

## Capítol 3

# DESCRIPCIÓ DE LA COLUMNA D'AIRE

### 3.1 Mètode de la multiconvolució

#### 3.1.1 Introducció

En el mètode de la multiconvolució, la resposta temporal d'una columna d'aire a un senyal d'entrada determinat s'obté mitjançant l'addició de les reflexions que arriben a la secció d'entrada i que provenen de les discontinuïtats localitzades al llarg de la columna d'aire (Martínez, 1987; Martínez, Agulló i Cardona, 1988*b*). Aquest mètode de càlcul presenta l'interès de seguir el procés físic que té lloc a l'interior de la columna d'aire. La figura 3.1 presenta un esquema del mètode de la multiconvolució.

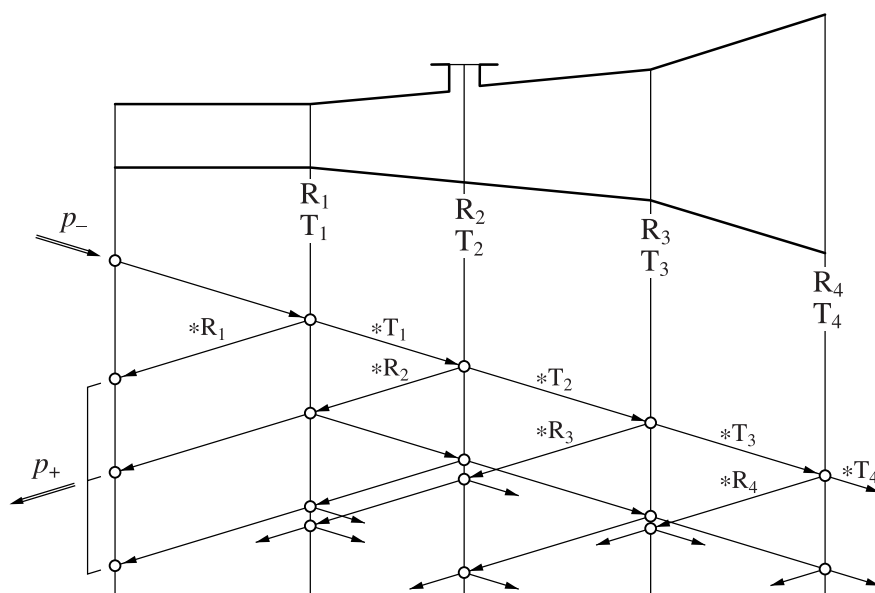


Figura 3.1: Esquema del mètode de multiconvolució

És evident que el nombre d'ones que es propaguen a l'interior del guia ones creix ràpidament amb el temps. El seguiment individualitzat de cadascuna d'aquestes ones seria complicat i poc eficient. És per això que cal sumar a cada pas temporal totes les ones que es propaguen en un mateix sentit i treballar únicament amb dues ones: la que viatja cap a la dreta (subíndex  $-$ ) i la que ho fa cap a l'esquerra (subíndex  $+$ ).

### 3.1.2 Estructura de la multiconvolució

L'algoritme de la multiconvolució implica dos tipus de càlculs diferents. Per un costat, els càlculs associats a les discontinuïtats de secció de la columna d'aire (canvis de diàmetre, canvis de conicitat, forats i extrems) i, per l'altre, els càlculs associats a la propagació de les ones en els trams entre discontinuïtats.

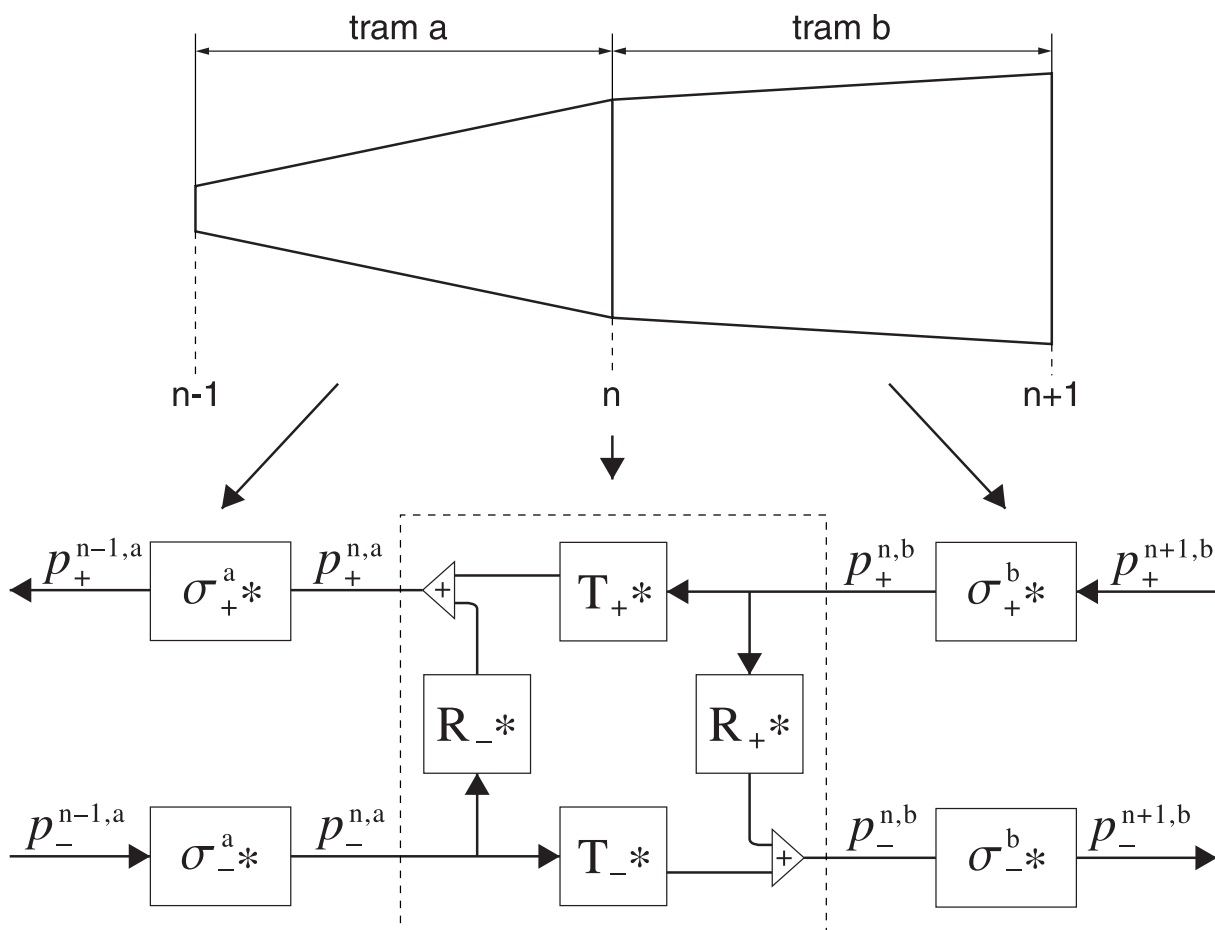


Figura 3.2: Convolucions en una discontinuïtat i en els trams anterior i posterior

En els càlculs de les discontinuïtats cal realitzar fins a quatre convolucions per obtenir les ones reflectides i les trameses, a partir de les ones propagatives que provenen de la dreta i de l'esquerra de la discontinuïtat. Per a la discontinuïtat n de la figura 3.2 s'obté:

$$\begin{aligned}
 p_+^{n,a1} &= R_- * p_-^{n,a} = \int_0^t R_-(t-\tau) p_-^{n,a}(\tau) d\tau, \\
 p_+^{n,a2} &= T_+ * p_+^{n,b} = \int_0^t T_+(t-\tau) p_+^{n,b}(\tau) d\tau, \\
 p_-^{n,b1} &= R_+ * p_+^{n,b} = \int_0^t R_+(t-\tau) p_+^{n,b}(\tau) d\tau, \\
 p_-^{n,b2} &= T_- * p_-^{n,a} = \int_0^t T_-(t-\tau) p_-^{n,a}(\tau) d\tau.
 \end{aligned}
 \tag{3.1}$$

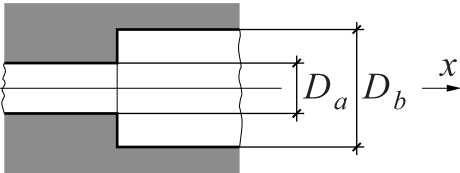
Les ones propagatives de sortida de la discontinuïtat s'obtenen de la suma de les ones transmesa i reflectida corresponents  $p_+^{n,a} = p_+^{n,a1} + p_+^{n,a2}$  i  $p_-^{n,b} = p_-^{n,b1} + p_-^{n,b2}$ .

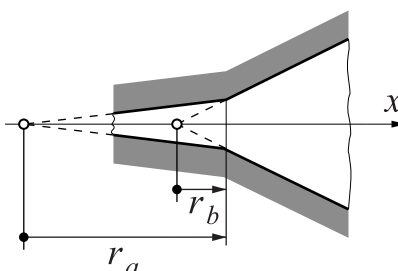
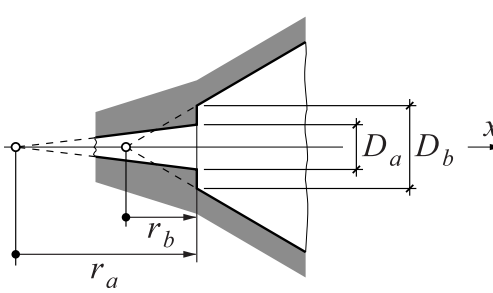
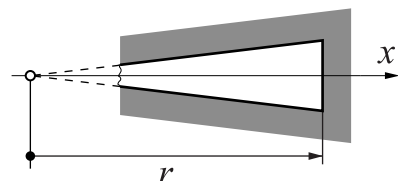
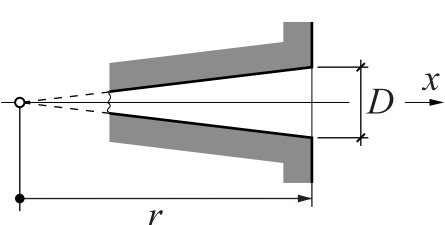
En els càlculs de propagació de les ones en els trams entre discontinuïtats cal realitzar dues convolucions per obtenir les ones propagatives de sortida als dos extrems del tram, a partir de les ones propagatives d'entrada al tram. Per al tram b de la figura 3.2 s'obté:

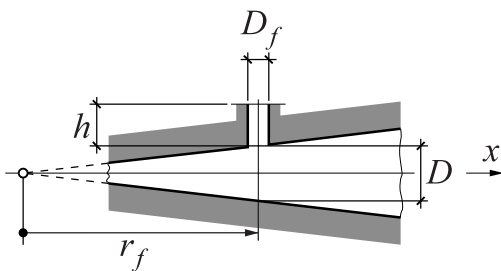
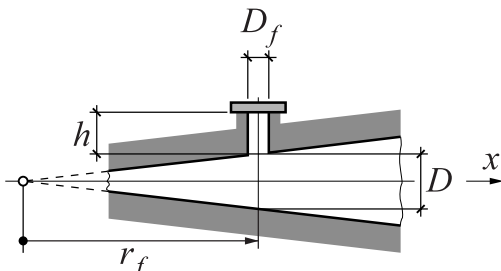
$$\begin{aligned}
 p_+^{n,b} &= \sigma_+^b * p_+^{n+1,b} = \int_0^t \sigma_+^b(t-\tau) p_+^{n+1,b}(\tau) d\tau, \\
 p_-^{n+1,b} &= \sigma_-^b * p_-^{n,b} = \int_0^t \sigma_-^b(t-\tau) p_-^{n,b}(\tau) d\tau.
 \end{aligned}
 \tag{3.2}$$

### 3.1.3 Discontinuitats

El càlcul de les convolucions involucrades en les discontinuïtats requereix el coneixement previ de totes les funcions de reflexió i transmissió elementals associades a totes les possibles discontinuïtats de la columna d'aire. El valor de la velocitat mitjana que s'assoleix en els instruments de bisell és prou petita, comparada amb la del so, per descartar la formulació de les funcions de reflexió en funció del nombre de Mach (Munjál, 1987). La taula 3.1 ens mostra les funcions de reflexió elementals per al camp de la pressió establertes per Martínez i Agulló (1988a).

	<p><b>canvi de diàmetre</b></p> $R_p(t) = \frac{B-1}{B+1} \delta(t)$ <p>amb <math>B = \left( \frac{D_a}{D_b} \right)^2</math></p>
---	---

	<p><b>canvi de conicitat</b></p> $R_p(t) = \varepsilon(t) v e^{\nu t}$ <p>amb <math>\nu = \frac{c}{2} \frac{(r_b - r_a)}{r_a r_b}</math></p>
	<p><b>canvi de diàmetre i conicitat</b></p> $R_p(t) = \frac{B-1}{B+1} \delta(t) + \frac{2B}{B+1} \varepsilon(t) v e^{\nu t}$ <p>amb <math>B = \left( \frac{D_a}{D_b} \right)^2</math></p> $\nu = \frac{c}{B+1} \frac{(B r_b - r_a)}{r_a r_b}$
	<p><b>extrem tancat</b></p> <p>tub cilíndric</p> $R_p(t) = \delta(t)$
	<p>tub cònic</p> $R_p(t) = \delta(t) + \varepsilon(t) \frac{2c}{r_e} e^{c t / r_e}$
	<p><b>extrem obert</b></p> <p>tub cilíndric</p> $R_p(t) = -\varepsilon(t) a^2 t e^{-a t}$ <p>amb <math>a = \frac{0,787 c e}{D}</math></p>
	<p>tub cònic</p> $R_p(t) = -\varepsilon(t) a^2 t e^{-a t}$ <p>amb <math>a = \frac{0,787 c e}{D} - \frac{c}{2 r_e}</math></p>

	<p style="text-align: center;"><b>forat obert</b></p> $R_p(t) = -b_1 \delta(t) - \varepsilon(t - \tau) \times$ $\times \frac{2 b_1 a^2 (1 - b_1)}{(s_1 - s_2)} \left( e^{s_1(t-\tau)} - e^{s_2(t-\tau)} \right)$ <p style="text-align: center;">amb <math>a = \frac{0,787 c e}{D_f} \quad \tau = 2 h/c</math></p> $b_1 = \left( 2 \left( D/D_f \right)^2 + 1 \right)^{-1}$ $s_{1,2} = \frac{a}{2} \left( -(2 + b_2 a \tau) \pm \left( (2 + b_2 a \tau)^2 - 8 b_1 \right)^{1/2} \right)$ $b_2 = 1 - 2 b_1$
	<p style="text-align: center;"><b>forat tapat</b></p> $R_p(t) = W \left( \delta(t) + \varepsilon(t) s e^{s t} \right)$ <p style="text-align: center;">amb <math>W = \frac{\eta - 1}{\eta + 1} \quad \eta = 0,1 D_f/h</math></p> $s = -\frac{2 c S}{(\eta + 1) V_f}$

Taula 3.1: Funcions de reflexió elementals

Les funcions de transmissió elementals s'obtenen a partir de les de reflexió i d'imposar la continuïtat de la pressió en la discontinuïtat:

$$T_p(t) = \delta(t) + R_p(t). \quad (3.3)$$

Totes les funcions nucli de les convolucions involucrades en la descripció d'una discontinuïtat (3.1) són de la forma:

$$F(t) = c_0 \delta(t) + c_1 e^{\rho_1 t} + c_2 e^{\rho_2 t} + c_3 t e^{\rho_2 t} = \{c\}^T \{b(t)\}, \quad (3.4)$$

on:

$$\{c\}^T = \{c_0, c_1, c_2, c_3\} \quad \text{i} \quad \{b(t)\}^T = \{\delta(t), e^{\rho_1 t}, e^{\rho_2 t}, t e^{\rho_2 t}\}. \quad (3.5)$$

La convolució amb aquestes funcions nucli admet una formulació recurrent que permet trobar el valor de la sortida  $y(t)$  a partir del valor anterior de la sortida  $y(t-\Delta t)$  i dels valors de l'entrada  $x$  entre  $t-\Delta t$  i  $t$  (Cardona 1992a):

$$y(t) = \int_0^t F(t-\tau) x(\tau) d\tau = \{c\}^T \{Y(t)\}, \quad (3.6)$$

$$\{Y(t)\} = [A]\{Y(t-\Delta t)\} + [B]\{X(t)\}, \quad (3.7)$$

on:

$$[A] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{\rho_1 \Delta t} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{\rho_2 \Delta t} & 0 \\ 0 & 0 & \Delta t e^{\rho_2 \Delta t} & e^{\rho_2 \Delta t} \end{bmatrix}, \quad (3.8)$$

$$\{Y(t)\} = \int_0^t \{b(\tau-t)\} x(\tau) d\tau \Rightarrow \{Y(0)\}^T = \{0, 0, 0, 0\}, \quad (3.9)$$

i les expressions de  $[B]$  i  $\{X(t)\}$  depenen de l'aproximació de  $x(t)$  entre  $t-\Delta t$  i  $t$ . Si s'utilitza una aproximació lineal de  $x(t)$  s'obté:

$$[B] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \{k\}_0 - \frac{1}{\Delta t} \{k\}_1 & \frac{1}{\Delta t} \{k\}_1 \end{bmatrix}, \quad (3.10)$$

$$\{X(t)\}^T = \{x(t), x(t-\Delta t)\}, \quad (3.11)$$

on:

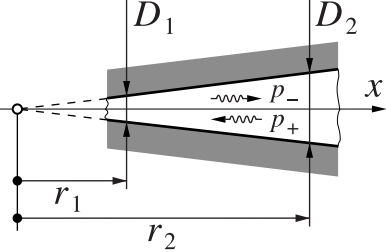
$$\{k\}_s = \int_0^{\Delta t} \{b(\tau)\} \tau^s d\tau. \quad (3.12)$$

Aquest mètode recurrent té dos avantatges importants respecte de la convolució numèrica no recurrent: redueix el nombre d'operacions a realitzar en cada pas temporal i no fa necessari l'emmagatzematge de les històries temporals de les funcions d'entrada a les discontinuïtats  $p_-^{n,a}$  i  $p_+^{n,b}$ .

### 3.1.4 Propagadors

El càlcul de les convolucions involucrades en la propagació de les ones en els trams entre discontinuïtats requereix una funció nucli descriptora del retard i de l'esmoreïment sofert per

l'ona. Martínez, Agulló i Cardona (1988b) estableixen una funció d'escoriment per al camp de la pressió, que es mostra a la taula 3.2, i tenen en consideració el retard a través de registres de decalatge. Aquest fet obliga a calcular el valor de la pressió en nodes equiespaiats al llarg del guia ones i a situar les discontinuïtats en aquests nodes.

	<p style="text-align: center;"><b>funció d'escoriment</b></p> $\sigma_p(t) = \frac{B \xi}{2\sqrt{\pi} (t - L/c)^{3/2}} e^{-\frac{\xi^2}{4(t-L/c)}}$ <p style="text-align: center;">amb <math>\xi = \frac{2\sqrt{2} \xi_0 L}{c^{3/2} (D_1 + D_2)}</math></p> <p style="text-align: center;"><math>L =  r_1 - r_2 </math></p> <p style="text-align: center;"><math>B = \left(\frac{D_1}{D_2}\right)</math> per a <math>p_-</math> i <math>B = \left(\frac{D_2}{D_1}\right)</math> per a <math>p_+</math></p>
---	--

Taula 3.2: Funció d'escoriment

Per poder situar les discontinuïtats en qualsevol posició, poden abordar-se les convolucions involucrades en la descripció de la propagació de les ones en els trams entre discontinuïtats (3.2) sense separar els efectes del retard i de l'escoriment (Cardona, Barjau i Puig, 1992b; Barjau, Keefe i Cardona, 1999). La figura 3.3 presenta una d'aquestes funcions nucli, on es pot observar que durant el temps que tarda l'ona a recórrer el tram ( $L/c$ ) la funció nucli és nul·la.

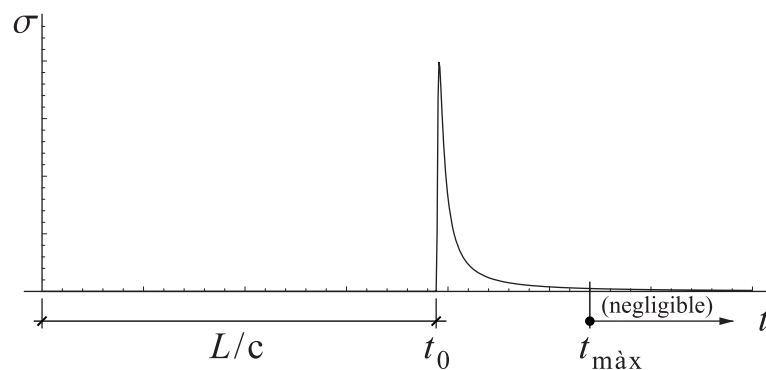


Figura 3.3: Nucli de convolució d'un propagador

L'àrea d'aquestes funcions nucli és la relació entre diàmetres de les seccions dels extrems del tram ( $B$ ), i descriuen la forma que presenta un impuls unitari quan ha recorregut tot el tram de longitud  $L$ .

La convolució amb aquestes funcions nucli no admet una formulació recurrent i, per tant, per conèixer el valor de la sortida  $y(t)$  cal emmagatzemar els valors de l'entrada  $x(t)$ . Si l'entrada  $x(t)$  és coneguda de manera discreta a intervals  $\Delta t$ , cal fer una aproximació polinòmica de  $x(t)$  per poder calcular la convolució (Cardona, 1992a). Si s'utilitza una aproximació lineal de  $x(t)$  s'obté:

$$\begin{aligned} y(t) &= \int_0^t \sigma(t-\tau) x(\tau) d\tau = \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} \left\{ \left[ k_{0m} - \frac{k_{1m}}{\Delta t} \right] x(t-m\Delta t) + \left[ \frac{k_{1m}}{\Delta t} \right] x(t-m\Delta t - \Delta t) \right\}, \end{aligned} \quad (3.13)$$

on:

$$k_{sm} = \int_0^{\Delta t} \sigma(m\Delta t + \tau) \tau^s d\tau. \quad (3.14)$$

Si es té en compte que la funció nucli és pràcticament negligible a partir d'un cert valor de temps  $t_{m\grave{a}x}$  (figura 3.3), el sumatori infinit de l'equació 3.13 pot reduir-se a un nombre finit de termes. Per a les dimensions habituals dels trams del tub d'un instrument musical es pot prendre com a  $t_{m\grave{a}x} = m_{m\grave{a}x} \Delta t$  el valor que fa que l'àrea de la funció nucli sigui superior al 98 % de l'àrea total:

$$\int_0^{t_{m\grave{a}x}} \sigma(\tau) d\tau = \sum_{m=0}^{m_{m\grave{a}x}-1} k_{0m} \geq 0,98 B. \quad (3.15)$$

Així també es redueix a  $m_{m\grave{a}x}$  el nombre de valors de l'entrada  $x(t)$  que cal emmagatzemar per poder realitzar els càlculs.

### 3.1.5 Procediment de càlcul

El procediment de càlcul descrit per a les discontinuïtats permet obtenir la sortida  $y$  en un valor de temps  $n \Delta t$  a partir del coneixement de l'entrada  $x$  fins al valor de temps també  $n \Delta t$ . El procediment de càlcul descrit per als propagadors, en canvi, permet obtenir la sortida  $y$  en un valor de temps  $n \Delta t$  a partir del coneixement de l'entrada  $x$  fins al valor de temps  $(n-1) \Delta t$ . Si la longitud del tram  $L$  és superior a  $c \Delta t$  ( $L > c \Delta t$ ) s'utilitza un valor de l'entrada no conegut però que pot ser calculat per interpolació. Si la longitud del tram  $L$  és inferior a  $c \Delta t$  ( $L < c \Delta t$ ) s'utilitza un valor de l'entrada no conegut que, en aquest cas, ha de ser calculat per



extrapolació. Aquestes dues situacions són representades a la figura 3.4, en què l'eix de la funció d'entrada està invertit d'acord amb l'operació de convolució.

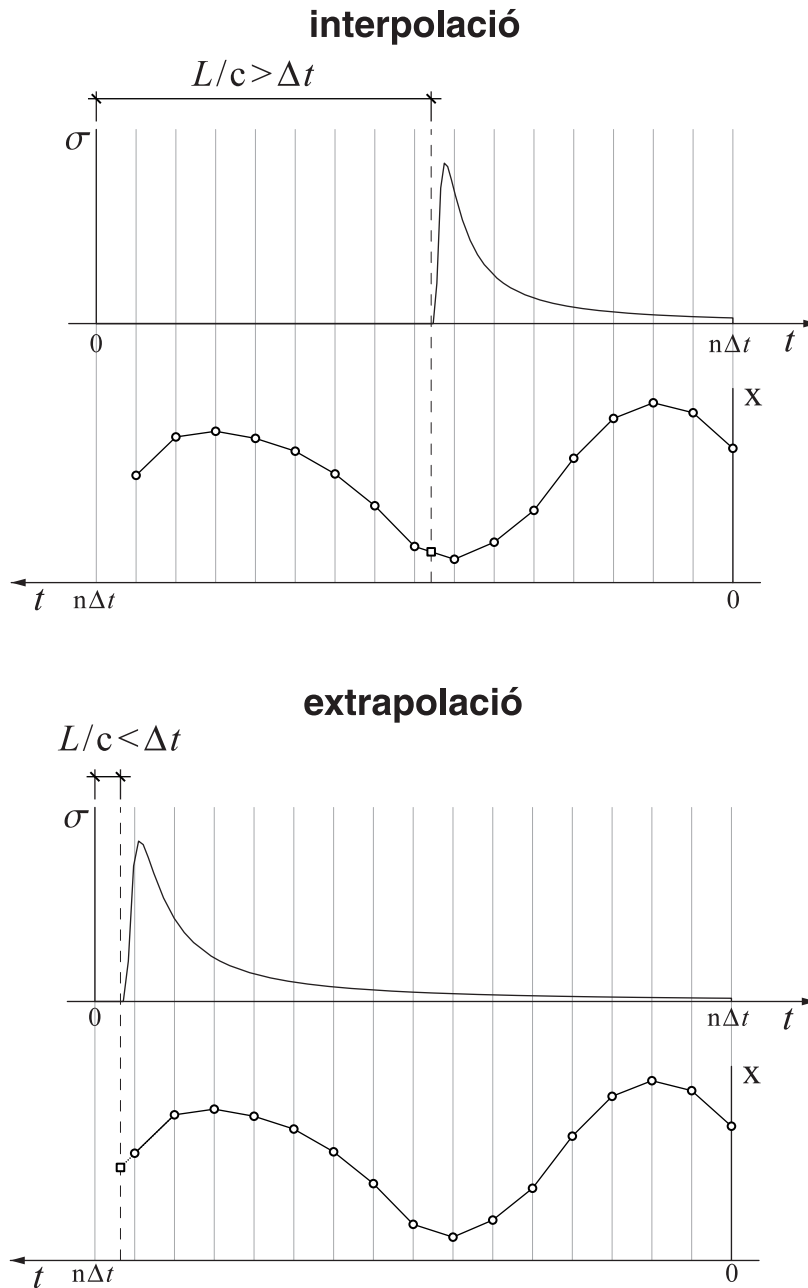


Figura 3.4: Dues possibilitats de convolució amb el propagador

A cada pas d'integració per al càlcul de la resposta d'un guia ones el procediment que cal seguir és el següent:

- a- Es disposa dels valors de les entrades i les sortides dels propagadors i les discontinuïtats en el pas d'integració anterior de valor de temps  $(i-1) \Delta t$ .

- b- Es calculen, mitjançant el mètode descrit en l'apartat 3.1.4, les sortides dels trams en el valor de temps i  $\Delta t$ . En aquest pas és on, depenent de la longitud del tram, cal realitzar una interpolació o una extrapolació.
- c- Les sortides dels trams calculades en el pas anterior són les entrades de les discontinuïtats en el valor de temps i  $\Delta t$ .
- d- Es calculen, mitjançant el mètode descrit en l'apartat 3.1.3, les sortides de les discontinuïtats en el valor de temps i  $\Delta t$ .
- e- Les sortides de les discontinuïtats calculades en el pas anterior són les entrades dels propagadors en el valor de temps i  $\Delta t$ .
- f- Es disposa finalment dels valors de les entrades i sortides dels propagadors i les discontinuïtats en el valor de temps i  $\Delta t$  que són necessaris per al següent pas d'integració.

## 3.2 Mètode de les matrius de transferència

### 3.2.1 Introducció

Les matrius de transferència relacionen, en el domini freqüencial, dues variables d'estat en una secció del tub amb les mateixes variables en una altra secció (Munjál, 1987; Jordi, 1999). Les variables d'estat utilitzades habitualment en l'estudi de tubs d'instrument musical de vent són la pressió i la velocitat:

$$\begin{Bmatrix} \hat{p} \\ \hat{v} \end{Bmatrix}_2 = \begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} \\ t_{21} & t_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \hat{p} \\ \hat{v} \end{Bmatrix}_1, \quad (3.16)$$

on:

$$\begin{aligned} t_{11} &= \left. \frac{\hat{p}_2}{\hat{p}_1} \right|_{\hat{v}_1=0}, & t_{12} &= \left. \frac{\hat{p}_2}{\hat{v}_1} \right|_{\hat{p}_1=0}, \\ t_{21} &= \left. \frac{\hat{v}_2}{\hat{p}_1} \right|_{\hat{v}_1=0}, & t_{22} &= \left. \frac{\hat{v}_2}{\hat{v}_1} \right|_{\hat{p}_1=0}. \end{aligned} \quad (3.17)$$

Les matrius de transferència poden relacionar qualsevol parell de variables d'estat. En els tubs on la pressió i la velocitat es suposen com a superposició d'una ona que viatja en un sentit i una altra que ho fa en sentit contrari, sovint serà útil utilitzar  $\hat{p}_-$  i  $\hat{p}_+$  com a variables d'estat per fer més senzilla la descripció d'alguna discontinuïtat o d'algun tram.

A partir del coneixement de les matrius de transferència elementals de les diferents discontinuïtats que es poden trobar al llarg d'un tub d'instrument, de les matrius de

transferència dels trams entre discontinuïtats i de la descripció dels diferents tipus d'extremes del tub es pot obtenir la resposta en freqüència del tub. La transformada de Fourier permet, a partir de la resposta en freqüència, obtenir la resposta temporal del guia ones.

### 3.2.2 Tram cilíndric

En un tub cilíndric, el camp de la pressió queda caracteritzat per l'equació d'ona. El camp de la velocitat es relaciona amb el de la pressió mitjançant l'equació de la quantitat de moviment. Si es negligeixen les pèrdues viscotèrmiques, ambdues equacions s'expressen com (Munjal, 1987):

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p(x,t)}{\partial t^2} = \nabla^2 p(x,t), \quad (3.18)$$

$$\frac{\partial v(x,t)}{\partial t} = -\frac{1}{\rho_0} \nabla p(x,t). \quad (3.19)$$

Les solucions unidimensionals i harmòniques d'aquestes equacions poden expressar-se com a suma de les ones propagatives:

$$\begin{aligned} p_- &= A_- e^{-j(kx+\psi)} e^{j(\omega t+\phi)}, \\ p_+ &= A_+ e^{j(kx+\psi)} e^{j(\omega t+\phi)}, \end{aligned} \quad (3.20)$$

$$\begin{aligned} v_- &= \frac{1}{\rho_0 c} A_- e^{-j(kx+\psi)} e^{j(\omega t+\phi)}, \\ v_+ &= -\frac{1}{\rho_0 c} A_+ e^{j(kx+\psi)} e^{j(\omega t+\phi)}, \end{aligned} \quad (3.21)$$

on  $x$  és la coordenada axial del tub cilíndric,  $k = \omega/c$  és el número d'ona, i  $\psi$  i  $\phi$  són angles de fase espacial i temporal, funció de les condicions d'extrem i de les condicions inicials respectivament. D'aquestes equacions s'obtenen les relacions entre les variables d'estat  $\hat{p}$ ,  $\hat{v}$  i  $\hat{p}_-$ ,  $\hat{p}_+$  per a un tub cilíndric, que expressades matricialment són:

$$\begin{Bmatrix} \hat{p}(x) \\ \hat{v}(x) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1/Z_0 & -1/Z_0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \hat{p}_-(x) \\ \hat{p}_+(x) \end{Bmatrix} = [A_{\text{cil}}] \begin{Bmatrix} \hat{p}_-(x) \\ \hat{p}_+(x) \end{Bmatrix}, \quad (3.22)$$

on  $Z_0 = \rho_0 c$  és la impedància característica.

Les equacions 3.20 permeten relacionar les variables d'estat  $\hat{p}_-$  i  $\hat{p}_+$  en dues seccions d'un tram de tub cilíndric separades una distància  $L = x_2 - x_1$ , tal com mostra la figura 3.5.

Aquestes relacions expressades matricialment conformen la matriu de transferència d'un tub cilíndric per a les variables d'estat  $\hat{p}_-$  i  $\hat{p}_+$ :

$$\begin{Bmatrix} \hat{p}_-(x_2) \\ \hat{p}_+(x_2) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{-jkL} & 0 \\ 0 & e^{jkL} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \hat{p}_-(x_1) \\ \hat{p}_+(x_1) \end{Bmatrix} = [T_{\text{cil}}^\pm] \begin{Bmatrix} \hat{p}_-(x_1) \\ \hat{p}_+(x_1) \end{Bmatrix}. \quad (3.23)$$

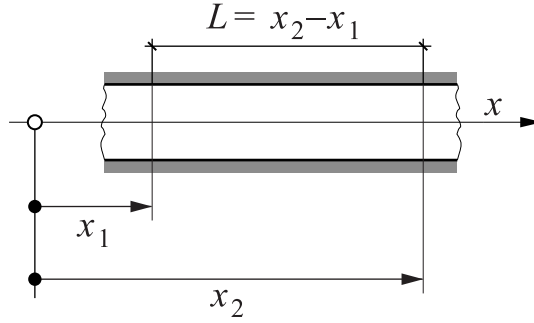


Figura 3.5: Tram cilíndric de longitud  $L$

I la matriu de transferència per a les variables d'estat  $\hat{p}$  i  $\hat{v}$  es pot obtenir a partir de les equacions 3.22 i 3.23 com:

$$[T_{\text{cil}}] = [A_{\text{cil}}] [T_{\text{cil}}^\pm] [A_{\text{cil}}]^{-1}, \quad (3.24)$$

$$\begin{Bmatrix} \hat{p}(x_2) \\ \hat{v}(x_2) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(kL) & -jZ_0 \sin(kL) \\ -\frac{j}{Z_0} \sin(kL) & \cos(kL) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \hat{p}(x_1) \\ \hat{v}(x_1) \end{Bmatrix} = [T_{\text{cil}}] \begin{Bmatrix} \hat{p}(x_1) \\ \hat{v}(x_1) \end{Bmatrix}. \quad (3.25)$$

### 3.2.3 Tram cònic

De manera anàloga al cas d'un tub cilíndric, les equacions que caracteritzen el camp de la pressió i de la velocitat en un tub cònic són, en absència de pèrdues viscotèrmiques (Munjál, 1987):

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p(r,t)}{\partial t^2} = \nabla^2 p(r,t), \quad (3.26)$$

$$\frac{\partial v(r,t)}{\partial t} = -\frac{1}{\rho_0} \nabla p(r,t). \quad (3.27)$$

Les solucions unidimensionals i harmòniques d'aquestes equacions també poden expressar-se com a suma de les ones propagatives:

$$\begin{aligned} p_- &= \frac{1}{r} A_- e^{-j(kr+\psi)} e^{j(\omega t+\phi)}, \\ p_+ &= \frac{1}{r} A_+ e^{j(kr+\psi)} e^{j(\omega t+\phi)}, \end{aligned} \quad (3.28)$$

$$\begin{aligned} v_- &= \frac{1}{r \rho_0 c} \left(1 - \frac{j}{kr}\right) A_- e^{-j(kr+\psi)} e^{j(\omega t+\phi)}, \\ v_+ &= -\frac{1}{r \rho_0 c} \left(1 + \frac{j}{kr}\right) A_+ e^{j(kr+\psi)} e^{j(\omega t+\phi)}. \end{aligned} \quad (3.29)$$

on  $r$  és la distància al vèrtex del tub cònic,  $k = \omega/c$  és el número d'ona, i  $\psi$  i  $\phi$  són angles de fase espacial i temporal, funció de les condicions d'extrem i de les condicions inicials, respectivament. Les relacions entre les variables d'estat  $\hat{p}$ ,  $\hat{v}$  i  $\hat{p}_-$ ,  $\hat{p}_+$  per a un tub cònic s'expressen com:

$$\begin{Bmatrix} \hat{p}(r) \\ \hat{v}(r) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \frac{1}{Z_0} \left(1 - \frac{j}{kr}\right) & -\frac{1}{Z_0} \left(1 + \frac{j}{kr}\right) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \hat{p}_-(r) \\ \hat{p}_+(r) \end{Bmatrix} = [A_{\text{con}}(r)] \begin{Bmatrix} \hat{p}_-(r) \\ \hat{p}_+(r) \end{Bmatrix}. \quad (3.30)$$

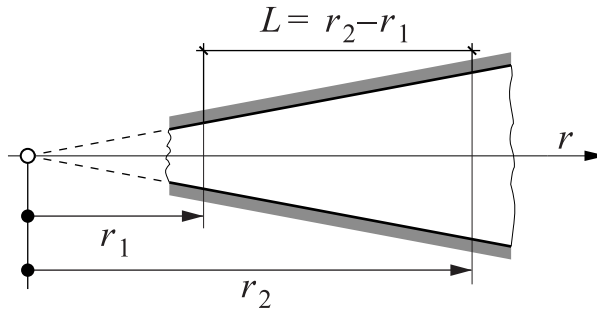


Figura 3.6: Tram cònic de longitud  $L$

En el cas d'un tram de tub cònic, com el de la figura 3.6, també resulta més senzill obtenir en primer lloc la matriu de transferència per a les variables d'estat  $\hat{p}_-$ ,  $\hat{p}_+$ :

$$\begin{Bmatrix} \hat{p}_-(r_2) \\ \hat{p}_+(r_2) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{r_1}{r_2} e^{-j k L} & 0 \\ 0 & \frac{r_1}{r_2} e^{j k L} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \hat{p}_-(r_1) \\ \hat{p}_+(r_1) \end{Bmatrix} = [\mathbf{T}_{\text{con}}^\pm] \begin{Bmatrix} \hat{p}_-(r_1) \\ \hat{p}_+(r_1) \end{Bmatrix}, \quad (3.31)$$

i després obtenir la matriu de transferència per a les variables d'estat  $\hat{p}$  i  $\hat{v}$ :

$$[\mathbf{T}_{\text{con}}] = [\mathbf{A}_{\text{con}}(r_2)] [\mathbf{T}_{\text{con}}^\pm] [\mathbf{A}_{\text{con}}(r_1)]^{-1}, \quad (3.32)$$

$$\begin{Bmatrix} \hat{p}(r_2) \\ \hat{v}(r_2) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{r_1}{r_2} \cos(k L) + \frac{1}{k r_2} \sin(k L) \\ \frac{j}{k Z_0} \frac{r_1}{r_2} \left[ \left( \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) \cos(k L) - \left( k + \frac{1}{k r_1 r_2} \right) \sin(k L) \right] \\ -j Z_0 \frac{r_1}{r_2} \sin(k L) \\ \frac{r_1}{r_2} \left( \cos(k L) - \frac{1}{k r_2} \sin(k L) \right) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \hat{p}(r_1) \\ \hat{v}(r_1) \end{Bmatrix} = [\mathbf{T}_{\text{con}}] \begin{Bmatrix} \hat{p}(r_1) \\ \hat{v}(r_1) \end{Bmatrix}. \quad (3.33)$$

### 3.2.4 Pèrdues viscotèrmiques en tubs cilíndrics

Per realitzar un estudi més realista de la propagació d'ones, cal tenir en compte la viscositat de l'aire així com fenòmens de conducció tèrmica. Kirchhoff va ser el primer a fer aquestes consideracions en la propagació d'ones en tubs. Ambdós fenòmens fan que les ones propagatives de pressió i velocitat sofreixin pèrdues a mesura que es propaguen. La viscositat del fluid fa, també, que la propagació d'ones en sentit longitudinal produeixi ones propagatives en direcció transversal, i, per tant, que l'aproximació d'ones unidimensionals sigui menys realista. Malgrat això, i per mantenir la simplicitat del model, s'utilitzaran ones unidimensionals fent un amitjanament de la velocitat longitudinal de les partícules d'una secció del tub.

Pierce (1991) obté, a partir de l'equació de Navier-Stokes per a un fluid viscos i compressible i de les equacions de l'acústica lineal, la següent equació per a l'amplitud d'ones planes estacionàries de pressió en un tub:

$$\frac{d}{dx} \left( S \frac{d\hat{p}}{dx} \right) + \left( k^2 S + 2 j k \alpha S + 2^{3/2} j k \zeta S e^{-j \frac{\pi}{4}} \right) \hat{p} = 0, \quad (3.34)$$

amb:

$$\alpha = k^2 \frac{\mu}{2 \rho_0 c} \left( \frac{4}{3} + (\gamma - 1) \left( \frac{\kappa}{\mu C_p} \right) \right), \quad (3.35)$$

$$\zeta = \frac{1}{2^{3/2}} \frac{L_p}{S} \left( \frac{\omega \mu}{\rho_0 c^2} \right)^{1/2} \left( 1 + (\gamma - 1) \left( \frac{\kappa}{\mu C_p} \right)^{1/2} \right), \quad (3.36)$$

on:

$S$  és l'àrea de la secció del tub,

$\mu$  és el coeficient de viscositat de l'aire,

$\gamma$  és la relació de calors específiques,

$\kappa$  és la conductivitat tèrmica,

$C_p$  és la calor específica a pressió constant,

$\alpha$  és el coeficient d'escorçament viscotèrmic de l'aire,

$\zeta$  és el coeficient d'escorçament viscotèrmic de les parets del tub,

$L_p$  és la longitud del perímetre de la secció.

La solució de l'equació 3.34 per a un tub cilíndric, on  $S$  i  $L_p$  són independents de  $x$  i  $S/L_p = D/4$ , condueix a l'expressió del camp de la pressió, que es pot escriure com a suma de les ones propagatives següents:

$$\begin{aligned} p_- &= A_- e^{-j(\hat{k}x + \psi)} e^{j(\omega t + \phi)}, \\ p_+ &= A_+ e^{j(\hat{k}x + \psi)} e^{j(\omega t + \phi)}, \end{aligned} \quad (3.37)$$

amb

$$\hat{k}^2 = k^2 + 2jk[\alpha + (1-j)\zeta]. \quad (3.38)$$

Si es té en compte que, per a valors típics dels instruments musicals, es compleix que  $\alpha \ll \zeta$  (Pierce, 1991) i que, segons diferents autors, el valor de  $(\zeta/k)$  és de l'ordre de 0,015 (Martínez, 1987) es pot fer l'aproximació següent:

$$\hat{k} \approx k + \zeta(1+j) = k + \hat{\zeta}, \quad (3.39)$$

on  $\hat{\zeta} = \zeta(1+j)$ .

Aquesta mateixa solució és la que proposa Martínez (1987) en la seva tesi doctoral o la que es pot obtenir de l'equació aproximada que resulta d'introduir la modificació de la velocitat de propagació de les ones, a causa de fenòmens viscotèrmics, proposada per Munjal (1987):

$$\begin{aligned}\hat{c} &= c \left( 1 - \frac{\zeta}{k} + j \frac{\zeta}{k} \right), \\ \frac{1}{\hat{c}} &\approx \frac{1}{c} \left( 1 + \frac{\zeta}{k} - j \frac{\zeta}{k} \right) = \frac{1}{c} \left( 1 + (1-j) \frac{\zeta}{k} \right),\end{aligned}\tag{3.40}$$

en l'equació d'ona de la pressió per a un tub cilíndric (3.18).

Les mesures experimentals de  $\zeta$ , realitzades per diferents autors, mostren discrepàncies d'entre el 15 i el 50 % respecte del valor teòric, però confirmen que  $\zeta$  depèn de  $\omega$  i de  $r$  en la forma que mostra l'equació 3.36 (Munjál, 1987). Aquest fet porta a utilitzar l'expressió següent per a  $\zeta$ :

$$\zeta = \zeta_0 \frac{\sqrt{k}}{D c},\tag{3.41}$$

amb  $\zeta_0$  determinat a partir de mesures experimentals.

Si s'utilitza l'aproximació expressada per l'equació 3.39 i l'equació de la quantitat de moviment 3.19 es poden escriure les ones propagatives de pressió i velocitat com:

$$\begin{aligned}p_- &= A_- e^{-\hat{\zeta} x} e^{-j(kx+\psi)} e^{j(\omega t+\phi)}, \\ p_+ &= A_+ e^{\hat{\zeta} x} e^{j(kx+\psi)} e^{j(\omega t+\phi)},\end{aligned}\tag{3.42}$$

$$\begin{aligned}v_- &= \frac{1}{\rho_0 c} \frac{(k-j\hat{\zeta})}{k} A_- e^{-\hat{\zeta} x} e^{-j(kx+\psi)} e^{j(\omega t+\phi)}, \\ v_+ &= -\frac{1}{\rho_0 c} \frac{(k-j\hat{\zeta})}{k} A_+ e^{\hat{\zeta} x} e^{j(kx+\psi)} e^{j(\omega t+\phi)}.\end{aligned}\tag{3.43}$$

Les expressions de les ones propagatives de pressió i velocitat permeten obtenir les relacions matricials entre les variables d'estat  $\hat{p}$ ,  $\hat{v}$  i  $\hat{p}_-$ ,  $\hat{p}_+$  quan es tenen en compte les pèrdues viscotèrmiques:

$$\begin{Bmatrix} \hat{p}(x) \\ \hat{v}(x) \end{Bmatrix}^{\zeta} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \frac{1}{Z_0} \frac{(k-j\hat{\zeta})}{k} & -\frac{1}{Z_0} \frac{(k-j\hat{\zeta})}{k} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \hat{p}_-(x) \\ \hat{p}_+(x) \end{Bmatrix}^{\zeta} = [A_{\text{cil}}^{\zeta}] \begin{Bmatrix} \hat{p}_-(x) \\ \hat{p}_+(x) \end{Bmatrix}^{\zeta}.\tag{3.44}$$

La comparació de les ones propagatives de pressió i velocitat obtingudes en l'apartat 3.2.2, en què no s'han tingut en compte les pèrdues viscotèrmiques, amb les obtingudes en aquest apartat permet obtenir relacions matricials de les variables d'estat en els dos casos:



$$\begin{Bmatrix} \hat{p}_-(x) \\ \hat{p}_+(x) \end{Bmatrix}^\zeta = \begin{bmatrix} e^{-\hat{\zeta} x} & 0 \\ 0 & e^{\hat{\zeta} x} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \hat{p}_-(x) \\ \hat{p}_+(x) \end{Bmatrix} = [\boldsymbol{\sigma}_{\text{cil}}^\pm(x)] \begin{Bmatrix} \hat{p}_-(x) \\ \hat{p}_+(x) \end{Bmatrix}, \quad (3.45)$$

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} \hat{p}(x) \\ \hat{v}(x) \end{Bmatrix}^\zeta &= \begin{bmatrix} \cosh(\hat{\zeta} x) & -Z_0 \sinh(\hat{\zeta} x) \\ -\frac{1}{Z_0} \frac{(k-j\hat{\zeta})}{k} \sinh(\hat{\zeta} x) & \frac{(k-j\hat{\zeta})}{k} \cosh(\hat{\zeta} x) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \hat{p}(x) \\ \hat{v}(x) \end{Bmatrix} \\ &= [\boldsymbol{\sigma}_{\text{cil}}(x)] \begin{Bmatrix} \hat{p}(x) \\ \hat{v}(x) \end{Bmatrix}, \end{aligned} \quad (3.46)$$

on es pot comprovar que:

$$[\boldsymbol{\sigma}_{\text{cil}}(x)] = [A_{\text{cil}}^\zeta] [\boldsymbol{\sigma}_{\text{cil}}^\pm(x)] [A_{\text{cil}}]^{-1}. \quad (3.47)$$

A partir d'aquestes relacions i de les matrius de transferència obtingudes en l'apartat 3.2.2 es pot obtenir la matriu de transferència d'un tub cilíndric amb esmorteïment per a les variables d'estat  $\hat{p}_-$  i  $\hat{p}_+$ :

$$[T_{\text{cil}}^{\pm\zeta}] = [\boldsymbol{\sigma}_{\text{cil}}^\pm(x_2)] [T_{\text{cil}}^\pm] [\boldsymbol{\sigma}_{\text{cil}}^\pm(x_1)]^{-1}, \quad (3.48)$$

$$\begin{Bmatrix} \hat{p}_-(x_2) \\ \hat{p}_+(x_2) \end{Bmatrix}^\zeta = \begin{bmatrix} e^{-(\hat{\zeta}+jk)L} & 0 \\ 0 & e^{(\hat{\zeta}+jk)L} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \hat{p}_-(x_1) \\ \hat{p}_+(x_1) \end{Bmatrix}^\zeta = [T_{\text{cil}}^{\pm\zeta}] \begin{Bmatrix} \hat{p}_-(x_1) \\ \hat{p}_+(x_1) \end{Bmatrix}^\zeta. \quad (3.49)$$

I la matriu de transferència d'un tub cilíndric amb esmorteïment per a les variables d'estat  $\hat{p}$  i  $\hat{v}$  es pot obtenir utilitzant una de les dues relacions següents:

$$[T_{\text{cil}}^\zeta] = [\boldsymbol{\sigma}_{\text{cil}}(x_2)] [T_{\text{cil}}] [\boldsymbol{\sigma}_{\text{cil}}(x_1)]^{-1} = [A_{\text{cil}}^\zeta] [T_{\text{cil}}^{\pm\zeta}] [A_{\text{cil}}^\zeta]^{-1}. \quad (3.50)$$

### 3.2.5 Pèrdues viscotèrmiques en tubs cònics

La incorporació de les pèrdues viscotèrmiques en tubs cònics presenta una complexitat conceptual similar al cas de tubs cilíndrics, amb la dificultat afegida d'haver de treballar en coordenades esfèriques. Aquesta dificultat addicional fa que la resolució analítica de les equacions resultants sigui inabordable, i s'hagi de recórrer a mètodes aproximats.

La conicitat que presenten els tubs dels instruments musicals és prou reduïda per suposar que l'amplitud de les ones propagatives de pressió es redueix, a causa de les pèrdues

viscotèrmiques, de manera similar a com ho fa en el cas dels tubs cilíndrics. Ara, però, el coeficient d'esmoreïment  $\zeta$  es defineix com en l'equació 3.41 però utilitzant el diàmetre mitjà del tram cònic:

$$\zeta = \zeta_0 \frac{2 \sqrt{k}}{(D_1 + D_2) c}. \quad (3.51)$$

Les ones propagatives de pressió que resulten d'aquesta aproximació i les ones propagatives de velocitat que s'obtenen en utilitzar l'equació de la quantitat de moviment 3.27 són:

$$\begin{aligned} p_- &= \frac{1}{r} A_- e^{-\hat{\zeta} r} e^{-j(kr + \psi)} e^{j(\omega t + \phi)}, \\ p_+ &= \frac{1}{r} A_+ e^{\hat{\zeta} r} e^{j(kr + \psi)} e^{j(\omega t + \phi)}, \end{aligned} \quad (3.52)$$

$$\begin{aligned} v_- &= \frac{1}{r \rho_0 c} \left( \frac{(k - j \hat{\zeta})}{k} - \frac{j}{kr} \right) A_- e^{-\hat{\zeta} r} e^{-j(kr + \psi)} e^{j(\omega t + \phi)}, \\ v_+ &= -\frac{1}{r \rho_0 c} \left( \frac{(k - j \hat{\zeta})}{k} + \frac{j}{kr} \right) A_+ e^{\hat{\zeta} r} e^{j(kr + \psi)} e^{j(\omega t + \phi)}. \end{aligned} \quad (3.53)$$

Aquestes expressions de les ones propagatives de pressió i velocitat permeten obtenir les relacions matricials entre les variables d'estat  $\hat{p}$ ,  $\hat{v}$  i  $\hat{p}_-$ ,  $\hat{p}_+$ :

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} \hat{p}(r) \\ \hat{v}(r) \end{Bmatrix}^\zeta &= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \frac{1}{Z_0} \left( \frac{(k - j \hat{\zeta})}{k} - \frac{j}{kr} \right) & -\frac{1}{Z_0} \left( \frac{(k - j \hat{\zeta})}{k} + \frac{j}{kr} \right) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \hat{p}_-(r) \\ \hat{p}_+(r) \end{Bmatrix}^\zeta \\ &= \left[ A_{\text{con}}^\zeta(r) \right] \begin{Bmatrix} \hat{p}_-(r) \\ \hat{p}_+(r) \end{Bmatrix}^\zeta. \end{aligned} \quad (3.54)$$

També en aquest cas, comparant ara amb les ones propagatives de pressió i velocitat obtingudes en l'apartat 3.2.3, es poden obtenir les relacions matricials següents entre les variables d'estat:

$$\begin{Bmatrix} \hat{p}_-(r) \\ \hat{p}_+(r) \end{Bmatrix}^\zeta = \begin{bmatrix} e^{-\hat{\zeta} r} & 0 \\ 0 & e^{\hat{\zeta} r} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \hat{p}_-(r) \\ \hat{p}_+(r) \end{Bmatrix} = \left[ \sigma_{\text{con}}^\pm(r) \right] \begin{Bmatrix} \hat{p}_-(r) \\ \hat{p}_+(r) \end{Bmatrix}, \quad (3.55)$$

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} \hat{p}(r) \\ \hat{v}(r) \end{Bmatrix}^{\zeta} &= \begin{bmatrix} \cosh(\hat{\zeta} r) - \frac{j}{k r} \sinh(\hat{\zeta} r) \\ \frac{1}{Z_0} \left[ - \left( \frac{(k-j\hat{\zeta})}{k} + \frac{1}{k^2 r^2} \right) \sinh(\hat{\zeta} r) + \frac{\hat{\zeta}}{k^2 r} \cosh(\hat{\zeta} r) \right] \end{bmatrix} \\ &\quad \begin{bmatrix} -Z_0 \sinh(\hat{\zeta} r) \\ \frac{(k-j\hat{\zeta})}{k} \cosh(\hat{\zeta} r) + \frac{j}{k r} \sinh(\hat{\zeta} r) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \hat{p}(r) \\ \hat{v}(r) \end{Bmatrix} = [\boldsymbol{\sigma}_{\text{con}}(r)] \begin{Bmatrix} \hat{p}(r) \\ \hat{v}(r) \end{Bmatrix}. \end{aligned} \quad (3.56)$$

Aquí la relació que es compleix és:

$$[\boldsymbol{\sigma}_{\text{con}}(r)] = [A_{\text{con}}^{\zeta}(r)] [\boldsymbol{\sigma}_{\text{con}}^{\pm}(r)] [A_{\text{con}}(r)]^{-1}. \quad (3.57)$$

A partir d'aquestes relacions i de les matrius de transferència obtingudes en l'apartat 3.2.3 es pot obtenir la matriu de transferència d'un tub cònic amb esmorteïment per a les variables d'estat  $\hat{p}_-$  i  $\hat{p}_+$ :

$$[T_{\text{con}}^{\pm\zeta}] = [\boldsymbol{\sigma}_{\text{con}}^{\pm}(r_2)] [T_{\text{con}}^{\pm}] [\boldsymbol{\sigma}_{\text{con}}^{\pm}(r_1)]^{-1}, \quad (3.58)$$

$$\begin{Bmatrix} \hat{p}_-(r_2) \\ \hat{p}_+(r_2) \end{Bmatrix}^{\zeta} = \begin{bmatrix} \frac{r_1}{r_2} e^{-(\hat{\zeta}+jk)L} & 0 \\ 0 & \frac{r_1}{r_2} e^{(\hat{\zeta}+jk)L} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \hat{p}_-(r_1) \\ \hat{p}_+(r_1) \end{Bmatrix}^{\zeta} = [T_{\text{con}}^{\pm\zeta}] \begin{Bmatrix} \hat{p}_-(r_1) \\ \hat{p}_+(r_1) \end{Bmatrix}^{\zeta}. \quad (3.59)$$

La matriu de transferència d'un tub cònic amb esmorteïment per a les variables d'estat  $\hat{p}$  i  $\hat{v}$  es pot obtenir, en aquest cas, utilitzant una de les dues relacions següents:

$$[T_{\text{con}}^{\zeta}] = [\boldsymbol{\sigma}_{\text{con}}(r_2)] [T_{\text{con}}] [\boldsymbol{\sigma}_{\text{con}}(r_1)]^{-1} = [A_{\text{con}}^{\zeta}(r_2)] [T_{\text{con}}^{\pm\zeta}] [A_{\text{con}}^{\zeta}(r_1)]^{-1}. \quad (3.60)$$

### 3.2.6 Extrems

Els extrems dels tubs són un tipus de discontinuïtats singulars que queden modelitzades per la relació existent entre les dues variables d'estat escollides i no per matrius de transferència. Això és així ja que només són d'interès, en l'estudi de l'establiment d'ones dins els tubs, les variables d'estat del costat de la discontinuïtat que queda dins del tub. En alguns casos la relació entre variables d'estat es farà més evident si s'utilitza  $\hat{p}$  i  $\hat{v}$  per obtenir la impedància d'extrem, i en d'altres serà més senzill utilitzar  $\hat{p}_-$  i  $\hat{p}_+$  i obtenir així la funció de reflexió

d'extrem. En qualsevol cas, sempre es disposa de les matrius definides a 3.22 i 3.30 per passar d'unes variables d'estat a les altres.

En un extrem tancat la paret rígida que produeix el tancament fa que les partícules d'aire que hi estan en contacte tinguin velocitat nul·la i, per tant, que la impedància d'extrem sigui infinita:

$$\begin{Bmatrix} \hat{p} \\ \hat{v} \end{Bmatrix}_{\text{et}} = \begin{Bmatrix} \hat{p} \\ 0 \end{Bmatrix} \Rightarrow \hat{Z}_{\text{et}}(\omega) = \infty. \quad (3.61)$$

Un extrem anecoic es defineix com aquell que absorbeix totes les ones incidents. Això fa que en aquest cas l'ona reflectida  $\hat{p}_+$  sigui nul·la i, per tant, també ho sigui la funció de reflexió d'extrem:

$$\begin{Bmatrix} \hat{p}_- \\ \hat{p}_+ \end{Bmatrix}_{\text{ea}} = \begin{Bmatrix} \hat{p}_- \\ 0 \end{Bmatrix} \Rightarrow \hat{R}_{\text{ea}}(\omega) = 0. \quad (3.62)$$

I finalment l'extrem obert, que és el que presenta majors dificultats. Diversos autors han establert formulacions per descriure l'extrem obert en forma d'impedància o de funció de reflexió:

$$\begin{Bmatrix} \hat{p} \\ \hat{v} \end{Bmatrix}_{\text{eo}} = \begin{Bmatrix} \hat{Z}_{\text{eo}} \hat{v} \\ \hat{v} \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} \hat{p}_- \\ \hat{p}_+ \end{Bmatrix}_{\text{eo}} = \begin{Bmatrix} \hat{p}_- \\ \hat{R}_{\text{eo}} \hat{p}_- \end{Bmatrix}. \quad (3.63)$$

Rayleigh (1896) estudia el cas d'un extrem obert en un tub cilíndric que desemboca en un pla infinit. La impedància d'extrem és, en aquest cas:

$$\hat{Z}_{\text{eo}}(\omega) = Z_0(\theta_0 + j\chi_0), \quad (3.64)$$

amb:

$$\theta_0 = 1 - \frac{2}{kD} J_1(kD) = 1 - \frac{2}{\pi k D} \int_0^{\pi} \sin(kD \sin \alpha) \sin \alpha \, d\alpha, \quad (3.65)$$

$$\chi_0 = \frac{4}{\pi} \int_0^{\pi/2} \sin(kD \cos \alpha) \sin^2 \alpha \, d\alpha, \quad (3.66)$$

on  $J_1$  és la funció de Bessel d'ordre 1. Aquesta expressió pressuposa que el sentit positiu de la velocitat és vers l'exterior del tub.

Levine i Schwinger (1948) estudien el cas d'un extrem obert en un tub cilíndric que desemboca en camp lliure. En aquest cas, el resultat l'expressen com a funció de reflexió de la manera següent:

$$\hat{R}_{eo}(\omega) = -|R| e^{j k 2l}, \quad (3.67)$$

amb:

$$|R| = \exp \left( -\frac{kD}{\pi} \int_0^{kD/2} \frac{\tan^{-1}(-J_1(x)/N_1(x))}{x[(kD/2)^2 - x^2]^{1/2}} dx \right), \quad (3.68)$$

$$\begin{aligned} \frac{2l}{D} = & \frac{1}{\pi} \int_0^{kD/2} \frac{\log \left( \pi J_1(x) [J_1^2(x) + N_1^2(x)]^{1/2} \right)}{x[(kD/2)^2 - x^2]^{1/2}} dx + \\ & + \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\log(1/(2I_1(x)K_1(x)))}{x[(kD/2)^2 - x^2]^{1/2}} dx \end{aligned}, \quad (3.69)$$

on  $J_1$ ,  $N_1$ ,  $I_1$  i  $K_1$  són les funcions de Bessel d'ordre 1.

I finalment Martínez (1987) proposa una solució aproximada, apta per a la convolució recurrent, a partir dels resultats de Rayleigh i de Levine i Schwinger. Aquesta solució expressada en forma de funció de reflexió temporal és la que ha estat presentada en la taula 3.1. La seva versió freqüencial per a un tub cilíndric és:

$$\hat{R}_{eo}(\omega) = -\left( \frac{j kD}{0,787 e} + 1 \right)^{-2}. \quad (3.70)$$

Les gràfiques de la figura 3.7 mostren el mòdul i la fase de les funcions de reflexió obtingudes a partir dels models de Rayleigh, Levine i Schwinger, i Martínez per al rang de valors del paràmetre adimensional  $kD$  que es dona en els instruments musicals. Per al model de Rayleigh s'ha hagut de transformar la impedància en l'expressió equivalent en forma de funció de reflexió. La complexitat dels models de Rayleigh, i Levine i Schwinger, junt amb l'acceptable precisió del model de Martínez, fan que aquest darrer sigui el més adequat per mantenir un model d'instrument amb una càrrega de computació raonable.

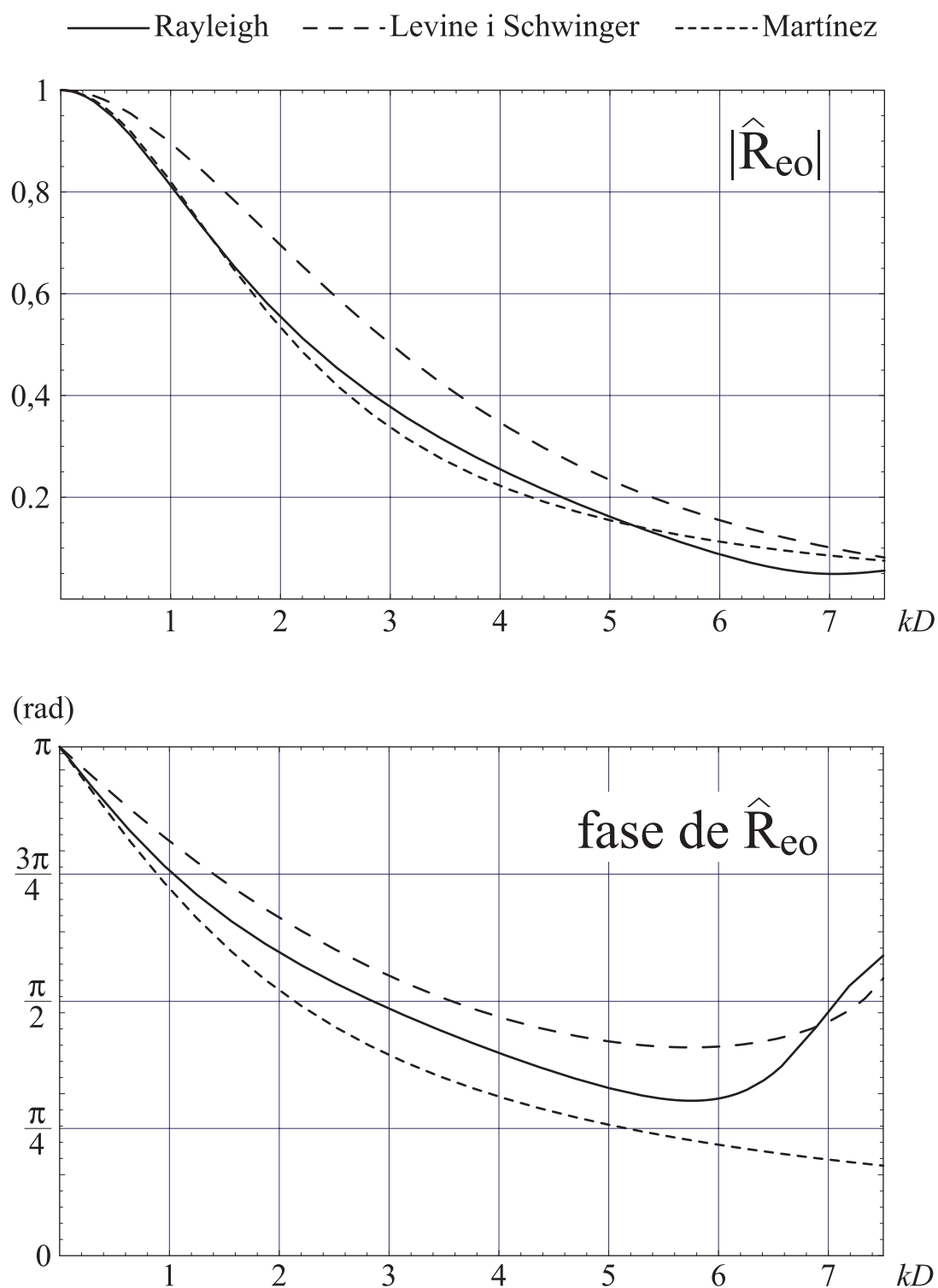


Figura 3.7: Mòdul i fase de les funcions de reflexió d'extrem obert segons els models de Rayleigh, Levine i Schwinger, i Martínez

### 3.2.7 Discontinuitats

Les discontinuitats són variacions brusques de la continuïtat del perfil del tub. Algunes, com les discontinuitats de secció, estan localitzades estrictament en una única secció, mentre que d'altres, com les discontinuitats de forat, tot i no estar localitzades en una única secció, es modelitzen situades en una única secció per mantenir la simplicitat del model.

Les matrius de transferència obtingudes en aquest cas relacionen les variables d'estat escollides en els dos extrems de la secció on es situa la discontinuitat. Un cop trobada la matriu de transferència per a les variables d'estat  $\hat{p}$  i  $\hat{v}$ , només cal utilitzar les matrius  $[A_{cil}]$  o  $[A_{con}(r)]$  (equacions 3.22 i 3.30) dels dos trams anterior i posterior a la discontinuitat per obtenir la matriu de transferència per a les variables d'estat  $\hat{p}_-$  i  $\hat{p}_+$ :

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} \hat{p} \\ \hat{v} \end{Bmatrix}_b &= [D] \begin{Bmatrix} \hat{p} \\ \hat{v} \end{Bmatrix}_a \quad \text{i} \quad \begin{Bmatrix} \hat{p}_- \\ \hat{p}_+ \end{Bmatrix}_b = [D^\pm] \begin{Bmatrix} \hat{p}_- \\ \hat{p}_+ \end{Bmatrix}_a \quad \Rightarrow \\ [D] &= [A_b] [D^\pm] [A_a]^{-1}, \\ [D^\pm] &= [A_b]^{-1} [D] [A_a]. \end{aligned} \quad (3.71)$$

També resulta senzill, a partir dels elements de les matrius de transferència, obtenir les funcions de reflexió i de transmissió, així com la impedància de la discontinuitat:

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} \hat{p}_- \\ \hat{p}_+ \end{Bmatrix}_b &= [D^\pm] \begin{Bmatrix} \hat{p}_- \\ \hat{p}_+ \end{Bmatrix}_a = \begin{bmatrix} d_{11}^\pm & d_{12}^\pm \\ d_{21}^\pm & d_{22}^\pm \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \hat{p}_- \\ \hat{p}_+ \end{Bmatrix}_a \quad \Rightarrow \\ \text{funció de reflexió} \quad \hat{R}_p(\omega) &= \left. \frac{\hat{p}_{+a}}{\hat{p}_{-a}} \right|_{\hat{p}_{+b}=0} = -\frac{d_{21}^\pm}{d_{22}^\pm}, \end{aligned} \quad (3.72)$$

$$\text{funció de transmissió} \quad \hat{T}_p(\omega) = \left. \frac{\hat{p}_{-b}}{\hat{p}_{-a}} \right|_{\hat{p}_{+b}=0} = \frac{\text{Det}[D^\pm]}{d_{22}^\pm}, \quad (3.73)$$

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} \hat{p}_- \\ \hat{p}_+ \end{Bmatrix}_b &= [A_b]^{-1} [D] \begin{Bmatrix} \hat{p} \\ \hat{v} \end{Bmatrix}_a = \begin{bmatrix} ad_{11} & ad_{12} \\ ad_{21} & ad_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \hat{p} \\ \hat{v} \end{Bmatrix}_a \quad \Rightarrow \\ \text{impedància} \quad \hat{Z}(\omega) &= \left. \frac{\hat{p}_a}{\hat{v}_a} \right|_{\hat{p}_{+b}=0} = -\frac{ad_{22}}{ad_{21}}. \end{aligned} \quad (3.74)$$

Aquestes funcions de reflexió es relacionen amb les funcions de reflexió temporals presentades a la taula 3.1 mitjançant la transformada de Fourier.

### Discontinuitats de secció

En aquest cas, la matriu de transferència resulta més senzilla de calcular si s'utilitzen les variables d'estat  $\hat{p}$  i  $\hat{v}$ , ja que la pressió i el cabal són iguals als dos costats de la discontinuïtat. Així, la velocitat compleix la relació  $S_a \hat{v}_a = S_b \hat{v}_b$ , on  $S$  és l'àrea de la secció del tub. La matriu de transferència és doncs:

$$\begin{Bmatrix} \hat{p} \\ \hat{v} \end{Bmatrix}_b = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \left(\frac{D_a}{D_b}\right)^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \hat{p} \\ \hat{v} \end{Bmatrix}_a = [D_s] \begin{Bmatrix} \hat{p} \\ \hat{v} \end{Bmatrix}_a. \quad (3.75)$$

La matriu de transferència  $[D_s^\pm]$  per a les variables d'estat  $\hat{p}_-$  i  $\hat{p}_+$  s'obté a partir de la relació 3.71. Cal fer notar que mentre la matriu de transferència  $[D_s]$  no depèn de quin sigui el tipus de tram anterior i posterior a la discontinuïtat, la matriu  $[D_s^\pm]$  sí que en depèn. Les diferents combinacions donen lloc a les tres situacions presentades en la taula 3.1.

### Discontinuitats de forat

Un model senzill i unidimensional d'un forat en un tub d'instrument pot obtenir-se modelitzant-lo com un tub de longitud  $h$ , igual a l'alçada del forat, i diàmetre  $D_f$ , igual al diàmetre del forat, enllaçat amb el tub principal de l'instrument en forma de T. Si es tracta d'un forat obert només cal afegir, a l'extrem del tub que modelitza el forat, la impedància d'extrem obert, i si es tracta d'un forat tancat cal afegir la impedància d'extrem tancat. La figura 3.8 mostra un esquema de la modelització d'un forat com a associació de tubs en forma de T.

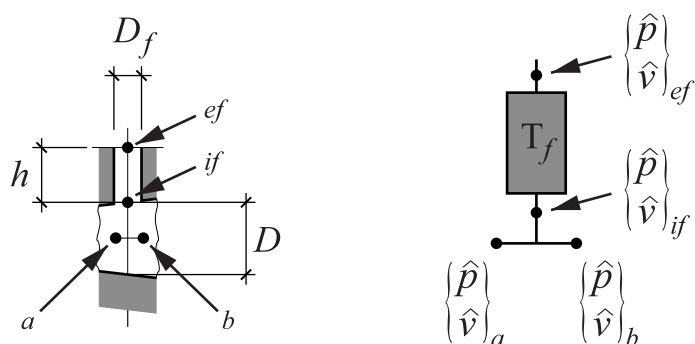


Figura 3.8: Esquema d'un model de forat

La matriu  $[T_f]$ , que modelitza el tram de tub del forat, dona la relació entre les variables d'estat a l'inici i a l'extrem del forat:



$$\begin{Bmatrix} \hat{p} \\ \hat{v} \end{Bmatrix}_{ef} = [T_f] \begin{Bmatrix} \hat{p} \\ \hat{v} \end{Bmatrix}_{if} = \begin{bmatrix} t_{f11} & t_{f12} \\ t_{f21} & t_{f22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \hat{p} \\ \hat{v} \end{Bmatrix}_{if}. \quad (3.76)$$

En funció de les característiques del forat i de la complexitat amb què es vulgui simular, es pot utilitzar la matriu de transferència per a un tub cilíndric sense esmorteïment (3.25), la matriu de transferència per a un tub cilíndric amb esmorteïment (3.50), la matriu de transferència per a un tub cònic sense esmorteïment (3.33) o la matriu de transferència per a un tub cònic amb esmorteïment (3.60).

La continuïtat de la pressió, la relació entre els cabals i la impedància d'extrem del forat:

$$\begin{aligned} \hat{p}_a &= \hat{p}_b = \hat{p}_{if}, \\ S \hat{v}_a &= S \hat{v}_b + S_f \hat{v}_{if}, \\ \hat{p}_{ef} &= \hat{Z}_{ef}(\omega) \hat{v}_{ef}, \end{aligned} \quad (3.77)$$

on  $S$  és la secció del tub principal i  $S_f$  la secció del tub del forat, juntament amb la matriu  $[T_f]$ , permeten obtenir la matriu de transferència per a la discontinuïtat de forat:

$$\begin{Bmatrix} \hat{p} \\ \hat{v} \end{Bmatrix}_b = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \left(\frac{D_f}{D}\right)^2 \frac{t_{f21} \hat{Z}_{ef}(\omega) - t_{f11}}{t_{f22} \hat{Z}_{ef}(\omega) - t_{f12}} & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \hat{p} \\ \hat{v} \end{Bmatrix}_a = [D_f] \begin{Bmatrix} \hat{p} \\ \hat{v} \end{Bmatrix}_a. \quad (3.78)$$

En el cas d'un forat tancat, on  $\hat{Z}_{et}(\omega) = \infty$ , cilíndric i sense esmorteïment, la matriu de transferència resulta:

$$\begin{Bmatrix} \hat{p} \\ \hat{v} \end{Bmatrix}_b = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\left(\frac{D_f}{D}\right)^2 \frac{j \sin(k h)}{Z_0 \cos(k h)} & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \hat{p} \\ \hat{v} \end{Bmatrix}_a. \quad (3.79)$$

I en el cas d'un forat obert, cilíndric i sense esmorteïment, la matriu de transferència resulta:

$$\begin{Bmatrix} \hat{p} \\ \hat{v} \end{Bmatrix}_b = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\left(\frac{D_f}{D}\right)^2 \frac{j \left(\frac{\hat{Z}_{eo}(\omega)}{Z_0}\right) \sin(k h) + \cos(k h)}{\hat{Z}_{eo}(\omega) \cos(k h) + j Z_0 \sin(k h)} & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \hat{p} \\ \hat{v} \end{Bmatrix}_a. \quad (3.80)$$

El model de forat com a associació de tubs en forma de T permet també modelitzar un forat mig obert. Aquest es pot modelitzar prenent la matriu  $[T_f]$  com el producte de dues

matrius, una corresponent al tub del forat i l'altra a una discontinuïtat de secció, tal com mostra la figura 3.9.

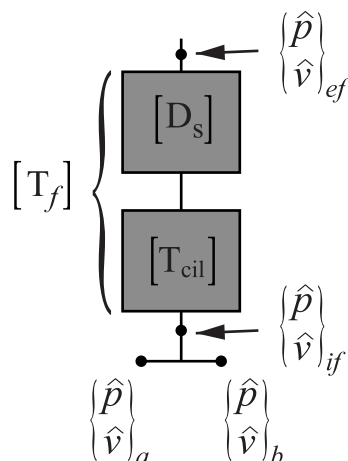


Figura 3.9: Esquema d'un model de forat mig obert

Si el forat té exactament la meitat de la seva secció oberta, la relació de seccions definida en la discontinuïtat de secció és igual a 2. La matriu  $[T_f]$  s'escriu com:

$$\begin{Bmatrix} \hat{p} \\ \hat{v} \end{Bmatrix}_{ef} = [T_f] \begin{Bmatrix} \hat{p} \\ \hat{v} \end{Bmatrix}_{if} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t_{f11} & t_{f12} \\ t_{f21} & t_{f22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \hat{p} \\ \hat{v} \end{Bmatrix}_{if}. \quad (3.81)$$

Quan el tub del forat es modelitza com un tub cilíndric sense esmorteïment, la matriu de transferència d'un forat mig obert resulta:

$$\begin{Bmatrix} \hat{p} \\ \hat{v} \end{Bmatrix}_b = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\left(\frac{D_f}{D}\right)^2 j \frac{2 \hat{Z}_{eo}(\omega)/Z_0 \sin(kh) + \cos(kh)}{2 \hat{Z}_{eo}(\omega) \cos(kh) + j Z_0 \sin(kh)} & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \hat{p} \\ \hat{v} \end{Bmatrix}_a. \quad (3.82)$$

El model de forat com a associació de tubs en forma de T, proposat anteriorment, és equivalent a modelitzar el forat com una impedància en sèrie. Keefe (1982a, 1990) proposa un model de forat com una impedància en sèrie  $Z_s$  i una impedància en paral·lel  $Z_a$ . La matriu de transferència que resulta d'aquest model és:

$$\begin{Bmatrix} \hat{p} \\ \hat{v} \end{Bmatrix}_b = \begin{bmatrix} 1 & Z_a \\ 1/Z_s & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \hat{p} \\ \hat{v} \end{Bmatrix}_a. \quad (3.83)$$

Per a un forat tancat les impedàncies en sèrie i en paral·lel són:

$$\begin{aligned} Z_s^t &= j Z_0 \left( D/D_f \right)^2 \cot(k h) , \\ Z_a^t &= j Z_0 \left( D/D_f \right)^2 k h_a^t , \end{aligned} \quad (3.84)$$

on:

$$h_a^t = \frac{0,47 \frac{D_f}{2} (D_f/D)^4}{\coth\left(1,84\left(2 h/D_f\right)\right) + 0,62(D_f/D)^2 + 0,64(D_f/D)} . \quad (3.85)$$

I per a un forat obert les impedàncies en sèrie i en paral·lel són:

$$\begin{aligned} Z_s^o &= -Z_0 \left( D/D_f \right)^2 (jk h_e + \xi_e) , \\ Z_a^o &= j Z_0 \left( D/D_f \right)^2 k h_a^o , \end{aligned} \quad (3.86)$$

on:

$$\begin{aligned} h_a^o &= \frac{0,47 \frac{D_f}{2} (D_f/D)^4}{\tanh\left(1,84\left(2 h/D_f\right)\right) + 0,62(D_f/D)^2 + 0,64(D_f/D)} , \\ h_e &\approx \frac{\frac{1}{k} \tan(k h) + \frac{D_f}{2} \left(1,40 - 0,58 (D_f/D)^2\right)}{1 - 0,61 k \frac{D_f}{2} \tan(k h)} , \end{aligned} \quad (3.87)$$

$$\xi_e = 0,25 \left( k D_f/2 \right)^2 + \alpha_e \frac{h}{D_f} + \frac{1}{4} \left( \frac{2 k \eta}{\rho_0 c} \right)^{1/2} \ln(D_f/r_c) ,$$

$$\alpha_e = \left( \frac{2 k \eta}{\rho_0 c} \right)^{1/2} \left( 1 + (\gamma - 1) \left( \frac{\kappa}{\eta C_p} \right)^{1/2} \right) ,$$

$\eta$  és el coeficient de viscositat de cisallament i  $r_c$  és el radi de curvatura dels cantells del forat.

Per poder comparar els diferents models disponibles de forat es calculen, a partir de les matrius de transferència, les funcions de reflexió corresponents. Les gràfiques de la figura 3.10 mostren, per a un forat tancat amb  $h = 4$  mm,  $D = 20$  mm i  $D_f = 10$  mm, la part real i la part imaginària de les funcions de reflexió calculades pel model d'associació en T sense esmorteïment i pel model proposat per Keefe.

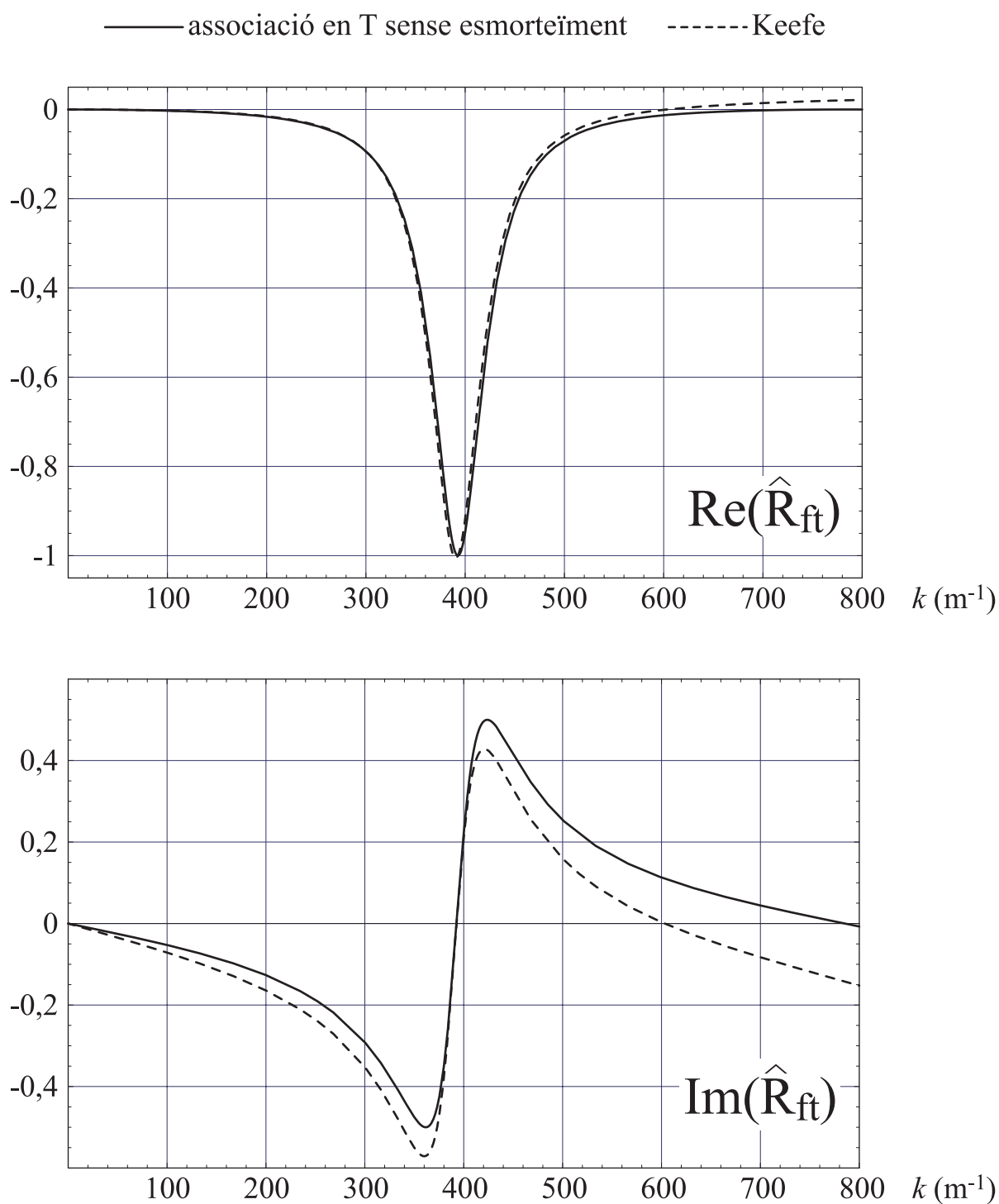


Figura 3.10: Part real i part imaginària de les funcions de reflexió de forat tancat segons el model d'associació en T sense esmorteïment i el model de Keefe

Les gràfiques de la figura 3.11 mostren, ara per a un forat obert amb  $h = 4$  mm,  $D = 20$  mm,  $D_f = 10$  mm i  $r_c = 0,5$  mm, la part real i la part imaginària de les funcions de reflexió calculades pel model d'associació en T sense esmorteïment i pel model proposat per Keefe.

Pel model d'associació en T sense esmorteïment s'ha utilitzat la impedància d'extrem obert obtinguda a partir del model d'extrem obert de Martínez.

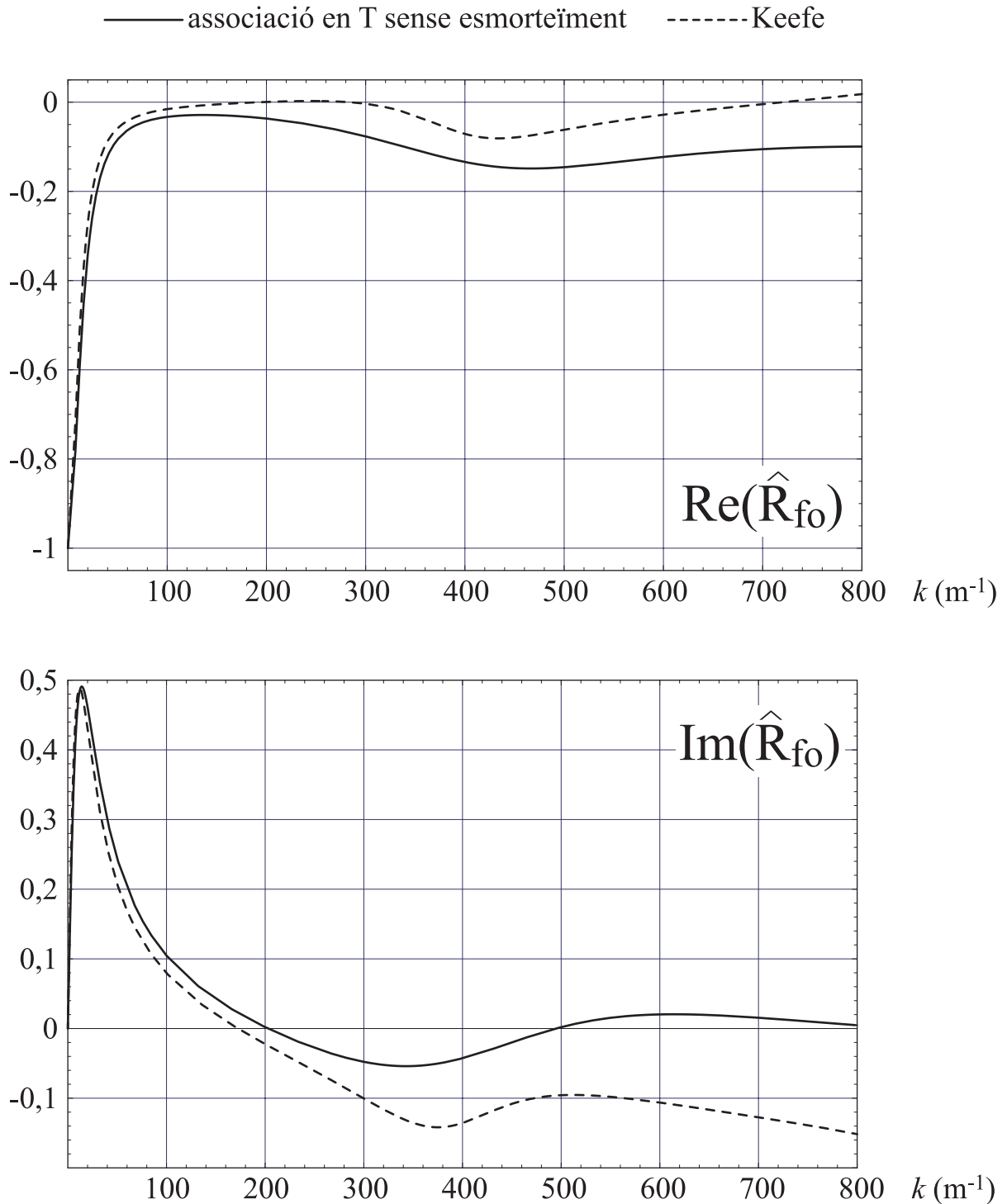


Figura 3.11: Part real i part imaginària de les funcions de reflexió de forat obert segons el model d'associació en T sense esmorteïment i el model de Keefe

També en la modelització dels forats es disposa de dos models. Caldrà optar o bé per un model de major complexitat com el de Keefe, o bé per un de simplificat com el d'associació en T.

### 3.2.8 Procediment de càlcul

A partir de les matrius de transferència de cadascun dels trams i cadascuna de les discontinuïtats que constitueixen el tub de l'instrument musical, es poden calcular les matrius de transferència globals de tot el tub:

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} \hat{p} \\ \hat{v} \end{Bmatrix}_n &= [T_{\text{global}}] \begin{Bmatrix} \hat{p} \\ \hat{v} \end{Bmatrix}_1 = \begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} \\ t_{21} & t_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \hat{p} \\ \hat{v} \end{Bmatrix}_1, \\ \begin{Bmatrix} \hat{p}_- \\ \hat{p}_+ \end{Bmatrix}_n &= [T_{\text{global}}^\pm] \begin{Bmatrix} \hat{p}_- \\ \hat{p}_+ \end{Bmatrix}_1 = \begin{bmatrix} t_{11}^\pm & t_{12}^\pm \\ t_{21}^\pm & t_{22}^\pm \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \hat{p}_- \\ \hat{p}_+ \end{Bmatrix}_1, \end{aligned} \quad (3.88)$$

que relacionen les variables d'estat als dos extrems del tub. Si l'extrem amb subíndex 1 és on es situa el bisell i l'extrem amb subíndex n és l'extrem obert del tub, només cal utilitzar la funció de reflexió d'extrem obert ( $\hat{p}_{+n} = \hat{R}_{\text{eo}} \hat{p}_{-n}$ ) i la impedància d'extrem obert ( $\hat{p}_n = \hat{Z}_{\text{eo}} \hat{v}_n$ ) per obtenir la funció de reflexió i la impedància globals del tub:

$$\hat{R}_{p \text{ global}}(\omega) = \frac{\hat{p}_{+1}}{\hat{p}_{-1}} = \frac{-\hat{R}_{\text{eo}}(\omega) t_{11}^\pm + t_{21}^\pm}{\hat{R}_{\text{eo}}(\omega) t_{12}^\pm - t_{22}^\pm}, \quad (3.89)$$

$$\hat{Z}_{\text{global}}(\omega) = \frac{\hat{p}_1}{\hat{v}_1} = \frac{-\hat{Z}_{\text{eo}}(\omega) t_{22} + t_{12}}{\hat{Z}_{\text{eo}}(\omega) t_{21} - t_{11}}. \quad (3.90)$$

La transformada inversa de Fourier permet passar la funció de reflexió freqüencial de pressió a la seva versió temporal, i la impedància a la funció de resposta impulsional:

$$\begin{aligned} \hat{R}_{p \text{ global}}(\omega) &\Rightarrow \text{TF}^{-1} \Rightarrow p_+(t) = R_p(t) * p_-(t), \\ \hat{Z}_{\text{global}}(\omega) &\Rightarrow \text{TF}^{-1} \Rightarrow p(t) = h(t) * v(t). \end{aligned} \quad (3.91)$$

## 3.3 Càlcul de la funció de reflexió de velocitat

Els mètodes de la multiconvolució i de les matrius de transferència, presentats en els apartats anteriors, permeten calcular la resposta impulsional i la funció de reflexió de pressió temporal. Aquestes dues funcions, tradicionalment utilitzades, són les més adequades per descriure la

columna d'aire en els instruments de canya, i poder acoblar aquesta descripció amb el model matemàtic establert per a la canya. En els instruments de bisell, i per la descripció feta en el capítol 2, serà adequat disposar d'una funció temporal que relacioni les dues ones de velocitat que viatgen en els dos sentits:

$$v_+(t) = R_v(t) * v_-(t). \quad (3.92)$$

Per poder establir, en una secció del tub, la relació entre la funció de reflexió de velocitat, necessària pel model de bisell implementat, i la funció de reflexió de pressió, d'ús més generalitzat, cal plantejar l'equació d'ona, que caracteritza el camp de la pressió, i l'equació de la quantitat de moviment.

Per a una secció d'un tub cilíndric, les solucions d'aquestes equacions en el domini freqüencial (3.20 i 3.21) permeten obtenir fàcilment la relació entre els coeficients de reflexió freqüencials de la pressió i la velocitat:

$$R_v(\omega) = -R_p(\omega). \quad (3.93)$$

La transformada inversa de Fourier condueix a la relació entre funcions de reflexió:

$$R_v(t) = -R_p(t). \quad (3.94)$$

Per a una secció d'un tub cònic, les solucions de l'equació d'ona i de l'equació de la quantitat de moviment en el domini freqüencial (3.28 i 3.29) també permeten obtenir la relació entre els coeficients de reflexió freqüencials de la pressió i la velocitat:

$$R_v(\omega) = -\frac{(kr + j)}{(kr - j)} R_p(\omega). \quad (3.95)$$

La transformada inversa de Fourier condueix a la relació entre funcions de reflexió:

$$R_v(t) = -\left( \delta(t) - 2\frac{c}{r} e^{-\frac{c}{r}t} \right) * R_p(t). \quad (3.96)$$

Les equacions 3.94 i 3.96 permeten utilitzar les funcions de reflexió temporals de pressió, calculades amb els mètodes de la multiconvolució i de les matrius de transferència, per obtenir les funcions de reflexió de velocitat.