre una plataforma un círculo ú segmento de círculo perfecto, con tal que se ejecute con cuidado, y se tomen las precauciones debidas (§. 694). Sirviéndose de este mismo alambre, se tira primeramente una recta desde el centro de la curvatura hasta la parte superior del arco proyectado, de modo que quede el mencionado arco dividido en dos partes ó porciones iguales; después se tira otra que forme ángulos rectos con la primera. para representar el diámetro (ú cuerda, según fuere el caso) del mencionado arco, con el objeto de formar los estribos ó apoyos del arco. Se trazan tres curvas paralelas: la del extremo ó de la parte exterior representará el lado inferior del arco, tal como deba aparecer después de concluido; la segunda debe quedar dentro de la primera y a una distancia igual al grueso que haya de llevar la cubierta ó enlisonado de la cimbra, que por consiguiente deberá representar la superficie convexa exterior de las cerchas de dicha cimbra; y la que queda mas al centro, representará la parte cóncava ó lado inferior de las cerchas.

702.- No hay pues dificultad alguna en el arreglo y disposición de cualquier arco circular, pero no sucede así con los elípticos, por cuyo motivo no se hace uso con frecuencia de la verdadera elipse, y en su lugar se adopta otra cualquier forma que más se aproxime a aquella, no obstante ser partes de círculos.

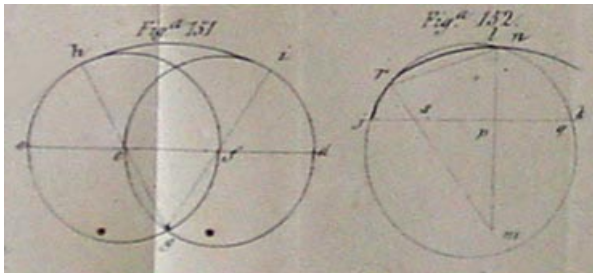
El modo de describir una verdadera elipse, por medio de un hilo atado por sus extremos a los dos focos es bien conocido, y este principio puede adoptarse en escala mayor y con la escrupulosidad competente, valiéndose para ello, en vez del hilo, del alambre de hierro flexible, el cual se sujeta por ambos extremos a los dos puntos de la plataforma que previamente se hayan designado para servir de focos.

Existen varios modos de formar curvas que coincidan aproximadamente con la figura de una elipse, y estas son las que comunmente se adoptan en la construcción de puentes; describense a continuación las que más generalmente han usado los constructores. Tírese la horizontal mm (Fig. 149) que representa el diámetro transversal de la línea ovalada del arco, y en el centro elévese la perpendicular nop . Tómese en una escala de partes iguales el alto que ha de llevar el arco; y llévese al lugar correspondiente en la perpendicular, como desde o a n . Con el radio on , y desde o como centro, describese el semicírculo qnr , y téngase su diámetro qr por base, sobre la que se forma el triángulo equilátero qrp ; prolónguense indefinidamente los dos lados que se extienden hasta la línea horizontal, como desde r a t y de q a s , y los tres ángulos del triángulo equilátero serán los tres centros desde los que deberán describirse igual número de segmentos de círculo de 60° cada uno. Por consiguiente, con el radio pn y desde el centro p se describe el arco snt , extendiéndolo desde un lado prolongado del triángulo ps al otro pt . Luego, desde r y q como centros, y con los radios iguales a las distancias que existen entre aquellos puntos, en el lugar en donde el mencionado arco divide los lados prolongados del referido triángulo, como qs , rt , se describen los dos arcos sm , tm , con lo que se completará la curva.



703.- En este último ejemplo se ha formado el óvalo por la parte exterior, ó circunscrito al círculo; pero razonando en el mismo orden, puede inscribirse en él; mas cuando sea menester hacerlo así, el radio del semicírculo debe hacerse igual al semidiámetro transversal en vez de verificarlo con el conjugado, como se demuestra a continuación (Fig. 150): primero, tírese la horizontal ru del mismo largo que el semidiámetro transversal del óvalo ó cuerda del arco, y con esta distancia, como radio, describase desde el centro v el cuarto de círculo $wxyu$. Divídase este segmento en tres partes iguales como wx , xy , yu ; únense x , v , por medio de una línea recta para determinar la posición de la línea inmediata yz que se tira desde el punto y paralela a xv , prolongada hasta que intersecte la perpendicular wv en el punto z , y en este caso los puntos a y z serán los dos centros desde donde debe describirse el óvalo que se requiere: principiando por a como centro, y con el radio au , describase el pequeño arco ub ; con esto se obtiene el punto fijo b en la línea zy , y el intervalo bz será el radio de la curva mayor que ha de trazarse desde el centro z . En este ejemplo solo se dá la mitad del arco; pero la otra puede completarse repitiendo la misma operación por la izquierda de la línea vertical wvz .

Las curvas descritas en estos ejemplos son muy semejantes a las verdaderas elipses; mas todas difieren en algo ó están circunscritas en la figura, y solo coinciden ó se aproximan a ellas en tres puntos a saber: en los extremos ó nacimientos, y en la parte superior o vértice del arco.



704.- Hé aquí otro expediente a que con frecuencia se reeurre para formar un óvalo menos excéntrico que el antecedente (Fig. 151). Tírese la línea recta cd del mismo largo que el diámetro transversal de la curva requerida, y divídase esta línea en tres partes iguales, en los puntos ef ; de cada uno de estos puntos, considerados como centros, describáse sucesivamente los dos círculos $chfg$, $eidg$, que se intersectan en el punto g , desde donde se tiran dos líneas rectas ó diámetros gh , gi ; luego se toma como radio uno de estos diámetros gh , y desde el punto g se describe el arco hi uniéndolo a los que antes existían ch , id , con lo cual se completa el óvalo.

705.- Se describirá ahora otro método más a propósito y perfecto, inventado por el profesor Robinson, por el cual se consigue trazar un arco que coincide en ocho puntos con la verdadera elipse, y ofrece al artifice los medios de trazar infinidad de óvalos de diversas figuras (Fig. 152). Tírese la línea recta jk que representa el eje o diámetro transversal del óvalo que se quiere formar, y en el centro de este levántese la perpendicular lm para el eje conjugado que corta a jk en el punto p , centro del óvalo. Fijese seguidamente el alto ó semidiámetro conjugado que se quiera dar al expresado óvalo, y después de haberlo tomado en una escala de partes iguales, trasfíerese esta distancia a la perpendicular, como se ve desde p a q , en la línea horizontal. Describáse después el círculo jng de modo que atraviese tres puntos dados j , n , q , y si desde cualquier punto r hasta j en el arco jrn se figura la cuerda rn , se tira la línea rsm , formando el ángulo nrs igual al rnp , y se juntan los puntos s , m ; en este caso s y m serán centros de dos círculos con que se formará, la cuarta parte jrn de un óvalo, según se manifiesta por la línea de puntos; y teniéndose ya los dos radios necesarios, la otra mitad de la curva se puede obtener demarcando la distancia ps hácia k para determinar el centro del segundo arco.

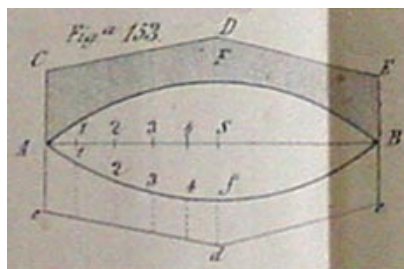
706.- Demostrados ya los medios de obtener las diferentes formas de arcos a que generalmente se reeurre en la práctica, se pasará a examinar otra curva de que hablan con más frecuencia los escritores, pero que rara vez se pone en práctica. Hacia fines del siglo pasado, la construcción de arcos era materia que ocupaba toda la atención de algunos de los matemáticos de más nombradía de Europa; y el Dr. Hooke aseguraba que el feston ó figura que formaba una cadena perfectamente flexible, ó una cuerda de un peso igual en todas sus partes, cuando se suspendían al aire por sus dos extremos; daba, si se invertía, la verdadera forma de los arcos cuyas partes quedaban en contacto por los mismos puntos, porque en este último caso, las fuerzas con que se comprimían mutuamente eran exactamente iguales y opuestas a las que ejercían tirando una de otra, cuando aquellas se suspendían al aire.

707.- El principio es muy exacto, y puede aplicarse a todos los casos que ocurran; pero se produce un equilibrio tal, que no admite la más leve alteración. Si el peso de la cadena no es igual en todas sus partes, ó en cada eslabón, resultará una curva que no será igual ni de la misma fuerza en ambos lados. Si la cadena es de igual peso en toda su extensión, y desde luego guarda por sí misma un equilibrio perfecto, de modo que produzca una curva perfecta, y después se carga, de intento, con diversos pesos repartidos indistintamente en sus diferentes partes; la curva variará de forma, sin embargo de que guardará otro equilibrio en esta nueva posición, porque en este caso ocurrirá un efecto de composición y resolución de fuerzas; y como cada eslabón debe considerarse como si fuese quicio ó eje sobre que giran sus partes, la curva pierde por esta razón su forma y simetría, y queda defectuosa é irregular aunque por esto no pierda el equilibrio en que se halla con respecto a sí misma. Puesto que

el peso de la tierra que se echa sobre los puentes para formar el camino, no carga sobre ellos con igualdad, como tampoco los pesos movibles que pasan por ellos, la curva no queda cargada en todas sus partes con un peso igual, y por lo tanto no es propia para la construcción de un arco, sin recurrir antes a los medios necesarios y conducentes para darle una forma invariable. Ahora bien, si se supone que en vez de constar la cadena de una série de eslabones movibles, se compusiera de un número de trozos ensartados en una cuerda, y de tal figura que los lados que hubiesen de quedar en contacto, fuesen planos que dividiesen en dos partes iguales el ángulo que formase la ensarta en cada junta ó unión, en este caso se produciría un arco o curva de alguna estabilidad, o tal que podría admitir una pequeña alteración sin desfigurarse, porque el equilibrio del festón primitivo solo existe en los vértices de los ángulos, en los que queda la presión perpendicular a las superficies en contacto, que pueden considerarse como infinitamente pequeñas. Así pues, si la curva o línea sostenedora atraviesa aun perpendicularmente las superficies que estan en contacto, y estas se consideran extendidas, las condiciones que se requieren para el equilibrio todavía se obtienen, con la diferencia de que se consigue aproximarse a la estabilidad de un cuerpo que descansa sobre un plano horizontal. Si la perpendicular que atraviesa el centro de gravedad queda dentro de la base del cuerpo, no solo se sostiene este, sino que se requiere hacer un esfuerzo para volcarlo.

708.- Estas conclusiones claramente deducidas del principio del festón demuestran, que mientras mas largas son las *juntas* en contacto, mayor es la estabilidad de los arcos, o mayor la fuerza requerida para derrumbarlos. Por lo tanto, es requisito de suma importancia proporcionar que las piedras de los arcos sean tan largas cuanto lo permita la economía. Este principio parece no haber sido desconocido a los arquitectos antiguos, quienes con el objeto de obtener esta fuerza auxiliar, sin gran desperdicio de materiales, hacian sobresalir algunas hiladas de las que componian sus arcos a la distancia de 6 pulgadas o de 1 pie, del paramento general de la obra figurando formeros; y se ven con frecuencia en los arcos góticos, al parecer para servir de mero adorno, pero que en realidad debieron introducirse con la mira de dar mayor sujeción a la obra con la tesura y estabilidad que reciben de aquellas.

709.- Estos son los principios generales sobre que está fundada la forma del arco de festón: ahora se pasará á explicar el medio de obtener esta curva, llamada *catenaria*, y cómo se mantiene en equilibrio cuando carga sobre ella el peso de un camino. Se quiere, por ejemplo, determinar la forma de un arco de esta clase, cuya cuerda AB tenga, de alto el que representan las letras F, S, (Fig. 153), y sobre el cual pase un camino en que la altura y declivios correspondan con la curva CDE por la parte de arriba. Inviértase, toda la figura ACDEB, de modo que forme la representada por las letras *AcdeB*: cuélguese una cadena de alambre fino de metal ú otro material de un peso y grueso uniformes en los puntos A y B, y sea ésta de un largo tal que alcance al punto más bajo *f*, o algo más abajo, correspondiente al F. Divídase AB en cualquier número de partes iguales 1, 2, 3, 4 etc. , y tírense líneas verticales que atraviesen, la cadena en los puntos correspondientes 1, 2, 3, 4 etc. Tómense otros pedazos de cadena del mismo grueso y suspéndanse de los puntos 1, 2, 3, etc. de la cadena A*f*B, y con esto se altera la forma de la curva. Acórtense estos pedazos de cadena hasta que sus extremos inferiores coincidan con el camino invertido *cde*. Los largos o añadiduras mayores que quedan pendientes en las inmediaciones de los extremos A y B tirarán hácia abajo la cadena por los indicados puntos, lo cual es causa de que el centro *f* (que no está tan cargado) se eleve un poco y quede próximamente á su correspondiente altura.



Es claro que por medio de esta operación se produce un arco en perfecto estado de equilibrio en todas sus partes, bajo el peso de una materia homogénea que se coloca sobre él, porque como el largo de la cadena varia, estará en proporción al peso de la tierra en sus posiciones correspondientes; mas quedan que hacer algunas otras consideraciones para llenar perfectamente el objeto propuesto. Sucede en los *arcos equilibrados*, para puentes que se cargan de este modo, que el peso de las piedras del arco es al peso de la materia con que se sobrecargan sus senos y vértice, como el peso de la cadena A*f*B es a la suma de los pesos de todos los pedazos de cadena que cuelgan de aquella, al menos muy aproximadamente. Pero esta proporción no es conocida de antemano, por lo que se procederá del modo siguiente. Dése, pues, a la curva producida, el grueso de un arco de piedra que se considere suficiente para asegurar su estabilidad: calcúlese seguidamente el peso de las piedras que componen dicho arco y el de la tierra y cascajo con que se han de rellenar los pies o senos y la parte superior que forma el camino o piso; y si la proporción de estos dos pesos es la misma que la de los pesos de las cadenas, puede estarse seguro de que se ha obtenido la curva; mas si estos difieren, entonces hay que calcular la porción que debe agregarse o quitarse a los pedazos de cadena pendiente para que sean iguales las dos referidas proporciones. Despues de hecha esta operación se obtendrá una nueva curva, en la cual se requiere, tal vez, hacer alguna pequeña alteración en los eslabones para acomodarlos al camino o piso, y la curva que se obtenga por este medio coincidirá, casi, con la que se requiere.

710.- El profesor Robinson puso en práctica este método, que verificó en escala mayor; el arco tenía 23 pies de cuerda, las piedras que lo componían solo eran de 3 pies, y se cargó con rajones y cascajo. Hízose previamente el cálculo en la suposición de que el arco sería casi elíptico. La distancia entre los puntos 1, 2, 3, etc. se dispuso de modo que determinase la proporción de los pesos de la cadena y estos viniesen conformes con lo expuesto. La curva distaba mucho de ser elíptica, pues que formaba ángulos de consideración con las verticales del nacimiento del arco. La verdadera proporción de los pesos de la cadena, después de haberse arreglado todo y hecho las alteraciones debidas para la disposición y formación del camino, era muy distinta de la que se esperaba. Se arregló, y esto produjo muy poca alteración en la curva, y se observó no haber variado ni en 2 pulgadas en parte alguna del verdadero arco. Una vez concluida la operación, el citado profesor formó la curva matemáticamente, y vió que esta difería muy poco de la que se construyó mecánicamente. Este resultado fue muy satisfactorio, pues por él se vió que la primera curva que se formó en dos horas de trabajo, y bajo una suposición tan distante de la probabilidad, aparecía bastante exacta para el objeto, puesto que en ningún punto desmintió aquella 3 pulgadas de la curva verdadera y perfecta, que por lo tanto quedaba internada o bien retirada de las juntas de las piedras que debían emplearse en el arco. Así, pues, cualquier artesano inteligente, aunque ignore las matemáticas, puede ejecutar esta operación con poco trabajo, y dar la debida forma a los referidos arcos, cualesquiera que sean las condiciones a que estén sujetos.

711.- El defecto principal que se nota en una curva formada del modo ya descrito, es su poca elegancia, porque hácia su nacimiento no se eleva formando ángulos rectos con la línea horizontal; pero esto sucede con toda curva *equilibrada*, del mismo modo que con los segmentos de círculo, y nada influye en su fuerza, porque en los puntos inmediatos a los estribos puede darse a la curva la figura que mejor acomode, supuesto que en estos puntos es siempre sólida la obra que en ellos se ejecuta, y todo desvío de la verdadera curva equilibrada que ocurra y la eleve perpendicularmente en los referidos puntos, y que tienda a darles mayor fuerza, es hasta propio y conveniente. La formación de esta curva indica que la presión obra verticalmente en todas las partes del arco; mas el cascajo y los escombros ejercen cierto grado de presión lateral al tiempo de asentarse, que retienen después, y por lo tanto es preciso aumentar algo más la curvatura hacia los extremos del arco para contrapearlo. No se ha podido calcular definitivamente la cantidad de esta presión lateral por medio de ninguno de los experimentos hechos hasta ahora; y para impedir sus efectos sería tal vez más conveniente dividir la cadena misma en las partes iguales 1, 2, 3, etc. en vez de la línea horizontal AB, pues entonces la curva se acercaría más a la forma correspondiente.

712.- El arco de feston ó catenario ha tenido muy poco uso, lo mismo que las curvas parabólica, hiperbólica y cicloide, porque al parecer no brindan mayores ventajas de las que se obtienen por medio del círculo o de la elipse. Por lo tanto el semicírculo, ú otro segmento menor de círculo, y la semielipse, son las que constantemente se usan para la formación de arcos, no solo porque son más fáciles de disponer y construir, y que en su ejecución no se está tan expuesto a cometer errores, sino porque generalmente se cree son de mejor aspecto y de más hermosa vista. La elección de la curva debe guardar armonía o depender en gran manera de la figura y naturaleza del terreno en que ha de construirse el puente; teniendo presente al mismo tiempo, que el arco semicircular es en casi todos los casos el de mayor resistencia y el menos propenso a ejercer en sus cimientos la expansión o presión lateral. Si un río atraviesa un valle profundo por un punto inferior al nivel del terreno adyacente; y los caminos o inmediaciones del puente proyectado quedan a una altura de consideración sobre el agua, en este caso debe preferirse un arco semicircular, o uno que descansa sobre pilares de tal altura que impida la depresión del camino en dicho puente; pero si el terreno es llano y se eleva muy poco sobre el nivel del río, un semicírculo de mucha cuerda formaría una eminencia o altura de difícil ascenso; por lo tanto, para evitar este inconveniente se deberá hacer uso de un arco elíptico o de algún segmento de corta elevación, o bien se divide el ancho del río con varios arcos, aunque estos aumentan el costo de la obra, y pueden ser un obstáculo a la corriente del río. La naturaleza de este puede aun influir en las expresadas consideraciones: si el río es navegable los arcos pequeños ofrecen sus inconvenientes; y si las embarcaciones son de vela, entonces es de necesidad un arco semicircular, no obstante las dificultades que pudiera ofrecer la elevación del camino. Por otro lado, si la corriente es muy rápida, los arcos rebajados también ofrecen muchos inconvenientes, á menos que no se construyan sobre pilares de tal altura que queden fuera del alcance de las mayores crecientes del río, pues en los puentes son raros los accidentes que ocurren causados por la acción de la corriente, cuando esta choca contra los pilares; mas el agua puede elevarse a tal altura, que no pudiendo pasar libremente por debajo de los arcos, ejerza su fuerza comprimiendo lateralmente al puente mismo. El arco elíptico no solo posee la ventaja de poderse hacer sobre él un camino llano y de poca altura, sino otra aún de mayor importancia; tal es la corta porción de material que requiere su construcción, pues la diferencia de la cantidad de obra viene á ser lo que el radio del arco semicircular es al semidiámetro conjugado de la elipse que puede inscribirse en él. Así, pues, tómese como ejemplo un arco de 72 pies de cuerda; para que este sea un semicírculo, su radio y alto competentes deben ser de 36 pies. Mas si se elige un arco semielíptico de 24 pies de alto, el semidiámetro conjugado de 24 pies solo es $\frac{2}{3}$

de 36 pies; por consiguiente, no solo se ahorra en dicho arco una tercera parte del costo de los materiales y del trabajo, sino que a los pilares se les alivia igualmente de la tercera parte del peso.

713.- A más de las circunstancias locales que anteceden é influyen en la forma del arco, también deben tomarse en consideración su estabilidad y presión; y como quiera que todas las partes de que se compone un puente y un arco tiene cada cual su correspondiente nombre técnico, se expresarán estos antes de todo; como asimismo se explicarán varios principios aplicables á la construcción de arcos, de los que aún no se ha hablado.

Una de las reglas principales y más esencial en la construcción es, que cuando un arco consta de cierto número de sillares ó trozos de piedra, ú otro material, puestos en contacto uno con otro, las juntas o uniones deben ser tan planas y ajustadas como sea posible, á fin de lograr su perfecta unión o contacto, y todas perpendiculares a la curva (o a las tangentes de ella en su punto de contacto) que forma la parte interior del arco; por consiguiente estas juntas deben ser divergentes, o abrir a medida que se alejan del agua; y así todas las piedras de que se compone el arco tendrán la figura de cuña se distinguen con el nombre de *dovelas*. A la parte inferior del arco se llama *intradós* ó *sofito*, usando del primer término cuando se habla de arcos grandes, tales como los de puentes; y del segundo cuando se refiere a los pequeños comunmente usados en los edificios. Del mismo modo se llama *extradós* a la parte exterior del arco. A otra línea que con frecuencia queda paralela a esta última, se dá el nombre de *arquivolta*. Esta es la curva formada por los lados superiores de las dovelas o sillares del arco, y quedá paralela con el intradós cuando dichas dovelas son todas de un mismo largo, pues que de otro modo no puede ser. Entiéndese alguna vez por arquivolta el conjunto de las dovelas de que se compone el arco. Las extremidades inferiores de este se llaman *nacimientos* ó *arranques*, ó *líneas de arranque*, y estas, así como las juntas de las dovelas, deben quedar en direcciones perpendiculares al intradós; por consiguiente, todo arco semicircular ó elíptico debe nacer desde una superficie horizontal, como parte del diámetro de dicho arco ó elipse. Todo segmento de círculo nace de las líneas que forman parte de los radios de los referidos arcos; y todo segmento elíptico ó de otra curva cualquiera deberá nacer de las líneas cuyos ángulos horizontales varíen según la extensión del segmento propuesto, porque dichas líneas deben quedar perpendiculares a la parte de la curva que ellas intersectan.

714.- Para que los arcos queden bien cimentados o asentados sobre los estribos que los sostienen, deben rematarse por sus extremos coincidiendo con las direcciones de las *líneas de arranque*. Los estribos de los arcos semicirculares o semielípticos son planos en su parte superior, cuyo remate lo forma una piedra grande llamada *cojin*, mientras que en todas las demás especies de arcos aquellos se rematan con piedras, con el corte arreglado a los ángulos de las líneas de arranque, y siempre se escogen entre las mayores y de mejor calidad, y se llaman entonces *salmeres* (nota 135). Esto influye en algún modo en el ancho de los pilares, pues cuando dos arcos nacen de un solo pilar es de necesidad un salmer doble ó uno que presente ángulos iguales en cada uno de los referidos arcos. Estos salmeres dobles deben considerarse como compuestos de dos ángulos rectos, que tienen un lado perpendicular (sobre el centro del pilar) comun a ambos; la parte plana de dicho pilar viene a ser, pues, su base comun ó continuada, y las faces inclinadas sus hipotenusas. Ahora bien, la faz inclinada ó hipotenusa siempre debe ser igual a la altura de la dovela que debe apoyarse en ella, y determina el largo de uno de los lados del triángulo; y como que este es rectángulo queda determinado también por consiguiente el alto de la perpendicular y de la base: el largo duplicado de esta es el ancho menor que puede darse a uno de los susodichos pilares que haya de apearse dos arcos, aun cuando estos estén en contacto; pero en el caso de quedar distantes, la cantidad del intervalo que media entre ellos se agrega al ancho. Los pilares que hayan de servir para un semicírculo, también requieren un ancho igual al largo duplicado de las dovelas con que se construye el arco. La dovela del centro de todo arco se llama *clave*, por las razones que más adelante se dirán: esta piedra es generalmente mayor que todas las demás de que se compone el arco. La superficie angular entre uno y otro arco se llama *seno*. Al centro del arco se da el nombre de *corona* ó *vértice*, y a la parte que se eleva por los lados desde la línea de arranque hasta cierta distancia, *riñones* ó *ancas* pero su largo nunca se ha fijado con exactitud. Los paramentos de un arco son los frentes que se presentan en ambos lados de un puente.

715.- La estabilidad, fuerza y presión de los arcos han sido objetos de que han tratado, aunque sin estar acordes, varios constructores, matemáticos y autores, y tal vez no ha habido materia que más haya ocupado la atención. Los teóricos establecen y sostienen generalmente que el arco de equilibrio es superior a todos los demás en cuanto a sus cualidades. Pero los prácticos, sin negar o sin aventurarse a disputar la verdad y exactitud de las deducciones ya expuestas, ponen no obstante más confianza en la fuerza positiva que en el contrapeso ó delicada operación de equilibrar, siendo de esta opinión algunos de los matemáticos y teóricos de más nota. Considéranse como arcos de equilibrio ó equilibrados los construidos con trozos de piedra ó de otro cualquier material, cuyos pesos y presiones laterales se determinan y calculan con tal cuidado y escrupulosa exactitud, que si se disponen con juntas lisas y llanas, sin mezcla ú otra cosa equivalente, se sostienen sin notarse tendencia alguna a caerse ni aún a cambiar de forma, no ocurriendo esto en realidad sin que contribuya a ello una fuerza extraordinaria, pues que las presiones de todas las piezas, producidas por la unión de las dos acciones (la de su peso y la del impulso lateral), estan perfectamente equilibradas en todas las partes del arco. No hay

duda que este equilibrio general es sumamente apetecible en la construcción de todo arco, y que debe procurarse todo lo más que fuere posible, pero su completa existencia es casi siempre incompatible con la naturaleza de los materiales y su labor, pudiendo alguna vez oponerse a la hermosura del diseño o al objeto del que lo traza. Así, pues, las dovelas que se notan en derredor de la cimbra representada por la figura 138, siendo todas de un mismo tamaño, no puede ser este un arco equilibrado; porque las piedras del centro tenderán a caerse, y siendo solo iguales en peso no tienen otra cosa que las sostenga, y con su tendencia a caerse ejercen una presión impulsiva o lateral, que se trasfiere a las piedras inferiores que les quedan a uno y otro lado. Las cinco piedras inferiores que siguen a ambos lados apenas tienen otra sujeción que la que reciben de las de la parte superior del arco; por consiguiente tenderán también a caerse, y esta tendencia se aumenta con el peso de las piedras de dicha parte superior que gravita sobre ellas, junto con su presión lateral; así que, las piedras inferiores resisten más peso que las superiores, y sobre ellas obrará una fuerza mayor que propende a sacarlas fuera de sus posiciones: para que el arco esté equilibrado es preciso aligerar y reducir el tamaño de las dovelas de la parte superior, y al mismo tiempo aumentar las superficies de las de abajo. Pues que en los arcos la presión (compuesta del peso de los materiales y de su tendencia a empujar o extenderse) va aumentándose desde su vértice hacia sus pies o arranques, la cantidad y peso del material debe aumentarse en la misma proporción. En el puente nuevo de Londres, parte del cual se manifiesta en la figura 140, se verificó algo parecido a esto, y las dovelas de la parte superior son más cortas que las inferiores; y esto mismo se nota en otros muchos puentes, principalmente en los magníficos arcos de hierro colado del puente de Southwark, cuyo arco central tiene 262,5 pies de cuerda, y es el arco mayor que existe en el mundo, y a la vez uno de los más rebajados, pues este enorme arco solo tiene de alto o de seno verso 26 pies. Los dos arcos laterales solo tienen 230 pies de cuerda cada uno, y se elevan a la altura de $19 \frac{2}{3}$ pies, y la armadura de hierro colado que compone la parte inferior de estos arcos es de $6 \frac{1}{2}$ pies de alto en la parte superior, y se aumenta hasta el ancho de $8 \frac{3}{4}$ pies en la línea de arranque.

716.- El equilibrio de todas las partes que componen un arco sería de la mayor importancia, en el supuesto de que un gran arco haya de permanecer aislado é independiente de otro objeto cualquiera, y no estuviese expuesto a cambio alguno en la cantidad o dirección del peso que carga sobre él. En este caso no existe probablemente otro método mejor para determinar la forma que debe llevar un arco, así como la del camino que ha de construirse encima de él, que el de la cadena y sus pedazos accesorios, ya descrito en el párrafo 709. Sin embargo, no hay concordancia entre la exacta dirección vertical en que deben tirar de la cadena colgante los pedazos de cadena adheridos a ella, y la en que comprimen al arco, la tierra y demás materiales necesarios para formar el piso. Estos, particularmente cuando los cala el agua llovediza, no solo comprimen perpendicularmente, sino que también ejercen cierta presión hidrostática o lateral, y además el peso que carga sobre el puente no se reparte de una vez por todo el arco, sino progresivamente. Este principia a obrar comprimiendo hacia abajo uno de los extremos, y como por el otro no hay nada que lo contrapesa, sigue luego a la parte superior, y de aquí pasa al extremo inmediatamente; así pues, las piezas o pedazos de cadena pendientes que tiran constantemente y por igual, pueden representar aproximadamente la acción de la tierra que está sobre el arco, mas de ningún modo la acción exacta del peso movable, que en este caso se supone ser de tal magnitud que obre de un modo sensible en el arco.

717.- El estudiante sacará instrucciones importantes respecto a la naturaleza de estas presiones y lo que ocurre en el arco, como también en los medios de conservar su figura, haciendo una operación bien sencilla; tal es doblar una caña ú otra pieza de madera flexible de 18 a 20 pulgadas de largo, hasta darle la forma de un arco semicircular y mantenerla en esta posición introduciendo sus extremos en una pieza plana de madera con agujeros hechos al intento para recibirlos. Si se comprime uno de los lados del arco así formado bajará la parte superior y el lado opuesto se dilatará o se hará hacia fuera, formando de este modo la caña una curva imperfecta. Si entonces se comprime el vértice se hundirá, pero al efectuarse esto se dilatarán o saldrán hacia fuera los dos lados a un mismo tiempo, dando de este modo a la caña una forma muy parecida a la elíptica, y se notará que no se requiere hacer mucho esfuerzo para producir estos efectos: lo que demuestra que este arco solo puede sostener una carga pequeña que grave sobre él con igualdad. Hecha esta experiencia, ábranse algunos agujeros en la tabla sobre la línea que une los extremos de la caña é inmediatos al centro del arco; pásense por ellos varios cordeles y átese uno de estos al vértice mientras los demás van radiando y atándose del mismo modo a la caña, a distancias iguales por uno y otro lado del centro del referido arco; asegúrense los cordeles fuertemente a sus correspondientes agujeros de modo que en nada se altere la forma semicircular de la caña, y se notará que la fuerza del arco se aumenta considerablemente; pues si ahora se comprime la parte superior, las extremidades se saldrán hacia afuera por estar sujetas en sus posiciones con los cordeles. Si del mismo modo se verifica la presión en alguno de los extremos, el opuesto no se alterará por la misma causa. Esto indica lo que debe hacerse para dar estabilidad a un arco verdadero: en primer lugar el cerco ú semicilindro ahuecado de cantería que forma el arco ha de ser de una fuerza y grueso tales que no se deshaga o desmorone con el peso que haya de llevar encima; este arco debe ir desde luego tan bien atado y sujeto, que ningún peso extraordinario o casual que sobre él se coloque pueda en manera alguna alterar su figura.

Esta atadura o sujeción a la parte de abajo no puede efectuarse (con cuerdas, como se verifica en el modelo, ni tampoco con cadenas o barras de hierro, porque estas obstruirían la navegación, y además no habría

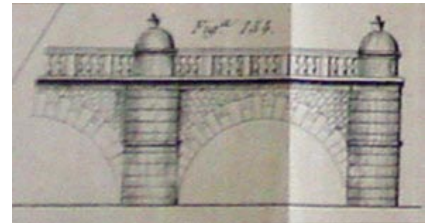
en donde asegurarlas en la parte inferior; pero si se aplican pesos en la superior del arco, estos producirán exactamente el mismo efecto que las cuerdas o ataduras que se fijan por debajo de él; así pues, la tierra misma ú otro material sólido que se emplea para cubrir los arcos y macizar los senos o intervalos entre unos y otros, en vez de comprimir los arcos les da mayor fuerza y firmeza para resistir pesos desiguales; pues la carreta de mayor peso que puede llegar hasta la parte superior de un arco nada pesa en comparación del peso de la cantidad de materiales que sirven para rellenar los susodichos espacios; y como quiera que toda esta porción de tierra ha de suspenderse antes que las dos extremidades puedan dilatarse, de aquí es que el arco permanecerá siempre en la misma posición.

718.- Aunque este modo de operar parece fundado en principios sólidos, no lo es en realidad, pues no pueden aplicarse a la práctica sin que preceda un escrupuloso arreglo o algunas modificaciones; pues sin embargo de impedirse por medio de la operación de cargar los extremos, que estos se dilaten o salgan hacia fuera obedeciendo o cediendo a la fuerza de un peso que se aplica en la parte superior; no obstante, la forma misma del arco pide se ponga muy poca o ninguna tierra en dicha parte superior, mientras que para abrir los extremos y rellenar los senos se necesita de una gran porción de material a fin de poderse formar un camino o piso horizontal. De aquí resulta que la presión de la tierra no equivaldrá a la acción de los cordeles del modelo, porque mientras existen dos pesos enormes a los lados, sobre la parte superior o del centro no hay nada que contrarreste dichos pesos; por consiguiente esta parte se suspenderá cediendo a la presión, con lo cual se destruye la simetría de la curva, y probablemente el arco entero. Una de dos cosas debe hacerse en este caso; recargar la parte superior hasta contrapesar la presión causada por los senos, o aliviar a estos de la cantidad del peso que pueda perjudicar a la parte superior. Una prueba de la necesidad de atender a esta especie de equilibrio ocurrió en Gales en la construcción del puente sobre el río Taff cerca de Llantrinssent, en Glamorganshire, conocido en el país con el nombre de *Pont y ty Prydd*, que a la vez de considerarse como uno de los puentes mas extraordinarios de la Gran Bretaña, es al mismo tiempo interesante por la historia de su construcción. Aunque el Taff no se acerca a ser un río ancho, corre no obstante por entre dos rocas, y pasa por un terreno tan montañoso, que lo expone a grandes avenidas é inundaciones: el primer puente de piedra construido por un tal Mr. William Edwards, albañil del país, constaba de tres sencillos y hermosos arcos formados en el valle, y se concluyó en 1746. Este puente fue admirado de todos mereciendo la aprobación general, y aú el mismo Edwards quedó tan satisfecho de la estabilidad de su obra que prestó fianza por siete años, en cuyo tiempo aseguró no habría que hacer en ella reparo alguno. Pero a los dos años y medio ocurrió una gran avenida en la que las aguas arrastraron consigo gran número de troncos y ramas de árboles y otros objetos, que retenidos por el puente formaron una barrera é impidieron el curso de las aguas, elevándose estas a tal altura, que al fin lo derrumbaron y arrastraron. En consecuencia se obligó a Edwards a que construyera otro puente, lo que ejecutó con toda la diligencia posible. Resuelto a que su obra quedase esta vez con toda la solidez debida adoptó un solo arco, formándolo de un segmento de círculo de 186 pies de diámetro. La cuerda de dicho arco tenía 153 pies, y con el objeto de ponerlo fuera del alcance de toda inundación, y evitar los daños consecuentes a ella, lo elevó a la altura de más de 38 pies sobre el nivel del agua. Las rocas de las orillas le prestaron excelentes apoyos o estribos para construir un arco de esta naturaleza, y no tuvo obstáculo ni dificultad alguna que vencer al llevarlo de una a otra roca. Solo faltaba hacer los muros laterales y rellenar con tierra los senos para formar el camino horizontal. Ya se había casi concluido la obra, cuando al cubrir los senos con la tierra, sin poner un peso equivalente sobre la parte superior, se notó que el de aquellas era excesivo, pues que se hundían levantando dicha parte superior; de modo que las dovelas perdieron sus posiciones, y en 1751, cuando este segundo puente estaba en vísperas de concluirse, se desplomó, precipitándose al fondo del río.

Esta serie de desgracias hubiera desalentado a otro hombre cualquiera, mas no sucedió así con Edwards. Percibió su error conociendo en qué había consistido el mal éxito de la obra, y persuadido de que no podía adoptar otra forma que la antecedente para la construcción del puente, principió de nuevo los trabajos y formó un arco enteramente igual al que se había derrumbado; mas en vez de sobrecargar los arranques como hizo anteriormente, le ocurrió la feliz idea de formar tres huecos cilindricos o socavones de ladrillo que atravesaban horizontalmente de un lado del puente al opuesto en cada seno del arco, dando a los inferiores 10 pies de diámetro, a los segundos $6 \frac{1}{2}$, y 3 y 4 a los superiores. Rellenáronse los senos con tierra bien apisonada por arriba, por debajo y todo enrededor de los seis huecos o socavones, con el objeto de darles sujeción y levantar el camino llasta su correspondiente nivel. La falta de peso por la corta cantidad de tierra necesaria en este caso para rellenar los espacios, satisfizo completamente el problema, y este tercer puente, concluido en 1755, se ostenta en el día como un monumento de la perseverancia é ingenio de su autor, y es de todos admirado por su estabilidad, sencillez y su aspecto hermoso é imponente.

719.- Se ve, pues, la poca seguridad que ofrecen los arcos de puentes construidos con dovelas de igual tamaño, y aún aquellos que guardan equilibrio respecto a ellos mismos, y cuyos espacios intermedios o senos se rellenan con tierra a la ventura o sin orden ni medida; pues la porción necesaria para cubrir los senos de un arco es mucho mayor que la que puede colocarse en su parte superior, y el peso mayor naturalmente supera al menor, y si se comprime dicha parte superior se acabaría por destruir el arco. Ha de buscarse, pues, un medio para dar seguridad al arco, y esto se consigue colocando dovelas de mayor extensión en los dos lados inferiores, con lo que se le da una apariencia muy semejante a la de un arco equilibrado, que puede o no alterar la forma exterior del diseño. Si se quiere que el arco aparezca como si estuviese construido con dovelas de un mismo tamaño, no

hay más que labrar las caras que hayan de quedar a la vista, dándoles dimensiones iguales, y después construir los muros laterales sobre ellos, y las dovelas ocultas en el arco (sobre las que gravita un peso mayor que en las exteriores) pueden llevar el largo que se las quiera dar. En el puente de Westminster, en Londres, cada hilada alternada de dovelas parece tener doble espesor o peralto que las intermedias; mas no por esto se crea que está construido bajo este orden. Esta es solo una forma que se ha dado a las piedras por la parte exterior, con el solo objeto de dar hermosura y vista a la obra. En el puente de Blackfriars también aparentan las dovelas ser todas de un mismo tamaño, o que el intradós y extradós son paralelos, y cada piedra alternativamente aparece como entera, y las intermedias como divididas en dos con una junta o unión supuesta, mientras que en la realidad las dovelas inmediatas a la clave del arco del centro tiene cada una 8 pies y 3 pulgadas de largo, y cada piedra es sucesivamente mayor a medida que se aproximan a las que se hallan colocadas en los arranques, las que son de 9 a 10 pies de largo. Este es el verdadero principio que debe adoptarse para construir un arco de gran tamaño; pues si a cada dovela, según fuere desviándose del centro, se le dá mayor largo que a la precedente, es tal la fuerza que por este medio se logra dar a los extremos, que por grande que sea el peso de la tierra que fuese necesario colocar sobre ellos, no por esto se alterarian en lo más mínimo; a lo que se agrega, que los espacios que han de rellenarse quedan reducidos considerablemente por las mismas piedras que contribuyen a dar firmeza al arco. Tampoco es necesario que estas grandes dovelas sean de una sola pieza, porque si así fuera, con dificultad se podrían proporcionar un número bastante de piedras del tamaño competente para el efecto. Elígense las piedras de mayor tamaño para el cerco o paramento del arco, como asimismo para el intradós; pero en su interior puede hacerse uso de piedras más pequeñas, con tal que sean tan duras é incompresibles como las demás, y que sus extremos radien o coincidan exactamente con las direcciones de las juntas de las piedras de mayor tamaño. En la construcción del puente de Westminster se llevó este principio a tal grado, que las dovelas de los arcos tocaban o se intersectaban con la obra sólida de los pilares, como se ve en la figura 154, de modo que no había recelo de que pudiese ocurrir alteración alguna, sin que antes se comprimiera el pilar. En la construcción del de Blackfriars, Mr. Mylne enlazó los arcos ingeniosamente desde el uno al otro extremo del puente, combinando esto de modo que parte del peso de cada dos arcos adyacentes se trasfería a otro inverso construido en los pilares para recibirlos.



720.- Resulta pues, que el perfecto equilibrio del arco mismo, circunstancia que tan recomendada ha sido, y sobre la que han hablado detenidamente los matemáticos de más nombre, es de poca importancia práctica. Los dos autores de más crédito son los profesores Robinson de Edimburgo y Hutton de Woolwich. Este último es bien conocido por su curso de matemáticas. El primero es autor de un tratado bastante extenso, nuevo y original, sobre la teoría de arcos y bóvedas, el cual sirve de suplemento a la tercera edición de la Enciclopedia Británica, y ha seguido incorporándose en las ediciones subsecuentes de esta misma obra; y el segundo era práctico y experimentado en la materia, a lo que se unían sus conocimientos matemáticos. Se dió a conocer al público por medio de la relación é investigaciones hechas y publicadas por él, en que explica las causas que influyeron en el derrumbamiento del pueute de Newcastle, sobre el rio Tyne en 1771, y desde entonces hasta casi medio siglo después fue siempre consultado como profesor, cuando se ofrecía alguna dificultad en la construcción de puentes. Publicó además un tratado sobre los principios de puentes, justamente admirado y con frecuencia consultado. Ninguno de estos dos profesores da la menor importancia al principio del equilibrio; y Robinson, después de explicar el equilibrio de los arcos, pasa adelante y dice¹²:

“Espero que con lo hasta aquí referido habré dado una noción bien clara de la tan mencionada y célebre teoría del equilibrio de los arcos, una de las aplicaciones de las matemáticas la más delicada y de mayor importancia. Se han escrito volúmenes sobre la materia y aún en el día ocupa la atención de los mecánicos. Pero permítaseme decir, respetando sin embargo los sugetos eminentes que adoptaron esta teoría, que sus investigaciones han valido muy poco, y son apenas atendidas por los prácticos. Puedo aún decir más, que Sir Christopher Wren, tal vez el arquitecto más hábil y completo de Europa, parece haberle dado muy poco valor, pues que en los fragmentos de sus escritos que han podido conservarse, no hace mención alguna de él, y considera el contrapeso de los arcos bajo un orden muy diverso.”

Después de algunas líneas más prosigue Robinson, y hace la observación que sigue:

“Las circunstancias generales que concurren en los arcos antiguos son sumamente instructivas, y merecen muy particularmente la atención del ingeniero; porque en este estado es en el que sus defectos y modo con que ha obrado la naturaleza se ven más claramente. Nos atrevemos a asegurar que la mayor parte de estos ejemplos no pueden conciliarse con las teorías.”

¹² *Robinson's system on Mechanical Philosophy*, vol. I, pàg. 634.

721.- Los principios que adoptan Robinson y Hutton para determinar la fuerza y presión de los arcos, son los mismos que se aplican a la carpintería para determinar el impulso o empuje lateral de las vigas (§. 507). Se supone que cada piedra tiene la fuerza o coherencia suficiente para poder conservar su forma o figura contra la acción de su propio peso, o cualquiera otra presión lateral a que estuviese expuesta, y que una línea recta supuesta pasa por cada piedra en la dirección en que se ejerce la fuerza, y puede llamarse el eje de la *presión*. Estas líneas serán rectas en las piedras perpendiculares; pero formarán ángulos unas con otras en las piedras adyacentes; y por consiguiente puede hacerse uso de ellas como de dos lados de un paralelogramo de fuerzas para determinar el resultado de la acción oblicua que ejercen una sobre la otra; por consiguiente, si es conocida la fuerza coherente de la piedra, la de su peso, é igualmente la de la tierra ú otro peso que haya de colocarse sobre ella, como también las direcciones de los ejes de la presión, con tales datos bastará para determinar el grueso que haya de darse a un arco capaz de sostener un peso dado.

722.- La formación de los arcos puede considerarse, pues, bajo tres distintos modos o puntos de vista que a continuación se expresan, casi en los mismos términos que lo verifica el Dr. Hutton en el escólio general con que concluye un corto pero excelente tratado de puentes. El primer método se deduce de las consideraciones hechas con referencia al equilibrio producido por los impulsos mútuos, los pesos y presiones de las piedras del arco, suponiendo que por estar estas sujetas no se deslizan unas sobre las otras por sus juntas oblicuas, ya sea por su aspereza y rozamiento, o ya por la sujeción de la mezcla ó grapas con que van sujetas cada par de piedras adyacentes, que dan al arco la misma consistencia y solidez de una masa compacta, comprimida verticalmente por el peso de los muros que se construyen sobre ella, y que parece ser el orden exacto y verdadero de considerar la acción del peso que gravita sobre un arco.

El segundo método, es el del arco equilibrado o perfectamente contrapesado, calculado en la suposición de que las piedras del arco estén perfectamente lisas por la superficie o lados que quedan en contacto, y sin nada que las estorbe resbalar unas sobre las otras; Mas el Dr. Hutton confía muy poco en este método, pues según él se funda en suposiciones que no pueden existir en la naturaleza o en el arte, y que por consiguiente jamás pueden ocurrir en la construcción de un arco.

El tercer método se funda en la curva catenaria o feston inverso, que es un principio estrictamente exacto y útil. Al proponer esta idea Mr. Hooke, y al hablar después sobre ella Mr. de la Hire en su Tratado de Mecánica, todo se redujo a contrapesar un arco sencillo o delgado, formado únicamente de dovelas, sin flanquear los lados con muros, y que por lo tanto apenas podía ponerse en práctica. Pero este mismo principio, al grado que lo llevó el profesor Robinson haciendo uso de las cadenas pendientes y proporcionando su peso al de la carga, como se ha descrito (§. 709 y §.710), es tan exacto y fácil de poner en práctica que se ha hecho un método útil y provechoso. El equilibrio establecido por cualquier teoría, debe ser no obstante de una naturaleza muy delicada, pues se supone estar las partes en contacto en un solo punto, y por lo tanto puede llamarse un equilibrio vacilante, puesto que cualquier peso o fuerza en donde quiera que se agregue, comprimirá el arco y le hará perder su forma equilibrada mudando o variando sus puntos de contacto. Pero esto se precave dando a las dovelas un largo de consideración, con lo que se consigue la estabilidad; porque la forma alterada tendrá puntos en donde apoyarse, y de esto resultará que mientras más largas sean las juntas de las piedras que han de quedar en contacto, mayor será la seguridad y firmeza de toda la fábrica.

723.- Poco hay que decir a más de lo ya expuesto, referente a los materiales que han de elegirse para la construcción de arcos, puesto que de ello puede inferirse que las grandes masas deben preferirse a las de menos tamaño, por presentar mayor superficie las unas que las otras; y como que la fuerza que se ejerce en un arco es la de compresión, por esta causa son mejores los materiales más duros y menos elásticos, mientras que las piedras areniscas y blandas, y los ladrillos mal cocidos son los peores materiales de que pueda hacerse uso. Un socavón que se construyó en una loma de alguna extensión en los alrededores de Londres, con el objeto de hacer un camino horizontal y a que dieron el nombre de Highgate Tunnel, vino todo a tierra en una sola noche al cabo de una semana de haberse concluido; y esto fue debido a que los ladrillos con que se formaron los arcos no tenían la solidez suficiente para resistir la presión del gran peso de la tierra que sostenían. La madera es un material muy expuesto para la construcción de arcos, a menos que no se ponga mucho cuidado en dar ventilación a los extremos o estribos, y se preserven de la humedad, pues de otro modo se pudren y vienen a tierra. Atendido el tamaño de las piezas en que puede proporcionarse la piedra, es, pues, sin disputa alguna el material mas a propósito y de mayor duración para las bóvedas de gran tamaño; y a esta sigue el ladrillo sólido y bien cocido, dispuesto competentemente. El hierro colado parece ser un material excelente, pues las piezas coladas pueden disponerse y sujetarse con pernos de tornillo, cuñas, claves y colas de pato, y las dovelas, huecas o de esqueleto, formarse con riostras diagonales por dentro, a fin de darles la resistencia de la piedra, y las superficies que han de ir en contacto hacerse igualmente de mucha extensión, a más de ser el peso del metal comparativamente corto. Cuando el hierro colado se amolda y dispone debidamente, resiste una fuerza de presión enorme, y las dudas que solo se han suscitado con respecto a la propiedad de su uso, toman origen de la tendencia de este material a oxidarse, y por consiguiente a menoscabarse, como asimismo por su propensión a dilatarse o contraerse con las variaciones de la temperatura. Cuando se calientan o enfrían los metales, estos se dilatan o

contraen con una fuerza casi irresistible (§. 213), y puesto que una bóveda de gran tamaño expone una superficie larga y continuada a la acción de la atmósfera, se temió que un arco construido de hierro podría dilatarse o alargarse en un verano caluroso a tal extensión que desbarataría sus estribos; o caso de poder estos resistir este movimiento, se suspendería por la parte superior; y que en invierno haría descenso a causa de la contracción de las partes, produciéndose de este modo un movimiento continuo en las juntas que las gastaría y partiría, quedando así expuesta la estabilidad de la obra. Mas ya se ha hecho el experimento en escala mayor, y es muy suficiente para hacer ver lo infundado de estos temores, y demostrar que puede construirse un arco perfectamente estable si se arregla y dispone como corresponde. Impidese la oxidación con el mejor éxito si se conservan las juntas de hierro perfectamente pintadas con pinturas minerales preparadas con aceite (§. 225), y si los efectos de la expansión y contracción se contrarrestan enlazando fuertemente las piezas que componen las dovelas, transversal y no longitudinalmente. Enlázanse las dovelas unas con otras por medio de grapas, o a caja y espiga, impidiéndose resbalen unas sobre las otras o que cambien de posición, por medio de clavos o pernos de hierro forjado con roscas, los que no se ponen enteramente apretados, pues que el movimiento o juego de cada junta es de poca entidad, aunque el conjunto de todas sus acciones puede ser de mucha consideración.

724.- El primer puente que se intentó hacer todo de hierro colado (exceptuando los pernos y clavos con que se sujetó, que eran forjados), se construyó sobre el río Severn, en Colebrooke Dale de Shroeshire, en Inglaterra, en 1779 por Mr. Abraham Darby, maestro herrero. Consta de un solo arco semicircular de 110 pies de cuerda, y contiene 378 $\frac{1}{2}$ toneladas inglesas (8328 quintales españoles) de hierro. El camino es de 26 $\frac{1}{4}$ pies de ancho, y lo sostienen 5 cerchas paralelas, formadas cada una de tres círculos concéntricos sujetos unos a otros por piezas radiales. El anillo inferior de cada cercha representa un semicírculo completo, los demás son segmentos cortados por el camino o que terminan en él. El camino o piso del puente está cubierto con planchas de hierro, y las barandas de los lados son también de hierro. Está fundado igualmente sobre planchas de hierro embutidas en la roca sólida pero estratificada. En la construcción de este puente hay muy poca ciencia si se exceptúa el enorme tamaño de las piezas fundidas, puesto que cada círculo interior de los que componen los formos, consta solo de dos piezas de 85 pies 4 pulgadas de largo cada una. Por la sencillez de su construcción se dispuso y concluyó en tres meses, y como que está situado entre dos rocas duras, el camino que conduce a él por ambos lados se hizo de cantería sólida.

725.- El segundo puente de hierro construido en Inglaterra está situado sobre el río Wear de Sunderland, en Durham; se principió en 1793 y concluyó en 1796. Los estribos de piedra tienen 76 $\frac{1}{2}$ pies de alto sobre el nivel ordinario del agua cuando está baja la marea, hasta los arranques del arco. El arco de hierro tiene de cuerda 258 pies formado de un segmento de círculo de 486 pies de diámetro; su elevación o seno verso es de 37 pies, y su intradós está a 109 pies de elevación sobre la línea de la marea baja del puerto, de modo que pueden pasar por debajo embarcaciones de porte mayor. El camino que vá por encima de este puente es de 35 pies de ancho con barandaje de hierro a uno y otro lado. Consta de seis cerchas construidas bajo un principio muy diverso del que se adoptó en los últimamente descritos, pues en vez de formarse de piezas de hierro de 50 a 70 pies de largo, en este puente cada una de las referidas cerchas se compone nada menos que de (25 dovelas pequeñas y huecas o de esqueleto, cada una de 2 pies y 2 pulgadas de ancho en dirección del largo o de la curva de la cercha, y 5 $\frac{1}{2}$ pies de peralte en dirección del radio. Estas dovelas huecas se mantienen sujetas por medio de barras de hierro forjado que se acomodan en canales o ranuras, y de tubos de hierro colado con rebordes por donde atraviesan pernos con roscas para dar sujeción a las cerchas. Esta construcción constituye todo el apoyo del puente; pero para hacer mas llano el camino (que se hizo de madera y cubrió con alquitran y cal y después con marga) desde la parte superior de cada cercha parten postes perpendiculares de hierro que van a morir a la inferior de las fuertes vigas colocadas sobre cada cercha en dirección del largo del puente, y la distancia que media entre ellos va disminuyendo hácia la parte superior que se arregla por el diámetro de un aro de hierro colado acomodado entre cada uno de los postes, siendo su diámetro tal que mientras la parte inferior de dicho aro descansa en la superior de la cercha, toca con la opuesta y sostiene por debajo las referidas vigas, y los postes verticales de hierro quedan en contacto con ambos lados de cada aro para impedir que estos se aplanen a causa de la presión. Este puente contiene solo 260 toneladas (5720 quintales) de hierro, de las cuales 214 (4708 quintales) son de hierro colado y 46 (1012 quintales) forjado para arreglar o dar sujeción a las partes. Costó 27.000 £, incluso los inmensos estribos construidos casi enteramente de cantería; tienen 261 pies de espesor, y hacia los cimientos 46 de ancho, disminuyendo hacia la parte superior en donde tienen 40,5 pies. Ha sido muy admirado por su elegancia y sencillez, y con justicia se considera como una obra atrevida del arte, y como prueba o muestra evidente de todo lo que es susceptible poderse ejecutar con el hierro colado; pero el principio es malo: primero, porque las piezas de que está formado son demasiado cortas, con lo que se multiplican las juntas sin necesidad alguna, mientras que las piezas de que está compuesta la armadura son de distintas dimensiones, cosa igualmente impropia; segundo, porque la sujeción de dichas piezas en sus respectivas posiciones le hace depender, mas de lo que corresponde, de los pernos y barras de hierro forjado, que deben emplearse todo lo menos posible en construcciones de esta especie; y tercero, porque los círculos colocados en los senos no causan buen efecto ni sirven de apoyo al camino, porque un círculo no es una figura que presta fuerza si no se comprime con igualdad por todas partes en su circunferencia, lo que no sucede en

este puente, y del modo que en él están dispuestos los referidos círculos, obran mas bien como muelles que como sólidos soportes del camino.

726.- La idea más atrevida que se haya jamás concebido en la construcción de arcos de hierro colado, fue la que ocurrió a los Señores Telford y Douglass de erigir un puente sobre el río Támesis, en Londres, de un solo arco de hierro colado formando un segmento de círculo de 1586 pies de diámetro, 656 pies de ojo o luz y 71 de sagita. Este puente debió constar de siete cerchas sobre las que había de quedar un camino de $49 \frac{1}{4}$ pies de ancho en el centro o vértice, desde donde fuese anchando en ambas direcciones hasta los extremos, en los que tendría $98 \frac{1}{2}$ pies de ancho. El plano y presupuesto de este puente (verdaderamente elegante) se presentaron al Parlamento británico en 1801, y por algun tiempo se pensó seriamente en llevar a cabo la empresa. Se calcularon necesarias 6.500 toneladas inglesas (unos 143.000 quintales españoles) de hierro, 565.000 pies cúbicos de granito y 26.200 pies cúbicos de obra de ladrillo para los estribos, ascendiendo el importe total a 262.289 £. La posibilidad de llevarse a efecto la obra en el concepto de que sería estable o permanente, así como los inconvenientes y ventajas que esta pudiera ofrecer, se sometió todo a juicio de los ingenieros y matemáticos de más concepto en Inglaterra, los que convinieron unánimes en la posibilidad de la ejecución de dicha obra y en su permanencia; pero despues de la debida deliberación, el Parlamento creyó ser este un experimento demasiado arriesgado, particularmente cuando un solo arco parecía no ser de tanta importancia para la navegación del río que mereciese la pena de exponerse al peligro de un derrumbamiento en una parte de la ciudad donde la existencia de un camino permanente era de tanta importancia, y por consiguiente se desechó el proyecto, y en su lugar se construyó el puente de Southwark compuesto de tres arcos de hierro.

727.- Esta grande obra bajo la dirección de Mr. Rennie se principió en 1813, concluyéndose del modo más satisfactorio en Marzo de 1819 por el plano trazado por el mismo. Su costo ascendió a 800.000 £, inclusa la compra de terrenos y casas que fue menester derribar para que quedasen libres las avenidas. Este estupendo puente consta de tres arcos de hierro colado formados de segmentos de círculo. El del centro tiene de cuerda 262 $\frac{1}{2}$ pies, y los dos laterales 230 cada uno. La distancia entre los estribos es de 775 pies; cada uno de estos tiene 78 de extensión y están formados de sólida sillería. Los dos pilares dentro del río tienen 26 $\frac{1}{4}$ pies de espesor entre las líneas de marea alta y baja, 82 pies de largo de punta a punta de los ángulos de los tajamares, y 65 $\frac{1}{2}$ de alto desde el fondo del río hasta la parte superior del parapeto. Para la formación de los cimientos se ahondó el terreno 13 pies más abajo del fondo del río, y se hicieron sobreembarengados de madera de 2 $\frac{3}{4}$ pies de grueso que descansaban en 420 pilotes, la mayor parte de ellos clavados hasta la profundidad de 26 pies. El intradós del arco del centro queda a la altura de 47 pies, término medio sobre la línea de la marea baja; el camino del puente está casi a nivel y empedrado en el centro en la anchura de 30 pies para los carruajes, con sus banquetas o andenes enlosados a los lados de 7,5 pies de ancho cada una para la gente de a pie. Muchas de las piezas sueltas fundidas de este puente pesan 10 toneladas (220 quintales) cada una, y el peso total del hierro es de 5.308 toneladas inglesas (o 116.780 quintales españoles). Las piezas fundidas empleadas en su construcción salieron de los talleres de los Señores Walker y compañía de Rotterdam, en Yorkshire, 200 millas (unas 58 leguas españolas) distantes del lugar en donde se erigió el puente. La obra de albañilería y colocación de las piezas se efectuó por contrata con los Sres. Joliffe y Banks, y tal fue la precisión y exactitud con que se ejecutó la obra, que el arco del centro solo bajó 0,95 de pulgada después de retirada la cercha. La fuerza de este puente estriba en ocho formeros contruidos de planchas de hierro colado dispuestas de modo que componen un arco equilibrado, y se mantienen en sus posiciones paralelas por medio de cuatro riostras oblicuas de hierro colado en cada arco que corren por ambos lados desde la parte superior hasta los estribos, y por medio de cierto número de piezas de enlaces colocadas entre los formeros. El camino está construido sobre planchas de hierro colado y sostenido por barras de hierro que salen desde la parte superior de los foimeros, cada una de las qué es alternativamente vertical, mientras que las inmediatas o intermedias radian desde el centro del arco, y en el punto en donde estas se cruzan vá colocada una de las piezas de sujeción del arco para mantenerlas unidas, lo que aumenta la fuerza y tesura general de toda la fabrica.

728.- El puente de Vauxhall, construido por Mr. James Walher por los años de 1813 y 1816, consta de nueve arcos de hierro colado de 85 pies de cuerda cada uno y 32 de elevación, que con los pilares, que son de piedra de Kent, forman un puente de 940 pies de largo. Costó 150.000 £. Los arcos son mas pequeños que los del anterior, por lo que no llevan barras radiantes que sostengan la plataforma de hierro del camino, el cual descansa en los pilares que lo sostienen, en la parte superior de los formeros y en los postes verticales colocados a distancias iguales a cada lado de dichos formeros y afianzados a la mitad de su altura por una pieza horizontal de enlace, mientras que sus partes superiores van unidas con arcos góticos, lo que dá a la estructura un aspecto sencillo y elegante. Cada uno de los arcos de este puente consta de diez formeros paralelos.

729.- Se han construido puentes de hierro en otros muchos lugares, pero se han citado los dos últimamente descritos por ser en los que hasta ahora se han hecho experimentos más en general con dicho material; y puesto que ambos han resistido a la prueba de veinte años sin dar muestra alguna de detrimento por su expansión, contracción, oxidación ú otra causa, parece probado que el hierro colado es un material bueno y útil para la construcción de puentes cuando se hace el debido uso de él y se dispone competentemente.

730.- Ahora pues, solo resta hacer algunas observaciones referentes a los medios que han de emplearse para el arreglo y disposición de los materiales en la formación de los arcos y en la construcción de puentes. Puesto que los arcos de ladrillo o de piedra deben principiarse desde sus arranques o estribos, estos deben considerarse en primer lugar, porque la estabilidad y duración de los arcos depende en gran manera de su perfección. Por consiguiente se requiere la mayor atención de parte del ingeniero, cuyo primer cuidado debe dirigirse a dar la solidez necesaria a los cimientos de los estribos y pilares, hincando pilotes y removiendo toda tierra blanda y movediza hasta tocar en terreno firme y sólido. Esto es de necesidad, especialmente en la construcción de puentes, pues con frecuencia sucede que las orillas de los rios son de arena o de un fango blando que las corrientes arrastran consigo y depositan en aquellos lugares, y no hay que confiar en este terreno flojo y suelto. Por esta causa es preciso llevar con frecuencia los estribos a una distancia considerable de las orillas de un rio con el fin de que se hagan firmes en un terreno sólido que pueda resistirlos, y como para esto se requieren costosas obras de cantería o de ladrillo, dichos estribos se construyen con mucha frecuencia huecos con pilares y arcos, con lo que se ahorra gran cantidad de macizo o material. Las entradas de todo puente deben ser más anchas que el camino que pasa por encima, para impedir algún accidente y dar paso franco; y los parapetos ú otro barandaje lateral se construyen formando generalmente una curva o ensanchándolos a medida que se retiran del puente, y estos muros continuados o barandajes laterales, cuando tocan en terreno sólido se llaman *alas o flancos del puente*. Esta circunstancia ofrece la oportunidad que debe siempre aprovecharse para formar los estribos más anchos que el puente mismo, con lo cual se logra que la presión lateral se extienda por una porción mayor de terreno y quede en disposición de resistir el esfuerzo que pueda ejercerse. Aunque las alas parecen delgadas en la parte que queda fuera de la tierra, y como si se construyeran solo para la seguridad de los pasajeros, son sin embargo frecuentemente gruesas y macizas en la parte cubierta por el terreno, y se llevan en dirección divergente hasta dar o tocar en lo firme, mientras que se unen al arco vertical inmediato al puente, a fin de que la presión lateral de este se trasfiera al terreno sólido; y si el puente es ancho se construyen tres y hasta cuatro de dichos muros en dirección de aquel, terminando cada dos muros en forma de arcos que presentan su superficie convexa a la presión. Estos muros pueden ser de hiladas horizontales o deprimidos en tierra, según sea la forma del arco, porque para los arranques de un semicírculo o de una semielipse se requieren estribos nivelados que los apeen, mientras que todos los demás deben inclinarse como salmeres o que sus juntas y bases inferiores radien o queden perpendiculares al intradós o parte interior del arco, a fin de que reciban la presión, todo lo más que fuere posible, en dirección perpendicular a sus superficies. Cada piedra del arco o dovela debe cortarse o labrarse con regularidad dándole la forma o figura de cuña antes de colocarla en el lugar que le está destinado, y sus dos lados o lechos también se labran, de modo que cuando se coloquen en el lugar correspondiente sus juntas radien de tal suerte que queden exactamente normales al intradós, mientras que al lado que haya de ser la parte inferior de la piedra se ahueca o se le dá la misma convexidad del arco, pues de lo contrario cuando el intradós queda expuesto a la vista despues de retiradas las cimbras, aparece como si se hubiera formado de planos pequeños, lo cual destruye la hermosura y regularidad del arco. Para obtener esta forma exacta debe consultarse la gran plataforma de madera que según se dijo en otro lugar es necesario construir para la formación de las cimbras. Sobre esta se traza la curva exacta del intradós; como asimismo el tamaño que han de llevar las dovelas, así como las direcciones que deben seguir las juntas; se forman plantillas delgadas que se ajusten con las líneas que se hayan trazado, y se distribuyen a los canteros para que labren las piedras arreglándose a ellas. Si resulta que una piedra no es suficientemente grande para formar una dovela completa, se coloca otra que dé todo el tamaño requerido y lleve las direcciones de las juntas, y estas piedras de este modo cortadas y labradas deben colocarse en el verdadero arco, en las posiciones correspondientes a las que tienen en la plataforma. Una vez labrada la piedra se hace en ella un hueco para la clavija en la parte superior, debiendo quedar en tal posición respecto a su centro de gravedad, que pueda suspenderse y dejarse caer lo más aproximadamente posible en la posición que ha de ocupar en el arco, de suerte que cuando se la quiera colocar en su lecho correspondiente, no sea necesario ronzarla, volverla o mudarla de lugar a tal grado que pueda alterarse la mezcla que préviamente se haya extendido en capas muy ligeras para recibirla. Si las piedras son grandes y pesadas, con solo la unión perfecta de las dos caras con la mezcla interpuesta será bastante para mantenerlas en sus posiciones si son pequeños los arcos: cuando estos son de gran tamaño y macizos, se usan las lañas o grapas para dar sujeción a las piedras y mantenerlas unidas, de modo que no puedan escaparse o deslizarse la una sobre la otra. En la construcción del puente de Blackfriars, Mister Mylne empleó un pie cúbico de piedra dura embutiéndolo hasta la mitad entre las juntas de las piedras de que se componia el arco, y sus pilares construidos con grandes sillares de piedra de Portland, los afinazó con colas de pato de roble sólido. En todos los casos la parte inferior de los senos o los espacios que median entre dos arcos

cualesquiera de un puente, o los que se hallan entre este y sus estribos, deben macizarse con cantería, con el fin de que un arco se apoye o recline contra el inmediato y adquieran fuerza y resistencia en sus ancas. En los puentes de Westminster y de Blackfriars, las juntas de este macizo toman la misma dirección radial que las juntas de las dovelas; mas en el de Southwark dicho macizo forma hiladas horizontales aunque las dovelas son de codillo, lo que relativamente a la fuerza y firmeza surte el mismo efecto. Construyose sobre el macizo de estos dos últimos puentes un arco inverso que cubre los pilares y obra en los arcos principales, con lo que se evita que el macizo se suspenda por el aventamiento de las ancas, caso que estas tiendan a efectuar dicho movimiento.

731.- Puesto que al construir un arco se principia la obra desde los arranques o por los puntos inferiores, las dovelas deben disponerse o colocarse una al lado de otra, empleando la menor cantidad de mezcla posible, haciendo que se deslice cada piedra si fuere dable, en su correspondiente lecho, hasta que su parte inferior toque con el enlisonado de la cimbra; entonces se pone en contacto perfecto con la piedra inmediata golpeándola suavemente con un martillo o pisón, pues la vibración que de este modo se produce en una piedra grande, contribuye a sentarla o traerla a su posición, mas bien que no los golpes que puedan partirla. Al principiar un arco, según se dijo en el párrafo 729, poca es la fuerza que se ejerce en los 25° o 30° , particularmente en los arcos semicirculares, como se notará si se inspecciona las dovelas de que se compone el que representa la figura 139, en el que si se tira una línea vertical (que represente la dirección de la gravedad) desde el centro de esta en cualquiera de las cuatro primeras piedras de la parte inferior, vendrá dicha línea a caer dentro de la proyección horizontal de dicha piedra; por consiguiente, estas piedras deben ir sostenidas mas bien por las que le quedan debajo que por la cimbra; pero a medida que se sigue hacia arriba, las referidas líneas caerán sobre la cimbra. De aquí se infiere que los dos pies del arco deben principiarse y proseguirse simultáneamente, pues de lo contrario se ejercería en la cimbra una presión desigual, que la impulsaría haciéndola formar comba por el lado opuesto del peso, con lo que quedaría desfigurada. Por lo tanto los arcos deben siempre constar de un número impar de dovelas, que se van colocando o sentando una sobre la otra hasta llegar a la parte superior o vértice, en donde el último espacio del centro se ocupa con una sola dovela, que es regularmente más larga y ancha que las demás, a la cual llaman *clave* por ser la dovela con que se cierra o concluye un arco, la que contribuye a sostenerlo después de retirada la cimbra; por consiguiente, las claves deben ser exactamente iguales a las plantillas que se arreglan al hueco o lugar que han de ocupar: suelen colocarse en seco o sin mezcla alguna, pero siempre es útil emplear un poco de mezcla bien cernida y fina, la que contribuye a hacerlas entrar mas fácilmente en su lugar en donde se acaban de introducir dándole algunos golpes, o construyendo provisionalmente sobre ella una obra pesada de piedra.

732.- En la continuación del método antecedente de contrapesar para producir una presión igual en ambos lados de la cimbra, no siempre se obtiene completa seguridad, pues a menos que la cimbra no sea muy fuerte y de una forma inmutable, el peso de los riñones la harían suspenderse en el centro o vértice, cuyo accidente ocurrió a Perronet mientras construía el puente de piedra de Orleans en Francia, en el que se sirvió de las tan decantadas cimbras de Hupeau, según se dijo en otro lugar (§. 626) (véase la figura 138). Al colocar las primeras piedras de este arco en el orden de costumbre, se notó que la parte superior de la cimbra había ascendido notablemente, y en su consecuencia se recargó dicha parte con piedras para impedir este efecto, con lo que bajó del mismo modo considerablemente. Esto demostró que el polígono inferior prestaba muy poca utilidad. Mr. Perronet conoció entonces que la cimbra era muy débil, é introdujo la viga larga *be* en cada lado formando diagonal con los cuadriláteros, y muy aproximadamente en dirección de la viga inferior *ab*, pero que caía algo más abajo de su línea. Con esto juzgó ser la armadura bastante fuerte y consistente, pues la cercha se había alterado completamente y ahora solo constaba de los dos lados largos, con una sopanda corta colocada horizontalmente entre sus dos cabezas. Toda la cimbra se componía entonces de una gran armadura *aeib*, y sus lados largos *ae*, *ib* se enlazaron en *Bb* y *fh*. Si esta sencilla idea hubiera ocurrido en la primitiva construcción, dicha cimbra hubiera sido excelente. El ángulo *abe* pudo haber sido como de unos 176° , y el polígono *bcbgh* haberse empleado solo para sostener este gran ángulo, de modo que le impidiera exceder de los 180° . Mr. Perronet notó igualmente que las juntas de *bc* hacia el pie del poste *ec* estaban expuestas a aflojarse, y tuvo que aplicar piezas largas de madera que aseguró con barrotes por uno y otro lado de la junta, las que abrazaban ambas vigas. Estas surtieron evidentemente el mismo efecto que las abrazaderas de hierro, y esto prueba claramente que cualesquiera que hubieran sido las presiones que se ejercían al principio, no existía apoyo alguno en el punto *e*, y que las vigas que allí se encontraban estaban expuestas a la fuerza de extensión y no a la de compresión; por consiguiente, que el mismo efecto pudieron haber producido las barras de hierro que las piezas tersas de madera. No es inconveniente alguno el que la parte superior de los arcos se suspenda ligeramente mientras se estan estos construyendo, pues al tiempo de retirar las cimbras, en este lugar es en donde precisamente hacen el descenso, y esto puede verificarse a tal grado, que el arco venga a quedar con la figura que se haya intentado darle.

733. Una vez concluido el arco, deberá inspeccionarse la superficie superior para averiguar si alguna de las juntas se ha abierto por algún cambio de forma ocurrido mientras aquel se construía; y si esto se ha efectuado, ver en dónde se requiere colocar el peso, para volverle a dar su forma competente; pero en estas aberturas no deben introducirse materiales duros, porque si las caras angulares de las dovelas llevan la figura correspondiente y han quedado debidamente labradas, dichos materiales impedirán que las piedras queden bien unidas y sentadas, lo que de otro modo sucedería. La práctica moderna de cargar un arco, no es la de rellenar los senos, por las razones ya expuestas (§. 718), sino que se construyen muros de ladrillo paralelos unos a otros, desde el uno al otro arco, en la dirección del largo del puente, llevándolos hasta la parte superior o vértice del arco, y cubriéndolos con piedras de enlosar, sobre los que se coloca la marga ú otra clase de tierra con que haya de formarse el lecho del camino, o bien abovedándolos, caso de no encontrarse la piedra a propósito. Por medio de esta operación adoptada en el puente de Waterloo, se dá fuerza y tesura a los arcos, y al mismo tiempo se evita la presión que pudiera ejercerse en los arranques y paramentos o muros de los frentes, que de otro modo les sería muy perjudicial; y si el peso no es bastante en algún punto, puede aumentarse rellenando en parte los huecos que quedan entre los muros, con ripios, o rajones sentados con mezcla rala. Después la superficie superior de los arcos que queda entre estos muros, se enladrilla con mucho cuidado o se enlosa con piedras planas, sentadas con cemento, para impedir que el agua penetre o se filtre en los arcos o pilares; y en cada muro paralelo se dejan conductos o desagües, por encima de cada estribo, que se comuniquen entre si, porque los puentes de piedra nunca se techan, y el agua llovediza suele penetrar en el camino y depositarse en estos receptáculos, a los que se dá salida por medio de tubos delgados de hierro introducidos para el efecto entre las piedras de los arcos, o por medio de las mismos conductos que van ocultos entre las piedras del frente, o paramentos de los pilares.

734.- Una vez llegada la obra del puente a este punto, se deberán retirar las cimbras aflojando las cuñas, antes de repellarlo y de construir los muros de los senos y parapetos, pues por leve que sea el movimiento que haga el arco al sentarse, aunque en na-a menoscabe su fuerza, es probable que quiebre y desfigure el paramento; pero si aquellos se construyen después de bien sentado el arco, no habrá que temer alteración alguna.

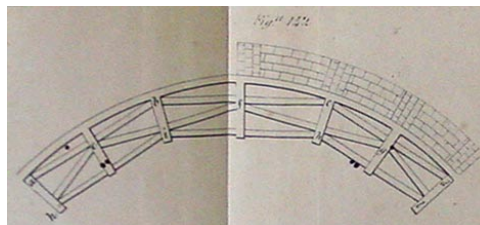
735.- Las piedras que forman los paramentos de puentes, se labran de diversos moos según el gusto del constructor. Así es, que en el puente de Westminster, las juntas van radiando en dirección de las juntas de las dovelas hasta intersectarse con los pilares como se vé en la figura 154. En el de Blackfriars dichas juntas son horizontales y paralelas, y las piedras que intersectan el extradós llevan la misma curvatura de este; mientras que en el puenle de Southwark, y en el nuevo de Londres las juntas son horizontales; pero en vez de intersectar la curvatura del arco, las dovelas de sus extremos están dispuestas de modo que sobresalen a la curva regular del extradós, y llevan cortes o formas horizontales y casi perpendiculares, de suerte que vienen buscando las piedras del paramento como se nota en la figura 140; a la obra construida de este modo llaman *de junta de codillo o acodillada*.

736.- Los arcos de los puentes por lo regular están terminados por una vistosa cornisa saliente, más bien por adorno, que con algún objeto útil: sobre ella se construyen los muros o parapetos, para la seguridad y protección de los pasajeros; pero con el fin de que no obstruyan la vista del agua, rara vez excede su altura de 3 a 4 pies, y se forman con balaustres de piedra cubiertos con sus pasamanos o cornisa, o bien se ponen en lugar de los parapetos barandas o verjas de hierro ; y para darles más firmeza, se elevan los pilares hasta la altura del pasamanos o cornisa que es comun a ambos. A la série de estos balaustres, se dá el nombre de *balaustrada* y se pone también a los lados de las escaleras.

737.- Atendida la naturaleza de las dovelas, se ve que los ladrillos comunes, no son en todos los casos a propósito para la construcción de arcos, pues la figura o forma de cuña tan necesaria, no puede obtenerse con un sólido de lados paralelos. En un arco de ladrillos de radio pequeño, aunque estos queden en contacto por el intradós, permanecen no obstante abiertos o separados por el extradós, y las juntas anchas que aparecen, solo podrían llenarse con mezcla, cuyo material se considera en estos casos de poca consistencia para resistir la presión. Estas grandes juntas podrían macizarse introduciendo en ellas cuñas de piedra o de pizarra; mas estas causan a menudo una presión desigual, que tienden a romper los ladrillos o a alterar la regularidad con que debe sentarse el arco, con lo que se trastornaría su figura y debilitaría su fuerza. Si al contrario, el arco tiene un radio de consideración, las juntas de los ladrillos quedan casi paralelas, de modo que puede desaparecer este inconveniente; pero los ladrillos deben ser buenos, duros y muy bien cocidos, para que puedan resistir el enorme peso de un arco grande y el de la obra que se construye sobre él, sin que se desmoronen, como sucedió en el camino abovedado de Highgate. A veces se moldean los ladrillos con la figura de cuña o en forma de dovola expresamente para la construcción de arcos, y en este caso ofrecen menos inconvenientes.

738.- Para allanar estas dificultades en la construcción de los arcos de ladrillo, se acostumbra sentarlos en hiladas delgadas y concéntricas sin enlazarlas unas con otras. Así pues a la hilada inferior puede darse medio ladrillo o $4 \frac{1}{4}$ pulgadas de grueso que se allana o alisa por la parte superior, y sobre esta se puede seguir construyendo en orden sucesivo cualquier número de hiladas de la misma clase de obra, en cuyo caso las juntas

radiantes quedan tan cortas que casi son paralelas. Si los arcos son grandes, también pueden colocarse los ladrillos de punta o derechos (de asta) y formar en este orden hiladas de nueve pulgadas que se sucedan una a otra. Con cualquiera de estos dos métodos se puede construir un arco bueno y fuerte para usos ordinarios, particularmente si la mezcla empleada en las juntas es en cantidad sumamente pequeña. Pero cuando es muy grande el peso que se ha de sostener, es de temer que las hiladas no sienten con igualdad, por componerse las superiores de mayor número de ladrillos y de juntas que las inferiores; y si esto llega a suceder la presión se trasfiere a una sola hilada, mientras se está en la creencia de que se ejerce en todas con igualdad, y consecuentemente fallar el arco. Por lo tanto el mejor medio y más seguro de construir un arco grande de ladrillo es el de imitar las dovelas lo más que sea posible, formando porciones o trozos de obra de ladrillo, con sus extremos para el intradós o hacia este, de tres o cuatro hiladas de grueso, y alternando estas con ladrillos sentados en arcos de círculo, que pueden extenderse hasta dos o tres veces el ancho de la dovela, como se ve en la figura 142 (nota 136.) Por este medio se enlaza y da mayor sujeción a la obra, y se obtienen mas aproximadamente las ventajas del arco de piedra, mejor que de ningún otro modo en que se disponga el ladrillo.



739. Se había pensado concluir este capítulo con la descripción de los puentes colgantes construidos hasta el día; pero se ha dado ya demasiada extensión a la presente obra, traspasando los límites que al principiarla se pensó señalarla, y por lo tanto baste decir por ahora, que estos puentes constan de varias cadenas de hierro, no como cables compuestos de eslabones pequeños, sino de barras enteras de hierro enlazadas por sus extremos, y que pasan por encima de torres o puertas de alguna elevación, situadas a uno y otro lado del río para dar entrada a dichos puentes, mientras que por sus extremos van fuertemente afianzados a piedras voluminosas y macizas, enterradas a una gran profundidad en el terreno en ambos lados del río. Las cadenas quedan pendientes, formando festones paralelos, al través del río, entre las torres que las sostienen; de aquellas penden igualmente varias barras verticales de hierro, con que se da sujeción a las vigas horizontales de madera o de hierro que quedan colgando en sentido de la corriente, y las cuales sirven para sostener la robusta plataforma o entablado que se extiende sobre ellas. Usanse regularmente cinco juegos de cadenas, y cinco de barras verticales que penden de aquellas, dividiendo de este modo el ancho del puente o la plataforma en dos caminos; en el centro para carruajes, y dos a los lados para la gente de a pie, los que van separados por un cercado de tableros o vallas sujetas a los extremos inferiores de las barras verticales de suspensión (nota 137). El más magnífico puente que bajo este orden se ha construido, es el que se erigió en Bangor, en la Gales del Norte, para atravesar el brazo de mar conocido por el estrecho de Menai, y separa las islas de Anglesea y Cardiganshire. El trecho de agua es tan considerable que no se creyó prudente colocar los obeliscos o torres que habían de sostener las cadenas, en la parte de tierra; y siguiendo el orden acostumbrado en los pilares de puentes, se construyeron en el agua separados a la distancia de 604 pies (nota 138). Son de piedra maciza y se elevan a la altura de 189 pies sobre la línea de la baja marea. Estas torres llevan polines o rolletes de metal en la parte superior, por los que pasan las cadenas, bajando de aquí a las rocas situadas en los lados opuestos, a las que están atadas y afianzadas firmemente. La plataforma o camino es enteramente de madera, por su poco peso, y sin embargo, las cadenas, barras de sujeción y la plataforma entre las dos torres, pesan juntas nada menos que 14.300 quintales; cuyo inmenso peso se sostiene a la altura de 132 pies sobre la línea de la baja mar, de modo que los buques de porte mayor pasan por debajo de este puente sin tocarle con sus mástiles. Este estupendo puente está en la carretera directa entre Dublín y Londres. Fue proyectado y dirigido por Mr. Telford, y su estabilidad y firmeza están probadas pues que ha podido resistir un gran tráfico y muchos y recios vientos. El 23 de Diciembre de 1835, estalló una tempestad en que se temió su destrucción, pues que fue tal la violencia con que se le vió ondular, que algunas partes de la plataforma se elevaban y deprimían hasta 17 pies. La tormenta duró doce horas, y después de haber esta pasado, se vió que todo el daño consistía en algunas tablas de la plataforma rotas, que se repusieron al día siguiente con muy poco costo.

740.- Se han construido después varios puentes bajo el mismo orden, y entre ellos uno en el Támesis en Hammersmith a cuatro millas al O. de Londres, dirigido por Mr. Tierney Clalk, que es justamente admirado por su elegante figura. Se cree que este sistema de puentes trae su origen de la China, en donde se usaban cuerdas en vez de cadenas (nota 139). Las ventajas que estos ofrecen es, que mientras se están construyendo no se necesitan cimbras, y que el equilibrio existe en ellos mismos, por cuya razón, si en algún tiempo ocurre alguna alteración en su forma, prontamente reparan por si solos el defecto, lo cual no sucede con los demás arcos construidos del modo ordinario. Además, los puentes colgantes, debido a la estabilidad de su equilibrio, consumen menos material que el necesario para la construcción de otra cualquier clase de puentes; y esta circunstancia unida a la de no necesitarse de cimbra ofrece la ventaja de ser esta construcción mucho más barata que cualquiera otra de su especie. Alguna vez se construyen las ya mencionadas torres de hierro colado, huecas o de esqueleto, sostenidas sobre plintos o cimientos de cantería o de ladrillo.

741.- También se construyen a menudo arcos enteramente debajo de tierra, con el objeto de soportar el terreno después de haberse practicado excavaciones que atraviesan por el centro de lomas o alturas, para formar caminos, o conducir canales por ellas, y estas excavaciones así dispuestas se llaman *tunnels* o *socavones*. El socavón de Highgate (§. 723) pertenece a esta clase. El gran canal de unión en Inglaterra por medio del cual se ponen en comunicación las partes N. y S. de la isla, atraviesa en varias partes por estas galerías, algunas de las cuales tienen dos millas de largo; y el célebre Tunnel que pasa por debajo del Támesis en Londres, cuyos trabajos dirige actualmente Mr. Brunnell, deberá ser un camino, seco o enjuto, por el cual se establece la comunicación por debajo del río en vez de efectuarse por arriba. En los socavones, la obra que forma el arco cubre el hueco por todos lados, tanto por la parte superior como por la inferior, en lugar de extenderse solo por arriba como sucede en los puentes. Por consiguiente puede decirse que un *tunnel* o galería subterránea consiste en una bóveda construida sobre otra bóveda inversa. El término *bóveda* se usa para expresar un arco extendido o continuado (nota 140). El arco puede constar de un orden sencillo de dovelas, sin necesidad de que quede visible extensión alguna del intradós como cuando se hace uso de él para formar parte de un muro o de los arcos ciegos; mas la bóveda tiene siempre extensión, de modo que un aposento de techo formando arco se dice que está abovedado y no arqueado. En este sentido puede llamarse bóveda al arco de un puente sobre el que pasa un camino ancho. Los *tunnels* o galerías subterráneas son generalmente más altos que anchos, de modo que sus secciones transversales presentan más bien una forma elíptica que circular; cuando tienen esta última figura, se llaman *acueductos*, y sirven para conducir arroyos pequeños, por debajo de caminos y canales navegables (nota 141). El acueducto es pues, un arco continuado en total la redondez, tal cual se representa en la figura 155, mientras que un *tunnel* se forma generalmente de un arco elíptico, sin embargo de que puede también ser circular. El del Támesis no es de forma elíptica regular en su sección, sino que su figura es ovalada o parecida a la de un huevo, pues la parte superior del arco es mas aguda que la inferior, cuya forma se considera como la mejor y más fuerte. En los destinados para canales, el agua ocupa el arco inferior o inverso, parte del cual va ocupado por un muro inclinado o de talud que sostiene el camino de sirga, el cual se extiende en todo el largo del socavón, y debe tener el ancho suficiente para que los caballos que remolcan a las embarcaciones puedan pasar en direcciones opuestas. En los socavones que se destinan para caminos, el arco inverso se terraplena todo o parte de él, con materiales duros para formar el camino; pero debe construirse un acueducto o cloaca por debajo de este; y comprendido en el arco, con el fin de dar salida a las aguas, caso de abundar el terreno en manantiales, que deteriorarían el camino, a causa del continuo estado de humedad en que se hallaría. Si no puede darse salida al agua por medio del declivio o inclinación natural del terreno, debe extraerse artificialmente por medio de bombas, o por el movimiento constante de una pequeña máquina de vapor, como se verifica en el *tunnel* del Támesis. Los *tunnels* son oscuros hasta cierta distancia de sus extremos o entradas, y por lo tanto se alumbran con lámparas, siendo el alumbrado de gas el que más comunmente se usa para este efecto, por la facilidad que hay de conducirlo por medio de tubos empotrados o colocados dentro de los arcos. Cuando son tan largos, que se hace costosa ú ofrece inconvenientes la extracción de la tierra que se va cavando, o se dificulta la introducción de materiales para la construcción del arco por las entradas de los extremos, la operación se verifica en este caso, por medio de huecos verticales y cilíndricos, semejantes a los de los pozos, por los que se bajan o suspenden los materiales. A estos huecos se les forma alrededor una obra de ladrillo, y se dejan abiertos para la ventilación, para que den luz y para la mayor comodidad en caso de tenerse que hacer algunos reparos.

ANNEX 3.3

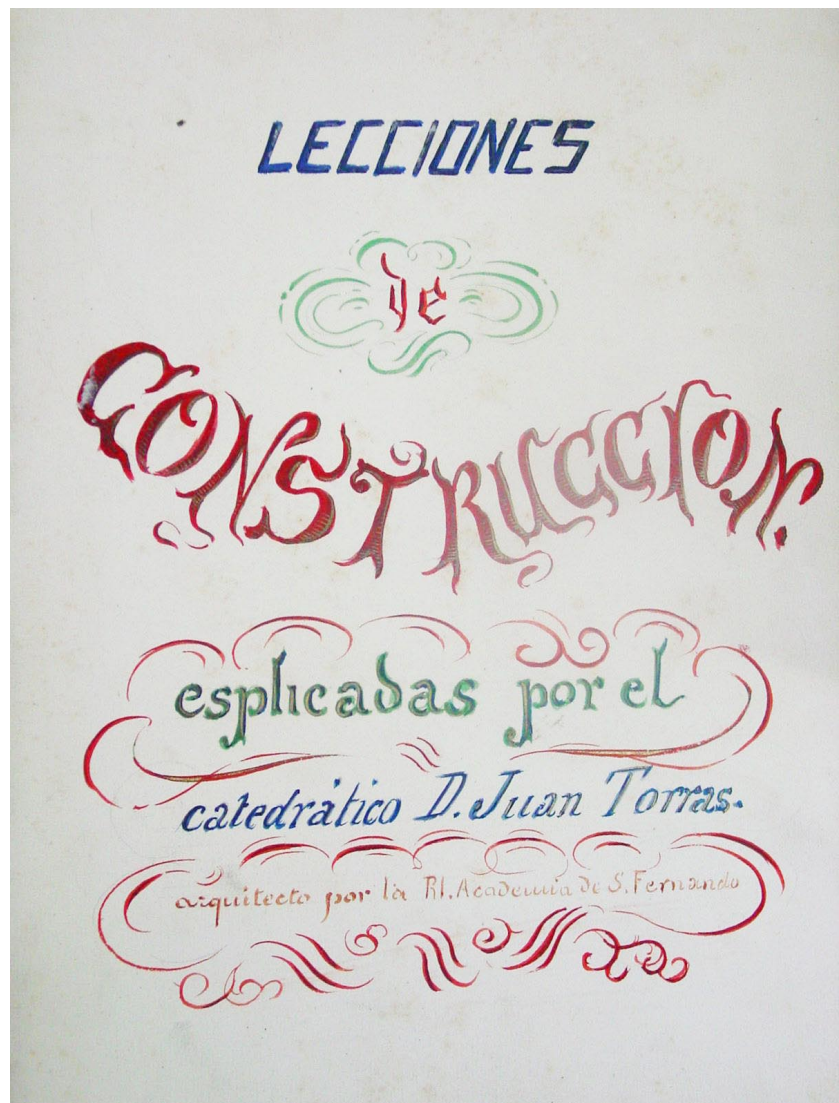
Apunts de construcció de Macari Planella i Roura, 1860.

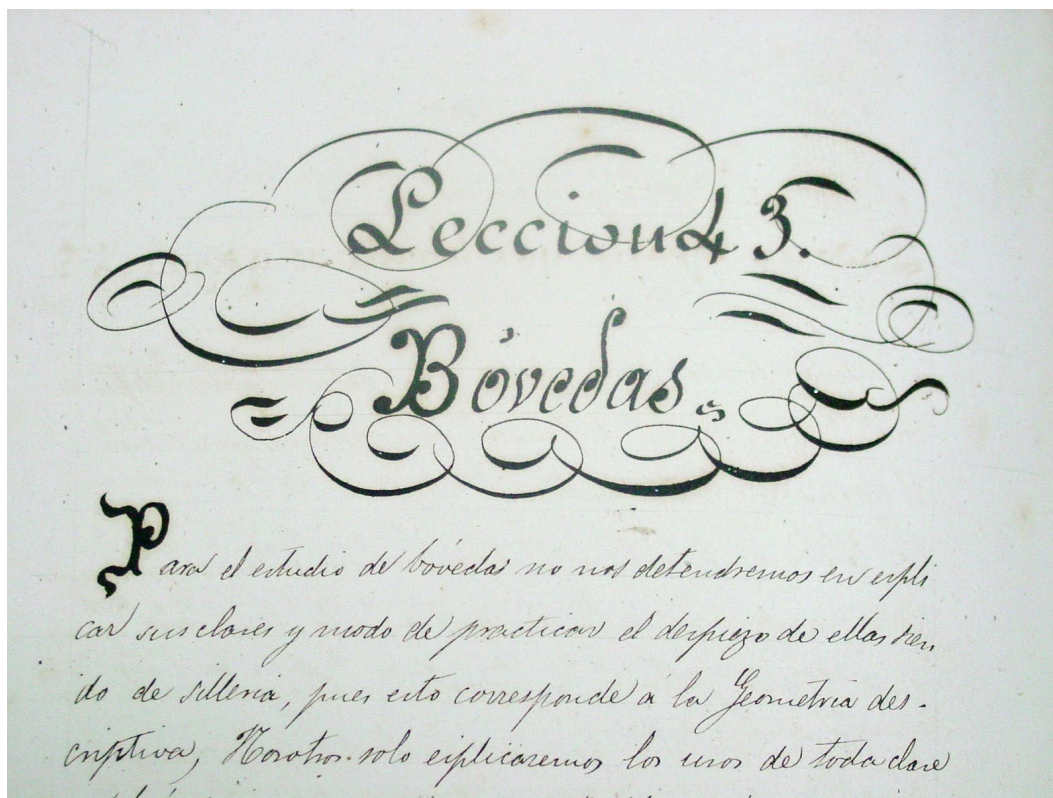
Llibre en dos volums (text i atlas de làmines), localitzat a la biblioteca de la Càtedra Gaudí. Són apunts de les classes Joan Torras, manuscrits, excepcionalment passats a net, amb títols rubricats i lletres capital a l'inici de pàgina o paràgraf. L'atles de construcció és de gran format i conté un conjunt de làmines molt vistoses dels diferents temes.

Títol complet: *Lecciones de Construcción explicadas por el catedrático D. Juan Torras por la Real Academia de san Fernando.*

Títol de la portada interior:
*Cuarta asignatura de la carrera
de Maestros de Obras,
aparejadores y agrimensores.
Cuaderno del alumno
(Signatura rubricada).*

A continuació adjuntem la transcripció literal de tot el capítol de voltes (pàg. 197-205).





Lección 43. Bóvedas

Para el estudio de bóvedas no nos detendremos en explicar sus clases y modo de practicar el despiece de ellas siendo de sillería, pues esto corresponde a la Geometría Descriptiva.

Nosotros solo explicaremos los usos de toda clase de bóvedas y su característica material o práctica, ya siendo de sillería, como de ladrillo o mampostería.

El oficio de las bóvedas generalmente es el de sostener un pavimento, y siempre el de ser techo, por lo tanto se pueden considerar como una clase de suelos.

Empecemos pues por las bóvedas de ladrillo, estas pueden ser tabicadas y de rosca.

Se llama tabicadas cuando están formadas por ladrillos planos, unidos de canto como en los tabiques. Según su importancia tendrán uno o dos gruesos y se sientan con mortero, pero es más general hacerlo con yeso. Las de rosca están constituidas por ladrillos unidos de plano.

Antes de ver el modo material de construir vamos a ver detenidamente, y siendo la bóveda de la clase que se quiera respecto a material.

¿Dado un espacio qué bóveda se adoptaría?

La forma de bóveda que se debe adoptar depende directamente de la disposición de los muros que cierran el espacio que deba cubrirse. Si se nos diera un espacio rectangular, cuyo menor lado no excediera de la dimensión de las bigas ordinarias, o sea treinta palmos, la bóveda se apoyará en los muros laterales que forman los lados mayores, y la forma más conveniente será cilíndrica o de cañón seguido, ya peraltada o rebajada. Se adoptará uno de estos casos según el espacio, y la resistencia de los muros.

Cuando los muros fueren suficientemente sólidos, será la mejor adoptar la de cañón seguido rebajada, pues además de ocupar poco espacio no tiene mucha carga.

Si los muros no presentasen toda la resistencia conveniente se adaptará una bóveda más peraltada, pues cuanto más peraltada menos tiende a derribar los muros, pero en cambio carga más.

En un espacio cuadrado, aunque no lo sea su rigor, se empleará una bóveda que reparta la carga entre los cuatro muros en proporción a la resistencia a cada uno de ellos y será la de rincón de claustro o esquife. Dado un espacio que tenga más de 25 o 30 palmos de anchura se dividirá en sentido longitudinal en dos partes iguales por medio de una serie de pilares y de pilar a pilar se construye un arco para que hagan en conjunto el efecto de una jácena, arreglado así se nos ofrecen dos medios de cubrir con bóveda y son los siguientes:

1º Constrúyanse dos cañones seguidos paralelos que ambos tengan apoyo en los arcos y otro en los muros correspondientes. Los pilares deberan ser bajitos para permitir la peraltez de la bóveda y arcos, pues cuanto más elevado tuvieren el arranque más altura se necesitaría.

2º Cuando el espacio debe quedar muy despejado se procura que los arcos sean muy peraltados y de cada pilar a la pared se construyen arcos iguales a los que se hayan adoptado, de este modo quedaran espacios cuadrados que se cubren con bóvedas vaidas.

En una casa particular y en otros muchos casos no se puede disponer de la altura que se requiere para dicha clase de bóvedas y lo que se ha hecho es aplastarla dándole uno, uno y medio o dos pies de punto o peralte constituyendo las bóvedas llamadas cochu como las que hay en la Plaza Real de esta ciudad.

Los arcos que se construyen entre arcos en lugar de ser de medio punto sería conveniente en algunos casos emplear arcos de tres centros y así los pilares no tendran que hacerse tan bajos.

Los espacios hay quien los cubre con bóvedas por arista pero son muy duras y es más conveniente emplear las vaidas i de cochu.

En espacios circulares es costumbre colocar bóvedas esféricas o bien un lucernario de abrace los muros y otro más pequeño rematado por media naranja.

En general decimos que la forma del espacio nos dará ya la de la bóveda, pero siempre se debe tener en consideración la clase de edificio y a qué está destinado.

En iglesias, salones regios y demás habitaciones que deba ostentarse grandeza, de verdad se cometería un error colocar naves rebajadas, pues parecen que a uno le aplasten por su poca elevación, al paso que si vemos bóvedas que sean muy peraltadas, nos infunde respeto y dominan nuestros sentimientos como sucede en las iglesias que pertenecen al goticismo. Además de esta circunstancia se tendrá en cuenta la belleza de la obra.

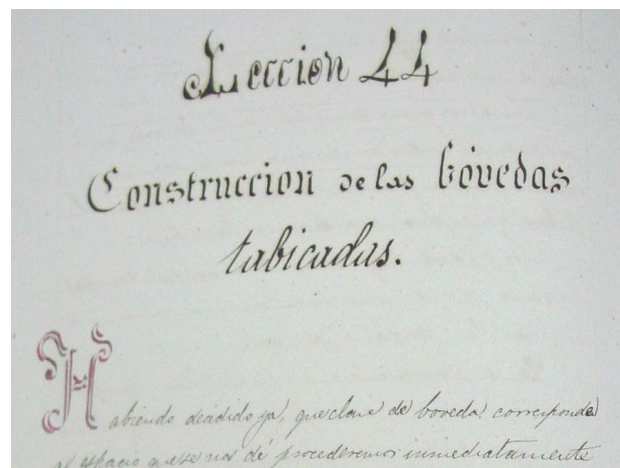
Ahora pasaremos al modo material de construcción.

----- · -----

Lección 44. Construcción de bóvedas tabicadas

Habiendo decidido ya que clase de bóveda corresponde al espacio que se nos de procedemos inmediatamente a su construcción y en este caso supondremos que es tabicada, dejando las de rosca para otro lugar.

Las bóvedas tabicadas se pueden construir con cimbra, pero como no cargan mucho y además no son de tanta importancia que requieran los gastos consiguientes a buenas cimbras los constructores se valen de cerchas, guías, reglones, etc. Su práctica les facilita la construcción con solo plantillas que señalen líneas rectas o curvas según se requiera. Si fuese un cañón seguido la plantilla que marque el intradós será movable para poderla transportar conforme se vaya adelantando la obra. En una bóveda por arista se colocan cerchas a las aristas en las vaidas las plantillas se colocan diagonalmente y cuatro medias plantillas que



van a favor a la clave marcando las cuatro pechinas. Las plantillas deben sugetarse con reglas apoyadas al suelo haciendo de pies derechos.

En las bóvedas de escalera no se pone siquiera plantilla tal es la práctica y soltura con que se hacen. Sin embargo en la parte de la caja seria conveniente colocar una plantilla.

Desde el momento que se trata de empezar la bóveda es preciso que en los muros se hagan salmeros, regatas o banquetas para apoyarse, pero hay casos que solo se forma una pestaña con yeso y ofrece la solidez que se requiere para una bóveda de tan poco peso como acostumbran a ser todas las tabicadas.

Respecto al modo de empezar la bóveda debe advertirse que conviene colocar tantos operarios como lados tenga, pues requiere que se suba por igualdad.

Sobre el enlace de los ladrillos o baldosas se procurará que se acomoden a la curvatura de la bóveda, lo qual se consigue haciendo que el lado menor del ladrillo siga la mayor curvatura de aquella y de este modo a cada ladrillo le corresponde una porción recta, se procura además que las baldosas reciban los empujes perpendicularmente a su longitud. A fin de evitar roturas las baldosas o ladrillos según lo que sea se enlazan como en los pavimentos.

Cuando la bóveda debe tener dos o más géneros lo verifican a medida que van construyendo el primero hechándole yeso claro, amasando y colocando los ladrillos de cualquier modo, pero siempre a juntas.

Después de subida la bóveda por todos sus extremos, y próxima a cerrarse, sea de la clase que fuere se acostumbra dejar abierta para que el yeso fragüe, y después de haber hecho asiento se cubre. Sin embargo los hay que lo hacen inmediatamente, pero esto puede dar mal resultado, pues el yeso al fraguar se hincha y no teniendo suficiente espacio para dilatarse rompe la bóveda.

Contruida ya la bóveda del modo más conveniente y cumpliendo las reglas del arte sigue la operación de igualar los senos del trasdós.

Varias son los medios de que podríamos hechar mano y los explicaremos cada uno de por si para presentar las ventajas o inconvenientes que tengan.

Lo que primero se ocurre al tratar de igualar los senos es llenarlos de arena o tierra, pero esto tiene el inconveniente que en bóvedas muy peraltadas las cargaria extremadamente, participando de ello el edificio.

Otros los igualan construyendo contra-bóvedas que son boveditas que se apoyan en el mismo muro y en las terceras partes de la bóveda, o bien al punto de mayor curvatura de la elipse, procurando que las cúspides de todas ellas vengan en un mismo plano y después se enrasan con ripio o tierras.

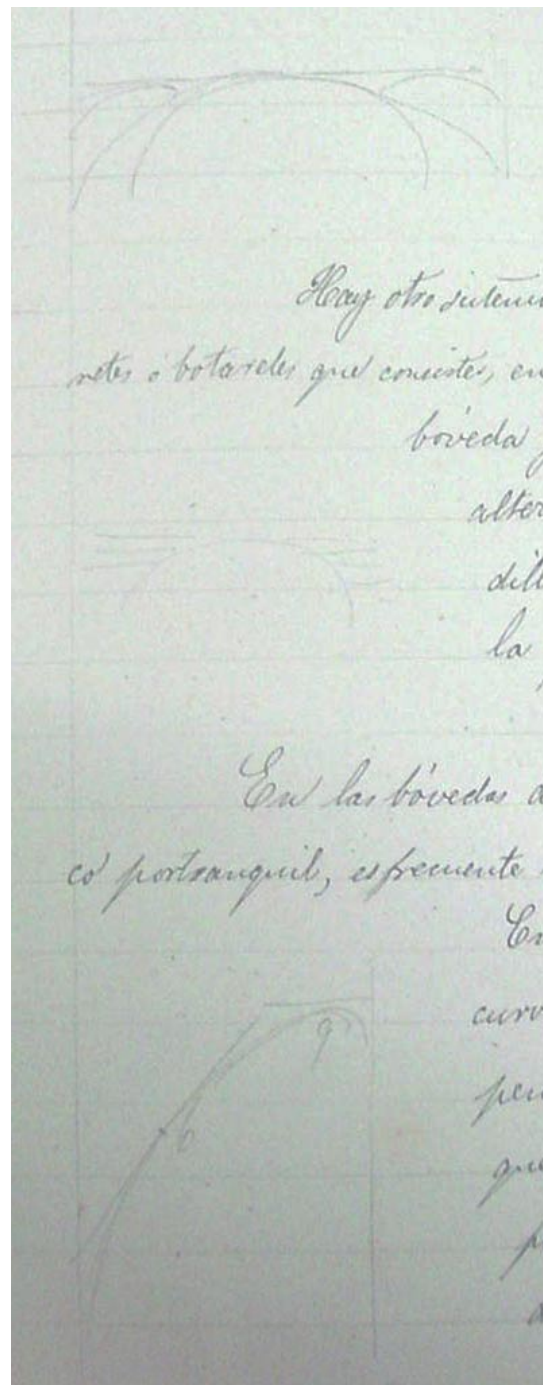
Vamos a ver los inconvenientes que las boveditas traen consigo.

Cuando se apoyan a demasiada altura influyen a que la bóveda principal se vaya abajo.

Hay otro sistema, llamado de refuerzo con muretes o botareles que consiste en construir en los senos de la bóveda grande una serie de tabiques alternados a veces con alguna bovedilla, según sea la dimension de la que se trata de enrasar.

En las bóvedas de escalera, o sean las de arco por tranquil, es frecuente ver roturas.

Esto es fruto de que dando mucha curvatura a la bóveda, sucede que el peso está mal repartido y teniendo que resistir mucho en b se rompe por dicho punto lo qual es efecto de haber poco peso en q. Por lo que se procurará dar a la bóveda una forma menos elíptica, pues en toda la extensión del tramo de la escalera podria seguir paralela a él y

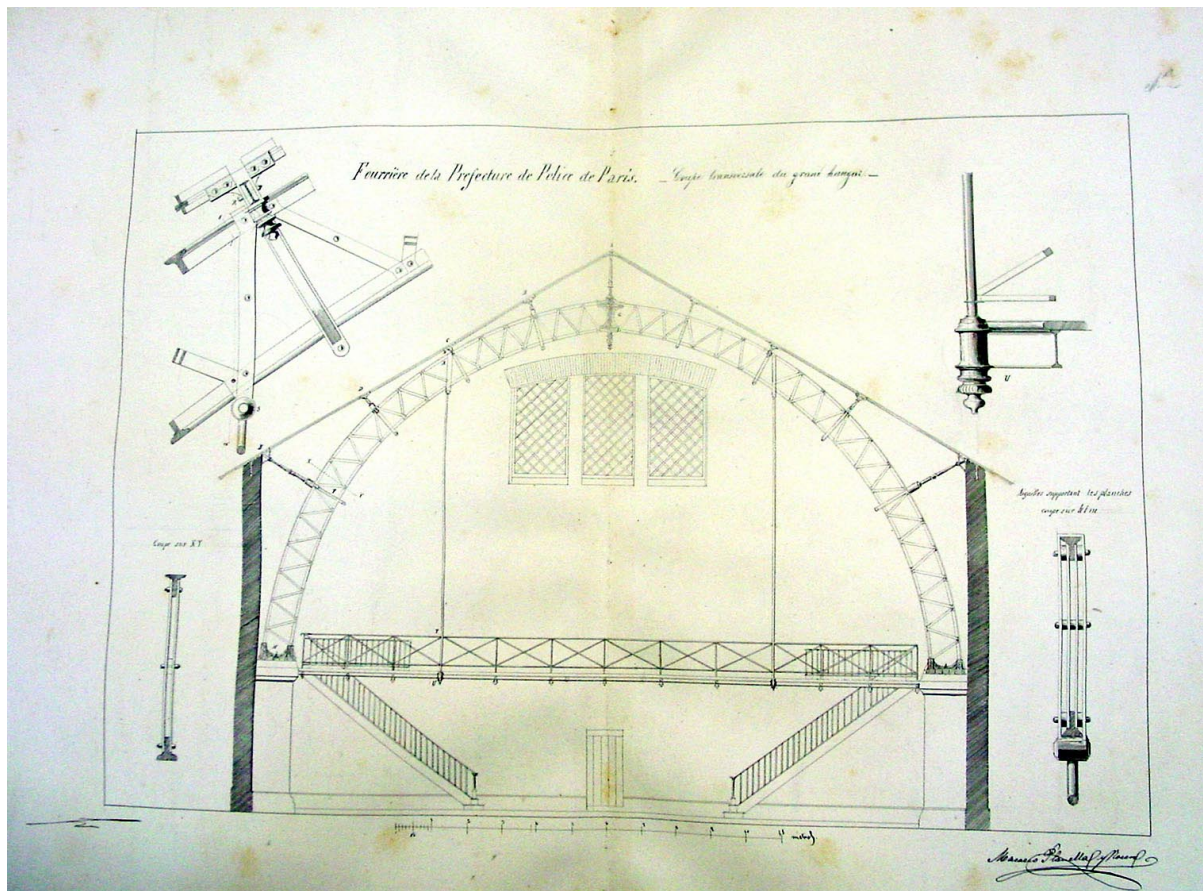


solo darle una curva muy rebajada en la meseta pues solo de este modo la carga queda repartida de lo contrario nos encontramos siempre en el caso antedicho de romperse por la parte de mayor curvatura del tramo, por recibir toda la carga que le comunica la curva superior al paso que si esta no es pronunciada respecto aquella recibe en si el peso que le corresponde sin poderlo transmitir a otro punto alguno.

Esto es cuanto podemos decir sobre las bóvedas tabicadas dejando todas las demás minuciosidades que respecto a ellas se podrian dar pasemos al estudio de la otra clase de bóvedas de ladrillo llamadas de rosca y a su paso, si algo hay que advertir sobre bóvedas en general lo haremos ayudados de la teoria que nos suministre dicha clase de bóvedas.

----- · -----

Una de les làmines més vistoses del volum e l'atles és la que adjuntem a continuació:



ANNEX 3.4

Estàtica gràfica de Hermann Scheffler

Joan Torras, a les seves classes remetia als alumnes a un text de Scheffler, en francès, per completar algunes explicacions de les seves classes. De Herman Scheffler hem trobat dos llibres:

- *Die Hydraulik auf neuen Grundlagen*, Leipzig, 1891. Localitzat al fons antic de la biblioteca de l'ETSEIB. És un text en alemany, sense il·lustracions, i pel títol sembla que versa sobre hidràulica. No és el text al qual es referia Torras.
- *Traité de la stabilité des constructions*, traduïda de l'alemany per Víctor Journié, París, 1864. Localitzat a la biblioteca de la RACAB.

Aquest segon és el que hem consultat i traduït per a la seva millor comprensió.

Signatura:

Codi de barres:

Notes de traducció:

El text escrit en francès antic, de fa 150 anys, i provenint d'una traducció alemanya, avui dia costa una mica d'entendre per als mateixos traductors. En molts casos s'ha hagut d'alterar considerablement l'ordre o estructura dels components de les frases o oracions i en molts altres s'ha modificat la puntuació. També ens ha dificultat la comprensió algunes omissions de verbs, subjectes o altres elements essencials en algunes frases. En aquest sentit la traducció que oferim no és literal sinó que hem primat oferir un text entenedor. És per això que, per distingir la part original de la nostra interpretació, hem decidit marcar en color blau els fragments que hem introduït per facilitar la comprensió i també els que hem arranjat més substancialment. El text que mostrem, per tant, no és una traducció sinó la nostra interpretació, amb ulls actuals, i afegim molt nombrosos comentaris a peu de pàgina no només per aclarir dubtes sinó també, a cops, per valorar o comparar els mètodes que s'exposen.

D'altra banda, en el llibre destaquen les il·lustracions “en negatiu”, és a dir, de línia blanca sobre fons negre. En la nostra traducció, però, les reproduïm invertides (línia negra sobre fons blanc), simplement per facilitar la lectura i l'homogeneïtzació visual de la pàgina.

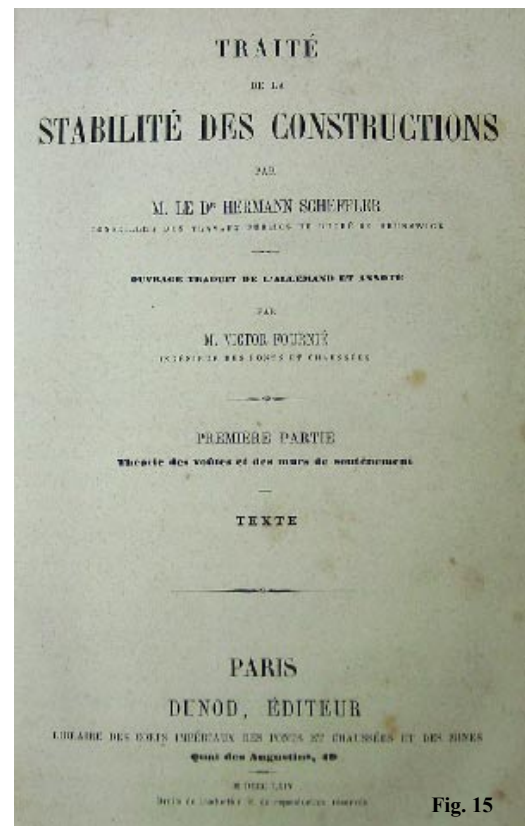


Fig. 15

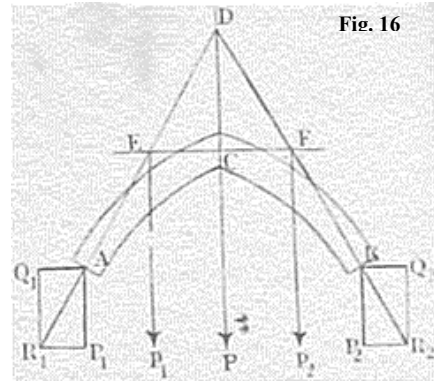
LLIBRE II. TEORIA DE LES VOLTES.

CAPÍTOL 1. Arcs de dues meitats simètriques.

Secció A. Equilibri de rotació sobre dues càrregues verticals simètriques.

§ 8. Generalitats.

Per més simplicitat, nosaltres considerem en primer lloc, una volta formada per dues branques AC, BC (Fig. 16), simètriques, juxtapossades i compreses entre dos plans verticals paral·lels¹. Aquest arc es suposa carregat no solament pel seu pes, sinó també per altres pesos distribuïts simètricament a l'una i l'altre part del vèrtex C. Aquest arc, està compost de dovelles aïllades en forma de tascó, formades amb materials no compressibles, i es recolzen sobre dos contraforts en els seus extrems A i B. La massa de la volta, està sotmesa a la llei de fregament en els seus junts; i no es té en compte l'adherència, difícil d'avaluar, del morter que pot trobar-s'hi interposat. Per estudiar l'estabilitat de la construcció composta per la volta i els contraforts, buscarem les condicions d'equilibri de la volta en ella mateixa, considerada recolzada sobre els contraforts fixes. Aquesta recerca ens farà conèixer al mateix temps les pressions que la volta exerceix contra els seus suports en A i en B.



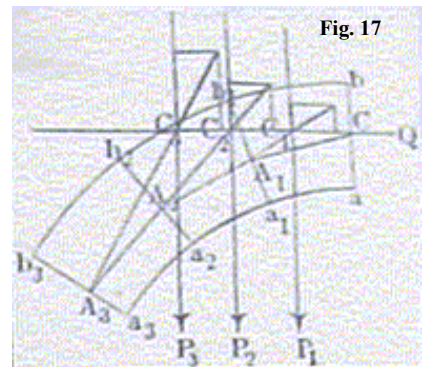
Si es tenen superfícies de suport bastant sòlides, per exemple una volta establerta entre dos parets de pedra, no cal preocupar-se per l'estabilitat dels contraforts. Si els contraforts són fets d'obra susceptibles de desplaçament o de rotació, serà necessari buscar si estan en equilibri sota l'acció de les forces que els sol·licitin. A aquest efecte, en els estudis sobre voltes es consideren els contraforts com a bases aïllades a continuació de la volta, massisses, fins al nivell dels fonaments. Així doncs, els contraforts molt massissos, sobretot quan ells són construïts amb cura, han de ser considerats com cossos indescomposables i que es desplacen d'una sola peça.

Tenint en consideració la forma simètrica dels dos mitjos arcs respecte del vèrtex, és clar que els punts d'aplicació A i B de les reaccions R_1 i R_2 i les superfícies de suport seran també simètriques respecte a la vertical DP que passa pel vèrtex i que la línia AB serà horitzontal encara que els punts A i B variïn sobre les superfícies de suport. Si es descomposa les reaccions R_1 i R_2 en les seves components horitzontals i verticals P_1, Q_1 i P_2, Q_2 , i es té que $P_1 = P_2$ igual al pes d'una mitja càrrega amb la seva sobrecàrrega, i l'empenta $Q_1 = Q_2$ ha de ser un mínima, segons el principi de la mínima resistència.

Considerem ara una de les dues meitats, per exemple AC; sigui EP₁ la vertical que passa pel centre de gravetat d'aquesta mitja càrrega; per tenir aquesta massa en equilibri és necessari que existeixi en el vèrtex una força i que la direcció CE passi pel punt d'intersecció E de la vertical EP₁ amb la direcció de la reacció R₁. Com que la component vertical de R₁ és igual al pes P₁ actuant en E, podem concloure sense dificultat que la tensió en el vèrtex C de la volta és necessàriament igual a la segona component Q₁ de la reacció R₁, i ha de ser horitzontal com ella.

Després d'això podem deixar de considerar una meitat de volta i, en AC, buscar la condició d'equilibri d'aquesta part, recolzada en A contra una superfície fixa, i sol·licitada en C per una força horitzontal; en el cas quan tingui lloc l'equilibri es buscarà quin és el valor més petit d'aquesta força horitzontal Q₁, i quin és el seu punt d'aplicació.

Siguin ab, a₁b₁, a₂b₂, a₃b₃ (Fig.17), els junts d'un arc qualsevol; P₁, P₂, P₃, les direccions verticals dels pesos de les parts abb₁a₁, abb₂a₂, abb₃a₃, i unint les sobrecàrregues que actuen sobre l'extradós en bb₁, bb₂, bb₃, aquestes càrregues poden consistir en masses contínues de pesos aïllats; sigui Q una força horitzontal aplicada al punt C d'un junt superior, la qual talla les direccions dels pesos P₁, P₂, P₃ en C₁, C₂, C₃, i que tenen la volta en equilibri, en concordància amb la reacció R₁ que actua sobre el punt inferior a₃b₃.



¹ Es refereix als plans verticals frontals, paral·lels al paper, que defineixen un gruix constant per a tot l'arc.

Es tracen els punts C_1, C_2, C_3 dels rectangles sobre les forces que es corresponen, Q i P_1, Q i P_2, Q i P_3 ; es tiren les diagonals, que donen en quantitat i direcció les resultants d'aquests sistemes de forces, i es prolonguen fins a interseccionar en A_1, A_2, A_3 , en els junts a_1b_1, a_2b_2, a_3b_3 , els punts C, A_1, A_2, A_3 representen els punts d'aplicació de les forces que actuen sobre les junts $ab, a_1b_1, a_2b_2, a_3b_3$, en les direccions $QC, C_1A_1, C_2A_2, C_3A_3$. I es clar que la superfície fixa a_3b_3 ha de resistir en A_3 , amb una força R_1 que actui en la direcció A_3C_3 i on la component vertical igual a P_3 , on el pes de l'arc abb_3a_3 ha crescut en càrregues, mentre que la component horitzontal té el valor Q .

És a dir, perquè l'arc pugui romandre en equilibri sota la influència de la força horitzontal Q , es necessari:

1. Que els punts d'intersecció C, A_1, A_2, A_3 , caiguin dins l'interior dels junts respectius $ab, a_1b_1, a_2b_2, a_3b_3$. Si per un junt qualsevol no es pas així, per exemple, el punt A_2 estigués per sobre de b_2 , la massa abb_2a_2 trabucaria entorn de l'aresta b_2 i es capgiraria. La condició precedent assegura així l'equilibri de l'arc contra la rotació de l'aresta d'una unió qualsevol.
2. Que les direccions de les forces exercides sobre les junts, $QC, C_1A_1, C_2A_2, C_3A_3$, facin amb les normals als junts respectius angles que no sobrepassin l'angle de fregament. Si això no fos pas així, per exemple, en la unió a_2b_2 , la massa abb_2a_2 lliscaria sobre la unió en la direcció a_2b_2 . Aquesta condició assegura l'equilibri contra el lliscament sobre cada junt.

Com que el fregament dels materials utilitzats **habitualment** en la construcció de voltes és quasi sempre bastant fort, per la qual cosa la caiguda de l'arc per lliscament no esdevé un perill, aquesta darrera condició la deixarem de banda en els paràgrafs següents, on es suposarà que no hi ha pas perill de ruptura fent-ho d'aquesta manera. En conseqüència l'equilibri en qüestió és degut, **simplement**, a la possible rotació al voltant d'una aresta, i més tard ja tornarà a sortir l'equilibri per lliscament.

§ 9. Corbes de pressió.

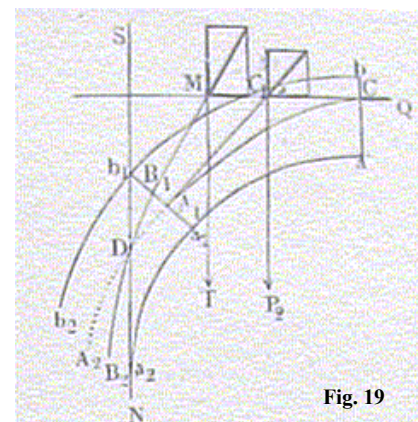
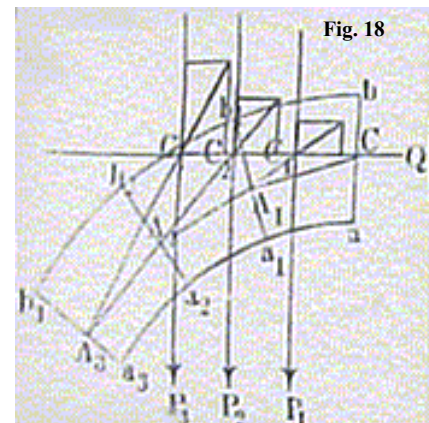
Si l'arc comprès entre ab i a_3b_3 (Fig. 18) té un nombre finit de junts, la línia $CA_1A_2A_3$, que passa pels punts d'aplicació de les forces actuant sobre els junts successius, i que s'ha d'anomenar línia de pressions, és una línia poligonal. Tanmateix, per generalitzar la recerca, es considera factible la volta composta per una infinitat de dovelles petites, aleshores la línia de forces esdevindrà una corba contínua (que passarà, entre altres punts, per C, A_1, A_2, A_3), sempre i quan la càrrega suportada per l'arc sigui contínua i segueixi una llei.

La càrrega contínua es compon ordinàriament dels pesos de la volta i dels murs o bé dels reblerts que s'hi sobreposen, compostos per materials que es distribueixen de manera contínua; si hi hagués una altra càrrega en aquests punts, simètricament posada sobre les dues mitges voltes, segons pesos aïllats a sostenir, la corba de forces tindrà punts singulars en aquests diversos llocs.

Suposem per exemple que el punt b_1 de l'extradós ha de sostenir el pes puntual S (Fig. 19) el qual exerceix la seva acció sobre la dovella $b_2b_1a_1a_2$, situada sota del junt b_1a_1 , i no pas a sobre. La combinació de l'empenta horitzontal Q amb el pes P_1 actuant sobre b_1baa_1 donarà per punt d'unió de la corba de pressions en el junt b_1a_1 el punt A_1 . Sigui $T = P+S$, sigui MT la vertical que representa la força de P_1 i S , sigui MB_1 la diagonal del rectangle traçat sobre Q i T : l'intersecció d'aquesta diagonal amb b_1a_1 dona el punt d'aplicació B_1 del braç inferior de la corba de forces. Aquesta corba es trobarà així trencada en aquest junt, hi haurà dues branques diferents, CA_1, B_1B_2 .

I es fàcil de veure que el punt B_1 serà sempre comprès entre A_1 i b_1 , i no pot caure ni en la direcció A_1b_1 més enllà de b_1 , ni en la direcció b_1A_1 més enllà de A_1 , ja sigui que el punt A_1 caigui en la part gruixuda de la volta, sigui en la que es troba fora sobre la prolongació dels junts a_1b_1 . Si A_1 s'acostés a b_1 , B_1 s'acostarà igualment a b_1 .

Suposem que conservant la dimensió i el punt d'aplicació de l'empenta Q es suprimeix el punt S , i així la corba de pressions sigui la línia contínua CA_1A_2 ; D és el punt d'intersecció d'aquesta corba amb la vertical Sb_1N passant b_1 . En general aquest punt d'intersecció serà únic; en certs casos pot ser múltiple. Restablint ara el pes S sense tocar Q . Es produirà la corba de pressions discontinua $CA_1B_1B_2$, on la part superior CA_1 queda idèntica a



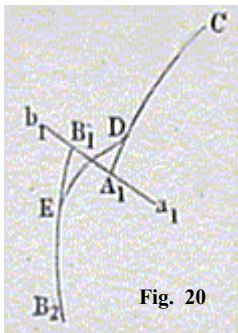
aquesta precedent existent, i la part inferior B_1B_2 talla a A_1A_2 de la corba precedent en el punt D, tots els altres punts es troben compresos entre la corba A_1A_2 i la vertical SN.

Si el junt b_1a_1 sobre l'aresta superior, en la qual actua aquest últim pes S, és vertical com ho és el junt ba en la clau o vèrtex, els tres punts A_1 , B_1 , i D coincidiran, i la corba de pressions formarà una punta angulara en aquest punt. Si el pes actua en el mateix junt de la clau, se suposarà que la volta formada per les seves dues parts concurrents i simètricament carregades suporta en el seu vèrtex el pes 2S, del qual una meitat S ha de ser atribuït a la mitja volta de l'esquerra i l'altre a la mitja volta de la dreta.

Si encara hi ha un punt sortint considerant aquestes corbes de pressions particulars que passant pel punt b_1 ; es faran coincidir els punts A_1 , B_1 , D i b_1 .

Si el punt A_1 es troba fora de la volta i en la prolongació de a_1b_1 cap amunt de manera que el punt B_1 , comprès entre A_1 i b_1 , sigui inferior a A_1 , l'intersecció D de la vertical SN amb la corba primitiva CA_1A_2 estarà totalment fora de la nova branca B_1B_2 ; aquesta última branca quedarà aleshores, des del punt d'aplicació B_1 a la dreta de A_1A_2 i la seva prolongació virtual sobre el punt B_1 només passarà en D.

Remarquem que, sobre d'un cos natural, en realitat un esforç finit no pot mai actuar puntualment com un element matemàtic, ja que aquest esforç s'ha de repartir seguint una llei contínua sobre una certa extensió més o menys restringida als dos costats del punt considerat; així a prop dels extrems d'aquesta extensió l'acció de la força decreix successivament fins a zero. Així, la corba de pressions, tot i essent el cas tractat anteriorment, serà sempre una corba contínua que presentarà només en la proximitat del junt b_1a_1 dues fortes curvatures oposades en el punt d'inflexió, com la representada en la figura CDEB₂ (Fig.20).

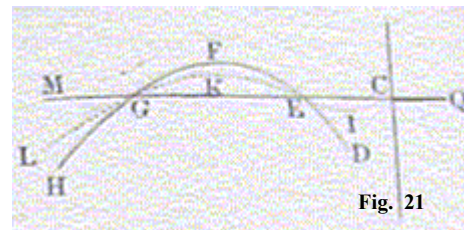


La figura de la part DE, molt fortament curvada, no pot ser traçada amb exactitud si no es coneix la llei per la qual la força S es reparteix sobre les molècules properes. Feta aquesta consideració, es traçarà la corba trencada $CA_1B_1B_2$, i s'inserirà, a ull, el segment DE, de manera que es retorni al cas d'una corba de pressions no interrompuda i contínua. Això és el que suposarem en les recerques que seguiran.

§ 10. Propietats generals de la corba de pressions.

Les propietats següents tenen importància per la recerca posterior. Es demostraran fàcilment sota aquesta restricció: la prolongació dels junts ba , b_1a_1 , b_2a_2 , ... amb la vertical superior sobre el punt a l'extradós del junt, a l'esquerra d'aquesta vertical, no faran en cap cas, un angle més gran de 90°. Això és el que comprèn tots els casos d'aplicació.²

1r) Sigui DEFGH (Fig.21) la corba que s'obté prolongant les verticals passant pels centres de gravetat dels pesos P_1 , P_2 , P_3 , ... fins que es troben amb els junts corresponents, i unint aquests punts d'intersecció amb un traç continu, de manera que aquests punts poden resultar dintre o fora de la volta.



Sigui C el punt d'aplicació d'una força horitzontal Q actuant sobre el junt del vèrtex, i determinant una corba de pressions que passarà en C. L'horitzontal CM passant en C tallarà la primera corba en un nombre indeterminat de punts, com E i G, de manera que certes parts de la corba, DE, GH estaran per sota, i d'altres, EFG, per sobre d'aquesta horitzontal. La corba de pressions que comença en C, tal com CIEKGL (en traç discontinu), qualsevol que sigui el valor de Q corresponent, sempre passarà per C, E i G. A més a més, les parts CIE i GL estaran sempre sota de l'horitzontal CM, i justament entremig d'aquesta línia i les parts de la corba DE i GH, respectivament; les parts com EKG sempre quedaran per sobre d'aquesta horitzontal, i entre ella i les parts de la corba com EFG.

El que s'ha dit de la posició de la corba de pressions entre l'horitzontal CM i la corba DEFGH també és cert, quan la mateixa horitzontal CM no talla aquesta corba, i resta tota sencera per sobre, o tota sencera per sota.

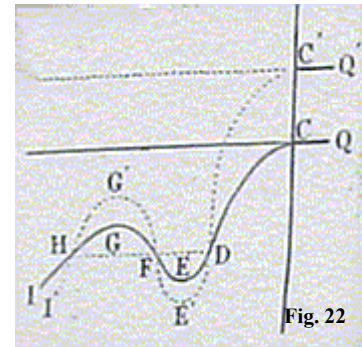
2n) En quasi tots els casos d'aplicació, DEFGH forma una corba en la qual tots els punts són més baixos que el punt inferior del junt del vèrtex de la volta, de manera que en general la horitzontal CM està per sobre d'ella mentre que el punt C a la clau sigui en l'interior de la volta. Aquesta corba (DEFGH) representa evidentment la corba de pressions particular que respon al cas de $Q = 0$, per la qual, en conseqüència, la posició del punt d'aplicació de la força nul·la al vèrtex és indeterminada.

² Amb aquesta consideració està limitant l'àmbit d'aplicació, i en aquest cas els casos que queden exclosos són aquells arcs de més de 180°, tipus mozàrabs o de ferradura, que retornen cap a l'interior.

3r) Si s'augmenta la força Q , conservant el seu punt d'aplicació, es troba la línia CIEKGL, una nova corba de pressions que passa, certament, per C, E i G, la qual es troba compresa entre l'horitzontal CM i la primera corba de pressions, de manera que les parts CIE i GL, s'eleven, mentre que EKG s'abaixen. Totes les parts s'apropen a la horitzontal CM. Si al contrari, es disminueix la força Q , conservant **també** el punt d'aplicació C, la nova corba de pressions, que **també** passarà sempre per C, E i G, s'allunya en els altres punts de l'horitzontal CM, les parts CIE i GL s'abaixen, i EKG s'eleva.

4r) Si es mou el punt C sobre la seva vertical sense canviar la dimensió de Q , la nova corba de pressions s'eleva o s'abaixarà tota sencera respecte de CIEKGL, sense tenir amb aquests darrers cap punt comú, segons si el punt C pugi o baixi.

5è) Si es fa variar a voluntat la dimensió i el punt d'aplicació de la força Q tot a la vegada, s'obtenen corbes de pressió que es tallen mútuament. Però aquestes tals corbes, que es tallen en un punt qualsevol (fig.22), es tallen també en tots els seus punts situats sobre l'horitzontal del punt D, i no es troben en cap altre punt ni per sobre ni per sota d'aquesta horitzontal. Resulta que la unió en els punts tals com D, que no es pas la tangent horitzontal, es necessàriament una intersecció i no un contacte, i, per al contrari, la unió als punts màxims C, E, G, es necessàriament un contacte.



Aquesta conseqüència es dedueix immediatament de la proposició que precedeix, en considerar el contacte de les dues corbes així com la coincidència en dos punts infinitament propers, o sobre un element de longitud.

Per demostrar les preposicions que precedeixen, sigui P_1 el pes que respon en el junt que la corba de pressions CEGI travessa el punt D; sigui p_1 la distància des del punt D a la vertical del centre de gravetat del punt P_1 . El moment del pes P_1 respecte a D és $P_1 \cdot p_1$. Si Q és la pressió horitzontal en C, i z la profunditat del punt D sobre de l'horitzontal del punt C; $z \cdot Q$ és el moment de Q ; i essent D un punt de la corba de pressions, es complirà la relació característica:

$$z \cdot Q = P_1 \cdot p_1$$

Segui F un altre punt de la mateixa corba, a la mateixa alçada que D; siguin P_2 , p_2 el punt i la distància corresponent al punt F:

$$z \cdot Q = P_2 \cdot p_2, \text{ d'on surt que } P_1 \cdot p_1 = P_2 \cdot p_2$$

Si considerem ara una nova corba de pressions que passi per D, aleshores $z' \cdot Q' = P_1 \cdot p_1$, i per tant $z' \cdot Q' = P_2 \cdot p_2$: ja que també passa per F.

Si considerem, contràriament, un punt I de la primera corba, que no sigui a la mateixa alçada que el punt D, el pes P_3 actuant en el junt que passa per I, la distància p_3 ds de I a la vertical del centre de gravetat d'aquest pes, i h la diferència de nivell entre I i D. Es té per tota corba que passa en aquests dos punts:

$$z \cdot Q = P_1 \cdot p_1 \quad \text{i} \quad (h + z) \cdot Q = P_3 \cdot p_3$$

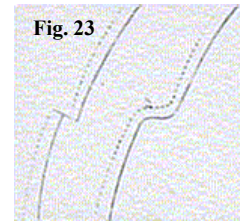
$$\text{D'on surt que} \quad Q = (P_3 \cdot p_3 - P_1 \cdot p_1) / h \quad \text{i} \quad z = p_1 \cdot P_1 \cdot h / (p_3 \cdot P_3 - p_1 \cdot P_1)$$

Després d'això, des que h té un valor finit, o bé des que els dos punts considerats no tenen la mateixa alçada, les dimensions Q i z tenen necessàriament un valor determinat que no pot correspondre més que una sola corba de pressions. Així doncs, dues corbes diferents no poden mai tallar-se en dos punts situats en alçades diferents.

6è) Les diferents corbes de pressions que es possible construir tenen això en comú, que llurs tangents són horitzontals al punt inicial C, en el qual no existeix un pes aïllat aplicat sobre el vèrtex. Si se suposa que aquestes corbes estan prolongades indefinidament en els contraforts, elles tendeixen cap a una mateixa corba que els serveix d'assíptota comuna.

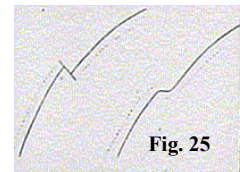
Aquesta última corba, a la qual ja hem fet menció (1r i 2n), representa la corba de pressions per la qual l'empenta se suposa nul·la. Està formada pels punts d'intersecció entre les línies dels junts i els pesos corresponents P_1 , P_2 , P_3 , ...

7è) Les propietats precedents s'apliquen també a les corbes de pressions discontinües, i responen al cas de pesos aïllats. Traçant els segments curts de forta corbatura que restableixen la continuïtat, es trobarà sempre fàcilment si una posició relativa de qualsevol d'aquestes dues corbes es possible o no, és a dir, si es tallen o no es tallen. Així, per exemple, amb la posició relativa de les corbes a traç continu i puntejat de la figura 23, es possible i no suposa pas intersecció. La que dona la figura 24 també es possible, mitjanament tres punts d'intersecció sobre una mateixa horitzontal, les corbes



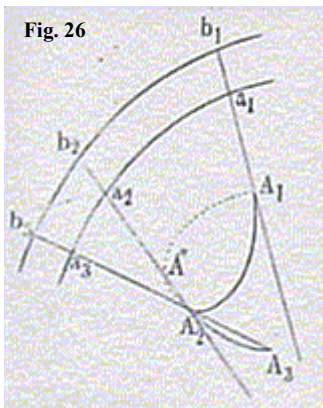
no poden tallar-se sobre cap altre horitzontal. En canvi, la posició de la fig.25 és impossible, perquè aquestes dues corbes no es tallaran en un punt sense fer-ho en altres punts que estiguin sobre la mateixa horitzontal.

Si es prolonguen tots els junts fins a llurs punts de concurrència més enllà de la volta, i es busquessin totes les corbes de



pressions imaginables les quals es corresponguessin en els punts dels junts situats més enllà dels punts de concurrència, caldria de fer una marca especial relativa a la posició relativa d'aquestes corbes en aquesta porció del pla.

8è) Sigui A_2 (Fig. 26) el punt de trobada dels dos junts b_2a_2 i b_3a_3 . Si una corba de pressions pasés per aquest punt, aleshores aquest punt podrà ser considerat, com punt d'aplicació de la pressió sobre el junt b_2a_2 , i com punt d'aplicació de la pressió sobre el junt b_3a_3 . En el primer cas, aquest punt, encara que trobant-se també en el junt b_3a_3 , no tindrà pas, respecte aquell, el caràcter de punt corresponent de la corba de pressions, aquesta propietat només li pertany respecte al junt b_2a_2 .



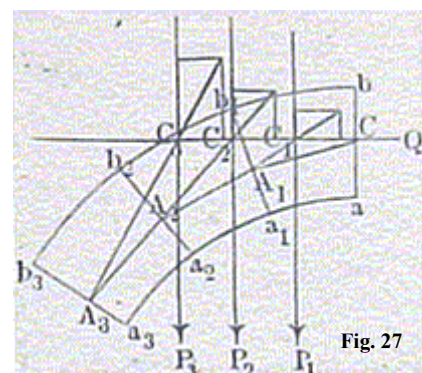
Sigui, per exemple, $A_1A_2A_3$ una corba de pressions que passa pel punt A_2 considerat com pertanyent al junt b_2a_2 . Passarà per un altre punt A_3 que correspondrà al b_3a_3 . Es pot concebre una altre corba $A_1A'A_2$, en la qual A_2 té la seva significació respecte al b_3a_3 , i un altre punt A correspondrà al b_2a_2 .

Segons això seria possible traçar corbes de pressió, en aquest cas, que es tallessin en diversos punts, a alçades diferents. Però, si es remarca que el punt A_2 no té en les dues corbes el caràcter d'un punt corresponent a un de sol i al mateix junt, es veu que les propietats abans enunciades conserven tota la seva generalitat. Se substitueix la idea de tall entre les dues corbes per la de

coincidència. Així, traçant la posició d'alçada relativa de les dues corbes, es tindrà cura que els punts d'aplicació corresponents a un mateix junt en les dues corbes siguin, respectivament, sempre més elevades o sempre més baixes. Per exemple, en la corba $A_1A'A_2$, a partir de A_1 , tots els punts tenen els seus corresponents en la corba $A_1A_2A_3$ més alts; encara que tinguin un punt comú A_2 , però té una doble significació.

§ 11. Definició precisa dels elements determinants per obtenir la veritable corba de pressions, així com la mínima i la màxima empenta.

Penetrem ara més endins en la recerca de les condicions d'equilibri d'una volta. Abans de tot cal remarcar que si la volta és suficientment gruixuda perquè totes les verticals que passen pels centres de gravetat dels pesos $P_1, P_2, P_3...$ tallin els junts corresponents en l'interior de la volta (fig.27), en altres termes, que si la corba de pressions que correspon a l'empenta $Q = 0$ enlloc no surt per fora del gruix de la volta, aleshores no és necessari cap força horitzontal al vèrtex per mantenir l'equilibri ³. (Nosaltres admitem implícitament que les verticals fan, amb les normals en els junts corresponents, angles més petits que l'angle de fregament relatiu al material de les dovelles, de



³ La figura no il·lustra el cas que es comenta. Les interseccions entre les verticals i els junts són a l'exterior del gruix de la volta, per l'intradós. Caldria una volta més gruixuda per l'intradós per exemplificar aquest cas.

manera que l'equilibri contra el lliscament siguin per tot arreu assegurat).

Aquestes circumstàncies es presenten, per exemple, quan, en construir una volta, no s'han posat les dovelles inferiors; cada junt, així com el contrafort, no pateixen una pressió vertical, i el contrafort no suporta cap esforç horitzontal. Tanmateix és fàcil de veure que, si es tracta d'un arc en el qual el junt al vèrtex sigui vertical i que està compostat d'una infinitat de dovelles infinitivament petites, el cas que tractem ($Q = 0$) no es podrà presentar perquè, prop del vèrtex, els angles entre les verticals $C_1P_1...$ dels pesos amb les normals als junts corresponents seran necessàriament més grans qualsevol que sigui l'angle de fregament. En aquest sistema fictici cal sempre una empenta, encara que pugui ser petita. En la realitat, com que cap volta no es compon de dovelles infinitivament petites, el cas que es tracta és possible encara que es presenta rarament en la pràctica corrent.

És clar que la corba a dalt considerada, que passa pels punts d'intersecció de les verticals als junts corresponents, no es trobarà mai per sobre de l'extradós, però podrà ser part per sobre o part per sota de l'intradós; tanmateix és necessari fer notar això, la qual cosa raonarem després.

Dit això, el problema és el següent: entre totes les corbes de pressions possibles segons les quals la volta roman en repòs, i en conseqüència en cap punt del seu desenvolupament no surten de l'interior de la volta, des del junt al vèrtex fins al contrafort, trobar aquella per la qual l'empenta Q es un mínim, i que, pel principi de la menor resistència, serà la veritable.

Quan es diu mínim aquest valor de l'empenta, no s'entén per un mínim analíticament absolut on el coeficient diferencial de Q en una direcció qualsevol és nul, sinó el valor més petit de Q possible sota les condicions del sistema.

Al costat d'aquesta corba, que respon al mínim de Q , es presenta la que correspon al màxim, i que representa la més gran empenta horitzontal que es podrà produir conservant la volta en repòs, si la producció de l'empenta no estigués subjecte al principi de la menor resistència.

La consideració simultànea d'aquestes dues corbes, la primera sol ser sempre la veritable en la nostra hipòtesis de l'incomprensibilitat de les dovelles, donen vistes útils sobre el sistema de forces que actuen sobre la volta.

És clar que si una d'aquestes línies existeix, l'altra també existirà necessàriament; serà un cas particular si les dues coincideixen: aleshores el màxim de Q serà també el seu mínim i no podrà existir cap altre corba que aquella. Si s'ha determinat les condicions generals que han de complir l'una o l'altra d'aquestes dues línies, i es troba que per una volta particular aquestes condicions no són complertes, aleshores ni l'altre corba ni cap corba de pressions poden assegurar que l'equilibri de la volta subsisteixi: doncs la volta es trencarà necessàriament.

§ 12. Caràcters comuns entre la corba de pressions que correspon a la mínima empenta i aquella que respon a la màxima.

La corba de pressions que respon a la màxima o a la mínima empenta, ha de situar-se sense sortir en cap de les parts del gruix de la volta, tenir un punt comú en l'extradós i un amb l'intradós, i es fàcil de veure que un tal punt comú, si no està en un extrem de la volta, sigui el vèrtex, sigui el contrafort, és necessàriament un punt de contacte de la corba de pressions amb la corba contorn.

Suposant en efecte que es pugui construir una corba de pressions continguda tota sencera en el gruix de la volta i que no tingui cap punt comú ni amb l'extradós, ni amb l'intradós, es podrà aleshores sense canviar el punt d'aplicació de Q a la clau, augmentar o disminuir aquesta força de tal manera que la nova corba de pressions, necessàriament diferent de la precedent, aconseguirà d'un costat o de l'altre **el contacte amb** el contorn de la volta, sense sortir-se'n. La línia en primer lloc construïda no pot respondre ni a un mínim ni a un màxim de l'empenta.

Si una corba de pressions, tota sencera continguda en el gruix de la volta, toca només una de les corbes contorn, l'extradós, per exemple, però no l'intradós, no podrà traslladar el seu punt d'aplicació cap al vèrtex d'aquesta última corba i conservar la dimensió de la força Q . De manera que la nova corba de pressions, després de les propietats exposades anteriorment, serà tota sencera sota de la primera, separada de l'extradós i no tindrà cap punt en comú ni amb una ni amb l'altre de les corbes contorn. Però aquesta nova corba de pressions que correspon al mateix valor de Q que la primera, comporta un creixement o disminució de la força Q , després del

raonament anterior; doncs aquesta corba, i per tant la primera construïda, no correspon ni a un mínim, ni a un màxim de l'empenta.

De tot això resulta que la corba que correspon al mínim o al màxim de Q ha de tenir un punt sobre cada una de les corbes contorn. Per definir els caràcters distintius de les corbes que corresponen respectivament al mínim i al màxim, queda per determinar la posició relativa d'aquests punts d'unió.

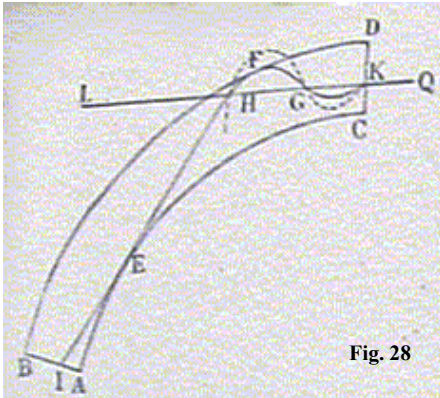


Fig. 28

Tanmateix farem prèviament la notació següent: sigui CDBA la mitja volta (fig.28), CD un junt vertical a la clau, AB el junt del suport, K el punt d'aplicació de la força Q , i KFEI una corba de pressions possible qualsevol que té el punt E comú amb l'intradós, i el punt F comú amb l'extradós. Els dos punts E, F han de ser sempre sota la horitzontal KL traçada pel punt K⁴. En el cas que els punts K, F, D es confonguin en D, o els punts K, E, C en C, els dos punts E i F estan, no sota de l'horitzontal KL, sinó sobre la mateixa horitzontal.

Pel punt E, aquesta proposta no necessita proves, ja que admetem que cap punt de l'intradós no pot ser a sobre de C, el punt més baix del junt de la clau⁵. Pel punt F, podem remarcar que, si és sobre de

KL, en disminuir el valor de Q sense canviar el punt d'aplicació K, la nova corba de pressions, seguirà el traç puntejat, s'abaixarà entre K i G, i s'aleverà entre G i H, i sortirà de l'extradós. Però aleshores la corba que correspon a $Q = 0$ també hauria de sortir de l'extradós, la qual cosa no és possible, segons una anotació feta anteriorment.

Hem d'ocupar-nos, doncs, de les corbes de pressions en les quals els dos punts coneguts E i F siguin sota de l'horitzontal KL, o vinguin justament sobre d'aquesta línia quan ella passa per C o per D.

⁴ Sembla que intencionadament s'il·lustra, justament, el cas contrari al que es planteja com a possible. Veiem a la fig. 28 la corba de pressions tallant l'horitzontal KL, amb un sector de la corba per damunt d'aquesta.

⁵ Aquesta hipòtesis, encara no és enunciada amb aquesta forma, ve del paràgraf § 10; Els angles dels junts amb la vertical superior són inferiors a 90 graus, ja que els junts són fets, més o menys aproximadament, radials a l'intradós.

§ 21. Procediment pràctic per l'establiment d'una volta estable.

S'estableix que una volta és certament estable, amb un cert grau d'elasticitat dels materials, fent-ho de la manera següent:

En primer lloc es traça, un perfil de volta anàloga a la forma general de voltes ordinàries, amb l'obertura i l'alçada sota la clau prèviament fixades i amb un gruix de la clau anàlogament també donat abans. Es busca per aquesta volta la veritable corba de pressions amb la hipòtesis de la incompressibilitat de les dovelles. Aquesta línia, que es determina pels mètodes ja coneguts, tallarà en diversos punts les corbes contorns. Aleshores es busca si, per la compressibilitat dels materials, la corba de pressions veritable no pot acostar-se a la corba mitjana, o bé si en certes parts té tendència a acostar-se a les arestes.

En el primer cas, la volta és perfectament estable. Això és el que succeeix quan la corba de pressions abans descrita (fig.36) passa pel punt més alt del vèrtex, D, i el punt més baix del suport, A. Això es produirà generalment en els arcs de cercle rebaixats.

En l'altre cas, i pels materials febles, perquè l'estabilitat estigui compromesa caldrà presuposar que la corba de pressions s'aproximarà a les arestes en els punts indicats. Així, al mateix temps que l'aresta sigui sobrepassada, l'equilibri de l'arc serà completament destruït. Això arribarà, per exemple, si la primera corba de pressions traçada DEI (fig. 37) toca l'extradós en D, l'intradós en E: aleshores en realitat la corba de pressions tendeix a aproximar-se a l'aresta exterior B o als voltants del punt I.

S'aconsegueix en aquest cas la més gran seguretat que es pugui aconseguir, fent possible una corba de pressions passant pel mig del junt a la vegada de la clau CD, al junt de ruptura E i al contrafort AB.

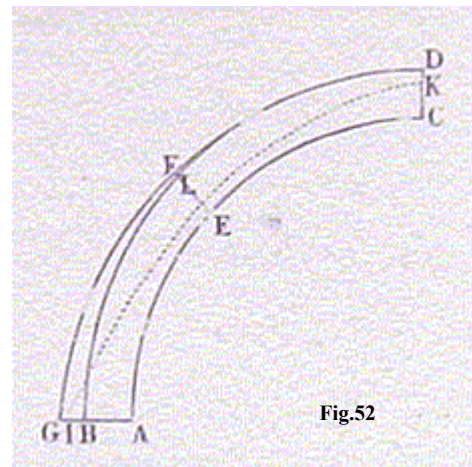
Si això no es dona, es pot arribar a l'equilibri conservant l'intradós, el gruix de la clau i augmentant el gruix del contrafort, o bé conservant els gruixos extrems i canviant la forma de l'arc per un abaixament vers E, o bé conservant la forma i donant un gruix uniforme que augmenti fins el grau necessari, o finalment combinant aquestes diverses modificacions.

Per aquest procediment s'obté una volta que posseeix un grau d'estabilitat exagerada per molts casos pràctics. Aquest procediment condueix sovint per altre banda a gruixos considerables o bé a un aplanament cap al junt de ruptura molt més pronunciat i que no convé.

La condició de fer passar una corba de pressions possible pel mig dels tres junts indicats no sembla pas respondre a una necessitat pràctica: En efecte, no es fa servir mai per les dovelles de materials bastant compressibles per tornar a portar cap al mig d'un junt la corba que teòricament passa per l'aresta d'aquest junt. Es reconeix així mateix de la inspecció de diverses voltes existents, que els punts febles de les dovelles es presenten sobre una de les corbes contorn per les seves arestes, els junts s'obren sensiblement de l'altra costat: La qual cosa prova que per la majoria de les pedres de construcció la corba de pressions no es pot separar de l'aresta de la pedra.

Per això, es pot considerar amb garantia suficient, el fet de permetre a la corba de pressions un retrocés fins al quart de junt a partir de l'aresta; es manllevaran dues zones, la interior i l'exterior, tenint cada una un quart d'espessor de cada junt, i s'aplicarà a la part restant les regles donades pel cas dels materials incompressibles assegurant que l'equilibri tingui lloc sota les càrregues donades.

Si la volta donada no compleix aquestes condicions, es modificarà fàcilment amb alteracions ja indicades més amunt, i per això s'operarà com segueix:



Admetem que la vertadera corba de pressions, pel cas dels materials incompressibles, i per tant el punt de ruptura EF (fig.52), sigui coneguda. Si es vol assegurar la compromesa estabilitat de l'arc ABCD, per exemple, augmentant simplement el gruix de l'arc en la part inferior, es construeix la corba de pressions KLI que passa pels dos punts K del vèrtex i L del junt de ruptura, tals com $DK = \frac{1}{4} DC$ i $EL = \frac{1}{4} EF$.

Es fa tot seguit $IG = (1/3) IA$, de manera que $GI = \frac{1}{4} GA$. L'arc AGDC presentarà a la pràctica una estabilitat suficient. Es pot pel resta tornar a començar l'operació per aquest nou arc i corregir així l'extradós, però aquesta nova operació no aportarà ordinàriament més que una modificació insignificant.

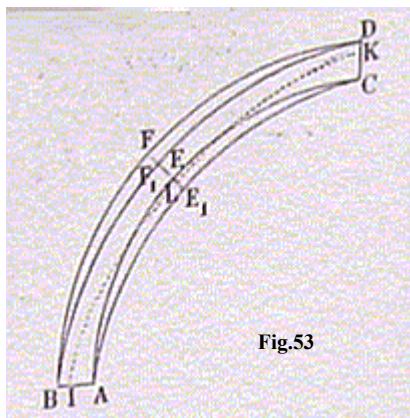


Fig.53

Si es vol conservar els gruixos i canviar la forma o bé la corbatura de l'arc, es prendrà en la volta els dos punts K i I respectivament col·locats a la clau i al contrafort (fig. 53), tals que $DK = \frac{1}{4} DC$, $BI = \frac{1}{4} BA$, i es construirà la corba de pressions KLI passant per K, I. Es pren tot seguit $LE_1 = (1/4)EF$, $LF_1 = (3/4)EF$. Aleshores l'arc ABF_1DCE_1A , pot necessitar una correcció, es repetirà l'operació, i posseirà l'estabilitat demanada.

Si, finalment, en un arc de gruix uniforme es vol augmentar successivament el gruix sense canviar la forma de l'arc, es construirà en la volta primitiva ABFDCEA (fig.54) la corba de pressions passant per K i I abans definits. Aquesta corba serà tota sencera dins el gruix de l'arc, com KLI, o bé ella sortirà com KLM en la proximitat del junt de ruptura. Sigui ara: al gruix $AB=CD=a$; i b la distància EL (o EM).

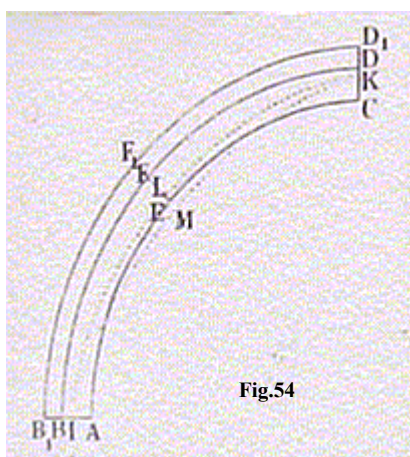


Fig.54

Es tindrà un arc de l'estabilitat requerida augmentant el gruix en una quantitat $BB_1=DD_1=(1/2)a - 2b$ (en el cas KLI) o bé $(1/2)a + 2b$ (en el cas de KMI). Aquesta modificació, la qual ens pot donar més exactitud si repetim la construcció, es autoritzada considerant que si s'augmenta uniformement la volta i que si es traça una corba de pressions passant pels punts situats al quart dels junts respectius de la clau i del contrafort, es té una nova corba sensiblement paral·lela a l'antiga KLI (o KMI)¹.

Quan l'equilibri de l'arc que considerem no es relaciona ni en el primer o el segon, sinó al tercer o el quart cas del paràgraf 16, el que resta arribarà rarament a la pràctica i quasi mai en els ponts, i es veurà fàcilment prenent per guia el que precedeix, la qual cosa s'ha de fer per assegurar l'estabilitat.

En un gran nombre d'aplicacions, la forma de l'intradós d'un pont es determinada mitjançant consideracions arquitectòniques, o bé per consideracions de evacuació d'aigües. Si malgrat tot s'arriba a que aquesta forma sigui indiferent, es farà bé de fer una corba de pressions passant pels punts mitjos dels junts si es possible, atenent que es tindrà així una volta d'estabilitat més gran i més uniforme i un repartiment de pressions sobre els junts també uniforme. La corba buscada s'obté per una o bé per més de dues aproximacions successives, partint d'una corba arbitràriament escollida, presumint gaudir d'una propietat buscada. Aquesta tal corba retrobarà el contrafort obliquament i no verticalment; i s'assembla molt a una paràbola on el vèrtex serà la clau.

En l'execució es podrà traçar aquesta corba aproximadament, com s'ha fet per les arcades el·líptiques, per mitjà de molts arcs de cercle.

¹ Sigui, admetent aquest paral·lelisme, x l'augment de gruix de la volta, y la distància de l'antiga a la nova corba de pressions. Es té els junts de clau i de contrafort,

$$(1/4)a - y + x = (1/4)(a+x)$$

i el junt de ruptura

$$b + y = (1/4)(a+x)$$

d'on surt

$$x = (1/2)a - 2b \text{ (cas KLI), Per KMI el mateix càlcul.}$$

22. Determinació del gruix de voltes des del punt de vista de la resistència de materials.

Una volta que satisfaci les condicions precedents, i situada sobre els contraforts indesplaçables, no pot trencar-se per rotació de les dovelles al voltant d'algunes arestes; però no hem exclòs fins ara la possibilitat d'una ruptura per trencament de les dovelles sota una pressió excessivament forta, o per lliscament de les dovelles sobre les cares d'alguns junts.

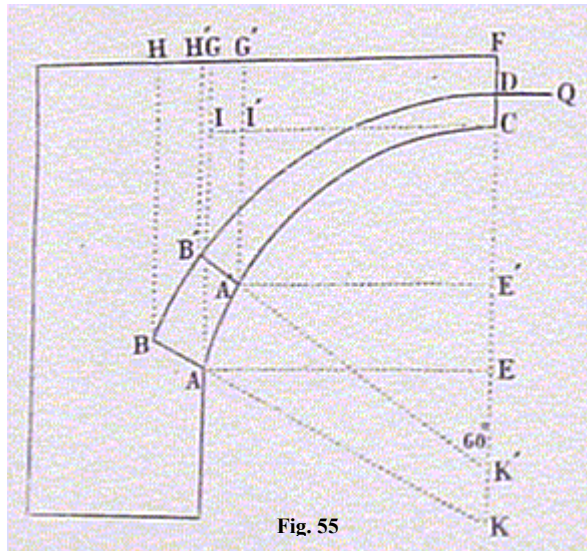


Fig. 55

Per garantir el perill de trencament sota una pressió excessivament gran, es necessari donar en tots els punts de l'arc un cert gruix a les dovelles, una certa separació de les corbes contorn de la volta (la pressió no està repartida d'una forma igualitària sobre tota la superfície del junt), i quan no se sap la compressibilitat de les dovelles, la separació per tant es tracta de determinar-la solament per la mesura de les voltes anàlogues, construïdes amb anterioritat i amb una duració reconeguda.

La determinació del gruix de les voltes des del punt de vista de la resistència dels materials pot estar compresa per les formes de pont habitual, per les fórmules que resulten de les consideracions següents:

En una volta ABDC, carregada d'un material de la mateixa densitat limitada a l'horitzontal FH, (fig 55) sigui:

- a la mitja obertura AE;
- b la fletxa EC;
- c el gruix de la clau CD;
- d el gruix del contrafort AB;
- h l'alçada DF de la massa homogènia formant càrrega sobre la clau. (si la matèria de la càrrega no es efectivament el mateix pes específic que les dovelles, es suposarà la línia FH més alta o més baixa segons el cas, i es continuarà amb l'hipòtesi d'un pes específic igual);
- β l'angle BKF del junt del contrafort amb la vertical;
- $\delta = d \cdot \sin \beta$ la projecció horitzontal GH del junt del contrafort AB;
- Q l'empenta horitzontal al cim de la clau;
- Q/c l'empenta mitjana per unitat de superfície al junt de la clau;
- P el pes de la volta amb la seva sobrecàrrega, ACFHB;
- M el moment de P en relació al punt A;
- R la reacció del contrafort AB;
- S la pressió normal sobre el junt del contrafort;
- S/d la pressió normal mitjana per unitat de superfície en el junt del contrafort.

Es pot representar les forces P, Q, R, S, per les superfícies, considerant-les com els pesos de prismes de les matèries de les dovelles, tenint una fondària igual a 1 en el sentit perpendicular a la figura ABFHC. Les forces mitjanes Q/c, S/d seran llavors representades per les longituds.

Per establir la fórmula d'aproximació que tenim a la vista, nosaltres indicarem dos casos:

Primer cas. – L'angle $\beta \leq 60^\circ$. Admetem que la veritable corba de pressions passi pel punt superior D de la clau i el punt inferior A del junt del contrafort, de manera que la força horitzontal Q actuant en D ha d'estar en equilibri al voltant del punt A amb la força vertical P actuant sobre el centre de gravetat de l'àrea ABFHC.

Assimilem per altra banda AIC a un segment parabòlic, de manera que la superfície igual $ab/3$, i la distància del seu centre de gravetat igual a $a/4$. En fi considerem el trapezi ABHG com un rectangle AG i de llargada $HG = \delta$. Tenim llavors, prenent el punt A pel centre de rotació:

Superfícies	Braç de palanca	Moments
$ACI = \frac{a \cdot b}{3}$	$\frac{a}{4}$	$\frac{a^3 \cdot b}{12}$
$ICFG = a \cdot (c + h)$	$\frac{a}{2}$	$\frac{a^3 \cdot (c + h)}{2}$
$AGHB = \delta \cdot (b + c + h)$	$\frac{-\delta}{2}$	$\frac{-\delta}{2} \cdot (b + c + h)$

D'on surt

$$P = \frac{a \cdot b}{3} + a \cdot (c + h) + \delta \cdot (b + c + h) \quad (1)$$

$$M = \frac{a^3 \cdot b}{12} + \frac{a^3 \cdot c + h^4}{2} - \frac{\delta^2}{2} (b + c + h) \quad (2)$$

$$Q = \frac{M}{b - c} \quad (3)$$

$$S = P \cdot \sin \beta + Q \cdot \cos \beta \quad (4)$$

Segon cas. – L'angle $\beta > 60^\circ$. Admetem que el junt de ruptura estigui inclinat a 60° sobre la vertical, que la corba de pressions passi d'aquesta manera pel punt inferior A' del junt A'B', inclinada sobre la vertical a 60° , de tal manera que la força Q actuant en D estarà en equilibri amb el pes A'B'H'FC al voltant del punt A'.

Sigui, pel punt A',

- a' la distància horitzontal A'E';
- b' la distància vertical E'C;
- d' el gruix de la volta A'B' al junt de ruptura, que es pot prendre igual a $d' = c + (b'/b) \cdot (d - c)$, per aproximació;
- δ' la projecció horitzontal G'H' del junt A'B'; $\delta' = 0,80d'$
- P' el pes A'B'H'FC;
- M el moment de P' en relació a A',

$$P' = \frac{a' \cdot b'}{3} + a'(c + h) + 0,80 \cdot d'(b' + c + h) \quad (5)$$

$$M' = \frac{a'^2 \cdot b'}{12} + \frac{a'^2 \cdot (c + h)}{2} - 0,32 \cdot d'^2 \cdot (b' + c + h) \quad (6)$$

$$Q = \frac{M'}{b' + c} \quad (7)$$

Té, com precedentment;

El pes P conserva el seu valor (1), i tenim encara aquí per la pressió contra el contrafort:

$$S = P \cdot \sin \beta + Q \cdot \cos \beta \quad (8)$$

Són aquestes pressions mitjanes Q/c , S/d , que es tracta de determinar per mitjà dels valors que elles posseeixen en les voltes del pont existent. Hem calculat per aquesta finalitat Q , S , Q/c , S/d per tot una sèrie d'obres conegudes, allà on la sobrecàrrega consistia solament en el camí ordinari, hem pres $H = 2$ peus; quan l'augment del gruix de l'arc, de la clau al contrafort, és desconeguda, l'hem suposada nul·la ($d=c$).

La taula següent referma els elements d'aquests càlculs, i dóna altres resultats dels quals farem ús en última instància.²

Per fer més aparents les lleis buscades, hem classificat els ponts per l'ordre ascendent dels valors de l'empenta determinada, segons els cas, per la fórmula (3) o (7). La resistència dels materials empleats no es la mateixa els diversos ponts; però mancats de dades suficients sobre aquesta resistència, hem estat obligats a no tenir en compte aquesta diferència, el que a la pràctica no ha suposat un gran inconvenient, perquè es pren sempre per les voltes dels materials escollits: ja que són generalment construïts en calcari o gres dur, i més rarament en granit o altres roques plutòniques. Les dues primeres espècies de pedres tenen la mateixa resistència; es per això que no s'exposa a la pràctica les dovelles que una feble partida de resistència que s'ha obtingut dels experiments de les mostres. Fiant-nos de la taula adjunta per les dimensions d'un pont nou, no s'haurà de témer el passar-se el límit d'estabilitat, a menys que no es tinguin els materials d'una feblesa excepcional.

S'entén per altre banda que nosaltres suposem que les dovelles són quadrilàters, formades d'una sola peça sobre tot el gruix de la volta i no són fetes de peces sobreposades com els maons.³

Fets tots aquests aclariments generals, notem que en el pont núm. 28, construït a Schwelm, sobre el ferrocarril de Berg i Mark, un gran nombre de dovelles, en totes les parts de la volta, estan trencades, els materials no eren bons. El pont núm. 37, a Vieilles – Brioude, sobre l'Allier, va caure per trencament de les dovelles (poc sòlides en vers la clau).

El pont (núm. 33 i 40) de Neuilly es un pont molt sòlid, fet de bons materials; no obstant es va produir en les dovelles superiors dels caps diverses ruptures. El pont núm. 35 sobre el Talf va caure sota una sobrecàrrega als ronyons, però sense trencar-se.

De la taula adjunta es dedueixen les conclusions següents:

- 1º. - L'empenta horitzontal per m² a la clau (Q/c) es molt lluny de tenir un valor constant pels diversos ponts. Ella augmenta amb la dimensió dels ponts i també amb el valor absolut de l'empenta Q.
- 2º. - Aquesta variació de Q/c es tant considerable, que aquesta pressió respon pels tres petits ponts, al pes d'una columna de la densitat de les dovelles i d'una alçada de 3 metres aproximadament; i pels tres grans ponts, pot equivaldre al pes d'una columna de 70 metres d'alçada.
- 3º. - Les mateixes indicacions s'apliquen a la pressió normal sobre el junt del contrafort per metre quadrat, S/d. Aquesta pressió es quasi sempre molt superior a Q/c, i pot arribar al triple o al quàdruple d'aquesta, és a dir, el pes d'una columna de pedra de 250 metres d'alçada.

Si observem que les pressions Q i S no estan mai uniformement repartides sobre les llargades senceres c, d dels junts corresponents, i que algunes parts d'aquests junts suporten el doble o el triple de la pressió mitjana Q/c o S/d, reconeixem que es bo determinar les dimensions de la volta, de manera que el junt al cim no suporti mai una pressió superior a la d'una columna de pedra de 60 a 65 metres d'alçada i que el junt del contrafort no suporti una pressió normal superior al pes d'una columna de 90 a 100 metres d'alçada. Nosaltres posarem com a límits Q/c = 63, S/d = 94.

Partint d'aquestes bases, agafem la taula adjunta i la taula de la pàgina següent que poden servir per determinar els gruixos de la clau i al contrafort, necessaris per un pont del qual coneixem les altres dimensions.

² La taula original està feta prenent el peu per unitat. Però el peu adoptat és, segons el lloc de construcció de les obres, el peu de París (0^m, 325^{mm}), o el peu del Rhin (0^m, 314^{mm}). L'autor remarca amb raó que aquesta variació no té cap importància per l'objectiu que es proposa aquí. S'han traduït les altres taules de l'obra en mesures mètriques. A fi de conservar idènticament els valors del text alemany, es mostra a la columna (12), h, el valor de 0^m, 63 o 0^m, 65 segons si representa dos peus del Rhin o dos peus de París.

Per això mateix la nostra taula és una traducció pura i simple de la de l'autor, i es possible que ell tingués alguns errors de cm sobre les dades d'aquells ponts. Això no suposa cap inconvenient seriós.

M està expressada en m³ (col 26). P', P, Q, S, W, en m² (col. 19, 20, 21, 22, 31).

a, b, c, d, h, f, g, e, a', b', (Q/c), (S/d), en metres (col. 6, 7, 8, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 17, 18, 23, 24). β, χ, γ en graus sexagesimals i minuts (col. 16, 29, 30). 2·γ/b, (Sc/ud), η, (P/Q), (Q/W), m, són de nombres extractes, (col. 9, 25, 27, 28, 32, 33).

³ Veure més lluny, les observacions sobre els acabats dels maons.

**TAULA PER LA DETERMINACIÓ DE L'ESPESSOR DE LES
VOLTES**

ESPESSOR c a la clau o d als arrencaments.	EMPENTA Q expressada en m2	PRESSIÓ normal màxima contra el suport : s	PRESSIÓ mitjana per m2		Relació de les pressions s/d : q/c
			a la clau q/c	al suport (màxima) s/d	
0,00	0	0,0	0,0	0,0	3
0,28	1	3,0	3,5	10,4	3
0,35	2	6,0	5,7	17,0	3
0,43	3	9,0	6,9	20,7	3
0,48	4	11,9	8,2	21,5	3
0,51	5	15,0	9,7	29,2	3
0,54	6	18,0	11,0	33,0	3
0,58	7	21,0	11,9	35,8	3
0,61	8	24,0	12,9	38,6	3
0,66	9	27,0	13,5	40,5	3
0,70	10	30,0	14,1	42,4	3
0,78	12	35,9	15,1	45,2	3
0,86	14	41,9	16,0	48,1	3
0,93	16	48,1	17,0	51,2	3
0,98	18	53,9	17,9	54,0	3
1,04	20	60,1	18,8	56,8	3
1,09	22	66,0	20,1	60,0	3
1,13	24	71,8	21,0	65,6	3
1,17	26	77,9	22,0	68,8	3
1,21	28	84,0	22,9	71,6	3
1,24	30	89,8	23,9	78,8	3
1,31	35	105,0	26,4	86,8	3
1,37	40	120,0	28,6	93,6	3
1,42	45	134,8	31,1	94,2	3
1,47	50	140,1	33,6	94,2	2,8
1,50	55	143,7	36,1	94,2	2,6
1,53	60	146,4	38,3	94,2	2,4
1,57	65	149,7	40,8	94,2	2,3
1,59	70	152,1	43,3	94,2	2,17
1,62	75	154,5	45,8	94,2	2,06
1,64	80	156,3	48,0	94,2	1,95
1,65	85	158,1	50,6	94,2	1,86
1,67	90	159,6	53,1	94,2	1,77
1,69	95	161,1	55,6	94,2	1,7
1,70	100	162,6	57,8	94,2	1,62
1,73	110	165,0	62,8	94,2	1,5
1,88	120	180,0	62,8	94,2	1,5
2,01	130	195,0	62,8	94,2	1,5
2,20	140	210,0	62,8	94,2	1,5
2,35	150	225,0	62,8	94,2	1,5

Tableau des dimensions & des coefficients de pression & de stabilité de divers ponts connus.

NOMBRES	DESIGNATION DES PONTS.	MATERIALS	SOLS des CONSTRUCTEURS	ABRÈS DE LA CONSTRUCTION.	FORME de l'ARC.	Ouverture.	Demi-ouverture.	Fiches.	Rapport de l'ouverture à la flèche.	Epaisseur de la voûte.		Hauteur des culées.		Inclinaison du joint sur la verticale.	ELEMENTS RELATIFS au joint près pour approximatif incliné à 60° sur la verticale.			Pression verticale.	Pression horizontale.	Pression normale sur le joint de culée.	Pression horizontale par mètre carré du joint.	Pression normale de culée.	Rapport de la P à Q.	Moment de la demi-voûte.	Stabilité de la culée contre le renversement.	Angle de la pression à la culée avec l'horizontale.	Angle de la pression à la culée avec la normale à la culée.	Poids de la voûte et des appuis.	Tension de l'arc de la pression sur le joint.	Stabilité avec la pression.	Stabilité de la culée contre le glissement.	
										à la cime.	à la base.	des culées.	des culées.		α.	β.	γ.															δ.
1	Pont ordinaire.				Plein cintre.	3,77	1,88	2,0	0,31	0,31	0,63	0	2,83	1,25	60°	1,03	0,91	2,24	2,85	1,12	2,85	3,58	12,25	3,1	2,1	3,70	3,42	75°+42'	16°+18'	6,51	0,173	5,70
2	de Brnoy sur l'Yères.		Perronet.		Id.	5,55	2,92	0,81	0,22	0,22	0,44	4,39	3,23	31°+42'				3,57	3,01	6,41	6,01	19,16	2,3	2,1	3,70	3,42	75°+42'	16°+18'	6,51	0,173	5,70	
3	de Niederpleis sur la Pleis.				Id.	7,24	3,72	2,04	0,27	0,27	0,54	5,71	3,40	36°+47'				3,57	3,01	6,41	6,01	19,16	2,3	2,1	3,70	3,42	75°+42'	16°+18'	6,51	0,173	5,70	
4	de Brunswick sur l'Oker.				Id.	10,95	5,02	2,57	0,30	0,30	0,60	6,03	4,53	38°+47'				3,57	3,01	6,41	6,01	19,16	2,3	2,1	3,70	3,42	75°+42'	16°+18'	6,51	0,173	5,70	
5	de Wipperfurth sur la Wupper.				Id.	11,62	5,81	2,57	0,30	0,30	0,60	6,03	4,53	38°+47'				3,57	3,01	6,41	6,01	19,16	2,3	2,1	3,70	3,42	75°+42'	16°+18'	6,51	0,173	5,70	
6	de Château-Thierry sur la Marne.				Id.	14,13	7,06	3,53	0,40	0,40	0,80	8,03	5,26	40°+33°+47'				3,57	3,01	6,41	6,01	19,16	2,3	2,1	3,70	3,42	75°+42'	16°+18'	6,51	0,173	5,70	
7	d'Orléans sur la Wupper.				Id.	15,60	7,80	3,80	0,40	0,40	0,80	8,03	5,26	40°+33°+47'				3,57	3,01	6,41	6,01	19,16	2,3	2,1	3,70	3,42	75°+42'	16°+18'	6,51	0,173	5,70	
8	de Saint-Angé à Rome.				Id.	17,58	8,79	4,39	0,40	0,40	0,80	8,03	5,26	40°+33°+47'				3,57	3,01	6,41	6,01	19,16	2,3	2,1	3,70	3,42	75°+42'	16°+18'	6,51	0,173	5,70	
9	de Bonitas sur l'Alber.				Id.	18,21	9,11	4,61	0,40	0,40	0,80	8,03	5,26	40°+33°+47'				3,57	3,01	6,41	6,01	19,16	2,3	2,1	3,70	3,42	75°+42'	16°+18'	6,51	0,173	5,70	
10	de Reims sur l'Argonne.				Id.	19,30	9,75	5,00	0,40	0,40	0,80	8,03	5,26	40°+33°+47'				3,57	3,01	6,41	6,01	19,16	2,3	2,1	3,70	3,42	75°+42'	16°+18'	6,51	0,173	5,70	
11	de Senlis sur la Seine.				Id.	20,10	10,05	5,26	0,40	0,40	0,80	8,03	5,26	40°+33°+47'				3,57	3,01	6,41	6,01	19,16	2,3	2,1	3,70	3,42	75°+42'	16°+18'	6,51	0,173	5,70	
12	de Fontaine sur la Seine.				Id.	21,10	10,55	5,53	0,40	0,40	0,80	8,03	5,26	40°+33°+47'				3,57	3,01	6,41	6,01	19,16	2,3	2,1	3,70	3,42	75°+42'	16°+18'	6,51	0,173	5,70	
13	de Fontaine sur la Seine.				Id.	22,10	11,05	5,80	0,40	0,40	0,80	8,03	5,26	40°+33°+47'				3,57	3,01	6,41	6,01	19,16	2,3	2,1	3,70	3,42	75°+42'	16°+18'	6,51	0,173	5,70	
14	de Fontaine sur la Seine.				Id.	23,10	11,55	6,07	0,40	0,40	0,80	8,03	5,26	40°+33°+47'				3,57	3,01	6,41	6,01	19,16	2,3	2,1	3,70	3,42	75°+42'	16°+18'	6,51	0,173	5,70	
15	de Fontaine sur la Seine.				Id.	24,10	12,05	6,34	0,40	0,40	0,80	8,03	5,26	40°+33°+47'				3,57	3,01	6,41	6,01	19,16	2,3	2,1	3,70	3,42	75°+42'	16°+18'	6,51	0,173	5,70	
16	de Fontaine sur la Seine.				Id.	25,10	12,55	6,61	0,40	0,40	0,80	8,03	5,26	40°+33°+47'				3,57	3,01	6,41	6,01	19,16	2,3	2,1	3,70	3,42	75°+42'	16°+18'	6,51	0,173	5,70	
17	de Fontaine sur la Seine.				Id.	26,10	13,05	6,88	0,40	0,40	0,80	8,03	5,26	40°+33°+47'				3,57	3,01	6,41	6,01	19,16	2,3	2,1	3,70	3,42	75°+42'	16°+18'	6,51	0,173	5,70	
18	de Fontaine sur la Seine.				Id.	27,10	13,55	7,15	0,40	0,40	0,80	8,03	5,26	40°+33°+47'				3,57	3,01	6,41	6,01	19,16	2,3	2,1	3,70	3,42	75°+42'	16°+18'	6,51	0,173	5,70	
19	de Fontaine sur la Seine.				Id.	28,10	14,05	7,42	0,40	0,40	0,80	8,03	5,26	40°+33°+47'				3,57	3,01	6,41	6,01	19,16	2,3	2,1	3,70	3,42	75°+42'	16°+18'	6,51	0,173	5,70	
20	de Fontaine sur la Seine.				Id.	29,10	14,55	7,69	0,40	0,40	0,80	8,03	5,26	40°+33°+47'				3,57	3,01	6,41	6,01	19,16	2,3	2,1	3,70	3,42	75°+42'	16°+18'	6,51	0,173	5,70	
21	de Fontaine sur la Seine.				Id.	30,10	15,05	7,96	0,40	0,40	0,80	8,03	5,26	40°+33°+47'				3,57	3,01	6,41	6,01	19,16	2,3	2,1	3,70	3,42	75°+42'	16°+18'	6,51	0,173	5,70	
22	de Fontaine sur la Seine.				Id.	31,10	15,55	8,23	0,40	0,40	0,80	8,03	5,26	40°+33°+47'				3,57	3,01	6,41	6,01	19,16	2,3	2,1	3,70	3,42	75°+42'	16°+18'	6,51	0,173	5,70	
23	de Fontaine sur la Seine.				Id.	32,10	16,05	8,50	0,40	0,40	0,80	8,03	5,26	40°+33°+47'				3,57	3,01	6,41	6,01	19,16	2,3	2,1	3,70	3,42	75°+42'	16°+18'	6,51	0,173	5,70	
24	de Fontaine sur la Seine.				Id.	33,10	16,55	8,77	0,40	0,40	0,80	8,03	5,26	40°+33°+47'				3,57	3,01	6,41	6,01	19,16	2,3	2,1	3,70	3,42	75°+42'	16°+18'	6,51	0,173	5,70	
25	de Fontaine sur la Seine.				Id.	34,10	17,05	9,04	0,40	0,40	0,80	8,03	5,26	40°+33°+47'				3,57	3,01	6,41	6,01	19,16	2,3	2,1	3,70	3,42	75°+42'	16°+18'	6,51	0,173	5,70	
26	de Fontaine sur la Seine.				Id.	35,10	17,55	9,31	0,40	0,40	0,80	8,03	5,26	40°+33°+47'				3,57	3,01	6,41	6,01	19,16	2,3	2,1	3,70	3,42	75°+42'	16°+18'	6,51	0,173	5,70	
27	de Fontaine sur la Seine.				Id.	36,10	18,05	9,58	0,40	0,40	0,80	8,03	5,26	40°+33°+47'				3,57	3,01	6,41	6,01	19,16	2,3	2,1	3,70	3,42	75°+42'	16°+18'	6,51	0,173	5,70	
28	de Fontaine sur la Seine.				Id.	37,10	18,55	9,85	0,40	0,40	0,80	8,03	5,26	40°+33°+47'				3,57	3,01	6,41	6,01	19,16	2,3	2,1	3,70	3,42	75°+42'	16°+18'	6,51	0,173	5,70	
29	de Fontaine sur la Seine.				Id.	38,10	19,05	10,12	0,40	0,40	0,80	8,03	5,26	40°+33°+47'				3,57	3,01	6,41	6,01	19,16	2,3	2,1	3,70	3,42	75°+42'	16°+18'	6,51	0,173	5,70	
30	de Fontaine sur la Seine.				Id.	39,10	19,55	10,39	0,40	0,40	0,80	8,03	5,26	40°+33°+47'				3,57	3,01	6,41	6,01	19,16	2,3	2,1	3,70	3,42	75°+42'	16°+18'	6,51	0,173	5,70	
31	de Fontaine sur la Seine.				Id.	40,10	20,05	10,66	0,40	0,40	0,80	8,03	5,26	40°+33°+47'				3,57	3,01	6,41	6,01	19,16	2,3	2,1	3,70	3,42	75°+42'	16°+18'	6,51	0,173	5,70	
32	de Fontaine sur la Seine.				Id.	41,10	20,55	10,93	0,40	0,40	0,80	8,03	5,26	40°+33°+47'				3,57	3,01	6,41	6,01	19,16	2,3	2,1	3,70	3,42	75°+42'	16°+18'	6,51	0,173	5,70	
33	de Fontaine sur la Seine.				Id.	42,10	21,05	11,20	0,40	0,40	0,80	8,03	5,26	40°+33°+47'				3,57	3,01	6,41	6,01	19,16	2,3	2,1	3,70	3,42	75°+42'	16°+18'	6,51	0,173	5,70	
34	de Fontaine sur la Seine.				Id.	43,10	21,55	11,47	0,40	0,40	0,80	8,03	5,26	40°+33°+47'				3,57	3,01	6,41	6,01	19,16	2,3	2,1	3,70	3,42	75°+42'	16°+18'	6,51	0,173	5,70	
35	de Fontaine sur la Seine.				Id.	44,10	22,05	11,74	0,40	0,40	0,80	8,03	5,26	40°+33°+47'				3,57	3,01	6,41	6,01	19,16	2,3	2,1	3,70	3,42	75°+42'	16°+18'	6,51	0,173	5,70	
36	de Fontaine sur la Seine.				Id.	45,10	22,55	12,01	0,40	0,40	0,80	8,03	5,26	40°+33°+47'				3,57	3,01	6,41	6,01	19,16	2,3	2,1	3,70	3,42	75°+42'	16°+18'	6,51	0,173	5,70	
37	de Fontaine sur la Seine.				Id.	46,10	23,05	12,28	0,40	0,40	0,80	8,03	5,26	40°+33°+47'				3,57	3,01	6,41	6,01	19,16	2,3	2,1	3,70	3,42	75°+42'	16°+18'	6,51	0,173	5,70	
38	de Fontaine sur la Seine.				Id.	47,10	23,55	12,55	0,40	0,40	0,80	8,03	5,26	40°+33°+47'				3,57	3,01	6,41	6,01	19,16	2,3	2,1	3,70	3,						

Retall de l'anterior taula.

NUMÉROS.	DESIGNATION DES PONTS.	NOMS des CONSTRUCTEURS.	ANNÉE DE LA CONSTRUCTION.	FORME de L'ARC.	Ouverture.	Demi-ouverture.	Flèche.	Rapport de l'ouverture à la flèche.	
					2a	a		b	$\frac{2a}{b}$
1	Pont ordinaire.....	a	>	Plein cintre.	3,77	1,88	1,88	2,0	0
2	— de Brunoy sur l'Yères....	Ferroncl.	1789	Arc de cercle.	5,85	2,92	0,81	7,2	0
3	— ordinaire.....	>	>	Id.	7,54	3,77	2,04	3,7	0
4	— de Niederpleis sur la Pleis	>	>	Id.	10,05	5,02	2,83	3,6	0
5	— de Brunswick sur l'Ocker.	>	>	Id.	11,62	5,81	1,57	7,4	0
6	— de Wipperfurth sur la	b	1852	Id.					

Vet aquí de quina manera ens pot servir aquesta taula. A partir de la forma de l'intradós i l'alçada de la sobrecàrrega, es donen els gruixos c i d , els que corresponen per semblança a les dimensions de les voltes existents. Amb la mitjana dels valors així escollits, es calcula l'empenta Q per les fórmules (3) o (7). Es pren seguidament com a valor corregit c a la clau el numero de la primera columna de la taula que correspon al valor trobat de Q .

Així mateix es calcula la pressió normal S sobre el contrafort amb les fórmules (4) o (8). Si aquesta és inferior a la que, en la taula precedent, respon al valor trobat per Q , es dona a la volta el mateix gruix al contrafort que al vèrtex: $d = c$. Però si les fórmules (4) o (8) donen un valor S més gran, es pren per d el valor que, amb la primera columna de la taula, respon al valor trobat de S . En el darrer cas, si el que es vol és una volta de gruix constant, es donarà per gruix a la clau el valor trobat pel gruix als arrencaments.

Si els valors trobats així per c i d difereixen notablement d'aquells que s'han escollit al principi se'ls corregirà fàcilment amb una nova aplicació de les fórmules que donen Q i S .

De totes maneres, en cap aplicació a les carreteres o als ferrocarrils, no s'ha de prendre c o d inferior a 0,32 m. En les construccions que no estan sotmeses a cap sotragada, es pot adoptar els valors menors, fins a un mínim de 0,16 m.

Primer Exemple. – Apliquem les regles que coneixem al pont de Pont-Saite-Maixence, les dimensions són al § núm. 24 de la nostra pissarra. Si prenem els gruixos $c = d = 1,46$ m, les fórmules donaran $Q = 45,9$, $S = 57,8$. A aquest valor de Q li correspon a la taula el valor $c = 1,429$, que es pot prendre també per al gruix del contrafort, ja que el valor $S = 57,8$ està lluny d'arribar al valor indicat com a màxim a la mateixa taula segons aquest valor c . Aquí veiem que el gruix calculat difereix molt poc de l'adoptat en efecte, 1,46 m.

Segon exemple. – Prenem per la part mitjana del pont de Neuilly, les dimensions del qual figuren en el núm. 33 de la primera taula, $c = d = 1,62$ m. Les fórmules (7) i (8) donen : $Q = 70,9$, $S = 127,2$. A aquest valor de Q li correspon, a la taula precedent, un gruix en el vèrtex $c = 1,595$ m, el qual pot ser adoptat igualment per al contrafort i difereix poc del realment existent, que és 1,62 m.

Tercer exemple. – Pel pont de Schwelm (núm. 38 de la primera taula), prenem $c = d = 0,94$ m. Es dedueix per les fórmules (7) i (8), que $Q = 87$, $S = 190$. Després, per mitjà de la segona taula, $c = 1,658$. El valor de $S = 190$ sobrepassa el màxim de 158 corresponent a c , i exigeix un gruix de 2 metres als arrencaments.

D'acord amb tot això, aquest pont, que té en realitat 0,94 m, hauria de tenir 1,65 m a la clau, i 2 metres als arrencaments, o, si es vulgués, una dimensió uniforme de 2 metres per tot arreu.

En l'aplicació de les fórmules precedents i els seus resultats en els viaductes dels ferrocarrils, serà útil, i fins i tot també suficient, vista la major càrrega i les sotragades a les quals el pas dels trens sotmet aquestes obres, augmentar de 0,94 m l'alçada h de la càrrega permanent. Està clar que aquest augment tindrà proporcionalment

més influència sobre les dimensions dels ponts carregats d'una dèbil alçada de terraplè que sobre les dels ponts establerts sota de terraplens elevats.

Si, per exemple, el pont de Neuilly, amb la seva càrrega de 0,65 m, hagués de suportar un ferrocarril, en el punt mig de $h = 0,65 \text{ m} + 0,94 \text{ m} = 1,59 \text{ m}$, es tindrà l'empenta $Q = 87,2$ que correspon a un gruix $c = d = 1,70$.

En fi, recordem encara que en les fórmules precedents se suposa l'ús de dovelles molt resistents i formades cada una d'elles d'una sola peça.⁴

Es pot admetre en general que el gres o el calcari dur, pesant de , 2.100 a 2.300 Kg/m³, té una resistència de 750 Kg/cm² i no serà d'aquesta manera trencada pel pes d'una columna de la mateixa matèria de 4.000 a 5.000 metres d'alçada. De la taula precedent, es desprèn que la matèria no treballaria així en els grans ponts, sinó a 1/70 o 1/75 de la resistència, en la clau, i a 1/45 o 1/50, en el contrafort, sempre que la pressió es reparteix uniformement. Però com que aquesta darrera condició està lluny de ser lograda, la resistència que es posa en joc en els junts o en la corba de pressions quan s'acosta als límits de la volta és molt més forta, aleshores pot arribar a ser 1/10 de la resistència límit.

En el cas que els materials siguin poc resistents, s'haurà de prendre un gruix més gran que el que està admès en la taula. De totes maneres no és necessari augmentar fins a la diferència de resistència, perquè, quan s'augmenta l'estesa del junt les tensions en el junt disminueixen, de manera que el repartiment sobre la superfície del junt esdevé més uniforme.

Per donar un punt de comparació, direm que si usem els maons, que són uns dels materials més febles, que presenten una resistència de 3 a 6 vegades més feble que la de les pedres dures, de les quals hem parlat més amunt, aleshores s'adopta un gruix igual a una vegada i mitja de la que està inscrita en la taula.

Molt sovint es construeixen les voltes amb maons formant diverses rengleres superposades de maons i lligades entre elles. Aquesta classe de construcció té de vicis, que, si el gruix de la clau és excessivament fort, el full interior queda sense suportar cap pressió i pot caure cap en dins. Aquest accident, que no compromet massa l'estabilitat de l'arc, es pot evitar construint acuradament.

Algunes vegades es construeixen voltes semblants amb fulls sobreposats sense lligar entre ells. Aquesta forma es admissible en alguns casos; però sovint és molt desafortunada. La volta és en equilibri, només quan el full exterior es estable, considerant-lo suportant, separadament, 1/n de la càrrega superior. En aquest cas, si el segon, el tercer, ... el full enèsim (n) són en la mateixa situació, el conjunt és estable sota la càrrega sencera.

Si l'intradós no és estable sota el valor 1/n de la càrrega, cap dels altres fulls ho serà i el conjunt tampoc ho serà. Així, per exemple, un arc de mig punt de 6,28 m de llum i 0,31 m de gruix, no carregat, no pot ser en equilibri. Un arc d'aquesta obertura, no carregat, tant gruixut com es vulgui, però format de fulls concèntrics de 0,31 m cada un d'ells, no podrà sostenir-se en equilibri. Si en la pràctica es troben arcs en equilibri en aquestes condicions, serà degut únicament a l'adherència del morter.

⁴ En realitat les dimensions indicades en aquest paràgraf s'apliquen sigui a les voltes de pedra tallada, sigui a les voltes de paleta de còdol. En el primer cas no es té pas en compte l'adherència del morter; en el segon les mateixes consideracions sols són aplicables a les condicions d'imaginar unes dovelles monolítiques fictícies. En altres termes, cal tenir en compte l'adherència dels morters en el sentit paral·lel als junts, encara que negligixin en el sentit perpendicular.

S'assimila aquestes dovelles fictícies a les dovelles amb pedra tallada, la cohesió de la qual serà deguda a la vegada a la cohesió pròpia dels còdols. En els casos ordinaris, on l'adherència d'un morter té un valor notable, es pot admetre, per a les voltes amb còdol, les dimensions calculades amb les indicacions d'aquest paràgraf. Si l'adherència del morter fos feble, es comportarà com si els còdols fossin poc resistents, augmentant les dimensions, com es diu més endavant.

Acabem de recordar que l'adherència del morter, almenys en un sentit, entra implícitament en consideració quan es tracta de voltes de paleta de còdol: si no es té en compte, no hi haurà en aquestes voltes de junt ben determinades, i aleshores l'empenta podrà efectivament més gran que l'empenta calculada.

En efecte, donada una volta monolítica que presenta una certa empenta Q, tal que hagi tingut un trencament en algun punt, si suposem que aquesta volta composta de dovelles seguida de junts que segueixen una certa llei, l'empenta veritable podrà ser Q com en el monòlit, si l'obra està ben feta; però una obra mal concebuda donarà lloc a una empenta més gran, perquè la volta en el seu moviment no podrà parar l'estat Q.

§ 24. Procediment pràctic per a la construcció de la corba de pressions

Aquí no donarem pas fórmules analítiques ni construccions rigoroses d'una corba de pressions a partir dels elements donats. Això ens portaria a càlculs i operacions massa complicades per a la pràctica. Ens limitarem a exposar amb detall un mètode pràctic per traçar aquesta corba, fonamentat sobre una construcció gràfica aproximada.

Una corba de pressions queda determinada quan és conegut un punt i la pressió en aquest punt, en dimensió i direcció, com per exemple el punt de la clau i la seva empenta horitzontal. També és determinada quan coneixem dos punts de la corba. En tots els casos, abans de res, determinarem el vèrtex a la clau i l'empenta en els punts donats. Això és igualment l'objectiu dels càlculs que seguiran.

Nomenclatura

Sigui AB l'horitzontal passant pel vèrtex A, i A el punt origen de coordenades de les distàncies horitzontals i verticals de les forces que considerarem (fig. 58);

Q, l'empenta **horitzontal en el junt de la clau**;

q, la seva distància vertical a la recta AB;

N, un punt qualsevol de la corba de pressions;

g, h, les coordenades NC, AC d'aquest punt;

M, el punt d'aplicació de l'empenta a la clau;

P, el pes de la part de volta MN, i inclou la sobrecàrrega;

p, la distància horitzontal de la vertical P al punt A.

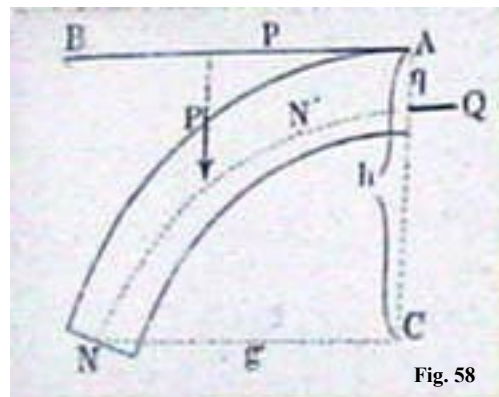


Fig. 58

Si cal considerar un altre punt N' de la corba de pressions aleshores usarem una notació anàloga:

$$q', p', g', h', P'.$$

Podem abreviar:

$$\begin{aligned} g-p &= a & g'-p' &= a' \\ h-q &= b & h'-q' &= b' \end{aligned}$$

$$i \quad h-h' = b-b' = e$$

Casos que pot abarcar aquest càlcul

Segons les dades de partida, podem considerar tres possibles casos. En tots ells necessitem l'empenta Q per iniciar el traçat de la corba, i aquesta queda determinada si coneixem:

1r.- el punt d'aplicació M de l'empenta Q i el valor d'aquesta empenta. Aleshores Q ja és donada i podem començar sense cap càlcul previ la construcció que segueix;

2n.- el punt M d'aplicació de l'empenta i un altre punt N de la corba, on,

$$a \cdot P = b \cdot Q, \quad \text{d'on } \text{trobem que } Q = a \cdot P / b \quad (1)$$

3r.- Dos punts N, N' de la corba de pressions, on,

$$a \cdot P = b \cdot Q = (b' + e) \cdot Q,$$

$$a' \cdot P' = b' \cdot Q$$

d'on, **restant-les, trobem que**

$$a \cdot P - a' \cdot P' = e \cdot Q \Rightarrow Q = (a \cdot P - a' \cdot P') / e \quad (2)$$

$$i \text{ també } q = h - b = h - (a \cdot P / Q) \quad (3).$$

Quan **coneixem** el pes P i la seva distància p al punt A, el mètode que segueix, i que serveix al mateix temps per a la construcció de la corba de pressions buscada, subministra un recurs simple per trobar **tots** els valors sense **gaires** càlculs.

Es **considera** una porció de la volta compresa entre dos plans verticals distanciat un metre, amb totes les càrregues que reposen sobre d'ella⁵. Prendrem per unitat de les forces a considerar el pes d'un metre cúbic de

⁵ És a dir, considera una mena de llesca d'una volta de canó seguit, definida per dos plans frontals paral·lels que defineixen un gruix de volta (perpendicular al paper) d'un metre.

Sigui DCG (fig.60) el costat del trapezi que actua sobre el junt CH que passa per C. Es parteix GH en dues parts iguals, en b. Es traça Gc, paral·lela a bD; ch serà el junt corregit. En el cas que la sobrecàrrega sigui nul·la, aquesta torna a fer passar el junt per la meitat de CG.

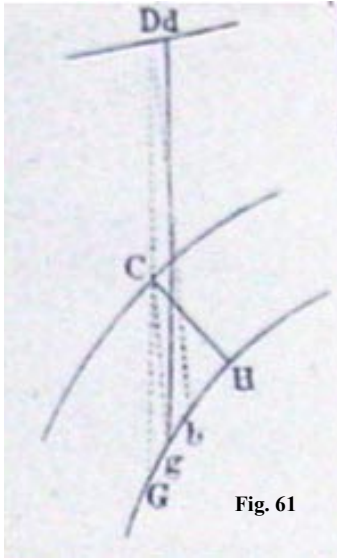


Fig. 61

Inversament, essent donat un junt CH, si es busca la vertical dg (fig.61) que limita la porció de càrrega actua sobre d'aquest junt, tenint en compte la correcció que ens ocupa, es traçarà per C la vertical DG, i per corregir-la es partirà GH en dues parts iguals, en b, es traçarà Cg, paral·lel a Db, i gd serà la vertical cercada.

Si les verticals que surten dels naixements no es troben més amb l'intradós, com per exemple, la vertical EC de la fig. 59, aleshores serà molt més fàcil, en cada cas, avaluar les àrees i les distàncies dels centres de gravetat de les parts de volta aïllades, les quals han d'ajuntar-se als trapezis superiors i han d'assignar-se al junt sobre el qual s'aplica el pes de totes les porcions de volta que precedeixen¹³.

Aquest cas es presenta particularment per les voltes de soterrani que continuen per sota del junt horitzontal; com per exemple la fig.62:

Se'ns formaran cinc trapezis limitats per les verticals D_1G_1 , D_2G_2 , D_3G_3 , D_4G_4 , D_5G_5 , el centre de gravetat de cadascun serà suposat sobre la vertical mitjana; els junts c_1h_1 , c_2h_2 , c_3h_3 , c_4h_4 , C_5H_5 , seran traçats, sabent els tres primers,

després de procedir segons la correcció descrita més amunt, el quart després, segons la disposició de la figura, i el cinquè sense correcció¹⁴. Per dessota del junt horitzontal, ens trobem encara algunes parts de volta, per les quals no s'ha de tenir en compte la sobrecàrrega directa, i seran limitats pels junts C_6G_6 , C_7G_7 ; Aquestes seran considerades com a rectangles, i els seus centres de gravetat seran els centres de figura¹⁵.

Si la volta suporta uns pesos aïllats F, es farà bé d'establir la divisió en trapezis, de tal manera que alguna de les línies de divisió passi pel punt d'aplicació de cadascun d'aquests pesos.

Ens resta remarcar que aquests pesos no són la fracció de pesos aïllats realment actuant que corresponen a la unitat de longitud de la volta. Si el pes es aplicat sobre la clau, no compte sinó com a meitat en la mitja volta que considerem.

Després d'aquestes preparacions, es fa el càlcul d'acord amb el tipus de càlcul que segueix.

Els pesos de les parts elementals DGG_1D_1 , $D_1G_1G_2D_2$, $D_2G_2G_3D_3$, etc., simplement designades pels números 1, 2, 3, etc., seran calculats per mitjà dels seus elements (columnes 2 i 3, llargada i altura) i figuraran a la columna 4 (superfície). Les distàncies dels centres de gravetat parcials a la clau s'indiquen en la columna 5 (braç de palanca). Els productes dels nombres 4 i 5 són els moments dels pesos (columna 6).

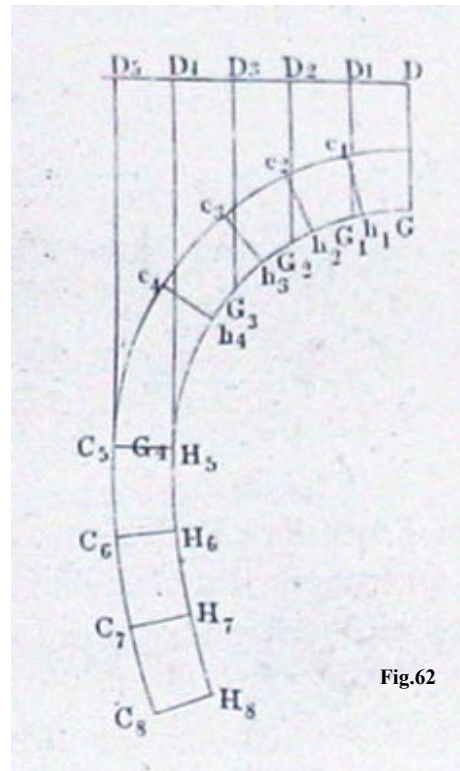


Fig.62

¹³ Gràcies als exemples pràctics que exposa després per il·lustrar aquest càlcul podem entendre aquest paràgraf ja que en ells veiem que sempre fa passar una partició pel punt interior del suport. D'aquesta manera no li queda cap junt sense poder definir segons el seu sistema, ja que el punt terminal o del suport ve definit de partida.

¹⁴ De fet, en el quart junt, que té la vertical justament tangent a l'intradós, veiem que també fa la correcció descrita, de la mateixa manera que els tres primers junts, tot i que en aquest cas sigui aquesta es faci més evident en ésser molt més a prop del suport.

¹⁵ En aquest cas sí que dibuixa els junts sense dependre de la partició horitzontal, i els veiem segons un repartiment uniforme, "a priori".

PESOS ELEMENTALS						SUMES DE DOVELLES			
Núms.	Llargada	Altura	Superfície	Braç de palanca	Moment	Núms.	Superfície	Moment	Braç de palanca
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)	(10)
1	0,94	1,57	1,48	0,47	0,69	1	1,48	0,69	0,47
2	0,94	2,20	2,07	1,41	2,92	1+2	3,54	3,61	1,02
3	0,94	3,14	2,95	2,35	6,94	1+2+3	6,50	10,55	1,62
4	0,94	3,77	3,54	3,29	11,66	1+...+4	10,04	22,20	2,21
5	0,63	4,71	2,97	4,08	12,09	1+...+5	13,01	34,30	2,64
totals	4,39		13,01		34,30				

A partir de la columna 7 es fa referència a la suma de dovelles, i s'acumulen els valors.

S'acumula, a partir de la clau, els pesos aïllats (8) i els moments (9). Els quocients de la divisió (9) per (8) són les distàncies horitzontals dels centres de gravetat de les sumes parcials a la vertical de la clau (**braç de palanca**).

Les sumes de les columnes (4) i (6) han de reproduir respectivament els dos darrers nombres de les columnes (8) i (9). Això constitueix una verificació¹⁶.

S'intercalerà fàcilment en aquesta taula les subdivisions de qualsevol de les dovelles elementals: 3.a, 3.b, ... S'intercalerà així, cadauna a la seva categoria, els pesos aïllats: I, II, III, ..., si existeixen.

La taula precedent ens demostra que la superfície de la mitja volta sencera amb la seva càrrega és igual a 13,01 m², que el seu moment és 34,35 m³, i la distància del seu centre de gravetat al junt de la clau és 2,64 m. Així doncs resulta:

$$P = 13,01 \text{ m}^2; \quad p = 2,64 \text{ m}; \quad P \cdot p = 34,35 \text{ m}^3.$$

Si ara es vol fer passar una corba de pressions per el punt superior del junt de la clau i el punt interior del junt del contrafort, es tindrà:

$$q = 0, \quad b = h = 4,70 \text{ m}, \quad g = 3,77 \text{ m}, \quad \text{on } a = g - p = 1,13 \text{ m}.$$

La fórmula demostra que donarà el **valor** més alt:

$$Q = \frac{a \cdot P}{b} = \frac{1,13 \cdot 13,01}{4,70} = 3,12$$

Si, contràriament, es demana una corba de pressions que passi pel punt més alt del segon junt i el punt més baix del quart, essent en el primer $h'=0,078$, $g'=0,94$, i en el segon $h=2,83$; $g=3,14$, es tindrà pel primer punt (que respon a la primera línia de la taula):

$$p' = 0,47; \quad P' = 1,48; \quad a' = g' - p' = 0,94 - 0,47 = 0,47;$$

i pel segon punt (tercera línia de la taula):

$$p = 1,62; \quad P = 6,50; \quad a = g - p = 3,14 - 1,62 = 1,52.$$

a més a més, $e = h - h' = 2,83 - 0,078 = 2,752$.

Les fórmules conegudes donen la força Q i la distància q al punt més alt de la clau:

$$Q = \frac{a \cdot P + a' \cdot P'}{e} = \frac{1,52 \cdot 6,50 - 0,47 \cdot 1,48}{2,75} = 3,35$$

$$q = h - \frac{a \cdot P}{Q} = 2,83 - \frac{1,52 \cdot 6,50}{3,35} = -0,13$$

Sobre el valor negatiu de q , es necessari concloure que la corba buscada passa 0,13 m per sobre del vèrtex de la volta.

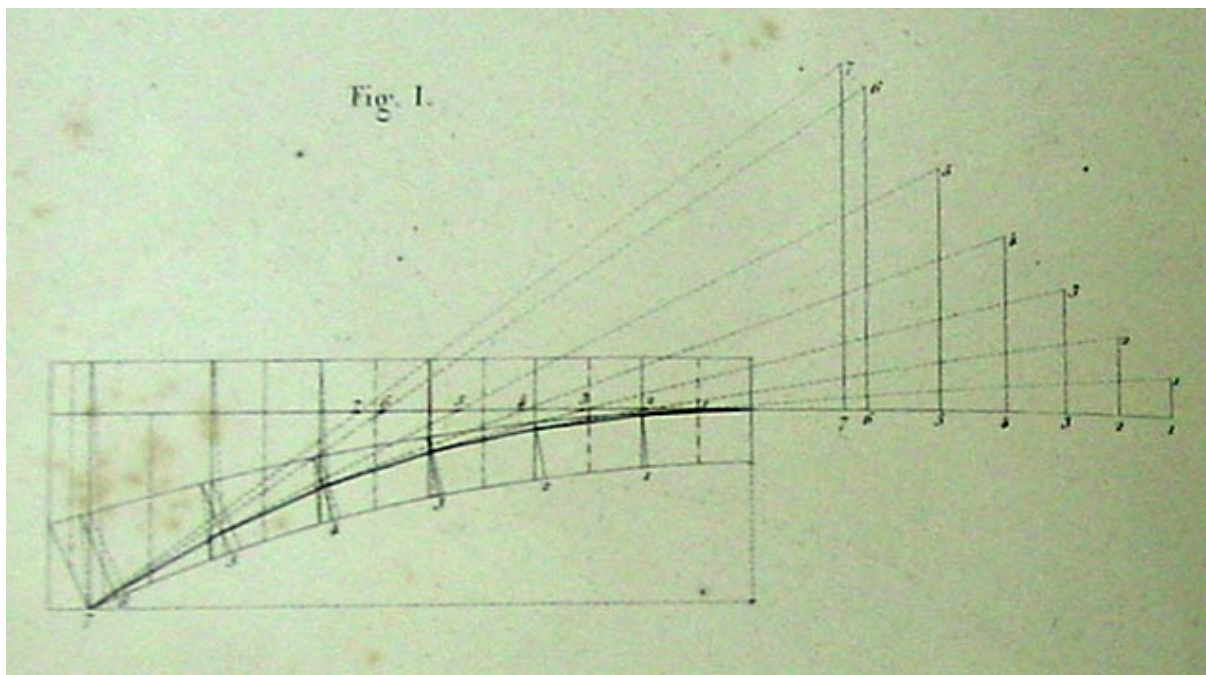
Si ara es compona successivament pel paral·lelogram de forces la força Q , trobada en dimensió i direcció, segons un dels dos càlculs precedents, amb els pesos verticals en els quals les dimensions i les línies d'aplicació són definides per les columnes (9) i (10) de la taula precedent, els punts d'unió de les diagonals resultants amb els junts corresponents seran igual als punts de la corba de pressions buscada.

Els paràgrafs següents contenen molts exemples de càlcul i construcció per aquest mètode, on l'aplicació és sempre fàcil i ràpida.

§ 25. Primer Exemple. Caps del pont de Neuilly.

Prendrem per exemple el cap del pont de Neuilly (fig. I al final del volum)¹⁷. Aquesta volta és un arc de cercle on la semi corda és igual a $19^m,86$ i la fletxa $4^m,22$. El seu gruix a la clau és 1,62, i al contrafort 2,76; els murs que formen el frontal de sobre de la volta tenen $1^m,95$ d'altura sobre el vèrtex de l'arc.

La forma aplanada d'aquesta volta permet concloure de seguida que la veritable corba de pressions haurà de passar pel vèrtex del junt de la clau i l'extrem interior del junt del contrafort.



Per construir aquesta corba, es divideix la superfície de la volta i de la sobrecàrrega en 7 dovelles, a partir del vèrtex: cadauna dels 5 primers té una llargada de $3^m,25$, la sisena $3^m,61$ i la setena, que compren la massa de la volta d'una aresta a l'altra del junt del contrafort, $1^m,17$. S'ha de fer la correcció dels junts per més exactitud.

¹⁶ Existeixen algunes petites diferències entre la nostra taula, feta amb un full de càlcul d'Excel, i la del llibre de Scheffler, amb les operacions fetes a mà. Simplement és qüestió dels decimals considerats.

¹⁷ Tot i que el llibre de Scheffler té les il·lustracions inserides en el mateix text, aquestes figures més grosses que corresponen als càlculs gràfics d'aquesta sèrie d'exemples són en uns plànols desplegable al final del llibre. Nosaltres, però, per facilitar la comprensió els hem inserit també en el mateix text.

La taula següent dóna els elements de càlcul i de la construcció.

PESOS ELEMENTALS						SUMES DE DOVELLES			
Núms.	Llargada	Altura	Superfície	Braç de palanca	Moment	Núms.	Superfície	Moment	Braç de palanca
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)	(10)
1	3.25	3.60	11.7	1.63	19.0	1	11.7	19.0	1.63
2	3.25	3.80	12.4	4.88	60.2	1+2	24.1	79.2	3.29
3	3.25	4.30	14.0	8.13	113.5	1+2+3	38.0	192.8	5.07
4	3.25	4.90	15.9	11.38	181.1	1+...+4	54.0	373.9	6.93
5	3.25	5.80	18.9	14.63	275.7	1+...+5	72.8	649.6	8.92
6	3.61	7.00	25.3	18.06	456.2	1+...+6	98.1	1,105.8	11.28
7	1.17	6.40	7.5	20.45	153.1	1+...+7	105.6	1,258.9	11.93
totals			105.6		1,258.9				

La corba de pressions ha de passar pel punt més alt del junt del vèrtex:

$q=0$; $b=h=5,85$; $g=19,86$; i de la columna (10) d'on surt que $p=11,93$; $a=g-p=7,93$,
i finalment per la columna (8), $P=105,4$.

El càlcul serà així:

$$Q = \frac{a \cdot P}{b} = \frac{7,93 \cdot 105,4}{5,85} = 142,8$$

Tot seguit, sobre una horitzontal que passa pel vèrtex de la clau (punt per on s'ha considerat que passa l'empenta Q) es posen, des de cada un dels punts obtinguts a la columna (10), les longituds iguals representant la força Q en direcció cap al costat de l'altra mitja volta; a partir de cada un d'aquests punts extrems trobats, en el sentit perpendicular i per sobre la mateixa horitzontal es posen successivament els pesos de la columna (8) i es componen, pel paral·lelogram de forces, amb la força Q respectiva. Prolongant aquestes diagonals fins que tallin els junts respectivament obtindrem els punts on són aplicades les resultants en cada junt. La línia d'unió de tots aquests punts on s'apliquen les resultants serà la veritable corba de pressions.

Una corba de pressions que vulgués respondre a la màxima empenta passaria, contràriament, pel punt més baix del junt de la clau i pel punt superior del junt del suport. Per calcular aquesta nova empenta cal considerar les noves dades dimensionals i s'introduiran en les fórmules:

$$a = g - p = 21,03 - 11,93 = 9,10$$

$$b = h - q = 3,15 - 1,62 = 1,53$$

d'on es treu:

$$Q = \frac{a \cdot P}{b} = \frac{9,10 \cdot 105,4}{1,53} = 626,8$$

§ 26. Segon exemple. Arcada principal del pont de Neuilly.

Aquesta arcada té una obertura de 39 metres i una fletxa de 9^m,75. El gruix de la volta és en el vèrtex com en el contrafort de 1^m,62, i la càrrega uniforme se suposa de 0^m,65 (fig.II al final del volum). Per calcular el pes de la volta sencera amb la càrrega i els timpans, jo divideixo la superfície en 8 parts: les cinc primeres, a partir de la clau, tenen una llargada de 3^m,25, les tres últimes 1^m,62.

Després d'això les quantitats necessàries per la construcció de la corba es donen en la taula següent:

PESOS ELEMENTALS						SUMES DE DOVELLES			
Núms.	Llargada	Altura	Superfície	Braç de palanca	Moment	Núms.	Superfície	Moment	Braç de palanca
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)	(10)
1	3.25	2.31	7.51	1.63	12.2	1	7.51	12.2	1.63
2	3.25	2.47	8.03	4.88	39.1	1+2	15.54	51.3	3.30
3	3.25	2.96	9.62	8.13	78.2	1+2+3	25.16	129.5	5.15
4	3.25	3.77	12.25	11.38	139.4	1+...+4	37.41	268.9	7.19
5	3.25	5.04	16.38	14.63	239.6	1+...+5	53.79	508.4	9.45
6	1.62	6.73	10.90	17.06	186.0	1+...+6	64.69	694.4	10.73
7	1.62	8.84	14.32	18.68	267.5	1+...+7	79.01	961.9	12.17
8	1.62	12.02	19.47	20.30	395.3	1+...+8	98.48	1,357.2	13.78
totals			98.48		1,357.2				

Per reconèixer la posició de la veritable corba de pressions, construirem en primer lloc una corba de pressions passant pel punt més alt de la clau i els punts interiors dels inicis:

$$q = 0; \quad b = h = 11,37; \quad a = g - p = 19,50 - 13,78 = 5,72; \quad P = 98,48.$$

d'on es treu:

$$Q = \frac{a \cdot P}{b} = \frac{5,72 \cdot 98,48}{11,37} = 49,5$$

La línia construïda amb aquestes dades talla l'intradós entre el tercer i el quart junt¹⁸, a partir de la clau, i cap al sisè junt és quan més s'allunya de la corba de l'intradós, fins que torna a unir-se de nou a l'intradós en el mateix punt del contrafort, el punt de pas considerat. Aleshores, la veritable corba de pressions passarà pel punt més alt de la clau i pel punt interior del sisè junt, on haurà de tocar l'intradós.

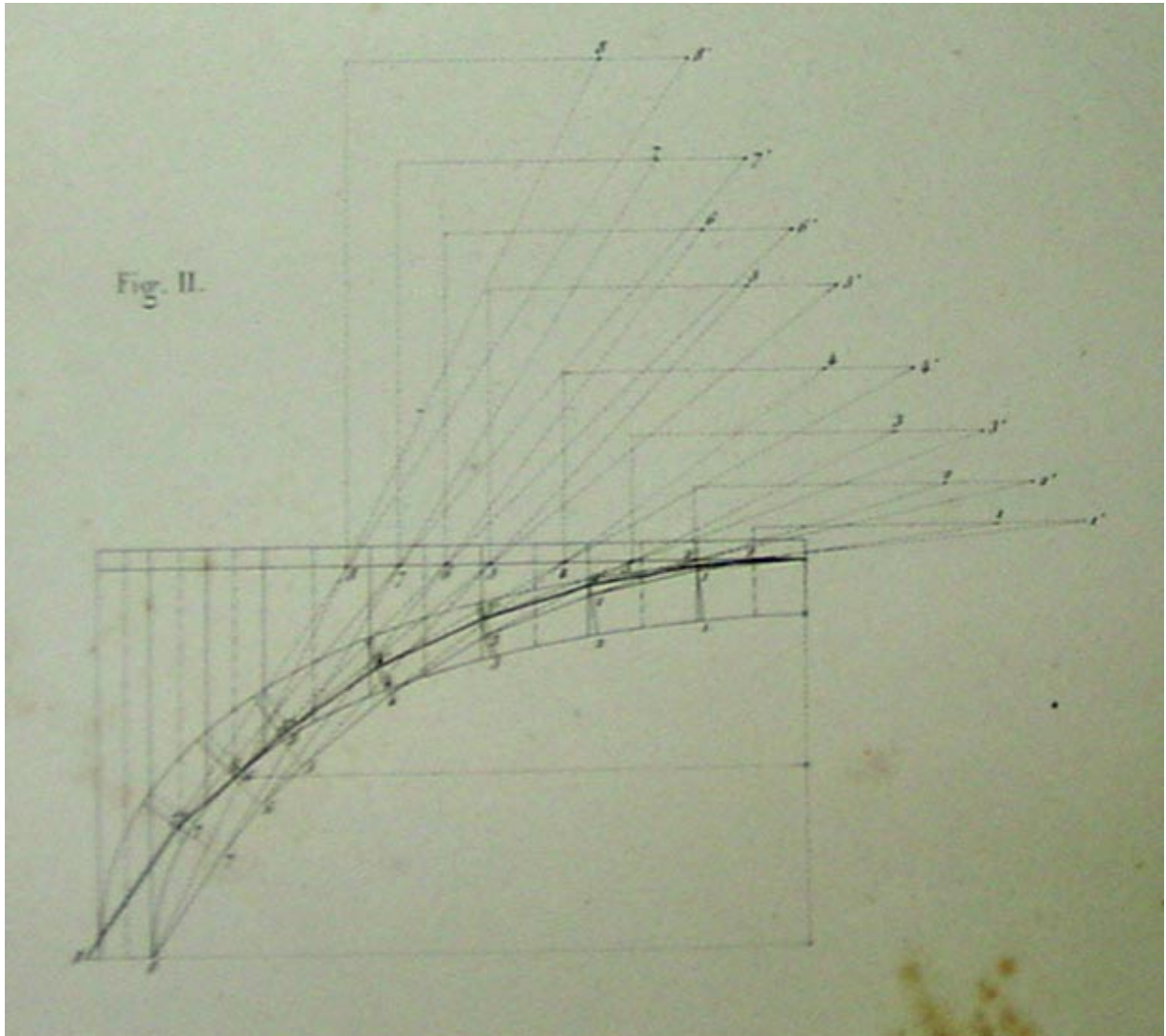
El càlcul de l'empenta que respon a aquesta nova corba es farà amb la fórmula coneguda; però no si farà entrar més que el pes de la superfície compresa entre la clau i el sisè junt, a saber, 64,69 m² amb un braç de palanca 10,72 m; igualment, les coordenades g', h' del punt en el qual actua són 16,90 m i 6,05 m. Així,

$$b' = h' = 6,03; \quad a' = g' - p' = 16,90 - 10,72 = 6,18; \\ P' = 64,69, \quad i \quad Q' = a' \cdot P' / b' = 6,18 \cdot 64,69 / 6,03 = 66,0.$$

La nova corba de pressions així construïda no queda totalment en l'interior de la volta; talla l'extradós en la proximitat del junt del contrafort. D'això en resulta que aquesta volta no posseeix l'estabilitat demanada.

En la proximitat dels arrencaments de l'arc, les pressions mitjanes són suportades no pels junts considerats fins ara, sino pel timpà, el qual, per la naturalesa dels seus junts i la cura aportada a la construcció, no pot de cap manera oferir una resistència igual a la de la volta. Podem admetre que el constructor d'aquest pont hauria donat més gruix a la clau o bé una altra forma a la volta, si ell hagués conegut la forma de la veritable corba de pressions.

¹⁸ El text original diu entre el segon i el tercer junt, però a la figura adjunta veiem clarament que és entre el tercer i el quart. És per això que ens atrevim a fer l'esmena.



§ 27. Tercer exemple. El mateix arc del pont de Neuilly carregat de pesos aïllats.

Per fer ressaltar la influència que exerceixen els pesos aïllats sobre una corba de pressions, admetem que l'arcada principal estudiada en el paràgraf anterior sigui ara carregada en dos punts diferents amb pesos aïllats (fig. III al final del volum).

En aquest cas, el millor es fer la divisió de la volta de tal manera que el punt d'aplicació de cada pes se situï sobre una línia de divisió. Nosaltres hem col·locat aquí els pesos procurant de conservar les subdivisions del paràgraf anterior, la qual cosa permetrà fer ressaltar, per comparació de les dues taules, la variació de les corbes de pressions.

Jo suposo que el punt d'aplicació d'un dels pesos, A, sigui justament en el junt del vèrtex, que el segon pes, B, a la quarta línia de divisió a partir del vèrtex, i que cada un d'aquests pesos responen a una superfície de $10,56 \text{ m}^2$. Com que només considerem mig arc¹⁹, hem de considerar el pes col·locat al vèrtex en la meitat del seu valor, aquest valor, que és $5,28 \text{ m}^2$.

Els pesos aïllats s'intercalaran a la taula de càlcul, seguint l'ordre segons la distància dels seus punts d'aplicació al vèrtex:

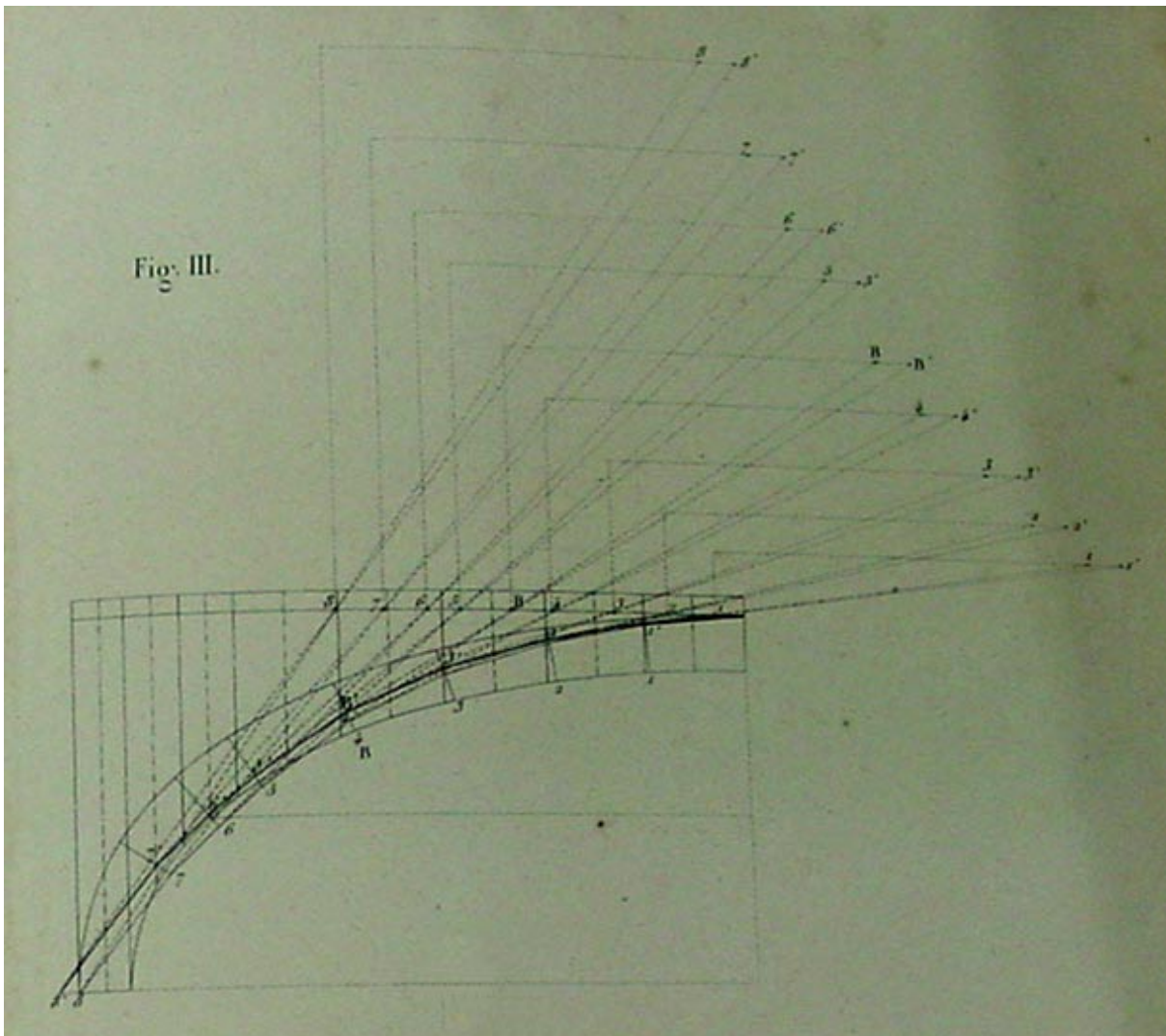
¹⁹ En l'estudi d'arcs simètrics sempre se simplifica a mig arc perquè l'empenta a la clau és horitzontal. L'estudi dels arcs no simètrics, Scheffler l'exposa en el seu segon capítol.

PESOS ELEMENTALS						SUMES DE DOVELLES			
Núms.	Llargada	Altura	Superfície	Braç de palanca	Moment	Núms.	Superfície	Moment	Braç de palanca
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)	(10)
A			5.28	0.00	0.0	A	5.28	0.0	0.00
1	3.25	2.31	7.51	1.63	12.2	A+1	12.79	12.2	0.95
2	3.25	2.47	8.03	4.88	39.1	A+1+2	20.82	51.3	2.47
3	3.25	2.96	9.62	8.13	78.2	A+...+3	30.44	129.5	4.25
4	3.25	3.77	12.25	11.38	139.4	A+...+4	42.69	268.9	6.30
B			10.56	13.00	137.3	A+...+B	53.25	406.1	7.63
5	3.25	5.04	16.38	14.63	239.6	A+...+5	69.63	645.7	9.27
6	1.62	6.73	10.90	17.06	186.0	A+...+6	80.53	831.7	10.33
7	1.62	8.84	14.32	18.68	267.5	A+...+7	94.85	1,099.2	11.59
8	1.62	12.02	19.47	20.30	395.3	A+...+8	114.32	1,494.5	13.07
totals			114.32		1,494.5				

Es construirà tot seguit una corba de pressions pel punt més alt del junt a la clau i el punt exterior del junt del contrafort, tenint en compte que aquesta línia, després del paràgraf anterior, s'aproxima bastant a la veritable corba de pressions. Es tindrà, aleshores:

$$q = 0; \quad b = h = 11,37; \quad a = g - p = 21,12 - 13,08 = 8,04; \quad P = 114,32;$$

d'on surt $Q = a \cdot P / b = 8,04 \cdot 114,32 / 11,37 = 80,84.$



Aquesta corba talla encara l'intradós, i la màxima desviació té lloc en el sisè junt. Així doncs, la veritable corba de pressions passarà quasi pel punt interior d'aquest junt.

El càlcul de l'empenta corresponent tindrà lloc, com en el paràgraf anterior, en fer ús de les vuit primeres línies de la taula de sobre. La columna (8) donarà la força $P' = 80,53$, i la columna (10) donarà el seu braç de palanca $p' = 10,32$. Les coordenades del punt interior del sisè junt són $h' = 6,05$, $g' = 16,90$.

D'on surt: $b' = 6,05$; $a' = g' - p' = 16,90 - 10,32 = 6,58$;

I $Q' = a' \cdot P' / b' = 6,58 \cdot 80,53 / 6,05 = 87,6$.

La corba de pressions construïda així ja no talla l'intradós; el toca just. El seu traçat es suficientment exacte i no reclama cap més correcció per a l'ús pràctic.

Amb la intervenció dels pesos aïllats es veu com l'empenta mínima ha sobrepassat l'empenta mínima anterior. Ara és molt més forta que el nombre calculat anteriorment. La corba traçada s'allunya encara més de l'extradós del suport que no pas en l'exemple precedent. En el cas actual, per assegurar l'estabilitat cercada, és necessari donar a la volta un gruix encara més gran en el contrafort o bé canviar el perfil de la volta.

§ 28. Quart exemple. L'arc ametllat.

L'arc ametllat que considerarem (fig. IV del final del volum) té una obertura de $22^m,61$ i una fletxa de $13^m,97$; el radi de l'intradós és de $25^m,12$, i el de l'extradós de $27^m,79$. El gruix normal de la volta al contrafort és de $2^m,04$, i a la clau és de $1^m,26$. Se suposa una càrrega uniformement repartida, tenint $2^m,51$ d'alçada per sobre de la clau. Partirem de la superfície de la volta i del timpà en sis parts, les quatre primeres de $2^m,51$, la cinquena de $1^m,26$, i la sisena de $1^m,88$. Aquests nombres, introduïts amb les alçades corresponents en la taula següent, donen les quantitats necessàries pel càlcul i la construcció de la corba de pressions.

PESOS ELEMENTALS						SUMES DE DOVELLES			
Núms.	Llargada	Altura	Superfície	Braç de palanca	Moment	Núms.	Superfície	Moment	Braç de palanca
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)	(10)
1	2.51	4.71	11.82	1.26	14.8	1	11.82	14.8	1.26
2	2.51	6.63	16.64	3.77	62.7	1+2	28.46	77.5	2.72
3	2.51	9.11	22.87	6.28	143.5	1+2+3	51.33	221.0	4.31
4	2.51	12.40	31.12	8.79	273.4	1+...+4	82.45	494.4	6.00
5	1.26	16.17	20.37	10.67	217.4	1+...+5	102.83	711.8	6.92
6	1.88	17.65	33.18	12.24	406.1	1+...+6	136.01	1,117.9	8.22
totals			136.01		1,117.9				

Es construirà en aquest cas, com ja hem fet anteriorment, una corba de pressions passant pel punt més alt del junt a la clau i el punt interior del junt del contrafort. Es té:

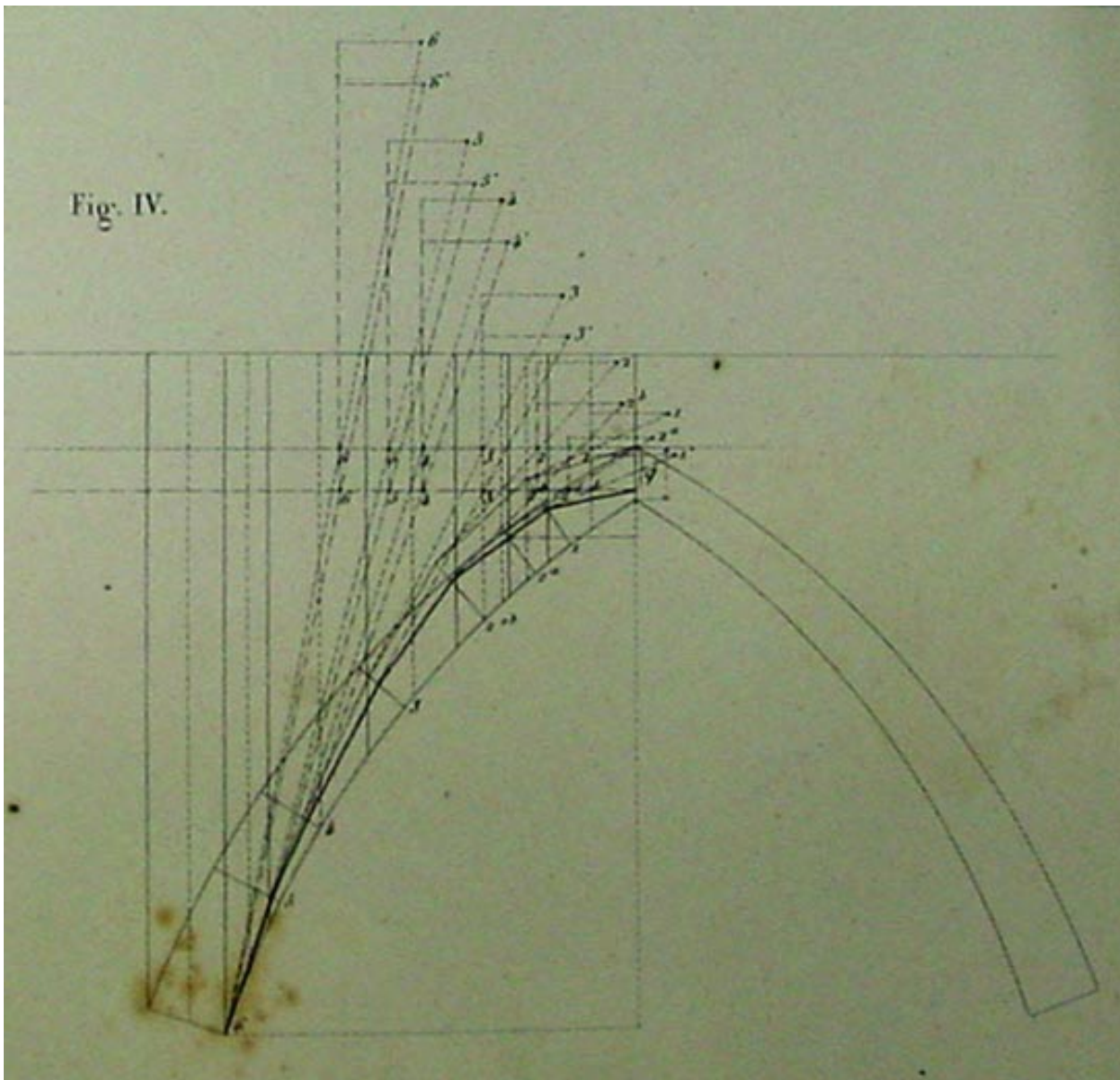
$$q = 0; \quad b = h = 15,39; \quad a = g - p = 11,30 - 8,22 = 3,08;$$

$$P = 136,00. \quad \text{D'on surt que } Q = a \cdot P / b = 3,08 \cdot 136,0 / 15,39 = 27,2$$

La part superior d'aquesta corba està totalment fora de l'extradós, mentre que la part inferior està en el gruix de la volta. Així doncs, la veritable corba de pressions no passa pel punt més alt de la clau. El punt de la clau ha de ser bastant baix perquè la corba de pressions no toqui l'extradós. La corba construïda recentment es desvia de l'extradós per fora de la volta, i això té lloc entre el primer i el segon junt.

En dividir el segon trapezi en dues parts, de tal manera que el junt corresponent a la nova divisió passi justament pel punt de l'extradós on suposem el contacte, aquestes dues parts figuraran al lloc corresponent de la part numero 2 de la taula anterior. El càlcul es farà com segueix:

PESOS ELEMENTALS						SUMES DE DOVELLES			
Números	Llargada	Alçada	Superfície	Braç de palanca	Moment	Números	Superfície	Moment	Braç de palanca
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)	(10)
1	2.51	4.71	11.82	1.26	14.8	1	11.82	14.8	1.26
2a	1.10	5.97	6.57	3.06	20.1	1+2a	18.39	34.9	1.90
2b	1.41	7.06	9.95	4.32	43.0	1+2a+2b	28.34	77.9	2.75
3	2.51	9.11	22.87	6.28	143.5	1+...+3	51.21	221.4	4.32
4	2.51	12.40	31.12	8.79	273.4	1+...+4	82.33	494.8	6.01
5	1.26	16.17	20.37	10.67	217.4	1+...+5	102.71	712.2	6.93
6	1.88	17.65	33.18	12.24	406.1	1+...+6	135.89	1,118.3	8.23
totals			135.89		1,118.3				



En aquest cas ens trobem en el tercer cas del paràgraf 24, on hom coneix dos punts de la corba de pressions: el punt interior del junt del contrafort i el punt exterior del junt 2,a.

L'empenta Q i el seu braç de palanca q , respecte al punt el més alt del junt a la clau, són donades per les fórmules:

$$Q = (a \cdot P - a' \cdot P') / e \quad i \quad q = h - a \cdot P / Q$$

Les coordenades del punt 2a són $g' = 3,77$, $h' = 2,35$, la superfície (situada sobre el junt 2a) $P' = 18,39$ (columna 8), i el seu braç de palanca $p' = 1,90$ (columna 10); pel punt interior del junt del contrafort on es té el mateix:

$$g = 11,30; h = 15,39; P = 135,88; p = 8,23.$$

El càlcul s'acabarà així:

$$\begin{aligned} a &= g - p = 11,30 - 8,23 = 3,07 \\ a' &= g' - p' = 3,77 - 1,90 = 1,87 \\ e &= h - h' = 15,30 - 2,35 = 13,04 \end{aligned}$$

$$Q = (a \cdot P - a' \cdot P') / e = (3,07 \cdot 135,88 - 1,87 \cdot 18,39) / 13,04 = 29,3$$

$$q = h - a \cdot P / Q = 15,39 - 3,07 \cdot 135,88 / 29,3 = 1,16$$

La corba, construïda després d'aquestes operacions, cau per tot entre l'intradós i l'extradós: es doncs la veritable. En el cas que aquesta segona línia hagués creuat encara part per fora de la volta, es prendrà per punt de contacte un nou punt que la figura indicarà amb una gran exactitud. En tornar a començar per darrera vegada s'obtindrà el càlcul amb una aproximació suficient de la corba buscada.

ANNEX 3.5

Apunts de mecànica de Joaquim Bassegoda i Amigó, 1873-1874.

Llibre de petit format localitzat a la biblioteca de l'ETSAB (UPC).

Exclòs de préstec.

Signatura: R-AP-MAN-4.

Codi barres: 210017586.

Títol complet: *Resumen de las lecciones de Mecánica aplicada a la construcción dadas en el curso 1873-74 en la escuela Provincial de Arquitectura de Barcelona.*

A més de la traducció de l'índex (íntegre) adjuntem la transcripció literal de la nota de la portada, del capítol de barres corbes (pàg. 239-253) i del capítol de voltes (pàg. 308-325).

Historia de este libro

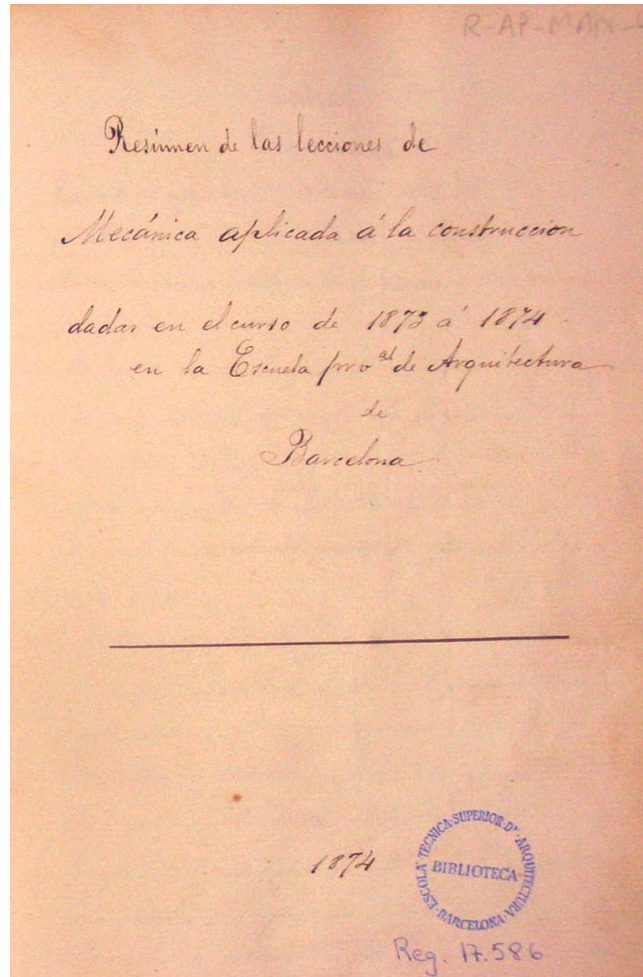
(puntos principales)

Se escribió durante el curso de 1873 a 1874; durante el verano de 74 lo tubo el alumno Cristóbal Cascante, quien lo devolvió a su dueño para estudiar en el curso 74 al 75. En el mes de febrero del 75 lo copió el alumno Gerardo Roig, quien lo dejó para copiarlo al alumno José Grases, quien a su vez lo devolvió a su dueño en abril del mismo curso. Examinado y aprobado su autor y dueño don Joaquin Bassegoda en junio del propio curso lo prestó al alumno D. Mercader quien estudió en él y lo copió durante el curso del 75 al 76. En este período de tiempo se eclipsó completamente el libro en cuestión, hasta el curso del 76 al 77 que volvió a aparecer en manos del alumno Cristóbal Cascante que aún gravaba la mecánica aplicada; a principios del 77 hubo nuevo eclipse ignorándose por completo el paradero suyo. Desconfiaban por consiguiente del hallazgo, cuando se supo que moraba en la estación de Zaragoza en poder de Francisco Cañellas, subdirector facultativo de la vía, y de D. Emilio Portusach empleado en la misma, alumnos que fueran de ésta Escuela de Arquitectura; y en vista de ello decidieron quitarle el polvo del olvido para lo cual fue a buscarlo el alumno Gerardo Roig, en cuyo poder obró hasta el diciembre del 77, quien lo entregó a su dueño que ya tenía ganas de poseerlo sin servidumbres, eclipses, ni viajes que han dejado tan mal trecho a quien tanto bien hizo.

De esto doy fe y lo firmo en Barcelona, a 9 de diciembre del 77.

Gerardo Roig y Gimeno

[signatura rubricada]



Índex

Preliminars

Centres de gravetat. Fórmula general, aplicacions de la fórmula anterior. Fórmula general del centre de gravetat d'una superfície, aplicacions de la fórmula anterior. Fórmula general del centre de gravetat d'una superfície plana, aplicacions de la fórmula anterior. Fórmula general del centre de gravetat d'una línia, aplicacions de la fórmula anterior. Centre de gravetat d'una superfície plana qualsevol.

Moments d'inèrcia. Fórmula general, aplicacions de la fórmula anterior. Moments d'inèrcia de figures curvilínies.

Radis de gir. Exemples d'el·lipses d'inèrcia. Determinació analítica del radi de gir. El·lipse d'inèrcia quan no es coneixen els eixos. Moment d'inèrcia quan l'eix és perpendicular al pla de la figura.

Centre de percussió. Aplicacions de la fórmula anterior. Determinació del centre de percussió per mitjà de l'el·lipse central d'inèrcia.

1^a Part. Resistència de Materials

Moviments elementals

Moviments externs

Aplicacions de les fórmules anteriors. Moviment longitudinal. Cas en què la força no obra sobre el centre d'elasticitat. Cas de la secció heterogènia.

Nucli central

Cas en què la secció és un junt i el pes cau fora del nucli central. Problemes sobre els diferents casos de moviment longitudinal.

Moviment de flexió.

Bigues encastades per un extrem. Problema general. 1r cas: pes a l'extrem de la biga. 2n cas: pes repartit uniformement. Representació gràfica dels moments de flexió i de l'esforç transversal. 3r cas: pes a l'extrem i un altre en un punt qualsevol. Problemes sobre bigues encastades per un extrem.

Bigues sostingudes pels dos extrems. 1r cas: pes repartit. 2n cas: pes en un sol punt de la biga. Problemes sobre les bigues recolzades pels dos extrems.

Bigues encastades per un extrem i recolzades per l'altre. 1r cas: pes repartit. 2n cas: pes en un punt.

Bigues encastades pels dos extrems

1r cas: pes repartit. 2n cas: pes en un punt.

Teoria dels tres moments

Fregament

Bigues inclinades. Representació gràfica de la resistència de les bigues inclinades.

Bigues equilibrades

Resistència dels peus drets a la compressió

Resistència a la torsió

Bigues poligonals i corbes no subjectes a flexió

Resistència de peces corbes subjectes a flexió. Cas del pes repartit segons la corda

Murs de terraplè

Mètode de Poncellet per calcular l'empenta dels murs de terraplè

Posició del centre de pressió. Gruix del mur. Problema sobre els murs de terraplè.

Murs dels edificis

Voltes

Voltes per aresta. Volta en racó de claustre. Volta esfèrica

Armadures

Bigues armades. Ganivets d'armadura. Armadures compostes. Armadura de Polençeau.

Armadura quebrantada. Armadura mansarda. Armadura per alçar pesos

2^a Part. Hidràulica

Hidrostàtica.

Equilibri i pressió dels fluids. Llei de Mariotte. Centre de pressió. Principi d'Arquímedes.

Hidrodinàmica.

Teorema de Torricelli. Corba que descriu la vena líquida. Construcció geomètrica per trobar el màxim abast dels dolls d'aigua. Correccions d'altura. Despesa de l'orifici
Bessament del líquid quan el nivell va variant. Exemple de traçat d'un canal

Canonades

Accidents que ocorren en les canonades segons la situació del tub. Força motriu de l'aigua.

Turbines

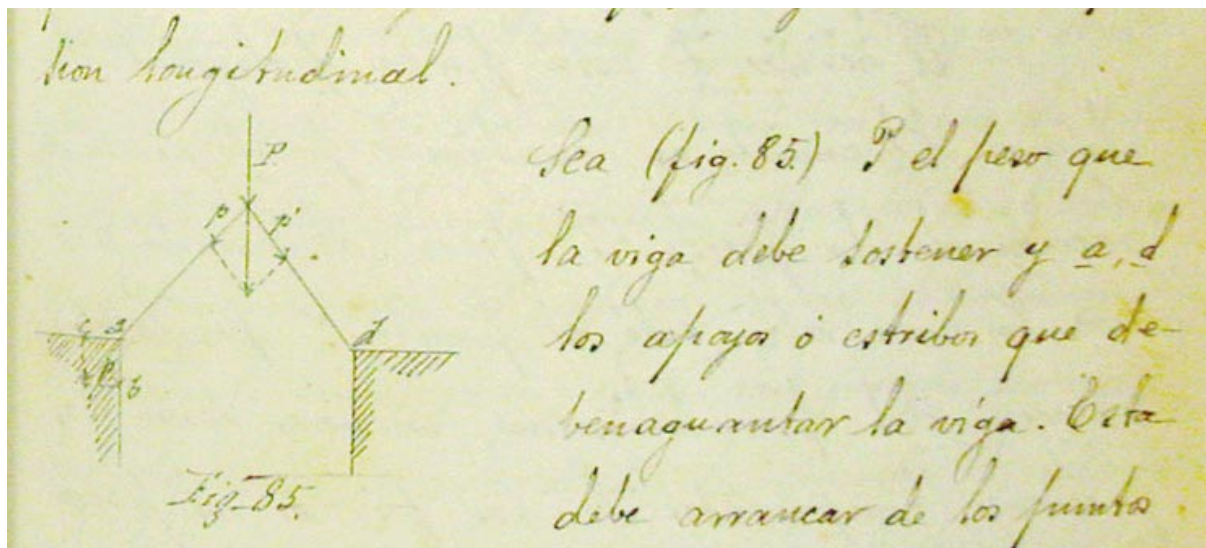
Màquines per elevar aigua.

Apèndix

Pàg. 239-253

Vigas poligonales y curvas no sujetas a flexión

Las vigas sujetas a la flexión, ya hemos visto que son las que resisten menos, porque la resistencia en este movimiento, relativamente es muy pequeña. Por lo que cuando necesitamos mucha resistencia con vigas muy pequeñas hemos de colocar una reunión de piezas que no estén sujetas a flexión y solo a una presión longitudinal.

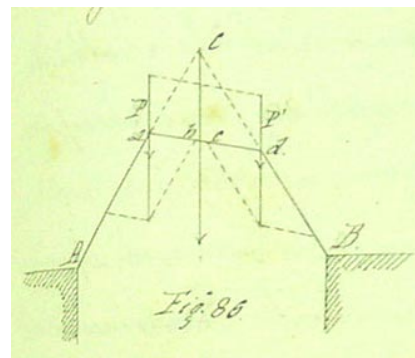


Sea (fig.85) P el peso que la biga debe sostener y a, d los apoyos o estribos que deben aguantar la viga. Esta debe arrancar de los puntos a y d , yendo a parar a un punto de la fuerza P , luego la viga estará formada por las dos aP y Pd . Descomponiendo el peso según la dirección de las piezas tendremos las dos componentes p y p' que ejercen una presión longitudinal a cada una de las piezas. Esta componente p se transmitirá al estribo a y se descompondrá en dos, según ab y ac . La vertical se equilibra con la reacción proveniente del muro y la horizontal produce un empuje lateral hacia el estribo. Luego así como en las vigas sujetas a flexión el muro no sostenía más que la carga vertical de la viga, aquí, tiene que resistir al empuje horizontal de manera que no puedan abrirse.

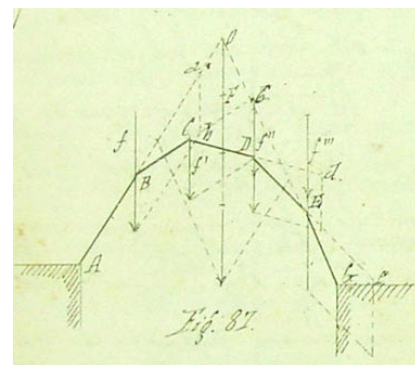
El vértice de esta pieza poligonal, lo elegimos libremente en cualquier punto de la dirección de la fuerza P , pero observando que cuanto más alto esté el punto P por la construcción del paralelogramo, menores serán las presiones componentes de las piezas, al paso que bajando el vértice tienen que aumentar p y p' .

Estas mismas consideraciones son aplicables para cuando el peso cae sobre cualquier punto de la viga, y un estribo esta más alto que otro.

Si los pesos que han de aguantarse son dos seguiremos una marcha análoga. Sean estos P y P' (fig.86). Como la viga debe arrancar de los estribos A , B y el tercer punto es libre con tal de estar en la dirección de una de las fuerzas, lo tomaremos en a y uno de los lados de la viga será Aa . Este lo prolongaremos hasta encontrar la resultante de P y P' , que será en el punto C . Si no obrara más que la resultante como fuerza única este sería el vértice que uniéndolo con el apoyo B nos determinan otro lado de la viga, pero como las fuerzas son dos, habrá dos vértices que serán los puntos de encuentro de las piezas de la viga con las fuerza, o sea los puntos a y d . Uniéndolos tendremos un tercer lado de la viga. Como comprobación descompongamos los pesos aplicados en a y d , según las piezas de la viga y si la componente ab resulta igual a la cd ; la pieza ad , está equilibrada y por consiguiente la viga no caerá a un lado ni a otro. Si descomponemos del mismo modo la resultante cada componente que resultará será el empuje que recibirá cada estribo.



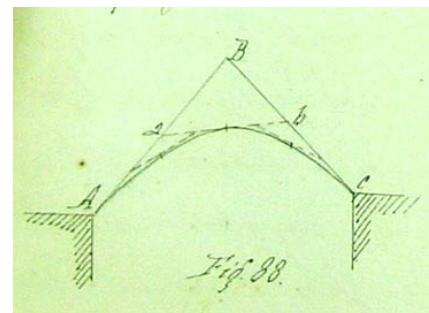
De un modo parecido llegaríamos al caso de ser varios los pesos que han de obrar sobre la viga poligonal. En la fig.87 hay 4: f, f', f'', f''' . Fijemos de antemano la dirección del 1r lado y sea AB . Hallemos la componente F de los pesos y el punto de unión con el 1r lado. Descompongamos la F en dos según OA y OG y tendremos las reacciones de cada estribo. En el punto B obran, el peso f y la reacción del estribo que es Ba , componiéndolas, la diagonal hasta llegar al peso f' será el segundo lado del polígono BC . La reacción que habrá en C será Bb , que colocándola de C a c y componiéndola con f'' tendremos otro lado CD , y así siguiendo hasta que no hay más fuerzas que componer. Como comprobación debe suceder que diagonal del último paralelogramo ha de estar sobre el lado DG . De estas construcciones se deduce



1º. Que cada fuerza debe obrar sobre un vértice y

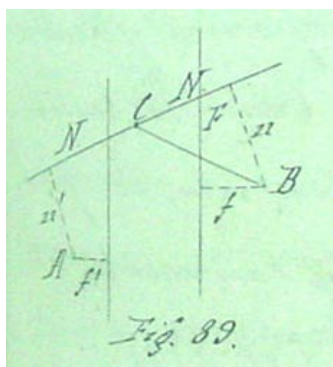
2º que cuanto mayor es aquella, este debe ser más agudo.

Podríamos también resolver el problema inverso, dada una viga poligonal equilibrada o sea un polígono funicular, determinar los pesos que deben aplicarse a cada vértice para que haya equilibrio. Para ello debe darse uno de los pesos por ejemplo el f (fig.87). Sobre el lado f , tracemos un paralelogramo cuya diagonal es el segundo lado BC y el B,a nos determinará el empuje o reacción del estribo. La reacción del lado Bc es la Bb , que colocándola sobre la Cc y con el CD como diagonal, tendremos otro paralelogramo cuyo lado f' es la fuerza pedida, y así continuaríamos para los demás vértices.



Cuando los pesos que deben obrar sobre la viga están repartidos en toda la longitud de la misma, se busca el que corresponde por cada unidad de longitud y se coloca como ordenada el peso correspondiente.

Si los pesos están repartidos por igual, el polígono funicular se nos convierte en una curva que por el cálculo determinaríamos que es una parábola, Veamos diferentes medios de construirla. Si se nos dan los puntos de arranque y un elemento de la curva tal como AB , que será tangente, como la resultante de los pesos debe pasar por el medio de la distancia AC en esta vertical debe estar la resultante. Prolongando la tangente hasta encontrarla en B (fig.88), este punto debe ser el vértice que uniéndolo con C tendremos la tangente en el otro extremo. Uniendo los dos puntos medios de las tangentes, en la mitad de esta recta debe haber un punto de la parábola, Considerando como vértices los puntos a y b y repitiendo esta operación, tendríamos bastantes puntos de la parábola para trazarla.



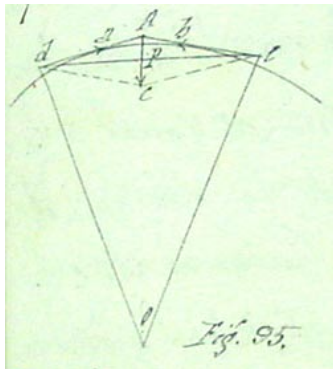
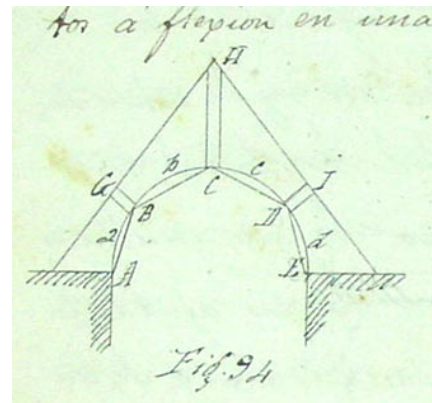
Podemos también construir la parábola dados los arranques y un punto de la curva. Nos valdremos para ello de la teoría de las fuerzas. Sean A y B los arranques (fig.89) y C el punto de la parábola conocido. Supongamos que conocemos la tangente a la curva en el punto C y que sea NN y podemos considerar a C y B como arranques de un arco de parábola. Sabemos que F

considerando que la presión de este punto sea cero, se verificará $F \cdot f - P \cdot p = 0$; De donde resulta $F = (P \cdot p) / f$. Este valor de F o sea el empuje horizontal de la clave, tratándose de una bóveda es el mismo que el que sufre el estribo.

Cuando los pesos en vez de estar repartidos por igual en sentido horizontal, lo están a lo largo de la curva, la resultante es la llamada catenaria, y es la que afecta un hilo o cuerda, sujeto por sus extremos y dejándolo libremente a su peso. Este caso se nos presenta cuando tenemos una bóveda de cubierta de igual grueso, que no tiene más peso que el suyo.

La dificultad de la aplicación de estas curvas equilibradas consiste en que rara vez sucede que los pesos estan repartidos según la ley manifestada, de manera que estas curvas, pueden modificarse más o menos según el modo como se apliquen los pesos. Así es que a veces la curva equilibrada, que corresponde a una bóveda cuyos senos se han llenado de tierra o mampostería, es aproximadamente un arco de círculo.

Vamos a ver los puntos que están sujetos a flexión en una curva no equilibrada. Sucede con frecuencia que para sostener las dos vertientes de un tejado GH y HI (fig.94) en lugar de la parábola, que como hemos visto corresponde a este caso, se emplea impropriadamente un semicírculo que se sujetan a las piezas inclinadas por los puntos B, C y D. Para sostener estas tres fuerzas se necesitará el polígono ABCDE que tiene un vértice en cada fuerza, pero en la curva que se ha colocado los extremos de los arcos a, b, c y d sufren presiones que producen una flexión en cada uno de ellos, los cuales se deformarán si son muy flexibles, al paso que si son de una materia rígida sufrirán mayor presión que la que les corresponde.



Todavía hay una tercera curva equilibrada que proviene de fuerzas aplicadas normalmente a la misma, de un modo continuo. En este caso la tensión o compresión es la misma para todos los puntos de la curva.

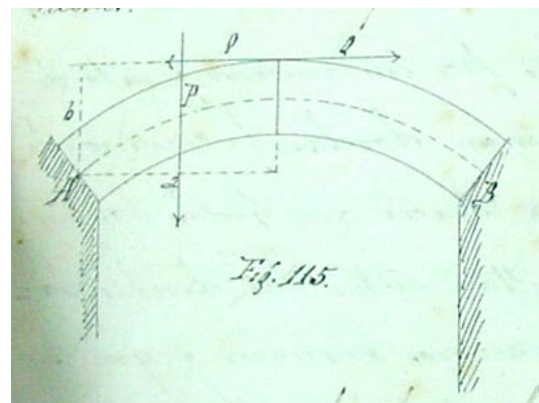
Consideremos un elemento infinitamente pequeño del arco, a b (fig.95) cuya resultante de los pesos que hay aplicados en el es P, que debe ser normal a la curva y descomponiéndola en dos, según las tangentes de los extremos del elemento ad y be (...)

Bóvedas

La bóveda no es más que una superficie curva destinada a cubrir un espacio generalmente de grandes dimensiones. Como las bóvedas están formadas por un número finito de piezas que se llaman dovelas, la condición de equilibrio consiste en hacer que todas las fuerzas que se desarrollan entre las dovelas vayan a parar a los muros o estribos y que estos tengan el grueso suficiente para sostenerlo.

La división que se hace de las bóvedas más usadas en la construcción es la de las superficies curvas que la forman, siendo las más empleadas la cilíndrica, que da lugar a la de cañón seguido, a la por arista y a la en rincón de claustro; y la esférica.

Vamos a ver las generalidades de las bóvedas en las de cañón seguido, advirtiendo que lo que se diga sobre una sección de la bóveda se entiende sobre una unidad de longitud contada sobre el eje de la misma y que las dovelas son incompresibles y están aisladas. La curva que corresponde a la parte cóncava del arco se llama intradós y la



que corresponde a la convexa, extradós. Supongamos (fig. 115) un arco cargado de cualquier manera apoyado sobre los estribos A y B. Considerándolo dividido por el medio, cada mitad tenderá a caer puesto que la resultante del peso caerá fuera de la base de sustentación, pero puestas en contacto inmediato, cada mitad sostendrá a la otra, originándose un empuje horizontal Q que, siendo igual en ambas mitades, producirá el equilibrio del arco. Vamos a determinar el valor de Q como lo hicimos en las piezas equilibradas. Las fuerzas que obran sobre la mitad A del arco son: el empuje horizontal Q de la clave; el peso E resultante de los que cargan sobre la mitad del arco y la reacción del estribo. Tomando los momentos respecto el punto A, este último será cero y tendremos :

$$Q \cdot b - P \cdot a/2 = 0, \text{ de donde } Q = P \cdot a / 2 \cdot b$$

Es decir que el empuje de la clave aumenta al mismo tiempo que el peso que carga sobre el arco y que la luz del mismo al paso que disminuye cuando el peralte o monte aumenta. En el caso particular de estar el peso uniformemente repartido, el brazo de palanca será $a/2$ pero en los demás casos tendrán otros valores particulares.

Vamos a ver de qué manera el empuje horizontal de la clave se transmite hasta los estribos. Consideramos (fig. 116) un arco dividido en dovelas, cada una de las cuales a más de su propio peso aguanta una sobrecarga que puede ser del mismo material que las dovelas o distintos: en el primer caso, por los extremos del extradós de cada dovela se levantan verticales y los trapecios que resultan son las sobrecargas de cada dovela, pero en caso contrario se reduce la superficie de la sobrecarga bajando la altura hasta la que tendría con el mismo peso si fuera del material del arco y se divide como hemos dicho. La construcción gráfica consiste en componer el empuje con el peso de la mitad de la clave y la resultante es el empuje que recibe la segunda dovela. Este se compone con el peso de la segunda dovela (mas la sobrecarga) y la resultante da la combinación para la tercera y así siguiendo, o bien podemos también seguir el procedimiento de Scheffler.

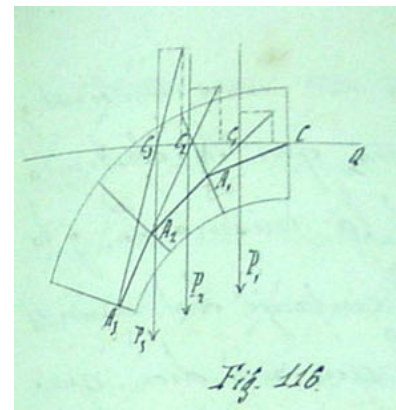
Consiste (fig.116) en por el punto de aplicación de Q trazar una horizontal, tomar el peso P_1 de la primera dovela, P_2 de las dos primeras y P_3 de las tres primeras pasando todos por los respectivos centros de gravedad. Por el punto C_1 de intersección de la horizontal con la dirección P_1 tomemos la horizontal igual a Q y la vertical igual a P_1 y componiéndolas nos dará la resultante C_1A_2 , cuyo trozo A_1A_2 será la compresión de la segunda dovela. En el punto C_2 componemos P_2 con la misma Q y nos dará C_2A_3 de la cual A_2A_3 es la compresión de la tercera dovela. Componiendo ahora P_3 con Q nos daría una compresión para la cuarta dovela que sería prolongación de C_3A_3 . La de la clave la obtendremos uniendo A_1 con C puesto que aquí hay componente Q al paso que P es cero. Así en general para la dovela n en el punto C_n compondríamos P_n con Q que nos daría una resultante $A_{n-1} A_n$ que considerando la última dovela cargara directamente sobre el estribo y cuya dirección inclinada la descompondremos en una vertical y una horizontal: la primera que la destruirá la reacción del muro será la misma P_n y la horizontal que produce el empuje del muro es la misma componente Q, lo que nos dice que el peso que sostiene el estribo es igual al de todo el arco y el empuje que recibe es el mismo de la clave. Conocida la construcción anterior para que haya equilibrio será menester que se cumplan las dos condiciones siguientes:

1ª Que los puntos de intersección C, A_1 , A_2 , A_3 ... caigan dentro de las respectivas juntas y

2ª Que la dirección de las resultantes QC_1 , C_1A_1 , C_2A_2 ... de las presiones ejercidas contra las juntas hagan con las normales a las mismas ángulos menores que el de rozamiento pues de lo contrario las dovelas escaparían por la parte superior.

Siempre que el arco está formado por un número finito de dovelas, la línea de las presiones de las dovelas es una línea quebrada como hemos visto, pero considerándolo compuesto por un número infinito de dovelas infinitamente pequeñas, la línea que resulta es una curva que se llama de presiones y no es más que la curva equilibrada que corresponde al sistema de los pesos de cada caso, y por consiguiente la naturaleza de la curva varía con la ley de pesos que cargan encima.

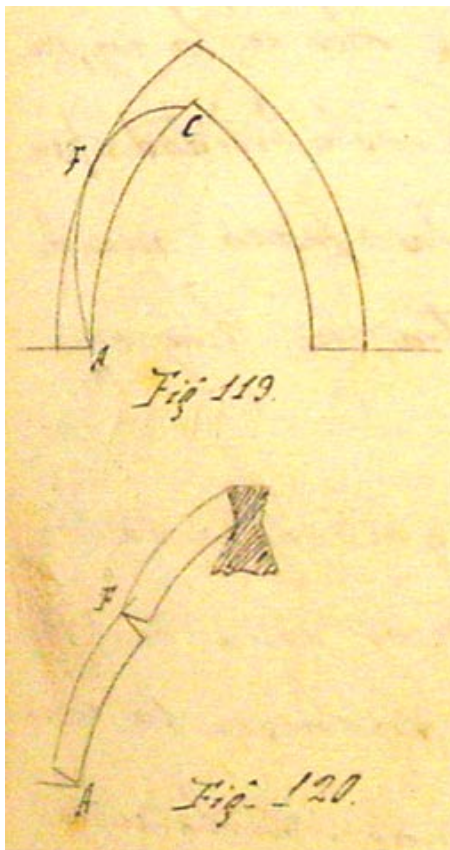
Para que tuviera lugar un perfecto equilibrio sería menester que los puntos de intersección de la curva de presiones con las juntas, que han de ser los mismos en que los pesos verticales cortan a la misma junta, fueran los centros de gravedad de las superficies de junta, pues de este modo estando las dovelas sujetas a una fuerza de compresión estarían en completo equilibrio. Pero desde el momento que la curva de presiones pasa fuera del centro de gravedad de las dovelas a más de la compresión ha de haber un giro que hace que unos puntos estén más comprimidos que otros. Pero mientras la curva de presiones esté comprendida dentro de la bóveda, como puede formarse una curva equilibrada no habrá empuje horizontal en el estribo, es decir $Q = 0$. De la construcción de la curva de presiones resulta que nunca podrá pasar sobre el extradós al paso que podrá pasar



tangente o más baja que el intradós, de cuya variación de posición depende la variación del valor de Q , y por consiguiente el problema que debemos resolver es el de determinar la curva de presiones que corresponde al mayor empuje horizontal y la que corresponde al menor. Desde luego podemos afirmar que la curva de presiones tanto si corresponde al mayor como al menor empuje debe tener un punto de contacto con el intradós y otro con el extradós. Si el del extradós es más alto que el del intradós, corresponde al menor valor del empuje y si el punto de contacto con el extradós está más bajo que el del intradós, es la del mayor valor.

Vamos a deducir de la curva de presiones correspondiente al menor empuje, la verdadera para los arcos más usados. Tenemos en primer lugar el arco de círculo rebajado (fig. 117), cuya mitad es el $ABDC$. Dijimos al hablar del empuje horizontal Q que tenía por expresión analítica $Q = P \cdot a / 2 \cdot b$ siendo b el peralte del arco y a la luz del mismo, de la cual se deduce que la curva de presiones que ha de tener el menor valor de Q tiene el menor valor posible de a y el mayor de b . Por consiguiente, en el caso que nos ocupa, la curva debe pasar por los puntos D y A . Lo que nos dice que cuando se nos da el arco para trazar la curva que da menos empuje horizontal, se hace pasar por el punto más alto de la junta de la clave y por el más bajo de la del estribo.

En el caso que tratamos del arco rebajado, como toda esa curva pasa dentro de la bóveda, indica que es la verdadera y que el empuje Q de la clave es el mismo que habíamos calculado para construir la curva y que es igual al del estribo. Como la presión en la clave y en los estribos se ejerce por un solo punto, se verifica un giro alrededor de el

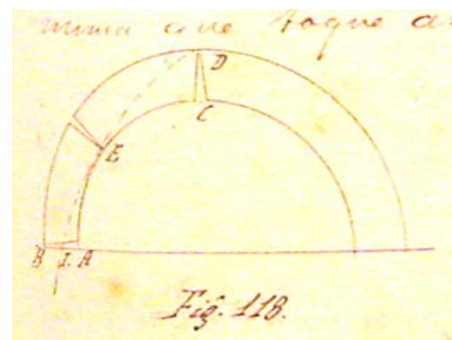
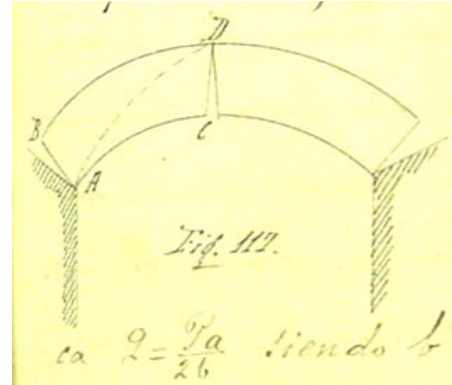


y se abre una grieta en estas juntas y este es generalmente el modo de abrirse de esta clase de arcos. Si el punto D no se halla en el vértice D sino algo más bajo, entonces la curva de presiones en el vértice se

tendrá que salir del extradós puesto que la curva de presiones tienen que ser horizontal en el punto más alto. Como que el arco es estable con tal que la curva pase por las intersecciones de las juntas de la clave con el extradós, por más que, como hemos dicho, la curva de presiones encima de la clave sale fuera del extradós, tenemos que cuanto más bajas estén las juntas de la clave más subirá la curva, mayor será el valor de b y por consiguiente menor Q . Este es un medio que tenemos para disminuir el empuje, aumentando la longitud de la clave a fin de hacer bajar las juntas.

En el arco semicircular cambia ya la posición de la curva que saliendo del punto D (fig. 118) puede suceder que toque en un punto al intradós, que lo corte en varios, pero nunca que toque al extradós. La verdadera curva de presiones será la que pasa por el vértice D y tangencialmente al intradós en E . Puesto que el arco tendrá estabilidad por tener todos los puntos de la curva dentro del arco y por las propiedades de las curvas de presiones se demuestra que esta es la que corresponde al menor empuje. Por consiguiente la mayor compresión de las dovelas tiene lugar por los puntos D y E , que es donde se ven frecuentes espartillamientos, abriéndose además una

grieta en estas puntos. El punto E , entre ciertos límites, es independiente de la carga que hay en la parte inferior del arco, por lo que aún cuando el arco esté en perfecto equilibrio, la junta que pasa por E se le llama junta de rotura. En la junta AB del estribo se abre también una grieta que depende de la posición del punto J intersección de la curva de presiones con la junta del estribo, siendo el arco tanto más estable cuanto el punto J se acerca al A . En un arco aproximadamente de círculo pero que el arranque no fuera vertical ni el punto superior de la clave horizontal nos daría una curva de presiones que pasaría por A y tocaría en uno o más puntos al extradós pero no intradós. Si pasa por A y es tangente al extradós, el arco será estable y la curva corresponde al menor empuje. En el arco apuntado (fig. 119) tenemos una curva de presiones que partiendo de A toca en un punto al extradós, pero en el vértice como tiene que formar la curvatura muy rápida para que esté toda contenida dentro del arco a



fin de que sea estable, lo que hace que hacia el vértice tenga que aumentar la componente P, o sea, el peso, y este es el origen de las grandes claves que vemos en las bóvedas ojivales que no son simplemente un adorno. Por el punto F y A como en los demás se abre una grieta deformándose el arco como en la figura 120.

Reasumiendo esos diferentes casos que hemos examinado, vemos que construyendo la curva de presiones pasando por A y D puede suceder que la curva esté completamente dentro del arco, que sea tangente a una de las curvas, o a las dos a la vez, conservando siempre el arco su estabilidad, pero si resultara que toca a las dos pasa más de una vez de la una a la otra no hay equilibrio posible.

Para establecer en general una bóveda estable, se empieza a trazar una con la abertura y la flecha dadas y se busca la curva de presiones que le corresponde. Si la curva se aproxima a ser la curva media, entonces habrá una estabilidad perfecta, pero si se acerca mucho a las curvas contorno, como que por los puntos de intersección de la curva con las juntas se transmite la compresión si este punto estuviera muy cerca del borde, podría suceder muy bien que la piedra se aplastara dando lugar a espartillamientos que tan frecuentemente vemos en los arcos. Para evitar esto se corrige el trazado del arco, conservando el intradós y el espesor de la clave y aumentando el grueso en los arranques, o bien cambiando la forma del arco rebajado por la sección de fractura o bien aumentando uniformemente todo el grueso del arco. Para saber el grado de estabilidad que necesita un arco según sea la resistencia del material de que está formado se [sic] conocido prácticamente que cuando dos dovelas obran por compresión la una contra la otra dando lugar a un giro, aún para los materiales más débiles no se aplastaban hasta que el giro se verifica alrededor de un eje que diste $\frac{1}{4}$ de la arista, por consiguiente colocando $\frac{1}{4}$ del grueso desde el intradós y $\frac{1}{4}$ desde el extradós resultará un arco semejante al primero, de la mitad de grueso y con tal que la curva de presiones no salga de ella el arco resistirá perfectamente al aplastamiento.

En general la forma del intradós la tenemos ya señalada, bien por consideraciones arquitectónicas, bien como en los puentes por la mayor facilidad en la salida de las aguas y en estos casos, para tener la bóveda estable hay que hacer las consideraciones explicadas, pero si somos libres en elegir la forma del intradós, lo haremos semejante a la curva equilibrada que corresponda a aquel reparto de pesos, pues de este modo la curva de presiones podrá pasar por los puntos medios de las juntas dando lugar a un perfecto reparto de presiones.

Fáltanos para concluir hablar del grueso de la bóveda. Scheffler por medio de unas fórmulas ha buscado una relación entre la luz, la flecha, los gruesos en la clave y en los estribos, las presiones en estos puntos sea por medio de las cuales, conocidos varios de éstos valores, determina los demás y por medio de ellas ha calculado unas tablas en que da estos valores para las formas y dimensiones de bóvedas más usadas. En el párrafo 24 de la traducción francesa del mismo autor se encuentra un proceder práctico para trazar la curva de presiones, calculando muy sencillamente el empuje en la clave y haciendo aplicación de los puentes principales ya construidos.

(...)

ANNEX 3.6

Apunts de construcció de Leandre Albareda, 1873-74 i 1874-75

Llibre manuscrit, mida mig foli, amb més de 800 pàgines. Es localitza a la biblioteca de l'ETSAB, exclòs de préstec i de consulta restringida. Es tracta d'uns apunts de les classes de construcció del professor Leandre Serrallach, presos per l'alumne Leandre Albareda durant el curs 1874-75, il·lustrats i passats a net però corregits i esmentats durant el curs següent.

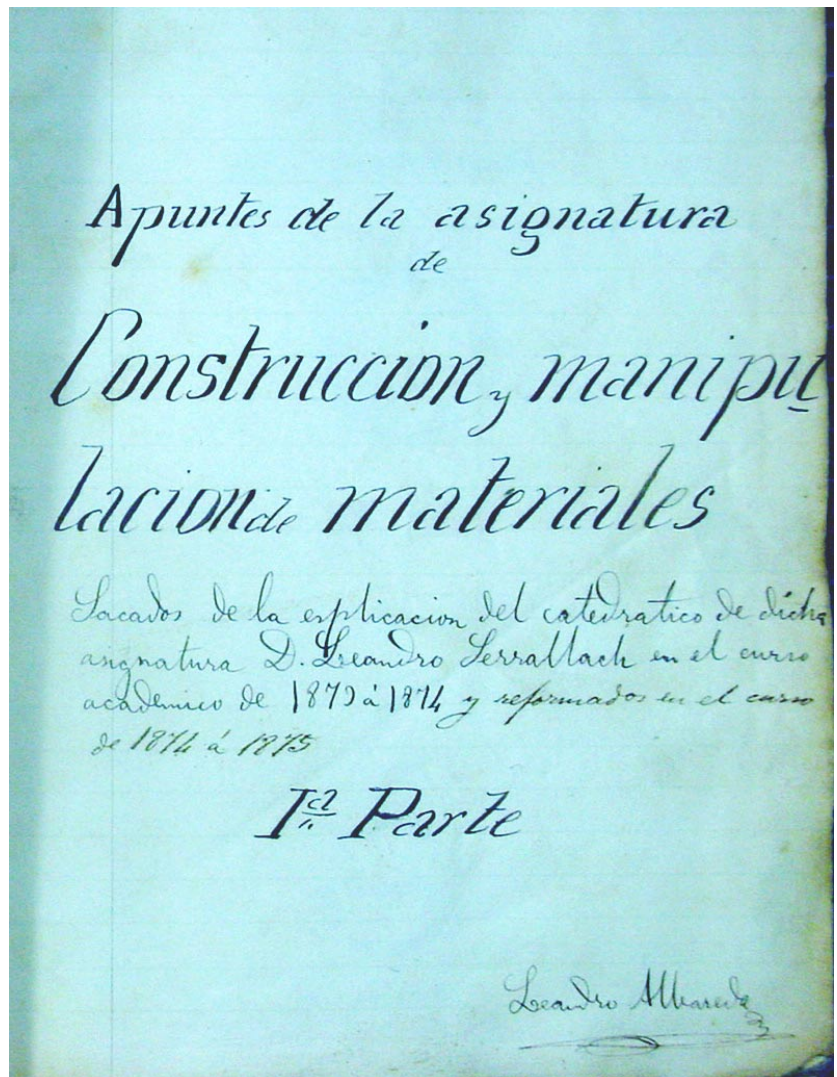
Títol complet:

Apuntes de la asignatura Construcción y Manipulación de Materiales sacados de la explicación del catedrático D. Leandre Serrallach en el curso académico 1873-1874 y reformados en el curso de 1874-1875. Ia Parte.

Signatura: R-AP-MAN-24

Codi barres: 1210017585

Leandre Albareda nasqué el mateix any que Gaudí (1852) obtingué el títol d'arquitecte tan sols un any abans que ell. Això és indicatiu que aquests apunts reflexen els coneixements que s'impartien aleshores a l'Escola d'Arquitectura de Barcelona y que també rebé Gaudí.



Transcripció literal d'alguns fragments:

Entre els diferents continguts que podem destacar hi ha la part on descriu els morters, els assajos dels ciments, l'amassada, la mescla o dosificació (pàgs. 190-191) i el formigó. Vegem-ne un fragment (pàgs. 192-195):

Hormigones

Es una mezcla generalmente de mortero hidráulico con materiales de poco tamaño, cascazo, cantos rodados, grava, ladrillos machacados. Estos materiales han de ser duros, no heladizos, su volumen debe procurarse que no exceda de la grava de carreteras de 0m 05 a 0m 06 de lado. Como este mortero se emplea dentro del agua es preciso que se endurezca dentro de poco tiempo, si se emplea al aire libre no importa que su dureza sea tan rápida sino que vaya creciendo poco a poco, a veces con hormigón se forman al aire más compuestas y unidas.

Bondad de los Hormigones

Depende de la bondad de los materiales y mortero que entren en su composición

Proporciones

Depende de su empleo, pues si se necesita poco (...)

Fabricación

En primer lugar hay la medición de las sustancias que entran en la composición, pues en una obra, en el pliego de condiciones se ha de poner el volumen de las sustancias medido por carretillas, así es que se dicen tantas carretillas de mortero por tantas carretillas de grava; las carretillas estan agujereadas inferiormente para que pueda salir el agua que echamos para lavar la grava. Se disponen los materiales y luego viene la elaboración que puede ser a brazo o por medios mecánicos.

Elaboración a brazo

En el área se echa por capas el mortero y la grava, cuando se tiene todo preparado un operario con el batidor va reviendo toda la pasta mientras dos o 3 según la importancia de la cantidad de hormigón que se quiere elaborar van con palas de hierro echando de la periferia al centro para así mezclarla bien y para que no se conozca donde esta la grava y donde esta el mortero.

Elaboración por medios mecánicos

Máquina de cajones

En un terreno se ponen los materiales (...)

Inserits amb el text hi ha uns dibuixos explicatius, a voltes esquemàtics i a voltes admirables de traç i d'expressivitat. El fragment sobre els mitjans per donar forma corba a la fusta, per a construir arcs o voltes, ja l'hem reproduït dins del text del capítol 4 d'aquesta tesi. Adjuntem a continuació la part completa de totes les lliçons que fan referència a les voltes (pàgs. 566-571). De totes maneres, com podem veure a la il·lustració adjunta, encara es parla de voltes fins a la pàg. 701, després dels temes que fan referència a la fusteria d'armar, amb encavallades de diferents tipus, i després del sistema de P. de l'Orme.

Hem de comentar que ha estat difícil la tasca de transcriure el text manuscrit. A vegades no hem pogut entendre la cal·ligrafia i algunes paraules dubtoses les hem assenyalat en color vermell.



Lección 53. Bóvedas

Elas pueden hecho variar la paz de la arquitectura, no solo por el cambio de forma de las cubiertas, sino que habiendo una relación entre sustentante y sostenido aquel ha cambiado según ha cambiado el sostenido.

Su antigüedad. Hasta hace poco se ha creído que la bóveda solo la conocieron los Etruscos de los cuales la adoptaron los Romanos y de ellos los Bizantinos, etc.

En Egipto, en el Palacio de Osimandrias 2500 años antes de J.C. existe un cañón seguido recto descansando planamente. En la pirámide de Gisé existe otro cañón de una manera análoga. Esta forma de sillares que iban avanzando se encuentra aún entre los Griegos, en las tesorías, tesoro Atrea en Micenas.

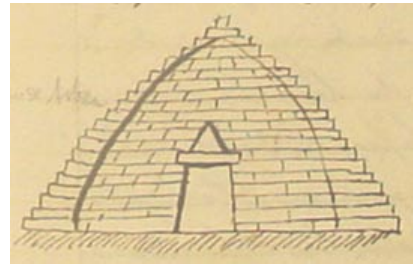
En la pirámide de Moroé existe un cañón seguido recto formado por dovelas.

En Tebas, la tumba del rey Amenofis 1^{er} rey de la 18^a dinastía, cañón recto elíptico de ladrillo. [dibuix-1]

En Nimvie hay una puerta abovedada de sección semicircular.

En cuanto a Grecia no nos queda ni ruinas ni edificios que poder estudiar. Aristóteles, autor griego, cita que las dovelas de tal edificio trabajaban en todos sentidos lo que prueba que eran dovelas.

Se deduce que es un hecho cierto que fue empleada la bóveda en los primeros siglos pero no imprimió carácter a los monumentos. En Grecia no se encuentran ni en los templos, ni propileos, pero en Roma se encuentran con gran esplendor, encontrándola en Etruria porque estudiaban todo lo que encontraban en las naciones que ellos conquistaban y se lo asimilaban en los propileos, thermas, puentes, anfiteatros.



La emplearon y no sabiendo discernir de que el arco y el dintel son elementos que no se unen bien ellos los ligaron de modo que no les honra mucho pues se tiene una obra doble.

Las bóvedas empleadas por los romanos, el cañón seguido recto, la bóveda por arista intersección de dos cilindros de igual altura de diferente amplitud, las esféricas pero sobre planta circular, no sobre planta cuadrada que en donde se empleó por primera vez la bóveda esférica con pechinas fue en Sta. Sofía, en donde nació el arte bizantino. En los primeros tiempos de la edad media se siguieron las tradiciones romanas haciendo el cañón seguido recto como refuerzos de trecho en trecho.

A medida que el tiempo adelanta hay tendencia a desprenderse de las tradiciones romanas pues se hacían al principio grandes macizos para contrarrestar el empuje de las bóvedas pero encontrando pesado aquello se empezaron a hacer gigantescos esfuerzos para ir adelgazando los soportes los cuales no podían llegar a un límite inferior sino se cambiaba el sistema de bóvedas construyendo las bóvedas por arista compuesta por arcos torales con aristones. El sistema de llevar los empujes al interior por medio de botareles les facilitó el disminuir la sección a los soportes o sostenidos.

La elección de una bóveda depende:

- 1° Del espacio que tenemos que cubrir.
- 2° De la resistencia de los muros o apoyos de las bóvedas a igualdad de luz dan diferente empuje que en los arcos apuntados se tiene menos empuje que en los arcos peraltados.
- 3° De la forma y disposición de los soportes.
- 4° Del carácter que se quiera dar a la obra con mucha importancia al arquitecto.

Elección de materiales depende:

- 1° Del destino de la obra, según haya la obra de resistir más o menos, según que tenga que sufrir presiones permanentes o no, que tenga que estar a la intemperie o dentro del agua se construyen bóvedas de sillarejo, alfarería hueca o ladrillo solo por la parte económica sino por el espesor que en este caso ha de ser menor que de sillería y luego porque revoca.

No siempre deben usarse materiales de gran tamaño y de gran riqueza. La cúpula del Panteón en Roma tiene 43 metros de diámetro y es de hormigón. En esta bóveda se observa que el hormigón es muy rico de mortero y está compuesto de ladrillo y de piedra pómez que es muy ligera y así no da tanto empuje. En algunas bóvedas romanas estaban formadas de hormigón con refuerzos de trecho en trecho de ladrillo. También emplearon bóvedas con piezas de alfarería hueca, eran simples cubiertas porque tenían que resistir pequeños empujes.

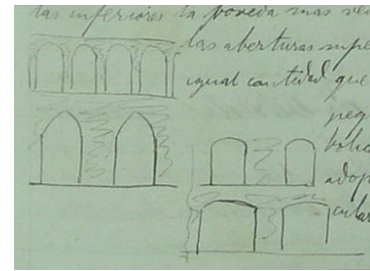
Parte superior de la bóveda

La parte interior geométrica se llama intradós y obedece a la forma de la generación de la bóveda, la exterior o extradós varia y se llaman bóvedas trasdosadas de igual espesor cuando son concéntricas o que tengan igual espesor pero a veces hasta los 2/3 se da más espesor y entonces se dice bóveda trasdosada de desigual espesor. Otras veces están trasdosadas a nivel cuando termina en plano por el extradós y trasdosada en pendiente cuando termina en una pendiente o en dos. [dibuix-2]

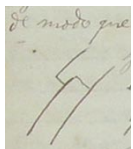


Elaboración de un sistema de bóvedas

Respecto de la estabilidad no hay inconveniente de elegir cualquier forma pues la más económica siempre que la parte artística y estática queden satisfechas y la relación de los huecos con los macizos sea la mayor posible. Si la bóveda ha de cubrir un río que unas veces el nivel está alto y otras bajo se adopta la forma semi-circular que es la forma más a propósito. Cuando ha de haber varios sistemas de arcos superpuestos y que el piso superior ha de tener doble número de arcos que las inferiores la bóveda más ventajosa es la ojiva. Cuando las oberturas superiores han de estar en igual cantidad que las inferiores pero más pequeñas la forma parabólica es la mejor, pero se adopta el arco rebajado circular. [dibuix-3]



Consideraciones respecto al despiezo



Salmer, clave i contraclaves. El intradós debe ser perfectamente labrado y que se ajuste a la generación geométrica de la bóveda, el trasdós se deja toscamente labrado en el caso de que no haya de ser visto pero algunas veces ha de ser visto y entonces se hace el despiezo de modo que el agua no puede penetrar por las juntas haciendo las piedras unas entradas encima de las otras. [dibuix-4]

En cuanto las juntas que estén bien labradas a fin de que haya muchos puntos de apoyo así es que para ellas se busca las superficies más fáciles que son las planas pero si no lo pueden ser que sean superficies desarrollables. Que las juntas sean normales al intradós. El tamaño de las dovelas depende de los materiales. Que no sean muy largas a fin de que no se rompan.

Lección 54. Construcción de bóvedas en general

Comprende 4 operaciones

- 1º Establecimiento
- 2º Ejecución de la fábrica sobre la cimbra
- 3º Descimbramiento
- 4º Trabajos complementarios

1º

Las cimbras son medios importantes.

Son de diversas formas y materiales. Cuando la bóveda es de poca altura la cimbra es de mampostería en seco cubriéndola con mortero o yeso a fin de que presenten igualdad de superficie. Su empleo es bastante limitado, para bóvedas de poca luz y de poco esmero, para las que han de permanecer enterradas y para bóvedas de sótanos, para bóvedas cuyas cimbras si fuesen de madera costarían mucho como las bóvedas acodilladas, de rincón de claustro, angulares, etc.

Otra clase de cimbras son las de tierra. Se construye un macizo de tierra de la forma que se quiere y luego que la bóveda está ya hecha se extrae la tierra. La gran cúpula de Panteón de Roma de 43 metros de diámetro se cree que se empleó la tierra como cimbra. Su volumen es de 66.000 metros cúbicos. Cuando la tierra es algo compresible después de cortado el terreno según la forma que se quiere se ponen tablas, la cimbra de tierra es preferible cuando la bóveda es rebajada.

Otra clase de cimbras es las de ladrillo. Se hace una bóveda tabicada a uno o dos gruesos. Ella se hace sin cimbra y ella sostiene la construcción. Esta cimbra se quita o no según seade silleria la bóveda o no. Estas cimbras son económicas.

Cimbras de madera son las mas generalmente empleadas a pesar de ser algo costosas y tienen la ventaja de que siendo transportables se reproducen con ellas bóvedas al infinito. Esta clase de cimbras son costosas, así es que todo el ingenio está en disponer la cimbra de modo que sea el menos costoso. En cimbras de madera se ponen de trecho en trecho unas piezas o camones y encima unos tablones.

La distancia de los camones no ha de ser muy grande porque si no estos seran de gran sección y por consiguiente seran costosos así es que esto depende de las circunstancias en que nos encontremos.

La disposición del entablado no ofrece dificultad ninguna, el espesor de ellos según el peso que ha de gravitar es un problema de mecánica. Los tablones no van sueltos sino que se clavan sobre los camones. Esto aumenta la resistencia puesto que entonces los tablones estan como empotrados y sujetan a los camones formando todo un conjunto sólido y finalmente facilita la colocación de las dovelas pues en caso contrario se podrian mover ocasionalmente las caidas de los trabajadores o dovelas. Los tablones se unen al tope si la obra ha de ser de mamposteria si hormigón, si es de silleria entnces se ponen clavos de trecho en trecho.

Formas. En las construcciones de madera.

Colocación de cimbras y asientos de bóvedas cuando se quita la cimbra.

Los constructores dan algo más de monte o peralte que la bóveda para compensar el achicamiento de la cimbra en la punta, para compensar lo que se rebaja la bóveda cuando se quita la cimbra porque las dovelas comprimen la junta de mortero y bajan algo.

La ciencia no ha podido aún fijar este peralte. Se ha observado que al quitar la cimbra al poco tiempo que se ha hecho la bóveda comprime las juntas de mortero y esto es bueno; si se verifica el quitar la cimbra cuando hace mucho tiempo que esta construida se verifican resquebrajaduras. Así es que el tiempo que se tarda en sacar la cimbra es variable pero es mejor que para sacarla pronto que haya mucha junta de mortero, conviene que el mortero esté ya algo seco para extraer la cimbra.

Construcción de bóvedas

Bóvedas de silleria

Antes de subir las dovelas a su sitio se marcan en las piedras las hiladas de que ha de constar la bóveda. Algunos la marcan con hilos untados de ahuangre pero lo mejor es marcala por medio de ranuras o de clavos a fin de que no se borre. Esto se hace para que la junta de mortero no sea muy grande y por medio de un cordel se marca cada hilada.

Como las juntas de las dovelas no estan bien labradas, para saber si estas juntas siguen la normalidad de la bóveda se comprueba por medio de falsas escuadras que tienen un lado recto y otro curvo que siga la curva de la bóveda. Si la bóveda es semicircular esta falsa escuadra será igual en todos los puntos pero no si es elíptica o de otra forma, en cuyo caso para cada junta la falsa escuadra es diferente. Si no se quiere emplear la falsa escuadra en el plano de monte se traza una línea vertical y en la cabeza de cada dovela se traza esta línea y se decanta más o menos hasta que esta línea esté en posición vertical. [dibuix-5].



Que las juntas de mortero el espesor conveniente. Este mortero se ha de tener cuidado de que no caiga sobre la cimbra porque si no, encontrando un grueso de mortero, forma reborde. Así es que tiene que tocar toda ella la cimbra. Se ha de tener cuidado de no dejar las dovelas tal como quieren quedar sino que después de colocada se golpea con un mazo de madera a fin de que se verifique todo el asiento. Como las juntas no estan bien labradas quedan huecos los cuales se rejuntan con ripio y cimient romano. Se procura que los dos lados de la bóveda suban por igual porque si se sube a un lado y al otro no la cimbra encontrándose cargada más sobre un lado se deformaria. Lo mismo se dice al terraplenar una bóveda. Si se hace solo por un lado se deforma y hasta puede sobrevenir su destrucción. Se ha de procurar que no se coloque una hilada sin tener completamente acabada la anterior.

Cierre de bóvedas

De esto depende el que la bóveda cubra luego desperfectos o no.

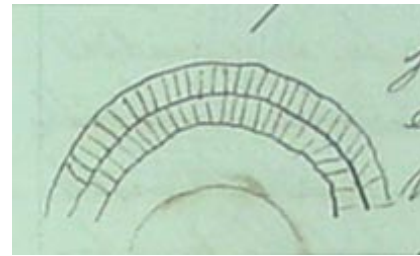
Procedimientos. 1º- Se cierra la bóveda por los dos extremos después de puestas las contraclaves se toma una plantilla exactamente de la forma del hueco que queda y así es que no se cortan las claves hasta que las contraclaves estén puestas y dándole una cantidad de 0^m011 cosa así a fin de que pueda entrar bien la clave ha de penetrar y si la clave no está bien apretada cede. Luego se rejunta todo.

2º- Así como en la cimbra anterior queda toda la cimbra, en este caso se quitan los tablones correspondientes a la clave a fin de que pueda descender todo se suspende la clave encima, se descende y se golpea a fin de que baje todo lo quiera y luego los canteros lo alisan todo.

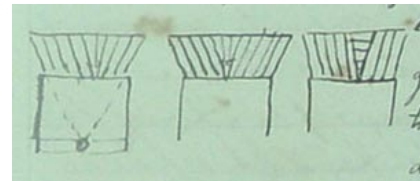
3º- Se pone en seco las claves y contraclaves y luego que estan colocadas las claves se rejuntan por medio de una lechada de cimiento romano que se vierte por las juntas y como tiene esta poca contracción queda bien unido. Esta lechada se puede hacer con yeso en el caso de que no tenga que estar expuesta a la humedad.

Bóvedas con ladrillos

Se hace de modo que los ladrillos sigan la normalidad a la curva, menos en las bóvedas planas que no son verticales sino que van a parar a cierto punto. La disposición de los ladrillos se siguen dos sistemas. Cuando la bóveda ha de tener mucho espesor se ponen en rosca, se hacen 4 roscas de $\frac{3}{4}$ otros travan los ladrillos de modo que formen una sola rosca para lo qual los cambian entre si, los autores ingleses que adoptan el primer sistema manifiestan que es bueno esta sistema porque las juntas de mortero son menos pronunciadas. Este inconveniente se está haciendo ladrillos adovelados y así la junta es de igual espesor. Los que opinan por el segundo sistema dicen que la rosca que atiranta más es la que obra y las otras dan peso cuando es la inferior y si es la superior las 3 de debajo bajan y queda un hueco entre la 3ª i la 4ª así es que según el sistema 2º da más solidez al arco. [dibuix-6].



En los arcos adintelados los ladrillos se disponen de varias maneras, en este sistema ha de haber más espesor en la parte superior de las juntas de mortero, así es que para evitar esto trazar triángulo equilátero con la amplitud y trazar las juntas paralelas a los lados del triángulo; pero en el centro queda un espacio que se cierra con ladrillos que siguen el paralelismo o bien con hiladas horizontales. Este modo se llama cerrar arcos a bolsos. Aquí conviene mucho la normalidad que se comprueba poniendo un clavo en una madera como marca la figura. [dibuix-7]



Construcción de bóvedas de ladrillo

Procurar mojar de antemano los ladrillos, que haya igualdad en el espesor de la junta de mortero, que en una hilada no trabajen varios operarios porque sino se verifican ondulaciones por desigualdad de espesor de mortero. Se han de apretar bien los ladrillos con el puño a fin de que quede el menor mortero posible. Para guiar se trazan en las cimbras las llaves y las hiladas por medio de ranuras en el canto y así se colocan con igualdad. Que en dos hiladas uscesivas que las juntas esten encontradas, que se cargue por igual la cimbra, esmero en el cierre que quede bien prieta. Si coge en la clave un ladrillo y una rasilla, no se ponga solamente un ladrillo. Que en el cierre se emplea cimiento romano que cierre mejor y no hay tanta compresión.

Cuando la bóveda está compuesta de roscas se cierra primero la rosca inmediata a la cimbra y luego las demás, que no se aprietan porque la inferior, tendiendo a bajar, las otras bajen también, a fin de que se unan.

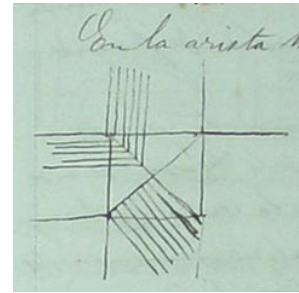
Lección 55.

1º Sistema de la construcción de bóvedas compuestas siguiendo la dirección de las generatrices de las bóvedas, y

2º Sistema siguiendo la dirección perpendicular a las mismas.

1er Sistema

En la arista hay que tocar los ladrillos, habiendo un deshecho, así es que algunos autores aconsejan el segundo sistema y los ponen perpendicular a las aristas pero hay deshecho al llegar a los arranques y esto es la bóveda horizontal. Lo mismo se tiene en la bóveda de rincón de claustro y la acodillada. [dibuix-8]



Cuando dos bóvedas se apoyan sobre pilares que tienen menos espesor que la suma de las dos se hace que descansen el mayor número de roscas sobre el apoyo y luego retrayéndose las demás se rellenan los espacios por hiladas horizontales. [dibuix-9]

Bóvedas tabicadas

Son formadas por ladrillos puestos de plano, son económicas pues no necesitan sostén momentáneo pues se sostienen por la facilidad de fraguar el yeso o cimiento romano.

Para su construcción se necesitan cerchas o plantillas que guíen la dirección de la bóveda, de modo que la cuerda del arco que forme la cercha sea horizontal y pase por los arranques. Algunas veces se sostienen momentaneamente sobre la cercha.

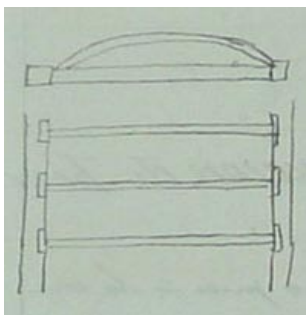
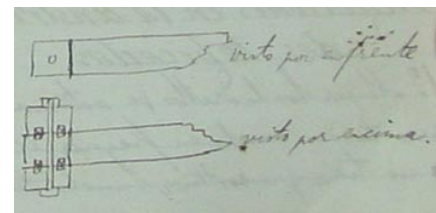
Construcción

Se hace una ranura en el muro capaz de sostener uno, dos o más gruesos. Esta ranura se hace en los arranques. En el testero no se hace ranura porque por motivo de los asientos desiguales del muro rompería la bóveda. Cuando se hace de varios gruesos se emplean ladrillos de varios tamaños de rasilla y ladrillo grueso, de rasilla y dos gruesos, etc. En cuanto los doblados primero se hace el 1er anillo, otro al lado y así sucesivamente hasta tener 3 o 4 que se dobla teniendo cuidado que las juntas en todos sentidos vengán encontradas con las de la 1ª hilada.

Algunos la 2ª hilada la hacen diagonal.

Estas bóvedas cuando son muy peraltadas se suelen romperse porque teniendo poco grueso tiende a romperse por los 2/3 y entonces se maciza el espacio o bien de trecho en trecho se hacen unos tabiques y unas bovedillas que vayan de uno a otro. [dibuix-10]

Estas bóvedas se han usado para suplir con ventaja a los techos, los cuales siendo de madera se pudren, se alabean por los pesos. Así es que se emplean estas bóvedas, pero como dan empuje necesitan muros de mucho espesor y no pudiéndose utilizar grandes alturas se hacen bóvedas tabicadas atirantadas con tirantes de trecho en trecho y entonces solo da empuje vertical.



El Sr. Torres ha hecho en su casa bóvedas de 30 metros empleando muros de $\frac{3}{4}$, unas piezas de madera de 3 en 3 palmos de distancia la $\frac{1}{4}$ parte de una viga de los Pirineos. [dibuix-11 i 12]

De los tirantes, añadiendo más piezas adicionales con tarugos de roble y un tornillo.

En el muro puso ladrillos de a palmo a fin de que saliendo más sostenían el tirante. Estos tirantes sostenían los cielos rasos. Para que no se pudrieran las extremidades empleó buena madera y las cabezas las introdujo dentro de una caldera de alquitrán. También podían ser tirantes de hierro. Estas bóvedas tienen la ventaja de hacerlo todo sólido pero tienen el inconveniente de ser muy sonoro.

De este sistema de bóvedas atirantadas se saca partido para cubrir un espacio lo cual no lo podemos cubrir con una jacena por su dimensión. La jácena no trabajará a flexión se pone una pieza horizontal y longitudinal de madera con una inclinación y unida con brazas de hierro y encima se hace un arco. [dibuix-13]



Precauciones en la construcción de bóvedas tabicadas

1º Mojar los ladrillos de antemano pues de lo contrario tarda mucho en fraguar el yeso y el operario no tiene que sostener mucho tiempo.

2º El yeso o cimient romano que amase espeso sobretodo en la primera hilada a fin de que adquiera consistencia.

3º En cuanto al doblado ya puede ser mas claro el yeso, pero no que sea agua, y se hecha el yeso encima de la 1ª hilada y se coloca el doblado, no empleando pedazos de ladrillo sinó ladrillos enteros.

Las bóvedas tienen el inconveniente el que al dilatarse el yeso o cimient romano, dan gran empuje contra los muros.

Mr. Olivier ha inventado los ladrillos de corchete para evitar esta dilatación. [dibuix-14]



Bóvedas de hormigón

Su uso es ya antiguo pues los Romanos lo emplearon bastante. Para estas bóvedas se toman las precauciones:

1º De disponer de cimbra resistente pues no se puede esperar del fragüe del mortero.

2º Que el hormigón esté bien lleno de mortero,

3º Al verter el hormigón que se haga por capas apisonándola a fin de que todo forme luego una masa firme y compacta.

En cuanto al tiempo que ha de permanecer la cimbra después de construida la bóveda es variable según la calidad del mortero pero de todos modos se esperará a que el mortero haya fraguado bien.

Estas bóvedas ya terminadas antes de quitar la cimbra se va rociando de intervalos para que conserven humedad necesaria para fraguar y para evitarlo de los efectos de las heladas y del sol se recubre con telas viejas.

Lo mejor es hacer dovelas artificiales de hormigón y después emplear-las como si fueran piedras.

Bóvedas de mampostería. Precauciones

1º Que las piedras cojan todo el espesor de la bóveda o a lo menos las más posibles.

2º Se dispone la mampostería por hiladas normales al intradós de la bóveda enrasando bien cada trozo.

3º Macizar bien a fin de que no queden huecos sin rellenar.

4º Que el mortero rebose todo lo posible y que sea algo hidráulico y cuanto más mejor, pues se tiene una especie de hormigón.

Bóvedas ligeras

Cuando no ha de estar cargada por grandes pesos en la parte superior y se quiere dar poco espesor a los muros tal como sucede en San Vital de Ravena en donde la bóveda es de alfarería hueca. En otros puestos se emplean los ladrillos huecos. En cuanto su construcción no hay dificultad ninguna.

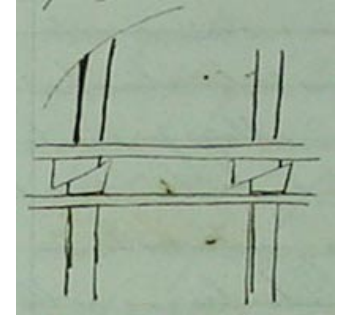
Relleno de juntas en las bóvedas

Esto se hace para que no se rompa por los 2/3 y luego para poder andar por encima se hace con varios materiales y que este bien macizado porque la resistencia sobretodo esto conviene cuando la bóveda está muy peraltada.

Descimbramiento de bóvedas

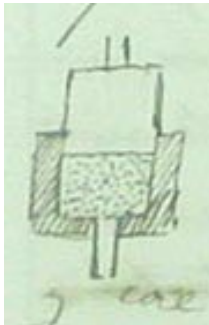
Algunos opinan el quitar la cimbra al cabo de meses y otros al cabo de poco tiempo. Estos dicen que estando el mortero pastoso va siguiendo los movimientos de la compresión de la bóveda. Según sean las bóvedas, forma, la cantidad de mortero y según el material de que esté formada se hará antes y después. Así es que el descimbramiento del director será el que guiará.

Esta operación es delicada pues si se quita de cualquier modo sobrevienen graves perjuicios, quitándola toda a la vez y sin movimientos bruscos. Antiguamente se quitaban las cuñas de debajo los camones, los tablonos iban bajando paulatinamente, pero a veces las cuñas estaban tan prietas que no se podían quitar, otras veces se destruían las cabezas de los pares de la cimbra pero hoy día se hace mejor, sobretodo en bóvedas importantes.



Se siguen varios sistemas.

1º Poner de distancia en distancia unos pies derechos apoyados sobre soleras las cuales se apoyan en dobles cuñas. A veces por el peso y el rozamiento es difícil hacerlas mover, así es que se las unta con cebo y se ponen unas planchas metálicas. [dibuix-15]



Conviene el que no perjudique pues saltan con fuerza y para evitar esto se ponen en vez de cuñas se ponen unos sacos de tela resistente llenos de arena y con abertura bien atada y al descimbrar se abre la abertura y cae. Si se detiene con una barilla se remueve. [dibuix-16]



En obras de gran importancia se ponen unas cajas de madera o plancha de hierro que la parte superior está abierta, por la cual se introduce su pistón o émbolo y lleno de arena. Se abre el tapón y cae la arena y baja el émbolo. El mejor sistema es el de tornillo que hacen que baje paulatinamente la cimbra, lo cual conviene mucho. [dibuix-17]

Lección 56.

Decoración de bóvedas

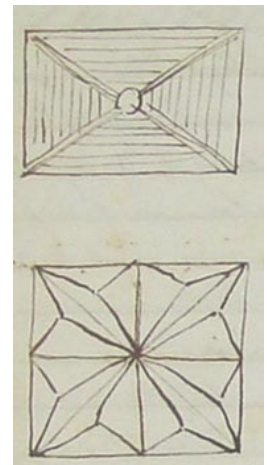
Debe salir espontáneamente de la construcción.

Si de sillería se quiere construir un cañón recto seguido la decoración puede salir no de los almohadillados como en los muros pues con ello se presenta la solidez, pero si se presenta esto en la bóveda este aspecto no debe presentarse por ser parte sostenida. Pero marcándose las juntas por canales finas y rellenando los espacios con adornos presentarían buen aspecto.

Otro medio de decorar las bóvedas es por medio de los arcos de refuerzo poniéndose pilastras en los muros y siguiendo estas partes salientes en la bóveda, quedan espacios que se pueden rellenar con esculturas y demás adornos.

En alguna época, creyéndose poco rica una bóveda se ha seguido el casetonado para decorarlas pero este sistema no es aplicable a la bóveda pues no se acusa la construcción; En Grecia en los techos de los templos se empleó el casetonado y los romanos lo adoptaron en las bóvedas lo cual no es de extrañar pues ellos gustándoles lo ostentoso decoraban sin darse razón.

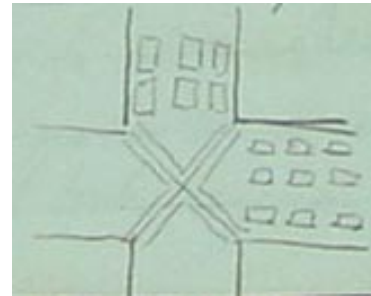
Durante la edad media no se empleó el casetonado, hasta el siglo XVI que se volvió a emplear. Estos casetones se ponen en todos sentidos a igual distancia dejando espacios que se decoran estos espacios o con cuadrados o rectangulares o poligonales. El primer casetón empezando por la cornisa se pone más alto que los demás por efecto de la perspectiva se ponen en número impar y entre los arcos de refuerzo también a fin de que uno venga en el centro del arco de refuerzo y si hay algún espacio que no venga en el centro. Estos casetones van adornados con molduras las cuales llevan palmetas, huevos, etc. Y en el centro se pone un florón. Estos se doran o se policroman según el efecto que se quiere efectuar.



Otras veces se han pintado las bóvedas dejándolas el arquitecto lisas y luego decorándolas, el genio del pintor. El aumento de la pintura no forma un solo recuadro sino varios para lo cual la bóveda se divide en cuadros. Cuando dos bóvedas se encuentran constituyendo la bóveda por arista los casetones presentan dificultad. Se paran antes de llegar a la bóveda por arista y en los espacios se marcan bien las aristas por medio de molduras y los espacios triangulares se llenan por cuadros al óleo. [\[dibuix-18\]](#)

En la edad media no se adornaron las bóvedas del modo que los romanos sino que solo acusaron los arcos torales y los aristones por medio de molduras y en el centro se puso una clave que sirve para decorar y como medio constructivo y el despiece está marcado completamente por las juntas y se ve la construcción tal como es.

Posteriormente se enriqueció más la formas hasta decaer en gran manera. [\[dibuix-19\]](#)



ANNEX 3.7

L'estàtica gràfica de Carl Culmann, 1880

Carl Culmann ha estat reconegut com el pare de l'estàtica gràfica en el sentit que fou gràcies a la seva obra que aquesta ciència es va difondre, que progressà admirablement i arribà a convertir-se en l'única alternativa viable en tota mena de càlculs. L'obra original data del 1864, però l'edició que hem pogut consultar avui, a Barcelona, és la traducció francesa de la segona edició alemanya de G. Glasser i J. Jaquier i A. Valat, editada a París el 1880.

Títol: Traité de statique graphique

Localització: Biblioteca de la RACAB

En aquest annex hem seleccionat l'índex de l'obra, útil per fer-se una idea de tot el seu contingut, i el prefaci de l'autor on explica els orígens de l'obra i les seves intencions.

PREFACI DE L'AUTOR

Les primeres aplicacions sistemàtiques dels mètodes gràfics, per a la determinació de les dimensions de les diferents parts de les construccions són degudes a Poncelet. De fet, els bons treballs de Monge van posar les bases i així, a Metz, a l'escola d'aplicació del geni i de l'artilleria, aquests mètodes foren divulgats per primera vegada per Poncelet, davant un auditori format per antics alumnes de l'escola Politècnica de París, i era l'única on les ciències gràfiques van ser ensenyades en aquella època.

Poncelet va ser el primer que va reconèixer que aquests mètodes, tot i ser molt més expeditius que els mètodes analítics, ofereixen tanmateix una bona aproximació a la pràctica; sobretot quan se sap que, en un projecte expressat sobre paper, qualsevol cosa que es faci, no és mai possible d'obtenir una exactitud superior a aquella donada pel plànol gràfic.

Aquests mètodes, aplicats a la teoria de les voltes i els murs de contenció, foren publicats en *Mémorial de officier du génie* (toms XII i XIII, anys 1835 i 1840).

Tanmateix Poncelet no fa ús del polígon funicular per determinar les resultants, l'ús del qual ofereix recursos tant preciosos a l'estàtica gràfica¹, sinó que es reserva al seu successor a l'escola de Metz, M. Michon, el mèrit de fer la seva primera aplicació en la determinació dels centres de gravetat de les dovelles, en la seva *Teoria de les voltes*.²

La geometria de posició, a la qual Poncelet a fet fer tant de progrés, no està tanmateix en aquesta època suficientment avançada perquè sigui possible de substituir-la completament per la geometria ordinària (geometria de masses) en el desenvolupament i la demostració dels plans. Així Poncelet recorre, també sovint, a la geometria

¹ Varignon en va fer menció [del polígon funicular] en la seva nova mecànica publicada a 1687.

² És per l'efecte de l'atzar que a 1845 un curs d'autografia sense nom d'autor, tenint per títol: *Instrucció sobre l'estabilitat de les construccions*, ens va caure a les mans. Això que ens ha arribat es va atribuir a M. Michon. Aquest curs conté sis lliçons sobre l'estabilitat de les voltes i quatre sobre la dels murs de contenció.

ordinària, i quan els mètodes elementals no li són suficients per les seves demostracions, ell es limita a traduir en dibuixos les fórmules algebraïques.

Hem de remarcar, a més a més, que el primer tractat de geometria de posició, en el qual es fa completament l'abstracció de la idea de mesura, no va ser publicat fins el 1847, per G. De Staudt, professor de matemàtiques de Erlangen (*Die Geometrie der Lage*, Nuremberg, 1847).

Quan vàrem ser cridats, el 1855, arran de la creació de l'escola Politècnica de Zurich, a presentar el curs de construcció (que incloïa els moviments de terres, la construcció de ponts, de carreteres i de ferrocarrils), fòrem obligats a introduir en les nostres ensenyances els mètodes gràfics de Poncelet per suplir les llacunes del curs de mecànica aplicada. Aquest curs no incloïa aleshores a Zurich els mètodes analítics que, en aquella època, eren a l'escola de ponts i camins de París i, en realitat, cal buscar en el curs de resistència de materials de M. Bresse, els plànols de Poncelet i de M. Michon.

Aquesta introducció de les teories de l'estàtica gràfica en els cursos de construcció, no ha deixat de presentar alguns inconvenients, i es retardava desmesuradament la marxa dels estudis. Nosaltres, el 1860, obtenim la creació d'un curs d'hivern obligatori pels enginyers (a dues lliçons per setmana), en el qual tractem aquests problemes de l'estàtica a la construcció, els quals són susceptibles de solucions gràfiques, i pels quals l'ensenyament no troba lloc, per falta de temps, en el curs de mecànica tècnica (aleshores donat per M. Zeuner).

Tal va ser l'origen de l'estàtica gràfica. Els cursos de construcció (ponts i ferrocarril) que entraven més particularment en la nostra especialitat, i el d'estàtica, en trobar-se així reunits en un mateix ensenyament, fòrem freqüentment conduïts a donar als alumnes les explicacions complementàries sobre les parts que ells no havien entès perfectament. En aquestes circumstàncies hem trobat sempre que era ben fàcil de recordar els teoremes de geometria de posició, la demostració dels quals pot fer-se amb l'ajuda de les línies del pla, o bé recórrer als càlculs analítics on els desenvolupaments exigeixen utilitzar un full de paper a part.

És així que nosaltres hem sigut conduïts, per dir-ho així, irresistiblement, a reemplaçar tant com sigui possible l'àlgebra per la geometria de posició. Durant els primers anys, els coneixements dels alumnes, en aquesta matèria, deixava, realment, molt que desitjar; però després d'un curs especial de geometria de posició que s'ha introduït en el programa d'estudis, fet per F. Fiedler (l'autor que ja havia preparat els alumnes amb la seva *Geometria descriptiva*), ara ja no tenim cap dificultat en el nostre ensenyament.

És quan s'ha desenvolupat aquest ensenyament que nosaltres hem publicat la primera edició de la nostra *Estàtica Gràfica*. (La primera meitat ha aparegut el 1864 i la segona el 1865).

Els nostres dibuixos han obtingut més èxit que els nostres mètodes. La nostra publicació ha estat seguida d'un gran nombre d'estàtiques elementals, en les quals, tot reproduint els nostres dibuixos més simples, (molt sovint sense canviar res), els autors s'han esforçat a donar les demostracions analítiques.

Nosaltres estimem que la veritat no rau en això; i que no triomfarà mai el fet de traçar les línies d'un dibuix i executar simultàniament les operacions algebraïques que comporten l'explicació d'aquest dibuix, ni penetrar en la significació de cada línia per representar les relacions estàtiques, ni limitar-se a traduir una fórmula on els desenvolupaments no són més presents en la memòria.

Nosaltres volem destacar que ens creiem en el dret de dirigir als nostres successors, als autors italians, i en particular a Cremona, el qual ha introduït l'estàtica gràfica en l'ensenyament de l'Escola Politècnica de Milà. Sabent, que les ciències gràfiques tenen uns bons resultats que tots hem d'aprofitar, Cremona no menysprea pas d'ensenyar ell mateix als seus alumnes la geometria de posició. I encara que hagi deixat avui Milà per Roma, l'ensenyament de l'estàtica gràfica es continua a l'escola tècnica de Milà amb el mateix esperit.

Les explicacions que precedeixen ens han semblat necessàries per la història de l'estàtica gràfica, i ens queda indicar amb algunes paraules l'ordre que hem seguit en la nostra obra.

El primer capítol de la primera part tracta del càlcul gràfic. Bé que això sigui estrany a l'estàtica pròpiament dita, es necessari que els alumnes el coneguin, i com que això no s'ensenyava en els cursos preparatoris, nosaltres hem pensat que es indispensable fer conèixer aquests mètodes, que són imitats per autors francesos i sobretot per Cousinèry. Amb el càlcul gràfic hem adjuntat la corbatura de la l'excavació, els moviments de terres, la teoria del

regle de càlcul, i els mètodes tant enginyosos de M. Lalanne (avui inspector general de ponts i camins i director de l'escola de ponts i camins de París) sobre les representacions gràfiques i sobre els fulls logarítmics.

La segona part tracta de la composició i descomposició de les forces en general.

La tercera part es consagra a les forces paral·leles i els seus moments de primer i segon ordre, les aplicacions de les quals a la teoria de l'elasticitat, que conformen la quarta part de l'obra, són nombroses.

El segon volum conté una sèrie d'aplicacions a les bigues, a les encavallades, armadures o estructures de barres (frameworks), als arcs i als murs de sosteniment.

Nosaltres hem esperat, després de la publicació de la primera edició de l'estàtica gràfica, que els analistes com per exemple Salmon i Fiedler, tractin la geometria. Però com que no ha passat res, hem intentat en la segona edició, d'unir tant breument com sigui possible les solucions analítiques amb les solucions purament geomètriques. Els mètodes analítics nous tenen el gran mèrit de conduir directament a la fi i, a més, de concordar amb els mètodes geomètrics. En la majoria dels casos podem deduir les fórmules de desenvolupament que precedeixen. Aquest mode de procedir té l'avantatge de donar als teoremes una forma, que, en el millor dels casos, resulta immediatament de les construccions geomètriques, i per altre banda, deixa triar, ja que donem les dues solucions, entre la construcció gràfica i el càlcul; a la pràctica és ara un dels mètodes, ara l'altre que condueix més ràpidament al final. Tanmateix com que els mètodes analítics exigeixen en general coneixements més elevats que els mètodes geomètrics, i sobretot a Zurich, no els podem exigir a tots els alumnes, tenim cura de distingir tot el que no es indispensable per la comprensió de la continuació de l'obra.

Els desenvolupaments analítics que nosaltres no estem en situació de reemplaçar per demostracions geomètriques i que necessàriament han de ser estudiades, han estat imprimides amb caràcters ordinaris. Gràcies al mètode que hem seguit, hem mostrat als qui busquen explicar en un pla analític, com és necessari aplicar l'anàlisi per fer ressorgir la identitat de les fórmules i els dibuixos.

En el desenvolupament de les fórmules analítiques hem considerat necessari senyalar en les mateixes fórmules, els passos que són importants en geometria. Així, hem dibuixat per tot els volums amb una gran lletra gòtica que representa les tres dimensions. Les superfícies, que representen dos dimensions, han sigut designades per una gran lletra llatina, i les línies amb una petita lletra llatina. Nosaltres tenim reservades les petites lletres gregues per la dimensió zero o pels nombres expressant informacions de diverses natures.

Nomenclatura (...) ³

Per acabar, hem d'expressar la nostra satisfacció de veure que la nostra obra s'ha posat en coneixement dels enginyers francesos.

Les ciències gràfiques són de sempre en honor a ells, i són els treballs dels seus il·lustres capdavaners que han sentat les bases de l'estàtica gràfica.

C. CULMANN.

Índex:

³ Per no estendre aquesta traducció fem omissió del fragment en el qual Culmann exposa i justifica els criteris sobre la nomenclatura que utilitzarà en l'obra, és a dir l'ús de majúscules i minúscules, lletres gregues, etc.

1ª PART. CÀLCUL GRÀFIC

- Capítol 1. Operacions amb línies
- Capítol 2. Logaritmes i regles de càlcul
- Capítol 3. Transformació de superfícies
- Capítol 4. Transformació de volums

2ª PART. COMPOSICIÓ DE FORCES

- Capítol 1.
- Capítol 2. Moment de forces en el pla
- Capítol 3. Força a l'espai
- Capítol 4. Relacions projectives entre polígon de forces i polígon funicular

3ª PART. MOMENTS DE FORCES PARAL·LELES

- Capítol 1. Forces paral·leles
- Capítol 2. Centres de gravetat
- Capítol 3. Moments d'inèrcia
- Capítol 4. Construcció de l'el·lipse central i del nucli central de figures planes
- Capítol 5. Moments d'inèrcia, el·lipsoide central i nucli central d'un cos qualsevol

4ª PART. ELEMENTS DE LA TEORIA ELÀSTICA

- Capítol 1. Forces proporcionals a les línies o les superfícies
- Capítol 2. Fibra neutra o mitjana
- Capítol 3. Arc elàstic
- Capítol 4. Arcs elàstics de forma parabòlica
- Capítol 5. Ponts elàstics

Índex de les làmines

- I Elevació a les potències i extracció d'arrels.
- II Representacions gràfiques.
- III Polígon de sumatori i transformació de superfícies.
- IV Taula parabòlica.
- V Volums de desmunts i terraplens, i composició de les forces en el pla.
- VI Moviments de terres.
- VII Composició de forces a l'espai.
- VIII Relacions projectives del polígon funicular i del polígon de forces.
- IX Corbes de pressions i corbes de càrregues.
- X Relacions recíproques dels plans de forces.
- XI Càrrega produïda per un tren de locomoció.
- XII Moment d'inèrcia i nucli d'un perfil de rail.
- XIII Moment d'inèrcia i nucli d'un acer corrent.
- XIV El·lipses centrals i nucli de diferents perfils d'acer.
- XV L'el·lipsoide de forces proporcionals a les superfícies.
- XVI L'arc elàstic de secció variable.
- XVII Fibra neutra de ponts construïts.

ANNEX 3.8

Elements d'Estàtica Gràfica
MÜLLER - BRESLAU
París 1886
Éléments de Statique Graphique (títol original)

(...)

Secció V
Teoria de les voltes cilíndriques

§ 26 CORBES DE PRESSIONS. TEORIA ANTIGA
Planxa 15

86. Introducció

Suposem que sobre una volta cilíndrica AA'B'B (fig. 132) actüi una càrrega vertical permanent que pot ser reemplaçada per una càrrega de maçoneria del mateix pes. Si aquesta "càrrega reduïda" és delimitada per la corba CDE (corba de càrrega) s'anomenarà la superfície AA'CDEB'B la *superfície de càrrega*. Si S és el contingut d'aquesta superfície, Π_m la densitat de la maçoneria, i si considerem una amplada de volta igual a la unitat, la càrrega total d'aquesta volta serà $\Pi_m S$. Això suposa naturalment que la càrrega està delimitada per la part superior per una superfície cilíndrica que té CDE per directriu, i una generatriu normal al pla de disseny o del cap de la volta.

Les *reaccions als extrems, a l'arrencada de la volta*, K_1 i K_2 , estan en equilibri amb el pes $\Pi_m S$ de la volta. Les condicions estàtiques d'aquest equilibri són les següents:

1. La suma de les components verticals de les reaccions ha de ser igual a $\Pi_m S$.
2. Les components horitzontals de les reaccions han de ser iguals.
3. La suma dels moments de les tres forces $\Pi_m S$, K_1 i K_2 , pres respecte a un centre de rotació qualsevol, ha de ser nul·la.

Però aquestes tres condicions s'apliquen a una sèrie de quantitats sis de les quals són desconegudes, ja que cadascuna de les forces K_1 i K_2 és desconeguda com a *valor*, com a *direcció* i com a *punt d'aplicació*. Caldrà, doncs, que les tres noves condicions que són necessàries per determinar les incògnites es dedueixin de la condició següent:

Després d'haver sofert una deformació per l'efecte de la càrrega i les reaccions, la volta haurà de tornar a adaptar-se per complert sobre els suports suposadament indeformables.

Les equacions que es poden plantejar com a conseqüència d'aquesta condició s'anomenen *equacions d'elasticitat de la volta*. Si amb el seu ajut s'aconsegueix determinar el valor i la posició d'una de les dues forces K_1 o K_2 , es pot determinar el valor i posició de l'altre per mitjà de les equacions d'equilibri resultants de les condicions 1, 2 i 3.

Mostrarem en primer lloc com es té en compte l'estabilitat de la volta quan es coneix la grandària i la direcció de la força K_1 .

87. Corba de pressions. Pressions als junts

Tallem la volta (fig. 132) per la línia DJJ', que és vertical de D a J' que a partir de J' segueix la direcció d'un junt. Separem així una part de la volta (indicada per la part ratllada) on el pes és P. L'equilibri d'aquesta part quedarà assegurat mitjançant l'aplicació sobre el junt d'una certa força F. Aquest equilibri exigeix que les tres forces K_1 , P i F es tallin en un mateix punt, i que poden servir per formar un triangle (fig. 132a) on els costats puguin ser

recorreguts en un sentit continu. Aquestes condicions són suficients -la força K_1 és coneguda- per tal de determinar F en amplada i direcció. El punt s on aquesta talla el junt s'anomena centre de pressions del junt, i el lloc geomètric dels punts s és la corba dels centres de pressió de la volta.

Si volem que, fins i tot sense morter als junts, no hi hagi cap lliscament possible, la pressió F ha de fer com a màxim, amb la normal al junt, un angle igual a l'angle de fregament ρ . Normalment $\rho = 33^\circ$.

Si cerquem les components N i T de la força F , l'una normal i l'altra paral·lela al junt (fig.133) i si designem com a

e la distància del punt s al mig del junt

δ la longitud del junt

R_s la pressió unitària a J'

R_i la pressió unitària a J

i si suposem que e és positiva, a partir del moment en què s se situa per sobre de m , en resulta que (Comp. núm. 80, p 138).

$$R_s = \frac{N}{\delta} \cdot \left(1 + \frac{6 \cdot e}{\delta}\right) \quad \text{i} \quad R_i = \frac{N}{\delta} \cdot \left(1 - \frac{6 \cdot e}{\delta}\right) \quad (1)$$

El valor de la pressió a m és:

$$R = \frac{N}{\delta} \quad (2)$$

Tot el que precedeix suposa que el centre de pressió s es troba a l'interior del nucli central, és a dir, dins el terç central del junt. En el cas contrari caldrà determinar la pressió màxima per mitjà de la fórmula

$$R = \frac{2 \cdot N}{d} \quad (\text{Veure p. 138})$$

Si $e > d/6$ i si ξ designa la distància del punt s a J' s'obindrà:

$$R_s = \frac{2 \cdot N}{3 \cdot \xi}$$

Les fórmules (1) es poden indicar de la següent manera:

$$R_s = \frac{6 \cdot N}{\delta^2} \cdot \left(\frac{\delta}{6} + e\right) \quad \text{i} \quad R_i = \frac{6 \cdot N}{\delta^2} \cdot \left(\frac{\delta}{6} - e\right) \quad (3)$$

Si ara S i I són els punts que limiten el nucli central del junt, i si e_s i e_i són les distàncies des de s a aquests punts, si plantegem:

es dedueixen les expressions següents:

$$N \cdot \left(\frac{d}{6} + e\right) = N \cdot e_i = M_i \Rightarrow \text{Moment respecte del punt } I$$

$$N \cdot \left(\frac{d}{6} - e\right) = N \cdot e_s = M_s \Rightarrow \text{Moment respecte del punt } S$$

on es dedueixen les expressions següents:

$$R_s = \frac{6 \cdot M_i}{\delta^2} \quad \text{i} \quad R_i = \frac{6 \cdot M_s}{\delta^2} \quad (4)$$

Es trobaran aquestes fórmules molt còmodes a la pràctica.

88. Corba de forces

A l'hora de determinar les pressions que actuen sobre els junts, és pràctic, en primer lloc, partir la volta en plans verticals (Fig. 134), en porcions on els pesos són P_1, P_2, P_3, \dots i no considerar que les parts que limiten les verticals passen pels angles dels suports A i B . Essent K' i K'' les pressions sobre els junts verticals AA' i BB' . Si es coneix la mida i la direcció de la pressió K' podrem determinar successivament les forces que actuen sobre cadascuna de les seccions verticals de la volta.

Disposem una darrera de l'altra les forces $K_1, P_1, P_2, P_3, \dots$ (fig.134a). Prenem el punt de partida O d'aquest polígon de forces com a pol, i tracem els rajos I, II, III... Aleshores podrem traçar un polígon funicular el primer costat del qual serà K' paral·lel a K_1 . Els costats I, II, III... representaran en amplada i direcció les pressions sobre

els junts 1, 2, 3... Les posicions de les forces les dona el polígon funicular. Les interseccions s_1, s_2, s_3, \dots dels costats d'aquest polígon amb els junts són els centres de pressió dels junts verticals.¹

El polígon funicular traçat d'aquesta manera s'anomena *polígon de forces resultants* de la volta. Si les seccions fetes verticalment s'acosten i esdevenen infinitament petites, aquest polígon es transformarà en una corba, que anomenem *corba de forces*. La recta que uneix els punts d'aplicació de K' i K'' s'anomena *línia de tancament*. Els punts s_1, s_2, s_3, \dots són els punts de tangència de la corba de forces inscrita en el polígon de forces. Ja que evidentment la posició de l'una de les resultants, II per exemple, és completament independent del nombre de seccions fetes, i que han subdividit els pesos (P_1+P_2). La posició de s_2 serà doncs la mateixa que es parteixi (P_1+P_2) en dues o en un nombre infinit de parts.

Després d'haver traçat el polígon de forces, es pot determinar fàcilment les pressions que actuen sobre els junts radials. D'aquesta manera la força II' que actua sobre JJ' és la resultant entre la força II que actua sobre el junt vertical 2 i el pes P' del prisma LJ'J. Les forces II', II i P' han de tallar-se en un mateix punt i formar un triangle contornejable en un sentit sense desfer el camí. Aquestes condicions determinen II'. En conseqüència, es podrà passar de la corba de forces a la corba de pressions. A la Fig. 134b, s_2 és un punt de la corba de forces, i s_2' un punt de la corba de pressions. Aquestes dues corbes són, a la pràctica, tan poc diferents que n'hi ha prou amb traçar la corba de forces.

Després d'haver fet el traçat de la corba de forces, per poder calcular les pressions R_s i R_i , es descomposarà la pressió sobre el junt vertical J'L (fig. 135) en una component horitzontal H i una vertical V. Es calcularà els moments en valor absolut $M_s = H \cdot e_s$ i $M_i = H \cdot e_i$, en les quals les fórmules e_s i e_i són les distàncies del punt s des del límit del nucli central del junt vertical. D'aquesta manera tindrem (Comp. les fórmules 4)

$$R_s = 6 \cdot \frac{H \cdot e_i}{\delta^2} \quad i \quad R_i = 6 \cdot \frac{H \cdot e_s}{\delta^2}$$

on δ és la longitud del junt vertical passant per m , centre del junt normal. Aquest procediment és suficientment exacte i condueix ràpidament al resultat.

H és l'*empenta horitzontal*. És la mateixa per a tots els junts i és mesurada per la distància polar de la fig. 134a.

Tornem a destacar, en vistes del que seguirà, que el moment de la pressió sobre el junt vertical és, respecte a m , igual a $H \cdot e$, és a dir que *és igual a l'empenta horitzontal, multiplicada per la distància vertical entre la línia mitjana de la volta i la corba de les forces*. M serà doncs positiva o negativa, segons que la corba de les forces estigui sobre o sota de la línia mitjana de la volta.²

89. Construcció de la corba de pressions, quan coneixem la línia de tancament i la força H, o bé un punt de la corba.

Posem que ab (fig. 134c) és una biga recolzada lliurement als seus dos extrems, la llum de la qual sigui igual a l'obertura de la volta de la fig. 134, sobre la que actuen els pesos P_1, P_2, P_3, \dots iguals als pesos dels trams successius de la volta i col·locats en les mateixes verticals que aquestes.

Si tracem amb els pesos P_1, P_2, P_3, \dots i un pol qualsevol O' (fig. 134e) un polígon funicular (fig. 134d) el qual tallarà les verticals passant per ab , en E i en C, i ajuntem EC amb la línia de tancament, obtenim (Comp. núm. 19 p. 20) els moments que són produïts a les seccions 1, 2, 3... de la biga, en multiplicar les ordenades $\eta'_1, \eta'_2, \eta'_3 \dots$ del polígon funicular per la distància polar H'. Per tant tindrem:

$$M_1 = H' \cdot \eta'_1, \quad M_2 = H' \cdot \eta'_2, \quad \dots$$

Si es designa mitjançant $\eta_1, \eta_2, \eta_3 \dots$ les ordenades de la corba de pressions complementàries fins a la línia de tancament, tindrem igualment:

$$M_1 = H \cdot \eta_1, \quad M_2 = H \cdot \eta_2, \quad M_3 = H \cdot \eta_3 \dots$$

¹ Així és com designarem a partir d'ara les seccions verticals traçades tal com hem indicat.

² La línia mitjana de les seccions verticals i la de les seccions normals gairebé se superposen. Pràcticament no es poden distingir entre elles, i nosaltres tampoc no ho farem d'aquí endavant.

Com a conseqüència,

$$H' \cdot \eta'_1 = H \cdot \eta_1 \Rightarrow \eta_1 = \frac{H'}{H} \cdot \eta'_1$$

$$H' \cdot \eta'_2 = H \cdot \eta_2 \Rightarrow \eta_2 = \frac{H'}{H} \cdot \eta'_2$$

Per tant, si es coneix la posició de la línia de tancament, així com el valor d' H , es pot deduir les ordenades η de la corba de pressions reals, de les ordenades η' d'una corba de pressions traçada arbitràriament. Es farà per això el segment $CD = H$ (Fig. 134d), es portarà a través de D una paral·lela a la línia de tancament EC , i es farà el segment $DR = H'$ i s'ajuntarà RC amb una recta. Si per l'extrem a_4 de l'ordenada η'_4 es traça una paral·lela fins a CR' , les línies CD i CR desprendran sobre aquesta paral·lela un segment $D_4R_4 = \eta_4 = \eta'_4 \cdot H' / H$. De la mateixa manera, s'obtidran totes les ordenades $\eta_1, \eta_2, \eta_3 \dots$

Si no es coneix H , però sí un punt de la corba de pressions, per exemple el punt s_4 , es determinarà la recta CR prenent sobre la paral·lela passant per a_4 una longitud $D_4R_4 = \eta_4$ i s'ajuntarà R_4C . Si es prolonga la línia de tancament una longitud $CR' = H'$ i es traça $R'R$ vertical, s'haurà trobat el segment $R'R = H$.

90. Antiga teoria de les voltes

Segons l'antiga teoria, que encara avui és de bon tros la més habitual, es considera que una volta dona resposta a les condicions de l'estabilitat si es pot traçar una corba de pressions totalment compresa dins del terç central de la volta, i que les pressions unitàries R_i i R_s determinades segons la posició d'aquesta corba no sobrepassin en cap part el màxim imposat.

Per tal d'aplicar-la cal escollir arbitràriament una línia de tancament i un tercer punt de la corba de les pressions, per exemple el punt s_4 ; d'aquesta manera es podrà fer la construcció de tota la corba de les pressions pel mètode que s'acaba d'exposar, i a continuació el càlcul de les pressions mitjançant les fórmules (4). Si la corba de les pressions surt del nucli central, cal examinar si és possible una altra corba de pressions més favorable.

Per tant, (en general) primer mirarem si és possible fer una corba de les pressions que coincideixi amb la línia mitjana de l'arc. Evidentment aquesta corba serà la més convenient, perquè donaria les pressions unitàries més febles. D'aquesta manera farem passar la línia de tancament pel mig dels junts AA'' i BB'' i escollirem, com a tercer punt, el mig d'un altre junt qualsevol.

La hipòtesi que la corba de pressions més convenient és la corba real, fa que trobar l'estabilitat d'una volta sigui un dels problemes més senzills de resoldre. Però cap dels defensors d'aquesta teoria no ha pogut demostrar l'exactitud d'aquesta teoria. L'experiència demostra el contrari, i en això coincideix amb les teories més recents, que la veritable corba de pressions té, en general, una posició molt diferent, i que molt sovint surt totalment del nucli central.

Malgrat això, sovint podrem utilitzar sense inconvenient la teoria antiga³. Podrem fer-ho especialment quan no es compleixen algunes condicions preliminars a l'aplicació de les noves teories. Així, per exemple, quan una volta porta una superposició de maçoneria molt elevada, no podem dir amb precisió amb quina llei la càrrega d'aquesta part superior es transmet a la volta pròpiament dita, ni quina és la influència d'aquesta sobrelevació sobre la deformació de la volta. Però com que són precisament les consideracions sobre la deformació les que

³ Tornem especialment als mètodes exposats al § 30.

porten a les equacions que falten, el valor de la teoria quedarà considerablement reduït si aquestes equacions no es poden establir amb exactitud. En molts casos de construcció d'edificis, la teoria antiga serà perfectament suficient; en canvi, estimem que per a voltes més importants, els ponts, per exemple, és molt millor la teoria nova, malgrat que aquesta fa servir un nombre d'hipòtesis que no han estat verificades experimentalment.

El millor serà rectificar les imperfeccions de la teoria amb els mètodes prudents de la construcció, i per això ens remetem als consells i als mètodes indicats per diversos bons constructors⁴. Una de les propostes es particularment digna de destacar, és aquella que consistiria a proporcionar a la volta amb tres ròtules (dues als arrancaments i una a la clau); perquè aleshores la corba de pressions queda forçada a passar per tres punts clarament determinats.

⁴ Vegeu Intze, Diari de la Soc. dels Eng. i Arquít. de Hannover 1876, p. 378 i Housselle, Deutsche Bauzeitung, 1878, p. 509.

§ 27. DETERMINACIÓ DE LA CORBA DE PRESSIONS REAL TEORIA NOVA

Planxa 15

91. Equació de la corba de pressions

Prenem com a eix de les x , l'horitzontal que passa per l'angle interior del junt del suport A (fig. 136). Anomenarem:

η l'ordenada de la corba de pressions

y l'ordenada de la corba mitjana de les dovelles de l'arc,

η' l'ordenada d'una corba de pressió traçada amb un pol qualsevol i la distància polar H'

H l'empenta horitzontal de la volta

l l'obertura de la volta.

La línia de tancament ve donada per les ordenades z' i z'' de les seves extremitats.

Segons el núm. 89, la part DC de l'ordenada η és igual a:

$$\overline{DC} = \eta' \cdot \frac{H'}{H}$$

mentre que:

$$\frac{\overline{DC} - z'}{x} = \frac{z'' - z'}{l}$$

de la qual cosa es dedueix que:

$$\overline{DE} = z' + (z'' - z') \frac{x}{l}$$

per tant tindrem:

$$\eta = z' + (z'' - z') \frac{x}{l} + \frac{H'}{H} \cdot \eta' \quad [1]$$

Per tal de determinar z' , z'' , i H , cal tenir a la seva disposició tres equacions deduïdes de les condicions d'elasticitat.

92. Les tres equacions fonamentals que depenen de l'elasticitat

Posem que φ (fig. 137) és l'angle d'inclinació de la tangent a la corba mitjana de l'arc en el punt (x, y) . Siguin φ_0 i φ'_0 són els valors que pren φ per $x = 0$ i $x = l$. L'origen de les coordenades es pren a l'arrencada esquerra de la volta.

L'efecte de les forces que actuen sobre la volta és deformar-la. φ , y i x patiran, per tant, variacions $\Delta\varphi$, Δy i Δx .

Considerem el punt (x, y) . Tindrem:

$$\Delta\varphi = \Delta\varphi_0 + \int_0^x d\Delta\varphi$$

i si el suport és completament invariable de posició, és a dir, si hi ha encastament, tindrem $\Delta\varphi = 0$ i, com a conseqüència,

$$\Delta\varphi = \int_0^x d\Delta\varphi \quad [2]$$

De manera anàloga, tindrem:

$$\Delta x = \int_0^x d\Delta x \quad \Delta y = \int_0^x d\Delta y$$

Si ds és un element de l'eix de la volta, tindrem, abans i després de la deformació⁵:

$$dy = ds \cdot \sin \varphi$$

$$d(y + \Delta y) = d(s - \Delta s) \cdot \sin(\varphi + \Delta\varphi)$$

Podem plantejar que $\sin \Delta\varphi = \Delta\varphi$, ja que aquest angle és molt petit. De la mateixa manera admetrem que $\cos \Delta\varphi = 1$. Aleshores tindrem

$$\sin(\varphi + \Delta\varphi) = \sin \varphi + \cos \varphi \cdot \Delta\varphi$$

i obtindrem, ignorant la quantitat molt petita del segon ordre $d\Delta s \Delta\varphi$,

$$\begin{aligned} dy + d\Delta y &= ds \cdot \sin \varphi + ds \cdot \cos \varphi \cdot \Delta\varphi - d\Delta s \cdot \sin \varphi = \\ &= dy + dx \cdot \Delta\varphi - \frac{d\Delta s}{ds} \cdot dy \Rightarrow d\Delta y = \Delta\varphi \cdot dx - \frac{d\Delta s}{ds} \cdot dy \end{aligned}$$

Si integrem, tindrem:

$$\Delta y = \int_0^x \Delta\varphi \cdot dx - \int_0^x \frac{d\Delta s}{ds} \cdot dy$$

on, integrant per parts

$$\Delta y = (\Delta\varphi x)_0^x - \int_0^x x d\Delta\varphi - \int_0^x \frac{d\Delta s}{ds} \cdot dy$$

Però, vist que l'expressió $\Delta\varphi x$ desapareix pel límit inferior = 0 de la integral,

$$\Delta y = \Delta\varphi x - \int_0^x x d\Delta\varphi - \int_0^x \frac{d\Delta s}{ds} \cdot dy \quad [3]$$

D'una manera anàloga, deduirem, a partir de $dx = ds \cdot \cos \varphi$, i també de $d(x + \Delta x) = d(s - \Delta s) \cdot \cos(\varphi + \Delta\varphi)$, aquesta altra expressió:

$$\Delta x = -\Delta\varphi y - \int_0^x y d\Delta\varphi - \int_0^x \frac{d\Delta s}{ds} \cdot dx \quad [4]$$

Si, admetent la hipòtesi de l'encastament als suports, fem $x = l$, $\Delta\varphi_0 = \Delta\varphi'_0$, $\Delta y = 0$, $\Delta x = 0$, obtindrem les tres equacions amb les següents condicions:

$$\left. \begin{aligned} 0 &= \int_0^l d\Delta\varphi \\ 0 &= -\int_0^l x d\Delta\varphi - \int_0^l \frac{d\Delta s}{ds} \cdot dy \\ 0 &= +\int_0^l y d\Delta\varphi - \int_0^l \frac{d\Delta s}{ds} \cdot dx \end{aligned} \right\} \quad [5]$$

Encara queda per avaluar $d\Delta\varphi$ i $d\Delta s / ds$

⁵ Per les compressions que es produeixen s esdevindrà $(s - \Delta s)$

Dos junts infinitament veïns (fig. 138) formen entre ells l'angle $-d\varphi$ ⁶. Si anomenem ρ el radi de corbatura de la línia mitjana de la volta i δ el gruix de la volta, els elements de l'anomenada línia i els de l'extradós i l'intradós són els següents:

$$ds = \rho(-d\varphi) \quad ds_s = \frac{ds(\rho + 0,5 \cdot \delta)}{\rho} \quad ds_i = \frac{ds(\rho - 0,5 \cdot \delta)}{\rho}$$

o encara

$$ds_s = \left(\rho + \frac{1}{2} \cdot \delta\right)(-d\varphi) \quad ds_i = \left(\rho - \frac{1}{2} \cdot \delta\right)(-d\varphi)$$

Si suposem que el centre de pressió cau a l'interior del nucli, R_s i R_i són compressions. Si E és el coeficient d'elasticitat del material, l'element ds_s es reduirà en $\Delta ds_s = R_s \cdot ds_s / E$. De la mateixa manera, ds_i es reduirà la quantitat de $\Delta ds_i = R_i \cdot ds_i / E$. Tindrem, per tant, abans que tota deformació:

$$ds_i - ds_s = d\varphi \delta$$

i després de la deformació

$$(ds_i - \Delta ds_i) - (ds_s - \Delta ds_s) = (d\varphi + \Delta d\varphi) \cdot \delta$$

Si restem membre a membre aquestes dues equacions, obtindrem:

$$\Delta ds_s - \Delta ds_i = (\Delta d\varphi) \cdot \delta$$

com a conseqüència

$$(\Delta d\varphi) = d \Delta \varphi = (R_s \cdot ds_s - R_i \cdot ds_i) / E \cdot \delta$$

on encara

$$d \Delta \varphi = \frac{ds}{E} \cdot \left[\frac{R_s - R_i}{\delta} + \frac{R_s + R_i}{2 \cdot \rho} \right]$$

Posem per cas, segons la fórmula [1], p. 138 (Comp. també Fig. 133)

$$R_s = \frac{N}{\delta} \left(1 + 6 \frac{e}{\delta} \right) = \frac{N}{\delta} + \frac{6 \cdot M}{\delta^2}$$

$$R_i = \frac{N}{\delta} \left(1 - 6 \frac{e}{\delta} \right) = \frac{N}{\delta} - \frac{6 \cdot M}{\delta^2}$$

A més, essent rectangular la secció de la volta rectangular i amb amplada = 1, $I = \delta^3 / 12$, tindrem:

$$R_s - R_i = \frac{M \cdot \delta}{I} \quad \text{i} \quad R_s + R_i = \frac{2 \cdot N}{I}$$

De la qual cosa deduïrem:

$$d \Delta \varphi = \frac{M ds}{EI} + \frac{N ds}{\rho \delta E} \quad [6]$$

L'escurçament $d \Delta s$ de l'element de la corba mitjana és, atès que la compressió unitària al mig de la secció = N/δ ,

$$d \Delta s = ds \cdot \frac{N}{\delta E} \quad [7]$$

Si introduïm a les fórmules núm. [5] els valors determinats de $d \Delta \varphi$ i $d \Delta s$, i si fem

⁶ Si x esdevé $(x+dx)$, aleshores φ esdevindrà $(\varphi-d\varphi)$.

$$I \cdot \frac{dx}{ds} = I \cdot \cos \varphi = I'$$

i si suposem $I' = \text{constant}$ ⁷, tindrem

$$\left. \begin{aligned} \theta &= \int_0^l M \cdot dx + \int_0^l \frac{I' \cdot N \cdot ds}{\rho \delta} \\ \theta &= - \int_0^l M \cdot x \cdot dx + \int_0^l \frac{I' \cdot N}{\delta} \left(x \frac{ds}{\rho} + dy \right) \\ \theta &= + \int_0^l M \cdot y \cdot dx + \int_0^l \frac{I' \cdot N}{\delta} \left(y \frac{ds}{\rho} + dx \right) \end{aligned} \right\} \quad [8]$$

Al lloc de la compressió normal N , utilitzarem el valor $N = H / \cos \varphi$. Aquesta expressió és rigorosament certa quan la corba de les pressions coincideix amb la corba mitjana de l'arc, si no només s'hi aproxima. L'error és, en tot cas, absolutament insignificant.

D'aquesta manera, l'expressió $I' \cdot N / \delta$ té el valor constant:

$$\frac{I \cdot \cos \varphi}{\delta} \cdot \frac{H}{\cos \varphi} = \frac{I \cdot H}{\delta} = \frac{H \cdot \delta^2}{12}$$

i obtenim, destacant que $M = H \cdot (\eta - y)$ [comp. pàg. 161], una forma nova de les tres equacions de condició, de foma molt simplificada:

$$\left. \begin{aligned} -\frac{\delta^2}{12} A + \int_0^l y \, dx &= \int_0^l \eta \, dx \\ -\frac{\delta^2}{12} B + \int_0^l yx \, dx &= \int_0^l \eta x \, dx \\ -\frac{\delta^2}{12} C + \int_0^l y^2 \, dx &= \int_0^l \eta y \, dx \end{aligned} \right\} \quad [9]$$

a les quals A , B i C tenen els significats següents:

$$\left. \begin{aligned} A &= \int_0^l \frac{ds}{\rho} \\ B &= \int_0^l \left(dy + x \frac{ds}{\rho} \right) \\ C &= \int_0^l \left(dx + y \frac{ds}{\rho} \right) \end{aligned} \right\} \quad [10]$$

El càlcul d'aquestes tres integrals és possible si coneixem la corba mitjana de l'arc. Per això dividirem aquesta corba en segments tenint com a llargada s_1, s_2, \dots . Determinarem les ordenades (x_1, y_1) (x_2, y_2) de la meitat d'aquests segments, així com els radis de curvatura ρ_1, ρ_2, \dots dels mateixos segments. Aleshores obtindrem amb suficient exactitud els valors següents:

⁷ Sovint es suposa que $I = \text{constant}$. Però l'adopció d'un valor I mitjà de tots els valors variables de $I \cdot \cos \varphi$ condueix a unes equacions més simples al mateix temps que més "voisines" de l'exactitud. El càlcul de les voltes de seccions variables es troba dins l'obra del mateix autor: *Müller-Breslau*. Théorie élastique des voûtes cylindriques. *Zeitschrift für Bauwesen* 1881. Livraison VII.

$$A = \frac{s_1}{\rho_1} + \frac{s_2}{\rho_2} + \frac{s_3}{\rho_3} + \dots$$

$$B = t + \frac{x_1 s_1}{\rho_1} + \frac{x_2 s_2}{\rho_2} + \frac{x_3 s_3}{\rho_3} + \dots$$

$$C = l - \frac{y_1 s_1}{\rho_1} - \frac{y_2 s_2}{\rho_2} - \frac{y_3 s_3}{\rho_3} - \dots$$

on t és la diferència de les ordenades dels centres dels junts a les arrencades (Fig. 137).

Per una volta en arc de cercle tindrem les següents anotacions (Fig. 139, Pl. 16).

$$\begin{aligned} y &= y_0 + \rho \cdot \cos \varphi - \rho \cdot \cos \varphi_0 & dy &= -\rho \cdot \sin \varphi d\varphi \\ x &= \rho \cdot \sin \varphi_0 - \rho \cdot \sin \varphi & dx &= -\rho \cdot \cos \varphi d\varphi \\ ds &= -\rho \cdot d\varphi \end{aligned}$$

Els termes A, B, C així doncs esdevenen:

$$A = \int_0^l \frac{ds}{\rho} = - \int_{+\varphi_0}^{-\varphi_0} d\varphi = 2 \cdot \varphi_0$$

$$B = \int_0^l (dy + x d\varphi) = - \int_{+\varphi_0}^{-\varphi_0} \rho \sin \varphi_0 d\varphi = +\rho \cdot \sin \varphi_0 \cdot 2 \cdot \varphi_0 = l \cdot \varphi_0$$

$$C = \int_0^l (dx + y d\varphi) = - \int_{+\varphi_0}^{-\varphi_0} (\rho \cos \varphi_0 - y_0) d\varphi = (\rho \cdot \cos \varphi_0 - y_0) \cdot 2 \cdot \varphi_0 = 2 \cdot h' \cdot \varphi_0$$

En resum:

$$A = 2 \cdot \varphi_0 \quad B = l \cdot \varphi_0 \quad C = 2 \cdot h' \cdot \varphi_0 \quad [11]$$

Després d'haver calculat les tres integrals A, B i C reprendrem la fórmula [9] per tal d'introduir-hi el valor de η

$$\eta = z' + (z'' - z') \frac{x}{l} + \frac{H'}{H} \eta'$$

després de la qual cosa podrem calcular z' , z'' i H .

A continuació ens ocuparem només d'una volta simètrica respecte a una vertical que passa pel mig de la mateixa.

§ 28. LA VOLTA DE CANÓ SIMÈTRICA

93. Càrregues simètriques

Si la superfície de càrrega d'una volta és simètrica respecte a la vertical que passa pel mig de la mateixa, tindrem $z = z'' = z$ (fig. 140). La línia de tancament serà horitzontal. Una de les equacions d'elasticitat, la segona, serà supèrflua⁸. Suposem (Comp. form. 1, p. 165):

$$\eta = z + \frac{H'}{H} \cdot \eta'$$

i que s'introdueixi aquest valor a la primera i la tercera de les equacions [9] s'obté

$$\left. \begin{aligned} -\frac{\delta^2}{12} A + \int_0^l y dx = z l + \frac{H'}{H} \int_0^l \eta^{-1} dx \\ \frac{\delta^2}{12} C + \int_0^l y^2 dx = z \int_0^l y dx + \frac{H'}{H} \int_0^l y \eta^1 dx \end{aligned} \right\} [1]$$

Es pot construir gràficament el valor de les integrals contingudes en aquestes dues equacions. Preferim no obstant això calcular-les amb la fórmula de Simpson. Per això plantegem:

$$\left. \begin{aligned} \int_0^l y dx = f l & \quad \int_0^l \eta^1 dx = f' l \\ \int_0^l y^2 dx = u f l & \quad \int_0^l y \eta^1 dx = u' f' l \end{aligned} \right\} [2]$$

Dividim la volta en un nombre parell de porcions (Fig. 140) l'amplada idèntica de les quals serà λ . Mesurem els valors de les ordenades $y_1, y_2, y_3 \dots$ per a $x = \lambda, 2\lambda, 3\lambda \dots$ de manera que els valors de $\eta_1', \eta_2', \eta_3' \dots$ pertanyents a la corba de pressions auxiliar, i aleshores tindrem:

$$\left. \begin{aligned} f' &= \frac{2\lambda}{3l} \{y_0 + y_n + 4(y_1 + y_3 + y_5 + \dots) + 2(y_2 + y_4 + \dots)\} \\ f &= \frac{2\lambda}{3l} \{\eta'_0 + 4(\eta'_1 + \eta'_3 + \eta'_5 + \dots) + 2(\eta'_2 + \eta'_4 + \dots)\} \\ u &= \frac{2\lambda}{3fl} \{y_0^2 + y_n^2 + 4(y_1^2 + y_3^2 + y_5^2 + \dots) + 2(y_2^2 + y_4^2 + \dots)\} \\ u' &= \frac{2\lambda}{3fl} \{y_n \eta'_n + 4(y_1 \eta'_1 + y_3 \eta'_3 + \dots) + 2(y_2 \eta'_2 + y_4 \eta'_4 + \dots)\} \end{aligned} \right\} [3]$$

⁸ Aquesta última equació expresa la condició que (veg. Fig. 137) el punt b no es desplaça en sentit vertical respecte a a ; aquesta condició es donarà si la superfície de càrrega és simètrica.

Les equacions [1] ara poden ser indicades amb la forma:

$$\begin{aligned} -\frac{\delta^2 A}{12 l} + f &= z + \frac{H'}{H} f' \\ \frac{\delta^2 C}{12 f l} + u &= z + \frac{H'}{H} u \end{aligned}$$

De la qual cosa se'n dedueix fàcilment:

$$H = H' \frac{u' - f'}{u_0 - f_0} \quad [4]$$

$$z = f_0 - \frac{H'}{H} f' \quad [5]$$

a les quals

$$\left. \begin{aligned} f_0 &= f - \frac{\delta^2 A}{12 l} \\ u_0 &= u + \frac{\delta^2 C}{12 f l} \end{aligned} \right\} \quad [6]$$

Si la fibra mitjana de la volta és un arc de cercle obtenim, segons la fórmula 11, p. 171.

$$\left. \begin{aligned} f_0 &= f - \frac{\delta^2 \varphi_n}{6 l} \\ u_0 &= u + \frac{\delta^2 \varphi_n h'}{6 l f} \end{aligned} \right\} \quad [7]$$

Si la corba de les sobrecàrregues es compon de dues rectes, i si l'intradós és un arc de cercle de radi r trobarem, adoptant les designacions de les lletres de la Fig. 141,

$$H' f' = \frac{H_m}{96} \left\{ 2l^2 \left(4h^m + \frac{5}{2}s \right) - 12\varphi_1 \frac{r^2}{l} (l^2 - r^2) - c(6r^2 - 5l^2) \right\} \quad [8]$$

on H_m és el pes del metre cúbic de maçoneria. A més tenim, aproximadament:

$$H = \frac{H_m l^2}{8h} (h^m - 0,86h^n + 0,69s) \frac{1}{1 + \frac{15\delta^2 \varphi_n}{8h^2 l} \left(h' + y_0 + \frac{2h}{3} \right)} \quad [9]$$

de manera que es podrà calcular H i després $z = f_0 - \frac{H'}{H} f'$, pel fet que sense traçar la corba auxiliar de les pressions [1]. (Vegeu a sota el càlcul d'aquestes dues fórmules).

La superfície delimitada per l'arc de cercle, fibra mitjana de l'arc, l'horitzontal AB i les verticals que passen per A i B , té com a expressió:

$$\int_0^l y dx = f l = \pi \varphi^2 \frac{2\varphi_n}{2\pi} - \frac{h' + y_0}{2} l + y_0 l$$

d'on:

$$f = \frac{\rho^2 \varphi_0}{l} - \frac{h'}{2} + \frac{y_0}{2} \quad [10]$$

Càlcul de la fórmula [8] Fig. 142. - Posem que CC i C₁C₁ són dues seccions verticals fetes a una volta, i suposant que CC es troba en el punt on la tangent a la corba de pressions és horitzontal. A C₁C₁ la resultant D és tangent a la mateixa corba i fa amb l'horitzontal l'angle α, ζ és l'ordenada de càrrega, és a dir, l'alçada vertical de l'intradós a la corba de càrrega. El pes de la porció de la volta compresa entre C i C₁ és $\int H_m \zeta dx$ i tindrem les equacions de condició:

$$K \sin \alpha = H_m \int \zeta dx \quad K \cos \alpha = H$$

per la qual cosa:

$$\frac{H}{H_m} \operatorname{tg} \alpha = \int \zeta dx$$

Si η i χ són les ordenades de la corba de pressions, tenim, $\operatorname{tg} \alpha = \frac{d\eta}{d\chi}$ i pel fet que $\frac{d^2\eta}{d\chi^2}$ és

negatiu, la corba essent còncaua cap a l'eix de χ: $-\frac{H}{H_m} \frac{d^2\eta}{d\chi^2} = \zeta$

Si a la figura 141 y' és l'ordenada de l'intradós, l'ordenada de càrrega serà $= h^m + 2s \frac{x}{l} - y'$

i:

$$y' = r \cos \varphi - r \cos \varphi_1$$

$$x = r \sin \varphi_1 - r \sin \varphi$$

$$dx = -r \cos \varphi d\varphi$$

L'equació diferencial d'una corba de pressions traçada amb la pressió qualsevol H' esdevindrà:

$$\frac{H'}{H_m} \bullet \frac{d^2\eta'}{dx^2} = -h^m - 2s \frac{x}{l} + y'$$

Si integrem

$$\frac{H'}{H_m} \bullet \frac{d\eta'}{dx} = -h^m x - \frac{s x^2}{l} + \int y' dx + C = -h^m x - \frac{s x^2}{l} - r^2 \left(\frac{\varphi}{2} + \frac{\sin \varphi \cos \varphi}{2} \right) + r^2 \cos \varphi_1 \sin \varphi + C$$

La condició de simetria indica que per $x = \frac{1}{2}l$ i $\varphi = 0$ cal que $\frac{d\eta'}{dx} = 0$. Per tant, cal:

$$0 = -\frac{1}{2}h^m l - \frac{1}{4}sl + C \quad \text{on:} \quad C = \frac{1}{2}h^m l + \frac{1}{4}sl$$

És per això que tenim:

$$\frac{H'}{H_m} \frac{d\eta'}{dx} = \frac{h^m l}{2} - h^m x + \frac{sl}{4} - \frac{s x^2}{l} - r^2 \left(\frac{1}{2}\varphi + \frac{1}{2}\sin \varphi \cos \varphi - \cos \varphi_1 \sin \varphi \right)$$

Tot integrant de nou:

$$\frac{H'}{H_m} \eta' = \frac{1}{2} h^m l x - \frac{1}{2} h^m x^2 + \frac{s l x}{4} - \frac{s x^3}{3l} + r^3 \left\{ \frac{1}{2} \varphi \sin \varphi + \frac{1}{2} \cos \varphi - \frac{1}{6} \cos^3 \varphi \sin^2 \varphi \right\} + C_1$$

Els valors simultanis $x=0$ i $\varphi=\varphi_1$ han de donar $\eta'=0$. Si introduïm aquests valors a l'equació que acabem de trobar:

$$0 = \frac{1}{2} r^3 \left\{ \varphi_1 \sin \varphi_1 + \cos \varphi_1 - \frac{1}{3} \cos^3 \varphi_1 - \cos \varphi_1 \sin^2 \varphi_1 \right\} + C_1$$

D'on podem concloure:

$$C_1 = -\frac{1}{2} r^3 \left\{ \varphi_1 \sin \varphi_1 + \cos \varphi_1 - \frac{1}{3} \cos^3 \varphi_1 - \cos \varphi_1 \sin^2 \varphi_1 \right\}$$

L'equació de la corba de pressions serà, per tant:

$$\frac{H'}{H_m} \eta' = \frac{1}{2} h^m l x - \frac{1}{2} h^m x^2 + \frac{s l x}{4} - \frac{s x^3}{3l} - \frac{1}{2} r^3 \left\{ \varphi_1 \sin \varphi_1 + \frac{2}{3} \cos^3 \varphi_1 - \varphi_1 \sin \varphi_1 - \cos \varphi_1 + \frac{1}{3} \cos^3 \varphi_1 + \cos \varphi_1 \sin^2 \varphi_1 \right\}$$

Però tenim:

$$\frac{H'}{H_m} \frac{f'l}{2} = \frac{H'}{H_m} \int_0^{\frac{l}{2}} \eta' dx = \frac{1}{24} h^m l^3 + \frac{3}{192} s l^3 - \frac{1}{16} r^3 \left\{ \varphi_1 (4 \sin^2 \varphi_1 - 1) + \sin \varphi_1 \cos \varphi_1 \left(1 - \frac{10}{3} \sin^2 \varphi_1 \right) \right\}$$

Si, s'agafa la Fig. 141, tenim $\sin \varphi_1 = \frac{l}{2r}$ i $\cos \varphi_1 = \frac{c}{r}$, s'obtindrà:

$$H' f' = \frac{H_m}{96} \left\{ 2l^2 \left(4h^m + \frac{5}{2}s \right) - 12\varphi_1 \frac{r^2}{l} (l^2 - r^2) - c(6r^2 - 5l^2) \right\}$$

Que és la fórmula [8] indicada aquí sobre.

Càlcul de la fórmula [9]. - Si considerem l'intradós i la fibra mitjana de la volta com a paràboles, tindrem (fig. 141).

$$\text{Per a l'ordenada de l'intradós } y' = \frac{4h'' x(l-x)}{l^2}$$

$$\text{l'ordenada de càrrega } \zeta = h^m + \frac{2s x}{l} - 4h'' x \frac{(l-x)}{l^2}$$

Tal com hem establert amb la fórmula [8], tenim:

$$\frac{H'}{H_m} \frac{d^2 \eta'}{dx^2} = -\zeta = -h^m + 4 \frac{h'' x}{l} - 4 \frac{h'' x^2}{l^2} - \frac{2s x}{l}$$

Integrant una primera vegada:

$$\frac{H'}{H_m} \frac{d\eta'}{dx} = -h^m x + \frac{2h'' x^2}{l} - 4 \frac{h'' x^3}{3l^2} - \frac{s x^2}{l} + C$$

i integrant de nou:

$$\frac{H'}{H_m} \eta' = -\frac{1}{2} h^m x^2 + \frac{2h'' x^3}{3l} - \frac{h'' x^4}{3l^2} - \frac{s x^3}{3l} + C x + C_1$$

Si es determina les constants per la condició que per $x = \frac{1}{2}l$, cal que tinguem $\frac{d\eta'}{dx} = 0$; i que per a $x=0$, $\eta' = 0$, trobarem que:

D'altra banda, sabem que: $\frac{H'}{H_m} f' l = 2 \frac{H'}{H_m} \int_0^{\frac{1}{2}l} \eta' dx$

$$\frac{H'}{H_m} \eta' = \frac{1}{2} h^m l x^2 - \frac{h^m x^2}{2} - \frac{h'' l x}{3} + \frac{2h'' x^3}{3l} - \frac{h'' x^4}{3l^2} + \frac{s l x^2}{4} - \frac{s x^3}{3l}$$

Integrant, doncs, de nu, l'expressió precedent, des de 0 fins a $\frac{l}{2}$, trobarem que:

$$\frac{H'}{H_m} f' l = \frac{l^3}{12} \left(h^m - \frac{4}{5} h'' + \frac{5}{8} s \right)$$

L'ordenada de la línia mitjana de la volta és: $y = y_0 + \frac{4hx(l-x)}{l^2} = y_0 + \frac{4hx}{l} - \frac{4hx^2}{l^2}$

tindrem, per tant:

$$u' f l = \int_0^l y \eta' dx = y_0 \int_0^l \eta' dx + \frac{4h}{l} \int_0^l \eta' x dx - \frac{4h}{l^2} \int_0^l \eta' x^2 dx = y_0 f' l - \frac{4h}{l} \cdot f' l \frac{l}{2} - \frac{4h}{l^2} \int_0^l \eta' x^2 dx$$

i finalment

$$u' = (y_0 + 2h) \frac{f'}{f} - \frac{4h H_m}{f l^3 H'} \int_0^l \frac{H'}{H_m} \eta' x^2 dx$$

A l'expressió de η' que trobem més amunt, la part independent de s s'ha d'aplicar després de $x=0$ fins a $x=l$. Al contrari, la part que conté s té per a $x > \frac{1}{2}l$ un valor diferent que per a $x < \frac{1}{2}l$. No obstant això aquesta és simètrica respecte a la vertical que passa pel mig de la volta. Per tant, podrem escriure:

$$\int_0^l \frac{H'}{H_m} \eta' x^2 dx = \frac{h^m}{2} \int_0^l (l x^3 - x^4) dx - \frac{h''}{3} \int_0^l \left(l x^3 - \frac{x^5}{l} + \frac{x^6}{l^2} \right) dx + s \int_0^{\frac{1}{2}l} \left(\frac{l x}{4} - \frac{x^3}{3l} \right) x^2 dx + s \int_0^{\frac{1}{2}l} \left(\frac{l x}{4} - \frac{x^3}{3l} \right) (l-x)^2 dx$$

de la qual cosa en deduirem:

$$u' = (y_0 + 2h) \frac{f'}{f} - \frac{h l^2 H_m}{10 H' f} \left(h^m - \frac{50}{63} h'' + \frac{178}{288} s \right)$$

Però pel fet que $f = y_0 + \frac{2h}{3}$.

$$u' - f' = \frac{4h}{3} \frac{f'}{f} - \frac{h l^2 H_m}{10 H' f} \left(h^m - \frac{50}{63} h'' + \frac{178}{288} s \right)$$

Destaquem de nou que: $u f l = \int_0^l y^2 dx$ i $y = y_0 + \frac{4hx}{l} - \frac{4hx^2}{l^2}$

En conseqüència: $u f l = l \left(y_0^2 + \frac{8}{15} h^2 + \frac{4}{3} y_0 h \right)$ i d'això $u - f = \frac{4h^2}{45f}$

Amb l'ajut d'aquests valors trobem:

$$\frac{u' - f'}{u - f} H' = \frac{45}{4h^2} (u' - f') f H' = \frac{H_m l^2}{8h} (h^m - 0,86h'' + 0,69s)$$

Tenint en compte les fórmules [6]

$$H = H' \frac{u' - f'}{u_0 - f_0} = H' \frac{u' - f'}{u - f} \frac{1}{1 + \frac{\varphi_0 \delta^2}{6l(u-f)f} (f + h')}$$

$$H = \frac{H_m l^2}{8h} (h^m - 0,86h'' + 0,69s) \frac{1}{1 + \frac{15 \delta^2 \varphi_0}{8 h^2 l} \left(h' + y_0 + \frac{2h}{3} \right)}$$

Aquesta fórmula és encara més exacta quan la volta és més plana. L'alçada ha obtingut resultats molt satisfactoris fins a $h = \frac{1}{3}l$.

97. Càlcul analític i gràfic de la resistència de la volta en el cas en què hi ha sobrecàrrega només la meitat esquerra

Suposem en primer lloc que hi ha sobrecàrrega a tota la volta, però amb un pes igual només igual a la meitat de la sobrecàrrega mòbil. Cal doncs substituir la línia xx per la línia x' situada a $\frac{1}{2}v = 0^m,125$ metres més amunt.

La **semivolta** ha estat dividida en 8 parts amb 1m. d'amplada cadascuna. Havent calculat el pes d'aquestes seccions, han estat disposades en polígons de forces. Per a fer aquest càlcul n'hi ha prou amb considerar la superfície de cadascuna d'aquestes seccions com un trapezi. Havent escollit un pol o, amb una distància polar = 100 tones, es traça una corba de pressions, les ordenades de la qual, corresponents als junts 1, 2, 3, són $\eta'_1, \eta'_2, \eta'_3 \dots$

Dessignem amb ζ l'alçada mitjana, i amb λ l'amplada de cada secció. La seva superfície és igual a la d'un rectangle de dimensions B i γ . Tindrem:

$$B y = \lambda \zeta \quad \text{d'on} \quad y = \frac{\lambda \zeta}{B}$$

Prendrem B constant per a totes les seccions; sera la *base de reducció*. El pes de les seccions estarà representat per un nombre de centrímetres y . L'escala de forces vindrà aleshores donada per la igualtat:

$$y^{cm} = H_m y B^{Tonnes}$$

Al segon membre d'aquesta igualtat, B i y hauran de ser en metres. Si l'escala de longituds és de n centímetres per 1 metre, la y del membre esquerre és un nombre n de vegades més gran que de y del membre dret.

L'escala de les forces serà, per tant, de $1^{cm} = \frac{H_m B}{n}$ tones.

En el cas actual $H_m = 1,6$. L'escala de les llargades és de $\frac{3^{cm}}{4}$ per 1 metre; per tant, $n = \frac{3}{4}$ i

l'escala de forces serà:

$$1^{cm} = \frac{4}{3} \times 1,6 B^{Tonnes}$$

Si agafem $B = 3^T, 75$, tindrem $1^{cm} = 8$ tones.

Fem ara $\overline{x'F} = B = 3^m, 75$, tracem FJ paral·lela a $x'x'$ i prenem $\overline{FJ} = \lambda = 1^m$; si arribem a $x'J$ obtindrem, traçant per l'intradós del mig de la secció 2, una horitzontal, una llargada $\overline{J_2 F_2}$ que representa el pes d'aquesta secció 2. Està compresa entre les línies $x'F$ i $x'J$. Totes les altres seccions ens proporcionen igualment la llargada que representa el pes d'ambdues sobre la base de reducció convinguda. Són pesos que han servit per a la construcció del polígon de forces, i a del polígon (auxiliar) de les pressions, segons les regles conegudes⁹. Mesurarem sober aquest últim els valors de les ordenades

$$\begin{array}{c} \text{Joint} \\ \eta' = \end{array} \left| \begin{array}{c|c|c|c|c|c|c|c|c|c} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ \hline 0,1,83 & 3,29 & 4,42 & 5,28 & 5,91 & 6,34 & 6,59 & 6,67 \end{array} \right|$$

Les ordenades de la corba mitjana de la volta són:

$$\begin{array}{c} \text{Joint} \\ \eta' = \end{array} \left| \begin{array}{c|c|c|c|c|c|c|c|c|c} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ \hline 0,635 & 1,34 & 1,92 & 2,39 & 2,76 & 3,04 & 3,23 & 3,35 & 3,385 \end{array} \right|$$

Les fórmules [3], pàg. 172, donen ara:

⁹ Partirem de la clau, traçant H' qualsevol però horitzontal, després els costats d'I a VIII. La línia de tancament S' passarà pel retrobament de VIII amb la vertical dels naixements, i servirà per a la lectura de les $\eta_1, \eta_2 \dots$

$$f = \frac{2 \times 1}{3 \times 16} [0,635 + 3,385 + 4(1,34 + 2,39 + 3,04 + 3,35) + 2(1,92 + 2,76 + 3,23)] = 2^m, 513$$

$$f' = \frac{2 \times 1}{3 \times 16} [0,67 + 4(1,83 + 4,42 + 5,91 + 6,59) + 2(3,29 + 5,28 + 6,34)] = 4^m, 645$$

$$u = \frac{2 \times 1}{3 \times 2,513 \times 16} \left[\overline{0,635^2} + \overline{3,385^2} + 4(\overline{1,34^2} + \overline{2,39^2} + \overline{3,04^2} + \overline{3,35^2}) + 2(\overline{1,92^2} + \overline{2,76^2} + \overline{3,23^2}) \right] \\ = 2^m, 773$$

$$u' = \frac{2 \times 1}{3 \times 2,513 \times 16} \left[3,385 \times 6,67 + 4(1,34 \times 1,83 + 2,39 \times 4,42 + 3,04 \times 5,91 + 3,35 \times 6,59) \right. \\ \left. + 2(1,92 \times 3,29 + 2,76 \times 5,28 + 3,23 \times 6,34) \right] = 5^m, 265$$

Les fórmules 7, pàg. 173, aleshores donen¹⁰:

$$f_0 = f - \frac{\varphi_0 \delta^2}{6l} = 2,513 - 0,6622 \times \frac{0,90^2}{6 \times 16} = 2,507 \quad (2)$$

$$u_0 = u + \frac{\varphi_0 \delta^2}{6l} \frac{h'}{f} = 2,773 + \frac{0,90^2}{6 \times 16} \times \frac{9,626}{2,513} = 2,794$$

La força horitzontal és, segons la fórmula 4, p.173

$$H = H' \frac{u' - f'}{u_0 - f_0} = 16 \frac{0,620}{0,287} = 34^T, 56 \quad \text{i} \quad z = f_0 - \frac{H'}{H} \cdot f' = 2^m, 507 - \frac{4,645 \times 16}{34,56} = 0^m, 356$$

Les ordenades de la corba de pressions real són: $\eta = z + \frac{H'}{H} \eta'$

Per tant es fa $\overline{DE} = z = 0,356$, $\overline{EL} = H'$ i LT perpendicular a EL, igual a $H = 34^T, 56$, i si es porta a la punta de cada ordenada η' una horitzontal, obtindrem els valors reals de les n compreses entre les línies ET i DM. Per a la secció IV, per exemple, el valor de η_4 vindrà donat per $D_4 E_4$.

Aquests valors de η corresponen en el cas en què tota la volta suporta una sobrecàrrega igual a $\frac{1}{2}v$ per unitat de longitud. Però es tracta del cas d'una sobrecàrrega que ocupa la meitat esquerra de la volta, cosa que és més o menys el cas menys favorable. Els valors de η esdevenen aleshores (segons el § 28) $\eta_d = \eta + \Delta\eta$. Obtindrem els valors de $\Delta\eta$ així com segueix. (Comp. P. 183).

¹⁰ Vegeu p. 191 el càlcul de N_0 i h' . L'espessor mitjana de la volta és 0m,90.

Sobre la semi obertura A'D' traçarem una paràbola, la fletxa de la qual és:

$$d' = \frac{H_m \gamma l^2}{64H} = \frac{1,6 \times 0,25 \times 16^2}{64 \times 34,56} = 0^m,046 \quad (1)$$

Per tant, farem $\overline{A'C'} = d'$ i unirem C'D'. Les diferències de les ordenades de la paràbola i de la recta D'D' són les $\Delta\eta$. Al costat dret, els valors tindran signe contrari.

Ara tenim tots els elements per tal de determinar les ordenades η_d de la sobrecàrrega simètrica. Pel junt 4, per exemple, tindrem, tot guardant només dues xifres decimals:

$$\eta_4 = 2^m,80 \quad \Delta\eta_4 = 0,02 \quad \text{a l'esquerra}$$

$$\Delta\eta_4 = -0,02 \quad \text{a la dreta}$$

$$\text{D'aquesta manera tindrem: } \eta_{d4} = 2,80 + 0,02 = 2,82 \quad \text{a l'esquerra}$$

$$\eta_{d4} = 2,80 - 0,02 = 2,78 \quad \text{a la dreta}$$

La figura 149 conté aquesta corba de pressions¹¹:

Per al junt 0 obtenim (comp. també Fig. 143, Pl 16 del costat carregat:

$$\eta_{d0} = z' = z - d' = 0,356 - 0,046 = 0^m,31$$

i del costat no carregat:

$$z'' = z + d' = 0,356 + 0,046 = 0^m,40$$

En aquest punt, la corba de pressions surt del nucli central. Si pel punts tracem un junt seguint el radi, la distància de la corba de pressions a l'intradós serà $0^m,23 = \xi$. Si després la reacció de l'estrep esquerre, la pressió normal al junt serà, amb una exactitud prou suficient:

$$N = A \sin \varphi_0 + H \cos \varphi_0 = \frac{Al + 2Hc}{2r}$$

$$\text{o } A = P_1 + P_2 + P_3 + \dots + P_8 + \frac{5H_m \nu l}{32} = 32^T,90 + \frac{5 \times 1,6 \times 0,25 \times 16}{32} = 33^T,90$$

$$\text{De manera que } N = \frac{33^T,90 \times 16 + 2 \times 34,56 \times 9,17}{2 \times 12,17} = 48^T$$

El coeficient de treball serà, per tant: $R = \frac{2N}{3\xi} = \frac{2 \times 48}{3 \times 0,23} = 40^T$ per metre quadrat.

Aquí s'assoliria, doncs, el valor límit de R. A la clau, el punt de pas de la pressió es

¹¹ Les ordenades de la corba de pressions sencera són les següents:

Junt	0	1	2	3	4	5	6	7	8
Costat esquerra	$\eta_d = 0,31$	1,18	1,88	2,42	2,82	3,12	3,31	3,42	3,44
Costat dret	$\eta_d = 0,40$	1,23	1,88	2,37	2,78	3,07	3,27	3,39	3,44

troba entre els límits del nucli S i I, a la distància 0,18m del junt i . La pressió a l'extrem superior del junt serà:

$$R = \frac{6H e_i}{\delta^2} = \frac{6 \times 34,56 \times 0,18}{0,77^2} = 63^T \text{ per metre quadrat.}$$

98. Càlcul analític de la resistència sota una sobrecàrrega dissimètrica. *Càlcul de les forces exteriors pre a la volta totalment sobrecarregada.* - Segons la fórmula 9, pàg 173 tenim, com a expressió de l'empenta:¹²

$$H = \frac{H_m l^2}{8h} \{h^m - 0,86h''\} \frac{1}{1 + \frac{15}{8} \cdot \frac{\delta^2}{l} \frac{\varphi_n}{h^2} \left(h' + y_0 + \frac{2}{3} h \right)} \quad (1)$$

$$H_m = 1^T,6 \quad l = 16m \quad h'' = 3^m,00$$

$$r = \frac{\left(\frac{1}{2}l\right)^2 + h^{\frac{1}{2}}}{2h''} = \frac{8^2 + 3^2}{2 \times 3} = \frac{73}{6} = 12^m,17$$

$$c = r - h'' = \frac{73}{6} - 3 = 9,17$$

$$\cos \varphi_1 = \frac{c}{r} = \frac{55}{73}$$

El gruix a la clau $\delta_0 = 0\delta^m,77$.

El gruix als extrems $\delta_1 = \delta_0 \frac{1}{\cos \varphi_1} = 0,77 \frac{73}{55} = 1^m,022$;

prendrem 1.03m

La projecció horitzontal del junt dels extrems: $1,03 \frac{l}{2r} = 0^m,677$.

¹² També podem escriure $H = \frac{H_m l^2}{8h} (h^m - 0,86h'') \frac{1}{1 + \frac{15}{16} \frac{\delta^2}{h^2}}$ perquè tenim sempre molt aproximadament

$$\varphi_0 \left(h' + y_0 + \frac{2}{3} h'' \right) = \frac{1}{2} l. \text{ En el cas actual, tenim per exemple}$$

$$\varphi_0 \left(h' + y_0 + \frac{2}{3} h'' \right) = 6,6622 \left(9,626 + 0,635 + \frac{2}{3} 2,750 \right) = 8^m,0086, \text{ mentre que } \frac{1}{2} l = 8^m.$$

El radi de l'extradós:

$$R = \frac{\sqrt{8,677^2 + 3,00^2}}{2 \times 3,0} = 14^m,049$$

$$2y_0 = \sqrt{R^2 - \left(\frac{1}{2}l\right)^2} - [R - h'' - \delta_0] =$$

$$\sqrt{14,049^2 - 8^2} - [14,049\delta - 3,00 - 0,77] = 1^m,270$$

$$y_0 = 0^m,635$$

$$h = h'' + \frac{1}{2}\delta_0 - \frac{1}{2}y_0 = 2^m,75$$

$$\rho = \frac{\left(\frac{1}{2}l\right)^2 + h^2}{2h} = \frac{8^2 + 2,75^2}{2 \times 2,75} = 13^m,011$$

El radi de la línia mitjana: $\sin \varphi_0 = \frac{l}{2\rho} = \frac{16}{2 \times 13,011} = 0,6148$

$$\varphi_0 = 37^\circ 56' 27''$$

La llargada de l'arc $\varphi_0 = 0,6622$.

$$h' = \rho - h - y_0 = 13,011 - 2,750 - 0,635 = 9^m,626$$

Amb aquestes dades calcularem H, tot suposant que el gruix mitjà $\delta = 0^m,90$.

$$H = \frac{1,6 \times 16^2}{8 \times 2,75} \{h^m - 0,86 \times 3\}$$

$$\times \frac{1}{1 + \frac{15}{8} \times \frac{0,90^2}{16} \times \frac{0,6622}{2,75^2} \left(9,626 + 0,635 + \frac{2}{3} \cdot 2,75\right)}$$

$$= 16,918h^m - 43^T,65$$

De manera que tindrem:

Per a la volta sense cap sobrecàrrega: $h^m = 4^m,50$ $H_1 = 32^T,48$

Per a la volta sobrecarregada $\frac{1}{2}v$ $h^m = 4^m,50 + 0,125$ $H_2 = 34^T,59$

Per a la volta sobrecarregada $\frac{1}{2}$ $h^m = 4^m,50 + 0,25$ $H_2 = 36^T,71$

El valor $H_2 = 34^T,59$ és igualment el de la volta que supporta sober la meitat de la seva llargada la sobrecàrrega v (Fig. 143)- Segons la fórmula 8, pàg. 173, tenim

$$H' f' = \frac{\Pi_m}{96} \left\{ 2l^2 \cdot 4h^m - 12\varphi_1 \frac{r^2}{l} (l^2 - r^2) - c(6r^2 - 5l^2) \right\}$$

on cal fer:

$$r = \frac{73}{6} \quad c = \frac{55}{6} \quad l = 16 \quad \Pi_m = 1,6$$

$$\sin \varphi_1 = \frac{l}{2r} = 0,6575 \quad \varphi_1 = 41^\circ 6' 44''$$

La llargada de l'arc $\varphi_1 = 0,7175$. Per tant: $H' f' = \frac{102,4}{3} h^m - 83,47$

Aleshores tornarem a tenir:

Per a la volta sense cap sobrecàrrega: $(H' f')_1 = 70^T, 13$

Per a la volta sobrecarregada amb $\frac{1}{2}v$: $(H' f')_2 = 74^T, 39$

Per a la volta sobrecarregada amb v : $(H' f')_3 = 78^T, 66$

La fórmula 10 p. 174 dóna com a resultat: $f = \frac{\rho^2 \varphi_0}{l} - \frac{h'}{2} + \frac{y_0}{2}$

i la fórmula 7, P. 174, dóna com a resultat:

$$\begin{aligned} f_0 &= f - \frac{\varphi_0 \delta_r}{6l} = \frac{\varphi_0}{l} \left(\rho_2 - \frac{\delta^2}{6} \right) - \frac{h'}{2} + \frac{y_0}{2} \\ &= \frac{0,6622}{16} \left(\overline{13,011^2} - \frac{0,9^2}{6} \right) - \frac{9,626}{2} + \frac{0,635}{2} = 2^m, 504 \end{aligned}$$

Per acabar, a fórmula $z = f_0 - \frac{H' f'}{H}$ ens donarà els diferents valors de z :

Per a la volta sense sobrecàrrega: $z_1 = 2,504 - \frac{70,13}{32,48} = 0^m, 338$

Per a la volta sobrecarregada $\frac{1}{2}v$: $z_2 = 2,504 - \frac{74,39}{34,59} = 0^m, 356$

Per a la volta sobrecarregada v : $z_3 = 2,504 - \frac{78,66}{36,71} = 0^m, 355$

Els valors de z són (fig. 144) les ordenades dels punts de pas de la corba de pressions als junts verticals dels extrems; aquests punts donen la línia de tancament veritable de la corba de pressions.

Si la meitat esquerra de la volta té una càrrega de v , i la meitat dreta no té sobrecàrrega, les ordenades dels punts de pas als arrencaments seran els següents: v . pàg 183 i fig. 143, però sobretot fig. 149.

$$a \text{ l'esquerra} \quad z' = z - d' = z - \frac{H_m r l^2}{64H}$$

$$a \text{ la dreta} \quad z'' = z + d' = z + \frac{H_m r l^2}{64H}$$

$$\text{Però tenim: } \frac{H_m r l^2}{64H} = \frac{1,6 \times 0,25 \times 16^2}{64 \times 34,59} = 0^m,046$$

Com a conseqüència tindrem:

$$z' = 0,356 - 0,046 = 0^m,31$$

$$z'' = 0,356 + 0,046 = 0^m,40$$

La distància de ξ designada amb la fig. 149 és:

$$\xi = z' \frac{c}{r} = 0,31 \frac{55}{73} = 0^m,23$$

El pes de la meitat no carregada de la volta és:

$$P = \frac{H_m l}{2} \left\{ h^m - \frac{r^2 \varphi_1}{l} + \frac{c}{2} \right\} = 1,6 \times 8 \left\{ 4,5 - \frac{12,17^2 \times 0,7175}{16} + \frac{9,17}{2} \right\} = 31^T,3$$

La meitat de la sobrecàrrega mòbil pesa:

$$H_m v \frac{l}{2} = 1,6 \times 0,25 \times 8 = 3^T,2$$

En conseqüència, les reaccions verticals seran:

$$\text{Sense cap sobrecàrrega } A_1 = 31^T,30$$

$$\text{Amb la sobrecàrrega } \frac{1}{2} v \quad A_2 = 31^T,30 + 1,60 = 32^T,90$$

$$\text{Amb la sobrecàrrega } v \quad A_3 = 31^T,30 + 3,20 = 34^T,50$$

Si la meitat de la volta de l'esquerra està sobrecarregada amb v , la reacció de l'esquerra serà:

$$A' = 32,90 + \frac{5 \Pi_m v l}{32} = 32,90 + \frac{5 \times 1,6 \times 0,25 \times 16}{32} = 33^T,90$$

i al costat no carregat, de la dreta, : $B' = 32,90 - 1 = 31,90$

Aleshores podem calcular com anteriorment (n. 97, p. 189) el valor de la reacció real sobre el junt dels arrencaments de l'esquerra:

$$N = A \sin \varphi_0 + H \cos \varphi_0 = 48^T, \quad i$$

$$R = \frac{2N}{3\xi} = \frac{2 \times 48}{3 \times 0,23} = 140^T \quad \text{per metre quadrat.}$$

Afegim encara que, pels ponts en arc de cercle rebaixats, la fatiga més gran sempre té lloc als naixements, cosa que fa que sigui superflu el traçat complet de la corba de pressions. Els

càlculs que precedeixen en aquest cas són sempre suficients.

Si volguéssim establir el càlcul d'aquesta volta segons la teoria antiga, ens convenceriem de bon tros que és possible establir una sèrie de corbes de pressions a l'interior del nucli central, i tindriem com a resultat final un coeficient de treball al voltant de la meitat inferior (70^T per metre quadrat). Però cal recordar que en realitat es pot fer un treball més elevat que $R=140^T$, pel fet que la teoria que es fa servir aquí suposa que els estreps són absolutament fixos, mentre que en realitat aquests sofririen els desplaçaments que no podem tenir en compte perquè es impossible avaluar-los. A més el cediment de les cimbres així com les baixades de temperatura poden fer que hi hagi augments de pressió; aquestes causes diverses actuen totes, -tal com ha fet notar el sr. Winkler- en un mateix sentit, és a dir l'augment de R . D'altra banda cal destacar que la influència d la cohesió dels tipans, que igualment queden fora de tota avaluació té certament un efecte favorable, cosa que neutralitza en part les pertorbacions molestes esmentades anteriorment.

En qualsevol cas, sembla que avui podem aconsellar amb seguretat que s'abandoni el mètode antic basat en la recerca de la corba de pressions més favorable.

§ 30. Corba de pressions mínima

101. Construcció de la corba de pressions mínima

Per la clau d'una volta cilíndrica simètrica, carregada simètricament, fem passar un pla vertical (fig.152). Després d'haver allunyat la meitat dreta d'aquesta volta substituïm la seva acció per la d'una força H , que és l'empenta a la clau. Ens proposem de mirar si a l'interior del nucli central és possible traçar una corba de pressions i entre totes les que en general es poden traçar amb aquesta condició escollirem la que donarà l'empenta horitzontal més feble. És la que designem amb el nom de *corba de pressions mínima*.

És evident que la força H serà més petita com més alt sigui el punt d'aplicació. En primer lloc mirarem, doncs, de fer passar aquesta força pel límit superior s del nucli central.

Designem amb i el límit inferior del nucli central en un junt qualsevol de la volta, junt que designarem com a n . Sigui P el pes de la part de la volta compresa entre aquest junt i i el de la clau. Si unim la i amb el punt d'intersecció de les forces H i P , obtindrem després d'haver descomposat P seguint la direcció sC i iC , el valor que haurà de tenir H si el punt i h de ser punt de pas de la pressió D que actua sobre el junt n . Anomenem H_n l'empenta calculada d'aquesta manera. Si disminuïm H_n d'una quantitat ΔH_n , en resultarà una altra pressió D' sobre el junt n , la qual tallarà aquesta junt més avall que i . La corba de pressions sortirà del nucli central. L'empenta H no haurà de tenir inferior a H_n .

El valor de H_n , trobat d'aquesta manera variarà naturalment, amb l'elecció del junt n . Si suposem construïts tots els valors de H_n tindrem per el valor màxim d'aquests valors el que H haurà de tenir *com a mínim*. És el que expressem tot escrivint:

$$\text{mín. } H = \text{màx. } H_n$$

Per tal de determinar aquest màxim d' H_n per a la volta representada a la fig.153, hem partit aquesta volta en seccions, el pes de les quals ha estat determinat. Mitjançant aquests pesos i amb una distància polar H' qualsevol, s'ha traçat (amb línies blaves) un polígon

funicular el primer costat del qual és horitzontal. Aquest polígon serveix per trobar les posicions de les resultants d'una sèrie de pesos P . Mirem per exemple H_6 pel junt núm. 6. determinarem la posició de la resultant $R_6 = P_1 + P_2 + \dots + P_6$ dels pesos que actuen a la dreta del junt considerat. Busquem la intersecció d' H i de R_6 en la C_6 , arribem a C_6 i i_6 i descoposem R_6 seguint C_6s i C_6i_6 , cosa que donarà D_6 i H_6 . Donat que el polígon de les forces R_6 es troba entre els radis H' i VI' la resultant R_6 passarà pel punt d'intersecció C_6 , dels esmentats costats H' i VI' . La construcció d' H_6 es podrà fer ràpidament. D'una manera anàloga trobarem els valors d' H_6 per als altres junts i ens convencerem fàcilment que tots aquests valors són més petits que H_6 ¹³ i com a conseqüència:

$$\text{mín. } H = H_6$$

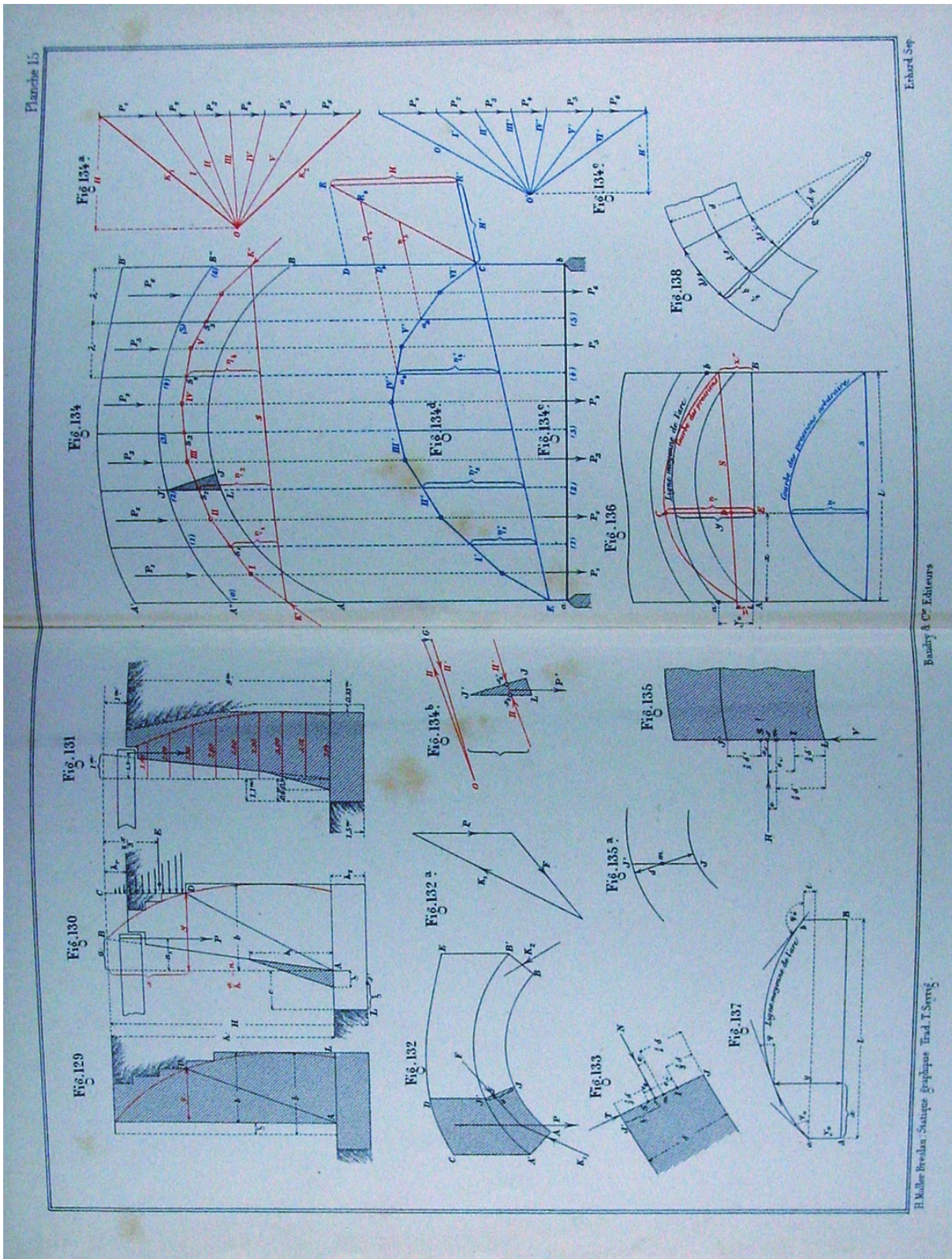
Si ara construïm amb H_6 com a empenta horitzontal una corba de pressions, i trobem que aquesta corba queda totalment a l'interior del nucli central, la volta serà reconeguda estable segons la teoria antiga amb la sola condició que les pressions no excedeixin en cap part el límit admès. Calculem aquestes pressions per a les seccions on la corba de pressions s'aproxima més als límits del nucli central seguint les regles desenvolupades anteriorment. Si aquestes pressions són més grans del que està admès podríem, és cert, -tot seguint sempre l'antiga teoria- trobar una corba de pressions situada més a prop de la línia mitjana, i més *favorable*. Tanmateix, convindrà més canviar la forma de la volta o agafar un material que ofereixi més resistència. L'enunciat tan sovint repetit que la corba de pressions més favorable és, en efecte, *la corba real*, això no és més que una afirmació sense proves, i fins i tot molt improbable. L'autor ha trobat en un nombre de casos bastant gran que ha tingut ocasió d'examinar, que per als arcs elevats, les pressions, calculades partint de la recerca de la corba de pressions mínima, s'aparten molt poc de les pressions calculades segons la teoria de l'elasticitat. L'autor creu, doncs, poder aconsellar amb tota seguretat que s'adopti el mètode que acabem d'exposar per al cas de les voltes sobreelevades.

Encara cal tornaer cridar l'atenció sobre el fet que la corba de pressions mínima no passa necessàriament pel punt s , límit superior del nucli central a la clau.

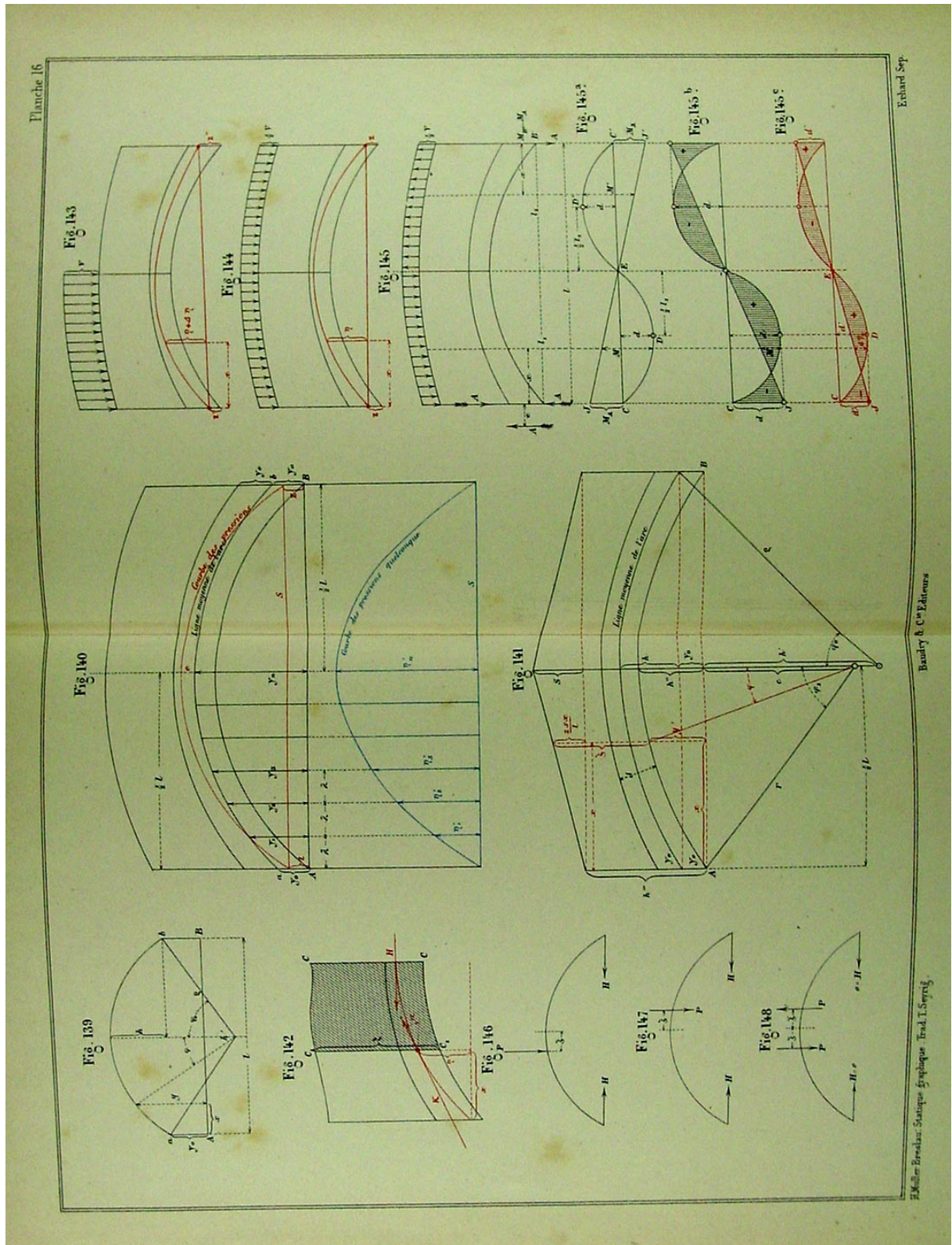
Si, en efecte, (fig. 154) tracem pel punt s de la clau una corba de pressions que toqui el límit inferior del nucli, pot ser que aquesta corba deixi el nucli en un punt encara molt proper de la clau. Això té lloc especialment quan hi ha una càrrega feble a la clau, fortes càrregues als ronyons, i a les voltes de punta d'ametlla. Aleshores cal escollir un altre punt a (fig. 155) situat més avall que s , com a punt de pas de H i determinar (per tanteig) la seva posició, de manera que la corba de pressions, tangent al límit inferior del nucli, toqui igualment al seu límit superior. Pot ser que el punt a coincideixi amb el límit inferior i del nucli, en el junt a la clau.

¹³ H_5 és gairebé igual que H_6 .

Müller- Breslau, planxa 15.



Müller- Breslau, planxa 16.



ANNEX 3.9

Tractat de mecànica de José Marvá y Mayer,

Títol original: Mecánica aplicada a las construcciones,

3 Volums, 2 de text i 1 de làmines.

Codi de barres: 1400 254841 1400 254842 1400 254843

Signatura: R-102/17 R-102/18 R-102/19

PIEZAS CURVAS

1. ARCOS Y ARMADURAS SOMETIDOS A CARGAS ESTATICAS

Cap. 950. Polígono de presiones. Propiedades. – Supongamos que, en magnitud y dirección, son conocidas las reacciones 5 y 6 del arco cuyo eje es A B (fig. 6.^a, lám. 45), y sean 1, 2, 3, ... etc., las fuerzas exteriores aplicadas a los puntos m, n, s ... Tracemos c' 0 igual y paralela a la reacción 6, y las c'd', d'e', ... b'0, paralelas e iguales, respectivamente, a las fuerzas 1, 2, ... 5; tomemos 0 como polo y dibujemos los radios polares 0d', 0e', etc.

Por el punto c de encuentro de a c y 1, tracemos cd paralela al segundo radio polar 0d' hasta su intersección d con 2; por este pnto, la recta de paralela al radio polar 0e', y así sucesivamente; como comprobación, la paralela a 0b' trazada por h debe coincidir con la reacción 5 del apoyo B. El polígono acdehb es uno de los infinitos polígonos funiculares del sistema de fuerzas 1, 2, ... 4; pasa por los puntos a y b, y esta condición sirve para determinarlos.

En una sección transversal CD que pasa por un punto r comprendido entre otros dos n y s de aplicación de fuerzas exteriores, la resultante de las fuerzas 6, 1 y 2 que se hallan a la izquierda es 0e' en magnitud, y de en posición y sentido. En una palabra, en el plano CD causan las fuerzas exteriores una presión cuyo punto de aplicación es x, y cuya línea de acción y magnitud son, respectivamente, de y el radio polar 0e'. Por esta razón se denomina polígono de las presiones el acd...b.

Diremos, pues, que entre todos los polígonos funiculares correspondientes a un sistema de fuerzas aplicadas a un cuerpo o a un sistema de cuerpos, existe uno cuyos lados son las líneas de acción transversal cualquiera, estando representadas las magnitudes de estas resultantes por los radios polares respectivos.

Cuando las fuerzas exteriores 1, 2, etc., están infinitamente próximas, el polígono se convierte en una curva de presiones; la tangente a esta curva en x sería la línea de acción resultante, y el radio polar paralelo a la tangente daría la magnitud.

Cap. 951. El polígono de las presiones da un medio sencillo de calcular el momento de flexión en una sección cualquiera.

Supongamos que A B (fig. 12, lám. 45) es el eje de un arco, cuyo polígono de presiones M E f ... X hemos podido trazar. En una sección CD normal al arco a b d c, la presión tiene la dirección E f y la magnitud 0 c', que llevaremos a m n, siendo m el punto de encuentro de E f con la vertical que pasa por 0. La fuerza m n = 0 c' es la resultante de todas las situadas a la izquierda de C D; de modo que el momento de flexión en esta sección es $\mu = m n X o s$, siendo o s la perpendicular a n m bajada desde o.

Si hallamos la componente horizontal m r de m n, resulta

$$m n = \frac{r m}{\cos n m r} \quad y \quad s o = o m \times \cos m o s,$$

y como los ángulos m o s y n m r son iguales, tendremos $\mu = m r \times o m$, o puesto que m r = 0 z y 0 z no es otra cosa que la componente horizontal de la reacción 0 a' = 5, es decir, el empuje horizontal N, será $\mu = N \times o m$, que nos dice que el momento de flexión, en una sección transversal cualquiera del arco, es igual al producto del

empuje horizontal N por la distancia vertical del centro de gravedad de la sección al polígono o curva de las presiones.

Si el eje de la pieza curva fuese $M E f F X$ en vez de $A B$, las magnitudes m serían cero; de modo que los momentos de flexión μ son nulos en todas las secciones, las cuales se verán sometidas tan sólo a la compresión

$$P = m n \times \text{sen } n m o$$

y el esfuerzo cortante

$$C = m n \times \text{cos } n m o.$$

Diremos, pues, que cuando el eje de la pieza curva coincide con la curva de las presiones, los momentos de flexión son cero, y la pieza trabaja únicamente por compresión y por esfuerzo cortante.

Cuando las cargas están uniformemente repartidas sobre la línea proyección vertical de la pieza curva, la curva de las presiones es una parábola (núm. 423, tomo I).

Cap. 952. El polígono de las presiones presta, como acabamos de ver, grandes servicios; su trazado es el polígono funicular que tiene puntos obligados de paso, entre otros, los de aplicación de las reacciones de los apoyos, y es conveniente estudiar los casos en que el trazado es posible. Recordaremos a este propósito que, según se demuestra en estática gráfica, tres condiciones son necesarias y suficientes para definir un polígono funicular.

Cap. 953. Arcos articulados en los arranques.- Sea $A B$ (fig. 7.^a, lám. 45) un arco articulado en A y B ; por estos puntos deberán pasar las reacciones de los apoyos.

Determinemos la resultante R_1 de las fuerzas 1, 2... 5 y unamos un punto cualquiera de ella, el C , por ejemplo, con los A y B . Si el arco es rígido, puede suponerse en equilibrio bajo la acción de R_1 y de dos fuerzas rígidas según AC y CB , cuyas magnitudes serán dadas por el triángulo mOn construido sobre $mn = R_1$ como base, trazando mO , nO paralelas a CA , CB ; y si se toma como polo el punto O , el polígono funicular correspondiente construido a partir de A , y cuyo primer lado es AC , pasará también por B y será polígono de las presiones.

Pero si trazamos Oa paralela a AB , cualquiera otro polo O' tomado sobre dicha recta dará lugar a un polígono funicular que pasará también por A y B ; de modo que resulta infinito número de polígonos de presión, siendo así que no debe haber más que uno, y es que siendo necesarias tres condiciones para fijar la posición de un polígono funicular, en el caso presente tan solo existen dos, que son las de pasar por los puntos A y B .

En este caso, y en todos aquellos en que las condiciones sean dos, el problema resulta indeterminado, si se resuelve con los recursos de la estática, y hay necesidad de apelar a la teoría de la elasticidad, tomando en consideración las deformaciones que el sólido sufre bajo la acción de las fuerzas.

Que la estática es impotente para resolver el problema, es fácil deducirlo; el equilibrio existiría igualmente si las reacciones estuviesen dirigidas según AC' , BC' y tuviesen por magnitud los lados $O'm$, $O'n$ dados por el triángulo $mO'n$ construido sobre $mn = R_1$ con lados mO' , nO' paralelos a AC' , $C'B$, y lo mismo diremos de otras direcciones cualesquiera entre las infinitas que se obtienen uniendo A y B con un punto de R_1 . Observaremos que Om , $O'm$... tienen por componente F paralela a las fuerzas exteriores la misma cantidad a m , siendo la otra componente N (Oa , $O'a$...) la que varía. Además, las reacciones de los dos apoyos dan igual componente N , es decir, empujes iguales.

Para arcos circulares articulados únicamente en sus extremos, cuando estos se hallan en una línea horizontal (fig. 5.^a, lám. 45) y la carga hr esté uniformemente repartida en proyección horizontal, a razón de p kilogramos por unidad lineal, el empuje N en los arranques tiene por valor, según dedujo M Bresse,

$$N = \frac{pl^2}{2f} \times \frac{1 - \frac{1}{7} \frac{f^2}{l^2}}{1 + \frac{15}{8} \frac{I}{wf^2}}$$

siendo $2l = AB$, $f = Ce$, w el área de la sección transversal del arco, e I su momento de inercia. Como primera aproximación del valor N se puede prescindir del segundo factor, lo que equivale a suponer una articulación en C (núm. 958).

Cuando la carga p por unidad lineal está repartida a lo largo de la fibra media ACB del arco,

$$N = pr \alpha \times \frac{l}{2f} \times \frac{1 - \frac{3f^2}{7l^2}}{1 + \frac{15I}{8wf^2}}$$

representando r el radio del arco y α el ángulo en el centro.

Cap. 954. Arcos parabólicos.- Supongamos un arco ACB articulado en los arranques (fig. 13, lám. 45) y sometido a cargas hr uniformemente repartidas, a razón de p kilogramos por cada metro de longitud AB = L de proyección horizontal.

El polígono funicular correspondiente al sistema de cargas supuesto es una parábola AcB (fig. 5.^a lám. 9.^a), en la cual $hc = ct$, y las tangentes tA, tB son paralelas a los radios polares extremos OK, OH (núms. 423, 424 y 425, tomo I); además, es A cB polígono de los momentos de flexión de la viga recta proyección de AB, y el momento máximo hc es igual a $\frac{1}{8} p L^2$, siendo L la longitud total, o $\frac{1}{8} p l^2$ si llamamos l a la semiluz, de modo que sea $2l = L$.

Construyamos el eje del arco ACB (fig. 13, lám. 45) como si fuese el polígono funicular de las cargas dadas, pasando por los puntos A y B, a cuyo efecto haremos $ab = pL$; situaremos el polo O a k unidades de ab en la perpendicular Oc a esta recta; trazaremos AD, BD paralelas a los radios polares Oa, Ob, y tomando DC = Ce se dibujará la parábola que pasa por A, C y B (núm. 584, tomo I).

Según lo demostrado en el núm. 951, los momentos de flexión μ en las secciones del arco parabólico ACB son cero. No hay más que esfuerzos cortantes C y compresiones P; la misma parábola ACB, eje del arco, es la curva de presiones, y para obtener el valor de P en una sección cualquiera mn, no habrá más que trazar la tangente ts y el radio polar paralelo Ox, el cual representará la magnitud de la compresión en s con arreglo a la correspondiente escala.

Las reacciones R_2 en A y en B son iguales y están representadas por Oa, Ob; se descomponen en una fuerza vertical $F = ac = pl$ y un empuje horizontal N, cuyo valor es $N = Oc = ac \times \text{tg } Oac$; y como, llamando f a la flecha C e,

$$ac = pl \quad \text{tg. } Oac = \text{tg. } ADe = \frac{Ae}{eD} = \frac{l}{2f} \quad \text{será} \quad N = \frac{pl^2}{2f} \quad (1).$$

Es el mismo resultado obtenido en el núm. 826, si se observa que allí l representa una magnitud doble de la que le asignamos ahora.

$$\text{La reacción } R_2 \text{ tendrá por valor} \quad R_2 = Oa = \sqrt{Oc^2 + ca^2} = pl \sqrt{1 + \frac{l}{4f^2}} \quad (2).$$

1. BOVEDAS CILINDRICAS O DE CAÑON SEGUIDO

Generalidades.

1077. Resolución general del problema.- Las bóvedas son unos macizos a los cuales se les puede aplicar cuanto queda dicho en los núm. 997 a 999. El problema mecánico se resuelve del mismo modo que en los muros (núms. 1004 a 1029); se parte de un cierto perfil transversal de bóveda, cuyas dimensiones se determinan preliminarmente por medio de fórmulas empíricas (núms. 1082 y siguientes), y se comprueban las condiciones de estabilidad y resistencia que tienen, modificando el perfil en el caso de que estas no sean satisfactorias.

Las bóvedas son, generalmente, simétricas, y están simétricamente cargadas con respecto al plano vertical que pasa por su eje. Para el cálculo se toma únicamente media bóveda comprendida entre uno de los arranques y el plano vertical medio, o junta de clave, ideal AB (figura 25, lám. 51). Si N es la resultante de las presiones en la clave, la acción de cada semibóveda sobre la inmediata puede ser substituida por la reacción N en el plano AB, y por esto en las operaciones de comprobación del equilibrio y resistencia de la semibóveda ABDC se parte del conocimiento de la reacción N, que se denomina empuje en la clave.

Componiendo N con el peso P de la dovela 1, obtendremos la presión ab en la junta de las dovelas 1 y 2 y su punto de aplicación o centro de presión m. La resultante ab, compuesta con P', peso de la dovela 2, dará bc,

presión en el plano de junta de las dovelas 2 y 3, y continuando estas operaciones obtendremos el polígono de presiones Sabcdy y el polígono de centros de presión Smnr, los cuales se convertirán en curvas que reciben estos mismos nombres cuando las dovelas 1, 2, etc..., sean infinitamente pequeñas por la escasa separación de los planos de junta.

El polígono de presiones puede en algunos casos quedar situado parcialmente fuera del espesor de la bóveda, como se ve en acdehb (figura 6.^a, lám. 45, núm. 950).

Substituyendo la presión Q en el arranque CD, por su igual y contraria reacción en este plano, podremos suponer (fig. 26, lám. 51) que la semibóveda ABDC está en equilibrio en el espacio, bajo la reacción Q en el arranque, del empuje N en la clave y de los pesos P, P', etc., o de su resultante R₁. El equilibrio exige que las tres fuerzas N, Q y R₁ concurren en un punto H.

Si sobre ab = R₁ se construye el triángulo de fuerzas abc por medio de las rectas ac, bc paralelas respectivamente a Hu, HS, obtendremos las magnitudes Q = ac y N = cb. La componente Q paralela a N es la misma fuerza N, y la componente vertical es R₁; esto equivale a decir que al arranque se transmiten íntegros el peso R₁ de la semibóveda y el empuje N en la clave. El peso R₁ contribuye a la estabilidad

Del estribo o del apoyo de la bóveda, mientras que el empuje se opone a ella.

Las magnitudes N y Q dependen, a igual valor y longitud de R₁, de la posición que se asigne a los puntos de aplicación respectivos S y u, pues de ellos depende la posición del punto H, la dirección Hu y la de su paralela ac, lado del triángulo construido sobre ab = R₁. El polígono de presiones ha de pasar por S y u, y en su trazado y forma influyen también la magnitud de N y la posición de S y u; de modo que a cada situación diferente de estos puntos corresponde un polígono o curva de presiones diferente también.

1078. Modo de fractura de las bóvedas cilíndricas.— Las experiencias realizadas para descubrir el modo de fractura de las bóvedas han demostrado que las de medio punto se rompen como indica la figura 1.^a (lámina 52), abriéndose por el intradós en la clave y en los arranques, mientras que en los riñones de la bóveda (bb', cc'), situados próximamente a mitad de la altura de la clave sobre los arranques, aparece la grieta en el trasdós. Los estribos, si son de espesor deficiente, giran al exterior, obediendo al empuje N. De modo igual se rompen las bóvedas carpaneles y elípticas. En las bóvedas escarzanadas (fig.2.^a, lám. 52) se abre la clave por el intradós y los arranques por el trasdós. Las bóvedas ojivas, por el contrario, se abren por el trasdós en la clave y por el intradós en los riñones (b', c', fig.3.^a, lám.52).

Los planos bb', cc' (figs. 1.^a a 3.^a, lám. 52) se llaman juntas de fractura, porque en ellas se opera esta, a causa de alcanzar su máximo valor la presión y la extensión por unidad superficial que sufren los materiales. Se deduce de este examen que la curva de los centros de presión, en las bóvedas de medio punto, se aproxima al trasdós en la clave y en los arranques, y al intradós en las juntas de fractura (fig.1.^a, lám.52), mientras que en las ojivales sucede todo lo contrario. En las bóvedas escarzanadas se acerca al trasdós en la clave y al intradós en los arranques, que hacen de juntas de fractura.

1079. Determinación de la junta de fractura.— Si conservando el punto S de aplicación del empuje en la clave (fig. 29, lám. 51) se varía la posición del punto u en el arranque, obtendremos, para una cierta situación de este punto, una curva de presiones SFu tangente al intradós en un cierto punto F, en el cual se rompería la bóveda por aplastamiento, de ser exacta la posición S, puesto que allí la presión por unidad superficial es un máximo, como que el centro de presión está en la arista extrema de la junta (núm. 993). El plano de junta FH que pasa por F es el de fractura correspondiente a la posición de S en la clave.

Cambiando de lugar S, y repitiendo las operaciones, obtendríamos nuevas juntas de fractura, pero todas ellas poco distantes entre sí; de modo que los puntos M, L, extremos, de tangencia de las diversas curvas de presiones con el intradós, forman una región en que la fractura de la bóveda, caso de verificarse, tendrá lugar, y la verdadera junta de fractura pasará por uno de los puntos de esta región LM. He aquí el procedimiento de MM. Lamé y Clapeyron para determinar la junta de fractura:

Tómese una cierta junta plana a (fig.4.^a, lám. 52), trácese la tangente al intradós en a y la resultante A del peso y cargas que actúan entre esta junta y la clave: la intersección de estas líneas da un punto a'.

Hágase igual operación para otras secciones b, etc..., con lo cual obtendremos nuevos puntos b',.... Únanse todos ellos por medio de una curva a', b', ..., y por el punto de intersección c' de esta curva con la horizontal mc' que pasa por el punto extremo m de la clave, trácese la tangente c'c al intradós; por el punto c pasa la junta de fractura.

El fundamento del método es sencillo. Consideremos la posición extrema mc' de la reacción en el plano de la clave: esta reacción, la de un plano de junta cualquiera, a por ejemplo, y el peso A del trozo de bóveda comprendido por ambas, han de cortarse en un punto. Ahora bien; la dirección de la reacción en las juntas a, b, etc., se obtiene por la tangente a la curva de las presiones; y como en la junta de fractura esta curva es tangente al intradós, se deduce que la tangente del intradós en la junta de fractura, la resultante de las cargas comprendidas entre esta junta y la clave y la reacción de esta última, han de concurrir en un punto. Si, pues, la curva a' c' b' es

el lugar geométrico de las intersecciones de las tangentes al intradós con las resultantes de las cargas, el punto c' es el de concurrencia de estas, con la reacción mc' en la clave, y por tanto, la tangente c'c determinará la junta de fractura.

1080. Método práctico de determinación de la junta de fractura.- Generalmente no se sigue el procedimiento anterior, sino que se fija desde luego la posición de la junta de fractura del siguiente modo:

Bóvedas de medio punto, elípticas o carpaneles (fig. 5.^a, lám. 52).- Por el punto medio A de la altura o flecha ON de la bóveda trácese la horizontal BC. Las juntas de fractura serán BD y CM. Los ángulos BOR y COR sonde 60°.

Bóvedas rebajadas.- Si el ángulo en el centro BOC es igual o menor que 120° (fig. 6.^a, lám. 52), las juntas de factura estarán en los arranques BD, CM. Cuando el ángulo en el centro sea mayor que 120° (fig. 7.^a, lám. 52), se terminará el arco de intradós SBE y se operará como en el primer caso, esto es, se tomará A punto medio de OE y se trazará BO. Las juntas de fractura serán las BD.

Según M. E. Roy, siempre que el ángulo FOM en el centro (fig. 8.^a, lám. 52) sea mayor que 120°, las juntas de factura BD, CH, estarán en la horizontal BC distante de la línea FM de los arranques la cantidad AN dada por la proporción

$$\frac{AN}{NE=f} = \frac{NE=f}{FM=L}$$

es decir, que si la flecha es $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n}$ de la luz L, será AN igual a $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n}$ de la flecha NE = f.

He aquí la situación de las juntas de fractura, según algunos ingenieros, definida por el ángulo que forman con el plano horizontal:

Bóvedas	Autores		
	Gauthey.	Reynaud.	Morandière.
Medio punto.	27°	30°	30°
Carpaneles rebajadas al 1/3.	45°	50°	45°
Carpaneles rebajadas al 1/4.	54°	50°	50°
Escarzanas rebajadas al 1/5 o más.	Plano de los arranques.		

1081. Comprobación del equilibrio y resistencia de una bóveda. Hipótesis fundamentales.- Las condiciones de estabilidad y resistencia que ha de satisfacer un macizo de mampostería son diferentes, según que se prescindan en el cálculo de la adherencia de los morteros (números 997 y 998), o que se tenga en cuenta. Por esta razón consideraremos separadamente los siguientes casos:

1.º No se aprecia la adherencia de los morteros. La bóveda se considera formada, para los efectos mecánicos, por dovelas simplemente superpuestas, capaces únicamente de resistir compresiones, pero no esfuerzos de extensión, porque las dovelas se separarían en los planos de junta, que son verdaderas soluciones de continuidad.

En este caso se encuentran las bóvedas de sillería o ladrillo tomado con mortero ordinario.

2.º Se tiene en cuenta la adherencia de los morteros y su resistencia a la tracción, así como la de los materiales que une. La bóveda se porta como un arco metálico y puede resistir esfuerzos de extensión, aunque moderados.

Tal sucede con las bóvedas de mampostería hormigón o ladrillo, cuando se emplea el cemento o morteros de cemento.

FÓRMULAS EMPÍRICAS.- BÓVEDAS DE PUENTES Y TÚNELES. BÓVEDAS CON GRANDES SOBRECARGAS DE TIERRAS

1082. Llamaremos:

L = 2l = luz de la bóveda.

r = radio de curvatura del intradós en la clave.

f = flecha o montea.

e = espesor de la bóveda en la clave, contada normalmente al intradós.

e' = ídem íd. En la junta de fractura.

e'' = ídem íd. En los arranques.

c = ídem del estribo en los arranques.

c' = ídem íd. En su base.

h = altura de la sobrecarga de tierra por encima del trasdós. En la clave¹.

h' = ídem del estribo desde la base hasta el arranque de la bóveda.

H = ídem total de la obra desde el plano superior de la sobrecarga de tierras hasta la base del estribo; de modo que $H = h + e + f + h'$.

1083. Espesor en la clave.- Bóvedas de medio punto. En ellas es $r = l = \frac{1}{2} L$.

Caso de no haber sobrecarga de tierras:

AUTORES		FÓRMULAS
Perronet		$e = 0,325 + 0,035 L$
Gauthey	$L < 16$	$e = 0,33 + 0,021 L$
	$16 < L < 32$	$e = 0,042 L$
	$L > 32$	$e = 0,67 + 0,021 L$
Léveillé		$e = 0,33 + 0,033 L$
Lesguillier		$e = 0,10 + 0,20 \sqrt{L}$
Déjardin		$e = 0,30 + 0,05 L$
Dupuit		$e = 0,20 \sqrt{L}$
Ingenieros rusos y alemanes		$e = 0,43 + 0,05 L$
E. Roy		$e = 0,30 + 0,04 L$
Michon		$e = 0,40 + 0,04 L$
Croizette – Desnoyers.	Puentes de carretera	$e = 0,15 + 0,15 \sqrt{L}$
	Punetes de vía férrea	$e = 0,20 + 0,17 \sqrt{L}$

Cuando haya sobrecarga de tierra, de altura h , los espesores dados por las fórmulas anteriores se aumentarán en la cantidad $0,02h$. Si la sobrecarga no es de tierra se calculará su equivalente en este material y se determinará h .

Bóvedas escarzanas:

AUTORES		FÓRMULAS
Léveillé		$e = 0,33 + 0,033 L$
Lesguillier		$e = 0,10 + 0,20 \sqrt{L}$
Déjardin	Bóveda rebajada al 1/3 ($f = 1/3 L$).	$e = 0,30 + 0,07 r$
	Bóveda rebajada al 1/6 ($f = 1/6 L$).	$e = 0,30 + 0,05 r$
	Bóveda rebajada al 1/8 ($f = 1/8 L$).	$e = 0,30 + 0,035 r$
	Bóveda rebajada al 1/10 ($f = 1/10 L$).	$e = 0,30 + 0,02 r$
Ingenieros rusos y alemanes		$e = 0,43 + 0,10 r$
Dupuit		$e = 0,15 \sqrt{L}$
Michon	Cuando $f/L \geq 1/3$	$e = 0,40 + 0,08 r$
	Cuando $f/L < 1/3$	$e = 0,40 + 0,04 r$

¹ Si la sobrecarga es de otra especie, se buscará su equivalente en peso de tierra y se determinará h .

Puentes de carretera:

AUTORES		FÓRMULAS
Croizette – Desnoyers.	Bóveda rebajada al 1/4 ($f = 1/4 L$).	$e = 0,15 + 0,15\sqrt{2r}$
	Bóveda rebajada al 1/6	$e = 0,15 + 0,14\sqrt{2r}$
	Bóveda rebajada al 1/8	$e = 0,15 + 0,13\sqrt{2r}$
	Bóveda rebajada al 1/10	$e = 0,15 + 0,12\sqrt{2r}$
	Bóveda rebajada al 1/12	$e = 0,15 + 0,11\sqrt{2r}$

Puentes de vía férrea:

AUTORES		FÓRMULAS
Croizette – Desnoyers.	Bóveda rebajada al 1/4 ($f = 1/4 L$).	$e = 0,20 + 0,17\sqrt{2r}$
	Bóveda rebajada al 1/6	$e = 0,20 + 0,16\sqrt{2r}$
	Bóveda rebajada al 1/8	$e = 0,20 + 0,15\sqrt{2r}$
	Bóveda rebajada al 1/10	$e = 0,20 + 0,14\sqrt{2r}$
	Bóveda rebajada al 1/12	$e = 0,20 + 0,13\sqrt{2r}$

Si hay sobrecarga se aumentarán los espesores en la cantidad $0,02h$, como para las bóvedas de medio punto.

Bóvedas elípticas:

AUTORES		FÓRMULAS
Ingenieros rusos y alemanes		$e = 0,43 + 0,10r$
Dupuit		$e = 0,20\sqrt{L}$
Croizette – Desnoyers.	Puentes de carretera	$e = 0,15 + 0,15\sqrt{2r}$
	Puentes de vía férrea	$e = 0,20 + 0,17\sqrt{2r}$
Déjardin		$e = 0,30 + 0,07r$
E. Roy		$e = 0,30 + 0,005r$

Para sobrecargas de tierras se aumentará al espesor la cantidad $0,02h$.

Bóvedas carpaneles:

Saint – Guilhem	$e = 0,30 + 0,07r$
Si hay sobrecarga de tierra	$e = 0,30 + 0,07r + 0,02h$
E. Roy	$e = 0,30 + 0,04r$
Déjardin	$e = 0,30 + 0,05r$

Se añadirá a e la cantidad $0,02h$ cuando haya sobrecarga de tierra.

Bóvedas peraltadas, ojivales o elípticas:

$$\text{Croizette – Desnoyers} \dots\dots\dots e = 0,15 + 0,20 \frac{L}{2\sqrt{f}}$$

Se aumentará e en 0,02h cuando haya sobrecarga de tierra de altura h.

Bóvedas oblicuas:

$$\text{Résal} \dots\dots\dots e_1 = \frac{e}{\sqrt{\text{sen } \alpha}}$$

e_1 = espesor en la clave de la bóveda oblicua.

e = ídem íd. íd. recta, cuyo perfil de intradós sea igual al del plano oblicuo de cabeza de la bóveda oblicua.

α = ángulo agudo que forma el plano de cabeza con el eje de la bóveda, medida de la oblicuidad.

Fórmula de Planat para toda clase de bóvedas:

$$e = 0,333 + \left(0,023 + 0,10 \times \frac{f}{L} \right) r ;$$

r es el radio de curvatura del intradós en la clave, f la flecha y L la luz. Es aplicable esta fórmula a las bóvedas de medio punto, escarzanas, carpaneles y elípticas, debiendo aumentarse e en 0,02h para el caso de una sobrecarga de tierra de altura h.

Fórmula de E. Aragon².- Bóvedas cilíndricas de todas formas. Espesor e en la clave.

Tomando en consideración la importancia de las cargas, Aragon hace depender el espesor de la clave de un número m' que corresponde a la clasificación siguiente:

$m' = 1$. Bóvedas ligeras que no soportan más que su propio peso y una sobrecarga ligera, como sucede a los techos de un piso sobre el cual no hay otro.

$m' = 2$. Bóvedas de mediana resistencia empleadas en los edificios que soportan el peso de un piso superior. (Por ejemplo, bóvedas de sótanos.)

$m' = 3$. Bóvedas fuertes (puentes de carretera, túneles, etc.) expuestas a grandes cargas, pero que produzcan choques y vibraciones de débil intensidad.

$m' = 4$. Bóvedas muy resistentes, para puentes de vía férrea, expuestos a grandes cargas y vibraciones intensas.

El espesor e en la clave, puede calcularse por la fórmula

$$e = \left(0,1 \times m' + \frac{L}{100 f} \right) (1 + 0,1L) \quad (a).$$

Ejemplo: Bóveda muy resistente (clase 4.^a; $m' = 4$) rebajada al 1/3

$$\text{Luz} = L = 6 \text{ m.} \quad \gg \quad \text{Flecha} = f = 2 \text{ m.}$$

$$e = \left(0,1 \times 4 + \frac{6}{100 \cdot 2} \right) (1 + 0,16) = 0^m,688.$$

Aragon cree preferible el empleo de la fórmula (a) al de las de Perronet, Leveillé, Lesguillier, etc. (núm. 1083), cuyos resultados son poco concordantes.

² Ponts et ouvrages en maçonnerie.- 1909.

COMPROBACIÓN DE LA ESTABILIDAD Y RESISTENCIA DE UNA BÓVEDA CUANDO SE PRESCINDE DE LA INFLUENCIA DE LOS MORTEROS

1093. Orden de las operaciones.- Han de ejecutarse, por su orden, las operaciones siguientes.

1.^a Trazado del perfil transversal de la bóveda, intradós, trasdós y estribos, valiéndose para determinar los espesores de las fórmulas empíricas correspondientes (núms. 1082 y siguientes).

2.^a Cálculo de las cargas (peso propio de la bóveda y sobrecargas permanentes o accidentales). Se considera, como en los muros, una longitud de bóveda de 1 metro.

3.^a Trazado del polígono de las presiones y comprobación de las condiciones de estabilidad y resistencia que, según vimos en el número 998, son:

- (a) (Estabilidad) La presión ad en una junta (fig. 30, lám. 51), ha de formar con la normal a esta un ángulo α menor que el ángulo ϕ de rozamiento de piedra sobre piedra.
- (b) (Estabilidad y resistencia) El polígono de los centros de presión ha de estar comprendido en el espesor de la bóveda, y en cuanto sea posible es conveniente que se halle situado en el tercio del espesor del macizo.
- (c) (Resistencia) La presión máxima por unidad superficial en una junta cualquiera AB, no ha de ser mayor que el coeficiente R' de trabajo por compresión correspondiente al material que se emplee. Si llamamos V a la componente ac de la compresión ad, deberá ser (número 1028):

$$p = \frac{V}{e} \left(1 + \frac{6x}{e} \right) \leq R'$$

e = espesor AB de la junta.

x = distancia Oa del centro de presión al punto medio O de la junta AB.

Ya hemos dado en la nota del núm. 999 los valores de R' . He aquí los que tiene en algunos puentes y viaductos:

NOBRES DE LOS PUENTES Y VIADUCTOS	LUZ de los arcos.	ALTURA total de la obra.	ESPESOR de la pila en los arranques	COEFICIENTE DE TRABAJO POR COMPRESIÓN R' KILOGRAMOS POR CM^2			
				En la clave.	En los arranques.	En el basamento.	En el cimiento.
	Metros.	Metros.	Metros.	Kilogramos.	Kilogramos.	Kilogramos.	Kilogramos.
Puente de Neuilly	39,00	14,65	4,20	12,78	11,68	11,68	7,69
Puente de la Concordia	31,18	12,96	2,92	17,00	9,96	11,37	5,16
Puente de la Trinidad (Florenzia)	29,19	9,00	7,88	15,46	3,95	4,65	5,16
Puente del Alma	43,00	11,50	4,60	12,47	9,07	9,07	7,22
Puente de Austerlitz	32,16	11,84	3,10	11,61	8,42	8,98	6,31
Puente de Luis Felipe	32,00	10,47	4,00	9,70	7,52	6,43	4,81
Puente de Cinq-Mars, sobre el Loire	20,00	11,20	3,50	5,23	5,47	5,76	3,79
Viaducto de Dinan	16,00	41,30	4,00	4,66	6,50	9,50	8,80
Viaducto de Port-Launay	22,00	52,50	4,80	4,83	5,84	9,12	7,29
Viaducto de Pont-de- Buis	18,00	40,00	4,00	4,37	5,09	7,86	6,06
Viaducto de Morlaix	15,00	58,00	4,25	4,25	4,35	7,50	8,12

En modernas obras de arte para vías férreas, las bóvedas se han calculado haciendo uso de los coeficientes de trabajo siguientes:

MORTERO EMPLEADO	Luz de la bóveda.	R' en Kilogramos por cm ² .
	Metros.	
De cal hidráulica	6 a 15	6 a 13
	15 a 20	13 a 16
De cemento	20 a 30	16 a 19
	42	23

La adherencia de los morteros ordinarios a la piedra suele estimarse en 1 a 2 Kilogramos por centímetro cuadrado, y la del mortero de cemento con la piedra en 5 a 6 Kilogramos por centímetro cuadrado.

1094. Trazado del polígono de las presiones. Método de M. Méry. En cuanto sigue, consideraremos únicamente un metro de longitud de bóveda, o sea la parte comprendida por dos planos paralelos a los de cabeza distantes una unidad lineal, porque de verificarse el equilibrio y resistencia en esta parte se verificará en el resto. El trazado del polígono de presiones se funda en el conocimiento del empuje N en la clave (núm. 1077), en dirección, magnitud y punto de aplicación.

En la magnitud de N influye su dirección y la situación de los puntos de aplicación de N y de Q; su dirección, porque en el triángulo de fuerzas abc (fig. 26, lám. 51) la longitud bc = N depende del ángulo cba; y la posición de los puntos de aplicación en la clave, y en el plano CD, de las reacciones N y Q (puntos S y u), porque siendo de grandes dimensiones, en general, los espesores SS', uu' (fig. 28, lám. 51) de los planos de junta en las bóvedas, de elegir los puntos S y u o los S' y u' resultan triángulos de fuerzas HAB, H'A'B' muy diferentes en cuanto a la magnitud de los catetos horizontales AB, A'B', representantes de los empujes N en la clave.

La dirección del empuje N depende del conocimiento del punto C de aplicación de la presión en la clave y en dos juntas cualquiera A y B (fig. 14, lám. 52); porque aplicando el procedimiento explicado y demostrado en el núm. 957, siendo H y T las resultantes de las cargas en las partes de bóveda AC, CB, y h y t sus distancias a

los puntos A y B, se unirán los A y C, se dividirá AC en partes DC, AD, tales que $\frac{CA}{CD} = \frac{H \times h}{T \times t}$ y uniendo D y

B y trazando Ca paralelamente a BD, obtendremos la línea de acción del empuje N. Cuando la bóveda es simétrica, y simétricamente cargada, de modo que siendo A y B los arranques, se verifica H = T, h = t, el punto D coincide con A, y Ca es paralela a la línea AB de los arranques, que es hora horizontal, por lo que también lo será N.

Deducimos de cuando dejamos expuesto que el problema de la comprobación del equilibrio y resistencia de una bóveda de perfil conocido es indeterminado, porque se funda en el conocimiento del polígono de las presiones; y al trazar este polígono, para lo cual hay que partir de la posición y magnitud del empuje N en la clave, se obtienen resultados muy diferentes.

Para que la indeterminación cese, es preciso conocer en la semibóveda considerada dos puntos de paso del polígono de presiones, o sea los centros de presiones en dos juntas, en la clave y en otro plano cualquiera, porque entonces se podrá determinar, conforme hemos visto anteriormente, la posición y magnitud N.

Para salvar la indeterminación supone M. Méry, fundado en las experiencias de fractura de bóvedas (núm. 1078), que el centro de presión del trasdós, y que en la junta de fractura CD, es s, a la distancia

$$Ds = \frac{1}{3} DC \text{ del intradós.}$$

Admitida esta hipótesis, y después de convertir las sobrecargas de toda especie en sobrecarga de mampostería NXZA (núms. 1090 y 1091), y de limitar la parte correspondiente a cada dovela por medio de los planos verticales CC', LL', etc., se determinarán los pesos de los volúmenes EBZF', EFF'L'LH, etc., que representaremos por los números 1, 2, ... 5, y los centros de gravedad de dichos volúmenes, a los cuales se considerarán aplicados dichos pesos.

Puesto que se toma en consideración la unidad lineal de bóveda, los pesos 1,2 ...5 pueden estar representados por las áreas de los polígonos F'B, L'E, etc.

El centro de gravedad de estas figuras se determinará por los procedimientos conocidos³.

³ Si se trata de la dovela ABCD (fig. 15. lám. 52), se substituirán los lados curvos de intradós y trasdós por las cuerdas respectivas; se trazará la diagonal BD y las medianas Ac, Cc de los triángulos ABD, CBD que tienen

común el lado BD. Tomando $cb = \frac{1}{3} Ac$, $cd = \frac{1}{3} Cc$, uniendo b y d y determinando el punto a de modo

que ba : ad :: dm : bm, se obtendrá en a el centro de gravedad del trapecio.

Conocida la magnitud y posición de los pesos 1,2 5, se hallará analítica o gráficamente la resultante R_1 de los 1, 2 y 3, comprendidos entre la junta de clave y la de fractura CD, determinada preliminarmente del modo indicado en los núm. 1079 y 1080. Eligiendo el procedimiento gráfico para la determinación de R_1 se construirá el polígono P'S de fuerzas, y eligiendo un polo cualquiera O' se trazará el polígono funicular a'b'c', y se obtendrá, prolongando los lados extremos, el punto d' de paso de la resultante.

Suponiendo que la bóveda es simétrica y está simétricamente cargada con respecto al plano vertical medio BZ, el empuje en la clave es horizontal, siendo su línea de acción a H_1 . Uniendo H_1 y s y haciendo $H_1E_1 = R_1$, el triángulo $H_1E_1F_1$ da en F_1E_1 el valor del empuje N en la clave.

Una vez determinado el valor de N, llevemos su valor lineal de P'a O; y tomando el punto O como polo, unámosle con los de división de las fuerzas 1, 25 del polígono de fuerzas P'F''. Las rectas Ox, Oz, OS, etc., representan en magnitud y en dirección las fuerzas de presión que actúan en los planos de junta FE, LH, CD, etc.; y, en efecto, Ox es la resultante de las fuerzas N y 1, la recta Oz es la resultante de Ox y 2, o de las fuerzas N, 1 y 2, y así sucesivamente.

El trazado del polígono de presiones es ya fácil. Por el punto c de intersección de N y 1 se trazará la recta cd paralela al radio polar Ox hasta que encuentre en d a la fuerza 2; por el punto d se trazará de paralela a Oz hasta su intersección en e con las fuerzas 3, y continuando la operación se obtendrá el polígono de presiones acdepu, que no es más que el polígono funicular correspondiente al de fuerzas P'F'' y polo O. Los centros de presión en los diversos planos de junta son a, o, f, s, r y l; uniendo estos puntos se obtendrá el polígono de centros de presión.

Como comprobación del trazado, el lado ep del polígono de presiones debe pasar por el punto s de la junta de fractura, a la distancia $Ds = \frac{1}{3}DC$ del intradós.

Si se traza la curva mnhl (línea de puntos) que pasa por los puntos medios de los planos de junta, se encuentra que el polígono de presiones la corta en un punto n situado entre la clave y la junta de fractura, como tiene que ser, puesto que se ha partido de la hipótesis de ser centros de presión en aquellos planos, respectivamente, los puntos a, s que están situados a distinto lado de la línea media mn. Resulta, pues, que los centros de presión se aproximan al trasdós desde n hacia el arranque, lo cual demuestra que en la región an la compresión máxima por unidad superficial tiene lugar en el trasdós, y en la parte np en el intradós. En la junta que pasase por n la presión se reparte de modo uniforme, porque coinciden el centro de presión y el de gravedad.

El polígono de presiones se puede continuar dentro del estribo NV. Es el caso del número 1065, siendo aquí v el punto de aplicación, pu la dirección y OF'' la magnitud de la fuerza que obra en la hilada superior, análoga a la F de las figuras 22 y 23 (l'm. 50).

1095. El trazado del polígono de presiones, según lo hemos explicado en el número anterior, no es muy exacto, porque al dibujar cada uno de los lados se parte de un punto del último lado construido, los errores se suman, y en las inmediaciones del arranque de la bóveda pueden resultar desviaciones notables de dicho polígono.

Para evitar estos errores, se determina la posición de las resultantes 1' (dovela ABEF) (fig. 27, lám. 51), 2' (parte ABHL de bóveda), 3' (parte ABDC) correspondientes a las cargas que actúan en las partes de bóveda comprendidas entre la junta de clave y los diversos planos de junta. La fuerza 2' es igual en magnitud a $1 + 2 + 3 = 1 + 2 + 3$.

Por los puntos c, M, N, etc., de intersección de N con 1', 2', 3', etc., se trazarán las rectas cd, Me, Np, etc., paralelas a los radios polares Ox, Oz, OS, etc., y así se obtendrá el polígono de presiones cdep.

1096. Regla de Navier para determinar el empuje en la clave.- Navier ha dado una fórmula práctica muy sencilla para determinar el valor del empuje N en la clave, correspondiente a una bóveda de longitud de eje igual a 1 metro. Llamando R_2 la carga total por metro cuadrado que actúa sobre el intradós en la clave (peso propio, sobrecargas permanentes y accidentales) y r el radio de curvatura del intradós en este punto, será:

$$N = R_2 r.$$

Si e es el espesor de la bóveda en la clave, h la altura de la sobrecarga de tierra en este punto y k la sobrecarga por metro cuadrado, y llamando t' y t a los pesos del metro cúbico de mampostería y de tierra, tenemos

Cuando la figura sea la ABEFCD (fig. 16, lám. 52) se hallarán por el método que acabamos de explicar los centros de gravedad g y g' de los trapecios EC, AC; se unirán g y g' y los puntos a y b que resultan de tomar sobre las verticales que pasan por g y g' magnitudes lineales ga, g'b proporcionales a las áreas de AC y EC. El punto G de intersección de gg' y ab es el centro de gravedad buscado.

$$R_2 = et' + ht + k$$

$$N = (et' + ht + k)r$$

El valor N obtenido por esta fórmula puede servir para hacer el trazado de la curva de presiones, según se ha explicado en el número 1094.

1097. Reglas prácticas de M. Kleitz para la comprobación de la estabilidad y resistencia de una bóveda.

1.^a Se tomará como punto de paso del polígono de presiones el situado en el tercio superior de la junta de clave.

2.^a En la junta de fractura se situará el centro de presión a una distancia igual a $\frac{1}{4}$ del espesor de esta junta en las bóvedas de pequeña luz, y a $\frac{1}{5}$ en las grandes.

3.^a La parte de bóveda situada por debajo del plano de fractura se considerará como una continuación del estribo o pila, y la estabilidad de este conjunto, estribo y arranques, se determinará como si se tratase de un monolito; pero el empuje horizontal a que se halla expuesto se supondrá ser, no el deducido de la hipótesis de un centro de presiones en el plano de fractura tal como marca la regla 2.^a, sino el que resultaría de tener en cuenta toda la semibóveda y de hacer pasar la curva de presiones por el punto medio del arranque.

4.^a En dos arcos contiguos se combinará el máximo empuje de uno con el mínimo del otro para colocarse en las condiciones más desfavorables.

1098. Observaciones al método de M. Méry. – Si el polígono de presiones trazado según la hipótesis de ser puntos de paso obligados, el a en el tercio superior de la junta de clave (fig. 12, lám.52) y el s en el tercio inferior de la junta de fractura, no satisficiese las condiciones de equilibrio y resistencia expuestas en los números 998 y 1093, no por esto podrá decirse que la bóveda sometida a comprobación es incapaz de cumplir dichas condiciones. En efecto; variando la posición de los puntos a y s se altera el valor del empuje N y la posición del polígono de presiones; de modo que antes de desechar un perfil de bóveda deberían, en rigor, ensayarse todas las posiciones admisibles de a y s, y, por lo tanto, todos los posibles polígonos de presiones, para ver si alguno satisfacía las condiciones exigidas.

El verdadero carácter distintivo del método de M. Méry está bien definido diciendo, con M. Durand – Claye, que lo que con él se busca es la posibilidad de una solución de equilibrio y resistencia. Pero entonces el número de tanteos necesarios es infinito, tantos como posiciones diversas se pueden atribuir a los puntos a y s; y para limitar este número, los ingenieros no admiten más posiciones para el polígono de centros de presiones, que las comprendidas en el tercio medio del espesor de la bóveda, a fin de que las juntas estén comprimidas en toda su superficie (núm. 995).

Con arreglo a esta base, si se dividen en tres partes iguales las juntas de clave y de arranque (fig. 17, lám. 52), las posiciones límites de los centros de presión en estos planos serán a, a' y c, c'. Aun así, sería indefinido el número de tanteos, y por esto se limita a las cuatro correspondientes curvas de presión ac, ac', a'c, a'c'.

Este método es bastante exacto para bóvedas de intradós circular o de forma muy aproximada a esta entre la clave y la junta inclinada a 60 grados con la vertical (arcos de medio punto, escarzanos, carpaneles, elipses rebajadas), siempre por supuesto que las sobrecargas estén representadas por una superficie limitada por una línea XZ no muy diferente de la horizontal, como resulta generalmente en el cálculo de puentes. La exactitud es deficiente cuando el intradós es diferente del antes indicado, como sucede en las ojivas, arcos peraltados y dinteles, o cuando las cargas están aplicadas de modo anormal, como en el caso de que actúen en puntos aislados del trasdós.

1099. Método de Durand – Claye. – El objeto que se alcanza con el procedimiento que vamos a exponer, debido a M. Durand – Claye, es limitar la indeterminación del problema, fijando límites de las posiciones de los centros de presión en las juntas de clave y de fractura, para que puedan quedar satisfechas las condiciones de equilibrio y de resistencia.

Equilibrio.- Sea A'B' un plano ideal de junta en la clave (fig. 18, lámina 52), AB otra junta cualquiera y R₁ la resultante de todas las fuerzas que obran en el trozo de bóveda ABB'A'; y supongamos que las presiones en A'B' y AB pasan, respectivamente, por los puntos A'₁ y A₁.

Trazando A'₁N, presión en A'B', o sea la reacción en la clave, hasta que corte en N a la fuerza R₁, uniendo N y A₁ y construyendo el triángulo NOR sobre NO = R₁, resulta ser OR la magnitud de la presión en A'₁, y NR la magnitud y dirección de la presión en A₁, o de su igual y contraria la reacción de la junta AB. Tomando A'B' como ejes de abscisas, llevaremos como ordenada la magnitud A'₁K igual al empuje o presión OR que corresponde a la hipótesis de ser A'₁ y A₁ los centros de presión en la clave y en el plano de junta AB. Si

permaneciendo invariable el centro de presión A'_1 variamos la posición del A_1 , en el triángulo de fuerzas construido sobre NO cambiará la magnitud del cateto OR y la dirección y magnitud de la hipotenusa. A medida que A_1 se aproxima a B aumentarán las dimensiones de OR y NR, disminuyendo en cambio cuando se aproxime A_1 a A.

Ahora bien: el equilibrio exige que A_1 esté dentro de AB (números 998 y 1093); de modo que las direcciones límites de la reacción en el plano AB serán AN, BN, y los valores límites correspondientes del empuje o reacción en la clave estarán representados por las magnitudes OT, OS, que trasladaremos a A'_1x' y A'_1z' . Diremos, en consecuencia, que para que el centro de presión AB esté contenido en el espesor de la bóveda, siendo A'_1 el punto de aplicación de la presión en la clave. Es preciso que la magnitud de esta última presión esté comprendida entre A'_1x' y A'_1z' , y es fácil comprobar que si la presión o empuje en A'_1 es menor que A'_1x' , o que su igual OT, la hipotenusa del triángulo de fuerzas resultaría a la izquierda de NT, y, por lo tanto, el punto de aplicación de la presión en AB, estaría a la izquierda de A, fuese mayor que A'_1z' , o que su igual OS, el centro de presión en AB quedaría fuera de AB, a la derecha.

Esta construcción puede repetirse para otro punto distinto del A'_1 . En el A' , por ejemplo, hallaríamos por valores límites del empuje en la clave, correspondientes a presiones en AB que pasan por A y por B, los $A'D'$ y $A'F'$; y en el punto B', los $B'C'$, $B'E'$. Uniendo los puntos E', z', F', y los C', x', D', obtendremos las curvas E'F', C'D'; y no consideraremos puntos exteriores a A'B', porque la condición de equilibrio exige que los centros de presión estén contenidos en el espesor de la bóveda.

Resulta de cuanto antecede que si los centros de presión en A'B' y AB han de estar dentro del espesor de la bóveda, como es indispensable para el equilibrio, la magnitud del empuje o presión en la clave ha de estar comprendida entre la de las ordenadas de las curvas E'F', C'D' con respecto al eje A'B'. Para en centro de presión A'_1 , y una magnitud cualquiera de empuje A'_1K , es fácil encontrar la presión y punto de aplicación correspondiente en AB; no hay más que hacer $NO = R_1$ y $OR = A'_1K$ y unir N y R, con lo cual se obtendrá A_1 y la magnitud NR.

Operemos en Ab como lo hemos hecho en la junta de clave A'B', y a este efecto tracemos la ordenada A_1Q de valor igual a la componente de la compresión NR perpendicular a AB, y sin variar la posición de A_1 , consideremos todas las posiciones de A'_1 dentro A'B'. Para los puntos A' y B', los triángulos de fuerzas tuv y N'O'S' construidos sobre los catetos $tu = N'O' = R_1$, dan para magnitudes límites de presión en A_1 , las rectas tv y N'S', y sus componentes perpendiculares a AB se trasladarán a A_1b'' , A_1a'' .

Repitiendo esta construcción en todos los demás puntos de AB se obtendrán las curvas CE, DF, cuyas ordenadas representan los valores límites que pueden tener las componentes de las presiones normales a AB, si, como exige el equilibrio, los centros de presión en los planos A'B', AB no salen del espesor de la bóveda. El área del cuadrilátero CEFD goza con respecto al plano de junta AB de las mismas propiedades que el área del cuadrilátero C'E'F'D' con respecto a la junta de clave A'B', y diremos, en conclusión, que para que haya equilibrio es necesario que el empuje en la clave A'B' y la compresión normal a AB tenga valores comprendidos entre los de las ordenadas del perímetro de dichas áreas.

Observaremos que los lados de los dos cuadriláteros se corresponden, así como los vértices; y para evitar confusión hemos empleado las mismas letras en los puntos correspondientes. A los lados C'E', E'F', etc., corresponden CE, EF, etc.

Resistencia.- No es suficiente, para que la bóveda pueda subsistir, que las presiones correspondientes en la junta de clave y en la AB tengan los valores anteriores, sino que también ha de satisfacerse a la condición de que las presiones p máximas por unidad superficial engendradas por las compresiones totales, no excedan del coeficiente de trabajo por compresión R' , a fin de que la obra sea a un tiempo estable y resistente. Recordaremos a este propósito [núm. 996, ecuaciones (11) y (12)] que para conseguir este resultado es preciso que la compresión total P tenga, como valores máximos, los de las ordenadas de la línea A'H'B' (fig. 19, lám. 52) compuesta de las rectas B'F₁, A'E₁, correspondientes a los tercios extremos B'D₁, C₁A' y de las dos ramas de hipérbola equilátera HF₁, HE₁ que se cortan en la ordenada del punto medio O' de la junta A'B'.

Según esto, las condiciones de estabilidad y resistencia exigen que las presiones en A'B' y su punto de aplicación estén dadas por abscisas y ordenadas del área b'a'c'd' que es común a la F'E'C'D', relativa a la estabilidad, y a la A'HB' correspondiente a la resistencia. El punto de paso del empuje en la clave deberá estar, por lo tanto, comprendido entre los a'' y c''.

Haciendo igual construcción en la junta AB (fig. 18, lám. 52), obtendríamos el área hers, y diremos, en conclusión, que el cumplimiento de las condiciones de estabilidad y resistencia exige que las presiones y su punto de aplicación en las juntas A'B' y AB sean, respectivamente, ordenadas y abscisas de las áreas b'a'c'd' y hers, a las cuales se les da el nombre de áreas de estabilidad.

Las do condiciones precedentes pueden reducirse a una. Si determinamos las curvas h'l', e'f' en la clave, correspondientes a las hl, ef de la junta AB, todo empuje en A'B' que caiga dentro del cuadrilátero m'n's'r' dará en AB una presión de punto de aplicación y magnitud correspondientes al cuadrilátero hers, de

modo que no habrá más que atender a que la presión en la clave tenga por magnitud y punto de aplicación ordenadas y abscisas del área $m'n's'r'$.

Se hubiera podido obtener el cuadrilátero $nmrs$ en el plano de junta AB por medio de las líneas ab , cd correspondientes a la $a'b'$, $c'd'$ de la junta de clave, y prescindir del área de estabilidad $a'b'c'd'$; pero nos atenderemos al cuadrilátero $m'n's'r'$.

Repetidas las construcciones anteriores para otros planos de junta AB , obtendríamos otros tantos cuadriláteros como el $m'n's'r'$, los cuales se superpondrán parcialmente. Si consideramos la parte de área común a todos ellos, esta será el área de estabilidad definitiva, que gozará de la importante propiedad siguiente: siempre que el empuje en la clave y su punto de aplicación sean las ordenadas y abscisas de un punto cualquiera de esta superficie, las condiciones de equilibrio y resistencia quedarán satisfechas en toda la bóveda en un plano de junta cualquiera.

Si no hay parte común a todos los cuadriláteros, es decir, si o hay área de estabilidad definitiva, no es posible la estabilidad de la bóveda en las condiciones que han servido de base a estas operaciones gráficas, esto es, trabajando únicamente por compresión con un coeficiente máximo R' por unidad superficial.

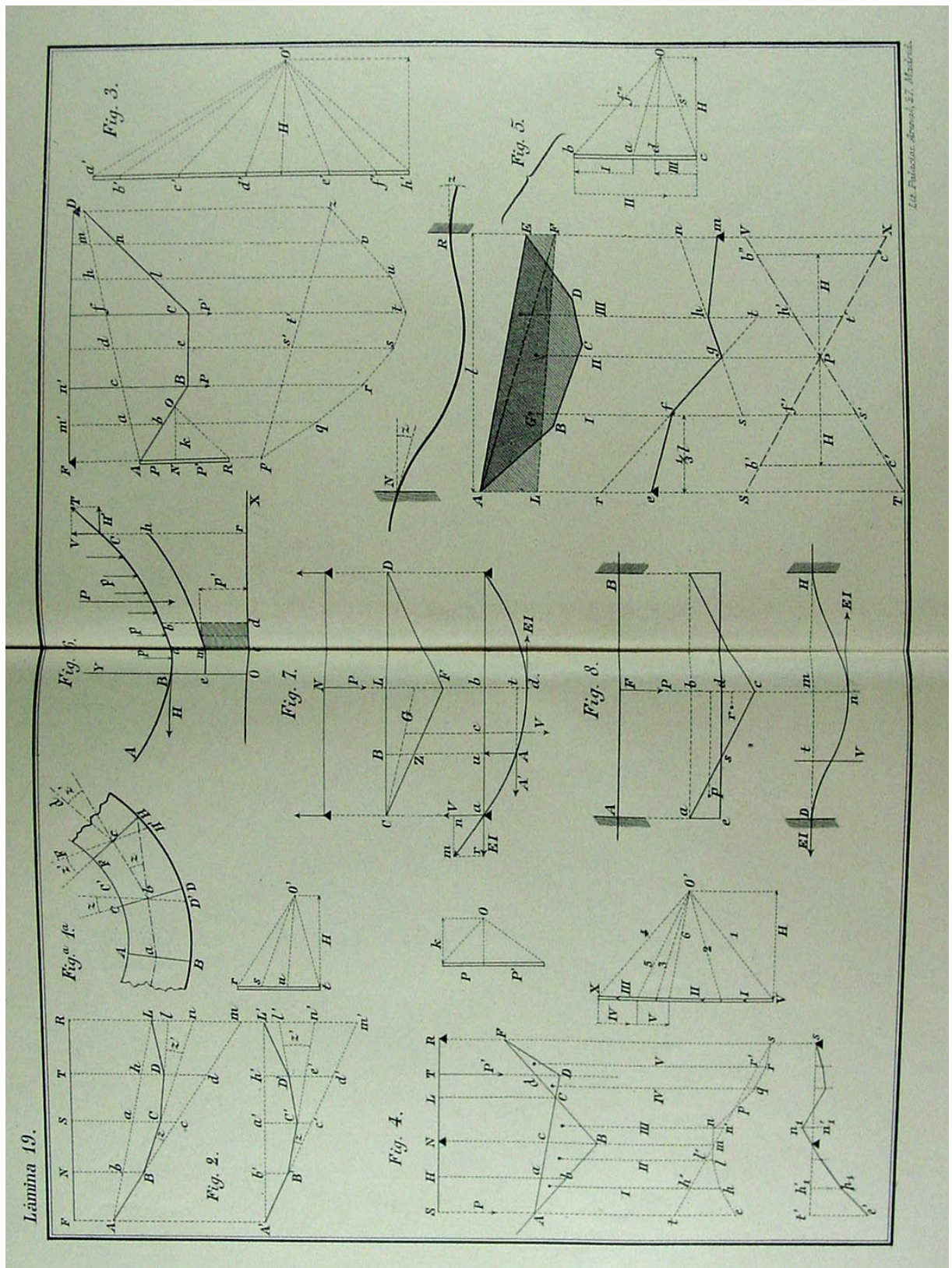
Cuando el área definitiva de estabilidad queda reducida aun punto m (fig. 20, lám. 52), la estabilidad es solo posible siendo el empuje o presión en la clave de magnitud mc y c el punto de aplicación. Trazado cD en dirección del empuje hasta su encuentro con la resultante R_1 de las cargas, y construyendo el triángulo rectángulo DEF , en el que $DE = R_1$ y $FE = mc$, obtendremos la dirección y magnitud DF de la presión en AB y su punto p de aplicación, siendo entonces fácil trazar la curva de presiones $cN'p$ que corresponde a la única solución que tiene el problema de estabilidad y resistencia.

En el caso de que el área definitiva de estabilidad sea el cuadrilátero $nmrs$, se construirán las curvas de presiones correspondientes a sus cuatro vértices; y en los puntos en que las curvas extremas se aproximen al intradós y al trasdós, el trabajo del material será un máximo; pero el equilibrio y resistencia es posible con cualquiera de ellas y todas las intermedias, de modo que la bóveda sometida a comprobación es estable y resistente.

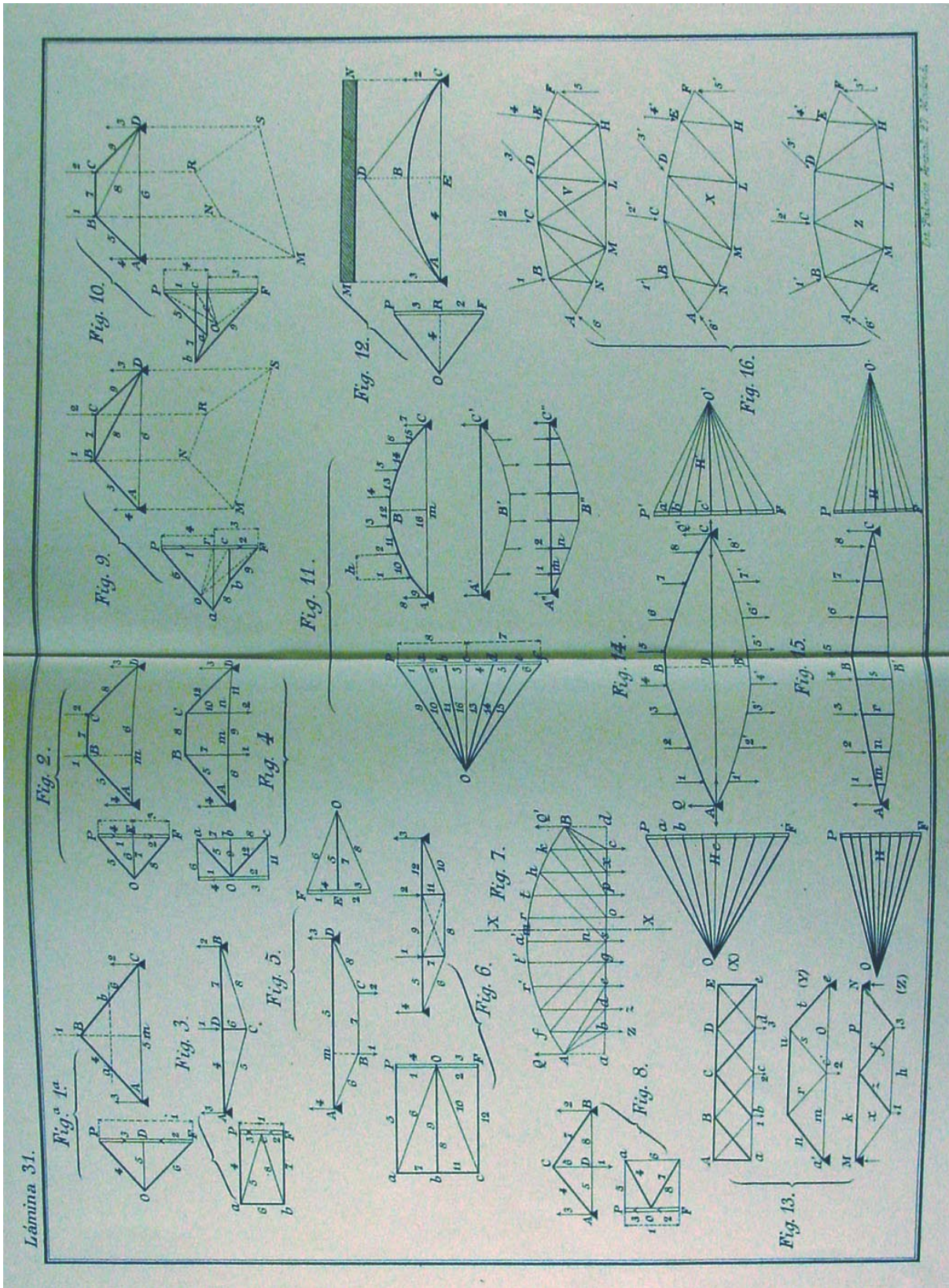
Todas las construcciones gráficas que acabamos de describir no presentan dificultades, pero son muy laboriosas y prolijas, razón por la cual el método de M. Durand – Claye es rar vez empleado, siendo preferible el de M. Méry, menos exacto pero más sencillo.

En les pàgines següents presentem un recull de làmines del llibre de l'autor.

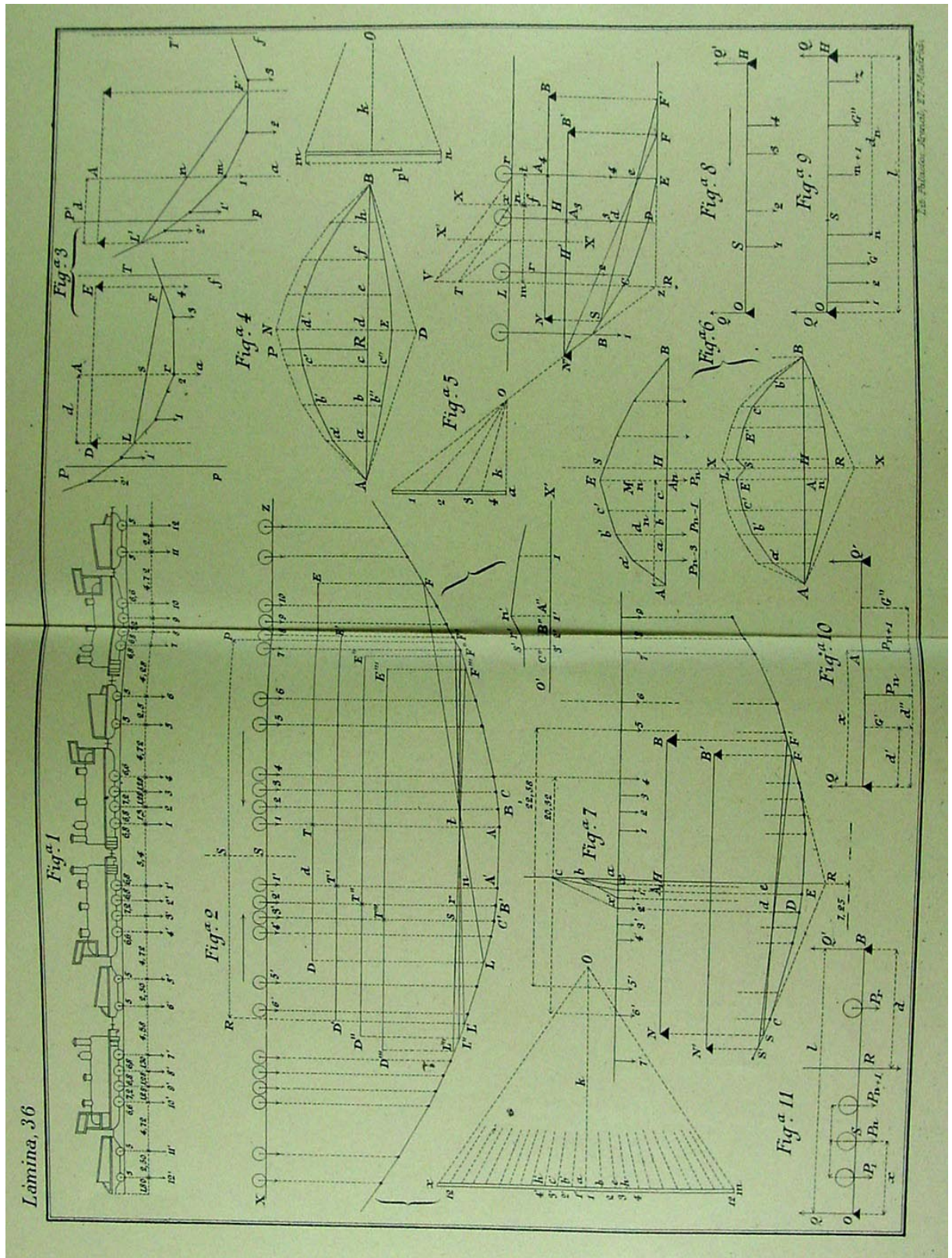
Marvà, Làmina, 19.



Marvà, Làmina, 31.

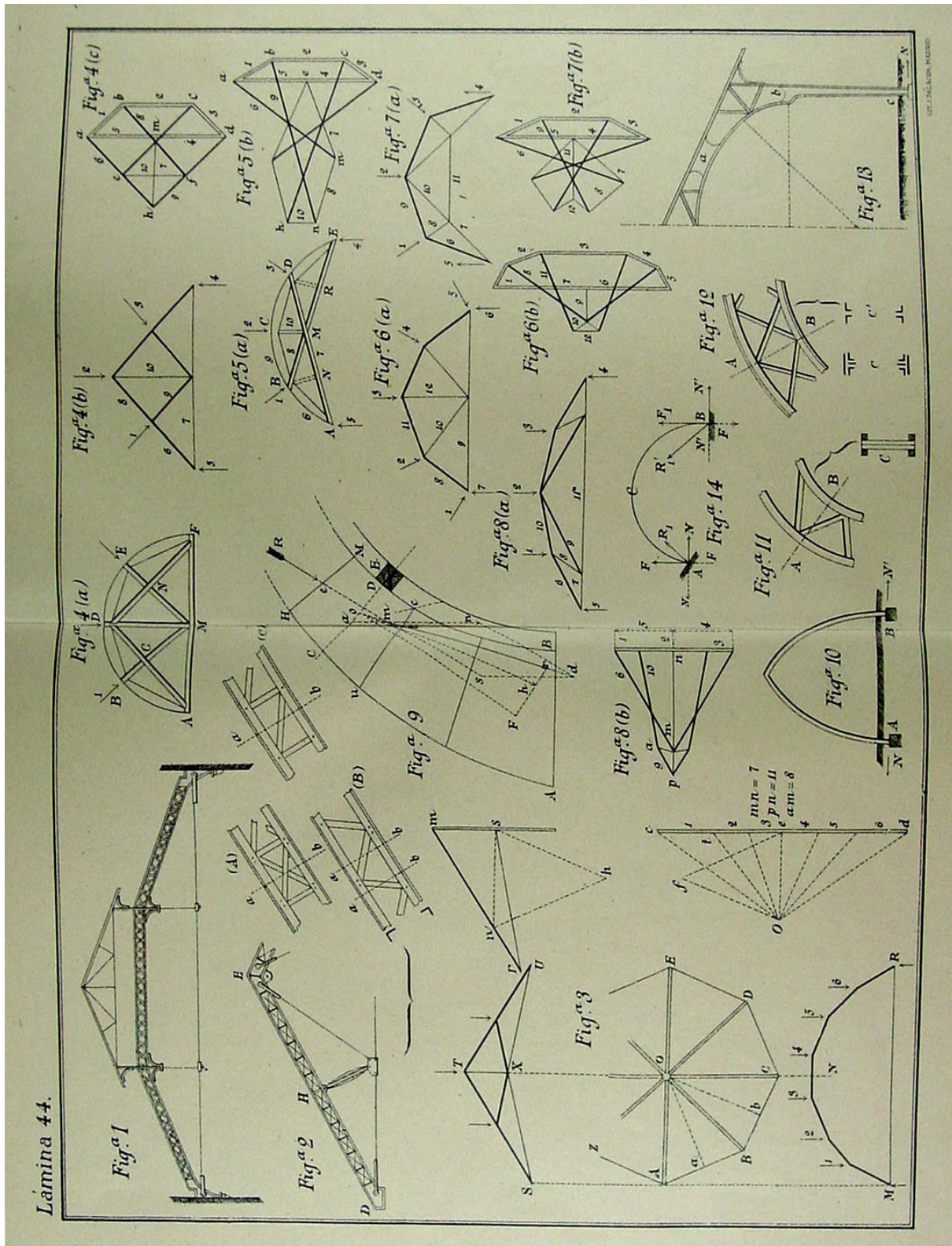


Marvà, Làmina, 36.

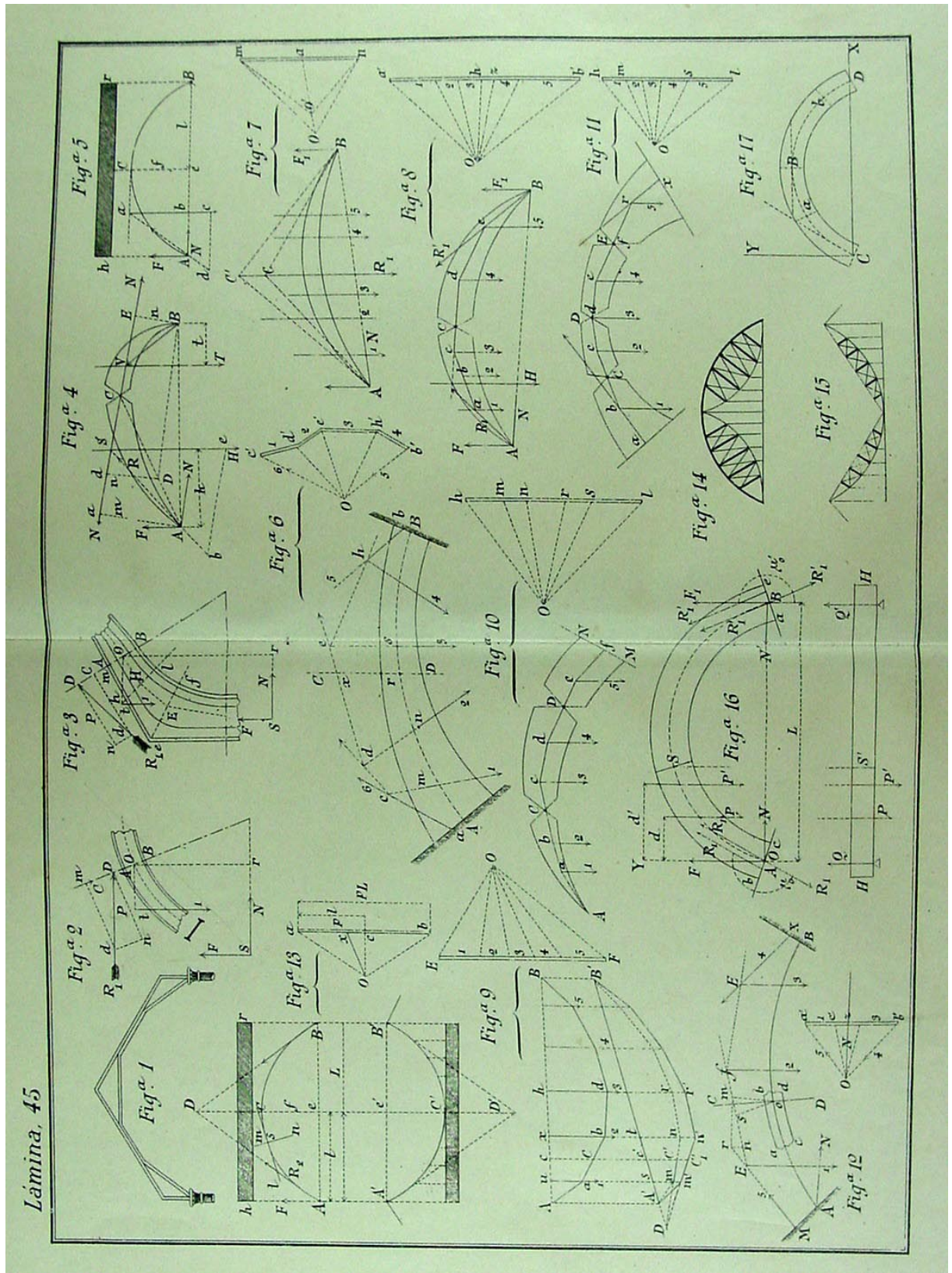


Las Palmas, Agosto, 27, 1898.

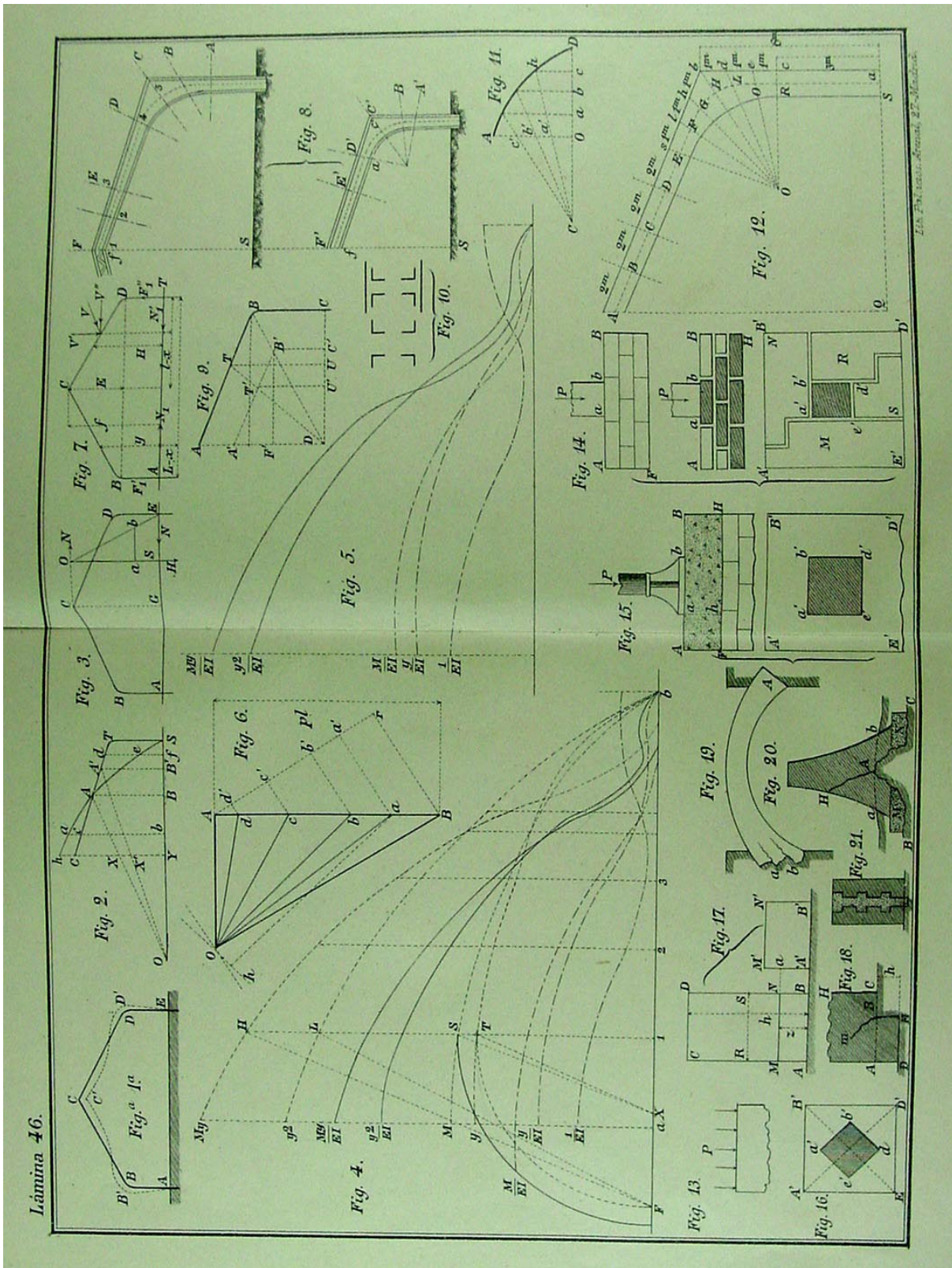
Marvà, Làmina, 44.



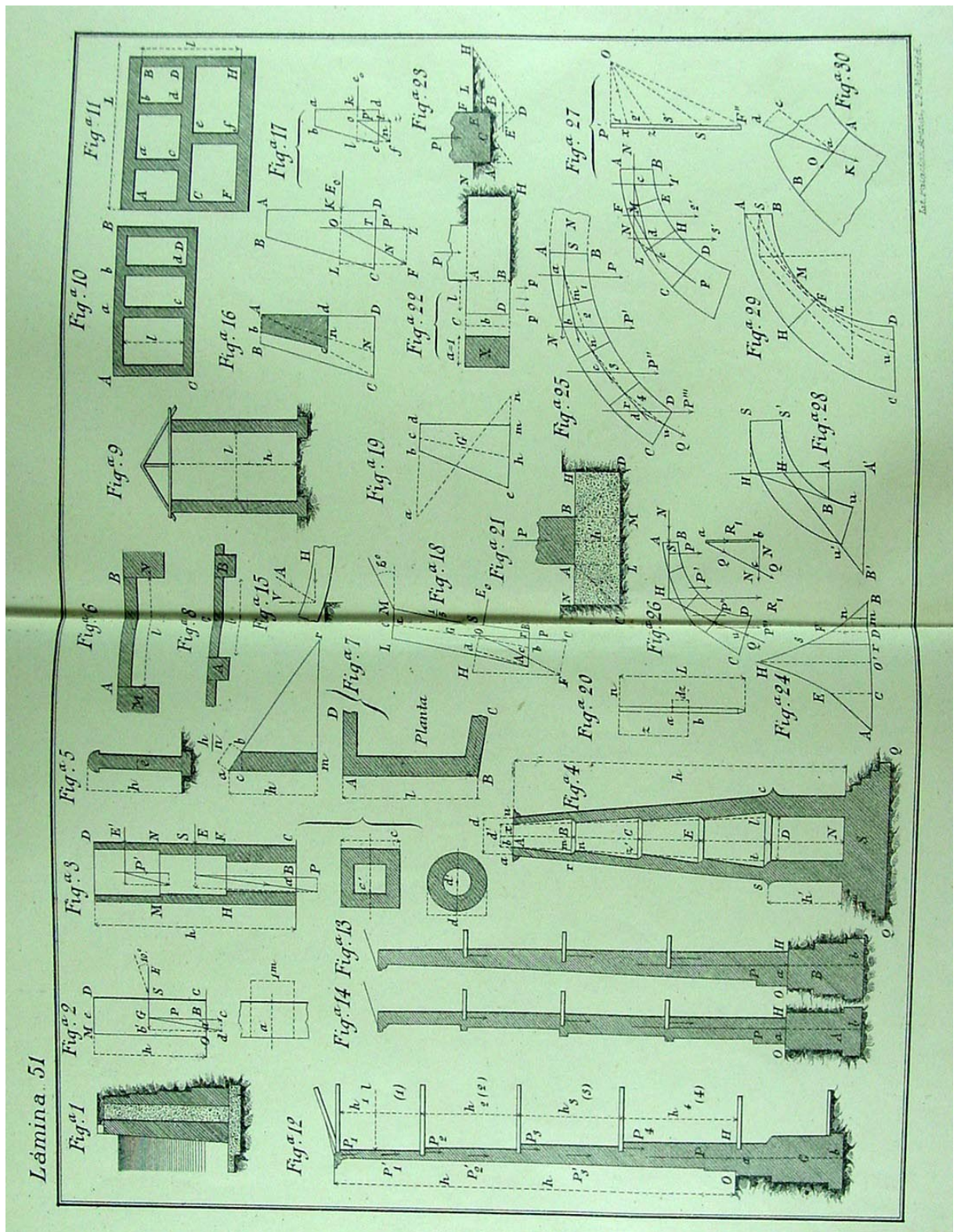
Marvà, Làmina, 45.



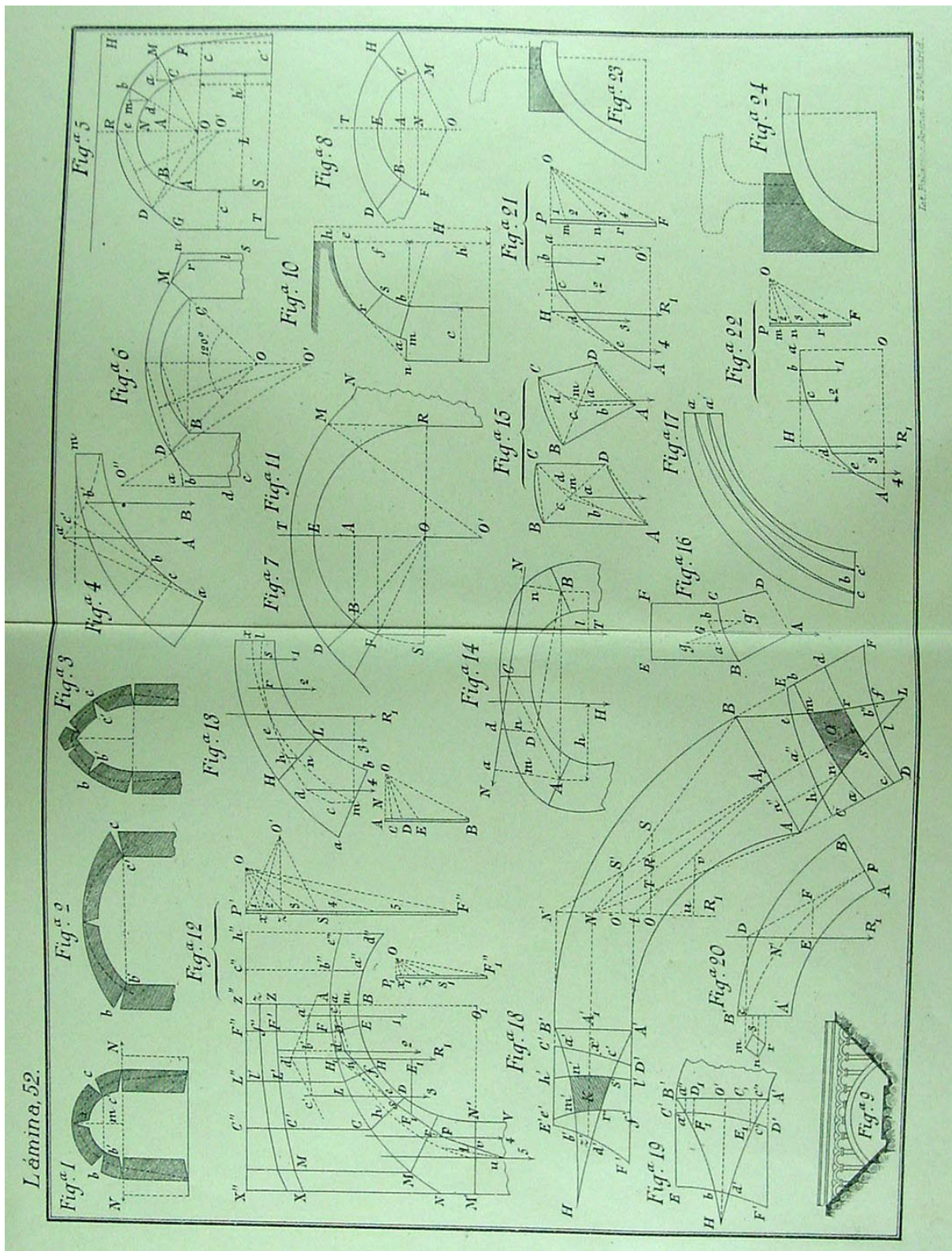
Marvà, Làmina, 46.



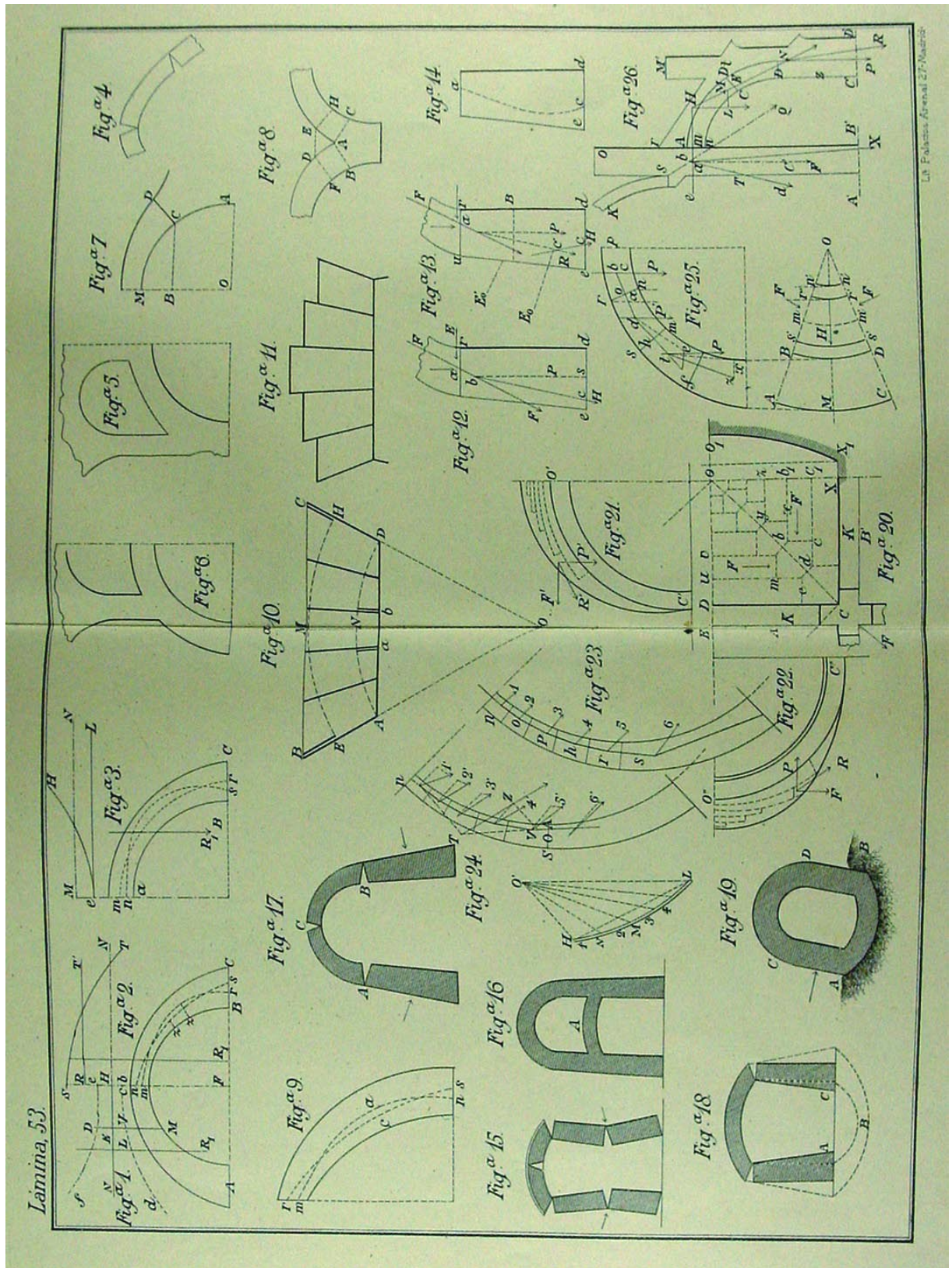
Marvà, Làmina, 51.



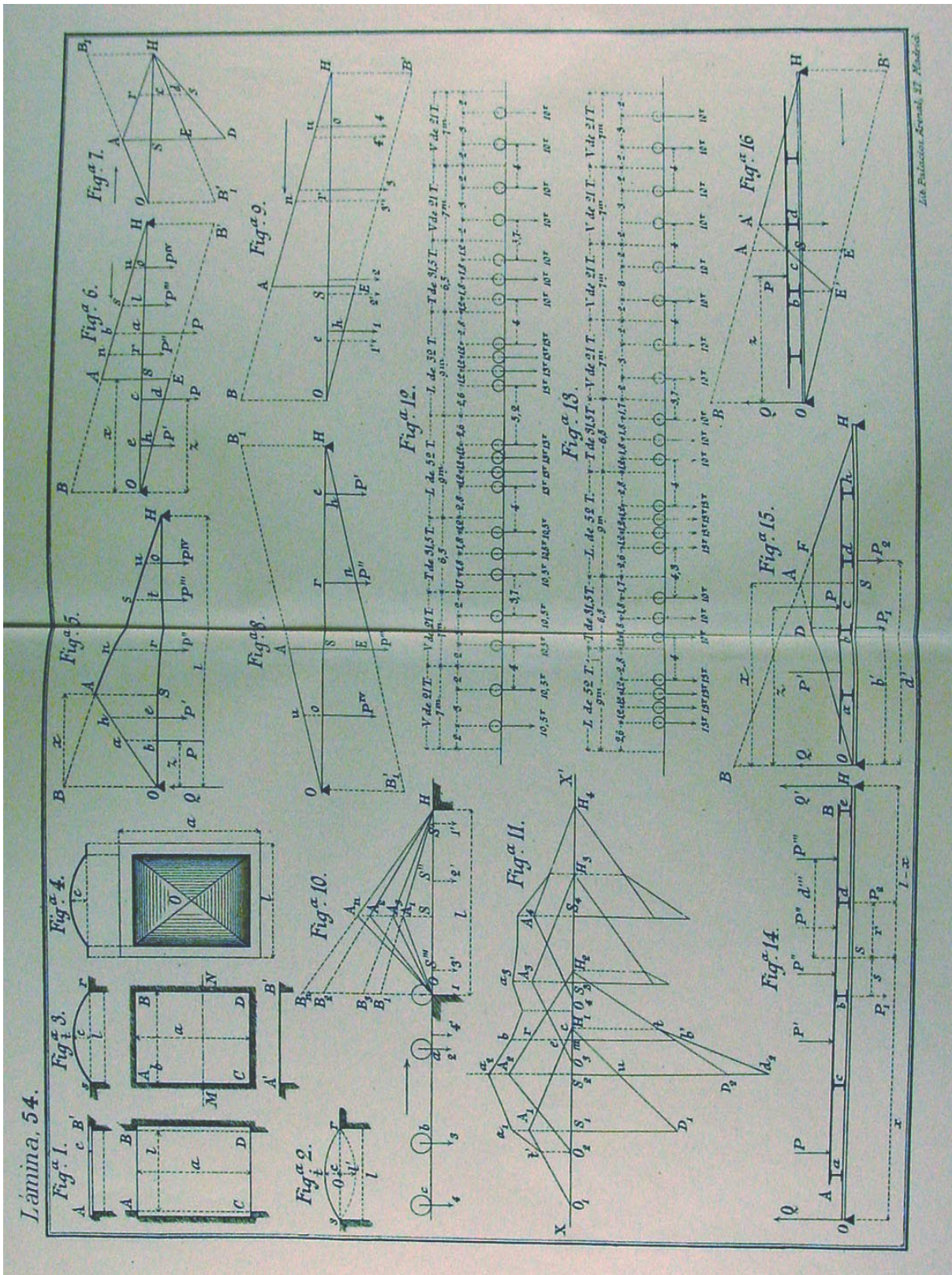
Marvà, Làmina, 52.



Marvà, Làmina, 53.

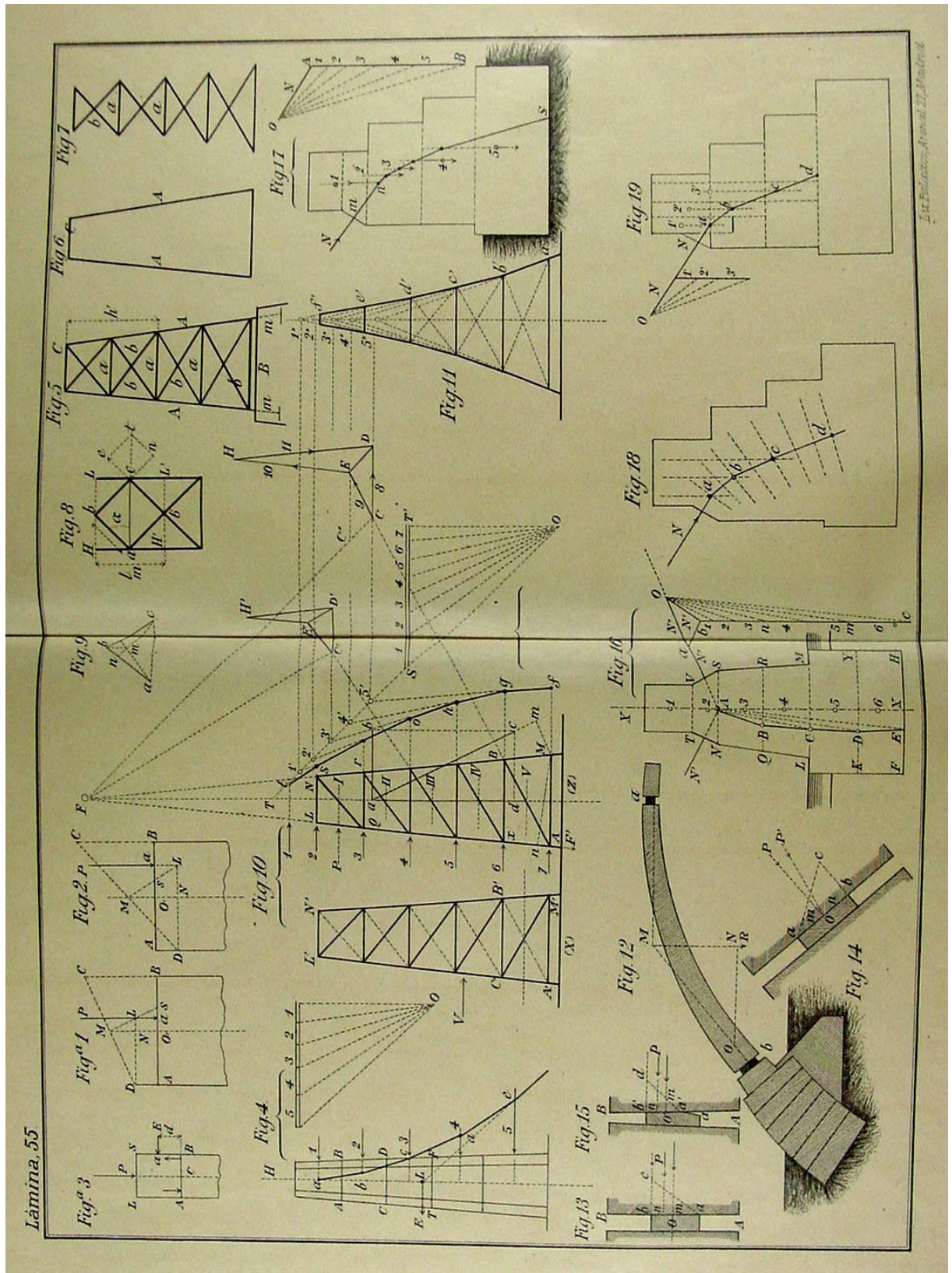


Marvà, Làmina, 54.



Lab. Publicacion. Arxib. 27. Març 1904.

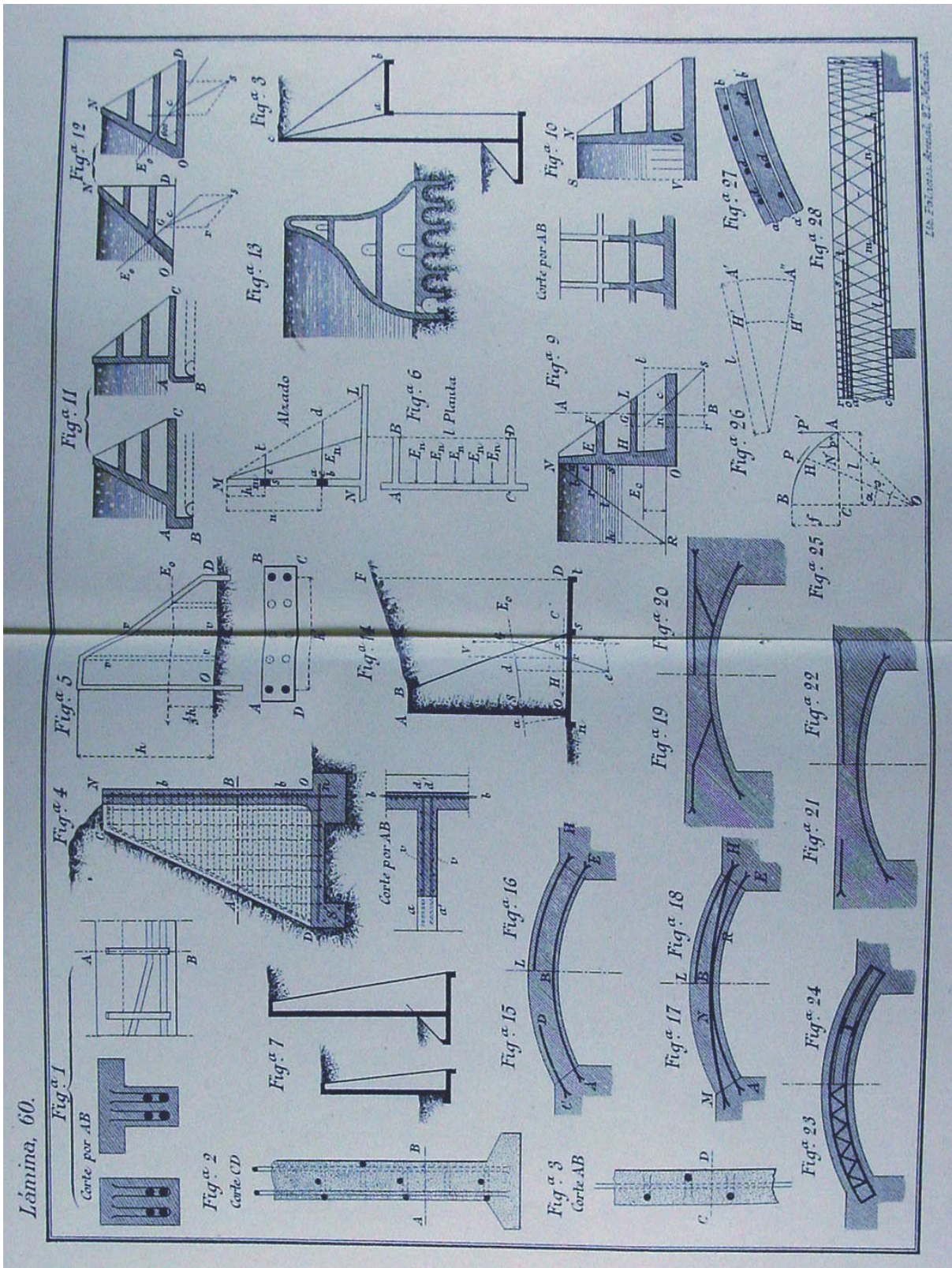
Marvà, Làmina, 55.



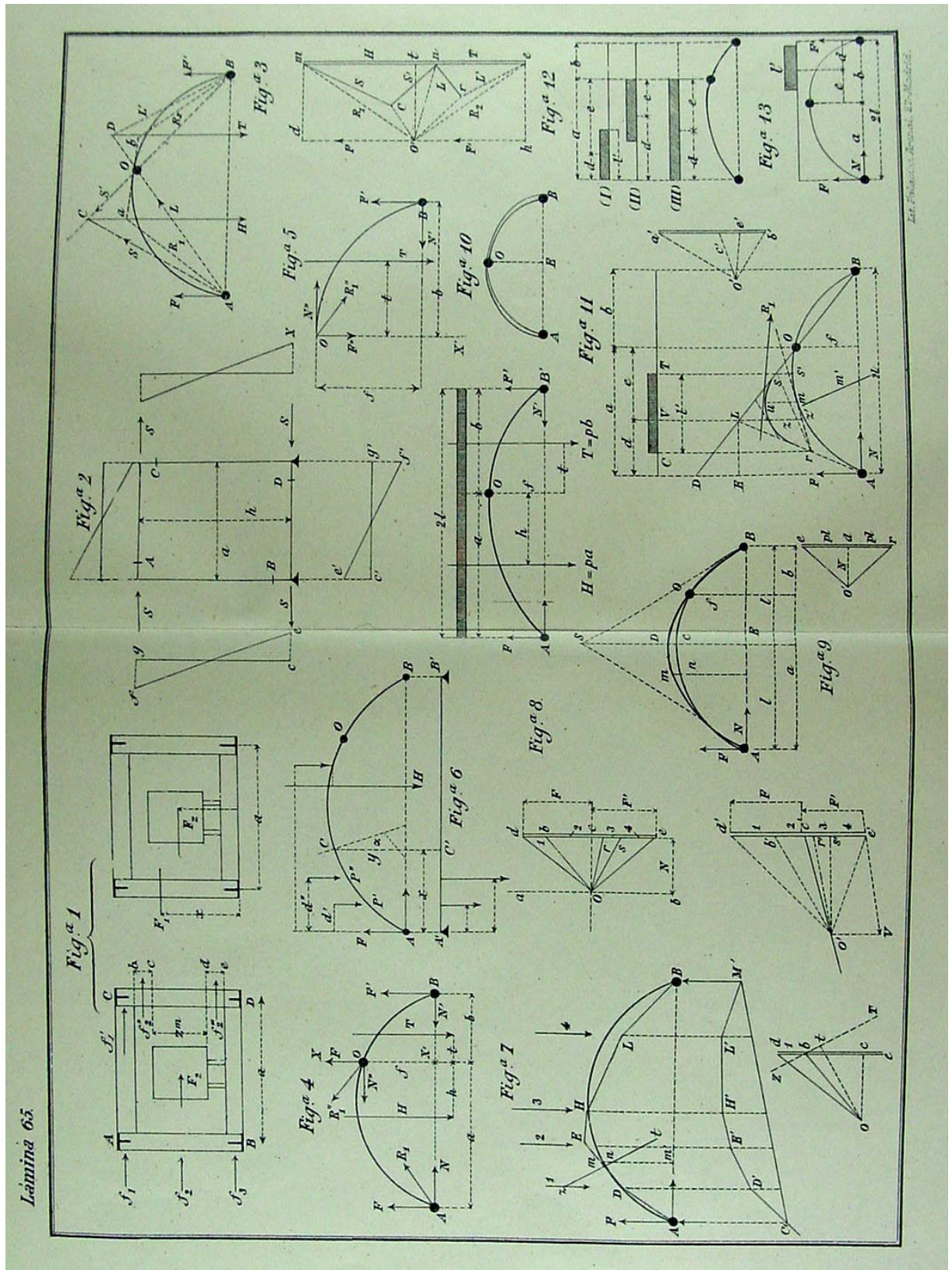
Làmina. 55

L. F. Fontana, Architect, 17. Madrid

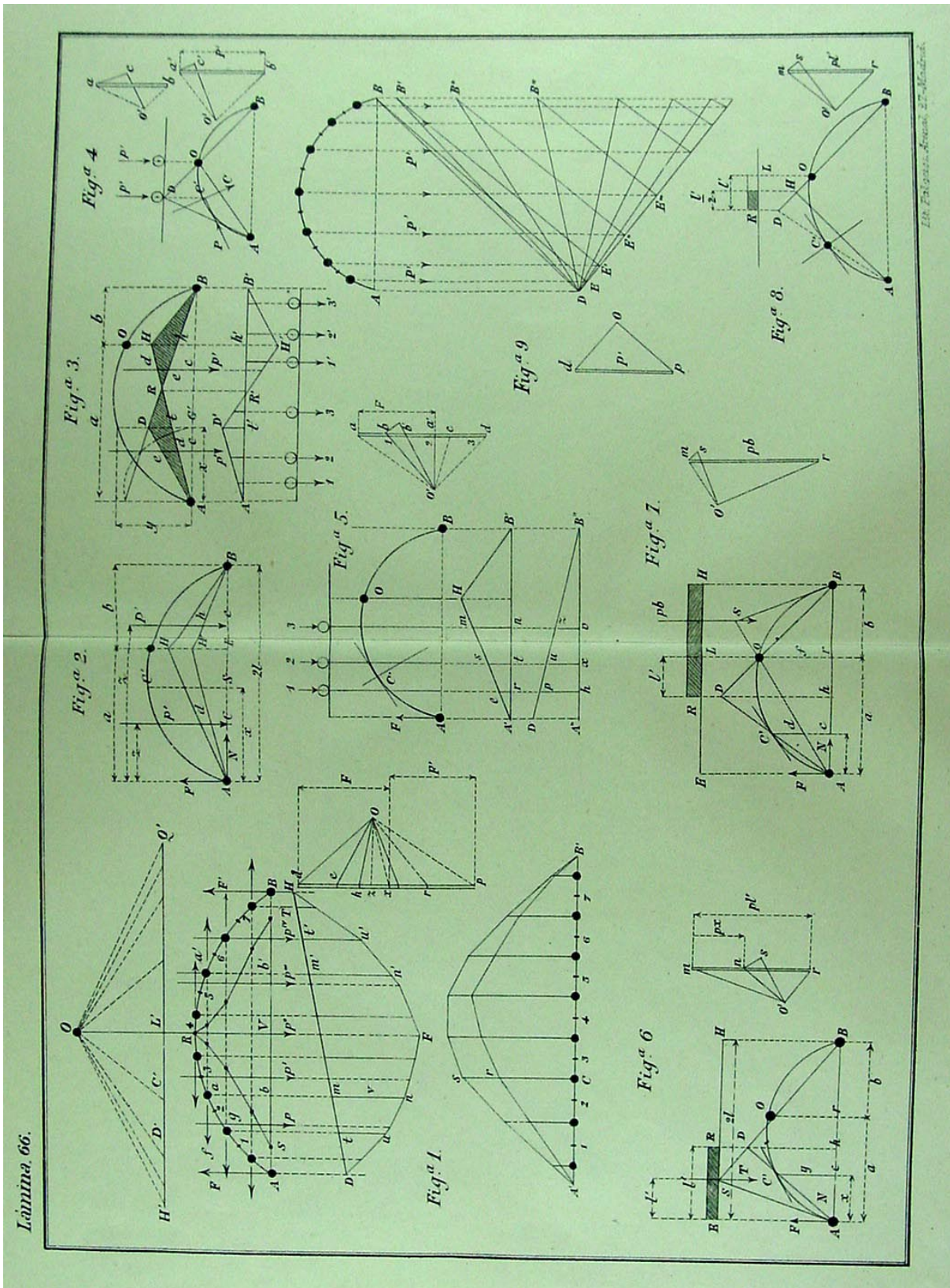
Marvà, Làmina, 60.



Marvà, Làmina, 65.



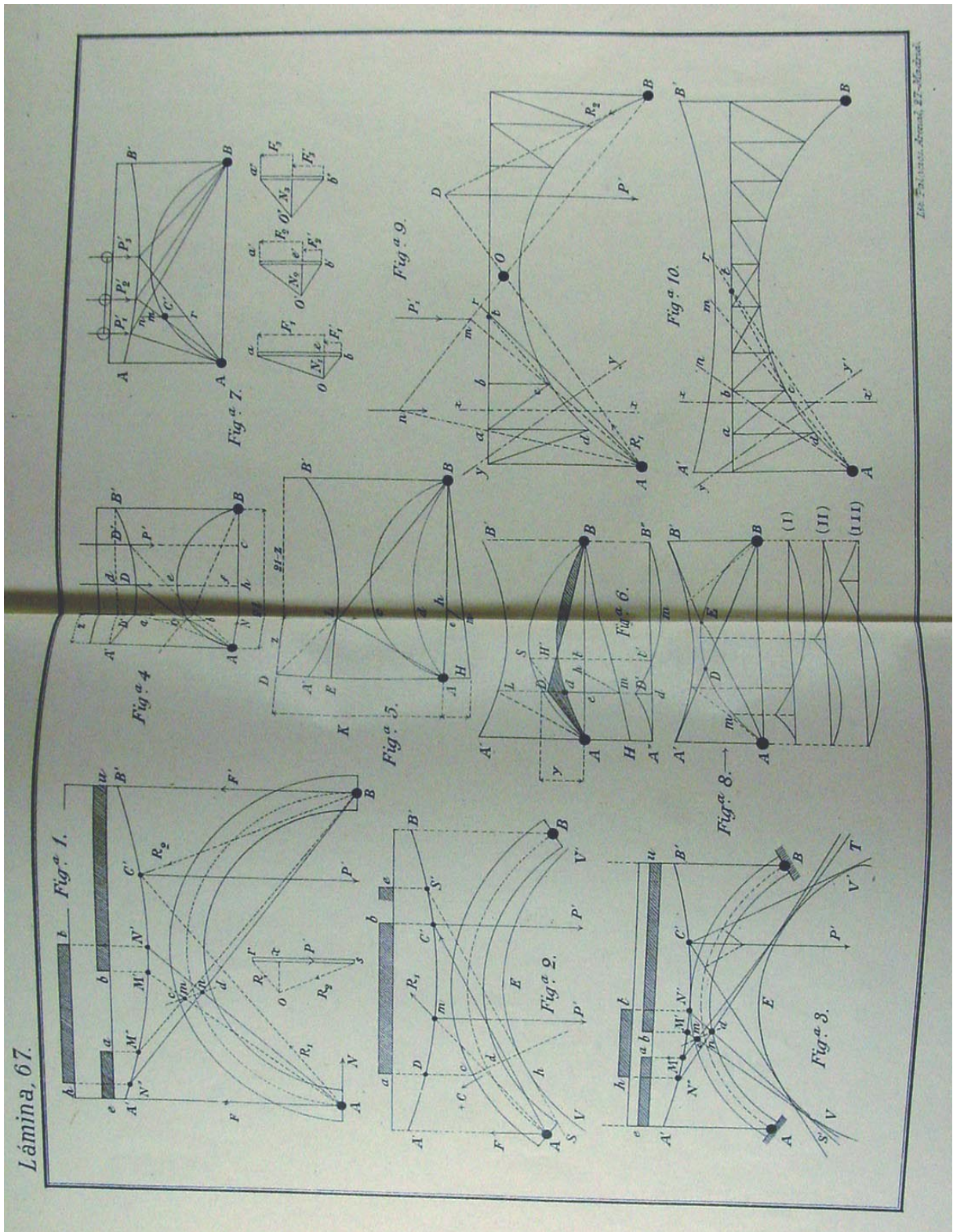
Marvà, Làmina, 66.



Làmina 66.

Lib. Eng. - Arx. - 27-16-1914

Marvà, Làmina, 67.



ANNEX 3.10

Apunts de construcció, de Jaume Bayó, 1897-98.

Jaume Bayó i Font (1874-1961) va ser alumne del professor de Gaudí, Joan Torras i Guardiola. El vincle entre Bayó i Gaudí es clar i queda forjat pel fet que el seu germà, Josep Bayó i Font, va ser el mestre d'obres de Gaudí en obres com La Pedrera i a la casa Batlló¹. Els germans Bayó, Josep, Jaume i Domingo, havien treballat junts i tenien el despatx al carrer Bruc, núm. 6. Aquests fets incrementen el nostre interès per aquest text.

A la càtedra Gaudí s'han conservat els apunts manuscrit que Jaume Bayó va pendre de les classes de Joan Torras, durant el curs 1897-98.

Són 4 volums. El tema de voltes queda repartit entre el volum II i III. En reproduïm alguns fragments. A més, al final del volum IV trobem uns interessants annexos:

- . Càlcul d'una volta tabicada. Sistema comú. Sistema Guastavino
- . Conseqüències deduïdes de les conferències donades per l'arquitecte Joan Torras i Guardiola, al saló de graus de la Universitat els dies 5 i 19 de març de 1899.

Anys més tard, Bayó esdevingué ell mateix catedràtic de construcció a l'Escola d'Arquitectura de Barcelona. D'aquestes classes s'han conservat uns apunts que va pendre un alumne seu, Ramon Termens Mauri, *Apuntes de Mecánica Aplicada a las construcciones Entresacados de las explicaciones de D. Jaime Bayó. Catedrático de la asignatura Por el alumno Ramon Termens Mauri. Curs 1917-1918*, publicats per l'editorial Julio Torrellas, i podem trobar també el seu propi llibre, *Construcció arquitectònica*, tots dos a la càtedra Gaudí.

Nota de transcripció

La interpretació de la caligrafia del manuscrit ha estat una feina difícil i a cops no hem comprés la totalitat de l'escrit. Sovint la intuïció del significat del text ha estat clau per entendre la lletra, però molts cops, sobretot en els casos de noms propis o en termes específics de tècniques constructives ja perdudes ens és impossible donar validesa a la nostra intuïció. A més a més, cal tenir en compte que estem tractant d'uns apunts de classe, espontanis, en els quals l'alumne podia deixar frases incompletes o escriure amb faltes d'ortografia algunes paraules que li resultessin noves, i això s'afegeix avui a la problemàtica de la dificultat de comprensió. És per aquest motiu que, per tal de distingir aquelles paraules que ens presenten dubtes en interpretació caligràfica, hem decidit assenyalar-les amb color vermell.

¹ Per augmentar informació sobre Josep Bayó, es recomana el llibre de Joan Bassegoda: *Josep Bayó i Font, contractista de Gaudí*, Ed. UPC, Barcelona, 2002.

Bóvedas

Son construcciones de forma curva apoyadas en pies derechos y destinadas a cubrir el hueco; son de piezas de menor dimensión que el hueco y se hallan en equilibrio por la presión que se ejercen entre si.

Nomenclatura. Cada una de las piezas se llaman dovelas; la central clave; la superficie curva interior cóncava, intradós; y la exterior a veces invisible, extradós.

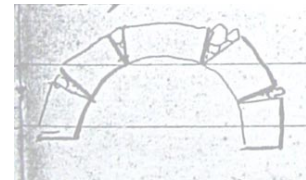
Diferencia entre el arco i la bóveda. Diremos que es arco, cuando los elementos alcanzan todo el muro; pero si son menores que el grueso entraran a (...) y será bóveda.

Importancia de la bóveda. Por si sola da carácter especial a los estribos y es el generar (...) elemento de los estribos arqu... Las diferencias entre la arquitectura arquitrabada y la de bóveda, presentan en planta estructura distinta, por exigir la bóveda puntos apoyos determinados y fijar el carácter especial de estilo arquitectónico. Dentro la forma abovedada, las distintas clases de curvas, influyen en la distribución de la planta; así es diferente la del edificio romano del gótico.

Antigüedad. A principios del siglo, se decía que el Oriente antiguo no conocía la bóveda. Fijaban los etruscos como los constructores primeros de la bóveda. Hoy día está probado que la bóveda es mucho más antigua de lo supuesto. En las construcciones orientales, se notan que hay bóvedas que tienen condiciones arquitectónicas, sin servir como a (...) como las bóvedas de hiladas horizontales (...) según una curva en el interior; que nos aparezca con estructura de bóveda tiene solo la apariencia de tal. [dibuix-1]

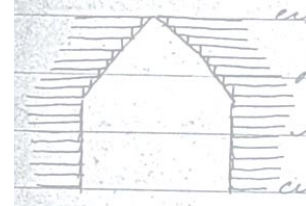


Egipto. Es una de las civilizaciones que ya conocieron las bóvedas cuyos restos están todavía en pie. Aparece la falsa bóveda y la verdadera, apareciendo simultáneamente las dos y (...) la adovelada es más antigua. La falsa bóveda más antigua pertenece a la XVIIIa dinastía; (el ... **Deleib-Boahi.. erigido por la senia Kazú**), tiene dependencias subterráneas y los corredores tienen esta bóveda falsa. Como trabajan más las piedras el arquitecto colocó arco de descarga apuntado [dibuix-2]. Las cámaras o capillas del templo de **Seti**, XIXa dinastía, tienen esta bóveda. La bóveda aparejada, en la Necrópolis Abidos en Via dinastía, en cámara sepulcral de ; está formada por arcos de ½ punto en que la curva no es perfecta formándola cinco dovelas con forma de prismas teniendo las juntas las fomas de cuñas en las que colocó piedras, de ladrillos las dovelas y la clave de sillería natural. [dibuix-3]



En otro momento, el **Serepo** se halla la bóveda de aparejo de mayor diámetro. Data del tiempo de **Ario** es de sillería. Pero en el mayor número de bóvedas, se hallan el ladrillo que por sus pequeñas dimensiones, no sirve de dintel.

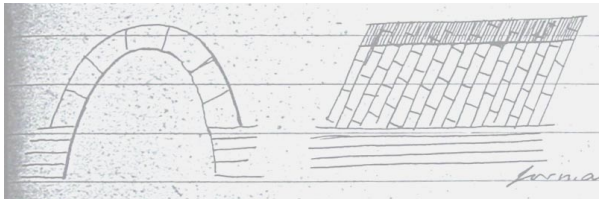
En cuanto a la forma es variada; en el valle de las **Resico** cuyo recinto tiene puertas de ingreso con 9 hiladas dispuestas en talud con el muro. En el templo de **Rasuseum o a Ramsés** hay arcos apuntados, elípticos y otros parabólicos.



Caldea y Asiria. Está muy probado que el origen de las bóvedas está en Caldea; no tiene piedras ni madera y no podía servirse del dintel por el ladrillo que tuvo que usarse en formas curvas.

El estudio de las bóvedas se halla en Asiria cuya civilización deriva de la Caldea; las pocas caldeas indican la falsa bóveda que corresponde a la ciudad , nativa de Abraham correspondiendo a la ciudad árabe de ; está formada de ladrillos; en resalto, sobre jambas en talud. [dibuix-4].

Además de la bóveda da cañón seguido, desde que cubrieron espacios semicirculares por cúpulas: en el palacio de **Khonsadad** perteneciente a **Segan**, las puertas tenían 3 roscas o hiladas con arcilla para la unión; las puertas de la ciudad también forma semicirculares, decoradas con elementos cocidos, esmaltes... ; pero en las obras de carácter utilitario emplazadas en el interior de los basamentos de los edificios, que están sobre plataformas de adobe, que se destruye con facilidad, al estar en contacto con las aguas, tuvo la necesidad de construir las cloacas de desagüe. Las de **Nemser hey Koyongich** se hallan bien conservadas, teniendo cada ...acción, un agujero para recoger las aguas. Las cloacas són de adobe y algunas veces ladrillo cocido; las bóvedas de estas cloacas son notables, el sistema constructivo se basa en un agujero distinto del actual: las juntas continuas son inclinadas y las discontinuas eran normales. [dibuix-5] Se construían sin cimbras formando cada hilada un arco



independiente, los ladrillos son plantillados, en forma parabólica, en **Korsalad**. Otras bóvedas eran de arco apuntado, obedeciendo al mismo sistema constructivo.

Grecia. Ha sido muy refractaria al empleo de la bóveda dando mayor importancia al dintel. La falsa bóveda en la época **Mycenia**, en las tumbas reales con el falso nombre de tesoros hay las piedras formando voladizo, es ejemplo más notable por el diámetro de 14,27 metros y 18 de alto; es casi parabólica y colocadas sin mortero con grapas metálicas.

En la arquitectura militar se ven restos de las bóvedas. Los griegos usaron del ladrillo como es verosímil suponer.

Etruria. A ella se atribuía la invención de la bóveda, representa importancia especial por la construcción de ellas. La civilización etrusca tiene dos influencias: la oriental y la griega. La primera influyó en el conocimiento de la bóveda; el origen es muy antiguo sin conocer las construcciones más antiguas, pero sabemos que por los romanos construyeron bóvedas de importancia notables: En la cloaca Máxima que virten aguas en el Tíber, construida en tiempo de Tarquino, es de 6 metros de diámetro y con la forma de cuña para trabarse entre si.

En otras poblaciones se ven otras construcciones de todas formas y secciones: en tumbas etruscas de las ciudades la forma es semicircular; en Roma, cárcel **Favertina**, tiene bóveda plana. El **Emiscrio del lajo Urbano** está cubierto con bóveda y es cónica en un extremo; las ruinas del teatro de **Terranto** representan arcos adintelados.

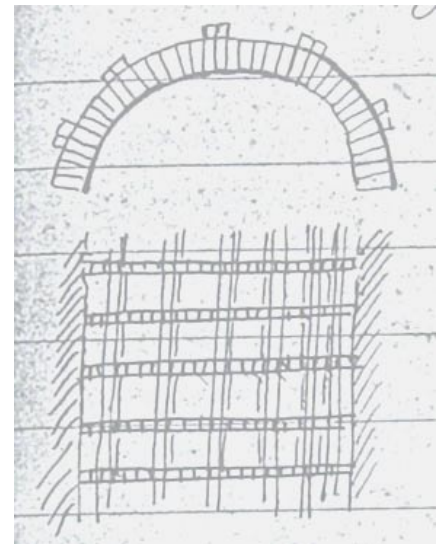
Roma. Los romanos siguieron estos ejemplos sobrepasándolos en el desarrollo: distinguen dos clases de bóveda: la sillería aparejada en dovelas, bien labradas en las juntas, son usadas en la arquitectura monumental, conducciones de agua o acueductos en todas las provincias romanas.

La bóveda concrecionada se funda en principio diametralmente opuesto; es forma concreta obtenida por el fraguado del mortero; fue usada primero por los romanos.

En el siglo I (a.C.) se construyeron el Pantheon de Agripa de 43 metros de diámetro; sistema concrecionado, con arcos o nervios en su interior.

En las termas se cubrieron las salas con estas bóvedas denotando las ruinas su estructura; o sean varios arcos de ladrillo en el sentido de la bóveda, colocando nervios que van de uno a otro y llenando el hormigón los huecos obteniendo gran rapidez con cimbras de escasa importancia y de gran resistencia. [dibuix-6]

Las formas derivan todas del arco de semicírculo: bóveda en cañón seguido, en bajada, la arista, la anular, la cúpula. Estas masas de hormigón no es el mismo romano son morteros de cpas horizontales, en el que se incrustan trozos de ladrillos, tejas... El oficio de los arcos es el de cimbras de la bóveda, llamados, cimbras permanentes.



Bizancio. En Bizancio se continuó usando la bóveda extendiendo su uso, sufriendo las influencias orientales y las romanas: Todas ellas obedecen al deseo de no usar cimbras como se ven disposiciones especiales. Aparejan bóvedas sin normalidad de juntas al intradós; siguen un despiezo que trata de evitar cimbras; Las juntas son poco inclinadas ejerciendo poca presión en la cimbra. [dibuix-7]



Se ve en el cañón seguido la disposición de Asiria; formas son cañones rectos inclinados, aristas y cúpulas que son las más importantes. A veces la construye sobre planta circular, los hace de ladrillo evitando la normalidad de juntas, evitan el empuje empleando poco peso en el material con alfarería, piezas huecas, tribos. La cúpula da un nuevo carácter al estilo, la construyen sobre planta cuadrada con pechinas interpuestas o sobre planta octogonal, en trompas que la apoyen.

En Sta. Sofía llega a 31 metros de diámetro, en el que se produjo ruina, a pesar de las precauciones tomadas.

En S. Vital y S. Marcos se ven las influencias de orden arquitectónico. Más tarde se eleva colocando intermedio o tambor, fue un grave inconveniente a la estabilidad, por producirse grandes movimientos, usaron de los atirantados o encadenados de madera en el interior de las masas para unir las evitando así en algo la dislocación.

Edad Media. En la Europa occidental la arquitectura latina fue una imitación de la romana. Se recibieron las influencias orientales resultando la arquitectura del s.X o románica. Los edificios se basaron 1º en las basílicas romanas cuyas plantas imitaron cubriéndolas por techos de madera, cubriéndolo más tarde con bóveda los edificios. Este problema no se alcanzó en todos los países. 1º solo se cubrieron las naves laterales con bóvedas semicirculares o cuarto de círculo o la bóveda por arista concrecionada. Más tarde la nave central se cubrió de la bóveda articulada transmitiendo a los nervios los pesos dejando los apoyos más delgados para aprovecharse el espacio. Esto se logró en la arquitectura gótica que transmitió los empujes a cuatro puntos aislados que se podían reforzar adelgazando los paños de pared interpuestos, llegando al s.XII ya perfeccionada construida en los siglos siguientes XV inclusive.

La cúpula tuvo empleo en frecuentes casos, como en el centro de Francia, dando origen a un sistema particular.

Renacimiento. Vuelven a aparecer las formas antiguas, copian de los reseros de los edificios romanos, fundando las bóvedas en las articuladas, sostenidas las dovelas por compresión mútuas como el cañón seguido. Subdividido en secciones unidas por nervios dando lugar a red o casetones. La cúpula o esféricas en ladrillo tuvieron aplicación. En Roma volvió aparecer la bóveda concrecionada en la cúpula de S. Pedro de 42 metros de diámetro, Los nervios de ladrillo y masas de hormigón para llenar los espacios, un tambor cilíndrico que le servía de base ocasionó deficiencias que hicieron emplear atirantado. En los s.XVII y XVIII decae la bóveda dando mayor importancia a la decoración, apareciendo las bóvedas simples o aparentes que permiten decoración sin ser estructura constructiva. Hoy día ha continuado decayendo, pero ha dejado de usarlas sirviéndose de otros medios e viose en casos determinados. El hierro permite cubrir espacios ilimitados trabajando a la flexión y la economía de su obtención sustituye con ventaja a las bóvedas, usándolas solo en los edificios de carácter artístico como iglesias.

Clasificación de las bóvedas según su forma

Las curvas pueden ser varias y de aquí distintos nombres. La forma del intradós no influye en la verdadera clasificación; no debe ser hija del capricho sino basada en las siguientes consideraciones.

1ª.- Nace de la forma del espacio que ha de cubrir. Así la esférica (cúpula) sirve bien para los espacios circulares, cuadrados o rectángulos poco prolongados. La bóveda por arista sirve para formas poco prolongadas.

2ª.- Resistencia de los apoyos o muros que han de sostener, que no solo registran pesos sino empujes y según sea la forma, dimensiones, materiales, permitirán usar de la bóveda diferente en cada caso.

3ª.- Forma y situación de los apoyos; así hay bóvedas que necesitan muros continuos para apoyos. Si son aislados la forma se ha de adaptar a ellos como en las bóvedas ojivales.

4ª.- El efecto artístico que se trata de obtener, éste es modificado por la bóveda que es una buena expresión artística. Las bajas, rebajadas, dan carácter de constructivo pesada y las altas dan idea de construcciones ligeras, aéreas, levantan las ideas. Esto ha de ser de una gran consideración.

Elección de materiales

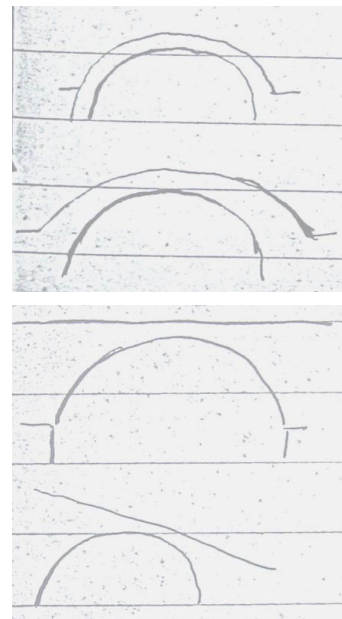
Para ello han de hacerse consideraciones siguientes.

Todas las fábricas pueden usarse, empleándose la sillería para obras ricas y majestuosas y obras exteriores. Si debe estar revestida de pinturas al fresco se usará el ladrillo, hormigón, que quedan ocultos.

El arquitecto tendrá libertad de elección escogiendo los más convenientes.

Formas del trasdós

La que adquiere el trasdós es no vista quedando encerrada, adquiere diferentes formas según el oficio, o sea que se trasdosa por igual. Otras veces en los arranques se le da espesor mayor lo que tiene origen en conocerse por ser mayor el empuje en el arranque que en la clave. [dibuix-8]



Otras se trasdosa por igual, como en bóvedas que han de sostener vías, carreteras, etc. o en plano inclinado, para recibir cubierta, muy bien empleada en la arquitectura románica. [dibuix-9]

Operaciones que comprende la construcción de las bóvedas

Las dividiremos en cuatro:

- 1ª.- Establecimiento de cimbras
- 2ª.- Ejecución de las fábricas
- 3ª.- Operación del descimbramiento
- 4ª.- Operaciones complementarias

1.- Establecimiento de cimbras

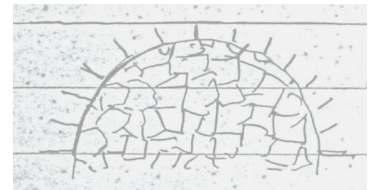
Cimbra es toda construcción provisional para sostener el peso de dovelas antes del cierre de la bóveda, al colocarlas partiendo del salmer que se sostiene por si propio, la inmediata el rozamiento la sostiene y más adelante las dovelas pueden resbalar o caer girando; es necesario para ello que haya construcción provisional o cimbra que desaparece en cerrar la bóveda.

La forma de la cimbra ha de ser la misma que la curva de intradós de la bóveda, es un molde que da forma a la bóveda. También se usa en el derribo de bóvedas cuando se quiere evitar el derrumbamiento súbito.

La cimbra puede ejecutarse con varios materiales.

- 1) Con mampostería en seco
- 2) Con cimbras de tierra
- 3) Las de ladrillo
- 4) Las de madera que son las mas ... y solo las otras se usan en casos determinados.

Cimbras de mampostería en seco. Es una pared de mampostería en seco, sin mortero, ejecutándola tal como se indica, colocando ripios en los intersticios para evitar el asiento. Supervisar al llegar a la superficie exterior, adoptando plantillas para la forma precisa y una capa de mortero para alisar la exterior del mismo. No tiene condiciones muy recomendables per ser deformable produciendo asiento, solo se usa en bóvedas poco importantes y si abunda la piedra.[dibuix-10]



Cimbras de tierra. Es también deformable en general, pero en casos resultan económicas como en casos de bóvedas cerca del suelo como se vió en las cimentaciones. Se cortan las tierras según las formas de la curva, sirven por ser tierras no arrancadas la que aumenta la resistencia. En un edificio que se ha de cubrir con bóvedas sin cortar la tierra hasta construidas. Antiguamente se usó de este procedimiento para las grandes bóvedas, como en Roma, la del Penteon de Agripa en que entraron 60.000 m³, la tradición tiene su origen, aquí en Barcelona, en la Catedral se sirvieron según tradición de la tierra para las bóvedas, lo que podria ser muy bien para las bóvedas de la antigua catedral a que estas sirvieron para las naves.

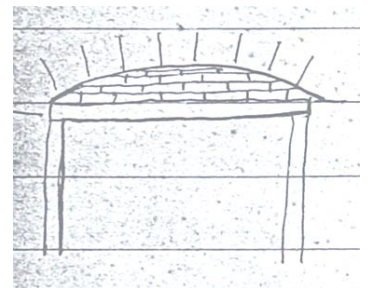
Una precaución es la que los materiales de la bóveda apoyen sobre tablas de madera, ara evitar que descansen inmediatamente sobre la tierra, que se deformaria bajo la presión de cada dovela.

Cimbras de ladrillo. Sirven los ladrillos en dos clases: cimbras de ladrillos en seco y cimbras de bóvedas tabicadas.

Los ladrillos en seco forman pared o muro con este material, que es fácil hacerlo procurando en la parte superior darle la forma del perfil con mortero de rápido fraguado, tiene la ventaja de ser incompresible, aún en seco, és fácil la construcción y desmontaje de estas cimbras. Para pequeños arcos, los prácticos hacen cimbras especiales sin recurrir al carpintero, colocan pies derechos a cada lado, un travesaño de igual longitud que al hueco encima, hiladas de ladrillo y por último se alisa la parte superior con morero. [dibuix-11]

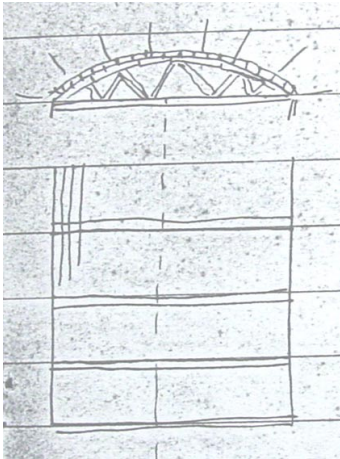
Las cimbras con bóvedas tabicadas pueden hacerse provisional o permanentemente. Para bóvedas de silleria es provisional tal com se explicará en bóvedas tabicadas, haciendo que la superficie del tardos de la tabicada sea igual a la superficie del intradós de la bóveda definitiva. Para descimbrar se rompen los ladrillos que la forman. No es de uso general. Para grandes bóvedas, el descimbramiento rápido producirá perjuicios, para las pequeñas es ventajosa.

Es de uso permanente cuando la cimbra sirve para la forma concrecionada o hormigón, formando la cimbra parte de la misma bóveda.



Cimbras de madera. Estas cimbras estan formadas de dos elementos: sustentados y sustentantes que son las cerchas o cuchillos o camones o formas de madera unidas de manera invariable, resisten por flexión una parte del peso, la cimbra se compone de varios camones en posición vertical i normal al eje de la bóveda, de distancia variable según la naturaleza de las bóvedas. [dibuix-12]

Sobre de ellos vienen los tablonos o parte sustentada, que dan forma al intradós de la bóveda sobre los que se colocan ya las dovelas.



Los camones han de calcularse según la distancia de unos a otros, varia según las condiciones económicas sin extremas medidas, pues si estan muy distanciados los pesos que aguantan son mayores y los camones se han de construir de piezas grandes que son muy caras. Al caso contrario las piezas han de ser muy delgadas, pero en cambio necesitarse de mucha de mano de obra y aumentan en número, resultando muchos camones y mucha mano de obra, lo que producen caros los camones.

Conviene un término medio o sea 1,5 m no pasando de 2 m. El entablonado ha de hacerse de tablonos largos, que se consideran como empotrados una vez bien clavados. Esta condición es necesaria por ser invariable su posición y mayor resistencia al calcularla. Los apoyos a los camones formando enriestrado que no tiene movimiento lateral i la separación de estas tablas dependen del material, en dovelas de sillería puede ser mayor, pero se ha de considerar el tránsito de los operarios. No estan al tope porque se mojan dilatándose las maderas, deformándola, se dejan pues varios centímetros de uno a otro.

Construcción de cimbras de madera.

Se ha de ejecutar en puntos próximos, destinando plano de monte. Dibujándolas tamaño natural, ejecutadas las piezas, se montan transportándola, en casos de distancias pequeñas. Si es grande la distancia se desmontan, numeran las piezas y montándolas de nuevo sobre plano horizontal y por cabrios se la levanta, poniéndola en posición vertical.

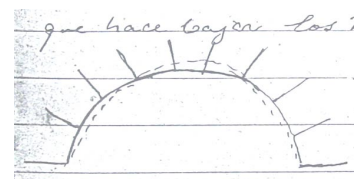
Es indispensable sujetar-la con cuerdas para que no se incline y cuando hay dos o tres, se clavan las riostras que se oponen al movimiento lateral. Si no se pueden montar a pie de la obra, puede hacerse espacios artificial sobre balsas o almodias que permiten todas las operaciones.

Si el camon no es muy grande se hace lo dicho pero en casos de muy grande se procede de otro modo. Montándolo por partes según la dimensión, colocándolas en obra sujetándolas con cuerdas, uniéndolas entre si hasta tenerlo ya montado sujetándolo con riostras.

Hay cimbras que solo se apoyan en los arranques, otras tienen varios puntos intermedios, recogidas las primeras o fijas las segundas, estas son fáciles de colocar siempre que se han colocado los puntos de apoyo haciendo el montaje por partes atirantándolas por cuerdas y cuando se tienen dos cuchillos se enriestran unos con otros. En épocas de viento son operaciones delicadas al que no resisten a no ser que estén atirantados o enriestrados.

Asiento de la cimbra.

Esta recibe el peso de las dovelas antes de cerrar la bóveda, aguanta pesos desigualmente repartidos sobre la longitud, produce deformación de ellas, asentándose mas en la clave y alrededor, pero antes sufre deformación que hace bajar los tercios y subir la clave por ser la longitud invariable. [dibuix-13]



Esta deformación trae dos inconvenientes:

- 1º.- Deformación de la curva, que da otra curva no proyectada y
- 2º.- el ser la junta de mortero, abrese sin poderla rellenar.

El origen de todo esto es complejo dependiendo de las siguientes causas:

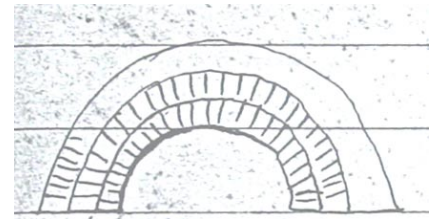
- 1º.- La deformación de las maderas bajo el peso que sufren, que las comprime y causa descenso de la cimbra,
- 2º.- Depende del coeficiente de elasticidad de las maderas, las de menor coeficiente se comprimirán más,
- 3º.- Depende de la relación entre amplitud de la bóveda y la flecha, cuanto mayor sea esta,
- 4º.- La disposición de las piezas puede influir en el asiento,
- 5º.- La mayor o menor perfección en la ejecución de la cimbra influye también.

En el caso de ser las cimbras fijas, los puntos de de apoyo mas largos hacen mayor compresión y mayor disminución de la longitud de los mismos. La mayor o menor compresión del suelo influye en este aumento del asiento.

Las precauciones que se pueden tomar para evitarlo son, toda vez que el asiento consiste en un descenso, se señala un exceso de peralte, lo que no da resultados por no descender proporcionalmente a la flecha, se producen muchas

irregularidades, otros medios es usar cimbras rígidas lo que se consigue aumentando la mayor sección de trabajo, usando maderas resistentes y de mayor escuadria, se hace que todas trabajen a la compresión y extrusión y por último se evita que trabajen a la flexión, lo que produce movimientos considerables. Otros dicen que, al aplastarse la cimbra en los tercios y levantarse en la clave, se cargan aquí con pesos muertos para contrarrestar los efectos y el medio es insuficiente además de dificultar el transito de operarios.

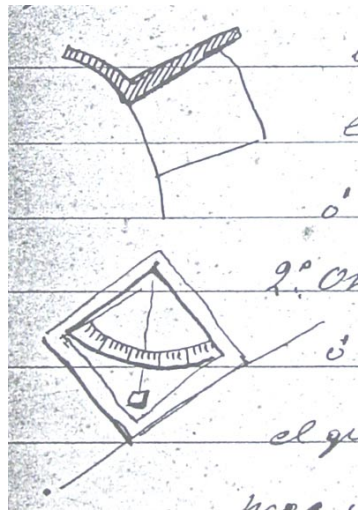
El medio preferible es hacer la bóveda subdividiéndola por elementos que cada uno se construye independientemente, hasta que cada rosca se ha cerrado pasando luego a ejecutar el siguiente cargando solo en la cimbra el peso del primer anillo. [dibuix-14]



Ejecución de la fábrica.

De una manera general diré lo mismo ya explicado en los casos de construcción de ella. Es indispensable que la fábrica ha de resistir los empujes que se originan y la curva de presiones debe transmitirse de unos elementos a otros sin solución de continuidad. La ejecución varia con la naturaleza de las fábricas.

Sillera. Acabada la cimbra, se señalan en ella las juntas continuas que en el cañón seguido seran las generatrices del cilindro, marcándolas por medio de puntos en los arcos de frente o cabeza, son puntos que dividen en partes iguales los arcos clavando allí puntos y tendiendo cordeles manchados de color, se separan y señalan la línea sobre la cimbra, a veces se prescinde de la materia colorante y se recurre a señales indelebles obtenidas con serrucho.



Cada dovela se eleva por los medios ya explicados, subiendo las del arranque a cada lado colocando una dovela y la simétrica, para que la deformación de la cimbra sea regular. Colocada allí se moja el lecho de la piedra inferior, se coloca el baño flotante de mortero con las cuñas de madera, bajando la dovela hasta apoyarla sobre la anterior sin cargar sobre la cimbra que solo le da posición. Se cooca la simétrica y así va siguiéndose. Importa darles la posición precisa marcando la posición de las generatrices, y se logra por varios medios:

1º.- rectitud de las líneas, normalidad de juntas, se hace por falsas escuadras, sacadas del plano de montea, el lado es recto de la junta y el otro curvo según la cimbra que puede ser arco cualquiera o círculo que da los vaiveles iguales.

[dibuix-15]

2º.- Otro medio es emplear escuadra de taludes o un cuadrado que tiene arco de círculo en el que un péndulo marca la misma inclinación para un plano determinado. [dibuix-15]. Se señala en el plano de

montea se le da el plano de junta con ángulo respecto a otro inclinado y recordando la graduación obtenida, esta se reproducirá al colocar la dovela.

3º.- Si se comete un error en las primeras dovelas, se suman los errores y se emplean medios más precisos como las coordenadas que fijan la posición absoluta de la junta, sobre un plano horizontal. Se toman las alturas como ordenadas y como abcisas se toman sobre la generatriz. La ventaja de este es hacer independiente el error en cada caso. [dibuix-16]

4º.- Otras veces se traza vertical en el plano de montea que se transmite a la dovela y una plomada indicará la posición comprobada.



Así se colocan las dovelas, sin hacer una hilada sin concluir antes la anterior, las juntas han de ser de espesor uniforme que ha de estar comprendido entre 0,008 m i 0,025 m y al colocarlo se recoge el que cae sobre la cimbra por la tendencia que tiene a resbalar limpiando la cimbra. Al colocar las dovelas se ha de recubrir la junta. En una bóveda no puede hacerse golpeando sinó com masas blandas de madera rechazando las de hierro. Si hay intersticios se colocan ripios para cerrar las juntas. Las hiladas se llevan simétricamente hasta la última , la clave, y esta se coloca con mucho cuidado, evitando que quede demasiado floja o estrecha. En el primer caso se producirá un descenso de la misma hasta apretarse con las contraclaves, y en el segundo caso se comprimiran con las laterales ocasionando, a veces, otros inconvenientes que perjudican la estabilidad. La clave no se labra porque el espacio seria demasiado grande y las juntas serian gruesas, mientras que si es pequeño no se da por supuesta su conclusión hasta rebajar las juntas. Las juntas se suponen de grueso constantemente marcado en el plano de montea, diferentes de la práctica. Tiene pues la clave la necesidad de no tener las juntas labradas sinó que se toma del espacio que ha de ocupar una plantilla con listones y se trasladan estas medidas sobre la clave ligeramente rebajada devastándola en lo marcado por este contorno. Para colocarla no se usa el baño flotante de mortero, se suspende y al bajar

paulatinamente se sostiene con cuñas de maderas a cada lado, para evitar espartillamientos y con la lija se llenan las juntas dándosela la posición definitiva.

2º procedimiento para colocar la clave.

Este se labra en sus juntas y no en el intradós, ni extradós, considerándose como cuña indefinida. Se quitan los tablones de debajo de la clave, se deja bajar paulatinamente hasta su posición definitiva, se labra después el intradós hasta quedar perfecto en su enlace. [dibuix-17]



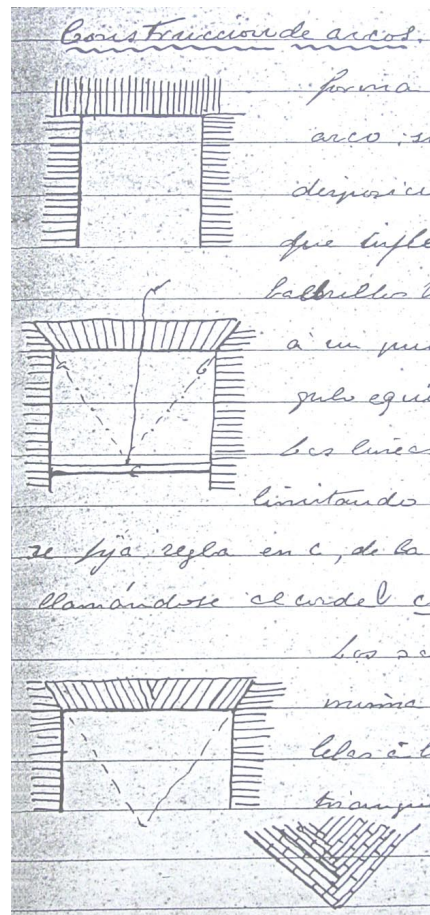
3º procedimiento. Se coloca sobre cuñas y en lechadas de mortero con cuñas, lo que da grandes perjuicios. La única que podría adoptarse era la lechada de yeso si es obra en interior.

Rehundido de bóvedas de silleria.

Una vez las dovelas se han labrado en el taller, a veces el intradós esta desvastado y se labran una vez colocadas siguiendo los mismos principios. Solo que aquí hay que atender a la ejecución de la bóveda en un cañón seguido. Se marcan con precisión los arcos en las partes, se labran pequeños cilindros, uno en cada extremo, se señalan otros intermedios y aplicando reglas de unos arcos a otros, que se marcan los puntos homólogos por niveletas formando una roza o arco, que servirá de directriz para colocar la regla. Si fuera bóveda de otra naturaleza hay que atender siempre a la naturaleza de la curva. En cúpula, trazando varios meridianos sacados del plano de monte, por plantillas formando rozas iguales, luego se labrarian arcos consecutivos y aplicando los paralelos correspondientes en cada junta apoyan sobre los meridianos.

Bóvedas y arcos de ladrillo.

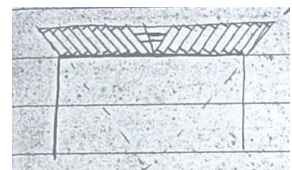
No tiene la importancia monumental, pero son más frecuentes, Comparando las de silleria con las de ladrillo, representan economía de tiempo, por exigir solo acopia de material y colocación en obra. Además hay economía de dinero porque por metro cúbico es de 1/8 a 1/10 del de silleria.



Los ladrillos pueden ser de dos formas: adovelados o en cuña y los rectangulares. Los primeros se usan en obras esmeradas y el común en las ordinarias, por resultar las juntas desiguales. El ladrillo adovelado es inútil en grandes bóvedas de radio muy grande.

Construcción de arcos.

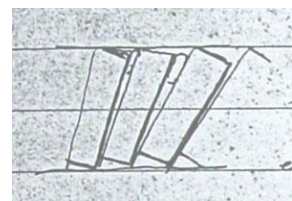
Arco adintelado o a regla. Es forma aparente, existiendo el verdadero. Si los ladrillos fueran verticales en la disposición a sardinella obtendríamos dintel inflexionaria, pudiendo romperse. [dibuix-18] Los ladrillos han de tener juntas convergentes a un punto, que está en el vértice del triángulo equilátero cuyo lado es la luz *ab*. [dibuix-18] Las líneas *ba* y *ac* estarán inclinadas a 60º limitando el arco. Para comprobar la colocación se fija en *c*, de la que parte cordel que recorre el arco, llamándosele al cordel cordel.



Los salmeres se cosntruyen siempre de la misma manera, se hacen las juntas paralelas a los salmeres cerrando el espacio triangular de la clave com se ve en la figura que se cierra el arco endentando. [dibuix-18]. También en esta disposición de dovelas puede cerrarse a bolson en que las hiladas son horizontales. [dibuix-19].



Como los ladrillos son paralelepípedos, quedan mas altos quedan resaltos que se cierran con el revoque.

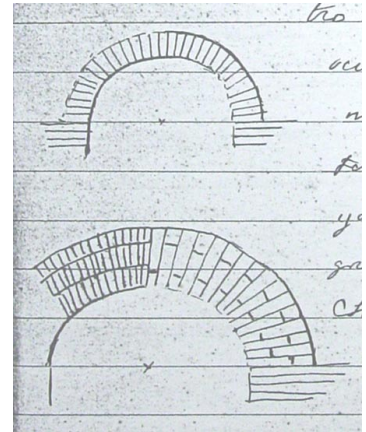


En el caso de concurrir las juntas, se disminuye la junta en el intradós y en el extradós es grande, resultando mayor asiento que produce movimientos en el arco adintelado. Pueden evitarse colocando lajas de pizarra en la junta que la subdividen. [dibuix-20]

Arcos semicirculares. Las juntas se dirigen al centro. Si el espesor es de un ladrillo este ocupará el grueso, quedando las juntas más gruesas en el trasdós. [dibuix-21]. Para obras vistosas usan los arcos adovelados, y, usando los rectangulares, cuanto mayor es la curvatura más es la diferencia de grueso en a junta entre el inverso y el intradós.

Si el espesor del arco es grande habrá que subdividirlo haciendo combinaciones según el grueso. Se llama a juntas combinadas, que quedan diferencias grandes en la junta parte del trasdós.

Otros subdividen el arco en otros construyendo cada arco independientemente, prescindiendo de hacer un arco, de que las juntas se correspondan en unos y otros. Se llama rosca a cada uno de estos arcos. [dibuix-22]

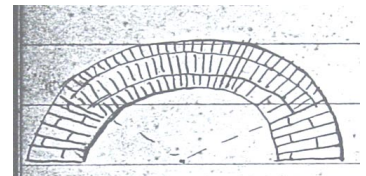
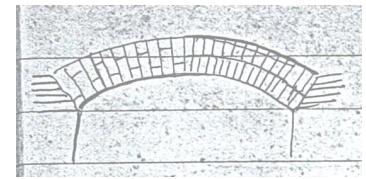


El sistema inglés.

Tiene muchas ventajas. La junta se reduce al mínimo, modifica las condiciones de equilibrio, haciendo que la curva de presiones pase al intradós y no puede abrirse por el intradós en la clave ni en el extradós en los tercios. Además solo carga sobre la cimbra la primera rosca, y puede ser ligera, de menor coste.

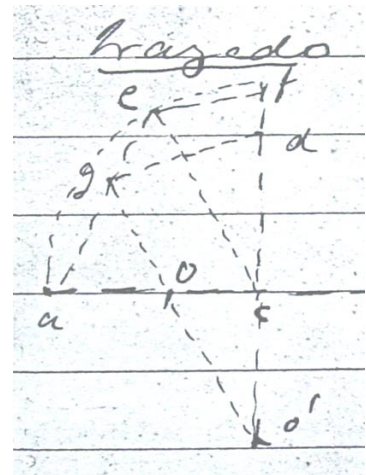
Como en este sistema puede abrirse por los tercios hacia el exterior en arcos de grandes dimensiones se construye de ladrillos combinados hasta el tercio y lo restante se construyen de roscas o anillos, haciendo además las roscas inferiores más gruesas y hacer solidarios unos con otros por medio de ladrillos que pasen de unos arcos a otros. [dibuix-23]

En este sistema puede tener menor espesor en la clave obteniendo economía de fábrica.



Arcos rebajados. Son variadas las formas por ser varia la relación entre la flecha y la amplitud del arco. Se dice es arco al 1/6, 1/8, 1/10 de amplitud, o expresado por grados del arco de 60°, de 45°. En el caso de ser de 60° se llama escarzano.

Las juntas concurren al centro, son normales al intradós y extradós. Si es de grande espesor pueden usarse los ladrillos combinados o el sistema inglés de roscas. Las juntas conservan aquí casi igual espesor. En igualdad de las otras circunstancias aumenta el empuje cunato más rebajado sea el arco, pudiendo llegar a fijar esfuerzos que podrian pasar del coeficiente de seguridad del ladrillo. [dibuix-24]



Arcos carpaneles. Son arcos de círculo semejantes a los elípticos. Para salvar los inconvenientes de trazado disposición de juntas, se usan estos arcos. Se asemejan los carpaneles en grandes arcos a los elípticos. Se hacen de 5, 7, 9, 11 centros y en pequeños arcos bastan de 3 centros, produciendo contaste al apreciar las dos curvaturas próximas que han de ser las diferencias lo mas pequeñas posibles. Uno de los medios para que la curvatura sea el mínimo en la diferencia se hace de 60° los ángulos.

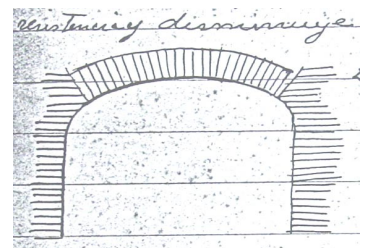
Trazado de carpaneles. Sea amplitud ab y flecha cd , trácese con radio ac el arco aef , constrúyase el triángulo equilátero aec , trácese por d la dg paralela a ef hasta encontrar la ea en g y por g trácese la go' , paralela a la ec . o o' són los centros de los arcos. [dibuix-25]

En cuanto a la construcción, siguen siguen los mismos procedimientos.

Si los arcos son de varios centros por ser de muy pequeña curvatura en el arranque, se usa un aparejo que aumenta esta resistencia y disminuye el empuje.

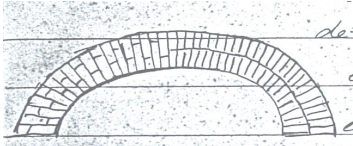
Se suben las hiladas horizontales hasta el arranque del radio mayor. [dibuix-26]. La parte de jamba aparece con voladizos y siendo escarzano la parte central. Se adoptan cuando no hay estribo para contrarrestar empujes.

En todos los arcos al colocar los ladrillos se ha de tener presente la posición de los cintreles que será en número igual al de centros de los arcos que forman el carpanel.



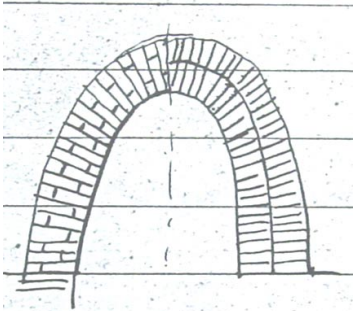
Arcos elípticos. Son poco usados, solo en casos aislados que se ven en las diferentes arquitecturas. En Egipto y en los palacios de Asirios, en el renacimiento se usó para separarse del apuntado, naciendo carácter especial como en París, en que las curvas son elípticas.

La elipse cumple en ciertos casos; hay más dificultades en el trazado, que en los circulares. En cuanto a su forma depende de la correlación de los ejes y según y según que el eje menor sea vertical u horizontal se llaman arcos rebajados y peraltados. Son los primeros los que tienen el eje menor vertical.



Arcos rebajados.

Aquí la curva es extradós no puede ser elipse, para que sea el arco de igual espesor. Haremos pues arco de desigual espesor si queremos elipse también en el trasdós o bien haciendo la curva algo distinta del trasdós para que sea igual el espesor, que se prefiere. La construcción es idéntica a los casos anteriores: ladrillos combinados y el sistema inglés o de roscas. En todos los arcos que hay variación de radios de curvatura, las juntas son de desigual espesor de unas a otras, variando este grueso podrán usarse lajas de pizarra, etc. [dibuix-27]

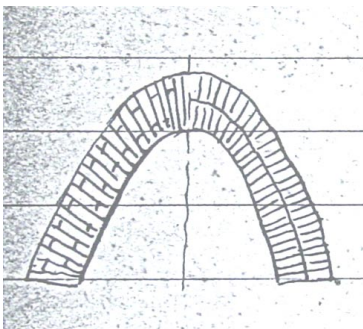
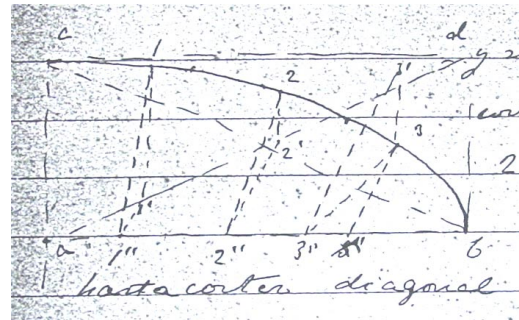


Arcos peraltados. [dibuix-28]

Los aparejos son los mismos anteriores. En los arcos elípticos hay que comprobar la dirección de las juntas, pues aquí no hay cintreles. El trazado de la normal es largo en la elipse y para tener guía un ingeniero francés Boisu ha ideado el medio, cuando se conocen los puntos, en que

se ha de pasar la normal.

Sea ab el semieje mayor, ac el menor, tracemos el rectángulo sobre las dos rectas, la elipse de intradós y sean los puntos de división que corresponden a las juntas $1, 2, 3$. Tracemos diagonales, por $1, 2, 3$ las paralelas al eje menor hasta cortar la diagonal ad . Por $1', 2', 3'$, perpendiculares a la diagonal cb hasta cortar al lado ab o eje mayor, se tienen 1 con $1'', 2$ con $2'', 3$ con $3''$. Para obtener las normales que serán las rectas $11'', 22'', 33''$. [dibuix-29]



Arcos parabólicos. [dibuix-30]

Pueden ser peraltados o rebajados teniendo estos últimos poco uso por acercarse al arco de círculo.

Los peraltados se usan alguna vez, siguiendo el aparejo las juntas normales, usando las dos disposiciones de ladrillos combinados o roscas. Para comprobar las normales de las juntas es más difícil que en la elipse, señalándola por baiveles, ya que no puede hacerse por método geométrico. Se presenta el inconveniente el que por ser de grueso igual el arco de la curva exterior no será parábola, que es lo que se hace, pero si quisieramos parábola resultaría arco desigual. Se usan en la resistencia cuando hay pesos repartidos por igual a lo largo de la proyección horizontal.

Arcos de herradura. [dibuix-31]

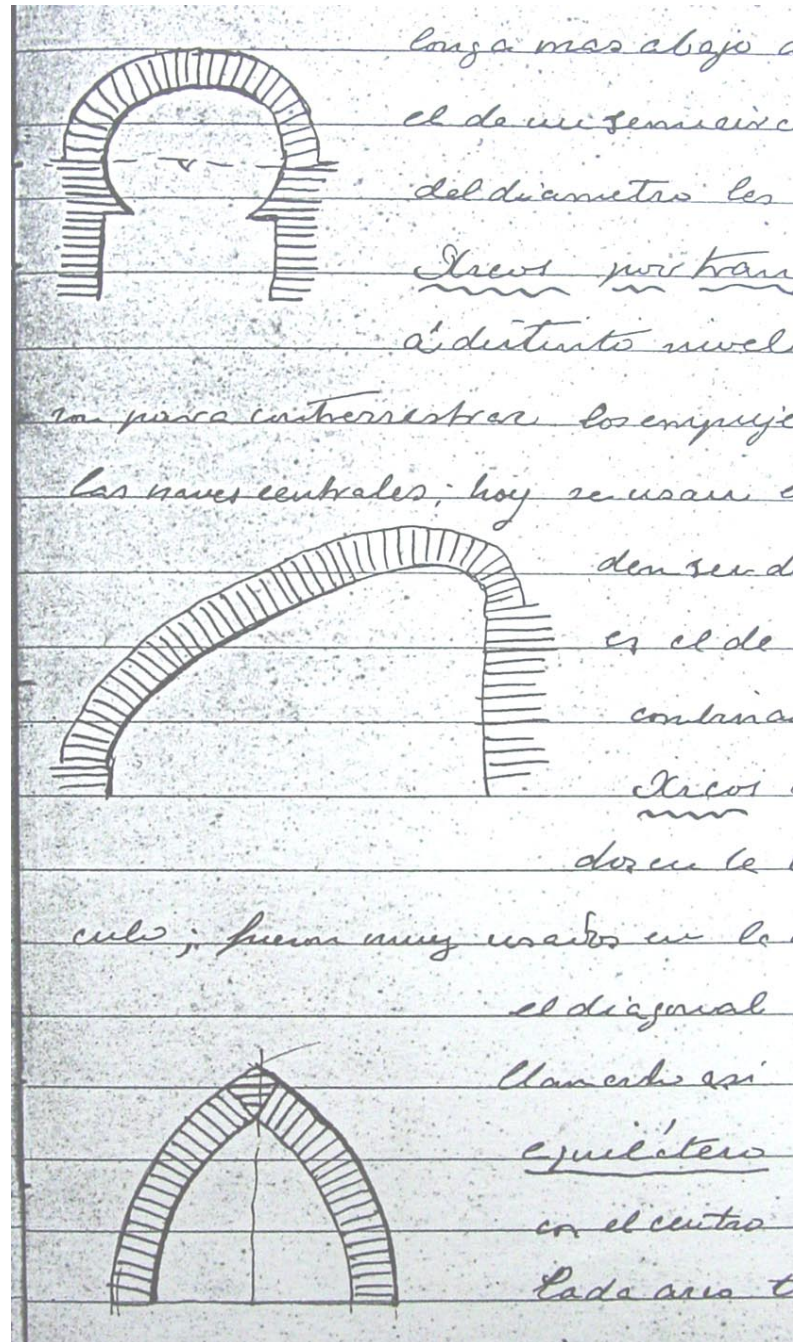
Son los usados por el árabe y derivados. Constructivamente es arco circular, cuya forma curva se prolonga más debajo de los arranques. El aparejo es el de un semicírculo y la parte curva debajo del diámetro las hiladas son horizontales.

Arcos por tranquil. [dibuix-31]

Tienen los arranques a distinto nivel. En la Edad Media se usaron para contrarrestar los empujes de las bóvedas que cubrían las naves centrales. Hoy se usan en bóvedas de escalera. Pueden ser de distintas curvas. El aparejo es el de ladrillos radiales, la de combinados o roscas.

Arcos apuntados. [dibuix-31]

Son los producidos con la intersección de dos arcos de círculo. Fueron muy usados en la arquitectura ojival. Arco ojivo es el diagonal de las crucerías. Es impropio llamarlo así al apuntado. Puede ser el arco equilátero formado por dos arcos trazados con el centro en cada arranque. Cada arco tiene el aparejo del arco de círculo y será: ladrillos radiales combinados o el de roscas. La clave se llena por hiladas horizontales disposición a bolson. Es preferible usar clave de sillería. Otros cerraban por una junta para obtener elasticidad.



Càlculo de una bóveda tabicada

Sistema común

Fijándonos en el caso de ser d igual a 3 m el espesor e es suficiente con un grueso de ladrillo, en total $e = 0,05$ m;

El peso de la bóveda será

$$0,05 \cdot L \cdot d \cdot 2000 \text{ Kp/m}^3 = 100 \cdot L \cdot d$$

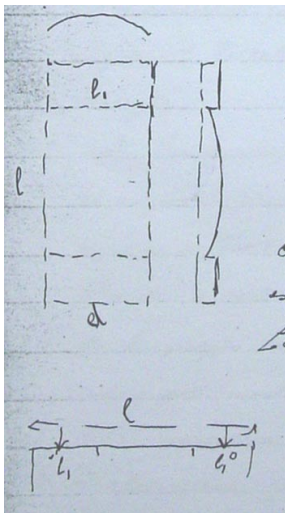
Para la viga se tendrá

$$100 \cdot L \cdot d \cdot L / 8 = R \cdot I / n$$

por ser carga uniformemente repartida.



Sistema Guastavino



Con el mismo espesor para la bóveda se tiene para el volumen

$$2 \cdot L_1 \cdot d \cdot e + (L - 2 \cdot L_1) \cdot e \cdot d = 2 \cdot L_1 \cdot d \cdot e - 2 \cdot L_1 \cdot d \cdot e + L \cdot d \cdot e$$

si se toman por longitudes de los arcos, la de las cuerdas, resulta igual volumen que anteriormente como es horizontal.

La sección de la viga obedecería a las fuerzas aplicadas en O y O', iguales cada una de ellas a

$$\frac{L \cdot d \cdot e \cdot \pi}{2} = \frac{100 \cdot L \cdot d}{2}$$

El momento sería

$$\frac{100 \cdot L \cdot d}{2} \cdot \frac{L_1}{2} = 25 \cdot L \cdot d \cdot L_1$$

que comparada con la anterior, resulta si se quiere

$$\text{Si } 25 \cdot L_1 = 100 \cdot L / 8$$

$$L_1 = \frac{100 \cdot L}{25 \cdot 8} = \frac{100}{200} \cdot \frac{L}{2}$$

Pero des de el momento que se hace L_1 mucho menor que $\frac{L}{2}$ resulta, si es $L_1 = \frac{L}{2 \cdot K}$, el momento

$$\frac{100 \cdot L \cdot d}{2} \cdot \frac{L}{2 \cdot K} = \frac{R \cdot I}{n} \quad ; \quad \frac{100}{4} \cdot L \cdot d \cdot \frac{L}{K} = \frac{R \cdot I}{n}$$

$$\frac{100}{8} \cdot L \cdot d \cdot \frac{L}{K} = \frac{R \cdot I}{n} \cdot \frac{1}{2} \quad \text{o bien} \quad \frac{100}{8} \cdot L \cdot d \cdot L = \frac{R \cdot I}{n} \cdot \frac{K}{2}$$

en que el coeficiente $\frac{K}{2}$ puede actuar sobre R o sobre $\frac{I}{n}$.

Consecuencias deducidas de las conferencias dadas por el Arqto. Juan Torras, en el Salón de Grados de la Universidad, en los días 5 y 19 de Marzo de 1899.

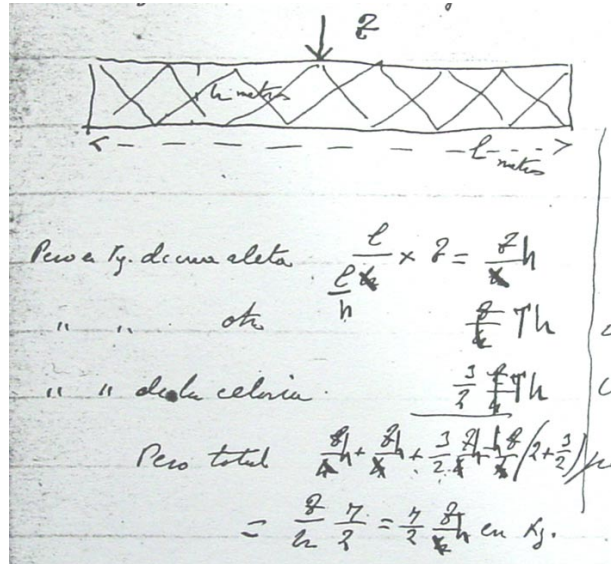
1ª) En las vigas armadas, si la línea de momentos es interior al contorno de las mismas, las piezas que van a encontrar la resultante de los pesos a la parte inferior de las vigas son estiradas y comprimidas las contrarias.

2ª) Si el perfil es parabólico, las aletas superiores sufren compresión, las inferiores extensión y las celosias obran solo para fuerzas accidentales que pueden modificar la línea de los momentos que se compondria primeramente con la aleta superior. La celosia en circunstancias normales sobra, porque no trabaja.

3ª) Si la curva de los momentos sale del contorno de la viga, se origina una flexión que tiende a abrir la pieza en la región central aplanando la curva y se origina una contraflexión a cada lado que tiende a aumentar la curvatura de la pieza. Esta flexión y las contraflexiones estan separadas por puntos de flexión nula o inflexión.

4ª) Estas consecuencias se aplican a todas las piezas armadas cualesquiera que sea su contorno: vigas rectas, curvas, semiparabólicas, cuhillos de armadura, etc.

5ª) El peso por metro lineal de las vigas rectas armadas es igual a la longitud total en metros partida por tantas veces la altura como indica la longitud, multiplicando el cociente por el número total en toneladas que ha de aguantar la pieza; lo cual da el peso de una aleta; se duplica y se toma 1 y 1/2 veces el peso primero y se obtiene el peso total en Kg.



Peso en Kg de una aleta $\frac{L}{L/h} \cdot Z = \frac{Z}{h} \cdot h$

“ “ otra $\frac{Z}{h} \cdot Th$

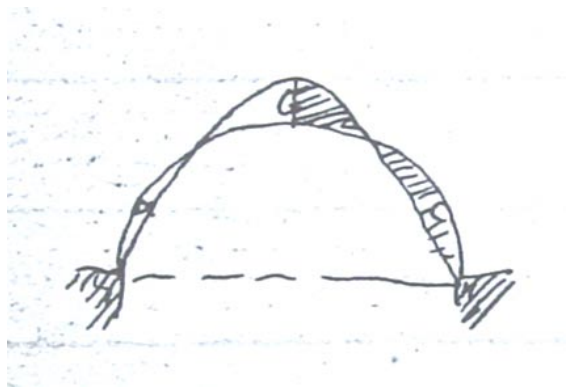
“ “ de la celosia $\frac{3}{2} \cdot \frac{Z}{h} \cdot Th$

Peso total $\frac{Z}{h} \cdot h + \frac{Z}{h} \cdot h + \frac{3}{2} \cdot \frac{Z}{h} \cdot h = \frac{Z}{h} \cdot h \cdot \left(2 + \frac{3}{2}\right) = \frac{7}{2} \cdot \frac{Z}{h} \cdot h$ en kg

6ª) El peso de una armadura, sistema Torras, es en Kg por metro lineal el número que resulta de tomar la carga total en toneladas multiplicada por 4 o 5. Así, si la carga esta es 40 toneladas, el peso por metro lineal es 160 a 200 kg por metro lineal. El peso de la armadura Polonceau es igual a 3,5 la carga total en toneladas.

7ª) Una armadura es tanto mas económica cuanto mayor es la superficie encerrada entre su contorno. Solamente en estas se debe procurarse, cunato más ligeras, un mejor enriestrado.

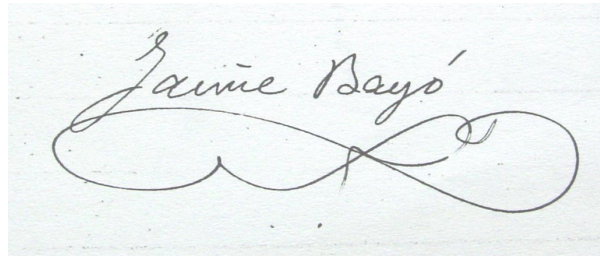
8ª) Las piezas curvas, puede considerarse con dos secciones: piezas curvas de movimiento libre en los estribos, por no tener tirante y el cálculo es como las vigas simplemente apoyadas, pues se produce la separación de los estribos hasta que el momento de flexión de las piezas se iguala al momento de resistencia de la pieza y entonces cesa el movimiento de los pies o estribos. Si los estribos son inalterables o fijos, se produce la flexión y contraflexiones explicadas para las vigas apoyadas, teniendo presente que la curva de momento al



pasar de la parte superior a la inferior deja con la fibra neutra unas superficies cuya suma es nula, es decir que, la superficie $a = b / 2$ o sea, $a + b + c = 0$.

El cálculo de las piezas que se hallan en este caso se deduce por un método sencillo que él explicó y no demostró y es:

Se construye el polígono funicular que equilibra los pesos que obran sobre el arco haciendo que el espacio entre el mismo y el tirante sea igual a la superficie comprendida entre arco y el tirante. El empuje del arco dado es el del polígono funicular que lo reemplaza. En apoyo del procedimiento citó la igualdad de los resultados obtenidos por su método con los obtenidos por Bresse. Planat también indica un procedimiento gráfico, si no tan sencillo como el del Sr. Torras, cuya demostración hemos de buscar si podemos, ya que él lo dedujo por sentimineto mecánico.



Jaime Bayó

ANNEX 3.11

Apunts de construcció, de Joan Torras.

Es tracta d'uns apunts anònims, conservats a l'arxiu històric del COAC, que daten del desembre de 1910. Tenim la sospita que fossin redactats en motiu de la crida que es feu durant la vetllada necrològica de l'estimat professor que morí aquell mateix any. El recull no és signat, però, veient que el catítol de línies de pressions conté per un igual el mètode de D. Joan Torras i el mètode de D. Jaume Bayó, es podria plantejar la hipòtesi que fos justament Bayó, també expert en temes estructurals, l'autor d'aquests apunts.

Curso de RESISTENCIA DE MATERIALES

APUNTES

basados en las explicaciones que daba
el profesor DON JUAN TORRAS Y GUARDIOLA
en la Escuela Superior de Arquitectura
de Barcelona

Tabla de materias

	<u>Pàgina</u>
NOCIONES PRELIMINARES	1
Fuerzas	2
Sistema de fuerzas	4
Sistemas de fuerzas equivalentes – Resultante	5
Resultante de un sistema de fuerzas plano. Polígono funicular	7
Propiedades del polígono funicular	9
Descomposición de fuerzas situadas en un plano	13
Momento de una fuerza respecto a un punto, un eje o un plano	15
Aplicación del polígono funicular a la determinación de los momentos	17
Centros de gravedad	21
Centros de gravedad de superficies	25
Líneas alabeadas	27
Líneas planas	27
Métodos gráficos	28
Aplicaciones	30
Teorema de Guldin. Aplicaciones	41

Momentos de inercia	43
Aplicaciones	44
Relación entre los momentos de inercia correspondientes a dos ejes paralelos	45
Método gráfico de Mohr	51
Ejes principales de inercia	53
Aplicaciones	57
Equilibrio. Condiciones que lo determinan en un cuerpo indeformable	60
Sólidos naturales	61
Volumen y superficie de carga	63
Fuerzas exteriores. Reacciones	65
Fuerzas interiores	66
Equilibrio de un sólido natural	68
Determinación del centro de presión. Indeterminación de la ley de repartición de las fuerzas elásticas	69
Caso de que tanto la resultante de las fuerzas exteriores como las fuerzas interiores son normales a una sección plana	70
Núcleo central	75
Aplicaciones	75
Centros de percusión	78
Fuerza viva. Trabajo. Teoremas generales	80
Rozamiento	82
Medida del trabajo disponible en un árbol de rotación. Freno de Prony	83
RESISTENCIA DE MATERIALES	86
Diferentes modos de resistencia de un cuerpo prismático	88
Tracción y compresión simples. Experiencias y fórmulas fundamentales	90
Caso en que los esfuerzos de tracción o compresión no coinciden en dirección con el eje de la pieza	93
Resistencia al esfuerzo cortante y al desgarramiento longitudinal	99
Aplicaciones de las fórmulas de extensión y compresión simples, esfuerzo cortante y desgarramiento	100
Cuerdas	100
Cables metálicos	100
Tirantes	101
Cadenas	101
Rodillos	102
Apoyos de vigas o jácenas	105
Resistencia y cálculo de las roblonaduras	107
Uniones de piezas de madera	112
Resistencia a la flexión. Piezas prismáticas rectas	116
Ley de distribución de las fuerzas elásticas de flexión	117
Casos típicos de flexión	122
Determinación de los momentos de flexión por medio de la línea de esfuerzos transversales	145
Método gráfico para determinar los momentos de flexión	148
Vigas apoyadas en más de dos puntos	156
Teorema de los tres momentos	159
Líneas de momentos y de esfuerzos transversales	160
Resolución de los problemas de resistencia, una vez conocidos el momento de flexión y el esfuerzo cortante máximos	164
Vigas inclinadas	171
Piezas comprimidas según su eje y de longitud mucho mayor que las dimensiones de su sección transversal	174

Fórmulas experimentales	178
Vigas de igual resistencia	183
Resistencia a torsión	191
Sistemas flexibles	195
Curvas funiculares. Primer caso	203
Segundo caso	208
Polígono y curva de fuerzas normales	210
Envoltentes cilíndricas de pequeño espesor	213
Piezas prismáticas curvas	215
Línea de presiones	219
Arcos articulados en los arranques	223
Arcos de tres articulaciones	224
Fórmulas generales de la deformación de una pieza curva	225
Determinación del empuje. Fórmula de Bresse	227
Métodos gráficos para la determinación de la línea de presiones	228
Procedimiento de D. Juan Torras	228
Procedimiento de Don Jaime Bayó	231
Arcos de formas equilibradas	235
Acopladuras de vigas horizontales	237
Vigas armadas	248
Naturaleza de los esfuerzos que se desarrollan en las aspas	253
Vigas de celosía	254
Sistemas articulados	257
Figuras deformables, indeformables y de líneas supérfluas	257
Figuras recíprocas	258
Equilibrio de los sistemas articulados planos. Método de Culmann	259
Método de Cremona	260
Método de Ritter	266
Aplicaciones. Vigas armadas	268
Método Torras	270
Vigas con sillas	271
Bow-Strings o vigas de arco y cuerda	275
Vigas compuestas	277
Vigas complejas	279
CUCHILLOS DE ARMADURA	281
Naturaleza de los esfuerzos que se desarrollan en las piezas que forman las triangulaciones	282
Aplicación de los métodos generales de cálculo de algunas armaduras	283
Armaduras compuestas	288
Armaduras en forma de arco	289
Armaduras de tres articulaciones	289
Diones	290
Determinación de las cargas y sobre-cargas que se consideran en los cuchillos de armadura	290
Aparatos para levantar pesos	293
Cabrias	293
Gruas	295
SUELOS	297
OBRAS DE ALBAÑILERÍA. Paredes de cerca	300
Muros de edificio	303
Fórmulas empíricas de Rondelet	304
Chimeneas	306

Cargas que pueden recibir los terrenos	309
Cimientos	309
Cimentación sobre un macizo de hormigón	310
Cimentación sobre un macizo de arena	310
Pilotajes	311
MUROS DE TERRAPLEN	316
Determinación del prisma de máximo empuje	318
Método de Poncelet	321
Distribución del empuje total	322
Comprobación de las condiciones de solidez del macizo de contención	324
Muros destinados a sostener una carga de agua	327
BÓVEDAS. Bóvedas en cañón seguido	329
Determinación de la línea de presiones	331
Modo de fractura de las bóvedas cilíndricas	333
Método de Méry	334
Soluciones admisibles en el trazado de la línea de presiones	335
Trazado práctico de la curva de presiones	337
Bóvedas no simétricas	341
Fórmulas empíricas para determinar a priori los espesores de las bóvedas cilíndricas	342
Estribos de las bóvedas cilíndricas	345
Bóvedas combinadas	347
Bóvedas atirantadas	348
Otras clases de bóvedas. Bóveda oblicua	350
Bóveda cónica	350
Bóveda por arista	350
Bóveda en rincón de claustro	351
Bóvedas de revolución	351
Regla de Rondelet para determinar aproximadamente los espesores de las distintas clases de bóvedas	355
Bóvedas tabicadas	355
Cimbras	356

160.- LÍNEA DE PRESIONES DEL ARCO. – Sea (fig. 264 lám. 28) un arco rígido, cuyo eje es $M'SN$ y sometido a las cargas P . Sean M y N los puntos de paso de las reacciones de los apoyos y Q el empuje desarrollado según la dirección MN . Supongamos trazado por los medios conocidos (nº 11) un polígono funicular $MABCDN$ correspondiente a las cargas P , que pasa por M y N y cuyo polo O diste de la línea ac una magnitud Q contada según la dirección oh paralela a Mn .

Sabemos que para encontrar las reacciones verticales bastará descomponer la resultante del sistema P en dos paralelas a su dirección y por lo tanto y según lo dicho en el nº 13 dichas reacciones serán las $P_1' = ba$; $P_2' = eb$. Además las reacciones R_1 y R_2 de los puntos M y N , puesto que han de ser resultantes de las Q , P_1' y Q , P_2' tendrán por líneas de acción las direcciones MA y ND de los lados extremos del polígono y por magnitudes las de los radios polares extremos Oa y Oe .

Esto sentado sea ab una sección plana ideal cualquiera efectuada por el punto S y normalmente a la línea media del arco o pieza curva. Para determinar las condiciones de equilibrio de esta sección sabemos que bastará hallar la resultante de las fuerzas exteriores aplicadas a uno cualquiera de las dos porciones en que la pieza queda dividida por la sección considerada; ahora bien si consideramos las fuerzas R_1 , P_1 y P_2 situadas a la izquierda nos convenceremos fácilmente de que su resultante tiene por línea de acción el lado BC del polígono funicular y por magnitud r_1 la del radio polar Oc correspondiente. Así, pues, para determinar la resultante de las fuerzas que actúan en una sección cualquiera bastará determinar el lado del polígono que resulta cortado por la vertical Sm trazada por el centro S de la sección considerada; este lado y el radio polar correspondiente nos darán en posición y magnitud la resultante buscada.

El polígono $MABCDN$ pasando por M y N y cuya distancia polar δ es la proyección horizontal de Q se llama línea de presiones del arco.

161.- USO DE LA LÍNEA DE PRESIONES PARA RESOLVER EL PROBLEMA DE RESISTENCIA. – Supongamos determinada la línea de presiones (fig. 264 lám. 28) y sea la sección ab trazada por el punto S de la línea media. Puesto que la resultante de las fuerzas que actúan en la sección S es como hemos dicho la r_1 dirigida según BC , podemos introducir sin alterar el equilibrio de dicha sección las fuerzas opuestas r_1 y r_2 pasando por S y de la misma dirección y magnitud que r_1 y si descomponemos la r_1 en las $p_1 = \xi \varepsilon$ y $p_2 = \varepsilon \theta$ normal y tangencialmente a la sección, obtendremos un definitiva: El par de flexión r_1 , r_2 ; el esfuerzo cortante p y la compresión p_1 . El momento del par de flexión es el momento de r_1 respecto a s y si descomponemos la r_1 en la vertical $mc' = qc$ y la horizontal $mq' = Oq = \delta$ el momento de r_1 , será la suma de los momentos de sus componentes (nº 16 bis). En definitiva, teniendo presente que el momento de mc' es nulo por pasar por el centro de momentos s quedará como valor del momento de flexión: $M = \delta \times mS$

Es decir “ el producto de la distancia polar que no es más que la proyección horizontal de Q por el segmento de ordenada Sm comprendido entre la línea de presiones y el eje del arco”.

Puesto que δ es constante el momento de flexión será proporcional en cada sección al segmento de ordenada correspondiente. Será por lo tanto positivo o negativo según que dicho segmento sea positivo (sección s) o negativo (sección s'); será máximo en los puntos en que la línea de presiones se aparte más del eje de la pieza y será nulo en los puntos L y L' en que el eje corta a línea de presiones. Estos puntos L y L' en que la flexión es nula reciben el nombre de puntos de inflexión.

Conociendo para cada sección s los valores de M ; p_1 y p aplicaremos las fórmulas:

$$\begin{aligned} \text{Extensión por unidad en las fibras más distantes del eje} & \dots\dots\dots \frac{Mn_1}{I} - \frac{p_1}{w} \\ \text{Compresión por unidad en las fibras más distantes del eje} & \dots\dots\dots \frac{Mn_2}{I} + \frac{p_2}{w} \\ \text{Esfuerzo cortante por unidad admitiendo que se reparte uniformemente} & \dots\dots\dots \frac{p}{w} \end{aligned}$$

I , w , n_1 y n_2 tienen la misma significación que en el nº 126. Además teniendo en cuenta el signo de M . Hay que observar que al paso que en $M'L'$ y $N'L$ son comprimidas las fibras inferiores de la sección y extendidas las superiores, en la parte restante $L'L$ se verificará lo contrario.

Después de determinados los valores de la extensión compresión y esfuerzo cortante por unidad correspondiente a las distintas secciones de la pieza, debemos cerciorarnos de que dichos valores no son superiores a los coeficientes de resistencia práctica admitidos para el material que manejamos. Si la pieza es de sección uniforme bastará comprobar esta última condición para la sección que resulte más fatigada, análogamente a lo explicado en el nº 159 para el caso de una pieza empotrada por un extremo y libre por el otro.

167.- MÉTODOS GRÁFICOS PARA LA DETERMINACIÓN DE LA LÍNEA DE PRESIONES.

Hemos expuesto la fórmula de Bresse, prescindiendo de los cálculos complicados que es preciso efectuar para encontrarla y añadiremos que para la resolución de los problemas que ordinariamente se presentan en la práctica, es más expedito el trazado de la línea de presiones empleando cualquiera de los dos procedimientos gráficos que vamos a exponer y que permiten operar con arcos de forma cualquiera. Uno de dichos procedimientos, es debido al que fue notable constructor Don Juan Torras y que por su sencillez no hemos olvidado ninguno de los que tuvimos la fortuna de oírlo de sus labios. El otro procedimiento fundado en las fórmulas generales encontradas en el nº 165 lo dio a conocer Don Jaime Bayó en su notable conferencia dada en la Asociación de Arquitectos de Cataluña el día ___ de _____ de 1909¹.

168.- PROCEDIMIENTO DE DON JUAN TORRAS.

Consiste sencillamente en admitir que la línea de presiones es un funicular que pasa por los arranques M y N (fig.274, lám. 30) y de modo que el área comprendida entre este funicular y la recta MN sea igual al área comprendida entre dicha recta y la línea media o eje del arco.

Este procedimiento no se funda en ninguna demostración rigurosa, pero puede asegurarse su bondad por haberse comprobado repetidamente que sus resultados coinciden con los obtenidos haciendo aplicación de las fórmulas de Bresse.

Cuando las fuerzas aplicadas al arco se reducen a una sola (fig. 275, lám. 30) el funicular de presión se reduce al triángulo MaN cuya área debe ser según sabemos:

$$\frac{1}{2} M N X = \text{área MSN} \quad \text{donde: } X = \frac{2 \text{área MSN}}{M N}$$

Si trazamos be paralela a Ma el empuje Q vendrá dado por la magnitud de paralela a MN.

Cuando se trata de varias fuerzas aisladas (fig.277 lám. 30) puede presentar cierta dificultad el encontrar un funicular de área determinada y en este caso pueden hallarse para cada fuerza los empujes parciales Q₁, Q₂, Q₃ en la forma indicada para el caso de la fig. 275 lám 30. El empuje total será: $Q = Q_1 + Q_2 + Q_3$

Conociendo el empuje y los puntos de articulación M y N podemos determinar fácilmente la línea de presiones (nº160).

Cuando se trata de una carga repartida según la horizontal sabemos que la línea de presiones será una parábola

(fig. 276 lám. 30) y recordando que el área de dicha parábola es: $\frac{2}{3} M N AB = \frac{2}{3} L_c X$ tendremos la ecuación:

$$\frac{2}{3} L_c X = \text{área MSN} \quad \text{de donde } X = \frac{3 \text{área MSN}}{2 L_c} \quad \text{si tomamos una distancia } BC = AB = X$$

Y unimos C con M y N obtendremos las direcciones de los lados extremos. Descomponiendo la resultante total $P = pL_c$ siendo p la fuerza por unidad de longitud L, en las direcciones encontradas obtendremos el empuje horizontal $ab = Q$.

Cuando las fuerzas vienen repartidas según una ley cualquiera puede resolverse el problema aproximadamente descomponiendo el arco en un número cualquiera de partes y aplicando a cada una la resultante de la carga repartida que actúa sobre ella. El problema lo resolveremos como si se tratara de una serie de fuerzas aisladas.

Es evidente que en este caso nos aproximaremos tanto más al verdadero resultado cuanto mayor sea el número de partes en que dividamos la longitud total del arco. – Por otra parte podemos asegurar que por poca que sea la aproximación, pueden aceptarse como buenos los resultados obtenidos en la mayoría de los casos que ordinariamente se presentan.

169.- PROCEDIMIENTOS DE DON JAIME BAYÓ. – Este procedimiento en principio es aplicable a los arcos homogéneos de igual resistencia y de forma simétrica y asimétrica cargados. Tiene por objetivo determinar los puntos de inflexión que constituyen, como sabemos, otros tantos puntos de paso del funicular de presiones.

Sea (fig. 278 lám. 30) MCN el arco en cuestión, que supondremos simétrico, así como también el funicular de presiones y por lo tanto los puntos de inflexión L, L₁.

La fórmula encontrada en el nº 165 que nos da la traslación horizontal de una sección cualquiera es:

$$H = \int_0^s y \frac{M ds}{EI}$$

Esta fórmula aplicada a la sección C será recordando que el arco es homogéneo y por lo tanto E constante:

¹ El document original deixa aquí uns espais en blanc per a la data, que suposadament havien de ser omplerts després.

$$H_1 = \frac{1}{E} \int_0^{\frac{s_1}{2}} y \frac{M ds}{I}$$

siendo \underline{s}_1 la longitud total \underline{MCN} . Ahora bien, si observamos que dada la simetría de la figura y siendo fijos por hipótesis los puntos \underline{M} y \underline{N} el punto \underline{C} solo puede moverse en sentido vertical y por lo tanto $H_1 = 0$, obtendremos:

$$\frac{1}{E} \int_0^{\frac{s_1}{2}} y \frac{M ds}{I} = 0 \quad \text{o bien} \quad \int_0^{\frac{s_1}{2}} y \frac{M ds}{I} = 0$$

Si descomponemos la integral anterior tomad entre \underline{M} y \underline{C} en la suma de otras dos tomadas entre \underline{M} \underline{L} y \underline{L} \underline{C} respectivamente obtendremos llamando $\underline{\lambda}$ a la longitud \underline{ML} y observando que entre \underline{M} y \underline{L} los momentos de flexión son negativos (nº 161):

$$-\int_0^{\underline{\lambda}} y \frac{M ds}{I} + \int_{\underline{\lambda}}^{\frac{s}{2}} y \frac{M ds}{I} = 0 \quad \text{o sea} \quad \int_0^{\underline{\lambda}} y \frac{M ds}{I} = \int_{\underline{\lambda}}^{\frac{s}{2}} y \frac{M ds}{I}$$

Si observamos que: $M = \frac{RI}{\eta}$ y admitimos que \underline{R} es constante en todas las secciones y por lo tanto que $\frac{I}{\eta}$

varía proporcionalmente a \underline{M} , obtendremos:

$$R \int_0^{\underline{\lambda}} \frac{y}{\eta} ds = R \int_{\underline{\lambda}}^{\frac{s}{2}} \frac{y}{\eta} ds \quad \text{o bien} \quad \int_0^{\underline{\lambda}} \frac{y}{\eta} ds = \int_{\underline{\lambda}}^{\frac{s}{2}} \frac{y}{\eta} ds$$

si suponemos que las secciones \underline{AB} , $\underline{A'B'}$, $\underline{A''B''}$, ... de cada sección, aunque desconozcamos sus dimensiones transversales, es evidente que llamando \underline{e} a la altura de una cualquiera de dichas secciones será:

$$\eta = \frac{1}{2} e \quad \text{y por lo tanto} \quad \int_0^{\underline{\lambda}} \frac{y}{e} ds = \int_{\underline{\lambda}}^{\frac{s}{2}} \frac{y}{e} ds \quad \text{o bien llamando } \underline{e}' \text{ al valor recíproco de } \underline{e} \text{ que podemos}$$

$$\text{hallar para cada punto: } \int_0^{\underline{\lambda}} e' y ds = \int_{\underline{\lambda}}^{\frac{s}{2}} e' y ds$$

Ahora bien si con el objeto de interpretar gráficamente las integrales anteriores dividimos el arco \underline{MC} (fig. 279 lám. 30) en partes iguales de pequeña longitud, que llamaremos $\underline{\Delta s}$ las integrales anteriores se convertirán en las

sumas: $\sum_1^{\underline{\lambda}} e' y \Delta s = \sum_{\underline{\lambda}}^{\frac{s}{2}} e' y \Delta s$ y como hemos dividido en partes iguales será constante $\underline{\Delta s}$ y por lo tanto:

$$\sum_1^{\underline{\lambda}} e' y = \sum_{\underline{\lambda}}^{\frac{s}{2}} e' y$$

Si suponemos ahora aplicados en los puntos medios de las longitudes $\underline{\Delta s}$ vectores iguales a $e' = \frac{1}{e}$ y paralelos a

la recta \underline{MN} admitiendo además que para mayor claridad hemos aumentado proporcionalmente las ordenadas \underline{y} del arco correspondientes a los puntos de aplicación de dichos vectores de modo que llamando \underline{y}' a las nuevas

ordenadas y \underline{k} a la relación constante entre las \underline{y}' y las \underline{y} será: $y = \frac{1}{k} y'$ es evidente que la ecuación:

$$\sum_1^{\underline{\lambda}} e' y = \sum_{\underline{\lambda}}^{\frac{s}{2}} e' y \quad \text{puede substituirse por esta otra: } \sum_1^{\underline{\lambda}} e' y' = \sum_{\underline{\lambda}}^{\frac{s}{2}} e' y' \quad \text{que se referirá al arco}$$

$\underline{M.L'.G'}$ y expresará la igualdad entre el momento resultante de los vectores \underline{e}' aplicados entre \underline{M} y $\underline{L'}$ siendo $\underline{L'}$ el correspondiente al punto de inflexión \underline{L} buscado, y el momento resultante de los vectores \underline{e}' aplicados entre $\underline{L'}$ y $\underline{G'}$.

Si hallamos estos momentos empleando un funicular cualquiera de polo o (véase el nº 19) es evidente que

obtendremos
$$\left| \begin{array}{l} \sum_1^{\lambda} e' y' = o d \cdot AX \\ \sum_1^{\frac{s}{2}} e' y' = o d \cdot XB \end{array} \right. \quad \text{y por lo tanto igualando ambos valores: } AX = BX \text{ es decir que el}$$

punto X es el punto medio de AB .

Así, pues, en definitiva para obtener el punto de inflexión L bastará tomar el punto X medio de AB y los lados del funicular, cuyas prolongaciones comprendan el punto X nos darán en su intersección el vértice e y por lo tanto el punto L' y el de inflexión L buscado.

Obtendremos con este procedimiento tanta mayor aproximación cuanto menores sean las longitudes Δs de modo que en el límite el polígono funicular trazado sería una curva y e el punto de contacto de la tangente trazada desde el punto X .

Determinado el punto L bastará (fig. 278 lám. 30) trazar un funicular de las fuerzas aplicadas pasando por los puntos M , L y N para obtener la línea de presiones.

Por último haremos observar que en la fig. 279 lám. 30 obtendremos el mismo polígono funicular considerando los vectores e' que considerando los vectores e'' proporcionales a los primeros, es decir que siendo η la relación

de semejanza $e'' = \eta e'$ o bien siendo como sabemos: $e' = \frac{1}{e}$ será $e'' = \frac{\eta}{e}$

O bien $e \cdot e'' = \eta$

Es decir que si llamamos e_1, e_2, e_3, \dots a las alturas de las distintas secciones y $e_1'', e_2'', e_3'', \dots$ a los vectores auxiliares respectivos tendremos: $e_1 \cdot e_1'' = e_2 \cdot e_2'' = e_3 \cdot e_3'' = \dots = \eta$

Y por lo tanto haciendo e_1'' igual a una magnitud arbitraria m ; $\frac{e_2}{m} = \frac{e_1}{e_2''}$; $\frac{e_3}{m} = \frac{e_1}{e_3''}$;

Es decir que podemos hallar gráficamente las magnitudes e_2'', e_3'', \dots de los vectores auxiliares buscando las cuartas proporcionales expresadas por las igualdades anteriores².

170. – ARCOS DE FORMAS EQUILIBRADAS. – Si suponemos que la línea de presiones del arco coincide con la línea media, es evidente que en cualquier sección el momento de flexión será nulo y sólo existirá un esfuerzo de compresión p representado por el radio polar correspondiente. – Si en este caso calculamos cada una

de las secciones del arco por la fórmula $w = \frac{P}{R'}$ siendo R' el coeficiente de resistencia práctica a la compresión,

es evidente que el material trabajará en todos los puntos de la pieza al mismo coeficiente R' y por lo tanto estaremos en las condiciones del máximo aprovechamiento. Por otra parte si imaginamos que se cambia el sentido de las fuerzas aplicadas sin alterar ninguna de las demás condiciones es fácil ver que la línea de presiones y por lo tanto la forma de la pieza en este caso, no es otra cosa que la posición de equilibrio de un sistema flexible suspendido por los puntos de articulación y sujeto a las fuerzas dadas dirigidas en sentido opuesto.

Según esto la determinación práctica de la forma de una pieza curva equilibrada y sujeta a las cargas P . (fig. 280 lám. 30) consiste en suspender un sistema flexible por los puntos M y N y determinar la forma $MA'B'C'N$ que adopta dicho sistema bajo la acción de las cargas P, P, \dots . Haciendo girar el polígono $MA'B'C'N$ alrededor de MN hasta adoptar la posición simétrica obtendremos la forma buscada $MABCDN$. El Empuje será como siempre la distancia polar $Oa = Q$.

Después de lo dicho no debe sorprendernos el empleo de arcos parabólicos y en forma de catenaria ... etc., ya que tienen por objeto un máximo aprovechamiento de las condiciones de resistencia de los materiales.

248. – BÓVEDAS. – Comprobación de sus condiciones de estabilidad y resistencia.

BÓVEDAS EN CAÑÓN SEGUIDO. – Sea (fig.452 lám. 61) una bóveda cilíndrica que supondremos de sección simétrica habiendo tomado para su estudio una faja de longitud igual a la unidad. Es evidente que esta faja, puesto que tiene fijos sus puntos de arranque producirá sobre los estribos M y N un empuje horizontal Q análogamente las piezas curvas estudiadas en los números 160 ...etc. Del mismo modo existirá para los arcos que estudiamos, una línea de presiones que será un polígono funicular correspondiente a las fuerzas exteriores

² En el anuario de la asociación de Arquitectos correspondiente a 1910 y en la pág. 157 y siguientes encontrará el lector explicado con más detalle este procedimiento y su aplicación al cálculo de las bóvedas tabicadas, así como un estudio complementario referente a los arcos no simétricos y sujetos a cargas cualquiera indicado por D. Amadeo Llopart, alumno de la escuela de Arquitectura de Barcelona.

aplicadas a la bóveda. Estas fuerzas exteriores serán para nuestro caso el peso propio de las dovelas más el peso de la sobre carga que actúa sobre cada una. Vimos (nº 161) al estudiar las piezas curvas que el conocimiento de la línea de presiones bastaba para darnos en cada sección los esfuerzos que en la misma se desarrollaban lo que nos permitía comprobar sus condiciones de resistencia. En el caso que estudiamos podemos hacer el mismo uso de la línea de presiones, pero teniendo presente que por tratarse de sistemas adovelados, las superficies de junta ss' (fig. 452 lám. 61) no admitirán esfuerzos de extensión y por lo tanto el centro de presiones \underline{A} que no es más que el punto de paso de la línea de presiones debe encontrarse cuando menos dentro de la distancia ss' igual al espesor e del arco o bóveda en la junta que se considere. Esto exige como condición indispensable para la estabilidad de las bóvedas estudiadas, que la línea de presiones sea en todos los puntos interior al perfil adoptado. Además para que resulten aprovechadas todas las superficies de junta, y teniendo presente que se trata de secciones rectangulares, conviene que los puntos de intersección de la línea de presiones con cada una de las superficies de junta disten del intradós o del trasdós de la bóveda una magnitud igual o mayor que $\frac{1}{3}e$. Así,

pues, en resumen suponiendo que la línea de presiones en el funicular de polo \underline{O} , las condiciones de estabilidad y resistencia de la bóveda son:

- 1- Que el polígono de presiones sea interior al perfil adoptado.
- 2- Que para una sección cualquiera ss' se verificará que $\theta < P \cdot f$ siendo; θ el ángulo que forma el lado be del funicular de presiones con la normal a la sección ss' ; P la componente normal a dicha sección de la resultante $r = O2$ correspondiente a las fuerzas que actúan sobre dicha sección, y f el coeficiente de rozamiento.
- 3- Que la presión máxima \underline{p} por unidad correspondiente a dicha sección sea inferior o a lo más igual al coeficiente de trabajo $\overline{R'}$ a la compresión referente al material que constituye la bóveda. Teniendo en cuenta que las secciones ss' son rectángulos de altura e y de base igual a la unidad y llamando f a la menor de las distancias que separan el punto \underline{A} de los bordes de la sección ($f = AS$ en nuestro caso) las fórmulas que nos darán el valor de \underline{p} serán (nº 232; 246):

$$\left\{ \begin{array}{l} AS = f < \frac{1}{3}e \dots\dots\dots p = \frac{2P}{3f} \leq \overline{R'} \\ AS = f = \frac{1}{3}e \dots\dots\dots p = \frac{2P}{e} \leq \overline{R'} \\ AS = f > \frac{1}{3}e \dots\dots\dots p = \frac{P}{e} \left(1 + \frac{6\left(\frac{e}{2} - f\right)}{e} \right) = \frac{P}{e} \left(b - \frac{6f}{e} \right) \leq \overline{R'} \end{array} \right.$$

Por último es conveniente que se verifique: $f \geq \frac{f}{3}e$ es decir que si tomamos los puntos \underline{A}_1 y \underline{A}_1'

(fig. 453 lám. 60) que dividen a cada junta en tres partes iguales y unimos los puntos análogos correspondientes a todas las secciones bastará que el polígono de presiones vaya comprendido dentro de la faja $\underline{mA}_1m'n'A_1'n$ para tener la seguridad de que se verificará la última condición, la cual por otra parte no es indispensable para asegurar la solidez de la bóveda.

249. – DETERMINACIÓN DE LA LÍNEA DE PRESIONES. – El objeto principal del problema que nos ocupa consiste en la determinación de a línea de presiones, la cual siendo un polígono funicular de las fuerzas que actúan sobre la bóveda vendrá determinado cuando se conozcan tres condiciones.

Sea la bóveda de la fig.452 lám. 61 que suponemos simétrica y simétricamente cargada. Si la imaginamos dividida en dos partes iguales por medio de la sección $\underline{BB'}$ podemos suponer cada una de las mitades como apoyada sobre a otra mitad según la junta $\underline{BB'}$ y sobre el estribo según la junta de arranque $\underline{LL'}$; El equilibrio de una cualquiera de dichas mitades $\underline{BB'L'L}$ tiene lugar n virtud de los pesos $\underline{P}_1, \underline{P}_2, \underline{P}_3, \underline{P}_4$ correspondientes a cada dovela, de la sección \underline{Q} procedente de la otra mitad y pasando por un cierto punto \underline{C} de la junta $\underline{BB'}$ y de la reacción \underline{R} del estribo que pasará por un punto \underline{D} de la sección de arranque $\underline{LL'}$. Si consideramos además que las acciones mutuas \underline{Q} desarrolladas en $\underline{BB'}$ y procedentes de cada una de las mitades de la bóveda son dos fuerzas que pasan por \underline{C} y tienen la misma dirección es fácil comprender atendiendo a la simetría de la figura que la reacción \underline{Q} debe ser una fuerza horizontal. Según esto bastaría conocer los puntos \underline{C} y \underline{D} por los cuales debe pasar el polígono de presiones para tener este completamente determinado. Bastaría en efecto hallar por cualquier procedimiento la resultante \underline{R} de las cargas $\underline{P}_1, \underline{P}_2, \underline{P}_3, \underline{P}_4$ y unir el punto \underline{H} intersección de \underline{R}_1 con la

horizontal \underline{CH} , con el punto \underline{D} correspondiente al arranque $\underline{LL'}$ para determinar la dirección \underline{DH} y por lo tanto el polo \underline{O} correspondiente a la línea de presiones que pasa por \underline{C} y \underline{D} .

Si en lugar de conocer los puntos \underline{C} y \underline{D} conocemos los puntos \underline{C} y $\underline{D'}$ siendo este último el punto de paso correspondiente a una sección cualquiera $\underline{s_1s_1'}$ bastará encontrar la resultante $\underline{R_2}$ de las cargas $\underline{P_1}$, $\underline{P_2}$, $\underline{P_3}$ comprendidas entre \underline{C} y $\underline{D'}$ y efectuar una construcción análoga a la explicada para obtener también el polo \underline{O} y por lo tanto la línea de presiones.

250. – MODO DE FRACTURA DE LAS BÓVEDAS CILÍNDRICAS. – Par determinar los puntos de paso del polígono de presiones, nos fijaremos en el modo de romperse las bóvedas de que tratamos cuando pierden sus condiciones de estabilidad.

Cuando la bóveda es de intradós semicircular, la rotura tiene lugar conforme indica la fig.454 lám. 61, abriéndose hacia el intradós por la clave y hacia el trasdós por las juntas \underline{a} situadas próximamente a la mitad de la altura \underline{OA} . De igual modo se abren las bóvedas carpaneles y elípticas.

Cuando la bóveda es circular rebajada (fig.456 lám. 61) de modo que $f < \frac{1}{2} OA$ las juntas \underline{a} que se abren por el trasdós son las juntas de los arranques.

Cuando la bóveda es peraltada (fig. 455 lám. 61) se abre hacia el trasdós por la clave \underline{c} y hacia el intradós por las juntas \underline{a} .

Si observamos que cuando una bóveda se abre por el trasdós \underline{A} (fig. 457 lám 61) es indicio de que la línea de presiones tiende a salir fuera del arco bajando hacia el intradós y por el contrario cuando la grieta se produce hacia el intradós \underline{B} , la línea de presiones tiende a subir hacia el trasdós de la bóveda, es evidente que la tendencia de las bóvedas cilíndricas a abrirse en la forma indicada en las figuras 45, 455, 456 lám.61, nos autoriza a suponer que la línea de presiones pasa ordinariamente cerca de trasdós en la junta de la clave y cerca del intradós en las juntas \underline{a} cuando se trata de bóvedas circulares, elípticas o carpaneles y tratándose de bóvedas peraltadas por el contrario pasa cerca del intradós en la clave y cerca del trasdós en las juntas \underline{a} que reciben el nombre de juntas de fractura y los puntos de paso correspondientes a dicha junta y a la junta de la clave, la línea de presiones quedará completamente determinada. (nº161).

251. MÉTODO DE MERY. – Consiste en admitir que la junta de fractura se encuentra sobre la normal al intradós que forma un ángulo de 60 grados con el eje de la bóveda. Si se trata de una bóveda semicircular (fig. 456 lám. 61) bastará dividir el cuadrante \underline{AN} en tres partes iguales y tomar dos a partir del punto \underline{A} para obtener la junta de fractura \underline{a} . Si la bóveda es rebajada (fig. 456 lám. 61) y $\alpha = 60^\circ$ se tomará como junta de fractura \underline{a} la correspondiente al arranque, y si $\alpha = 60^\circ$ se seguirá la regla general determinando la junta que forma con la vertical \underline{CA} un ángulo de 60° .

Por último, tratándose de bóvedas no peraltadas se admite en el método de Mery que la línea de presiones pasa al tercio del trasdós en la junta \underline{AB} de la clave (fig. 458 lám.62) y al tercio del intradós en la junta de fractura $\underline{A'B'}$ (puntos \underline{C} Y \underline{D}).

Determinados los puntos de paso \underline{C} y \underline{D} basta, como sabemos, encontrar la resultante \underline{P} de las cargas que actúan en la porción $\underline{ABA'B'}$, trazar la horizontal \underline{CH} y unir los puntos \underline{H} y $\underline{D'}$ para obtener la posición de los lados \underline{CH} y $\underline{HD'}$ y por lo tanto el polo \underline{O} del polígono de presiones.

Es fácil observar que el método de Mery al fijar la junta de fractura $\underline{A'B'}$ y los puntos de paso \underline{C} y $\underline{D'}$ referentes a las bóvedas cilíndricas tiene en cuenta el modo de fractura de dichas bóvedas que hemos indicado en el nº 250.

252. SOLUCIONES ADMISIBLES EN EL TRAZADO DE LA LÍNEA DE PRESIONES. – Por el método de Mery obtendremos una línea de presiones, la cual puede ser tal que no satisfaga las condiciones de estabilidad y resistencia indicadas en el nº 248, más no por eso consideraremos como inadmisibles el perfil adoptado para la bóveda. En efecto, es posible que variando convenientemente la posición de los puntos \underline{C} y $\underline{D'}$ en sus juntas respectivas logremos obtener una nueva línea de presiones tal que satisfaga dichas condiciones de equilibrio y resistencia y por lo tanto podemos aceptar el perfil adoptado.

En general variando los puntos de paso encontraremos varias curvas de presiones que pueden representar otras tantas soluciones admisibles, cada una de las cuales de por sí asegurará las condiciones de solidez de la bóveda. De ahí se echa de ver la indeterminación del problema y el desconocimiento absoluto de línea de presiones que realmente corresponde a la bóveda una vez construida. No obstante, si bien en general la línea de presiones verdadera no será exactamente la que nos ha servido de base para el cálculo de la bóveda, el hecho de haber encontrado una línea de presiones admisible nos asegura la solidez de dicha bóveda: En efecto, aún suponiendo que esta línea de presiones admisible fuera única podría cabernos la seguridad de que la bóveda por efecto de las

fuerzas aplicadas se deformaría adoptando la única posición de equilibrio posible que correspondería indudablemente a la línea de presiones encontrada.

Con el objeto de limitar el número de tanteos en el caso de que el trazado de Mery no dé resultados aceptables, se aconseja dividir la junta superior y el arranque en tres partes iguales y ensayar las posiciones límites \underline{CD} , $\underline{CD'}$, $\underline{C'D}$, $\underline{C'D'}$ (fig. 459, lám. 62) siendo también conveniente comprobar la que pasa por los puntos medios \underline{G} y $\underline{G'}$. En caso de no obtener resultados favorables, es preferible modificar el perfil adoptado antes que forzar la solución escogiendo nuevos puntos de paso.

Por último, indicaremos que el perfil que reúne mejores condiciones de resistencia y estabilidad dado un sistema de cargas \underline{P} (fig. 461, lám. 62) es el que admite una línea de presiones pasando por los puntos medios de cada una de las secciones y tangente por consiguiente a la línea media o eje del arco. En este caso los esfuerzos resultantes que actúan en cada sección serán normales a la misma y se aplicarán a su centro de gravedad viniendo por lo tanto repartidos uniformemente en toda su extensión. Para determinar estas formas equilibradas correspondientes a un sistema de cargas \underline{P} bastará proceder del modo indicado en el n° 170 al tratar de las formas rígidas, empleando un sistema flexible suspendido por los puntos \underline{M} y \underline{N} y sujeto a cargas iguales o proporcionales alas cargas \underline{P} .

253.- TRAZADO PRÁCTICO DE LA CURVA DE PRESIONES. – Sea (fig. 460, lám. 62) una bóveda que supondremos simétrica y simétricamente cargada. Tomaremos en consideración los pesos siguientes:

Peso propio de la bóveda.....	δ por m^2 .
Peso de una sobrecarga permanente	δ_1 por m^2 .
Peso de una sobrecarga accidental	p por m^2 .

Supondremos que la sobrecarga permanente consiste en un relleno de tierra u hormigón que enrasa hasta la línea \underline{ML} .

Haremos el estudio para una de las mitades \underline{B} del arco y supondremos determinada la junta de fractura y los puntos \underline{A} y \underline{D} por el método de Mery.

En lugar de dividir los arcos según secciones normales al intradós lo dividiremos en fajas verticales del mismo ancho \underline{a} y tanto más estrechas cuanto permitan las dimensiones del dibujo.

Reduciremos ante todo las sobrecargas a una capa homogénea y del mismo material que el arco. Para ello, reduciremos primero la sobrecarga accidental a sobrecarga permanente, para lo cual si llamamos \underline{h}_1 a la altura que buscamos y nos referimos a una cualquiera de las fajas \underline{a} obtendremos recordando que operamos sobre una

bóveda cuya longitud es la unidad (n° 248): $a \cdot b_1 \cdot \delta_1 = ap$ de donde: $b_1 = \frac{p}{\delta_1}$ conocida \underline{h}_1 bastará levantar la línea

\underline{LM} hasta la altura \underline{h}_1 para obtener la línea $\underline{L_1M_1}$ que representará la sobrecarga total. Por último si tomamos una faja cualquiera $\underline{ms_1q_1n_1}$ y suponemos que la porción de sobrecarga $\underline{mn'n'n}$ correspondiente al arco, es evidente que si consideramos la línea media y llamamos $\underline{h'}$ a la altura primitiva y \underline{h} a la altura de la nueva sobrecarga

obtendremos: $a \cdot b \cdot \delta = ab' \delta'$ de donde $b = b' \frac{\delta'}{\delta}$

Por lo tanto para obtener la línea definitiva $\underline{L'M'}$ bastará multiplicar las alturas \underline{h} por la relación $\frac{\delta'}{\delta}$.

Según lo dicho, el peso total que corresponde a una faja cualquiera \underline{msqn} será, llamando \underline{H} a la altura total contada sobre la línea media: $H \cdot a \cdot \delta$ y puesto que $\underline{a \cdot d}$ es constante para todas las fajas, las cargas correspondientes serán proporcionales a las longitudes de línea media comprendidas entre el intradós y la línea $\underline{L'M'}$. Además dichas cargas vendrán aplicadas en los centros de gravedad de cada una de las fajas y si para simplificar y teniendo presente la estrechez de dichas fajas admitimos que su centro de gravedad se encuentra sobre la línea media, resultará que las cargas correspondientes a cada faja vendrán representadas en posición y magnitud por sus alturas medias \underline{H} .

Tomando, pues, en el polígono auxiliar \underline{Ocd} magnitudes 1, 2, 3, ... iguales o proporcionales a la altura \underline{H} bastará trazar un funicular pasando por \underline{A} y \underline{D} y cuyo lado superior sea horizontal para obtener la línea de presiones. Para encontrar fácilmente el polo \underline{O} de este funicular bastará tomar un polo cualquiera $\underline{O'}$ sobre la horizontal y trazar el funicular \underline{Ae} correspondiente a las fuerzas 1, 2, 3, 4, 5: Los lados extremos de este funicular se cortan en el punto $\underline{3}$ que unido con \underline{D} nos dará la dirección \underline{DS} cuya paralela $\underline{d'O}$ nos dará el polo \underline{O} que buscamos.

Una vez trazada la línea de presiones pasaremos a comprobar las condiciones de estabilidad y resistencia en la forma indicada en el n° 248 y refiriéndose a las secciones verdaderas $\underline{ss'}$.

Para determinar el verdadero valor de los esfuerzos desarrollados basta observar que si por ejemplo las magnitudes $\underline{1, 2, 3, \dots}$ tomadas en \underline{Cd} son la mitad de las alturas \underline{H} bastará multiplicar cualquiera de dichas magnitudes por: $2 \cdot a \cdot \delta$ para obtener los valores de los esfuerzos correspondientes.

Al determinar las condiciones de solidez de la bóveda procuraremos abreviar el trabajo estudiando solamente las secciones que a juzgar por la posición de la línea de presiones, ofrezcan más peligro.

Cuando (fig. 460, lám. 62) la sección estudiada *ss'* forma con la línea de presiones un ángulo poco distinto de 90° no hay que temer el resbalamiento ya que en general se verifica:

$$\text{Arcos de sillería.} \left\{ \begin{array}{l} f = tg \varphi = 0,7 \text{ a } 1 \\ \varphi = 35^\circ \text{ a } 45^\circ \end{array} \right.$$

$$\text{Arcos de ladrillo.} \left\{ \begin{array}{l} f = tg \varphi = 0,7 \\ \varphi = 35^\circ \end{array} \right.$$

Bastará por lo tanto, comprobar las condiciones de resistencia empleando las fórmulas del nº 248 en las cuales para facilitar las operaciones podemos sustituir $P = Oq$ por el valor $r = 02$ ya que son poco diferentes por ser θ muy pequeño según hemos supuesto. Las fórmulas serán como hemos visto, siendo $AS = f$:

$$\left\{ \begin{array}{l} f < \frac{1}{3}e \dots\dots\dots \frac{2}{3} \frac{r}{f} \\ f = \frac{1}{3}e \dots\dots\dots 2 \frac{r}{f} \\ f > \frac{1}{3}e \dots\dots\dots \frac{r}{e} \left(b - \frac{6f}{e} \right) \end{array} \right.$$

Para mayor facilidad, en el caso de ser $f > \frac{1}{3}e$ podemos suponer que la parte comprimida es $SS'' = 2 SA$ en

cuyo caso la presión se reparte uniformemente y su valor es: $p = \frac{1}{2} \frac{r}{f}$

Las fórmulas serán pues:

$$\left\{ \begin{array}{l} f < \frac{1}{3}e \dots\dots\dots p = \frac{2}{3} \frac{r}{f} \leq \overline{R}' \\ f = \frac{1}{3}e \dots\dots\dots p = 2 \frac{r}{f} \leq \overline{R}' \\ f > \frac{1}{3}e \dots\dots\dots p = \frac{1}{2} \frac{r}{f} \leq \overline{R}' \end{array} \right.$$

no olvidemos que estas fórmulas son aproximadas, y siendo:

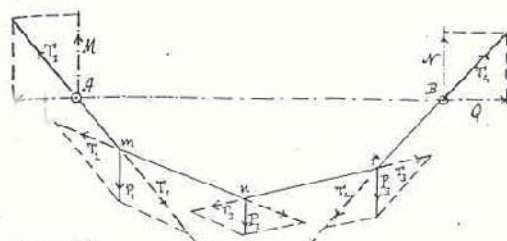
Bóvedas de sillería $\overline{R}' = 30 \text{ a } 40 \text{ Kg por } cm^2$

Bóveda de ladrillo con mortero ordinario $\overline{R}' = 7 \text{ Kg por } cm^2$

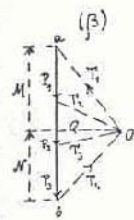
Id con mortero de cemento $\overline{R}' = 10 \text{ Kg por } cm^2$

Cuando después de los tanteos que sean necesarios se ha obtenido una línea de presiones aceptable comprobarse escrupulosamente las condiciones de resistencia y estabilidad de cada una de las secciones siguiendo estrictamente el camino indicado en el nº 248.

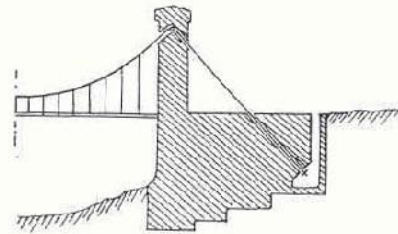
26



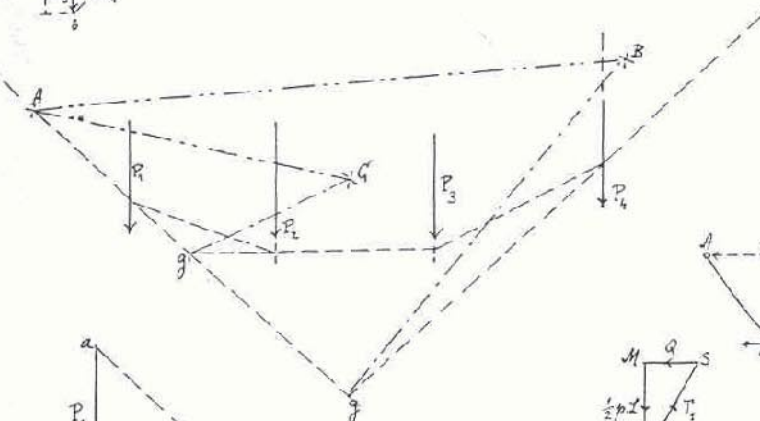
(245)



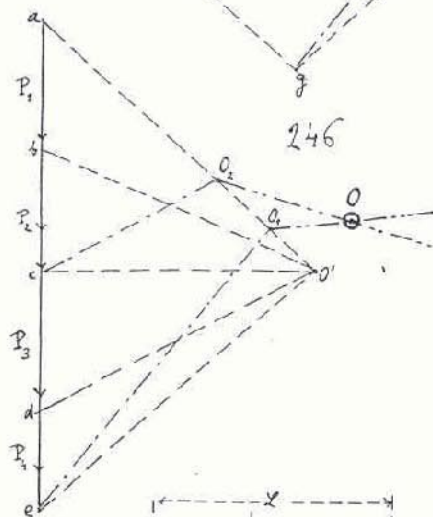
(β)

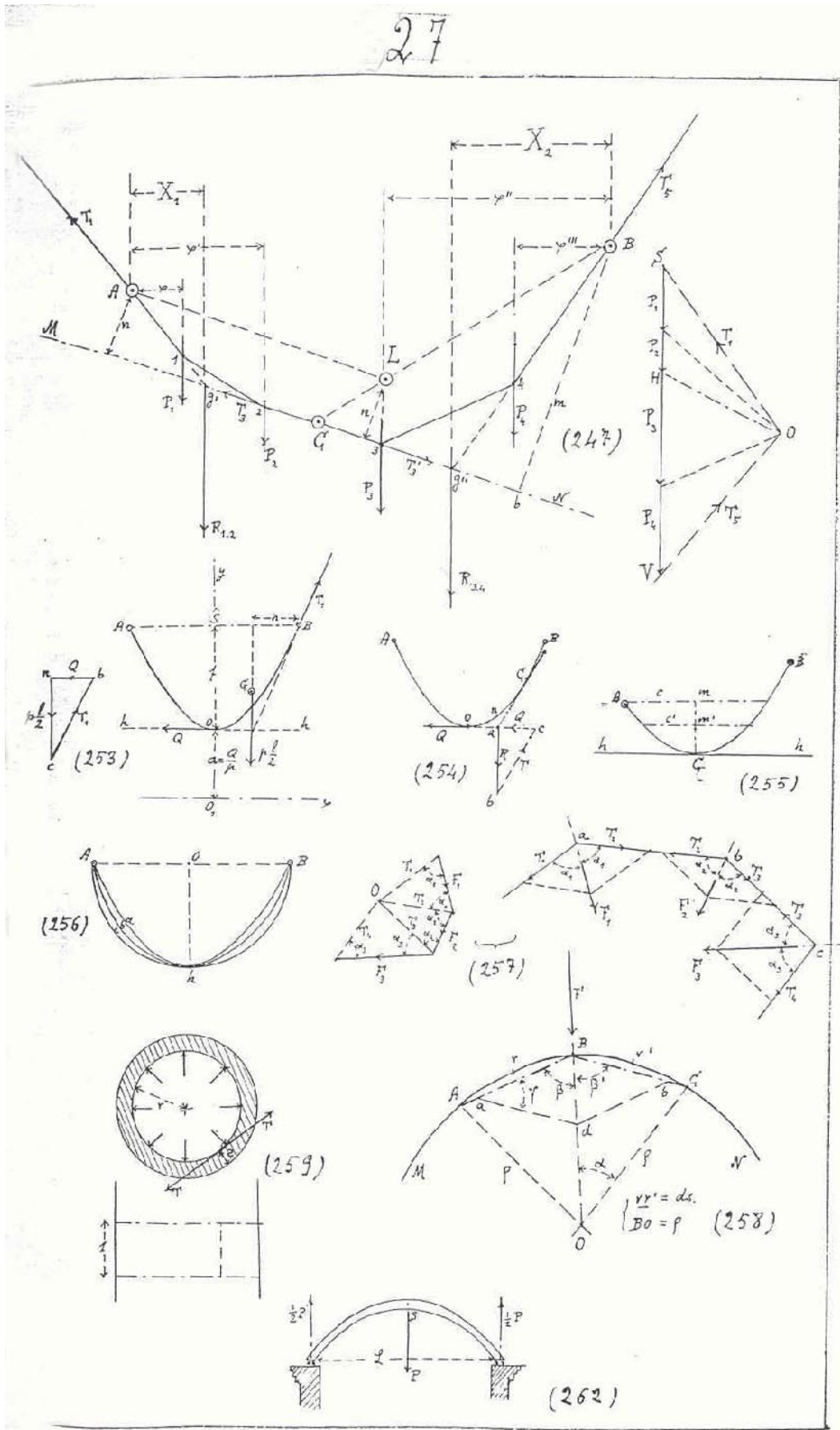


(248)



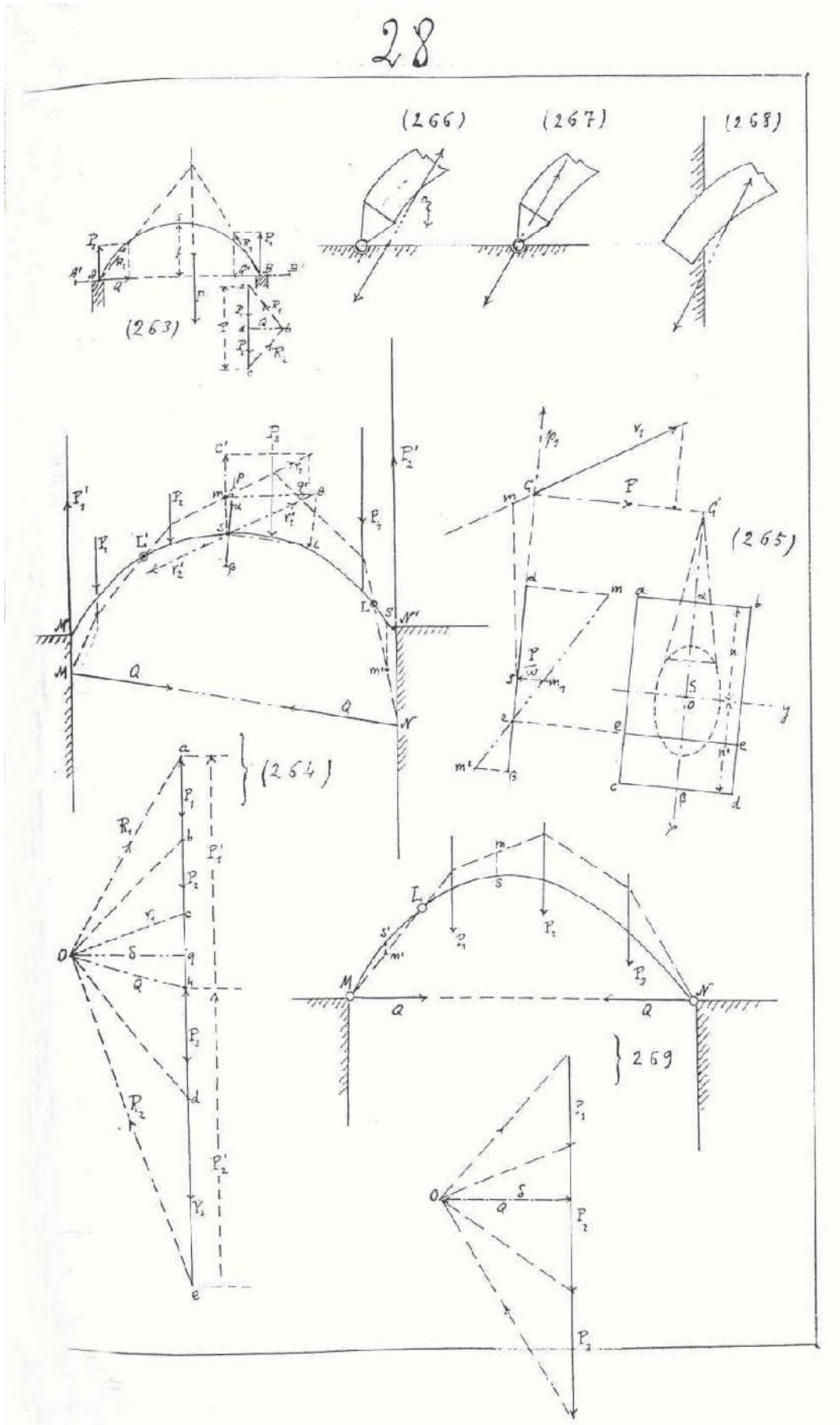
246



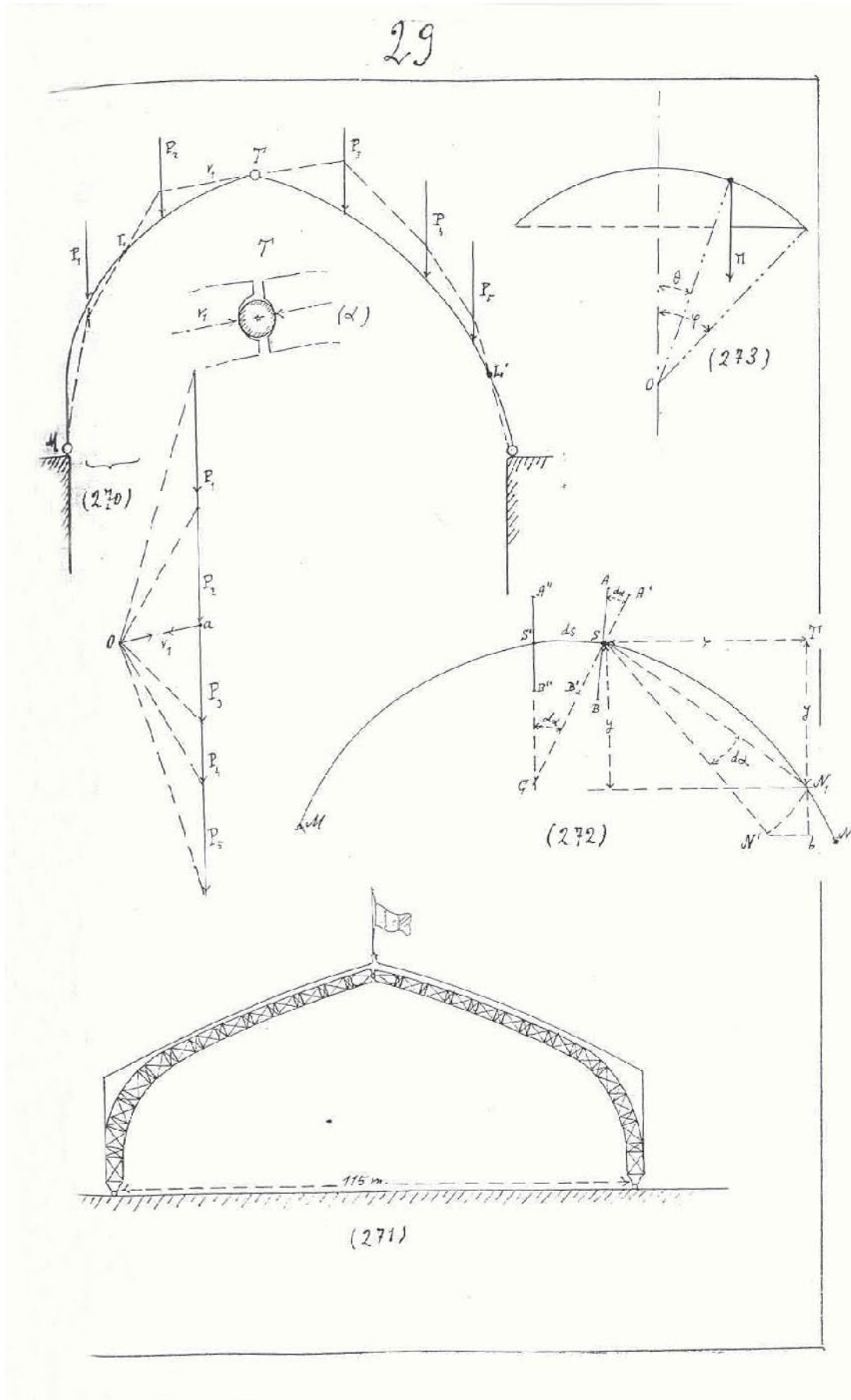


Làmina 27

28

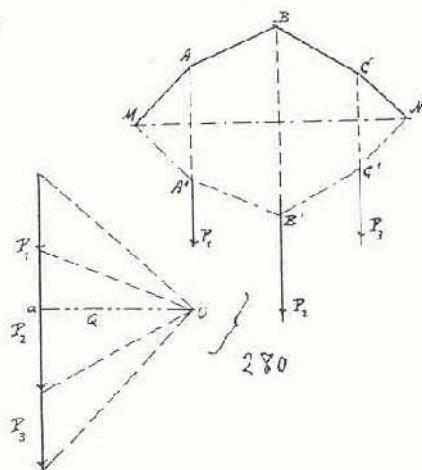
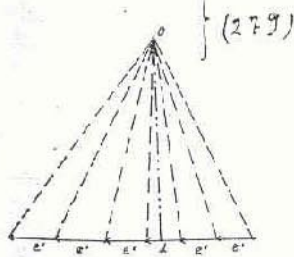
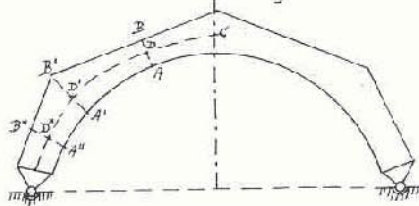
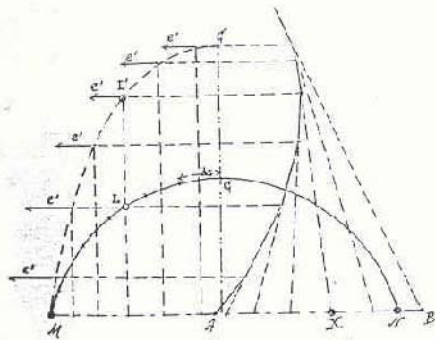
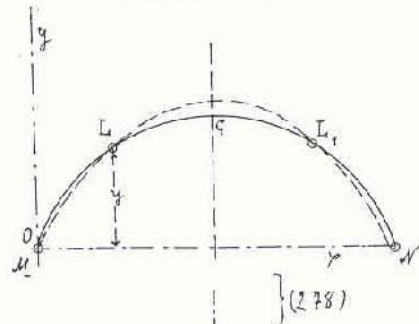
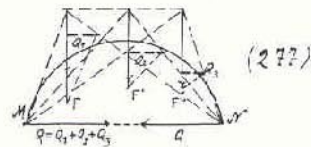
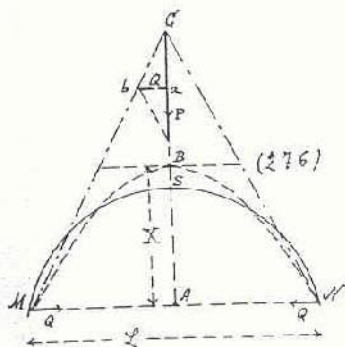
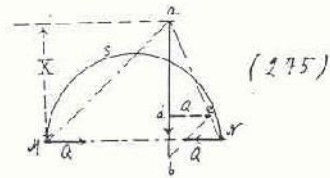
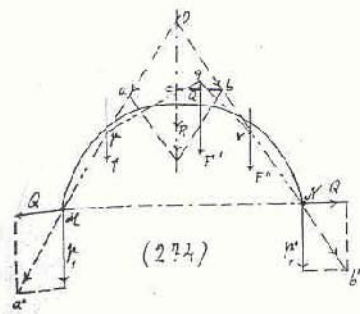


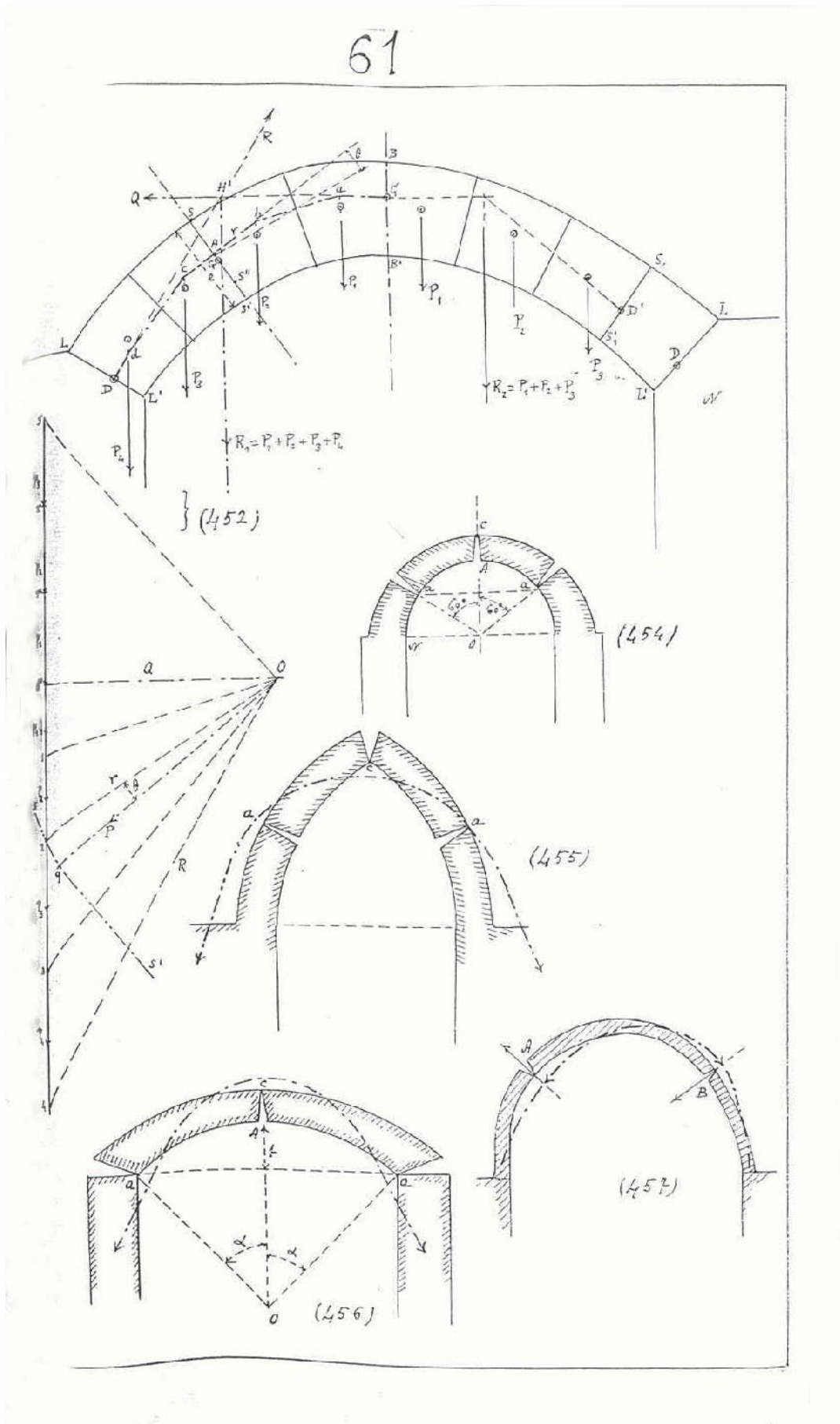
Làmina 28



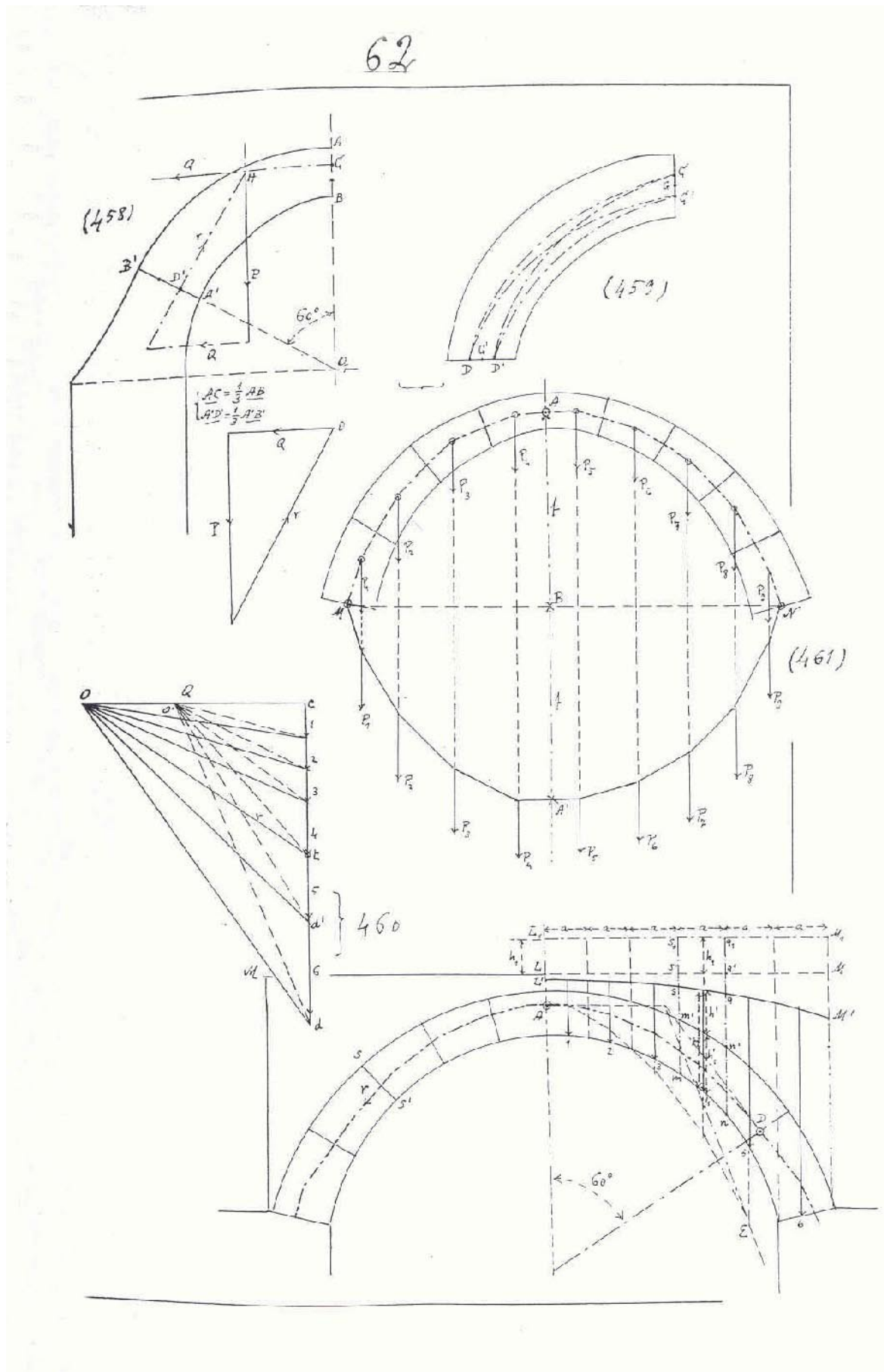
Làmina 29

30

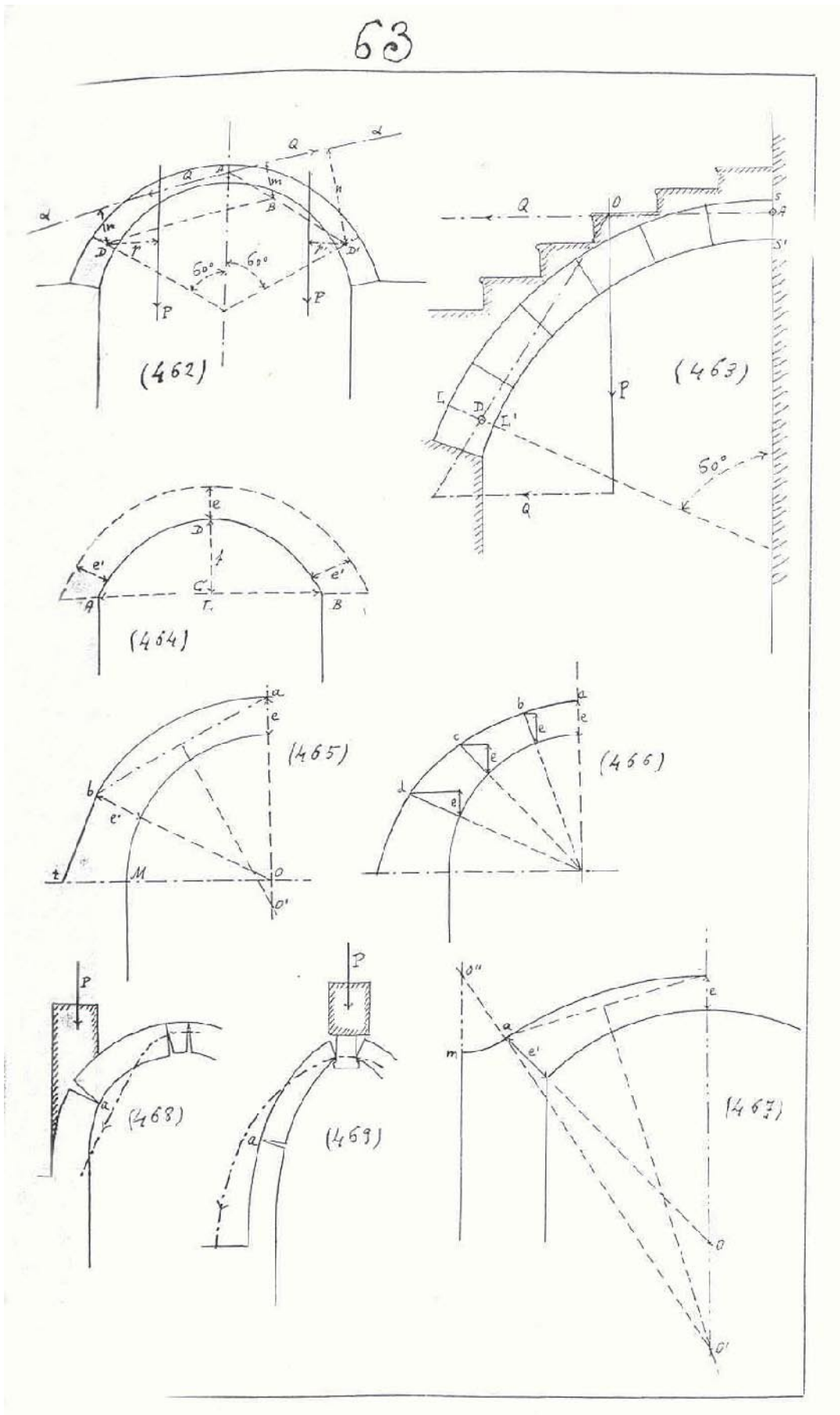




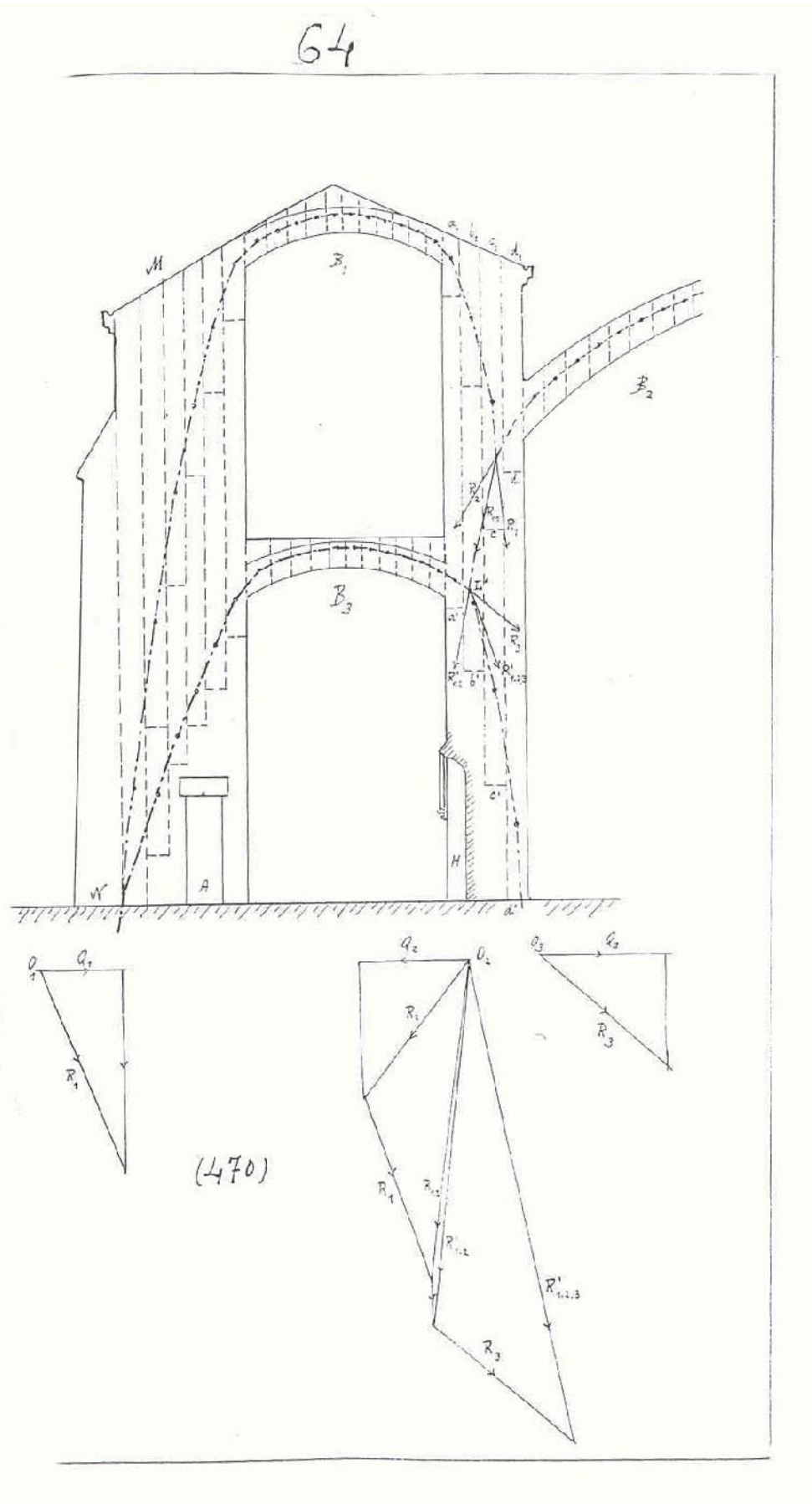
Làmina 61



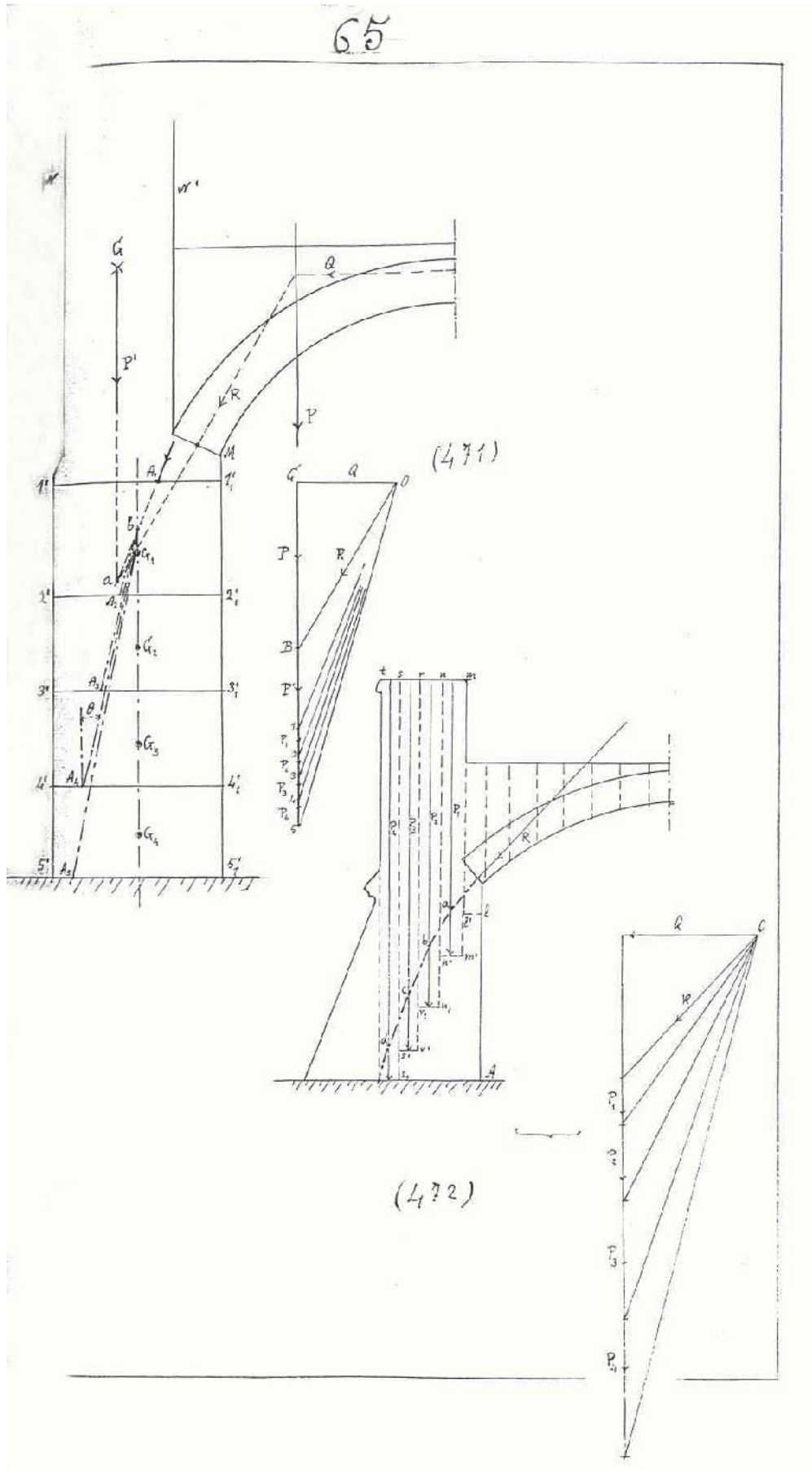
Làmina 62



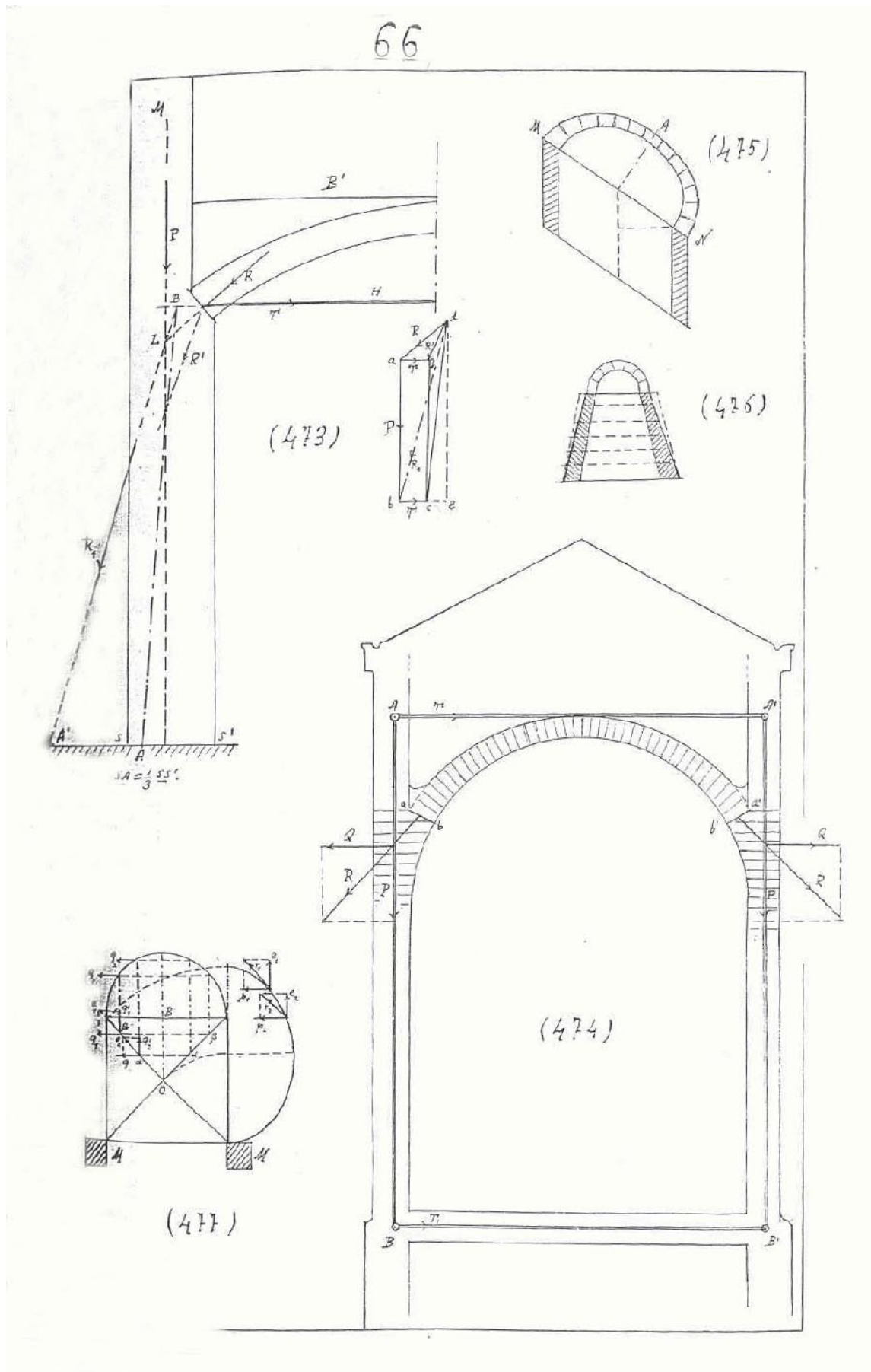
Làmina 63



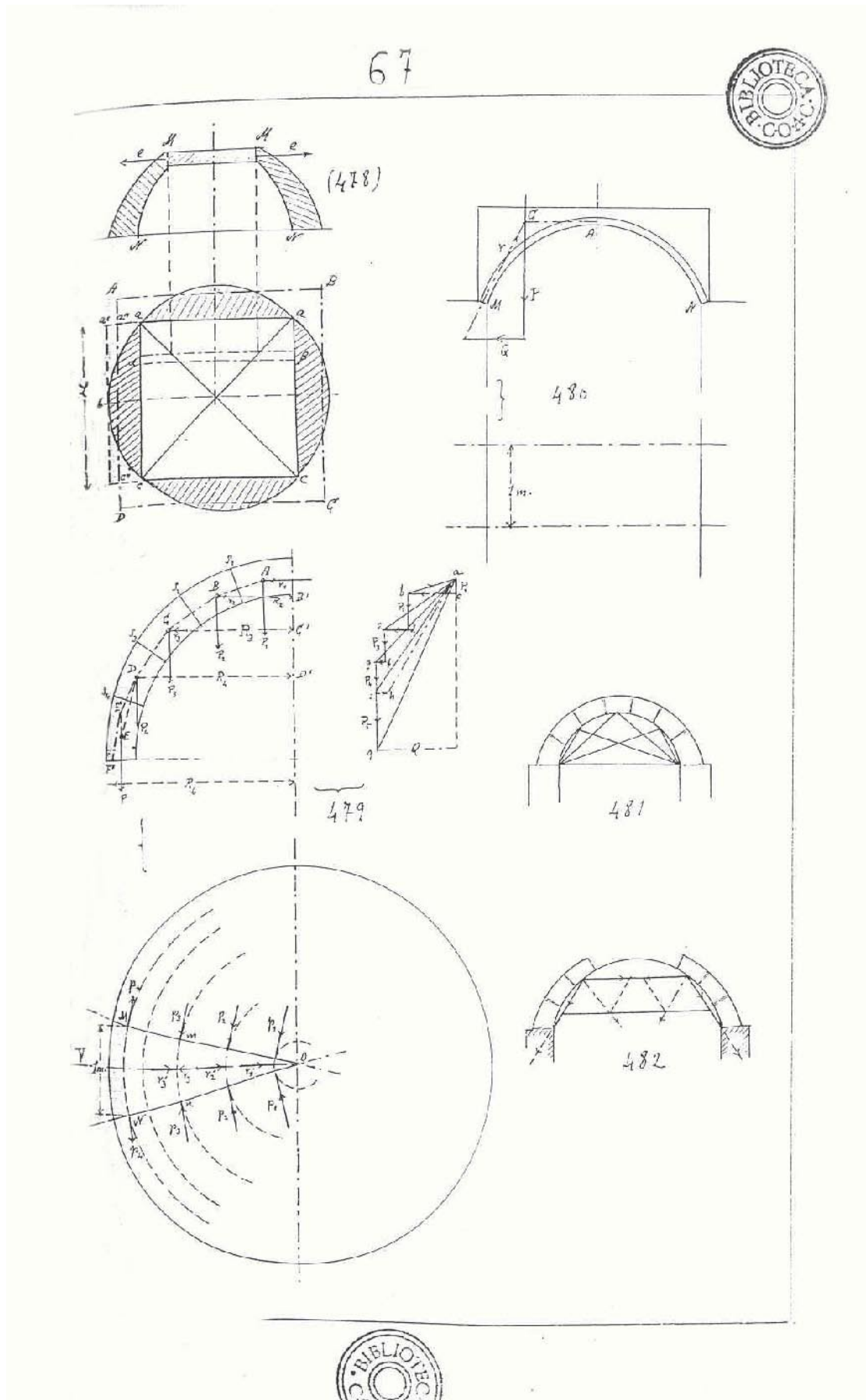
Làmina 64



Làmina 65



Làmina 66



Làmina 67

ANNEX 3.12

Apunts de construcció, de Luís Moya.

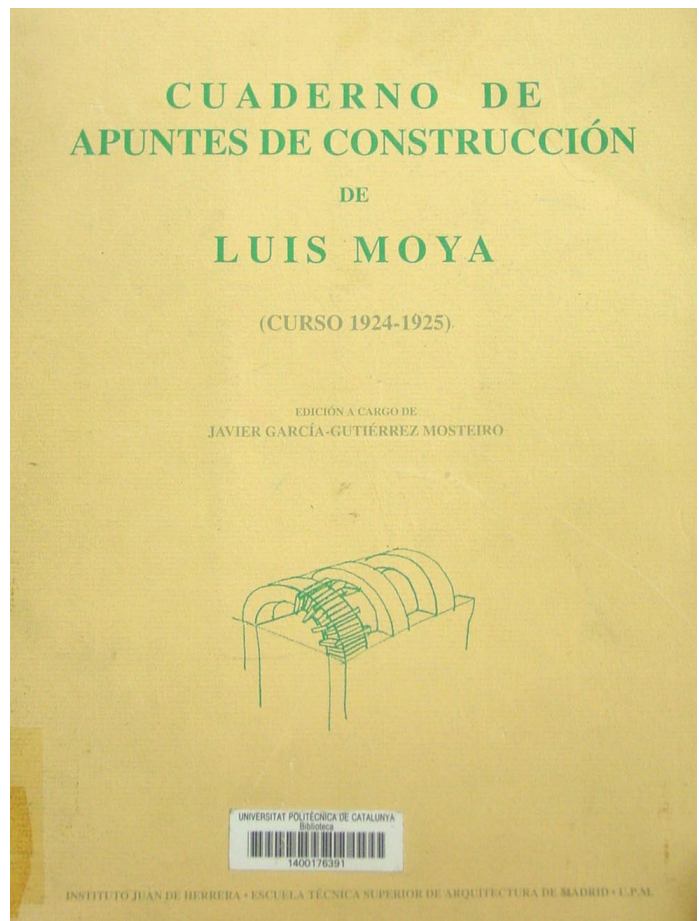
A la biblioteca de l'ETSAB hem trobat aquest recull d'apunts de construcció que tracten extensament el tema dels arcs i les voltes, i tenen el valor afegir de ser uns apunts visuals on la part gràfica i els dibuixos superen de llarg la part del text. Creiem que és representatiu de la manera de concebre la mecànica i geometria dels arcs i les voltes, tot que sigui al límit del període de temps que abarquem en aquest estudi,.

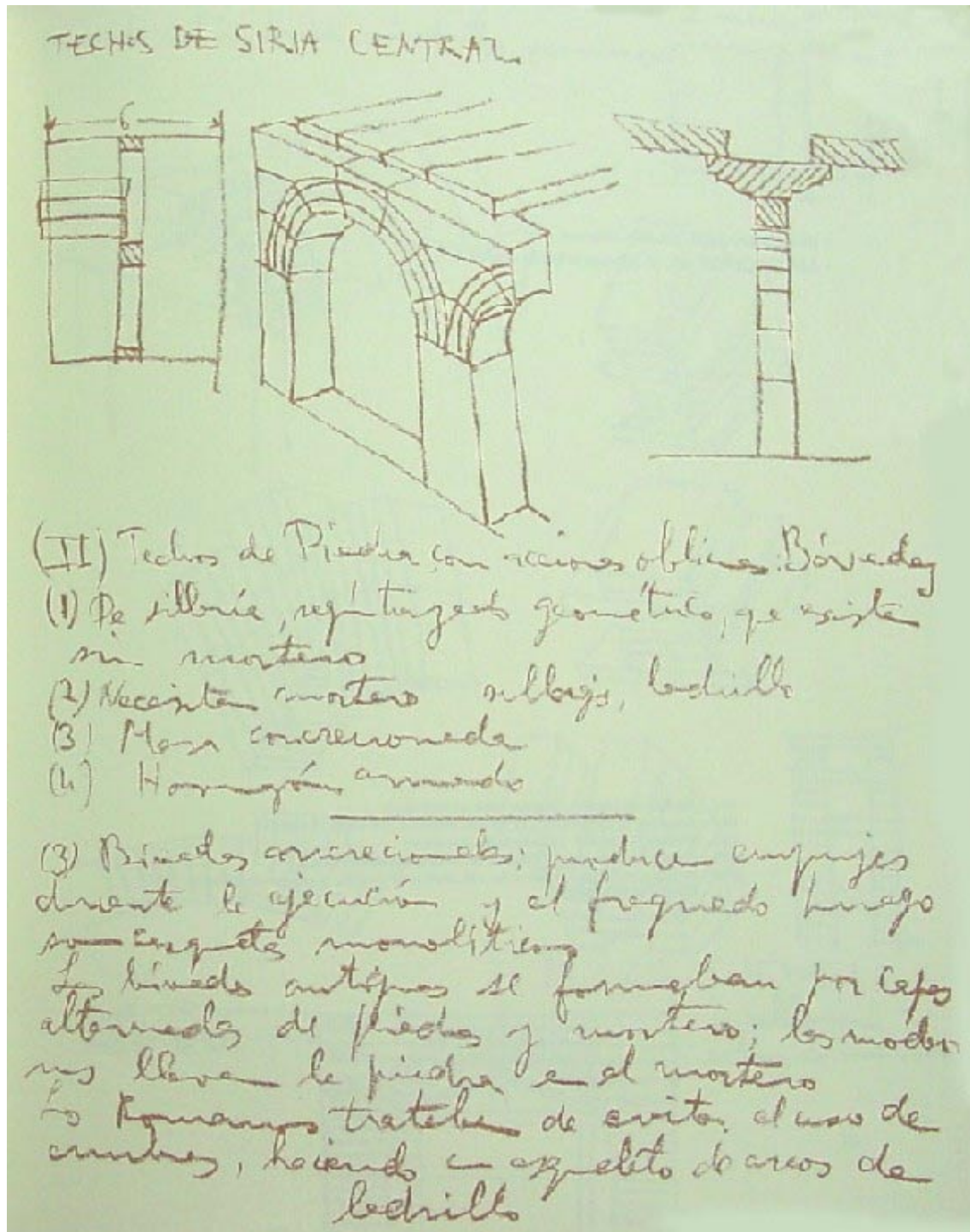
Cuaderno de apuntes de construcción de Luís Moya. Curso 1924-1925.

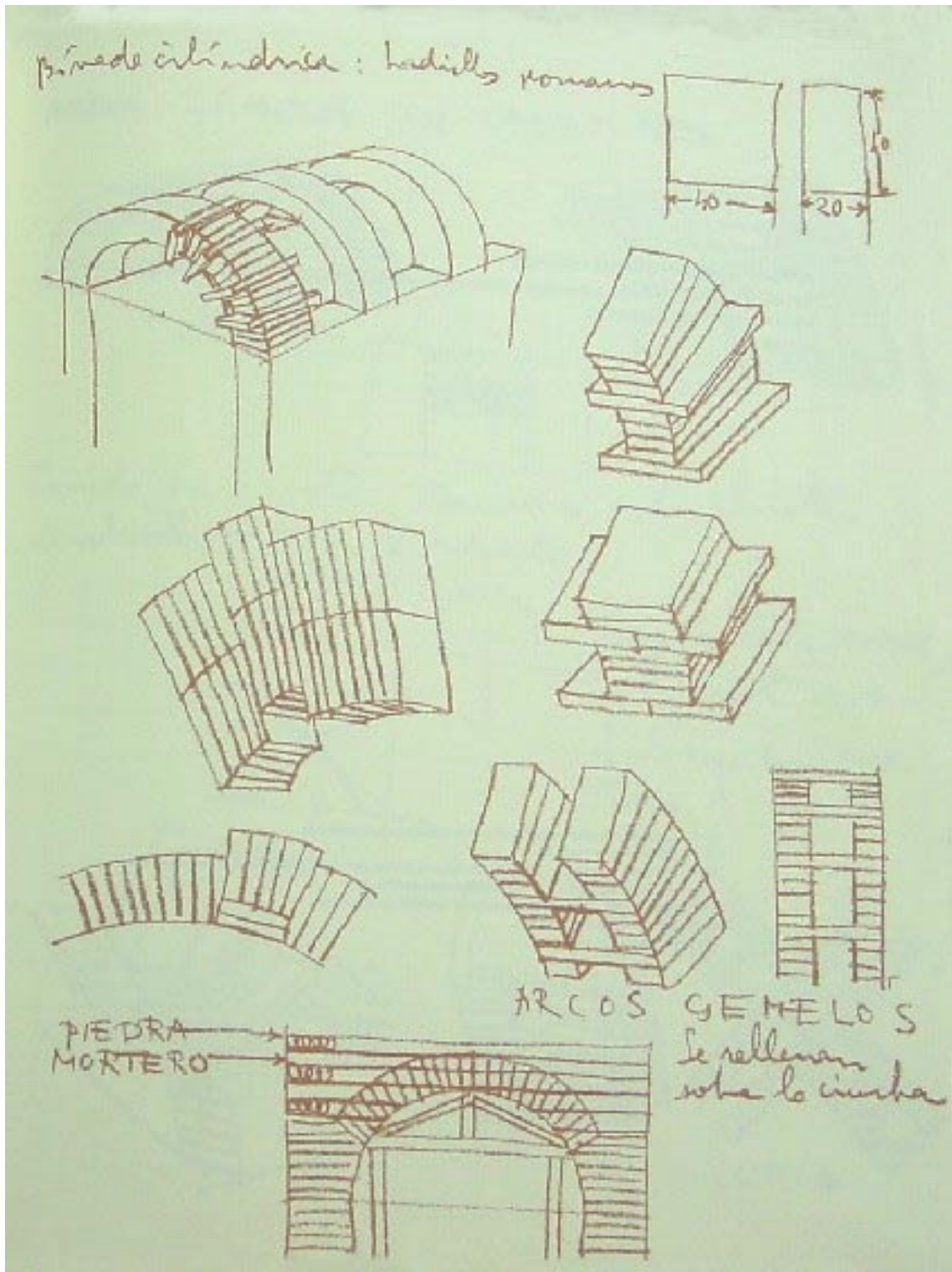
Ed. Javier García-Gutiérrez Mosteiro, Madrid 1993.

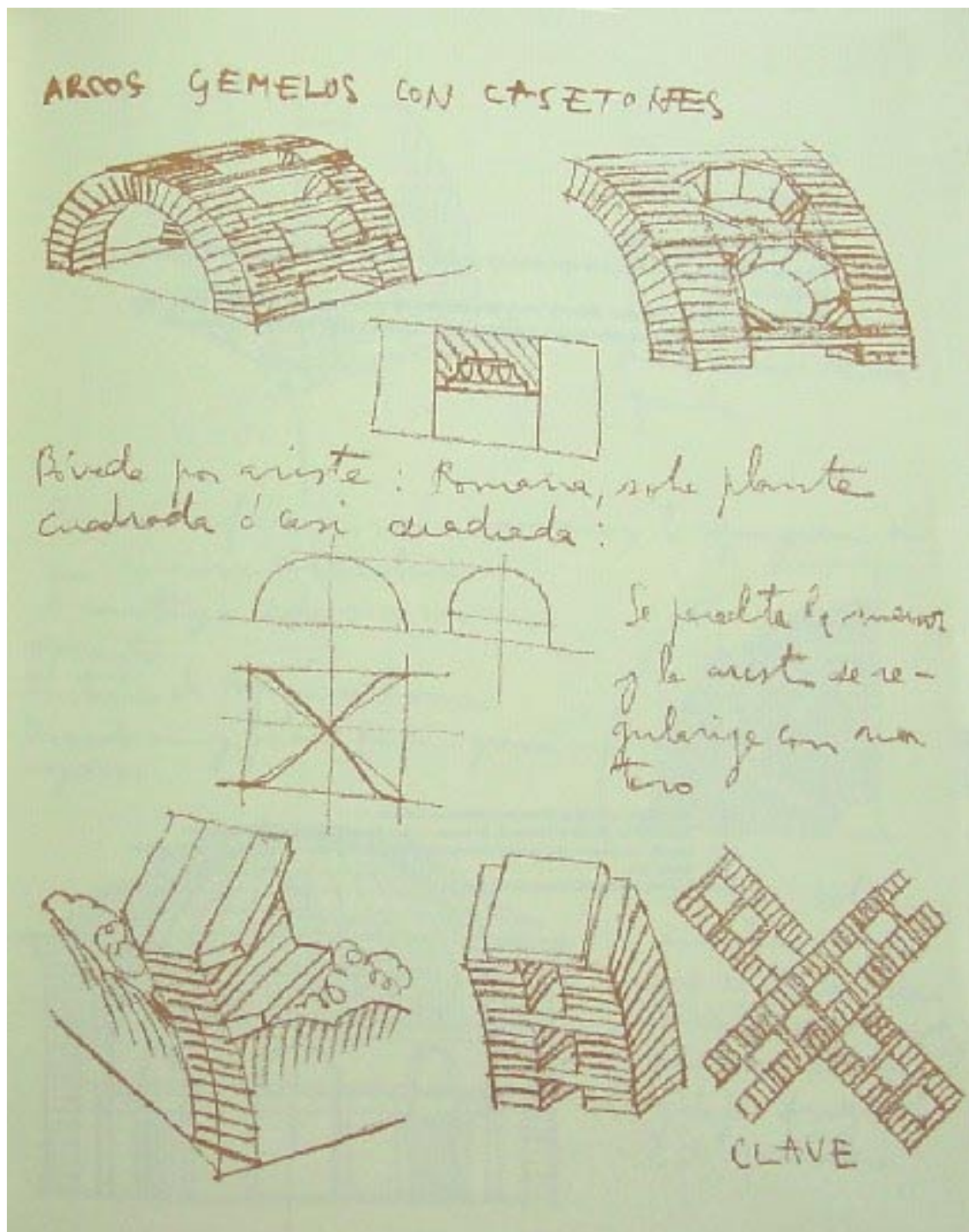
Codi barres: 1400176391.

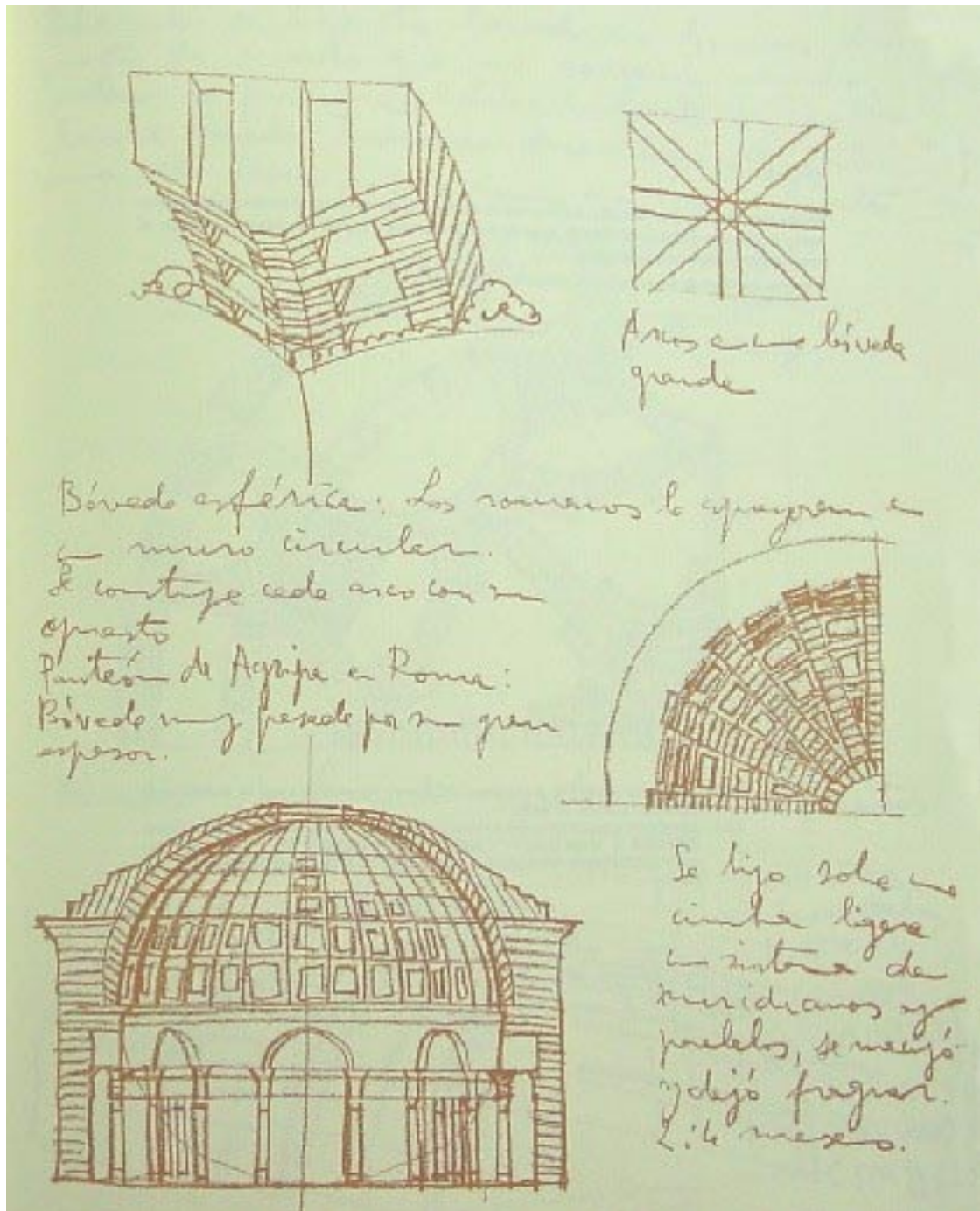
Sig: 69(076.6) MOY

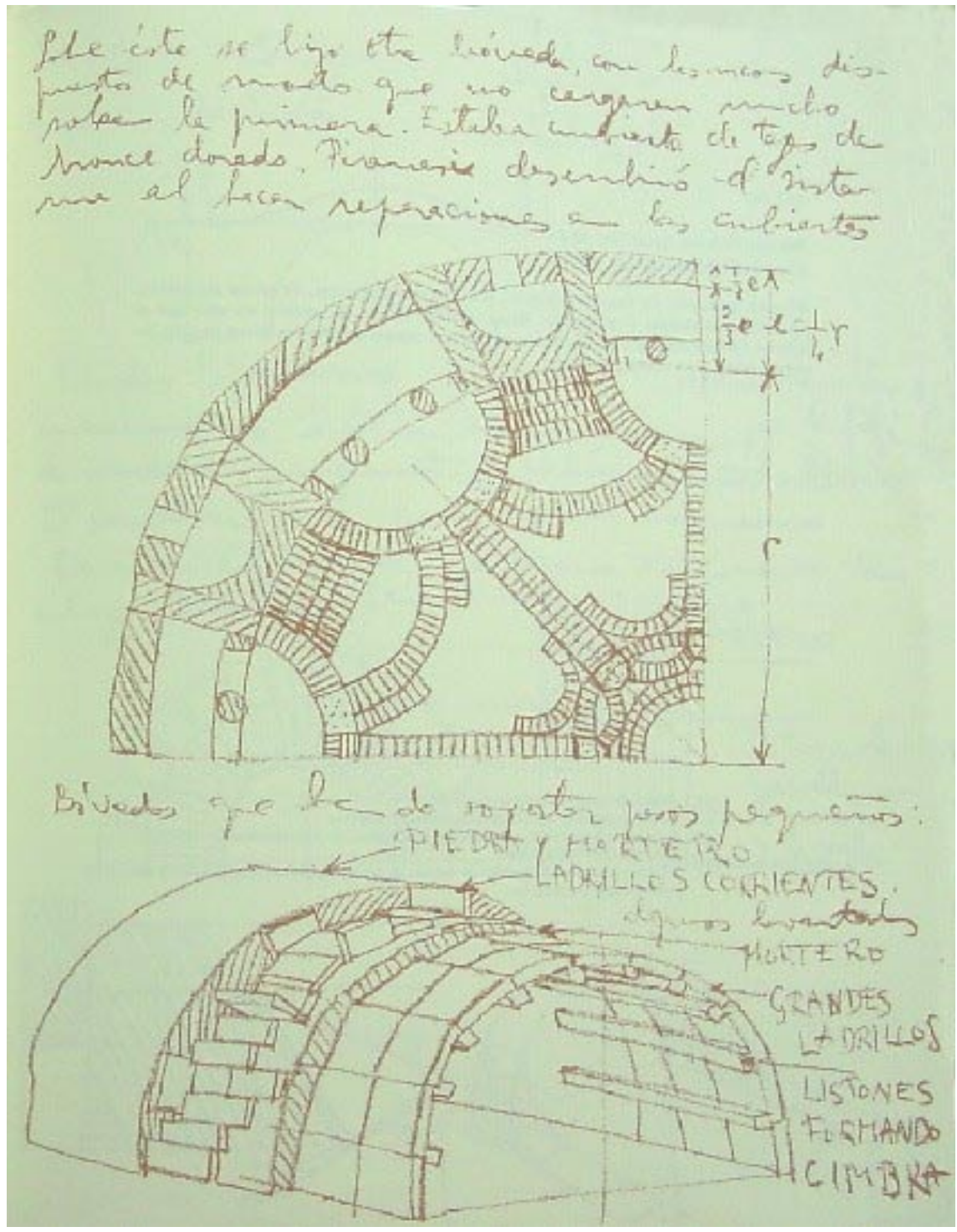


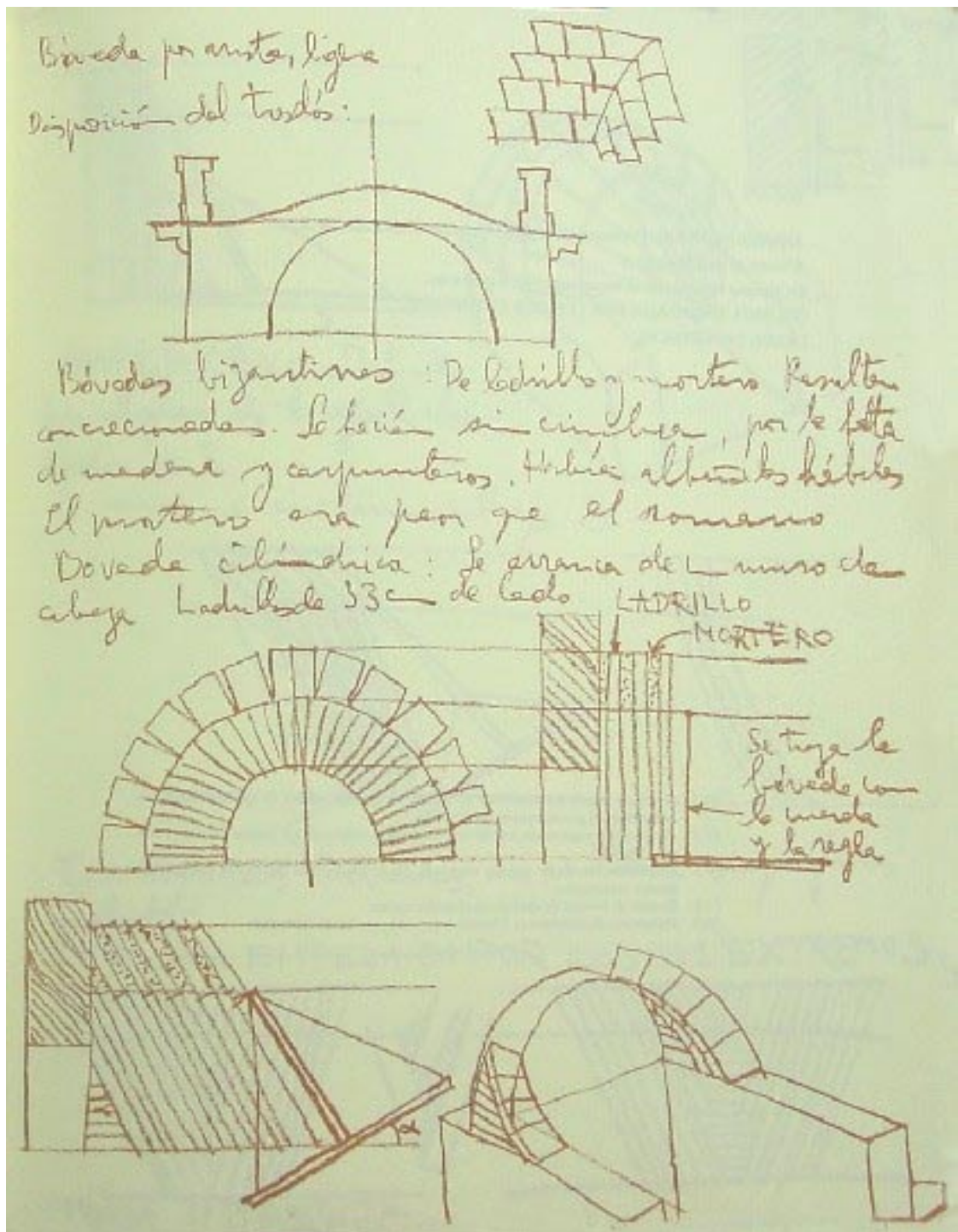


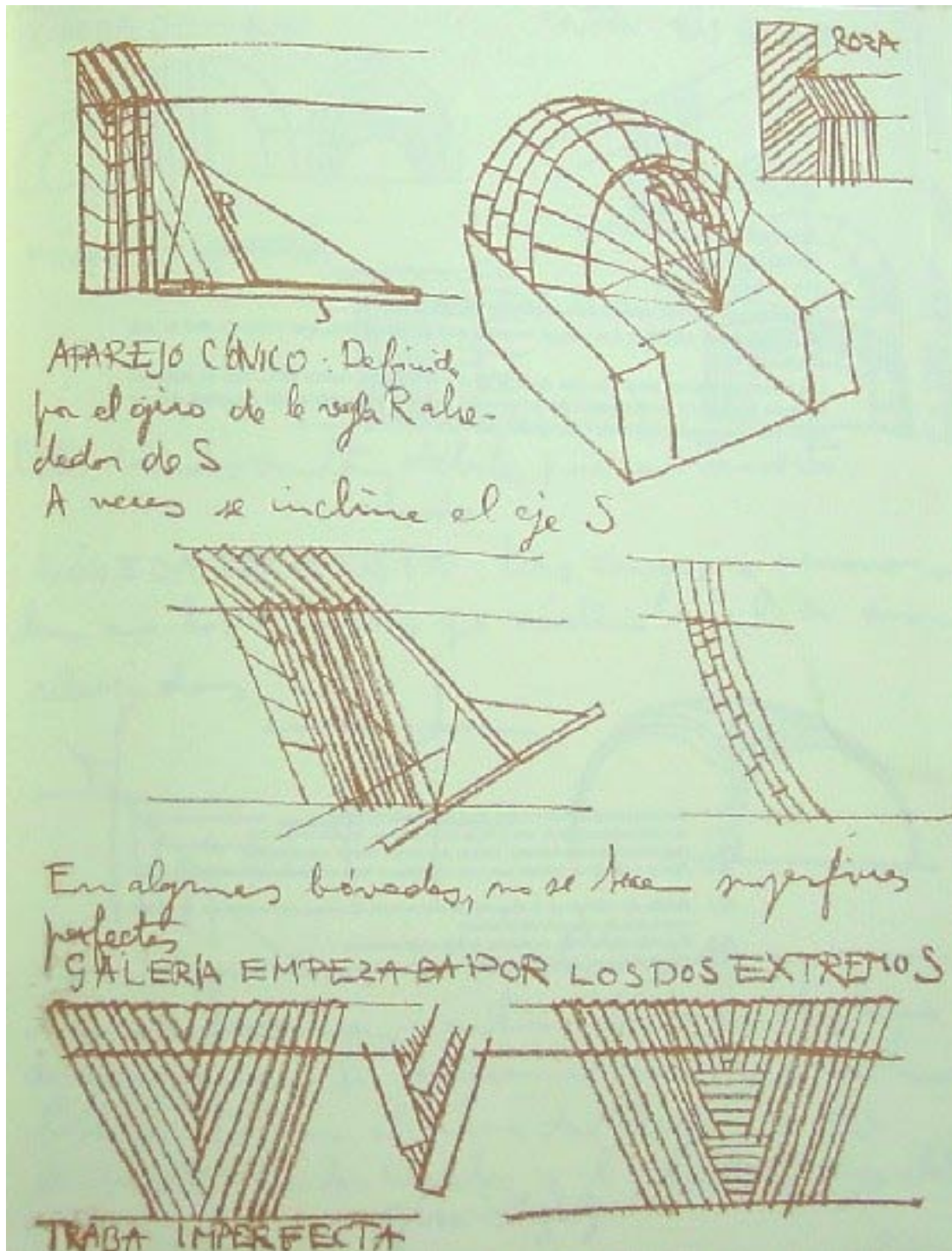


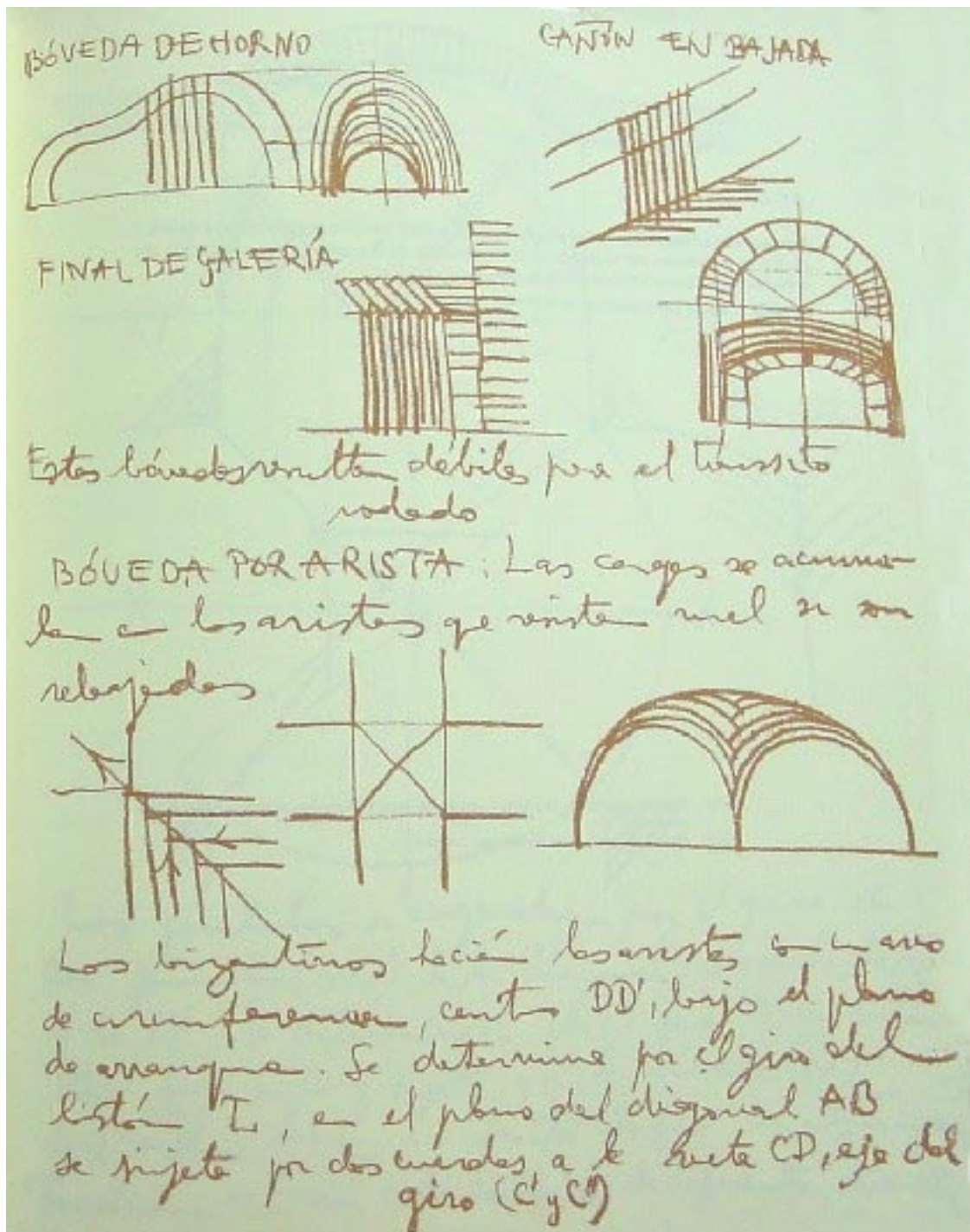


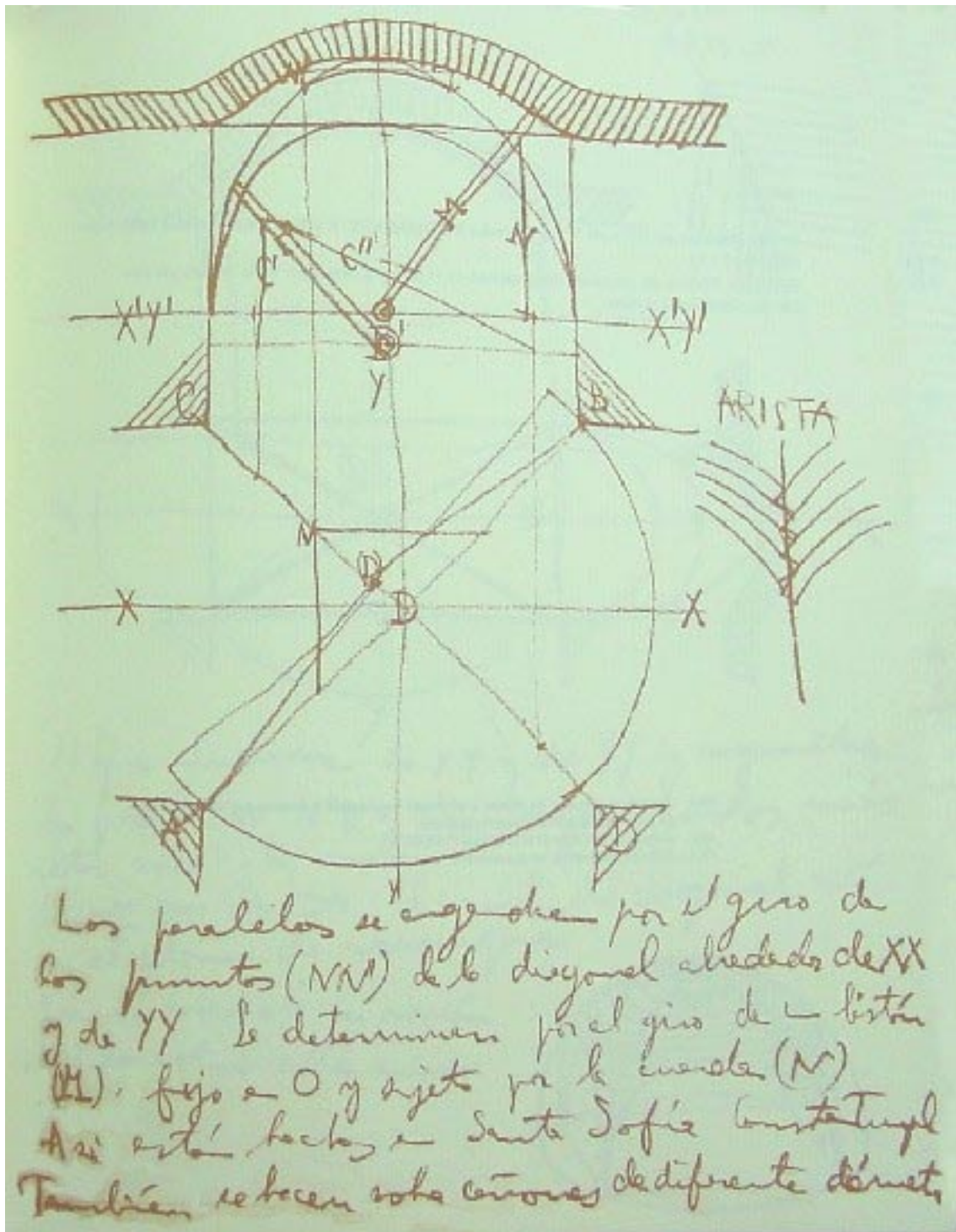


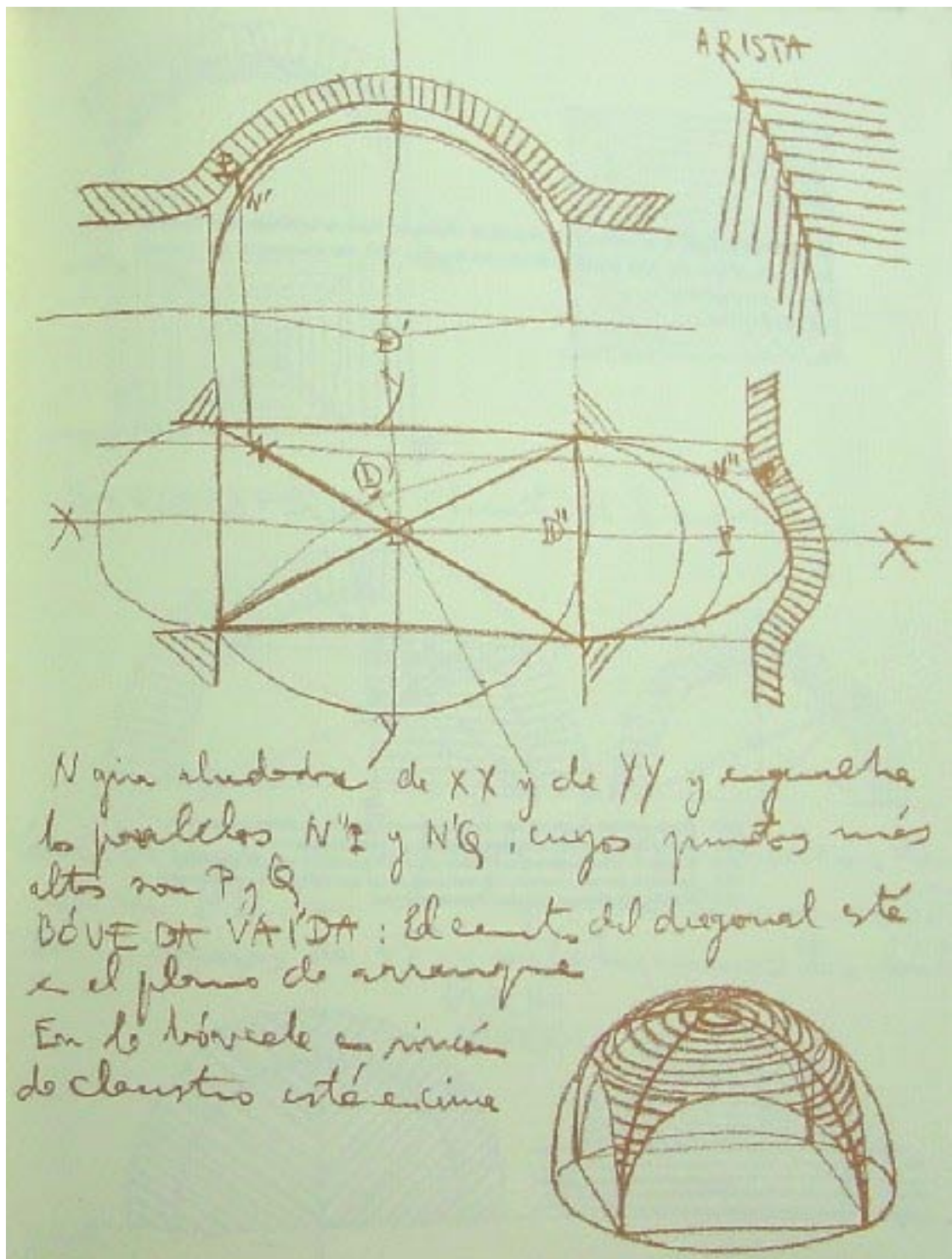


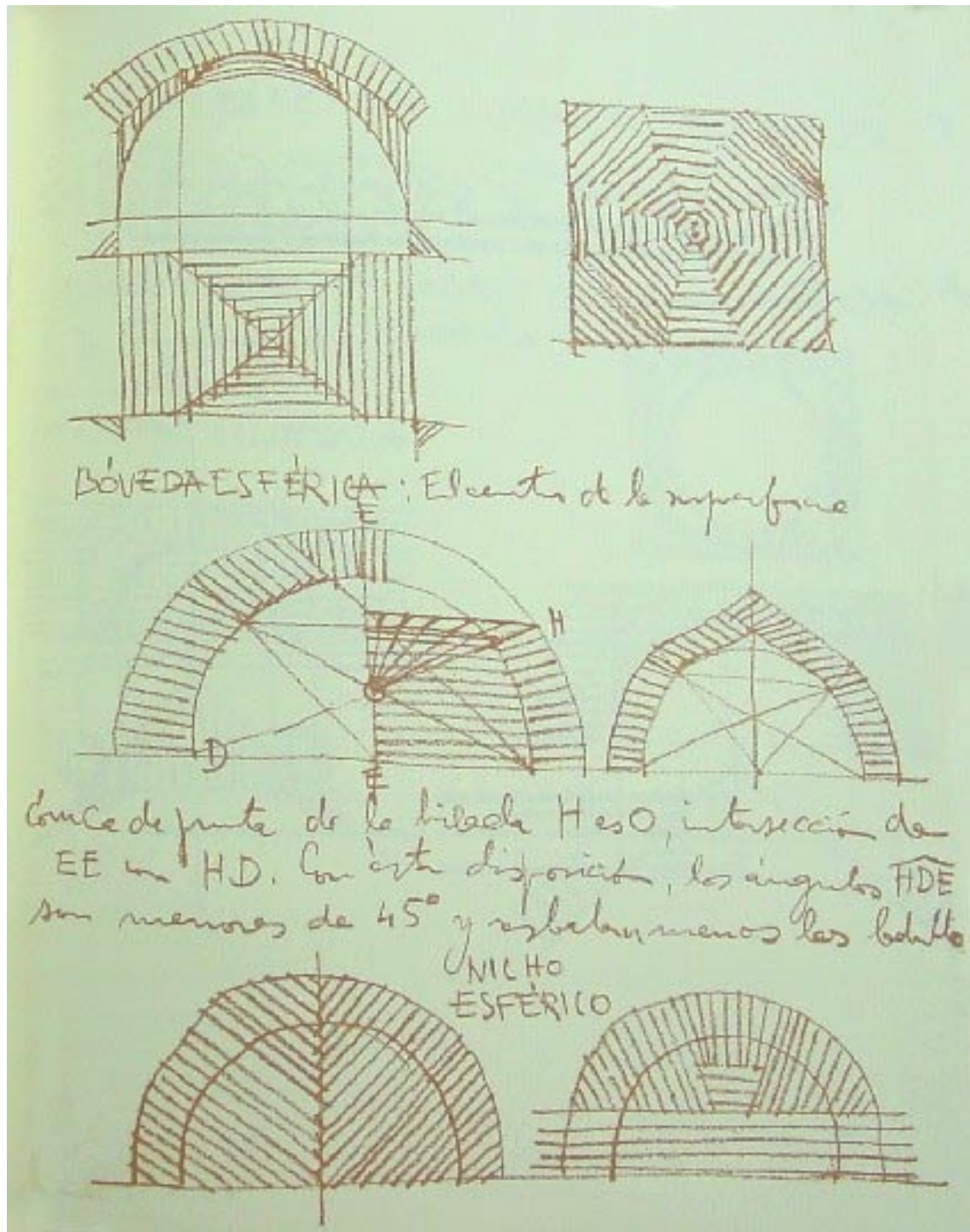


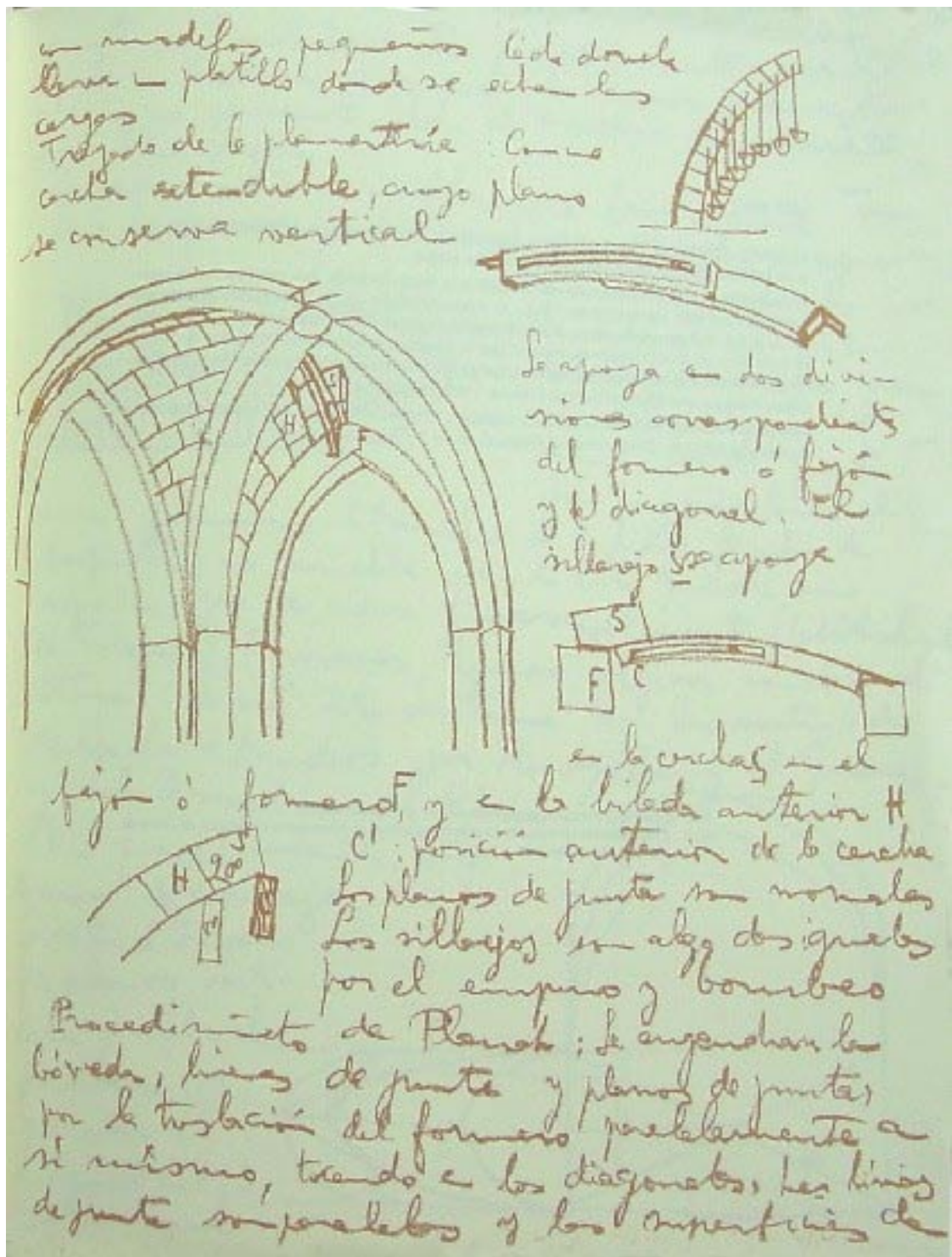


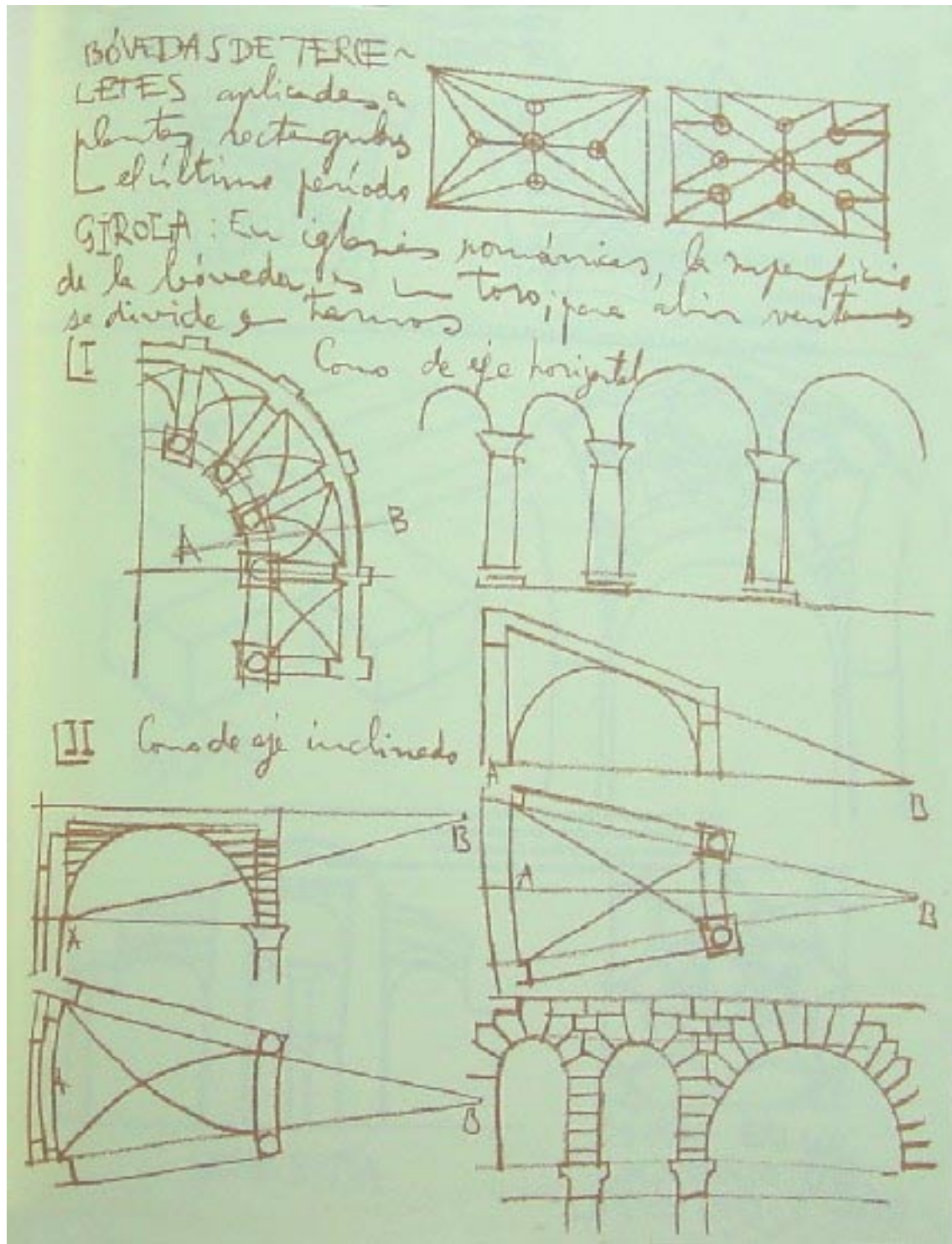


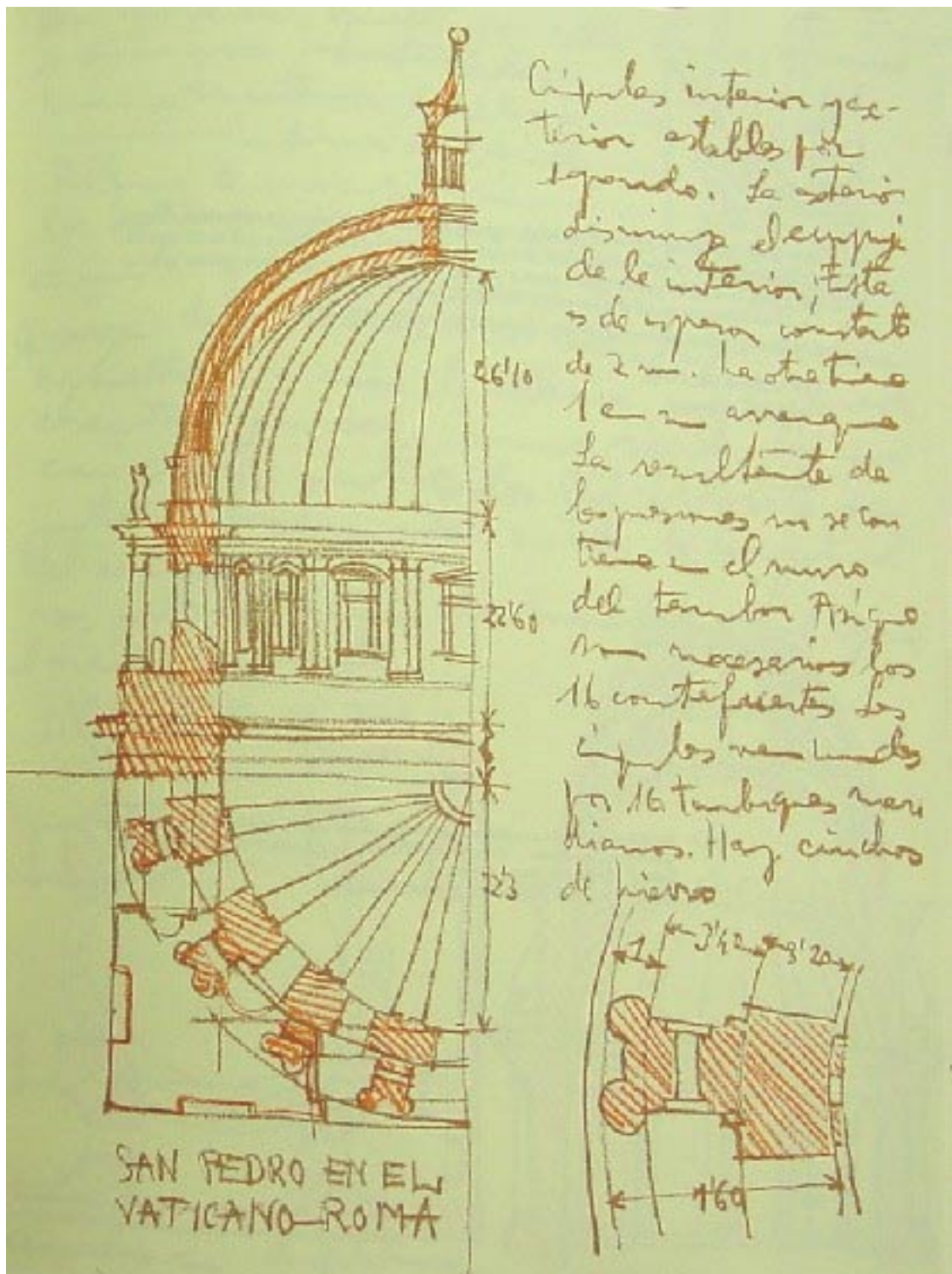


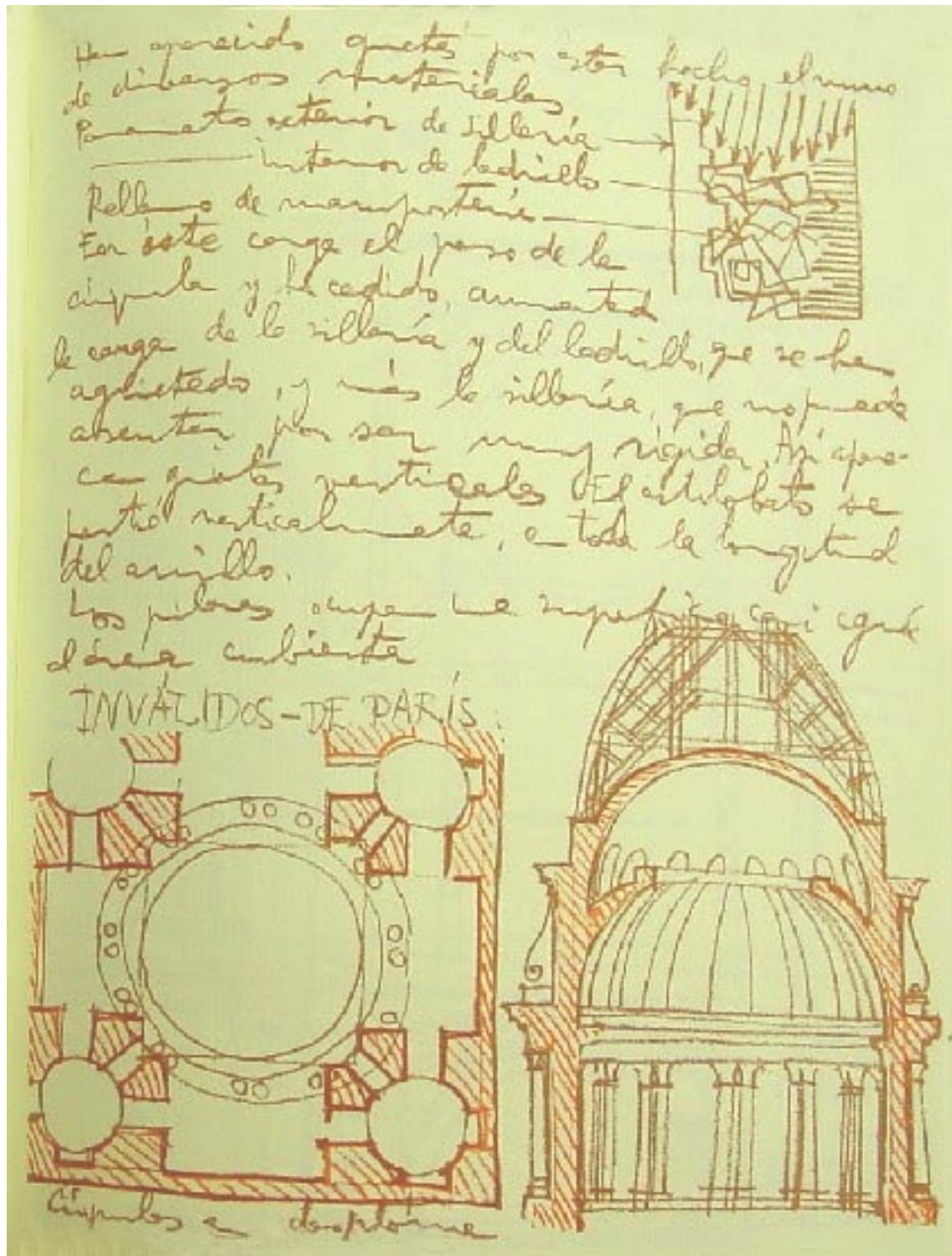


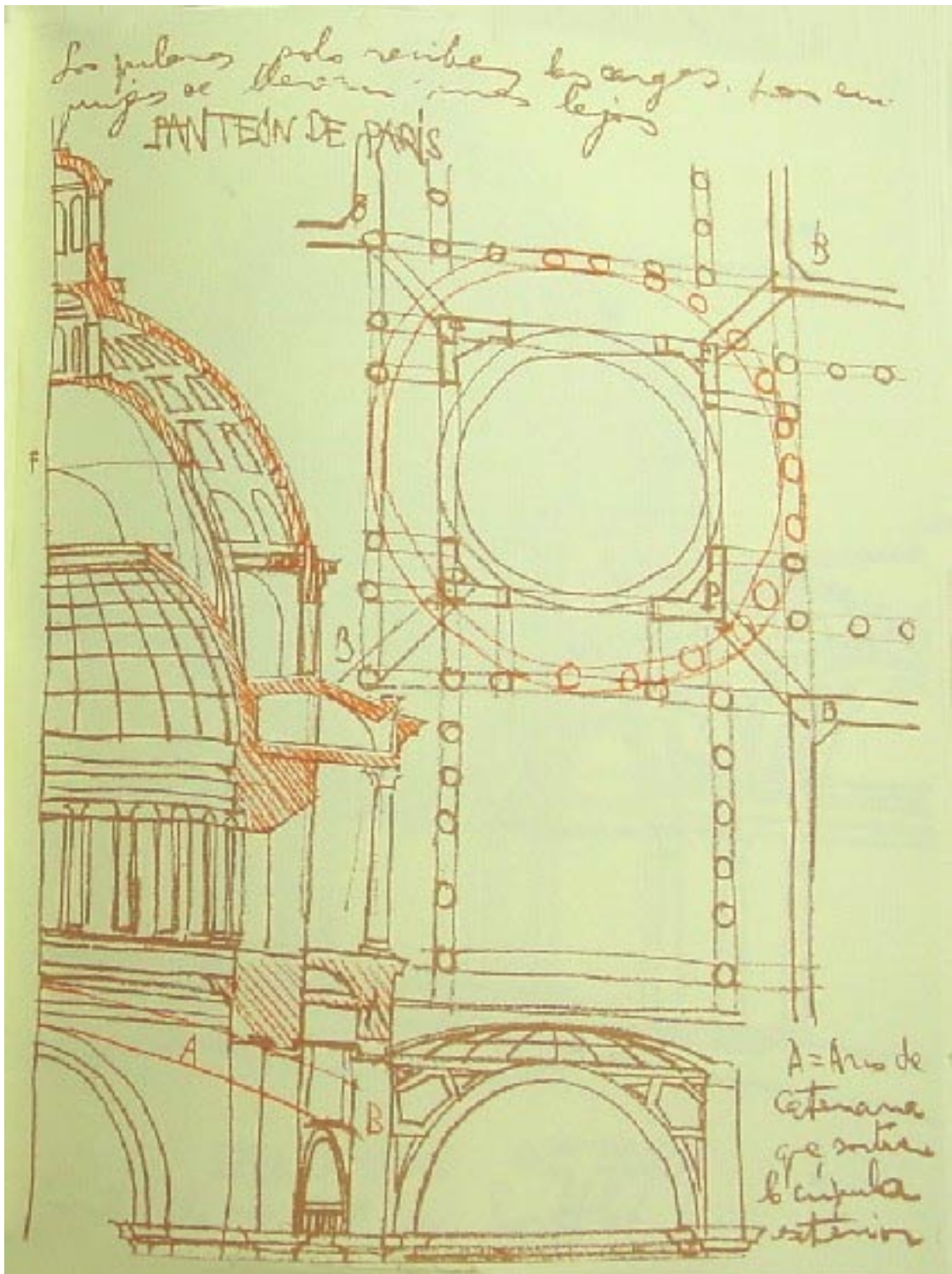


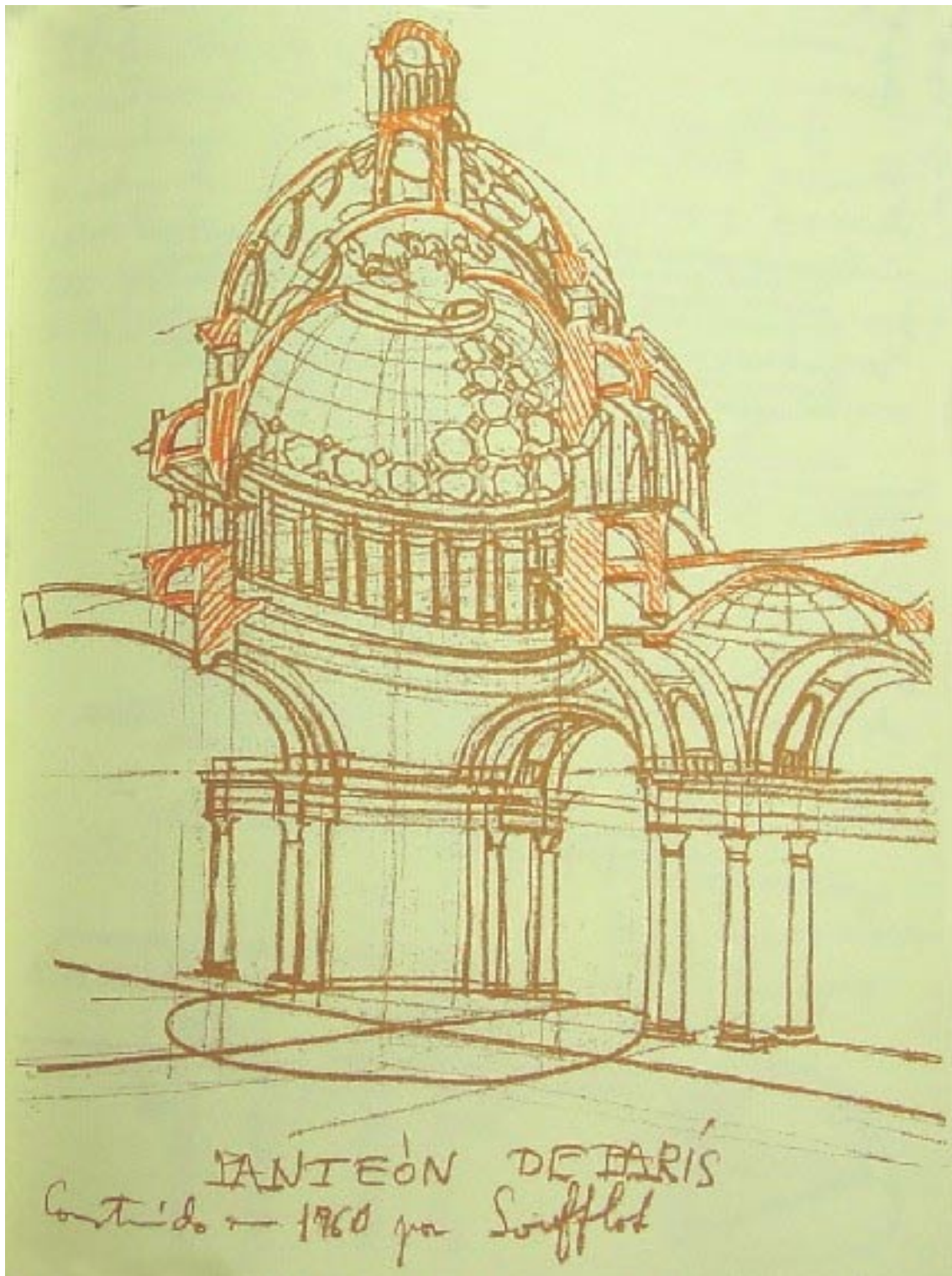


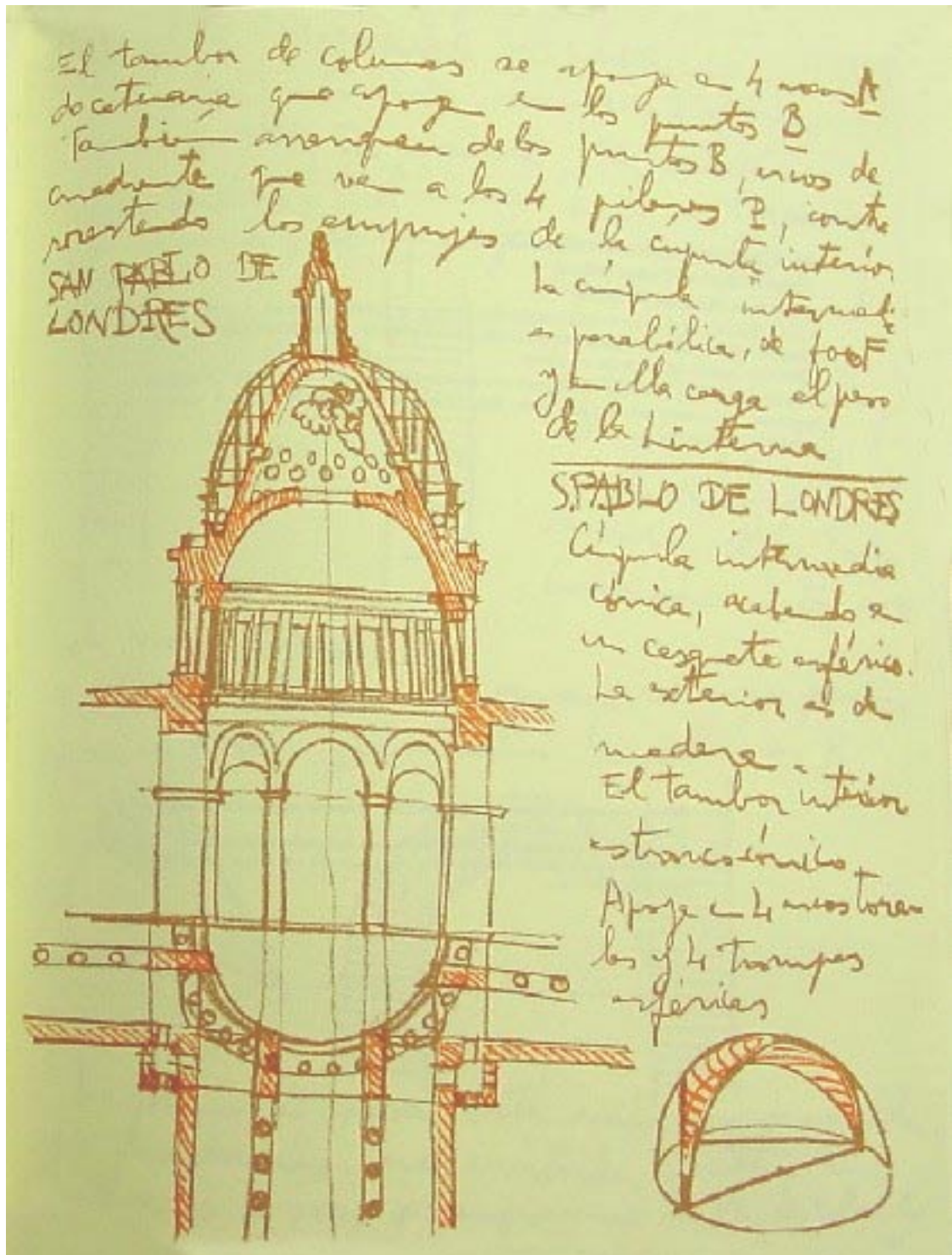


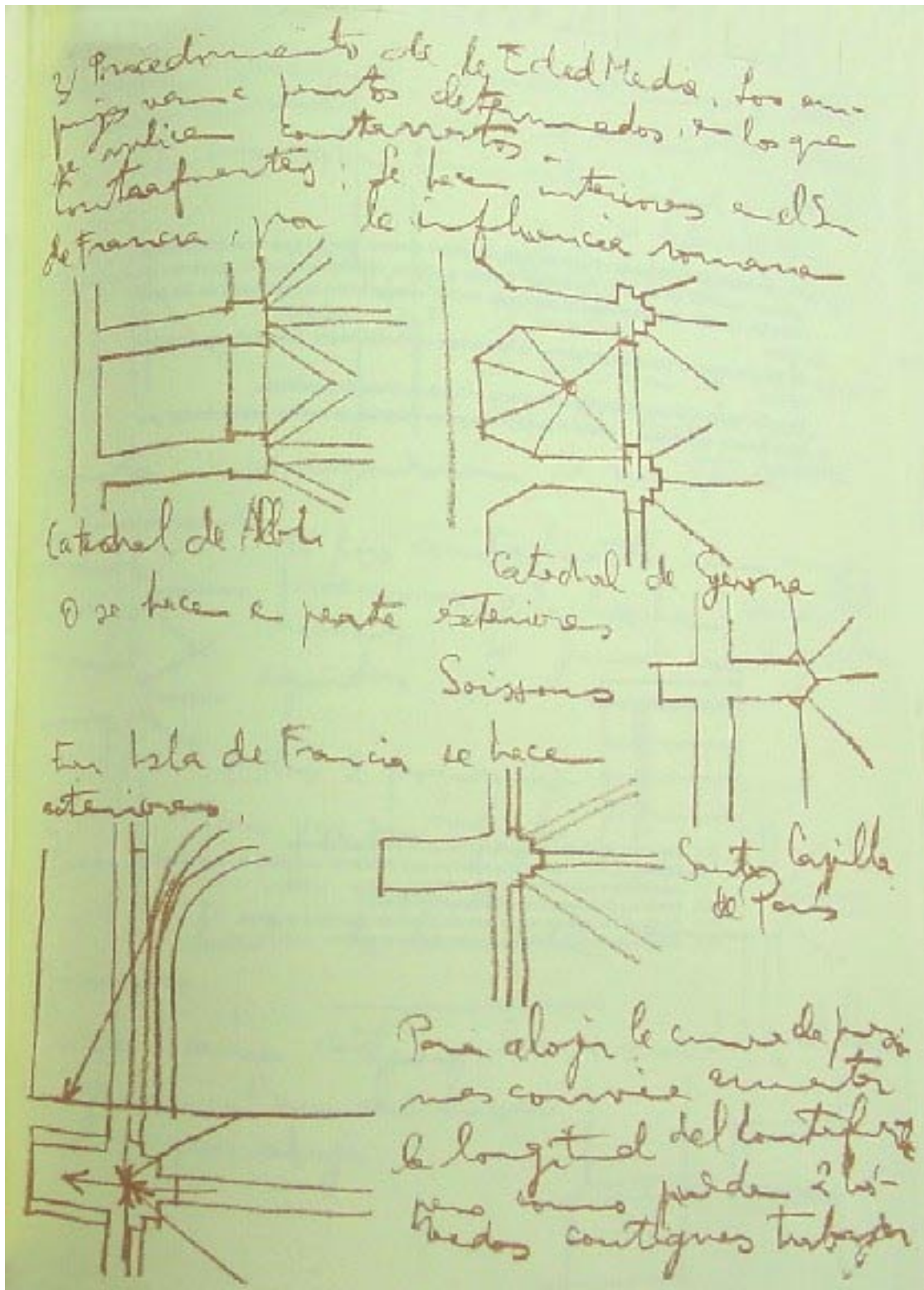












de modo desigual puede al escape del plano normal, por lo se debe tener que...

Además, debe tener estabilidad propia

a y b se determinan por la altura de las fijas

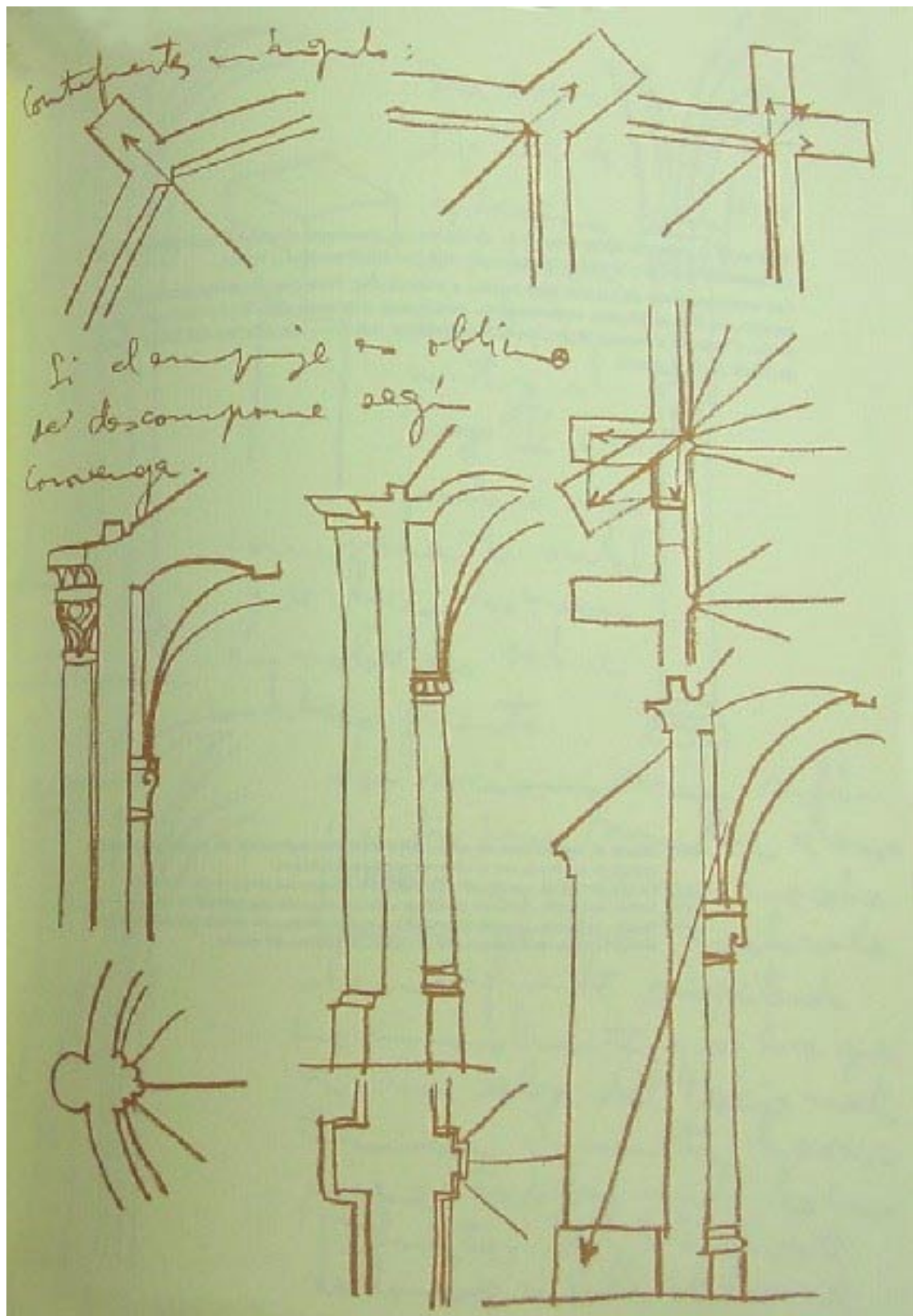
la sección se determina de modo que resiste a compresión la resultante de las fuerzas

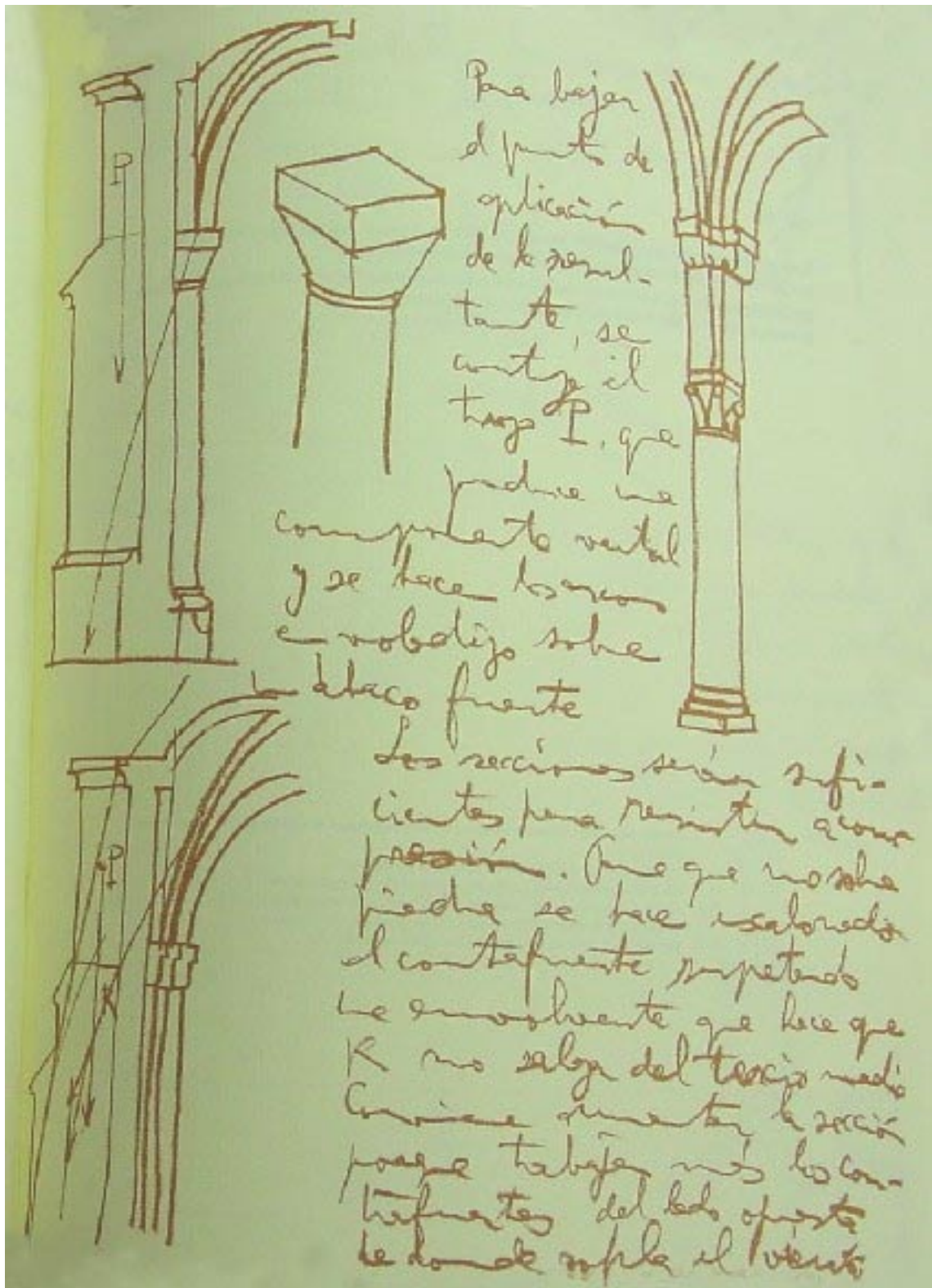
Si los contrafuerzas son muy próximas, se estrecha cerca del agujero. Se pueden igualar

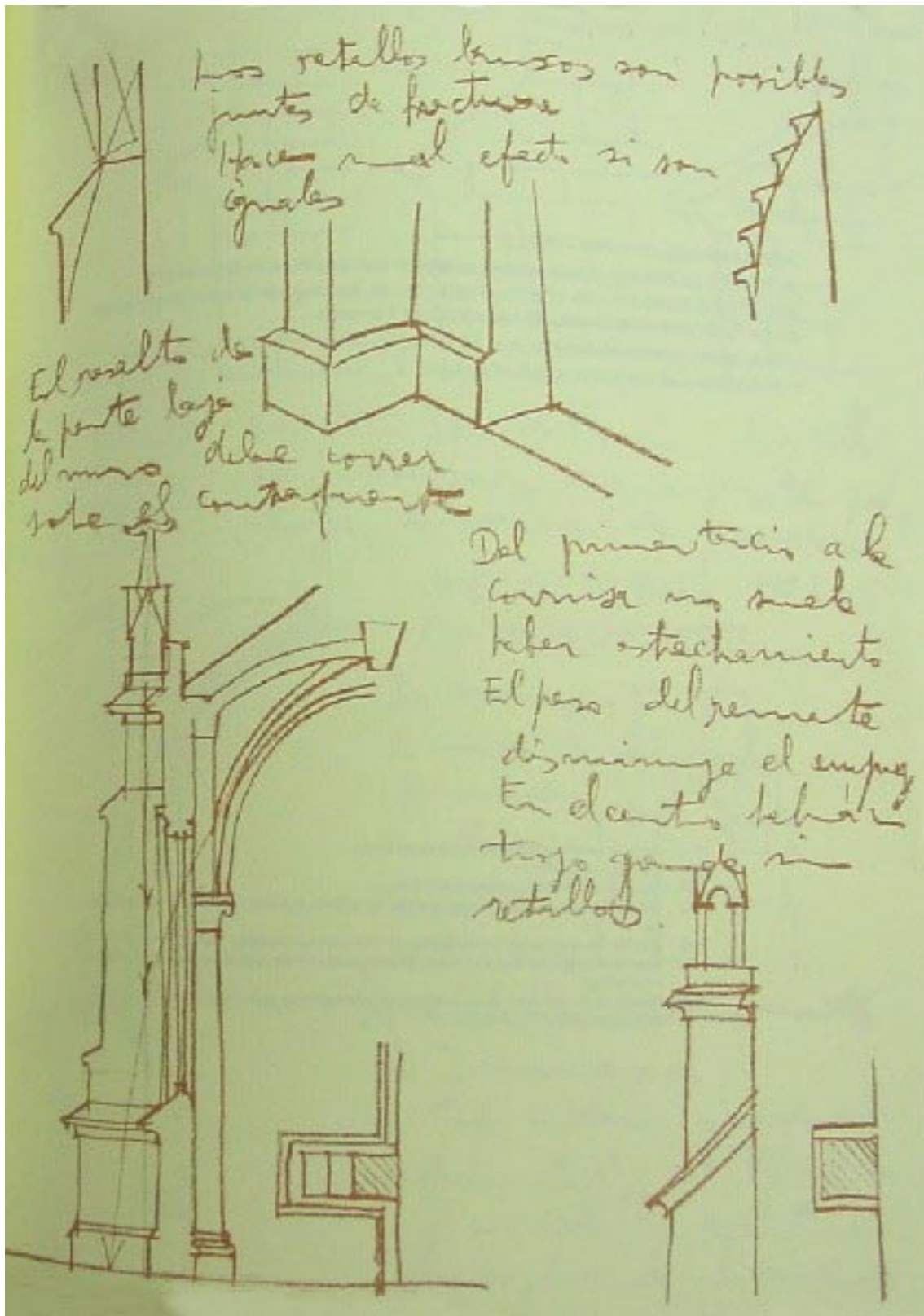
Estos 2 fijos se toman por su ángulo si se acerca al borde la línea de fuerzas

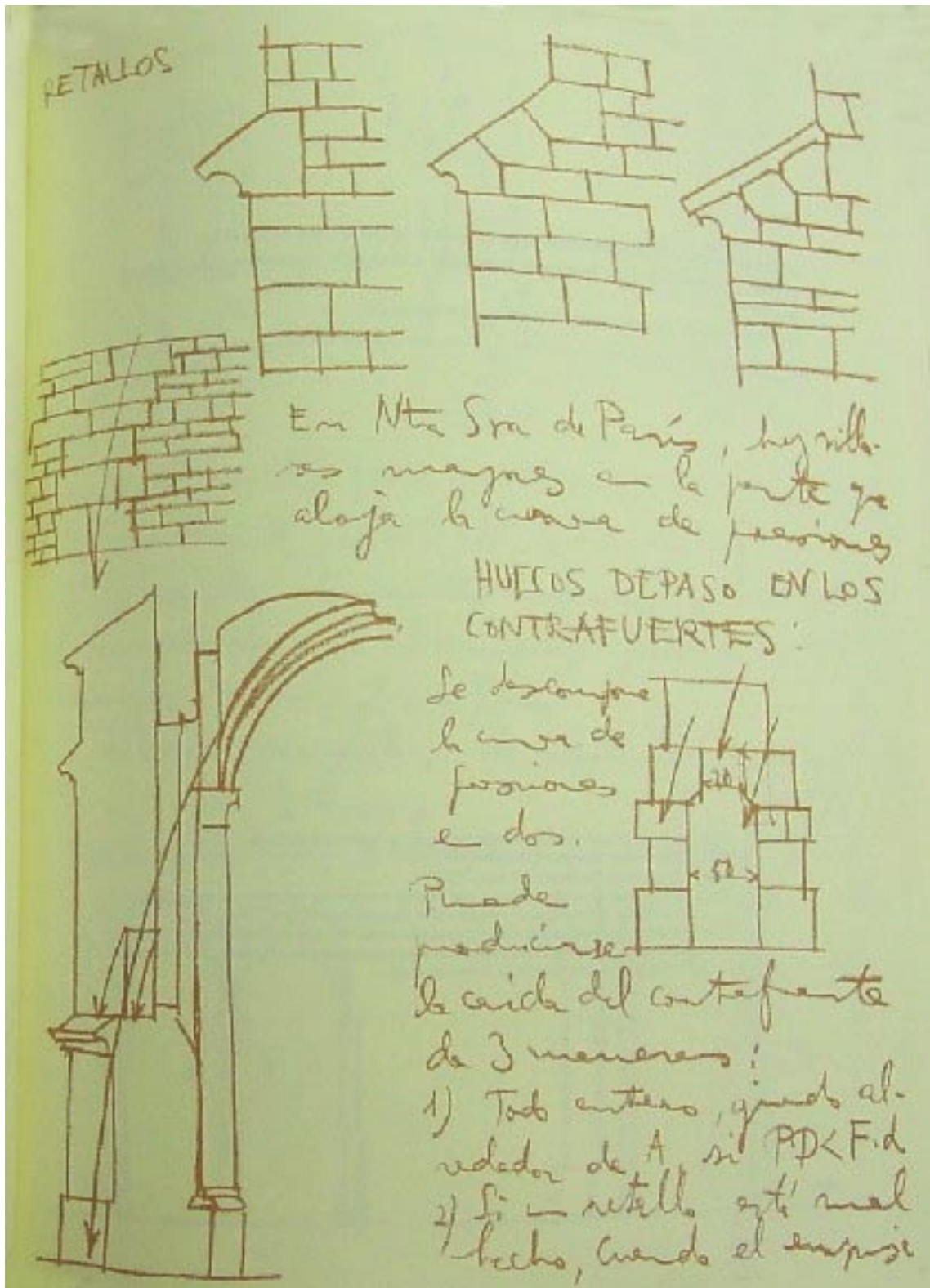
Se debe hacer rectangular; 2 veces $2 \frac{1}{2}$ el largo

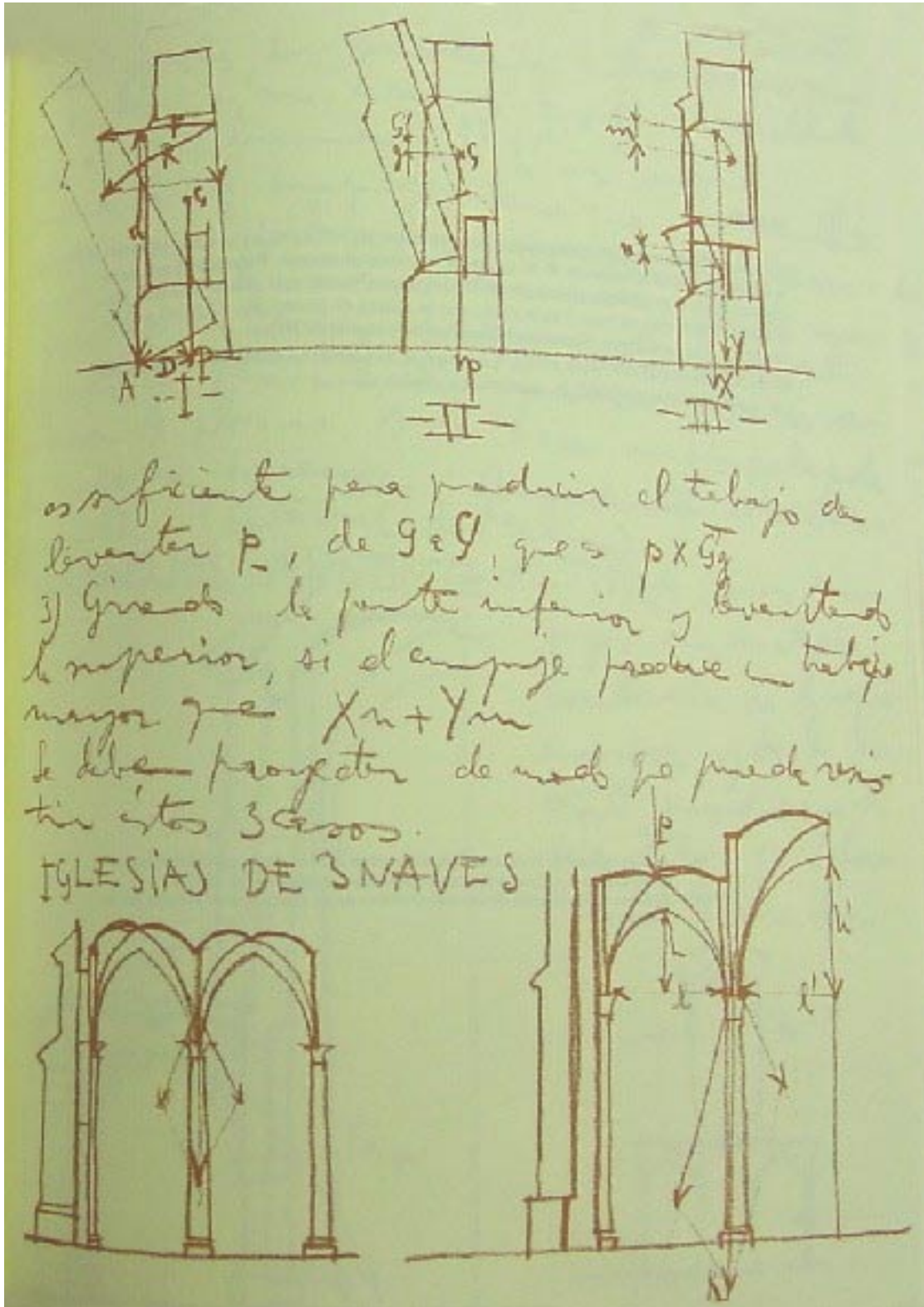
debido al ancho, ensanchados por abajo





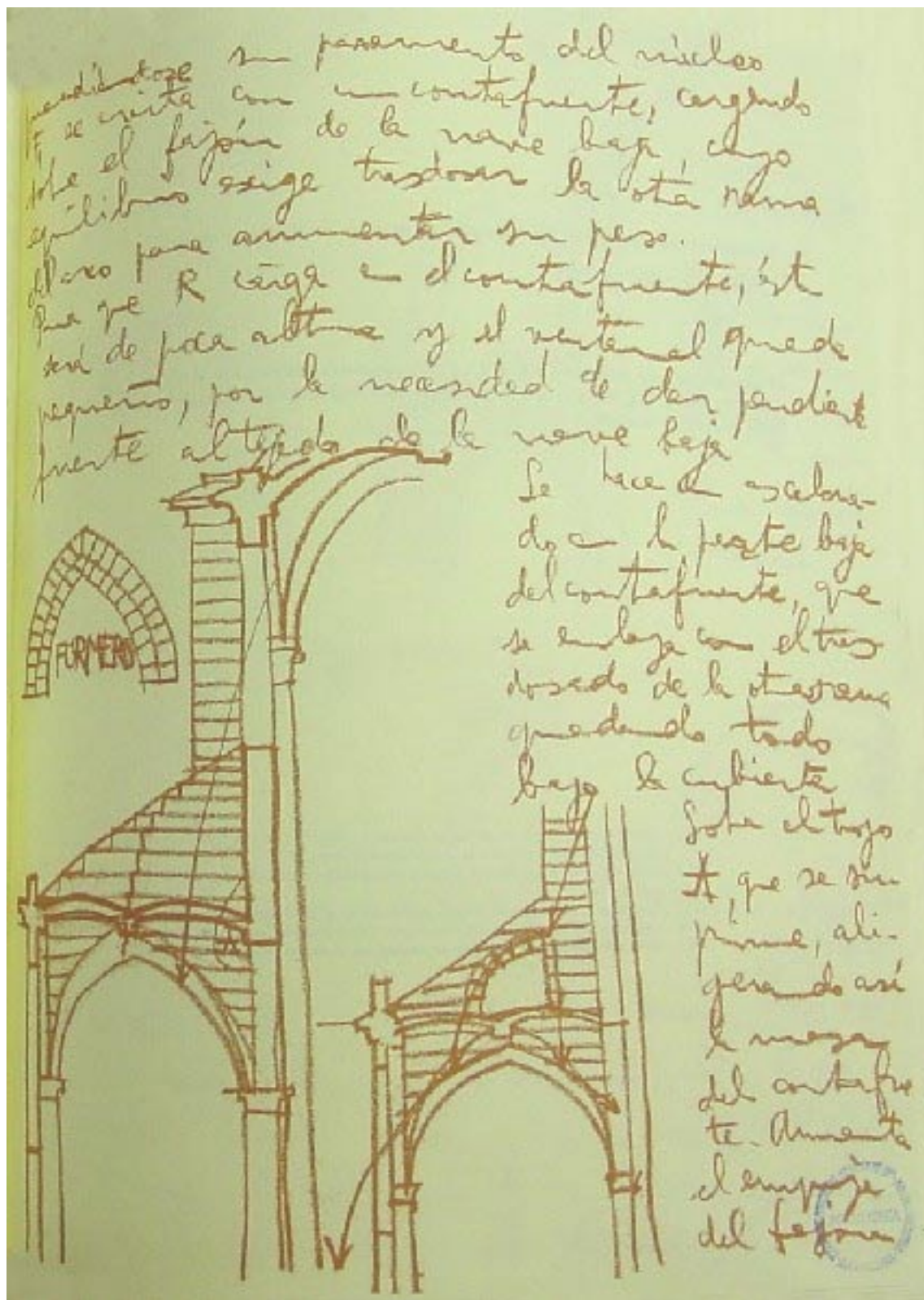


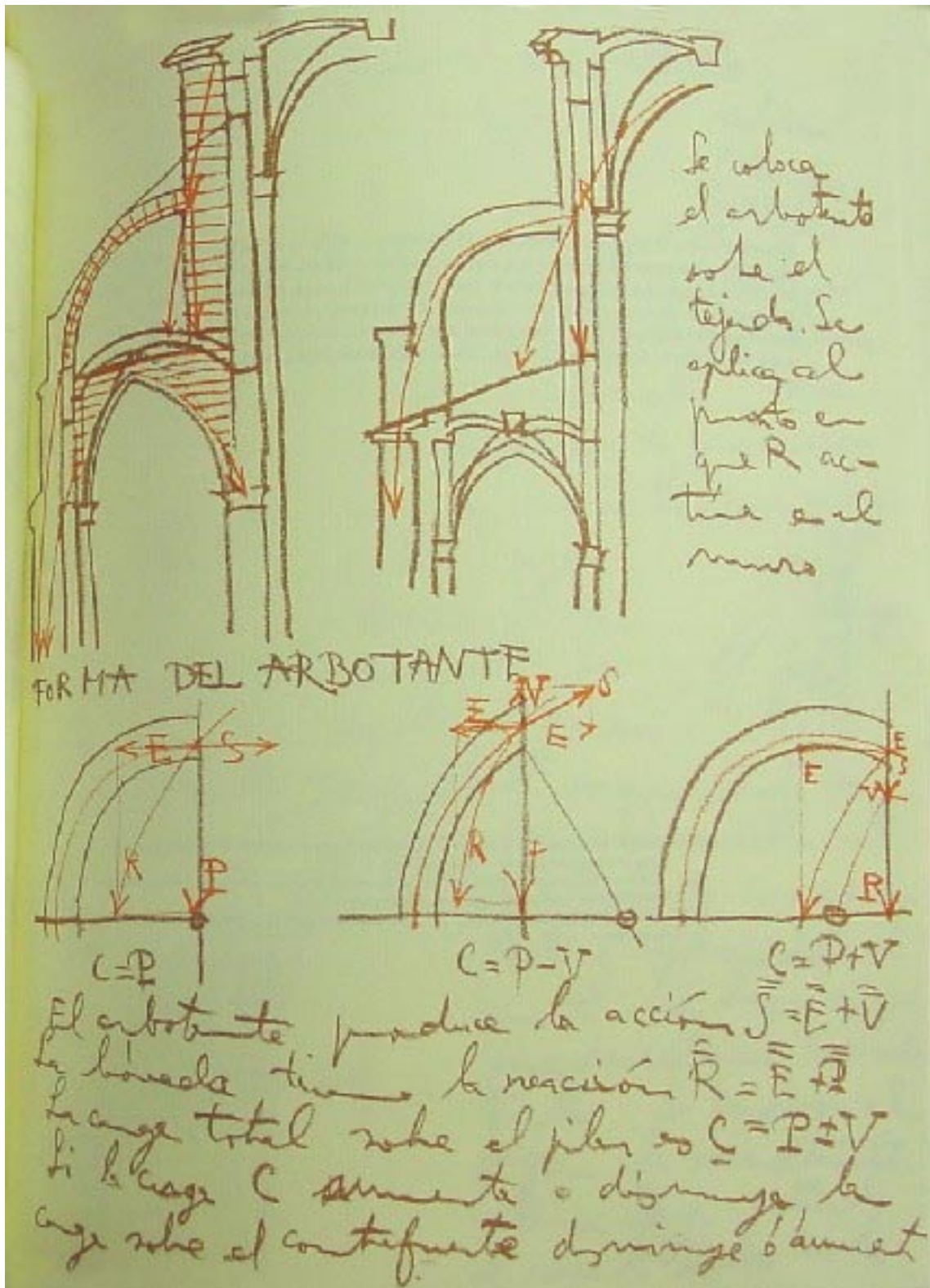




Si son iguals, los resultantes intermedios son
 verticales. Si no lo son y $\frac{h}{l} = \frac{h'}{l'}$, la resultante
 cae a la columna. Si $h' > \frac{h}{l} l'$, la resultante
 cae a la izquierda del empuje. Para que la resultante
 caiga en el pilar, se aumenta el empuje
 de la nave menor, se aumenta el empuje
 de la nave mayor y plenarientaria, dando más
 peso a la clave, que se rellena de plomo. O se hace más pesada
 la nave menor. Aumenta el contra-
 fuerte. (Catedral de Milán)

ARRANQUES A DISTINTA ALTURA: Los ar-
 cos en sentido
 contrario de la nave
 mayor y de la
 menor produce el
 por F_1, F_2 , se de-
 forme el pilar, des-





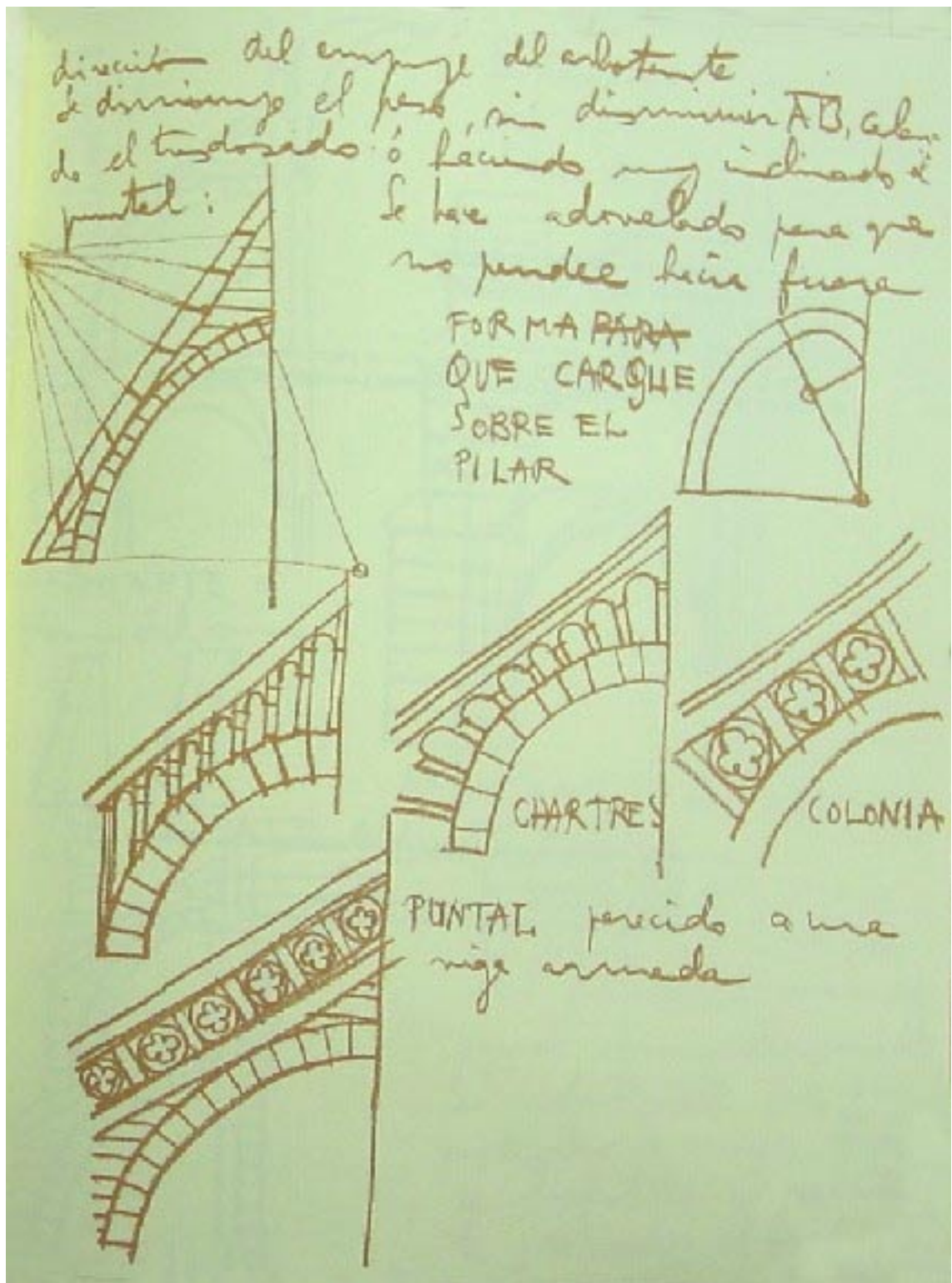
El pilar es más estable
 El arbotante se aplica
 a la altura del contrafor-
 te, es que R sale del
 muro. Cada uno actúa
 en un punto de la última
 trabe horizontal. Si em-
 pie la curva de perfiles
 de uno, sería R, que puede
 abrirse hacia
 fuera en

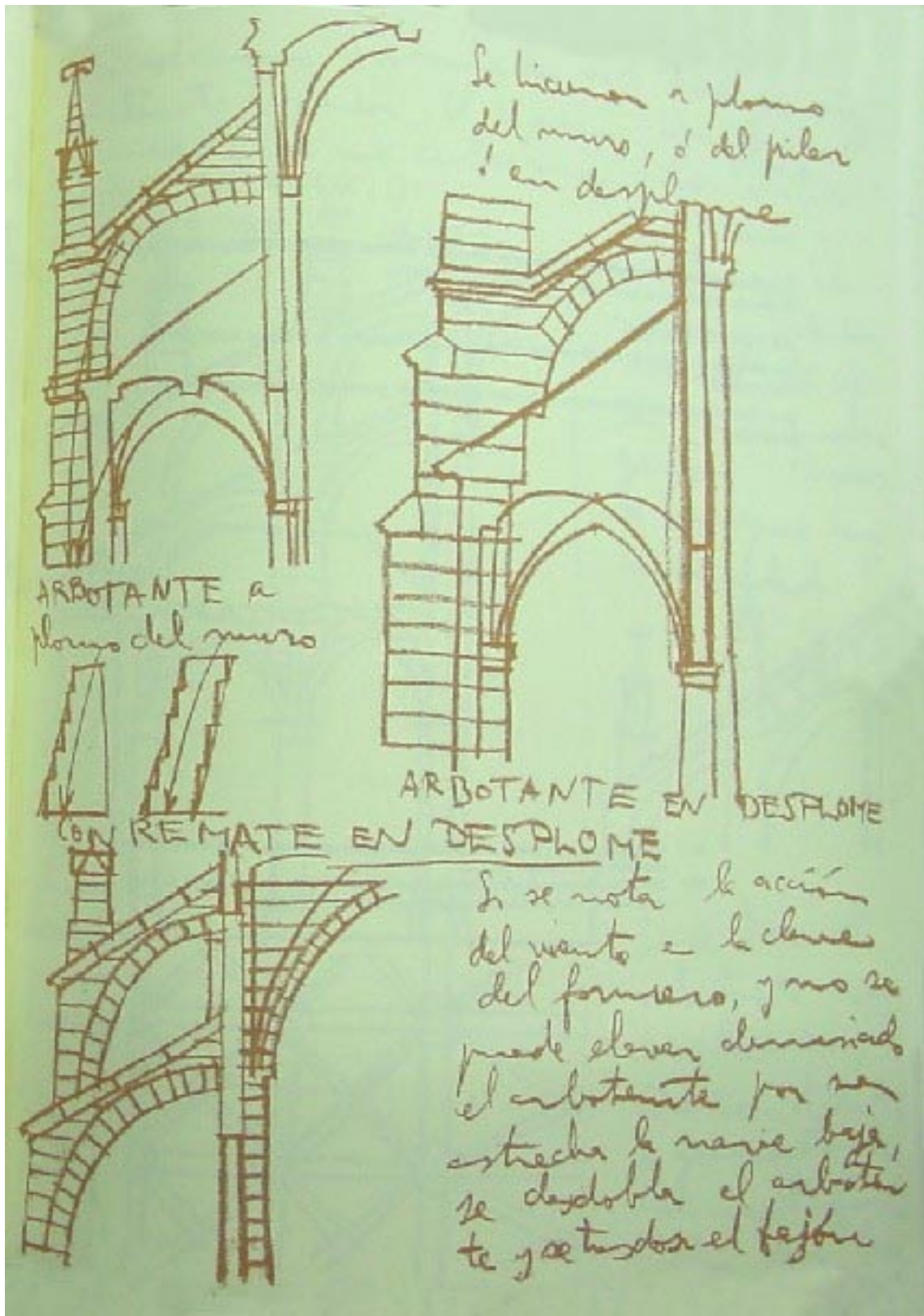
$C = P \cdot T$
 R
 H
 E

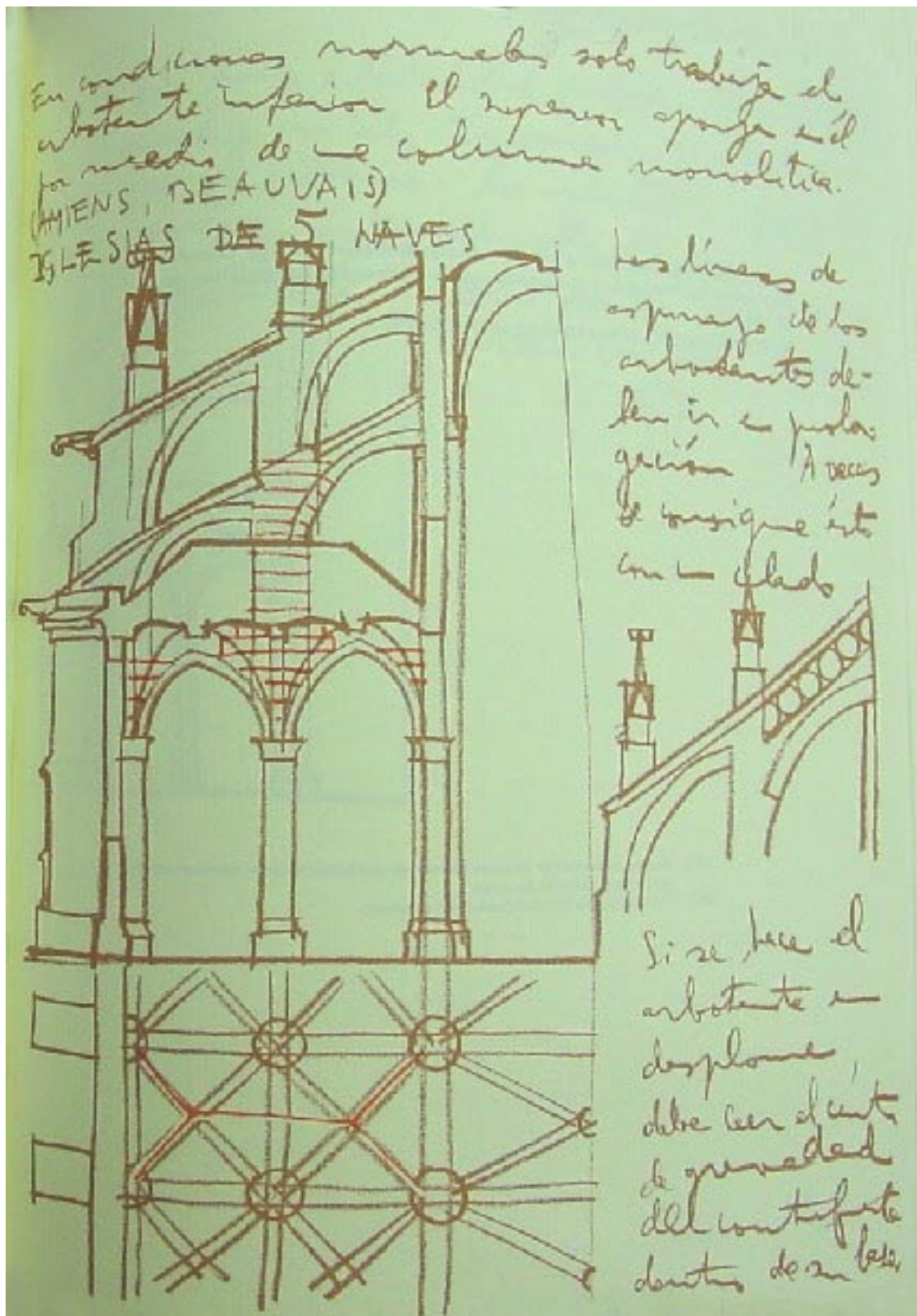
componente H en par con E. Se
 evita, sin aumentar el grueso
 del arbotante y con ello E, creándose con
 la albardilla recta
 que trabaje como por-
 tal y aplicándose el
 punto más bajo a que
 puede actuar la resis-
 tencia. Se traza el
 eje. La resultante
 actúa hacia fuera cuando
 el viento sopla en la

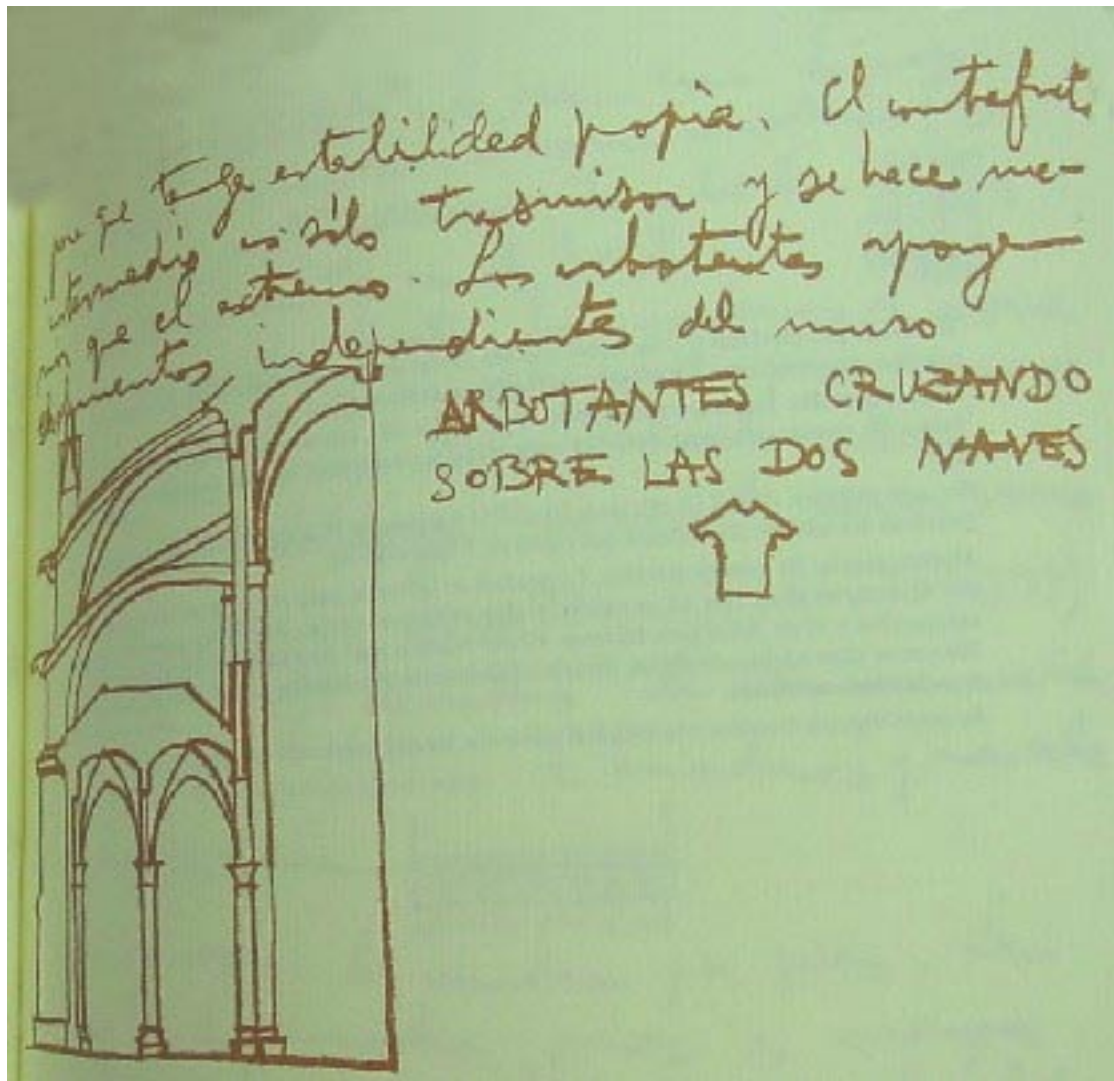
H
 E
 R

H
 E
 B









ANNEX 3.13

Tractat d'arquitectura i construcció de Domènec Sugranyes

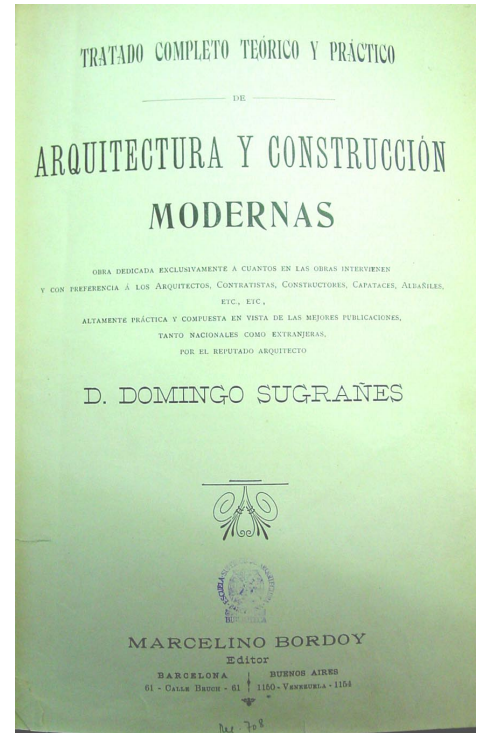
La publicació més completa i que millor pot explicar els coneixements de Domènec Sugranyes és el seu tractat d'arquitectura i construcció, en 3 volums (un de text i dos de làmines), editat a Barcelona per M. Bordoy. Es tracta d'una autèntica enciclopèdia de construcció en la qual Sugranyes explica els diferents conceptes en el 1r volum, en el 2n els il·lustra i en el 3r volum mostra, en un seguit de làmines a color, una selecció d'obres a mode de catàleg d'estil arquitectònic segons diverses tipologies. De totes maneres, encara hi ha altres publicacions de Sugranyes, entre les quals cal destacar el *Manual de Albañileria* i el pròleg en un llibre sobre formigó armat.

Títol original: *Tratado completo teórico y práctico de Arquitectura y Construcción modernas / por Domingo Sugrañes*

Localitzat a l'ETSAB

Codi de barres. 1400425620

Signatura: R-XXXIV-3



El capítol sobre els arcs comença a la pàg. 284 amb el títol Arcs Corbs. Presentem la traducció del primer fragment per mostrar com Sugranyes presenta el tema:

Arcs corbs

§ 154.- Arcs de carreus

Aquesta denominació compren una gran varietat d'arcs, alguns dels quals designarem amb noms especials, segons la seva natura, en tractar sobre la classificació dels arcs. Aquests arcs, com les llindes dovellades, poden ser construïts principalment de fàbriques de carreus o de maó i en alguns casos especials amb pedra ordinària.

Els arcs, en general, poden considerar-se com a seccions de voltes de canó seguit, que tenen per directriu la corba de l'arc, o bé com a veritables voltes de poc gruix, per la qual cosa no ens detindrem a fer un estudi molt detallat dels mateixos, ja que després hem de fer-lo en tractar sobre les voltes. Ens limitarem aquí a donar algunes regles de caràcter general.

(...)

Sobre el punt següent, § 155.- **Arcs de maó**, podem destacar els mètodes d'obtenció de normals als arcs el·líptics per facilitar el traçat dels junts. Sugranyes cita i il·lustra els mètodes d'Ocagne, de Deyris i de Morre.

Els punts següents, § 156.- **Atirantaments i reforços en els arcs**, i 157.- **Arcs de fàbrica de pedra ordinària**, completen el ventall descrit.

Ens interessa destacar el punt § 158.- **Gruix dels arcs i dels seus suports**, on dóna taules pràctiques per al predimensionat d'un arc ordinari, (pàgs. 290-291):

§ 158. Gruix dels arcs i dels seus suports:

Vam veure ja els gruixos que es donen normalment a les lindes. A més d'allò dit, podem recórrer a les següents fórmules per determinar aquests gruixos:

$$G = \frac{1}{14} \cdot \left(\frac{L}{2} + 5 \right) \quad r = 3 \cdot \left(\frac{\left(\frac{L}{2} \right)^2 - f^2}{2 \cdot f} \right)$$

L = llum de l'arc
 G = gruix de l'arc
 f = fletxa de l'arc
 r = radi de l'arc

En les construccions ordinàries, els arcs de maó que es construeixen tan en els murs de façana com en els intermedis no acostumen a suportar grans càrregues, per la qual cosa n'hi ha prou amb els gruixos que s'indiquen en les següents taules per assegurar la seva estabilitat:

Llum de l'arc	Gruix de l'arc	
	Arcs de mig punt	Arcs rebaixats
Menor a 2.00 m	0.24 m	0.37 m
Entre 2.00 m i 3.00 m	0.37 m	0.50 m
Entre 3.00 m i 5.50 m	0.50 m	0.62 m
Entre 5.50 m i 8.00 m	0.62 m	0.75 m

En els arcs rebaixats se'ls dóna, fins als 10 m de llum, una fletxa no menor de 1/12 de la llum. Per a aquells arcs amb llums que oscil·len entre 10 i 20 m, la fletxa mai es menor que 1/10 de la llum.

Gruix a la clau dels arcs ordinari de maó			
Llum	Arcs de mig punt	Arcs peraltats	Arcs rebaixats fins a 1/8
> 1.75 m	2 astas	1 asta	3 astas
De 2.00 a 3.00 m	De 3 a 4	2 astas	De 3 a 4
De 3.50 a 5.75 m	De 4 a 5	3 astas	De 4 a 5
De 6.00 a 8.50 m	De 5 a 6	De 3 a 4	De 5 a 6

Poden emplear-se també les fórmules:

Arcs de mig punt	$G = 0.24 + 0.10 \cdot r$
Arcs d'obertura de 90°	$G = 0.24 + 0.07 \cdot r$
Arcs d'obertura de 60°	$G = 0.24 + 0.05 \cdot r$

on r és el radi de la corba de l'intradós a la clau.

Per a arcs amb llums superiors a 9 m poden emplear-se aquestes altres fórmules:

Arcs de mig punt	$G = L / 12$
Arcs rebaixats	$G = L / 15$

Per a arcs de mig punt o rebaixats fins a 1/3

Arcs de maó ordinari	$G = 0.24 + L / 16$
Arcs de carreus de pedra	$G = 0.24 + L / 32$

Altres vegades s'usa la següent fórmula:

$$G = 0.20 + 0.025 \cdot L + \frac{L}{f} \cdot (0.02 + 0.001 \cdot L)$$

Rankine proposa altres fórmules:

$$\text{arcs de mig punt: } G = \sqrt{0.0364 \cdot r}$$

$$\text{arcs carpanells o el·líptics: } G = \sqrt{0.0521 \cdot r}$$

en les quals r representa el radi de curvatura en el vèrtex de l'intradós; la primera serveix per a arcs de mig punt i la segona per a arcs carpanells de diversos centres o per a arcs el·líptics.

En els suports o peus drets que sostenen els arcs se'ls assignen els gruixos següents:

Arcs de mig punt	$L / 4$
Arcs peraltats o ametllats	Entre $L/5$ i $L/6$
Arcs rebaixats fins a la fletxa de $1/8$	Entre $L/4$ i $L/5$
Arcs rebaixats fins a la fletxa de $1/2$	$L/2$
Arcs plans (llindes dovellades)	$2L / 3$

(...)

Sugranyes encara extén aquest tema amb més fórmules per dimensionar els arcs plans (o llindes dovellades) i després ja passa al tema de les voltes (pàg. 292). A la presentació del tema hi trobem dades que repeteixen les anècdotes històriques dels apunts de Joan Torras i de Leandre Serrallach.

Voltes

(...)

L'origen de les voltes, igual que els arcs, es remunta a temps remots. Sense comptar amb els nombrosos exemples que podríem citar en els antics monuments de la Índia, d'Egipte, de Grècia, etc., en els quals els materials que constituïen les cobertes voltades eren disposats en estrats horitzontals, podem recordar diversos exemples de voltes amb els materials disposats amb els junts normals a l'intradós en algunes piràmides d'Etiòpia i de Tebes. A la tomba del 1r rei de la 18^a dinastia es troba la veritable volta el·líptica construïda amb maó i juntes normals a l'intradós. Els exemples egipcis bastaren als romans perquè erigissin la volta en element integral de les seves grans fàbriques, i arribaren a construir grandioses voltes que encara avui podem admirar en alguns d'aquells monuments de l'època imperial.

(...)

La classificació que fa Sugranyes dels diferents tipus de voltes és extensa i ens ha semblat interessant recollir-la:

Per a que hi hagi estabilitat en una volta és necessari que la línia de pressions estigui constantment continguda entre els perfils que limiten l'intradós i l'extradós de la volta, i perquè no manifesti cap esquerda cal que estigui continguda dins del terç central del gruix de la volta. Però a més de complir aquesta condició hem d'assegurar-nos que cap dovella llisqui pels seus plans de junta, i a més, que en cap punt la pressió que s'exerceixi sigui superior al límit d'elasticitat del material. Per evitar els lliscaments de les dovelles es necessari que la resultant faci amb la normal al pla del junt un angle menor que l'angle de fregament del material.

L'arc de mig punt no pot coincidir mai amb la corba de pressions, però aquesta s'acostarà a aquell tant més com major sigui la càrrega sobre els suports. L'arc de cercle rebaixat correspon a una corba de repartiment de les càrregues que es confon sensiblement amb una línia recta, i l'arc d'el·lipse, també rebaixat, resulta intermedi entre els dos precedents.

A un repartiment horitzontal i uniforme dels pesos correspon un arc parabòlic, i si les càrregues són repartides uniformement al llarg de la corba, l'arc és una catenària.

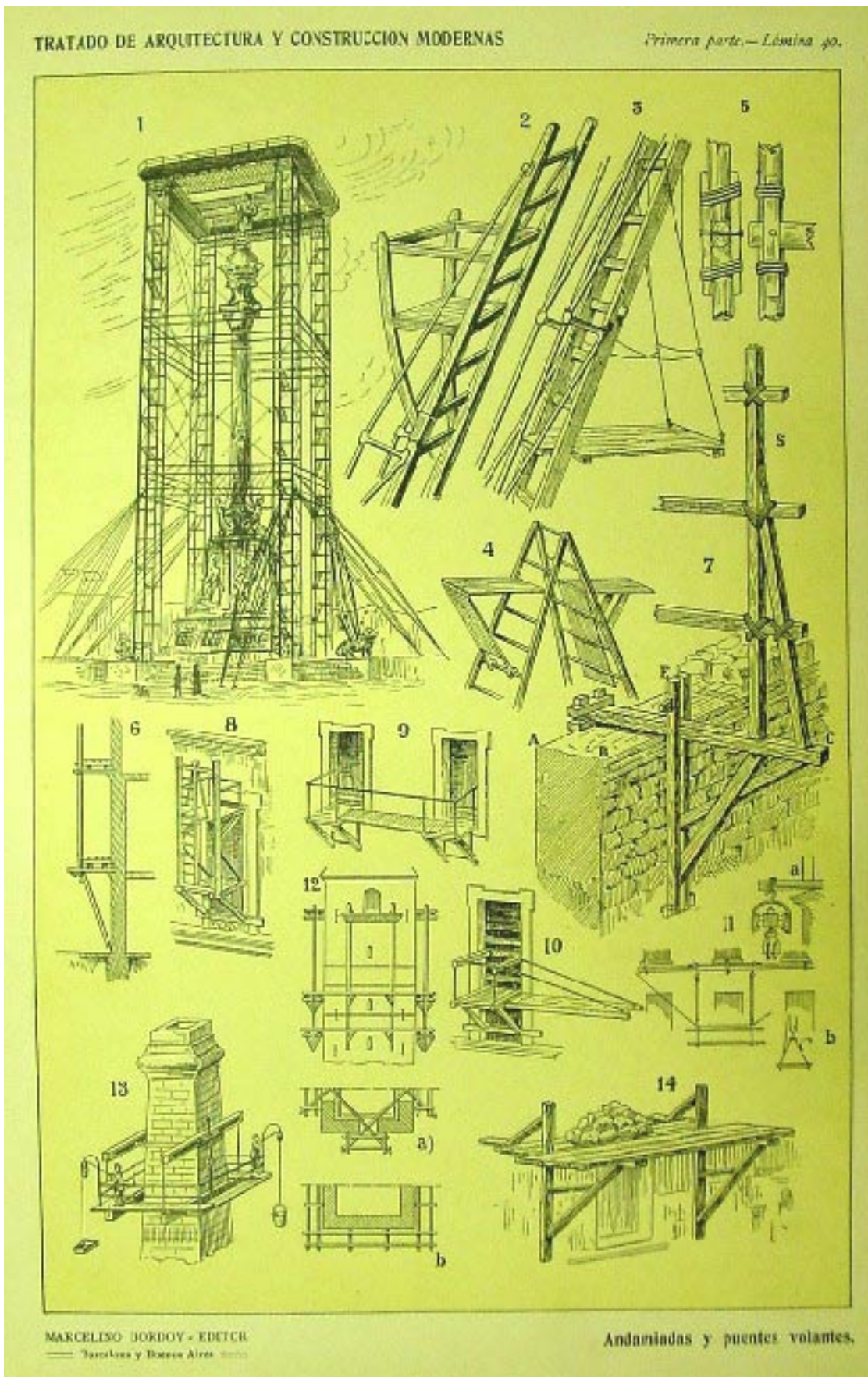
L'arc agut dona lloc, per a una mateixa càrrega, a una empenta menor, però com que actua amb major braç de palanca respecte dels suports, resulta per això aminorada l'avantatge de ser menor la intensitat de l'empenta.

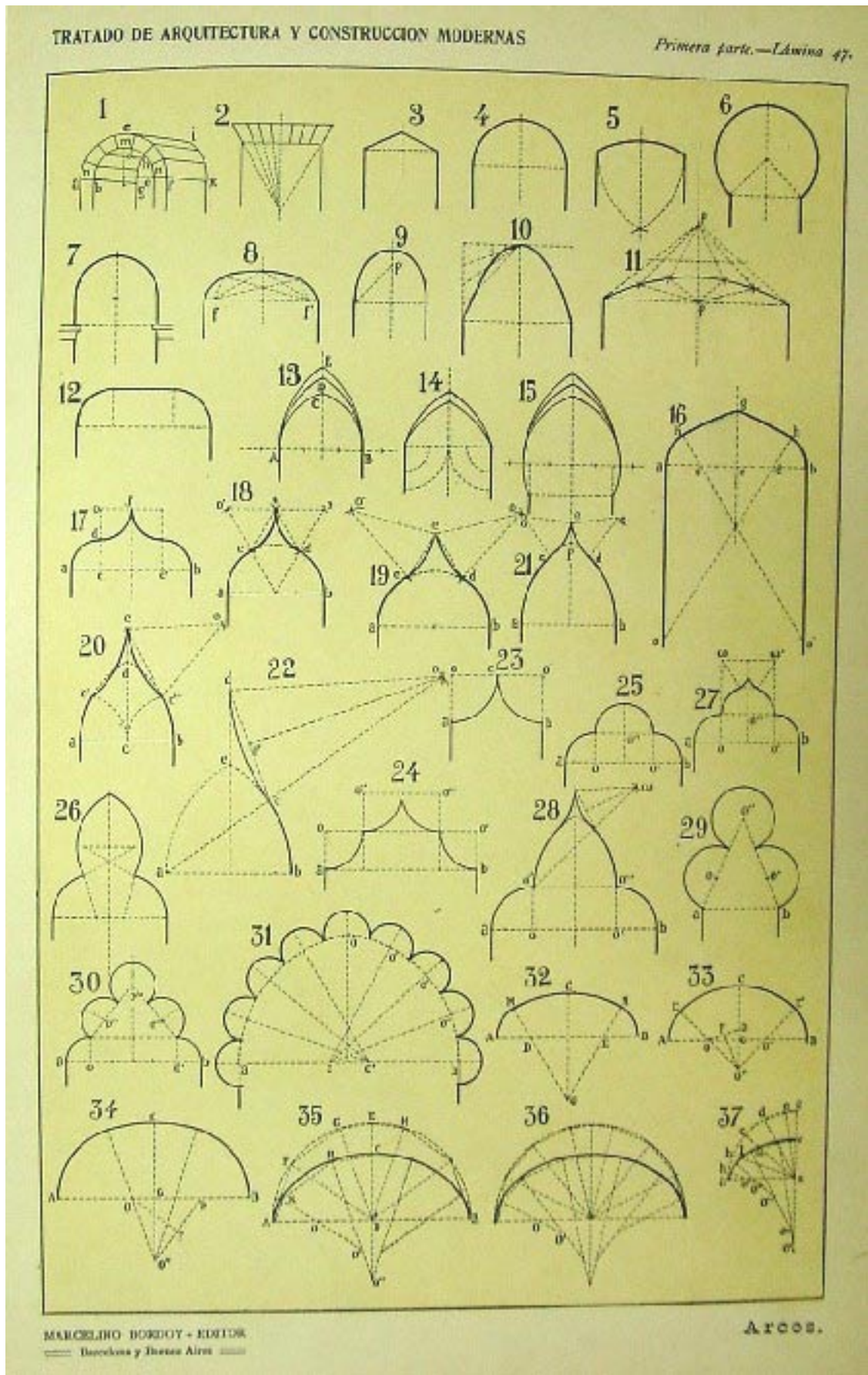
El polígon funicular de les compressions que s'exerceixen en una volta és exactament el mateix, encara que en posició invertida, del que s'obtidria si les pressions fossin tensions. Aquesta propietat ens proporciona un mitjà pràctic i molt senzill per determinar el polígon funicular per a un repartiment de càrregues donat. Així, a la fig. 3, lám. 84, es vol determinar la forma que correspondria a l'arc que (...)

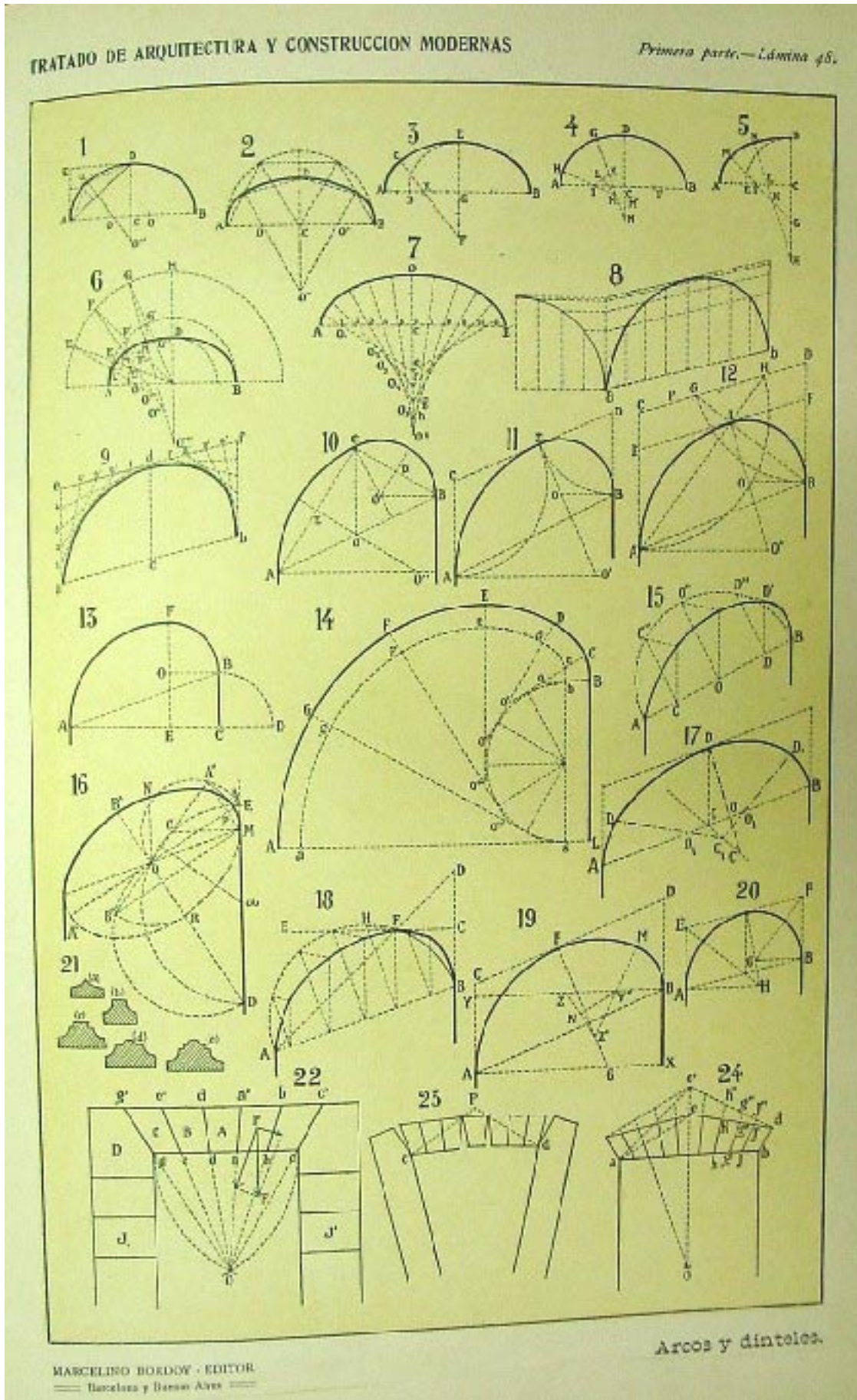
fig.4 lám. 84

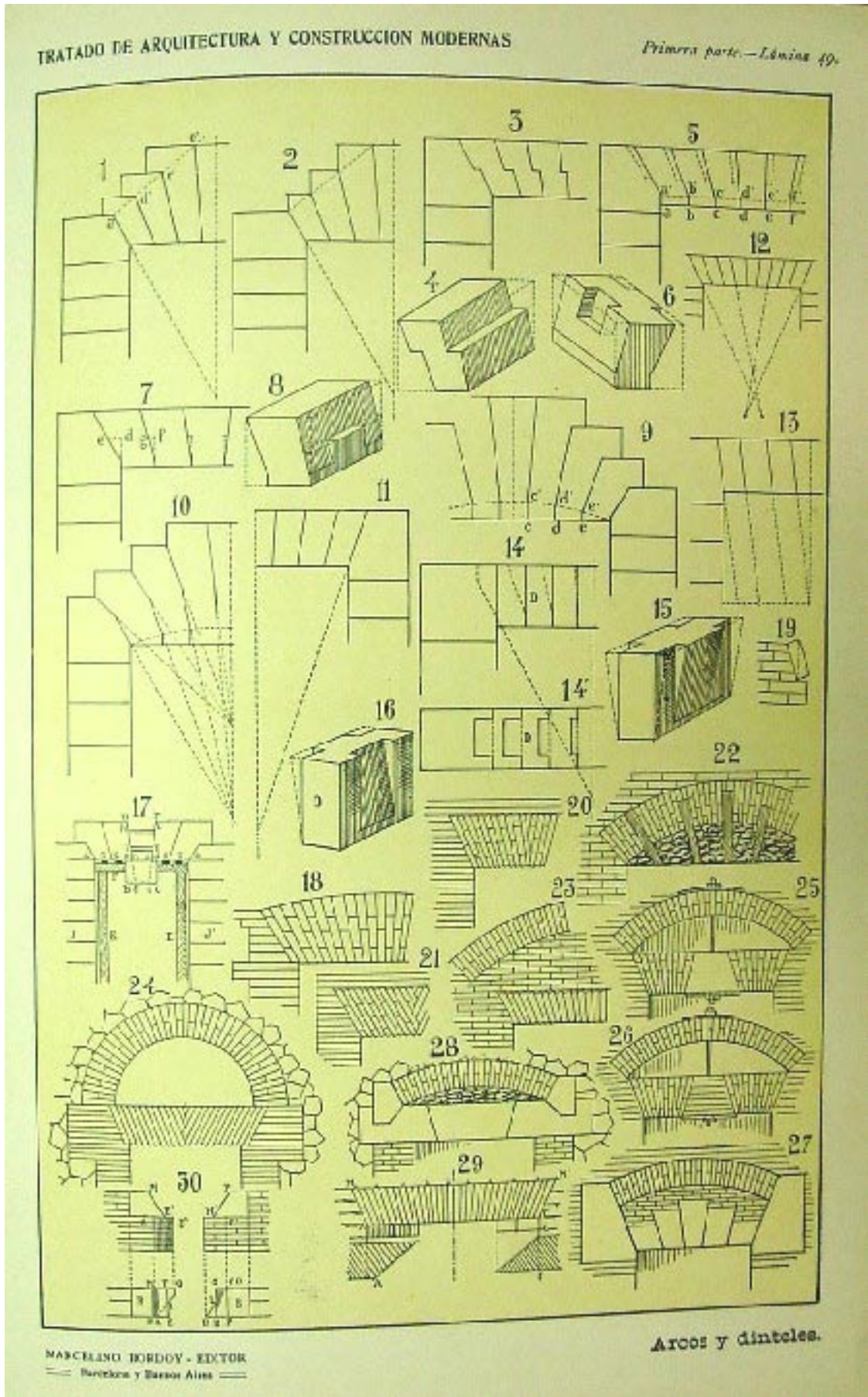
(...)

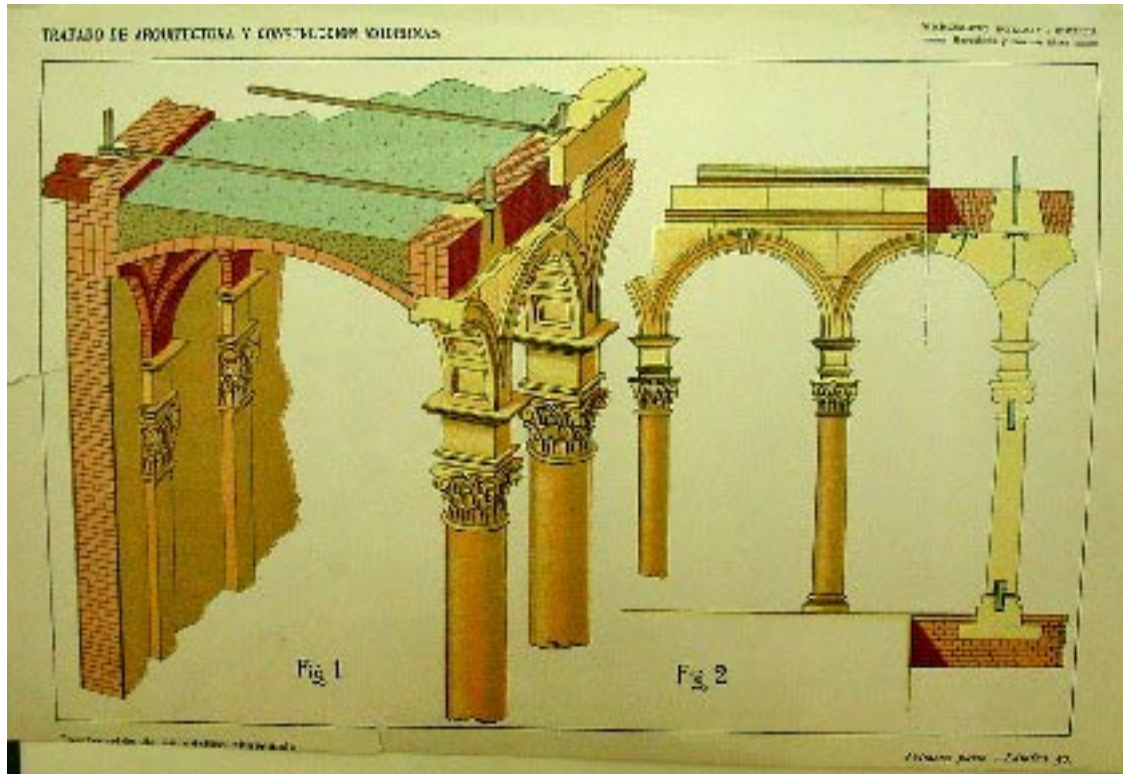
El genial arquitecte català don Antoni Gaudí, ha pogut, empleant aquest sistema, construir un edifici totalment equilibrat, la qual cosa hagués estat molt difícil, o casi impossible, empleant qualsevol altre procediment de càlcul.

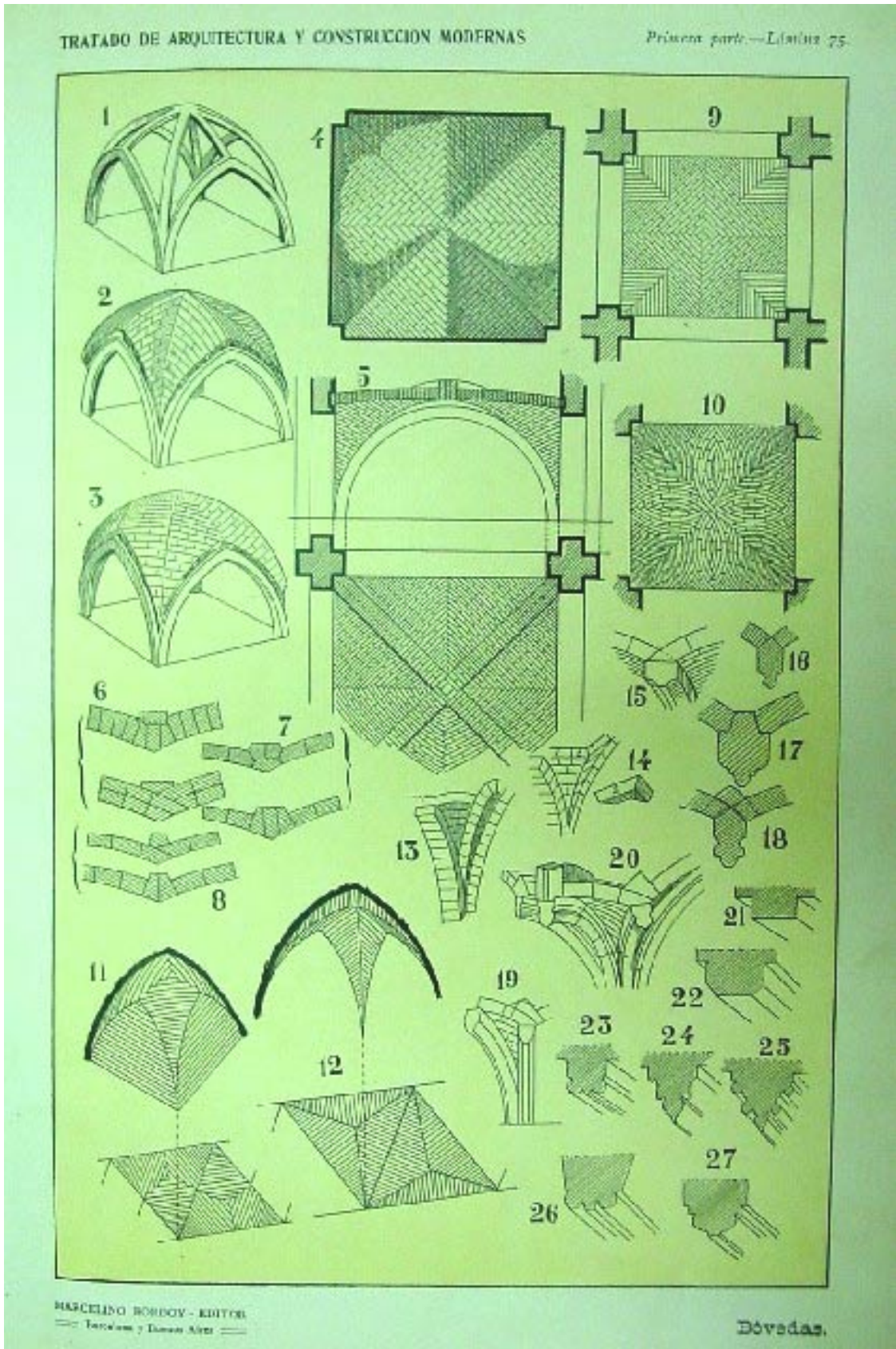


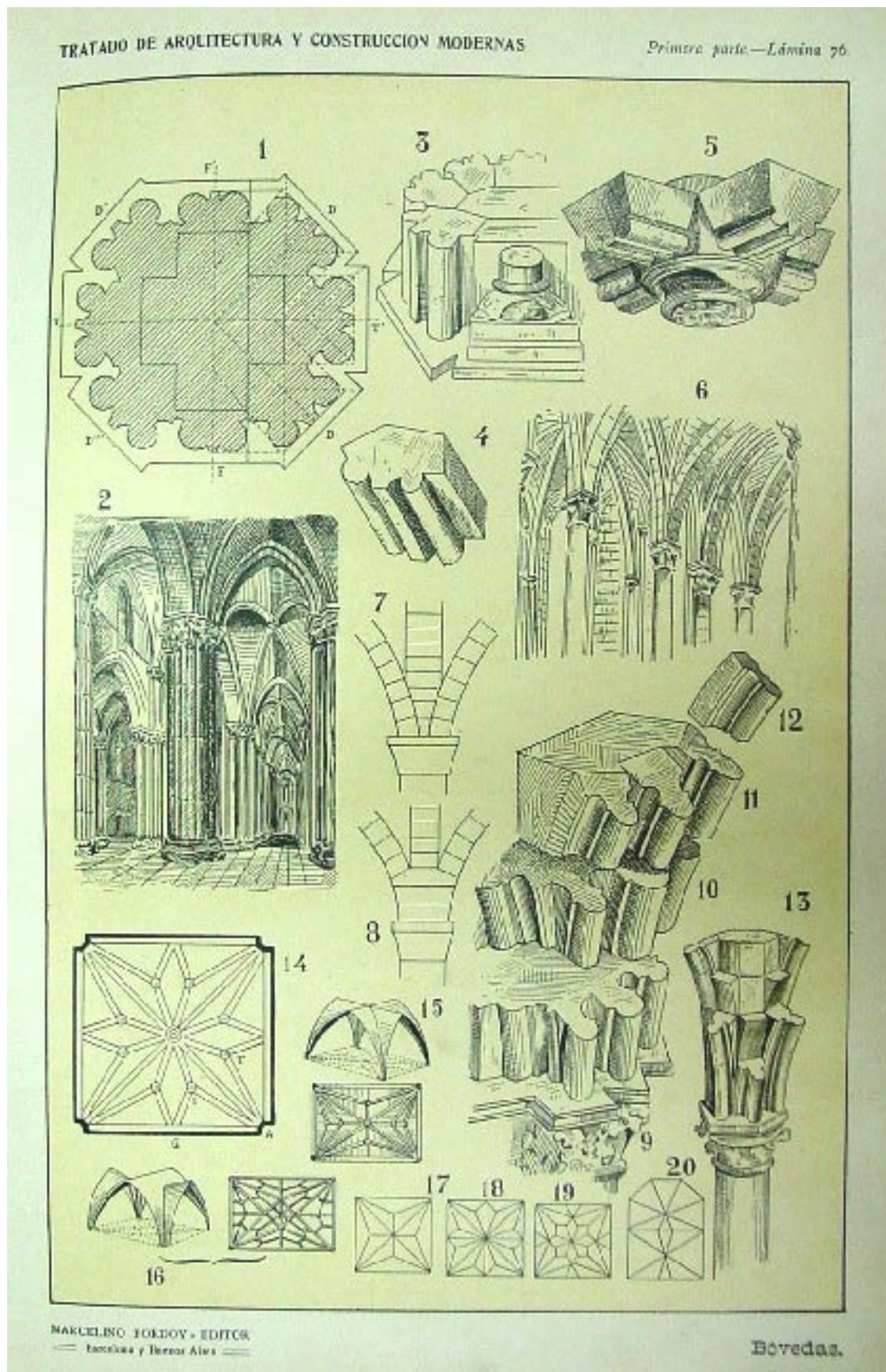


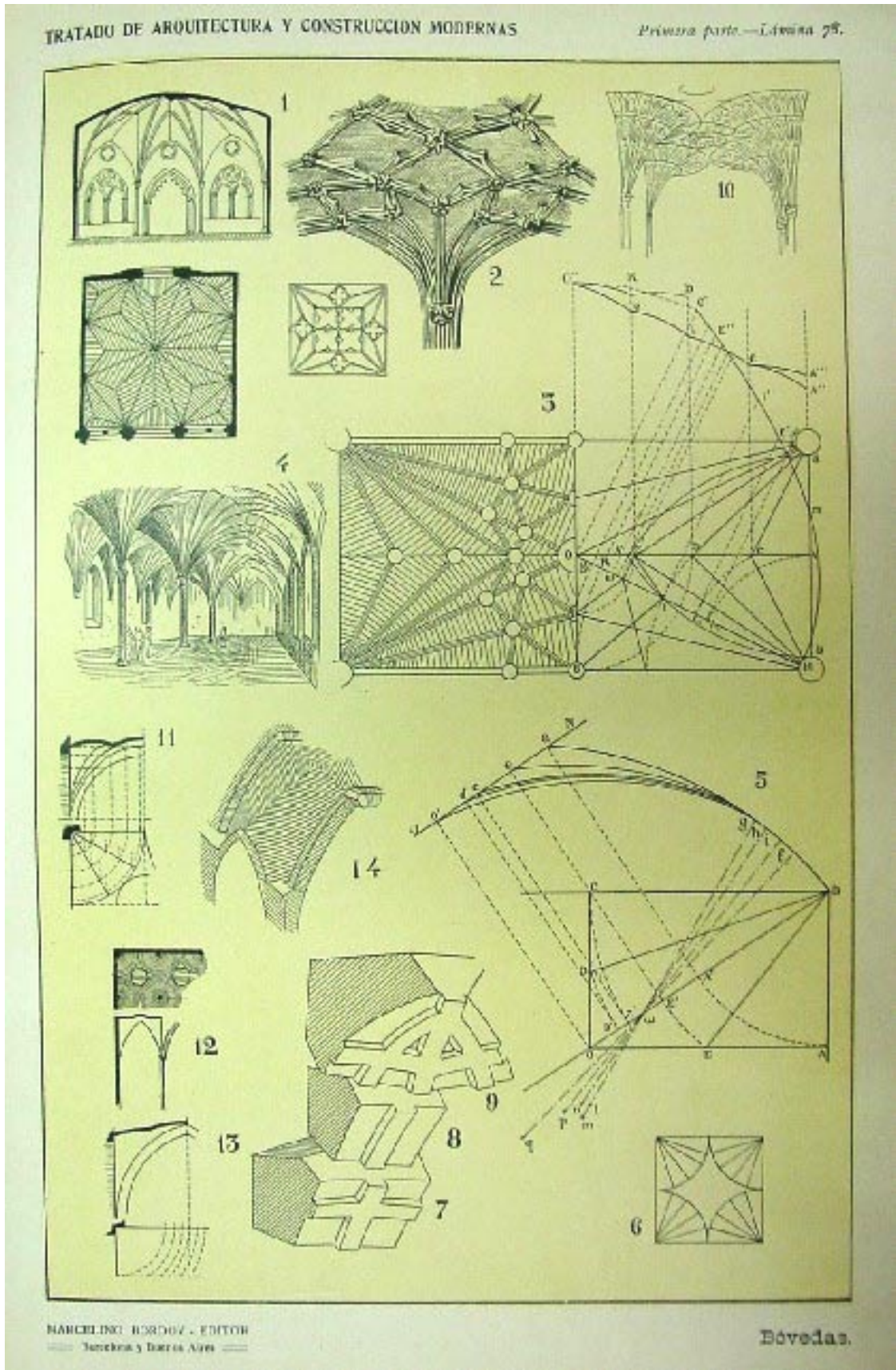


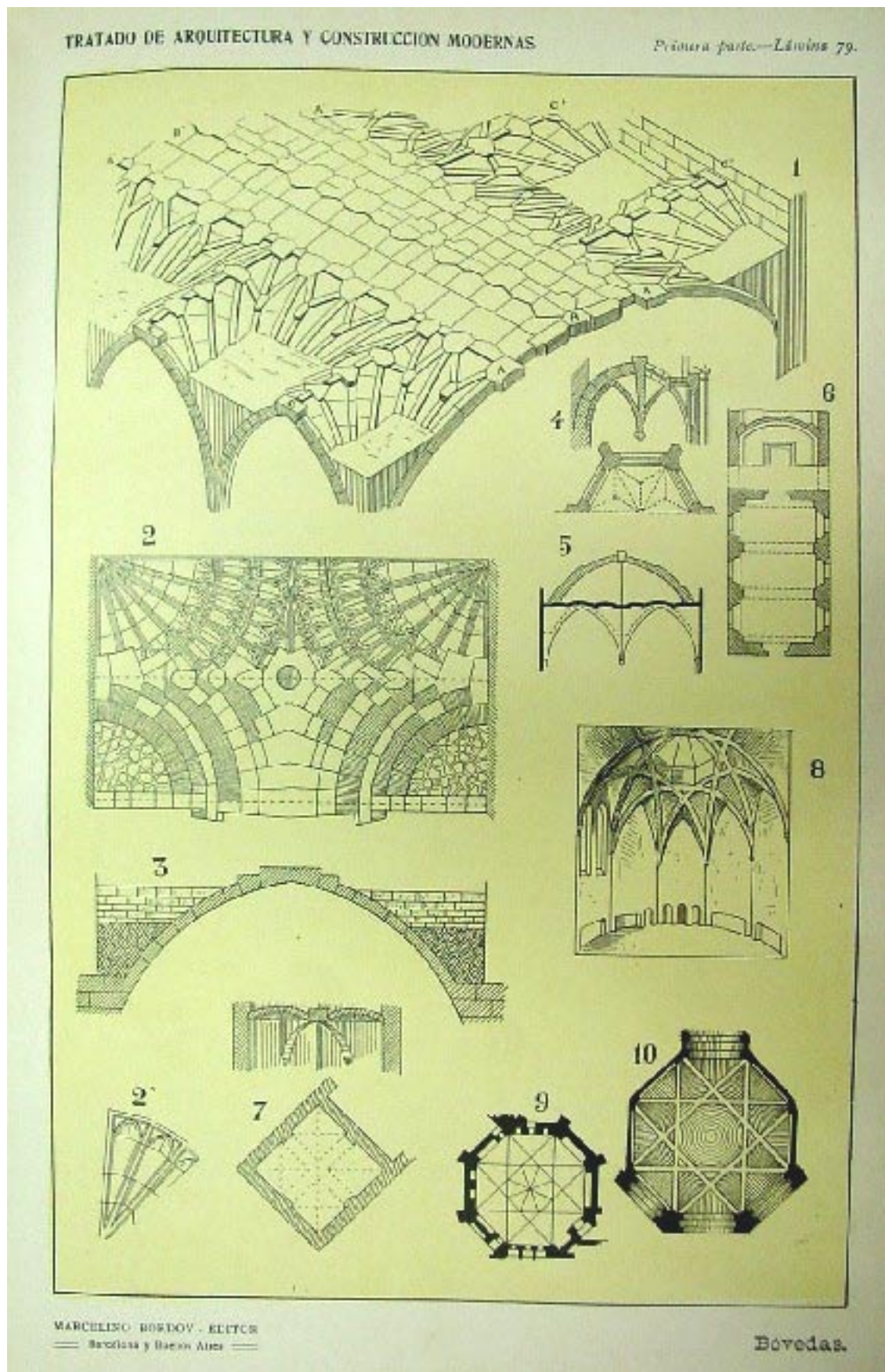


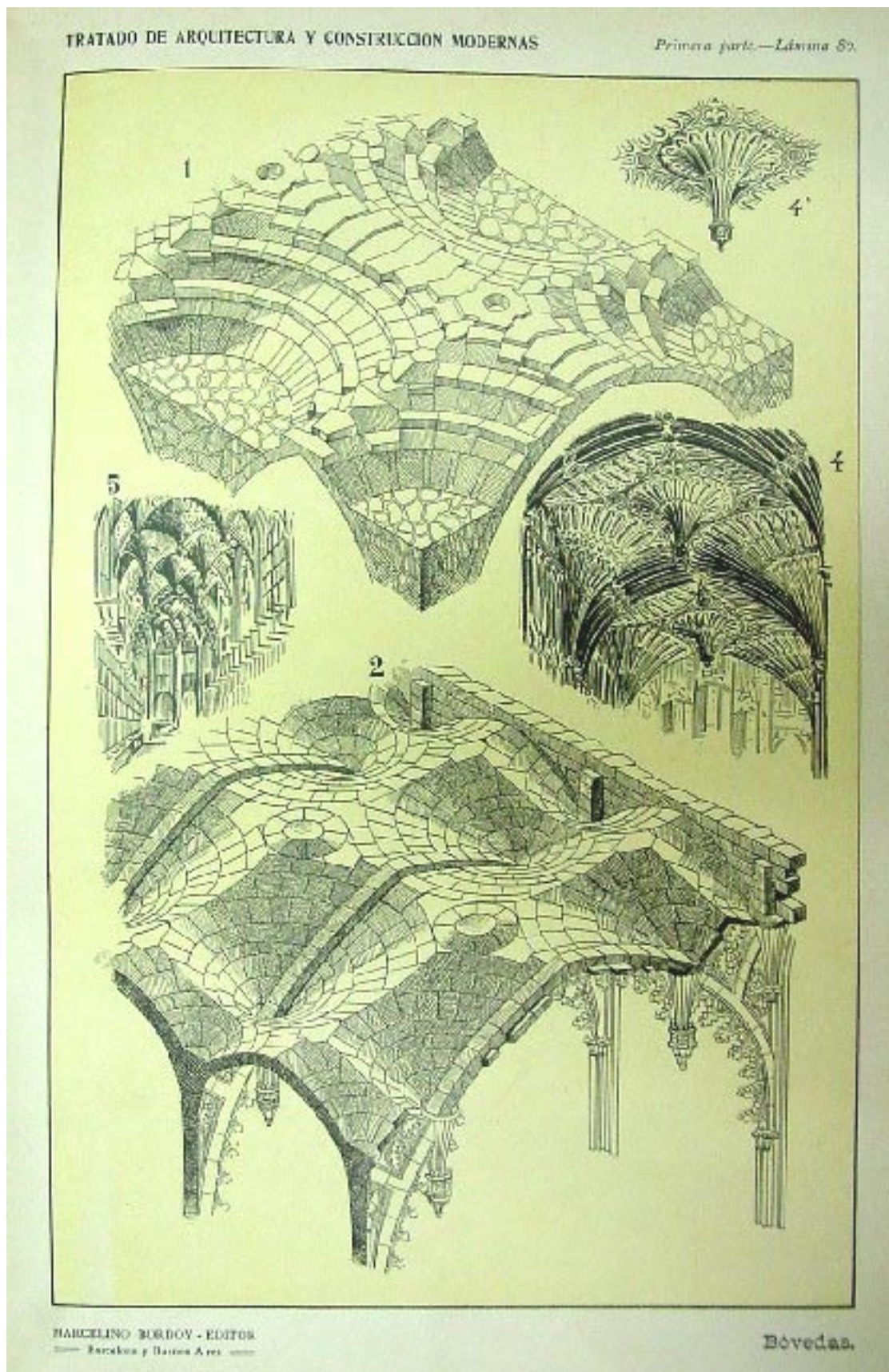


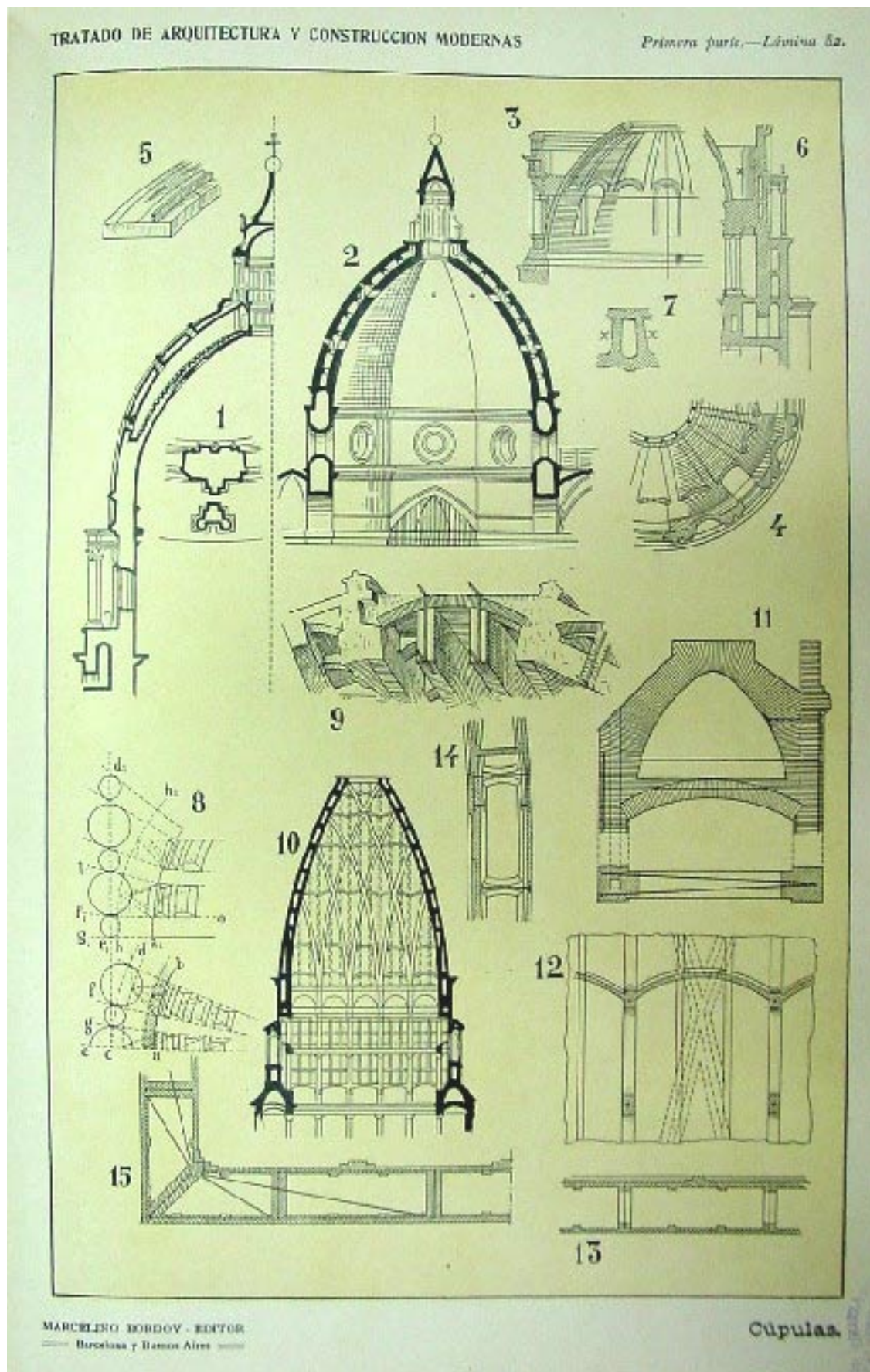


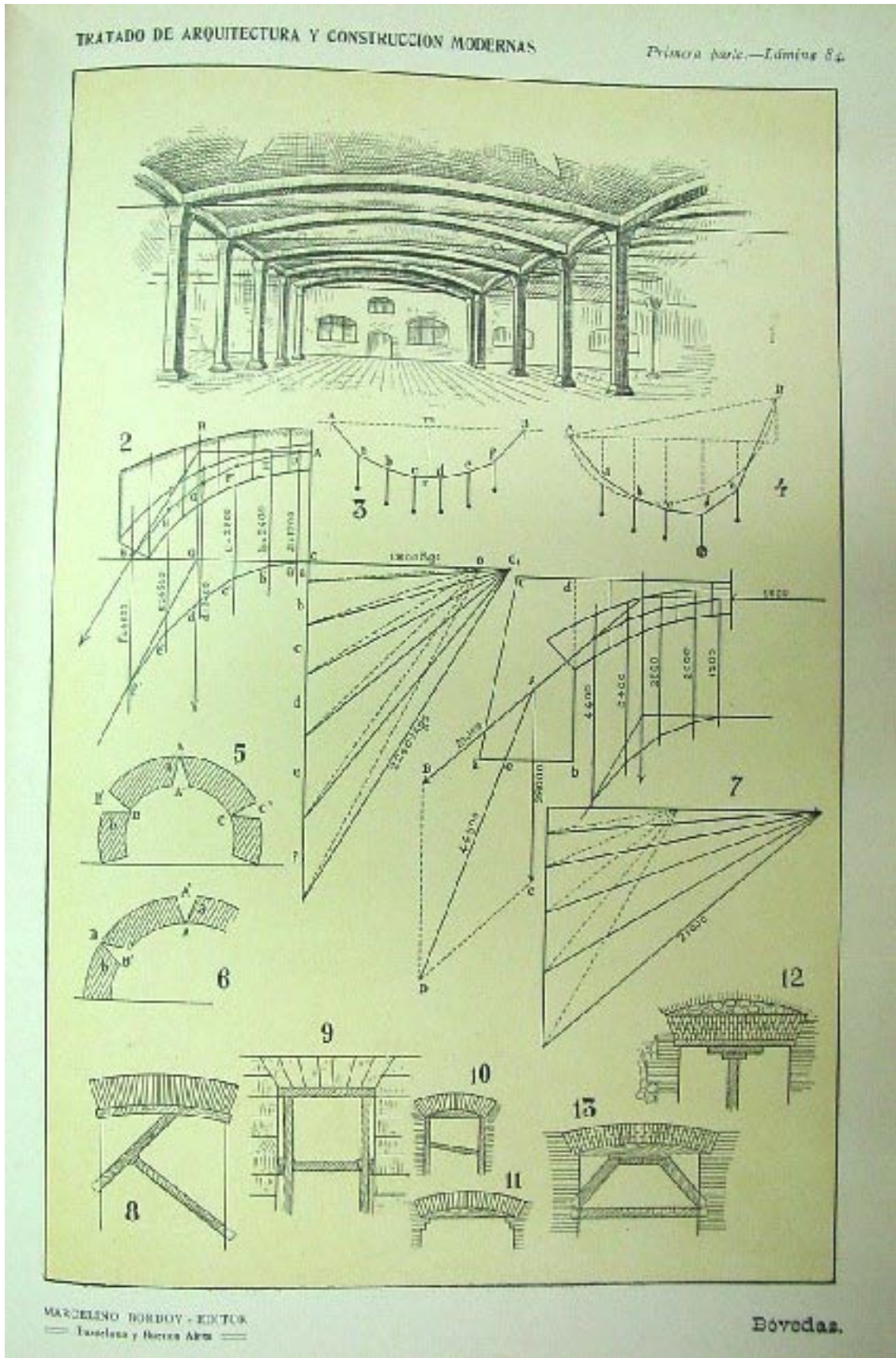


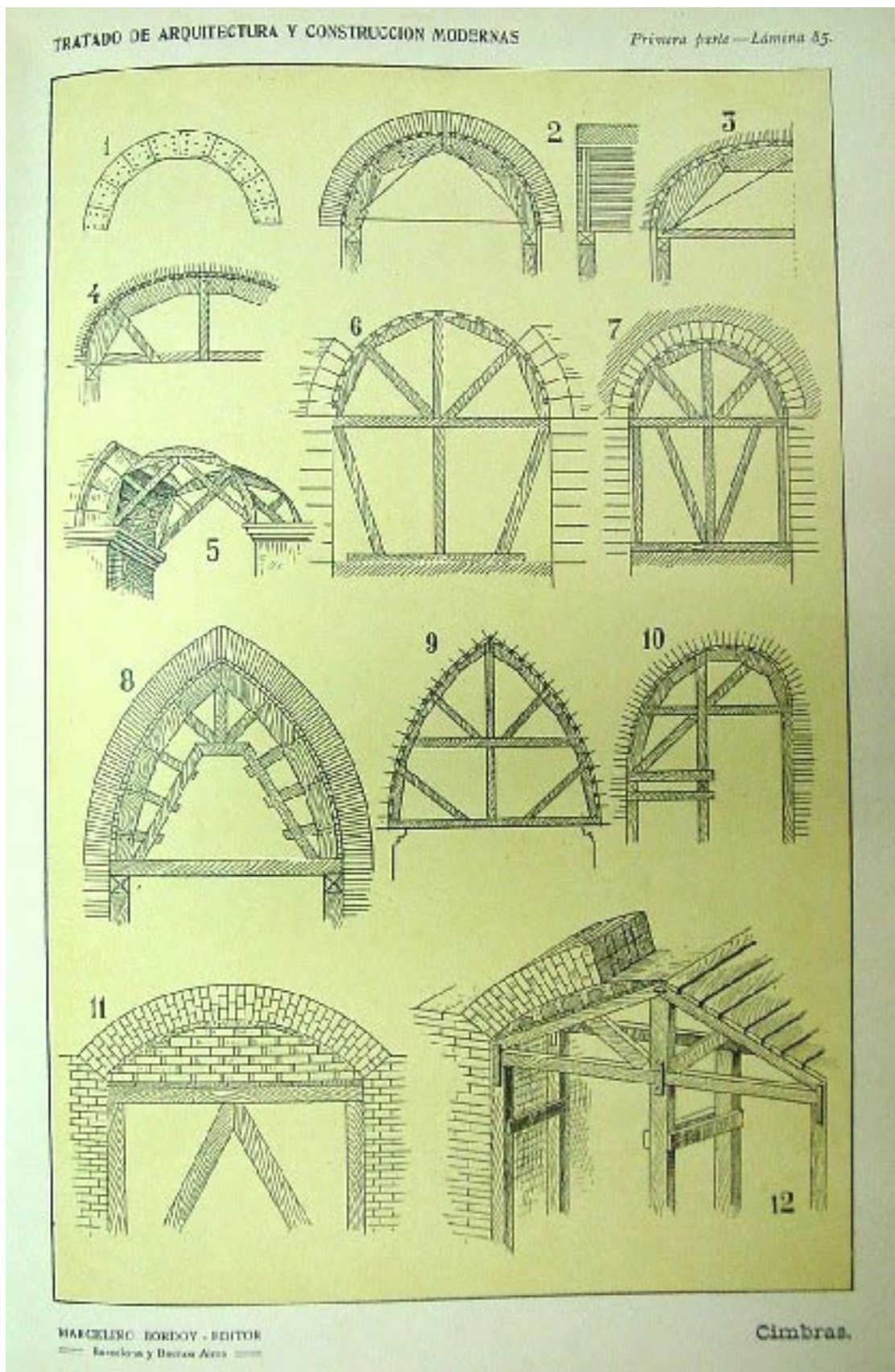


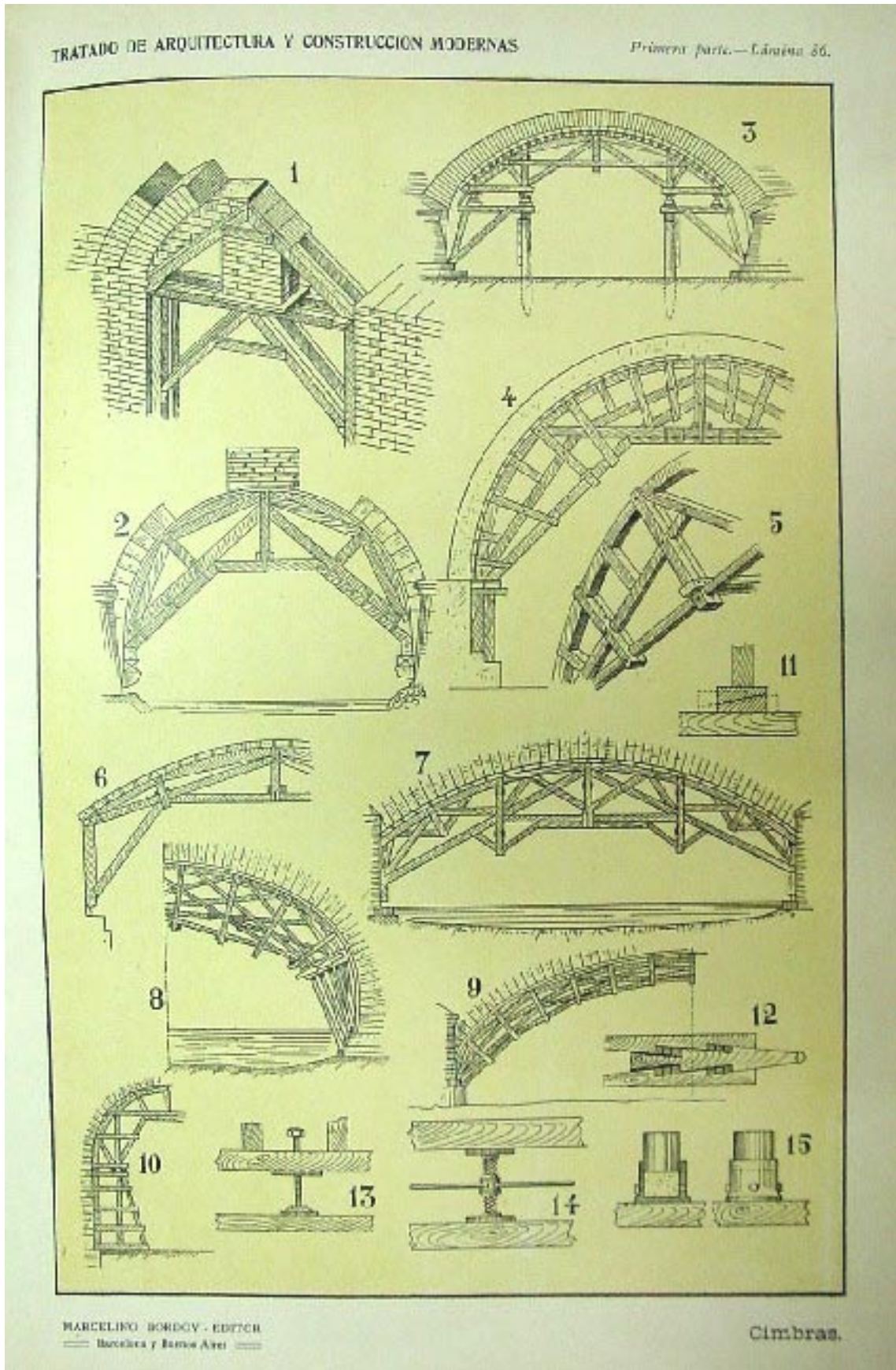


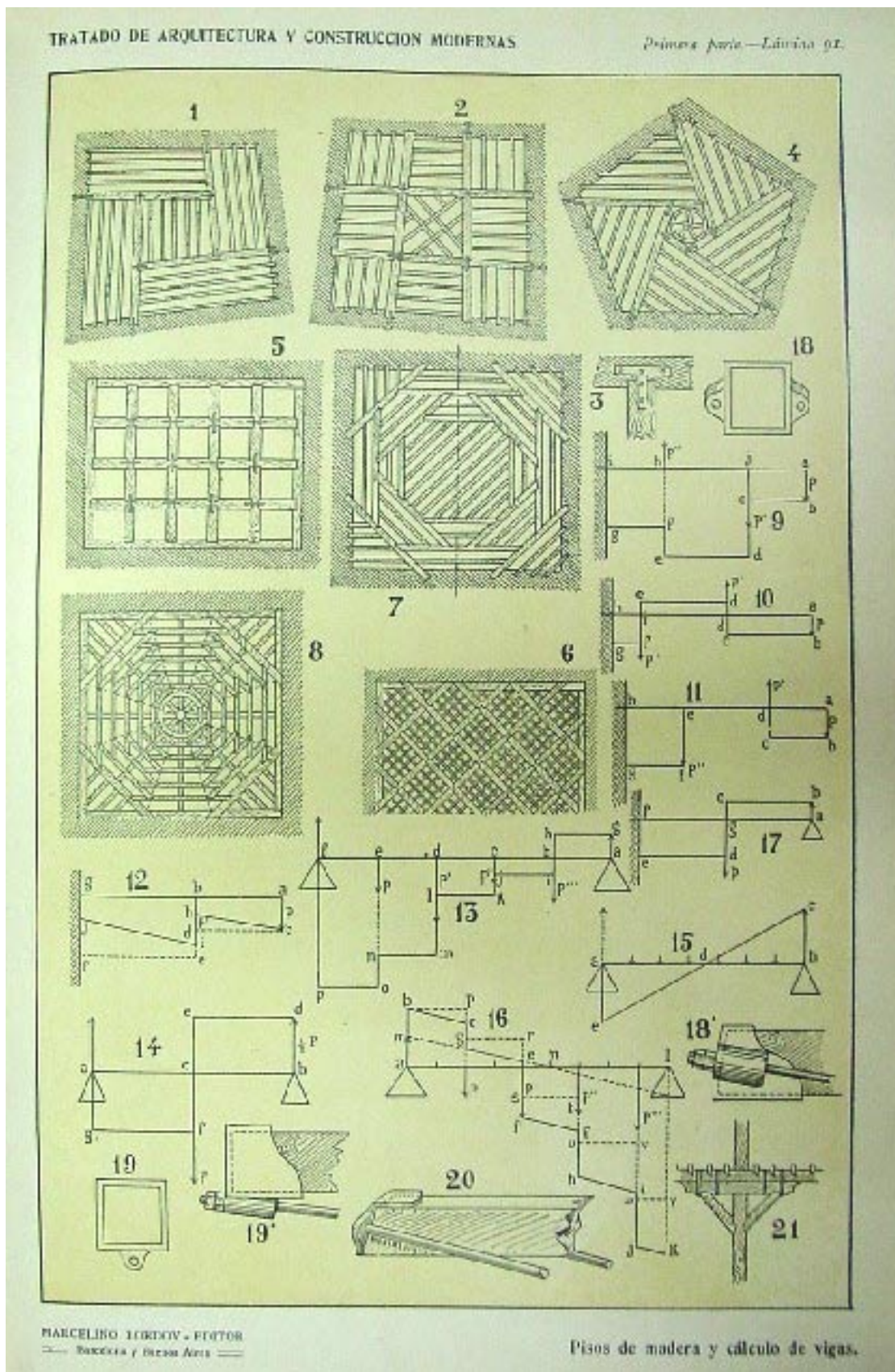


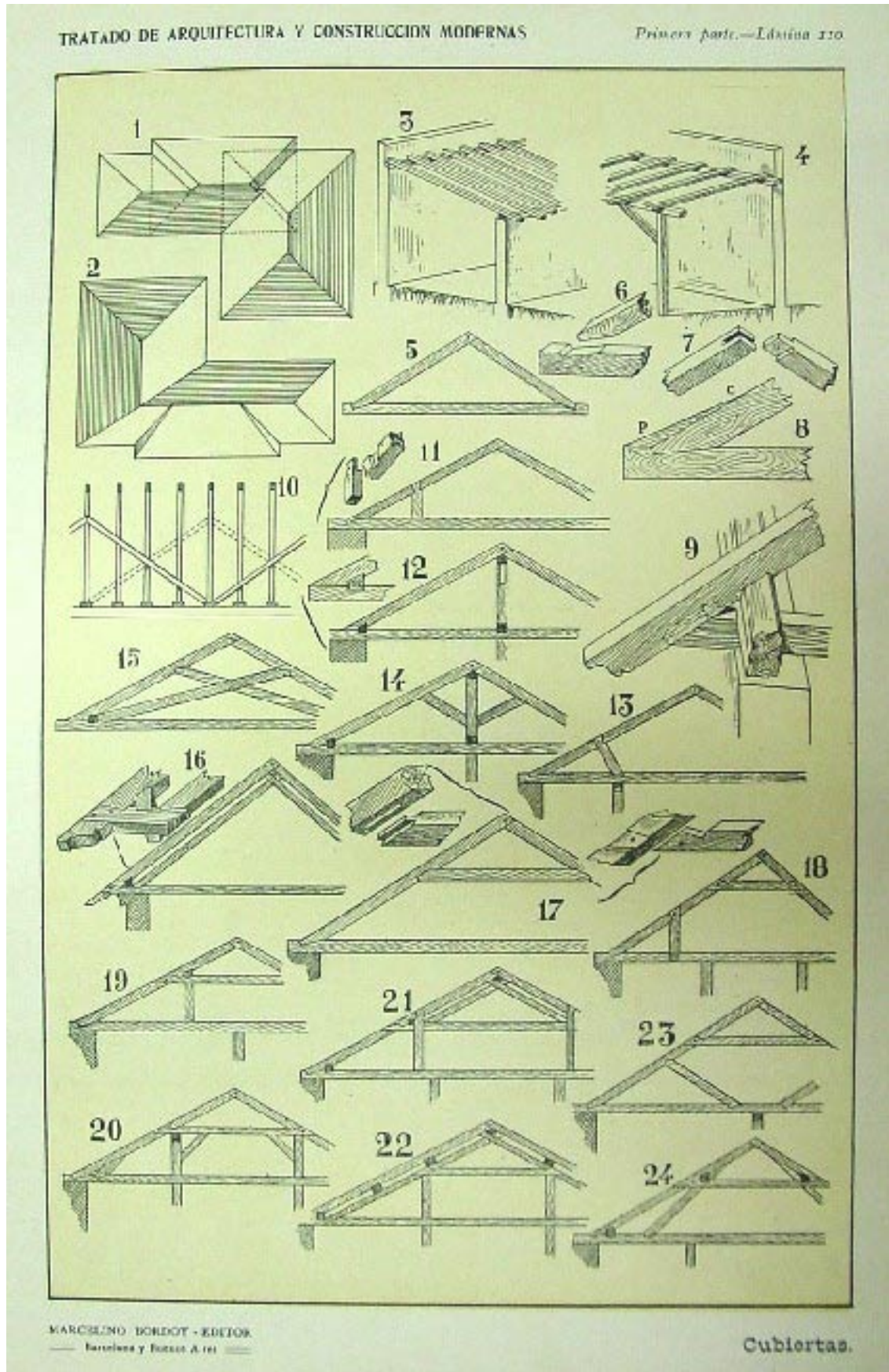


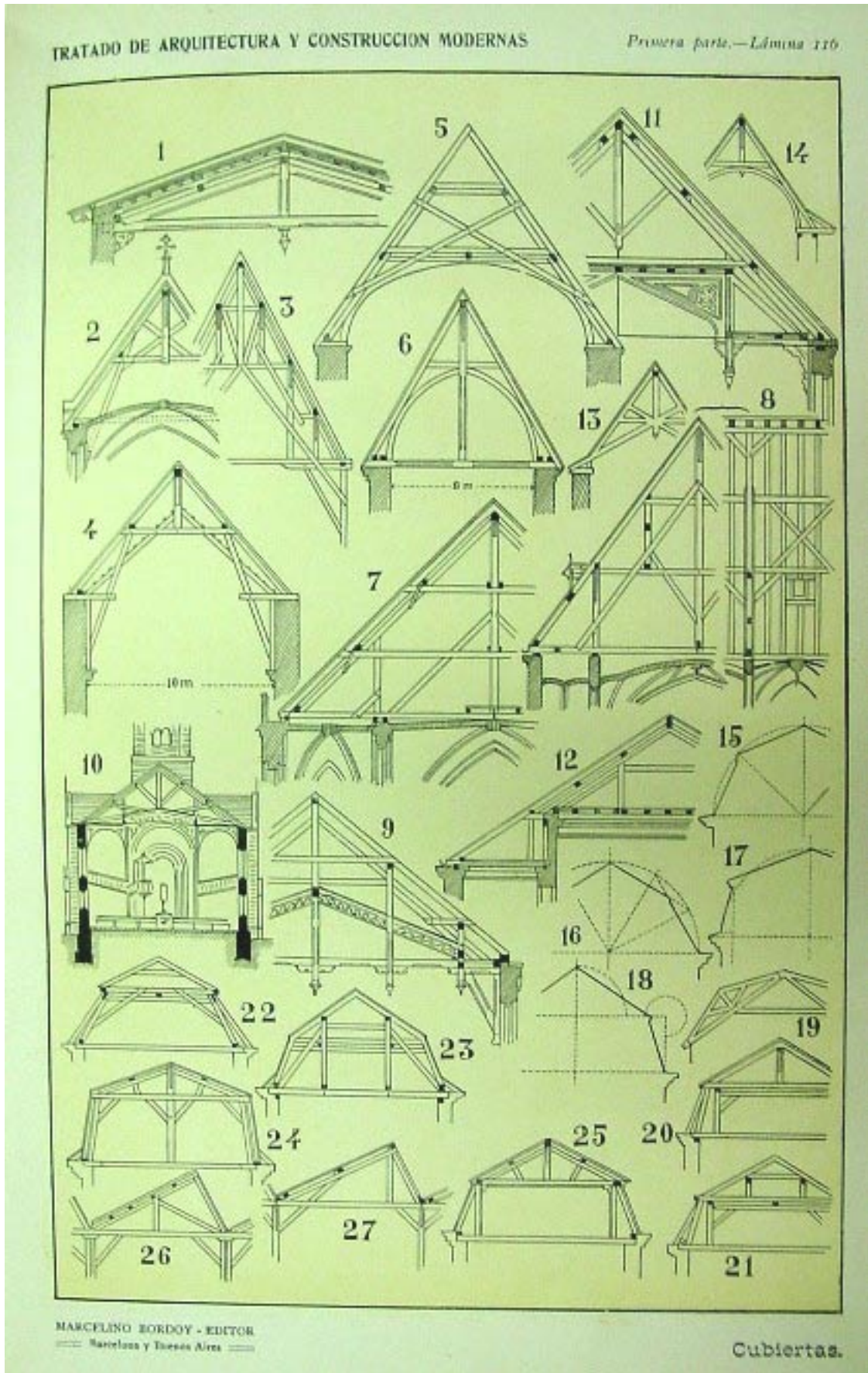


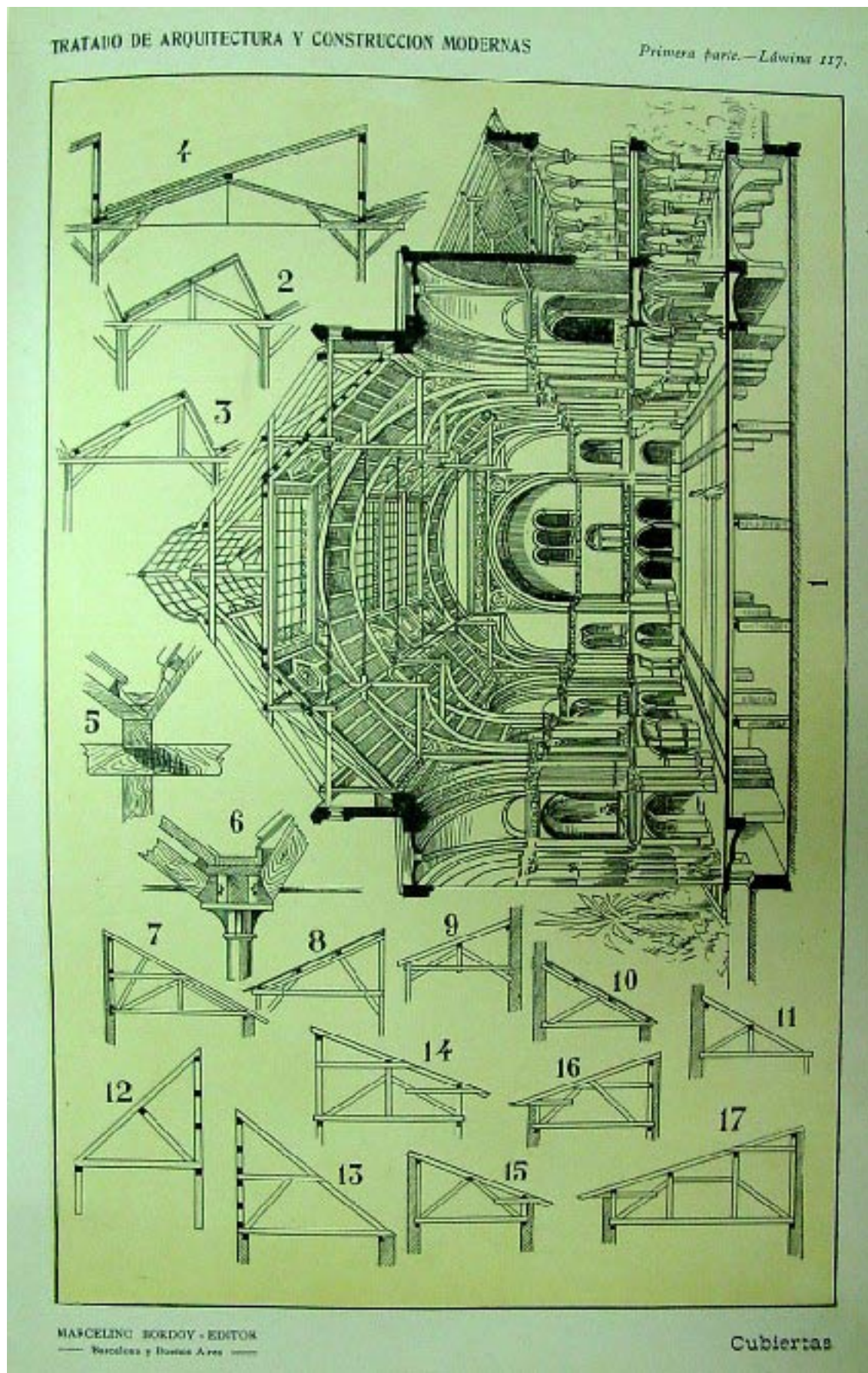


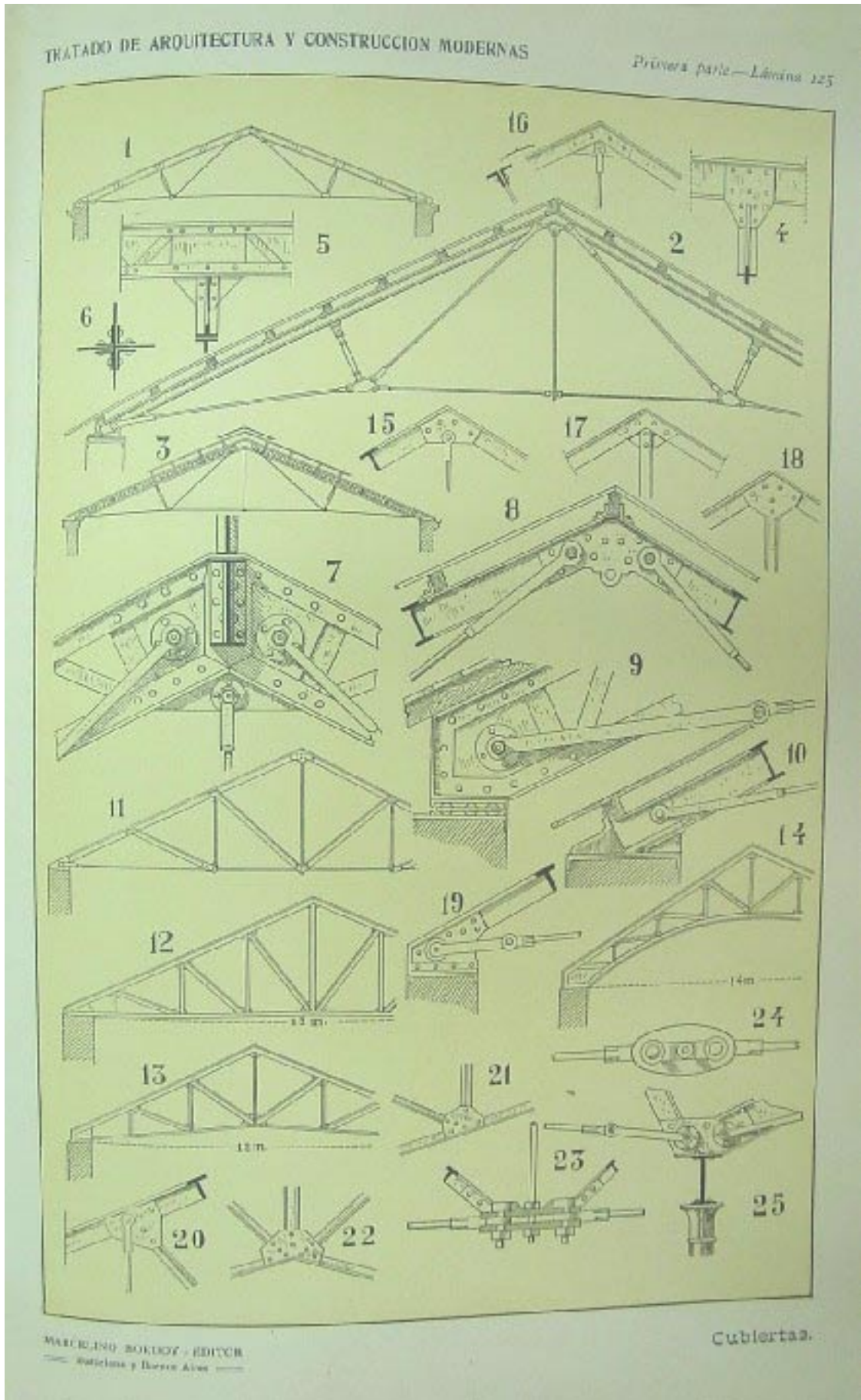


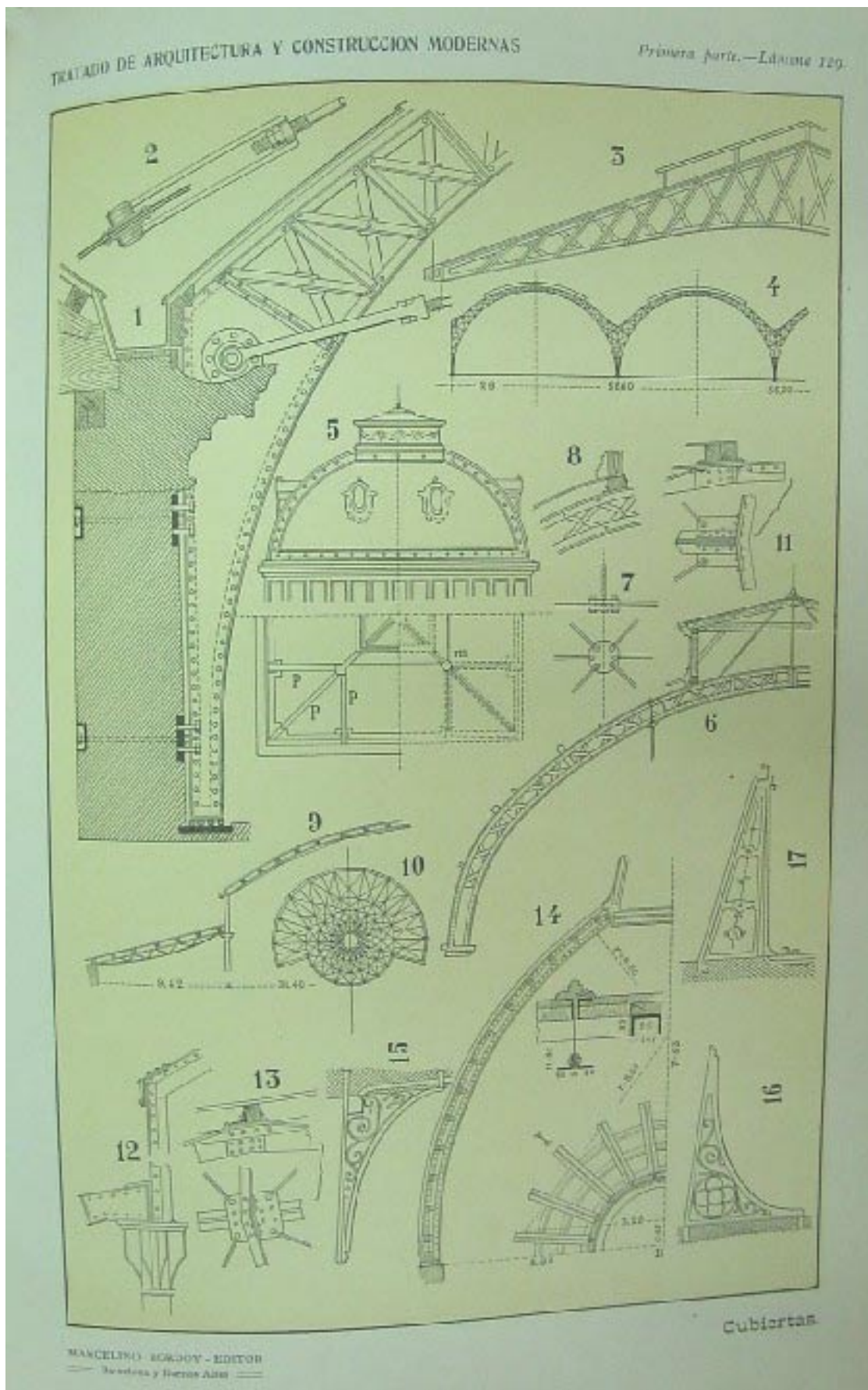


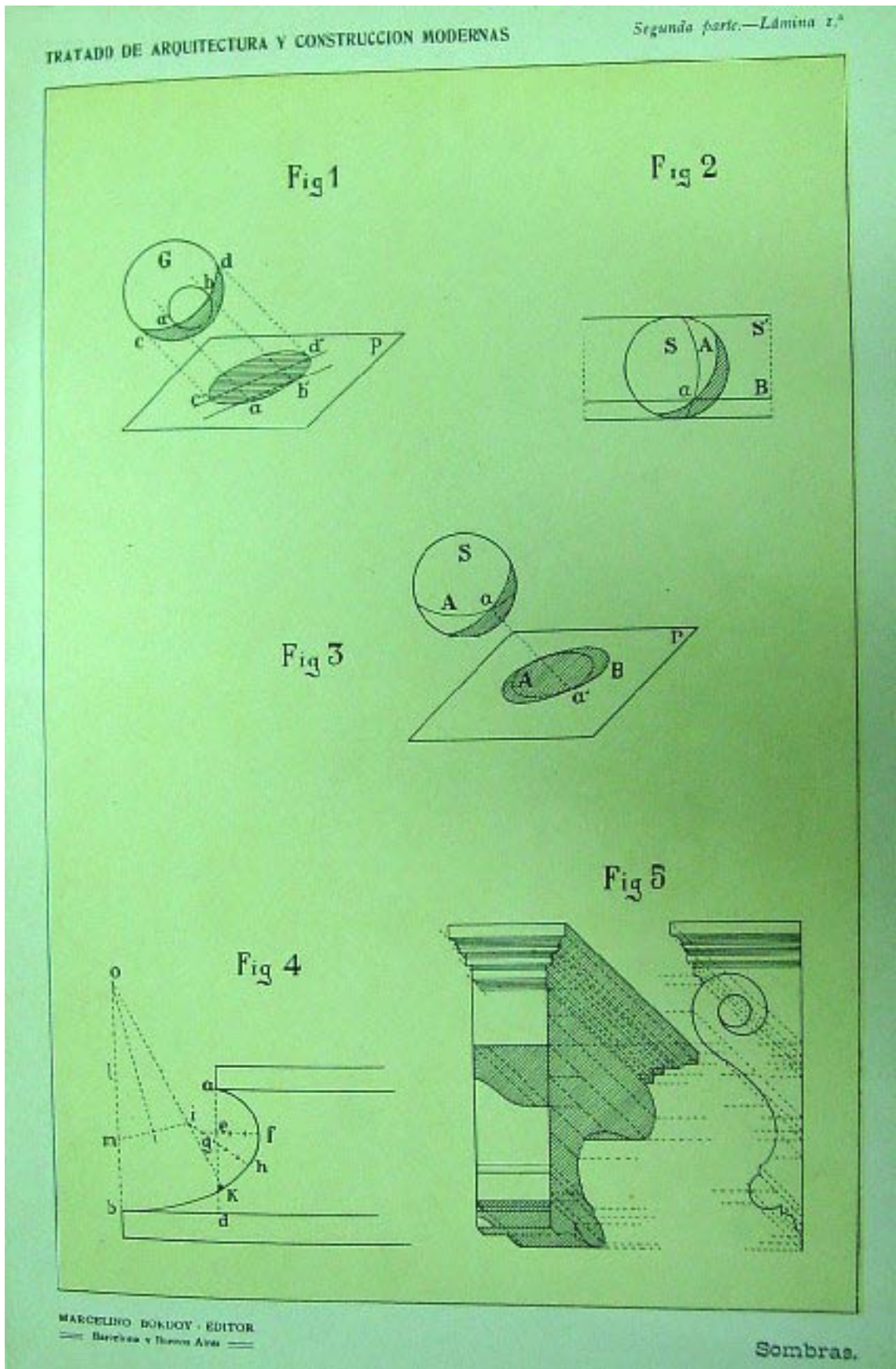


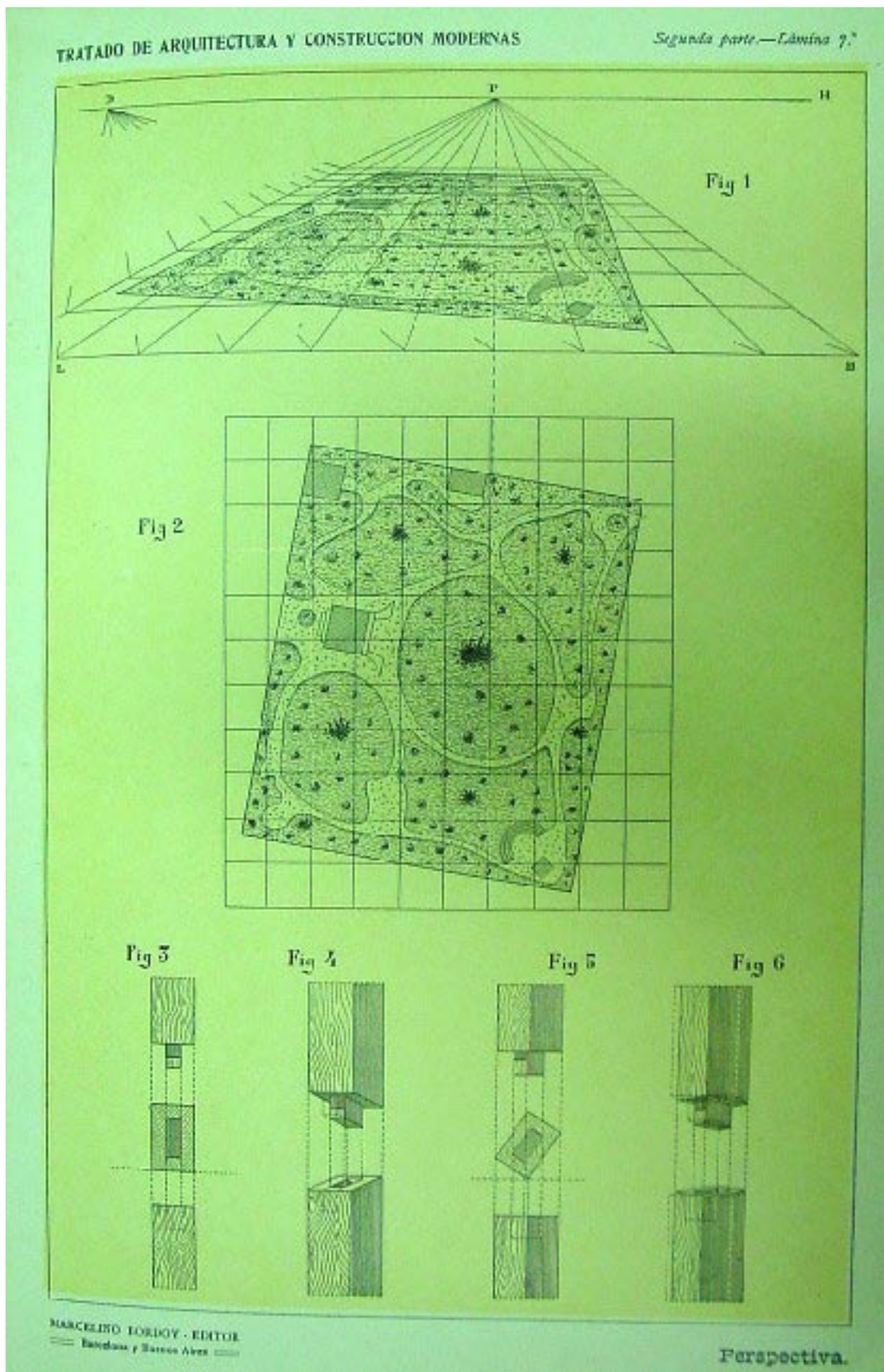












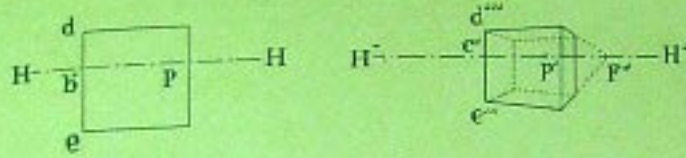


Fig 1

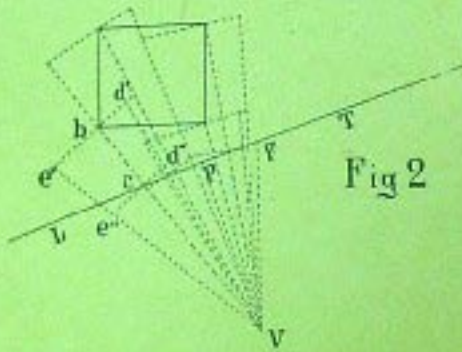


Fig 2

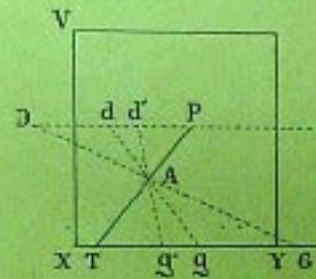
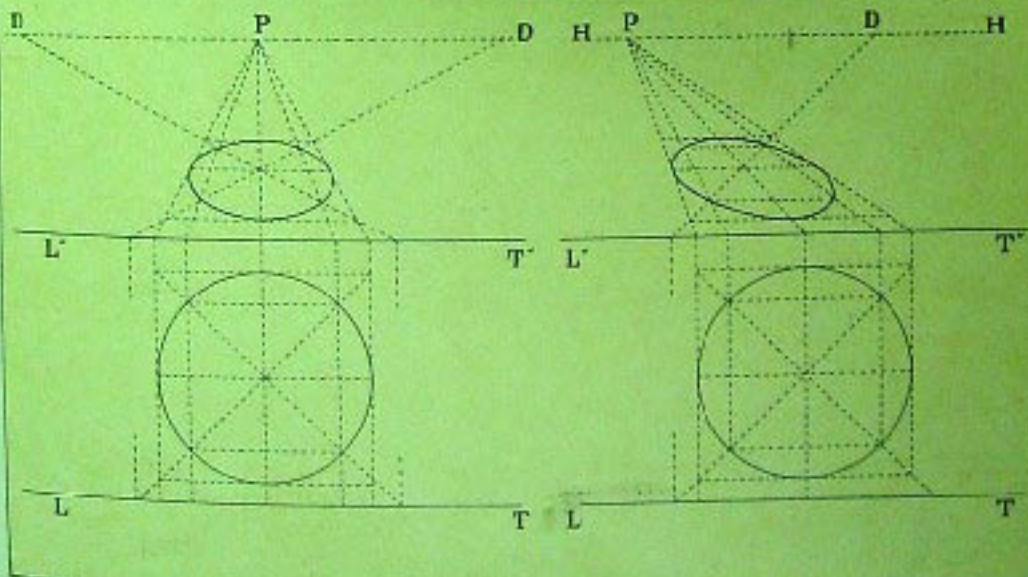


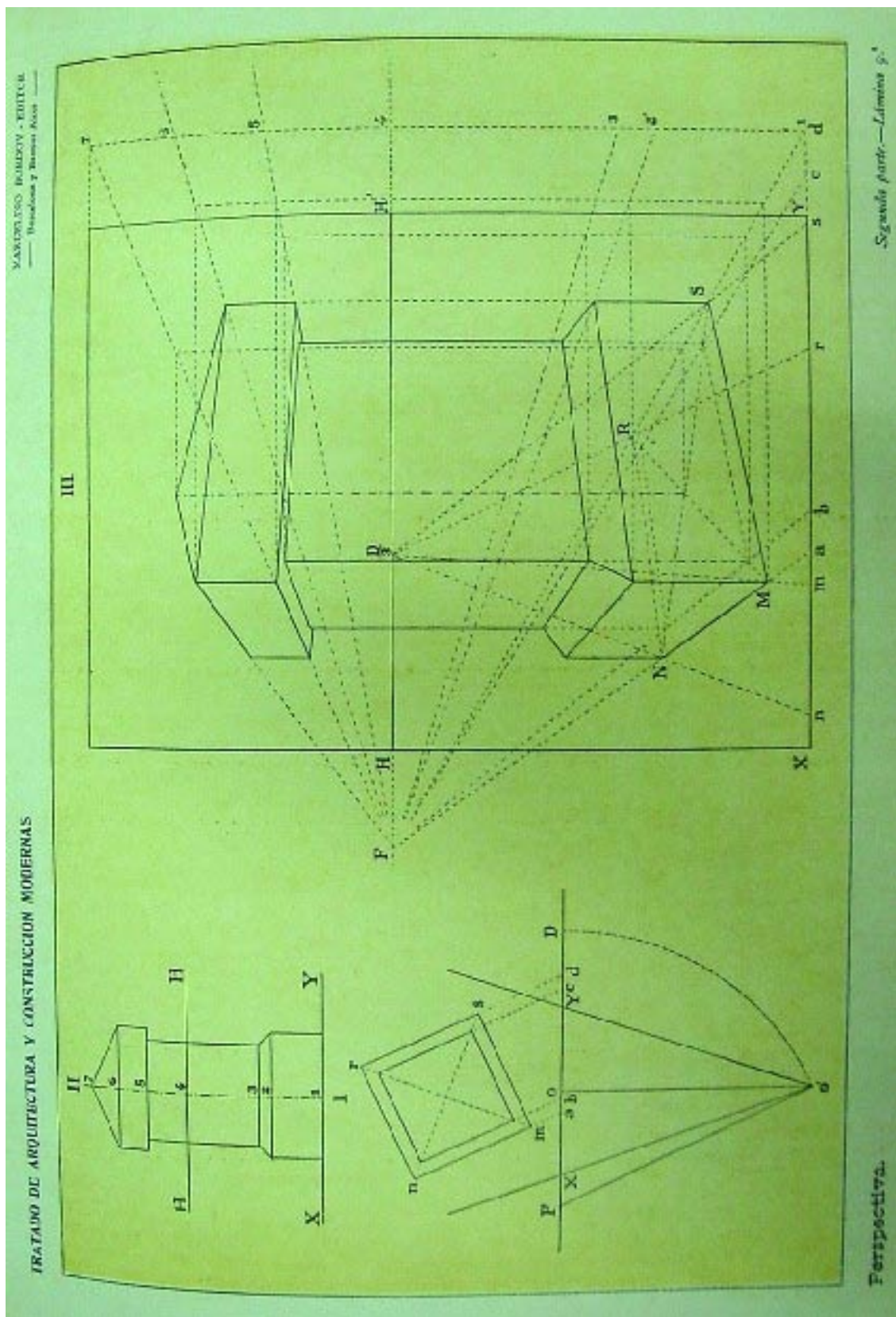
Fig 3

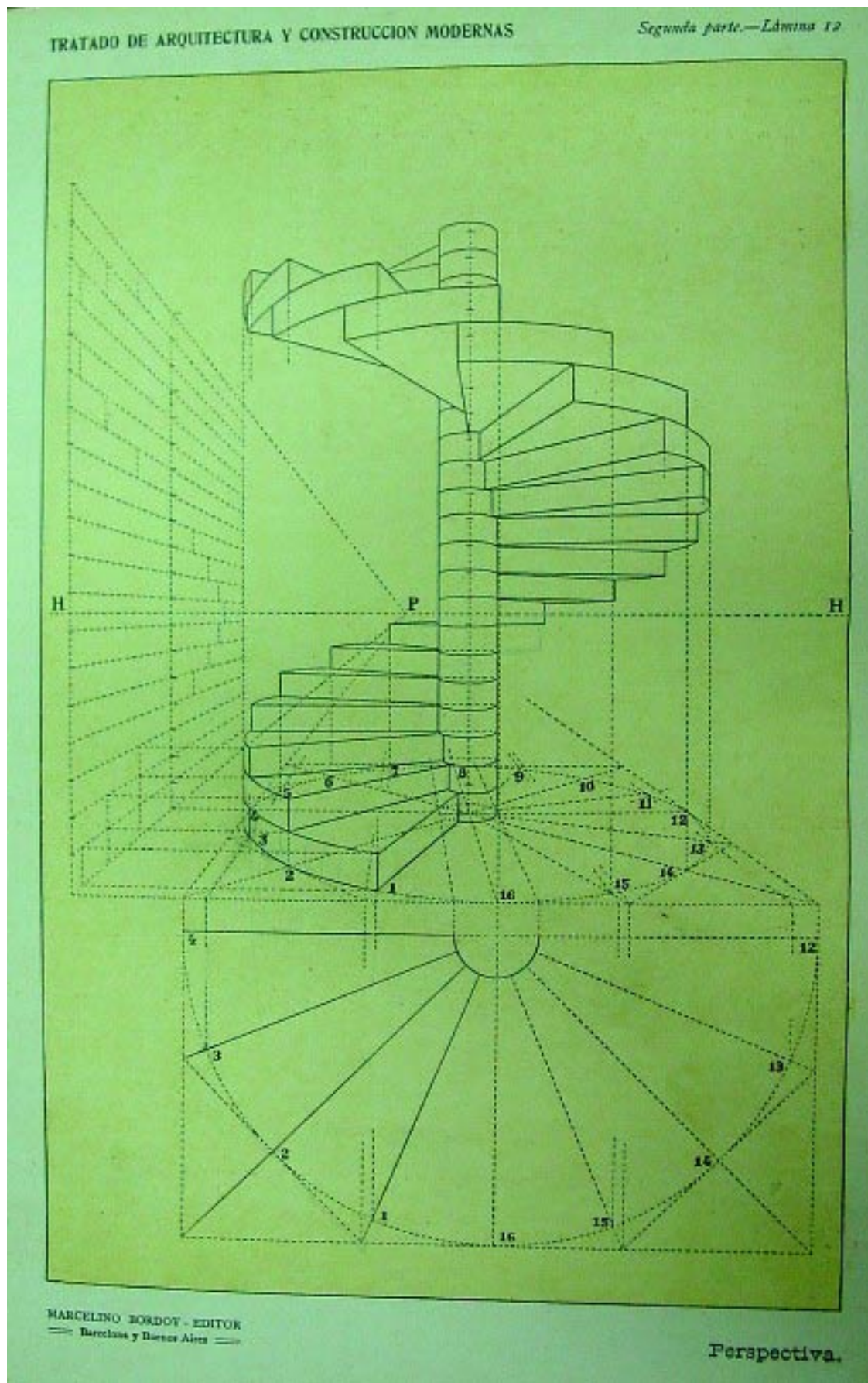
Fig 4

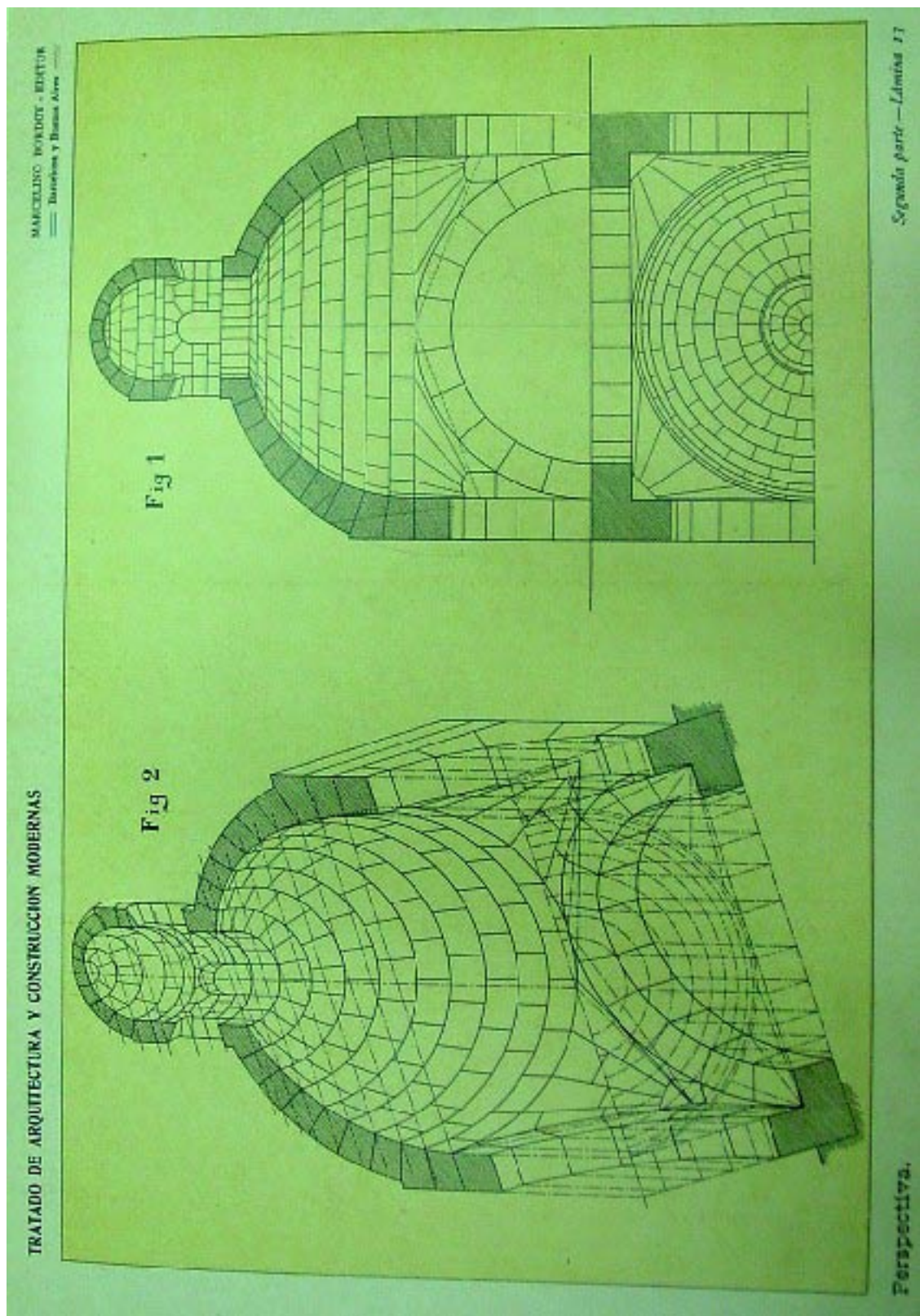


MARCELINO BORDOY - EDITOR
 — Escalas y Bases Años —

Perspectiva.

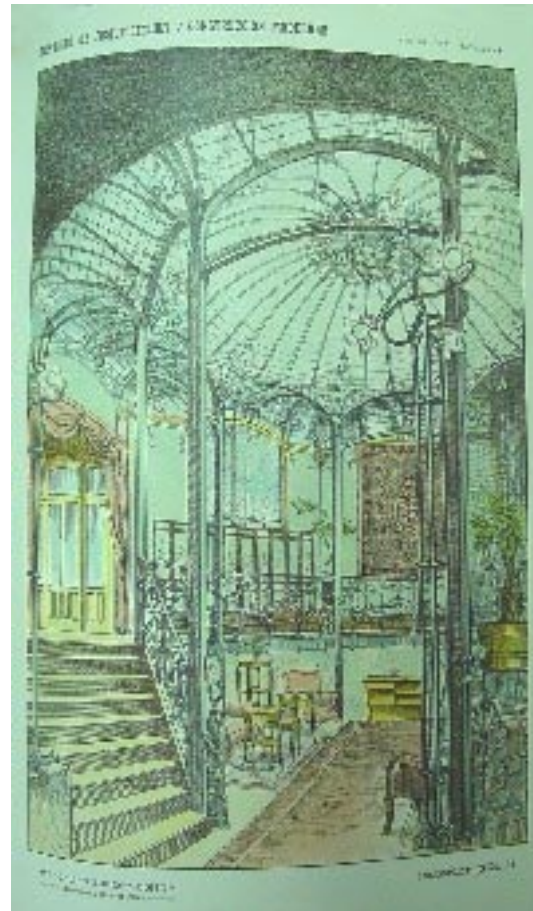
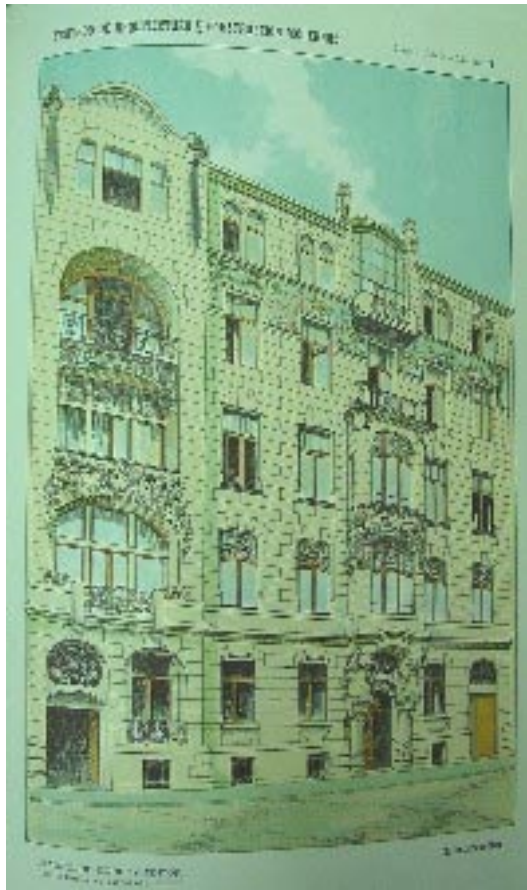












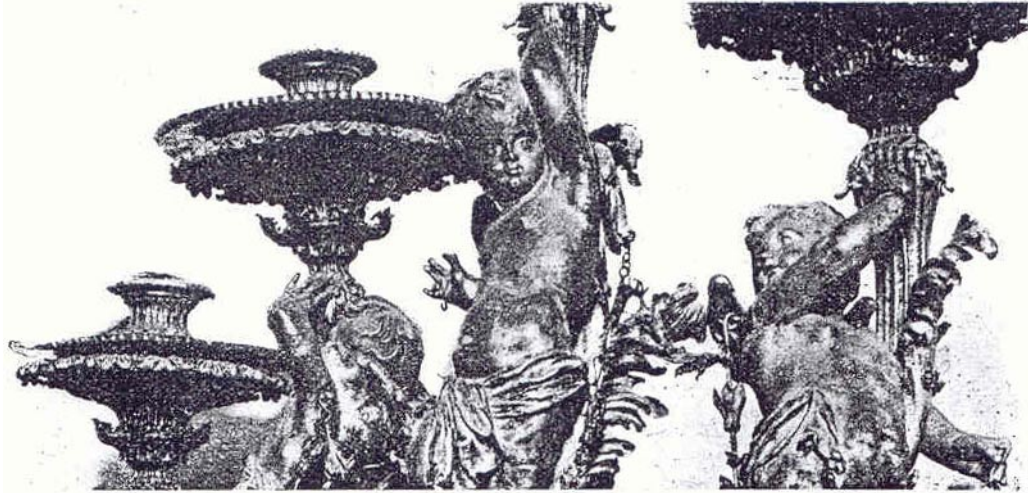
ANNEX 4

Conferències i altres temes diversos dels col·laboradors de Gaudí

- 4.1 Conferència de Rubió sobre la Catedral de Mallorca.
- 4.2 Conferència de Sugranyes sobre la Sagrada Família.
- 4.3 Comprovacions dimensionals dels cubicatges de Sugranyes.
- 4.4 Mètodes d'estàtica gràfica.

ANNEX 4.1

Conferencia de Rubió sobre la Catedral de Mallorca.



Conferencia acerca de los conceptos orgánicos, mecánicos y constructivos de la Catedral de Mallorca, dada con motivo de la excursión oficial de la asociación de Arquitectos de Cataluña, por Juan Rubió Bellver.

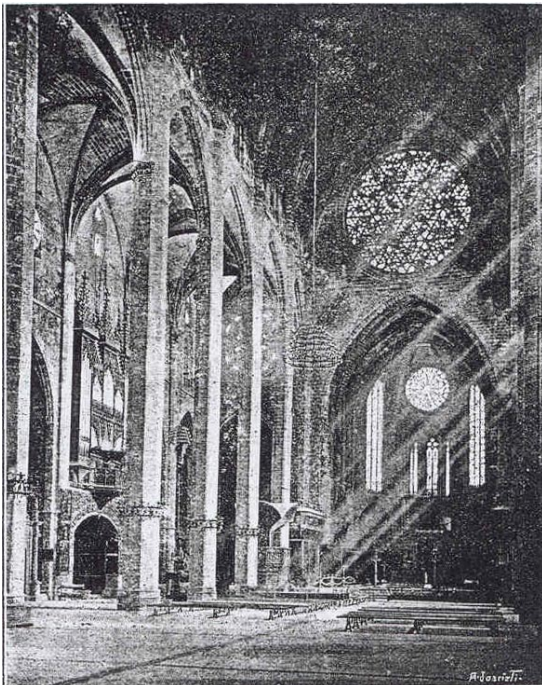


Fig. 5.- Vista interior de la Catedral de

fin y al cabo es lo único que me hizo aceptar la conferencia y ahora el escribir la presente disertación.

Honrado por la junta de la Asociación de Arquitectos de Cataluña para dar una explicación de la catedral Mallorquina, junto a la cual los quehaceres de la vida me han hecho pasar largas temporadas, he creído que sería quizás útil apartarme un poco del monumento, elevando el asunto, en todo aquello que fuera posible, a las regiones de la arquitectura gótica tomada en un concepto más general y trascendente. Porque, si las visitas a un monumento no han de servir para procurar ensanchar los horizontes del espíritu y extender la mirada hasta las más lejanas neblinas para aclarar las indecisas siluetas que ellas desdibujan y esfuman, tanto valiera no moverse de casa. Naturalmente que es esta una labor comprometida, y los que tenemos la vista corta nos exponemos a tomar la imagen por la realidad y equivocarnos en cosas tal vez fundamentales, pero cuando menos quedará siempre patente el esfuerzo realizado para complacer a mis compañeros, que al

VI

El equilibrio de la Catedral de Mallorca

El estudio del equilibrio de un organismo tan importante como la Catedral Mallorquina merece un poco de atención.

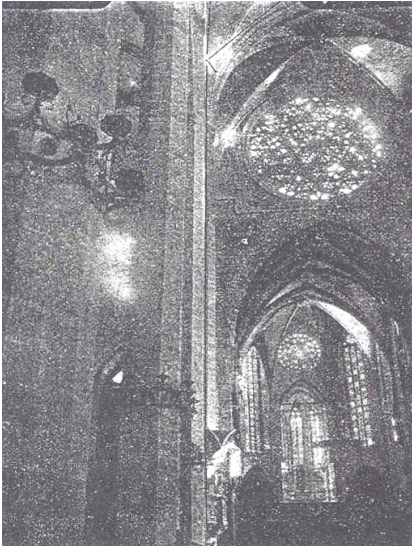
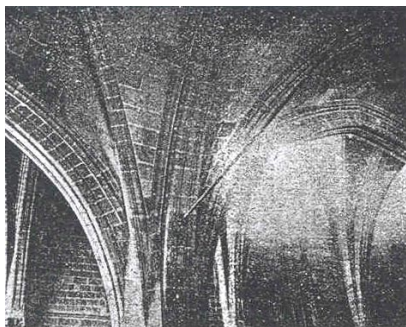


Fig. 12: Desplome de las columnas de la Catedral de Mallorca hacia la nave central.

Fig.15: Tirante de hierro para contrarrestar la expansión de la nave lateral cuando aun no está construida la nave central.



El sistema tantísimamente usado en las construcciones religiosas de la Edad Media, que consiste en una nave mayor flanqueada por dos naves laterales menores y más bajas, no es tan fácil de estudiar como a primera vista pudiera parecer. En general, creo poder afirmar que si a cualquiera de nosotros se le pregunta cuales son las condiciones de equilibrio en virtud de las que se sostiene una catedral de tres naves semejante a la de Mallorca todos responderíamos que las expansiones de la nave mayor contrarrestadas por la nave lateral y por los arcos botareles superiores hacen que su resultante sea vertical y pase por la columna y por lo tanto el equilibrio queda asegurado. Este concepto que tantas veces se ha repetido y escrito y en las cátedras se ha enseñado, no es más que una parte de la verdad.

En muchas de las catedrales y en la de Mallorca así se verifica, para hacer su cálculo, es preciso suponer que las columnas se han desequilibrado, perdiendo la verticalidad y entonces las cargas que por intermedio del sistema de arcos formeros gravan las columnas ya no lo hacen directamente,

sino que cargan sobre la curva de presiones, ya de la nave mayor, ya de la nave menor. Si suponemos que la columna ha perdido la verticalidad, necesariamente ha de aumentar de altura y apoyarse, en cierto modo, por las aristas (valga la expresión, inexacta, pero sin duda inteligible), y por lo tanto las cargas muertas superiores que pesan sobre la columna, en la vertical del centro de gravedad de su base, dejan ya de hacerlo así y cargan sobre una de las dos aristas inferiores, según sea la dirección del desplome. Entonces todo el peso muerto se convierte en peso vivo carga sobre el vacío y modifica la curva de presiones.

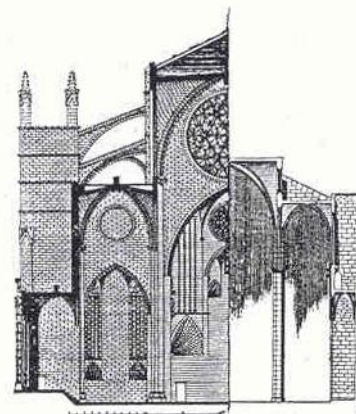


Fig. 16.- Mallorca y Santa María del Mar de Barcelona.

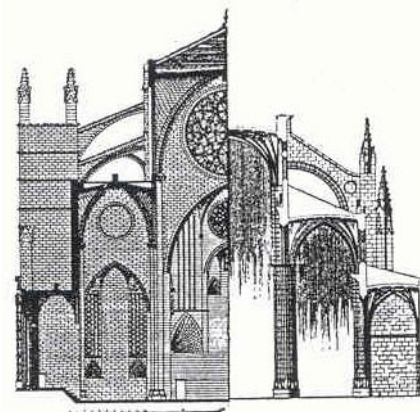


Fig. 17.- Mallorca y Salamanca.

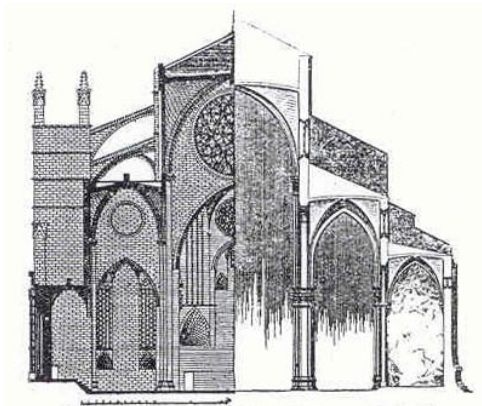


Fig. 18: Mallorca y S. Petronio de Bolonia.

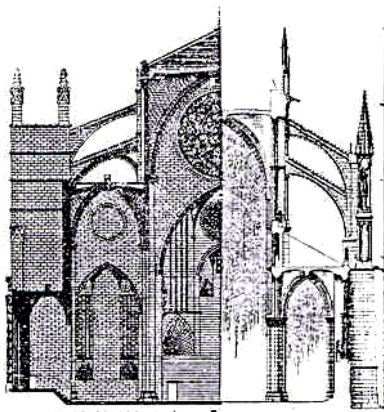


Fig. 19: Mallorca y Reims.

Si no se calcula así y se supone que la columna queda rígidamente vertical y se pretender trazar las curvas de presiones de la Catedral Mallorquina uno queda asustado al darse cuenta de que no hay manera posible de lograr que la resultante pase, no ya por el eje de la columna, sino ni tan siquiera por dentro de ella. ¡La Catedral de Mallorca no debería sostenerse! Más como hace varios siglos que se aguanta con solemne majestad, no queda otro remedio que rendirse a la evidencia y cargar el peso muerto sobre la curva de presiones.

Por otra parte, vista la Catedral y los movimientos de sus columnas, pareció me debía hacer los cálculos partiendo del supuesto de que las columnas se habían desplomado hacia dentro de la nave mayor (Fig. 12), y así lo hice. Se adjunta la curva de presiones en la que los pesos muertos a que me he referido están aplicados en el punto 4. – Sin esas 230 toneladas de carga supletoria, debo declararme impotente para trazar la dificultosa curva de presiones de este monumento de ligereza y atrevimiento incompatibles.

VII

La Curva de presiones

Entre las cuestiones que afectan a la descripción de un monumento, ninguna tan ardua y detenida como la averiguación de las condiciones en virtud de las que el equilibrio de sus diversos elementos se efectúa. Para poder trazar las curvas de presiones que se acompañan (Fig. 13 y 14), se han debido emplear largos días en una labor pesada e ingrata, en hacer y deshacer, en tantear una solución y probar otra, y a la postre se ha conseguido un resultado que, satisfactorio, como el que aquí se presenta, no por eso deja el espíritu satisfecho del todo, ni la solución es tan indiscutible que no de lugar a la duda, aun cuando esta pueda tener efecto en cuestiones de detalle, ya que, claro está, que las fundamentales no pueden dejar de verificarse, a menos que se dé por sentado el absurdo de que un monumento que tenga varios siglos de existencia esté en malas condiciones de equilibrio.

En la Catedral d Mallorca hay que tener en cuenta, para estudiar su equilibrio, seis cantidades hipotéticamente variables que constituyen seis esfuerzos, los cuales compuestos y contrabalanceados han de venir a dar un esfuerzo vertical o casi vertical, pasando por la columna, sin contar los que por ir al contrafuerte principal son de más fácil estudio. Estos esfuerzos son:

1. La resultante de todos los esfuerzos que se desarrollan en el arco toral principal.

2. Las resultantes de los aristones principales que debidamente compuestas entre sí dan un solo esfuerzo.
3. La resultante del arco botarel alto.
4. La resultante del arco botarel bajo.
5. La del arco toral de la segunda nave.
6. Las resultantes compuestas de los dos aristones de la nave lateral.



Botareles de la Catedral de Mallorca.

De estos elementos se conocen los pesos, pero no son conocidas sus mutuas reacciones, y únicamente se sabe, al empezar el estudio de su composición general que la suma de las reacciones procedentes de los elementos de la nave mayor, ha de ser igual o casi igual y contraria a la suma de las reacciones de los elementos de la nave segunda a fin de que en la columna, anulados unos con otros los esfuerzos contrarios, quede solamente el peso vertical, único esfuerzo capaz de ser sostenido por la columna.

A quien no tenga un largo aprendizaje en el estudio de estos juegos de esfuerzos, ha de serle difícil considerar que la solución de este problema, que en los libros y en el encerado se presenta tan llano, cuando se transporta a un edificio como la Catedral de Mallorca abarca una complejidad tremenda y encierra unas dificultades casi insuperables.

He de dar una ligera idea de ellas.

Lo primero que debe hacerse, después de efectuados los estados de cubicaciones y pesos, que también se acompañan, es trazar todas y cada una de las curvas de presiones de todos y cada uno de los elementos: arco toral, aristones y arcos botareles. Estas curvas de presión han de hacerse dobles para cada elemento. Una de ellas ha de ser la curva de presión que con menos reacción sea posible hacerla pasar por dentro los macizos del arco y la otra la que con más reacción sea posible hacerle también pasar por los mismos macizos. Esto con el fin de conocer los límites dentro de los cuales pueda encerrarse la solución definitiva. Para trazar cada una de estas curvas máxima y mínima, es preciso tomar dos series de reacciones, una decreciente y otra ascendente, e ir trazando con ellas dos series de curvas de presión hasta llegar a la mínima de reacción mínima, y a la máxima de reacción máxima.

Obtenidas estas dos soluciones, máxima y mínima, por cada uno de los arcos y aristones, viene el caso de emprender la labor definitiva que ha de terminar en la composición mutua en el trazado general.

Precisa empezar por suponer, en el arco mayor, una solución intermedia entre la máxima y la mínima y con ella intentar una solución final. Al llegar el trazado al nivel I, es necesario componerle un esfuerzo procedente del arco botarel que, claro está, la prudencia aconseja que tampoco sea ni el máximo ni el mínimo. Los esfuerzos de los aristones mayores vienen a combinarse más abajo en 2, junto también con otro esfuerzo procedente de la segunda batería de arcos respaldares, y finalmente en 4 con los pesos muertos provenientes de las paredes altas, con lo cual tenemos una resultante de todos los esfuerzos que actúan en la nave mayor de capitel para arriba. Esta resultante estaría a punto de ser compuesta con las resultantes del arco toral de la nave segunda y con sus aristones, si esto fuera posible, pero no lo es, porque esta resultante hallada por tan prudentes medios, apartándose de los máximos y mínimos, se introducirá en la nave segunda en un punto y una dirección inapropiadas... Es necesario volver a empezar y apartarse de los términos medios, abordando el problema en un

arco con máximos, en otro con mínimos, en un tercero ni con máximos ni mínimos y volver a hacer la composición de todas y cada una de las curvas de cada uno de los arcos, aristones y arcos botareles, y después componerlas entre sí... y tampoco su resultado es aprovechable, porque también la resultante invade la nave segunda en pésimas condiciones. Ha sido preciso hacer este trabajo de tanteo ... ¡muchísimas veces! ¡tan delicadamente se sostiene la Catedral de Mallorca! Hasta encontrar unas curvas y unas reacciones que, estando comprendidas entre el máximo y el mínimo tantas veces repetido, dieran una resultante que fuese posible componerla con las procedentes de la nave segunda, donde también se ha tenido de hacer un trabajo de tanteo.

La reacción de la nave mayor ha resultado ser de 48 toneladas en el arco total y de 36 toneladas en los dos aristones una vez compuestos en una sola fuerza: en total 84 toneladas. Esta reacción es un máximo que prudentemente no podía suponerse pudiera ser mayor, tanto porque la curva de presiones que de ella resultaba, en la parte baja de los aristones habría salido del lugar que le es propio, si la reacción se hubiese supuesto mayor, como porque en el total casi llega a pasar por el centro de gravedad del macizo total de que el está formado, apartándose muchísimo del arco propiamente dicho.

En cambio en la nave lateral hemos llegado a reacciones muy pequeñas. En el total hemos llegado a 27 toneladas y en los aristones a unas reacciones por demás bajas, de 18 toneladas una vez compuestos entre sí debidamente. Esta solución ha debido aceptarse, porque toda otra que se basara en dar a la nave mayor unas reacciones menores, tenía el inconveniente de que sumadas las reacciones de los estribos y de la nave menor sobrepujaban de mucho a las de la mayor y de consiguiente jamás podía establecerse el equilibrio sobre la columna. En las diferentes veces que intentamos buscar una solución satisfactoria, nos convencimos de que era necesario dar la mayor extensión posible a las reacciones de la nave mayor a fin de que las curvas pasaran altas, para que, después de ser contrarrestadas en parte por los arcos botareles, diesen unas líneas de presión lo mayor verticales posible, logrando así que se introdujesen todo lo menos en la nave lateral, ya que en definitiva su cruzamiento con los esfuerzos procedentes de la nave segunda tienen de enlazarse con los de la nave mayor dentro de las verticales del prisma de la columna. Por esto una vez logradas con estas reacciones importantes, que las fuerzas pasasen altas, ha sido necesario casi anularlas con los esfuerzos de los estribos, dejándoles nada más que como a exceso de reacción las $18 + 6 = 24$ toneladas que reacciona la nave mayor, ya que, de no anularlas, hubiéramos incurrido en el propio defecto que tratábamos de evitar, o sea, que las resultantes de los esfuerzos de las partes altas del edificio no invadiesen la nave segunda por unos puntos y direcciones impropias. A pesar de las muchas tentativas realizadas, no hemos podido conseguir de ningún modo hallar un sistema de esfuerzos cuya resultante pasara por el eje de la columna. Después de un número muy importante de tanteos y ensayos se ha podido encontrar un sistema de equilibrio en el que la presión en el punto de carga máximo del total principal, fuese una carga soportable de un modo permanente por la caliza de que está construido (19 kilogramos por centímetro cuadrado) y al mismo tiempo invadiera el capitel de la columna lo suficientemente apartado de las aristas para que su carga máxima pudiera ser resistida por la caliza de que están construidas las columnas, que es mucho más tenaz que la empleada en el resto de la construcción, carga que llega a ser de 34 kilogramos por centímetro cuadrado en una de las aristas.

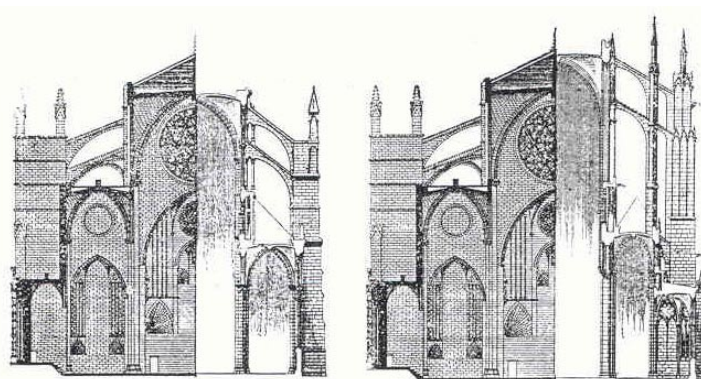


Fig. 20.—Mallorca y Amiens.

Fig. 21.—Mallorca y Beauvais.

La inspección del estado actual de las columnas de la Catedral confirma en absoluto el resultado de los estudios que tengo hechos. Un prisma comprimido verticalmente por una fuerza que no pase por su eje, es sabido que tiene tendencia a la flexión, y que la compresión se transforma en tensión en las fibras más apartadas del centro de presión, desde el momento en que este centro se desvía de lo que llamamos el núcleo central de inercia. Del estudio se deduce, que las cargas verticales de la columna no pasan por su eje y por lo tanto todas las columnas de la Catedral deberían haber hecho flexión, como en efecto la han hecho, curvándose con la convexidad hacia la nave mayor, que es en la dirección donde los esfuerzos hallados en el estudio hecho, indican que han de estar curvadas (Fig. 12).

Yo no creo que si los constructores de la Edad Media hubieran tenido exacto conocimiento de lo que pasaba dentro de sus construcciones, se hubiesen atrevido a construir tan temerariamente como lo está la Catedral de Mallorca. Llegar a hacer pasar la curva de presión de un arco de 20 metros de luz a la distancia de 40 centímetros de su arista interior, con una carga por centímetro cuadrado que se puede suponer casi llegada al límite de las de un modo permanente puede soportar, exponiéndose a arruinar un edificio inmenso, hecho a costa de tantísimos sacrificios y de siglos y más siglos de trabajo, sería en el hombre que no ignorase esto, una imprudencia imperdonable.

Los constructores debían tomar las cosas en globo, y, ya sea por una compensación de pesos a derecha e izquierda de la columna con relación al ancho de las naves respectivas, o por algún otro medio sintético, resolver grosso modo estas cuestiones tan delicadísimas.

El resultado de este estudio es de una gran enseñanza. Según mi modo de ver todo el proceso del arte gótico queda estampado en estas curvas de equilibrio que creo que por primera vez en la historia de las monografías arquitectónicas, aquí se exponen. Arte de picapedreros puesto al servicio de equilibristas ingeniosos, hombres llenos de espíritu científico y aficionados a todas las minucias del dibujo; arte de detalle rebuscado, no de grandiosa concepción; arte del norte brumoso, no del mediodía esplendente. Véase a cuanto artificio se ha de recurrir para cubrir un espacio de 40 metros de ancho. Columnas, arcos, aristones, bóvedas, dobles botareles, contrafuertes inmensos, cargas supletorias sobre las bóvedas, todo compuesto y combinado con rebuscamientos indecibles., después de tanteos sin fin, después de una lucha titánica de varios siglos contra las dificultades que presenta tan complicado equilibrio. Y al fin y al cabo, después de todo y considerando que estamos en presencia del monumento quizás más simple de la arquitectura gótica, contemplemos el gran desacuerdo que existe entre las formas geométricas que el arte gótico lleva en sí emparejadas, con lo que la realidad mecánica impone y veamos que la nave segunda sin modificar en nada ni para nada el resto del monumento, sin cambiar poco ni mucho sus condiciones de equilibrio, podría tener casi el doble de la anchura que ahora tiene.

VIII

Resumen del estudio mecánico

De este estudio mecánico que del organismo constructivo de la Catedral de Mallorca acabamos de hacer, entiendo que puede sacarse las siguientes enseñanzas:

1. La estructura del edificio tiene la circunstancia capital de una gran desproporción entre la intensidad de las extensiones de la nave mayor y las de la nave menor. Esto procede de que los estribos de la batería alta son demasiado importantes y exigen contra ellos unas reacciones muy grandes. Quizás habría sido mejor que no existiese más que la batería baja, ya que ella sola bastaba sin duda para contrarrestar la expansión de los arcos y de los aristones. Este exceso de reacción en la batería alta ha obligado a colocar sobre los vértices de los torales aquellas sobrecargas mencionadas en otro lugar y que se ven dibujadas en la sección (Fig. 8). Gracias sin embargo a la influencia del botarel alto, la curva de presiones se mantiene cercana al intradós del toral.
2. En la Catedral Mallorquina las acciones y reacciones entre los diferentes arcos no son suficientes a mantenerse mutuamente en equilibrio sobre la columna, y es necesario llegar a la suposición de su desplome a fin de que los pesos muertos que cargan sobre ella (por intermedio de los formeros) pasen a ser pesos de actuación viva, e influyan sobre la curva de presiones.
3. La columna está mal colocada. Por un medio u otro, sin variar la luz del arco toral principal, debía haber sido puesta unos 45 centímetros más hacia la nave segunda y entonces la presión habría pasado por el eje. Esta mala colocación ha motivado el que se curvara.
4. La batería de arcos estribos inferiores está muy exactamente colocada y tiene el peso y la curvatura que le son necesarios y suficientes.
5. El arco toral de la nave segunda aguanta una verdadera pared hasta la altura de ses terrades. Este peso, que puede parecer aquí superfluo, tiene la ventaja de hacer que la curva de presiones de este arco, con muy ligera reacción, dé una resultante final relativamente importante, bastante aproximada a la vertical y de situación muy propia para la combinación con las fuerzas procedentes de la nave principal.
6. En los dos puntos de presión máxima la piedra trabaja en uno de ellos a 19 Kg. por centímetro cuadrado y en el otro a 34 Kg., cantidades que se pueden considerar un límite máximo práctico de carga dadas las dos clases de piedra caliza que están contruidos.

IX

Comparación del organismo constructivo de la Catedral de Mallorca con el de otras Catedrales

La superioridad inmensa del organismo constructivo de la Catedral de Mallorca sobre el de la totalidad de las más afamadas, salta a la vista comparando su sección transversal (puesto que conocemos todas sus cualidades) con el de sus hermanas, pero de todos modos necesario es insistir sobre este punto y para proceder con un poco de orden, conviene clasificar a esas soberbias construcciones en cuatro grupos, es a saber:

1^{er} grupo. Las que por tener las tres o más naves cubiertas poco más o menos al mismo nivel, siempre los esfuerzos que ha de sostener la columna son verticales, y el problema mecánico y de organización de masas constructivas se puede decir que no existe. Ejemplos: Zaragoza, Munich, Pirna, Perugia, Lady Chapel de Winchester, Sta. Elisabet de Marburg,; Iglesias de Wetzlar y de Wetter, la Wiesenkirche de Soest, la Friedberg de Hessen, etc. En ese caso las naves pueden ser todas de la misma anchura.

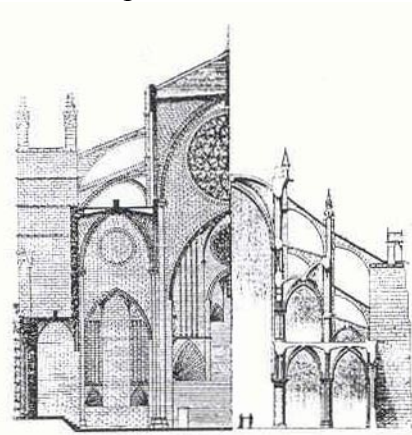


Fig. 22.—Mallorca y Paris.

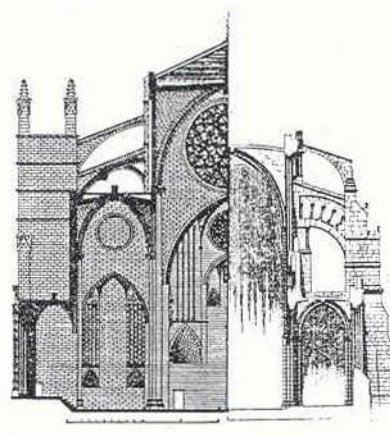


Fig. 23.—Mallorca y Chartres.

Parece que las condiciones constructivas y estéticas de esas Catedrales comparadas con la de Mallorca casi no hay que hablar. Es claro que ellas tienen la ventaja inapreciable de tener todas sus naves amplias y despejadas y eso siempre impresiona bien, pero los gravísimos defectos que ellas tienen de estar pésimamente iluminadas y sin ninguna clase de compensaciones proporcionales entre sus diversos elementos las ha hecho siempre considerar como soluciones arquitectónicas de poca importancia y de ninguna trascendencia. No es posible establecer ninguna clase de comparación entre estas Catedrales y la de Mallorca. La distancia que las separa es demasiado importante.

2^a grupo. Las que por tener las naves segundas casi tan altas como la central, los esfuerzos de la nave central son contrarrestados en su totalidad por las bóvedas laterales sin tener necesidad de recurrir al auxilio de los botareles. En ese caso, sí los hay de rudimentarios o son una imitación sin sentido práctico o bien son simples bajadas de agua con un esfuerzo reactivo insignificante. Ejemplos: Catedral de Barcelona, (Fig. 19), Santa María del Mar de Barcelona (Fig. 16), la Catedral de Winchester y Betlem de Portugal. En ese caso las naves segundas pueden tener una anchura relativamente grande.

Las construcciones comprendidas en ese grupo casi todas están situadas en nuestro suelo.

En estos templos, las mutuas reacciones de las dos naves se equilibran sobre la columna, y esta se mantiene vertical con suma facilidad. Es este un medio de eludir el problema mecánico a costa de la gentileza del monumento. La nave mayor casi ciega y la iglesia iluminada nada más que por la luz procedente de la nave segunda, no es ciertamente un medio para hacer valer toda la armonía del monumento, ni sobre todo la fecunda esbeltez de que es capaz el arte gótico.

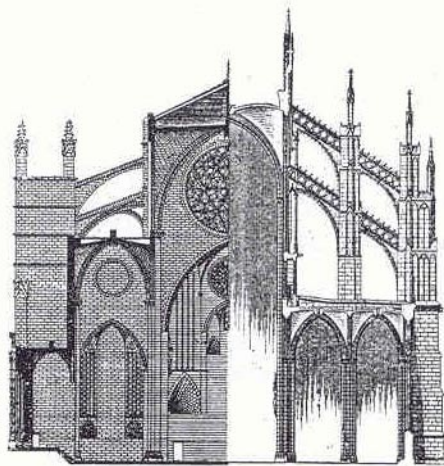


Fig. 24.—Mallorca y Colonia.

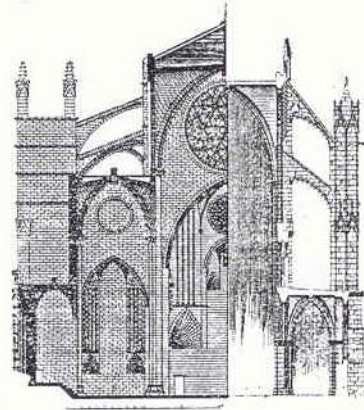


Fig. 25.—Mallorca y Metz.

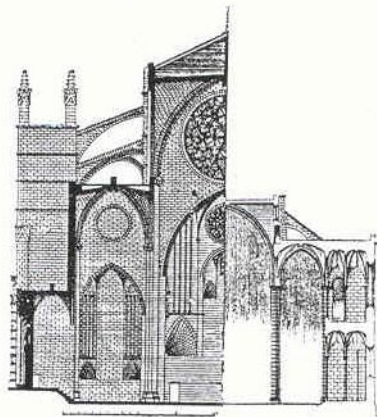


Fig. 26.—Mallorca y Barcelona.

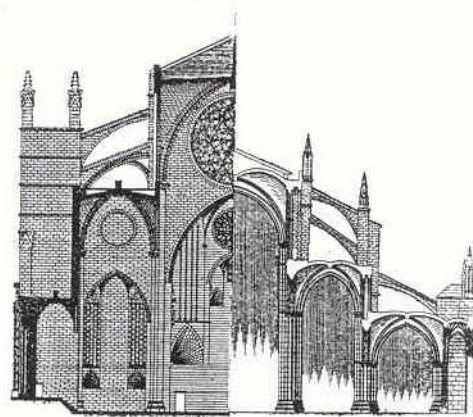


Fig. 27.—Mallorca y Toledo.

La iglesia de Sta. María del Mar (Fig. 16) es tal vez de todas las construcciones góticas, la única que por su espaciosidad puede compararse con la Catedral Mallorquina. La nave mayor de esta última está sostenida por columnas distribuidas según la planta que llamamos de doble cuadrado, mientras que Sta. María del Mar está sostenida sobre columnas distribuidas a modo de cuadrado simple. Una y otra iglesia rompen todos los moldes del arte gótico y en lugar de construir una nave mayor flanqueada por naves laterales, oprimidas por su poca elevación, oprimiendo ellas también la nave mayor, a la que convierten en corredor (es lo que en lenguaje popular francés se llama *nef*, y así no se dice la Catedral de Amiens o de París, sino la *nef* de Amiens, o la *nef* de París), son por el contrario unas verdaderas salas espaciosas para dar cabida en ellas a enormes multitudes. En Sta. María del Mar o en la Catedral de Mallorca, que yo quiero ahora considerar como los dos edificios de organismo constructivo más simple de todo el arte gótico y los que con menor complicación y menos materiales han logrado construir las dos salas proporcionalmente más espaciosas y desembarazadas de toda la cristiandad, uno no sabe tan solamente si existe eso que tantas veces hemos llamado naves.

Sta. María causa la impresión de un inmenso espacio cubierto, formando una sola entidad, un espacio único, no una suma de espacios. Y una impresión paralela, pero claro está que más importante, produce la Catedral de Mallorca. Impresión bien diferenciada de la que causan esas Catedrales del Norte que quedan convertidas en una sola nave, nave corredor,

nave en la que únicamente hay un punto de vista y una perspectiva. Claro está que las construcciones de ese grupo, con la nave central oprimida y sin todo el desarrollo en altura de que es capaz, son de todo punto inferiores a las de los grupos 3 y 4. A las del tercero porque en este las tres naves tienen todo el desarrollo que les es propio, y a las del 4ª porque aunque tengan oprimida y baja la nave lateral y las columnas de gran grueso relativo, pero al menos tienen la nave principal con todo el desarrollo necesario.

Entre todas ellas (y ya es sabido que existen muy pocas) merece mención aparte la de Barcelona (Fig. 26), porque en ella las naves laterales están avaloradas y mejoradas por medio de inmensas galerías triforios que le dan despeje y desahogo, por eso es a costa de la importancia de la nave mayor que en la catedral de Barcelona apenas si juega en la armonía total del conjunto. Tan oscura y tan oprimida y baja resulta. Únicamente en las regiones absidales en os que la nave lateral no tiene las galerías de que se hace mención, la nave principal vuelve a recobrar en la construcción el lugar preeminente que le es propio.

En Mallorca las columnas tienen	}	$\frac{1}{13}$ del ancho de la nave
		15 diámetros de altura
		La nave lateral tiene 5 décimas de anchura de la principal

En Barcelona las columnas tienen	}	$\frac{1}{6}$ de ancho de la nave
		8 y $\frac{1}{2}$ diámetros de altura
		La nave lateral tiene 5 décimas de la anchura de la principal

La iglesia de Santa María del Mar de Barcelona es claro que escapa a toda comparación, porque está concebida con un trazado completamente diferente, pero aunque no sea más que para completar esa nota diremos que:

En Sta. María las columnas tienen	}	$\frac{1}{8}$ del ancho de la nave
		13,5 diámetros de altura
		La nave lateral tiene 5 décimas de anchura de la principal

3^r. grupo. Las que por tener las naves segundas más bajas que las del grupo anterior ya no pueden prescindir del auxilio de los botareles en simple o doble batería y por consiguiente la expansión de la nave principal es contrarrestada principalmente pero no totalmente por ellos y entonces los esfuerzos de la nave segunda, se han de limitar a contrarrestar el pequeño exceso de expansión de la nave central no contrarrestada por los botareles. La nave lateral en ese caso ha de ser necesariamente mucho más estrecha que la nave mayor a fin de que su expansión no traspase los pequeños límites en los que puede moverse. Ejemplos: Catedrales de Mallorca y Salamanca (Fig. 17), S. Petronio de Bolonia (Fig. 18), Santa Eulalia de Mallorca, Iglesia de Erfurt, la Liebfrauenkirche de Oppenheim, la de Howden y la Catedral de Como.

Del tercer caso en que hemos clasificado las catedrales, o sea cuando el vértice del arco toral lateral esté a poca diferencia al mismo nivel que los arranques del toral principal, y

que parece debería ser el caso genérico, y por lo tanto el más abundante, es por el contrario, tan escasísimo que en todo el arte gótico los ejemplos creo podrían contarse con los dedos de una mano. No con suficiente exactitud aun pero con bastante aproximación se verifica esto, además de la Catedral de Mallorca, en S. Petronio de Bolonia, en las Catedrales de Salamanca y de Sevilla y en Erfurt y aun con menos aproximación en Toledo (Fig. 27).

En París mismo, donde por tener la primera nave lateral aquel triforio tan incomprensible y tan malísimamente colocado, hay doble bóveda, ni siquiera la segunda bóveda, la bóveda alta, llega de mucho al nivel de los arranques del toral principal.

De la comparación de la Catedral de Mallorca con sus cuatro hermanas, S. Petronio, Salamanca, Sevilla y la de los Dominicos de Erfurt resulta:

En la Seo de Mallorca las columnas tienen ..	{	$\frac{1}{13}$ del ancho de la nave 15 diámetros de altura La nave lateral tiene 5 décimas de anchura de la principal
En S. Petronio de Bolonia las columnas tienen ..	{	$\frac{1}{5'6}$ de altura de la nave 6'6 diámetros de altura La nave lateral tiene 5 décimas de la anchura de la principal
En Salamanca las columnas tienen	{	$\frac{1}{4}$ del ancho de la nave 3,5 diámetros de altura La nave lateral tiene 5 décimas de anchura de la principal
En Sevilla las columnas tienen	{	$\frac{1}{3}$ del ancho de la nave $\frac{3}{5}$ diámetros de altura La nave lateral tiene 6 décimas de la anchura de la principal
En Erfurt las columnas tienen ..	{	$\frac{1}{10}$ del ancho de la nave 8'8 diámetros de altura La nave lateral tiene 4 décimas de la anchura de la principal

Esta iglesia de Erfurt que quizás es la única de toda la construcción gótica que tiene cierta paridad de proporciones interiores con la Catedral de Mallorca, no es realmente comparable con ella ya que la nave mayor no pasa de 8,5 metros de ancho. Es una pequeña iglesia, tan pequeña que no le ha hecho falta ningún botarel para aguantarse. Así y todo proporcionalmente tiene las columnas muchísimo más gruesas que la Catedral Mallorquina. Dentro de ese grupo debería incluirse la Catedral de Milán si su organismo no estuviese tan miserablemente atirantado (Fig. 28). Aun así

En Milán las columnas tienen

$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{6} \text{ de la altura de la nave} \\ 9 \text{ diámetros de altura} \\ \text{La nave lateral tiene } 4 \frac{1}{3} \text{ décimas de} \\ \text{la anchura de la nave principal} \end{array} \right.$

Dentro de ese grupo la Catedral de Mallorca es evidente que lleva la supremacía y la ventaja. Dadas las extraordinarias dimensiones de S. Petronio de Bolonia y sobre todo la circunstancia de tener las columnas distribuidas según la disposición que hemos dado en llamar de planta cuadrada la duda respecto cual de las dos debería ser considerada con méritos superiores a su compañera podría existir, si la de Bolonia no fuera una iglesia tan desgarrada y maciza. Los enormes paredones que sustituyen a los botareles y la poca delicadeza de su trazado la hacen incomparable con la catedral de Mallorca. Así y todo, su ordenación interior la hace superior, por lo simple y despesada, a buena parte de las que tienen mayor fama que ella. Y es que en ese punto como en otros muchos, el espíritu del dilettantismo que admira capiteles y esculturas, hojarascas y detalles, ha sustituido al concepto claro de lo que es un monumento arquitectónico.

Paréceme que no se ha de insistir en señalar la manifiesta superioridad de la de Mallorca sobre la de Bolonia. Respecto de la de Salamanca y la de Erfurt, aun la distancia y la diferencia es más considerable.

4º grupo. Las que por tener las naves segundas cubiertas a mucho más bajo nivel que los arranques de las bóvedas de la nave central han de confiar totalmente el recoger y anular la expansión de la nave central por medio de las baterías de botareles. En ese caso las expansiones de la nave segunda son siempre una causa de perturbación en la estabilidad de la columna. La expansión de la nave lateral hacia la central no teniendo ninguna otra fuerza horizontal o inclinada que se le oponga ha de fiar su apoyo y su neutralización (valga la palabra) a la enormidad de las cargas verticales que le vienen de las partes altas del edificio. Por grandes que sean estas y por estrechas y bajas que sean las naves laterales, siempre la resultante de la combinación de los pesos verticales de las partes altas y de la resultante inclinada de las expansiones de la nave lateral siempre ha de ser una fuerza inclinada. Para que esa fuerza inclinada resultante pase por los núcleos resistentes de la columna, esa ha de ser necesariamente de gran diámetro. Ejemplos: Catedrales de Reims, Amiens, Beauvais, Chartres, París, Colonia, Metz, Strassburg, Ulm, etc., etc., para no citar sino las más principales (Fig. 19-20-21-22-23-24-25-26). En ese caso necesariamente la nave lateral ha de ser también de escasa anchura.

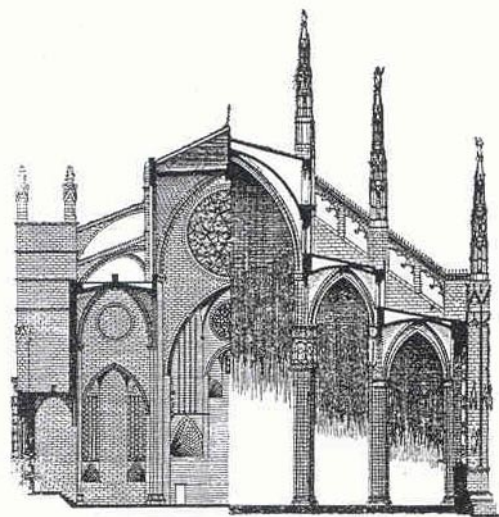


Fig. 28: Mallorca y Milán.

Ese es el caso más abundante. Parece ser el tipo clásico del gótico del Norte. Es el tipo de catedral nef, en que los espacios se oprimen y aprietan, los triforios y galerías se

multiplican y en que la complicada ingeniosidad de esos inquietos maestros góticos llega algunas veces al delirio.

Hemos hecho notar que en las construcciones comprendidas dentro de ese grupo la columna tiene necesidad de un gran grueso relativo a pesar de la estrechez y poca altura de la nave segunda.

Para hacer esto patente bastará apuntar cual es esa relación en las catedrales a que nos referimos. El grueso de las columnas en estas catedrales no guarda relación con la carga que llevan. En todas ellas la superficie de la sección transversal de la columna sería muchísimo más grande que lo necesario para soportarlas cargas que la comprimen, si las columnas fuesen colocadas en su lugar más propio. En la misma catedral Mallorquina a pesar de su delicadeza tienen más del doble de la superficie que necesitan. Tomando como a tipo de comparación la columna de la catedral de Mallorca tendremos aproximadamente:

En Mallorca las columnas tienen	{	$\frac{1}{13}$ del ancho de la nave 15 diámetros de altura La nave lateral tiene 5 décimas de anchura de la principal
En París las columnas tienen	{	$\frac{1}{8,8}$ del ancho de la nave 4'5 diámetros de altura La nave lateral tiene 4 décimas de la anchura de la principal
En Amiens las columnas tienen	{	$\frac{1}{7}$ del ancho de la nave 7,5 diámetros de altura La nave lateral tiene 5 décimas de anchura de la principal
En Reims las columnas tienen	{	$\frac{1}{6,6}$ del ancho de la nave 5 diámetros de altura La nave lateral tiene 4'5 décimas de la anchura de la principal
En Beauvais las columnas tienen	{	$\frac{1}{6,2}$ del ancho de la nave 7'1 diámetros de altura La nave lateral tiene 4 décimas de la anchura de la principal
En Chartres las columnas tienen	{	$\frac{1}{5,7}$ del ancho de la nave 4 diámetros de altura La nave lateral tiene 3 $\frac{3}{4}$ décimas de la anchura de la principal

Estas cifras dicen bien claro que en esa clase de Catedrales, el hacer la nave segunda muy baja obliga a ensanchar la columna de un modo extraordinario, a fin de hacer que quepa

en ella la fuerza inclinada procedente de la composición de los pesos verticales, que provienen de las partes altas, con las inclinadas procedentes de la nave segunda. Una catedral de esta índole, no puede subsistir con las columnas delgadas. Por otra parte, en las que esta razón no fuese verdadera, subsistirían porque el enorme peso de sus paredes obliga a la casi verticalidad de las fuerzas procedentes de la nave lateral, y entonces claro está que la sección transversal de la columna ha de ser también muy grande.

La nave segunda, si ha de apoyarse sobre columnas relativamente delgadas, ha de ser con la precisa condición de que, sea, o muy baja, y entonces la poca elevación de la columna y su grueso hacen posible la cabida de una fuerza inclinada, o muy alta, y entonces los esfuerzos de la nave central y los de la lateral, combinándose y ayudada la nave segunda con una o dos baterías de botareles, dan una resultante que puede pasar por la columna. Pero lo que no es posible sin artificios extraños o sin un grueso desmedido de la columna, es la existencia de una nave segunda de una altura media. Entonces no le es posible a la resultante inclinada caber dentro de la columna.

Esta manera de que estamos ocupándonos de ser concebida una iglesia de tres naves no solamente es en detrimento de la perfección de su organismo constructivo y mecánico, sino que también lo es de su efecto de conjunto. La nave lateral si es baja oprime materialmente el edificio. Es inútil que se acumulen cinco naves como en París: el efecto total ya está echado a perder y la nave mayor queda oprimida entre dos murallas de piedra, tan adornada de triforios y esculturas como se quiera, pero aplastada y sin que la vista pueda esplayarse (Fig. 29 y 30). Este es el gran error, el defecto primordial capital del gótico del Norte, que, a pesar de todos sus esplendores y de todas sus riquezas, ha sido incapaz de crear un sistema para edificar grandes salones para las grandes multitudes. Al estudiarlos, uno se pregunta si aquella buena gente de la Edad Media eran, en el Norte, una gente subdividida, fraccionada en pequeños grupos envidiosos unos de otros, que no conocían los grandes sentimientos colectivos y las grandes unidades sociales y preferían esas Catedrales llenas de estorbos y de columnas con naves bajas y aplastadas, a las grandes salas despejadas y extensas.

De los ejemplos que aquí presentamos, para comparar sus soluciones constructivas y mecánicas con las de la Catedral de Mallorca, hay que descontar ya desde luego por incomparables, la de París, con su embrollada y inexplicable organización de estribos, fruto de una inteligencia mediocre y de un concepto poco claro de lo que son esas cosas. Por otra parte, ya es sabido que el triforio sobre la primera nave lateral, tuvo que modificarse levantando de extraña manera uno de los lienzos de su bóveda (Fig. 23) para dar más altura a los ventanales a fin de dejarlos visibles desde el suelo.

Hay que descontar también la de Beauvais (Fig. 21), terriblemente oprimida y apretada, ya que el problema que parece que con ella se intentó resolver fue el de la altura, pero no el de la capacidad, ni el de la sabia ordenación. Como todo en ella está subordinado a alcanzar altura extraordinaria, si se quiere juzgar con justicia, hay que colocarse dentro de la misma idea que precedió a su ejecución, y en ese caso es claro que se ha de afirmar que se logró con muy simples medios el fin que se pretendía.

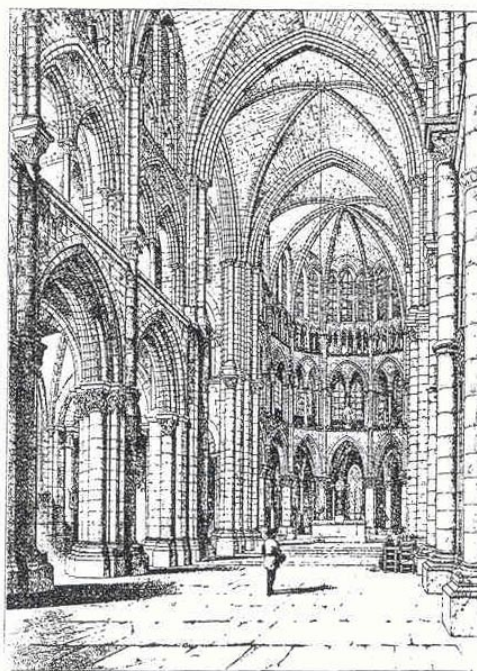


Fig. 29.- La nave mayor de Chalons – sur – Marne.

De la de Chartres (Fig. 22) parece que se puede decir que sus sistemas de estribos tienen un fin mejor ornamental que práctico. Es seguro que las acciones de los tres botareles ocasionan a la nave principal un trabajo excesivo, obligándola a unas expansiones inapropiadas. Véase el modo con que los pesos muertos cargan sobre la columna y sobre el tercio inferior del toral lateral para hacerse cargo de lo forzado de esa solución que no responde a ningún fin que mejore la capacidad interior del monumento.

Reims (Fig. 19) y Amiens (Fig. 20) son en mi concepto dentro del grupo que analizamos, los dos tipos más acabados. La nave de Amiens es, de las dos, la que el asentimiento general ha calificado de más hermosa, y desde nuestro particular punto de vista es innegable que tiene una organización algo superior a la de Reims, ya que teniendo ambas la misma anchura total interior, la de Amiens tiene la nave mayor más alta, la columna más delgada y más alta, la nave segunda más ancha y más alta y el contrafuerte más pequeño. En Reims el botarel alto parece que no está tan bien colocado como en Amiens.

Pero una y otra comparadas con la de Mallorca le son muy inferiores. Basta fijarse en sus secciones para ver, en primer lugar, la enorme diferencia de sus dimensiones y además la mucha mayor altura relativa de la segunda nave de Mallorca.

La Catedral de Colonia tiene la proporción:

En Colonia las columnas tienen	{	$\frac{1}{6}$ del ancho de la nave 5 diámetros de altura La nave lateral tiene 5 décimas de la anchura de la principal
--------------------------------------	---	--

X

Principales características de la Catedral de Mallorca

- I. La Catedral de Mallorca es evidentemente un gran, un espléndido edificio concebido a la manera lombarda, a la manera precursora del arte gótico, pero construido con ese sistema gótico propio de la época en que fue levantado.
- II. De todos los edificios concebidos al modo lombardo es, sin duda alguna, el que ofrece desarrollados con más amplitud todos los organismos propios de esa escuela. En ninguno como en él han sido llevados tan lejos de sus modestos orígenes los elementos que lo integran.
- III. De todos los edificios construidos en el estilo gótico, por ser el que tiene la nave lateral más alta, la nave central más espaciosa y las columnas más altas y más delgadas, es sin duda alguna el que con más aprovechamiento para la organización del edificio, ha utilizado los medios constructivos del arte gótico.
- IV. La Catedral de Mallorca es sin duda la que con menor cantidad de materiales vistos desde el interior, encierra dentro de sí un volumen mayor de espacio útil.
- V. En la Catedral de Mallorca los medios supletorios para equilibrar la construcción son extraordinarios en extremo y, a pesar de todo, el divorcio entre sus formas geométricas y sus curvas de equilibrio es tan grande, que puede afirmarse que, siguiendo los procedimientos góticos, sería sumamente difícil cubrir una iglesia de tres naves de mayores dimensiones que ella. Por otra parte la historia de la arquitectura gótica lo confirma plenamente.

VI. De todas las iglesias góticas de tres naves, es la que tiene la nave lateral lo más alta posible sin absorber las luces ni la altura de la nave mayor. Si a semejanza de la Catedral de Barcelona y de la iglesia de Sta. María del Mar de la misma ciudad, tuviese la nave segunda más alta que el punto de arranque de los arcos de la nave mayor, entonces igual que ellas tendría la nave central ahogada por las laterales. Bajo este punto de vista de solución de Mallorca es la más perfecta de todas. Geométricamente, y por la simplicidad y naturalidad de sus trazados, está en el justo término medio entre las que tienen las naves laterales demasiado bajas y las que las tienen altas en exceso. Dar a la clave de la segunda nave, la altura del arranque de los torales mayores, parece que es la mayor perfección geométrica del trazado de una iglesia de tres naves.

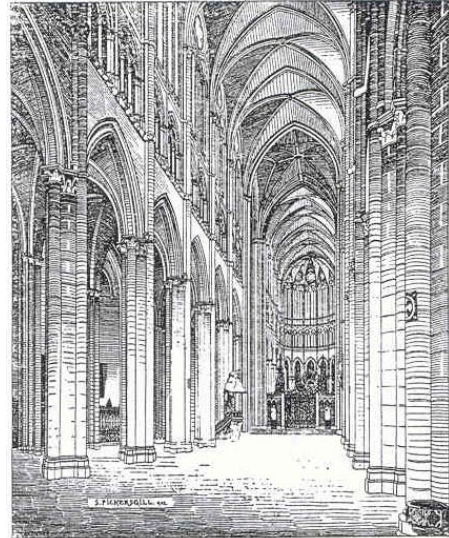


Fig. 30.- La nave mayor de Amiens

VII. La Catedral de Mallorca es, pues, de entre todas las Catedrales, la que tiene empleados los organismos propios del estilo gótico con la mayor simplicidad posible y en un límite superior del cual no sería prudente pasar, y del cual en ninguna otra se ha pasado y en consecuencia se puede afirmar de ella, que es el éxito orgánico, constructivo, y mecánico mayor y más perfecto del estilo gótico.

XI

Estados de cubicaciones y pesos

He aquí los cuadros numéricos referentes a la curva de presiones, muchas de cuyas dimensiones no ha habido más remedio que suponerlas de un modo prudencial y aproximado.

Arco toral nave central

Reacción 48.000 Kilogramos

Designación	Dimensiones			Volumen	Densidad	Peso parcial	Peso total	Sección	Observaciones
	Longitud	Latitud	Alto o grueso						
Arco toral de la nave central	1'00	0'70	5'00	3'50	2.100	7.350			Sobre el vértice de este arco carga la pared, cuya fotografía se acompaña (fig. nº8)
Bóvedas 2 de Cubierta	1'10	2'16	0'15	0'71	2.100	1.491			
	5'00	5'00		25'00	200	5.000			
							13.841	A.	
Arco toral de la nave central	1'00	0'70	3'50	2'45	2.100	5.145			
Bóvedas 2 de	1'15	1'98	0'15	0'48	2.100	1.008			
							6.153	B.	
Arco toral de la nave central	1'00	0'70	2'80	1'96	2.100	4.116			

Bóvedas 2 de	1'17	1'45	0'15	0'49	2.100	1.029			
							5.145	C.	
Arco toral de la nave central	1'00	0'70	2'00	1'40	2.100	2.940			
Bóvedas 2 de	1'25	1'25	0'15	0'45	2.100	945			
							3.885	D.	
Arco toral de la nave central	1'00	0'70	2'60	1'82	2.100	3.885			
Bóvedas 2 de	1'35	1'05	0'15	0'41	2.100	861			
							4.683	E.	

Aquí (I) se combina con el empuje horizontal del botarel superior que es de 21.000 Kilogramos.

Arco toral de la nave central	1'00	0'70	3'60	2'25	2.100	4.725			Sobre el vértice de este arco carga la pared, cuya fotografía se acompaña (fig. n°8)
Bóvedas 2 de	1'40	0'75	0'15	0'31	2.100	651			
							5.376	F.	
Arco toral de la nave central	1'00	0'70	4'50	3'15	2.100	6.615			
Bóvedas 2 de	1'70	0'45	0'15	0'23	2.100	483			
Cubierta	5'00	2'00		10'00	200	2.000			
							9.098	G.	
Arco toral de la nave central	1'00	0'70	6'00	4'20	2.100	8.820			
Bóvedas 2 de	2'70	0'25	0'15	0'202	2.100	424			
							9.244	H.	
Arco toral de la nave central	1'00	0'70	8'00	5'60	2.100	11.760			
							11.760	I.	

Aquí (2) el empuje horizontal del botarel inferior, que es de 286.000 Kilogramos, y la resultante de los 2 aristones de la nave mayor se combinan entre sí, y la resultante de esta combinación, se combina (3) a su vez con el trazado general y después con el siguiente (4)

Peso Muerto

Pilar	1'20	0'40	15'00	7'20	2.100	15.120			Se considera peso muerto todo el que no carga sobre el vacío y además todo lo que carga sobre los arcos Z (véase planta).
Pared	8'00	0'70	5'00	84'00	2.100	176.400			
Pináculo	1'50	1'50	6'00	13'50	2.100	28.350			
Cubierta				50'00	200	10.000			
							229.870	Y.	

La resultante de todos los esfuerzos que hasta aquí se han ido combinando se cruza (5) con la resultante del toral de la nave lateral y se combina con ella y más abajo (6) cruza a su vez con la de los 2 aristones de la nave lateral dando una resultante final inclinada que no pasa por el eje de la columna.

Esta resultante última tiene al nivel de los capiteles un valor de 456 toneladas y como el volumen de la columna es de 64 metros cúbicos y la caliza algo dura de que está formada, parece que se puede contar a una densidad de 2.400 Kilogramos, lo que le da un peso de 153

toneladas; la carga total, al nivel del suelo es de 609.000 Kilogramos y por centímetro cuadrado 22 kilogramos.

Aristón nave central

Reacción 20.000 Kilogramos

Designación	Dimensiones			Volumen	Densidad	Peso parcial	Peso total	Sección	Observaciones
	Longitud	Latitud	Alto o grueso						
Arco diagonal de la nave central	2'00	0'50	0'70	0'70	2.100	1.470			Sobre la clave carga la pirámide escalonada de sillería cuya fotografía se acompaña (fig. nº 9) Imposible saber con exactitud las dimensiones de la clave. Imposible saber con exactitud el tizón de las piedras que forman el aristón. La dimensión que damos creemos que es la prudencial.
Clave						500			
Bóveda	2'20	0'50	0'15	0'165	2.100	346			
Idem.	1'00	0'85	0'10	0'127	2.100	266			
Pirámide				2'10	2.100	4.410			
Cubierta	5'00	2'50			200	2.500			
							9.492	A.	
Arco diagonal de la nave central	1'00	0'50	0'80	0'40	2.100	840			
Bóveda	3'40	0'60	0'15	0'30	2.100	630			
Idem.	0'60	0'90	0'15	0'08	2.100	168			
Sobrecarga en la arista superior de la bóveda	1'00	0'60	0'60	0'36	2.100	756			
							2.394	B.	
Arco diagonal de la nave central	1'00	0'50	0'80	0'40	2.100	840			
Bóveda	4'40	0'60	0'15	0'396	2.100	831			
Idem.	1'50	0'90	0'15	0'20	2.100	420			
Sobrecarga en la arista superior de la bóveda	1'00	0'60	0'60	0'36	2.100	756			
							2.835	C.	
Arco diagonal de la nave central	1'00	0'50	0'90	0'45	2.100	945			
Bóveda	6'00	0'60	0'15	0'54	2.100	1.134			
Idem.	3'40	0'90	0'15	0'46	2.100	966			
Sobrecarga en la arista superior de la bóveda	1'00	0'60	0'60	0'36	2.100	756			
							3.801	D.	
Arco diagonal de la nave central	1'00	0'50	1'00	0'50	2.100	1.050			
Bóveda	7'60	0'60	0'15	0'68	2.100	1.428			
Idem.	4'00	0'60	0'15	0'54	2.100	1.134			
Sobrecarga en la arista superior de la bóveda	1'00	0'60	0'60	0'36	2.100	756			
							4.368	E.	

Designación	Dimensiones			Volumen	Densidad	Peso parcial	Peso total	Sección	Observaciones
	Longitud	Latitud	Alto o grueso						
Arco diagonal de la nave central	1'00	0'50	1'00	0'50	2.100	1.050			Los tabiques y la solera sirven para hacer practicables los pisos en todos los lugares de la bóveda y llevar el agua que pudiera caer a través de la cubierta provisional al nivel del botarel alto.
Bóveda	4'00	0'60	0'15	0'36	2.100	756			
Idem.	4'50	0'90	0'15	0'60	2.100	1.260			
Sobrecarga en la arista superior de la bóveda	1'00	0'60	0'60	0'36	2.100	756			
							3.822	F.	
Arco diagonal de la nave central	1'00	0'50	1'25	0'625	2.100	1.312			
Bóveda	1'50	0'90	0'15	0'27	2.100	567			
Idem.	4'20	0'90	0'15	0'58	2.100	1.218			
Sobrecarga en la arista superior de la bóveda	1'00	0'70	0'60	0'36	2.100	756			
Solera y tabiques				0'50	300	150			
							4.003	G.	
Arco diagonal de la nave central	1'00	0'50	1'40	0'70	2.100	1.470			
Bóveda	2'00	0'60	0'15	0'18	2.100	278			
Idem.	3'00	0'90	0'15	0'40	2.100	840			
Sobrecarga en la arista superior de la bóveda	1'00	0'60	0'60	0'36	2.100	756			
Solera y tabiques				1'70	300	150			
							3.854	H.	
Arco diagonal de la nave central	1'00	0'50	2'00	1'00	2.100	2.100			
Sobrecarga en la arista superior de la bóveda	1'00	0'60	0'60	0'36	2.100	756			
Solera y tabiques				2'50	300	750			
							3.606	I.	

Como son 2 los aristones que juntan sus esfuerzos en un mismo punto, es necesario proceder a hacer su combinación (reacción 36.000 véase planta). La resultante de esa combinación es la que a su vez se combina con la resultante del toral principal y con el empuje del botarel inferior en la sección I (2) y (3).

Botarel superior

Reacció 21.000 Kilogramos

Designación	Dimensiones			Volumen	Densidad	Peso parcial	Peso total	Sección	Observaciones
	Longitud	Latitud	Alto o grueso						
Botarel superior	1'00	1'00	2'10	2'10	2.100	4.410			Este botarel sirve complementariamente para el paso del agua pluvial.
							4.410	J.	
Id. Id.	1'00	1'00	1'70	1'70	2.100	3.750			
							3.750	K.	
Id. Id.	1'00	1'00	1'40	1'40	2.100	2.940			
							2.940	L.	
Id. Id.	1'00	1'00	1'20	1'20	2.100	2.520			
							2.520	M.	
Id. Id.	1'00	1'00	1'20	1'20	2.100	2.520			
							2.520	N.	
Id. Id.	1'00	1'00	1'40	1'40	2.100	2.940			
							2.940	O.	
Id. Id.	1'00	1'00	1'80	1'80	2.100	3.780			
							3.780	P.	
Id. Id.	1'00	1'00	2'80	2'80	2.100	5.880			
							5.880	Q.	
Id. Id.	1'00	1'00	2'50	2'50	2.100	5.250			
							5.250	R.	
Id. Id.	1'00	1'80	1'00	27'00	2.100	56.000			
							56.000	S.	

La resultante de este trazado al llegar a la sección T (7) se combina con la resultante del trazado siguiente:

Botarel inferior

Reacción 26.000 Kilogramos

Designación	Dimensiones			Volumen	Densidad	Peso parcial	Peso total	Sección	Observaciones
	Longitud	Latitud	Alto o grueso						
Botarel inferior	1'00	1'00	2'10	2'10	2.100	4.410			Este botarel sirve complementariamente para el paso del agua pluvial.
							4.410	J.	
Id. Id.	1'00	1'00	1'80	1'80	2.100	3.780			
							3.780	K.	
Id. Id.	1'00	1'00	1'60	1'60	2.100	3.360			
							3.360	L.	
Id. Id.	1'00	1'00	1'50	1'50	2.100	3.150			
							3.150	M.	
Id. Id.	1'00	1'00	1'60	1'60	2.100	3.360			
							3.360	N.	
Id. Id.	1'00	1'00	1'70	1'70	2.100	3.570			
							3.570	O.	
Id. Id.	1'00	1'00	2'10	2'10	2.100	4.410			
							4.410	P.	
Id. Id.	1'00	1'00	2'50	2'50	2.100	5.250			
							5.250	Q.	
Id. Id.	1'00	1'00	2'50	2'50	2.100	5.250			
							5.250	R.	
Id. Id.	1'50	1'80	3'00	8'10	2.100	17.010			
							17.010	S.	

La resultante de este trazado al llegar a la sección T (7) se combina con la resultante del trazado anterior y la de ambas con el peso T (8).

Contrafuerte	2'00	1'80	12'05	43'38	2.100	910.98			
							11.098	T.	

En esta misma sección la resultante del trazado anterior se combina con la resultante del toral lateral.

Aristón nave lateral

Reacción 12.000 Kilogramos

Designación	Dimensiones			Volumen	Densidad	Peso parcial	Peso total	Sección	Observaciones
	Longitud	Latitud	Alto o grueso						
Arco diagonal de la nave lateral	1'00	0'40	0'60	0'24	2.100	504			Imposible saber con exactitud las dimensiones de la clave.
Clave						500			
Pirámide				0'46	2.100	966			
							1.970	J.	Imposible saber con exactitud el tizón de las piedras que forman el arístón. La dimensión que damos creemos que es la prudencial.
Arco diagonal de la nave lateral	1'00	0'40	0'70	0'28	2.100	588			
Bóvedas 2 de	1'30	0'80	0'15	0'31	2.100	661			
Soleras 2 de	2'00	0'40	0'05	0'08	2.100	168			
Tabiques 2 x 1'5 de	1'10	0'40	0'05	0'07	2.100	147			
							1.564	K.	
Arco diagonal de la nave lateral	1'00	0'40	0'70	0'28	2.100	588			Sobre las bóvedas se apoya un sistema de tabiques que a su vez sostienen una solera – terrado revestida exteriormente de una mezcla de cal y de arcilla cocida pulverizada destinada a impermeabilizarla. Hoy un sistema de cubiertas provisionales y de teja árabe, cubren esas terrazas.
Bóvedas 2 de	3'50	0'80	0'15	0'84	2.100	1.764			
Soleras 2 de	2'00	0'75	0'05	0'15	2.100	315			
Tabiques 2 x 1'5 de	2'00	0'70	0'05	0'21	2.100	441			
							3.108	L.	
Arco diagonal de la nave lateral	1'00	0'40	0'80	0'32	2.100	672			
Bóvedas 2 de	3'40	0'80	0'15	0'81	2.100	1.701			
Soleras 2 de	3'00	0'75	0'05	0'22	2.100	462			
Tabiques 2 x 1'5 de	1'30	3'00	0'05	0'57	2.100	1.197			
							4.032	M.	
Arco diagonal de la nave lateral	1'00	0'40	0'80	0'32	2.100	672			
Bóvedas 2 de	4'50	0'80	0'15	1'08	2.100	2.268			
Soleras 2 de	2'60	0'75	0'05	0'19	2.100	399			
Tabiques 2 x 1'5 de	2'60	2'30	0'05	0'95	2.100	1.995			
							5.334	N.	

Arco diagonal de la nave lateral	1'00	0'40	1'10	0'44	2.100	924		
Bóvedas 2 de	2'10	0'80	0'15	0'50	2.100	1.050		
Soleras 2 de	2'00	0'75	0'05	0'15	2.100	315		
Tabiques 2 x 1'5 de	2'00	3'20	0'05	0'96	2.100	2.016		
							4.305	O.
Arco diagonal de la nave lateral	1'00	0'40	3'00	1'20	2.100	1.520		
Bóvedas 2 de	3'10	0'80	0'15	0'73	2.100	1.520		
Soleras 2 de	1'80	0'75	0'05	0'07	2.100	147		
Tabiques 2 x 1'5 de	1'10	4'70	0'05	0'77	2.100	1.617		
							4.817	P.

Como son 2 aristonos que juntan sus esfuerzos en un mismo punto, es necesario proceder a hacer su combinación (reacción = 18.002) antes de incorporarlos al trazado general (véase planta).

Arco total nave lateral

Reacción 28.000 Kilogramos

Designación	Dimensiones			Volumen	Densidad	Peso parcial	Peso total	Sección	Observaciones
	Longitud	Latitud	Alto o grueso						
Aro total de la nave lateral	1'00	0'70	1'60	1'12	2.100	2.352			Este botarel sirve complementariamente para el paso del agua pluvial.
Bóvedas	1'10	3'60	0'15	0'59	2.100	1.239			
Tabiques 2 de	2'00	3'60	0'06	0'86	2.100	1.800			
Solera	1'00	3'60		3'60	200	720			
							6.111	A.	
Aro total de la nave lateral	1'00	0'70	2'20	1'54	2.100	3.234			
Bóvedas	1'15	2'50	0'15	0'43	2.100	903			
Tabiques 2 de	2'50	2'50	0'06	0'75	2.100	1.575			
Solera	1'00	2'50		2'50	200	500			
							6.212	B.	
Aro total de la nave lateral	1'00	0'70	3'00	2'10	2.100	4.410			
Bóvedas	1'40	1'70	0'15	0'36	2.100	756			
Tabiques 2 de	3'20	1'70	0'06	0'65	2.100	1.365			
Solera	1'00	1'70		1'70	200	340			
							6.871	C.	
Aro total de la nave lateral	1'00	0'70	4'50	3'15	2.100	6.615			
Bóvedas	2'20	0'70	0'15	0'23	2.100	485			
Tabiques 2 de	4'50	0'70	0'15	0'38	2.100	798			
Solera	1'00	0'70		0'70	200	140			
							8.038	D.	
Aro total de la nave lateral	0'30	0'70	5'80	1'21	2.100	2.567			
							2.567	E.	
Contrafuerte	1'15	1'80	2'60	5'38	2.100	11.398			
							11.398	S.	
Idem	2'00	1'80	1'50	5'40	2.100	11.340			
							11.340	T.	

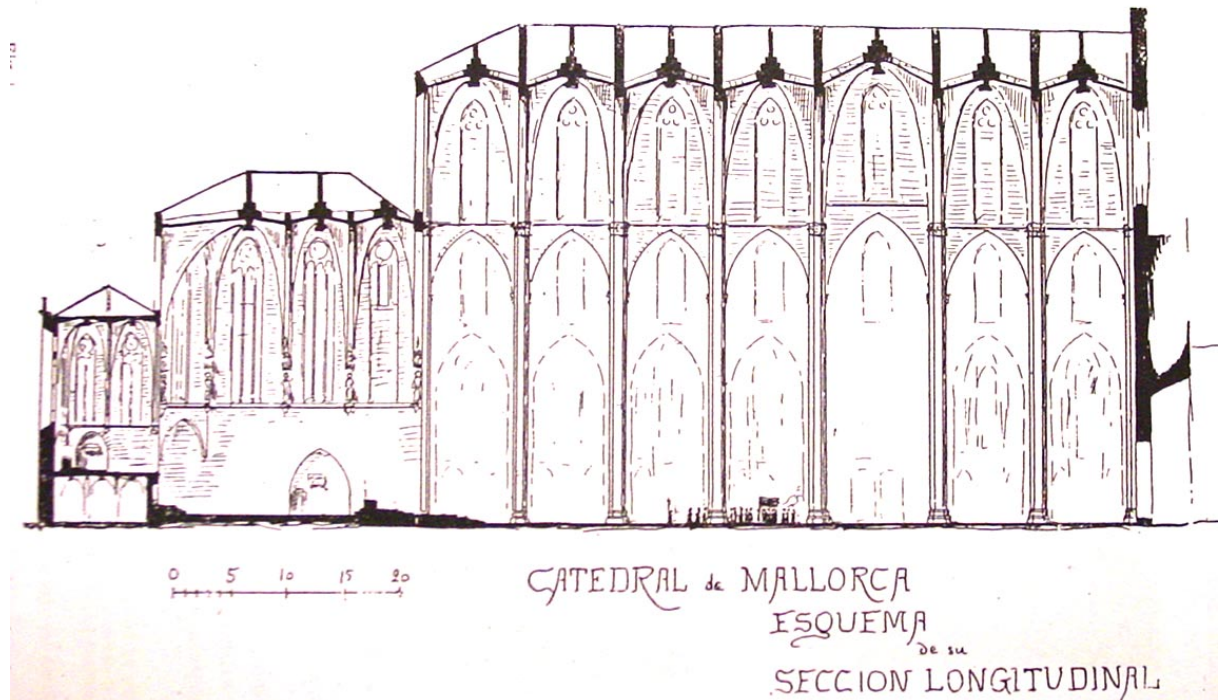
En esta sección la resultante del trazado anterior se combina con la de los dos botareles y después con los pesos siguientes, habiéndose, en este punto, reducido a la mitad ($I^m/n = 1.000 \text{ k}$) la escala de fuerzs, a fin de no salirse de los límites del dibujo.

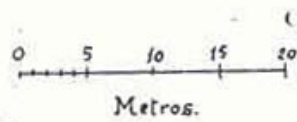
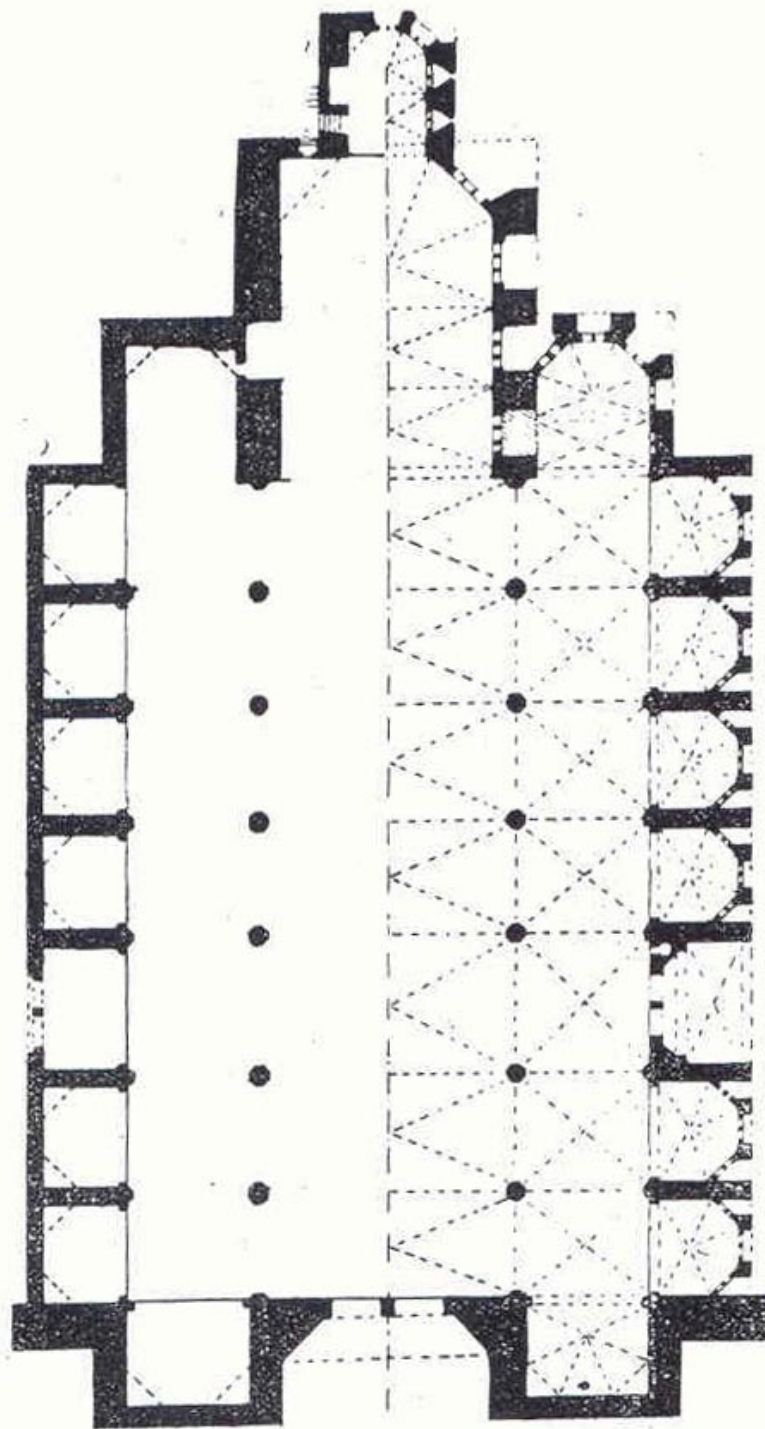
Contrafuerte	2'00	1'80	20'00	72'00	2.100	151.000		
							151.000	U.
Idem	2'00	1'80	31'00	111'60	2.100	234.360		
							234.360	V.

La última resultante es de 677.000 kilogramos y produce al nivel del suelo una presión de 17 kilogramos por centímetro cuadrado.

En cuanto a las presiones provenientes de los aristones de la nave lateral (9) no tienen la situación conveniente para ser combinadas al trazado general. Ha bastado combinar a ellas un peso de 26.460 kilogramos ($3,50 \times 1,80 \times 2,00 \times 2100$) provenientes del trozo de contrafuerte que se puede considerar que carga en el punto (10) para que cambie completamente la dirección. Se ha creído inútil el continuar el trazado de este polígono, ya que es visible que sus esfuerzos no han de influir, ni remotamente para nada, en la estabilidad del contrafuerte.

Fig. 11.- La Catedral de Mallorca está constituida por tres edificios colocados a continuación unos de otros.





CATEDRAL de MALLORCA

ANNEX 4.2

CONFERÈNCIA DE SUGRANYES SOBRE LA SAGRADA FAMÍLIA

Disposició estàtica del Temple de la Sagrada Família

ANTECEDENTS

La disposició estàtica que actualment està estudiada per al Temple de la Sagrada Família, no ha nascut per casualitat, ni an ella s'hi ha arribat a la impensada, sino que és filla de molts anys de treball esmerçats en alliberar la estructura gòtica dels seus defectes més capitals.

Aixís doncs, aquesta disposició que ens ocupa, és un pas més, un nou avençament en la llarga evolució constructiva que començant en la basílica coberta amb encavallades de fusta; culmina en les grans catedrals gòtiques.

No ens entretindrem en historiar aqueixa evolució, per ésser sobradament coneguda; tant sols al objecte de facilitar la comparació, i fixar les fites del camí recorregut, presentarem en esquema els jocs de forces en les estructures d'una basílica amb coberta de fusta, d'una catedral romànica de cinc naus, d'un altra de gòtica i finalment, de la del Temple de la Sagrada Família.

La comparació d'aqueixos esquemes, ens farà veure clarament la relació de continuïtat que té la estructura del Temple amb els seus antecedents i a la vegada la superioritat d'aquella sobre aquests, de manera que quedarà clarament demostrada l'afirmació que feiem suara, de que la disposició estàtica del Temple de la Sagrada Família és un nou pas en l'evolució de l'arquitectura cristiana, i pas donat en ferm i en avant, puig recull les qualitats de cada un dels tipus anteriors, afegint-hi una nova disposició, que el determina i caracteritza; el que fa que no sigui una repetició més o menys afortunada de tipus i disposicions abants d'ara realitzats, sino que crea una nova individualitat, un nou tipus, una nova anella en la cadena interminable de la perfecció de les obres humanes.

LES ESTRUCTURES ANTERIORS

En la ràpida comparació d'estructures que anem a fer, ens atindrem tant sols als temples de planta basilical, puig an aquesta agrupació pertany el de la Sagrada Família.

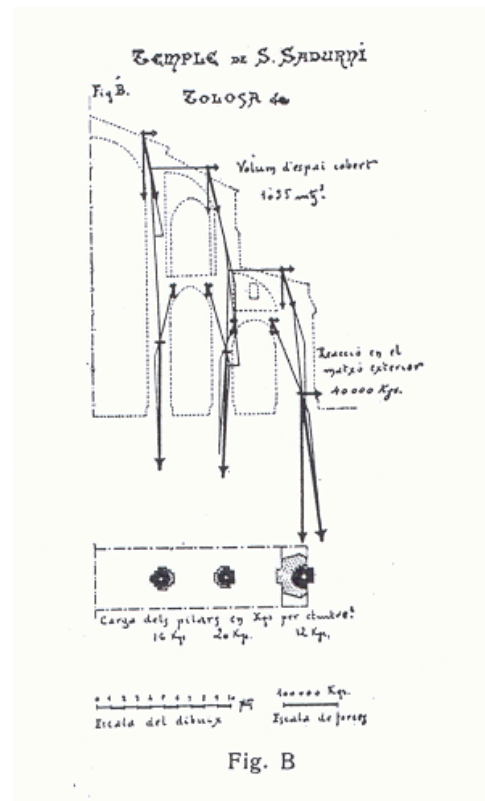
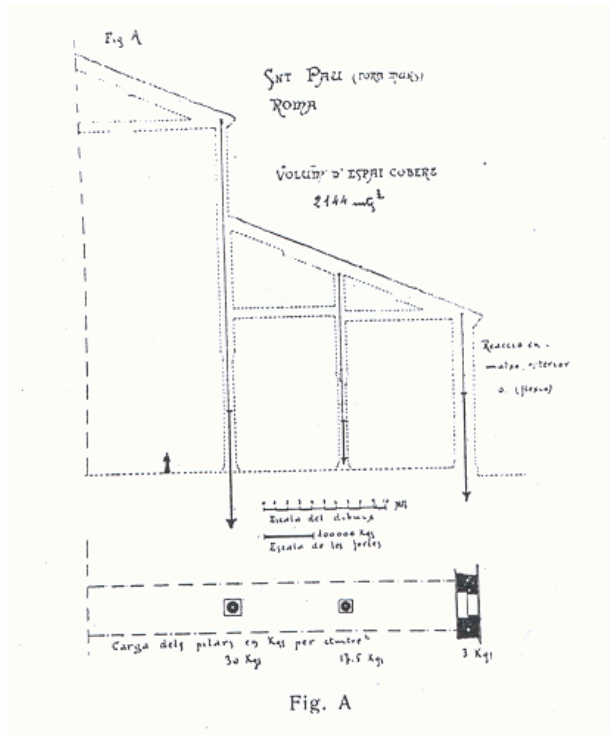
Els temples escollits per a portar endavant aquesta comparació, son representatius cada un de tot un sistema, i poden sens dubte qualificar-se de construccions mestres, puig al condensar-se en cada un d'ells l'essència de tota una sèrie d'assaigs anteriors, han sigut feconds en ensenyances, que, degudament aprofitades, són les que han donat vida al sistema d'equilibri que tractem de presentar.

A més, els edificis-tipus que s'han escollit, tenen les condicions de semblança que's precisa per a que l'evolució es fassi palesa, i a fi de que la comparança entre ells sigui fàcil, els esquemes han sigut dibuixats a la mateixa escala, tant en les forces com en les mides.

Els esquemes que's presenten pertanyen a la basílica de Sant Pau, fora murs de Roma; a l'església de Sant Sadurní de Tolosa, i a la Catedral de Colònia, els quals són tots, com el Temple de la Sagrada Família, esglésies de cinc naus.

LA BASÍLICA

L'estructura basilical, és simplicíssima, puig tant en la coberta exterior, com en la interior (artesonats) emprava com a material resistent la fusta, i aquesta estava disposada formant vigues i encavallades, disposicions que no produeixen reaccions horitzontals o que les produeixen tant insignificants, que pràcticament són negligibles, carregant per tant els pesos verticalment sobre les columnes; això fa que aquestes puguin ésser de poc diàmetre, un metre per a les de la nau central i 0'80 per a les de les naus laterals, i això amb amplituts de nau de 24 metres. Aquesta estructura i aquests materials que amb tanta senzillesa permetien cobrir espais tant grans tingueren de ser abandonats per les causes de destrucció de tots conegudes. La Fig. A, esquema de la secció transversal de Sant Pau, mostra abastament la simplicitat d'aquesta estructura basilical.



EL TIPUS ROMÀNIC

Efecte dels freqüents incendis en les basíliques cobertes totalment en fusta, es pensà substituir aqueix material per la pedra, al menys en les cobertes interiors, que es convertiren en voltes, continuant-se emprant la fusta en els elements resistents de la coberta exterior, aminorant-se així els perills de l'incendi, encara que sense fer-los desaparèixer totalment.

Després d'un llarg període de tantejos i provatures, unes reexides, altres fracassades, s'arribà a concretar l'estructura del temple romànic, de la qual presentem com a tipus la Fig. B, esquema de la secció de Sant Sadurni de Tolosa.

Basta comparar les figures A i B per a notar les grandíssimes diferències que separen una estructura de l'altra. Els espais coberts s'han reduït considerablement, en canvi la quantitat de material esmerçada en cobrir aquests reduïts espais és extraordinàriament més crescuda; l'amplitud de les naus s'ha fet inferior a la meitat, i la massa de construcció s'ha fet cinc o sis vegades major. La lleugeresa i simplicitat de la basílica romana s'han convertit en pesantor i complicació, les cargues que en aquella anaven directament a terra, en l'església romànica han de recórrer una llarga trajectòria, puig a causa de les expansions produïdes per les voltes s'han hagut d'introduir altres elements que contrarrestin aqueixes expansions i fassin que les resultants es verticalitzin el suficient per a

estar contingudes dins dels pilars que es preté que siguin absolutament verticals. Essent la volta de la nau central un canó seguit reforçat amb arcs torals, el contrarrest es verifica per una doble bateria de voltes també en canó seguit i en quart de cercle que porten les reaccions horitzontals fins als robusts matxons exteriors els quals amb el seu enorme pes asseguren la estabilitat de la construcció.

EL TIPUS GÒTIC

Desentrotllant els principis establerts en l'estructura que acabem de veure i afinant les solucions dels problemes que d'ella s'originen, s'arriba a la concreció d'una nova disposició estàtica, la que dona naixença a les grans catedrals gòtiques, aqueix miracle d'equilibri, com han sigut repetidament qualificades.

La Fig. C, presenta l'esquema de la secció de la Catedral de Colònia, la qual té totes les grans qualitats i tots els greus defectes de totes les del seu tipus.

Comparant les Figs. B i C, es veu desseguida que les dugues disposicions estàtiques són essencialment la mateixa, i això no obstant, la Catedral de Colònia té una esbeltesa i unes proporcions que són molt lluny de les de Sant Sadurní; i és que *tot* s'ha afinat, la volta no és en canó seguit, sino que per mitja dels torals i aristons concentra les cargues i les expansions en punts determinats, donant aixís amples espais neutres en els quals s'hi han obert els grans finestrals que han *tornat* al temple la claror que per atendre a la solidesa, se li havia robat en els edificis del grup romànic. Les dugues bateries de voltes en canó seguit que havien de contrarrestar la volta també seguida de la nau central, han pogut ésser substituïdes per dos ordres d'arcs botants que apuntalen els punts on se concentren les expansions, alleugerint aixís notablement les masses de construcció i permetent per tant augmentar les amplades de les naus i principalment les alsades que es fan extraordinàries.

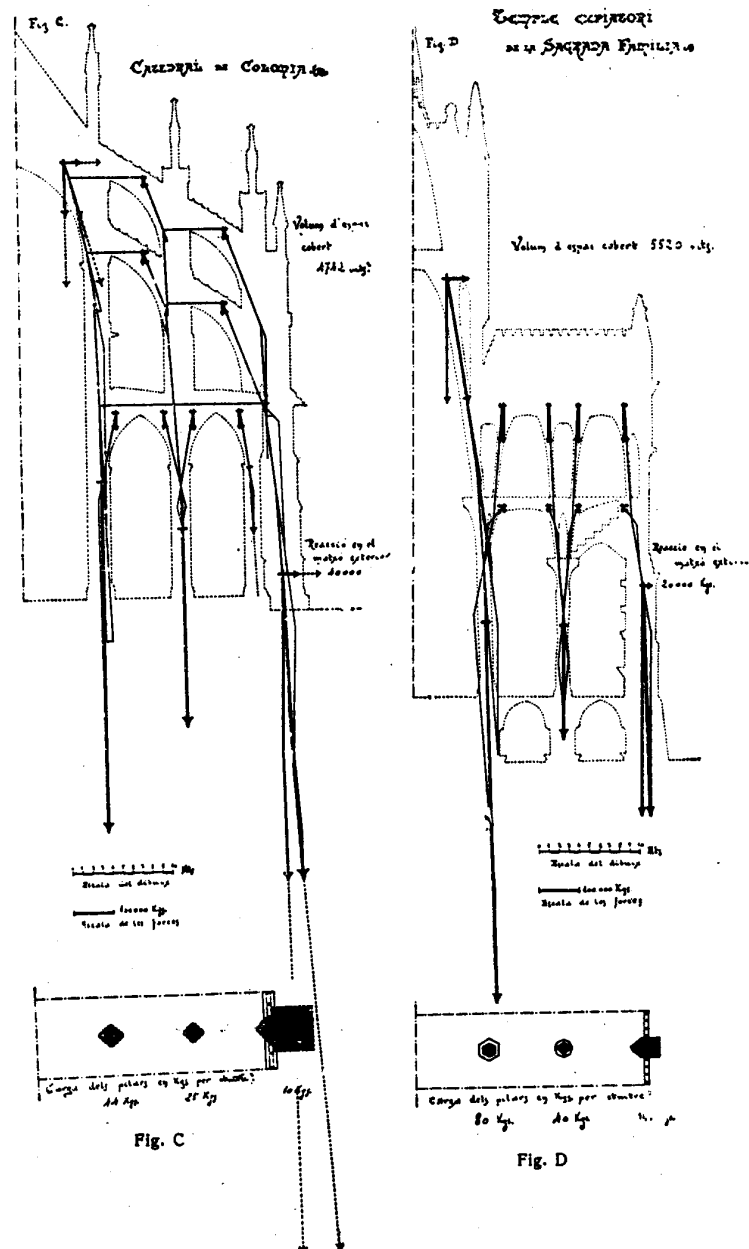
Indubtablement que els edificis d'aqueix tipus tenen una estructura més fina, més lleugera, més aèria que els del tipus romànic, però en contra d'aqueixes aventatges, damunt dels seus precedents, tenen greússims inconvenients i defectes, que en cert sentit els posen per dessota d'aquells.

Tant en el tipus romànic com en el gòtic, són elements essencialíssims de la estabilitat, les voltes i'ls botarells de contrarrest, puig sense aqueixos o aquelles, l'edifici no podria subsistir; en els edificis de tipus romànic aqueixes voltes de contrarrest que junt amb els amples, macissos i rabassuts matxons i contraforts, asseguren l'estabilitat de la volta de la nau central, formen un conjunt unit, un tot compacte i solidari amb una considerabilíssima massa de construcció que els hi dona ampla garantia contra les causes naturals o artificials de destrucció; en canvi, en els edificis de tipus gòtic, tots aqueixos elements, vitals, essencialíssims per a la subsistència dels mateixos, queden reduïts a elements isolats, sense solidaritat, sense que puguin ajudar-se o substituir-se en cas necessari, formant aqueixos atrevits i finissims botarells i aqueixos elegants i aguts pinacles, que amb ses lleugeríssimes masses, queden al exterior, exposats a tot5 els perills, que ja naturalment per acció dels elements o ja artificialment per ma de l'home treballen per la destrucció.

EL TEMPLE DE LA SAGRADA FAMÍLIA

L'estructura gòtica, que com acabem de veure, essencialment és la mateixa dels temples romànics, s'ha anat repetint sense variació fins a l'actualitat. Empro en el Temple de la Sagrada Família, aprofitant les ensenyances que es dedueixen dels diversos sistemes d'equilibri empleats anteriorment, s'ha procurat cercar un nou sistema, que salvant els inconvenients que tenien aquells, aprofités les avantatges que cada un té sobre'ls seus precedents.

L'estructura actualment projectada, no és la primera que per a dit Temple s'ha estudiat, si bé des dels primers tantejos, s'ha anat a modificar la disposició gòtica. 'En el primer estudi complet de l'estructura del Temple, resolt allà per l'any 1898, aquesta si bé era essencialment compresa dins del tipus gòtic, puig es mantenia la verticalitat de les columnes, no obstant suprimia els botarells, peraltant els aristons de les naus central i laterals, al objecte de disminuir les reaccions horitzontals i sobre tot per a lograr que la curva de pressions de la nau central vingués a compasar-se amb les de les naus laterals sense ajuda dels botarells a l'arrancada dels arcs d'aqueixes naus, la Fig. E donarà una lleugera idea d'aquesta primera disposició. Però com que no hi ha mal que per bé no vingui, la manca de cabals, que ha fet portar a la construcció una vida precària i esllanguida, ha donat temps per a refer i estudiar de bell nou les solucions abans projectades, i d'aquesta revisió, teta una vintena d'anys després, ha nascut la disposició actualment projectada, en la qual es torna a la simplicitat basilical, dintre del que hi cap naturalment, per les radicals diferències en la manera de ser cobert l'edifici, puig aquest serà cobert. tant en les voltes com en la coberta exterior, per materials pètris.



Basta mirar la Fig D, que dona l'esquema de la disposició estàtica del nostre Temple, per a veure que aquí com en la basilica, cada columna soporta la part de coberta que li correspon, amb independència de les altres, i de manera que l'enorme pes de la nau central, al igual que el de les naus laterals, van directament a terra i sense necessitat de recórrer el llarg i complicat camí a través d'arcs botants i contraforts, que hem vist era la característica del tipus gòtic, poguent per tant ésser suprimits aquests elements.

I aquí rau principalment l'importància del sistema que tractem de presentar. La comparació de les figures C i D, ens declara immediatament la superioritat de la disposició estàtica del Temple de la Sagrada família, puig el seu diagrama de forces, dona una sensació de repòs i tranquil·litat que satisfà l'ànim, en canvi, al fixar la vista en la secció de la Catedral de Colònia, aquesta sensació de repòs desapareix, puig la simplicitat d'aquell joc de forces, es converteix en una complicació d'accions i reaccions, la naturalitat es torna artífici; el joc de les forces és una combinació enginyosa i rebuscada, però l'ànim se sent poc satisfet, és més, causa espant el considerar que la permanència del magestuós edifici depèn tant sols de que no es rompi un fil d'aqueix complicat teixit de forces que constitueixen el seu organisme, i sobre tot espanta, al pensar que la major part d'aqueix teixit queda al exterior i sense protecció.

La supressió dels botarells i contraforts s'ha lograt senzillament donant a la columna la inclinació de la resultant de la composició dels pesos que damunt d'ella graviten, és exactament el que fa el tronc d'un arbre corpulent que

s'inclina segons siguin les masses de fullatge que les rames van a sostenir. En tots els estils arquitectònics la columna s'ha lligat amb l'idea de l'arbre, i s'ha comparat manta vegada, l'interior d'una Catedral gòtica, amb els boscos en els que els arbres entrellacen llurs brancades, però en realitat aqueixes comparacions, tant sols tenien un cert valor literari, abstracte, puig les columnes i voltes, no tenien essencialment res que veure amb l'arbre, ja que aqueix constitueix una individualitat, que subsisteix independentment dels altres que'l circumden, puig té en la seva pròpia disposició tots els elements d'equilibri sense necessitat d'ajudes ni puntals, tot el contrari del que passa en els pilans i voltes d'una Catedral gòtica.

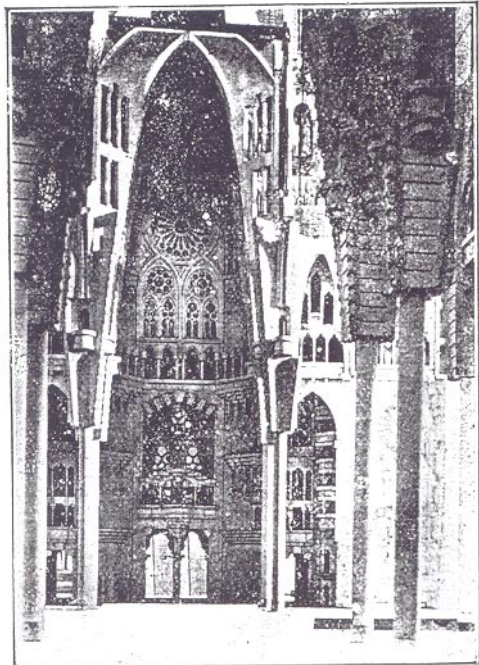


Fig. E

Aqueixa individualitat independenta que agrupa'ls elements que la componen i'ls disopa de manera que s'equilibrin per ells mateixos, és precisament la columna en la disposició estàtica adoptada en el Temple de la Sagrada Família, per això mai aqueixa idea del arbre lligada a la columna ha tingut una realitat tant justa i tant essencialment adaptada com la tindrà en el Temple el dia que aqueix sigui construït.

De manera que la disposició estàtica adoptada, si be és nova dins de la construcció, no ho és dins de la Naturalesa, puig aqueixa existeix des del tercer dia de la Creació, amb això ja veieu que la tradició en que s'apoya és quelcom de respectable.

Altres aventatges i no petites té aquesta estructura en relació amb la disposició gòtica; tots sabem que el complicat joc d'accions i reaccions que constitueix l'essència d'aquesta, tendeixen a fer que les forces resultants passin per les columnes o pilans verticals que suporten les voltes de les naus central i laterals, no conseguint però mai que aquestes resultants coincideixin, amb l'eix del pilar, puig mentres aqueix és vertical, aquelles són sempre més o menys inclinades, el que vol dir que els centres de percussió no coincideixen mai amb el centres de gravetat de les seccions

dels pilars, i per tant que la distribució de compressions damunt d'aqueixes seccions, es fa sempre de manera irregular, i en detriment de la regular fatiga dels materials que les integren; aqueix inconvenient queda salvat en la disposició que ens ocupa, puig la coincidència de la direcció de l'eix de la columna amb la resultant de la composició dels pesos, fa que la compressió es reparteixi d'una manera uniforme, obtenint aixís el màxim rendiment de la matèria del pilar, i per tant poguent donar an aqueix la secció estrictament necessària per a suportar la carga que ha de rebre.

Sobradament conegudes, són les dificultats que existeixen per a determinar les curves de pressions dels arcs i voltes i sobre tot per a lograr que aquestes curves aixís com les resultants de llurs composicions, s'armonitzin amb les formes dels arcs i pilars que les han de contenir, puig sapiguda és la constant baralla i discrepància que hi ha entre les unes i les altres. Aquestes dificultats i aquests desacorts, desapareixen per a convertir-se en facilitats i harmonies en el sistema adoptat en el Temple de la Sagrada Família.

MOSTRA DEL SISTEMA PROJECTAT

Com a mostra del sistema que s'ha emprat per a determinar la intensitat i situació de les cargues que actuen damunt d'una columna i deduir de la posició d'aquestes la inclinació de la mateixa, anem a presentar com exemple, una de les columnes de la nau central.

La Fig. F mostra de front i de perfil la situació dels pesos i llurs composicions amb les resultants de les mateixes. En aquesta disposició, les cargues es van a sostenir directament per mitja de columnes que es ramifiquen formant el brancatge, a l'objecte d'anar a buscar les masses de construcció en aquells punts en els quals podem considerar que aquestes es concentren, és a dir en llurs centres de gravetat, per això és precís que aquelles masses de construcció que han d'ésser sostingudes, formin un conjunt unit, concrecionat podríem dir, per tant que els punts d'apoi puguin reduir-se, an aqueix objecte, les dites masses, voltes i cobertes especialment, han d'ésser armades, obtenint-se aixís un altra aventatge grandíssima, i és la facilitat i economia en llur construcció, puig queden suprimit els cindris i molasses que tant la dificulten i tant la encareixen. En el sistema adoptat, com que les

superfícies emprades per a la formació de les voltes i cobertes, són totes elles reglades, hiperboloids i paraboloids hiperbòlics, les generatrius i directrius que han de servir per a la formació de les mateixes, seran a la vegada l'armadura que els donarà unitat i resistència a la flexió, poguent esmerçar tot el que costarien les complicades bastides i cimbratges, en fer una decoració esplendorosa que ha de portar el nostre Temple a igualar o superar les més riques decoracions bizantines, i això com hem dit, amb una evident economia de temps, de treball i de diner.

Un altre dia potser parlarem d'aqueix aspecte de la forma i de la decoració en el Temple de la Sagrada Família, anem ara al que és el nostre objecte, i per això examinem la Fig. F; per a no fer-la confosa, s'han suprimit les composicions elementals necessàries per anar a la determinació dels centres de gravetat dels diversos elements constructius, per altra part, aquestes composicions són senzillíssimes i qualsevol podria refer-les.

Es comença per a fer la cubicació dels distints elements que componen la coberta, i feta aquesta cubicació, es determina la situació del centre de gravetat de cada un d'aqueixos elements, tenint així el pés i el punt d'aplicació d'aqueix pés per a cada un d'aquells elements, allavors es componen entre si i s'obté el centre de gravetat de la secció de coberta que gravita damunt de la columna que anem a estudiar.

Així en la Fig. F, tenim que els pesos elementals de la secció de coberta corresponent, estan situats en els punts 1. 2. 3. 4. 5. 6. i 7. i la seva intensitat i procedència és de:

1.- Paraboloid superior

$$\frac{1}{2}(8,5 \times 8,5 \times 0,45 \times 2000) = 32512 \text{Kgs.}$$

2.- Plans triangulars

$$2 \times \frac{24,20 \times 2,60}{2} \times 0,45 \times 2000 = 56628 \text{Kgs.}$$

3.- $2 \frac{1}{2}$ paraboloids junt al frontó

$$2 \times \frac{15,40 \times 4,70 \times 0,45 \times 2000}{2} = 65142 \text{Kgs.}$$

4.- Paraboloid interior

$$7,90 \times 4,20 \times 0,45 \times 2000 = 29862 \text{Kgs.}$$

5, 6 i 7.- Sostres interiors

$$2,70 \times 7,50 \times 0,45 \times 2100 = 19131 \text{Kgs.}$$

$$4,20 \times 7,50 \times 0,50 \times 2100 = 33075 \text{Kgs.}$$

$$6,20 \times 7,50 \times 0,50 \times 2100 = 48825 \text{Kgs.}$$

Aquests pesos que en la secció transversal es projecten en els punts indicats, en la secció longitudinal estan dividits per meitat i situats simètricament a cada banda de l'eix de la columna, corresponent als punts 1'. 2'. 3'. 4'. 5'. 6'. i 7'.

La composició d'aquests pesos dona en la secció longitudinal els centres de gravetat A' i en la transversal, el A, en quin punt hi suposem aplicat el pes de la coberta, o sigui

$$A' = 142586 \text{ Kgs.} \quad A = 285172 \text{ Kgs.}$$

El mateix que hem fet per als elements de la coberta, ho farem per als elements de les voltes de la nau central i tindrem el pes i la situació del seu punt d'aplicació de cada un d'aquests elements, els quals corresponen als números 8. 9. 10, 10', 11 i 12 en la secció transversal i 8' 9' 10' 10'' 11' i 12' en la longitudinal; la intensitat i procedència d'aquests pesos és:

8.- $\frac{1}{2}$ del hiperboloid central

$$\frac{2\pi \times 2,78 \times 10 \times 0,20 \times 2000}{6} = 11639 \text{Kgs.}$$

$$9.- 2 \cdot \frac{1}{4} \text{ hiperboloids davant del finestral}$$

$$\frac{2\pi \times 2 \times 7,50 \times 0,20 \times 2000}{2} = 18840 \text{Kgs.}$$

$$10.- 2 \cdot \frac{1}{4} \text{ hiperboloids junt al frontó}$$

$$\frac{2\pi \times 2,2 \times 6 \times 0,20 \times 2000}{2} = 16572 \text{Kgs.}$$

10' – Sostre dintre les voltes

$$\left[(7,50 \times 7,50) - \left(\frac{2\pi}{4} \times 0,90^{-2} + \frac{\pi \times 0,80^{-2}}{2} + \frac{2\pi}{4} \times 0,80^{-2} \right) \right] \times 0,30 \times 2100 = 33390 \text{Kgs.}$$

11 i 12 – Conos assintòtics

$$\left(\frac{1}{2} + \frac{2}{4} \right) (\pi \times 2 \times 2,90) \times 0,20 \times 2000 = 7120 \text{Kgs.}$$

$$2 \times \frac{1}{2} (\pi \times 2 \times 2,90) \times 0,20 \times 2000 = 7120 \text{Kgs.}$$

La composició d'aquests pesos dona'ls centres de gravetat B' en una secció i B en l'altra, i en aquests punts suposem concentrats els pesos de les voltes o siguin

$$B' = 47340 \text{ Kgs.} \quad i \quad B = 94680 \text{ Kgs.}$$

Ara bé, la composició dels centres A i B, i A' i B', ens dona els punts C i C', que són els centres de gravetat dels pesos de la coberta i voltes altes. Per aqueix punt ha de passar doncs el pilar que ha de sostenir aquests pesos, de manera que en els punts C i C' hi tenim aplicades respectivament unes forces verticals de:

$$C = 379852 \text{ Kgs.} \quad C' = 189926 \text{ Kgs.}$$

An aquests pesos hi hem de sumar el pes propi dels pilans de sosteniment dels mateixos; aquests pilans els considerem de secció circular, però per a determinar llur pes, fem la secció quadrada pel diàmetre que hem trobat; així tenim, pilans de sosteniment de la coberta de la nau central, en maó

$$\frac{142586}{15} = 9506 \text{ ctm.}^2 = 111 \text{ ctm.}$$

De diàmetre

Pes d'aqueix pilar,

$$1,23 \times 7,50 \times 1800 = 16596 \text{ Kgs.}$$

per tant,

coberta	142586
pilar	16596
	159182 Kgs.

Pilar, sosteniment, voltes i coberta nau central, també en maó, en la part interior de les voltes,

Pes superior	159182
Voltes	47340
	206522 Kgs.

$$\frac{206522}{16} = 13768 \text{ ctm.}^2 = 133 \text{ ctm. de diàmetre}$$

pes d'aqueix pilar

$$1.76 \times 3.50 \times 1800 = 11088 \text{ Kgs.}$$

Coberta, voltes i pilar	206522
Pilar	11088
	217610 Kgs.

Carga total considerada en el punt C' i en el punt C serà el doble de la mateixa o sigui 435220 Kgs.

Els pesos del frontó venen situats en els punts 13 i 14, i 13' i 14' i són:

$$2 \left(\frac{2 \times 1.20}{2} \times 13 \right) \times 2400 = 74880 \text{ Kgs.}$$

$$2 \left(\frac{2 \times 9}{2} \times 1.20 \right) \times 2400 = 51840 \text{ Kgs.}$$

La composició d'aquests dos pesos ens dona els punts D i D' centres de gravetat del frontó en les dugues seccions, essent

$$D = 126720 \text{ Kgs.} \quad D' = 63366 \text{ Kgs.}$$

El pes total del finestral en el seu centre de gravetat E, procedeix de la següent cubicació:

$$2 \left(\frac{2 \times 1.20}{2} \times 4.50 \right) \times 2400 = 25920 \text{ Kgs.}$$

$$2 \times \frac{2}{3} \left(\frac{1.80 + 2.80}{2} \times 4.60 \times 1.20 \times 2400 \right) = 41940 \text{ Kgs.}$$

$$2 \times \frac{2}{3} (3.70 \times 7.70 \times 1.20 \times 2.400) = 109376 \text{ Kgs.}$$

$$1.60 \times 7.50 \times 1.20 \times 2.400 = 34560 \text{ Kgs.}$$

és a dir:

$$E = 211790 \text{ Kgs.} \quad E' = 105895 \text{ Kgs.}$$

i la composició dels pesos D i E, i D' i E' ens donarà'l centre de gravetat i pes total del frontó i finestral que estarà situat en els punts F i F' i serà:

$$F = 338510 \text{ Kgs.} \quad F' = 169255 \text{ Kgs.}$$

Procedint per a la coberta i voltes de la nau lateral, de manera semblant a com ho hem fet per a la coberta i voltes de la nau central, obtindrem els centres de gravetat I i I'. Així els pesos i centres de gravetat elementals, corresponents a la part de coberta de la nau lateral que interessa a la columna que estem estudiant estan situats en els punts 15, 16, 17 i 18, i 15', 16' 17' i 18' i procedeixen de les següents cubicacions:

15.– Paraboloid junt al finestral

$$2 \frac{1}{2} (4.40 \times 7 \times 0.45 \times 2000) = 27720 \text{ Kgs.}$$

16.- Paraboloid junt a la coberta

$$2\frac{1}{2}(6.80 \times 3.20 \times 0.45 \times 2000) = 19384 \text{ Kgs.}$$

17 i 18.- Plans

$$\left. \begin{array}{l} 2\frac{1}{2}(5 \times 0.80 \times 0.45 \times 2000) = 3600 \text{ Kgs.} \\ 2\frac{1}{2}(5.40 \times 8.50 \times 0.45 \times 2000) = 41310 \text{ Kgs.} \end{array} \right\}$$

$$2 \times 2.20 \times 2.20 \times 0.50 \times 2100 = 10164 \text{ Kgs.}$$

La composició d'aquests pesos, ens dona com a centres de gravetat de la part de coberta corresponent, els punts G i G'.

$$G = 63138 \text{ Kgs.} \quad G' = 31069 \text{ Kgs.}$$

Els centres de gravetat elementals corresponents a les voltes, els tenim en els punts 19 i 20 i 19' i 20', i les forces o pesos en ells aplicats són:

19.- Part de 4 hiperboloids

$$3.14 \times 2.25 \times 2.70 \times 0.20 \times 2000 = 7628 \text{ Kgs.}$$

20.- Pla sobre voltes

$$3.75 \times 3.75 \times 0.50 \times 2100 = 14763 \text{ Kgs.}$$

La composició d'aquests pesos elementals ens dona'l pes total de es voltes en els punts H i H', essent:

$$H = 44782 \text{ Kgs.} \quad H' = 22391 \text{ Kgs.}$$

Ara bé, els punts G i H i G' i H' es componen i ens donen els punts I i I', en els quals suposem concentrats els pesos totals de la coberta i voltes de la nau lateral en la part que carrega damunt de la columna que estem estudiant.

Al pes aplicat en els punts I i I' hem d'afegir-hi el pes propi del pilar de sosteniment de la coberta, com hem fet al tractar dels punts C i C', de manera que tindrem:

$$\frac{31969}{15} = 2071 \text{ ctms.}^2 = 52 \text{ ctms.} \quad \text{De diàmetre, i com a pes d'aqueix pilar:}$$

$$0,27 \times 5.20 \times 1800 = 2527 \text{ Kgs.}$$

$$\text{I per tant } I = 111974 \text{ Kgs.} \quad I' = 55987 \text{ Kgs.}$$

Ara bé, els pesos o forces verticals que s'han de compondre són els C, F, I en una projecció i els C', F', I', en l'altra.

Al fer aquesta composició, pot succeir que ens convingui que la resultant final passi per un punt determinat, per exemple, el punt d'arrancada de la columna en el pla de terra, qual punt pot estar fixat prèviament, o bé, pot convenir-nos que les diverses branques es reunixin en punts que fixarem. En el primer cas, composariem les forces aplicades en els punts indicats i aquesta composició ens donaria un centre de gravetat de les forces composades i la unió d'aqueix punt amb el prèviament fixat coma arrencament de la columna, serà la que indicarà l'inclinació de la mateixa, produint-se una tracció o una compressió que serà precís anular valent-nos de la simètrica, produïda per la columna corresponent a l'altra banda de la nau.

En el cas que'ns ocupa, en lloc de fixar el punt d'arrancada de la columna, s'han fixat els punts de concurrència de les diverses branques que han de donar com a resultat la posició del tronc o sigui la columna; havent procedit com s'indica en la figura.

Examinem primer la secció transversal, les forces E i I ens convé que siguin concorrents en el punt M, per a aconseguir això mantindrem vertical la força E fins al punt L, on la desviarem segons la direcció LM, desviació que produirà una petita component horitzontal que serà anulada per l'armadura del pla horitzontal que passa per aqueix punt; la força I la desviarem segons la direcció IM i aquesta serà la inclinació de les columnes de sosteniment de les voltes i coberta de la nau lateral, aquestes columnes es perllongaran fins arribar al punt G, al objecte de que per mitjà del pla horitzontal que passa per aqueix punt pugui ésser anulada la component horitzontal que la desviació de la força I produirà.

Com que els pesos propis de les columnes de sosteniment de les cargues E i I són molt petits en relació amb aquestes cargues podem considerar que no faran variar sensiblement les direccions de les forces LM i IM, si bé aquests pesos els tindrem en compte per a sumar-los a les dites forces, al fer la seva composició en el punt M, aixís en aqueix punt compondrem les dues forces

$$IM = 119750 \text{ Kgs.} \quad \text{i} \quad LM = 361838 \text{ Kgs.}$$

Obtenint aixís la resultant $Mm. = 481588 \text{ Kgs.}$

El pes de les columnes de sosteniment de les voltes, deduït del volum de les mateixes columnes, es

$$\frac{55987}{40} = 1399 \text{ cms.}^3 = 43 \text{ cms.}$$

de diàmetre, aquestes columnes essent de Montjuich pesen $0.18 \times 9 \times 2400 = 3888 \text{ Kgs.}$

i com que són dugues que en la secció que examinem es confonen en una projecció, tindrem

$$IM = 111974 + 7776 = 119750 \text{ Kgs.}$$

El pes corresponent a les columnes de sosteniment del finestral, frontó i trifori, serà:

$$\frac{169255}{40} = 4231 \text{ ctms.}^2 = 74 \text{ ctms.}$$

de diàmetre, i per tant $0.54 \times 9 \times 2400 = 11664 \text{ Kgs.}$ i com que són també dugues columnes confoses en una de sola projecció, tindrem

$$LM = 338510 + 23328 = 361838 \text{ Kgs.}$$

De manera que la resultant Mm , serà:

$$Mm = 481588 \text{ Kgs.}$$

i'l pilar de sosteniment d'aquesta carga tindrà'l diàmetre i pes següents, essent de granet,

$$\frac{481588}{80} = 6019 \text{ ctms.}^2 = 88 \text{ ctms.}$$

de diàmetre.

$$0.77 \times 6.50 \times 2700 = 13230 \text{ Kgs.}$$

que's sumaran a la carga anterior, donant un total de 494818 Kgs.

La força C, ens convé que vingui a reunir-se a la Mm , de manera que sobre'l capitell de la columna única final quedi espai per a dues columnes que han de formar la primera bifurcació, per això la força vertical C la convertim en l'inclinada Cc, produint-se una comonent horitzontal que s'anul·larà per intermig del pla horitzontal de l'interior de la coberta. L'inclinació de a força Cc, vindrà modificada pel pes propi de les columnes de sosteniment d'aqueixa carga, que, en aqueix cas, per la llargada de les mateixes, cal tenir en compte.

Aixís en els punts J i K tenen lloc les composicions de les forces inclinades, i de les verticals dels pesos propis de les columnes, obtenint finalment la resultant Kk.

Els diàmetres i pesos d'aqueixes columnes, és com segueix:

Carga en el punt J

$$\frac{217610}{40} = 5440 \text{ ctms.}^2 = 84 \text{ ctms.}$$

De diàmetre en pedra de Montjuich, per tant

$$0.70 \times 13 \times 2400 = 21840 \text{ Kgs.}$$

i com que en la secció que ara considerem es projecten confoses dugues columnes, la carga total en dit punt és de
 $435220 + 21840 + 21840 = 478900 \text{ Kgs.}$

Carga en el punt K

$$\frac{478900}{80} = 5984 \text{ ctms.}^2 = 88 \text{ ctms.}$$

de diàmetre en pedra de granet,

$$0.77 \times 15 \times 2700 = 31185 \text{ Kgs.}$$

i per tant, la carga total serà de $478900 + 31185 = 510085 \text{ Kgs.}$
 que és la resultant Kk.

Les dugues forces Mm i Kk es creuen en el punt N i allí farem la seva composició que'ns donarà la resultant Nn qual resultant ens indicarà l'inclinació de la columna única que soporta tots els pesos superiors. Aquesta resultant vindrà modificada, encara que molt lleugerament pel pes propi de la mateixa columna, obtenint finalment la resultant definitiva que serà Nn'.

La carga que actua en la part superior d'aqueixa columna única, és la suma de les forces Mm i Kk més el pes del capitell, que serà:

$$2.50 \times 2 \times 2 \times 2700 = 27000 \text{ Kgs.}$$

essent per tant aqueixa carga igual a : $494818 + 510085 + 27000 = 1031903 \text{ Kgs.}$
 que ens donarà, essent la columna de granet, una secció i pes de

$$\frac{1031903}{80} = 12899 \text{ ctms.}^2 = 129 \text{ ctms.}$$

de diàmetre

$$1.65 \times 15 \times 2700 = 67230 \text{ Kgs.}$$

per tant, la carga a la base de la columna serà de $1031903 + 67230 = 1099134 \text{ Kgs.}$

a la qual correspondrà una secció de

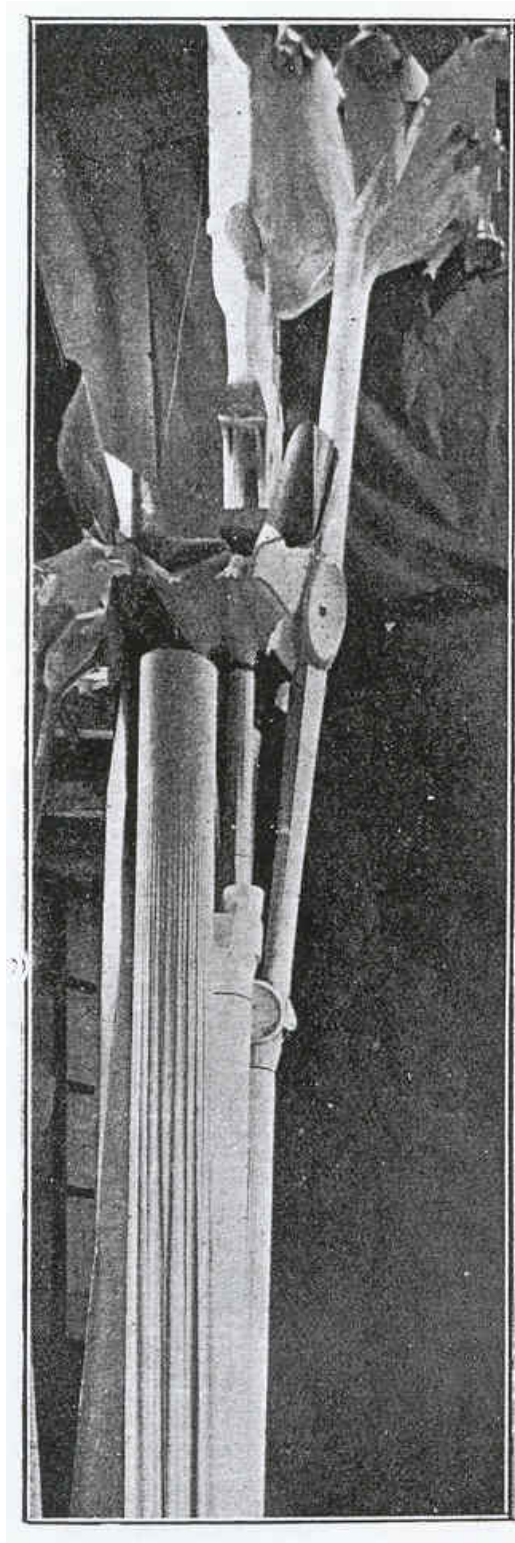
$$\frac{1099134}{80} = 13739 \text{ ctms.}^2 = 133 \text{ ctms.}$$

de diàmetre.

Amb el lleuger anàlisi que acabem de fer, veiem les grandíssimes facilitats que amb aqueix sistema poden obtenir-se. Les components horitzontals resultants de les inclinacions de les forces verticals, són insignificants, com pot comprobar-se amb l'examen de la figura, i són fàcilment anul·lades com hem dit per l'armadura que forçosament hem d'empregar. Com que la distribució de pesos és simètrica respecte a l'eix de la columna en la secció longitudinal, en aquesta secció, aquella sens projectarà vertical, de manera que l'inclinació de la columna única s'efectuarà en un sol sentit, no aixís les ramificacions d'aqueixa, les quals tindran les inclinacions en dos sentits com es veu examinant la secció longitudinal de la figura; en aquesta, les forces C' es desvien de la vertical per a reunir-se i unificar-se a l'alsada de 30 mts., formant dos soports des d'aqueixa alçada de 30 mts. fins al pla interior de la coberta, i una sola des del nivell de 30 mts. fins al capitell de la columna única, situat a l'alçada de 15 mts.

Les forces F' es subdivideixen per a donar lloc als mainells i roses del finestral, tornant-se a reunir per anar a compondre amb les forces I' i arribar unificades a sobre'l capitell a l'objecte de compondre com hem vist amb la força K.

Les forces I' es desvien de la vertical prenent l'inclinació $I'G'$ fins al pla situat a 30 mts. en qual punt cambien l'inclinació, prenent la $H'K'$ i unificant-se en el punt de concurrència per a compondre-se amb les forces que provenen del trifori, finestral i frontó, arribant unificades a sobre'l capítell per a compondre-se com acabem de veure.



Amb el que deixem dit, queden paleses les facilitats que poden obtenir-se amb el sistema exposat, i aquestes facilitats que tanta llibertat donen per a projectar noves estructures, s'han obtingut senzillament, per l'alliberament de la preocupació de la verticalitat de les columnes, preocupació que no podia tenir altre motiu que la facilitat de la construcció de les mateixes, i aqueixa facilitat, tampoc es perd, puig tant sols en raríssims cassos, la vertical del centre de gravetat caurà fora de la base de la columna, ço que li faria perdre la pròpia estabilitat durant la construcció, per ésser les inclinacions resultants molt petites, entre totes les estudiades per al Temple de la Sagrada Família, no n'hi ha cap en que això passi.

Creiem que és suficient l'anteriorment exposat per a tenir idea del sistema d'equilibri projectat per al Temple de la Sagrada Família, i qual exposició constitueix el motiu de les presents ratlles escrites sota la pressió d'insistents requeriments de volguts companys que portats de son bon desitj m'han empès en aqueixa tasca sense comptar amb la meua manca de condicions d'expositor.

Aqueixa nova concepció del sistema estàtic, que és fecondíssima en aplicacions, una de les quals, mal que bé, acabem d'exposar, comporta necessàriament l'adopció de formes distintes a les fins are utilitzades, per als diversos elements que integren l'edifici, formes, que potser com hem dit, un altre dia intentarem analitzar, però entretant, i per a que serveixi de compensació a l'aridesa de l'estudi que venim de fer, presentem unes vistes que donen idea de l'element complert, podent-se admirar en elles la simplicitat, riquesa i harmonia d'aqueixes formes, les quals han de venir avalorades extraordinàriament per la magnífica decoració simbòlica i expressiva que en gran part les ha de recobrir sense alterar-les.

D. SUGRAÑES

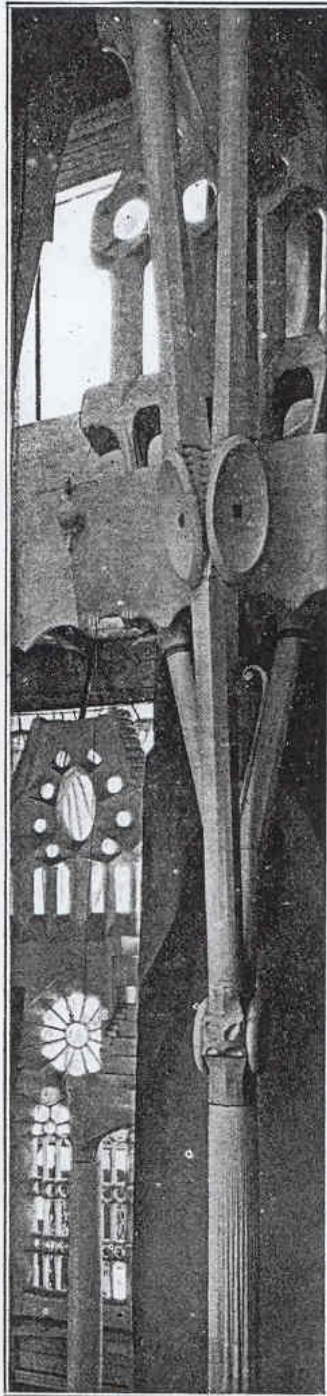


Fig. H
Vista d'escorç de la columna i ses
ramificacions

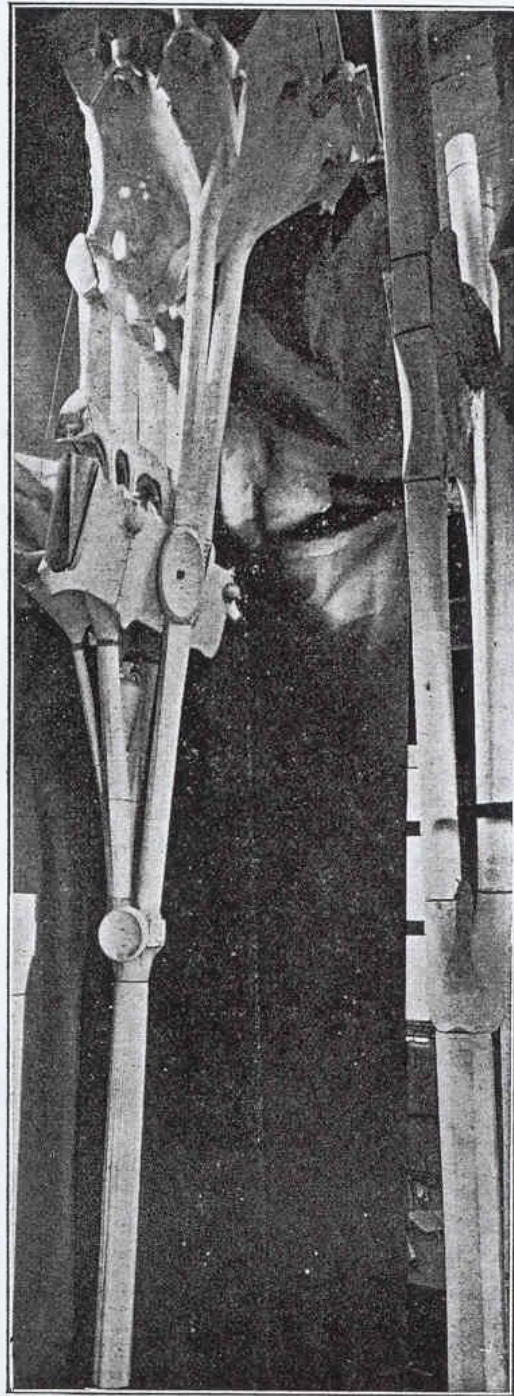
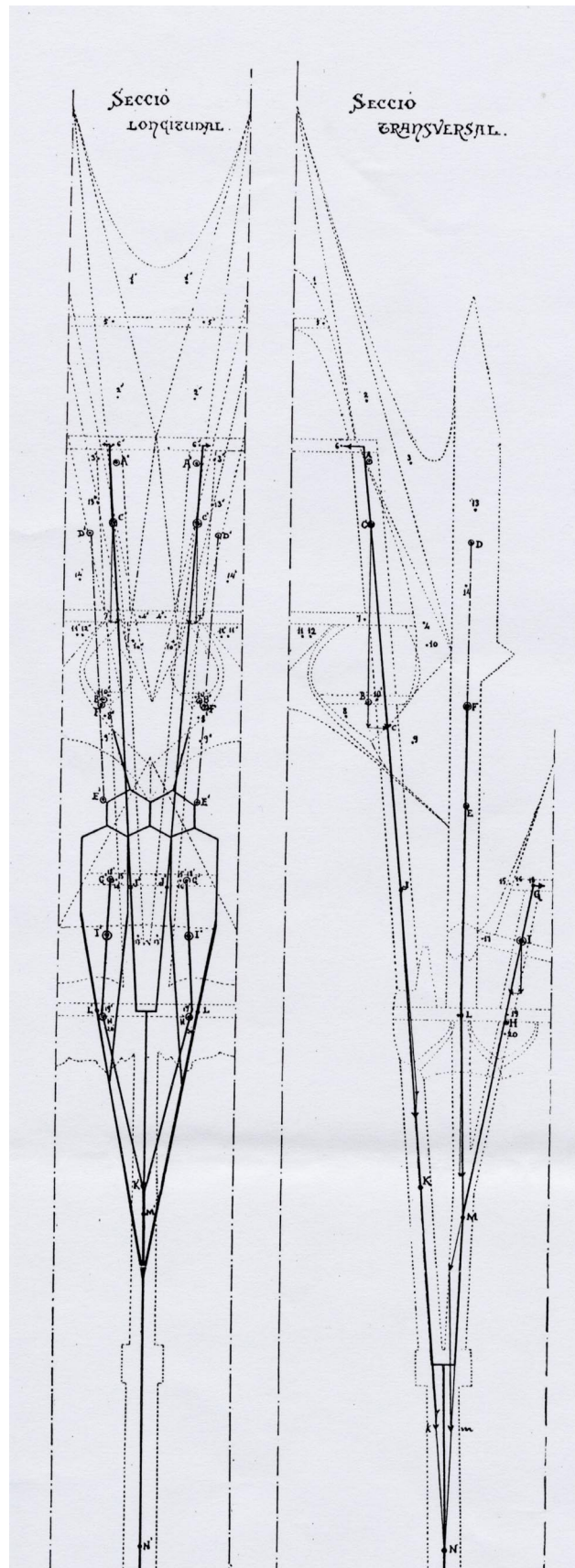


Fig. I
Vista diagonal de la columna i ses
ramificacions



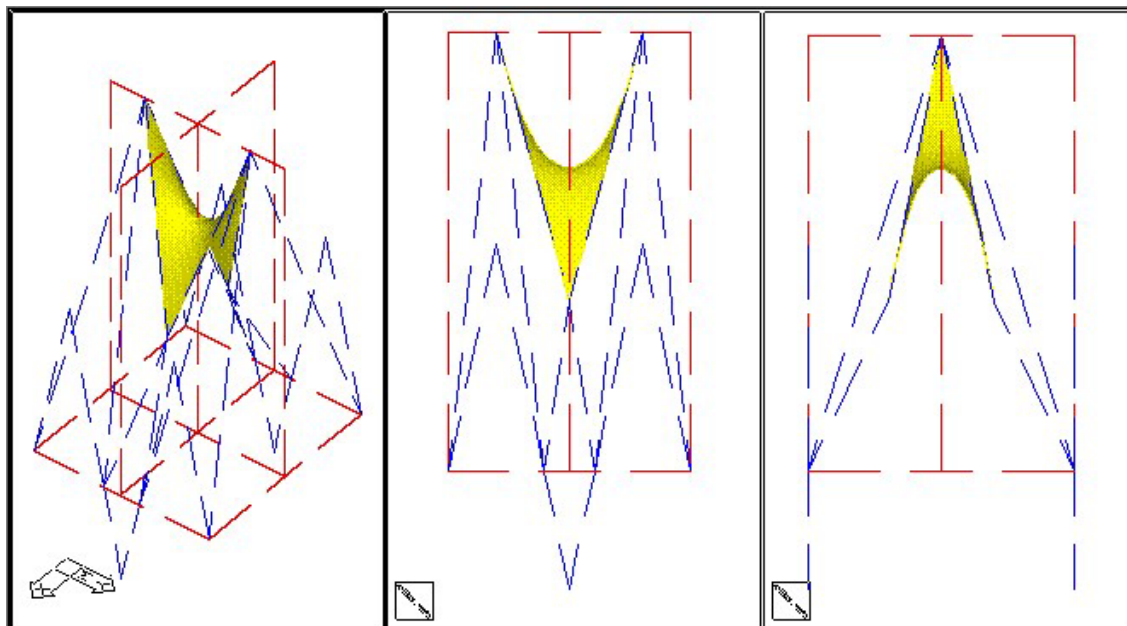
ANNEX 4.3

Comprovacions dimensionals dels cubicatges de D. Sugranyes.

En aquest annex adjuntem part de la nostra intensa recerca de l'origen de les xifres que D. Sugranyes presentà en la seva conferència sobre el càlcul d'estabilitat de les naus de la Sagrada Família. Cenyits a les primeres peces, exemplificadores, del càlcul de Sugranyes, la nostra anàlisi planteja el problema des de dos punts de vista. D'una banda modela les peces de nou per tal de poder treure mesures d'àrees i centres de gravetat amb precisió. D'altra banda mesura el model virtual en totes direccions i projeccions sobre els eixos o sobre els plans coordinats per tal d'intentar trobar alguna coincidència amb les xifres de Sugranyes.

Tenint en compte els escassos mitjans que disposaven aleshores, ens sorprèn l'alta precisió dels càlculs d'una banda, però d'altra banda, no hem trobat la raó de ser de les xifres que Sugranyes utilitza per mesurar les àrees. Els valors que Sugranyes utilitza en les seves expressions no corresponen a cap de les mesures que hem pogut obtenir del nostre model. És clar que són mesures aproximades, per a unes fórmules o expressions empíriques, però la realitat és que qui les utilitzà ho feu amb admirable precisió.

Peça 1 : Paraboloides central superior



Dades bàsiques per al modelat virtual 3D

Coordenades dels vèrtexs superiors:

X	Y	Z
0.00	3.75	69.00
0.00	-3.75	69.00

Coordenades dels vèrtexs inferiors:

X	Y	Z
2.80	0.00	55.00
-2.80	0.00	55.00

Dimensió màxima:

X	Y	Z
5.60	7.50	14.00

Àrea segons Sugranyes: $8.50 \cdot 8.50 = 72.25 \text{ m}^2$.Àrea segons model virtual 3D: 69.80 m^2 .Error absolut: 2.45 m^2 .Error relatiu: 3.51%

Centre de gravetat (1/4) segons Sugranyes:

X	Y	Z
0.90	1.10	61.70

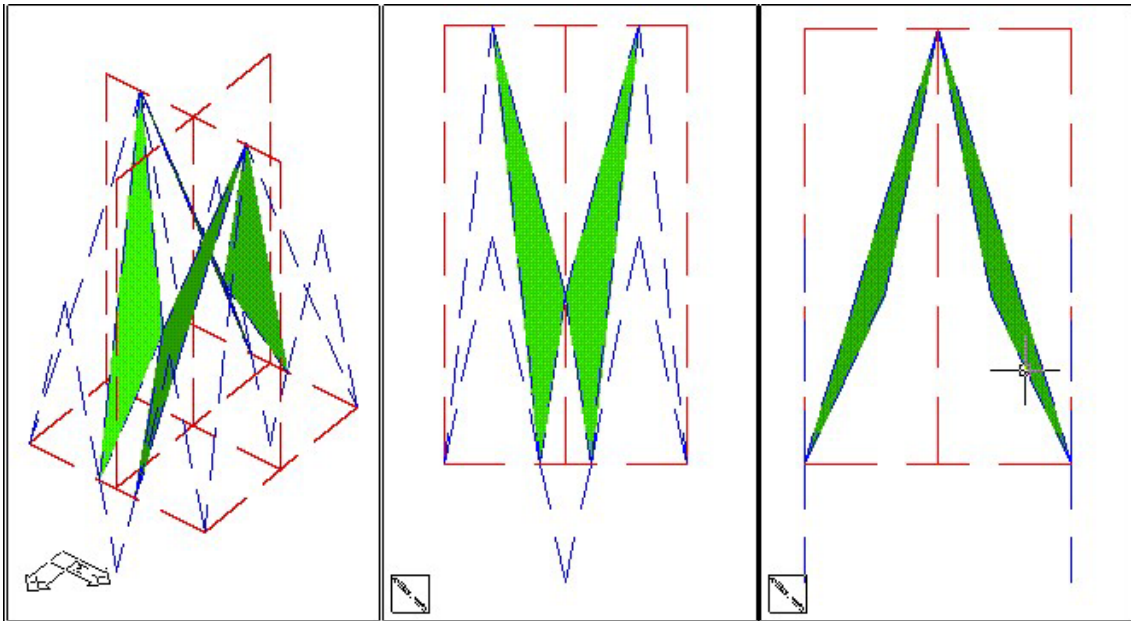
Centre de gravetat (1/4) segons model virtual 3D:

X	Y	Z
1.08	1.32	61.85

Error absolut: -0.18 m -0.22 m -0.15 m.

Error relatiu: 3.28 % 3.00 % 1.08 %

Peça 2 : Plans triangulars



Dades bàsiques per al modelat virtual 3D

Coordenades dels tres vèrtexs:

X	Y	Z
0.00	3.75	69.00
2.80	0.00	55.00
7.00	1.10	46.00

Dimensió màxima:

X	Y	Z
4.20	2.65	23.00

Àrea segons Sugranyes: $\frac{24.20 \cdot 2.60}{2} = 31.46 \text{ m}^2$.

Àrea segons model virtual 3D: 31.22 m^2 .

Error absolut: 0.24 m^2 .

Error relatiu: 0.77%

Centre de gravetat segons Sugranyes:

X	Y	Z
3.20	1.65	56.00

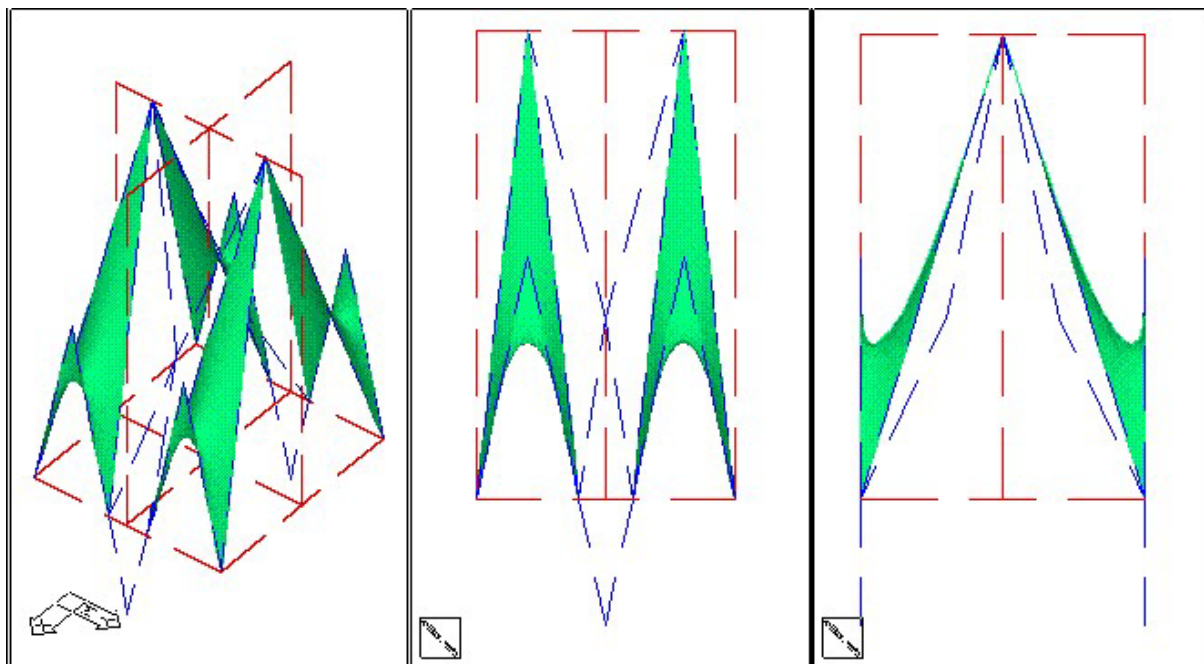
Centre de gravetat segons model virtual 3D:

X	Y	Z
3.27	1.62	56.67

Error absolut: -0.07 m 0.03 m -0.67 m .

Error relatiu: -1.67% 1.13% 2.91%

Peça 3 : Dos mitjos paraboloides junt al frontó



Dades bàsiques per al modelat virtual 3D

Coordenades dels vèrtexs superiors:

X	Y	Z
0.00	3.75	69.00
7.00	3.75	58.00

Coordenades dels vèrtex inferiors

X	Y	Z
7.00	1.10	46.00
7.00	6.40	46.00

Dimensió màxima:

X	Y	Z
7.00	5.30	23.00

Àrea segons Sugranyes: $15.40 \cdot 4.70 = 72.38 \text{ m}^2$.

Àrea segons model virtual 3D: 66.66 m^2 .

Error absolut: 5.72 m^2 .

Error relatiu: 8.58%

Centre de gravetat (1/2) segons Sugranyes:

X	Y	Z
5.20	2.50	53.20

Centre de gravetat (1/2) segons model virtual 3D:

X	Y	Z
4.88	2.79	55.06

Error absolut: 0.32 m -0.29 m -1.86 m .

Error relatiu: 4.57% 5.47% 8.08%

Superfície d'un paraboloid hiperbòlic

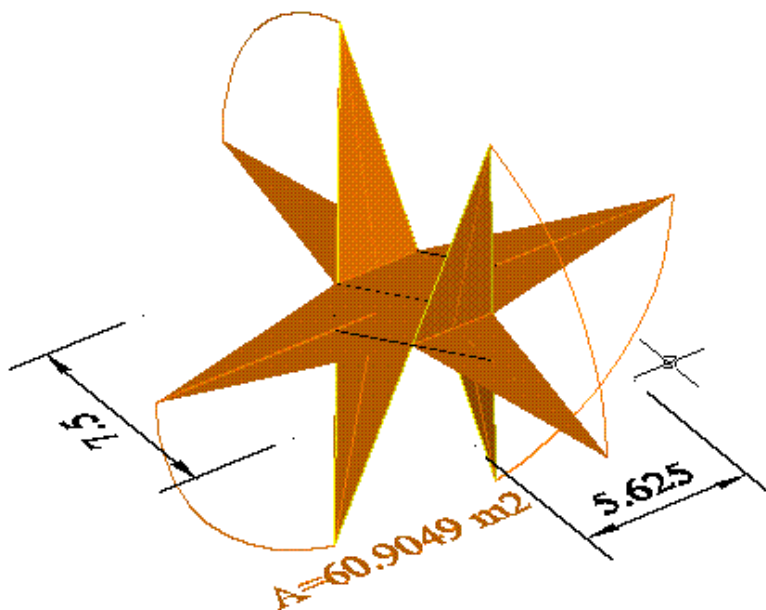
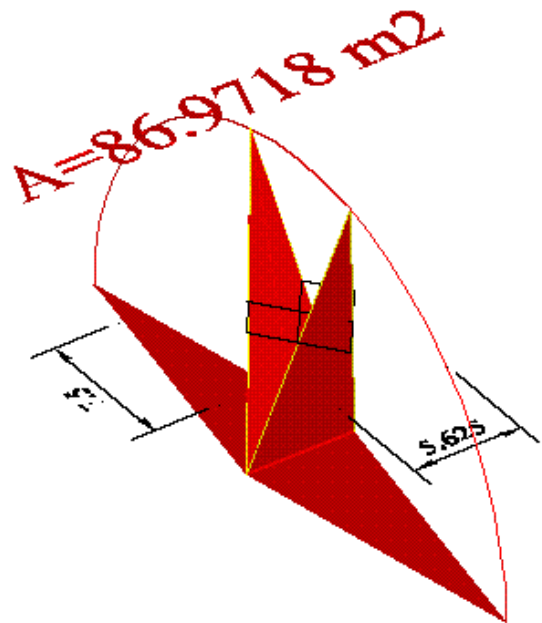
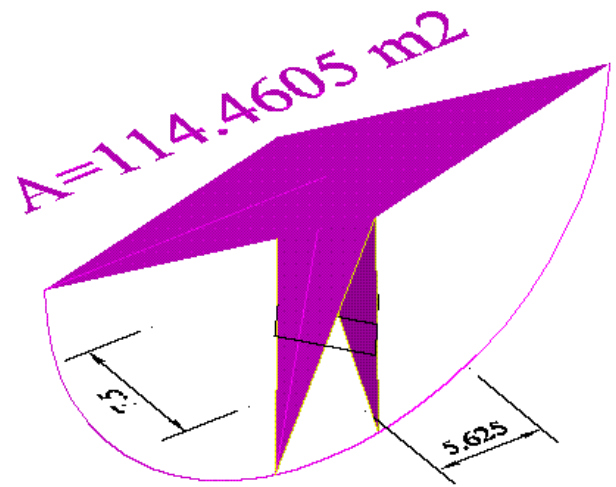
A continuació oferim algunes investigacions sobre diferents possibles aproximacions a la superfície del paraboloid central de coberta, la Peça 1.

1a) Aproximació per dos triangles.

Si prenem els triangles sobre el costat llarg tenim un error per excés de $114.46 \text{ m}^2 - 69.80 \text{ m}^2 = 44.66 \text{ m}^2$ que representa un 63.98 %. És un error molt alt.

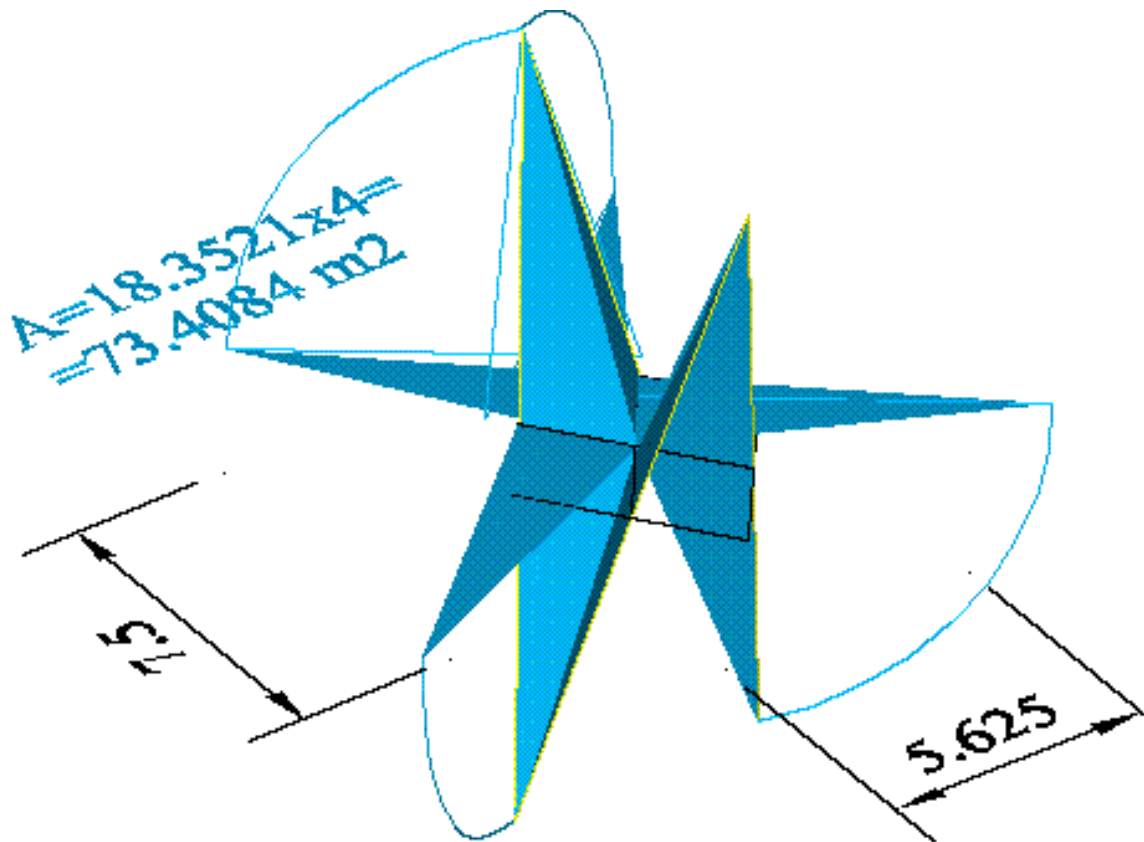
Si prenem els triangles sobre el costat curt tenim un error per excés de $86.97 \text{ m}^2 - 69.80 \text{ m}^2 = 17.17 \text{ m}^2$ que representa un 24.60 %. Segueix essent un error molt alt.

2a) Aproximació per un rectangle mitjà i quatre triangles.

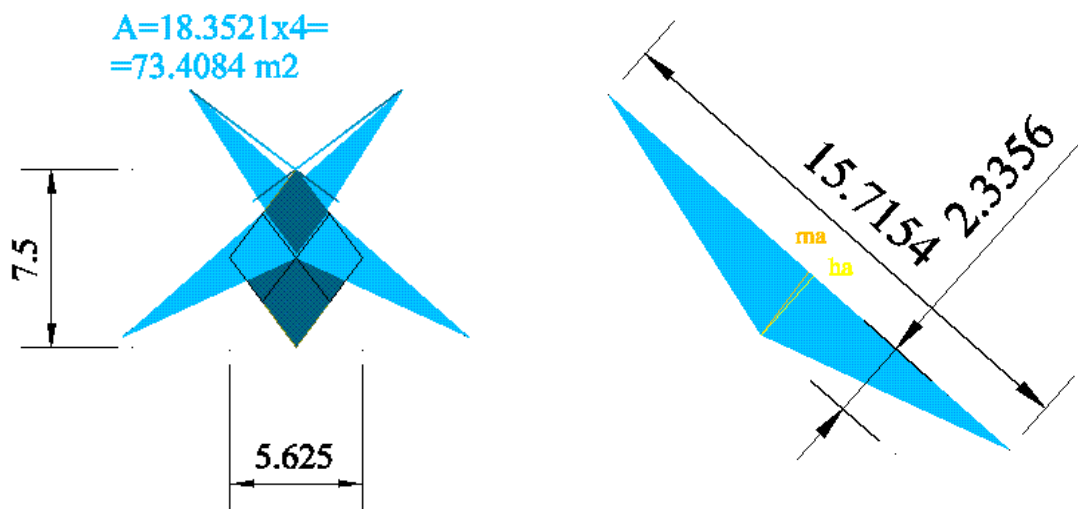


Aquesta aproximació és força més bona que les anteriors. En aquest cas l'error és per defecte de $60.90 \text{ m}^2 - 69.80 \text{ m}^2 = -8.90 \text{ m}^2$, que representa, encara un 12.75 % d'error relatiu.

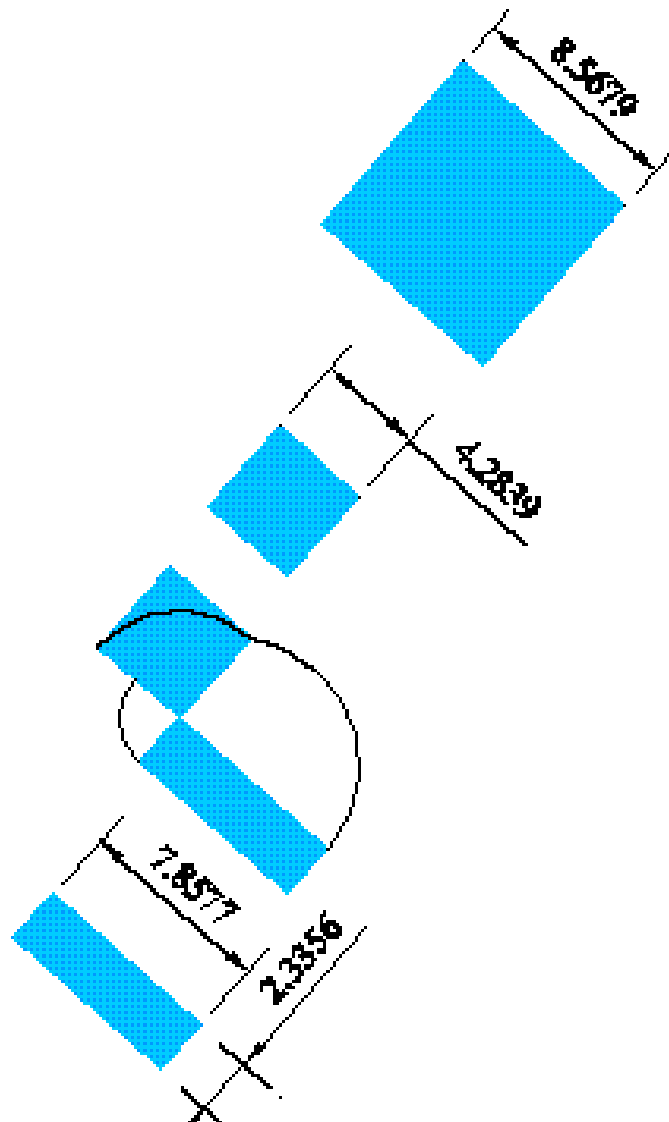
3a) Aproximació per 4 triangles.



Entre les possibles aproximacions senzilles que hem pogut imaginar, aquesta és la millor. L'error és per excés de $73.40 \text{ m}^2 - 69.80 \text{ m}^2 = 3.60 \text{ m}^2$, que representa tan sols un 5.15 % d'error relatiu.



En aquest cas, si considerem un d'aquests quatre triangles iguals i fem la seva quadratura, obtenim un quadrat de 4,28 x 4,28. Per tant, el seu doble és, aproximadament un quadrat de 8,50 x 8,50.



Aquesta ha estat l'única manera d'obtenir el perseguit valor de 8.50 x 8.50, una aproximació complexa i rebuscada de la superfície del paraboloides que no ens satisfà, ja que la quadratura tindria raó de ser en un paraboloides simètric a tots dos plans, i aquest cas, en planta es projecta com un rombe i no pas com un quadrat.

Així doncs, l'enigma resta encara per resoldre, sobretot, en els casos dels paraboloides no simètrics, com el de la peça 3, per exemple, on la quadratura deixa de tenir cap sentit.

Càlcul exacte de la superfície del paraboloid:

Després dels intents anteriors hem procurat trobar una expressió que donés la superfície del paraboloid a partir de les coordenades dels vèrtexs del quadrilàter guerx.

Per aconseguir-ho cal plantejar el problema amb totes les coordenades necessàries com a paràmetres que cal arrossegar fins al final de la integració de la superfície.

Expressió canònica d'un paraboloid hiperbòlic:

$$f(x, y, z) = P \cdot x^2 - Q \cdot y^2 + R \cdot z + S = 0$$

Com que

$$f(0, 0, 0) = 0 \Rightarrow S = 0$$

Si coneixem 4 punts, els vèrtex inferiors i els superiors,

$$\begin{aligned} A &= (a, 0, -c) = (2.8125, 0.00, -7.00) \\ A' &= (-a, 0, -c) = (-2.8125, 0.00, -7.00) \\ B &= (0, b, c) = (0.00, 3.75, 7.00) \\ B' &= (0, -b, c) = (0.00, -3.75, 7.00) \end{aligned}$$

$$f(A) = f(a, 0, -c) = P \cdot a^2 - Q \cdot 0 + R \cdot (-c) = 0 \Rightarrow -R = \frac{P \cdot a^2}{-c}$$

$$f(B) = f(0, b, c) = P \cdot 0 - Q \cdot b^2 + R \cdot c = 0 \Rightarrow -R = \frac{-Q \cdot b^2}{c}$$

$$\text{Prenent } R = 1 \text{ aleshores } \Rightarrow P = \frac{c}{a^2} \text{ i } Q = \frac{c}{b^2}$$

i per tant l'equació quedarà, en forma paramètrica:

$$f(x, y) = f\left(x, y, -\frac{c}{a^2}x^2 + \frac{c}{b^2}y^2\right)$$

El càlcul de la superfície d'aquesta funció sobre una determinada regió o domini serà la integral del mòdul del producte vectorial entre dos vectors tangents a la superfície i perpendiculars entre si, com ho són els de les dues derivades parcials.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \left(1, 0, \frac{\partial z}{\partial x}\right) = \left(1, 0, -\frac{2c}{a^2}x\right)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \left(0, 1, \frac{\partial z}{\partial y}\right) = \left(0, 1, +\frac{2c}{b^2}y\right)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x} \times \frac{\partial f}{\partial y} = \left(1, 0, -\frac{2c}{a^2}x\right) \times \left(0, 1, +\frac{2c}{b^2}y\right) = \left(+\frac{2c}{a^2}x, -\frac{2c}{b^2}y, 1\right)$$

$$\Rightarrow \left\| \frac{\partial f}{\partial x} \times \frac{\partial f}{\partial y} \right\| = \sqrt{\left(+\frac{2c}{a^2}x\right)^2 + \left(-\frac{2c}{b^2}y\right)^2 + 1} = 2c \sqrt{\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{1}{4c^2}}$$

$$\Rightarrow \text{Area} = \iint_D 2c \sqrt{\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{1}{4c^2}} \cdot dx \cdot dy$$

El domini, en el nostre cas, són tots els punts dins del rombe definit pels vèrtex $(a,0)$, $(-a,0)$, $(0,b)$ i $(0,-b)$ del pla XY ($Z=0$).

Com que existeix simetria central respecte del punt $(0,0,0)$ podem definir només el primer quadrant per obtenir un quart de la superfície total.

La recta que passa per $(a,0)$ i $(0,b)$ és

$$\begin{aligned}\vec{x} &= a + \lambda \cdot \vec{ab} \\ \Rightarrow (x, y) &= (a, 0) + \lambda \cdot (-a, b) \\ \Rightarrow \frac{x-a}{-a} &= \frac{y-0}{b} \Rightarrow y = b \cdot \left(\frac{x}{-a} + 1 \right) = \frac{-b}{a}x + b\end{aligned}$$

Per tant, un cop resolt els límits d'integració, l'expressió exacta de la superfície d'un paraboloides definit pels paràmetres a, b i c serà la que resulti de resoldre la integral doble:

$$\int_0^a dx \cdot \int_0^{-\frac{b}{a}x+b} 2c \cdot \sqrt{\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{1}{4c^2}} \cdot dy$$

La resolució d'aquesta integral de manera simbòlica no es possible ni amb els mitjans informàtics a l'abast (Math 2.1), l'expressió resultant obtinguda en funció dels paràmetres considerats, en el millor dels casos que la màquina no col·lapsi, ocupa desenes de pàgines. És molt lluny de la simplicitat del producte $K_1 \cdot K_2$ que fa servir Sugranyes.

Per tal que la màquina pugui resoldre aquesta integral cal una resolució no simbòlica, és a dir numèrica, sense paràmetres, substituïnt-los pels valors numèrics corresponents al cas concret que analitzem, sense generalitzar.

Aleshores el programa troba solució, però cal tenir en compte que ho fa utilitzant mètodes numèrics, per tant, és una aproximació, igual que l'obtinguda amb els programes de dibuix que hem utilitzat en fer el model.

Això demostra que les expressions senzilles utilitzades per Sugranyes són aproximades, no poden ésser exactes.

ANNEX 4.4

Mètodes d'Estàtica gràfica

Amb l'objectiu de trobar expressions que donessin aval a les operacions simplifiades que utilitza D. Sugranyes hem cercat en, llibres d'estàtica gràfica, mètodes gràfics i expressions numèriques per a calcular àrees i centres de gravetat de formes planes i de cossos a l'espai.

Malauradament, fora de la geometria plana no s'ha trobat res; res per tant que faci referència a paraboloides, hiperboloides, etc.

A continuació presentem un recull dels resultats d'aquesta recerca bibliogràfica pel que fa als mètodes gràfics i expressions numèriques per a calcular àrees i centres de gravetat de diferents formes planes.

Càlcul d'àrees:

triangle: $b \cdot h / 2$

quadrilàter: $d_1 \cdot d_2' / 2$
(d_2' projecció de la segona diagonal sobre la perpendicular a la primera diagonal)

sector circular: $\pi \cdot r^2 \cdot (\alpha / 2 \cdot \pi) = \alpha \cdot r^2 / 2$
(angle α en radians)

sector parabòlic (int.): $2/3 \cdot a \cdot b$

sector parabòlic (ext.): $1/3 \cdot a \cdot b$

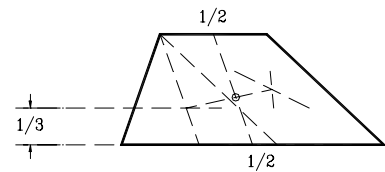
Càlcul de centres de gravetat:

triangle:
El baricentre és el centre de gravetat, és a $2/3$ de cada mediana, des del vèrtex.

paral·lelogram:
El baricentre és en el punt de tall de les dues diagonals.

trapezi:

Bàsicament es descriuen tres mètodes, descomposició en triangle més romboide, descomposició en dos triangles i un enginyós tercer mètode. Tots ells parteixen sempre que el baricentre se situarà sobre la recta que uneix els punts mitjos de les bases.

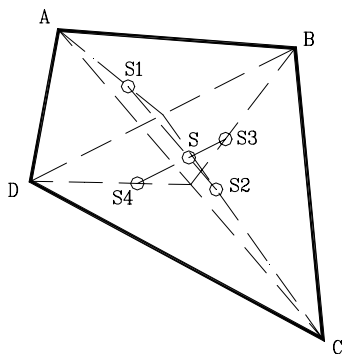
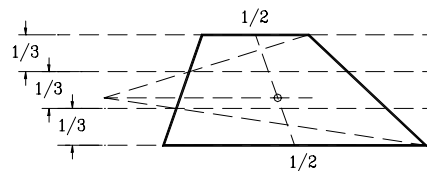
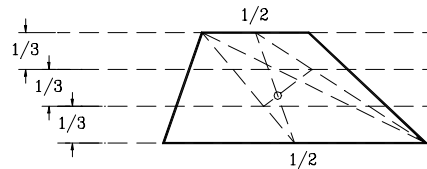


quadrilàter en general, trapezoide:

Es divideix el quadrilàter amb les diagonals, produint dues parelles de triangles ABC-ACD i ABD-BCD.

Es troben els baricentres d'aquests quatre triangles S1, S2, S3, i S4.

El baricentre final S és el punt d'intersecció de les rectes que uneixen els baricentres anteriors.

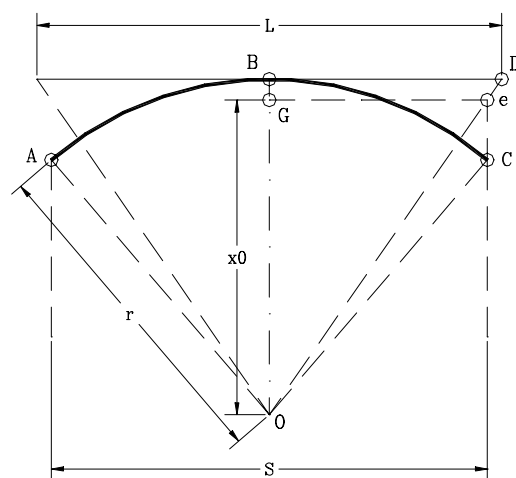


arc de circumferència:

Es tracta de trobar la distància x_0 des del centre O.

Com que es produeix la proporcionalitat següent: $x_0 / S = r / L$. Es traça l'eix de simetria i perpendicularment es desenvolupa el perímetre de l'arc L.

Es formarà un triangle isòceles dividit en dos triangles rectangles simètrics. L'hipotenusa d'aquest triangle rectangle és la recta de proporcionalitat, i sobre d'ella podem trobar el punt e, que projectat sobre l'eix ens dona la posició del centre de gravetat G, la distància x_0 .

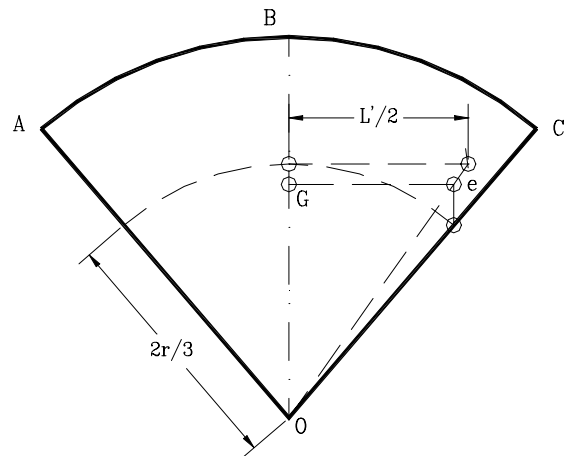


sector circular:

El baricentre del sector serà el mateix que el baricentre de l'arc que passa pels 2/3 del radi.

Es traça la circumferència de radi $r' = 2 \cdot r / 3$ i el triangle rectangle de proporcionalitat amb el semiperímetre baricèntric, L' .

Es troba el baricentre G seguint el procediment anterior.

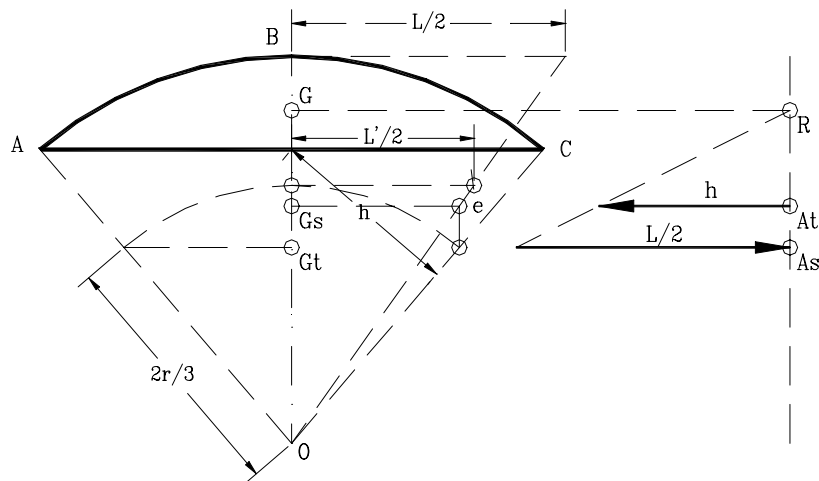


segment circular:

Cal trobar el baricentre del sector circular complert i restar-li el que correspon al triangle. És una suma de forces de sentit contrari. Partint per l'eix de simetria podem considerar la meitat de les parts.

Per trobar els mòduls dels vectors que representen l'àrea, el pes, de cada part, podem fer-ho establint les següents relacions:

<i>sector</i>	<i>és a</i>	<i>triangle</i>	
$\frac{\alpha \cdot r^2}{2}$	\Leftrightarrow	$\frac{h \cdot r}{2}$	$\leftarrow \alpha \cdot r \text{ és l'arc}$
$\alpha \cdot r$	\Leftrightarrow	h	
$l/2$	\Leftrightarrow	h	



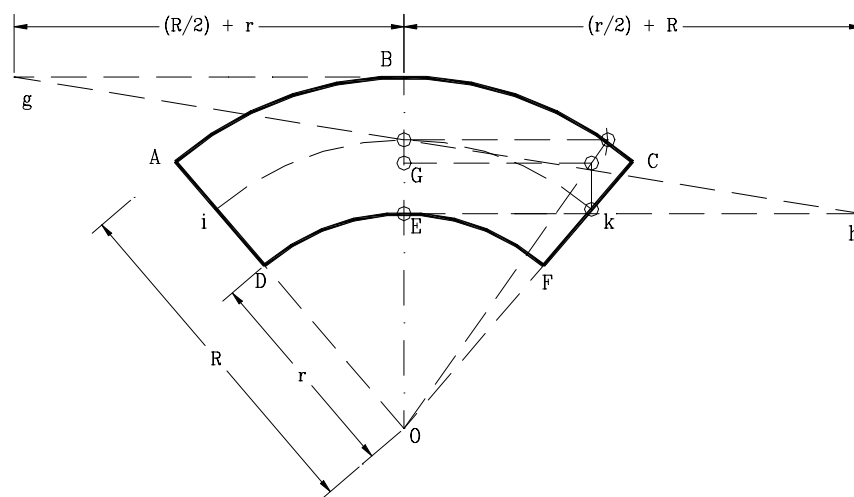
trapezi circular:

Es tracta de trobar l'arc baricèntric del trapezi circular, i d'aquest obtenir-ne el baricentre G.

Per trobar aquest arc "ik" es fa el procediment següent:

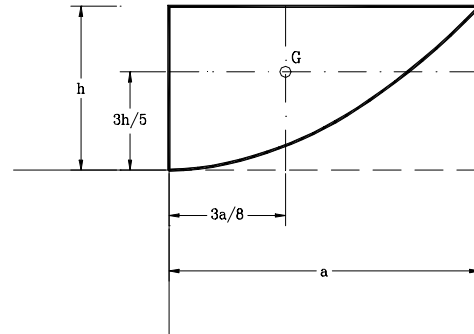
- 1) punt g a distància $R/2 + r$
- 2) punt h a distància $r/2 + R$
- 3) recta "gh" i intersecció amb l'eix de simetria.

Després el procediment és el mateix que els anteriors.



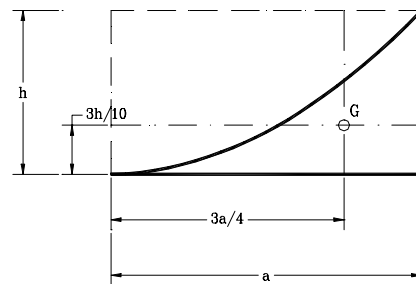
sector parabòlic convexe:

$$G = \left(\frac{3}{8} a, \frac{3}{5} h \right)$$



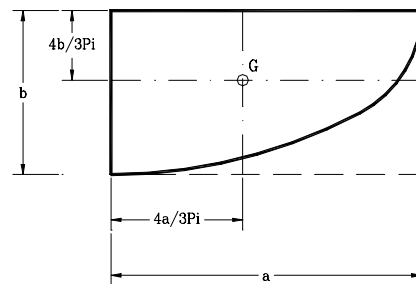
sector parabòlic còncau:

$$G = \left(\frac{3}{4} a, \frac{3}{10} h \right)$$



quart d'el·lipse:

$$G = \left(\frac{4}{3 \cdot \pi} a, \frac{4}{3 \cdot \pi} b \right)$$

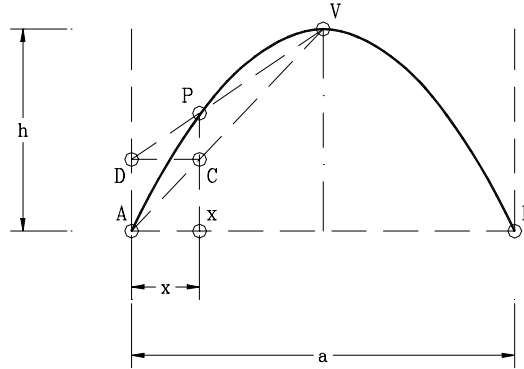


Construcció de paràboles i tangents:

Procediment curiós de construcció de paràboles per punts:

Dades dos punts A i B (simètrics) i el vèrtex de la paràbola V.

- 1) S'elegeix un punt arbitrari sobre el segment AB.
- 2) Es troba el punt C sobre la recta AV.
- 3) Es troba el punt D, projecció de C sobre la perpendicular en A.
- 4) Es troba el punt P de la paràbola sobre la recta DV.



Un cop tenim un punt P de la paràbola, si hi volem traçar la tangent, pel punt, podem fer-ho senzillament:

- 5) Es projecta el punt P sobre l'eix per trobar F.
- 6) Es troba el punt simètric de F, F', sobre l'eix, respecte del vèrtex V.
- 7) La recta PF' és tangent a la paràbola en P.

