

Analyse Transitoire des Modèles Markoviens des Systèmes Tolérants aux Fautes avec Réparation Différée

Jamal Temsamani

**Département d'Ingénierie Électronique
Universitat Politècnica de Catalunya**

Thèse Doctorale
présentée pour obtenir le grade de Docteur en Ingénierie Industrielle

Directeur: Juan Antonio Carrasco López

Barcelona, Février 2006

Table des matières

Préface	v
1 Introduction	1
1.1 Modélisation	2
1.2 Les Chaînes de Markov à temps continu récompensées	3
1.3 Systèmes tolérants aux fautes avec réparation différée	6
1.4 Objectif et organisation de la thèse	7
2 Méthodes pour l'analyse transitoire des CMTC récompensées	9
2.1 Méthodes numériques pour la résolution des EDO raides	10
2.1.1 Stabilité	11
2.1.2 Méthode TR-BDF2	13
2.1.3 Méthode de Runge-Kutta implicite de troisième ordre	13
2.1.4 Méthodes de résolution des EDO combinés	14
2.2 Méthodes basées sur la randomisation	14
2.2.1 Randomisation standard (RS)	14
2.2.2 Uniformisation adaptative (UA)	17
2.2.3 Randomisation régénérative	20
2.2.4 Randomisation régénérative bornante	24

2.2.5	Randomisation avec détection du régime stationnaire	25
2.2.6	Randomisation avec détection du régime quasistationnaire	26
3	Randomisation régénérative divisée: cas particulier	31
3.1	Modèles couverts	31
3.2	Modèle transformé avec espace infini d'état	33
3.3	Troncation du modèle transformé	52
3.4	Description algorithmique	72
3.5	Propriétés théoriques	73
3.6	Analyse numérique	83
3.7	Conclusions	89
4	Randomisation régénérative divisée: cas général	91
4.1	Généralisation	91
4.2	Propriétés théoriques	105
4.3	Analyse numérique	109
4.4	Conclusions	117
5	Randomisation régénérative divisée bornante	123
5.1	Méthode	123
5.2	Analyse numérique	128
5.3	Conclusions	135
6	Conclusions	137
	Appendice: Réseaux ASEN-Max	139

Préface

A mes parents, à mon épouse Ihssan et, à mes petits Zaid et Yassir.

La modélisation joue un rôle important dans la conception et l'analyse des systèmes tolérants aux fautes. C'est clairement vrai aux étapes préliminaires de conception et quand on doit certifier qu'un système existant réalise un niveau très élevé de confiabilité.

La randomisation standard est une méthode attrayante pour l'analyse transitoire des modèles Markoviens des systèmes tolérants aux fautes. Les principaux avantages de la méthode sont la stabilité numérique et le contrôle d'erreur. Cependant la méthode peut être coûteuse pour des modèles raides, limitant ainsi son application.

La réparation différée est une approche intéressante pour les systèmes tolérants aux fautes dans lesquels les actions du remplacement des composants défaillants sont chères, par exemple le cas d'un système situé à une location éloignée. Dans cette thèse nous développons une nouvelle méthode numérique appelée *randomisation régénérative divisée* avec les mêmes avantages que la randomisation standard et typiquement beaucoup plus efficace pour les modèles Markoviens des systèmes tolérants aux fautes avec réparation différée.

Chapitre 1

Introduction

La demande croissante de fiabilité (comprise dans son sens large, c.à d. comme capacité d'un système de fonctionner correctement) a motivé un intérêt accru pour les systèmes tolérants aux fautes. Un système tolérant aux fautes est un système qui peut continuer son bon fonctionnement avec ou sans dégradation de performance en présence de fautes, c.à d. fautes physiques, imperfections, perturbations externes, ou erreurs de dessin des composants du matériel ou du logiciel. La tolérance aux fautes peut être réalisée par le masquage des fautes, c.à d. par annulation des erreurs sans éliminer les composants défectueux de la configuration opérationnelle de système, ou par reconfiguration, c.à d. par l'élimination des composants défectueux de la configuration opérationnelle de système. La dernière approximation est, généralement, plus complexe à mettre en application et exige la détection de faute (identification qu'une faute s'est produite), la location de la faute (identification du composant défectueux), l'isolation de la faute (isolation du composant défectueux de sorte qu'il ne produise pas d'erreurs qui se propagent dans le système), et la récupération de la faute (rétablissement du système à un état correct à partir duquel continue l'opération). Toutes ces techniques de tolérance aux fautes exigent l'addition de redondance. Cette redondance peut être de variants types: redondance matérielle (composants de matériel supplémentaires), redondance de l'information (information extra), redondance temporelle (computations supplémentaires), ou redondance de logiciel (composants de logiciel supplémentaires). La réplication des composants de matériel est un exemple de redondance matérielle; l'utilisation des codes détecteurs d'erreur est un exemple de redondance de l'information; la computation répétée et le "checkpointing" sont des exemples de redondance temporelle; la programmation *N*-version, et les blocs de rétablissement sont des exemples de redondance de logiciel. L'addition de redondance affecte négativement certaines caractéristiques du système comme le coût, la vitesse d'exécution, la taille, le poids, et la consommation d'énergie, et, pendant la conception d'un système tolérant aux fautes, ces impacts doivent être équilibrés contre l'amélioration de la

fiabilité du système. La tolérance aux fautes est une approche attrayante pour la conception de systèmes qui, sans tolérance aux fautes, auraient un niveau inacceptable de fiabilité. Ceci inclut les systèmes pour des applications critiques telles que la commande de vol et la commande des processus chimiques dangereux, les systèmes non-réparables avec missions longues tels que les satellites, les systèmes exigeant une disponibilité très élevée, comme les systèmes de commutation téléphonique et les systèmes de réservation des lignes aériennes, et les systèmes avec de grandes quantités de matériel ou logiciel tels que les grands multiprocesseurs.

La fiabilité d'un système tolérant aux fautes peut être mesurée par mesures récapitulant le comportement du système perçu par ses utilisateurs. Beaucoup de systèmes peuvent être considérés comme exécutant correctement ou n'exécutant pas du tout. La fiabilité de ces systèmes peut être quantifiée en utilisant des mesures simples de confiabilité comme la fiabilité et la disponibilité. Beaucoup d'autres systèmes, cependant, sont dégradables, dans le sens que leur exécution peut se dégrader à cause des composants défectueux. Les mesures simples de fiabilité peuvent être généralisées pour évaluer la fiabilité de ces systèmes en associant des niveaux des performances aux états de système et en incluant dans l'ensemble des états opérationnels les états dans lesquels le système a une performance supérieure ou égale à chacun de ces niveaux [31]. Une approche plus générale est le concept de performabilité présenté par Meyer [37]. Dans cette approche, le comportement du système perçu par ses utilisateurs est quantifié par un ensemble discret ou continu de niveaux d'accomplissement et la performabilité est définie comme la probabilité d'un sous-ensemble mesurable de niveaux d'accomplissement. Un exemple du concept de performabilité est la distribution de la performance accumulée par le système pendant un intervalle de temps. Un autre exemple [38] est la distribution de la fraction du temps pendant un intervalle de temps dans lequel un canal de transmission ne fournit pas une qualité donnée de service aux sources du trafic admises.

1.1 Modélisation

La modélisation joue un rôle important dans la conception et l'analyse des systèmes tolérants aux fautes. C'est clairement vrai aux étapes préliminaires de conception et quand on doit certifier qu'un système existant réalise un niveau très élevé de fiabilité. Les fautes des composants, les mécanismes de récupération des fautes, les activités de réparation, et les activités de performances sont de nature stochastique, et, ainsi, des modèles stochastiques doivent être employés. Les paramètres typiques de ces modèles sont les taux de fautes de composants, les probabilités de couverture (c.à d. les probabilités que les fautes soient récupérées avec succès), les distributions des temps de réparation, et les caractéristiques des activités reliées à la performance. L'évalua-

tion de ces paramètres est la première étape pour construire un modèle. Cette évaluation peut être réalisée à partir des caractéristiques de système, à partir des données collectées dans des systèmes en opération semblables, à partir des données fournies par les fabricants de composants (par exemple, temps moyen de fautes de composants de matériel/logiciel), à partir des modèles standard disponibles (par exemple, le modèle de MIL-HDBK-217e pour l'évaluation des taux de fautes de composants de matériel), ou à partir des données collectées par expérimentations réalisées sur le système réel, un modèle de simulation des systèmes plus ou moins détaillé (par exemple les estimations des probabilités de couverture par expérimentation d'injection des fautes; voir Iyer et Tang [25] pour un résumé de ces techniques).

L'importance des modèles stochastiques dans l'évaluation des systèmes tolérants aux fautes a stimulé le développement des outils de logiciel avec facilités pour la spécification et la résolution des modèles stochastiques: SURF [30], ARIES [33], HARP [22], SAVE [24], METFAC [12], SHARPE [47], SPNP [19], UltraSAN [21], SURF-2 [4], METFAC-2 [13], et GALILEO [51], entre autres. Les chaînes de Markov à temps continu (CMTC) homogènes sont le type le plus largement utilisées. Ils apparaissent quand les temps de production de fautes et les temps de réparation ont des distributions exponentielles.

1.2 Les Chaînes de Markov à temps continu récompensées

Les chaînes de Markov à temps continu (CMTC) récompensées ont démontrée être dans les dernières années un puissant formalisme de modélisation. La structure de récompense peut inclure des taux de récompenses associées aux états et des récompenses d'impulsion associés aux transitions. Les taux de récompense indiquent le taux auquel la récompense est accumulée pendant que la CMTC est dans un état particulier; les taux de récompenses d'impulsion sont des récompenses accumulées chaque fois que la CMTC effectue une transition. Une structure appropriée de récompense peut être employée pour mesurer beaucoup d'aspects du comportement d'un système: Fiabilité, performance, coût d'opération, consommation d'énergie, etc. Le comportement probabiliste de la récompense résultante peut être récapitulé en utilisant différentes mesures de récompense.

Dans cette thèse nous considérons des chaînes de Markov à temps continu avec espace d'état fini et une structure de récompenses comprenant seulement des taux de récompenses. Soit $X = \{X(t); t \geq 0\}$ une CMTC avec espace d'état fini Ω et taux de récompense $r_i, i \in \Omega$. Le taux de récompense de X a le temps t et la variable aléatoire $r_{X(t)}$. Deux mesures récapitulant l'évolution de $r_{X(t)}$ seront considérées: L'espérance de taux de récompense transitoire $E\text{TRT}(t) = E[r_{X(t)}]$ et l'espérance de taux de récompense moyenne $E\text{TRM}(t) = E\left[\int_0^t r_{X(\tau)} d\tau/t\right]$.

Ci-dessous, on décrit quelques concepts de base de la théorie de CMTC qui vont être utilisés dans la thèse.

Soit $X = \{X(t), t \geq 0\}$ un processus stochastique à temps continu à espace d'état dénombrable Ω . On dit que le processus X est une chaîne de Markov à temps continu (CMTC) si, pour tous $t > 0, 0 \leq s_1 < s_2 < \dots < s_n$ et $j, i_1, i_2, \dots, i_n \in \Omega$,

$$P[X(t+s) = j | X(s_1) = i_1 \wedge X(s_2) = i_2 \wedge \dots \wedge X(s_n) = i_n] = P[X(t+s) = j | X(s_n) = i_n]$$

c.à d. l'évolution future de ce processus stochastique dépend seulement de l'état actuel et ne dépend pas de l'évolution antérieure. Soit $X = \{X(t), t \geq 0\}$ une CMTC avec espace d'état dénombrable Ω . Les probabilités $\tilde{P}_{i,j}(s, t) = P[X(t) = j | X(s) = i], 0 \leq s \leq t$, sont appelées probabilités de transition de X . La matrice $\tilde{\mathbf{P}}(s, t) = (\tilde{P}_{i,j}(s, t))_{i,j \in \Omega}$ est appelée matrice des probabilités de transition de X . Cette matrice est stochastique, c.à d., $\tilde{\mathbf{P}}(s, t) \geq \mathbf{0}$ et $\tilde{\mathbf{P}}(s, t)\mathbf{1} = \mathbf{1}$, ou $\mathbf{0}$ est un vecteur avec tous ses composants égaux à 0 et $\mathbf{1}$ est un vecteur avec tous ses composants égaux à 1.

Une CMTC $X = \{X(t); t \geq 0\}$ est dite homogène quand les probabilités de transitions $\tilde{P}_{i,j}(s, t)$ ont la forme $P_{i,j}(t - s)$, qui sont aussi appelées probabilités de transition. La matrice $\mathbf{P}(t) = (P_{i,j}(t))_{i,j \in \Omega}$ est appelée matrice des probabilités de transition de X . La matrice $\mathbf{P}(t)$ est stochastique. Le taux de transition de X de l'état i à l'état $j, j \neq i$ est défini par $\lambda_{i,j} = p'_{i,j}(0^+)$; le taux de départ de l'état i est défini par $\lambda_i = -p'_{i,i}(0^+)$. On a $\lambda_{i,j} \geq 0, j \neq i, \lambda_i \geq 0$ et $\sum_{j \neq i} \lambda_{i,j} \leq \lambda_i$. Pour une CMTC à espace d'état fini on a $\lambda_i = \sum_{j \neq i} \lambda_{i,j} < \infty$. La matrice $\mathbf{A} = (a_{i,j})_{i,j \in \Omega}, a_{i,i} = -\lambda_i, a_{i,j} = \lambda_{i,j}, j \neq i$, est appelée matrice de taux de transition de X ou générateur infinitésimal de X . La matrice \mathbf{A} avec le vecteur des probabilités initiales $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_i)_{i \in \Omega}, \alpha_i = P[X(0) = i]$ caractérise la CMTC.

Le graphe de transition des états d'une CMTC X est un graphe dirigé ayant comme ensemble des noeuds l'espace d'état de X et ayant un arc du noeud i au noeud j étiqueté $\lambda_{i,j}$ par chaque taux de transition $\lambda_{i,j} > 0$. Deux états $i, j \in \Omega$ sont communicants si et seulement s'il y a des chemins dans le graphe de transition des états de i à j et de j à i . Par convention, un état est communicant avec lui même. La communication entre états est une relation d'équivalence. Les classes d'équivalence correspondantes sont appelées *classes* d'états de X . Une classe est donc, un sous-ensemble maximal des états communicants. Il est utile de définir le *graphe de classes* d'un CMTC X . Le *graphe de classes* d'une CMTC est le graphe dirigé acyclique ayant comme ensemble des noeuds l'ensemble des classes de X et ayant un arc de la classe C à la classe C' si et seulement si le graphe de transition d'état du X a un arc d'un certain état dans C à un certain état dans C' . Pour illustrer les concepts définis jusqu'ici, Figure 1.1 donne le graphe de transition des états d'une petite CMTC et le graphe correspondant des classes.

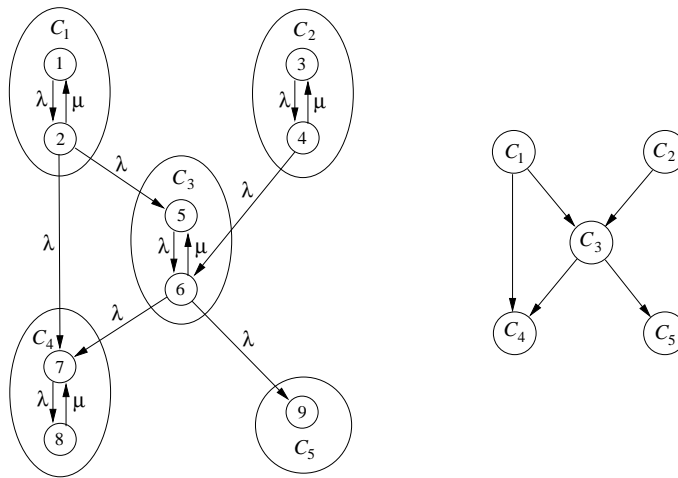


FIG. 1.1 – Graphe de transition des états d’une petite CMTC (gauche) et du graphe correspondant aux classes (droite).

Soit $p_i(t) = P[X(t) = i]$, $i \in \Omega$. Un état d’une CMTC X est accessible si et seulement si $p_i(t) > 0$, $t > 0$. Il peut être démontré que pour un état i inaccessible, $p_i(t) = 0$, $t \geq 0$. Soit $\alpha = (\alpha_i)_{i \in \Omega}$, $\alpha_i = P[X(0) = i]$, le vecteur des probabilités initiales de X . L’accessibilité des états de X peut être déterminé en analysant les probabilités initiales α_i , $i \in \Omega$ et l’existence des chemins dans le graphe de transition des états de X . Un état i est accessible si et seulement si $\alpha_i > 0$ ou s’il existe un chemin dans le graphe de transition des états de X d’un état $j \neq i$ avec $\alpha_j > 0$ à i . On peut démontrer que l’accessibilité est une propriété de classe, c.à d., que ou tous les états d’une classe sont accessibles ou tous les états d’une classe sont inaccessibles. On peut parler, donc, des classes accessibles et des classes inaccessibles. Pour chaque classe C de X , soit $\alpha_C = \sum_{i \in C} \alpha_i$. Alors les états d’une classe C sont accessibles si et seulement si $\alpha_C > 0$ ou s’il ya un chemin dans le graphe des classes de X d’une classe $C' \neq C$ avec $\alpha_{C'} > 0$ à C . Étant donné que les états inaccessibles ne seront jamais visités, on peut ignorer les états inaccessibles. Dans ce qui suit nous supposons que les états inaccessibles ont été éliminés de l’espace d’état de la CMTC.

Un état i est *transitoire* si, avec une probabilité non nulle, commençant en i , X abandonne i pour ne jamais retourner à lui. Un état est récurrent s’il n’est pas transitoire. On peut démontrer que pour un état i transitoire, $\lim_{t \rightarrow \infty} p_i(t) = 0$ et pour un état i récurrent, $\lim_{t \rightarrow \infty} p_i(t) > 0$. La transitoirité est une propriété de classe, c.à d.. ou tous les états d’une classe sont transitoires ou tous les états d’une classe sont récurrents. On peut parler, donc des classes transitoires et des classes récurrentes. La classification des classes d’une CMTC entre transitoires et récurrentes peut être faite facilement en examinant le graphe des classes. Une classe est récurrente si et seulement si, dans le graphe des classes, elle n’a aucun arc sortant. Pour l’exemple donné dans

la Figure 1.1, supposant que toutes les classes sont accessibles, les classes C_1 , C_2 et C_3 seraient transitoires et les classes C_4 et C_5 seraient récurrentes. Un état est appelé absorbant si $\lambda_i = 0$. Il est clair qu'un état absorbant constitue lui-même une classe récurrente. Une CMTC ayant une simple classe (récurrente) est dite *irréductible*.

1.3 Systèmes tolérants aux fautes avec réparation différée

La réparation différée est une approche intéressante dans les systèmes tolérants aux fautes dans lesquels les actions du remplacement des composants défaillants sont chères, par exemple le cas d'un système situé à une localisation éloignée. Dans cette thèse, nous considérons certaines classes de CMTC récompensées comprenant les CMTC qui typiquement résulte quand on modélise un système tolérant aux fautes avec réparation différée. Pour illustrer la structure de ces CMTC, la Figure 1.2 donne un petit modèle de fiabilité d'un système tolérant aux fautes avec réparation différée employant la technique "pair-and-spare" [26]. Dans cette technique il y a trois copies du même module. Quand aucun module n'est en faute, deux modules sont actifs travaillant avec une configuration duale et le troisième module est en réserve. Après la faute d'un module actif, le module de réserve est activé et le système continue à fonctionner avec deux modules actifs travaillant avec une configuration duale. La faute d'un deuxième module laisse le système avec un seul module actif. La faute de ce module cause la défaillance du système. Le système défaille aussi si la faute d'un module actif n'est pas couverte. Les modules actifs ont un taux de faute λ_M , le module de réserve a un taux de faute nul. La faute d'un module actif est douce avec probabilité S_M et dure avec probabilité $1 - S_M$, et, qu'elle soit douce ou dure, la faute de module actif est couverte avec probabilité C_M . Les modules avec faute douce sont indépendamment récupérés avec taux μ_S et les modules avec faute dure sont réparés par un simple réparateur avec taux μ_H . La réparation est différée jusqu'à ce que deux modules tombent en faute et, quand cette condition est atteinte, la réparation procède jusqu'à atteindre l'état 1 sans composants en faute. Les états avec réparation différée sont les états 2 et 3. L'état 2 correspond à un système avec réparation ayant un module avec faute douce. L'état 3 correspond à un système avec réparation ayant un module avec faute dure. L'état 4 correspond à un système avec réparation ayant deux modules avec faute douce. L'état 5 correspond à un système avec réparation ayant un module avec faute douce et un module avec faute dure. L'état 6 correspond à un système avec réparation ayant deux modules avec faute dure. L'état f correspond à la défaillance du système. Avec $r_f = 1$ et $r_i = 0$, $i \neq f$, la mesure $ETRT(t)$ est la non-fiabilité du système au temps t .

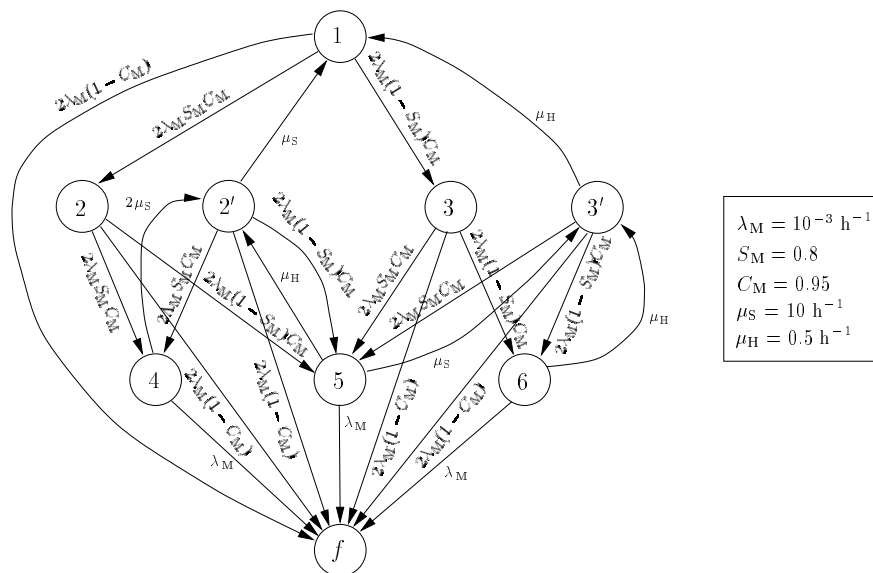


FIG. 1.2 – Modèle de fiabilité de CMTC d'un système tolérant aux pannes réparable avec réparation différée employant la technique "pair-and-spare".

1.4 Objectif et organisation de la thèse

La randomisation standard est une méthode attrayante pour l'analyse transitoire des modèles Markoviens des systèmes tolérant aux fautes. Les principaux avantages de la méthode sont la stabilité numérique et le contrôle de l'erreur. Cependant, la méthode est très coûteuse quand le modèle est raide. Dans cette thèse, nous développons une nouvelle méthode numérique appelée *randomisation régénérative divisée* avec les mêmes avantages que la randomisation standard et, peut être, beaucoup plus efficace pour les modèles Markoviens raides des systèmes tolérant aux fautes avec réparation différée. Nous développons aussi une méthode très efficace, la *randomisation régénérative divisée bornant*, pour la computation des bornes, typiquement ajustées, pour mesures de type fiabilité et modèles Markoviens des systèmes tolérant aux fautes avec réparation différée. La thèse est organisée comme suit. Le Chapitre 2 révisé les principales méthodes numériques pour l'évaluation des mesures $ETRT(t)$ et $ETRM(t)$ pour CMTC récompensées. Le Chapitre 3 est consacré aux développements de la méthode randomisation régénérative divisée pour un cas particulier d'intérêt de la mesure $ETRT(t)$. Le Chapitre 4 généralise la méthode aux mesures $ETRT(t)$ et $ETRM(t)$. Le Chapitre 5 développe la méthode randomisation régénérative divisée bornant. Le Chapitre 6 présente les conclusions. L'Annexe inclut une description des réseaux ASEN-MAX, qui sont utilisés comme exemple d'application des méthodes numériques développées dans thèse.

Chapitre 2

Méthodes pour l'analyse transitoire des CMTC récompensées

L'évaluation des mesures $ETRT(t)$ et $ETRM(t)$ exige l'analyse transitoire du CMTC. Les méthodes numériques standards pour effectuer cette analyse sont les méthodes numériques pour la résolution des équations différentielles ordinaires (EDO) et la *randomisation*, aussi appelée uniformisation. Une description des ces méthodes peut être trouvée à [34, 35, 44]. Les méthodes numériques pour la résolution de EDO n'offrent pas un contrôle strict de l'erreur de computation (l'erreur est proportionnelle à une tolérance spécifiée par l'utilisateur, mais la constante de proportionnalité est inconnue). La méthode de randomisation est numériquement stable et offre un contrôle strict de l'erreur de computation, mais la méthode est très coûteuse pour de grands modèles raides. Ces grands modèles raides peuvent être analysés plus efficacement en employant des méthodes numériques spécifiées pour la résolution des EDO raides.

Dans ce chapitre, on révisé les méthodes numériques pour la résolution des EDO raides, la randomisation (standard) et les variantes de la randomisation standard qui ont été proposées pour améliorer son efficacité. On considérera une CMTC $X = \{X(t); t \geq 0\}$ avec espace d'états fini Ω , générateur infinitésimal $\mathbf{A} = (a_{i,j})_{i,j \in \Omega}$, $a_{i,i} = -\lambda_i$, $i \in \Omega$, $a_{i,j} = \lambda_{i,j}$, $i, j \in \Omega$, $j \neq i$, où λ_i est le taux de départ de X de l'état i et $\lambda_{i,j}$ est le taux de transition de X de l'état i à l'état j . Le vecteur des probabilités initiales de X sera dénoté par $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_i)_{i \in \Omega}$, $\alpha_i = P[X(0) = i]$, $i \in \Omega$.

2.1 Méthodes numériques pour la résolution des EDO raides

Soit $\mathbf{p}(t) = (p_i(t))_{i \in \Omega}$, $p_i(t) = P[X(t) = i]$, $i \in \Omega$ le vecteur ligne des probabilités transitoires de X . Il est bien connu que $\mathbf{p}(t)$ satisfait l'équation différentielle ordinaire (EDO),

$$\frac{d\mathbf{p}(t)}{dt} = \mathbf{p}(t)\mathbf{A}, \quad (2.1)$$

avec condition initiale $\mathbf{p}(0) = \boldsymbol{\alpha}$.

Les mesures $\text{ETRT}(t)$ et $\text{ETRM}(t)$ peuvent être exprimées en fonction de vecteur $\mathbf{p}(t)$:

$$\text{ETRT}(t) = E[r_{X(t)}] = \sum_{i \in \Omega} r_i p_i(t),$$

$$\text{ETRM}(t) = E\left[\frac{1}{t} \int_0^t r_{X(\tau)} d\tau\right] = \frac{1}{t} \int_0^t E[r_{X(\tau)}] d\tau = \sum_{i \in \Omega} r_i \frac{1}{t} \int_0^t p_i(\tau) d\tau.$$

Ces formulations permettent l'utilisation des méthodes numériques pour la résolution des EDO pour évaluer les mesures $\text{ETRT}(t)$ et $\text{ETRM}(t)$. Comme la EDO (2.1) est fréquemment raide, les méthodes numériques pour la résolution des EDO raides sont particulièrement pertinentes.

La stratégie des méthodes numériques pour la résolution des EDO pour résoudre (2.1) est de discrétiser l'intervalle de solution $[0, t]$ et de calculer une solution approchée en des points intermédiaires. Soit une subdivision $\{t_0, t_1, t_2, \dots, t_n\}$ de $[0, t]$ où $t_0 = 0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n = t$. Les méthodes numériques pour la résolution des EDO calculent une solution approchée $\tilde{\mathbf{p}}(t)$ pour $\mathbf{p}(t)$ aux points $t_0, t_1, t_2, \dots, t_n$. Le vecteur $\tilde{\mathbf{p}}(t_0)$ est égal à $\boldsymbol{\alpha}$. Pour k , $1 \leq k \leq n$, le vecteur $\tilde{\mathbf{p}}(t_k)$ est calculé en utilisant $\tilde{\mathbf{p}}(t_m)$, $0 \leq m \leq k-1$. Si $\tilde{\mathbf{p}}(t_k)$, $1 \leq k \leq n$, est calculé en employant seulement $\tilde{\mathbf{p}}(t_{k-1})$, la méthode pour la résolution des EDO est dite à pas simple. Dans le cas où $\tilde{\mathbf{p}}(t_k)$, $1 \leq k \leq n$, est calculé en employant $\tilde{\mathbf{p}}(t_m)$, $\max\{0, k-r\} \leq m \leq k-1$, $r \geq 2$, la méthode pour la résolution des EDO est dite à pas multiple avec multiplicité r . Les méthodes à pas simples sont les plus utilisées.

Dans une méthode à pas simple explicite, $\tilde{\mathbf{p}}(t_k)$ est calculé à partir de $\tilde{\mathbf{p}}(t_{k-1})$ en utilisant une équation

$$\tilde{\mathbf{p}}(t_k) = \tilde{\mathbf{p}}(t_{k-1})U(\mathbf{A}h), \quad (2.2)$$

où $h = t_k - t_{k-1}$ est le pas employé pour avancer de t_{k-1} à t_k et $U(x)$ est un polynôme dépendant de la méthode employée. L'erreur locale de troncature $\boldsymbol{\tau}(t_k)$, définie comme $\tilde{\mathbf{p}}(t_k) - \mathbf{p}(t_k)$ supposant que $\tilde{\mathbf{p}}(t_{k-1}) = \mathbf{p}(t_{k-1})$, est estimée en utilisant

$$\boldsymbol{\tau}(t_k) = \tilde{\mathbf{p}}(t_{k-1})V(\mathbf{A}h),$$

où $V(x)$ est un autre polynôme dépendant de la méthode. Par exemple, pour la méthode Runge-Kutta d'ordre 4 avec estimation de l'erreur locale de troncature par la méthode de Fehlberg, on a [2, chapitre 4]

$$U(x) = \frac{x^4}{24} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^2}{2} + \frac{5}{6}x + 1$$

et

$$V(x) = \frac{405178}{7172880}x^5 - \frac{680716937249}{674710436400}x^4 - \frac{30344907}{12414600}x^3 + \frac{22465}{496584}x^2.$$

Dans une méthode à pas simple implicite, $\tilde{\mathbf{p}}(t_k)$ est calculé à partir de $\tilde{\mathbf{p}}(t_{k-1})$ en utilisant une équation

$$\tilde{\mathbf{p}}(t_k) = \tilde{\mathbf{p}}(t_{k-1})U(\mathbf{A}h)(W(\mathbf{A}h))^{-1},$$

où $h = t_k - t_{k-1}$ est le pas employé pour avancer de t_{k-1} à t_k et $U(x)$ et $W(x)$ sont des polynômes dépendant de la méthode employée. L'erreur locale de troncature $\tau(t_k)$ est estimée en utilisant

$$\tau(t_k) = \tilde{\mathbf{p}}(t_{k-1})V(\mathbf{A}h),$$

où $V(x)$ est un autre polynôme dépendant de la méthode. Par exemple pour la méthode Euler rétrograde, on a

$$U(x) = 1 + \frac{x}{2},$$

$$W(x) = 1 - \frac{x}{2},$$

et

$$V(x) = \frac{x^2}{2}.$$

Un pas d'une méthode implicite demande la résolution d'un système linéaire, tandis qu'un pas d'une méthode explicite demande un produit vecteur-matrice. Ceci implique que, en général, le pas d'une méthode implicite est plus coûteux qu'un pas d'une méthode explicite.

2.1.1 Stabilité

Une méthode pour la résolution des EDO est stable si, appliquée avec un pas constant $h > 0$ à la résolution de l'équation $dy/dt = \lambda y(t)$, où λ est une complexe avec $\text{Re}(\lambda) < 0$ donne une solution avec une erreur bornée pour $t \rightarrow \infty$. Toutes les méthodes pour la résolution des EDO ont leur conditions de stabilité. Par exemple la condition de stabilité pour la méthode Runge-kutta d'ordre 4 est [2, chapitre 4],

$$\left| 1 + h\lambda + \frac{(h\lambda)^2}{2} + \frac{(h\lambda)^3}{3!} + \frac{(h\lambda)^4}{4!} \right| \leq 1. \quad (2.3)$$

Ce résultat limite le pas h à une valeur de l'ordre de $1/\lambda$, toutes les méthodes explicites pour la résolution des EDO ont des conditions de stabilité similaires, c.à d. toutes limitent le pas h à une valeur de l'ordre de $1/\lambda$.

Quand toutes les valeurs propres du générateur infinitésimal \mathbf{A} sont réelles et simples, l'équation différentielle 2.1 a la solution,

$$\mathbf{p}(t) = \mathbf{a}_0 + \mathbf{a}_1 e^{\lambda_1 t} + \mathbf{a}_2 e^{\lambda_2 t} + \dots + \mathbf{a}_n e^{\lambda_n t},$$

où $\lambda_i < 0$, $1 \leq i \leq n$, sont les valeurs propres différentes de 0 de \mathbf{A} et \mathbf{a}_i , $0 \leq i \leq n$, sont des vecteurs ligne. Supposons sans la perte de la généralité que $\min_{1 \leq i \leq n} \lambda_i = |\lambda_1|$ et $\max_{1 \leq i \leq n} \lambda_i = |\lambda_n|$. La stabilité d'une méthode pour la résolution des EDO appliquée à l'équation différentielle 2.1 sera conditionnée par le terme $\mathbf{a}_n e^{\lambda_n t}$, qui est la solution de l'équation $dy/dt = |\lambda_n|y(t)$. Par conséquent, dans une méthode explicite le pas h sera limité à une valeur de l'ordre de $1/|\lambda_n|$. La valeur propre λ_n est de l'ordre du taux de sortie maximum, Λ . Pour les modèles Markoviens des systèmes tolérants aux fautes avec réparation, Λ est de l'ordre des taux de réparation. Alors, pour un modèle Markovien d'un système tolérant aux fautes avec réparation, la résolution de l'équation différentielle 2.1 jusqu'à temps t employant une méthode explicite demandera un nombre de pas de l'ordre de Λt , qui peut être très grand. Par exemple, Λ pourra avoir une valeur de l'ordre de 0.1min^{-1} et avec $t = 5 \text{ans}$, le nombre des pas serait de l'ordre de $\Lambda t = 262.800$. Ceci implique qu'une méthode explicite peut être très coûteuse pour l'analyse des systèmes tolérants aux fautes qui sont l'objectif de cette thèse. Ce problème a motivé le développement des méthodes pour la résolution des EDO raides. Ces méthodes sont basées sur les propriétés A-stabilité et L-stabilité. Une EDO raide est une EDO pour laquelle la solution a des composants avec constantes de temps très différentes, c.à d., quand $|\lambda_n| \gg |\lambda_1|$.

Une méthode pour la résolution des EDO est dite A-stable si appliquée avec un pas constant h à l'équation différentielle $dy/dt = \lambda y(t)$, où λ est une complexe avec $\text{Re}(\lambda) < 0$, donne une solution qui tend vers zéro lorsque $t \rightarrow \infty$. Dans certains cas, notamment pour les EDO extrêmement raides, la propriété de la A-stabilité est insuffisante. On doit exiger une propriété plus forte: la L-stabilité. Une méthode pour la résolution des EDO est dite L-stable si elle est A-stable et si appliquée avec un pas constant h à l'équation différentielle $dy/dt = \lambda y(t)$, où λ est une complexe avec $\text{Re}(\lambda) < 0$, donne une solution à laquelle $|y_{n+1}/y_n| \rightarrow 0$ quand $\text{Re}(h\lambda) \rightarrow -\infty$, où y_n est la solution à la fin du n -ième intervalle. La L-stabilité implique que la taille de h n'affecte pas la stabilité de la méthode et que h peut être sélectionné en tenant compte seulement de la magnitude de l'erreur locale de troncature. Dans la pratique, dans une méthode L-stable le pas h a une petite taille pour valeurs petites de t et une taille croissante pour valeurs croissantes de t . Le résultat est une réduction significative du nombre total des pas en relation avec une méthode explicite, dans laquelle le pas h doit avoir une petite taille dans tous les intervalles

d'intégration. Regardant la A-stabilité et la L-stabilité, on a le résultat suivant [2]:

Théorème 2.1. *Toutes les méthodes implicites sont A-stable et toutes les méthodes L-stables sont implicites.*

Les méthodes pour la résolution des EDO raides sont les méthodes L-stables. Étant donné que pour les modèles Markoviens des systèmes tolérants aux fautes avec réparation, l'équation différentielle 2.1 est raide, les méthodes pour la résolution des EDO raides sont les plus pertinentes dans le contexte de la thèse. Dans les deux sections suivantes, nous décrivons les deux méthodes les plus importantes pour la résolution des EDO raides.

2.1.2 Méthode TR-BDF2

C'est une méthode L-stable qui combine la méthode des trapèzes (TR, pour "Trapezoidal Rule") et celle des différenciations rétrogrades d'ordre deux (BDF2, pour "second order Backward Difference Formula"). Le passage de $t = t_{k-1}$ à $t = t_{k-1} + h$ dans la méthode TR-BDF2 se fait en deux étapes comme suit. La première étape, TR, consiste à passer de $t = t_{k-1}$ à $t = t_{k-1} + \gamma h$, où γ est un réel, $0 < \gamma < 1$, en utilisant la méthode des trapèzes:

$$\tilde{\mathbf{p}}(t_{k-1} + \gamma h) \left(\mathbf{I} - \frac{\gamma \mathbf{A} h}{2} \right) = \tilde{\mathbf{p}}(t_{k-1}) \left(\mathbf{I} + \frac{\gamma \mathbf{A} h}{2} \right).$$

La seconde étape, BDF2, consiste à passer de $t = t_{k-1} + \gamma h$ à $t = t_{k-1} + h$ en utilisant la formule BDF2:

$$\tilde{\mathbf{p}}(t_{k-1} + h) [(2 - \gamma) \mathbf{I} - (1 - \gamma) \mathbf{A} h] = \gamma^{-1} \tilde{\mathbf{p}}(t_{k-1} + \gamma h) - \frac{(1 - \gamma)^2}{\gamma} \mathbf{p}(t_{k-1}).$$

Pour le choix de γ , il a été montré dans [3] que $\gamma = 2 - \sqrt{2}$ présente de nombreux avantages. L'erreur locale de troncature est estimée à TR-BDF2 utilisant [3]

$$\tau(h) = \frac{-3\gamma^2 + 4\gamma - 2}{6(2 - \gamma)} \left(-\frac{\tilde{\mathbf{p}}(t_{k-1})}{\gamma} + \frac{\tilde{\mathbf{p}}(t_{k-1} + \gamma h) \mathbf{A}}{\gamma(1 - \gamma)} - \frac{\tilde{\mathbf{p}}(t_{k-1}) \mathbf{A}}{1 - \gamma} \right) h.$$

Cette méthode fonctionne raisonnablement pour des tolérances d'erreur non inférieures à 10^{-8} et a une stabilité excellente. Cependant, pour des tolérances d'erreur plus serrées, le coût de la méthode augmente considérablement.

2.1.3 Méthode de Runge-Kutta implicite de troisième ordre

C'est une méthode L-stable du troisième ordre, le pas de la méthode est définie par

$$\tilde{\mathbf{p}}(t_k) \left(\mathbf{I} - \frac{2}{3} \mathbf{A} h + \frac{1}{6} \mathbf{A}^2 h^2 \right) = \tilde{\mathbf{p}}(t_{k-1}) \left(\mathbf{I} + \frac{1}{3} \mathbf{A} h \right).$$

L'erreur locale de troncature est estimée en utilisant

$$\tau(h) = \mathbf{p}(t_{k-1}) \mathbf{A}^4 \frac{h^4}{72}.$$

Un problème de la méthode est que il est nécessaire de calculer explicitement la matrice \mathbf{A}^2 . Quand la matrice \mathbf{A} est dispersée, le coût de ce calcul peut être relativement élevé. En relation à la méthode TR-BDF2, le nombre de pas nécessaire dans la méthode Runge-kutta implicite de troisième ordre est plus petit. Ceci implique que la méthode peut être plus ou moins aussi coûteuse que la méthode TR-BDF2, dépendant du coût relatif de calcul de \mathbf{A}^2 .

2.1.4 Méthodes de résolution des EDO combinés

On a proposé la combinaison d'une méthode raide et d'une méthode explicite [35]. Pour des petits temps, la méthode raide et la méthode explicite utilisent un pas de taille similaire et on utilise la méthode explicite en profitant du moindre coût par pas de cette méthode. Pour des temps grands on utilise la méthode raide. La réduction du temps de calcul obtenue par la combinaison en relation avec la méthode raide est de l'ordre de 2 [35].

2.2 Méthodes basées sur la randomisation

2.2.1 Randomisation standard (RS)

La méthode de randomisation standard est basée sur le résultat suivant [27, Théorème 4.19]. Soit $X = \{X(t); t \geq 0\}$ une CMTC finie avec espace d'états Ω , taux de transition $\lambda_{i,j}$, $i, j \in \Omega$, $j \neq i$, et taux de départ $\lambda_i = \sum_{j \in \Omega - \{i\}} \lambda_{i,j}$, $i \in \Omega$, et vecteur des probabilités initiales $\alpha = (P[X(0) = i])_i \in \Omega$. Soit $\Lambda \geq \max_{i \in \Omega} \lambda_i$ et soit $\hat{X} = \{\hat{X}_n; n = 0, 1, 2, \dots\}$ la chaîne de Markov à temps discret homogène (CMTD) avec le même espace d'état et distribution de probabilité initiale que X et avec probabilités de transition $P[\hat{X}_{n+1} = j | \hat{X}_n = i] = P_{i,j} = \lambda_{i,j}/\Lambda$, $i \in \Omega$, $j \neq i$, $P[\hat{X}_{n+1} = i | \hat{X}_n = i] = P_{i,i} = 1 - \lambda_i/\Lambda$, $i \in \Omega$. Soit $Q = \{Q(t); t \geq 0\}$ un processus de Poisson avec taux Λ indépendant de \hat{X} ($P[Q(t) = n] = e^{-\Lambda t} (\Lambda t)^n / n!$). Alors, $X = \{X(t); t \geq 0\}$ et $\{\hat{X}_{Q(t)}; t \geq 0\}$ sont probabilistiquement identiques. Ce résultat sera appelé *résultat de la randomisation*.

Supposons que X a une structure de taux de récompense $r_i \geq 0$, $i \in \Omega$. Utilisant le résultat de la randomisation, on peut exprimer la mesure $\text{ETRT}(t) = E[r_{X(t)}]$ de la forme

$$\text{ETRT}(t) = \sum_{i \in \Omega} r_i P[X(t) = i] = \sum_{i \in \Omega} r_i P[\hat{X}_{Q(t)} = i]$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{i \in \Omega} r_i \sum_{n=0}^{\infty} P[\widehat{X}_n = i \mid Q(t) = n] P[Q(t) = n] = \sum_{i \in \Omega} r_i \sum_{n=0}^{\infty} P[\widehat{X}_n = i] P[Q(t) = n] \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{i \in \Omega} r_i P[\widehat{X}_n = i] P[Q(t) = n] = \sum_{n=0}^{\infty} d(n) e^{-\Lambda t} \frac{(\Lambda t)^n}{n!}, \tag{2.4}
\end{aligned}$$

où $d(n) = \sum_{i \in \Omega} r_i P[\widehat{X}_n = i]$. La formulation (2.4) de $\text{ETRT}(t)$ en fonction du régime transitoire de \widehat{X} est la base de la méthode randomisation standard pour la mesure de $\text{ETRT}(t)$. La sommation infinie est tronquée à une valeur $N \geq 0$ suffisante pour que l'erreur soit petite. La valeur approchée pour $\text{ETRT}(t)$, $\text{ETRT}_N^a(t)$, ainsi obtenue est

$$\text{ETRT}_N^a(t) = \sum_{n=0}^N d(n) e^{-\Lambda t} \frac{(\Lambda t)^n}{n!}.$$

Employant $0 \leq d(n) \leq r_{\max} = \max_{i \in \Omega} r_i$,

$$0 \leq \text{ETRT}(t) - \text{ETRT}_N^a(t) \leq r_{\max} \sum_{n=N+1}^{\infty} e^{-\Lambda t} \frac{(\Lambda t)^n}{n!}$$

et, exigeant une erreur de troncature absolue $\leq \varepsilon$, on choisie

$$N = \min \left\{ m \geq 0 : r_{\max} \sum_{n=m+1}^{\infty} e^{-\Lambda t} \frac{(\Lambda t)^n}{n!} \leq \varepsilon \right\}.$$

La mesure $\text{ETRM}(t) = E[(1/t) \int_0^t r_{X(\tau)} d\tau]$ peut être exprimée en fonction de $\text{ETRT}(t)$ de la forme

$$\text{ETRM}(t) = \frac{1}{t} \int_0^t E[r_{X(\tau)}] d\tau = \frac{1}{t} \int_0^t \text{ETRT}(\tau) d\tau.$$

Alors, utilisant (2.4) et $\int_0^t e^{-\Lambda \tau} (\Lambda \tau)^n / n! d\tau = (1/\Lambda) \sum_{l=n+1}^{\infty} e^{-\Lambda t} (\Lambda t)^l / l!$ on a

$$\text{ETRM}(t) = \frac{1}{\Lambda t} \sum_{n=0}^{\infty} d(n) \sum_{l=n+1}^{\infty} e^{-\Lambda t} \frac{(\Lambda t)^l}{l!}. \tag{2.5}$$

La formulation (2.5) de $\text{ETRM}(t)$ en fonction du régime transitoire de \widehat{X} est la base de la méthode randomisation standard pour la mesure $\text{ETRM}(t)$. Les sommations infinies sont tronquées de manière à ce que l'erreur soit petite. La valeur approchée pour $\text{ETRM}(t)$, $\text{ETRM}_N^a(t)$, est

$$\text{ETRM}_N^a(t) = \frac{1}{\Lambda t} \sum_{n=0}^N d(n) \sum_{l=k+1}^{N+1} e^{-\Lambda t} \frac{(\Lambda t)^l}{l!} = \frac{1}{\Lambda t} \sum_{n=1}^{N+1} e^{-\Lambda t} \frac{(\Lambda t)^n}{n!} \sum_{l=0}^{n-1} d(l).$$

Employant $0 \leq d(n) \leq r_{\max}$,

$$\begin{aligned}
\text{ETRM}(t) - \text{ETRM}_N^a(t) &= \frac{1}{\Lambda t} \sum_{n=0}^{\infty} d(n) \sum_{l=n+1}^{\infty} e^{-\Lambda t} \frac{(\Lambda t)^l}{l!} - \frac{1}{\Lambda t} \sum_{n=0}^N d(n) \sum_{l=n+1}^{N+1} e^{-\Lambda t} \frac{(\Lambda t)^l}{l!} \\
&= \frac{1}{\Lambda t} \sum_{l=N+2}^{\infty} e^{-\Lambda t} \frac{(\Lambda t)^l}{l!} \sum_{n=0}^{l-1} d(n),
\end{aligned}$$

ce qui implique

$$0 \leq \text{ETRM}(t) - \text{ETRM}_N^a(t) \leq \frac{r_{\max}}{\Lambda t} \sum_{l=N+2}^{\infty} l e^{-\Lambda t} \frac{(\Lambda t)^l}{l!} = r_{\max} \sum_{n=N+1}^{\infty} e^{-\Lambda t} \frac{(\Lambda t)^n}{n!},$$

et, exigeant une erreur de troncature absolue $\leq \varepsilon$, on choisit

$$N = \min \left\{ m \geq 0 : r_{\max} \sum_{n=m+1}^{\infty} e^{-\Lambda t} \frac{(\Lambda t)^n}{n!} \leq \varepsilon \right\}.$$

Notons que le paramètre de troncature N pour les mesures $\text{ETRT}(t)$ et $\text{ETRM}(t)$ est croissant avec t . Alors, si la mesure doit être calculée pour plusieurs valeurs de t , le paramètre de troncature N doit être choisi pour le maximum t .

Le calcul des mesures $\text{ETRT}(t)$ et $\text{ETRM}(t)$ exige le calcul du $d(n)$. Soit le vecteur ligne $\mathbf{p}(n) = (p_i(n))_{i \in \Omega} = (P[\hat{X}_n = i])_{i \in \Omega}$, et soit $\mathbf{P} = (P_{i,j})_{i,j \in \Omega}$ la matrice de probabilité de transition de \hat{X} . On a $d(n) = \sum_{i \in \Omega} p_i(n)$ et $\mathbf{p}(0) = \boldsymbol{\alpha}$. Les vecteurs ligne $\mathbf{p}(n)$, $n > 0$ peuvent être calculés en utilisant

$$\mathbf{p}(n+1) = \mathbf{p}(n)\mathbf{P}.$$

Le calcul des probabilités de Poisson $e^{-\Lambda t}(\Lambda t)^n/n!$ est délicat. Un calcul trivial de ces probabilités résulte facilement à “overflows” et “underflows” intermédiaires. Plusieurs solutions ont été proposées [11, 23, 28, 40]. Dans notre réalisation, nous utiliserons la méthode décrite dans [28, pp. 1028–1029] (voir aussi [1]).

Le calcul de N demande le calcul de $S(m) = \sum_{n=m+1}^{\infty} e^{-\Lambda t}((\Lambda t)^n/n!)$ pour des valeurs croissantes de m , commençant en $m = 0$. On pourrait calculer $S(m)$, $m \geq 0$ utilisant

$$S(m) = 1 - \sum_{n=0}^m e^{-\Lambda t} \frac{(\Lambda t)^n}{n!},$$

mais cette méthode est numériquement instable dû aux annulations quand l’erreur sollicitée ε est $\ll 1$. Une meilleure méthode est de calculer $S(m)$, commençant en $m = 0$, en tronquant la sommation $\sum_{n=m+1}^{\infty} e^{-\Lambda t}((\Lambda t)^n/n!)$ maintenant l’erreur relative petite. Cette idée peut être réalisée de la manière suivante.

Supposons $M+1 > \Lambda t$ et $M \geq m+2$. On a

$$\begin{aligned} S(m) &= \sum_{n=m+1}^{M-1} e^{-\Lambda t} \frac{(\Lambda t)^n}{n!} + \sum_{n=M}^{\infty} e^{-\Lambda t} \frac{(\Lambda t)^n}{n!} \\ &< \sum_{n=m+1}^{M-1} e^{-\Lambda t} \frac{(\Lambda t)^n}{n!} + e^{-\Lambda t} \frac{(\Lambda t)^M}{M!} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\Lambda t}{M+1} \right)^n \\ &= \tilde{S}(m, M) + S^\varepsilon(M), \end{aligned}$$

avec

$$\tilde{S}(m, M) = \sum_{n=m+1}^{M-1} e^{-\Lambda t} \frac{(\Lambda t)^n}{n!},$$

$$S^\varepsilon(M) = e^{-\Lambda t} \frac{(\Lambda t)^M}{M!} \frac{1}{1 - \frac{\Lambda t}{M+1}}.$$

Soit ν une petite valeur $\ll 1$, par exemple $\nu = 10^{-6}$. Alors, on peut calculer $S(m)$ pour des valeurs croissantes de m , commençant en $m = 0$, avec erreur de troncature relative $\leq \nu$ de la manière suivante. Pour $m = 0$, nous sélectionnons pour M le mineur entier ≥ 2 avec $M + 1 > \Lambda t$ qui satisfait $S^\varepsilon(M)/\tilde{S}(0, M) \leq \nu/10$, approchons $S(0)$ de $S_{\text{ult}} = \tilde{S}(0, M) + S^\varepsilon(M)$ et faisons $S = S_{\text{ult}}$. A partir de ce point, pour chaque valeur croissante de m nous calculons $S_{\text{ult}} = S_{\text{ult}} - e^{-\Lambda t} (\Lambda t)^m / m!$ et si $M \geq m + 2$ et $S_{\text{ult}}/S \geq 0,1$, nous approchons $S(m)$ de S_{ult} et continuons. Si m devient $< M - 2$ où S_{ult}/S devient $< 0,1$, nous obtenons un nouveau M comme le mineur entier $\geq m + 2$ avec $M + 1 > \Lambda t$, qui satisfait $S^\varepsilon(M)/\tilde{S}(m, M) \leq \nu/10$, approchons $S(m)$ avec $S_{\text{ult}} = \tilde{S}(m, M) + S^\varepsilon(M)$, faisons $S = S_{\text{ult}}$, et continuons.

Employant le résultat bien connu [46, Théorème3.3.5] que $Q(t)$ a pour $\Lambda t \rightarrow \infty$ une distribution normale asymptotique avec moyenne et variance Λt , on a que pour Λt grande, N est approximativement égal à Λt . Comme nous avons argumenté antérieurement, pour les modèles Markovien de systèmes tolérants aux fautes réparables avec réparation différée, Λt peut avoir une très grande taille. Alors, la méthode randomisation standard peut être très coûteuse pour les modèles objectifs de la thèse.

2.2.2 Uniformisation adaptative (UA)

L'uniformisation adaptative est une méthode dans laquelle le taux d'uniformisation (randomisation) s'adapte en accord avec l'ensemble d'états dans lesquels la CMTD randomisée peut être dans chaque pas [39].

Soit $X = \{X(t); t \geq 0\}$ une CMTC avec espace fini d'états Ω , taux de transition $\lambda_{i,j}$, $i, j \in \Omega$, $j \neq i$, taux de départ $\lambda_i = \sum_{j \in \Omega - \{i\}} \lambda_{i,j}$, $i \in \Omega$, générateur infinitésimal $\mathbf{A} = (a_{i,j})_{i,j \in \Omega}$, $a_{i,i} = -\lambda_i$, $i \in \Omega$, $a_{i,j} = \lambda_{i,j}$, $i, j \in \Omega$, $j \neq i$, et vecteur des probabilités initiales $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_i)_{i \in \Omega} = (P[X(0) = i])_{i \in \Omega}$. Soit $\hat{X} = \{\hat{X}_n; n = 0, 1, 2, \dots\}$ la CMTD randomisée et soit $\pi_i(n) = P[\hat{X} = i]$, $i \in \Omega$. Alors, on définit l'ensemble des état actifs au pas n comme

$$B_n = \{i \in \Omega : \pi_i(n) > 0\}.$$

Pour $n = 0, 1, 2, \dots$, soit $\Lambda_n = \max_{i \in B_n} \lambda_i$ le taux de randomisation au pas n et soit $\mathbf{A}_n =$

$(\lambda_{n,i,j})_{i,j \in \Omega}$ le générateur infinitésimal au pas n , où

$$\lambda_{n,i,j} = \begin{cases} \lambda_{i,j} & \text{si } i \in B_n \\ 0 & \text{autrement} \end{cases} .$$

La matrice de probabilités de transition de \widehat{X} au pas n est

$$\mathbf{P}_n = \mathbf{I} + \frac{1}{\Lambda_n} \mathbf{A}_n .$$

Soit les variables aléatoires T_n , $n = 0, 1, 2, \dots$ définies par $T_0 = 0$, et pour $n > 0$, par

$$T_n = \text{EXP}(\Lambda_0) + \text{EXP}(\Lambda_1) + \dots + \text{EXP}(\Lambda_{n-1}), \quad (2.6)$$

où $\text{EXP}(\Lambda_i)$, $0 \leq i \leq n-1$ dénotent n variables aléatoires exponentiellement distribuées avec paramètre Λ_i , $0 \leq i \leq n-1$. Soit le processus stochastique de naissance $Q = \{Q(t); t \geq 0\}$ où $Q(t) = \max\{n : T_n \leq t\}$ et soit

$$U_n(t) = P[Q(t) = n], \quad n \geq 0 .$$

Soit le vecteur ligne $\boldsymbol{\pi}(n) = (\pi_i(n))_{i \in \Omega}$. La méthode uniformisation adaptative est basée sur la formalisation pour $\mathbf{p}(t)$

$$\mathbf{p}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} U_n(t) \boldsymbol{\pi}(n) . \quad (2.7)$$

La sommation infinie est tronquée à une valeur $N_a \geq 0$ de manière que l'erreur absolue dans chaque élément de $\mathbf{p}(t)$ soit petite. Ceci donne une valeur approximative pour $\mathbf{p}(t)$,

$$\mathbf{p}_{N_a}(t) = \sum_{n=0}^{N_a} U_n(t) \boldsymbol{\pi}(n) .$$

L'analogie entre (2.7) et l'équation sur laquelle est basée la randomisation standard,

$$\mathbf{p}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\Lambda t} \frac{(\Lambda t)^n}{n!} \boldsymbol{\pi}(n), \quad (2.8)$$

est évidente. La randomisation standard peut être considérée comme un cas particulier de l'uniformisation adaptative avec $\Lambda_n = \Lambda = \max_{i \in \Omega} \lambda_i$, $n \geq 0$, dans laquelle $U_n(t)$ est un processus de Poisson avec taux Λ .

L'uniformisation adaptative demande le calcul de $U_n(t)$. Dans [39], on décrivait trois méthodes pour le calcul de $U_n(t)$: Un évaluateur des chaînes de Markov acycliques (ACE), un ACE modifié, et la randomisation standard. Les deux premières méthodes peuvent être numériquement

instables. La troisième méthode est numériquement stable. Son utilisation mène à l'uniformisation adaptative appelée uniformisation adaptative avec uniformisation diposée (“layered uniformization”). Appliquant la randomisation standard avec paramètre de troncature N_b au calcul de $U_n(t)$, on a les valeurs approximatives

$$U_{n,N_b}(t) = \sum_{k=0}^{N_b} e^{-\beta t} \frac{(\beta t)^k}{k!} \pi_n^b(k),$$

où $\pi_n^b(k)$ est la probabilité de que la CMTD randomisée au pas k est à l'état n , et soit ε_b un petit paramètre de contrôle d'erreur,

$$N_b = \min \left\{ m \geq 0 : \sum_{k=m+1}^{\infty} e^{-\beta t} \frac{(\beta t)^k}{k!} \leq \varepsilon_b \right\}. \quad (2.9)$$

Notons que $U_{n,N_b}(t) \leq U_n(t)$ et que

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} (U_n(t) - U_{n,N_b}(t)) &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=N_b+1}^{\infty} e^{-\beta t} \frac{(\beta t)^k}{k!} \pi_n^b(k) \\ &= \sum_{k=N_b+1}^{\infty} e^{-\beta t} \frac{(\beta t)^k}{k!} \sum_{n=0}^{\infty} \pi_n^b(k) = \sum_{k=N_b+1}^{\infty} e^{-\beta t} \frac{(\beta t)^k}{k!} \leq \varepsilon_b. \end{aligned}$$

La valeur approximative pour $\mathbf{p}(t)$, $\mathbf{p}_{N_a,N_b}(t)$ obtenue utilisant $U_{n,N_b}(t)$, $0 \leq n \leq N_a$ est

$$\mathbf{p}_{N_a,N_b}(t) = \sum_{n=0}^{N_a} \left(\sum_{k=0}^{N_b} e^{-\beta t} \frac{(\beta t)^k}{k!} \pi_n^b(k) \right) \boldsymbol{\pi}(n).$$

Supposons qu'on veuille compter $\mathbf{p}(t)$ avec erreur $\leq \varepsilon$ à chaque élément. Cette computation peut être réalisée comme suit. Premièrement, nous choisissons $\varepsilon_a > 0$ et $\varepsilon_b > 0$ satisfaisant $\varepsilon_a + \varepsilon_b = \varepsilon$ et $\varepsilon_b < \varepsilon_a$ (par exemple, $\varepsilon_a = 0.9$ et $\varepsilon_b = 0.1$). Alors, N_b est choisi utilisant (2.9) et N_a est choisie utilisant

$$N_a = \min \left\{ m \geq 0 : 1 - \sum_{n=0}^m U_{n,N_b}(t) \leq \varepsilon_a \right\}.$$

Il est facile de démontrer que $\|\mathbf{p}(t) - \mathbf{p}_{N_a,N_b}\|_{\infty} \leq \varepsilon$. Premièrement, nous avons:

$$\begin{aligned} &\|\mathbf{p}(t) - \mathbf{p}_{N_a,N_b}\|_{\infty} \\ &= \left\| \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} e^{-\beta t} \frac{(\beta t)^k}{k!} \pi_n^b(k) \boldsymbol{\pi}(n) - \sum_{n=0}^{N_a} \sum_{k=0}^{N_b} e^{-\beta t} \frac{(\beta t)^k}{k!} \pi_n^b(k) \boldsymbol{\pi}(n) \right\|_{\infty} \\ &\leq \left\| \sum_{n=0}^{N_a} \sum_{k=0}^{\infty} e^{-\beta t} \frac{(\beta t)^k}{k!} \pi_n^b(k) \boldsymbol{\pi}(n) - \sum_{n=0}^{N_a} \sum_{k=0}^{N_b} e^{-\beta t} \frac{(\beta t)^k}{k!} \pi_n^b(k) \boldsymbol{\pi}(n) \right\|_{\infty} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \left\| \sum_{n=N_a+1}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} e^{-\beta t} \frac{(\beta t)^k}{k!} \pi_n^b(k) \boldsymbol{\pi}(n) \right\|_{\infty} \\
= & \left\| \sum_{n=0}^{N_a} \sum_{k=N_{b+1}}^{\infty} e^{-\beta t} \frac{(\beta t)^k}{k!} \pi_n^b(k) \boldsymbol{\pi}(n) \right\|_{\infty} + \left\| \sum_{n=N_a+1}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} e^{-\beta t} \frac{(\beta t)^k}{k!} \pi_n^b(k) \boldsymbol{\pi}(n) \right\|_{\infty}.
\end{aligned}$$

Mais,

$$\begin{aligned}
& \left\| \sum_{n=0}^{N_a} \sum_{k=N_{b+1}}^{\infty} e^{-\beta t} \frac{(\beta t)^k}{k!} \pi_n^b(k) \boldsymbol{\pi}(n) \right\|_{\infty} \\
& \leq \sum_{n=0}^{N_a} \sum_{k=N_{b+1}}^{\infty} e^{-\beta t} \frac{(\beta t)^k}{k!} \pi_n^b(k) \leq \sum_{k=N_{b+1}}^{\infty} e^{-\beta t} \frac{(\beta t)^k}{k!} \leq \varepsilon_b
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
& \left\| \sum_{n=N_a+1}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} e^{-\beta t} \frac{(\beta t)^k}{k!} \pi_n^b(k) \boldsymbol{\pi}(n) \right\|_{\infty} \\
= & \left\| \sum_{n=N_a+1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} U_n(t) \boldsymbol{\pi}(n) \right\|_{\infty} \leq \sum_{n=N_a+1}^{\infty} U_n(t) = 1 - \sum_{n=0}^{N_a} U_n(t) \leq 1 - \sum_{n=0}^{N_a} U_{n,N_b}(t) \leq \varepsilon_a.
\end{aligned}$$

Alors,

$$\| \mathbf{p}(t) - \mathbf{p}_{N_a, N_b} \|_{\infty} \leq \varepsilon_a + \varepsilon_b = \varepsilon.$$

Des résultats expérimentaux [39] ont montré que l'uniformisation adaptative peut être plus rapide que la randomisation standard pour des petits et moyens temps.

On a proposé la combinaison de l'uniformisation adaptative et la randomisation standard [40]. Pour des grands temps, l'intervalle de temps est divisé en deux subintervalles. L'uniformisation adaptative est utilisée dans le premier subintervalle, la randomisation standard est utilisée dans le second subintervalle. La partition est effectuée avec l'objectif de minimiser le coût de calcul. La méthode combinée est moins coûteuse que l'uniformisation adaptative et la randomisation standard.

2.2.3 Randomisation régénérative

L'idée fondamentale dans la randomisation régénérative est d'obtenir à partir du modèle original un modèle transformé tronqué qui, avec une structure de taux de récompense appropriée, à la même mesure $E_{TRT}(t)$ et $E_{TRM}(t)$ que le modèle original avec une erreur arbitrairement petite. Le modèle transformé tronqué est résolu avec la randomisation standard. La méthode exige la sélection d'un état régénérateur r . La CMTC X et r doivent remplir les deux conditions suivantes:

1. X a un espace d'état fini $\Omega = S \cup \{f_1, f_2, \dots, f_A\}$, $|S| \geq 2$, $A \geq 0$, où f_i , $i \leq i \leq A$, sont des états absorbants et tous les états dans S sont transitoires où S a un simple récurrent classe.
2. $r \in S$ et si S a un simple récurrent classe C , $r \in C$.

Le modèle transformé tronqué est obtenu à partir de CMTC en caractérisant le comportement du X de $S' = S - \{r\}$ jusqu'au prochain coup de r ou coup d'un état f_i et de r jusqu'au prochain coup de r ou coup d'un état f_i . Soit $\alpha_i = P[X(0) = i]$, $i \in \Omega$, et soit $\alpha_{S'} = \sum_{i \in S'} \alpha_i$. Pour le cas $\alpha_{S'} > 0$, le modèle transformé tronqué est appelé $V_{K,L}$ et a l'espace d'état $\{s_k, 0 \leq k \leq K\} \cup \{s'_k, 0 \leq k \leq L\} \cup \{f_1, f_2, \dots, f_A, a\}$, la distribution de probabilité initiale $P[V_{K,L}(0) = s_0] = \alpha_r$, $P[V_{K,L} = s'_0] = \alpha_{S'}$, $P[V_{K,L}(0) = f_i] = \alpha_{f_i}$, $P[V_{K,L}(0) = i] = 0$, $i \notin \{s_0, s'_0, f_1, f_2, \dots, f_A\}$, le diagramme de transition d'état illustré dans la Figure 2.1 pour le cas $A = 1$, et la structure de taux de récompense $r'_{s_k} = b(k)$, $r'_{s'_k} = b'(k)$, $r'_{f_i} = r_{f_i}$, $r'_a = 0$, où $b(k)$ et $b'(k)$ seront définis plus tard. Pour le cas $\alpha_{S'} = 0$, le modèle transformé tronqué est appelé V_K et diffère de $V_{K,L}$ par l'absence des états s'_k .

Soit $\widehat{X} = \{\widehat{X}_n; n = 0, 1, 2, \dots\}$ la CMTD randomisée de X avec taux de randomisation $\Lambda = (1 + \theta) \max_{i \in \Omega} \lambda_i$, où λ_i est le taux de départ de X de i et θ est une petite quantité positive, par exemple $\theta = 10^{-4}$. Dénotons par $P_{i,j}$, $i, j \in \Omega$, les probabilités de transition de \widehat{X} : $P_{i,j} = \lambda_{i,j} / \Lambda$, $i, j \in \Omega$, $j \neq i$, $P_{i,i} = 1 - \lambda_i / \Lambda$, $i \in \Omega$, où $\lambda_{i,j}$ est le taux de transition de X de i à j . Soit \widehat{X}' une version de \widehat{X} avec état initial r . Soit $\pi_i(k) = P[\widehat{X}'_1 \neq r \wedge \widehat{X}'_2 \neq r \wedge \dots \wedge \widehat{X}'_k \neq r \wedge \widehat{X}'_k = i]$, $i \in S$ et soit $\pi'_i(k) = P[\widehat{X}'_0 \neq r \wedge \widehat{X}'_1 \neq r \wedge \dots \wedge \widehat{X}'_k \neq r \wedge \widehat{X}'_k = i]$, $i \in S'$. Alors les paramètres $w_k, q_k, v_k^j, w'_k, q'_k, v_k'^j, b(k)$ et $b'(k)$ dont $V_{K,L}$ et V_K dépendent peuvent être obtenus à partir de $\pi_i(k)$, $k = 0, 1, \dots, K$ et $\pi'_i(k)$, $k = 0, 1, \dots, L$ utilisant

$$w_k = \frac{\sum_{i \in S} \pi_i(k) P_{i,S'}}{a(k)},$$

$$q_k = \frac{\sum_{i \in S} \pi_i(k) P_{i,r}}{a(k)},$$

$$v_k^j = \frac{\sum_{i \in S} \pi_i(k) P_{i,f_j}}{a(k)},$$

$$w'_k = \frac{\sum_{i \in S'} \pi'_i(k) P_{i,S'}}{a'(k)},$$

$$q'_k = \frac{\sum_{i \in S'} \pi'_i(k) P_{i,r}}{a'(k)},$$

$$v_k'^j = \frac{\sum_{i \in S'} \pi'_i(k) P_{i,f_j}}{a'(k)},$$

$$b(k) = \frac{\sum_{i \in S} \pi_i(k) r_i}{a(k)},$$

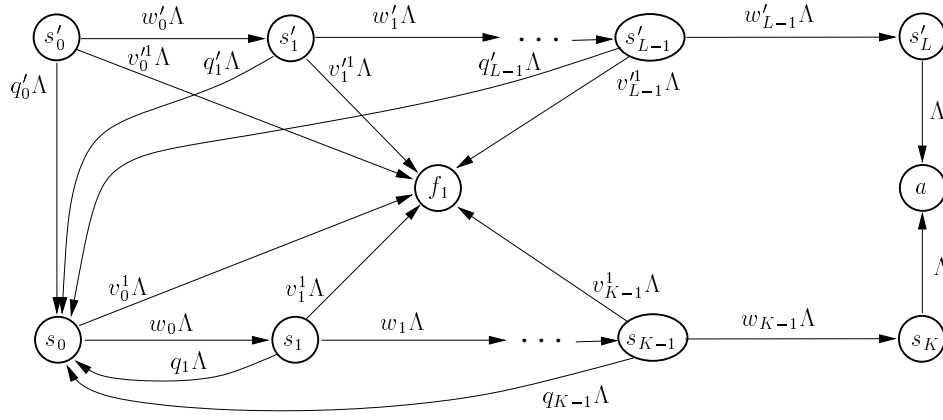


FIG. 2.1 – Diagramme de transition d'état de CMTC $V_{K,L}$ pour le cas $A = 1$.

$$b'(k) = \frac{\sum_{i \in S'} \pi'_i(k) r_i}{a'(k)},$$

où $a(k) = \sum_{i \in S} \pi_i(k)$ et $a'(k) = \sum_{i \in S'} \pi'_i(k)$.

Pour le cas $\alpha_{S'} > 0$, soit $\text{ETRT}^{K,L,a}(t)$ et $\text{ETRM}^{K,L,a}(t)$, respectivement, l'espérance de taux de récompense transitoire et l'espérance de taux de récompense moyenne de $V_{K,L}$. On a :

$$\begin{aligned} 0 &\leq \text{ETRT}(t) - \text{ETRT}^{K,L,a}(t) \leq \\ &r_{\max} a'(L) \sum_{k=L+1}^{\infty} e^{-\Lambda t} \frac{(\Lambda t)^k}{k!} + r_{\max} \alpha_{S'} a(K) \sum_{k=K+1}^{\infty} (k-K) e^{-\Lambda t} \frac{(\Lambda t)^k}{k!}, \\ 0 &\leq \text{ETRM}(t) - \text{ETRM}^{K,L,a}(t) \leq \frac{r_{\max} a'(L)}{\Lambda t} \sum_{k=L+2}^{\infty} (k-L-1) e^{-\Lambda t} \frac{(\Lambda t)^k}{k!} \\ &+ \frac{r_{\max} \alpha_{S'} a(K)}{\Lambda t} \sum_{k=K+2}^{\infty} \frac{(k-K)(k-K-1)}{2} e^{-\Lambda t} \frac{(\Lambda t)^k}{k!}. \end{aligned}$$

Pour le cas $\alpha_{S'} = 0$, soit $\text{ETRT}^{K,a}(t)$ et $\text{ETRM}^{K,a}(t)$, respectivement, l'espérance de taux de récompense transitoire et l'espérance de taux de récompense moyenne de V_K . On a :

$$\begin{aligned} \text{ETRT}(t) - \text{ETRT}^{K,a}(t) &\leq r_{\max} \alpha_S a(K) \sum_{k=K+1}^{\infty} (k-K) e^{-\Lambda t} \frac{(\Lambda t)^k}{k!}, \\ \text{ETRM}(t) - \text{ETRM}^{K,a}(t) &\leq \frac{r_{\max} \alpha_S a(K)}{\Lambda t} \sum_{k=K+2}^{\infty} \frac{(k-K)(k-K-1)}{2} e^{-\Lambda t} \frac{(\Lambda t)^k}{k!}. \end{aligned}$$

Soit ε l'erreur absolue permise. Une portion $\varepsilon/2$ est réservée pour l'erreur de troncature et une portion $\varepsilon/2$ est réservée pour l'erreur de la résolution du modèle transformé tronqué par randomisation standard. Alors, pour $\alpha_{S'} > 0$ et la mesure $\text{ETRT}(t)$, les paramètres de troncatures K

et L sont choisies comme

$$K = \min \left\{ m \geq 0 : r_{\max} \alpha_S a(m) \sum_{k=K+1}^{\infty} (k-K) e^{-\Lambda t} \frac{(\Lambda t)^k}{k!} \leq \frac{\varepsilon}{4} \right\},$$

$$L = \min \left\{ m \geq 0 : r_{\max} a'(m) \sum_{k=L+1}^{\infty} e^{-\Lambda t} \frac{(\Lambda t)^k}{k!} \leq \frac{\varepsilon}{4} \right\}.$$

Pour $\alpha_{S'} > 0$ et la mesure ETRM(t), les paramètres de troncature K et L sont choisis comme

$$K = \min \left\{ m \geq 0 : \frac{r_{\max} \alpha_S a(m)}{\Lambda t} \sum_{k=K+2}^{\infty} \frac{(k-K)(k-K-1)}{2} e^{-\Lambda t} \frac{(\Lambda t)^k}{k!} \leq \frac{\varepsilon}{4} \right\},$$

$$L = \min \left\{ m \geq 0 : \frac{r_{\max} a'(m)}{\Lambda t} \sum_{k=L+2}^{\infty} (k-L-1) e^{-\Lambda t} \frac{(\Lambda t)^k}{k!} \leq \frac{\varepsilon}{4} \right\}.$$

Pour $\alpha_{S'} = 0$ et la mesure ETRT(t), le paramètre de troncature K est choisi comme

$$K = \min \left\{ m \geq 0 : r_{\max} \alpha_S a(m) \sum_{k=K+1}^{\infty} (k-K) e^{-\Lambda t} \frac{(\Lambda t)^k}{k!} \leq \frac{\varepsilon}{2} \right\}.$$

Finalement, pour $\alpha_{S'} = 0$ et la mesure ETRM(t), le paramètre de troncature K est choisi comme

$$K = \min \left\{ m \geq 0 : \frac{r_{\max} \alpha_S a(K)}{\Lambda t} \sum_{k=K+2}^{\infty} \frac{(k-K)(k-K-1)}{2} e^{-\Lambda t} \frac{(\Lambda t)^k}{k!} \leq \frac{\varepsilon}{2} \right\}.$$

Il est facile de démontrer que le paramètre de troncature K est $O(\log(\Lambda t/\varepsilon))$ et, pour $\alpha_{S'} > 0$, le paramètre de troncature L est $O(\log(1/\varepsilon))$ [15]. Ceci implique que pour des modèles assez grands et raides (Λt assez large) la randomisation régénérative sera significativement moins coûteuse que la randomisation standard. Le coût de la randomisation régénérative dépend de la sélection de l'état régénérateur r . Cet état devrait être sélectionné de manière à ce que $a(m)$ et, si $\alpha_{S'} > 0$, $a'(m)$ diminuent, le plus rapidement possible, et que les paramètres K et L soient les plus petits possible. En général, une sélection automatique de l'état régénérateur n'est pas possible et la sélection doit être proportionnée par l'utilisateur de la méthode. Pour une classe de modèles, classe C' , une sélection naturelle pour l'état r existe et, avec cette sélection naturelle, des résultats théoriques existent estimant le coût de la méthode en fonction de paramètres "visibles" du modèle. La classe de modèles C' inclut toutes les CMTC couvertes par la randomisation régénérative pour lesquelles une partition $S_0 \cup S_1 \cup \dots \cup S_{N_C}$ pour S existe satisfaisant les propriétés suivantes:

P1. $S_0 = \{o\}$ (c.à d. $|S_0| = 1$).

$$\text{P2. } \max_{0 \leq k \leq N_C} \max_{i \in S_k} \lambda_{i, S_k - \{i\} \cup S_{k+1} \cup \dots \cup S_{N_C}} \text{ est sensiblement plus petit que } \\ \min_{0 < k \leq N_C} \min_{i \in S_k} \lambda_{i, S_0 \cup \dots \cup S_{k-1} \cup \{f_1, \dots, f_A\}} > 0.$$

La classe C' inclut les modèles de faute/réparation, avec distributions exponentielles de temps de faute et de réparation et avec réparation dans chaque état avec composants en faute, quand les taux de faute sont significativement plus petits que les taux de réparation. Les modèles de la classe C' se déplacent rapidement vers l'état o ou vers un état f_i et, par conséquent, l'état o est une sélection "naturelle" pour l'état r . Les paramètres K et L sont principalement déterminés par la valeur du paramètre $R = \max_{i \in S} \lambda_i / \min_{i \in S' - \{o\}} \lambda_i$ et, pour $R \gg 1$, peuvent être estimés par $30R$ [15]. Notons que R est un paramètre "visible". Des résultats expérimentaux ont montré que pour des modèles grands et raides dans la classe C', la randomisation régénérative peut être plus ou moins aussi coûteuse que la randomisation standard.

Pour améliorer l'efficacité de la méthode on a proposé [17]. Une variante de la randomisation régénérative, appelée *randomisation régénérative avec inversion de transformation de Laplace*, qui diffère de la randomisation régénérative seulement par le fait que le modèle transformé tronqué est résolu en utilisant une solution du modèle au domaine de la transformation de Laplace en combinaison avec une méthode numérique pour inversion de la transformation de Laplace. Des expériences numériques ont démontré que la variante peut être significativement moins coûteuse que la randomisation régénérative quand le modèle original est raide et de non grande taille.

2.2.4 Randomisation régénérative bornante

Dans [16] on a développé la méthode randomisation régénérative bornante pour le calcul des bornes pour un cas particulier de la mesure $\text{ETRT}(t)$. Les modèles couverts par la méthode sont les modèles couverts par la randomisation régénérative avec $A \geq 1$. La mesure considérée est $m(t) = \sum_{i=1}^A r_{f_i} P[X(t) = f_i]$ avec $r_{f_i} \geq 0$ et avec différents r_{f_i} pour différent i .

La méthode calcule une borne inférieure pour $m(t)$, une borne supérieure pour $m(t)$, ou tous les deux et exige le choix d'un état régénérateur $r \in S$ et un paramètre de contrôle D satisfaisant $1 \leq D < \lambda_{\max} / \lambda_{\min}$, où $\lambda_{\min} = \min_{i \in S'} \lambda_i$ et $\lambda_{\max} = \max_{i \in S'} \lambda_i$. Pour obtenir la borne inférieure pour $m(t)$, la méthode modifie la CMTC X pour obtenir une CMTC X^{bi} . La borne inférieure pour $m(t)$ est $m^{\text{bi}}(t) = \sum_{i=1}^A r_{f_i} P[X^{\text{bi}}(t) = f_i]$, qui est calculée en résolvant X^{bi} par randomisation régénérative avec état régénérateur r . La CMTC X^{bi} est obtenue à partir de X par l'échelonnement des taux de transition de S' . La relation entre les taux de transition $\lambda_{i,j}^{\text{bi}}$ de X^{bi} et les taux de transition $\lambda_{i,j}$ de X est $\lambda_{i,j}^{\text{bi}} = \lambda_{i,j} (\lambda_i^{\text{bi}} / \lambda_i)$ $i \in S'$, où λ_i est le taux de départ de X de i et $\lambda_i^{\text{bi}} = \min\{\lambda_i, D\lambda_{\min}\}$. Pour obtenir la borne supérieure pour $m(t)$, la méthode

modifie la CMTC X pour obtenir une CMTC X^{bs} . La borne supérieure pour $m(t)$ est $m^{\text{bs}}(t) = \sum_{i=1}^A r_{f_i} P[X^{\text{bs}}(t) = f_i]$, qui est calculée en résolvant X^{bs} par randomisation régénérative avec état régénérateur r . La CMTC X^{bs} est obtenue à partir de X par l'échelonnement des taux de transition de S' . La relation entre les taux de transition $\lambda_{i,j}^{\text{bs}}$ de X^{bs} et les taux de transition $\lambda_{i,j}$ de X est $\lambda_{i,j}^{\text{bs}} = \lambda_{i,j}(\lambda_i^{\text{bs}}/\lambda_i)$ $i \in S'$, où λ_i est le taux de départ de X de i et $\lambda_i^{\text{bs}} = \max\{\lambda_i, \lambda_{\max}/D\}$. Pour le cas particulier où les deux bornes sont calculées, $D = 1$ et $\lambda_{\min} \geq \lambda_r$ il y a une réalisation plus efficace de la méthode par laquelle la CMTC X^{bi} est obtenue à partir de la CMTC X^{bs} .

La méthode randomisation régénérative bornante est principalement dirigée à une classe de modèles C'' . La classe C'' comprend les modèles couverts par la méthode pour lesquels une partition $S_0 \cup S_1 \cup \dots \cup S_{N_C}$ pour S existe satisfaisant les propriétés:

- P1. $S_0 = \{o\}$ (c.à d. $|S_0| = 1$).
- P2. $\max_{0 \leq k \leq N_C} \max_{i \in S_k} \lambda_{i, S_k - \{i\} \cup S_{k+1} \cup \dots \cup S_{N_C}}$ est sensiblement plus petit que $\min_{0 < k \leq N_C} \min_{i \in S_k} \lambda_{i, S_0 \cup \dots \cup S_{k-1} \cup \{f_1, \dots, f_A\}} > 0$.
- P3. $\lambda_o \leq \min_{i \in S - \{o\}} \lambda_i$.

Pour les modèles de classe C'' une sélection naturelle pour l'état régénérateur est $r = o$. Avec cette sélection, les bornes obtenues par la méthode sont ajustées. De plus, le paramètre D permet de promettre la qualité des bornes et le coût de computation de la méthode. Des valeurs supérieures de D proportionnent des bornes plus ajustées avec un coût computationnel meilleur. Pour la sélection $D = 1$, le coût computationnel de la méthode est relativement petit.

2.2.5 Randomisation avec détection du régime stationnaire

Dans [50] on a développé la méthode randomisation avec détection du régime stationnaire pour le calcul des mesures $\text{ETRT}(t)$ et $\text{ETRM}(t)$ pour le cas où la CMTC est irréductible. Nous décrivons une légère variante de la méthode décrite dans [50] qui est un peu moins coûteuse pour de grands modèles. Soit $X = \{X(t); t \geq 0\}$ une CMTC irréductible avec espace d'états fini Ω , taux de départ λ_i , $i \in \Omega$, structure de taux de récompense $r_i \geq 0$, $i \in \Omega$, et vecteur ligne des probabilités initiales $\alpha = (P[X(0) = i])_{i \in \Omega}$. Soit Λ un taux de randomisation $> \max_{i \in \Omega} \lambda_i$. Soit $\hat{X} = \{\hat{X}_n, n = 0, 1, 2, \dots\}$ la CMTD randomisée de X avec le taux de randomisation Λ et soit $\mathbf{P} = (P_{i,j})_{i,j \in \Omega}$ la matrice des probabilités de transition de \hat{X} . Étant donné que X est irréductible et $P_{i,i} \geq 0$, $i \in \Omega$, \mathbf{P} est irréductible et aperiodique et, donc, régulière. Considérons les vecteurs $\mathbf{V}^n = (V_i^n)_{i \in \Omega} = \mathbf{P}^n \mathbf{r}$, $n \geq 0$, où $\mathbf{r} = (r_i)_{i \in \Omega}$, et soit $v_n = \alpha \mathbf{V}^n$. Alors,

$$\text{ETRT}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\Lambda t} \frac{(\Lambda t)^n}{n!} v_n.$$

La détection du régime stationnaire est basée sur le contrôle de séquence des vecteurs \mathbf{V}^n . Soit $m_n = \min_{i \in \Omega} V_i^n$ et $M_n = \max_{i \in \Omega} V_i^n$. Les séquences m_n et M_n sont, respectivement, croissantes et décroissantes avec n . De plus, $\lim_{n \rightarrow \infty} m_n = \lim_{n \rightarrow \infty} M_n$. Soit le temps discret jusqu'à la stationnarité

$$K = \min \{n \geq 0 : M_n - m_n \leq 2\varepsilon\}.$$

Alors, $\text{ETRT}(t)$ est calculé avec erreur $\leq \varepsilon$ comme

$$\sum_{n=0}^K e^{-\Lambda t} \frac{(\Lambda t)^n}{n!} v_n + \frac{M_K + m_K}{2} \left(1 - \sum_{n=0}^K e^{-\Lambda t} \frac{(\Lambda t)^n}{n!} \right).$$

La méthode demande le calcul de \mathbf{V}^n pour $0 \leq n \leq K$. Les vecteurs sont calculés en utilisant $\mathbf{V}^0 = \mathbf{r}$ et $\mathbf{V}^{n+1} = \mathbf{P}\mathbf{V}^n$, $0 \leq n \leq K-1$.

Pour la mesure $\text{ETRM}(t)$, soit les vecteurs $\mathbf{V}^n = 1/(n+1) \sum_{k=0}^n \mathbf{P}^k \mathbf{r}$, $n \geq 0$ et soit $v'_n = \boldsymbol{\alpha} \mathbf{V}^n$, $n \geq 0$. Alors,

$$\text{ETRM}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\Lambda t} \frac{(\Lambda t)^n}{n!} v'_n.$$

Avec le même temps discret à la stationnarité K définie par la mesure $\text{ETRT}(t)$, soit

$$G_k(t) = \sum_{n=0}^k e^{-\Lambda t} \frac{(\Lambda t)^n}{n!} v'_n,$$

$$H_k(t) = 1 - \sum_{n=0}^k e^{-\Lambda t} \frac{(\Lambda t)^n}{n!},$$

et $S_k = (M_k + m_k)/2$. Alors $\text{ETRM}(t)$ est calculé avec erreur $\leq \varepsilon$ comme

$$G_K(t) + \frac{K+1}{\Lambda t} (v'_K - S_K) H_{K+1}(t) + S_K H_K(t).$$

La méthode demande le calcul de \mathbf{V}^n pour $0 \leq n \leq K$. Les vecteurs sont calculés utilisant $\mathbf{V}^0 = \mathbf{V}^0 = \mathbf{r}$, $\mathbf{V}^{n+1} = \mathbf{P}\mathbf{V}^n$, $0 \leq n \leq K-1$ et

$$\mathbf{V}^{m+1} = \frac{n+1}{n+2} \mathbf{V}^m + \frac{1}{n+2} \mathbf{V}^{n+1}, \quad 0 \leq n \leq K-1.$$

2.2.6 Randomisation avec détection du régime quasistationnaire

Dans [18] on a développé la méthode randomisation avec détection du régime quasistationnaire pour le calcul des mesures $\text{ETRT}(t)$ et $\text{ETRM}(t)$. La méthode couvre les CMTC $X = \{X(t); t \geq 0\}$ avec espace d'état fini $\Omega = S \cup \{f_1, f_2, \dots, f_A\}$, $A \geq 1$, où tous les états de S sont transitoires et accessibles entre eux et où les états f_i sont absorbants, avec une structure de

taux de récompense $r_i \geq 0$, $i \in \Omega$, où les r_{f_i} sont différents pour f_i différent. Soit $\alpha = (\alpha_i)_{i \in \Omega}$, $\alpha_i = P[X(0) = i]$, $i \in \Omega$, le vecteur ligne de probabilités initiales de X . Soit λ_i , $i \in \Omega$, les taux de départ de X et soit $\Lambda = (1 + \theta) \max_{i \in \Omega} \lambda_i$ le taux de randomisation, où θ est une petite valeur positive, par exemple $\theta = 10^{-4}$. Soit $\hat{X} = \{\hat{X}_n, n = 0, 1, 2, \dots\}$ la CMTD randomisée de X avec le taux de randomisation Λ et soit $\mathbf{P} = (P_{i,j})_{i,j \in \Omega}$ la matrice des probabilités de transition de \hat{X} . Soit $\mathbf{P}_{S,S} = (P_{i,j})_{i,j \in S}$ et $P_{i,S} = \sum_{j \in S} P_{i,j}$ et soit le vecteur ligne $\alpha_S = (\alpha_i)_{i \in S}$ et $\alpha_S = \sum_{i \in S} \alpha_i$. Les états dans S étant accessibles entre eux dans X alors, la matrice $\mathbf{P}_{S,S}$ sera irréductible. De plus étant $\Lambda > \max_{i \in \Omega} \lambda_i$, $P_{i,i} > 0$, $i \in S$, ce qui implique que $\mathbf{P}_{S,S}$ sera apériodique. Alors, la matrice $\mathbf{P}_{S,S}$ sera régulière.

Soit les vecteurs colonne

$$\begin{aligned} \mathbf{r} &= (r_j)_{j \in S}, \\ \mathbf{w} &= (w_j)_{j \in S} = (P_{j,S})_{j \in S}, \\ \mathbf{v}^i &= (v_j^i)_{j \in S} = (P_{j,f_i})_{j \in S}, \quad 1 \leq i \leq A \end{aligned}$$

et soit

$$\begin{aligned} r(n) &= \frac{\alpha_S \mathbf{P}_{S,S}^n \mathbf{r}}{\alpha_S \mathbf{P}_{S,S}^n \mathbf{1}}, \\ w(n) &= \frac{\alpha_S \mathbf{P}_{S,S}^n \mathbf{w}}{\alpha_S \mathbf{P}_{S,S}^n \mathbf{1}}, \\ v^i(n) &= \frac{\alpha_S \mathbf{P}_{S,S}^n \mathbf{v}^i}{\alpha_S \mathbf{P}_{S,S}^n \mathbf{1}}, \quad 1 \leq i \leq A, \end{aligned}$$

où $\mathbf{1}$ un vecteur de dimension $|S|$ avec tous ces éléments égaux à 1. Alors, la mesure $\text{ETRT}(t)$ peut être exprimée comme suit

$$\text{ETRT}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} d(n) e^{-\Lambda t} \frac{(\Lambda t)^n}{n!}$$

avec

$$\begin{aligned} d(n) &= \nu(n) r(n) + \sum_{i=1}^A \alpha_{f_i} r_{f_i} + \sum_{m=0}^{n-1} \nu(m) \sum_{i=1}^A v^i(m) r_{f_i}, \\ \nu(n) &= \alpha_S \prod_{m=0}^{n-1} w(m). \end{aligned}$$

La formulation précédente de $\text{ETRT}(t)$ en fonction des séquences $r(n)$, $w(n)$ et $v^i(n)$, $1 \leq i \leq A$ est la base de la méthode randomisation avec détection du régime quasistationnaire. La méthode exploite le résultat que, $\mathbf{P}_{S,S}$ étant régulière, quel que soit le vecteur \mathbf{z} de dimension $|S|$, la limite pour $n \rightarrow \infty$ de

$$z(n) = \frac{\alpha_S \mathbf{P}_{S,S}^n \mathbf{z}}{\alpha_S \mathbf{P}_{S,S}^n \mathbf{1}}$$

existe et indépendant de α_S [18]. La quantité $z(n)$ peut être interprétée comme $E[z_{\hat{X}_n} | \hat{X}_n \in S]$. Dans la méthode les séquences $r(n)$, $w(n)$ et $v^i(n)$, $1 \leq i \leq A$ sont calculées jusqu'à un indice $n = K$ et des bornes pour $\text{ETRT}(t)$ sont calculées à partir des bornes pour $r(n)$, $w(n)$ et $v^i(n)$, $1 \leq i \leq A$, $n > K$. Soit

$$\begin{aligned} \mathbf{o}(n) &= (o_j(n))_{j \in S} = \mathbf{P}_{S,S}^n \mathbf{1}, \\ \mathbf{r}(n) &= (r_j(n))_{j \in S} = \mathbf{P}_{S,S}^n \mathbf{r}, \\ \mathbf{w}(n) &= (w_j(n))_{j \in S} = \mathbf{P}_{S,S}^n \mathbf{w}, \\ \mathbf{v}^i(n) &= (v_j^i(n))_{j \in S} = \mathbf{P}_{S,S}^n \mathbf{v}^i, \quad 1 \leq i \leq A. \end{aligned}$$

Les bornes pour $r(n)$, $w(n)$ et $v^i(n)$, $1 \leq i \leq A$, $n > K$, sont données par

$$\begin{aligned} r_{\text{bi}}(K) &= \min_{j \in S} \frac{r_j(K)}{o_j(K)}, \\ r_{\text{bs}}(K) &= \max_{j \in S} \frac{r_j(K)}{o_j(K)}, \\ w_{\text{bi}}(K) &= \min_{j \in S} \frac{w_j(K)}{o_j(K)}, \\ w_{\text{bs}}(K) &= \max_{j \in S} \frac{w_j(K)}{o_j(K)}, \\ v_{\text{bi}}^i(K) &= \min_{j \in S} \frac{v_j^i(K)}{o_j(K)}, \quad 1 \leq i \leq A, \\ v_{\text{bs}}^i(K) &= \max_{j \in S} \frac{v_j^i(K)}{o_j(K)}, \quad 1 \leq i \leq A. \end{aligned}$$

Le paramètre K est choisi de manière à ce que la moyenne des deux bornes pour $\text{ETRT}(t)$ donne $\text{ETRT}(t)$ avec erreur $\leq \varepsilon$. La borne inférieure pour $\text{ETRT}(t)$ est donnée par

$$\begin{aligned} \text{ETRT}_{\text{bi}}^K(t) &= \sum_{n=0}^K d(n) e^{-\Lambda t} \frac{(\Lambda t)^n}{n!} + B(K) \sum_{n=K+1}^{\infty} e^{-\Lambda t} \frac{(\Lambda t)^n}{n!} \\ &+ C_{\text{bi}}(K) e^{-(1-w_{\text{bi}}(K))\Lambda t} \sum_{n=K+1}^{\infty} e^{-w_{\text{bi}}(K)\Lambda t} \frac{(w_{\text{bi}}(K)\Lambda t)^n}{n!} \\ &+ D_{\text{bi}}(K) \sum_{n=K+2}^{\infty} (1-w_{\text{bi}}(K)^{n-K-1}) e^{-\Lambda t} \frac{(\Lambda t)^n}{n!} \end{aligned}$$

et la borne supérieure pour $\text{ETRT}(t)$ est donnée par

$$\text{ETRT}_{\text{bs}}^K(t) = \sum_{n=0}^K d(n) e^{-\Lambda t} \frac{(\Lambda t)^n}{n!} + B(K) \sum_{n=K+1}^{\infty} e^{-\Lambda t} \frac{(\Lambda t)^n}{n!}$$

$$\begin{aligned}
& + C_{\text{bs}}(K) e^{-(1-w_{\text{bs}}(K))\Lambda t} \sum_{n=K+1}^{\infty} e^{-w_{\text{bs}}(K)\Lambda t} \frac{(w_{\text{bs}}(K)\Lambda t)^n}{n!} \\
& + I_{w_{\text{bs}}(K) < 1} D_{\text{bs}}(K) \sum_{n=K+2}^{\infty} (1 - w_{\text{bs}}(K))^{n-K-1} e^{-\Lambda t} \frac{(\Lambda t)^n}{n!} \\
& + I_{w_{\text{bs}}(K) = 1} E_{\text{bs}}(K) \sum_{n=K+2}^{\infty} (n - K - 1) e^{-\Lambda t} \frac{(\Lambda t)^n}{n!},
\end{aligned}$$

où I_c est une fonction indicatrice tournant la valeur 1 si la condition c est satisfaite et 0 autrement et

$$\begin{aligned}
B(K) &= \sum_{i=1}^A \alpha_{f_i} r_{f_i} + \sum_{m=0}^K \nu(m) \sum_{i=1}^A v^i(m) r_{f_i}, \\
C_{\text{bi}}(K) &= \frac{\nu(K+1) r_{\text{bi}}(K)}{w_{\text{bi}}(K)^{K+1}}, \\
C_{\text{bs}}(K) &= \frac{\nu(K+1) r_{\text{bs}}(K)}{w_{\text{bs}}(K)^{K+1}}, \\
D_{\text{bi}}(K) &= \nu(K+1) \frac{\sum_{i=1}^A v_{\text{bi}}^i(K) r_{f_i}}{1 - w_{\text{bi}}(K)}, \\
D_{\text{bs}}(K) &= \nu(K+1) \frac{\sum_{i=1}^A v_{\text{bs}}^i(K) r_{f_i}}{1 - w_{\text{bs}}(K)}, \\
E_{\text{bs}}(K) &= \nu(K+1) \sum_{i=1}^A v_{\text{bs}}^i(K) r_{f_i}.
\end{aligned}$$

Étant ε l'erreur permise, K est choisie comme

$$K = \min\{m \geq 0 : \text{ETRM}_{\text{bs}}^m(t) - \text{ETRT}_{\text{bi}}^m(t) \leq 2\varepsilon\}$$

et $\text{ETRT}(t)$ est calculé avec une erreur $\leq \varepsilon$ utilisant

$$\frac{\text{ETRT}_{\text{bi}}^K(t) + \text{ETRT}_{\text{bs}}^K(t)}{2}.$$

Les vecteurs $\mathbf{r}(n)$, $\mathbf{w}(n)$, $\mathbf{v}^i(n)$, $1 \leq i \leq A$ et $\mathbf{o}(n)$, $0 \leq n \leq K$ sont calculé utilisant $\mathbf{r}(0) = \mathbf{r}$, $\mathbf{w}(0) = \mathbf{w}$, $\mathbf{v}^i(0) = \mathbf{v}^i$, $1 \leq i \leq A$, $\mathbf{o}(0) = \mathbf{1}$ et $\mathbf{r}(n+1) = \mathbf{P}_{S,S} \mathbf{r}(n)$, $\mathbf{w}(n+1) = \mathbf{P}_{S,S} \mathbf{w}(n)$, $\mathbf{v}^i(n+1) = \mathbf{P}_{S,S} \mathbf{v}^i(n)$, $1 \leq i \leq A$, $\mathbf{o}(n+1) = \mathbf{w}(n+1) + \sum_{i=1}^A \mathbf{v}^i(n+1)$.

La méthode pour $\text{ETRM}(t)$ est basée sur la relation $\text{ETRM}(t) = \int_0^t \text{ETRT}(\tau) d\tau/t$. Cette relation permet de calculer une borne inférieure pour $\text{ETRM}(t)$ comme $\text{ETRM}_{\text{bi}}^K(t) = \int_0^t \text{ETRT}_{\text{bi}}^K(\tau) d\tau/t$ et une borne supérieure comme $\text{ETRM}_{\text{bs}}^K(t) = \int_0^t \text{ETRT}_{\text{bs}}^K(\tau) d\tau/t$. Les expressions pour $\text{ETRM}_{\text{bi}}^K(t)$ et $\text{ETRM}_{\text{bs}}^K(t)$ sont

$$\text{ETRM}_{\text{bi}}^K(t) = \frac{1}{\Lambda t} \sum_{n=1}^{K+1} \left(\sum_{m=0}^{n-1} d(m) \right) e^{-\Lambda t} \frac{(\Lambda t)^n}{n!} + \frac{1}{\Lambda t} \left(\sum_{n=0}^K d(n) \right) \sum_{n=K+2}^{\infty} e^{-\Lambda t} \frac{(\Lambda t)^n}{n!}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{B(K)}{\Lambda t} \sum_{n=K+2}^{\infty} (n - K - 1) e^{-\Lambda t} \frac{(\Lambda t)^n}{n!} \\
& + \frac{C_{\text{bi}}(K)}{\Lambda t} \frac{w_{\text{bi}}(K)^{K+1}}{1 - w_{\text{bi}}(K)} \sum_{n=K+2}^{\infty} (1 - w_{\text{bi}}(K)^{n-K-1}) e^{-\Lambda t} \frac{(\Lambda t)^n}{n!} \\
& + \frac{D_{\text{bi}}(K)}{\Lambda t} \sum_{n=K+3}^{\infty} \left(\sum_{m=K+2}^{n-1} (1 - w_{\text{bi}}(K)^{m-K-1}) \right) e^{-\Lambda t} \frac{(\Lambda t)^n}{n!}
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
\text{ETRM}_{\text{bs}}^K(t) &= \frac{1}{\Lambda t} \sum_{n=1}^{K+1} \left(\sum_{m=0}^{n-1} d(m) \right) e^{-\Lambda t} \frac{(\Lambda t)^n}{n!} + \frac{1}{\Lambda t} \left(\sum_{n=0}^K d(n) \right) \sum_{n=K+2}^{\infty} e^{-\Lambda t} \frac{(\Lambda t)^n}{n!} \\
& + \frac{B(K)}{\Lambda t} \sum_{n=K+2}^{\infty} (n - K - 1) e^{-\Lambda t} \frac{(\Lambda t)^n}{n!} \\
& + I_{w_{\text{bs}}(K) < 1} \frac{C_{\text{bs}}(K)}{\Lambda t} \frac{w_{\text{bs}}(K)^{K+1}}{1 - w_{\text{bs}}(K)} \sum_{n=K+2}^{\infty} (1 - w_{\text{bs}}(K)^{n-K-1}) e^{-\Lambda t} \frac{(\Lambda t)^n}{n!} \\
& + I_{w_{\text{bs}}(K) = 1} \frac{C_{\text{bs}}(K)}{\Lambda t} \sum_{n=K+2}^{\infty} (n - K - 1) e^{-\Lambda t} \frac{(\Lambda t)^n}{n!} \\
& + I_{w_{\text{bs}}(K) < 1} \frac{D_{\text{bs}}(K)}{\Lambda t} \sum_{n=K+3}^{\infty} \left(\sum_{m=K+2}^{n-1} (1 - w_{\text{bs}}(K)^{m-K-1}) \right) e^{-\Lambda t} \frac{(\Lambda t)^n}{n!} \\
& + I_{w_{\text{bs}}(K) = 1} \frac{E_{\text{bs}}(K)}{\Lambda t} \sum_{n=K+3}^{\infty} \frac{(n - K - 1)(n - K - 2)}{2} e^{-\Lambda t} \frac{(\Lambda t)^n}{n!}.
\end{aligned}$$

Choissant K comme

$$K = \min\{m \geq 0 : \text{ETRM}_{\text{bs}}^m(t) - \text{ETRM}_{\text{bi}}^m(t) \leq 2\varepsilon\},$$

$\text{ETRM}(t)$ est calculé avec une erreur $\leq \varepsilon$ utilisant

$$\frac{\text{ETRM}_{\text{bi}}^K(t) + \text{ETRM}_{\text{bs}}^K(t)}{2}.$$

Les vecteurs $\mathbf{r}(n)$, $\mathbf{w}(n)$, $\mathbf{v}^i(n)$, $1 \leq i \leq A$ et $\mathbf{o}(n)$, $0 \leq n \leq K$ sont calculé comme pour la mesure $\text{ETRT}(t)$.

Pour Λt grand, le paramètre K peut être beaucoup plus petit que le paramètre de troncature N de la randomisation standard, impliquant que la méthode peut être beaucoup moins coûteuse que la randomisation standard. Pour les modèles dans la classe C' vers lesquelles la randomisation régénérative est orientée, la randomisation avec détection du régime quasistationnaire semble être plus coûteuse que la randomisation régénérative [18].

Chapitre 3

Randomisation régénérative divisée: cas particulier

L'idée fondamentale dans la randomisation régénérative divisée est d'obtenir à partir du modèle original un modèle transformé tronqué qui, avec une structure de taux de récompense appropriée, a la même mesure $ETRT(t)$ et $ETRM(t)$ que le modèle original avec une erreur arbitrairement petite. Le modèle transformé tronqué est résolu utilisant la méthode randomisation standard. Dans ce chapitre, nous développerons la méthode randomisation régénérative divisée pour un cas particulier de la mesure $ETRT(t)$. Le prochain chapitre généralisera la méthode à la mesure $ETRT(t)$ et à la mesure $ETRM(t)$. Le cas particulier de la mesure $ETRT(t)$ considérée dans ce chapitre est

$$m(t) = \sum_{i=1}^A r_{f_i} P[X(t) = f_i],$$

où $A \geq 1$ et $f_i, 1 \leq i \leq A$ sont des états absorbants.

3.1 Modèles couverts

La méthode randomisation régénérative divisée demande la sélection d'un sous-ensemble d'états E et d'un état régénérateur r . La méthode couvre des CMTC X avec espace d'état fini et des sélections de E et r satisfaisant quelques conditions. Soit Ω l'espace d'état de X et soit $E = E - \{r\}$ et $\bar{E} = S - E$. Alors, dénotant par $\lambda_{i,j}$ le taux de transition de X de i à j , les conditions sont:

C1. $\Omega = S \cup \{f_1, \dots, f_A\}$, $|S| \geq 3$, $A \geq 1$, où $f_i, i \leq i \leq A$, sont des états absorbants et ou

tous les états dans S sont transitoires ou S a une simple classe récurrente C .

- C2. Tous les états sont accessibles.
- C3. $r_{f_i} \geq 0$, $i \in \Omega$ et tous r_{f_i} sont différents.
- C4. $E \subset S$.
- C5. $r \in E$ et, si X inclut un simple récurrent classe $C \subset S$, $r \in C$.
- C6. $|E| \geq 2$.
- C7. $|\overline{E}| \geq 1$.
- C8. r est seulement accessible de \overline{E} ($\lambda_{i,r} = 0$, $i \in E'$).
- C9. r est le seul point d'entrée dans E ($\lambda_{i,j} = 0$, $i \in \overline{E}$, $j \in E'$).
- C10. $\lambda_{r,j} > 0$ pour quelque $j \in E'$.

La condition C10 peut être facilement évitée dans la pratique en ajoutant, au cas où $\lambda_{r,j} = 0$ pour tous $j \in E'$, un petit taux de transition $\lambda \leq 10^{-10}\varepsilon/(2r_{\max}t_{\max})$ de r à un certain état dans E' , où ε est l'erreur permise, $r_{\max} = \max_{1 \leq i \leq A} r_{f_i}$ et t_{\max} est le plus grand temps auquel la mesure $m(t)$ doit être calculée. L'addition du taux de transition λ introduit [14] une erreur négligeable à $m(t) \leq 10^{-10}\varepsilon$. De plus, si X a une simple classe récurrente $C \subset S$, les conditions C5 et C10 impliquent $|C| \geq 2$, puis $|C| = 1$ impliquerait par la condition C5 que r serait absorbante, en contradiction avec la condition C10. Par conséquent, quand la méthode est applicable, f_1, f_2, \dots, f_A doivent être les seuls états absorbants. Ceci rend facile de vérifier si la méthode est applicable à une CMTC X donnée avec espace d'états finis et avec sous-ensemble d'états E et état régénérateur r donnés.

Pour les modèles Markoviens des systèmes tolérants aux fautes considérés dans la thèse, le sous-ensemble d'états E devrait être choisi de manière à ce qu'il inclue justement les états sans réparation (l'état sans composants en faute et les états avec réparation différée) et comme état régénérateur r on devrait choisir l'état sans composants en faute. Comme illustration, la Figure 3.1 montre un petit modèle Markovien de fiabilité d'un système tolérant aux fautes employant la technique pair et réserve (en anglais, "pair-and-spare") [26]. Dans cette technique, il y a deux modules actifs et un module de réserve. Le module de réserve est activé quand un des modules actifs défaille. Les modules actifs défont avec taux λ_M . Il y a deux modes de défaillance pour les modules. Le premier mode (mode doux) arrive avec probabilité S_M et est réparé avec taux μ_S . Le deuxième mode (mode dur) arrive avec probabilité $1 - S_M$ et est réparé avec taux μ_H . Il y a deux personnes pour réparer des modules en faute douce. Il y a seulement une personne pour réparer des modules en faute dure. La réparation est différée jusqu'au moment où il y a deux modules en faute et, à partir de ce moment, continue jusqu'à ce que tous les modules en faute aient été réparés. Pour ce petit modèle, la sélection pour r devrait être $r = 1$ et la sélection pour E devrait être $E = \{1, 2, 3\}$.

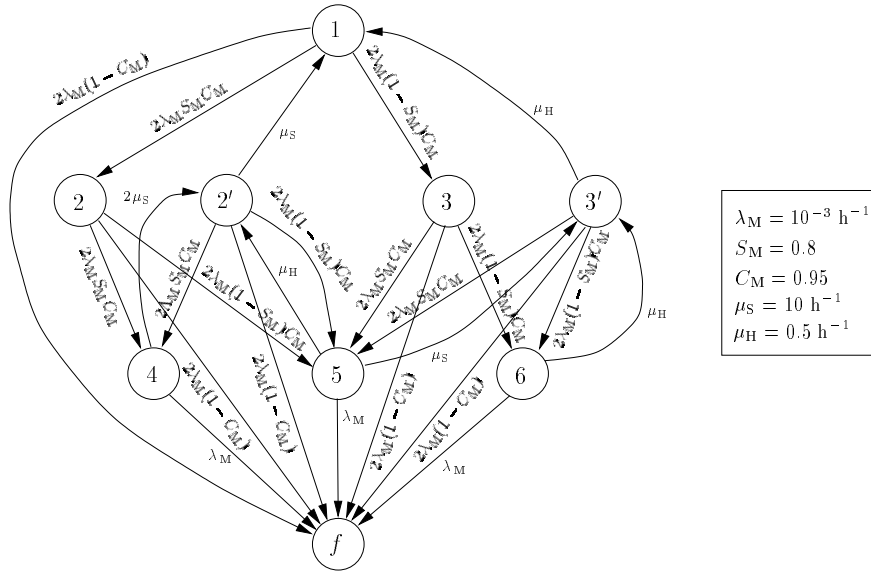


FIG. 3.1 – Modèle de fiabilité de CMTD d'un système tolérant aux fauts réparable avec réparation différée employant la technique pair et réserve.

3.2 Modèle transformé avec espace infini d'état

Dans cette section, nous définirons un modèle Markovien transformé V obtenu à partir de X qui aura la même mesure $m(t)$ que X . A la randomisation régénérative divisée, ce modèle V sera tronqué de manière que le modèle tronqué aura avec une erreur $\leq \varepsilon$ la même mesure $m(t)$ que le modèle original X . A la randomisation régénérative divisée, la mesure $m(t)$ du modèle transformé tronqué sera calculée en utilisant la méthode randomisation standard.

Soit $\lambda_i = \sum_{j \in \Omega - \{i\}} \lambda_{i,j}$, $i \in \Omega$ le taux de départ de X de l'état i . Soit $\Lambda_E \geq \max_{i \in E} \lambda_i > 0$ et $\Lambda_{\bar{E}} \geq \max_{i \in \bar{E}} \lambda_i > 0$, où les inégalités > 0 viennent du fait que les seuls états absorbants de X sont f_1, f_2, \dots, f_A , et soit \hat{X} la CMTD obtenue par dérandomisation de X avec le taux Λ_E dans E et taux $\Lambda_{\bar{E}}$ dans $\Omega - E = \bar{E} \cup \{f_1, f_2, \dots, f_A\}$. La CMTD \hat{X} aura le même espace d'état et distribution de probabilité initiale que X et probabilités de transition $P_{i,j} = \lambda_{i,j}/\Lambda_E$, $i \in E$, $j \neq i$, $P_{i,i} = 1 - \lambda_i/\Lambda_E$, $i \in E$, $P_{i,j} = \lambda_{i,j}/\Lambda_{\bar{E}}$, $i \in \bar{E} \cup \{f_1, f_2, \dots, f_A\}$, $j \neq i$, $P_{i,i} = 1 - \lambda_i/\Lambda_{\bar{E}}$, $i \in \bar{E} \cup \{f_1, f_2, \dots, f_A\}$. Nous pouvons interpréter X comme la composition de la CMTD \hat{X} , qui donne une séquence d'états visités, avec des durées de visites indépendantes avec une distribution exponentielle, avec paramètre Λ_E dans les états appartenant à E et avec paramètre $\Lambda_{\bar{E}}$ dans les états appartenant à $\bar{E} \cup \{f_1, f_2, \dots, f_A\}$. Cette interprétation de X généralise la randomisation standard, à laquelle tous les états sont randomisés avec le même taux. Le Lemme suivant prouve la correction de l'interprétation pour le cas, plus général, auquel un taux de randomisation différent pour chaque état est permis. Au lemme, $\text{diag}[\Lambda_i]_{i \in \Omega}$ dénote une

matrice diagonale avec éléments à la diagonale $\Lambda_i, i \in \Omega$. Nous rappelons que les éléments $a_{i,j}$ du générateur infinitésimal de X sont $a_{i,i} = -\lambda_i, i \in \Omega$ et $a_{i,j} = \lambda_{i,j}, i, j \in \Omega, j \neq i$.

Lemme 3.1. *Soit $X = \{X(t); t \geq 0\}$ une CMTC avec espace d'état fini Ω , générateur infinitésimal $\mathbf{A} = (a_{i,j})_{i,j \in \Omega}$, et vecteur des probabilités initiales $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_i)_{i \in \Omega}$. Soit \widehat{X} la CMTD avec espace d'états Ω , matrice des probabilités de transition $\mathbf{P} = (P_{i,j})_{i,j \in \Omega} = \mathbf{I} + \boldsymbol{\Lambda}^{-1} \mathbf{A}$, $\boldsymbol{\Lambda} = \text{diag}[\Lambda_i]_{i \in \Omega}$, $\Lambda_i \geq -a_{i,i}$, $\Lambda_i > 0, i \in \Omega$, et vecteur des probabilités initiales $\boldsymbol{\alpha}$. Soit $Y = \{Y(t); t \geq 0\}$ le processus stochastique obtenu par randomisation de \widehat{X} avec taux Λ_i à chaque état $i \in \Omega$. Alors, Y est probabilistiquement équivalent à X .*

Preuve. Soit $\{E_{i,n}, i \in \Omega, n \geq 0\}$ une collection de variables aléatoires indépendentes, avec $E_{i,n}$ exponentiellement distribuée avec paramètre Λ_i , et soit $\tau(t) = \min\{n \geq 0 : \sum_{k=0}^n E_{\widehat{X}_{n,k}} > t\}$. Alors, Y peut être définie formellement à partir de \widehat{X} comme $Y(t) = \widehat{X}_{\tau(t)}$. Étant donné que $\tau(0) = 0$ avec probabilité 1, il résulte que le vecteur des probabilités initiales de Y est $\boldsymbol{\alpha}$. Soit $t_n, n \geq 0$ le temps auquel Y performe son n -ième changement d'état ($t_0 = 0$). A partir de la définition de Y , il est clair que le comportement de Y après t_n dépend seulement de $T(t_n)$. Soit $i \in \Omega$ un état absorbant de X . Étant donné que i sera aussi absorbant dans \widehat{X} , il est clair qu'une fois T entre i il restera là pour toujours. Soit $i \in \Omega$ un état non-absorbant de X et soit $Q_{i,j}^n(t) = P[t_{n+1} - t_n \leq t \wedge Y(t_{n+1}) = j \mid Y(t_n) = i], n \geq 0, j \in \Omega, j \neq i, t \geq 0$. Alors, utilisant l'interprétation d'une CMTC avec espace d'états fini en termes de sa CMTD intégrée (en anglais, "embedded") [27], le résultat à prouver résulte si $Q_{i,j}^n(t) = (a_{i,j}/|a_{i,i}|)(1 - e^{-|a_{i,i}|t})$. Soit $\mu(n) = \tau(t_n)$. Sous la convention $0^0 = 1$ ($P_{i,i}$ pourrait être égal à 0) nous avons:

$$\begin{aligned}
Q_{i,j}^n(t) &= P[t_{n+1} - t_n \leq t \wedge Y(t_{n+1}) = j \mid Y(t_n) = i] \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} P[\widehat{X}_{\mu(n)+1} = i \wedge \cdots \wedge \widehat{X}_{\mu(n)+k} = j \mid \widehat{X}_{\mu(n)} = i] \\
&\quad P[E_{i,\mu(n)} + \cdots + E_{i,\mu(n)+k} \leq t] \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} P_{i,i}^k P_{i,j} \sum_{l=k+1}^{\infty} e^{-\Lambda_i t} \frac{(\Lambda_i t)^l}{l!} = \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{k=0}^{l-1} P_{i,i}^k P_{i,j} e^{-\Lambda_i t} \frac{(\Lambda_i t)^l}{l!} \\
&= \sum_{l=1}^{\infty} \frac{1 - P_{i,i}^l}{1 - P_{i,i}} P_{i,j} e^{-\Lambda_i t} \frac{(\Lambda_i t)^l}{l!} \\
&= \frac{P_{i,j}}{1 - P_{i,i}} \sum_{l=1}^{\infty} e^{-\Lambda_i t} \frac{(\Lambda_i t)^l}{l!} - \sum_{l=1}^{\infty} P_{i,i}^l \frac{P_{i,j}}{1 - P_{i,i}} e^{-\Lambda_i t} \frac{(\Lambda_i t)^l}{l!}.
\end{aligned}$$

Alors, employant $P_{i,j}/(1 - P_{i,i}) = a_{i,j}/|a_{i,i}|$ et $\Lambda_i = |a_{i,i}| + P_{i,i}\Lambda_i$:

$$Q_{i,j}^n(t) = \frac{a_{i,j}}{|a_{i,i}|} (1 - e^{-\Lambda_i t}) - \frac{a_{i,j}}{|a_{i,i}|} \sum_{l=1}^{\infty} e^{-|a_{i,i}|t} e^{-P_{i,i}\Lambda_i t} \frac{(P_{i,i}\Lambda_i t)^l}{l!}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{a_{i,j}}{|a_{i,i}|} (1 - e^{-\Lambda_i t}) - \frac{a_{i,j}}{|a_{i,i}|} e^{-|a_{i,i}|t} (1 - e^{-P_{i,i}\Lambda_i t}) \\
&= \frac{a_{i,j}}{|a_{i,i}|} - \frac{a_{i,j}}{|a_{i,i}|} e^{-\Lambda_i t} - \frac{a_{i,j}}{|a_{i,i}|} e^{-|a_{i,i}|t} + \frac{a_{i,j}}{|a_{i,i}|} e^{-(|a_{i,i}|+P_{i,i}\Lambda_i)t} \\
&= \frac{a_{i,j}}{|a_{i,i}|} - \frac{a_{i,j}}{|a_{i,i}|} e^{-\Lambda_i t} - \frac{a_{i,j}}{|a_{i,i}|} e^{-|a_{i,i}|t} + \frac{a_{i,j}}{|a_{i,i}|} e^{-\Lambda_i t} \\
&= \frac{a_{i,j}}{|a_{i,i}|} (1 - e^{-|a_{i,i}|t}). \quad \square
\end{aligned}$$

La CMTD \widehat{X} sera utilisée pour définir une autre CMTD transformée \widehat{V} avec espace d'états infini. La CMTC transformée V avec espace d'états infini sera définie à partir de \widehat{V} . Nous dirons que \widehat{X} est la CMTD randomisée de X avec le taux Λ_E dans E et avec le taux de randomisation $\Lambda_{\overline{E}}$ dans $\overline{E} \cup \{f_1, f_2, \dots, f_A\}$. Similairement, nous dirons que X est la CMTC dérandomisée de X avec le taux de randomisation Λ_E dans E et avec le taux de randomisation $\Lambda_{\overline{E}}$ dans $\overline{E} \cup \{f_1, f_2, \dots, f_A\}$. Nous supposons que les taux de randomisation Λ_E et $\Lambda_{\overline{E}}$ sont pris légèrement plus grands que, respectivement, $\max_{i \in E} \lambda_i$ et $\max_{i \in \overline{E}} \lambda_i$ (c.à d. $\Lambda_E = (1 + \theta) \max_{i \in E} \lambda_i$, $\Lambda_{\overline{E}} = (1 + \theta) \max_{i \in \overline{E}} \lambda_i$, où θ est une petite quantité par exemple 10^{-4}). Ceci implique $P_{i,i} > 0$, $i \in \Omega$.

Pour exprimer les probabilités de transition de la CMTD transformée \widehat{V} et pour justifier les propriétés théoriques de la randomisation régénérative divisée, nous utiliserons trois CMTD, Z , Z' , et Z'' , qui peuvent être définis en termes de \widehat{X} ou en termes d'une version, \widehat{X}' , de \widehat{X} avec état initial r . Dans la suite, étant donné une CMTD \widehat{Y} et une condition c , nous dénoterons par $\widehat{Y}_{k:l}c$ le prédicat qui est vrai si et seulement si Y_n satisfait la condition c pour chaque n , $k \leq n \leq l$ (par convention, le prédicat sera vrai pour $k > l$) et nous dénoterons par $\#\widehat{Y}_{k:l}c$ le nombre des n , $k \leq n \leq l$ pour lesquels \widehat{Y}_n satisfait le condition c . Nous utiliserons aussi la notation $\alpha_B = \sum_{i \in B} \alpha_i$. La première CMTD, $Z = \{Z_n; n = 0, 1, 2, \dots\}$, suit \widehat{X} de r jusqu'à re-entrée dans r . La CMTD Z peut être définie formellement en termes de \widehat{X} comme

$$\begin{aligned}
Z_0 &= r, \\
Z_n &= \begin{cases} i & \text{si } \widehat{X}'_{1:n} \neq r \wedge \widehat{X}'_n = i, \quad i \in S' \cup \{f_1, f_2, \dots, f_A\} \\ a & \text{si } \#\widehat{X}'_{1:n} = r > 0 \end{cases}, \quad n > 0. \quad (3.1)
\end{aligned}$$

Z a l'espace d'état $S \cup \{f_1, f_2, \dots, f_A, a\}$, où f_i , $1 \leq i \leq A$ et a sont des états absorbants, état initial r , et (possibles) probabilités de transition non-nulles

$$P[Z_{n+1} = j \mid Z_n = i] = P_{i,j}, \quad i \in S, j \in S' \cup \{f_1, f_2, \dots, f_A\},$$

$$P[Z_{n+1} = a \mid Z_n = i] = P_{i,r}, \quad i \in S,$$

$$P[Z_{n+1} = f_i \mid Z_n = f_i] = P[Z_{n+1} = a \mid Z_n = a] = 1, \quad 1 \leq i \leq A.$$

La deuxième CMTD, $Z' = \{Z'_n; n = 0, 1, 2, \dots\}$, suit \widehat{X} de E' jusqu'à sa première visite à r . La CMTD Z' peut être définie formellement à partir de \widehat{X} comme

$$Z'_n = \begin{cases} i & \text{si } \widehat{X}_0 \in E' \wedge \widehat{X}_{1:n} \neq r \wedge \widehat{X}_n = i, \quad i \in S' \cup \{f_1, f_2, \dots, f_A\} \\ a & \text{autrement} \end{cases} \quad (3.2)$$

La CMTD Z' a l'espace d'état $S' \cup \{f_1, f_2, \dots, f_A, a\}$, où f_i et a sont les états absorbants, distribution de probabilité initiale $P[Z'_0 = i] = \alpha_i, i \in E', P[Z'_0 = i] = 0, i \in \overline{E} \cup \{f_1, f_2, \dots, f_A\}$, $P[Z'_0 = a] = \alpha_{\{r\} \cup \overline{E} \cup \{f_1, f_2, \dots, f_A\}}$, et (possibles) probabilités de transition non-nulles

$$P[Z'_{n+1} = j \mid Z'_n = i] = P_{i,j}, \quad i \in S', j \in S' \cup \{f_1, f_2, \dots, f_A\},$$

$$P[Z'_{n+1} = a \mid Z'_n = i] = P_{i,r}, \quad i \in S',$$

$$P[Z'_{n+1} = f_i \mid Z'_n = f_i] = P[Z'_{n+1} = a \mid Z'_n = a] = 1, \quad 1 \leq i \leq A.$$

La troisième CMTD, $Z'' = \{Z''_n; n = 0, 1, 2, \dots\}$, suit \widehat{X} de \overline{E} jusqu'à sa première visite à l'état r . La CMTD Z'' peut être définie formellement à partir de \widehat{X} comme (notons que, par la condition C7, le seul point d'entrée de \widehat{X} dans E est l'état r et, alors, Z'' ne peut pas visiter E)

$$Z''_n = \begin{cases} i & \text{if } \widehat{X}_0 \in \overline{E} \wedge \widehat{X}_{1:n} \neq r \wedge \widehat{X}_n = i, \quad i \in \overline{E} \cup \{f_1, f_2, \dots, f_A\} \\ a & \text{autrement} \end{cases} \quad (3.3)$$

La CMTD Z'' a l'espace d'état $\overline{E} \cup \{f_1, f_2, \dots, f_A, a\}$, où f_i et a sont des états absorbants, distribution de probabilité initiale $P[Z''_0 = i] = \alpha_i, i \in \overline{E}, P[Z''_0 = f_i] = 0, 1 \leq i \leq A$, $P[Z''_0 = a] = \alpha_{E \cup \{f_1, f_2, \dots, f_A\}}$, et (possibles) probabilités de transition non-nulles

$$P[Z''_{n+1} = j \mid Z''_n = i] = P_{i,j}, \quad i \in \overline{E}, j \in \overline{E} \cup \{f_1, f_2, \dots, f_A\},$$

$$P[Z''_{n+1} = a \mid Z''_n = i] = P_{i,r}, \quad i \in \overline{E},$$

$$P[Z''_{n+1} = f_i \mid Z''_n = f_i] = P[Z''_{n+1} = a \mid Z''_n = a] = 1, \quad 1 \leq i \leq A.$$

La validité de la méthode randomisation régénérative divisée et les propriétés théoriques de la méthode dépendent du fait que les états dans S de Z , les états dans S' de Z' , et les états dans \overline{E} de Z'' soient transitoires. Ces propriétés des états de Z , Z' , et Z'' sont assurées par les trois propositions suivantes.

Proposition 3.1. *Les Conditions C1 et C5 sont suffisantes pour que tous les états dans S de Z soient transitoires.*

Preuve. Les états dans S sont transitoires dans \widehat{X} si et seulement s'ils sont transitoires dans X . Les classes récurrentes de \widehat{X} dans S sont exactement les classes récurrentes de X dans S . Par

conséquent, il est suffisant de démontrer le résultat avec les conditions C1 et C5 référées à \widehat{X} au lieu de X . Étant donné que tous les états dans S sont transitoires dans \widehat{X} , il existera pour chacun $x \in S$ un chemin dans \widehat{X} de x à un certain état absorbant f_i . En plus de x , le chemin peut inclure ou non r . Par les relations entre les diagrammes de transition d'états de \widehat{X} et Z , ceci implique l'existence d'un chemin dans Z de x à quelque f_i (si, à part de x , le chemin dans \widehat{X} n'inclut pas r) ou a (si, à part de x , le chemin dans \widehat{X} inclut r), et que x est transitoire dans Z . Si \widehat{X} a une seule classe récurrente $C \subset S$ et $r \in C$, pour chacun $x \in C$ il existera un chemin dans Z de x à a . Pour $x = r$, ceci est parce que $P_{r,r} > 0$. Pour $x \in C - \{r\}$, ceci est parce que, étant C une classe récurrente de \widehat{X} , il existera un chemin dans \widehat{X} de x à r . Considérons maintenant un état $x \in S - C$. Un tel état est transitoire dans \widehat{X} et, donc, il existera un chemin dans \widehat{X} de x à C où il existera un chemin dans \widehat{X} de x à un état f_i ne comprenant pas des états dans C . Dans le premier cas, \widehat{X} aura un chemin de x à r , impliquant l'existence dans Z d'un chemin de x à a . Dans le deuxième cas, Z aura un chemin de x à l'état f_i . Dans les deux cas $x \in S - C$ sera transitoire dans Z . \square

Proposition 3.2. *Les conditions C1 et C5 sont suffisantes pour que tous les états dans S de Z' soient transitoires.*

Preuve. Comme dans la preuve de la proposition 3.1, il suffit de démontrer la suffisance des conditions C1 et C5 référées à \widehat{X} . Le résultat pour le cas dans lequel tous les états S sont transitoires dans \widehat{X} peut être prouvé comme a été prouvée la Proposition 3.1 pour le cas dans lequel tous les états S sont transitoires dans \widehat{X} , sauf que seulement états $x \in S'$ doivent être considérés. Considérons maintenant le cas dans lequel \widehat{X} a une simple classe récurrente $C \subset S$ et $r \in C$. Nous avons $S' = C - \{r\} \cup (S - C)$. Étant C une classe récurrente de \widehat{X} , il existera un chemin dans \widehat{X} de $x \in C - \{r\}$ à r , impliquant l'existence d'un chemin dans Z' de $x \in C - \{r\}$ à a et que tous les états dans $C - \{r\}$ seront transitoires dans Z' . Que les états $x \in S - C$ sont transitoires dans Z' peut être prouvé comme il a été prouvée dans la preuve de la Proposition 3.1 que les états $x \in S - C$ sont transitoires dans Z pour le cas dans lequel \widehat{X} a une simple classe récurrente $C \subset S$ et $r \in C$. \square

Proposition 3.3. *Les conditions C1, C5 et C9 sont suffisantes pour que tous les états dans \overline{E} de Z'' soient transitoires.*

Preuve. Les états dans S sont transitoires dans \widehat{X} si et seulement s'ils sont transitoires dans X . Les classes récurrentes de \widehat{X} dans S sont exactement les classes récurrentes de X dans S . En outre, pour $i \in \overline{E}$, $j \in E'$, la probabilité de transition de \widehat{X} $P_{i,j}$ est 0 si et seulement si le taux de transition de X $\lambda_{i,j}$ est 0. Par conséquent, il suffit de prouver le résultat avec les conditions C1 et C5 référées à \widehat{X} au lieu de X et dans la condition C9 remplacé par condition C9') $P_{i,j} = 0$, $i \in \overline{E}$, $j \in E'$.

La réalisation des conditions C1 et C5 implique que ou tous les états à S sont transitoires dans \widehat{X} ou que \widehat{X} a une simple classe récurrente $C \subset S$ incluant l'état r . Pour le cas où tous les états dans S sont transitoires dans \widehat{X} , pour chacun $x \in \overline{E}$ il existera un chemin dans \widehat{X} de x à un certain état absorbant f_i . Si, à part l'état f_i , ce chemin inclut seulement des états dans \overline{E} , il existera un chemin dans Z'' de x à f_i . Si le chemin sort de \overline{E} avant d'entrer f_i , par condition C9', l'état de sortie sera l'état r et, donc, il existera un chemin dans Z' de x à a . Dans les deux cas, x sera transitoire dans Z'' . Il reste à traiter le cas dans lequel \widehat{X} a une simple classe récurrente $C \subset S$ comprenant l'état r . Soit $x \in \overline{E}$. Pour le cas $x \notin C$, x sera transitoire dans \widehat{X} et il existera un chemin dans \widehat{X} de x à C où il existera un chemin dans \widehat{X} de x à un certain état f_i ne comprenant pas des états dans C . Dans le premier cas, \widehat{X} aura un chemin de x à r , impliquant, par condition C9', l'existence d'un chemin dans Z' de x à a . Dans le deuxième cas, Z'' aura un chemin de x à f_i , si le chemin dans \widehat{X} ne sort pas de \overline{E} , ou, par condition C9', à a , si le chemin dans \widehat{X} sort de \overline{E} . Pour le cas $x \in C$ ($x \neq r$, donnée que $x \in \overline{E}$ et $r \in E$), étant C une classe récurrente de \widehat{X} , il existera un chemin dans \widehat{X} de x à r , impliquant, par condition C9', l'existence d'un chemin dans Z'' de x à a . En résumé, dans le cas où \widehat{X} a une simple classe récurrente $C \subset S$ comprenant l'état r , du chaque $x \in \overline{E}$ il existera un chemin dans Z' de x à a où à un état f_i , et tous les états $x \in \overline{E}$ seront transitoires dans Z'' . \square

Soit $\mathbf{P} = (P_{i,j})_{i,j \in \Omega}$ la matrice de probabilités de transition de \widehat{X} . Dénotons par $\mathbf{P}_{B',B''}$, $B', B'' \subset \Omega$, la submatrice de \mathbf{P} rassemblant les probabilités de transition des états dans B' aux états dans B'' et soit $\mathbf{P}'_{E,E}$ la matrice identique à $\mathbf{P}_{E,E}$ sauf que les éléments de la colonne correspondant à l'état r sont 0. La restriction de la matrice de probabilités de transition de Z à $S \times S$ restreint a, avec l'ordonnance des états E, \overline{E} , la forme

$$\mathbf{P}_Z = \begin{pmatrix} \mathbf{P}'_{E,E} & \mathbf{P}_{E,\overline{E}} \\ \mathbf{0} & \mathbf{P}_{\overline{E},\overline{E}} \end{pmatrix}, \quad (3.4)$$

où $\mathbf{0}$ est une matrice de dimensions appropriées avec tous ces éléments égaux a 0. La restriction de la matrice de probabilités de transition de Z' à $S' \times S'$ a, avec l'ordonnance des états E', \overline{E} , la forme

$$\mathbf{P}_{Z'} = \begin{pmatrix} \mathbf{P}_{E',E'} & \mathbf{P}_{E',\overline{E}} \\ \mathbf{0} & \mathbf{P}_{\overline{E},\overline{E}} \end{pmatrix}, \quad (3.5)$$

Finalement, la restriction de la matrice de probabilités de transition de Z'' à $\overline{E} \times \overline{E}$ est

$$\mathbf{P}_{Z''} = \mathbf{P}_{\overline{E},\overline{E}}. \quad (3.6)$$

Soient $\pi_i(n) = P[Z_n = i] = P[Z_{0:n} \in E \wedge Z_n = i]$, $i \in E$, $\pi_i(n, l) = P[Z_n \in E \wedge Z_{n+1:n+l} \in \overline{E} \wedge Z_{n+l} = i] = P[Z_{0:n} \in E \wedge Z_{n+1:n+l} \in \overline{E} \wedge Z_{n+l} = i]$, $i \in \overline{E}$, $\pi'_i(n) = P[Z'_n = i] = P[Z'_{0:n} \in E' \wedge Z'_n = i]$, $i \in E'$, $\pi'_i(n, l) = P[Z'_n \in E' \wedge Z'_{n+1:n+l} \in \overline{E} \wedge Z'_{n+l} = i] = P[Z'_{0:n} \in E' \wedge Z'_{n+1:n+l} \in \overline{E} \wedge Z'_{n+l} = i]$, $i \in \overline{E}$, et $\pi''_i(n) = P[Z''_n = i] = P[Z''_{0:n} \in \overline{E} \wedge Z''_n = i]$,

$i \in \overline{E}$, et considérons les vecteurs ligne $\boldsymbol{\pi}(n) = (\pi_i(n))_{i \in E}$, $\boldsymbol{\pi}(n, l) = (\pi_i(n, l))_{i \in \overline{E}}$, $\boldsymbol{\pi}'(n) = (\pi'_i(n))_{i \in E'}$, $\boldsymbol{\pi}'(n, l) = (\pi'_i(n, l))_{i \in \overline{E}}$, et $\boldsymbol{\pi}''(n) = (\pi''_i(n))_{i \in \overline{E}}$. Supposant que dans E r est ordonné premier, ces vecteurs peuvent être calculés pour $n \geq 0$, $l \geq 1$ employant

$$\boldsymbol{\pi}(0) = (1 \ 0 \ 0 \ \cdots \ 0), \quad (3.7)$$

$$\boldsymbol{\pi}(n+1) = \boldsymbol{\pi}(n)\mathbf{P}'_{E,E}, \quad n \geq 0, \quad (3.8)$$

$$\boldsymbol{\pi}(n, 1) = \boldsymbol{\pi}(n)\mathbf{P}_{E,\overline{E}}, \quad n \geq 0, \quad (3.9)$$

$$\boldsymbol{\pi}(n, l+1) = \boldsymbol{\pi}(n, l)\mathbf{P}_{\overline{E},\overline{E}}, \quad l \geq 1, \quad (3.10)$$

$$\boldsymbol{\pi}'(0) = (\alpha_i)_{i \in E'}, \quad (3.11)$$

$$\boldsymbol{\pi}'(n+1) = \boldsymbol{\pi}'(n)\mathbf{P}_{E',E'}, \quad n \geq 0, \quad (3.12)$$

$$\boldsymbol{\pi}'(n, 1) = \boldsymbol{\pi}'(n)\mathbf{P}_{E',\overline{E}}, \quad n \geq 0, \quad (3.13)$$

$$\boldsymbol{\pi}'(n, l+1) = \boldsymbol{\pi}'(n, l)\mathbf{P}_{\overline{E},\overline{E}}, \quad l \geq 1, \quad (3.14)$$

$$\boldsymbol{\pi}''(0) = (\alpha_i)_{i \in \overline{E}}, \quad (3.15)$$

$$\boldsymbol{\pi}''(n+1) = \boldsymbol{\pi}''(n)\mathbf{P}_{\overline{E},\overline{E}}, \quad n \geq 0. \quad (3.16)$$

La CMTD $\widehat{V}_n = \{\widehat{V}_n; n = 0, 1, 2, \dots\}$ est définie à partir de \widehat{X} comme

$$\widehat{V}_n = \begin{cases} s_k & \text{si } 0 \leq k \leq n \wedge \widehat{X}_{n-k} = r \wedge \widehat{X}_{n-k+1:n} \in E' \\ s_{k,l} & \text{si } 0 \leq k \leq n-1 \wedge 1 \leq l \leq n-k \wedge \widehat{X}_{n-k-l} = r \\ & \wedge \widehat{X}_{n-k-l+1:n-l} \in E' \wedge \widehat{X}_{n-l+1:n} \in \overline{E} \\ s'_n & \text{si } \widehat{X}_{0:n} \in E' \\ s'_{k,n-k} & \text{si } 0 \leq k \leq n-1 \wedge \widehat{X}_{0:k} \in E' \wedge \widehat{X}_{k+1:n} \in \overline{E} \\ s''_n & \text{si } \widehat{X}_{0:n} \in \overline{E} \\ f_i & \text{si } \widehat{X}_n = f_i \end{cases}. \quad (3.17)$$

Autrement dit, $\widehat{V}_n = s_k$ si par l'étape n \widehat{X} a visité r , la dernière fois où il a visité r a été k étapes avant, et \widehat{X} n'a pas quitté E depuis; $\widehat{V}_n = s_{k,l}$ si par l'étape n \widehat{X} a visité r , la dernière fois où il a visité r a été $k+l$ étapes avant, et depuis cette étape \widehat{X} a été initialement $k+1$ étapes dans E et, après cela, l étapes dans \overline{E} ; $\widehat{V}_n = s'_n$ si par l'étape n , \widehat{X} n'a pas quitté E' ; $\widehat{V}_n = s'_{k,n-k}$ si, par l'étape n , \widehat{X} a été dans E' les premières $k+1$ étapes et, après cela, a été dans \overline{E} $n-k$ étapes; $\widehat{V}_n = s''_n$ si, par l'étape n , \widehat{X} n'a pas quitté \overline{E} ; et $\widehat{V}_n = f_i$ si, par l'étape n , \widehat{X} a été absorbé dans f_i . Il est possible de vérifier, en utilisant le fait que r est le seul point d'entrée de \widehat{X} dans E , que la définition de \widehat{V}_n est correcte, c.-à-d. qu'il assigne un simple état à chaque trajectoire possible de \widehat{X} , \widehat{X}_0 , $\widehat{X}_1, \dots, \widehat{X}_n$. Notons que $\widehat{V}_n = s_0$ si et seulement si $\widehat{X}_n = r$. Soit

$$a(k) = \sum_{i \in E} \pi_i(k), \quad (3.18)$$

$$a(k, l) = \sum_{i \in \bar{E}} \pi_i(k, l), \quad (3.19)$$

$$a'(k) = \sum_{i \in E'} \pi'_i(k), \quad (3.20)$$

$$a'(k, l) = \sum_{i \in \bar{E}} \pi'_i(k, l), \quad (3.21)$$

$$a''(k) = \sum_{i \in \bar{E}} \pi''_i(k), \quad (3.22)$$

$$w_k = \frac{\sum_{i \in E} \pi_i(k) P_{i, E'}}{a(k)}, \quad (3.23)$$

$$v_k^i = \frac{\sum_{j \in E} \pi_j(k) P_{j, f_i}}{a(k)}, \quad (3.24)$$

$$h_k = \frac{\sum_{i \in E} \pi_i(k) P_{i, \bar{E}}}{a(k)}, \quad (3.25)$$

$$w_{k, l} = \frac{\sum_{i \in \bar{E}} \pi_i(k, l) P_{i, \bar{E}}}{a(k, l)}, \quad (3.26)$$

$$q_{k, l} = \frac{\sum_{i \in \bar{E}} \pi_i(k, l) P_{i, r}}{a(k, l)}, \quad (3.27)$$

$$v_{k, l}^i = \frac{\sum_{j \in \bar{E}} \pi_j(k, l) P_{j, f_i}}{a(k, l)}, \quad (3.28)$$

$$w'_k = \frac{\sum_{i \in E'} \pi'_i(k) P_{i, E'}}{a'(k)}, \quad (3.29)$$

$$v'_k{}^i = \frac{\sum_{j \in E'} \pi'_j(k) P_{j, f_i}}{a'(k)}, \quad (3.30)$$

$$h'_k = \frac{\sum_{i \in E'} \pi'_i(k) P_{i, \bar{E}}}{a'(k)}, \quad (3.31)$$

$$w'_{k, l} = \frac{\sum_{i \in \bar{E}} \pi'_i(k, l) P_{i, \bar{E}}}{a'(k, l)}, \quad (3.32)$$

$$q'_{k, l} = \frac{\sum_{i \in \bar{E}} \pi'_i(k, l) P_{i, r}}{a'(k, l)}, \quad (3.33)$$

$$v'_{k, l}{}^i = \frac{\sum_{j \in \bar{E}} \pi'_j(k, l) P_{j, f_i}}{a'(k, l)}, \quad (3.34)$$

$$w''_k = \frac{\sum_{i \in \bar{E}} \pi''_i(k) P_{i, \bar{E}}}{a''(k)}, \quad (3.35)$$

$$q''_k = \frac{\sum_{i \in \bar{E}} \pi''_i(k) P_{i, r}}{a''(k)}, \quad (3.36)$$

$$v_k'' = \frac{\sum_{j \in \overline{E}} \pi_j''(k) P_{j, f_i}}{a''(k)}. \quad (3.37)$$

La proposition suivante prouve, pour le cas $\alpha_{E'} > 0$, $\alpha_{\overline{E}} > 0$, que \widehat{V} est vraiment une CMTD et donne, pour ce cas, son espace d'états (incluant seulement les états accessibles), sa distribution de probabilité initiale, et ses probabilités de transition. Notons que, étant $P_{r, E'} > 0$ (par la condition C10) et $P_{i, i} > 0$, $i \in E'$, $\pi_i(k) > 0$ pour tous $k \geq 0$ pour certains $i \in E$, et $a(k) > 0$ pour tous $k \geq 0$. De plus, pour k tels que $a(k, 1) > 0$, $\pi_i(k, 1) > 0$ pour certains $i \in \overline{E}$, et, étant $P_{i, i} > 0$, $i \in \overline{E}$, $\pi_i(k, l) > 0$ pour tous $l \geq 1$ pour certains $i \in \overline{E}$, et $a(k, l) > 0$ pour tous $l \geq 1$. De plus, pour $\alpha_{E'} > 0$, $\pi_i'(0) > 0$ pour certains $i \in E'$, et, étant $P_{i, i} > 0$, $i \in E'$, $\pi_i'(k) > 0$ pour tous $k \geq 0$ pour certains $i \in E'$, et $a'(k) > 0$ pour tous $k \geq 0$. De plus, pour $\alpha_{E'} > 0$, pour k tels que $a'(k, 1) > 0$, $\pi_i'(k, 1) > 0$ pour certains $i \in \overline{E}$, et, étant $P_{i, i} > 0$, $i \in \overline{E}$, $\pi_i'(k, l) > 0$ pour tous $l \geq 1$ pour certains $i \in \overline{E}$, et $a'(k, l) > 0$ pour tous $l \geq 1$. Enfin, pour $\alpha_{\overline{E}} > 0$, $\pi_i''(0) > 0$ pour certains $i \in \overline{E}$, et, étant $P_{i, i} > 0$, $i \in \overline{E}$, $\pi_i''(k) > 0$ pour tous $k \geq 0$ pour certains $i \in \overline{E}$, et $a''(k) > 0$ pour tous $k \geq 0$. Tout ceci garantit que toutes les probabilités de transition de \widehat{V} sont bien définies, c.à d. que, dans leurs définitions, il n'y a pas de divisions par 0.

Proposition 3.4. *Supposons $\alpha_{E'} > 0$ et $\alpha_{\overline{E}} > 0$. Alors, \widehat{V} est une CMTD avec espace accessible d'états $E_V \cup \overline{E}_V \cup \{f_1, f_2, \dots, f_A\}$, $E_V = \{s_k, k \geq 0\} \cup \{s'_k, k \geq 0\}$, $\overline{E}_V = \{s_{k,l} : k \geq 0 \wedge a(k, 1) > 0 \wedge l \geq 1\} \cup \{s'_{k,l} : k \geq 0 \wedge a'(k, 1) > 0 \wedge l \geq 1\} \cup \{s''_k, k \geq 0\}$, distribution de probabilité initiale $P[\widehat{V}_0 = s_0] = \alpha_r$, $P[\widehat{V}_0 = s'_0] = \alpha_{E'}$, $P[\widehat{V}_0 = s''_0] = \alpha_{\overline{E}}$, $P[\widehat{V}_0 = f_i] = \alpha_{f_i}$, $1 \leq i \leq A$, $P[\widehat{V}_0 = i] = 0$, $i \notin \{s_0, s'_0, s''_0, f_1, f_2, \dots, f_A\}$, et (possibles) probabilités de transition non-nulle $P[\widehat{V}_{n+1} = s_0 \mid \widehat{V}_n = s_0] = P_{r,r}$, $P[\widehat{V}_{n+1} = f_i \mid \widehat{V}_n = s_k] = v_k^i$, $P[\widehat{V}_{n+1} = s_{k+1} \mid \widehat{V}_n = s_k] = w_k$, $P[\widehat{V}_{n+1} = s_{k,1} \mid \widehat{V}_n = s_k] = h_k$, $P[\widehat{V}_{n+1} = f_i \mid \widehat{V}_n = s_{k,l}] = v_{k,l}^i$, $P[\widehat{V}_{n+1} = s_0 \mid \widehat{V}_n = s_{k,l}] = q_{k,l}$, $P[\widehat{V}_{n+1} = s_{k,l+1} \mid \widehat{V}_n = s_{k,l}] = w_{k,l}$, $P[\widehat{V}_{n+1} = f_i \mid \widehat{V}_n = s'_{k,l}] = v_{k,l}^i$, $P[\widehat{V}_{n+1} = s'_{k+1} \mid \widehat{V}_n = s'_k] = w'_k$, $P[\widehat{V}_{n+1} = s'_{k,1} \mid \widehat{V}_n = s'_k] = h'_k$, $P[\widehat{V}_{n+1} = f_i \mid \widehat{V}_n = s'_{k,l}] = v_{k,l}^i$, $P[\widehat{V}_{n+1} = s_0 \mid \widehat{V}_n = s'_{k,l}] = q'_{k,l}$, $P[\widehat{V}_{n+1} = s'_{k,l+1} \mid \widehat{V}_n = s'_{k,l}] = w'_{k,l}$, $P[\widehat{V}_{n+1} = f_i \mid \widehat{V}_n = s''_k] = v_k^{i''}$, $P[\widehat{V}_{n+1} = s_0 \mid \widehat{V}_n = s''_k] = q_k^{i''}$, $P[\widehat{V}_{n+1} = s''_{k+1} \mid \widehat{V}_n = s''_k] = w_k^{i''}$, $P[\widehat{V}_{n+1} = f_i \mid \widehat{V}_n = f_i] = 1$, où $a(k)$, $a(k, l)$, $a'(k)$, $a'(k, l)$, $a''(k)$, w_k , v_k^i , h_k , $w_{k,l}$, $q_{k,l}$, $v_{k,l}^i$, w'_k , $v_k^{i'}$, h'_k , $w'_{k,l}$, $q'_{k,l}$, $v_{k,l}^{i'}$, $w_k^{i''}$, $q_k^{i''}$, et $v_k^{i''}$ sont donnés par (3.18)-(3.37) (Figure 3.2 illustre le diagramme de transition d'états de \widehat{V} pour le cas $A = 1$).*

Preuve La distribution de probabilité initiale de \widehat{V} suit de sa définition (3.17). Il est également clair par la définition de \widehat{V} que \widehat{V}_n peut être seulement un état s_k , $0 \leq k \leq n$, un état $s_{k,l}$, $0 \leq k \leq n-1$, $1 \leq l \leq n-k$, un état s'_n , un état $s'_{k,n-k}$, $0 \leq k \leq n-1$, un état s''_n , ou un état f_i , $1 \leq i \leq A$. De plus, \widehat{V}_n peut être l'état $s_{k,l}$ si et seulement si $\widehat{X}_{n-k-l} = r$, $\widehat{X}_{n-k-l+1:n-l} \in E'$, et $\widehat{X}_{n-l+1:n} \in \overline{E}$ avec probabilité non-nulle, et ceci exige que, pour la version de \widehat{X} , \widehat{X}' , avec état initial r , $\widehat{X}'_{1:k} \in E'$ et $\widehat{X}'_{k+1:k+l} \in \overline{E}$ avec probabilité non-nulle, qui exige $\widehat{X}'_{1:k} \in E'$ et $\widehat{X}'_{k+1} \in \overline{E}$ avec probabilité non-nulle. Alors, tenant compte de la définition

de Z (3.1), \widehat{V}_n peut être l'état $s_{k,l}$ si et seulement si $Z_{0:k} \in E$ et $Z_{k+1} \in \overline{E}$ avec probabilité non-nulle, c.à d. $a(k,1) = \sum_{i \in \overline{E}} \pi_i(k,1) > 0$. En outre, \widehat{V}_n peut être à l'état $s'_{k,n-k}$ si et seulement si $\widehat{X}_{0:k} \in E'$ et $\widehat{X}_{k+1:n} \in \overline{E}$ avec probabilité non-nulle, qui exige $\widehat{X}_{0:k} \in E'$ et $\widehat{X}_{k+1} \in \overline{E}$ avec probabilité non-nulle. Alors, tenant compte de la définition de Z (3.2), \widehat{V}_n peut être à l'état $s'_{k,n-k}$ si et seulement si $Z'_{0:k} \in E'$ et $Z'_{k+1} \in \overline{E}$ avec probabilité non-nulle, c.à d. $a'(k,1) = \sum_{i \in \overline{E}} \pi'_i(k,1) > 0$. En résumé, nous avons $\widehat{V}_n \in \{s_k : 0 \leq k \leq n\} \cup \{s_{k,l} : 0 \leq k \leq n-1 \wedge 1 \leq l \leq n-k \wedge a(k,1) > 0\} \cup \{s'_n\} \cup \{s'_{k,n-k} : 0 \leq k \leq n-1 \wedge a'(k,1) > 0\} \cup \{s''_n\} \cup \{f_1, f_2, \dots, f_A\}$. Ceci implique que l'espace accessible d'état de \widehat{V} est un sous-ensemble de celui indiqué par la proposition.

Il est également clair par la définition de \widehat{V} (3.17) que: 1) de l'état s_0 , \widehat{V} peut sauter seulement aux états f_i , $1 \leq i \leq A$, s_0 , s_1 , et $s_{0,1}$, 2) de l'état s_k , $k \geq 1$, par la condition C8, qui implique $P_{i,r} = 0$, $i \in E'$, \widehat{V} peut sauter seulement aux états f_i , $1 \leq i \leq A$, s_{k+1} , et $s_{k,1}$, 3) de l'état $s_{k,l}$, par la condition C9, qui implique $P_{i,j} = 0$, $i \in \overline{E}$, $j \in E'$, \widehat{V} peut sauter seulement aux états f_i , $1 \leq i \leq A$, s_0 , et $s_{k,l+1}$, 4) de l'état s'_k , par la condition C8, \widehat{V} peut sauter seulement aux états f_i , $1 \leq i \leq A$, s'_{k+1} , et $s'_{k,1}$, 5) de l'état $s'_{k,l}$, par la condition C9, \widehat{V} peut sauter seulement aux états f_i , $1 \leq i \leq A$, s_0 , et $s'_{k,l+1}$, et 6) de l'état s''_k , par la condition C9, \widehat{V} peut sauter seulement aux états f_i , $1 \leq i \leq A$, s_0 , et s''_{k+1} .

Par la définition de \widehat{V} , $\widehat{V}_n = f_i$ si et seulement si $\widehat{X}_n = f_i$ et, étant f_i absorbant dans \widehat{X} , de l'état f_i , \widehat{V} peut sauter seulement à l'état f_i , et $P[\widehat{V}_{n+1} = f_i | \widehat{V}_n = f_i \wedge \widehat{V}_{n-1} = x_{n-1} \wedge \dots \wedge \widehat{V}_0 = x_0] = P[\widehat{V}_{n+1} = f_i | \widehat{V}_n = f_i] = 1$. Pour vérifier complètement que \widehat{V} est une CMTD nous devons démontrer que: a) $P[\widehat{V}_{n+1} = y | \widehat{V}_n = s_k \wedge \widehat{V}_{n-1} = x_{n-1} \wedge \dots \wedge \widehat{V}_0 = x_0] = P[\widehat{V}_{n+1} = y | \widehat{V}_n = s_k]$ pour tous les chemins faisables $(x_0, x_1, \dots, x_{n-1}, s_k)$ de \widehat{V} , b) $P[\widehat{V}_{n+1} = y | \widehat{V}_n = s_{k,l} \wedge \widehat{V}_{n-1} = x_{n-1} \wedge \dots \wedge \widehat{V}_0 = x_0] = P[\widehat{V}_{n+1} = y | \widehat{V}_n = s_{k,l}]$ pour tous les chemins faisables $(x_0, x_1, \dots, x_{n-1}, s_{k,l})$ de \widehat{V} , c) $P[\widehat{V}_{n+1} = y | \widehat{V}_n = s'_n \wedge \widehat{V}_{n-1} = x_{n-1} \wedge \dots \wedge \widehat{V}_0 = x_0] = P[\widehat{V}_{n+1} = y | \widehat{V}_n = s'_n]$ pour tous les chemins faisables $(x_0, x_1, \dots, x_{n-1}, s'_n)$ de \widehat{V} , d) $P[\widehat{V}_{n+1} = y | \widehat{V}_n = s'_{k,n-k} \wedge \widehat{V}_{n-1} = x_{n-1} \wedge \dots \wedge \widehat{V}_0 = x_0] = P[\widehat{V}_{n+1} = y | \widehat{V}_n = s'_{k,n-k}]$ pour tous les chemins faisables $(x_0, x_1, \dots, x_{n-1}, s'_{k,n-k})$ de \widehat{V} , et e) $P[\widehat{V}_{n+1} = y | \widehat{V}_n = s''_n \wedge \widehat{V}_{n-1} = x_{n-1} \wedge \dots \wedge \widehat{V}_0 = x_0] = P[\widehat{V}_{n+1} = y | \widehat{V}_n = s''_n]$ pour tous les chemins faisables $(x_0, x_1, \dots, x_{n-1}, s''_n)$ de \widehat{V} . Pour démontrer a) notons que $\widehat{V}_n = s_k$ implique $\widehat{V}_{n-k} = s_0$, $\widehat{V}_{n-k+1} = s_1, \dots, \widehat{V}_{n-1} = s_{k-1}$ et, étant donné que, par la définition de \widehat{V} (3.17), le comportement de \widehat{V} après les étapes m aux quel \widehat{V} coupe état s_0 est indépendant de $\widehat{X}_0, \widehat{X}_1, \dots, \widehat{X}_{m-1}$ et, donc, de $\widehat{V}_0, \widehat{V}_1, \dots, \widehat{V}_{m-1}$, nous avons $P[\widehat{V}_{n+1} = y | \widehat{V}_n = s_k \wedge \dots \wedge \widehat{V}_{n-k} = s_0 \wedge \widehat{V}_{n-k-1} = x_{n-k-1} \wedge \dots \wedge \widehat{V}_0 = x_0] = P[\widehat{V}_{n+1} = y | \widehat{V}_n = s_k \wedge \dots \wedge \widehat{V}_{n-k} = s_0] = P[\widehat{V}_{n+1} = y | \widehat{V}_n = s_k]$. Pour démontrer b) notons que $\widehat{V}_n = s_{k,l}$ implique $\widehat{V}_{n-k-l} = s_0, \dots, \widehat{V}_{n-l} = s_k, \widehat{V}_{n-l+1} = s_{k,1}, \dots, \widehat{V}_{n-1} = s_{k,l-1}$, et, étant donnée que, comme il a été démontré précédemment, \widehat{V} perd sa mémoire aux étapes auxquelles il coupe l'état s_0 , $P[\widehat{V}_{n+1} = y | \widehat{V}_n = s_{k,l} \wedge \dots \wedge \widehat{V}_{n-l+1} = s_{k,1} \wedge \widehat{V}_{n-l} =$

$s_k \wedge \cdots \wedge \widehat{V}_{n-k-l} = s_0 \wedge \widehat{V}_{n-k-l-1} = x_{n-k-l-1} \wedge \cdots \wedge \widehat{V}_0 = x_0] = P[\widehat{V}_{n+1} = y \mid \widehat{V}_n = s_{k,l} \wedge \cdots \wedge \widehat{V}_{n-l+1} = s_{k,1} \wedge \widehat{V}_{n-l} = s_k \wedge \cdots \wedge \widehat{V}_{n-k-l} = s_0] = P[\widehat{V}_{n+1} = y \mid \widehat{V}_n = s_{k,l}]$.
 Pour démontrer c) notons que $\widehat{V}_n = s'_n$ implique $\widehat{V}_0 = s'_0, \widehat{V}_1 = s'_1, \dots, \widehat{V}_{n-1} = s'_{n-1}$ et, donc, $P[\widehat{V}_{n+1} = y \mid \widehat{V}_n = s'_n \wedge \cdots \wedge \widehat{V}_0 = s'_0] = P[\widehat{V}_{n+1} = y \mid \widehat{V}_n = s'_n]$. Pour démontrer d) notons que $\widehat{V}_n = s'_{k,n-k}$ implique $\widehat{V}_0 = s'_0, \dots, \widehat{V}_k = s'_k, \widehat{V}_{k+1} = s'_{k,1}, \dots, \widehat{V}_{n-1} = s'_{k,n-k-1}$ et, donc, $P[\widehat{V}_{n+1} = y \mid \widehat{V}_n = s'_{k,n-k} \wedge \cdots \wedge \widehat{V}_{k+1} = s'_{k,1} \wedge \widehat{V}_k = s'_k \wedge \cdots \wedge \widehat{V}_0 = s'_0] = P[\widehat{V}_{n+1} = y \mid \widehat{V}_n = s'_{k,n-k}]$. Finalement, pour démontrer e) notons que $\widehat{V}_n = s''_n$ implique $\widehat{V}_0 = s''_0, \dots, \widehat{V}_{n-1} = s''_{n-1}$ et, donc, $P[\widehat{V}_{n+1} = y \mid \widehat{V}_n = s''_n \wedge \cdots \wedge \widehat{V}_0 = s''_0] = P[\widehat{V}_{n+1} = y \mid \widehat{V}_n = s''_n]$.

Nous vérifierons maintenant les valeurs des probabilités de transition des états $s_k, s_{k,l}, s'_k, s'_{k,l}$, et s''_k . Nous emploierons $\widehat{V}_n \in \{s_k : 0 \leq k \leq n\} \cup \{s_{k,l} : 0 \leq k \leq n-1 \wedge 1 \leq l \leq n-k \wedge a(k,1) > 0\} \cup \{s'_n\} \cup \{s'_{k,n-k} : 0 \leq k \leq n-1 \wedge a'(k,1) > 0\} \cup \{s''_n\} \cup \{f_1, f_2, \dots, f_A\}$.

Cas a ($P[\widehat{V}_n = s_0] > 0$, qui implique (3.17) $P[\widehat{X}_n = r] > 0$): Tenant compte que $\widehat{V}_n = s_0$ si et seulement si $\widehat{X}_n = r$, que $\widehat{V}_n = f_i$ si et seulement si $\widehat{X}_n = f_i$, (3.7), et (3.18) $a(0) = \sum_{i \in E} \pi_i(0) = 1$:

$$\begin{aligned}
 P[\widehat{V}_{n+1} = f_i \mid \widehat{V}_n = s_0] &= \frac{P[\widehat{V}_n = s_0 \wedge \widehat{V}_{n+1} = f_i]}{P[\widehat{V}_n = s_0]} \\
 &= \frac{P[\widehat{X}_n = r \wedge \widehat{X}_{n+1} = f_i]}{P[\widehat{X}_n = r]} \\
 &= P[\widehat{X}_{n+1} = f_i \mid \widehat{X}_n = r] = P_{r,f_i} = \sum_{j \in E} \pi_j(0) P_{j,f_i} \\
 &= \frac{\sum_{j \in E} \pi_j(0) P_{j,f_i}}{a(0)} = v_0^i.
 \end{aligned}$$

De même:

$$\begin{aligned}
 P[\widehat{V}_{n+1} = s_0 \mid \widehat{V}_n = s_0] &= \frac{P[\widehat{V}_n = s_0 \wedge \widehat{V}_{n+1} = s_0]}{P[\widehat{V}_n = s_0]} \\
 &= \frac{P[\widehat{X}_n = r \wedge \widehat{X}_{n+1} = r]}{P[\widehat{X}_n = r]} = P[\widehat{X}_{n+1} = r \mid \widehat{X}_n = r] = P_{r,r},
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 P[\widehat{V}_{n+1} = s_1 \mid \widehat{V}_n = s_0] &= \frac{P[\widehat{V}_n = s_0 \wedge \widehat{V}_{n+1} = s_1]}{P[\widehat{V}_n = s_0]} \\
 &= \frac{P[\widehat{X}_n = r \wedge \widehat{X}_{n+1} \in E']]}{P[\widehat{X}_n = r]} = P[\widehat{X}_{n+1} \in E' \mid \widehat{X}_n = r] \\
 &= P_{r,E'} = \sum_{i \in E} \pi_i(0) P_{i,E'} = \frac{\sum_{i \in E} \pi_i(0) P_{i,E'}}{a(0)} = w_0,
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
P[\widehat{V}_{n+1} = s_{0,1} \mid \widehat{V}_n = s_0] &= \frac{P[\widehat{V}_n = s_0 \wedge \widehat{V}_{n+1} = s_{0,1}]}{P[\widehat{V}_n = s_0]} \\
&= \frac{P[\widehat{X}_n = r \wedge \widehat{X}_{n+1} \in \overline{E}]}{P[\widehat{X}_n = r]} = P[\widehat{X}_{n+1} \in \overline{E} \mid \widehat{X}_n = r] \\
&= P_{r, \overline{E}} = \sum_{i \in E} \pi_i(0) P_{i, \overline{E}} = \frac{\sum_{i \in E} \pi_i(0) P_{i, \overline{E}}}{a(0)} = h_0.
\end{aligned}$$

Cas b ($P[\widehat{V}_n = s_k] > 0, 1 \leq k \leq n$, qui implique (3.17) $P[\widehat{X}_{n-k} = r] > 0$): Tenant compte de la définition de \widehat{V} (3.17), que $\{\widehat{X}_{m+k}; k = 0, 1, 2, \dots\}$ conditionné à $\widehat{X}_m = r$ est probabilistiquement identique à $\widehat{X}' = \{\widehat{X}'_k; k = 0, 1, 2, \dots\}$, la définition de Z (3.1), que, en raison de la structure de la restriction de la matrice de probabilités de transition de Z à $S \times S$ (3.4) et du fait que $Z_0 = r, Z_{1:k} \in E'$ si et seulement si $Z_k \in E$, que $P[Z_{k+1} = f_i \mid Z_k = j] = P_{j, f_i}, j \in E$, et (3.18):

$$\begin{aligned}
P[\widehat{V}_{n+1} = f_i \mid \widehat{V}_n = s_k] &= \frac{P[\widehat{V}_n = s_k \wedge \widehat{V}_{n+1} = f_i]}{P[\widehat{V}_n = s_k]} \\
&= \frac{P[\widehat{X}_{n-k} = r \wedge \widehat{X}_{n-k+1:n} \in E' \wedge \widehat{X}_{n+1} = f_i]}{P[\widehat{X}_{n-k} = r \wedge \widehat{X}_{n-k+1:n} \in E']} \\
&= \frac{P[\widehat{X}_{n-k+1:n} \in E' \wedge \widehat{X}_{n+1} = f_i \mid \widehat{X}_{n-k} = r]}{P[\widehat{X}_{n-k+1:n} \in E' \mid \widehat{X}_{n-k} = r]} \\
&= \frac{P[\widehat{X}'_{1:k} \in E' \wedge \widehat{X}'_{k+1} = f_i]}{P[\widehat{X}'_{1:k} \in E']} = \frac{P[Z_{1:k} \in E' \wedge Z_{k+1} = f_i]}{P[Z_{1:k} \in E']} \\
&= \frac{P[Z_k \in E \wedge Z_{k+1} = f_i]}{P[Z_k \in E]} = \frac{\sum_{j \in E} P[Z_k = j] P[Z_{k+1} = f_i \mid Z_k = j]}{\sum_{j \in E} P[Z_k = j]} \\
&= \frac{\sum_{j \in E} \pi_j(k) P_{j, f_i}}{\sum_{j \in E} \pi_j(k)} = \frac{\sum_{j \in E} \pi_j(k) P_{j, f_i}}{a(k)} = v_k^i.
\end{aligned}$$

De même:

$$\begin{aligned}
P[\widehat{V}_{n+1} = s_{k+1} \mid \widehat{V}_n = s_k] &= \frac{P[\widehat{V}_n = s_k \wedge \widehat{V}_{n+1} = s_{k+1}]}{P[\widehat{V}_n = s_k]} \\
&= \frac{P[\widehat{X}_{n-k} = r \wedge \widehat{X}_{n-k+1:n+1} \in E']}{P[\widehat{X}_{n-k} = r \wedge \widehat{X}_{n-k+1:n} \in E']} = \frac{P[\widehat{X}_{n-k+1:n+1} \in E' \mid \widehat{X}_{n-k} = r]}{P[\widehat{X}_{n-k+1:n} \in E' \mid \widehat{X}_{n-k} = r]} \\
&= \frac{P[\widehat{X}'_{1:k+1} \in E']}{P[\widehat{X}'_{1:k} \in E']} = \frac{P[Z_{1:k+1} \in E']}{P[Z_{1:k} \in E']} = \frac{P[Z_k \in E \wedge Z_{k+1} \in E']}{P[Z_k \in E]} \\
&= \frac{\sum_{i \in E} P[Z_k = i] P[Z_{k+1} \in E' \mid Z_k = i]}{\sum_{i \in E} P[Z_k = i]} = \frac{\sum_{i \in E} \pi_i(k) P_{i, E'}}{\sum_{i \in E} \pi_i(k)} \\
&= \frac{\sum_{i \in E} \pi_i(k) P_{i, E'}}{a(k)} = w_k,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
P[\widehat{V}_{n+1} = s_{k,1} \mid \widehat{V}_n = s_k] &= \frac{P[\widehat{V}_n = s_k \wedge \widehat{V}_{n+1} = s_{k,1}]}{P[\widehat{V}_n = s_k]} \\
&= \frac{P[\widehat{X}_{n-k} = r \wedge \widehat{X}_{n-k+1:n} \in E' \wedge \widehat{X}_{n+1} \in \overline{E}]}{P[\widehat{X}_{n-k} = r \wedge \widehat{X}_{n-k+1:n} \in E']} \\
&= \frac{P[\widehat{X}_{n-k+1:n} \in E' \wedge \widehat{X}_{n+1} \in \overline{E} \mid \widehat{X}_{n-k} = r]}{P[\widehat{X}_{n-k+1:n} \in E' \mid \widehat{X}_{n-k} = r]} \\
&= \frac{P[\widehat{X}'_{1:k} \in E' \wedge \widehat{X}'_{k+1} \in \overline{E}]}{P[\widehat{X}'_{1:k} \in E']} = \frac{P[Z_{1:k} \in E' \wedge Z_{k+1} \in \overline{E}]}{P[Z_{1:k} \in E']} \\
&= \frac{P[Z_k \in E \wedge Z_{k+1} \in \overline{E}]}{P[Z_k \in E]} = \frac{\sum_{i \in E} P[Z_k = i] P[Z_{k+1} \in \overline{E} \mid Z_k = i]}{\sum_{i \in E} P[Z_k = i]} \\
&= \frac{\sum_{i \in E} \pi_i(k) P_{i, \overline{E}}}{\sum_{i \in E} \pi_i(k)} = \frac{\sum_{i \in E} \pi_i(k) P_{i, \overline{E}}}{a(k)} = h_k.
\end{aligned}$$

Cas c ($P[\widehat{V}_n = s_{k,l}] > 0, 0 \leq k \leq n-1, 1 \leq l \leq n-k, a(k,1) > 0$, qui implique (3.17) $P[\widehat{X}_{n-k-l} = r] > 0$): Tenant compte de la définition de \widehat{V} (3.17), que $\{\widehat{X}_{m+k}; k = 0, 1, 2, \dots\}$ conditionné à $\widehat{X}_m = r$ est probabilistiquement identique à $\widehat{X}' = \{\widehat{X}'_k; k = 0, 1, 2, \dots\}$, la définition de Z (3.1), que, en raison de la structure de la restriction de la matrice de probabilités de transition Z à $S \times S$ (3.4) et du fait que $Z_0 = r, Z_{1:k} \in E'$ si et seulement si $Z_k \in E$, que $P[Z_{n+1} = f_i \mid Z_n = j] = P_{j, f_i}, j \in \overline{E}$, et (3.19):

$$\begin{aligned}
P[\widehat{V}_{n+1} = f_i \mid \widehat{V}_n = s_{k,l}] &= \frac{P[\widehat{V}_n = s_{k,l} \wedge \widehat{V}_{n+1} = f_i]}{P[\widehat{V}_n = s_{k,l}]} \\
&= \frac{P[\widehat{X}_{n-k-l} = r \wedge \widehat{X}_{n-k-l+1:n-l} \in E' \wedge \widehat{X}_{n-l+1:n} \in \overline{E} \wedge \widehat{X}_{n+1} = f_i]}{P[\widehat{X}_{n-k-l} = r \wedge \widehat{X}_{n-k-l+1:n-l} \in E' \wedge \widehat{X}_{n-l+1:n} \in \overline{E}]} \\
&= \frac{P[\widehat{X}_{n-k-l+1:n-l} \in E' \wedge \widehat{X}_{n-l+1:n} \in \overline{E} \wedge \widehat{X}_{n+1} = f_i \mid \widehat{X}_{n-k-l} = r]}{P[\widehat{X}_{n-k-l+1:n-l} \in E' \wedge \widehat{X}_{n-l+1:n} \in \overline{E} \mid \widehat{X}_{n-k-l} = r]} \\
&= \frac{P[\widehat{X}'_{1:k} \in E' \wedge \widehat{X}'_{k+1:k+l} \in \overline{E} \wedge \widehat{X}'_{k+l+1} = f_i]}{P[\widehat{X}'_{1:k} \in E' \wedge \widehat{X}'_{k+1:k+l} \in \overline{E}]} \\
&= \frac{P[Z_{1:k} \in E' \wedge Z_{k+1:k+l} \in \overline{E} \wedge Z_{k+l+1} = f_i]}{P[Z_{1:k} \in E' \wedge Z_{k+1:k+l} \in \overline{E}]} \\
&= \frac{P[Z_k \in E \wedge Z_{k+1:k+l} \in \overline{E} \wedge Z_{k+l+1} = f_i]}{P[Z_k \in E \wedge Z_{k+1:k+l} \in \overline{E}]} \\
&= \frac{\sum_{j \in \overline{E}} P[Z_k \in E \wedge Z_{k+1:k+l} \in \overline{E} \wedge Z_{k+l} = j] P[Z_{k+l+1} = f_i \mid Z_{k+l} = j]}{\sum_{j \in \overline{E}} P[Z_k \in E \wedge Z_{k+1:k+l} \in \overline{E} \wedge Z_{k+l} = j]} \\
&= \frac{\sum_{j \in \overline{E}} \pi_j(k, l) P_{j, f_i}}{\sum_{j \in \overline{E}} \pi_j(k, l)} = \frac{\sum_{j \in \overline{E}} \pi_j(k, l) P_{j, f_i}}{a(k, l)} = v_{k,l}^i.
\end{aligned}$$

De même:

$$\begin{aligned}
P[\widehat{V}_{n+1} = s_0 \mid \widehat{V}_n = s_{k,l}] &= \frac{P[\widehat{V}_n = s_{k,l} \wedge \widehat{V}_{n+1} = s_0]}{P[\widehat{V}_n = s_{k,l}]} \\
&= \frac{P[\widehat{X}_{n-k-l} = r \wedge \widehat{X}_{n-k-l+1:n-l} \in E' \wedge \widehat{X}_{n-l+1:n} \in \overline{E} \wedge \widehat{X}_{n+1} = r]}{P[\widehat{X}_{n-k-l} = r \wedge \widehat{X}_{n-k-l+1:n-l} \in E' \wedge \widehat{X}_{n-l+1:n} \in \overline{E}]} \\
&= \frac{P[\widehat{X}_{n-k-l+1:n-l} \in E' \wedge \widehat{X}_{n-l+1:n} \in \overline{E} \wedge \widehat{X}_{n+1} = r \mid \widehat{X}_{n-k-l} = r]}{P[\widehat{X}_{n-k-l+1:n-l} \in E' \wedge \widehat{X}_{n-l+1:n} \in \overline{E} \mid \widehat{X}_{n-k-l} = r]} \\
&= \frac{P[\widehat{X}'_{1:k} \in E' \wedge \widehat{X}'_{k+1:k+l} \in \overline{E} \wedge \widehat{X}'_{k+l+1} = r]}{P[\widehat{X}'_{1:k} \in E' \wedge \widehat{X}'_{k+1:k+l} \in \overline{E}]} \\
&= \frac{P[Z_{1:k} \in E' \wedge Z_{k+1:k+l} \in \overline{E} \wedge Z_{k+l+1} = a]}{P[Z_{1:k} \in E' \wedge Z_{k+1:k+l} \in \overline{E}]} \\
&= \frac{P[Z_k \in E \wedge Z_{k+1:k+l} \in \overline{E} \wedge Z_{k+l+1} = a]}{P[Z_k \in E \wedge Z_{k+1:k+l} \in \overline{E}]} \\
&= \frac{\sum_{i \in \overline{E}} P[Z_k \in E \wedge Z_{k+1:k+l} \in \overline{E} \wedge Z_{k+l} = i] P[Z_{k+l+1} = a \mid Z_{k+l} = i]}{\sum_{i \in \overline{E}} P[Z_k \in E \wedge Z_{k+1:k+l} \in \overline{E} \wedge Z_{k+l} = i]} \\
&= \frac{\sum_{i \in \overline{E}} \pi_i(k, l) P_{i,r}}{\sum_{i \in \overline{E}} \pi_i(k, l)} = \frac{\sum_{i \in \overline{E}} \pi_i(k, l) P_{i,r}}{a(k, l)} = q_{k,l},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
P[\widehat{V}_{n+1} = s_{k,l+1} \mid \widehat{V}_n = s_{k,l}] &= \frac{P[\widehat{V}_n = s_{k,l} \wedge \widehat{V}_{n+1} = s_{k,l+1}]}{P[\widehat{V}_n = s_{k,l}]} \\
&= \frac{P[\widehat{X}_{n-k-l} = r \wedge \widehat{X}_{n-k-l+1:n-l} \in E' \wedge \widehat{X}_{n-l+1:n+1} \in \overline{E}]}{P[\widehat{X}_{n-k-l} = r \wedge \widehat{X}_{n-k-l+1:n-l} \in E' \wedge \widehat{X}_{n-l+1:n} \in \overline{E}]} \\
&= \frac{P[\widehat{X}_{n-k-l+1:n-l} \in E' \wedge \widehat{X}_{n-l+1:n+1} \in \overline{E} \mid \widehat{X}_{n-k-l} = r]}{P[\widehat{X}_{n-k-l+1:n-l} \in E' \wedge \widehat{X}_{n-l+1:n} \in \overline{E} \mid \widehat{X}_{n-k-l} = r]} \\
&= \frac{P[\widehat{X}'_{1:k} \in E' \wedge \widehat{X}'_{k+1:k+l+1} \in \overline{E}]}{P[\widehat{X}'_{1:k} \in E' \wedge \widehat{X}'_{k+1:k+l} \in \overline{E}]} = \frac{P[Z_{1:k} \in E' \wedge Z_{k+1:k+l+1} \in \overline{E}]}{P[Z_{1:k} \in E' \wedge Z_{k+1:k+l} \in \overline{E}]} \\
&= \frac{P[Z_k \in E \wedge Z_{k+1:k+l+1} \in \overline{E}]}{P[Z_k \in E \wedge Z_{k+1:k+l} \in \overline{E}]} = \frac{P[Z_k \in E \wedge Z_{k+1:k+l} \in \overline{E} \wedge Z_{k+l+1} \in \overline{E}]}{P[Z_k \in E \wedge Z_{k+1:k+l} \in \overline{E}]} \\
&= \frac{\sum_{i \in \overline{E}} P[Z_k \in E \wedge Z_{k+1:k+l} \in \overline{E} \wedge Z_{k+l} = i] P[Z_{k+l+1} \in \overline{E} \mid Z_{k+l} = i]}{\sum_{i \in \overline{E}} P[Z_k \in E \wedge Z_{k+1:k+l} \in \overline{E} \wedge Z_{k+l} = i]} \\
&= \frac{\sum_{i \in \overline{E}} \pi_i(k, l) P_{i,\overline{E}}}{\sum_{i \in \overline{E}} \pi_i(k, l)} = \frac{\sum_{i \in \overline{E}} \pi_i(k, l) P_{i,\overline{E}}}{a(k, l)} = w_{k,l}.
\end{aligned}$$

Cas d ($P[\widehat{V}_n = s'_n] > 0$): Tenant compte de la définition de \widehat{V} (3.17), la définition de Z' (3.2), que, en raison de la structure de la restriction de la matrice de probabilités de transition de Z à $S' \times S'$ (3.5) $Z'_{0:n} \in E'$ si et seulement si $Z'_n \in E'$, que $P[Z'_{n+1} = f_i \mid Z'_n = j] = P_{j,f_i}$, $j \in E'$,

et (3.20):

$$\begin{aligned}
P[\widehat{V}_{n+1} = f_i \mid \widehat{V}_n = s'_n] &= \frac{P[\widehat{V}_n = s'_n \wedge \widehat{V}_{n+1} = f_i]}{P[\widehat{V}_n = s'_n]} = \frac{P[\widehat{X}_{0:n} \in E' \wedge \widehat{X}_{n+1} = f_i]}{P[\widehat{X}_{0:n} \in E']} \\
&= \frac{P[Z'_{0:n} \in E' \wedge Z'_{n+1} = f_i]}{P[Z'_{0:n} \in E']} = \frac{P[Z'_n \in E' \wedge Z'_{n+1} = f_i]}{P[Z'_n \in E']} \\
&= \frac{\sum_{j \in E'} P[Z'_n = j] P[Z'_{n+1} = f_i \mid Z'_n = j]}{\sum_{j \in E'} P[Z'_n = j]} \\
&= \frac{\sum_{j \in E'} \pi'_j(n) P_{j,f_i}}{\sum_{j \in E'} \pi'_j(n)} = \frac{\sum_{j \in E'} \pi'_j(n) P_{j,f_i}}{a'(n)} = v'_n.
\end{aligned}$$

De même:

$$\begin{aligned}
P[\widehat{V}_{n+1} = s'_{n+1} \mid \widehat{V}_n = s'_n] &= \frac{P[\widehat{V}_n = s'_n \wedge \widehat{V}_{n+1} = s'_{n+1}]}{P[\widehat{V}_n = s'_n]} = \frac{P[\widehat{X}_{0:n+1} \in E']}{P[\widehat{X}_{0:n} \in E']} \\
&= \frac{P[Z'_{0:n+1} \in E']}{P[Z'_{0:n} \in E']} = \frac{P[Z'_n \in E' \wedge Z'_{n+1} \in E']}{P[Z'_n \in E']} \\
&= \frac{\sum_{i \in E'} P[Z'_n = i] P[Z'_{n+1} \in E' \mid Z'_n = i]}{\sum_{i \in E'} P[Z'_n = i]} \\
&= \frac{\sum_{i \in E'} \pi'_i(n) P_{i,E'}}{\sum_{i \in E'} \pi'_i(n)} = \frac{\sum_{i \in E'} \pi'_i(n) P_{i,E'}}{a'(n)(3.6)} = w'_n.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
P[\widehat{V}_{n+1} = s'_{n,1} \mid \widehat{V}_n = s'_n] &= \frac{P[\widehat{V}_n = s'_n \wedge \widehat{V}_{n+1} = s'_{n,1}]}{P[\widehat{V}_n = s'_n]} = \frac{P[\widehat{X}_{0:n} \in E' \wedge \widehat{X}_{n+1} \in \overline{E}]}{P[\widehat{X}_{0:n} \in E']} \\
&= \frac{P[Z'_{0:n} \in E' \wedge Z'_{n+1} \in \overline{E}]}{P[Z'_{0:n} \in E']} = \frac{P[Z'_n \in E' \wedge Z'_{n+1} \in \overline{E}]}{P[Z'_n \in E']} \\
&= \frac{\sum_{i \in E'} P[Z'_n = i] P[Z'_{n+1} \in \overline{E} \mid Z'_n = i]}{\sum_{i \in E'} P[Z'_n = i]} \\
&= \frac{\sum_{i \in E'} \pi'_i(n) P_{i,\overline{E}}}{\sum_{i \in E'} \pi'_i(n)} = \frac{\sum_{i \in E'} \pi'_i(n) P_{i,\overline{E}}}{a'(n)} = h'_n.
\end{aligned}$$

Cas e ($P[\widehat{V}_n = s'_{k,n-k}] > 0$, $0 \leq k \leq n-1$, $a'(k, 1) > 0$): Tenant compte de la définition de \widehat{V} (3.17), la définition de Z' (3.2), que, en raison de la structure de la restriction de la matrice de probabilités de transition de Z' à $S' \times S'$ (3.5), $Z'_{0:n} \in E'$ si et seulement si $Z'_n \in E'$, que $P[Z'_{n+1} = f_i \mid Z'_n = j] = P_{j,f_i}$, $j \in \overline{E}$, et (3.21):

$$\begin{aligned}
P[\widehat{V}_{n+1} = f_i \mid \widehat{V}_n = s'_{k,n-k}] &= \frac{P[\widehat{V}_n = s'_{k,n-k} \wedge \widehat{V}_{n+1} = f_i]}{P[\widehat{V}_n = s'_{k,n-k}]} \\
&= \frac{P[\widehat{X}_{0:k} \in E' \wedge \widehat{X}_{k+1:n} \in \overline{E} \wedge \widehat{X}_{n+1} = f_i]}{P[\widehat{X}_{0:k} \in E' \wedge \widehat{X}_{k+1:n} \in \overline{E}]}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{P[Z'_{0:k} \in E' \wedge Z'_{k+1:n} \in \overline{E} \wedge Z'_{n+1} = f_i]}{P[Z'_{0:k} \in E' \wedge Z'_{k+1:n} \in \overline{E}]} = \frac{P[Z'_k \in E' \wedge Z'_{k+1:n} \in \overline{E} \wedge Z'_{n+1} = f_i]}{P[Z'_k \in E' \wedge Z'_{k+1:n} \in \overline{E}]} \\
&= \frac{\sum_{j \in \overline{E}} P[Z'_k \in E' \wedge Z'_{k+1:n} \in \overline{E} \wedge Z'_n = j] P[Z'_{n+1} = f_i \mid Z'_n = j]}{\sum_{j \in \overline{E}} P[Z'_k \in E' \wedge Z'_{k+1:n} \in \overline{E} \wedge Z'_n = j]} \\
&= \frac{\sum_{j \in \overline{E}} \pi'_j(k, n-k) P_{j, f_i}}{\sum_{j \in \overline{E}} \pi'_j(k, n-k)} = \frac{\sum_{j \in \overline{E}} \pi'_j(k, n-k) P_{j, f_i}}{a'(k, n-k)} = v'_{k, n-k}.
\end{aligned}$$

De même:

$$\begin{aligned}
P[\widehat{V}_{n+1} = s_0 \mid \widehat{V}_n = s'_{k, n-k}] &= \frac{P[\widehat{V}_n = s'_{k, n-k} \wedge \widehat{V}_{n+1} = s_0]}{P[\widehat{V}_n = s'_{k, n-k}]} \\
&= \frac{P[\widehat{X}_{0:k} \in E' \wedge \widehat{X}_{k+1:n} \in \overline{E} \wedge \widehat{X}_{n+1} = r]}{P[\widehat{X}_{0:k} \in E' \wedge \widehat{X}_{k+1:n} \in \overline{E}]} \\
&= \frac{P[Z'_{0:k} \in E' \wedge Z'_{k+1:n} \in \overline{E} \wedge Z'_{n+1} = a]}{P[Z'_{0:k} \in E' \wedge Z'_{k+1:n} \in \overline{E}]} = \frac{P[Z'_k \in E' \wedge Z'_{k+1:n} \in \overline{E} \wedge Z'_{n+1} = a]}{[Z'_k \in E' \wedge Z'_{k+1:n} \in \overline{E}]} \\
&= \frac{\sum_{i \in \overline{E}} P[Z'_k \in E' \wedge Z'_{k+1:n} \in \overline{E} \wedge Z'_n = i] P[Z'_{n+1} = a \mid Z'_n = i]}{\sum_{i \in \overline{E}} P[Z'_k \in E' \wedge Z'_{k+1:n} \in \overline{E} \wedge Z'_n = i]} \\
&= \frac{\sum_{i \in \overline{E}} \pi'_i(k, n-k) P_{i, r}}{\sum_{i \in \overline{E}} \pi'_i(k, n-k)} = \frac{\sum_{i \in \overline{E}} \pi'_i(k, n-k) P_{i, r}}{a'(k, n-k)} = q'_{k, n-k},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
P[\widehat{V}_{n+1} = s'_{k, n-k+1} \mid \widehat{V}_n = s'_{k, n-k}] &= \frac{P[\widehat{V}_n = s'_{k, n-k} \wedge \widehat{V}_{n+1} = s'_{k, n-k+1}]}{P[\widehat{V}_n = s'_{k, n-k}]} \\
&= \frac{P[\widehat{X}_{0:k} \in E' \wedge \widehat{X}_{k+1:n+1} \in \overline{E}]}{P[\widehat{X}_{0:k} \in E' \wedge \widehat{X}_{k+1:n} \in \overline{E}]} = \frac{P[Z'_{0:k} \in E' \wedge Z'_{k+1:n+1} \in \overline{E}]}{P[Z'_{0:k} \in E' \wedge Z'_{k+1:n} \in \overline{E}]} \\
&= \frac{P[Z'_k \in E' \wedge Z'_{k+1:n} \in \overline{E} \wedge Z'_{n+1} \in \overline{E}]}{P[Z'_k \in E' \wedge Z'_{k+1:n} \in \overline{E}]} \\
&= \frac{\sum_{i \in \overline{E}} P[Z'_k \in E' \wedge Z'_{k+1:n} \in \overline{E} \wedge Z'_n = i] P[Z'_{n+1} \in \overline{E} \mid Z'_n = i]}{\sum_{i \in \overline{E}} P[Z'_k \in E' \wedge Z'_{k+1:n} \in \overline{E} \wedge Z'_n = i]} \\
&= \frac{\sum_{i \in \overline{E}} \pi'_i(k, n-k) P_{i, \overline{E}}}{\sum_{i \in \overline{E}} \pi'_i(k, n-k)} = \frac{\sum_{i \in \overline{E}} \pi'_i(k, n-k) P_{i, \overline{E}}}{a'(k, n-k)} = w'_{k, n-k}.
\end{aligned}$$

Cas f ($P[\widehat{V}_n = s''_n] > 0$): Tenant compte de la définition de \widehat{V} (3.17), la définition de Z'' (3.3), que, en raison de que la restriction de la matrice de probabilité de transition de Z' à $\overline{E} \times \overline{E}$ est (3.6) $\mathbf{P}_{\overline{E}, \overline{E}}$, $Z''_{0:n} \in \overline{E}$ si et seulement si $Z''_n \in \overline{E}$, que $P[Z''_{n+1} = f_i \mid Z''_n = j] = P_{j, f_i}$, $j \in \overline{E}$, et (3.22):

$$P[\widehat{V}_{n+1} = f_i \mid \widehat{V}_n = s''_n] = \frac{P[\widehat{V}_n = s''_n \wedge \widehat{V}_{n+1} = f_i]}{P[\widehat{V}_n = s''_n]} = \frac{P[\widehat{X}_{0:n} \in \overline{E} \wedge \widehat{X}_{n+1} = f_i]}{P[\widehat{X}_{0:n} \in \overline{E}]}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{P[Z''_{0:n} \in \bar{E} \wedge Z''_{n+1} = f_i]}{P[Z''_{0:n} \in \bar{E}]} = \frac{P[Z''_n \in \bar{E} \wedge Z''_{n+1} = f_i]}{P[Z''_n \in \bar{E}]} \\
&= \frac{\sum_{j \in \bar{E}} P[Z''_n = j] P[Z''_{n+1} = f_i \mid Z''_n = j]}{\sum_{j \in \bar{E}} P[Z''_n = j]} \\
&= \frac{\sum_{j \in \bar{E}} \pi''_j(n) P_{j, f_i}}{\sum_{j \in \bar{E}} \pi''_j(n)} = \frac{\sum_{j \in \bar{E}} \pi''_j(n) P_{j, f_i}}{a''(n)} = v''_n.
\end{aligned}$$

De même:

$$\begin{aligned}
P[\widehat{V}_{n+1} = s_0 \mid \widehat{V}_n = s''_n] &= \frac{P[\widehat{V}_n = s''_n \wedge \widehat{V}_{n+1} = s_0]}{P[\widehat{V}_n = s''_n]} = \frac{P[\widehat{X}_{0:n} \in \bar{E} \wedge \widehat{X}_{n+1} = r]}{P[\widehat{X}_{0:n} \in \bar{E}]} \\
&= \frac{P[Z''_{0:n} \in \bar{E} \wedge Z''_{n+1} = a]}{P[Z''_{0:n} \in \bar{E}]} = \frac{P[Z''_n \in \bar{E} \wedge Z''_{n+1} = a]}{P[Z''_n \in \bar{E}]} \\
&= \frac{\sum_{i \in \bar{E}} P[Z''_n = i] P[Z''_{n+1} = a \mid Z''_n = i]}{\sum_{i \in \bar{E}} P[Z''_n = i]} \\
(3.6) \quad &= \frac{\sum_{i \in \bar{E}} \pi''_i(n) P_{i, r}}{\sum_{i \in \bar{E}} \pi''_i(n)} = \frac{\sum_{i \in \bar{E}} \pi''_i(n) P_{i, r}}{a''(n)} = q''_n,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
P[\widehat{V}_{n+1} = s''_{n+1} \mid \widehat{V}_n = s''_n] &= \frac{P[\widehat{V}_n = s''_n \wedge \widehat{V}_{n+1} = s''_{n+1}]}{P[\widehat{V}_n = s''_n]} = \frac{P[\widehat{X}_{0:n+1} \in \bar{E}]}{P[\widehat{X}_{0:n} \in \bar{E}]} \\
&= \frac{P[Z''_{0:n+1} \in \bar{E}]}{P[Z''_{0:n} \in \bar{E}]} = \frac{P[Z''_n \in \bar{E} \wedge Z''_{n+1} \in \bar{E}]}{P[Z''_n \in \bar{E}]} = \frac{\sum_{i \in \bar{E}} P[Z''_n = i] P[Z''_{n+1} \in \bar{E} \mid Z''_n = i]}{\sum_{i \in \bar{E}} P[Z''_n = i]} \\
&= \frac{\sum_{i \in \bar{E}} \pi''_i(n) P_{i, \bar{E}}}{\sum_{i \in \bar{E}} \pi''_i(n)} = \frac{\sum_{i \in \bar{E}} \pi''_i(n) P_{i, \bar{E}}}{a''(n)} = w''_n.
\end{aligned}$$

Il reste à démontrer que tous les états s_k , $k \geq 0$ sont accessible, que tous états $s_{k,l}$, $k \geq 0$, $l \geq 1$ tels que $a(k, 1) > 0$ sont accessible, que tous états s'_k , $k \geq 0$ sont accessible, que tous états $s'_{k,l}$, $k \geq 0$, $l \geq 1$ tels que $a'(k, 1) > 0$ sont accessible, que tous états s''_k , $k \geq 0$ sont accessible, et que tous les états f_i , $1 \leq i \leq A$ sont accessible. Que tous les états f_i , $1 \leq i \leq A$ sont accessibles suit de $\widehat{V}_n = f_i$ si et seulement si $\widehat{X}_n = f_i$ et les états étant f_i accessible dans \widehat{X} (parce qu'ils (3.6) sont accessibles dans X). Que s'_0 est accessible suit de $P[\widehat{V}_0 = s'_0] = \alpha_{E'} > 0$. Que s''_0 est accessible suit de $P[\widehat{V}_0 = s''_0] = \alpha_{\bar{E}} > 0$. Que s_0 est accessible suit de $\widehat{V}_n = s_0$ si et seulement si $\widehat{X}_n = r$ et l'état r étant accessible dans \widehat{X} (parce qu'il est accessible dans X). L'accessibilité des états restants suit, puis, de $w_k > 0$, $k \geq 0$; $w'_k > 0$, $k \geq 0$; $w''_k > 0$, $k \geq 0$; $h_k > 0$ pour $k \geq 0$ si $a(k, 1) > 0$; $h'_k > 0$ pour $k \geq 0$ si $a'(k, 1) > 0$; $w_{k,l} > 0$ pour $k \geq 0$ tel que $a(k, 1) > 0$ et $l \geq 1$; et $w'_{k,l} > 0$ pour $k \geq 0$ tel que $a'(k, 1) > 0$ et $l \geq 1$. Tout ceci suit de la Proposition 3.5 et $a(k) > 0$, $k \geq 0$; $a'(k) > 0$, $k \geq 0$; $a''(k) > 0$, $k \geq 0$; $a(k, l) > 0$, $l \geq 1$ pour k tel que $a(k, 1) > 0$; et $a'(k, l) > 0$, $l \geq 1$ pour k tel que $a'(k, 1) > 0$. \square

La Proposition 3.4 considère le cas $\alpha_{E'} > 0$, $\alpha_{\bar{E}} > 0$. Pour $\alpha_{\bar{E}} = 0$, \widehat{V} perd la corde des états s''_k . Pour $\alpha_{E'} = 0$, \widehat{V} perd le combe des états tenant la corde des états s'_k comme lombes. Formelle-

ment, l'espace d'états de \widehat{V} peut être défini en général comme $E_V \cup \overline{E}_V \cup \{f_1, f_2, \dots, f_A\}$, ou, quand $\alpha_{E'} = 0$, E_V n'inclut pas les états s'_k et \overline{E}_V n'inclut pas les états $s'_{k,l}$ et, quand $\alpha_{\overline{E}} = 0$, \overline{E}_V n'inclut pas les états s''_k .

La CMTC transformée V avec espace infini d'états est obtenue par randomisation de \widehat{V} avec le taux Λ_E dans E_V et le taux $\Lambda_{\overline{E}}$ dans $\overline{E}_V \cup \{f_1, f_2, \dots, f_A\}$. La CMTC V a le même espace d'états et distribution initiale de probabilité que \widehat{V} . La figure 3.2 illustre le diagramme de transition d'états de V pour le cas $\alpha_{E'} > 0$, $\alpha_{\overline{E}} > 0$ et $A = 1$. Le théorème suivant établit que $m(t)$ peut être exprimé en termes de régime transitoire de V .

Théorème 3.1.

$$m(t) = \sum_{i=1}^A r_{f_i} P[V(t) = f_i].$$

Preuve. Il est suffisant de démontrer que $P[V(t) = f_i] = P[X(t) = f_i]$, $1 \leq i \leq A$. Soit $F_{k,l,\Lambda_E,\Lambda_{\overline{E}}}(t)$ la probabilité que la somme des k variables aléatoires exponentielles avec le paramètre Λ_E et l variables aléatoires exponentielles avec le paramètre $\Lambda_{\overline{E}}$ étant toutes des variables aléatoires indépendantes, est $\leq t$. Étant donnée que \widehat{X} est la CMTD randomisée de X avec le taux Λ_E dans E et avec le taux $\Lambda_{\overline{E}}$ dans $\overline{E} \cup \{f_1, f_2, \dots, f_A\}$ et étant donnée que les états f_i sont absorbants dans X , il est clair que, groupant des chemins à f_i selon le nombre des visites que \widehat{X} fait aux états dans E et dans \overline{E} avant d'entrer f_i ,

$$\begin{aligned} P[X(t) = f_i] \\ = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} P[\#(\widehat{X}_{0:k+l-1} \in E) = k \wedge \#(\widehat{X}_{0:k+l-1} \in \overline{E}) = l \wedge \widehat{X}_{k+l} = f_i] F_{k,l,\Lambda_E,\Lambda_{\overline{E}}}(t). \end{aligned}$$

De même, étant donnée que \widehat{V} est la CMTD randomisée de V avec le taux Λ_E dans E_V et le taux $\Lambda_{\overline{E}}$ dans $\overline{E}_V \cup \{f_1, f_2, \dots, f_A\}$ et étant donnée que les états f_i sont absorbant dans V ,

$$\begin{aligned} P[V(t) = f_i] \\ = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} P[\#(\widehat{V}_{0:k+l-1} \in E_V) = k \wedge \#(\widehat{V}_{0:k+l-1} \in \overline{E}_V) = l \wedge \widehat{V}_{k+l} = f_i] F_{k,l,\Lambda_E,\Lambda_{\overline{E}}}(t). \end{aligned}$$

Mais, étant donné que (3.17) $\widehat{V}_n \in E_V$ si et seulement si $\widehat{X}_n \in E$, $\widehat{V}_n \in \overline{E}_V$ si et seulement si $\widehat{X}_n \in \overline{E}$, et $\widehat{V}_n = f_i$ si et seulement si $\widehat{X}_n = f_i$,

$$\begin{aligned} P[\#(\widehat{V}_{0:k+l-1} \in E_V) = k \wedge \#(\widehat{V}_{0:k+l-1} \in \overline{E}_V) = l \wedge \widehat{V}_{k+l} = f_i] \\ = P[\#(\widehat{X}_{0:k+l-1} \in E) = k \wedge \#(\widehat{X}_{0:k+l-1} \in \overline{E}) = l \wedge \widehat{X}_{k+l} = f_i], \end{aligned}$$

et le résultat suit. □

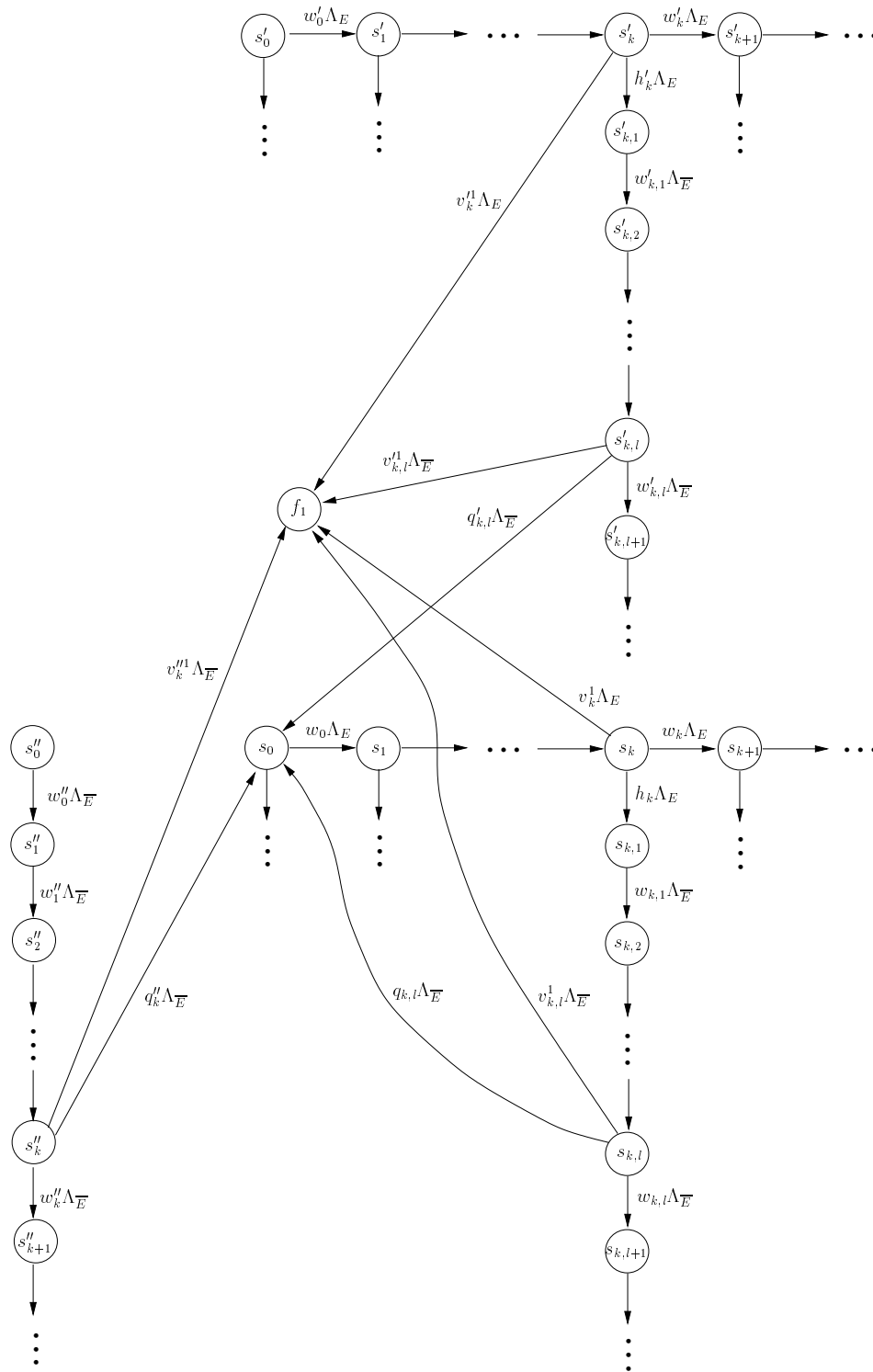


FIG. 3.2 – Diagramme de transition d'états de V pour le cas $\alpha_{E'} > 0$, $\alpha_{\bar{E}} > 0$ et $A = 1$ (il peut exister des transitions à f_1 de tous les états et des transitions à s_0 de tout état $s_{k,l}$, tout état $s'_{k,l}$, et tout état s''_k).

3.3 Troncation du modèle transformé

Le Théorème 3.1 donne une formulation exacte pour $m(t)$ en terme du régime transitoire de V . Cependant, ayant V un espace d'états finis, cette formulation ne peut pas être utilisée en général pour calculer $m(t)$. Dans cette section, nous construirons un modèle transformé tronqué, V_T , à partir duquel $m(t)$ pourra être calculé avec une erreur arbitrairement petite. La méthode randomisation régénérative divisée résoudra V_T en utilisant la méthode randomisation standard.

La CMTC V_T est obtenue à partir de V tout en introduisant un état absorbant a capturant le comportement tronqué et: 1) conservant les états s_k , $0 \leq l \leq K$, $K \geq 1$, et dirigeant vers a les taux de transition de s_K ; 2) pour chacun k , $k \leq K - 1$, pour lequel $a(k, 1) > 0$, conservant les états $s_{k,l}$ $1 \leq l \leq K_k$, $K_k \geq 1$ et dirigeant vers a les taux de transition de s_{k,K_k} ; si $\alpha_{E'} > 0$, 3) conservant les états s'_k , $0 \leq k \leq L$, $L \geq 1$, et dirigeant vers a les taux de transition de s'_L , et 4) pour chacun k , $0 \leq k \leq L - 1$, pour lequel $d'(k, 1) > 0$, conservant les états $s'_{k,l}$, $1 \leq l \leq L_k$, $L_k \geq 1$, et dirigeant vers a les taux de transitions de s_{k,L_k} ; et, si $\alpha_{\bar{E}} > 0$, 5) conservant les états s''_k , $0 \leq k \leq M$, $M \geq 1$, et dirigeant vers a les taux de transition de s''_M . V_T peut être défini formellement en termes de V comme

$$V_T(t) = \begin{cases} V(t) & \text{si, au temps } t, V \text{ n'a pas quitté l'état } s_K, \text{ un état } s_{k,K_k}, \\ & \text{un état } s'_L, \text{ un état } s'_{k,L_k}, \text{ où l'état } s''_M \\ a & \text{autrement} \end{cases}. \quad (3.38)$$

La distribution de probabilité initiale de V_T est identique à celle de V , c.à.d. $P[V_T(0) = s_0] = \alpha_r$, $P[V_T(0) = s'_0] = \alpha_{E'}$, $P[V_T(0) = s''_0] = \alpha_{\bar{E}}$, $P[V_T(0) = f_i] = \alpha_{f_i}$, $1 \leq i \leq A$, $P[V_T(0) = i] = 0$, $i \notin \{s_0, s'_0, s''_0, f_1, f_2, \dots, f_A\}$. Dénotons par E_V^T l'ensemble des états dans E_V conservés dans V_T et dénotons par \bar{E}_V^T l'ensemble des états dans \bar{E}_V conservés dans V_T . Alors, l'espace d'états de V_T est $E_V^T \cup \bar{E}_V^T \cup \{f_1, f_2, \dots, f_A, a\}$. La Figure 3.3 illustre le diagramme de transition d'états de V_T pour le cas $\alpha_{E'} > 0$, $\alpha_{\bar{E}} > 0$, et $A = 1$.

Employant V_T , nous pouvons obtenir une valeur approximative pour $m(t)$ comme

$$m^a(t) = \sum_{i=1}^A r_{f_i} P[V_T(t) = f_i].$$

Le Théorème suivant borne l'erreur de cette approximation.

Théorème 3.2.

$$0 \leq m(t) - m^a(t) \leq r_{\max} P[V_T(t) = a] = m^e(t),$$

où $r_{\max} = \max_{1 \leq i \leq A} r_{f_i}$.

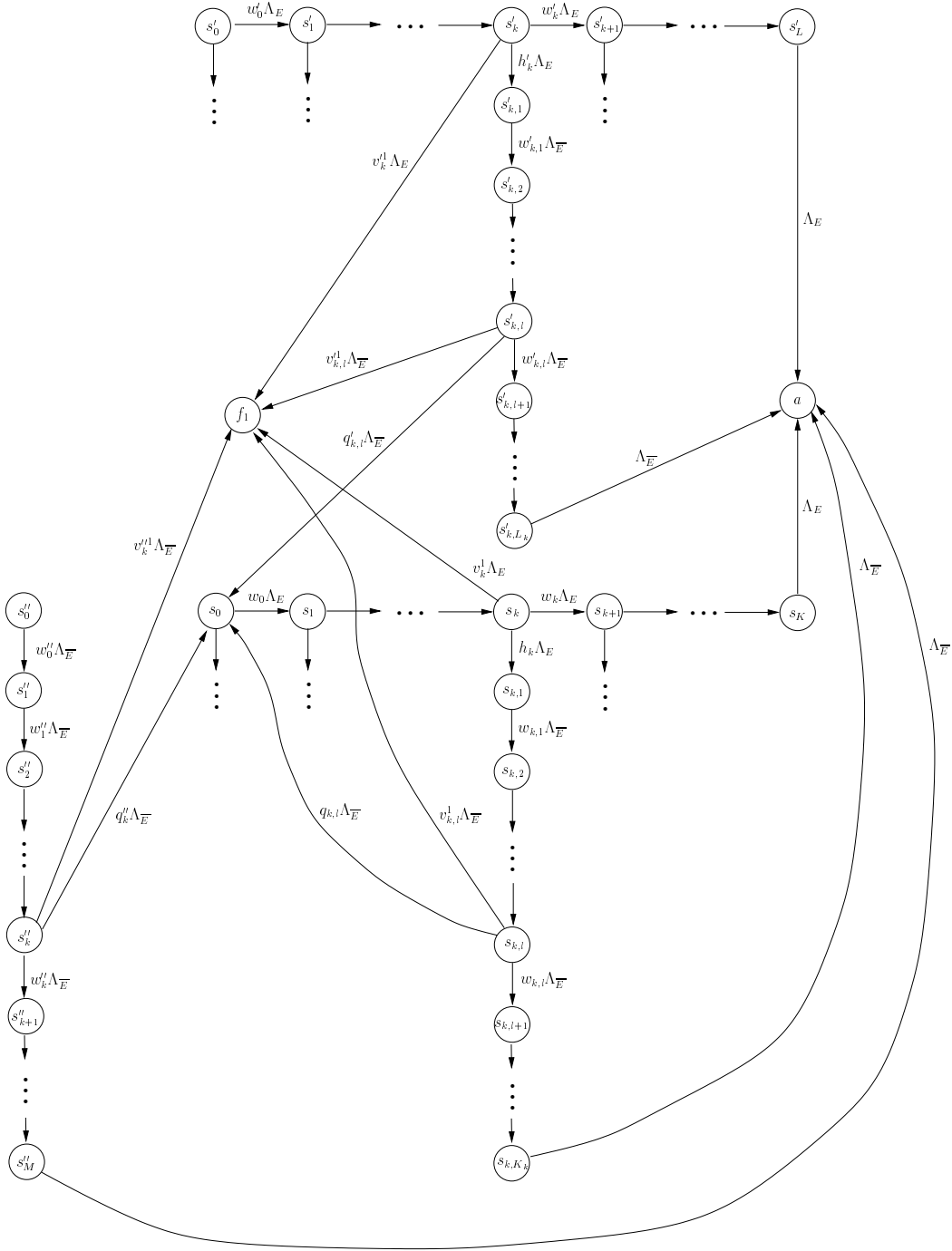


FIG. 3.3 – Diagramme de transition d'états de V_T pour le cas $\alpha_{E'} > 0$, $\alpha_{E-bar} > 0$ et $A = 1$ (il peut exister des transitions à f_1 de tout état s_k , $0 \leq k \leq K - 1$, tout état $s_{k,l}$, $1 \leq l \leq K_k - 1$, tout état s'_k , $0 \leq k \leq L - 1$, tout état $s'_{k,l}$, $1 \leq l \leq L_k - 1$, et tout état s''_k , $0 \leq k \leq M - 1$; peuvent exister des transitions à s_0 de tout état $s_{k,l}$, $1 \leq l \leq K_k - 1$, tout état $s'_{k,l}$, $1 \leq l \leq L_k - 1$, et tout état s''_k , $0 \leq k \leq M - 1$).

Preuve. En notant que $\sum_{i \in E_V^T \cup \overline{E}_V^T} P[V_T(t) = i] + \sum_{i=1}^A P[V_T(t) = f_i] + P[V_T(t) = a] = 1$, que, selon (3.38), $P[V_T(t) = i] \leq P[V(t) = i]$, $i \in E_V^T \cup \overline{E}_V^T$, que $E_V^T \subset E_V$ et $\overline{E}_V^T \subset \overline{E}_V$, et que $\sum_{i \in E_V \cup \overline{E}_V} P[V(t) = i] + \sum_{i=1}^A P[V(t) = f_i] = 1$, nous avons

$$\begin{aligned} P[V_T(t) = a] &= 1 - \sum_{i \in E_V^T \cup \overline{E}_V^T} P[V_T(t) = i] - \sum_{i=1}^A P[V_T(t) = f_i] \\ &\geq 1 - \sum_{i \in E_V^T \cup \overline{E}_V^T} P[V(t) = i] - \sum_{i=1}^A P[V_T(t) = f_i] \\ &\geq 1 - \sum_{i \in E_V \cup \overline{E}_V} P[V(t) = i] - \sum_{i=1}^A P[V_T(t) = f_i] \\ &= \sum_{i=1}^A P[V(t) = f_i] - \sum_{i=1}^A P[V_T(t) = f_i], \end{aligned}$$

Alors, utilisant (3.38) $P[V(t) = f_i] \geq P[V_T(t) = f_i]$ et $r_{f_i} \geq 0$, $1 \leq i \leq A$,

$$\begin{aligned} 0 \leq m(t) - m^a(t) &= \sum_{i=1}^A r_{f_i} \left(P[V(t) = f_i] - P[V_T(t) = f_i] \right) \\ &\leq r_{\max} \sum_{i=1}^A \left(P[V(t) = f_i] - P[V_T(t) = f_i] \right) \\ &\leq r_{\max} P[V_T(t) = a] = m^e(t). \quad \square \end{aligned}$$

Un calcul exact de la borne supérieure de l'erreur de troncature du modèle $m^\ell(t)$ donnée par Théorème 3.2 semble être coûteuse. Avec cette motivation, nous dériverons une borne supérieure pour $m^e(t)$ composée de plusieurs termes qui peuvent être calculés avec un petit coût. La méthode randomisation régénérative divisée emploiera la borne supérieure pour $m^\ell(t)$ pour contrôler l'erreur de troncature du modèle transformé. Que la borne supérieure utilisée pour contrôler l'erreur de troncature soit peu coûteuse est important puisque la méthode devra calculer la borne supérieure plusieurs fois. Nous discuterons également comment les paramètres de troncatures K , K_k , L , L_k et M sont choisis. Pour dériver la borne supérieure pour $m(t)$ nous emploierons l'ensemble de résultats préliminaires rassemblé à la proposition suivante.

Proposition 3.5. a) Pour $k \geq 1$,

$$\prod_{i=0}^{k-1} w_i = a(k).$$

b) Pour $k \geq 0$,

$$h_k = \frac{a(k, 1)}{a(k)}.$$

c) Pour $k \geq 0$ tel que $a(k, 1) > 0$,

$$\prod_{i=1}^{l-1} w_{k,i} = \frac{a(k, l)}{a(k, 1)}.$$

d) Supposant $\alpha_{E'} > 0$, pour $k \geq 1$,

$$\prod_{i=0}^{k-1} w'_i = \frac{a'(k)}{\alpha_{E'}}.$$

e) Supposant $\alpha_{E'} > 0$, pour $k \geq 0$,

$$h'_k = \frac{a'(k, 1)}{a'(k)}.$$

f) Supposant $\alpha_{E'} > 0$, pour $k \geq 0$ tel que $a'(k, 1) > 0$,

$$\prod_{i=1}^{l-1} w'_{k,i} = \frac{a'(k, l)}{a'(k, 1)}.$$

g) Supposant $\alpha_{\bar{E}} > 0$, pour $k \geq 1$,

$$\prod_{i=0}^{k-1} w''_i = \frac{a''(k)}{\alpha_{\bar{E}}}.$$

Preuve. Partie a): Nous rappelons que $a(k) > 0$, $k \geq 0$. Employant (3.8), (3.18), et (3.23):

$$w_k = \frac{\sum_{i \in E} \pi_i(k) P_{i,E'}}{a(k)} = \frac{\boldsymbol{\pi}(k) \mathbf{P}'_{E,E} \mathbf{1}}{a(k)} = \frac{\boldsymbol{\pi}(k+1) \mathbf{1}}{a(k)} = \frac{a(k+1)}{a(k)},$$

où $\mathbf{1}$ est un vecteur colonne de dimension appropriée avec tous ses éléments égaux à 1. Considérant, puis, que (3.7) $a(0) = 1$:

$$\prod_{i=0}^{k-1} w_i = \prod_{i=0}^{k-1} \frac{a(i+1)}{a(i)} = \frac{a(k)}{a(0)} = a(k).$$

Partie b): Employant (3.9), (3.19), et (3.25):

$$h_k = \frac{\sum_{i \in \bar{E}} \pi_i(k) P_{i,\bar{E}}}{a(k)} = \frac{\boldsymbol{\pi}(k) \mathbf{P}_{\bar{E},\bar{E}} \mathbf{1}}{a(k)} = \frac{\boldsymbol{\pi}(k, 1) \mathbf{1}}{a(k)} = \frac{a(k, 1)}{a(k)}.$$

Partie c): Nous rappelons que $a(k, 1) > 0$ implique $a(k, l) > 0$, $l \geq 1$. Employant (3.10), (3.19), et (3.26):

$$w_{k,l} = \frac{\sum_{i \in \bar{E}} \pi_i(k, l) P_{i,\bar{E}}}{a(k, l)} = \frac{\boldsymbol{\pi}(k, l) \mathbf{P}_{\bar{E},\bar{E}} \mathbf{1}}{a(k, l)} = \frac{\boldsymbol{\pi}(k, l+1) \mathbf{1}}{a(k, l)} = \frac{a(k, l+1)}{a(k, l)},$$

ce qui implique le résultat.

Partie d): Nous rappelons que, pour $\alpha_{E'} > 0$, $a'(k) > 0$, $k \geq 0$. Employant (3.12), (3.20), et (3.29):

$$w'_k = \frac{\sum_{i \in E'} \pi'_i(k) P_{i,E'}}{a'(k)} = \frac{\boldsymbol{\pi}'(k) \mathbf{P}_{E',E'} \mathbf{1}}{a'(k)} = \frac{\boldsymbol{\pi}'(k+1) \mathbf{1}}{a'(k)} = \frac{a'(k+1)}{a'(k)}.$$

Considérant, puis, que (3.11) $a'(0) = \alpha_{E'}$:

$$\prod_{i=0}^{k-1} w'_i = \prod_{i=0}^{k-1} \frac{a'(i+1)}{a'(i)} = \frac{a'(k)}{a'(0)} = \frac{a'(k)}{\alpha_{E'}}.$$

Partie e): Employant (3.13), (3.21), et (3.31):

$$h'_k = \frac{\sum_{i \in E'} \pi'_i(k) P_{i,\bar{E}}}{a'(k)} = \frac{\boldsymbol{\pi}'(k) \mathbf{P}_{E',\bar{E}} \mathbf{1}}{a'(k)} = \frac{\boldsymbol{\pi}'(k,1) \mathbf{1}}{a'(k)} = \frac{a'(k,1)}{a'(k)}.$$

Partie f): Nous rappelons que, supposant $\alpha_{E'} > 0$, $a'(k,l) > 0$, $l \geq 1$ pour k tel que $a'(k,1) > 0$. Employant (3.14), (3.21), et (3.32):

$$w'_{k,l} = \frac{\sum_{i \in \bar{E}} \pi'_i(k,l) P_{i,\bar{E}}}{a'(k,l)} = \frac{\boldsymbol{\pi}'(k,l) \mathbf{P}_{\bar{E},\bar{E}} \mathbf{1}}{a'(k,l)} = \frac{\boldsymbol{\pi}'(k,l+1) \mathbf{1}}{a'(k,l)} = \frac{a'(k,l+1)}{a'(k,l)},$$

ce qui implique le résultat.

Part g): Nous rappelons que, pour $\alpha_{\bar{E}} > 0$, $a''(k) > 0$, $k \geq 0$. Employant (3.16), (3.22), et (3.35):

$$w''_k = \frac{\sum_{i \in \bar{E}} \pi''_i(k) P_{i,\bar{E}}}{a''(k)} = \frac{\boldsymbol{\pi}''(k) \mathbf{P}_{\bar{E},\bar{E}} \mathbf{1}}{a''(k)} = \frac{\boldsymbol{\pi}''(k+1) \mathbf{1}}{a''(k)} = \frac{a''(k+1)}{a''(k)}.$$

Considérant, puis, que (3.15) $a''(0) = \alpha_{\bar{E}}$:

$$\prod_{i=0}^{k-1} w''_i = \prod_{i=0}^{k-1} \frac{a''(i+1)}{a''(i)} = \frac{a''(k)}{a''(0)} = \frac{a''(k)}{\alpha_{\bar{E}}}. \quad \square$$

Pour obtenir la borne supérieure peu coûteuse pour $m^{\ell}(t)$, nous décomposerons $m^e(t)$ en plusieurs termes. Soit $\gamma_K = \{k : 0 \leq k \leq K-1 \wedge a(k,1) > 0\}$, et, supposant $\alpha_{E'} > 0$, soit $\gamma'_L = \{k : 0 \leq k \leq L-1 \wedge a'(k,1) > 0\}$. L'ensemble γ_K collecte les indices k pour lesquels le peigne de V_T ayant comme lombes les états s_l a une dent attachée à l'état s_k et, supposant $\alpha_{E'} > 0$, γ'_L collecte les indices k pour lesquels le peigne de V_T ayant comme lombes les états s'_l a une dent attachée à l'état s'_k . Le premier terme, $m_M^{e'}(t)$, existe seulement quand $\alpha_{\bar{E}} > 0$ et est r_{\max} fois la probabilité qui, au temps t , V_T est entré a à travers s''_M . Le second terme, $m_L^{e''}(t)$, existe seulement quand $\alpha_{E'} > 0$ et est r_{\max} fois la probabilité que, au temps t , V_T est entrée a à travers s'_L . Le troisième terme, $m_{L,k}^{e''}(t)$, $k \in \gamma'_L$, existe seulement quand $\alpha_{E'} > 0$ et est r_{\max} fois

la probabilité que, au temps t , V_T est entrée a à travers s'_{k,L_k} . Le quatrième terme, $m_{K,L,M}^{e'''}(t)$, est r_{\max} fois la probabilité que, au temps t , V_T est entrée a à travers s_K . En fin, le cinquième terme $m_{K,L,M,k}^{e''''}(t)$, $k \in \gamma_K$, est r_{\max} fois la probabilité qui, au temps t , V_T est entrée a à travers s_{k,K_k} .

Supposant $\alpha_{\bar{E}} > 0$, une expression pour $m_M^{e'}(t)$ peut être facilement obtenue en considérant qu'il y a seulement un chemin par lequel V_T peut entrer a à travers s''_M . Ce chemin est $p''_M = (s''_0, s''_1, \dots, s''_M, a)$. La CMTC V_T est initialement dans s''_0 avec probabilité $\alpha_{\bar{E}}$ et, donc, la probabilité que V_T suivra ce chemin est $\alpha_{\bar{E}} \prod_{k=0}^{M-1} w''_k$. En outre, puisque tous les états du chemin ont le taux de départ $\Lambda_{\bar{E}}$, la durée du chemin (temps jusqu'à V_T entre a) est Erlang avec $M + 1$ étapes et paramètre $\Lambda_{\bar{E}}$. Récapitulant et utilisant Proposition 3.5, g),

$$\begin{aligned} m_M^{e'}(t) &= r_{\max} \alpha_{\bar{E}} \left(\prod_{k=0}^{M-1} w''_k \right) P[\text{duré de } p''_M \leq t] \\ &= r_{\max} a''(M) \sum_{k=M+1}^{\infty} e^{-\Lambda_{\bar{E}} t} \frac{(\Lambda_{\bar{E}} t)^k}{k!}. \end{aligned} \quad (3.39)$$

Supposant $\alpha_{E'} > 0$, une dérivation semblable s'applique à $m_L^{e''}(t)$. Dénnotant par p'_L le chemin $(s'_0, s'_1, \dots, s'_L, a)$ et employant Proposition 3.5, d),

$$m_L^{e''}(t) = r_{\max} \alpha_{E'} \left(\prod_{k=0}^{L-1} w'_k \right) P[\text{duré de } p'_L \leq t] = r_{\max} a'(L) \sum_{k=L+1}^{\infty} e^{-\Lambda_{E'} t} \frac{(\Lambda_{E'} t)^k}{k!}. \quad (3.40)$$

Supposons $\alpha_{E'} > 0$. Soit $k \in \gamma'_L$. Le seul chemin à travers lequel V_T peut entrer a à travers s'_{k,L_k} est $p'_{k,L_k} = (s'_0, s'_1, \dots, s'_k, s'_{k,1}, \dots, s'_{k,L_k}, a)$. La probabilité que V_T suivra le chemin p'_{k,L_k} est $\alpha_{E'} (\prod_{i=0}^{k-1} w'_i) h'_k (\prod_{i=1}^{L_k-1} w'_{k,i})$. Alors, utilisant Proposition 3.5, d), e) et f)

$$\begin{aligned} m_{L,k}^{e''}(t) &= r_{\max} \alpha_{E'} \left(\prod_{i=0}^{k-1} w'_i \right) h'_k \left(\prod_{i=1}^{L_k-1} w'_{k,i} \right) P[\text{duré de } p'_{k,L_k} \leq t] \\ &= r_{\max} a'(k) \frac{a'(k,1)}{a'(k)} \frac{a'(k,L_k)}{a'(k,1)} P[\text{duré de } p'_{k,L_k} \leq t] \\ &= r_{\max} a'(k, L_k) P[\text{duré de } p'_{k,L_k} \leq t]. \end{aligned}$$

Ayant les états dans p'_{k,L_k} avant a différents taux de départ, une expression exacte pour $P[\text{durée de } p'_{k,L_k} \leq t]$ est complexe. Une borne supérieure pour $P[\text{durée de } p'_{k,L_k} \leq t]$ peut, cependant, être obtenue facilement en négligeant les temps de séjour dans les états $s'_{k,1}, \dots, s'_{k,L_k}$. Étant donné que tous les états s'_0, s'_1, \dots, s'_k ont des taux de départ $\Lambda_{E'}$, ceci donne la borne supérieure

$$P[\text{durée de } p'_{k,L_k} \leq t] < \sum_{l=k+1}^{\infty} e^{-\Lambda_{E'} t} \frac{(\Lambda_{E'} t)^l}{l!},$$

rendant

$$m_{L,k}^{e''}(t) < r_{\max} a'(k, L_k) \sum_{l=k+1}^{\infty} e^{-\Lambda_E t} \frac{(\Lambda_E t)^l}{l!}, \quad k \in \gamma'_L. \quad (3.41)$$

Le calcul des bornes supérieures pour $m_{K,L,M}^{e'''}(t)$ et $m_{K,L,M,k}^{e'''}(t)$, $k \in \gamma_K$ est plus complexe. Les propositions suivantes donnent de telles bornes supérieures.

Proposition 3.6.

$$m_{K,L,M}^{e'''}(t) \leq r_{\max} (\alpha_S - a''(M)) a(K) \sum_{k=K+1}^{\infty} (k - K) e^{-\Lambda_E t} \frac{(\Lambda_E t)^k}{k!}.$$

Preuve. Nous commencerons par considérer une CMTC, V'_T , qui diffère de V_T dans les faits que: 1) les dents du peigne avec les états s_k dans les lombes n'ont pas été tronqués (ils sont comme dans V), 2) les transitions aux états absorbants f_i , $1 \leq i \leq A$, ont été redirigés à s_0 , et 3) les états absorbants f_i , $1 \leq i \leq A$, ont été fusionnés avec l'état a . Soit \mathcal{P} l'ensemble des chemins par lesquels V_T peut entrer à l'état a à travers s_K . Chaque $p \in \mathcal{P}$ est une séquence d'états $(x_0, x_1, \dots, x_{L(p)})$, $L(p) \geq 1$, avec $P[V_T(0) = x_0] > 0$, non-nulle taux de transition de chaque état x_l à x_{l+1} , $0 \leq l < L(p)$, $x_{L(p)-1} = s_K$, et $x_{L(p)} = a$. Soit \mathcal{P}' l'ensemble de chemins par lesquels V'_T peut entrer à l'état a à travers s_K . Par construction, $\mathcal{P} \subset \mathcal{P}'$. Ensuite, dénotant par $P(p)$, $p \in \mathcal{P}$ la probabilité que V_T suive le chemin p et dénotant par $P'(p)$, $p \in \mathcal{P}'$ la probabilité que V'_T suive le chemin p , nous avons $P(p) = P'(p)$, $p \in \mathcal{P}$. En outre, étant donné que les états de V_T différent de f_i , $1 \leq i \leq A$, ont le même taux de départ dans V'_T comme dans V_T , dénotant par $D(p)$, $p \in \mathcal{P}$ la durée de chemin p dans V_T (le temps jusqu'à ce que V_T coupe a) et avec $D'(p)$, $p \in \mathcal{P}'$ la durée du chemin p dans V'_T , $D(p)$ et $D'(p)$, $p \in \mathcal{P}$ ont la même distribution. Alors,

$$m_{K,L,M}^{e'''}(t) = r_{\max} \sum_{p \in \mathcal{P}} P(p) P[D(p) \leq t] \leq r_{\max} \sum_{p \in \mathcal{P}'} P'(p) P[D'(p) \leq t]. \quad (3.42)$$

Considérons maintenant la CMTC V''_T obtenue à partir de V'_T en substituant les états avec le taux de départ $\Lambda_{\bar{E}}$ (états $s_{k,l}$, $k \in \gamma_K$, $l \geq 1$; si $\alpha_{E'} > 0$, les états $s'_{k,l}$, $k \in \gamma'_L$, $1 \leq l \leq L_k$; et, si $\alpha_{\bar{E}} > 0$, les états s''_k , $0 \leq k \leq M$) par des commutateurs instantanés avec des probabilités de saut à leurs successeurs égaux aux probabilités de saut de ces états dans V'_T . Concernant les chemins $p \in \mathcal{P}'$, ceci est équivalent à négliger dans chaque chemin les temps de séjour dans les états avec le taux de départ $\Lambda_{\bar{E}}$. Alors, dénotant par $D''(p)$, $p \in \mathcal{P}'$ la durée du chemin p dans V''_T et négligeant dans chaque chemin les temps de séjour dans les états avec le taux de départ $\Lambda_{\bar{E}}$ nous avons $P[D''(p) \leq t] \geq P[D'(p) \leq t]$, $p \in \mathcal{P}'$ et

$$P[\text{par temps } t, V''_T \text{ est entré } a \text{ à travers } s_K]$$

$$= \sum_{p \in \mathcal{P}'} P'(p) P[D''(p) \leq t] \geq \sum_{p \in \mathcal{P}'} P'(p) P[D'(p) \leq t],$$

qui, combiné avec (3.42), donne

$$m_{K,L,M}^{ell}(t) \leq r_{\max} P[\text{au temps } t, V_T'' \text{ est entré } a \text{ à travers } s_K]. \quad (3.43)$$

A continuation, nous dériverons la distribution de probabilité initiale et le diagramme de transition d'état de V_T'' . Par construction, la distribution de probabilité initiale de V_T' est:

$$\begin{aligned} P[V_T'(0) = s_0] &= P[V_T(0) = s_0] = \alpha_r, \\ \text{pour } \alpha_{E'} > 0, \quad P[V_T'(0) = s'_0] &= P[V_T(0) = s'_0] = \alpha_{E'}, \\ \text{pour } \alpha_{\bar{E}} > 0, \quad P[V_T'(0) = s''_0] &= P[V_T(0) = s''_0] = \alpha_{\bar{E}}, \\ P[V_T'(0) = a] &= P[V_T(0) = a] + \sum_{i=1}^A P[V_T(0) = f_i] = \sum_{i=1}^A \alpha_{f_i}, \\ P[V_T'(0) = i] &= 0, \quad i \notin \{s_0, s'_0, s''_0, a\}. \end{aligned}$$

La distribution de probabilité initiale et le diagramme de transition d'états de V_T'' peuvent, alors, être obtenus à partir de la distribution de probabilité initiale et le diagramme de transition d'états de V_T' en remplaçant les états avec taux de départ $\Lambda_{\bar{E}}$ par des commutateurs instantanés et en éliminant ces commutateurs comme les marquages (en anglais, "vanishing markings") sont éliminés dans les GSPNs [9]. Figure 3.4 montre le diagramme de transition d'état de V_T' pour le cas $\alpha_{E'} > 0$, $\alpha_{\bar{E}} > 0$ et $A = 1$ avec les états avec le taux de départ $\Lambda_{\bar{E}}$ remplacés par des commutateurs instantanés (représentés par des carrés avec probabilités de commutation). Supposons $\alpha_{\bar{E}} > 0$. Le seul commutateur instantané avec probabilité initiale non-nulle est l'état s''_0 . Ce commutateur a une probabilité initiale $\alpha_{\bar{E}}$. Employant la Proposition 3.5, g), la probabilité que V_T' (avec des états avec sortie $\Lambda_{\bar{E}}$ remplacé par les commutateurs instantanés) suivra le chemin $(s''_0, s''_1, \dots, s''_M, a)$ est $\alpha_{\bar{E}} \prod_{k=0}^{M-1} w_k'' = a''(M)$. Avec probabilité $\alpha_{\bar{E}}(1 - \prod_{k=0}^{M-1} w_k'') = \alpha_{\bar{E}} - a''(M)$, V_T' commencera à s''_0 et sortira du sous-ensemble d'états $\{s''_0, s''_1, \dots, s''_M\}$ par l'état s_0 . Alors, la distribution de probabilité initiale de V_T'' sera

$$\begin{aligned} P[V_T''(0) = s_0] &= P[V_T'(0) = s_0] + \alpha_{\bar{E}} - a''(M) = \alpha_r + \alpha_{\bar{E}} - a''(M), \\ \text{pour } \alpha_{E'} > 0, \quad P[V_T''(0) = s'_0] &= P[V_T'(0) = s'_0] = \alpha_{E'}, \\ P[V_T''(0) = a] &= P[V_T'(0) = a] + a''(M) = \sum_{i=1}^A \alpha_{f_i} + a''(M), \\ P[V_T''(0) = i] &= 0, \quad i \notin \{s_0, s'_0, a\}. \end{aligned}$$

Pour $\alpha_{E'} > 0$, l'élimination des commutateurs $s'_{k,l}$, $k \in \gamma'_L$, $1 \leq l \leq L_k$, introduira des transitions dans V_T'' des états s'_k , $k \in \gamma'_L$, aux états a et s_0 . Prenant en considération que la probabilité à laquelle, commençant de $s'_{k,1}$, V_T' sortira de sous-ensemble d'états $\{s'_{k,1}, s'_{k,2}, \dots, s'_{k,L_k}\}$ par l'état a est $\prod_{i=1}^{L_k-1} w'_{k,i}$, pour chacun $k \in \gamma'_L$, l'élimination des commutateurs $s'_{k,1}, s'_{k,2}, \dots, s'_{k,L_k}$ introduira un taux de transition de s'_k à a égal à $\phi'_k \Lambda_E$ avec $\phi'_k = h'_k \prod_{i=1}^{L_k-1} w'_{k,i}$. Suposant que, par convention, le produit de 0 par une quantité non-définie est 0, V_T'' aura un taux de transition de chaque état s'_k , $0 \leq k \leq L-1$, à a de valeur $\phi'_k \Lambda_E$ avec $\phi'_k = h'_k \prod_{i=1}^{L_k-1} w'_{k,i}$. Comme le taux de départ de chaque état s'_k est Λ_E , l'élimination des commutateurs $s'_{k,1}, s'_{k,2}, \dots, s'_{k,L_k}$ introduira un taux de transition de chaque état s'_k , $0 \leq k \leq L-1$, à s_0 égale à $\Lambda_E - w'_k \Lambda_E - \phi'_k \Lambda_E = (1 - w'_k - \phi'_k) \Lambda_E$. L'élimination des états $s_{k,l}$, $k \in \gamma_K$, introduira un taux de transition de s_k , $k \in \gamma_K$, $k > 0$, à l'état s_0 . La probabilité que, commençant à un état $s_{k,1}$, $k \in \gamma_K$, V_T' sortira le sous-ensemble d'états $\{s_{k,1}, s_{k,2}, \dots\}$ par l'état s_0 est 1. Ceci est une conséquence du fait que la limite pour $m \rightarrow \infty$ de $\prod_{i=1}^m w_{k,i} = a(k, m+1)/a(k, 1)$ (par Proposition 3.5, c)) est 0 parce que, comme on a démontré dans la preuve du Théorème 3.4, $a(k, l)$ diminue géométriquement rapidement avec l . Alors, Λ_E étant le taux de sortie des états s_k , $1 \leq k \leq K-1$, l'élimination des commutateurs $s_{k,l}$, $k \in \gamma_K$, $l \geq 1$, introduira un taux de transition à s_0 de chaque état s_k , $1 \leq k \leq K-1$, égale à $\Lambda_E - w_k \Lambda_E = (1 - w_k) \Lambda_E$. La Figure 3.5 montre le diagramme de transition d'état de V_T'' pour le cas $\alpha_{E'} > 0$. Pour le cas $\alpha_{E'} = 0$, les états s'_k et les transitions de ces états disparaîtront.

Soit \widehat{V}_T'' la CMTD obtenue par dérandomisation V_T'' avec le taux Λ_E . La distribution de probabilité initiale de \widehat{V}_T'' est la même que la distribution de probabilité initiale de V_T'' . Le diagramme de transition d'état de \widehat{V}_T'' pour le cas $\alpha_{E'} > 0$ est dépeint dans la figure 3.6. Pour le cas $\alpha_{E'} = 0$, les états s'_k et les transitions de ces états sont absents.

Soit $c(k) = P[\text{au étape } k, \widehat{V}_T'' \text{ est entré dans } a \text{ à travers } s_K]$. Employant l'identité probabiliste de V_T'' et $\{(\widehat{V}_T'')_{Q(t)}; t \geq 0\}$, où Q est un processus de Poisson avec taux d'arrivé Λ_E indépendant de \widehat{V}_T'' ,

$$P[\text{au temps } t, V_T'' \text{ est entré } a \text{ à travers } s_K] = \sum_{k=0}^{\infty} c(k) e^{-\Lambda_E t} \frac{(\Lambda_E t)^k}{k!}$$

et, donc (3.43):

$$m_{K,L,M}^{e'''}(t) \leq r_{\max} \sum_{k=0}^{\infty} c(k) e^{-\Lambda_E t} \frac{(\Lambda_E t)^k}{k!}. \quad (3.44)$$

Considérons maintenant, pour le cas $\alpha_{E'} > 0$, la CMTD Y obtenue à partir \widehat{V}_T'' en introduisant un état absorbant f_1 avec probabilité initiale nulle et redirigeant à f_1 les transitions des états $s'_0, s'_1, \dots, s'_{L-1}$ à a . La CMTD Y est un cas particulier de la CMTD $\widehat{V}_{K,L}$ considéré dans [14]. Pour le cas $\alpha_{E'} = 0$, soit Y la CMTD obtenue à partir \widehat{V}_T'' en introduisant un état absorbant f_1

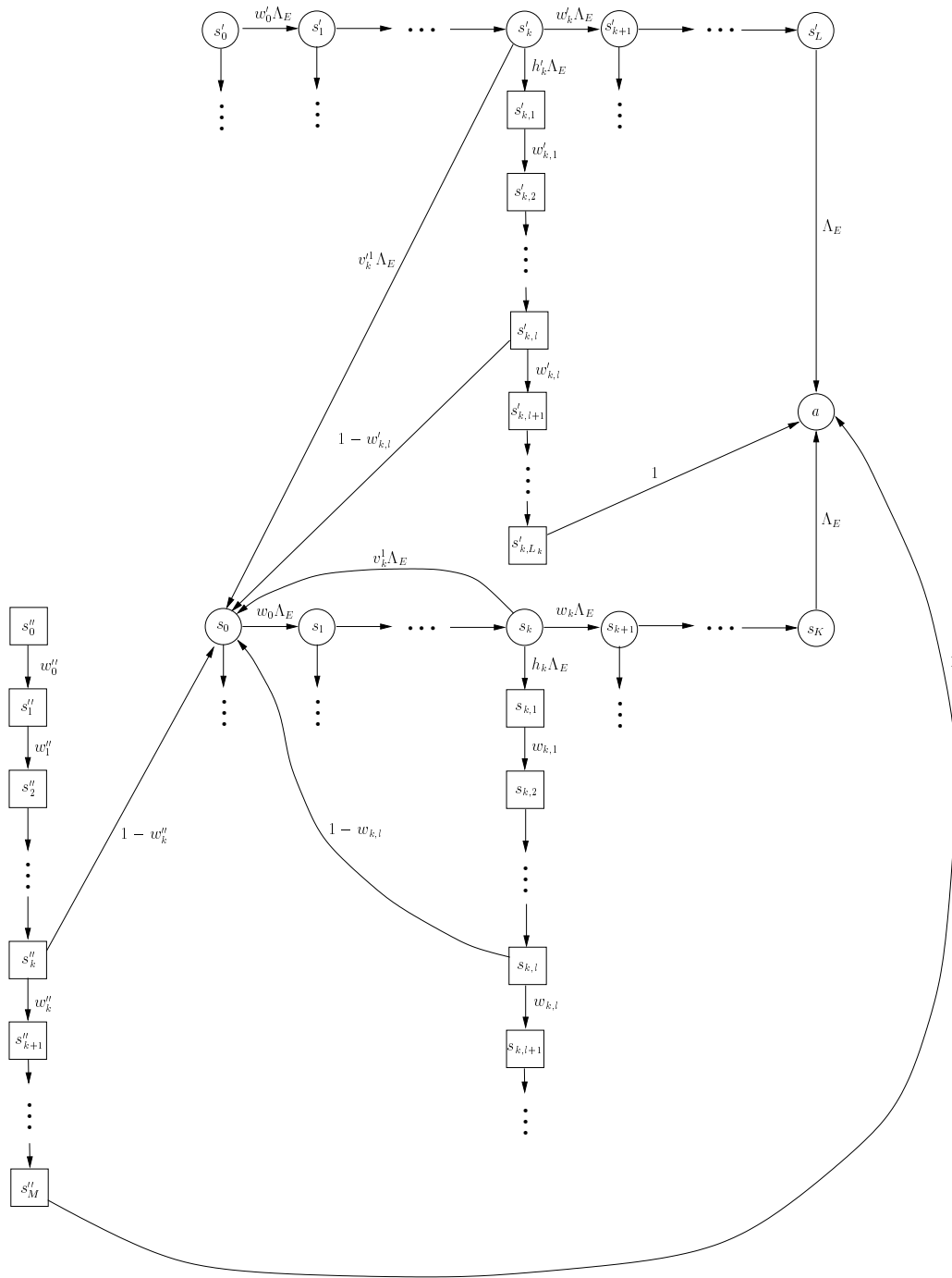


FIG. 3.4 – Diagramme de transition d'états de la CMTC V_T^I avec les états avec taux de sortie $\Lambda_{\bar{E}}$ remplacés par des commutateurs instantanés pour le cas $\alpha_{E'} > 0$, $\alpha_{\bar{E}} > 0$ et $A = 1$ (il peut exister des transitions à s_0 de tout état s_k , $0 < k \leq K - 1$, quelques états $s_{k,l}$, $l \geq 1$, quelques états s_k^j , $0 \leq k \leq L - 1$, quelques états $s_{k,l}^j$, $1 \leq k \leq L_k - 1$, et quelques états s_k'' , $0 \leq k \leq M - 1$).

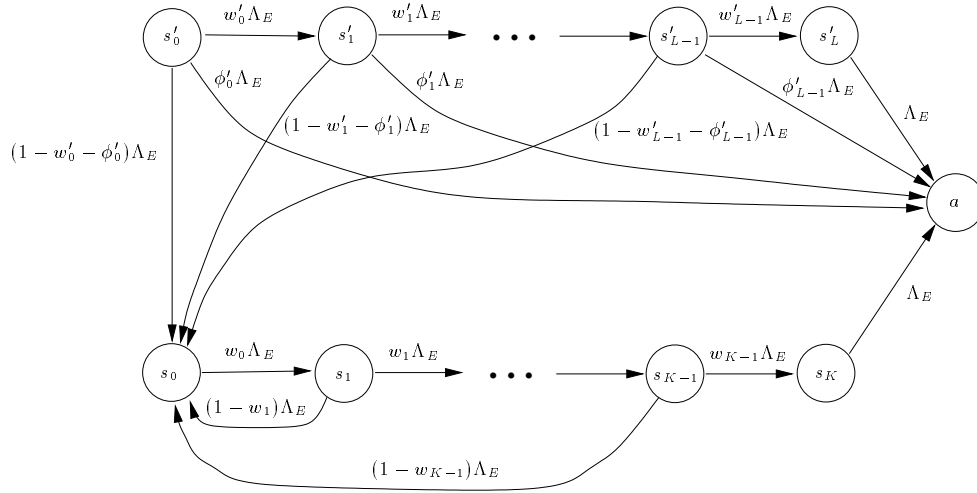


FIG. 3.5 – Diagramme de transition d'états de la CMTD V_T'' pour le cas $\alpha_{E'} > 0$.

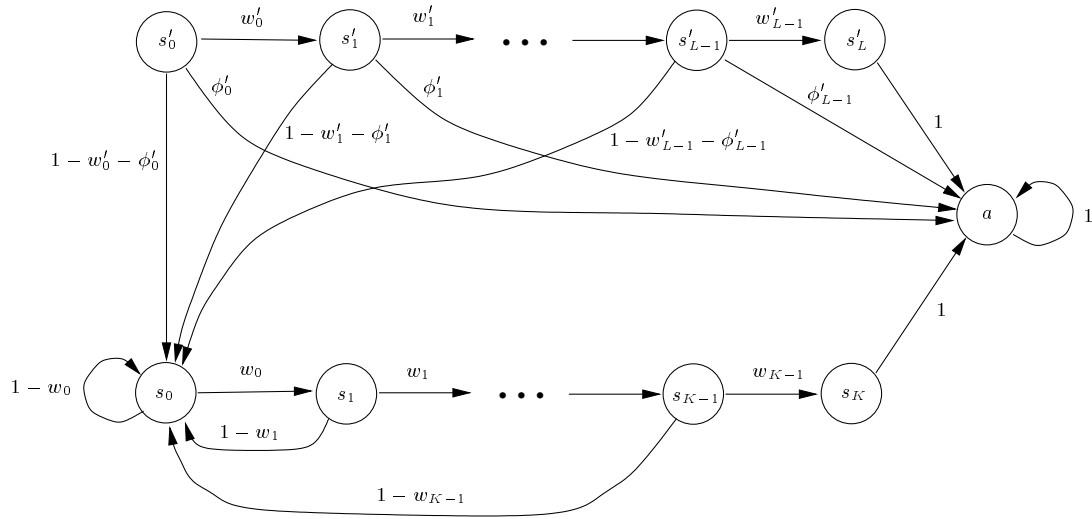


FIG. 3.6 – Diagramme de transition d'états de la CMTD \widehat{V}_T'' pour le cas $\alpha_{E'} > 0$.

avec probabilité initiale nulle. Dans ce cas, Y est un cas particulier de la CMTD \widehat{V}_K considéré dans [14]. Trivialement, $c(k)$ est égale à la probabilité que, à l'étape k , Y est entré a à travers s_K . Alors, dénotant par I_c la fonction indicatrice retournant la valeur 1 si la condition c est satisfaite et la valeur 0 autrement, appliquant la Proposition 3 de [14] et employant Proposition 3.5, a), pour le cas $\alpha_{E'} > 0$,

$$\begin{aligned} c(k) &\leq I_{k>K} P[(\widehat{V}_T'')_0 \in \{s_0, s'_0\}] (k-K) \prod_{i=0}^{K-1} w_i \\ &= I_{k>K} (\alpha_r + \alpha_{\overline{E}} - a''(M) + \alpha_{E'}) (k-K) a(K) \\ &= I_{k>K} (\alpha_S - a''(M)) (k-K) a(K). \end{aligned}$$

Similairement, pour le cas $\alpha_{E'} = 0$,

$$\begin{aligned} c(k) &\leq I_{k>K} P[(\widehat{V}_T'')_0 = s_0] (k-K) \prod_{i=0}^{K-1} w_i \\ &= I_{k>K} (\alpha_r + \alpha_{\overline{E}} - a''(M)) (k-K) a(K) \\ &= I_{k>K} (\alpha_S - a''(M)) (k-K) a(K). \end{aligned}$$

La combinaison de $c(k) = I_{k>K} (\alpha_S - a''(M)) (k-K) a(K)$ avec (3.44) complète la preuve de la proposition. \square

Proposition 3.7.

$$m_{K,L,M,k}^{e'''}(t) \leq r_{\max} (\alpha_S - a''(M)) a(k, K_k) \sum_{l=k+1}^{\infty} (l-k) e^{-\Lambda_E t} \frac{(\Lambda_E t)^l}{l!}, \quad k \in \gamma_K.$$

Preuve. Considérons, premièrement, la CMTC $V_{T,k}'$ qui diffère de V_T dans que: 1) les dents du peigne avec les états s_k dans les lombes attachées aux états s_l , $k+1 \leq l \leq K-1$, n'ont pas été tronqués (ils sont comme dans CMTC V), 2) les transitions aux états absorbants f_i , $1 \leq i \leq A$, ont été redirigés à s_0 , et 3) les états absorbants f_i , $1 \leq i \leq A$, ont été fusionnés avec l'état a . Considérons, ensuite, la CMTC $V_{T,k}''$ obtenue à partir $V_{T,k}'$ par substitution des états avec le taux de départ $\Lambda_{\overline{E}}$ (les états $s_{l,m}$, $l \in \gamma_K$, $0 \leq l \leq k$, $1 \leq m \leq K_l$; les états $s_{l,m}$, $l \in \gamma_K$, $k+1 \leq l \leq K-1$, $m \geq 1$; si $\alpha_{E'} > 0$, les états $s'_{l,m}$, $l \in \gamma'_L$, $1 \leq m \leq L_l$; et, si $\alpha_{\overline{E}} > 0$, les états s''_l , $0 \leq l \leq M$) par des commutateurs instantanés avec des probabilités de saut à leurs successeurs égales aux probabilités de saut de ces états dans $V_{T,k}'$. Similairement à ce qui a été démontré dans la preuve de Proposition 3.6 que $m_{K,L,M}^{e'''}(t) \leq r_{\max} P[\text{au temps } t, V_T'' \text{ est entré } a \text{ à travers } s_K]$, on peut démontrer que

$$m_{K,L,M,k}^{e'''}(t) \leq r_{\max} P[\text{au temps } t, V_{T,k}'' \text{ est entré } a \text{ à travers } s_k], \quad k \in \gamma_K. \quad (3.45)$$

Ensuite, nous dériverons la distribution de probabilité initiale et le diagramme de transition d'états de $V''_{T,k}$. Par construction, la distribution de probabilité initiale de $V'_{T,k}$ est:

$$\begin{aligned} P[V'_{T,k}(0) = s_0] &= P[V_T(0) = s_0] = \alpha_r, \\ \text{pour } \alpha_{E'} > 0, \quad P[V'_{T,k}(0) = s'_0] &= P[V_T(0) = s'_0] = \alpha_{E'}, \\ \text{pour } \alpha_{\bar{E}} > 0, \quad P[V'_{T,k}(0) = s''_0] &= P[V_T(0) = s''_0] = \alpha_{\bar{E}}, \\ P[V'_{T,k}(0) = a] &= P[V_T(0) = a] + \sum_{i=1}^A P[V_T(0) = f_i] = \sum_{i=1}^A \alpha_{f_i}, \\ P[V'_{T,k}(0) = i] &= 0, \quad i \notin \{s_0, s'_0, s''_0, a\}. \end{aligned}$$

Comme dans la preuve de la Proposition 3.6, la distribution de probabilité initiale et le diagramme de transition d'états de $V''_{T,k}$ peuvent être obtenus à partir de la distribution de probabilité initiale et le diagramme de transition d'états de $V'_{T,k}$ en substituant les états avec le taux de départ $\Lambda_{\bar{E}}$ par des commutateurs instantanés et en éliminant ces commutateurs d'une manière semblable à celles dont sont éliminés dans GSPNs les marquages évanouissants. La Figure 3.7 montre le diagramme de transition d'états de $V'_{T,k}$ pour le cas $\alpha_{E'} > 0$, $\alpha_{\bar{E}} > 0$ et $A = 1$ avec les états avec taux de sortie $\Lambda_{\bar{E}}$ remplacés par des commutateurs instantanés (représentés par des carrés avec probabilités de commutation). La distribution de probabilité initiale de $V''_{T,k}$ diffère seulement de la distribution probabilité initiale de $V'_{T,k}$ en raison de l'élimination des commutateurs $s''_0, s''_1, \dots, s''_M$ et, comme dans la preuve de Proposition 3.6, on peut démontrer:

$$\begin{aligned} P[V''_{T,k}(0) = s_0] &= P[V'_{T,k}(0) = s_0] + \alpha_{\bar{E}} - a''(M) = \alpha_r + \alpha_{\bar{E}} - a''(M), \\ \text{pour } \alpha_{E'} > 0, \quad P[V''_{T,k}(0) = s'_0] &= P[V'_{T,k}(0) = s'_0] = \alpha_{E'}, \\ P[V''_{T,k}(0) = a] &= P[V'_{T,k}(0) = a] + a''(M) = \sum_{i=1}^A \alpha_{f_i} + a''(M), \\ P[V''_{T,k}(0) = i] &= 0, \quad i \notin \{s_0, s'_0, a\}. \end{aligned}$$

Comme pour la CMTC V''_T considérée dans la preuve de Proposition 3.6, si $\alpha_{E'} > 0$, l'élimination des commutateurs $s'_{l,m}$, $l \in \gamma'_L$, $1 \leq m \leq L_l$, introduira un taux de transition de chaque état s'_l , $l \in \gamma'_L$, à a égal à $\phi'_l \Lambda_E$, avec $\phi'_l = h'_l \prod_{i=1}^{L_l-1} w'_{l,i}$ et un taux de transition de chaque état s'_l , $l \in \gamma'_L$, à s_0 égal à $(1 - w'_l - \phi'_l) \Lambda_E$. Supposant par convention que le produit de 0 par une quantité non-définie est égal à 0, $V''_{T,k}$ aura un taux de transition de chaque état s'_l , $0 \leq l \leq L - 1$ à a égal à $\phi'_l \Lambda_E$, avec $\phi'_l = h'_l \prod_{i=1}^{L_l-1} w'_{l,i}$ et un taux de transition de chaque état s'_l , $0 \leq l \leq L - 1$, à s_0 égal à $(1 - w'_l - \phi'_l) \Lambda_E$. L'élimination des commutateurs $s_{l,m}$, $l \in \gamma_K$, $0 \leq l \leq k$, introduira un taux de transition de chaque état s_l , $l \in \gamma_K$, $0 \leq l \leq k$, à l'état a égal à $\phi_l \Lambda_E$, avec

$$\phi_l = h_l \prod_{i=1}^{K_k-1} w_{l,i}. \quad (3.46)$$

Supposant par convention que le produit de 0 par une quantité non-définie est égal à 0, $V''_{T,k}$ aura un taux de transition de chaque état s_l , $0 \leq l \leq k$, à l'état a est égal à $\phi_l \Lambda_E$. Étant donné que le taux de départ de chaque état s_l , $0 < l \leq k$ est Λ_E , l'élimination des commutateurs $s_{l,m}$, $l \in \gamma_K$, $0 \leq l \leq k$, introduira un taux de transition de chaque état s_l , $0 < l \leq k$ à l'état s_0 de valeur $\Lambda_E - w_l \Lambda_E - \phi_l \Lambda_E = (1 - w_l - \phi_l) \Lambda_E$. L'élimination des commutateurs $s_{l,m}$, $l \in \gamma_K$, $k+1 \leq l \leq K-1$, $m \geq 1$, introduira un taux de transition de chaque état s_l , $l \in \gamma_K$, $k+1 \leq l \leq K-1$, à l'état s_0 . La probabilité que, commençant à un état $s_{l,1}$, $l \in \gamma_K$, $k+1 \leq l \leq K-1$, $V''_{T,k}$ sortira de sous-ensemble d'états $\{s_{l,1}, s_{l,2}, \dots\}$ par l'état s_0 est 1. Ceci est une conséquence du fait que la limite pour $m \rightarrow \infty$ de $\prod_{i=1}^m w_{l,i} = a(l, m+1)/a(l, 1)$ (par Proposition 3.5, c)) est 0 parce que, comme il a été démontré dans la preuve du Théorème 3.4, $a(l, m)$ diminue géométriquement rapidement avec m . Alors, Λ_E étant le taux de départ des états s_l , $k+1 \leq l \leq K-1$, l'élimination des commutateurs $s_{l,m}$, $l \in \gamma_K$, $k+1 \leq l \leq K-1$, $m \geq 1$, introduira un taux de transition de chaque état s_l , $k+1 \leq l \leq K-1$, à l'état s_0 égale $\Lambda_E - w_l \Lambda_E = (1 - w_l) \Lambda_E$. La Figure 3.8 montre le diagramme de transition d'états de $V''_{T,k}$ pour le cas $\alpha_{E'} > 0$. Pour le cas $\alpha_{E'} = 0$, les états s'_l et les transitions de ces états sont absents.

Soit $\widehat{V}''_{T,k}$, $k \in \gamma_K$, la CMTD obtenue par dérandomisation de $V''_{T,k}$ avec le taux Λ_E . La distribution de probabilité initiale de $\widehat{V}''_{T,k}$ est la même que la distribution de probabilité initiale de $V''_{T,k}$. Le diagramme de transition d'états de $\widehat{V}''_{T,k}$ pour le cas $\alpha_{E'} > 0$ est montré à la Figure 3.9. Pour le cas $\alpha_{E'} = 0$, les états s'_l et les transitions de ces états sont absents.

Soit $c_k(l) = P[\text{à l'étape } l, \widehat{V}''_{T,k} \text{ est entré } a \text{ à travers } s_k]$, $k \in \gamma_K$. Employant l'identité probabilistique de $V''_{T,k}$ et $\{(\widehat{V}''_{T,k})_{Q(t)}; t \geq 0\}$, où Q est un processus de Poisson avec taux d'arrivée Λ_E indépendant de $\widehat{V}''_{T,k}$,

$$P[\text{au temps } t, V''_{T,k} \text{ est entré } a \text{ à travers } s_k] = \sum_{l=0}^{\infty} c_k(l) e^{-\Lambda_E t} \frac{(\Lambda_E t)^l}{l!}, \quad k \in \gamma_K$$

et, donc (3.45),

$$m_{K,L,M,k}^{e'''}(t) \leq r_{\max} \sum_{l=0}^{\infty} c_k(l) e^{-\Lambda_E t} \frac{(\Lambda_E t)^l}{l!}, \quad k \in \gamma_K. \quad (3.47)$$

Soit $\widehat{V}'''_{T,k}$, $k \in \gamma_K$, la CMTD obtenue à partir $\widehat{V}''_{T,k}$ en redirigeant la probabilité 1 de transition de s_K à a à l'état s_0 . Le diagramme de transition d'états de $\widehat{V}'''_{T,k}$ pour le cas $\alpha_{E'} > 0$ est montré à la Figure 3.10. Pour le cas $\alpha_{E'} = 0$, les états s'_l et les transitions de ces états sont absents. Soit $c'_k(l) = P[\text{à l'étape } l, \widehat{V}'''_{T,k} \text{ est entré } a \text{ à travers } s_k]$, $k \in \gamma_K$. Soit \mathcal{P}_k l'ensemble de chemins de la CMTD $\widehat{V}'''_{T,k}$ par lesquels elle entre dans l'état a à travers s_k . Chaque chemin p est une séquence $(x_0, x_1, \dots, x_{L(p)})$ avec $P[(\widehat{V}'''_{T,k})_0 = x_0] > 0$, probabilité de transition non-nulle de chaque état x_l à x_{l+1} , $0 \leq l < L(p)$, $x_{L(p)-1} = s_k$, et $x_{L(p)} = a$. Soit $P(p)$, $p \in \mathcal{P}_k$, la probabilité que $\widehat{V}'''_{T,k}$

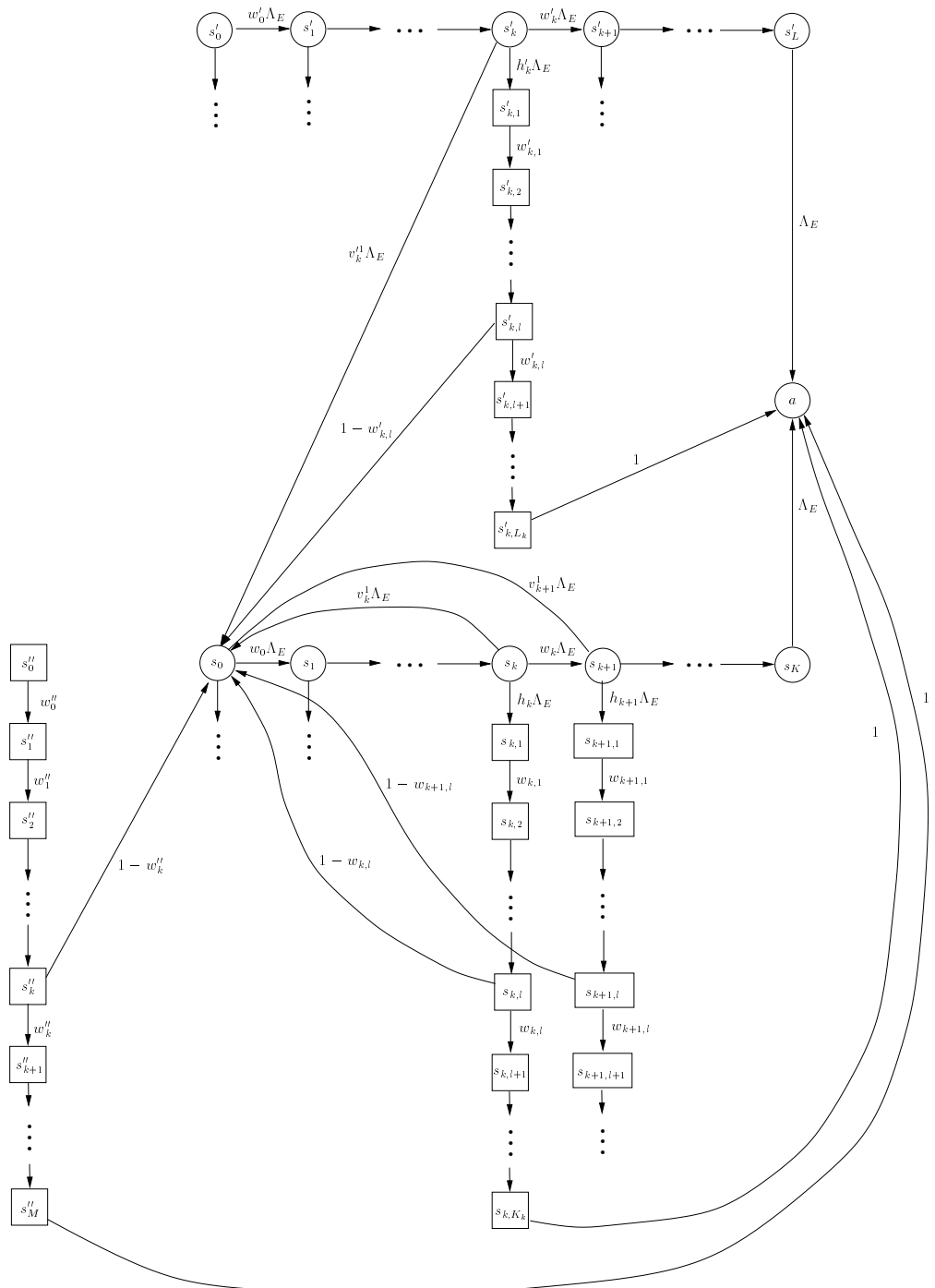


FIG. 3.7 – Diagramme de transition d'états de la CMTC $V_{T,k}'$ avec les états avec taux de sortie $\Lambda_{\overline{E}}$ remplacés par des commutateurs instantanés pour le cas $\alpha_{E'} > 0$, $\alpha_{\overline{E}} > 0$ et $A = 1$ (il peut exister des transitions à s_0 de tout état s_k , $0 < k \leq K - 1$, tout état $s_{l,m}$, $0 \leq l \leq k$, $1 \leq m \leq K_k - 1$, tout état $s_{l,m}$, $k + 1 \leq l \leq K - 1$, $m \geq 1$, tout état s'_l , $0 \leq l \leq L - 1$, tout état $s'_{l,m}$, $1 \leq m \leq L_l - 1$, et tout état s''_l , $0 \leq l \leq M - 1$).

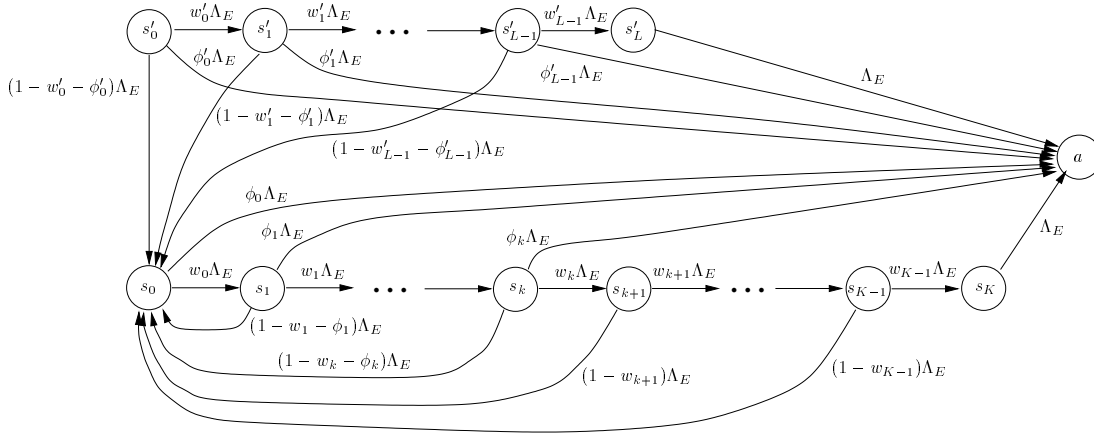


FIG. 3.8 – Diagramme de transition d'états de la CMTC $V''_{T,k}$ pour le cas $\alpha_{E'} > 0$.

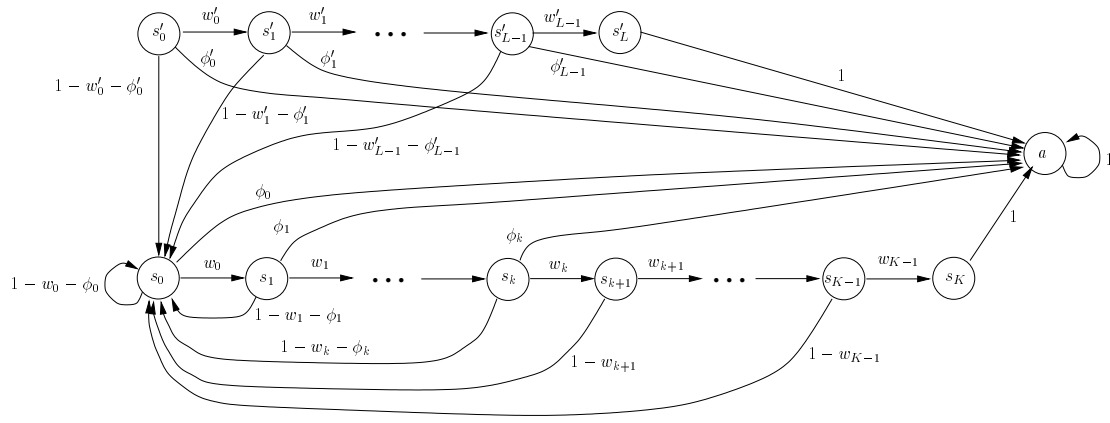


FIG. 3.9 – Diagramme de transition d'états de la CMTD $\widehat{V}''_{T,k}$ pour le cas $\alpha_{E'} > 0$.

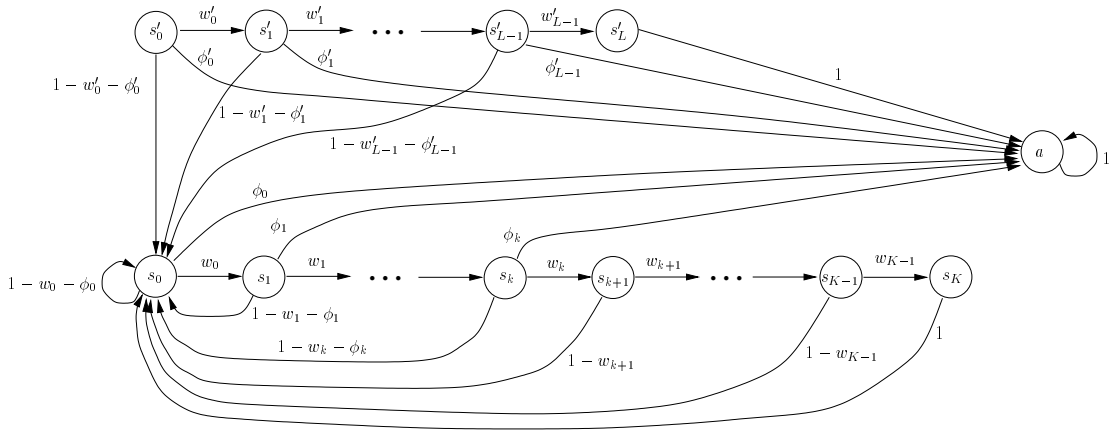


FIG. 3.10 – Diagramme de transition d'états de la CMTD $\widehat{V}_{T,k}^{III}$ pour le cas $\alpha_{E'} > 0$.

suivre le chemin p . Nous avons:

$$c_k(l) = \sum_{p \in \mathcal{P}_k, L(p) \leq l} P(p).$$

Soit \mathcal{P}'_k l'ensemble de chemins de la CMTD $\widehat{V}_{T,k}^{III}$ par lesquels elle entre l'état a à travers s_k . Soit $P'(p)$, $p \in \mathcal{P}'_k$ la probabilité que $\widehat{V}_{T,k}^{III}$ suive le chemin p . Nous avons:

$$c'_k(l) = \sum_{p \in \mathcal{P}'_k, L(p) \leq l} P'(p).$$

Par construction, $\mathcal{P}_k \subset \mathcal{P}'_k$ et, pour chacun $p \in \mathcal{P}_k$, $P'(p) = P(p)$. Donc, $c_k(l) \leq c'_k(l)$.

Soit $\widehat{V}_{T,k}^{IV}$, $k \in \gamma_K$ la CMTD obtenue de $\widehat{V}_{T,k}^{III}$ en remplaçant les états $s_{k+1}, s_{k+2}, \dots, s_K$ par des commutateurs instantanés. Le diagramme de transition d'états de $\widehat{V}_{T,k}^{IV}$ pour le cas $\alpha_{E'} > 0$ est montré à la Figure 3.11. Pour le cas $\alpha_{E'} = 0$, les états s'_i et les transitions de ces états sont absents. Soit $c''_k(l) = P[\text{à l'étape } l, \widehat{V}_{T,k}^{IV} \text{ a entré } a \text{ à travers } s_k]$, $k \in \gamma_K$. Pour chacun $p \in \mathcal{P}'_k$, soit $M(p)$ le nombre des états de le sous-ensemble $\{s_{k+1}, \dots, s_K\}$ dans le chemin p . Par construction,

$$c''_k(l) = \sum_{p \in \mathcal{P}'_k, L(p) - M(p) \leq l} P'(p)$$

et, donc, $c'_k(l) \leq c''_k(l)$.

Enfin, soit $\widehat{V}_{T,k}^V$, $k \in \gamma_K$, la CMTD obtenue à partir $\widehat{V}_{T,k}^{IV}$ en retardant l'entrée de $\widehat{V}_{T,k}^{IV}$ à a de s_k par une étape en ajoutant un état s_{k+1} , redirigeant à s_{k+1} la probabilité de transition ϕ_k de s_k à a , et ajoutant une probabilité de transition 1 de s_{k+1} à a . Le diagramme de transition d'états de $\widehat{V}_{T,k}^V$ pour le cas $\alpha_{E'} > 0$ est montré à la Figure 3.12. Pour le cas $\alpha_{E'} = 0$, les états s'_i et les transitions de ces états sont absents. Soit $c'''_k(l) = P[\text{à l'étape } l, \widehat{V}_{T,k}^V \text{ est entré } a \text{ à travers } s_{k+1}]$,

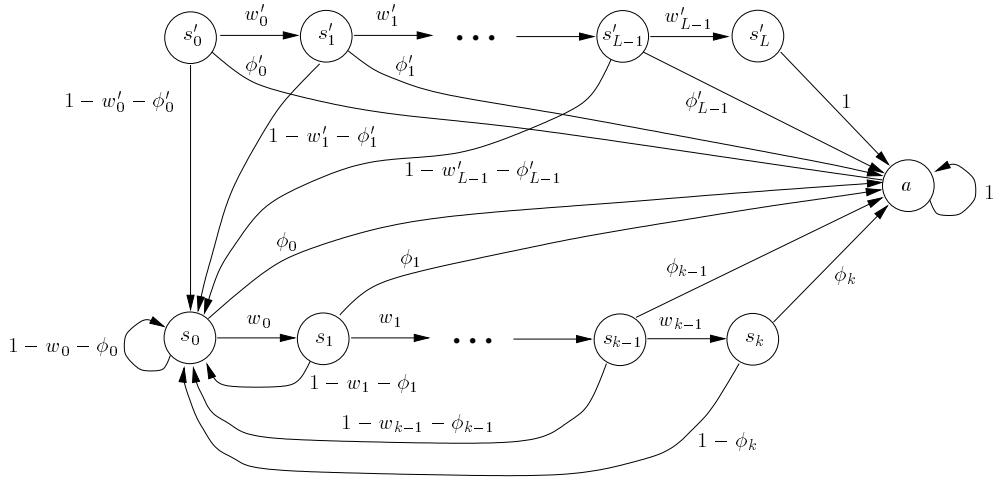


FIG. 3.11 – Diagramme de transition d'états de la CMTD $\widehat{V}_{T,k}^{IV}$ pour le cas $\alpha_{E'} > 0$.

$k \in \gamma_K$. Par la construction de $\widehat{V}_{T,k}^V$, $c_k''(l) = c_k'''(l+1)$, $k \in \gamma_K$. Récapitulatif, nous avons $c_k(l) \leq c_k'''(l+1)$, $k \in \gamma_K$, qui combiné avec (3.47) donne :

$$m_{K,L,M,k}^{e'''}(t) \leq r_{\max} \sum_{l=0}^{\infty} c_k'''(l+1) e^{-\Lambda_E t} \frac{(\Lambda_E t)^l}{l!}, \quad k \in \gamma_K. \quad (3.48)$$

Considérons maintenant, pour le cas $\alpha_{E'} > 0$, la CMTD Y obtenue à partir $\widehat{V}_{T,k}^V$ en ajoutant un état absorbant f_1 avec probabilité initiale nulle et redirigeant à f_1 les transitions des états $s'_0, s'_1, \dots, s'_{L-1}$ et des états s_0, s_1, \dots, s_{k-1} à a . La CMTD Y est un cas particulier de la CMTD $\widehat{V}_{K,L}$ considéré dans [14]. Pour le cas $\alpha_{E'} = 0$, soit Y la CMTD obtenue à partir de $\widehat{V}_{T,k}^V$ en ajoutant un état absorbant f_1 avec probabilité initiale nulle et redirigeant vers f_1 les transitions des états s_0, s_1, \dots, s_{k-1} à a . Dans ce cas, Y est un cas particulier de la CMTD \widehat{V}_K considéré dans [14]. Trivialement, $c_k'''(l)$ est aussi la probabilité que, à l'étape l , Y est entré a à travers s_{k+1} . Alors, appliquant la Proposition 3 de [14], en tenant compte que la distribution de probabilité initiale de Y est la même que la distribution de probabilité initiale de $\widehat{V}_{T,k}''$, employant (3.46), et employant Proposition 3.5, a), b) et c), pour le cas $\alpha_{E'} > 0$,

$$\begin{aligned} c_k'''(l) &\leq I_{l>k+1} P \left[(\widehat{V}_{T,k}'')_0 \in \{s_0, s'_0\} \right] (l-k-1) \left(\prod_{i=0}^{k-1} w_i \right) \phi_k \\ &= I_{l>k+1} (\alpha_r + \alpha_{\overline{E}} - a''(M) + \alpha_{E'}) (l-k-1) \left(\prod_{i=0}^{k-1} w_i \right) h_k \left(\prod_{i=1}^{K_k-1} w_{k,i} \right) \\ &= I_{l>k+1} (\alpha_S - a''(M)) (l-k-1) a(k) \frac{a(k,1)}{a(k)} \frac{a(k, K_k)}{a(k,1)} \\ &= I_{l>k+1} (\alpha_S - a''(M)) (l-k-1) a(k, K_k), \quad k \in \gamma_K. \end{aligned}$$

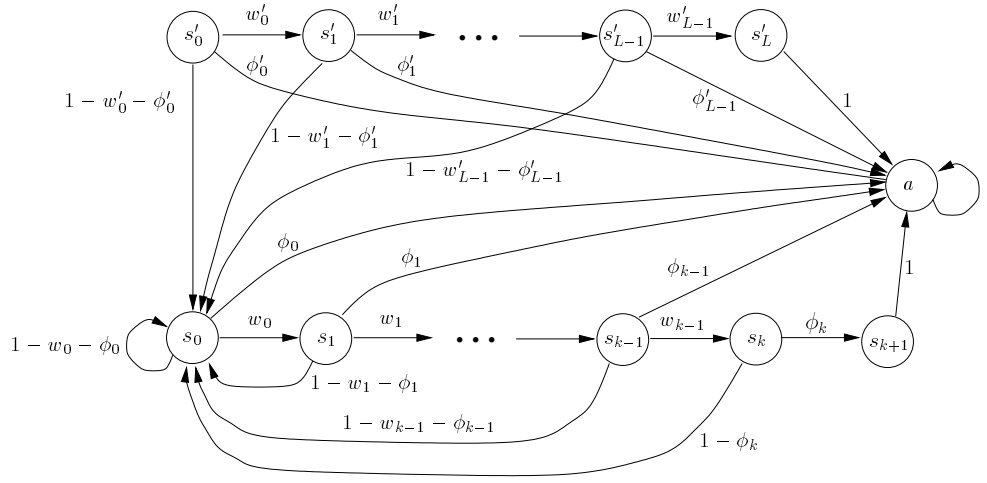


FIG. 3.12 – Diagramme de transition d'états de la CMTD $\widehat{V}_{T,k}^V$ pour le cas $\alpha_{E'} > 0$.

Similairement, pour le cas $\alpha_{E'} = 0$,

$$\begin{aligned}
 c_k'''(l) &\leq I_{l>k+1} P \left[(\widehat{V}_{T,k}'')_0 = s_0 \right] (l - k - 1) \left(\prod_{i=0}^{k-1} w_i \right) \phi_k \\
 &= I_{l>k+1} (\alpha_r + \alpha_{\overline{E}} - a''(M)) (l - k - 1) \left(\prod_{i=0}^{k-1} w_i \right) h_k \left(\prod_{i=1}^{K_k-1} w_{k,i} \right) \\
 &= I_{l>k+1} (\alpha_S - a''(M)) (l - k - 1) a(k) \frac{a(k, 1)}{a(k)} \frac{a(k, K_k)}{a(k, 1)} \\
 &= I_{l>k+1} (\alpha_S - a''(M)) (l - k - 1) a(k, K_k), \quad k \in \gamma_K.
 \end{aligned}$$

La combinaison $c_k'''(l) = I_{l>k+1} (\alpha_S - a''(M)) (l - k - 1) a(k, K_k)$, $k \in \gamma_K$ avec (3.48) complète la preuve de la proposition. \square

Dénotant par I_c la fonction indicatrice renvoyant la valeur 1 si la condition c est satisfaite et la valeur 0 autrement, nous pouvons récapituler les résultats obtenus jusqu'ici avec le théorème suivant.

Théorème 3.3.

$$m^e(t) = I_{\alpha_{\overline{E}}>0} m_M^{e'}(t) + I_{\alpha_{E'}>0} \left(m_L^{e''}(t) + \sum_{k \in \gamma'_L} m_{L,k}^{e''}(t) \right) + m_{K,L,M}^{e'''(t)} + \sum_{k \in \gamma_K} m_{K,L,M,k}^{e'''(t)},$$

où $m_M^{e'}(t)$ est donné par (3.39), $m_L^{e''}(t)$ est donné par (3.40), des bornes supérieures pour $m_{L,k}^{e''}(t)$, $k \in \gamma'_L$ sont données par (3.41), une borne supérieure pour $m_{K,L,M}^{e'''(t)}$ est donnée par Proposition 3.6, est des bornes supérieures pour $m_{K,L,M,k}^{e'''(t)}$, $k \in \gamma_K$ sont données par Proposition 3.7.

Dans la méthode randomisation régénérative divisée, $m(t)$ est calculé avec une erreur $\leq \varepsilon$. Les paramètres de troncature $K, L, M, K_k, k \in \gamma_K$, et $L_k, k \in \gamma'_L$ sont choisis de sorte que $m^e(t) \leq \varepsilon/2$, et une partie d'erreur $\varepsilon/2$ est disponible pour l'erreur de troncature associée à la solution du modèle transformé tronqué par randomisation standard. Une approche raisonnable est de distribuer l'erreur de troncature de modèle permis, $\varepsilon/2$, également parmi les composants applicables, selon si $\alpha_{E'} > 0$ et $\alpha_{\bar{E}} > 0$, de $m_M^{e'}(t)$, la somme de $m_L^{e''}(t)$ et les bornes supérieures pour $m_{L>,k}^{e''}(t)$ $k \in \gamma'_L$, et la somme de la borne supérieure pour $m_{K,L,M}^{e'''}(t)$ et les bornes supérieures pour $m_{K,L,M,k}^{e'''}(t)$, $k \in \gamma_K$; de distribuer également la partie d'erreur assignée à la somme de la borne supérieure pour $m_{K,L,M}^{e'''}(t)$ et des bornes supérieures pour $m_{K,L,M,k}^{e'''}(t)$, $k \in \gamma_K$ entre la borne supérieure pour $m_{K,L,M}^{e'''}(t)$ et la somme des bornes supérieures pour $m_{K,L,M,k}^{e'''}(t)$, $k \in \gamma_K$; au cas où $\alpha_{E'} > 0$, de distribuer également la partie d'erreur assignée à la somme de $m_L^{e''}(t)$ et les bornes supérieures pour $m_{L,k}^{e''}(t)$, $k \in \gamma'_L$ entre $m_L^{e''}(t)$ et la somme des bornes supérieures pour $m_{L,k}^{e''}(t)$, $k \in \gamma'_L$; de distribuer également la partie d'erreur assignée à la somme des bornes supérieures pour $m_{K,L,M,k}^{e'''}(t)$, $k \in \gamma_K$ parmi les bornes supérieures; et, finalement, si $\alpha_{E'} > 0$, de distribuer également la partie d'erreur assignée à la somme des bornes supérieures pour $m_{L,k}^{e''}(t)$, $k \in \gamma'_L$ parmi les bornes supérieures. Ceci mène à une valeur de M , pour le cas $\alpha_{\bar{E}} > 0$,

$$M = \min \left\{ m \geq 1 : r_{\max} a''(m) \sum_{k=m+1}^{\infty} e^{-\Lambda_{\bar{E}} t} \frac{(\Lambda_{\bar{E}} t)^k}{k!} \leq \varepsilon_1 \right\}, \quad (3.49)$$

où $\varepsilon_1 = \varepsilon/6$ si $\alpha_{E'} > 0$ et $\varepsilon_1 = \varepsilon/4$ si $\alpha_{E'} = 0$. Le paramètre de troncature K peut, alors, être choisi employant

$$K = \min \left\{ m \geq 1 : r_{\max}(\alpha_S - a''(M))a(m) \sum_{k=m+1}^{\infty} (k-m)e^{-\Lambda_E t} \frac{(\Lambda_E t)^k}{k!} \leq \varepsilon_2 \right\}, \quad (3.50)$$

où $\varepsilon_2 = \varepsilon/12$ si $\alpha_{E'} > 0$ et $\alpha_{\bar{E}} > 0$, $\varepsilon_2 = \varepsilon/8$ si $\alpha_{E'} > 0$ et $\alpha_{\bar{E}} = 0$ ou $\alpha_{E'} = 0$ et $\alpha_{\bar{E}} > 0$, et $\varepsilon_2 = \varepsilon/4$ si $\alpha_{E'} = 0$ et $\alpha_{\bar{E}} = 0$. Les paramètres de troncature $K_k, k \in \gamma_K$ peuvent être choisis employant

$$K_k = \min \left\{ m \geq 1 : r_{\max}(\alpha_S - a''(M))a(k, m) \sum_{l=k+1}^{\infty} (l-k)e^{-\Lambda_E t} \frac{(\Lambda_E t)^l}{l!} \leq \frac{\varepsilon_2}{|\gamma_K|} \right\}. \quad (3.51)$$

Finalement, pour le cas $\alpha_{e'} > 0$, le paramètre de troncature L peut être choisi employant

$$L = \min \left\{ m \geq 1 : r_{\max} a'(m) \sum_{k=m+1}^{\infty} e^{-\Lambda_E t} \frac{(\Lambda_E t)^k}{k!} \leq \varepsilon_3 \right\}, \quad (3.52)$$

où $\varepsilon_3 = \varepsilon/12$ si $\alpha_{\bar{E}} > 0$ et $\varepsilon_3 = \varepsilon/8$ si $\alpha_{\bar{E}} = 0$, et, aussi pour le cas $\alpha_{e'} > 0$, les paramètres de troncature $L_k, k \in \gamma'_L$ peut être choisis employant

$$L_k = \min \left\{ m \geq 1 : r_{\max} a'(k, m) \sum_{l=k+1}^{\infty} e^{-\Lambda_E t} \frac{(\Lambda_E t)^l}{l!} \leq \frac{\varepsilon_3}{|\gamma'_L|} \right\}. \quad (3.53)$$

La quantité $\sum_{k=m+1}^{\infty} e^{-\Lambda t} (\Lambda t)^k / k!$ est la probabilité que dans l'intervalle $[0, t]$ ont été plus que m arrivées dans un processus de Poisson avec taux d'arrivée Λ et, en conséquence, $\sum_{k=m+1}^{\infty} e^{-\Lambda t} (\Lambda t)^k / k!$ croît avec t . Regardant $\sum_{k=m+1}^{\infty} (k-m)e^{-\Lambda t} (\Lambda t)^k / k!$, nous pouvons écrire:

$$\sum_{k=m+1}^{\infty} (k-m)e^{-\Lambda t} \frac{(\Lambda t)^k}{k!} = \sum_{k=m+1}^{\infty} \sum_{i=m+1}^k e^{-\Lambda t} \frac{(\Lambda t)^k}{k!} = \sum_{i=m+1}^{\infty} \sum_{k=i}^{\infty} e^{-\Lambda t} \frac{(\Lambda t)^k}{k!},$$

et, étant donné que chaque terme $\sum_{k=i}^{\infty} e^{-\Lambda t} (\Lambda t)^k / k!$ croît avec t , $\sum_{k=m+1}^{\infty} (k-m)e^{-\Lambda t} (\Lambda t)^k / k!$ croîtra également avec t . Alors, au cas où $m(t)$ doit être calculé pour plusieurs valeurs de t , t_1, t_2, \dots, t_n , des paramètres appropriés de troncature pour toutes les valeurs de t peuvent être choisis employons (3.49)–(3.53) avec $t = t_{\max} = \max\{t_1, t_2, \dots, t_n\}$.

3.4 Description algorithmique

Les Figures 3.13 et 3.14 donnent une description algorithmique de la méthode randomisation régénérative divisée pour la mesure $m(t)$. La description algorithmique a comme entrées la CMTC X , le nombre d'états absorbants A , le taux de récompense $r_{f_1}, r_{f_2}, \dots, r_{f_A}$, un vecteur ligne de distribution de probabilité initiale $\alpha = (\alpha_i)_{i \in \Omega}$, le sous-ensemble $E \subset S$, l'état régénérateur $r \in E$, l'erreur permise ε , le nombre de points temporels n auquel $m(t)$ doit être calculée, et les points temporels t_1, t_2, \dots, t_n . La description algorithmique a comme sorties les valeurs évalués pour $m(t)$ aux points temporels donnés, $\tilde{m}(t_1), \tilde{m}(t_2), \dots, \tilde{m}(t_n)$. On suppose que les conditions C1–C10 concernant la structure de X et les choix du sous-ensemble E et de l'état régénérateur $r \in E$ sont satisfaits. Le modèle transformé tronqué est appelé V . L'algorithme fait deux traversales dans les lombes des peignes: la première pour déterminer les paramètres de troncature K et L et la seconde pour construire les dents. Pendant la première traversale du peigne ayant comme lombes les états s_k , l'algorithme détermine, par la condition $h_k > 0$, que, par la Proposition 3.5, b), est équivalent à $a(k, 1) > 0$, le sous-ensemble γ_k et enregistre dans la variable n_k le nombre de dents du peigne. Similairement, pour $\alpha_{E'} > 0$, pendant la première traversale du peigne ayant comme lombes les états s'_k , l'algorithme détermine, par la condition $h'_k > 0$, que, par la Proposition 3.5, e), est équivalent à $d(k, 1) > 0$, le sous-ensemble γ'_L et enregistre dans la variable n_k le nombre de dents du peigne. L'algorithme exige le calcul, pour m croissant, des sommes des formes

$$S(m, \lambda) = \sum_{k=m+1}^{\infty} e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!},$$

$$S'(m, \lambda) = \sum_{k=m+1}^{\infty} (k-m) e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}.$$

Des procédures efficaces et numériquement stables pour effectuer ces calculs qui peuvent être inclus dans la description algorithmique sont décrites dans [14].

Nous notons que, une fois que \mathbf{P} a été calculé, les taux de transition du modèle transformé tronqué sont obtenus sans substractions. Alors, la méthode randomisation régénérative divisée aura la même excellente stabilité numérique que la méthode randomisation standard. De plus, dans la méthode, l'erreur de calcul est bien-contrôlée et peut être spécifiée à l'avance.

3.5 Propriétés théoriques

Dans cette section, nous analyserons les propriétés théoriques relevant de la méthode randomisation régénérative divisée appliquée au calcul de la mesure $m(t)$. Nous démontrerons premièrement que, pour tous les modèles couverts par la méthode, la méthode a un comportement bénin, dans le sens que, en opposition avec la randomisation standard, les paramètres de troncations sont des fonctions douces de t et ε . Deuxièmement, nous définirons une classe de modèles Markoviens, incluant les modèles Markoviens typiques des systèmes tolérants aux fautes avec réparation différée, et, pour les modèles dans cette classe, nous obtiendrons des résultats théoriques plus forts permettant la prédiction approximée des valeurs des paramètres de troncature. Ces prédictions peuvent être utilisées pour prévoir pour un modèle particulier dans la classe si la randomisation régénérative divisée sera ou non moins coûteuse que la randomisation standard.

Employant (3.8), nous avons $\boldsymbol{\pi}(n) = \boldsymbol{\pi}(0)\mathbf{P}_{E,E}^n$. Mais, étant (3.4) $\mathbf{P}'_{E,E}$ la restriction de la matrice de probabilités de transition de Z à $E \times E$, et étant tous les états de Z dans E transitoires, on aura [49, Théorème 4.3] que $\pi_i(n)$, $i \in E$ diminuera géométriquement rapidement. Que $\pi'_i(n)$, $i \in E'$ diminue géométriquement rapidement peut être montré pareillement en employant (3.12) $\boldsymbol{\pi}'(n) = \boldsymbol{\pi}'(0)\mathbf{P}'_{E',E'}$, le fait que (3.5) $\mathbf{P}'_{E',E'}$ est la restriction à $E' \times E'$ de la matrice de probabilités de transition de Z' , et le fait que tous les états de Z' dans E' sont transitoires. Finalement, que $\pi''_i(k)$, $i \in \overline{E}$ aussi diminuent géométriquement rapidement peut être montré en employant (3.16) $\boldsymbol{\pi}''(n) = \boldsymbol{\pi}''(0)\mathbf{P}''_{\overline{E},\overline{E}}$, le fait que (3.6) $\mathbf{P}''_{\overline{E},\overline{E}}$ est la restriction à $\overline{E} \times \overline{E}$ de la matrice de probabilités de transition de Z'' , et le fait que tous les états de Z'' dans \overline{E} sont transitoires. La borne supérieure pour $m_{K,L,M}^{e'''}(t)$ donnée par la Proposition 3.6 est bornée supérieurement par $r_{\max}\alpha_S a(K) \sum_{k=K+1}^{\infty} (k-K)e^{-\Lambda_E t} (\Lambda_E t)^k / k!$, qui est analogue au terme de la borne supérieure de l'erreur de troncature modèle $m_{K,L}^{e''}(t)$ utilisé dans la randomisation régénérative [14]. De plus, les expressions pour $m_L^{e''}(t)$ (3.40) et $m_M^{e'}(t)$ (3.39) sont analogues au terme de la borne supérieure de l'erreur de troncature de modèle $m_L^{e'}(t)$ utilisé dans la randomisation régénérative [14]. Alors, nous pouvons étendre le Théorème 3 de [14] et établir $K = O(\log(\Lambda_E t / \varepsilon))$, $L = O(\log(1/\varepsilon))$, et $M = O(\log(1/\varepsilon))$. Concernant les longueurs des

```

Inputs:  $X, A, r_{f_1}, r_{f_2}, \dots, r_{f_A}, \alpha, E, r, \varepsilon, n, t_1, t_2, \dots, t_n$ 
Outputs:  $\tilde{m}(t_1), \tilde{m}(t_2), \dots, \tilde{m}(t_n)$ 
 $r_{\max} = \max\{r_{f_1}, r_{f_2}, \dots, r_{f_A}\};$ 
 $t_{\max} = \max\{t_1, t_2, \dots, t_n\};$ 
 $\Lambda_E = (1 + 10^{-4}) \max_{i \in E} \lambda_i; \Lambda_{\bar{E}} = (1 + 10^{-4}) \max_{i \in \bar{E}} \lambda_i;$ 
Obtain  $\mathbf{P}$ :
 $\alpha_{E'} = \sum_{i \in E'} \alpha_i; \alpha_{\bar{E}} = \sum_{i \in \bar{E}} \alpha_i; \alpha_S = \alpha_r + \alpha_{E'} + \alpha_{\bar{E}};$ 
for ( $i \in E$ )  $P_{i,E'} = \sum_{j \in E', P_{i,j} > 0} P_{i,j};$  for ( $i \in S$ )  $P_{i,\bar{E}} = \sum_{j \in \bar{E}, P_{i,j} > 0} P_{i,j};$ 
Build CTMC  $V$  including state  $s_0$  with initial probability 0 and
states  $f_i, 1 \leq i \leq A$ , with initial probabilities  $\alpha_{f_i}$ ;
if ( $\alpha_{\bar{E}} > 0$ ) {
  if ( $\alpha_{E'} = 0$ )  $tol = \varepsilon/4;$  else  $tol = \varepsilon/6;$ 
   $add\_state(V, s_0'', \alpha_{\bar{E}}); \boldsymbol{\pi}'' = (\alpha_i)_{i \in \bar{E}}; a'' = \alpha_{\bar{E}}; M = 0;$ 
  do {
    for ( $i = 1; i \leq A; i++$ ) {
       $v''^i = \sum_{j \in \bar{E}, P_{j,i} > 0} \pi_j'' P_{j,i} / a''; \mathbf{if}$  ( $v''^i > 0$ )  $add\_transition(V, s_M'', f_i, v''^i \Lambda_{\bar{E}});$ 
    }
     $w'' = \sum_{i \in \bar{E}} \pi_i'' P_{i,\bar{E}} / a''; q'' = \sum_{i \in \bar{E}} \pi_i'' P_{i,r} / a'';$ 
     $add\_state(V, s_{M+1}'', 0); add\_transition(V, s_M'', s_{M+1}'', w'' \Lambda_{\bar{E}});$ 
    if ( $q'' > 0$ )  $add\_transition(V, s_M'', s_0'', q'' \Lambda_{\bar{E}});$ 
     $n\boldsymbol{\pi}'' = \boldsymbol{\pi}'' \mathbf{P}_{\bar{E},\bar{E}}; \boldsymbol{\pi}'' = n\boldsymbol{\pi}''; M++; a'' = \sum_{i \in \bar{E}} \pi_i'';$ 
  }
  until ( $r_{\max} a'' \sum_{k=M+1}^{\infty} e^{-\Lambda_{\bar{E}} t_{\max}} (\Lambda_{\bar{E}} t_{\max})^k / k! \leq tol$ );
   $add\_transition(V, s_M'', a, \Lambda_{\bar{E}});$ 
}
else  $a'' = 0;$ 
if ( $\alpha_{E'} > 0$  &&  $\alpha_{\bar{E}} > 0$ )  $tol = \varepsilon/12;$  else if ( $\alpha_{E'} > 0$  ||  $\alpha_{\bar{E}} > 0$ )  $tol = \varepsilon/8;$  else  $tol = \varepsilon/4;$ 
 $\boldsymbol{\pi} = (I_{i=r})_{i \in E}; a = 1; K = 0; n\_k = 0;$ 
do {
  for ( $i = 1; i \leq A; i++$ ) {
     $v^i = \sum_{j \in E, P_{j,i} > 0} \pi_j P_{j,i} / a; \mathbf{if}$  ( $v^i > 0$ )  $add\_transition(V, s_K, f_i, v^i \Lambda_E);$ 
  }
   $h_K = \sum_{i \in E} \pi_i P_{i,\bar{E}} / a; w = \sum_{i \in E} \pi_i P_{i,E'} / a;$ 
   $add\_state(V, s_{K+1}, 0); add\_transition(V, s_K, s_{K+1}, w \Lambda_E);$ 
  if ( $h_K > 0$ )  $n\_k++;$ 
   $n\boldsymbol{\pi} = \boldsymbol{\pi} \mathbf{P}_{E,E}; \boldsymbol{\pi} = n\boldsymbol{\pi}; K++; a = \sum_{i \in E} \pi_i;$ 
}
until ( $r_{\max} (\alpha_S - a'') a \sum_{k=K+1}^{\infty} (k - K) e^{-\Lambda_E t_{\max}} (\Lambda_E t_{\max})^k / k! \leq tol$ );
 $add\_transition(V, s_K, a, \Lambda_E);$ 
 $\boldsymbol{\pi} = (I_{i=r})_{i \in E};$ 
for ( $k = 0; k \leq K - 1; k++$ ) {
  if ( $h_k > 0$ ) {
     $\boldsymbol{\pi}^{\bar{E}} = \boldsymbol{\pi} \mathbf{P}_{\bar{E},\bar{E}}; K' = 1; a = \sum_{i \in \bar{E}} \pi_i^{\bar{E}}; add\_state(V, s_{k,1}, 0); add\_transition(V, s_k, s_{k,1}, h_k \Lambda_E);$ 
    while ( $r_{\max} (\alpha_S - a'') a \sum_{l=k+1}^{\infty} (l - k) e^{-\Lambda_E t_{\max}} (\Lambda_E t_{\max})^l / l! > tol / n\_k$ ) {
      for ( $i = 1; i \leq A; i++$ ) {
         $v^i = \sum_{j \in \bar{E}, P_{j,i} > 0} \pi_j^{\bar{E}} P_{j,i} / a; \mathbf{if}$  ( $v^i > 0$ )  $add\_transition(V, s_{k,K'}, f_i, v^i \Lambda_{\bar{E}});$ 
      }
       $w = \sum_{i \in \bar{E}} \pi_i^{\bar{E}} P_{i,\bar{E}} / a; q = \sum_{i \in \bar{E}} \pi_i^{\bar{E}} P_{i,r} / a;$ 
       $add\_state(V, s_{k,K'+1}, 0); add\_transition(V, s_{k,K'}, s_{k,K'+1}, w \Lambda_{\bar{E}});$ 
      if ( $q > 0$ )  $add\_transition(V, s_{k,K'}, s_0, q \Lambda_{\bar{E}});$ 
       $n\boldsymbol{\pi}^{\bar{E}} = \boldsymbol{\pi}^{\bar{E}} \mathbf{P}_{\bar{E},\bar{E}}; \boldsymbol{\pi}^{\bar{E}} = n\boldsymbol{\pi}^{\bar{E}}; K'++; a = \sum_{i \in \bar{E}} \pi_i^{\bar{E}};$ 
    }
     $add\_transition(V, s_{k,K'}, a, \Lambda_{\bar{E}});$ 
  }
  if ( $k < K - 1$ ) {  $n\boldsymbol{\pi} = \boldsymbol{\pi} \mathbf{P}'_{E,E}; \boldsymbol{\pi} = n\boldsymbol{\pi};$  }
}
}

```

FIG. 3.13 – Description algorithmique de la randomisation régénérative divisée pour la mesure $m(t)$.


```

if ( $\alpha_{E'} > 0$ ) {
  if ( $\alpha_{\overline{E}} > 0$ )  $tol = \varepsilon/12$ ; else  $tol = \varepsilon/8$ ;
   $add\_state(V, s'_0, \alpha_{E'})$ ;  $\boldsymbol{\pi}' = (\alpha_i)_{i \in E'}$ ;  $a' = \sum_{i \in E'} \alpha_i$ ;  $L = 0$ ;  $n \mathcal{K} = 0$ ;
  do {
    for ( $i = 1$ ;  $i \leq A$ ;  $i++$ ) {
       $v^{ti} = \sum_{j \in E', P_{j,i} > 0} \pi'_j P_{j,i} / a'$ ; if ( $v^{ti} > 0$ )  $add\_transition(V, s'_L, f_i, v^{ti} \Lambda_E)$ ;
    }
     $w' = \sum_{i \in E'} \pi'_i P_{i,E'} / a'$ ;  $h'_L = \sum_{i \in E'} \pi'_i P_{i,\overline{E}} / a'$ ;
     $add\_state(V, s'_{L+1}, 0)$ ;  $add\_transition(V, s'_L, s'_{L+1}, w' \Lambda_E)$ ;
    if ( $h'_L > 0$ )  $n \mathcal{K}++$ ;
     $n \boldsymbol{\pi}' = \boldsymbol{\pi}' \mathbf{P}_{E',E'}$ ;  $\boldsymbol{\pi}' = n \boldsymbol{\pi}'$ ;  $L++$ ;  $a' = \sum_{i \in E'} \pi'_i$ ;
  }
  until ( $r_{\max} a' \sum_{k=L+1}^{\infty} e^{-\Lambda_E t_{\max}} (\Lambda_E t_{\max})^k / k! \leq tol$ );
   $add\_transition(V, s'_L, a, \Lambda_E)$ ;
   $\boldsymbol{\pi}' = (\alpha_i)_{i \in E'}$ ;
  for ( $k = 0$ ;  $k \leq L - 1$ ;  $k++$ ) {
    if ( $h'_k > 0$ ) {
       $\boldsymbol{\pi}^{\overline{E}} = \boldsymbol{\pi}' \mathbf{P}_{E',\overline{E}}$ ;  $L' = 1$ ;  $a' = \sum_{i \in \overline{E}} \pi_i^{\overline{E}}$ ;  $add\_state(V, s'_{k,1}, 0)$ ;  $add\_transition(V, s'_k, s'_{k,1}, h'_k \Lambda_E)$ ;
      while ( $r_{\max} a' \sum_{l=k+1}^{\infty} e^{-\Lambda_E t_{\max}} (\Lambda_E t_{\max})^l / l! > tol / n \mathcal{K}$ ) {
        for ( $i = 1$ ;  $i \leq A$ ;  $i++$ ) {
           $v^{ti} = \sum_{j \in \overline{E}, P_{j,i} > 0} \pi_j^{\overline{E}} P_{j,i} / a'$ ; if ( $v^{ti} > 0$ )  $add\_transition(V, s'_{k,L'}, f_i, v^{ti} \Lambda_{\overline{E}})$ ;
        }
         $w' = \sum_{i \in \overline{E}} \pi_i^{\overline{E}} P_{i,\overline{E}} / a'$ ;  $q' = \sum_{i \in \overline{E}} \pi_i^{\overline{E}} P_{i,r} / a'$ ;
         $add\_state(V, s'_{k,L'+1}, 0)$ ;  $add\_transition(V, s'_{k,L'}, s'_{k,L'+1}, w' \Lambda_{\overline{E}})$ ;
        if ( $q' > 0$ )  $add\_transition(V, s'_{k,L'}, s_0, q' \Lambda_{\overline{E}})$ ;
         $n \boldsymbol{\pi}^{\overline{E}} = \boldsymbol{\pi}^{\overline{E}} \mathbf{P}_{\overline{E},\overline{E}}$ ;  $\boldsymbol{\pi}^{\overline{E}} = n \boldsymbol{\pi}^{\overline{E}}$ ;  $L'++$ ;  $a' = \sum_{i \in \overline{E}} \pi_i^{\overline{E}}$ ;
      }
       $add\_transition(V, s'_{k,L'}, a, \Lambda_{\overline{E}})$ ;
    }
    if ( $k < L - 1$ ) {  $n \boldsymbol{\pi}' = \boldsymbol{\pi}' \mathbf{P}_{E',E'}$ ;  $\boldsymbol{\pi}' = n \boldsymbol{\pi}'$ ; }
  }
}
 $\Lambda = \max\{\Lambda_E, \Lambda_{\overline{E}}\}$ ;  $N = \min\{m \geq 0 : r_{\max} \sum_{k=m+1}^{\infty} e^{-\Lambda t_{\max}} (\Lambda t_{\max})^k / k! \leq \varepsilon/2\}$ ;
Let  $\widehat{V}$  be the randomized DTMC of  $V$  with randomization rate  $\Lambda$ ;
Give  $N$  steps to  $\widehat{V}$  and compute  $d(k) = \sum_{i=1}^A r_{f_i} P[\widehat{V}_k = f_i]$ ,  $k = 0, 1, \dots, N$ ;
for ( $i = 1$ ;  $i \leq n$ ;  $i++$ ) for ( $k = 0$ ,  $\widehat{m}(t_i) = 0$ ;  $k \leq N$ ;  $k++$ )  $\widehat{m}(t_i) += d(k) e^{-\Lambda t_i} (\Lambda t_i)^k / k!$ 

```

FIG. 3.14 – Description algorithmique de la randomisation régénérative divisée pour la mesure $m(t)$ (continuation).

dents des peignes, soit $K_{\bar{E}} = \sum_{k \in \gamma_K} K_k$ et $L_{\bar{E}} = \sum_{k \in \gamma'_L} L_k$, nous avons le résultat suivant.

Théorème 3.4. $K_{\bar{E}} = O((\log(\Lambda_{Et}/\varepsilon))^2)$ et $L_{\bar{E}} = O((\log(1/\varepsilon))^2)$.

Preuve. Les états dans \bar{E} de la CMTD Z'' sont transitoires. De plus, la restriction de la matrice de probabilité de transition de Z'' à $\bar{E} \times \bar{E}$ est (3.6) $\mathbf{P}_{\bar{E},\bar{E}}$. Ceci implique [49, Théorème 4.3] que les éléments de $\mathbf{P}_{\bar{E},\bar{E}}^l$ diminuent géométriquement rapidement avec l et, donc, que $\|(\mathbf{P}_{\bar{E},\bar{E}}^T)^l\|_1 = \|(\mathbf{P}_{\bar{E},\bar{E}}^l)^T\|_1$ diminue géométriquement rapidement avec l . On commencera par démontrer $K_{\bar{E}} = \sum_{k \in \gamma_K} K_k = O((\log(\Lambda_{Et}/\varepsilon))^2)$. Employant $\boldsymbol{\pi}(k, l)^T = (\mathbf{P}_{\bar{E},\bar{E}}^T)^{l-1} \mathbf{P}_{\bar{E},\bar{E}}^T \boldsymbol{\pi}(k)^T$, qui vient de (3.9) et (3.10), $\|\boldsymbol{\pi}(k)^T\|_1 \leq 1$, et $\|\mathbf{P}_{\bar{E},\bar{E}}^T\|_1 \leq 1$, nous obtenons (3.19)

$$a(k, l) = \|\boldsymbol{\pi}(k, l)^T\|_1 \leq \|(\mathbf{P}_{\bar{E},\bar{E}}^T)^{l-1}\|_1 \|\mathbf{P}_{\bar{E},\bar{E}}^T\|_1 \|\boldsymbol{\pi}(k)^T\|_1 \leq \|(\mathbf{P}_{\bar{E},\bar{E}}^T)^{l-1}\|_1$$

et, donc, $a(k, l)$ diminuera géométriquement rapidement avec l , i.e. il existera $C > 0$, $0 < b < 1$, et $l_0 \geq 0$ tels que

$$a(k, l) \leq Cb^l, \quad l \geq l_0. \quad (3.54)$$

D'autre part, la borne supérieure pour $m_{K,L,M,k}^{ell}(t)$, $k \in \gamma_K$, donné par la Proposition 3.7 satisfait

$$\begin{aligned} r_{\max}(\alpha_S - a''(M))a(k, K_k) & \sum_{l=k+1}^{\infty} (l-k)e^{-\Lambda_{Et}} \frac{(\Lambda_{Et})^l}{l!} \\ & = r_{\max}(\alpha_S - a''(M))a(k, K_k) \sum_{l=1}^{\infty} l e^{-\Lambda_{Et}} \frac{(\Lambda_{Et})^{k+l}}{(k+l)!} \\ & \leq r_{\max} \alpha_S a(k, K_k) \sum_{l=1}^{\infty} e^{-\Lambda_{Et}} \frac{(\Lambda_{Et})^{k+l}}{(k+l-1)!} \\ & = r_{\max} \alpha_S a(k, K_k) \Lambda_{Et} \sum_{l=k}^{\infty} e^{-\Lambda_{Et}} \frac{(\Lambda_{Et})^l}{l!} < r_{\max} \alpha_S a(k, K_k) \Lambda_{Et}. \end{aligned} \quad (3.55)$$

Employant (3.55), pour chaque $k \in \gamma_k$, le paramètre de troncature K_k sera borné supérieurement par le minimum entier $l \geq 1$ satisfaisant $r_{\max} \alpha_S a(k, l) \Lambda_{Et} \leq \varepsilon_2/|\gamma_K|$. Employant (3.54), cet entier ne sera pas plus grand que $K_{\text{bs}} = \max\{l_0, m\}$, où m est le minimum entier $l \geq 1$ satisfaisant $r_{\max} \alpha_S Cb^l \Lambda_{Et} \leq \varepsilon_2/|\gamma_K|$. Mais, m n'est pas plus grand que $\max\{1, \lfloor x \rfloor + 1\}$, où x satisfait

$$r_{\max} \alpha_S Cb^x \Lambda_{Et} = \frac{\varepsilon_2}{|\gamma_K|}.$$

Prenant les logarithmes,

$$\log r_{\max} + \log \alpha_S + \log C + x \log b + \log(\Lambda_{Et}) = \log \left(\frac{\varepsilon_2}{|\gamma_K|} \right),$$

$$x = \frac{\log(|\gamma_K| \Lambda_E t / \varepsilon_2) + \log r_{\max} + \log \alpha_S + \log C}{\log(1/b)}.$$

Étant $0 < b < 1$, $\log(1/b) > 0$ et, donc, l'expression précédente pour x démontre que x , m et K_{bs} sont $O(\log(|\gamma_K| \Lambda_E t / \varepsilon_2)) = O(\log(K \Lambda_E t / \varepsilon)) = O(\log(\log(\Lambda_E t / \varepsilon) \Lambda_E t / \varepsilon))$, parce que $|\gamma_K| \leq K$, ε_2 est égal à ε excepté par un facteur constant, et $K = O(\log(\Lambda_E t / \varepsilon))$. Il est important de noter que K_{bs} est indépendant de k et, donc, $K_{\bar{E}} \leq K K_{\text{bs}}$. Alors,

$$\begin{aligned} K_{\bar{E}} &= O\left(\log\left(\frac{\Lambda_E t}{\varepsilon}\right) \log\left(\frac{\log\left(\frac{\Lambda_E t}{\varepsilon}\right) \Lambda_E t}{\varepsilon}\right)\right) \\ &= O\left(\log\left(\frac{\Lambda_E t}{\varepsilon}\right) \left(\log\left(\log\left(\frac{\Lambda_E t}{\varepsilon}\right)\right) + \log\left(\frac{\Lambda_E t}{\varepsilon}\right)\right)\right) \\ &= O\left(\left(\log\left(\frac{\Lambda_E t}{\varepsilon}\right)\right)^2\right). \end{aligned}$$

Ensuite, nous démontrerons que $L_{\bar{E}} = \sum_{k \in \gamma_L} L_k = O((\log(1/\varepsilon))^2)$. Employant $\boldsymbol{\pi}'(k, l)^T = (\mathbf{P}_{\bar{E}, \bar{E}}^T)^{l-1} \mathbf{P}_{E', \bar{E}}^T \boldsymbol{\pi}'(k)^T$, qui suit de (3.13) et (3.14), $\|\boldsymbol{\pi}'(k)^T\|_1 \leq 1$, et $\|\mathbf{P}_{E', \bar{E}}^T\|_1 \leq 1$, nous avons (3.21)

$$a'(k, l) = \|\boldsymbol{\pi}'(k, l)^T\|_1 \leq \|(\mathbf{P}_{\bar{E}, \bar{E}}^T)^{l-1}\|_1 \|\mathbf{P}_{E', \bar{E}}^T\|_1 \|\boldsymbol{\pi}'(k)^T\|_1 \leq \|(\mathbf{P}_{\bar{E}, \bar{E}}^T)^{l-1}\|_1,$$

et, étant donné que, comme il a été démontré, $\|(\mathbf{P}_{\bar{E}, \bar{E}}^T)^l\|_1$ diminue géométriquement rapidement avec l , $a'(k, l)$ diminuera aussi géométriquement rapidement avec l , et il existera $C > 0$, $0 < b < 1$, et $l_0 \geq 0$ tels que

$$a'(k, l) \leq C b^l, \quad l \geq l_0. \quad (3.56)$$

D'autre part, la borne supérieure pour $m_{L, k}^{e''}(t)$ donnée par (3.41) satisfait

$$r_{\max} a'(k, L_k) \sum_{l=k+1}^{\infty} e^{-\Lambda_E t} \frac{(\Lambda_E t)^l}{l!} < r_{\max} a'(k, L_k). \quad (3.57)$$

Employant (3.57), pour chaque $k \in \gamma'_L$, le paramètre de troncature L_k sera borné supérieurement par le minimum entier $l \geq 1$ satisfaisant $r_{\max} a'(k, l) \leq \varepsilon_3 / |\gamma'_L|$. Employant (3.56), ce nombre entier ne sera pas plus grand que $L_{\text{bs}} = \max\{l_0, m'\}$, où m' est le minimum entier $l \geq 1$ satisfaisant $r_{\max} C b^l \leq \varepsilon_3 / |\gamma'_L|$. Mais, m' n'est pas plus grand que $\max\{1, \lfloor x' \rfloor + 1\}$, où x' satisfait

$$r_{\max} C b^{x'} = \frac{\varepsilon_3}{|\gamma'_L|}.$$

Prenant les logarithmes,

$$\log r_{\max} + \log C + x' \log b = \log\left(\frac{\varepsilon_3}{|\gamma'_L|}\right),$$

$$x' = \frac{\log(|\gamma'_L|/\varepsilon_3) + \log r_{\max} + \log C}{\log(1/b)}.$$

Étant $0 < b < 1$, $\log(1/b) > 0$ et, donc, l'expression précédente pour x' démontre que x' , m' et L_{bs} sont $O(\log(|\gamma'_L|/\varepsilon_3)) = O(\log(L/\varepsilon)) = O(\log(\log(1/\varepsilon))/\varepsilon)$, parce que $|\gamma'_L| \leq L$, ε_3 est égal à ε excepté pour un facteur constant, et $L = O(\log(1/\varepsilon))$. En tant qu'avant, il est important de noter que L_{bs} est indépendant de k et, donc, $L_{\overline{E}} \leq LL_{\text{bs}}$. Alors,

$$\begin{aligned} L_{\overline{E}} &= O\left(\log\left(\frac{1}{\varepsilon}\right) \log\left(\frac{\log\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)}{\varepsilon}\right)\right) \\ &= O\left(\log\left(\frac{1}{\varepsilon}\right) \left(\log\left(\log\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)\right) + \log\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)\right)\right) \\ &= O\left(\left(\log\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)\right)^2\right). \quad \square \end{aligned}$$

En résumé, $K, L, M, K_{\overline{E}}$ et $L_{\overline{E}}$ sont tous des fonctions douces de t et ε . Cette propriété s'appelle *comportement bénin* et implique que, pour assez grand X et assez grand t , la randomisation régénérative divisée sera sensiblement moins coûteuse que la randomisation standard. Ceci parce que: 1) le coût de la première phase de la randomisation régénérative divisée (génération du modèle transformé tronqué) se compose des composants approximativement proportionnels à, respectivement, $K, L, M, K_{\overline{E}}$ et $L_{\overline{E}}$, tandis que le coût de randomisation standard est, pour grand t , approximativement proportionnel à $\max_{i \in \Omega} \lambda_i t$, et 2) étant le maximum taux de départ du modèle transformé tronqué non plus grand que $(1 + \theta)$ fois le maximum taux de départ du modèle original, le coût de la deuxième phase de la randomisation régénérative divisée (solution du modèle transformé tronqué par randomisation standard) rapportera avec le coût de la randomisation standard non plus que la taille du modèle transformés tronqué par rapport avec la taille de modèle original, X .

Le coût de la randomisation régénérative divisée dépend, naturellement, des choix de E et de l'état régénérateur r , de plus ces choix influencent le comportement de $a(k), d(k), a''(k), a(k, l)$, et $a'(k, l)$ et les valeurs des paramètres de troncature $K, L, M, K_k, k \in \gamma_K$ et $L_k, k \in \gamma'_L$. Idéalement, E et r devraient être choisis de sorte que $a(k), d(k), a''(k), a(k, l)$, et $a'(k, l)$ diminuent aussi rapidement que possible. Pour des modèles Markoviens généraux, le choix automatique de E et r ne semble pas être facile, et, puis, l'application de la méthode est basée sur l'intuition de l'utilisateur pour faire des choix appropriés. Nous considérerons, cependant, une classe de modèles, la classe C_2 , pour laquelle des choix naturels pour E et r existent, et, pour des modèles dans cette classe et ces choix naturels on obtiendra des résultats théoriques plus forts que le comportement "bénin" qui peuvent être utilisés pour prévoir le coût de la méthode.

La classe du modèle C_2 inclut tout les CMTC X avec un espace d'états fini $\Omega = S \cup$

$\{f_1, f_2, \dots, f_A\}$, $|S| \geq 3$, $A \geq 1$, où f_i sont des états absorbants et, ou tous les états dans S sont transitoires ou X a une simple classe récurrente $C \subset S$, tels que tous les états sont accessibles, et pour lesquels il existe une partition $S_0 \cup S_1 \cup \dots \cup S_{N_C} \cup \bar{S}_1 \cup \bar{S}_2 \cup \dots \cup \bar{S}_{\bar{N}_C}$ pour S satisfaisant les propriétés:

- P1) $S_0 = \{o\}$ (i.e. $|S_0| = 1$).
- P2) si X a une simple classe récurrente $C \subset S$, $o \in C$.
- P3) $|S_0 \cup S_1 \cup \dots \cup S_{N_C}| \geq 2$, et $|\bar{S}_1 \cup \bar{S}_2 \cup \dots \cup \bar{S}_{\bar{N}_C}| \geq 1$.
- P4) $\lambda_{o, S_1 \cup \dots \cup S_{N_C}} > 0$.
- P5) pour tous $i \in S_k$, $0 < k \leq N_C$, $\lambda_{i, S_0 \cup \dots \cup S_k - \{i\}} = 0$.
- P6) pour tous $i \in \bar{S}_k$, $1 \leq k \leq \bar{N}_C$, $\lambda_{i, S_1 \cup \dots \cup S_{N_C}} = 0$.
- P7) $\max_{1 \leq k \leq \bar{N}_C} \max_{i \in \bar{S}_k} \lambda_{i, \bar{S}_k - \{i\} \cup \bar{S}_{k+1} \cup \dots \cup \bar{S}_{\bar{N}_C}}$ est sensiblement plus petit que $\min_{1 \leq k \leq \bar{N}_C} \min_{i \in \bar{S}_k} \lambda_{i, S_0 \cup \bar{S}_1 \cup \dots \cup \bar{S}_{k-1} \cup \{f_1, f_2, \dots, f_A\}} > 0$.

La classe inclut les modèles typiques de faute/réparation de fiabilité avec distributions exponentielles de temps de faute et de réparation dans lesquels la réparation est différée jusqu'à une certaine condition sur le sous-ensemble de composants en faute est satisfaite et, puis, procède jusqu'à atteindre l'état dans laquelle aucun composant est en faute, étant donné que les taux de faute sont sensiblement plus petits que les taux de réparation. Pour ces modèles, une partition pour laquelle les propriétés P1—P7 sont satisfaites est la partition dans laquelle le sous-ensemble S_k inclut les états opérationnels sans réparation et même nombre de composants en faute, avec les sous-ensembles S_k ordonnés par nombre croissant de composants en faut, et le sous-ensemble \bar{S}_k inclut les états opérationnels avec réparation et même nombre de composants en panne, avec les sous-ensembles \bar{S}_k ordonnés par nombre croissant de composants en faute. Comme illustration, une partition pour $S = \{1, 2, 2', 3, 3', 4, 5, 6\}$ qui montre que le modèle Markovien de fiabilité montré dans la Figure 3.1 appartient à la classe C_2 serait $S_0 = \{1\}$, $S_1 = \{2, 3\}$, $\bar{S}_1 = \{2', 3'\}$, $\bar{S}_2 = \{4, 5, 6\}$. Modèles semblables avec distributions de temps de faute avec distributions du type phase acycliques (en anglais, cyclic phase-type distributions) [41], qui peuvent être employées pour approcher distributions des variables aléatoires positives non-exponentielles [10]), appartient aussi à la classe C_2 , à condition que les taux de faut soient sensiblement plus petits que les taux de départ de la CMTCs acycliques définissant les distributions du type phase. Avec les choix $E = S_0 \cup S_1 \cup \dots \cup S_{N_C}$ et $r = o$ les modèles dans la classe C_2 satisfont les conditions C1—C8 rendant la méthode randomisation régénérative divisée applicable. De plus, avec ces choix, en raison de la propriété P7, les modèles se déplacent “rapidement” des états dans \bar{E} à l'état o ou à un état f_i , faisant ces choix naturel. Considérons un modèle de classe C_2 et une partition $S_0 \cup S_1 \cup \dots \cup S_{N_C} \cup \bar{S}_1 \cup \bar{S}_2 \cup \dots \cup \bar{S}_{\bar{N}_C}$ pour S satisfaisant les propriétés P1—P7.

On a le résultat suivant ¹.

Théorème 3.5. *Pour les modèles dans la classe C_2 et les sélections $E = S_0 \cup S_1 \cup \dots \cup S_{N_C}$ et $r = 0$, $a(k) \leq h_E(k)$ et $a'(k) \leq \alpha_{E'} h_{E'}(k)$, où, pour $k \rightarrow \infty$, $h_E(k) \sim C \binom{k}{p-1} q_E^k$, $C > 0$, p entier ≥ 1 , et $h_{E'}(k) \sim C' \binom{k}{p'-1} q_{E'}^k$, $C' > 0$, p' entier ≥ 1 , avec*

$$q_E = 1 - \frac{\min_{0 < k \leq N_C} \min_{i \in S_k} \lambda_i}{(1 + \theta) \max_{0 \leq k \leq N_C} \max_{i \in S_k} \lambda_i}.$$

La preuve du théorème 3.5 utilisera le lemme technique suivant.

Lemme 3.2. *Soit*

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{0} \\ \boldsymbol{\beta} & \mathbf{B} \end{pmatrix},$$

où $\mathbf{0}$ est un vecteur ligne de dimension appropriée avec tous ses éléments égaux à 0 et $\boldsymbol{\beta}$ est un vecteur colonne de dimension appropriée. Alors, $\rho(\mathbf{A}) = \rho(\mathbf{B})$.

Preuve. Les valeurs propres de \mathbf{A} sont les racines de $\det(\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A})$, où \mathbf{I} dénote une matrice d'identité des dimensions appropriées. Mais,

$$\det(\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A}) = \begin{vmatrix} \lambda & \mathbf{0} \\ -\boldsymbol{\beta} & \lambda \mathbf{I} - \mathbf{B} \end{vmatrix} = \lambda \det(\lambda \mathbf{I} - \mathbf{B}),$$

qui prouve que l'ensemble des valeurs propres de \mathbf{A} inclut exactement 0 et l'ensemble des valeurs propres de \mathbf{B} , impliquant le résultat. \square

Preuve du Théorème 3.5. Dans la preuve, nous dénoterons par $\rho(\mathbf{A})$ le rayon spectral d'une matrice carrée \mathbf{A} . De (3.12), pour $k \geq 0$, $\boldsymbol{\pi}'(k)^T = (\mathbf{P}_{E',E'}^T)^k \boldsymbol{\pi}'(0)^T$. Alors, employant (3.20), $\pi'_i(k) \geq 0$, $i \in E'$, et (3.11) $\sum_{i \in E'} \pi'_i(0) = \alpha_{E'}$,

$$\begin{aligned} a'(k) &= \sum_{i \in E'} \pi'_i(k) = \|\boldsymbol{\pi}'(k)^T\|_1 = \|(\mathbf{P}_{E',E'}^T)^k \boldsymbol{\pi}'(0)^T\|_1 \\ &\leq \|(\mathbf{P}_{E',E'}^T)^k\|_1 \|\boldsymbol{\pi}'(0)^T\|_1 = \|(\mathbf{P}_{E',E'}^T)^k\|_1 \sum_{i \in E'} \pi'_i(0) \\ &= \alpha_{E'} \|(\mathbf{P}_{E',E'}^T)^k\|_1. \end{aligned}$$

Avec l'ordonnance des états S_1, \dots, S_{N_C} , les éléments de la partie triangulaire supérieure de $\mathbf{P}_{E',E'}^T$ sont 0 et les éléments diagonaux de $\mathbf{P}_{E',E'}^k$ ont des valeurs

$$1 - \frac{\lambda_i}{(1 + \theta) \max_{0 \leq k \leq N_C} \max_{i \in S_k} \lambda_i}, \quad i \in S_k, 0 < k \leq N_C,$$

¹ $x(k) \sim y(k)$ pour $k \rightarrow \infty$ dénoter $\lim_{k \rightarrow \infty} x(k)/y(k) = 1$.

et $\rho(\mathbf{P}_{E',E'}^T) = q_E$. Alors, ils existent [54, Théorème 3.1] $C' > 0$ et p' entier ≥ 1 tels que, pour $k \rightarrow \infty$, $\|(\mathbf{P}_{E',E'}^T)^k\|_1 \sim C' \binom{k}{p'-1} q_E^k$. De (3.8), pour $k \geq 0$, $\boldsymbol{\pi}(k)^T = (\mathbf{P}_{E',E'}^T)^k \boldsymbol{\pi}(0)^T$. Alors, employant (3.18), $\pi_i(k) \geq 0$, et (3.7) $\sum_{i \in E} \pi_i(0) = 1$,

$$\begin{aligned} a(k) &= \sum_{i \in E} \pi_i(k) = \|\boldsymbol{\pi}(k)^T\|_1 = \|(\mathbf{P}_{E',E'}^T)^k \boldsymbol{\pi}(0)^T\|_1 \\ &\leq \|(\mathbf{P}_{E',E'}^T)^k\|_1 \|\boldsymbol{\pi}(0)^T\|_1 = \|(\mathbf{P}_{E',E'}^T)^k\|_1 \sum_{i \in E} \pi_i(0) = \|(\mathbf{P}_{E',E'}^T)^k\|_1. \end{aligned}$$

Avec l'ordonnance des états S_0, S_1, \dots, S_{N_C} , $\mathbf{P}_{E,E}^T$ a la forme

$$\mathbf{P}_{E,E}^T = \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{0} \\ \boldsymbol{\beta} & \mathbf{P}_{E',E'}^T \end{pmatrix},$$

où $\mathbf{0}$ dénote un vecteur ligne avec tous ses composants égaux à 0 et $\boldsymbol{\beta}$ dénote un vecteur colonne. Selon Lemme 3.2, $\rho(\mathbf{P}_{E,E}^T) = \rho(\mathbf{P}_{E',E'}^T)$, et, donc, $\rho(\mathbf{P}_{E,E}^T) = q_E$. Alors, appliquant une autre fois [54, Théorème 3.1], ils existent $C > 0$ et p entier ≥ 1 tels que, pour $k \rightarrow \infty$, $\|(\mathbf{P}_{E,E}^T)^k\|_1 \sim C \binom{k}{p-1} q_E^k$. \square

Théorème 3.5 assure que, pour des modèles de classe C_2 avec les choix $E = S_0 \cup S_1 \cup \dots \cup S_{N_C}$ et $r = o$, tous les deux $a(k)$ et $d'(k)$ sont bornés par quelque chose qui descend asymptotiquement avec un facteur de valeur q_E . Pour ε assez petit, les paramètres de troncature K et L de la randomisation régénérative divisée seraient principalement déterminés par les taux de diminution de $a(k)$ et $d'(k)$ et, par conséquent, le Théorème 3.5 suggère que les paramètres de troncature K et L pour des modèles de classe C_2 avec les choix naturels pour E et r peuvent être bornés supérieurement rudement en utilisant q_E^m au lieu de, respectivement, $r_{\max}(\alpha_S - a''(M))a(m) \sum_{k=m+1}^{\infty} (k-m)e^{-\Lambda_E t} (\Lambda_E t)^k / k!$ dans (3.50) et $r_{\max} a'(m) \sum_{k=m+1}^{\infty} e^{-\Lambda_E t} (\Lambda_E t)^k / k!$ dans (3.52). Soit $R_E = \max_{0 \leq k \leq N_C} \max_{i \in S_k} \lambda_i / \min_{0 < k \leq N_C} \min_{i \in S_k} \lambda_i \geq 1$. Nous avons $q_E = 1 - 1/((1 + \theta)R_E) \approx 1 - 1/R_E$. Pour R_E près de 1, q_E sera petit et K et L seront petits et, pour R_E croissant, q_E approchera 1, et K et L augmenteront.

Soit

$$\delta = \frac{\max_{1 \leq k \leq \overline{N}_C} \max_{i \in \overline{S}_k} \lambda_{i, \overline{S}_k - \{i\} \cup \overline{S}_{k+1} \cup \dots \cup \overline{S}_{\overline{N}_C}}}{\min_{1 \leq k \leq \overline{N}_C} \min_{i \in \overline{S}_k} \lambda_{i, S_0 \cup \overline{S}_1 \cup \dots \cup \overline{S}_{k-1} \cup \{f_1, \dots, f_A\}}}.$$

Le paramètre δ peut être considéré comme un paramètre de “rareté” mesurant comment la propriété P7 est satisfaite. En termes du paramètre de rareté δ , nous pouvons modéliser les taux de transition des états $i \in \overline{S}_k$ aux états $j \in \overline{S}_k - \{i\} \cup \overline{S}_{k+1} \cup \dots \cup \overline{S}_{\overline{N}_C}$, $1 \leq k \leq \overline{N}_C$ comme $\lambda_{i,j} = \Lambda_{i,j} \delta$, où $\Lambda_{i,j}$ sont constants, et nous pouvons modéliser les taux de transition restants comme constants. Alors, nous pouvons étudier le comportement de la randomisation régénérative divisée pour des modèles de classe C_2 avec les choix $E = S_0 \cup S_1 \cup \dots \cup S_{N_C}$ et $r = o$

pour $\delta \rightarrow 0$. Soit $P_{i,(\delta)}$ les probabilités de transition de \widehat{X} en fonction du paramètre de rareté δ et soit $\mathbf{P}_{\overline{E},\overline{E}}(\delta)$ la matrice $\mathbf{P}_{\overline{E},\overline{E}}$ de probabilité de transition en fonction de δ . Notons que, pour $i \in \overline{S}_k, j \in \overline{S}_k - \{i\} \cup \overline{S}_{k+1} \cup \dots \cup \overline{S}_{\overline{N}_C}, 1 \leq k \leq \overline{N}_C$, $\lim_{\delta \rightarrow 0} P_{i,j}(\delta) = 0$ et que, en utilisant la propriété P6,

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} P_{i,i}(\delta) = 1 - \frac{\lambda_{i,S_0 \cup \overline{S}_1 \cup \dots \cup \overline{S}_{k-1} \cup \{f_1, \dots, f_A\}}}{(1 + \theta) \max_{1 \leq k \leq \overline{N}_C} \max_{i \in \overline{S}_k} \lambda_{i,S_0 \cup \overline{S}_1 \cup \dots \cup \overline{S}_{k-1} \cup \{f_1, \dots, f_A\}}}, \quad i \in \overline{S}_k, 1 \leq k \leq \overline{N}_C.$$

Alors, nous avons le résultat suivant:

Théorème 3.6. *Pour des modèles de classe C_2 et les sélections $E = S_0 \cup S_1 \cup \dots \cup S_{N_C}$ et $r = o$, $a(k, l) \leq h_{\overline{E}}(l - 1)$, $a'(k, l) \leq \alpha_{E'} h_{\overline{E}}(l - 1)$, et $a''(l) \leq \alpha_{\overline{E}} h_{\overline{E}}(l)$, où, pour $l \rightarrow \infty$, $h_{\overline{E}}(l) \sim C(\delta) \binom{l}{p(\delta)-1} \rho(\mathbf{P}_{\overline{E},\overline{E}}(\delta)^T)^l$, $C(\delta) > 0$, $p(\delta)$ entier ≥ 1 , avec $\lim_{\delta \rightarrow 0} \rho(\mathbf{P}_{\overline{E},\overline{E}}(\delta)^T) = q_{\overline{E}}$ et*

$$q_{\overline{E}} = 1 - \frac{\min_{1 \leq k \leq \overline{N}_C} \min_{i \in \overline{S}_k} \lambda_{i,S_0 \cup \overline{S}_1 \cup \dots \cup \overline{S}_{k-1} \cup \{f_1, \dots, f_A\}}}{(1 + \theta) \max_{1 \leq k \leq \overline{N}_C} \max_{i \in \overline{S}_k} \lambda_{i,S_0 \cup \overline{S}_1 \cup \dots \cup \overline{S}_{k-1} \cup \{f_1, \dots, f_A\}}}.$$

Preuve. Employant (3.9) et (3.10), pour $k \geq 0$ et $l \geq 1$, $\boldsymbol{\pi}(k, l)^T = (\mathbf{P}_{\overline{E},\overline{E}}(\delta)^T)^{l-1} \mathbf{P}_{\overline{E},\overline{E}}^T \boldsymbol{\pi}(k)^T$. Alors, employant (3.19), $\pi_i(k, l) \geq 0$, $i \in \overline{E}$, $\|\mathbf{P}_{\overline{E},\overline{E}}^T\|_1 \leq 1$, et $\|\boldsymbol{\pi}(k)^T\|_1 \leq 1$, pour $k \geq 0$ and $l \geq 1$,

$$\begin{aligned} a(k, l) &= \sum_{i \in \overline{E}} \pi_i(k, l) = \|\boldsymbol{\pi}(k, l)^T\|_1 = \|(\mathbf{P}_{\overline{E},\overline{E}}(\delta)^T)^{l-1} \mathbf{P}_{\overline{E},\overline{E}}^T \boldsymbol{\pi}(k)^T\|_1 \\ &\leq \|(\mathbf{P}_{\overline{E},\overline{E}}(\delta)^T)^{l-1}\|_1 \|\mathbf{P}_{\overline{E},\overline{E}}^T\|_1 \|\boldsymbol{\pi}(k)^T\|_1 \leq \|(\mathbf{P}_{\overline{E},\overline{E}}(\delta)^T)^{l-1}\|_1. \end{aligned}$$

Similairement, employant (3.13) et (3.14), pour $k \geq 0$ et $l \geq 1$, $\boldsymbol{\pi}'(k, l)^T = (\mathbf{P}_{\overline{E},\overline{E}}(\delta)^T)^{l-1} \mathbf{P}_{E',\overline{E}}^T \boldsymbol{\pi}'(k)^T$. Alors, employant (3.21), $\pi'_i(k, l) \geq 0$, $i \in \overline{E}$, $\|\mathbf{P}_{E',\overline{E}}^T\|_1 \leq 1$ et, de (3.11) et (3.12), tenant compte $\|\mathbf{P}_{E',E'}^T\|_1 \leq 1$, $\|\boldsymbol{\pi}'(k)^T\|_1 = \|(\mathbf{P}_{E',E'}^T)^k \boldsymbol{\pi}'(0)^T\|_1 \leq \|\mathbf{P}_{E',E'}^T\|_1^k \|\boldsymbol{\pi}'(0)^T\|_1 \leq \|\boldsymbol{\pi}'(0)^T\|_1 = \alpha_{E'}$,

$$\begin{aligned} a'(k, l) &= \sum_{i \in \overline{E}} \pi'_i(k, l) = \|\boldsymbol{\pi}'(k, l)^T\|_1 = \|(\mathbf{P}_{\overline{E},\overline{E}}(\delta)^T)^{l-1} \mathbf{P}_{E',\overline{E}}^T \boldsymbol{\pi}'(k)^T\|_1 \\ &\leq \|(\mathbf{P}_{\overline{E},\overline{E}}(\delta)^T)^{l-1}\|_1 \|\mathbf{P}_{E',\overline{E}}^T\|_1 \|\boldsymbol{\pi}'(k)^T\|_1 \leq \alpha_{E'} \|(\mathbf{P}_{\overline{E},\overline{E}}(\delta)^T)^{l-1}\|_1. \end{aligned}$$

Finalement, employant (3.16), pour $l \geq 0$, $\boldsymbol{\pi}''(l)^T = (\mathbf{P}_{\overline{E},\overline{E}}(\delta)^T)^l \boldsymbol{\pi}''(0)^T$. Alors, employant (3.22), $\pi''_i(l) \geq 0$, $i \in \overline{E}$, et (3.15) $\|\boldsymbol{\pi}''(0)^T\|_1 = \alpha_{\overline{E}}$,

$$\begin{aligned} a''(l) &= \sum_{i \in \overline{E}} \pi''_i(l) = \|\boldsymbol{\pi}''(l)^T\|_1 = \|(\mathbf{P}_{\overline{E},\overline{E}}(\delta)^T)^l \boldsymbol{\pi}''(0)^T\|_1 \leq \|(\mathbf{P}_{\overline{E},\overline{E}}(\delta)^T)^l\|_1 \|\boldsymbol{\pi}''(0)^T\|_1 \\ &= \alpha_{\overline{E}} \|(\mathbf{P}_{\overline{E},\overline{E}}(\delta)^T)^l\|_1. \end{aligned}$$

Soit $\rho(\mathbf{P}_{\overline{E},\overline{E}}(\delta)^T)$ le rayon spectral de $\mathbf{P}_{\overline{E},\overline{E}}(\delta)^T$. Alors, il existera [54, Théorème 3.1] $C(\delta) > 0$ et $p(\delta)$ entier ≥ 1 tels que, pour $l \rightarrow \infty$, $\|(\mathbf{P}_{\overline{E},\overline{E}}(\delta)^T)^l\|_1 \sim C(\delta) \binom{l}{p(\delta)-1} \rho(\mathbf{P}_{\overline{E},\overline{E}}(\delta)^T)^l$. De plus, étant les valeurs propres d'une matrice fonctions continues des éléments de la matrice [48, Théorème 3.13], $\lim_{\delta \rightarrow 0} \rho(\mathbf{P}_{\overline{E},\overline{E}}(\delta)^T) = \rho(\mathbf{P}_{\overline{E},\overline{E}}(0)^T)$. Mais, avec l'ordonnance des sous-ensembles $\overline{S}_k, \overline{S}_1, \dots, \overline{S}_{\overline{N}_C}$, les éléments dans la partie triangulaire inférieure de $\mathbf{P}_{\overline{E},\overline{E}}(0)^T$ sont 0 et les éléments diagonaux ont des valeurs

$$1 - \frac{\lambda_{i, S_0 \cup \overline{S}_1 \cup \dots \cup \overline{S}_{k-1} \cup \{f_1, \dots, f_A\}}}{(1 + \theta) \max_{1 \leq k \leq \overline{N}_C} \max_{i \in \overline{S}_k} \lambda_{i, S_0 \cup \overline{S}_1 \cup \dots \cup \overline{S}_{k-1} \cup \{f_1, \dots, f_A\}}}, \quad i \in \overline{S}_k, 1 \leq k \leq \overline{N}_C$$

et, donc, $\rho(\mathbf{P}_{\overline{E},\overline{E}}(0)^T) = q_{\overline{E}}$. \square

Théorème 3.6 assure que, pour des modèles de classe C_2 avec les choix $E = S_0 \cup S_1 \cup \dots \cup S_{N_C}$ et $r = o$, $a''(l)$, $a(k, l)$ et $a'(k, l)$ sont bornés supérieurement par quelque chose qui diminue asymptotiquement avec un facteur avec de valeur $q_{\overline{E}}$ pour $\delta \rightarrow 0$. Pour assez petit ε , les paramètres de troncature M , K_k , $k \in \gamma_K$ et L_k , $k \in \gamma'_L$ de la randomisation régénérative divisée seront principalement déterminés par les taux de diminution de $d'(l)$, $a(k, l)$, et $a'(k, l)$ et, donc, le Théorème 3.6 suggère que les paramètres de troncature M , K_k , $k \in \gamma_K$ et L_k , $k \in \gamma'_L$ pour des modèles de classe C_2 avec les choix naturels pour E et r peuvent être bornés supérieurement rudement utilisant $q_{\overline{E}}^m$ au lieu de, respectivement, $r_{\max} a''(m) \sum_{k=m+1}^{\infty} e^{-\Lambda_{\overline{E}} t} (\Lambda_{\overline{E}} t)^k / k!$ dans (3.49), $r_{\max} (\alpha_S - a''(M)) a(k, m) \sum_{l=k+1}^{\infty} (l - k) e^{-\Lambda_{\overline{E}} t} (\Lambda_{\overline{E}} t)^l / l!$ dans (3.51), et $r_{\max} a'(k, m) \sum_{l=k+1}^{\infty} e^{-\Lambda_{\overline{E}} t} (\Lambda_{\overline{E}} t)^l / l!$ dans (3.53). Soit $R_{\overline{E}} = \max_{1 \leq k \leq \overline{N}_C} \max_{i \in \overline{S}_k} \lambda_i / \min_{1 \leq k \leq \overline{N}_C} \min_{i \in \overline{S}_k} \lambda_i \geq 1$. Nous avons $q_{\overline{E}} \approx 1 - 1 / ((1 + \theta) R_{\overline{E}}) \approx 1 - 1 / R_{\overline{E}}$. Comme $R_{\overline{E}}$ est plus grand, $q_{\overline{E}}$ est plus proche et les M , K_k , $k \in \gamma_K$ et L_k , $k \in \gamma'_L$ sont plus grandes. Selon la discussion et les expériences numériques dans [14], pour assez petit ε et $R_{\overline{E}} \gg 1$, M , K_k , $k \in \gamma_K$ et L_k , $k \in \gamma'_L$ sont bornés supérieurement rudement par $30 R_{\overline{E}}$.

Notons que tous les deux R_E et $R_{\overline{E}}$ sont des caractéristiques “visibles” des modèles (ils peuvent être estimés facilement). Ceci implique que, pour des modèle de classe C_2 avec les choix naturels pour E et r , les paramètres de troncature K , L , M , K_k , $k \in \gamma_K$, et L_k , $k \in \gamma'_L$ peuvent être bornés supérieurement rudement dans la pratique, et ces bornes supérieures approximatives peuvent être employées pour prévoir le coût de la randomisation régénérative divisée et anticiper quand la méthode sera sensiblement plus rapide que la randomisation standard.

3.6 Analyse numérique

Dans cette section, on utilisera un modèle Markovien de fiabilité de classe C_2 d'un réseau d'interconnexion ASEN-MAX 16×16 [29] sous un protocole sans retour-arrière (en anglais “non-backtracking”) pour analyser le coût computationnel de la randomisation régénérative divisée et

la comparer avec ceux de la randomisation standard, la randomisation régénérative [14], l'uniformisation adaptative [39], et la randomisation avec la détection du régime quasistationnaire [18]. L'analyse de la fiabilité des réseaux d'interconnexion de ce genre est difficile et a été le sujet de recherche intensive (voir, par exemple, [6, 7, 8, 20, 36, 52, 53]).

La Figure 3.15 montre l'architecture d'un réseau d'interconnexion ASEN-MAX 16×16 . Le réseau d'interconnexion inclut un étage des multiplexeurs, trois étages des commutateurs, et un étage des démultiplexeurs. Les liens sont assumés parfaitement fiables. On suppose que le réseau est opérationnel si l'ensemble des composants sans faute est tel que, en présence d'une demande simple de n'importe quelle source à n'importe quelle destination, le protocole "non-backtracking" employé par le réseau d'interconnexion réussit à conduire la demande. Cette hypothèse est garantie d'être pessimiste [45]. On considérera la possibilité que une faute d'un multiplexeur, un commutateur, ou un démultiplexeurs peut être non couverte et conduire à la défaillance du réseau. La structure du réseau d'interconnexion est telle que, supposant la couverture de toutes les fautes, le réseau tolère la faute de n'importe quel composant simple. Les multiplexeurs et les démultiplexeurs ont un taux de faute λ_M ; les commutateurs ont un taux de faute λ_S . Les fautes des multiplexeurs et démultiplexeurs sont couvertes avec la probabilité C_M ; les fautes des commutateurs sont couvertes avec la probabilité C_S . Il y a un seul réparateur. La réparation commence quand le nombre de composants en panne est ≥ 2 , et continue jusqu'à tous les composants en faute aient été réparés. Les multiplexeurs et les démultiplexeurs sont réparés avec taux μ_M ; les commutateurs sont réparés avec taux μ_S . La réparation des commutateurs à priorité interrompant (en anglais, "preemptive priority") sur la réparation des multiplexeurs et des démultiplexeurs. Le composant à réparer est choisi aléatoirement entre les composants en faute avec maximum priorité de réparation. Nous emploierons les valeurs pour les paramètres du modèle $\lambda_M = 4 \times 10^{-6} \text{ h}^{-1}$, $\lambda_S = 1.2 \times 10^{-5} \text{ h}^{-1}$, $C_M = 0.995$, $C_S = 0.99$, $\mu_M = 2 \text{ h}^{-1}$, et, pour μ_S , deux valeurs: 0.4 h^{-1} et 0.08 h^{-1} . Concernant la distribution de probabilité initiale, nous considérerons deux cas: cas 1) l'état initial est l'état sans composants en faute, et, cas 2) avec la probabilité 0.5, l'état initial est l'état dans lequel le seul composant en faute est le commutateur 0 de l'étape 0, et, avec la probabilité 0.5, l'état initial est l'état dans lequel les composants en panne sont le commutateur 0 de l'étape 0 et le multiplexeur supérieur.

La mesure d'intérêt est la non-fiabilité au temps t , $nf(t)$. Cette mesure pourrait être calculée en utilisant un CMTC avec un état absorbant représentant la défaillance du système et un sous-ensemble d'états transitoires comprenant tous les états dans lesquels le système est opérationnel. Cependant, le réseau d'interconnexion a un grand nombre de composants (56) et une telle CMTC serait extrêmement grande, rendant non-praticable un calcul numérique exact de $nf(t)$. Le problème peut être évité en employant des modèles bornés. Un modèle Markovien, X_{bi} , rapportant une borne inférieure pour $nf(t)$ aurait un espace d'état, $S \cup \{f_1, f_2\}$, où S est un

sous-ensemble d'états opérationnels et f_1 et f_2 sont des états absorbants. Les taux de transition de X_{bi} entre états dans S seront comme ceux du modèle exact. Le modèle entrera f_1 quand le système défaille d'un état opérationnel dans S et entrerait f_2 quand le système entre un état opérationnel non inclu dans S . La distribution initiale de X_{bi} dans S serait comme celle du modèle exact, la probabilité initiale de X_{bi} dans f_1 serait la probabilité que initialement le système est en défaillance et la probabilité initiale de X_{bi} dans f_2 serait la probabilité de que initialement le système est en un état opérationnel non inclu dans S . La borne inférieure pour $nf(t)$ serait $nf_{bi}(t) = P[X_{bi}(t) = f_1]$. Un modèle Markovien, X_{bi} , rapportant une borne supérieure pour $nf(t)$ aurait un espace d'état $S \cup \{f_1\}$, où S est un sous-ensemble d'états opérationnels et f_1 est un état absorbant. Les taux de transition de X_{bs} entre états dans S seront comme ceux du modèle exact. Le modèle entrerait f_1 quand le système défaille ou il entre dans un état opérationnel non inclu dans S . La distribution de probabilité initial de X_{bs} dans S serait comme celle du modèle exact. La probabilité initial de X_{bs} dans f_1 serait la probabilité de que initialement le système est en défaillance ou dans un état opérationnel non inclu dans S . La borne supérieure pour $nf(t)$ serait $nf_{bs}(t) = P[X_{bs}(t) = f_1]$. Inclure dans S les états opérationnels avec jusqu'à 4 composants en faute donne des bornes très ajustées. Ainsi, pour $\mu_S = 0,4 \text{ h}^{-1}$, cas 1 et $t = 100.000 \text{ h}$, nous obtenons $nf_{bi}(t) = 0,652058783$ et $nf_{bs}(t) = 0,652058789$. Avec ce choix, $|S| = 315.045$ et les deux modèles bornants ont des tailles maniables. Tous les états dans S sont transitoires et les deux modèles bornants appartiennent à la classe modèle C_2 . Nous comparerons la performances des méthodes en utilisant le modèle bornant rapportant $nf_{bs}(t)$. Pour la randomisation régénérative divisée nous prendrons pour E et r les choix naturels, c.-à-d. E inclura les états sans réparation et r sera l'état o sans composants en faute. Le cas 1 illustrera le cas $\alpha_{E'} = 0, \alpha_{\bar{E}} = 0$. Le cas 2 illustrera le cas plus général ($\alpha_{E'} > 0, \alpha_{\bar{E}} > 0$). Le modèle appartient également à la classe de modèles C considérée dans [14] et, pour la randomisation régénérative, nous prendrons le choix $r = o$. Pour toutes les méthodes nous demanderons une borne pour l'erreur $\varepsilon = 10^{-9}$. Tous les temps de CPU sont mesurés avec un seul temps t et sur un poste de travail avec un processeur Sun-Blade 1000 et 4 GB de mémoire principale.

Nous commencerons par illustrer la performance de la randomisation régénérative divisée. En particulier, on illustrera le comportement des paramètres de troncature du modèle transformé en fonction de t . Table 3.1 donne K et $K_{\bar{E}}$, pour le cas 1 et les deux valeurs pour μ_S , en fonction de t . Table 3.2 donne $K, L, M, K_{\bar{E}}$, et $L_{\bar{E}}$, pour le cas 2 et les deux valeurs pour μ_S , en fonction de t . Nous pouvons noter que tous les paramètres de troncature croissent doucement avec t . Les paramètres de troncature K et L ont des valeurs très petites dans tous les cas. C'est dû au fait que, le système ayant beaucoup de composants avec taux de faute semblables, les taux de départ des états dans E sont très semblables et, alors, R_E est légèrement plus grands que 1 et q_E est très petit ($q_E = 0,0289$). Les bornes supérieures approximatives pour K et L suggérées à la

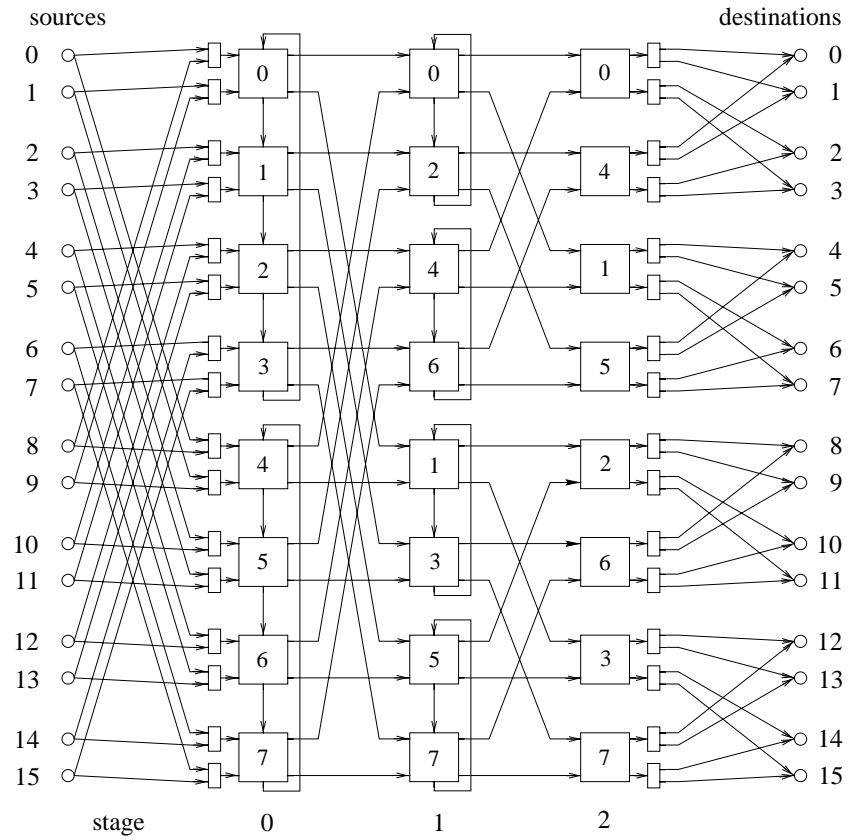


FIG. 3.15 – Architecture du réseau d'interconnexion ASEN-MAX 16 × 16.

TAB. 3.1 – K et $K_{\overline{E}}$ comme fonction de t pour le cas 1 et les deux valeurs pour μ_S .

t (h)	$\mu_S = 0,4 \text{ h}^{-1}$		$\mu_S = 0,08 \text{ h}^{-1}$	
	K	$K_{\overline{E}}$	K	$K_{\overline{E}}$
10	3	69	3	359
20	3	87	3	463
50	3	110	3	592
100	3	128	3	686
200	4	167	4	896
500	4	208	4	1.120
1.000	5	262	5	1.414
2.000	5	306	5	1.658
5.000	6	395	6	2.148
10.000	7	474	7	2.572
20.000	8	544	8	2.955
50.000	8	592	8	3.226
100.000	9	641	9	3.499

Section 3.5 sont très bonnes. Ainsi, pour le cas 2, $\mu_S = 0,4 \text{ h}^{-1}$ et $t = 100.000 \text{ h}$, la borne supérieure approximative pour K est 7, très semblable à la valeur exacte $K = 9$, et la borne supérieure approximative pour L est 7, identique à la valeur exacte $L = 7$. Les paramètres de troncature M , K_k , $k \in \gamma_K$, et L_k , $k \in \gamma'_L$ ont des valeurs petites pour $\mu_S = 0,4 \text{ h}^{-1}$ parce que, dans ce cas, les taux de départ des états dans \overline{E} ne sont pas très différents et $R_{\overline{E}}$ a une valeur modérée ($R_{\overline{E}} \approx 5$). Pour $\mu_S = 0,08 \text{ h}^{-1}$, ces paramètres de troncature ont des valeurs plus élevées, parce que, dans ce cas, les taux de départ des états dans \overline{E} sont plus différents et $R_{\overline{E}}$ a une valeur plus grande ($R_{\overline{E}} \approx 25$). Les paramètres de troncature K_k , $k \in \gamma_K$ et L_k , $k \in \gamma'_L$ diminuent avec k . Ainsi, pour le cas 2, $\mu_S = 0,4 \text{ h}^{-1}$, et $t = 100.000 \text{ h}$, nous avons $K_1 = 145$, $K_2 = 128$, $K_3 = 112$, $K_4 = 95$, $K_5 = 78$, $K_6 = 60$, $K_7 = 43$, et $K_8 = 25$ ($a(0,1) = 0$ et, puis, le peigne ayant comme lombes les états s_k n'a aucune dent attachée à l'état s_0), et $L_0 = 126$, $L_1 = 109$, $L_2 = 92$, $L_3 = 75$, $L_4 = 58$, $L_5 = 41$, et $L_6 = 22$. On peut également noter que la borne supérieure approximative $30R_{\overline{E}}$ pour les paramètres de troncature M , K_k , $k \in \gamma_K$, et L_k , $k \in \gamma'_L$ est satisfait et est un peu ample. Ainsi, pour $\mu_S = 0,4 \text{ h}^{-1}$, la borne supérieure approximative a une valeur ≈ 150 , qui est un peu plus grande que les valeurs de M , K_k , $k \in \gamma_K$, et L_k , $k \in \gamma'_L$ pour le cas 2, $\mu_S = 0,4 \text{ h}^{-1}$, et $t = 100.000 \text{ h}$. Ceci semble confirmer l'application des bornes supérieures approximatives pour les paramètres de troncature.

TAB. 3.2 – K , L , M , $K_{\overline{E}}$, et $L_{\overline{E}}$ comme fonction de t pour le cas 2 et les deux valeurs pour μ_S .

t (h)	$\mu_S = 0,4 \text{ h}^{-1}$					$\mu_S = 0,08 \text{ h}^{-1}$				
	K	L	M	$K_{\overline{E}}$	$L_{\overline{E}}$	K	L	M	$K_{\overline{E}}$	$L_{\overline{E}}$
10	3	2	43	81	141	3	2	51	421	760
20	3	2	63	99	151	3	2	81	524	816
50	3	3	98	121	189	3	3	155	651	1.023
100	3	3	100	138	210	3	3	263	745	1.137
200	4	3	100	183	231	4	3	444	988	1.249
500	4	4	100	223	284	4	4	554	1.209	1.541
1.000	5	4	100	283	316	5	4	554	1.535	1.717
2.000	6	5	100	347	372	6	5	554	1.877	2.024
5.000	7	6	100	441	446	7	6	554	2.398	2.415
10.000	7	6	100	505	481	7	6	554	2.750	2.609
20.000	8	7	100	583	521	8	7	554	3.166	2.817
50.000	9	7	100	664	523	9	7	554	3.556	2.835
100.000	9	7	100	686	523	9	7	554	3.738	2.835

Ensuite, nous comparerons le coût computationnel de la randomisation régénérative divisée (RRD) avec ceux de la randomisation standard (RS), la randomisation régénérative (RR), l’uniformisation adaptative (UA), et la randomisation avec détection du régime quasistationnaire (RDQ). Pour être justes à la comparaison, pour UA nous emploierons la variante “uniformisation étagée avec taux convergé” (en anglais, “layered uniformization with converged rate”) de l’uniformisation adaptative [39]. Ceci assure pour l’UA la même stabilité numérique de toutes les autres méthodes. La Figure 3.16 donne le temps de CPU pour tous les méthodes en fonction du t , pour le cas 1 et les deux valeurs pour μ_S . La Figure 3.17 donne le temps de CPU pour le cas 2 et les deux valeurs pour μ_S . Nous pouvons noter que, pour le cas 1, c.-à-d. quand la distribution de probabilité initiale est concentrée dans l’état sans composants en faute, o , UA est moins coûteuse que RS pour des petites et moyennes valeurs de t et un peu plus coûteuse pour des grandes valeurs de t . Cependant, pour le cas 2, c.-à-d. quand la distribution de probabilité initiale n’est pas concentrée dans l’état o , UA est toujours plus coûteuse que RS. Ceci est dû au fait que le taux adapté de randomisation en UA est grand à partir de l’étape initiale. Concernant le coût computationnel du RR vers celui de RS, pour le cas 1, RR est plus coûteuse que RS pour presque tous t . Comme t augmente, RR devient moins coûteuse que RS, mais le temps auquel la RR devient moins coûteuse est très grand (de l’ordre de 100.000 h). Pour le cas 2, RR est sensiblement plus coûteuse que RS excepté à partir d’une très grande valeur de t (de l’ordre de 100.000 h). RDQ est

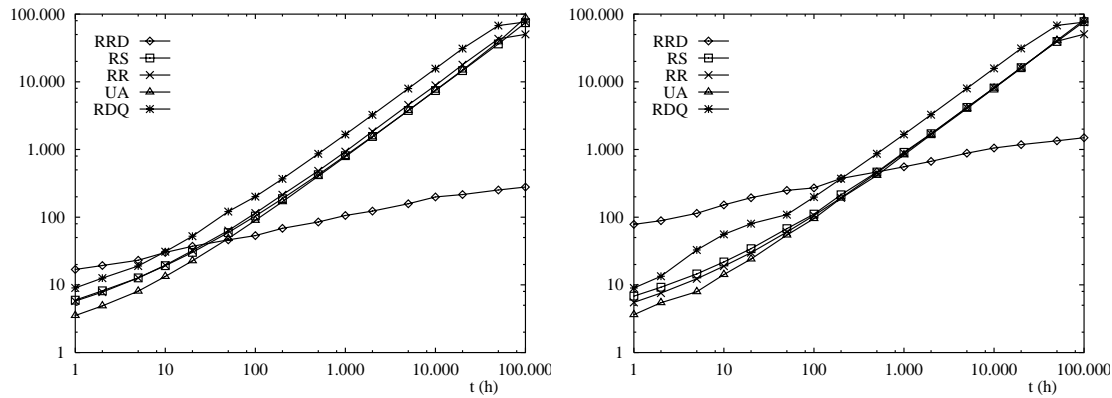


FIG. 3.16 – Temps de CPU en secondes pour la randomisation régénérative divisée (RRD), la randomisation standard (RS), la randomisation régénérative (RR), l’uniformisation adaptative (AU), et la randomisation avec détection du régime quasi-stationnaire, pour le cas 1 et $\mu_S = 0.4 \text{ h}^{-1}$ (gauche), $\mu_S = 0.08 \text{ h}^{-1}$ (droit), en fonction de t .

plus coûteuse que RR pour le cas 1 et moins coûteuse que RR pour le cas 2. Pour grand t , RRD est la méthode la moins coûteuse. Pour le cas 1, $\mu_S = 0,4 \text{ h}^{-1}$, et $t = 100.000 \text{ h}$, RRD est 180 fois moins coûteuse que la moins coûteuse des autres méthodes (RR). Pour le cas 1, $\mu_S = 0,08 \text{ h}^{-1}$, et $t = 100.000 \text{ h}$, RRD est 33,8 fois moins coûteuse que la moins coûteuse des autres méthodes (RR). Pour le cas 2, $\mu_S = 0,4 \text{ h}^{-1}$, et $t = 100.000 \text{ h}$, RRD est 128 fois moins coûteuse que la moins coûteuse des autres méthodes (RS). Pour le cas 2, $\mu_S = 0,08 \text{ h}^{-1}$, et $t = 100.000 \text{ h}$, RRD est 23,0 fois moins coûteuse que la moins coûteuse des autres méthodes (RS). Ces accélérations rendent raisonnables les temps de CPU sous RRD même pour $t = 100,000 \text{ h}$: de 279 s pour le cas 1 et $\mu_S = 0,4 \text{ h}^{-1}$ à 3.145 s pour le cas 2 et $\mu_S = 0,08 \text{ h}^{-1}$. La valeur de t à partir de laquelle RRD devient attrayante augmente quand les taux de réparation deviennent plus différents (R_E augmente) et est plus grande quand la distribution de probabilité initiale n’est pas concentrée dans l’état o sans composants en faute. Les deux tendances sont dues à l’augmentation de la taille du modèle transformé tronqué, qui augmente le coût computationnel des deux phases de la randomisation régénérative divisée (génération du modèle transformé tronqué et résolution de ce modèle par la randomisation standard).

3.7 Conclusions

Dans ce chapitre nous avons développé la méthode randomisation régénérative divisée pour le calcul d’un cas particulier, $m(t)$, de la mesure ETRT(t). La mesure inclut comme cas particulier la non-fiabilité et des bornes pour la non-fiabilité. La méthode est dirigée à l’analyse des modèles

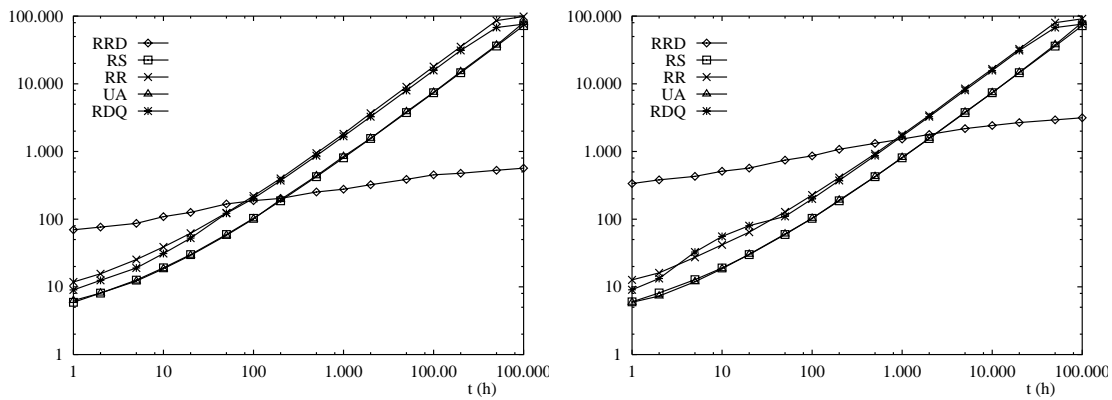


FIG. 3.17 – Temps de CPU en secondes pour la randomisation régénérative divisée (RRD), la randomisation standard (RS), la randomisation régénérative (RR), l’uniformisation adaptative (AU), et la randomisation avec détection du régime quasistationnaire, pour le cas 2 et $\mu_S = 0.4 \text{ h}^{-1}$ (gauche), $\mu_S = 0.08 \text{ h}^{-1}$ (droit), en fonction de t .

Markoviens de systèmes tolérants aux fautes avec réparation différée et demande la sélection d’un sous-ensemble d’états E et d’un état régénérateur r . La méthode est numériquement stable, permet le calcul de $m(t)$ avec une erreur bien contrôlée et, en opposition à la randomisation standard, a un comportement bénin, dans le sens où le coût computationnel de la méthode est une fonction douce de t . Nous avons défini une classe de modèles, classe C_2 , pour laquelle des sélections naturelles existent pour E et r , et pour laquelle des résultats théoriques plus fortes que le comportement bénin existent permettant la prédiction approximative du coût computationnel de la méthode avec ces sélections naturelles. La classe C_2 inclut les modèles des systèmes tolérants aux fautes avec réparation différée et avec distributions exponentielles pour les temps de faute et les temps de réparation quand les taux de fautes sont beaucoup plus petits que les temps de réparation. De plus, des résultats numériques, ont confirmé que, pour les modèles Markoviens des systèmes tolérants aux fautes avec réparation différée, la randomisation régénérative divisée peut être pour grand t beaucoup moins coûteuse que d’autres méthodes basées sur la randomisation. Quand les taux de départ des états avec réparation ne sont pas très différents, la randomisation régénérative divisée permet l’analyse avec des temps de CPU raisonnables de modèles Markoviens de systèmes tolérants aux fautes avec réparation différée de grande taille. Ceci combiné avec des techniques bornantes permet l’analyse des systèmes tolérants aux fautes avec réparation différée très complexes quand les taux de départ des états avec réparation ne sont pas très différents.

Chapitre 4

Randomisation régénérative divisée: cas général

Dans ce chapitre, on généralisera la méthode randomisation régénérative divisée, pour la mesure $m(t)$ développée dans le chapitre précédent. La méthode généralisée couvrira les mêmes modèles Markoviens que la méthode pour la mesure $m(t)$ avec l'extension $A = 0$, c.à d. Avec la condition $A \geq 1$ remplacée par la condition $A \geq 0$, et les mesures ETRT(t) et ETRM(t) sont généralité, c.à d. avec une structure de taux de récompense $r_i, i \in \Omega$ arbitraire satisfaisant $r_i \geq 0, i \in \Omega$. La méthode généralisée aura les mêmes bonnes propriétés que la randomisation standard et la méthode développée au chapitre précédent: stabilité numérique, erreur de calcul bien contrôlée, et capacité de spécifier l'erreur de calcul à l'avance. De plus, la méthode généralisée aura aussi un comportement bénin et, pour une classe de modèles Markoviens, classe C'_2 , généralisant la classe de modèles C_2 définie dans le chapitre précédent, il y aura des résultats théoriques généralisant les résultats théoriques similaires obtenus dans le chapitre précédent permettant de prévoir approximativement le coût computationnel de la méthode.

4.1 Généralisation

Il est facile de tester que les développements du chapitre précédant peuvent être étendus au cas $A = 0$. Soit V la CMTC définie dans le chapitre précédant. La clé pour généraliser la méthode est le résultat suivant. Nous dénotons par I_c la fonction indicatrice retournant la valeur 1 si la condition c est satisfaite et la valeur 0 autrement et, par convention, supposons que le produit de 0 par une quantité non-définie est égal à 0.

Proposition 4.1. *Pour $i \in S$,*

$$\begin{aligned} P[X(t) = i] &= I_{i \in E} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\pi_i(k)}{a(k)} P[V(t) = s_k] + I_{i \in \bar{E}} \sum_{k=0}^{\infty} I_{a(k,1) > 0} \sum_{l=1}^{\infty} \frac{\pi_i(k,l)}{a(k,l)} P[V(t) = s_{k,l}] \\ &+ I_{\alpha_{E'} > 0} \left(I_{i \in E'} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\pi'_i(k)}{a'(k)} P[V(t) = s'_k] + I_{i \in \bar{E}} \sum_{k=0}^{\infty} I_{a'(k,1) > 0} \sum_{l=1}^{\infty} \frac{\pi'_i(k,l)}{a'(k,l)} P[V(t) = s'_{k,l}] \right) \\ &+ I_{\alpha_{\bar{E}} > 0} I_{i \in \bar{E}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\pi''_i(k)}{a''(k)} P[V(t) = s''_k]. \end{aligned}$$

Preuve. Il suffit de prouver que

$$P[X(t) = i] = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\pi_i(k)}{a(k)} P[V(t) = s_k] + I_{\alpha_{E'} > 0} I_{i \in E'} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\pi'_i(k)}{a'(k)} P[V(t) = s'_k], \quad i \in E \quad (4.1)$$

et

$$\begin{aligned} P[X(t) = i] &= \sum_{k=0}^{\infty} I_{a(k,1) > 0} \sum_{l=1}^{\infty} \frac{\pi_i(k,l)}{a(k,l)} P[V(t) = s_{k,l}] \\ &+ I_{\alpha_{E'} > 0} \sum_{k=0}^{\infty} I_{a'(k,1) > 0} \sum_{l=1}^{\infty} \frac{\pi'_i(k,l)}{a'(k,l)} P[V(t) = s'_{k,l}] \\ &+ I_{\alpha_{\bar{E}} > 0} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\pi''_i(k)}{a''(k)} P[V(t) = s''_k], \quad i \in \bar{E}. \end{aligned} \quad (4.2)$$

On commencera par prouver (4.1). Employant l'interprétation de X comme le résultat de la composition du processus \widehat{X} donnant la séquence d'états visités avec des durées de visite indépendantes et exponentiellement distribuées avec le paramètre Λ_E aux états dans E et paramètre $\Lambda_{\bar{E}}$ aux états dans $\bar{E} \cup \{f_1, \dots, f_A\}$ et étant $X_j^E, j = 1, 2, \dots$, et $X_j^{\bar{E}}, j = 1, 2, \dots$ des variables aléatoires exponentielles indépendantes avec, respectivement, paramètres Λ_E et $\Lambda_{\bar{E}}$, nous avons:

$$\begin{aligned} P[X(t) = i] &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n+1} P[\#(\widehat{X}_{0:n} \in E) = k \wedge \widehat{X}_n = i] \\ &= P \left[\sum_{j=1}^{k-1} X_j^E + \sum_{j=1}^{n-k+1} X_j^{\bar{E}} \leq t \wedge \sum_{j=1}^k X_j^E + \sum_{j=1}^{n-k+1} X_j^{\bar{E}} > t \right], \quad i \in E. \end{aligned} \quad (4.3)$$

Notant que, selon la définition de \widehat{V} (3.17), $\widehat{X}_n \in E$ implique $\widehat{V}_n \in \{s_m, 0 \leq m \leq n\} \cup \{s'_n\}$, que $\widehat{V}_n = s_m, 0 \leq m \leq n$, si et seulement si $\widehat{X}_{n-m} = r$ et $\widehat{X}_{n-m+1:n} \in E'$, que $\widehat{V}_n = s'_n$ si et seulement si $\widehat{X}_{0:n} \in E'$, et que \widehat{X}' est probabilistiquement identique à $\{\widehat{X}_{n-m+l}; l = 0, 1, \dots\}$

conditionné à $\widehat{X}_{n-m} = r$, nous avons:

$$\begin{aligned}
& P[\#(\widehat{X}_{0:n} \in E) = k \wedge \widehat{X}_n = i] \\
&= \sum_{m=0}^n P[\widehat{V}_n = s_m \wedge \#(\widehat{X}_{0:n} \in E) = k \wedge \widehat{X}_n = i] \\
&\quad + P[\widehat{V}_n = s'_n \wedge \#(\widehat{X}_{0:n} \in E) = k \wedge \widehat{X}_n = i] \\
&= \sum_{m=0}^n P[\#(\widehat{X}_{0:n-m-1} \in E) = k - m - 1 \wedge \widehat{X}_{n-m} = r \wedge \widehat{X}_{n-m+1:n} \in E' \wedge \widehat{X}_n = i] \\
&\quad + I_{i \in E'} I_{\alpha_{E'} > 0} I_{k=n+1} P[\widehat{X}_{0:n} \in E' \wedge \widehat{X}_n = i] \\
&= \sum_{m=0}^n P[\#(\widehat{X}_{0:n-m-1} \in E) = k - m - 1 \wedge \widehat{X}_{n-m} = r] \\
&\quad P[\widehat{X}_{n-m+1:n} \in E' \wedge \widehat{X}_n = i \mid \widehat{X}_{n-m} = r] \\
&\quad + I_{i \in E'} I_{\alpha_{E'} > 0} I_{k=n+1} P[\widehat{X}_{0:n} \in E' \wedge \widehat{X}_n = i] \\
&= \sum_{m=0}^n P[\#(\widehat{X}_{0:n-m-1} \in E) = k - m - 1 \wedge \widehat{X}_{n-m} = r] P[\widehat{X}'_{1:m} \in E' \wedge \widehat{X}'_m = i] \\
&\quad + I_{i \in E'} I_{\alpha_{E'} > 0} I_{k=n+1} P[\widehat{X}_{0:n} \in E' \wedge \widehat{X}_n = i], \quad i \in E.
\end{aligned}$$

De la définition de Z (3.1), nous avons $Z_{1:m} \in E'$ si et seulement si $Z_m \in E$, $m \geq 1$; de la définition de Z' (3.2), nous avons $Z'_{0:n} \in E'$ si et seulement si $Z'_n \in E'$. Alors,

$$\begin{aligned}
& P[\#(\widehat{X}_{0:n} \in E) = k \wedge \widehat{X}_n = i] \\
&= \sum_{m=0}^n P[\#(\widehat{X}_{0:n-m-1} \in E) = k - m - 1 \wedge \widehat{X}_{n-m} = r] P[Z_{1:m} \in E' \wedge Z_m = i] \\
&\quad + I_{i \in E'} I_{\alpha_{E'} > 0} I_{k=n+1} P[Z'_{0:n} \in E' \wedge Z'_n = i] \\
&= \sum_{m=0}^n P[\widehat{X}_{n-m} = r \wedge \#(\widehat{X}_{0:n-m-1} \in E) = k - m - 1] \pi_i(m) \\
&\quad + I_{i \in E'} I_{\alpha_{E'} > 0} I_{k=n+1} \pi'_i(n), \quad i \in E. \tag{4.4}
\end{aligned}$$

Utilisant que, selon la définition de \widehat{V} , $\widehat{V}_n \in E_V$ si et seulement si $\widehat{X}_n \in E$ et $\widehat{V}_n = s_m$ si et seulement si $\widehat{X}_{n-m} = r$ et $\widehat{X}_{n-m+1:n} \in E'$, que \widehat{X}' est probabilistiquement identique à $\{\widehat{X}_{n-m+l}; l = 0, 1, \dots\}$ conditionné à $\widehat{X}_{n-m} = r$, et, finalement, que, selon la définition de Z , $Z_{1:m} \in E'$ si et seulement si $Z_m \in E$, $m \geq 1$:

$$\begin{aligned}
& P[\widehat{V}_n = s_m \wedge \#(\widehat{V}_{0:n} \in E_V) = k] \\
&= \sum_{i \in E} P[\widehat{V}_n = s_m \wedge \#(\widehat{X}_{0:n} \in E) = k \wedge \widehat{X}_n = i] \\
&= \sum_{i \in E} P[\widehat{X}_{n-m} = r \wedge \widehat{X}_{n-m+1:n} \in E' \wedge \#(\widehat{X}_{0:n-m-1} \in E) = k - m - 1 \wedge \widehat{X}_n = i]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= P[\widehat{X}_{n-m} = r \wedge \#(\widehat{X}_{0:n-m-1} \in E) = k - m - 1] \\
&\quad \sum_{i \in E} P[\widehat{X}_{n-m+1:n} \in E' \wedge \widehat{X}_n = i \mid \widehat{X}_{n-m} = r] \\
&= P[\widehat{X}_{n-m} = r \wedge \#(\widehat{X}_{0:n-m-1} \in E) = k - m - 1] \sum_{i \in E} P[\widehat{X}'_{1:m} \in E' \wedge \widehat{X}'_m = i] \\
&= P[\widehat{X}_{n-m} = r \wedge \#(\widehat{X}_{0:n-m-1} \in E) = k - m - 1] \sum_{i \in E} P[Z_{1:m} \in E' \wedge Z_m = i] \\
&= P[\widehat{X}_{n-m} = r \wedge \#(\widehat{X}_{0:n-m-1} \in E) = k - m - 1] \sum_{i \in E} \pi_i(m). \tag{4.5}
\end{aligned}$$

Utilisant que, selon la définition de \widehat{V} , $\widehat{V}_n \in E_V$ si et seulement si $\widehat{X}_n \in E$ et $\widehat{V}_n = s'_n$ si et seulement si $\widehat{X}_{0:n} \in E'$, et que, selon la définition de Z' , $Z'_{0:n} \in E'$ si et seulement si $Z'_n \in E'$:

$$\begin{aligned}
&P[\widehat{V}_n = s'_n \wedge \#(\widehat{V}_{0:n} \in E_V) = k] \\
&= \sum_{i \in E'} P[\widehat{V}_n = s'_n \wedge \#(\widehat{X}_{0:n} \in E) = k \wedge \widehat{X}_n = i] \\
&= I_{k=n+1} \sum_{i \in E'} P[\widehat{X}_{0:n} \in E' \wedge \widehat{X}_n = i] \\
&= I_{k=n+1} \sum_{i \in E'} P[Z'_{0:n} \in E' \wedge Z'_n = i] = I_{k=n+1} \sum_{i \in E'} \pi'_i(n). \tag{4.6}
\end{aligned}$$

Combinant (4.4), (4.5) et (4.6):

$$\begin{aligned}
&P[\#(\widehat{X}_{0:n} \in E) = k \wedge \widehat{X}_n = i] \\
&= \sum_{m=0}^n P[\widehat{V}_n = s_m \wedge \#(\widehat{V}_{0:n} \in E_V) = k] \frac{\pi_i(m)}{\sum_{i \in E} \pi_i(m)} \\
&\quad + I_{i \in E'} I_{\alpha_{E'} > 0} P[\widehat{V}_n = s'_n \wedge \#(\widehat{V}_{0:n} \in E_V) = k] \frac{\pi'_i(n)}{\sum_{i \in E'} \pi'_i(n)}, \quad i \in E. \tag{4.7}
\end{aligned}$$

Remplaçant (4.7) dans (4.3) et utilisant le fait que V peut être interprété comme composition du processus stochastique \widehat{V} avec des durées de visites indépendantes des distributions exponentielles avec le paramètre Λ_E dans les états dans E_V et avec le paramètre $\Lambda_{\overline{E}}$ dans les états dans $\overline{E}_V \cup \{f_1, \dots, f_A\}$:

$$\begin{aligned}
&P[X(t) = i] \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n+1} \sum_{m=0}^n P[\widehat{V}_n = s_m \wedge \#(\widehat{V}_{0:n} \in E_V) = k] \frac{\pi_i(m)}{\sum_{i \in E} \pi_i(m)} \\
&\quad P \left[\sum_{j=1}^{k-1} X_j^E + \sum_{j=1}^{n-k+1} X_j^{\overline{E}} \leq t \wedge \sum_{j=1}^k X_j^E + \sum_{j=1}^{n-k+1} X_j^{\overline{E}} > t \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + I_{i \in E'} I_{\alpha_{E'} > 0} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n+1} P[\widehat{V}_n = s'_n \wedge \#(\widehat{V}_{0:n} \in E_V) = k] \frac{\pi'_i(n)}{\sum_{i \in E} \pi'_i(n)} \\
& \quad P \left[\sum_{j=1}^{k-1} X_j^E + \sum_{j=1}^{n-k+1} X_j^{\overline{E}} \leq t \wedge \sum_{j=1}^k X_j^E + \sum_{j=1}^{n-k+1} X_j^{\overline{E}} > t \right] \\
& = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\pi_i(k)}{a(k)} P[V(t) = s_k] + I_{i \in E'} I_{\alpha_{E'} > 0} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\pi'_i(k)}{a'(k)} P[V(t) = s'_k], \quad i \in E,
\end{aligned}$$

complétant la preuve de (4.1).

On prouvera après (4.2). Employant l'interprétation de X comme résultat de la composition du processus stochastique \widehat{X} avec des durées de visite indépendantes des distributions exponentielles avec le paramètre Λ_E dans les états dans E et avec le paramètre $\Lambda_{\overline{E}}$ dans les états dans $\overline{E} \cup \{f_1, \dots, f_A\}$ et soyant $X_j^E, j = 1, 2, \dots$ et $X_j^{\overline{E}}, j = 1, 2, \dots$ des variables aléatoires indépendantes exponentielles avec, respectivement, paramètres Λ_E et $\Lambda_{\overline{E}}$, nous avons:

$$\begin{aligned}
& P[X(t) = i] \\
& = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n+1} P[\#(\widehat{X}_{0:n} \in E) = k \wedge \widehat{X}_n = i] \\
& \quad P \left[\sum_{j=1}^k X_j^E + \sum_{j=1}^{n-k} X_j^{\overline{E}} \leq t \wedge \sum_{j=1}^k X_j^E + \sum_{j=1}^{n-k+1} X_j^{\overline{E}} > t \right], \quad i \in \overline{E}. \quad (4.8)
\end{aligned}$$

Notant que, selon la définition de \widehat{V} , $\widehat{X}_n \in \overline{E}$ implique $\widehat{V} \in \{s_{m,l}, 0 \leq m \leq n-1, 1 \leq l \leq n-m\} \cup \{s'_{m,n-m}, 0 \leq m \leq n-1\} \cup \{s''_n\}$, que $\widehat{V}_n = s_{m,l}$ si et seulement si $\widehat{X}_{n-m-l} = r$, $\widehat{X}_{n-m-l+1:n-l} \in E'$, et $\widehat{X}_{n-l+1:n} \in \overline{E}$, que $\widehat{V}_n = s'_{m,n-m}$ si et seulement si $\widehat{X}_{0:m} \in E'$ et $\widehat{X}_{m+1:n} \in \overline{E}$, que $\widehat{V}_n = s''_n$ si et seulement si $\widehat{X}_{0:n} \in \overline{E}$, et que \widehat{X}' est probabalistiquement identique à $\{\widehat{X}_{n-m-l+p}; p = 0, 1, \dots\}$ conditionné à $\widehat{X}_{n-m-l} = r$, nous avons:

$$\begin{aligned}
& P[\#(\widehat{X}_{0:n} \in E) = k \wedge \widehat{X}_n = i] \\
& = \sum_{m=0}^{n-1} \sum_{l=1}^{n-m} P[\widehat{V}_n = s_{m,l} \wedge \#(\widehat{X}_{0:n} \in E) = k \wedge \widehat{X}_n = i] \\
& \quad + \sum_{m=0}^{n-1} P[\widehat{V}_n = s'_{m,n-m} \wedge \#(\widehat{X}_{0:n} \in E) = k \wedge \widehat{X}_n = i] \\
& \quad + P[\widehat{V}_n = s''_n \wedge \#(\widehat{X}_{0:n} \in E) = k \wedge \widehat{X}_n = i]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{m=0}^{n-1} \sum_{l=1}^{n-m} P[\widehat{X}_{n-m-l} = r \wedge \widehat{X}_{n-m-l+1:n-l} \in E' \wedge \widehat{X}_{n-l+1:n} \in \overline{E} \\
&\quad \wedge \#(\widehat{X}_{0:n-m-l-1} \in E) = k - m - 1 \wedge \widehat{X}_n = i] \\
&\quad + I_{\alpha_{E'} > 0} \sum_{m=0}^{n-1} I_{k=m+1} P[\widehat{X}_{0:m} \in E' \wedge \widehat{X}_{m+1:n} \in \overline{E} \wedge \widehat{X}_n = i] \\
&\quad + I_{\alpha_{\overline{E}} > 0} I_{k=0} P[\widehat{X}_{0:n} \in \overline{E} \wedge \widehat{X}_n = i] \\
&= \sum_{m=0}^{n-1} \sum_{l=1}^{n-m} P[\#(\widehat{X}_{0:n-m-l-1} \in E) = k - m - 1 \wedge \widehat{X}_{n-m-l} = r] \\
&\quad P[\widehat{X}_{n-m-l+1:n-l} \in E' \wedge \widehat{X}_{n-l+1:n} \in \overline{E} \wedge \widehat{X}_n = i \mid \widehat{X}_{n-m-l} = r] \\
&\quad + I_{\alpha_{E'} > 0} \sum_{m=0}^{n-1} I_{k=m+1} P[\widehat{X}_{0:m} \in E' \wedge \widehat{X}_{m+1:n} \in \overline{E} \wedge \widehat{X}_n = i] \\
&\quad + I_{\alpha_{\overline{E}} > 0} I_{k=0} P[\widehat{X}_{0:n} \in \overline{E} \wedge \widehat{X}_n = i] \\
&= \sum_{m=0}^{n-1} \sum_{l=1}^{n-m} P[\#(\widehat{X}_{0:n-m-l-1} \in E) = k - m - 1 \wedge \widehat{X}_{n-m-l} = r] \\
&\quad P[\widehat{X}'_{1:m} \in E' \wedge \widehat{X}'_{m+1:m+l} \in \overline{E} \wedge \widehat{X}'_{m+l} = i] \\
&\quad + I_{\alpha_{E'} > 0} \sum_{m=0}^{n-1} I_{k=m+1} P[\widehat{X}_{0:m} \in E' \wedge \widehat{X}_{m+1:n} \in \overline{E} \wedge \widehat{X}_n = i] \\
&\quad + I_{\alpha_{\overline{E}} > 0} I_{k=0} P[\widehat{X}_{0:n} \in \overline{E} \wedge \widehat{X}_n = i], \quad i \in \overline{E}. \tag{4.9}
\end{aligned}$$

Employant que, selon la définition de Z , $Z_{1:m} \in E'$ si et seulement si $Z_m \in E$, $m \geq 1$, que, selon la définition de Z' , $Z'_{0:n} \in E'$ si et seulement si $Z'_n \in E'$, que, selon la définition de Z'' , $Z''_{0:n} \in \overline{E}$ si et seulement si $Z''_n \in \overline{E}$, que $\pi_i(m, l) = 0$, $l \geq 1$, pour $a(m, 1) = 0$, et que $\pi'_i(m, l) = 0$, $l \geq 1$, pour $a'(m, 1) = 0$:

$$\begin{aligned}
&P[\#(\widehat{X}_{0:n} \in E) = k \wedge \widehat{X}_n = i] \\
&= \sum_{m=0}^{n-1} \sum_{l=1}^{n-m} P[\#(\widehat{X}_{0:n-m-l-1} \in E) = k - m - 1 \wedge \widehat{X}_{n-m-l} = r] \\
&\quad P[Z_{1:m} \in E' \wedge Z_{m+1:m+l} \in \overline{E} \wedge Z_{m+l} = i] \\
&\quad + I_{\alpha_{E'} > 0} \sum_{m=0}^{n-1} I_{k=m+1} P[Z'_{0:m} \in E' \wedge Z'_{m+1:n} \in \overline{E} \wedge Z'_n = i] \\
&\quad + I_{\alpha_{\overline{E}} > 0} I_{k=0} P[Z''_{0:n} \in \overline{E} \wedge Z''_n = i] \\
&= \sum_{m=0}^{n-1} \sum_{l=1}^{n-m} P[\#(\widehat{X}_{0:n-m-l-1} \in E) = k - m - 1 \wedge \widehat{X}_{n-m-l} = r] I_{a(m,1) > 0} \pi_i(m, l) \\
&\quad + I_{\alpha_{E'} > 0} \sum_{m=0}^{n-1} I_{k=m+1} I_{a'(m,1) > 0} \pi'_i(m, n-m) + I_{\alpha_{\overline{E}} > 0} I_{k=0} \pi''_i(n), \quad i \in \overline{E}. \tag{4.10}
\end{aligned}$$

Utilisant que, selon la définition $\widehat{V}, \widehat{V}_n \in E_V$ si et seulement si $\widehat{X}_n \in E$ et $\widehat{V}_n = s_{m,l}$ si et seulement si $\widehat{X}_{n-m-l} = r$, $\widehat{X}_{n-m-l+1:n-l} \in E'$, et $\widehat{X}_{n-l+1:n} \in \overline{E}$, que \widehat{X}' est probabilistiquement identique à $\{\widehat{X}_{n-m-l+p}; p = 0, 1, \dots\}$ conditionné à $\widehat{X}_{n-m-l} = r$, et que, selon la définition de $Z, Z_{1:m} \in E'$ si et seulement si $Z_m \in E, m \geq 1$:

$$\begin{aligned}
& P[\#(\widehat{V}_{0:n} \in E_V) = k \wedge \widehat{V}_n = s_{m,l}] \\
&= \sum_{i \in \overline{E}} P[\#(\widehat{X}_{0:n-m-l-1} \in E) = k - m - 1 \wedge \widehat{X}_{n-m-l} = r \wedge \widehat{X}_{n-m-l+1:n-l} \in E' \\
&\quad \wedge \widehat{X}_{n-l+1:n} \in \overline{E} \wedge \widehat{X}_n = i] \\
&= \sum_{i \in \overline{E}} P[\#(\widehat{X}_{0:n-m-l-1} \in E) = k - m - 1 \wedge \widehat{X}_{n-m-l} = r] \\
&\quad P[\widehat{X}_{n-m-l+1:n-l} \in E' \wedge \widehat{X}_{n-l+1:n} \in \overline{E} \wedge \widehat{X}_n = i \mid \widehat{X}_{n-m-l} = r] \\
&= \sum_{i \in \overline{E}} P[\#(\widehat{X}_{0:n-m-l-1} \in E) = k - m - 1 \wedge \widehat{X}_{n-m-l} = r] \\
&\quad P[\widehat{X}'_{1:m} \in E' \wedge \widehat{X}_{m+1:m+l} \in \overline{E} \wedge \widehat{X}_{m+l} = i] \\
&= \sum_{i \in \overline{E}} P[\#(\widehat{X}_{0:n-m-l-1} \in E) = k - m - 1 \wedge \widehat{X}_{n-m-l} = r] \\
&\quad P[Z_{1:m} \in E' \wedge Z_{m+1:m+l} \in \overline{E} \wedge Z_{m+l} = i] \\
&= P[\#(\widehat{X}_{0:n-m-l-1} \in E) = k - m - 1 \wedge \widehat{X}_{n-m-l} = r] \sum_{i \in \overline{E}} \pi_i(m, l). \tag{4.11}
\end{aligned}$$

Utilisant que, selon la définition de $\widehat{V}, \widehat{V}_n \in E_V$ si et seulement si $\widehat{X}_n \in E$ et $\widehat{V}_n = s'_{m,n-m}$ si et seulement si $\widehat{X}_{0:m} \in E'$ et $\widehat{X}_{m+1:n} \in \overline{E}$, et que, selon la définition de $Z', Z'_{0:m} \in E'$ si et seulement si $Z'_m \in E'$:

$$\begin{aligned}
& P[\#(\widehat{V}_{0:n} \in E_V) = k \wedge \widehat{V}_n = s'_{m,n-m}] \\
&= I_{\alpha_{E'} > 0} I_{k=m+1} \sum_{i \in \overline{E}} P[\widehat{X}_{0:m} \in E' \wedge \widehat{X}_{m+1:n} \in \overline{E} \wedge \widehat{X}_n = i] \\
&= I_{\alpha_{E'} > 0} I_{k=m+1} \sum_{i \in \overline{E}} P[Z'_{0:m} \in E' \wedge Z'_{m+1:n} \in \overline{E} \wedge Z'_n = i] \\
&= I_{\alpha_{E'} > 0} I_{k=m+1} \sum_{i \in \overline{E}} \pi'_i(m, n - m). \tag{4.12}
\end{aligned}$$

Utilisant que, selon la définition de $\widehat{V}, \widehat{V}_n \in E_V$ si et seulement si $\widehat{X}_n \in E$ et $\widehat{V}_n = s''_n$ si et seulement si $\widehat{X}_{0:n} \in \overline{E}$, et que, selon la définition de Z'' 3.3, $Z''_{0:n} \in \overline{E}$ si et seulement si $Z''_n \in \overline{E}$:

$$\begin{aligned}
& P[\#(\widehat{V}_{0:n} \in E_V) = k \wedge \widehat{V}_n = s''_n] \\
&= I_{\alpha_{\overline{E}} > 0} I_{k=0} \sum_{i \in \overline{E}} P[\widehat{X}_{0:n} \in \overline{E} \wedge \widehat{X}_n = i] \\
&= I_{\alpha_{\overline{E}} > 0} I_{k=0} \sum_{i \in \overline{E}} P[Z''_{0:n} \in \overline{E} \wedge Z''_n = i] = I_{\alpha_{\overline{E}} > 0} I_{k=0} \sum_{i \in \overline{E}} \pi''_i(n). \tag{4.13}
\end{aligned}$$

Combinant (4.10), (4.11), (4.12), et (4.13):

$$\begin{aligned}
& P[\#(\widehat{X}_{0:n} \in E) = k \wedge \widehat{X}_n = i] \\
&= \sum_{m=0}^{n-1} \sum_{l=1}^{n-m} I_{a(m,1) > 0} P[\#(\widehat{V}_{0:n} \in E_V) = k \wedge \widehat{V}_n = s_{m,l}] \frac{\pi_i(m, l)}{\sum_{i \in \overline{E}} \pi_i(m, l)} \\
&+ I_{\alpha_{E'} > 0} \sum_{m=0}^{n-1} I_{k=m+1} I_{a'(m,1) > 0} P[\#(\widehat{V}_{0:n} \in E_V) = k \wedge \widehat{V}_n = s'_{m,n-m}] \\
&\quad \frac{\pi'_i(m, n-m)}{\sum_{i \in \overline{E}} \pi'_i(m, n-m)} \\
&+ I_{\alpha_{\overline{E}} > 0} I_{k=0} P[\#(\widehat{V}_{0:n} \in E_V) = k \wedge \widehat{V}_n = s''_n] \frac{\pi''_i(n)}{\sum_{i \in \overline{E}} \pi''_i(n)}, \quad i \in \overline{E}. \quad (4.14)
\end{aligned}$$

Remplaçant (4.14) dans (4.8) et utilisant le fait que V peut être interprété comme composition du processus stochastique \widehat{V} avec des durées de visites indépendantes des distributions exponentielles avec le paramètre Λ_E aux états dans E_V et paramètre $\Lambda_{\overline{E}}$ aux états dans $\overline{E}_V \cup \{f_1, \dots, f_A\}$:

$$\begin{aligned}
& P[X(t) = i] \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n+1} \sum_{m=0}^{n-1} \sum_{l=1}^{n-m} I_{a(m,1) > 0} P[\#(\widehat{V}_{0:n} \in E_V) = k \wedge \widehat{V}_n = s_{m,l}] \frac{\pi_i(m, l)}{\sum_{i \in \overline{E}} \pi_i(m, l)} \\
&\quad P \left[\sum_{j=1}^k X_j^E + \sum_{j=1}^{n-k} X_j^{\overline{E}} \leq t \wedge \sum_{j=1}^k X_j^E + \sum_{j=1}^{n-k+1} X_j^{\overline{E}} > t \right] \\
&+ I_{\alpha_{E'} > 0} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n+1} \sum_{m=0}^{n-1} I_{k=m+1} I_{a'(m,1) > 0} P[\#(\widehat{V}_{0:n} \in E_V) = k \wedge \widehat{V}_n = s'_{m,n-m}] \\
&\quad \frac{\pi'_i(m, n-m)}{\sum_{i \in \overline{E}} \pi'_i(m, n-m)} \\
&\quad P \left[\sum_{j=1}^k X_j^E + \sum_{j=1}^{n-k} X_j^{\overline{E}} \leq t \wedge \sum_{j=1}^k X_j^E + \sum_{j=1}^{n-k+1} X_j^{\overline{E}} > t \right] \\
&+ I_{\alpha_{\overline{E}} > 0} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n+1} I_{k=0} P[\#(\widehat{V}_{0:n} \in E_V) = k \wedge \widehat{V}_n = s''_n] \frac{\pi''_i(n)}{\sum_{i \in \overline{E}} \pi''_i(n)} \\
&\quad P \left[\sum_{j=1}^k X_j^E + \sum_{j=1}^{n-k} X_j^{\overline{E}} \leq t \wedge \sum_{j=1}^k X_j^E + \sum_{j=1}^{n-k+1} X_j^{\overline{E}} > t \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{k=0}^{\infty} I_{a(k,1)>0} \sum_{l=1}^{\infty} \frac{\pi_i(k,l)}{a(k,l)} P[V(t) = s_{k,l}] \\
&\quad + I_{\alpha_{E'}>0} \sum_{k=0}^{\infty} I_{a'(k,1)>0} \sum_{l=1}^{\infty} \frac{\pi'_i(k,l)}{a'(k,l)} P[V(t) = s'_{k,l}] \\
&\quad + I_{\alpha_{\bar{E}}>0} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\pi''_i(k)}{a''(k)} P[V(t) = s''_k], \quad i \in \bar{E},
\end{aligned}$$

complétant la preuve de (4.2). \square

Soit $\text{ETRT}^V(t)$ et $\text{ETRM}^V(t)$, respectivement, l'espérance du taux de récompense transitoire de V au temps t et l'espérance du taux de récompense moyenne de V dans l'intervalle temporel $[0, t]$ avec la structure de taux de récompense pour V :

$$r'_{f_i} = r_{f_i}, \quad (4.15)$$

$$r'_{s_k} = b(k) = \frac{\sum_{i \in E} r_i \pi_i(k)}{a(k)}, \quad (4.16)$$

$$r'_{s_{k,l}} = b(k,l) = \frac{\sum_{i \in \bar{E}} r_i \pi_i(k,l)}{a(k,l)}, \quad s_{k,l} \in \bar{E}_V, \quad (4.17)$$

$$r'_{s'_k} = b'(k) = \frac{\sum_{i \in E'} r_i \pi'_i(k)}{a'(k)}, \quad s'_k \in E_V, \quad (4.18)$$

$$r'_{s'_{k,l}} = b'(k,l) = \frac{\sum_{i \in \bar{E}} r_i \pi'_i(k,l)}{a'(k,l)}, \quad s'_{k,l} \in \bar{E}_V, \quad (4.19)$$

$$r'_{s''_k} = b''(k) = \frac{\sum_{i \in \bar{E}} r_i \pi''_i(k)}{a''(k)}, \quad s''_k \in \bar{E}_V. \quad (4.20)$$

Alors,

Théorème 4.1. $\text{ETRT}^V(t) = \text{ETRT}(t)$ et $\text{ETRM}^V(t) = \text{ETRM}(t)$.

Preuve. Employant, pour le cas $A \geq 1$, (voir preuve du Théorème 3.1) $P[V(t) = f_i] = P[X(t) = f_i]$, Proposition 4.1 et (4.15)–(4.20):

$$\text{ETRT}(t) = \sum_{i \in \Omega} r_i P[X(t) = i] = \sum_{i \in S} r_i P[X(t) = i] + \sum_{i=1}^A r_{f_i} P[X(t) = f_i]$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sum_{i \in E} r_i \pi_i(k)}{a(k)} P[V(t) = s_k] \\
&+ \sum_{k=0}^{\infty} I_{a(k,1) > 0} \sum_{l=1}^{\infty} \frac{\sum_{i \in \bar{E}} r_i \pi_i(k, l)}{a(k, l)} P[V(t) = s_{k,l}] \\
&+ I_{\alpha_{E'} > 0} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sum_{i \in E'} r_i \pi'_i(k)}{a'(k)} P[V(t) = s'_k] \right. \\
&\quad \left. + \sum_{k=0}^{\infty} I_{a(k,1) > 0} \sum_{l=1}^{\infty} \frac{\sum_{i \in \bar{E}} r_i \pi'_i(k, l)}{a'(k, l)} P[V(t) = s'_{k,l}] \right) \\
&+ I_{\alpha_{\bar{E}} > 0} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sum_{i \in \bar{E}} r_i \pi''_i(k)}{a''(k)} P[V(t) = s''_k] + \sum_{i=1}^A r_{f_i} P[V(t) = f_i] \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} b(k) P[V(t) = s_k] + \sum_{k=0}^{\infty} I_{a(k,1) > 0} \sum_{l=1}^{\infty} b(k, l) P[V(t) = s_{k,l}] \\
&+ I_{\alpha_{E'} > 0} \left(\sum_{k=0}^{\infty} b'(k) P[V(t) = s'_k] + \sum_{k=0}^{\infty} I_{a'(k,1) > 0} \sum_{l=1}^{\infty} b'(k, l) P[V(t) = s'_{k,l}] \right) \\
&+ I_{\alpha_{\bar{E}} > 0} \sum_{k=0}^{\infty} b''(k) P[V(t) = s''_k] + \sum_{i=1}^A r'_{f_i} P[V(t) = f_i] \\
&= \text{ETRT}^V(t).
\end{aligned}$$

Finalement, utilisant $\text{ETRM}(t) = (1/t) \int_0^t \text{ETRT}(\tau) d\tau$ et $\text{ETRM}^V(t) = (1/t) \int_0^t \text{ETRT}^V(\tau) d\tau$,

$$\text{ETRM}(t) = \frac{1}{t} \int_0^t \text{ETRT}(\tau) d\tau = \frac{1}{t} \int_0^t \text{ETRT}^V(\tau) d\tau = \text{ETRM}^V(t). \quad \square$$

Soit V_T la CMTC tronquée définie dans le chapitre précédent avec une structure des taux de récompense indentique à celle de V pour les états $f_i, s_k, s'_k, s''_k, s_{k,l}$, et $s'_{k,l}$, et avec un taux de récompense 0 pour l'état absorbant a . Les valeurs approximatives, $\text{ETRT}^a(t)$ et $\text{ETRM}^a(t)$, pour, respectivement, $\text{ETRT}(t)$ et $\text{ETRM}(t)$ sont, respectivement, l'espérance du taux de récompense transitoire de V_T au temps t et l'espérance du taux de récompense moyenne de V_T dans l'intervalle temporel $[0, t]$. Soit $r_{\max} = \max_{i \in \Omega} r_i$. Les deux théorèmes suivants bornent supérieurement l'erreur de troncature du modèle de la randomisation régénérative divisée généralisée pour, respectivement, les mesure $\text{ETRT}(t)$ et la mesure $\text{ETRM}(t)$.

Théorème 4.2. $0 \leq \text{ETRT}(t) - \text{ETRT}^a(t) \leq r_{\max} P[V_T(t) = a] = \text{ETRT}^e(t)$.

Preuve. Que $\text{ETRT}(t) - \text{ETRT}^a(t) \geq 0$ est une conséquence immédiate du fait que (3.38) $P[V_T(t) = i] \leq P[V(t) = i], i \in E_V \cup \bar{E}_V \cup \{f_1, f_2, \dots, f_A\}$, du fait que les taux de récompense de V_T et V a tous ces états sont ≥ 0 , du fait que les taux de récompense de V_T et V aux états

dans $E_V \cup \bar{E}_V \cup \{f_1, f_2, \dots, f_A\}$ sont égaux, et du fait que les taux de récompense de V_T à a est 0. Allons démontrer que $\text{ETRT}(t) - \text{ETRT}^a(t) \leq r_{\max} P[V_T(t) = a]$. Notant que, selon (3.38), $P[V_T(t) = i] \leq P[V(t) = i]$, $i \in E_V^T \cup \bar{E}_V^T$ et $P[V_T(t) = f_i] \leq P[V(t) = f_i]$, $1 \leq i \leq A$, que $\sum_{i \in E_V \cup \bar{E}_V} P[V(t) = i] + \sum_{i=1}^A P[V(t) = f_i] = 1$, et que $\sum_{i \in E_V^T \cup \bar{E}_V^T} P[V_T(t) = i] - \sum_{i=1}^A P[V_T(t) = f_i] + P[V_T(t) = a] = 1$,

$$\begin{aligned}
\text{ETRT}(t) - \text{ETRT}^a(t) &= \sum_{i \in E_V \cup \bar{E}_V} r_i P[V(t) = i] + \sum_{i=1}^A r_{f_i} P[V(t) = f_i] \\
&\quad - \left(\sum_{i \in E_V^T \cup \bar{E}_V^T} r_i P[V_T(t) = i] + \sum_{i=1}^A r_{f_i} P[V_T(t) = f_i] \right) \\
&= \sum_{i \in (E_V - E_V^T) \cup (\bar{E}_V - \bar{E}_V^T)} r_i P[V(t) = i] + \sum_{i \in E_V^T \cup \bar{E}_V^T} r_i (P[V(t) = i] - P[V_T(t) = i]) \\
&\quad + \sum_{i=1}^A r_{f_i} (P[V(t) = f_i] - P[V_T(t) = f_i]) \\
&\leq r_{\max} \left(\sum_{i \in (E_V - E_V^T) \cup (\bar{E}_V - \bar{E}_V^T)} P[V(t) = i] + \sum_{i \in E_V^T \cup \bar{E}_V^T} (P[V(t) = i] - P[V_T(t) = i]) \right. \\
&\quad \left. + \sum_{i=1}^A (P[V(t) = f_i] - P[V_T(t) = f_i]) \right) \\
&= r_{\max} \left(\sum_{i \in E_V \cup \bar{E}_V} P[V(t) = i] + \sum_{i=1}^A P[V(t) = f_i] \right. \\
&\quad \left. - \sum_{i \in E_V^T \cup \bar{E}_V^T} P[V_T(t) = i] - \sum_{i=1}^A P[V_T(t) = f_i] \right) \\
&= r_{\max} \left(1 - \sum_{i \in E_V^T \cup \bar{E}_V^T} P[V_T(t) = i] - \sum_{i=1}^A P[V_T(t) = f_i] \right) \\
&= r_{\max} P[V_T(t) = a] = \text{ETRT}^e(t). \quad \square
\end{aligned}$$

Théorème 4.3. $0 \leq \text{ETRM}(t) - \text{ETRM}^a(t) \leq (r_{\max}/t) \int_0^t P[V_T(\tau) = a] d\tau = \text{ETRM}^e(t)$.

Preuve. Employant $\text{ETRM}(t) = (1/t) \int_0^t \text{ETRT}(\tau) d\tau$ et $\text{ETRM}^a(t) = (1/t) \int_0^t \text{ETRT}^a(\tau) d\tau$,

$$\text{ETRM}(t) - \text{ETRM}^a(t) = \frac{1}{t} \int_0^t \text{ETRT}(\tau) d\tau - \frac{1}{t} \int_0^t \text{ETRT}^a(\tau) d\tau$$

$$= \frac{1}{t} \int_0^t (\text{ETRT}(\tau) - \text{ETRT}^a(\tau)) d\tau.$$

Alors, employant le Théorème 4.2,

$$0 \leq \text{ETRM}(t) - \text{ETRM}^a(t) \leq \frac{r_{\max}}{t} \int_0^t P[V_T(\tau) = a] d\tau = \text{ETRM}^e(t). \quad \square$$

Soit $\gamma_K = \{k : 0 \leq k \leq K - 1 \wedge a(k, 1) > 0\}$ et $\gamma'_L = \{k : 0 \leq k \leq L - 1 \wedge a'(k, 1) > 0\}$. Etant donné que la borne $\text{ETRT}^e(t)$ pour les erreur de troncature du modèle pour la mesure $\text{ETRT}(t)$ donné par Théorème 4.2 est formellement identique à la borne pour l'erreur de troncature du modèle borné supérieurement pour la mesure $m(t)$ considérée dans le chapitre précédent, nous pouvons énoncer le résultat suivant.

Théorème 4.4.

$$\begin{aligned} \text{ETRT}^e(t) &< I_{\alpha_{\bar{E}} > 0} r_{\max} a''(M) \sum_{k=M+1}^{\infty} e^{-\Lambda_{\bar{E}} t} \frac{(\Lambda_{\bar{E}} t)^k}{k!} \\ &+ I_{\alpha_{E'} > 0} \left(r_{\max} a'(L) \sum_{k=L+1}^{\infty} e^{-\Lambda_{E'} t} \frac{(\Lambda_{E'} t)^k}{k!} + \sum_{k \in \gamma'_L} r_{\max} a'(k, L_k) \sum_{l=k+1}^{\infty} e^{-\Lambda_{E'} t} \frac{(\Lambda_{E'} t)^l}{l!} \right) \\ &+ r_{\max} (\alpha_S - a''(M)) a(K) \sum_{k=K+1}^{\infty} (k - K) e^{-\Lambda_{E'} t} \frac{(\Lambda_{E'} t)^k}{k!} \\ &+ \sum_{k \in \gamma_K} r_{\max} (\alpha_S - a''(M)) a(k, K_k) \sum_{l=k+1}^{\infty} (l - k) e^{-\Lambda_{E'} t} \frac{(\Lambda_{E'} t)^l}{l!}. \end{aligned}$$

Le théorème suivant donne la borne supérieure pour l'erreur de troncature du modèle pour la mesure de $\text{ETRM}(t)$.

Théorème 4.5.

$$\begin{aligned} \text{ETRM}^e(t) &< I_{\alpha_{\bar{E}} > 0} \frac{r_{\max} a''(M)}{\Lambda_{\bar{E}} t} \sum_{k=M+2}^{\infty} (k - M - 1) e^{-\Lambda_{\bar{E}} t} \frac{(\Lambda_{\bar{E}} t)^k}{k!} \\ &+ I_{\alpha_{E'} > 0} \left(\frac{r_{\max} a'(L)}{\Lambda_{E'} t} \sum_{k=L+2}^{\infty} (k - L - 1) e^{-\Lambda_{E'} t} \frac{(\Lambda_{E'} t)^k}{k!} \right. \\ &\quad \left. + \sum_{k \in \gamma'_L} \frac{r_{\max} a'(k, L_k)}{\Lambda_{E'} t} \sum_{l=k+2}^{\infty} (l - k - 1) e^{-\Lambda_{E'} t} \frac{(\Lambda_{E'} t)^l}{l!} \right) \\ &+ \frac{r_{\max} (\alpha_S - a''(M)) a(K)}{\Lambda_{E'} t} \sum_{k=K+2}^{\infty} \frac{(k - K)(k - K - 1)}{2} e^{-\Lambda_{E'} t} \frac{(\Lambda_{E'} t)^k}{k!} \\ &+ \sum_{k \in \gamma_K} \frac{r_{\max} (\alpha_S - a''(M)) a(k, K_k)}{\Lambda_{E'} t} \sum_{l=k+2}^{\infty} \frac{(l - k)(l - k - 1)}{2} e^{-\Lambda_{E'} t} \frac{(\Lambda_{E'} t)^l}{l!}. \end{aligned}$$

Preuve. Utilisant les Théorèmes 4.2, 4.3 et 4.4,

$$\begin{aligned}
\text{ETRM}^e(t) &= \frac{r_{\max}}{t} \int_0^t P[V_T(\tau) = a] d\tau = \frac{1}{t} \int_0^t \text{ETRT}^e(\tau) d\tau \\
&< I_{\alpha_{\bar{E}} > 0} \frac{r_{\max} a''(M)}{t} \sum_{k=M+1}^{\infty} \int_0^t e^{-\Lambda_{\bar{E}}\tau} \frac{(\Lambda_{\bar{E}}\tau)^k}{k!} d\tau \\
&\quad + I_{\alpha_{E'} > 0} \left(\frac{r_{\max} a'(L)}{t} \sum_{k=L+1}^{\infty} \int_0^t e^{-\Lambda_E\tau} \frac{(\Lambda_E\tau)^k}{k!} d\tau \right. \\
&\quad \quad \left. + \sum_{k \in \gamma'_L} \frac{r_{\max} a'(k, L_k)}{t} \sum_{l=k+1}^{\infty} \int_0^t e^{-\Lambda_E\tau} \frac{(\Lambda_E\tau)^l}{l!} d\tau \right) \\
&\quad + \frac{r_{\max}(\alpha_S - a''(M))a(K)}{t} \sum_{k=K+1}^{\infty} (k-K) \int_0^t e^{-\Lambda_E\tau} \frac{(\Lambda_E\tau)^k}{k!} d\tau \\
&\quad + \sum_{k \in \gamma_K} \frac{r_{\max}(\alpha_S - a''(M))a(k, K_k)}{t} \sum_{l=k+1}^{\infty} (l-k) \int_0^t e^{-\Lambda_E\tau} \frac{(\Lambda_E\tau)^l}{l!} d\tau.
\end{aligned}$$

Employant $\int_0^t e^{-\Lambda\tau} (\Lambda\tau)^k / k! d\tau = (1/\Lambda) \sum_{l=k+1}^{\infty} e^{-\Lambda t} (\Lambda t)^l / l!$,

$$\begin{aligned}
\sum_{k=M+1}^{\infty} \int_0^t e^{-\Lambda_{\bar{E}}\tau} \frac{(\Lambda_{\bar{E}}\tau)^k}{k!} d\tau &= \frac{1}{\Lambda_{\bar{E}}} \sum_{k=M+2}^{\infty} (k-M-1) e^{-\Lambda_{\bar{E}}t} \frac{(\Lambda_{\bar{E}}t)^k}{k!}, \\
\sum_{k=L+1}^{\infty} \int_0^t e^{-\Lambda_E\tau} \frac{(\Lambda_E\tau)^k}{k!} d\tau &= \frac{1}{\Lambda_E} \sum_{k=L+2}^{\infty} (k-L-1) e^{-\Lambda_E t} \frac{(\Lambda_E t)^k}{k!}, \\
\sum_{l=k+1}^{\infty} \int_0^t e^{-\Lambda_E\tau} \frac{(\Lambda_E\tau)^l}{l!} d\tau &= \frac{1}{\Lambda_E} \sum_{l=k+2}^{\infty} (l-k-1) e^{-\Lambda_E t} \frac{(\Lambda_E t)^l}{l!}, \\
\sum_{k=K+1}^{\infty} (k-K) \int_0^t e^{-\Lambda_E\tau} \frac{(\Lambda_E\tau)^k}{k!} d\tau &= \frac{1}{\Lambda_E} \sum_{k=K+2}^{\infty} \left(\sum_{l=K+1}^{k-1} (l-M) \right) e^{-\Lambda_E t} \frac{(\Lambda_E t)^k}{k!} \\
&= \frac{1}{\Lambda_E} \sum_{k=K+2}^{\infty} \frac{(k-K)(k-K-1)}{2} e^{-\Lambda_E t} \frac{(\Lambda_E t)^k}{k!}, \\
\sum_{l=k+1}^{\infty} (l-k) \int_0^t e^{-\Lambda_E\tau} \frac{(\Lambda_E\tau)^l}{l!} d\tau &= \frac{1}{\Lambda_E} \sum_{l=k+2}^{\infty} \left(\sum_{m=k+1}^{l-1} (m-k) \right) e^{-\Lambda_E t} \frac{(\Lambda_E t)^l}{l!} \\
&= \frac{1}{\Lambda_E} \sum_{l=k+2}^{\infty} \frac{(l-k)(l-k-1)}{2} e^{-\Lambda_E t} \frac{(\Lambda_E t)^l}{l!},
\end{aligned}$$

et le résultat suit. \square

Les paramètres de troncature $K, L, M, K_k, k \in \gamma_K$, et $L_k, k \in \gamma'_L$ doivent être choisis de sorte que la borne supérieure pour l'erreur de troncature du modèle donnée par le Théorème 4.4

pour la mesure $ETRT(t)$ et par le Théorème 4.5 pour la mesure $EARR(t)$ soit $\leq \varepsilon/2$. La borne supérieure pour l'erreur de troncature du modèle donnée par Théorème 4.4 est formellement identique à la borne supérieure pour la mesure $m(t)$ considérée dans le chapitre précédent et, alors, les paramètres de troncature pour la mesure $ETRT(t)$ sont choisis comme décrit là. Pour la mesure $ETRM(t)$, pour le cas $\alpha_{\bar{E}} > 0$, M est choisi employant

$$M = \min \left\{ m \geq 1 : \frac{r_{\max} a''(m)}{\Lambda_{\bar{E}} t} \sum_{k=m+2}^{\infty} (k-m-1) e^{-\Lambda_{\bar{E}} t} \frac{(\Lambda_{\bar{E}} t)^k}{k!} \leq \varepsilon_1 \right\},$$

où $\varepsilon_1 = \varepsilon/6$ si $\alpha_{E'} > 0$ et $\varepsilon_1 = \varepsilon/4$ si $\alpha_{E'} = 0$. Le paramètre de troncature K est alors choisi employant

$$K = \min \left\{ m \geq 1 : \frac{r_{\max}(\alpha_S - a''(M))a(m)}{\Lambda_{E'} t} \sum_{k=m+2}^{\infty} \frac{(k-m)(k-m-1)}{2} e^{-\Lambda_{E'} t} \frac{(\Lambda_{E'} t)^k}{k!} \leq \varepsilon_2 \right\},$$

où $\varepsilon_2 = \varepsilon/12$ si $\alpha_{E'} > 0$ et $\alpha_{\bar{E}} > 0$, $\varepsilon_2 = \varepsilon/8$ si $\alpha_{E'} > 0$ et $\alpha_{\bar{E}} = 0$ ou $\alpha_{E'} = 0$ et $\alpha_{\bar{E}} > 0$, et $\varepsilon_2 = \varepsilon/4$ si $\alpha_{E'} = 0$ et $\alpha_{\bar{E}} = 0$. Les paramètres de troncature K_k , $k \in \gamma_K$ sont choisis employant:

$$K_k = \min \left\{ m \geq 1 : \frac{r_{\max}(\alpha_S - a''(M))a(k, m)}{\Lambda_{E'} t} \sum_{l=k+2}^{\infty} \frac{(l-k)(l-k-1)}{2} e^{-\Lambda_{E'} t} \frac{(\Lambda_{E'} t)^l}{l!} \leq \frac{\varepsilon_2}{|\gamma_K|} \right\}.$$

Finalement, pour le cas $\alpha_{E'} > 0$, le paramètre de troncature L est choisi employant

$$L = \min \left\{ m \geq 1 : \frac{r_{\max} a'(m)}{\Lambda_{E'} t} \sum_{k=m+2}^{\infty} (k-m-1) e^{-\Lambda_{E'} t} \frac{(\Lambda_{E'} t)^k}{k!} \leq \varepsilon_3 \right\}$$

et les paramètres de troncature L_k , $k \in \gamma'_L$ sont choisis employant

$$L_k = \min \left\{ m \geq 1 : \frac{r_{\max} a'(k, m)}{\Lambda_{E'} t} \sum_{l=k+2}^{\infty} (l-k-1) e^{-\Lambda_{E'} t} \frac{(\Lambda_{E'} t)^l}{l!} \leq \frac{\varepsilon_3}{|\gamma'_L|} \right\}.$$

On a démontré dans le chapitre précédant que la borne supérieure pour l'erreur de troncature du modèle pour la mesure $m(t)$ considérée dans ce chapitre est croissante avec t . Ce résultat s'étend trivialement à la mesure $ETRT(t)$. Regardant la mesure $ETRM(t)$, étant donné que l'erreur de troncature du modèle pour cette mesure donnée par le Théorème 4.5 est la valeur moyenne dans l'intervalle $[0, t]$ de la borne supérieure donnée par le Théorème 4.4 pour la mesure

ETRT(t), s'ensuit que la borne supérieure donnée par le Théorème 4.5 pour la mesure ETRM(t) est également croissante avec t .

Pour clarifier, les Figures 4.1–4.2 donnent la description algorithmique de la méthode pour la mesure de ETRT(t). La description algorithmique a comme entrées la CMTC X , le nombre d'états absorbants A , les taux de récompense $r_i, i \in \Omega$, un vecteur ligne de distribution initiale de probabilité $\alpha = (\alpha_i)_{i \in \Omega}$, le sous-ensemble $E \subset S$, un état régénérateur $r \in E$, l'erreur permise ε , le nombre de points de temps n auxquels la mesure doit être calculée, et les points de temps t_1, t_2, \dots, t_n . La description algorithmique a comme sorties les valeurs approchées pour la mesure pour les points de temps donnés, $\widetilde{\text{ETRT}}(t_1), \widetilde{\text{ETRT}}(t_2), \dots, \widetilde{\text{ETRT}}(t_n)$. On suppose que les conditions C1–C10 concernant la structure de X et le choix du sous-ensemble E et de l'état régénérateur $r \in E$ sont satisfaits. Étant donné que les bornes supérieures pour l'erreur de troncature des modèles transformés augmentent avec t , cette erreur est contrôlée pour $t_{\max} = \{t_1, t_2, \dots, t_n\}$. L'algorithme fait deux traversales des lombes des peignes: la première pour déterminer K et $|\gamma_K|$ (appelé n_k dans l'algorithme), et, si $\alpha_{E'} > 0$, L et $|\gamma'_L|$ (également appelé n_k dans l'algorithme), et la seconde pour construire les dents. La méthode pour la mesure ETRM(t) peut être décrite pareillement, avec les changements évidents.

Les méthodes exigent le calcul des sommes

$$\begin{aligned}
 S(m) &= \sum_{k=m+1}^{\infty} e^{-(\Lambda t)} \frac{(\Lambda t)^k}{k!}, \\
 S'(m) &= \sum_{k=m+1}^{\infty} (k-m) e^{-(\Lambda t)} \frac{(\Lambda t)^k}{k!}, \\
 S''(m) &= \sum_{k=m+2}^{\infty} (k-m-1) e^{-(\Lambda t)} \frac{(\Lambda t)^k}{k!}, \\
 S'''(m) &= \sum_{k=m+2}^{\infty} \frac{(k-m)(k-m-1)}{2} e^{-(\Lambda t)} \frac{(\Lambda t)^k}{k!},
 \end{aligned}$$

pour $\Lambda = \Lambda_E$ ou $\Lambda = \Lambda_{\bar{E}}$, $t = t_{\max}$, et valeurs croissantes de m . Procédures efficaces et numériquement stables pour le calcul de $S(m)$, $S'(m)$, et $S'''(m)$ sont décrits dans [14] et [15]. Une procédure efficace et numériquement stable pour le calcul de $S''(m)$ peut être obtenue facilement en adaptant la procédure pour le calcul $S'(m)$.

4.2 Propriétés théoriques

Étant les expressions des bornes de l'erreur de troncature du modèle pour la mesure ETRT(t) formellement identiques aux expressions des bornes de l'erreur de troncature du modèle pour la

Inputs: $X, A, (r_i)_{i \in \Omega}, \alpha, \varepsilon, n, t_1, t_2, \dots, t_n$
Outputs: $\widetilde{ETRR}(t_1), \widetilde{ETRR}(t_2), \dots, \widetilde{ETRR}(t_n)$
 $r_{\max} = \max_{i \in \Omega} r_i; t_{\max} = \max\{t_1, t_2, \dots, t_n\};$
 $\Lambda_E = (1 + 10^{-4}) \max_{i \in E} \lambda_i; \Lambda_{\overline{E}} = (1 + 10^{-4}) \max_{i \in \overline{E}} \lambda_i;$
Obtain P;
 $\alpha_{E'} = \sum_{i \in E'} \alpha_i; \alpha_{\overline{E}} = \sum_{i \in \overline{E}} \alpha_i; \alpha_S = \alpha_r + \alpha_{E'} + \alpha_{\overline{E}};$
for $(i \in E) P_{i,E'} = \sum_{j \in E', P_{i,j} > 0} P_{i,j};$ **for** $(i \in S) P_{i,\overline{E}} = \sum_{j \in \overline{E}, P_{i,j} > 0} P_{i,j};$
Build CTMC V including state s_0 with initial probability α_r , state a with initial probability 0 and states $f_i, 1 \leq i \leq A$, with initial probabilities $\alpha_{f_i};$
if $(\alpha_{\overline{E}} > 0)$ {
 if $(\alpha_{E'} = 0)$ $tol = \varepsilon/4;$ **else** $tol = \varepsilon/6;$
 $add_state(V, s_0'', \alpha_{\overline{E}}); \pi'' = (\alpha_i)_{i \in \overline{E}}; a'' = \alpha_{\overline{E}}; M = 0;$
 do{
 for $(i = 1; i \leq A; i++)$ {
 $v''^i = \sum_{j \in \overline{E}, P_{j,f_i} > 0} \pi_j'' P_{j,f_i} / a''; \text{if } (v''^i > 0) \text{ add_transition}(V, s_M'', f_i, v''^i \Lambda_{\overline{E}});$
 }
 $w'' = \sum_{i \in \overline{E}} \pi_i'' P_{i,\overline{E}} / a''; q'' = \sum_{i \in \overline{E}} \pi_i'' P_{i,r} / a''; b''(M) = \sum_{i \in \overline{E}} \pi_i'' r_i / a''$
 $add_state(V, s_{M+1}'', 0); add_transition(V, s_M'', s_{M+1}'', w'' \Lambda_{\overline{E}});$
 if $(q'' > 0)$ $add_transition(V, s_M'', s_0'', q'' \Lambda_{\overline{E}});$
 $n\pi'' = \pi'' P_{\overline{E},\overline{E}}; \pi'' = n\pi''; M++; a'' = \sum_{i \in \overline{E}} \pi_i'';$
 }
 until $(r_{\max} a'' \sum_{k=M+1}^{\infty} e^{-\Lambda_{\overline{E}} t_{\max}} (\Lambda_{\overline{E}} t_{\max})^k / k! \leq tol);$
 $b''(M) = \sum_{i \in \overline{E}} \pi_i'' r_i / a''; add_transition(V, s_M'', a, \Lambda_{\overline{E}});$
}
else $a'' = 0;$
if $(\alpha_{E'} > 0 \ \&\& \ \alpha_{\overline{E}} > 0)$ $tol = \varepsilon/12;$ **else if** $(\alpha_{E'} > 0 \ || \ \alpha_{\overline{E}} > 0)$ $tol = \varepsilon/8;$ **else** $tol = \varepsilon/4;$
 $\pi = (I_{i=r})_{i \in E}; a = 1; K = 0; n_k = 0;$
do{
 for $(i = 1; i \leq A; i++)$ {
 $v^i = \sum_{j \in E, P_{j,f_i} > 0} \pi_j P_{j,f_i} / a; \text{if } (v^i > 0) \text{ add_transition}(V, s_K, f_i, v^i \Lambda_E);$
 }
 $h_K = \sum_{i \in E} \pi_i P_{i,\overline{E}} / a; w = \sum_{i \in E} \pi_i P_{i,E'} / a; b(K) = \sum_{i \in E} \pi_i r_i / a$
 $add_state(V, s_{K+1}, 0); add_transition(V, s_K, s_{K+1}, w \Lambda_E);$
 if $(h_K > 0)$ $n_k++;$
 $n\pi = \pi P'_{E,E}; \pi = n\pi; K++; a = \sum_{i \in E} \pi_i;$
}
until $(r_{\max} (\alpha_S - a'') a \sum_{k=K+1}^{\infty} (k - K) e^{-\Lambda_E t_{\max}} (\Lambda_E t_{\max})^k / k! \leq tol);$
 $b(K) = \sum_{i \in E} \pi_i r_i / a; add_transition(V, s_K, a, \Lambda_E);$
 $\pi = (I_{i=r})_{i \in E};$
for $(k = 0; k \leq K - 1; k++)$ {
 if $(h_k > 0)$ {
 $\pi^{\overline{E}} = \pi P_{E,\overline{E}}; K' = 1; a = \sum_{i \in \overline{E}} \pi_i^{\overline{E}}; add_state(V, s_{k,1}, 0); add_transition(V, s_k, s_{k,1}, h_k \Lambda_E);$
 while $(r_{\max} (\alpha_S - a'') a \sum_{l=k+1}^{\infty} (l - k) e^{-\Lambda_E t_{\max}} (\Lambda_E t_{\max})^l / l! > tol / n_k)$ {
 for $(i = 1; i \leq A; i++)$ {
 $v^i = \sum_{j \in \overline{E}, P_{j,f_i} > 0} \pi_j^{\overline{E}} P_{j,f_i} / a; \text{if } (v^i > 0) \text{ add_transition}(V, s_{k,K'}, f_i, v^i \Lambda_{\overline{E}});$
 }
 $w = \sum_{i \in \overline{E}} \pi_i^{\overline{E}} P_{i,\overline{E}} / a; q = \sum_{i \in \overline{E}} \pi_i^{\overline{E}} P_{i,r} / a; b(k, K') = \sum_{i \in \overline{E}} \pi_i^{\overline{E}} r_i / a;$
 $add_state(V, s_{k,K'+1}, 0); add_transition(V, s_{k,K'}, s_{k,K'+1}, w \Lambda_{\overline{E}});$
 if $(q > 0)$ $add_transition(V, s_{k,K'}, s_0, q \Lambda_{\overline{E}});$
 $n\pi^{\overline{E}} = \pi^{\overline{E}} P_{\overline{E},\overline{E}}; \pi^{\overline{E}} = n\pi^{\overline{E}}; K'++; a = \sum_{i \in \overline{E}} \pi_i^{\overline{E}};$
 }
 $b(k, K') = \sum_{i \in \overline{E}} \pi_i^{\overline{E}} r_i / a; add_transition(V, s_{k,K'}, a, \Lambda_{\overline{E}});$
 }
 if $(k < K - 1)$ $n\pi = \pi P'_{E,E}; \pi = n\pi; }$
}

FIG. 4.1 – Description algorithmique de la randomisation régénérative divisée pour la mesure $ETRT(t)$.


```

if ( $\alpha_{E'} > 0$ ) {
  if ( $\alpha_{\overline{E}} > 0$ )  $tol = \varepsilon/12$ ; else  $tol = \varepsilon/8$ ;
  add_state( $V, s'_0, \alpha_{E'}$ );  $\pi' = (\alpha_i)_{i \in E'}$ ;  $a' = \sum_{i \in E'} \pi'_i$ ;  $L = 0$ ;  $n_k = 0$ ;
  do {
    for ( $i = 1; i \leq A; i++$ ) {
       $v^{i'} = \sum_{j \in E', P_{j, f_i} > 0} \pi'_j P_{j, f_i} / a'$ ; if ( $v^{i'} > 0$ ) add_transition( $V, s'_L, f_i, v^{i'} \Lambda_E$ );
    }
     $w' = \sum_{i \in E'} \pi'_i P_{i, E'} / a'$ ;  $h'_L = \sum_{i \in E'} \pi'_i P_{i, \overline{E}} / a'$ ;  $b'(L) = \sum_{i \in E'} \pi'_i r_i / a'$ ;
    add_state( $V, s'_{L+1}, 0$ ); add_transition( $V, s'_L, s'_{L+1}, w' \Lambda_E$ );
    if ( $h'_L > 0$ )  $n_{k++}$ ;
     $n\pi' = \pi' P_{E', E'}$ ;  $\pi' = n\pi'$ ;  $L++$ ;  $a' = \sum_{i \in E'} \pi'_i$ ;
  }
  until ( $r_{\max} a' \sum_{k=L+1}^{\infty} e^{-\Lambda_E t_{\max}} (\Lambda_E t_{\max})^k / k! \leq tol$ );
   $b'(L) = \sum_{i \in E'} \pi'_i r_i / a'$ ; add_transition( $V, s'_L, a, \Lambda_E$ );
   $\pi' = (\alpha_i)_{i \in E'}$ ;
  for ( $k = 0; k \leq L - 1; k++$ ) {
    if ( $h'_k > 0$ ) {
       $\pi^{\overline{E}} = \pi' P_{E', \overline{E}}$ ;  $L' = 1$ ;  $a' = \sum_{i \in \overline{E}} \pi^{\overline{E}}_i$ ; add_state( $V, s'_{k,1}, 0$ ); add_transition( $V, s'_{k,1}, s'_{k,1}, h'_k \Lambda_E$ );
      while ( $r_{\max} a' \sum_{l=k+1}^{\infty} e^{-\Lambda_E t_{\max}} (\Lambda_E t_{\max})^l / l! > tol / n_k$ ) {
        for ( $i = 1; i \leq A; i++$ ) {
           $v^{i'} = \sum_{j \in \overline{E}, P_{j, f_i} > 0} \pi^{\overline{E}}_j P_{j, f_i} / a'$ ; if ( $v^{i'} > 0$ ) add_transition( $V, s'_{k, L'}, f_i, v^{i'} \Lambda_{\overline{E}}$ );
        }
         $w' = \sum_{i \in \overline{E}} \pi^{\overline{E}}_i P_{i, \overline{E}} / a'$ ;  $q' = \sum_{i \in \overline{E}} \pi^{\overline{E}}_i P_{i, r} / a'$ ;  $b'(k, L') = \sum_{i \in \overline{E}} \pi^{\overline{E}}_i r_i / a'$ ;
        add_state( $V, s'_{k, L'+1}, 0$ ); add_transition( $V, s'_{k, L'}, s'_{k, L'+1}, w' \Lambda_{\overline{E}}$ );
        if ( $q' > 0$ ) add_transition( $V, s'_{k, L'}, s_0, q' \Lambda_{\overline{E}}$ );
         $n\pi^{\overline{E}} = \pi^{\overline{E}} P_{\overline{E}, \overline{E}}$ ;  $\pi^{\overline{E}} = n\pi^{\overline{E}}$ ;  $L'++$ ;  $a' = \sum_{i \in \overline{E}} \pi^{\overline{E}}_i$ ;
      }
       $b'(k, L') = \sum_{i \in \overline{E}} \pi^{\overline{E}}_i r_i / a'$ ; add_transition( $V, s'_{k, L'}, a, \Lambda_{\overline{E}}$ );
    }
    if ( $k < L - 1$ ) {  $n\pi' = \pi' P_{E', E'}$ ;  $\pi' = n\pi'$ ; }
  }
}

```

$\Lambda = \max\{\Lambda_E, \Lambda_{\overline{E}}\}$; $N = \min\{m \geq 0 : r_{\max} \sum_{k=m+1}^{\infty} e^{-\Lambda t_{\max}} (\Lambda t_{\max})^k / k! \leq \varepsilon/2\}$;
 Let \widehat{V} be the randomized DTMC of V with randomization rate $\Lambda = \max\{\Lambda_E, \Lambda_{\overline{E}}\}$;
 Give N steps to \widehat{V} and compute $d(k) = \sum_{l=0}^K b(l) P[\widehat{V}_k = s_l] + \sum_{0 \leq l \leq K-1; h_l > 0} \sum_{m=1}^{K_l} b(l, m) P[\widehat{V}_k = s_{l, m}]$
 $+ I_{\alpha_{E'} > 0} (\sum_{l=0}^L b'(L) P[\widehat{V}_k = s'_l] + \sum_{0 \leq l \leq L-1; h'_l > 0} \sum_{m=1}^{L'_l} b'(l, m) P[\widehat{V}_k = s'_{l, m}])$
 $+ I_{\alpha_{\overline{E}} > 0} \sum_{l=0}^M b''(l) P[\widehat{V}_k = s''_l] + \sum_{i=1}^A r_{f_i} P[\widehat{V}_k = f_i]$, $k = 0, 1, \dots, N$;
 for ($i = 1; i \leq n; i++$) for ($k = 0, ETRR(t_i) = 0; k \leq N; k++$) $ETRR(t_i) += d(k) e^{-\Lambda t_i} (\Lambda t_i)^k / k!$;

FIG. 4.2 – Description algorithmique de la randomisation régénérative divisée pour la mesure $ETRT(t)$ (suite).

mesure $m(t)$ considérée dans le chapitre précédant, nous avons le résultat suivant.

Théorème 4.6. *Les K , L , M , $K_{\overline{E}}$ et $L_{\overline{E}}$ de la méthode randomisation régénérative divisée pour la mesure $\text{ETRT}(t)$ sont, respectivement, $O(\log(\Lambda_E t/\varepsilon))$, $O(\log(1/\varepsilon))$, $O(\log(1/\varepsilon))$, $O((\log(\Lambda_E t/\varepsilon))^2)$ et $O((\log(1/\varepsilon))^2)$.*

Employant le Théorème 4.6, nous pouvons prouver le résultat suivant concernant la mesure de $\text{ETRM}(t)$:

Théorème 4.7. *Les K , L , M , $K_{\overline{E}}$ et $L_{\overline{E}}$ de la méthode randomisation régénérative divisée pour la mesure $\text{ETRM}(t)$ sont, respectivement, $O(\log(\Lambda_E t/\varepsilon))$, $O(\log(1/\varepsilon))$, $O(\log(1/\varepsilon))$, $O((\log(\Lambda_E t/\varepsilon))^2)$ et $O((\log(1/\varepsilon))^2)$.*

Preuve. Les bornes de l'erreur de troncature du modèle utilisées dans la méthode randomisation régénérative divisée pour la mesure $\text{ETRM}(t)$ sont les moyennes dans l'intervalle $[0, t]$ des bornes de l'erreur de troncature de modèle de la méthode pour $\text{ETRT}(\tau)$, $0 \leq \tau \leq t$. En outre, les bornes de l'erreur de troncature du modèle pour la mesure $\text{ETRT}(t)$ augmentent avec t et le résultat suit alors le Théorème 4.6. \square

Les Théorèmes 4.6 et 4.7 disent que K , L , M , $K_{\overline{E}}$, et $L_{\overline{E}}$ sont tous des fonctions douces de t et ε pour les deux mesures $\text{ETRT}(t)$ et $\text{ETRM}(t)$. Cette propriété s'appelle le comportement bénin et implique que, pour assez grand X et assez grand t , la randomisation régénérative divisée sera sensiblement moins coûteuse que la randomisation standard.

Appelons C'_2 la classe des modèles définie de mode identique à la classe des modèles C_2 considérée dans le chapitre précédant avec l'extension au cas $A = 0$, c.'à d. avec la condition $A \geq 1$ remplacée par la condition plus générale $A \geq 0$. Étant donné que les développements effectués dans le chapitre précédant peuvent être étendus au cas $A = 0$, nous pouvons étendre les Théorèmes 3.5 et 3.6 à la classe des modèles C'_2 . Comme conséquence, pour des modèles de la classe C'_2 et les sélections naturelles pour $E = S_0 \cup S_1 \cup \dots \cup S_{N_C}$ et $r = o$ on aura que les paramètres de troncature K et L pourront être estimés rudement en utilisant \hat{q}_E^n en lieu des composants associés à ces paramètres de troncature de la borne supérieure de l'erreur de troncature du modèle avec $q_E \approx 1 - 1/R_E$, où $R_E = \max_{0 \leq k \leq N_C} \max_{i \in S_k} \lambda_i / \min_{0 < k \leq N_C} \min_{i \in S_k} \lambda_i$, et, pour R_E près de 1, K et L seront petits. Similairement, pour des modèles de la classe C'_2 et les sélections naturelles pour E et r , les paramètres de troncature M , K_k , $k \in \gamma_K$ et L_k , $k \in \gamma'_L$ croîtront avec $R_{\overline{E}} = \max_{1 \leq k \leq \overline{N}_C} \max_{i \in \overline{S}_k} \lambda_i / \min_{1 \leq k \leq \overline{N}_C} \min_{i \in \overline{S}_k} \lambda_i$ et, pour $R_{\overline{E}} \gg 1$ pourront être bornés supérieurement rudement par $30R_{\overline{E}}$.

4.3 Analyse numérique

Dans cette section, nous analysons la performance de la méthode randomisation régénérative divisée généralisée et la comparerons à celle de la randomisation standard, de la randomisation régénérative, de la randomisation avec détection quasi-stationnaire, et, seulement pour la mesure de $ETRT(t)$, à celle de l'uniformisation adaptative. Nous utiliserons un modèle de la classe \mathcal{C}_2 correspondant à un multiprocesseur tolérant aux fautes comprenant 16 processeurs connectés par un réseau hypercube de 8 noeuds. La Figure 4.3 montre l'architecture du système. Les processeurs défont avec le taux λ_P ; les noeuds de l'hypercube défont avec le taux λ_N ; les liens de l'hypercube défont avec le taux λ_L . Une faute d'un processeur est couverte avec probabilité C_P ; une faute d'un noeud de l'hypercube est couverte avec probabilité C_N . Les fautes des liens sont couvertes avec probabilité 1. Il y a un nombre illimité de réparateurs. La réparation commence quand le nombre de composants en faute est ≥ 2 . Le taux de réparation est μ_P pour les processeurs, μ_N pour les noeuds, et μ_L pour les liens. Une défaillance totale du système, produite par une faute non couverte, est récupérée, portant le système à un état totalement opérationnel sans composants en faute avec le taux μ_G . On supposera la présence des procédures de diagnostic et reconfiguration configurant le système de manière qu'il travaille avec une configuration maximale de processeurs interconnectés en coopération. Comme taux de récompenses, nous prendrons un taux d'accélération fonction du nombre de processeurs dans le sous-ensemble de processeurs coopérants. Cette fonction est donnée dans la Table 4.1. Avec cette structure des taux de récompense, $ETRT(t)$ peut être interprété comme la vélocité de computation du multiprocesseur en rapport avec la vélocité de computation d'un seul noeud, et $ETRM(t)$ peut être interprété comme vélocité relative de computation dans l'intervalle temporel $[0, t]$. Nous employerons les valeurs $\lambda_P = 2 \times 10^{-5} \text{ h}^{-1}$, $\lambda_N = 2 \times 10^{-5} \text{ h}^{-1}$, $\lambda_L = 5 \times 10^{-6} \text{ h}^{-1}$, $C_P = 0,99$, $C_N = 0,995$, $\mu_P = 0,1 \text{ h}^{-1}$, $\mu_N = 0,05 \text{ h}^{-1}$, $\mu_L = 0,05 \text{ h}^{-1}$ et $\mu_G = 0,2 \text{ h}^{-1}$. Concernant la distribution initiale de probabilité, nous considérons deux cas: 1) l'état initial du système est l'état sans composants en faute, et 2) avec la probabilité 0,5 l'état initial est l'état sans composants en faute, avec la probabilité 0,25 l'état initial est l'état avec réparation différée dans lequel le processeur P0 est le seul composant en faute, et avec la probabilité 0,25 l'état initial est l'état dans lequel le processeur P0 est le seul composant en faute et la réparation est en cours.

Un modèle exact du système multiprocesseur aurait une taille non-manéable, et, donc, nous utiliserons des modèles bornants avec espace d'état $S \cup \{f_i\}$, où S inclut les états avec jusque N_F fautes couvertes et l'état dans lequel le système est totalement défont en raison d'une faute non couverte d'un composant. Les modèles bornants entreront dans l'état absorbant f_i quand le modèle exact entrerait un état avec plus de N_F fautes couverts. Dans les modèles bornants, les états dans S ont les mêmes taux de récompense que dans le modèle exact. Assignant à

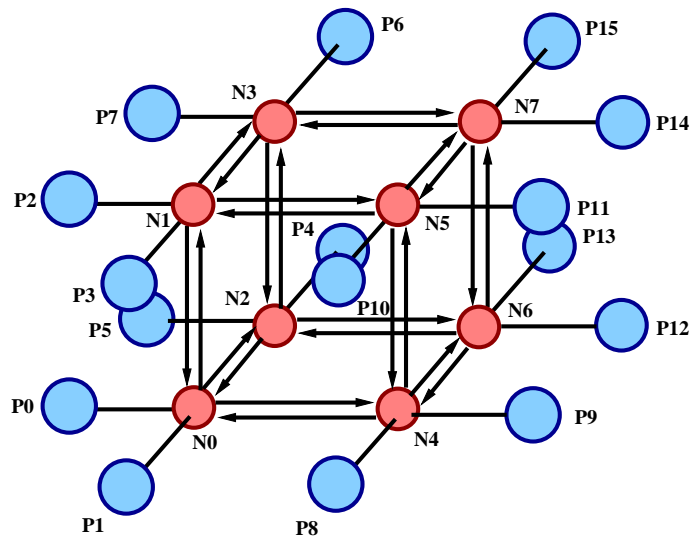


FIG. 4.3 – Architecture du système multiprocesseur tolérant aux fautes.

TAB. 4.1 – Taux de récompense en h^{-1} comme fonction du nombre de processeurs coopérants.

processeurs	taux
1	1
2	1,96667
3	2,9
4	3,8
5	4,66667
6	5,5
7	6,3
8	7,06667
9	7,8
10	8,5
11	9,16667
12	9,8
13	10,4
14	10,96667
15	11,5
16	12

l'état absorbant f_1 un taux de récompense égal à 0 (12) on obtient une borne inférieure (supérieure) pour tous les deux $\text{ETRT}(t)$ et $\text{ETRM}(t)$. Les modèles bornants appartiennent à la classe C'_2 . Prenant $N_F = 4$ est suffisant pour obtenir des bornes très ajustées. Ainsi, pour le cas 1 et $t = 100.000$ h, les bornes inférieure et supérieure pour $\text{ETRT}(t)$ sont $11,760559 \text{ h}^{-1}$ et $11,760562 \text{ h}^{-1}$, respectivement, et les bornes inférieure et supérieure pour $\text{ETRM}(t)$ sont $11,762899 \text{ h}^{-1}$ et $11,762901 \text{ h}^{-1}$, respectivement. Avec cette valeur de N_F , les modèles bornants ont 213.104 états et 2.074.962 transitions. Pour la randomisation régénérative divisée nous prendrons pour E et r les selections naturelles, c.à d. E inclura les états sans réparation et r sera l'état simple o sans composants en faute. Avec ces selections naturelles, nous avons $\alpha_{E'} = 0$ et $\alpha_{\bar{E}} = 0$ pour le cas 1 et $\alpha_{E'} > 0$ et $\alpha_{\bar{E}} > 0$ pour le cas 2. Pour la randomisation régénérative nous emploierons la sélection $r = o$. Tous les temps de CPU ont été mesurés sur un poste de travail avec un processeur Sun-Blade 1000 et 4 GB de mémoire principale. Toutes les méthodes sont invoquées avec un simple t et avec une erreur permise $\varepsilon = 10^{-10}$.

Nous commencerons par discuter la dépendance avec t des paramètres de troncature de la randomisation régénérative divisée. La Table 4.2 donne les valeurs de K , L , M , $K_{\bar{E}} = \sum_{k \in \gamma_K} K_k$ et $L_{\bar{E}} = \sum_{k \in \gamma'_L} L_k$ dans la méthode pour la mesure $\text{ETRT}(t)$ en fonction de t ; la Table 4.3 donne les valeurs correspondantes dans la méthode pour la mesure $\text{ETRM}(t)$. Nous pouvons noter que pour les deux mesures et dans tous les cas les paramètres de troncature augmentent doucement avec t . De plus, les paramètres de troncature K et L ont des valeurs très petites. Ceci est parce que, le système ayant beaucoup de composants avec taux de faute semblables, les taux de départ des états dans E sont très semblables et, en conséquence, R_E est seulement légèrement plus grand que 1 et q_E est très petit. Les paramètres de troncature M , K_k , et L_k ont également des valeurs raisonnablement petites. Dans tous les cas, les paramètres de troncature dans la méthode pour la mesure de $\text{ETRM}(t)$ ne sont pas plus grands que les paramètres de troncature dans la méthode pour la mesure de $\text{ETRT}(t)$. Ceci peut être expliqué en rappelant que les bornes de l'erreur de troncature du modèle dans la méthode pour la mesure $\text{ETRM}(t)$ ne sont pas plus grandes que les bornes de l'erreur de troncature du modèle dans la méthode pour la mesure $\text{ETRT}(t)$.

Ensuite, nous comparerons le coût computationnel de la randomisation régénérative divisée (RRD) à celui de la randomisation standard (RS), de la randomisation régénérative (RR), de la randomisation avec détection du régime quasistationnaire (RDQ), et, seulement pour la mesure de $\text{ETRT}(t)$, à celui de l'uniformisation adaptative (UA). La Figure 4.4 donne les temps de CPU pour la mesure de $\text{ETRT}(t)$; la Figure 4.5 donne les temps de CPU pour la mesure $\text{ETRM}(t)$. Nous commencerons à discuter les résultats pour le cas 1. Bien que pas clairement vu dans la Figure 4.4, pour $\text{ETRT}(t)$ UA est, avec peu d'exceptions, la méthode moins coûteuse pour t non plus que grande 1.000 h. Comparé à RS, il y a un point de croisement de valeur approchée 5.000h

TAB. 4.2 – Paramètres de troncature de la randomisation régénérative divisée pour $ETRT(t)$ en fonction de t .

t (h)	cas 1		cas 2				
	K	$K_{\overline{E}}$	K	$K_{\overline{E}}$	L	$L_{\overline{E}}$	M
1	2	111	2	121	2	199	9
5	3	174	3	194	3	253	16
10	3	202	3	220	3	280	21
50	4	292	4	319	3	351	46
100	4	339	4	367	4	410	69
500	5	500	5	533	5	553	154
1.000	6	603	6	645	5	624	154
5.000	8	904	8	961	7	865	154
10.000	9	1.050	9	1.116	8	958	154
50.000	10	1.276	11	1.380	9	1.021	154
100.000	11	1.359	11	1.443	9	1.021	154

TAB. 4.3 – Paramètres de troncature de la randomisation régénérative divisée pour $ETRM(t)$ en fonction de t .

t (h)	cas 1		cas 2				
	K	$K_{\overline{E}}$	K	$K_{\overline{E}}$	L	$L_{\overline{E}}$	M
1	2	102	2	112	2	186	8
5	3	155	3	173	2	222	14
10	3	182	3	201	3	258	19
50	4	263	4	287	3	328	42
100	4	308	4	335	4	376	64
500	5	456	5	489	5	508	144
1.000	6	547	6	586	5	576	150
5.000	7	805	8	884	7	802	153
10.000	8	949	9	1.032	8	902	154
50.000	10	1.214	10	1.290	9	1.007	154
100.000	10	1.276	11	1.380	9	1.014	154

au-dessous duquel UA est moins coûteuse et au-dessus duquel UA est plus coûteuse. Ce fait est conforme au comportement connu de l'UA par rapport à RS [39]. RR n'est pas beaucoup plus coûteuse que SR pour tous les deux $ETRT(t)$ et $ETRM(t)$. Par contre, étant donné que la taille du modèle transformé tronqué utilisé à RR est logarithmique en t et le nombre d'étapes requises dans RS augmente linéairement avec t , pour t assez grand RR devient moins coûteuse que RS. Dans l'exemple, RR est moins coûteuse que RS pour t de l'ordre de 50.000 h pour tous les deux $ETRT(t)$ et $ETRM(t)$. Pour les valeurs considérées de t , RDQ est la méthode la plus coûteuse, mais il deviendra également moins coûteuse que RS pour plus grand t 's. Finalement, RRD est la méthode moins coûteuse pour t au-dessus d'approximativement 1.000h. Pour $t = 100.000$ h, RRD est, pour la mesure $ETRT(t)$, 18,2 fois moins coûteuse que la moins coûteuse des autres méthodes (RR) et, pour la mesure $ETRM(t)$, 19,3 fois moins coûteuse que la moins coûteuse des autres méthodes (RR). Dans le cas2, il n'y a presque aucune différence de performance entre UA et RS pour la mesure $ETRT(t)$ c'est parce que, dans ce cas, le taux adapté de randomisation utilisé en UA est grand à partir des pas initiaux. Dans ce cas, RR est relativement plus mauvais que RS. La raison est que quand la distribution de probabilité initiale n'est pas concentrée dans l'état régénérateur, le modèle transformé tronqué pour RR est plus grand que quand la distribution de probabilité initiale est concentré dans l'état régénérateur [15]. La performance de RDQ est, cependant, très semblable à la performance de cette méthode au cas 1. Comme dans le cas 1, pour t assez grand, RRD est la méthode moins coûteuse. Cependant, le temps au-dessus duquel RRD est la méthode moins coûteuse est de l'ordre de 5,000 h pour les deux mesures, plus grand qu'au cas 1. La raison est que le modèle transformé tronqué est plus grand que dans le cas 1 du à la présence du peigne ayant comme lombes les états s'_k et de la corde des états s''_k . Le gain dans la performance de RRD au-dessus des autres méthodes est significatif quoique plus petit que dans le cas 1. Ainsi, pour $t = 100.000$ h, RRD est, pour tous deux la mesure $ETRT(t)$ et la mesure $ETRM(t)$, 15,4 fois moins coûteuse que la moins coûteuse des autres méthodes (RS). Quand les taux de réparation sont très différents, $R_{\bar{E}}$ sera grand, M , $K_{\bar{E}}$ et $L_{\bar{E}}$ seront grands et la randomisation régénérative divisée sera relativement plus coûteuse.

La randomisation régénérative divisée généralisée couvre aussi les modèles irréductibles (il est suffisant de considérer le cas particulier $A = 0$). Les modèles irréductibles peuvent être analysés par la méthode randomisation avec détection du régime stationnaire, mais ils ne peuvent pas être analysés par la méthode randomisation avec détection du régime quasistationnaire. Pour terminer cette section, nous comparerons la performance de la méthode randomisation régénérative divisée généralisée (RRD) à celle de la randomisation standard (RS), la randomisation régénérative (RR), la randomisation avec détection du régime stationnaire (RDS), et, seulement pour la mesure de $ETRT(t)$, à celle de l'uniformisation adaptative (UA). On considérera un exemple paramétrique correspondant à un système avec l'architecture illustré dans la Figure 4.6. Le sys-

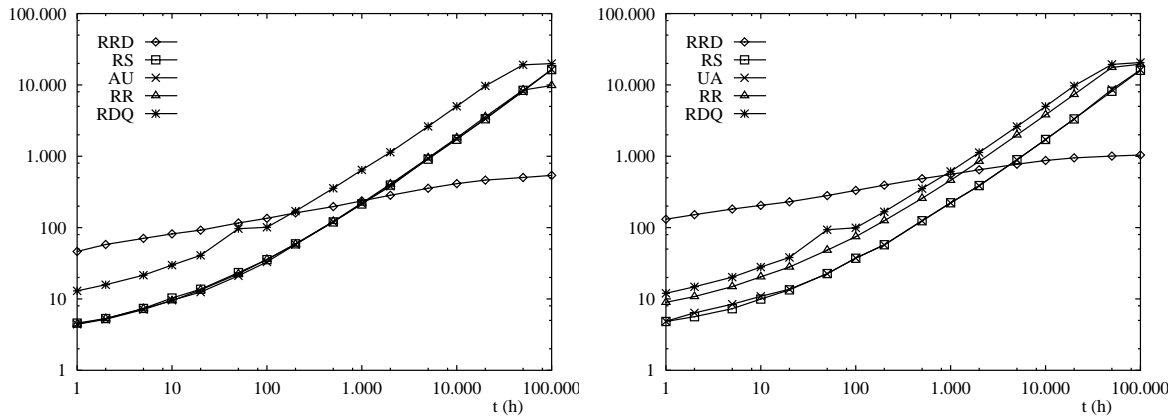


FIG. 4.4 – Temps de CPU en secondes pour la mesure $ETRT(t)$: cas 1 (gauche), cas 2 (droite).

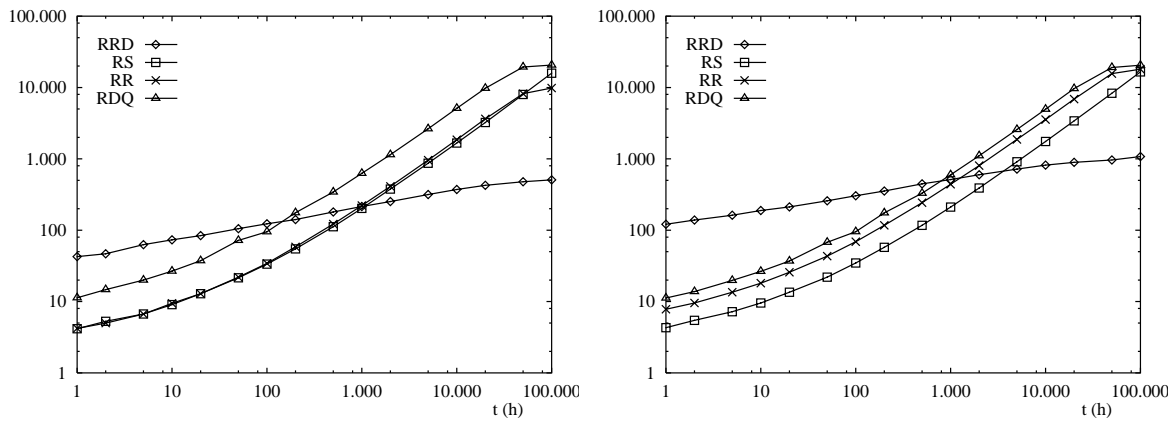


FIG. 4.5 – Temps de CPU en secondes pour la mesure $ETRM(t)$: cas 1 (gauche), cas 2 (droite).

tème est constitué par deux sous-systèmes, deux contrôleurs C et N_D ensembles des disques. Chaque sous-système inclut un processeur P et deux mémoires M . Le système est opérationnel si au moins un processeur et une mémoire connectés à lui sont opérationnels, un contrôleur est opérationnel et trois disques de chaque ensemble sont opérationnels. Les processeurs défont avec taux λ_P ; une faute de processeur est douce avec probabilité P_S et dure avec probabilité $1 - P_S$. Les mémoires défont avec taux λ_M . Les contrôleurs défont avec taux λ_C . Les disques défont avec taux λ_D . Une faute d'un contrôleur est propagée au deux disques de l'un des ensembles avec probabilité $1 - C_C$. L'ensemble des disques auquel la faute est propagée est choisi aléatoirement. Il y a deux réparateurs pour réparer les processeurs en faute douce et un seul réparateur pour réparer les processeurs en faute dure, mémoires, contrôleurs et disques, avec priorité interrompant donnée premièrement aux disques, deuxièmement aux contrôleurs, troisièmement aux processeurs en faute dure et finalement aux mémoires. Le composant à être réparé est choisi aléatoirement entre les composants en faute avec maximum priorité de réparation. Les taux de réparation sont μ_{PH} pour les processeurs en faute dure, μ_{PS} pour les processeurs en faute douce, μ_M pour les mémoires, μ_C pour les contrôleurs et μ_D pour les disques. La réparation est différée quand les seules composants en faute sont mémoires et il qu'il n'y a pas plus d'une mémoire en faute dans le même sous-système.

On considérera les deux ensembles pour les valeurs des paramètres du modèle décrits dans la Table 4.4. Dans l'ensemble A, les taux sont très similaires; dans l'ensemble B, ils sont plus différents. On considérera deux valeurs pour N_D : $N_D = 4$ et $N_D = 8$. La CMTC a 8.099 états et 36.154 transitions pour $N_{DS} = 4$ et 162.307 états et 1.059.078 transitions pour $N_{DS} = 8$. Concernant la distribution de probabilité initiale, nous considérons deux cas: 1) l'état initial du système est l'état sans composant en faute avec probabilité 1, et 2) avec la probabilité 0,5 l'état initial est l'état dans lequel un disque de l'ensemble 1 est en faute et avec la probabilité 0,5 l'état initiale est l'état dans lequel une mémoire du sous-système 1 est en faute. Les méthodes sont invoquées demandant une borne pour l'erreur $\varepsilon = 10^{-10}$ et avec un seul temps t . Les temps de CPU sont mesurés sur un poste de travail avec un processeur Sun-Blade 1000 et 4 GB de mémoire principale.

Les Figures 4.7 et 4.8 donnent les temps de CPU pour le modèle avec $N_D = 4$ pour les mesures $ETRT(t)$ et $ETRM(t)$, respectivement. Nous commencerons à discuter les résultats pour le cas 1 (au-dessus). Pour des petits t , la méthode la moins coûteuse est la RS. Pour des grands t , la méthode la moins coûteuse est la RRD. Il y a un point de croisement de valeur approchée au-dessus duquel la RRD est la méthode la moins coûteuse. Pour l'ensemble A (taux de réparation moins différents) le point de croisement est $t \approx 200$ h; pour l'ensemble B (taux de réparation plus différents) le point de croisement est $t \approx 200$ h. Dans le cas 2, la RRD est relativement plus coûteuse et, pour l'ensemble B, elle est plus coûteuse que la RS, qui est la méthode la moins

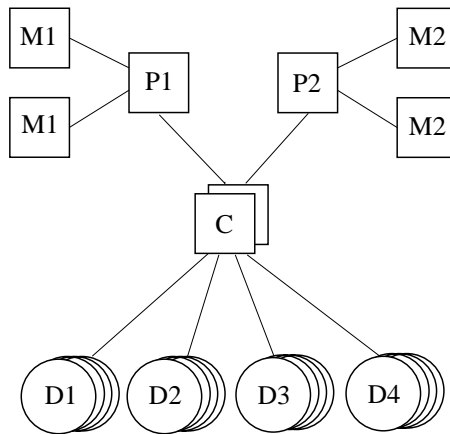


FIG. 4.6 – Architecture de l'exemple paramétrique pour $N_D = 4$.

TAB. 4.4 – Ensembles des valeurs des paramètres. Tous les taux sont en h^{-1} .

	ensemble	
	A	B
λ_P	2×10^{-5}	2×10^{-5}
λ_M	10^{-5}	10^{-5}
λ_C	2×10^{-5}	2×10^{-5}
λ_D	10^{-5}	10^{-5}
P_S	0.8	0.8
C_C	0.99	0.99
μ_{PS}	0.5	5
μ_{PH}	0.2	0.2
μ_M	0.2	0.2
μ_C	0.5	0.5
μ_D	0.5	0.5

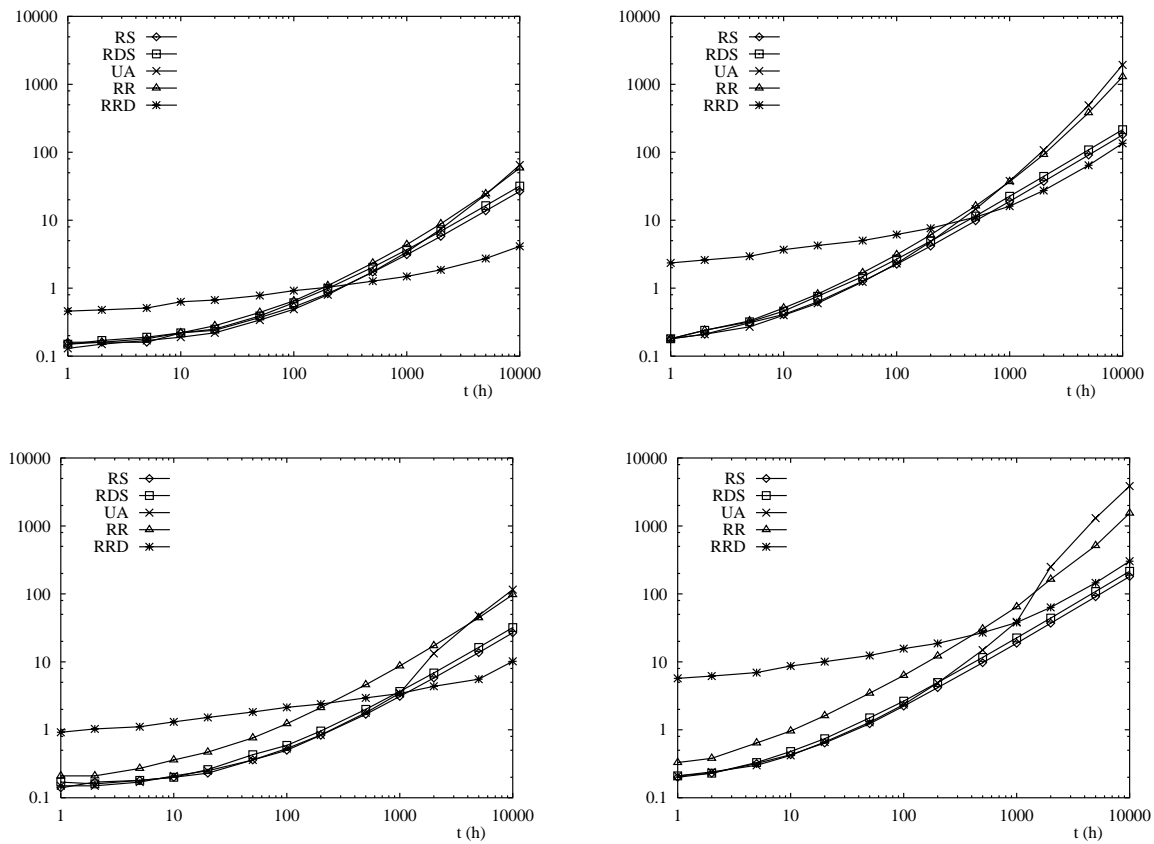


FIG. 4.7 – Temps de CPU en secondes pour le modèle avec $N_D = 4$ et la mesure $E\text{TRT}(t)$ pour, au-dessus, cas1 (ensemble A à gauche, ensemble B à droite) et, au-dessous, cas2 (ensemble A à gauche, ensemble B à droite).

coûteuse. Les Figures 4.9 et 4.10 donnent les temps de CPU pour le modèle avec $N_D = 8$ pour les mesures $E\text{TRT}(t)$ et $E\text{TRM}(t)$, respectivement. Les résultats sont similaires à ceux du modèle petit ($N_D = 4$), avec la seule différence que la RRD est relativement moins coûteuse. Ceci s'explique par le fait que, le modèle donné étant plus grand et les modèles transformés tronqués étant de taille similaires, la deuxième phase de la méthode (résolution du modèle transformé tronqué par RS) est relativement moins coûteuse. Pour des plus grands t l'avantage de la RRD sur la RS serait plus prononcé, et la méthode serait plus compétitive.

4.4 Conclusions

Dans ce chapitre nous avons généralisé la méthode randomisation régénérative divisée développée dans le chapitre précédent de manière à ce qu'elle couvre des modèles Markoviens avec des taux de récompense non-négatifs arbitraires et permet le calcul des mesures $E\text{TRT}(t)$ et

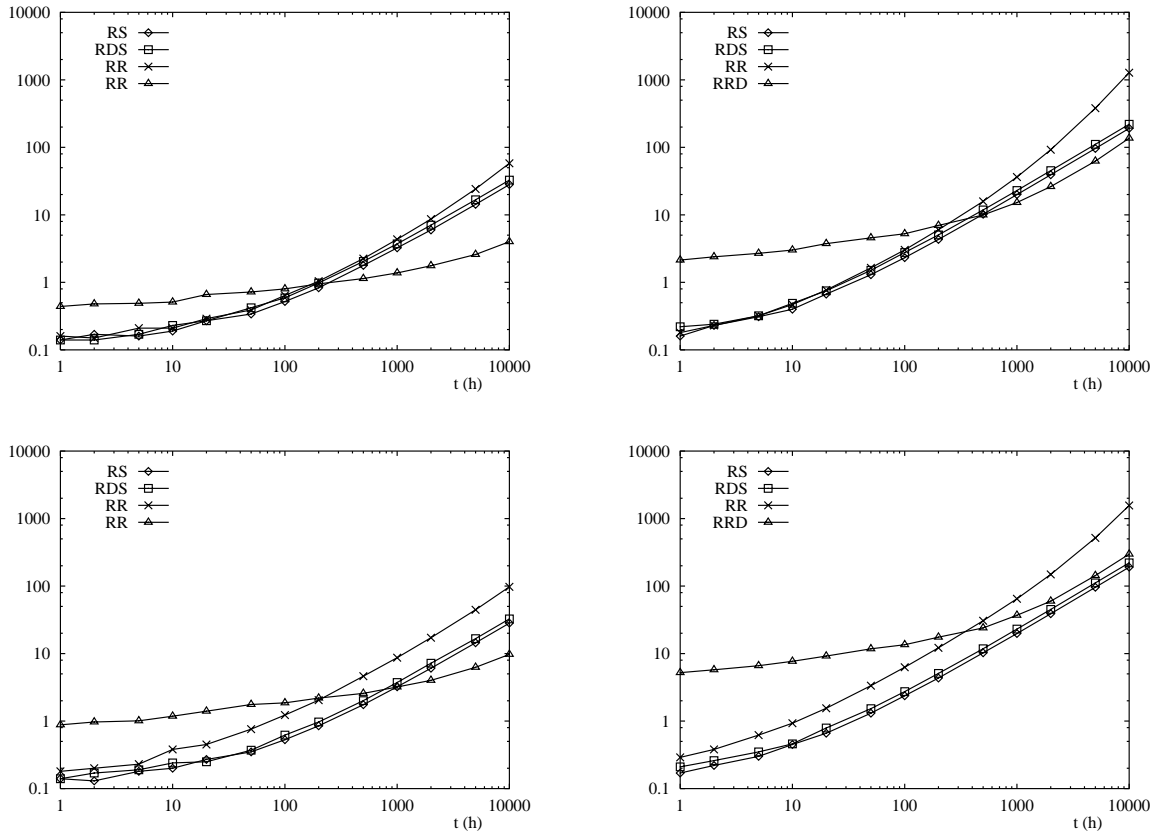


FIG. 4.8 – Temps de CPU en secondes pour le modèle avec $N_D = 4$ et la mesure $ETRM(t)$ pour, au-dessus, cas1 (ensemble A à gauche, ensemble B à droite) et, au-dessous, cas2 (ensemble A à gauche, ensemble B à droite).

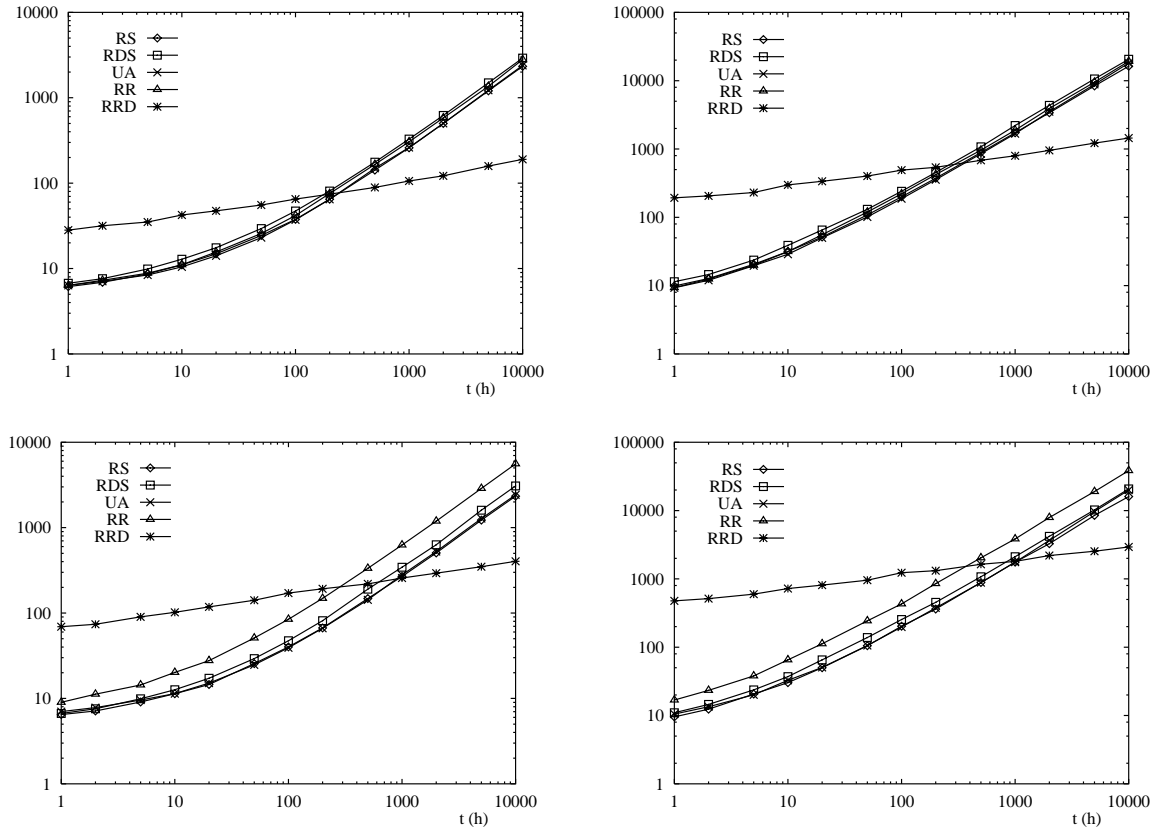


FIG. 4.9 – Temps de CPU en secondes pour le modèle avec $N_D = 8$ et la mesure $ETRT(t)$ pour, au-dessus, cas1 (ensemble A à gauche, ensemble B à droite) et, au-dessous, cas2 (ensemble A à gauche, ensemble B à droite).

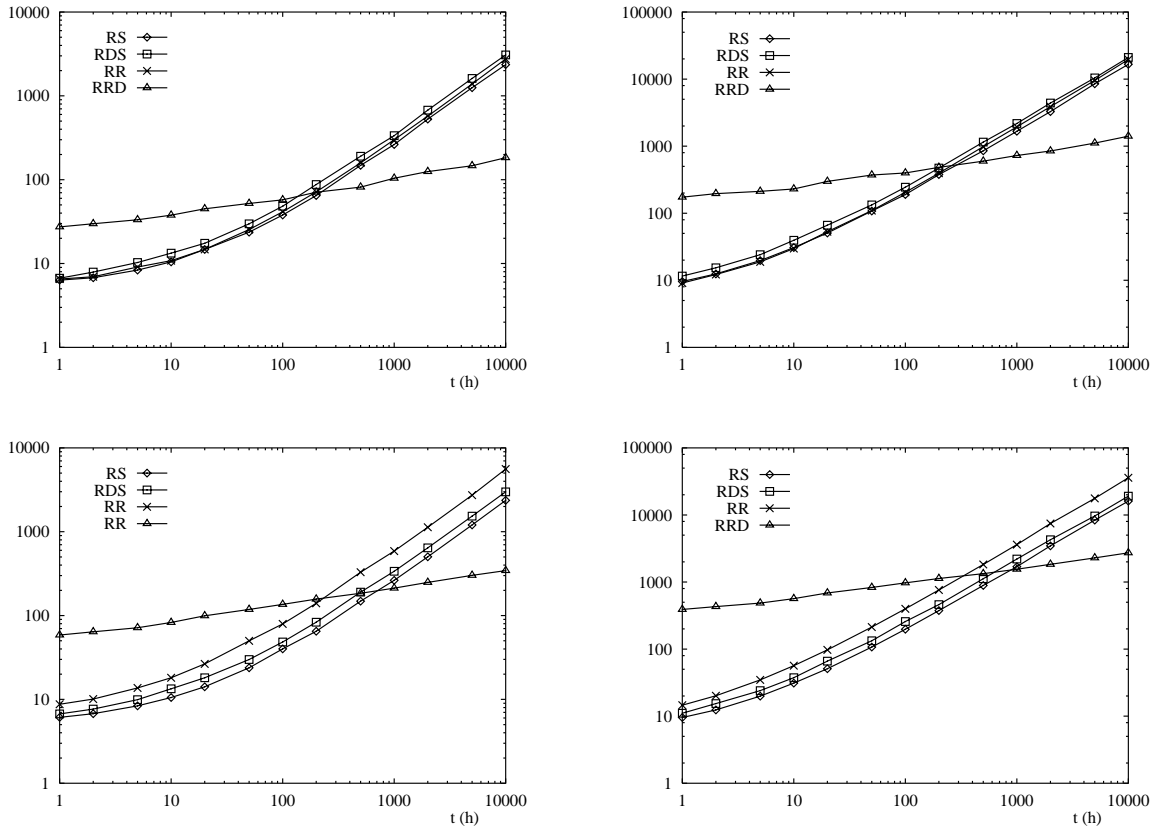


FIG. 4.10 – Temps de CPU en secondes pour le modèle avec $N_D = 8$ et la mesure $ETRM(t)$ pour, au-dessus, cas1 (ensemble A à gauche, ensemble B à droite) et, au-dessous, cas2 (ensemble A à gauche, ensemble B à droite).

$ETRM(t)$. La méthode généralisée a les mêmes bonnes propriétés que la méthode développée dans le chapitre précédent et que la randomisation standard. La classe des modèles C_2 a été généralisée à la classe des modèles C'_2 en permettant le cas $A = 0$. Pour la classe généralisée C'_2 , des sélections naturelles pour E et r existent aussi et, avec ces sélections naturelles, des résultats théoriques existent permettant de prévoir le coût computationnel de la méthode. La classe C'_2 inclut les modèles des systèmes tolérants aux fautes avec réparation différée et avec des distributions exponentielles pour les temps de faute et les temps de réparation quand les taux de faute sont beaucoup plus petits que les temps de réparation. La méthode généralisée peut être beaucoup moins coûteuse que les autres méthodes basées sur la randomisation. Quand les taux de départ des états avec réparation ne sont pas très différents, la méthode généralisée permet l'analyse en temps de CPU raisonnables des CMTC recompensées de très grande taille. En combinaison avec des méthodes bornantes, ceci permet l'analyse des systèmes tolérants aux fautes avec réparation différée avec un nombre de composants très élevé.

Chapitre 5

Randomisation régénérative divisée bornante

La fiabilité est une mesure importante pour évaluer quelques systèmes tolérants aux fautes. Dans les cas des systèmes tolérants aux fautes avec réparation différée, la randomisation régénérative divisée permet de calculer la non-fiabilité avec un coût computationnel modéré quand les taux de départ des états avec réparation ne sont pas très différents. Cependant, il y a des modèles pour lesquels les taux de départ des états avec réparation diffèrent par ordres de magnitude. Dans ces cas, la randomisation régénérative divisée serait très coûteuse. Dans ce chapitre nous développerons une nouvelle méthode, la randomisation régénérative divisée bornante, permettant un calcul très efficace des bornes pour la mesure $m(t)$, que inclut comme cas particulier la non-fiabilité. Pour les modèles des systèmes tolérants aux fautes avec réparation différée dans lesquels les taux de réparation sont beaucoup plus grands que les taux de faute, les bornes seront ajustées.

5.1 Méthode

La méthode randomisation régénérative divisée bornante permet le calcul d'une borne inférieure et d'une borne supérieure pour $m(t) = \sum_{i=1}^A r_{f_i} P[X(t) = f_i]$. Les bornes sont calculées avec une erreur $\leq \varepsilon$. La méthode demande la spécification d'un sous-ensemble d'états E et d'un état régénérateur $r \in E$ et a un paramètre D contrôlant le degré d'ajustement des bornes. Soit $\lambda_{\min} = \min_{i \in \bar{E}} \lambda_i$ et $\lambda_{\max} = \max_{i \in \bar{E}} \lambda_i$. Le paramètre de contrôle doit satisfaire $1 \leq D < \lambda_{\max}/\lambda_{\min}$. Ceci implique que la méthode sera seulement applicable quand $\lambda_{\max} > \lambda_{\min}$. Cependant, quand $\lambda_{\max} = \lambda_{\min}$, la méthode randomisation régénérative divisée sera très efficace quand R_E est près de 1, rendant la nécessité d'une méthode plus efficace pour

calculer des bornes pour $m(t)$. La méthode combine une phase dans laquelle quelques taux de transition sont échelonnés avec l'application de la randomisation régénérative divisée au modèle avec taux de transition échelonné. Dans ce sens, la méthode est très similaire à la randomisation régénérative bornante [16]. La méthode couvre les mêmes modèles que les modèles couverts par la randomisation régénérative divisée pour la mesure $m(t)$.

Pour obtenir la borne inférieure pour $m(t)$, la méthode modifie la CMTC X pour obtenir une CMTC X^{bi} . La CMTC X^{bi} est obtenue à partir de X par l'échelonnement des taux de transition des états dans \overline{E} de sorte que, appelant λ_i^{bi} le taux de départ de X^{bi} et appelant $\lambda_{i,j}^{\text{bi}}$ les taux de transition de X^{bi} , $\lambda_i^{\text{bi}} \leq \lambda_i$, $i \in \overline{E}$ et $\max_{i \in \overline{E}} \lambda_i^{\text{bi}} / \min_{i \in \overline{E}} \lambda_i^{\text{bi}} = D$. L'échelonnement est défini par $\lambda_{i,j}^{\text{bi}} = \lambda_{i,j}(\lambda_i^{\text{bi}}/\lambda_i)$, $\lambda_i^{\text{bi}} = \min\{\lambda_i, D\lambda_{\min}\}$, $i \in \overline{E}$, où $\lambda_{i,j}^{\text{bi}}$ sont les taux de transitions dans X^{bi} . La borne inférieure pour $m(t)$ est donnée par

$$m^{\text{bi}}(t) = \sum_{i=1}^A r_{f_i} P[X^{\text{bi}}(t) = f_i].$$

Cette borne inférieure est obtenue par la résolution de X^{bi} par randomisation régénérative divisée avec le même sous-ensemble des états E , l'état régénérateur r et une erreur permise ε .

Pour obtenir la borne supérieure pour $m(t)$, la méthode modifie la CMTC X pour obtenir une CMTC X^{bs} . La CMTC X^{bs} est obtenue à partir de X par l'échelonnement des taux de transition des états dans \overline{E} de sorte que, appelant λ_i^{bs} , $i \in \overline{E}$ le taux de départ de X^{bs} et appelant $\lambda_{i,j}^{\text{bs}}$ les taux de transition de X^{bs} , $\lambda_i^{\text{bs}} \geq \lambda_i$, $i \in \overline{E}$ et $\max_{i \in \overline{E}} \lambda_i^{\text{bs}} / \min_{i \in \overline{E}} \lambda_i^{\text{bs}} = D$. L'échelonnement est défini par $\lambda_{i,j}^{\text{bs}} = \lambda_{i,j}(\lambda_i^{\text{bs}}/\lambda_i)$, $\lambda_i^{\text{bs}} = \max\{\lambda_i, \lambda_{\max}/D\}$, $i \in \overline{E}$. la borne supérieure pour $m(t)$ est donnée par

$$m^{\text{bs}}(t) = \sum_{i=1}^A r_{f_i} P[X^{\text{bs}}(t) = f_i].$$

Cette borne supérieure est obtenue par la résolution de X^{bs} par randomisation régénérative divisée avec le même sous-ensemble des états E , l'état régénérateur r et une erreur permise ε . Que $m^{\text{bi}}(t)$ borne inférieurement $m(t)$ et $m^{\text{bs}}(t)$ borne supérieurement $m(t)$ suit de la Proposition 2 de [16], qui est applicable au CMTC X , X^{bi} et X^{bs} en raison des rapports entre les taux de transition des CMTC. Étant donné que les taux de départ des états dans \overline{E} de X^{bi} décroissent potentiellement avec D et les taux de départ des états dans \overline{E} de X^{bs} croissent potentiellement avec D , par la Proposition 2 de [16], les bornes $m^{\text{bi}}(t)$ et $m^{\text{bs}}(t)$ seront potentiellement plus ajustées à mesure que D augmente.

Le cas particulier dans lequel les deux bornes doivent être calculées et $D = 1$ permet une réalisation plus efficace de la méthode que celle décrite dans le paragraphe précédent. Le théorème suivant établit le résultat sur lequel cette exécution particulière est basée (les indices^{bi} et

^{bs} dénotent les objets associés aux solutions de, respectivement, X^{bi} et X^{bs} par la randomisation régénérative divisée.

Théorème 5.1. *Pour $D = 1$, $a^{\text{bi}}(k) = a^{\text{bs}}(k)$, $a'^{\text{bi}}(k) = a'^{\text{bs}}(k)$, $a''^{\text{bi}}(k) = a''^{\text{bs}}(k)$, $a^{\text{bi}}(k, l) = a^{\text{bs}}(k, l)$, $a'^{\text{bi}}(k, l) = a'^{\text{bs}}(k, l)$, $w_k^{\text{bi}} = w_k^{\text{bs}}$, $v_k^{\text{bi}} = v_k^{\text{bs}}$ et $h_k^{\text{bi}} = h_k^{\text{bs}}$, supposant $\alpha_{E'} > 0$, $w_k'^{\text{bi}} = w_k'^{\text{bs}}$, $v_k'^{\text{bi}} = v_k'^{\text{bs}}$ et $h_k'^{\text{bi}} = h_k'^{\text{bs}}$, supposant $a^{\text{bs}}(k, 1) > 0$, $w_{k,l}^{\text{bi}} = w_{k,l}^{\text{bs}}$, $q_{k,l}^{\text{bi}} = q_{k,l}^{\text{bs}}$ et $v_{k,l}^{\text{bi}} = v_{k,l}^{\text{bs}}$, supposant $\alpha_{E'} > 0$ et $a'^{\text{bs}}(k, 1) > 0$, $w_{k,l}'^{\text{bi}} = w_{k,l}'^{\text{bs}}$, $q_{k,l}'^{\text{bi}} = q_{k,l}'^{\text{bs}}$ et $v_{k,l}'^{\text{bi}} = v_{k,l}'^{\text{bs}}$, et, supposant $\alpha_{\bar{E}} > 0$, $w_k''^{\text{bi}} = w_k''^{\text{bs}}$, $q_k''^{\text{bi}} = q_k''^{\text{bs}}$ et $v_k''^{\text{bi}} = v_k''^{\text{bs}}$. Aussi, $K^{\text{bi}} \leq K^{\text{bs}}$, supposant $a^{\text{bs}}(k, 1) > 0$, $K_k^{\text{bi}} \leq K_k^{\text{bs}}$, supposant $\alpha_{E'} > 0$, $L^{\text{bi}} = L^{\text{bs}}$, supposant $\alpha_{E'} > 0$ et $a'^{\text{bs}}(k, 1) > 0$, $L_k^{\text{bi}} = L_k^{\text{bs}}$, et, supposant $\alpha_{\bar{E}} > 0$, $M^{\text{bi}} \leq M^{\text{bs}}$.*

Preuve Soit $R' = \lambda_{\max}/\lambda_{\min}$. Notant que $\lambda_i^{\text{bi}} = \lambda_{\min}$, $i \in \bar{E}$ et $\lambda_i^{\text{bs}} = \lambda_{\max}$, $i \in \bar{E}$, nous avons $\lambda_{i,j}^{\text{bi}} = \lambda_{i,j}^{\text{bs}}/R'$, $i \in \bar{E}$ et $\Lambda_{\bar{E}}^{\text{bi}} = \Lambda_{\bar{E}}^{\text{bs}}/R'$. Alors, les probabilités de transition $P_{i,j}^{\text{bi}}$, $i \in \bar{E}$ de la CMTD \hat{X}^{bi} sont identiques aux probabilités de transition $P_{i,j}^{\text{bs}}$, $i \in \bar{E}$ de la CMTD \hat{X}^{bs} . Ceci suit pour $j \neq i$ parce que $P_{i,j}^{\text{bi}} = \lambda_{i,j}^{\text{bi}}/\Lambda_{\bar{E}}^{\text{bi}}$ et $P_{i,j}^{\text{bs}} = \lambda_{i,j}^{\text{bs}}/\Lambda_{\bar{E}}^{\text{bs}}$, et est également vrai pour $j = i$ parce que $\sum_j P_{i,j}^{\text{bi}} = \sum_j P_{i,j}^{\text{bs}} = 1$. Les probabilités de transition $P_{i,j}^{\text{bi}}$, $i \in E$ de \hat{X}^{bi} sont également identiques aux probabilités de transition $P_{i,j}^{\text{bs}}$, $i \in E$ de \hat{X}^{bs} , parce que les taux de transition $\lambda_{i,j}^{\text{bi}}$, $i \in E$ de \hat{X}^{bi} sont identiques aux taux de transition $\lambda_{i,j}^{\text{bs}}$, $i \in E$ de \hat{X}^{bs} . De plus, étant donné que f_i sont absorbants dans tous les deux \hat{X}^{bi} et \hat{X}^{bs} , $P_{f_i, f_i}^{\text{bi}} = P_{f_i, f_i}^{\text{bs}} = 1$, $1 \leq i \leq A$. En résumé, \hat{X}^{bi} et \hat{X}^{bs} sont identiques distributions de probabilité initiale et identiques probabilités de transition. Ceci implique $\pi_i^{\text{bi}}(k) = \pi_i^{\text{bs}}(k)$, $\pi_i'^{\text{bi}}(k) = \pi_i'^{\text{bs}}(k)$, $\pi_i''^{\text{bi}}(k) = \pi_i''^{\text{bs}}(k)$, $\pi_i^{\text{bi}}(k, l) = \pi_i^{\text{bs}}(k, l)$ et $\pi_i'^{\text{bi}}(k, l) = \pi_i'^{\text{bs}}(k, l)$. Alors, nous avons $a^{\text{bi}}(k) = \sum_{i \in E} \pi_i^{\text{bi}}(k) = \sum_{i \in E} \pi_i^{\text{bs}}(k) = a^{\text{bs}}(k)$, $a'^{\text{bi}}(k) = \sum_{i \in E'} \pi_i'^{\text{bi}}(k) = \sum_{i \in E'} \pi_i'^{\text{bs}}(k) = a'^{\text{bs}}(k)$, $a''^{\text{bi}}(k) = \sum_{i \in \bar{E}} \pi_i''^{\text{bi}}(k) = \sum_{i \in \bar{E}} \pi_i''^{\text{bs}}(k) = a''^{\text{bs}}(k)$, $a^{\text{bi}}(k, l) = \sum_{i \in \bar{E}} \pi_i^{\text{bi}}(k, l) = \sum_{i \in \bar{E}} \pi_i^{\text{bs}}(k, l) = a^{\text{bs}}(k, l)$ et $a'^{\text{bi}}(k, l) = \sum_{i \in \bar{E}} \pi_i'^{\text{bi}}(k, l) = \sum_{i \in \bar{E}} \pi_i'^{\text{bs}}(k, l) = a'^{\text{bs}}(k, l)$. Similairement,

$$w_k^{\text{bi}} = \frac{\sum_{i \in E} \pi_i^{\text{bi}}(k) P_{i, E'}^{\text{bi}}}{a^{\text{bi}}(k)} = \frac{\sum_{i \in E} \pi_i^{\text{bs}}(k) P_{i, E'}^{\text{bs}}}{a^{\text{bs}}(k)} = w_k^{\text{bs}},$$

$$v_k^{\text{bi}} = \frac{\sum_{j \in E} \pi_j^{\text{bi}}(k) P_{j, f_i}^{\text{bi}}}{a^{\text{bi}}(k)} = \frac{\sum_{j \in E} \pi_j^{\text{bs}}(k) P_{j, f_i}^{\text{bs}}}{a^{\text{bs}}(k)} = v_k^{\text{bs}}$$

et

$$h_k^{\text{bi}} = \frac{\sum_{i \in E} \pi_i^{\text{bi}}(k) P_{i, \bar{E}}^{\text{bi}}}{a(k)^{\text{bi}}} = \frac{\sum_{i \in E} \pi_i^{\text{bs}}(k) P_{i, \bar{E}}^{\text{bs}}}{a(k)^{\text{bs}}} = h_k^{\text{bs}},$$

supposant $\alpha_{E'} > 0$,

$$w_k'^{\text{bi}} = \frac{\sum_{i \in E'} \pi_i'^{\text{bi}}(k) P_{i, E'}^{\text{bi}}}{a'^{\text{bi}}(k)} = \frac{\sum_{i \in E'} \pi_i'^{\text{bs}}(k) P_{i, E'}^{\text{bs}}}{a'^{\text{bs}}(k)} = w_k'^{\text{bs}},$$

$$v_k'^{\text{bi}} = \frac{\sum_{j \in E'} \pi_j'^{\text{bi}}(k) P_{j, f_i}^{\text{bi}}}{a'^{\text{bi}}(k)} = \frac{\sum_{j \in E'} \pi_j'^{\text{bs}}(k) P_{j, f_i}^{\text{bs}}}{a'^{\text{bs}}(k)} = v_k'^{\text{bs}}$$

et

$$h_k^{/bi} = \frac{\sum_{i \in E'} \pi_i^{/bi}(k) P_{i,\bar{E}}^{bi}}{a(k)^{/bi}} = \frac{\sum_{i \in E'} \pi_i^{/bs}(k) P_{i,\bar{E}}^{bs}}{a(k)^{/bs}} = h_k^{/bs},$$

supposant $a^{bs}(k, 1) > 0$,

$$w_{k,l}^{bi} = \frac{\sum_{i \in \bar{E}} \pi_i^{bi}(k, l) P_{i,\bar{E}}^{bi}}{a^{bi}(k, l)} = \frac{\sum_{i \in \bar{E}} \pi_i^{bs}(k, l) P_{i,\bar{E}}^{bs}}{a^{bs}(k, l)} = w_{k,l}^{bs},$$

$$q_{k,l}^{bi} = \frac{\sum_{i \in \bar{E}} \pi_i^{bi}(k, l) P_{i,r}^{bi}}{a^{bi}(k, l)} = \frac{\sum_{i \in \bar{E}} \pi_i^{bs}(k, l) P_{i,r}^{bs}}{a^{bs}(k, l)} = q_{k,l}^{bs}$$

et

$$v_{k,l}^{i bi} = \frac{\sum_{j \in \bar{E}} \pi_j^{bi}(k, l) P_{j,fi}^{bi}}{a^{bi}(k, l)} = \frac{\sum_{j \in \bar{E}} \pi_j^{bs}(k, l) P_{j,fi}^{bs}}{a^{bs}(k, l)} = v_{k,l}^{i bs},$$

supposant $\alpha_{E'} > 0$ et $a^{/bs}(k, 1) > 0$,

$$w_{k,l}^{/bi} = \frac{\sum_{i \in \bar{E}} \pi_i^{/bi}(k, l) P_{i,\bar{E}}^{bi}}{a^{/bi}(k, l)} = \frac{\sum_{i \in \bar{E}} \pi_i^{/bs}(k, l) P_{i,\bar{E}}^{bs}}{a^{/bs}(k, l)} = w_{k,l}^{/bs},$$

$$q_{k,l}^{/bi} = \frac{\sum_{i \in \bar{E}} \pi_i^{/bi}(k, l) P_{i,r}^{bi}}{a^{/bi}(k, l)} = \frac{\sum_{i \in \bar{E}} \pi_i^{/bs}(k, l) P_{i,r}^{bs}}{a^{/bs}(k, l)} = q_{k,l}^{/bs}$$

et

$$v_{k,l}^{/i bi} = \frac{\sum_{j \in \bar{E}} \pi_j^{/bi}(k, l) P_{j,fi}^{bi}}{a^{/bi}(k, l)} = \frac{\sum_{j \in \bar{E}} \pi_j^{/bs}(k, l) P_{j,fi}^{bs}}{a^{/bs}(k, l)} = v_{k,l}^{/i bs},$$

et, supposant $\alpha_{\bar{E}} > 0$,

$$w_k^{//bi} = \frac{\sum_{i \in \bar{E}} \pi_i^{//bi}(k) P_{i,\bar{E}}^{bi}}{a^{//bi}(k)} = \frac{\sum_{i \in \bar{E}} \pi_i^{//bs}(k) P_{i,\bar{E}}^{bs}}{a^{//bs}(k)} = w_k^{//bs},$$

$$q_k^{//bi} = \frac{\sum_{i \in \bar{E}} \pi_i^{//bi}(k) P_{i,r}^{bi}}{a^{//bi}(k)} = \frac{\sum_{i \in \bar{E}} \pi_i^{//bs}(k) P_{i,r}^{bs}}{a^{//bs}(k)} = q_k^{//bs}$$

et

$$v_k^{//i bi} = \frac{\sum_{j \in \bar{E}} \pi_j^{//bi}(k) P_{j,fi}^{bi}}{a(k)^{//bi}} = \frac{\sum_{j \in \bar{E}} \pi_j^{//bs}(k) P_{j,fi}^{bs}}{a(k)^{//bs}} = v_k^{//i bs}.$$

Supposant $\alpha_{\bar{E}} > 0$, pour $m \geq 1$, $\Lambda_{\bar{E}}^{bi} < \Lambda_{\bar{E}}^{bs}$ implique $r_{\max} a^{//bi}(m) \sum_{k=m+1}^{\infty} e^{-\Lambda_{\bar{E}}^{bi} t_{\max}} (\Lambda_{\bar{E}}^{bi} t_{\max})^k / k! = r_{\max} a^{//bs}(m) \sum_{k=m+1}^{\infty} e^{-\Lambda_{\bar{E}}^{bi} t_{\max}} (\Lambda_{\bar{E}}^{bi} t_{\max})^k / k! < r_{\max} a^{//bs}(m) \sum_{k=m+1}^{\infty} e^{-\Lambda_{\bar{E}}^{bs} t_{\max}} (\Lambda_{\bar{E}}^{bs} t_{\max})^k / k!$, qui implique $M^{bi} \leq M^{bs}$. De plus, donnée que $a^{//bi}(m)$ diminue avec m et $M^{bi} \leq M^{bs}$, $a^{//bi}(M^{bi}) \geq a^{//bi}(M^{bs}) = a^{//bs}(M^{bs})$, et, puis, pour $m \geq 1$, $r_{\max}(\alpha_S - a^{//bi}(M^{bi})) a^{bi}(m) \sum_{k=m+1}^{\infty} (k-m) e^{-\Lambda_E} (\Lambda_E t_{\max})^k / k! \leq r_{\max}(\alpha_S - a^{//bs}(M^{bs})) a^{bs}(m) \sum_{k=m+1}^{\infty} (k-m) e^{-\Lambda_E} (\Lambda_E t_{\max})^k / k!$, qui implique $K^{bi} \leq K^{bs}$. Supposant $a^{bs}(k, 1) > 0$, pour $m \geq 1$, $r_{\max}(\alpha_S - a^{//bi}(M^{bi})) a^{bi}(k, m) \sum_{l=k+1}^{\infty} (l-k) e^{-\Lambda_E t_{\max}} (\Lambda_E t_{\max})^l / l! \leq r_{\max}(\alpha_S -$

$a''^{bs}(M^{bs})a^{bs}(k, m) \sum_{l=k+1}^{\infty} (l - k)e^{-\Lambda_E t_{\max}} (\Lambda_E t_{\max})^l / l!$, qui implique $K_k^{bi} \leq K_k^{bs}$. Supposant $\alpha_{E'} > 0$, pour $m \geq 1$, $r_{\max} a'^{bi}(m) \sum_{k=m+1}^{\infty} e^{-\Lambda_E} (\Lambda_E t_{\max})^k / k! = r_{\max} a^{bs}(m) \sum_{k=m+1}^{\infty} e^{-\Lambda_E} (\Lambda_E t_{\max})^k / k!$, qui implique, $L^{bi} = L^{bs}$. Finalement, supposant $\alpha_{E'} > 0$ et $a'^{bs}(k, 1) > 0$, pour $m \geq 1$, $r_{\max} a'^{bi}(k, m) \sum_{l=k+1}^{\infty} e^{-\Lambda_E t_{\max}} (\Lambda_E t_{\max})^l / l! = r_{\max} a'^{bs}(k, m) \sum_{l=k+1}^{\infty} e^{-\Lambda_E t_{\max}} (\Lambda_E t_{\max})^l / l!$, qui implique $L_k^{bi} = L_k^{bs}$. \square

Alors, si la borne supérieure $m^{bs}(t)$ est calculé d'abord et K^{bs} , $a^{bs}(k)$, $1 \leq k \leq K^{bs}$, w_k^{bs} , $v_k^{i,bs}$, $1 \leq i \leq A$ et h_k^{bs} , $0 \leq k \leq K^{bs} - 1$, γ_K^{bs} , K_k^{bs} , $k \in \gamma_K^{bs}$, $a^{bs}(k, l)$, $k \in \gamma_K^{bs}$, $1 \leq l \leq K_k^{bs}$, $w_{k,l}^{bs}$, $q_{k,l}^{bs}$ et $v_{k,l}^{i,bs}$, $1 \leq i \leq A$, $k \in \gamma_K^{bs}$, $1 \leq l \leq K_k^{bs} - 1$, si $\alpha_{E'} > 0$, L^{bs} , $w_k^{i,bs}$, $v_k^{i,bs}$, $1 \leq i \leq A$, et $h_k^{i,bs}$, $0 \leq k \leq L^{bs} - 1$, γ_L^{bs} , L_k^{bs} , $l \in \gamma_L^{bs}$, $w_{k,l}^{i,bs}$, $q_{k,l}^{i,bs}$ et $v_{k,l}^{i,bs}$, $1 \leq i \leq A$, $k \in \gamma_L^{bs}$, $1 \leq l \leq L_k^{bs} - 1$ et, si $\alpha_{\bar{E}} > 0$, M^{bs} , $a''^{bs}(k)$, $1 \leq k \leq M^{bs}$, $w_k^{i,bs}$, $q_k^{i,bs}$ et $v_k^{i,bs}$, $1 \leq i \leq A$, $0 \leq l \leq M^{bs} - 1$ sont gardés, le Théorème 5.1 peut être employé pour établir le modèle transformé tronqué correspondant à la solution de X^{bi} par la randomisation régénérative divisée sans appliquer la première phase de cette méthode à X^{bi} .

Les Figures 5.1 et 5.2 donnent une description algorithmique de la méthode régénérative divisée bornante. La description algorithmique a comme entrées la CMTC X , le nombre d'états absorbants A , les taux de récompense r_{f_i} , $1 \leq i \leq A$, le vecteur ligne de probabilités initiales α , le sous-ensemble d'états E , l'état régénérateur r , deux paramètres, lb et ub , disant si la borne inférieure (supérieure) doit être calculée ou non, le paramètre de contrôle D , l'erreur permise ε , le nombre de points de temps n pour lesquels la mesure $m(t)$ doit être calculée, et les points de temps t_1, t_2, \dots, t_n . Les sorties de la description algorithmique sont les bornes calculées pour $m(t)$, $\tilde{m}^{bi}(t_1), \tilde{m}^{bi}(t_2), \dots, \tilde{m}^{bi}(t_n)$ et $\tilde{m}^{bs}(t_1), \tilde{m}^{bs}(t_2), \dots, \tilde{m}^{bs}(t_n)$. On suppose que X et les sélections pour E et r satisfont les conditions rendant la méthode applicable. Dans le cas particulier dans lequel les deux bornes doivent être calculées et $D = 1$, le modèle transformé tronqué correspondant à la borne inférieure, appelée V dans la description algorithmique, est construit en utilisant la fonction $add_state(V, s, p)$ et $add_transition(V, s_f, s_t, r)$. La première fonction ajoute à V l'état s avec la probabilité initiale p ; la deuxième fonction ajoute à V le taux de transition r de l'état s_f à l'état s_t .

Pour les modèles de la classe C_2 , les modèles X^{bi} et X^{bs} modifiés appartiennent également à la classe C_2 et ils ont un $R_{\bar{E}}$ paramètre égal à D . Alors, pour $D = 1$, les paramètres de troncature $K_{\bar{E}}$, si $\alpha_{E'} > 0$, $L_{\bar{E}}$ et, si $\alpha_{\bar{E}} > 0$, M correspondants à la solution par la randomisation régénérative divisée de X^{bi} et X^{bs} auront des valeurs très petites. De plus, si R_E est près de 1, les paramètres de troncature K et, si $\alpha_{E'} > 0$, L correspondant à la solution par randomisation régénérative divisée de X^{bi} et X^{bs} seront aussi petits et, alors, le coût computationnel du calcul des bornes par la randomisation régénérative divisée sera petit. Si les taux de départ des états dans \bar{E} sont sensiblement plus grands que les taux de départ des états dans E , par la propriété P7

définissant la classe des modèles C_2 , X passera la majeure partie du temps dans S dans le sous-ensemble E et, étant donné que le comportement aux états dans E est identique dans X^{bi} , X^{bs} et X , les bornes devraient être ajustées pour n'importe quelle valeur de t si $\alpha_{\overline{E}} = 0$ et pour des valeurs non petites de t si $\alpha_{\overline{E}} > 0$. Les modèles des systèmes tolérants aux fautes avec réparation différée et distributions exponentielles de temps de faute et réparation satisfont toutes ces conditions quand les taux de réparation sont beaucoup plus grands que les taux de faute. Alors, pour ces modèles, les bornes obtenues par la randomisation régénérative divisée bornante devraient être ajustées pour n'importe quelle valeur de t si $\alpha_{\overline{E}} = 0$ et pour des valeurs non petites de t si $\alpha_{\overline{E}} > 0$. Comme D augmente, les bornes obtenues par la méthode deviendront plus ajustées mais le coût computationnel de la méthode augmentera. Nous exploiterons ceci dans la section suivante.

5.2 Analyse numérique

Dans cette section, nous illustrerons la performance de la méthode régénérative divisée bornante. Nous comparerons aussi le coût computationnel de la méthode avec ceux de la randomisation régénérative divisée et d'autres méthodes basées sur la randomisation. Nous utiliserons le même modèle bornant de fiabilité d'un réseau d'interconnexion ASEN-MAX 16×16 utilisé dans la Section 3.6. Ce modèle donne une borne supérieure, $nf_{\text{bs}}(t)$, pour la non-fiabilité du système.

Le modèle appartient à la classe C_2 et pour la randomisation régénérative divisée et la randomisation régénérative divisée bornante nous prendrons les sélections naturelles pour E et r , c.à d. E inclura les états sans réparation et r sera l'état o sans composants en faute. Pour la randomisation régénérative nous prendrons comme état régénérateur r l'état o . Nous considérons les mêmes distributions de probabilités initiales considérées dans la Section 3.6: cas 1) l'état initial est l'état sans composant en faute, et, cas 2) avec la probabilité 0,5, l'état initial est l'état dans lequel le seul composant en faute est le commutateur 0 de l'étape 0, et, avec la probabilité 0,5, l'état initial est l'état dans lequel les composants en faute sont le commutateur 0 de l'étape 0 et le multiplexeur supérieur. Le cas 1 illustrera le cas $\alpha_{E'} = \alpha_{\overline{E}} = 0$ et le cas 2 illustrera le cas $\alpha_{E'} > 0$, $\alpha_{\overline{E}} > 0$. Pour toutes les méthodes nous demanderons une borne pour l'erreur $\varepsilon = 10^{-9}$. Tous les temps de CPU sont mesurés avec un seul temps t et sur un poste de travail avec un processeur Sun-Blade 1000 et 4 GB de mémoire principale.

Les Tableaux 5.1 et 5.2 donnent les bornes pour $nf_{\text{bs}}(t)$ obtenues par la randomisation régénérative divisée bornante avec $D = 1$ pour plusieurs valeurs de t . Nous pouvons noter que, dans le cas 1, les bornes sont ajustées pour toutes les valeurs de t ; pour le cas 2, les bornes sont ajustées pour des valeurs non petites de t . Les Tableaux 5.3 et 5.4 donnent les paramètres de tron-

```

Inputs:  $X, A, r_{f_1}, r_{f_2}, \dots, r_{f_A}, \alpha, E, r, lb, ub, D, \epsilon, n, t_1, t_2, \dots, t_n$ 
Outputs:  $\tilde{m}^{lb}(t_1), \tilde{m}^{lb}(t_2), \dots, \tilde{m}^{lb}(t_n), \tilde{m}^{ub}(t_1), \tilde{m}^{ub}(t_2), \dots, \tilde{m}^{ub}(t_n)$ 
 $\lambda_{\min} = \min_{i \in \overline{E}} \lambda_i; \lambda_{\max} = \max_{i \in \overline{E}} \lambda_i;$ 
if (!lb && !ub ||  $D < 1$  ||  $D \geq \lambda_{\max}/\lambda_{\min}$ ) exit;
if (lb && ub &&  $D == 1$ ) {
  Obtain  $X^{ub}$  from  $X$ ;
  Compute  $\tilde{m}^{ub}(t_1), \tilde{m}^{ub}(t_2), \dots, \tilde{m}^{ub}(t_n)$  by solving  $X^{ub}$  by split regenerative randomization
  with subset of states  $E$ , regenerative state  $r$  and allowed error  $\epsilon$ ;
  Let  $K^{ub}, a^{ub}(k), w_k^{ub}, v_k^{iub}, h_k^{ub}, K_k^{ub}, a^{ub}(k, l), w_{k,l}^{ub}, q_{k,l}^{ub}, v_{k,l}^{iub}$ , if  $\alpha_{E'} > 0, L^{ub}, w_k^{ub}, v_k^{iub},$ 
   $h_k^{ub}, L_k^{ub}, w_{k,l}^{ub}, q_{k,l}^{ub}, v_{k,l}^{iub}$ , and, if  $\alpha_{\overline{E}} > 0, M^{ub}, a^{ub}(k), w_k^{ub}, q_{k,l}^{ub}, v_{k,l}^{iub}$  be the values of,
  respectively,  $K, a(k), w_k, v_k^i, h_k, K_k, a(k, l), w_{k,l}, q_{k,l}, v_{k,l}^i$ , if  $\alpha_{E'} > 0, L, w_k', v_k^i, h_k', L_k,$ 
   $w_{k,l}', q_{k,l}', v_{k,l}^i$ , and, if  $\alpha_{\overline{E}} > 0, M, a''(k), w_k'', q_{k,l}'', v_{k,l}^{ii}$  corresponding to the solution of  $X^{ub}$  by split
  regenerative randomization with subset of states  $E$ , regenerative state  $r$  and allowed error  $\epsilon$ ;
  Build CTMC  $V$  including state  $s_0$  with initial probability  $\alpha_r$ , state  $a$  with initial probability 0
  and states  $f_i, 1 \leq i \leq A$ , with initial probabilities  $\alpha_{f_i}$ ;
   $r_{\max} = \max_{1 \leq i \leq A} r_{f_i}; t_{\max} = \max_{1 \leq i \leq n} t_i;$ 
   $\Lambda_E = (1 + 10^{-4}) \max_{i \in E} \lambda_i; \Lambda_{\overline{E}} = (1 + 10^{-4}) \min_{i \in \overline{E}} \lambda_i;$ 
  if ( $\alpha_{E'} > 0$ )  $\epsilon_1 = \epsilon/6$ ; else  $\epsilon_1 = \epsilon/4$ ;
   $M = \min\{m \geq 1 : r_{\max} a^{ub}(m) \sum_{k=m+1}^{\infty} e^{-\Lambda_{\overline{E}} t_{\max}} (\Lambda_{\overline{E}} t_{\max})^k / k! \leq \epsilon_1\};$ 
  if ( $\alpha_{E'} > 0$  &&  $\alpha_{\overline{E}} > 0$ )  $\epsilon_2 = \epsilon/12$ ; else if ( $\alpha_{E'} > 0$  ||  $\alpha_{\overline{E}} > 0$ )  $\epsilon_2 = \epsilon/8$ ; else  $\epsilon_2 = \epsilon/4$ ;
  if ( $\alpha_{\overline{E}} > 0$ )  $a'' = a^{ub}(M)$ ; else  $a'' = 0$ ;
   $K = \min\{m \geq 1 : r_{\max}(\alpha_S - a'') a^{ub}(m) \sum_{k=m+1}^{\infty} (k-m) e^{-\Lambda_E t_{\max}} (\Lambda_E t_{\max})^k / k! \leq \epsilon_2\};$ 
  for ( $k = 0, n \_k = 0; k \leq K - 1; k++$ ) if ( $a^{ub}(k, 1) > 0$ )  $n \_k++$ ;
  for ( $k = 0; k \leq K - 1; k++$ )
    if ( $a^{ub}(k, 1) > 0$ )
       $K_k = \min\{m \geq 1 : r_{\max}(\alpha_S - a'') a^{ub}(k, m) \sum_{l=k+1}^{\infty} (l-k) e^{-\Lambda_E t_{\max}} (\Lambda_E t_{\max})^l / l! \leq \epsilon_2 / n \_k\};$ 
  for ( $k = 1; k \leq K; k++$ )  $add\_state(V, s_k, 0)$ ;
  for ( $k = 0; k \leq K - 1; k++$ )
    if ( $a^{ub}(k, 1) > 0$ ) for ( $l = 1, l \leq K_k; l++$ )  $add\_state(V, s_{k,l}, 0)$ ;
  for ( $k = 0, k \leq K - 1, k++$ ) {
     $add\_transition(V, s_k, s_{k+1}, w_k^{ub} \Lambda_E)$ ;
    if ( $a^{ub}(k, 1) > 0$ )  $add\_transition(V, s_k, s_{k,1}, h_k^{ub} \Lambda_E)$ ;
    for ( $i = 1, i \leq A; i++$ )  $add\_transition(V, s_k, f_i, v_k^{iub} \Lambda_E)$ ;
  }
   $add\_transition(V, s_K, a, \Lambda_E)$ ;
  for ( $k = 0; k \leq K - 1; k++$ ) {
    if ( $a^{ub}(k, 1) > 0$ ) {
      for ( $l = 1; l \leq K_k - 1; l++$ ) {
         $add\_transition(V, s_{k,l}, s_{k,l+1}, w_{k,l}^{ub} \Lambda_{\overline{E}})$ ;  $add\_transition(V, s_{k,l}, s_0, q_{k,l}^{ub} \Lambda_{\overline{E}})$ ;
        for ( $i = 1, i \leq A; i++$ )  $add\_transition(V, s_{k,l}, f_i, v_{k,l}^{iub} \Lambda_{\overline{E}})$ ;
      }
       $add\_transition(V, s_{k,K_k}, a, \Lambda_{\overline{E}})$ ;
    }
  }
}

```

FIG. 5.1 – Description algorithmique de randomisation régénérative divisée de bornes.

```

if ( $\alpha_{E'} > 0$ ){
   $L = L^{\text{ub}}$ ; for ( $k = 0; k \leq L - 1; k++$ ) if ( $a^{\text{ub}}(k, 1) > 0$ )  $L_k = L_k^{\text{ub}}$ ;
  add_state( $V, s'_0, \alpha_{E'}$ ); for ( $k = 1, k \leq L; k++$ ) add_state( $V, s'_k, 0$ );
  for ( $k = 0, k \leq L - 1; k++$ )
    if ( $a^{\text{ub}}(k, 1) > 0$ ) for ( $l = 1; l \leq L_k; l++$ ) add_state( $V, s'_{k,l}, 0$ );
  for ( $k = 0, k \leq L - 1, k++$ ){
    add_transition( $V, s'_k, s'_{k+1}, w_k^{\text{ub}} \Lambda_E$ );
    if ( $a^{\text{ub}}(k, 1) > 0$ ) add_transition( $V, s'_k, s'_{k,1}, h_k^{\text{ub}} \Lambda_E$ );
    for ( $i = 1, i \leq A, i++$ ) add_transition( $V, s'_k, f_i, v_k^{\text{ub}} \Lambda_E$ );
  }
  add_transition( $V, s'_L, a, \Lambda_E$ );
  for ( $k = 0, k \leq L - 1, k++$ ){
    if ( $a^{\text{ub}}(k, 1) > 0$ ){
      for ( $l = 1, l \leq L_k - 1; l++$ ){
        add_transition( $V, s'_{k,l}, s'_{k,l+1}, w_{k,l}^{\text{ub}} \Lambda_E$ ); add_transition( $V, s'_{k,l}, s_0, q_{k,l}^{\text{ub}} \Lambda_E$ );
        for ( $i = 1, i \leq A, i++$ ) add_transition( $V, s'_{k,l}, f_i, v_{k,l}^{\text{ub}} \Lambda_E$ );
      }
    }
  }
}
if ( $\alpha_{\bar{E}} > 0$ ){
  add_state( $V, s''_0, \alpha_{\bar{E}}$ );
  for ( $k = 1, k \leq M, k++$ ) add_state( $V, s''_k, 0$ );
  for ( $k = 0, k \leq M - 1, k++$ ){
    add_transition( $V, s''_k, s''_{k+1}, w_k^{\text{ub}} \Lambda_{\bar{E}}$ ); add_transition( $V, s''_k, s_0, q_k^{\text{ub}} \Lambda_{\bar{E}}$ );
    for ( $i = 1; i \leq A, i++$ ) add_transition( $V, s''_k, f_i, v_k^{\text{ub}} \Lambda_{\bar{E}}$ );
  }
  add_transition( $V, s''_M, a, \Lambda_{\bar{E}}$ );
}
 $\Lambda = \max\{\Lambda_E, \Lambda_{\bar{E}}\}$ ;
 $N = \min\{m \geq 0 : r_{\max} \sum_{n=m+1}^{\infty} e^{-\Lambda t_{\max}} (\Lambda t_{\max})^n / n! \leq \epsilon/2\}$ ;
Let  $\hat{V}$  be the randomized DTMC of  $V$  with randomization rate  $\Lambda$ ;
Give  $N$  steps to  $\hat{V}$  an compute  $d(n) = \sum_{i=1}^A r_f P[\hat{V}_n = f_i], 0 \leq n \leq N$ ;
for ( $i = 1, i \leq n; i++$ )  $\tilde{m}^{\text{lb}}(t_i) = \sum_{n=0}^N d(n) e^{-\Lambda t_i} (\Lambda t_i)^n / n!$ ;
}
else{
  if ( $lb$ ){
    Obtain  $X^{\text{lb}}$  from  $X$ ;
    Compute  $\tilde{m}^{\text{lb}}(t_1), \tilde{m}^{\text{lb}}(t_2), \dots, \tilde{m}^{\text{lb}}(t_n)$  by solving  $X^{\text{lb}}$  by split regenerative randomization
    with subset of states  $E$ , regenerative state  $r$ , and allowed error  $\epsilon$ ;
  }
  if ( $ub$ ){
    Obtain  $X^{\text{ub}}$  from  $X$ ;
    Compute  $\tilde{m}^{\text{ub}}(t_1), \tilde{m}^{\text{ub}}(t_2), \dots, \tilde{m}^{\text{ub}}(t_n)$  by solving  $X^{\text{ub}}$  by split regenerative randomization
    with subset of states  $E$ , regenerative state  $r$ , and allowed error  $\epsilon$ ;
  }
}
}

```

FIG. 5.2 – Description algorithmique de randomisation régénérative divisée de bornes (suite).

TAB. 5.1 – Bornes pour $nf_{bs}(t)$ obtenues par randomisation régénérative divisée bornante avec $D = 1$ en fonction de t pour le cas 1, $\mu_S = 0.4 \text{ h}^{-1}$ (au-dessus) et $\mu_S = 0.08 \text{ h}^{-1}$ (au-dessous).

t (h)	borne inférieure	borne supérieure
1	$3,523 \times 10^{-6}$	$3,523 \times 10^{-6}$
10	$3,5487 \times 10^{-5}$	$3,5487 \times 10^{-5}$
100	$3,79994 \times 10^{-4}$	$3,80008 \times 10^{-4}$
1.000	$5,741090 \times 10^{-3}$	$5,742394 \times 10^{-3}$
10.000	0,092991136	0,093051379
100.000	0,651968927	0,652259360
1	$3,523 \times 10^{-6}$	$3,523 \times 10^{-6}$
10	$3,5487 \times 10^{-5}$	$3,5490 \times 10^{-5}$
100	$3,80162 \times 10^{-4}$	$3,80302 \times 10^{-4}$
1.000	$5,757722 \times 10^{-3}$	$5,765937 \times 10^{-3}$
10.000	0,093287668	0,093656971
100.000	0,653129492	0,654870606

cature de la randomisation régénérative divisée bornante (RRDB) pour $D = 1$, correspondant au calcul de la borne supérieure pour $nf_{bs}(t)$ (les paramètres de troncature correspondant au calcul de la borne inférieure ne sont pas plus grands), la randomisation régénérative divisée (RRD) et la randomisation standard (RS). Les temps de CPU consommés par RRDB avec $D = 1$, RRD, la randomisation régénérative (RR), l'uniformisation adaptative (UA), la randomisation avec détection du régime quasistationnaire (RDQ) et RS sont données dans les Figures 5.3 et 5.4. Nous pouvons noter que RRDB avec $D = 1$ est très peu coûteuse pour tous t et, pour des grands t , beaucoup moins coûteuse que toutes les autres méthodes.

En fin, nous exploiterons l'arrangement entre le degré d'ajustement des bornes et le coût computationnel dans la randomisation régénérative divisée bornante commandée par le paramètre D . Le Tableau 5.5 donne les bornes pour $nf_{bs}(t)$ obtenues par la randomisation régénérative divisée bornante et les temps CPU pour $\mu_S = 0.08 \text{ h}^{-1}$, cas 1, $t = 10.000 \text{ h}$ et plusieurs valeurs de D ($\lambda_{\max}/\lambda_{\min} \approx 25$). On peut noter que les bornes deviennent modérément plus ajustées que D augmente, mais le coût computationnel de la méthode augmente rapidement. Ainsi, le choix $D = 1$ semble être le plus intéressant.

TAB. 5.2 – Bornes pour $nf_{bs}(t)$ obtenues par la randomisation régénérative divisée bornante avec $D = 1$ en fonction de t pour le cas 2, $\mu_S = 0.4 \text{ h}^{-1}$ (au-dessus) et $\mu_S = 0.08 \text{ h}^{-1}$ (au-dessous).

t (h)	borne inférieure	borne supérieure
1	$2,1528 \times 10^{-5}$	$4,0092 \times 10^{-5}$
10	$1,58424 \times 10^{-4}$	$1,66109 \times 10^{-4}$
100	$1,358243 \times 10^{-3}$	$1,366681 \times 10^{-3}$
1.000	0,012891783	0,012922037
10.000	0,107421165	0,107509980
100.000	0,657558500	0,657855188
1	$2,2793 \times 10^{-5}$	$1,40807 \times 10^{-4}$
10	$1,98521 \times 10^{-4}$	$2,84253 \times 10^{-4}$
100	$1,443059 \times 10^{-3}$	$1,494011 \times 10^{-3}$
1.000	0,013009002	0,013125405
10.000	0,107827753	0,108352430
100.000	0,658744807	0,660523036

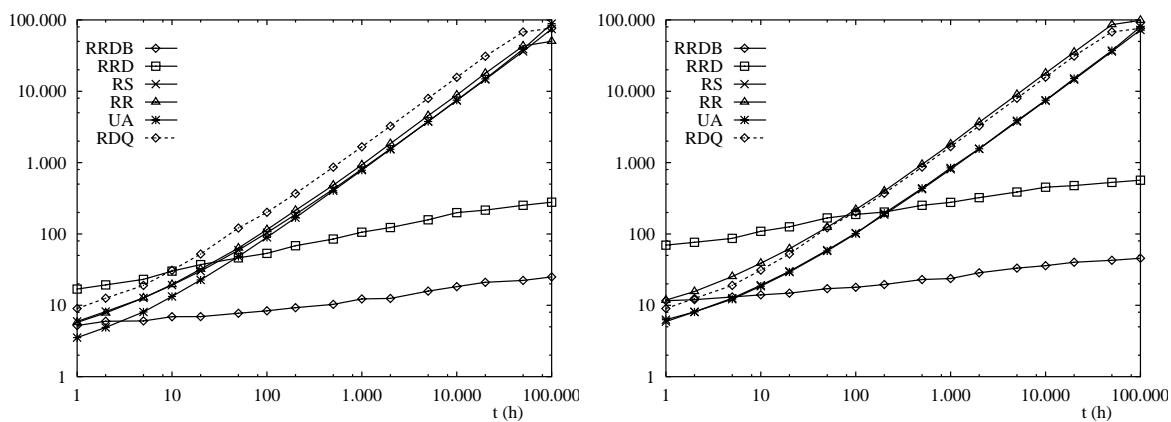


FIG. 5.3 – Temps de CPU en secondes consommés par les méthodes en fonction de t pour $\mu_S = 0.4 \text{ h}^{-1}$, cas 1 (gauche) et cas 2 (droite).

TAB. 5.3 – Valeurs des paramètres de troncature dans la randomisation régénérative divisée bornante (RRDB pour $D = 1$, la randomisation régénérative divisée RRD) et la randomisation standard (RS) pour le cas 1, $\mu_S = 0.4 \text{ h}^{-1}$ (au-dessus) et $\mu_S = 0.08 \text{ h}^{-1}$ (au-dessous).

t (h)	RRDB		RRD		RS
	K^{bs}	$K_{\bar{E}}^{\text{bs}}$	K	$K_{\bar{E}}$	N
1	2	3	2	35	15
10	3	8	3	69	52
100	3	12	3	128	290
1.000	5	24	5	262	2.274
10.000	7	40	7	474	20.858
100.000	9	54	9	641	202.730
1	2	5	2	181	15
10	3	10	3	359	52
100	3	14	3	686	290
1.000	5	28	5	1.414	2.274
10.000	7	48	7	2.572	20.858
100.000	9	68	9	3.499	202.730

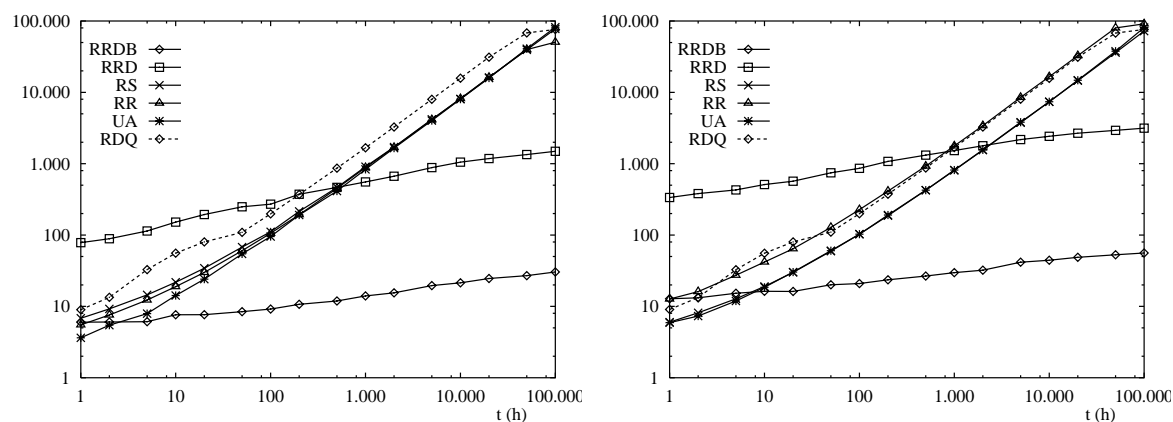


FIG. 5.4 – Temps de CPU en secondes consommés par les méthodes en fonction de t pour $\mu_S = 0.08 \text{ h}^{-1}$, cas 1 (gauche) et cas 2 (droite).

TAB. 5.4 – Valeurs des paramètres de troncature de la randomisation régénérative divisée bornante (RRDB) pour $D = 1$, la randomisation régénérative divisée (RRD) et la randomisation standard (RS) pour le cas 2, $\mu_S = 0.4 \text{ h}^{-1}$ (au-dessus) et $\mu_S = 0.08 \text{ h}^{-1}$ (au-dessous).

t (h)	RRDB					RRD					RS
	K^{bs}	L^{bs}	M^{bs}	$K_{\overline{E}}^{\text{bs}}$	$L_{\overline{E}}^{\text{bs}}$	K	L	M	$K_{\overline{E}}$	$L_{\overline{E}}$	N
1	2	2	6	5	10	2	2	14	40	108	15
10	3	2	8	8	12	3	2	43	81	141	52
100	3	3	8	12	19	3	3	100	138	210	290
1.000	5	4	8	24	24	5	4	100	283	316	2.274
10.000	7	6	8	42	40	7	6	100	505	481	20.858
100.000	9	7	8	57	45	9	7	100	692	524	220.730
1	2	2	7	5	12	2	2	15	204	616	15
10	3	2	10	10	14	3	2	51	443	774	52
100	3	3	10	14	23	3	3	263	745	1.137	290
1.000	5	4	10	30	32	5	4	554	1.535	1.717	2.274
10.000	7	6	10	52	50	7	6	554	2.750	2.609	20.858
100.000	9	7	10	72	55	9	7	554	3.785	2.840	202.730

TAB. 5.5 – Bornes pour $nf_{\text{bs}}(t)$ obtenues par la randomisation régénérative divisée bornante et temps de CPU en secondes consommés par la méthode pour $\mu_S = 0.08 \text{ h}^{-1}$, cas 1, $t = 10.000 \text{ h}$ et plusieurs valeurs de D .

D	borne inférieure	borne supérieure	temps de CPU (s)
1	0,093287668	0,093656970	21,1
2	0,093346808	0,093646216	132
5	0,093382313	0,093613977	380
10	0,093394162	0,093560326	790
20	0,0934000890	0,093453332	1.609

5.3 Conclusions

Dans ce chapitre nous avons développé la méthode randomisation régénérative divisée bornante pour le calcul des bornes pour la mesure $m(t)$. La méthode couvre les mêmes modèles que la randomisation régénérative divisée appliquée à la mesure $m(t)$. La méthode a un paramètre de contrôle, D . Plus grandes valeurs de D donnent des bornes plus ajustées. Pour les modèles dans la class C_2 , la méthode permet l'arrangement du degré d'ajustement des bornes avec le coût computationnel. Quand les taux de départ aux états dans \overline{E} sont beaucoup plus grands que les taux de départ aux états dans E , les bornes obtenues par la méthode pour $D = 1$ devraient être très ajustées pour n'importe quelle valeur de t si la probabilité initiale aux états avec réparation est nulle et pour des valeurs non petites de t autrement. De plus, pour $D = 1$ le coût computationnel de la méthode est très petit. Les modèles satisfaisant les propriétés pour lesquels ces conclusions s'appliquent incluent les modèles des systèmes tolérants aux fautes avec réparation différée quand les taux de réparation sont beaucoup plus grands que les taux de faute. En combinaison avec des techniques de borne, la randomisation régénérative divisée bornante permet l'analyse des systèmes tolérants aux fautes avec réparation différée ayant un très grand nombre de composants. Ceci a des applications pratiques très importantes.

Chapitre 6

Conclusions

Les systèmes tolérants aux fautes peuvent être analysés en utilisant les modèles Markoviens. Certaines mesures de confiabilité et performabilités des systèmes tolérants aux fautes demandent l'analyse transitoire de la chaîne de Markov à temps continu modelant le système. L'évaluation de ces mesures peut être très coûteuse computationnellement. Ce coût élevé limite la taille des modèles Markoviens qui peuvent être analysés en temps de CPU raisonnables et la complexité des systèmes tolérants aux fautes qui peuvent être analysés. Beaucoup de mesures de confiabilité et performabilité peuvent être exprimées en utilisant des modèles Markoviens récompensés avec une structure de taux de récompense associés aux états du modèle. Dans cette thèse nous avons considéré des systèmes tolérants aux fautes avec réparation différée et des mesures définies sur des modèles Markoviens avec une structure de récompense incluant des taux de récompense associés aux états du modèle: le taux de récompense espérée au temps t et le taux de récompense moyenne dans l'intervalle temporel $[0, t]$. Exemples de mesures de confiabilité et performabilité qui peuvent être exprimées comme des cas particuliers de ces mesures incluant la non-fiabilité, l'indisponibilité au temps t , l'indisponibilité moyenne dans l'intervalle temporel $[0, t]$, la performance espérée au temps t et la performance moyenne dans l'intervalle temporel $[0, t]$. Certaines mesures évaluant le coût d'opération ou le bénéfice économique du système sont aussi possibles.

Suivant les idées similaires aux idées subjacentes, les méthodes de randomisation régénérative et la randomisation régénérative bornante, nous avons développé deux nouvelles méthodes numériques orientées à la résolution des modèles Markoviens des systèmes tolérant aux fautes avec réparation différée: la randomisation régénérative divisée et la randomisation régénérative bornante. Les deux méthodes ont les mêmes bonnes propriétés que la randomisation standard: stabilité numérique, bon contrôle de l'erreur, et capacité de spécifier l'erreur de calcul à l'avance. La randomisation régénérative divisée permet le calcul des deux mesures considérées dans thèse

et, pour les modèles Markoviens des systèmes tolérants aux fautes avec réparation différée, peut être beaucoup moins coûteuses que les autres méthodes basées sur la randomisation. Quand les taux de départ aux états avec réparation ne sont pas très différents, le coût computationnel de la méthode est relativement petit, permettant, en combinaison avec les techniques de borne, l'analyse en temps de CPU raisonnables des systèmes avec un grand nombre de composants.

La randomisation régénérative divisée bornante permet le calcul d'un cas particulier de la mesure taux de récompense espérée au temps t , incluant comme cas particulier la non-fiabilité. Pour les modèles Markoviens des systèmes tolérants aux fautes avec réparation différée pour lesquels les taux de réparation sont beaucoup plus grands que les taux de faute, le coût computationnel de la méthode sera relativement très petit et les bornes obtenues par la méthode seront très ajustées pour n'importe quelle valeur de t si la probabilité initiale aux états avec réparation est nul et pour des valeurs non petites de t autrement. En combinaison avec les techniques de borne, la méthode permet l'analyse en temps de CPU raisonnables des systèmes avec un très grand nombre des composants. Ceci a d'importantes applications pratiques.

Le travail de recherche présenté dans cette thèse peut être continué en plusieurs directions. Une direction immédiate serait la substitution de la randomisation standard par une autre méthode plus efficace de résolution du modèle transformé tronquée obtenue aux méthodes développées dans la thèse. Ceci produira d'importantes réductions dans les temps de CPU pour des modèles Markoviens de taille modérée. Une autre direction, plus ambitieuse, est le développement des méthodes similaires à celles développées dans la thèse, orientées aux systèmes tolérants aux fautes avec réparation différée, pour évaluer les mesures de confiabilité et performabilité plus complexes comme la distribution de la disponibilité d'intervalle et la distribution de la récompense accumulée dans l'intervalle temporel $[0, t]$.

Appendice: Réseaux ASEN-Max

La conception et l'analyse des réseaux d'interconnexion multi-étage sont des problèmes centraux dans le dessin des ordinateurs de grands performances et les systèmes de communication. Beaucoup de ces applications ont des exigences de fiabilité, rendant important que le réseau d'interconnexion ait une fiabilité élevée. La tolérance aux fautes peut être employée pour réaliser cette fiabilité élevée. La tolérance aux fautes peut être réalisée en employant la redondance de matériel et redondance de temps. En utilisant la redondance de matériel, des éléments supplémentaires sont ajoutés au réseau pour fournir des chemins alternatifs des entrées aux sorties du réseau d'interconnexion et, ainsi, tolérer les fautes. En utilisant la redondance de temps, une demande qui ne peut pas être servie parce qu'il n'y a pas de chemins à une entrée est réorientée à d'autres entrées. La redondance de temps augmente la fiabilité du réseau mais dégrade sa performance [5]. On a proposé un certain nombre d'arrangements de redondance de matériel pour augmenter la fiabilité des réseaux d'interconnexion multi-étages: réplication du réseau, addition d'étages supplémentaires et addition de liens supplémentaires. L'addition des liens tend à avoir un impact plus profond sur la fiabilité que l'addition d'étages supplémentaires [42]. Le réseau ASEN-Max [43, 29] est un réseau avec une redondance matérielle modérée qui peut tolérer n'importe quelle faute simple.

Le réseau ASEN-Max avec $N = 2^n$ entrées a N multiplexeurs 2×1 , N démultiplexeurs 1×2 et $\log_2(N) - 1$ étages avec $N/2$ commutateurs. La Figure 6.1 montre un réseau ASEN-Max avec 16 entrées. Les commutateurs au dernier étage sont des commutateurs 2×2 , les commutateurs aux étages restants sont des commutateurs 3×3 . Dans chaque étage excepté le dernier, les commutateurs peuvent être groupés dans des paires conjuguées. Tous les commutateurs dans la même paire conjuguée sont liés aux mêmes commutateurs du prochain étage. Les paires conjuguées peuvent être groupées en sous-ensembles conjugués, où un sous-ensemble conjugué inclut tous les commutateurs à une étape particulière qui mène aux mêmes sous-ensembles de sorties. Les commutateurs dans le même sous-ensemble conjugué qui n'appartiennent pas à la même paire conjuguée communiquent par des liens auxiliaires qui constituent des boucles. À titre illustratif, dans le réseau ASEN-Max avec 16 entrées montré à la Figure 6.1, et dénotant par $s_{i,j}$ le

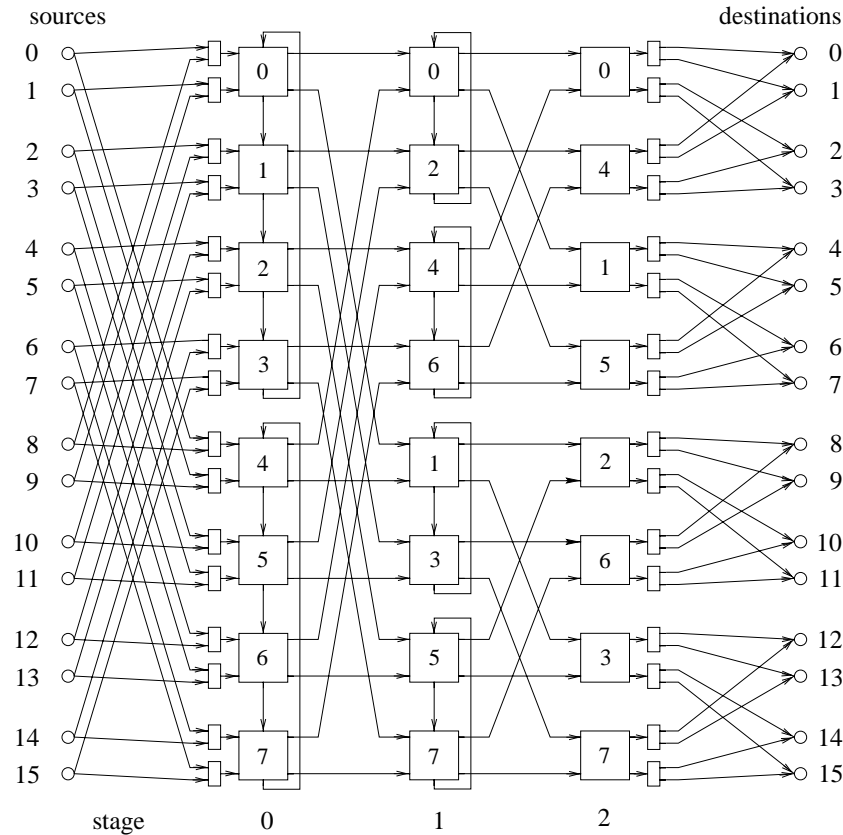


FIG. 6.1 – Architecture du réseau d’interconnexion ASEN-MAX 16×16 .

commutateur j de l’étage i , les commutateurs $S_{0,0}, S_{0,1}, \dots$ et $S_{0,7}$ forment un sous-ensemble conjugué; dans ce sous-ensemble, les commutateurs $S_{0,0}$ et $S_{0,4}$ forment une paire conjuguée; les commutateurs $S_{0,0}, S_{0,1}, S_{0,2}$ et $S_{0,3}$ forment une boucle. Cette boucle est boucle conjuguée de la boucle constituée par les commutateurs $S_{0,4}, S_{0,5}, S_{0,6}$ et $S_{0,7}$.

Une question importante dans un réseau d’interconnexion tolérant aux fautes est la façon dont l’acheminement est exécuté en présence des fautes. L’acheminement peut être fait en utilisant des algorithmes avec retour-arrière (en anglais, “backtracking”) ou sans retour-arrière. Les algorithmes avec retour-arrière sont chers et difficiles à mettre en application parce qu’ils ont besoin de liens bi-directionnels et des techniques de commutation des paquets. Les algorithmes sans retour-arrière ont une réalisation moins coûteuse. En présence des fautes, les algorithmes sans retour-arrière peuvent baser les décisions d’acheminement sur des informations locales sur l’état des composants du réseau ou sur des informations globales. Celles utilisant des décisions basées sur des informations locales peuvent ne pas trouver un chemin existant d’une certaine entrée à une certaine sortie. Dans [43, 29], on a proposé un algorithme d’acheminement sans retour-arrière pour les réseaux ASEN-Max. L’algorithme est basé sur l’information suivante locale.

1. Chaque entrée connaît l'état de faute de l'ensemble formé par le multiplexeur auquel elle est connecté et le commutateur auquel le multiplexeur est connecté.
2. Chaque commutateur de n'importe quelle étage excepté les deux derniers connaît l'état de faute des commutateurs auxquels il est connecté.
3. Chaque commutateur de l'étage précédant à la dernière connaît l'état de faute des ensembles formés par un commutateur auquel il est connecté et les deux démultiplexeurs auxquels le commutateur est connecté.

Cette information locale assume un modèle de fautes dans lequel les liens ne défont pas. Un modèle plus général de fautes comprenant des fautes de liens peut être, cependant, facilement adapté en associant les fautes des liens au multiplexeur, démultiplexeur ou commutateur auquel le lien est connecté. L'algorithme d'acheminement emploie la codification binaire $d_0 d_1 d_2 \cdots d_{n-1}$ de l'adresse de sortie, où d_0 est le bit le plus significatif et d_{n-1} est le bit le moins significatif. Dans la description de l'algorithme, nous ferons référence au lien primaire et au lien secondaire d'une entrée: les liens primaires sont dessinés au-dessus des liens secondaires dans la Figure 6.1. Nous ferons également référence aux 0-liens et aux 1-liens d'un commutateur ou d'un démultiplexeur: les 0-liens sont dessinés au-dessus des 1-liens dans la Figure 6.1. Le réseau traite les demandes en attente aux entrées regroupées par ronds, chaque rond incluant une demande de chaque entrée avec des demandes en attente. De plus, le réseau utilise des techniques de commutation de circuits. Des conflits peuvent surgir dans les multiplexeurs et des commutateurs si deux demandes doivent être acheminées par le même lien de sortie. On suppose l'existence d'un mécanisme aléatoire pour résoudre ces conflits. Les demandes perdant le conflit sont abandonnées. L'algorithme d'acheminement peut être décrit de la forme suivante.

1. Pour chaque entrée: si le multiplexeur auquel le lien primaire est connecté n'est pas défaillé et le commutateur auquel ce multiplexeur est connecté n'est pas défaillé, la demande est dirigée au lien primaire; autrement, si le multiplexeur auquel le lien secondaire est connecté n'est pas défaillé et le commutateur auxquels ce multiplexeur est connecté n'est pas défaillé, la demande est dirigée au lien secondaire; autrement, la demande est abandonnée.
2. Pour chaque commutateur dans l'étage i , $i < n - 3$: employer le bit i de l'adresse de la sortie pour choisir entre diriger la demande au 0-lien (si le bit i est 0) ou au 1-lien (si le bit i est 1); si le 0-lien ou le 1-lien choisi n'est pas occupé et le commutateur connecté à lui n'est pas défaillé la demande est dirigée au lien choisi; autrement, si le lien auxiliaire n'est pas occupé et le commutateur qui lui est connecté n'est pas défaillé la demande est dirigée au lien auxiliaire; autrement, la demande est abandonnée.
3. Pour chaque commutateur dans l'étage $n - 3$: employer le bit $n - 3$ de l'adresse de la sortie pour choisir entre diriger la demande au 0-lien (si le bit $n - 3$ est 0) ou au 1-lien

(si le bit $n - 3$ est 1); si le 0-lien ou le 1-lien choisi n'est pas occupé, le commutateur qui lui est connecté n'est pas défaillé et le démultiplexeur connecté au commutateur n'est pas défaillé, la demande est dirigée à ce lien; autrement, si le lien auxiliaire n'est pas occupé et le commutateur qui lui est connecté n'est pas défaillé, la demande est dirigée au lien auxiliaire; autrement, la demande est abandonnée.

4. Pour chaque commutateur dans l'étage $n - 2$ étage: employer le bit $n - 2$ de l'adresse de la sortie pour choisir entre diriger au 0-lien (si le bit $n - 2$ est 0) ou au 1-lien (si le bit $n - 2$ est 1); si le 0-lien ou le 1-lien choisi n'est pas occupé, diriger la demande à ce lien; autrement, la demande est abandonnée.
5. Pour chaque démultiplexeur: employer le bit $n - 1$ de l'adresse de la sortie pour choisir entre diriger la demande au 0-lien (si le bit $n - 1$ est 0) ou au 1-lien (si le bit $n - 1$ est 1) et diriger la demande à ce lien.

La présence de plusieurs demandes peut empêcher l'acheminement d'une demande qui serait servie si la demande était isolée. Supposer, par exemple, que les seuls composants défaillés sont les commutateurs $S_{2,0}$ et $S_{1,2}$ et qu'il y a une demande en attente à l'entrée que doit être dirigée à la sortie 0. Si le patron des demandes est tel que il y a indéfiniment des demandes de l'entrée 2 à la sortie 0, ces demandes seront indéfiniment dirigées au commutateur $S_{1,0}$, et, quand la demande de l'entrée 0 au sortie 0 arrive à ce commutateur, la demande sera indéfiniment abandonnée. Nous supposons, donc, que quand une demande est abandonnée beaucoup de fois, toutes les autres demandes sont congelées et le réseau essaye de servir la demande abandonnée en isolation. Par conséquent, le réseau sera considéré opérationnel si une demandes isolée de n'importe quelle entrée à n'importe quelle sortie peut être dirigée. Cette hypothèse est garantie d'être pessimiste. Un autre avantage de l'hypothèse est qu'elle est facile de déterminer si le réseau est opérationnel ou non.

Un système est cohérent si: 1) comme les composants défaillent, il est impossible pour le système de passer d'un état défaillé à un état opérationnel, et 2) tous les composants sont redevants [32]. Par conséquent, pour prouver la non-cohérence du réseau ASEN-Max il est suffisant de trouver un sous-ensemble de composants C_1 et un sous-ensemble du composants $C_1 \subset C_2$ tel que quand l'ensemble de composant défaillés est C_1 une certaine demande isolée d'une certaine entrée à aucune sortie ne peut pas être servie et quand l'ensemble de composants défaillés est C_2 et une demande isolée de n'importe quelle entrée à n'importe quel sortie est servie. L'existence d'une telle paire de sous-ensembles d'éléments sera illustrée en considérant un réseau ASEN-Max a 16-entrées (voire Figure 6.1). Quand l'ensemble de composants défaillés est $C_1 = \{S_{1,2}, S_{2,0}\}$, demandes isolées de l'entrée 0 aux sorties 0, 1 et 2 ne pourront pas être servies parce qu'elles seront dirigées par le multiplexeur 0, le commutateur $S_{0,0}$ et le commutateur

$S_{1,0}$, et seront abandonnées dans $S_{1,0}$. Cependant, quand le sous-ensemble du composant défaillé est $C_2 = \{S_{1,0}, S_{1,2}, S_{2,0}\}$, ces demandes seront dirigées par le multiplexeur 0 et les commutateurs $S_{0,0}, S_{0,1}, S_{0,2}, S_{1,4}, S_{1,6}$ et $S_{2,4}$, et atteindront leur destination. On peut facilement tester que des demandes isolées entre autres paires entrée-sortie seront servies quand l'ensemble de composants échoués est C_2 .

Bibliographie

- [1] M. Abramowitz et I. A. Stegun, eds., *Handbook of Mathematical Functions*, Dover, 1964.
- [2] U. M. Ascher et L. R. Petzold, *Computer Methods for Ordinary Differential Equation and Differential-Algebraic Equation*, SIAM, 1998.
- [3] R. E. Bank, W. M. Courghan, W. Fichtner, E. H. Grosse, D. J. Rose et R. K. Smith, “Transient Simulation of Silicon Devices and Circuits”, *IEEE Trans. on Electron Devices*, vol. 32, no. 10, 1985, pp. 1.992–2.007.
- [4] C. Béounes, M. Aguéra, J. Arlat et al, “SURF-2: A Program for Dependability Evaluation of Complex Hardware and Software Systems”, dans *Proc. 23rd IEEE Int. Symp. on Fault-Tolerant Computing (FTCS-23)*, 1993, pp. 142–150.
- [5] L. N. Bhuyan et D.P. Agrawal, “Design and Performance of Generalized Interconnection Networks”, *IEEE Trans. on Computers*, vol. C-32, no. 12, 1983, pp. 1.081–1.090.
- [6] J. T. Blake et K. S. Trivedi, “Reliabilities of Two Fault-Tolerant Interconnection Networks”, dans *Proc. 18th IEEE Int. Symp. on Fault-Tolerant Computing (FTCS-18)*, 1988, pp. 300–305.
- [7] J. T. Blake et K. S. Trivedi, “Reliability Analysis of Interconnection Networks Using Hierarchical Composition”, *IEEE Trans. on Reliability*, vol. 38, no. 1, 1989, pp. 111-120.
- [8] J. T. Blake et K. S. Trivedi, “Multistage Interconnection Network Reliability”, *IEEE Trans. on Computers*, vol. 38, no. 11, 1989, pp. 1.600–1.604.
- [9] A. Blakemore, “The Cost of Eliminating Vanishing Markings from Generalized Stochastic Petri Nets”, dans *Proc. 3rd IEEE Int. Workshop on Petri Nets and Performance Models (PNPM89)*, 1989, pp. 85–92.
- [10] A. Bobbio et M. Telek, “A Benchmark for PH Estimation Algorithms: Results for Acyclic-PH”, *Communications in Statistics—Stochastic Models*, vol. 10, no. 3, 1994, pp. 661–677.
- [11] P. N. Bowerman, R. G. Nolty et E. M. Schener, “Calculation of the Poisson Cumulative Distribution Function”, *IEEE Trans. on Reliability*, vol. 39, no. 2, 1990, pp. 158–161.
- [12] J.A. Carrasco et J. Figueras, “METFAC: Design and Implementation of a Software Tool for Modeling and Evaluation of Complex Fault-Tolerant Computing Systems”, dans *Proc. 16th IEEE Int. Symp. on Fault-Tolerant Computing (FTCS-16)*, 1986, pp. 424–429.
- [13] J. A. Carrasco et J. L. Domingo, “METFAC-2: A Tool for Specification and Solution of Markov Performance, Dependability and Performability Models”, dans *Proc. XII Design of Circuits and Integrated Systems Conference*, Sevilla, Spain, November 1997, pp. 195–200.

- [14] J. A. Carrasco, "Transient Analysis of Large Markov Models with Absorbing States using Regenerative Randomization", *Communications in Statistics—Simulation and Computation*, vol. 34, no. 4, 2005, pp. 1.027–1.052.
- [15] J. A. Carrasco, "Computation of Bounds for Transient Measures of Large Rewarded Markov Models using Regenerative Randomization", *Computers and Operations Research*, vol. 30, no. 7, 2003, pp. 1.005–1.035.
- [16] J. A. Carrasco, "Computationally Efficient and Numerically Stable Reliability Bounds for Repairable Fault-Tolerant Systems", *IEEE Trans. on Computers*, vol. 51, no. 3, March 2002, pp. 254–268.
- [17] J. A. Carrasco, "Transient Analysis of Rewarded Continuous time Markov Models by Regenerative Randomization with Laplace Transform Inversion", *The Computer Journal*, vol. 46, no. 1, 2003, pp. 84–99.
- [18] J. A. Carrasco, "Transient Analysis of some Rewarded Markov Models using Randomization with Quasistationarity Detection", *IEEE Trans. on Computers*, vol. 53, no. 9, 2004, pp. 1.106–1.120.
- [19] G. Ciardo, J. Muppala et K. S. Trivedi, "SPNP: Stochastic Petri Net Package", dans *Proc. 3rd IEEE Int. Workshop on Petri Nets and Performance Models (PNPM89)*, 1989, pp. 142–151.
- [20] C. J. Colbourn, J. S. Devitt, D. D. Harms et M. Kraetzel, "Assessing Reliability of Multistage Interconnection Networks", *IEEE Trans. on Computers*, vol. 42, no. 10, 1993, pp. 1.207–1.221.
- [21] J. Couvillion, R. Freire, R. Johnson, W. Obal II, A. Qureshi, M. Rai, W. Sanders et J. Tvedt, "Performability Modelling with UltraSAN", *IEEE Software*, vol. 8, no. 5, 1991, pp. 69–80.
- [22] J. B. Dugan, K. S. Trivedi, M. K. Smotherman et R. M. Geist, "The Hybrid Automated Reliability Predictor", *J. of Guidance, Control, and Dynamics*, vol. 9, no. 3, 1986, pp. 319–331.
- [23] B. L. Fox et P. W. Glynn, "Computing Poisson Probabilities", *Communications of the ACM*, vol. 31, no. 4, 1988, pp. 440–445.
- [24] A. Goyal, W. C. Carter, E. de Souza e Silva et al, "The System Availability Estimator", dans *Proc. 16th IEEE Int. Symp. on Fault-Tolerant Computing (FTCS-16)*, 1986, pp. 84–89.
- [25] R. K. Iyer et D. Tang, "Experimental Analysis of Computer System Dependability", dans *Fault-Tolerant Computer System Design* (Pradhan, D. K., ed.), Prentice-Hall, 1995, pp. 282–392.
- [26] B. W. Johnson, *Design and Analysis of Fault Tolerant Digital Systems*, Addison-Wesley, 1989.
- [27] M. Kijima, *Markov Processes for Stochastic Modeling* Cambridge University Press, 1997.
- [28] L. Knüsel, "Computation of the Chi-square and Poisson Distribution", *SIAM J. Sci. Stat. Comput.*, vol. 7, no. 3, 1986, pp. 1.022–1.036.
- [29] V. P. Kumar et S. M. Reddy, "A Fault Tolerant Technique for Shuffle-Exchange Multistage Interconnection Networks", *IEEE Computer*, vol. 20, no. 1, 1987, pp. 30–40.
- [30] C. Landrault et J. C. Laprie, "SURF—A Program for Modeling and Reliability Prediction for Fault-Tolerant Computing Systems", dans *Information Technology*, J. Moneta, ed., North-Holland, 1978, pp. 17–26.
- [31] J. C. Laprie et A. Costes, "Dependability: A Unifying Concept for Reliable Computing", dans *Proc. 12th IEEE Int. Symp. on Fault-Tolerant Computing (FTCS-12)*, 1982, pp. 18–21.

- [32] D. H. Lawrie, "Access and Alignment of Data in an Array Processor", *IEEE Trans Computers*, vol. C-24, no. 12, 1975, pp. 1.145–1.155.
- [33] S. V. Makam et A. Avizienis, "ARIES 81: A Reliability and Life-Cycle Evaluation Tool for Fault-Tolerant Systems", dans *Proc. 12th IEEE Int. Symp. on Fault-Tolerant Computing (FTCS-12)*, 1982, pp. 266–274.
- [34] M. Malhotra, J. K. Muppala et K. S. Trivedi, "Stiffness-Tolerant Methods for Transient Analysis of Stiff Markov Chains", *Microelectronics and Reliability*, vol. 34, no. 11, 1994, pp. 1.825–1.841.
- [35] M. Malhotra, "A Computationally Efficient Technique for Transient Analysis of Repairable Markovian Systems", *Performance Evaluation*, vol. 24, no. 1–2, 1995, pp. 311–331.
- [36] B. L. Menezes et U. Bakhru, "New Bounds on the Reliability of Augmented Shuffle-Exchange Networks", *IEEE Trans. on Computers*, vol. 44, no. 1, 1995, pp. 123–129
- [37] J. F. Meyer, "On Evaluating the Performability of Degradable Computing Systems", *IEEE Trans. on Computers*, vol. C-29, no. 8, 1980, pp. 720–731.
- [38] J. F. Meyer, "Performability of an Algorithm for Connection Admission Control", *IEEE Trans. on Computers*, vol. 50, no. 7, 2001, pp. 724–733.
- [39] A. P. Moorsel et W. H. Sanders, "Adaptive Uniformization", *Communications in Statistics—Stochastic Models*, vol. 10, no. 3, 1994, pp. 619–647.
- [40] A. P. Moorsel et W. H. Sanders, "Transient Solution of Markov Models by Combining Adaptive and Standard Uniformization", *IEEE Trans. on Reliability*, vol. 46, no. 3, 1997, pp. 430–440.
- [41] M. F. Neuts, *Matrix-Geometric Solutions in Stochastic Models. An Algorithmic Approach*, Dover Publications Inc, 1994.
- [42] J. H. Patel, "Performance of Processor-Memory Interconnections for Multiprocessors", *IEEE Trans Computers*, vol. C-30, no. 10, 1981, pp. 771-780.
- [43] S. M. Reddy et V. P. Kumar, "On Tolerant Multistage Interconnection Networks", dans *Proc. 1984 IEEE Int'l Conf. on Parallel Processing*, 1984, pp 155–164.
- [44] A. Reibman et K. S. Trivedi, "Numerical Transient Analysis of Markov Models", *Computers and Operations Research*, vol. 15, no. 1, 1988, pp. 19–36.
- [45] C. I. Rincu, J. A. Carrasco et V. Suñé, "Markovian Reliability Analysis of Non-Coherent Non-Repairable Fault-Tolerant Interconnection Networks", dans *Proc. Communications 2002 Int. Conf.*, 2002, pp. 108–113.
- [46] S. M. Ross, *Stochastic Processes*, John Wiley & Sons, 1983.
- [47] R. A. Sahner et K. S. Trivedi, "Reliability Modeling using SHARPE", *IEEE Trans. on Reliability*, vol. R-36, no. 2, 1987, pp. 186–193.
- [48] J. R. Schott, *Matrix Analysis for Statistics*, John Wiley & Sons, Inc., 1997.
- [49] E. Seneta, *Non-negative Matrices and Markov Chains*, Springer series in Statistics, Springer-Verlag, 2nd edition, 1981.
- [50] B. Sericola, "Availability Analysis of Repairable Computer Systems and Stationarity Detection", *IEEE Trans. on Computers*, vol. 48, no. 11, 1999, pp. 1.166–1.172.

- [51] K. J. Sullivan, D. Coppit et J. B. Dugan, “The Galileo Fault Tree Analysis Tool”, dans *Proc. 29th IEEE Symp. on Fault Tolerant Computing (FTCS-29)*, 1999, pp. 232–235.
- [52] J. L. Trahan, D. X. Wang et S. Rai, “Dependent and Multimode Failures in Reliability Evaluation of Extra-Stage Shuffle-Exchange MINs”, *IEEE Trans. on Reliability*, vol. 44, no. 1, 1995, pp. 73–86.
- [53] N. F. Tzeng, P. Ch. Yew et Ch. Q. Zhu, “Realizing Fault-Tolerant Interconnection Networks via Chaining”, *IEEE Trans. on Computers*, vol. 37, no. 4, 1988, pp. 458–462.
- [54] R. S. Varga, *Matrix Iterative Analysis*, Prentice-Hall, 1962.