APÈNDIX 4.I INTEGRAL DE HELMHOTZ-KIRCHHOFF

4.I.1 Introducció

La integral de Helmholtz-Kirchhoff permet obtenir el camp acústic en un volum qualsevol a partir de la consideració exclusiva del valor que prenen algunes variables acústiques en la superfície que l'envolta [Pierce, 1991].

La magnitud acústica emprada és el potencial de velocitat $\Phi(\bar{r},t)$, que tot i no ser una magnitud directament mesurable, és convenient perquè a partir d'ell i per derivació es poden obtenir les altres magnituds acústiques com són la pressió i la velocitat. Així:

$$\bar{v}(\bar{r},t) = \bar{\nabla}\Phi(\bar{r},t) \quad \text{i} \quad p(\bar{r},t) = -\rho\frac{\partial\Phi(\bar{r},t)}{\partial t}.$$

Un cop conegudes la pressió i la velocitat acústiques es poden obtenir fàcilment les altres magnituds com la resposta impulsional o la impedància acústica.

4.I.2 Obtenció de la integral de Helmholtz-Kirchhoff

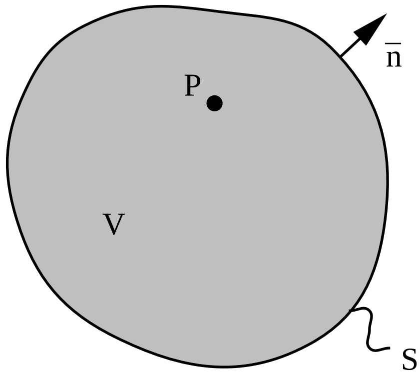

Fig. 4.I.2.1 Volum *V* on es calcula $\Phi(\bar{r},t)$.

El problema a resoldre és conèixer el potencial de velocitat en un punt qualsevol *P* del volum *V* limitat per una superfície *S* (Fig. 4.I.2.1).

El potencial de velocitat compleix l'equació d'ona:

$$\Delta\Phi(\bar{r},t) - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\Phi(\bar{r},t)}{\partial t^2} = 0.$$

A partir de la integració d'aquesta equació dins del volum *V* s'obtindrà l'equació de Helmholtz-Kirchhoff.

Sigui $g(\bar{r},t)$ una funció arbitrària que compleix l'equació d'ona, és a dir que n'és solució:

$$\Delta g(\bar{r},t)-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 g(\bar{r},t)}{\partial t^2}=0.$$

A partir d'aquesta consideració es pot escriure l'expressió:

$$g(\bar{r},t)*\left[\Delta\Phi(\bar{r},t)-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\Phi(\bar{r},t)}{\partial t^2}\right]-\Phi(\bar{r},t)*\left[\Delta g(\bar{r},t)-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 g(\bar{r},t)}{\partial t^2}\right], \qquad (\ 4.\mathrm{I}.2.1\ )$$

que valdrà zero en qualsevol punt P del volum V sempre i quan $g(\bar{r},t)$ o $\Phi(\bar{r},t)$ no prenguin el valor infinit en algun punt.

L'expressió 4.I.2.1 es pot escriure com:

$$\left[g(\bar{r},t)*\Delta\Phi(\bar{r},t)-\Phi(\bar{r},t)*\Delta g(\bar{r},t)\right]-\frac{1}{c^2}\left[g(\bar{r},t)*\frac{\partial^2\Phi(\bar{r},t)}{\partial t^2}-\Phi(\bar{r},t)*\frac{\partial^2 g(\bar{r},t)}{\partial t^2}\right].$$

Per les propietats del producte de convolució el segon terme d'aquesta expressió és nul i per tant l'expressió 4.I.2.1 queda finalment reescrita com:

$$\left[g(\bar{r},t)*\Delta\Phi(\bar{r},t)-\Phi(\bar{r},t)*\Delta g(\bar{r},t)\right]=\overline{\nabla}\cdot\left[g(\bar{r},t)*\overline{\nabla}\Phi(\bar{r},t)-\Phi(\bar{r},t)*\overline{\nabla}g(\bar{r},t)\right].$$

Si s'integra aquesta identitat en el volum en què es vol conèixer el camp acústic:

$$\int_V\left[g(\bar{r},t)*\Delta\Phi(\bar{r},t)-\Phi(\bar{r},t)*\Delta g(\bar{r},t)\right]\,\mathrm{d}V=\int_V\overline{\nabla}\cdot\left[g(\bar{r},t)*\overline{\nabla}\Phi(\bar{r},t)-\Phi(\bar{r},t)*\overline{\nabla}g(\bar{r},t)\right]\,\mathrm{d}V,$$

el teorema de Gauss ens permet escriure la integral de la dreta com una integral de superfície:

$$\int_V\overline{\nabla}\cdot\left[g(\bar{r},t)*\overline{\nabla}\Phi(\bar{r},t)-\Phi(\bar{r},t)*\overline{\nabla}g(\bar{r},t)\right]\,\mathrm{d}V=$$

$$\int_S\left[g(\bar{r},t)*\overline{\nabla}\Phi(\bar{r},t)-\Phi(\bar{r},t)*\overline{\nabla}g(\bar{r},t)\right]\cdot\mathrm{d}\bar{S}. \qquad (\ 4.\mathrm{I}.2.2\ )$$

Si es pren $g(\bar{r},t)$ com el camp lliure creat per una font puntual situada en un punt interior al volum on s'està calculant el potencial de velocitat (Fig. 4.I.2.2),

$$g(\bar{r},t) = \frac{1}{r}\delta\left(\bar{r} - \frac{t}{c}\right),$$

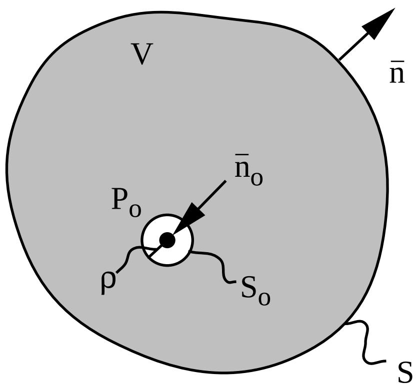

Fig. 4.I.2.2 Exclusió de la singularitat per al càlcul de $\Phi(\bar{r},t)$.

cal excloure del domini d'integració el punt P_o, en constiutir la font i ser un punt singular. Aquesta exclusió és fàcil de fer si es considera el punt P_o com el centre d'una esfera de radi ρ tendint a 0 i superfície S_o. Així la superfície sobre la que s'ha de resoldre la integral de la dreta de l'equació 4.I.2.2 serà $S+S_o$ i la integral de l'esquerra d'aquesta expressió serà nul·la, per tant:

$$\int_{\Sigma=S+S_o}\left[g(\bar{r},t) * \bar{\nabla}\Phi(\bar{r},t) - \Phi(\bar{r},t) * \bar{\nabla}g(\bar{r},t)\right]\cdot \mathrm{d}\bar{\Sigma} = 0. \qquad (\text{ 4.I.2.3 })$$

Tenint en compte que $\mathrm{d}\bar{\Sigma} = \bar{n}_\Sigma \cdot \mathrm{d}\Sigma$, l'expressió anterior pren la forma:

$$\int_S\left[g(\bar{r},t) * \frac{\partial\Phi(\bar{r},t)}{\partial n} - \Phi(\bar{r},t) * \frac{\partial g(\bar{r},t)}{\partial n}\right]\mathrm{d}S \; + \qquad (\text{ 4.I.2.4 })$$
$$\int_{S_o}\left[g(\bar{r},t) * \frac{\partial\Phi(\bar{r},t)}{\partial n_o} - \Phi(\bar{r},t) * \frac{\partial g(\bar{r},t)}{\partial n_o}\right]\mathrm{d}S_o = 0.$$

El valor de la segona integral de l'equació 4.I.2.4 depèn de la situació de la font respecte a la superfície *S*. Per resoldre-la cal tenir en compte que:

$$\mathrm{d}S_o = \rho^2\mathrm{d}\Omega \quad \text{i} \quad \frac{\partial}{\partial n_o} = -\frac{\partial}{\partial\rho},$$

on Ω és l'angle sòlid i ρ és el radi de l'esfera que envolta P_o. Aleshores, si s'introdueix el valor de $g(\overline{\rho},t)$, aquesta segona integral es pot escriure com:

$$\int_\Omega \left[\Phi(\overline{\rho},t) * \frac{\partial g(\overline{\rho},t)}{\partial \rho} - g(\overline{\rho},t) * \frac{\partial \Phi(\overline{\rho},t)}{\partial \rho} \right] \rho^2 \mathrm{d}\Omega =$$

$$\int_\Omega \left[\Phi(\overline{\rho},t) * \frac{\partial \left[\frac{1}{\rho} \delta\left(\overline{\rho} - \frac{t}{c} \right) \right]}{\partial \rho} - \frac{1}{\rho} \delta(\overline{\rho}) \delta(t) * \frac{\partial \Phi(\overline{\rho},t)}{\partial \rho} \right] \rho^2 \mathrm{d}\Omega \ .$$

Quan ρ tendeix a 0 el valor d'aquesta integral tendeix al valor de $\Phi(P_o,t)$ per una constant. Tenint en compte que la superfície S d'integració és una superfície contínua i amb derivades contínues, el valor de la constant és 4π si P_o és interior a S i 2π si P_o es troba sobre S, ja que correspon al valor de l'angle sòlid que comprèn la superfície S_o.

Per tant l'equació 4.I.2.4 queda de la forma:

$$\int_S \left[g(\bar{r},t) * \frac{\partial \Phi(\bar{r},t)}{\partial n} - \Phi(\bar{r},t) * \frac{\partial g(\bar{r},t)}{\partial n} \right] \mathrm{d}S = \alpha \Phi(P_o). \qquad (\ 4.I.2.5\ )$$

Aquesta és l'expressió en el domini temporal de l'equació de Helmholtz-Kirchhoff.