5 DESENVOLUPAMENTS MATEMÀTICS

5.1. TEMPS D'ESPERA EN FUNCIO DELS INTERVALS.

5.1.1. FINALITAT.

La fórmula que LAMPKIN i SAALMANS donen en llur treball {30}, que en aquest punt és objecte d'estudi, pretén calcular el temps d'espera mitjà en una parada, per a un nombre de línies superior o igual a 2 ; es val en tot moment del càlcul de probabilitats. Es tracta, en definitiva, de la forma analítica de la funció.

$$W\ (u_1\ ,\ u_2\ ,\ldots\ldots\ldots\ u_n),$$

esmentada a la hipòtesi H 14A), fórmula (3.1.2.).
Els autors només n'exposen l'expressió general; en aquest punt, a més, se'n detalla tota la justificació, aplicacions i casos particulars.

5.1.2. HIPOTESIS ADDICIONALS.

El càlcul es fa per a un itinerari, tal com s'ha definit a la hipòtesi H 13)
Els autobusos de cada línia passen regularment. Tenen doncs, una freqüència i interval únics, determinats tal com s'ha vist a la hipòtesi H 12.
H 21) Els usuaris arriben a la parada segons una llei uniforme i prenen el primer autobús que passa de tots els que segueixen l'itinerari desitjat.
Dit altrament, els usuaris arriben a la parada sense tenir en compte el moment de pas de l'autobús. O també: els usuaris desconeixen els horaris.
H 22) Els autobusos de línies diferents no tenen cap relació en el seu moment de pas.

5.1.3. CAS D'1 LINIA.

Només a tall de complement, s'exposa el cas en què l'itinerari és servit per una sola línia.
Sigui u el seu interval de pas.
Com que els autobusos passen regularment, al cap d'u minuts d'espera és segur que ja haurà passat l'autobús.
La probabilitat de pas, doncs, és la mateixa a cada moment.
Per tant, si p (t) és la funció de densitat i
P (t) és la probabilitat acumulada,

$$p\ (t)\ dt = \frac{1}{u}\ dt \qquad (5.1.1.)$$

$$P\ (t) = \int_0^t p\ (t)\ dt = \frac{1}{u}\ .\ t \qquad (5.1.2.)$$

Efectivament, quan t=u, la probabilitat acumulada esdevé 1 :

$$P(u) = \frac{u}{u} = 1$$

5.1.4. CAS PARTICULAR DE 2 LINIES.

5.1.4.1. Densitat de probabilitat.

Siguin 2 línies amb intervals u_1 i u_2, on $u_1 \leqslant u_2$.
Cada línia tindrà una funció de densitat uniforme, respectivament igual a

$$p_1(t)\,dt = \frac{1}{u_1}\,dt \qquad P_1(t) = \frac{1}{u_1}\,t$$

$$p_2(t)\,dt = \frac{1}{u_2}\,dt \qquad P_2(t) = \frac{1}{u_2}\,t$$

Pel teorema de les probabilitats compostes:

P {agafar l'autobús a l'instant dt} =
= P {passar un bus de la línia 1} x P{no haver-ne passat cap de la línia 2 fins aquell moment.}
+ P {passar un bus de la línia 2} x P{no haver-ne passat cap de la línia 1 fins aquell moment.} (5.1.3.)

Si s'anomena

p (t) dt: funció de densitat conjunta (ambdues línies).
P (t) : funció de densitat acumulada conjunta (ambdues línies).

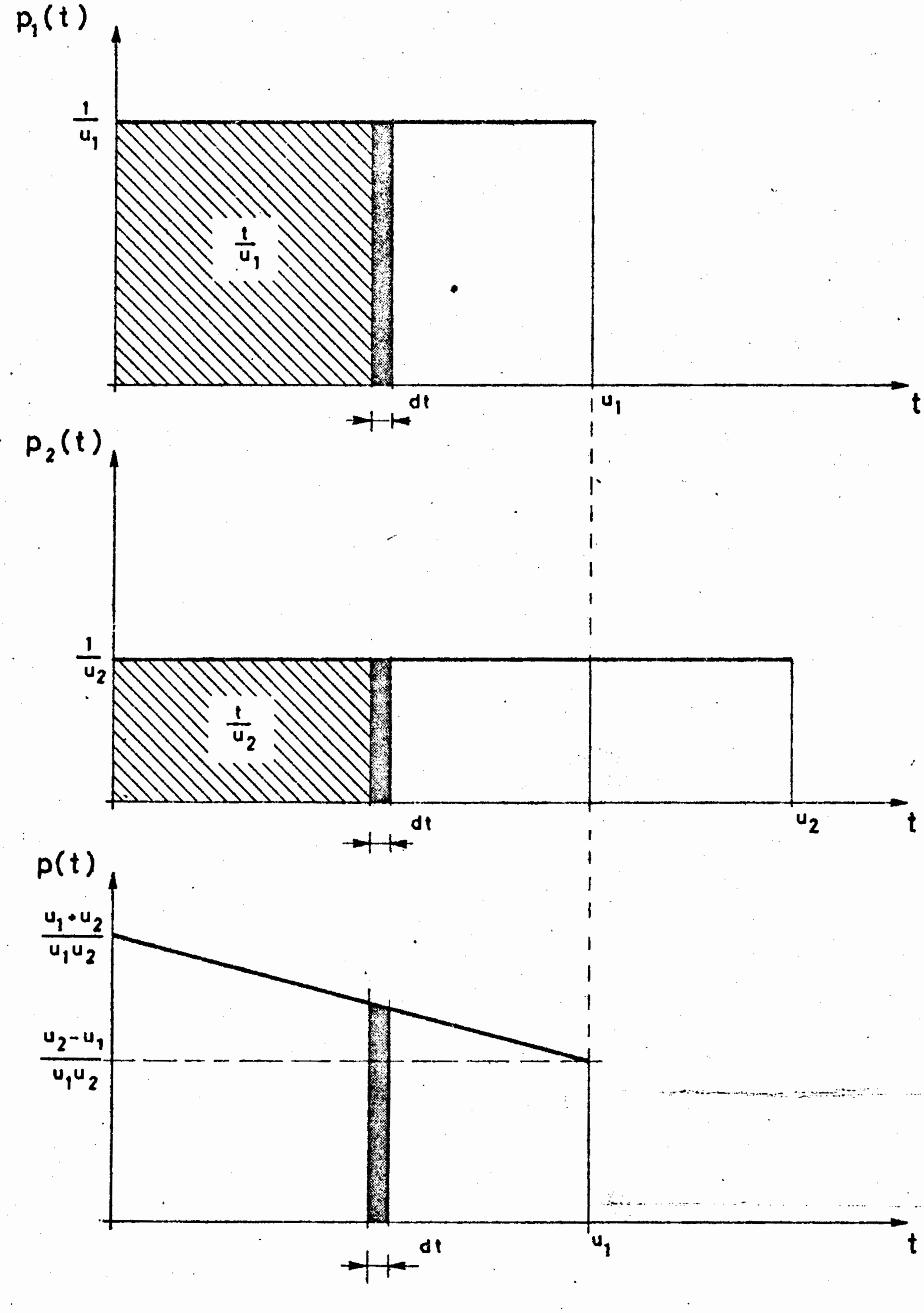
aleshores:

$p_1(t)dt$: P {passar un bus de la línia 1}
$[1 - P_1(t)]$: P {no haver-ne passat cap de la línia 1 fins a l'instant t}
$p_2(t)dt$:
$[1 - P_2(t)]$: anàlogament.

Remplaçant aquests valors a l'expressió (5.1.3.)

$$p(t)dt = p_1(t)dt\,[1 - P_2(t)] + p_2(t)dt\,[1 - P_1(t)] =$$

$$= \left[\frac{1}{u_1}\left(1 - \frac{t}{u_2}\right) + \frac{1}{u_2}\left(1 - \frac{t}{u_1}\right)\right] dt = \frac{u_1 + u_2 - 2t}{u_1 \cdot u_2}\,dt$$



$p_1(t)$
$\frac{1}{u_1}$
$\frac{t}{u_1}$
dt
u_1
t
$p_2(t)$
$\frac{1}{u_2}$
$\frac{t}{u_2}$
dt
u_2
t
$p(t)$
$\frac{u_1+u_2}{u_1u_2}$
$\frac{u_2-u_1}{u_1u_2}$
dt
u_1
t

FIG. 5.1.1

Es tracta, doncs, d'una funció lineal decreixent:

$$\boxed{p(t) = \frac{u_1 + u_2 - 2t}{u_1 \cdot u_2}} = \left(\frac{1}{u_1} + \frac{1}{u_2}\right) - 2\,\frac{1}{u_1\,u_2}\,t \qquad (5.1.4.)$$

amb valors extrems:

$$p\,(o) = \frac{u_1 + u_2}{u_1\,u_2}$$

$$p\,(u_1) = \frac{u_2 - u_1}{u_1\,u_2}$$

Les gràfiques de $p_1(t)$, $p_2(t)$ i $p(t)$ són a la figura 5.1.1.

5.1.4.2. Probabilitat acumulada.

També per definició, serà la probabilitat que a un instant t ja hagi passat almenys un autobús. Aquest valor serà:

$$P(t) = \int_0^t p(t)dt = \int_0^t \frac{u_1 + u_2 - 2t}{u_1\,u_2}\,dt = \frac{u_1+u_2}{u_1\,u_2}\,t - \frac{1}{u_1\,u_2}\,t^2$$

$$\boxed{P(t) = \frac{(u_1 + u_2)t - t^2}{u_1\,u_2}} \qquad (5.1.5.)$$

Pot veure- s'hi que:

$$P(o) = 0$$

$$P\,(u_1\,) = \frac{(u_1 + u_2)\,u_1 \;\; - u_1^2}{u_1\,u_2} = 1$$

El darrer resultat es correspon amb la intuïció: el màxim temps d'espera és l'interval menor , ja que al cap d'u_1 minuts és segur que ha passat un bus de la línia 1 .
A la figura 5.1.2. s'hi han dibuixat les tres funcions $P_1(t)$, $P_2(t)$ i $P(t)$ una al costat de l'altra, perquè pugui comparar-se la millora relativa.
A la figura 5.1.3. s'hi representa el cas particular en què $u_1 = u_2$ i, per tant, $P_1(t) = P_2(t)$

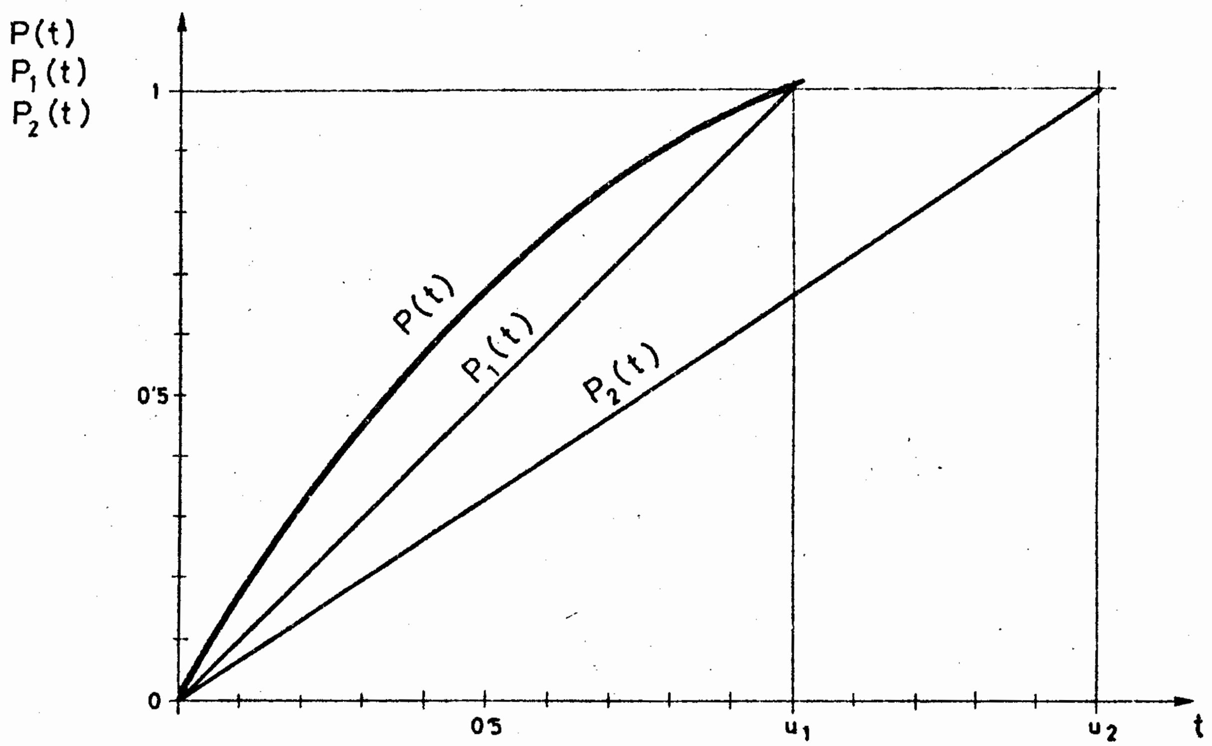


FIG. 5.1.2

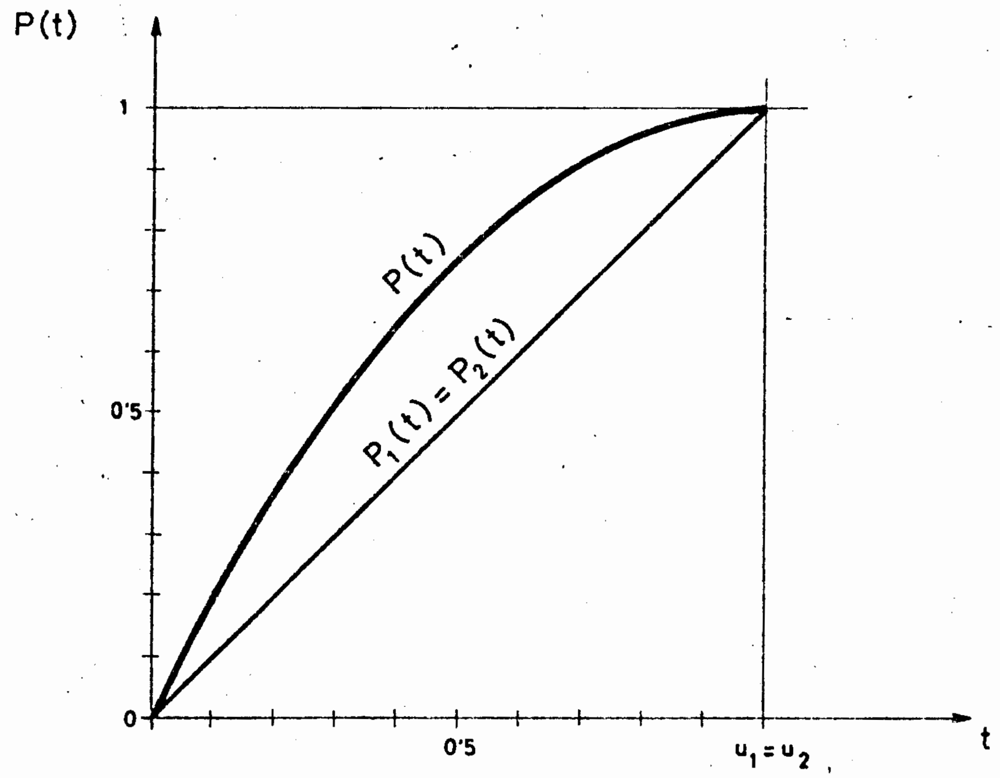


FIG. 5.1.3

5.1.4.3. Valor mitjà de l'espera.

Serà el valor requerit; o sigui:

$$\bar{t} = W(u_1, u_2) \qquad (5.1.6.)$$

El valor mitjà serà l'esperança matemàtica del temps d'espera, és a dir:

$$W(u_1, u_2) = \bar{t} = \int_0^{u_1} t.p(t)dt = \int_0^{u_1} t \frac{u_1+u_2-2t}{u_1 u_2} dt =$$

$$= \int_0^{u_1} \left(\frac{u_1+u_2}{u_1 u_2} t - \frac{2}{u_1 u_2} t^2 \right) dt = \frac{u_1+u_2}{u_1 u_2} . \frac{u_1^2}{2} - \frac{2}{u_1 u_2} . \frac{u_1^3}{3} =$$

$$= \frac{u_1}{2} \left(1 - \frac{u_1}{3 u_2} \right) = u_1 \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{6} . \frac{u_1}{u_2} \right)$$

$$\boxed{W(u_1, u_2) = u_1 \left(\frac{1}{2} - \frac{u_1}{6 u_2} \right) \qquad u_1 \leqslant u_2} \qquad (5.1.7.)$$

Naturalment, si $u_1 \geqslant u_2$, la fórmula passa a ser:

$$W(u_1, u_2) = \frac{u_2}{2} \left(1 - \frac{u_2}{3u_1} \right)$$

i en el cas frontera $u_1 = u_2$

$$W(u_1, u_2) = \frac{u_1}{2} \left(1 - \frac{1}{3} \right) = \frac{u_1}{3} \qquad (5.1.8.)$$

Al punt 5.1.8. s'estudiarà la variació de la funció (5.1.7.)

5.1.4.4. Funció temps d'espera-interval.

A tall il.lustratiu, es tracta d'estudiar la variació de la funció $W(u_1, u_2)$, quan es fixa un interval, i l'altre recorre el semieix positiu.

Sigui:

u_o: l'interval fix.

u : l'interval variable.

Aleshores la funció passa a ser:

$$W(u_1, u_2) = W(u, u_o) = W(u),$$

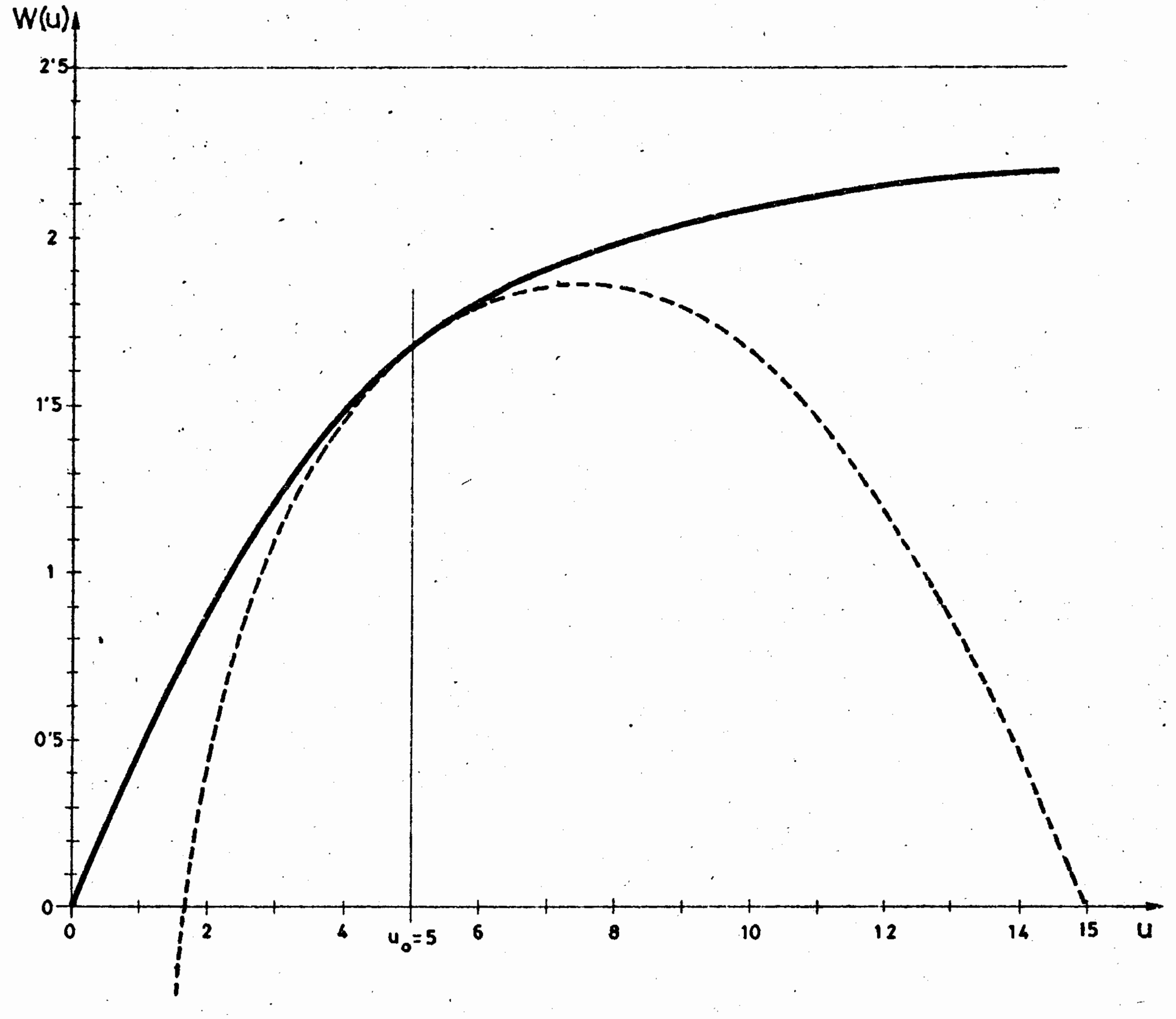


FIG. 5.1.4

que pren les dues expressions analítiques:

$$\left\{\begin{array}{ll} W(u) = u\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{6u_o} \cdot u\right) = \frac{1}{2}u - \frac{1}{6u_o} \cdot u^2 & \text{si } u \leqslant u_o \\ W(u) = u_o\left(\frac{1}{2} - \frac{u_o}{6} \cdot \frac{1}{u}\right) = \frac{1}{2}u_o - \frac{u_o^2}{6} \cdot \frac{1}{u} & \text{si } u_o \leqslant u \end{array}\right\}$$

(5.1.9.)

Per a l'interval $o \leqslant u \leqslant u_o$, la funció és una paràbola convexa, mentre que si $u_o \geqslant u$, la funció esdevé una hipèrbole creixent amb asímptota a $\frac{1}{2} u_o$. Vegi's la figura 5.1.4., on s'ha suposat $u_o = 5$.
Es tracta, doncs, d'una funció creixent i convexa en tot el semieix, que expressa la menor importància relativa de la línia en l'interval a mida que el seu interval es fa gran. L'asímptota $\frac{1}{2} u_o$ coincideix amb la inexistència de la línia; aleshores, el temps d'espera és la meitat de l'altre interval.

5.1.5. CAS PARTICULAR DE 3 LINIES.

Per un raonament anàleg al fet quan l'itinerari constava de 2 línies, s'arribaria a les següents expressions:

$$p(t) = \left(\frac{1}{u_1} + \frac{1}{u_2} + \frac{1}{u_3}\right) - 2\left(\frac{1}{u_1 u_2} + \frac{1}{u_2 u_3} + \frac{1}{u_3 u_1}\right)t + 3\frac{1}{u_1 u_2 u_3} t^2 \quad (5.1.10.)$$

$$P(t) = \left(\frac{1}{u_1} + \frac{1}{u_2} + \frac{1}{u_3}\right)t - \left(\frac{1}{u_1 u_2} + \frac{1}{u_2 u_3} + \frac{1}{u_3 u_1}\right)t^2 + \frac{1}{u_1 u_2 u_3} t^3 \quad (5.1.11.)$$

$$W(u_1, u_2, u_3) = u_1\left[\frac{1}{2} - \frac{1}{6} u_1 \left(\frac{1}{u_2} + \frac{1}{u_3}\right) + \frac{1}{12} u_1^2 \frac{1}{u_2 u_3}\right] \quad (5.1.12.)$$

5.1.6. GENERALITZACIO A n LINIES.

Un cop deduïdes les fórmules que regeixen els itineraris de 2 i 3 línies, hom passa a trobar una generalització per a n.

5.1.6.1. Densitat de probabilitat.

A partir d'ara, el subíndex indicarà el nombre de línies a què correspon cada expressió.
Les dues fórmules vistes fins ara, per bé que escrites d'un altra forma són:

$$p_2(t) = \left(\frac{1}{u_1} + \frac{1}{u_2}\right) - 2t\frac{1}{u_1 u_2} = (-t)^0 \sum_{j_1=1}^{2} \frac{1}{u_{j_1}} + 2(-t)^1 \sum_{j_1=1}^{1} \sum_{j_2=2}^{2} \frac{1}{u_{j_1} \; u_{j_2}}$$

$$p_3(t) = \left(\frac{1}{u_1}+\frac{1}{u_2}+\frac{1}{u_3}\right) - 2t\left(\frac{1}{u_1u_2}+\frac{1}{u_1u_3}+\frac{1}{u_2u_3}\right) + 3t^2\frac{1}{u_1u_2u_3} =$$

$$= (-t)^0 \sum_{j_1=1}^{3} \frac{1}{u_{j_1}} + 2(-t)^1 \sum_{j_1=1}^{2}\sum_{j_2=2}^{3} \frac{1}{u_{j_1}u_{j_2}} +$$

$$+ 3(-t)^2 \sum_{j_1=1}^{1}\sum_{j_2=2}^{2}\sum_{j_3=3}^{3} \frac{1}{u_{j_1}u_{j_2}\cdots u_{j_3}} \qquad (5.1.13)$$

Una generalització d'aquesta expressió duu a:

$$\boxed{p_n(t) = \sum_{r=1}^{n} r(-t)^{r-1} \sum_{j_1=1}^{n-r+1}\ \sum_{j_2=j+1}^{n-r+2} \cdots\cdots \sum_{j_r=j_{r-1}+1}^{n} \frac{1}{u_{j}\cdot u_{j_2}\cdots u_{j_r}}}$$

(5.1.14)

on el nombre de sumatoris interiors a considerar a cada valor d'r és precisament r , tal com es comprova en els dos casos particulars.

5.1.6.2. Probabilitat acumulada.

En l'expressió anterior, sigui C_r el valor constant propi de cada valor d'r . Per tant queda:

$$p_n(t) = \sum_{r=1}^{n} r(-t)^{r-1}\cdot C_r \qquad (5.1.15)$$

Integrant-la, s'obté la funció desitjada:

$$P_n(t) = \int_0^t p_n(t)\,dt = \sum_{r=1}^{n} C_r \int_0^t r(-t)^{r-1}dt = \sum_{r=1}^{n} C_r(-t)^r$$

On es remplaça el valor primitiu:

$$\boxed{P_n(t) = \sum_{r=1}^{n} (-t)^r \sum_{j_1=1}^{n-r+1}\ \sum_{j_2=j_1+1}^{n-r+2} \cdots\cdots \sum_{j_r=j_{r-1}+1}^{n} \frac{1}{u_{j_1}u_{j_2}\cdots u_{j_r}}}$$

(5.1.16)

5.1.6.3. Valor mitjà de l'espera.

Per tal d'alleugerir la nomenclatura, a partir d'ara s'adopta el conveni següent, anàleg d'altra banda al suara introduït:

$$W_n = W(u_1, u_2, \ldots u_n)$$

S'ha vist que:

$$W_2 = u_1\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{6}u_1 \cdot \frac{1}{u_2}\right) = u_1\left[\frac{1}{2} + \frac{(-1)^1 u_1}{2.3} \sum_{j_1=2}^{2} \frac{1}{u_{j_1}}\right] \quad (5.1.7)$$

$$W_3 = u_1\left[\frac{1}{2} - \frac{1}{6}u_1\left(\frac{1}{u_2} + \frac{1}{u_3}\right) + \frac{1}{12}u_1^2 \frac{1}{u_2 u_3}\right] =$$

$$= u_1\left[\frac{1}{2} + \frac{(-1)^1 u_1}{2.3} \sum_{j_1=2}^{3} \frac{1}{u_{j_1}} + \frac{(-1)^2 u_1^2}{3.4} \sum_{j_1=2}^{2} \sum_{j_2=3}^{3} \frac{1}{u_{j_1} u_{j_2}}\right] \quad (5.1.12)$$

Passant a una generalització anàloga a la ja vista, a 5.16.1., pot escriure's:

$$\boxed{W_n = u_1\left[\frac{1}{2} + \sum_{r=1}^{n-1} \frac{(-1)^r u_1^r}{(r+1)(r+2)} \sum_{j_1=2}^{n-r+1} \sum_{j_2=j_1+1}^{n-r+2} \cdots \sum_{j_r=j_{r-1}+1}^{n} \frac{1}{u_{j_1} \cdot u_{j_2} \ldots u_{j_r}}\right]} \quad (5.1.17)$$

Les fórmules (5.1.14) i (5.1.17) són les donades per LAMPKIN i SAALMANS. Aquí no es proven; tan sols se'n comprova llur validesa per a n=2 i n=3.

5.1.7. ADEQUACIO OPERATIVA.

5.1.7.1. Mètode seguit.

La fórmula anterior és la definitivament recercada, i la que resol el problema del càlcul del temps mitjà d'espera per a qualsevol nombre de línies constitutives de l'itinerari.

Malgrat la seva compacitat i elegància, té un defecte greu de cara a programació. En efecte, la implementació informàtica d'aquest algorisme s'ha fet en llenguatge FORTRAN, que no és essencialment recursiu com ara l'ALGOL. Hom pot deduir, doncs, la dificultat d'implementar una cadena de sumatoris, o sigui de bucles de forma DØ, de longitud variable.

Per bandejar aquest problema s'ha optat per una disposició pseudo-recursiva, que calcula el valor pas a pas, afegint cada cop una nova línia.

El mètode seguit és aquest:

i) Ordenar els intervals de manera creixent, $u_1 \leqslant u_2 \leqslant \ldots\ldots \leqslant u_n$.

ii) Calcular la fórumula ja coneguda:

$$W_2 = W(u_1, u_2)$$

iii) Suposar que la línia següent passa a formar part de l'itinerari amb la qual cosa, el temps d'espera ha de variar(de fet disminuir); sigui h_m aquesta disminució. Se'n calcula el valor i s'afegeix a l'anterior. Es a dir:

$$W_m = W_{m-1} + h_m \tag{5.1.18}$$

iv) Si $m < n$, tornar a iii). Si $m=n$, ja el valor de W_n és el recercat.

Ja es veu, doncs, que tot es limita a fer el següent càlcul:

$$\left.\begin{array}{l} n=2 \ : \ W_2 \text{ es troba directament} \\ n \geqslant 2 \ : \ W_n = W_2 + h_3 + h_4 \ \ldots\ldots + h_n = W_2 + \sum\limits_{m=3}^{n} h_m \end{array}\right\} \tag{5.1.19}$$

5.1.7.2. <u>Càlcul dels increments.</u>

Segons s'acaba de veure:

$$h_m = W_m - W_{m-1} \tag{5.1.18 bis}$$

Per al càlcul d'h_m, doncs, caldrà partir de les expressions generals de W_{m+1} i W_m, tenint en compte que les m primeres línies de W_{m+1} equivalen una per una a les de W_m, i que l'expressió constitutiva de W_{m+1} tindrà un sumand més que l'altra.
Restant-les, doncs, terme a terme:

$$h_{m+1} = u_1 \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \frac{(-1)u_1}{2.3} \left(\sum_{j_1=2}^{m+1} \frac{1}{u_j} - \sum_{j_1=2}^{m} \frac{1}{u_j} \right) + \right.$$

$$+ \frac{u^2}{3.4} \left(\sum_{j_1=2}^{m} \sum_{j_2=j_1+1}^{m+1} \frac{1}{u_{j_1} u_{j_2}} - \sum_{j_1=2}^{m-1} \sum_{j_2=j_1+1}^{m} \frac{1}{u_{j_1} u_{j_2}} \right) +$$

$$+\frac{(-1)\,u_1^3}{4.5}\left(\sum_{j_1=2}^{m-1}\ \sum_{j_2=j_1+1}^{m}\ \sum_{j_3=j_2+1}^{m+1} \frac{1}{u_{j_1}\,u_{j_2}\,u_{j_3}} -\right.$$

$$\left. -\sum_{j_1=2}^{m-2}\ \sum_{j_2=j_1+1}^{m-1}\ \sum_{j_3=j_2+1}^{m} \frac{1}{u_{j_1}\,u_{j_2}\,u_{j_3}}\right)+\dots+\frac{(-1)^m\,u_1^m}{(n+1)(m+2)}\cdot\frac{1}{u_{j_1}u_{j_2}\cdots u_{j_n}}\ \Bigg]$$

Reduint termes dintre de cada parèntesi s'obté:

$$h_{m+1} = u_1\Bigg[-\frac{u_1}{6}\cdot\frac{1}{u_{m+1}}+$$

$$+\frac{u_1^2}{3.4}\,\frac{1}{u_{m+1}}\sum_{j_1=2}^{m}\frac{1}{u_{j_1}}+$$

$$+\frac{(-1)\,u_1^3}{4.5}\cdot\frac{1}{u_{m+1}}\sum_{j_1=2}^{m-1}\ \sum_{j_2=j_1+1}^{m}\frac{1}{u_{j_1}\,u_{j_2}}+\dots\dots+$$

$$+\frac{(-1)^m.\,u_1^m}{(m+1)(m+2)}\cdot\frac{1}{u_{m+1}}\cdot\frac{1}{u_{j_1}\,u_{j_2}\dots u_{j_r}}\ \Bigg]$$

Un cop tret el factor comú, queda una expressió similar a la de W com pot veure's a l'expressió compactada:

$$\boxed{h_{m+1}=\frac{u_1^2}{u_{m+1}}\left[-\frac{1}{6}+\sum_{r=1}^{n-1}\frac{(-1)^{r+1}u_1^r}{(r+2)(r+3)}\ \sum_{j_1=1}^{n-r+1}\ \sum_{j_2=j_1+1}^{n-r+2}\ ..\sum_{j_r=j_{r-1}+1}^{n}\frac{1}{u_{j_1}\,u_{j_2}\dots u_{j_r}}\right]}$$

(5.1.20)

5.1.7.3. Realització pràctica.

En el programa, s'hi han desenvolupat les fórmules fins a m=7, que permeten el càlcul de W_7 . Per a valors superiors, es prescindeix de les línies els intervals de les quals són més grans que u_7 . Val a dir que el cas d'un itinerari amb 8 o més línies és extremadament rar.
A continuació es descriuen els desenvolupaments de la fórmula anterior per a valor d'm de 3 a 7:

$$W_2 = u_1\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{6} \cdot \frac{u_1}{u_2}\right)$$

$$h_3 = \frac{u_1^2}{u_3}\left(-\frac{1}{6} + \frac{1}{12} u_1 \frac{1}{u_2}\right)$$

$$h_4 = \frac{u_1^2}{u_4}\left[-\frac{1}{6} + \frac{1}{12} u_1 \left(\frac{1}{u_2} + \frac{1}{u_3}\right) - \frac{1}{20} u_1^2 \frac{1}{u_2 u_3}\right]$$

$$h_5 = \frac{u_1^2}{u_5}\left[-\frac{1}{6} + \frac{1}{12} u_1\left(\frac{1}{u_2} + \frac{1}{u_3} + \frac{1}{u_4}\right) - \frac{1}{20} u_1^2\left(\frac{1}{u_2u_3} + \frac{1}{u_2u_4} + \frac{1}{u_3u_4}\right) - \frac{1}{30} u_1^3 \frac{1}{u_2u_3u_4}\right]$$

$$h_6 = \frac{u_1^2}{u_6}\left[-\frac{1}{6} + \frac{1}{12} u_1\left(\frac{1}{u_2} + \frac{1}{u_3} + \frac{1}{u_4} + \frac{1}{u_5}\right) - \frac{1}{20} u_1^2\left(\frac{1}{u_2u_3} + \frac{1}{u_2u_4} + \frac{1}{u_2u_5} + \frac{1}{u_3u_4} + \frac{1}{u_3u_5} + \frac{1}{u_4u_5}\right) + \frac{1}{30} u_1^3\left(\frac{1}{u_2u_3u_4} + \frac{1}{u_2u_3u_5} + \frac{1}{u_2u_4u_5} + \frac{1}{u_3u_4u_5}\right) - \frac{1}{42} u_1^4 \frac{1}{u_2u_3u_4u_5}\right]$$

$$h_7 = \frac{u_1^2}{u_7}\left[-\frac{1}{6}+\frac{1}{12}u_1\left(\frac{1}{u_2}+\frac{1}{u_3}+\frac{1}{u_4}+\frac{1}{u_5}+\frac{1}{u_6}\right)-\right.$$

$$-\frac{1}{20}u_1^2\left(\frac{1}{u_2u_3}+\frac{1}{u_2u_4}+\frac{1}{u_2u_5}+\frac{1}{u_2u_6}+\frac{1}{u_3u_4}+\frac{1}{u_3u_5}+\frac{1}{u_3u_6}+\frac{1}{u_4u_5}+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{u_4u_6}+\frac{1}{u_5u_6}\right)+$$

$$+\frac{1}{30}u_1^3\left(\frac{1}{u_2u_3u_4}+\frac{1}{u_2u_3u_5}+\frac{1}{u_2u_3u_6}+\frac{1}{u_2u_4u_5}+\frac{1}{u_2u_4u_6}+\frac{1}{u_2u_5u_6}+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{u_3u_4u_5}+\frac{1}{u_3u_4u_6}+\frac{1}{u_3u_5u_6}+\frac{1}{u_4u_5u_6}\right)-$$

$$-\frac{1}{42}u_1^4\left(\frac{1}{u_2u_3u_4u_5}+\frac{1}{u_2u_3u_4u_6}+\frac{1}{u_2u_3u_5u_6}+\frac{1}{u_2u_4u_5u_6}+\frac{1}{u_3u_4u_5u_6}\right)+$$

$$\left.+\frac{1}{56}u_1^5\;\frac{1}{u_2u_3u_4u_5u_6}\right]$$

5.1.8. CAS PARTICULAR EN QUE L'INTERVAL ES EL MATEIX PER A TOTES LES LINIES. (APLICACIO A L'ALGORISME DE GENERACIO).

5.1.8.1. Aplicació.

Interessa d'analitzar la funció W_n en el cas en què hi hagi un interval de xarxa, únic per a totes les línies. Aquesta és la hipòtesi H 14) que es pren en l'algorisme de generació.
Recordi's que per a l'assignació es substitueix per la H 14A) a la qual es dedica tota la resta del punt 5.1.

5.1.8.2. Valor de l'expressió.

Se suposa, doncs,:

$$u_1 = u_2 = \ldots\ldots = u_n = u \;;$$

aquest valor, sustituït a (5.1.17), queda :

$$W_n = u\left[\frac{1}{2}+\sum_{r=1}^{n-1}\frac{(-1)^r\,u^r}{(r+1)(r+2)}\cdot\frac{\binom{n-1}{r}}{u^r}\right] =$$

$$= u\left[\frac{1}{2}+\sum_{r=1}^{n-1}\frac{(-1)^r}{(r+1)(r+2)}\binom{n-1}{r}\right] =$$

$$= u\sum_{r=0}^{n-1}(-1)^r\frac{\binom{n-1}{r}}{(r+1)(r+2)} \qquad (5.1.21)$$

La fracció pot escriure's d'una altra manera. En efecte:

$$\frac{\binom{n-1}{r}}{(r+1)(r+2)} = \frac{1}{(r+2)(r+1)}\cdot\frac{(n-1)!}{r!\,(n-r-1)!} = \frac{(n-1)!}{(r+2)!(n-r-1)!},$$

Multiplicant i dividint per $(n+1)n$:

$$\frac{(n-1)!}{(r+2)!(n-r-1)!} = \frac{1}{(n+1)n}\cdot\frac{(n+1)!}{(r+2)!\,[(n+1)-(r+2)]!} = \frac{1}{(n+1)n}\binom{n+1}{r+2}$$

Aleshores (5.1.21) se simplifica:

$$W_n = u\sum_{r=0}^{n-1}(-1)^r\cdot\frac{1}{(n+1)n}\binom{n+1}{r+2} = u\,\frac{1}{(n+1)n}\sum_{r=0}^{n-1}(-1)^r\binom{n+1}{r+2} =$$

$$= u\,\frac{1}{(n+1)n}\left[-\left[\binom{n+1}{0}-\binom{n+1}{1}\right]+\sum_{r=-2}^{n-1}(-1)^r\binom{n+1}{r+2}\right] = \qquad (5.1.22)$$

$$= u\,\frac{1}{(n+1)\,n}\left[-1+(n+1)+0\right] = \frac{u}{n+1} \qquad \boxed{W_n = \frac{u}{n+1}}$$

El sumatori darrer és efectivament nul. Per demostrar-ho, cal adonar-se, d'antuvi, de la següent identitat:

$$0 = (1-1)^n = \sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r} (-1)^r$$

I fent una transformació del sumatori en qüestió, s'obté una expressió equivalent:

$$\sum_{r=-2}^{n-1} (-1)^r \binom{n+1}{r+2} = \sum_{r=-2}^{n-1} (-1)^{r+2} \binom{n+1}{r+2} = \sum_{r=0}^{n+1} (-1)^r \binom{n+1}{r} = 0$$

5.1.9 VARIACIO DEL TEMPS D'ESPERA PER IRREGULARITAT EN L'ARRIBADA DELS AUTOBUSOS.

A la hipòtesis H 14A) s'ha vist la limitació que comportava el fet d'admetre que els autobusos arriben a una parada, amb unes diferències de temps que indefectiblement equivalen a l'interval teòric. De fet no és així, i hi ha bones raons pràctiques que ho demostren.
D'antuvi, hi ha les perturbacions que el tràfic imposa als autobusos. Però, a part d'aquest motiu exògen, els autobusos d'una mateixa línia constitueixen "per se", un sistema inestable: en efecte, un petit retard en un autobús fa que quan arriba a la següent parada hi ha un nombre de viatgers que l'esperen més alt. Això implica que s'atura més temps a la parada i que, per tant, arriba encara més tard a la següent. Per contra, l'autobús que li ve al darrera, es troba que a cada parada s'hi atura menys temps del previst, ja que el precedent li ha pres una part de la seva càrrega. A la llarga, doncs, ambdós autobusos acabaran ajuntant-se.

L'objectiu d'aquesta tesi, però, no és d'estudiar quantitativament aquestes irregularitats ni de donar-hi una solució. Aquest punt, només es toca de trascantó, amb la sola intenció d'introduir una millora en la funció del temps d'espera. Per tant, hom es limita ací a afegir-hi una fórmula sobre aquesta irregularitat.

5.1.9.1. Formulació matemàtica.

Donada la gran difusió que ha assolit, i imposibilitats d'analitzar-ne l'eficiència pràcticament, hom es limita a reproduir l'expressió trobada per E.M. HOLROYD i D.A. SCRAGGS, {21} , en un estudi empíric dut a terme a Londres l'any 1.966.
L'expressió matemàtica en qüestió és:

$$W = u \frac{u^2 + 70}{2 u^2 + 70} \qquad (5.1.23)$$

On W i u tenen el significat habitual, però forçosament expressats en minuts, car la fórmula conté termes constants.

$$W_t = \frac{u}{2} \qquad (5.1.24)$$

on W_t seria l'interval teòric, o sense irregularitat, tal i com s'acceptava fins ara, a la figura 5.1.5 es poden comparar ambdues funcions.

5.1.9.2. Comparació de funcions.

Per tal d'apreciar la variació absoluta i relativa que hi ha entre els dos temps d'espera s'han definit les funcions:

$$D(u) = W - W_t = u\left(\frac{u^2+70}{2u^2+70} - \frac{1}{2}\right) \qquad (5.1.25)$$

$$R(u) = \frac{W}{W_t} = 2\,\frac{u^2+70}{2u^2+70} \qquad (5.1.26)$$

que donen precisament aquestes variacions. A la figura 5.1.6 poden veure- s'hi les gràfiques.
Cal notar que la funció D(u) és molt aplanada. Té un màxim per a $u = \sqrt{35} = 5{,}91$ min., amb una $D(u)$ màx = 1'479 min. Però en les seves rodalies, la variació és molt petita. En efecte,

a l'interval $3'5 < u < 10$, $\quad 1'3 < d \leqslant 1'479$,

i a " $2'4 < u < 16'5$ $\quad 1 < d \leqslant 1'479$;

Aquest segon interval cobreix un bon troç de tot el camp de definició; dintre seu, en canvi, la funció és a dir, l'augment a afegir al temps teòric d'espera per causa de la perturbació es manté entre 1 i 1'5 minuts. Aquesta variació sembla irrelevant si no és que s'atorga una ponderació al temps d'espera, amb la qual cosa llur influència en l'algorisme augmentaria.
La segona funció R(u), que descriu els increments relatius, és sempre decreixent; per tant, l'increment relatiu a afegir per causa de la pertorbació es fa proporcionalment més petit a mesura que augmenta l'interval. Presenta una inflexió en el punt $\left(\sqrt{\frac{35}{3}} , \frac{7}{4}\right)$ o sigui (3,42, 1,75).

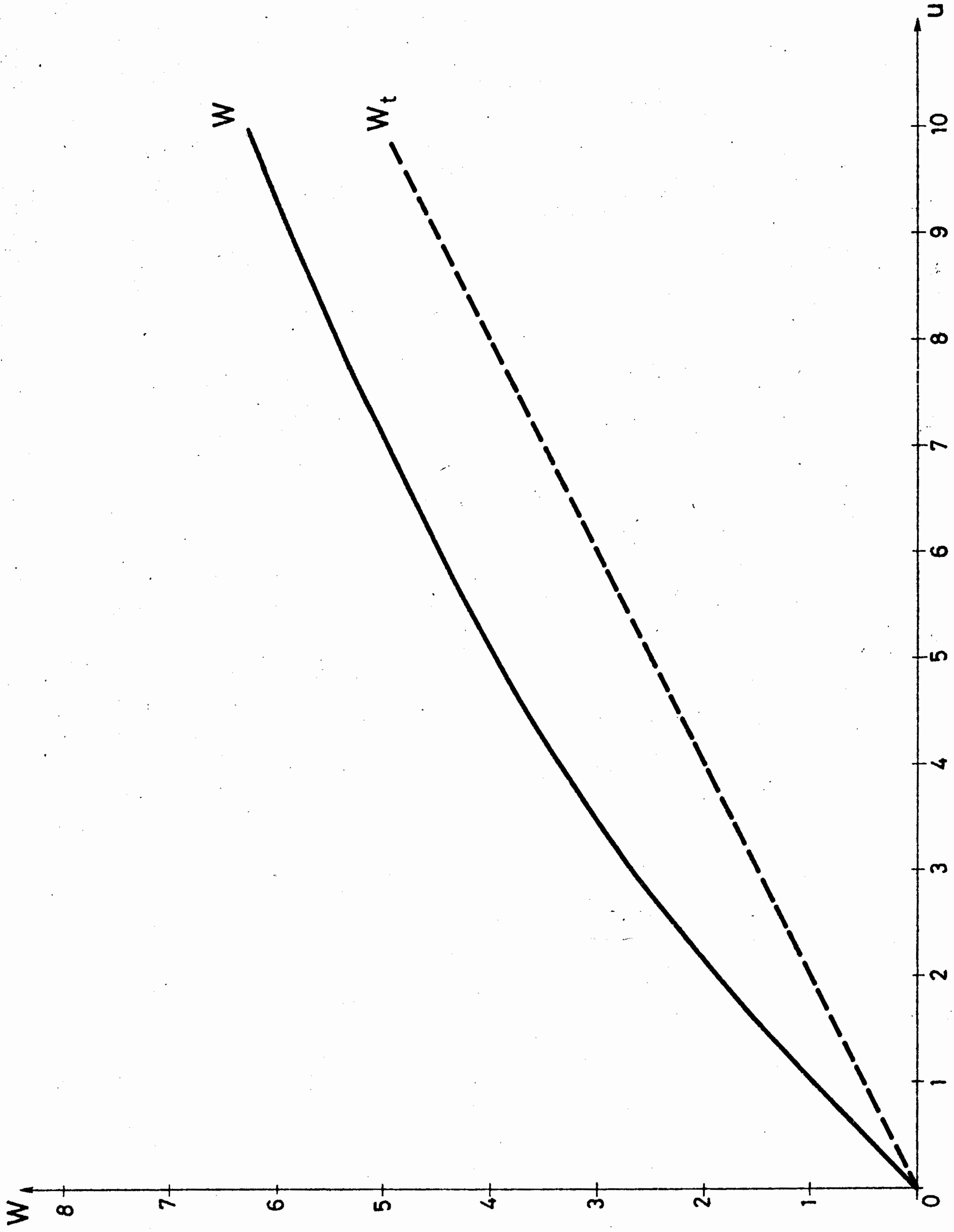
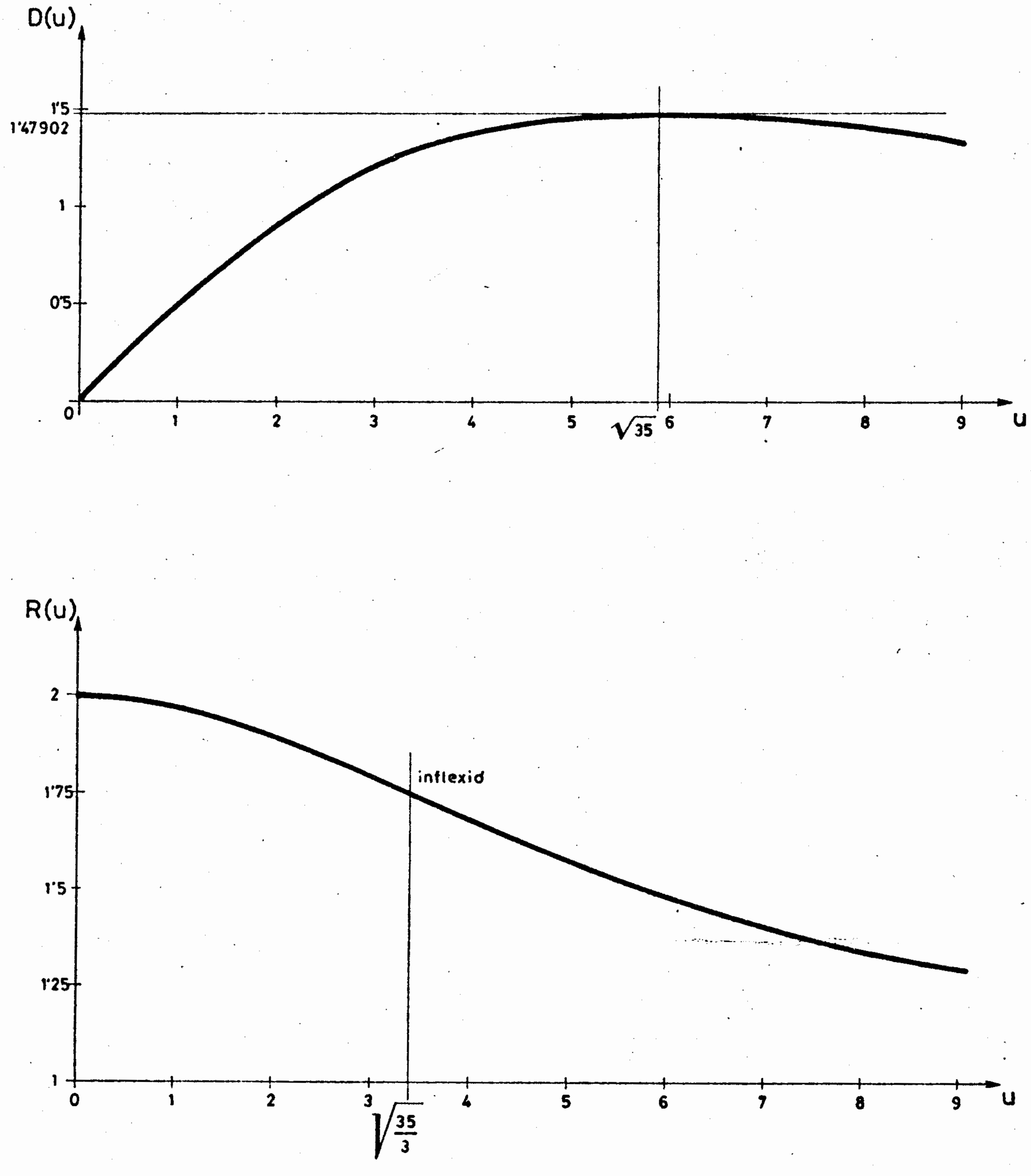


FIG. 5.1.5



Augments absolut i relatiu de la fórmula de HOLROYD i SCRAGGS.

FIG. 5.1.6

5.2. FUNCIONS DE REPARTIMENT MODAL I DE COST MITJA DE VIATGE.

5.2.1. FINALITAT.

A les hipòtesis H 17) i H 20) s'han definit respectivament la funció de repartiment entre modes i/o itineraris, i la funció de cost mitjà de viatge per a un flux donat (i,j). Vegin-se, les fórmules (2.1.8) a (2.1.12).
Els treballs previs sobre repartiment modal, entre els quals cal citar a tall d'exemple: R.E.QUANDT {48}, D.A. QUARMBY {49} el quadern nº 17-18 de l'I.A.U.R.P. {25} i G.M. HYMAN {23}, arriben a la conclusió que la variable que explica millor la decisió de l'usuari de prendre un o altre mode de transport és la diferència de costos generalitzats. A més, la relació entre l'esmentada diferència de costos i la proporció que empra un mode determinat, per exemple l'autobús, la formalitzen com una funció logística.
En el punt 5.2., la primera part es dedica a l'estudi d'aquesta funció a les seves característiques i a la contradicció a què s'arriba si s'adoptés en els presents algorismes. El següent paràgraf, 5.2.3., tracta de trobar-hi una sortida a partir d'altres formulacions; es proposa, en definitiva la funció L. Finalment, el paràgraf 5.2.4. generalitza l'anterior expressió a n itineraris de la qual cosa resulta la funció M que és l'efectivament emprada als algorismes i l'exposada a les hipòtesis H 17) i H 20).

5.2.2. ESTUDI DE LA FUNCIO LOGISTICA.

5.2.2.1. Funció de repartiment.

S'entén per funció de repartiment la funció definida en general a la hipòtesi H 17):

$$y^k = y^k\ (a^o,\ a^1\ \ldots\ldots\ldots a^s) \qquad (2.1.7)$$

que relaciona la proporció d'usuaris que empra un itinerari (o mode) amb els costos de tots els itineraris.Donat, però, que la majoria d'autors, llevat potser de G.M. HYMAN, consideren un repartiment binari, en aquest cas entre peu (o mode alternatiu) i autobús, la funció estudiada esdevé:

$$y^k = y^k(\ a^o,\ a^1\ ) \qquad (5.2.1)$$

De fet, àdhuc aquesta terminologia se simplifica com es veu tot seguit.

5.2.2.1.1.: Expressió.

Sigui:

y: proporció d'usuaris que prenen el bus (fins ara y^1)

p: cost a peu o pel mode alternatiu (fins ara a^o)

a: cost en bus (fins ara a^1).

β: paràmetre de sensibilitat ($\beta > o$).

La funció logística aplicada al cas present és:

$$y = y(a,p) = \frac{1}{1 + \exp[\beta(a-p)]} \qquad (5.2.2.)$$

O anomenant z=a-p, a la diferència entre el cost en bus menys el cost a peu:

$$y = \frac{1}{1 + \exp(\beta z)} \qquad (5.2.3.)$$

La gràfica és a la figura 5.2.1.

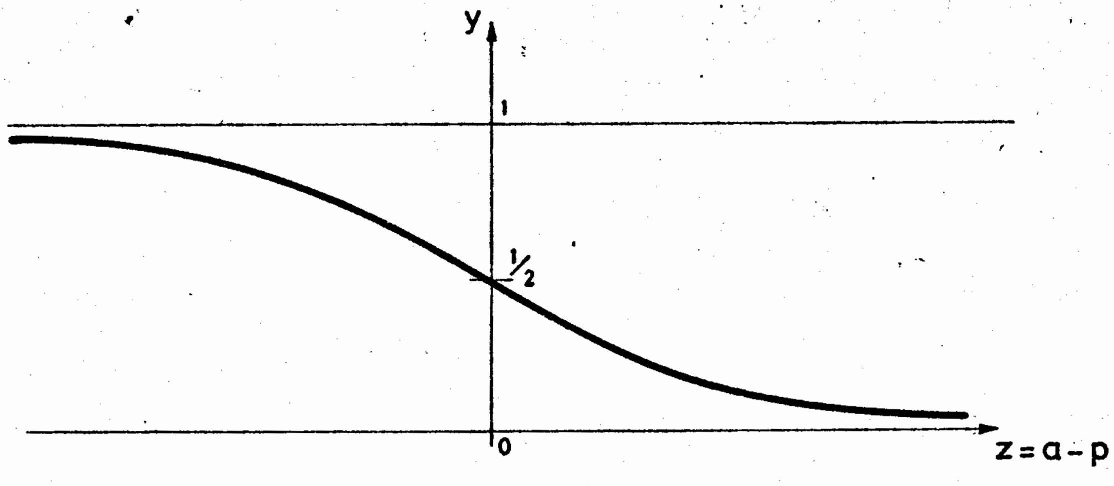


FIG. 5.2.1

5.2.2.1.2. Propietats.

Heus ací les propietats de la funció logística que ara interessa de remarcar, car després serviran de punt de referència per a les propostes ulteriors.

a) Es veu que la proporció d'usuaris de bus es fa petita a mesura que la diferència augmenta. Inversament, quan el cost a peu és superior. La funció, doncs, és monòtona decreixent.

b) La funció no privilegia cap mode, ja que és simètrica respecte del punt ($0, \frac{1}{2}$). Es a dir:

$$y(z) = 1 - y(-z)$$

En efecte:

$$1-y(-z) = 1 - \frac{1}{1+\exp(-\beta z)} = \frac{-\exp(-\beta z)}{1+\exp(-\beta z)} = \frac{1}{1+\exp(\beta z)} = y(z)$$

Per tant, si per una diferència z hi ha una proporció y que va en bus, per a una diferència de -z, l'anterior proporció serà 1-y.

c) El paràmetre creix amb la sensibilitat de l'usuari en la regió propera a l'origen. En efecte, la derivada a l'origen val:

$$y'(0) = -\frac{\beta}{4}$$

Evidentment, en regions allunyades passarà exactament el contrari; però el salt fort es produeix quan els costos s'assemblen, és a dir, quan $z \simeq 0$.

5.2.2.2. Funció de cost.

5.2.2.2.1. Formalització.

Sigui un flux (parell origen destí) amb una demanda fixa. El cost a peu és constant sempre, i el cost en bus varia segons l'evolució de l'algorisme. En definitiva, la variable independent és z, ja que se suposa:

$$a = p + z$$

Anomenant, doncs:

c: cost mitjà dels viatgers constituents del flux, i donant a les altres variables llur sentit habitual, queda:

$$c = y.a + (1-y)p = y(p+z) + (1-y)p = p + y.z = p + \frac{z}{1+\exp(\beta z)}$$

$$c = p + \frac{z}{1+\exp(\beta z)} \qquad (5.2.4)$$

5.2.2.2.2. Propietats.

Les derivades 1ª i 2ona. són:

$$c' = \frac{1 + (1-\beta z)\, e^{\beta z}}{(1+e^{\beta z})^2} \qquad (5.2.5)$$

$$c'' = -\beta e^{\beta z}\,\frac{(\beta z+2)+(-\beta z+2)\ e^{\beta z}}{(1+e^{\beta z})^3} \qquad (5.2.6)$$

Per tal de trobar el màxim de la funció c(z), si al numerador es fa $\beta z = x$, cal resoldre l'equació

$$(x-1)\ e^{x} = 1$$

que té una solució:

$$x_o = \beta z_o = 1'278464547260 \qquad (5.2.7)$$

Sustituint a la 2ª derivada:

$$c''(z_o) = -\beta\, e^{x_o}\,\frac{(3x_o-2)(x_o-1)^3}{x_o^3} < 0$$

Així, doncs, tracta d'un màxim.

L'ordenada a aquest punt serà:

$$c(z_o) = p + \frac{z_o}{1+\exp(\beta z_o)} = p + \frac{x_o}{\beta}\cdot\frac{1}{1+e^{x_o}} =$$

$$= p + \frac{x_o}{\beta}\cdot\frac{1}{1+\frac{1}{x_o-1}} = p + \frac{x_o-1}{\beta} \qquad (5.2.8)$$

La 2a derivada s'anul.la a dos punts, oposats entre sí, el valor dels quals és:

$$\left\{\begin{array}{l} \beta z_1 = x_1 = 2'399357280515 \\ \beta z_2 = x_2 = -x_1 \end{array}\right\} \qquad (5.2.9)$$

5.2.2.2.3. Influència del paràmetre β.

A la figura 5.2.2. s'ha dibuixat un gràfic de la funció, amb diversos valors de β . Cal notar que:

a) totes les corbes passen pel punt (0,p), que correspon a una igualtat de costos entre modes.

b) per valors grans de β, la funció s'aproxima més a

$c \longrightarrow p - z$	$z \ll 0$	$a \ll p$
$c \longrightarrow p$	$z \gg 0$	$a \gg p$,

que és l'afectació per tot o res.

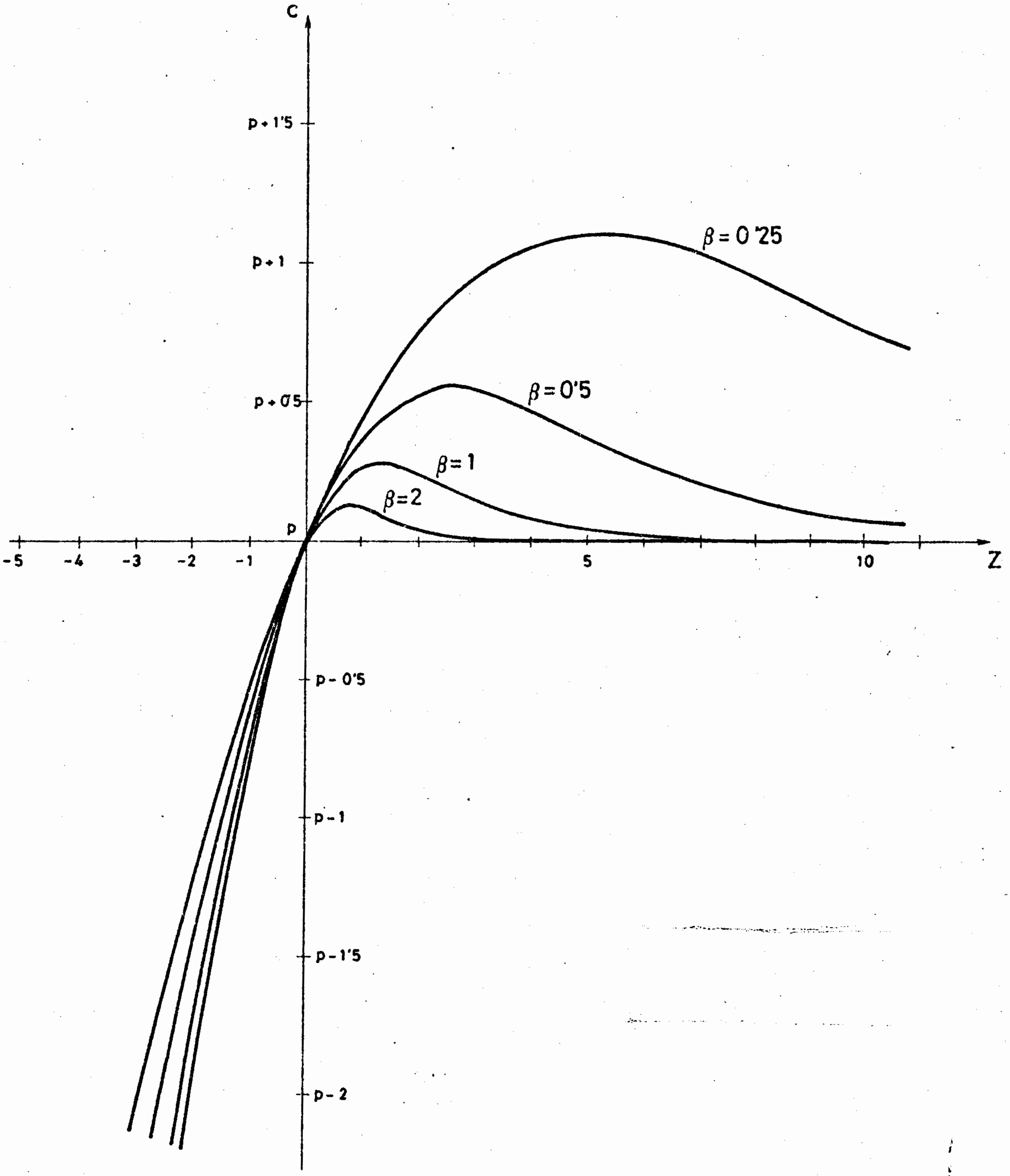


FIG. 5.2.2

En efecte, quan el cost en bus és molt petit en relació al cost a peu, $a \ll p$, el cost mitjà c tendeix a valer a. En el cas contrari, c s'acosta a p.

5.2.2.3. Inconvenients d'adaptar-la als presents algorismes.

La gràfica de la funció $c(z)$ deixa veure el resultat aparentment absurd on es va a raure.
En resulta que per a valors de $z > 0$, el valor del cost mitjà c augmenta fins a un punt, i després disminueix. Es a dir, a mida que el cost en bus augmenta, el cost mitjà també, la qual cosa és fins a cert punt lògica. Es com si els usuaris tinguessin una certa inèrcia a deixar l'autobús, tot i que és més car que la marxa a peu.
L'interval a la dreta del màxim seria el de "presa de consciència". L'autobús arriba a ser tant més car que cada vegada se n'adona més gent, la qual es decanta per anar a peu. Això explicaria la disminució del cost mitjà, per a valors creixents de z.
Si bé la forma d'aquesta funció pot ser més o menys acceptable sota un angle psicològic, es fa del tot inadmissible quan hom pensa a introduir-la a l'algorisme. En efecte, es tracta d'un algorisme iteratiu que avança pas a pas. En l'interval de z superiors al màxim, resultaria que una disminució del cost en bus $(z_2 < z_1)$ donaria lloc a un augment del cost mitjà general $(c_2 > c_1)$, amb la qual cosa, aquest pas no seria mai escollit, tot i que de fet representa una millora. Vegi's la figura 5.2.3.

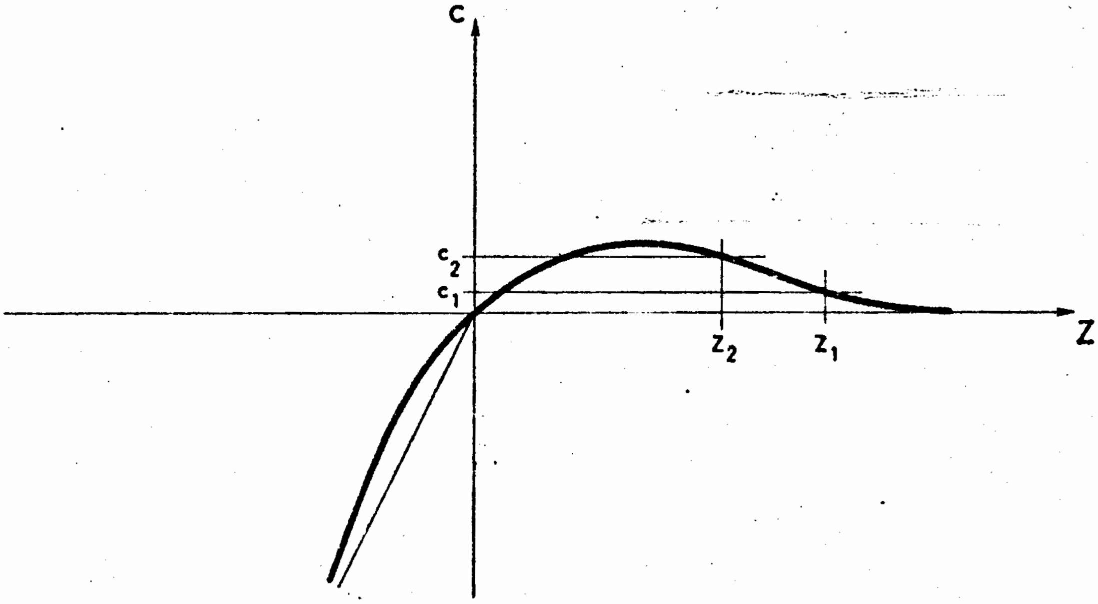


FIG. 5.2.3

5.2.3. ESTUDI DE LA FUNCIO L.

Al punt anterior s'ha vist la dificultat que presentava la fórmula logística sota un punt de vista algorísmic. Per tal de bandejar aquest problema, s'ha pensat en una altra funció de repartició similar a l'anterior, però tal que la seva funció de cost no tingui cap màxim: és a dir, sigui sempre creixent.

La solució proposada és una corba no analítica, constituïda a partir de dues hipèrboles adjacents a l'origen.
Se segueix la mateixa nomenclatura anterior, llevat de quan es farà la comparació entre ambdues solucions.

5.2.3.1. Funció de repartiment.

5.2.3.1.1. Expressió.

$$y=y(a,p)=\begin{cases} 1-\dfrac{1}{2-\beta(a-p)} & a\leqslant p \\[2ex] \dfrac{1}{2+\beta(a-p)} & a\geqslant p \end{cases} \qquad (5.2.10)$$

5.2.3.1.2. Propietats.

Té les mateixes propietats generals que la corba logística. Així:

a) Les asímptotes són:

$$\lim_{z\to-\infty} y = \lim_{z\to-\infty}\left[1-\frac{1}{2-\beta z}\right]=1$$

$$\lim_{z\to\infty} y = \lim_{z\to\infty}\frac{1}{2+\beta z}=0$$

b) Es simètrica:

$$y(z)=1-y(-z)$$

En efecte:
Si $z>0$:

$$1-y(-z)=1-\left[1-\frac{1}{2-\beta(-z)}\right]=+\frac{1}{(2+\beta z)}=y(z)$$

Si $z<0$:

$$1-y(-z)=1-\frac{1}{2+\beta(-z)}=1-\frac{1}{(2-\beta z)}=y(z)$$

c) El paràmetre β compleix la mateixa missió, i és un indicador de la sensibilitat. A l'origen, la derivada pren el mateix valor que abans:

$$y'(0)=-\frac{\beta}{4}$$

ja sigui calculada per la dreta o per l'esquerra.

A la figura 5.2.4. es comparen les funcions L i la logísti ca, per a diferents valors de β:

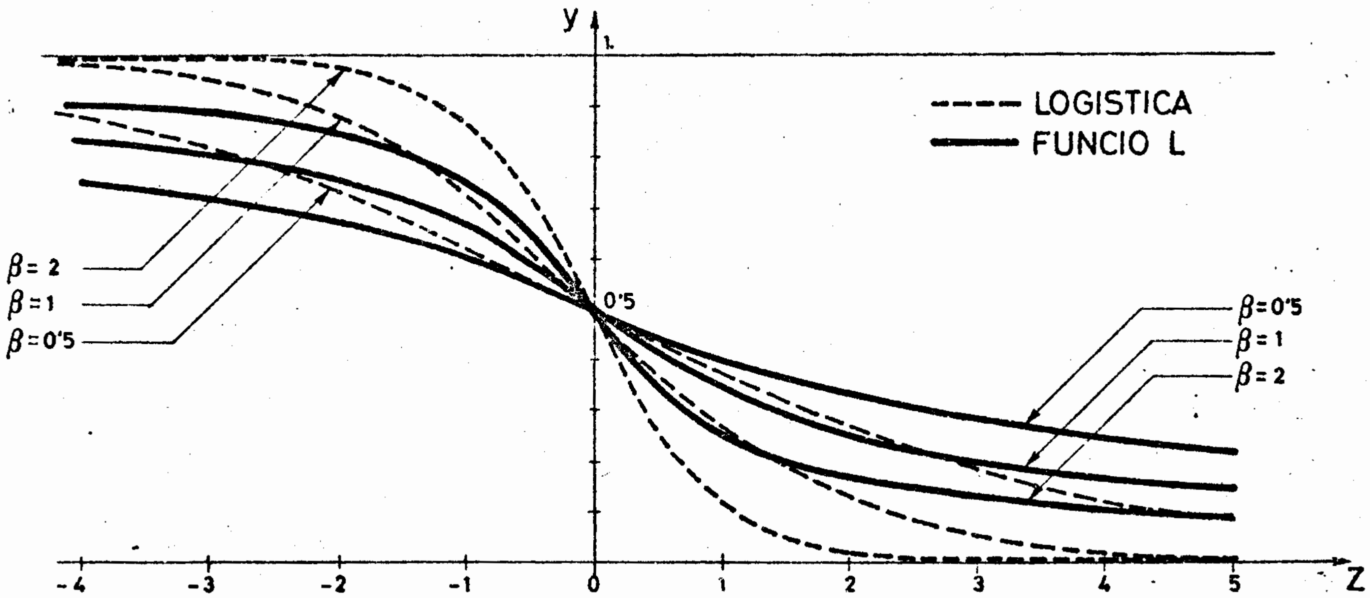


FIG. 5.2.4

Amb les condicions imposades l'igualtat d'ordenada i de derivada a l'origen, la corba logística és, en tot moment, més discriminadora que la funció L, per a un mateix valor del paràmetre β, donat que aquesta darrera tendeix més lentament a l'asímptota en qualsevol dels casos.
Sota un punt de vista teòric, no sembla un obstacle massa greu aquesta lentitud, i fins aquí pot acceptar-se aquesta funció com a representativa del repartiment entre modes.

5.2.3.2. Funció de cost.

5.2.3.2.1. Formalització.

Fent servir la mateixa nomenclatura que abans, s'obté:

$$\boxed{c = y.a + (1-y).p = p + y.z \begin{cases} p + z\dfrac{z}{2-\beta z} & z \leqslant 0 \\ p + \dfrac{z}{2+\beta z} & z > 0 \end{cases}} \tag{5.2.11}$$

5.2.3.2.2. Propietats: comparació amb la funció de cost logística.

Les derivades 1ª i 2ª són:

$$c' = \begin{cases} 1 - \dfrac{2}{(2-\beta z)^2} & z \leqslant 0 \\ \dfrac{2}{(2+\beta z)^2} & z \geqslant 0 \end{cases} \tag{5.2.12}$$

$$c'' \begin{cases} -\dfrac{4\beta}{(2-\beta z)^3} & z \leqslant 0 \\ -\dfrac{4\beta}{(2+\beta z)^3} & z \geqslant 0 \end{cases} \qquad (5.2.13)$$

Pot veure's que c'és sempre positiva; en efecte

- si $z \geqslant 0$, és evident
- si $z \leqslant 0$, el denominador serà sempre $\geqslant 2$, ja que $\beta > 0$.

Per tant, la fracció $\leqslant 1$ i $c' > 0$.
En segon lloc, la funció i les dues primeres derivades coincideixen a l'origen, amb els valors de (5.2.14)

$$\left. \begin{aligned} c(0) &= p \\ c'(0) &= \frac{1}{2} \\ c''(0) &= \frac{\beta}{2} \end{aligned} \right\} \qquad (5.2.14)$$

tant les dues meitats de la funció entre sí com elles dues amb la funció de cost logística.
D'altra banda, les dues primeres derivades no tenen extrems en el camp de definició. Això resol el problema de la funció anterior, ja que $c(z)$ és creixent en tot l'eix real.
L'única expressió que s'anul.la és $c' = 1 - \frac{2}{(2-\beta z)^2}$, que té un màxim per $z = \frac{2-\sqrt{2}}{\beta}$. Però com que $\beta > 0$, $z > 0$, cau fora del camp de definició $[-\infty, 0]$.
Respecte de les asímptotes, pot veure's que:

$$\left. \begin{aligned} \lim_{z\to-\infty} (c-p-z) &= \lim_{z\to-\infty} \left(-\frac{z}{2-\beta z}\right) = \frac{1}{\beta} \\ \lim_{z\to\infty} (c-p) &= \lim_{z\to\infty} \frac{z}{2+\beta z} = \frac{1}{\beta} \end{aligned} \right\} \qquad (5.2.15)$$

Es a dir, les asímptotes són,

$$\left. \begin{aligned} c &= z + \left(p + \frac{1}{\beta}\right) && \text{quan } z \to -\infty \\ c &= p + \frac{1}{\beta} && \text{''} \quad z \to \infty \end{aligned} \right\} \qquad (5.2.16)$$

(vegi's la figura 5.2.5), la qual cosa vol dir que la funció no tendeix als mateixos límits que abans, sinó que aquests s'augmenten en $1/\beta$ a cada extrem.

La figura 5.2.6. compara les funcions de cost L i logística per a diferents valors de β ; gràficament hi apareix tot allò que s'ha dit fins ara. La figura 5.2.7. n'és una ampliació per a $\beta = 1$ en una zona propera a l'origen.

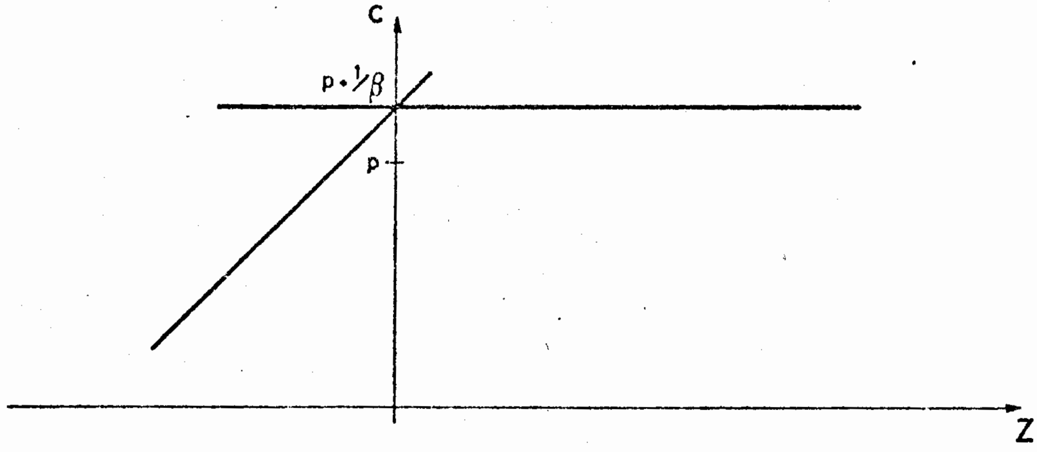


FIG. 5.2.5

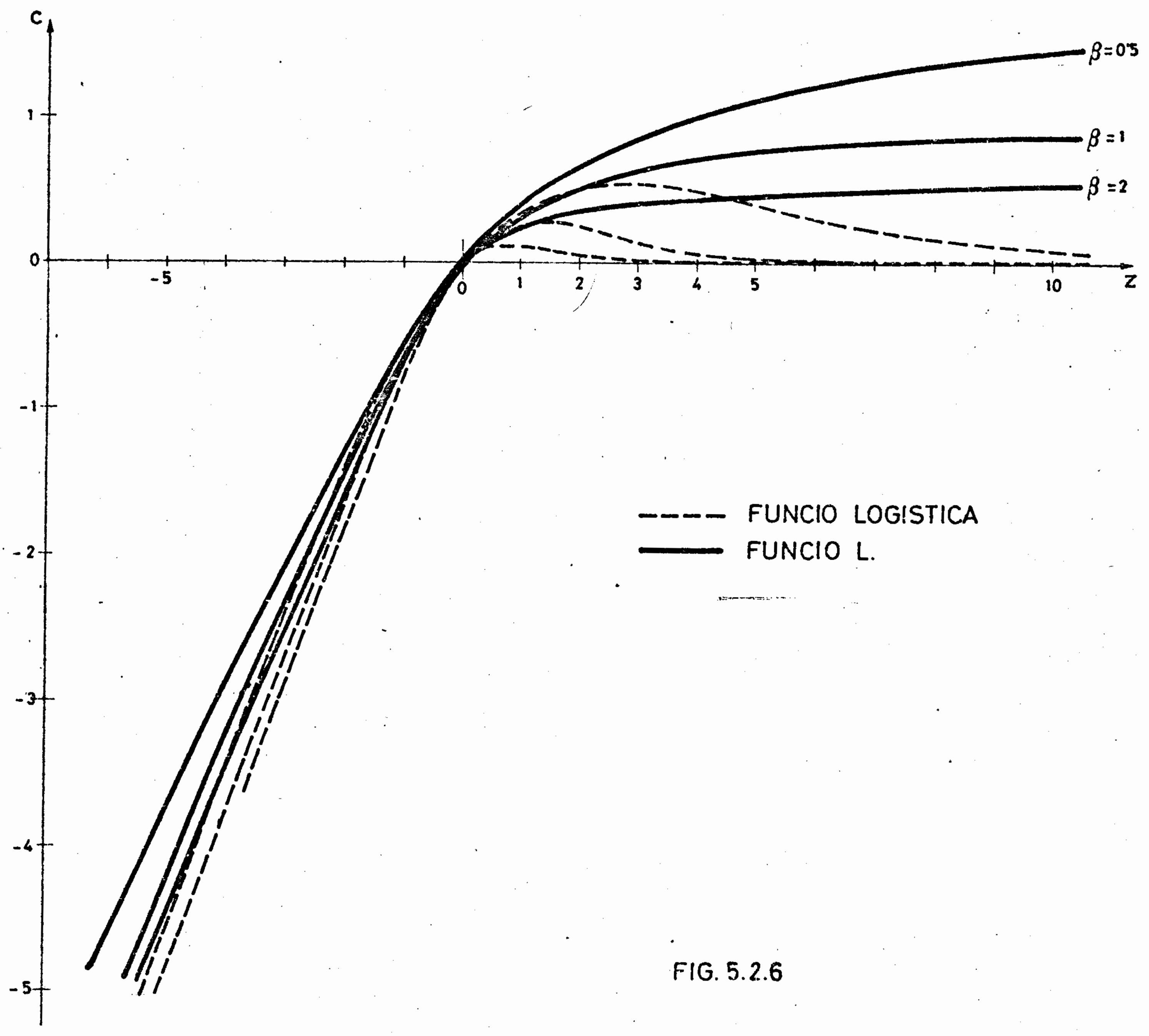


FIG. 5.2.6

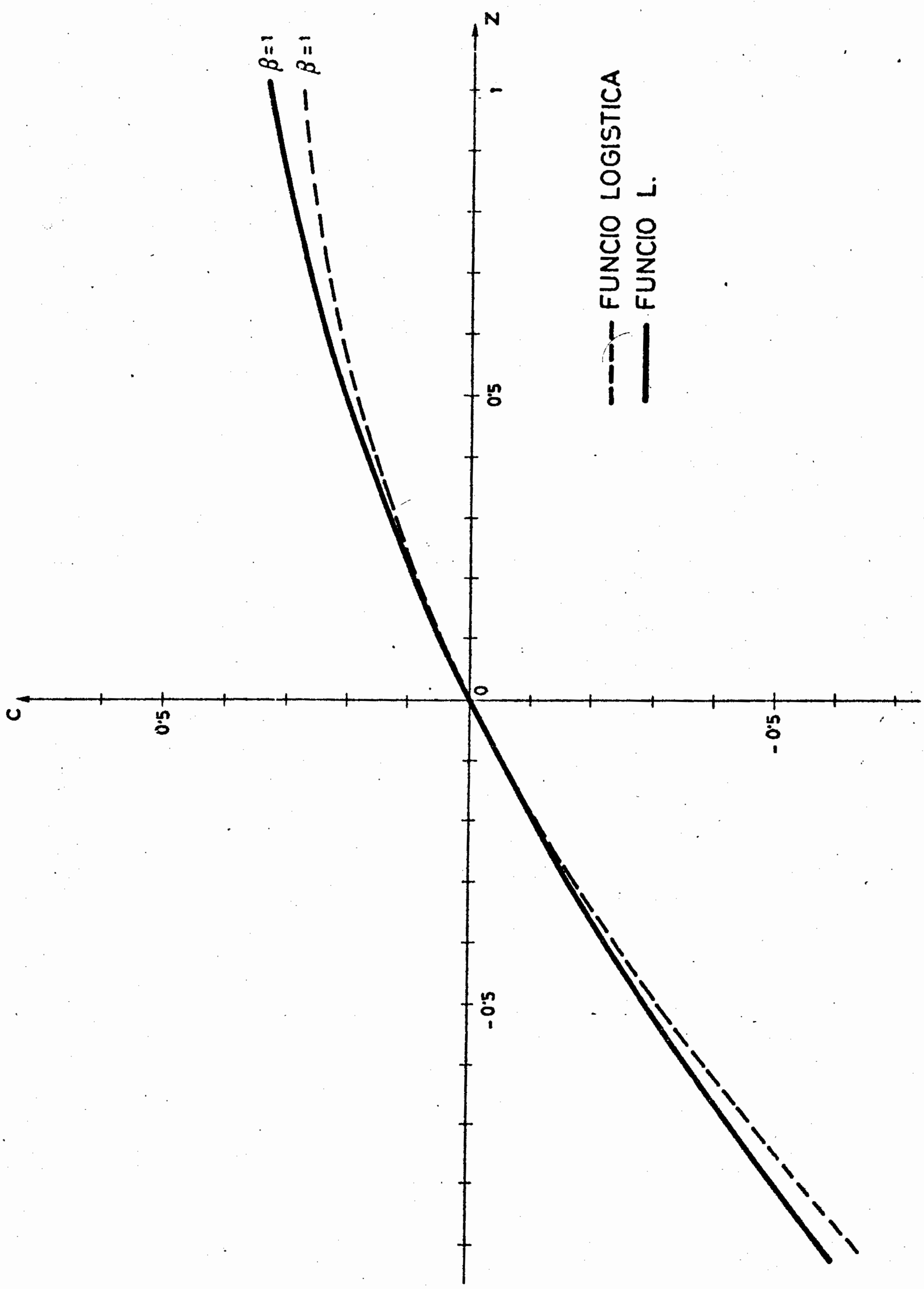


FIG. 5.2.7

5.2.3.3. Crítica que comporta el seu ús.

S'ha resolt el problema anterior per mor del màxim de la funció de cost. Però això crea un nou inconvenient. En estudiar les asímptotes s'ha pogut veure que disten $\frac{1}{\beta}$ de la funció logística que en el límit assignava per tot o res.
Aquesta pega pot pal.liar-se prenent un valor gran per a β ,(de l'ordre de $3 \div 5$). Caldrà tenir en compte que, cada cost, llevat del punt $z = 0$, en què el cost en bus i a peu coincideixen, serà superior si s'adopta aquesta funció que no si se segueix amb la logística i, per descomptat, la tot o res.
A les figures 5.2.6. i 5.2.7. pot veure-s'hi que la proximitat a l'asímptota es fa més gran a mesura que creix .

5.2.3.4. Impossibilitat d'emprar funcions de grau superior.

Cal descartar la possibilitat d'obtenir corbes més reeixides a partir de funcions racionals de grau superior.
En efecte, sigui la funció de partida:

$$y = \frac{1}{(A+B\beta Z)^n} = (A+B\beta Z)^{-n} \qquad z \geqslant 0 \qquad (5.2.17)$$

on $n \geqslant 1$. Imposant les condicions inicials habituals fins ara, és a dir:

$$\left.\begin{aligned} y(o) &= \frac{1}{A^n} = \frac{1}{2} \\ y'(o) &= \frac{-n\,B\beta}{A^{n-1}} = -\frac{\beta}{4} \end{aligned}\right\} \qquad (5.2.18)$$

es determinen els coeficients A i B . Substituïts a (5.2.17) en resulta:

$$y = \frac{1}{2\left(1+\frac{\beta}{2n}z\right)^n} \qquad z \geqslant 0 \qquad (5.2.19)$$

La funció de cost seria aleshores:

$$c = p + \frac{z}{2\left(1+\frac{\beta}{2n}z\right)^n} \qquad z \geqslant 0 \qquad (5.2.20)$$

la qual té un màxim per a

$$z = \frac{2n}{\beta(n-1)} \qquad (5.2.21)$$

Aquest màxim només deixa de produir-se quan $n=1$, que és el cas ja tractat. Fora d'aquest, doncs, la funció tornaria a tenir un màxim, que és precisament allò que vol evitar-se.

5.2.4. ESTUDI DE LA FUNCIO M.

La corba L resolia el problema del repartiment entre dos modes, ensems que imposava que el cost mitjà fos una funció monòtona creixent. A partir dels resultats obtinguts aleshores, ara es tracta de generalitzar-los per tal de trobar-ne una aplicable a un flux servit per s itineraris.
Tot i la formulació inicial de la funció M, diferent de la funció L, es demostra que per a 2 itineraris ambdues coincideixen.
En tot el paràgraf 5.2.4, doncs, se suposa que hi ha un total d's itineraris, cada un amb un cost a^k . Per tant, l'usuari té $s+1$ alternatives car, a més, hi ha el viatge a peu, el cost del qual és a^o.

5.2.4.1. Funció de repartiment.

5.2.4.1.1. Expressió.

Sigui y^k a la proporció d'usuaris que empra l'itinerari k-è.
Aleshores:

$$\boxed{\begin{aligned} y^k &= \frac{\dfrac{1.}{a^k - M}}{\displaystyle\sum_{i=o}^{s} \frac{1}{a^i - M}} && (2.1.8) \\ M &< \min_k a^k && (2.1.9) \end{aligned}}$$

Aquestes fórmules ja han aparegut a la hipòtesi H 17)
La proporció y^k és inversament proporcional al cost, disminuït d'una certa quantitat M, constant per a tots els costos.
El denominador pretén de ser un coeficient normalitzador per tal que sigui certa la condició:

$$\sum_{i=o}^{n} y_i = 1 \qquad (5.2.22)$$

La raó de prendre els costos disminuïts d'M obeeix a un motiu experimental, obtingut de les enquestes. El criteri que més pesa enfront de l'usuari de cara a decidir l'itinerari, és més que cap altre la diferència de costos, tal com ja s'ha assenyalat a l'inici del punt 5.2. Si hom tria aquesta

M de manera que la diferència h = $\min_k a^k - M$ sigui constant, deixen de tenir relevància els valors absoluts i passen a comptar llurs diferències. Això és el que es pretenia.

5.2.4.1.2. Cas particular de 2 itineraris.

Adaptant la funció M al cas de només 2 itineraris, i tenint en compte que a^0 = p i a^1 = a, en resultaria:

$$y = \frac{\frac{1}{a-m}}{\frac{1}{a-m} + \frac{1}{p-m}} = \frac{1}{1 + \frac{a-m}{p-m}} \qquad (5.2.23)$$

Té les propietats habituals, a condició de mantenir constant:

$$h = \min(a,p) - m \qquad (5.2.24)$$

En efecte:

a) Les asímptotes són

$$\left.\begin{aligned} &\lim_{a\to\infty} y = \lim_{a\to\infty} \frac{1}{1+\frac{a-m}{p-m}} = \lim_{a\to\infty} \frac{1}{1+\frac{h}{p-(a-h)}} = 1 \\ &\lim_{a\to\infty} y = \lim_{a\to\infty} \frac{1}{\frac{a-(p-h)}{h}} = 0 \end{aligned}\right\} \qquad (5.2.25)$$

b) La derivada a l'origen serà:

$$\frac{\delta y}{\delta a} = -\left(1+\frac{a-m}{p-m}\right)^{-2} \frac{1}{p-m}$$

$$\left(\frac{\delta y}{\delta a}\right)_0 = -\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{p-m} = -\frac{1}{4h}$$

Igualant aquest valor a l'obtingut a la corba L

$$-\frac{1}{4h} = -\frac{\beta}{4} \quad \Rightarrow \quad \boxed{h = \frac{1}{\beta}} \qquad (5.2.26)$$

h és doncs, l'indicador de sensibilitat. Com més pròxim sigui M al cost mínim, més sensible serà la funció a les diferències de costos.

Valent-se de la igualtat (5.2.26), i sustituInt-la a la fórmula general:

a) Si $a < p$
$$\begin{cases} a - m = h = \dfrac{1}{\beta} \\ p - m = a - z - m = -z + \dfrac{1}{\beta} \end{cases}$$

$$y = \frac{1}{1+\frac{a-m}{p-m}} = \frac{1}{1+\frac{\frac{1}{\beta}}{-z+\frac{1}{\beta}}} = \frac{-\beta z}{2-\beta z} = 1-\frac{1}{2-\beta z}$$

b) Si $a > p$
$$\begin{cases} p - m = h = \dfrac{1}{\beta} \\ a - m = p + z - m = z + \dfrac{1}{\beta} \end{cases}$$

$$y = \frac{1}{1+\frac{a-m}{p-m}} = \frac{1}{1+\frac{z+\frac{1}{\beta}}{\frac{1}{\beta}}} = \frac{1}{2+\beta z}$$

Reapareix, doncs, la funció L de repartiment (5.2.10). Aquesta equivalència prova, entre altres coses la simetria de la funció M, respecte del punt $a=p$, quan hi ha 2 itineraris, i fa extensives a la funció M totes les propietats vistes per a la funció L.

5.2.4.2. Funció de cost.

5.2.4.2.1. Expressió.

El cost mitjà, per aplicació de (2.1.8) serà:

$$c = \sum_{k=o}^{s} y^k a^k = \frac{\sum\limits_{k=o}^{s} \frac{a^k}{a^k - M}}{\sum\limits_{k=o}^{s} \frac{1}{a^k - M}} \qquad (2.1.12)$$

que és la fórmula que apareix a la hipòtesi H 20)

5.2.4.2.2. Propietats.

La primera derivada és:

$$\frac{\delta c}{\delta a^i} = \frac{-M\sum\limits_k \frac{1}{a^k-M} + \sum\limits_k \frac{a^k}{a^k-M}}{\sum\limits_k\left(\frac{1}{a^k-M}\right)^2} \cdot \frac{1}{(a^i-M)^2} =$$

$$= \frac{s+1}{\left(\sum_i \frac{1}{a^i - M}\right)^2} \cdot \frac{1}{(a^i - M)^2} \qquad (5.2.27)$$

Sempre és positiva, ja que el numerador ho és ($s > 0$) i el denominador és un producte de factors quadràtics.
Si $a^i = a, \forall i$, aleshores:

$$c(a) = a$$

$$\left(\frac{\delta c}{\delta a^i}\right)_a = \frac{s+1}{\left(\frac{s+1}{h}\right)^2} \cdot \frac{1}{h^2} = \frac{1}{s+1},$$

que és una generalització dels valors trobats per a 2 itineraris. En efecte aleshores $s = 1$, i $c \doteq 1/2$

5.2.4.2.3. Asímptotes.

Fent tendir a infinit tots els costos, llevat del cost a peu,

$$a^k \longrightarrow \infty \qquad k = 1 \ldots s,$$
$$a^o - M = h$$

La funció passa a ser:

$$\lim_{\substack{a^k \to \infty \\ \forall k = 1..s}} c = \lim_{\substack{a^k \to \infty \\ \forall k = 1..s}} \frac{\frac{a^o}{a^o - M} + \sum_{k=1}^{s} \frac{a^k}{a^k - M}}{\frac{1}{a^o - M} \sum_{k=1}^{s} \frac{1}{a^k - M}} = \frac{\frac{a^o}{a^o - M} + s}{\frac{1}{a^o - M} + 0} =$$

$$= \frac{\frac{a^o}{h} + s}{\frac{1}{h}} = a^o + \frac{s}{\beta} \qquad (5.2.28)$$

El cost màxim depèn del nombre total d'itineraris , s., àdhuc si aquests no tenen cap usuari quan llur cost sigui infinit. Aquest punt caldrà tenir-lo en compte en la implementació informàtica.

5.2.4.3. Dificultats que comporta el seu ús.

En l'algorisme d'assignació, es dóna el cas d'assignar 0 autobusos a una línia. Si aquesta línia és l'única del seu itinerari, el cost es fa, aleshores, infinit.
Prèviament es calcula el cost màxim, és a dir, aquell que haurien de

suportar els usuaris si no hi hagués cap autobús a la xarxa. Tal cost no coincideix, evidentment, amb el cost a peu, sinó que, a més, és funció del nombre d'itineraris (lògicament "buits") que hi hagi entre tot parell de punts.
L'augment de cost que suposa el fet de tenir en compte la funció M en el cas asímptòtic pot interpretar-se com el cost de desacostumar els usuaris, quan estaven habituats a emprar un servei donat.

5.3 INDEX DE PROXIMITAT

5.3.1. DEFINICIO

Al punt 2.3.5.2., en parlar de la influència de LINUS, s'ha definit breument i aplicat l'índex de proximitat entre xarxes. Ara se'n fa la ressenya completa.

Donades 2 xarxes relatives a una mateixa ciutat, cada una d'elles ofereix un tipus de servei diferent a la demanda. L'índex que aquí es defineix, pretén de mesurar la diferència entre els serveis oferts per cada xarxa.

Les matrius de partida són:

$[d_{ij}]$: demanda.

$[a^m_{ij}]$: cost mitjà de viatge ofert per la xarxa m-ena.

Considerant cada matriu de cost com una distribució estadística, i la matriu de demanda com a una ponderació de les primeres, aleshores poden definir-se els moments estadístics referits a cada distribució. Així:

$$\bar{x}_m = \frac{\sum_i \sum_j d_{ij} \, a^m_{ij}}{\sum_i \sum_j d_{ij}} = \frac{\sum_i \sum_j d_{ij} \, a^m_{ij}}{W} \qquad (5.3.1.)$$

$$\sigma^2_m = \frac{\sum_i \sum_j d_{ij} \, (a^m_{ij} - \bar{x}_m)^2}{\sum_i \sum_j d_{ij}} = \frac{\sum_i \sum_j d_{ij} \, {a^m_{ij}}^2}{W} - \bar{x}^2_m \qquad (5.3.2)$$

Definides dues xarxes, l'm-ena, i l'n-ena, llavors:

$$\mu_{mn} = \frac{\sum_i \sum_j d_{ij}(a^m_{ij} - \bar{x}_m)\,(a^n_{ij} - \bar{x}_n)}{\sum_i \sum_j d_{ij}} \qquad (5.3.3)$$

Després d'aquest pròleg, pot passar-se a definir l'índex de proximitat entre 2 xarxes, m-ena i n-ena, de la següent manera:

$$\boxed{I_{mn}=\frac{\sum_i \sum_j d_{ij}(a^m_{ij}-a^n_{ij})^2}{\sum_i \sum_j d_{ij}}} \qquad (5.3.4)$$

Com que es tracta d'una proximitat (o d'una distància), ha semblat adient d'escollir una expressió quadràtica.

5.3.2. CALCUL.

El valor concret d'I_{mn} pot obtenir-se fàcilment a partir dels moments anteriorment vistos: mitjana, variància i covariància. En endavant, i per millorar la comprensió se suprimeixen els subíndexs on hi siguin evidents.

$$I_{mn}=\frac{\sum d(a_m-a_n)^2}{W}=\frac{\sum d(a_m^2+a_n^2-2\,a_m\,a_n)}{W}=\frac{\sum da_m^2}{W}+\frac{\sum da_n^2}{W}-$$

$$-2\,\frac{\sum a_m\,a_n}{W}=(\sigma_m^2+\bar{x}_m^2)+(\sigma_n^2+\bar{x}_n^2)-2(\mu xy+\bar{x}_m\,\bar{x}_n)=(\sigma_m^2+\sigma_n^2-2\,\mu_{mn})+$$

$$+(\bar{x}_m^2+x_n^2-2\,\bar{x}_m\bar{x}_n)=(\sigma_m^2+\sigma_n^2-2\,\mu_{mn})+(\bar{x}_m-\bar{x}_n)^2$$

$$\boxed{I_{mn}=(\sigma_m^2+\sigma_n^2\quad-2\,\mu_{mn})+(\bar{x}_m-\bar{x}_n)^2} \qquad (5.3.5)$$

5.3.3. INTERPRETACIO.

La partició de la fórmula anterior en dos sumands, permet de donar un significat a cada un:

$$\left.\begin{aligned} I^1_{mn}&=\sigma_m^2+\sigma_n^2-2\,\mu_{mn}\\ I^2_{mn}&=(\bar{x}_m-\bar{x}_n)^2\end{aligned}\right\} \qquad (5.3.6)$$

El primer indica la part de la diferència imputable a les dispersions diferencials entre costos, mentre que el segon, es refereix a la diferent grandària dels valors.
Per tant, I^1_{mn} serà més gran com més gran siguin les diferències de costos flux a flux (parell a parell). I^2_{mn}, en canvi, creix amb la diferència global de servei, ja que no és altra cosa que una diferència quadràtica de mitjanes.
Aleshores, $I_{mn} \simeq I^2_{mn}$ (o sigui, $I^1_{mn} \simeq 0$) significarà que ambdues xarxes són igualment "equitatives", per bé que de qualitat diferent.
El cas oposat, quan $I^2_{mn} \simeq 0$, $I_{mn} \simeq I^1_{mn}$ representarà la proximitat entre dues xarxes que, per bé que globalment ofereixen un mateix servei, discriminen entre els diversos fluxos, de forma que alguns estan més ben servits en l'una que en l'altra.

5.4 NOMBRE DE SOLUCIONS DE L'ALGORISME D'ASSIGNACIO

L'assignació d'autobusos a les línies és un problema combinatori, i com a tal, el nombre de solucions és molt alt. A tall il.lustratiu, aquest punt es dedica al càlcul del nombre de solucions, o maneres possibles d'assignar A autobusos a una xarxa d'L línies.

5.4.1. DEMOSTRACIO DE LA FORMULA.

Sigui:

A : el nombre d'autobusos de la flota.

L : el nombre de línies de la xarxa.

S(A,L) : el nombre de solucions possibles.

En general, s'acomplirà:

$$S(A,L) = \sum_{x=0}^{A} S(x, L-1) \qquad (5.4.1)$$

En efecte, si s'aïlla la línia L-ena, o darrera, i s'hi assignen A-x autobusos, resten x autobusos per a les altres L − 1 línies, amb S(x, L−1) solucions.

La línia L-ena pot tenir entre 0 i A autobusos; per tant, per a la resta de la xarxa en queden $A \geqslant x \geqslant 0$, que explica els límits del sumatori.

A més, és obvi que

$$S(A, 1) = 1, \qquad (5.4.2)$$

ja que si només hi ha una línia, tots els autobusos s'hi han d'assignar per força.

La fórmula que dóna el nombre de solucions és:

$$\boxed{S(A,L) = \binom{A+L-1}{L-1}} \qquad (5.4.3)$$

La prova es fa per inducció:

a) Es cert per a L =1

$$S(A,1) = \binom{A}{0} = 1$$

tal com s'ha vist a (5.4.2)

b) Si és cert per a L-1 , també ho és per a L. Aplicant (5.4.1)

$$S(A,L) = \sum_{x=0}^{A} S(x, L-1) = \sum_{x=0}^{A} \binom{x+L-2}{L-2} =$$

$$= \binom{L-2}{L-2} + \binom{L-1}{L-2} + \binom{L}{L-2} + \cdots + \binom{A+L-3}{L-2} + \binom{A+L-2}{L-2}$$

I recordant les 2 següents propietats dels nombres combinatoris:

$$\binom{m}{m} = \binom{m+1}{m+1} = 1$$

$$\binom{m}{n} + \binom{m}{n+1} = \binom{m+1}{n+1}$$

els dos primers sumands de l'expressió anterior esdevenen

$$\binom{L-2}{L-2} + \binom{L-1}{L-2} = \binom{L-1}{L-1} + \binom{L-1}{L-2} = \binom{L}{L-1}$$

i sumant aquest resultat al tercer:

$$\binom{L}{L-1} + \binom{L}{L-2} = \binom{L+1}{L-1}$$

Així successivament, hom acabaria sumant l'avant-darrer amb el darrer:

$$\binom{A+L-2}{L-1} + \binom{A+L-2}{L-2} = \binom{A+L-2}{L-1},$$

com calia demostrar.

5.4.2. PROBLEMA DUAL.

Es fàcil mostrar l'equivalència següent:

$$\boxed{S(A,L) = S(L-1\ ,\ A+1\ )} \tag{5.4.4}$$

En efecte, segons (5.4.3)

$$\begin{cases} S(A,\ L\ ) = \binom{A+L-1}{L-1} \\ S(L-1\ ,\ A+1\ ) = \binom{(L-1)+(A+1)-1}{A+1-1} = \binom{A+L-1}{A} \end{cases}$$

I com que, en general:

$$\binom{m}{n} = \binom{m}{m-n}$$

alehores

$$S(A,L) = \binom{A+L-1}{L-1} = \binom{A+L-1}{(A+L-1)-(L-1)} =$$

$$= \binom{A+L-1}{A} = S(L-1\ ,\ A+1\ )$$

Per tant, és idèntic el nombre de solucions amb A busos i L línies, com en un problema amb L − 1 busos i A+1 línies.

5.4.3. ALGUNS EXEMPLES.

A la taula de la figura, 5.4.1 hi ha els valors del nombre de solucions per els nombres dígits. Pot observar-se que es compleix la fórmula 5.4.1.
Així, el valor S(6,4) = 84, per exemple, és igual a la suma dels elements de la fila superior, des de la columna 0 fins a la 6ena. (S (0,3) + S(1,3)+.... ..... + S(6,3) = 1 + 3 + ... + 28)
La taula 5.4.2. dóna el nombre de solucions per a valors més grans d'A i d'L, intentant de recórrer tota la gamma possible d'ambdues variables.

A busos / L: línies	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
3	1	3	6	10	15	21	28	36	45	55	66
4	1	4	10	20	35	56	84	120	165	220	286
5	1	5	15	35	70	126	210	330	495	715	1001
6	1	6	21	56	126	252	462	792	1287	2002	3003
7	1	7	28	84	210	462	924	1716	3003	5005	8008
8	1	8	36	120	330	792	1716	3432	6435	11440	19448
9	1	9	45	165	495	1287	3003	6435	12870	24310	43758
10	1	10	55	220	715	2002	5005	11440	14310	43758	92378

Nombre de solucions S(A,L)

FIG. 5.4.1

A busos / L: línies	10	50	100	500	1000
10	$9{,}2 \cdot 10^{4}$	$1{,}3 \cdot 10^{10}$	$4{,}2 \cdot 10^{12}$	$5{,}9 \cdot 10^{18}$	$2{,}9 \cdot 10^{21}$
20	$2{,}0 \cdot 10^{7}$	$4{,}6 \cdot 10^{16}$	$4{,}9 \cdot 10^{21}$	$2{,}3 \cdot 10^{34}$	$9{,}9 \cdot 10^{39}$
50	$6{,}3 \cdot 10^{10}$	$5{,}0 \cdot 10^{28}$	$6{,}7 \cdot 10^{39}$	$3{,}1 \cdot 10^{70}$	$5{,}5 \cdot 10^{84}$

Nombre de solucions S(A,L)

FIG. 5.4.2

Finalment, a l'apartat 3.3. van analitzar-se els resultats del model d'assignació. Totes les proves van fer-se a partir de les 5 xarxes de base i comptant amb 500 autobusos, llevat del punt 3.3.6., que estudiava justament la influència del nombre de busos. També a tall il.lustratiu s'exposa el nombre de solucions en cada un dels casos estudiats. Vegin-se les figures 5.4.3. i 5.4.4.

nombre de busos: 500

xarxa de base	L7	L8	L9	L10	L12
nombre de línies:L	31	24	23	22	19
" " solucions:S(500,L)	$8,7.10^{48}$	$7,9.10^{39}$	$3,5.10^{38}$	$1,5.10^{37}$	$8,4.10^{32}$

Nombre de solucions de les xarxes de base

FIG. 5.4.3

Xarxa de base L8. Nombre de línies L = 24

nombre de busos: A	15	50	150	500	1000
nombre de solucions S(A,24)	$1,6.10^{10}$	$5,6.10^{18}$	$2,5.10^{28}$	$7,9.10^{39}$	$5,1.10^{46}$

Nombre de solucions en les proves de 3.3.6

FIG. 5.4.4