Apéndice B

Transformación de Park o D-Q

B.1. Expresión de la matriz de transformación

La transformación de Park o D-Q convierte las componentes 'abc' del sistema trifásico a otro sistema de referencia 'dq0'. El objetivo de la transformación consiste en convertir los valores trifásicos 'abc', variables senoidalmente en el tiempo, a valores constantes 'dq0', en régimen permanente. El vector con las componentes del nuevo sistema de referencia $[x_r]$ se obtiene multiplicando el vector de coordenadas trifásicas $[x]$ por la matriz de transformación $[T]$, según la expresión (B.1).

$$\begin{bmatrix} x_d \\ x_q \\ x_0 \end{bmatrix} = [x_r] = [T] \cdot [x] = [T] \cdot \begin{bmatrix} x_a \\ x_b \\ x_c \end{bmatrix} \tag{B.1}$$

La expresión de la matriz de transformación $[T]$ se tiene en (B.2).

$$[T] = \sqrt{\frac{2}{3}} \cdot \begin{bmatrix} \cos(\theta) & \cos\left(\theta - {}^{2\pi}\!/_{3}\right) & \cos\left(\theta + {}^{2\pi}\!/_{3}\right) \\ -\sin(\theta) & -\sin\left(\theta - {}^{2\pi}\!/_{3}\right) & -\sin\left(\theta + {}^{2\pi}\!/_{3}\right) \\ {}^{1}\!/_{\sqrt{2}} & {}^{1}\!/_{\sqrt{2}} & {}^{1}\!/_{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \tag{B.2}$$

donde θ (B.3) es el ángulo de la referencia rotativa (ejes D-Q), ver figura B.1.

$$\theta = \int_0^t (\omega \cdot t) \cdot dt + \theta_0 \tag{B.3}$$

donde

ω : velocidad angular de la referencia D-Q (igual a la pulsación del sistema trifásico del lado de alterna del convertidor)

θ_0 : ángulo inicial de la referencia D-Q

Cuando la velocidad angular ω es constante, la transformación se puede expresar según la expresión (B.4).

$$[T]=\sqrt{\frac{2}{3}}\cdot\begin{bmatrix}\cos(\omega\cdot t+\theta_0) & \cos\left(\omega\cdot t+\theta_0-{}^{2\pi}\!/_{3}\right) & \cos\left(\omega\cdot t+\theta_0+{}^{2\pi}\!/_{3}\right)\\ -\sin(\omega\cdot t+\theta_0) & -\sin\left(\omega\cdot t+\theta_0-{}^{2\pi}\!/_{3}\right) & -\sin\left(\omega\cdot t+\theta_0+{}^{2\pi}\!/_{3}\right)\\ {}^{1}\!/_{\sqrt{2}} & {}^{1}\!/_{\sqrt{2}} & {}^{1}\!/_{\sqrt{2}}\end{bmatrix} \qquad \text{(B.4)}$$

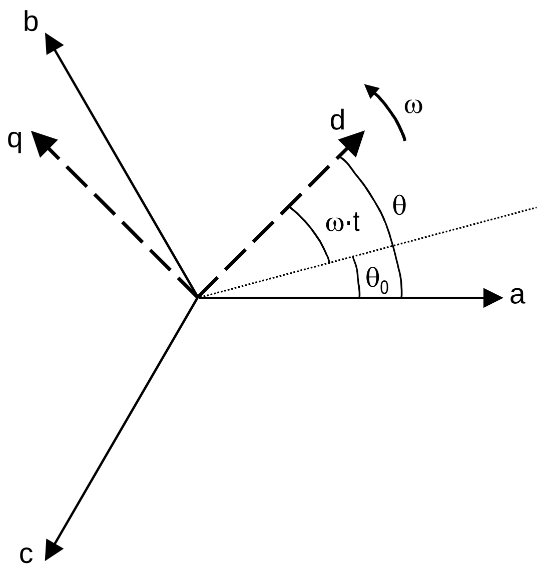

Figura B.1. Sistemas de referencia trifásico y D-Q.

B.2. Propiedades de la matriz de transformación

El término que multiplica la matriz de transformación en (B.2) y (B.4) puede tener un valor diverso [106][224]. En las expresiones (B.2) y (B.4), este término presenta el valor √(2/3). Con este valor, se consigue que la transformación sea ortonormal, al verificar la propiedad $[T]^{-1}$ = $[T]^{T}$, según (B.5).

$$[T]=\sqrt{\frac{2}{3}}\cdot T \quad\Rightarrow\quad [T]^T=\sqrt{\frac{2}{3}}\cdot T^T$$

$$[T]\cdot[T]^T=\sqrt{\frac{2}{3}}\cdot T\cdot\sqrt{\frac{2}{3}}\cdot T^T=\frac{2}{3}\cdot T\cdot T^T=[I]_{3\times 3} \quad\Rightarrow\quad [T]^T=[T]^{-1} \qquad \text{(B.5)}$$

Las transformaciones ortonormales se caracterizan por mantener invariante el producto escalar, ver (B.6).

$$\begin{gathered}\left[x_{1r}\right]=\left[T\right]\cdot\left[x_1\right] \qquad ; \qquad \left[x_{2r}\right]=\left[T\right]\cdot\left[x_2\right] \\ \left[x_{1r}\right]^T\cdot\left[x_{2r}\right]=\left(\left[T\right]\cdot\left[x_1\right]\right)^T\cdot\left(\left[T\right]\cdot\left[x_2\right]\right)=\left[x_1\right]^T\cdot\left[T\right]^T\cdot\left[T\right]\cdot\left[x_2\right]=\left[x_1\right]^T\cdot\left[x_2\right]\end{gathered} \tag{B.6}$$

Como consecuencia de la anterior propiedad, el valor de la potencia instantánea se mantiene invariante, independientemente del dominio donde se calcule 'abc' ó 'dq0' (B.7).

$$\begin{gathered}\left[v_{fr}\right]=\left[T\right]\cdot\left[v_f\right] \qquad ; \qquad \left[i_{fr}\right]=\left[T\right]\cdot\left[i_f\right] \\ p=v_a\cdot i_a+v_b\cdot i_b+v_c\cdot i_c=\left[v_a \quad v_b \quad v_c\right]\cdot\begin{bmatrix} i_a \\ i_b \\ i_c\end{bmatrix}=\left[v_f\right]^T\cdot\left[i_f\right] \\ p=\left[v_f\right]^T\cdot\left[i_f\right]=\left(\left[v_f\right]^T\cdot\left[T\right]^T\right)\cdot\left(\left[T\right]\cdot\left[i_f\right]\right)=\left[v_{fr}\right]^T\cdot\left[i_{fr}\right] \\ p=\left[v_{fr}\right]^T\cdot\left[i_{fr}\right]=\left[v_d \quad v_q \quad v_0\right]\cdot\begin{bmatrix} i_d \\ i_q \\ i_0\end{bmatrix}=v_d\cdot i_d+v_q\cdot i_q+v_0\cdot i_0\end{gathered} \tag{B.7}$$

B.3. Propiedades del sistema trifásico y componentes homopolares

A partir de las expresiones (B.2) y (B.4), las componentes a la denominada secuencia homopolar o cero se calculan como se muestra en (B.8).

$$v_0=\frac{1}{\sqrt{3}}\left(v_a+v_b+v_c\right) \qquad ; \qquad i_0=\frac{1}{\sqrt{3}}\left(i_a+i_b+i_c\right) \tag{B.8}$$

Según las características del sistema trifásico y las expresiones de (B.8), se pueden efectuar las siguientes deducciones:

- Si el sistema trifásico de tensiones está equilibrado, la suma de tensiones 'abc' es nula en todo momento ($v_a + v_b + v_c = 0$) y la tensión homopolar (v_0) es nula.
- Si el neutro del sistema trifásico está aislado, la suma de corrientes 'abc' es nula en todo momento ($i_a + i_b + i_c = 0$) y la corriente homopolar (i_0) es nula.
- Si el sistema trifásico de tensiones está equilibrado y la impedancia de carga es la misma en todas las fases (carga equilibrada), las sumas de tensiones y corrientes 'abc' son nulas en todo momento y las componentes a secuencia cero son nulas ($v_0 = 0$, $i_0 = 0$).

Suele ser común que el sistema trifásico de tensiones sea simétrico y equilibrado, y que la carga trifásica esté equilibrada. También es habitual encontrar aplicaciones o cargas donde el neutro está aislado. En estas condiciones, las componentes homopolares son nulas y la aplicación de la transformación de Park o D-Q reduce el número de variables del sistema, al pasar de tres variables trifásicas 'abc' a dos variables 'dq' (de valor constante en régimen permanente).

B.4. Aplicación genérica a un sistema en el espacio de estado

Se considera el modelo de un sistema trifásico en el espacio de estado (B.9), que se desea transformar al dominio 'dq0'.

$$\frac{d}{dt}[x] = [A]\cdot[x] + [B]\cdot[u] \tag{B.9}$$

Si se consideran las variables transformadas (B.10), se obtiene la expresión en el espacio de estado (B.11) en el dominio de Park o D-Q.

$$[x_r] = [T]\cdot[x] \;\Rightarrow\; [x] = [T]^T\cdot[x_r] \qquad ; \qquad [u_r] = [T]\cdot[u] \;\Rightarrow\; [u] = [T]^T\cdot[u_r] \tag{B.10}$$

$$\frac{d}{dt}[x_r] = [A_r]\cdot[x_r] + [B_r]\cdot[u_r] \tag{B.11}$$

Se puede demostrar que las matrices transformadas $[A_r]$ y $[B_r]$ se expresan según (B.12).

$$\begin{aligned} [A_r] &= [T]\cdot[A]\cdot[T]^T - [T]\cdot\frac{d}{dt}[T]^T = [T]\cdot[A]\cdot[T]^T - \omega\cdot\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ [B_r] &= [T]\cdot[B]\cdot[T]^T \end{aligned} \tag{B.12}$$

B.5. Transformación del inversor NPC con filtro LC y carga R

En el apartado 3.3.1 se detalla el proceso de modelado del inversor NPC con filtro LC y carga R. Una vez realizados los correspondientes pasos en la metodología de modelado, se obtiene el modelo en el espacio de estado y dominio trifásico (3.23), que se transcribe en este apartado (B.13).

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} i_a \\ i_b \\ i_c \\ v_{a'N} \\ v_{b'N} \\ v_{c'N} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -1/L & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1/L & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1/L \\ 1/C & 0 & 0 & -1/RC & 0 & 0 \\ 0 & 1/C & 0 & 0 & -1/RC & 0 \\ 0 & 0 & 1/C & 0 & 0 & -1/RC \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_a \\ i_b \\ i_c \\ v_{a'N} \\ v_{b'N} \\ v_{c'N} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1/L & 0 & 0 \\ 0 & 1/L & 0 \\ 0 & 0 & 1/L \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} v_{ao} - v_{No} \\ v_{bo} - v_{No} \\ v_{co} - v_{No} \end{bmatrix} \tag{B.13}$$

$$\frac{d}{dt}[v_o] = -\frac{1}{C_{DC}}\left[\left(d_{ap} + d_{an}\right) \quad \left(d_{bp} + d_{bn}\right) \quad \left(d_{cp} + d_{cn}\right)\right] \cdot \begin{bmatrix} i_a \\ i_b \\ i_c \end{bmatrix}$$

En la transformación del modelo (B.13) al dominio D-Q, se tratan los lados de alterna y de continua por separado, para luego reunirlos en el modelo definitivo. Se ha visto en el apartado 3.3.1 que las ecuaciones del modelo (B.13) que describen el lado de alterna se extraen de la aplicación de las leyes de Kirchhoff (3.9), que se transcriben en este apartado en las expresiones (B.14) y (B.15).

$$[v] = L \cdot \frac{d}{dt}[i_Y] + [v_Y] = L \cdot \frac{d}{dt}[i_Y] + [v_{YN}] + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot v_{No} \tag{B.14}$$

$$[i_Y] = C \cdot \frac{d}{dt}[v_{YN}] + \frac{1}{R} \cdot [v_{YN}] \tag{B.15}$$

Es necesario recordar algunas expresiones ya indicadas en el apartado 3.3.1.

$$\begin{bmatrix} v_{VSId} \\ v_{VSIq} \\ v_{VSI0} \end{bmatrix} = [T] \cdot \begin{bmatrix} v_{ao} \\ v_{bo} \\ v_{co} \end{bmatrix} \quad ; \quad [v_r] = [T] \cdot [v] \quad ; \quad [v] = [T]^T \cdot [v_r] \tag{B.16}$$

$$\begin{bmatrix} i_{Yd} \\ i_{Yq} \\ i_{Y0} \end{bmatrix} = [T] \cdot \begin{bmatrix} i_a \\ i_b \\ i_c \end{bmatrix} \quad ; \quad [i_{Yr}] = [T] \cdot [i_Y] \quad ; \quad [i_Y] = [T]^T \cdot [i_{Yr}] \tag{B.17}$$

$$\begin{bmatrix} v_{YNd} \\ v_{YNq} \\ v_{YN0} \end{bmatrix} = [T] \cdot \begin{bmatrix} v_{a'N} \\ v_{b'N} \\ v_{c'N} \end{bmatrix} \quad ; \quad [v_{YNr}] = [T] \cdot [v_{YN}] \quad ; \quad [v_{YN}] = [T]^T \cdot [v_{YNr}] \tag{B.18}$$

$$\begin{bmatrix} v_{Yd} \\ v_{Yq} \\ v_{Y0} \end{bmatrix} = [T] \cdot \begin{bmatrix} v_{a'o} \\ v_{b'o} \\ v_{c'o} \end{bmatrix} \quad ; \quad [v_{Yr}] = [T] \cdot [v_Y] \quad ; \quad [v_Y] = [T]^T \cdot [v_{Yr}] \tag{B.19}$$

$$\begin{bmatrix} d_{pd} & d_{nd} \\ d_{pq} & d_{nq} \\ d_{p0} & d_{n0} \end{bmatrix} = [T] \cdot \begin{bmatrix} d_{ap} & d_{an} \\ d_{bp} & d_{bn} \\ d_{cp} & d_{cn} \end{bmatrix} \quad ; \quad [d_r] = [T] \cdot [d] \quad ; \quad [d] = [T]^T \cdot [d_r] \tag{B.20}$$

$$\begin{bmatrix} v_{VSId} \\ v_{VSIq} \\ v_{VSI0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_{pd} & d_{nd} \\ d_{pq} & d_{nq} \\ d_{p0} & d_{n0} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} v_p \\ v_n \end{bmatrix} = \left[d_r \right] \cdot \begin{bmatrix} v_p \\ v_n \end{bmatrix} \quad ; \quad \begin{bmatrix} i_p \\ i_n \end{bmatrix} = \left[d_r \right]^T \cdot \begin{bmatrix} i_{Yd} \\ i_{Yq} \\ i_{Y0} \end{bmatrix} \tag{B.21}$$

También es importante realizar algunas observaciones sobre las componentes homopolares. De (B.16) y (B.17) se extrae:

$$v_{VSI0} = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \left(v_{ao} + v_{bo} + v_{co} \right) \tag{B.22}$$

$$i_{Y0} = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \left(i_a + i_b + i_c \right) \tag{B.23}$$

Si el neutro de la carga está aislado ($i_a + i_b + i_c = 0$), la corriente homopolar es nula en todo momento ($i_{Y0} = 0$). En estas condiciones, al aplicar (3.13) sobre (B.22), se tiene

$$v_{VSI0} = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \left(v_{ao} + v_{bo} + v_{co} \right) = \sqrt{3} \cdot v_{No} \tag{B.24}$$

a) Transformación de la primera ecuación del lado de alterna.

Se aplica la transformación D-Q a la primera ecuación del lado de alterna (B.14).

$$[T] \cdot [v] = [T] \cdot L \cdot \frac{d}{dt}[i_Y] + [T] \cdot [v_{YN}] + [T] \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot v_{No} \tag{B.25}$$

Aplicando las expresiones (B.16)-(B.18) y efectuando el producto del último sumando del lado derecho de la igualdad de (B.25):

$$[v_r] = [T] \cdot L \cdot \frac{d}{dt}\left([T]^T \cdot [i_{Yr}] \right) + [v_{YNr}] + \sqrt{3} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot v_{No} \tag{B.26}$$

Desarrollando la derivada del producto:

$$[v_r] = L \cdot [T] \cdot \frac{d}{dt}[T]^T \cdot [i_{Yr}] + L \cdot [T] \cdot [T]^T \cdot \frac{d}{dt}[i_{Yr}] + [v_{YNr}] + \sqrt{3} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot v_{No} \tag{B.27}$$

Se sabe que $[T] \cdot [T]^T = [I]$ y además, de (B.12) se extrae que:

$$[T] \cdot \frac{d}{dt}[T]^T = \omega \cdot \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{B.28}$$

En consecuencia:

$$\left[v_r\right]=L\cdot\omega\cdot\begin{bmatrix}0 & -1 & 0\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\cdot\left[i_{Yr}\right]+L\cdot\frac{d}{dt}\left[i_{Yr}\right]+\left[v_{YNr}\right]+\sqrt{3}\cdot\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}\cdot v_{No} \tag{B.29}$$

Desarrollando (B.29):

$$\begin{bmatrix}v_{VSId}\\ v_{VSIq}\\ v_{VSI0}\end{bmatrix}=L\cdot\omega\cdot\begin{bmatrix}-i_{Yq}\\ i_{Yd}\\ 0\end{bmatrix}+L\cdot\frac{d}{dt}\begin{bmatrix}i_{Yd}\\ i_{Yq}\\ i_{Y0}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}v_{YNd}\\ v_{YNq}\\ v_{YN0}\end{bmatrix}+\sqrt{3}\cdot\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}\cdot v_{No} \tag{B.30}$$

Analizando la componente homopolar mostrada en (B.30):

$$v_{VSI0}=L\cdot\frac{d}{dt}i_{Y0}+v_{YN0}+\sqrt{3}\cdot v_{No} \tag{B.31}$$

El neutro está aislado, por tanto la corriente homopolar es nula en todo momento y su derivada es nula también. Teniendo en cuenta además (B.24), resulta v_{YN0} = 0, según (B.32). En consecuencia, puede suprimirse la ecuación a secuencia homopolar.

$$v_{YN0}=L\cdot\frac{d}{dt}i_{Y0}+\sqrt{3}\cdot v_{No}-v_{VSI0}=0+\sqrt{3}\cdot v_{No}-\sqrt{3}\cdot v_{No}=0 \tag{B.32}$$

Despejando las derivadas temporales de (B.30) y eliminando la secuencia homopolar:

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix}i_{Yd}\\ i_{Yq}\end{bmatrix}=-\omega\cdot\begin{bmatrix}-i_{Yq}\\ i_{Yd}\end{bmatrix}-\frac{1}{L}\cdot\begin{bmatrix}v_{YNd}\\ v_{YNq}\end{bmatrix}+\frac{1}{L}\cdot\begin{bmatrix}v_{VSId}\\ v_{VSIq}\end{bmatrix} \tag{B.33}$$

Aplicando (B.21) a las tensiones v_{VSId}, v_{VSIq}:

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix}i_{Yd}\\ i_{Yq}\end{bmatrix}=-\omega\cdot\begin{bmatrix}-i_{Yq}\\ i_{Yd}\end{bmatrix}-\frac{1}{L}\cdot\begin{bmatrix}v_{YNd}\\ v_{YNq}\end{bmatrix}+\frac{1}{L}\cdot\begin{bmatrix}d_{pd} & d_{nd}\\ d_{pq} & d_{nq}\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}v_p\\ v_n\end{bmatrix} \tag{B.34}$$

Finalmente, sustituyendo v_p, v_n por v_o, v_{pn}, se tiene la primera ecuación del lado de alterna en el dominio D-Q.

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix}i_{Yd}\\ i_{Yq}\end{bmatrix}=-\omega\cdot\begin{bmatrix}-i_{Yq}\\ i_{Yd}\end{bmatrix}-\frac{1}{L}\cdot\begin{bmatrix}v_{YNd}\\ v_{YNq}\end{bmatrix}+\frac{1}{2L}\cdot\begin{bmatrix}\left(d_{pd}+d_{nd}\right) & \left(d_{pd}-d_{nd}\right)\\ \left(d_{pd}+d_{nd}\right) & \left(d_{pd}-d_{nd}\right)\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}v_o\\ v_{pn}\end{bmatrix} \tag{B.35}$$

b) Transformación de la segunda ecuación del lado de alterna.

Se aplica la transformación D-Q a la segunda ecuación del lado de alterna (B.15).

$$[T]\cdot[i_Y] = C\cdot[T]\cdot\frac{d}{dt}[v_{YN}] + \frac{1}{R}\cdot[T]\cdot[v_{YN}] \tag{B.36}$$

Aplicando las expresiones (B.17) y (B.18):

$$[i_{Yr}] = C\cdot[T]\cdot\frac{d}{dt}\left([T]^T\cdot[v_{YNr}]\right) + \frac{1}{R}\cdot[v_{YNr}] \tag{B.37}$$

Desarrollando la derivada del producto:

$$[i_{Yr}] = C\cdot[T]\cdot\frac{d}{dt}[T]^T\cdot[v_{YNr}] + C\cdot[T]\cdot[T]^T\cdot\frac{d}{dt}[v_{YNr}] + \frac{1}{R}\cdot[v_{YNr}] \tag{B.38}$$

Puesto que $[T]\cdot[T]^T = [I]$ y empleando (B.28), se extrae:

$$[i_{Yr}] = C\cdot\omega\cdot\begin{bmatrix}0 & -1 & 0\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\cdot[v_{YNr}] + C\cdot\frac{d}{dt}[v_{YNr}] + \frac{1}{R}\cdot[v_{YNr}] \tag{B.39}$$

Se desarrolla (B.39) y se elimina la secuencia homopolar, ya que $i_{Y0} = 0$ y $v_{YN0} = 0$, como se ha visto anteriormente.

$$\begin{bmatrix}i_{Yd}\\ i_{Yq}\end{bmatrix} = C\cdot\omega\cdot\begin{bmatrix}-v_{YNq}\\ v_{YNd}\end{bmatrix} + C\cdot\frac{d}{dt}\begin{bmatrix}v_{YNd}\\ v_{YNq}\end{bmatrix} + \frac{1}{R}\cdot\begin{bmatrix}v_{YNd}\\ v_{YNq}\end{bmatrix} \tag{B.40}$$

Despejando las derivadas temporales, se tiene la segunda ecuación del lado de alterna en el dominio D-Q.

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix}v_{YNd}\\ v_{YNq}\end{bmatrix} = \frac{1}{C}\cdot\begin{bmatrix}i_{Yd}\\ i_{Yq}\end{bmatrix} - \omega\cdot\begin{bmatrix}-v_{YNq}\\ v_{YNd}\end{bmatrix} - \frac{1}{RC}\cdot\begin{bmatrix}v_{YNd}\\ v_{YNq}\end{bmatrix} \tag{B.41}$$

c) Transformación de la ecuación del lado de continua.

Se aplica la transformación D-Q a la ecuación del lado de continua (B.13). Esta ecuación se deduce de las expresiones (3.20) y (3.7). La ecuación (B.42) es la expresión (3.20).

$$\frac{dv_o}{dt} = -\frac{1}{C_{DC}}\cdot\left(i_p + i_n\right) \tag{B.42}$$

Se aplica la ecuación (B.21) sobre las corrientes i_p, i_n de (B.42).

$$\frac{dv_o}{dt} = -\frac{1}{C_{DC}}\cdot\left[\left(d_{pd}+d_{nd}\right)\cdot i_{Yd} + \left(d_{pq}+d_{nq}\right)\cdot i_{Yq} + \left(d_{p0}+d_{n0}\right)\cdot i_{Y0}\right] \tag{B.43}$$

Eliminando la componente homopolar (i_{Y0} = 0): se tiene la ecuación del lado de continua en el dominio D-Q.

$$\frac{dv_o}{dt} = -\frac{1}{C_{DC}} \cdot \left[\left(d_{pd} + d_{nd} \right) \cdot i_{Yd} + \left(d_{pq} + d_{nq} \right) \cdot i_{Yq} \right] \tag{B.44}$$

d) Tensiones de la carga referidas a 'o' y a 'N'.

En (B.14) se indica la relación entre las tensiones de carga (a',b',c') referidas a punto medio del bus de continua 'o' [v_Y] y referidas al neutro de la carga 'N' [v_{YN}].

$$\left[v_Y \right] = \left[v_{YN} \right] + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot v_{No} \tag{B.45}$$

Su transformación al dominio D-Q resulta, ver (B.25) y (B.26):

$$\left[v_{Yr} \right] = \left[v_{YNr} \right] + \sqrt{3} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot v_{No} \qquad \Rightarrow \qquad \begin{bmatrix} v_{Yd} \\ v_{Yq} \\ v_{Y0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_{YNd} \\ v_{YNq} \\ v_{YN0} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \sqrt{3} \cdot v_{No} \end{bmatrix} \tag{B.46}$$

Teniendo en cuenta, además, que v_{YN0} = 0 (B.32) y que $v_{VSI0} = \sqrt{3} \cdot v_{No}$ (B.24), se tiene:

$$\begin{aligned} v_{Yd} &= v_{YNd} \\ v_{Yq} &= v_{YNq} \\ v_{Y0} &= \sqrt{3} \cdot v_{No} = v_{VSI0} \qquad ; \qquad v_{YN0} = 0 \end{aligned} \tag{B.47}$$

La ecuación (B.47) indica que las tensiones de la carga referidas al punto medio del bus de continua 'o' o al neutro de la carga 'N' tienen la mismas componentes 'd' y 'q'. La componente cero de las tensiones de la carga referidas al neutro de la carga 'N' es nula. Toda la tensión a secuencia cero está presente en la tensión entre 'o' y 'N' (v_{No}).

e) Modelo completo en el espacio de estado y dominio D-Q.

Empleando la expresión (B.47), agrupando las ecuaciones (B.35), (B.41) y (B.44), y diferenciando entre variables de estado (i_{Yd}, v_{Yd}, i_{Yq}, v_{Yq}) y de entrada (v_{pn}), se obtiene el modelo completo del sistema en el espacio de estado y dominio D-Q.

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} i_{Yd} \\ v_{Yd} \\ i_{Yq} \\ v_{Yq} \\ v_o \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{-1}{L} & \omega & 0 & \frac{\left(d_{pd}+d_{nd}\right)}{2\cdot L} \\ \frac{1}{C} & \frac{-1}{RC} & 0 & \omega & 0 \\ -\omega & 0 & 0 & \frac{-1}{L} & \frac{\left(d_{pq}+d_{nq}\right)}{2\cdot L} \\ 0 & -\omega & \frac{1}{C} & \frac{-1}{RC} & 0 \\ \frac{-\left(d_{pd}+d_{nd}\right)}{C_{DC}} & 0 & \frac{-\left(d_{pq}+d_{nq}\right)}{C_{DC}} & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} i_{Yd} \\ v_{Yd} \\ i_{Yq} \\ v_{Yq} \\ v_o \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \left(d_{pd}-d_{nd}\right) \\ 0 \\ \left(d_{pq}-d_{nq}\right) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot \frac{v_{pn}}{2\cdot L} \tag{B.48}$$

f) Modelo de régimen permanente.

Anulando las derivadas temporales en (B.48), se tiene (B.49). Los valores de las variables en régimen permanente se indican con mayúsculas.

$$\begin{aligned} 0 &= V_{Yd} + L\cdot\omega\cdot I_{Yq} + \frac{1}{2}\left(D_{pd}+D_{nd}\right)\cdot v_o + \frac{1}{2}\left(D_{pd}-D_{nd}\right)\cdot v_{pn} \\ 0 &= I_{Yd} - \frac{1}{R}\cdot V_{Yd} + C\cdot\omega\cdot V_{Yq} \\ 0 &= -L\cdot\omega\cdot I_{Yd} + V_{Yq} + \frac{1}{2}\left(D_{pq}+D_{nq}\right)\cdot v_o + \frac{1}{2}\left(D_{pq}-D_{nq}\right)\cdot v_{pn} \\ 0 &= -C\cdot\omega\cdot V_{Yd} + I_{Yq} - \frac{1}{R}\cdot V_{Yq} \\ 0 &= \left(D_{pd}+D_{nd}\right)\cdot I_{Yd} + \left(D_{pq}+D_{nq}\right)\cdot I_{Yq} \end{aligned} \tag{B.49}$$

Si la estrategia de conmutación que se emplea es simétrica, condición que se verifica en general, las relaciones de conducción transformadas cumplen la expresión (B.50).

$$D_d = D_{pd} = -D_{nd} \quad ; \quad D_q = D_{pq} = -D_{nq} \quad ; \quad D_0 = D_{p0} = D_{n0} \tag{B.50}$$

Si se desea controlar la tensión de salida, se conocen los valores de consigna o referencia V_{Yd}, V_{Yq}, además de la frecuencia de salida ω y la tensión del bus de continua V_{pn}. En estas condiciones, la quinta ecuación de (B.49) resulta nula y las ecuaciones de régimen permanente se reducen a cuatro (B.51), donde D_d, D_q son las relaciones de conducción que la estrategia de conmutación debe generar para que la tensión de la carga sea la deseada y I_{Yd}, I_{Yq} son las corrientes de salida del convertidor.

$$\begin{aligned} D_d &= \frac{V_{Yd}\cdot\left(1-L\cdot C\cdot\omega^2\right) - \frac{L\cdot\omega}{R}\cdot V_{Yq}}{V_{pn}} \quad ; \quad D_q = \frac{V_{Yq}\cdot\left(1-L\cdot C\cdot\omega^2\right) + \frac{L\cdot\omega}{R}\cdot V_{Yd}}{V_{pn}} \\ I_{Yd} &= \frac{1}{R}\cdot V_{Yd} - C\cdot\omega\cdot V_{Yq} \quad ; \quad I_{Yq} = C\cdot\omega\cdot V_{Yd} + \frac{1}{R}\cdot V_{Yq} \end{aligned} \tag{B.51}$$

En la deducción de (B.51) se tiene que la quinta ecuación de (B.49) resulta nula. Este resultado no es ninguna incongruencia, indica que la corriente del punto medio del bus de continua debe ser nula (B.52). Cabe recordar que las variables se han promediado, por tanto es el valor promediado el que es nulo.

$$\begin{aligned} i_o &= -i_p - i_n = -\left(d_{pd} + d_{nd}\right)\cdot i_{Yd} - \left(d_{pq} + d_{nq}\right)\cdot i_{Yq} \\ I_o &= -\left(D_{pd} + D_{nd}\right)\cdot I_{Yd} - \left(D_{pq} + D_{nq}\right)\cdot I_{Yq} \\ I_o &= -\left(D_d - D_d\right)\cdot I_{Yd} - \left(D_q - D_q\right)\cdot I_{Yq} = 0 \end{aligned} \qquad \text{(B.52)}$$

g) Modelo de pequeña señal.

A partir del modelo de gran señal (B.48) se deduce el modelo de pequeña señal sustituyendo cada variable de gran señal por la suma de su valor de régimen permanente y su perturbación (B.53).

$$x(t) = X + \hat{x}(t) \qquad \text{(B.53)}$$

Teniendo en cuenta las ecuaciones de régimen permanente y despreciando los términos de segundo orden y superiores de las perturbaciones, se extrae el modelo de pequeña señal.

La primera ecuación de (B.48) queda:

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dt}\left(I_{Yd} + \hat{i}_{Yd}\right) = -\frac{1}{L}\cdot\left(V_{Yd} + \hat{v}_{Yd}\right) + \omega\cdot\left(I_{Yq} + \hat{i}_{Yq}\right) + \\ &+\frac{1}{2\cdot L}\cdot\left[\left(D_{pd} + \hat{d}_{pd}\right) + \left(D_{nd} + \hat{d}_{nd}\right)\right]\left(V_o + \hat{v}_o\right) + \frac{1}{2\cdot L}\cdot\left[\left(D_{pd} + \hat{d}_{pd}\right) - \left(D_{nd} + \hat{d}_{nd}\right)\right]\left(V_{pn} + \hat{v}_{pn}\right) \end{aligned} \qquad \text{(B.54)}$$

Desarrollando los términos:

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dt} I_{Yd} + \frac{d}{dt}\hat{i}_{Yd} = -\frac{1}{L}\cdot V_{Yd} - \frac{1}{L}\cdot\hat{v}_{Yd} + \omega\cdot I_{Yq} + \omega\cdot\hat{i}_{Yq} + \\ &+\frac{1}{2\cdot L}\cdot\left[D_{pd}\cdot V_o + \hat{d}_{pd}\cdot V_o + D_{nd}\cdot V_o + \hat{d}_{nd}\cdot V_o + D_{pd}\cdot\hat{v}_o + \hat{d}_{pd}\cdot\hat{v}_o + D_{nd}\cdot\hat{v}_o + \hat{d}_{nd}\cdot\hat{v}_o\right] \\ &+\frac{1}{2\cdot L}\cdot\left[D_{pd}\cdot V_{pn} + \hat{d}_{pd}\cdot V_{pn} - D_{nd}\cdot V_{pn} - \hat{d}_{nd}\cdot V_{pn} + D_{pd}\cdot\hat{v}_{pn} + \hat{d}_{pd}\cdot\hat{v}_{pn} - D_{nd}\cdot\hat{v}_{pn} - \hat{d}_{nd}\cdot\hat{v}_{pn}\right] \end{aligned} \qquad \text{(B.55)}$$

Eliminando la ecuación de régimen permanente, los términos perturbados de segundo orden y agrupando convenientemente, se obtiene la primera ecuación del modelo de pequeña señal.

$$\frac{d}{dt}\hat{i}_{Yd} = -\frac{1}{L}\cdot\hat{v}_{Yd} + \omega\cdot\hat{i}_{Yq} + \frac{\left(D_{pd} + D_{nd}\right)}{2\cdot L}\cdot\hat{v}_o + \frac{\left(V_o + V_{pn}\right)}{2\cdot L}\cdot\hat{d}_{pd} + \frac{\left(V_o - V_{pn}\right)}{2\cdot L}\cdot\hat{d}_{nd} + \frac{\left(D_{pd} - D_{nd}\right)}{2\cdot L}\cdot\hat{v}_{pn} \qquad \text{(B.56)}$$

Realizando el mismo proceso para cada una de las restantes ecuaciones del modelo de gran señal, se extrae el modelo de pequeña señal del sistema (B.57)

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix}\hat{i}_{Yd}\\ \hat{v}_{Yd}\\ \hat{i}_{Yq}\\ \hat{v}_{Yq}\\ \hat{v}_o\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & \frac{-1}{L} & \omega & 0 & \frac{\left(D_{pd}+D_{nd}\right)}{2\cdot L}\\ \frac{1}{C} & \frac{-1}{RC} & 0 & \omega & 0\\ -\omega & 0 & 0 & \frac{-1}{L} & \frac{\left(D_{pq}+D_{nq}\right)}{2\cdot L}\\ 0 & -\omega & \frac{1}{C} & \frac{-1}{RC} & 0\\ -\frac{\left(D_{pd}+D_{nd}\right)}{C_{DC}} & 0 & -\frac{\left(D_{pq}+D_{nq}\right)}{C_{DC}} & 0 & 0\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}\hat{i}_{Yd}\\ \hat{v}_{Yd}\\ \hat{i}_{Yq}\\ \hat{v}_{Yq}\\ \hat{v}_o\end{bmatrix}+$$

$$+\begin{bmatrix}\frac{\left(V_o+V_{pn}\right)}{2\cdot L} & \frac{\left(V_o-V_{pn}\right)}{2\cdot L} & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & \frac{\left(V_o+V_{pn}\right)}{2\cdot L} & \frac{\left(V_o-V_{pn}\right)}{2\cdot L}\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ \frac{-I_{Yd}}{C_{DC}} & \frac{-I_{Yd}}{C_{DC}} & \frac{-I_{Yq}}{C_{DC}} & \frac{-I_{Yq}}{C_{DC}}\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}\hat{d}_{pd}\\ \hat{d}_{nd}\\ \hat{d}_{pq}\\ \hat{d}_{nq}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\left(D_{pd}-D_{nd}\right)\\ 0\\ \left(D_{pq}-D_{nq}\right)\\ 0\\ 0\end{bmatrix}\cdot\frac{\hat{v}_{pn}}{2\cdot L} \qquad \text{(B.57)}$$

Esta misma operativa se puede aplicar a cualquier otra ecuación del convertidor. Por ejemplo, los valores de pequeña señal de las variables i_o y v_{No} son:

$$\hat{i}_o=-\left(D_{pd}+D_{nd}\right)\cdot\hat{i}_{Yd}-\left(D_{pq}+D_{nq}\right)\cdot\hat{i}_{Yq}-I_{Yd}\cdot\hat{d}_{pd}-I_{Yd}\cdot\hat{d}_{nd}-I_{Yq}\cdot\hat{d}_{pq}-I_{Yq}\cdot\hat{d}_{nq} \qquad \text{(B.58)}$$

$$\hat{v}_{No}=\frac{\left(D_{p0}+D_{n0}\right)}{2\cdot\sqrt{3}}\cdot\hat{v}_o+\frac{\left(V_o+V_{pn}\right)}{2\cdot\sqrt{3}}\cdot\hat{d}_{p0}+\frac{\left(V_o-V_{pn}\right)}{2\cdot\sqrt{3}}\cdot\hat{d}_{n0}+\frac{\left(D_{p0}-D_{n0}\right)}{2\cdot\sqrt{3}}\cdot\hat{v}_{pn} \qquad \text{(B.59)}$$

B.6. Valores de las tensiones y corrientes transformadas

Se consideran las tensiones simples de un sistema trifásico simétrico y equilibrado.

$$\begin{aligned}v_a(t)&=\sqrt{2}\cdot V_{\underset{simple}{RMS}}\cdot\cos(\omega\cdot t)\\ v_b(t)&=\sqrt{2}\cdot V_{\underset{simple}{RMS}}\cdot\cos(\omega\cdot t-2\pi/3)\\ v_c(t)&=\sqrt{2}\cdot V_{\underset{simple}{RMS}}\cdot\cos(\omega\cdot t+2\pi/3)\end{aligned} \qquad \text{(B.60)}$$

Aplicando la transformación D-Q a estas tensiones, y alineando el eje 'd' con el fasor de tensión, se puede demostrar que resulta (B.61).

$$v_{Yd}=V_{\underset{compuesta}{RMS}} \quad ; \quad v_{Yq}=0 \quad ; \quad v_{Y0}=0 \qquad \text{(B.61)}$$

Se observa que el valor eficaz del fasor queda multiplicado por un factor √3 al realizar la transformación. Esta deducción puede extrapolarse al resto de variables trifásicas transformadas.

Obviamente, si el eje 'd' de la referencia de Park no está alineado con el fasor de tensión, se debe cumplir:

$$V_{\underset{compuesta}{RMS}} = \sqrt{v_{Yd}^2 + v_{Yq}^2} \qquad \text{(B.62)}$$