

Capítulo 2. Flujo variable en lámina libre

2.1. Introducción

En este capítulo se presentan las ecuaciones del flujo variable del agua en lámina libre o ecuaciones de Saint Venant, ecuaciones que deben resolverse para la modelación de la propagación de avenidas en ríos (objeto de esta tesis).

En la primera parte del capítulo se deducen las ecuaciones a partir de las leyes físicas de conservación que rigen el flujo de un fluido en general. Particularizando a un fluido incompresible e isótropo, como es el agua, se obtienen las ecuaciones de Navier-Stokes para el movimiento instantáneo y de ellas se deducen, considerando variables medias en el tiempo, las ecuaciones de Reynolds. Estas serían las ecuaciones básicas que habría que resolver en el caso de flujo tridimensional de agua. Su resolución exigiría una discretización tridimensional del dominio de estudio y el esquema numérico sería complejo pero sobretodo muy costoso computacionalmente.

Como se ha comentado, la mayoría de las veces el flujo de agua en cauces naturales presenta unas características que permiten simplificar estas ecuaciones más generales y obtener resultados suficientemente precisos con mucho menos coste. De las ecuaciones de Reynolds, integrando en la profundidad para eliminar en ellas la dimensión vertical, se obtienen las ecuaciones de Saint Venant bidimensionales, válidas cuando el flujo que se quiere representar tiene también este carácter bidimensional, con velocidades verticales pequeñas, pendientes del fondo del cauce suaves, y en general, las dimensiones horizontales predominantes sobre la vertical. Gran parte de esta tesis trata la resolución de estas ecuaciones. A continuación de su deducción, en este capítulo se discuten los términos que aparecen en la forma más general de las ecuaciones de Saint Venant, y especialmente cómo se pueden aproximar y cuáles se pueden despreciar para simplificar las ecuaciones al máximo sin que dejen de representar lo mejor posible los fenómenos de propagación de avenidas en ríos que nos interesan.

La siguiente simplificación es el paso a las ecuaciones de Saint Venant unidimensionales. Ecuaciones clásicas en hidráulica que muchas veces son suficientes para representar correctamente el movimiento no permanente en lámina libre en cauces, naturales o artificiales, debido a la marcada unidimensionalidad de éstos. El objetivo final es la resolución conjunta en una y dos dimensiones, utilizando la simplificación que consiga un mejor compromiso entre precisión y economía en cada zona de nuestro dominio.

Las ecuaciones de Saint Venant forman un sistema de ecuaciones diferenciales en derivadas parciales, hiperbólico y cuasi-lineal. El estudio de este tipo de sistemas y sus soluciones, concretando para las ecuaciones de Saint Venant unidimensionales y bidimensionales, constituye la última parte de este capítulo.

La teoría de las características permite obtener formas más sencillas de expresar los sistemas de ecuaciones, formas que quizás no sirvan directamente para la obtención de la solución, pero serán una gran ayuda a la hora de formular las condiciones de contorno necesarias en los esquemas numéricos y, sobretodo, para poner de manifiesto propiedades de los sistemas hiperbólicos y sus soluciones que permitirán, en los capítulos posteriores, obtener esquemas numéricos más eficientes. Se presentan las superficies características desde un punto de vista matemático, como aquellas superficies sobre las cuales el problema de valores iniciales no está bien definido: de esta manera su significado físico se hace patente enseguida como superficies de transmisión de información privilegiadas.

Finalmente se hace hincapié en las posibles soluciones discontinuas de las ecuaciones de Saint Venant. En un cauce natural con flujo bidimensional, o incluso en el caso unidimensional, es probable que en alguna zona aparezca una discontinuidad en la solución (cambio de régimen, frente de onda). Aunque no es el objetivo final

la modelación detallada y precisa de estas discontinuidades, sí se pretende que el esquema numérico las pueda representar y no supongan un obstáculo a la obtención de la solución en el resto del dominio.

Las soluciones discontinuas de sistemas de ecuaciones diferenciales cuasi-lineales constituyen fenómenos físicos ondulatorios y tradicionalmente han constituido un objetivo prioritario en mecánica de gases. Para ello es muy útil la solución del problema de Riemann, que consiste en ver qué ondas aparecen y cómo se propagan a partir de dos estados constantes que entran en contacto de repente. El problema de Riemann está únicamente bien definido en el caso unidimensional, pero las propiedades que se obtienen de su estudio y los métodos de resolución aproximada desarrollados por varios autores (conocidos como *approximate Riemann solvers*) son la clave para la resolución del problema bidimensional. Con la discretización en volúmenes finitos del dominio bidimensional, se puede considerar que en cada contorno de cada volumen finito existe precisamente un problema de Riemann unidimensional.

Algunos de los temas tratados en este capítulo (como la discusión de los términos turbulentos de las ecuaciones, la forma de las superficies características y sus propiedades, la propagación de ondas asociadas a sistemas cuasi-lineales o la resolución del problema de Riemann) son suficientemente extensos e interesantes como para desarrollarlos mucho más de lo que se ha hecho. Aquí se ha intentado no perder de vista el objetivo final y entrar en cada uno de ellos lo necesario para justificar tan solo aquellas propiedades que serán útiles en capítulos posteriores.

2.2. Ecuaciones de Saint Venant bidimensionales

2.2.1. Leyes físicas para el flujo de un fluido en general.

El flujo de un fluido en general viene gobernado por las siguientes leyes físicas de conservación (Tan, 1992), (Bateman, 1993):

1. Ley de conservación de la masa o ecuación de continuidad

$$\frac{d}{dt}(m) = 0 \quad (2.1)$$

donde m es la masa del fluido y la expresión d/dt representa la derivada material.

2. Ley de conservación de la cantidad de movimiento (segunda ley de Newton) o ecuación del movimiento:

$$\frac{d}{dt}(m\mathbf{V}) = \mathbf{F} \quad (2.2)$$

donde \mathbf{V} es el vector velocidad y \mathbf{F} las fuerzas exteriores, que en general son vectores de tres componentes coincidentes con las tres dimensiones espaciales.

3. Propiedades termodinámicas de los fluidos (a partir de las cuales se obtienen las ecuaciones constitutivas).

4. Ley de conservación de la energía o primera ley de la termodinámica

$$\frac{d}{dt}(E) = \frac{dJ}{dt} + \frac{dW}{dt} \quad (2.3)$$

donde E es la energía de la masa m (tanto interna como mecánica), J es el calor (tanto el intercambiado con el medio como el producido por fricción o el asociado a la variación de volumen), y W es el trabajo desarrollado por las fuerzas exteriores.

5. Segunda ley de la termodinámica:

$$dS - \frac{dJ}{T} \geq 0 \quad (2.4)$$

donde S es la entropía y T la temperatura absoluta

A menudo se representa el movimiento de un fluido con las dos primeras leyes (conservación de la masa y de la cantidad de movimiento) ya que en ellas aparecen explícitamente las variables que describen el movimiento. Sin embargo, ellas solas son, en general, insuficientes para describir todos los procesos físicos que intervienen en el movimiento de un fluido (a partir únicamente de estas dos leyes se obtienen sistemas de ecuaciones con más incógnitas que ecuaciones), por lo que se necesitan las condiciones adicionales dadas por las otras tres leyes, o, por lo menos, por alguna de estas otras tres leyes.

Al considerar las propiedades termodinámicas de los fluidos se obtienen relaciones que permiten, en algunos fluidos particulares (fluidos incompresibles, agua), cerrar el sistema de ecuaciones, como serían las ecuaciones constitutivas (relación entre las tensiones y la velocidad de deformación del fluido). Para fluidos en general se obtienen las ecuaciones de estado que relacionan, por ejemplo, presión, densidad y temperatura absoluta, y que a menudo son aproximaciones más o menos empíricas a la realidad.

En la ley de conservación de la energía, la energía total de una masa m es la suma de la energía interna y la energía mecánica. Se podría suponer que el proceso de calentamiento del fluido es independiente del movimiento mecánico, con lo que podríamos descomponer la ley mencionada en dos, una relacionada con la energía interna o térmica y otra con la energía mecánica. Si consideramos además que el movimiento del fluido no depende de la temperatura, la ecuación de conservación de la energía interna, que describe el cambio de energía interna debido a la transferencia de calor (y a la deformación del fluido si éste no es incompresible) queda desacoplada del resto de ecuaciones y por lo tanto no hace falta tenerla en cuenta para el cálculo del movimiento del fluido.

Con las hipótesis del párrafo anterior, la ley de conservación de la energía mecánica tiene las mismas variables que la ley de conservación de la cantidad de movimiento, ya que el producto de ésta por la velocidad es precisamente la energía mecánica. Podríamos, por lo tanto, representar el movimiento del fluido mediante una de estas dos leyes de conservación (cantidad de movimiento o energía mecánica) juntamente con la ecuación de continuidad. De todos modos, las suposiciones hechas en el párrafo anterior respecto a la independencia de la energía mecánica y la energía interna no son exactamente ciertas, incluso pueden ser bastante inciertas en movimiento rápidamente variable (por ejemplo en la disipación de energía en un resalto hidráulico), por lo que es más correcto considerar la ecuación de continuidad junto con la de conservación de la cantidad de movimiento.

La segunda ley de la termodinámica se utiliza sobretodo como comprobación de que las soluciones obtenidas son posibles, y en concreto para rechazar algunas soluciones, posibles matemáticamente, que físicamente son incorrectas ya que violan dicha ley. Para el caso del flujo de agua en lámina libre en principio no consideramos la variación de calor, por lo que la segunda ley queda en que la variación de entropía tiene que ser mayor o igual a cero.

Con las cinco leyes mencionadas, se puede obtener un sistema cerrado de ecuaciones para cualquier fluido, aunque para flujos complejos o fluidos con propiedades termodinámicas complicadas, a menudo algunos términos son desconocidos o se basan en aproximaciones empíricas.

2.2.2. Ecuaciones de Navier-Stokes

En particular, para un fluido newtoniano, e isótropo (las propiedades del fluido no cambian con la dirección), el conjunto de leyes anteriores se concreta en las ecuaciones de Navier-Stokes, que se obtienen directamente de las ecuaciones de continuidad (2.1) y del movimiento (2.2) (Tan, 1992), (Toro, 1996).

La ecuación de continuidad será directamente la expresión de la ley de conservación de la masa.

La ecuación del movimiento, se obtiene de analizar la naturaleza de las fuerzas que actúan sobre el fluido por unidad de volumen. Estas fuerzas son las que ejerce el propio fluido más las fuerzas exteriores que puedan existir.

En la deducción de las ecuaciones se plantea el equilibrio de fuerzas sobre un volumen de control. Las fuerzas que se ejercen sobre el contorno de este volumen de control, por parte del propio fluido o de un contorno material, son unas tensiones sobre la superficie del mismo que se pueden representar con un *tensor de tensiones* σ , de manera que los elementos de la diagonal de este tensor son las fuerzas normales por unidad de superficie en el contorno del volumen y el resto de componentes serían las componentes tangenciales de dichas fuerzas. Por equilibrio de momentos se demuestra que el tensor de tensiones es simétrico. El resto de fuerzas exteriores las agrupamos bajo el término \mathbf{b} (fuerzas por unidad de masa), aunque en general sólo consideraremos la gravedad y la fuerza de Coriolis debido a la rotación de la tierra. Aplicando directamente la ley de conservación de la cantidad de movimiento con las consideraciones anteriores sobre el volumen de control, y utilizando el teorema de Gauss o de la divergencia en la superficie cerrada que es su contorno, se obtiene:

$$\rho \frac{d\mathbf{V}}{dt} = \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \rho \mathbf{b} \quad (2.5)$$

El tensor de tensiones se puede descomponer a su vez, para el caso de fluido incompresible, en la suma de dos. El primero representa su parte isótropa, que es una matriz diagonal 3x3 de componentes iguales, mientras que el resto se podría llamar tensor de tensiones viscosas $\boldsymbol{\tau}$, es decir:

$$\boldsymbol{\sigma} = -p\mathbf{I} + \boldsymbol{\tau} \quad (2.6)$$

donde \mathbf{I} representa la matriz identidad y p es un escalar que viene dado por

$$p = -\frac{\text{tr}(\boldsymbol{\sigma})}{3} \quad (2.7)$$

$\text{tr}(\boldsymbol{\sigma})$ es la traza (suma de los elementos de la diagonal) del tensor de tensiones, que para un fluido en movimiento se conoce por *presión dinámica*. Para el caso de fluidos compresibles (excepto en el caso de gases monoatómicos) esto no es exactamente cierto ya que habría que considerar la influencia de una viscosidad adicional debida a la dilatación volumétrica del fluido. Stokes formuló la hipótesis de que esta influencia se podría despreciar siempre; en este caso, de las dos ecuaciones anteriores se desprende que la traza de $\boldsymbol{\tau}$ es igual a cero.

El tensor de tensiones viscosas representa la parte no isótropa del tensor de tensiones. Sus elementos de la diagonal son las tensiones viscosas normales, mientras que el resto son las tensiones viscosas tangenciales, por lo que la hipótesis de Stokes implica que la suma de las tensiones viscosas normales es cero.

Un fluido newtoniano es aquel que cumple la ley de Newton, según la cual la tensión tangencial entre dos capas de fluido en movimiento es proporcional a la velocidad relativa entre dichas capas. Matemáticamente esto se traduce en que el tensor de tensiones totales es proporcional a la parte simétrica del tensor velocidad de deformación, y se escribe como:

$$\boldsymbol{\sigma} = 2\mu\mathbf{E} \quad (2.8)$$

Donde \mathbf{E} es la parte simétrica del tensor velocidad de deformación que, en componentes, responde a la expresión:

$$e_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (2.9)$$

donde u_k sería la componente de la velocidad en la dirección del espacio dada por x_k . μ es el coeficiente de viscosidad dinámica que relaciona el tensor de tensiones con el tensor velocidad de deformación

Sustituyendo la ley de Newton (2.8) en la ecuación (2.9), y teniéndola en cuenta a su vez en la expresión de la presión (2.7) se obtiene que:

$$\boldsymbol{\tau} = 2\mu\mathbf{E} - \frac{2\mu}{3}(\nabla \cdot \mathbf{V})\mathbf{I} \quad (2.10)$$

Esta expresión, juntamente con la ecuación del movimiento (2.2) y algunas operaciones matemáticas nos permite obtener la ecuación del movimiento para un fluido isótropo, newtoniano, que, juntamente con la ecuación de continuidad (2.1), teniendo en cuenta que la densidad del fluido ρ es precisamente la masa por unidad de volumen, constituyen las *ecuaciones de Navier-Stokes*:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{V}) = 0 \quad (2.11)$$

$$\rho \frac{d\mathbf{V}}{dt} = -\nabla p + \rho \mathbf{b} + \mu \nabla^2 \mathbf{V} + \frac{\mu}{3} \nabla(\nabla \cdot \mathbf{V}) \quad (2.12)$$

donde, como hemos visto, \mathbf{V} es el vector velocidad, ρ es la densidad del fluido, p la presión, \mathbf{b} el vector de fuerzas exteriores por unidad de masa.

En las expresiones anteriores d/dt representa la derivada material, que puede expresarse como la derivada local más la componente convectiva: $d/dt = \partial/\partial t + \nabla \mathbf{V}$. Se recuerda que el operador ∇ aplicado a un vector es la divergencia de éste, mientras que aplicado a un escalar es su gradiente. Las derivadas respecto del tiempo, d/dt , que aparecen en las leyes de conservación (2.1) a (2.3), también deben entenderse en este sentido. Los dos últimos términos de la ecuación del movimiento corresponden a la divergencia del tensor de tensiones.

Para fluido incompresible, utilizando la ecuación de continuidad (2.11), se puede ver que el último término de la derecha de la ecuación del movimiento (2.12) es igual a cero: en este caso las ecuaciones de Navier-Stokes quedarían, en componentes, de la siguiente forma:

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0 \quad (2.13)$$

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_j} + b_i + \nu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_j} \quad (2.14)$$

Donde $u_{i,j,k}$ son las tres componentes del vector de velocidad \mathbf{V} , b_i las componentes del vector de fuerzas por unidad de masa \mathbf{b} y ν el coeficiente de viscosidad cinemática $\nu = \mu/\rho$. Se utiliza la notación de Einstein donde componentes repetidas indican sumatorio. Las componentes del tensor de tensiones son entonces:

$$\tau_{ij} = \nu \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \quad (2.15)$$

En el caso de un fluido ideal, ($\mu = 0$), las ecuaciones de Navier-Stokes (2.11), (2.12) junto con la ecuación de conservación de la energía (2.3), reciben el nombre de *ecuaciones de Euler*. La búsqueda de métodos de resolución para las ecuaciones de Euler ha sido muy importante para el avance en métodos numéricos para la resolución de sistemas de ecuaciones en derivadas parciales hiperbólicos. Gran parte de los métodos de resolución para las ecuaciones en lámina libre (que guardan un gran parecido matemático con alguna de las variantes de las ecuaciones de Euler), que se explican en capítulos posteriores, y especialmente los métodos de alta resolución, fueron desarrollados en un principio para la resolución de las ecuaciones de Euler.

En concreto, las ecuaciones de Euler para flujo unidimensional con la hipótesis de que la entropía es constante en cualquier punto (ecuaciones isentrópicas), se pueden escribir como:

$$\mathbf{U}_t + \mathbf{F}(\mathbf{U})_x = \mathbf{0} \quad (2.16)$$

$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u \end{pmatrix} \quad ; \quad \mathbf{F} = \begin{pmatrix} \rho u \\ \rho u + \rho a^2 \end{pmatrix} \quad (2.17)$$

donde \mathbf{U} es el vector de variables dependientes y \mathbf{F} el vector de flujo. La *variable* u representa la velocidad del fluido y a la velocidad del sonido. El motivo de escribir aquí estas ecuaciones es poder observar luego el gran parecido que tienen con las ecuaciones del flujo de agua en lámina libre que se presentarán a continuación en este capítulo, de manera que el flujo de agua en lámina libre se puede estudiar de la misma manera que el flujo de un gas ideal compresible. Una exhaustiva exposición de las distintas versiones de las ecuaciones de Euler para fluidos con distintas propiedades, y de los métodos numéricos utilizados por distintos autores para su resolución, se puede encontrar en Toro (1996).

2.2.3. Flujo turbulento. Ecuaciones de Reynolds

Las ecuaciones de Navier-Stokes describen exactamente el flujo de un fluido newtoniano, incompresible e isotrópico. En el caso del agua, las ecuaciones son válidas tanto para el caso de movimiento laminar como para el movimiento turbulento. En movimiento laminar las velocidades son pequeñas y la viscosidad molecular es suficiente para ordenar el flujo, pero si la velocidad aumenta hay un momento en que esto ya no ocurre (como observó Reynolds en su experimento) y cualquier pequeña aspereza del contorno o perturbación del flujo tiende a desordenarlo.

Aunque las ecuaciones sigan siendo exactas, y a pesar de los grandes avances que ha habido recientemente en la tecnología de los ordenadores, en movimiento turbulento no es posible resolver exactamente las ecuaciones de Navier-Stokes. Como expone Rodi (1980) esto es debido a que el movimiento turbulento contiene elementos cuyo tamaño es muchos ordenes de magnitud más pequeño que el dominio del estudio, de manera que para poder representarlos correctamente sería necesaria una discretización aún más pequeña. En flujos reales esto requeriría por un lado una capacidad de memoria y una velocidad de los ordenadores muy por encima de las actuales; mientras que por otro lado la información necesaria para imponer adecuadamente las condiciones de contorno sería tan grande que probablemente nunca se pueda conseguir, ya que habría que representar correctamente cualquier protuberancia en los contornos sólidos y cualquier variación de las variables, tanto en el espacio como en el tiempo, en los contornos fluidos, hasta ordenes de magnitud tan pequeños como las oscilaciones turbulentas.

En la práctica el conocimiento exacto de las fluctuaciones turbulentas no posee demasiado interés; por ello el flujo turbulento se estudia considerando que cualquier variable se puede descomponer mediante la suma de una variable promedio en un cierto incremento de tiempo (corto en relación a la escala de tiempos del flujo medio pero largo comparado con las fluctuaciones turbulentas), más las fluctuaciones turbulentas. Esta idea sugerida por primera vez por Reynolds, permite expresar una variable cualquiera u como:

$$u = \bar{u} + u' \quad (2.18)$$

donde \bar{u} es la variable promediada según:

$$\bar{u} = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} u dt \quad (2.19)$$

y u' las fluctuaciones turbulentas.

Para flujos incompresibles, a partir de las ecuaciones de Navier-Stokes y promediando en el tiempo se pueden obtener las *ecuaciones de Reynolds*, que, en componentes, se pueden escribir como:

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_i} = 0 \quad (2.20)$$

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} + \bar{u}_j \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + \bar{b}_i + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_j} (\mu \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} - \rho \overline{u'_i u'_j}) \quad (2.21)$$

donde $\overline{u_{i,j,k}}$ y $u'_{i,j,k}$ son respectivamente el promedio temporal y las fluctuaciones turbulentas de las componentes de la velocidad $u_{i,j,k}$. Las ecuaciones de Reynolds son exactas tanto para el flujo laminar como para el turbulento, pues en ellas no se han introducido más suposiciones que las de las ecuaciones de Navier-Stokes. El término $\mu(\partial \bar{u}_i / \partial x_j)$ se suele denominar *tensiones laminares*, mientras que el término $-\rho \overline{u'_i u'_j}$ que representa el transporte de la cantidad de movimiento debido a las fluctuaciones turbulentas, se conoce como *tensiones turbulentas* o *tensiones de Reynolds*. Estrictamente hablando, este último no es un término de tensiones, sino que procede de realizar el promedio en el tiempo de los términos convectivos de las ecuaciones de Navier-Stokes.

Es interesante remarcar que si no fuera por las tensiones turbulentas, las ecuaciones de Reynolds para las variables promediadas coincidirían exactamente con las de Navier-Stokes para las variables instantáneas.

Para resolver las ecuaciones de Reynolds se debe determinar de alguna manera el valor de las tensiones turbulentas. Esto no se puede hacer de manera exacta y es el objetivo de los distintos modelos de turbulencia.

2.2.4. Integración vertical de las ecuaciones de Reynolds. Ecuaciones del flujo bidimensional en lámina libre o ecuaciones de Saint Venant

En gran parte de los flujos en lámina libre, y especialmente en problemas de propagación de avenidas en ríos, que son el objeto del presente trabajo, el valor de las variables cambia poco en una misma vertical. Esta consideración permite pensar en una simplificación de las ecuaciones de Reynolds a dos dimensiones mediante un promedio vertical de las ecuaciones tridimensionales. Para poder hacer esta simplificación se consideran las hipótesis siguientes:

1. Profundidad de la capa de agua pequeña con relación a las otras dimensiones del problema.
2. Distribución hidrostática de presiones en la vertical
3. Pendiente de solera reducida.

Estas tres hipótesis están estrechamente ligadas. Para que se cumpla la hipótesis de distribución hidrostática de presiones es necesario que la curvatura de las líneas de corriente sea pequeña. El cumplimiento de estas hipótesis implica además que las componentes de la velocidad y aceleración en el eje z son despreciables frente a las componentes en los otros ejes, y también que éstas últimas tienen una marcada uniformidad vertical.

Para la integración de las ecuaciones de Reynolds en la profundidad, se define la velocidad promediada como $\mathbf{U} = (u_1, u_2)$ donde cada una de las componentes es respectivamente:

$$u_1 = \frac{1}{h} \int_{z_0}^{z_0+h} \bar{u}_1 dz \quad ; \quad u_2 = \frac{1}{h} \int_{z_0}^{z_0+h} \bar{u}_2 dz \quad (2.22)$$

z es el eje de coordenadas vertical hasta ahora también llamado x_3 ; z_0 es la cota del fondo y h es la profundidad de la lámina de agua.

La integración consiste en aplicar a las ecuaciones de Reynolds (2.20), (2.21), la integral desde la cota de fondo a la de la superficie libre:

$$\int_{z_0}^{z_0+h} \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_i} dz = 0 \quad (2.23)$$

$$\int_{z_0}^{z_0+h} \left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} + \bar{u}_j \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} \right) dz = \int_{z_0}^{z_0+h} \left(-\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + \bar{b}_i + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_j} (\mu \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} - \rho \overline{u'_i u'_j}) \right) dz \quad (2.24)$$

teniendo en cuenta que la presión es la hidrostática (es decir $\nabla p = (0, 0, -\rho g)$, con g la aceleración de la gravedad).

Utilizando la regla de Leibnitz de derivación bajo el signo integral, y considerando que las únicas fuerzas por unidad de masa que actúan son la fuerza de la gravedad y la fuerza de Coriolis debida a la rotación de la tierra, las ecuaciones que se obtienen al realizar este proceso se pueden escribir como:

$$\frac{\partial z}{\partial t} + \frac{\partial (hu_1)}{\partial x_1} + \frac{\partial (hu_2)}{\partial x_2} = 0 \quad (2.25)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (hu_1) + \frac{\partial}{\partial x_1} (hu_1^2) + \frac{\partial}{\partial x_2} (hu_1 u_2) = -gh \frac{\partial}{\partial x_1} (h + z_0) - \frac{\tau_{0x_1} + \tau_{sx_1}}{\rho} + fhu_2 + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_1} (hT_{x_1 x_1}) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_2} (hT_{x_1 x_2}) \quad (2.26)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(hu_2) + \frac{\partial}{\partial x_1}(hu_1u_2) + \frac{\partial}{\partial x_2}(hu_2^2) = -gh \frac{\partial}{\partial x_2}(h+z_0) - \frac{\tau_{0x_2} + \tau_{sx_2}}{\rho} + fhu_1 + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_1}(hT_{x_1x_2}) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_2}(hT_{x_2x_2}) \quad (2.27)$$

donde τ_0 y τ_s son los tensores de tensiones (de segundo orden) contra el fondo y la superficie libre respectivamente, f el coeficiente de Coriolis para tener en cuenta la rotación de la tierra (2.2.5.6), mientras que $T_{x_ix_j}$ responden a la expresión:

$$T_{x_ix_j} = \frac{1}{h} \int_{z_0}^{z_0+h} \left(\rho v \left[\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right] - \overline{\rho u'_i u'_j} - \rho (\bar{u}_i - u_i)(\bar{u}_j - u_j) \right) dz \quad (2.28)$$

y se conocen por *tensiones efectivas* (2.2.5.7), ya que contienen términos que no son estrictamente tensiones sino que proceden del promedio temporal para la deducción de las ecuaciones de Reynolds y del promedio en la vertical que hemos hecho al deducir las ecuaciones (2.23), (2.24).

Las ecuaciones (2.25), (2.26) y (2.27) son las *ecuaciones bidimensionales del flujo en lámina libre* o *ecuaciones de Saint Venant bidimensionales* en su expresión más completa en *forma conservativa*. Introduciendo la ecuación de continuidad en las ecuaciones del movimiento, se pueden escribir estas mismas ecuaciones en *forma no conservativa* como:

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial(hu_1)}{\partial x_1} + \frac{\partial(hu_2)}{\partial x_2} = 0 \quad (2.29)$$

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} + u_1 \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + u_2 \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + g \frac{\partial h}{\partial x_1} = -g \frac{\partial z_0}{\partial x_1} - \frac{\tau_{0x_1} + \tau_{sx_1}}{\rho h} + fu_2 + \frac{1}{\rho h} \frac{\partial}{\partial x_1}(hT_{x_1x_1}) + \frac{1}{\rho h} \frac{\partial}{\partial x_2}(hT_{x_1x_2}) \quad (2.30)$$

$$\frac{\partial u_2}{\partial t} + u_1 \frac{\partial u_2}{\partial x_1} + u_2 \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + g \frac{\partial h}{\partial x_2} = -g \frac{\partial z_0}{\partial x_2} - \frac{\tau_{0x_2} + \tau_{sx_2}}{\rho h} + fu_1 + \frac{1}{\rho h} \frac{\partial}{\partial x_1}(hT_{x_1x_2}) + \frac{1}{\rho h} \frac{\partial}{\partial x_2}(hT_{x_2x_2}) \quad (2.31)$$

2.2.5. Discusión sobre los distintos términos de las ecuaciones de Saint Venant

2.2.5.1 Aceleración local

Los términos de aceleración local $\partial u_1/\partial t$ y $\partial u_2/\partial t$ representan la variación de la velocidad con el tiempo en un punto fijo. Son los responsables del carácter no permanente del flujo.

2.2.5.2 Aceleración convectiva

Son los términos, $u_1 \partial u_1/\partial x_1$, $u_1 \partial u_2/\partial x_1$, $u_2 \partial u_1/\partial x_2$ y $u_2 \partial u_2/\partial x_2$ que representan el efecto del transporte con el flujo del gradiente de la velocidad. Son los responsables de la formación de vórtices, y su efecto es más importante cuanto mayor sea el número de Reynolds (relación entre fuerzas viscosas y fuerzas de inercia), como se desprende de un análisis adimensional de las ecuaciones. En presencia de altas velocidades o pequeña viscosidad, y desde el punto de vista matemático, son los responsables de la no-linealidad del sistema de ecuaciones.

La suma de la aceleración local y la convectiva es la derivada material, que representa la aceleración total de las partículas del fluido.

2.2.5.3 Pendiente de la superficie libre

Es el término $\partial/\partial x_i(h+z_0)$, que multiplicado por la aceleración de la gravedad g , representa la acción de las fuerzas gravitatorias, y se ha obtenido integrando en la vertical el término $-\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i}$ de las ecuaciones de

Reynolds utilizando la hipótesis de presión hidrostática.

Este término se puede descomponer en la suma de la pendiente del fondo ($S_{\alpha x_1} = -\partial z_o / \partial x_1$, $S_{\alpha x_2} = -\partial z_o / \partial x_2$) y el gradiente del calado, dónde la primera es conocida ya que depende sólo de la geometría del problema. La pendiente del fondo es la principal responsable de la no homogeneidad de las ecuaciones, y su presencia aumenta la complejidad de los esquemas numéricos de resolución de forma considerable.

2.2.5.4 Tensiones en el fondo

Los términos debidos a la fricción contra el fondo $\tau_0 / \rho h$ tienen un efecto no lineal de retardo del flujo. Aproximando el radio hidráulico por el calado se tiene $\tau_0 = \rho g h S_f$ (Chaudhry 1993), donde S_f es la pendiente motriz. Para ésta, una expresión comúnmente utilizada es la fórmula de Manning. Con ella, para el caso de flujo bidimensional, la pendiente motriz se puede calcular como:

$$S_{f x_1} = \frac{u_1 \sqrt{u_1^2 + u_2^2} n^2}{h^{4/3}} \quad ; \quad S_{f x_2} = \frac{u_2 \sqrt{u_1^2 + u_2^2} n^2}{h^{4/3}} \quad (2.32)$$

donde n es el coeficiente de rugosidad de Manning.

La fórmula de Manning se puede contemplar como un caso particular de la fórmula de Chezy:

$$S_{f x_1} = \frac{u_1 \sqrt{u_1^2 + u_2^2}}{C^2 h} \quad ; \quad S_{f x_2} = \frac{u_2 \sqrt{u_1^2 + u_2^2}}{C^2 h} \quad (2.33)$$

donde C es el coeficiente de Chezy. Para $C = h^{1/6} / n$ se obtiene la fórmula de Manning.

Cuando no se considera ningún modelo de turbulencia, lo cual es muy común en modelación de flujo en canales y cauces naturales como veremos más adelante, la disipación de energía debida a las tensiones efectivas se puede suponer que se incluye en la pendiente motriz, es decir, mediante la fórmula de Manning no se pretende aproximar solamente el efecto de las tensiones en el fondo, sino también el efecto de todo el termino de tensiones efectivas.

2.2.5.5 Tensiones tangenciales en la superficie libre

La presencia de tensiones tangenciales en la superficie libre τ_s puede ser importante en grandes superficies con vientos fuertes. Existen distintas fórmulas propuestas para estimar este término, que tiene importancia principalmente para estudios oceanográficos, a partir de la velocidad del viento (Cunge, 1980), (Tan, 1992).

2.2.5.6 Fuerzas por unidad de masa

Las fuerzas por unidad de masa que actúan sobre el fluido son, en general, la fuerza de gravedad y la fuerza geostrófica o de Coriolis.

La primera, que en las ecuaciones de Navier-Stokes se representaba con el término del gradiente de presiones, queda, al realizar la integración en la vertical, como la pendiente de la superficie libre de la cual ya se ha hablado (apartado 2.2.5.3).

La segunda se puede escribir como:

$$\mathbf{b}_c = \begin{pmatrix} f u_2 \\ -f u_1 \end{pmatrix} \quad (2.34)$$

donde \mathbf{b}_c es el vector de fuerza de Coriolis y $f = 2\omega \sin \lambda$ es el coeficiente de Coriolis, con ω la velocidad angular de rotación de la tierra y λ la latitud, dando lugar a los términos correspondientes de las ecuaciones.

En este apartado también se podría incluir el efecto de las mareas, que es también una fuerza por unidad de masa debida a la atracción de la luna y del sol. Este término tendría un efecto no despreciable tan solo para masas de

agua de tamaño muy grande, como los mares y océanos, pero no tanto en ríos. Su estudio no es el objeto de esta tesis y por tanto no lo consideramos.

2.2.5.7 Tensiones efectivas

La expresión (2.28) de las tensiones efectivas muestra que éstas constan de tres contribuciones. El primer sumando es el término de *tensiones viscosas* (o tensiones viscosas laminares), el único de los tres que representa unas tensiones reales, debido a la viscosidad del fluido.

El segundo término de las tensiones efectivas son las *tensiones turbulentas*, fruto del promedio temporal de las ecuaciones de Navier-Stokes para obtener las ecuaciones de Reynolds en variables promediadas. Para flujos turbulentos desarrollados las tensiones viscosas laminares son mucho más pequeñas que las turbulentas y sólo tienen importancia en una pequeña capa próxima a los contornos (Nezu, 1993), por lo que, o bien se suelen despreciar o bien se consideran conjuntamente con las segundas mediante un modelo de turbulencia. El intento de modelar correctamente las tensiones turbulentas ha dado origen a toda la teoría de turbulencia y a los distintos modelos de turbulencia (apartado 2.2.6). Para flujo gradualmente variable la importancia de este término con respecto a las tensiones del fondo suele considerarse despreciable (apartado 2.2.6.3).

Finalmente el tercer término o término de *tensiones convectivas* resulta de la integración sobre la profundidad de los términos convectivos tridimensionales. Este término, también llamado término de *dispersión* (Nezu, 1993) o de *advección diferencial* (Vreughdenhil, 1994), se anularía si realmente la distribución de velocidades fuera uniforme en la vertical, y es más relevante cuanto más nos alejamos de la hipótesis de presión hidrostática. Es un término únicamente fruto del promedio en la vertical, por lo que no tiene nada que ver con los fenómenos turbulentos. Pese a que ha habido algunos intentos de modelar este término, ello no tiene demasiado sentido ya que solamente es importante cuando nos alejamos de las hipótesis de deducción de las ecuaciones, es decir, cuando éstas dejan de ser válidas. En el caso de no poder despreciar las tensiones convectivas, habría que considerar flujo tridimensional con sus correspondientes ecuaciones (Nezu, 1993).

2.2.6. Consideraciones sobre turbulencia

2.2.6.1 Descripción física de la turbulencia

La turbulencia, o fluctuaciones de las partículas alrededor de una trayectoria media, se puede describir físicamente como una serie de movimientos en forma de vórtice o torbellino que cubren un amplio rango de tamaños con su correspondiente espectro de frecuencias de fluctuación. La distribución de los vórtices es altamente aleatoria y no permanente en el tiempo. Los vórtices más grandes, asociados con frecuencias de fluctuación más bajas, vienen provocados por las condiciones de contorno del flujo y su tamaño puede ser del mismo orden de magnitud que las ondas del flujo medio. Los vórtices más pequeños, asociados con altas frecuencias de fluctuación, son producidos por las fuerzas viscosas. El espectro de tamaños de vórtice aumenta con el número de Reynolds. Rodi (1980) y Nezu (1993) hacen una descripción detallada de los fenómenos turbulentos.

Los vórtices más grandes contribuyen al transporte de la cantidad de movimiento. Al ser del mismo orden de magnitud que el flujo medio, los vórtices interfieren con éste sustrayéndole energía cinética. A su vez estos vórtices más grandes nutren a los más pequeños de manera que la energía cinética se va transmitiendo hacia vórtices cada vez más pequeños y finalmente es disipada por las fuerzas viscosas. Vemos pues, que aunque la disipación de energía tiene lugar en los vórtices más pequeños, la energía cinética que pasa del movimiento medio al movimiento turbulento, y por tanto la energía que finalmente es disipada en los procesos turbulentos, viene condicionada por las características del movimiento medio y de los vórtices de mayor tamaño.

Los vórtices mayores, de la misma manera que el movimiento medio, vienen condicionados por las condiciones de contorno del problema. En las hipótesis de aguas poco profundas, el movimiento horizontal predomina sobre el vertical, y esto es cierto tanto para el movimiento medio como para las fluctuaciones turbulentas de mayores tamaños. Esta sensibilidad a una dirección se va perdiendo a medida que consideramos vórtices más pequeños hasta el punto que, si el flujo es turbulento desarrollado, el movimiento de los vórtices a escala más pequeña es isótropo.

Matemáticamente, los modelos de turbulencia consisten en aproximar de alguna manera el término correspondiente a las tensiones de Reynolds relacionándolo con las variables medias, de modo que los modelos de turbulencia no describen los detalles de las fluctuaciones turbulentas, sino el efecto de dichas fluctuaciones sobre las variables medias. La mayoría de modelos de turbulencia se han desarrollado para flujos en tres dimensiones, aunque se encuentran varios ejemplos de aplicación a las ecuaciones promediadas en la profundidad.

2.2.6.2 Viscosidad turbulenta y modelos de turbulencia

La primera propuesta para modelar las tensiones turbulentas, y en la que se basan la mayor parte de modelos de turbulencia existentes fue formulada por Bousinesq y se trata del concepto de *viscosidad turbulenta* o *viscosidad de remolino*. Bousinesq supuso que, al igual que pasa con el movimiento laminar, las tensiones turbulentas son proporcionales al gradiente de la velocidad media, de manera que se pueden escribir, para el caso general de movimiento tridimensional, como :

$$-\overline{u'_i u'_j} = \nu_t \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} k \delta_{ij} \quad (2.35)$$

donde ν_t es la viscosidad turbulenta o viscosidad de remolino, δ_{ij} es la delta de Kronecker y k la energía cinética media por unidad de masa de la turbulencia:

$$k = \frac{1}{2} \overline{(u_i u_i)} \quad (2.36)$$

de esta manera la suma de las tensiones turbulentas normales $-\overline{u'_i u'_i}$ es precisamente la energía cinética k (Rodi, 1980), (Nezu, 1993), (Berezowsky, 1993).

Al sustituir la expresión de las tensiones turbulentas en las ecuaciones de Reynolds se obtienen unas ecuaciones donde, en principio, las únicas incógnitas son las variables promediadas en el tiempo. El problema ahora consiste en determinar la viscosidad turbulenta ν_t . Esta viscosidad turbulenta no es una propiedad del fluido sino que depende del estado de la turbulencia y puede variar de un punto a otro y a lo largo del tiempo.

Aunque existen algunos modelos de turbulencia que no utilizan el concepto de viscosidad turbulenta, estos son la minoría y prácticamente no se han utilizado en hidráulica (Nezu, 1993). Si se acepta el concepto de viscosidad turbulenta, los modelos de turbulencia se pueden clasificar en el número de ecuaciones que hace falta añadir para determinar el coeficiente ν_t .

Los modelos más sencillos serían pues los modelos de cero ecuaciones, y entre ellos, el más elemental sería el que supone un valor de ν_t constante en todo el fluido. Como destaca Rodi (1980), este tipo de modelos no tienen nada que ver con la modelación de la turbulencia, ya que no pueden tener en cuenta diferencias en la propia turbulencia en puntos distintos. El modelo de viscosidad turbulenta constante más sencillo y quizá más utilizado (modelo MIKE21), (Menéndez, 1985), (Molls y Chaudry, 1995), (Ponce, 1991), (Szymkiewicz, 1993), (Tingsanchali y Chirananont, 1991), (modelo RMA-2), propuesto por primera vez por Kuipers y Vreughdenhil (1973) supone que los términos correspondientes a las tensiones efectivas en las ecuaciones de Saint Venant bidimensionales (2.29) (2.30) (2.31) se pueden escribir como:

$$\frac{1}{\rho h} \frac{\partial}{\partial x_1} (h T_{x_1 x_1}) + \frac{1}{\rho h} \frac{\partial}{\partial x_2} (h T_{x_1 x_2}) = \nu_t \left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_2^2} \right) \quad (2.37)$$

$$\frac{1}{\rho h} \frac{\partial}{\partial x_1} (h T_{x_1 x_2}) + \frac{1}{\rho h} \frac{\partial}{\partial x_2} (h T_{x_2 x_2}) = \nu_t \left(\frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_2^2} \right) \quad (2.38)$$

mientras que otros utilizan las expresiones resultantes de sustituir (2.35) (2.36) en (2.28) y despreciar las tensiones viscosas y convectivas (Ambrosi, 1994), (Molinaro, Di Filippo y Ferrari, 1994), (Molls y Chaudry, 1995), (modelo HIVEL2D), obteniéndose:

$$T_{x_1x_1} = \frac{2\rho v_t}{h} \frac{\partial(hu_1)}{\partial x_1} \quad (2.39)$$

$$T_{x_1x_2} = \frac{\rho v_t}{h} \left(\frac{\partial(hu_1)}{\partial x_2} + \frac{\partial(hu_2)}{\partial x_1} \right) \quad (2.40)$$

$$T_{x_2x_2} = \frac{2\rho v_t}{h} \frac{\partial(hu_2)}{\partial x_2} \quad (2.41)$$

Los modelos de turbulencia propiamente dichos más sencillos serían los que relacionan directamente v_t con la velocidad media o su gradiente. Estos modelos, también de cero ecuaciones, suponen que la turbulencia se disipa donde se genera, es decir, no tienen en cuenta el transporte de la turbulencia (o de las variables que la caracterizan). El primer modelo en este sentido fue el modelo de longitud de mezcla de Prandtl, que supone que la viscosidad turbulenta es proporcional a una media de la velocidad turbulenta y a una longitud característica o longitud de mezcla. La primera puede escribirse en función de la segunda, por lo que la longitud de mezcla es un parámetro que necesita especificarse a partir de la experiencia.

En la realidad la turbulencia en una zona puede depender de la turbulencia generada en otra, o de la turbulencia generada en el pasado. Para poder tener en cuenta este transporte de la turbulencia, se desarrollaron una serie de modelos que utilizan ecuaciones de transporte para algunas cantidades que caracterizan la turbulencia. El más utilizado de ellos es el llamado modelo $k-\varepsilon$ que supone que el coeficiente de viscosidad turbulenta se puede escribir como:

$$v_t = C_\mu \frac{k^2}{\varepsilon} \quad (2.42)$$

donde C_μ es una constante empírica, k es la energía cinética de la turbulencia y ε su tasa de disipación. Para calcular v_t se añaden al sistema de ecuaciones dos ecuaciones de transporte (para k y ε) que permiten calcular k y ε y que deben ser resueltas conjuntamente con la ecuación de continuidad y la del movimiento (Berezowsky, 1993), (Chaudhry, 1993), (Shettar y Murthy, 1996).

2.2.6.3 Turbulencia en el flujo en lámina libre

La mayoría de modelos para la resolución de las ecuaciones del flujo en lámina libre o bien no incluyen ningún modelo de turbulencia, de manera que el efecto de la turbulencia se tiene en cuenta solamente en el término de fricción contra el fondo (Alcrudo, 1992), (Alcrudo y García-Navarro, 1994), Aral, Zhang y Jin, 1998), (Bechteler, Nujic y Otto, 1994), (Beffa y Faeh, 1994), (Benkhaldoun, 1994), (Franco, 1996), (Bonillo, Vázquez, Suárez y Puertas, 1998), (Braqschi, Dadone y Gallati, 1994), (Cetina y Rajar, 1994), (D'Alpaos y Delfina, 1994), (Di Gianmarco y Todini, 1994), (Elliot y Chaudhry, 1989), (Fennema y Chaudhry, 1989), Fracarollo y toro, 1995), (Glaister, 1988), (Jimenez y Chaudhry, 1987), (Katopodes, 1984), (Molinero, 1992), (Naa'im y Brugnot, 1994), (Paquier, 1994), (Rajar y Cetina, 1994), (Scarati, 1993), (Tan, 1992), (Urban y Zielke, 1985), (Valiani, 1992), Zhang y Cundy, 1989), (Zhao, Shen, Tabios III, Lai y Tan, 1994), (Zhao, Shen, Tabios III, Lai, 1996), o bien utilizan un coeficiente de viscosidad turbulenta constante (Ambrosi y Saleri, 1994), (modelo MIKE21), (TELEMAC), (Menéndez, 1985), (Molinero, Di Filippo y Ferrari, 1994), (Molls y Chaudry, 1995), (Ponce y Yabusaki, 1991), (Riccardi, 1994), (Szymkiewicz, 1993), (Tingsanchali y Chirananont, 1991), (modelo RMA-2), (Valiani, 1992), (modelo HIVEL2D), (Vázquez-Cendón, 1996), (Villanueva, 1999), (Brufau, 2000). En alguna ocasión se ha utilizado un modelo de turbulencia $k-\varepsilon$ (Cetina y Rajar, 1994), (Shettar y Murthy, 1996) e incluso un modelo de longitud de mezcla (Leclerc, 1990).

Para el cálculo hidrodinámico en cursos de agua naturales, pretender modelar correctamente la turbulencia mediante un coeficiente de viscosidad turbulenta constante no tiene demasiado sentido (Rodi, 1980), (Nezu, 1993). En la mayor parte de las aplicaciones los términos de las tensiones turbulentas suelen ser despreciables comparados con otros términos y el único efecto notable de la turbulencia es a través de las tensiones en el fondo; aquí la inclusión de un modelo de turbulencia no tendría prácticamente ninguna influencia. Incluso en el caso en que los términos turbulentos fueran importantes, una correcta modelación de la turbulencia exigiría una

discretización muy fina. En las aplicaciones a ríos, lo más probable es que la discretización para tener tiempos de cálculos aceptables sea demasiado burda para poder modelar bien la turbulencia. Menéndez (1985) afirma que las tensiones efectivas tienen importancia para flujos en que la curvatura de las líneas de corriente sea comparable a la profundidad, mientras Cetina y Rajar (1994) llegan a la conclusión que un modelo refinado de turbulencia no aporta ninguna mejora a la modelación de un flujo rápidamente variable en un ensanchamiento brusco, mediante la comparación de un modelo físico con dos modelos numéricos: uno sin considerar los términos turbulentos y otro incorporando un modelo $k - \varepsilon$.

Algunas veces, y especialmente para esquemas numéricos de elementos finitos, se utiliza un coeficiente de viscosidad turbulenta constante para añadir cierta difusión al esquema numérico con la finalidad de hacerlo más estable, tal como se dice explícitamente en Bates, Anderson y Hervouet (1995), Leclerc (1990), y los manuales de RMA-2 y HIVEL2D, perdiéndose todo el significado físico de dicho coeficiente. El caso más extremo es el de algunos modelos comerciales (RMA-2 y HIVEL2D) que ajustan automáticamente el coeficiente para obtener esquemas estables, o que recomiendan al usuario utilizar un coeficiente suficientemente grande para estabilizar el esquema, pero a la vez lo más pequeño posible para que la solución no se aleje demasiado de la realidad. También se ha justificado la inclusión de un coeficiente de viscosidad turbulenta para poder obtener recirculaciones (Menéndez, 1985), (Ponce y Yabusaki, 1991), (Riccardi, 1994), (Molls y Chaudhry, 1995), entendiéndose cómo tales campos de velocidades con líneas de corriente que se cierran sobre sí mismas. Aunque la forma de las recirculaciones sí puede depender del coeficiente de viscosidad turbulenta (Riccardi, 1994), con un coeficiente constante no se está representando correctamente la turbulencia, mientras que las recirculaciones también suelen aparecer por la propia difusión numérica de los esquemas utilizados, y parece que ni siquiera un modelo $k - \varepsilon$ permite representarlas correctamente en una modelación bidimensional. (Hervouet y Janin, 1994).

En el caso de considerar un coeficiente de viscosidad turbulenta constante en definitiva se está añadiendo un parámetro más que podría servir para calibrar el modelo. La dispersión del valor de dicho coeficiente en la bibliografía es notable: $50 \text{ m}^2/\text{s}$ en (Ambrosi y Saleri, 1994), 0.001 , 1 y $100 \text{ m}^2/\text{s}$ en (Szymkiewicz, 1993), 0 y $300 \text{ m}^2/\text{s}$ en (Menéndez, 1985) y (Riccardi, 1994), 0 y $0.0012 \text{ m}^2/\text{s}$ en (Molls y Chaudhry, 1993), valores dependientes de la malla y el incremento de tiempo según $\nu_t = \alpha(\Delta x)^2/2\Delta t$ con $\alpha = 0$ y 0.1 en (Ponce, 1991) y $\alpha = 0.8$ y 0.9 en (Tingsanchali y Chirananont, 1991), y valores variables para tener estabilidad del esquema numérico (modelos RMA-2 y HIVEL2D).

Por todo lo dicho, como describen Rodi (1980) y Berezowsky (1993) y se ilustra mediante la comparación con resultados experimentales en los trabajos de Cetina y Rajar (1994), Molls y Chaudhry (1995) y Bonillo, Vázquez, Suárez y Puertas (1998) para estudios en cursos de agua naturales de una cierta dimensión espacial, donde la turbulencia se debe básicamente a la fricción y el movimiento es principalmente horizontal (hipótesis de aguas poco profundas), el uso de modelos de turbulencia no parece necesario ni se puede asegurar que éstos den buenos resultados con discretizaciones normales; incluso se discute desde un punto de vista teórico la propiedad de representar la turbulencia mediante un modelo bidimensional (Hervouet y Janin, 1994). Podríamos decir, en cierta manera, que para el cálculo hidrodinámico el error cometido al considerar válidas las hipótesis de flujo bidimensional es del mismo orden que el error cometido al no considerar ningún modelo de turbulencia, por lo que hacerlo no aportaría mejoras sensibles a la solución mientras que sí podría añadir complejidad, restar eficiencia al esquema numérico, y añadir confusión al tener más parámetros que ajustar sin un criterio claro para hacerlo. Cualquier modelo de turbulencia contiene parámetros que deben ajustarse mediante un estudio experimental, de manera que ningún modelo de turbulencia se debería aceptar sin una buena verificación experimental.

Por otro lado, aunque el flujo medio sea eminentemente bidimensional, los fenómenos turbulentos pueden tener componentes verticales importantes que nunca se pueden modelar bien con las ecuaciones de Saint Venant bidimensionales. Un modelo de turbulencia completo en el cálculo del flujo del agua en lámina libre sí que puede tener sentido en flujos turbulentos tridimensionales (Nezu y Nakagawa, 1993), (Hervouet y Janin, 1994), y para cierto tipo de flujos (cambios de régimen, variaciones bruscas en dirección y módulo de la velocidad, etc.), utilizando entonces las ecuaciones de Reynolds tridimensionales.

Es de destacar, sin embargo, que para problemas termodinámicos donde interesa conocer distribuciones de temperatura (interviene la ecuación de la energía), o bien para problemas de dispersión de contaminantes (en los cuales se utiliza una ecuación de conservación para la concentración), aparece un flujo turbulento de calor o concentración que sí es importante frente a los otros términos de la ecuación, y debe ser modelado correctamente. Por ello, en estudios termodinámicos o de dispersión de contaminantes, es conveniente utilizar un modelo de turbulencia completo (Mohammadi y Pironneau, 1994), (Bonillo, Vázquez, Suárez y Puertas, 1998).

En este tipo de estudios a menudo se han utilizado esquemas que consideran un modelo de turbulencia (más o menos complejo) en la ecuación de conservación de la energía o concentración, pero no lo hacen en las ecuaciones de continuidad ni del movimiento.

2.2.7. Simplificación de las ecuaciones de Saint Venant en dos dimensiones

Tras la discusión del apartado anterior, si no se considera la fuerza de Coriolis, que para cauces de ríos no suele ser significativa, ni las tensiones efectivas, que tienen poca importancia con respecto a los otros términos, ni las tensiones producidas por el viento en la superficie libre, se pueden escribir las ecuaciones de Saint Venant bidimensionales como:

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial(hu)}{\partial x} + \frac{\partial(hv)}{\partial y} = 0 \quad (2.43)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(hu) + \frac{\partial}{\partial x}(hu^2 + g\frac{h^2}{2}) + \frac{\partial}{\partial y}(huv) = gh(S_{0x} - S_{fx}) \quad (2.44)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(hv) + \frac{\partial}{\partial x}(huv) + \frac{\partial}{\partial y}(hv^2 + g\frac{h^2}{2}) = gh(S_{0y} - S_{fy}) \quad (2.45)$$

donde se ha utilizado la notación x e y para las direcciones x_1 y x_2 , así como u y v para u_1 y u_2 .

En este sistema de ecuaciones, con el que se trabajará en adelante, se ha supuesto pues que el efecto de la fuerza de Coriolis y la tensión debida al viento en la superficie libre son despreciables teniendo en cuenta la naturaleza de los problemas en los que se centra este trabajo, aunque su inclusión en el esquema numérico puede hacerse sin dificultad. Tampoco se ha considerado aquí ningún modelo de turbulencia, por lo que la disipación de los términos de tensiones efectivas solamente se puede tener en cuenta, de manera muy aproximada, en el término de la pendiente motriz, juntamente con las tensiones de fondo.

Utilizando notación vectorial, se pueden escribir estas ecuaciones de Saint Venant en dos dimensiones en forma conservativa como:

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{U} + \nabla \mathbf{F} = \mathbf{H} \quad (2.46)$$

donde \mathbf{U} es el vector de variables de flujo, \mathbf{F} es *el tensor de flujo* y \mathbf{H} es el término independiente o término fuente, que responden a las expresiones:

$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} h \\ hu \\ hv \end{pmatrix}; \mathbf{F} = \begin{pmatrix} hu & hv \\ hu^2 + g\frac{h^2}{2} & huv \\ huv & hv^2 + g\frac{h^2}{2} \end{pmatrix}; \mathbf{H} = \begin{pmatrix} 0 \\ gh(S_{0x} - S_{fx}) \\ gh(S_{0y} - S_{fy}) \end{pmatrix} \quad (2.47)$$

La ecuación (2.46) consta de tres términos. Como se desprende del planteamiento que se ha hecho de las ecuaciones a partir de las leyes de conservación, el primer término representa la variación temporal local de las variables hidráulicas: masa y cantidad de movimiento; el segundo término representa la variación espacial de los flujos de dichas cantidades; el tercer término (término independiente) representa la ganancia o pérdida de masa y cantidad de movimiento por unidad de tiempo en un volumen diferencial que se mueve con el fluido. Evidentemente la variación de masa debe de ser nula, por lo que la primera componente del vector de variables independientes es cero.

La contribución exterior a la cantidad de movimiento, con las hipótesis realizadas, tiene dos razones: la variación de energía potencial (reflejada en la pendiente del fondo) y las fuerzas de fricción con el contorno (reflejada en la pendiente motriz).

Las ecuaciones de Saint Venant son un caso concreto de sistema de ecuaciones diferenciales en derivadas parciales hiperbólico, cuasi-lineal y con término independiente. Las propiedades de este tipo de sistema, cuyo conocimiento permite obtener métodos numéricos adecuados, se analizan en el apartado 2.4. de este capítulo.

Introduciendo la ecuación de continuidad en las ecuaciones del movimiento, o directamente a partir de las ecuaciones (2.29), (2.30) y (2.31), se pueden escribir las ecuaciones de Saint Venant en forma no conservativa como:

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial(hu)}{\partial x} + \frac{\partial(hv)}{\partial y} = 0 \quad (2.48)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + g \frac{\partial h}{\partial x} = g(S_{0x} - S_{fx}) \quad (2.49)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + g \frac{\partial h}{\partial y} = g(S_{0y} - S_{fy}) \quad (2.50)$$

Las ecuaciones de Saint Venant en forma conservativa presentan grandes ventajas a la hora de plantear esquemas de resolución que permitan obtener soluciones con discontinuidades, como se comenta en el capítulo siguiente, aparte de que son la expresión más directa de las leyes de conservación que gobiernan el fenómeno físico.

2.3. Ecuaciones de Saint Venant unidimensionales

Muchos problemas de hidráulica general, y hidráulica fluvial en concreto, tienen un carácter marcadamente unidimensional. Otras veces la unidimensionalidad no es tan clara pero el hecho de tratarlo como un problema bidimensional no es posible por distintas razones, como por ejemplo, de obtención de información necesaria.

Por otro lado el estudio de las ecuaciones unidimensionales puede ser útil al ser éstas más sencillas que las bidimensionales, pudiéndose obtener conclusiones más fácilmente y luego extenderlas a las ecuaciones bidimensionales.

Para obtener las ecuaciones de Saint Venant unidimensionales se pueden seguir dos caminos: a) a partir de las ecuaciones bidimensionales suprimir las dependencias de la dimensión y , lo que equivaldría a hacer un promedio en la anchura; esto sólo es factible para cauces rectangulares, y b) deducir directamente las ecuaciones utilizando las leyes de conservación de la masa y de la cantidad de movimiento.

El segundo camino se puede aplicar a cauces de sección arbitraria, incluso no prismáticos mientras se pueda considerar cierta la hipótesis de unidimensionalidad, es más ilustrativo sobre el significado de los distintos términos de las ecuaciones, y se puede consultar en distintas fuentes (Cunge, 1980), (Gómez, 1988), (Alcrudo, 1992), (Chaudhry, 1993), (Franco, 1996).

Las ecuaciones de Saint Venant para canal no prismático que resultan son:

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{U} + \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{F} = \mathbf{H} \quad (2.51)$$

con:

$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} A \\ Q \end{pmatrix} ; \quad \mathbf{F} = \begin{pmatrix} Q \\ \frac{Q^2}{A} + gI_1 \end{pmatrix} ; \quad \mathbf{H} = \begin{pmatrix} 0 \\ gI_2 + gA(S_0 - S_f) \end{pmatrix} \quad (2.52)$$

utilizando como variables el área de la sección mojada A y el caudal circulante Q . I_1 es la fuerza debida a la presión del agua en una sección, que puede escribirse como el momento geométrico, o momento de primer orden de la sección respecto de la superficie libre:

$$I_1 = \int_0^h (h - \eta) b(x, \eta) d\eta \quad (2.53)$$

donde b es el ancho superficial y h el calado. I_2 es la contribución de las fuerzas de presión del contorno definida como:

$$I_2 = \int_0^h (h - \eta) \frac{\partial b(x, \eta)}{\partial x} d\eta \quad (2.54)$$

En canales prismáticos, aunque tengan una sección cualquiera, el término I_2 es idénticamente igual a cero, mientras que en canales no prismáticos es distinto de cero. Esto, junto con el hecho de no poder poner el área como una función únicamente del calado, provoca que algunos de los métodos de alta resolución que dan muy buenos resultados en canales prismáticos y en flujo bidimensional, no lo hagan tanto cuando se modelan canales no prismáticos con las ecuaciones unidimensionales.

Para canales rectangulares, donde el área es el ancho multiplicado por el calado, las ecuaciones se pueden simplificar utilizando como variables hidráulicas el calado y el caudal, resultando:

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{U} + \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{F} = \mathbf{H} \quad (2.55)$$

con:

$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} h \\ hu \end{pmatrix} ; \quad \mathbf{F} = \begin{pmatrix} hu \\ hu^2 + g \frac{h^2}{2} \end{pmatrix} ; \quad \mathbf{H} = \begin{pmatrix} 0 \\ gh(S_0 - S_f) \end{pmatrix} \quad (2.56)$$

Esta versión, donde u representa la velocidad, es la simplificación directa de las ecuaciones bidimensionales (2.46), (2.47) a una dimensión.

Si en las ecuaciones unidimensionales para cauces no prismáticos incorporamos la ecuación de continuidad en la del movimiento, podemos obtener otra forma de las mismas ecuaciones, la forma no conservativa, como:

$$\frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} = 0 \quad (2.57)$$

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{Q^2}{A} \right) + gA \frac{\partial h}{\partial x} = gA(S_0 - S_f) \quad (2.58)$$

Para la deducción de estas ecuaciones en forma no conservativa a partir de las ecuaciones (2.51)(2.52) se ha utilizado que la derivada de I_1 respecto de la dirección x se puede escribir, utilizando la regla de Leibnitz de derivación bajo el signo integral, como:

$$\frac{\partial I_1}{\partial x} = I_2 + A \frac{\partial h}{\partial x} \quad (2.59)$$

Se pueden encontrar otras expresiones para las ecuaciones de Saint Venant en forma no conservativa, utilizando por ejemplo las variables (A, u) en lugar de (A, Q) , o fusionando la pendiente del fondo y el gradiente del calado en una sola derivada que exprese la variación de la cota de la superficie libre, etc., pero del mismo modo que en el caso bidimensional, y como se comentará en el siguiente capítulo, la forma que tiene más ventajas de cara a la obtención de soluciones en el caso más general es la forma conservativa, que además es la expresión más inmediata de las leyes de conservación.

2.4. Análisis de las ecuaciones de Saint Venant

En este apartado se realiza un análisis de las ecuaciones de Saint Venant, que forman un sistema de ecuaciones diferenciales en derivadas parciales no lineales e hiperbólico. En primer lugar se verá la definición y algunas propiedades de este tipo de sistemas, propiedades que serán fundamentales en los capítulos siguientes para la obtención de esquemas numéricos para su resolución.

Paralelamente se irá viendo como se concretan estas propiedades en el caso de las ecuaciones de Saint Venant, la estructura de su solución y algunos ejemplos básicos de flujo en lámina libre que ponen de manifiesto algunas de las propiedades más relevantes de las ecuaciones.

2.4.1. Sistemas de ecuaciones diferenciales en derivadas parciales hiperbólicos

En general podemos considerar un sistema de m ecuaciones del tipo:

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \sum_{i=1}^n \mathbf{A}_i \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x_i} = \mathbf{H} \quad (2.60)$$

donde $\mathbf{U}(\mathbf{x}, t) = (u_1(\mathbf{x}, t), \dots, u_m(\mathbf{x}, t))$ es el vector de m componentes de variables dependientes y $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$ el vector de variables independientes de n componentes. \mathbf{A}_i son matrices $m \times m$ que en general dependen de \mathbf{U} , \mathbf{x} y t , y de derivadas de \mathbf{U} con respecto de las direcciones x_i , al igual que el vector del término independiente \mathbf{H} .

Para el sistema (2.60) podemos decir que si los elementos de las matrices \mathbf{A}_i y las componentes del vector \mathbf{H} son constantes, el sistema es lineal con coeficientes constantes, si $\mathbf{A}_i = \mathbf{A}_i(\mathbf{x}, t)$ y $\mathbf{H} = \mathbf{H}(\mathbf{x}, t)$ el sistema es lineal con coeficientes variables. Si \mathbf{A}_i y \mathbf{H} dependen de \mathbf{U} pero no de sus derivadas, o sea $\mathbf{A}_i = \mathbf{A}_i(\mathbf{x}, t, \mathbf{U})$, se dice que el sistema es cuasi-lineal (un sistema cuasi-lineal es pues un caso particular de sistema de ecuaciones no lineales). Por otro lado, si $\mathbf{H} = \mathbf{0}$ el sistema es homogéneo.

Se define el sistema (2.60) como sistema hiperbólico en un punto P de (\mathbf{x}, t) si los ceros $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ del polinomio característico

$$Q(P, \boldsymbol{\alpha}, \lambda) \equiv \det \left(\sum_{i=1}^n \alpha_i \mathbf{A}_i(P) - \lambda \mathbf{I} \right) \quad (2.61)$$

son todos reales para cualquier vector unitario $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ de \mathbf{x} , y si existen m vectores propios (o más concretamente, vectores propios *por la derecha*) $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_m$ que satisfacen la ecuación

$$\left\{ \sum_{i=1}^n \alpha_i \mathbf{A}_i(P) - \lambda_j \mathbf{I} \right\} \mathbf{e}_j = 0 \quad (2.62)$$

o, lo que es lo mismo,

$$\left\{ \sum_{i=1}^n \alpha_i \mathbf{A}_i(P) \right\} \mathbf{e}_i = \lambda_i \mathbf{e}_i \quad (2.63)$$

y son linealmente independientes.

Los valores $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ son los valores propios de la matriz

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i \mathbf{A}_i(P) \quad (2.64)$$

y en el caso de que todos sean distintos se dice que el sistema es estrictamente hiperbólico.

2.4.1.1 Caso unidimensional

Consideramos el caso de un sistema de n ecuaciones diferenciales en derivadas parciales unidimensional, o sea con una sola dirección espacial y un número n cualquiera de variables dependientes. El concepto de sistema hiperbólico se puede concretar como el siguiente:

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \mathbf{A} \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x} = \mathbf{H} \quad (2.65)$$

con:

$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}; \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}; \quad \mathbf{H} = \begin{pmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_n \end{pmatrix} \quad (2.66)$$

Si los elementos a_{ij} de la matriz \mathbf{A} y las componentes h_i del vector \mathbf{H} son constantes, el sistema (2.65), (2.66) es lineal con coeficientes constantes, si $a_{ij} = a_{ij}(x, t)$ y $h_i = h_i(x, t)$ el sistema es lineal con coeficientes variables. Si \mathbf{A} depende de \mathbf{U} pero no de sus derivadas, o sea $\mathbf{A} = \mathbf{A}(x, t, \mathbf{U})$, se dice que el sistema es cuasi-lineal.

El sistema (2.65), (2.66) es hiperbólico en un dominio de (x, t) si la matriz \mathbf{A} tiene todos sus valores propios $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ reales con sus vectores propios correspondientes $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$ linealmente independientes. Si todos los valores propios son distintos, el sistema es estrictamente hiperbólico.

Una conclusión inmediata y que será de gran utilidad más adelante es que para un sistema de ecuaciones hiperbólico se puede encontrar una matriz no singular \mathbf{P} tal que \mathbf{PAP}^{-1} es una matriz diagonal con los valores propios λ_i como elementos de la diagonal. Las columnas de \mathbf{P} son los vectores propios \mathbf{e}_i .

En el caso de las ecuaciones de Saint Venant unidimensionales para canal no prismático escritas en forma conservativa (2.51), (2.52), si consideramos la matriz jacobiana \mathbf{A} del vector de flujo \mathbf{F} :

$$\mathbf{A} = \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{U}} \quad (2.67)$$

dichas ecuaciones se pueden escribir de la forma (2.65), (2.66) con \mathbf{A} dado por:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ g \frac{A}{b} - \frac{Q^2}{A^2} & 2 \frac{Q}{A} \end{pmatrix} \quad (2.68)$$

En la deducción de la expresión de \mathbf{A} se ha utilizado que la derivada del término de fuerzas de presión en una sección I_1 respecto del área es:

$$\frac{\partial I_1}{\partial A} = \frac{\partial}{\partial A} \int_0^h (h - \eta) b(x, \eta) d\eta = \frac{A(h)}{b(h)} \quad (2.69)$$

Los valores propios de la matriz \mathbf{A} se obtienen resolviendo la siguiente ecuación para λ , llamada *ecuación característica* o *polinomio característico*:

$$\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) = 0 \quad (2.70)$$

donde $\det()$ indica el determinante e \mathbf{I} la matriz identidad. Con ello se obtienen los valores propios y vectores propios:

$$\lambda_{1,2} = u \pm c \quad ; \quad \mathbf{e}_{1,2} = \begin{pmatrix} 1 \\ u \pm c \end{pmatrix} \quad (2.71)$$

En los cuales c es la celeridad y u la velocidad:

$$c = \sqrt{g \frac{A}{b}} \quad ; \quad u = \frac{Q}{A} \quad (2.72)$$

En nuestro caso los valores propios son siempre reales y distintos, y los vectores propios independientes, por lo que el sistema de ecuaciones es hiperbólico.

2.4.1.2 Caso bidimensional

En el caso de tener dos direcciones espaciales x e y tenemos un sistema de ecuaciones del tipo:

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \mathbf{A} \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x} + \mathbf{B} \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial y} = \mathbf{H} \quad (2.73)$$

con

$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} ; \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{1n} \\ \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{nn} \end{pmatrix} ; \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{1n} \\ \vdots & \vdots \\ b_{n1} & b_{nn} \end{pmatrix} ; \quad \mathbf{H} = \begin{pmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_n \end{pmatrix} \quad (2.74)$$

Concretando la definición para el caso general dada en 2.4.1, si los elementos a_{ij} y b_{ij} de las matrices \mathbf{A} y \mathbf{B} respectivamente, y las componentes h_i del vector \mathbf{H} son constantes, el sistema (2.73), (2.74) es lineal con coeficientes constantes. Si $a_{ij} = a_{ij}(x, y, t)$, $b_i = b_i(x, y, t)$ y $h_i = h_i(x, y, t)$ el sistema es lineal con coeficientes variables. Si \mathbf{A} y \mathbf{B} dependen de \mathbf{U} pero no de sus derivadas, o sea $\mathbf{A} = \mathbf{A}(\mathbf{x}, t, \mathbf{U})$ y $\mathbf{B} = \mathbf{B}(\mathbf{x}, t, \mathbf{U})$, se dice que el sistema es cuasi-lineal.

El sistema es hiperbólico en un dominio de (x, y, t) si se cumplen las siguientes dos condiciones:

1. Todos los valores propios de una matriz $\alpha_1 \mathbf{A} + \alpha_2 \mathbf{B}$ son reales, donde α_1 y α_2 son números reales que cumplen $\alpha_1^2 + \alpha_2^2 = 1$ (es decir, las componentes de un vector unitario en el plano x - y).
2. Para la matriz $\alpha_1 \mathbf{A} + \alpha_2 \mathbf{B}$ existe un sistema completo de vectores propios ortogonales.

Si los valores propios son todos distintos, la segunda condición se cumple automáticamente y se dice que el sistema es estrictamente hiperbólico.

Podemos escribir las ecuaciones de Saint Venant bidimensionales en forma conservativa (2.46), (2.47) en la forma (2.73) con:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -u^2 + gh & 2u & 0 \\ -uv & v & u \end{pmatrix} ; \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -uv & v & u \\ -v^2 + gh & 0 & 2v \end{pmatrix} \quad (2.75)$$

Entonces los valores propios de la matriz $\alpha_1 \mathbf{A} + \alpha_2 \mathbf{B}$ se obtienen de resolver la ecuación característica para λ :

$$\det(\alpha_1 \mathbf{A} + \alpha_2 \mathbf{B} - \lambda \mathbf{I}) = 0 \quad (2.76)$$

de donde se obtiene:

$$\lambda_{1,3} = \alpha_1 u + \alpha_2 v \pm \sqrt{gh} \quad ; \quad \lambda_2 = \alpha_1 u + \alpha_2 v \quad (2.77)$$

y los vectores propios:

$$\mathbf{e}_{1,3} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \pm \sqrt{gh} \end{pmatrix} \quad ; \quad \mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} \alpha_2 \\ -\alpha_1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2.78)$$

Los valores α_1 y α_2 se pueden entender como las componentes de un cierto vector de dirección $\mathbf{a} = (\alpha_1, \alpha_2)$ en el plano $x-y$, con $\alpha_1 = \cos \theta$ y $\alpha_2 = \sin \theta$, donde θ es el ángulo que forma dicha dirección con el eje x . Esta consideración tendrá importancia en el siguiente apartado a la hora de definir las superficies características y ver su significado físico.

Para las ecuaciones de Saint Venant, para toda matriz $\alpha_1 \mathbf{A} + \alpha_2 \mathbf{B}$ se cumple siempre que los tres valores propios son distintos y por lo tanto el sistema es estrictamente hiperbólico.

2.4.2. Teoría de las características

Los sistemas de ecuaciones hiperbólicos tienen un comportamiento especial, asociado con la velocidad con que la información se propaga a través del dominio de estudio (celeridad o velocidad de onda), que se pone de manifiesto con la teoría de las características. Un estudio exhaustivo de la teoría de las características para sistemas de ecuaciones diferenciales en derivadas parciales hiperbólicos se encuentra en Courant y Hilbert (1962) y también en (Jeffrey, 1976) para el caso concreto de sistemas de ecuaciones cuasi-lineales. Aquí nos centraremos en su aplicación a las ecuaciones de Saint Venant, en una y dos dimensiones, y concretamente en aquellos aspectos que nos revelan propiedades de dichas ecuaciones que luego serán útiles en la elaboración de esquemas numéricos para su resolución.

En general las características son un conjunto de direcciones privilegiadas, líneas en el espacio x,t en el caso 1D y superficies en el espacio x,y,t en el caso 2D, en las cuales el sistema de ecuaciones diferenciales se simplifica de manera considerable. En el primer caso el sistema de dos ecuaciones en derivadas parciales original se puede sustituir, en las líneas características, por otro sistema de dos ecuaciones diferenciales pero ahora en derivadas totales. En el caso 2D, lo que se consigue en las superficies características es reducir el sistema original a otro sistema de ecuaciones con una variable independiente menos.

Ambos casos se pueden ver como casos particulares de sistemas hiperbólicos multidimensionales (Jeffrey, 1976), donde las características (líneas en el caso 1D y superficies en el 2D) serían entonces un conjunto de hipersuperficies que conducen a un sistema de coordenadas natural en el cual se pueden reescribir las ecuaciones originales de una forma más sencilla. En concreto, las características serían hipersuperficies a través de las cuales una solución continua puede presentar discontinuidades en sus derivadas respecto la dirección normal a ellas, lo que veremos que es lo mismo que decir que las características actúan como elementos de transporte de este tipo de discontinuidades, que llamaremos *discontinuidades débiles* (apartado 2.5.)

Toda la teoría de las características sirve para poner de manifiesto una serie de propiedades analíticas que deben cumplir las soluciones de sistemas hiperbólicos, tanto continuas como discontinuas, y que serán fundamentales a la hora de desarrollar esquemas numéricos. Quizá el ejemplo más conocido sería el caso de los *invariantes o cuasi-invariantes de Riemann*, que son unas magnitudes que se mantienen constantes sobre las características en el caso de que el término independiente en las ecuaciones originales fuera nulo, y cuyo estudio facilita enormemente la interpretación física del sistema de ecuaciones.

Las características son líneas en (x, t) en el caso 1D, superficies en (x, y, t) en el caso 2D y en el caso más general del sistema multidimensional (2.60) serían hipersuperficies en (\mathbf{x}, t) . En este apartado, por ser el caso 2D el caso más general que se abordará en esta tesis y por simplicidad a la hora de representarlas gráficamente, se hablará siempre de superficies características. Se plantea su definición para el caso de un sistema de ecuaciones bidimensional ($n = 2$ en (2.60)) y luego, en los apartados siguientes, se concreta para las ecuaciones de Saint Venant en una y dos dimensiones. Los desarrollos y comentarios que haremos en este apartado son directamente extrapolables al caso multidimensional (n cualquiera).

Una manera de presentar matemáticamente las superficies características podría ser como aquellas superficies en (x, y, t) que no servirían como condiciones iniciales para la obtención de la solución de (2.60). Es decir, si conocemos el valor que toma la solución de (2.60) en una superficie característica de (x, y, t) , no se puede conocer el valor que toma dicha solución en puntos próximos a dicha superficie, mientras que en general sí que se puede para otras superficies cualquiera. Esta idea es equivalente a decir que conociendo los valores de la solución $\mathbf{U}(x, y, t)$ sobre una superficie característica no se puede calcular el valor de la derivada de \mathbf{U} respecto la dirección normal a dicha superficie. Conociendo dicha derivada y los valores de \mathbf{U} sobre la superficie se podrían conocer \mathbf{U} en puntos de (x, y, t) próximos a la superficie característica.

A partir de esta idea, a continuación se plantea qué relaciones matemáticas deben cumplirse para que una superficie sea característica. Se considera pues una superficie cualquiera Φ en el espacio (x, y, t) sobre la cual se conoce $\mathbf{U}(x, y, t)$ y se verá cómo se puede obtener la derivada de \mathbf{U} respecto la dirección normal a partir de los propios valores de \mathbf{U} y de sus derivadas sobre la superficie Φ . Para ello es útil ver el efecto sobre (2.60) de un cambio de coordenadas tal que en un punto determinado, la superficie Φ sea tangente a un plano coordenado, de manera que la derivada normal a Φ será precisamente la derivada respecto dicha coordenada. Para no perder de vista el significado físico del tiempo se deja esta coordenada inalterada, pero se sustituyen las coordenadas espaciales x e y por φ_1 y φ_2 de manera que las funciones $\varphi_i = \varphi_i(x, y, t)$ son funciones diferenciables respecto de sus argumentos. Se puede suponer, sin pérdida de generalidad, que la superficie Φ está asociada a la componente φ_1 de manera que la podemos representar por una ecuación $\varphi_1 = \text{constante}$. El cambio de coordenadas es pues:

$$t' = t \quad ; \quad \varphi_i = \varphi_i(x, y, t) \tag{2.79}$$

y si se supone no singular, en un entorno de Φ debe cumplirse que su jacobiano es distinto de cero:

$$J = \frac{\partial(t, x, y)}{\partial(t', \varphi_1, \varphi_2)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial t}{\partial t'} & \frac{\partial x}{\partial t'} & \frac{\partial y}{\partial t'} \\ \frac{\partial t}{\partial \varphi_1} & \frac{\partial x}{\partial \varphi_1} & \frac{\partial y}{\partial \varphi_1} \\ \frac{\partial t}{\partial \varphi_2} & \frac{\partial x}{\partial \varphi_2} & \frac{\partial y}{\partial \varphi_2} \end{vmatrix} \neq 0 \tag{2.80}$$

En términos de las nuevas variables, los operadores diferenciales que aparecen en (2.60) son:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial t'} + \frac{\partial \varphi_1}{\partial t} \frac{\partial}{\partial \varphi_1} + \frac{\partial \varphi_2}{\partial t} \frac{\partial}{\partial \varphi_2} \\ \frac{\partial}{\partial x} &= \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} \frac{\partial}{\partial \varphi_1} + \frac{\partial \varphi_2}{\partial x} \frac{\partial}{\partial \varphi_2} & \frac{\partial}{\partial y} &= \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} \frac{\partial}{\partial \varphi_1} + \frac{\partial \varphi_2}{\partial y} \frac{\partial}{\partial \varphi_2} \end{aligned} \tag{2.81}$$

de manera que el sistema se puede escribir como:

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \frac{\partial \varphi_1}{\partial t} \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial \varphi_1} + \frac{\partial \varphi_2}{\partial t} \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial \varphi_2} \right) + \mathbf{A}_1(\mathbf{U}, x, y, t) \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial x} \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial \varphi_1} + \frac{\partial \varphi_2}{\partial x} \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial \varphi_2} \right) + \\ & + \mathbf{A}_2(\mathbf{U}, x, y, t) \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial y} \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial \varphi_1} + \frac{\partial \varphi_2}{\partial y} \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial \varphi_2} \right) = \mathbf{H}(\mathbf{U}, x, y, t) \end{aligned} \quad (2.82)$$

y si tenemos en cuenta que la coordenada φ_1 es la dirección normal a la superficie Φ , la derivada que estamos buscando es $\partial \mathbf{U} / \partial \varphi_1$. Separando los términos de este tipo del resto, el sistema anterior se puede escribir de forma simplificada como

$$\mathbf{B} \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial \varphi_1} + \mathbf{R} = \mathbf{0} \quad (2.83)$$

donde \mathbf{B} es la matriz $m \times m$:

$$\mathbf{B} = \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial t} + \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} \mathbf{A}_1(\mathbf{U}, x, y, t) + \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} \mathbf{A}_2(\mathbf{U}, x, y, t) \right) \quad (2.84)$$

y \mathbf{R} un vector columna de m elementos que dependen de x , y , t , \mathbf{U} y $\partial \mathbf{U} / \partial \varphi_2$. La derivada que estamos buscando se puede obtener de (2.83) siempre que exista la inversa de \mathbf{B} , es decir, siempre que

$$\det \mathbf{B} \neq 0 \quad (2.85)$$

Ahora podemos dividir la expresión (2.85) por el módulo del gradiente de φ_1 respecto de las coordenadas x, y :

$$|\nabla_{x,y} \varphi_1| = \sqrt{\left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial y} \right)^2} \quad (2.86)$$

y considerar los valores:

$$\alpha_1 = \frac{\partial \varphi_1 / \partial x}{|\nabla_{x,y} \varphi_1|} ; \quad \alpha_2 = \frac{\partial \varphi_1 / \partial y}{|\nabla_{x,y} \varphi_1|} ; \quad \lambda = - \frac{\partial \varphi_1 / \partial t}{|\nabla_{x,y} \varphi_1|} \quad (2.87)$$

de manera que el vector (α_1, α_2) es un vector unitario en el plano x, y en la dirección del gradiente mencionado. Tenemos entonces:

$$\mathbf{B} = (-\lambda \mathbf{I} + \alpha_1 \mathbf{A}_1(P) + \alpha_2 \mathbf{A}_2(P)) |\nabla_{x,y} \varphi_1| \quad (2.88)$$

La condición (2.85) queda:

$$\det(-\lambda \mathbf{I} + \alpha_1 \mathbf{A}_1(P) + \alpha_2 \mathbf{A}_2(P)) \neq 0 \quad (2.89)$$

y debe satisfacerse en cualquier punto P de Φ para que la derivada $\partial \mathbf{U} / \partial \varphi_1$ esté únicamente determinada. Si ahora definimos el polinomio característico de (2.60) precisamente como:

$$Q(P, \boldsymbol{\alpha}, \lambda) = \det(\alpha_1 \mathbf{A}_1(P) + \alpha_2 \mathbf{A}_2(P) - \lambda \mathbf{I}) \quad (2.90)$$

podemos decir que la derivada $\partial \mathbf{U} / \partial \varphi_1$ normal a la superficie Φ estará indeterminada siempre y cuando se cumpla la condición

$$Q(P, \boldsymbol{\alpha}, \lambda) = 0 \quad (2.91)$$

en cuyo caso la superficie Φ será una superficie característica. De manera que las superficies características se pueden obtener imponiendo que se cumpla esta última ecuación. Para cada vector unitario (α_1, α_2) en el plano x - y se obtiene un polinomio característico de grado n tal que sus raíces λ determinan unos vectores $(\alpha_1, \alpha_2, -\lambda)$ que son precisamente los vectores de (x, y, t) normales a las superficies características.

Otra posible interpretación física de una superficie característica $\Phi(t, x, y) = 0$ es entenderla como las distintas posiciones que va tomando una curva determinada sobre el plano x - y que se mueve al transcurrir el tiempo t . Esta curva a veces se menciona en la bibliografía como *curva característica*, y no es más que la intersección de la superficie característica con planos $t = \text{constante}$. Estas curvas características son distintas de las *líneas características* a las que estamos acostumbrados en el caso 1D y que definiremos en el apartado 2.4.2.1, que son las superficies características particularizadas para una dimensión.

Hemos dicho que el vector $(\alpha_1, \alpha_2, -\lambda)$ es normal a una superficie característica, de manera que si consideramos ahora un corte por un plano vertical (paralelo al eje t) que contenga dicho vector, la superficie característica nos cortará este plano según una línea en la dirección de $(\lambda\alpha_1, \lambda\alpha_2, 1)$ (Figura 2.1).

Se aprecias pues que en un intervalo de tiempo igual a la unidad, una curva característica se desplazará sobre el plano físico x - y una distancia λ en la dirección normal a ella. Los valores propios λ representan entonces la velocidad con que se movería la curva característica respecto el plano físico x - y en cada instante, es decir, la velocidad de propagación de la información sobre x - y .

La derivada de la solución respecto a la dirección normal a ella está indeterminada, es decir, puede ser distinta a cada lado de la superficie. Por otro lado, una superficie característica tiene asociado siempre un valor propio λ_i , cero del polinomio característico $Q(P, \alpha, \lambda)$ y la derivada de \mathbf{U} en la dirección normal a dicha característica se puede obtener de (2.83). Para un sistema homogéneo, en la ecuación (2.83) se tiene $\mathbf{R} = \mathbf{0}$. Teniendo en cuenta (2.88) y comparando (2.83) con (2.62), resulta que, aunque no esté únicamente determinada, para un sistema hiperbólico homogéneo la derivada $\partial\mathbf{U}/\partial\varphi_k$ respecto la dirección normal a una característica debe ser proporcional al vector propio \mathbf{e}_i asociado a dicha característica. Este es un resultado importante que se utilizará posteriormente.

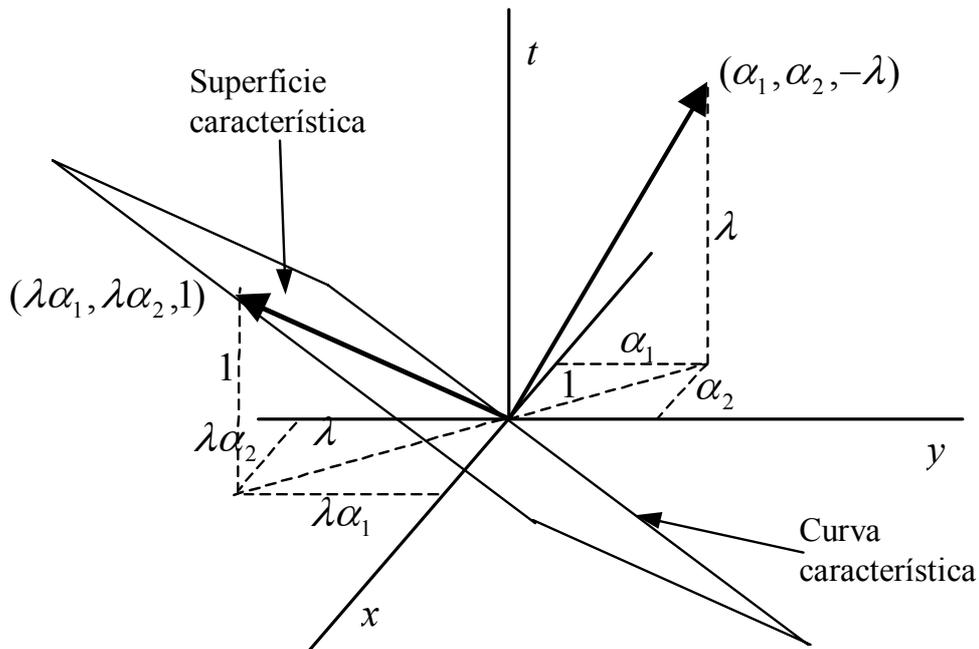


Figura 2.1. Vector normal a una superficie característica y significado físico de λ .

2.4.2.1 Ecuaciones características para las ecuaciones de Saint Venant unidimensionales para cauces prismáticos rectangulares

Teniendo en cuenta lo dicho para ecuaciones diferenciales en derivadas parciales hiperbólicas en el apartado 2.4.1.1, podemos escribir las ecuaciones de Saint Venant para cauces prismáticos rectangulares, ecuaciones (2.55)(2.56), en la forma (2.65) con la matriz jacobiana del vector de flujo siguiente:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ c^2 - u^2 & 2u \end{pmatrix} \quad (2.92)$$

donde en este caso la celeridad c responde a la expresión:

$$c = \sqrt{gh} \quad (2.93)$$

Si ahora realizamos el proceso planteado en el apartado anterior para la obtención de las superficies características (líneas en este caso), al haber una sola dimensión espacial el vector unitario $\boldsymbol{\alpha}$ que interviene en la definición del polinomio característico (2.90) se reduce a un vector unitario en la dirección x , es decir, $\alpha_1 = 1$, con lo que el polinomio característico no depende en este caso de $\boldsymbol{\alpha}$, es precisamente la ecuación (2.70) y sus raíces vienen dadas por (2.71). El vector normal a las líneas características $(\alpha_1, \alpha_2, -\lambda)$ queda ahora en (x, t) como $(1, -\lambda)$, de manera que las superficies características las podemos describir de forma diferencial con la ecuación:

$$\frac{dx}{dt} = \lambda(\mathbf{U}, x, t) \quad (2.94)$$

que utilizando el resultado (2.71) nos conduce a las ecuaciones de las dos líneas características:

$$\frac{dx}{dt} = u + c \quad ; \quad \frac{dx}{dt} = u - c \quad (2.95)$$

La primera de ellas es la dirección característica *positiva* o C^+ y la segunda la dirección característica *negativa* o C^- . De (2.94) y (2.95) podemos ver que la derivada direccional a lo largo de una línea característica se puede escribir como:

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \lambda_{1,2} \frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial t} + (u \pm c) \frac{\partial}{\partial x} \quad (2.96)$$

Como hemos visto en 2.4.1.1 el sistema es hiperbólico, y podemos encontrar una matriz de vectores propios \mathbf{P} y su inversa \mathbf{P}^{-1} :

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ u + c & u - c \end{pmatrix} \quad ; \quad \mathbf{P}^{-1} = \frac{1}{2c} \begin{pmatrix} c - u & 1 \\ u + c & -1 \end{pmatrix} \quad (2.97)$$

de manera que el producto $\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P}$ es una matriz diagonal $\boldsymbol{\Lambda}$, formada por los valores propios de \mathbf{A} :

$$\boldsymbol{\Lambda} = \begin{pmatrix} u + c & 0 \\ 0 & u - c \end{pmatrix} \quad (2.98)$$

Las columnas de la matriz \mathbf{P}^{-1} son los *vectores propios por la izquierda* de la matriz \mathbf{A} , que expresaremos como \mathbf{l}_i , de manera que tal como los vectores \mathbf{e}_i cumplen

$$\mathbf{A}\mathbf{e}_i = \lambda_i \mathbf{e}_i \quad (2.99)$$

los vectores \mathbf{l}_i cumplen

$$I_i \mathbf{A} = \lambda_i I_i \quad (2.100)$$

Si ahora sustituimos la expresión $\mathbf{A} = \mathbf{P}\mathbf{\Lambda}\mathbf{P}^{-1}$ en la ecuación (2.65) y a su vez la multiplicamos por la izquierda por la matriz \mathbf{P}^{-1} , obtenemos:

$$\mathbf{P}^{-1} \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \mathbf{\Lambda} \mathbf{P}^{-1} \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x} = \mathbf{P}^{-1} \mathbf{H} \quad (2.101)$$

o, expresándolo en componentes:

$$I_i \left(\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \lambda_i \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x} \right) = I_i \mathbf{H} \quad (2.102)$$

donde la expresión entre paréntesis es precisamente la derivada de \mathbf{U} en la dirección de las líneas características $(\lambda_i, 1)$. La ecuación (2.102) se puede entender también como una combinación lineal de las ecuaciones originales, que forman el sistema (2.55), de manera que en cada ecuación todas las componentes del vector \mathbf{U} se derivan respecto de la misma dirección, que es la de las líneas características.

Si tenemos en cuenta que $c^2 = gh$ (con lo que $gdh = 2cdc$), tras operar podemos escribir las ecuaciones de Saint Venant para canal rectangular prismático en forma característica como:

$$\frac{\partial}{\partial t}(u \pm 2c) + (u \pm c) \frac{\partial (u \pm 2c)}{\partial x} = g(S_0 - S_f) \quad (2.103)$$

La interpretación física de las ecuaciones (2.103) se encuentra ampliamente documentada en la bibliografía (Henderson, 1966), (Gómez, 1988), (Martín, 1989), (Bateman, 1993). Las variables

$$J^+ = u + 2c \quad ; \quad J^- = u - 2c \quad (2.104)$$

se conocen por el nombre de *variables características* o *cuasi-invariantes de Riemann*. En el caso particular que el término independiente \mathbf{H} fuera nulo, se conocen simplemente por *invariantes de Riemann*. Observando la expresión (2.96) de la derivada en la dirección de las líneas características, vemos que el significado de la parte izquierda de la igualdad (2.103) es precisamente la variación de los invariantes de Riemann J^+ y J^- a lo largo de las respectivas líneas características C^+ y C^- , la cual es cero si el sistema es homogéneo y toma el valor del término independiente en el caso que éste exista.

Las ecuaciones de Saint Venant sobre las líneas características, se pueden escribir pues, en derivadas totales, como:

$$\frac{d}{dt}(u \pm 2c) = g(S_0 - S_f) \quad (2.105)$$

La forma característica de las ecuaciones de Saint Venant (2.103) ha originado el método clásico de resolución de estas ecuaciones conocido como *método de las características*, con todas sus variantes dependiendo de si es explícito o implícito y de la manera como se aproxima el valor de las variables en puntos donde su valor exacto es desconocido. También el estudio de las líneas características permite conocer el dominio de dependencia y la zona de influencia de un punto del canal en un instante, el número de condiciones de contorno que se deben dar en cada instante en el extremo aguas arriba y aguas abajo del canal dependiendo del tipo de flujo, y también cómo se propagan ciertas ondas sencillas en un canal a lo largo del tiempo.

El método de las características se basa en la ecuación (2.105). Conociendo el valor de las variables hidráulicas en un punto del espacio x, t , conocemos la ecuación de las líneas características que pasan por dicho punto, ecuaciones (2.95), e integrando la ecuación en derivadas totales (2.105) a lo largo de dichas líneas podemos obtener el valor de las variables en cualquier punto de ellas. En este sentido se dice que la información de la solución se transmite a lo largo de las líneas características.

Tal como analiza detalladamente Bateman (1993), la ecuación (2.65), y en general cualquier sistema de ecuaciones hiperbólico como (2.60), se puede entender como una ecuación de onda, donde la matriz \mathbf{A} contiene la información de la velocidad de propagación de la onda y cuyas direcciones principales (líneas características en nuestro caso) se pueden obtener a partir de sus valores propios.

Los valores propios de \mathbf{A} , que son la suma de la velocidad del agua en el canal u y la celeridad de la onda de gravedad c , corresponden a la velocidad de propagación de dicha onda respecto un sistema de coordenadas fijo. El término de la celeridad c , que depende solamente de las características geométricas de la sección mojada, nos indica la capacidad que tiene el agua de transmitir información de dicha sección del canal a otra inmediatamente contigua.

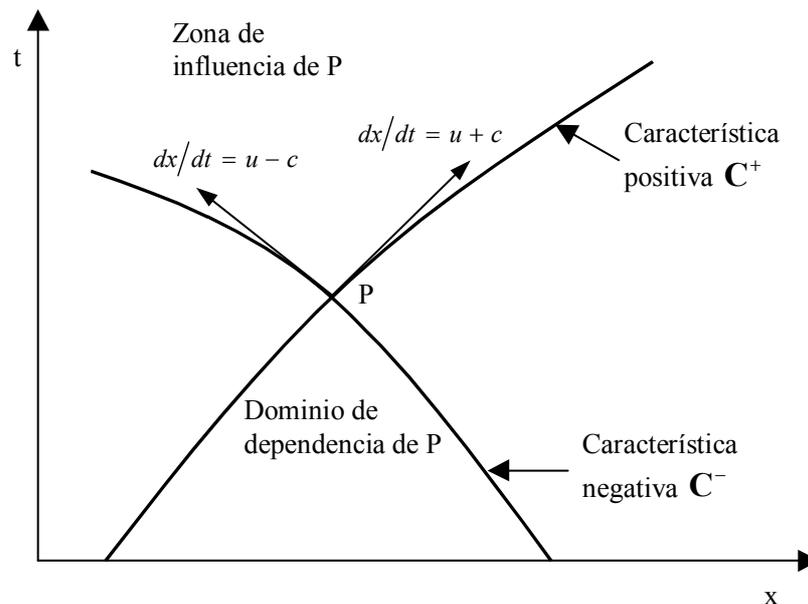


Figura 2.2. Líneas características unidimensionales en el espacio $x-t$

2.4.2.2 Ecuaciones características para las ecuaciones de Saint Venant unidimensionales para cauces cualesquiera

Para cauces de geometría irregular cualquiera las ecuaciones de Saint Venant responden a la expresión de las ecuaciones (2.51), (2.52), con la misma matriz jacobiana del vector de flujo del apartado anterior, expresión (2.92) o (2.68), pero ahora con la celeridad dada por la expresión (2.72). Las matrices \mathbf{P} y \mathbf{P}^{-1} que diagonalizan el jacobiano \mathbf{A} son las mismas que para el caso de cauce rectangular, excepto un factor de normalización:

$$\mathbf{P} = b \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ u+c & u-c \end{pmatrix} \quad ; \quad \mathbf{P}^{-1} = \frac{b}{2c} \begin{pmatrix} c-u & 1 \\ u+c & -1 \end{pmatrix} \quad (2.106)$$

Para poder obtener una expresión análoga a la ecuación (2.103) es necesario antes definir una variable auxiliar ω , llamada *variable de Escoffier*, que es en el fondo una medida del nivel de agua en un punto del cauce:

$$\omega = \int_0^A c \frac{dA}{A} = \int_0^y \sqrt{\frac{gA}{b}} \frac{bdy}{A} = \int_0^y \sqrt{\frac{gb}{A}} dy \quad (2.107)$$

de manera que, utilizando la regla de Leibnitz, podemos escribir su diferencial como:

$$d\omega = \sqrt{\frac{gb}{A}} dy \quad (2.108)$$

Mediante un proceso análogo al del apartado anterior, multiplicando la ecuación (2.51) por la izquierda por \mathbf{P}^{-1} y operando, obtenemos las ecuaciones de Saint Venant unidimensionales para cauce cualquiera en forma característica:

$$\frac{\partial}{\partial t}(u \pm \omega) + (u \pm c) \frac{\partial(u \pm \omega)}{\partial x} = g \left(\frac{I_2}{A} + S_0 - S_f \right) \quad (2.109)$$

o, en derivadas totales:

$$\frac{d}{dt}(u \pm \omega) = g \left(\frac{I_2}{A} + S_0 - S_f \right) \quad (2.110)$$

Su significado físico es el mismo que para las ecuaciones (2.103), pero ahora los cuasi-invariantes de Riemann están formados por la suma de la velocidad y la variable de Escoffier, y en el término independiente aparece una contribución más debido a la posible variación de la sección a lo largo del cauce.

2.4.2.3 Características para las ecuaciones de Saint Venant bidimensionales

Mediante la aplicación de la teoría de las características al caso bidimensional, se pretende igual que en el caso 1-D, por un lado obtener expresiones simplificadas de las ecuaciones de Saint Venant, pero sobretodo, obtener información sobre la estructura de la solución y de cómo se transmite la información de una zona a otra del dominio. En primer lugar se definirán las superficies características para luego deducir las *condiciones de compatibilidad* o relaciones que deben cumplirse sobre dichas superficies y ver su significado físico.

Las superficies características se pueden obtener, como se ha dicho, a partir de (2.91) donde α es un vector unitario cualquiera sobre el plano (x, y) .

Para aplicar la teoría presentada para el caso más general en 2.4.2, se puede partir de las ecuaciones de Saint Venant bidimensionales escritas de la forma (2.60) con $n = 2$, $\mathbf{A}_1 = \mathbf{A}$ y $\mathbf{A}_2 = \mathbf{B}$, es decir:

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \mathbf{A} \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x} + \mathbf{B} \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial y} = \mathbf{H} \quad (2.111)$$

siendo \mathbf{A} y \mathbf{B} las matrices definidas en (2.75). Con esto se puede ver que la ecuación característica (2.91) toma precisamente la forma (2.76), y se ha dicho anteriormente que cualquier vector del tipo $(\alpha_1, \alpha_2, -\lambda)$ será un vector normal a una superficie característica $\mathbf{N} = (n_x, n_y, n_t) = (\alpha_1, \alpha_2, -\lambda)$. El plano tangente a una superficie característica se puede definir entonces por la expresión $-\lambda t + \alpha_1 x + \alpha_2 y = 0$.

Los valores de λ en función de α_1 y α_2 se obtienen de igualar el polinomio característico a cero, lo que puede escribirse como:

$$\det(\alpha_1 \mathbf{A} + \alpha_2 \mathbf{B} - \lambda \mathbf{I}) = \begin{vmatrix} -\lambda & \alpha_1 & \alpha_2 \\ (c^2 - u^2)\alpha_1 - uv\alpha_2 & -\lambda + 2u\alpha_1 + v\alpha_2 & u\alpha_2 \\ (c^2 - u^2)\alpha_1 - uv\alpha_2 & v\alpha_1 & -\lambda + u\alpha_1 + 2v\alpha_2 \end{vmatrix} = 0 \quad (2.112)$$

donde c es la celeridad que en el caso bidimensional se define como:

$$c = \sqrt{gh} \quad (2.113)$$

De la ecuación (2.112) se obtienen dos ecuaciones independientes que ligan α_1 , α_2 y $-\lambda$ (componentes del vector normal \mathbf{N}), ya que operando se puede ver que para que el determinante se anule se debe cumplir una de las condiciones siguientes:

$$(-\lambda + u\alpha_1 + v\alpha_2)^2 - c^2(\alpha_1^2 + \alpha_2^2) = 0 \quad (2.114)$$

o bien:

$$-\lambda + u\alpha_1 + v\alpha_2 = 0 \quad (2.115)$$

Estas dos últimas ecuaciones dan origen a dos familias de superficies características distintas. Sobre cada una de ellas se pueden deducir una condición de compatibilidad, al estilo de lo que se ha hecho en el caso 1-D, y obtener un sistema equivalente con una variable independiente menos.

Primera familia de superficies características

La primera familia de superficies características en un punto \mathbf{P} del espacio t, x, y , y su significado físico, la obtendremos analizando el significado de la ecuación (2.114). Para ello consideraremos, sin pérdida de generalidad, que dicho punto \mathbf{P} es el origen de coordenadas.

Consideraremos el vector normal al plano tangente a una superficie característica, que para la primera familia de superficies características llamaremos $\mathbf{N}_1 = (n_{1x}, n_{1y}, n_{1t}) = (\alpha_1, \alpha_2, -\lambda)$, y recordamos que su proyección sobre el plano físico x, y es un vector unitario, o sea

$$\alpha_1^2 + \alpha_2^2 = 1 \quad (2.116)$$

Con ello, la ecuación (2.114) queda como:

$$-\lambda + u\alpha_1 + v\alpha_2 = \pm c \quad (2.117)$$

La ecuación (2.115) indica que el extremo de \mathbf{N}_1 está sobre una superficie cilíndrica de diámetro unidad y cuyo eje es el eje de coordenadas t , mientras que la ecuación (2.117) indica que dicho extremo está sobre un plano cuya posición viene determinada por los valores de u , v y c , que no pasa por el punto \mathbf{P} . Los puntos extremos de los vectores \mathbf{N}_1 normales a las superficies características, con origen en \mathbf{P} , estarán pues sobre la intersección de estas dos superficies, que es una elipse, constituyendo una superficie cónica que se conoce por el nombre de *cono normal característico*.

El plano tangente a una superficie característica, normal por el origen a cada vector \mathbf{N}_1 sobre el cono normal característico, llamado también *superficie de onda* o *simplemente plano característico*, es una aproximación local a una superficie característica de la primera familia. La envolvente de todas las superficies de onda, o sea la envolvente de la primera familia de superficies características, será también un cono y se conoce como el *cono característico*.

Para deducir la ecuación del cono característico, es conveniente buscar primero la ecuación de un plano característico $\Phi(t, x, y) = 0$, cuyo vector normal $(\alpha_1, \alpha_2, -\lambda)$ debe cumplir la ecuación (2.114). Si $\mathbf{N}'_1 = (n'_{1x}, n'_{1y}, n'_{1t})$ es un vector con misma dirección que el \mathbf{N}_1 anterior pero tal que su componente según el eje t sea la unidad, es decir $n'_{1t} = 1$, las otras dos componentes cumplirán:

$$n'_{1x} = \frac{\alpha_1}{-\lambda} \quad ; \quad n'_{1y} = \frac{\alpha_2}{-\lambda} \quad (2.118)$$

El plano característico se puede expresar, a partir de \mathbf{N}'_1 como:

$$t + n'_{1x}x + n'_{1y}y = 0 \quad (2.119)$$

Dividiendo (2.114) por $-\lambda$ y teniendo en cuenta (2.118) se obtiene la relación que deben cumplir n'_{1x} y n'_{1y} :

$$(1 + un'_{1x} + vn'_{1y})^2 - c^2(n'^2_{1x} + n'^2_{1y}) = 0 \quad (2.120)$$

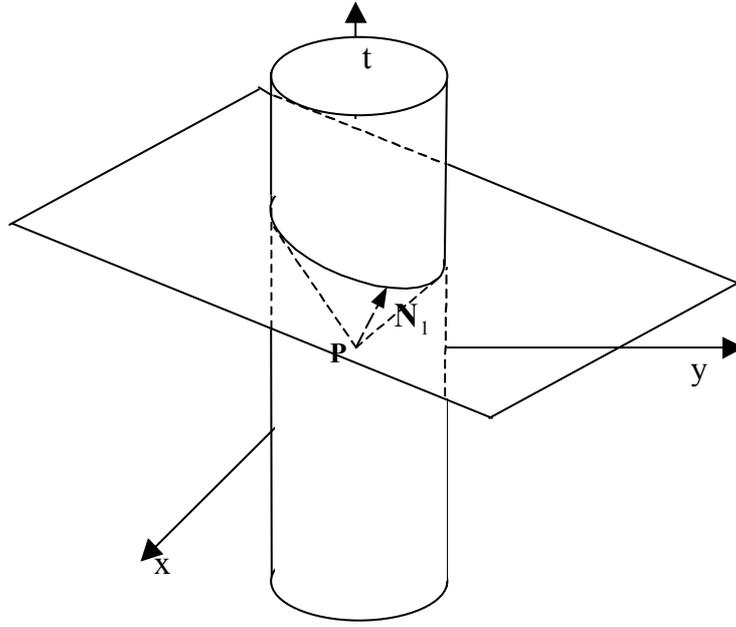


Figura 2.3. Cono normal característico

Para la obtención de la ecuación del cono característico es útil el paso a coordenadas polares

$$n'_{ix} = \rho \cos \theta \quad ; \quad n'_{iy} = \rho \operatorname{sen} \theta \quad (2.121)$$

La condición (2.120) en función de ρ y θ queda de la forma siguiente:

$$\rho = \frac{-1}{u \cos \theta + v \operatorname{sen} \theta \pm c} \quad (2.122)$$

Con lo que la ecuación del plano característico (2.119), teniendo ya en cuenta en ella la condición (2.120), se puede escribir como:

$$(u \cos \theta + v \operatorname{sen} \theta \pm c)t = x \cos \theta + y \operatorname{sen} \theta \quad (2.123)$$

Esta última ecuación es una expresión del tipo $\Phi(t, x, y, \theta) = 0$ que, variando el parámetro θ , representa a toda la familia de planos característicos. La envolvente de todos los planos, el cono característico, deberá cumplir esta ecuación y también la condición $\partial\Phi(t, x, y, \theta)/\partial\theta = 0$, ya que al movernos sobre la superficie del cono variando el valor del parámetro θ , Φ no puede variar al seguir valiendo cero por encontrarnos siempre sobre un plano característico. Derivando respecto de θ la ecuación (2.123) obtenemos la expresión:

$$(-u \operatorname{sen} \theta + v \cos \theta)t = -x \operatorname{sen} \theta + y \cos \theta \quad (2.124)$$

Se puede eliminar el parámetro θ entre las dos ecuaciones (2.123) y (2.124), elevándolas al cuadrado y sustituyendo la segunda en la primera. Así obtenemos la ecuación del cono característico:

$$(x - ut)^2 + (y - vt)^2 = (ct)^2 \quad (2.125)$$

Lo hecho es cierto en primer orden, o sea en un entorno diferencial alrededor del punto \mathbf{P} . Como los valores de u , v y c en general no son constantes en el espacio, al alejarnos de \mathbf{P} el cono característico se transforma en un conoide (Figura 2.4). Solamente en el caso de flujo uniforme el conoide sería un cono.

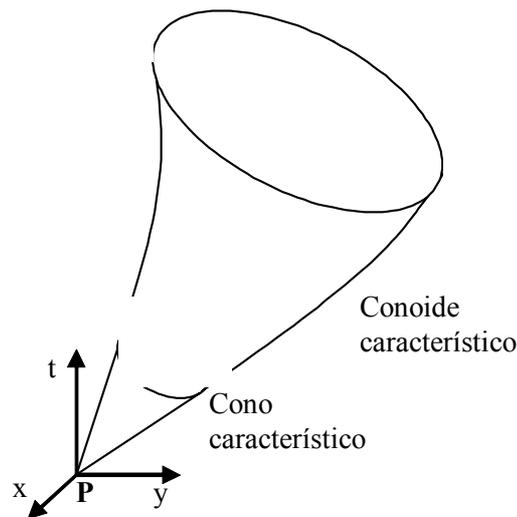


Figura 2.4. Cono y conoide característicos

El significado físico del conoide se puede entender como la trayectoria de una perturbación que empieza en su vértice y se propaga. Cada una de sus secciones circulares por un plano $t = \text{constante}$ representa la trayectoria alcanzada por la perturbación en cada instante. Las generatrices del conoide característico, que están formadas por los puntos de tangencia con las superficies características, se conocen por el nombre de *bicaracterísticas*.

De la ecuación (2.125) se desprende que el eje del cono característico es una recta que responde a la ecuación:

$$\begin{cases} x = ut \\ y = vt \\ t = t \end{cases} \quad (2.126)$$

La ecuación del cono en paramétricas se puede escribir como:

$$\begin{cases} x = (u \pm c \cos \theta)t \\ y = (v \pm c \sin \theta)t \\ t = t \end{cases} \quad (2.127)$$

Para cada valor del ángulo θ se obtiene la ecuación de una de las rectas generatrices del cono, que son las bicaracterísticas. Si se corta el cono por un plano $t = \text{constante}$ se obtiene una circunferencia con centro en el punto (ut, vt) y radio ct . La proyección sobre el plano $t = \text{constante}$ del vector normal a una superficie característica es un vector de componentes $(\cos \theta, \sin \theta)$ mientras que el vector tangente al cono en el plano $t = \text{constante}$, que está sobre la correspondiente superficie característica, es $(-\sin \theta, \cos \theta)$. Estas consideraciones serán importantes para las condiciones de contorno del esquema numérico en la resolución de las ecuaciones bidimensionales (Capítulo 5).

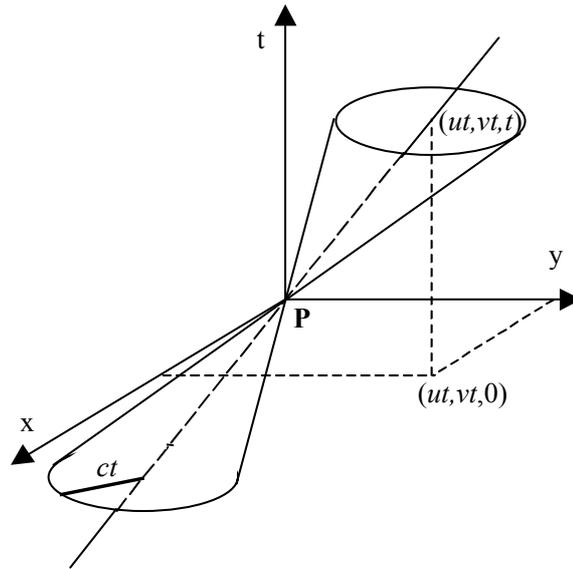


Figura 2.5. Cono característico

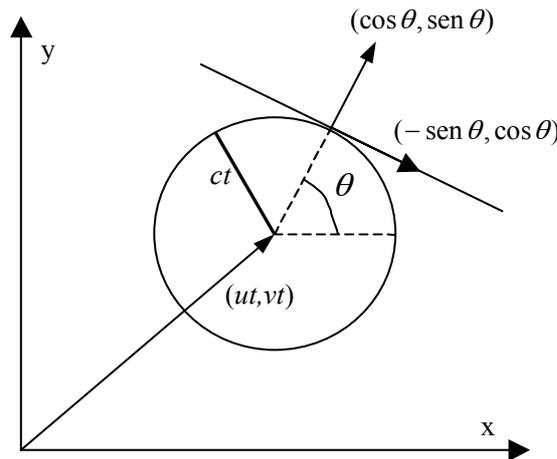


Figura 2.6. Corte del cono característico por un plano $t = \text{constante}$

Segunda familia de superficies características

Se realiza un proceso análogo al del apartado anterior, pero ahora partiendo de la condición reflejada en la ecuación (2.115). Al igual que antes, se considera un punto P donde se sitúa el origen de coordenadas, y se considera el vector $\mathbf{N}_2 = (n_{2x}, n_{2y}, n_{2t}) = (\alpha_1, \alpha_2, -\lambda)$, vector normal al plano tangente a una superficie característica de la segunda familia tal que su proyección sobre el plano x, y sea un vector unitario (ecuación (2.116)).

La ecuación (2.116) indica como antes que el extremo de \mathbf{N}_2 está sobre una superficie cilíndrica de diámetro unidad y eje el eje t , mientras que la ecuación (2.115) indica que también está sobre un plano que pasa por el origen y que depende de u y v . La intersección de este plano con la superficie cilíndrica es una elipse, que es la trayectoria de los extremos de todos los vectores \mathbf{N}_2 normales a las superficies características. El plano mencionado, sobre el cual reposan los vectores normales \mathbf{N}_2 , se denomina *plano normal característico* (Figura 2.7), que es el equivalente para la segunda familia al cono normal característico de la primera familia.

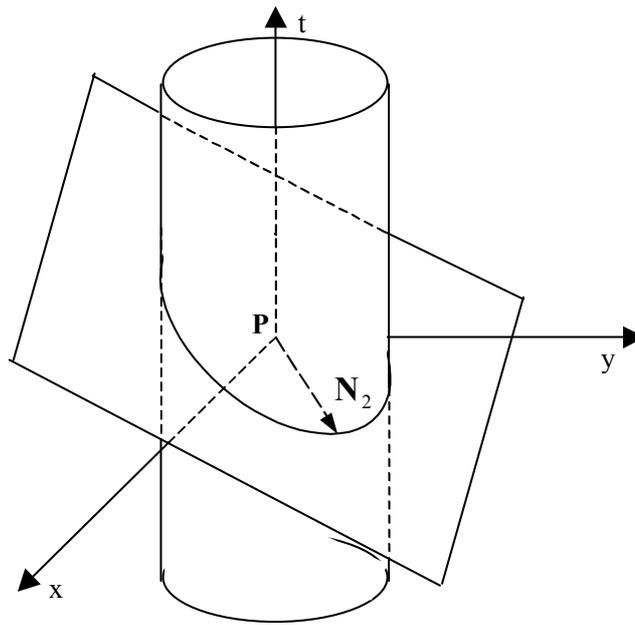


Figura 2.7. Plano normal característico

Tal como se ha hecho para la primera familia se puede buscar una expresión del plano tangente a una superficie característica, para ello se impondrá al vector \mathbf{N}'_2 , de misma dirección que \mathbf{N}_2 , que su componente según el eje t sea la unidad, de manera que la ecuación de su plano normal será una ecuación como (2.119) con n'_{2x} y n'_{2y} que cumplan:

$$1 + un'_{2x} + vn'_{2y} = 0 \quad (2.128)$$

Igual que antes se puede pasar a coordenadas polares según (2.121) de manera que esta última ecuación queda:

$$\rho = \frac{-1}{u \cos \theta + v \sen \theta} \quad (2.129)$$

y la ecuación del plano tangente a una superficie característica:

$$-(u \cos \theta + v \sen \theta)t + x \cos \theta + y \sen \theta = 0 \quad (2.130)$$

En esta última ecuación se observa que los vectores \mathbf{N}'_2 , normales a las superficies características y pertenecientes al plano normal característico, responden a la forma $(-(u \cos \theta + v \sen \theta), \cos \theta, \sen \theta)$. Se puede ver fácilmente que el vector $(1, u, v)$ es perpendicular a cualquier vector \mathbf{N}'_2 , por lo que la expresión del plano normal característico es:

$$t + ux + vy = 0 \quad (2.131)$$

Todos los planos perpendiculares al plano normal característico y que pasan por el punto \mathbf{P} se llaman *superficies de corriente* y son planos tangentes a las superficies características de la segunda familia (o aproximaciones locales a estas superficies), el equivalente para la segunda familia de las superficies de onda. Todas las superficies de corriente forman un haz de planos que intersectan según una recta perpendicular al plano normal característico, y que por lo tanto responden a la expresión (2.126), que era también la ecuación del eje del cono característico de la primera familia de superficies características. La envolvente de todas las superficies características de la segunda familia será pues esta misma recta que se conoce por el nombre de *cuasi-trayectoria* y corresponde al cono característico de la primera familia. La proyección de la cuasi-trayectoria sobre el plano x, y es una recta con la dirección dada por el vector velocidad (u, v) , que es la *trayectoria*.

En la Figura 2.8 se representa una superficie de corriente, su dirección normal \mathbf{N}'_2 y la cuasi-trayectoria. En la Figura 2.9 se representa su proyección sobre un plano $t = \text{constante}$.

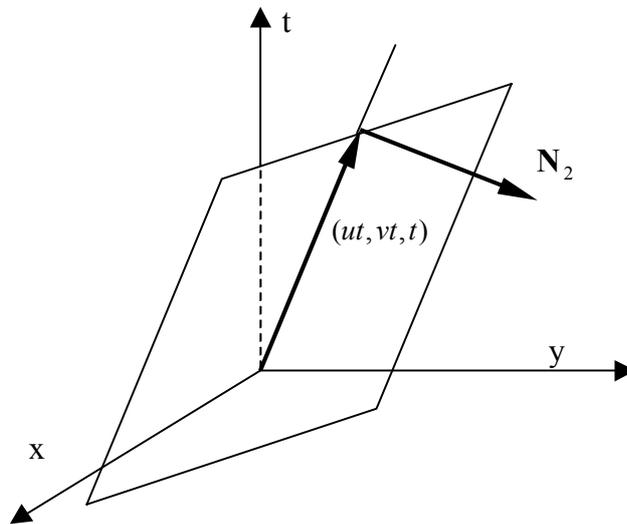


Figura 2.8. Superficie de corriente

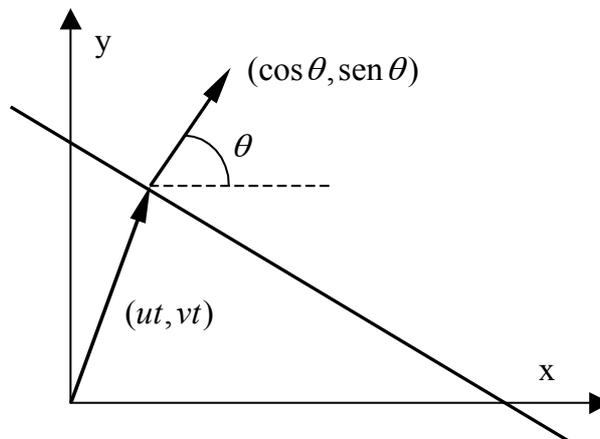


Figura 2.9. Corte de una superficie de corriente y proyección de los vectores de la Figura 2.7. sobre el plano $t = \text{constante}$.

2.4.2.3.1. Dominio de dependencia y zona de influencia

Es una propiedad de los sistemas hiperbólicos que, para un punto cualquiera \mathbf{P} del espacio x, y, t , la solución depende únicamente de los datos en un cierto dominio cerrado del espacio físico x, y , pero no de los puntos situados fuera de dicho dominio (Jeffrey, 1976). Esto es equivalente a decir que la onda asociada se propaga a una celeridad finita.

Para el caso de las ecuaciones de Saint Venant bidimensionales, el dominio de dependencia serán todos los puntos del conoide característico en la dirección decreciente de t , mientras que la zona de influencia serán los puntos dentro del conoide en la dirección de t creciente. El conoide actúa pues como una frontera para la propagación de la información.

2.4.2.3.2. Condiciones de compatibilidad en las superficies características

Igual que en el caso unidimensional, combinando linealmente de manera adecuada las ecuaciones de Saint Venant se puede obtener un sistema de ecuaciones equivalente al original sobre las superficies características, sistema que sólo contiene derivadas a lo largo de direcciones contenidas en las superficies características. Estas ecuaciones, llamadas *condiciones de compatibilidad*, *relaciones características* o *ecuaciones de consistencia*, que serían el equivalente para el caso bidimensional de las ecuaciones (2.103), (2.105), son especialmente útiles a la hora de formular las condiciones de contorno necesarias en los esquemas numéricos de resolución de las ecuaciones bidimensionales.

Para deducir las condiciones de compatibilidad se puede seguir el mismo método visto para el caso unidimensional de multiplicar el sistema de ecuaciones (2.111) por la izquierda por los *vectores propios por la izquierda* de la matriz $\alpha_1 \mathbf{A} + \alpha_2 \mathbf{B}$, pero en el caso bidimensional es quizás más sencillo y más ilustrativo partir de las ecuaciones de Saint Venant en forma no conservativa, ecuaciones (2.48), (2.49) y (2.50). Aplicando la regla de la cadena a la ecuación de continuidad (2.48), el anterior sistema de ecuaciones se puede escribir como:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + g \frac{\partial h}{\partial x} = g(S_{0x} - S_{fx}) \quad (2.132)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + g \frac{\partial h}{\partial y} = g(S_{0y} - S_{fy}) \quad (2.133)$$

$$\frac{\partial h}{\partial t} + h \frac{\partial u}{\partial x} + u \frac{\partial h}{\partial x} + h \frac{\partial v}{\partial y} + v \frac{\partial h}{\partial y} = 0 \quad (2.134)$$

Si se multiplican estas tres ecuaciones respectivamente por tres factores arbitrarios σ_1 , σ_2 y σ_3 y se suman el resultado (es decir, realizamos una combinación lineal cualquiera de ellas), se obtiene:

$$\begin{aligned} & (\sigma_1 u + \sigma_3 h) \frac{\partial u}{\partial x} + \sigma_1 v \frac{\partial u}{\partial y} + \sigma_1 \frac{\partial u}{\partial t} + \sigma_2 u \frac{\partial v}{\partial x} + (\sigma_2 v + \sigma_3 h) \frac{\partial v}{\partial y} + \sigma_2 \frac{\partial v}{\partial t} + \\ & (\sigma_1 g + \sigma_3 u) \frac{\partial h}{\partial x} + (\sigma_2 g + \sigma_3 v) \frac{\partial h}{\partial y} + \sigma_3 \frac{\partial h}{\partial t} = \sigma_1 g(S_{0x} - S_{fx}) + \sigma_2 g(S_{0y} - S_{fy}) \end{aligned} \quad (2.135)$$

Ahora se pueden definir tres vectores Φ_1 , Φ_2 y Φ_3 como:

$$\Phi_1 = (\sigma_1 u + \sigma_3 h)\mathbf{i} + \sigma_1 v\mathbf{j} + \sigma_1 \mathbf{k} \quad (2.136)$$

$$\Phi_2 = \sigma_2 v\mathbf{i} + (\sigma_2 v + \sigma_3 h)\mathbf{j} + \sigma_2 \mathbf{k} \quad (2.137)$$

$$\Phi_3 = (\sigma_1 g + \sigma_3 u)\mathbf{i} + (\sigma_2 g + \sigma_3 v)\mathbf{j} + \sigma_3 \mathbf{k} \quad (2.138)$$

Donde \mathbf{i} , \mathbf{j} y \mathbf{k} son los vectores unitarios en el espacio x , y , t . La ecuación (2.135) se puede escribir como :

$$\frac{\partial u}{\partial \Phi_1} + \frac{\partial v}{\partial \Phi_2} + \frac{\partial h}{\partial \Phi_3} = \sigma_1 g(S_{0x} - S_{fx}) + \sigma_2 g(S_{0y} - S_{fy}) \quad (2.139)$$

Esta ecuación es válida para cualquier Φ_i (que depende de los σ_i escogidos). Entre ellos interesa buscar unos σ_i de manera que los tres vectores Φ_i estén en un mismo plano y que además sea tangente a una superficie característica. Entonces, como en la ecuación (2.139) hay derivadas solamente en las direcciones de Φ_i , que serán operadores definidos en el plano mencionado, la ecuación (2.139) será precisamente la condición de compatibilidad sobre una superficie característica (superficie de onda o superficie de corriente) que estamos buscando.

La condición que los tres vectores Φ_i estén sobre un plano característico es que sean perpendiculares al vector $\mathbf{N} = (n_x, n_y, n_t)$ de (x, y, t) normal a dicho plano, es decir, que cumplan :

$$\mathbf{N}\Phi_1 = 0 \quad ; \quad \mathbf{N}\Phi_2 = 0 \quad ; \quad \mathbf{N}\Phi_3 = 0 \quad (2.140)$$

o, lo que es lo mismo:

$$\begin{pmatrix} un_x + vn_y + n_t & 0 & n_x h \\ 0 & un_x + vn_y + n_t & n_y h \\ gn_x & gn_y & un_x + vn_y + n_t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \end{pmatrix} = 0 \quad (2.141)$$

2.4.2.3.3. Condición de compatibilidad para la primera familia de superficies características

Para obtener la condición de compatibilidad sobre las superficies de onda, consideraremos de nuevo el vector $\mathbf{N}_1 = (n_{1x}, n_{1y}, n_{1t}) = (\alpha_1, \alpha_2, -\lambda)$, que cumple que su proyección sobre el plano x,y es un vector unitario (ecuación (2.116)). Este vector, por estar sobre un plano característico de la primera familia, debe cumplir la condición (2.117), de manera que la ecuación anterior (2.141) queda como:

$$\begin{pmatrix} \pm c & 0 & n_{1x} h \\ 0 & \pm c & n_{1y} h \\ gn_{1x} & gn_{2y} & \pm c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \end{pmatrix} = 0 \quad (2.142)$$

Una solución de este sistema es:

$$\sigma_1 = \pm cn_{1x} \quad ; \quad \sigma_2 = \pm cn_{1y} \quad ; \quad \sigma_3 = -g \quad (2.143)$$

Si ahora se pasa a coordenadas polares

$$n_{1x} = \cos \theta \quad ; \quad n_{1y} = \sin \theta \quad (2.144)$$

y se sustituyen los valores (2.143) en la forma general de la condición de compatibilidad (2.135), se obtiene la condición de compatibilidad para una superficie de onda:

$$\begin{aligned} & \pm c \cos \theta \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial t} \right) \pm c \sin \theta \left(u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial t} \right) + g(\pm c \cos \theta - u) \frac{\partial h}{\partial x} + \\ & + g(\pm c \sin \theta - v) \frac{\partial h}{\partial y} - g \frac{\partial h}{\partial t} - c^2 \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) = \pm c(g(S_{0x} - S_{fx}) \cos \theta + g(S_{0y} - S_{fy}) \sin \theta) \end{aligned} \quad (2.145)$$

Como se ha dicho anteriormente, los operadores diferenciales en (2.145) son tangentes a las superficies de onda, en las cuales se pueden seleccionar dos direcciones independientes, que pueden ser la dirección de una bicaracterística (ecuación (2.127)) y la dirección perpendicular a ella. Según (2.127), a lo largo de una bicaracterística, la derivada total de una función $f(x, y, t)$ con respecto del tiempo es:

$$\frac{df}{dt} = (u \pm c \cos \theta) \frac{\partial f}{\partial x} + (v \pm c \sin \theta) \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial t} \quad (2.146)$$

Escribiendo las derivadas parciales de (2.145) como derivadas a lo largo de las bicaracterísticas, se tiene:

$$\begin{aligned} & \pm c \left(\frac{d(u \cos \theta)}{dt} + \frac{d(v \sin \theta)}{dt} - g \frac{dh}{dt} \right) - c^2 \left[\frac{\partial u}{\partial x} \sin^2 \theta + \frac{\partial v}{\partial y} \cos^2 \theta - \right. \\ & \left. - \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) \sin \theta \cos \theta \right] = \pm c \left(g(S_{0x} - S_{fx}) \cos \theta + g(S_{0y} - S_{fy}) \sin \theta \right) \end{aligned} \quad (2.147)$$

Los primeros tres términos de la ecuación representan la derivada total respecto del tiempo (derivada material) a lo largo de una bicaracterística, mientras que el término entre corchetes sería la derivada en la dirección de un vector $(-\sin \theta, \cos \theta)$ perpendicular a ella sobre una superficie característica, derivada que se puede expresar como:

$$\frac{df}{d\theta} = \mp c \sin \theta \frac{\partial f}{\partial x} \pm c \cos \theta \frac{\partial f}{\partial y} \quad (2.148)$$

Con lo dicho, la condición de compatibilidad sobre una superficie característica de la primera familia se puede escribir:

$$\frac{d(u_n \pm 2c)}{dt} \pm \frac{\partial u_t}{\partial \theta} = \pm g(S_{0x} - S_{fx}) \cos \theta + g(S_{0y} - S_{fy}) \sin \theta \quad (2.149)$$

Donde u_n y u_t representan las componentes de la velocidad en la dirección del vector normal a la superficie característica y su perpendicular:

$$u_n = u \cos \theta + v \sin \theta \quad ; \quad u_t = -u \sin \theta + v \cos \theta \quad (2.150)$$

La ecuación (2.150) es la análoga a la ecuación (2.105) para el caso unidimensional, y expresa que en ausencia de término independiente, y en el supuesto que las variaciones en la dirección tangencial a la superficie característica fuesen despreciables, las cantidades $u_n \pm 2c$, que se conocen por *pseudo invariantes de Riemann*, se mantendrían constantes a lo largo de la correspondiente bicaracterística.

$$\begin{pmatrix} un_x + vn_y + n_t & 0 & n_x h \\ 0 & un_x + vn_y + n_t & n_y h \\ gn_x & gn_y & un_x + vn_y + n_t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \end{pmatrix} = 0 \quad (2.151)$$

2.4.2.3.4. Condición de compatibilidad para la segunda familia de superficies características

Para obtener la condición de compatibilidad que debe cumplirse sobre la segunda familia de superficies características, o planos de corriente, se puede realizar un proceso análogo al del apartado anterior. Ahora el vector normal a las superficies características, \mathbf{N}'_2 , al cual impondremos que su componente según el eje t valga la unidad, deberá cumplir la condición (2.128), por lo que el sistema (2.151) quedará:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & n'_{2x} h \\ 0 & 0 & n'_{2y} h \\ gn'_{2x} & gn'_{2y} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \end{pmatrix} = 0 \quad (2.152)$$

De donde:

$$\sigma_1 n'_{2x} + \sigma_2 n'_{2y} = 0 \quad ; \quad \sigma_3 = 0 \quad (2.153)$$

La ecuación anterior quiere decir que el vector (σ_1, σ_2) sobre el plano x, y debe ser perpendicular a la proyección de \mathbf{N}'_2 sobre dicho plano. Ahora se puede escoger

$$\sigma_1 = -\operatorname{sen} \theta \quad ; \quad \sigma_2 = \operatorname{cos} \theta \quad (2.154)$$

Entrando con estos valores en la forma general de la condición de compatibilidad, ecuación (2.135), y definiendo la derivada material según la dirección de la cuasi-trayectoria, o eje del cono característico (equivalente a la ecuación (2.146) de la primera familia de características) como:

$$\frac{df}{dv} = u \frac{\partial f}{\partial x} + v \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial t} \quad (2.155)$$

La condición de compatibilidad para la segunda familia de características queda:

$$\frac{d(u_t)}{dv} + 2 \frac{\partial c}{\partial \theta} = -g(S_{0x} - S_{fx}) \operatorname{sen} \theta + g(S_{0y} - S_{fy}) \operatorname{cos} \theta \quad (2.156)$$

Esta ecuación, que representa el transporte de la componente de la velocidad tangencial a la bicaracterística, no tiene un equivalente directo en el caso unidimensional

2.5. Soluciones discontinuas y propagación de ondas

Normalmente se entiende por onda la propagación de una perturbación, localizada o no, a lo largo del tiempo. Muchos fenómenos físicos ondulatorios, como es el caso de las ecuaciones de Saint Venant, se pueden representar por sistemas de ecuaciones diferenciales hiperbólicos cuasi-lineales. El estudio de este tipo de sistemas es complejo aunque si el sistema es homogéneo el comportamiento de la solución se simplifica. En este caso el sistema puede representar una onda compresiva o una onda expansiva, y se puede estudiar utilizando la teoría de las características. Este tipo de ondas, cuya forma va cambiando (lo contrario se conoce como onda progresiva y sólo es posible para sistemas lineales), pueden ir evolucionando hasta producir una discontinuidad u onda de choque, aunque las condiciones iniciales fueran suaves.

Para las ecuaciones de Saint Venant bidimensionales, podemos dividir las soluciones discontinuas posibles en tres grandes grupos:

1. Discontinuidades débiles u ondas de depresión, también llamadas ondas de descompresión, ondas de expansión u ondas de rarefacción. Todas las variables dependientes son continuas y sólo sus derivadas sufren un salto.
2. Discontinuidades fuertes u ondas de choque. Todas las variables dependientes sufren un salto a través de la discontinuidad. Comprenden los frentes de onda y resaltos hidráulicos.
3. Discontinuidades de contacto. Solo alguna de las variables dependientes sufre un salto, mientras que el resto son continuas.

Para el primer tipo de ondas, que corresponden a soluciones continuas de las ecuaciones, se puede entender la solución como una hipersuperficie (una superficie ordinaria en (x, t, U) en el caso 1D con una sola variable dependiente) y la onda como un surco en dicha hipersuperficie. (Figura 2.10). La proyección sobre el espacio (x, t) de este surco o *frente de onda* será simplemente una línea para el caso unidimensional y una superficie ordinaria para el caso bidimensional, que indica como se desplaza la discontinuidad, y que se puede llamar *traza de la onda*. Se ha visto en los apartados anteriores que si se tiene una solución tal que su derivada en una dirección de (x, t) es discontinua, la superficie normal a esta dirección será una superficie característica. Como a través de la traza de la onda la derivada de la solución es también discontinua, esta deberá coincidir siempre con una superficie característica.

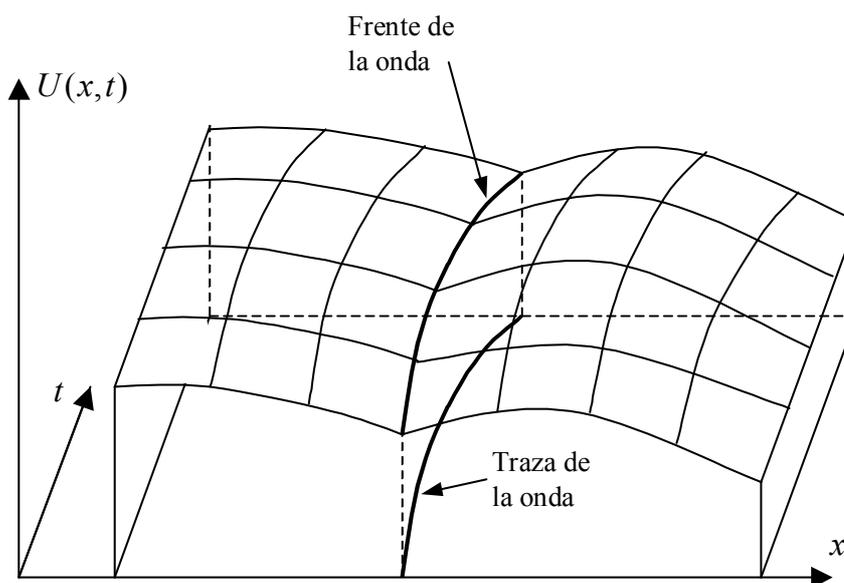


Figura 2.10. Discontinuidad débil. Solución, frente y traza de la onda.

El segundo tipo de discontinuidades, las ondas de choque o discontinuidades fuertes, son fenómenos que aparecen también en otros procesos físicos aparte del movimiento del agua en lámina libre. Estas discontinuidades pueden aparecer a partir de una discontinuidad débil que va evolucionando, tal como muestra Jeffrey (1976), quien realiza un estudio exhaustivo de este tipo de discontinuidades. En ellas interesará sobretudo poder relacionar de alguna manera la solución a ambos lados de la discontinuidad (condiciones de Rankine-Hugoniot) y tener algún criterio para poder descartar aquellas soluciones discontinuas posibles matemáticamente pero sin significado físico (mediante consideraciones sobre entropía). Una discontinuidad fuerte no tiene por qué coincidir con una línea característica, como se ha visto, y por lo tanto se propagará por el espacio con una velocidad distinta a los ceros del polinomio característico.

El tercer tipo de discontinuidades no existe para las ecuaciones de Saint Venant unidimensionales, debido a la forma de las ecuaciones, pero sí se puede encontrar para el caso bidimensional. Sería por ejemplo el caso del contacto entre dos corrientes contiguas en la misma dirección pero con velocidades distintas.

En los siguientes subapartados se recuerdan algunas propiedades de los sistemas de ecuaciones diferenciales en derivadas parciales, no lineales, que a menudo son la expresión de leyes físicas de conservación (ya se ha dicho que las ecuaciones de Saint Venant son un sistema cuasi lineal, que es un tipo particular de sistema no lineal, y por tanto los desarrollos de este apartado también son válidos para ellas). Nos centraremos en aquellas propiedades que luego serán útiles en el desarrollo de métodos numéricos para obtener su solución. Los métodos aproximados de resolución del problema de Riemann que se presentan en capítulos posteriores (y que son la base de los esquemas numéricos de alta resolución) utilizan algunas de las propiedades que se verán en este apartado.

2.5.1. Campos característicos

La ecuación característica (2.91) se concreta, para las ecuaciones de Saint Venant, como una ecuación característica del tipo $\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) = 0$, siendo \mathbf{A} la matriz dada por las expresiones (2.68) en el caso unidimensional, y la matriz $\alpha_1 \mathbf{A} + \alpha_2 \mathbf{B}$ definida en el apartado 2.4.1.2 para el caso bidimensional. La distribución espacial de los valores λ_i en el plano $x-t$, donde λ_i es el i -ésimo valor propio de \mathbf{A} , es lo que se conoce como i -ésimo campo característico. Los campos característicos, en general van variando suavemente, excepto en las discontinuidades de la solución, a través de las cuales, la variación brusca de las variables dependientes determina también variaciones bruscas en los valores y vectores propios de \mathbf{A} .

Un campo característico que cumple que los gradientes (respecto las variables dependientes) de los valores propios λ_i no son ortogonales a los vectores propios asociados \mathbf{e}_i , es decir, que para todo \mathbf{U} cumple:

$$\mathbf{e}_i \frac{\partial \lambda_i}{\partial \mathbf{U}} \neq 0 \quad (2.157)$$

se conoce por un *campo característico genuinamente no lineal*. Lo contrario, es decir, si para un \mathbf{U} cualquiera se cumple:

$$\mathbf{e}_i \frac{\partial \lambda_i}{\partial \mathbf{U}} = 0 \quad (2.158)$$

se conoce por un *campo característico linealmente degenerado*. Si esta última condición se cumple para todos los valores de i , el sistema es *totalmente degenerado*. Esta clasificación tiene sentido ya que se puede ver que las discontinuidades de contacto solamente pueden aparecer para campos característicos linealmente degenerados (Jeffrey, 1976), (Tan, 1992).

Se puede ver fácilmente que para las ecuaciones de Saint Venant unidimensionales, los dos campos característicos dados por (2.71) son genuinamente no lineales. En el caso bidimensional, los valores y vectores propios vienen dados por (2.77) (2.78). El primer y tercer campos característicos son genuinamente no lineales, mientras que el segundo es linealmente degenerado.

2.5.2. Propagación y tipos de onda para la ecuación escalar hiperbólica unidimensional

Un ejemplo ilustrativo de la propagación de ondas para sistemas no lineales es la ecuación escalar

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial f(u)}{\partial x} = 0 \tag{2.159}$$

que siempre se puede escribir como:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \lambda(u) \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \tag{2.160}$$

donde $\lambda(u) = df/du = f'(u)$ es la velocidad característica, equivalente a los valores propios de la matriz jacobiana del vector de flujo en el caso de un sistema de ecuaciones, y representa la inversa de la pendiente de las líneas características, a lo largo de las cuales el valor de u se mantiene constante (invariante de Riemann). Para ver cómo se propaga y se distorsiona una onda determinada, se puede considerar por ejemplo que la función $f(u)$ es convexa, o sea que $\lambda'(u) = f''(u) > 0$, lo que indica que la velocidad característica $\lambda(u)$ aumenta al aumentar u .

Si se considera en primer lugar una onda continua como la de la Figura 2.11(a), como la velocidad característica es superior para valores de u mayores, los valores de u más pequeños se propagarán a través del espacio a velocidades menores, mientras que los valores de u mayores lo harán más rápido. En la Figura 2.11(b) se representan las líneas características para el instante inicial. Las líneas más tendidas hacia la derecha corresponden a velocidades características mayores.

Así pues el valor u_2 se desplaza hacia la derecha más rápidamente que los valores de u_1 y u_3 , por lo que la distancia entre puntos con velocidades u_1 y u_2 tenderá a alargarse, siendo la curva $u(x)$ cada vez mas suave en esta zona (zona expansiva), mientras que la distancia entre puntos con velocidades u_2 y u_3 será cada vez menor, volviéndose el perfil cada vez más abrupto (zona compresiva) (Figura 2.11(a), línea discontinua). En el proceso de aumento de pendiente en la zona compresiva, existe un momento en que las líneas características se cruzan y la solución deja de ser única para un punto de x - t , produciéndose una discontinuidad en la solución que avanza hacia la derecha.

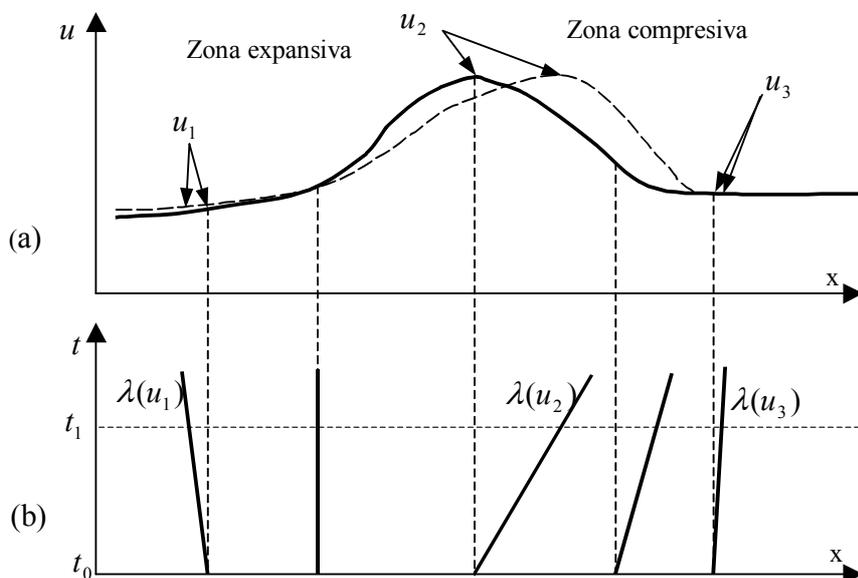


Figura 2.11. Propagación de una onda para una ley de conservación no lineal

En el caso de las ecuaciones de Saint Venant ocurre el mismo fenómeno, las líneas características se cruzan en el instante anterior a la formación de la discontinuidad, que en este caso es un frente de onda o un resalto hidráulico.

A continuación se presentan los distintos tipos de solución discontinua que puede tener la ecuación (2.159).

Discontinuidad fuerte (onda de choque). Una situación inicial dada por una discontinuidad del tipo:

$$\begin{cases} u(0, x) = u_0(x) = u_L & \text{si } x < 0 \\ u(0, x) = u_0(x) = u_R & \text{si } x > 0 \end{cases} \quad u_L > u_R \quad (2.161)$$

que, con un flujo convexo como se ha dicho que era el caso, es una discontinuidad compresiva: las velocidades características a la izquierda de la discontinuidad son superiores que las de la derecha. Las líneas características se cruzan ya en el instante inicial y la discontinuidad situada en $s(t)$ se propagará, teniendo pues una onda de choque o discontinuidad fuerte (Figura 2.12). La ecuación diferencial (2.159) no es válida en la discontinuidad, ya que tenemos una zona donde u toma distintos valores para una misma x . Si se puede utilizar la formulación integral de la ley de conservación en un volumen de control definido por el intervalo $[x_L, x_R]$ que abarca la discontinuidad:

$$f(u(x_L, t)) - f(u(x_R, t)) = \frac{d}{dt} \int_{x_L}^{s(t)} u(x, t) dx + \frac{d}{dt} \int_{s(t)}^{x_R} u(x, t) dx \quad (2.162)$$

Utilizando la regla de Leibnitz de derivación bajo el signo integral, queda

$$f(u(x_L, t)) - f(u(x_R, t)) = [u(s_L, t) - u(s_R, t)]S + \int_{x_L}^{s(t)} \frac{du(x, t)}{dt} dx + \int_{s(t)}^{x_R} \frac{du(x, t)}{dt} dx \quad (2.163)$$

donde $S = ds/dt$ es la velocidad de la discontinuidad, mientras $u(s_L, t)$ y $u(s_R, t)$ son el límite de $u(s(t), t)$ cuando x tiende a $s(t)$ por la izquierda y por la derecha respectivamente. Al hacer el límite por ambos lados hacia la discontinuidad, las dos integrales se anulan y queda

$$f(u(x_L, t)) - f(u(x_R, t)) = [u(s_L, t) - u(s_R, t)]S \quad (2.164)$$

que es la condición de Rankine-Hugoniot que relaciona el salto de las variables (u en este caso), el salto del flujo f , y la velocidad de la discontinuidad. Simplificadamente se puede escribir

$$\Delta f = S \Delta u \quad (2.165)$$

En el apartado 2.5.4 se ve su equivalente para las ecuaciones de Saint Venant.

Con lo dicho, la solución del problema (2.159) con las condiciones iniciales (2.161) (que sería un caso particular del Problema de Riemann), queda:

$$u(x, t) = \begin{cases} u_L & \text{si } x - St < 0 \\ u_R & \text{si } x - St > 0 \end{cases} \quad (2.166)$$

La velocidad de la discontinuidad, que se obtiene de (2.165), viene dada por

$$S = \frac{1}{2}(u_L + u_R) \quad (2.167)$$

y de la Figura 2.12 se puede ver que se cumple la condición:

$$\lambda(u_L) > S > \lambda(u_R) \quad (2.168)$$

Que es la *condición de entropía* que debe satisfacerse para que la solución con velocidades no nulas sea posible físicamente.

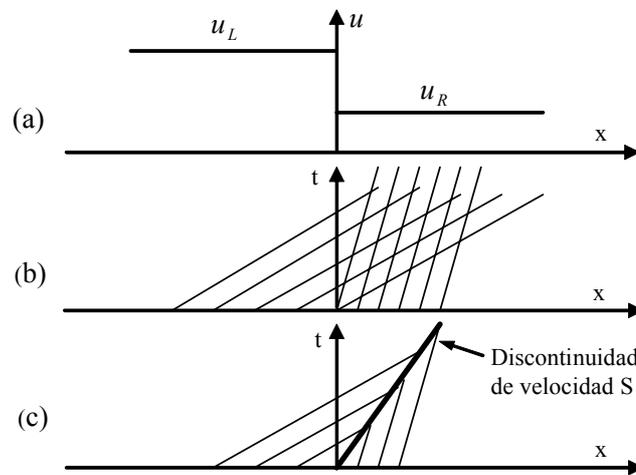


Figura 2.12. Discontinuidad fuerte u onda de choque. (a) Situación inicial. (b) líneas características en el instante inicial. (c) Propagación de la discontinuidad en x-t.

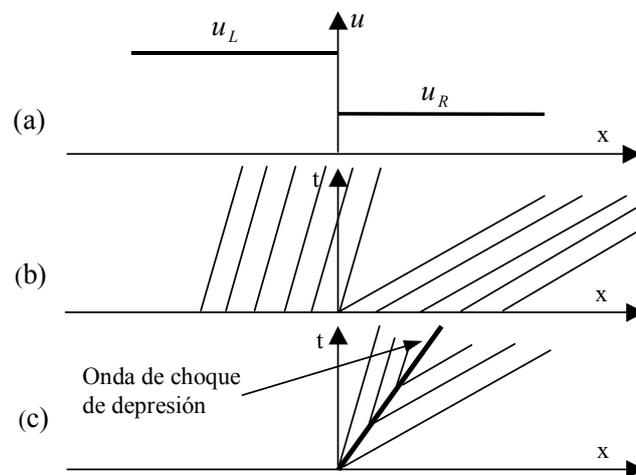


Figura 2.13. Onda de choque de depresión (incorrecta). (a) Situación inicial. (b) líneas características en el instante inicial. (c) Propagación de la discontinuidad en x-t.

Discontinuidad débil (onda de depresión o de descompresión). Se considera ahora la misma ecuación (2.159) pero ahora con las condiciones iniciales

$$\begin{cases} u(0, x) = u_0(x) = u_L & \text{si } x < 0 \\ u(0, x) = u_0(x) = u_R & \text{si } x > 0 \end{cases} \quad u_L < u_R \quad (2.169)$$

En este caso la discontinuidad está en una zona expansiva, pues la pendiente de las líneas características será superior a la izquierda que a la derecha de ella. Las líneas características no se cruzarán en el instante inicial. Una posible solución matemática de este problema sería exactamente la misma que teníamos en el caso de la discontinuidad fuerte, dada por las ecuaciones (2.166) y (2.167) y representada en la Figura 2.13. Sin embargo esta solución, conocida en la literatura como *rarefaction shock* u *onda de choque de depresión* no es correcta.

Hay varias maneras de ver que este resultado no tiene sentido físico. Una de ellas es ver que es una solución inestable, es decir, no corresponde al límite de las soluciones de problemas con condiciones iniciales que tienden a (2.169). Para ello se puede considerar un problema parecido cambiando las condiciones iniciales por dos estados constantes conectados por una variación lineal de u :

$$u(0, x) = u_0(x) = \begin{cases} u_L & \text{si } x < x_L \\ u_L + \frac{u_R - u_L}{x_R - x_L}(x - x_L) & \text{si } x_L < x < x_R \quad ; \quad u_L < u_R \\ u_R & \text{si } x \geq x_R \end{cases} \quad (2.170)$$

que se representa en la Figura 2.14(a).

La solución en un instante de tiempo t_1 se puede encontrar siguiendo las líneas características, de manera que esta consistirá, igual que la condición inicial, en una transición suave entre dos estados constantes con valores u_L y u_R , y se llama *onda de depresión* u *onda de descompresión* y está limitada por dos discontinuidades débiles, ya que allí la solución es continua pero no sus derivadas. Los límites de la onda vienen dados por dos rectas $x = x_L + \lambda(u_L)t$ y $x = x_R + \lambda(u_R)t$. Como los valores inferiores de u se propagan a menor velocidad, la onda tiende a aplanarse y suavizarse con el tiempo. Este fenómeno de aplanamiento de las ondas es típico de los sistemas no lineales, y no existe para sistemas hiperbólicos a coeficientes constantes.

La estructura de la solución debe de ser la misma por muy pequeño que sea el intervalo $[x_L, x_R]$, y es completamente distinta de la onda de choque de depresión de la Figura 2.13 que matemáticamente también es una solución posible. A la vista de esto, la solución del problema (2.159) con (2.169) debe ser una onda de depresión como la vista pero que emana de un único punto y se conoce por onda de depresión centrada. Al empezar a transcurrir el tiempo la discontinuidad inicial desaparece inmediatamente para tener una solución no constante pero continua en una zona del espacio que va expandiéndose, cuyos límites se desplazan con velocidades λ_L y λ_R . Así pues existen al menos dos soluciones del problema de Riemann, de manera que al admitir soluciones discontinuas puede haber soluciones espurias, sin significado físico. Posteriormente en este capítulo se presentan algunas condiciones que debe cumplir la solución y que sirven para descartar estas soluciones incorrectas.

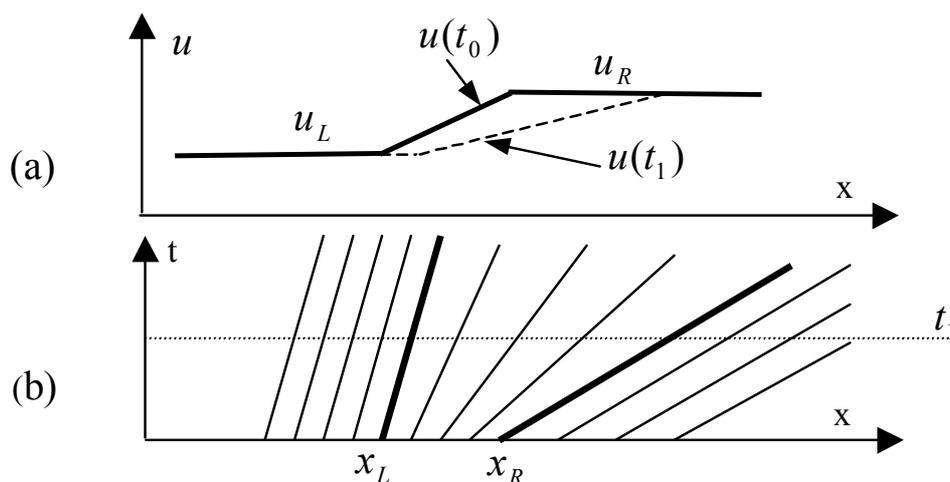


Figura 2.14. Onda de depresión. (a) solución en t_0 y t_1 . (b) Líneas características.

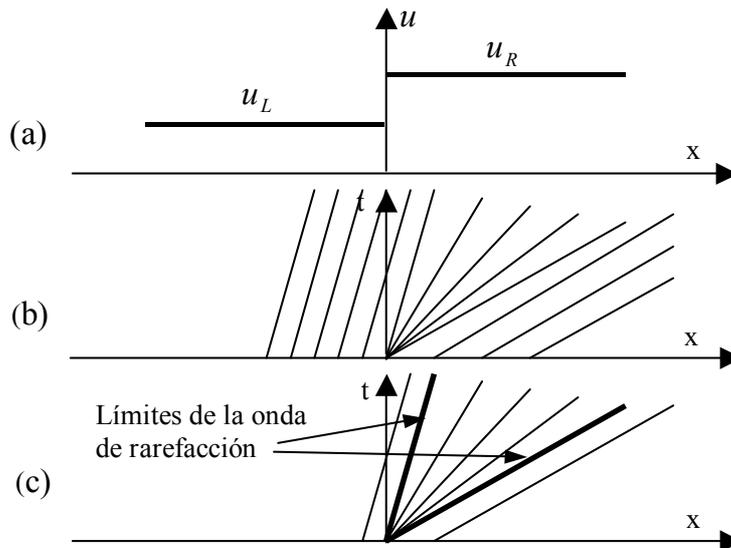


Figura 2.15. Onda de depresión (discontinuidad débil). (a) Situación inicial. (b) Líneas características. (c) Solución en el plano $x-t$.

2.5.3. Onda simple e invariantes de Riemann generalizados

Se consideran siempre en este apartado soluciones continuas, por lo que los resultados que se obtienen son de utilidad en el caso de discontinuidades débiles. Se introduce en primer lugar la idea de *onda simple*, para poder llegar luego a la definición de los invariantes de Riemann generalizados, cuyas propiedades son útiles para la obtención de esquemas numéricos de alta resolución (Capítulo 3).

Para comprender bien el concepto de onda simple conviene hacer uso del *plano de estado* o *plano hodométrico*. Este es un tema desarrollado minuciosamente por Bateman (1993) y que aquí solo se trata en su aspecto más general. A partir de las ecuaciones de Saint Venant unidimensionales para canal rectangular homogéneas:

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \mathbf{A}(\mathbf{U}) \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x} = \mathbf{0} \quad (2.171)$$

con \mathbf{U} definido por (2.56) para canal prismático rectangular y por (2.52) para cauce cualquiera, y \mathbf{A} dado por (2.68), se generaliza luego el resultado para un sistema con más de dos variables dependientes pero siempre en una dimensión.

El *plano de estado* se obtiene considerando unos ejes de coordenadas, colocando en el eje de abscisas los valores correspondientes a la velocidad u y en el eje de ordenadas los valores del doble de la celeridad $2c$. Los invariantes de Riemann J^+ y J^- , definidos en (2.104), se pueden representar en el plano de estado por dos conjuntos de rectas perpendiculares entre sí con pendientes -1 y $+1$ respectivamente. (Figura 2.16).

Un par de valores $(u_1, u_2) = (A, Q)$, que corresponden a una solución de las ecuaciones (2.171) constante, define a su vez un par de valores $(u, 2c)$ que se representan por un punto en el plano de estado. Si se consideran los valores que puede tomar una solución al desplazarnos por el espacio $x-t$ a lo largo de una línea característica C^+ , habrá unos valores $(u, 2c)$ que cumplirán $u + 2c = \text{constante}$, de manera que en el plano de estado nos estaremos desplazando sobre una recta J^+ . Si por el contrario en $x-t$ nos desplazamos sobre una característica C^- sobre el plano de estado nos estaremos moviendo a lo largo de una recta J^- .

Si se considera ahora una zona del espacio $x-t$ para la cual la solución del sistema de ecuaciones es constante ($u_1(x,t) = u_{01}, u_2(x,t) = u_2$), en esta *región de solución constante* las líneas características de las dos familias serán rectas pues en cada punto habrá los mismos valores propios de la matriz, $\mathbf{A}(\mathbf{U})$, que son los que definen la pendiente de las líneas características. Por otro lado todos los puntos de este dominio de solución constante corresponderán a un único punto $(u_0, 2c_0)$ del plano de estado.

Se define una *onda simple* como una solución del sistema (2.171) que cumple que en un cierto dominio de $x-t$ su segunda componente es función de la primera, es decir, $u_2 = f(u_1)$ o, lo que es lo mismo para las ecuaciones de Saint Venant, $2c = g(u)$ donde f y g son funciones diferenciables. Al dominio de $x-t$ en cuestión se le conoce por *región de onda simple* y a cada punto de ella le corresponde un punto sobre el plano de estado que debe estar precisamente sobre la curva \mathcal{G} definida por $2c = g(u)$.

Ahora consideramos un punto de $x-t$ dentro de la región de onda simple, y a partir de él nos desplazamos siguiendo una característica C^+ (un desarrollo análogo se podría hacer para las características C^-), si la solución no permanece constante, resulta que sobre el plano de estado nos estaremos moviendo sobre una recta J^{+*} correspondiente a dicha característica. Por otro lado, por estar siempre en la región de onda simple nos estaremos moviendo también sobre la curva \mathcal{G} , de donde la recta J^{+*} y la curva \mathcal{G} deben ser la misma. Como ello es cierto para todas las características C^+ , resultará que todas ellas tendrán a J^{+*} como su correspondiente recta en el plano de estado.

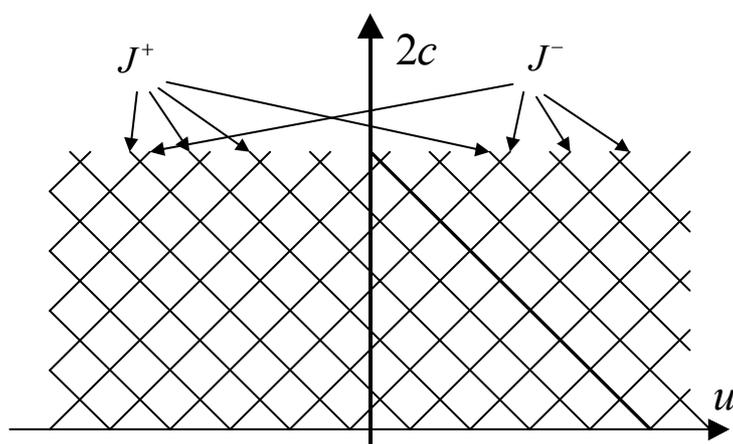


Figura 2.16. Plano de estado. Familias de rectas J^+ y J^-

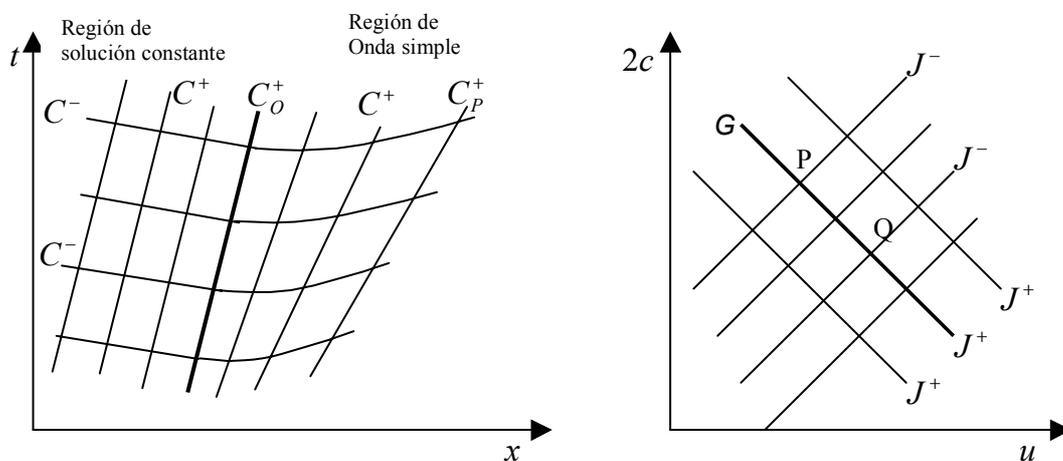


Figura 2.17. Región de onda simple, cuya imagen en el plano de estado (derecha) es el punto Q , adyacente a una región de solución constante cuya imagen es el segmento PQ

Si ahora se considera la otra familia de características C^- , como todos los puntos de la región de onda simple deben tener su correspondiente en el plano de estado situado sobre \mathcal{E} , las imágenes de todos los puntos de las líneas C^- también deben estar sobre \mathcal{E} . Por otro lado la imagen de una línea característica C^- debe estar siempre sobre una de las rectas J^- que son perpendiculares a \mathcal{E} , de donde resulta que la imagen de cualquier línea características C^- de nuestra región de onda simple debe de reducirse a un solo punto de \mathcal{E} , lo que es lo mismo, que en nuestra región de onda simple la solución es constante a lo largo de las características C^- , y en consecuencia estas son rectas.

En resumen, la representación en el plano de estado de una región de onda simple es siempre una recta J^+ o J^- . En el primer caso todas las líneas características C^+ tienen la misma recta J^+ como imagen en el plano de estado, y las características C^- son rectas. En el segundo caso son todas la líneas características C^- las que tienen la misma J^- como imagen mientras las líneas C^+ son rectas.

Una conclusión inmediata de utilidad práctica se obtiene de considerar a la vez el hecho de que una región de solución constante tiene un único punto como imagen en el plano de estado y que una región de onda simple está siempre atravesada por una familia de características rectas. De todo lo dicho anteriormente se deduce que si la solución es constante a lo largo de una línea característica (por lo que dicha línea es una recta) entonces la región adyacente a esta líneas debe ser o bien una región de solución constante o bien una región de onda simple (Figura 2.17).

Si se generaliza el concepto de onda simple para un sistema multidimensional como (2.171), pero ahora con:

$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} ; \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \quad (2.172)$$

Se estará en una región de onda simple si se puede poner la solución en función de una de sus componentes, que sin pérdida de generalidad consideraremos la primera, es decir $\mathbf{U} = \mathbf{U}(u_1)$, o lo que es equivalente $u_i = u_i(u_1)$ para $i = 2, \dots, n$. Sustituyendo esta última expresión en (2.171) y aplicando la regla de la cadena se obtiene:

$$\left(\frac{\partial u_1}{\partial t} \mathbf{I} + \frac{\partial u_1}{\partial x} \mathbf{A} \right) \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial u_1} = \mathbf{0} \quad (2.173)$$

que solo tiene solución en el caso que

$$\det(\mathbf{A} - \mu \mathbf{I}) = 0 \quad (2.174)$$

con $\mu = (-\partial u_1 / \partial t) / (-\partial u_1 / \partial x)$. Esta ecuación en μ tiene n soluciones que son precisamente los valores propios λ_i de \mathbf{A} , lo que quiere decir que para que la solución sea una onda simple u_1 debe ser tal que $(-\partial u_1 / \partial t) / (-\partial u_1 / \partial x)$ coincida con un λ_i ; en este caso se dice que se trata de una i -onda simple. Por otro lado, se ha visto que los valores propios eran la velocidad con que un punto sobre una línea característica se desplaza por x , es decir:

$$\frac{\partial x}{\partial t} = \lambda_i = -\frac{\partial u_1}{\partial t} / \frac{\partial u_1}{\partial x} \quad (2.175)$$

o, lo equivalente:

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} dx + \frac{\partial u_1}{\partial x} dt = 0 \quad \text{sobre las características } C^i \quad (2.176)$$

que viene a decir que en una i -onda simple $u_1(x, t)$ es constante sobre las característica C^i , y como en toda la región $\mathbf{U} = \mathbf{U}(u_1)$ resulta que \mathbf{U} es constante sobre las características C^i . Como la matriz \mathbf{A} depende sólo

de \mathbf{U} , y éste es constante en C^i , finalmente tenemos que en una i -onda simple λ_i es constante sobre las características C^i asociadas a ella, y por lo tanto estas líneas características son rectas.

Se pueden interpretar las i -ondas simples a partir del *espacio de estado* (u_1, u_2, \dots, u_n) de manera análoga a lo que se ha hecho para el caso $n = 2$. El hecho de que la familia de características C^i sean rectas que transportan valores constantes de \mathbf{U} , quiere decir que la imagen de cada una de ellas es un único punto en (u_1, u_2, \dots, u_n) . El conjunto de dichos puntos constituye una línea \mathcal{S} en (u_1, u_2, \dots, u_n) que es precisamente la imagen de toda la región de $x-t$ correspondiente a la i -onda simple. Al movernos en la región de i -onda simple de $x-t$ a lo largo de las características C^i , estamos siempre sobre el mismo punto del espacio de estado, mientras que al movernos sobre cualquiera otra línea característica estamos recorriendo tramos de la línea \mathcal{S} en (u_1, u_2, \dots, u_n) .

Por otro lado, de (2.173) se puede ver que para una i -onda simple el vector $\partial\mathbf{U}/\partial u_1$ debe ser proporcional al vector propio \mathbf{e}_i correspondiente a dicho λ_i , es decir:

$$\frac{du_1}{e_{i1}} = \frac{du_2}{e_{i2}} = \dots = \frac{du_n}{e_{in}} \quad (2.177)$$

donde cada e_{ik} es la k -ésima componente del vector propio \mathbf{e}_i . Integrando (2.177) se obtienen $n-1$ relaciones independientes entre las componentes de \mathbf{U} que se pueden expresar como

$$R_{ik}(\mathbf{U}) = \text{constante} \quad \text{para } k = 1 \dots n-1 \quad (2.178)$$

y que se llaman *i -invariantes de Riemann generalizados* que son relaciones entre las distintas componentes del vector de variables dependientes que deben ser ciertas en toda la región de i -onda simple. Para cada i -onda simple existen pues $n-1$ i -invariantes de Riemann generalizados que se pueden entender como superficies de (u_1, u_2, \dots, u_n) cuya intersección es precisamente la línea \mathcal{S} . Al desplazarnos sobre la región de i -onda simple a través de líneas características C^i , o sea al movernos sobre la línea \mathcal{S} en el espacio de estado, los invariantes de Riemann generalizados deben mantenerse constantes.

Los invariantes de Riemann generalizados sirven para obtener la solución del problema de Riemann (apartados 2.5.7.3 y 2.5.7.4), y en concreto son la base del método de Osher para la resolución aproximada del problema de Riemann. Estos invariantes no coinciden, para el caso $n = 2$, con los invariantes de Riemann definidos en 2.4.2.1, como se ve a continuación. En 2.5.7.5 se utiliza la constancia de los invariantes de Riemann generalizados para resolver el problema de rotura de presa unidimensional, que es un caso particular del problema de Riemann.

Invariantes de Riemann generalizados para las ecuaciones de Saint Venant unidimensionales: Se aplica ahora el concepto de onda simple e invariantes de Riemann generalizados a las ecuaciones de Saint Venant unidimensionales para canal prismático rectangular. λ_1 está asociado a las características C^+ o C^1 y λ_2 está asociado a C^- o C^2 . En una región de onda simple asociada a las líneas C^+ , estas son rectas. Para cada tipo de onda simple existe en este caso un invariante de Riemann generalizado que se obtiene a partir de (2.177), que ahora queda como:

$$\frac{dh}{1} = \frac{d(hu)}{u+c} \quad (2.179)$$

ya que ahora $\mathbf{U} = (h, hu)$ y $\mathbf{e}_1 = (1, u+c)$. De (2.179) se obtiene directamente

$$du + \frac{c}{h} dh = 0 \quad (2.180)$$

de donde, integrando:

$$R^+(\mathbf{U}) = R_1(\mathbf{U}) = \int du + \int \frac{c}{h} dh = \int du + \sqrt{g} \int h^{-\frac{1}{2}} dh = u - 2c = \text{constante} \quad (2.181)$$

Análogamente, para ondas simples asociadas a C^- :

$$R^-(\mathbf{U}) = u + 2c = \text{constante} \quad (2.182)$$

Así pues que los invariantes de Riemann generalizados correspondientes a C^+ y C^- son respectivamente $R^+ = u - 2c$ y $R^- = u + 2c$ (los invariantes de Riemann *normales* eran $J^+ = u + 2c$ y $J^- = u - 2c$). Los invariantes de Riemann generalizados correspondientes a las características C^+ corresponden, para el caso $n = 2$, a los invariantes de Riemann *normales* de C^- , lo que es normal ya que son funciones que deben mantenerse constantes a través de las líneas C^+ . Para el caso $n > 2$ se puede ver que no existen unos invariantes de Riemann en el sentido clásico, como funciones que se mantengan constantes sobre cada una de las familias características (Jeffrey, 1976). Los invariantes de Riemann generalizados, por el contrario, si que existen.

2.5.4. Las condiciones de Rankine-Hugoniot en una dimensión

Al igual que lo visto en el apartado 2.5.2 para la ecuación escalar, las condiciones de Rankine-Hugoniot son unas relaciones que deben cumplirse a través de una solución discontinua de una ley de conservación dada por un sistema hiperbólico. Estas condiciones sirven entonces para relacionar los valores de la solución a ambos lados de una discontinuidad fuerte.

Para ello se aplica la ley de conservación a un volumen de control que contenga una discontinuidad que se desplaza a lo largo del eje x , obteniendo una expresión vectorial equivalente a (2.163) para el sistema (2.171):

$$\mathbf{F}(\mathbf{U}(x_L, t)) - \mathbf{F}(\mathbf{U}(x_R, t)) = [\mathbf{U}(s_L, t) - \mathbf{U}(s_R, t)]S + \int_{x_L}^{s(t)} \frac{d\mathbf{U}(x, t)}{dt} dx + \frac{d}{dt} \int_{s(t)}^{x_R} \frac{d\mathbf{U}(x, t)}{dt} dx \quad (2.183)$$

donde $S = ds/dt$ es la velocidad de la discontinuidad, mientras $\mathbf{U}(s_L, t)$ y $\mathbf{U}(s_R, t)$ son el límite de $\mathbf{U}(s(t), t)$ cuando x tiende a $s(t)$ por la izquierda y por la derecha respectivamente. Al hacer el límite por ambos lados hacia la discontinuidad, las dos integrales se anulan y queda la condición de Rankine-Hugoniot que se buscaba:

$$\Delta \mathbf{F} = S \Delta \mathbf{U} \quad (2.184)$$

que relaciona el salto del vector de variables dependientes (\mathbf{U}), el salto del vector de flujo \mathbf{F} y la velocidad de la discontinuidad.

De esta relación se puede ver que un salto en las variables, $\Delta \mathbf{U}$, sólo es una discontinuidad estable si se propaga con una velocidad S dada por:

$$S = \frac{\Delta \mathbf{F}}{\Delta \mathbf{U}} \quad (2.185)$$

Si se hace el cómputo de incógnitas y ecuaciones para las ecuaciones de Saint Venant unidimensionales, hay cuatro incógnitas distribuidas a ambos lados de la discontinuidad: h_L, u_L, h_R, u_R . Las condiciones de Rankine-Hugoniot, derivadas de la conservación de la masa y la cantidad de movimiento, proporcionan dos ecuaciones pero introducen otra incógnita S que es su velocidad de propagación. De esta manera, aunque se conozca el valor de las variables dependientes a un lado de la discontinuidad, no se puede determinar el estado del otro lado. Para hacerlo es necesario dar otra variable que puede ser, por ejemplo, la condición de que el resalto hidráulico sea estacionario ($S = 0$).

En el caso $S = 0$ las condiciones de Rankine-Hugoniot se simplifican a la ecuación $\Delta \mathbf{F} = 0$. Aplicando esta condición a las ecuaciones de Saint Venant unidimensionales (2.52) obtenemos directamente:

$$\begin{aligned} Q_L &= Q_R \\ \frac{Q_L^2}{A_L} + gI_{1L} &= \frac{Q_R^2}{A_R} + gI_{1R} \end{aligned} \quad (2.186)$$

con las variables definidas en 2.3. y cuya solución depende de la forma del cauce. En el caso más sencillo de canal prismático rectangular, teniendo en cuenta que $A = bh$ y $Q = uA$, o bien aplicando directamente las condiciones de Rankine-Hugoniot a (2.167) queda:

$$\begin{aligned} h_L u_L &= h_R u_R \\ h_L u_L^2 + g \frac{h_L^2}{2} &= h_R u_R^2 + g \frac{h_R^2}{2} \end{aligned} \quad (2.187)$$

La primera ecuación indica que el caudal unitario $q = hu = Q/b$ es el mismo a ambos lados del resalto. Operando con la segunda y definiendo el *número de Froude* para cauce rectangular como:

$$Fr = \frac{u}{\sqrt{gh}} \quad (2.188)$$

queda la ecuación de segundo grado en h_R/h_L :

$$\frac{h_R}{h_L} \left(1 + \frac{h_R}{h_L} \right) = Fr_L^2 \quad (2.189)$$

cuya solución es la clásica ecuación de Bélanger de calados conjugados en un resalto hidráulico:

$$\frac{h_R}{h_L} = \frac{1}{2} \left(\sqrt{1 + 8Fr_L^2} - 1 \right) \quad (2.190)$$

2.5.5. Propagación de ondas y soluciones discontinuas para las ecuaciones de Saint Venant bidimensionales

En el caso bidimensional, el conjunto de discontinuidades posibles puede formar una estructura de la solución mucho más compleja que en el caso unidimensional. Las discontinuidades son ahora superficies en el espacio (x, y, t) que separan subdominios donde la solución es continua y pueden cruzarse o están conectadas entre ellas. Para cada punto de la superficie de discontinuidad existen los límites de la solución por la derecha y por la izquierda. La diferencia entre ellos expresará la fuerza de la onda de choque.

En la dirección tangencial a una superficie de discontinuidad la solución de las ecuaciones de Saint Venant es suave, produciéndose la discontinuidad de la solución en su dirección normal. Haciendo un cambio de coordenadas en un punto de la discontinuidad, de manera que los nuevos ejes sean normales y tangenciales a ella, se puede aproximar localmente la propagación del frente con la teoría desarrollada para el caso unidimensional.

En dos dimensiones las discontinuidades pueden dar lugar a ondas de choque si son fuertes, ondas de depresión cuando son débiles, y discontinuidades de contacto. La velocidad tangencial a ambos lados de una onda de choque deberá ser la misma, mientras que las componentes normales deberán cumplir las condiciones de Rankine-Hugoniot. Para las ondas de depresión será cierta la constancia de los invariantes de Riemann.

Para una discontinuidad de contacto, las líneas de corriente son tangenciales a ella y hay una discontinuidad tan solo en la velocidad tangencial. Como en el caso 1-D no existe velocidad tangencial, no puede haber discontinuidades de contacto.

Para el flujo bidimensional, las ondas continuas se pueden dividir también en las dos categorías que son: ondas de compresión (en las cuales el calado va aumentando con el flujo) y ondas de expansión si ocurre lo contrario. Una onda de compresión, igual que en el caso 1-D, puede evolucionar a un frente o resalto hidráulico.

2.5.6. Condiciones de Rankine-Hugoniot en dos dimensiones

Tal como se ha hecho para el caso unidimensional, las condiciones de Rankine-Hugoniot relacionan valores de la solución a ambos lados de una discontinuidad fuerte. Para una discontinuidad como una superficie curva continua en t, x, y , se puede aplicar el teorema de Gauss-Green a las ecuaciones de Saint Venant bidimensionales en forma conservativa (2.47) considerando dos estados constantes \mathbf{U}_L y \mathbf{U}_R a ambos lados de la discontinuidad. Con ello se obtiene la ecuación

$$n_t(\mathbf{U}_R - \mathbf{U}_L) + n_x(\mathbf{E}_R - \mathbf{E}_L) + n_y(\mathbf{G}_R - \mathbf{G}_L) \quad (2.191)$$

donde $\mathbf{N} = (n_t, n_x, n_y)$ es un vector normal a la discontinuidad en un punto, mientras \mathbf{E} y \mathbf{G} son los vectores que forman las dos columnas del tensor de flujo, o sea:

$$\mathbf{E} = \begin{pmatrix} hu \\ hu^2 + g h^2/2 \\ huv \end{pmatrix} ; \quad \mathbf{G} = \begin{pmatrix} hv \\ huv \\ hv^2 + g h^2/2 \end{pmatrix} \quad (2.192)$$

Normalizando la longitud del vector \mathbf{N} haciendo $\mathbf{N} = (-s, n_x, n_y)$ con la condición que (n_x, n_y) sea un vector unitario en el plano x, y , la ecuación anterior (2.191) queda de la forma

$$s\Delta\mathbf{U} = n_x\Delta\mathbf{E} + n_y\Delta\mathbf{G} \quad (2.193)$$

que es la condición de Rankine-Hugoniot que debe cumplirse en una discontinuidad, equivalente a la ecuación (2.184) en una dimensión, donde s representa la velocidad de propagación de la discontinuidad y $\Delta(\bullet) = \bullet_R - \bullet_L$.

Para las ecuaciones de Saint Venant bidimensionales, sustituyendo (2.192) en (2.193) se obtiene, en componentes:

$$s\Delta h = n_x\Delta(hu) + n_y\Delta(hv) \quad (2.194)$$

$$s\Delta(hu) = n_x\Delta(hu^2 + g h^2/2) + n_y\Delta(huv) \quad (2.195)$$

$$s\Delta(hv) = n_x\Delta(huv) + n_y\Delta(hv^2 + g h^2/2) \quad (2.196)$$

Estas ecuaciones son las expresiones de la conservación de la masa y la cantidad de movimiento a través de una discontinuidad.

2.5.7. El problema de Riemann.

En capítulos posteriores se tratará la obtención de esquemas numéricos para la resolución de las ecuaciones de Saint Venant que sirvan tanto para la solución de flujos continuos como para el caso de flujos discontinuos. Un gran grupo de estos esquemas, conocidos bajo el nombre de métodos *shock capturing* o de captura de choques, permiten formar, localizar y propagar las discontinuidades presentes en el dominio de estudio automáticamente. Otros métodos, que se pueden agrupar bajo los nombres *de shock tracking* o *shock fitting*, o sea métodos de seguimiento de choques, precisan tratar las discontinuidades individualmente de forma especial, considerándolas como un contorno interior, ir siguiendo dicho contorno a lo largo del tiempo y empalmar las soluciones a ambos lados del contorno. Dentro de este segundo grupo se encontrarían todas las variantes del método de las características.

En esta tesis, los métodos numéricos que se desarrollan son del primer tipo y, más concretamente, se pueden entender como variantes y extensiones del *método de Godunov* (Apartado 4.2 del Capítulo 4). Este método fue desarrollado en un principio para la resolución del *problema de Riemann* en dinámica de gases, aunque posteriormente se extendió a otros problemas similares en otros campos, como puede ser la resolución de las ecuaciones de Saint Venant en flujos discontinuos.

Originalmente se denominó problema de Riemann al estudio en mecánica de gases de la propagación de onda en un tubo, de manera que el problema de Riemann original considera un tubo con un diafragma: un lado del tubo se rellena con un gas a una presión p_1 , mientras que el otro lado se rellena con otro gas a una presión p_2 . Cuando el sistema se encuentra en equilibrio el diafragma se quita repentinamente, generándose una onda compresiva hacia el lado de menor presión y una onda expansiva en el sentido opuesto.

Posteriormente el término problema de Riemann se ha extendido a cualquier problema unidimensional consistente en la solución de un sistema de ecuaciones hiperbólico del tipo:

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{F}(\mathbf{U}) = \mathbf{0} \quad (2.197)$$

con unas condiciones iniciales discontinuas pero constantes en dos regiones del espacio:

$$\begin{cases} \mathbf{U}(0, x) = \mathbf{U}_0(x) = \mathbf{U}_L & \text{si } x < 0 \\ \mathbf{U}(0, x) = \mathbf{U}_0(x) = \mathbf{U}_R & \text{si } x > 0 \end{cases} \quad (2.198)$$

donde \mathbf{U}_L y \mathbf{U}_R son dos vectores constantes. El estudio del problema de Riemann es de gran utilidad para obtener propiedades de las posibles soluciones, las cuales serán luego fundamentales a la hora de desarrollar esquemas numéricos para la solución de las ecuaciones, tanto para flujos continuos como discontinuos y en una o dos dimensiones.

En este apartado y los siguientes veremos el comportamiento de la solución de sistemas de ecuaciones hiperbólicos, y en concreto de las ecuaciones de Saint Venant unidimensionales, para una serie de situaciones particulares (entre ellas el problema de Riemann), lo que será una ayuda en los capítulos siguientes.

En cuanto al caso bidimensional, no existe una definición matemática estricta para el problema de Riemann. Algunos autores lo han definido como un numero finito de estados constantes, separados por líneas rectas en x, y con un punto en común. De todos modos, la solución de este problema tendría poca importancia de cara a la obtención de esquemas numéricos para la resolución de las ecuaciones de Saint Venant bidimensionales. Sin embargo, los resultados obtenidos para el caso unidimensional sí que serán útiles para los esquemas bidimensionales, ya que la discretización de dominios bidimensionales en volúmenes finitos que se utiliza en esta tesis, permite considerar que en cada uno de los lados de dichos volúmenes tenemos un problema de Riemann unidimensional

2.5.7.1 El problema de Riemann para sistemas hiperbólicos unidimensionales a coeficientes constantes

Aunque la estructura de las ecuaciones de Saint Venant es más compleja, el estudio de este caso sencillo ayuda a entender la estructura de la solución y, por otro lado, los resultados que se obtienen se utilizarán en capítulos posteriores. El problema viene dado por el sistema de ecuaciones:

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \mathbf{A} \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x} = \mathbf{0} \quad (2.199)$$

donde \mathbf{A} es una matriz $m \times m$ a coeficientes constantes, con las condiciones iniciales:

$$\begin{cases} \mathbf{U}(0, x) = \mathbf{U}_0(x) = \mathbf{U}_L & \text{si } x < 0 \\ \mathbf{U}(0, x) = \mathbf{U}_0(x) = \mathbf{U}_R & \text{si } x > 0 \end{cases} \quad (2.200)$$

que se representa en la Figura 2.18.

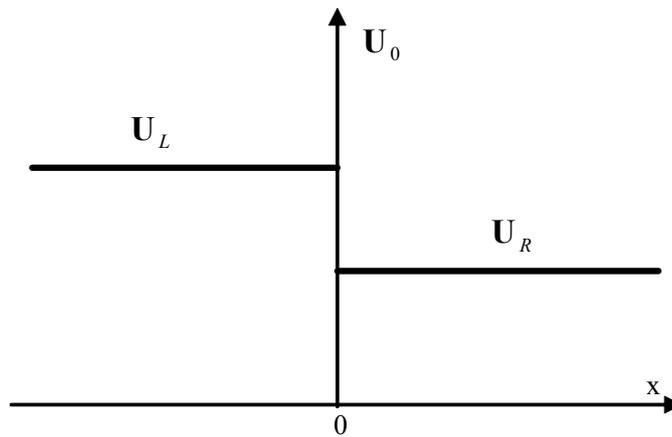


Figura 2.18. Datos iniciales del problema de Riemann

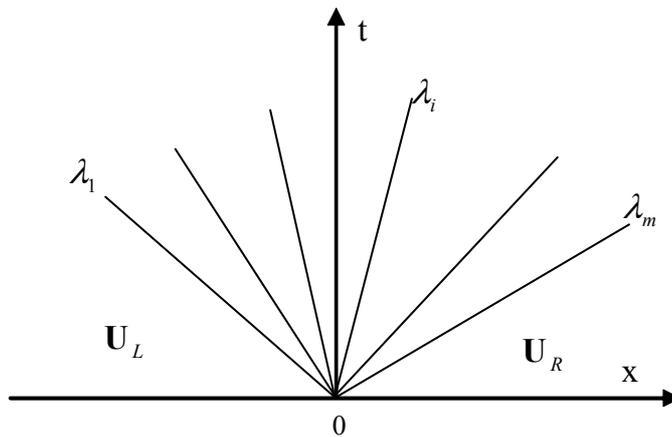


Figura 2.19. Estructura de la solución del problema de Riemann para un sistema hiperbólico a coeficientes constantes

Suponemos que el sistema es estrictamente hiperbólico, con valores propios reales:

$$\lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_m \quad (2.201)$$

La estructura de la solución en el plano $x-t$ consiste en m ondas que salen del origen. Cada una representa una discontinuidad que se propaga a velocidad λ_i . A la izquierda de λ_1 la solución es el estado constante \mathbf{U}_L , mientras que a la derecha de λ_m es \mathbf{U}_R (Figura 2.18). Como los valores propios \mathbf{e}_i forman un sistema de vectores linealmente independientes, se pueden escribir los estados constantes \mathbf{U}_L y \mathbf{U}_R como:

$$\mathbf{U}_L = \sum_{i=1}^m \alpha_i \mathbf{e}_i \quad ; \quad \mathbf{U}_R = \sum_{i=1}^m \beta_i \mathbf{e}_i \quad (2.202)$$

con α_i y β_i coeficientes constantes. La solución del problema (2.199), (2.200) viene dada por (Toro, 1996):

$$\mathbf{U}(x,t) = \sum_{i=I+1}^m \alpha_i \mathbf{e}_i + \sum_{i=1}^I \beta_i \mathbf{e}_i \quad (2.203)$$

donde $I = I(x, t)$ es el máximo valor del subíndice i para el cual $x - \lambda_i t > 0$. De esta expresión se deduce que el salto que sufre la solución al cruzar una onda λ_i es el valor:

$$(\Delta \mathbf{U})_i = (\beta_i - \alpha_i) \mathbf{e}_i \tag{2.204}$$

donde el coeficiente $(\beta_i - \alpha_i)$ se conoce como la *fuerza de la onda i*.

Para el caso en que \mathbf{A} es una matriz 2×2 , del origen salen dos ondas que viajan a una velocidad igual a las velocidades características λ_i . La solución a la izquierda de la línea $dx/dt = \lambda_1$ es el estado \mathbf{U}_L :

$$\mathbf{U}_L = \alpha_1 \mathbf{e}_1 + \alpha_2 \mathbf{e}_2 \tag{2.205}$$

y a la derecha de $dx/dt = \lambda_2$ es:

$$\mathbf{U}_R = \beta_1 \mathbf{e}_1 + \beta_2 \mathbf{e}_2 \tag{2.206}$$

La cuña comprendida entre las ondas λ_1 y λ_2 se conoce en la bibliografía como *región estrella* o *Star Region*, y la solución allí se denota con \mathbf{U}^* . Si nos desplazamos por una línea $t = \text{constante}$ desde un punto (x_L, t^*) situado a la izquierda de $dx/dt = \lambda_1$, mientras no se cruce dicha línea se cumple $x - \lambda_i t < 0$ para ambos λ_i , por lo que la solución será constante dada por (2.205). En el momento que se cruza la onda λ_1 , la expresión $x - \lambda_1 t$ pasa de negativa a positiva. La solución viene dada, según (2.203), por:

$$\mathbf{U}^* = \beta_1 \mathbf{e}_1 + \alpha_2 \mathbf{e}_2 \tag{2.207}$$

mientras que al cruzar la línea $dx/dt = \lambda_2$ es la expresión $x - \lambda_2 t$ la que cambia de signo y la solución viene dada por (2.206).

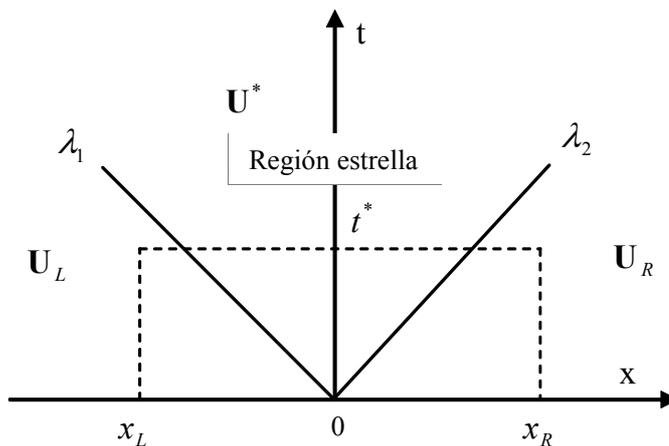


Figura 2.20. Estructura de la solución del problema de Riemann unidimensional

2.5.7.2 Relaciones integrales en el problema de Riemann

En este contexto es interesante obtener un resultado que más adelante será útil para el desarrollo de métodos aproximados de resolución del problema de Riemann (segundo apartado del Capítulo 4). Para ello se consideran dos estados iniciales \mathbf{U}_L a la izquierda y \mathbf{U}_R a la derecha y las ondas que se propagan a menor y mayor velocidad de entre las existentes, siendo sus valores S_L y S_R respectivamente. La forma integral de (2.197) en $[x_L, 0] \times [0, T]$ (Figura 2.21) es:

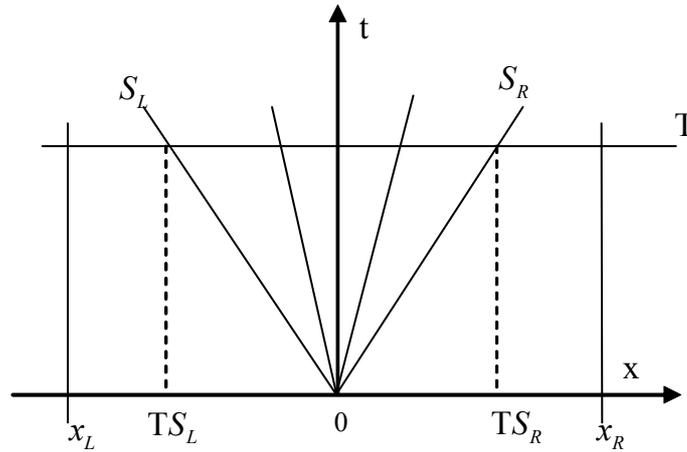


Figura 2.21. Volumen de integración $[x_L, 0] \times [0, T]$ de la ley de conservación donde S_L y S_R son las velocidades mínima y máxima de propagación de las ondas resultantes del problema de Riemann.

$$\int_{x_L}^0 U(x, T) dx = \int_{x_L}^0 U(x, 0) dx + \int_0^T F(U(x_L, t)) dt - \int_0^T F(U(0, t)) dt \tag{2.208}$$

que como el estado a la izquierda es constantes queda:

$$\int_{x_L}^0 U(x, T) dx = -x_L U_L + T(F_L - F_0) \tag{2.209}$$

siendo $F_L = F(U_L)$ y $F_0 = F(U(x=0))$. El término de la izquierda de la ecuación anterior se puede desarrollar como:

$$\int_{x_L}^0 U(x, T) dx = \int_{x_L}^{TS_L} U(x, T) dx + \int_{TS_L}^0 U(x, T) dx = (TS_L - x_L) U_L + \int_{TS_L}^0 U(x, T) dx \tag{2.210}$$

y de estas dos ultimas expresiones se obtiene:

$$F_0 = F_L - S_L U_L - \frac{1}{T} \int_{TS_L}^0 U(x, T) dx \tag{2.211}$$

De la misma forma, integrando sobre el volumen $[0, x_R] \times [0, T]$:

$$F_0 = F_R - S_R U_R + \frac{1}{T} \int_0^{TS_R} U(x, T) dx \tag{2.212}$$

2.5.7.3 El problema de Riemann para las ecuaciones de Saint Venant unidimensionales

La solución del problema de Riemann para las ecuaciones de Saint Venant unidimensionales consiste en dos ondas (ondas de choque o de depresión) que emanan del origen, dependiendo de las condiciones iniciales, y más concretamente de si en el instante inicial las líneas características correspondientes al mismo valor propio a cada lado de la discontinuidad se cruzan (onda de choque) o no (onda de depresión).

En el caso de una onda de choque, los dos estados iniciales están conectados a través de una única discontinuidad entre ambos lados de la cual deben cumplirse las condiciones de Rankine-Hugoniot (2.184) y la condición de entropía:

$$\lambda_i(U_L) > S > \lambda_i(U_R) \tag{2.213}$$

Mientras que en el caso de la onda de depresión los dos estados a cada lado están conectados por una transición suave entre los cuales se cumple la constancia de los invariantes de Riemann generalizados (porqué por tratarse de una región próxima a un estado constante estaremos en una región de onda simple) y la condición de divergencia de características:

$$\lambda_i(U_L) < \lambda_i(U_R) \tag{2.214}$$

Aunque en un principio el problema de Riemann se planteó para dinámica de gases entre dos estados en equilibrio, posteriormente el término se ha aplicado para una situación inicial dada por dos estados constantes cualquiera, aunque no se cumplan las condiciones de Rankine-Hugoniot entre ellos, o sea prácticamente imposible conseguirlos en la realidad.

Una presentación detallada de la formación de frentes, resaltos hidráulicos y propagación de ondas para las ecuaciones de Saint Venant unidimensionales, con una completa discusión de los tipos de onda posibles, se puede encontrar en (Bateman, 1993). Aquí nos limitamos a ver la estructura geométrica de todas las soluciones posibles del Problema de Riemann para las ecuaciones de Saint Venant unidimensionales, para el caso $u_L < u_R$:

1. Si: $u_L - u_R > \sqrt{g(h_L + h_R)(h_L - h_R)^2 / (2h_L h_R)}$ la discontinuidad inicial se descompone en dos ondas de choque o discontinuidades fuertes (frentes de onda) que se propagan en direcciones opuestas y en un estado constante entre ellos (Figura 2.22).

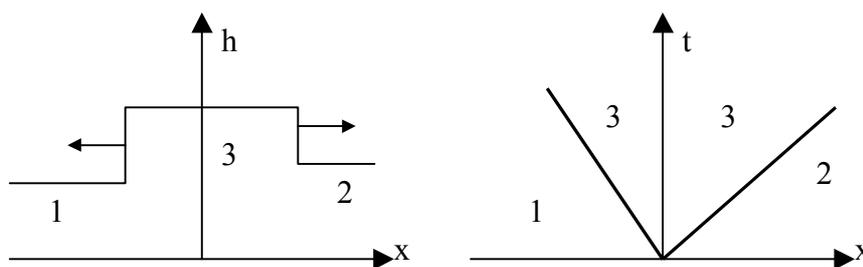


Figura 2.22. Solución del problema de Riemann 1. Solución y características.

2. Si $u_L - u_R = \sqrt{g(h_L + h_R)(h_L - h_R)^2 / (2h_L h_R)}$ la discontinuidad inicial se mantiene propagándose hacia la izquierda.
3. Si $-2(c_2 - c_1) < u_L - u_R < \sqrt{g(h_L + h_R)(h_L - h_R)^2 / (2h_L h_R)}$ la discontinuidad inicial se descompone en una discontinuidad fuerte que se desplaza hacia la izquierda y una onda de depresión limitada por discontinuidades débiles que se propaga hacia la derecha. Entre ellas hay un estado constante. El problema de la rotura de presa, que se trata en el apartado siguiente, es un caso particular de este con $u_R = u_L = 0$ (Figura 2.23) i $u_L - u_R = -2(c_R - c_L)$ habrá tan solo una onda de depresión propagándose hacia la derecha..

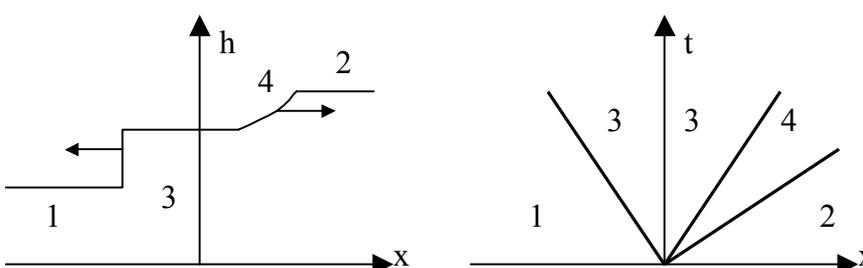


Figura 2.23. Solución del problema de Riemann 3. Solución y características.

4. Si $u_L - u_R = -2(c_L - c_R)$ habrá una onda de depresión propagándose hacia la derecha (Figura 2.24).

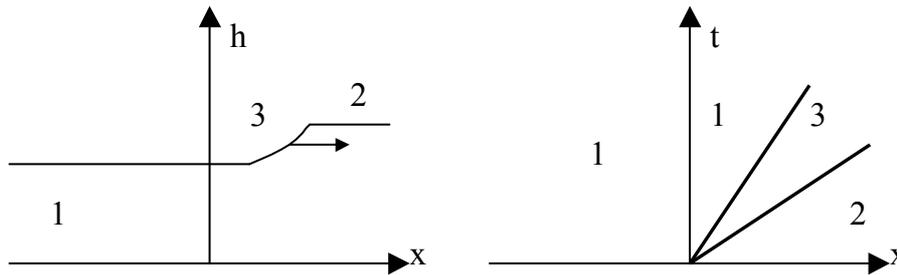


Figura 2.24. Solución del problema de Riemann 4. Solución y características.

5. Si $-2(c_R + c_L) < u_L - u_R < -2(c_L - c_R)$ habrá dos ondas de depresión propagándose hacia ambos lados con un estado constante entre ambas (Figura 2.25).

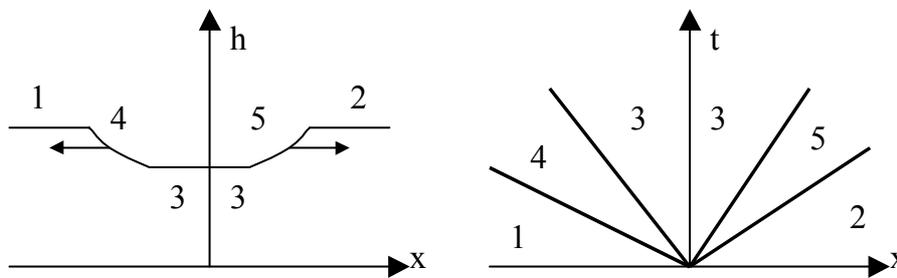


Figura 2.25. Solución del problema de Riemann 5. Solución y características.

6. Si $u_L - u_R \leq -2(c_L + c_R)$ es igual al caso anterior con la diferencia que no habrá agua entre las dos ondas de depresión.

2.5.7.4 El problema de Riemann para las ecuaciones de Saint Venant en una dimensión aumentadas

A partir de las ecuaciones de Saint Venant unidimensionales en canal rectangular (2.55), (2.56), se pueden definir las *ecuaciones de Saint Venant aumentadas* (Toro, 2001) como:

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{U} + \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{F} = 0 \tag{2.215}$$

con:

$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} h \\ hu \\ h\Psi \end{pmatrix} ; \quad \mathbf{F} = \begin{pmatrix} hu \\ hu^2 + g \frac{h^2}{2} \\ hu\Psi \end{pmatrix} \tag{2.216}$$

donde Ψ es un escalar llamado *escalar pasivo* que puede tener distintos significados.

Ψ podría ser por ejemplo la concentración de un contaminante transportado por el flujo y la tercera fila de la ecuación anterior representaría la ecuación de transporte del mismo. Por otro lado, estas ecuaciones de Saint

Venat aumentadas coinciden exactamente con la proyección sobre la dirección x de las ecuaciones de Saint Venant bidimensionales (2.46) (2.47) con término independiente nulo.

El problema de Riemann para las ecuaciones de Saint Venant unidimensionales aumentadas está definido por (2.216) junto con

$$\begin{cases} \mathbf{U}(0, x) = \mathbf{U}_0(x) = \mathbf{U}_L & \text{si } x < 0 \\ \mathbf{U}(0, x) = \mathbf{U}_0(x) = \mathbf{U}_R & \text{si } x > 0 \end{cases} \quad (2.217)$$

y

$$\mathbf{U}_L = \begin{pmatrix} h_L \\ h_L u_L \\ h_L \Psi_L \end{pmatrix} ; \quad \mathbf{U}_R = \begin{pmatrix} h_R \\ h_R u_R \\ h_R \Psi_R \end{pmatrix} \quad (2.218)$$

Su estudio es útil para el desarrollo de esquemas numéricos para la resolución de las ecuaciones de Saint Venant bidimensionales mediante la técnica de los volúmenes finitos, donde se resuelven las ecuaciones en forma integral en un volumen finito a través de la resolución del problema de Riemann en la dirección perpendicular a cada uno de los lados que forman el contorno del volumen finito.

Para este sistema de ecuaciones los valores propios son:

$$\lambda_{1,3} = u \pm c \quad ; \quad \lambda_2 = u \quad (2.219)$$

y los vectores propios:

$$\mathbf{e}_{1,3} = \begin{pmatrix} 1 \\ u \pm c \\ \Psi \end{pmatrix} ; \quad \mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (2.220)$$

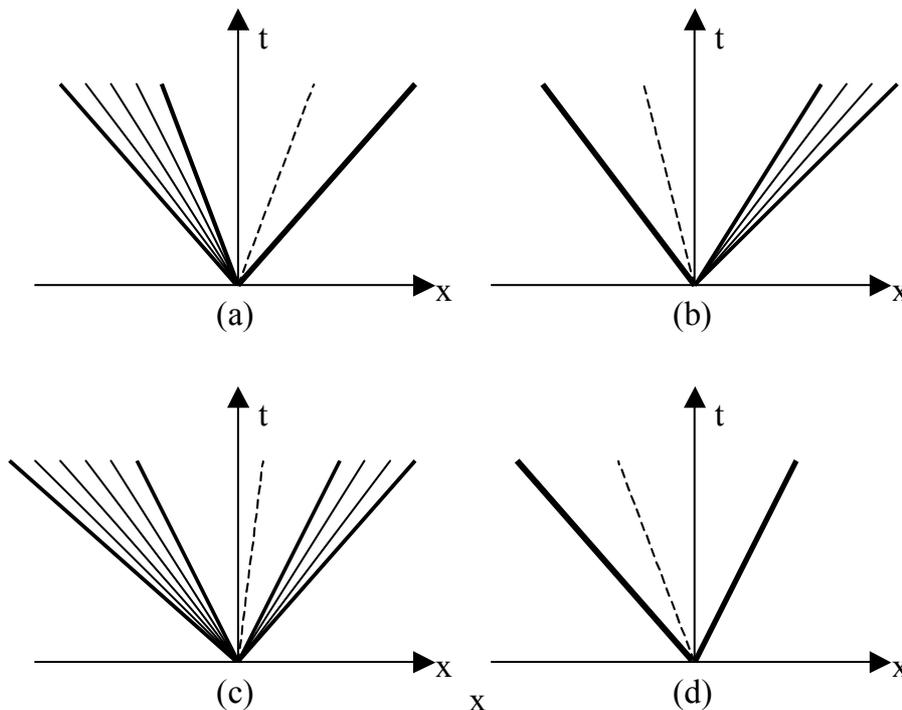


Figura 2.26. Los cuatro posibles patrones de ondas para las ecuaciones de Saint Venant aumentadas formados por ondas de choque (línea gruesa), ondas de contacto (línea discontinua) y ondas débiles (abanico).

Por lo que la solución del problema de Riemann para las ecuaciones de Saint Venant aumentadas consiste en tres ondas que emanan del origen, dos de ellas (no lineales) pueden ser ondas de choque o de depresión, mientras que la tercera (lineal), asociada al escalar pasivo, es siempre una onda de contacto (Figura 2.26). Esta solución tiene pues la misma estructura que la de las ecuaciones de Saint Venant unidimensionales vista en el apartado anterior, con la diferencia que entre cada una de las ondas vistas anteriormente (la de la izquierda asociada al valor propio $u - c$ y la de la derecha a $u + c$) existirá una onda de contacto (asociada al segundo valor propio u).

La solución del problema de Riemann se puede encontrar utilizando las relaciones que se deben cumplir a través de cada una de las ondas sabiendo que los estados extremos corresponden a los estados iniciales \mathbf{U}_L y \mathbf{U}_R . A través de una onda débil los invariantes de Riemann generalizados se mantienen constantes. Se puede ver que esta condición resulta en que a través de una onda débil asociada a $u + c$ se cumple:

$$u - 2c = \text{constante} \quad ; \quad \Psi = \text{constante} \quad (2.221)$$

mientras que a través de una onda débil asociada a $u - c$:

$$u + 2c = \text{constante} \quad ; \quad \Psi = \text{constante} \quad (2.222)$$

Se ha visto que para una onda de contacto las líneas características asociadas a su valor propio son paralelas a ambos lados de la misma, se cumple pues $\lambda_{2L} = \lambda_{2R}$, de manera que la velocidad de propagación de la onda será precisamente u . La condición de Rankine-Hugoniot es:

$$\Delta \mathbf{F} = u \Delta \mathbf{U} \quad (2.223)$$

La invariancia de los invariantes de Riemann generalizados se escribirá para este campo característico

$$\frac{dh}{0} = \frac{d(hu)}{0} = \frac{d(h\Psi)}{1} \quad (2.224)$$

de donde se obtiene que h y u se mantienen constantes a través de la onda de contacto mientras que Ψ tiene un salto en su valor.

Para una onda de choque, al igual que para las ecuaciones de Saint Venant unidimensionales se debe cumplir la condición de Rankine-Hugoniot (2.184), y la condición de entropía que dice que las características convergen hacia la discontinuidad

$$\lambda_i(\mathbf{U}_L) > S_i > \lambda_i(\mathbf{U}_R) \quad (2.225)$$

Como las ecuaciones de Rankine-Hugoniot son independientes del sistema de referencia, escritas para un sistema de referencia que se mueve con la onda quedan:

$$\Delta \hat{\mathbf{F}} = 0 \Delta \hat{\mathbf{U}} = 0 \quad (2.226)$$

donde $\hat{\mathbf{U}} = \mathbf{U} - S_i$ y $\hat{\mathbf{F}} = \hat{\mathbf{F}}(\hat{\mathbf{U}})$, por lo que la primera y tercera ecuación de la condición de Rankine-Hugoniot son respectivamente:

$$\Delta(h\hat{u}) = 0 \quad ; \quad \Delta(h\hat{u}\Psi) = 0 \quad (2.227)$$

Finalmente incluyendo la primera en la tercera se obtiene que para una onda de choque $\Delta\Psi = 0$ o, lo que es lo mismo, Ψ es constante a través de ella.

Así pues la única diferencia entre la solución del problema de Riemann para las ecuaciones de Saint Venant unidimensionales, y para las mismas ecuaciones aumentadas, es la presencia de una onda de contacto que se desplaza con velocidad u y a través de la cual el valor del escalar pasivo sufre un salto. A través del resto de ondas Ψ se mantiene constante.

2.5.7.5 El problema de la rotura de presa en una dimensión.

El problema de la rotura de presa en una dimensión equivale al problema de Riemann para $u_L = u_R = 0$. La discontinuidad inicial del problema hace que muchos esquemas clásicos de resolución de las ecuaciones de Saint Venant fallen, otros funcionan siempre y cuando la profundidad de agua en el lado donde es menor no sea inferior a un cierto porcentaje del otro lado. En cualquier caso es un buen test para cualquier esquema numérico que pretenda modelar correctamente flujos discontinuos.

La situación inicial sería la de un canal rectangular prismático horizontal, con una presa que separa dos partes con agua en reposo y calados distintos: h_L a la izquierda de la presa y h_R a su derecha. Suponemos el canal indefinido y sin fricción.

Como se ha visto en el apartado anterior, la estructura del flujo es la siguiente: a la izquierda del todo queda el estado inicial sin perturbar, que por congruencia con el apartado anterior llamaremos zona 2 (mayor calado inicial), a continuación, después de una discontinuidad débil, viene una zona ocupada por una onda de depresión, que va ensanchándose y propagándose a la izquierda a medida que transcurre el tiempo, la zona 4. La siguiente, zona 3, es una zona de calado h_3 y velocidad u_3 constantes, limitada por la derecha por un frente que se propaga hacia la derecha a continuación del cual está la zona 1, con velocidad nula y calado inalterado u_R Figura 2.28.

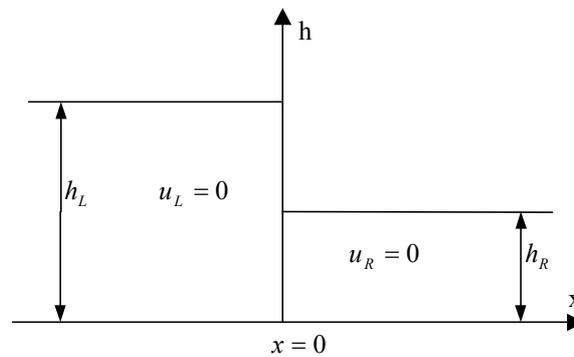


Figura 2.27. Estado inicial del problema de rotura de presa.

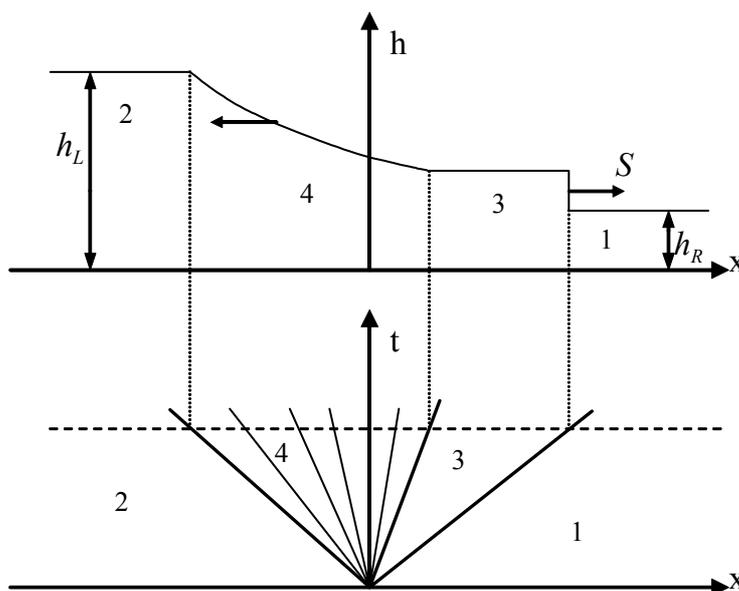


Figura 2.28. Rotura de presa a $t > 0$. Calados y características.

La zona de la onda de depresión (zona 4) está limitada por dos estados constantes, por lo que, tal como se ha visto en 2.5.3 esta zona debe ser una región de onda simple correspondiente a las características C^- y por lo tanto a través de ella se cumple la constancia de los invariantes de Riemann generalizados R^- :

$$2c_2 = u_4 + 2c_4 = u_3 + 2c_3 \quad (2.228)$$

A través del frente, entre las zonas 3 y 1, se deben cumplir las condiciones de Rankine-Hugoniot (2.184) válidas cuando tenemos una discontinuidad fuerte, que aquí quedan:

$$h_1 u_1 - h_3 u_3 = s(h_1 - h_3) \quad (2.229)$$

$$(h_1 u_1^2 + g \frac{h_1^2}{2})(h_3 u_3^2 + g \frac{h_3^2}{2}) = s(h_1 u_1 - h_3 u_3) \quad (2.230)$$

donde s es la velocidad de propagación del frente. Teniendo en cuenta que $u_1 = 0$, $h = c^2/g$ y operando, estas dos ecuaciones quedan:

$$\frac{c_3}{c_1} = \left[\frac{1}{2} \left(\sqrt{1 + 8 \left(\frac{s}{c_1} \right)^2} - 1 \right) \right]^{\frac{1}{2}} \quad (2.231)$$

$$\frac{u_3}{c_1} = \frac{s}{c_1} - \frac{c_1}{4s} \left(1 + \sqrt{1 + 8 \left(\frac{s}{c_1} \right)^2} \right) \quad (2.232)$$

que juntamente con la parte correspondiente de (2.228):

$$u_3 + 2c_3 = 2c_2 \quad (2.233)$$

forman un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas u_3 , c_3 y s que hay que resolver por algún método iterativo.

Las ecuaciones que dan la solución en la zona 4 se obtienen de tener en cuenta que el haz de características rectas allí corresponde a las líneas C^- y por lo tanto cumplen la relación $x/t = u_4 - c_4$ que juntamente con (2.228) da:

$$u_4 = \frac{2}{3} \left(c_2 + \frac{x}{t} \right) \quad ; \quad c_4 = \frac{1}{3} \left(2c_2 - \frac{x}{t} \right) \quad (2.234)$$

2.5.7.6 El problema de la rotura de presa sobre lecho seco.

El problema de la rotura de presa sobre lecho seco se diferencia del apartado anterior en que ahora $h_R = 0$ (Figura 2.29). En la práctica, muchas veces este problema numéricamente se trata, por simplicidad, considerando que en lugar de lecho seco existe un calado muy pequeño, pero esta aproximación es inexacta y puede causar problemas de estabilidad en el método numérico.

En el apartado anterior se ha visto que en la rotura de presa sobre lecho mojado existe un frente de onda que es una onda de choque que avanza con velocidad S , en cambio Toro (Toro, 2001) demuestra que una onda de choque no puede ser adyacente a una región de lecho seco, por lo que en este caso el vance del frente no corresponde a una onda de choque sino a una onda débil, como se muestra en la Figura 2.30. En este caso ($h_R = 0$) la onda débil estará asociada en general al autovalor $u_L - c_L$ que en este caso vale $-c_L$ y este es

precisamente la velocidad de propagación de su extremo izquierdo, mientras que la velocidad de propagación del frente mojado (extremo derecho de la onda) es en general $u_L + 2c_L$ y en particular para este caso $2c_L$.

Recordamos que lo dicho sería en la situación teórica de las ecuaciones sin término independiente y por lo tanto sin fricción, por lo que en la realidad la velocidad de avance del frente mojado nunca será tan grande.

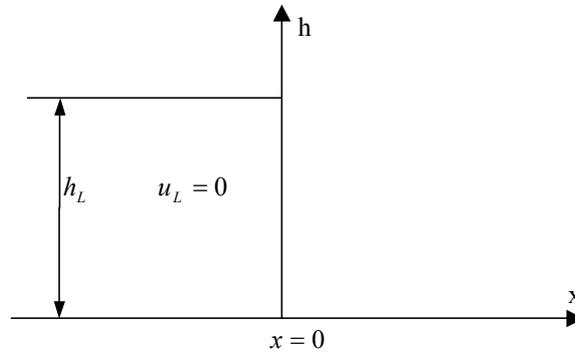


Figura 2.29. Estado inicial del problema de rotura de presa sobre lecho seco.

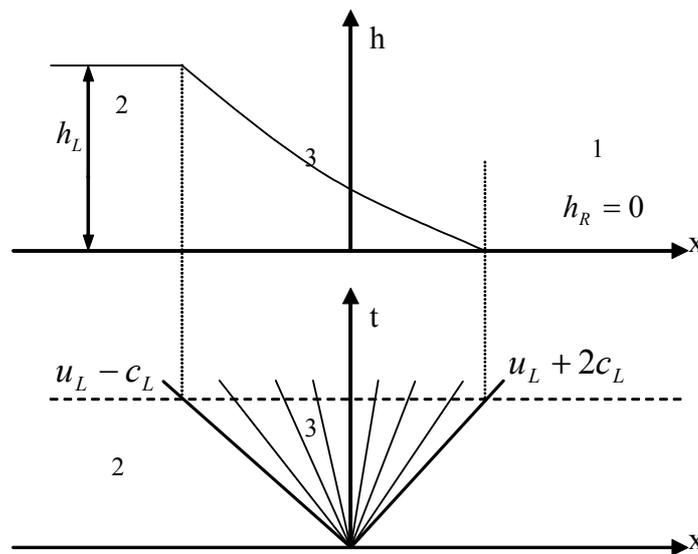


Figura 2.30. Rotura de presa sobre lecho seco a $t > 0$. Calados y características.

