

Capítulo 3. Consideraciones sobre métodos numéricos

3.1. Introducción

En este capítulo se presenta la teoría y algunos conceptos sobre los que se sustentan los esquemas numéricos de alta resolución. Su aplicación a las ecuaciones de Saint Venant se realiza en los capítulos siguientes. Algunos de los conceptos que se exponen no son válidos para un sistema hiperbólico general (no-lineal, multidimensional y con término independiente) como son las ecuaciones de Saint Venant; sino que en algún caso son válidos tan sólo para la ecuación escalar unidimensional y homogénea, otras veces lo son para sistemas de ecuaciones unidimensionales, algunas veces homogéneos y otras con término independiente, y finalmente algunos sí que son válidos para el sistema más general. Por ello en algunos apartados del capítulo se hace referencia a expresiones de leyes de conservación más sencillas que las ecuaciones de Saint Venant.

En este capítulo se repasan conceptos de formulación y discretización, con el objetivo de justificar algunas de las decisiones que luego se toman y de dejar claras algunas ideas fundamentales sobre las que se basan los esquemas de alta resolución que se presentan en los capítulos siguientes.

3.2. Formulación integral de las leyes de conservación y discretización en volúmenes finitos

Cualquier ley de conservación, y en particular las ecuaciones de Saint Venant, se puede escribir en forma diferencial y en forma integral. Hasta ahora se han presentado las ecuaciones en forma diferencial, aunque existen buenas razones para considerar también su forma integral. La deducción de las ecuaciones se suele realizar expresando las leyes físicas de conservación como relaciones integrales en volúmenes de control, aunque luego el supuesto de suavidad de la solución permite la obtención de formas diferenciales. La forma integral es una formulación más básica que requiere menos suavidad a la solución, permitiendo con ella extender el estudio a soluciones discontinuas. Por otro lado, desde un punto de vista de cálculo numérico, el hecho de utilizar la forma integral de las ecuaciones lleva de forma natural a una discretización del dominio en células o *volúmenes finitos*, y a todos los esquemas basados en este tipo de discretización que tiene ventajas considerables.

Para una ley de conservación escalar unidimensional como:

$$u_t + f_x(u) = 0 \quad (3.1)$$

la forma integral se obtiene efectuando la integración en x y t . Si consideramos, por ejemplo, el dominio $[x - \Delta x/2, x + \Delta x/2] \times [t, t + \Delta t]$ donde Δx y Δt son intervalos espaciales y temporales cualquiera, a partir de (3.1) se obtiene (abusando del lenguaje):

$$\int_t^{t+\Delta t} \int_{x-\Delta x/2}^{x+\Delta x/2} [u_t + f_x(u)] dx dt = 0 \quad (3.2)$$

de donde es inmediato:

$$\int_{x-\Delta x/2}^{x+\Delta x/2} [u(x, t + \Delta t) - u(x, t)] dx + \int_t^{t+\Delta t} [f(x + \Delta x/2, t) - f(x - \Delta x/2, t)] dt = 0 \quad (3.3)$$

que es la forma integral de (3.1). Se ha utilizado la notación $f(x, t)$ para $f(u(x, t))$.

Los esquemas numéricos clásicos en diferencias finitas utilizan discretizaciones que consideran el valor de las variables en puntos concretos de la malla espacial. En volúmenes finitos, en cambio, el dominio de estudio se divide en una serie de celdas, o *volúmenes finitos*, y las variables utilizadas en el esquema numérico representan el valor medio de las variables dependientes en cada celda en un instante determinado. En la Figura 3.1 se representa la discretización en volúmenes finitos para el caso unidimensional y la ecuación escalar. En ella los valores u_i^n representan el valor medio de $u(x, t)$ en la celda i y en el instante $t = t^n = n\Delta t$:

$$u_i^n = \frac{1}{\Delta x} \int_{x-\Delta x/2}^{x+\Delta x/2} u(x, t) dx \quad (3.4)$$

Observando la ecuación (3.3) y teniendo en cuenta la definición de u_i^n en (3.4), se obtiene:

$$u_i^{n+1} = u_i^n - \frac{1}{\Delta x} \int_t^{t+\Delta t} [f(x + \Delta x/2, t) - f(x - \Delta x/2, t)] dt \quad (3.5)$$

La integral de la ecuación anterior es desconocida ya que no se pueden conocer los valores de $u(x - \Delta x/2, t)$ y $u(x + \Delta x/2, t)$ en tiempos comprendidos entre t y $t + \Delta t$, por lo que hay que aproximar dicha integral de alguna manera. Así, la técnica de los volúmenes finitos lleva a describir un esquema numérico para la ecuación (3.1) mediante una expresión del tipo:

$$u_i^{n+1} = u_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} (f_{i+1/2}^* - f_{i-1/2}^*) \quad (3.6)$$

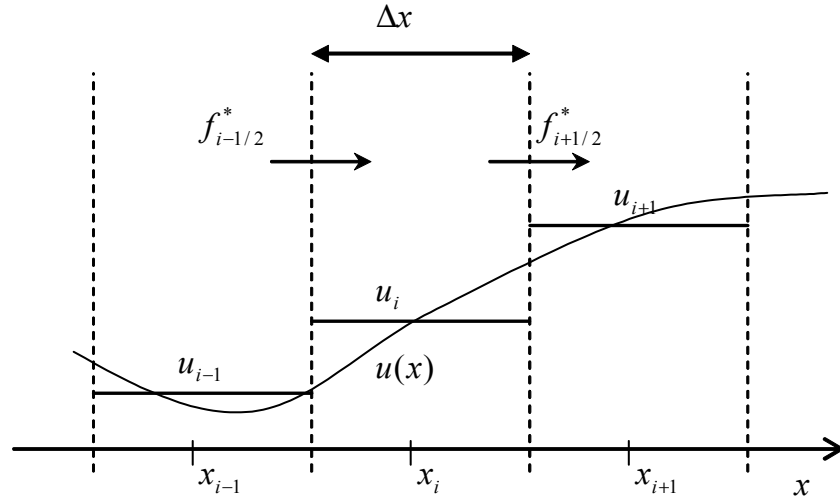


Figura 3.1. Discretización en volúmenes finitos

Donde, como se ha visto, u_i^n representa el valor que toma la variable u en la celda i del dominio unidimensional discretizado y en el instante de tiempo n , mientras que $f_{i+1/2}^*$ se conoce por *flujo numérico* y depende en general de las variables en las celdas contiguas a la i en los instantes de tiempo t^n y t^{n+1} :

$$f_{i+1/2}^* = f_{i+1/2}^*(u_{i-1}^n, \dots, u_i^n, \dots, u_{i+m}^n, u_{i-1}^{n+1}, \dots, u_i^{n+1}, \dots, u_{i+m}^{n+1}) \quad (3.7)$$

con l y m dos enteros no negativos. El flujo numérico es en definitiva lo que diferenciará un esquema numérico de otro.

En una dimensión y para esquemas conservativos (ver apartado 3.6.3) la diferencia entre los volúmenes finitos y las diferencias finitas es principalmente conceptual, ya que el esquema numérico resultante es generalmente idéntico con las dos técnicas de discretización. En dos o más dimensiones, en cambio, los esquemas resultantes de utilizar una u otra técnica son muy diferentes, hasta el punto que utilizando volúmenes finitos se obtienen esquemas que permiten considerar soluciones discontinuas de manera inmediata mientras que con diferencias finitas ello se complica en gran manera. Los volúmenes finitos permiten además adaptar la discretización a dominios con formas arbitrarias muy fácilmente, mientras que con diferencias, en el caso de no tener mallas rectangulares y uniformes se obtienen esquemas muy complicados.

En el caso de un sistema de ecuaciones unidimensionales, como son las ecuaciones de Saint Venant unidimensionales:

$$\mathbf{U}_t + \mathbf{F}_x(\mathbf{U}) = \mathbf{H} \quad (3.8)$$

con \mathbf{U} , \mathbf{F} y \mathbf{H} los vectores de (2.52), la forma integral para un dominio $[x - \Delta x/2, x + \Delta x/2] \times [t, t + \Delta t]$ se obtiene de la misma forma:

$$\int_t^{t+\Delta t} \int_{x-\Delta x/2}^{x+\Delta x/2} \left[\mathbf{U}_t + \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{F}(\mathbf{U}) \right] dx dt = \int_t^{t+\Delta t} \int_{x-\Delta x/2}^{x+\Delta x/2} \mathbf{H} dx dt \quad (3.9)$$

que también se puede escribir como:

$$\begin{aligned} \int_{x-\Delta x/2}^{x+\Delta x/2} [\mathbf{U}(x, t + \Delta t) - \mathbf{U}(x, t)] dx + \int_t^{t+\Delta t} [\mathbf{F}(\mathbf{U}(x + \Delta x/2, t)) - \mathbf{F}(\mathbf{U}(x - \Delta x/2, t))] dt = \\ = \int_t^{t+\Delta t} \int_{x-\Delta x/2}^{x+\Delta x/2} \mathbf{H}(x, t) dx dt \end{aligned} \quad (3.10)$$

De donde se obtiene un esquema del tipo:

$$\mathbf{U}_i^{n+1} = \mathbf{U}_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} (\mathbf{F}_{i+1/2}^* - \mathbf{F}_{i-1/2}^*) + \Delta t \mathbf{H}_i \quad (3.11)$$

donde ahora \mathbf{F}^* es el flujo numérico, \mathbf{U}_i^n es el valor medio del vector \mathbf{U} en la celda i en el instante t^n y \mathbf{H}_i un valor representativo del promedio de \mathbf{H} en la celda i en el paso de tiempo de t^n a t^{n+1} , y que, como \mathbf{F}^* , dependerá del esquema utilizado.

En el caso bidimensional el dominio físico se descompone en polígonos (en este trabajo se utilizan cuadriláteros y triángulos) que son ahora los volúmenes de control o volúmenes finitos. Cada volumen tiene una superficie o contorno formado por los lados que lo encierran y viene definido por sus vértices. Los vértices pueden estar distribuidos irregularmente, formando una malla no estructurada, o formar parte de una malla estructurada (para cuadriláteros siempre habrá cuatro lados concurrentes en cada vértice, y para triángulos tres). En dos dimensiones los volúmenes finitos no son pues volúmenes tridimensionales sino áreas, y sus superficies son curvas cerradas. En la Figura 3.2 se representa un volumen finito $V_{i,j}$ en forma de cuadrilátero en un dominio bidimensional. Su superficie o contorno son los cuatro lados, cada uno de ellos con un vector normal exterior \mathbf{n} .

Como se vio en el capítulo anterior, las ecuaciones de Saint Venant bidimensionales se pueden escribir de forma conservativa como (apartado 2.2.7):

$$\mathbf{U}_t + \nabla \mathbf{F} = \mathbf{H} \quad (3.12)$$

donde ahora \mathbf{U} y \mathbf{H} son vectores y \mathbf{F} es el tensor de flujo dado por (2.47). Su expresión integral para un volumen V cualquiera es:

$$\int_V \mathbf{U}_t dV + \int_V \nabla \mathbf{F} dV = \int_V \mathbf{H} dV \quad (3.13)$$

y aplicando el teorema de Gauss a la segunda integral se tiene:

$$\int_V \mathbf{U}_t dV + \oint_S (\mathbf{F} \cdot \mathbf{n}) ds = \int_V \mathbf{H} dV \quad (3.14)$$

donde S es la superficie que encierra a V . Si ahora se denotan con \mathbf{U}_{ij} y \mathbf{H}_{ij} respectivamente al valor promedio en el volumen finito V de las variables dependientes y del término independiente, la ecuación (3.14) se puede reescribir, para un volumen concreto V_i como:

$$\mathbf{U}_i = \frac{-1}{V_i} \oint_S (\mathbf{F} \cdot \mathbf{n}) ds + \mathbf{H}_{i,j} \quad (3.15)$$

Tal como se ha hecho en el caso unidimensional, se puede definir un tensor de flujo numérico \mathbf{F}^* , que es el *flujo numérico* normal a S , de manera que la integral que aparece en esta última ecuación se puede aproximar como la suma del producto de dicho tensor por el vector normal a S , o sea:

$$\oint_S (\mathbf{F} \cdot \mathbf{n}) ds = \sum_{l=1}^{N_i} (\mathbf{F}_{i,w_l}^* \mathbf{n}_{i,w_l}) l_{i,w_l} \quad (3.16)$$

donde w_l representa el índice correspondiente a la l -ésima pared del elemento i y N_i el número de lados.

El vector \mathbf{n}_{i,w_l} es la normal exterior a la pared w_l del elemento i y l_{i,w_l} es su longitud. La expresión del flujo numérico, igual que en el caso 1D, es lo que diferenciará un esquema numérico de otro, que se puede escribir de forma general, análogamente a (3.11) como:

$$\mathbf{U}_i^{n+1} = \mathbf{U}_i^n - \frac{\Delta t}{V_i} \sum_{l=1}^{N_i} (\mathbf{F}_{i,w_l}^* \mathbf{n}_{i,w_l}) I_{i,w_l} + \Delta t \mathbf{H}_i \quad (3.17)$$

En esta última expresión ya se puede intuir la importancia que tiene el problema unidimensional en la resolución del problema bidimensional. Este último se acaba resolviendo considerando el flujo numérico a través de cada una de las cuatro paredes de cada elemento de volumen, y este flujo se puede calcular, como se verá en el *Capítulo 5* siguiente, como si en la dirección normal a cada pared hubiera un problema de Riemann unidimensional, con dos estados constantes a cada lado definidos por los valores promedio de las variables en los elementos de volumen contiguos a dicha pared. También es fundamental la discretización del término $\mathbf{H}_{i,j}$, que representa la integral del término independiente en el volumen finito V_{ij} .

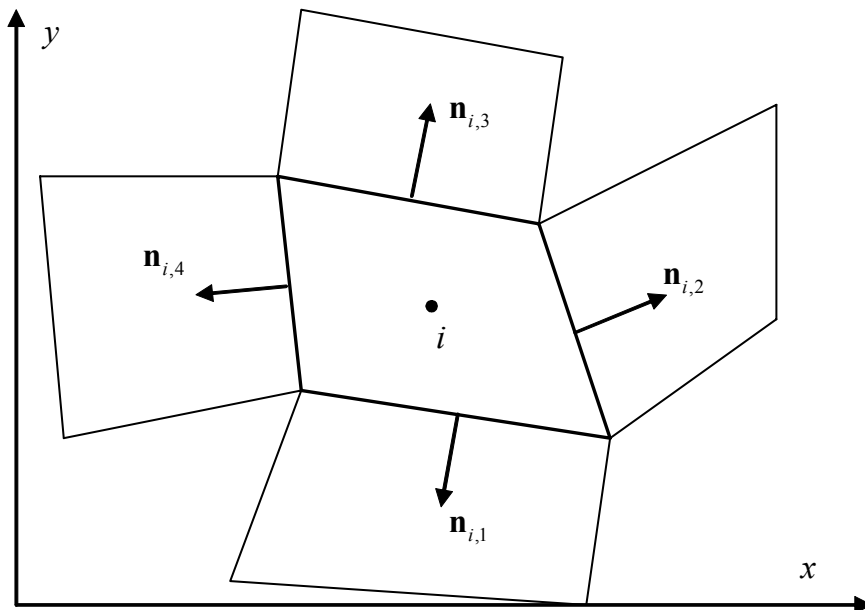


Figura 3.2. Discretización en volúmenes finitos de un dominio bidimensional

3.3. Solución débil

Se ha visto en el capítulo anterior que la solución de un sistema de ecuaciones cuasi-lineal homogéneo, que responde a la ecuación diferencial

$$\mathbf{U}_t + \mathbf{F}_x(\mathbf{U}) = \mathbf{0} \quad (3.18)$$

puede desarrollar singularidades o discontinuidades después de un tiempo finito, por lo que las soluciones clásicas del sistema de ecuaciones diferenciales (clásicamente se admiten como soluciones las funciones continuas con derivadas continuas, o a lo sumo funciones continuas que cumplan la condición de Lipschitz) dejan de ser válidas. En la forma diferencial del sistema de ecuaciones aparecen explícitamente las derivadas de las variables hidráulicas, que no están definidas en el caso de haber discontinuidades. En la forma integral, en cambio, este problema no se da.

El concepto de solución de (3.18) se puede extender considerando la forma integral siguiente:

$$\int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty [\mathbf{U}_t + \mathbf{F}_x(\mathbf{U})] w dx dt = \mathbf{0} \quad (3.19)$$

donde $w(x,t)$ es una *función de test*, función suave en un cierto dominio de (x,t) y que se anula en el contorno y fuera de dicho dominio. La ecuación (3.19), como forma integral que es, si que se satisface aunque existan discontinuidades. Si tomáramos $w \equiv 1$ la ecuación (3.19) se convertiría en una expresión integral de las leyes de conservación con sentido físico del tipo de (3.9) para un sistema homogéneo.

Integrando (3.19) por partes se obtienen:

$$\int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty [w_t \mathbf{U} + w_x \mathbf{F}(\mathbf{U})] dx dt = - \int_{-\infty}^\infty w(x,0) \mathbf{U}(x,0) dx \quad (3.20)$$

Una función \mathbf{U} que satisface (3.20) para cualquier función de test w se llama una *solución débil* o *solución generalizada* del sistema de ecuaciones (3.18). Una solución clásica del sistema de ecuaciones, si existe, debe satisfacer la leyes de conservación en forma integral, por lo que es también una solución débil. Sin embargo lo contrario no es cierto.

La importancia de la solución débil viene dada por el teorema de Lax-Wendroff (apartado 3.6.3) que asegura la obtención de una solución débil bajo ciertas condiciones del esquema numérico, y por lo tanto abre la posibilidad de desarrollar esquemas numéricos con los que se pueden obtener soluciones discontinuas del sistema de ecuaciones de manera directa (métodos directos o *shock-capturing*). Sin embargo, la solución débil no es única, por lo que la solución obtenida con un esquema numérico puede que no coincida con la solución física del sistema. Para poder asegurar lo contrario se debe comprobar que la solución satisface la condición de entropía resultante de considerar la segunda ley de la termodinámica (apartado 3.6.4).

3.4. Esquemas explícitos y esquemas implícitos

Los esquemas explícitos son aquellos en los que el cálculo de las variables en un instante se efectúa tan sólo con los valores que toman en el instante anterior. Un esquema numérico explícito, por ejemplo para la ecuación escalar unidimensional, toma la forma (3.6) pero sin que el flujo numérico dependa de los valores en el instante t^{n+1} , o sea:

$$f_{i+1/2}^* = f_{i+1/2}^*(u_{i-l}^n, \dots, u_i^n, \dots, u_{i+m}^n) \quad (3.21)$$

Cada punto del dominio espacial (o cada volumen finito) se calcula pues independientemente de los demás.

Por el contrario, un esquema implícito evalúa las variables dependientes en el instante t^{n+1} a partir de los valores en puntos adyacentes al de cálculo en el instante anterior t^n , pero también en el mismo instante t^{n+1} (expresiones (3.6) y (3.7)). La resolución de un punto del espacio en un instante implica pues los valores en otros puntos del espacio en el mismo instante, por lo que se debe resolver en cada paso de tiempo un sistema de ecuaciones que engloba todas las variables en todos los puntos del espacio en el instante t^{n+1} .

Los esquemas explícitos tienen un coste computacional pequeño en cada paso de tiempo, pero para ser estables es necesario trabajar con incrementos de tiempo también pequeños. Un análisis de estabilidad para esquemas explícitos ((Gómez, 1988)(Abbott, 1979)) a partir de la teoría de las características para soluciones continuas lleva a la conclusión que dichos esquemas, para ser estables, deben cumplir la condición de Courant, que para las ecuaciones unidimensionales es:

$$\Delta t \leq \frac{\Delta x}{|u \pm c|} \quad (3.22)$$

o, lo que es lo mismo:

$$C = \frac{|u \pm c| \Delta t}{\Delta x} \leq 1 \quad (3.23)$$

donde C es el número de Courant, también llamado número de Courant, Friedrichs y Levy (CFL). La condición de Courant significa que el dominio de dependencia de un punto en un esquema en diferencias explícitas (que está formado por los puntos del espacio que intervienen en el esquema) debe comprender al dominio de dependencia para la ecuación diferencial, ya que precisamente $|u \pm c|$ es la velocidad de propagación de una onda, o velocidad de transmisión de la información, que limita el dominio de dependencia para la solución exacta.

Para el caso bidimensional el mismo análisis de estabilidad (Tan, 1992) concluye que para que un sistema explícito sea estable debe cumplirse (para el caso $\Delta x = \Delta y$ y malla regular):

$$\Delta t \leq \frac{\Delta x}{\sqrt{2} \sqrt{u^2 + v^2 + c^2}} \quad (3.24)$$

que para una discretización mediante volúmenes finitos, con la notación del apartado 0.1., queda como:

$$\Delta t \leq \min_{i,l} \left(\frac{l_{i,w_l}}{\sqrt{2} \sqrt{u^2 + v^2 + c^2}} \right) \quad (3.25)$$

que también se puede escribir como

$$C = \max_{i,l} \left(\frac{|\sqrt{u^2 + v^2} + c| \Delta t}{l_{i,w_l}} \right) \leq \frac{1}{\sqrt{2}} \quad (3.26)$$

Lo visto es una condición necesaria de estabilidad, pero en el caso de soluciones discontinuas el criterio de estabilidad puede ser más restrictivo en algún caso. En el caso unidimensional lo que debe cumplirse es:

$$\Delta t \leq \frac{\Delta x}{S_{\max}} \quad (3.27)$$

donde S_{\max} es la velocidad de propagación de la onda más rápida del problema de Riemann asociado. Esta será pues la condición que deberán cumplir los esquemas basados en el método de Godunov, como se verá en adelante. En la práctica las condiciones (3.22) y (3.27) se suelen considerar equivalentes, aunque en algún caso, como el avance en lecho seco, podría llevar a inestabilidades por estar infravalorando la velocidad de propagación de la onda.

Los esquemas implícitos tienen la ventaja sobre los esquemas explícitos que son incondicionalmente estables, aunque la convergencia a veces puede ser difícil de conseguir dependiendo de las condiciones iniciales. Es posible combinar la diferenciación temporal implícita con discretizaciones espaciales de alta resolución (Alcrudo, 1992) (entendiendo como tales aquellas que, para una formulación explícita de la derivada temporal, serían de alta resolución) resultando esquemas estables para fenómenos estacionarios con números de Courant del orden de 100, pero no es posible asegurar, ni siquiera en el caso escalar, que los esquemas resultantes sean realmente de alta resolución, es decir, que cumplan las tres condiciones de Harten. Esto, junto con el hecho de que se pierde precisión debido a las aproximaciones que se deben hacer para linealizar el sistema, la relativamente poca mejora en tiempos de cálculo por el gran número de iteraciones que hacen falta para converger y el tiempo que consume cada iteración (especialmente en dominios grandes y bidimensionales), y el hecho de que si se pretende modelar un régimen rápidamente variable en el tiempo el uso de incrementos de tiempo grandes pierde incluso sentido físico, hace que los esquemas implícitos se utilicen poco para fenómenos físicos rápidamente variables donde son necesarios esquemas de alta resolución. Los esquemas implícitos dan excelentes resultados para flujo claramente subcrítico, siendo los más utilizados para ello el esquema de Preissmann o de los cuatro puntos para cálculos unidimensionales, y esquemas ADI desarrollados a partir del esquema de Lendertsee para dos dimensiones. Para problemas con variaciones importantes en el espacio o en el tiempo, los esquemas explícitos son más adecuados. Información sobre esquemas implícitos clásicos se puede encontrar en (Abbott, 1979), (Cunge, 1980), (Ritchmyer, 1967), (Gómez, 1988) y (Bateman, 1994).

3.5. Esquemas centrales y esquemas upwind

Los esquemas en diferencias finitas consisten en reemplazar las derivadas según cada variable dependiente por cocientes en diferencias de los valores de las variables en los puntos de discretización del dominio de solución. Tradicionalmente los esquemas numéricos unidimensionales utilizan, para la discretización espacial, diferencias centradas, diferencias hacia delante o diferencias hacia atrás, según la aproximación a la derivada de una función $f(x)$ en el punto x_i se realice, respectivamente, como:

$$\frac{df}{dx} \approx \frac{f_{i+1} - f_{i-1}}{2\Delta x} \quad ; \quad \frac{df}{dx} \approx \frac{f_{i+1} - f_i}{\Delta x} \quad ; \quad \frac{df}{dx} \approx \frac{f_i - f_{i-1}}{\Delta x} \quad (3.28)$$

Las dos últimas expresiones tendrán sentido, sobretodo, en los puntos de los contornos del dominio de estudio, donde las diferencias centrales no se pueden utilizar, al menos de forma inmediata.

Uno de los esquemas explícitos más sencillos en que se puede pensar para resolver la ecuación escalar homogénea (3.1) consistiría en utilizar una aproximación con diferencias hacia delante para las derivadas temporales (que como se verá en el apartado 3.6.3 es necesario para tener esquemas conservativos) y diferencias centrales en las derivadas espaciales para tener segundo orden de precisión, o sea, para el punto (x_i, t^n) :

$$\frac{du}{dt} = \frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} \quad ; \quad \frac{du}{dx} = \frac{u_{i+1}^n - u_{i-1}^n}{2\Delta x} \quad (3.29)$$

para la ecuación (3.1) con $f(u) = \lambda \cdot u$, la aplicación de las estas expresiones nos llevaría al esquema:

$$u_i^{n+1} = u_i^n - \frac{\lambda \Delta t}{2\Delta x} (u_{i+1}^n - u_{i-1}^n) \quad (3.30)$$

Sorprendentemente este esquema es incondicionalmente inestable como se puede ver con un análisis de estabilidad de Von-Neumann (Gómez, 1988), (Toro, 1997), y ello es debido a que se está utilizando un dominio de dependencia para el esquema numérico distinto del dominio de dependencia físico de la solución exacta.

En cambio, tan solo sustituyendo $u_i^n = 1/2(u_{i-1}^n + u_{i+1}^n)$ en (3.29), el esquema resultante para esta misma ecuación queda como:

$$u_i^{n+1} = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{\lambda \Delta t}{\Delta x} \right) u_{i-1}^n + \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\lambda \Delta t}{\Delta x} \right) u_{i+1}^n \quad (3.31)$$

que es el conocido *esquema de Lax-Friedrichs* (a veces llamado también *esquema de Lax* o *esquema difusivo*), y resulta incondicionalmente estable si se cumple la condición de Courant:

$$\frac{\lambda \Delta t}{\Delta x} \leq 1 \quad (3.32)$$

Este esquema tiene un buen comportamiento para ondas rápidas, pero no tanto para ondas lentas o estacionarias.

Otro esquema central de especial interés es el esquema de Lax-Wendroff, que se puede obtener considerando las derivadas espaciales como una combinación de derivadas hacia delante y derivadas hacia atrás:

$$\frac{du}{dx} = \gamma_1 \frac{u_i^n - u_{i-1}^n}{\Delta x} + \gamma_2 \frac{u_{i+1}^n - u_i^n}{\Delta x} \quad (3.33)$$

con

$$\gamma_1 = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{\lambda \Delta t}{\Delta x} \right) \quad ; \quad \gamma_2 = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\lambda \Delta t}{\Delta x} \right) \quad (3.34)$$

resultando

$$u_i^{n+1} = \frac{1}{2} \frac{\lambda \Delta t}{\Delta x} \left(1 + \frac{\lambda \Delta t}{\Delta x} \right) u_{i-1}^n + \left(1 - \left(\frac{\lambda \Delta t}{\Delta x} \right)^2 \right) u_i^n - \frac{1}{2} \frac{\lambda \Delta t}{\Delta x} \left(1 - \frac{\lambda \Delta t}{\Delta x} \right) u_{i+1}^n \quad (3.35)$$

que también es estable si se cumple (3.32).

Para poder incorporar en el esquema numérico las propiedades del fenómeno físico se desarrollaron los *esquemas upwind* (*contraviento* o *contracorriente*), esquemas descentrados que utilizan el hecho de que la información se propaga a lo largo de las líneas características para que los puntos involucrados en las derivadas espaciales involucren al dominio que físicamente influencia cada punto de cálculo. Para ello se utilizan derivadas espaciales hacia delante o hacia atrás dependiendo del sentido de propagación de la onda. Por ejemplo, para la ecuación (3.1) con $f(u) = \lambda \cdot u$, λ es precisamente la velocidad característica ($\lambda = df/du$), velocidad con que se propaga una onda (ver Capítulo 2, apartado 2.4.3.2). Si λ es positivo se pueden utilizar diferencias hacia atrás, lo que resulta en el esquema:

$$u_i^{n+1} = u_i^n - \frac{\lambda \Delta t}{\Delta x} (u_i^n - u_{i-1}^n) \quad (3.36)$$

mientras que si λ es negativo, utilizando diferencias hacia delante tenemos:

$$u_i^{n+1} = u_i^n + \frac{\lambda \Delta t}{\Delta x} (u_i^n - u_{i-1}^n) \quad (3.37)$$

Este esquema, de primer orden de precisión, es estable para números de Courant inferiores o iguales a 1 y tiene la ventaja de tener en cuenta la física del fenómeno a la hora de discretizar las ecuaciones. Para escribirlo en forma condensada se puede definir:

$$\lambda^+ = \frac{1}{2}(\lambda + |\lambda|) \quad ; \quad \lambda^- = \frac{1}{2}(\lambda - |\lambda|) \quad (3.38)$$

de manera que si λ es positivo $\lambda^+ = \lambda$ y $\lambda^- = 0$, mientras que si por el contrario λ es negativo se tiene $\lambda^+ = 0$ y $\lambda^- = \lambda$. Con ello este *esquema upwind de primer orden* se puede escribir como:

$$u_i^{n+1} = u_i^n - \frac{\lambda^+ \Delta t}{\Delta x} (u_i^n - u_{i-1}^n) - \frac{\lambda^- \Delta t}{\Delta x} (u_{i+1}^n - u_i^n) \quad (3.39)$$

Este esquema, válido como se ha dicho para la ecuación escalar homogénea con $f(u) = \lambda \cdot u$ fue propuesto por Courant, Isaacson y Reeves en 1952, por lo que también se le conoce como esquema *CIR*. En el capítulo siguiente se realiza la extensión a sistemas de ecuaciones no lineales.

En los últimos años distintos autores han realizado importantes esfuerzos para desarrollar esquemas upwind. Aunque los esquemas centrales tienen las ventajas de su simplicidad, no tienen en cuenta como realmente se propaga la información. El coste computacional de los esquemas upwind puede ser bastante mayor que para esquemas centrados y el tratamiento del término independiente complejo, aún así son una buena opción para conseguir métodos directos para las ecuaciones del flujo en lámina libre, especialmente para el caso bidimensional.

3.6. Algunas propiedades de los esquemas numéricos

En este apartado se comentan algunas de las propiedades que puede tener, y en general es conveniente que tenga, un esquema numérico. Cuando en adelante se discutan los distintos esquemas, el hecho de poseer o no estas propiedades dará inmediatamente una idea de sus capacidades y limitaciones.

3.6.1. Orden de diferenciación

El orden de diferenciación de un esquema numérico en diferencias finitas hace referencia a la manera como se aproximan las derivadas de manera discreta. Dada una función $f(x)$ suficientemente suave, y el valor que toma en un punto x_0 se puede conocer el valor que toma en un punto cercano $x_0 + \Delta x$ mediante un desarrollo en serie de Taylor:

$$f(x_0 + \Delta x) = f(x_0) + \sum_k \frac{(\Delta x)^k}{k!} \frac{d^k f(x_0)}{dx} \quad (3.40)$$

Truncando la serie de Taylor se pueden obtener aproximaciones a las derivadas de $f(x)$. Por ejemplo, despreciando los términos de segundo orden en (3.40) y despejando, podemos obtener una aproximación a la primera derivada como:

$$\frac{df(x_0)}{dx} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} + O(\Delta x) \quad (3.41)$$

o, considerando el punto $x_0 - \Delta x$:

$$\frac{df(x_0)}{dx} = \frac{f(x_0) - f(x_0 - \Delta x)}{\Delta x} + O(\Delta x) \quad (3.42)$$

Tanto (3.41) como (3.42) son aproximaciones de primer orden de la primera derivada de $f(x)$ en x_0 , pues el error cometido es un término de primer orden, $O(\Delta x)$. Considerando los desarrollos en serie de Taylor de $f(x_0 + \Delta x)$ y $f(x_0 - \Delta x)$ y restando uno de otro se puede obtener una aproximación a la derivada, mediante diferencias centradas, que es de segundo orden, ya que los términos de primer orden se anulan:

$$\frac{df(x_0)}{dx} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0 - \Delta x)}{2\Delta x} + O(\Delta x^2) \quad (3.43)$$

En general un esquema basado en diferencias hacia delante, hacia atrás, o upwind será de primer orden de precisión, mientras que diferencias centrales producirán un esquema de segundo orden de precisión.

Un resultado importante para el desarrollo de esquemas de alta resolución, es que un esquema numérico lineal para la resolución de la ecuación escalar (3.1) con $f(u) = \lambda u$

$$u_i^{n+1} = \sum_{k=-k_L}^{k_R} b_k u_{i+k}^n \quad (3.44)$$

es de segundo orden de precisión si y sólo si:

$$S_0 = 1 \quad ; \quad S_1 = -c \quad ; \quad S_2 = c^2 \quad (3.45)$$

donde $c = \lambda \Delta t / \Delta x$ y:

$$S_q = \sum_{k=-k_L}^{k_R} k^q b_k \quad (3.46)$$

De los esquemas vistos en 0.1. son de primer orden el esquema inestable (3.30), el esquema de Lax-Friedrichs (3.31) y el esquema upwind de primer orden (3.39). El esquema de Lax-Wendroff es de segundo orden de precisión en el espacio y en el tiempo, y además es el único esquema posible de segundo orden que incorpora tan solo tres puntos ($u_{i+1}^n, u_i^n, u_{i-1}^n$) en su discretización.

3.6.2. Convergencia, consistencia y estabilidad

A continuación se enuncian tres conceptos que sirven para considerar la bondad con que un esquema numérico es capaz de reproducir la solución de la ecuación original.

Convergencia: Un esquema numérico es convergente si la solución numérica obtenida de él tiende a la solución exacta de la ecuación diferencial cuando la malla se hace indefinidamente fina. Todo esquema numérico debería pues ser convergente.

Consistencia: Un esquema será consistente con la ecuación original si, al refinar la malla, el operador diferencial y el operador en diferencias finitas son equivalentes. La consistencia indica pues la bondad con que un esquema numérico representa la ecuación original, y se puede expresar también diciendo que un esquema numérico es consistente si el flujo numérico coincide, cuando todos los argumentos son iguales a v , con el flujo físico para $u = v$:

$$f_{i+1/2}^*(v, \dots, v, \dots, v) = f(v) \quad (3.47)$$

Estabilidad: La estabilidad es la propiedad que tiene o no un esquema numérico de que los errores de redondeo permanezcan dentro de límites razonables. La estabilidad es una propiedad del método de integración utilizado, que no depende de la ecuación original.

Los tres conceptos anteriores están ligados por el *teorema de Lax*, que dice que para un problema de valor inicial lineal bien planteado, y para un esquema numérico consistente, la estabilidad es una condición necesaria y suficiente para la convergencia de la solución numérica. Este teorema permite descomponer el problema de la convergencia en otros dos más asequibles, por lo que se puede demostrar la convergencia de un esquema, al menos para el problema lineal, a través de su consistencia y estabilidad. La mayor parte de los esquemas utilizados para la resolución de ecuaciones en derivadas parciales se basan en este teorema para garantizar su convergencia, aunque se debe recordar que las ecuaciones de Saint Venant forman un sistema de ecuaciones no lineal y por tanto esta teoría deja de ser válida.

3.6.3. Esquemas conservativos

Para poder calcular soluciones discontinuas se deben imponer condiciones tanto en la formulación de las ecuaciones como en los esquemas numéricos utilizados. En cuanto a las primeras, tan solo la forma conservativa de las ecuaciones, que utiliza como variables aquellas que físicamente se conservan, permitirá calcular de forma correcta una solución discontinua (Toro, 1997). Para cualquier otro conjunto de variables distinto de las variables conservativas se obtendrán unas condiciones de salto (como las condiciones de Rankine-Hugoniot para las variables conservativas) erróneas, con una velocidad de propagación también errónea, y por lo tanto una solución de su posición a lo largo del tiempo también errónea.

Un esquema numérico, para la ecuación escalar (3.1) se define como *esquema conservativo* si se puede escribir en la forma de la ecuación (3.6). Los esquemas conservativos aparecen pues de forma natural al considerar la forma integral de la ecuación (3.1), ecuación (3.3), y una discretización en volúmenes finitos.

Por otro lado, gracias al teorema de Lax-Wendroff, que dice que un método numérico conservativo, si es convergente, converge a una solución débil de la ley de conservación, se puede asegurar que mediante esquemas conservativos podremos calcular la solución incluso en el caso de haber discontinuidades. Y es más, en el caso

de tener soluciones discontinuas, si se quiere utilizar un método directo o *shock capturing* no queda más remedio que aplicar un método conservativo y utilizar las ecuaciones en forma conservativa.

El teorema de Lax-Wendroff asegura que la solución que se obtiene es una solución débil del sistema de ecuaciones, pero como las soluciones débiles pueden no ser únicas, es necesario verificar que ésta coincide con la solución física comprobando que se cumple la condición de entropía.

Algunos esquemas de ejemplos escritos en forma conservativa son:

$$f_{i+1/2} = \frac{1}{2}(f_{i+1}^n + f_{i-1}^n) \quad (3.48)$$

para el esquema inestable,

$$f_{i+1/2} = \frac{1}{2}(f_{i+1}^n + f_{i-1}^n) - \frac{\Delta t}{2\Delta x}(u_{i+1}^n - u_i^n) \quad (3.49)$$

para el esquema de Lax-Friedrichs o

$$f_{i+1/2} = f\left(\frac{1}{2}(u_{i+1}^n + u_i^n) - \frac{\Delta t}{2\Delta x}(f_{i+1}^n - f_i^n)\right) \quad (3.50)$$

para el esquema de Lax-Wendroff.

3.6.4. Unicidad y condición de entropía

Para una misma condición inicial discontinua puede existir más de una solución débil de las ecuaciones, pero de ellas solamente una es físicamente correcta. En el caso de las ecuaciones de Saint Venant, debido a la viscosidad del fluido y a la producción de calor, la entropía debe crecer a través de una discontinuidad. Sin embargo, se pueden encontrar soluciones discontinuas de las ecuaciones de Saint Venant para las cuales la entropía decrece. Este tipo de soluciones se han presentado en el Capítulo 2, apartado 2.5.2, como ondas de choque de depresión, y son físicamente inadmisibles.

La solución correcta se puede distinguir de las otras porque debe cumplir una serie de criterios que se puede demostrar que son equivalentes (Tan, 1992):

1. Criterio de viscosidad. La solución correcta coincide con el límite, cuando la viscosidad tiende a cero, de las mismas ecuaciones hiperbólicas cuando al término independiente se le añade un término de viscosidad. En el caso particular de un sistema de ecuaciones hiperbólico como (3.18), la solución físicamente correcta debe coincidir, pues, con el límite cuando ν tiende a 0 de la solución de:

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{U} + \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{F} = \nu \frac{\partial^2 \mathbf{U}}{\partial \mathbf{x}^2} \quad (3.51)$$

2. Criterio de la aproximación en diferencias: La solución físicamente correcta coincide con el límite de la solución numérica cuando el incremento de tiempo utilizado tiende a cero.
3. Criterio de la onda de choque: Como se ha visto en el apartado 2.5.2 del Capítulo 2, para la ecuación unidimensional escalar homogénea, una discontinuidad fuerte físicamente correcta es aquella en la que convergen las líneas características (Figura 2.12). Para un sistema hiperbólico del tipo (3.8) lo mismo será cierto para cada uno de los campos característicos, lo que se traduce que para cualquier valor propio λ_i , si S es la velocidad de propagación de la discontinuidad debe cumplirse, como muestra la Figura 3.3.

$$\lambda_i(\mathbf{U}_L) > S > \lambda_i(\mathbf{U}_R) \quad (3.52)$$

$$\lambda_{i+1}(\mathbf{U}_R) > S > \lambda_{i-1}(\mathbf{U}_L) \tag{3.53}$$

Naturalmente la segunda de estas ecuaciones no tiene sentido para las ecuaciones de Saint Venant unidimensionales, para las cuales solamente existen dos valores propios, pero sí cuando consideramos las ecuaciones de Saint Venant bidimensionales (variables u, v, h) restringidas a una dirección (lo que se hace en cada uno de los contornos de los elementos de volumen).

Se puede probar que las ecuaciones (3.52) y (3.53) son equivalentes, en dinámica de gases, al hecho que la entropía termodinámica de una partícula aumente al cruzar una discontinuidad.

Los criterios anteriores son equivalentes, por lo que los esquemas de alta resolución deben comprobar que la solución obtenida cumple alguno de ellos, o, lo que es lo mismo, que no permiten obtener soluciones que violen alguno de los mencionados criterios.

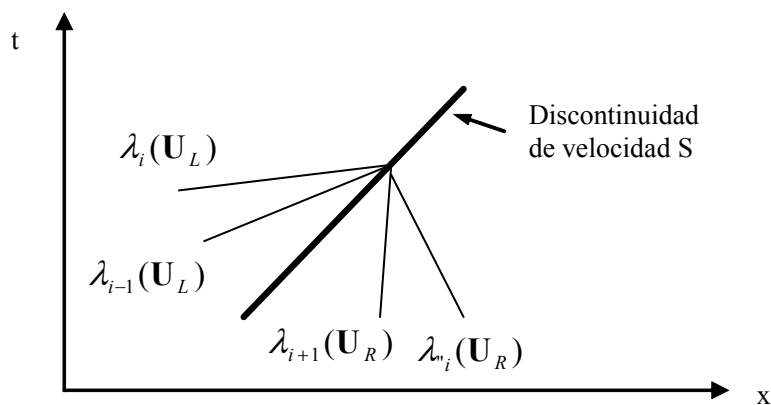


Figura 3.3. Convergencia de las características en una discontinuidad con sentido físico

3.6.5. Monotonicidad

En la búsqueda de esquemas numéricos verdaderamente de alta resolución toman importancia los conceptos teóricos de monotonicidad, variación total decreciente (TVD), la condición de compatibilidad de datos y la idea de esquemas ENO (Essentially Non-Oscillating), conceptos que están muy ligados entre si y que son fundamentales para comprender los esquemas de alta resolución. Se insiste que la mayoría de estos conceptos rigurosamente sólo tienen sentido para la ecuación escalar homogénea, o para un sistema de ecuaciones homogéneo, aunque generalmente se cumple que los esquemas que resultan adecuados para esos casos también lo serán en el caso más general con términos fuente y más dimensiones.

Si consideramos la expresión escalar de un ley física de conservación (3.1) su solución *preserva la monotonicidad* (Harten, 1982) entendiéndolo por ello que se cumplen las dos condiciones siguientes: 1) no se pueden crear nuevos extremos locales en x y 2) el valor de un mínimo local no puede disminuir y el de un máximo local no puede aumentar. La preservación de la monotonicidad es pues una propiedad física de una ley de conservación que cualquier buen esquema numérico deberá mantener.

Por otro lado, al pasar a la solución discreta, se dice que un esquema numérico del tipo:

$$u_i^{n+1} = H(u_{i-r+1}^n, \dots, u_{i+s}^n) \tag{3.54}$$

es monótono si H es una función no-decreciente de todos sus argumentos:

$$\frac{\partial H}{\partial u_j^n} \geq 0 \quad \forall j \tag{3.55}$$

Con un esquema monótono, a partir de un conjunto de datos $\{u_i^n\}$ se obtiene una solución $\{u_i^{n+1}\}$ que cumple (Toro, 1997):

$$\max_i \{u_i^{n+1}\} \leq \max_i \{u_i^n\} \quad ; \quad \min_i \{u_i^{n+1}\} \geq \min_i \{u_i^n\} \quad (3.56)$$

que no es más que la expresión discreta de la preservación de la monotonicidad física de la solución. Un esquema monótono mantiene esta propiedad y por lo tanto no podrá crear soluciones espurias, por lo que la búsqueda de esquemas monótonos será la base de los métodos de alta resolución.

Para un esquema conservativo de tres puntos del tipo

$$u_i^{n+1} = u_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} (f_{i+1/2} - f_{i-1/2}) \quad (3.57)$$

puede verse fácilmente que la condición de monotonicidad (3.55) queda

$$\frac{\partial f_{i+1/2}}{\partial u_i^n}(u_i^n, u_{i+1}^n) \geq 0 \quad ; \quad \frac{\partial f_{i+1/2}}{\partial u_{i+1}^n}(u_i^n, u_{i+1}^n) \leq 0 \quad (3.58)$$

mientras que para un esquema lineal del tipo:

$$u_i^{n+1} = \sum_{k=-k_L}^{k_R} b_k u_{i+k}^n \quad (3.59)$$

la condición de monotonicidad (3.55) queda

$$b_k \geq 0 \quad \forall k_j \quad (3.60)$$

Un resultado notable que se deduce de las propiedades anteriores es el *Teorema de Godunov*: para la ecuación escalar (3.1) con $f(u) = au$, no existe ningún esquema lineal (de la forma (3.59)) de orden de precisión mayor que uno, que sea monótono. El Teorema de Godunov se demuestra desarrollando S_2 en (3.46) como:

$$\begin{aligned} S_2 &= \sum_{k=-k_L}^{k_R} k^2 b_k = \sum_{k=-k_L}^{k_R} (k+c)^2 b_k - 2 \sum_{k=-k_L}^{k_R} k b_k - c^2 \sum_{k=-k_L}^{k_R} b_k = \\ &= \left[\sum_{k=-k_L}^{k_R} (k+c)^2 b_k \right] - 2cS_1 - c^2 S_0 \end{aligned} \quad (3.61)$$

sustituyendo la condición de segundo orden de precisión del esquema (3.45) en (3.61) queda

$$S_2 = \left[\sum_{k=-k_L}^{k_R} (k+c)^2 b_k \right] + c^2 = c^2 \quad (3.62)$$

si se pretende que el esquema sea monótono debe cumplirse además (3.60), por lo que la única posibilidad sería $b_k = 0$ para cualquier k , lo que no tiene sentido.

Del Teorema de Godunov se desprende pues que los esquemas lineales pueden ser sólo de primer orden para ser monótonos, pero por otro lado los esquemas de primer orden son a veces poco precisos. Para conseguir esquemas de alta resolución se tiene que evitar pues caer en las hipótesis de este teorema, y en concreto buscar esquemas que no sean lineales, es decir, cuyos coeficientes dependan de los valores discretos que toma la solución.

Otro resultado importante (Hirsh, 1990) es que los esquemas monótonos no sólo convergen a una solución débil de la ley de conservación, sino que lo hacen a la única solución que satisface la condición de entropía y que es, por lo tanto, la solución física.

3.6.6. Oscilaciones espurias, dispersión y disipación

Se conoce por el nombre de fenómeno de Gibbs el hecho de que un esquema de segundo o mayor orden de precisión produce oscilaciones espurias de la solución en zonas cercanas a grandes gradientes, y en concreto en zonas cercanas a discontinuidades de la solución. Esquemas distintos producen oscilaciones distintas (ver Figura 3.4) alrededor de la discontinuidad, pero como se ha visto en el apartado anterior cualquier esquema numérico lineal de segundo orden de precisión las producirá. Las oscilaciones pueden ir aumentando al transcurrir el tiempo y provocar que el esquema numérico sea inestable, producir valores de calados negativos o simplemente malas aproximaciones a la realidad. Este fenómeno se conoce también por el nombre de *dispersión*.

Históricamente este problema se trató, en un principio, añadiendo términos de viscosidad artificial a esquemas de segundo orden, solución que utilizan todavía algunos programas comerciales, a pesar que de esta manera la discontinuidad se suaviza comprendiendo un dominio más amplio que el que tiene realmente. Precisamente los métodos de aislamiento del frente de onda (*Shock Fitting methods*) se desarrollaron para intentar resolver este problema, pero que como se ha dicho en el Capítulo 1 se mostraron ineficaces y poco prácticos al tener que tratar la discontinuidad como un contorno móvil con unas condiciones especiales, frente a la ventaja de los métodos directos, con esquemas de alta resolución que no requieren de ningún tratamiento especial.

Por el contrario los esquemas de primer orden son disipativos, de manera que la amplitud de una onda decrece más que su solución exacta y por otro lado las variaciones de la solución, y sobretodo las discontinuidades, se esparcen por la malla de cálculo (ver Figura 3.5).

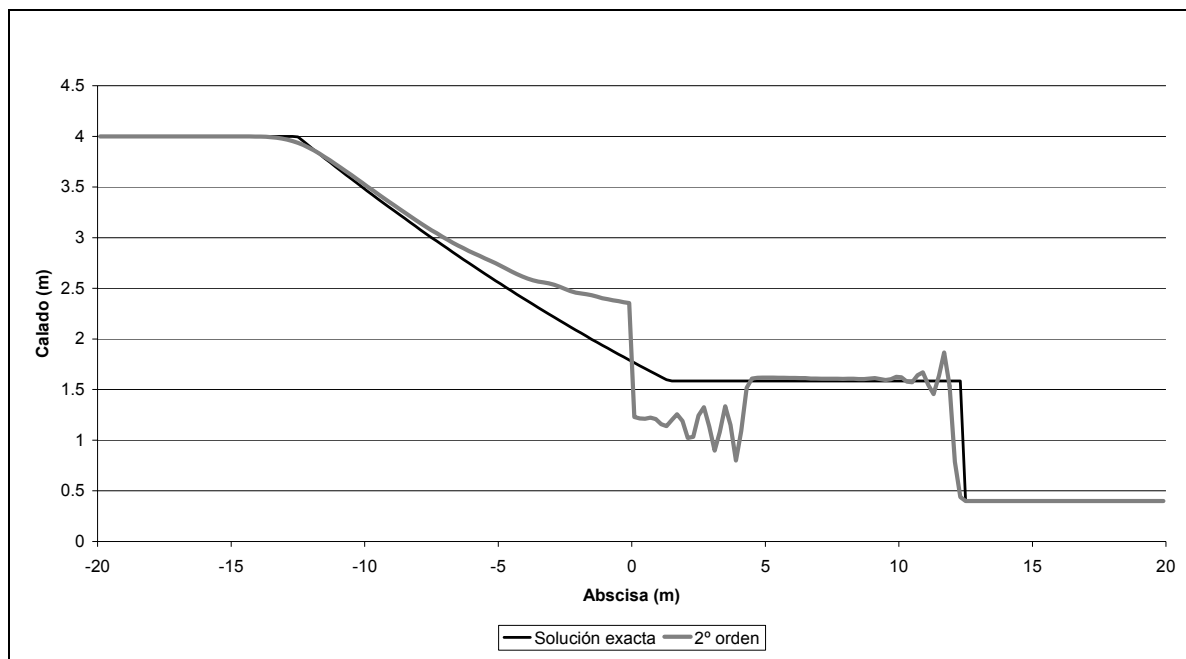


Figura 3.4. Oscilaciones espurias (fenómeno de Gibbs) para un esquema de segundo orden

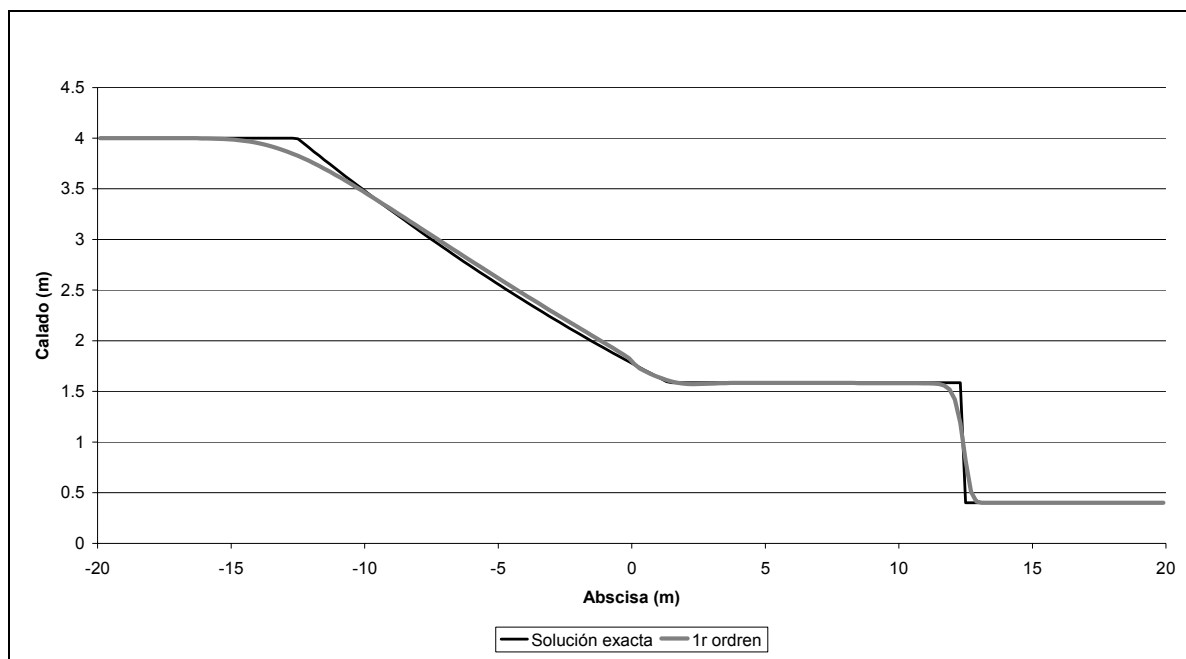


Figura 3.5. Disipación producida por un esquema de primer orden.

3.6.7. Variación Total Decreciente y compatibilidad de datos

Una condición menos estricta que la monotonicidad es el concepto de *Variación Total Decreciente* (*Total Variation Diminishing* o *TVD*) introducido por Harten (1983), que asegura la convergencia de la solución numérica a la solución débil de la ley de conservación (3.1), aunque, al contrario que la monotonicidad, no asegura el cumplimiento de la condición de entropía.

Se define la *Variación Total* de una función continua $u(x)$ como

$$TV(u) = \int_{-\infty}^{+\infty} |u'(x)| dx \quad (3.63)$$

mientras que para una solución discreta $\{u_i^n\}$, será

$$TV(u^n) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} |u_{i+1}^n - u_i^n| \quad (3.64)$$

y se dice que un esquema numérico para la resolución de la ecuación escalar homogénea escalar (3.1) es *TVD* (*Variación Total Decreciente*) si

$$TV(u^n) \leq TV(u^{n+1}) \quad (3.65)$$

Entre las propiedades de monotonicidad, preservación de la monotonicidad y, variación total decreciente existe la siguiente relación: Todos los esquemas monótonos (3.54)(3.55) son esquemas TVD, mientras que a su vez todos los esquemas TVD preservan la monotonicidad. Para esquemas lineales de la forma (3.59) la condición de preservación de la monotonicidad equivale a la de monotonicidad, por lo que cualquier esquema TVD lineal será sólo de primer orden de precisión. Sin embargo, lo dicho no es cierto para esquemas no lineales, que pueden ser TVD y tener segundo orden de precisión, y de aquí su importancia en la generación de esquemas de alta resolución.

Una condición para que un esquema numérico para la resolución de la ecuación escalar (3.1) sea TVD fue dada por Harten (1983) en el teorema conocido por su nombre.

Teorema de Harten: si se considera un esquema escrito de la siguiente forma (que es otra manera de escribir la expresión de un esquema conservativo (3.6)):

$$u_i^{n+1} = u_i^n - C_{i-1/2} \Delta u_{i-1/2} + D_{i+1/2} \Delta u_{i+1/2} \quad (3.66)$$

con $\Delta u_{i-1/2} = u_i^n - u_{i-1}^n$, $\Delta u_{i+1/2} = u_{i+1}^n - u_i^n$ y $C_{i-1/2}$, $D_{i+1/2}$ funciones de $\{u_i^n\}$, el esquema es TVD si se cumple

$$C_{i+1/2} \geq 0 \quad ; \quad D_{i+1/2} \geq 0 \quad ; \quad 0 \leq C_{i+1/2} + D_{i+1/2} \leq 1 \quad (3.67)$$

El teorema de Harten permitirá esquivar en cierta manera los resultados del teorema de Godunov abriendo un posible camino a los esquemas de alta resolución a través de esquemas no lineales, ya que los coeficientes $C_{i-1/2}$ y $D_{i+1/2}$ dependen de los datos. Se recuerda que estos conceptos teóricos son ciertos, como se ha dicho, para la ecuación escalar homogénea.

En la construcción de esquemas TVD en lugar de aplicar directamente el teorema de Harten se utiliza otra condición algo más restrictiva pero de más fácil aplicación que es la *condición de compatibilidad de datos*: se dice que un esquema para la resolución de la ecuación escalar homogénea (3.1) es *compatible con los datos* $\{u_i^n\}$ si la solución $\{u_i^{n+1}\}$ obtenida con dicho esquema, en cada punto i está comprendida entre los valores u_{i-s}^n y u_i^n siendo s el signo de $\lambda = \partial f / \partial u$. u_{i-s}^n es el valor de la solución en el instante n en el punto upwind del punto i .

La anterior definición se puede describir como que se cumple:

$$\min(u_{i-s}^n, u_i^n) \leq u_i^{n+1} \leq \max(u_{i-s}^n, u_i^n) \quad (3.68)$$

Observando la definición de esquema TVD dada al principio del apartado, resulta que si un esquema es compatible con los datos, por la condición anterior el esquema es TVD.

Por otro lado, puede verse que esta condición de compatibilidad de datos es equivalente a requerir:

$$0 \leq \frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{u_{i-s}^n - u_i^n} \leq 1 \quad (3.69)$$

Esta última expresión es la que se utilizará luego para construir esquemas TVD.