3. Problema directo

La medida de la resistividad aparente desde la superficie permite la detección de estructuras inmersas en el subsuelo sin realizar labores mecánicas intensivas. Esta técnica puede ser interesante cuando el interés de los objetos no justifique el coste de dicha labor, e incluso porque la simple ejecución de ciertas labores mecánicas puede poner en peligro las propias estructuras que interesa localizar (caso de las tuberías o restos arqueológicos). La posibilidad de una localización basada exclusivamente en medidas realizadas desde la superficie puede abrir las puertas a muchas aplicaciones donde se den restricciones de coste y riesgo.

La medida de la resistividad eléctrica del suelo, empleando diferentes agrupaciones de electrodos, ha sido utilizada generalmente para identificar las diferentes capas en un medio estratificado. En proyectos de Ingeniería Civil, la presencia de cavidades enterradas (frecuentemente debido a actuaciones anteriores) puede ser de particular importancia. Estas cavidades podrían ser modeladas en una primera aproximación como esferas aislantes en un medio homogéneo. La presencia de galerías, tuberías y túneles puede ser modelada con bastante exactitud por cilindros. Problemas similares pueden aparecer, por ejemplo, en la localización de restos arqueológicos y de minerales. Por lo tanto, la solución analítica del potencial eléctrico para el caso de una esfera y un cilindro inmersos en un medio homogéneo será útil para determinar cuándo la localización de dichos objetos es viable utilizando métodos resistivos.

Las soluciones clásicas del potencial eléctrico proporcionan medios para estimar la influencia de varios parámetros geométricos y físicos del objeto a detectar, como el tamaño, la profundidad y la resistividad. Con una solución matemática cerrada, estas pruebas se pueden realizar de una manera rápida, de forma precisa y con un coste bajo. Estas soluciones proporcionarán también los datos sintéticos para comparar los diferentes algoritmos de reconstrucción utilizados en el capítulo 5. Además, pueden servir como controles analíticos para programas que calculan el potencial eléctrico por medio de técnicas numéricas (elementos finitos, diferencias finitas, elementos de contorno). A diferencia de otros métodos de prospección basados en la propagación de ondas, donde la longitud de onda de la señal incidente proporciona una escala de su poder de resolución, las posibilidades de resolución de los métodos basados en el potencial eléctrico estático sólo pueden evaluarse mediante estudios de modelos

El apartado 3.1 muestra la solución para el potencial y el campo eléctrico de una esfera de conductividad finita inmersa en un suelo homogéneo. El apartado 3.2 obtiene la solución para el caso de un cilindro cuyo eje es paralelo a la superficie. El apartado 3.3 compara las diferentes configuraciones de electrodos en función de su “habilidad” para detectar la presencia de un objeto esférico. El apartado 3.4 estima la influencia de parámetros como el tamaño, la profundidad y el contraste resistivo de la esfera y el cilindro en la resistividad aparente medida. Se resuelve una cuestión práctica importante, qué es determinar el poder de resolución de la técnica resistiva, o dicho de otra manera, se determina cuándo un cuerpo es detectable. Veremos que, con ciertas condiciones, es posible determinar la profundidad y el radio de objetos esféricos y cilíndricos. De hecho, este resultado constituye una primera aproximación al problema inverso, que será tratado más ampliamente en el capítulo 5 y 6. La presencia de capas horizontales de diferente resistividad debajo del objeto puede enmascarar la presencia de éste. La obtención de una medida de referencia minimiza el efecto de la capa. Curiosamente, este problema es opuesto al encontrado cuando se quiere determinar la estructura estratificada del subsuelo, donde los artefactos en el potencial vienen determinados por objetos de dimensiones finitas, como por ejemplo un objeto esférico (Barker, 1981). Finalmente, las predicciones teóricas se validan experimentalmente con medidas de laboratorio.

3.1. Potencial y campo eléctrico en presencia de una esfera

3.1.1. Solución exacta del potencial eléctrico

La solución del potencial eléctrico para problemas de cuerpos inmersos en un medio homogéneo no es frecuente en la bibliografía. Para el caso particular de una esfera de conductividad infinita (o resistividad cero), Van Nostrand (1953) obtiene una solución para el dispositivo Wenner. Large (1971) considera el caso de una esfera de conductividad finita en las proximidades de un electrodo de corriente situado en la superficie. Merkel y Alexander (1971) resuelven el problema para tres configuraciones de electrodos diferentes basadas en la configuración dipolo-dipolo: a) directamente sobre la esfera, b) un electrodo de corriente entre la esfera y la superficie, c) un electrodo de corriente dentro de la esfera. Singh y Espindola (1976) proporcionan una solución para el caso de una esfera conductora por el método de las imágenes. Aldridge y Oldenburg (1989) derivan una solución totalmente general (no restringe la posición de los electrodos de corriente y tensión) para el caso de dos esferas de resistividad arbitraria inmersas en un medio homogéneo. Un caso particular de éste es el de una esfera inmersa en un espacio semi-infinito homogéneo. Además, los autores argumentan mejoras computacionales respecto a las soluciones previamente reseñadas.

La Figura 3.1 muestra una esfera de radio a y resistividad r_2 situada a una profundidad h e inmersa en un medio homogéneo de resistividad r_1. El origen de coordenadas está situado en la superficie (z = 0) sobre el centro de la esfera. El Apéndice A.1 muestra, basándose en la solución dada por Aldridge y Oldenburg (1989), que el potencial en un punto P de la superficie debido a una fuente de corriente I situada también en la superficie viene dado por la expresión

$$V = \frac{r_1 I}{2p}\left(\frac{1}{R} + \frac{\sqrt{(1-\cos h_s)(1-\cos h)}}{b}\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{l} d_m \Re\left\{A_{lm} Y_l^m(h,f)\right\}\right) \tag{3.1}$$

donde la solución viene expresada en función de las coordenadas biesféricas h, f, siendo h_s la coordenada biesférica h de la fuente de corriente. Y_l^m es el armónico esférico de grado l y orden m. $\hat{A}\{\ \}$ indica la parte real de { }. Los coeficientes A_{lm}, d_m y la constante b se encuentran definidos en el Apéndice A.1. En la expresión anterior, el primer término del sumando es la contribución del medio homogéneo y el segundo término es debido a la esfera. Normalmente la inyección de corriente se realiza entre dos electrodos. La solución se obtiene, entonces, aplicando superposición de las dos fuentes puntuales de corriente.

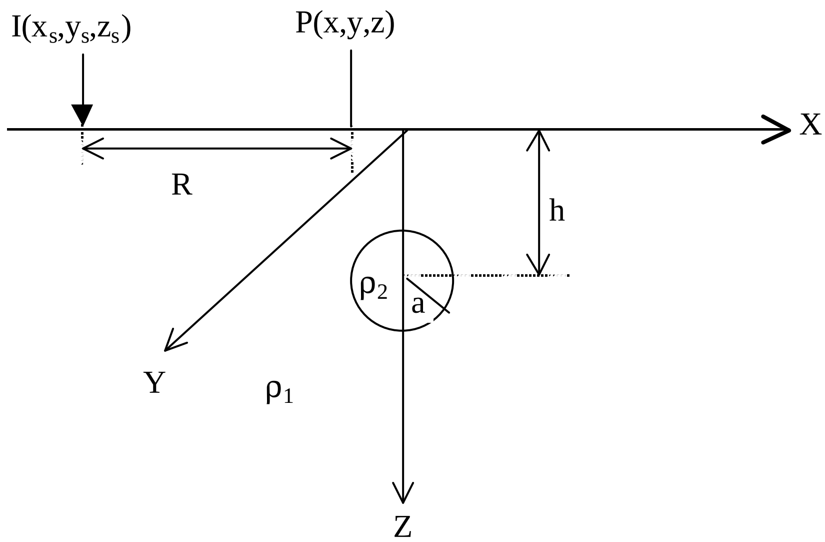


Figura 3.1. Esfera inmersa en un medio semi-infinito homogéneo.

A primera vista puede parecer que la extracción de valores numéricos de la expresión anterior será difícil. Afortunadamente, la convergencia de las sumas es bastante rápida en los casos en que la esfera no está demasiado cerca de la superficie. El Apéndice A.1 analiza algunos resultados.

3.1.2. Solución aproximada del potencial eléctrico

A pesar de que la solución exacta sólo requiere cuatro términos si $h/a > 2$ (Apéndice A.1), el tiempo de cálculo requerido puede ser considerable si se quieren generar diferentes soluciones al variar parámetros como la posición, radio y resistividad de la esfera, o la posición de los electrodos inyectores y detectores. Esta situación se da al generar los datos sintéticos para comparar los diferentes algoritmos de reconstrucción en el capítulo 5. Por lo tanto, conviene buscar soluciones que requieran un tiempo de cálculo menor.

Wait (1982) proporciona una solución analítica de la tensión originada por una fuente puntual de corriente en un medio infinito homogéneo que contiene una esfera. Telford, Geldart y Sheriff (1990) consideran que la interfase tierra-aire dobla la contribución de la esfera y comentan que la solución se puede considerar válida para relaciones $h/a > 1{,}3$. Quick (1974) dice que para esta relación el error cometido es menor del 10 %. La Figura 3.2 muestra la geometría del problema, donde ahora se define el origen de coordenadas en el centro de la esfera y r,q son coordenadas esféricas.

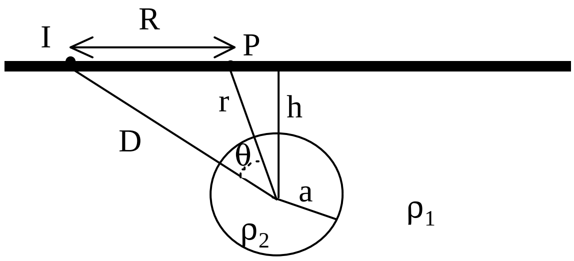


Figura 3.2. Esfera inmersa en un medio semi-infinito homogéneo. La corriente I retorna por el infinito

El Apéndice A.2 muestra la solución aproximada del potencial en el punto P dada por la expresión

$$V = \frac{I\rho_1}{2\pi}\left(\frac{1}{R} + 2\frac{a}{D r}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a^2}{D r}\right)^n \frac{n(\rho_2-\rho_1)}{(n+1)\rho_2+n\rho_1} P_n(\cos\theta)\right) \tag{3.2}$$

donde P_n son polinomios de Legendre

Si la inyección de corriente se realiza mediante dos electrodos como muestra la Figura 3.3, podemos aplicar superposición. Entonces

$$V = \frac{I\rho_1}{2\pi}\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R'}\right) + \sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n \frac{1}{r^{n+1}}\cdot P_n(\cos\theta) - A_n' \frac{1}{r^{n+1}}\cdot P_n(\cos\theta')\right) \tag{3.3}$$

donde

$$\begin{aligned} A_n &= \frac{I\rho}{2\pi}\frac{a^{2n+1}}{D^{n+1}}2\frac{n(\rho_2-\rho_1)}{(n+1)\rho_2+n\rho_1} \\ A_n' &= \frac{I\rho}{2\pi}\frac{a^{2n+1}}{(D')^{n+1}}2\frac{n(\rho_2-\rho_1)}{(n+1)\rho_2+n\rho_1} \end{aligned} \tag{3.4}$$

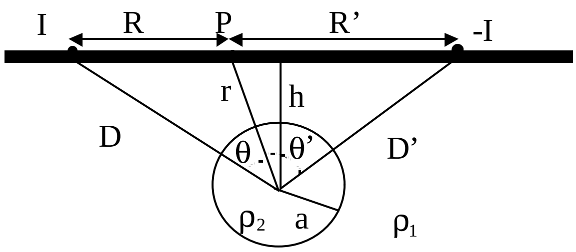


Figura 3.3. Esfera inmersa en un medio semi-infinito homogéneo. La corriente se inyecta entre dos electrodos puntuales a distancia finita de la esfera.

Lytle y Hanson (1983) dan una expresión cerrada para $r_2 = 0$ y $r_2 = \infty$. Para una esfera totalmente conductora (3.2) se reduce a

$$V = \frac{Ir_1}{2p}\left(\frac{1}{R} - 2\frac{a}{Dr}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a^2}{Dr}\right)^n P_n(\cos q)\right) \tag{3.5}$$

Si definimos

$$x = \frac{a^2}{Dr} \tag{3.6}$$

y usamos la identidad

$$\sum x^n P_n(\cos q) = \frac{1}{\sqrt{1 - 2x\cos q + x^2}} - 1 \tag{3.7}$$

el potencial para una esfera perfectamente conductora es

$$V = \frac{Ir_1}{2p}\left[\frac{1}{R} - 2\frac{a}{Dr}\left(\frac{1}{\sqrt{1 - 2x\cos q + x^2}} - 1\right)\right] \tag{3.8}$$

Para una esfera totalmente aislante, (3.2) se convierte en

$$V = \frac{Ir_1}{2p}\left(\frac{1}{R} + 2\frac{a}{Dr}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n+1}x^n P_n(\cos q)\right) \tag{3.9}$$

Sabiendo que

$$\int_0^x u^n du = \frac{x^{n+1}}{n+1} \tag{3.10}$$

podemos expresar (3.9) como

$$V = \frac{Ir_1}{2p}\left(\frac{1}{R} + 2\frac{a}{Dr}\int_0^x udu\sum_{n=1}^{\infty} nu^{n-1} P_n(\cos q)\right) \tag{3.11}$$

La identidad

$$\sum_{n=1}^{\infty} n u^{n-1} P_n(\cos q) = \frac{\cos q - u}{\left(1 - 2u\cos q + u^2\right)^{3/2}} \tag{3.12}$$

junto con (3.11) permite expresar el potencial para una esfera aislante como

$$V = \frac{I r_1}{2p}\left[\frac{1}{R} + \frac{2}{a}\left(\frac{x}{\sqrt{1 - 2x\cos q + x^2}} - \ln\frac{\sqrt{1 - 2x\cos q + x^2} + x - \cos q}{1 - \cos q}\right)\right] \tag{3.13}$$

El Apéndice A.3 compara (3.8) y (3.13) con la solución exacta dada por (3.1). En el caso de una fuente puntual de corriente situada en el origen de coordenadas el error entre los potenciales secundarios de ambas soluciones es menor del 4 % para relaciones $h/a > 2$.

3.1.3. Solución con campo eléctrico uniforme

Supongamos que la esfera se encuentra bajo el punto medio de la línea que une los electrodos de corriente (Figura 3.4). En el caso de la esfera conductora, partiendo de (3.8) y aplicando superposición de las fuentes de corriente, el potencial es

$$V = \frac{I r_1}{2p}\left[\frac{1}{R} - \frac{1}{R'} - 2\frac{a}{Dr}\frac{1}{\sqrt{1 - 2x\cos q + x^2}} + 2\frac{a}{Dr}\frac{1}{\sqrt{1 - 2x\cos q' + x^2}}\right] \tag{3.14}$$

donde

$$\begin{aligned} \cos q &= \frac{h^2 - Lx}{Dr} \\ \cos q' &= \frac{h^2 + Lx}{Dr} \end{aligned} \tag{3.15}$$

Sustituyendo (3.6) y (3.15) en (3.14) obtenemos

$$V = -\frac{I r_1}{p}\left[\frac{x}{L^2 - x^2} + \frac{a}{Dr}\left(\frac{1}{\sqrt{1 + \dfrac{a^2}{D^2}\dfrac{a^2 + 2Lx - 2h^2}{r^2}}} - \frac{1}{\sqrt{1 + \dfrac{a^2}{D^2}\dfrac{a^2 - 2Lx - 2h^2}{r^2}}}\right)\right] \tag{3.16}$$

donde el primer término es el potencial primario y el segundo es la contribución de la esfera. Si $-L < x < L$, el campo eléctrico en la dirección x es

$$E_x = -\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{I r_1}{p}\left[\frac{L^2 + x^2}{\left(L^2 - x^2\right)^2} - \frac{a}{D r^3}\left(\frac{x + \frac{a^2}{D^2}L}{\left(1 + \frac{a^2}{D^2}\frac{a^2 + 2Lx - 2h^2}{r^2}\right)^{3/2}} - \frac{x - \frac{a^2}{D^2}L}{\left(1 + \frac{a^2}{D^2}\frac{a^2 - 2Lx - 2h^2}{r^2}\right)^{3/2}}\right)\right] \tag{3.17}$$

Si $D >> a$, el potencial se puede expresar como

$$V = -E_0 x\left(\frac{L^2}{L^2 - x^2} - 2\left(\frac{a}{r}\right)^3\left(\frac{L}{D}\right)^3\right) \tag{3.18}$$

donde hemos definimos E_0 como un campo eléctrico uniforme de intensidad

$$E_0 = \frac{I r_1}{p L^2} \tag{3.19}$$

La expresión del potencial para la esfera conductora es el que hubiéramos obtenido a partir de (3.3) quedándonos sólo con el primer término del sumatorio. Se comprueba que esto es válido para esferas de resistividad arbitraria. Por tanto, si $D >> a$, podemos expresar el potencial como

$$V = -E_0 x\left(\frac{L^2}{L^2 - x^2} + k_e\left(\frac{a}{r}\right)^3\left(\frac{L}{D}\right)^3\right) \tag{3.20}$$

donde

$$k_e = \frac{2(r_2 - r_1)}{2r_2 + r_1} \tag{3.21}$$

A partir de (3.20), el campo eléctrico en la dirección x es

$$E_x = -\frac{\partial V}{\partial x} = E_0\left[L^2\frac{L^2 + x^2}{\left(L^2 - x^2\right)^2} + k_e\left(\frac{a}{r}\right)^3\left(\frac{L}{D}\right)^3\left(1 - 3\left(\frac{x}{r}\right)^2\right)\right] \tag{3.22}$$

Cuando $L >> x$ las expresiones anteriores del potencial y el campo eléctrico se pueden aproximar por

$$V \cong -E_0 x\left(1+k_e\left(\frac{a}{r}\right)^3\left(\frac{L}{D}\right)^3\right) \tag{3.23}$$

$$E_x \cong E_0\left[1+k_e\left(\frac{a}{r}\right)^3\left(\frac{L}{D}\right)^3\left(1-3\left(\frac{x}{r}\right)^2\right)\right] \tag{3.24}$$

Si, además, L >> h tenemos

$$V \cong -E_0 x\left(1+k_e\left(\frac{a}{r}\right)^3\right) \tag{3.25}$$

$$E_x \cong E_0\left[1+k_e\left(\frac{a}{r}\right)^3\left(1-3\left(\frac{x}{r}\right)^2\right)\right] \tag{3.26}$$

Estas dos últimas expresiones son las que se obtendrían suponiendo que la esfera está bajo un campo eléctrico uniforme de intensidad E_0.

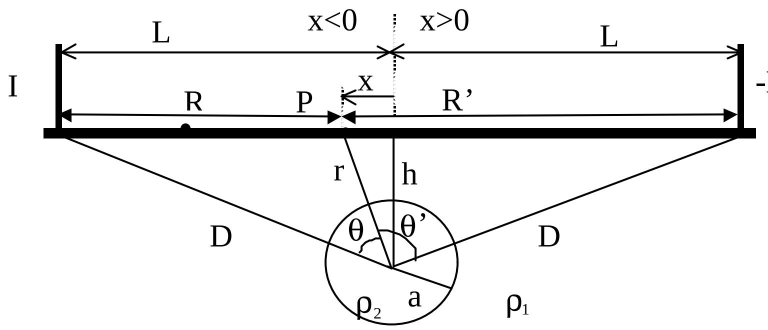


Figura 3.4. Esfera inmersa en un medio semi-infinito homogéneo. La esfera se encuentra bajo el punto medio de la línea que une los electrodos de corriente.

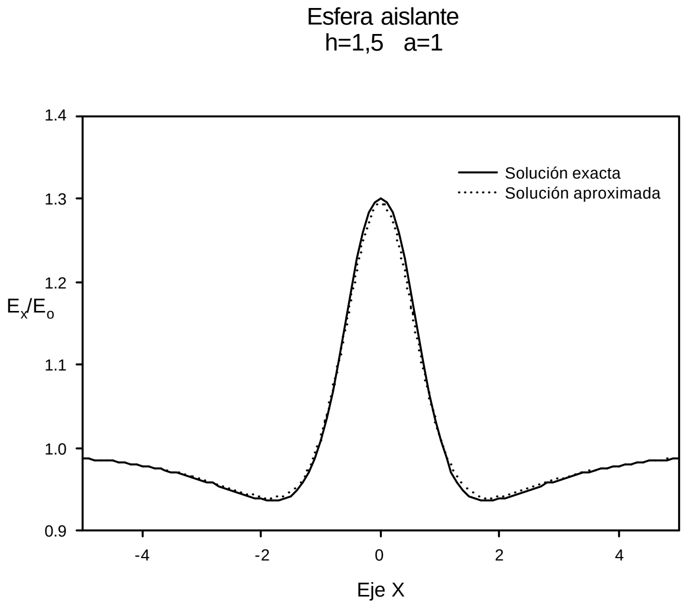
La expresión (3.26) para el campo eléctrico es una solución aproximada, ya que se ha obtenido con la condición de que los electrodos de corriente se encuentran a una gran distancia de la esfera. La solución exacta se obtendría a partir de la expresión (3.1). La Figura 3.5 compara las dos soluciones para una esfera aislante de radio unidad y profundidades 1,5 y 2. El error porcentual definido como

$$e_{r1} = max\left|\frac{E_a - E_e}{E_0}\right| \tag{3.27}$$

donde E_e es la solución exacta del campo eléctrico y E_a es la solución aproximada, es del 1,5 % y del 0,16 % respectivamente. Para una esfera conductora los errores son del 4,4% y del 0,57 % respectivamente. Sin embargo, lo que proporciona información acerca de la presencia del objeto es la variación del campo. Por lo tanto, puede ser más apropiado referenciar el error absoluto con el cambio máximo del campo eléctrico. Así definimos el nuevo error porcentual como

$$e_{r2} = max\left|\frac{E_a - E_e}{max\left|E_e - E_o\right|}\right| \tag{3.28}$$

En este caso, los errores son del 4,7 % y del 1,3 % para la esfera aislante y del 8 % y del 2,34% para la esfera conductora.



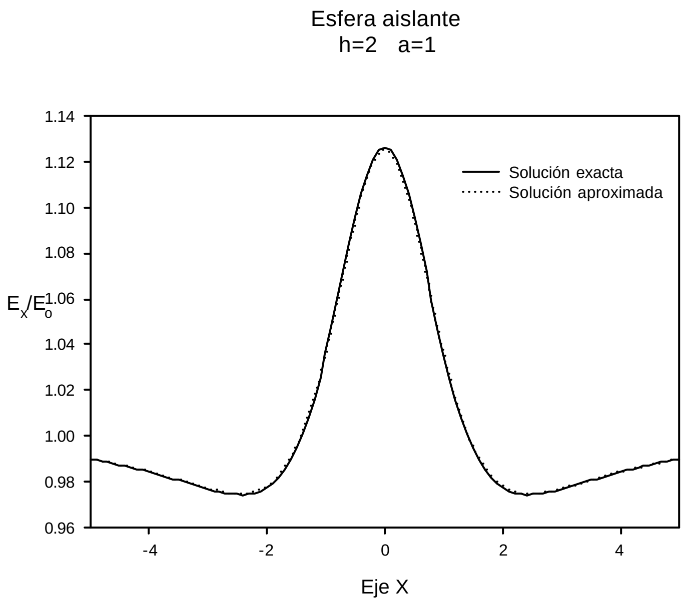


Figura 3.5. Solución exacta y aproximada del campo eléctrico en presencia de una esfera aislante de radio unidad y profundidad 1,5 y 2 cuando los electrodos de corriente se encuentran muy alejados.

3.2. Potencial y campo eléctrico en presencia de un cilindro

Un cilindro puede modelar con bastante exactitud galerías y túneles. Parasnis (1964) obtiene una solución del potencial eléctrico en el caso de un cilindro infinito horizontal inmerso en un suelo homogéneo en presencia de líneas de corriente infinitas situadas en la superficie y paralelas al eje del cilindro. Militzer, Rösler y Lösch (1979) utilizan dicho análisis para comparar diferentes configuraciones electródicas. Wait (1982) realiza un análisis cuando la fuente de corriente es puntual y el cilindro está inmerso en un medio infinito. El mismo autor considera el caso de un cilindro conductor de radio mucho menor que la profundidad a la que se halla inmerso en un suelo homogéneo. Bhattarcharya y Biswas (1992) analizan el caso general de un cilindro inmerso en un suelo homogéneo a cualquier profundidad en presencia de un campo eléctrico constante. Sin embargo, no parece existir una solución para el caso de un cilindro inmerso en un suelo homogéneo cuando los electrodos de corriente son puntuales y están a una distancia finita. De hecho el problema ha de ser abordado utilizando coordenadas bipolares, sistema para el cual la ecuación de Laplace no es separable (Morshe y Feschback, 1953).

Una solución aproximada se puede obtener a partir de la solución para el caso del cilindro en un medio infinito (Wait, 1982) y considerando que la interfase suelo-aire dobla el efecto del objeto. Si el eje del cilindro es paralelo a la superficie (Figura 3.6), el potencial, expresado en coordenadas cilíndricas, es (Apéndice B)

$$V = \frac{I r_1}{2p}\left\{\frac{1}{R} + \frac{4}{p}\int_0^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty} e_m A_m(l) K_m(lr)\cos(mf)\, dl\right\} \tag{3.29}$$

donde

$$A_m(l) = \frac{K_m(lD) I'_m(la)(r_2/r_1 - 1)}{\dfrac{I'_m(la) K_m(la)}{I_m(la)} - \dfrac{r_2}{r_1} K'_m(la)} \tag{3.30}$$

y $e_m = 1$ para $m = 0$, $e_m = 2$ para $m = 1,2,...$

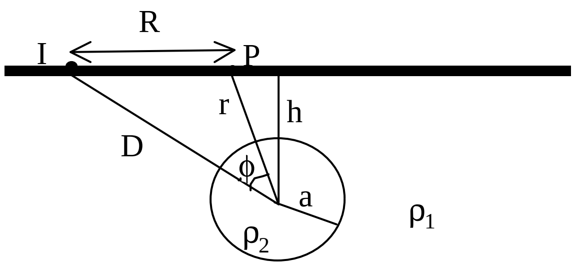


Figura 3.6. Cilindro inmerso en un suelo homogéneo. El eje del cilindro es paralelo a la superficie y perpendicular a la línea que une la fuente de corriente y el punto de medida

En el caso de que el retorno de corriente se produzca por otro electrodo a distancia finita, el potencial se calcula por superposición de las dos fuentes de corriente, tal como se hizo con la esfera. Sin embargo, el tiempo de cálculo es mucho mayor que en el caso de la esfera ya que la integral en (3.29) se ha de calcular por métodos numéricos. La Figura 3.7 muestra el caso de un cilindro con su eje perpendicular a la línea que une los electrodos de corriente y equidistante a ellos. El potencial, en este caso, se puede expresar como

$$V = \frac{Ir_1}{2p}\left\{\frac{1}{R} + \frac{4}{p}\int_0^\infty \sum_{m=0}^{\infty} 2A_m(l)K_m(lr)\left[\cos(mf) - \cos(mf')\right]dl\right\} \tag{3.31}$$

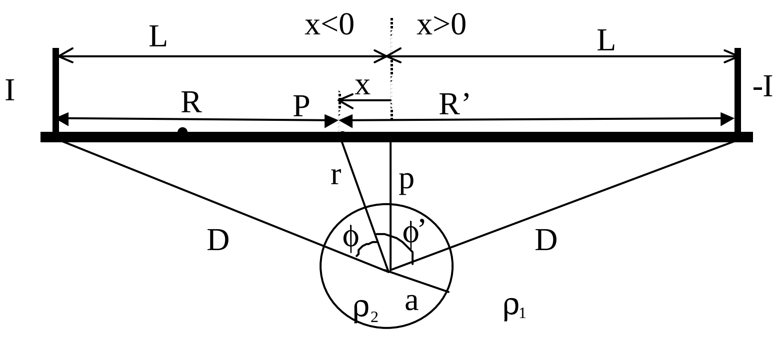


Figura 3.7. Cilindro inmerso en un medio semi-infinito homogéneo. El eje del cilindro es paralelo a la superficie, perpendicular a la línea que une los electrodos de corriente y equidistante de éstos.

Si L >> x, h, la esfera está sometida a un campo eléctrico constante de intensidad E_0 y dirección perpendicular al eje del cilindro. Ahora el potencial y el campo eléctricos son

$$V \cong -E_0 x\left(1 + k_c \frac{a^2}{r^2}\right) \tag{3.32}$$

$$E_x \cong E_0\left[1 + k_c\left(\frac{a}{r}\right)^2\left(1 - \frac{2x^2}{r^2}\right)\right] \tag{3.33}$$

donde

$$k_c = 2\frac{r_2 - r_1}{r_2 + r_1} \tag{3.34}$$

Para este caso Bhattarcharya y Biswas (1992) consideran de manera precisa el efecto de la interfase suelo-aire utilizando coordenadas bipolares (2D). El potencial en la superficie es

$$V = -2bE_0 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 + 0{,}5k_c e^{-2nm_o}}{1 - 0{,}5k_c e^{-2nm_o}} \operatorname{sen}(nh) \tag{3.35}$$

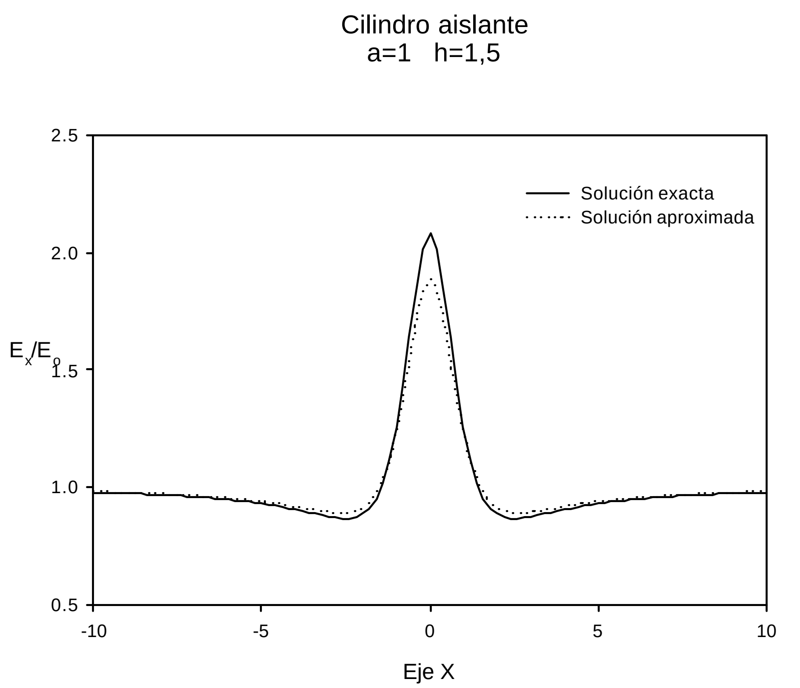
donde

$$
\begin{aligned}
b &= h^2 - a^2 \\
m_o &= 0{,}5 \ln \frac{h+b}{h-b} \\
h &= p - 2tan^{-1} \frac{x}{b}
\end{aligned}
\tag{3.36}
$$

El campo eléctrico en la superficie en la dirección x es

$$
E_x = -2E_0 \left(1 - \cos h\right) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 + 0{,}5 k_c e^{-2nm_o}}{1 - 0{,}5 k_c e^{-2nm_o}} \, n \cos(nh)
\tag{3.37}
$$

La Figura 3.8 compara las curvas respectivas obtenidas mediante (3.33) y (3.36) para un cilindro aislante y conductor de radio unidad y profundidad 1,5. La Figura 3.9 presenta el caso de un cilindro a profundidad 2. En este caso, las soluciones exacta y aproximada del campo eléctrico presentan diferencias relativas mayores que en el caso de la esfera para una misma relación *h/a*.



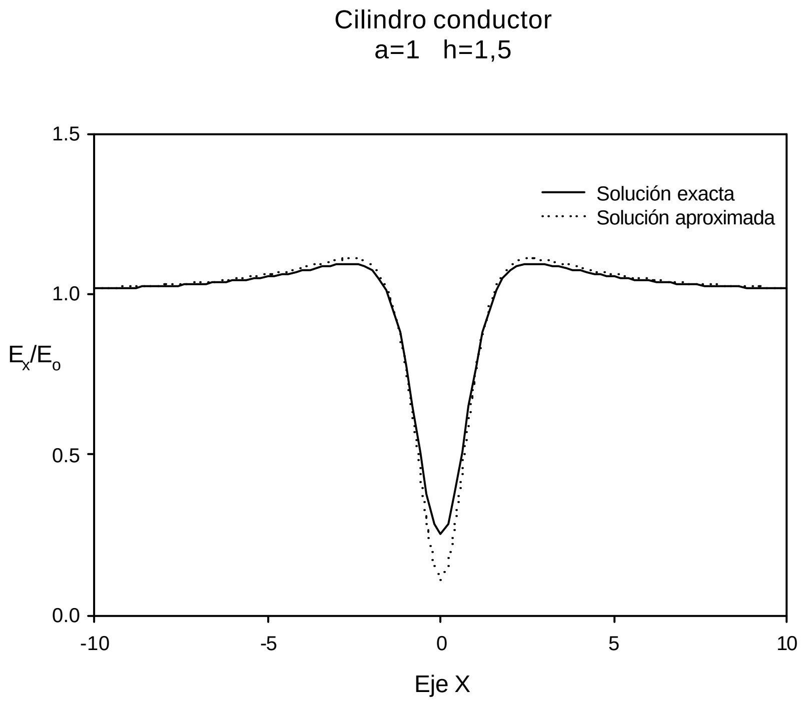
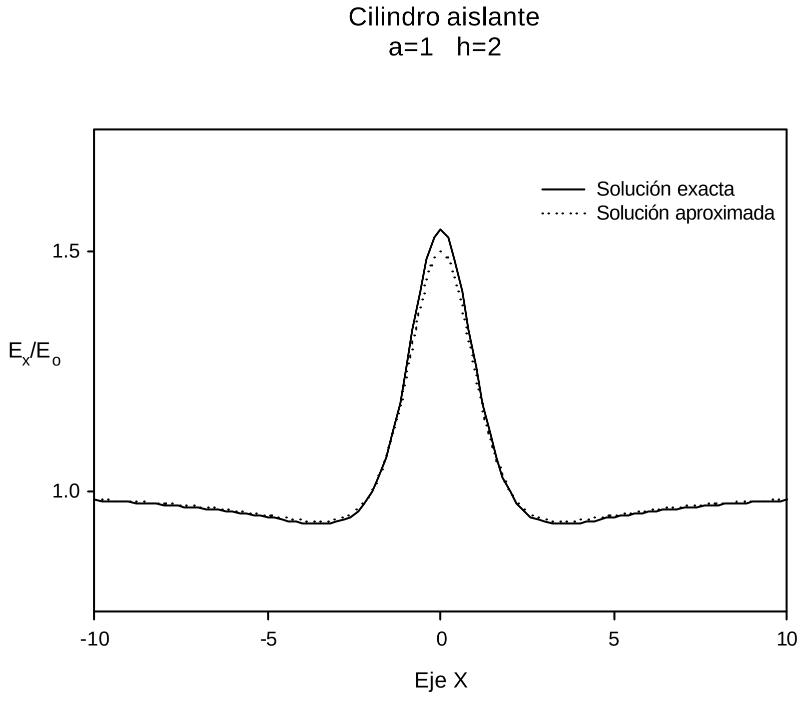


Figura 3.8. Solución exacta y aproximada del campo eléctrico sobre un cilindro de radio unidad y profundidad 1,5 dispuesto según la Figura 3.7 con los electrodos de corriente muy alejados. El campo eléctrico primario es uniforme y perpendicular al eje del cilindro.



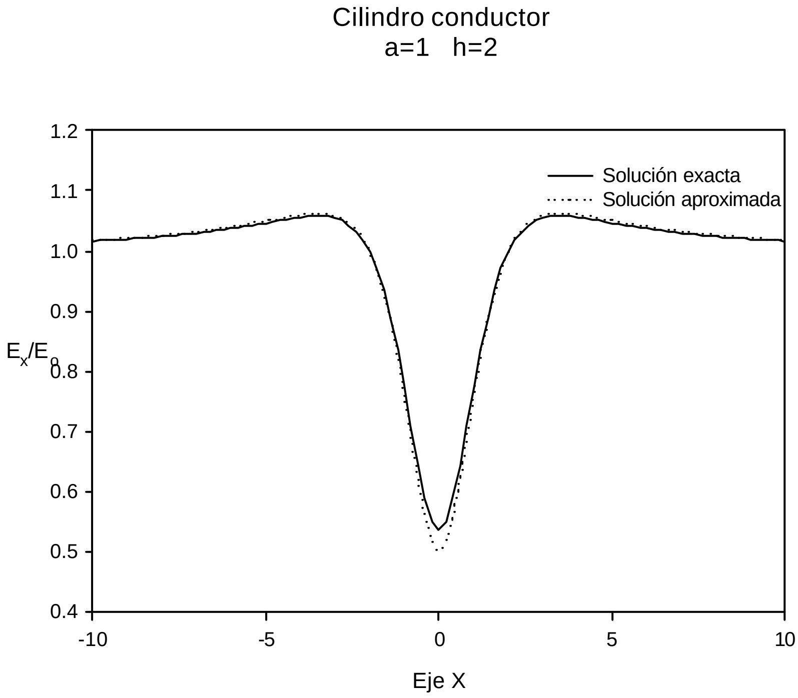


Figura 3.9. Solución exacta y aproximada del campo eléctrico sobre un cilindro de radio unidad y profundidad 2 dispuesto según la Figura 3.7 con los electrodos de corriente muy alejados. El campo eléctrico primario es uniforme y perpendicular al eje del cilindro.

La Tabla 3.1 muestra los errores relativos dados por (3.27) y (3.28) para diferentes relaciones *h/a* en el caso del cilindro aislante. Los errores son similares para un cilindro conductor. Estos errores son mayores que para el caso de la esfera.

	h/a = 1,5	h/a = 2	h/a = 3	h/a = 4
e_{r1}	19,2 %	4,4 %	0,71 %	0,21 %
e_{r2}	17,8 %	8,1 %	3,1 %	1,7 %

Tabla 3.1. Error relativo entre la solución exacta y aproximada del cilindro aislante según *h/a*

3.3. Configuraciones de electrodos óptimas

El capítulo 2 describe diferentes dispositivos electródicos que se utilizan en la prospección geoeléctrica. La elección de la configuración utilizada se ha de hacer de acuerdo con algún criterio. Apparao et al. (1992) y Apparao, Sivarama y Subrahmanya (1997) comparan cuatro configuraciones de electrodos basadas en los dispositivos electródicos Wenner, polo-polo, polo-dipolo y doble dipolo. El criterio de comparación se basa en la profundidad de detección que se define como la profundidad por debajo de la cual un objeto no puede ser detectado con una configuración de electrodos determinada. Van Nostrand (1953) considera que un objeto es detectable si produce un cambio de la resistividad aparente mayor del 10 %. Apparao et al. (1992)

y Apparao, Sivarama y Subrahmanya (1997) miden en una cubeta de dimensiones 200 cm $\times$ 100 cm $\times$ 120 cm llena de agua. Las cuerpos utilizados son láminas verticales, cilindros y esferas, tanto totalmente conductores (Apparao et al., 1992) como aislantes (Apparao, Sivarama y Subrahmanya 1997). Los autores concluyen que la detección de objetos conductores es más sencillo y que la menor profundidad de detección se produce para las cuerpos esféricos. En este último caso la configuración Wenner es la que da peor resultado, comportándose las otras tres de forma similar.

En nuestro caso, para comparar las diferentes configuraciones de electrodos definimos la resistividad aparente normalizada como

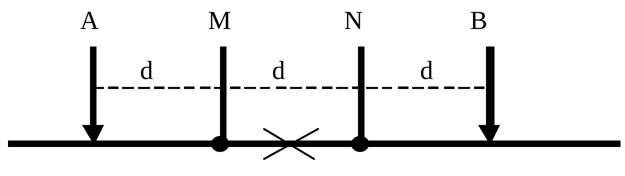
$$Q = \frac{r_a - r_1}{r_1} \tag{3.38}$$

donde r_a es la resistividad aparente definida en el apartado 2.3 y r_1 es la resistividad del medio. Definimos la visibilidad como el máximo del valor absoluto de la resistividad aparente normalizada

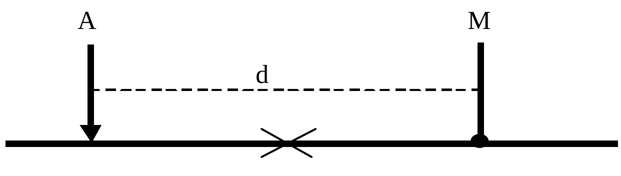
$$Q_0 = max|Q| \tag{3.39}$$

Según el criterio seguido por Van Nostrand (1953), un objeto será detectable si $Q_0 > 0{,}1$. El criterio que utilizaremos para comparar las diferentes configuraciones será la visibilidad obtenida en presencia de una esfera. Más adelante tendremos en cuenta el número de medidas independientes de cada configuración y el margen dinámico de las medidas. La visibilidad se obtendrá de forma analítica, utilizando la solución exacta del potencial (3.1), y se contrastará posteriormente con resultados experimentales.

Comparamos primero las cuatro configuraciones de electrodos utilizadas por Apparao et al. (1992). La Figura 3.10 muestra los dispositivos electródicos utilizados. El símbolo ‘x’ indica la posición asignada al dispositivo. Por ejemplo, en un dispositivo Wenner si la posición de A es x = 7 (unidades arbitrarias) y la posición de B es x = 10, la posición del dispositivo sería x = 8,5. Para obtener los datos utilizaremos (3.1) para una esfera totalmente aislante o conductora de radio unidad situada en $x = y = 0$ y profundidades 1,6-2,0-2,4 unidades.



Dispositivo Wenner



Dispositivo polo-polo

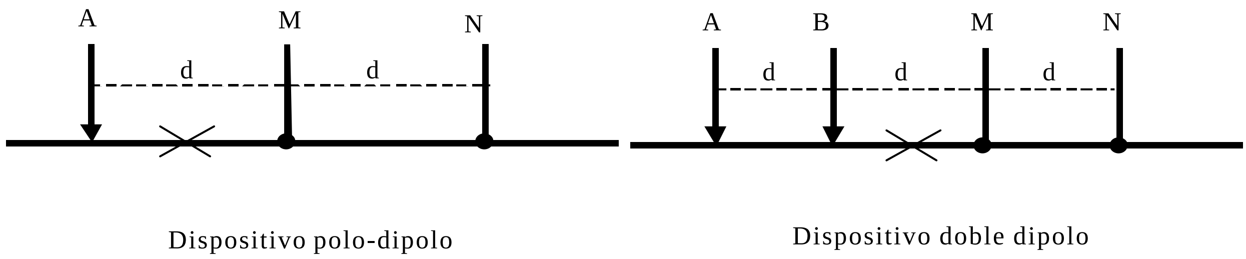
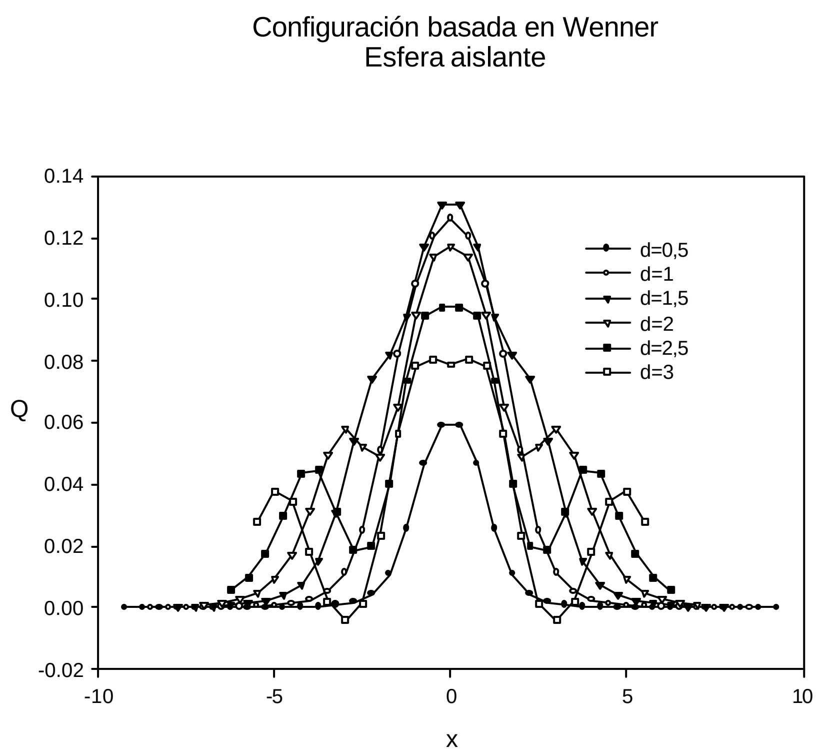
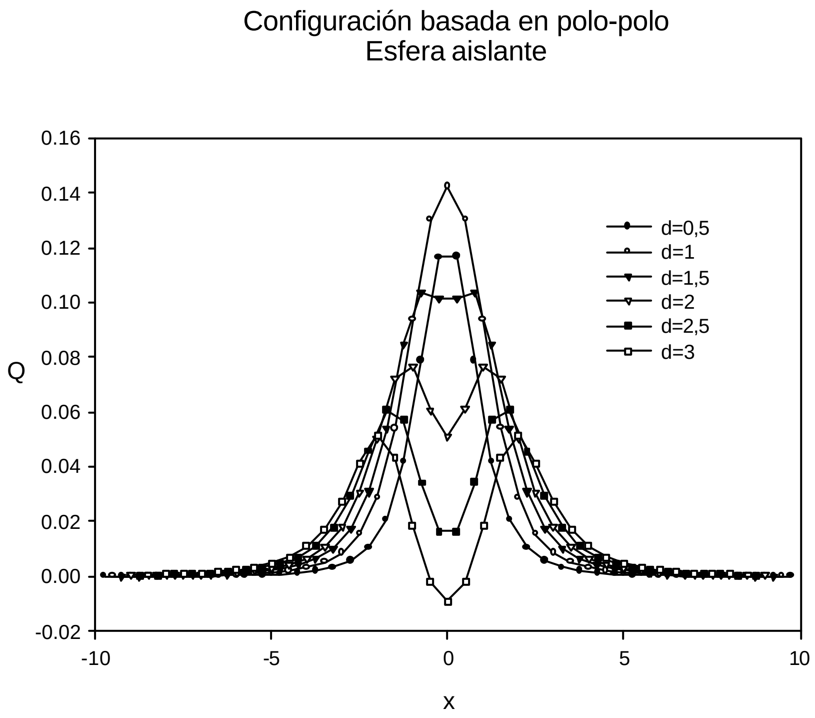
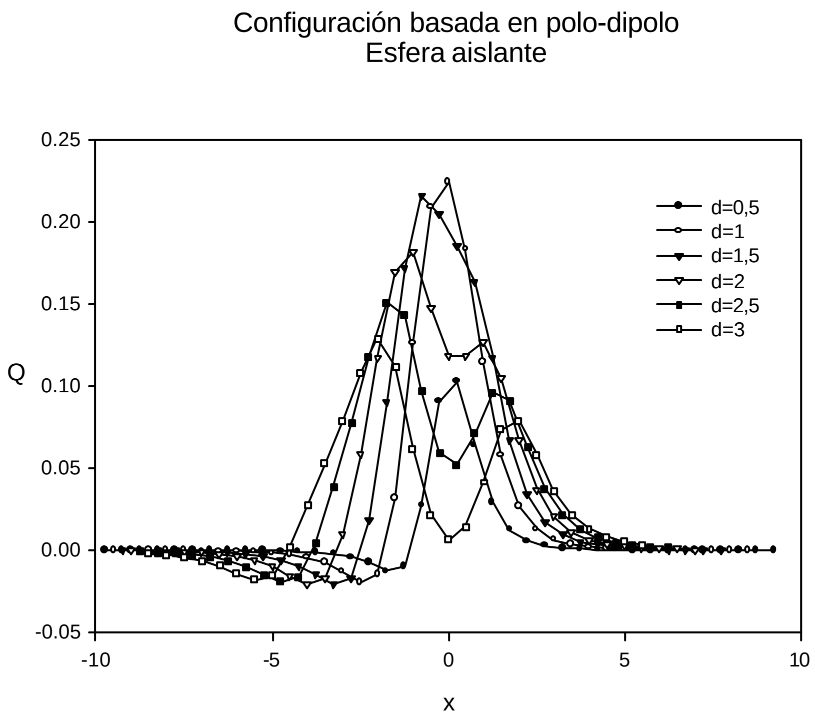


Figura 3.10. Dispositivos electródicos utilizados en la determinación de la visibilidad para objetos esféricos.

Para cada dispositivo electródico se realizan varias calicatas en la dirección del eje x, directamente sobre la esfera (Figura 3.1), donde se produce la mayor variación en la resistividad aparente. Cada calicata empieza con el electrodo del extremo izquierdo en la posición $x = -10$ y acaba con el electrodo del extremo derecho en la posición $x = 10$, desplazándose a pasos de 0,5 unidades. La Figura 3.11 muestra la resistividad aparente normalizada en función de la posición del dispositivo electródico para una esfera aislante situada a una profundidad de 1,6 unidades. Las diferentes curvas se obtienen variando la separación interelectródica d entre 0,5 y 3 unidades a intervalos de 0,5 unidades. La Figura 3.12 muestra el caso de una esfera conductora. La resistividad aparente normalizada es casi el doble y de signo contrario que la de la esfera aislante. En ambos casos, las configuraciones basadas en los dispositivos polo-dipolo y doble dipolo presentan valores de Q mayores. Para no confundir estas configuraciones con las definidas en el apartado 2.6, se habla de configuración *basada en* un dispositivo determinado.




Configuración basada en polo-polo
Esfera aislante
Q
x
d=0,5
d=1
d=1,5
d=2
d=2,5
d=3
0.16
0.14
0.12
0.10
0.08
0.06
0.04
0.02
0.00
-0.02
-10
-5
0
5
10


Configuración basada en polo-dipolo
Esfera aislante
Q
x
d=0,5
d=1
d=1,5
d=2
d=2,5
d=3
0.25
0.20
0.15
0.10
0.05
0.00
-0.05
-10
-5
0
5
10

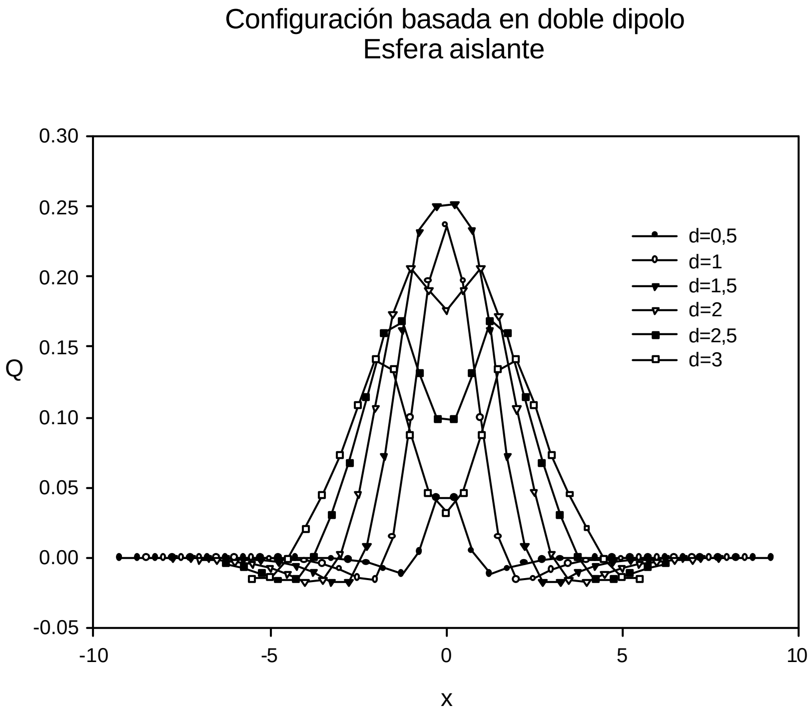
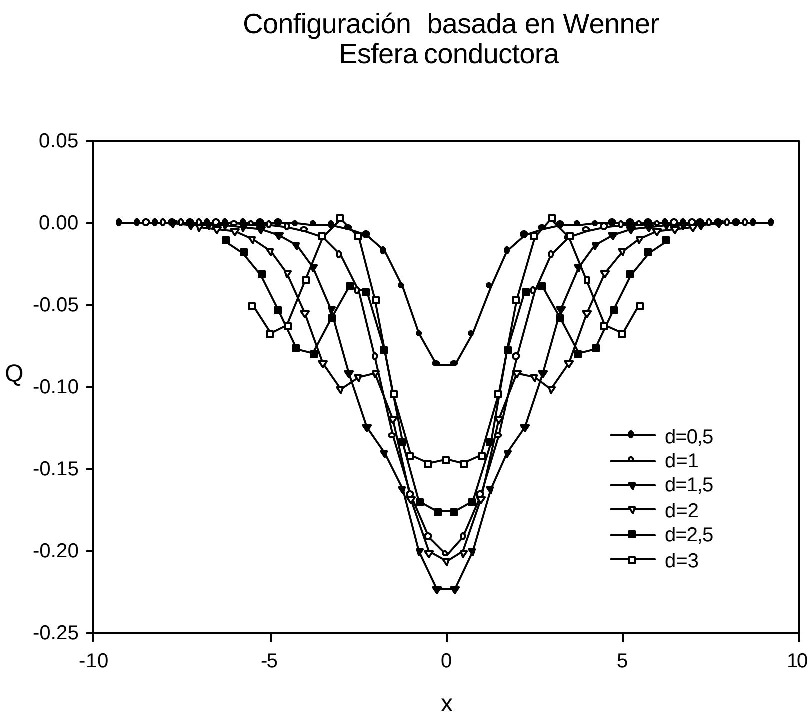
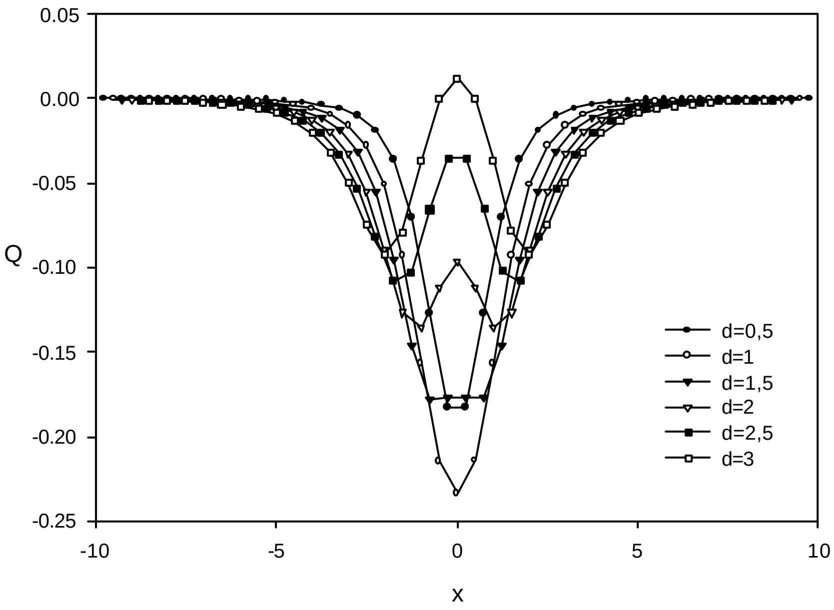


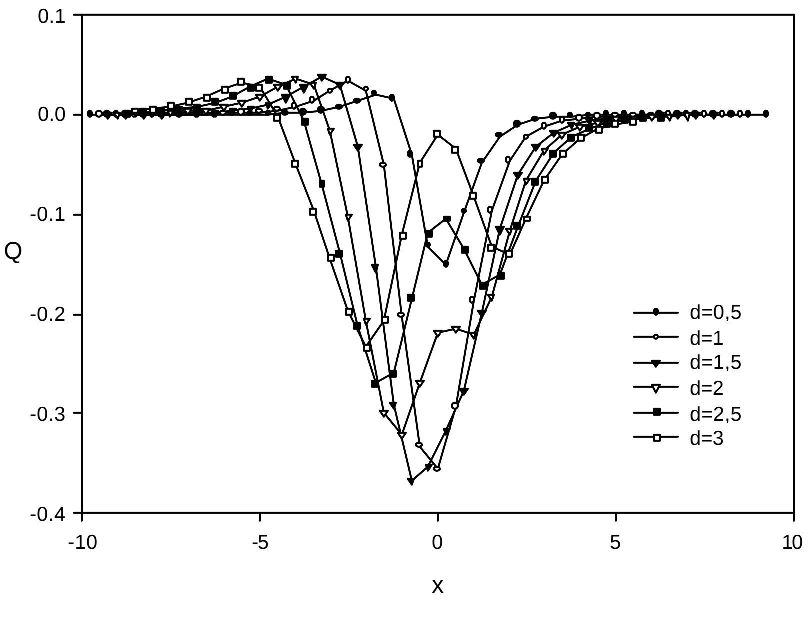
Figura 3.11. Resistividad aparente normalizada con una esfera aislante de radio 1 unidad a una profundidad de 1,6 unidades. Las diferentes curvas se obtienen variando la separación interlectródica *d* entre 0,5 y 3 unidades a intervalos de 0,5 unidades.



Configuración basada en polo-polo
Esfera conductora



Configuración basada en polo-dipolo
Esfera conductora



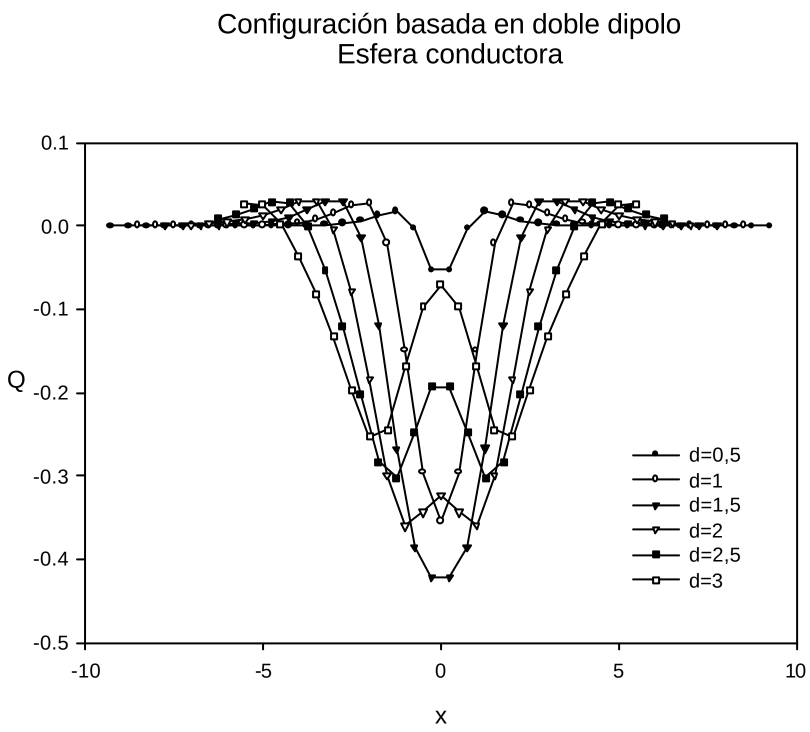


Figura 3.12. Resistividad aparente normalizada con una esfera conductora de radio 1 unidad a una profundidad de 1,6 unidades. Las diferentes curvas se obtienen variando la separación interlectródica *d* entre 0,5 y 3 unidades a intervalos de 0,5 unidades.

La Figura 3.13 representa la variación de la visibilidad Q_0 en función de d en el caso de la esfera aislante para los cuatro dispositivos utilizados. La Figura 3.14 muestra el caso de la esfera conductora. Como era de esperar, la visibilidad disminuye con la profundidad del objeto. La visibilidad máxima, a la profundidad h = 1,6 unidades, se produce para d entre 1 y 1,5 dependiendo de la configuración utilizada. Hay, por tanto, una separación electródica óptima para detectar la esfera. A medida que la profundidad de la esfera aumenta también lo hace la distancia d óptima. Para todas las profundidades, la visibilidad de las esferas conductoras es casi el doble que la de las esferas aislantes y las configuraciones basadas en los dispositivos doble dipolo y polo-dipolo tienen una visibilidad sensiblemente mayor que las otras dos configuraciones. Apparao, Sivarama, y Subrahmanya (1997) también coinciden en que las esferas conductoras son más fáciles de detectar. Los mismos autores concluyen que la configuración basada en el dispositivo polo-polo presenta una profundidad de detección similar a las configuraciones basadas en los dispositivos doble dipolo y polo-dipolo. Sin embargo, una inspección detallada de las gráficas que presentan dichos autores revela que la profundidad de detección es ligeramente inferior en el caso de la configuración polo-polo, lo que se corresponde con los resultados presentados aquí.

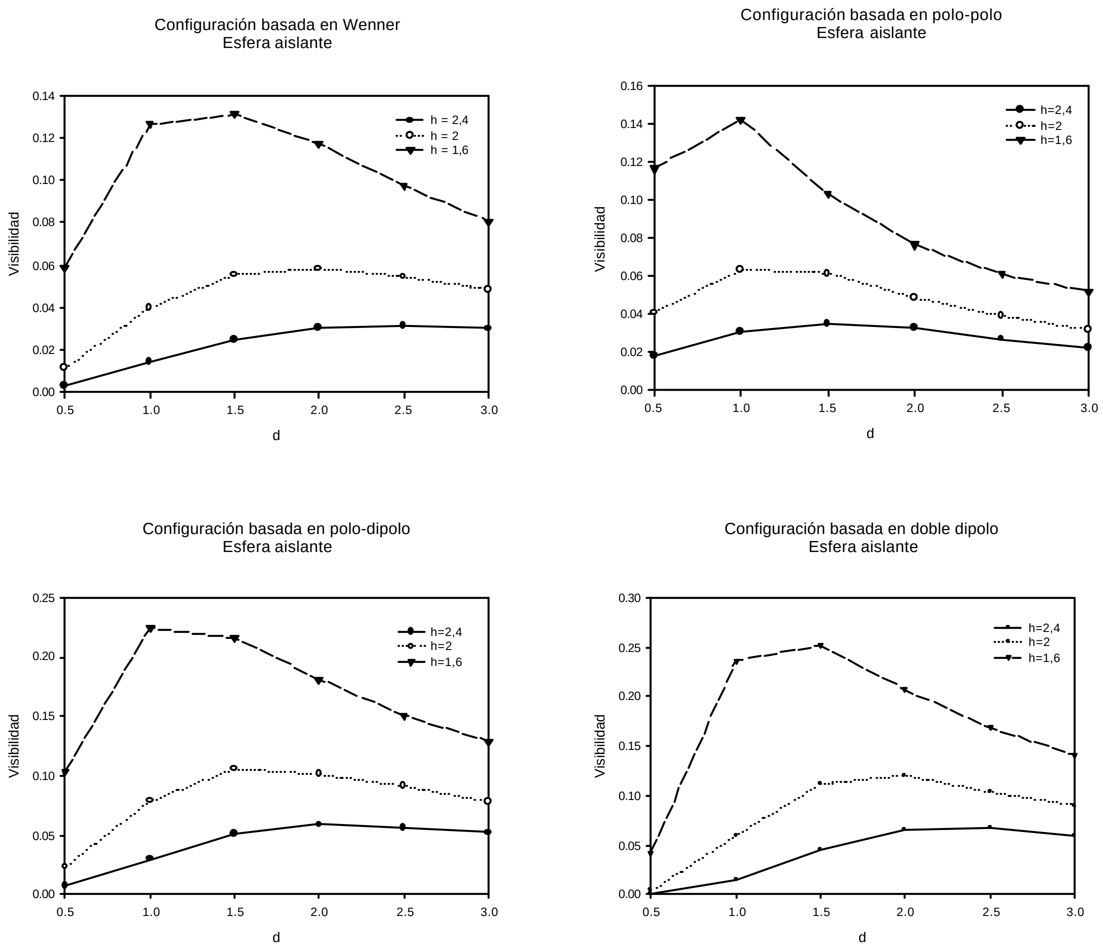
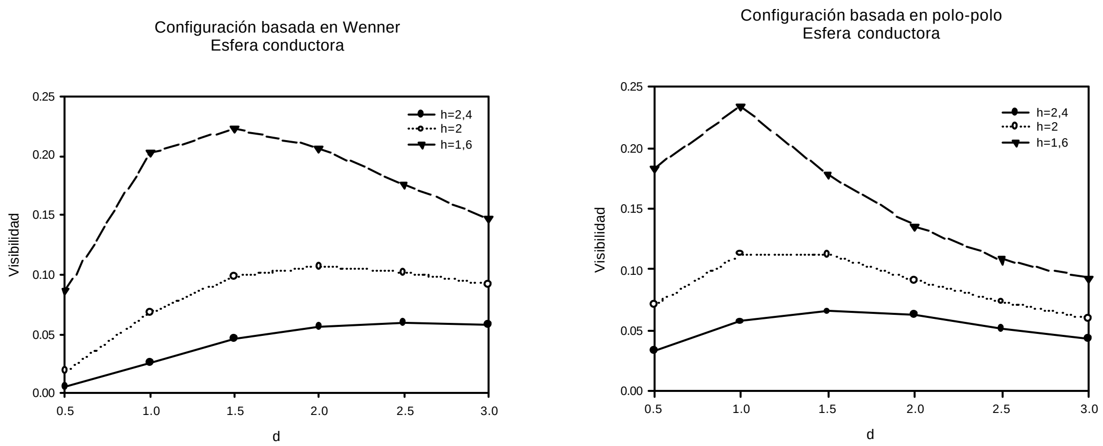


Figura 3.13. Visibilidad para una esfera aislante a diferentes profundidades h.



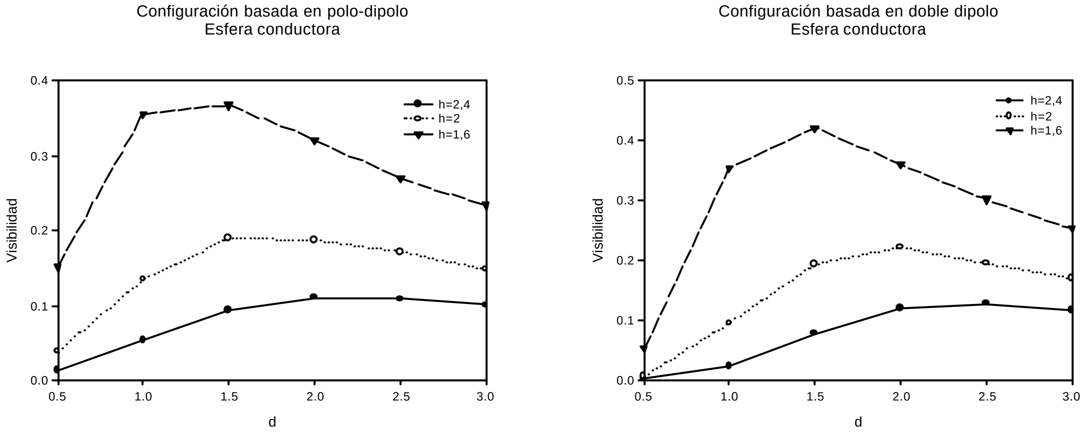


Figura 3.14. Visibilidad para una esfera conductora a diferentes profundidades *h*.

Una configuración no utilizada por Apparao et al. (1992) y Apparao, Sivarama y Subrahmanya (1997) es la basada en el dispositivo α-Wenner (Figura 3.15). De hecho cuando $a << d$ el dispositivo es idéntico al Schlumberger.

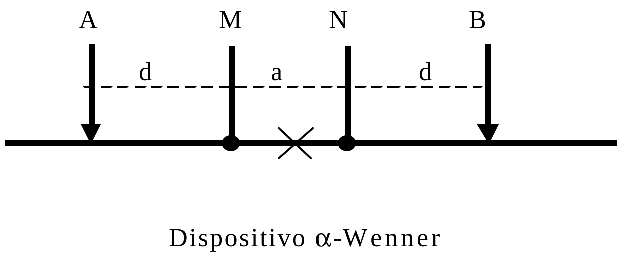
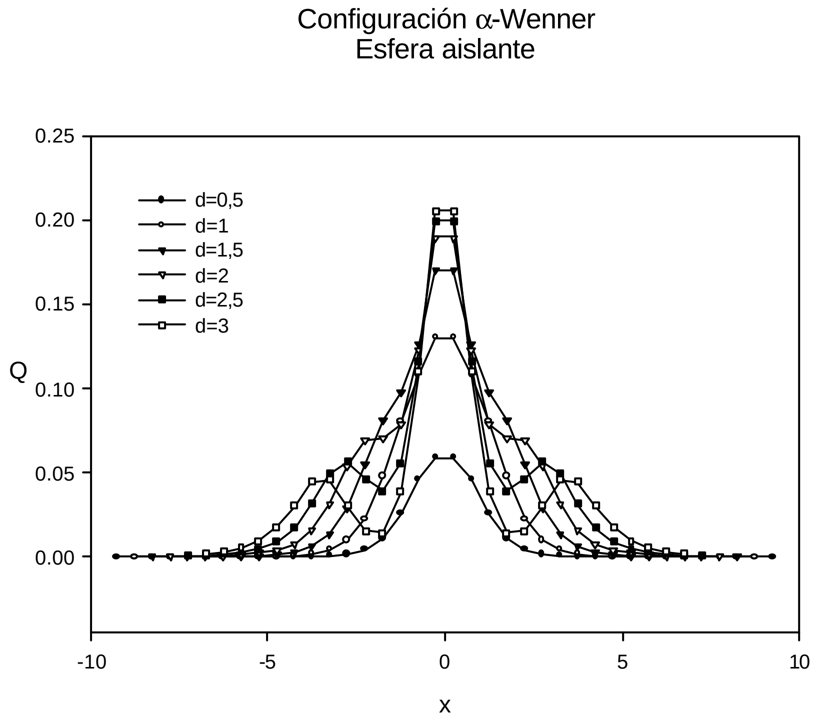


Figura 3.15. Dispositivo α-Wenner utilizado en la determinación de la visibilidad para objetos esféricos.

La Figura 3.16 representa Q en función de la posición del dispositivo para una esfera aislante a profundidad 1,6. La distancia a es igual a 0,5 unidades y d varía entre 0,5 y 3 a intervalos de 0,5 unidades. La Figura 3.17 representa Q_0 en función de d para diferentes profundidades de la esfera.



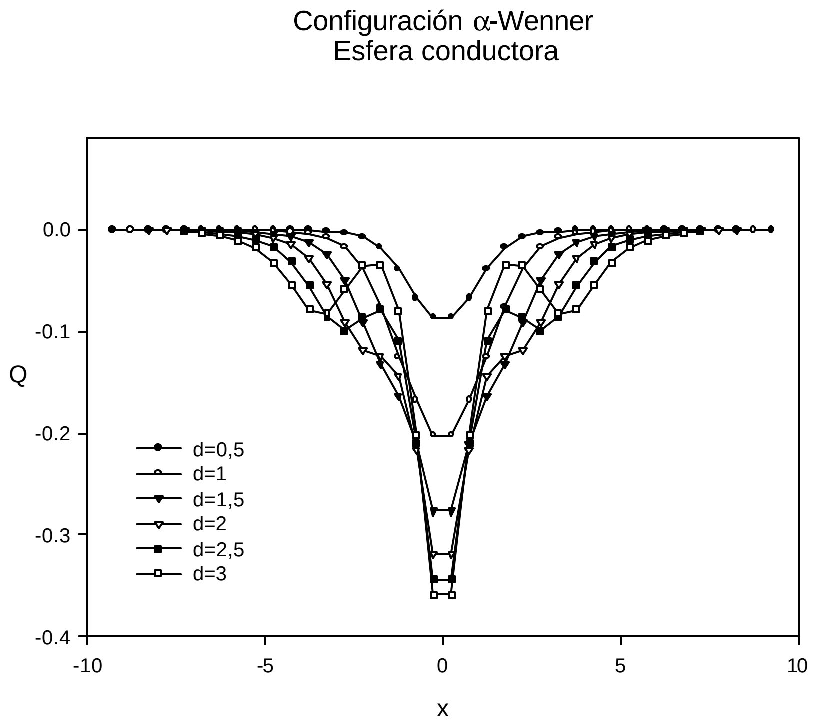


Figura 3.16. Resistividad aparente con una esfera aislante y conductora de radio unidad a una profundidad de 1,6 unidades. Las diferentes curvas se obtienen variando la separación interlectródica *d* entre 0,5 y 3 unidades a intervalos de 0,5 unidades.

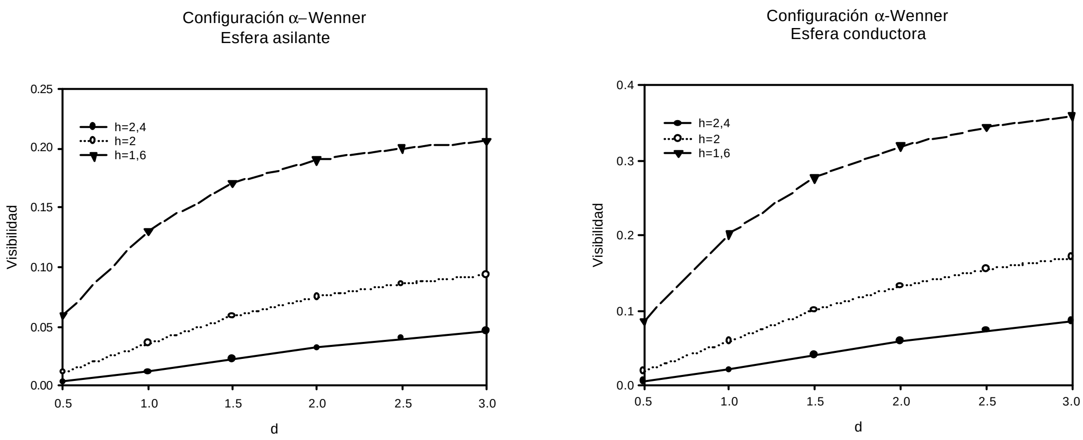


Figura 3.17. Visibilidad para una esfera aislante y conductora a diferentes profundidades *h*.

La visibilidad máxima a cada profundidad *h* para esta configuración es ligeramente menor que las basadas en los dispositivos polo-dipolo y doble dipolo. La visibilidad de la esfera conductora es también casi el doble que la de la aislante. Una propiedad interesante es que a medida que *d* aumenta, la visibilidad también aumenta. La Figura 3.18 muestra la visibilidad para distancias d de hasta 9 unidades. Se observa el efecto de saturación de la visibilidad con la distancia *d*. En esta configuración hablaremos, pues, de una distancia mínima *d* (y, por tanto, una separación mínima de los electrodos inyectores) a partir de la cual la visibilidad se mantiene prácticamente constante. Esta distancia mínima aumenta con la profundidad de la esfera. Volveremos sobre este punto con más detalle en el apartado 3.4.

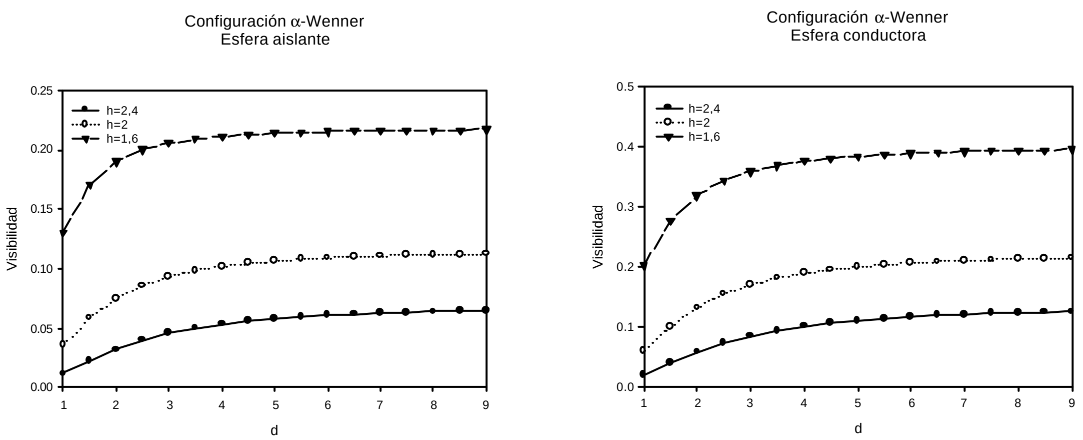


Figura 3.18. Visibilidad para una esfera aislante y conductora a diferentes profundidades *h*. El margen de distancias *d* se ha extendido hasta 9 unidades para observar el aumento de la visibilidad.

El sistema de medida automático PROGEO para realizar medidas en el laboratorio permite cualquier combinación de electrodos inyectores-detectores en una agrupación de 16 electrodos (Alberto, 1997). La Figura 3.19 muestra las visibilidades teóricas para las configuraciones anteriores si utilizamos 16 electrodos equiespaciados 1 unidad con una esfera aislante de radio unidad situada entre los electrodos 8 y 9. La distancia *d* varia entre 1 unidad y el máximo posible para cada configuración. La Figura 3.20 muestra el caso de una esfera conductora. Las conclusiones son similares a las comentadas anteriormente.

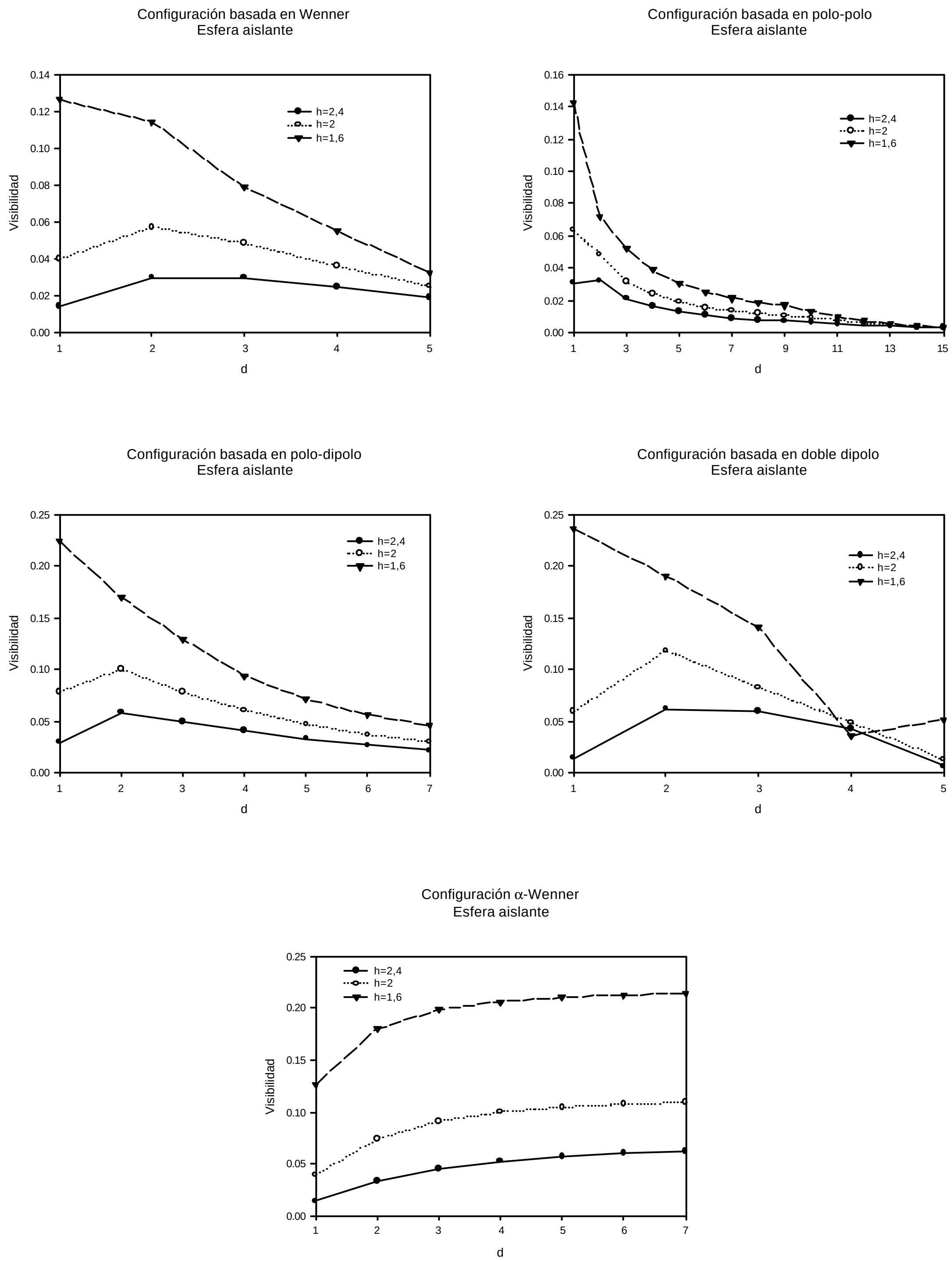


Figura 3.19. Visibilidad teórica para una esfera aislante de radio unidad a diferentes profundidades *h*, si utilizamos 16 electrodos equiespaciados 1 unidad

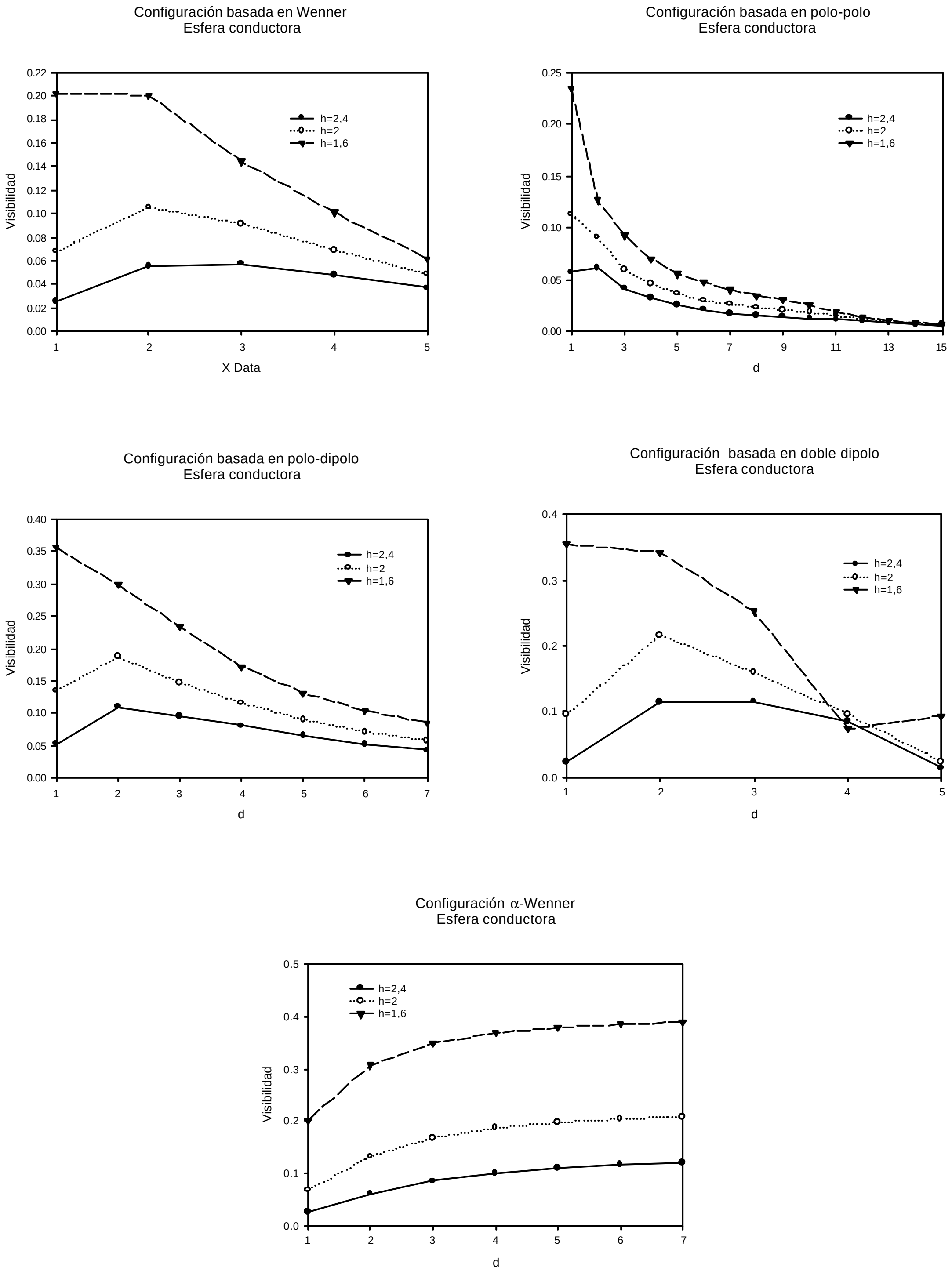


Figura 3.20. Visibilidad teórica para una esfera conductora a diferentes profundidades *h*, si utilizamos 16 electrodos equiespaciados 1 unidad

La Figura 3.21 muestra la visibilidad obtenida experimentalmente en una cubeta de plástico (40 cm x 35 cm x 20 cm) llena de agua, cuando la distancia interelectródica es de 2 cm (1 unidad), el radio de la esfera de goma (aislante) es de 2,2 cm (1,1 unidades) y la profundidad de 4 cm (2 unidades). Debido a las reducidas dimensiones de la cubeta, no es posible implementar las configuraciones polo-polo y polo-dipolo. Este mismo factor, además, altera seriamente el valor medido de la resistividad aparente en las configuraciones restantes. Para minimizar su efecto en la visibilidad de la esfera sustituimos r_1 en (3.38) por la resistividad aparente medida sin la esfera. Las visibilidades así obtenidas coinciden cualitativamente con las gráficas correspondientes de la Figura 3.19 para una profundidad de 2 unidades. Los valores experimentales son ligeramente más elevados debido a que el radio de la esfera es mayor que 2 cm (1 unidad).

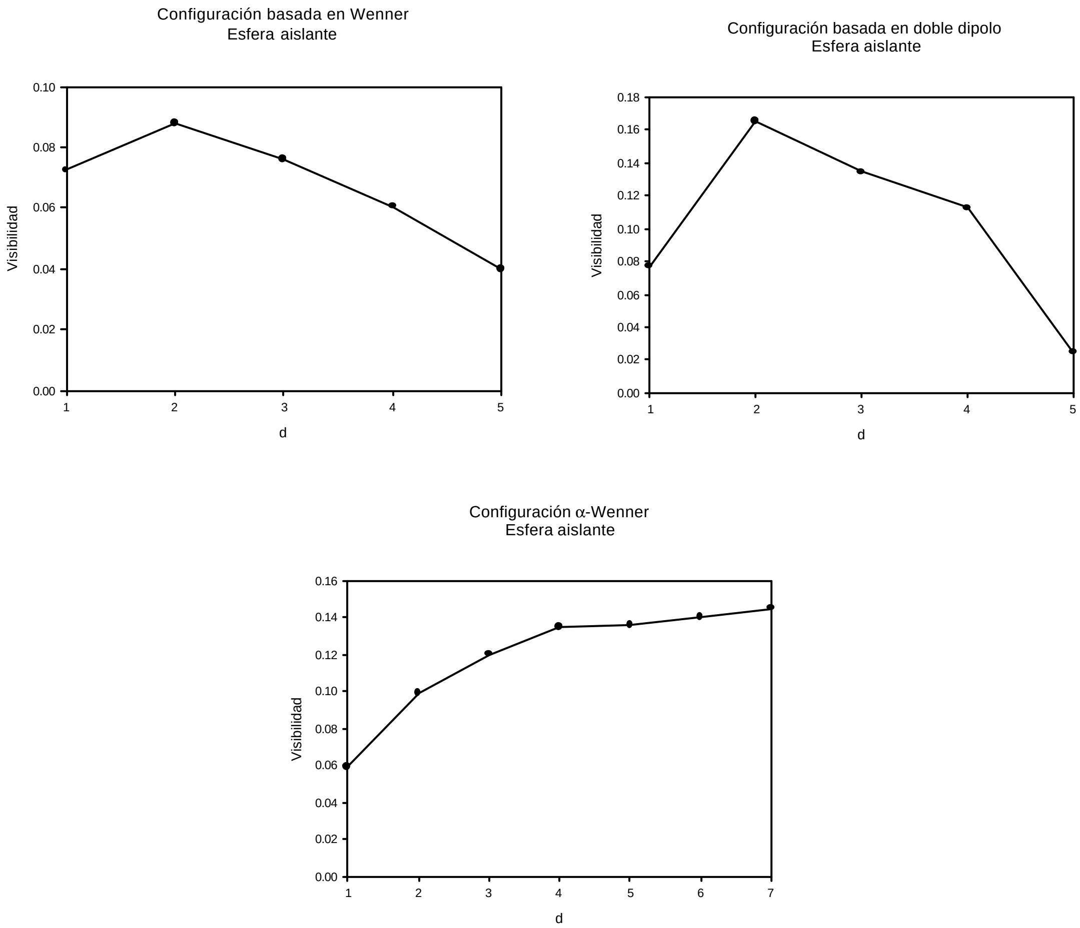
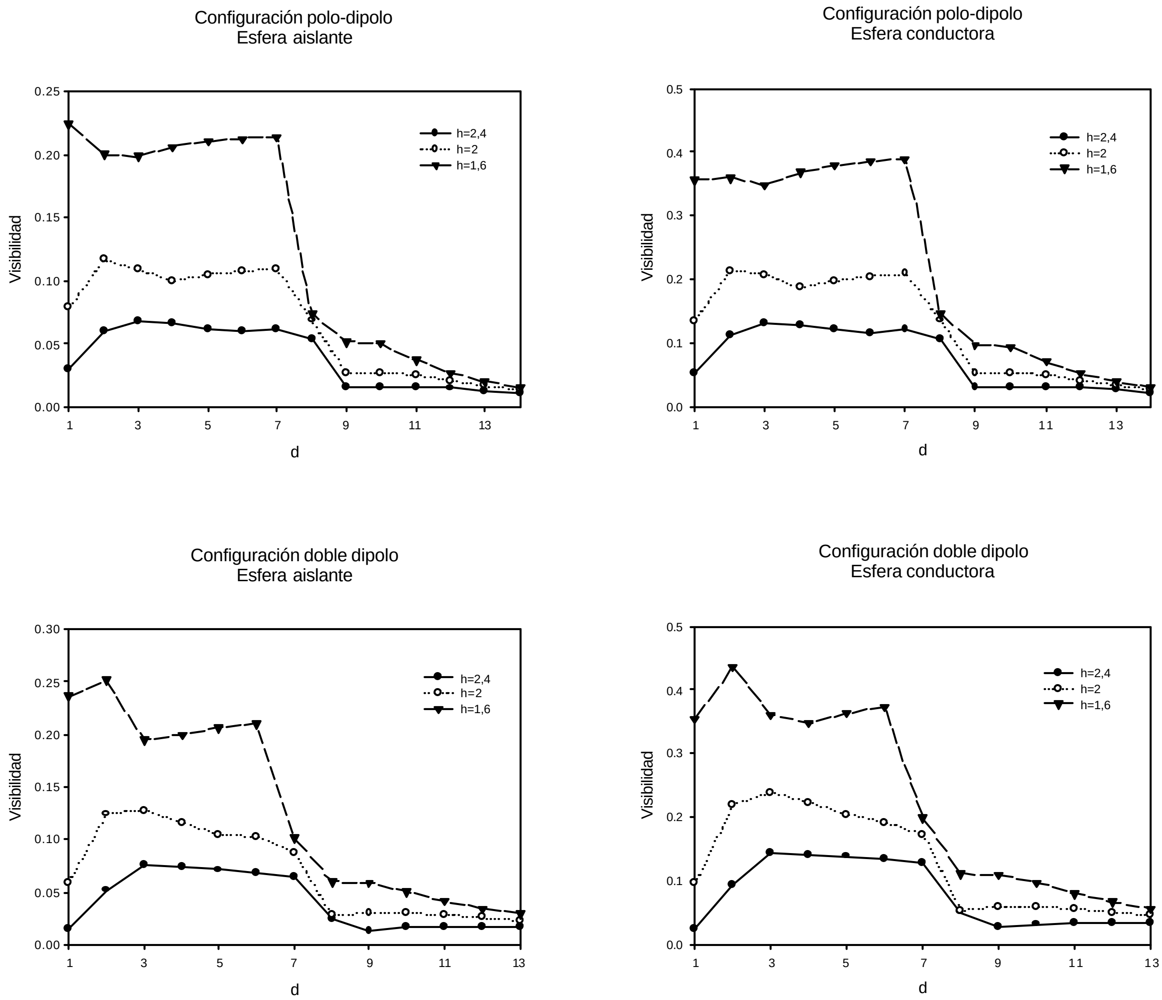


Figura 3.21. Visibilidad para una esfera de goma (aislante) de radio 2,2 cm (1,1 unidades) sumergida a una profundidad de 4 cm (2 unidades) en una cubeta de plástico (40 cm x 35 cm x 20 cm) llena de agua.

El capítulo 5 estudia el problema inverso, que básicamente consiste en determinar la distribución de la resistividad del subsuelo a partir de las medidas realizadas en la superficie. El subsuelo se divide en una serie de celdas de resistividad constante y se obtienen “imágenes” de los valores de resistividad de dichas celdas. Cuanto mayor sea el número de medidas independientes mejor podremos resolver la distribución de la resistividad del subsuelo. El número de medidas que podemos hacer con 16 electrodos es de 35 con Wenner, de 120 con polo-polo, de 58 con polo-dipolo, de 35 con doble dipolo y de 49 con α-Wenner. La configuración Wenner es la menos interesante ya que a su baja visibilidad hay que añadir el poco número de medidas realizables. Las configuraciones con más visibilidad, las basadas en los dispositivos polo-dipolo, doble dipolo y α-Wenner, también presentan este último inconveniente. Para aumentar el número de medidas podemos utilizar las configuraciones polo-dipolo, doble dipolo y Schlumberger descritas en la apartado 2.6 (no confundir con las utilizadas hasta ahora en este apartado). En las configuraciones polo-dipolo y Schlumberger se define *d* como la distancia entre los electrodos A y M, y en la configuración doble dipolo como la distancia entre los electrodos B y M. La distancia entre los electrodos M y N siempre es de una unidad. La Figura 3.22 muestra la visibilidad teórica de estas configuraciones en función de *d* para una esfera aislante y conductora de radio unidad. Para la configuración polo-dipolo sólo se representan las primeras 105 medidas (de las 119 totales) y en las dos restantes se representan las primeras 91 medidas (de las 104 totales). La visibilidad máxima es ligeramente mayor en la configuración doble dipolo. La visibilidad tiene, ahora, una caída brusca a partir de un valor de *d* que oscila entre 7 y 9, dependiendo de la configuración electródica, que se corresponde con las medidas donde los electrodos detectores se encuentran siempre a la derecha del objeto.



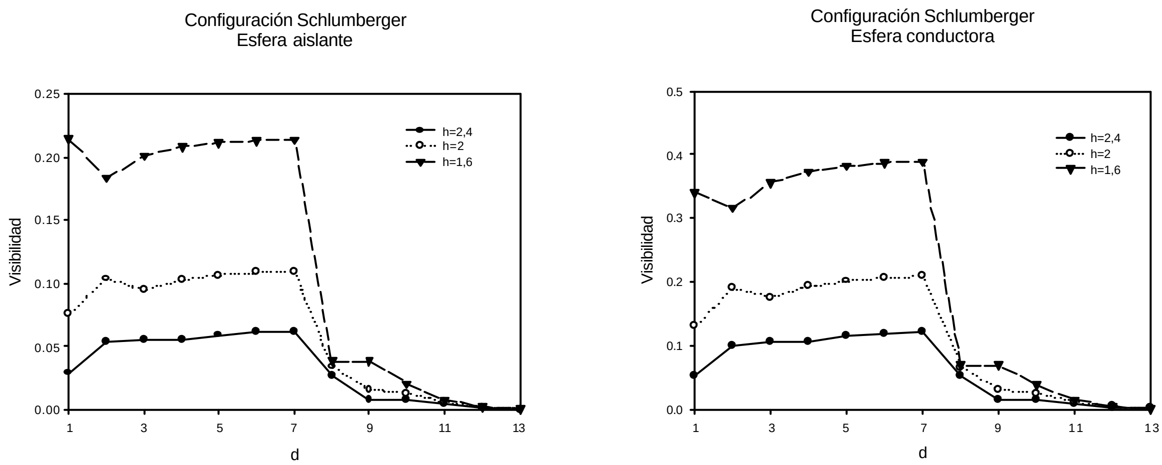


Figura 3.22. Visibilidad teórica de una esfera a diferentes profundidades para las configuraciones polo-dipolo, doble dipolo y Schlumberger.

La Figura 3.23 muestra la visibilidad teórica para las configuraciones polo-dipolo, doble dipolo y Schlumberger para una esfera aislante de radio unidad a profundidad 3 y 4 unidades. La configuración doble dipolo presenta la visibilidad máxima. El valor máximo de la visibilidad para la configuración Schlumberger es menor que en las otras dos configuraciones, sobre todo para $h = 4$.

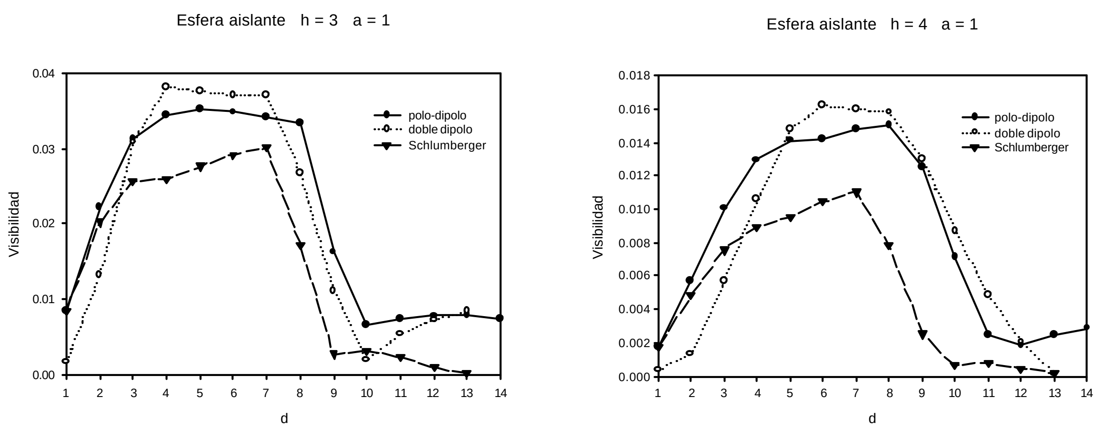


Figura 3.23. Visibilidad teórica de una esfera aislante de radio unidad a profundidades 3 y 4 unidades para las configuraciones polo-dipolo, doble dipolo y Schlumberger.

El apartado 2.6 muestra que el problema de la configuración doble dipolo es el elevado margen dinámico que puede exigir al detector. Este margen dinámico puede no ser viable en la práctica debido al error presente en las medidas. En el capítulo 4 se analizará con más detalle las fuentes de error posibles. La configuración polo-dipolo también presenta una relación entre la medida mayor y menor elevada (de 104), no siendo, además, implementable en el sistema de laboratorio debido a las reducidas dimensiones de la cubeta. La configuración Schlumberger, en cambio, presenta una relación entre las medidas mayor y menor de 28, pero una visibilidad menor a la de la configuración doble dipolo. Existe pues un compromiso entre la visibilidad y el margen dinámico necesario en el detector. Esto queda reflejado en la tabla, que muestra para las tres configuraciones anteriores la visibilidad máxima en el caso de una esfera aislante de radio unidad y profundidad 2, 3 y 4 unidades, y el margen dinámico necesario (cuando la resolución en las medidas es del 0,1%).

Configuración	Medidas independientes	Margen dinámico	Q_0 (max) h = 2	Q_0 (max) h = 3	Q_0 (max) h = 4
doble dipolo	104	117 dB	0,13	$3{,}8\times10^{-2}$	$1{,}6\times10^{-2}$
polo-dipolo	119	100 dB	0,12	$3{,}5\times10^{-2}$	$1{,}5\times10^{-2}$
Schlumberger	104	89 dB	0,11	$3{,}0\times10^{-2}$	$1{,}1\times10^{-2}$

Tabla 3.2. Numero de medidas independientes, margen dinámico (resolución 0,1 %) y visibilidad máxima en el caso de una esfera aislante de radio unidad y profundidad 2, 3, 4 unidades para las configuraciones doble dipolo, polo-dipolo y Schlumberger.

La Figura 3.24 muestra la visibilidad obtenida a partir de medidas experimentales realizadas en el laboratorio, cuando sumergimos en la cubeta de plástico una esfera de goma (aislante) de radio 1,1 unidades a una profundidad de 2 unidades (1 unidad equivale a 2 cm). Los resultados son ligeramente mayores que los presentados en la Figura 3.22 correspondientes a $h = 2$ unidades, debido a que el radio de la esfera es mayor que 1 unidad. La visibilidad es mayor en la configuración doble dipolo pero existen valores anómalos a partir de $d = 10$ debido a la incertidumbre en las medidas.

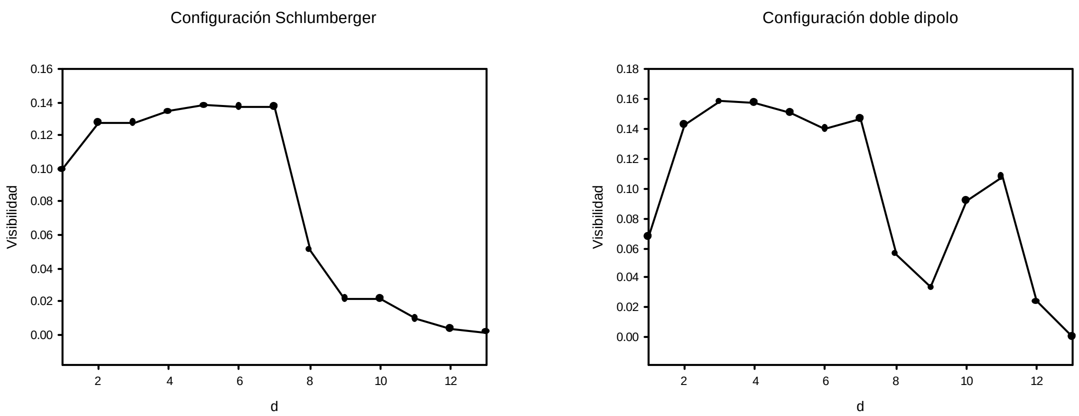


Figura 3.24. Visibilidad de una esfera de goma (aislante) de radio 2 cm (1 unidad del eje de abscisas) sumergida a una profundidad de 4 cm en una cubeta de plástico (40 cm x 30 cm x 25 cm) llena de agua para las configuraciones Schlumberger y doble dipolo.

3.4. Detectabilidad de objetos esféricos y cilíndricos. Determinación de la profundidad y el radio.

El apartado 3.1 y 3.2 proporcionan la solución analítica del potencial y el campo eléctrico para los problemas de una esfera y de un cilindro inmersos en un suelo homogéneo. El apartado 3.3 usa estas soluciones para determinar las configuraciones de electrodos óptimas con el criterio de visibilidad máxima para objetos esféricos aislantes y conductores. Además, interesa que el número de medidas independientes sea elevado y que el margen dinámico del conjunto de medidas sea reducido. Se muestra la visibilidad de diferentes configuraciones electródicas al variar la profundidad y la resistividad (totalmente conductora o aislante) de una esfera de radio unidad. Sin embargo, los resultados son particulares y no analizan el caso del cilindro. Un estudio general requeriría la solución de numerosos casos y la obtención, a partir de ellos, de reglas "empíricas".

Si el campo eléctrico primario es uniforme las soluciones del potencial y del campo eléctrico producidos por una esfera y un cilindro son simples, lo que permite estimar de forma general la influencia de parámetros tales cómo el tamaño, la profundidad y el contraste resistivo de objetos esféricos y cilíndricos. El apartado 3.4.1 muestra estos resultados, los cuales permiten determinar de una manera sencilla cuándo dichos objetos son detectables. Así mismo se muestra cómo determinar la profundidad y el radio de objetos esféricos y cilíndricos a partir de la curva de resistividad aparente normalizada, lo que constituye una primera aproximación al problema inverso, que será tratado de forma más general en el capítulo 5. El apartado 3.4.2 estudia el efecto de la proximidad de los electrodos de corriente (campo eléctrico no uniforme). El apartado 3.4.3 analiza la presencia de una capa de diferente resistividad situada debajo del objeto. El apartado 3.4.4 estudia cómo afecta el error en las medidas y el hecho de disponer de un número finito de medidas. Por último, las medidas experimentales de laboratorio presentadas en el apartado 3.4.5 validan la metodología desarrollada.

Un tema importante, mencionado en el párrafo anterior, es la determinación del tamaño y la profundidad de cavidades (esféricas y cilíndricas) en el subsuelo a partir de la curva de resistividad aparente, sin necesidad de utilizar complicados algoritmos de reconstrucción (capítulo 5). Una de las técnicas más conocidas es el método de Bristow (Bristow, 1966). Esta técnica consiste en usar el dispositivo polo-dipolo en conjunción con una técnica gráfica simple para interpretar los datos. Lowry y Shive (1990) estudian esta técnica generando los datos mediante un método numérico de diferencias finitas (Dey y Morrison, 1979) y muestran que es posible localizar con bastante precisión la profundidad de los objetos. Los mismos autores argumentan que debido al ruido geoeléctrico presente en las medidas de campo, es difícil detectar esferas más profundas que su diámetro y cilindros más profundos que 3 veces su radio. Habberjam (1969) utiliza variaciones del dispositivo Wenner para detectar objetos esféricos aislantes a partir de medidas experimentales de laboratorio. Con la ayuda de unos gráficos obtenidos a partir de las medidas es capaz de detectar la profundidad y el radio de la esfera con ciertas limitaciones. Estableciendo un cambio mínimo en la resistividad aparente del 10 % para poder detectar la esfera, concluye que la profundidad de la esfera ha de ser menor que su diámetro. Este límite es muy similar al obtenido por Van Nostrand

(1953) para esferas conductoras. Militzer, Rösler y Lösch (1979) fijan el límite de detección para cavidades cilíndricas cuando la relación *h/a* del objeto es inferior a 5. Rodríguez y Reyes (1992) utilizan el método ideado por Militzer, Rösler y Lösch (1979) para identificar cualitativamente cavidades superficiales en uno de los centros más antiguos de minas de plata de México. Para el caso de cuerpos esféricos y cilíndricos horizontalmente polarizados por un campo eléctrico uniforme, Quick (1974) determina teórica y experimentalmente su profundidad a partir de la componente horizontal del campo eléctrico en la superficie. Sin embargo, su estudio sólo analiza el método de polarización inducida. Schulz (1985) determina teóricamente el radio y la profundidad de objetos esféricos y cilíndricos a partir de la resistividad aparente medida suponiendo que el campo eléctrico es uniforme.

3.4.1. Campo eléctrico uniforme

Medida de campo eléctrico

En un dispositivo Schlumberger, cuando los electrodos inyectores se encuentran muy alejados del objeto se puede considerar que el campo eléctrico incidente sobre él es uniforme (Quick, 1974). Si los electrodos detectores están muy próximos, la medida es de campo eléctrico y la resistividad aparente viene dada por (2.21)

$$r_a(x) \cong \frac{pL^2}{I} E_x$$

En el caso de una esfera, el campo eléctrico E_x se puede substituir por (3.26). Según el apartado 3.1.3, esta solución tiene un error menor al 2,34 % si $h/a > 2$. La resistividad aparente es en este caso

$$r_a = r_1 \left[1 + k_e \left(\frac{a}{r} \right)^3 \left(1 - 3 \left(\frac{x}{r} \right)^2 \right) \right] \tag{3.40}$$

y la resistividad aparente normalizada, (3.38), es

$$Q = k_e \left(\frac{a}{r} \right)^3 \left(1 - 3 \left(\frac{x}{r} \right)^2 \right) \tag{3.41}$$

donde k_e viene dado por (3.21)

$$k_e = \frac{2(r_2 - r_1)}{2r_2 + r_1}$$

La visibilidad, (3.39), se produce en $x = 0$, siendo

$$Q_0 = |k_e| \left(\frac{a}{h} \right)^3 \qquad (3.42)$$

El valor de k_e es –2 para una esfera conductora y 1 para una esfera aislante. Por tanto, la visibilidad de las esferas conductoras es el doble que la de las aislantes, tal como apuntaban los resultados del apartado 3.3. Siguiendo el criterio de Van Nostrand (1953), el objeto es detectable para $Q_0 > 0{,}1$, lo que supone una relación $h/a > 2{,}71$ para las esferas conductoras y $h/a > 2{,}15$ para las esferas aislantes. Estos resultados coinciden con los obtenidos por Schulz (1985). Si el criterio de detectabilidad fuese de $Q_0 > 0{,}01$, la relación h/a sería de 5,65 y 4,64 respectivamente. El criterio de detectabilidad vendrá dado, entre otros, por el ruido geoeléctrico, por los errores en la posición de los electrodos y por la precisión de la instrumentación utilizada.

En el caso del cilindro el campo eléctrico E_x viene dado por (3.33). El apartado 3.2 mostró que esta solución tiene un error del 8,1 % para $h/a = 2$. Cuando $h/a = 4$, este error baja al 1,7 %. La expresión de Q será

$$Q = k_c \left(\frac{a}{r} \right)^2 \left(1 - 2 \left(\frac{x}{r} \right)^2 \right) \qquad (3.43)$$

siendo la visibilidad

$$Q_0 = |k_c| \left(\frac{a}{h} \right)^2 \qquad (3.44)$$

El parámetro k_c dado por (3.34) es –2 para un cilindro conductor y 2 para un cilindro aislante. La visibilidad de un cilindro aislante es la misma que la de uno conductor y mayor que la visibilidad de la esfera. Con $Q_0 > 0{,}1$ la relación h/a ha de ser menor que 4,47. Este resultado es similar al obtenido por Schulz (1985). Militzer, Rösler y Lösch (1979) establecen el límite de detección en $h/a = 5$. Con el criterio menos exigente de $Q_0 > 0{,}01$, $h/a < 14{,}1$.

La Figura 3.25 y la Figura 3.26 muestran el efecto de la variación de los diferentes parámetros (h, a, k_e, k_c) en el valor de Q. El cruce por cero de Q se produce en $x_z = \pm h/\sqrt{2}$ para una esfera y en $x_z = \pm h$ para un cilindro. Los pequeños mínimos de Q para los objetos aislantes o máximos para los conductores se producen en $x_m = \pm h\sqrt{3/2}$ en el caso de la esfera y en $x_m = \pm h\sqrt{3}$ en el caso del cilindro. Tanto la variación del radio a como de los parámetros k_e y k_c, sólo producen un escalado de Q, mientras que la profundidad también afecta a la forma, haciendo que el lóbulo principal se recorte y se haga más ancho a medida que h aumenta (se observa en las gráficas que al variar h cambian los puntos x_z y x_m). Los objetos son más visibles (detectables) cuanto más cerca estén de la superficie y mayor sea su contraste resistivo, como era de esperar.

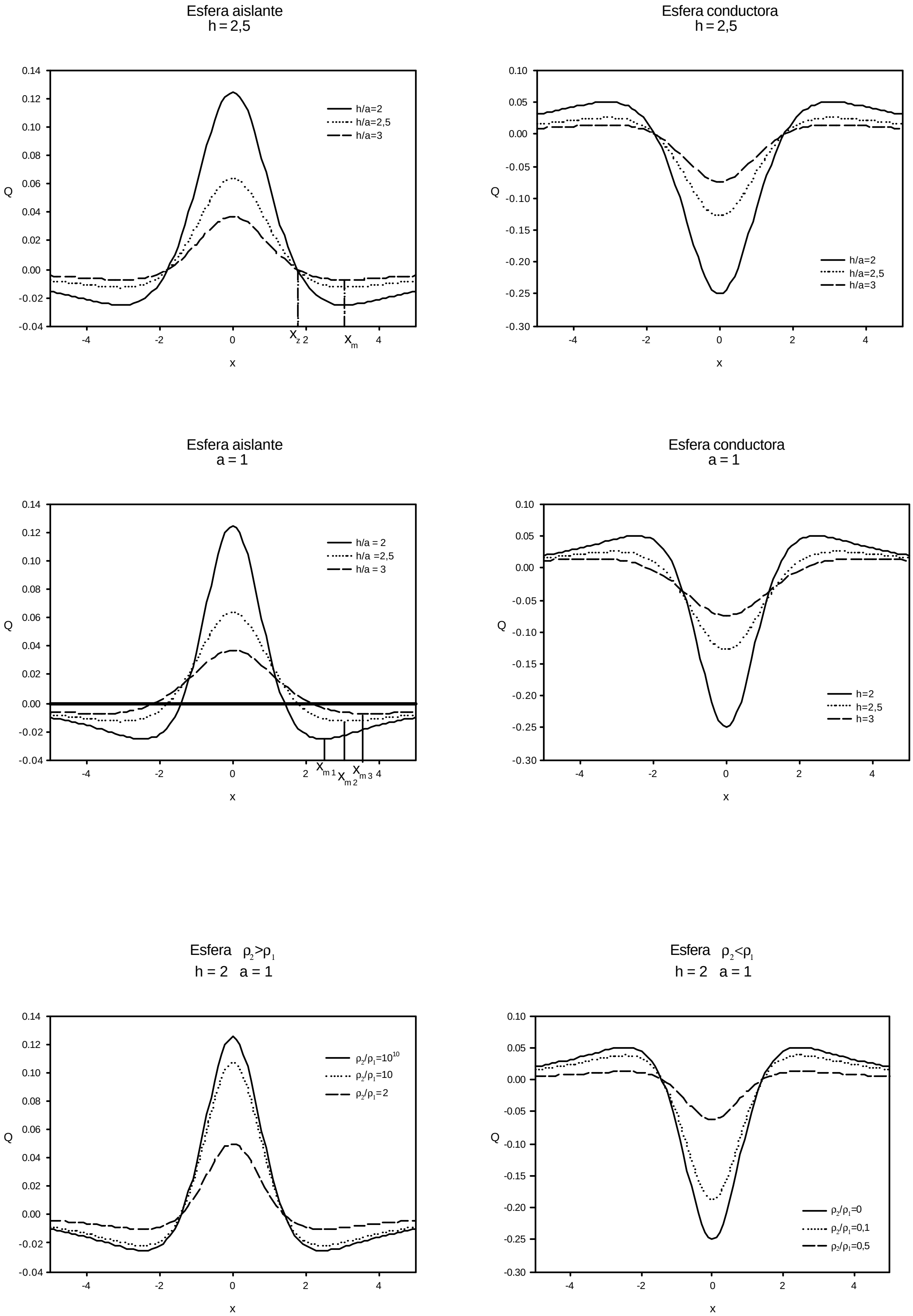


Figura 3.25. Variación de Q con *h*, *a*, k_e para una esfera inmersa en un medio homogéneo de resistividad 1 Ω m. Las unidades del eje *x* son arbitrarias.

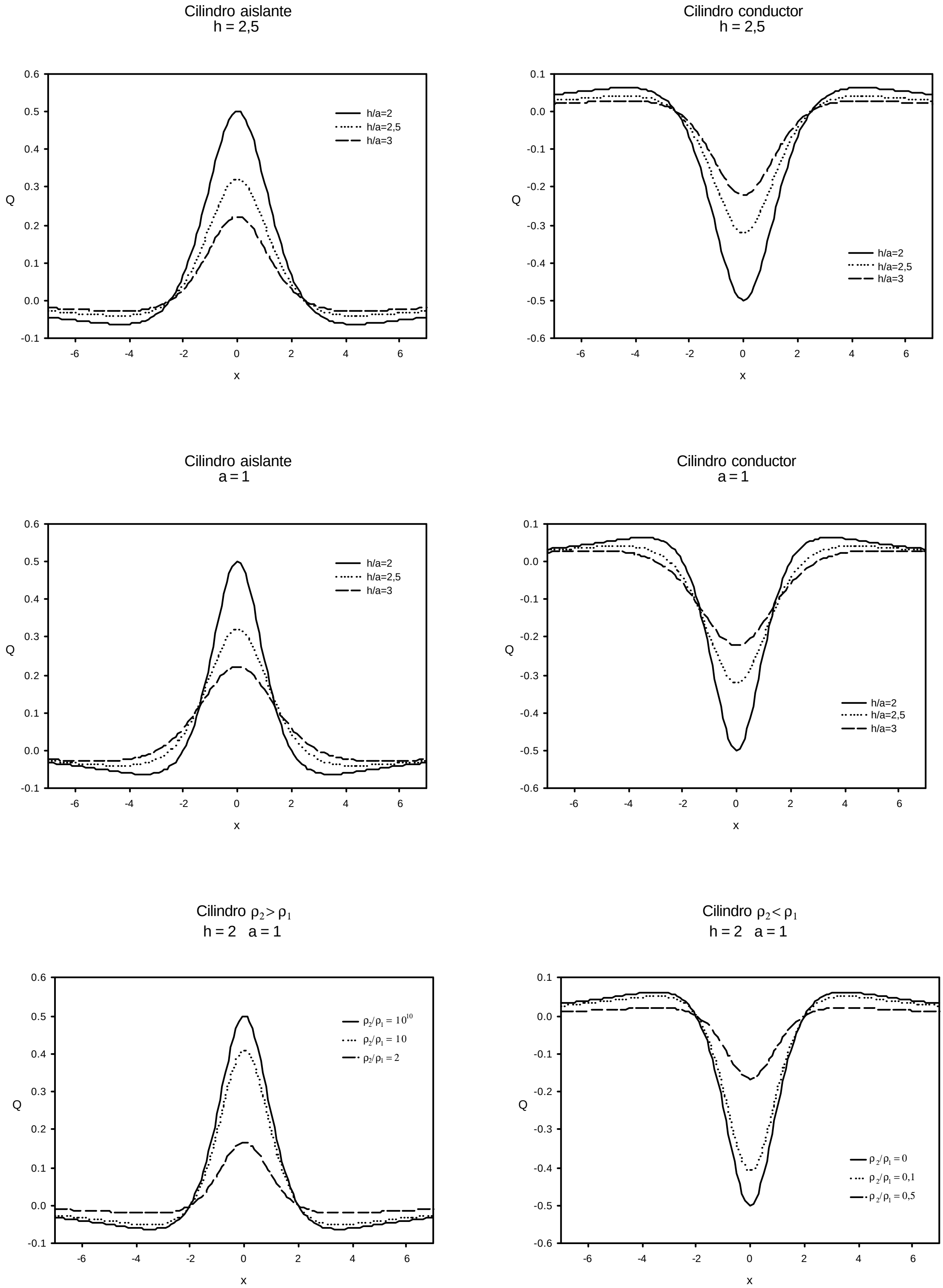


Figura 3.26. Variación de Q con *h*, *a*, k_c, para un cilindro inmerso en un medio homogéneo de resistividad 1 Ωm. Las unidades del eje x son arbitrarias.

Schulz (1985) prueba que diferentes cuerpos pueden provocar curvas de *Q* similares. En especial destaca la similitud entre la anomalía producida por una esfera y un cubo con el mismo volumen. Este hecho muestra la dificultad de resolver de manera única el problema inverso, que será tratado más ampliamente en el capítulo 5.

Podemos determinar la profundidad de una esfera de dos formas diferentes como

$$h_z = \sqrt{2}\left|x_z\right| \tag{3.45}$$

$$h_m = \sqrt{2/3}\left|x_m\right| \tag{3.46}$$

y en el caso del cilindro como

$$h_z = \left|x_z\right| \tag{3.47}$$

$$h_m = \left|x_m\right| / \sqrt{3} \tag{3.48}$$

Los subíndices en el parámetro h se han añadido para identificar el método utilizado al determinar la profundidad. A partir de la visibilidad es posible determinar el radio de la esfera si conocemos el parámetro k_e y la profundidad h. A partir de (3.42) tenemos que

$$a = h\left(\frac{Q_o}{\left|k_e\right|}\right)^{1/3} \tag{3.49}$$

En el caso del cilindro, el radio se determina a partir de (3.44) como

$$a = h\left(\frac{Q_o}{\left|k_c\right|}\right)^{1/2} \tag{3.50}$$

Las expresiones (3.45) a (3.50) son equivalentes a las obtenidas por Schulz (1985), aunque dicho autor las obtiene a partir de la curva de resistividad aparente. El parámetro a se expresará como a_z o a_m si sustituimos la profundidad por h_z o h_m respectivamente. Los parámetros k_e, k_c, serán en general desconocidos, pero son necesarios para determinar el radio de los objetos. De hecho, para una misma visibilidad hay infinitas soluciones de los parámetros a, k_e en el caso de la esfera y a, k_c en el caso del cilindro, lo que reafirma la dificultad ya apuntada de resolver de manera única el problema inverso. La Figura 3.27 muestra la variación de k_e y k_c en función del contraste resistivo entre el medio y el objeto. Tanto k_e como k_c se saturan rápidamente. Así, cuando $r_2/r_1 = 10$, k_e ya es el 86 % y k_c el 82 % de su valor máximo. Que la esfera o el cilindro fueran totalmente aislantes sólo comportaría un aumento adicional de la visibilidad del 14 % y del 18 % respectivamente. Dicho aumento se lograría también con un incremento del radio de tan solo el 4,5 % en el caso de la esfera y del 8,6 % en el caso del cilindro. Como regla general, el valor de k_e escogido para determinar el radio, será de 1 ó –2 (dependiendo de si el lóbulo principal de la curva de Q es positivo o negativo respectivamente) y el de k_c de 2 ó –2.

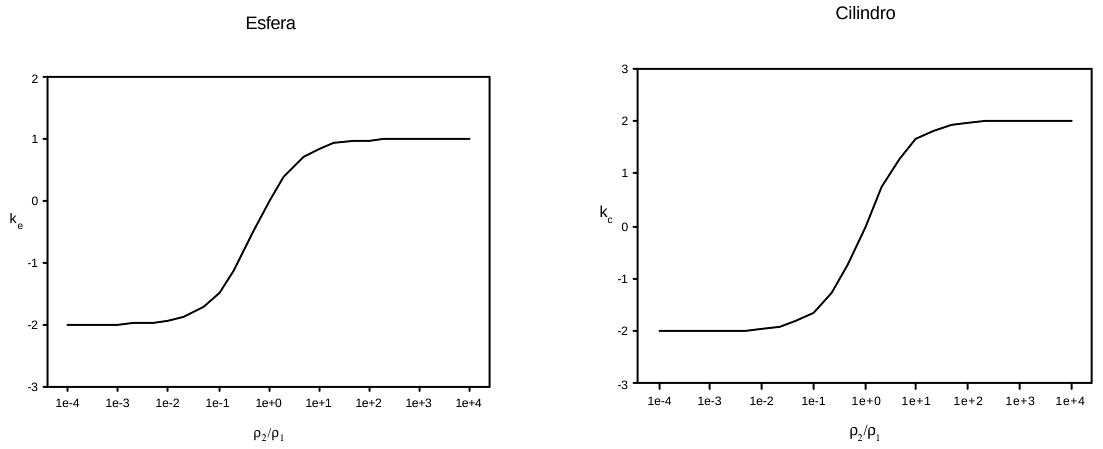


Figura 3.27. Variación de los parámetros k_e, k_c en función del contraste resistivo r_2/r_1

Efecto de la separación entre los electrodos detectores

En la práctica los electrodos detectores no están infinitamente próximos entre sí, sino que están separados una distancia *d* y la medida realizada es la diferencia de tensión entre dos electrodos. En este caso, la resistividad aparente viene dada, si los electrodos inyectores continúan estando muy alejados, por (2.20)

$$r_a(x) \cong \frac{pL^2}{I}\frac{\Delta V(x)}{d}$$

donde *DV(x) = V(x-d/2) - V(x+d/2)* y *x* es el punto medio entre los electrodos de medida. En el caso de la esfera, el potencial viene dado por (3.25) y la resistividad aparente es

$$r_a = r_1\left[1 + k_e a^3\left[\frac{x/d + 1/2}{\left(h^2 + (x + d/2)^2\right)^{3/2}} - \frac{x/d - 1/2}{\left(h^2 + (x - d/2)^2\right)^{3/2}}\right]\right] \tag{3.51}$$

La resistividad aparente normalizada será

$$Q(x) = k_e a^3\left[\frac{x/d + 1/2}{\left(h^2 + (x + d/2)^2\right)^{3/2}} - \frac{x/d - 1/2}{\left(h^2 + (x - d/2)^2\right)^{3/2}}\right] \tag{3.52}$$

La visibilidad es ahora

$$Q_0 = |k_e|\left(\frac{a}{h}\right)^3 \frac{1}{\left(1 + \left(\frac{d}{2h}\right)^2\right)^{3/2}} \tag{3.53}$$

En el caso del cilindro sustituimos el potencial por (3.32) y la resistividad aparente normalizada es

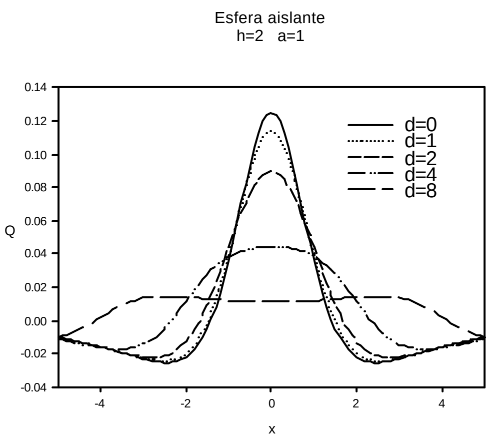
$$Q(x) = k_c a^2 \left[\frac{x/d + 1/2}{h^2 + (x + d/2)^2} - \frac{x/d - 1/2}{h^2 + (x - d/2)^2} \right] = k_c a^2 \frac{h^2 + d^2/4 - x^2}{\left[h^2 + (x + d/2)^2\right]\left[h^2 + (x - d/2)^2\right]} \qquad (3.54)$$

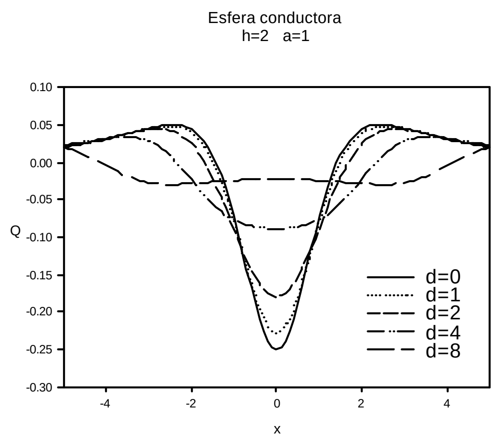
La visibilidad será

$$Q_0 = |k_c| \left(\frac{a}{h} \right)^2 \frac{1}{1 + \left(\frac{d}{2h} \right)^2} \qquad (3.55)$$

Las expresiones (3.53) y (3.55) coinciden con (3.42) y (3.44) respectivamente para d = 0. A medida que la relación *d/h* aumenta, la visibilidad disminuye. Así por ejemplo, para que la visibilidad no disminuya más del 10 % se ha de cumplir que $d < 0{,}54\,h$ para una esfera y que $d < 0{,}67\,h$ para un cilindro. Como regla general podemos establecer que la distancia d entre los electrodos detectores sea como máximo la mitad de la profundidad mínima que se quiere explorar ($d < h_{min}$). Lowry y Shive (1990) prueban que una objeto esférico o cilíndrico es más visible a medida que decrece d y que esta es la causa de que el dispositivo Schlumberger sea más sensible que el dispositivo Wenner a cambios laterales de la resistividad. Los mismos autores argumentan que la distancia d ha de ser menor que el radio del menor objeto que se quiera detectar. Este límite coincide con el que hemos impuesto anteriormente si $h = 2a$.

La Figura 3.28 muestra el efecto de la distancia d en la resistividad aparente normalizada de una esfera dada por (3.52). La Figura 3.29 muestra el caso de un cilindro. Al aumentar d la visibilidad disminuye, por lo que el objeto será menos detectable. El efecto de la distancia d es menor para cuerpos más profundos. Reina (1997) valida experimentalmente estos resultados.





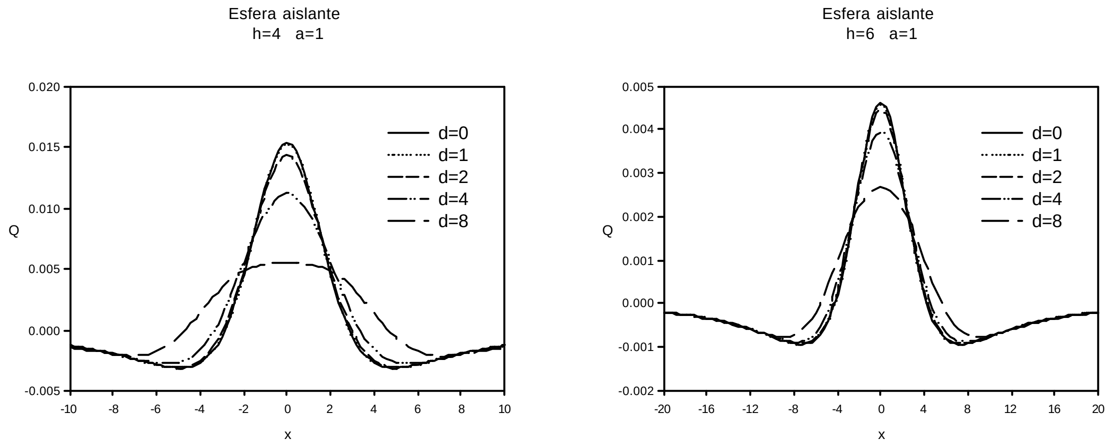


Figura 3.28. Efecto de la distancia *d* en la resistividad aparente normalizada de una esfera.

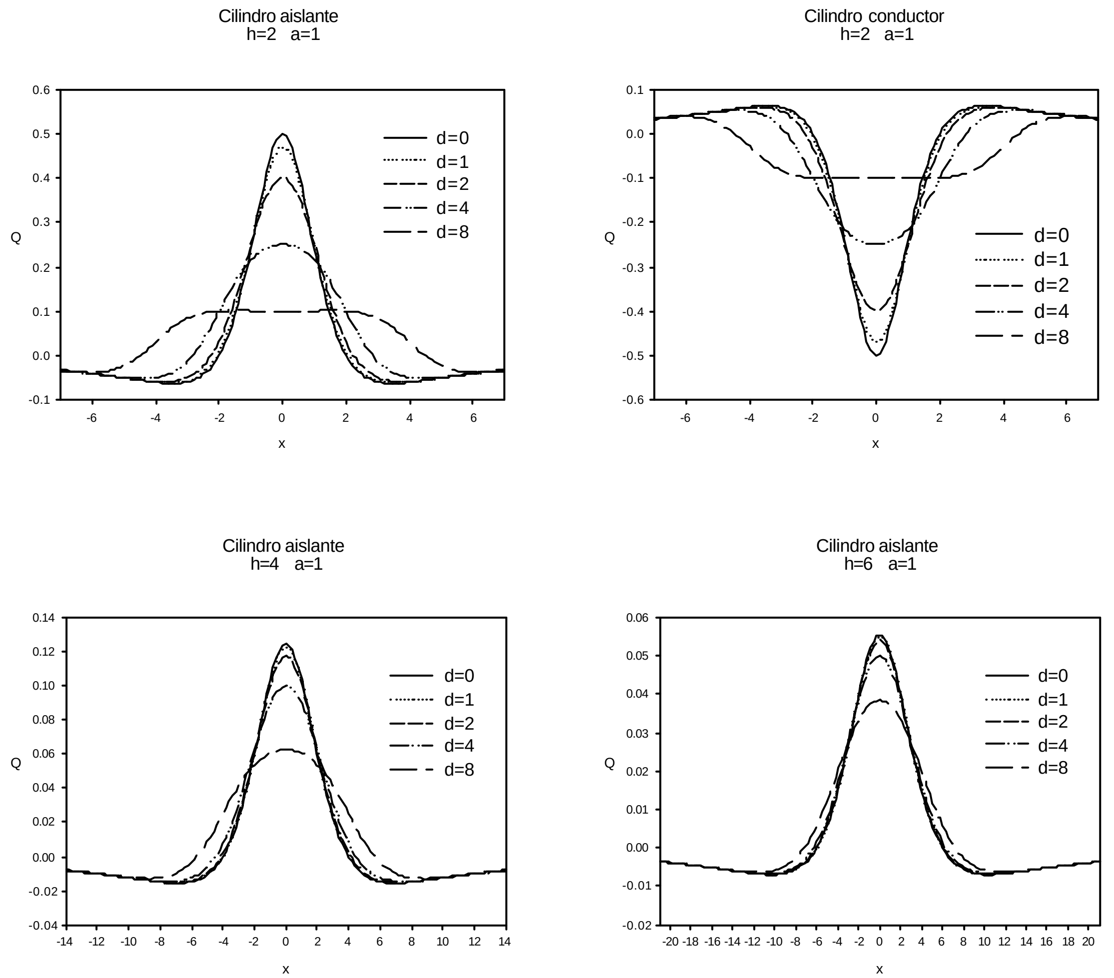


Figura 3.29. Efecto de la distancia *d* en la resistividad aparente normalizada de un cilindro.

El lóbulo principal de las curvas se ensancha a medida que d aumenta, por lo que tanto x_z como x_m tendrán un valor mayor y provocarán un error en la determinación de la profundidad mediante las expresiones (3.45) a (3.48). La Tabla 3.3 muestra los resultados para una esfera y un cilindro aislantes de radio unidad y profundidades 2, 4 y 6 unidades, cuando d = 1, 2, 4 y 8 unidades. En el caso de la esfera se ha utilizado la expresión (3.25). En ambos casos, la profundidad se determina de forma más precisa con el parámetro h_m. En el caso del cilindro los errores son menores. En todos los casos, el error relativo aumenta si también lo hace el factor d/h. A pesar de que el error en la determinación de la profundidad influye directamente en el radio, la determinación de éste es bastante precisa. Ello es debido a que el aumento de h se ve compensado por una disminución de la visibilidad Q_0.

D	h	Esfera h_z	Esfera h_m	Cilindro h_z	Cilindro h_m	Esfera a_z	Esfera a_m	Cilindro a_z	Cilindro a_m
1	2	2’10	2,07	2,04	2,02	1,02	1,01	1,03	1,02
1	4	4,05	4,04	4,03	4,02	1,00	1,00	1,01	1,01
1	6	6,03	6,02	6,02	6,01	1,00	1,00	1,00	1,00
2	2	2,37	2,27	2,22	2,14	1,06	1,02	1,03	1,00
2	4	4,19	4,15	4,12	4,08	1,02	1,01	1,01	1,00
2	6	6,13	6,10	6,08	6,05	1,01	1,00	1,00	1,00
4	2	3,30	2,90	2,82	2,52	1,17	1,03	1,03	0,93
4	4	4,74	4,55	4,47	4,31	1,06	1,02	1,01	0,97
4	6	6,51	6,38	6,32	6,21	1,03	1,01	1,00	0,99
8	2	5,82	4,45	4,46	3,54	1,30	0,99	1,03	0,82
8	4	6,60	5,80	5,66	5,07	1,17	1,03	1,01	0,90
8	6	7,90	7,38	7,21	6,79	1,10	1,02	1,00	0,95

Tabla 3.3. Determinación del radio y la profundidad para una esfera y un cilindro aislantes a profundidades 2, 4 y 6 en los casos *d* = 1, 2, 4 y 8.

Podemos minimizar el error incluyendo el parámetro d en las expresiones anteriores. En el caso del cilindro, el cruce por cero de Q se produce en $x_z = \pm(h^2 + d^2/4)^{1/2}$. La profundidad se puede determinar como

$$h_{zd} = \sqrt{x_z^{\,2} - d^2/4} \tag{3.56}$$

El mínimo/máximo de la curva de Q ocurre en $x_m = \pm[h^2+d^2/4+(4h^4+h^2d^2)^{1/2}]^{1/2}$. Si $d << 2h$, $x_m \approx \pm(3h^2+d^2/2)^{1/2}$ con lo que

$$h_{md} = \sqrt{\frac{x_m^{\,2} - d^2/2}{3}} \tag{3.57}$$

Se comprueba que esta última expresión tiene un error menor al 1 % si $d/h < 4/3$. El radio se determina a partir de (3.55) como

$$a = h\sqrt{\frac{Q_0}{|k_c|}}\sqrt{1+\left(\frac{d}{2h}\right)^2} \tag{3.58}$$

Estas tres últimas expresiones coinciden con (3.47), (3.48) y (3.50) para $d = 0$.

Los puntos característicos de la curva de Q no llevan a expresiones sencillas en el caso de la esfera. Sin embargo, podemos determinar la profundidad de forma precisa particularizando (3.52) en $x = 0$ y en $x = d$. A partir de *Q(0)* y *Q(d)* hallamos

$$h_d = \frac{d}{2}\sqrt{\frac{9-\left[\dfrac{3Q(0)}{2Q(d)+Q(0)}\right]^{\frac{2}{3}}}{\left[\dfrac{3Q(0)}{2Q(d)+Q(0)}\right]^{\frac{2}{3}}-1}} \tag{3.59}$$

De (3.53) determinamos el radio como

$$a = h\sqrt{1+\left(\frac{d}{2h}\right)^2}\cdot\sqrt[3]{\frac{Q_0}{|k_e|}} \tag{3.60}$$

que coincide con (3.49) para $d = 0$.

Se puede proceder de forma análoga en el caso del cilindro particularizando ahora (3.54) en $x = 0$ y en $x = d$, resultando

$$h_d = \frac{d}{2}\sqrt{\frac{9-\dfrac{3Q(0)}{2Q(d)+Q(0)}}{\dfrac{3Q(0)}{2Q(d)+Q(0)}-1}} = \frac{d}{2}\sqrt{\frac{9Q(d)-2Q(0)}{Q(0)-Q(d)}} \tag{3.61}$$

Así pues, en el caso del cilindro podemos determinar de manera precisa la profundidad a partir de (3.56), (3.57) o (3.61), y el radio a partir de (3.58). La profundidad de la esfera se determina a partir de (3.59). La utilización de (3.45) o (3.46) comporta un error que aumenta con la relación d/h, como se vió en la Tabla 3.3. El radio de la esfera se determina a partir de (3.60).

3.4.2. Efecto de la proximidad de los electrodos de corriente

Hasta ahora hemos considerado que los electrodos de corriente se encontraban muy alejados del centro de la esfera (campo eléctrico uniforme). En la práctica, sin embargo, estarán situados a una distancia que puede ser comparable a la profundidad y a la abscisa del punto de medida x. Si medimos campo eléctrico, la resistividad aparente viene dada por (2.19)

$$r_a(x) = \frac{p}{I}\frac{\left(L^2 - x^2\right)^2}{L^2 + x^2} E_x$$

En el caso de la esfera, el campo eléctrico, si se cumple que $D >> a$, se puede aproximar por (3.22) y la resistividad aparente es

$$r_a(x) = r_1\left(1 + \frac{\left(L^2 - x^2\right)^2}{L^2\left(L^2 + x^2\right)} k_e \left(\frac{a}{r}\right)^3 \left(\frac{L}{D}\right)^3 \left(1 - 3\left(\frac{x}{r}\right)^2\right)\right) \tag{3.62}$$

La resistividad aparente normalizada será

$$Q(x) = \frac{\left(L^2 - x^2\right)^2}{L^2\left(L^2 + x^2\right)} k_e \left(\frac{a}{r}\right)^3 \left(\frac{L}{D}\right)^3 \left(1 - 3\left(\frac{x}{r}\right)^2\right) \tag{3.63}$$

y la visibilidad

$$Q_0 = |k_e|\left(\frac{a}{h}\right)^3 \left(\frac{L}{D}\right)^3 = |k_e|\left(\frac{a}{h}\right)^3 \frac{1}{\left[1 + \left(\frac{h}{L}\right)^2\right]^{3/2}} \tag{3.64}$$

Esta expresión coincide con (3.42) si L tiende a infinito. A medida que la relación h/L aumenta, la visibilidad disminuye. Si queremos que la visibilidad no disminuya más del 10 % respecto al valor dado por (3.46), se ha de cumplir $L > 3{,}84\ h$ Como regla general podemos establecer que la distancia entre los electrodos inyectores ($2L$) sea mayor que 8 veces la profundidad máxima de exploración ($L > 4h_{max}$).

Si la distancia d es diferente de cero (medida de la tensión diferencial), la resistividad aparente es, según (2.5)

$$r_a = g(x)\frac{\Delta V(x)}{I} = g(x)\frac{V(x - d/2) - V(x + d/2)}{I}$$

donde el factor geométrico $g(x)$ viene dado por (2.18)

$$g(x) = 2p\left(\frac{1}{\mathrm{L + (x - d/2)}} - \frac{1}{\mathrm{L - (x - d/2)}} - \frac{1}{\mathrm{L + (x + d/2)}} + \frac{1}{\mathrm{L - (x + d/2)}}\right)^{-1}$$

Si $D >> a$ el potencial se puede aproximar por (3.20) y la resistividad aparente es

$$r_a = r_1\left[1 + k_e a^3\left(\frac{L}{D}\right)^3 \frac{g(x)}{pL^2}\left[\frac{x + d/2}{\left(h^2 + (x + d/2)^2\right)^{3/2}} - \frac{x - d/2}{\left(h^2 + (x - d/2)^2\right)^{3/2}}\right]\right] \qquad (3.65)$$

La resistividad aparente normalizada es

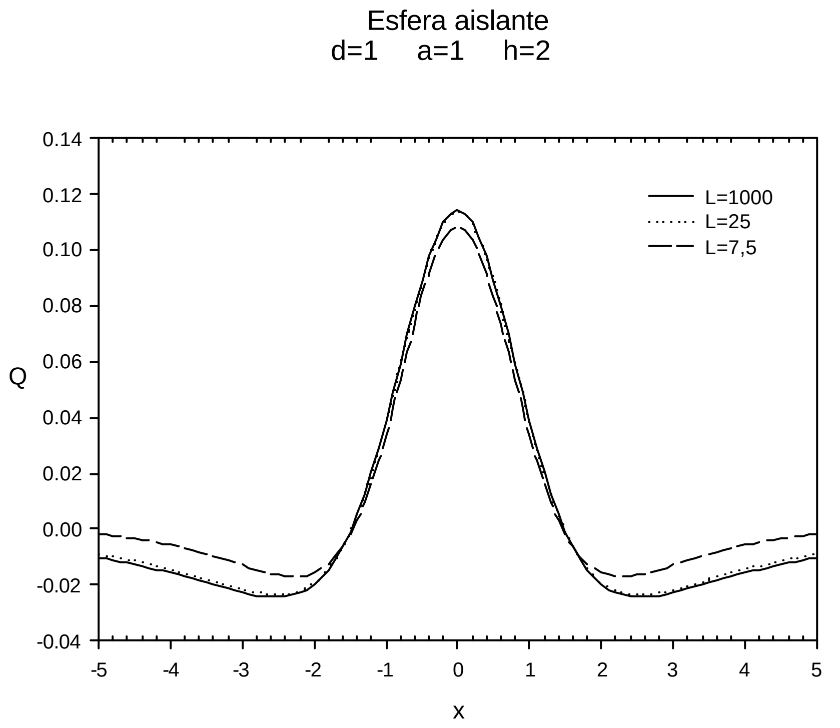
$$Q(x) = k_e a^3\left(\frac{L}{D}\right)^3 \frac{g(x)}{pL^2}\left[\frac{x + d/2}{\left(h^2 + (x + d/2)^2\right)^{3/2}} - \frac{x - d/2}{\left(h^2 + (x - d/2)^2\right)^{3/2}}\right] \qquad (3.66)$$

siendo la visibilidad

$$Q_0 = |k_e|\left(\frac{a}{h}\right)^3\left(\frac{L}{D}\right)^3 \frac{1 - \left(\frac{d}{2L}\right)^2}{\left(1 + \left(\frac{d}{2h}\right)^2\right)^{3/2}} = |k_e|\left(\frac{a}{h}\right)^3 \frac{1 - \left(\frac{d}{2L}\right)^2}{\left(1 + \left(\frac{h}{L}\right)^2\right)^{3/2}\left(1 + \left(\frac{d}{2h}\right)^2\right)^{3/2}} \qquad (3.67)$$

Esta expresión coincide con (3.64) para $d = 0$ (medida de campo eléctrico) y con (3.42) si, además, L tiende a infinito (campo eléctrico uniforme). A medida que la relación d/L aumenta, la visibilidad disminuye. Si queremos que este factor no provoque una disminución mayor del 10 % en la visibilidad se ha de cumplir que $L > 1{,}58d$. De hecho, si cumplimos las condiciones anteriores ($d < 0{,}5h_{min}$ y $L > 4h_{max}$) se cumple que $L > 8d$ (por lo que este factor prácticamente no influirá) y la disminución de la visibilidad será menor al 20 % (10 % por cada uno de los otros dos factores).

La Figura 3.30 muestra la variación de Q con la distancia L en el caso de una esfera aislante de radio unidad a profundidad 2 y 4 cuando $d = 1$. Se observa que la visibilidad disminuye al disminuir L y su efecto es mayor al aumentar la profundidad de la esfera.



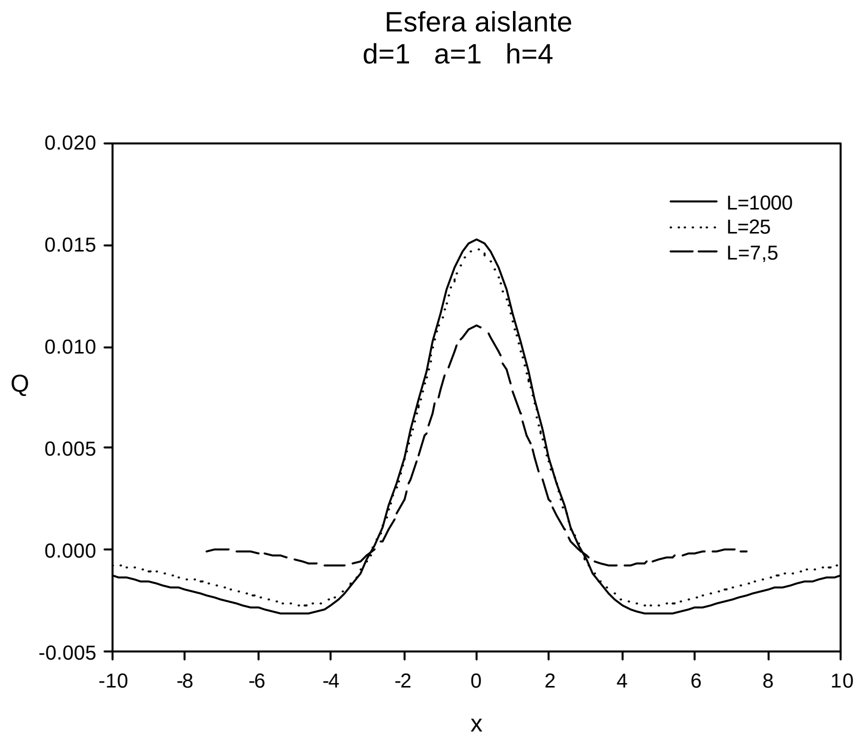


Figura 3.30. Variación de *Q* con *L* en el caso de una esfera aislante de radio unidad a profundidades 2 y 4. La distancia *d* entre los electrodos detectores es de 1 unidad.

Si definimos una Q modificada como

$$Q_m(x) = \frac{Q(x)}{g(x)d} pL^2 \tag{3.68}$$

a partir de (3.66) se obtiene

$$Q_m(x) = k_e a^3 \left(\frac{L}{D}\right)^3 \left[\frac{x/d + 1/2}{\left(h^2 + (x + d/2)^2\right)^{3/2}} - \frac{x/d - 1/2}{\left(h^2 + (x - d/2)^2\right)^{3/2}}\right] \tag{3.69}$$

Esta expresión es idéntica a (3.52) excepto en el factor $(L/D)^3$, que sólo produce un escalado y no afecta a la forma de la curva. Por tanto, podemos determinar, como en el caso de campo eléctrico uniforme, la profundidad a partir de (3.45), (3.46) o (3.59) sustituyendo Q_m por Q. El radio de la esfera se determina a partir de (3.67) como

$$a = h\frac{D}{L}\sqrt{1+\left(\frac{d}{2h}\right)^2} \cdot \sqrt[3]{\frac{Q_0}{|k_e|\left[1-\left(\frac{d}{2L}\right)^2\right]}} = h\frac{D}{L}\sqrt{1+\left(\frac{d}{2h}\right)^2} \cdot \sqrt[3]{\frac{Q_m(0)}{k_e}} \tag{3.70}$$

que coincide con (3.60) si L tiende a infinito (campo eléctrico uniforme) y con (3.49) si, además, d = 0 (medida de campo eléctrico). La Tabla 3.4 muestra las profundidades y radios hallados cuando d es 1 unidad. La curva Q_m se calcula a partir de (3.68) con Q obtenida a partir de la expresión exacta (3.1) del potencial para una esfera (si utilizáramos la expresión (3.69) para Q_m cometeríamos lo que se denomina el “crimen” del problema inverso). Los parámetros h_z, h_m y h_d se han obtenido a partir de las expresiones (3.45), (3.46), (3.59) respectivamente. La Tabla 3.5 muestra el caso para d = 4. Cuando d es 1 unidad los resultados utilizando los tres métodos son similares y bastante precisos. Para d = 4, los errores son mayores utilizando h_z o h_m. La dependencia con L es pequeña en todos los casos. El parámetro h_d no cambia con d, como era de esperar, y su error máximo es del 3 % para h = 2 y L = 7,5. Este resultado es coherente ya que en este caso tenemos la menor relación D/a (de 7,76) y las expresiones para determinar la profundidad y el radio son estrictamente correctas para $D >> a$.

L	h	h_z	h_m	h_d	a_z	a_m	a_d
1000	2	2,10	2,07	2,00	1,05	1,03	1,00
1000	4	4,05	4,04	4,00	1,01	1,01	1,00
1000	6	6,03	6,02	6,00	1,01	1,00	1,00
25	2	2,09	2,07	2,00	1,05	1,03	1,00
25	4	4,04	4,03	3,99	1,01	1,01	1,00
25	6	6,02	6,01	5,99	1,01	1,00	1,00
7,5	2	2,06	2,04	1,97	1,05	1,04	1,00
7,5	4	3,98	3,97	3,93	1,01	1,01	1,00
7,5	6	5,95	5,94	5,92	1,00	1,00	0,99

Tabla 3.4. Determinación del radio y la profundidad para una esfera aislante de radio unidad a profundidades 2, 4 y 6 unidades. La distancia *d* es de 1 unidad.

L	h	h_{zd}	h_{md}	h_d	a_{zd}	a_{md}	a_d
1000	2	3,30	2,90	2,00	1,36	1,25	1,00
1000	4	4,74	4,55	4,00	1,15	1,11	1,00
1000	6	6,51	6,38	6,00	1,08	1,06	1,00
25	2	3,30	2,90	2,00	1,37	1,25	1,00
25	4	4,73	4,54	3,99	1,16	1,12	1,00
25	6	6,50	6,37	5,99	1,08	1,06	1,00
7,5	2	3,28	2,88	1,96	1,45	1,30	1,00
7,5	4	4,68	4,48	3,93	1,20	1,15	1,00
7,5	6	6,43	6,30	5,92	1,11	1,08	0,99

Tabla 3.5. Determinación del radio y la profundidad para una esfera aislante de radio unidad a profundidades 2, 4 y 6 unidades. La distancia *d* es de 4 unidades.

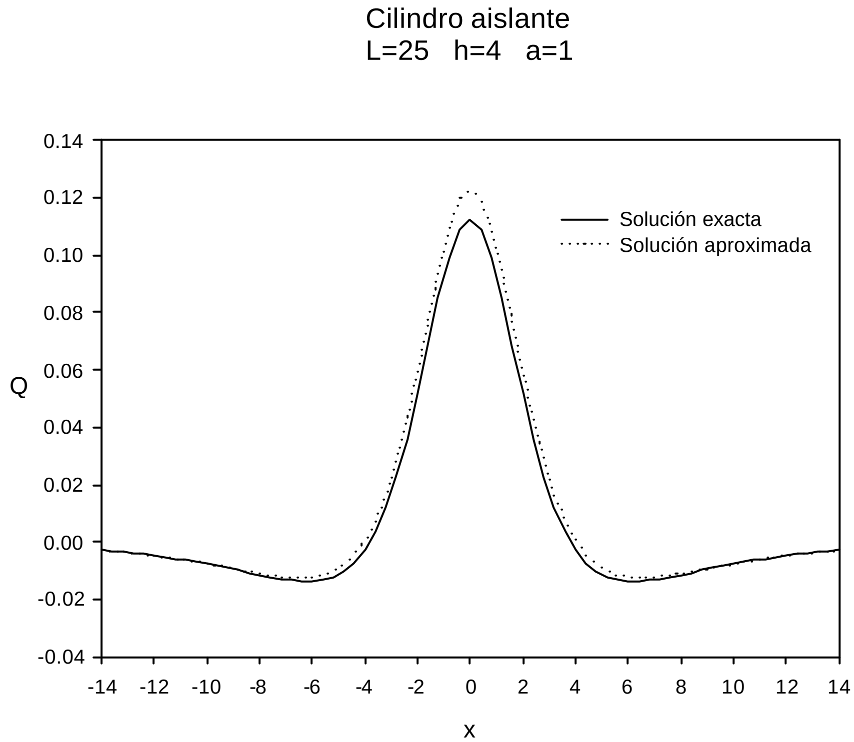
Para el cilindro no disponemos de ninguna solución simple del potencial eléctrico cuando los electrodos inyectores están cerca del objeto. Si utilizamos de nuevo la expresión (3.33) para el potencial la resistividad aparente normalizada queda como

$$Q(x) = k_c a^2 \frac{g(x)}{pL^2}\left[\frac{x + d/2}{h^2 + (x + d/2)^2} - \frac{x - d/2}{h^2 + (x - d/2)^2}\right] \tag{3.71}$$

Sustituyendo (3.71) en (3.68) obtenemos

$$Q_m(x) = \frac{Q(x)}{g(x)d} pL^2 = k_c a^2 \left[\frac{x/d + 1/2}{h^2 + (x + d/2)^2} - \frac{x/d - 1/2}{h^2 + (x - d/2)^2}\right] \tag{3.72}$$

expresión idéntica a (3.54). Por lo tanto, para determinar la profundidad y el radio se pueden utilizar las mismas expresiones que en el caso de campo eléctrico uniforme. Sin embargo, contrariamente al caso de la esfera, los errores pueden ser elevados ya que (3.71) se ha obtenido con la expresión del potencial para campo eléctrico uniforme, que puede distar mucho del potencial real. Esto queda reflejado en la Figura 3.31 donde Q (a partir de la cual se obtiene Q_m) se ha calculado de dos formas diferentes para un cilindro a una profundidad 4: una a partir de (3.70) y otra utilizando para el potencial (3.29), que se aproxima mejor al caso real. Se observa que la diferencia entre las dos curvas es mayor al disminuir *L*.



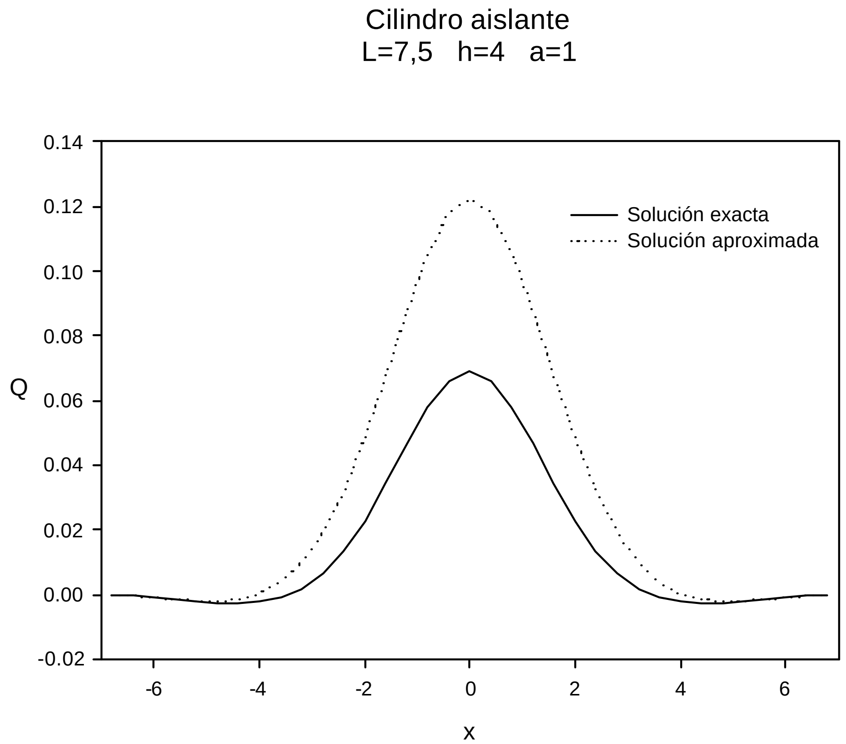


Figura 3.31. Efecto de la distancia *L* en *Q* en el caso de una esfera y cilindro aislantes de radio unidad a diferentes profundidades. La distancia *d* entre los electrodos detectores es de 1 unidad.

La Tabla 3.6 muestra los resultados para un cilindro aislante cuando la distancia d es 1. Los parámetros h_{zd}, h_{md} y h_d se han obtenido a partir de las expresiones (3.56), (3.57), (3.61) respectivamente. El radio se determina a partir de (3.58). Los resultados no varían significativamente con d ya que los parámetros h_{zd}, h_{md} y h_d consideran este efecto. El parámetro h_d presenta un mejor comportamiento. Aun en este caso los errores son considerables, siendo del 18% para la profundidad y del 50 % para el radio cuando L = 7,5 y h = 6.

L	h	h_{zd}	h_{md}	h_d	a_{zd}	a_{md}	a_d
1000	2	2,00	2,00	2,00	1,00	1,00	1,00
1000	4	4,00	4,00	4,00	1,00	1,00	1,00
1000	6	6,00	6,00	6,00	1,00	1,00	1,00
25	2	1,94	1,96	1,97	0,96	0,97	0,98
25	4	3,76	3,82	3,90	0,90	0,92	0,94
25	6	5,49	5,57	5,79	0,84	0,85	0,88
7,5	2	1,76	1,79	1,85	0,83	0,85	0,87
7,5	4	3,35	3,40	3,64	0,64	0,65	0,69
7,5	6	4,92	4,97	5,41	0,49	0,50	0,54

Tabla 3.6. Determinación del radio y la profundidad para una cilindro aislante de radio unidad a profundidades 2, 4 y 6 unidades. La distancia *d* es de 1 unidad.

3.4.3. Efecto de una capa horizontal

Una situación frecuente en el subsuelo es la presencia de una o varias capas horizontales de diferente resistividad. La Figura 3.32 muestra el caso de una capa de resistividad r_c a una profundidad p de la superficie

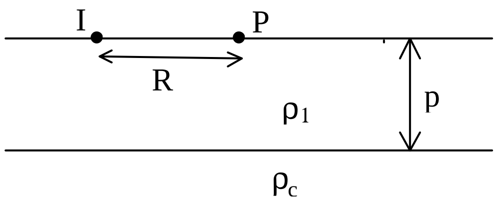


Figura 3.32. Capa horizontal de resistividad r_c a una profundidad *p* de la superficie. El retorno de corriente se produce por el infinito.

El potencial en el punto P debido a una fuente de corriente situada a una distancia R es (Wait, 1982)

$$V = \frac{I r_1}{2pR} G(R,k) \tag{3.73}$$

donde

$$G(R,k) = 1 + 2kR\int \frac{e^{-2lp}}{1-ke^{-2lp}} J_0(lR)dl \tag{3.74}$$

y

$$k = \frac{r_c - r_1}{r_c + r_1} \tag{3.75}$$

siendo J_0 la función de Bessel de 1ª clase y orden 0. El potencial también se puede expresar como

$$V = \frac{Ir_1}{2p}\left(\frac{1}{R} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2k^n}{\sqrt{R^2 + (2np)^2}}\right) \tag{3.76}$$

De hecho esta solución se puede obtener calculando el potencial por el método de las imágenes. Si la corriente se inyecta a través de dos puntos separados una distancia $2L$, el potencial en el punto P (Figura 3.33) se puede calcular aplicando superposición. Se obtiene

$$V = \frac{Ir_1}{2p}\left(\frac{1}{L+x} - \frac{1}{L-x} + \sum_{n=1}^{\infty} 2k^n\left[\frac{1}{\sqrt{(L+x)^2 + (2np)^2}} - \frac{1}{\sqrt{(L-x)^2 + (2np)^2}}\right]\right) \tag{3.77}$$

El campo eléctrico en la dirección x es

$$E_x = \frac{Ir_1}{p}\left(\frac{L^2 + x^2}{(L^2 - x^2)^2} + \sum_{n=1}^{\infty} k^n\left[\frac{L+x}{\left[(L+x)^2 + (2np)^2\right]^{3/2}} + \frac{L-x}{\left[(L-x)^2 + (2np)^2\right]^{3/2}}\right]\right) \tag{3.78}$$

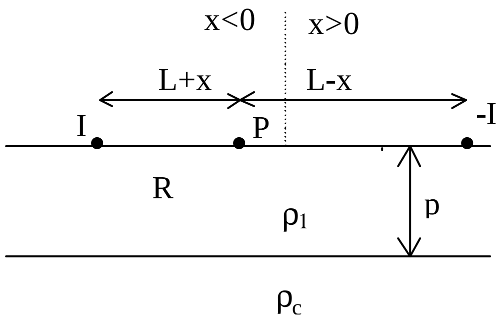


Figura 3.33. Capa horizontal de resistividad r_c a una profundidad p de la superficie. La corriente se inyecta a través de dos puntos separados una distancia *2L*.

y la resistividad aparente utilizando (2.19) resulta

$$r_{ac} = r_1 \left\{ 1 + \frac{\left(L^2 - x^2\right)^2}{L^2 + x^2} \sum_{n=1}^{\infty} k^n \left[\frac{L+x}{\left[(L+x)^2 + (2np)^2\right]^{3/2}} + \frac{L-x}{\left[(L-x)^2 + (2np)^2\right]^{3/2}} \right] \right\} \tag{3.79}$$

La resistividad aparente normalizada es

$$Q = \frac{\left(L^2 - x^2\right)^2}{L^2 + x^2} \sum_{n=1}^{\infty} k^n \left[\frac{L+x}{\left[(L+x)^2 + (2np)^2\right]^{3/2}} + \frac{L-x}{\left[(L-x)^2 + (2np)^2\right]^{3/2}} \right] \tag{3.80}$$

y la visibilidad

$$Q_0 = \sum_{n=1}^{\infty} k^n \frac{2L^3}{\left[L^2 + (2np)^2\right]^{3/2}} \tag{3.81}$$

La Figura 3.34 muestra la resistividad aparente normalizada cuando L = 7,5 y la capa horizontal es aislante. El valor de Q aumenta a medida que la capa se acerca a la superficie. Cuando p = 5 el efecto de la capa enmascararía totalmente la perturbación debida a una esfera aislante de radio unidad y profundidad 2.

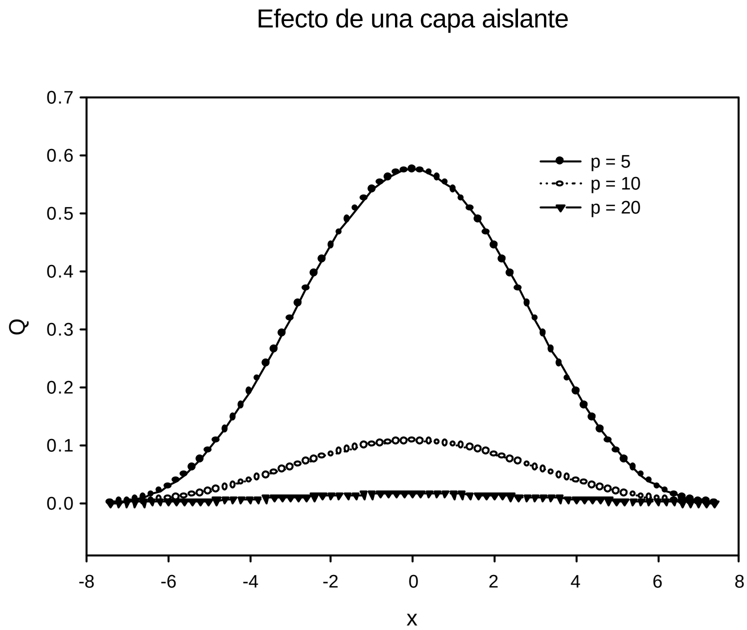


Figura 3.34. Efecto de una capa horizontal aislante en *Q* cuando p = 5, 10, 20.

En el caso de una esfera conductora es posible encontrar una solución aproximada del campo eléctrico en presencia de una capa horizontal. La Figura 3.35 representa este caso, donde se muestran las 3 primeras imágenes de cada fuente de corriente. La esfera también tendría imágenes pero su contribución es mucho menor y no se considerará en el análisis.

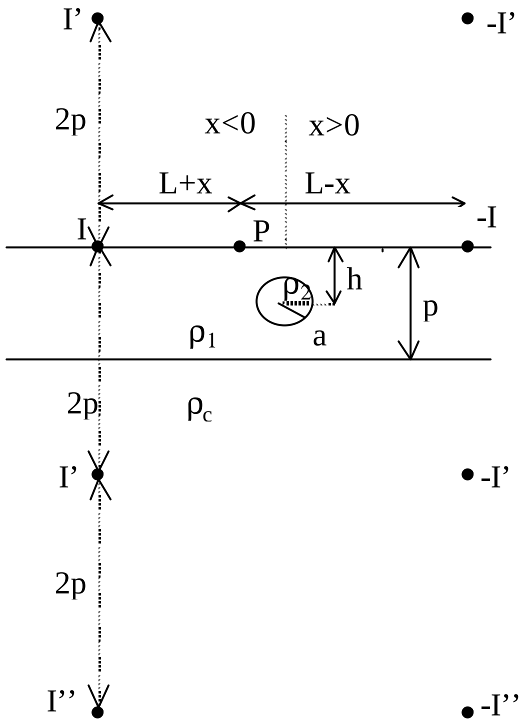


Figura 3.35. Esfera situada entre la superficie y la capa horizontal, y equidistante de los electrodos de corriente.

Partiendo de (3.17), se determina que el campo eléctrico en el caso de la esfera conductora cuando L >> h es

$$E_x = \frac{Ir_1}{pL^2}\left\{\begin{array}{l} \dfrac{\left(L^2+x^2\right)L^2}{\left(L^2-x^2\right)^2} + \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} k^n L^2 \left[\frac{L+x}{\left[(L+x)^2+(2np)^2\right]^{3/2}} + \frac{L-x}{\left[(L-x)^2+(2np)^2\right]^{3/2}}\right] - \\ -2\left(\dfrac{a}{r}\right)^3\left(1-3\dfrac{x^2}{r^2}\right)\left[1+\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} k^n \frac{2L^3}{\left[L^2+(2np)^2\right]^{3/2}}\right] \end{array}\right\} \tag{3.82}$$

La resistividad aparente se obtiene sustituyendo el campo eléctrico en (2.19) resultando

$$r_{ae} = r_1\left\{\begin{array}{l} 1+\dfrac{\left(L^2-x^2\right)^2}{L^2+x^2}\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} k^n \left[\frac{L+x}{\left[(L+x)^2+(2np)^2\right]^{3/2}} + \frac{L-x}{\left[(L-x)^2+(2np)^2\right]^{3/2}}\right] - \\ -2\dfrac{\left(L^2-x^2\right)^2}{\left(L^2+x^2\right)L^2}\left(\dfrac{a}{r}\right)^3\left(1-3\dfrac{x^2}{r^2}\right)\left[1+\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} k^n \frac{2L^3}{\left[L^2+(2np)^2\right]^{3/2}}\right] \end{array}\right\} \tag{3.83}$$

La visibilidad es ahora

$$Q_o = \sum_{n=1}^{\infty} k^n \frac{2L^3}{\left[L^2 + (2np)^2\right]^{3/2}} - 2\left(\frac{a}{h}\right)^3 \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} k^n \frac{2L^3}{\left[L^2 + (2np)^2\right]^{3/2}}\right] \tag{3.84}$$

donde el primer sumando es la contribución de la capa horizontal y el segundo es el debido a la esfera. La contribución de la esfera se ve amplificada respecto al caso de un suelo homogéneo. Como hemos visto anteriormente, el efecto de la capa puede enmascarar el de la esfera. Para solventar este inconveniente definimos Q como

$$Q(x) = \frac{r_{ae}(x) - r_{ac}(x)}{r_{ac}(0)} = -2\frac{\left(L^2 - x^2\right)^2}{L^2 + x^2}\left(\frac{a}{r}\right)^3\left(1 - 3\frac{x^2}{r^2}\right) \tag{3.85}$$

que coincide con la resistividad aparente normalizada de una esfera conductora en un medio homogéneo. En el apartado 3.4.5 se utiliza este resultado para reducir el efecto de la cubeta en las medidas realizadas en el laboratorio.

3.4.4. Errores en las medidas. Número finito de muestras.

Hasta ahora hemos considerado que disponíamos de un número ilimitado de datos para determinar la profundidad y el radio de los objetos. De hecho, para localizar el mínimo/máximo y el paso por cero de la curva de Q se ha considerado esta función continua. En la práctica tenemos un numero limitado de medidas. Una situación habitual, sobre todo cuando se utilizan sistemas de medida automáticos (Alberto, 1997; Gasulla, Jordana y Pallás, 1998a), es disponer de una agrupación de electrodos equiespaciados. En este caso, la inyección se realiza por los electrodos externos. La diferencia de potencial se mide en los electrodos restantes entre pares adyacentes.

Los sistemas de medida automáticos implementados, que serán descritos en el capítulo 4, permiten trabajar con 16 electrodos, por lo que dispondremos de 13 medidas. La Figura 3.36 muestra la resistividad aparente normalizada en el caso de una esfera aislante de radio unidad y profundidad 2 unidades (h = 2). Los electrodos inyectores están situados en x = -7,5 y x = 7,5 (L = 7,5) y la distancia entre los electrodos es de 1 unidad (d = 1). Los círculos corresponden a los valores teóricos de Q en los 13 puntos de medida; la línea continua se ha obtenido utilizando 100 puntos de Q por unidad; la línea a trazos se ha obtenido interpolando los 13 puntos (círculos) con la función *spline* de Matlab. Como vemos, la coincidencia entre la línea continua y la de trazos es muy buena por lo que la determinación de la profundidad y el radio a partir de la línea interpolada (a trazos) será correcta. En este caso L = 3,75h y d = 0,5h, por lo que prácticamente se cumplen los requisitos establecidos para que la visibilidad no disminuya más del 20 % respecto a la visibilidad que se obtendría con campo eléctrico uniforme, como se comentó en el apartado 3.4.2. Esta disminución relativa será mayor para h > 2 ya que L < 3,75h.

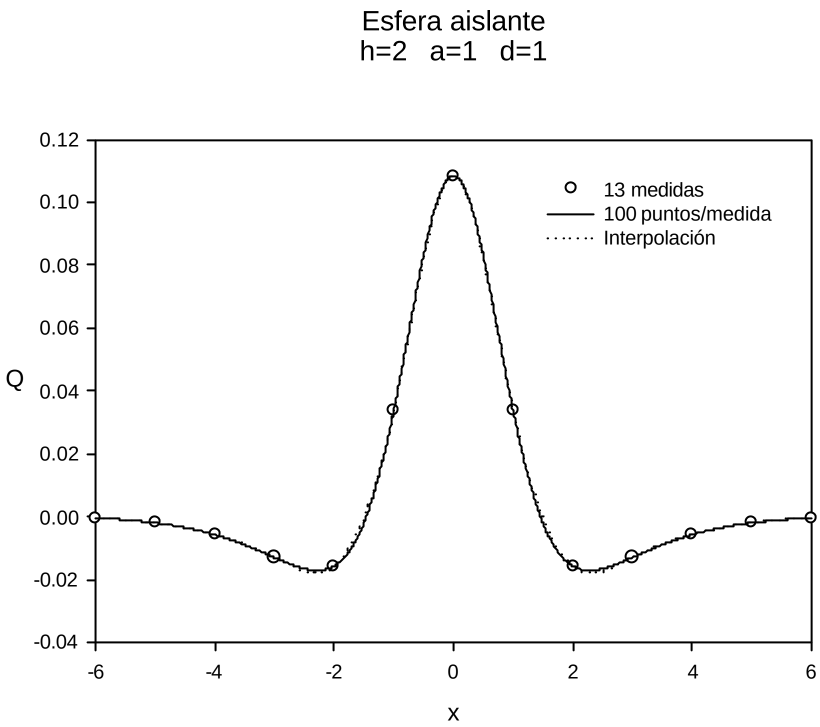


Figura 3.36. Resistividad aparente normalizada de una esfera aislante de radio unidad y profundidad 2. Los puntos corresponden a los 13 puntos de medida. La línea continua utiliza 100 puntos de *Q* por unidad. La línea a trazos se ha obtenido interpolando los 13 puntos con la función *spline* de Matlab.

Las medidas pueden tener errores debido a la inexactitud en la posición de los electrodos, al ruido geoléctrico y a la precisión del sistema de medida. La Figura 3.37 muestra los 13 valores de Q de la Figura 3.36 (círculos negros) a los que se ha añadido un ruido gaussiano de desviación típica 0,01 y media cero (círculos blancos). La línea a puntos corresponde a la interpolación de los datos con ruido. La curva modificada Q_m se obtiene sustituyendo la curva interpolada de Q en (3.68). Los parámetros h_z, h_m, h_d, se obtienen a partir de (3.45), (3.46), (3.59) respectivamente. El radio a se obtiene a partir de (3.60). Los valores x_z y x_m, a partir de los cuales se obtienen los parámetros h_z y h_m, se obtienen promediando los valores de los dos pasos por cero y de los dos mínimos de la curva Q_m respectivamente. El valor $Q_m(d)$ utilizado para determinar el parámetro h_d se obtiene promediando los valores de Q_m en $x = d$ y $x = -d$. Con estas consideraciones, las profundidades obtenidas son $h_z = 1{,}87$, $h_m = 1{,}9$, $h_d = 1{,}76$ y los radios respectivos $a_z = 0{,}98$, $a_m = 1{,}00$, $a_d = 0{,}93$.

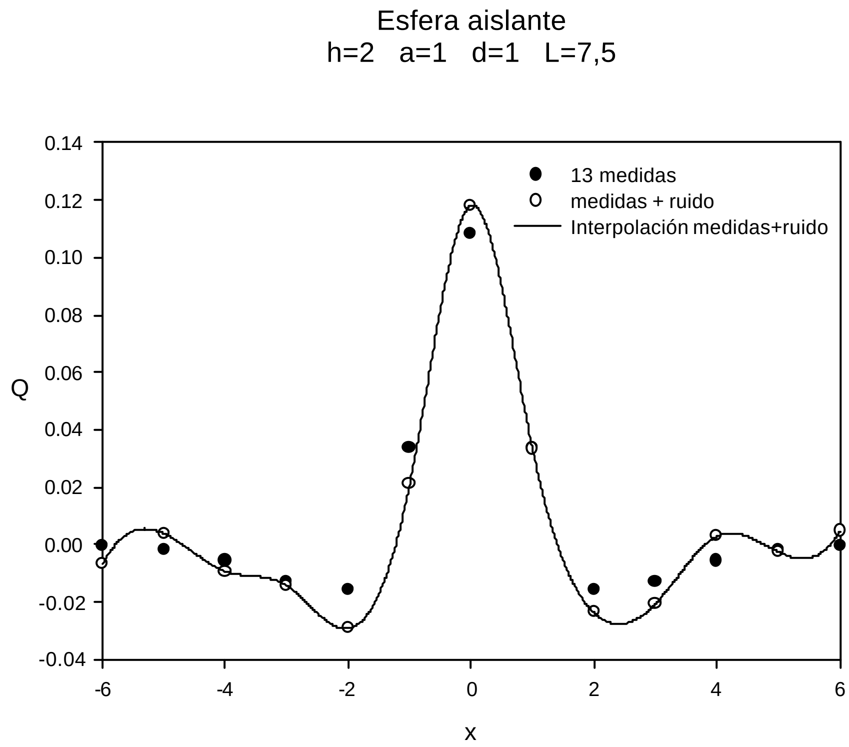


Figura 3.37. Resistividad aparente normalizada de una esfera aislante de radio unidad y profundidad 2. Los círculos negros y blancos corresponden a los datos sin y con ruido respectivamente. La línea continua y punteada son la interpolación de los datos sin y con ruido respectivamente. La línea a trazos es la curva teórica que mejor se ajusta a los datos con ruido siguiendo el criterio del error cuadrático mínimo.

Una solución alternativa descrita por Reina (1997) para determinar la profundidad y el radio es encontrar la curva teórica de Q que mejor se ajuste a los 13 puntos basándose en el criterio del error cuadrático mínimo. Para el cálculo de Q, Reina (1997) considera campo eléctrico uniforme. Una solución mejor es calcular Q considerando la distancia finita de los electrodos de corriente. El procedimiento de búsqueda de la curva teórica de Q es por prueba y error. La profundidad y el radio determinados son en este caso h_t = 1,76 y a_r = 0,92. En el caso del cilindro este método no se implementará ya que el tiempo de cálculo es muy elevado.

La Tabla 3.7 muestra los resultados cuando la esfera de radio unidad está situada en h = 3, 4 y el ruido aditivo es el mismo que en la Figura 3.37. Los resultados empeoran a profundidades mayores. Los resultados cambian para diferentes realizaciones, al cambiar el error.

h	h_z	h_m	h_d	h_r	a_z	a_m	a_d	a_r
3	1,95	1,91	1,85	1,82	0,71	0,70	0,68	0,67
4	1,62	1,82	1,39	1,41	0,48	0,53	0,41	0,43

Tabla 3.7. Determinación del radio y la profundidad para una esfera aislante de radio unidad a profundidades 3 y 4. El error en las medidas es del 1%

3.4.5. Medidas experimentales

Las medidas experimentales se han realizado en una cubeta de plástico (40 cm x 35 cm x 20 cm) llena de agua. Los 16 electrodos de acero inoxidable están sumergidos de 2 a 4 mm en el agua y separados 2 cm (1 unidad) entre ellos. El Apéndice E muestra imágenes del sistema de medida y del modelo analógico utilizado. La Figura 3.38 muestra la resistividad aparente obtenida cuando sumergimos en el agua (con la ayuda de pequeñas poleas y hilos de nylon) una esfera de goma (aislante) de radio 1,1 unidades a una profundidad de 2, 3 y 4 unidades. La Figura 3.39 muestra el caso de un cilindro de PVC (aislante) de radio unidad y longitud 12,5 unidades. Los objetos se encuentran situados entre los electrodos 8 y 9. La resistividad aparente en el caso homogéneo se ha obtenido con el objeto situado en el fondo de la cubeta y dista mucho de tener un valor constante (en un caso real la medida homogénea se realizaría con la agrupación de electrodos suficientemente alejada del objeto, como veremos en el capítulo 6). Ello es debido al efecto del fondo y de las paredes laterales de la cubeta. En el apartado 3.4.3 se expuso como eliminar el efecto de una capa horizontal; aquí generalizaremos ese resultado al caso de la cubeta. Los efectos de las dimensiones finitas de la cubeta pueden reducirse sustituyendo r_1 en (3.38)

$$Q = \frac{r_a - r_1}{r_1}$$

por la resistividad aparente medida sin la presencia del objeto. Este resultado ya se apuntó en las medidas experimentales presentadas en el apartado 3.3. Franco (1999) confirma este resultado con el programa de simulación de campos cuasi-estáticos COULOMB (Integrated Engineering Software).

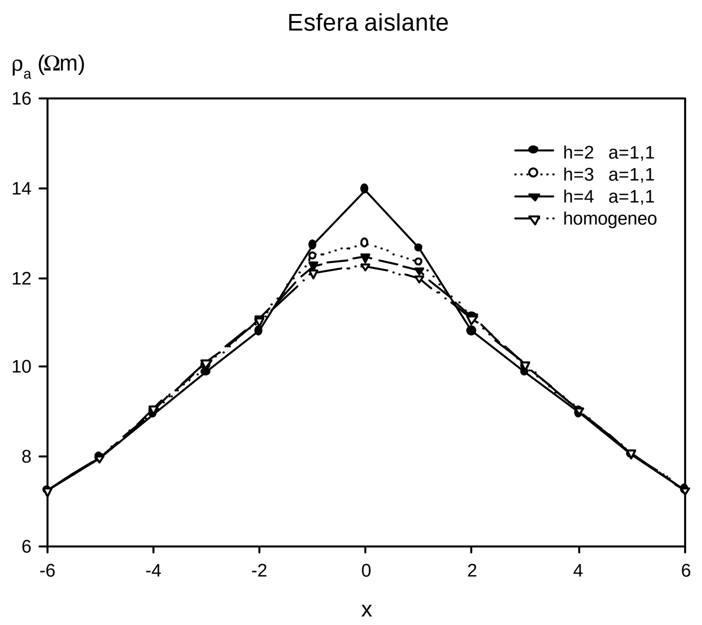


Figura 3.38. Medidas experimentales en una cubeta de plástico (40 cm x 35 cm x 20 cm) llena de agua. Resistividad aparente en presencia de una esfera de radio 1,1 unidades a una profundidad de 2, 3 y 4 unidades. El caso homogéneo se ha obtenido con el objeto en una esquina del fondo de la cubeta para no variar el nivel del agua.

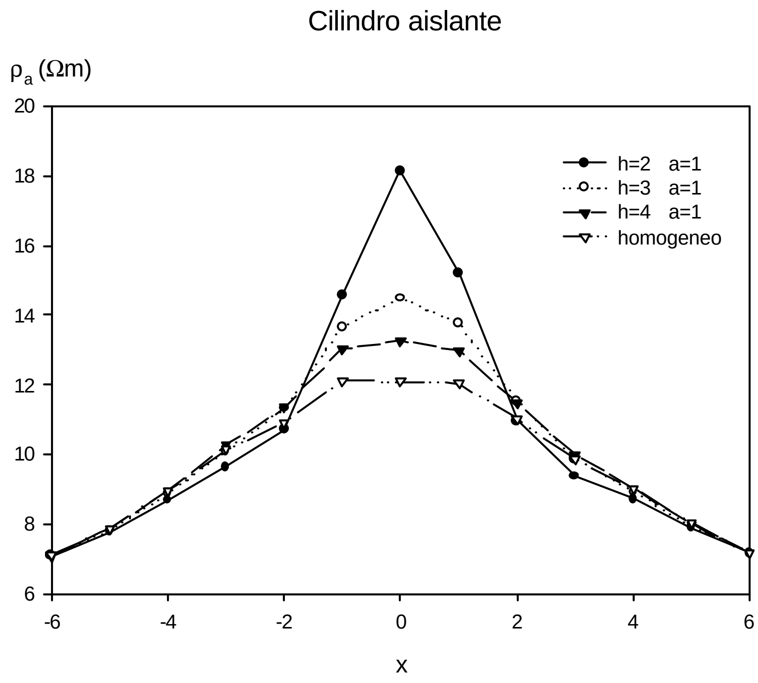
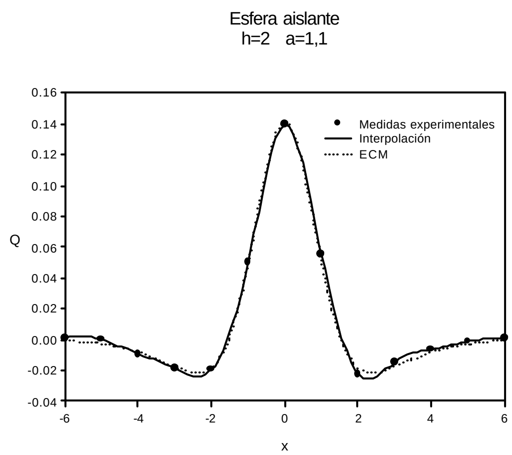
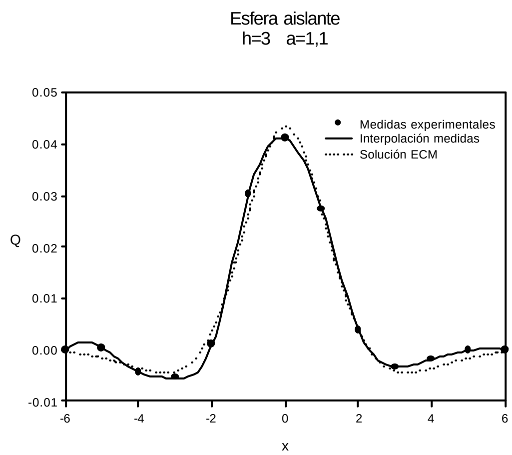


Figura 3.39. Medidas experimentales en una cubeta de plástico (40 cm x 30 cm x 25 cm) llena de agua. Resistividad aparente en presencia de un cilindro aislante de radio unidad y longitud 12,5 unidades a una profundidad de 2, 3 y 4 unidades. El caso homogéneo se ha obtenido con el objeto en una esquina del fondo de la cubeta para no variar el nivel del agua.

La Figura 3.40 representa la resistividad aparente normalizada para la esfera (en círculos) calculada según (3.38) donde r_1 se substituye por la resistividad aparente "homogénea" medida mientras que r_a se substituye por la resistividad aparente medida en presencia del objeto. La línea continua es la interpolación de los datos, la línea punteada corresponde a la solución teórica con el error cuadrático mínimo.





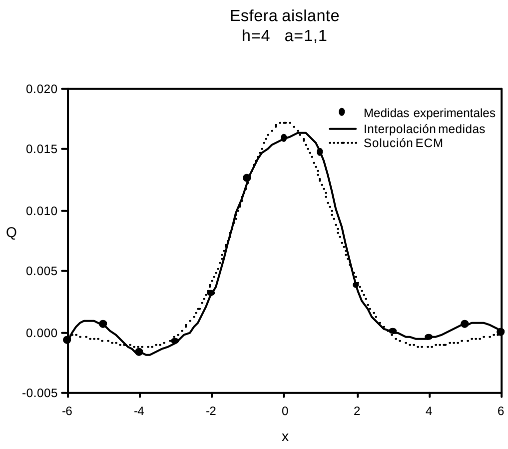


Figura 3.40. Resistividad aparente normalizada para una esfera de goma (en círculos) de radio 1,1 unidades sumergida a una profundidad de 2, 3 y 4 unidades. La línea continua es la interpolación de los datos, la línea punteada corresponde a la solución teórica con el error cuadrático mínimo (ECM).

La Tabla 3.8 muestra las profundidades y radios hallados con los diferentes métodos. Los métodos del cruce por cero y del ECM son los más robustos al ruido y los valores obtenidos se aproximan bastante a los teóricos con un error máximo aproximado del 10 % en la profundidad y del 20 % en el radio. Sin embargo, estos errores podrían ser debidos también a que la profundidad real de la esfera puede diferir ligeramente de la profundidad teórica, ya que el posicionamiento del objeto es manual.

h	h_z	h_m	h_d	h_r	a_z	a_m	a_d	a_r
2	2,22	2,00	2,16	2,13	1,23	1,11	1,20	1,16
3	3,06	2,73	3,80	3,27	1,16	1,02	1,48	1,23
4	3,98	3,11	6,61	4,09	1,14	0,86	2,23	1,18

Tabla 3.8. Determinación del radio y la profundidad para una esfera aislante de radio unidad y *h* = 2, 3, 4 unidades.

La Figura 3.41 representa la resistividad aparente normalizada para el cilindro (en círculos). La línea continua es la interpolación de los datos. La visibilidad es mayor que en el caso de la esfera, por lo que los errores en las medidas tendrán menor efecto.

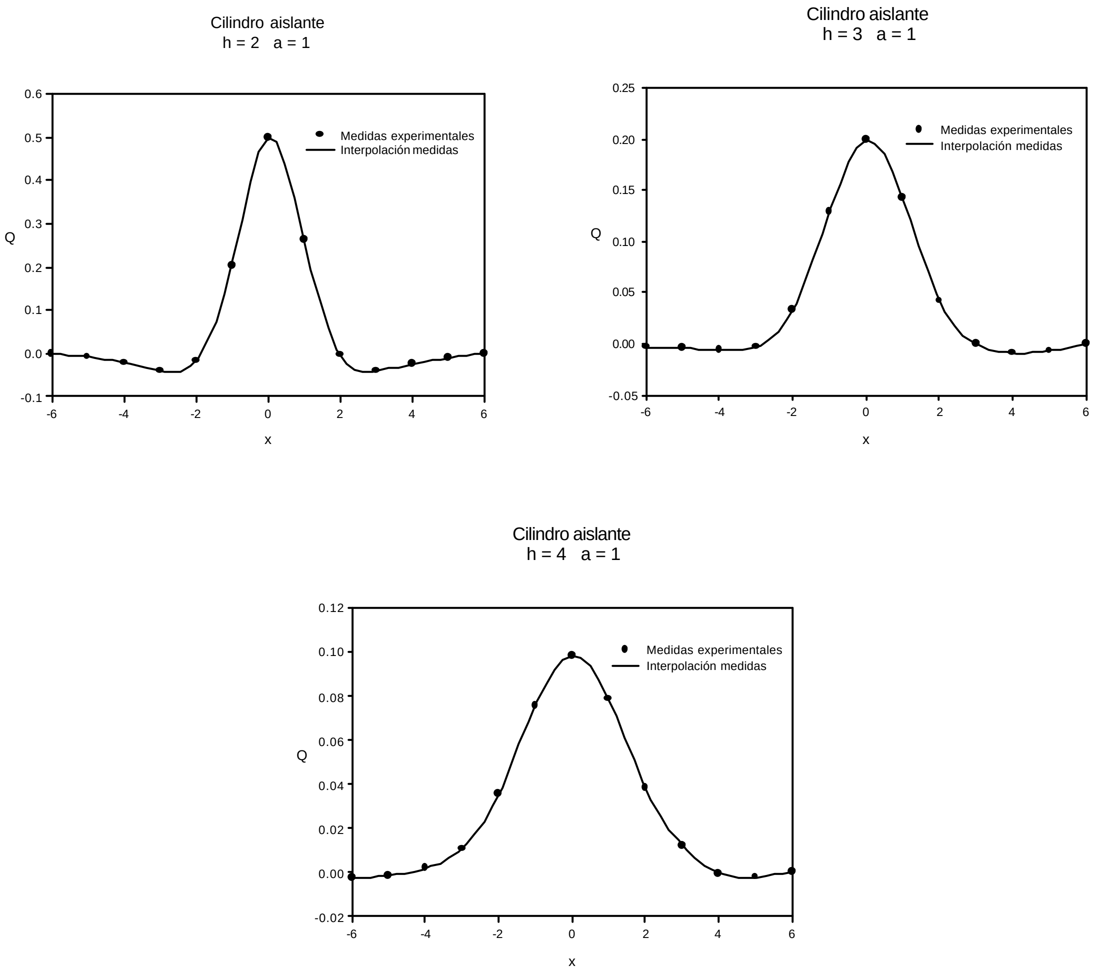


Figura 3.41. Resistividad aparente normalizada para un cilindro (en círculos) de radio unidad y *h* = 2, 3, 4 unidades. La línea continua es la interpolación de los datos.

La Tabla 3.9 muestra las profundidades y radios hallados en el caso del cilindro. El parámetro h_m presenta un error elevado cuando $h = 4$. Los otros dos métodos determinan con bastante precisión la profundidad y el radio del cilindro en todos los casos. Los resultados son “mejores” que utilizando los datos teóricos (Tabla 3.6 para $L = 7{,}5$ y $h = 4$). Ello podría ser debido a las dimensiones finitas de la cubeta y del cilindro.

h	h_z	h_m	h_d	a_z	a_m	a_d
2	1,84	1,78	1,91	0,96	0,93	0,99
3	2,87	3,07	2,92	0,92	0,98	0,94
4	4,21	3,12	3,94	0,94	0,70	0,88

Tabla 3.9. Determinación del radio y la profundidad para una cilindro aislante de radio unidad y h = 2, 3 y 4 unidades.

3.5. Resumen

El problema directo obtiene el potencial en la superficie (y, por tanto, la resistividad aparente) cuando se conoce la distribución de resistividades del subsuelo. Esto es interesante ya que permite la obtención de datos para validar los algoritmos utilizados en la solución del problema inverso (Capítulo 5), la modelización de estructuras inmersas en el subsuelo y el estudio del poder de resolución de la técnica resistiva. El problema directo se puede resolver experimentalmente, por métodos numéricos y analíticamente. Esta última opción es la más deseable ya que permite una solución rápida, precisa y de coste bajo.

A partir de la solución dada por Aldridge y Oldenburg (1989) se ha implementado una solución analítica exacta del potencial eléctrico para el caso de una esfera inmersa en un subsuelo homogéneo cuando la inyección de corriente se realiza a través de dos electrodos puntuales situados en la superficie. Una solución aproximada derivada a partir de los resultados de Wait (1982) y Lyttle y Hanson (1983) permite obtener con mayor rapidez los datos. Esto es interesante, por ejemplo, al obtener imágenes tridimensionales (capítulo 5), donde el número de medidas requeridas es elevado. Para el caso del cilindro sólo existe una solución exacta cuando el campo eléctrico primario es uniforme (Bhattacharya y Biswas, 1992). A partir del resultado obtenido por Wait (1982) se deriva una solución aproximada para el caso general (electrodos de corriente situados a una distancia finita del cilindro). Sin embargo el tiempo de cálculo es mucho mayor que en el caso de la esfera.

La solución del potencial eléctrico para la esfera permite comparar las configuraciones electródicas en función de su visibilidad. Las configuraciones basadas en los dispositivos doble dipolo y polo-dipolo son los que presentan mayor visibilidad. Estos resultados validan las conclusiones experimentales obtenidas por Apparao et al. (1992) y por Apparao, Sivarama y Subrahmanya (1997). Sin embargo, el número de medidas con las configuraciones con mayor visibilidad es pequeño. Para aumentar el número de medidas independientes (y, por tanto, la información acerca de la distribución de resistividad del subsuelo) se utilizan las configuraciones propuestas en el apartado 2.5. La configuración doble dipolo tiene una visibilidad mayor que la configuración Schlumberger pero el margen dinámico necesario en el detector es 28 dB mayor. Existe, pues, un compromiso y la elección de la configuración dependerá del ruido presente en las medidas.

Si el campo eléctrico primario es uniforme, las soluciones del potencial y del campo eléctrico producidos por una esfera y un cilindro son simples, lo que permite estimar de forma general la influencia de parámetros tales cómo el tamaño, la profundidad y el contraste resistivo de objetos esféricos y cilíndricos. La visibilidad de las esferas conductoras es el doble que la de las esferas aislantes. Un cilindro es más visible que una esfera a la misma profundidad y su visibilidad es la misma tanto si es aislante como conductor. La profundidad a la que es detectable un objeto esférico o cilíndrico depende de su radio y de la visibilidad mínima. Ésta viene limitada principalmente por el ruido en las medidas y el error en la posición de los electrodos. Las expresiones obtenidas para la determinación de la profundidad y el radio de objetos esféricos y cilíndricos coinciden con las descritas Schulz (1985), y se obtuvieron sin el conocimiento de dicho trabajo. Estas expresiones conllevan errores si la distancia entre los electrodos inyectores o entre los electrodos detectores es comparable a la profundidad del objeto, por lo que se obtienen nuevas expresiones que compensan este efecto, sobre todo en el caso de la esfera. El efecto de las dimensiones finitas de la cubeta en las medidas experimentales se puede reducir con una medida de referencia "homogénea". Las medidas experimentales efectuadas en el laboratorio muestran que el método que estima la profundidad de los objetos a partir del paso por cero de Q es el más robusto a los errores experimentales. Los objetos (tanto esféricos como cilíndricos) se han localizado correctamente hasta una profundidad igual a 4 veces su radio.