2 MODEL DE GENERACIÓ

2.1 HIPOTESIS DEL MODEL

H 1) Existeix un nucli urbà o ciutat que suposem dividit en n zones, que formen el conjunt Z.
Cada zona té una certa demanda i oferta de viatge (origen i destí, respectivament), que es localitza en un sol punt anomenat nus.

H 2) Se suposa l'existència d'uns arcs que connecten tots els nusos entre sí. Cada arc té associat el temps de recorregut en bus. El cost és únic en un i altre sentit. El conjunt d'arcs i de nusos constitueix el graf, damunt del qual es mouen els busos i els vianants.

H 3) Existeix una demanda potencial, fixa per a cada problema, definida per a cada parell de zones. S'anomena matriu de demanda i es representa per

$$[d_{ij}]$$

H 4) Una línia d'autobús es defineix com un enfilall de nusos:

$$L_l = \{Z_1, Z_2, \ldots\ldots Z_{m_l} \mid Z_k \in Z,\ k=1 \ldots\ldots m_l\}$$

que són precisament, els que la línia uneix.
El conjunt de línies és la xarxa $x = \{L_l \mid l = 1 \ldots\ldots p\}$
No té cap relació el fet que una línia passi per una zona amb el nombre de parades en aquesta darrera. Hi ha d'haver, com a mínim, una parada, però la decisió d'implantar-n'hi més no s'inclou a través del recorregut, sinó dels costos associats a l'arc.

H 5) Les línies tenen anada i tornada: ambdues sempre són coincidents. Es a dir, si l'anada és:

$$Z_1 \longrightarrow Z_2 \longrightarrow \cdots\cdots\cdots \longrightarrow Z_{m_l-1} \longrightarrow Z_m$$

la tornada serà:

$$Z_{m_l} \longrightarrow Z_{m_l-1} \longrightarrow \cdots\cdots\cdots \longrightarrow Z_2 \longrightarrow Z_1$$

H 6) Pel que fa als itineraris, cal matisar dos punts:

a) s'admet la línia circular, en la qual el primer i el darrer nus coincideixen:

$$Z_1 = Z_{m_l}$$

b) una línia, a mig recorregut, no pot creuar-se a sí mateixa, és a dir:

$$Z_k \neq Z_n \qquad \begin{array}{l} k = 2, \ldots\ m_l-1 \\ n = 2, \ldots\ m_l-1\ ,\ \forall\ L_l \in X \end{array}$$

H 7) La demanda enunciada a H 3) pot ser servida per 2 mitjans de transport:
- autobús.
- NO autobús. Aquest mitjà fictici inclou tots els mitjans damunt dels

quals no pot actuar-se, com ara: peu, cotxe, metro i tren intraurbà.
El conjunt d'aquests mitjans alternatius té un sol cost,

$[p_{ij}]$

que se suposa constant al llarg del procés.
Per simplicitat, d'ara en endavant aquest cost s'assimila a la marxa a peu.

H 8) El cost en autobús està format dels següent components:
- temps de recorregut
- " d'accés (inicial i final).
- equivalent en temps de la tarifa pagada, obtingut per un coeficient de valor del temps esmerçat en el viatge.
- temps d'espera.

El cost total és la suma dels components.

H 9) El temps de recorregut entre 2 nusos i,j, per la línia l, és la suma de temps associats a cada un dels arcs que componen el tram entre el 2 nusos donats.
Si la línia és circular, es pren com a temps de recorregut el mínim dels dos possibles.

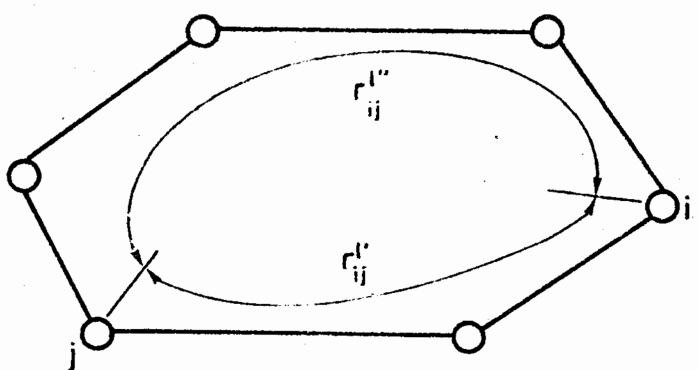


FIG. 2.1.1

$$r_{ij}^{l} = \min \left[r_{ij}^{l'} , r_{ij}^{l''} \right]$$

H 10) El temps d'accés se suposa constant per a tota zona i independent de la línia que la travessa, tant si es considera origen com destí.
El present algorisme suposa nuls els temps d'accés; és fàcil de modificar aquesta hipòtesi, i substituir-la per una altra que suposi la tarifa proporcional al recorregut.Això troba la seva justificació en el fet que la matriu de costos alternatius $[p_{ij}]$ ve calculada de nus a nus, i,per tant, també ignora els temps d'accés.

H 11) L'equivalent en temps de la tarifa E, es defineix com l'estalvi de temps respecte del mitjà alternatiu que s'ha d'oferir a l'usuari perquè a aquest li sigui indiferent de prendre l'un o l'altre.
Pot definir-se també com l'equivalent en temps del cost monetari de la tarifa, via "el valor del temps".

Aquest valor, E, se suposa constant per a tota la xarxa; és a dir, s'admet la vigència d'una tarifa única. Modificar aquesta hipòtesi assignant un valor d'accés a cada zona és perfectament possible amb l'actual estructura de l'algorisme.

H 12) L'algorisme de generació fa la hipòtesi restrictiva que, en un moment donat del procés l'interval entre dos autobusos consecutius d'una línia és el mateix per a totes les línies.
Si s'anomena:

T_l : temps total de recorregut de la línia l-ena (en un sol sentit)
T : " " " " " " xarxa
A : nombre total de busos
u : interval de la xarxa, aleshores:

$$\boxed{T = \sum_l T_l} \qquad (2.1.1)$$

$$\boxed{u = \frac{2 \cdot T}{A}} \qquad (2.1.2)$$

En efecte, 2 T és el temps que un sol autobús tardaria a recórrer-se tota la xarxa, línia per línia en ambdós sentits. Suposant tots els A autobusos igualment espaiats, u ha de ser l'interval entre dos autobusos. Com pot deduir-se, s'ha suposat nul el temps mort esmerçat als tèrminus.

H 13) Sigui H_{ij} el conjunt de línies que passen per i i per j

$$H_{ij} \subset X$$

$$H_{ij} = \{ L_l \mid L_l \in X , i \in L_l, j \in L_l \}$$

Per a un parell donat, poden presentar-se 3 possibilitats:
a) $H_{ij} = \emptyset$. Les zones no estan unides per cap línia.
b) $|H_{ij}| = 1$. Només hi ha 1 línia que les uneix.
c) $|H_{ij}| \geq 2$. Quan hi ha 2 o més línies que uneixen les zones, pot definir-se la següent relació d'equivalència entre línies:

$$L_l, L_h \in H_{ij}$$

$L_l \, R \, L_h \Leftrightarrow$ comprenen els mateixos nusos i en el mateix ordre entre i i j.

Aquesta relació estableix una partició en el conjunt H_{ij} . Cada element del conjunt quocient $G_{ij} = H_{ij} / R$, s'anomena itinerari.

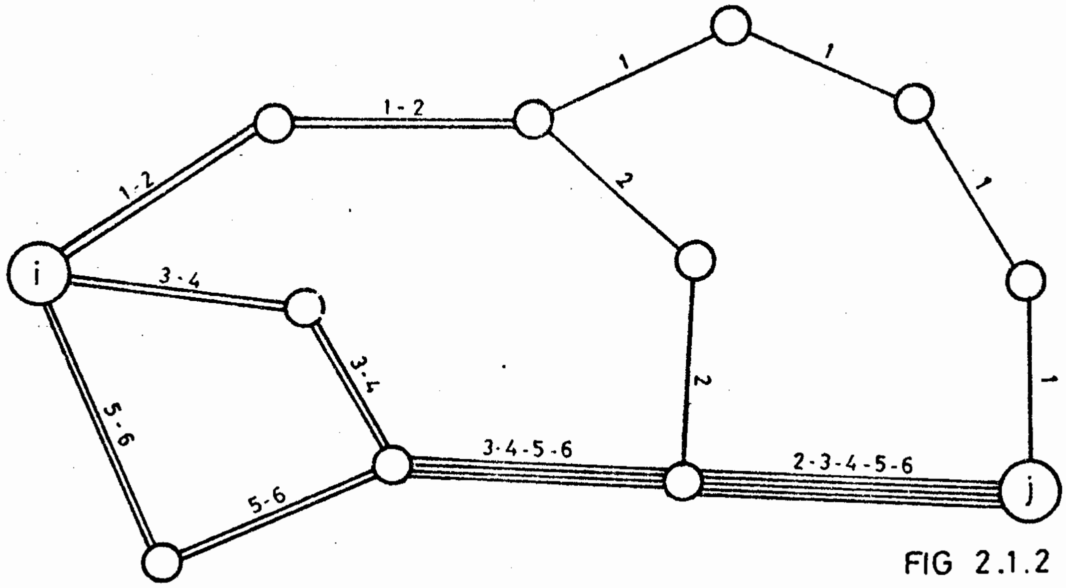


FIG 2.1.2

En l'exemple de la figura 2.1.2 se suposa que $H_{ij} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
Per la relació R , el conjunt quocient serà:

$$G_{ij} = H_{ij}/R = \{\{1\}, \{2\}, \{3,4\}, \{5,6\}\}$$

Una conseqüència d'aquesta partició, és que totes les línies d'un mateix itinerari, tenen un mateix temps de recorregut. El temps de recorregut és inherent, donos, a l'itinerari i no a les línies.

H 14) Cada itinerari duu associat un temps d'espera, que és funció de l'interval de la xarxa, i del nombre de línies de l'itinerari.

$$W_{ij}^{k} = W\left(g_{ij}^{k}, u\right)$$

La forma analítica d'aquesta funció és la següent:

W_{ij}^{k} : temps d'espera associat a l'itinerari k-è

u : interval de la xarxa

g_{ij}^{k} : nombre de línies de l'itinerari k-è

$$\boxed{W_{ij}^{k} = \frac{u}{g_{ij}^{k} + 1}} \qquad (2.1.3)$$

La prova d'aquesta fórmula es troba al punt 5.1 on es dedueix com el cas particular de la fórmula de LAMPKIN i SAALMANS en què tots els intervals coincideixen.

Cal notar que si l'itinerari només consta d'una línia, aleshores $g_{ij}^{k} = 1$ i $W_{ij}^{k} = u/2$, que és un valor ja esperat, car el temps d'espera és la meitat de l'interval.

H 15) L'usuari percep diferentment el temps de recorregut i el temps d'espera. En concret, aquest darrer li és molt més desagradable i el valora molt més que no pas el primer. Aquesta valoració se suposa idèntica per a tothom.
Per tal de quantificar aquest fenomen, es defineix el paràmetre P, anomenat coeficient de penalització del temps d'espera. Aleshores P minuts de recorregut equivalen a 1 minut d'espera.

H 16) El cost total de viatge associat a un itinerari, (sempre entre dos nusos i i j), s'anomena a^k_{ij} , i es defineix com la suma dels seus components:

- temps de recorregut r^k_{ij}
- temps d'accés (suposat nul)
- equivalent en temps de la tarifa: E
- temps d'espera W^k_{ij}

$$\boxed{a^k_{ij} = r^k_{ij} + E + P \cdot W^k_{ij}} \qquad (2.1.4)$$

$$\boxed{a^k_{ij} = \tau\left(r^k_{ij}, g^k_{ij}, T\right) r^k_{ij} + E + P \frac{2.T}{A} \cdot \frac{1}{g^k_{ij} + 1}} \qquad (2.1.5)$$

S'ha definit la funció τ prenent com a paràmetres r^k_{ij} , g^k_{ij} i T, i només aquests 3, perquè són els únics susceptibles de variar al llarg d'un procés. Se'n veurà la utilitat en el paràgraf 2.2.5.2 i següents.

H 17) En tot parell de nusos hi ha:

- una demanda a absorbir
- un mitjà alternatiu per a absorbir-la
- cap, un o més itineraris, també per a absorbir-la.

Si, per simplificar la terminologia i les expressions, el mitjà alternatiu es concep com un itinerari més, o itinerari 0 (zero), i el seu cost associat, p_{ij} , s'anomena a^0_{ij} , aleshores pot dir-se que sempre hi ha almenys un itinerari per a absorbir la demanda.

Donos bé, es defineix la proporció de demanda d^k_{ij} , absorbida per l'itinerari k-è com a:

$$y^k_{ij} = \frac{d^k_{ij}}{d_{ij}} \qquad (2.1.6\ )$$

o estalviant els subíndexs de zona:

$$y^k = \frac{d^k}{d} \qquad (2.1.6\ \text{bis}\ )$$

Aquesta proporció és funció dels costos totals de viatge associats a cada itinerari

$$y^k = y^k\ (\ a^0,\ a^1\ ,\ \ldots\ldots\ldots\ a^S\ ) \qquad (2.1.7)$$

on S és el nombre total d'itineraris: $S = |G_{ij}|$

L'expressió analítica d'aquesta funció és:

$$y^k = \frac{\dfrac{1}{a^k - M}}{\displaystyle\sum_{i=o}^{S} \dfrac{1}{a^i - M}} \tag{2.1.8}$$

$$M < \min_k a^k \tag{2.1.9}$$

La justificació es troba al punt 5.2 on es defineix la "funcio M"

H 18) Els usuaris considerats globalment tenen una sensibilitat β donada i estructural, per a percebre la diferència de costos entre itineraris alternatius.
Això vol dir que, com més gran sigui llur sensibilitat, més gran serà la proporció d'usuaris que es decantarà per l'itinerari de cost mínim.
El valor M té un estret lligam amb β, a través de la relació:

$$M = \min_k a^k - \frac{1}{\beta} \tag{2.1.10}$$

com també es detalla al punt 5.2

H 19) La proporció de demanda que ha escollit un itinerari donat, es reparteix per un igual entre les diverses línies que el constitueixen, cas que n'hi hagi més d'una.
Aquesta hipòtesi és coherent amb la H 12), on se suposava que l'interval era idèntic per a totes les línies. Com que el temps de recorregut també ha de coincidir, car es tracta d'un mateix itinerari, el cost total és el mateix per a totes les línies.
Aquesta hipòtesi se substitueix, en l'algorisme d'assignació, per L'H 19 A) com a conseqüència de no haver-hi admès, tampoc, les hipòtesis H 12) ni H 14).

H 20) El cost mitjà de viatge associat a un parell de nusos es defineix com la mitjana dels costos totals de viatge associats a cada itinerari, ponderada per la proporció de demanda que n'absorbeix cada un.
Aquest cost mitjà se simbolitza per a_{ij} . Aleshores:

$$a_{ij} = \sum_{k=o}^{S} y^k_{ij} \; a^k_{ij} \tag{2.1.11}$$

I recordant (2.1.8)

$$\boxed{a_{ij} = \mu(a^{o}_{ij}, \dots a^{s}_{ij}) = \frac{\displaystyle\sum_{k=o}^{s} \frac{a^{k}_{ij}}{a^{k}_{ij} - M_{ij}}}{\displaystyle\sum_{k=o}^{s} \frac{1}{a^{k}_{ij} - M_{ij}}}} \qquad (2.1.12)$$

2.2 DESCRIPCIO DE L'ALGORISME

2.2.1 CARACTERISTIQUES GENERALS

El primer algorisme, anomenat "algorisme de generació" , té con a finalitat de generar una xarxa de línies d'autobús.
Es tracta d'un algorisme heurístic i iterariu, que no es basa en cap teoria habitual d'optimització; l'òptim no hi és garantit teòricament, per bé que sempre arriba a un mínim local.
El mètode, doncs, per anar obtenint millores progressives és el d'introduir perturbacions en arribar a un mínim local; aquestes perturbacions es provoquen manualment, després d'un examen del resultat.
L'algorisme també admet una solució inicial, que millora progressivament.
En altres paraules, és capaç de modificar una xarxa ja existent.
En concret, la funció a minimitzar és:

$$\boxed{[\text{MIN}] \quad C = \sum_{i,j} d_{ij} \cdot a_{ij}} \qquad (2.2.1)$$

De tot el que s'ha dit fins aquí es desprèn que aquest mínim s'obté incidint damunt d'a_{ij} , ja que d_{ij} roman invariable al llarg del procés.
Un esquema de com es produeix aquesta variació d'a_{ij} , variant el traçat de les línies, es reflecteix a la figura 2.2.1

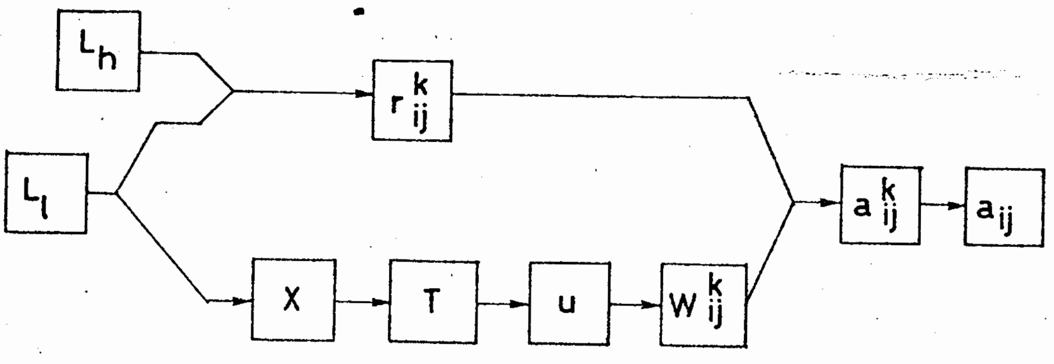


FIG. 2.2.1

En efecte, una variació en una línia, tal com l'escurçament, el canvi de traçat, la inserció o la supressió d'un nus, té com a conseqüència directa un canvi en el temps de recorregut. Però ,d'altra banda, la longitud total de la xarxa, al seu torn, serà diferent ja que una línia ha canviat. Com que la flota de busos és la mateixa, l'interval i el temps d'espera hauran sofert una variació. Per tant aquesta incidència en el cost total de viatge es produeix tant via els temps de recorregut com via els temps d'espera.

2.2.2 DADES NECESSARIES

2.2.2.1. Matrius

a) Matriu de cost per mitjans alternatius, per a cada parell de zones. Es tracta de $[p_{ij}]$, i es fa la hipòtesi que és una matriu simètrica: $(\forall_i)(\forall_j)$: $p_{ij} = p_{ji}$

b) Llista de temps de recorregut per a cada arc, que permet de reconstruir els temps de recorregut de cada itinerari.
De fet, el programa no admet la llista tal qual, sinó que requereix la forma de matriu de camins mínims; aleshores, el temps de recorregut d'un arc apareix com a camí mínim entre els nusos origen i destí.
Aquesta característica és conseqüència de complir-se la propietat triangular.
Es a dir, si la matriu de camins mínims és $[\varrho_{ij}]$, aleshores:

$$(\forall i)(\forall j)(\forall k): \quad \varrho_{ij} \leqslant \varrho_{ik} + \varrho_{kj}$$

La desigualtat estricta tindrà lloc quan el nus k no pertanyi al camí mínim entre i i j. Altrament, l'expressió esdevindrà una igualtat. Vegi's la figura 2.2.2.
A més, el fet de donar la matriu de camins mínims permet de calcular una cota inferior de la funció objectiva, tal com es detalla més endavant.

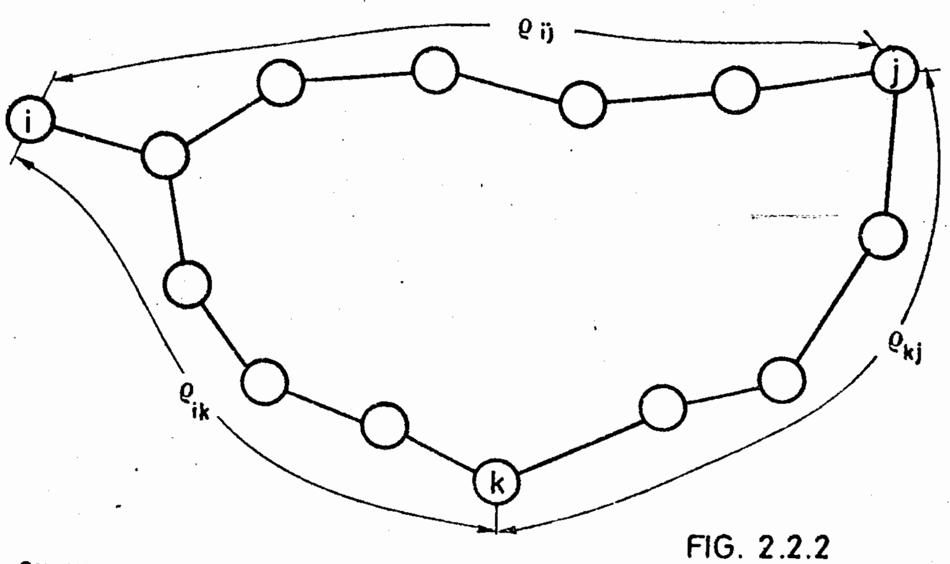


FIG. 2.2.2

CAMINS MINIMS : PROPIETAT TRIANGULAR

c) Matriu de demanda potencial, $[d_{ij}]$ o flux de passatgers que vol traslladar-se d'i a j en l'interval de temps considerat.

2.2.2.2. Paràmetres de comportament

Tots s'han definit en descriure les hipòtesis.
Ara simplement es recopilen.
a) Equivalent en temps de la tarifa, E
b) Coeficient de penalització del temps d'espera, P
c) Sensibilitat de l'usuari a la diferència de costos, β.

2.2.2.3. Flota d'autobusos

A, o el nombre mitjà útil d'autobusos, que poden assignar-se a la xarxa.

2.2.2.4. Descripció de la xarxa

Només en el cas de modificació i millora d'una xarxa donada.
En aquest cas, recordant la definició de xarxa com a conjunt de línies:

$$X = \left\{ L_l \mid l = \ \ldots\ldots\ p \right\}$$

i la línia com a enfilall de nusos en un cert ordre:

$$L_l = \left\{ Z_1, Z_2 \ldots\ldots Z_{m_l} \mid Z_k \in Z, \quad k=1 \ \ldots\ldots\ m_l \right\}$$

caldrà fornir el nombre total de línies X, i la descripció de cada línia.

2.2.2.5. Paràmetres geomètrics

Es definiran en descriure el funcionament de l'algorisme, als apartats 2.2.5.3.4 i 2.2.5.4.4. Tenen com a objecte de limitar la recerca de noves solucions, i vénen a reduir-se a 3:

a) coeficient d'inserció. γ_i o només γ
b) " de clausura γ_c
c) " de ruptura γ_r

Fins aquí les dades que l'algorisme necessita. El programa que l'implementa, però, en requereix algunes més, que li defineixen opcions purament informàtiques; aquest punt es tractarà al capítol 8.

2.2.3 PREPARACIO DE LES DADES

A més de les dades que l'algorisme necessita indefectiblement, cal que ell mateix en prepari unes quantes més per tal de guardar dades i resultats parcials que en faciliten el desenvolupament.
Aquestes dades són:

2.2.3.1. Descripció de la xarxa

X, en forma de matriu on cada fila és una línia, i les diverses columnes, els nusos que la componen.
L'element $X_{lh} \in X$, doncs, serà la zona o nus h-è de la línia l-ena.

2.2.3.2. Temps de recorregut en una línia

$[t_{lh}]$. Es una matriu d'una estructura idèntica a l'anterior. L'element t_{lh} indica el temps de recorregut entre el nus 1er. i el nus h-è per la línia l-ena.

Recordant que el temps mínim de recorregut entre dos nusos i i j és ϱ ,
aleshores:

$$t_{lh} = \sum_{k=1}^{h} \varrho_{z_k,\ z_{k+1}} \qquad (2.2.2)$$

La consulta a aquesta matriu forneix el temps de recorregut per una línia donada ,l.
En efecte: el valor r^l_{ij} es trobarà consultant en primer lloc a la matriu X , fila l-ena.

El nus i ocupa la posició h_i
" " j " " " h_j, on $h_j > h_i$

Aleshores:

$$r^l_{ij} = t_{lh_j} - t_{lh_i} = \sum_{k=1}^{h_j-1} \varrho_{k,k+1} - \sum_{k=1}^{h_i-1} \varrho_{k,k+1} =$$

$$= \sum_{k=h_i}^{h_j-1} \varrho_{k,k+1} \qquad (2.2.3)$$

Òbviament, el recorregut al llarg d'una línia serà, en general, més llarg que el camí mínim: $r^l_{ij} \geqslant \varrho_{ij}$
La coincidència està assegurada tan sols quan els dos nusos són contigus dintre de la línia. En efecte, si i ocupa la posició h_i i j la posició h_i+1 , aleshores, segons (2.2.3)

$$r^l_{ij} = \sum_{k=h_i}^{h_i+1} \varrho_{k,k+1} = \varrho_{h_i,\ h_i+1} = \varrho_{ij}$$

Vegi's la figura 2.2.3

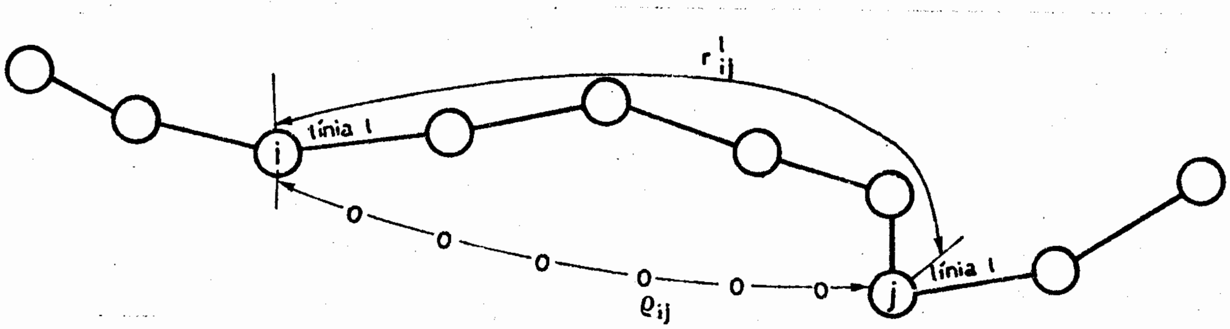


FIG. 2.2.3

En cas de línia circular, s'ha dit a la hipòtesi H 9) que es considerava el mínim temps de recorregut.
Aleshores:

$$r^{l}_{ij} = \min \left[r^{l'}_{ij} , r^{l''}_{ij} \right] \quad \text{on} \qquad (2.2.4)$$

$$r^{l'}_{ij} = t_{lh_j} - t_{lh_i} , \text{ és el temps en sentit directe} \qquad (2.2.5)$$

$$r^{l''}_{ij} = T_l - r^{l'}_{ij} , \text{ és el temps en sentit invers} \qquad (2.2.6)$$

(T_l s'ha definit com el temps total de recorregut de la línia)
En aquest cas, cal fer la consulta de la següent manera:

$$r^{l}_{ij} = \min \left[(t_{lh_j} - t_{lh_i}) , T_l - (t_{lh_j} - t_{lh_i}) \right] \qquad (2.2.7)$$

2.2.3.3. <u>Matriu lògica de pertanyença</u> $[q_{li}]$

Es una matriu d'ajuda, que no duu cap informació nova.
Es defineix de la següent manera:

$$q_{li} \begin{cases} \text{CERT : si la línia l conté (o passa per) el nus i} \\ \text{FALS: altrament} \end{cases}$$

Tan sols facilita la recerca de la informació continguda a la matriu X
Pot obtenir-se a partir d'X

$$(\forall l)(\forall i) \quad q_{li} = \text{CERT} \quad \Leftrightarrow \quad \exists h, X_{lh} = i$$

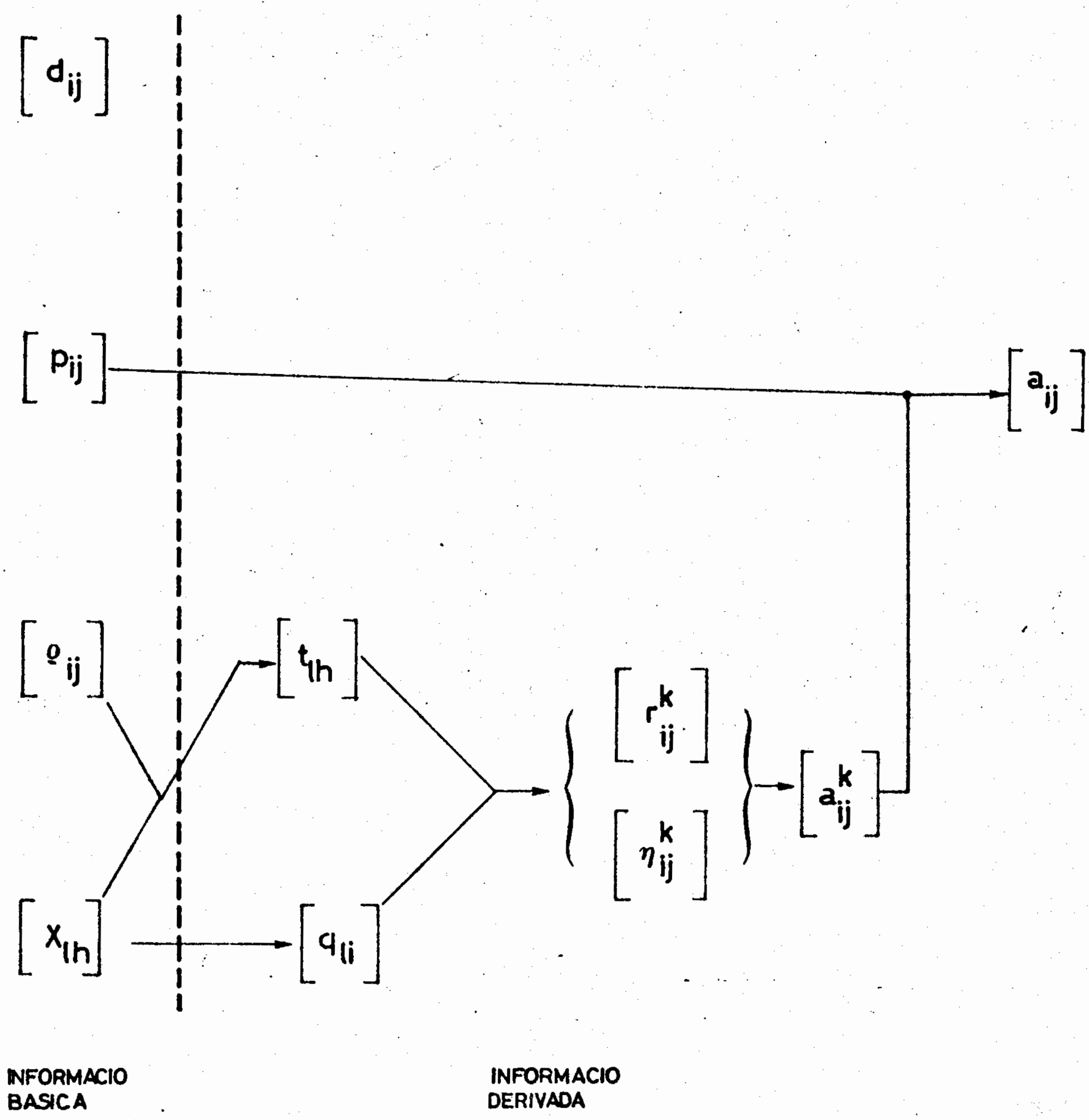
De fet, aquesta matriu s'utilitza per determinar el conjunt H_{ij} (conjunt de línies entre i i j), que es necessita molt sovint, com ja es veurà en descriure l'algorisme.

2.2.3.4. <u>Matriu de nombre d'itineraris</u> $[s_{ij}]$

Emmagatzema el nombre d'itineraris existent a cada moment del procés conformats per les línies que uneixen i i j. s_{ij} no inclou el mitjà alternatiu, que se suposa sempre existent. Si no n'hi ha cap més que aquest, aleshores $s_{ij} = 0$.

2.2.3.5. <u>Matrius de temps de recorregut i de nombre de línies associades al 1er. itinerari</u> $[r^1_{ij}][\eta^1_{ij}]$

A la hipòtesi H 20) i fórmula (2.1.11) s'ha vist que el cost mitjà de viatge a_{ij} , s'obté a partir d'una mitjana ponderada dels costos totals de viatge associats a cada itinerari, a^k_{ij} .



$[d_{ij}]$
$[p_{ij}]$
$[a_{ij}]$
$[\varrho_{ij}]$
$[t_{lh}]$
$[r^k_{ij}]$
$[\eta^k_{ij}]$
$[a^k_{ij}]$
$[X_{lh}]$
$[q_{li}]$
INFORMACIO BASICA
INFORMACIO DERIVADA

FIG. 2.2.4

A la hipòtesi H 16) i fórmula (2.1.5), s'ha definit a_{ij}^{k} com a funció del temps de recorregut r_{ij}^{k} i del nombre de línies que componen l'itinerari g_{ij}^{k} .
Aleshores, per conèixer a_{ij} , n'hi ha prou de "tenir a mà", els diversos r_{ij}^{k} i g_{ij}^{k} associats als s itineraris possibles, a part de valors generals, con E,P,T i A.
De fet, el nombre més freqüent és s = 1 , (s'entén, a part del mitjà alternatiu). Per tal de no desaprofitar memòria, els valors associats al 1er. itinerari es guarden en una matriu, mentre que els dels següents itineraris, cas que existeixin, s'emmagatzemen en vectors suplementaris, amb un accés més llarg. Es la solució de compromís decidida en el dilemma ocupació de memòria-rapidesa.
Aquestes matrius són les que donen el títol al present paràgraf.
En el cas que s_{ij} = 0, aleshores $r_{ij}^{1} = \infty$ i $\eta_{ij}^{1} = 0$

2.2.3.6. <u>Vectors suplementaris de temps de recorregut i de nombre de línies associats al 2on. i següents itineraris.</u>

Ja s'han definit al paràgraf anterior.
Cal insistir, però, en el fet que totes aquestes matrius i vectors no aporten cap informació nova. Tan sols en milloren l'accés. La figura 2.2.4 detalla quina és la informació bàsica i quina la derivada.

2.2.4 <u>METODE SEGUIT PER L'ALGORISME</u>

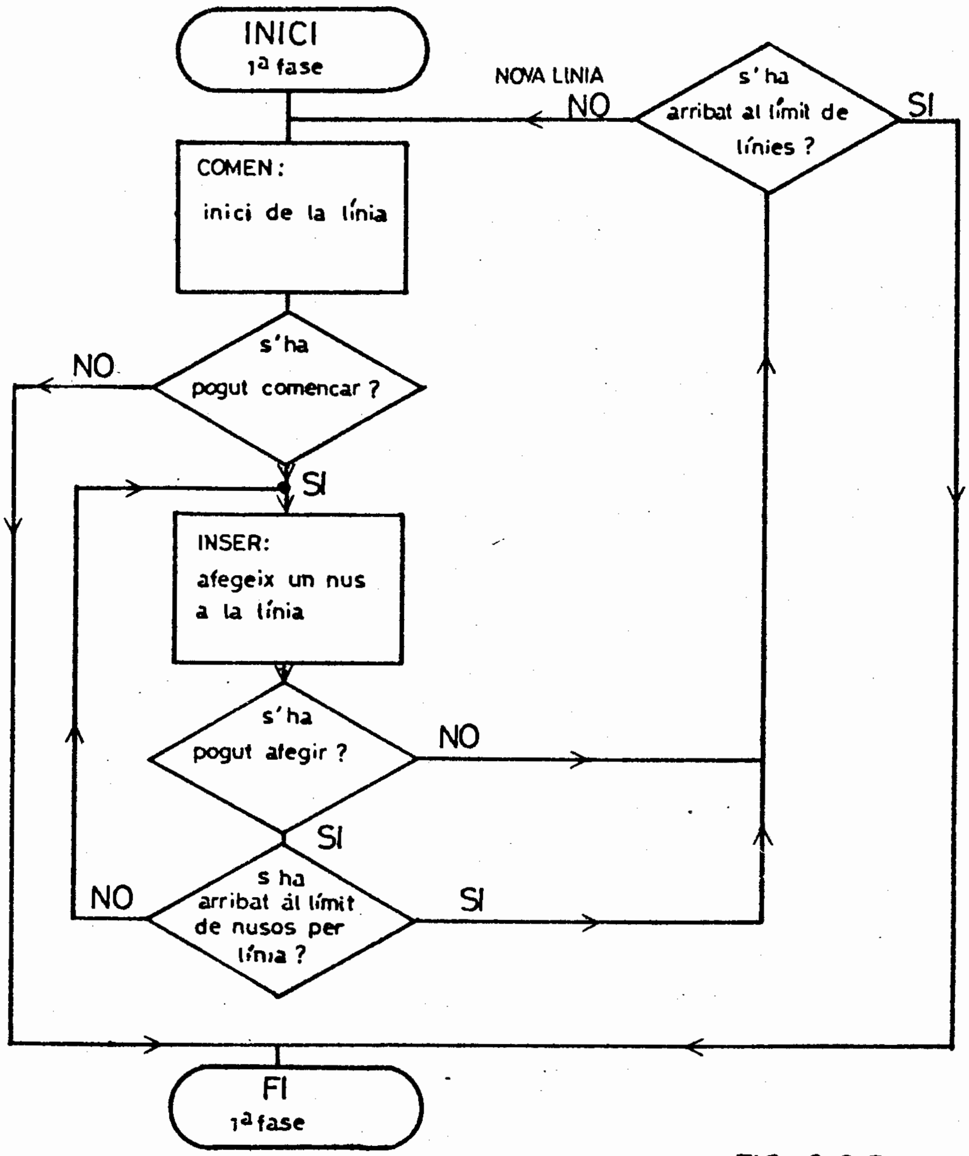
2.2.4.1. <u>Generalitats</u>

Anteriorment s'ha dit que l'algorisme permetia dues opcions:
- generar una xarxa de bell nou
- modificarne una de ja existent.

D'altra banda, l'algorisme és el resultat de conjuminar 4 mòduls, amb una missió específica cada un d'ells. Aquests mòduls són, en síntesi:
a) <u>COMEN</u> : inici d'una línia. Tria un parell de nusos que fan de nucli.
b) <u>INSER</u> : afegeix un nus a una línia.
c) <u>SUPRE</u> : suprimeix un nus d'una línia.
e) <u>ELIM</u> : elimina una línia constituïda només per un parell de nusos.

Cal remarcar que només actuen si l'acompliment de llur tasca provoca una disminució del cost total C.
En el cas que realment el mòdul pugui actuar, selecciona, d'entre totes les possibilitats,aquella que forneix una reducció màxima del cost total. Així, per exemple, el mòdul COMEN determinarà, com a primer pas aquells parells de nusos per als quals, la implantació d'una línia de l'un a l'altre disminueix al cost total. Si n'existeix més d'un, escollirà finalment aquell parell amb reducció màxima. El punt 2.2.5 es dedica a explicar amb detall l'estructura de cada mòdul.
Aquests 4 mòduls s'agrupen en 2 fases:
1ª fase: creació de noves línies.
2ª fase: revisió de les línies ja creades.

2.2.4.2. Primera fase



1a FASE

FIG. 2.2.5

Com s'il.lustra a la figura 2.2.5, la creació de línies té lloc per aplicació inicial del mòdul COMEN, que determina els 2 primers nusos que compondran la línia.
Posteriorment, cada vegada que actua INSER s'afegeix un nus a la línia, fins que s'arriba al límit superior de nusos permesos en la 1ª fase.
En aquest moment ja hi ha una xarxa força completa. Però donat el procés seqüencial de generació, l'algorisme determina la línia l-ena en funció de les l-1 anteriors, però ha d'ignorar les posteriors perquè encara no existeixen.

2.2.4.3. Segona fase

Aquesta dificultat se salva en la 2ª fase ja que, com es veurà tot seguit, la revisió de la línia l-ena té lloc quan existeixen totes les altres, que, de fet, es tenen en compte.

Tal com apareix a la figura 2.2.6 la 2^{ona} fase tracta correlativament les línies. En cada una mira, abans que tot d'escurçar-la; és a dir, de suprimir tants nusos com pugui o bé, si només en resten 2, d'eliminar-la del tot. Tot seguit, intenta d'afegir-li'n per aplicació del mòdul INSER.

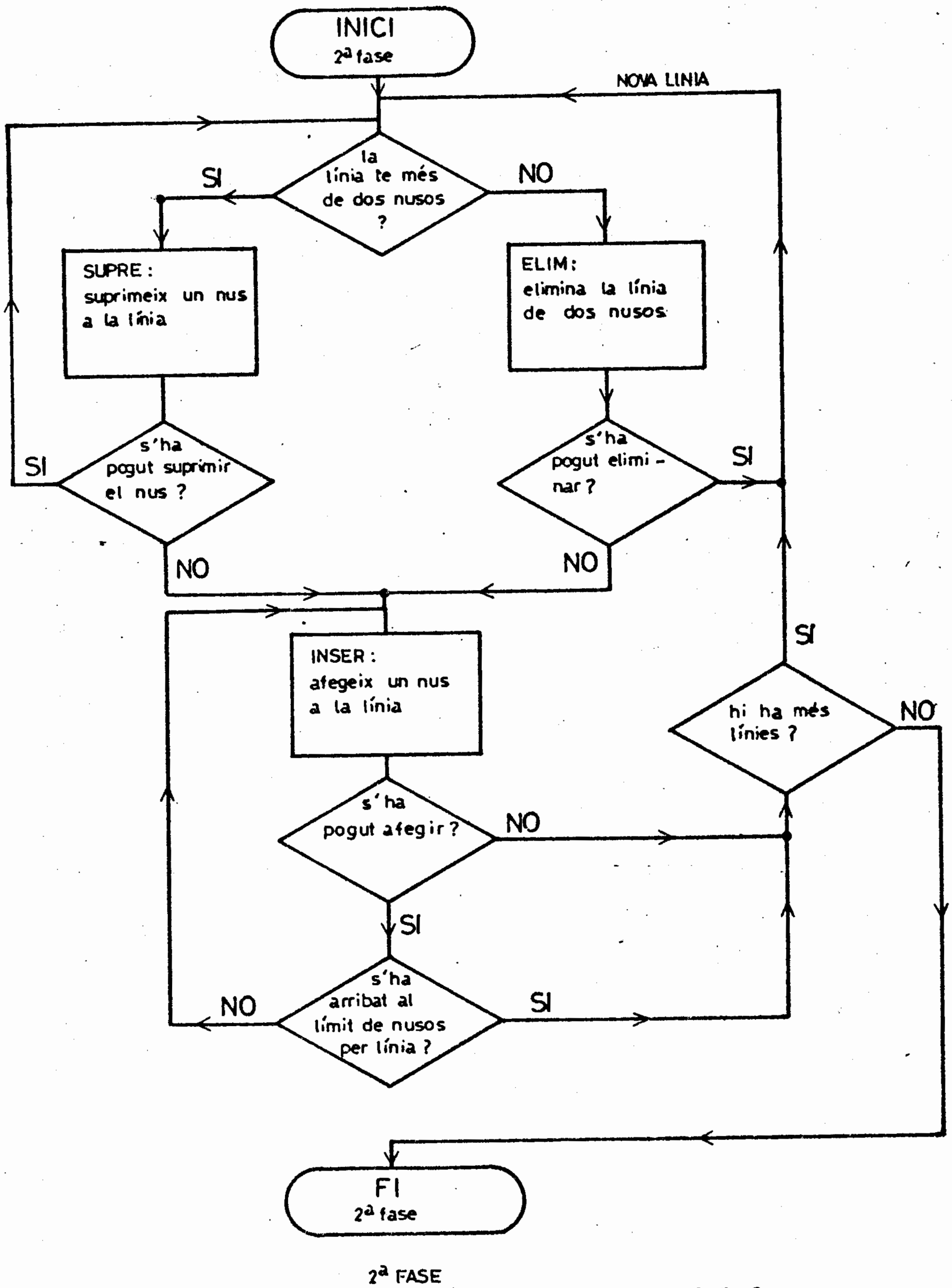


FIG. 2.2.6

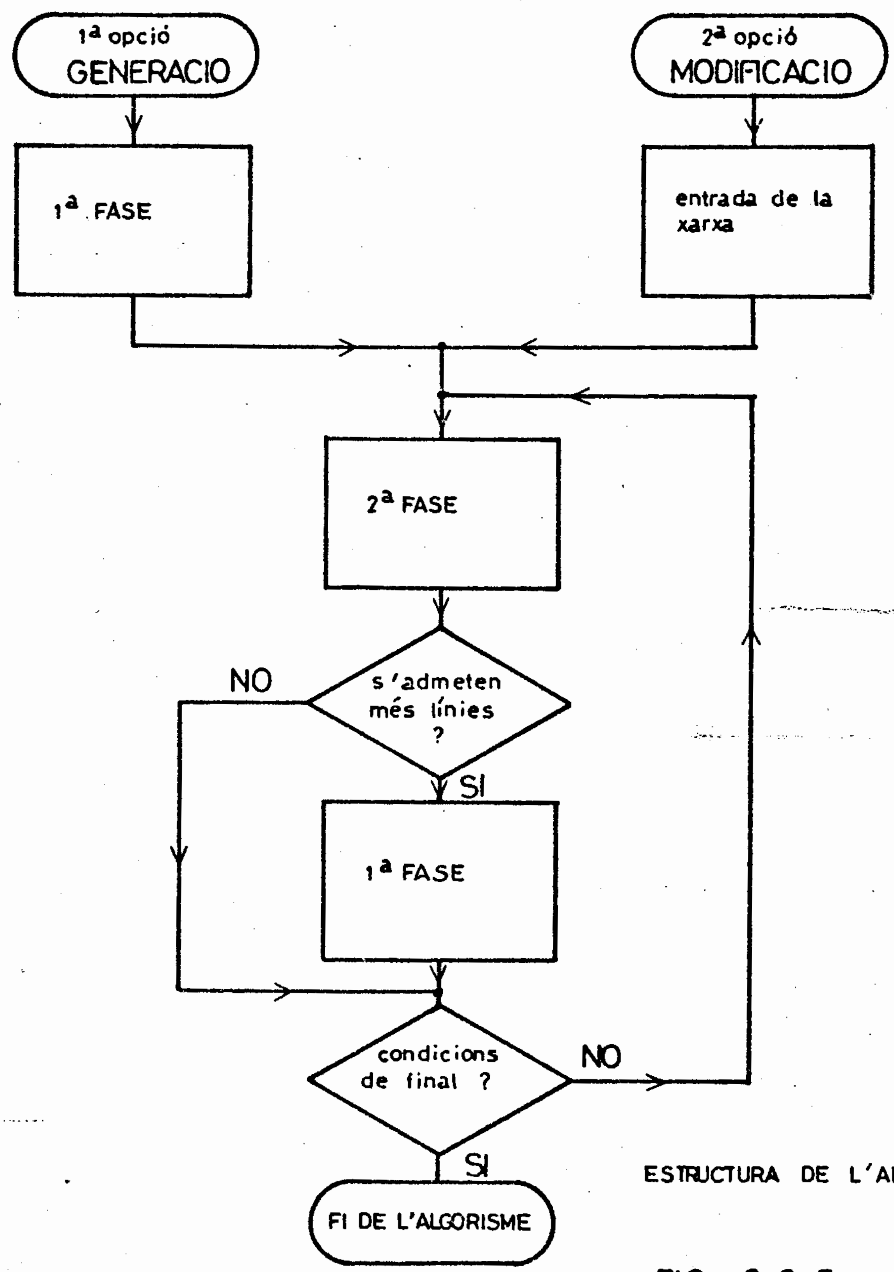
Aquest ordre de mòduls es justifica pel fet de l'alternància

$$\left\{\begin{matrix}\text{COMEN}\\ \text{INSER}\end{matrix}\right\} \longleftrightarrow \left\{\begin{matrix}\text{ELIM}\\ \text{SUPRE}\end{matrix}\right\}$$

que cal conferir a l'algorisme per tal de l'eficiència n'augmenti.
Cal recordar que la 2ª fase segueix la 1ª, i que el darrer mòdul que ha actuat és COMEN o INSER. Aleshores, el primer ara ha de ser un que escurci.

2.2.4.4. <u>Estructura de l'algorisme</u>

Les 2 opcions que s'ha esmentat a les generalitats, només difereixen al començament. L'opció de generació aplica d'entrada la 1ª fase, on crea totes les línies. En canvi, la de modificació es limita a llegir-les.
Després, ambdues entren al bucle d'iteració que comença amb la 2ª fase, és a dir, l'anàlisi i eventual correcció de la xarxa, línia per línia.



ESTRUCTURA DE L'ALGORISME

FIG. 2.2.7

Un cop feta la revisió de les línies existents, intenta generar-ne de noves, car, donat que la xarxa ja no és la mateixa ara podria ser avantatjós de crear una nova línia.
Finalment, comprova si tenen lloc les condicions de final. Aquestes condicions, consisteixen en una estabilització del cost o del nombre de nusos de la xarxa, o simplement en un nombre màxim d'iteracions. Si es compleixen les condicions, l'algorisme es detura; altrament passa a una nova iteració.
Vegi's la figura 2.2.7

2.2.5 ANALISI DE CADA MODUL

2.2.5.1. Tipus de mòduls i de guanys a calcular

Un mòdul és un instrument per actuar en la definició o traçat d'una línia. Aquesta actuació es manifesta en 1 nus concret, si és un mòdul mitjà o en 2 si és extrem. Això comporta l'existència de dos tipus de guanys, derivats de l'actuació d'un mòdul.

	Extrems	Mitjans
Positius	COMEN	INSER
Negatius	ELIM	SUPRE

Tipus de mòduls

FIG. 2.2.8

φ_Z - guany del nus, o guany dels usuaris que tenien com a origen o destí el nus considerat.

φ_L - guany de la resta de la línia, per als parells de nusos pertanyents tots dos a la línia tractada.

Cal, a més, considerar-ne un altre relatiu a la resta de la xarxa, ja que, també rep les conseqüències de l'actuació a través d'una variació del temps total de recorregut de la xarxa T_i i, per tant, de l'interval
φ_X : guany de la resta de la xarxa.
El valor de φ_X és petit en relació als altres i, en canvi, és llarg de calcular. Per agilitzar l'execució de l'algorisme hom ha enginyat un mètode per a estimar-lo, que és idèntic per a tots els mòduls. Aquest mètode es descriu al paràgraf 2.2.5.6. però no s'esmenta en parlar de cada mòdul en particular.

En els mòduls extrems, en què s'inicia o se suprimeix una línia, no hi ha "resta de la línia" i, per tant, φ_L no té sentit.
Cal aclarir que el terme guany s'empra en sentit genèric i que, per tant, tant pot significar un augment com una disminució del cost.
El guany total d'un mòdul, R, serà segons es desprèn del paràgraf 2.2.4.1

$$R = \mathrm{MAX}\ [\ 0,\ d\ (\varphi_Z + \varphi_L + \varphi_X\ )\ ] \qquad (2.2.8)$$

ja que un mòdul només actua si el guany que pot fornir és positiu, és a dir si ocasiona una disminució de cost:

$$R = -\Delta C > 0 \qquad (2.2.9)$$

A la hipòtesi H 1) s'ha definit el conjunt Z com el de totes les zones o nusos de la ciutat. Per tant, el conjunt $F = Z \times Z$ serà el de tots els parells de nusos o fluxos.
En aquest conjunt F es pot definir una partició tal com segueix:

$$F = F_Z \cup F_L \cup F_X \qquad (2.2.10)$$

$$F_Z \cap F_L = F_Z \cap F_x = F_L \cap F_X = \emptyset \qquad (2.2.11)$$

Els tres subconjunts es defineixen de manera que a cada temptativa d'un mòdul comprenguin els tipus de fluxos que originen els guanys φ_Z, φ_L i φ_X respectivament.

2.2.5.2. Mòdul COMEN

Com ja s'ha dit a 2.2.4.1. aquest mòdul recerca un parell de nusos tals que pugui traçar-se una línia de l'un a l'altre (i només de l'un a l'altre).
Per tant, hi haurà 2 graus de llibertat, corresponents a cada un dels nusos. Si els anomenem i i j, aleshores les particions queden definides com segueix.

$$\begin{aligned} F_Z &= \{(i,j)\} \\ F_L &= \emptyset \\ F_X &= F - \{(i,j)\} \end{aligned} \qquad (2.2.12)$$

Si el temps de recorregut és b, aleshores poden presentar-se 2 casos:
a) ja existia un itinerari que tenia aquest temps associat:

$$\exists\, k \quad r^k_{ij} = b$$

b) altrament.
En el cas b) es calcularà el nou cost considerant un nou itinerari:

$$\varphi_Z = d_{ij}\ [a_{ij} - \mu(\ a^0_{ij}, \ldots\ldots, a^s_{ij},\ a^{s+1}_{ij}\ )] \qquad (2.2.13)$$

Donat que pot triar-se el nus en concret j, i l'indret de la línia on inserir-lo, h, aleshores hom gaudeix de dos graus de llibertat. Si la línia té m nusos, h pot prendre m+1 valors, ja que hom admet tots els buits d'entremig més els dos extrems.
El guany del nus, φ_L, serà la suma algèbrica dels guanys obtinguts per cada parell (j, z_h). La forma de calcular-los és anàloga a la descrita en el mòdul COMEN, segons si ja existia un itinerari amb el temps de recorregut b o no. Vegi's la figura 2.2.9

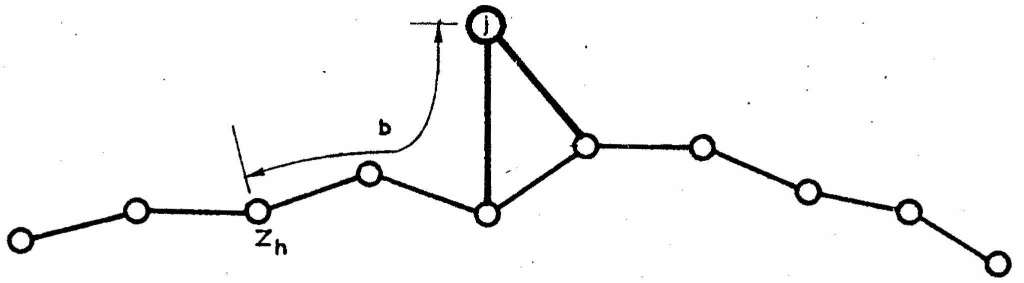


FIG. 2.2.9

Si el cost actual és a'_{jz_h}, el guany serà:

$$\varphi_z = \sum_{h=1}^{m_1} d_{jz_h} \left(a_{jz_h} - a'_{jz_h} \right) \qquad (2.2.20)$$

Pel que fa al guany de la resta de la línia, φ_L, que en aquest cas només pot ser pèrdua, cal definir, abans, una nova partició dintre de L_l : Si j es pretén inserir a l'indret h-è,

$$\left.\begin{array}{l} L_1 = \{ z_n \mid z_n \in L_1,\ n < h \} \\ L_2 = \{ z_n \mid z_n \in L_1,\ n \geqslant h \} \\ L_1 \cup L_2 = L_1 \\ L_1 \cap L_2 = \emptyset \end{array}\right\} \qquad (2.2.21)$$

el tram de línia anterior a h és L_1 i el posterior és L_2.
Vegi's la figura 2.2.10
Per als fluxos interior a L_1 o interiors a L_2, només canvia l'interval, però l'estructura d'itineraris i llurs temps de recorregut romanen inalterats. Es un tipus de canvi, doncs, com el de la resta de la

on a_{ij}: cost mitjà anterior.

a_{ij}^{s+1}: nou cost o cost lligat a l'itinerari $s+1$ -è, i que ha de valer:

$$a_{ij}^{s+1} = \tau(b, 1 \ , T+b) \qquad (2.2.14)$$

Els costos dels altres itineraris també varien, ja que l'interval, encara que poc, serà diferent:

$$a_{ij}^{k} = \tau(r_{ij}^{k}, g_{ij}^{k}, T+b) \qquad (2.2.15)$$

En el cas a), el guany serà

$$\varphi_Z = d_{ij} [a_{ij} - \mu(a_{ij}^{o}, \ldots\ldots a_{ij}^{k}, \ldots\ldots a_{ij}^{s})] \qquad (2.2.16)$$

però ara el cost del n-è itinerari serà:

$$a_{ij}^{n} = \tau(r_{ij}^{n}, g_{ij}^{n}+1 \ , T+b) = \tau(r_{ij}^{n}, g_{ij}^{n}+1, T+r_{ij}^{n}) \qquad (2.2.17)$$

mentre que el dels altres serà el vist a (2.2.15)
Per tant, l'objectiu del mòdul pot sintetitzar-se així:

$$R = \max_{i,j} [0, \ \varphi_Z + \varphi_X] \qquad (2.2.18)$$

En el cas que, realment $R > 0$, la xarxa augmenta en una línia, la qual està constituida per i i j, i s'alteren tots els valors d'estat de l'algorisme, començant per C. Altrament, no es fa res i no es torna a cridar aquest mòdul fins que hi ha hagut alguna variació a la xarxa.

2.2.5.3. Mòdul INSER

Donada la línia l-ena, examina la possibilitat d'inserir-hi un nus, ja sigui entremig de dos, ja sigui en un extrem. En tota l'exposició caldrà distingir què s'esdevè segons si la línia és dreta o circular, ja que els càlculs a fer no són idèntics en els dos tipus de línia. També s'inclou dintre de la inserció el fet de tancar una línia (clausura); és a dir la transformació d'una línia dreta en circular.
Es veuran, doncs, els 3 supòsits per separat.

2.2.5.3.1. Inserció en una línia dreta.
Si la línia en qüestió és L_l, i el nus potencialment inserible és j, $j \in L_l$, aleshores les particions queden definides com segueix:

$$\left.\begin{array}{l} F_Z = (j, Z_h), \ Z_h \in L_1 \text{ o bé } \{j\} x \ L_1 \\ F_L = L_1 x L_1 \\ F_X = F - F_Z - F_1 \end{array}\right\} \qquad (2.2.19)$$

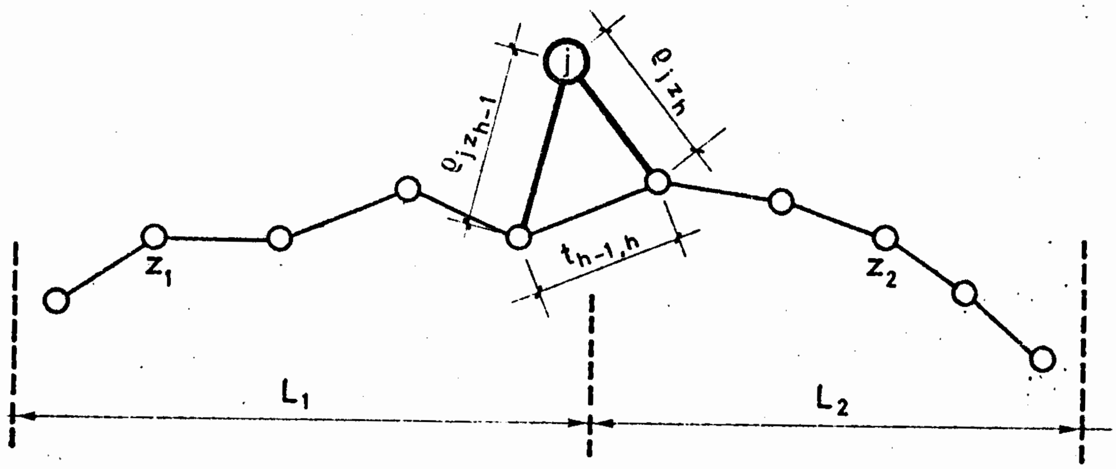


FIG. 2.2.10

xarxa. En canvi, per a un flux d'L_1 a L_2, hi ha un augment del temps de recorregut, igual a :

$$\Delta T = \varrho_{jz_{h-1}} + \varrho_{jz_h} - t_{h-1,h} \qquad (2.2.22)$$

Suposant que la línia l-ena pertany a l'itinerari k-è, i anomenant genèricament als nusos z_1 i z_2 , poden presentar-se dos casos, segons si l'antic temps de recorregut era únic o no en l'itinerari k-è i segons si el nou temps del recorregut resultant ja era satisfet per algun dels anteriors itineraris o és realment nou.
Un exemple pot aclarir el paràgrafanterior. Sigui el cas exposat gràficament a la figura 2.2.11 amb un temps de recorregut i nombre de línies

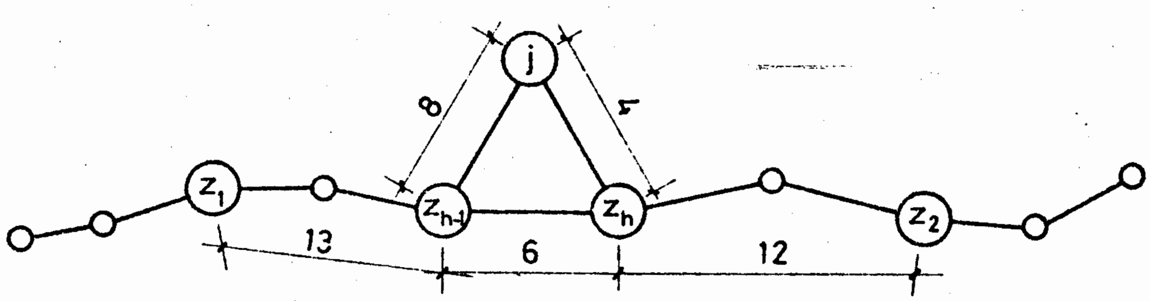


FIG. 2.2.11

per itinerari indicats a la figura 2.2.12
Pot veure's que $\Delta T = 8+4-6 = 6$, i que els antics 31 minuts passen a 37 (= 31+ 6), amb la qual cosa, la línia en qüestió se suprimeix del 2on. itinerari i passa al 3er, que casualment era de 37 minuts. Altrament, ella sola constituiria un 4rt. itinerari.

Antics itineraris

Itiner.	T. recor.	Nº línies
1	30	1
2	31	2
3	37	2

Nous itineraris

Itiner.	T. recor.	Nº línies
1	30	1
2	31	1
3	37	3

FIG: 2.2.12

La figura 2.2.13 tipifica els casos possibles tot indicant la variació en el nombre total d'itineraris, s. En qualsevol cas, però, el càlcul del cost mitjà resultant s'obté pel mateix camí:

- eliminant l'antic cost de l'itinerari corresponent, o eliminant l'itinerari sencer si s'escau.
- afegint el nou cost a un itinerari que ja tingués aquest temps de recorregut o, eventualment, creant un nou itinerari.
- recalculant el cost mitjà, variant, a més, el temps total.

	Variació d's (nombre itin)	Nou temps recorregut: Ja existia	Nou temps recorregut: No existia
antic temps recorregut	era únic en l'itinerari	-1	0
	NO era únic	0	+1

Variació del nombre d'itineraris. FIG. 2.2.13

En dos casos, però, no caldra refer tots els costos ni tan sols establir els subconjunts L_1 i L_2

- quan el nus afegit sigui extrem ($h = 1$, $h = m_l + 1$), car els temps de recorregut entre qualsevol parell de nusos de la línia no s'alteren. Es a dir, si $h = 1$, $L_1 = \emptyset$ i $L_2 = L$ i si $h = m_l + 1$, $L_1 = L$ i $L_2 = \emptyset$
- quan $\Delta T = 0$, o sigui, quan el nus afegit estava damunt del camí mínim entre l'anterior i el posterior de l'indret d'inserció, car no augmenta cap temps de recorregut ni tan sols l'interval. Quan $\Delta T = 0$, doncs, pot afirmar-se d'entrada que $\varphi_L = 0$, i per idèntiques raons també $\varphi_X = 0$. Vegi's la figura 2.2.14

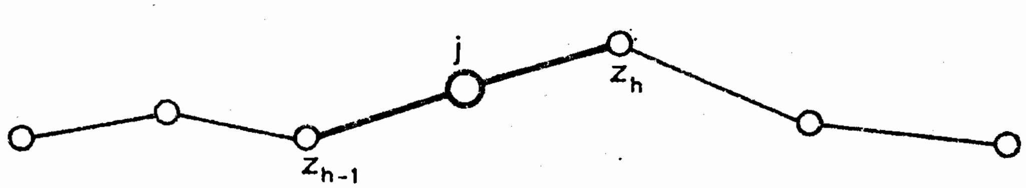


FIG. 2.2.14

Tornant al cas general, la formulació corresponent seria:

$$\varphi_L = \sum_{n\in L_1} \sum_{p\in L_2} d_n \, (a_{np} - a'_{np}) + \sum_{n\in L_1} \sum_{p\in L_1} d_{np} \, (a_{np} - a''_{np}) +$$

$$+ \sum_{n\in L_2} \sum_{p\in L_2} d_{np} \, (a_{np} - a''_{np}) \qquad (2.2.23)$$

on a'_{np} significa el nou cost, amb canvi d'itineraris i d'interval, i a''_{np} només amb canvi d'interval.
Deixant, com ja s'ha acordat, l'explicació de φ_X per a més endavant, l'objectiu del mòdul INSER en el cas de línia dreta s'expressa així:

$$R = \max_{j,h} \, [\, 0, \; \varphi_Z + \varphi_L + \varphi_X \,] \qquad (2.2.24)$$

2.2.5.3.2 Inserció en una línia circular.
En essència, els plantejaments són idèntics en les línies dreta i circular. Les variacions deriven del fet que una línia circular ofereix dos camins per assolir un nus donat.
D'antuvi, la definició que s'ha fet de les particions F_Z, F_L i F_X a (2.2.19) segueix essent vàlida aquí. Respecte dels graus de llibertat, cal afegir que, donat que ara no hi ha extrems, el nus només pot inserir-se en m_1 indrets, en comptes dels $m_1 + 1$ d'abans.
Pel que fa al guany φ_Z, que se sintetitzava:

$$\varphi_z = \sum_{h=1}^{m_1} d_{jz_h} \, (a_{jz_h} - a'_{jz_h}) \qquad (2.2.20)$$

ara cal notar que el nou cost mitjà a'_{jz_h} s'obté a partir del temps de recorregut resultant b, que és el mínim dels dos possibles b_1 i b_2
Vegi's la figura 2.2.15.

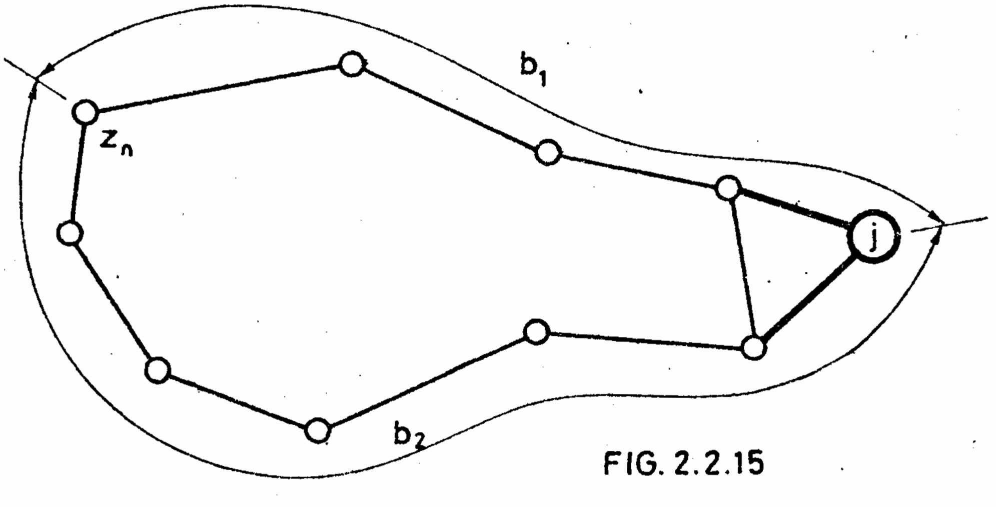


FIG. 2.2.15

Per al càlcul del guany de la resta de la línia φ_L ,perd el sentit la partició d'L en L_1 i L_2 . Llavors només hi havia augment de temps de recorregut si es prenia un nus de cada subconjunt. Ara, a priori no pot avançar-se res.S'ha d'examinar en cada cas per quin cantó s'obté el menor temps de recorregut entre dos nusos de la línia. La fórmula d'abans, (2.2.23), ara s'ha de modificar com segueix:

$$\varphi_L = \sum_{(n,p)\in F_L} d_{np} (a_{np} - a'_{np}) , \qquad (2.2.25)$$

sense que pugui dir-se si $a'_{n\varrho}$ només difereix d'$a_{n\varrho}$ en l'interval o, a més a més, en la composició d'itineraris.
També,com abans, en el cas en què $\Delta T = 0$, és segur que $\varphi_L = \varphi_X = 0$.
La fórmula del guany total continua essent:

$$R = \max_{j,h} \left[0,\ \varphi_Z + \varphi_L + \varphi_X \right] \qquad (2.2.24)$$

2.2.5.3.3. Clausura d'una línia
Tot i que, "strictu sensu" la clausura d'una línia no és una inserció, és una operació que s'ha inclòs en el mòdul, donada la similitad que hi presenta, ja que també afegeix un tram nou a la línia: el que la tanca. Només hi ha l'opció de tancar o no tancar, i cas de fer-ho, només pot ajuntar-se el nus primer amb el darrer. No hi ha cap més grau de llibertat, doncs. A més, donat que no s'insereix cap nus, $F_Z = \emptyset$ i $\varphi_Z = 0$.
Els altres dos conjunts F_L i F_X segueixen definits com abans.
Tampoc no té sentit la partició en L_1 i L_2 , ja que, d'antuvi no se sap quins fluxos s'aprofiten de la unió. El tractament en cas de clausura s'assembla més aviat a la inserció en una línia circular; és a dir, és exhaustiu. Per a cada flux de F_L caldrà veure si podrà aprofitar el nou tram; i això, naturalment, s'esdevindrà quan el nou temps de recorregut serà més curt que l'anterior.

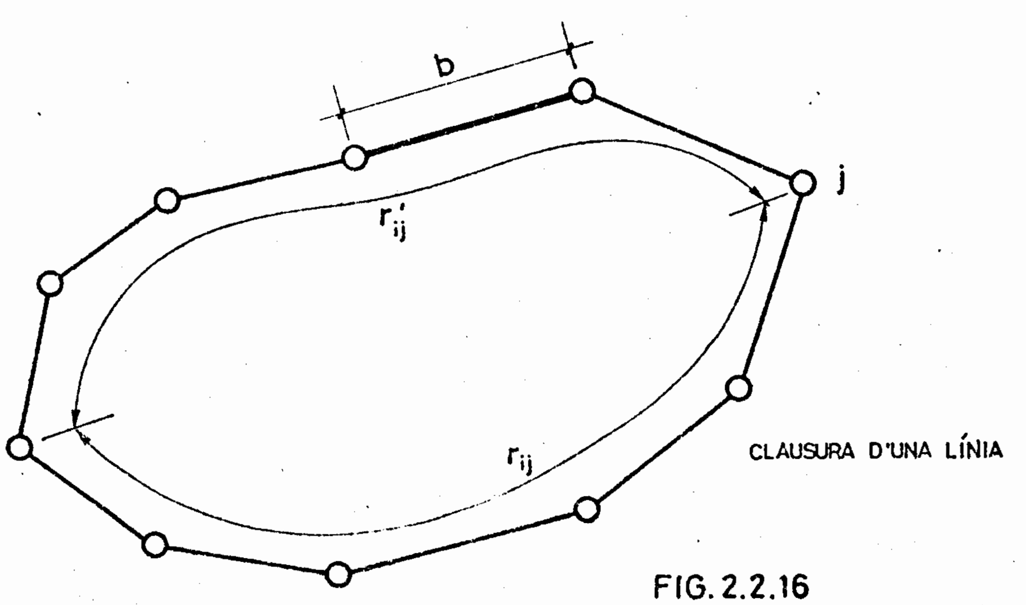


FIG. 2.2.16

Així, si el temps total de recorregut de la línia era T_l i el temps entre i i j era (vegi's la figura (2.2.16))

$$r_{ij} = t_{lh_j} - t_{lh_i} \tag{2.2.26}$$

ara passarà a ser:

$$r'_{ij} = t_{lh_i} + b + (T_l - t_{lh_j}) = (T_l + b) - r_{ij} \tag{2.2.27}$$

i hi haurà una disminució del temps de recorregut si $r'_{ij} < r_{ij}$. Altrament el flux (i,j) sofrirà una pèrdua, car el temps total de la xarxa augmenta en b, i en conseqüència l'interval i el temps d'espera també seran més alts.

La formalització pot fer-se definint 2 subconjunts d'F_L de la següent manera:

$$\left.\begin{aligned} F_L^1 &= \left\{(i,j) \mid (i,j) \in F_L,\ r_{ij} > \tfrac{1}{2}(T_l + b)\right\} \\ F_L^2 &= \left\{(i,j) \mid (i,j) \in F_L,\ r_{ij} < \tfrac{1}{2}(T_l + b)\right\} \\ F_L^1 &\cup F_L^2 = F_L \\ F_L^1 &\cap F_L^2 = \emptyset \end{aligned}\right\} \tag{2.2.28}$$

Aleshores,

$$\varphi_L = \sum_{(i,j) \in F_L^1} d_{ij}(a_{ij} - a'_{ij}) + \sum_{(i,j) \in F_l^2} d_{ij}(a_{ij} - a''_{ij}) \tag{2.2.29}$$

on a'_{ij} i a''_{ij} tenen el mateix sentit que a (2.2.23); a'_{ij} significa el nou cost amb canvi d'itineraris i d'interval, mentre que a''_{ij} només ha sofert un canvi d'interval.

La fórmula del guany total, ara se simplifica:

$$R = \text{MAX}\ [\ 0,\ \varphi_L + \varphi_X] \tag{2.2.30}$$

2.2.5.3.4 Filtres geomètrics previs.

a) Per a un indret qualsevol hi ha una pregunta important a respondre. Donat un indret h, quins nusos j es proven?. La contesta podria ser "tots", però és evident que això representa un gran malbaratament de temps de càlcul oimés si es té en compte que experimentalment ha pogut comprovar-se que els nusos llunyans a l'indret d'inserció és quasi bé impossible que puguin resultar escollits. S'ha seguit un criteri geomètric de proximitat per procedir a una determinació prèvia dels nusos candidats a inseribles. Un nus j és sotmès a la prova d'inserció si:

$$\rho_1 + \rho_2 \leq (1+\gamma)\,B = 2a \tag{2.2.31}$$

on ρ_1 i ρ_2 són els temps de recorregut als nusos adjacents, i B és el temps entre aquests darrers. Es equivalent a no permetre que entri un nus que comportaria un augment relatiu més gran que γ . En el límit $\gamma = 0$ significa que només poden inserir-se aquells nusos que caiguin damunt del camí mínim entre els dos adjacents, suposant que n'existeixi algun.
El lloc geomètric de nusos a analitzar és una superfície el.líptica que té com a focus els dos nusos adjacents, segons s'observa a la figura 2.2.17. El semieix major de l'el.lipse valdrà:

$$2a = (1+\gamma)\,B, \quad \longrightarrow \quad a = (1+\gamma)\,\frac{B}{2}$$

per definició; i la distància focal:

$$2c = B, \qquad c = \frac{B}{2}$$

per construcció, i el semieix menor:

$$b = \sqrt{a^2 - c^2} = \sqrt{(1-\gamma)^2\left(\frac{B}{2}\right)^2 - \left(\frac{B}{2}\right)^2} = \sqrt{\gamma(\gamma+2)}\;\frac{B}{2}$$

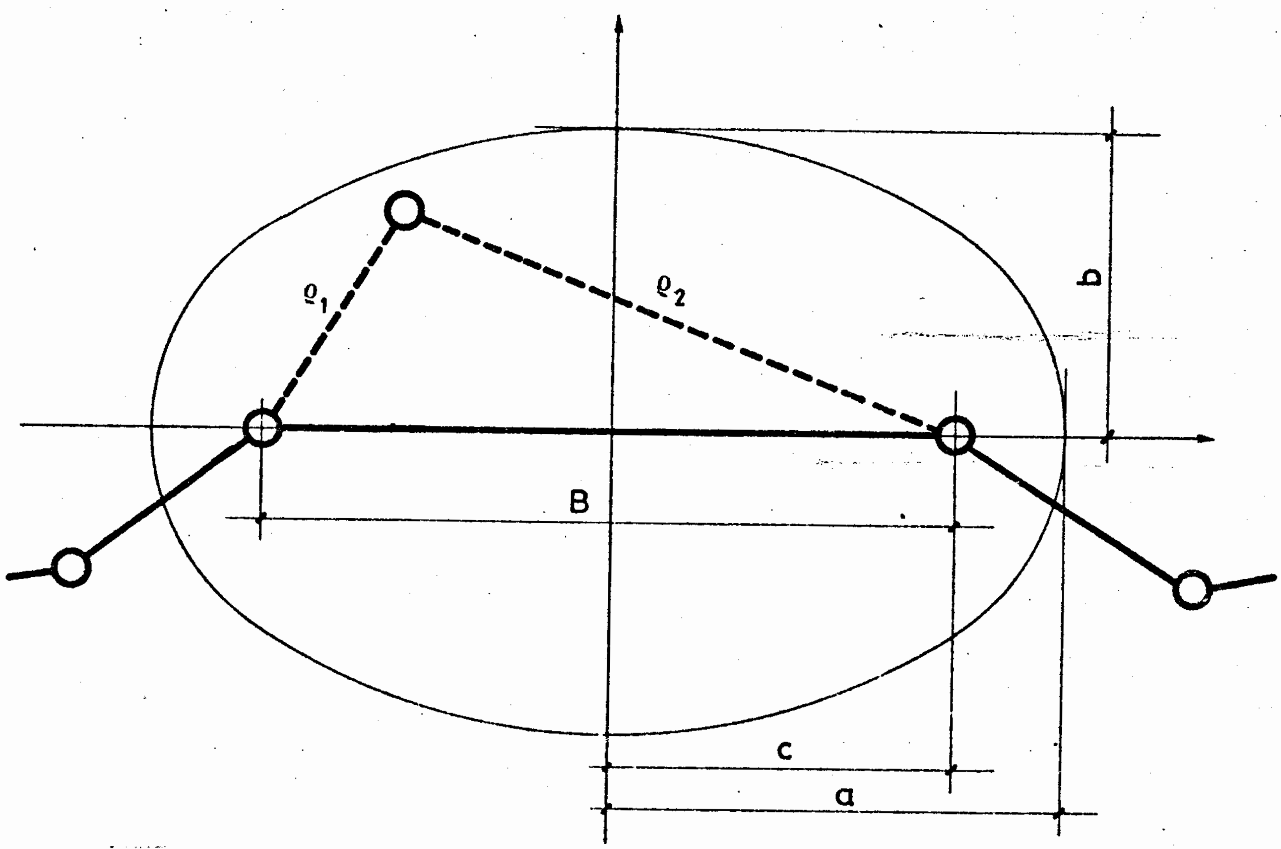


FIG. 2.2.17

Per tant, l'àrea de l'esmentada superfície és:

$$S = \pi ab = \frac{\pi B^2}{4}\left[(\gamma+1)\sqrt{\gamma(\gamma+2)}\right] = \frac{\pi B^2}{4}\left[\gamma^2 + \cdots\right] \qquad (2.2.32)$$

i és evident que l'àrea és proporcional al nombre de nusos a analitzar. De l'examen de la fórmula (2.2.32) pot concloure-se'n que el nombre de nusos analitzats és proporcional al quadrat del temps entre els adjacents, i al quadrat de l'augment relatiu γ . Es obvi que l'interval de definició de γ és

$$0 \leq \gamma \leq \infty ,$$

i que per a $\gamma = 0$, $S = 0$.

b) per a nusos extrems.
Ara cal dissenyar un filtre per als nusos extrems que estigui en una certa consonància amb l'anterior el.lipse. S'ha decidit de prendre una altra cònica, una branca d'hipèrbole en concret, de forma que llurs focus siguin el nus extrem i el seu contigu. D'aquesta manera, l'eix es fa coincidir amb el del tram extrem. Vegi's la figura 2.2.18.
La raó d'haver triat aquesta hipèrbola també rau en la predeterminació de la línia que l'origina. L'el.lipse no permetia que el nou nus caigués més lluy d'un cert increment relatiu, és a dir, prohibia angles massa marcats i desviacions massa fortes a la línia. La hipèrbole, al seu torn, també priva que el sentit de la línia, es capgiri massa en un extrem, o que es produeixi una inflexió més forta que un cert angle.
La condició imposada també és similar al cas anterior:

$$\varrho_2 - \varrho_1 \geqslant \frac{B}{\sqrt{1+\gamma^2}} = 2a \qquad (2.2.33)$$

on ϱ_1 és el temps fins al nus extrem i ϱ_2 fins al nus següent.
a és el semieix menor.

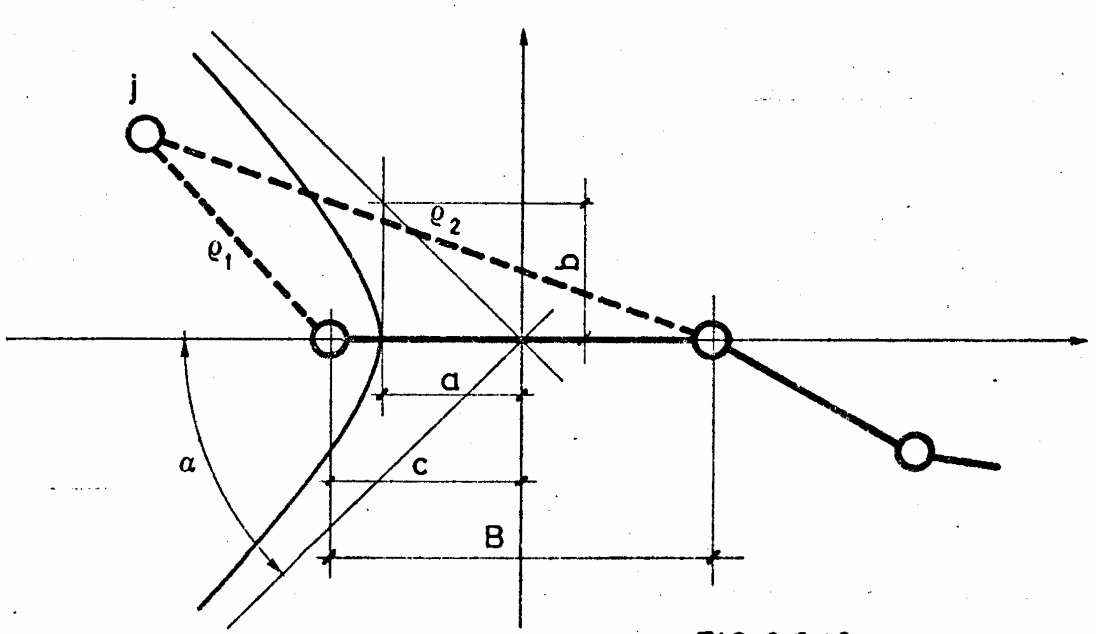


FIG. 2.2.18

Cal aturar-se en veure com juga el paràmetre γ en la determinació d'a. Abans s'ha vist que $\gamma = 0$ implicava que només s'analitzaven els nusos damunt de l'eix, i que $\gamma = \infty$ suposava una inexistència de filtre.
Aquestes condicions poden "traduir-se" en termes d'hipèrbola a la següent condició:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{b}{a} = \gamma \qquad (2.2.34)$$

(vegi's figura 2.2.18), que hi respon força. En efecte, per a $\gamma = 0$, hom s'ha de moure damunt del semieix, i per a $\gamma = \infty$, la superfície a analitzar és un semiplà, que ja sembla suficient.
Aleshores, la distància focal és, per construcció:

$$2c = B$$

i per tractar-se d'una hipèrbole:

$$\left(\frac{B}{2}\right)^2 = c^2 = a^2 + b^2 = a^2 + (\gamma\ a)^2 = (1+\gamma^2)\ a^2 \qquad (2.2.35)$$

D'aquesta expressió se'n dedueix la restricció exposada a (2.2.33) separant a.
A mida que una línia va configurant-se, l'àrea total a analitzar es redueix. L'algorisme, doncs, permet menys vel.leïtats a una línia madura que a una de novella. Aquesta conclusió s'obté automàticament de les condicions imposades ja que, en general, la B mitjana o temps de recorregut entre nusos es va fent petit. Però és coherent amb allò que s'esdevé en el procés real, ja que una línia madura està inserida en una xarxa també madura; per tant, és presumible que tots els fluxos relevants ja han estat recollits per alguna altra línia. Les figures 2.2.19 , 2.2.20 i 2.2.21, mostren com, l'àrea d'anàlisi va cenyint-se progressivament a la línia a mesura que aquesta creix. Els trets puntejats permeten de comparar les distintes àrees, en tres moments de l'evolució, corresponents respectivament a 2, 4 i 8 nusos. L'ordre d'inserció s'indica a l'interior del nus, i en tots ells s'ha pres un valor de $\gamma = 1$.
A més,la pràctica ha demostrat que les grans insercions tenen lloc al començament, mentre que a mesura que avança el procés l'algorisme es limita a fer alguna que altra reforma local. Si els límits es tracen de forma que incloguin només els nusos a ser inserits, és evident que l'estalvi de temps de càlcul pot ser prodigiós.

c) Per a la clausura.
Tot i que la clausura no és gaire cara en temps de càlcul, també s'ha dissenyat un filtre per a evitar la feina del mòdul en aquelles línies manifestament dretes, on és pràcticament impossible de tancar-les i d'obtenir- hi simultàniament un guany.
Per no caure en contradicció amb el filtre anterior, es comprova d'antuvi que o bé el primer nus caigui dintre de la hipèrbola del darrer o que el darrer ho faci dintre de la del primer. Segons el filtre per a

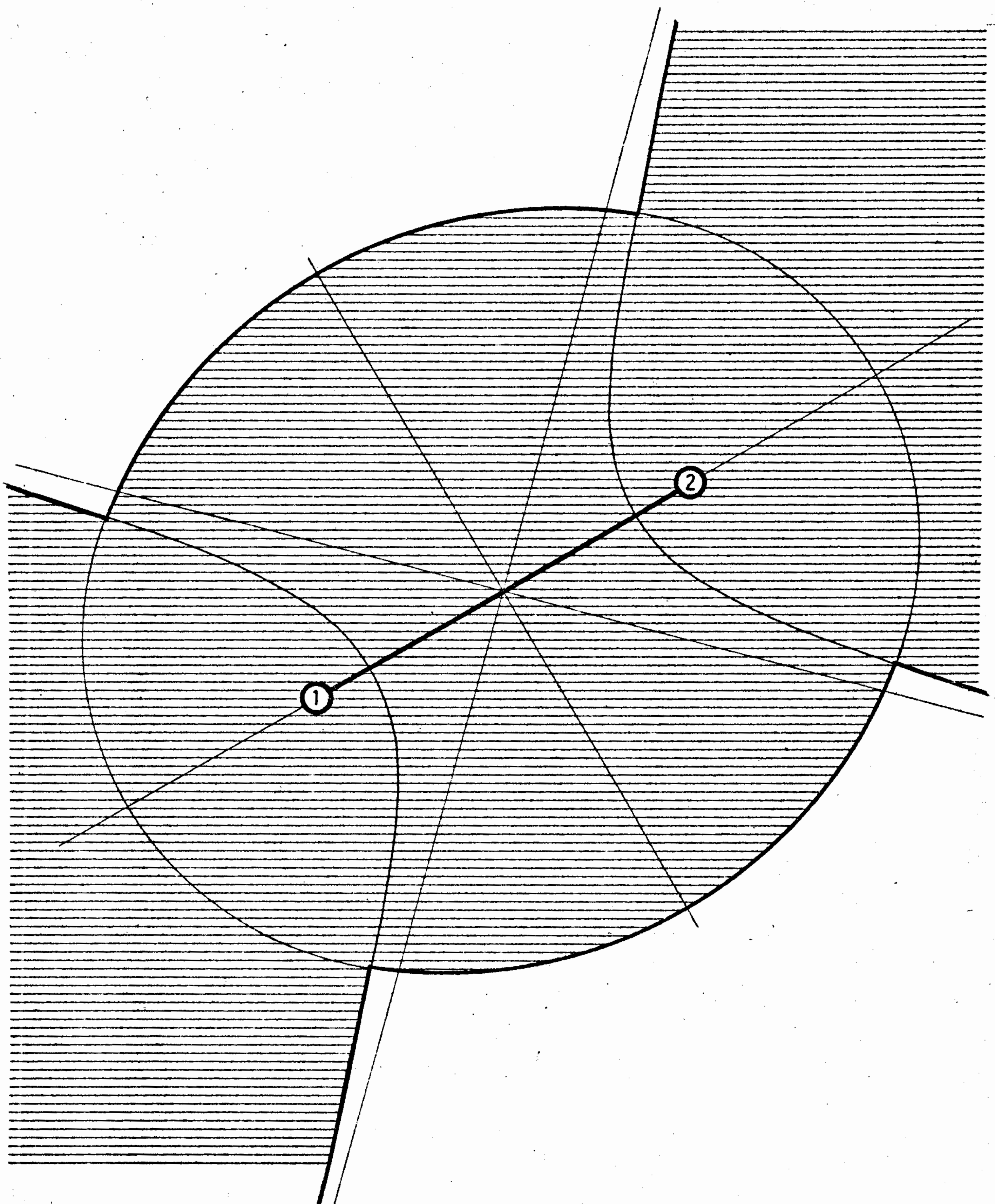


FIG. 2.2.19

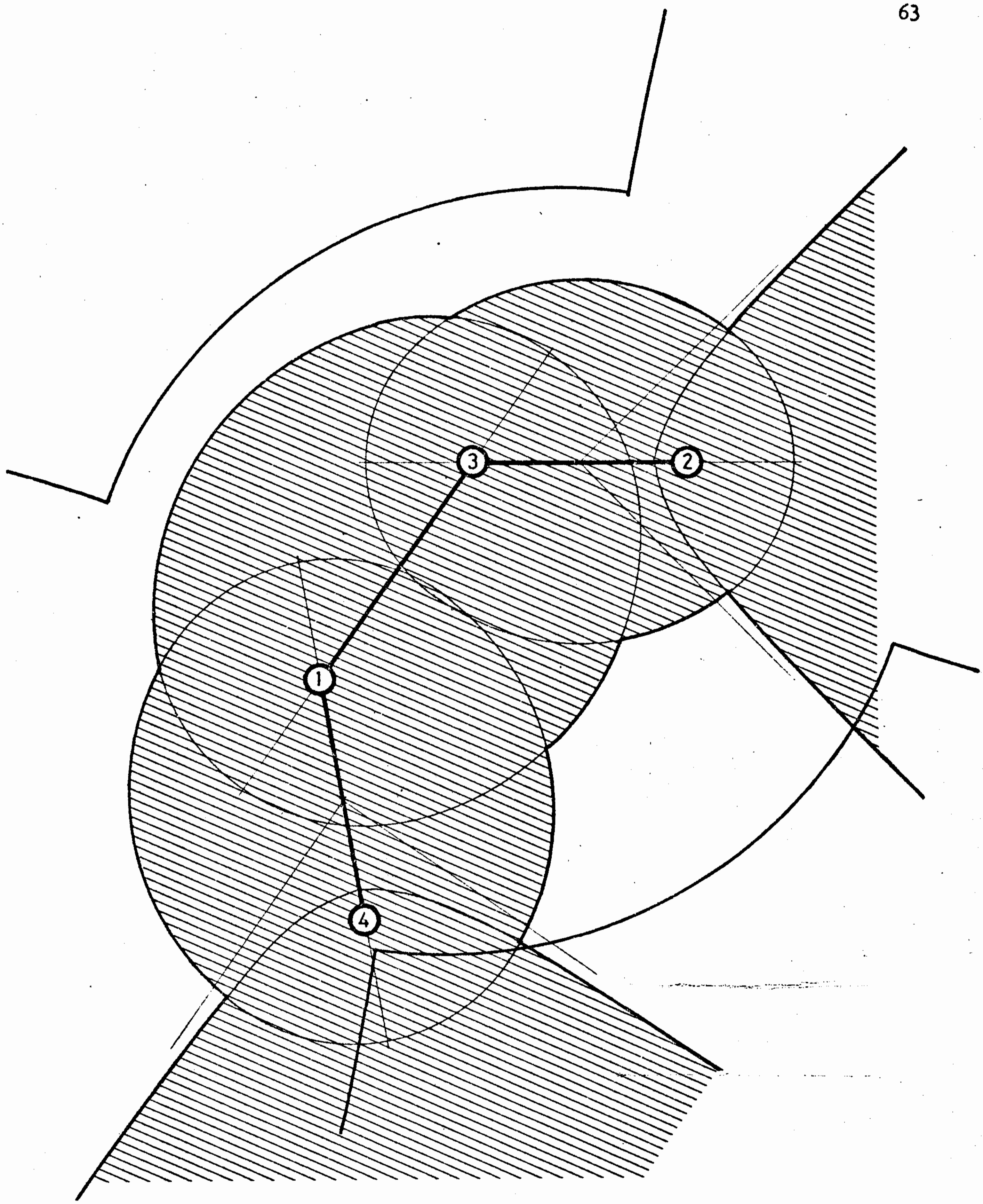


FIG. 2.2.20

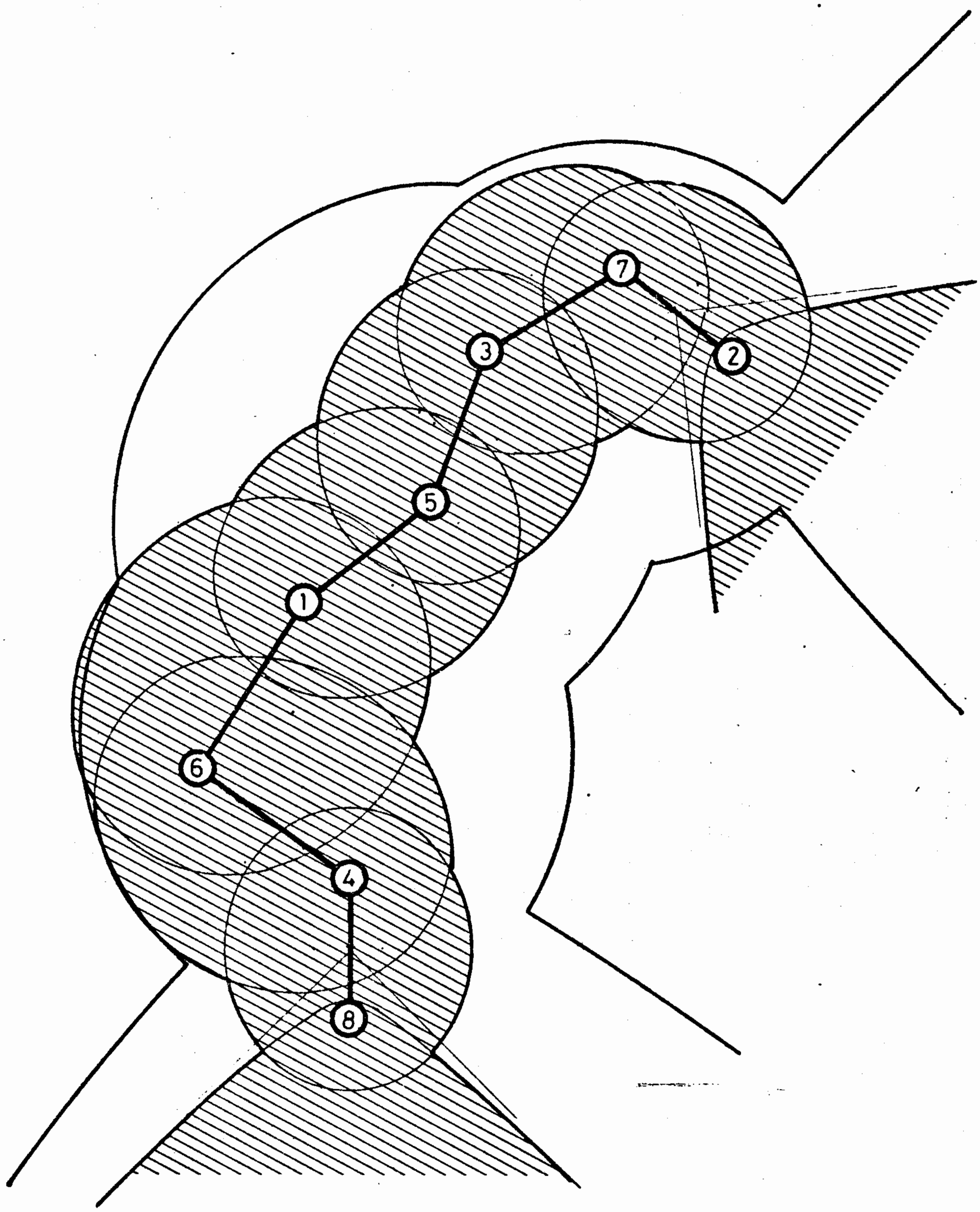


FIG. 2.2.21

nusos extrems, qualssevol de les dues condicions és suficient per a emprendre l'estudi. Vegi's la figura 2.2.22, on es compleix per a un dels dos.

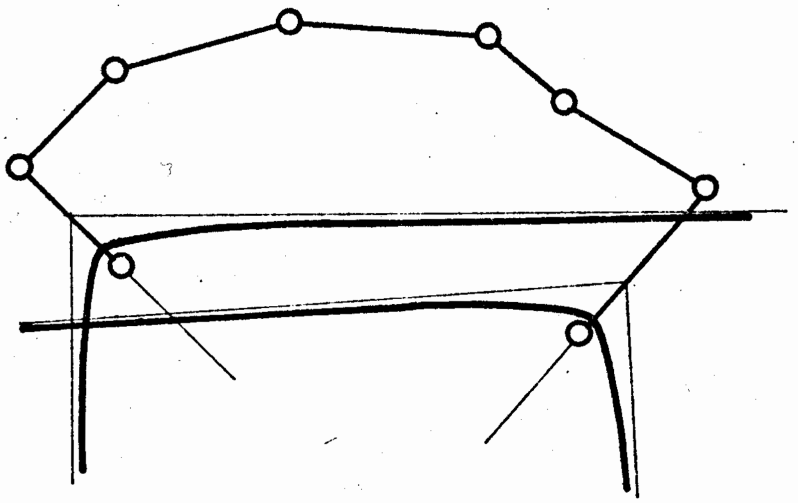


FIG. 2.2.22

Però àdhuc si no es compleix cap d'ambdues condicions, pot ser interessant d'estudiar la clausura. Això serà quan els nusos siguin prou pròxims perquè, presumiblement, convingui tancar la línia. Vegi's la figura 2.2.23. Per decidir si la proximitat és suficient o no, hi ha el coeficient de clausura γ_c **, del qual s'ha parlat a 2.2.2.5. Si**

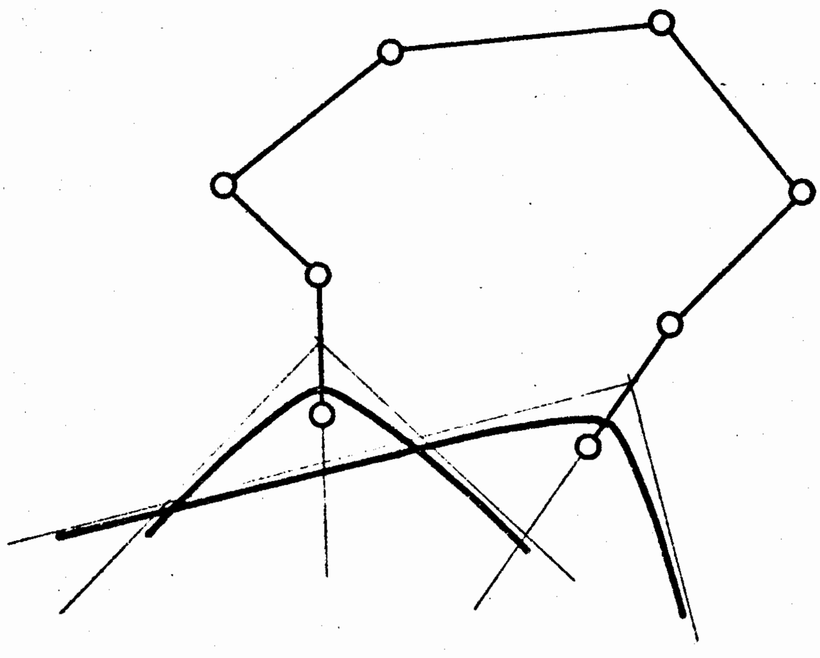


FIG. 2.2.23

el temps de recorregut màxim entre nusos adjacents de la línia en qüestió, es B max., aleshores el criteri de proximitat per a la clausura serà:

$$\varrho_{z_1 z_m} \leq \gamma_o \cdot B\ max \tag{2.2.36}$$

on γ_c sol situar-se cap a 2, i on $\varrho_{z_1 z_m}$ és el temps mínim entre nusos extrems.
El conjunt de les 3 condicions duu a la següent expressió:

$$\left.\begin{array}{ll} \varrho_{2m} - \varrho_{1m} \geqslant \dfrac{B_{12}}{\sqrt{1+\gamma^2}} & \text{o} \\ \varrho_{m-1,1} - \varrho_{m1} \geqslant \dfrac{B_{m,m-1}}{\sqrt{1+\gamma^2}} & \text{ò} \\ \varrho_{1m} \leqslant \gamma_c.\ B\ màx. & \end{array}\right\} \tag{2.2.37}$$

on s'hansubstituït els indicatius del nus només pels subíndexs.

2.2.5.4. Mòdul SUPRE

Donada una línia l- ena, examina la possibilitat de suprimir un dels nusos que la constitueixen en aquell moment. L'exposició que se seguirà és anàloga a l'adoptada per a INSER; és a dir, l'estudi de la línia dreta, de la circular i de la ruptura de línia circular per a transformar-la novament en dreta.
En tots tres supòsits només hi ha un grau de llibertat, que és el nus en qüestió a suprimir; i que pot prendre m_l valors; per tant, el nombre de possibilitats és molt més reduït i els filtres previs són quasi inexistents.
2.2.5.4.1. Supressió en una línia dreta.
Si la línia és L_l i el nus a suprimir és Z_h, $Z_h \in L_l$ i $h=1,m_1$ aleshores les particions esdevenen:

$$\left.\begin{array}{l} F_Z = \{z_h\} \times (L_1 - \{z_h\}) \\ F_L = (L_1 - \{z_h\})^2 \\ F_X = F - F_Z - F_1 \end{array}\right\} \tag{2.2.38}$$

F_Z és el conjunt de fluxos entre el nus a suprimir i tots els altres de la línia, i F_L són tots els que empren la línia en qüestió, llevat dels que ja s'han englobat a F_Z.

El guany φ_Z (en aquest cas, pèrdua) serà completament anàleg al seu corresponent del mòdul INSER fórula (2.2.20), tan sols amb els límits del sumatori diferents.
Es a dir:

$$\varphi_Z = \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq h}}^{m_1} d_{z_h z_n} (a_{z_h z_n} - a'_{z_h z_n}) \qquad (2.2.39)$$

tal com s'aprecia a la figura 2.2.24. $a'_{z_h z_n}$ serà el cost mitjà resultant, un cop llevada la línia 1-ena. Si l'esmentada línia era única, aleshores a' es reduirà a p , és a dir, cost per mitjà alternatiu.
En l'avaluació del guany per a la resta de la línia, φ_L , també té sentit de definir les dues particions L_1 i L_2 vistes a (2.2.21) només que ara amb una lleugera diferència: el nus h-è a suprimir no pertany a cap d'ambdues.
Es a dir:

$$\begin{aligned} L_1 &= \{ Z_n \mid Z_n \subset L_1, \quad n < h \} \\ L_2 &= \{ Z_n \mid Z_n \subset L_1, \quad n > h \} \\ L_1 \cup &\{Z_h\} \cup L_2 = L_1 \\ L_1 \cap L_2 &= \emptyset \end{aligned} \qquad (2.2.40)$$

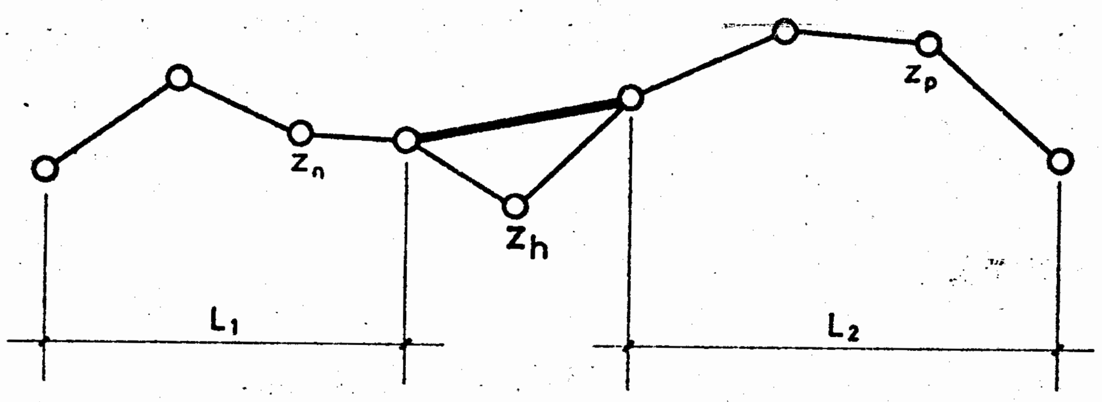


FIG. 2.2.24

La filosofia segueix essent la mateixa que aleshores, amb la sola salvetat que, en lloc d'un augment de temps de recorregut hi ha una disminució; el seu valor, però, és el mateix que es defineix a (2.2.22).

També, com a la inserció, hi ha dos casos especials:

- quan el nus a suprimir és un extrem; aleshores no té cap altra incidència que d'alterar el temps d'espera.
  No es fa, doncs, la partició en L_1 i L_2
- quan $\Delta T = 0$, aquell nus ni s'analitza, ja que és segur que no pot obtenir-se cap guany en eliminar-lo.
  Només cal veure que, la longitud de la xarxa roman invariada i que, per tant, ningú no pot millorar el temps d'espera.
  La formulació corresponent, també seria la mateixa que abans:

$$\varphi_L = \sum_{n\in L_1} \sum_{p\in L_2} d_{np} (a_{np} - a'_{np}) + \sum_{n\in L_1} \sum_{p\in L_1} d_{np} (a_{np} - a''_{np}) +$$

$$+ \sum_{n\in L_2} \sum_{p\in L_2} d_{np} (a_{np} - a''_{np}) \qquad (2.2.23)$$

L'objectiu, finalment, serà:

$$R = \underset{h}{\mathrm{MAX}} \; [0, \; \varphi_Z + \varphi_L + \varphi_X] \qquad (2.2.41)$$

2.2.5.4.2. Supressió en una línia circular.

No cal afegir res de nou, ja que tot el que li fa referència és anàleg adés a la supressió en una línia dreta, adés a la inserció en una línia circular.

Per a la pèrdua del nus φ_Z, encara és vàlida (2.2.39). En el guany per a la resta de la línia, també cal comparar els dos temps de recorregut b_1 i b_2 fornits per la línia circular (figura 2.2.25) sense que "a priori" tampoc no pugui avençar-se si a'_{np} només difereix d'a_{hp} en l'interval o, a més, en la composició d'itinerari. La fórmula a aplicar és (2.2.25) tal com en la inserció circular.

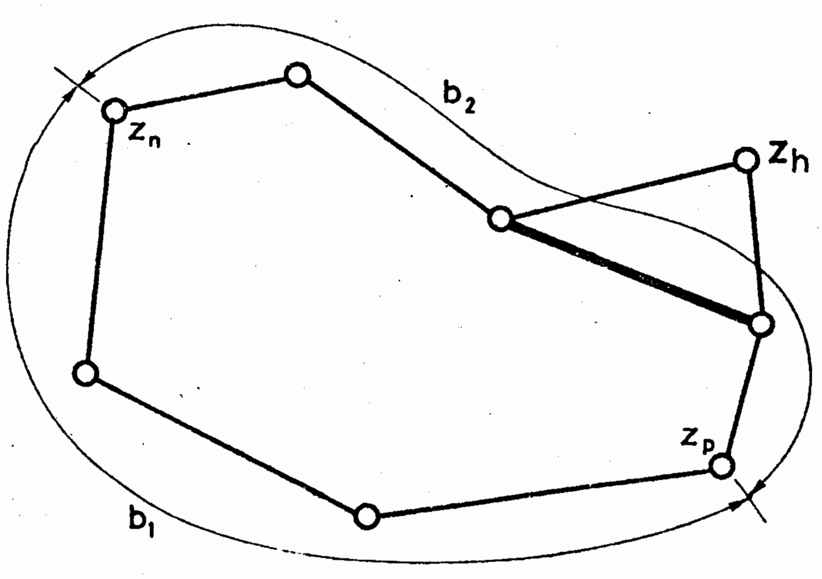


FIG. 2.2.25

Finalment, el guany total serà, com abans:

$$R = \underset{h}{MAX} \left[0, \varphi_Z + \varphi_L + \varphi_X \right] \qquad (2.2.41)$$

on h pot prendre m - 1 valors, ja que h=1 i h=m_l corresponen al mateix nus (primer i darrer).

2.2.5.4.3. Ruptura d'una línia circular

Constitueix l'operació simètrica o inversa de la clausura d'una línia dreta: ara, donada una línia circular, es tracta de trencar-la per algun punt o sigui, suprimir-ne un arc.
Aquí, però, contràriament a la clausura, cal decidir el punt per on es trenca: hi ha un grau de llibertat, amb m_l possibilitats. Com que no se suprimeix cap nus: $F_Z = \emptyset$ y $\varphi_Z = 0$.
Els altres dos conjunts, ara seran:

$$\left.\begin{array}{l} F_Z = \emptyset \\ F_L = L_1^2 \\ F_X = F - F_L \end{array}\right\} \qquad (2.2.42)$$

El càlcul de φ_L ha de tenir en compte per a cada flux d'F_L si l'anul.lació de l'arc, el perjudica; per tant, requereix un tractament exhaustiu. També, doncs, té sentit de definir 2 subconjunts d'F_L segons si el temps de recorregut resultant és més gran que l'anterior o, per contra, és igual que abans. Si b és el temps de l'arc suprimit, tal com apareix a la figura 2.2.26 i r'_{ij} és el nou temps resultant, aleshores:

$$\left.\begin{array}{l} F_L^1 = \left\{ (i,j) \mid (i,j) \in F_1,\ r'_{ij} > \frac{1}{2}(T_1 - b) \right\} \\ F_L^2 = \left\{ (i,j) \mid (i,j) \in F_1,\ r'_{ij} < \frac{1}{2}(T_1 - b) \right\} \\ F_L^1 \cup F_L^2 = F_L \\ F_L^1 \cap F_L^2 = \emptyset \end{array}\right\} \qquad (2.2.43)$$

i el guany experimentat és el descrit a (2.2.29):

$$\varphi_L = \sum_{(i,j) \in F_L^1} d_{ij}(a_{ij} - a'_{ij}) + \sum_{(i,j) \in F_L^2} d_{ij}(a_{ij} - a''_{ij}) \qquad (2.2.29)$$

on a'_{ij} i a''_{ij} tenen el mateix sentit que aleshores.
L'expressió del guany total té, en canvi, un grau de llibertat:

$$R = \underset{h}{MAX} \left[0, \varphi_L + \varphi_X \right] \qquad (2.2.44)$$

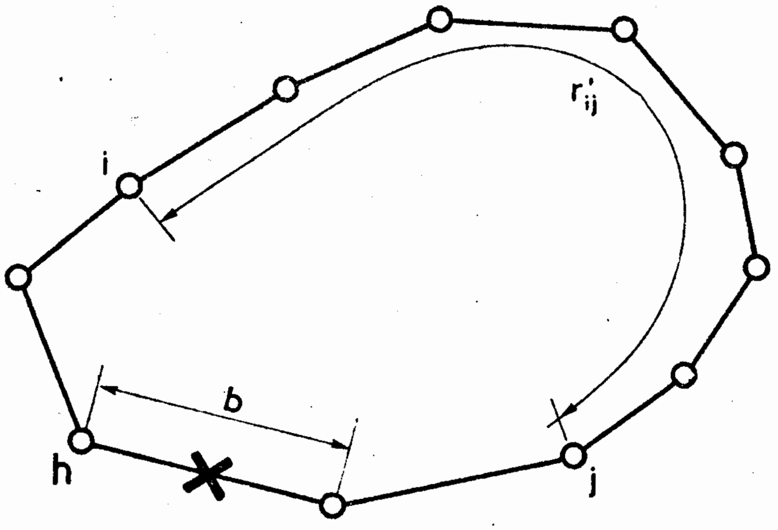


FIG. 2.2.26

2.2.5.4.4. Filtre geomètric previ.

En parlar de la supressió en una línia s'ha esbossat lleument un filtre elemental, consistent en no estudiar la supressió d'aquell nus que no suposa cap millora en el temps de recorregut.
Pròpiament, però, només hi ha filtre geomètric en la ruptura. Quan el temps associat a l'arc en qüestió és prou petit, se suposa que en cap cas pot sortir a compte de suprimir-lo. Aquesta "petitesa" es mesura relativament a l'arc màxim, B max.
Aleshores, la supressió de l'arc n-è s'estudiarà si i només si

$$\varrho_{n,n+1} \geqslant \gamma_r \cdot B_{max} \qquad (2.2.45)$$

on γ_r és el coeficient de ruptura, que se sol fixar cap a $\gamma_r = 0,5$, i del qual s'ha parlat a 2.2.2.5

2.2.5.5. Mòdul ELIM

Es el simètric del mòdul COMEN. Aquell iniciava una línia tot determinant els dos primers nusos. Aquest tracta d'anul.lar-la, quan ja només en resten els dos nusos darrers.
No hi ha cap grau de llibertat, ja que només pot triar-se entre eliminar el parell restant o no. En cas afirmatiu, la línia desapareix com a tal de la xarxa.
Les particions es defineixen així:

$$\left.\begin{aligned} F_Z &= \{(i,j)\} \\ F_L &= \emptyset \\ F_X &= F - \{(i,j)\} \end{aligned}\right\} \qquad (2.2.12)$$

coincidents amb les del mòdul COMEN.

Anomenant, com ja és habitual:

- a_{ij} el cost actual
- a'_{ij} el cost mitjà després de suprimir la línia present,

aleshores el guany lligat al nus serà:

$$\varphi_Z = d_{ij}(a_{ij} - a'_{ij}) \qquad (2.2.46)$$

D'altre cantó φ_X és el guany que experimenta la resta de la xarxa pel fet de suprimir el tram entre i i j.
En definitiva, el guany total serà:

$$R = \mathrm{MAX}\ [0, \quad \varphi_Z + \varphi_X] \qquad (2.2.47)$$

Cal notar que la fórmula no conté cap subíndex, ja que, tal com ja s'ha dit, tampoc no hi ha cap grau de llibertat.

2.2.5.6. Guany de la resta de la xarxa

Al punt 2.2.5.1 s'ha definit el guany per a la resta de laxarxa, però es reserva per al present l'explicació del seu mètode de càlcul. De tot el que s'ha vist se'n desprèn fàcilment:

$$\varphi_X = \sum_{(i,j)\in F_X} d_{ij} \ [a_{ij} - a'_{ij}] \qquad (2.2.48)$$

on a'_{ij} és el nou cost mitjà, resultant de la variació de la xarxa en b minuts. Aleshores, per tant,

$$a'_{ij} = \mu(a^{o}_{ij}, \ a^{1'}_{ij}, \ \ldots\ldots \ a^{s'}_{ij}) \qquad (2.2.49)$$

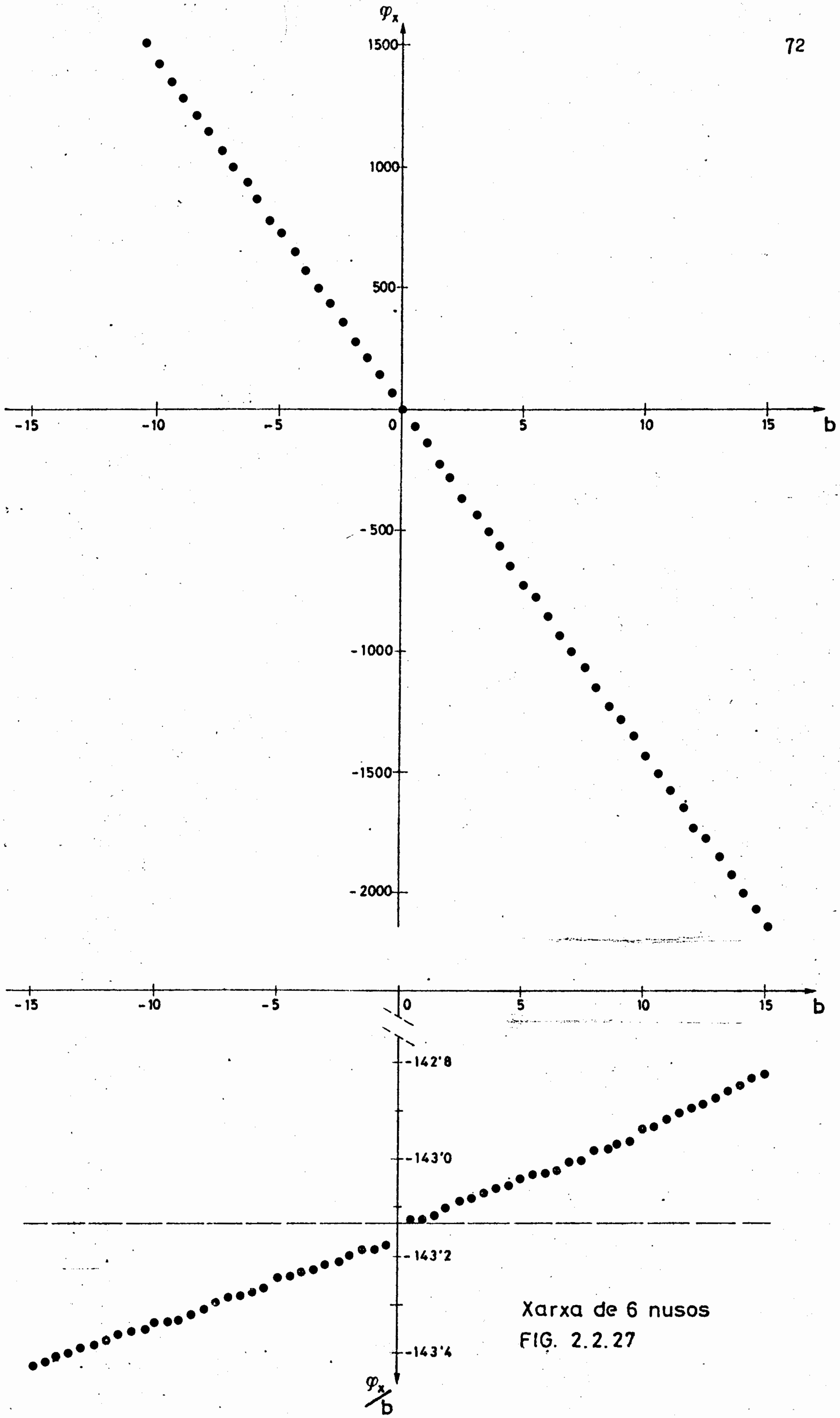
$$a^{k'}_{ij} = \tau(r^{k}_{ij}, \ g^{k}_{ij}, \ T+b) \qquad (2.2.50)$$

Com s'exposa a (2.2.49) i (2.2.50), els costos mitjans i els costos totals de viatge només són funció de b, ja que els temps de recorregut i el nombre de línies per itinerari romanen constants.
Pot escriure's , doncs:

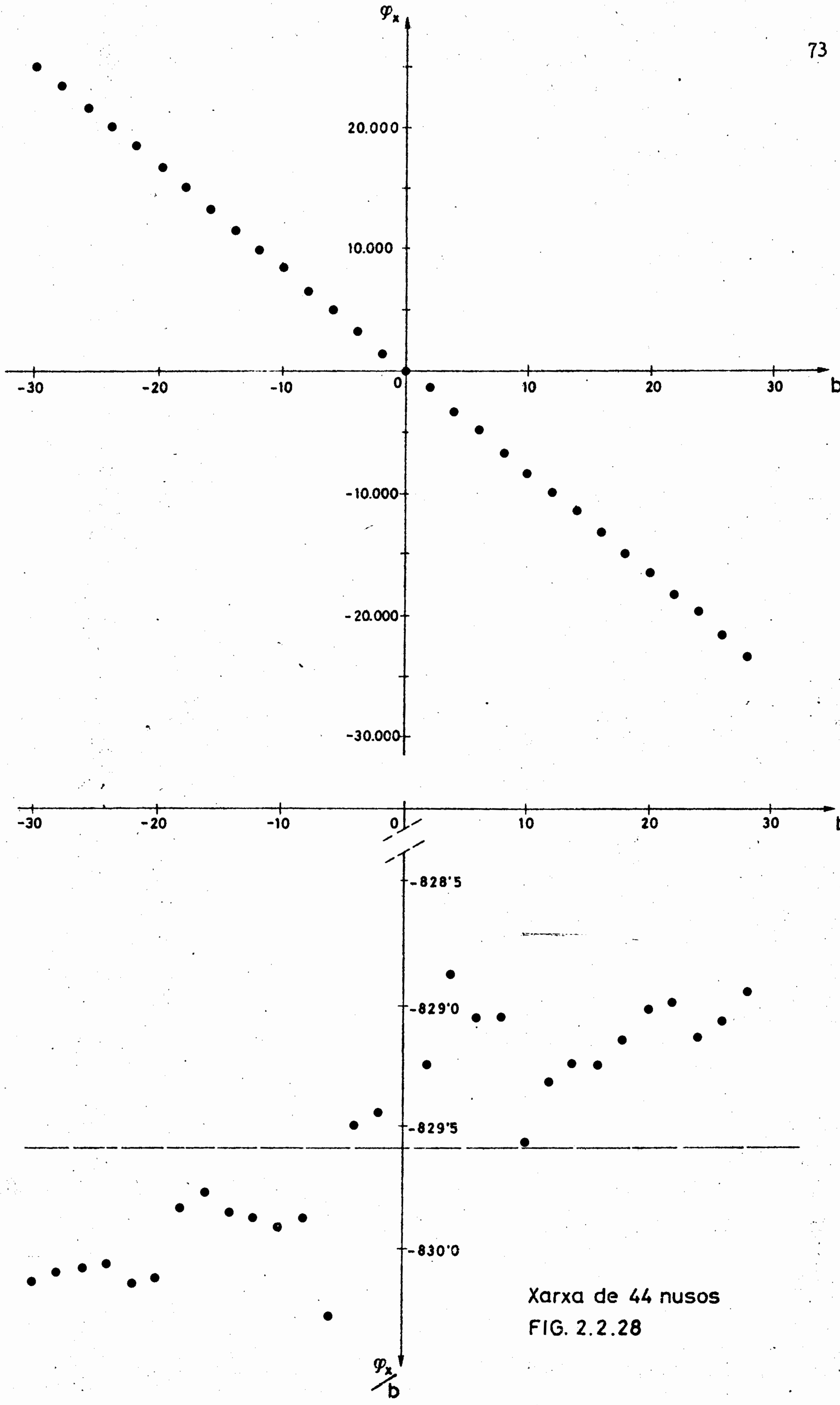
$$\varphi_X = \varphi_X(b) \qquad (2.2.51)$$

Els valors de b estan acotats, ja que, tal com s'ha desenvolupat al llarg dels paràgrafs precedents, hi ha filtres geomètrics previs en la majoria de temptatives.A més,però, hi ha un valor màxim que no pot ultrapassar-se, i és el diàmetre del graf, $b \leq_{max}$. El valor de b, doncs, és necessàriament petit al costat de T, temps total de recorregut de la xarxa. Per tant, es comet un error mínim si es linealitza la funció, en les rodalies del punt T. Es a dir:

$$\varphi_X = K \cdot b \qquad K \leq 0 \qquad (2.2.52)$$



Xarxa de 6 nusos
FIG. 2.2.27



Xarxa de 44 nusos
FIG. 2.2.28

on K és negatiu, car un augment del temps de recorregut representa una pèrdua o guany negatiu. Aquest valor representa, doncs, els minuts totals $\left\{\begin{matrix}\text{guanyats}\\\text{perduts}\end{matrix}\right\}$ per a la resta dels usuaris de la xarxa si la línia en qüestió $\left\{\begin{matrix}\text{disminueix}\\\text{augmenta}\end{matrix}\right\}$ en 1 minut.
En efecte, en dues xarxes de prova, que es descriuen a l'apartat 2.3.1 s'ha calculat φ_X per a una ampla gamma de b.
La primera xarxa consta de 6 zones, i la segona de 44. En cada cas s'ha dibuixat el valor de φ_X que, en principi, ha d'assemblar-se a una recta, i el de φ_X/b, o guany mitjà que, donat que la d'abans era una recta, aquesta hauria de ser constant: els gràfics de les figures 2.2.27 i 2.2.28 són prou explícits per sí mateixos, ja que "quasi" prenen aquesta forma.
Per tal d'expressar quantitativament la semblança amb una recta i, per tant, la bondat de la linealització, se n'ha calculat la correlació.
Les dades són a la taula de la figura 2.2.29

$\varphi_X = K.b + n$	xarxa de:	
	6 nusos	44 nusos
coef. correlació ϱ	$-1 + 6,1.\ 10^{-7}$	$-1 + 6,9.\ 10^{-8}$
pendent K	-143,14	-829,50
ordenada origen n	1,56	6,67
error relatiu màxim en el pendent	$8,7.10^{-4}$	$2,2.10^{-3}$

FIG. 2.2.29

Tant el coeficient de correlació ϱ, con la petitesa relativa a l'ordenada a l'origen justifiquen l'adopció de la forma lineal vista a 2.2.5.2. D'altra banda l'error relatiu comès en calcular el pendent en un punt o un altre, de l'ordre de mil.lèsimes permet de prendre qualsevol valor de K indistintament.
Aleshores el mètode de càlcul és com segueix: en cridar qualsevol mòdul, es tria un b arbitrària, procurant que sigui mitjana d'entre tots els que el mòdul pot emprar, i es calcula la $K = \varphi_X/b$ corresponent als fluxos F_X o a la resta de la xarxa; la resta de la xarxa és tota llevat de la línia damunt la qual es treballa. Aquest valor es conserva mentre opera l'esmentat mòdul ja que la resta de la xarxa segueix essent la mateixa. En cridar un altre mòdul, o àdhuc aquell mateix de bell nou, es recalcula un altre valor de K.
És en aquests càlculs quan realment es fa servir la matriu lògica de pertanyença $[q_{lj}]$ explicada a 2.2.3.3. A partir d'aquesta matriu, és fàcil de decidir per a cada flux si pertany o no a F_L.

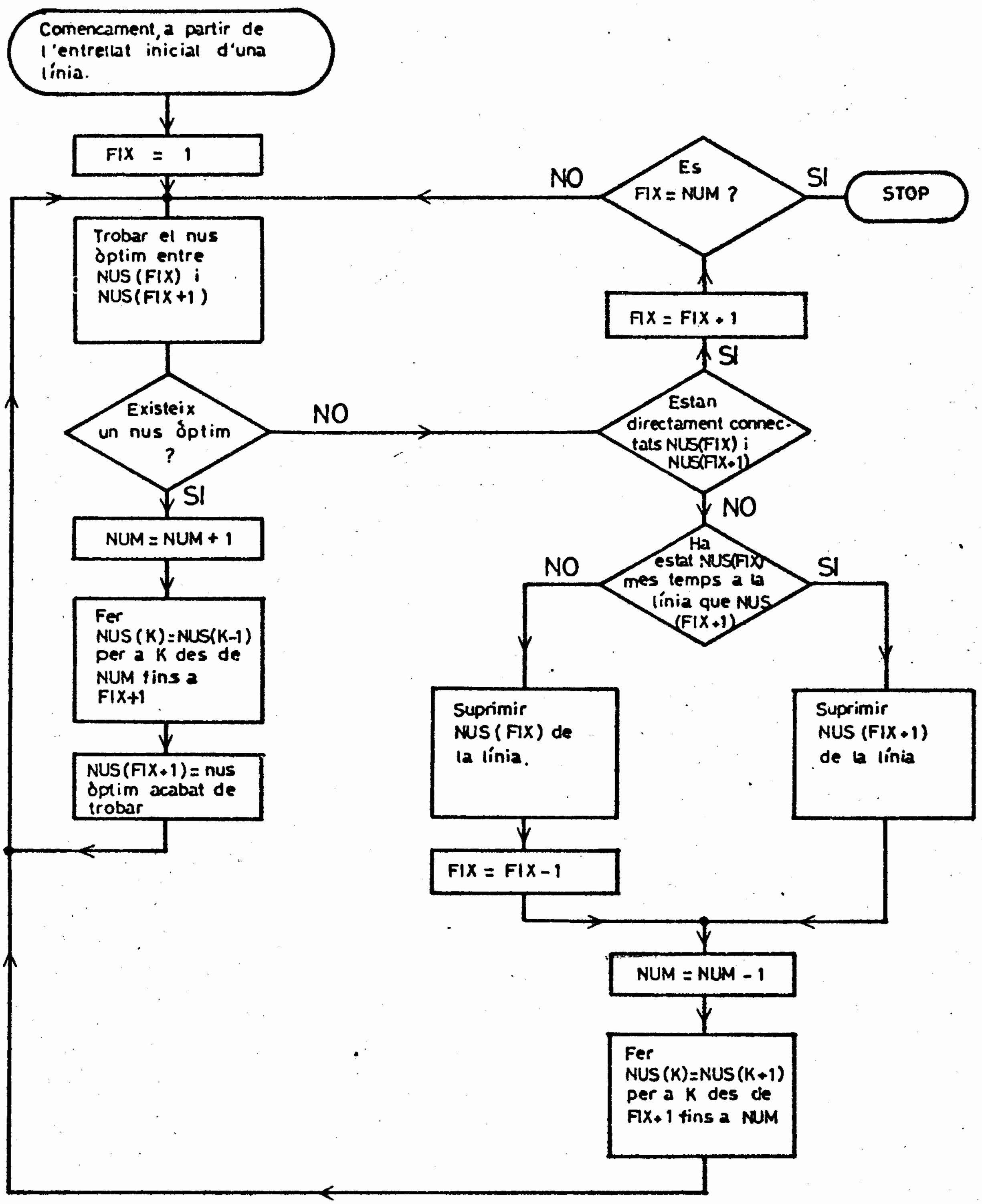
La condició és, en efecte:

$$\neg(q_{li} \wedge q_{lj}) = \text{CERT. o bé } (q_{li} \wedge q_{lj}) = \text{FALS.}$$

si la que s'analitza és a la línia l.
En els mòduls positius (COMEN i INSER) hi ha una salvetat a fer. Un o dos nusos que no pertanyen a la línia s'hi integren. Per tant, els fluxos que contenien aquest nus o nusos, estan comtabilitzats 2 vegades: com a $\left\{\begin{matrix}\text{fora}\\\text{dintre}\end{matrix}\right\}$ i com a $\left\{\begin{matrix}\text{dintre}\\\text{fora}\end{matrix}\right\}$ de la $\left\{\begin{matrix}\text{línia}\\\text{resta de la xarxa}\end{matrix}\right.$
Per tant, del valor φ_X primitiu, cal deduïr-ne aquell fluxos que ja intervenen a φ_X ò φ_L i que varien per a cada temptativa.
L'estalvi de càlculs obtingut per aquest mètode és espectacular.
Pensi's, només que en cas de rebutjar la linealització, per a cada nova b , o sigui, per a cada possible canvi a fer en una línia, caldria recalcular φ_X ; i ara, en canvi, està calculat íntegrament per als mòduls negatius, i quasi del tot en els positius.

2.2.5.7. Comparació amb l'algorisme de LAMPKIN i SAALMANS.

Tal com s'ha explicat al punt 1.2.2.2, en parlar dels antecedents propers, aquest algorisme vol ser una superació del proposat per LAMPKIN i SAALMANS {30} , en el qual està inicialment inspirat.
Llur algorisme genera les línies d'una en una, a partir d'allò que els autors anomenen un entrellat, és a dir, un conjunt de pocs nusos (3 ò 4) en un cert ordre, de manera que, a grans trets defineixen com serà la línia. Suposen, però, la restricció que els nusos extrems de la versió final de la línia han de pertànyer a l'entrellat inicial; per tant, no serà possible d'allargar pels extrems una línia durant el procés, tal con aquí es fa; l'algorisme, doncs, es limita a definir el traçat, el qual se li ha fornit prèviament en síntesi.
D'altra banda, la inserció d'un nus només s'estudia en un buit concret predeterminat. Això resta d'antuvi un grau de llibertat als dos oferts pel mòdul INSER: el nus concret a inserir i el buit on s'insereix.
Anàlogament, l'opció de supressió queda limitada al nus adjacent a l'indret on l'algorisme actua.
La figura 2.2.30 conté l'ordinagrama de l'algorisme. La variable NUM és el nombre de nusos que conté la línia, mentre que FIX és el "pointer" que assenyala el buit on l'algorisme està fent l'anàlisi a cada moment.
Les limitacions suara exposades es palesen en el fet que FIX, que seria l'equivalent de la variable h dels mòduls INSER i SUPRE només varia d'un en un, en més o en menys.
Finalment, cal afegir que l'algorisme no preveu la interacció entre línies. L'ordinograma de la figura, doncs, s'executa tantes vegades com entrellats hi ha.
Després, s'acaba ; com a conseqüència, una línia donada només pot tenir en compte les generades abans que ella, però no, com és lògic, les que es generaran després.



Algorisme de LAMPKIN i SAALMANS

FIG. 2.2.30