# APÈNDIX 1.II MATRIUS DE TRANSFERÈNCIA

## 1.II.1 Matriu de transferència d'un element de perfil cilíndric

La matriu de transferència $[T]$ relaciona, per al cas de règim harmònic, els valors de l'amplitud (en forma complexa) de la pressió i la velocitat, o cabal, en una secció amb els valors que presenten aquestes variables en una altra secció.

$$\begin{Bmatrix} \hat{p} \\ \hat{u} \end{Bmatrix}_2 = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \hat{p} \\ \hat{u} \end{Bmatrix}_1 = [T] \begin{Bmatrix} \hat{p} \\ \hat{u} \end{Bmatrix}_1 .$$

Els elements de la matriu es poden interpretar com:

$$T_{11} = \left.\frac{\hat{p}_2}{\hat{p}_1}\right|_{\hat{u}_1=0} ; \quad T_{12} = \left.\frac{\hat{p}_2}{\hat{u}_1}\right|_{\hat{p}_1=0}$$

$$T_{21} = \left.\frac{\hat{u}_2}{\hat{p}_1}\right|_{\hat{u}_1=0} ; \quad T_{22} = \left.\frac{\hat{u}_2}{\hat{u}_1}\right|_{\hat{p}_1=0} ,$$

i es poden obtenir les seves expressions a partir de les de la pressió i la velocitat dins d'un tub cilíndric en una determinada secció.

Una altra possibilitat per a la deducció d'aquests termes és treballar amb l'equació d'ona per al potencial de velocitat $\Phi(x,t)$ i a partir d'ell deduir les expressions de la pressió i la velocitat ja que:

$$p(x,t) = -\rho \frac{\partial \Phi(x,t)}{\partial t} \qquad \text{i} \qquad u(x,t) = \frac{\partial \Phi(x,t)}{\partial x} . \tag{1.II.1.1}$$

En el cas d'un tub cilíndric, (Fig. 1.II.1.1), i negligint les pèrdues viscotèrmiques, l'equació d'ona per al potencial de velocitat s'escriu com:

$$\frac{\partial^2 \Phi(x,t)}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial \Phi(x,t)}{\partial t} .$$

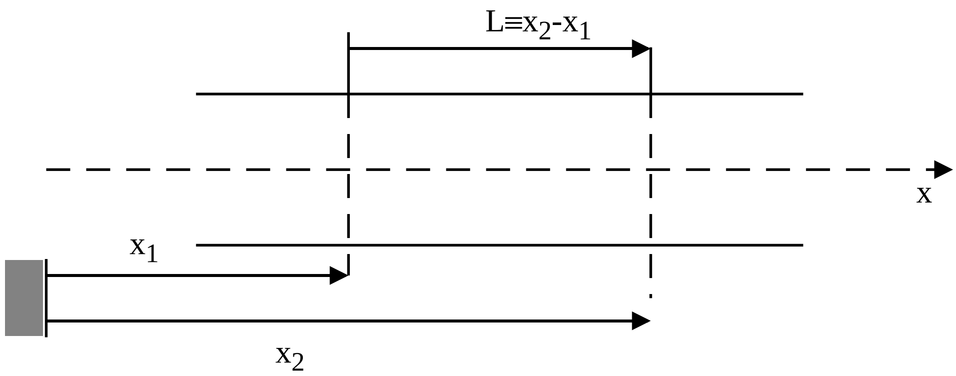


Fig. 1.II.1.1 Coordenades per a un tub cilíndric.

Si es suposa una solució harmònica del tipus: $\Phi(x,t) = \hat{\Phi}(x)e^{j\omega t}$, aleshores l'equació per a la part espacial es pot escriure com:

$$\frac{d^2\hat{\Phi}(x)}{dx^2} = -k\hat{\Phi}(x), \qquad \text{on } k = \omega / c.$$

Aquesta equació té per solució:

$$\hat{\Phi}(x) = \Phi_+^o e^{jkx} + \Phi_-^o e^{-jkx} \equiv \hat{\Phi}_+(x) + \hat{\Phi}_-(x).$$

Per tant:

$$\Phi(x,t) = \left[\hat{\Phi}_+(x) + \hat{\Phi}_-(x)\right] e^{j\omega t} \equiv \Phi_+(x,t) + \Phi_-(x,t).$$

La pressió i el cabal es relacionen amb el potencial de velocitat segons les expressions 1.II.1.1 i per tant:

$$p(x,t) = -j\rho\omega\left[\Phi_+(x,t) + \Phi_-(x,t)\right] \quad \text{i}$$
$$u(x,t) = jk\left[\Phi_+(x,t) - \Phi_-(x,t)\right],$$

o eliminant la dependència temporal harmònica:

$$\hat{p}(x) = -j\rho\omega\left[\hat{\Phi}_+(x) + \hat{\Phi}_-(x)\right] \quad \text{i}$$
$$\hat{u}(x) = jk\left[\hat{\Phi}_+(x) - \hat{\Phi}_-(x)\right].$$

Aquestes dues expressions es poden escriure en forma matricial:

$$\begin{Bmatrix} \hat{p}(x) \\ \hat{u}(x) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -\mathrm{j}\rho\omega & -\mathrm{j}\rho\omega \\ \mathrm{j}k & -\mathrm{j}k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \hat{\Phi}_+(x) \\ \hat{\Phi}_-(x) \end{Bmatrix}.$$

A partir d'aquesta expressió es poden relacionar les pressions i les velocitats en dues seccions diferents i per tant obtenir la matriu de transferència. Si es té en compte que:

$$\hat{\Phi}_\pm(x_2) = \hat{\Phi}_\pm(x_1 + L) = \Phi^o_\pm e^{\pm \mathrm{j}k(x_1+L)} = \left[\Phi^o_\pm e^{\pm \mathrm{j}kx_1}\right] e^{\pm \mathrm{j}kL} = \hat{\Phi}_\pm(x_1) e^{\pm \mathrm{j}kL},$$

aleshores:

$$\begin{Bmatrix} \hat{p}(x) \\ \hat{u}(x) \end{Bmatrix}_2 = \begin{bmatrix} -\mathrm{j}\rho\omega & -\mathrm{j}\rho\omega \\ \mathrm{j}k & -\mathrm{j}k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{\mathrm{j}kL} & 0 \\ 0 & e^{-\mathrm{j}kL} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \hat{\Phi}_+(x) \\ \hat{\Phi}_-(x) \end{Bmatrix}_1.$$

Com a conseqüència:

$$\begin{Bmatrix} \hat{p}(x) \\ \hat{u}(x) \end{Bmatrix}_2 = \begin{bmatrix} -\mathrm{j}\rho\omega & -\mathrm{j}\rho\omega \\ \mathrm{j}k & -\mathrm{j}k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{\mathrm{j}kL} & 0 \\ 0 & e^{-\mathrm{j}kL} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dfrac{-1}{2\mathrm{j}\omega\rho} & \dfrac{1}{2\mathrm{j}k} \\ \dfrac{-1}{2\mathrm{j}\omega\rho} & \dfrac{-1}{2\mathrm{j}k} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \hat{p}(x) \\ \hat{u}(x) \end{Bmatrix}_1,$$

i per tant:

$$\begin{Bmatrix} \hat{p}(x) \\ \hat{u}(x) \end{Bmatrix}_2 = \left[T_{cil}\right] \begin{Bmatrix} \hat{p}(x) \\ \hat{u}(x) \end{Bmatrix}_1, \quad \text{amb } \left[T_{cil}\right] = \begin{bmatrix} \cos(kL) & -\mathrm{j}Z_o \sin(kL) \\ \dfrac{-\mathrm{j}}{Z_o} \sin(kL) & \cos(kL) \end{bmatrix}$$

on $k$ és el nombre d'ona, $Z_o$ és la impedància característica i $L$ està definida a la Fig. 1.II.1.1.

## 1.II.2 Matriu de transferència d'un element de perfil cònic

Per a un tub cònic com el mostrat a la Fig. 1.II.2.1 i seguint un raonament anàleg a l'anterior per a la variable $\hat{\Psi}(r) = r\hat{\Phi}(r)$, s'obté:

$$\begin{Bmatrix} \hat{p}(r) \\ \hat{u}(r) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -\dfrac{\mathrm{j}\rho\omega}{r} & -\dfrac{\mathrm{j}\rho\omega}{r} \\ \dfrac{\mathrm{j}k}{r} - \dfrac{1}{r^2} & -\dfrac{\mathrm{j}k}{r} - \dfrac{1}{r^2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \hat{\Psi}_+(r) \\ \hat{\Psi}_-(r) \end{Bmatrix}.$$

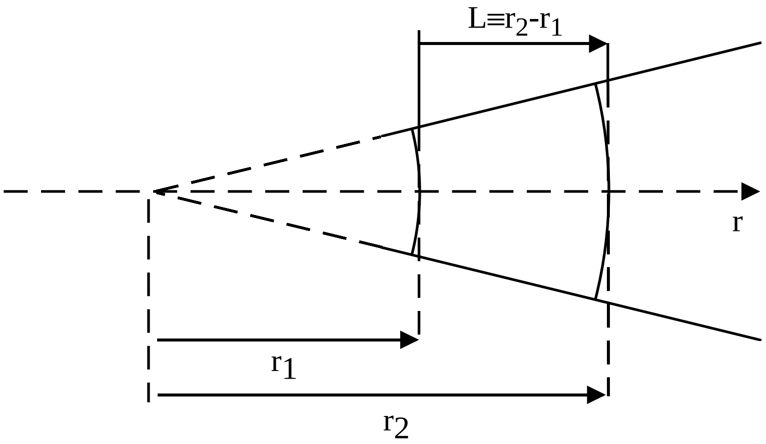


Fig. 1.II.2.1 Coordenades per a un tub cònic.

Si es té en compte que:

$$\hat{\Psi}_{\pm}(r_2) = \hat{\Psi}_{\pm}(r_1 + L) = \Psi^{o}_{\pm} e^{\pm \mathrm{j}k(r_1+L)} = \left[\Psi^{o}_{\pm} e^{\pm \mathrm{j}kr_1}\right] e^{\pm \mathrm{j}kL} = \hat{\Psi}_{\pm}(r_1) e^{\pm \mathrm{j}kL},$$

aleshores:

$$\begin{Bmatrix} \hat{p}(r) \\ \hat{u}(r) \end{Bmatrix}_2 = \begin{bmatrix} -\dfrac{\mathrm{j}\rho\omega}{r_2} & -\dfrac{\mathrm{j}\rho\omega}{r_2} \\ \dfrac{\mathrm{j}k}{r_2} - \dfrac{1}{r_2^2} & -\dfrac{\mathrm{j}k}{r_2} - \dfrac{1}{r_2^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{\mathrm{j}kL} & 0 \\ 0 & e^{-\mathrm{j}kL} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \hat{\Psi}_{+}(r) \\ \hat{\Psi}_{-}(r) \end{Bmatrix}_1 .$$

Com a conseqüència :

$$\begin{Bmatrix} \hat{p}(r) \\ \hat{u}(r) \end{Bmatrix}_2 = \begin{bmatrix} -\dfrac{\mathrm{j}\rho\omega}{r_2} & -\dfrac{\mathrm{j}\rho\omega}{r_2} \\ \dfrac{\mathrm{j}k}{r_2} - \dfrac{1}{r_2^2} & -\dfrac{\mathrm{j}k}{r_2} - \dfrac{1}{r_2^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{\mathrm{j}kL} & 0 \\ 0 & e^{-\mathrm{j}kL} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\left(\dfrac{r_1}{2\mathrm{j}\rho\omega} - \dfrac{1}{2k\rho\omega}\right) & \dfrac{r_1}{2\mathrm{j}k} \\ -\left(\dfrac{r_1}{2\mathrm{j}\rho\omega} + \dfrac{1}{2k\rho\omega}\right) & -\dfrac{r_1}{2\mathrm{j}k} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \hat{p}(r) \\ \hat{u}(r) \end{Bmatrix}_1 ,$$

i per tant:

$$\begin{Bmatrix} \hat{p}(r) \\ \hat{u}(r) \end{Bmatrix}_2 = \left[T_{con}\right] \begin{Bmatrix} \hat{p}(r) \\ \hat{u}(r) \end{Bmatrix}_1 , \quad \text{amb}$$

$$[T_{con}] = \begin{bmatrix} \dfrac{r_1}{r_2}\cos(kL) + \dfrac{1}{kr_2}\sin(kL) & -\mathrm{j}Z_o \dfrac{r_1}{r_2}\sin(kL) \\ \mathrm{j}\dfrac{1}{kZ_o}\dfrac{r_1}{r_2}\left[\left(\dfrac{1}{r_1} - \dfrac{1}{r_2}\right)\cos(kL) - \left(k + \dfrac{1}{kr_1r_2}\right)\sin(kL)\right] & \dfrac{r_1}{r_2}\left(\cos(kL) - \dfrac{1}{kr_2}\sin(kL)\right) \end{bmatrix},$$

on $k$ és el nombre d'ona, $Z_o$ és la impedància característica i els paràmetres geomètrics estan definits a la Fig. 1.II.2.1.

## 1.II.3 Matriu de transferència d'un element tipus Salmon

El perfil d'un element tipus Salmon, com el mostrat a la Fig. 1.II.3.1, ve definit per l'equació:

$$y(x) = y_o\left[\cosh\left(\frac{x}{m}\right) + T\sinh\left(\frac{x}{m}\right)\right].$$

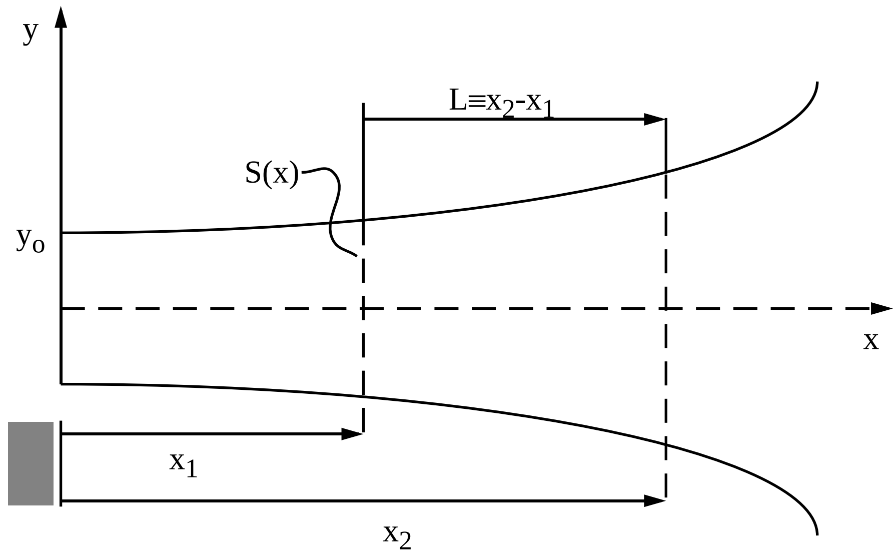


Fig. 1.II.3.1 Coordenades per a un perfil tipus Salmon.

Per a aquest tipus de perfil les expressions de la pressió i la velocitat en una certa secció són:

$$\hat{p}(x) = \frac{p_+^o}{y(x)}e^{\mathrm{j}k'x} + \frac{p_-^o}{y(x)}e^{-\mathrm{j}k'x} \equiv \hat{p}_+(x) + \hat{p}_-(x)$$

$$\hat{u}(x) = \frac{\mathrm{j}}{\omega\rho}\left[\mathrm{j}k' - \frac{y'(x)}{y(x)}\right]\frac{p_+^o}{y(x)}e^{\mathrm{j}k'x} - \frac{\mathrm{j}}{\omega\rho}\left[\mathrm{j}k' + \frac{y'(x)}{y(x)}\right]\frac{p_-^o}{y(x)}e^{-\mathrm{j}k'x}, \text{ amb}$$

$$k' = \left[k^2 - \frac{1}{m^2}\right]^{1/2} = \frac{\omega}{\tilde{c}(\omega)} \quad , \quad y'(x) = \frac{\mathrm{d}y(x)}{\mathrm{d}x} \text{ i } \tilde{c}(\omega) = \left(1 - \frac{c^2}{m^2\omega^2}\right)^{-1/2}.$$

En l'expressió completa de la pressió acústica $p(x,t)=\hat{p}(x)e^{\mathrm{j}\omega t}$ s'observa l'efecte dispersiu dels pavellons ja que dins de $\hat{p}(x)$ apareix $k'$ on es fa evident que la velocitat de propagació depèn de la freqüència $\omega$.

Com a conseqüència:

$$\begin{Bmatrix}\hat{p}(x)\\ \hat{u}(x)\end{Bmatrix}_2=\begin{bmatrix}\dfrac{e^{\mathrm{j}k'x_2}}{y(x_2)} & \dfrac{e^{-\mathrm{j}k'x_2}}{y(x_2)}\\ \dfrac{\mathrm{j}}{\omega\rho}\left(\mathrm{j}k'-\dfrac{y'(x_2)}{y(x_2)}\right)\dfrac{e^{\mathrm{j}k'x_2}}{y(x_2)} & -\dfrac{\mathrm{j}}{\omega\rho}\left(\mathrm{j}k'+\dfrac{y'(x_2)}{y(x_2)}\right)\dfrac{e^{-\mathrm{j}k'x_2}}{y(x_2)}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}p_+^o\\ p_-^o\end{Bmatrix}.$$

Si es té en compte que:

$$\begin{Bmatrix}p_+^o\\ p_-^o\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}\dfrac{y(x_1)}{e^{\mathrm{j}k'x_1}}\left[\dfrac{1}{2}-\dfrac{\mathrm{j}}{2k'}\dfrac{y'(x_1)}{y(x_1)}\right] & -\dfrac{\omega\rho}{2k'}\dfrac{y(x_1)}{e^{\mathrm{j}k'x_1}}\\ \dfrac{y(x_1)}{e^{-\mathrm{j}k'x_1}}\left[\dfrac{1}{2}+\dfrac{\mathrm{j}}{2k'}\dfrac{y'(x_1)}{y(x_1)}\right] & \dfrac{\omega\rho}{2k'}\dfrac{y(x_1)}{e^{-\mathrm{j}k'x_1}}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\hat{p}(x)\\ \hat{u}(x)\end{Bmatrix}_1,$$

s'obté:

$$\begin{Bmatrix}\hat{p}(x)\\ \hat{u}(x)\end{Bmatrix}_2=\left[T_{Sal}\right]\begin{Bmatrix}\hat{p}(x)\\ \hat{u}(x)\end{Bmatrix}_1,\ \text{amb}\ \left[T_{Sal}\right]=\begin{bmatrix}T_{11} & T_{12}\\ T_{21} & T_{22}\end{bmatrix}\ \text{on}$$

$$T_{11}=\frac{y(x_1)}{y(x_2)}\left[\cos(k'L)+\frac{1}{k'}\frac{y'(x_1)}{y(x_1)}\sin(k'L)\right],$$

$$T_{12}=\frac{y(x_1)}{y(x_2)}\left[-\mathrm{j}\frac{\omega\rho}{k'}\sin(k'L)\right],$$

$$T_{21}=\frac{y(x_1)}{y(x_2)}\left\{\frac{\mathrm{j}}{\omega\rho}\left[\left(\frac{y'(x_1)}{y(x_1)}-\frac{y'(x_2)}{y(x_2)}\right)\cos(k'L)-\left(k'+\frac{1}{k'}\frac{y'(x_1)y'(x_2)}{y(x_1)y(x_2)}\right)\sin(k'L)\right]\right\},$$

$$T_{22}=\frac{y(x_1)}{y(x_2)}\left[\cos(k'L)-\frac{1}{k'}\frac{y'(x_2)}{y(x_2)}\sin(k'L)\right],$$

on els paràmetres geomètrics estan definits a la Fig. 1.II.3.1.

### 1.II.4 Incorporació de les pèrdues viscotèrmiques

L'estudi de la propagació d'ones en un fluid real, viscós, amb conducció de calor a través de les parets del tub i la consideració d'altres efectes dissipatius va ser realitzat primerament per Kirchhoff.

Els efectes de la viscositat es poden incloure en l'equació del moviment a partir del tensor d'esforços corresponent [Morse, 1968]. Així l'equació del moviment que s'obté és la de Navier-Stokes per a un fluid viscós i compressible:

$$\rho \frac{\partial \bar{v}}{\partial t} = -\nabla p + \frac{1}{3}\mu \nabla(\nabla \cdot \bar{v}) + \mu \Delta \bar{v}$$

on $\bar{v}$ és la velocitat del fluid i $\mu$ és el coeficient de viscositat.

L'altra equació necessària per resoldre el problema acústic és l'equació de continuïtat:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho_o(\nabla \cdot \bar{v}) = 0.$$

La presència de viscositat implica un acoblament entre el moviment axial i radial de les partícules dins d'un tub. Fins i tot encara que s'assumeixi axisimetria, l'equació d'ones en un tub circular serà bidimensional. Així doncs, la pressió i la velocitat seran magnituds que dependran tant de la coordenada axial com de la radial i del temps, $p(r,z,t)$ i $\bar{v}(r,z,t)$. En ser la velocitat una magnitud vectorial es pot descompondre en dos components, un de radial i un d'axial, i per tant es pot escriure:

$$\bar{v}(r,z,t) = v_r(r,z,t)\bar{e}_r + v_z(r,z,t)\bar{e}_z,$$

on $\bar{e}_r$ i $\bar{e}_z$ són els versors directors en direcció radial i axial, respectivament, i on cada component depèn tant de $r$ com de $z$ ja que existeix acoblament entre ambdues coordenades.

Si es suposa axisimetria i s'expressa l'equació de Navier-Stokes en coordenades cilíndriques s'obté:

$$\rho_o \frac{\partial v_z}{\partial t} + \frac{\partial p}{\partial z} = \mu\left(\frac{\partial^2 v_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2}\right) + \frac{\mu}{3}\left(\frac{\partial^2 v_r}{\partial r \partial z} + \frac{1}{r}\frac{\partial v_r}{\partial z} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2}\right) \quad \text{i}$$

$$\rho_o \frac{\partial v_r}{\partial t} + \frac{\partial p}{\partial r} = \mu\left(\frac{\partial^2 v_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial v_r}{\partial r} - \frac{v_r}{r^2} + \frac{\partial^2 v_r}{\partial z^2}\right) + \frac{\mu}{3}\left(\frac{\partial^2 v_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial v_r}{\partial r} - \frac{v_r}{r^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z \partial r}\right).$$

Si es suposa una solució de tipus harmònic tant per a la pressió com per a la velocitat:

$$p(r,z,t) = \hat{p}(r,z)e^{j\omega t},$$

$$v_r(r,z,t) = \hat{v}_r(r,z)e^{j\omega t} \quad \text{i} \quad v_z(r,z,t) = \hat{v}_z(r,z)e^{j\omega t},$$

l'equació de Navier-Stokes es reescriu de la forma següent:

$$j\omega\rho_o \hat{v}_z(r,z) + \frac{\partial \hat{p}(r,z)}{\partial z} = \mu\left(\frac{\partial^2 \hat{v}_z(r,z)}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial \hat{v}_z(r,z)}{\partial r} + \frac{\partial^2 \hat{v}_z(r,z)}{\partial z^2}\right) + \frac{\mu}{3}\left(\frac{\partial^2 \hat{v}_r(r,z)}{\partial r \partial z} + \frac{1}{r}\frac{\partial \hat{v}_r(r,z)}{\partial z} + \frac{\partial^2 \hat{v}_z(r,z)}{\partial z^2}\right) \quad \text{i}$$

$$j\omega\rho_o \hat{v}_r(r,z) + \frac{\partial \hat{p}(r,z)}{\partial r} = \mu\left(\frac{\partial^2 \hat{v}_r(r,z)}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial \hat{v}_r(r,z)}{\partial r} - \frac{\hat{v}_r(r,z)}{r^2} + \frac{\partial^2 \hat{v}_r(r,z)}{\partial z^2}\right) + \frac{\mu}{3}\left(\frac{\partial^2 \hat{v}_r(r,z)}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial \hat{v}_r(r,z)}{\partial r} - \frac{\hat{v}_r(r,z)}{r^2} + \frac{\partial^2 \hat{v}_z(r,z)}{\partial z \partial r}\right).$$

El desacoblament d'aquestes equacions i el seu desenvolupament matemàtic [Munjal, 1987] condueix a un resultat per a la pressió i per al cabal que, per a la part longitudinal de les ones, pot expressar-se, de manera aproximada, com:

$$\hat{p}_-^{\zeta}(z) = e^{-\zeta z}\hat{p}_-(z) \;\; ; \;\; \hat{u}_-^{\zeta}(z) = e^{-\zeta z}\hat{u}_-(z)$$
$$\hat{p}_+^{\zeta}(z) = e^{\zeta x}\hat{p}_+(z) \;\; ; \;\; \hat{u}_+^{\zeta}(z) = e^{\zeta x}\hat{u}_+(z)$$

on $\zeta$ conté l'efecte de l'esmorteïment i depèn del diàmetre del tub i del nombre d'ona segons l'expressió [Nederveen, 1967]:

$\zeta = (1+j)\zeta_o \dfrac{\sqrt{k}}{cD}$, essent $D$ el diàmetre del tub cilíndric.

Així doncs, en la propagació d'ones uniparamètriques per l'interior d'un tub s'incorporen les pèrdues viscotèrmiques considerant que les ones s'atenuen i es retarden, i que per tant la seva amplitud ve afectada per una exponencial. La part real de $\zeta$ representa l'atenuació de l'ona per unitat de longitud i la part imaginària el retard de fase en la mateixa longitud.

Per a d'altres tipus de perfils de tub la resolució de l'equació de Navier-Stokes no resulta tan simple i el que se sol fer és extrapolar el resultat obtingut per al cas cilíndric. En aquest cas, en la definició del coeficient d'esmorteïment es substitueix $D$ per $D_m$, diàmetre mitjà entre les seccions extremes del tub.

La consideració d'esmorteïment al llarg del tub implica la modificació de la matriu de transferència corresponent en la següent forma:

$$\left[T_\zeta\right] = \left[\sigma_2\right]\left[T_{\zeta=0}\right]\left[\sigma_1\right]^{-1} \qquad (\ 1.\text{II}.4.1\ )$$

Efectivament, a cada secció del tub considerat es pot establir la relació:

$$\begin{Bmatrix} \hat{p}^\zeta \\ \hat{u}^\zeta \end{Bmatrix}_i = \left[\sigma_i\right] \begin{Bmatrix} \hat{p} \\ \hat{u} \end{Bmatrix}_i . \qquad (\ 1.\text{II}.4.2\ )$$

Per altra banda:

$$\begin{Bmatrix} \hat{p} \\ \hat{u} \end{Bmatrix}_2 = \left[T_{\zeta=0}\right] \begin{Bmatrix} \hat{p} \\ \hat{u} \end{Bmatrix}_1 \quad \text{i} \quad \begin{Bmatrix} \hat{p}^\zeta \\ \hat{u}^\zeta \end{Bmatrix}_2 = \left[T_\zeta\right] \begin{Bmatrix} \hat{p}^\zeta \\ \hat{u}^\zeta \end{Bmatrix}_1 .$$

Així doncs:

$$\left[\sigma_2\right] \begin{Bmatrix} \hat{p} \\ \hat{u} \end{Bmatrix}_2 = \left[T_\zeta\right]\left[\sigma_1\right] \begin{Bmatrix} \hat{p} \\ \hat{u} \end{Bmatrix}_1 \quad \Rightarrow \quad \left[T_{\zeta=0}\right] = \left[\sigma_2\right]^{-1}\left[T_\zeta\right]\left[\sigma_1\right],$$

i per tant es recupera l'expressió 1.II.4.1. El problema a resoldre és la determinació de la matriu $\left[\sigma_i\right]$.

### 1.II.4.1 Obtenció de $\left[\sigma_i\right]$ per a un tub cilíndric

Si es té en compte l'expressió 1.II.4.2 i que per a un tub cilíndric:

$$\hat{p}(z) = \hat{p}_-(z) + \hat{p}_+(z); \qquad \hat{u}(z) = \frac{1}{\rho c}\left(\hat{u}_-(z) - \hat{u}_+(z)\right)$$

$$\hat{p}^{\zeta}(z) = e^{-\zeta z}\hat{p}_{-}(z) + e^{\zeta z}\hat{p}_{+}(z)$$
$$\hat{u}^{\zeta}(z) = \frac{1}{\rho c}\frac{k-\mathrm{j}\zeta}{k}\left(e^{-\zeta z}\hat{u}_{-}(z) - e^{\zeta z}\hat{u}_{+}(z)\right),$$

es pot escriure la següent relació:

$$\begin{Bmatrix} e^{-\zeta z}\hat{p}_{-}(z) + e^{\zeta z}\hat{p}_{+}(z) \\ \dfrac{1}{\rho c}\dfrac{k-\mathrm{j}\zeta}{k}\left(e^{-\zeta z}\hat{u}_{-}(z) - e^{\zeta z}\hat{u}_{+}(z)\right) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \hat{p}_{-}(z) + \hat{p}_{+}(z) \\ \dfrac{1}{\rho c}\left(\hat{u}_{-}(z) - \hat{u}_{+}(z)\right) \end{Bmatrix}.$$

Aquest sistema d'equacions permet trobar els elements de la matriu $[\sigma]$, de manera que:

$$[\sigma_{cil}] = \begin{bmatrix} \cosh(\zeta z) & -\rho c \sinh(\zeta z) \\ -\dfrac{1}{\rho c}\dfrac{k-\mathrm{j}\zeta}{k}\sinh(\zeta z) & \dfrac{k-\mathrm{j}\zeta}{k}\cosh(\zeta z) \end{bmatrix},$$

i en conseqüència:

$$[\sigma_{cil}]^{-1} = \begin{bmatrix} \cosh(\zeta z) & \rho c \dfrac{k}{k-\mathrm{j}\zeta}\sinh(\zeta z) \\ \dfrac{1}{\rho c}\sinh(\zeta z) & \dfrac{k}{k-\mathrm{j}\zeta}\cosh(\zeta z) \end{bmatrix}.$$

### 1.II.4.2 Obtenció de $[\sigma_i]$ per a un tub cònic

Si es té en compte l'expressió 1.II.4.2 i que per a un tub cònic:

$$\hat{p}(r) = \hat{p}_{-}(r) + \hat{p}_{+}(r); \quad \hat{u}(r) = \frac{1}{\rho c}\left[\frac{kr-\mathrm{j}}{kr}\hat{u}_{-}(r) - \frac{kr+\mathrm{j}}{kr}\hat{u}_{+}(r)\right]$$

$$\hat{p}^{\zeta}(r) = e^{-\zeta r}\hat{p}_{-}(r) + e^{\zeta z}\hat{p}_{+}(r)$$
$$\hat{u}^{\zeta}(r) = \frac{1}{\rho c}\left[\left(\frac{k-\mathrm{j}\zeta}{k} - \frac{\mathrm{j}}{kr}\right)e^{-\zeta r}\hat{u}_{-}(r) - \left(\frac{k-\mathrm{j}\zeta}{k} + \frac{\mathrm{j}}{kr}\right)e^{\zeta r}\hat{u}_{+}(r)\right],$$

es pot escriure la següent relació:

$$\begin{Bmatrix} e^{-\zeta r}\hat{p}_{-}(r)+e^{\zeta r}\hat{p}_{+}(r) \\ \dfrac{1}{\rho c}\left[\left(\dfrac{k-\mathrm{j}\zeta}{k}-\dfrac{\mathrm{j}}{kr}\right)e^{-\zeta r}\hat{u}_{-}(r)-\left(\dfrac{k-\mathrm{j}\zeta}{k}+\dfrac{\mathrm{j}}{kr}\right)e^{\zeta r}\hat{u}_{+}(r)\right] \end{Bmatrix}=\begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} \end{bmatrix}\cdot \begin{Bmatrix} \hat{p}_{-}(r)+\hat{p}_{+}(r) \\ \dfrac{1}{\rho c}\left[\dfrac{kr-\mathrm{j}}{kr}\hat{u}_{-}(r)-\dfrac{kr+\mathrm{j}}{kr}\hat{u}_{+}(r)\right] \end{Bmatrix}.$$

Aquest sistema d'equacions permet trobar els elements de la matriu $[\sigma]$, de manera que:

$$[\sigma_{con}]=\begin{bmatrix} \cosh(\zeta r)-\dfrac{\mathrm{j}}{kr}\sinh(\zeta r) & -\rho c\sinh(\zeta r) \\ \dfrac{1}{\rho ck}\left[\dfrac{\zeta}{kr}\cosh(\zeta r)-\left((k-\mathrm{j}\zeta)+\dfrac{1}{kr^{2}}\right)\sinh(\zeta r)\right] & \dfrac{k-\mathrm{j}\zeta}{k}\cosh(\zeta r)+\dfrac{\zeta}{kr}\sinh(\zeta r) \end{bmatrix}.$$