

MODELIZACIÓN DE LA HISTÉRESIS  
MAGNÉTICA Y SU APLICACIÓN AL  
CÁLCULO NUMÉRICO EN MÁQUINAS  
ELÉCTRICAS

Tesis doctoral de  
ALFREDO DE BLAS DEL HOYO

Director  
RAMÓN BARGALLÓ PERPIÑÁ

DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA ELÉCTRICA  
UNIVERSIDAD POLITÉCNICA DE CATALUÑA

BARCELONA-SORIA  
Noviembre de 2005

## **Resumen**

El presente documento es la tesis doctoral de Alfredo de Blas del Hoyo, dirigida por el Dr. Ing. Ramón Bargalló Perpiñá, realizada en el marco del programa de doctorado de Ingeniería Electromecánica del Departamento de Ingeniería Eléctrica de la Universidad Politécnica de Cataluña.

El trabajo de investigación realizado trata sobre la modelización de la histéresis magnética y su aplicación al cálculo numérico. En concreto se trata de aportar un sistema de cálculo que permita considerar el efecto de la histéresis en la determinación de la distribución del campo magnético en los núcleos ferromagnéticos de las máquinas eléctricas. Lo aquí expuesto es fácilmente extrapolable a otros sistemas que empleen materiales ferromagnéticos.

Se han analizado y comparado los modelos de histéresis más difundidos. Fruto de la comparación se ha elegido el modelo más adecuado para nuestro ámbito de aplicación, el modelo de Preisach. Dicho modelo es analizado exhaustivamente, no solo en sus fundamentos y propiedades, sino que también se comparan los diversos métodos de caracterización y desarrollo, determinando cual es la opción más apropiada. Nuestra propuesta es el modelo de Preisach caracterizado por el método de Mayergoyz y desarrollado directamente a partir de su definición algebraica o bien mediante integrales de Everett.

Basándonos en una idea de G. Bertotti, desarrollamos también un modelo de Preisach dinámico. Además proponemos un modelo de Preisach completamente inverso, necesario en problemas en los que la ecuación de difusión del campo magnético se formula en  $A-U$ .

Para caracterizar el modelo de Preisach mediante el método de Mayergoyz hemos desarrollado un ensayo basado en el método balístico que permite obtener de una forma económica los datos experimentales necesarios. También se investiga la forma de obtener estos datos experimentales mediante el método histeresigráfico, para ello desarrollamos un equipo automático controlado por ordenador que empleamos además para determinar las características magnéticas de las muestras.

La combinación del modelo de Preisach con los métodos numéricos se realiza mediante una aplicación, la determinación del campo, flujo y pérdidas magnéticas disgregadas en el núcleo de un transformador monofásico de 220V/380V y 1,3kVA.



## Abstract

This document is the doctoral thesis of Alfredo de Blas del Hoyo, directed by Dr. Ramón Bargalló Perpiñá, made in the context of the doctorate program of Electromechanics Engineering of the Electric Engineering Department of the Polytechnic University of Catalonia.

This researching work is about the modelization of the magnetic hysteresis and its application to numeric calculus. Actually it treats to contribute a calculus system that allows consider the effect of magnetic hysteresis on the determination of the magnetic field distribution inside the ferromagnetic cores of electric machines. This study is easy to extrapolate to other systems with ferromagnetic materials.

We have analyzed and compared the most spread models of hysteresis. Result of this comparison we have chosen the model most suitable for our scope of application, the model of Preisach. This model is exhaustively analyzed, not only on its foundation and on properties, but several methods of characterization and development are compared. Our proposal is the Preisach model characterized by the method of Mayergoyz and developed directly from its algebraic definition or with Everett integrals.

From an idea by G. Bertotti we develop a dynamic generalization of the model of Preisach. We propose also a full inverse model of Preisach. The inverse model is necessary in problems where the diffusion equation of magnetic field is formulated in  $A-U$ .

To characterize the model of Preisach with the method of Mayergoyz we have developed a procedure based on the ballistic method that allows obtain in a cheap way the experimental data required. We also research the way to obtain this experimental data with the hysteresigraphic method, developing an automatic device controlled by computer. This device is also used to obtain the magnetic characteristics of the samples.

The combination of the model of Preisach with numeric methods is carry out by means of an application, the determination of magnetic field, magnetic flux and core losses on a single-phase transformer of 1,3kVA and 220V / 380V.



Para Ana mi esposa, amiga, compañera, colega...

Y para mis padres Alfredo y Justa.

Este trabajo lo hemos hecho juntos.



## **Prefacio**

El presente trabajo trata sobre la modelización de la histéresis magnética y de la combinación del modelo de histéresis con los métodos numéricos para el cálculo de la distribución del campo magnético en materiales ferromagnéticos.

La modelización de la histéresis y su inclusión en los métodos numéricos son de interés en el análisis y diseño de sistemas que emplean de una forma u otra materiales ferromagnéticos. Por ejemplo, grabación en cintas magnéticas o memorias magnéticas, ensayos no destructivos basados en corrientes inducidas, ensayos no destructivos basados en métodos magnéticos, inductancias, imanes permanentes y, como no, la totalidad de las máquinas eléctricas; por citar unos cuantos. Nuestro trabajo se centrará en el ámbito de las máquinas eléctricas. Esto no quiere decir que este trabajo no pueda aplicarse a otros ámbitos, sin embargo en nuestro caso siempre buscaremos el método o modelo que más se adapte a las peculiaridades de los núcleos magnéticos de las máquinas eléctricas.

Después de un estudio de los diversos modelos de histéresis disponibles en la actualidad nos hemos decantado por el modelo de Preisach. Aun considerando sus limitaciones es el modelo más adecuado a nuestras necesidades. Estudiamos su caracterización y su desarrollo, buscando siempre la alternativa más propicia a nuestro ámbito de aplicación. Para algunas aplicaciones es necesario ampliar las prestaciones del modelo de Preisach. En este sentido hemos desarrollado un modelo dinámico y un modelo inverso.

Con el modelo de histéresis desarrollado se analiza la combinación del modelo con los métodos numéricos mediante una aplicación. Se trata del cálculo de la distribución del cálculo del campo magnético, el flujo magnético y las pérdidas en el núcleo de un transformador monofásico aplicando el método de las diferencias finitas. Esto nos permite validar y analizar el sistema de cálculo y comprobar las dificultades a resolver al intentar combinar el modelo de histéresis con el sistema de cálculo.

Después de una introducción en el capítulo 1, en el siguiente capítulo se repasan los principales conceptos de la magnetización de los materiales ferromagnéticos para obtener los fundamentos teóricos necesarios para valorar y comparar los diversos modelos de histéresis.

En el capítulo 3 presentamos el modelo de Preisach clásico, se exponen sus fundamentos, propiedades, métodos de caracterización y métodos de desarrollo. Finalmente se valida el modelo de Preisach para una muestra, calculando varios ciclos de histéresis y curvas de magnetización diversas.

En el capítulo 4 tratamos la ampliación del modelo de Preisach a modelo dinámico. Se presentan y comparan varios modelos dinámicos tipo-Preisach. Finalmente se valida el modelo escogido como más idóneo para nuestro ámbito de aplicación.

En el capítulo 5 desarrollamos la inversión del modelo de Preisach, de interés cuando se aplica el modelo de histéresis en la resolución de la ecuación de difusión formulada en  $A-U$ .

El método de caracterización del modelo de Preisach adoptado por nosotros, el método de Mayergoyz, necesita de un conjunto de curvas de magnetización denominados curvas inversas de primer orden. En el capítulo 6 se muestra como se realizó la determinación experimental de las curvas inversas de primer orden. Primero mediante un procedimiento derivado del método balístico y posteriormente se investiga la posibilidad de emplear el método histeresisgráfico.

En el capítulo 7 comenzamos con el análisis de la combinación del modelo de histéresis con los métodos numéricos. El análisis se realiza mediante una aplicación, el cálculo del campo, el flujo y las pérdidas en el hierro de un transformador monofásico. En este capítulo presentamos el problema a resolver, la formulación, el desarrollo del método numérico y el algoritmo de cálculo. En el capítulo 8 se presentan y validan los resultados del cálculo. Finalmente en el capítulo 9 mostramos algunas alternativas al sistema de cálculo propuesto en el capítulo 7.

La determinación experimental de las pérdidas en el hierro y del flujo, variables que empleamos para comprobar los resultados del sistema de cálculo, se muestran en el capítulo 10.

Finalizamos el trabajo con el capítulo 11 en el cual se exponen las conclusiones generales y el trabajo a realizar en el futuro.

Entre los apéndices, cabe resaltar el apéndice-C en el que comparamos los principales modelos de histéresis disponibles en la actualidad.

El ensayo balístico y el primer prototipo del equipo automático se realizaron en el Laboratorio de Máquinas Eléctricas de la Escuela Universitaria de Ingeniería Técnica (EUETIB) de la Universidad Politécnica de Cataluña. En la construcción del primer prototipo de equipo automático colaboró el maestro de taller de la Unidad Estructural de Electricidad de la EUETIB el Sr. Jordi Vilanova, al cual deseo agradecer su participación. El equipo automático y las mediciones finales se realizaron en las instalaciones del Departamento de Física e Ingeniería Nuclear de la UPC. En el diseño del equipo experimental y en la toma de datos, tuve la fortuna de contar con la inestimable ayuda del Dr. Ing. Manuel Sevilla, sin cuya paciencia y experiencia no se hubieran conseguido los resultados obtenidos. En la construcción del prototipo definitivo de equipo automático participó el maestro de taller del Departamento de Física e Ingeniería Nuclear el Sr. Miquel Carreras.

El trabajo aquí presentado no hubiera sido posible sin la colaboración directa o indirecta de muchas personas. Mi director de tesis el Dr. Ing. Ramón Bargalló, que no sólo ha sido mi director, sino también un amigo. Los profesores de Unidad Estructural de Electricidad de la EUETIB (en orden alfabético) Miquel Bonet, Dr. Lorenzo Salamó y Antoni Salazar. Al también profesor de la U.E. de Electricidad de la EUETIB, Dr. Ing. Joan Llaverías, que me inició en el camino seguido. El profesor del Departamento de Ingeniería Eléctrica de la UPC Jordi de la Hoz por su colaboración y apoyo. El profesor Dr. Ricard Bosch también del Departamento de Ingeniería Eléctrica de la UPC por el material prestado y sus consejos. El Dr. Carlos Lemos Antunes de la Universidad de Coimbra (Portugal). También de la Universidad de Coimbra, el profesor Dr. Paulo G. Pereirinha de la Universidad de Coimbra, por su apoyo, consejos y amistad y un día inolvidable tanto para mí como para mi esposa en Coimbra. El alumno de proyecto final de carrera Aarón García, que colaboró en el ensayo balístico.

L'Hospitalet de Llobregat (Barcelona) y Alcozar (Soria)



**Índice de contenidos. xiii**

**Lista de símbolos. xxxi**

**1. Introducción. 1**

**2. Magnetización en los materiales ferromagnéticos. 13**

**3. Modelo de Preisach. 59**

**4. Modelos tipo Preisach dinámicos. 149**

**5. Modelo de Preisach inverso. 197**

**6. Ensayos para la caracterización del modelo de Preisach. 213**

**7. Aplicación al cálculo del campo magnético y de las pérdidas magnéticas de un transformador (I). Formulación del problema. Método de cálculo. 253**

**8. Aplicación al cálculo del campo magnético y de las pérdidas magnéticas de un transformador (II). Resultados y validación. Conclusiones. 303**

**9. Aplicación al cálculo del campo magnético y de las pérdidas magnéticas de un transformador (III). Alternativas de cálculo. 345**

**10. Determinación experimental de las pérdidas magnéticas en las muestras. 357**

**11. Conclusiones generales y trabajo futuro. 409**

**Apéndice A. Referencias. 417**

**Apéndice B. Terminología. 433**

**Apéndice C. Modelos de histéresis magnética. 437**

**Apéndice D. Características de las muestras. 483**

**Apéndice E. Características de los equipos de medición. 515**

**Apéndice F. Códigos del modelo de histéresis. 521**

**Apéndice G. Códigos del equipo histeresigráfico. 541**

**Apéndice H. Códigos de la aplicación. 567**

**Apéndice I. Publicaciones derivadas de la tesis. 569**

**Apéndice J. Índice de figuras. 573**

**Apéndice K. Índice de tablas. 589**

## **Índice de contenidos**

**Resumen. i**

**Abstract. iii**

**Dedicatoria. v**

**Prefacio. vii**

**Índice genérico. xi**

**Índice de contenidos. xiii**

**Listado de símbolos. x**

### **1. Introducción. 1**

#### **1.1 Motivación y justificación del presente trabajo. 1**

1.1.1 Problemática de la histéresis magnética en el análisis y diseño de sistemas con materiales ferromagnéticos. 1

1.1.2 Focalización de la problemática de la histéresis magnética en el ámbito de las máquinas eléctricas 2

#### **1.2 Estado del arte. 3**

1.2.1 Modelización de la histéresis magnética. 3

1.2.2 Cálculo de la distribución del campo magnético en núcleos ferromagnéticos considerando el efecto de la histéresis. 6

#### **1.3 Objetivos y alcance de la tesis. 7**

#### **1.4 Principales aportaciones de la tesis. 9**

#### **1.5 Estructura y organización de la tesis. 10**

## **2. Magnetización en los materiales ferromagnéticos. 13**

### **2.1 Introducción. 13**

2.1.1 Campos magnéticos. 13

2.1.2 Momentos magnéticos y magnetización 14

2.1.3 Momentos magnéticos del electrón. Orígenes del magnetismo. 15

2.1.3.1 Descripción newtoniana o clásica. 15

2.1.3.2 Descripción cuántica. 16

2.1.4 Tipos de magnetismo. 19

2.1.4.1 Diamagnetismo. 19

2.1.4.2 Paramagnetismo 20

2.1.4.3 Antiferromagnetismo. 21

2.1.4.4 Ferrimagnetismo. 21

2.1.4.5 Ferromagnetismo. 22

### **2.2. Teorías de ferromagnetismo. 24**

2.2.1 Teoría de Weiss del campo medio. 25

2.2.2 La relación de intercambio. 26

2.2.3 Teoría de las bandas. 27

2.2.4 Anisotropía magnetocristalina. 28

2.2.5 Magnetostricción. Anisotropía por tensión magnetoelástica. 29

### **2.3 Formación de dominios. Consideraciones energéticas. 30**

2.3.1 Energía de intercambio. 31

2.3.2 Energía magnetostática. 32

2.3.3 Energía de anisotropía magnetocristalina. 32

2.3.4 Energía de magnetostricción. 33

### **2.4 Paredes de dominio. 33**

### **2.5 Movimiento de las paredes de dominio. 36**

2.5.1 Fuerza en las paredes. 36

2.5.2 Modelo de paredes rígidas. 37

2.5.3 Modelo de paredes flexibles. Pandeo de las paredes. 38

### **2.6 Proceso de magnetización. 39**

2.6.1 Curva de magnetización y procesos en los dominios relacionados con ella. 39

2.6.1.1 Estado desmagnetizado. 40

2.6.1.2 Rango de permeabilidad inicial. 40

2.6.1.3 Rango de magnetización irreversible. 41

2.6.1.4 Rango de magnetización por rotación coherente. 41

- 2.6.1.5 Rango de saturación técnica. 41
- 2.6.1.6 Ciclo de histéresis. 42
- 2.6.1.7 Mecanismos en el ciclo de histéresis. 43
- 2.6.1.8 Consideraciones sobre la magnetización y los procesos en los dominios relacionados con ella. 43
- 2.6.2 Mecanismos en los dominios durante la magnetización. 44
  - 2.6.2.1 Resumen de los tipos de mecanismos que acontecen en los dominios durante la magnetización. 44
  - 2.6.2.2 Rotación. 45
    - 2.6.2.3 Movimiento de las paredes. 45
- 2.6.3 Permeabilidad inicial. 47
- 2.6.4 Fuerza coercitiva. 48
  - 2.6.4.1 Teoría de las tensiones. Enganche de las paredes por deformaciones o tensiones internas. 48
  - 2.6.4.2 Teoría de la inclusión. Enganche de las paredes por inclusiones. 49
  - 2.6.4.3 Teoría del campo interno variable de Néel. 51
- 2.6.5 Aproximación a la saturación. 52
- 2.6.6 Nucleación de dominios. 52
- 2.6.7 Efecto Barkhausen. 53
- 2.7 Efectos dependientes del tiempo. 55**
  - 2.7.1 Corrientes inducidas. 55
  - 2.7.2 Otros efectos dependientes del tiempo. 56
    - 2.7.2.1 Envejecimiento magnético (*Magnetic agening*). 56
    - 2.7.2.2 Pos-efecto magnético (*Magnetic after-effect*). 56
    - 2.7.2.3 Viscosidad magnética. 57
    - 2.7.2.4 Desacomodación. 58
- 3. Modelo de Preisach. 59**
  - 3.1 Interpretación matemática. 60**
  - 3.2 Interpretación geométrica. 60**
    - 3.2.1 Plano de Preisach. 60
    - 3.2.2 Interpretación geométrica. 64
    - 3.2.3 Formulación alternativa del modelo de Preisach. 65
  - 3.3 Propiedades del modelo de Preisach. 65**
    - 3.3.1 Propiedad de borrado. 65

3.3.2 Propiedad de congruencia. 66

3.3.3 Memoria no lineal. 68

3.3.4 Modelo estático. 68

### **3.4 La función densidad. 68**

3.4.1 Significado físico. 68

3.4.2 Propiedades de la función densidad. 69

3.4.2.1 Propiedad de simetría. 69

3.4.2.2 Propiedad de factorización. 70

### **3.5 La integral de Everett. 70**

### **3.6 Identificación del modelo de Preisach. 74**

3.6.1 Caracterización por interpolación o no paramétrica. 74

3.6.1.1 Método de Mayergoyz. 74

3.6.1.2 Corrección al método de Mayergoyz. Integrales de Everett promedio. 77

3.6.1.3 Método de Biorci-Pescetti. 79

3.6.2 Caracterización paramétrica o por ajuste. 85

3.6.2.1 Lorentziana. 85

3.6.2.2 Lorentziana móvil. 86

3.6.2.3 Gaussiana-log-normal. 87

3.6.2.4 Método de ajuste para la gaussiana-log-normal. 88

3.6.2.5 Gaussiana-gaussiana. 89

3.6.3 Otros métodos de caracterización. 89

### **3.7 Desarrollo numérico del modelo de Preisach. 90**

3.7.1 Desarrollo por aplicación directa de la definición del modelo de Preisach. 90

3.7.2 Desarrollo por aplicación de la interpretación geométrica. 91

3.7.3 Desarrollo numérico por integrales de Everett. 92

3.7.3.1 Formulación del modelo de Preisach por integrales de Everett. 92

3.7.3.2 Curva de primera inducción. 96

3.7.3.3 Tramo creciente de una excitación periódica. 97

3.7.3.4 Tramo decreciente de una excitación periódica. 98

3.7.3.5 Curva inversa de primer orden. 99

3.7.3.6 Algoritmo genérico. 101

3.7.4 Método de Naidu. 101

3.7.4.1 Función  $F(H)$  de Naidu. 103

3.7.4.2 Cálculo de la función  $F(H)$  de Naidu. 104

3.7.4.3 Expresión matemática de las curvas inversas de primer orden crecientes con el método de Naidu. 108

---

3.7.4.4	Expresiones matemáticas para curvas inversas de primer orden derecientes con el método de Naidu.	110
3.7.4.5	Expresión matemática para la curva de primera inducción por el método de Naidu.	111
3.7.5	Método d'Alessandro-Ferrero.	111
<b>3.8</b>	<b>Generalizaciones del modelo de Preisach clásico.</b>	<b>115</b>
3.8.1	Limitaciones del modelo de Preisach clásico.	115
3.8.2	Modelo producto.	118
3.8.3	Modelo móvil.	118
3.8.4	Modelo de Basso-Bertotti.	119
3.8.4.1	Introducción.	119
3.8.4.2	Fundamentos del modelo.	120
3.8.4.3	Propiedades básicas del modelo.	122
3.8.4.4	Valoración del modelo para nuestro ámbito de aplicación.	123
<b>3.9</b>	<b>Resultados y valoración de los métodos de caracterización del modelo de Preisach clásico.</b>	<b>123</b>
3.9.1	Modelo de Mayergoyz.	123
3.9.2	Por ajuste a una lorentziana factorizada.	124
3.9.3	Por ajuste a una gaussiana-log-normal.	126
3.9.4	Por ajuste a una gaussiana-gaussiana.	126
3.9.5	Conclusiones.	127
<b>3.10</b>	<b>Resultados y validación del modelo de Preisach en función de su método de desarrollo.</b>	<b>129</b>
3.10.1	Curva de primera inducción.	130
3.10.2	Ciclo límite.	131
3.10.3	Curvas inversas de primer orden.	133
3.10.4	Curvas inversas de segundo orden.	136
3.10.5	Conclusiones.	136
<b>3.11</b>	<b>Validación general del modelo de Preisach.</b>	<b>137</b>
3.11.1	Condiciones de la validación.	137
3.11.2	Conclusiones.	146
<b>4.</b>	<b>Modelos tipo Preisach dinámicos.</b>	<b>149</b>
<b>4.1</b>	<b>Modelo de Bertotti.</b>	<b>150</b>
4.1.1	Fundamentos.	150

4.1.1.1	Definición del modelo.	150
4.1.1.2	Operadores de Bertotti.	150
4.1.1.3	Operador suma truncada.	151
4.1.1.4	Derivas en los límites de los operadores de Bertotti.	152
4.1.1.5	Valor instantáneo de los operadores de Bertotti.	155
4.1.1.6	Modelo normalizado.	158
4.1.2	Caracterización.	159
4.1.3	Desarrollo.	159
<b>4.2</b>	<b>Modelo de Mayergoyz.</b>	<b>160</b>
4.2.1	Fundamentos.	160
4.2.2	Caracterización.	161
4.2.3	Desarrollo.	165
<b>4.3</b>	<b>Modelo de Nakmahachalasint-Ngo-VuQuoc.</b>	<b>167</b>
4.3.1	Fundamentos.	168
4.3.1.1	Visión general del modelo.	168
4.3.1.2	Bloque “Dinámica de paredes de dominio”.	169
4.3.1.3	Bloque “Dinámica del proceso reversible”.	170
4.3.2	Desarrollo.	171
4.3.3	Caracterización.	173
<b>4.4</b>	<b>Modelo de Fűzi-Ivanyi.</b>	<b>174</b>
<b>4.5</b>	<b>Valoración de los modelos analizados.</b>	<b>175</b>
<b>4.6</b>	<b>Resultados.</b>	<b>176</b>
<b>4.7</b>	<b>Conclusiones.</b>	<b>192</b>
<b>5.</b>	<b>Modelo de Preisach inverso.</b>	<b>197</b>
<b>5.1</b>	<b>Introducción.</b>	<b>197</b>
5.1.1	Necesidad de un modelo de histéresis inverso.	197
5.1.2	Estado del arte.	198
<b>5.2</b>	<b>Método Takahashi-Miyabara-Fujiwara.</b>	<b>199</b>
<b>5.3</b>	<b>Propuesta del modelo de Preisach inverso.</b>	<b>202</b>
<b>5.4</b>	<b>Modelo de Preisach dinámico inverso.</b>	<b>205</b>
<b>5.5</b>	<b>Resultados. Validación del modelo de Preisach inverso.</b>	<b>206</b>
<b>5.4</b>	<b>Conclusiones.</b>	<b>211</b>

## **6. Ensayos para la caracterización del modelo de Preisach. 213**

### **6.1 Introducción. 213**

### **6.2 Ensayo balístico. 215**

6.2.1 Descripción. 215

6.2.2 Preparación de las muestras. 216

6.2.3 Esquema básico. Determinación del ciclo límite. 217

6.2.4 Determinación de la característica de magnetización, característica normal o curva de primera inducción. 219

6.2.5 Determinación de curvas inversas de primer orden. 220

6.2.6 Curvas inversas de segundo orden. 221

6.2.7 Resultados. 222

6.2.8 Crítica al método balístico. Posibles mejoras al método. 225

### **6.3 Histeresígrafo adaptado para curvas inversas de primer orden. 227**

6.3.1 Introducción. 227

6.3.2 Descripción del equipo. 230

6.3.2.1 Ordenador personal y tarjeta de adquisición de datos. 230

6.3.2.2 Generador de funciones. 231

6.3.2.3 Recortador. 232

6.3.2.4 Amplificador de transconductancia. 233

6.3.2.5 Adaptador a TTL. 234

6.3.2.6 Fuente de alimentación. 235

6.3.3 Procedimiento. Software. 236

6.3.3.1 Procedimiento. 236

6.3.3.2 Algoritmo principal. 237

6.3.3.3 Subprogramas. 245

6.3.4 Resultados. 247

6.3.5 Análisis. Conclusiones. 249

## **7. Aplicación al cálculo del campo magnético y de las pérdidas magnéticas de un transformador (I). Formulación del problema. Método de cálculo. 253**

### **7.1 Introducción. Bases para la formulación del problema. 254**

7.1.1 Ecuaciones de Maxwell y ecuaciones constitutivas. 254

7.1.1.1 Nomenclatura y definiciones de análisis vectorial. 254

- 7.1.1.2 Primera ecuación de Maxwell. Teorema de Ampère. 256
- 7.1.1.3 Segunda ecuación de Maxwell. 258
- 7.1.1.4 Tercera ecuación de Maxwell. Ley de Faraday. 258
- 7.1.1.5 Cuarta ecuación de Maxwell. 259
- 7.1.1.6 Ecuación de continuidad eléctrica. 260
- 7.1.1.7 Ecuaciones constitutivas. 260
- 7.1.2 Potenciales. 261
  - 7.1.2.1 Potencial vector magnético  $A$ . 261
  - 7.1.2.2 Potencial escalar magnético  $\psi$ . 263
  - 7.1.2.3 Potencial vector eléctrico  $T$ . 263
  - 7.1.2.4 Potencial escalar eléctrico  $U$ . 264
- 7.1.3 Normas. 264
  - 7.1.3.1 Norma de Coulomb. 265
- 7.1.4 Ecuación de difusión del campo magnético. 265
  - 7.1.4.1 Formulación en  $H$ . 266
  - 7.1.4.2 Formulación en  $A-U$ . 268
  - 7.1.4.3 Formulación en  $T-\psi$ . 270
- 7.2 Descripción del problema. 271**
- 7.3 Modelo del problema. 272**
- 7.4 Formulación del problema. 274**
  - 7.4.1 Formulación en  $H$ . 274
    - 7.4.1.1 Ecuación de difusión. 274
    - 7.4.1.2 Acoplamiento de la ecuación de difusión con la ecuación del circuito eléctrico. 275
  - 7.4.2 Formulación en  $A-U$ . 277
    - 7.4.2.1 Ecuación de difusión. 277
    - 7.4.2.2 Acoplamiento de la ecuación de difusión con la ecuación del circuito eléctrico. 280
  - 7.4.3 Modelización del laminado del núcleo. 281
- 7.5 Estrategia de resolución. Preproceso. 283**
- 7.6 Resolución de la ecuación de difusión. Proceso. 286**
  - 7.6.1 Resolución de sistemas de ecuaciones no lineales por el método del punto fijo. 286
  - 7.6.2 Resolución de la ecuación de difusión. 288
- 7.7 Post-proceso. 293**
  - 7.7.1 Cálculo de las variables magnéticas en el núcleo. 293
    - 7.7.1.1 Cálculo de densidad de corrientes inducidas. 293

- 7.7.1.2 Cálculo del potencial vector magnético. 295
- 7.7.1.3 Cálculo del flujo magnético. 295
- 7.7.2 Pérdidas magnéticas en el núcleo (pérdidas en el hierro). 296
  - 7.7.2.1 Teorema de Poynting. Determinación de las pérdidas específicas totales en el hierro. 296
  - 7.7.2.2 Determinación de las pérdidas específicas por histéresis. 300
  - 7.7.2.3 Determinación de las pérdidas específicas por corrientes inducidas. 301
  - 7.7.2.4 Determinación de las pérdidas específicas por exceso. 302
- 7.8 Resultados y validación. 302**

## **8. Aplicación al cálculo del campo magnético y de las pérdidas magnéticas de un transformador (II). Resultados y validación. Conclusiones. 303**

- 8.1 Conclusiones. 303**
- 8.2 Resultados. 307**
  - 8.2.1 Variables magnéticas. 307
  - 8.2.2 Pérdidas en el hierro. 331
- 8.3 Análisis de resultados. Validación. 340**
  - 8.3.1 Campo e inducción. 340
  - 8.3.2 Variables electromagnéticas restantes ( $A$ ,  $J$ ,  $\phi$ ). 341
  - 8.3.3 Pérdidas específicas en el hierro disgregadas. 343
- 8.4 Conclusiones. 344**

## **9. Aplicación al cálculo del campo magnético y de las pérdidas magnéticas de un transformador (III). Alternativas de cálculo. 345**

- 9.1 Introducción. 345**
- 9.2 Resolución a partir de una formulación  $A-U$ . 346**
  - 9.2.1 Modelo del problema. 346
  - 9.2.2 Formulación del problema. 346
  - 9.2.3 Modelización del laminado del núcleo. 348
  - 9.2.4 Estrategia de resolución. 348
  - 9.2.5 Preproceso. 349
  - 9.2.6 Proceso. 349

9.2.6.1 Resolución del sistema de ecuaciones no lineales mediante el método del punto fijo. 350

9.2.6.2 Resolución de las ecuaciones de difusión. 352

### **9.3 Alternativa al método de las diferencias finitas. El método de los elementos finitos. 355**

## **10. Determinación experimental de las pérdidas magnéticas en las muestras. 357**

### **10.1 Introducción. 357**

### **10.2 Pérdidas totales. 359**

10.2.1 Método del vatímetro. 359

10.2.1.1 Descripción del ensayo. 360

10.2.1.2 Generación de la señal de excitación. 365

10.2.1.3 Procedimiento. 368

10.2.2 Mediante el área del ciclo de histéresis. 369

### **10.3 Pérdidas por histéresis. 372**

10.3.1 Experimentales (áreas de ciclos de histéresis cuasiestáticos). 372

10.3.1.1 Descripción del ensayo. Equipo. 372

10.3.1.2 Procedimiento. Obtención experimental de los ciclos de histéresis. 372

10.3.1.3 Tratamiento de los ciclos de histéresis experimentales. 375

10.3.1.4 Calculo de las pérdidas por histéresis. 376

10.3.2 Mediante la ecuación de Steinmetz. 376

10.3.3 Mediante el modelo de Preisach clásico. 378

### **10.4 Pérdidas por corrientes inducidas. 378**

### **10.5 Pérdidas de exceso. 379**

### **10.6 Resultados. 380**

10.6.1 Pérdidas magnéticas totales. 381

10.6.1.1 Mediante vatímetro. 381

10.6.1.2 Mediante el área de del ciclo de histéresis. 382

10.6.1.3 Comparativa de métodos. 382

10.6.2 Pérdidas por histéresis. 388

10.6.2.1 A partir del área del ciclo de histéresis cuasiestático obtenido experimentalmente. 388

10.6.2.2 Mediante la ecuación de Steinmetz. 388

- 10.6.2.3 A partir del área del ciclo de histéresis cuasiestático obtenido mediante el modelo de Preisach clásico. 389
- 10.6.2.4 Comparativa de métodos. 389
- 10.6.3 Pérdidas por corrientes inducidas. 399
- 10.6.4 Pérdidas de exceso. 400
- 10.7 Conclusiones. 404**
- 10.7.1 Conclusiones generales. 404
- 10.7.2 Pérdidas magnéticas totales. 405
- 10.7.3 Pérdidas por histéresis. 406
- 10.7.4 Pérdidas por corrientes inducidas. 407
- 10.7.5 Pérdidas por exceso. 407

## **11. Conclusiones generales y trabajo futuro. 409**

### **11.1 Conclusiones generales. 409**

- 11.1.1 Sobre la elección del modelo de histéresis. 409
- 11.1.2 Sobre el modelo de Preisach clásico. 409
- 11.1.3 Sobre el modelo de Preisach dinámico. 411
- 11.1.4 Sobre el modelo de Preisach inverso. 412
- 11.1.5 Sobre la obtención experimental de las curvas inversas de primer orden. 412
- 11.1.6 Sobre la combinación del modelo de Preisach con un método numérico para determinar la distribución del campo en núcleos ferromagnéticos. 414

### **11.2 Trabajo futuro. 415**

## **Apéndice A. Referencias. F.1**

### **A.1 Artículos y ponencias en congresos. 417**

### **A.2 Libros. 427**

### **A.3 Tesis. 430**

### **A.4 Normas y estándares. 430**

### **A.5 Miscelánea. 431**

## **Apéndice B. Terminología. 433**

## **Apéndice C. Modelos de histéresis magnética. 437**

### **C.1 Modelo de Stoner-Wohlfarth. 437**

C.1.1 Partículas de Stoner-Wohlfarth. 437

C.1.2 Cálculo de la dirección de magnetización. 440

C.1.2.1 Astroide de Slonczewski. 440

C.1.3 Modelo de Stoner-Wohlfarth. 442

C.1.4 Caracterización. 442

C.1.5 Desarrollo. 443

C.1.6 Expansiones o generalizaciones del modelo de Stoner-Wohlfarth. 444

C.1.7 Valoración. 445

C.1.7.1 Ventajas. 445

C.1.7.2 Inconvenientes. 445

### **C.2 Modelo de Jiles-Atherton. 446**

C.2.1 Fundamento del modelo. 446

C.2.1.1 Magnetización de anhistéresis. 446

C.2.1.2 Efecto del enganche de las paredes de los dominios. 448

C.2.1.3 Proceso de magnetización irreversible. 449

C.2.1.4 Proceso de magnetización reversible. 450

C.2.1.5 Magnetización total. 451

C.2.1.6 Clausura de curvas inversas y ciclo menores asimétricos. 451

C.2.1.7 Variante de Carpenter. 452

C.2.2 Caracterización. 452

C.2.3 Desarrollo numérico. 454

C.2.4 Modelo dinámico. 456

C.2.5 Valoración. 458

### **C.3 Modelo de Globus. 459**

C.3.1 Fundamento. 459

C.3.1.1 Partículas de Globus. 459

C.3.1.2 Procesos de magnetización irreversible. 460

C.3.1.3 Procesos de magnetización reversibles. 462

C.3.1.4 Ciclo de histéresis. 462

C.3.2 Caracterización. 463

C.3.3 Valoración. 463

### **C.4 Modelo de Enokizono-Soda. 464**

C.4.1 Fundamento. 464

C.4.2 Caracterización. 465

C.4.3 Valoración. 467

### **C.5 Comparación de los modelos analizados. 468**

C.5.1 Comparación de características. 469

C.5.1.1 Mecanismo de representación del proceso de magnetización. 469

C.5.1.2 Efecto de la anisotropía magnetocristalina. 470

C.5.1.3 Efecto de los diversos tipos de interacción. 471

C.5.1.4 Efecto de los puntos de enganche. 472

C.5.1.5 Curvas inversas. 474

C.5.1.6 Granos con múltiples dominios. 475

C.5.1.7 Complejidad del algoritmo. Tiempo de cálculo estimado. 475

C.5.2 Comparación de requerimientos para caracterización. 476

C.5.2.1 Modelo de Stoner-Wohlfarth. 476

C.5.2.2 Modelo de Jiles-Atherton. 477

C.5.2.3 Modelo de Preisach. 477

C.5.2.4 Modelo dinámico tipo Preisach de Bertotti. 478

C.5.2.5 Modelo dinámico tipo Preisach de Mayergoyz. 479

C.5.2.6 Modelo de Globus. 479

C.5.2.7 Modelo de Enokizono-Soda. 479

### **C.6 Conclusiones. 480**

## **Apéndice D. Características de las muestras. 483**

### **D.1 Introducción. 483**

#### **D.2 Muestra A. 484**

D.2.1 Características generales. 484

D.2.2 Características de los arrollamientos. 484

D.2.3 Geometría y dimensiones del núcleo. 486

D.2.4 Características de la chapa magnética del núcleo. 487

D.2.5 Características magnéticas. 487

D.2.5.1 Característica normal o de primera inducción. 487

D.2.5.2 Ciclos de histéresis cuasiestáticos. 488

D.2.5.3 Ciclos de histéresis a varias frecuencias. 488

D.2.5.4 Curvas inversas de primer orden. 489

D.2.5.5 Curvas inversas de segundo orden. 489

#### **D.3 Muestra B. 498**

- D.3.1 Características generales. 498
- D.3.2 Características de los arrollamientos. 498
- D.3.3 Geometría y dimensiones. 498
- D.3.4 Características de la chapa magnética del núcleo. 499
- D.3.5 Características magnéticas. 499
  - D.3.5.1 Ciclos de histéresis cuasiestáticos. 499
  - D.3.5.2 Curva normal o de primera inducción. 500
  - D.3.5.3 Curvas inversas de primer orden. 500

#### **D.4 Muestra C. 504**

- D.4.1 Características generales. 504
- D.4.2 Características de los arrollamientos. 504
- D.4.3 Geometría y dimensiones de núcleo. 504
- D.4.4 Características de la chapa magnética del núcleo. 505
- D.4.5 Características magnéticas. 505
  - D.4.5.1 Curva normal o de primera inducción. 505
  - D.4.5.2 Ciclos de histéresis cuasiestáticos. 505
  - D.4.5.3 Ciclos de histéresis a varias frecuencias. 506
  - D.4.5.4 Curvas inversas de primer orden. 507

### **Apéndice E. Características de los equipos de medición. 515**

#### **E.1 Fluxómetro 3254 de Yokogawa. 515**

#### **E.2 Vatímetro de factor de potencia bajo 2041 de Yokogawa. 516**

#### **E.3 Tarjeta de adquisición de datos PCL-1800 de National Instruments. 517**

### **Apéndice F. Códigos del modelo de histéresis. 521**

#### **F.1 Propósito y organización del apéndice. 521**

#### **F.2 Caracterización del modelo de Preisach mediante el método de Mayergoyz. 522**

- F.2.1 Programa master. 522
- F.2.2 Subprograma *plano\_preisach*. 523
  - F.2.2.1 Función. 523
  - F.2.2.2 Entradas-salidas. 523
- F.2.3 Subprograma *everett01*. 523
  - F.2.3.1 Función. 523

- F.2.3.2 Entradas-salidas. 523
- F.2.4 Suprograma *f\_densidad01*. 524
  - F.2.4.1 Función. 524
  - F.2.4.2 Entradas-salidas. 524
- F.3 Caracterización del modelo de Preisach mediante ajuste a una lorentziana factorizada. 525**
  - F.3.1 Función. 525
  - F.3.2 Primera lorentziana. Subprograma *lorentziana1*. 525
    - F.3.2.1 Entradas-salidas. 525
  - F.3.3 Segunda lorentziana. Subprograma *lorentziana2*. 526
    - F.3.3.1 Entradas-salidas. 526
- F.4 Caracterización del modelo de Preisach mediante ajuste a una gaussiana-log-normal. 526**
  - F.4.1 Primera gaussiana-log-normal. Subprograma *gaussiana\_lognormal1*. 527
    - F.4.1.1 Cálculos previos. Ajuste por el método della Torre-Cardelli. 527
    - F.4.1.2 Entradas-salidas. 527
  - F.4.2 Segunda gaussiana-log-normal. Subprograma *gaussiana\_lognormal2*. 528
    - F.4.2.1 Entradas-salidas. 528
- F.5 Caracterización del modelo de Preisach mediante ajuste de una gaussiana-gaussiana. 528**
  - F.5.1 Suprograma *gaussiana-gaussiana*. 528
  - F.5.2 Entradas-salidas. 529
- F.6 Desarrollo del modelo de Preisach por integrales de Everett. 529**
  - F.6.1 Programa master. Validación. 529
  - F.6.2 Subprograma *preisach\_everett*. 530
    - F.6.2.1 Función. 530
    - F.6.2.2 Entradas-salidas. 530
    - F.6.2.3 Subprgrama *ev*. 530
- F.7 Desarrollo del modelo de Prisach mediante su definición matemática. 531**
  - F.7.1 Programa master. Validación. 531
  - F.7.2 Subprograma *operadores\_estaticos*. 533
    - F.7.2.1 Función. 533
    - F.7.2.2 Entradas-salidas. 533
  - F.7.3 Subprograma *preisach\_integral*. 534
    - F.7.3.1 Función. 534
    - F.7.3.2 Entradas-salidas. 534

**F.8 Desarrollo del modelo de Preisach mediante el método de Naidu. 534**

F.8.1 Programa master. Validación. 535

F.8.2 Subprograma *función\_F2*. 535F.8.3 Subprograma *función\_F1*. 535F.8.4 Subprograma *primera\_magnetizacion*. 535F.8.5 Subprograma *principal\_creciente* y *principal\_decreciente*. 535**F.9 Modelo dinámico de Bertotti. 536**

F.9.1 Programa master. Validación. 536

F.9.2 Subprograma *operadores\_dinamicos*. 536

F.9.2.1 Función. 536

F.9.2.2 Entradas-salidas. 536

**F.10 Modelo de Preisach inverso. 537**

F.10.1 Programa master. Validación. 537

F.10.2 Subprograma *plano\_preisach\_inverso*. 539

F.10.2.1 Función. 539

F.10.2.2 Entradas-salidas. 539

F.10.3 Subprograma *everett\_inversa01*. 539

F.10.3.1 Función. 539

F.10.3.2 Entradas-salidas. 540

F.10.4 Subprograma *f\_densidad\_inversa*. 540

F.10.4.1 Función. 540

F.10.4.2 Entradas-salidas. 540

**Apéndice G. Códigos del equipo histeresisgráfico. 541****G.1 Propósito y organización del capítulo. 541****G.2 Programa master. 541**

G.2.1 Función. 541

G.2.2 Procedimiento y códigos. 542

**G.3 Subprograma "periodo". 551**

G.3.1 Función. 551

G.3.2 Entradas y salidas. 551

G.3.3 Procedimiento y código. 551

**G.4 Subprograma "ajuste". 553**

G.4.1 Función. 553

G.4.2 Entradas y salidas. 553

G.4.3 Procedimiento y códigos. 554

**G.5 Subprograma "pseudo\_I". 557**

G.5.1 Función. 557

G.5.2 Entradas y salidas. 557

G.5.3 Código. 558

**G.6 Subprograma "integral". 558**

G.6.1 Función. 558

G.6.2 Entradas y salidas. 558

G.6.3 Procedimiento y código. 558

**G.7 Subprograma "offset". 559**

G.7.1 Función. 559

G.7.2 Entradas y salidas. 559

G.7.3 Procedimiento y código. 559

**G.8 Subprograma "centrado". 560**

G.8.1 Función. 560

G.8.2 Entradas y salidas. 560

G.8.3 Procedimiento y código. 560

**G.9 Subprograma "curvas". 561**

G.9.1 Función. 561

G.9.2 Entradas y salidas. 561

G.9.3 Procedimiento y código. 562

**G.10 Subprograma "archivo". 562**

**Apéndice H. Códigos de la aplicación. 567**

**H.1 Propósito y organización del apéndice. 567**

**H.2 Proceso. 567**

**H.3 Preproceso. 567**

**Apéndice I. Publicaciones derivadas de la tesis. 569**

**I.1 Artículos en revistas. 569**

**I.2 Ponencias en congresos. 569**

**Apéndice J. Índice de figuras. 573****Apéndice K. Índice de tablas. 589**

## Lista de símbolos

### *1 Variables relacionadas con el proceso de magnetización*

$A, \vec{A}$	Área de un momento magnético
$A_w$	Área de una pared de dominio magnético
$a$	Espaciamiento de la red
$B, \vec{B}$	Inducción magnética
$B_S$	Inducción del punto máximo del ciclo límite
$E_{ex}$	Energía de intercambio
$E_H$	Energía por unidad de volumen de un dominio expuesto a un campo externo
$E_k$	Energía de anisotropía magnetocristalina o anisotrópica
$E_m$	Energía magnetostática
$E_{ms}$	Energía de anisotropía magnetoelástica o magnetostrictiva
$E_w$	Energía de pared por unidad de área de pared de dominio
$E_{wT}$	Energía total por unidad de área de pared de dominio
$F_w$	Fuerza en una pared de un dominio
$e$	Carga eléctrica del electrón
$H, \vec{H}$	Campo magnético
$H_C$	Campo coercitivo
$H_S$	Campo del punto máximo del ciclo límite
$I$	Intensidad eléctrica
$J_{ex}$	Integral de intercambio
$j, \vec{j}$	Número cuántico del momento angular total
$k$	Constante de anisotropía
$l, \vec{l}$	Número cuántico del momento angular orbital
$M, \vec{M}$	Magnetización

$\vec{M}_s, \vec{M}_s$	Magnetización espontánea de un dominio
$\vec{m}, \vec{m}$	Momento magnético o momento bipolar
$m_e$	Masa del electrón
$\vec{m}_o, \vec{m}_o$	Momento magnético orbital
$\vec{m}_s, \vec{m}_s$	Momento magnético de espín
$\vec{m}_t, \vec{m}_t$	Momento magnético total
$n$	Número cuántico principal
$\vec{p}_o, \vec{p}_o$	Momento angular orbital
$\vec{p}_s, \vec{p}_s$	Momento angular de espín
$s, \vec{s}$	Número cuántico de espín
$\alpha$	Constante del campo de interacción medio del modelo de Jiles-Atherton
$\chi$	Susceptibilidad
$\bar{\chi}$	Susceptibilidad relativa
$\Delta E_b$	Cambio de energía en una pared debido a su encurvamiento
$\Delta E_H$	Energía aportada por un campo externo a un dominio
$\Delta E_w$	Cambio de energía causado por un desplazamiento de una pared
$\delta$	Grosor de la pared de un dominio
$\gamma$	Constante del campo medio de la teoría de Weiss
$\lambda$	Coefficiente de magnetostricción
$\mu$	Permeabilidad absoluta
$\mu_B$	Magnetón de Bohr
$\mu_o$	Permeabilidad en el vacío ( $4\pi 10^{-7}$ H/m)
$\nu$	Reluctividad
$\sigma$	Tensión mecánica
$\hbar$	Constante de Planck modificada
$\mathcal{H}$	Hamiltoniano de la interacción

## 2 Variables relacionadas con el modelo de Preisach

$A$	Área del plano de Preisach en el método de d'Alessandro-Ferrero
$a$	Inducción de conmutación de +1 a -1 del operador de histéresis del modelo inverso
$a$	Parámetro del método Takahashi-Miyabara-Fujiwara
$\hat{a}$	Coefficiente histerésico del modelo dinámico de Mayergoyz

---

$\tilde{B}$	Inducción estática en el modelo dinámico de Mayergoyz
$B_{HI}$	En una curva inversa de primer orden con punto de inversión $HI$ , valor de la inducción en el punto de inversión
$B_{HI,Hx}$	En una curva inversa de primer orden con punto de inversión $HI$ , valor de la inducción para un valor de campo $Hx$
$b$	Inducción de conmutación de -1 a +1 del operador de histéresis del modelo inverso
$b$	Parámetro del método Takahashi-Miyabara-Fujiwara
$E$	Integral de Everett
$\varepsilon$	Integral de Everett inversa
$F(H)$	Función del método de Naidu
$g$	Función en el modelo de Basso-Bertotti
$h_c$	Campo coercitivo de un operador de histéresis
$h_i$	Campo de interacción de un operador de histéresis
$k$	Constante del modelo dinámico de Bertotti
$L$	Línea de estado del plano de Preisach
$R$	Función no-congruente para el modelo de Preisach producto
$S_+$	Región del plano de Preisach con operadores en estado +1
$S_-$	Región del plano de Preisach con operadores en estado -1
$T(\alpha, \beta)$	Triángulo del plano de Preisach delimitado por el punto $(\alpha, \beta)$
$t_\alpha$	En el modelo de Bertotti. Instante en el que comienza el intervalo $\Delta t_\alpha$
$t_\beta$	En el modelo de Bertotti. Instante en el que comienza el intervalo $\Delta t_\beta$
$\alpha$	Campo de conmutación de -1 a +1 del operador de histéresis
$\beta$	Campo de conmutación de +1 a -1 del operador de histéresis
$\Delta t_\alpha$	En el modelo de Bertotti. Intervalo de tiempo dentro de un periodo de campo en el que se cumple que $H(t) > \alpha$
$\Delta t_\beta$	En el modelo de Bertotti. Intervalo de tiempo dentro de un periodo de campo en el que se cumple que $H(t) < \beta$
$\delta_{a,b} B(t)$	Valor del operador de histéresis del modelo inverso
$\gamma_{\alpha\beta} H(t)$	Valor del operador de histéresis $(\alpha, \beta)$ para un campo $H(t)$ determinado
$\mu$	Función densidad
$\nu$	Función densidad del modelo inverso
$\tau$	Tiempo de relajación del modelo dinámico de Mayergoyz
$\oplus$	Operador suma truncada en el modelo dinámico de Bertotti

### 3 Variables relacionadas con el cálculo numérico

$A, \vec{A}, A$	Potencial vector magnético
$A_h$	Área del ciclo de histéresis
$A_i$	Potencial vector magnético en el nodo $i$ para el paso de tiempo actual. Incógnita de la ecuación en difusión en diferencias
$a$	Mitad de la dimensión $x$ (anchura) del núcleo del transformador. Distancia desde la superficie hasta la línea de simetría
$a_i$	Potencial vector magnético en el nodo $i$ para el paso de tiempo anterior de la ecuación de difusión en diferencias.
$B, \vec{B}, B$	Inducción
$b$	Dimensión $y$ (profundidad) del núcleo del transformador
$c$	Factor de llenado o de apilamiento de las láminas del núcleo del transformador
$D, \vec{D}, D$	Desplazamiento
$E, \vec{E}, E$	Campo eléctrico
$H, \vec{H}, H$	Campo magnético
$H_o$	Campo en la superficie del núcleo
$H_i$	Valor del campo en el nodo $i$ en el paso de tiempo actual. Incógnita de la ecuación de difusión en diferencias
$h$	Dimensión $z$ (altura) del núcleo del transformador
$h_i$	Valor del campo en el nodo $i$ en el paso de tiempo anterior
$I, \vec{I}, I$	Corriente eléctrica
$I_o$	Intensidad de la fuente de corriente que alimenta al arrollamiento de excitación
$\hat{i}$	Coseno director de la dimensión $x$
$J, \vec{J}, J$	Densidad de intensidad
$\hat{j}$	Coseno director de la dimensión $y$
$\hat{k}$	Coseno director de la dimensión $z$
$\hat{n}$	Vector unitario de una superficie
$\vec{P}$	Vector de Poynting
$P_c$	Pérdidas por corrientes inducidas
$p_c$	Pérdidas específicas por corrientes inducidas
$P_{ex}$	Pérdidas por exceso
$p_{ex}$	Pérdidas específicas por exceso
$P_{Fe}$	Pérdidas en el hierro

---

$p_{Fe}$	Pérdidas específicas en el hierro
$P_h$	Pérdidas por histéresis
$p_h$	Pérdidas específicas por histéresis
$Q$	Carga eléctrica
$R$	Función residuo
$T, \vec{T}, T$	Potencial vector eléctrico
$t$	Tiempo
$U$	Potencial escalar eléctrico
$V$	Volumen del núcleo del transformador
$v_l$	Tensión de la fuente de tensión que alimenta al arrollamiento de excitación
$\Delta t$	Tiempo entre nodos de temporales
$\Delta x$	Distancia entre nodos de espacio
$\Gamma_{0l}$	Frontera entre la región $\Omega_0$ y la región $\Omega_l$
$\Gamma_{l2}$	Frontera entre la región $\Omega_l$ y la región $\Omega_2$
$\varepsilon$	Fuerza electromotriz
$\phi$	Flujo magnético
$\mu$	Permeabilidad magnética en general. Permeabilidad magnética del núcleo del transformador
$\mu_r$	Permeabilidad relativa
$\bar{\mu}$	Constante que controla el proceso de convergencia en el método del punto fijo
$\rho$	Densidad volumétrica de carga eléctrica
$\sigma$	Conductividad eléctrica
$\sigma_l$	Conductividad eléctrica del arrollamiento de excitación
$\sigma_2$	Conductividad eléctrica del núcleo del transformador
$\tau$	Espesor de una lámina del núcleo
$\Omega_0$	Región de aire exterior al transformador
$\Omega_l$	Región del arrollamiento de excitación
$\Omega_2$	Región del núcleo del transformador
$\omega$	Pulsación
$\psi$	Potencial escalar magnético
$\zeta$	Constante de la ecuación de difusión en diferencias finitas
$\mathcal{R}$	Reluctancia
$\mathcal{R}_0$	Reluctancia del aire
$\mathcal{R}_{fe}$	Reluctancia del núcleo ferromagnético

#### ***4 Variables relacionadas con las muestras y los ensayos***

$\mathcal{H}$	Hamiltoniano de la interacción
$A$	Factor de corrección del vatímetro de bajo factor de potencia
$A_f$	Factor de corrección que considera el porcentaje de pérdidas por corrientes inducidas
$A_h$	Factor de corrección que considera el porcentaje de pérdidas por histéresis
$B_m$	Inducción máxima
$H_m$	Campo máximo
$f$	Frecuencia
$i_l$	Intensidad de salida del amplificador de transconductancia
$i'_l$	Intensidad de salida del amplificador de transconductancia muestreada y ajustada
$l$	Longitud media efectiva del circuito magnético
$l'$	Longitud media aparente del circuito magnético
$m$	Masa efectiva del circuito magnético
$m'$	Masa aparente del circuito magnético
$N_l$	Número de espiras del arrollamiento de excitación
$S$	Superficie transversal del circuito magnético
$u_2$	Fuerza electromotriz en el arrollamiento secundario de la muestra
$u_{RI}$	Tensión en la resistencia $RI$ del amplificador de transconductancia
$V$	Volumen de la muestra
$\phi$	Flujo en el núcleo de la muestra
$\eta_f$	Coeficiente de la ecuación de Steinmetz para las pérdidas por corrientes inducidas
$\eta_h$	Coeficiente de la ecuación de Steinmetz para las pérdidas por histéresis
$\xi$	Factor de forma

## 1. Introducción

### *1.1 Motivación y justificación del presente trabajo*

#### **1.1.1 Problemática de la histéresis magnética en el análisis y diseño de sistemas con materiales ferromagnéticos**

Existen en la actualidad una multitud de sistemas que emplean de una forma u otra materiales ferromagnéticos. Por citar unos cuantos, valgan los siguientes casos. Los sistemas de grabación basados en cintas magnéticas y memorias magnéticas. Los ensayos no destructivos basados en corrientes inducidas cuando se aplican sobre materiales ferromagnéticos. Los ensayos no destructivos basados en las partículas magnéticas o los basados en el análisis de la histéresis magnética o de los saltos de Barkhausen. La gran variedad de máquinas eléctricas, ya sean transformadores así como accionamientos eléctricos. Los aceleradores de partículas que requieren de potentes imanes. Y un largo etcétera.

Todos ellos con sus particularidades propias, padecen de un mismo problema común en el análisis o diseño, la consideración más o menos realista de la magnetización de los materiales ferromagnéticos.

Los materiales ferromagnéticos presentan un comportamiento muy complicado de considerar. La magnetización (o inducción) que presenta el material no solo depende del valor actual del campo sino que también depende del historial de intensidad de campo a la cual ha sido sometido el material ferromagnético hasta ese momento, esto es, presenta un fenómeno de memoria local. Este comportamiento si se visualiza gráficamente presenta unas formas típicas con histéresis (del griego ὑστέρησις, retardo). Por ello, suele englobarse al proceso de magnetización de los materiales ferromagnéticos con el término genérico de histéresis magnética.

No vamos a extendernos en este momento en las razones, pero la predicción del comportamiento de los materiales ferromagnéticos no es trivial. Tanto es así que, actualmente, no disponemos de un modelo que pueda considerarse "definitivo" de histéresis. Esto complica mucho el diseño y análisis de estos sistemas ferromagnéticos si deseamos incluir el efecto de la histéresis en ellos.

### **1.1.2 Focalización de la problemática de la histéresis magnética en el ámbito de las máquinas eléctricas.**

Concretemos el problema de la histéresis magnética para el caso del análisis y diseño de las máquinas eléctricas. Estas máquinas, sea cual sea el tipo, tienen en común la presencia de un núcleo de material ferromagnético que en la mayoría de los casos presenta una geometría compleja, con dientes, ranuras y otra serie de irregularidades. Por tanto en el análisis de las máquinas eléctricas también tendremos el problema de la histéresis magnética.

En general, es de interés conocer la distribución del campo magnético en el núcleo magnético. A partir de ella se puede determinar la forma de onda del flujo y por tanto la forma de onda de fuerza electromotriz en bornes de un arrollamiento, o bien la forma de onda de la intensidad de excitación, o incluso para determinar las pérdidas magnéticas (o pérdidas en el hierro) de la máquina. Todos ellos son parámetros de interés para el ingeniero ya sea para predecir el comportamiento de la máquina en la red o para mejorar el rendimiento de la misma.

La determinación de la distribución del campo en el núcleo se realiza mediante la ecuación de difusión del campo que se obtiene a partir de las ecuaciones de Maxwell. Esto de por sí, ya es un problema ciertamente complejo. Pero que más o menos está resuelto aplicando métodos numéricos, siempre y cuando se simplifique el comportamiento del material ferromagnético prescindiendo de la histéresis. La consideración de la histéresis magnética complica mucho la resolución de la ecuación de difusión.

En definitiva, para el caso concreto de las máquinas eléctricas el problema de la histéresis magnética presenta una doble vertiente. Primero ser capaces de predecir la magnetización del material ferromagnético con un modelo. Y después combinar el modelo de histéresis con el método numérico para ser capaces de calcular la distribución del campo magnético en el núcleo. Por tanto el modelo no puede ser uno cualquiera, ha de ser preciso, fiable, combinable con el método magnético y ser útil para el ámbito de la ingeniería eléctrica.

Por supuesto que esta problemática expuesta para las máquinas eléctricas, la presentan de una forma u otra, los demás sistemas ferromagnéticos. He aquí el interés de nuestro trabajo, lo aquí expuesto se puede extrapolar a otros casos, aunque nosotros nos hemos centrado en las particularidades de las máquinas eléctricas, y hemos realizado nuestra elección de soluciones en función de este ámbito de trabajo.

Pensamos que las razones expuestas aquí son suficientes para justificar un trabajo de investigación. Tanto es así, que es fruto de trabajo de muchos investigadores de primera línea a nivel internacional.

## ***1.2 Estado del arte***

Debido a que en nuestro trabajo intervienen diversos aspectos analizaremos el estado de cada uno de ellos por separado.

### **1.2.1 Modelización de la histéresis magnética**

La modelización de la histéresis magnética es objeto de investigación de un gran número de investigadores desde los albores del siglo XX. Se han propuestos múltiples métodos para modelizar la histéresis, pero hasta el momento de escribir este trabajo no puede considerarse que se haya logrado un modelo definitivo. Todos los modelos contienen puntos débiles demasiado importantes para poder considerarlos como el modelo definitivo. Los modelos basados en la descripción cuántica del material podrían ser considerados los más ajustados, pero la propia naturaleza estocástica de los saltos de Barkhausen hace que estos modelos sean de escaso interés a escala macroscópica para aplicaciones de ingeniería. Los modelos macroscópicos sólo son capaces de describir aspectos parciales del proceso de magnetización de los materiales ferromagnéticos.

No es nuestra intención desarrollar un modelo de histéresis, sino tratar de considerar el efecto de la histéresis en nuestros cálculos de máquinas eléctricas. Por ello nuestra primera tarea ha sido recopilar los modelos de histéresis que han ido sobreviviendo a los análisis de los diversos investigadores que los han ido empleando a lo largo del siglo XX. Seguidamente hemos sometido los modelos recopilados a un análisis con objeto de ver si alguno de ellos nos era de utilidad a nuestro objetivo. De los modelos actuales más extendidos, el modelo de Jiles-Atherton [Jiles y Atherton, 1986] y el modelo de Preisach [Preisach, 1935] (con sus diversas variantes y generalizaciones), son los dos modelos que mejor se ajustan a nuestras

necesidades. Se pueden emplear como método numérico y presentan una fiabilidad aceptable sin ser excesivamente complicados de caracterizar.

Otro modelo también interesante es el de Enokizono-Soda [Enokizono y Fujita, 2002; Soda y Enokizono, 2000], pero para caracterizarlo correctamente se necesita tomar datos experimentales del campo en dos dimensiones, lo cual se escapa a las posibilidades de nuestro laboratorio.

Por las razones indicadas en el trabajo (apéndice-C) nos decantamos por el modelo de Preisach. Este modelo ha sobrevivido a más de 60 años de análisis científico y de la competencia de otros modelos que han ido quedando olvidados. El modelo de Preisach original, que se suele denominar también clásico presenta una serie de carencias que en la actualidad han ido siendo superadas con diversas generalizaciones del modelo. Actualmente hay versiones del modelo -como el modelo móvil, el modelo producto o el modelo della Torre-Oki-Kadar- que pueden considerar la acomodación y el postefecto magnético. Una gran parte del trabajo desarrollada en este sentido es debida a Edward della Torre de la Universidad de Washington.

Otra generalización del modelo de Preisach de gran interés es la propuesta de modelo dinámico de Giorgio Bertotti del Instituto Electrotécnico Galileo Ferraris. Los trabajos de Giorgio Bertotti son de gran importancia y abarcan no sólo el modelo de Preisach, sino también la descripción y comprensión de los fenómenos que acontecen en la magnetización de los materiales ferromagnéticos e incluso de las pérdidas magnéticas.

Uno de los artífices de que actualmente el modelo de Preisach sea comprendido y aplicado de forma efectiva es Isaak D. Mayergoyz, cuyos libros [Mayergoyz, 1991; Mayergoyz, 2003] son referencia casi obligada para cualquier investigador interesado en el modelo de Preisach. El profesor Mayergoyz es además el creador de varias mejoras y variantes del modelo de Preisach, incluyendo un modelo dinámico.

Uno de los aspectos de mayor controversia del modelo de Preisach es su carácter fenomenológico. El modelo no tiene ninguna relación con los procesos físicos que acontecen en la magnetización de los materiales, pues reproduce las curvas de histéresis a partir del historial de campo con una gran fiabilidad, sin embargo no explica que ocurre en el material. En este sentido el modelo de Preisach se asimila a un sistema de ajuste de curvas muy sofisticado. Giorgio Bertotti ha tratado de encontrar las conexiones entre los operadores del

modelo de Preisach y el proceso de magnetización. Sus conclusiones, expuestas en su excelente libro sobre histéresis magnética [Bertotti, 1998], se incluyen en el presente trabajo.

En nuestra experiencia uno de los grandes problemas -o mejor aun el gran problema- del modelo de Preisach es la caracterización del modelo cuando se emplea para ciertas aplicaciones. Generalmente el modelo de Preisach se caracteriza por ajuste de curvas. Se trata de un método sencillo que no requiere de demasiados datos experimentales. Este sistema no es válido para máquinas eléctricas. Los núcleos de materiales magnéticos blandos, presentan una característica tal, que caracterizando el modelo por ajuste, no se logran buenos resultados. En la actualidad, además de los métodos paramétricos o por ajuste también se han desarrollado una serie de métodos no paramétricos alternativos. Entre estos últimos destaca el método de Mayergoyz que permite caracterizar el modelo de Preisach a partir de un conjunto experimental de curvas de magnetización denominadas curvas inversas de primer orden. Este método implica un cierto esfuerzo experimental, pero con él se logran excelentes resultados en la simulación de los núcleos de las máquinas eléctricas.

En su desarrollo, el modelo de Preisach, también ha experimentado una evolución. Aparte de la aplicación directa de la ecuación base del modelo (o su interpretación geométrica) han aparecido una serie de alternativas debidas a diversos investigadores. Entre ellas destaca el método de d'Alessandro-Ferrero que permite desarrollar y caracterizar el modelo a partir únicamente de ciclos de histéresis (más sencillo de obtener que las curvas inversas de primer orden del método Mayergoyz) y el método de Naidu. Este último permite aplicar el modelo de Preisach como varias expresiones analíticas sencillas a aplicar en función del historial de campo y además únicamente necesita de una rama del ciclo de histéresis límite para caracterizar el modelo de Preisach. Ambos métodos de desarrollo llevan implícita una caracterización del modelo a partir de datos experimentales muy sencillos de obtener, pero justamente ahí está también su debilidad. Están caracterizados a partir de datos estadísticamente más pobres, por lo que los resultados también son más pobres. Una alternativa válida es el desarrollo a partir de las integrales de Everett propuesto por Isaak D. Mayergoyz.

Respecto a la información disponible sobre el modelo de Preisach a pesar de los excelentes libros sobre modelos de histéresis de Isaak D. Mayergoyz, del libro de histéresis magnética de Giorgio Bertotti y de una considerable cantidad de artículos publicados, sobretodo en el IEEE Transactions on Magnetics, esta información está muy fragmentada y de difícil comprensión. Tanto es así que se requiere de un notable esfuerzo si se desea desarrollar el

modelo de Preisach para una aplicación determinada. No existe un texto con una exposición clara del desarrollo del modelo. Esta dificultad es mucho mayor cuando se aplica una de las generalizaciones del modelo.

### **1.2.2 Cálculo de la distribución del campo magnético en núcleos ferromagnéticos considerando el efecto de la histéresis**

Como ya hemos comentado antes, el cálculo de la distribución del campo se realiza a partir de la ecuación de difusión que se deduce a partir de las ecuaciones de Maxwell. La dificultad de resolución de esta ecuación es muy grande cuando se aplica a geometrías complejas como las que nos encontramos en las máquinas eléctricas. La aplicación del método de los elementos finitos a los cálculos en electromagnetismo, a la ingeniería eléctrica y por supuesto las máquinas eléctricas ha supuesto la superación de esta dificultad. La aplicación del método de los elementos finitos permite el cálculo del campo magnético (u otras variables electromagnéticas de interés) en prácticamente cualquier geometría, incluso tridimensional. En este sentido se puede considerar que el problema está superado. Como muestra del estado del arte de la aplicación del método de los elementos finitos en ingeniería eléctrica valga como referencia los libros de P.P Silvester y R.L. Ferrari [Silvester y Ferrari, 1996] o Sheppard J. Salon [Salon, 1995] por mencionar obras que, sin ser lo último publicado, son de referencia en el tema.

No obstante, todo lo dicho se puede considerar correcto siempre y cuando no se considere el efecto de la histéresis cuando se resuelve la ecuación de difusión en materiales ferromagnéticos o se considere de una forma simplificada. En tal caso, no se puede considerar que el problema esté resuelto tan claramente. Tanto es así que, en nuestro conocimiento, no hay ningún programa comercial de elementos finitos que considere realmente la histéresis. Existe una colaboración de Edward della Torre y su equipo con los responsables del programa “Flux” para tratar de incluir de alguna manera el modelo de Preisach en este programa.

Investigadores de todo el mundo están trabajando en la combinación del modelo de Preisach con los diversos métodos numéricos, lográndose poco a poco resultados interesantes, si bien aún no puede considerarse que exista un procedimiento definitivo. Existe una cierta dispersión –a parte de poca transparencia- en los métodos y procedimientos empleados. Las referencias más interesantes son: [Albanese y Rubinacci, 1992], [Boglietti, Cavagnino,

Lazzari et al, 2003], [Bottauscio, Chiampi, Dupré et al, 1998], [Gyselinck, Vandervelde, Makareev et al 2000], [Kim, Jung y Hong, 1998], entre otras.

Respecto a la aplicación y desarrollo del método de los elementos finitos existe mucha y excelente información. Pero, como es lógico, no ocurre así con la combinación del modelo de Preisach con los métodos numéricos. En este caso la información aún es más confusa y fragmentada que en el caso del desarrollo del modelo de Preisach comentado en el apartado anterior.

### ***1.3 Objetivos y alcance de la tesis***

El trabajo presentado trata sobre la modelización de la histéresis magnética y su aplicación a cálculos numéricos en máquinas eléctricas. En concreto se persiguen dos objetivos principales. El primer objetivo es la modelización de la histéresis magnética propiamente dicha y el segundo, la combinación del modelo de histéresis con los métodos de cálculo numérico que nos permite determinar la distribución del campo magnético en materiales ferromagnéticos. Todo esto es aplicado al ámbito de las máquinas eléctricas.

Respecto al primer objetivo principal, la modelización de la histéresis magnética, se puede desglosar en los siguientes objetivos:

- Analizar los modelos de histéresis actuales y determinar cual de ellos es el más indicado para utilizarlo en combinación con los métodos numéricos aplicados en la determinación de la difusión del campo magnético en los núcleos ferromagnéticos de las máquinas eléctricas. El resultado fue la elección del modelo de Preisach.
- Encontrar un procedimiento de caracterización del modelo de Preisach válido para las características de los núcleos ferromagnéticos de las máquinas eléctricas.
- Desarrollar el modelo de Preisach
- Validar el modelo de Preisach con el método de caracterización y tipo de desarrollo adoptado en chapas magnéticas de núcleos de máquinas eléctricas.
- Ampliar el modelo de Preisach a modelo dinámico

- Desarrollar el modelo dinámico de Preisach
- Validar el modelo dinámico de Preisach para la muestras ferromagnéticas disponibles
- Desarrollar un modelo de Preisach totalmente inverso.
- Validar el modelo de Preisach inverso

Para caracterizar el modelo de Preisach, hemos optado por el método de Mayergoyz, el cual implica la obtención experimental de un conjunto de curvas inversas de primer orden. Por lo cual a los objetivos anteriores cabe añadir los siguientes:

- Obtención experimental de las curvas inversas de primer orden mediante un procedimiento asequible. Siendo nuestra primera opción el desarrollo de un ensayo balístico con el cual se obtuvieron las curvas experimentales deseadas.
- El modelo balístico presenta unas carencias y dificultades que deben ser superadas. Para ello hemos tratado de desarrollar un equipo controlado por ordenador para obtener las curvas y caracterizar el modelo de forma automática.

El segundo objetivo principal es el cálculo de la distribución del campo magnético en los núcleos ferromagnéticos de las máquinas eléctricas. Esto se ha probado a partir de una aplicación la cual nos ha permitido analizar la combinación del modelo de Preisach con los métodos numéricos de resolución de la ecuación de difusión. La aplicación ha consistido en determinar el campo magnético, el flujo y las pérdidas magnéticas disgregadas en el núcleo de un transformador monofásico de 220V / 380V y 1,3kVA. Se puede desglosar en los siguientes objetivos:

- Desarrollo de la ecuación de difusión a partir de las ecuaciones de Maxwell para el transformador
- Determinar las ventajas e inconvenientes de las diversas formulaciones de la ecuación de difusión cuando se combina con el modelo de Preisach
- Combinar el método de resolución de la ecuación de difusión y el método de resolución del sistema de ecuaciones no lineales resultante con el modelo de Preisach

- Determinar y resolver los problemas que aparecen al combinar el modelo de Preisach con el método numérico.
- Desarrollar un algoritmo de cálculo
- Aplicar el algoritmo de cálculo para determinar la distribución del campo, el flujo y las pérdidas magnéticas disgregadas en el núcleo de un transformador. Con el cálculo del flujo se logra validar el algoritmo de cálculo
- Determinar experimentalmente el flujo y las pérdidas magnéticas disgregadas del transformador.

#### ***1.4 Principales aportaciones de la tesis***

Algunas aportaciones de interés son:

- Análisis y comparación los diversos métodos de desarrollo y caracterización del modelo de Preisach, dando pautas para su realización práctica. Así mismo se presentan las principales características del modelo. Que tengamos constancia, hasta la fecha, este es el primero documento que presenta tanta información sobre el modelo de Preisach.
- Desarrollo de un modelo tipo-Preisach dinámico a partir de una idea de Giorgio Bertotti.
- Desarrollo de un modelo de Preisach totalmente inverso.
- Realización de un procedimiento experimental para obtener las curvas inversas de primer orden necesarias para caracterizar el modelo de Preisach sin necesidad de instrumentación sofisticada.
- Cálculo de la distribución del campo magnético  $H(x,t)$  y el flujo en el núcleo de un transformador tomando en consideración la histéresis magnética.
- Aportar un procedimiento numérico para combinar el modelo de Preisach con la resolución de la ecuación mediante el método de las diferencias finitas.

- Análisis de los problemas que surgen al combinar del modelo de Preisach con los métodos numéricos.

### ***1.5 Estructura y organización de la tesis***

La tesis está dividida en dos grandes bloques, el modelo de histéresis y la combinación del modelo de histéresis con los métodos numéricos para calcular el campo magnético en materiales ferromagnéticos.

En la primera parte se desarrolla el modelo de histéresis y las variantes necesarias para su aplicación posterior. Dentro de esta parte se encuentran los siguientes capítulos.

- *Capítulo 2. Magnetización en los materiales ferromagnéticos.* En este capítulo se exponen los procesos físicos que intervienen en la magnetización de los materiales ferromagnéticos. Esto nos permitirá comprender y valorar los diversos modelos de histéresis analizados.
- *Capítulo 3. Modelo de Preisach.* Aquí se exponen los fundamentos y las propiedades del modelo de Preisach. Se presentan los métodos de caracterización y los métodos de desarrollo del modelo de Preisach. Finalmente se valida el modelo de Preisach presentando los resultados correspondientes. La validación se efectúa para varios métodos de caracterización y varios métodos de desarrollo.
- *Capítulo 4. Modelos tipo Preisach dinámicos.* En el capítulo 4 se presentan varias generalizaciones del modelo de Preisach a modelo dinámico. Se analizan y comparan entre escogiendo entre ellos el más adecuado para nuestro ámbito de aplicación. Finalmente se valida el modelo empleando datos experimentales.
- *Capítulo 5. Modelo de Preisach inverso.* En primer lugar analizamos la necesidad de un modelo inverso. Posteriormente se presentan las alternativas existentes. A partir de una de ellas se propone un modelo de Preisach totalmente inverso que posteriormente se valida.

- *Capítulo 6. Ensayos para la caracterización del modelo de Preisach.* Como el propio título del capítulo indica aquí presentamos el procedimiento experimental para determinar las curvas inversas de primer orden y el equipo controlado por ordenador para caracterizar de forma automática el modelo de Preisach.
- *Apéndice C. Análisis de modelos de histéresis.* Exposición de los modelos de histéresis más importantes disponibles en la actualidad de los cuales tenemos noticia. Estos modelos analizan y comparan entre sí. Concluyendo que el modelo más adecuado para nuestro ámbito de aplicación es el modelo de Preisach.

El segundo bloque de la tesis está dedicado a la combinación del modelo de Preisach con el método numérico y su análisis mediante una aplicación, el cálculo del campo magnético, el flujo y las pérdidas magnéticas disgregadas en el núcleo de un transformador monofásico. Los capítulos que componen este segundo bloque son los siguientes:

- *Capítulo 7. Aplicación al cálculo del campo magnético y de las pérdidas magnéticas de un transformador (I). Formulación del problema. Método de cálculo.* Comenzamos el bloque exponiendo como se formula la ecuación de difusión, como se resuelve y como se combina, proponiendo un algoritmo de cálculo. Dicho algoritmo de cálculo se aplica al caso del transformador ya comentado. Se presentan todos los cálculos, tanto durante el proceso como el post-proceso.
- *Capítulo 8. Aplicación al cálculo del campo magnético y de las pérdidas magnéticas de un transformador (II). Resultados y validación.* Aquí se muestran los resultados del cálculo, se validan y se realizan las conclusiones pertinentes.
- *Capítulo 9. Aplicación al cálculo del campo magnético y de las pérdidas magnéticas de un transformador (III). Alternativas de cálculo* En el capítulo 9 completamos la aplicación al transformador comentado algunas alternativas al cálculo propuesto en el capítulo 7.
- *Capítulo 10. Determinación experimental de las pérdidas magnéticas en las muestras.* Procedimientos experimentales realizados para determinar las pérdidas magnéticas disgregadas de las muestras empleadas para validar el método de cálculo.

Además en el capítulo 11 se presentan las conclusiones generales de la tesis y el trabajo futuro a realizar. Completan la tesis diversos apéndices con información adicional relativa al trabajo realizado.

## 2. Magnetización en los materiales ferromagnéticos

### 2.1 Introducción

#### 2.1.1 Campos magnéticos

La teoría magnética moderna utiliza dos vectores de campo para describir los fenómenos magnéticos [Beattie, 1989]. La intensidad de campo magnético o simplemente campo  $\mathbf{H}$  y la densidad de flujo magnético o inducción  $\mathbf{B}$ . En el aire, la relación entre ambos es:

$$\vec{B} = \mu_0 \vec{H} \quad (2.1)$$

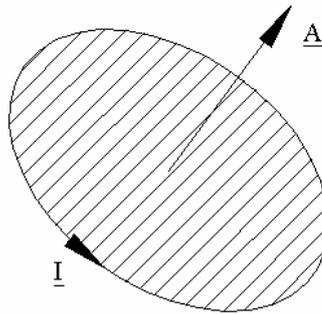
Donde  $\mu_0$  es la permeabilidad en el vacío ( $\mu_0=4\pi 10^{-7}$  H/m). En el interior de un material la relación es más compleja. Es necesario introducir un tercer vector  $\mathbf{M}$  denominado magnetización, que satisface la ecuación:

$$\vec{B} = \mu_0 (\vec{H} + \vec{M}) \quad (2.2)$$

La relación  $\mathbf{B}=f(\mathbf{H})$  -o  $\mathbf{M}=f(\mathbf{H})$ - es lo que generalmente denominamos proceso de magnetización y se refleja gráficamente en la curva o característica de magnetización. Este proceso depende de la geometría y estructura del material así como de ciertas constantes magnéticas [Bertotti, 1998]. No es posible calcular las curvas de magnetización en ninguna forma general a partir de principios básicos [Craik y Tebble, 1965]. Este es justamente uno de los objetivos de esta tesis, reproducir estas relaciones mediante un modelo compatible con el cálculo numérico.

### 2.1.2 Momentos magnéticos y magnetización

Como ya es sabido el campo magnético se genera por el movimiento de cargas eléctricas, esto es, por la presencia de corriente eléctrica. En general se puede considerar que existen dos clases de corrientes eléctricas. Una de ellas son las corrientes “normales”, debidas al transporte de cargas eléctricas, se trata de electrones libres o iones cargados que circulan por circuito eléctrico. El otro tipo de corriente eléctrica a considerar son las corrientes atómicas, estas se producen sin transporte de carga y son debidas a los electrones ligados al núcleo del átomo. La fuente del magnetismo son las corrientes atómicas.



**Figura 2-1.** Momento magnético

Sea una corriente eléctrica  $I$  circulando por un circuito que describe un área  $A$ , tal y como se muestra en la figura 2-1. A este sistema se le denomina dipolo magnético. Así mismo, se define momento magnético o momento bipolar a:

$$\vec{m} = I\vec{A} \quad (2.3)$$

Se define magnetización  $\vec{M}$  al momento bipolar por unidad de volumen  $\Delta V$ . En concreto:

$$\vec{M} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta V} \sum_i \vec{m}_i \quad (2.4)$$

En  $\Delta V$  se halla la clave de la magnetización, este volumen es lo suficiente pequeño como para considerarse casi nulo a escala macroscópica, pero lo suficientemente grande a escala microscópica como para contener cierto número de átomos. Se trata de una magnitud puntual, relaciona el mundo microscópico de los átomos con el mundo macroscópico.

Cuando la magnetización es uniforme, las corrientes de los dipolos se eliminan entre si y no hay corriente neta efectiva en el interior del material. Cuando la magnetización no es uniforme, los dipolos magnéticos no se eliminan entre si en las zonas frontera de la discontinuidad y aparece la corriente de magnetización. No hay transporte de carga, pero hay movimiento efectivo de carga y se puede producir un campo magnético.

### 2.1.3 Momentos magnéticos del electrón. Orígenes del magnetismo

#### 2.1.3.1 Descripción newtoniana o clásica

La magnetización de un material se origina por el movimiento de los electrones ligados a un átomo. En efecto, como ya se comentó los campos magnéticos se generan por cargas en movimiento, como que los electrones de un material están en movimiento crean un pequeño campo magnético. Desde un punto de vista de la mecánica clásica un electrón orbitando constituye una corriente circulando alrededor de la órbita y crea un pequeño momento magnético perpendicular al plano de la órbita.

En realidad, el electrón posee dos tipos de movimiento, el orbital y el de espín. Cada uno de ellos implica un momento angular, dicho momento angular determina el momento magnético por el concepto de carga eléctrica en movimiento. El electrón posee por tanto dos momentos angulares, el orbital y el de espín, cada uno de los cuales creará su momento magnético. La contribución relativa del movimiento orbital y de espín depende del tipo de material a considerar. Experimentos basados en la resonancia magnética muestran que en la mayor parte de materiales ferromagnéticos, el momento magnético es debido casi enteramente al espín.

#### Momento magnético orbital

El electrón describe una órbita alrededor del núcleo. Esta situación es análoga a la descrita en la figura 2-1 para definir el momento magnético. El electrón posee una carga eléctrica  $e$  y describe una órbita que abarca un área  $A$  en un tiempo  $\tau$ , aplicando la ecuación (2.1) el momento magnético orbital  $\vec{m}_o$  se expresa como:

$$\vec{m}_o = \frac{-e\vec{A}}{\tau} \quad (2.5)$$

El momento magnético orbital  $\mathbf{m}_o$  también se puede expresar en función del momento angular orbital  $\mathbf{p}_o$  mediante la siguiente expresión:

$$\vec{m}_o = -\left(\frac{e}{2m_e}\right)\vec{p}_o \quad (2.6)$$

Donde  $m_e$  es la masa del electrón.

### Momento magnético de espín

El momento angular de espín  $\mathbf{p}_s$  también genera un momento magnético  $\mathbf{m}_s$ :

$$\vec{m}_s = -\frac{e\vec{p}_s}{m_e} \quad (2.7)$$

### Momento magnético total

El momento magnético total del electrón  $\mathbf{m}_t$  es la suma de la contribución del momento magnético de espín y el momento magnético orbital:

$$\vec{m}_t = \vec{m}_s + \vec{m}_o \quad (2.8)$$

### Crítica a la descripción newtoniana o clásica

La interpretación basada en la mecánica newtoniana o clásica, que asume que los electrones son cargas orbitando alrededor de núcleo, no es válida. Además, la visión también clásica del espín como una corriente “amperiana” tampoco sirve. Para una descripción más detallada del fenómeno necesitamos recurrir a una interpretación basada en la mecánica cuántica.

#### 2.1.3.2 Descripción cuántica

Los momentos angulares del electrón no son continuos, vienen condicionados por las leyes de la mecánica cuántica, y por tanto los momentos magnéticos también se hallan condicionados

por dichas leyes. Vamos a deducir a continuación cual es la descripción cuántica de dichos momentos, pero antes definiremos los números cuánticos relacionados con ellos.

### Número cuántico principal ( $n$ )

El número cuántico principal  $n$  determina la capa y la energía del electrón. Recordemos que el número máximo de electrones permitidos en una capa es  $2n^2$ .

### Número cuántico del momento angular orbital ( $l$ )

Es un número necesario para definir el momento angular orbital  $p_o$  ya que en cada nivel de energía puede haber más de un valor de momento angular permitido. Este número cuántico es una medida del momento angular del electrón multiplicado por la constante modificada de Planck  $\hbar$  y de la excentricidad de la órbita del electrón. El número cuántico del momento angular orbital se expresa como:

$$\vec{p}_o = \vec{l} \hbar \quad (2.9)$$

### Número cuántico del espín ( $s$ )

Es el número cuántico análogo al número cuántico del momento angular orbital  $l$ .

$$\vec{p}_s = \vec{s} \hbar \quad (2.10)$$

Para electrones adopta un valor de  $1/2$ .

### Número cuántico del momento angular total ( $j$ )

Análogamente a  $l$  y  $s$  para los momentos angulares orbital y de espín respectivamente, este número cuántico da una medida del momento angular total.

$$\vec{p}_j = \vec{j} \hbar \quad (2.11)$$

Donde  $p_j$  es el momento angular total y  $j$  es el número cuántico del momento angular total que se determina como:

$$\vec{j} = \vec{l} + \vec{s} \quad (2.12)$$

### Momentos magnéticos cuánticos

Ahora ya estamos en disposición de exponer la descripción cuántica de los momentos magnéticos del electrón. Sustituyendo el momento angular orbital expresado mediante el número cuántico  $l$  de la ecuación (2.9) en la ecuación (2.6) se obtiene:

$$\vec{m}_o = -\frac{e\hbar}{2m_e} \vec{l} \quad (2.13)$$

La ecuación (2.13) expresa al momento magnético orbital como un número cuántico, en concreto nos indica que la contribución del momento orbital al momento total es un múltiplo de una constante,  $e\hbar/2m_e$ . A esta constante se la conoce como magnetón de Bohr  $\mu_B$ . Así el momento magnético orbital se expresa cuánticamente como:

$$\vec{m}_o = -\mu_B \vec{l} \quad (2.14)$$

Para el momento magnético de espín procedemos igual, se sustituye (2.10) en (2.7), con lo que se obtiene dicho momento magnético  $\vec{m}_s$  expresado en función del número cuántico  $s$ :

$$\vec{m}_s = -\frac{e\hbar}{m_e} \vec{s} \quad (2.15)$$

Recurriendo al magnetón de Bohr:

$$\vec{m}_s = -2\mu_B \vec{s} \quad (2.16)$$

Con la expresión (2.16) también tenemos al momento magnético de espín expresado cuánticamente. Finalmente el momento magnético total  $\vec{m}_t$ :

$$\vec{m}_t = -\left(\mu_B \vec{l} + 2\mu_B \vec{s}\right) \quad (2.17)$$

### 2.1.4 Tipos de magnetismo

Las sustancias que pueden ser magnetizadas en mayor o menor medida por un campo magnético se denominan en general materiales magnéticos [Chikazumi, 1964]. Hay varios tipos de magnetismo, cada uno de ellos está caracterizado por su propia estructura. Para establecer un criterio de clasificación de los materiales magnéticos necesitamos introducir una nueva variable, la susceptibilidad  $\chi$ . Se define susceptibilidad como a la relación entre la magnetización  $\vec{M}$  y el campo magnético  $\vec{H}$ :

$$\vec{M} = \chi \vec{H} \quad (2.18)$$

Las unidades de la susceptibilidad son H/m, esto es, la misma que la de la permeabilidad del aire  $\mu_0$ . Entonces es posible determinar una susceptibilidad relativa  $\bar{\chi}$  en función de  $\mu_0$ :

$$\bar{\chi} = \frac{\chi}{\mu_0} \quad (2.19)$$

Sustituyendo (2.18) en (2.1):

$$\vec{B} = (\chi + \mu_0) \vec{H} = \mu \vec{H} \quad (2.20)$$

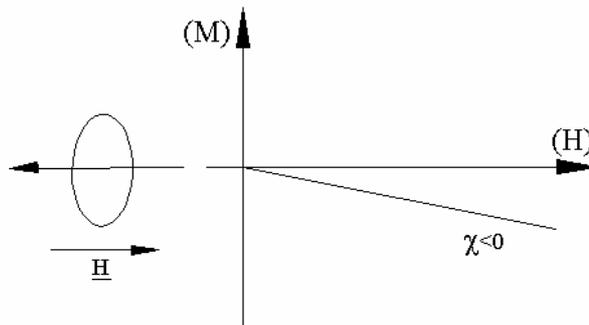
El valor de la susceptibilidad relativa varía desde  $10^{-5}$  para un magnetismo débil hasta  $10^6$  para un magnetismo fuerte. En algunos casos el valor puede ser negativo, mientras que en otros siquiera presenta un valor constante, sino que depende del campo  $H$ . Se puede interpretar el tipo de comportamiento de  $\chi$  en función de la estructura magnética del material. Adoptando este criterio se pueden clasificar los varios tipos de magnetismo como sigue:

- Diamagnetismo
- Paramagnetismo
- Ferromagnetismo
- Antiferromagnetismo
- Ferrimagnetismo

#### 2.1.4.1 Diamagnetismo

El diamagnetismo es un magnetismo débil en el cual la magnetización del material exhibe una dirección opuesta a la del campo aplicado. En consecuencia la susceptibilidad es negativa y pequeña, del orden de  $-10^{-5}$ . El diamagnetismo está presente en todo tipo de materia, pero

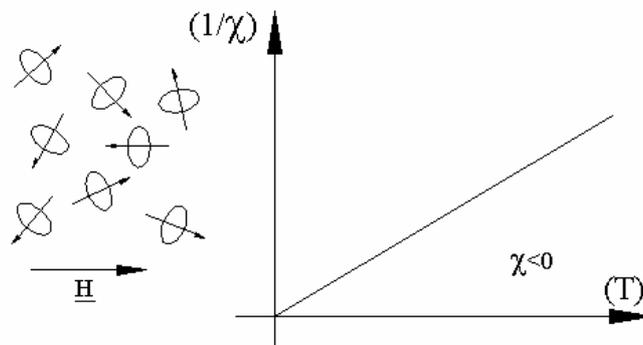
puede quedar enmascarado por el ferromagnetismo y el paramagnetismo. Al aplicar un campo en un material diamagnético se induce una rotación orbital en los electrones del núcleo lo cual implica la creación de momentos magnéticos, pero por la ley de Lenz la corriente de los momentos magnéticos orbitales inducidos es tal que se opone al campo aplicado.



**Figura 2-2** Diamagnetismo

#### 2.1.4.2 Paramagnetismo

El paramagnetismo también es un magnetismo débil, en él la magnetización  $M$  es proporcional al campo magnético  $H$ . El orden de magnitud de  $\bar{\chi}$  es de  $10^{-3}$  a  $10^{-5}$ . En general, las sustancias paramagnéticas contienen átomos magnéticos cuyos espines están aislados del entorno magnético y pueden cambiar su dirección con cierta libertad. A temperaturas finitas los espines experimentan agitación térmica adoptando direcciones aleatorias. Al aplicarse un campo, la orientación media de los espines cambia ligeramente produciendo un débil magnetismo en la misma dirección que el campo aplicado. La susceptibilidad es inversamente proporcional a la temperatura.



**Figura 2-3.** Paramagnetismo

### 2.1.4.3 Antiferromagnetismo

Magnetismo débil con susceptibilidad positiva. La variación de la susceptibilidad con la temperatura presenta un pico (véase la figura 2-4) denominado temperatura de Néel. Cuando se aplica un campo, por debajo de la temperatura de Néel los espines se alinean de forma antiparalela, de forma que la tendencia a magnetizarse con el campo exterior de los espines orientados en el sentido del campo aplicado experimenta la oposición de los espines orientados en sentido contrario. Por encima de la temperatura de Néel el comportamiento es el de un material paramagnético.

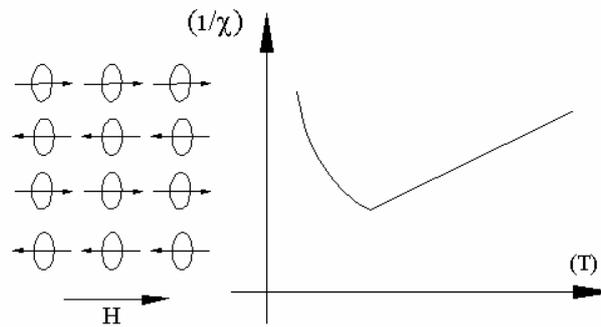


Figura2-4. Antiferromagnetismo

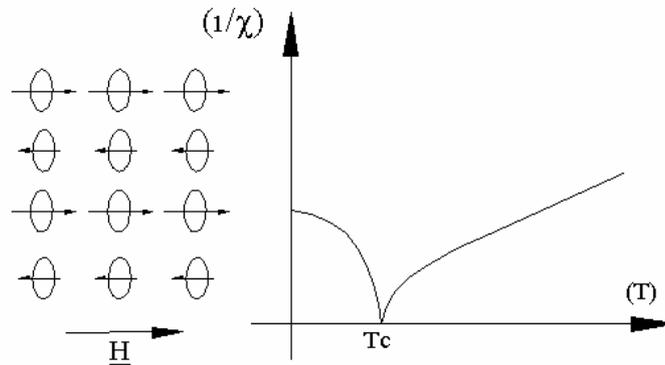
### 2.1.4.4 Ferrimagnetismo

Ferrimagnetismo es el término propuesto por Néel para describir el comportamiento magnético de las ferritas. En estos materiales los iones magnéticos ocupan dos tipos de red cristalina. En un tipo de red -denominémosle A- los espines se orientan en un sentido. En la otra red cristalina -la B por ejemplo- los espines se orientan en sentido contrario<sup>1</sup> a de la red A. Como el número de iones en la red A y B no tiene porque ser el mismo, el balance es favorable a una de las direcciones y se produce una configuración de espines orientados que puede producir magnetización. Como que esta orientación se produce sin intervención de un campo externo se la denomina magnetización espontánea.

A medida que la temperatura aumenta, la configuración de los espines se deforma por agitación térmica, lo cual implica un descenso de la magnetización espontánea. Hasta llegar a cierta temperatura, denominada temperatura de Curie  $T_c$ , para la cual la configuración de los

<sup>1</sup> La razón por la cual los espines se orientan de forma paralela es la fuerza de intercambio que se comentará más adelante, cuando justifiquemos la aparición de dominios en los materiales ferromagnéticos

espines se vuelve totalmente aleatoria, desapareciendo la magnetización espontánea. Por encima de la temperatura de Curie el comportamiento del material es del un paramagnético.

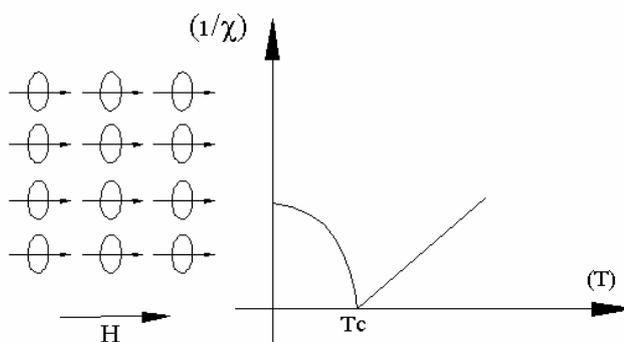


**Figura 2-5. Ferrimagnetismo**

#### 2.1.4.5 Ferromagnetismo

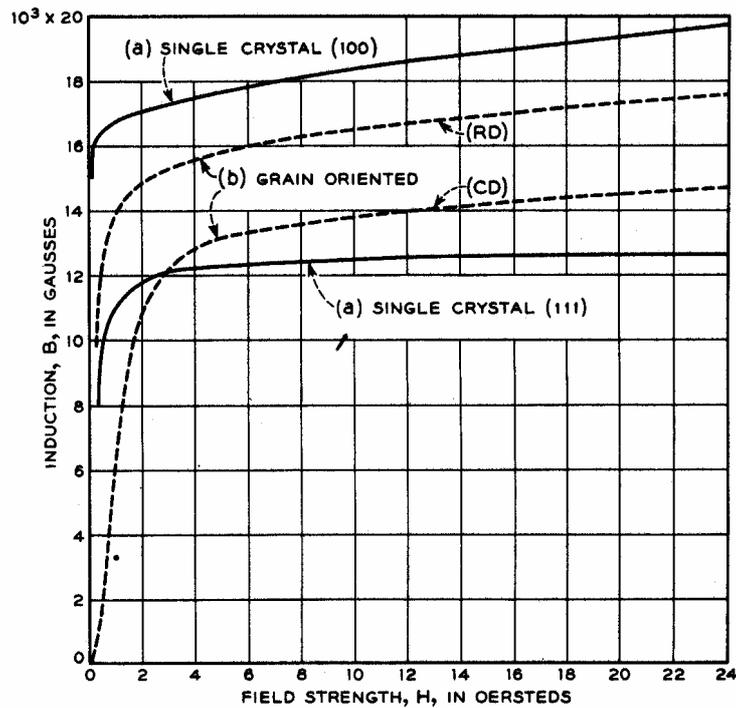
El ferromagnetismo es similar al del ferrimagnetismo, con la diferencia que ahora los espines se orientan en paralelo el uno con el otro como resultado una interacción que actúa entre espines vecinos. Al igual que en el ferrimagnetismo, sin aplicar un campo externo aparece una magnetización espontánea que desaparece cuando la temperatura del material llega a la temperatura de Curie, por encima de la cual el material se comporta como un paramagnético (figura 2-6).

A pesar de la magnetización espontánea, un bloque de material ferromagnético (o ferrimagnético) generalmente no está magnetizado sino que se halla en un estado desmagnetizado. Esto es debido a que el interior del bloque se divide en los denominados dominios, cada uno de los cuales está espontáneamente magnetizado en una dirección arbitraria, con lo que la contribución de todos los dominios resulta en una magnetización nula.



**Figura 2-6. Ferromagnetismo**

Si se aplica un campo exterior la magnetización aparente del bloque desmagnetizado varía según se muestra en la figura 2-7, alcanzando finalmente la magnetización de saturación que es igual a la magnetización espontánea. Si una vez alcanzada la magnetización de saturación se reduce el campo aplicado, la magnetización disminuye de nuevo pero no vuelve al valor inicial. Este proceso irreversible se denomina histéresis (del griego υστερησις, retardo).



**Figura 2-7.** Curvas de magnetización medidas en diferentes direcciones de un cristal de (a) una lámina anisotrópica y (b) FeSi. RD medido en la dirección de mecanizado, CD medido en la dirección perpendicular a la dirección de mecanizado [Bozorth, 1978]

La presencia de la magnetización de saturación y de la histéresis es inherente a los materiales ferromagnéticos. Si bien pocos materiales son ferromagnéticos: Fe, Ni, Co, Gd Dy y sus aleaciones, los núcleos de las máquinas eléctricas están constituidos por materiales ferromagnéticos, siendo uno de los objetivos del presente trabajo determinar numéricamente la ley constitutiva  $B=f(H)$  de estos materiales ferromagnéticos, con su saturación e histéresis.

El resto del presente capítulo lo vamos a dedicar al conocimiento de los procesos que acontecen en la magnetización de un material ferromagnético y que determinan la ley  $B=f(H)$ .

## ***2.2 Teorías del ferromagnetismo***

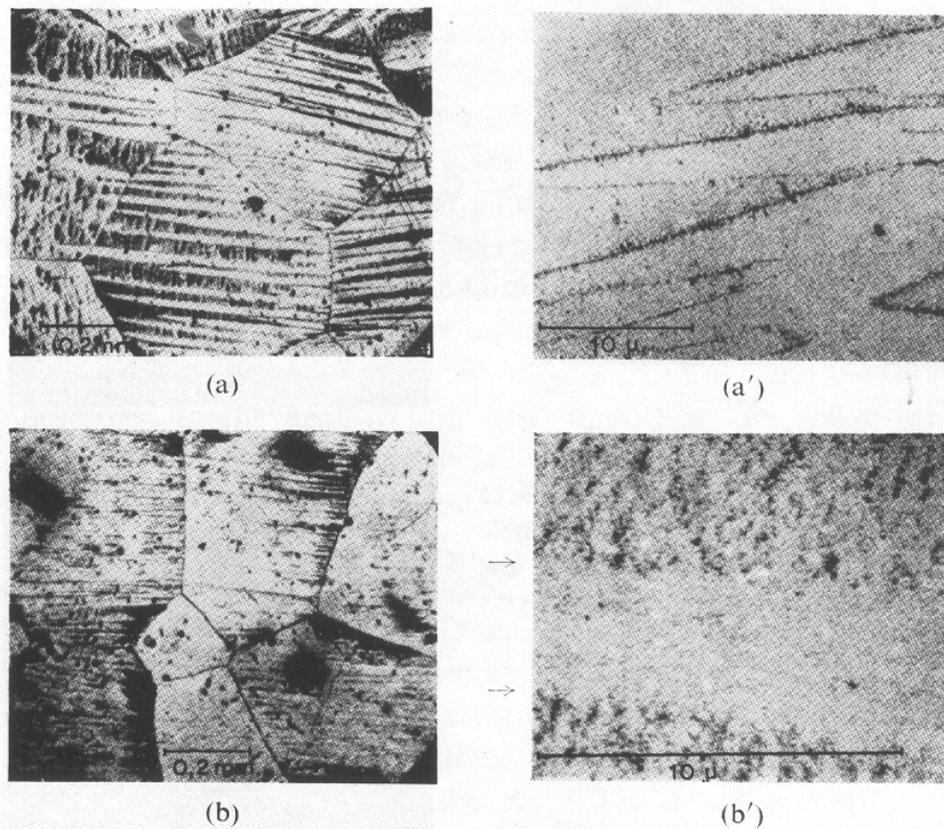
Como ya adelantó en el apartado anterior, en general, un material ferromagnético en ausencia de un campo exterior aplicado, a pesar de la magnetización espontánea, no presenta magnetización aparente (exterior) alguna. En cambio, la aplicación de incluso un pequeño campo externo produce un momento que es varios órdenes de magnitud superior al que se produce en un material paramagnético. Para explicar esto Pierre Weiss postuló la existencia de unas pequeñas regiones denominadas dominios magnéticos, cada uno de los cuales se encuentra espontáneamente magnetizado. La magnetización del dominio está prácticamente saturada.

En ausencia de campo aplicado la dirección de magnetización de un dominio respecto a otro es independiente y arbitraria. Por ello en ese caso la magnetización global es nula.

Resumiendo, con la aceptación de la existencia de los dominios magnéticos, la descripción de los materiales ferromagnéticos se basa en los siguientes puntos:

1. Siempre existen momentos magnéticos de espín
2. Los momentos magnéticos de espín se alinean incluso en el estado desmagnetizado, formando las regiones denominadas dominios. A esto se lo denomina magnetización espontánea.
3. En el estado desmagnetizado los dominios están alineados entre si de forma aleatoria, por lo que la magnetización resultante es nula.
4. Al aplicar un campo externo los dominios tienden a orientarse en la dirección y sentido del campo, con lo que se produce la magnetización.

La hipótesis de la existencia de dominios está plenamente comprobada y fundamentada desde hace décadas. En la figura 2-8 se muestran varias imágenes con dominios en un material ferromagnético. En cambio no se ha desarrollado una teoría capaz de justificar la presencia de dicho dominios. La razón por la cual se orientan los dominios no está totalmente clara. Se exponen a continuación las teorías más importantes acerca de la formación de dominios.



**Figura 2-8.** Patrón de dominios magnéticos, en superficies axiales paralelas al campo. El material es Alcomax-III (a) y (a') de bajo campo coercitivo, (b) y (b') de alto campo coercitivo [Craik y Tebble, 1965]

### 2.2.1 Teoría de Weiss del campo medio

Es la teoría más simple del ferromagnetismo. Asume la existencia de un campo a nivel molecular actuando en cada momento atómico, el campo medio de Weiss. Por lo que el campo efectivo  $H_e$  experimentado por un momento magnético atómico es la suma de la contribución del campo aplicado  $H$  y el campo medio de Weiss.

$$\vec{H}_e = \vec{H} + \gamma \vec{M} \quad (2.21)$$

Donde  $\alpha$  es la constante del campo medio que representa el acoplamiento entre dominios.

El campo medio de Weiss  $\gamma \vec{M}$  tiende a alinear momentos vecinos y es lo suficientemente fuerte como para que en los dominios los momentos se orienten en la misma dirección, incluso sin aplicar un campo externo, produciéndose la magnetización espontánea. Esta magnetización espontánea ocurre sólo a nivel macroscópico

La teoría de Weiss del campo medio es puramente fenomenológica, el campo medio es completamente empírico. De hecho Weiss no supo explicar el origen de este campo, en su época no se disponía de las herramientas necesarias para ello, la mecánica cuántica.

### 2.2.2 La interacción de intercambio

El origen del campo medio molecular de Weiss permaneció oscuro hasta el advenimiento de la mecánica cuántica. Heisenberg demostró que este campo es el resultado de la interacción cuántica de intercambio [Morrish, 2001]. Esta interacción no tiene analogía en la mecánica clásica.

La interacción de intercambio de Heisenberg se expresa algebraicamente como [Craik, 1995]:

$$\mathfrak{K} = -\frac{J_{ex}}{\hbar^2} \vec{s}_1 \cdot \vec{s}_2 \quad (2.22)$$

Donde  $\mathfrak{K}$  es el hamiltoniano de la interacción. Si esta ecuación se interpreta como una expresión de la mecánica newtoniana, para dos espines en paralelo sería:

$$E = -\frac{J_{ex}}{\hbar} s_1 s_2 \quad (2.23)$$

En cambio, para el caso que  $s_1$  y  $s_2$  estén en antiparalelo:

$$E = \frac{J_{ex}}{\hbar^2} s_1 s_2 \quad (2.24)$$

Esto es,  $J_{ex}>0$  favorece al alineamiento en paralelo y  $J_{ex}<0$  favorece el alineamiento en antiparalelo.

Las fuerzas de intercambio son el resultado de la interacción entre los momentos angulares de espín de dos átomos vecinos. La energía asociada con esta fuerza es la denominada energía de intercambio. Su expresión clásica, válida por analogía con los resultados cuánticos, para un átomo  $i$  acoplado con el átomo vecino más cercano  $j$ , es:

$$E_{ex} = -2J_{ex}s_i s_j \quad (2.25)$$

Donde el factor 2 es arbitrario. Además se ha supuesto que la interacción intercambio es isotrópica, por tanto el factor  $J_{ex}$  cumple:

$$J_{ex,ij} = J_{ex} \quad (2.26)$$

Donde  $s_i$  y  $s_j$  son los números del momento angular de espín de dos átomos adyacentes. Al factor  $J_{ex}$  se le denomina integral o parámetro de intercambio.

La integral de intercambio para los materiales ferromagnéticos es mayor que cero. Esto tiene una consecuencia directa, la orientación energéticamente favorable para ambos espines es aquella en la que ambos están en paralelo. Esta es una característica distintiva de los materiales ferromagnéticos, pues para la mayor parte de materiales la integral de intercambio es negativa, lo que favorece el alineamiento antiparalelo. Justamente el que en los materiales ferromagnéticos se favorezca la orientación en paralelo de los espines es lo que hace que su permeabilidad sea tan alta y se les emplee para circuitos magnéticos.

La relación de intercambio alinea a los espines adyacentes y depende de la distancia entre átomos, se trata de una fuerza intensa, pero de corto alcance.

### 2.2.3 Teoría de las bandas

El alto momento magnético de los materiales ferromagnéticos es debido a espines en electrones no apareados en capas de electrones interiores (3d, 4f) incompletas. Los electrones apareados, por el principio de exclusión de Pauli tienen espines opuestos y su contribución no produce un momento magnético neto. En consecuencia la fuerza de intercambio tenderá a causar que los espines antiparalelos se orienten en paralelo. Debido a la proximidad de los átomos, las capas de electrones más grandes se solapan causando la división de los niveles energéticos. Esta división de niveles causa la formación de bandas de niveles de energía, con las correspondientes funciones de onda expandiéndose por el cristal. Como consecuencia los electrones, y por tanto los momentos magnéticos, no están localizados sino distribuidos por el cristal.

En los materiales ferrimagnéticos la conductividad es baja por lo que los electrones no tienen movilidad y los momentos magnéticos se hallan localizados. Las fuerzas de intercambio

alinean los momentos en antiparalelo, pero debido a que átomos adyacentes tienen diferente configuración de espín, resta un momento neto. También se magnetizan espontáneamente en dominios.

La teoría del campo medio de Weiss, la mecánica cuántica y la teoría de bandas dan explicaciones a las fuentes del ferromagnetismo y del ferrimagnetismo, pero no son capaces de explicar plenamente el fenómeno de la histéresis [Beattie, 1989].

#### 2.2.4 Anisotropía magnetocristalina

Experimentalmente se ha encontrado que la magnetización tiende a establecerse en ciertos ejes cristalográficos, a este efecto se le denomina anisotropía cristalina.

La existencia de anisotropía cristalina se ha demostrado para las curvas de magnetización de especímenes de cristal único [Morrish, 2001]. Se ha comprobado que el campo requerido para magnetizar un cristal hasta la saturación depende de que el campo aplicado tenga la misma dirección que ciertos ejes del cristal. Los ejes cristalográficos a lo largo de los cuales tiende a establecerse la magnetización se denominan ejes favorables o preferentes (*easy axis*).

En realidad la anisotropía está relacionada con la interacción entre los momentos y la estructura cristalina, más específicamente del acoplamiento espín-órbita. Las órbitas de electrones están fuertemente determinadas por la red cristalina y son muy difíciles de cambiar. En cambio el acoplamiento espín-órbita es más débil. Cuando se aplica un campo exterior, para que los espines se reorienten alineándose con el campo se debe superar el acoplamiento espín-órbita. En los ejes favorables el acoplamiento espín-órbita es menor y por tanto de menor energía.

La energía magnetocristalina o energía cristalina anisotrópica es el trabajo requerido para hacer que la magnetización se establezca a lo largo de cierta dirección comparada con una dirección favorable.

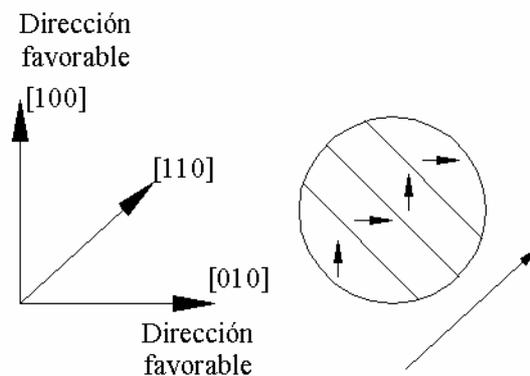
En un cristal uniaxial, sin anisotropía normal al único eje favorable, se puede expresar la energía de anisotropía magnetocristalina de forma aproximada como [Craik, 1995]:

$$E_k = k \sin^2 \theta \quad (2.27)$$

Donde  $\theta$  es el ángulo entre la dirección preferente y el vector de magnetización. Es usual expresar la energía de anisotropía en una serie de potencias de funciones trigonométricas de los ángulos del vector de magnetización con respecto al eje principal del cristal.

$$E_k = k_1 \sin^2 \theta + k_2 \sin^4 \theta + \dots = \sum k_n \sin^{2n} \theta \quad (2.28)$$

En la práctica sólo los dos primeros términos son relevantes y pueden ser medidos con precisión. Para la mayor parte de propósitos sólo se considera  $k_1$ .



*Figura 2-9. Anisotropía magnetocristalina en el hierro. Orientación de los dominios en los ejes favorables.*

Sea un espécimen de hierro. En ausencia de campo aplicado el vector de magnetización se establecerá en una de las seis direcciones favorables (en el caso del hierro coinciden con las aristas del cubo) y los dominios se hallarán igualmente distribuidos en esas direcciones por lo que la magnetización neta es cero. Supongamos a continuación que se aplica un campo que coincide con la dirección [110], los dos ejes favorables del hierro más cercanos son el [100] y el [010]. Cuando el campo aplicado es pequeño las direcciones de los dominios caen en las direcciones favorables más cercanas a la dirección del campo, en este caso la [100] y la [010]. En consecuencia hay una distribución igual de los dos tipos de dominios (ver figura 2-9). Si el campo sigue aumentando los vectores de magnetización de los dominios tienden a rotar hacia la dirección del campo.

### 2.2.5 Magnetostricción. Anisotropía por tensión magnetoelástica.

Cuando una sustancia cristalina es sometida a un campo magnético, experimenta un esfuerzo en su estructura cristalina y la sustancia cambia sus dimensiones deformándose. Igualmente al

producirse deformaciones en la red cristalina cambia la magnetización del cristal ferromagnético. A este efecto se le denomina magnetostricción.

La energía de magnetostricción y la energía de anisotropía están interrelacionadas a causa de que la anisotropía depende del estado de deformación de la red. Un cristal se deformará espontáneamente si así desciende su energía de anisotropía.

Se define coeficiente de magnetostricción  $\lambda$  como al cambio fraccional en la longitud acontecido durante el cambio de magnetización desde cero a la saturación. Supóngase que puede considerarse la muestra isotrópica, con un coeficiente de magnetostricción medio  $\lambda_s$ . En presencia de una tensión  $\sigma$ , interna o externa, la magnetostricción está asociada con el trabajo o energía proporcional en magnitud a  $\lambda_s \sigma$ . La aplicación de una tensión longitudinal introduce una dirección preferencial y la energía anisotrópica magnetoelástica introducida en una configuración de dominios se puede representar como [Craik y Tebble, 1965]:

$$E_{ms} = \frac{3}{2} \lambda_s \sigma \sin^2 \theta \quad (2.29)$$

Se puede considerar por tanto como una modificación de la anisotropía magnetocristalina, reemplazando  $k_1$  por

$$k_1 + \frac{3}{2} \lambda_s \sigma = k_1 + k_\sigma \quad (2.30)$$

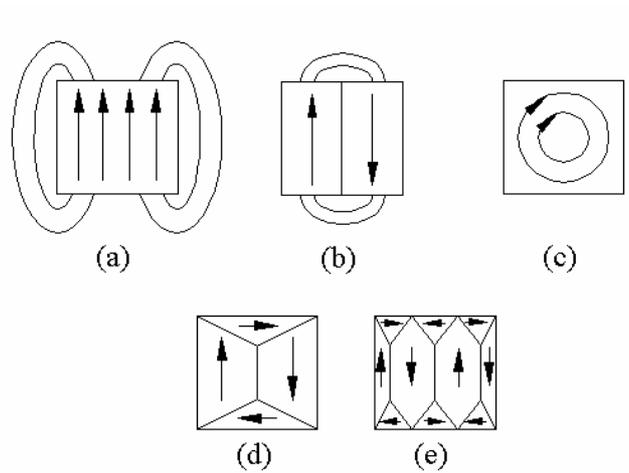
### **2.3 Formación de dominios. Consideraciones energéticas**

La histéresis magnética es un efecto macroscópico, no es un resultado de las propiedades atómicas. Es debida al comportamiento de los dominios. A medida que varía el campo los dominios varían su tamaño o rotan. A continuación se van a exponer las consideraciones energéticas que implican que un dominio adopte un tamaño y forma concreta.

Según Landau y Lifschitz la existencia de dominios es una consecuencia de la minimización energética [Jiles, 1991]. En realidad todo sistema tiende al estado de menor energía. La formación de dominios es consecuencia de un balance energético de minimización de energía en el cual intervienen las siguientes energías:

- Energía de intercambio  $E_{ex}$
- Energía magnetostática  $E_m$
- Energía anisotrópica magnetocristalina o anisotrópica  $E_k$
- Energía anisotrópica magnetoelástica o magnetostrictiva  $E_{ms}$

Analicemos cada energía separadamente.



**Figura 2-10.** Formación de patrones de dominios como proceso de minimización de la energía. (a) Configuración que minimiza la energía de intercambio, pero con una energía magnetostática muy alta. (b) Configuración que minimiza la suma de la energía de intercambio y la energía magnetostática. (c) Configuración que minimiza la energía de intercambio, la energía magnetostática y la energía de los espines cercanos a la frontera entre dominios. (d) Igual que (c) pero considerando además la minimización de la energía de anisotropía magnetocristalina, (e) Igual que (d) pero considerando además la minimización de la energía magnetostrictiva.

### 2.3.1 Energía de intercambio

Esta energía se introdujo en el apartado 2.2.2. La interacción de intercambio es de origen cuántico y es la causante de que los espines se alineen paralelos o antiparalelos. Su expresión matemática es la ecuación (2.25), en ella aparece la integral de intercambio  $J_{ex}$ , que en el caso de los materiales ferromagnéticos es positiva por lo que favorece el que los espines se alineen paralelos entre sí. En consecuencia la energía de intercambio es mínima cuando los espines están en paralelo. Esto es, la energía de intercambio hace que todos los espines se orienten en paralelo formándose un único dominio tal y como se muestra en la figura 2-10a

### 2.3.2 Energía magnetostática

Es debida a la interacción entre los momentos del material y el campo aplicado. La energía por unidad de volumen de un momento de magnetización  $\vec{M}$  en un campo magnético  $\vec{H}$  se expresa como:

$$E_m = -\mu_o \int \vec{H} \cdot d\vec{M} \quad (2.31)$$

El campo magnético en un punto depende de la posición y orientación de todos los demás momentos magnéticos del material, así como de cualquier campo magnético aplicado.

La configuración de la figura 2-10a, que minimizaba la energía de intercambio, en realidad es un imán muy poderoso [Plonus, 1982], con una energía magnetostática muy alta. La suma de la energía de intercambio y la energía magnetostática ha de tender a un mínimo. Permitiendo que la energía de intercambio aumente a expensas de que la energía magnetostática baje se puede derivar en una configuración que reduzca la suma de ambas energías. Esto nos llevaría a la configuración de la figura 2-10b. En esta configuración la energía de intercambio ha aumentado ligeramente al aparecer dos dominios con los espines en antiparalelo entre si, pero la energía magnetostática ha disminuido al reducirse el número de líneas de campo en el exterior.

La fuerza de intercambio es de corto alcance (una o dos distancias atómicas), por ello la energía de intercambio es mayor en la frontera de los dominios que en el propio dominio. Los espines que se encuentran en el interior de un dominio solo perciben a vecinos orientados en paralelo con ellos, en cambio los espines de la frontera reciben la influencia de espines con otras orientaciones. A las fronteras de los dominios se les denomina paredes de dominio. La energía de intercambio sería muy elevada si la transición de orientación de espines entre un dominio y otro fuese abrupta. Por ello las paredes tienen un cierto espesor en el que los espines se orientan paulatinamente. En consecuencia la configuración de la figura 2-10b no es la que minimiza al máximo la suma de las energías magnetostática y de intercambio, con la configuración de la figura 2-10c se logra una energía aún menor.

### 2.3.3 Energía de anisotropía magnetocristalina

La tendencia de los dominios a orientarse en las direcciones favorables, en las que la energía de anisotropía es menor, también condiciona la configuración de dominios. La energía de

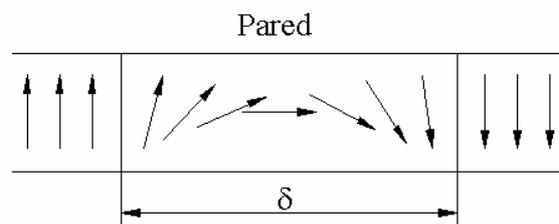
anisotropía tiende a hacer disminuir las paredes de los dominios. Desde la perspectiva de la energía de intercambio y de la energía magnetostática, la configuración de menor energía sería la mostrada en la figura 2-10c. Pero al haber direcciones más favorables, de menor energía de anisotropía, la distribución de energía que minimiza la suma de la tres energías (intercambio, magnetostática y de anisotropía) es la distribución mostrada en la figura 2-10d.

### 2.3.4 Energía de magnetostricción

La configuración resultante de minimizar la energía magnetostática, la energía de interacción y la energía de anisotropía es la mostrada en la figura 2-10d. Pero el cristal se deforma severamente cuando los dominios se alargan en la dirección de imanación, produciéndose una deformación elástica que aumenta la energía de magnetostricción. Para mitigar el esfuerzo interno y con ello rebajar la energía de magnetostricción, se forma un número mayor de dominios, así el volumen total deformado es menor. La configuración resultante de minimizar la suma de todas las energías es la mostrada en la figura 2-10e.

## 2.4 Paredes de dominio

En el proceso de magnetización, para campos débiles y moderados, la mayor parte de las acciones se producen por expansión de los dominios, esto es, acontecen en las paredes. Estas paredes de dominio tienen unas propiedades muy diferentes al resto del dominio. Se analiza a continuación sus características principales.



**Figura 2-11.** Ejemplo de pared de dominio

A las fronteras entre dominios se las denomina paredes de dominio. En la figura 2-11 se muestra un ejemplo de pared de dominio. Como ya se comentó anteriormente, para minimizar la energía de intercambio entre dos dominios con dirección diferente la transición de los espines de una a otra dirección no se produce abruptamente sino paulatinamente. Por ello las

paredes además de poseer una cierta energía, también poseen una amplitud, o anchura, del orden de varios espacios atómicos.

La energía de una pared de dominio es la diferencia entre la energía de los momentos magnéticos cuando forman parte de la pared respecto a cuando están inmersos en un dominio.

La energía de la pared disminuye con el grosor de la misma (menor energía de intercambio). Pero la anchura de las paredes está limitada por la presencia de la energía magnetocristalina, que aumenta con el tamaño de la pared. Este tamaño se determina por el equilibrio entre la energía de anisotropía magnetocristalina y la energía de intercambio.

La energía de anisotropía magnetocristalina tiende a estrechar las paredes ya que dicha energía es menor cuando todos los momentos están orientados en los ejes cristalográficos favorables. Dentro de la pared los espines rotan paulatinamente de la dirección de un dominio a la dirección del otro dominio, con lo que la mayor parte de ellos no están orientados en ninguna de las direcciones favorables. En ausencia de otros efectos la pared tendría el grosor de un átomo con la magnetización en paralelo con la dirección favorable más cercana a la transición de direcciones entre ambos dominios.

La energía de intercambio tiende a hacer las paredes más gruesas ya que su energía es mínima cuando los espines están orientados en paralelo, con lo que cada espín dentro de la pared gira con respecto al anterior lo mínimo posible.

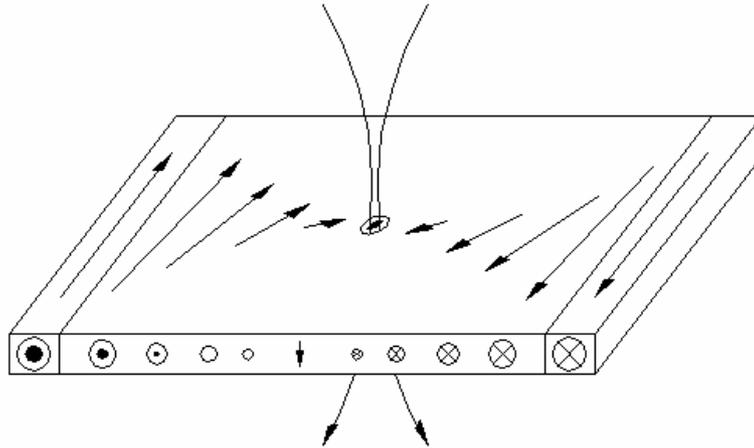
Debido a la cantidad de incertidumbres involucradas, una estimación a priori de la energía y del tamaño de la pared es más que suficiente. Aplicando dicha estimación se puede demostrar [Morrish, 2001] que el grosor de la pared  $\delta$  se puede calcular como:

$$\delta = \sqrt{\frac{J_e^2 s^2 \pi^2}{k_1 a}} \quad (2.32)$$

Donde  $a$  es el espaciado de la red cristalina.

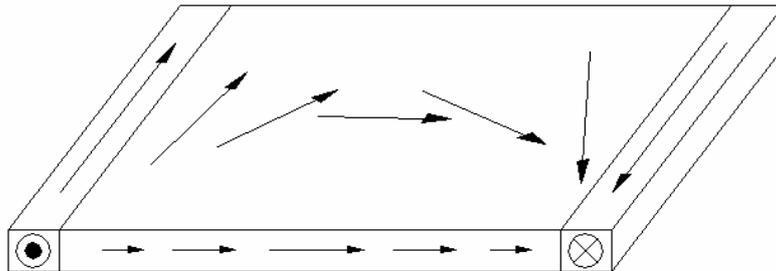
La forma en la que los espines giran paulatinamente dentro de la pared de un dominio a otro no es única. Hay situaciones en las que un tipo de rotación es más favorable que otra. Se suele distinguir entre dos tipos de paredes de dominio, las paredes de Bloch y las paredes de Néel.

En la figura 2-12 se muestra una pared de Bloch, en este tipo de pared los espines rotan mediante un cambio de plano. Debido a este cambio de plano, en cierto punto los momentos quedan paralelos a la superficie por lo que salen líneas de campo al exterior, esto es, aparece un polo libre en la superficie.



**Figura 2-12.** Pared de Bloch

Cuando la rotación de los espines se realiza sin cambio de plano se le denomina pared de Néel. En la figura 2-13 se muestra una pared de Néel.



**Figura 2-13.** Pared de Néel

Las paredes de Bloch son energéticamente más favorables que las de Néel cuando el eje de rotación está en el plano de pared, ya que los polos libres se producirían por toda la pared y la energía magnetostática asociada sería muy grande. Con especímenes muy finos (películas), donde el grosor del espécimen es menor al grosor  $\delta$  de una pared, las condiciones son inversas, y se forma una pared de Néel, en la cual los espines rotan en el plano del espécimen. Las paredes de Bloch y de Néel representan dos casos límite.

## 2.5 Movimiento de las paredes de dominio

Cuando el campo exterior comienza a aumentar hacia valores moderados los dominios orientados favorablemente crecen produciéndose un efecto similar al movimiento de las paredes. Al aplicar un campo exterior los espines que pueden responder más fácilmente son los que están en las paredes ya que su dirección resulta de un equilibrio entre la energía de intercambio y la energía de anisotropía. Un cambio en la energía del campo exterior puede romper este balance.

Sea una pared de Bloch, si aplicamos un campo exterior en la dirección de uno de los dominios colindantes con la pared, los momentos que están en la dirección contraria no cambian de dirección, ya que están en el fondo de un pozo energético causado por la interacción mutua a través del campo de intercambio. Pero en las paredes no hay tal campo, el campo externo rompe el balance a favor de la dirección del campo aplicado. Los momentos de las paredes rotan ligeramente a medida que el campo aumenta.

En realidad las paredes no se mueven y no son una entidad, sino una zona de transición entre un dominio y otro. Pero es costumbre – o conveniente – considerarlas como a una entidad y analizarlas como si se moviesen a través del material.

Las paredes tienen asociada una energía que depende del área, por ello su tendencia es la de minimizar esta área.

### 2.5.1 Fuerzas en las paredes

La energía por unidad de volumen de un dominio expuesto a un campo externo  $\mathbf{H}$  es:

$$E_H = -\mu_0 \vec{M}_s \cdot \vec{H} \quad (2.33)$$

Donde  $\vec{M}_s$  es la magnetización espontánea de un dominio. El cambio de energía causado por un desplazamiento de una pared de  $180^\circ$   $\Delta E_w$  (aquella que divide dos dominios que están orientados entre si  $180^\circ$ ) una distancia  $x$ :

$$\Delta E_w = -2\mu_0 A_w \vec{M}_s \cdot \vec{H} \quad (2.34)$$

Por tanto la fuerza en la pared  $F$ :

$$F_w = -\frac{1}{A_w} \frac{dE}{dx} = 2\mu_0 \vec{M}_s \cdot \vec{H} \quad (2.35)$$

Donde  $A_w$  es el área de la pared.

### 2.5.2 Modelo de paredes rígidas. La aproximación del potencial.

Modelo para paredes de alta energía [Jiles, 1998]. Las paredes con energías altas permanecen planas, ni se abomban ni pandean ante la aplicación de un campo externo. La energía aportada por el campo externo  $\vec{H}$  a un material ferromagnético se puede expresar como:

$$\Delta E_H = -\mu_0 \int \vec{H} \cdot d\vec{M} \quad (2.36)$$

Si una pared de  $180^\circ$  con área transversal unitaria se mueve una distancia  $dx$ , el cambio de magnetización  $d\vec{M}$  es:

$$d\vec{M} = 2\vec{M}_s dx \quad (2.37)$$

Por tanto la energía aportada por el campo al dominio se puede expresar como:

$$\Delta E_H = -2\mu_0 \vec{M}_s \cdot \vec{H} \int dx = -2\mu_0 \vec{M}_s \cdot \vec{H} x \quad (2.38)$$

Si la pared está sujeta a una energía potencial  $E_w$  determinada, o dicho de otra forma, posee una energía propia  $E_w$ , la energía total en la pared  $E_{wT}$  es:

$$\begin{aligned} E_{wT} &= E_w + \Delta E_H \Rightarrow \\ E_{wT} &= E_w - 2\mu_0 \vec{M}_s \cdot \vec{H} x \end{aligned} \quad (2.39)$$

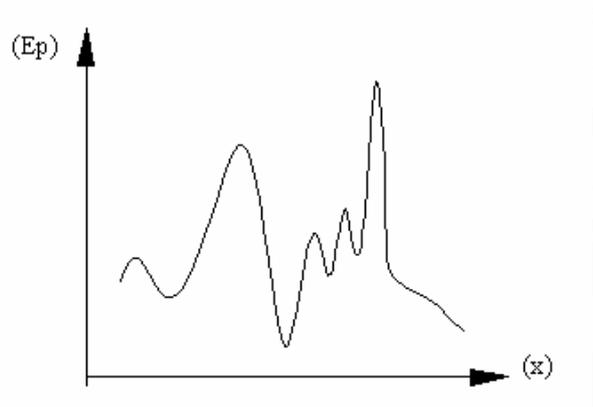
La energía potencial varía dentro de un sólido de forma irregular (figura 2-14) debido a:

- Defectos. Producen mínimos de energía potencial.
- Microtensiones debidas a dislocaciones. Pueden producir tanto máximos como mínimos de energía potencial

El desplazamiento de la pared de  $180^\circ$  se puede calcular partiendo de (2.39):

$$\frac{dE_t}{dx} = 0 \Rightarrow \frac{dE_p}{dx} - 2\mu_0 \vec{M}_s \cdot \vec{H} = 0 \quad (2.40)$$

Se pueden encontrar soluciones específicas si conocemos el potencial  $E_p$ .

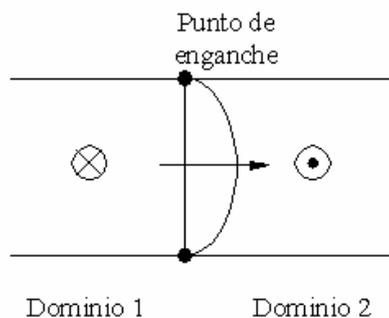


**Figura 2-14.** Ejemplo de espectro de energía potencial en el sólido

### 2.5.3 Modelo de paredes flexibles. Pandeo de las paredes.

Modelo para paredes con energías bajas [Jiles, 1998]. Las paredes con energías bajas tienden al pandeo. El curvado de las paredes depende, entre otros factores, del campo externo y de la energía en las paredes.

Sea una pared de  $180^\circ$  que se extiende completamente en un material formado por granos, pero donde dichos granos no presentan impurezas. Las fronteras del grano son el mayor impedimento para el movimiento de la pared. La pared se quedará fijada a la pared del grano tal y como haría con cualquier otro defecto del material. Si se aplica un campo en la dirección de uno de los dominios, este dominio crecerá por movimiento de la pared, pero esta pared al estar fijada a un punto se curvará (figura 2-15).



**Figura 2-15.** Pandeo de una pared

La diferencia en la energía de la pared causada por el encurvamiento:

$$\Delta E_b = E_w [A(H) - A(0)] \quad (2.41)$$

Donde  $E_w$  es la energía de la pared,  $A(H)$  es el área de la pared con el campo  $H$  y  $A(0)$  es el área de la pared sin magnetización. Se asume por simplicidad una deformación cilíndrica de la pared.

La fuerza de la pared por unidad de área es la expresada por la ecuación (2.35). Asumiendo por simplicidad una deformación cilíndrica, esto nos lleva a una expresión para la fuerza por unidad de área en la pared en función del radio de curvatura,

$$F_w = \frac{\kappa}{r} \quad (2.42)$$

Esta es la expresión del exceso de presión a través de una membrana elástica como una interfase líquida, donde  $\kappa$  es la tensión superficial.

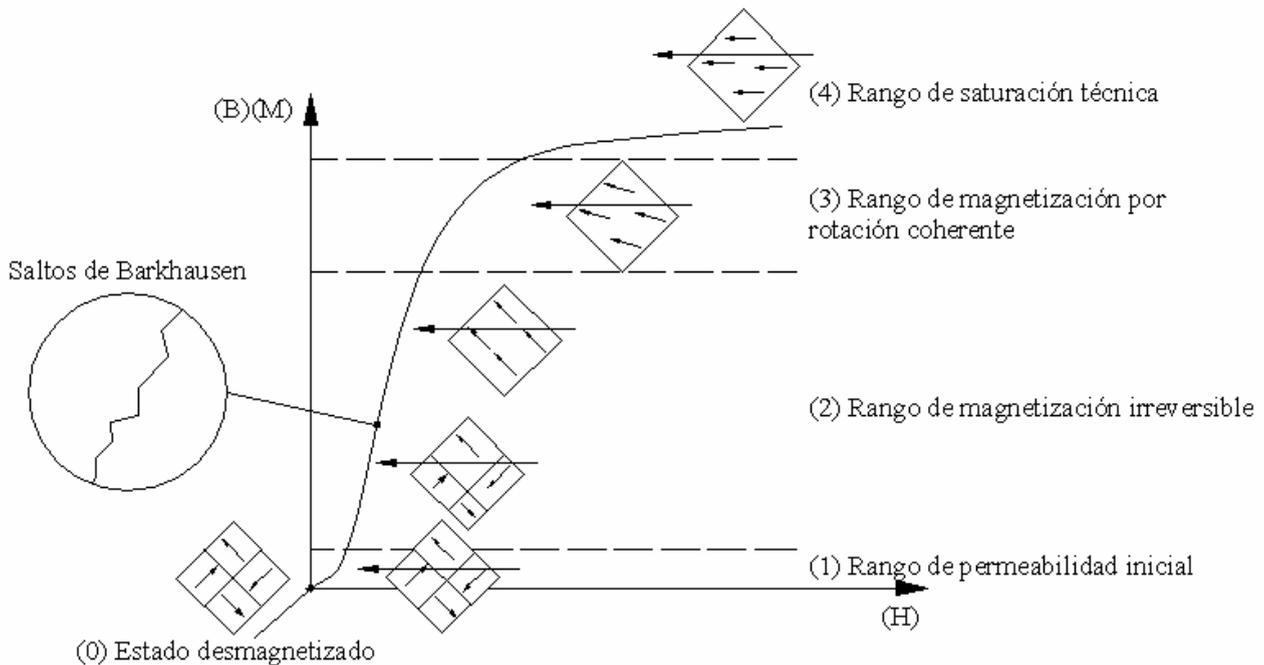
## 2.6 Proceso de magnetización

### 2.6.1 Curva de magnetización y procesos en los dominios relacionados con ella

Se analizan a continuación los procesos en los dominios así como la magnetización resultante en un espécimen ferromagnético sometido a un campo exterior  $H$ . El campo aplicado comienza desde un valor cero hasta un valor  $H_m$  tal que lleva al espécimen a la saturación técnica.

Los mecanismos que se producen en el proceso de magnetización se pueden agrupar en varias zonas o rangos [Chikazumi, 1964], tal y como se muestra en la figura 2-16:

- Estado desmagnetizado
- Rango de permeabilidad inicial
- Rango de magnetización irreversible
- Rango de magnetización por rotación coherente
- Rango de saturación técnica [Kaganov y Tsukérnik, 1985] o de aproximación a la saturación



**Figura 2-16.** Proceso de magnetización. Curva de magnetización.

### 2.6.1.1 Estado desmagnetizado

El espécimen no ha sido previamente expuesto a un campo exterior, se encuentra en su estado natural. En tal estado los dominios presentan una orientación aleatoria y por tanto una magnetización resultante nula.

### 2.6.1.2 Rango de permeabilidad inicial

La magnetización cambia reversiblemente. La magnetización en cada dominio rota reversiblemente partiendo de las direcciones estables. Simultáneamente las paredes de los dominios se desplazan reversiblemente desde sus posiciones estables en los ejes cristalográficos favorables hacia la dirección del campo.

El proceso de magnetización reversible de esta zona se produce por desplazamientos así mismo reversibles de las paredes de los dominios. Se produce un crecimiento de los dominios alineados favorablemente con el campo siguiendo los criterios de minimización energética. Como quiera que el desplazamiento de las paredes está determinado por la homogeneidad del material, la contribución de dichos desplazamientos a la permeabilidad inicial depende enteramente del tipo de material estudiado.

### 2.6.1.3 Rango de magnetización irreversible

Si se incrementa el campo aplicado  $H$  por encima a los valores de campo correspondientes al rango de permeabilidad inicial, la magnetización experimentará un aumento drástico siguiendo un proceso irreversible. La magnetización aumenta por desplazamientos irreversibles de las paredes de una posición estable a otra.

En materiales muy heterogéneos, con gran cantidad de inclusiones magnéticas, la magnetización es irreversible. Esto es debido a los desplazamientos irreversibles de las paredes y a la rotación irreversible de la magnetización de los momentos. Los dominios rotan de su dirección original a una de las direcciones de los ejes cristalográficos favorables que están cercanos a la dirección del campo aplicado.

En este rango se producen los saltos de Barkhausen, de los cuales hablaremos más adelante. Los saltos de Barkhausen son pequeños cambios discontinuos en la magnetización, inducidos por el desplazamiento irreversible de las paredes y por la rotación irreversible de la magnetización local de los dominios.

También se produce el efecto magneto-térmico, que consiste en la generación de calor en el proceso de magnetización. Parte del trabajo realizado por el campo en el proceso de magnetización discontinua se disipa en calor. Esta disipación de calor es la que se denomina pérdidas por histéresis.

### 2.6.1.4 Rango de magnetización por rotación coherente

Si el campo aplicado sigue aumentado de valor, la curva de magnetización se vuelve menos empinada y el proceso se torna reversible una vez más. El desplazamiento de los dominios ya se ha completado y la magnetización se produce por rotación coherente. Los dominios que estaban orientados en los ejes cristalográficos favorables más cercanos a la dirección del campo han ocupado todo el espécimen y ahora rotan a la dirección del campo a medida que éste aumenta de valor.

### 2.6.1.5 Rango de saturación técnica

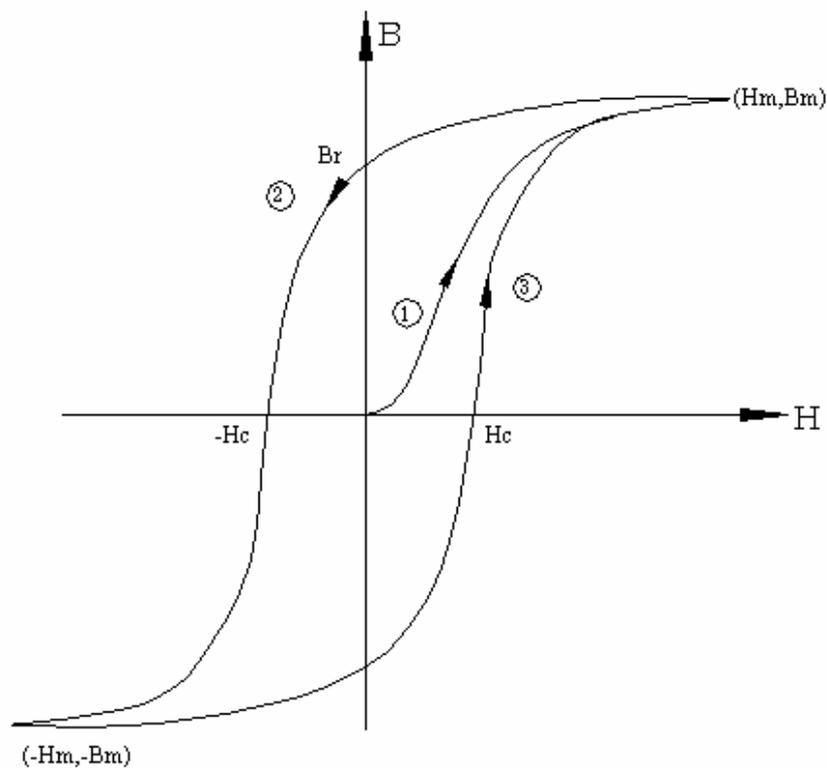
En esta zona la magnetización se aproxima gradualmente a la saturación. En la saturación técnica la magnetización se incrementa gradualmente en proporción al campo magnético. Este efecto se produce por el perfecto alineamiento de los espines con el campo.

No obstante, el alineamiento de los espines se ve afectado por la agitación térmica, con lo que en la práctica no se logra la saturación total, de ahí la denominación de saturación técnica. Generalmente este efecto es muy pequeño incluso bajo campos considerablemente altos.

#### 2.6.1.6 Ciclo de histéresis

Supongamos que en un punto determinado del proceso relatado, por ejemplo en la saturación técnica, el campo aplicado comenzara a disminuir. En principio lo esperado sería que la inducción siguiese la misma curva pero en sentido descendente. No obstante no es así, la inducción  $B=B(H)$  desciende por un camino diferente, esto es lo que denominamos fenómeno de histéresis.

A la curva trazada desde que el material se encuentra en su estado natural desmagnetizado (la curva de la figura 2-16) se la denomina curva de primera inducción, característica normal o característica magnética.



**Figura 2-17.** Ciclo de histéresis

Centrémonos en el ciclo de histéresis. Sean  $H_m$  y  $B_m$  el campo y la inducción respectivamente para los cuales se produce el cambio de campo aplicado ascendente a descendente. Continuando con la reducción de la intensidad de campo, supongamos que llegamos a

eliminar totalmente la intensidad de campo  $H=0$ , pero si observamos la figura 2-17 ello no quiere decir que la inducción también se haya eliminado, al contrario, queda una inducción,  $B_r$ , que se denomina remanente.

Pero aún no hemos finalizado, ahora con  $H=0$  cambiamos la polaridad del campo aplicado, esto es, aplicamos un campo negativo  $H<0$ . Seguimos con nuestro análisis, pero esta vez con campos cada vez más negativos. La inducción disminuye siguiendo la curva (2) hasta que llega a desaparecer  $B=0$ . Al campo necesario para que la inducción desaparezca se le denomina campo coercitivo. Si seguimos disminuyendo la intensidad de campo, la inducción pasará a ser negativa, cada vez más negativa y, al igual que ocurría con la curva de primera inducción, llega un momento en el cual la curva entra en saturación. Si en el punto  $(-H_m, -B_m)$  comenzamos a hacer el campo cada vez menos negativo, la inducción seguirá la curva (3), similar a la (2).

Las curvas (2) y (3) forman el ciclo o curva de histéresis, si la señal de excitación es periódica, la inducción seguirá dichas curvas alternativamente, trazando siempre el mismo ciclo de histéresis. Pero si en un momento determinado la excitación cambia de historial, la inducción adoptará otra curva diferente a este ciclo.

#### 2.6.1.7 Mecanismos en el ciclo de histéresis

Los mecanismos en el ciclo de histéresis son similares a los discutidos anteriormente. Sea por ejemplo la rama ascendente, el mecanismo de magnetización desde la saturación hasta la remanencia es debido a la rotación coherente, y desde la remanencia hasta la mitad de la curva es debido a la magnetización irreversible, el tramo restante de curva es debido a la magnetización por rotación.

El calor total generado durante un ciclo de histéresis está determinado por el área trazada y es igual a la energía total disipada por los procesos de magnetización discontinua (saltos de Barkhausen).

#### 2.6.1.8 Consideraciones sobre la magnetización y los procesos en los dominios relacionados con ella.

Esta descripción es válida para materiales blandos, en los cuales el desplazamiento de las paredes tiene lugar fácilmente pero la magnetización por rotación necesita un campo bastante alto. En los materiales claramente duros no se puede realizar una distribución tan clara de

zonas en las que acontecen unos mecanismos de magnetización determinados. El desplazamiento de las paredes y la rotación de la magnetización tienen lugar de forma casi simultánea.

La magnetización depende de la frecuencia del campo. El desplazamiento de las paredes se ve favorecido si el campo aplicado  $H$  cuasiestático (frecuencia que tiende a cero), pero su movimiento es más fácilmente retardado que la rotación para un campo aplicado de frecuencia alta.

En un espécimen magnético determinado la estructura de los dominios depende de su tamaño y forma, por lo que sus propiedades magnéticas también. Las curvas obtenidas no representan las propiedades magnéticas inherentes a la sustancia sino las inherentes al espécimen. Por ejemplo, las propiedades magnéticas de láminas de material ferromagnético, cuyos granos tienen un diámetro mayor que el grosor de la lámina comúnmente dependen de su grosor.

## 2.6.2 Mecanismos en los dominios durante la magnetización.

### 2.6.2.1 Resumen de los tipos de mecanismos que acontecen en los dominios durante la magnetización

Según lo expuesto en el apartado anterior, durante el proceso de la magnetización acontecen los siguientes mecanismos:

- *Crecimiento de dominios.* Implica el movimiento de las paredes de los dominios.
  - *Curvatura*
    - Reversible.
      - Para magnitudes pequeñas del campo
    - Irreversible.
      - Si la deformación es tan grande que la expansión continua sin incremento del campo aplicado
      - Si la expansión se encuentra con algún punto de enganche
  - *Traslación.* Siempre irreversible
- *Rotación de dominios.*
  - *Rotación coherente*
  - *Rotación irreversible*

Un cambio en la magnetización es reversible cuando después de aplicar y quitar un campo magnético externo la magnetización vuelve a su estado inicial. Los procesos reversibles e

irreversibles pueden producirse simultáneamente, pero entonces la magnetización no vuelve a su estado inicial.

El crecimiento de dominios por traslación es un procedimiento irreversible. Se puede describir mediante el modelo de pared rígida. En tal caso los máximos y mínimos locales de la energía potencial son debidos a tensiones mecánicas internas, debidas a las dislocaciones o por heterogeneidades estructurales.

### 2.6.2.2 Rotación

La rotación se puede exponer de una forma sencilla mediante el modelo de Stoner-Wohlfarth. Si bien se trata de un modelo limitado en cuanto su aplicación para en cálculos de ingeniería, explica concisamente el proceso de rotación de una partícula de dominio único. Este modelo se expone detalladamente en el apartado C.1. No se expone aquí para no alargar excesivamente la extensión del presente capítulo.

### 2.6.2.3 Movimiento de las paredes

Sea una pared de  $180^\circ$  en un cristal simple. Cuando se aplica un campo externo  $H$  paralelo a la dirección de magnetización del dominio la pared se desplaza. En principio el campo aplicado requerido es muy pequeño, pero la existencia de imperfecciones impide el movimiento de las paredes, implicando permeabilidades iniciales menores y campos coercitivos más altos. Este efecto es mayor en materiales policristalinos ya que la presencia de fronteras de grano introduce imperfecciones adicionales.

Debido a la presencia de las imperfecciones en los cristales, la energía del espécimen depende de la localización de las paredes. En concreto se ven afectados varios términos de energía: la energía propia (energía potencial) de la pared  $E_w$  y la energía magnetostática  $E_{ms}$ .

La energía de pared  $E_w$  es la energía por unidad de área de la pared, ubicada en una posición determinada, independientemente del origen de esta energía. Cuando se aplica un campo exterior la energía total por unidad de área de pared  $E_{wT}$  es:

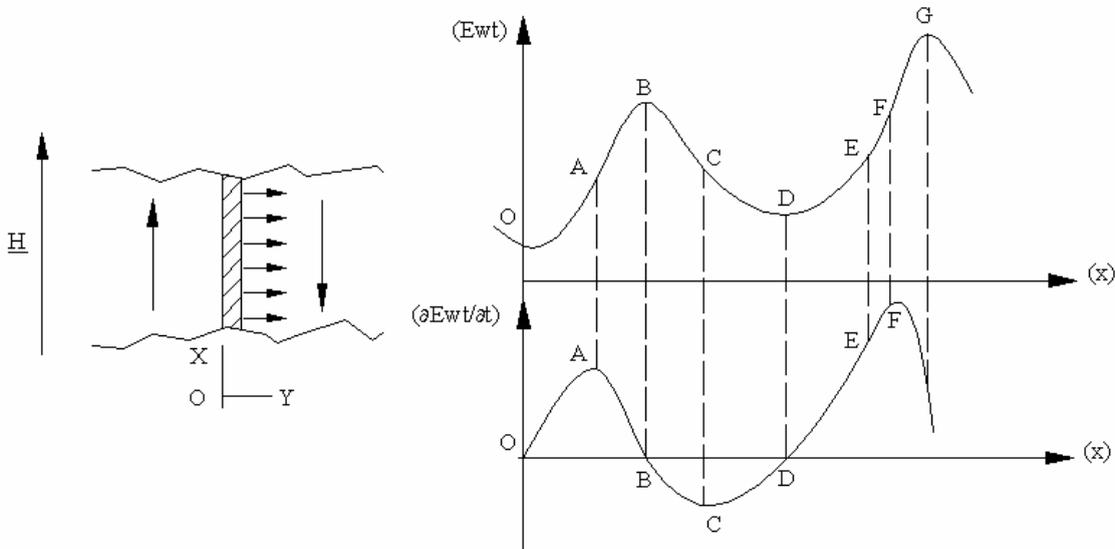
$$E_{wT} = E_w - 2HMx \quad (2.43)$$

La pared se establece en una posición de equilibrio:

$$\frac{d}{dx} E_{wT} = 0 \Rightarrow 2MH = \frac{dE_w}{dx} \quad (2.44)$$

Se ilustra a continuación el proceso de traslación de una pared de un dominio. Sean el espectro de energía de la pared y su correspondiente derivada, mostrados ambos en la figura 2-18. La acción del campo será desplazar la pared hacia la derecha en una longitud que depende de la pendiente de  $E_w = f(x)$ . Veamos que fases experimenta dicho desplazamiento:

1. Entre O y A el movimiento es reversible ya que el campo decrece, la pared volverá a un valor de  $x$  apropiado para el campo.
2. Cuando la pared llega al punto A se mueve espontáneamente a E, este movimiento es irreversible ya que la pared retornará por DCB.
3. Para incrementos posteriores del campo entre E y F el movimiento de nuevo es reversible. En F se realiza otro salto espontáneo.



**Figura 2-18.** Espectro de energía de una pared y su efecto en el movimiento de la pared

La permeabilidad inicial está determinada por  $dE_w/dx$  cerca del origen. La fuerza coercitiva es una medida del campo requerido para mover una pared superando las barreras de energía y depende por tanto de los máximos de  $dE_w/dx$ . La histéresis aparece de los cambios de energía irreversibles.

En un espécimen real habrán más paredes, no sólo una, pero el comportamiento del material se puede considerar como la superposición de los efectos de cada pared o como una situación promedio para una pared.

### 2.6.3 Permeabilidad inicial

Según lo expuesto en el apartado anterior, la permeabilidad inicial depende del valor de la derivada de la energía de la pared respecto a la posición  $dE_w/dx$ . Los valores de esta derivada dependen del modelo adoptado para dicha energía [Morrish, 2001].

En la descripción dada del proceso de magnetización la permeabilidad inicial es reversible, esto es, la curva de magnetización es la misma independientemente de si el campo aplicado  $H$  aumenta o disminuye, siempre y cuando el valor de dicho campo sea lo suficiente pequeño como para permanecer en el rango de permeabilidad inicial.

No obstante, es un hecho contrastado que la permeabilidad en esta zona no es completamente reversible, sino que presenta un pequeño ciclo de histéresis. Esto es razonable si se tiene en cuenta que algunas paredes pueden realizar movimientos irreversibles incluso con campos considerablemente pequeños.

A partir de estudios experimentales Lord Rayleigh obtuvo las siguientes leyes para la magnetización en la zona de permeabilidad inicial:

$$M = \alpha H + \beta H^2 \quad (2.45)$$

$$M = \alpha(H_1 - H) + \frac{1}{2}\beta(H_1 - H)^2; \forall -H_1 < H < H_1 \quad (2.46)$$

Donde  $H_1$  es el máximo campo aplicado y  $\alpha$  y  $\beta$  son constantes que caracterizan al material. En la figura 2-19 se muestra la forma teórica de un ciclo de histéresis que sigue la ley de Rayleigh.

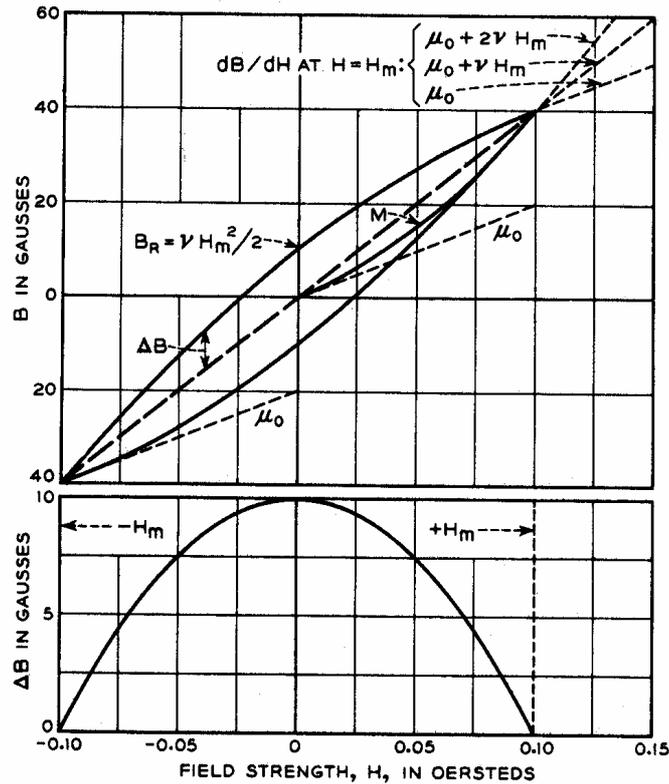


Figura 2-19. Forma teórica de la curva de histéresis de Rayleigh a inducciones bajas [Bozorth, 1978]

## 2.6.4 Fuerza coercitiva

Para determinar la fuerza coercitiva se requiere una expresión de la energía de la pared  $E_w$ , lo cual implica conocer la naturaleza de las imperfecciones en el material, conocer como contribuyen dichas imperfecciones a la energía y conocer además la distribución de estas imperfecciones, lo cual no es posible. La solución está en recurrir a modelos que simplifiquen la situación, los modelos que se exponen a continuación se puede considerar como clásicos. Estos modelos no son necesariamente excluyentes entre si.

### 2.6.4.1 Teoría de las tensiones. Enganche de las paredes por deformaciones o tensiones internas.

Las imperfecciones en el material provocan tensiones internas heterogéneas, estas tensiones afectan a la energía de la pared  $E_w$  y la energía magnetostrictiva de los dominios  $E_{ms}$ . Según Becker las paredes ven impedido su avance por regiones de deformaciones no homogéneas que interaccionan por magnetostricción con los momentos magnéticos para provocar barreras de energía que las paredes deben superar.

Si las paredes son de  $180^\circ$  la energía magnetostrictiva permanece constante ya que depende de  $\cos^2 \theta$ , y esta función cumple:

$$\cos^2 \theta = \cos^2 (\pi + \theta) \quad (2.47)$$

Entonces sólo tiene trascendencia la energía magnetocristalina, que se puede expresar como:

$$E_w = E_k = \sqrt{2A} \sqrt{k_1 + c\lambda_s \sigma} \quad (2.48)$$

Donde  $c$  es un factor numérico que depende de la dirección de la tensión  $\sigma$  respecto a la pared. Suponiendo una variación espacial de la tensión mecánica del tipo:

$$\sigma = \sigma_0 + \Delta\sigma \sin\left(\frac{2\pi x}{l}\right) \quad (2.49)$$

Se puede deducir que [Morrish, 2001]:

$$H_c = \frac{\pi^2 c \lambda_s \Delta\sigma}{M} \left(\frac{\delta}{l}\right) \quad (2.50)$$

Donde  $l$  es la longitud de onda de la tensión. Este cálculo es para una única pared, para más paredes se obtiene un promedio considerando la variación del factor  $c$  en todo el material.

$$H_c \approx \begin{cases} \frac{\lambda_s \Delta\sigma}{M} \left(\frac{l}{\delta}\right); \forall \delta > l \\ \frac{\lambda_s \Delta\sigma}{M}; \forall l > \delta \end{cases} \quad (2.51)$$

Esta teoría no puede considerar fuerzas coercitivas altas.

#### 2.6.4.2 Teoría de la inclusión. Enganche de las paredes por inclusiones

Las inclusiones magnéticas son regiones aisladas de materiales de segunda fase con propiedades magnéticas diferentes de la matriz. Según Kersten las inclusiones reducen la energía de las paredes cuando interaccionan con ellas.

En este modelo la energía propia de la pared  $E_w$  es la única contribución a la energía total de la pared  $E_{wT}$ :

$$E_{wT} = E_w \quad (2.52)$$

La interacción de la pared del dominio con las inclusiones se considera tal y como se muestra en la figura 2-20. Las inclusiones se modelan como esferas de radio  $r$  localizadas en las esquinas de una red cúbica con espaciado  $l$ . Cuando la pared interacciona con una inclusión, la energía de la pared se reduce en un término:

$$\Delta E_w = \pi(r^2 - x^2) \quad (2.53)$$

Si hay  $N$  inclusiones por unidad de volumen  $N=1/l^3$ , la energía de la pared por unidad de área será:

$$E_{wT} = \begin{cases} E_w \left[ 1 - \sqrt[3]{N^2} \pi (r^2 - x^2) \right], \forall x < |r| \text{ (Con interseccion)} \\ E_w, \forall |l| - |r| > x > |r| \text{ (Sin interseccion)} \end{cases} \quad (2.54)$$

Cuando hay interacción entre la pared y la inclusión, la derivada de la energía total respecto a la distancia es:

$$\frac{\partial F_{wT}}{\partial x} = 2E_w \sqrt[3]{N^2} \pi x \quad (2.55)$$

Esta derivada presenta un máximo en  $x=r$ :

$$\left. \frac{\partial E_{wT}}{\partial x} \right|_{\max} = 2E_w \sqrt[3]{N^2} \pi a \quad (2.56)$$

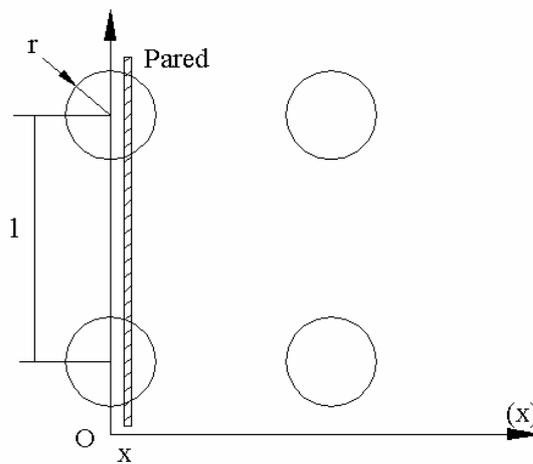
Donde  $a$  es el factor de retícula de la red cristalina. Aplicando la ecuación (2.44), la fuerza coercitiva es:

$$H_c \approx \frac{E_w \sqrt[3]{N^2} \pi a}{M} \quad (2.57)$$

## 2.6.4.3 Teoría del campo interno variable de Néel

Néel formula una teoría que si tiene en consideración la energía magnetostática menospreciada en los modelos anteriores. El hecho de que hay presente una energía magnetostática cuando hay inclusiones queda reflejado en la figura 2-21a. Para una inclusión esférica la energía magnetostática de la inclusión es:

$$E_m = \frac{1}{2} \left( \frac{4\pi}{3} \right) \left( \frac{4\pi r^3}{3} \right) M^2 \quad (2.58)$$



**Figura 2-20.** Interacción entre inclusiones y una pared de un dominio según la teoría de la inclusión.

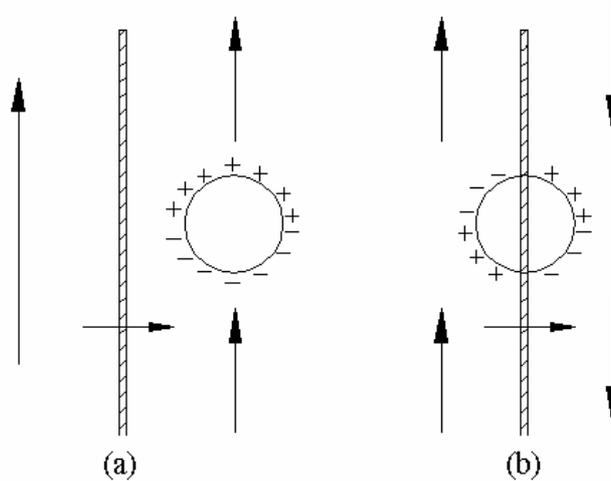
Cuando una pared interacciona con una inclusión se produce una redistribución de polos (figura 2-20b), esto reduce la energía magnetostática en un 50% aproximadamente. La variación de energía magnetostática entre la situación inicial de la figura 2-21a y la situación con interacción de la figura 2-21b es mucho mayor al cambio de energía en la pared de la teoría de la inclusión.

La situación mostrada en la figura 2-21 no es realista puesto que la magnetización puede ser no uniforme en las proximidades de la inclusión. Los polos no compensados también pueden aparecer por tensiones internas, produciendo también el efecto de reducir la pared.

Para el hierro Néel propone la siguiente expresión, deducida mediante su modelo, para el campo coercitivo:

$$H_c = 2,1v_s + 360v_i \quad (2.59)$$

Donde  $v_s$  es el volumen fraccional de tensión interna y  $v_i$  es el volumen fraccional de inclusiones no magnéticas.



**Figura 2-21.** Distribución de polos en la superficie de una inclusión, (a) sin interacción con una pared de dominio y (b) con interacción con una pared de dominio

### 2.6.5 Aproximación a la saturación

Con campos aplicados muy altos los movimientos de las paredes se vuelven irreversibles y la magnetización se produce por rotación de los dominios. Se ha constatado que la aproximación a la saturación se rige por la siguiente relación empírica:

$$M_H = M_s \left( 1 - \frac{a}{H} - \frac{b}{H^2} \right) + cH \quad (2.60)$$

Donde  $M_H$  es la magnetización en la dirección del campo aplicado,  $M_s$  es la magnetización de saturación;  $a$ ,  $b$  y  $c$  son constantes a determinar.

### 2.6.6 Nucleación de dominios.

Tal y como se ha expuesto en el proceso de magnetización, al llegar a la saturación en la muestra tan solo queda un dominio. Si a continuación se reduce el campo, la magnetización sigue una curva de magnetización (por ejemplo, una de las ramas de la curva de histéresis) con unos procesos idénticos a los que la llevaron a la saturación. Pero entonces, ¿cómo y cuando comienzan los dominios del proceso de magnetización inversa? Dicho de otro forma,

cómo se inicia la nucleación de dominios. Para averiguarlo Allan H. Morrish [Morrish, 2001] propone estudiar el proceso de magnetización en filamentos de hierro y extrapolar las conclusiones al caso genérico de los materiales ferromagnéticos. Los filamentos contienen relativamente pocas imperfecciones, siendo la estructura más cercana a un cristal perfecto.

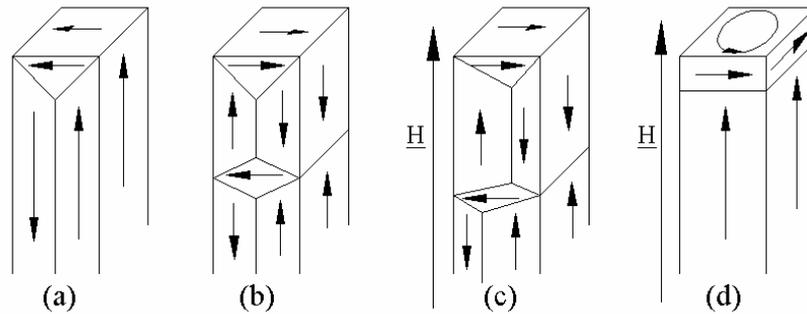


Figura 2-22. Proceso de magnetización en un filamento

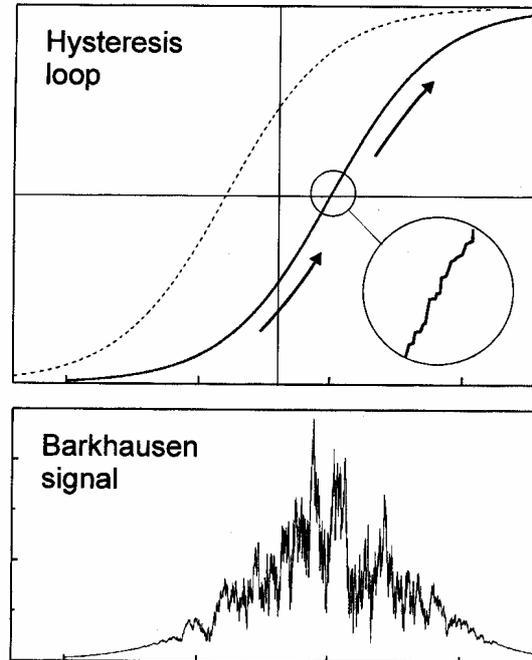
En la figura 2-22a se muestra el patrón de dominios que suelen adoptar los filamentos cuando están en estado desmagnetizado. Cuando se aplica un campo perpendicular al eje del filamento, el filamento adopta el patrón de dominios mostrado en la figura 2-22b. En cambio, si el campo aplicado fuese paralelo al eje del filamento el patrón de dominios adoptado sería el de la figura 2-22c.

Si el campo aplicado al filamento es paralelo a su eje y se aumenta el campo hasta llegar al rango de aproximación de la saturación el patrón de dominios será el mostrado en la figura 2-22d. Cerca del final del filamento subsiste un dominio inverso. Si se reduce el campo aplicado, este dominio residual inverso será el germen sobre el cual crecerán los dominios a favor del sentido del campo. El pequeño dominio residual en el extremo del filamento es el causante de la nucleación. Se puede extrapolar esta situación al caso de una muestra ferromagnética, en ella se encuentran imperfecciones localizadas cuyo comportamiento es similar al de los filamentos, siendo estas imperfecciones donde se inicia la nucleación.

### 2.6.7 El efecto Barkhausen

El efecto Barkhausen es el fenómeno de cambios discontinuos de la magnetización cuando el campo cambia de forma continua. Estos cambios aparecen en la región de magnetización irreversible y son debidos a los desplazamientos irreversibles de las paredes y la rotación irreversible de los dominios. A cada cambio discontinuo de magnetización se le denomina salto de Barkhausen. En la figura 2-23 se muestra el detalle de la curva de histéresis en el

rango de magnetización irreversible con los saltos de Barkhausen y la señal de tensión obtenida por saltos de Barkhausen.



**Figura 2-23.** Efecto Barkhausen. Arriba: detalle de la curva de histéresis en la zona de magnetización irreversible con los saltos de Barkhausen. Abajo: Señal de tensión de los saltos de Barkhausen.

[Bertotti, 1998]

Los saltos de Barkhausen se ven afectados por los cambios en la estructura del material y por la tensión mecánica.

Ya se ha comentado que el campo y la magnetización dan una descripción incompleta del estado del espécimen ferromagnético. Esto es lógico pues la magnetización  $M$  es el promedio sobre un volumen que contiene muchos dominios. En la escala de los dominios, el estado de un cuerpo está definido por su estructura, y pueden existir muchas estructuras para los mismos valores de campo y magnetización promedio. En un sistema magnético macroscópico hay una gran cantidad de imperfecciones que provocan un desorden estructural: granos, dislocaciones y deformaciones de retícula, fluctuaciones de composición, presencia de inclusiones, precipitados, separaciones de fase, etcétera. Estas fuentes de desorden están acopladas a la magnetización a través de las interacciones de intercambio, anisotropía e interacciones magnetostáticas. El resultado es que el perfil de energía en el cual se desenvuelve el sistema exhibe una estructura muy complicada, con un gran número de mínimos locales y puntos de inflexión que reflejan la presencia del desorden estructural.

La magnetización está acoplada al campo aplicado por la energía  $-\mu_0 \mathbf{M} \cdot \mathbf{H}$ , que continuamente altera el balance energético del sistema a medida que  $\mathbf{H}$  varía con el tiempo. La estabilidad de una configuración de dominios dada, tarde o temprano se destruirá por variación del campo aplicado. El mínimo de energía se transforma en un punto de inflexión, el patrón de dominios se vuelve inestable, y espontáneamente evoluciona a alguna configuración nueva. Estos reajustes se pueden localizar en el espacio como una pared de dominio dando un pequeño salto a otra posición estable, o puede implicar a toda la estructura de dominios en partes sustanciales del cuerpo. Este mecanismo fundamental del proceso de magnetización es el efecto Barkhausen.

La descripción cuantitativa del efecto Barkhausen, al menos en términos de ecuaciones definitorias es muy complicada debido a la naturaleza aleatoria del proceso. No obstante, En los últimos años Bertotti ha hecho un gran progreso en la modelación del efecto Barkhausen [Bertotti, 1998]. Se trata de un modelo basado en procesos estocásticos. En esta descripción los saltos de Barkhausen dependen del potencial interno experimentado por las paredes de los dominios a medida que se mueven por el material. El potencial interno tiene carácter aleatorio ya que depende de las imperfecciones del material.

## ***2.7 Efectos dependientes del tiempo***

### **2.7.1 Corrientes inducidas**

Aun cuando el campo aplicado cambie de forma instantánea, la magnetización de un espécimen no llega a su equilibrio instantáneamente, esta es retardada por las corrientes inducidas, y las paredes de los dominios se mueven a una velocidad finita. Esto se traduce en que existe un retardo entre la magnetización y el campo.

El proceso más importante que provoca el retardo es el siguiente. El campo, por la ley de Faraday, induce una fuerza electromotriz en el material. Como que los materiales ferromagnéticos son relativamente buenos conductores, fluyen corrientes ciertamente apreciables por dicho material, estas corrientes se denominan corrientes inducidas. Las corrientes inducidas, según la ley de Lenz, tendrán una dirección tal que se oponen a un cambio del campo. El resultado es que el campo tarda un cierto tiempo en penetrar en el material, por ello el cambio en la magnetización es más lento. Si el campo aplicado varía de forma sinusoidal en el tiempo, la amplitud del campo es considerablemente menor en el centro que en la superficie. A esto se le denomina efecto corona magnético (o efecto pelicular

magnético). Sólo cuando el campo se mantiene constante las corrientes inducidas decaen a cero y el campo en el interior se iguala con el campo en la superficie

Cuando la pared de un dominio se mueve a una velocidad  $v$ , el momento magnético de los dominios adyacentes a la pared cambian a una velocidad  $2Mv$  por unidad de área de pared. En general esta velocidad depende directamente de la frecuencia del campo aplicado. No obstante es importante indicar que incluso cuando el campo aplicado es muy lento las paredes, a veces, se moverán a una velocidad no nula. Esto ocurre cuando el campo es tan grande que provoca movimientos irreversibles de las paredes (movimiento espontáneo del punto A al E en el espectro energía-movimiento de la figura 2-19). Como resultado de este movimiento de las paredes también se inducen corrientes. Estas corrientes inducidas provocarán un campo magnético cuya tendencia es oponerse al movimiento que los causó. Si el movimiento de las paredes es irreversible, las corrientes inducidas actúan reduciendo la velocidad de la pared.

### **2.7.2 Otros efectos dependientes del tiempo**

Aparte de las corrientes inducidas y el correspondiente retardo de la magnetización con respecto al campo aplicado, en los materiales ferromagnéticos pueden aparecer otros efectos dependientes del tiempo. No entra dentro del interés de nuestro trabajo el análisis profundo de dichos efectos, pero sí enunciarlos y definirlos. Las denominaciones para referir a un mismo efecto pueden ser diferentes según el autor [Craik y Tebble, 1965]. Aquí se emplearán las denominaciones más aceptadas.

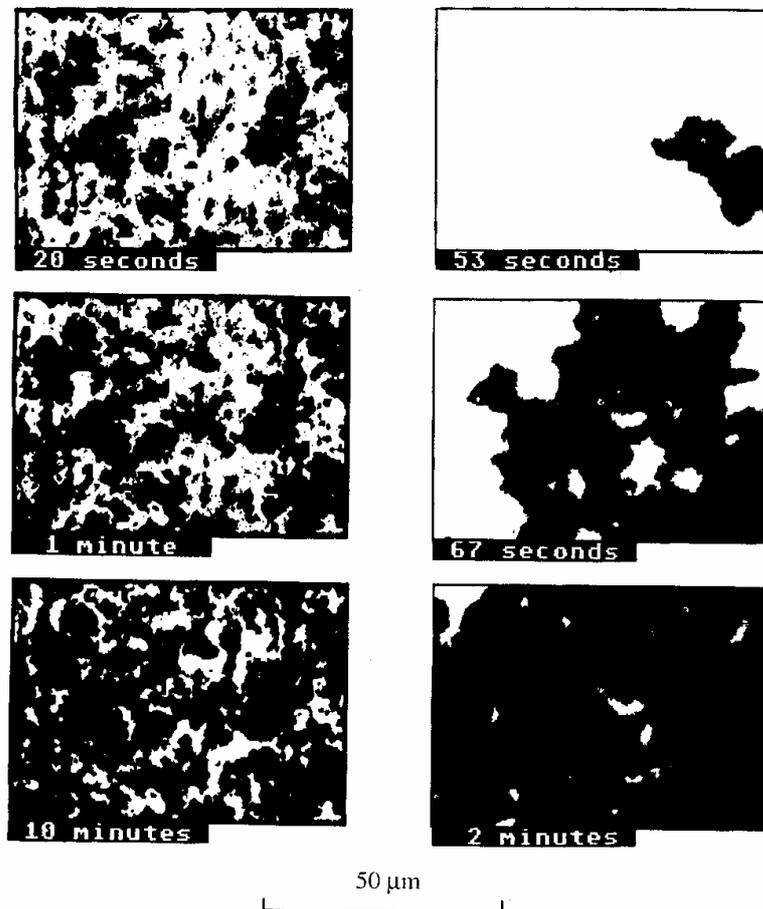
#### *2.7.2.1 Envejecimiento magnético (Magnetic ageing)*

Cambios irreversibles en las propiedades magnéticas debidas a cambios en la estructura, como la formación de precipitados; puede acompañar a un envejecimiento mecánico.

#### *2.7.2.2 Pos-efecto magnético (Magnetic after-effect)*

Si se aplica un campo y se registra la respuesta de magnetización, en algunos casos puede apreciarse que el tiempo transcurrido para llegar al equilibrio es mayor que el retardo causado por las corrientes inducidas. Esta diferencia de tiempo es lo que denominamos pos-efecto magnético.

Cuando aparece, o más bien, cuando se puede registrar, el pos-efecto magnético está asociado con la difusión de átomos, iones, electrones o huecos.



*Figura 2-24. Evolución temporal de la estructura de dominios en una película de Co por relajamiento térmico (viscosidad magnética). [Bertotti, 1998]*

### 2.7.2.3 Viscosidad magnética

El término viscosidad magnética se suele emplear para designar al mismo proceso que el pos-efecto magnético. No obstante parece más conveniente reservar el término para aquellos cambios lentos en la magnetización que no están relacionados con algún efecto de difusión. Se emplea para este concepto la designación viscosidad irreversible, mientras que se denomina viscosidad reversible como sinónimo de pos-efecto de difusión. En la figura 2-24 se muestra la evolución de los dominios en una película de cobalto por relajamiento térmico.

#### *2.7.2.4 Desacomodación*

En algunos especímenes desmagnetizados, la permeabilidad inicial decrece con el tiempo. A este efecto se le denomina desacomodación.

La desacomodación también es un efecto de la difusión de átomos intersticiales.

También se suele emplear el término envejecimiento reversible como sinónimo de desacomodación.

### 3 Modelo de Preisach

El modelo conocido como de Preisach clásico fue desarrollado por el ingeniero húngaro Ferenc Preisach en los inicios de los años 30 mientras trabajaba para Siemens and Halske en Berlín [Vajda y della Torre, 1995a]. En la actualidad el modelo de Preisach es considerado como un modelo de histéresis fenomenológico, pero en su concepción Ferenc Preisach [Preisach, 1935] basó su modelo en una aproximación física intuitiva del proceso de magnetización.

Hasta las tres últimas décadas del siglo pasado este modelo no mereció apenas ninguna consideración [Zhu, 1994]. El paso decisivo para la correcta aplicación y comprensión del modelo fue realizado por el matemático ruso M. Krasnoselski en la década de los 70, quien aisló las connotaciones físicas – erróneas, o cuanto menos dudosas [Morrish, 2001] – de la herramienta matemática que en realidad es y desarrolló además toda la teoría algebraica del modelo [Doong y Mayergoyz, 1985; Mayergoyz, 2003]. En este sentido David Jiles, con cierta ironía, considera al modelo de Preisach como a un sistema sofisticado de ajuste de curvas [Jiles, 1998]. Realmente puede ser considerado como tal, pero también merece ser reconocido como la contribución -hasta el momento- más destacable a la modelación del ciclo de histéresis [Takacs, 2003]. De hecho es el único modelo de histéresis sobreviviente a siete décadas de escrutinio científico.

Actualmente el modelo de Preisach clásico sirve de base a unas generalizaciones que tratan de superar algunas carencias del modelo. No obstante, aún no se dispone de un modelo tipo-Preisach que englobe todas ellas. Paralelamente a la generalización del modelo, se ha intentado dotar de sentido físico a algunas características del modelo de Preisach [Bertotti, 1998].

### 3.1 Interpretación matemática

El modelo de Preisach, desde un punto de vista matemático, describe al sistema con histéresis como a un conjunto de operadores biestables denominados operadores de histéresis o histeriones. Cada operador tiene dos estados posibles, +1 y -1. La transición del estado -1 al estado +1 se realiza cuando la función de entrada, el campo  $H$ , es superior a un valor  $a$ . Asimismo, la transición inversa se realiza cuando el campo es inferior a un valor  $b$ . A estos valores del campo,  $a$  y  $b$ , se les denomina campos de conmutación. En la figura 3-1 se muestra de forma gráfica el comportamiento del operador de histéresis en función del campo. Los valores del campo de conmutación son específicos para cada operador  $g_{ab}H(t)$ , cumpliéndose siempre que  $a \geq b$ .

Para el conjunto de operadores  $g_{ab}H(t)$  puede definirse una función de ponderación  $m(a, b)$  denominada función densidad o función de Preisach. Esta función de ponderación en realidad es la densidad de probabilidad de encontrar un operador de histéresis  $g_{ab}H(t)$  con unos valores de campo de conmutación determinados [Brokate, 1989].

En definitiva podemos representar el modelo de Preisach de forma algébrica según la siguiente expresión:

$$B(t) = B_s \iint_{a \geq b} m(a, b) g_{ab} H(t) da db \quad (3.1)$$

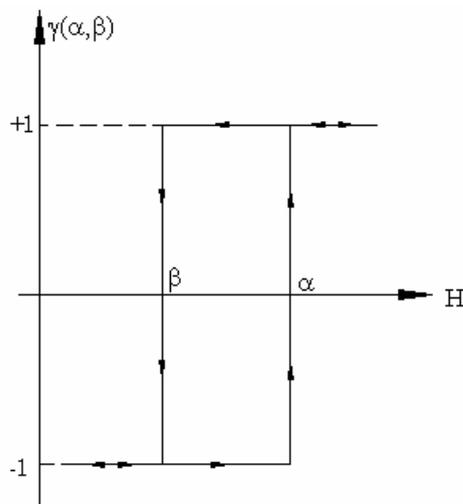


Figura 3-1. Operador de histéresis

De la definición del modelo de Preisach dada se deduce que el modelo se puede aplicar en general a cualquier sistema con histéresis. La entrada podría ser cualquier variable, y los límites de conmutación dos valores cualesquiera de dicha variable de entrada. Además no es necesario relacionar los operadores con ningún mecanismo físico ubicado especialmente en un punto determinado, estos operadores no representan ninguna partícula real. Si bien está última afirmación la iremos matizando a medida que avanzamos en la descripción y comprensión del modelo de Preisach y sus generalizaciones.

### 3.2 Interpretación geométrica

#### 3.2.1 Plano de Preisach

Por cada pareja de campos de conmutación  $(\mathbf{a}, \mathbf{b})$  existe un operador de histéresis  $\mathbf{g}_{ab}H(t)$  y este es único. En consecuencia el conjunto de todos los operadores forma un plano  $\mathbf{a}-\mathbf{b}$ , a cada punto  $(\mathbf{a}, \mathbf{b})$  de dicho plano le corresponde un operador  $\mathbf{g}_{ab}H(t)$ . Al plano  $\mathbf{a}-\mathbf{b}$ , en la literatura especializada, se le suele referir como plano de Preisach.

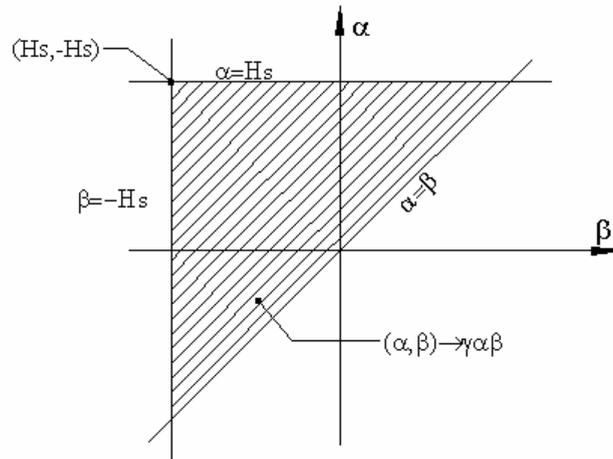
El plano de Preisach tiene la extensión del semiplano definido por  $\mathbf{a} \geq \mathbf{b}$ , pero en un problema real esta situación no es deseable y el plano de Preisach debe acotarse. Veamos como realizamos dicha acotación.

Para nuestras aplicaciones asumiremos que el semiplano  $\mathbf{a} < \mathbf{b}$  tiene  $\mathbf{m}(\mathbf{a}, \mathbf{b})=0$ , lo contrario no tendría sentido. Con esto ya tenemos la primera acotación del plano de Preisach.

Si denominamos ciclo límite a aquel que contiene a todos los ciclos de histéresis que puede producirse, en él se produce la máxima intensidad de campo posible, esto es, el rango de intensidades de campo abarcado por el ciclo límite contiene todas las intensidades de campo que se pueden dar en nuestro problema. Para un buen funcionamiento del modelo de Preisach se elige un ciclo límite tal que alcance la saturación técnica  $H_s$ . En consecuencia, no es necesario considerar los operadores cuyos campos de conmutación sean mayores que la intensidad de saturación, para estos operadores también se considerará que  $\mathbf{m}(\mathbf{a}, \mathbf{b})=0$ .

Con estas consideraciones, el plano de Preisach queda delimitado por las líneas  $\mathbf{a}=\mathbf{b}$ ,  $\mathbf{a}=H_s$  y  $\mathbf{b}=-H_s$ , al como se muestra en la figura 3-2. En estas circunstancias el plano de Preisach nos

queda acotado a un triángulo definido por el vértice  $(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = (H_s, -H_s)$ , al cual denominamos triángulo límite  $T(\mathbf{a}_0, \mathbf{b}_0)$ .



**Figura 3-2.** Plano de Preisach restringido al triángulo límite

Para comprender mejor el funcionamiento del modelo de Preisach, a continuación vamos a analizar la evolución de los operadores ante un historial de campo arbitrario con la ayuda del plano de Preisach.

Supongamos que el material magnético que se desea caracterizar es llevado a su saturación negativa  $-H_s$ . En esta situación inicial todos los operadores del triángulo se hallan en su estado -1, tal situación se muestra en la figura 3-3a. Seguidamente el campo aumenta de forma continua hasta un valor  $H_1$ , ante esta variación de la excitación los operadores con  $\mathbf{a} = H_1$  conmutan del estado -1 al estado +1 mientras que el resto continúa en el estado -1, de forma que el triángulo nos queda dividido en dos zonas. Una zona,  $S_+(t)$ , con operadores en estado +1; y la otra zona,  $S_-(t)$ , con operadores en estado -1. Ambas zonas se hallan divididas por una línea  $L(t)$  que en este caso coincide con la recta horizontal  $\mathbf{a} = H_1$ . A la línea de división  $L(t)$  la denominaremos línea de estado. En la figura 3.3b se muestra el plano de Preisach después de este cambio de la excitación.

Supóngase a continuación que el campo decrece de forma continua de un valor inicial  $H_1$  a un segundo valor  $H_2$ . Los operadores que antes estaban en el estado -1 seguirán estándolo, pero de aquellos que en el anterior cambio pasaron de -1 a +1 los que tengan su campo de conmutación  $\mathbf{b} \geq H_2$  volverán al estado -1. El plano de Preisach sigue estando limitado por dos zonas, pero ahora la línea de división  $L(t)$  está formada por las rectas horizontal  $\mathbf{a} = H_1$  y la recta vertical  $\mathbf{b} = H_2$ . La nueva configuración del plano de Preisach se muestra en la figura 3-

3c. En el resto de la figura 3-3 se aprecia la evolución de los operadores de histéresis en el plano de Preisach ante nuevas variaciones arbitrarias de la excitación.

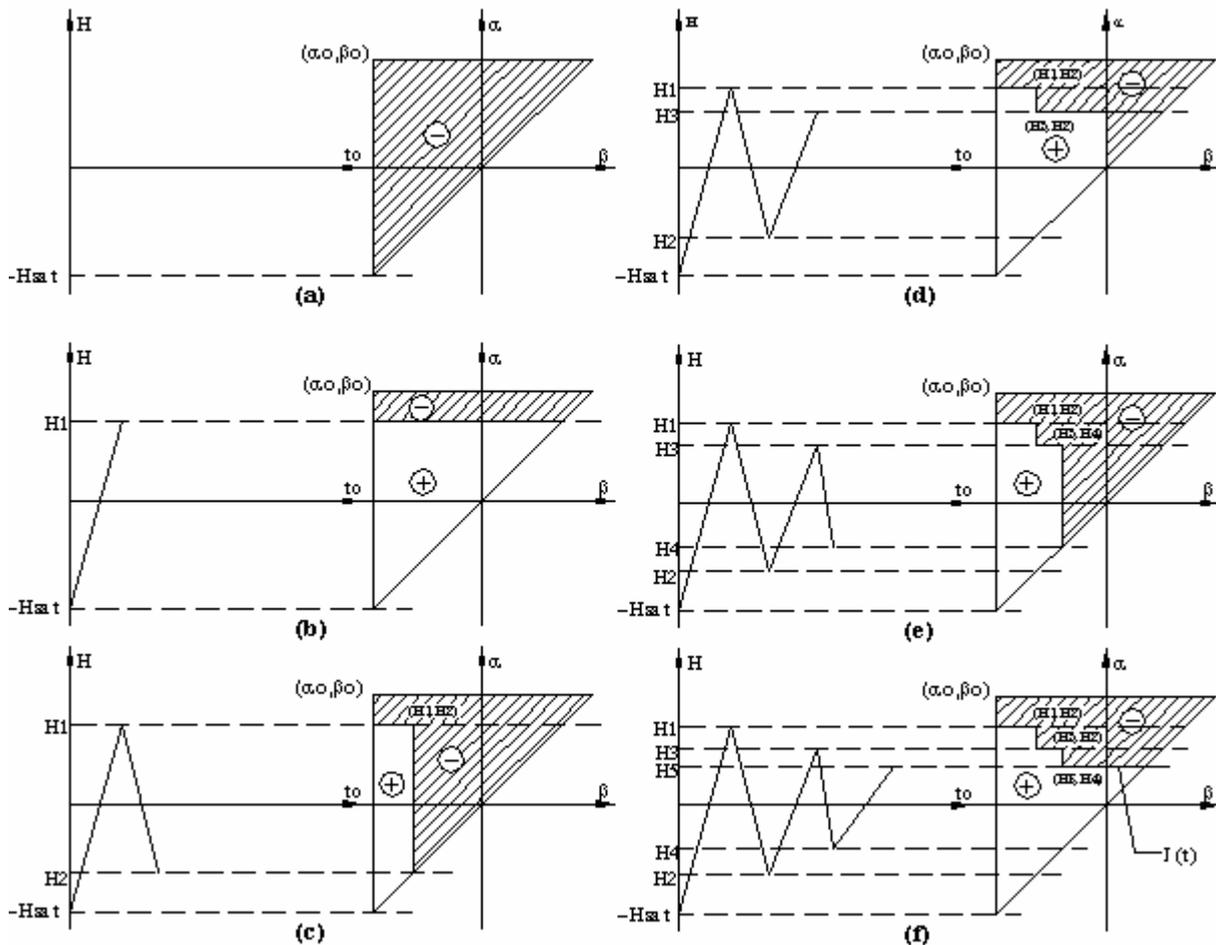


Figura 3-3. Evolución de los operadores en el plano de Preisach ante una excitación arbitraria

Este análisis se puede generalizar con la siguiente conclusión. En un instante de tiempo determinado el triángulo está dividido en dos zonas:  $S_+(t)$  formada por operadores en el estado +1 y  $S_-(t)$  formada por operadores en el estado -1. La frontera entre ambas zonas es una línea  $L(t)$  formada por tramos rectos horizontales y tramos rectos verticales alternados, cuyos vértices coinciden con los máximos y mínimos locales del historial de campo. De tal forma que se puede concluir que el modelo de Preisach caracteriza a la inducción  $B(t)$  –o la magnetización  $M(t)$ - mediante:

- a. La línea de estado  $L(t)$  que viene definida por el historial de la excitación y marca el estado del sistema con histéresis.

- b. La función densidad  $\mathbf{m}(\mathbf{a}, \mathbf{b})$  que depende de la microestructura y las características magnéticas que afectan al proceso de magnetización

En este análisis también se debe prestar atención a un hecho que, como posteriormente se comentará, va a delimitar el ámbito de aplicación del modelo de Preisach. Obsérvese que la estructura del plano de Preisach depende del estado de la línea frontera  $L(t)$ . El estado de esta línea  $L(t)$  depende únicamente de los máximos y mínimos locales del historial de campo, no de los valores intermedios, ni tampoco de la rapidez con que se suceden dichos extremos locales. Esto es, la determinación de la variable de salida, la inducción  $B(t)$ , es independiente de la frecuencia y de la forma de onda del campo  $H(t)$ .

### 3.2.2 Interpretación geométrica

La generalización del análisis del plano de Preisach permite comprobar que la integral doble de (3.1) se puede descomponer en dos integrales dobles, una para cada zona.

$$B(t) = B_s \iint_{S_+(t)} \mathbf{m}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \mathbf{g}_{ab} H(t) d\mathbf{a} d\mathbf{b} + B_s \iint_{S_-(t)} \mathbf{m}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \mathbf{g}_{ab} H(t) d\mathbf{a} d\mathbf{b} \quad (3.2)$$

El operador de histéresis puede hallarse en el estado “+1” o en el estado “-1”:

$$\mathbf{g}_{ab} H(t) = \begin{cases} +1; \forall (\mathbf{a}, \mathbf{b}) \in S_+(t) \\ -1; \forall (\mathbf{a}, \mathbf{b}) \in S_-(t) \end{cases} \quad (3.3)$$

Sustituyendo el operador de histéresis por su valor correspondiente para cada zona, la ecuación (3.2) se puede expresar finalmente como:

$$B(t) = B_s \left( \iint_{S_+(t)} \mathbf{m}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) d\mathbf{a} d\mathbf{b} - \iint_{S_-(t)} \mathbf{m}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) d\mathbf{a} d\mathbf{b} \right) \quad (3.4)$$

Esta expresión nos permite formular el modelo de Preisach en función de la evolución del plano y la línea de estado  $L(t)$ .

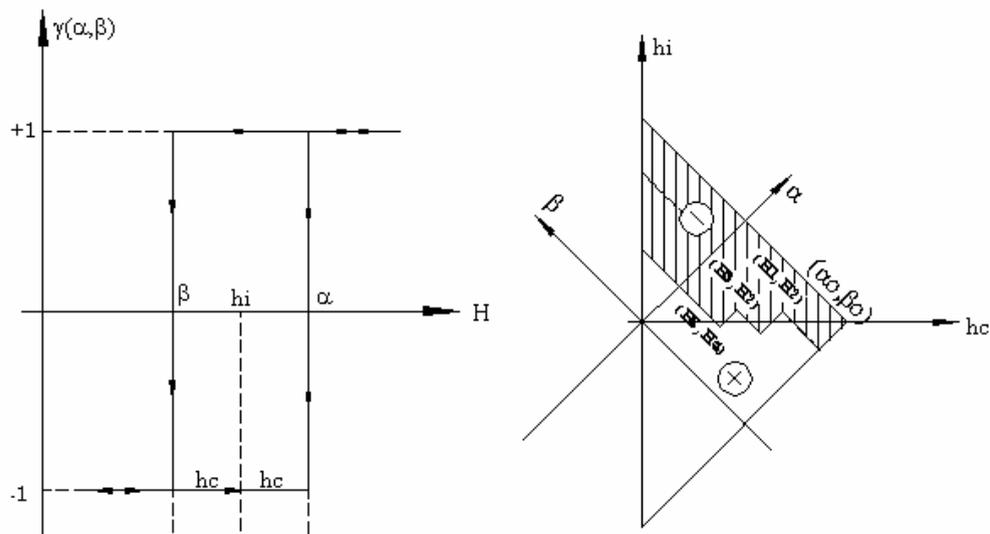


Figura 3.4. Operador de histéresis y plano de Preisach con la formulación  $hc-hi$

### 3.2.3 Formulación alternativa del modelo de Preisach

Los operadores de histéresis también pueden expresarse en función de dos parámetros denominados campo de interacción  $h_i$  y campo crítico o campo coercitivo  $h_c$ . En tal caso el plano de Preisach sería el plano  $(h_c-h_i)$  mostrado en la figura 3-4. La formulación del modelo de Preisach con los campos de conmutación y con los campos de interacción y coercitivo es totalmente equivalente. De la figura 3-4 se deduce que la relación entre ambos parámetros es:

$$\begin{aligned} \mathbf{a} &= h_i + h_c \\ \mathbf{b} &= h_i - h_c \end{aligned} \quad (3.5)$$

## 3.3 Propiedades del modelo de Preisach

### 3.3.1 Propiedad de borrado

La línea  $L(t)$  define el estado del sistema con histéresis. Asimismo, esta línea está definida por sus vértices, los cuales coinciden con los extremos locales de la excitación. Todo extremo “borra” a todos los vértices de  $L(t)$  cuyas coordenadas  $\mathbf{a}$  estén por debajo de dicho máximo. Igualmente, el extremo mínimo borra los vértices de  $L(t)$  cuyas coordenadas  $\mathbf{b}$  están por encima de dicho mínimo. A esta propiedad del modelo de Preisach se la denomina de borrado. En la figura 3.5 se muestra el efecto de borrado de un extremo máximo sobre todos los demás máximos anteriores menores a él [Brokate y della Torre, 1989; Pescetti, 1991].

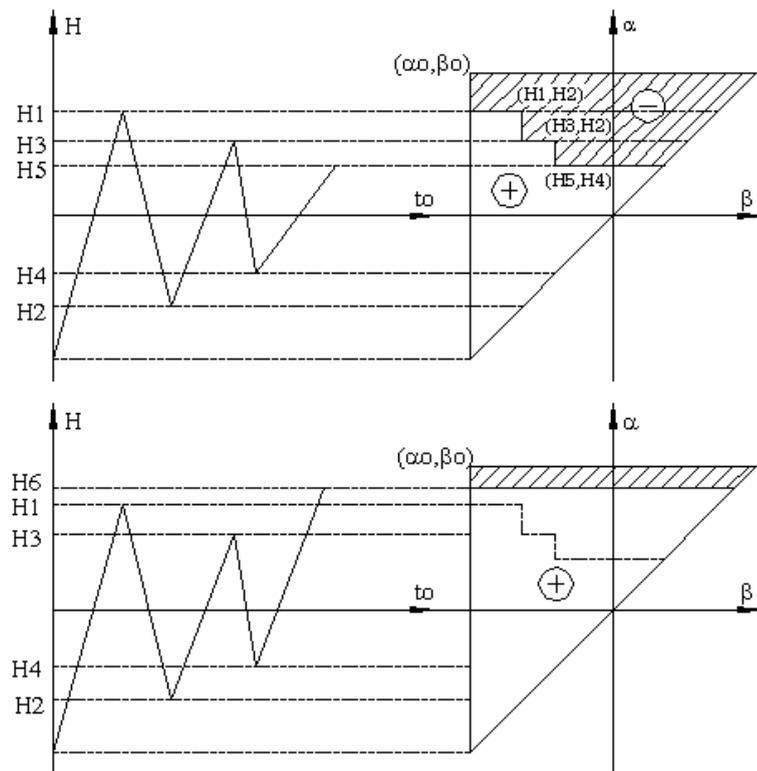


Figura 3.5. Propiedad de borrado en el modelo de Preisach

### 3.3.2 Propiedad de congruencia

Sean dos historias de campo  $H_1(t)$  y  $H_2(t)$  distintos, sus respectivas líneas de estado serán distintas. Sea un instante  $t_0$  a partir del cual los dos historiales coinciden. Desde ese instante ambas líneas de estado forman en el plano de Preisach un triángulo final idéntico. En consecuencia ambos describirán un ciclo menor igual, pero desplazados verticalmente por partir de estados iniciales diferentes. Dicho de otra forma, Todas las ramas que comienzan en puntos de inversión iguales tienen la misma forma [Pescetti,1991].

En la figura 36 se muestran dos historiales independientes que finalizan en dos ciclos menores limitados por las mismas intensidades de campo, como se puede apreciar en la figura 3-7 cuando ambos historiales entran en el ciclo menor la progresión en el plano de Preisach es la misma, el triángulo  $(H_1, H_2)$ .

Comparando ambos planos de Preisach y recordando la definición del modelo de Preisach que nos da la ecuación (3.4) se deduce que la congruencia de ambos ciclos es debida al hecho de que la  $m(\mathbf{a}, \mathbf{b})$  es independiente de los estados previos del historial de intensidad de campo y de la propia inducción [Zhu, 1994]. En efecto, la integral de área de  $m(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ , que nos

proporciona el incremento de inducción para un incremento de intensidad de campo dado, para ambos ciclos menores está realizada sobre el mismo triángulo, por tanto los incrementos de inducción son idénticos y ambos ciclos son congruentes.

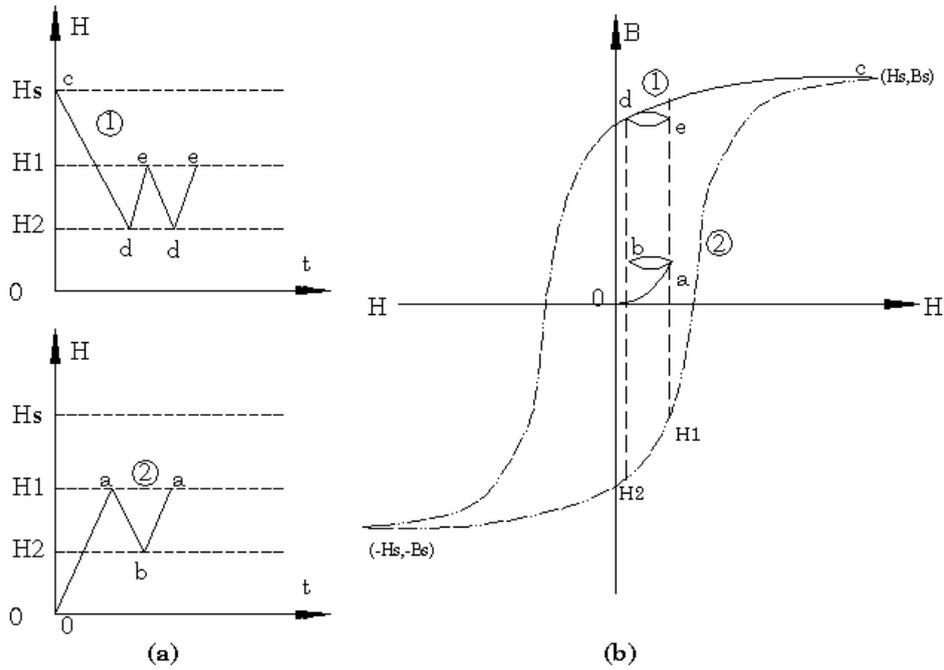


Figura 3-6. Ciclos menores congruentes con el modelo de Preisach.

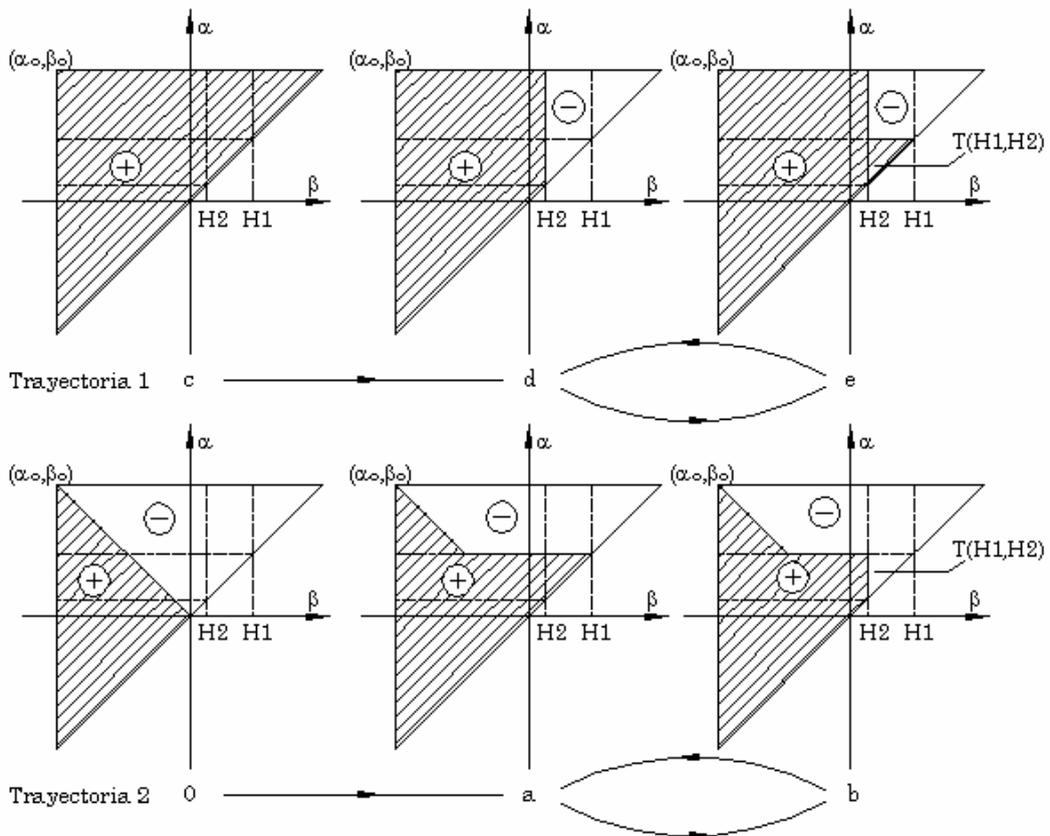


Figura 3-7. Evolución del plano de Preisach para los dos ciclos menores congruentes de la figura 3-6

### 3.3.3 Memoria no local

Según lo anterior se muestra la siguiente paradoja. El modelo de Preisach está formado por operadores de histéresis los cuales presentan memoria local, pero en su conjunto el modelo presenta memoria no local [Pescetti, 1991].

### 3.3.4 Modelo estático

De la evolución del plano de Preisach para un historial de intensidad de campo dado se desprende que únicamente los valores máximos y mínimos modifican la línea de estado  $L(t)$ , por la propiedad de borrado los puntos intermedios no influyen en la configuración de vértices de la línea de estado, y por tanto tampoco lo hacen en el cálculo de la inducción. Tampoco la rapidez con que se suceden los máximos y mínimos del campo influye en la línea de estado. En consecuencia, el modelo de Preisach no es capaz de considerar el efecto de la forma de onda o la frecuencia del campo. Es por ello que se le considera un modelo estático.

## 3.4 La función densidad

### 3.4.1 Significado físico

La función  $m(\mathbf{a}, \mathbf{b})$  es la densidad de probabilidad de encontrar un operador de histéresis con campos de conmutación  $\mathbf{a}$  y  $\mathbf{b}$ . O lo que es lo mismo, la relación  $m(\mathbf{a}, \mathbf{b})d\mathbf{a}d\mathbf{b}$  es la probabilidad de encontrar un ciclo elemental con su rama ascendente entre  $\mathbf{a}$  y  $\mathbf{a}+d\mathbf{a}$  y rama descendente entre  $\mathbf{b}$  y  $\mathbf{b}+d\mathbf{b}$  [Biorci y Pescetti, 1958]. Esta es una definición puramente matemática, que define perfectamente la función de la función densidad en el modelo de Preisach, pero que nada nos aporta de su significado físico. Como ya se comentó, el modelo de Preisach carece de analogía física directa. Pero esto no implica que esté carente de una cierta identidad física. G. Bertotti ha investigado los paralelismos del modelo de Preisach con los mecanismos físicos del proceso de magnetización en los medios ferromagnéticos. Los operadores de histéresis no tienen un sentido físico tan evidente, pero si se puede buscar el significado físico de la función densidad. A continuación se expone un resumen de las conclusiones de G. Bertotti sobre la función densidad [Bertotti, 1998].

El proceso de magnetización en los medios ferromagnéticos es básicamente una sucesión de saltos de Barkhausen. Cuando se produce un salto, el sistema abandona un estado metaestable para alcanzar otro de menor energía. Hay dos términos energéticos que intervienen en el

proceso, el cambio de energía libre  $DF$  y la cantidad de energía disipada en el proceso  $DE$ . Si fuéramos capaces de conocer los cambios energéticos acontecidos en la secuencia de saltos de Barkhausen, tendríamos a mano una herramienta para describir la histéresis. El principal inconveniente para desarrollar esta herramienta es que se desconocen los principios generales que rigen la estadística de los saltos de Barkhausen. No obstante, establezcamos una hipótesis de trabajo, sea la distribución de probabilidad  $m(DE, DF)$  de que se produzca un salto caracterizado por el cambio energético  $DE$  y  $DF$ . Esta distribución de probabilidad es una propiedad inherente del sistema y puede determinarse mediante algunas curvas de magnetización específicas. Pues bien, la distribución de probabilidad o función densidad del modelo de Preisach expresada en términos del campo correctivo y el campo de interacción  $m(h_c, h_i)$  expresa en términos precisos la densidad de probabilidad  $m(DE, DF)$  ya que  $h_c$  y  $h_i$  son proporcionales a su vez a la energía disipada o a la energía almacenada en un salto de Barkhausen. El problema subyace en que, tal y como está definido el modelo de Preisach, la función densidad es única para cualquier curva de magnetización (ya vimos anteriormente que esto llevaba a la propiedad de congruencia) y en realidad tendremos una distribución  $m(DE, DF)$  diferente para cada curva. De hecho, como ya se verá más adelante, uno de los métodos para determinar la función densidad parte de una colección de historiales de magnetización experimentales.

### 3.4.2 Propiedades de la función densidad

#### 3.4.2.1 Propiedad de simetría

En los materiales ferromagnéticos se puede considerar que para todo historial  $\{H(t), B(t)\}$  existe un historial inverso correspondiente  $\{-H(t), -B(t)\}$ . Cuando es este el caso  $m(\mathbf{a}, \mathbf{b})$  es función par de  $h_i$ .

$$m(h_c, h_i) = m(h_c, -h_i) \quad (3.6)$$

Para el modelo de Preisach formulado en  $\mathbf{a}-\mathbf{b}$ , la función densidad presenta la siguiente propiedad de simetría [del Vecchio, 1980; Visintin, 1994]:

$$m(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = m(-\mathbf{b}, -\mathbf{a}) \quad (3.7)$$

Esta propiedad refleja que, en general, la inducción  $B$  al final del historial de campo  $H(t)$  de un ciclo de histéresis es igual en magnitud y opuesta en signo a la inducción al final de un historial de campo inverso  $H'(t) = -H(t)$  [Biorci y Pescetti, 1959].

#### 3.4.2.2 Propiedad de factorización

De todas las factorizaciones compatibles con la ecuación (2.6), las siguientes presentan algún interés [Bertotti, 1998; Naidu, 1990].

$$\mathbf{m}(h_c, h_i) = \mathbf{m}_1(\mathbf{a}) \mathbf{m}_2(-\mathbf{b}) \quad (3.8)$$

$$\mathbf{m}(h_c, h_i) = \mathbf{m}_1(h_c + h_i) \mathbf{m}_2(h_c - h_i) \quad (3.9)$$

$$\mathbf{m}(h_c, h_i) = \mathbf{m}_1(h_c) \mathbf{m}_2(h_i) \quad (3.10)$$

$$\mathbf{m}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \mathbf{m}_1(\mathbf{a}) \mathbf{m}_2(\mathbf{b}) \quad (3.11)$$

Las propiedades de factorización (3.10) y (3.11) reflejan de una forma natural el comportamiento del modelo de Preisach cuando se le analiza como una descripción física de la histéresis [Bertotti y Basso, 1993]. La propiedad (3.10) es totalmente natural para un conjunto de partículas que interaccionan, cuando hay independencia estadística entre la fuerza coercitiva de las partículas y las interacciones entre partículas. El modelo de Preisach, esté factorizado o no, siempre contiene una descripción implícita de las interacciones, como consecuencia del hecho que está basado en un conjunto de ciclo elementales (partículas) desplazadas de su posición de simetría. La propiedad (3.11) refleja el que los campos de conmutación son estadísticamente independientes para cada partícula o ciclo elemental.

Estas propiedades tienen una aplicación interesante, la función densidad se puede representar por curvas factorizadas. Esto en principio simplifica la caracterización del modelo.

### 3.5 La integral de Everett

Antes de exponer los diversos métodos de identificar (o caracterizar) el modelo de Preisach es conveniente introducir una función que será de utilidad en el desarrollo numérico y en la caracterización del modelo. Se trata de la denominada integral de Everett  $E(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ .

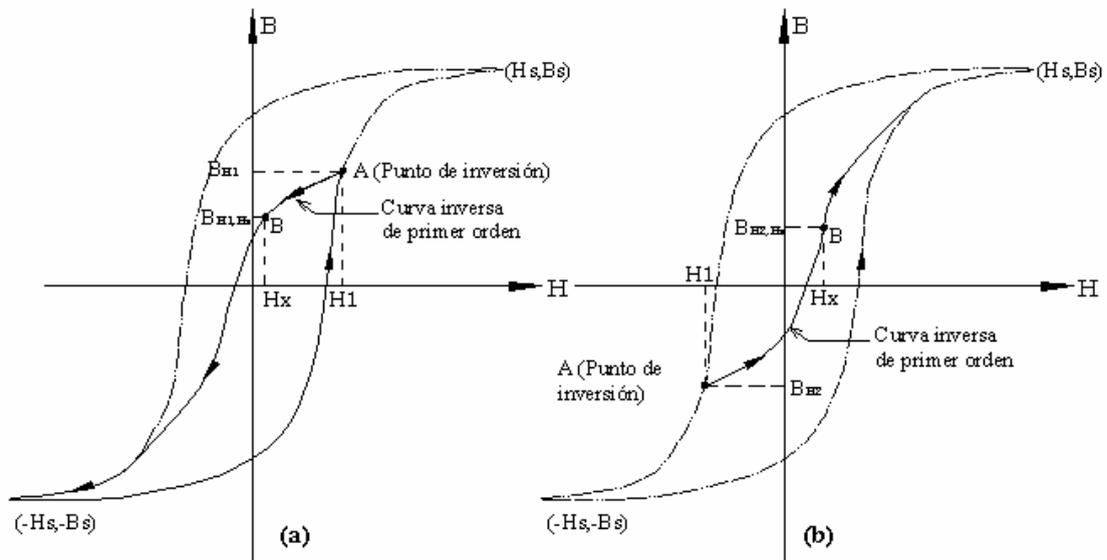


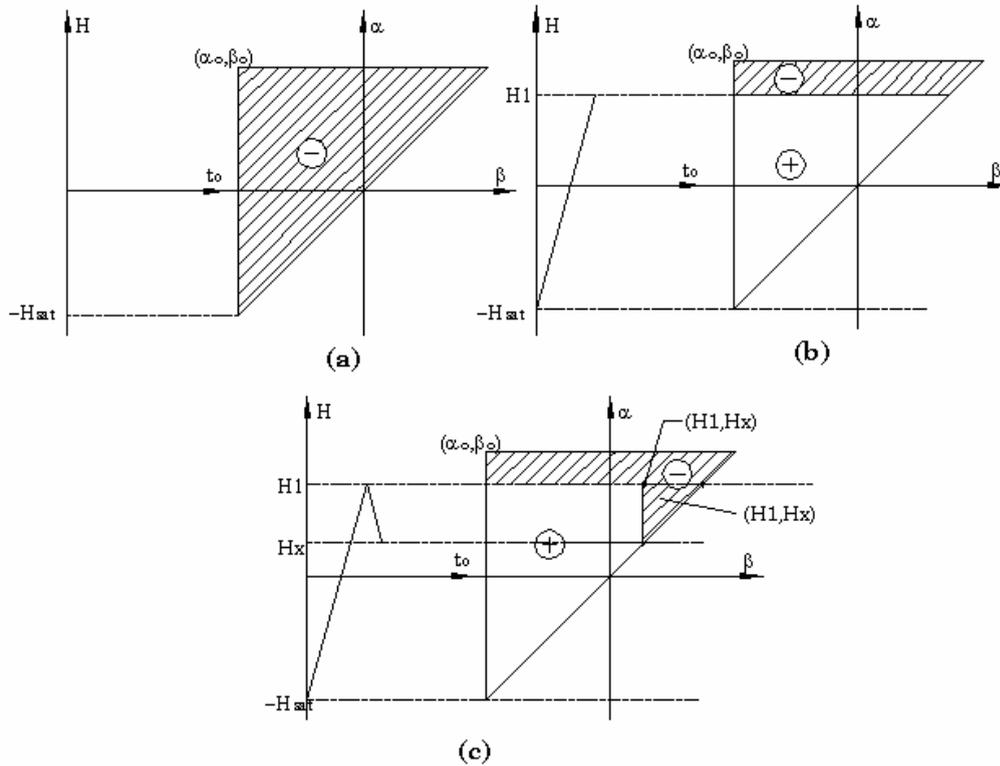
Figura 3-8. Curvas inversas de primer orden. (a) Ascendente y (b) descendente

Sea la característica de magnetización mostrada en la figura 3-8a. A una característica de ese tipo se la denomina curva inversa de primer orden. Para obtenerla se aumenta el campo  $H(t)$  de forma continua desde el valor de saturación negativa hasta un valor determinado  $H_1$ . Una vez llegado a  $H_1$ , el campo disminuye hasta llegar de nuevo a la saturación negativa. A la curva de magnetización trazada desde  $H_1$  hasta la saturación negativa se la denomina curva inversa de primer orden y al campo  $H_1$  punto de inversión. Estas curvas también se pueden describir en sentido inverso, esto es, partiendo desde la saturación positiva, la excitación  $H(t)$  desciende continuamente hasta llegar a un valor de campo  $H_2$ . A partir de este valor la excitación vuelve a aumentar hasta volver de nuevo a la saturación positiva. La curva ascendente descrita entre  $H_2$  y la saturación positiva también es una curva inversa de primer orden. Esta curva inversa se muestra en la figura 3.8b. Ambas curvas poseen las mismas propiedades [Atherton, Szpunar y Szpunar, 1987].

Empleamos la notación  $B_{H_1}$  (o  $B_{H_2}$  para la figura 3.8b) para representar el valor de la inducción cuando la intensidad de campo es  $H(t)=H_1$ , donde  $H_1$  es el punto de inversión. Así mismo, empleamos  $B_{H_1, H_x}$  para representar el valor de la inducción para un campo  $H_x$ , dentro de la curva inversa de primer orden cuyo punto de inversión es  $H_1$ .

Sea la curva inversa de primer orden descendente de la figura 3-8a. Definimos la integral de Everett de dicha curva a la siguiente función:

$$E(H_1, H_x) \equiv \frac{1}{2} (B_{H_1} - B_{H_1, H_x}) \quad (3.12)$$



**Figura 3-9.** Evolución del plano de Preisach para una curva inversa de primer orden descendente

En la figura 3-9 se muestra la evolución del plano de Preisach para el caso de la curva inversa de primer orden descendente de la figura 3.8a. En la figura 3.9a se puede observar el estado del plano justo en el momento de comenzar la ramificación en  $H(t)=H_1$ . Cuando la  $H(t)$  ha descendido hasta  $H_x$ , ya dentro de la curva inversa, el estado del plano es el mostrado en la figura 3.9b. Si comparamos ambos planos, en  $H_x$  se cumple:

$$\begin{aligned} S_+(H_x) &= S_+(H_1) - T(H_1, H_x) \\ S_-(H_x) &= S_-(H_1) + T(H_1, H_x) \end{aligned} \quad (3.13)$$

Ya que en la interpretación geométrica del modelo de Preisach de la ecuación (3.4)  $B(t)$  es la resta de la integral doble sobre  $S_+$  menos la integral sobre  $S_-$ , según la ecuación (3.13) se puede concluir que:

$$B_{H_1, H_x} - B_{H_1} = -2 \iint_{T(H_1, H_x)} m(\mathbf{a}, \mathbf{b}) d\mathbf{a} d\mathbf{b} \quad (3.14)$$

Recuperando la definición de la integral de Everett de la ecuación (3.12) se deduce que esta función también se puede expresar como:

$$E(H_1, H_x) = \iint_{T(H_1, H_x)} m(H_1, H_x) da db = \int_{H_x}^{H_1} \int_{H_x}^{H_1} m(a, b) da db \quad (3.15)$$

De la expresión anterior se deduce la siguiente interesante relación:

$$m(H_1, H_x) = -\frac{\partial^2 E(H_1, H_x)}{\partial a \partial b} \quad (3.16)$$

Para la curva inversa de primer orden ascendente de la figura 3-9b, la expresión de la integral de Everett es:

$$E(H_2, H_x) = \frac{1}{2} (B_{H_2 H_x} - B_{H_2}) \quad (3.17)$$

En la figura 3-10 se muestra la evolución del plano de Preisach para una curva inversa de primer orden ascendente. Siguiendo esta evolución, con un razonamiento análogo a los realizados para la curva descendente se llega a la misma expresión de la función densidad, la ecuación (3.17). Ambos tipos de curvas se pueden emplear para identificar la función densidad

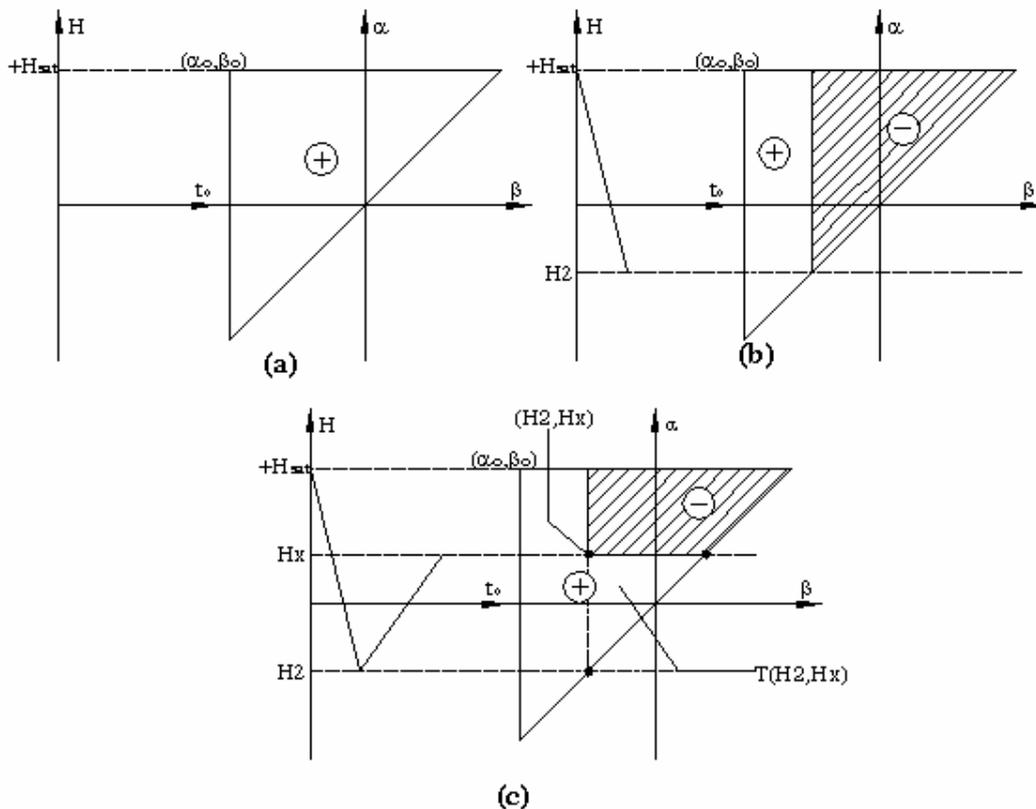


Figura 3.10. Evolución del plano de Preisach para una curva inversa de primer orden ascendente

La integral de Everett presenta la propiedad de simetría, análoga a la ecuación (3.7) para la función densidad:

$$E(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = E(-\mathbf{b}, -\mathbf{a}) \quad (3.18)$$

### 3.6 Identificación del modelo de Preisach

Del análisis de la definición del modelo de Preisach se deduce que este depende de los siguientes parámetros:

- a) Las zonas  $S_+(t)$  y  $S_-(t)$ , esto es, de la línea de estado  $L(t)$ . Esta línea, así mismo, es función del historial de máximos y mínimos locales del campo  $H(t)$ .
- b) La inducción de saturación  $B_s$ .
- c) La función densidad  $m(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ .

El historial de máximos y mínimos locales del campo es la variable de entrada al modelo y por tanto un dato conocido. La inducción de saturación  $B_s$  se asimila a la inducción máxima del ciclo límite. Se necesita por tanto obtener el ciclo límite experimentalmente, o al menos tener una estimación de su punto máximo. La obtención experimental del punto máximo del ciclo límite no es complicada, existiendo varios métodos para conseguirlo. Por ejemplo, a partir del punto máximo de un ciclo de histéresis a cualquier frecuencia, pero que tenga como intensidad de campo máxima aquella que se estime la máxima del problema; o bien, directamente de la curva normal de magnetización, que suele ser un dato proporcionado por los fabricantes de materiales magnéticos. Desgraciadamente, no ocurre lo mismo con la función densidad, su obtención es el punto más delicado del modelo de Preisach, tanto es así que la determinación de  $B_s$  queda eclipsada por la de  $m(\mathbf{a}, \mathbf{b})$  y el problema de la identificación de los parámetros del modelo se resume al del cálculo de la función de densidad.

#### 3.6.1 Caracterización por interpolación o no paramétrica

##### 3.6.1.1 Método de Mayergoyz

Este método propuesto por Isaac D. Mayergoyz [Mayergoyz, 1991; Mayergoyz, 2003], es una de las más importantes aportaciones al desarrollo del método de Preisach como método

numérico de aplicación a la ingeniería. Parte de la aplicación de la definición de integral de Everett de (3.15) y su consecuencia directa, la ecuación (3.16):

$$\mathbf{m}(H', H) = -\frac{\partial^2 E(H', H)}{\partial \mathbf{a} \partial \mathbf{b}} \quad (3.19)$$

No obstante, como se verá más adelante, existe la posibilidad de desarrollar el modelo directamente en función de integrales de Everett, de esta forma no es necesario determinar la función densidad.

Para aplicar el método de Mayergoyz necesitamos un conjunto de curvas inversas de primer orden y con ellas calcular la función de Everett para cada punto mediante (3.12) o (3.17). Este es el punto débil de este método, se deben obtener normalmente al menos quince curvas inversas de primer orden experimentales para conseguir una estimación de la función de Everett lo suficientemente precisa como para describir correctamente los diversos niveles de magnetización [Rouvre, Waeckerle y Kedous-Leobouc, 1995]. Para paliar esto se pueden realizar ajustes por trazadores (splines) cúbicos [Henze y Rucker, 2002], si bien así no se consigue mejorar demasiado la situación. Ajustando mediante interpolación a tramos por polinomios cúbicos de Hermite, hemos conseguido resultados correctos con únicamente ocho curvas inversas de primer orden experimentales.

Las integrales de Everett se calculan discretizadas para un entramado de puntos  $(\mathbf{a}_i, \mathbf{b}_i)$  del plano de Preisach. Para la determinación de la integral de Everett se procede en cuatro fases:

1. Se obtienen las curvas inversas de primer orden experimentalmente, mediante una versión modificada del ensayo balístico [de Blas, Bargalló, de la Hoz, 2004]. En nuestra exposición asumiremos que se trata de curvas ascendentes  $B(H, H(t))$ . El mismo procedimiento es aplicable para curvas descendentes.
2. Se ajustan mediante interpolación a tramos por polinomios cúbicos de Hermite las curvas inversas experimentales. Los valores sobre los cuales se realiza el ajuste son los nodos del eje  $\mathbf{a}$  del entramado fino sobre el que se desea obtener la integral de Everett. Así se obtiene un conjunto de curvas  $B(\mathbf{b}'_j, \mathbf{a})$ , donde  $\mathbf{b}'_j$  es el valor de  $H$  donde comienza la curva inversa, esto es, el punto de inversión de cada una de las  $j$  curvas inversas experimentales obtenidas y  $\mathbf{a}_i$  los puntos  $H$  para los cuales se discretiza la curva inversa (ver figura 3-11a).

3. Para cada una de las curvas inversas ajustadas para  $\mathbf{a}$  se calcula la integral de Everett según la ecuación (3.17):

$$E(\mathbf{a}_i, \mathbf{b}'_j) = \frac{1}{2} (B_{b'_j, a_i} - B_{b'_j}) \quad (3.20)$$

Con esto obtenemos la superficie de integrales de Everett  $E(\mathbf{a}, \mathbf{b}')$  definida sobre el plano de Preisach. No obstante, el entramado del plano de Preisach es aún pobre pues el conjunto de valores  $\mathbf{b}'$  está a su vez definido por el número de curvas inversas obtenidas experimentalmente. Figura 3-11b.

4. Por último se trata de mejorar la situación anterior: el ajuste de la integral de Everett  $E(\mathbf{a}, \mathbf{b}')$  para un entramado  $\mathbf{b}$  más fino. En nuestro caso, se propone un entramado de valores  $\mathbf{b}=\mathbf{a}$ . Se ajusta por interpolación a tramos mediante polinomios de Hermite cúbicos. Figura 3.11c.

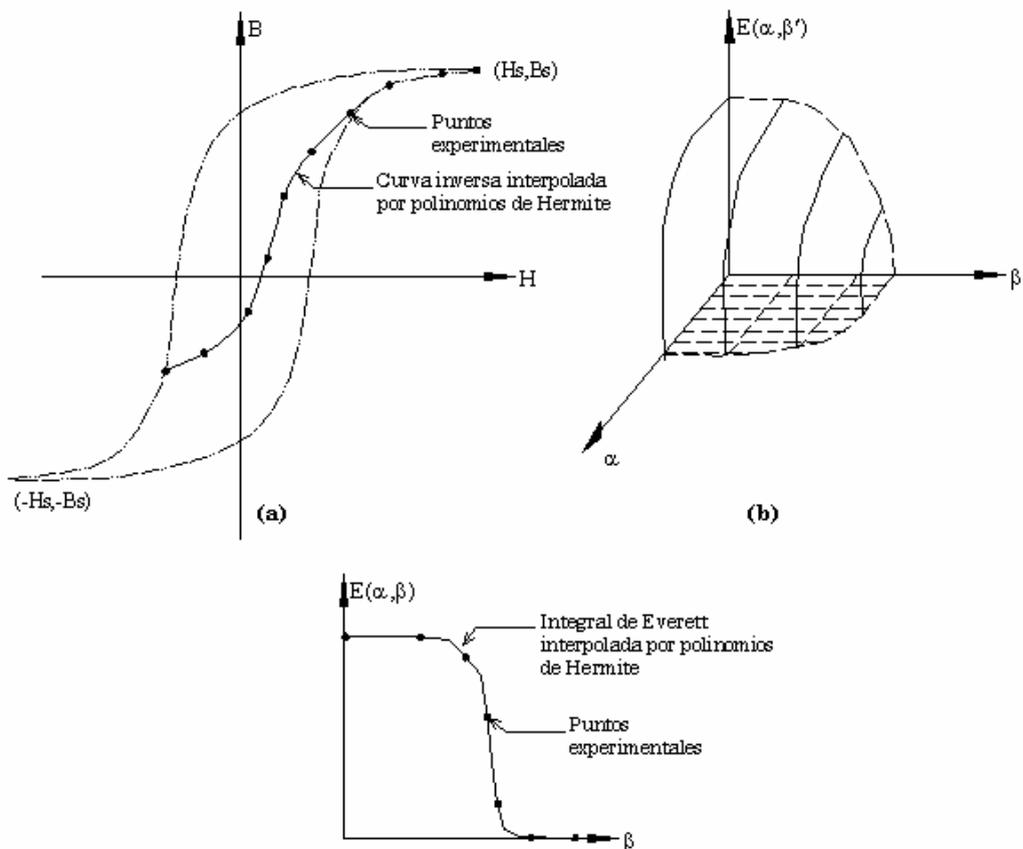


Figura 3-11. Procedimiento para obtener la integral de Everett con pocas curvas experimentales

El primer ajuste de las curvas inversas al entramado fino  $\mathbf{a}$  no es problemático y se puede ajustar también a tramos mediante trazadores (splines) cúbicos o a tramos lineales. El segundo ajuste de la integral de Everett  $E(\mathbf{a}, \mathbf{b}')$  al entramado fino  $\mathbf{b}$  si es problemático. Aquí los trazadores cúbicos propuestos por Olaf Henze y Wolfgang Rucker [Henze y Rucker, 2002] no ofrecen buenos resultados para tan pocas curvas como las disponibles en nuestro caso.

Podemos mejorar la precisión de la integral de Everett obtenida añadiendo las siguientes curvas inversas de primer orden, que de hecho son los dos casos límite:

- a. La primera curva inversa de primer orden es el propio punto máximo del ciclo límite.
- b. La última curva inversa de primer orden es la rama ascendente del ciclo límite.

Con la integral de Everett calculada ya se puede determinar la función densidad, si esta es necesaria. Para ello se puede emplear un desarrollo en diferencias finitas, por ejemplo mediante la ecuación de diferencias central.

$$m_1 = \frac{\partial E(\mathbf{a}, \mathbf{b})}{\partial \mathbf{a}} = \frac{E(\mathbf{a}_{i+1}, \mathbf{b}) - E(\mathbf{a}_{i-1}, \mathbf{b})}{2D\mathbf{a}} \quad (3.21)$$

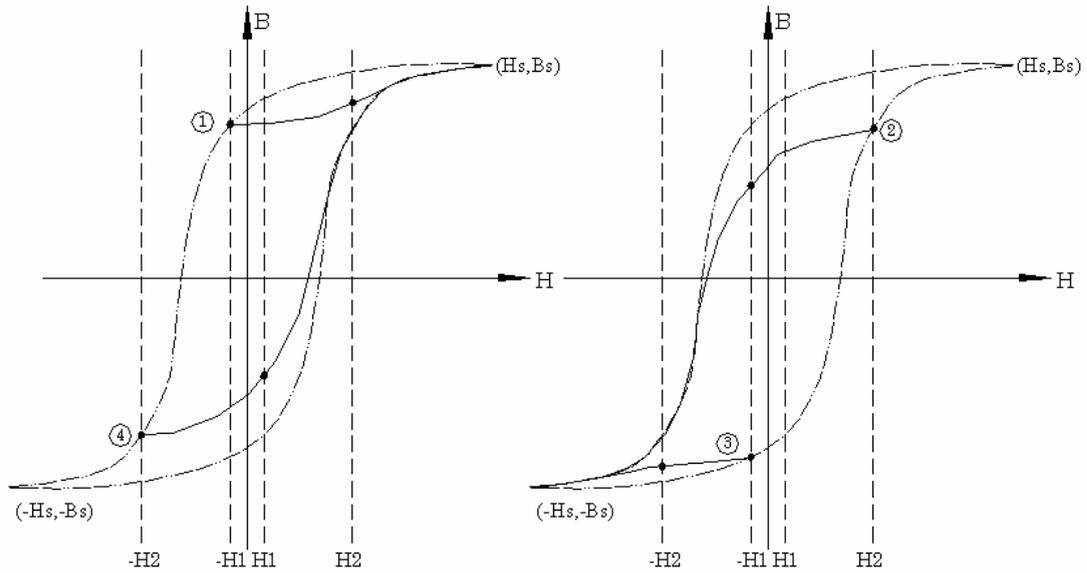
$$m(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = -\frac{\partial^2 E(\mathbf{a}, \mathbf{b})}{\partial \mathbf{a} \partial \mathbf{b}} = -\frac{\partial m_1}{\partial \mathbf{b}} = -\frac{m_1(\mathbf{a}, \mathbf{b}_{j+1}) - m_1(\mathbf{a}, \mathbf{b}_{j-1})}{2D\mathbf{b}} \quad (3.22)$$

El método de Mayergoyz presenta un problema a considerar, la necesidad de obtener una cierta cantidad de curvas inversas de primer orden, características que implican cierta dificultad cuando se obtienen experimentalmente. Pero tal y como veremos más adelante, este es el método con el que –con diferencia– se consiguen los mejores resultados cuando se aplica el modelo de Preisach a materiales blandos. Por ello, a pesar de ese punto débil, es el método más apropiado para caracterizar el modelo.

### 3.6.1.2 Corrección al método de Mayergoyz. Integrales de Everett promedio

J. Dupré, R. Van Keer y J. Melkebeek proponen una mejora al método de Mayergoyz [Dupré, Van Keer y Melkebeek, 1997]. Los materiales magnéticos normalmente no presentan la propiedad de congruencia presente en el modelo de Preisach. Según estos autores en tales

casos no es aplicable el método de Mayergoyz; la corrección propuesta si permitirá modelar la histéresis de materiales sin congruencia.



**Figura 3.12.** Curvas inversas para calcular la integral de Everett promedio

La corrección consiste en emplear una integral de Everett promedio. Para ello las curvas inversas de primer orden se deben tomar en grupos de cuatro curvas, tales como las mostradas en la figura 3.12. Se calculan cuatro integrales de Everett:

$$\begin{aligned}
 (1): E^{(1)} &= |B(H_2) - B(H_1)| \\
 (2): E^{(2)} &= |B(H_1) - B(H_2)| \\
 (3): E^{(3)} &= |B(-H_2) - B(-H_1)| \\
 (4): E^{(4)} &= |B(-H_1) - B(-H_2)|
 \end{aligned} \tag{3.23}$$

Según la propiedad de congruencia del modelo de Preisach debería cumplirse  $E^{(1)}=E^{(2)}=E^{(3)}=E^{(4)}$ , en cambio un material que no presente esta propiedad únicamente cumplirá [Dupré, Van Keer y Melkebeek, 1997]:

$$\begin{aligned}
 E^{(1)} &= E^{(3)} & E^{(1)} &\neq E^{(2)} \\
 E^{(2)} &= E^{(4)} & E^{(3)} &\neq E^{(4)}
 \end{aligned} \tag{3.24}$$

Con las cuatro integrales de Everett calculadas mediante (3.23) se determina la integral de Everett promedio como:

$$\tilde{E}(H_1, H_2) \equiv \frac{1}{4} \left( \sum_{i=1}^4 E^{(i)}(H_1, H_2) \right); \quad \forall (H_1 < H_2), (H_1 > -H_2) \quad (3.25)$$

Finalmente la función densidad se calcula por la, ya conocida, ecuación de la derivada doble de la integral de Everett, que en este caso se expresaría:

$$m(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = -\frac{\partial^2 \tilde{E}(H_1, H_2)}{\partial \mathbf{a} \partial \mathbf{b}} \quad (3.26)$$

### 3.6.1.3 Método de Biorci-Pescetti

Este es uno de los primeros métodos de caracterización para el modelo de Preisach del que se tiene constancia. Propuesto por G. Biorci y G. Pescetti [Biorci y Pescetti, 1958]. Tiene como principal ventaja que tan solo necesita de la curva de primera inducción y la rama descendente del ciclo límite para calcular la función densidad. Pero también es esta la razón de su debilidad, el modelo de Preisach necesita que los datos experimentales empleados para su caracterización sean al menos del mismo orden que las trayectorias a simular. Por ello no podremos trazar ciclos menores con el modelo de Preisach caracterizado mediante el método de Biorci-Pescetti.

Sea la curva de primera inducción del material, obtenida experimentalmente. La evolución del plano de Preisach es la mostrada en la figura 3-13, en la parte derecha de la figura se muestra el plano con el material sin magnetizar y en la parte izquierda la evolución de la línea de estado a medida que aumenta  $H$  en la curva de primera inducción.

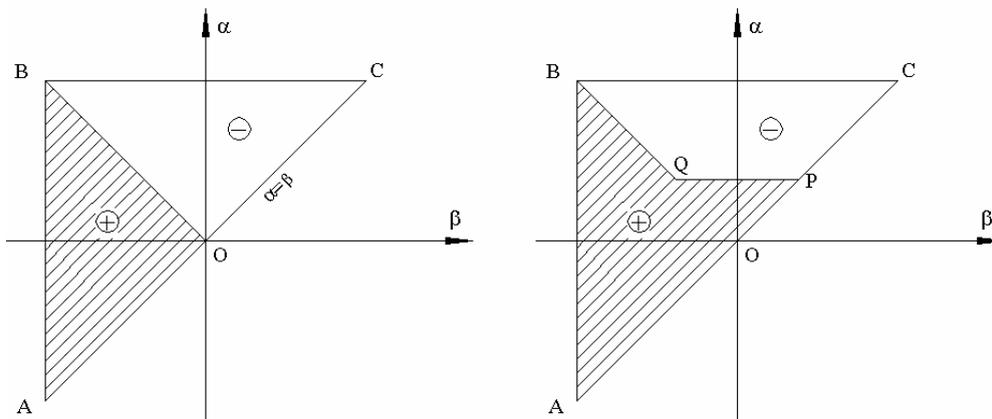


Figura 3-13. Evolución del plano de Preisach durante la curva de primera inducción

En la izquierda de la figura 3-13 se muestra el plano de Preisach cuando un material esta sin magnetizar. El área  $S_+$  está formada por el triángulo AOB, el cuales igual al área  $S_-$  formada

por el triángulo BOC, en consecuencia la inducción es nula. Partiendo del material sin magnetizar, la inducción para una intensidad de campo  $H(t)$ , aplicando la definición geométrica del modelo (3.2) se calcula como:

$$B(t) = 2B_s \iint_{OPQ} m(\mathbf{a}, \mathbf{b}) d\mathbf{a} d\mathbf{b} \quad (3.27)$$

Sea la función  $f(\mathbf{a})$ , que se define como:

$$f(\mathbf{a}) \equiv \int_{-a}^a m(\mathbf{a}, \mathbf{b}) d\mathbf{b} \quad (3.28)$$

Se puede calcular la función  $f(\mathbf{a})$  a partir de la curva de primera inducción aplicando (3.28) en (3.27):

$$f(\mathbf{a}') = \frac{1}{2M_s} \frac{dB(\mathbf{a}')}{d\mathbf{a}'} \quad (3.29)$$

Donde  $\mathbf{a}'$  es la variable  $\mathbf{a}$  restringida al semiplano  $H > 0$ . Supongamos a continuación una curva de primera inducción para  $H < 0$ , si definimos  $\mathbf{a}''$  como la variable  $\mathbf{a}$  restringida al plano  $H < 0$ , la función  $f$  calculada a partir de dicha curva sería:

$$f(\mathbf{a}'') = f(\mathbf{a}) \quad \forall \mathbf{a}'' = -\mathbf{a} \quad (3.30)$$

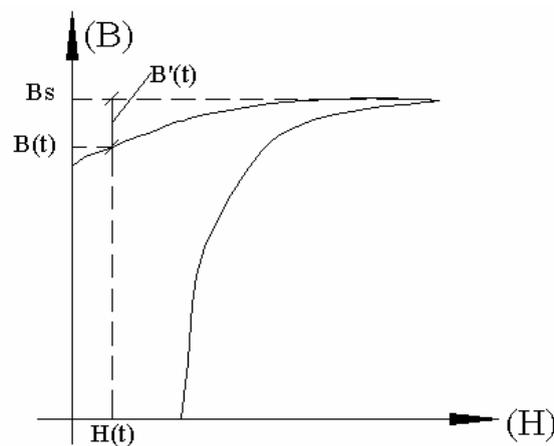


Figura 3-14. Función  $B'(t)$

A continuación se toma el ciclo límite, en concreto su rama descendente, sobre dicho ciclo se define la función  $B'(t) = B_s - B(t)$  tal y como se muestra en la figura 3-14.

En la figura 3-15 se muestra el plano de Preisach para la función  $B'(t)$ , aplicando la definición geométrica de la ecuación (3.2) y la deducción de zonas de la figura 3-16, la función  $B'(t)$  se puede calcular como:

$$B'(t) = B_s - B(t) = 2B_s \iint_{CMN} m(\mathbf{a}, \mathbf{b}) d\mathbf{a} d\mathbf{b} \quad (3.31)$$

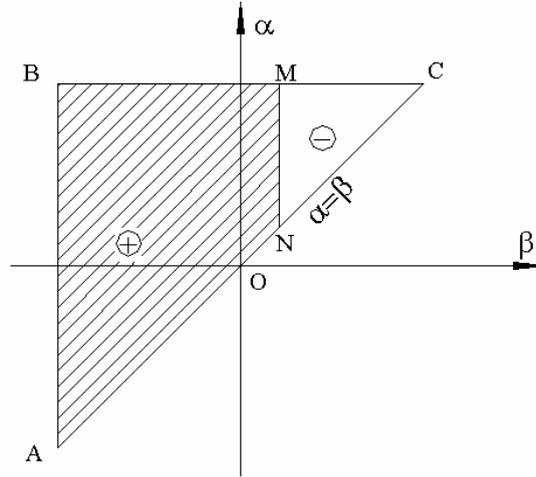


Figura 3-15. Evolución del plano de Preisach para la función  $B'(t)$

Sea la función  $g(\mathbf{b})$ , que se define como:

$$g(\mathbf{b}) \equiv - \int_{|b|}^{H_s} m(\mathbf{a}, \mathbf{b}) d\mathbf{a} \quad (3.32)$$

Entonces es posible calcular la función densidad a partir de la curva descendente del ciclo límite experimental combinando (3.31) y (3.32):

$$g(\mathbf{b}) = \begin{cases} \frac{1}{2B_s} \frac{dB'(\mathbf{b})}{d\mathbf{b}}; & \forall \mathbf{b} \geq 0 \\ \frac{1}{2B_2} \frac{dB'(\mathbf{b})}{d\mathbf{b}} - f(\mathbf{b}); & \forall \mathbf{b} < 0 \end{cases} \quad (3.33)$$

Donde  $f(\mathbf{b})$  es la misma función  $f(\mathbf{a}')$  calculada para  $H < 0$  según (3.30).

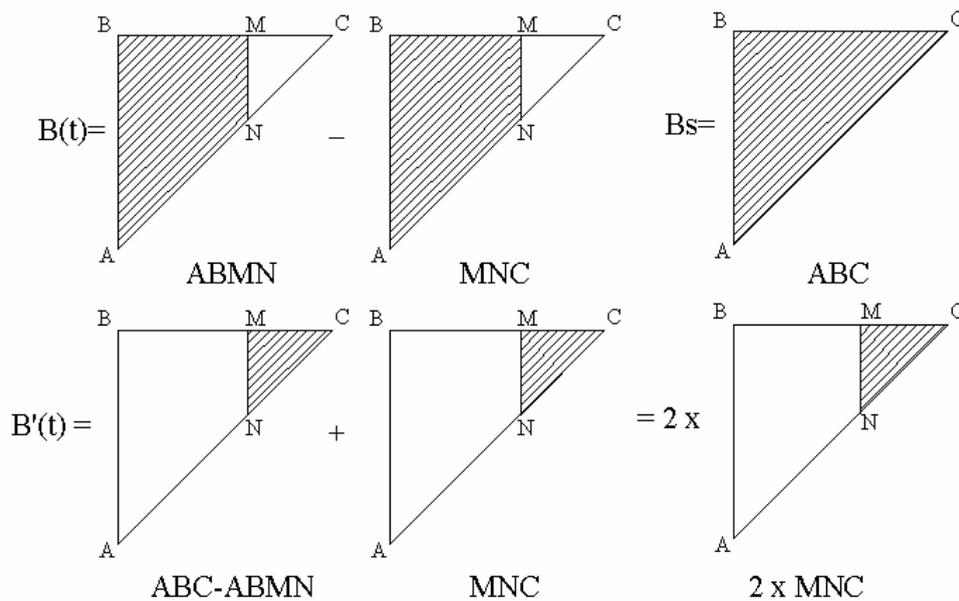


Figura 3-16. Deducción de zonas en el plano de Preisach para la función  $B'(t)$

Las ecuaciones (3.28) y (3.32) forman un sistema de ecuaciones para  $\mathbf{m}(\mathbf{a}, \mathbf{b})$  donde  $f(\mathbf{a})$  y  $g(\mathbf{b})$  se determinan a partir de la curva de primera inducción y la rama descendente del ciclo límite mediante (3.29) y (3.33) respectivamente. No obstante, las ecuaciones (3.28) y (3.32) no determinan de forma única a  $\mathbf{m}(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ . Esto se soluciona asumiendo que la función densidad cumple la factorización de la ecuación (3.11), esto es,  $\mathbf{m}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \mathbf{m}_1(\mathbf{a}) \mathbf{m}_2(\mathbf{b})$ , lo cual supone que, para un operador dado, la probabilidad de que la rama ascendente del operador se encuentre en  $d\mathbf{a}$  es independiente de la probabilidad de que la rama descendente del operador se halle en  $d\mathbf{b}$ .

Con las funciones  $f(\mathbf{a}')$  y  $g(\mathbf{b})$  ya calculadas, asumiendo cierta la factorización  $\mathbf{m}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \mathbf{m}_1(\mathbf{a}) \mathbf{m}_2(\mathbf{b})$  se puede comenzar el cálculo de  $\mathbf{m}(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ . Para ello se discretiza el plano de Preisach tal y como se muestra en la figura 3-17. Se trazan líneas verticales y horizontales en el plano de Preisach, formándose las distancias  $a_1, a_2 \dots a_i \dots a_N$ . En nuestro caso se supone que las líneas se trazan equidistantes y por tanto todas las distancias son iguales.

Sean  $(\mathbf{a}_i, \mathbf{b}_i)$  las coordenadas de uno de los cuadrados formado en la discretización del plano de Preisach. Se definen asimismo los siguientes coeficientes:

$$F_i \equiv \frac{1}{2B_s} \int_{a_{i-1}}^{a_i} f(\mathbf{a}) d\mathbf{a} \quad (3.34)$$

$$G_j = \frac{1}{2B_s} \int_{b_{j-1}}^{b_j} g(\mathbf{b}) d\mathbf{b} \quad (3.35)$$

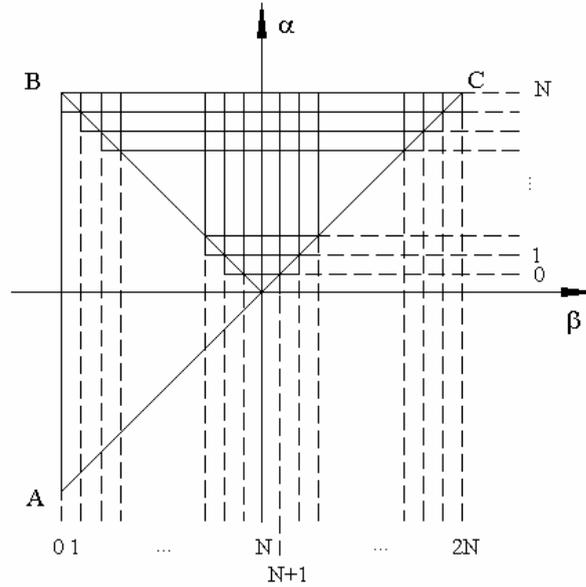


Figura 3-17. Discretización del plano de Preisach para el cálculo de  $\mathbf{m}(\mathbf{a}, \mathbf{b})$

El siguiente paso es desarrollar los coeficientes  $F$  y  $G$  para el plano de la figura 3-17. Para ello se definen las funciones  $\mathbf{y}_1$  y  $\mathbf{y}_2$ :

$$\begin{aligned} \mathbf{y}_1(\mathbf{a}_i) &= a_i \mathbf{m}_1(\mathbf{a}_i) \\ \mathbf{y}_2(\mathbf{b}_j) &= a_{N+1-j} \mathbf{m}_2(\mathbf{b}_j); \quad \forall 1 < j < N \\ \mathbf{y}_2(\mathbf{b}_j) &= a_{j-N} \mathbf{m}_2(\mathbf{b}_j); \quad \forall N+1 < j < 2N \end{aligned} \quad (3.36)$$

Se definen además los siguientes coeficientes para simplificar las ecuaciones:

$$P_i = \sum_{k=i+1}^{2N+1-i} G_k - \sum_{k=1}^{N+1-i} F_i \quad (3.37)$$

$$Q_i = P_i + F_{N+1-i} \quad (3.38)$$

De tal forma que finalmente se obtienen las siguientes ecuaciones [Biorci y Pescetti, 1958]:

$$\mathbf{y}_1(\mathbf{a}_i) = \mathbf{y}_1(\mathbf{a}_N) \frac{F_i}{P_{N+1-i}} \prod_{k=1}^{N-i} \frac{Q_k}{P_k}; \quad \forall i = 1, 2, \dots, N+1 \quad (3.39)$$

$$\mathbf{y}_2(\mathbf{b}_i) = \begin{cases} \frac{G_i}{\mathbf{y}_1(\mathbf{a}_N)} \prod_{k=1}^{i-1} \frac{P_k}{Q_k}; & \forall i = 1, 2, \dots, N \\ \frac{G_i}{\mathbf{y}_1(\mathbf{a}_N)} \prod_{k=1}^{2N+1-i} \frac{P_k}{Q_k}; & \forall i = N+1, N+2, \dots, 2N \end{cases} \quad (3.40)$$

Con las cuales se puede obtener las funciones  $\mathbf{y}_1$  y  $\mathbf{y}_2$  en función de una  $\mathbf{y}_1(\mathbf{a}_N)$  determinada –por ejemplo  $\mathbf{y}_1(\mathbf{a}_N)=1$ -. Posteriormente las funciones densidad factorizadas  $\mathbf{m}_1(\mathbf{a})$  y  $\mathbf{m}_2(\mathbf{b})$ , que permiten finalmente calcular la función densidad:

$$\mathbf{m}(\mathbf{a}_i, \mathbf{b}_j) = \mathbf{m}_1(\mathbf{a}_i) \mathbf{m}_2(\mathbf{b}_j) \quad (3.41)$$

En resumen, el método de Biorci-Pescetti permite encontrar  $\mathbf{m}(\mathbf{a}, \mathbf{b})$  siguiendo los siguientes pasos:

- a. Obtener experimentalmente la curva de primera inducción y la rama descendente del ciclo límite.
- b. Determinar las funciones  $f(\mathbf{a}')$  y  $g(\mathbf{b})$  a partir de las curvas experimentales mediante las ecuaciones (3.29) y (3.33) respectivamente. Para calcular la función  $g(\mathbf{b})$  previamente se calcula la función  $f(-\mathbf{b})$  empleando la relación (3.30)
- c. Discretizar el plano de Preisach tal como se muestra en la figura 3-17
- d. Calcular los coeficientes  $F$  y  $G$  con las ecuaciones (3.34) y (3.35) respectivamente.
- e. Calcular los coeficiente  $P$  y  $Q$  haciendo uso de la ecuaciones (3.37) y (3.38)
- f. Determinar las funciones  $\mathbf{y}_1$  y  $\mathbf{y}_2$  con las ecuaciones (3.39) y (3.40) con  $\mathbf{y}_1(\mathbf{a}_N)=1$
- g. Calcular las funciones densidad factorizadas  $\mathbf{m}_1(\mathbf{a})$  y  $\mathbf{m}_2(\mathbf{b})$  mediante la ecuación (3.36)
- h. Finalmente se obtiene la función densidad para el plano de Preisach discretizado mediante la ecuación (3.41)

El método de Biorci-Pescetti ofrece una alternativa más simple al método de Mayergoyz, y requiere además menos datos experimentales. Como ya se ha comentado más arriba, está es justamente la causa de su debilidad, pues al calcular la función densidad a partir del ciclo límite es incapaz de trazar correctamente ciclos menores. Otro punto débil es que parte del punto de magnetización de cero y la curva de primera inducción, y este punto es indefinido en el modelo de Preisach. El método de Biorci-Pescetti ha servido de base a S.R. Naidu para crear un método de desarrollo del modelo de Preisach mediante una serie de sencillas ecuaciones analíticas [Naidu, 1990; Naidu, 1991]. El método de Naidu se expondrá más adelante.

### 3.6.2 Caracterización paramétrica o por ajuste

La caracterización paramétrica consiste en asumir que la función densidad sigue una función analítica determinada que se puede ajustar a partir de datos experimentales. Merced a la propiedad de factorización de la función densidad las curvas que la describen pueden ser más sencillas.

El modelo de Preisach caracterizado por ajuste ofrece unos resultados muy pobres para materiales blandos, pues presenta la tendencia a generar ciclos de histéresis cuadrados. Este tipo de ciclo puede ser interesante para materiales magnéticos duros, pero no para los materiales blandos empleados para los núcleos de las máquinas eléctricas.

De todas las funciones analíticas propuestas en la bibliografía la lorentziana factorizada es la curva con la que mejores resultados –siempre con muy baja precisión– se consigue cuando se la aplica a materiales blandos.

A continuación se exponen las funciones más comunes empleadas para ajustar la función densidad del modelo de Preisach.

#### 3.6.2.1 Lorentziana

Giorgio Bertotti propone las siguientes lorentzianas factorizadas para ajustar la función densidad [Bertotti, 1998; Bertotti, 1992]:

$$\mathbf{m}(h_c, h_i) = \frac{2}{\mathbf{p} \mathbf{s}_c^2 H_o^2 \left( \frac{\mathbf{p}}{2} + \arctg \frac{1}{\mathbf{s}_c} \right)} \frac{1}{\left[ 1 + \left( \frac{h_c + h_i - H_o}{\mathbf{s}_c H_o} \right)^2 \right] \left[ 1 + \left( \frac{h_c - h_i - H_o}{\mathbf{s}_c H_o} \right)^2 \right]} \quad (3.42)$$

$$\mathbf{m}(x, y) = \frac{K}{\left[ 1 + \left( x - \frac{1}{2} \right)^2 \right] \left[ 1 + \left( y + \frac{1}{2} \right)^2 \right]} \quad (3.43)$$

$$x = \frac{\mathbf{a}}{H_o}; y = \frac{\mathbf{b}}{H_o}$$

Donde  $H_o$  es un valor del orden del campo coercitivo del ciclo límite,  $\mathbf{s}_c$  es un valor a ajustar a partir del ciclo límite y  $K$  es una constante cercana a  $0,15e-6$ .

En realidad ambas curvas son la misma, y por supuesto los resultados son los mismos. Según confiesan L.L. Rouvre, T. Waeckerle y A. Kedous-Lebouc, Giorgio Bertotti emplea la función lorentziana para caracterizar el modelo de Preisach porque en definitiva le da buenos resultados para el cálculo de las pérdidas magnéticas, pero no por obtener un buen ajuste de los ciclos de histéresis [Rouvre, Waeckerle, Kedous-Lebouc et al 1996].

### 3.6.2.2 Lorentziana móvil

De nuevo Giorgio Bertotti propone un método para paliar la tendencia a la cuadratura en los ciclos de magnetización calculados mediante la lorentziana [Rouvre, Waeckerle y Kedous-Lebouc, 1995]. El método consiste en realizar un cálculo con realimentación, para ello se necesita hallar previamente el ciclo límite de forma experimental. El cálculo se realiza en los siguientes pasos:

1. Se calcula el ciclo límite mediante el modelo de Preisach con la función densidad ajustada por una función lorentziana para la excitación  $H_1(t)$  correspondiente. De esta forma se obtiene el ciclo límite calculado.
2. Se calcula lo que Giorgio Bertotti denomina campo de interacción  $H_i(t) = H_1(t) - H_2(t)$ , donde  $H_1$  es el campo aplicado para conseguir una  $B(t)$  determinada en el ciclo límite experimental y  $H_2$  es el campo necesario para conseguir la misma  $B(t)$  en el ciclo calculado mediante el modelo de Preisach con la función densidad ajustada a una lorentziana.

3. Se recalcula el ciclo límite mediante el modelo de Preisach pero añadiendo el campo de interacción  $H_i(t)$ .

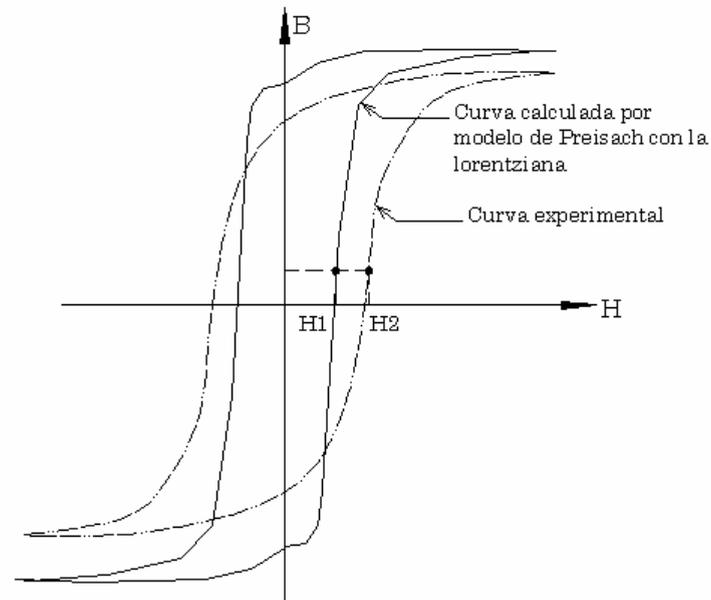


Figura 3-18. Determinación del campo de interacción para la lorentziana móvil

### 3.6.2.3 Gaussiana-log-normal

Es una función empleada con cierta regularidad, sobre todo en los trabajos de Edward della Torre y sus colaboradores (por ejemplo [della Torre, 1999]). La expresión propuesta por della Torre es:

$$m(h_c, h_i) = \frac{B_s}{2ps_i s_c} e^{-\frac{1}{2} \left[ \left( \frac{h_c - H_o}{s_c} \right)^2 + \frac{h_i^2}{s_i^2} \right]} \quad (3.44)$$

Donde  $B_s$  es la inducción asintótica del ciclo límite,  $H_o$  es el campo coercitivo del ciclo límite y las variables  $s_i$  y  $s_c$  se obtienen a partir del ciclo límite.

Giorgio Bertotti [Bertotti, 1998] propone la siguiente función gaussiana-log-normal para el ajuste de la función densidad:

$$m(h_c, h_i) = \frac{1}{2ps_c s_i H_o^2} \frac{H_o}{h_c} e^{-\frac{1}{2s_c^2} \ln^2 \left( \frac{h_c}{H_o} \right)} e^{-\frac{h_i^2}{2s_i^2 H_o^2}} \quad (3.45)$$

### 3.6.2.4 Método de ajuste para la gaussiana-log-normal

Respecto a la expresión (3.44) Edward della Torre y Ermanno Cardelli proponen el siguiente método para ajustar los parámetros al ciclo límite [della Torre y Vajda, 1995; della Torre, 1999; Cardelli, della Torre y Pinzaglia, 2003].

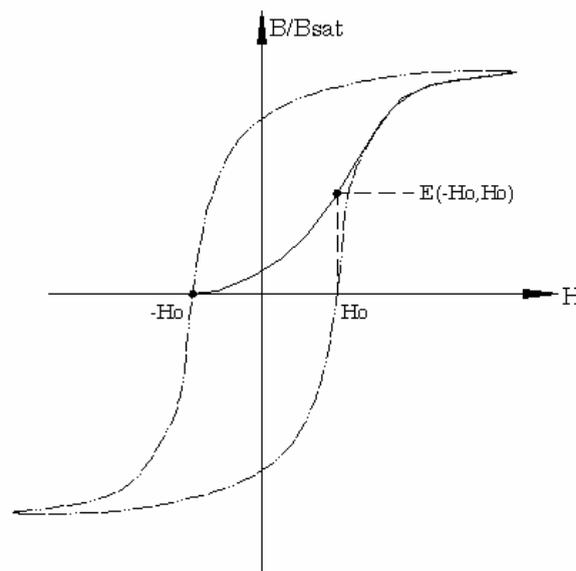
Los parámetros  $H_o$  y  $B_s$  se obtienen directamente de la curva límite. Para determinar  $s$ ; y  $s_c$  seguiremos el siguiente procedimiento.

Se define el parámetro  $s$  como:

$$s \equiv \sqrt{s_c^2 + s_i^2} \quad (3.46)$$

Este parámetro se obtiene ajustando una gaussiana a la derivada del ciclo mayor, la desviación estándar de dicha gaussiana es  $s$ . Ahora se debe separar  $s$  en  $s_c$  y  $s_i$ . Para ello necesitamos de una curva inversa de primer orden ascendente cuyo punto de inversión sea el campo coercitivo de la rama descendente del ciclo límite (la opción inversa también es posible). Se calcula la integral de Everett para dicha curva en el punto correspondiente al campo coercitivo de la rama ascendente del ciclo límite (ver figura 3-19).

$$E(-H_o, H_o) = \frac{1}{2} (B_{-H_o, H_o} - B_{-H_o}) \quad (3.47)$$



**Figura 3-19.** Integral de Everett para calcular los parámetros de la gaussiana-log-normal

Finalmente se calculan los parámetros  $s_c$  y  $s_i$ .

$$\begin{aligned} s_i &= \cos \left[ \frac{p}{2} E(-H_o, H_o) \right] \\ s_c &= \sin \left[ \frac{p}{2} E(-H_o, H_o) \right] \end{aligned} \quad (3.48)$$

Los resultados obtenidos con las curvas gaussiana-log-normal son peores que los obtenidos con la curva lorentziana. Este tipo de curva tampoco es apropiado para materiales ferromagnéticos blandos, de hecho los trabajos de Edward della Torre y sus colaboradores se suelen centrar en sistemas de grabación magnética.

### 3.6.2.5 Gaussiana-gaussiana

Otra posibilidad es ajustar la función densidad a una curva gaussiana-gaussiana, como por ejemplo la siguiente [Bertotti, 1998; Henze y Rucker, 2002]:

$$m(h_c, h_i) = \frac{1}{2ps_c s_i H_o^2} \frac{2}{\operatorname{erf}(s_c \sqrt{2}) + 1} e^{-\frac{(h_c - H_o)^2}{2s_c^2 H_o^2}} e^{-\frac{h_i^2}{2s_i^2 H_o^2}} \quad (3.49)$$

Los resultados obtenidos con el modelo de Preisach caracterizado con la función gaussiana-log normal para materiales blandos son igualmente malos.

Donde todas las variables tienen el mismo significado que en la expresión (3.44) y  $\operatorname{erf}$  es la función error normalizada:

$$\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{p}} \int_0^x e^{-u^2} du \quad (3.50)$$

### 3.6.3 Otros métodos de caracterización

Aparte de los métodos de caracterización mostrados, algunos investigadores están trabajando en la aplicación de redes neuronales para calcular la función densidad [Cirrincione, Miceli, Ricco Galluzzo et al, 2003; Cirrincione, Miceli, Ricco Galluzzo et al, 2004].

### 3.7 Desarrollo numérico del modelo de Preisach

En el presente documento trataremos los siguientes métodos de desarrollo numérico del modelo de Preisach:

- Aplicando directamente la definición del modelo mediante la ecuación (3.1)
- Aplicando la interpretación geométrica del modelo, ecuación (3.2)
- Desarrollo a partir de integrales de Everett
- Método de Naidu
- Método de d'Alessandro-Ferrero

En el siguiente análisis de los diversos métodos de desarrollo numérico se supone ya determinada la función densidad o las integrales de Everett.

#### 3.7.1 Desarrollo por aplicación directa de la definición del modelo de Preisach

Se aplica directamente la definición del modelo de la ecuación (3.1). Para obtener la inducción debida a una intensidad de campo periódica de valor máximo  $H_{max}$ , donde este valor debe cumplir  $H_{max} < H_s$ , la aplicación de la ecuación (3.1) sería:

$$B(t) = B_s \int_{-H_{max}}^{H_{max}} \int_{-H_{max}}^a \mathbf{m}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \mathbf{g}_{ab} H(t) d\mathbf{b} d\mathbf{a} \quad (3.51)$$

Donde  $H(t)$  es el valor instantáneo del campo. Esto implica que previamente se debe haber determinado el estado de cada uno de los operadores del plano de Preisach para cada valor instantáneo  $H(t_i)$ . Se debe hacer una doble discretización, una del tiempo y otra del plano de Preisach.

La ecuación (3.51) es válida siempre que la intensidad de campo sea menor a  $H_s$ , de hecho fuera del triángulo límite de Preisach se supone que los operadores tienen asociada  $\mathbf{m}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = 0$ .

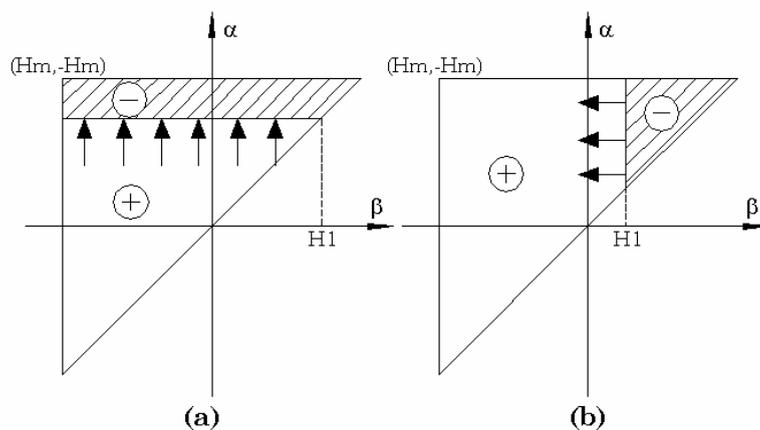
Se debe tener mucho cuidado en la aplicación del modelo de Preisach ya que este guarda memoria de todo el historial de la excitación, esto es, el estado del plano de Preisach en el momento de comenzar el historial determinará el valor de los futuros valores de inducción a medida que avance el historial de campo. Por ello es necesario, o bien conocer algo de la historia previa al momento inicial de la simulación, o establecer una hipótesis sobre ella.

Este sistema de desarrollo presenta la ventaja de que si se parte de la función densidad ajustada por alguna curva no es necesario determinar la integral de Everett. En cambio se debe calcular previamente la evolución de los operadores de histéresis para el historial de intensidad de campo. Además si la función densidad se caracteriza por interpolación se debe realizar la derivada doble de la función de Everett. Realizar derivadas o integrales dobles numéricamente implica ralentizar el cálculo y aumentar los errores. El cálculo previo de los operadores de histéresis también supone un incremento del tiempo de cálculo.

### 3.7.2 Desarrollo por aplicación de la interpretación geométrica

Se aplica la ecuación (3.4) que no es más que la interpretación geométrica del modelo respecto al plano de Preisach.

En el caso de una intensidad de campo periódica de valor máximo  $H_{max}$ , se puede restringir el plano de Preisach al triángulo  $T(H_{max}, -H_{max})$ , aunque este no corresponda al ciclo límite. Si la función es periódica se supone que el máximo de la misma no cambiará, así pues el ciclo resultante puede ejercer la función de nuevo ciclo límite. Claro está que esto tiene implícito el suponer que antes de comenzar el historial, el material estaba a una magnetización menor a la correspondiente al máximo del nuevo historial periódico. Además el valor de  $B_s$  de las ecuaciones originales se debe cambiar por el valor de la inducción cuando la intensidad de campo alcanza el máximo  $B_{max}$ .



**Figura 3-20.** Evolución del plano de Preisach en los tramos (a) ascendentes y (b) descendentes de una excitación periódica de valor máximo  $H_{max}$

La ecuación (3.4) se aplica de diferente forma en función del tramo del historial de excitación. Para tramos ascendentes:

$$B(t) = B_{\max} \left[ \int_{-H_{\max}}^{H_{\max}} \int_{-H_{\max}}^{\mathbf{a}} \mathbf{m}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) d\mathbf{b} d\mathbf{a} - \int_{H_1}^{H_{\max}} \int_{\mathbf{a}}^{H_{\max}} \mathbf{m}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) d\mathbf{b} d\mathbf{a} \right] \quad (3.52)$$

Para tramos descendentes:

$$B(t) = B_{\max} \left[ \int_{-H_{\max}}^{H_1} \int_{-H_{\max}}^{\mathbf{b}} \mathbf{m}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) d\mathbf{a} d\mathbf{b} - \int_{H_1}^{H_{\max}} \int_{\mathbf{b}}^{H_{\max}} \mathbf{m}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) d\mathbf{a} d\mathbf{b} \right] \quad (3.53)$$

Para el valor máximo  $H_{\max}$ :

$$B(t) = B_{\max} \int_{-H_{\max}}^{H_{\max}} \int_{-H_{\max}}^{\mathbf{a}} \mathbf{m}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) d\mathbf{b} d\mathbf{a} \quad (3.54)$$

Para el valor mínimo  $H_{\min}$ :

$$B(t) = -B_{\max} \int_{-H_{\max}}^{H_{\max}} \int_{-H_{\max}}^{\mathbf{a}} \mathbf{m}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) d\mathbf{b} d\mathbf{a} \quad (3.55)$$

Si se está calculando la inducción para campos no periódicos las ecuaciones anteriores no sirven, se deben cambiar los límites de integración considerando en cada instante la situación de la línea de estado  $L(t)$ .

Todos los inconvenientes del desarrollo por aplicación directa de la definición vuelven a aparecer en el presente método, añadiendo la complejidad del algoritmo de cálculo si la función no es periódica.

### 3.7.3 Desarrollo numérico por integrales de Everett

#### 3.7.3.1 Formulación del modelo de Preisach por integrales de Everett

Consiste en expresar la definición del modelo de Preisach en función únicamente de integrales de Everett. Como se verá esto proporciona un método no sólo elegante sino también eficiente.

Sea la interpretación geométrica del modelo de Preisach:

$$B(t) = \iint_{S_+(t)} \mathbf{m}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) d\mathbf{a} d\mathbf{b} - \iint_{S_-(t)} \mathbf{m}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) d\mathbf{a} d\mathbf{b} \quad (3.56)$$

Obsérvese que en la ecuación anterior, a diferencia de otras ecuaciones similares no se multiplica por  $B_s$ . Esto es así porque en nuestro caso, la ecuación la vamos a expresar en función de la integral de Everett que calculamos directamente de las curvas inversas de primer orden.

Sea  $T$  el área total del triángulo límite del plano de Preisach, para esta área se cumple:

$$T = S_+(t) + S_-(t) \quad (3.57)$$

En la ecuación (3.56), las dos integrales dobles representan la resta de áreas  $S_+(t) - S_-(t)$ , si se expresa dicha resta en función del área total  $T$ :

$$S_+(t) - S_-(t) = S_+(t) - [T - S_+(t)] = 2S_+(t) - T \quad (3.58),$$

la ecuación (3.56) se puede expresar como:

$$B(t) = -\iint_T \mathbf{m}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) d\mathbf{a} d\mathbf{b} + 2 \iint_{S_+(t)} \mathbf{m}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) d\mathbf{a} d\mathbf{b} \quad (3.59)$$

Recordemos que la integral de Everett  $E(\mathbf{a}, \mathbf{b})$  se puede interpretar como el área del triángulo del plano de Preisach definido por el vértice  $(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ . La primera integral doble (3.59) abarca el área del triángulo límite, esto es, el triángulo definido por el punto  $(H_s, -H_s)$ .

$$\iint_T \mathbf{m}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) d\mathbf{a} d\mathbf{b} = E(H_s, -H_s) \quad (3.60)$$

Si se calcula la integral de Everett a partir de curvas inversas de primer orden decrecientes, por la ecuación (3.12):

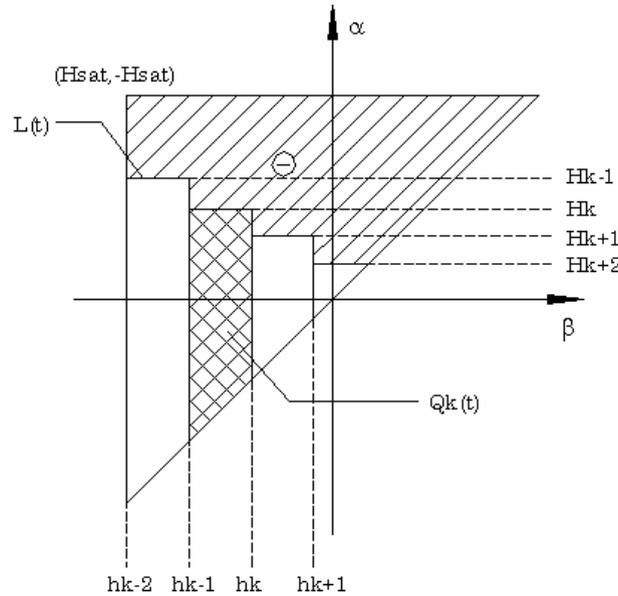
$$E(H_s, -H_s) = \frac{1}{2} [B_s - (-B_s)] = B_s \quad (3.61)$$

Entonces se puede expresar la inducción como:

$$B(t) = -B_s + 2 \iint_{S_+(t)} \mathbf{m}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) d\mathbf{a} d\mathbf{b} \quad (3.62)$$

Sea un plano de Preisach arbitrario como el de la figura 3-21, a cuya configuración se ha llegado después de un historial campo determinado. Dividimos el área  $S_+(t)$  en tantos trapezoides  $Q_k(t)$  como “escalones” presente la línea de estado  $L(t)$ .

La integral de (3.62) sobre el área  $S_+(t)$  se puede expresar como la sumatoria de las integrales de las áreas de los diversos trapezoides que la conforman.



**Figura 3-21.** División de  $S_+(t)$  en trapezoides

$$\iint_{S_+(t)} \mathbf{m}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) d\mathbf{a} d\mathbf{b} = \sum_{k=1}^{n(t)} \iint_{Q_k(t)} \mathbf{m}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) d\mathbf{a} d\mathbf{b} \quad (3.63)$$

Esta ecuación aún se puede desarrollar más. Si se observa de nuevo la figura 2-21, cualquier trapezoide, por ejemplo el  $Q_k(t)$  tiene un área que es la resta de triángulos:

$$Q_k(t) = T(H_k, h_{k-1}) - T(H_k, h_k) \quad (3.64)$$

Por tanto la integral doble de (3.62) también se puede representar como:

$$\iint_{S_+(t)} \mathbf{m}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) d\mathbf{a} d\mathbf{b} = \sum_{k=1}^{n(t)} \left[ \iint_{T(H_k, h_{k-1})} \mathbf{m}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) d\mathbf{a} d\mathbf{b} - \iint_{T(H_k, h_k)} \mathbf{m}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) d\mathbf{a} d\mathbf{b} \right] \quad (3.65)$$

Las dos integrales dobles dentro de la sumatoria de la ecuación (3.65) se pueden identificar claramente con integrales de Everett:

$$\iint_{S_+(t)} \mathbf{m}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) d\mathbf{a} d\mathbf{b} = \sum_{k=1}^{n(t)} [E(H_k, h_{k-1}) - E(H_k, h_k)] \quad (3.66)$$

En consecuencia, retornando a la ecuación (3.62), la inducción se puede calcular como:

$$B(t) = -B_s + 2 \sum_{k=1}^{n(t)} [E(H_k, h_{k-1}) - E(H_k, h_k)] \quad (3.67)$$

Se puede considerar a la ecuación (3.67) como el modelo de Preisach formulado con integrales de Everett. Obsérvese que han desaparecido las integrales dobles definidas sobre el plano de Preisach. En su lugar hay una sumatoria que no es más que un registro de los diversos cambios de máximos y mínimos locales que van apareciendo en el historial de la excitación. También ha desaparecido la función densidad para aparecer en su lugar la integral de Everett, lo cual en caso de emplear el método de Mayergoyz para caracterizar el modelo de Preisach es ventajoso pues las integrales de Everett se obtienen directamente de los datos experimentales. Todo ello revierte en que el tiempo de cálculo es mucho menor y se reducen los errores inherentes a la derivada doble de la función densidad. Tan sólo hemos de disponer de una pila LIFO para registrar los diversos máximos y mínimos locales a medida que van apareciendo en el historial de la intensidad de campo. En el anexo F se incluye el código correspondiente a este desarrollo numérico del modelo de Preisach.

Este desarrollo del modelo de Preisach permite además deducir expresiones analíticas para la inducción debida a historiales de  $H(t)$  determinados. Si queremos desarrollar un algoritmo genérico, aplicaremos lo comentado al final de párrafo anterior, pero si tratamos ante intensidades de campo periódicas o curvas concretas podemos simplificar mucho el algoritmo desarrollando estas expresiones específicas.

### 3.7.3.2 Curva de primera inducción

La curva de primera inducción implica un historial de campo como el mostrado en la figura 3-22a cuya evolución del plano de Preisach se muestra en la figura 3-22b.

El valor de la inducción en cualquier punto de la curva de primera inducción se puede determinar como el área del triángulo cuyo vértice es  $(H(t), -H(t))$ , esto es:

$$B(t) = E(H(t), -H(t)) \quad (3.68)$$

A modo de curiosidad, obsérvese que en realidad el modelo de Preisach no es capaz de representar el punto de magnetización cero con precisión. En consecuencia tampoco es realmente capaz de representar la curva de primera inducción pues la evolución del plano de Preisach parte del punto de magnetización cero. En realidad el tramo diagonal de la línea de estado  $L(t)$  está formado por tantos “escalones” como fino sea el entramado  $(\mathbf{a}, \mathbf{b})$  del plano de Preisach.

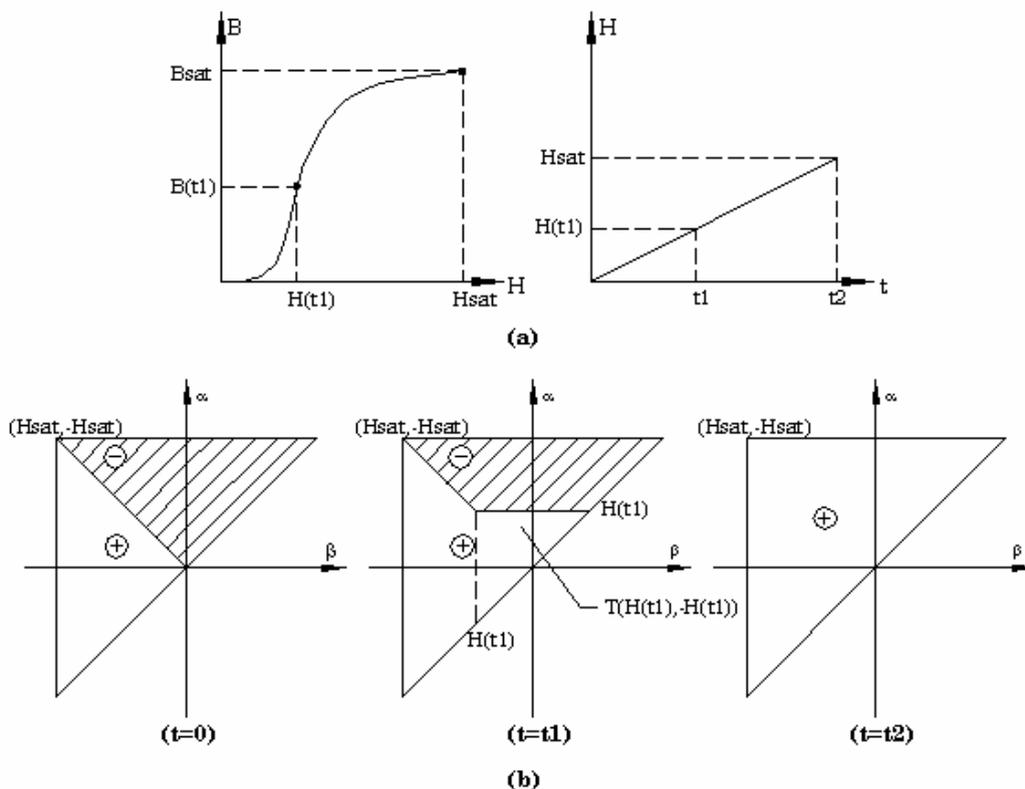


Figura 3-22. Curva de primera inducción. (a) Historial de excitación y (b) evolución del plano de Preisach

3.7.3.3 Tramo creciente de una excitación periódica

Sea el tramo creciente de una excitación periódica, simétrica respecto al eje de tiempos, y con valor máximo  $H_m \leq H_s$ . Para que el modelo funcione correctamente con una única expresión analítica se establece la hipótesis que la excitación periódica ha borrado cualquier evolución del plano de Preisach anterior a ella –o sea que nunca antes ha habido un máximo mayor al de la excitación periódica-, con ello podemos reducir el plano de Preisach al triángulo definido por el vértice  $(H_m, -H_m)$ . En caso contrario deberíamos considerar todo el historial anterior al establecimiento de la excitación periódica.

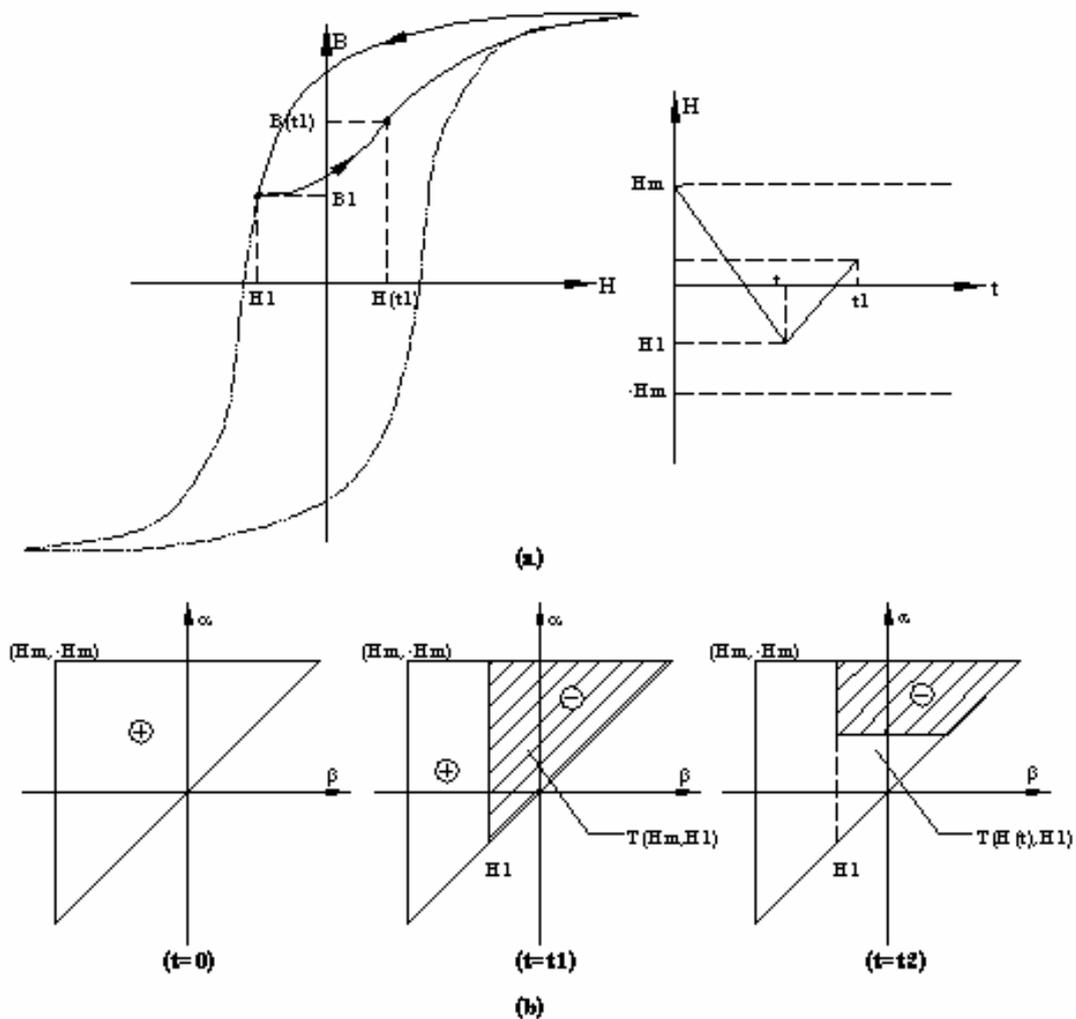


Figura 3-23. Tramo creciente de una excitación periódica. (a) Historial de excitación y (b) evolución del plano de Preisach

Como se aprecia en la figura 3-23b, entre el estado inicial de saturación negativa y el estado final de saturación positiva, en el plano de Preisach la línea de estado es una recta horizontal

$\mathbf{a}=H(t)$ , a medida que aumenta el valor de  $H(t)$ , la línea avanza verticalmente, aumentando el área de  $S_+(t)$  y disminuyendo el área de  $S_-(t)$ . En todo momento, la línea de estado  $L(t)$  está formada únicamente por una recta. Aplicando la ecuación (3.67) se deduce una expresión analítica para la inducción en este tramo creciente de la excitación:

$$B(t) = -B_m + 2 \left[ E(H(t), -H_m) - E(H(t), H(t)) \right] \quad (3.69)$$

Por la propia definición de integral de Everett se deduce que  $E(h,h)=0$ , por lo que la expresión final es:

$$B(t) = -B_m + 2E(H_m, -H(t)) \quad (3.70)$$

Se puede deducir la misma expresión analizando el estado del plano de Preisach con un planteamiento geométrico mediante las integrales de Everett, considerando que  $E(x,y)$  es el área del triángulo definido por el vértice  $(x,y)$ .

$$\begin{aligned} B(t) &= \iint_{S_+(t)} \mathbf{m}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) d\mathbf{a} d\mathbf{b} - \iint_{S_-(t)} \mathbf{m}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) d\mathbf{a} d\mathbf{b} = \\ &= E(H(t), -H_m) - B_m + E(H(t), -H_m) = \\ &= -B_m + 2E(H(t), -H_m) \end{aligned} \quad (3.71)$$

#### 3.7.3.4 Tramo decreciente de una excitación periódica

Siguiendo un procedimiento similar al del apartado 3.7.3.3 para el tramo de excitación creciente, obtenemos la expresión para el tramo decreciente de la misma excitación.

En la figura 3-24b se observa como para este caso la línea de estado está formada por un único tramo, una recta vertical  $\mathbf{b}=H(t)$  que se mueve horizontalmente de izquierda a derecha. El área  $S_-(t)$  avanza a izquierdas hasta que todo el plano de Preisach se encuentra en estado de saturación negativa. Aplicando la ecuación (3.67) a este estado deducimos la expresión analítica correspondiente:

$$\begin{aligned} B(t) &= -B_m + 2 \left[ E(H_m, H_m) - E(H_m, H(t)) \right] = \\ &= -B_m - 2E(H_m, H(t)) \end{aligned} \quad (3.72)$$

3.7.3.5 Curva inversa de primer orden

Se deduce a continuación una expresión para una curva inversa de primer orden creciente. La hipótesis de partida es que dicha curva inversa se produce después de una excitación periódica que ha borrado cualquier máximo local anterior.

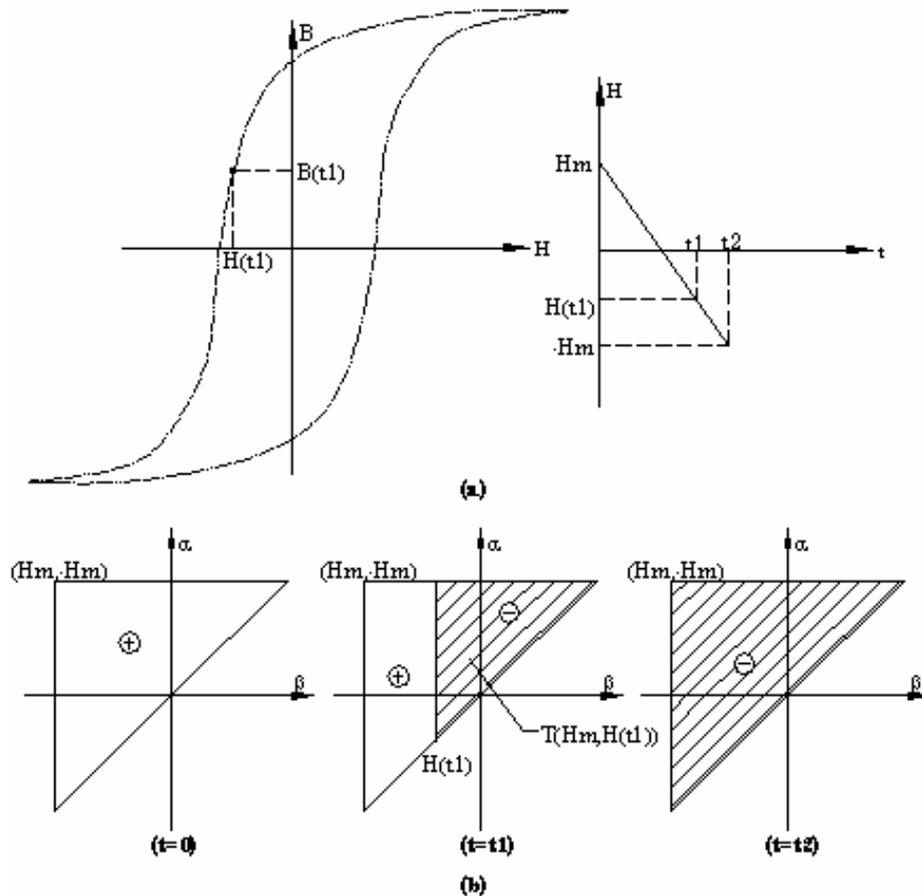


Figura 3-24. Tramo decreciente de una excitación periódica. Historial de excitación y evolución del plano de Preisach

La deducción de la expresión analítica es análoga a la realizada para el tramo ascendente de la excitación periódica en el tramo 3.7.3.3. En la figura 3-25b se muestra la evolución del plano de Preisach. Hasta el punto de inversión  $H_1$ , mientras la excitación va decreciendo, el estado es el mismo que para el tramo decreciente descrito en el apartado anterior y es aplicable la ecuación (3.72). Repentinamente, en  $H_1$ , la excitación pasa a ser creciente, por lo que el sistema entra en la curva inversa de primer orden. En el plano de Preisach, la línea de estado  $L(t)$  está formada por dos tramos, una línea vertical constante  $\mathbf{b}=H_1$  y una línea horizontal  $\mathbf{a}=H(t)$  que comienza en  $\mathbf{b}=H_1$  que avanza de abajo a arriba. En este caso tenemos dos trapezoides, uno en la izquierda, fijo y delimitado por  $\mathbf{a}=H_m$  y  $\mathbf{b}=H_1$ , y otro en la

derecha, móvil y delimitado por  $a=H(t)$  y la línea  $a=b$ . Aplicando la ecuación (3.68) a esta situación obtenemos la expresión analítica para la curva inversa creciente de primer orden.

$$B(t) = -B_m + 2 \left[ E(H_m, H_m) - E(H_m, H_1) + E(H_1, H(t)) - E(H(t), H(t)) \right] \quad (3.73)$$

Aplicando la propiedad de la integral de Everett  $E(h,h)=0$  obtenemos la expresión definitiva:

$$B(t) = -B_m + 2 \left[ E(H_1, H(t)) - E(H_m, H_1) \right] \quad (3.74)$$

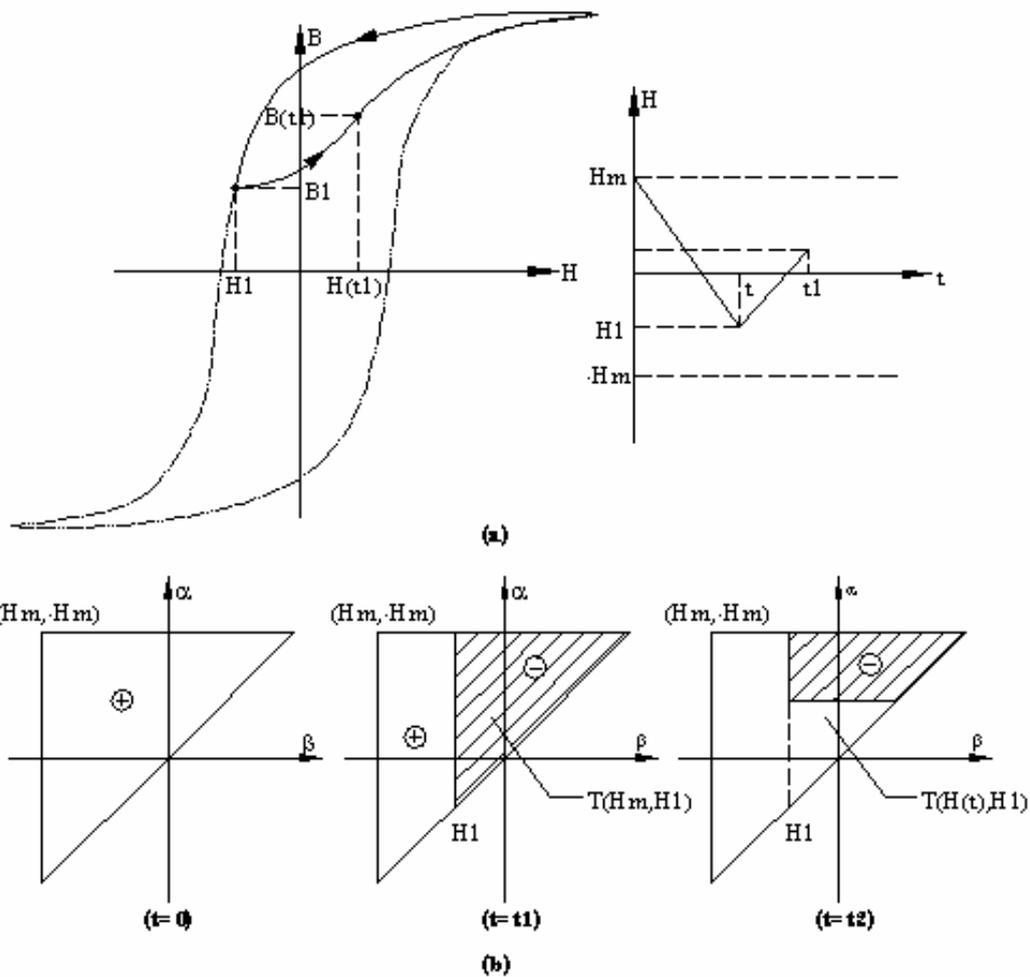


Figura 3-25. Curva inversa creciente de primer orden. Historial de excitación y evolución del plano de Preisach

Si siguiendo el mismo planteamiento para una curva inversa decreciente se llegaría a la siguiente expresión:

$$B(t) = B_m + 2 \left[ E(H_1, H_m) - E(H_1, H(t)) \right] \quad (3.75)$$

### 3.7.3.6 Algoritmo genérico

Realizando un planteamiento similar al de los casos anteriores podemos deducir una expresión analítica para casi cualquier excitación. No obstante, los desarrollos anteriores nos permiten deducir una forma sencilla de realizar un algoritmo genérico. Observemos la expresión para la curva inversa decreciente, ecuación (3.74), y en la expresión de inducción para el tramo decreciente (3.72). Claramente la curva inversa se podría expresar directamente como:

$$B(t) = -B(H_1) + 2E(H(t), H_1) \quad (3.76)$$

Esto es muy interesante pues nos indica que no es necesario desarrollar la sumatoria de (3.67), únicamente debemos partir del valor de la inducción del último punto máximo acontecido. Los diversos cambios que se van produciendo en la excitación, en el plano de Preisach, se traducen a añadir o quitar integrales de Everett. Así se simplifica significativamente el algoritmo con respecto a (3.67), pues tan sólo se debe almacenar el último máximo producido y su correspondiente inducción e ir sumando o restando integrales de Everett. El anexo C contiene el pseudocódigo del algoritmo correspondiente.

### 3.7.4 Método de Naidu

S.R. Naidu ha propuesto un desarrollo del modelo de Preisach que deriva en un conjunto de expresiones analíticas para diversas curvas de magnetización [Naidu, 1990; Naidu, 1991]. De hecho, el método de Naidu resuelve simultáneamente la caracterización y el desarrollo.

La gran ventaja del presente método es que únicamente necesita del tramo descendente del ciclo límite. Esta es una curva sencilla de obtener frente a las numerosas curvas o ajustes que se deben realizar para el desarrollo por integrales de Everett si se emplea el método de Mayergoyz para obtenerlas. Comparando el método de Naidu con el desarrollo partiendo de la función densidad obtenida por ajuste, presenta la ventaja de unos mejores resultados y eludir la integral doble de las definiciones básicas del modelo de Preisach.

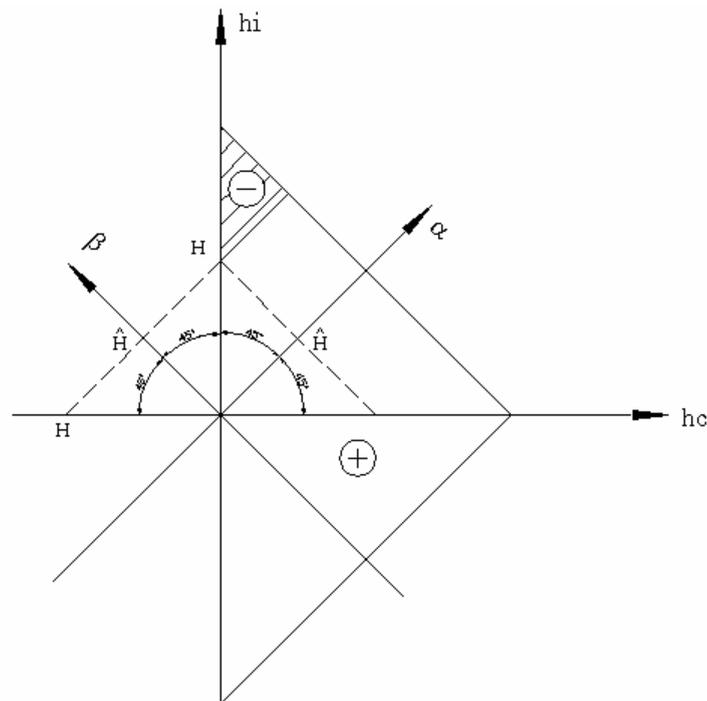
El método está basado en cierto modo en el método de caracterización de Biorci-Pescetti, y por tanto comparte con él sus inconvenientes, principalmente al desarrollarse a partir de una parte del ciclo límite es incapaz de reproducir ciclos menores, como por ejemplo, las curvas inversas.

En algunas partes de nuestro análisis del método de Naidu emplearemos como variables del plano de Preisach el campo crítico y el campo de interacción en vez de los campos de conmutación. Los valores de la intensidad de campo son directamente expresables como campos de conmutación y se pueden abatir directamente en los ejes **a** y **b**. A las intensidades de campo abatidas en los ejes **a** y **b** las indicaremos como  $\hat{H}$ . En la figura 3-26 se muestra la relación geométrica entre ambas variables, que expresada algebraicamente es:

$$\begin{aligned}\hat{H}_a &= H \cos(45^\circ) = H \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{H}{\sqrt{2}} \\ \hat{H}_b &= H \sin(45^\circ) = H \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{H}{\sqrt{2}}\end{aligned}\quad (3.77)$$

Generalizando:

$$H = \sqrt{2}\hat{H} \quad (3.78)$$



**Figura 3-26.** Transformación de variables entre los ejes **a-b** y los ejes  $h_c$ - $h_i$

Siguiendo el trabajo de G. Biorci y D. Pescetti [Biorci y Pescetti, 1958], S.R. Naidu establece la siguiente relación:

$$B(t) = \iint_{S(t)} B_s \mathbf{m}(h_c, h_i) dh_c dh_i = \iint_{a \geq b} G(\mathbf{a}, \mathbf{b}) d\mathbf{a} d\mathbf{b} \quad (3.79)$$

Donde la función  $G(\mathbf{a}, \mathbf{b})$  cumple las siguientes propiedades:

$$\begin{aligned} G(\mathbf{a}, \mathbf{b}) &= G_a(\mathbf{a}) G_b(\mathbf{b}) \\ G(\mathbf{a}, \mathbf{b}) &= -G(-\mathbf{b}, -\mathbf{a}) \end{aligned} \quad (3.80)$$

Además de:

$$\begin{aligned} G_a(\mathbf{a}) &= G_b(-\mathbf{a}) \\ G_b(\mathbf{b}) &= G_a(-\mathbf{b}) \end{aligned} \quad (3.81)$$

Por lo que también se cumple:

$$G_a(\mathbf{a}) G_b(\mathbf{b}) = G_a(\mathbf{a}) G_a(-\mathbf{b}) \quad (3.82)$$

Con lo que se concluye que la inducción es:

$$B(t) = \iint_{a \geq b} G_a(\mathbf{a}) G_a(-\mathbf{b}) d\mathbf{a} d\mathbf{b} \quad (3.83)$$

#### 3.7.4.1 Función $F(H)$ de Naidu

Sobre el eje  $\mathbf{a}$  del plano de Preisach se define la función  $F(H)$  como (ver figura 3-27a):

$$F(H) \equiv \int_{\hat{H}}^{\hat{H}_s} G_a(\mathbf{a}) d\mathbf{a} \quad (3.84)$$

La función  $F(H)$  también se puede definir sobre el eje  $\mathbf{b}$  del plano de Preisach (figura 3-27b):

$$F(H) = \int_{-\hat{H}_s}^{-\hat{H}} G_a(-\mathbf{b}) d\mathbf{b} \quad (3.85)$$

Observando la figura 3-27a se deduce la siguiente propiedad de la función  $F(H)$  que debe tenerse en consideración para subsiguientes desarrollos:

$$F(H) \neq F(-H) \quad (3.86)$$

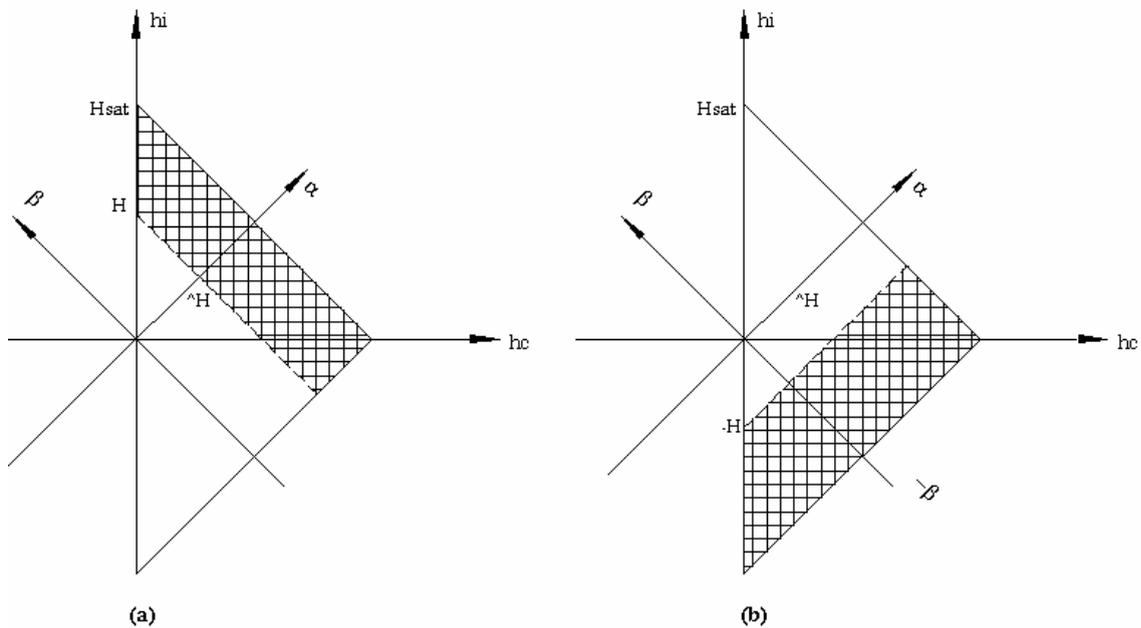


Figura 3-27. Funciones del modelo de Naidu. (a) Función  $F(H)$  y (b) función  $F(-H)$

### 3.7.4.2 Cálculo de la función $F(H)$ de Naidu

A continuación vamos a obtener una expresión analítica para el tramo decreciente de la curva límite. Según se muestra en la figura 3-28 la inducción para este tramo se puede expresar como:

$$B_e(t) = \iint_{DEBC} G_a(\mathbf{a})G_b(-\mathbf{b})d\mathbf{a}d\mathbf{b} - \iint_{AED} G_a(\mathbf{a})G_b(-\mathbf{b})d\mathbf{a}d\mathbf{b} \quad (3.87)$$

Observando la figura 3-28 se comprueba que el triángulo AED de la zona  $S(t)$  es igual al triángulo GFC, por tanto en la ecuación (3.87) el área  $DEBC-AED=DEGFB$  y puede reescribirse como:

$$B_e(t) = \iint_{DEGFB} G_a(\mathbf{a})G_b(-\mathbf{b})d\mathbf{a}d\mathbf{b} \quad (3.88)$$

Como es imposible que existan operadores de histéresis con campo crítico  $h_c < 0$ , se puede asimilar que los operadores con  $h_c < 0$  están continuamente en un estado  $g=0$ . Así, si añadimos

el triángulo  $B'DG$  a la zona  $DEGFB$  la inducción no variará, pero nos permitirá introducir las funciones  $F(H)$ .

$$\begin{aligned}
 B_e(t) &= \iint_{BEBF} G_a(\mathbf{a})G_a(-\mathbf{b})d\mathbf{a}d\mathbf{b} \\
 &= \int_{\frac{H(t)}{\sqrt{2}}}^{\frac{H_s}{\sqrt{2}}} G_a(\mathbf{a})d\mathbf{a} \int_{\frac{H_s}{\sqrt{2}}}^{\frac{H(t)}{\sqrt{2}}} G_a(-\mathbf{b})d\mathbf{b} = \int_{-\hat{H}(t)}^{\hat{H}_s} G_a(\mathbf{a})d\mathbf{a} \int_{-\hat{H}_s}^{\hat{H}(t)} G_b(-\mathbf{b})d\mathbf{b}
 \end{aligned}
 \tag{3.89}$$

Expresada así la inducción podemos aplicar la función  $F(H)$  de Naidu:

$$\begin{aligned}
 B_e(t) &= F(-H(t))F(-H(t)) = [F(-H(t))]^2 \Rightarrow \\
 &\Rightarrow F[-H(t)] = \sqrt{B_e(t)}
 \end{aligned}
 \tag{3.90}$$

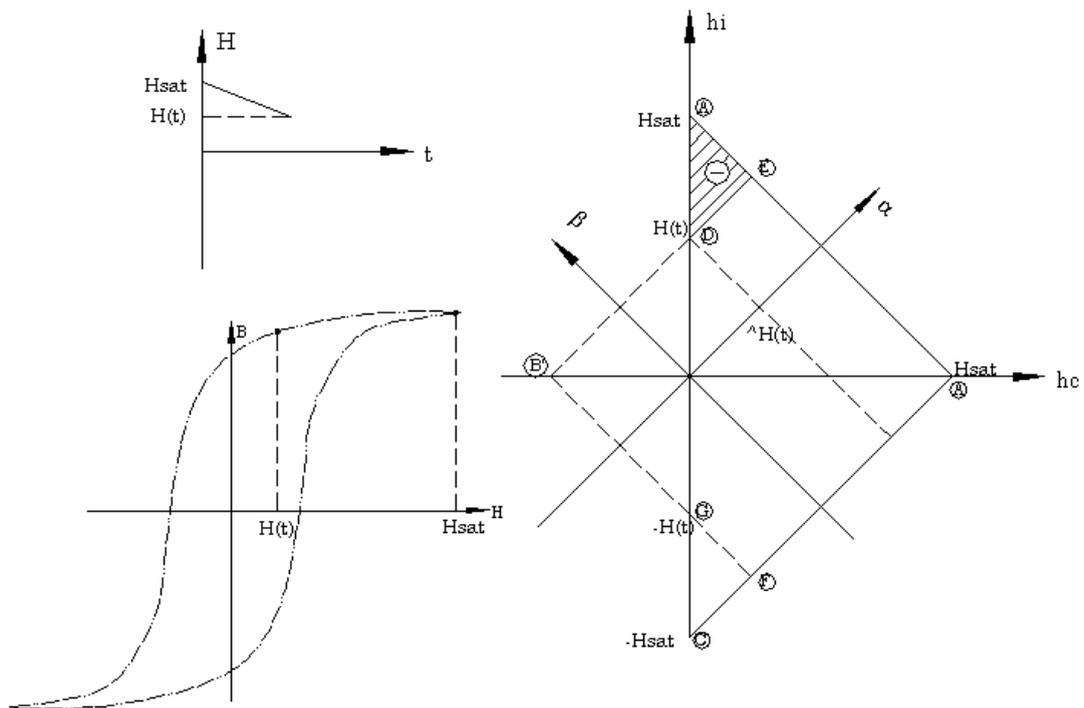


Figura 3-28. Tramo decreciente del ciclo límite

Con esta ecuación podemos caracterizar la función  $F(H)$  de Naidu para  $H < 0$ . Para calcular esta función cuando  $H > 0$  necesitaremos una segunda ecuación complementaria que obtendremos del análisis del tramo decreciente del ciclo límite.

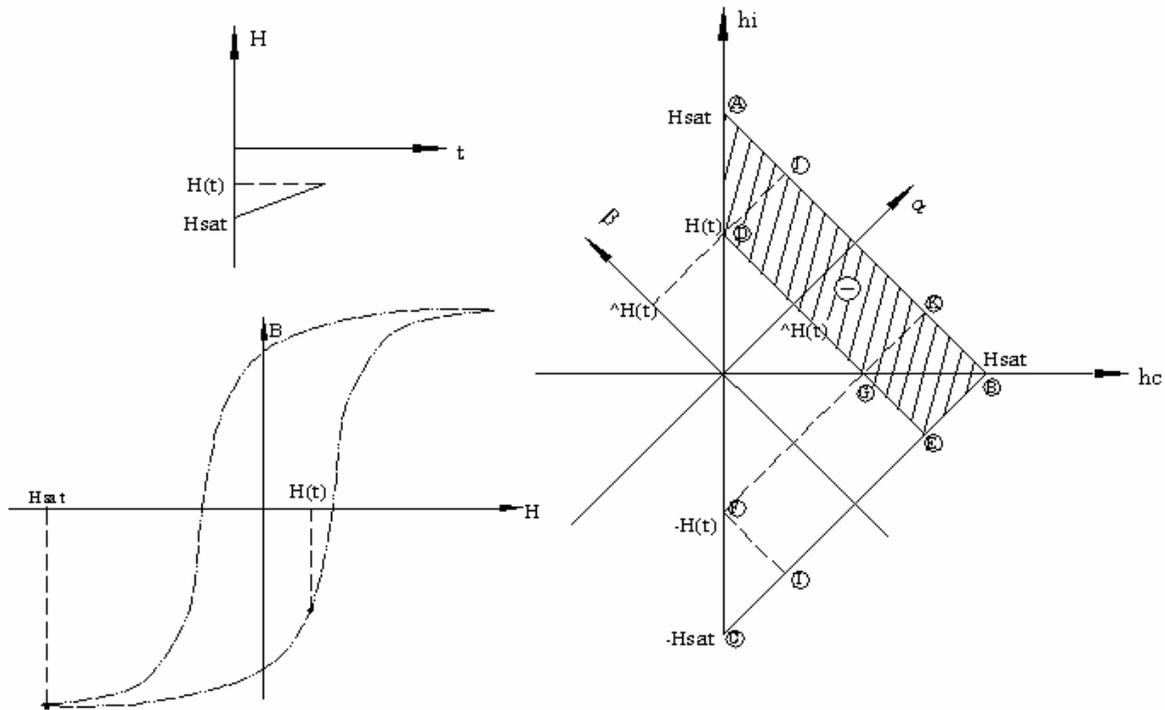


Figura 3-29. Tramo ascendente del ciclo límite

Del plano de Preisach para el tramo ascendente mostrado en la figura 3-29 se deduce que la inducción para dicho tramo es:

$$B_i(H) = \iint_{DEC} G_a(\mathbf{a})G_a(-\mathbf{b})d\mathbf{a}d\mathbf{b} - \iint_{ADBE} G_a(\mathbf{a})G_a(-\mathbf{b})d\mathbf{a}d\mathbf{b} \quad (3.91)$$

Recurrimos a la ecuación (3.88), adoptando la nomenclatura de la figura 3-29:

$$B_e(t) = \iint_{DLFIB} G_a(\mathbf{a})G_a(-\mathbf{b})d\mathbf{a}d\mathbf{b} \quad (3.92)$$

La diferencia entre la inducción en el tramo descendente y la inducción en el tramo ascendente:

$$B_e(t) - B_i(t) = \iint_{DLBIF} G_a(\mathbf{a})G_a(-\mathbf{b})d\mathbf{a}d\mathbf{b} - \left[ \iint_{DEC} G_a(\mathbf{a})G_a(-\mathbf{b})d\mathbf{a}d\mathbf{b} - \iint_{ADBE} G_a(\mathbf{a})G_a(-\mathbf{b})d\mathbf{a}d\mathbf{b} \right] \quad (3.93)$$

Considerando la operación entre áreas de la figura 330 se simplifica la ecuación (3.92) logrando finalmente la siguiente expresión para la diferencia entre las inducciones de los tramos descendente y ascendente:

$$B_e(t) - B_i(t) = 2 \iint_{DLBE} G_a(\mathbf{a}) G_a(-\mathbf{b}) d\mathbf{a} d\mathbf{b} \quad (3.94)$$

Expresando la integral doble en función de los límites de integración podemos relacionar la ecuación con la función  $F(H)$  de Naidu:

$$B_e(t) - B_i(t) = 2 \int_{\hat{H}}^{\hat{H}_+} G_a(\mathbf{a}) d\mathbf{a} \int_{-\hat{H}}^{\hat{H}} G_a(-\mathbf{b}) d\mathbf{b} = 2F(H(t))F(-H(t)) \quad (3.95)$$

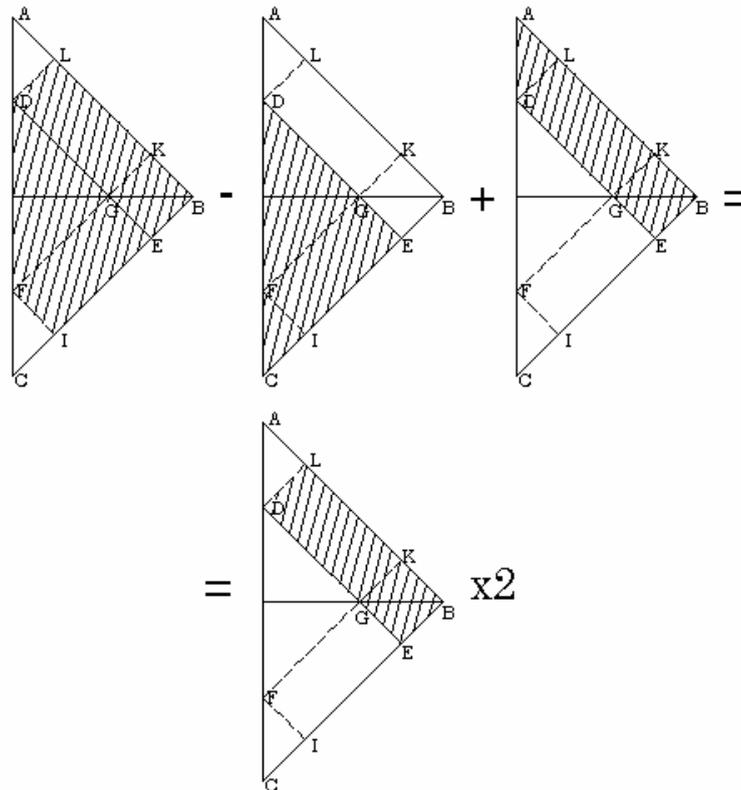
Para la mayoría de materiales ferromagnéticos es válida la hipótesis de suponer un ciclo límite simétrico, por lo que se cumple  $B_i(H) = -B_e(-H)$ , con lo que obtenemos la siguiente relación:

$$B_e(H(t)) + B_e(-H(t)) = 2F(H(t))F(-H(t)) \quad (3.96)$$

Como para cada instante de tiempo existe una relación biunívoca entre B y H, a partir de este momento simplificaremos la apariencia de las ecuaciones obviando la dependencia temporal  $H(t)$ .

Con la ecuación (3.96) ya podemos completar la determinación de la función  $F(H)$ . No obstante, considerando la ecuación (3.90) y despejando para la función de Naidu, englobamos el cálculo de  $F(H)$  en una única ecuación:

$$F(H) = \frac{1}{2} \frac{B_e(H) - B_e(-H)}{\sqrt{B_e(H)}} \quad (3.97)$$



**Figura 3-30.** Relación de áreas para el tramo ascendente del ciclo límite

La función  $F(H)$  se calcula mediante la ecuación (3.90) para los valores de  $H < 0$  y la ecuación (3.97) cuando  $H > 0$ .

El desarrollo según el método de Naidu consiste en analizar el desarrollo del plano de Preisach para la curva deseada y deducir para ella una expresión analítica en función de  $F(H)$ . En concreto [Naidu, 1990; Naidu, 1991] se desarrollan expresiones para la curva de primera inducción, para curvas inversas decrecientes y para curvas inversas crecientes. Con las ecuaciones de las curvas inversas se pueden trazar todas las trayectorias básicas de análisis, ciclos límite, ciclos menores y las curvas inversas. A continuación se desarrollan las expresiones matemáticas para las curvas inversas.

#### 3.7.4.3 Expresión matemática de las curvas inversas de primer orden crecientes con el método de Naidu

Denominamos  $B_{u,H1}(H)$  a la inducción en un punto de una curva inversa de primer orden cuyo punto de inversión es  $H_1$ . En la figura 3-31 se muestra la evolución del plano de Preisach para la curva en análisis.

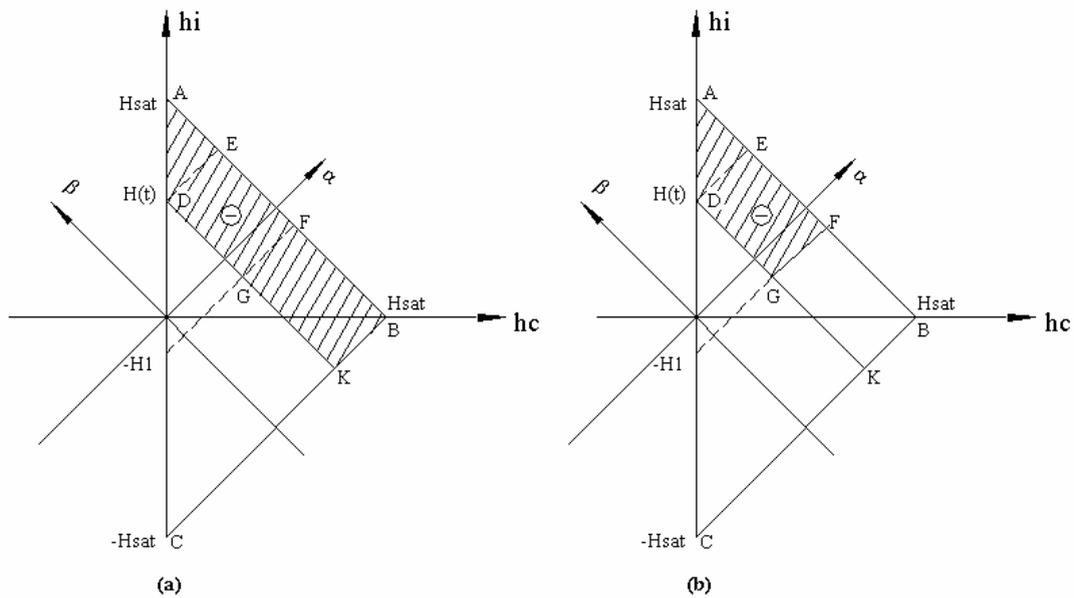


Figura 3-31. Evolución del plano de Preisach para (a) el tramo ascendente del ciclo límite y (b) una curva inversa creciente de primer orden

Se parte de la diferencia entre la inducción en la curva inversa y la inducción en el tramo creciente del ciclo límite. Siguiendo el plano de Preisach para cada curva se deduce que la diferencia entre las inducciones de ambas curvas es:

$$B_{u,H_1}(H) - B_i(H) = \iint_{DGFBC} G_a(\mathbf{a})G_a(-\mathbf{b})d\mathbf{a}d\mathbf{b} - \iint_{DAFG} G_a(\mathbf{a})G_a(-\mathbf{b})d\mathbf{a}d\mathbf{b} - \left[ \iint_{DCK} G_a(\mathbf{a})G_a(-\mathbf{b})d\mathbf{a}d\mathbf{b} - \iint_{DKBA} G_a(\mathbf{a})G_a(-\mathbf{b})d\mathbf{a}d\mathbf{b} \right] \quad (3.98)$$

Esta ecuación se simplifica notablemente si operamos con las diversas áreas que aparecen en sus integrales dobles.

$$\begin{aligned} \text{Area}(DGFBC) + \text{Area}(DKBA) &= \text{Area}(ABC) + \text{Area}(GFBK) \\ \text{Area}(DAFG) + \text{Area}(DCK) &= \text{Area}(AFGKC) \end{aligned} \quad (3.99)$$

Restando ambas expresiones:

$$\text{Area}(ABC) + \text{Area}(GFBK) - \text{Area}(AFGKC) = 2\text{Area}(AFGKC) \quad (3.100)$$

Por tanto la ecuación (3.98) queda simplificada en:

$$B_{u,H_1}(H) - B_i(H) = 2 \iint_{GFBK} G_a(\mathbf{a}) G_a(-\mathbf{b}) d\mathbf{a} d\mathbf{b} \quad (3.101)$$

Desarrollando los límites de integración:

$$B_{u,H_1}(H) - B_i(H) = 2 \int_{\hat{H}}^{\hat{H}_s} G_a(\mathbf{a}) d\mathbf{a} \int_{-\hat{H}_s}^{-\hat{H}_1} G_a(-\mathbf{b}) d\mathbf{b} = 2F(H)F(H_1) \quad (3.102)$$

Aplicando la hipótesis de simetría del ciclo límite:

$$B_{u,H_1}(H) = 2F(H)F(H_1) - B_e(-H) \quad (3.103)$$

Esta ecuación es la expresión analítica para la curva inversa creciente de primer orden. Para aplicarla tan solo se necesita haber calculado previamente la función  $F(H)$  para lo cual únicamente se necesita la rama descendente del ciclo límite. El desarrollo de (3.103) se ha realizado para  $H_1 < 0$  y  $H > 0$ , para las tres situaciones posibles se obtienen las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned} B_{u,H_1}(H) &= 2F(H)F(H_1) - B_e(-H) & \forall H_1 < 0; H > 0 \\ B_{u,H_1}(-H) &= 2F(-H)F(H_1) - B_e(H) & \forall H_1 < 0; H < 0 \\ B_{u,H_1}(H) &= 2F(H)F(-H_1) - B_e(-H) & \forall H_1 > 0; H > 0 \end{aligned} \quad (3.104)$$

#### 3.7.4.4 Expresiones matemáticas para curvas inversas de primer orden decrecientes con el método de Naidu

Siguiendo un procedimiento de análisis similar al del apartado 3.7.4.3 se obtienen las siguientes expresiones para las curvas inversas de primer orden decrecientes:

$$\begin{aligned} B_{u,H_2}(H) &= B_e(H) - 2F(H_2)F(-H) & \forall H_2 > 0; H > 0 \\ B_{u,H_2}(-H) &= B_e(-H) - 2F(H_2)F(H) & \forall H_2 > 0; H < 0 \\ B_{u,H_2}(H) &= B_e(H) - 2F(-H_2)F(-H) & \forall H_2 < 0; H < 0 \end{aligned} \quad (3.105)$$

Donde  $B_{u,H_2}(H)$  es la inducción en un punto de la curva inversa de primer orden decreciente con un punto de inversión  $H_2$ .

### 3.7.4.5 Expresión matemática para la curva de primera inducción por el método de Naidu

Realizando un desarrollo similar al del apartado 3.7.4.3 se obtiene la siguiente expresión matemática para la curva de primera inducción:

$$B_m(H) = \frac{[B_e(H) - B_e(-H)]^2}{4B_e(H)} \quad (3.106)$$

Donde  $B_m(H)$  es la inducción en un punto de la curva de primera inducción.

### 3.7.5 Método de D'Alessandro-Ferrero

El método propuesto por Leone d'Alessandro y Alessandro Ferrero es otra alternativa para el desarrollo del modelo de Preisach [d'Alessandro y Ferrero, 1994]. Con este método los datos experimentales de partida son ciclos mayores a partir de los cuales se calcula la inducción discretizada en el plano de Preisach con lo que se puede calcular la inducción para cualquier historial de campo. De esta forma, al igual que en el desarrollo por integrales de Everett, no es necesario determinar la función densidad, pero a diferencia de éste los datos experimentales necesarios son más sencillos de obtener. En realidad como ya se verá más adelante, atendiendo al uso que se hace del conjunto de ciclos mayores, únicamente con la curva de primera inducción ya es suficiente.

Como ya se ha dicho, los datos de partida están formados por un conjunto de ciclos mayores de igual frecuencia. Estos ciclos presentan consecutivamente su correspondiente punto máximo cada vez mayor, hasta llegar al ciclo límite. A cada ciclo le corresponde una evolución de la línea de estado en el plano de Preisach que nos permite calcular la inducción  $B(t)$  a partir de la definición geométrica del modelo –ecuación (3.2)-.

Sea la intensidad de campo a un valor  $H(t)=H_l$ , la inducción correspondiente  $B_l$  se puede calcular mediante la ecuación (3.2):

$$B_1(t) = B_s \left[ \iint_{S_{1+}} \mathbf{m}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) d\mathbf{a} d\mathbf{b} - \iint_{S_{1-}} \mathbf{m}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) d\mathbf{a} d\mathbf{b} \right] =$$

$$= B_s \left[ \iint_{S_{1+}} \mathbf{m}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) d\mathbf{a} d\mathbf{b} + \iint_{S_{1-}} \mathbf{m}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) d\mathbf{a} d\mathbf{b} - \iint_{S_{1-}} \mathbf{m}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) d\mathbf{a} d\mathbf{b} - \iint_{S_{1-}} \mathbf{m}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) d\mathbf{a} d\mathbf{b} \right] \quad (3.107)$$

Sea  $A_t$  el área total del plano de Preisach delimitado:

$$A_t = \iint_{s_1^+} \mathbf{m}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) d\mathbf{a} d\mathbf{b} + \iint_{s_1^-} \mathbf{m}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) d\mathbf{a} d\mathbf{b} \quad (3.108)$$

Combinando las ecuaciones (3.107) y (3.108) se obtiene que  $B_t$ , la inducción en  $H(t)=H_t$  es:

$$B_t = A_t - 2 \iint_{s_1^-} \mathbf{m}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) d\mathbf{a} d\mathbf{b} \quad (3.109)$$

Supongamos a continuación que el campo pasa de  $H_t$  a otro valor  $H_2$ , tal que  $H_2 > H_t$ , la inducción correspondiente a este nuevo valor de campo se puede determinar siguiendo el mismo razonamiento que  $B_t$ :

$$B_2 = A_t - 2 \iint_{s_2^-} \mathbf{m}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) d\mathbf{a} d\mathbf{b} \quad (3.110)$$

La diferencia entre ambas inducciones:

$$B_2 - B_t = 2 \iint_{s_1^-} \mathbf{m}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) d\mathbf{a} d\mathbf{b} - 2 \iint_{s_2^-} \mathbf{m}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) d\mathbf{a} d\mathbf{b} \quad (3.111)$$

Definimos a continuación  $A_{H_1, H_2}$  como la zona diferencial en el plano de Preisach cuando el campo pasa de  $H_t$  a  $H_2$  (figura 3-32), el valor de dicha área es:

$$A_{H_1, H_2} = \iint_{s_1^-} \mathbf{m}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) d\mathbf{a} d\mathbf{b} - \iint_{s_2^-} \mathbf{m}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) d\mathbf{a} d\mathbf{b} \quad (3.112)$$

Sustituyendo la ecuación (3.111) en la (3.112) se expresa el área  $A_{H_1, H_2}$  en función de la diferencia de inducciones:

$$A_{H_1, H_2} = \frac{B_t - B_2}{2} \quad (3.113)$$

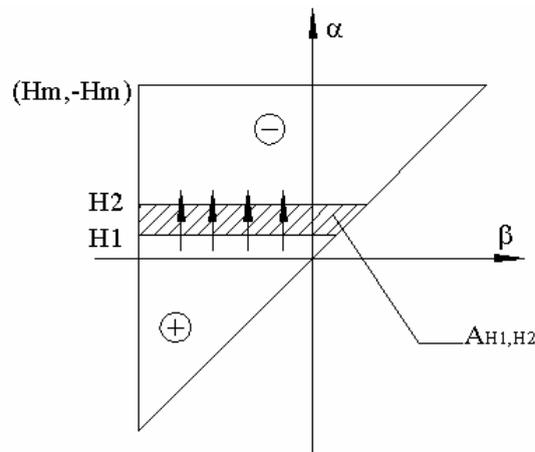


Figura 3-32. Área diferencial en el tramo ascendente  $H_1-H_2$

Siguiendo el mismo razonamiento para el caso en el que el campo pasa de un valor  $H_1$  a un valor inferior  $H_3$  se obtiene la siguiente relación entre el área diferencial y la diferencia de inducciones:

$$A_{H_1,H_3} = \frac{B_3 - B_1}{2} \tag{3.114}$$

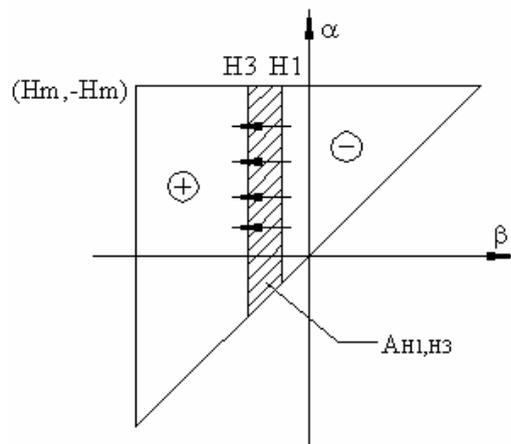


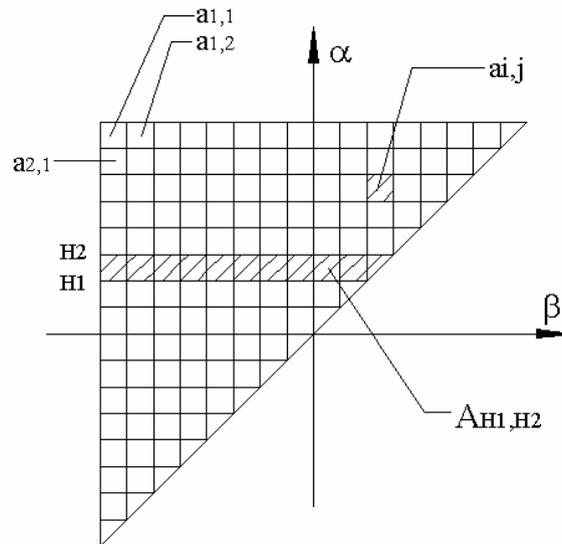
Figura 3-33. Área diferencial en el tramo descendente  $H_1-H_3$

El método de d'Alessandro-Ferrero consiste en discretizar el plano de Preisach en áreas tal como se muestra en la figura (3-34), de tal forma que el área diferencial  $A_{H_1,H_2}$  se puede expresar como:

$$A_{H_1,H_2} = \sum_{j=1}^N a_{H_1,j} \tag{3.115}$$

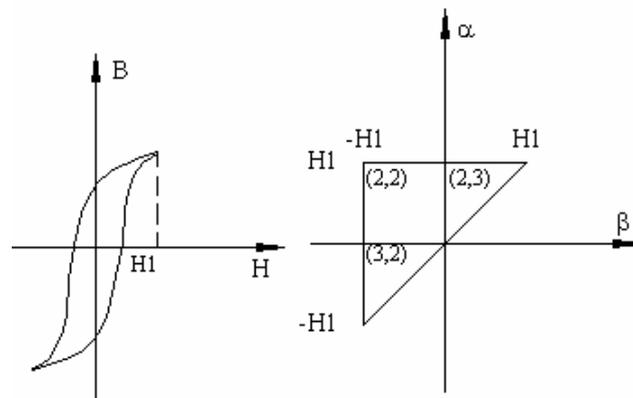
O bien para tramos descendentes  $H_1-H_3$ :

$$A_{H_1,H_3} = \sum_{i=1}^M a_{i,H_3} \tag{3.116}$$



**Figura 3-34.** Plano de Preisach discretizado para aplicar el método Ferrero-d'Alessandro

Si obtenemos diversos ciclos de histéresis de amplitud creciente a estos les corresponden triángulos de Preisach concéntricos. Los elementos  $a_{ij}$  del triángulo n-simo se pueden calcular a partir de los elementos  $a_{ij}$  del triángulo n-1 como cantidades conocidas. Sea por ejemplo el primer ciclo de histéresis del conjunto de ciclos experimentales y su correspondiente triángulo de Preisach discretizado, tal como se muestra en la figura 3-35.

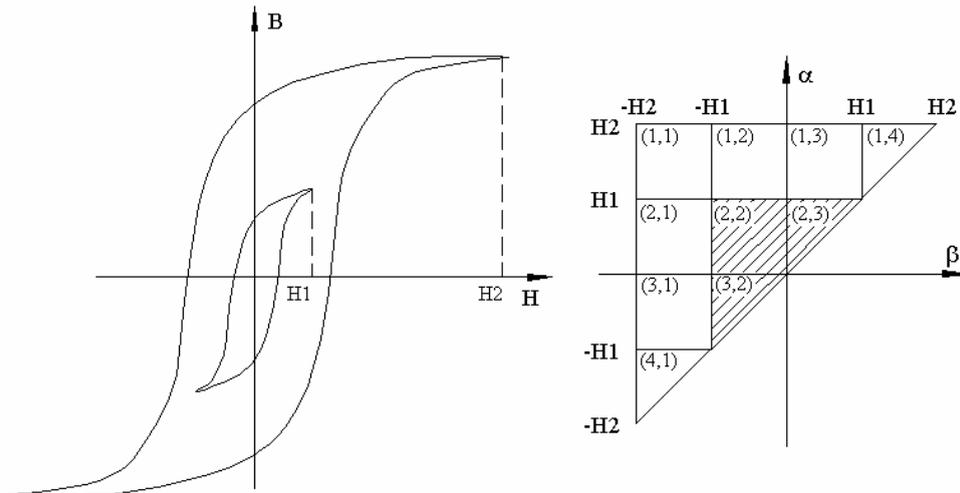


**Figura 3-35.** Primer ciclo experimental y su correspondiente plano de Preisach discretizado

Planteando las ecuaciones (3.115) y (3.116) se obtienen cuatro ecuaciones con  $a_{2,2}$ ,  $a_{2,3}$  y  $a_{3,2}$  como incógnitas que se pueden relacionar con la inducción máxima  $B_1$ , que es un dato conocido, mediante las ecuaciones (3.113) y (3.114). Con todas las incógnitas del triángulo del primer ciclo determinadas se pasa al siguiente ciclo (figura 3-36). Siguiendo el mismo procedimiento se pueden hallar las incógnitas del segundo ciclo en función de las inducciones  $B_1$  y  $B_2$  y las áreas  $a_{2,2}$ ,  $a_{2,3}$  y  $a_{3,2}$  determinadas con el triángulo anterior.

Como se puede comprobar, en realidad el único punto que se emplea de cada ciclo experimental es su valor máximo de inducción, por ello se deduce que únicamente con la curva de primera inducción sería suficiente para calcular el Plano de Preisach discretizado.

También se deduce de lo anterior que la dimensión de cada área determinada es de inducción. Con las áreas del triángulo ya calculadas el modelo de Preisach se desarrolla sumando y restando las áreas delimitadas por la línea de estado.



**Figura 3-36.** Segundo ciclo experimental y su correspondiente plano de Preisach discretizado

### 3.8 Generalizaciones del modelo de Preisach clásico

Se he presentado hasta ahora la versión del modelo de Preisach que se suele denominar clásica. No obstante este modelo presenta unas carencias que pueden comprometer su empleo en ciertas aplicaciones. Por ello durante las últimas décadas múltiples investigadores han ido desarrollando diversas generalizaciones del modelo de Preisach clásicos para subsanar estas carencias. Desgraciadamente no existe ninguna generalización definitiva que las subsane todas.

#### 3.8.1 Limitaciones del modelo de Preisach clásico

Resumiendo, las limitaciones del modelo de Preisach son las siguientes:

1. La propiedad de congruencia. Las características de magnetización descritas por el modelo de Preisach presentan la propiedad de congruencia. Los materiales ferromagnéticos no presentan esta propiedad.

2. Modelo estático. El modelo clásico es estático por naturaleza, no describe los procesos dinámicos. No puede tratar el efecto de la frecuencia o la forma de onda de la intensidad de campo.
3. La propiedad de borrado. En la realidad, la formación de ciclos de histéresis requiere de un cierto número de ciclos para conseguir un ciclo menor estable. El post-efecto y la acomodación están relacionados con este proceso de estabilización.
4. Modelo isótropo. Para aplicaciones que impliquen anisotropía será necesaria una ampliación del modelo.

Por su influencia en ciertas aplicaciones, como en las aplicaciones de grabación magnética, la propiedad de congruencia es la que más ha ocupado a los investigadores. Los materiales reales no obedecen la congruencia con la intensidad de campo del modelo clásico. Como resultado de ello, algunas curvas pueden diferir con respecto a los resultados experimentales y puede aparecer algún comportamiento sin sentido físico en las curvas calculadas. El peor comportamiento que puede presentar el modelo de Preisach clásico es la pendiente negativa de la curva inversa que produce inestabilidades en las ecuaciones magnetodinámicas [Zirka, Moroz, Marketos, et al., 2002].

El desarrollo del modelo de Preisach con integrales de Everett representa con exactitud las curvas inversas de primer orden. No obstante, si las integrales de Everett se determinan a partir de curvas inversas de primer orden experimentales, nada nos asegura que en las curvas de orden mayor al primero calculadas mediante el modelo no aparezcan pendientes negativas.

En realidad, la propiedad de congruencia es debida a que el modelo de Preisach clásico supone que la magnetización remanente sólo depende de la intensidad de campo aplicada. Cuando el campo varía de forma cíclica entre dos valores determinados, el tamaño y la forma del ciclo menor no dependen del estado magnético del sistema [Kadar y della Torre, 1987]. Dicho de otra forma, la función densidad  $m(\mathbf{a}, \mathbf{b})$  únicamente depende de la intensidad de campo, pero no del estado magnético del sistema, o sea de la inducción.

Los principales modelos desarrollados para paliar la propiedad de congruencia son:

- Modelo tipo-Preisach móvil
- Modelo tipo-Preisach producto.

- Modelo de della Torre-Oki-Kadar (o modelo móvil completo) [Vajda y della Torre, 1995a; della Torre, 1999; della Torre, Oti y Kadar, 1990].
- Modelo de Basso-Bertotti

Además se han desarrollado los siguientes modelos para representar la acomodación y el pos-efecto magnético:

- Modelo independiente del estado
- Modelo dependiente de la magnetización
- Modelo dependiente del estado

Cada modelo tiene sus propias características, en función del tipo de sistema a representar se ha elegido uno de los tres modelos para superar la congruencia y añadirle un segundo modelo que trate la reversibilidad. De la combinación de ambos se obtiene un modelo nuevo [della Torre y Kadar, 1987; della Torre y Vajda, 1995a; della Torre, 1999].

A pesar de la importancia dada a mitigar la propiedad de congruencia del modelo clásico, este efecto no tiene trascendencia en nuestros cálculos, por ello no aplicaremos ninguna de las generalizaciones destinadas a subsanar la congruencia.

En cambio si que es de importancia que el modelo clásico sea estático, pues no nos permitirá predecir el área del ciclo de histéresis en función de la frecuencia o de la forma de onda. Por ello no aplicaremos el modelo clásico en nuestros cálculos, sino que se aplicará la generalización a modelo dinámico más idónea. En el siguiente capítulo trataremos los modelos tipo Preisach dinámicos.

Para tratar materiales anisótropos se recurre al modelo de Preisach vectorial. Básicamente consiste en discretizar las direcciones y desarrollar un modelo clásico para cada dirección [della Torre y Vajda, 1996; della Torre, 1999; Mayergoyz, 1991; Mayergoyz, 2003].

A continuación tratamos someramente dos generalizaciones desarrolladas para paliar la congruencia, el modelo producto y el modelo móvil. Además, se introduce el modelo de Basso-Bertotti que nos resulta de interés pues sirve de base a uno de los modelos tipo Preisach que trataremos en el capítulo siguiente.

### 3.8.2 Modelo producto

Consiste en calcular primero la inducción mediante el modelo clásico, esta inducción se modifica mediante una función dependiente de la magnetización  $S(B_c)$  – o  $S(M_c)$  -, donde  $B_c$  es la inducción predicha por el modelo clásico. La expresión matemática de la función modificadora de la inducción es:

$$\frac{1}{S(B_c)} = \int \frac{1}{R(B_c)} dB_c \quad (3.117)$$

Donde  $R(B_c)$  es una función no-congruente.

Una vez determinada la inducción no modificada mediante el modelo de Preisach clásico, la inducción definitiva se calcula mediante la función modificadora:

$$\begin{aligned} B &= S(B_c) \\ M &= S(M_c) \end{aligned} \quad (3.118)$$

La función no-congruente debe cumplir las siguientes propiedades:

$$\begin{aligned} S(-\infty) &= -B_s \\ S(\infty) &= B_s \end{aligned} \quad (3.119)$$

Esta función no-congruente puede adoptar una forma tan simple como la propuesta por G. Kádar [Kádar, 1987]:

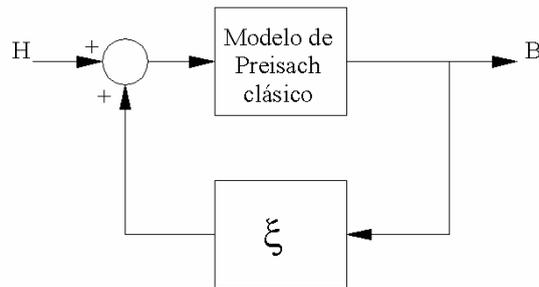
$$R(B_c) = 1 - B_c^2 \quad (3.120)$$

### 3.8.3 Modelo móvil

Se ha demostrado que la desviación estándar de la distribución de campos de interacción  $h_i$  es constante, pero el valor promedio es directamente proporcional a la magnetización [Kádar y della Torre, 1987]. Sea  $x$  la constante de proporcionalidad entre el campo medio y la magnetización, el modelo móvil se basa en que el efecto de un campo de magnetización es mover  $m(\mathbf{a}, \mathbf{b})$  en el plano de Preisach  $\mathbf{a}-\mathbf{b}$  a lo largo de una línea de pendiente unidad.

El modelo móvil palia la propiedad de congruencia del modelo clásico mediante una realimentación de la magnetización, tal y como se muestra en la figura 3-37.

En el desarrollo como método numérico se reemplaza la intensidad de campo  $H$  en la direcciones  $\mathbf{a}$  y  $\mathbf{b}$  por  $\mathbf{a}+\mathbf{x}B$  y  $\mathbf{b}+\mathbf{x}B$  respectivamente. La inducción (o magnetización resultante) se resuelve por iteración.



**Figura 3-37.** Modelo móvil [della Torre, 1999;Zhu, 1994]

### 3.8.4 Modelo de Basso-Bertotti

Se trata de un modelo de histéresis con base física, de aplicación a materiales en los cuales el movimiento de las paredes de los dominios es el principal mecanismo de magnetización. El comportamiento de una pared se describe por una restricción del modelo de Preisach y la superposición de muchas contribuciones de paredes de dominios se trata introduciendo un factor multiplicativo que describe la dependencia de la superficie de la pared con la magnetización.

#### 3.8.4.1 Introducción

Neél demostró la validez física del modelo de Preisach en la zona de Rayleigh en base a una cierta descripción del sistema de energía libre [Morrish, 2001]. Así mismo, Giorgio Bertotti ha encontrado la relación entre la energía liberada en los saltos de Barkhausen y la función densidad, dando una validez física más genérica al modelo de Preisach [Bertotti, 1998]. Pero si bien se logra una conexión con procesos físicos, están lejos de ser apropiadas para un modelo. No obstante, si bien en partículas pequeñas de dominio único el modelo de Preisach está asociado con la magnetización inversa de una partícula; en materiales donde el principal mecanismo es el movimiento de las paredes de los dominios, el operador de histéresis puede

ser considerado como un salto irreversible de la pared de un dominio a través de dos mínimos locales [Basso, Bertotti, 1996].

El modelo de Basso-Bertotti parte de la siguiente propuesta: la histéresis de una pared de dominio sin fronteras se puede describir mediante una restricción particular del modelo de Preisach. Para ello el sistema no debe saturarse, y la función densidad, formulada en  $h_c-h_i$  debe ser función únicamente de una única variable, el campo coercitivo  $h_c$ .

Una vez definido el movimiento de una pared mediante el modelo de Preisach, el siguiente paso es considerar la superposición de muchas paredes independientes. Para tener en cuenta los mecanismos del proceso de magnetización se asume que la superficie de la pared es función de la magnetización. Esta dependencia es introducida como un factor en la expresión de la susceptibilidad. En este sentido es un modelo similar al modelo producto de Kadar [Kadar, 1987].

#### 3.8.4.2 Fundamentos del modelo

Se suponen ciertas las siguientes hipótesis:

- El proceso se encuentra lejos de la saturación
- No hay interacción entre las paredes de diversos dominios

Supóngase que una única pared de dominio se desplaza en un paralelepípedo infinitamente ancho bajo la acción de un campo externo aplicado. Bajo esta premisa se procede a calcular la posición de la pared de dominio  $x$  en términos del modelo de Preisach clásico. Dada una sucesión de mínimos y máximos locales de un historial de intensidad de campo determinado, se puede expresar la posición de la pared como:

$$x = x_o(H_0) + E(H_0, H_1) - E(H_1, H_2) + \dots + E(H_{n-2}, H_{n-1}) - E(H_{n-1}, H_n) + E(H_n, H) \quad (3.121)$$

Donde  $x_o(H_0)$  es el estado inicial dentro de un ciclo mayor donde toda la historia previa ha sido borrada. Una nueva rama, después de un punto de inversión  $H_0$ , hará cambiar la posición  $x_0$  en una distancia  $Dx$ :

$$Dx = x(H_0 + DH) - x_0(H_0) = E(H_0, H_0 + DH) \quad (3.122)$$

Según (3.122) las integrales de Everett deben depender del incremento de intensidad de campo después del punto de inversión  $DH$ . En realidad esto no es nada nuevo, ya lo sabíamos de la propia definición de integral de Everett dada en su momento. Tampoco nos es desconocida la relación de la integral de Everett con la  $\mathbf{m}(\mathbf{a}, \mathbf{b})$  que tiene así mismo relación con la energía liberada en el salto de Barkhausen:

$$\mathbf{m}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = -\frac{1}{2} \frac{\partial^2 E(\mathbf{a}, \mathbf{b})}{\partial \mathbf{a} \partial \mathbf{b}} \quad (3.123)$$

En la formulación alternativa del plano de Preisach con el campo coercitivo y el campo de interacción, la línea de estado  $L(t)$  se puede expresar como una función  $b(h_c)$  con pendiente:

$$\frac{db(h_c)}{dh_c} = \pm 1 \quad (3.124)$$

Partiendo de la definición del modelo de Preisach, la expresión matemática para la posición de la pared de un dominio es:

$$x = 2 \int_0^{\infty} \int_0^{b(h_c)} \mathbf{m}(h_c) dh_t dh_c = 2 \int_0^{\infty} b(h_c) \mathbf{m}(h_c) dh_c \quad (3.125)$$

El siguiente paso es considerar la superposición de las contribuciones de muchas paredes de dominio. Se introduce la susceptibilidad total del sistema, definida como el producto de la susceptibilidad de una pared por un factor que refleja la superficie total de la pared del dominio. Como primera aproximación, la superficie de la pared de dominio puede describirse como una función  $R(m)$  de la magnetización normalizada  $m: (-1 \leq m \leq 1)$ :

$$\frac{dm}{dH} = R(m) \frac{dx}{dH} \quad (3.126)$$

Donde  $R(m)$  tiene como propiedades el ser una función positiva y  $R(\pm 1) = 0$ , describiendo la ausencia de paredes de dominios en estado de saturación. Por separación de variables e integración:

$$dx = \frac{1}{R(m)} dm \quad (3.127)$$

Sea la función  $g(m)$  definida como:

$$g(m) = x[H(t)] \quad (3.128)$$

y su función inversa  $G$ :

$$m = G(x[H(t)]) \quad (3.129)$$

La posición de la pared de dominio:

$$g(x) = \int \frac{1}{R(m)} dm \quad (3.130)$$

La función  $G$  asegura la saturación del sistema a  $\pm 1$  para valores de  $x$  altos.

### 3.8.4.3 Propiedades básicas del modelo

a) Sobre la función densidad

La fuerza coercitiva del ciclo límite se puede calcular como [Basso y Bertotti, 1996]:

$$\frac{dx}{dH} = c = \int_0^{\infty} \mathbf{m}(h_c) dh_c \quad (3.131)$$

La fuerza coercitiva del ciclo mayor se produce cuando  $x=0$  y  $H=H_c$ . Sustituyendo en (3.125):

$$H_c = \frac{\int_0^{\infty} h_c \mathbf{m}(h_c) dh_c}{\int_0^{\infty} \mathbf{m}(h_c) dh_c} = \langle h_c \rangle \quad (3.132)$$

Por tanto la función densidad  $\mathbf{m}(h_c)$  se puede interpretar como la distribución de las fuerzas coercitivas de los operadores de histéresis.

b) Congruencia tipo “m”

Las ramas que comienzan con valores de magnetización iguales tiene igual forma, a esta clase de congruencia Basso y Bertotti la denominan tipo “m”.

c) Representación inversa

Basso y Bertotti demuestran que el modelo permite una representación inversa [Basso y Bertotti, 1996].

#### 3.8.4.4 Valoración del modelo para nuestro ámbito de aplicación

El modelo es incapaz de describir las rotaciones coherentes, que tienen un papel tan importante en los materiales magnéticos blandos. El interés del modelo de Basso-Bertotti para nuestro trabajo es que sirve de base al modelo dinámico tipo Preisach de Nakmahachalasint-Ngo.

### 3.9 Resultados y validación de los métodos de caracterización del modelo de Preisach clásico.

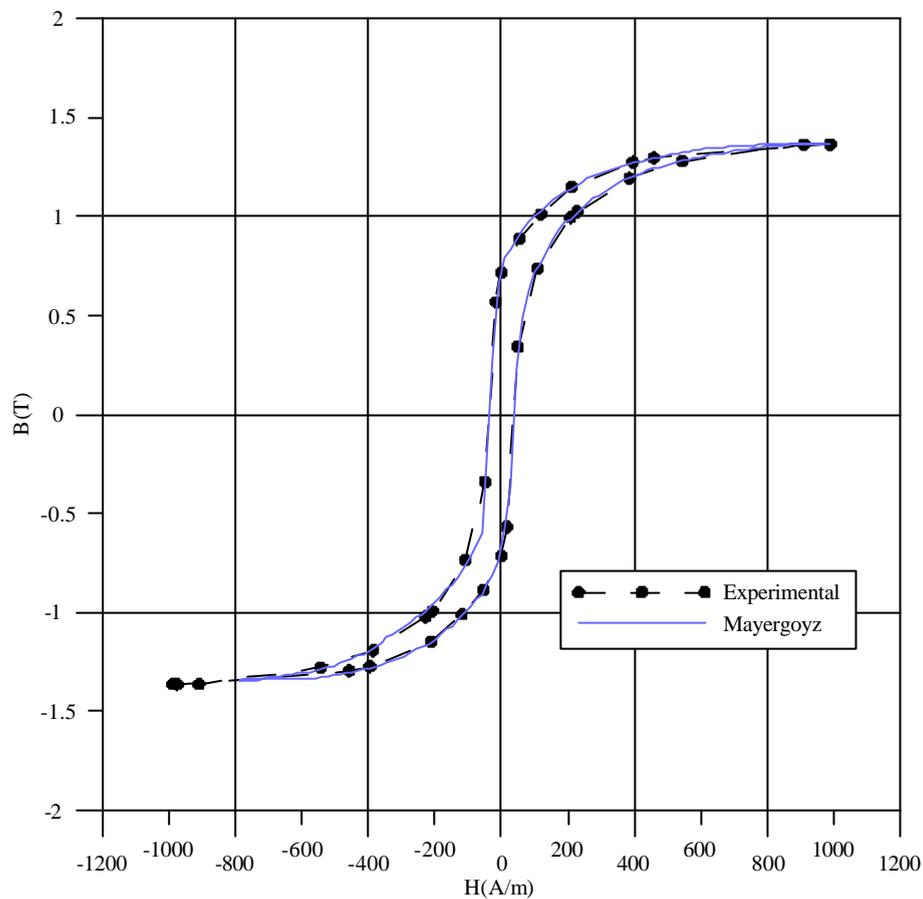
A continuación se analizan los diversos métodos de caracterización del modelo de Preisach clásico. Se emplean estos métodos para calcular  $m(a, b)$ , con la función densidad calculada se determina el ciclo límite mediante el modelo de Preisach desarrollado según la ecuación (3.1), el ciclo límite calculado mediante el modelo de Preisach se compara con el ciclo límite experimental.

#### 3.9.1 Método de Mayergoyz

En la figura 3-38 se muestra el ciclo límite calculado mediante el modelo de Preisach desarrollado según su definición algebraica directa, la ecuación (3.1) empleando la función densidad determinada mediante el método de Mayergoyz. Este ciclo límite determinado con el modelo de Preisach caracterizado mediante el método de Mayergoyz se compara con el ciclo límite experimental.

Para la caracterización mediante el método de Mayergoyz se han empleado únicamente nueve curvas inversas de primer orden experimentales (ver figura 3-42), siguiendo el procedimiento basado en la interpolación a tramos por polinomios de Hermite indicada en el apartado

3.6.1.1. Como que el método de Mayergoyz determina las integrales de Everett  $E(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ , posteriormente se calculó la función densidad mediante (3.16).



**Figura 3-38.** Ciclo mayor determinado por el modelo de Preisach clásico caracterizado por el método de Mayergoyz y su comparación con el ciclo límite experimental

A pesar de haber empleado pocas curvas experimentales para el método de Mayergoyz y de haber tenido que derivar las integrales de Everett obtenidas, con el correspondiente error introducido en la derivación, la figura 3-38 nos muestra que el resultado obtenido es óptimo.

El resultado de figura 3-38 no sólo muestra que el método de Mayergoyz es válido, también nos valida el modelo de Preisach desarrollado según la definición integral directa de la ecuación (3.1). En consecuencia, si con otros métodos de caracterización del mismo desarrollo del modelo de Preisach no obtenemos buenos resultados esto deberá ser atribuido al método de caracterización y no al desarrollo del modelo de Preisach.

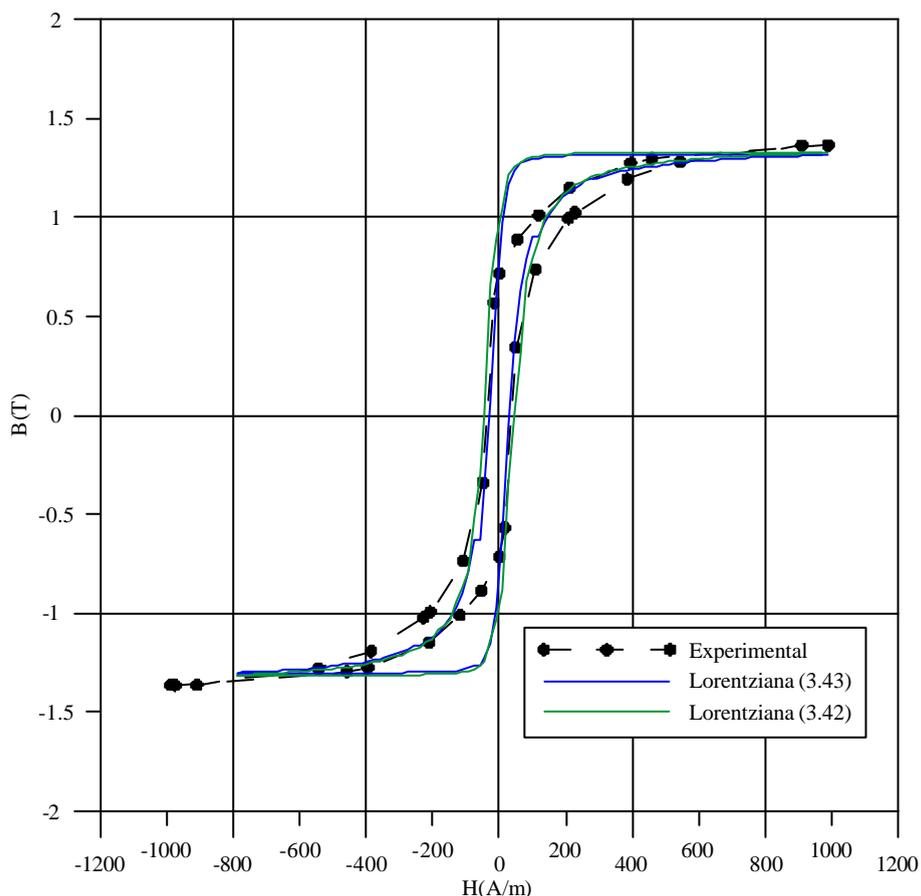
### 3.9.2 Por ajuste a una lorentziana factorizada

Comenzamos el análisis de los resultados de la caracterización paramétrica mediante el ajuste a una lorentziana factorizada. El procedimiento seguido es el mismo que en el método de Mayergoyz, las curvas empleadas son la (3.42) y la (3.43). En la figura 3-39 se muestra la comparación entre los ciclos límite obtenidos mediante las dos expresiones de lorentziana factorizada y el ciclo límite experimental. Los parámetros para la lorentziana (3.42) son:

$$H_c = 33,07; s_c = 1; K=0.96 \quad (3.133)$$

Mientras que para la lorentziana (3.43):

$$H_c = 37.03; k=1.48 \cdot 10^{-4} \quad (3.134)$$



*Figura 3-39. Ciclo límite determinado por el modelo de Preisach clásico caracterizado por lorentzianas factorizadas y su comparación con el ciclo límite experimental*

En la figura 3-39 se muestra el ciclo límite calculado con el mejor ajuste logrado para una lorentziana. El modelo de Preisach caracterizado con curvas lorentzianas produce ciclo de

histéresis cuadrados, lo cual es inoperante para los materiales blandos empleados en las chapas de los núcleos de máquinas eléctricas y circuitos magnéticos en general. En nuestro ámbito de aplicación, la lorentziana factorizada no es una buena opción para caracterizar el modelo de Preisach.

### 3.9.3 Por ajuste a una gaussiana-log-normal

Otra opción bastante extendida es el ajuste de la función densidad a una curva gaussiana-log-normal. Se han empleado las expresiones (3.44) y (3.45). Los mejores resultados se han conseguido ajustando los parámetros a los siguientes valores:

$$H_c = 37.07; \mathbf{s}_c = 5; \mathbf{s}_i = 130; K=0.68 \quad (3.135)$$

Para la ecuación (3.44), mientras que para la (3.45):

$$H_c = 37.07; \mathbf{s}_c = 1; \mathbf{s}_i = 3; K=0.68 \quad (3.136)$$

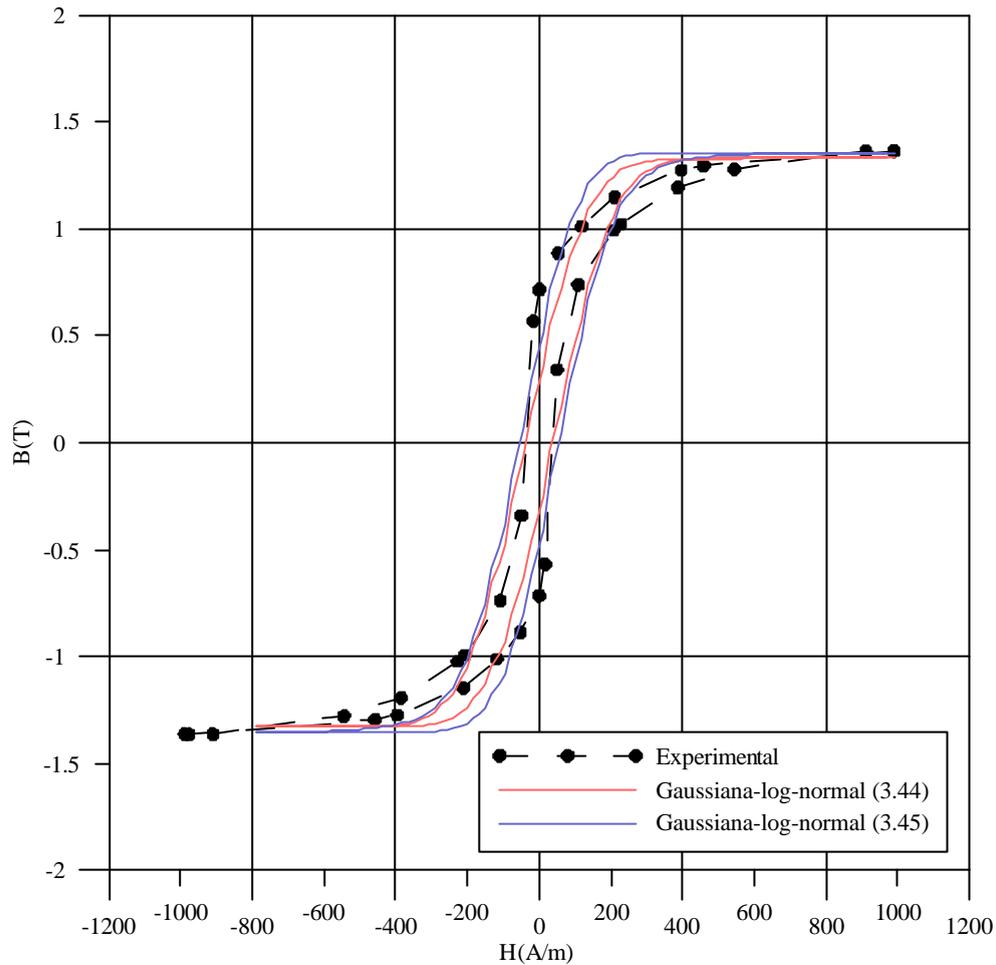
En la figura 340 se comparan los ciclos límites obtenidos con las curvas gaussiana-log-normal con el ciclo límite experimental. De nuevo, la tendencia es la de producir unos ciclos demasiado cuadrados como para ser operativos para materiales blandos. La caracterización del modelo de Preisach mediante la curva gaussiana-log-normal tampoco es una buena opción.

### 3.9.4 Por ajuste a una gaussiana-gaussiana

Similares resultados que con las curvas lorentziana factorizada y gaussiana-log-normal se obtienen mediante la curva gaussiana-gaussiana. Los ciclos obtenidos con el modelo de Preisach caracterizado mediante esta curva son cuadrados, imposibilitando su uso en materiales blandos. La curva es la expresión (3.46), el mejor resultado se obtiene con los siguientes parámetros:

$$H_c = 37.07; \mathbf{s}_c = 0.6; \mathbf{s}_i = 2.4; K=0.45 \quad (3.137)$$

En la figura 341 se compara el ciclo límite obtenido con el modelo de Preisach y el ciclo límite experimental. El ajuste a una curva gaussiana-gaussiana tampoco es una buena opción.



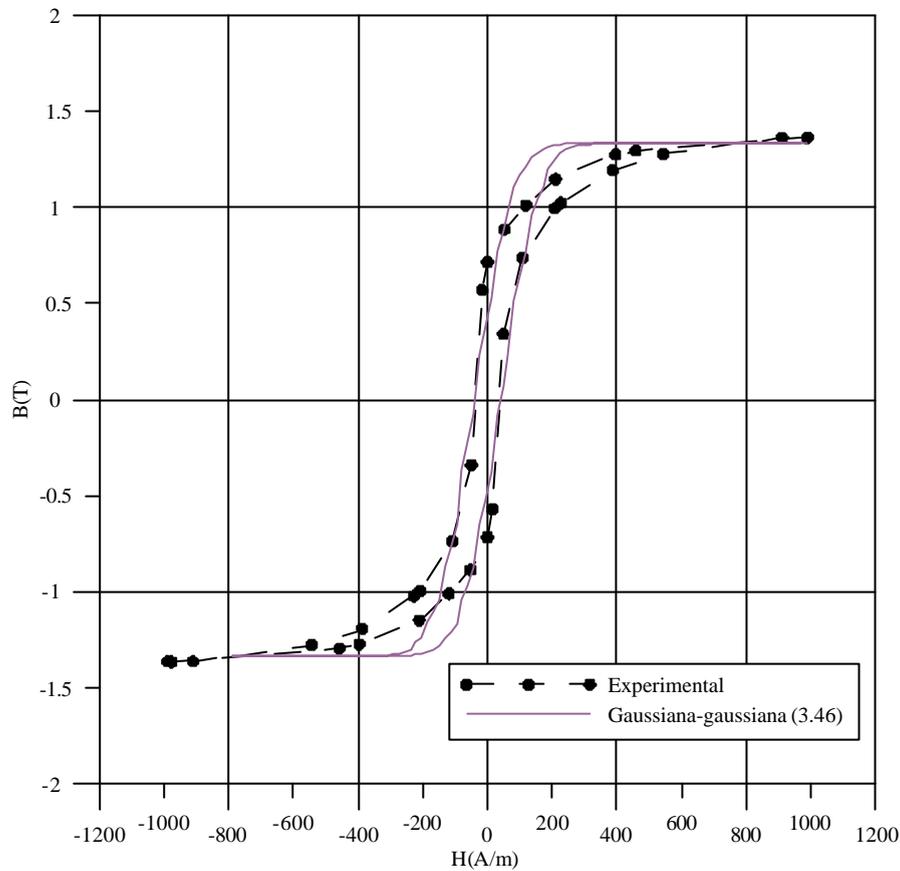
*Figura 3-40. Ciclo límite determinado por el modelo de Preisach clásico caracterizado por curvas gaussiana-log-normal y su comparación con el ciclo límite experimental*

### 3.9.5 Conclusiones

En vista de los ciclos límites obtenidos con el modelo de Preisach caracterizado por los diversos métodos mostrados, el único método aplicable a nuestro ámbito de trabajo es el método de Mayergoyz, el ajuste paramétrico está basado en la suposición de que la función densidad es ajustable a unas curvas sin justificación física alguna. Con estas curvas se puede conseguir resultados aceptables si se simulan materiales duros, pero no son operativas para materiales blandos.

En cambio el resultado mediante el método de Mayergoyz, aun habiendo empleado pocas curvas experimentales y con el error asociado con la integración de la integral de Everett para obtener la función densidad, el ciclo límite obtenido es prácticamente el mismo que el

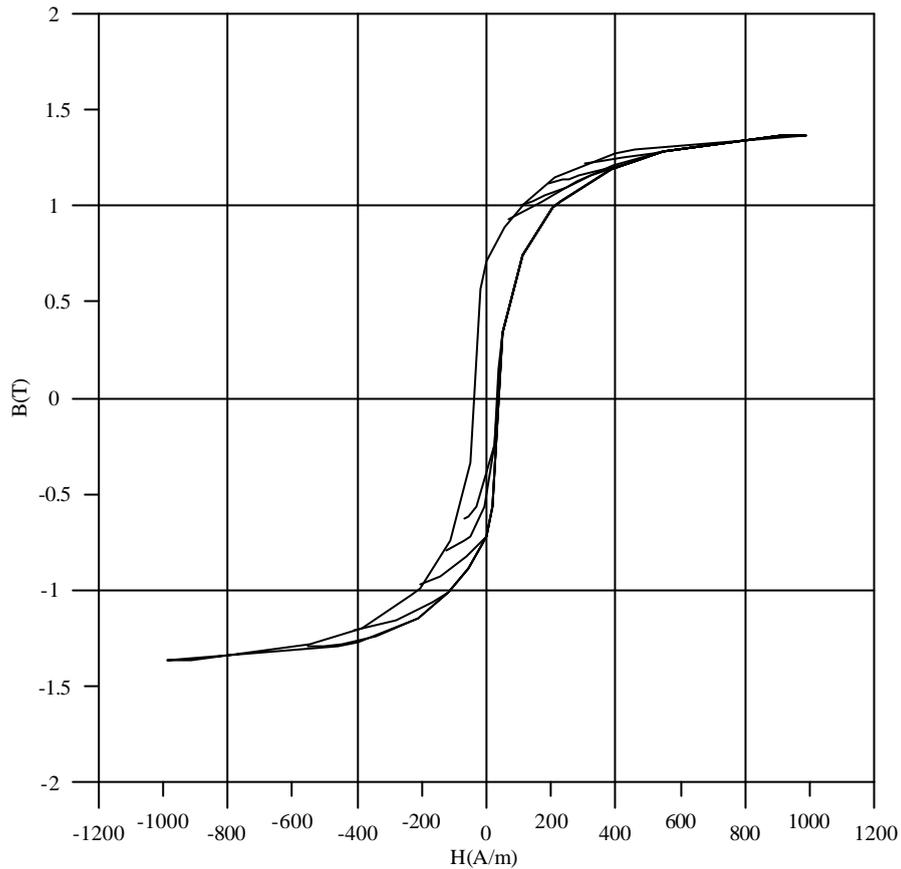
experimental. En la figura 3-42 se muestra el conjunto de curvas inversas de primer orden experimentales empleadas.



**Figura 3-41.** Ciclo límite determinado por el modelo de Preisach clásico caracterizado por una curva gaussiana-gaussiana y su comparación con el ciclo límite experimental

Es, por tanto, el método de Mayergoyz el idóneo para caracterizar el modelo de Preisach. A pesar del gran inconveniente que supone el tener que disponer de un conjunto de curvas inversas experimentales y la dificultad de su obtención. A partir de este momento el modelo de Preisach sea cual sea su desarrollo se caracterizará mediante el método de Mayergoyz.

Asimismo el ciclo límite obtenido con el método de Mayergoyz (figura 3-39) también nos valida el modelo de Preisach, al menos en su desarrollo por definición directa integral. A continuación completamos dicha validación comparando los diversos métodos de desarrollo para varias trayectorias de intensidad de campo.



**Figura 3-42.** Conjunto de curvas inversas de primer orden experimentales empleadas para caracterizar el modelo de Preisach mediante el método de Mayergoz

### 3.10 Resultados y validación del modelo de Preisach en función de su método de desarrollo

Completamos la validación del modelo de Preisach clásico aplicándolo para calcular la inducción  $B(t)$  para las siguientes trayectorias de historial de campo:

- Curva de primera inducción
- Ciclo límite
- Trayectoria A: Curva inversa de primer orden con punto de inversión  $H_I=65.96\text{A/m}$
- Trayectoria B: Curva inversa de primer orden con punto de inversión  $H_I=0\text{A/m}$
- Trayectoria C: Curva inversa de primer orden con punto de inversión  $H_I=-122.04\text{A/m}$
- Trayectoria D: Curva inversa de primer orden con punto de inversión  $H_I=-412.29\text{A/m}$
- Curva inversa de segundo orden con puntos de inversión  $H_1=-591.41\text{A/m}$  y  $H_2=-85.75\text{A/m}$

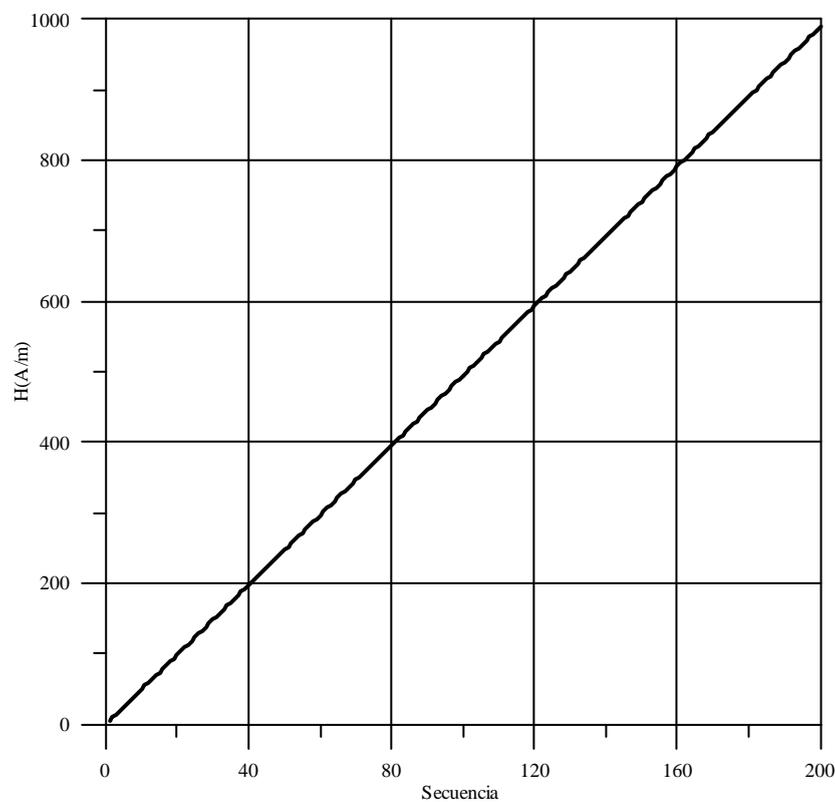
El modelo de Preisach se desarrolla según los siguientes métodos:

- Definición directa integral, ecuación (3.1)
- Formulación por integrales de Everett
- Método de Naidu

Calculando con cada uno de ellos las trayectorias indicadas y comparando los resultados del modelo de Preisach con los valores experimentales. Excepto en el método de Naidu, el modelo de Preisach se ha caracterizado por el método de Mayergoyz con el mismo conjunto de curvas experimentales (fig 3-42).

### 3.10.1 Curva de primera inducción

Para simular la curva de primera inducción se introduce el historial mostrado en la figura 3-43 como entrada al modelo de Preisach para cada uno de los desarrollos indicados. En el historial de entrada al modelo de Preisach no figura la variable tiempo y la forma de onda es una rampa. Esto es debido a que estamos validando el modelo clásico, el cual es de naturaleza estática, esto es, no distingue la forma de onda o la frecuencia de la intensidad de campo, tan solo la sucesión de máximos y mínimos locales.

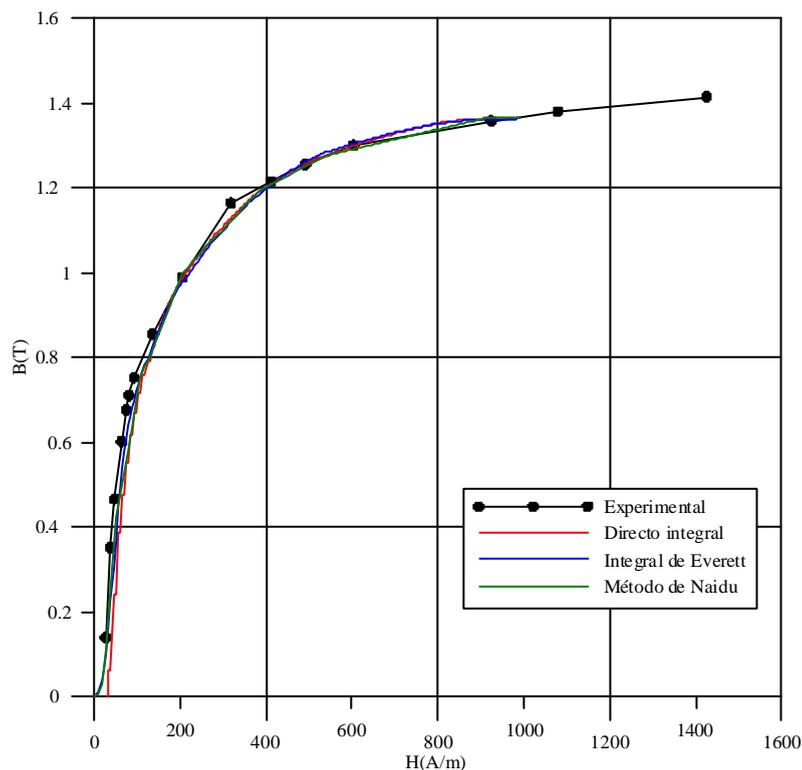


**Figura 3-43.** Historial de campo utilizado como entrada al modelo de Preisach para la obtención de la curva de primera inducción

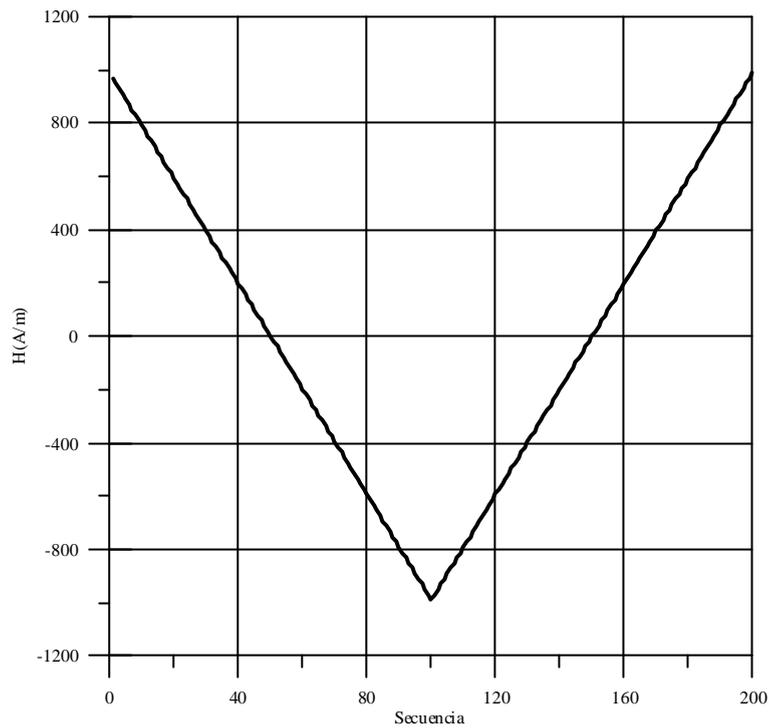
Cada uno de los desarrollos del modelo de Preisach da como resultado las evoluciones de la inducción indicadas en la figura 3-44. En dicha figura se comparan los resultados del modelo de Preisach con la curva de primera inducción experimental. Se aprecia como todos los métodos de desarrollo son satisfactorios, obteniendo unos resultados muy buenos en todos los casos. Incluso se puede apreciar un punto erróneo en la curva experimental que en ningún caso afecta al modelo de Preisach.

### 3.10.2 Ciclo límite

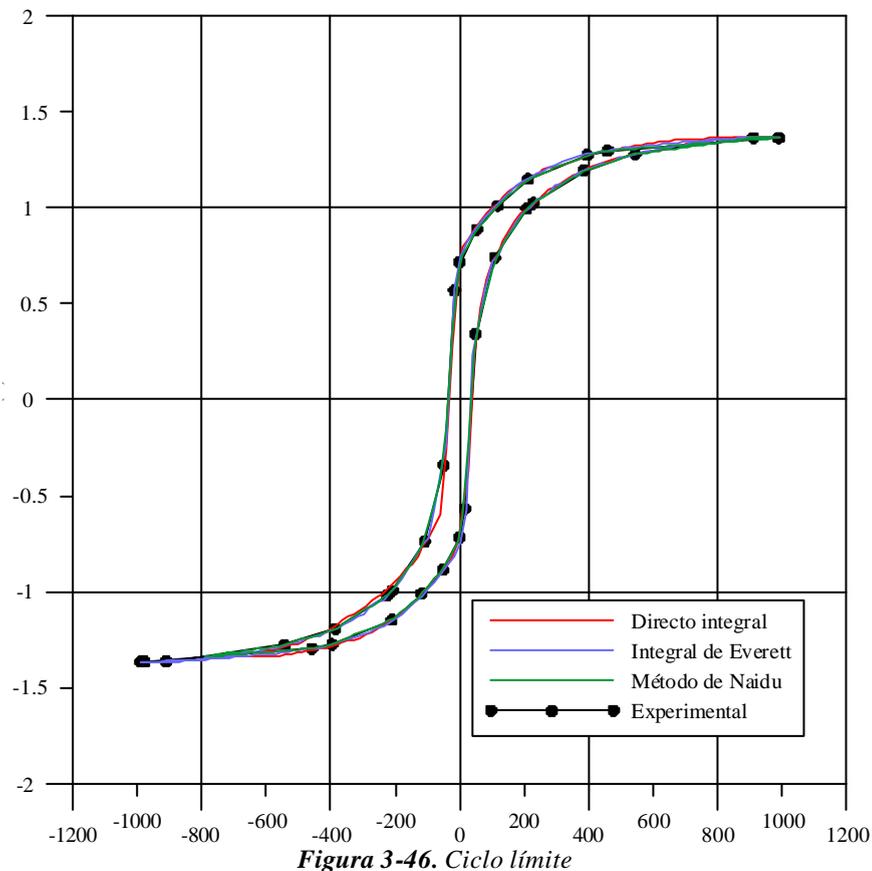
El historial de intensidad de campo, entrada al modelo de Preisach se muestra en la figura 3-45. Los resultados obtenidos y su comparación con el ciclo experimental están en la figura 3-46, donde se aprecia que para este caso el modelo de Preisach en todos sus desarrollos determina un ciclo límite prácticamente igual al experimental. El ciclo límite experimental se determinó mediante el ensayo de Rowland modificado para una frecuencia casi cero. Se trata de un ciclo límite cuasiestático.



*Figura 3-44. Curva de primera inducción*



**Figura 3-45.** Historial del campo utilizado como entrada al modelo de Preisach para la obtención del ciclo límite

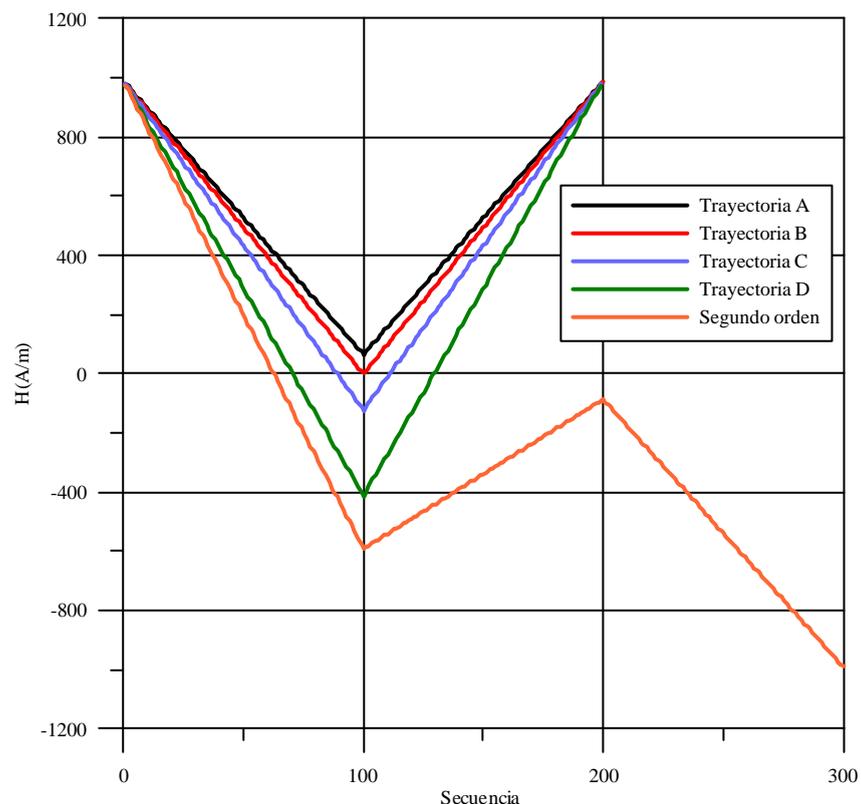


**Figura 3-46.** Ciclo límite

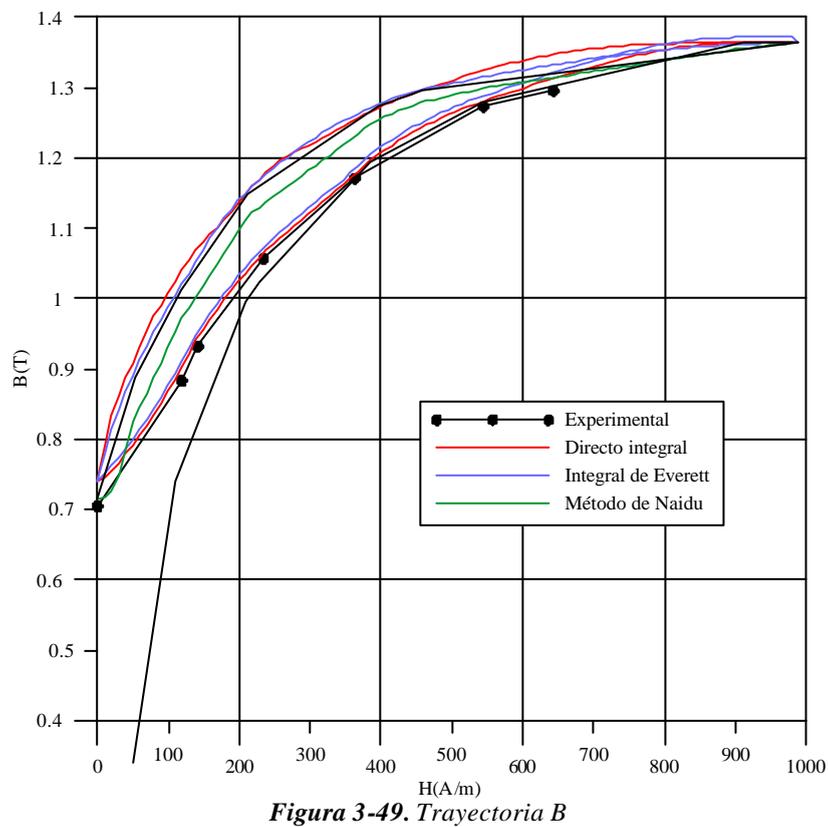
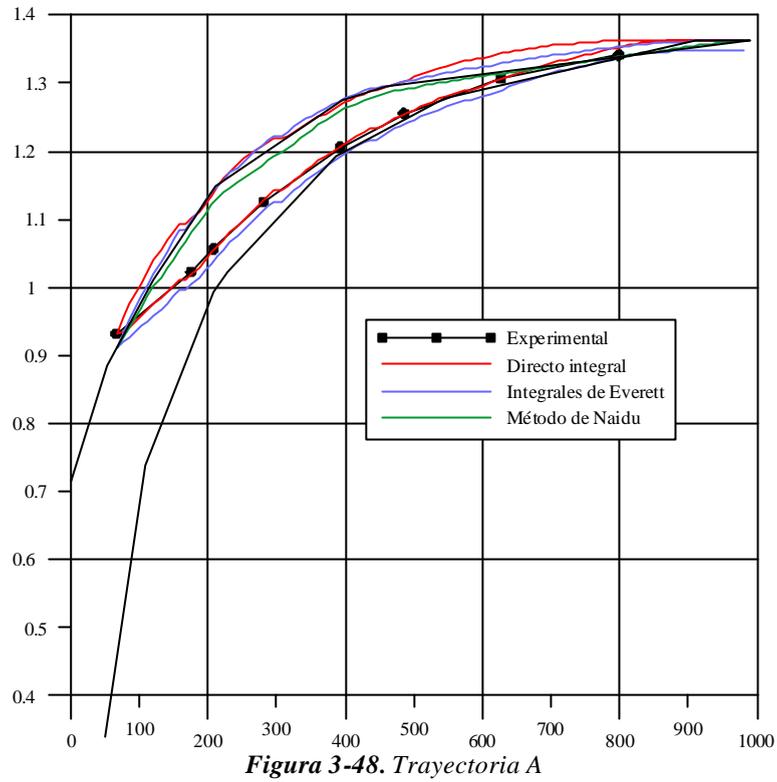
### 3.10.3 Curvas inversas de primer orden

La siguiente característica magnética para la que se valida el modelo de Preisach es la curva inversa de primer orden. Se valida para cuatro curvas inversas de primer orden ascendentes. Dos trayectorias de un único cuadrante, esto es con punto de inversión positivo, y dos trayectorias de cuatro cuadrantes, con punto de inversión negativo. Las trayectorias A y B pertenecen al primer tipo, mientras que la C y la D al segundo tipo. En la figura 3-47 se muestran los historiales de campo para las cuatro trayectorias.

En las figuras 3-48, 3-49, 3-50 y 3-51 se muestran las diversas trayectorias de inducción comparadas con la curva experimental correspondiente. En todos los casos los resultados también están ajustados a la curva experimental, ahora ya con cierto error, pero todavía aceptable. Excepto para el caso del desarrollo por el método de Naidu. Este método falla en las curvas inversas de primer orden A y B. Este fallo es lógico, recordemos que este método únicamente necesitaba de la rama descendente del ciclo límite para su caracterización, esto es demasiado pobre como para obtener buenos resultados en ciclos menores.



**Figura 3-47.** Historial de campo utilizado como entrada al modelo de Preisach para la obtención de las cuatro trayectorias de curvas inversas de primer orden y la curva inversa de segundo orden



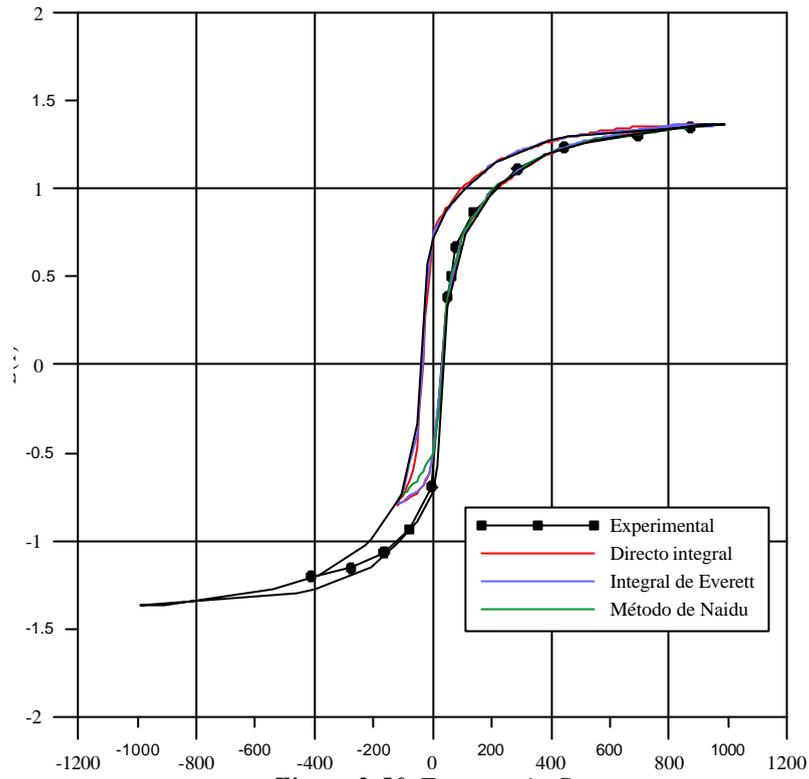


Figura 3-50. Trayectoria C

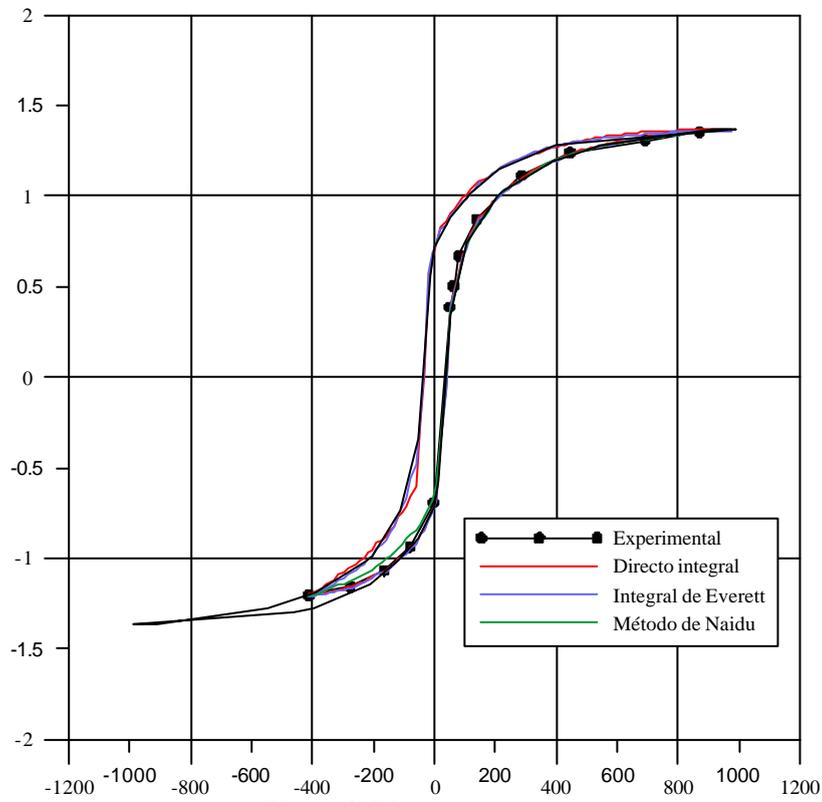


Figura 3-51. Trayectoria D

### **3.10.4 Curvas inversas de segundo orden**

Finalmente se valida el modelo de Preisach con sus diversos desarrollos para curvas inversas de segundo orden. El historial de campo correspondiente es el mostrado en la figura 3-47.

Como era de esperar, el modelo de Preisach tampoco es capaz de trazar una curva de segundo orden suficientemente ajustada a la curva experimental. El motivo es exactamente el mismo que motivó que el método de Naidu no pudiera reproducir curvas de primer orden. Para el desarrollo del modelo de Preisach por el método de Mayergoyz se han empleado curvas de primer orden, por lo que no se pueden determinar curvas de segundo orden.

### **3.10.5 Conclusiones**

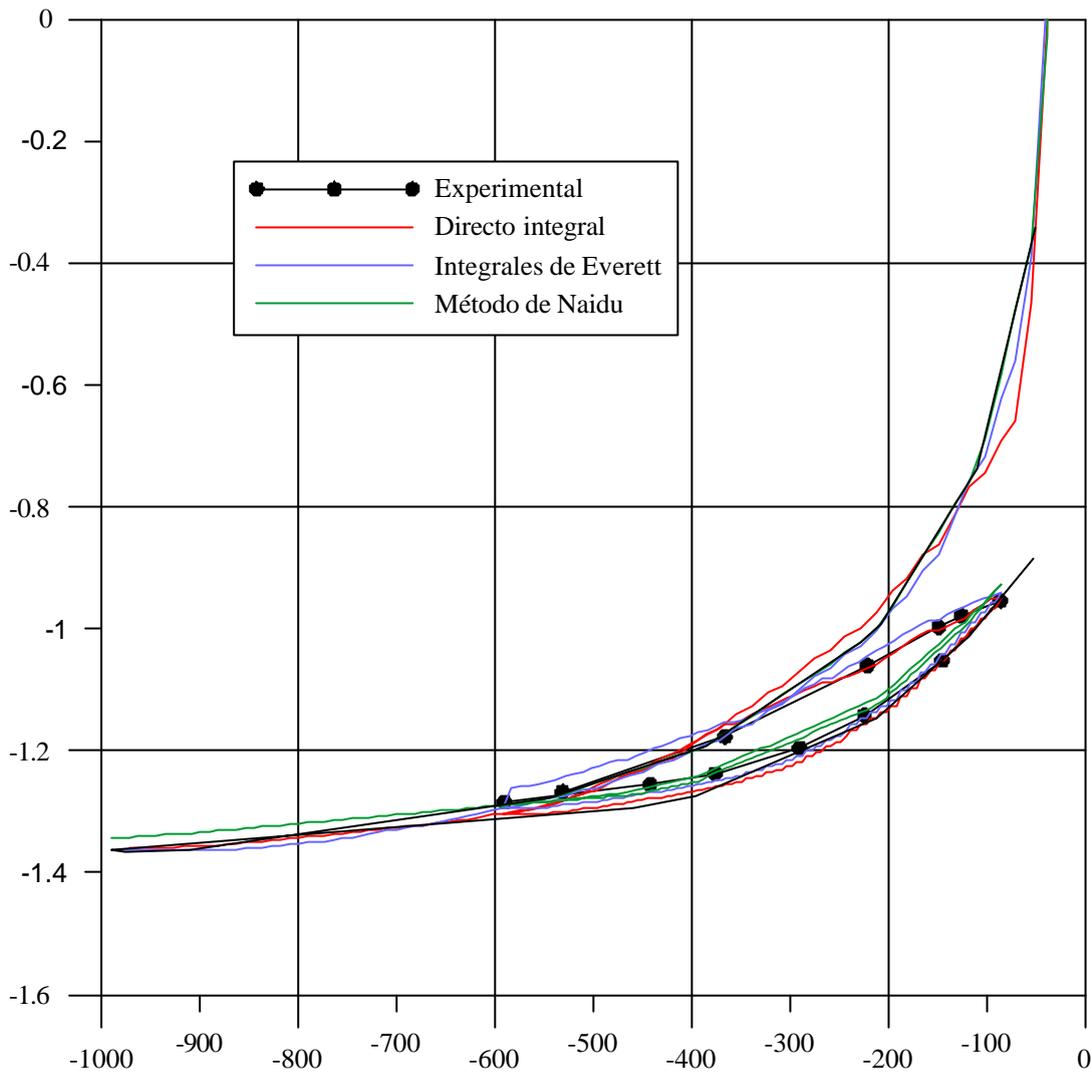
El modelo de Preisach en su desarrollo por integrales de Everett o por su definición directa es capaz de determinar con precisión la curva de primera inducción, los ciclos de histéresis y los ciclos menores de primer orden, e incluso dar una estimación de los de segundo orden. Si aumentamos el orden del conjunto de curvas experimentales que sirvieron para caracterizar el modelo incluso se podría conseguir una buena precisión en ciclos menores de órdenes mayores. Ambos métodos por tanto quedan validados. No obstante, como se verá en el siguiente capítulo, para el desarrollo del modelo dinámico de Preisach habremos de emplear la definición directa.

El método de Naidu no es capaz de trazar bien los ciclos menores, siendo su precisión buena para ciclos mayores y la curva de primera inducción. Como es más sencillo de desarrollar y de caracterizar puede ser una buena opción cuando se requiere simular el comportamiento del material magnético ante excitaciones periódicas y simétricas.

## ***3.11 Validación general del modelo de Preisach***

### **3.11.1 Condiciones de la validación**

Concluimos la validación del modelo de Preisach clásico con el cálculo de un conjunto de ciclos de histéresis previamente determinados experimentalmente por un método diferente al que se empleó para caracterizar el modelo. Para caracterizar el modelo se emplearon curvas obtenidas mediante el método balístico, esas mismas curvas, entre otras, se calcularon mediante el modelo de Preisach. A continuación calculamos un conjunto de ciclos de histéresis que previamente se obtuvieron mediante el equipo histeresisgráfico.



*Figura 3-52. Curva inversa de segundo orden*

De las anteriores validaciones hemos concluido que el desarrollo del modelo de Preisach más adecuado para nuestro ámbito de aplicación es aquel realizado mediante las integrales de Everett y caracterizado mediante el método de Mayergoyz. Esta versión del modelo de Preisach es la que empleamos para esta validación general propuesta.

Las curvas experimentales a reproducir mediante el modelo de Preisach están formadas por un conjunto de ciclos de histéresis obtenidos mediante el equipo histéresisgráfico a una frecuencia  $f=0,15\text{Hz}$ . Consideramos que a dicha frecuencia los ciclos son cuasiestáticos, y por tanto el modelo de Preisach teóricamente debería ser capaz de calcularlos. Este conjunto de ciclos es el mismo que se emplea para calcular las pérdidas por histéresis. En el apartado 10.3.1 se expone el proceso seguido para su obtención.

El equipo histéresisgráfico se ha desarrollado para generar un conjunto de curvas inversas de primer orden que nos permita caracterizar el modelo de Preisach con mejores resultados que

los obtenidos con las curvas obtenidas mediante el método balístico. Es por ello que dicho sistema impone la intensidad, y por tanto el campo, mediante un amplificador de transconductancia (todo lo referente al equipo histeresisgráfico se puede consultar en el capítulo 6). Esta situación es la idónea para validar el modelo de Preisach clásico, donde la entrada es el campo  $H(t)$  y la salida la inducción  $B(t)$ .

Las señales de campo  $H(t)$  de cada uno de los ciclos se muestra en la figura 3-53. Se trata de un conjunto de señales sinusoidales periódicas de frecuencia  $f=0,15\text{Hz}$  y amplitud variable. En la tabla 3-I se indican los máximos de las señales de  $H(t)$  empleadas para esta validación.

**Tabla 3-I.** Amplitudes de las señales de campo  $H(t)$  de los ciclos de histéresis experimentales para la validación general del modelo de Preisach

	A	B	C	D	E	F	G	H
$Hm(A/m)$	16.1109	26.258	38.7315	49.0457	64.6564	77.7542	90.4953	90.4953
	I	J	K	L	M	N	O	P
$Hm(A/m)$	103.897	116.6	129.763	128.515	195.763	262.255	329.264	394.123

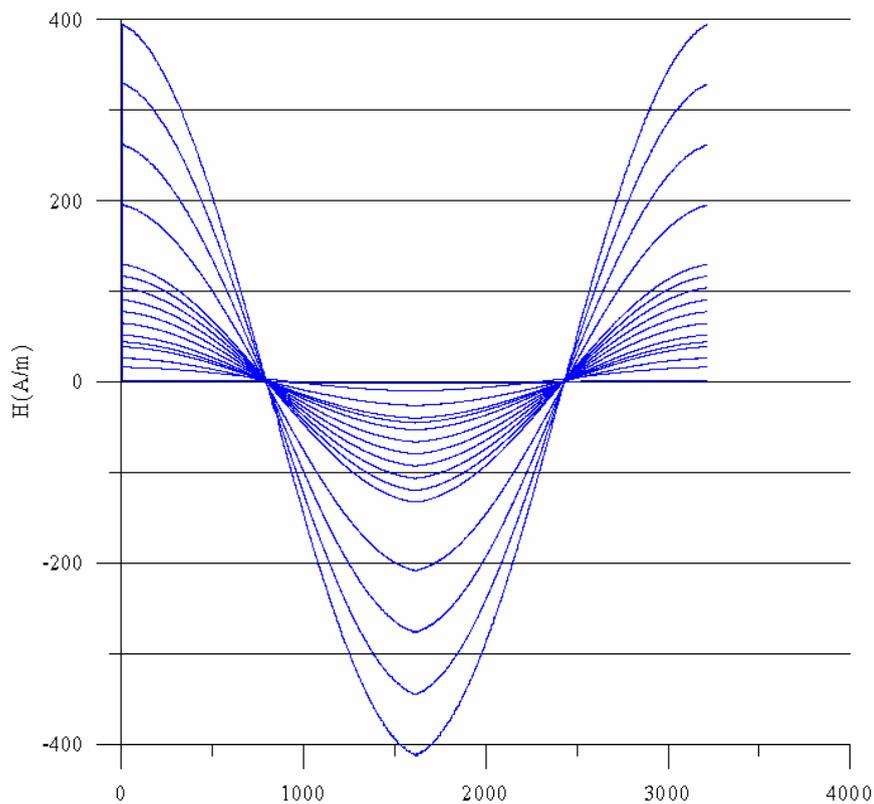
Como que el modelo de Preisach es cuasiestático, tan sólo es capaz de considerar los máximos y mínimos locales de la señal de campo y no le afectan ni la forma de onda ni la frecuencia. Por tanto no es necesario emplear como entrada al modelo de Preisach el conjunto de curvas  $H(t)$  de la figura 3-53. Para el cálculo de los ciclos empleamos como historiales de entrada el conjunto de señales triangulares  $h(t)$  de la figura 3-54.

Para comprobar que realmente el único parámetro del historial de campo que afecta al modelo de Preisach son los extremos locales, en resumen la amplitud para señales periódicas, hemos calculado un ciclo (el correspondiente a la excitación O) empleando como entrada al modelo una señal completa  $H_i(t)$  y repetido el mismo cálculo empleando como entrada la señal triangular  $h_i(t)$  con la misma amplitud que la señal completa. En la figura 3-55 se muestran ambos ciclos. Comparando los dos ciclos calculados comprobamos como efectivamente el modelo de Preisach no es capaz de distinguir la forma de onda, resultando exactamente el ciclo de histéresis para ambas entradas.

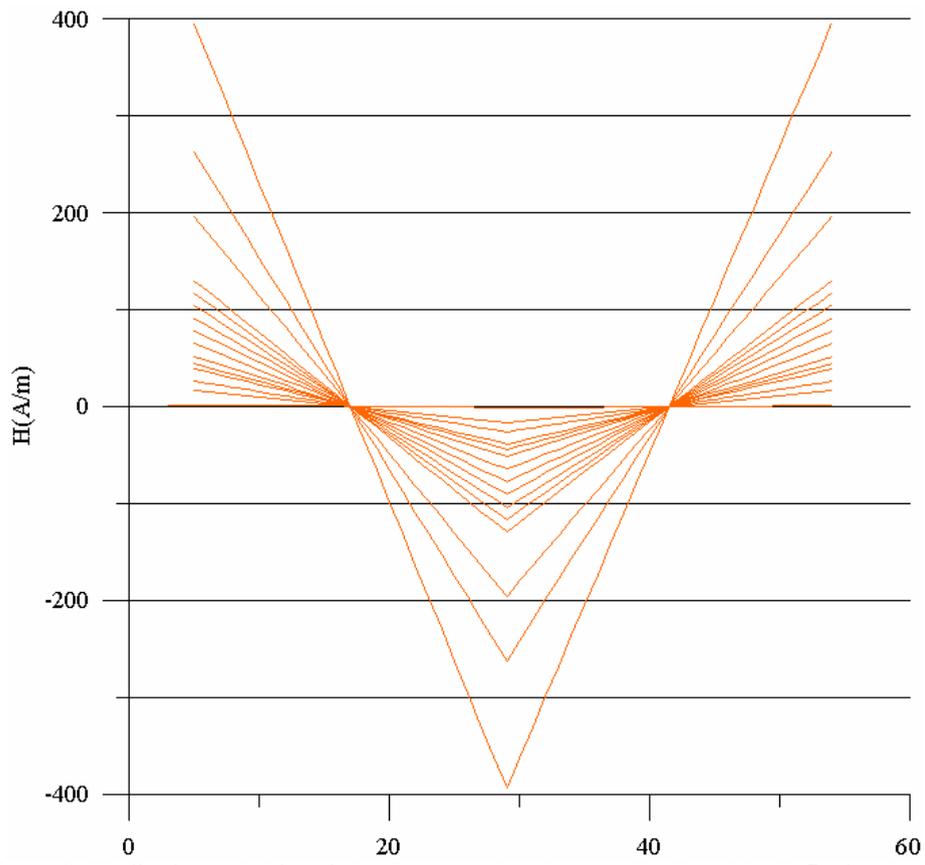
La razón de preferir emplear las excitaciones triangulares  $h(t)$  y no las excitaciones reales  $H(t)$  es que las primeras se han generado con menos nodos de tiempo que las segundas. Las señales  $H(t)$  provienen del muestreo del equipo histeresisgráfico y están compuestas 3200 nodos de tiempo. Lo cual implica un tiempo de cálculo mucho mayor, para conseguir el

mismo resultado. El tiempo de cálculo no sólo aumenta por el gran número de nodos de tiempo (muestras), si no que además, al haber tantos puntos para representar  $H(t)$ , la distancia  $dH$  entre uno y otro también es muy pequeña, por lo que se necesita un discretizado del plano de Preisach mucho más fino, siendo esta la principal causa del tiempo de cálculo.

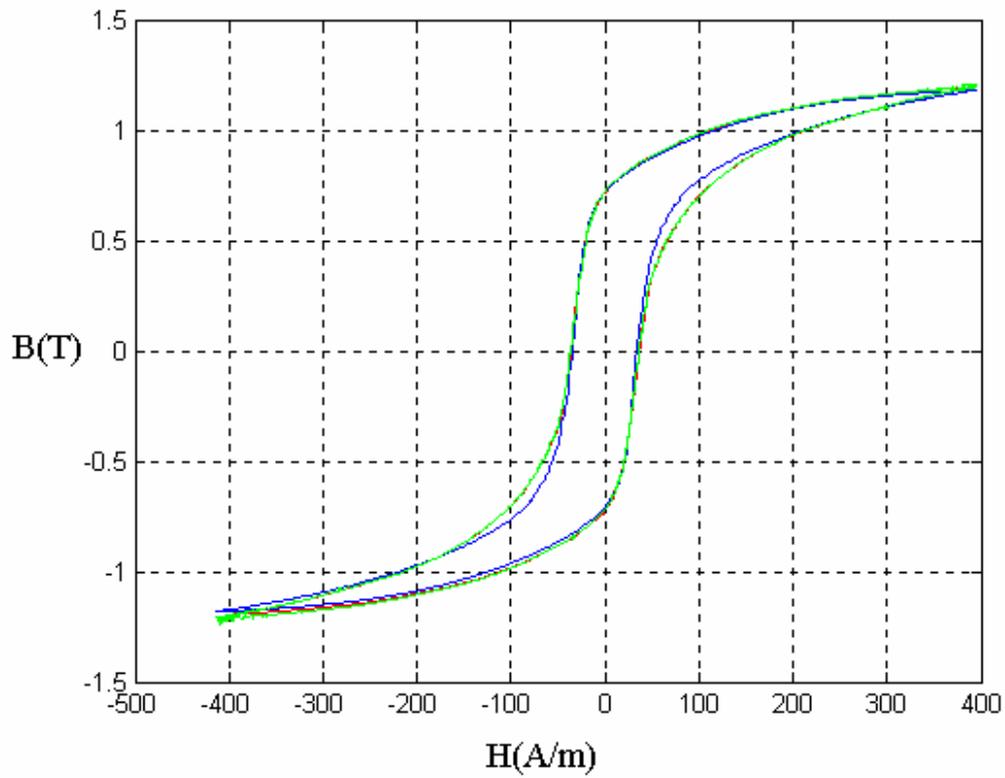
En definitiva, empleando las excitaciones triangulares de la figura 3-54 se ha calculado los ciclos de histéresis cuasiestáticos mediante el modelo de Preisach. Los resultados se muestran en las figuras 3-56 a 3-59.



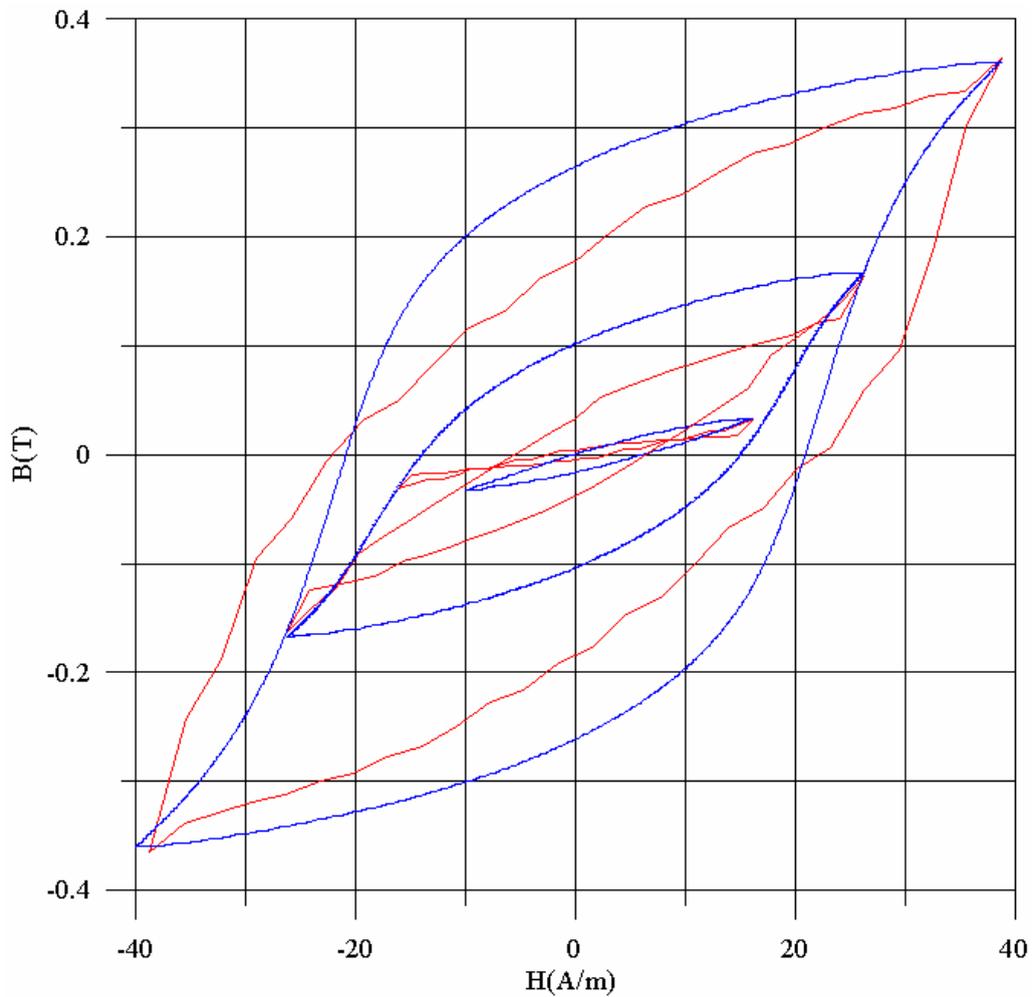
**Figura 3-53.** Señales de campo  $H(t)$  del conjunto de ciclos de histéresis experimentales. (El eje  $x$  tan sólo expresa el índice del nodo de tiempo)



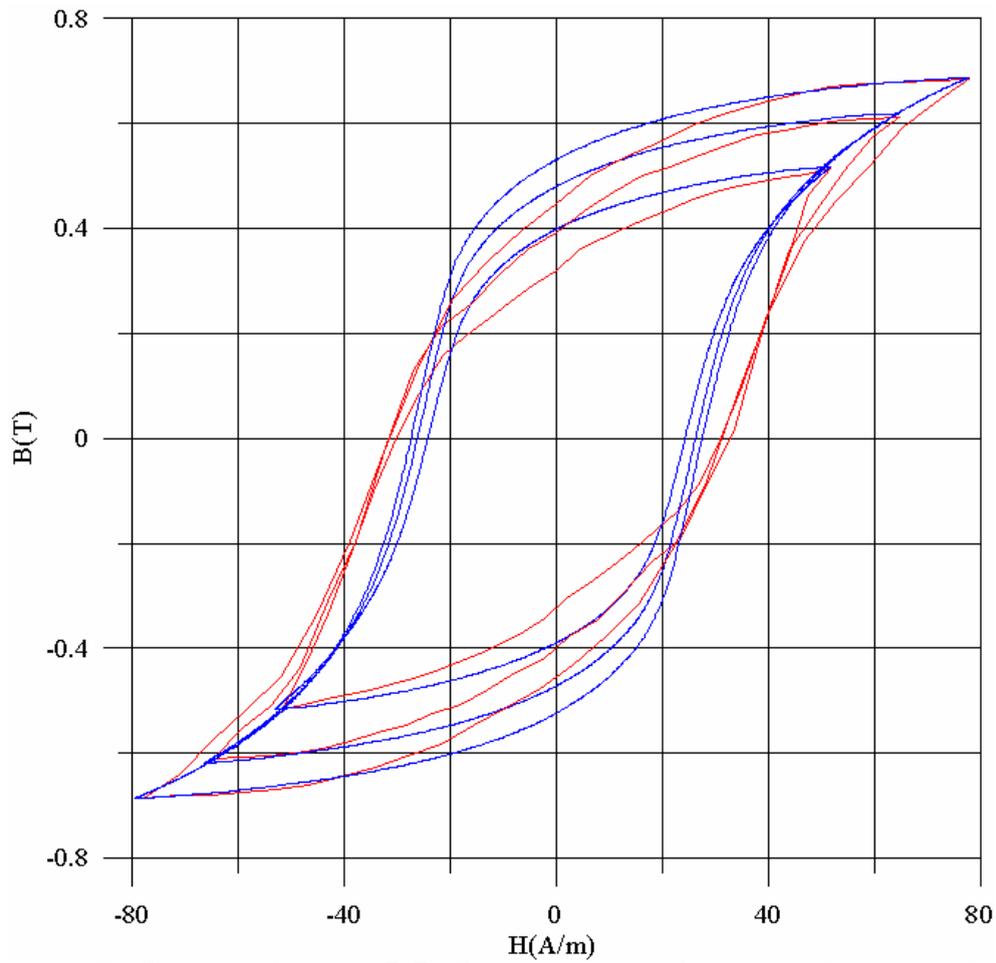
**Figura 3-54.** Conjunto de historiales de campo  $h(t)$  de entrada al modelo de Preisach



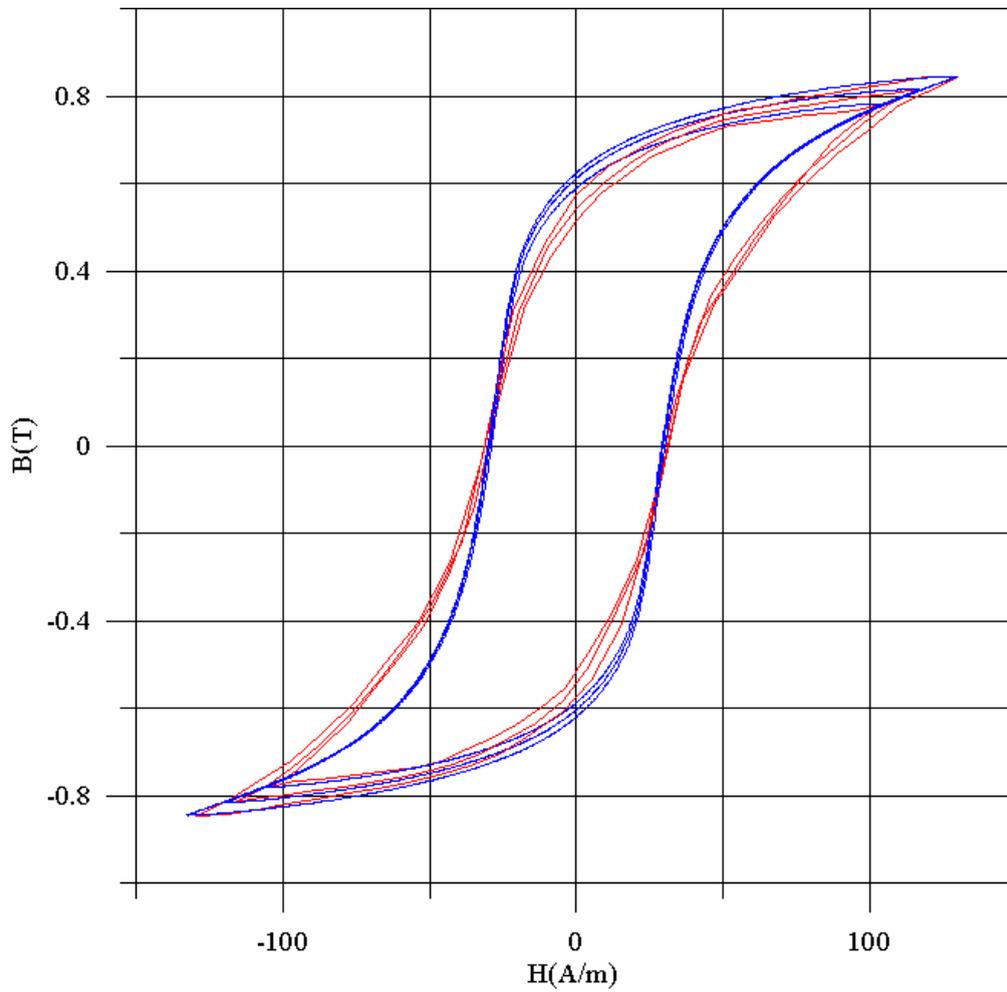
**Figura 3-55.** Comparación del ciclo calculado por el modelo de Preisach tomando como entrada la señal  $H(t)$  (en verde) y tomando como entrada el historial triangular de igual amplitud  $h(t)$  (en rojo). El trazo en azul corresponde al ciclo experimental. Los ciclos corresponden a la excitación  $O$ .



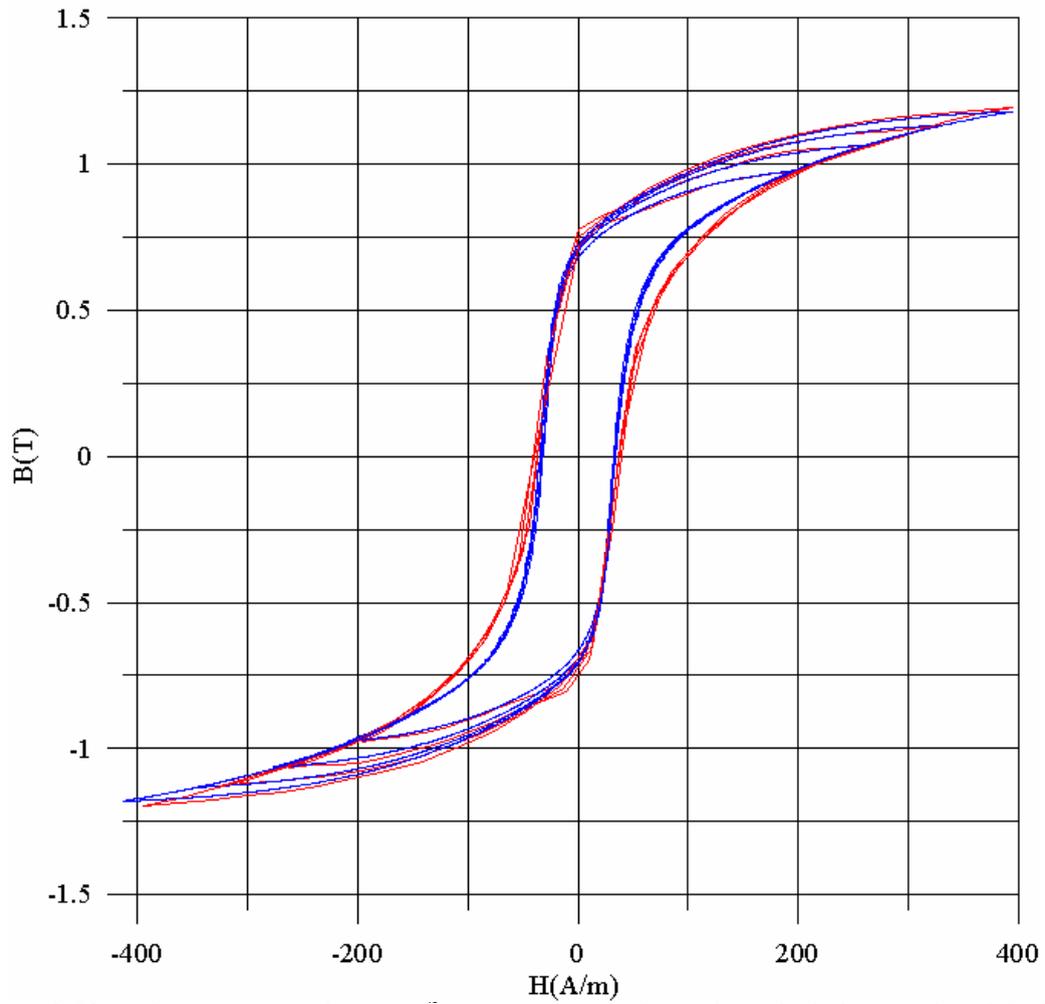
**Figura 3-56.** Ciclos experimentales A, B y C (en trazo azul) y ciclos calculados por el modelo de Preisach (en trazo rojo)



**Figura 3-57.** Ciclos experimentales E, F y G (en trazo azul) y ciclos calculados por el modelo de Preisach (en trazo rojo)



**Figura 3-58.** Ciclos experimentales I, J y K (en trazo azul) y ciclos calculados por el modelo de Preisach (en trazo rojo)



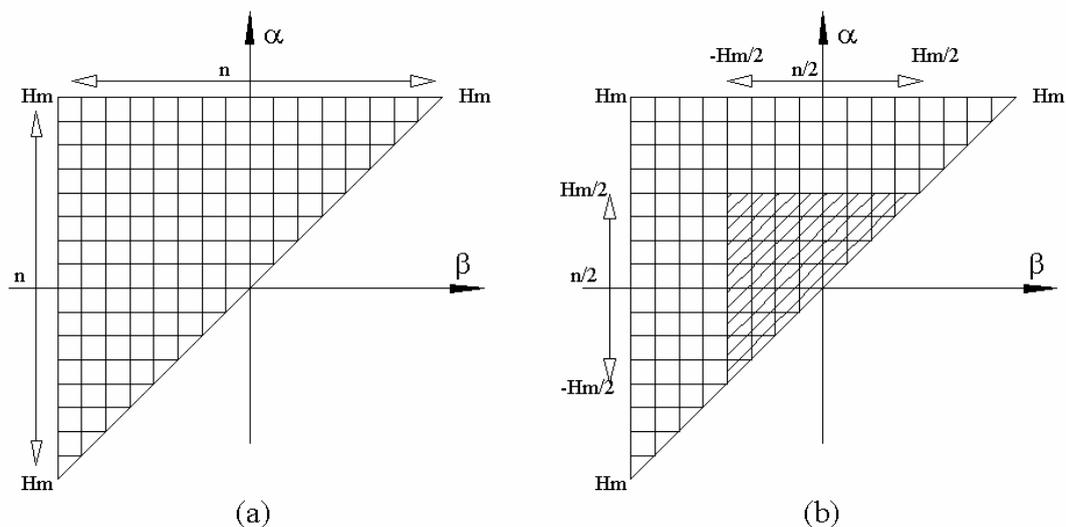
*Figura 3-59. Ciclos experimentales M, N,  $\bar{N}$  y O (en trazo azul) y ciclos calculados por el modelo de Preisach (en trazo rojo)*

### 3.11.2 Conclusiones

Comparando los ciclos calculados por el modelo de Preisach y los ciclos experimentales de las figuras 3-56 a 3-59, apreciamos que si bien la tendencia en general es buena y las simulaciones son aceptables, aparecen diferencias entre ambos ciclos de histéresis. Estas diferencias son dos:

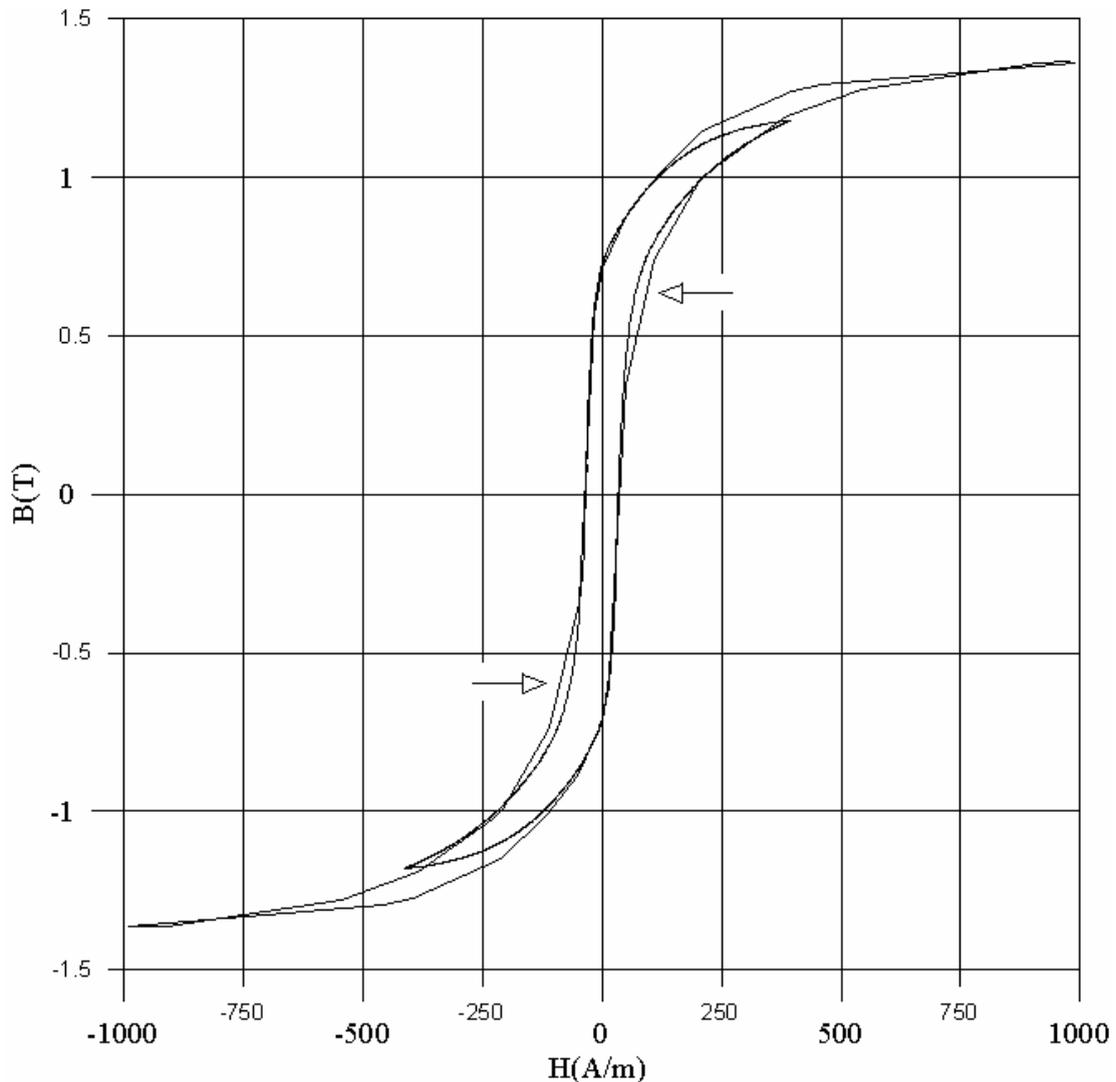
1. A medida que la amplitud del ciclo se reduce, empeoran los resultados predichos por el modelo de Preisach, hasta llegar al extremo de que en los ciclos más pequeños (A, B y C), los ciclos calculados están totalmente alejados de los ciclos experimentales (ver la figura 3-56).
2. Los ciclos más grandes aparecen bien calculados, pero ligeramente deformados en algunas partes de su trayectoria.

La causa de la primera diferencia la encontramos en el discretizado del plano de Preisach. Este plano se limita de forma que los extremos del triángulo límite corresponden con los valores máximos ( $H_m$  y  $-H_m$ ) de campo del ciclo límite (figura 3-60a). Sea  $n$  es el número de nodos en que se discretizan los ejes  $\alpha$  y  $\beta$  del plano de Preisach. De forma que se dispone de  $n$  nodos de precisión de la función densidad  $m(\alpha, \beta)$ . Pero si se desea calcular un ciclo de histéresis cuyo campo correspondiente tiene una amplitud máxima mitad a la del ciclo límite, el número de nodos del plano de Preisach disponibles es  $n/2$  (figura 4-60b), con lo que la precisión es mucho menor.



**Figura 3-60.** Discretización del plano de Preisach. (a) Para el ciclo límite, (b) para un ciclo de amplitud mitad a la del ciclo límite

Este efecto se puede reducir aumentando el número de nodos del plano de Preisach, si bien ello implica aumentar considerablemente el tiempo de cálculo.



**Figura 3-61.** Comparación entre un ciclo obtenido con el método balístico y un ciclo obtenido mediante el equipo histeresisgráfico. Las flechas indican los tramos menos precisos del ciclo obtenido mediante el método balístico.

La segunda diferencia es debida a los datos base para caracterizar el modelo de Preisach. Las curvas inversas de primer orden necesaria para determinar la función densidad  $m(a, b)$  se han obtenido mediante el método balístico. Con este método se pierde mucha precisión en la determinación de las características magnéticas. Como muestra ella se incluye la figura 3-61, en ella se compara el ciclo límite obtenido con el método balístico y el ciclo P obtenido mediante el equipo histeresisgráfico. Si bien ambos ciclos no corresponden a la misma amplitud de campo  $H_m$ , se aprecia perfectamente que la diferencia entre el ciclo balístico y el

ciclo histerisgráfico es la que se reproduce después en las curvas calculadas por el modelo de Preisach.

Este defecto se consigue paliar caracterizando el modelo de Preisach con un conjunto de curvas inversas de primer orden mayor y con mejor precisión de las empleadas. He ahí el motivo de la construcción del equipo histeresisgráfico, de la que nos ocuparemos en el capítulo 6.

## 4. Modelos tipo Preisach dinámicos.

El modelo de Preisach expuesto en el capítulo anterior se suele denominar modelo clásico. Ya se ha comentado que este modelo de Preisach clásico es de naturaleza estática o “rate-independent”. Únicamente los valores extremos, máximos y mínimos, del campo influyen en los valores futuros de la inducción. El modelo no es capaz de considerar la rapidez con que se suceden estos valores extremos, por lo que no puede reflejar la dependencia de la inducción con la frecuencia o con la forma de onda del campo.

En realidad el modelo de Preisach clásico es modelo cuasiestático, en el sentido que se puede considerar que calcula las características magnéticas para una frecuencia de excitación que tiende a cero.

Para cálculos válidos en ingeniería eléctrica, o concretamente en máquinas eléctricas, es de interés un modelo que sea capaz de considerar los efectos temporales en las características magnéticas. Esto es, se necesita un modelo dinámico. En la actualidad existen diversas variaciones o expansiones del modelo de Preisach clásico para que se comporte como un modelo dinámico. A estos modelos los denominamos modelos tipo-Preisach dinámicos.

En el presente capítulo se analizan varios modelos tipo-Preisach dinámicos. Finalmente se efectúa una valoración y comparación de los modelos analizados, fruto de esta valoración seleccionamos el modelo más adecuado para nuestras necesidades.

## 4.1 Modelo de Bertotti

### 4.1.1 Fundamentos

#### 4.1.1.1 Definición del modelo

Giorgio Bertotti [Bertotti, 1992; Bertotti, Basso y Pasquale, 1994; Bertotti y Fiorillo, 1993] propone modificar los operadores de histéresis del modelo de Preisach clásico, de forma que la conmutación entre el estado “+1” y el estado “-1” (estados de saturación) no se produzca con pendiente infinita, esto es, instantáneamente. En el modelo de Bertotti la transición entre los estados de saturación está condicionada por la rapidez de la variación temporal del campo, esto es, por los efectos temporales como la frecuencia y la forma de onda del campo.

El funcionamiento básico del modelo de Bertotti es el mismo que en el modelo clásico. El sistema con histéresis es tratado como a un conjunto de operadores de histéresis (histeriones) que conmutan de un estado a otro para unos valores determinados del campo. La inducción resulta de la contribución de cada uno de estos operadores ponderada por una función de distribución o densidad de probabilidad, la densidad de operadores  $\mathbf{m}(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ . Esta definición se expresa matemáticamente así:

$$B(t) = \iint_{\mathbf{a} \geq \mathbf{b}} \mathbf{m}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \mathbf{g}_{\mathbf{a}, \mathbf{b}, t} H(t) \, d\mathbf{a} \, d\mathbf{b} \quad (4.1)$$

Esta definición es exactamente igual que la definición matemática del modelo de Preisach clásico (3.1). La única diferencia está en como se define al operador de histéresis  $\mathbf{g}_{\mathbf{a}, \mathbf{b}, t} H(t)$ , que en el modelo de Bertotti depende también de la dinámica de la variable de entrada, el campo  $H(t)$ .

#### 4.1.1.2 Operadores de Bertotti

En el modelo clásico los operadores de histéresis  $\mathbf{g}_{\mathbf{a}, \mathbf{b}} H(t)$  conmutan de estado de forma instantánea, con pendiente infinita, tal como se muestra en la figura 4-1a. La propuesta de Bertotti [Bertotti, 1992] es considerar que las transiciones entre los estados de saturación se producen en un tiempo finito (figura 4-1b). La transición entre estados de saturación del operador de histéresis se trata considerando que la derivada respecto al tiempo del operador es:

$$\frac{\partial g_{a,b,t} H(t)}{\partial t} = \begin{cases} k[H(t) - a] & \forall H(t) > a \\ 0 & \forall b \leq H(t) \leq a \\ k[H(t) - b] & \forall H(t) < b \end{cases} \quad (4.2)$$

Donde  $a$  y  $b$  son los campos de conmutación del operador y  $k$  es un parámetro a caracterizar en función de la muestra.

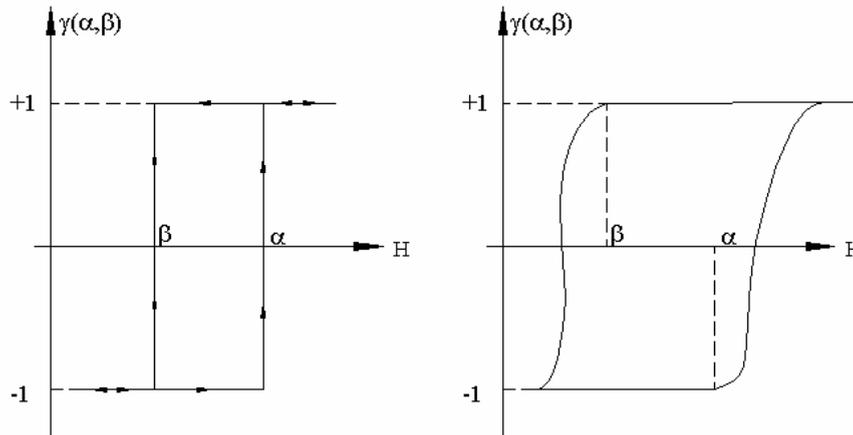


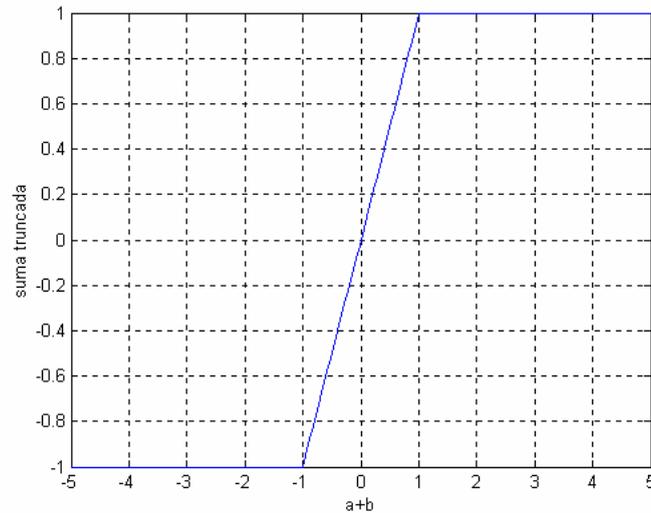
Figura 4-1. Comparación entre un operador del modelo de Preisach clásico (izquierda) y un posible operador en un momento determinado del modelo de Bertotti (derecha)

Para completar la ecuación (4.2) se debe indicar que la derivada respecto al tiempo del operador es igual a uno cuando éste está saturado

#### 4.1.1.3 Operador suma truncada

Para poder tratar el hecho que la derivada del operador respecto al tiempo cambia de expresión en función del valor del campo  $H(t)$  se introduce la operación suma truncada. Esta operación se empleará en las expresiones de los límites y valor instantáneo de los operadores dinámicos. El operador suma truncada se define por la siguiente expresión (ver figura 4-2):

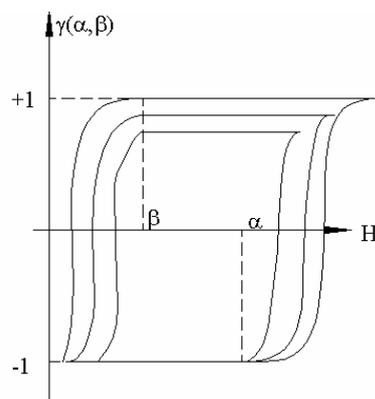
$$a \oplus b \equiv \begin{cases} a + b & \forall -1 < (a + b) < 1 \\ 1 & \forall (a + b) \geq 1 \\ -1 & \forall (a + b) \leq -1 \end{cases} \quad (4.3)$$



**Figura 4-2.** Operador suma truncada

#### 4.1.1.4 Derivas en los límites de los operadores de Bertotti

Según la propia definición de los operadores de Bertotti, la transición entre los dos estados de saturación se realiza en un tiempo finito, permaneciendo estables dichos estados de saturación. Pero la ecuación (4.2) implica que comenzando por una configuración inicial genérica, para un operador dado, las excursiones negativas y positivas serán diferentes y aparece una cierta deriva en los valores límite (estados inferior y superior), hasta que dicho límite llega al valor de saturación (+1 ó -1).



**Figura 4-3.** Ejemplo de deriva en el límite superior de un operador de Bertotti sometido a un campo periódico.

Para ilustrar el concepto de deriva en los límites de los operadores de Bertotti, lo mejor es mostrarlo con una figura. En la figura 4-3 se muestra un operador sometido a un campo  $H(t)$  periódico. Dicho operador  $\mathbf{g}_{a,b,t}H(t)$  inicialmente tiene su límite inferior igual al valor de saturación -1, pero su límite superior aún no ha llegado a la saturación positiva +1. A medida

que se van repitiendo periodos de campo  $H(t)$  el límite superior tiende al valor de saturación positiva. Este sería un ejemplo de deriva en el límite superior de un operador.

En consecuencia se debe considerar el efecto de deriva en los límites del operador, por lo que no es suficiente calcular dicho operador a partir de la integral de la ecuación (4.2). Previamente se deben calcular los límites del operador para cada instante de tiempo en función del historial del campo  $H(t)$ .

Sea una excitación  $H(t)$  periódica tal que cumpla  $H(t+p) = -H(t)$ . Para los operadores cuyos campos de conmutación cumplen que  $a+b > 0$  se pueden calcular sus límites mediante las siguientes expresiones:

$$\begin{aligned} g_{\min} &= -1 \\ g_{\max} &= -1 \oplus k \int_{D_a} [H(t) - a] dt \end{aligned} \tag{4.4}$$

Donde  $g_{\max}$  y  $g_{\min}$  son, respectivamente, los límites superior e inferior de un operador. Para los operadores cuyos campos de conmutación cumplen que  $a+b < 0$  se pueden calcular sus límites mediante:

$$\begin{aligned} g_{\min} &= 1 \oplus k \int_{D_b} [H(t) - b] dt \\ g_{\max} &= 1 \end{aligned} \tag{4.5}$$

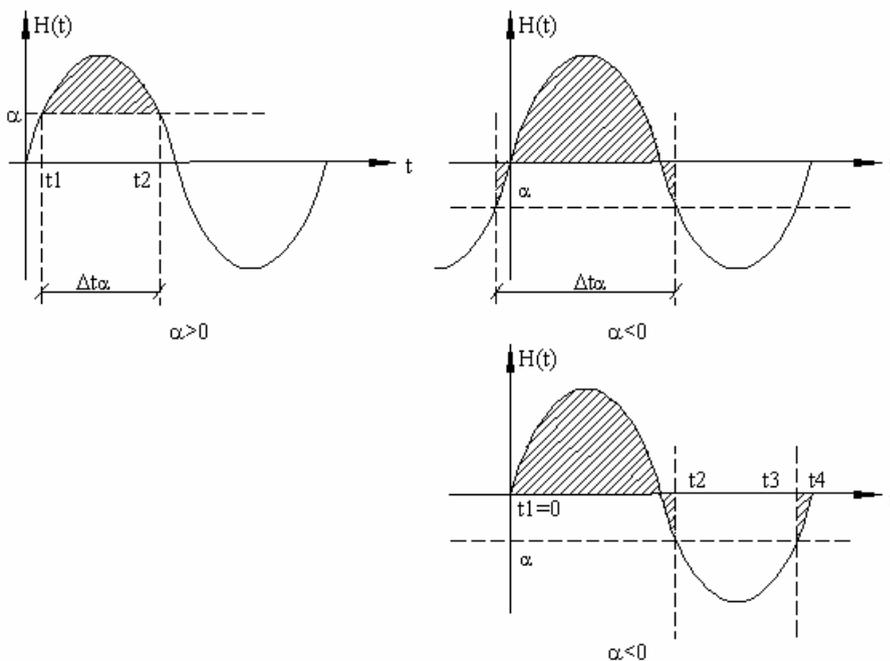
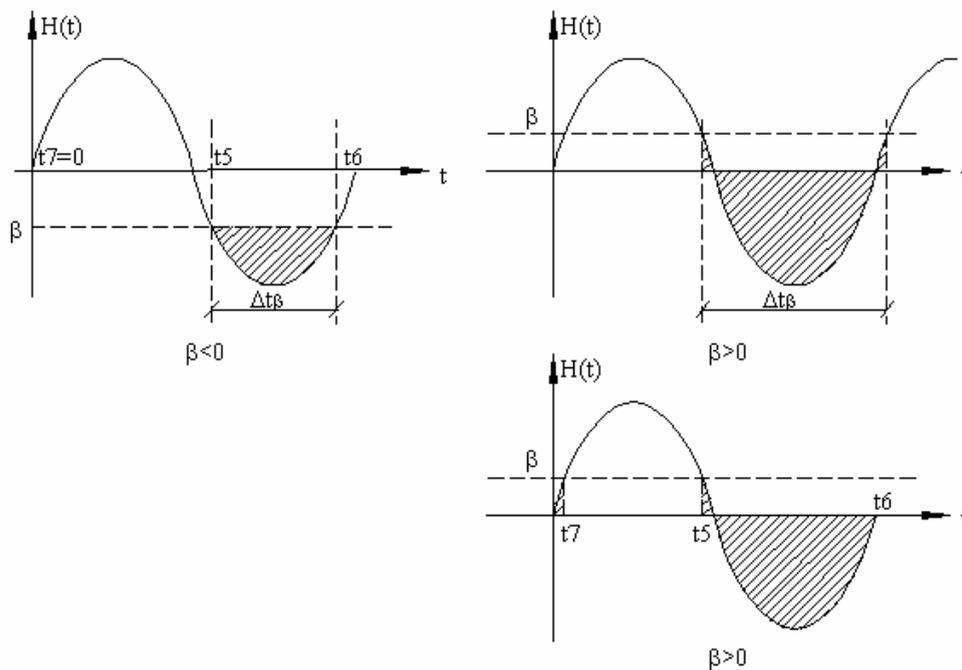


Figura 4-4. Determinación de  $D_a$

En las ecuaciones (4.4) y (4.5), el parámetro  $Dta$  es el intervalo de tiempo dentro de un periodo de campo en el que se cumple que  $H(t) > a$ , así mismo  $Dtb$  es el intervalo de tiempo dentro un periodo de campo en el que se cumple que  $H(t) < b$ .

En la figura 4-4 se muestra como se determina el periodo  $Dta$  y en función del valor del campo de conmutación  $a$ . Paralelamente en la figura 4-5 se muestra la determinación de  $Dtb$  en función del campo de conmutación  $b$ .



**Figura 4-5.** Definición de  $Dtb$

De las figuras 4-4 y 4-5 se deduce que en función del valor del campo de conmutación varían los límites de integración de las integrales de las ecuaciones (4.4) y (4.5), en concreto se debe controlar si el campo de conmutación es mayor o menor de cero. En la tabla 4-I se resumen las cuatro zonas en las que se puede dividir el plano de Preisach en función del valor de  $a+b$  y el valor del campo de conmutación. En dicha tabla también se representan los límites de integración que deben emplearse en las integrales de las ecuaciones (4.4) y (4.5).

En la figura 4-6 se muestra el plano de Preisach dividido en las cuatro zonas de la tabla 4-I. En realidad como que  $a \geq b$ , no es necesario considerar la zona d.

Tabla 4-I. Zonas del plano de Preisach y límites de integración

Zona a	$\mathbf{a+b>0}$	$\mathbf{a\geq 0}$	$t1, t2, t3=0, t4=0$	$\int_{t_1}^{t_2} [H(t) - \mathbf{a}] dt + \int_{t_3}^{t_4} [H(t) - \mathbf{a}] dt$
Zona b		$\mathbf{a<0}$	$t1=0, t2, t3, t4=1/f$	
Zona c	$\mathbf{a+b<0}$	$\mathbf{b\leq 0}$	$t5, t6, t7=0$	$\int_{t_0}^{t_7} [H(t) - \mathbf{b}] dt + \int_{t_5}^{t_6} [H(t) - \mathbf{b}] dt$
Zona d		$\mathbf{b>0}$	$t5, t6=1/f, t7$	

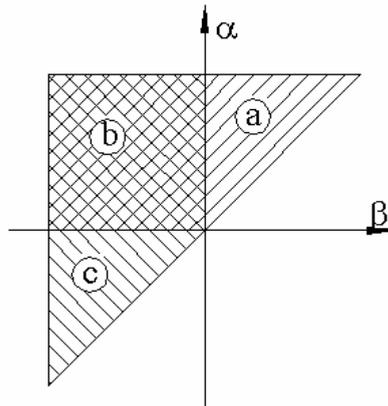


Figura 4-6. Subdivisión del plano de Preisach en las zonas de la tabla 4-I

4.1.1.5 Valor instantáneo de los operadores de Bertotti

El valor instantáneo de un operador de Bertotti, sometido a un campo periódico  $H(t)$  tal que cumple  $H(t + p) = -H(t)$ , con valores límite  $g_{max}$  y  $g_{min}$  viene determinado por la expresión:

$$\mathbf{g}_{a,b,t} = \begin{cases} g_{min} & \forall \left( \mathbf{b} < H(t) < \mathbf{a} ; \frac{dH}{dt} > 0 \right); & \text{Estado I} \\ g_{min} \oplus k \int_{t_a}^t [H(t) - \mathbf{a}] dt & \forall (H(t) > \mathbf{a}): & \text{Estado II} \\ g_{max} & \forall \left( \mathbf{b} < H(t) < \mathbf{a} ; \frac{dH}{dt} < 0 \right); & \text{Estado III} \\ g_{max} \oplus k \int_{t_b}^t [H(t) - \mathbf{b}] dt & \forall (H(t) < \mathbf{b}): & \text{Estado IV} \end{cases} \quad (4.6)$$

Donde  $t_a$  es el punto inicial del intervalo  $D_{t_a}$  y  $t_b$  es el punto inicial del intervalo  $D_{t_b}$ . Con el valor de cada operador del plano  $\mathbf{a-b}$  calculado para cada valor del campo  $H(t)$  ya se puede calcular la inducción  $B(t)$  mediante la ecuación (4.1).

Al igual que ocurría con la integral de la expresión de los límites (4.4) y (4.5), los límites de las integrales que aparecen en la ecuación (4.6) dependen del valor del campo de conmutación (ver figuras 4-4 y 4-5). Pero además, en este caso, también dependen del valor instantáneo del campo aplicado  $H(t)$ .

Cuando  $\mathbf{a}>0$ , la integral del estado II en (4.6) se calcula como:

$$\int_{t_1}^t [H(t) - \mathbf{a}] dt \quad (4.7)$$

En cambio cuando  $\mathbf{a}<0$ :

$$\begin{aligned} \int_{t_3}^t [H(t) - \mathbf{a}] dt \quad \forall t_3 < t < t_4 \\ \int_{t_3}^{t_4} [H(t) - \mathbf{a}] dt + \int_0^t [H(t) - \mathbf{a}] dt \quad \forall 0 < t < t_2 \end{aligned} \quad (4.8)$$

Igualmente, para la integral del estado IV, cuando  $\mathbf{b}<0$ :

$$\int_{t_5}^t [H(t) - \mathbf{b}] dt \quad (4.9)$$

Y para  $\mathbf{b}>0$ :

$$\begin{aligned} \int_{t_5}^t [H(t) - \mathbf{b}] dt \quad \forall t_5 < t < t_6 \\ \int_{t_5}^{t_6} [H(t) - \mathbf{a}] dt + \int_0^t [H(t) - \mathbf{a}] dt \quad \forall 0 < t < t_7 \end{aligned} \quad (4.10)$$

Los operadores del modelo de Preisach clásico únicamente pueden adoptar dos estados “+1” ó “-1”. En cambio, como se muestra en la ecuación (4.6), los operadores dinámicos del modelo de Bertotti, presentan cuatro estados:

- Estado I: límite inferior
- Estado II: transición del límite inferior al superior
- Estado III: límite superior
- Estado IV: transición del límite superior al inferior.

Además, a diferencia de los operadores estáticos, los operadores dinámicos pueden tener un valor diferente de +1 en el límite superior, un valor diferente a -1 en el límite inferior, y

cualquier valor entre el límite superior e inferior en los estados de transición de un límite a otro. El valor de los operadores en los estados de transición depende del valor del campo magnético  $H(t)$ .

En la figura 4-7 se muestra un ejemplo de operador dinámico con sus cuatro estados diferenciados.

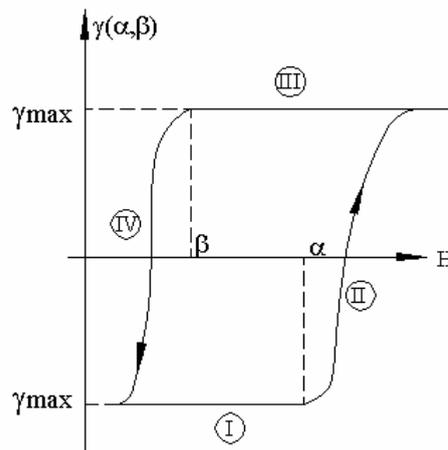


Figure 4-7. Ejemplo de operador dinámico y sus cuatro estados

En la figura 4-8 se muestra un ejemplo de evolución de los estados de los operadores en el plano de Preisach para un campo creciente y un campo decreciente.

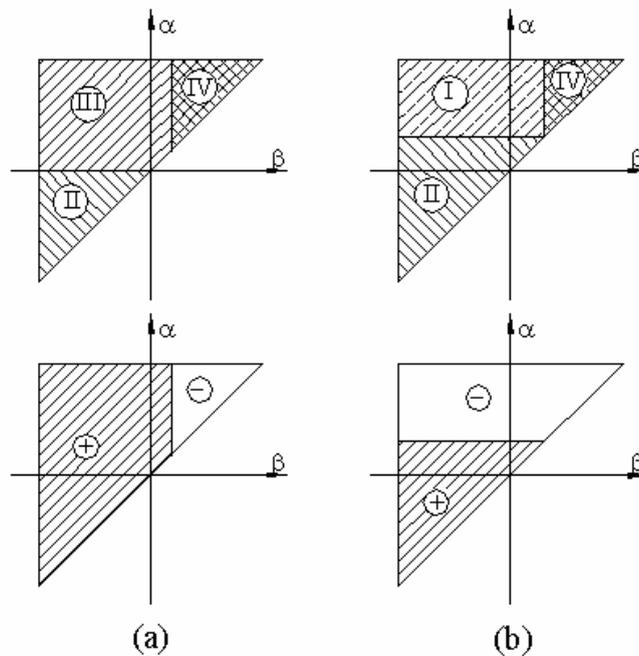


Figure 4-8. Evolución del estado de los operadores dinámicos en el plano de Preisach para (a) un campo decreciente y (b) un campo creciente

#### 4.1.1.6 Modelo normalizado

Las ecuaciones del modelo se pueden normalizar aplicando los siguientes cambios de variables:

$$x = \frac{\mathbf{a}}{H_c}; \quad y = \frac{\mathbf{b}}{H_c} \quad (4.11)$$

$$u = 2 \cdot \mathbf{p} \cdot f \cdot t \quad (4.12)$$

$$h(u) = \frac{H(t)}{H_c} \quad (4.13)$$

$$cf = \frac{2\mathbf{p}f}{kH_c} \quad (4.14)$$

Donde  $H_c$  es un parámetro de valor próximo al campo coercitivo del ciclo límite. Con estos parámetros normalizados la expresión de los límites de los operadores cuando  $\mathbf{a} + \mathbf{b} > 0$  es:

$$\begin{aligned} \mathbf{g}_{\min} &= -1 \\ \mathbf{g}_{\max} &= -1 \oplus \frac{1}{cf} \int_{u_x}^u [h(u) - x] du \end{aligned} \quad (4.15)$$

Cuando se cumple  $\mathbf{a} + \mathbf{b} < 0$ , la expresión es:

$$\begin{aligned} \mathbf{g}_{\min} &= 1 \oplus \frac{1}{cf} \int_{u_y}^u [h(u) - y] du \\ \mathbf{g}_{\max} &= 1 \end{aligned} \quad (4.16)$$

Así la expresión con los parámetros del valor instantáneo de los operadores es:

$$\mathbf{g}_{x,y,u} = \begin{cases} \mathbf{g}_{\min} & \forall \left( y < h(u) < x ; \frac{dh}{du} > 0 \right) \text{ Zona I} \\ \mathbf{g}_{\min} \oplus \frac{1}{cf} \int_{u_x}^u [h(u) - x] du & \forall (h(u) > x) \text{ Zona II} \\ \mathbf{g}_{\max} & \forall \left( y < h(u) < x ; \frac{dh}{du} < 0 \right) \text{ Zona III} \\ \mathbf{g}_{\max} \oplus \frac{1}{cf} \int_{u_y}^u [h(u) - y] du & \forall (h(u) < y) \text{ Zona IV} \end{cases} \quad (4.17)$$

### 4.1.2 Caracterización

Para desarrollar el modelo de Bertotti se necesita caracterizar dos parámetros:

- La función densidad  $m(\mathbf{a}, \mathbf{b})$
- El parámetro  $k$

La caracterización de la función densidad ya se trató en el capítulo 3. No obstante, es importante indicar que según la definición dada este modelo no permite la formulación de (4.1) por integrales de Everett, lo cual implica que se debe emplear la función densidad. Si los resultados con la función densidad caracterizada por ajuste no eran buenos cuando se aplicaba el modelo de Preisach clásico a materiales blandos, tampoco lo serán para el modelo de Bertotti en los mismos materiales. La única opción es calcular la función densidad por métodos no paramétricos. En tal sentido, recuérdese que si se emplea el método de Mayergoyz se necesitan al menos quince curvas inversas de primer orden para obtener buenos resultados ya que para este caso la interpolación a tramos por polinomios de Hermite no soluciona nada.

Para calcular el parámetro  $k$  se recurre a un proceso iterativo en el cual se parte de un valor de  $k$  inicial o semilla y se hace que el modelo de Bertotti calcule el ciclo de histéresis del ciclo límite a la frecuencia deseada. Por supuesto, el ciclo límite ha sido determinado previamente de forma experimental. Cuando el área del ciclo calculado por el modelo se ajusta al área del ciclo límite experimental dentro de unos márgenes de error aceptables, el proceso de iteración finaliza.

Es interesante observar que el parámetro  $k$ , aparte del material, también depende de la frecuencia y de la forma de onda del campo  $H(t)$ , por lo que deberá recalcularse cada vez que se modifique el campo.

### 4.1.3 Desarrollo

El procedimiento a seguir es:

1. Discretizar el plano  $\mathbf{a}-\mathbf{b}$

2. Calcular la función densidad para todos los puntos discretizados del triángulo límite del plano  $\mathbf{a-b}$ . Este cálculo se puede realizar por alguno de los métodos expuestos en el capítulo 3.
3. Calcular, por iteración, el parámetro  $k$
4. Para cada operador calcular el valor de los intervalos  $Dt_a$  y  $Dt_b$ , con sus correspondientes puntos de inicio  $t_a$  y  $t_b$ .
5. Calcular los límites inferior  $g_{min}$  y superior  $g_{max}$  de cada operador para cada valor instantáneo del campo  $H(t)$ .
6. Calcular el valor instantáneo de cada operador de Bertotti para cada valor instantáneo del campo  $H(t)$ .
7. Calcular el valor de la inducción  $B(t)$  mediante la expresión (4.1), empleando el valor instantáneo de los operadores calculados en el paso (6).

## 4.2 Modelo de Mayergoyz

### 4.2.1 Fundamentos

Paralelamente al modelo de Bertotti, Isaac D. Mayergoyz propuso una generalización del modelo de Preisach clásico a modelo dinámico [Mayergoyz, 1988; Mayergoyz, 1991 y Mayergoyz, 2003]. En el modelo de Mayergoyz es la función densidad la que depende de la rapidez de la variación del campo  $H(t)$ . Los operadores de histéresis se ajustan a la misma definición que en el modelo clásico. La formulación algebraica del modelo de Mayergoyz es:

$$B(t) = \iint_{a \geq b} \mathbf{m} \left( \mathbf{a}, \mathbf{b}, \frac{dB(t)}{dt} \right) \mathbf{g}_{\mathbf{a}, \mathbf{b}} H(t) d\mathbf{a} d\mathbf{b} \quad (4.18)$$

Este fundamento del modelo presenta dos dificultades. La primera es que la función densidad depende de la derivada de la inducción respecto al tiempo  $dB(t)/dt$ , que es la variable, a priori, incógnita a determinar. La segunda es que no queda claro como caracterizar el modelo.

Desarrollando en serie de potencias la función densidad, considerando únicamente los dos primeros términos:

$$\mathbf{m}\left(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \frac{dB(t)}{dt}\right) = \mathbf{m}_0(\mathbf{a}, \mathbf{b}) + \frac{dB(t)}{dt} \mathbf{m}_1(\mathbf{a}, \mathbf{b}) + \dots \quad (4.19)$$

Aplicando los dos primeros términos de la función densidad desarrollada en serie de potencias en la definición matemática del modelo (4.18) obtenemos:

$$B(t) = \iint_{a \geq b} \mathbf{m}_0(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \mathbf{g}_{a,b} H(t) d\mathbf{a} d\mathbf{b} + \frac{dB(t)}{dt} \iint_{a \geq b} \mathbf{m}_1(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \mathbf{g}_{a,b} H(t) d\mathbf{a} d\mathbf{b} \quad (4.20)$$

En un proceso estático la derivada  $dB(t)/dt$  es nula, con lo que (4.20) tan solo conserva el primer término, que es justamente la definición matemática del modelo de Preisach clásica. Por tanto la función densidad  $\mathbf{m}_0(\mathbf{a}, \mathbf{b})$  se puede identificar con la función densidad clásica o estática, y el segundo término de (4.20) se identifica como el término dinámico del modelo.

Sea  $\tilde{B}(t)$  la inducción estática, calculada previamente mediante el modelo de Preisach clásico y por tanto un dato ya conocido. Entonces:

$$B(t) = \tilde{B}(t) + \frac{dB(t)}{dt} \iint_{a \geq b} \mathbf{m}_1(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \mathbf{g}_{a,b} H(t) d\mathbf{a} d\mathbf{b} \quad (4.21)$$

#### 4.2.2 Caracterización

En la ecuación (4.21), la componente estática  $\tilde{B}(t)$  corresponde al modelo de Preisach clásico que ya fue suficientemente analizado en el capítulo anterior. Nos vamos a centrar por tanto en el único término nuevo a caracterizar, la función densidad dinámica  $\mathbf{m}_1(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ .

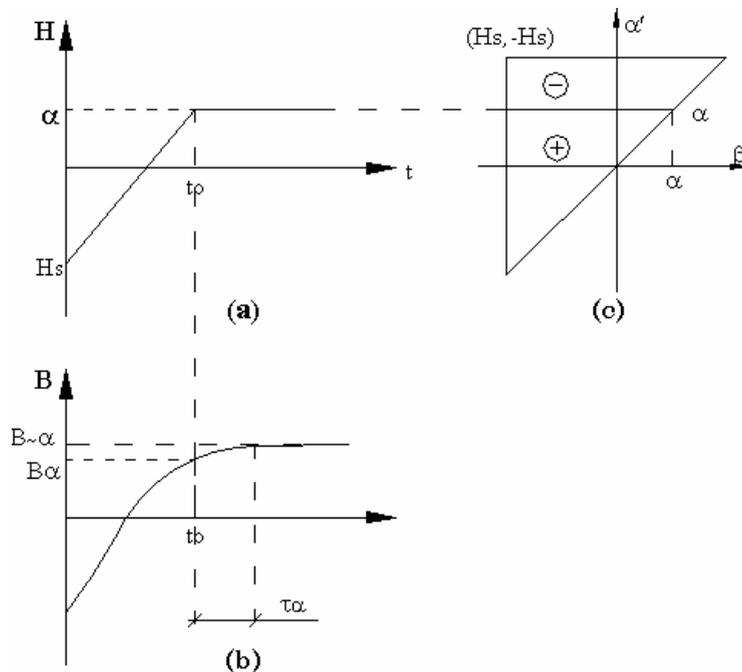
Sea un historial de campo  $H(t)$  como el mostrado en el figura 4-9. El campo aumenta con una cierta pendiente hasta llegar al instante  $t=t_0$ , donde el campo permanece constante con un valor  $H=\mathbf{a}$ . Mientras el campo aumenta, la inducción  $B(t)$  también aumenta. En el instante  $t=t_0$ , la inducción tiene valor  $B_a$ . Pero, aunque el campo se haya estabilizado en  $t_0$ , la

inducción aún no se estabiliza, experimenta un proceso de relajamiento hasta llegar a su valor estático definitivo  $\tilde{B}_a$ . Este proceso de relajamiento de la inducción viene descrito por:

$$t_a \frac{dB(t)}{dt} + B(t) = \tilde{B}_a \quad (4.22)$$

De la evolución del plano de Preisach para la transición de  $H(t)$  –ver figura 4-9-, aplicando la definición geométrica, se deduce la siguiente expresión:

$$t_a = \iint_{s_a^-} \mathbf{m}(\mathbf{a}', \mathbf{b}') d\mathbf{a}' d\mathbf{b}' - \iint_{s_a^+} \mathbf{m}_1(\mathbf{a}', \mathbf{b}') d\mathbf{a}' d\mathbf{b}' \quad (4.23)$$



**Figura 4-9.** (a) Historial de  $H(t)$ , (b) respuesta de  $B(t)$  con su proceso de relajamiento y (c) plano  $\mathbf{a}-\mathbf{b}$  correspondiente a  $H(t)$

La solución a la ecuación diferencial (4.22) es:

$$B(t) = (B_a - \tilde{B}_a) e^{-\frac{t}{t_a}} + \tilde{B}_a \quad (4.24)$$

De esta ecuación se deduce que el parámetro  $t_a$  es el tiempo de relajación de la inducción, esto es, el tiempo transcurrido desde la estabilización del campo en  $t_0$  hasta que  $B(t)$  alcanza su valor estático  $\tilde{B}_a$ . Esto nos indica el camino a seguir para caracterizar el modelo. Se

somete la muestra ferromagnética a caracterizar a un historial de campo similar al mostrado en la figura 4-9, midiéndose el tiempo transcurrido desde  $t_0$  hasta que  $B(t)$  se estabiliza.

No obstante, aún no hemos finalizado pues este parámetro de relajación obtenido es válido únicamente para la línea  $\mathbf{a}=\mathbf{b}$  del plano de Preisach, equivale a un parámetro  $t_{aa}$ . Es necesario un ensayo más complejo para determinar el parámetro de relajamiento en todo el plano de Preisach.

Sea el historial de campo de la figura 4-10. Ahora el campo aumenta monótonamente hasta llegar a  $H=\mathbf{a}$  en  $t=t_0$ , momento en el cual el campo pasa a disminuir hasta llegar el momento  $t=t'_0$  donde se estabiliza en  $H=\mathbf{b}$ . El proceso experimentado por la inducción también es mostrado en la figura 4-10. La inducción cuando el campo se estabiliza es  $B_{ab}$ , pero este no es su valor definitivo, la inducción presenta proceso de relajación, esto es, continúa variando hasta llegar a su valor estático  $\tilde{B}_{ab}$ . La ecuación diferencial (4.22) es ahora:

$$t_{ab} \frac{dB(t)}{dt} + B(t) = \tilde{B}_{ab} \tag{4.25}$$

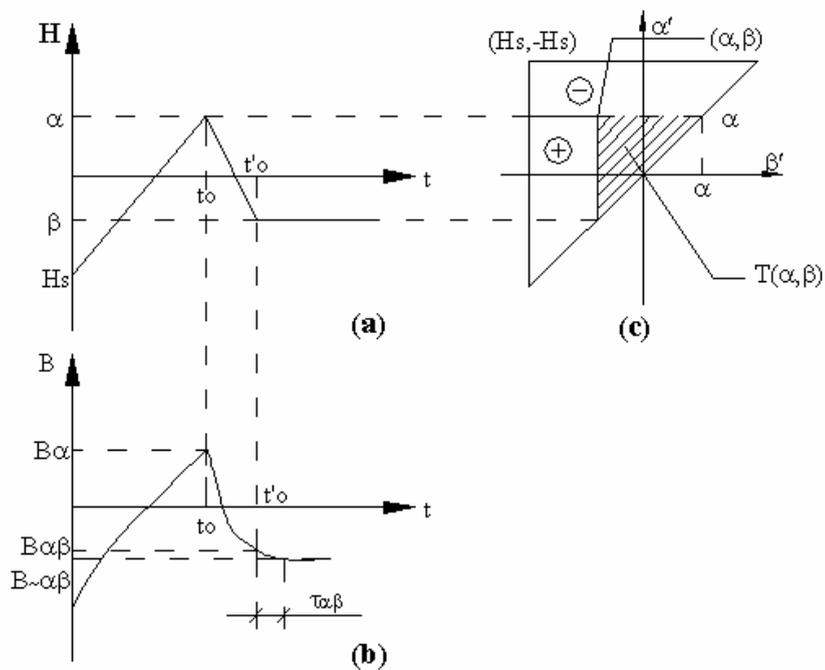


Figura 4-10. (a) Historial de  $H(t)$ , (b) respuesta de  $B(t)$  con su proceso de relajamiento y (c) plano  $\mathbf{a-b}$  correspondiente a  $H(t)$

Aplicando de nuevo la interpretación geométrica del modelo de Preisach, al plano  $\mathbf{a}-\mathbf{b}$  de la figura 4-10:

$$t_{ab} = \iint_{S_{ab}^-} \mathbf{m}(\mathbf{a}', \mathbf{b}') d\mathbf{a}' d\mathbf{b}' - \iint_{S_{ab}^+} \mathbf{m}(\mathbf{a}', \mathbf{b}') d\mathbf{a}' d\mathbf{b}' \quad (4.26)$$

Resolviendo la ecuación diferencial (4.25):

$$B(t) = (B_{ab} - \tilde{B}_{ab}) e^{-\frac{t}{t_{ab}}} + \tilde{B}_{ab} \quad (4.27)$$

Así pues,  $t_{ab}$  es el tiempo de relajación desde que estabiliza el campo en  $t'_0$  hasta que se estabiliza la inducción. Este tiempo de relajamiento se puede medir experimentalmente. Con lo que ya sólo nos queda relacionar el tiempo de relajamiento  $t_{ab}$  con la densidad de operadores dinámica  $\mathbf{m}(\mathbf{a}, \mathbf{b})$  y así completar la caracterización del modelo.

Sea la función:

$$q(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \equiv t_a - t_{ab} \quad (4.28)$$

Entonces, de las ecuaciones (4.23) y (4.26) se deduce la siguiente interesante expresión:

$$q(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = -2 \iint_{T_{ab}} \mathbf{m}(\mathbf{a}', \mathbf{b}') d\mathbf{a}' d\mathbf{b}' \quad (4.29)$$

Donde  $T_{ab}$  es el triángulo definido por el punto  $(\mathbf{a}, \mathbf{b})$  del plano  $\mathbf{a}-\mathbf{b}$  mostrado en la figura 4-10. De (4.29) se obtiene:

$$\mathbf{m}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 q(\mathbf{a}, \mathbf{b})}{\partial \mathbf{a} \partial \mathbf{b}} \quad (4.30)$$

Aplicando la definición de la función  $q(\mathbf{a}, \mathbf{b})$  de la ecuación (4.28), obtenemos finalmente:

$$\mathbf{m}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = -\frac{1}{2} \frac{\partial^2 t_{ab}}{\partial \mathbf{a} \partial \mathbf{b}} \quad (4.31)$$

La ecuación (4.31) nos indica como caracterizar el término dinámico  $\mathbf{m}(\mathbf{a}, \mathbf{b})$  del modelo de Mayergoyz. Se somete la muestra magnética a un campo con el historial de una curva inversa de primer orden con punto de inversión en  $H=\mathbf{a}$ , finalizando la curva inversa en  $H=\mathbf{b}$ . El tiempo que transcurre desde que el campo se estabiliza y se estabiliza la inducción es el tiempo de relajamiento  $t_{ab}$ . Repitiendo el proceso se obtiene un mapa de la función  $t_{ab}$  en el plano  $\mathbf{a}-\mathbf{b}$ . La función densidad dinámica la obtenemos como la derivada de  $t_{ab}$  respecto a  $\alpha$  y  $\mathbf{b}$ .

### 4.2.3 Desarrollo

Sea la definición del modelo de Mayergoyz de la ecuación (4.21). Esta será nuestra base para desarrollar el modelo. En ella  $\tilde{B}_0$  representa la inducción estática, que se determina mediante el modelo de Preisach clásico. Supondremos que dicho modelo ya se ha desarrollado, y que además ya se ha determinado el valor de  $\tilde{B}_0$ .

Para facilitar el desarrollo del modelo de Mayergoyz, definimos la función denominada coeficiente histerésico  $\hat{a}(H(t))$  como:

$$\hat{a}(H(t)) \equiv - \iint_{\mathbf{a} \geq \mathbf{b}} \mathbf{m}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \mathbf{g}_{\mathbf{a}, \mathbf{b}} H(t) d\mathbf{a} d\mathbf{b} \quad (4.32)$$

Aplicando el coeficiente histerésico en la definición del modelo de la ecuación (4.21):

$$\hat{a}(H(t)) \frac{dB(t)}{dt} + B(t) = \tilde{B}(t) \quad (4.33)$$

De esta forma nos resulta una ecuación diferencial, cuya solución es la expresión final a aplicar para determinar la inducción mediante el modelo de Mayergoyz:

$$B(t) = b(t) \left[ B_0 + \int_0^t \frac{\tilde{B}(t')}{\hat{a}(t') b(t')} dt' \right] \quad (4.34)$$

Donde  $B_0$  es el valor inicial de la inducción y  $b(t)$  es la función:

$$b(t) \equiv e^{-\int_0^t \frac{1}{\hat{a}(t')} dt'} \quad (4.35)$$

Analizando la definición del coeficiente histerésico de la ecuación (4.32) y la definición de función  $q(\mathbf{a}, \mathbf{b})$  de la ecuación (4.28), se puede deducir que su estructura es similar a las integrales de Everett  $E(\mathbf{a}, \mathbf{b})$  del modelo de Preisach clásico. Siguiendo un razonamiento análogo al realizado para el desarrollo numérico del modelo clásico por integrales de Everett se deduce la siguiente expresión:

$$\hat{a}(H(t)) = -\frac{1}{2}q(H_s, H_s) + \sum_{k=1}^{n(t)} [q(H_k, h_{k-1}) - q(H_k, h_k)] \quad (4.36)$$

Donde  $H_k$  y  $h_k$  son los puntos de inflexión de la línea de estado en el plano de Preisach.

En resumen, el procedimiento a seguir para determinar la inducción mediante el modelo de Mayergoyz es:

1. Calcular la inducción estática  $\tilde{B}(t)$  para el historial de campo  $H(t)$  mediante el modelo de Preisach clásico.
2. Determinar experimentalmente un conjunto de tiempos de relajación  $t_{ab}$ .
3. Construir el mapa discretizado de tiempos de relajación sobre el plano  $\mathbf{a}-\mathbf{b}$
4. Calcular la función  $q(\mathbf{a}, \mathbf{b})$  para el plano  $\mathbf{a}-\mathbf{b}$  discretizado
5. Calcular el coeficiente histerésico para cada nodo de tiempo del historial de campo mediante (4.36). Si se calcula mediante (4.32), previamente se debe calcular la función densidad dinámica  $\mathbf{m}(\mathbf{a}, \mathbf{b})$  mediante (4.31).
6. Calcular la función  $b(t)$  para cada nodo de tiempo del historial de campo mediante (4.35).
7. Calcular la inducción  $B(t)$  para cada nodo de tiempo del historial de campo mediante (4.34).

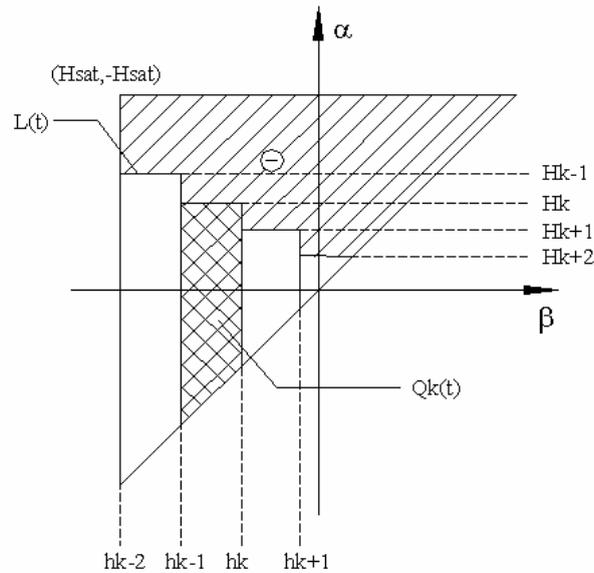


Figura 4-11. Triángulo límite del plano  $\alpha$ - $\beta$  descompuesto en paralelogramos

### 4.3 Modelo de Nakmahachalasint-Ngo-VuQuoc

Entre los investigadores que tratan el problema del modelado de la histéresis magnética, Paiboon Nakmahachalasint y Khai D.T. Ngo, llevan varios años trabajando en modelos para ferritas. Después de trabajar y ampliar el modelo de Basso-Bertotti, juntamente con Loc Vu-Quoc han propuesto [Nakmahachalasint, Ngo y Vu-Quoc 2004] un modelo dinámico que parte del modelo de Basso-Bertotti [Basso y Bertotti, 1996; Nakmahachalasint y Ngo, 2002] y permite el modelado del proceso de magnetización en ferritas.

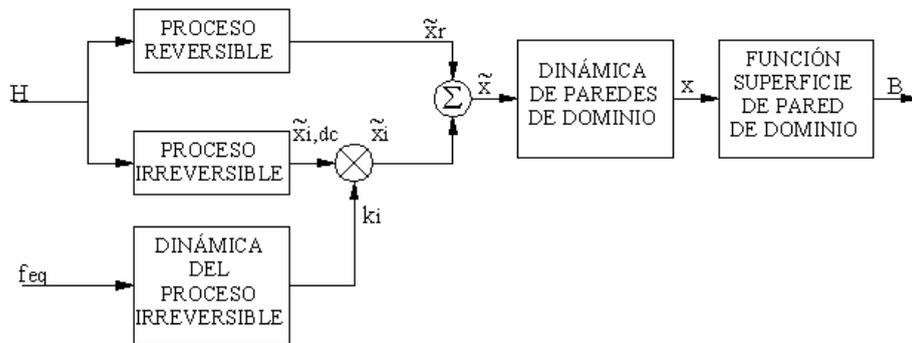


Figura 4-12. Esquema de bloques del modelo Nakmahachalasint-Ngo-VuQuoc

### 4.3.1 Fundamentos

#### 4.3.1.1 Visión general del modelo

El modelo propuesto se resume en la figura 4-12. Los bloques “Proceso reversible”, “Proceso irreversible” y “Función superficie de pared de dominio” forman el modelo de Basso-Bertotti (ver apartado 3.8.4). Recuérdese que dicho modelo permitía determinar el movimiento de las paredes de los dominios para un historial de campo determinado empleando un esquema similar al del modelo de Preisach, se puede considerar que es una variación del modelo de Preisach. Téngase también en mente, que el modelo de Basso-Bertotti, se puede considerar en dos fases, en una primera fase se calcula el desplazamiento de una pared de dominio ideal con el esquema de operadores típico del modelo de Preisach, y en una segunda fase se globaliza a todo el conjunto de paredes de dominio del material calculándose la magnetización  $M$  aplicando la función superficie de pared de dominio  $R(M)$ .

El campo de entrada  $H$  genera un desplazamiento estático  $\tilde{x}$  de las paredes de los dominios, este desplazamiento consta de una componente reversible  $\tilde{x}_r$  y una componente irreversible  $\tilde{x}_i$ . Estas componentes se determinan mediante el modelo de Basso-Bertotti, pero aún no se ha aplicado la función superficie de pared de dominio  $R(M)$ , por tanto este desplazamiento calculado, no solo es estático –el modelo de Basso-Bertotti no es dinámico- sino que además es el desplazamiento de una única pared. Hasta que no se aplique la función  $R(M)$  no se puede considerar que el desplazamiento es global. En consecuencia en el esquema de la figura 4-12, el desplazamiento  $\tilde{x}$  es debido a una única pared idealizada y en cierta medida es estático.

Los autores del modelo presentado, para obtener la componente irreversible del desplazamiento de la pared multiplican el resultado obtenido mediante el modelo de Basso-Bertotti por una función  $k_i$  que depende de la frecuencia del campo aplicado. Esta función se determina en el bloque “Dinámica de paredes de dominio”. De esta forma se tienen en consideración los efectos de las corrientes inducidas en el desplazamiento irreversible de la pared.

Una vez determinado el desplazamiento  $\tilde{x}$  de una pared de dominio, interviene el bloque “Dinámica de paredes de dominio”, este ya propio del modelo, que determina el desplazamiento de la pared  $x$  dinámico. Este desplazamiento es globalizado a todas las paredes del material y posteriormente convertido a inducción  $B$  mediante el bloque “Función superficie de dominio”, que en realidad es la segunda fase del modelo de Basso-Bertotti.

A continuación se exponen brevemente los dos nuevos bloques que aporta el modelo de Nakmahachalasint-Ngo-VuQuoc respecto al modelo de Basso-Bertotti.

#### 4.3.1.2 Bloque “Dinámica de paredes de dominio”

La función de dinámica de pared se puede sintetizar empleando la permeabilidad compleja  $\mathbf{m}$ , definida como:

$$\mathbf{m} = \frac{dB}{dH} \Big|_{(H,B) \rightarrow (0,0)} = \mathbf{m}_0 + \mathbf{m}_0 \frac{dM}{dx} \frac{dx}{d\tilde{x}} \frac{d\tilde{x}}{dH} \Big|_{(H,M) \rightarrow (0,0)} \quad (4.37)$$

De la ecuación (4.37), la permeabilidad compleja se puede determinar experimentalmente a partir del ciclo límite, mientras que los términos  $dM/dx \Big|_{(x,M) \rightarrow (0,0)}$  y  $d\tilde{x}/dH \Big|_{(H,\tilde{x}) \rightarrow (0,0)}$  se obtienen del modelo de Basso-Bertotti. De hecho, dichos términos se pueden definir como:

$$M_s = \frac{dM}{dx} \Big|_{(x,M) \rightarrow (0,0)} \quad (4.38)$$

$$c\mathbf{c} = \frac{d\tilde{x}}{dH} \Big|_{(H,\tilde{x}) \rightarrow (0,0)} \quad (4.39)$$

Donde  $c$  es un coeficiente que sirve de ponderación de la contribución del proceso reversible y  $\mathbf{c}$  es la susceptibilidad máxima normalizada. De esta forma, aplicando la ecuación (4.37), se puede calcular  $dx/d\tilde{x}$ .

La permeabilidad, en el dominio de la frecuencia, se puede representar como [Nakmahachalasint, Ngo y Vu-Quoc, 2004]:

$$\mathbf{m}(s) = \mathbf{m}_0 \left( 1 + \frac{\mathbf{c}_r}{1 + \frac{s}{\mathbf{w}_r}} \right) \quad (4.40)$$

Donde  $s$  es la frecuencia compleja y  $\mathbf{w}$  define la frecuencia de corte del proceso reversible  $f_r$ :

$$\mathbf{w}_r = 2\mathbf{p} f_r \quad (4.41)$$

Aplicando las ecuaciones (4.37), (4.38), (4.39) y (4.40):

$$\left. \frac{dx}{d\tilde{x}} \right|_{(\tilde{x},x) \rightarrow (0,0)} = \left. \frac{x}{\tilde{x}} \right|_{(\tilde{x},x) \rightarrow (0,0)} = \frac{1}{1 + \frac{s}{\mathbf{w}_r}} \quad (4.42)$$

Expresando esta última ecuación en el dominio del tiempo:

$$\frac{1}{\mathbf{w}_r} \frac{dx(t)}{dt} + x(t) = \tilde{x} \quad (4.43)$$

Hemos obtenido la expresión para determinar el desplazamiento dinámico  $\tilde{x}$  a partir del estático  $x$  y una constante  $\mathbf{w}_r$ .

#### 4.3.1.3 Bloque “Dinámica del proceso reversible”

Como que el desplazamiento de fase entre  $x_{i,dc}$  y  $x_i$  es pequeño y considerando el ruido de las mediciones, los autores consideran lícita la hipótesis que  $x_{i,dc}$  es proporcional a  $x_i$  mediante un parámetro de escalado dependiente de la frecuencia  $k_i$ :

$$x_i(f) = k_i x_{i,dc}, \forall 0 \leq k_i \leq 1 \quad (4.44)$$

Donde  $k_i \rightarrow 1 \forall f \rightarrow 10\text{kHz}$ . El parámetro de escalado  $k_i$  se obtiene para cada frecuencia, calculando la pendiente de la línea que ajusta mejor los pares de datos  $(x_i, x_{i,dc})$ . Por ajuste de mínimos cuadrados de los resultados obtenidos para cada frecuencia [Nakmahachalasint, Ngo y Vu-Quoc, 2004]:

$$k_i(f) = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{f}{f_i}\right)^2}} \quad (4.45)$$

Donde  $f_i$  es la frecuencia de operación en estado estacionario, que puede ser conocida mediante una simulación en tiempo real. Se puede emplear una frecuencia equivalente.

$$f_{eq}(t_N) = \frac{1}{2pT_s} a \cos \left( \frac{\sum_{k=N-W}^{N-1} [B(t_k) + B(t_{k-2})] B(t_{k-1})}{2 \sum_{k=N-W}^{N-1} [B(t_{k-1})]^2} \right) \quad (4.46)$$

Donde  $t_N = NT_s$  es el instante de tiempo en el que se produce la muestra  $N$ ,  $T_s$  es el tiempo entre muestras,  $W$  es el número de muestras más recientes para estimar la frecuencia.

### 4.3.2 Desarrollo

El modelo de Nakmahachalasint-Ngo-VuQuoc comprende un conjunto de ecuaciones que describen la curva de primera inducción y todos los ciclos mayores y curvas inversas.

Cada punto en la trayectoria  $B=f(H)$  está asociado con una posición de la pared del dominio  $\tilde{x}$  (o  $\tilde{x}_{INICIAL}$  si la curva es la de primera inducción).

El primer punto de cada trayectoria  $B=f(H)$  se denomina genéricamente punto de inversión y está caracterizado por los parámetros  $(B_0, H_0, \tilde{x}_0, x, t_0)$ . En concreto, si la curva es la de primera inducción el punto de inversión viene caracterizado por el valor de los parámetros  $(B_0, H_0, \tilde{x}_0, x, t_0) = (0, 0, 0, 0, 0)$ .

Empelando el modelo de Basso-Bertotti [Nakmahachalasint, Ngo, 2000] en combinación con los bloques “Dinámica de paredes de dominio” y “Dinámica del proceso irreversible”, la variable  $\tilde{x}_0$  y la inducción se pueden calcular siguiendo el siguiente proceso:

1. Calcular la variación de campo  $DH$ :

$$\Delta H = H - H_0 \quad (4.47)$$

2. Empleando la variación de campo  $DH$  de (4.47), calcular la componente reversible al cambio en la posición de la pared  $x_r$ :

$$x_r(\Delta H) = c c \Delta H \quad (4.48)$$

3. Empleando la variación del campo  $\mathbf{DH}$  de (4.47), calcular la componente reversible del cambio en la posición de la pared en corriente continua:

$$x_{INICIALdc}(H) = c \operatorname{sgn}(H)(1-c) P_i(|H|) \quad (4.49)$$

$$x_{irrdc}(\Delta H) = 2c \operatorname{sgn}(\Delta H)(1-c) P_{irr} \left( \left| \frac{\Delta H}{2} \right| \right) \quad (4.50)$$

Donde:

$$P_{irr}(\Delta H) = (\Delta H - H_{c,i}) + H_{c,i} e^{-\frac{n\Delta H}{H_{c,i}}} \sum_{k=1}^n \frac{k}{n(n-k)!} \left( \frac{n\Delta H}{H_{c,i}} \right)^{n-k} \quad (4.51)$$

En la ecuación (4.51),  $n$  es un entero positivo que controla la forma de la función densidad irreversible y  $H_{c,i}$  es la fuerza coercitiva asociada con el proceso irreversible. Si  $H_c$  es la fuerza coercitiva,  $H_{c,i}$  se determina como:

$$H_{c,i} = \frac{H_c}{1-c} \quad (4.52)$$

4. Calcular la frecuencia equivalente mediante la ecuación (4.46)

5. Calcular el parámetro de escalado  $k_i$  mediante la ecuación (4.45)

6. Con las ecuaciones (4.49), (4.50) y (4.45) calcular la componente irreversible del movimiento estático de la pared:

$$\tilde{x}_{INICIALi}(H, f_{eq}) = k_i(f_{eq}) \tilde{x}_{INICIALdc}(H) \quad (4.53)$$

$$\tilde{x}_i(\Delta H, f_{eq}) = k_i(f_{eq}) \tilde{x}_{irdc}(\Delta H) \quad (4.54)$$

7. Empleando (4.48), (4.53) o (4.54) calcular el desplazamiento estático total de la pared  $\tilde{x}$ :

$$\tilde{x}_{INICIAL}(H, f_{eq}) = \tilde{x}_r(H) + \tilde{x}_{INICIALi}(H, f_{eq}) \quad (4.55)$$

$$\tilde{x}(\Delta H, f_{eq}) = \tilde{x}_0 + \tilde{x}_r(\Delta H) + \tilde{x}_i(\Delta H, f_{eq}) \quad (4.56)$$

8. Calcular la posición dinámica de la pared  $x$  a partir de la posición estática  $\tilde{x}$ , calculada en el paso anterior.

$$\frac{1}{2\mathbf{p}f_r} \frac{dx(H,t)}{dt} + x(H,t) = \tilde{x}(H, f_{eq}) \quad (4.57)$$

$$x(H_0, t_0) = x_0 \quad (4.58)$$

9. Hallar la magnetización normalizada  $m=M/M_s$  a partir de la posición de la pared dinámica  $x$  calculada en el paso anterior:

$$m = \begin{cases} \sqrt{m_t} \tanh\left(\frac{x}{\sqrt{m_t}}\right), \forall |x| \leq x_t \\ \text{sgn}(x) \left(1 - \frac{1-m_t}{1-x_t+|x|}\right), \forall |x| > x_t \end{cases} \quad (4.59)$$

$$x_t = \sqrt{m_t} \operatorname{arctanh}(\sqrt{m_t}) \quad (4.60)$$

Donde  $m_t$  es la magnetización normalizada que define la transición entre ciclos mayores y menores.

10. Finalmente, la inducción  $B$  se calcula mediante:

$$B = \mathbf{m}_0 H + m B_s \quad (4.61)$$

Donde  $B_s$  es la densidad de flujo de saturación, definido como  $\mathbf{m}_0 M_s$ , siendo  $M_s$  la magnetización de saturación.

### 4.3.3 Caracterización

Para caracterizar el modelo se deben determinar los siguientes parámetros:

- Susceptibilidad máxima normalizada  $c$
- Coeficiente de ponderación de la contribución del proceso reversible  $c$
- Campo coercitivo  $H_c$
- Inducción de saturación  $B_s$
- Magnetización normalizada de transición  $m_t$
- Frecuencia de corte reversible  $f_r$
- Frecuencia de corte irreversible  $f_i$

El campo coercitivo y la inducción de saturación se pueden obtener del ciclo límite. Para los parámetros restantes se debe realizar un ensayo aparte. La muestra se prepara con el mismo procedimiento relatado en el siguiente capítulo para el ensayo balístico. Básicamente se trata de hacer dos arrollamientos, un primario de excitación y un secundario de exploración. Entonces se somete la muestra a un campo periódico, registrando la señal de la intensidad en el primario (proporcional al campo) y la tensión en el secundario en vacío (relacionada con el flujo en la muestra). Estos parámetros se obtienen por ajuste de la señales de tensión e intensidad registradas.

#### 4.4 Método de Fűzi-Iványi

Hace unos años, J.Fűzi y A.Iványi propusieron un sencillo algoritmo basado en el modelo de Preisach para generalizarlo a modelo dinámico [Fűzi e Ivanyi, 2001].

El modelo emplea el modelo de Preisach clásico, pero la entrada al mismo no es el historial de campo  $H(t)$  si no un historial de campo modificado  $H_m(t)$  que se determina mediante la siguiente ecuación:

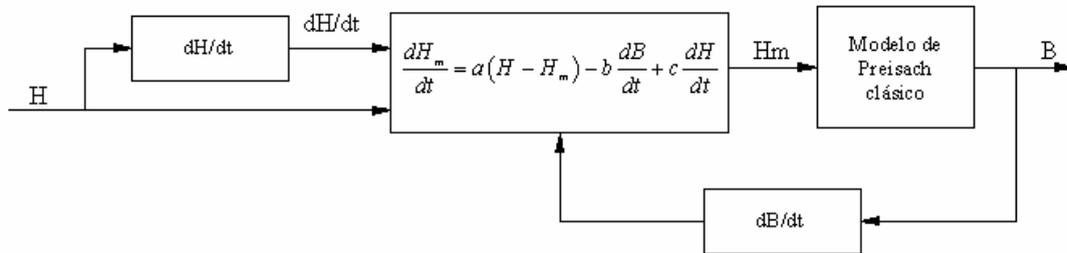
$$\frac{dH_m}{dt} = a(H - H_m) - b \frac{dB}{dt} + c \frac{dH}{dt} \quad (4.62)$$

Determinar el campo modificado mediante (4.56) implica realizar el algoritmo mostrado en la figura 4-13.

El parámetro  $a$  tiene el efecto de aproximar la forma del ciclo dinámico a la del ciclo estático, el parámetro  $b$  ensancha el ciclo y el parámetro  $c$  controla la inclinación del ciclo.

La caracterización del modelo, aparte de determinar la función densidad del modelo de Preisach clásico por los métodos ya comentados, consiste en determinar los parámetros  $a$ ,  $b$ ,

y  $c$ . Estos parámetros se determinan por ensayo y error respecto a un ciclo para la frecuencia y forma de onda deseada



**Figura 4-13.** Algoritmo de cálculo del campo modificado en el modelo Fűzi-Iványi

El modelo es potencialmente interesante pues aparentemente es sencillo de realizar y sus parámetros tan sólo requieren de una curva a la frecuencia deseada para su caracterización. Desconocemos la dependencia de los parámetros con la frecuencia o la forma de onda, esto es, si se deben recalcular para otras frecuencias o formas de onda del campo.

Hemos probado el desarrollo del presente modelo, pero hasta el momento de escribir el presente documento no hemos conseguido resultados con él.

#### 4.5 Valoración de los modelos analizados

El modelo de Nakmahachalasint-Ngo-VuQuoc presenta el mismo problema que el modelo de Basso-Bertotti, en el cual se apoya. No es capaz de reproducir las rotaciones coherentes, que tienen un papel trascendental en el proceso de magnetización de los materiales blandos. Por lo que, en principio, no es una primera opción si disponemos de modelos más adecuados a nuestro ámbito de aplicación.

El modelo de Fűzi-Iványi es potencialmente interesante pero, como ya hemos comentado antes, hasta el momento no hemos logrado su correcto funcionamiento.

De los dos modelos tipo Preisach dinámicos analizados restantes, el más adecuado es el modelo de Bertotti. El modelo de Mayergoyz tiene una serie de inconvenientes que lo convierten en una mala opción:

- Añade un parámetro más a caracterizar, el coeficiente histerésico  $\hat{a}(H(t))$ , cuyo cálculo implica el conocimiento de los parámetros de relajamiento  $t_{ab}$ . El proceso de cálculo del nuevo parámetro, en definitiva, es complejo.
- Para determinar los coeficientes de relajamiento necesitamos de un nuevo ensayo específico. Además se debe realizar una nueva extrapolación para calcular dichos coeficientes para los puntos discretizados del plano de Preisach.
- Se necesita calcular previamente la inducción estática  $\hat{B}$  mediante el modelo de Preisach clásico. Esto complica y ralentiza aún más el tiempo de cálculo.

Finalmente nos decantamos por el modelo de Bertotti, este también es un modelo de ejecución lenta, pues también necesita de muchos cálculos, pero no es tan complejo como el de Mayergoysz. Y sobre todo, no se requiere de otro ensayo específico para caracterizarlo.

- El modelo de Bertotti introduce un nuevo parámetro a identificar  $k$ , pero su cálculo es más simple que el coeficiente histerésico del modelo de Mayergoysz. No es necesario un nuevo ensayo específico, ni realizar una interpolación para el plano  $a-b$  discretizado.
- El modelo en sí mismo es más sencillo, más fácil de programar y de ejecución más rápida.
- No se requiere calcular previamente la inducción estática.

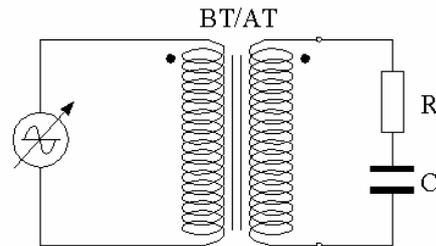
#### **4.6 Resultados**

A continuación se presentan los resultados obtenidos con el modelo adoptado para nuestros cálculos, el modelo de Bertotti. En concreto, se ha probado el modelo de Bertotti para la muestra A (ver apéndice D con las características de las muestras). La muestra A consiste en un transformador de dos arrollamientos, se emplea el arrollamiento de baja como primario y el arrollamiento de alta como secundario.

El primario de la muestra se alimenta a una frecuencia de 50Hz a cuatro amplitudes de tensión diferentes, con la mas alta se logra el ciclo límite, con las restantes tres ciclos

menores concéntricos al ciclo límite. La tensión de alimentación se puede considerar prácticamente sinusoidal (ver apartados 10.2.1.2 y 10.2.2.).

En el secundario se conecta una carga formada por un condensador de capacidad  $C=1\mu\text{F}$  en serie con una resistencia de  $R=1\text{M}\Omega$  (ver figura 4-14). Midiendo la tensión en bornes del condensador  $v_C(t)$  podemos determinar la inducción en el núcleo de la muestra  $B(t)$ .



**Figura 4-14.** Circuito para determinar experimentalmente los ciclos de histéresis de la muestra A.

Este procedimiento se expone de una forma detallada en el apartado 10.2.2. Las curvas de histéresis que empleamos para validar el modelo dinámico son la que se emplean también para obtener las pérdidas en el hierro totales a partir del área descrita por las curvas de histéresis.

Para no complicar la lectura de este capítulo, aquí tan solo mencionamos el ensayo seguido y presentamos las curvas obtenidas, para mayor información consultar el apartado 10.2.2.

El sistema de alimentación del circuito de la figura 4-14 está formado por una máquina asincrónica acoplada al eje de una máquina sincrónica. La máquina asincrónica está alimentada por un convertidor de frecuencia. El inducido de la máquina sincrónica es el que alimenta al circuito de la figura 4-14. En el apartado 10.2.1.2 se expone más detalladamente este sistema.

Siguiendo este procedimiento, las señales de campo y de inducción obtenidas son las mostradas en la figuras 4-15 y 4-16 respectivamente.

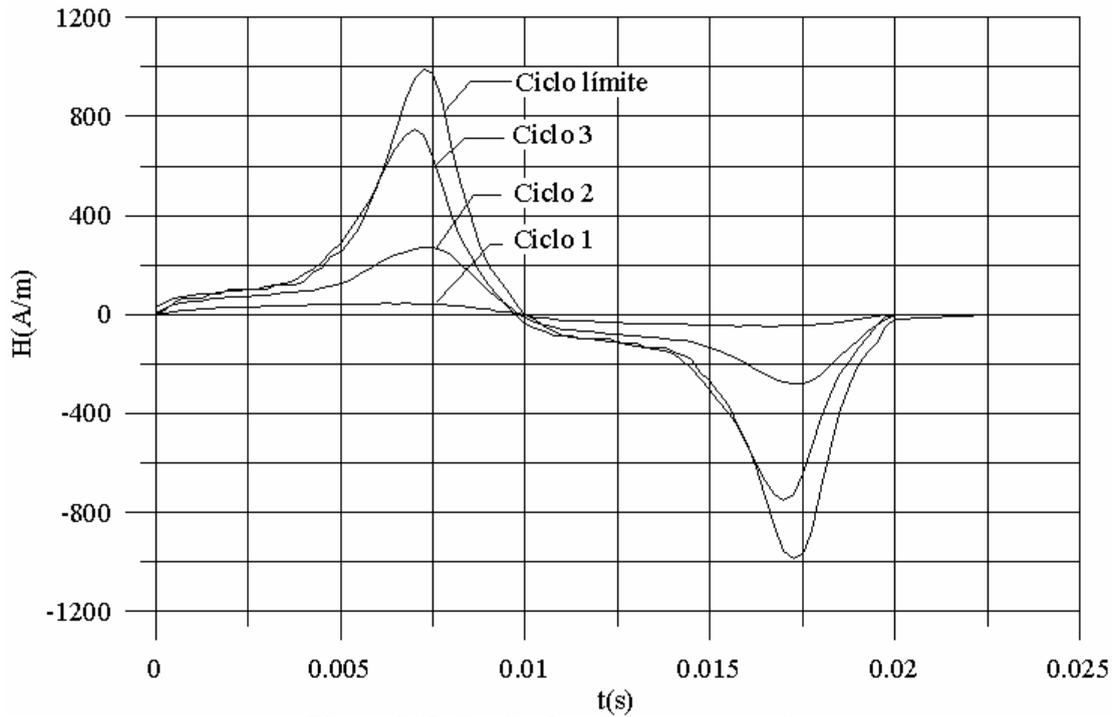


Figura 4-15. Señales de campo experimentales

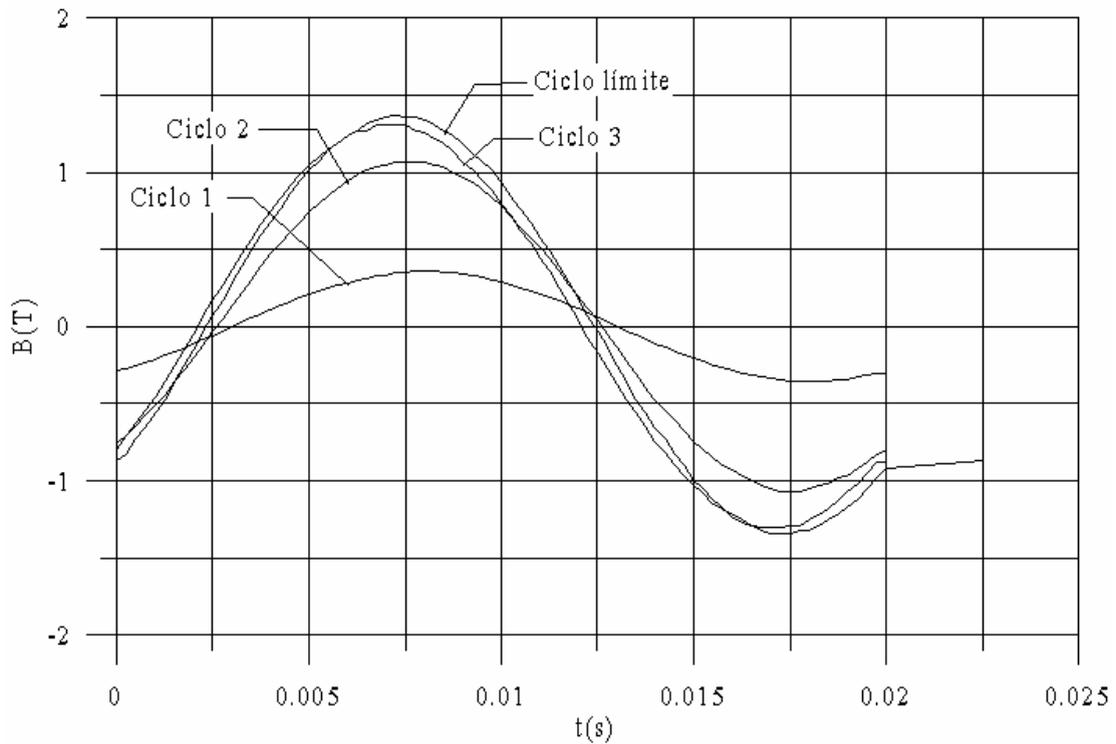


Figura 4-16. Señales de inducción experimentales

Combinando las señales de campo y las señales de intensidad se obtiene el ciclo límite experimental y tres ciclos experimentales (figura 4-17).

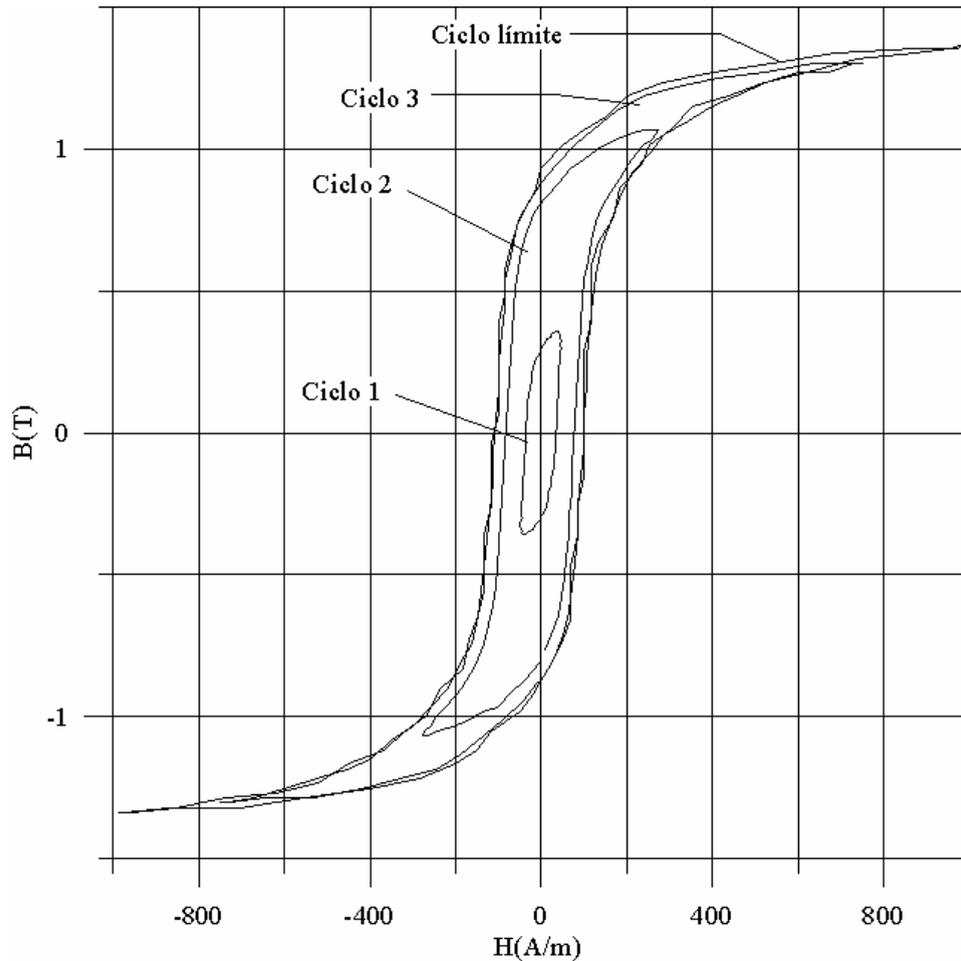


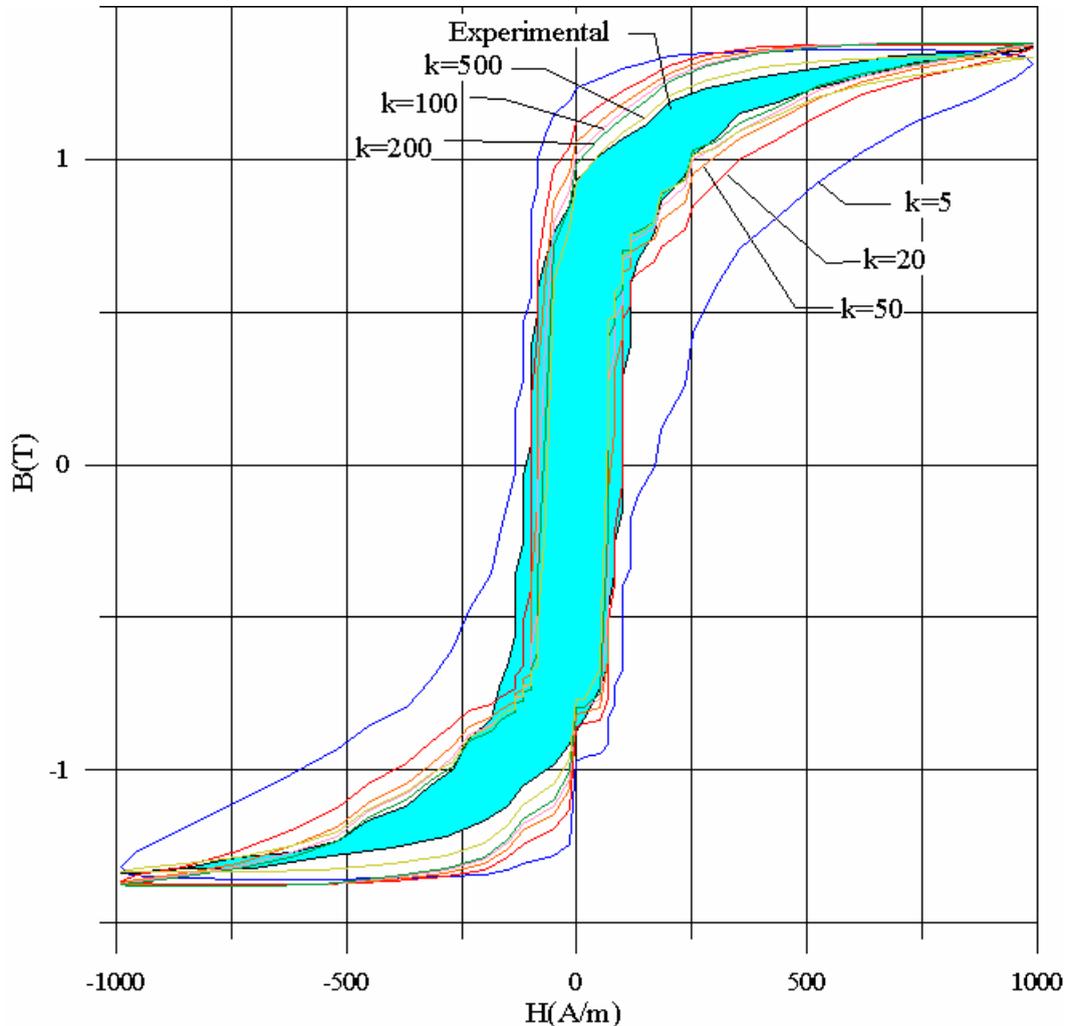
Figura 4-17. Ciclos de histéresis experimentales.

Puesto que la muestra A ya fue empleada para validar el modelo de Preisach clásico. Para el modelo de Bertotti se ha empleado la misma función densidad  $m(\mathbf{a}, \mathbf{b})$  empleada para la validación del modelo de Preisach clásico desarrollado según su definición. Esta función densidad se determinó a partir de las integrales de Everett siguiendo el método de Mayergoyz. Para más detalles consultar el apartado 3.9.1 del presente trabajo.

El modelo de Bertotti se emplea para calcular la inducción  $B(t)$  en la muestra A para los diversos historiales de campo  $H(t)$  experimentales. Esto es, se emplean los historiales de campo mostrados en la figura 4-15 como entrada al modelo de Bertotti.

Para comprobar el efecto del parámetro  $k$  del modelo de Bertotti se han calculado todos los ciclos para diversos parámetros  $k$ , en concreto,  $k=(5, 20, 50, 100, 200, 500)$ .

En la figura 4-18 se muestran los diversos ciclos límites obtenidos mediante el modelo de Bertotti, para los parámetros  $k$  indicados, y se comparan con el ciclo límite experimental. El área de color corresponde al ciclo límite experimental



**Figura 4-18.** Ciclos límite (50Hz) determinados mediante el modelo de Preisach para diversos parámetros  $k$ . El área corresponde al ciclo experimental.

En la figura 4-19 se muestran las diversas señales de inducción calculadas mediante el modelo de Bertotti.

Los mismos criterios se han seguido para los ciclos marcados como ciclo 1, ciclo 2 y ciclo 3 de la figura 4-17. En las figuras 4-20, 4-22 y 4-24 se muestran los ciclos de histéresis calculados mediante el modelo de Bertotti comparados con los correspondientes ciclos experimentales. En las figuras 4-21, 4-23 y 4-25 las señales de inducción para cada uno de los ciclos.

Para completar la validación del modelo de Bertotti, también se ha calculado curvas a 30Hz y 70Hz. Estas curvas se obtuvieron por un método similar al de las curvas de 50Hz (consultar el apartado 10.2.2). Se han calculado dos ciclos de 30Hz (ciclos 4 y 5), y cuatro ciclos de 70Hz (curvas 6, 7, 8 y 9). En las figuras 426 y 427 se representan los ciclos 4 y 5 respectivamente, en la figura 4-28 se muestra la forma de onda de la inducción para el ciclo 5. Los ciclos 6 a 9 se muestran en las figuras 428 a 432. Finalmente, en la figura 433 se muestra la forma de onda de la inducción para el ciclo 9.

Los ciclos a 30Hz se ha calculado con  $k=300$ , mientras que los de 70Hz se calcularon con  $k=90$ .

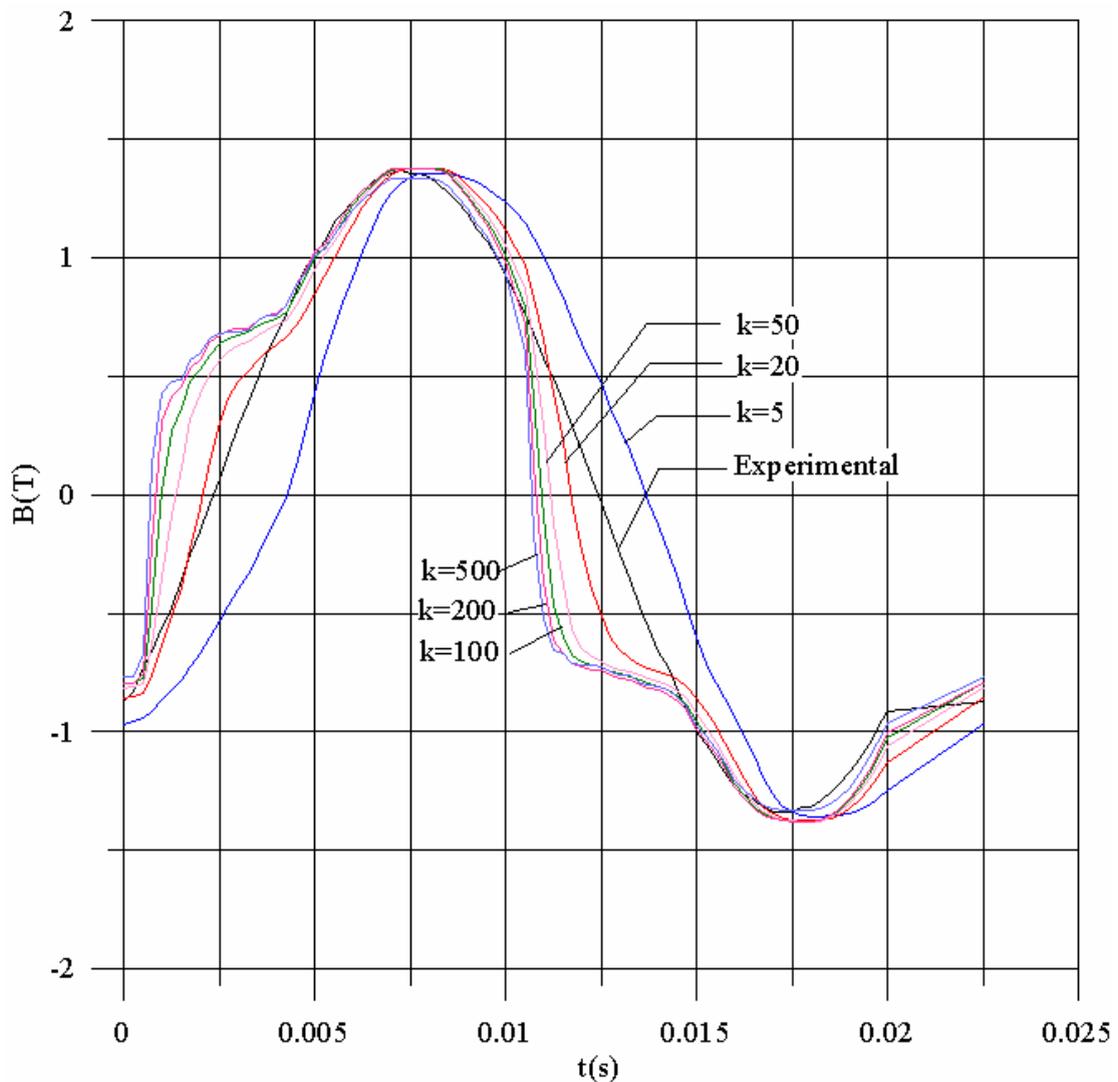
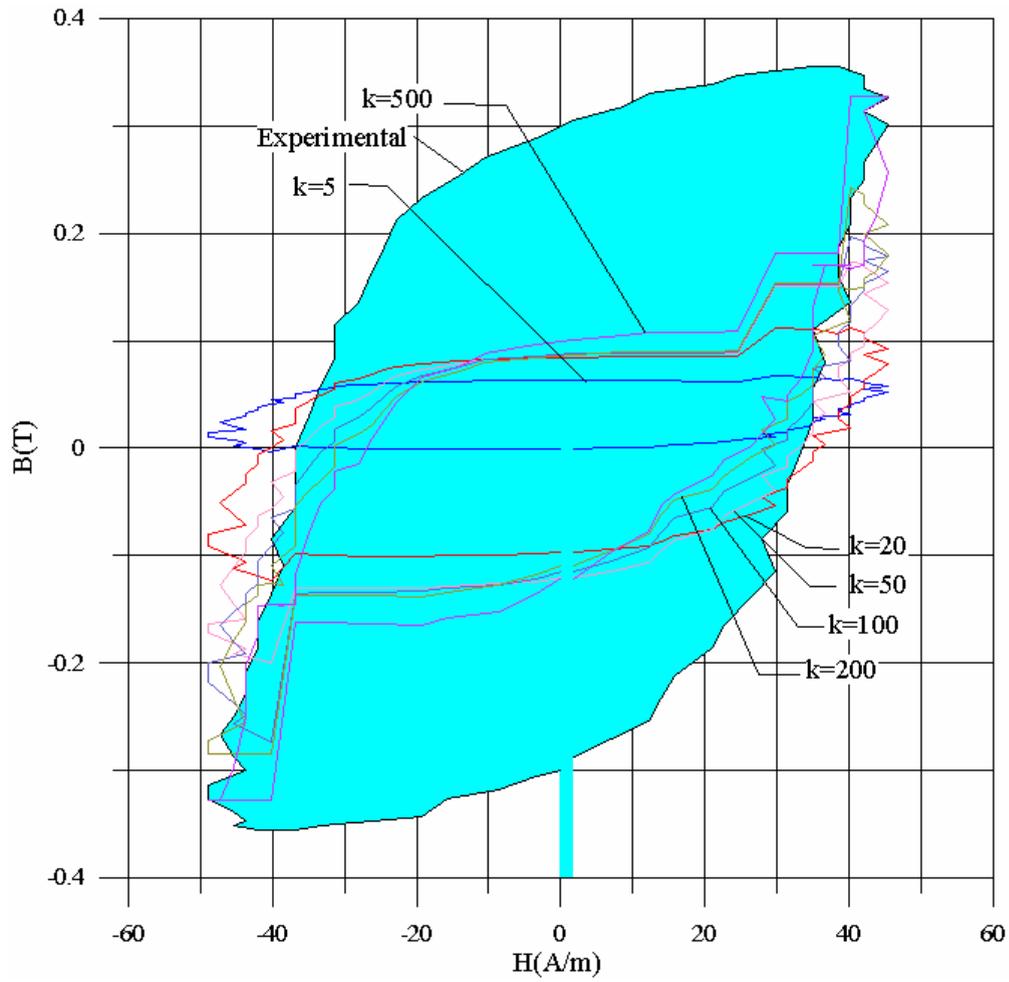


figura 4-19. Señales de inducción para el ciclo límite (50Hz).



*Figura 4-20. Ciclo 1(50Hz) determinado mediante el modelo de Bertotti*

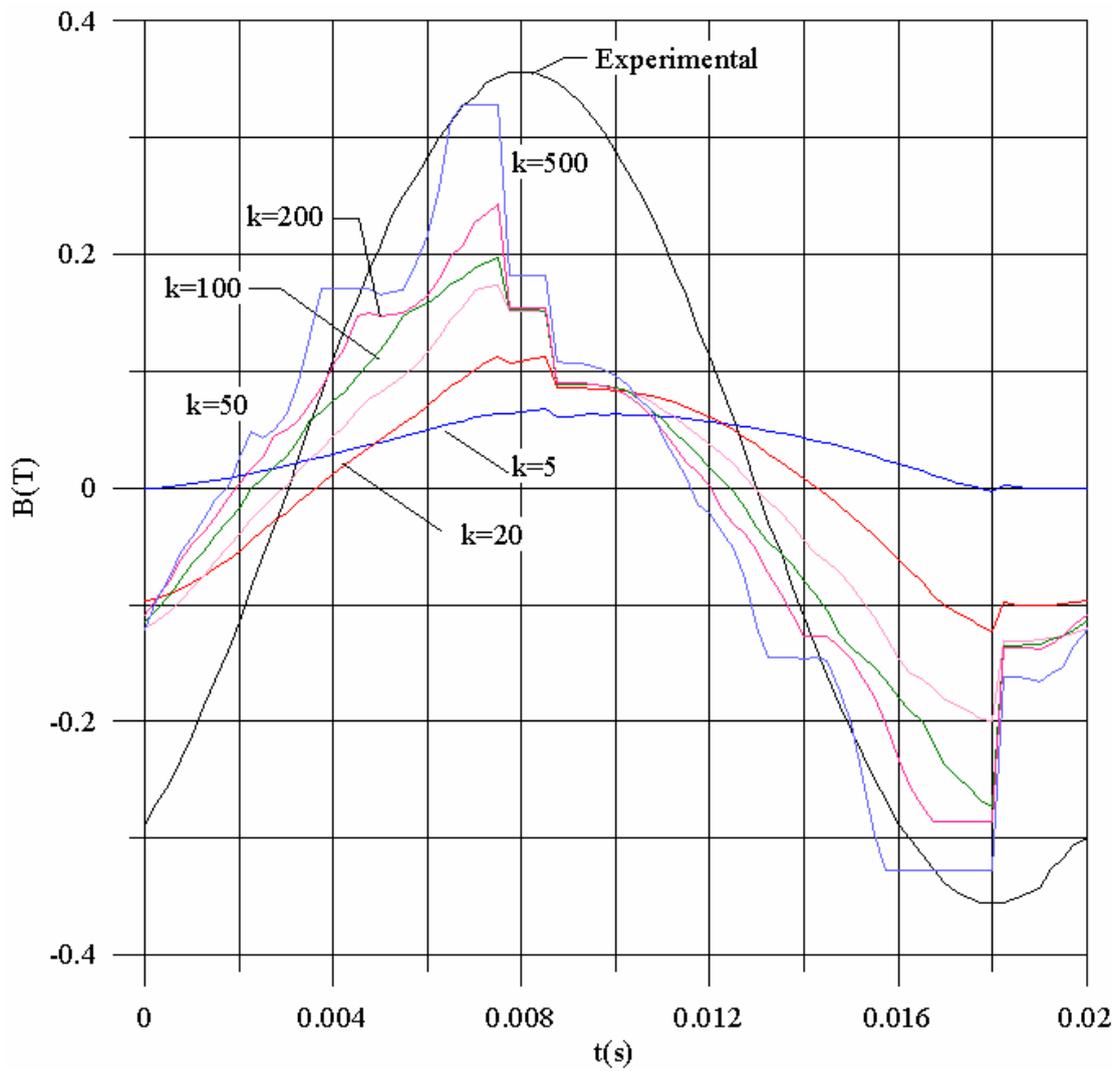


Figura 4-21. Señales de inducción para el ciclo 1 (50Hz)

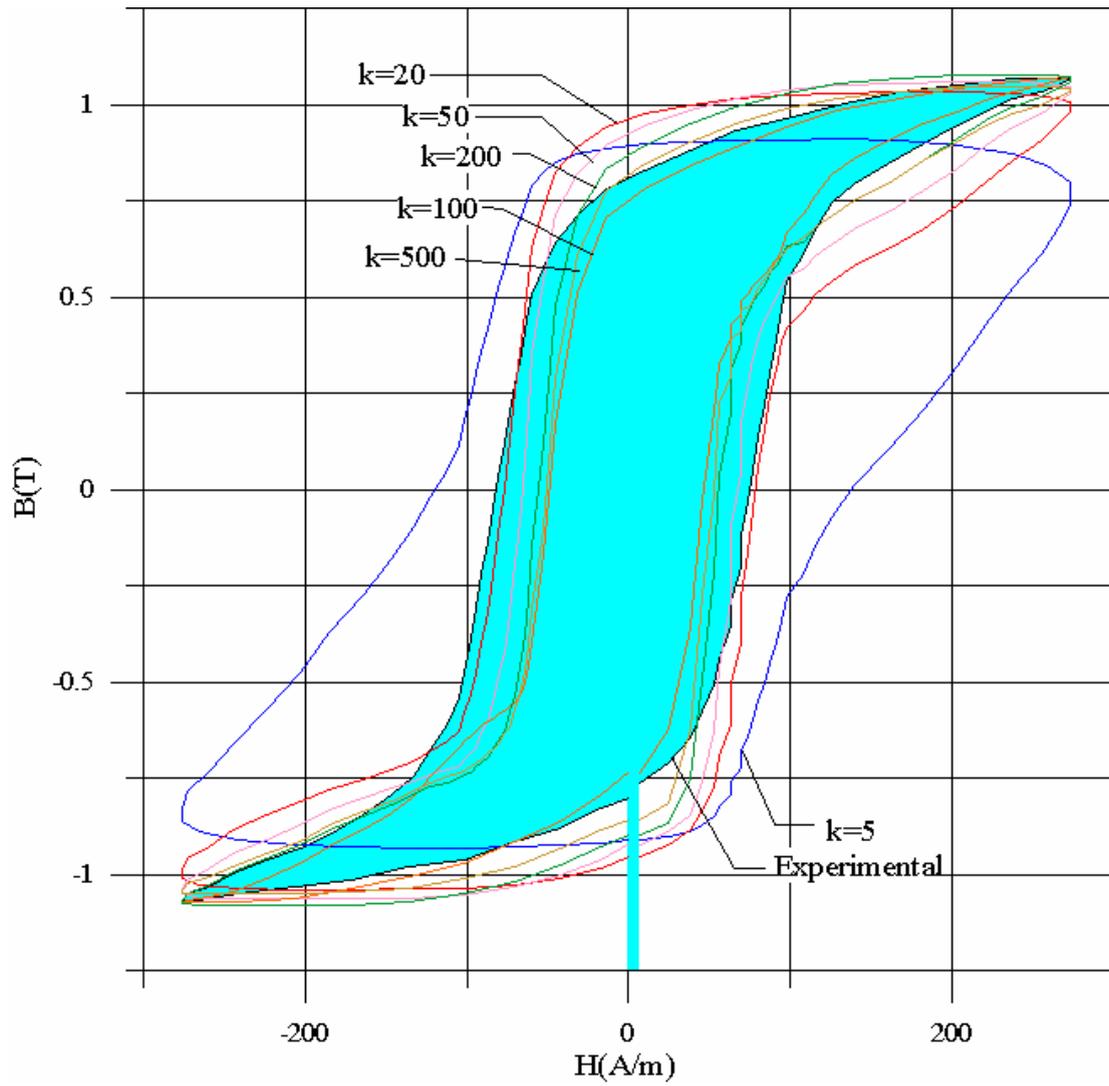


Figura 4-22. Ciclo 2 (50Hz) determinado mediante el modelo de Bertotti

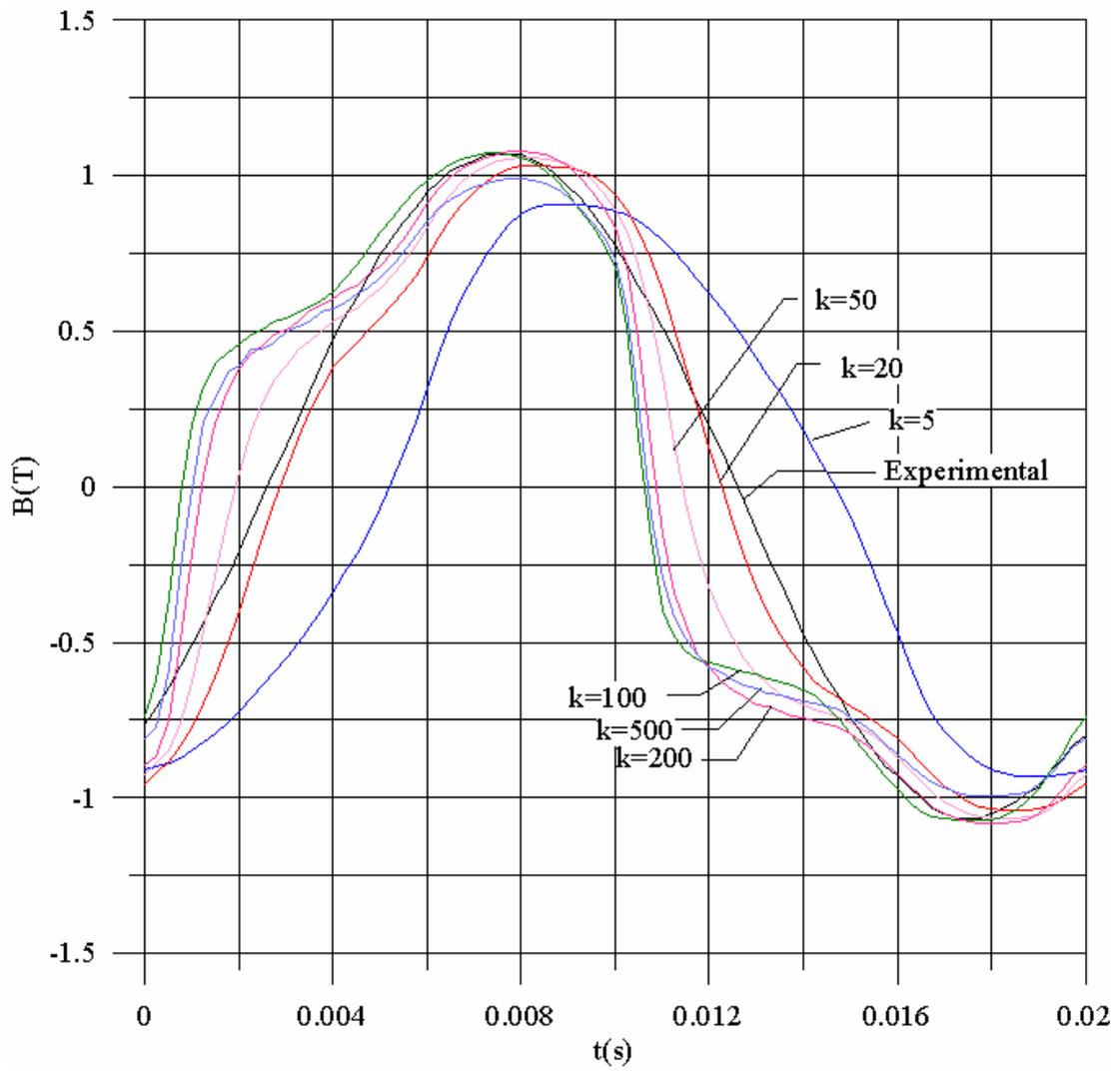


Figura 4-23. Señales de inducción para el ciclo 2 (50Hz)

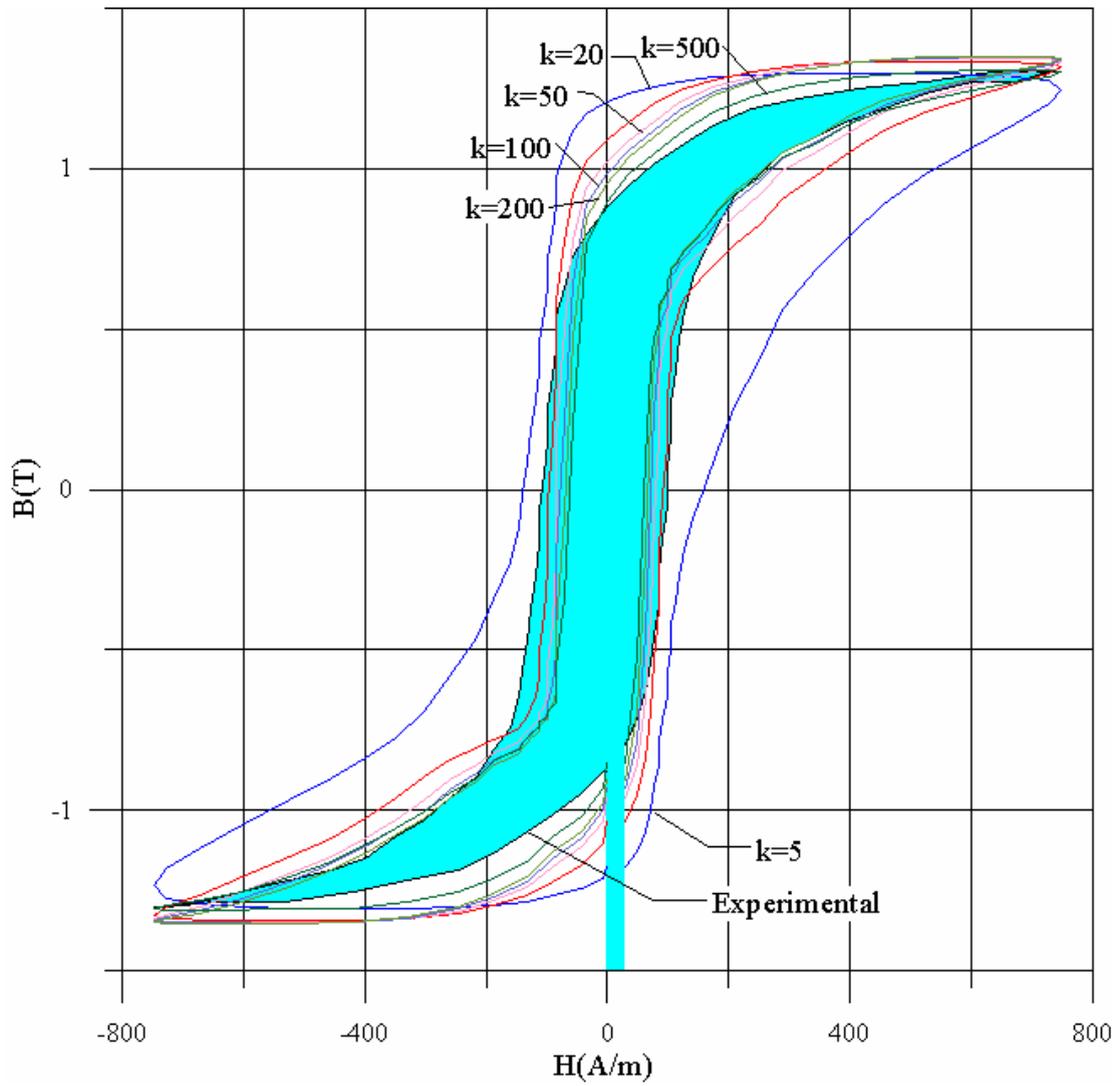


Figura 4-24. Ciclo 3(50Hz) determinado mediante el modelo de Bertotti

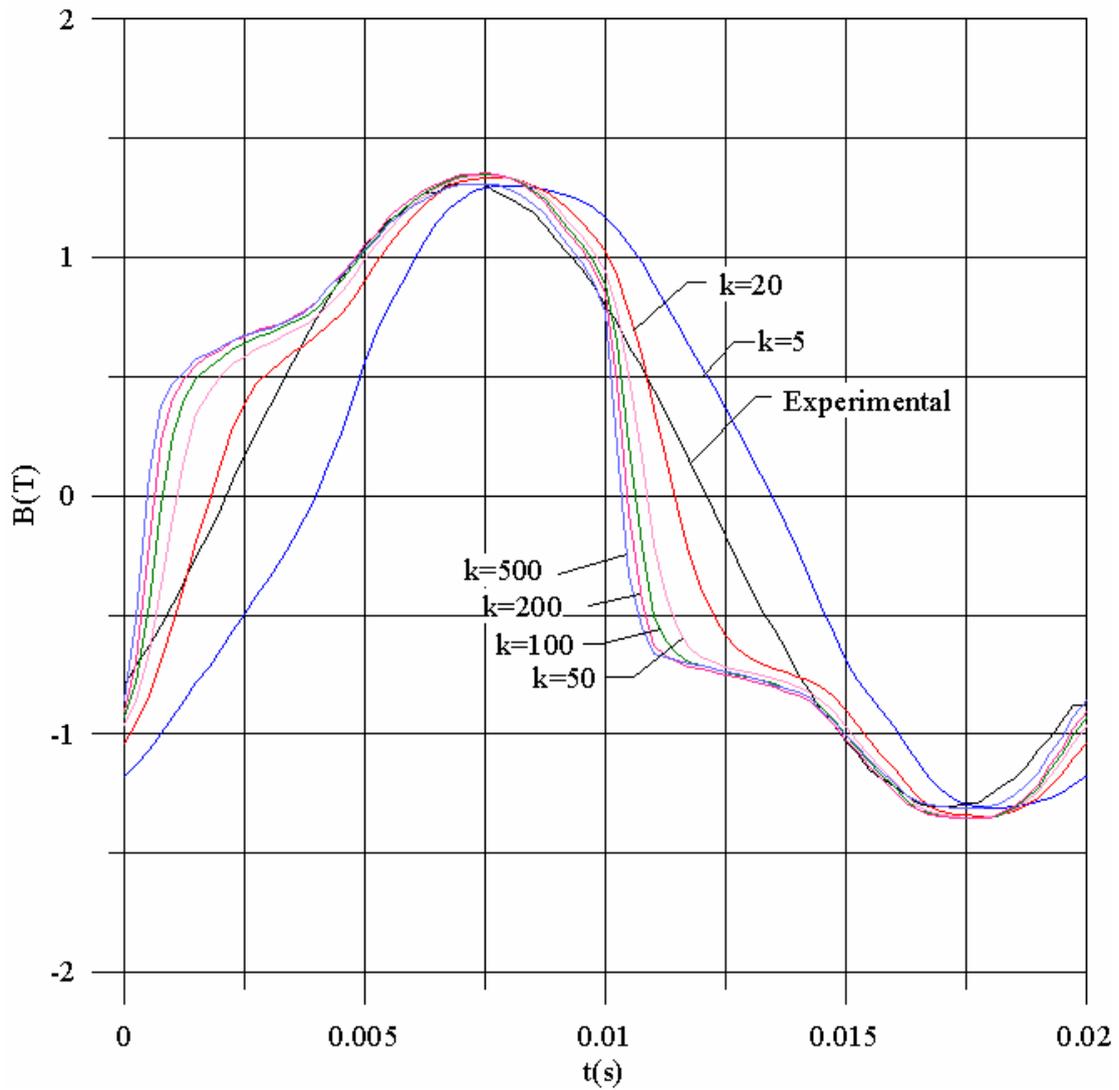


Figura 4-25. Señales de inducción para el ciclo 3 (50Hz)

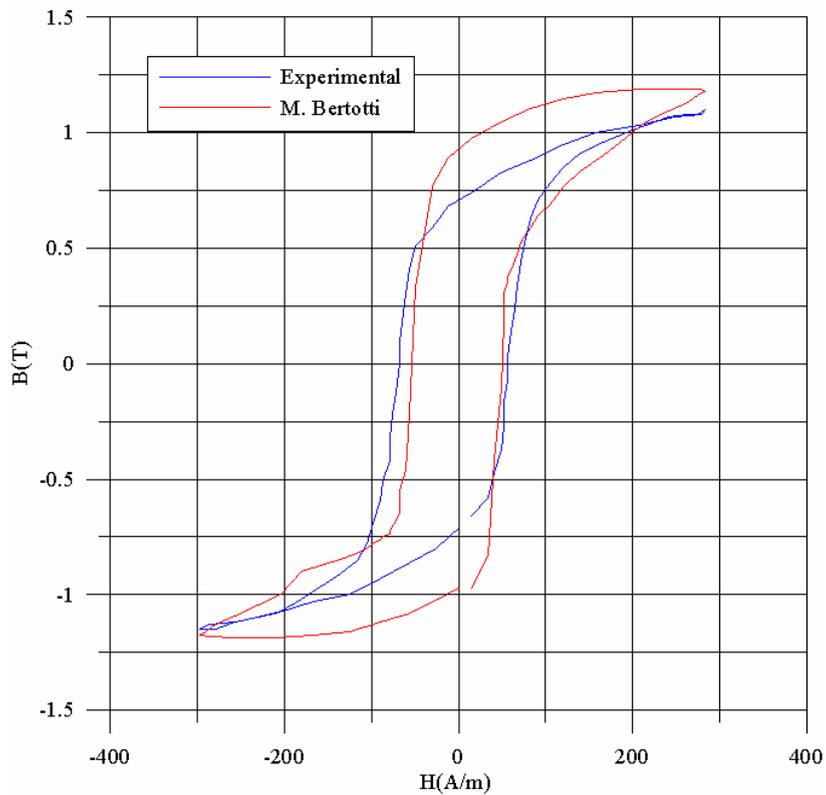


Figura 4-26. Ciclo 4 (30Hz) determinado mediante el modelo de Bertotti

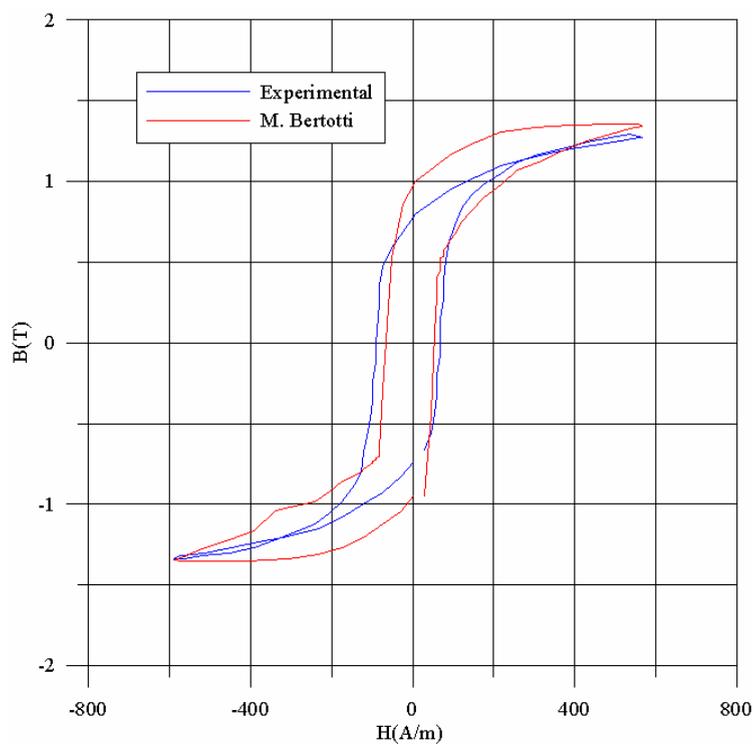


Figura 4-27. Ciclo 5 (30Hz) determinado mediante el modelo de Bertotti

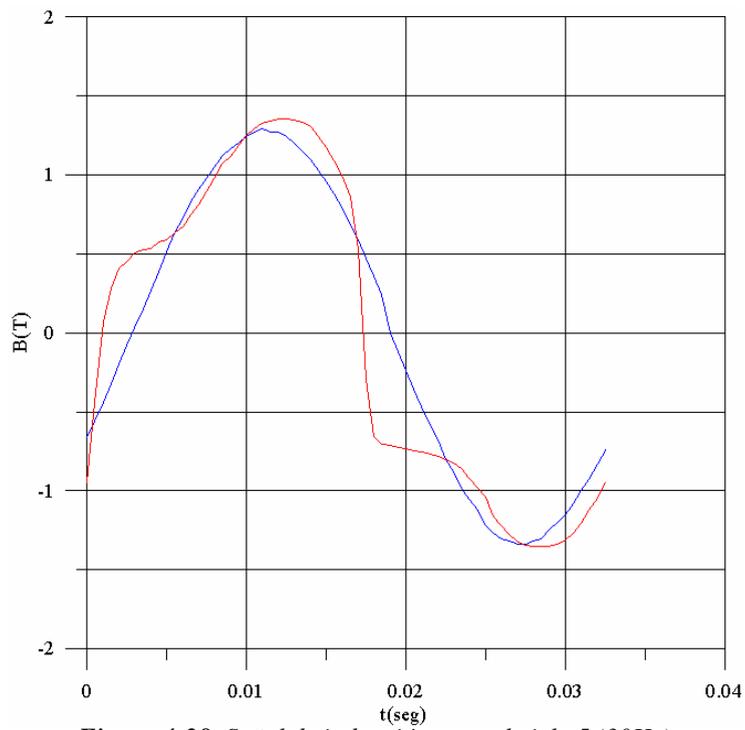


Figura 4-28. Señal de inducción para el ciclo 5 (30Hz)

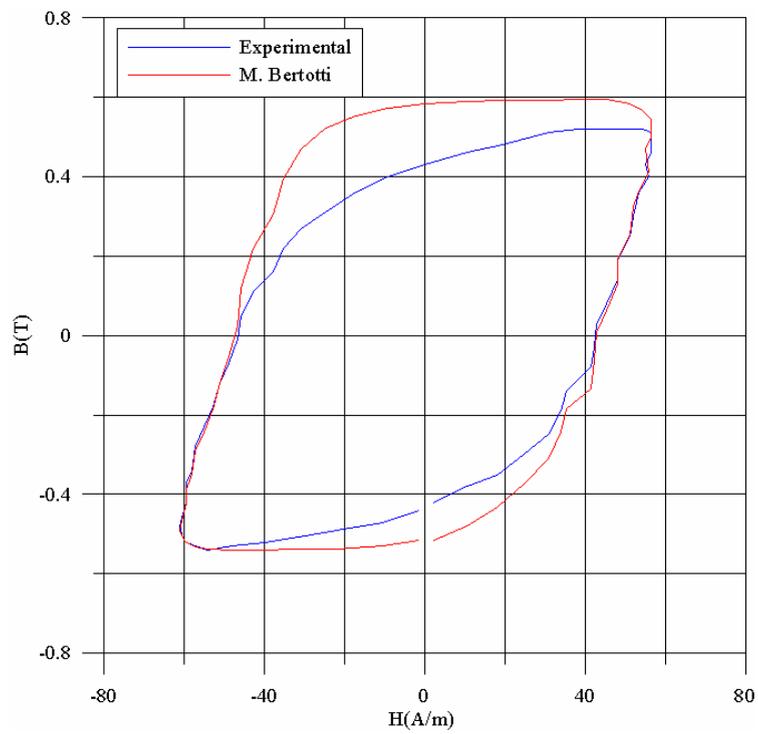
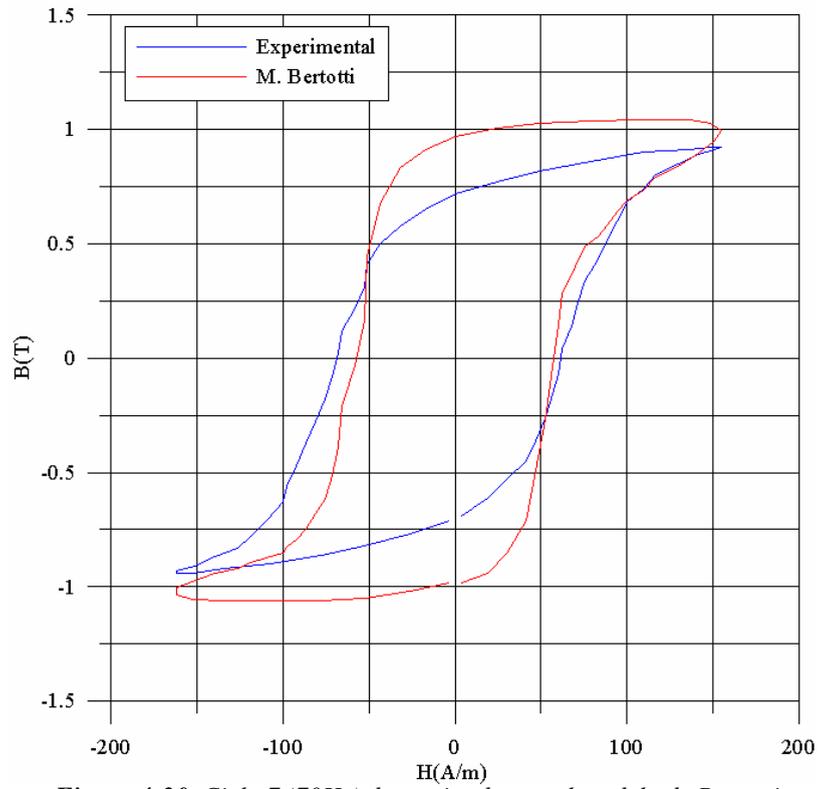
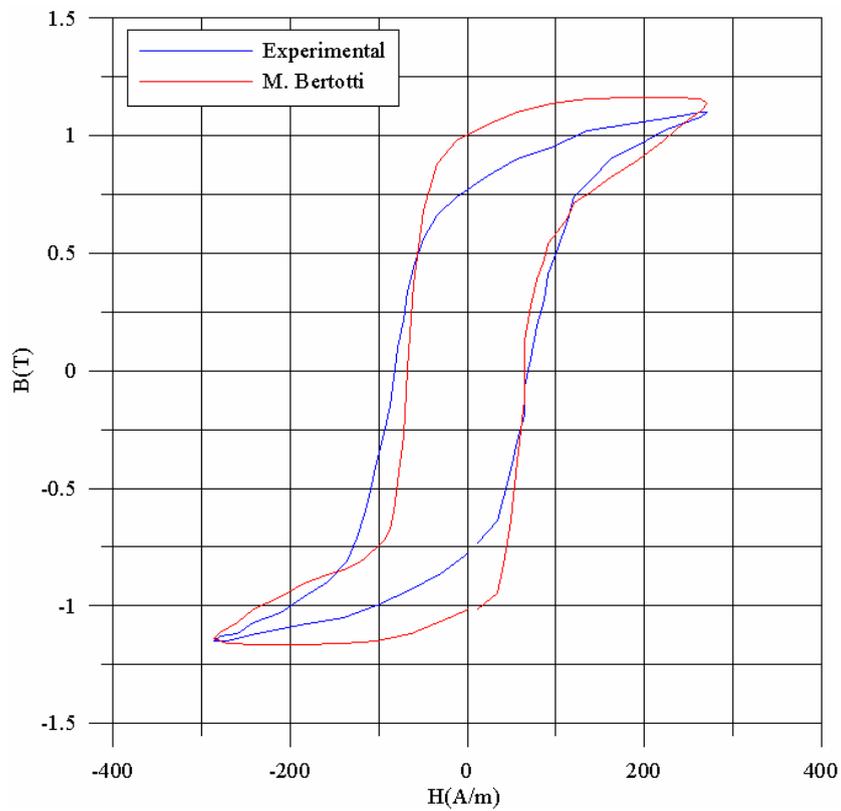


Figura 4-29. Ciclo 6 (50Hz) determinado mediante el modelo de Bertotti



**Figura 4-30.** Ciclo 7 (70Hz) determinado con el modelo de Bertotti



**Figura 4-31.** Ciclo 8 (70Hz) determinado con el modelo de Bertotti

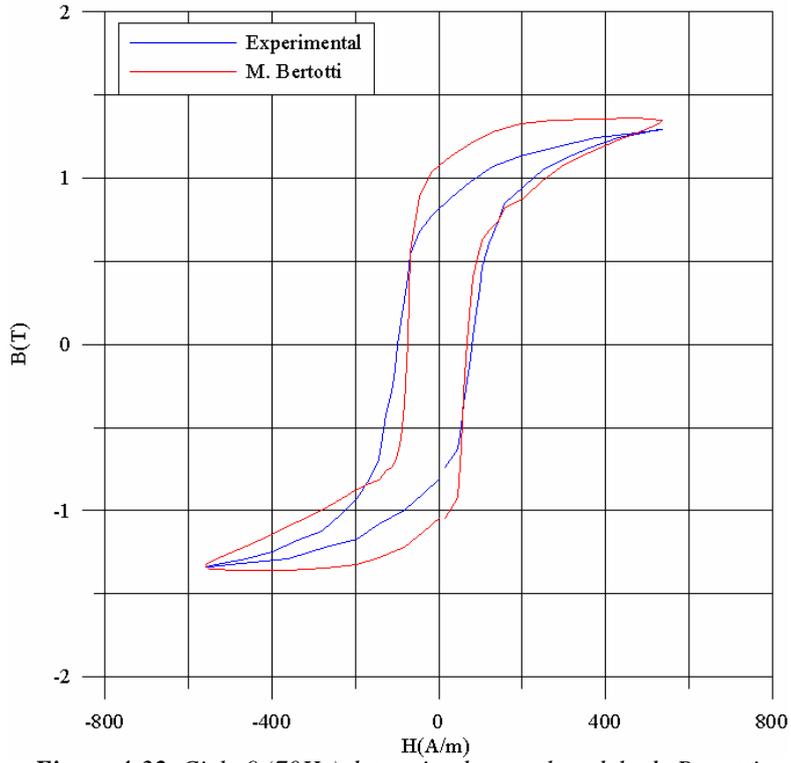


Figura 4-32. Ciclo 9 (70Hz) determinado con el modelo de Bertotti

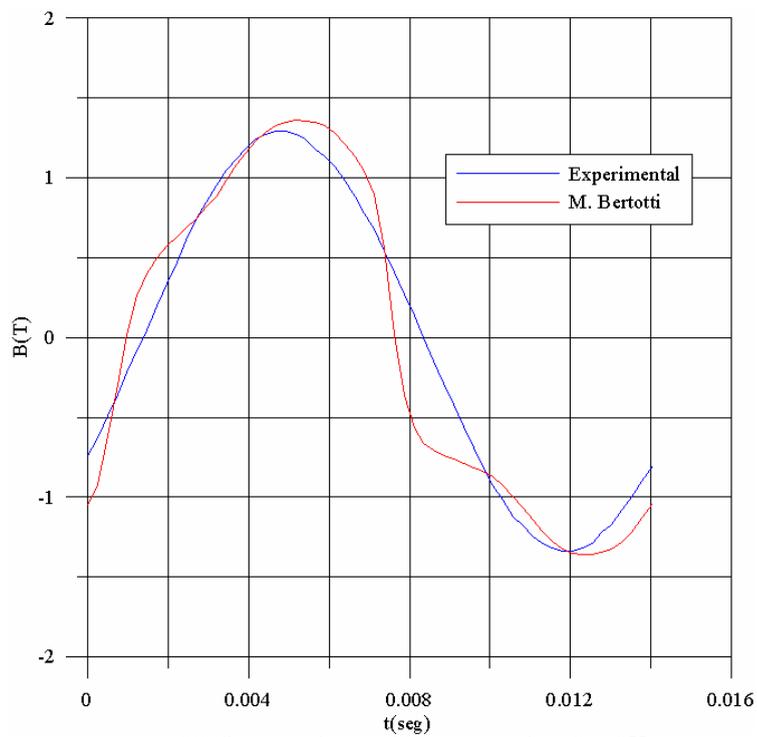


Figura 4-33. Señal de inducción para el ciclo 9 (70Hz)

## 4.7 Conclusiones

Analizando las figuras anteriores lo primero que salta a la vista es la peor precisión de los resultados obtenidos si se comparan con los logrados con el modelo de Preisach clásico. La razón de ello la encontramos en el proceso de determinación de la función densidad. Se ha empleado el método de Mayergoyz, el cual se demostró en su momento que es la mejor opción para nuestro ámbito de aplicación. No obstante, ya se ha comentado varias veces que con el método de Mayergoyz, el número de curvas experimentales mínimas para obtener buenos resultados es de 15. Nosotros hemos empleado únicamente nueve curvas<sup>1</sup>. Se aplicó un método de interpolación a tramos mediante polinomios de Hermite cúbicos, mediante el cual se consiguió un buen resultado para el modelo clásico. Pero esto no es suficiente para el modelo dinámico de Bertotti.

De forma que, en definitiva, todo el problema se resume a la capacidad de obtener un conjunto suficiente de curvas inversas de primer orden. En el capítulo 6 del presente trabajo trataremos este problema. El método empleado para obtener las curvas inversas con las cuales calculamos las integrales de Everett del método de Mayergoyz es el método balístico modificado. Con este método cuesta mucho conseguir curvas inversas con puntos de inversión de campos pequeños, además el método balístico tiene un error intrínseco asociado a su propio procedimiento. Para paliar este error y lograr un número mayor de curvas se intentó desarrollar un equipo para obtener curvas inversas de primer orden automáticamente. En el capítulo 6 se comentan los problemas en el desarrollo del procedimiento automático, el cual, en el momento de escribir estas líneas, no funciona correctamente.

Este empeoramiento de la precisión no impide la aplicación del modelo, puesto que eligiendo un parámetro  $k$  adecuado se puede conseguir que el área del ciclo simulado sea igual al área del ciclo experimental o que la forma de onda de la inducción se aproxime a la experimental. De hecho el parámetro  $k$  influye directamente en la forma de los ciclos simulados. Centrémonos en el ciclo límite (figura 4-18). Para  $k$  muy pequeñas ( $k=5$  en la figura 4-18), el ciclo aparece muy deformado y no tiene ninguna validez. A medida que  $k$  aumenta, el ciclo calculado se va acercando al ciclo experimental, pero aún aparece distorsionado, sobre todo en la región de magnetización por rotación coherente. Para  $k=20$  se logra que la fuerza coercitiva del ciclo calculado y el ciclo experimental sea la misma, pero la curva de histéresis

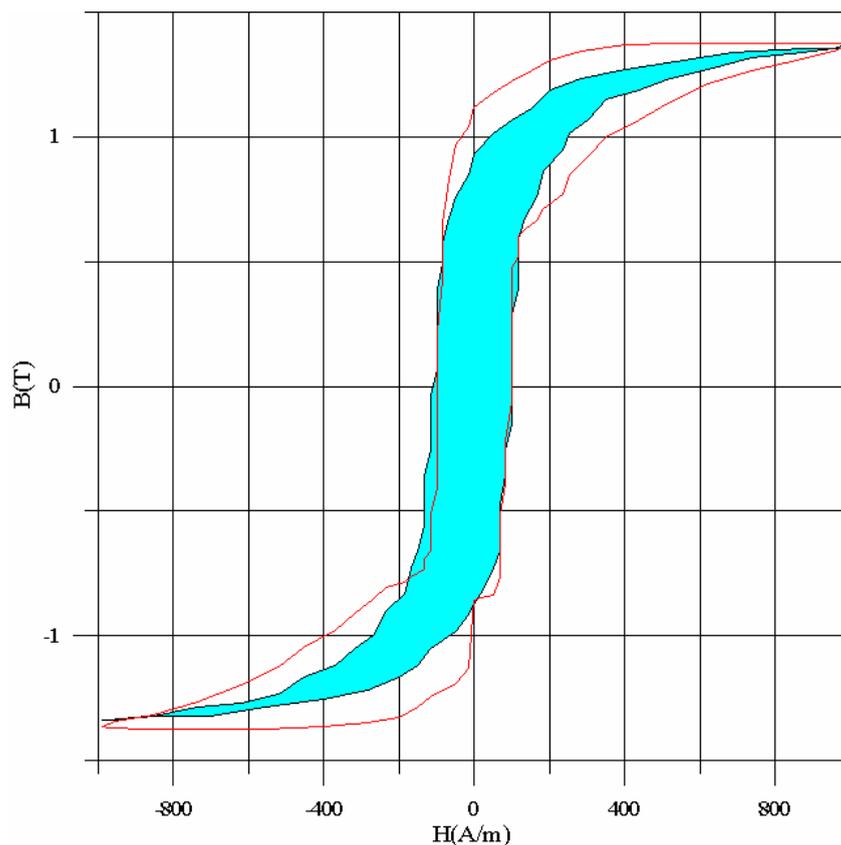
---

<sup>1</sup> En realidad se emplearon 6 curvas pues para la interpolación se emplearon la rama ascendente y el punto máximo del ciclo límite como casos límite de curvas inversas de primer orden.

aparece distorsionada en el rango comentado. Aumentando más  $k$  la curva de histéresis se aproxima a la experimental, pero el campo coercitivo se hace menor.

En resumen, para  $k$  entre 20 y 50 se consigue que la zona de magnetización reversible se aproxime a la experimental, pero la zona de rotaciones coherentes aparece deformada. Por contra, a medida que aumenta  $k$  la zona de rotaciones coherentes se aproxima al ciclo experimental pero el campo coercitivo se reduce. A falta de conseguir reproducir el ciclo experimental, se debe adoptar la  $k$  más adecuada en función del tipo de cálculo que se necesita.

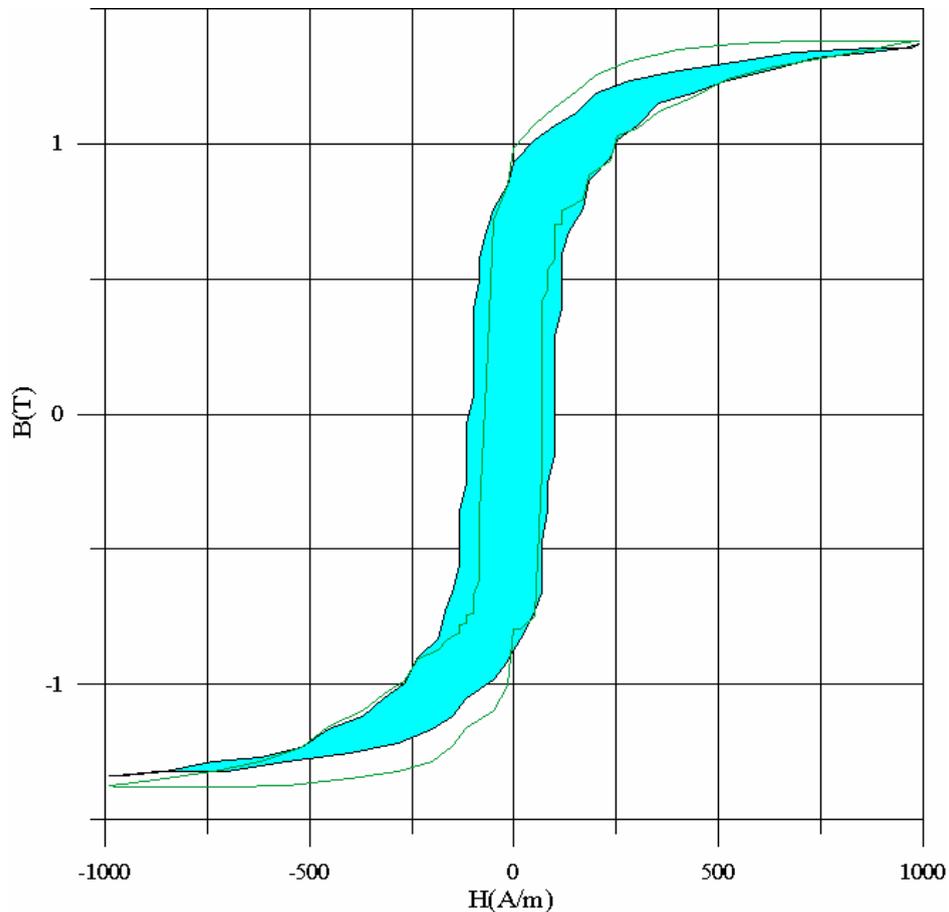
En la figura 4-26 se muestra el ciclo límite logrado con  $k=20$  comparado con el ciclo experimental, este es valor para el parámetro  $k$  con el que más logramos aproximarnos al campo coercitivo del ciclo límite experimental.



**Figura 4-34** Ciclo límite (50Hz) calculado mediante el modelo de Bertotti con  $k=20$ . El área corresponde al ciclo límite experimental.

En la figura 427 se muestra el ciclo límite calculado para  $k=200$ , el campo coercitivo es menor al experimental pero se ha mejorado la zona de rotaciones coherentes. Esto tiene un efecto beneficioso, el área del ciclo simulado es prácticamente la misma que la del ciclo

experimental con lo que su energía es la misma, esto puede ser interesante de cara a determinar pérdidas magnéticas en el núcleo.

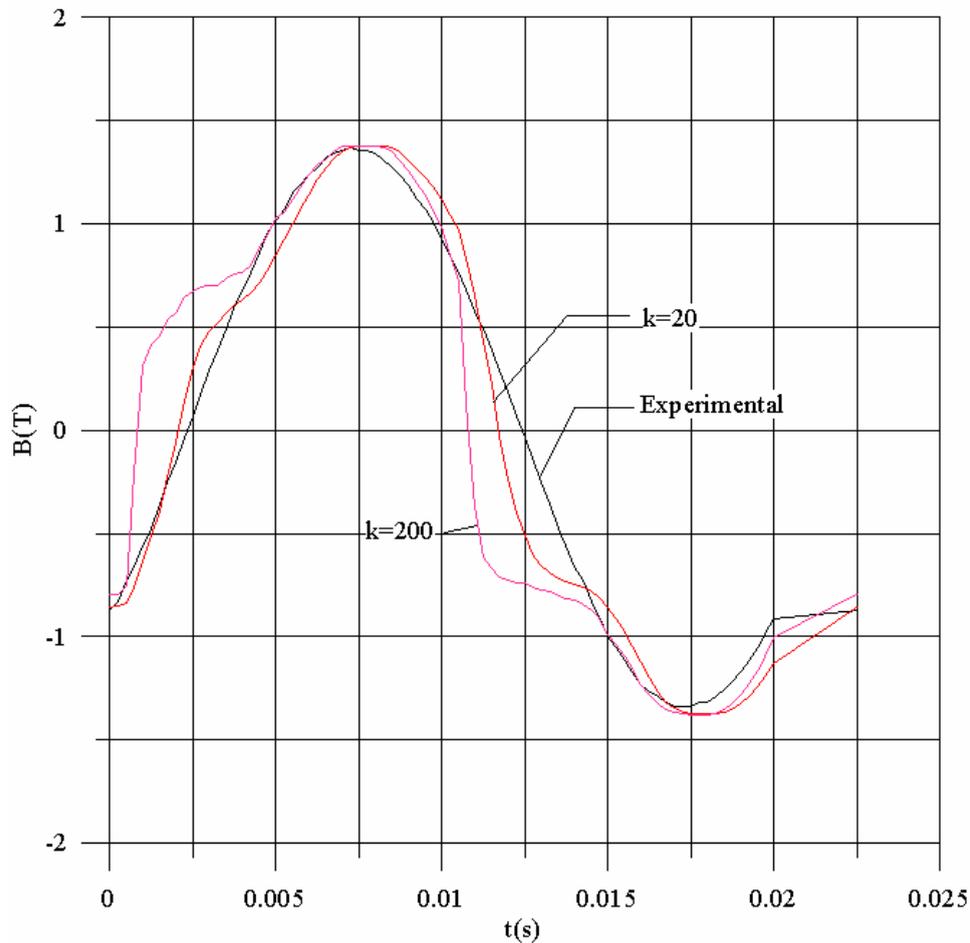


*Figura 4-35* Ciclo límite (50Hz) calculado mediante el modelo de Bertotti con  $k=200$ . El área corresponde al ciclo límite experimental.

No obstante, para  $k=20$  la forma de onda de la inducción se parece más a la correspondiente a la experimental que con  $k=200$ . En la figura 428 se comparan la forma de onda de la inducción para  $k=20$ ,  $k=200$  y la experimental.

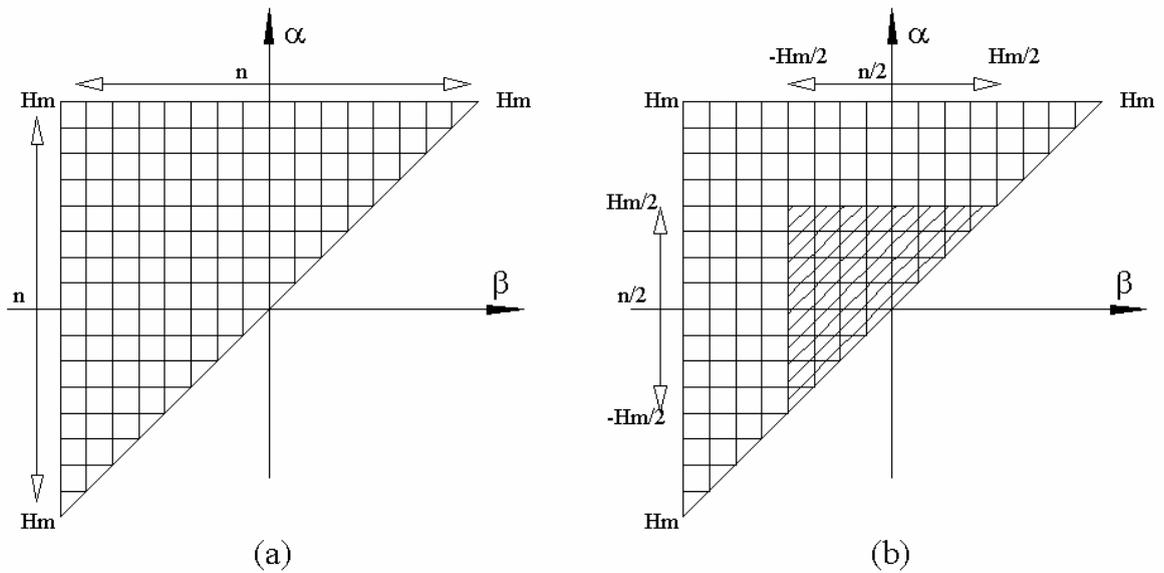
En principio, cuando se necesite calcular el área de la histéresis adoptaremos  $k=200$ . Para  $k$  mayores la región de rotaciones coherentes se acerca, pero el campo coercitivo se aleja demasiado. Pero para su empleo conjunto con un método numérico adoptaremos  $k=20$ , por ser la forma de onda de  $B(t)$  más cercana a la experimental, y por tanto menor el error cometido.

En realidad el parámetro  $k$  depende de la frecuencia del campo para el cual se quiere calcular la inducción. Para la frecuencia de 50Hz, la  $k$  mas apropiada es del orden de la decena [Berotti, 1992]



**Figura 4-36.** Inducciones calculadas mediante el modelo de Bertotti con  $k=20$  y  $k=200$  comparadas con la inducción experimental

Otro efecto a considerar es la pérdida de precisión a medida que disminuye el ciclo de histéresis a calcular. La causa de esto es inherente a la forma en como se desarrolla el modelo de Preisach y ya se comentó en el apartado 3.11.2 para las curvas cuasiestáticas. Recordemos que este efecto era debido a que la discretización del plano de Preisach se efectúa en función del ciclo límite (figura 429a), con lo que para ciclos de amplitud pequeña, el plano de Preisach queda reducido a pocos nodos. Este efecto se puede reducir aumentando el número de nodos del plano de Preisach, si bien ello implica aumentar considerablemente el tiempo de cálculo.



**Figura 4-37.** Discretización del plano de Preisach y nodos disponibles para (a) el ciclo límite y (b) un ciclo cuya amplitud máxima es la mitad que la del ciclo límite

En definitiva se debe trabajar en lograr un procedimiento experimental que nos permita obtener un número de curvas inversas de primer orden suficiente como para que el método de Mayergoyz nos permita obtener resultados mejores. En el capítulo 6 del presente trabajo se trata este problema.

## 5. Modelo de Preisach inverso

### 5.1 Introducción

#### 5.1.1 Necesidad de un modelo de histéresis inverso.

El modelo de Preisach, tanto clásico como dinámico, permite el cálculo de la inducción en un material ferromagnético  $B$  a partir del historial de campo  $H$ , esto es, determina  $B=f(H)$ . No obstante, antes de emplear el modelo de Preisach en el cálculo para la difusión del campo en el interior de núcleos ferromagnéticos, hemos de cuestionarnos si la relación  $B=f(H)$  del modelo de Preisach es la más adecuada a nuestros cálculos, o si no sería mejor disponer de la relación inversa  $H=g(B)$ .

Si para calcular la difusión del campo magnético en el núcleo de la máquina empleamos una formulación en  $H$  no es necesaria la relación inversa, pues la variable calculada en cada punto del núcleo es precisamente el campo magnético  $H$ .

Pero no siempre la formulación en  $H$  es la más conveniente. En caso que la excitación de la máquina se realice mediante un generador de tensión, es más adecuada la formulación en función del potencial vector magnético y el potencial escalar eléctrico (formulación  $A$ - $V$ ). Con la formulación en  $A$ - $V$ , la variable que se calcula en cada punto es el potencial vector magnético  $A$ , a partir del cual se puede determinar la inducción aplicando  $\nabla \times \mathbf{A} = \mathbf{B}$ . En consecuencia para esta formulación se debería disponer de la relación inversa  $H=g(B)$ .

En caso que necesitáramos la relación inversa  $H=g(B)$ , partiendo de la ecuación que define algebraicamente al modelo:

$$B(t) = \iint_{\alpha \geq \beta} \mu(\alpha, \beta) \gamma_{\alpha, \beta} H(t) d\alpha d\beta \quad (5.1)$$

se deduce que el modelo de Preisach no permite el cálculo de  $H$  despejando directamente dicha variable en la ecuación, pues el campo  $H$  está presente de forma implícita en el valor de los operadores  $\gamma_{\alpha\beta}$  y su progresión en el plano de Preisach en función de los valores que adopta  $H(t)$ . En definitiva el modelo de Preisach no permite su inversión directamente. Nuestra propuesta es desarrollar un modelo de Preisach alternativo que determina directamente  $H=g(B)$ , al que denominamos modelo inverso de Preisach.

### 5.1.2 Estado del arte

La mayoría de investigadores que trabajan con modelos de histéresis abordan la inversión del modelo de Preisach mediante un método iterativo [Gyselinck, Vandervelde, Makareev et al, 2000]. El campo  $H$  a determinar es la solución de la ecuación no lineal  $B(H, H_{pas}) = B$ . Donde  $H_{pas}$  es el historial de campo calculado hasta ese instante. En definitiva se trata de seguir empleando el modelo de Preisach sin invertir, calculando el campo  $H$  por iteraciones sucesivas. Comenzando por una estimación inicial, las iteraciones subsiguientes se realizan mediante un algoritmo de Newton-Raphson.

La ventaja de este método iterativo es que no es necesario desarrollar un modelo de Preisach inverso, pero ello a cambio de ralentizar los cálculos. Con el método de Newton-Raphson es necesario calcular la matriz de Jacobi, entre otros cálculos, en cada iteración. Además la resolución de ecuaciones no lineales acarrea problemas de convergencia.

La alternativa al método iterativo es el desarrollo de un modelo de Preisach inverso. Noriko Takahashi, Shin-Ichi Miyabara y Koji Fujiwara han puesto la primera piedra en este sentido. Su propuesta consiste en una caracterización y desarrollo del modelo de Preisach en cierto modo similar al método de d'Alessandro-Ferrero. El modelo de Preisach inverso se obtiene a partir de este desarrollo [Takahashi, Miyabara, Fujiwara, 1999]. La principal desventaja del método de Takahasi-Miyabara-Fujiwara es que la discretización del plano de Preisach depende de las curvas inversas de primer orden disponibles para calcular la función distribución. En consecuencia si se dispone de pocas curvas, como es nuestro caso, el resultado es una discretización de la función densidad muy basta, con lo que es muy difícil obtener buenos resultados.

Nuestra propuesta es el desarrollo de un modelo de Preisach totalmente inverso. Partiendo de la idea de N. Takahashi, S.I., Miyabara y K. Fujiwara se desarrolla un modelo de Preisach paralelo al clásico, con las mismas propiedades y definiciones, pero formulado de forma

inversa. De esta forma se puede aplicar la técnica de desarrollo o caracterización más idónea a cada caso.

## 5.2 Método Takahashi-Miyabara-Fujiwara

Como quiera que el modelo de Preisach inverso propuesto fue inspirado por un artículo de los profesores N. Takahashi, S.I. Miyabara y K. Fujiwara de la Universidad de Okayama [Takahashi, Miyabara y Fujiwara, 1999], antes de exponer nuestro modelo inverso se introduce primero su método.

Como ya es sabido el modelo de Preisach se basa en la ecuación (5.1):

$$B(t) = \iint_{\alpha \geq \beta} \mu(\alpha, \beta) \gamma_{\alpha, \beta} H(t) d\alpha d\beta \quad (5.1)$$

Para caracterizar el modelo de Preisach se debe calcular la función densidad  $\mu(\alpha, \beta)$ . El método Takahashi-Miyabara-Fujiwara la calcula a partir de curvas inversas de primer orden (ellos, en su artículo las denominan curvas de transición). Para ello se dividen los ejes del plano de Preisach en tantas partes como curvas inversas de primer orden experimentales se disponga. Si, por ejemplo, se dispone de 4 curvas inversas descendentes (incluyendo la rama descendente del ciclo límite), los ejes del plano de Preisach se dividirán por los tramos comprendidos entre  $H_1$ ,  $H_2$ ,  $H_3$ ,  $H_4$  y  $H_5$ . Donde  $H_2$  a  $H_4$  son los puntos de inversión de las curvas inversas de primer orden  $H_1$  y  $H_5$  son respectivamente los campos de los puntos máximo y mínimo del ciclo límite.

A partir de los valores de la rama descendente del ciclo límite en los campos  $H_1 \dots H_5$  se determinan los parámetros  $a_1 \dots a_5$ . La relación entre los parámetros  $a_i$  y el plano de Preisach se muestra en la figura 5-1, en dicha figura también se muestra como se determinan los valores de los parámetros a partir de la rama descendente del ciclo límite. El proceso seguido para la rama del ciclo límite se repite para las curvas inversas, determinando los parámetros  $b_i, c_i \dots$ . En la figura 5-2 se muestra como se determinan los parámetros  $b_i$ .

Con todos los parámetros  $a_i, b_i, c_i \dots$  determinados ya se puede proceder al cálculo de la función densidad en cada uno de los puntos del plano de Preisach discretizado, tal y como se muestra en la figura 5-3.

Siguiendo este procedimiento se puede determinar la función densidad  $\mu(\alpha, \beta)$  y la inducción se calcula como:

$$B(t) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \gamma_{i,j} H(t) \mu(i, j) \tag{5.2}$$

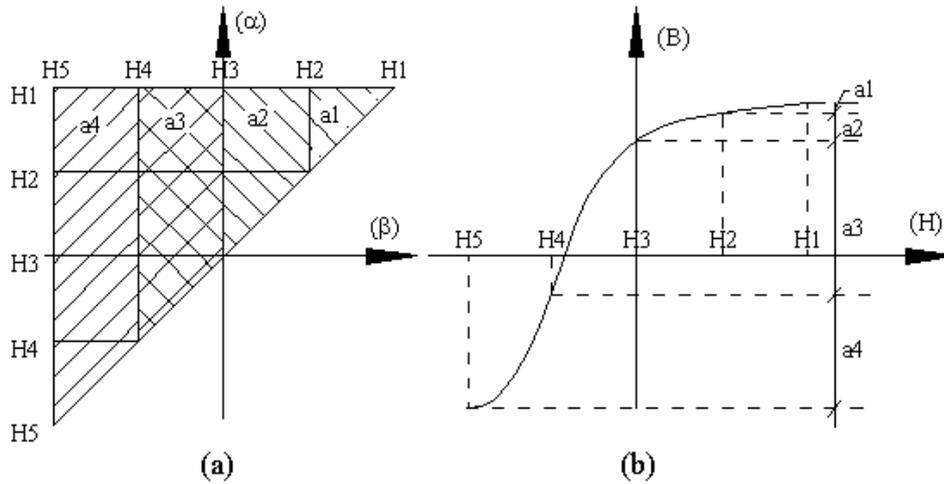


Figura 5-1. Relación entre la rama descendente del ciclo límite y los parámetros a

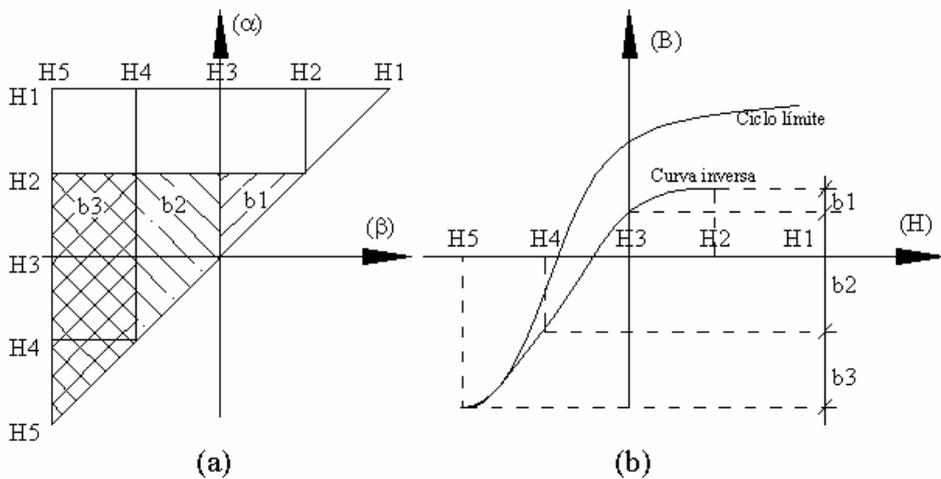


Figura 5-2. Relación entre una curva inversa de primer orden y los parámetros b

El modelo inverso mediante el método Takahashi-Miyabara-Fujiwara se desarrolla siguiendo el mismo procedimiento, pero empleando curvas inversas de primer orden invertidas (esto es,  $H=g(B)$ ). En la figura 5-4 se muestra el cálculo de los parámetros para la rama del ciclo límite y una curva inversa de primer orden invertida. El cálculo de la función densidad inversa  $\nu$  se realiza igual que en el caso directo (figura 5-3). Con la función densidad inversa calculada el campo se calcula a partir de la inducción aplicando:

$$H(t) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \delta_{i,j} B(t) v(i, j) \tag{5.3}$$

Donde  $\delta$  es el valor de los operadores de histéresis en el plano de Preisach inverso.

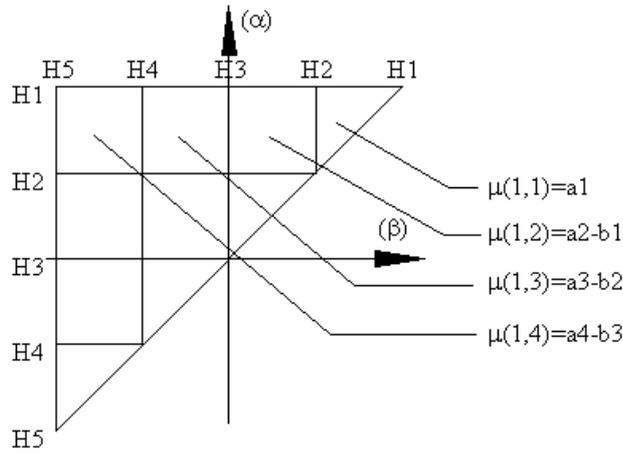


Figura 5-3. Calculo de la función densidad definida sobre el plano de Preisach discretizado a partir de los parámetros a, b, ...

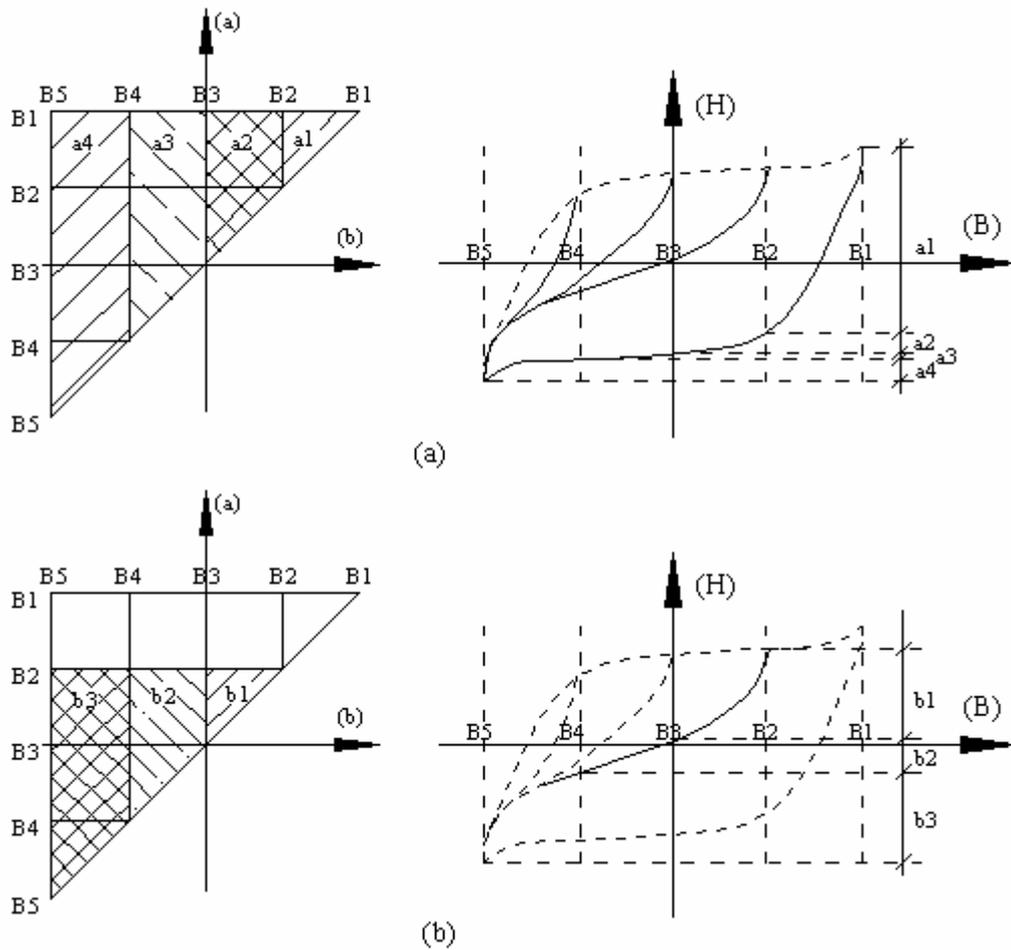


Figura 5-4. Determinación de los parámetros a y b para el modelo de Preisach invertido

Como hemos visto, el número de parámetros y por tanto la precisión en el cálculo y el número de áreas en el que se divide el plano de Preisach depende directamente del número de curvas inversas experimentales disponibles, esto implica que se deben emplear muchas curvas si se desea caracterizar correctamente el modelo de Preisach. Este es un problema para casos como el nuestro, en el que disponemos de pocas curvas experimentales, dado que en tal caso es muy difícil obtener buenos resultados.

### 5.3 Propuesta modelo de Preisach inverso

Basándonos en la idea de N. Takahashi, S.I. Miyabara y K. Fujiwara de que se puede obtener una función densidad inversa a partir de curvas inversas de primer orden invertidas y de ahí calcular el campo  $H$  a partir del historial de inducción  $B$ . Proponemos un modelo de Preisach inverso que se basa en una formulación inversa totalmente paralela a la del modelo de Preisach tradicional. A diferencia del método de Takahashi-Miyabara-Fujiwara, nuestro desarrollo de modelo inverso no es vinculante al método de determinación de la función densidad, por lo que puede emplearse el método que más se adecue a nuestras necesidades.

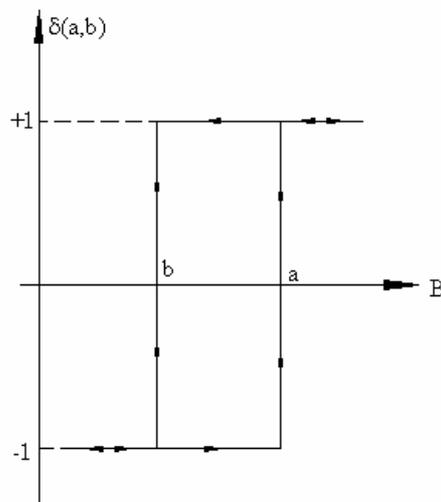


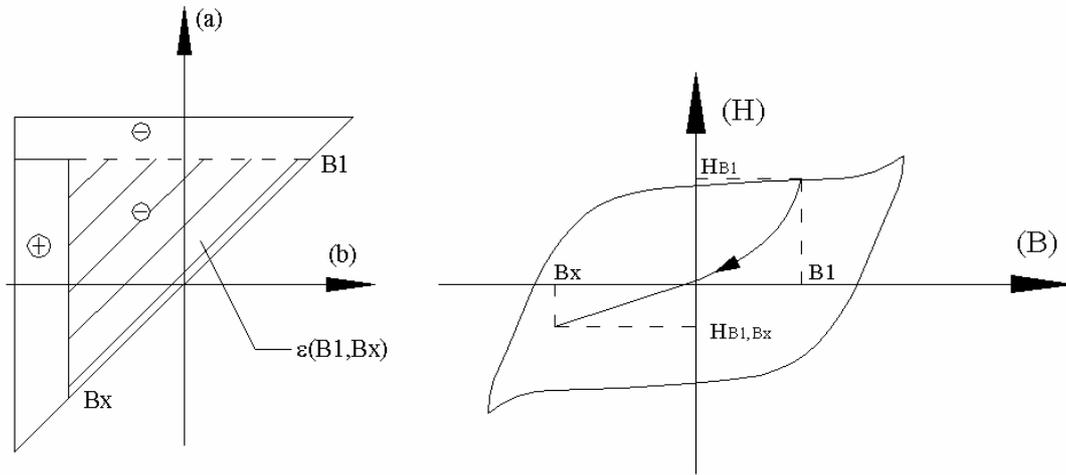
Figura 5-5. Operador de histéresis del modelo de Preisach inverso

La formulación algebraica del modelo de Preisach propuesto es:

$$H(t) = H_s \iint_{a \geq b} \delta_{a,b} B(t) v(a,b) da db \quad (5.4)$$

Donde  $\delta_{a,b} B(t)$  es el valor de los operadores de histéresis inversos (figura 5-5) cuya inducción de conmutación es  $a$  y  $b$ . A cada uno de estos operadores inverso le corresponde un punto en

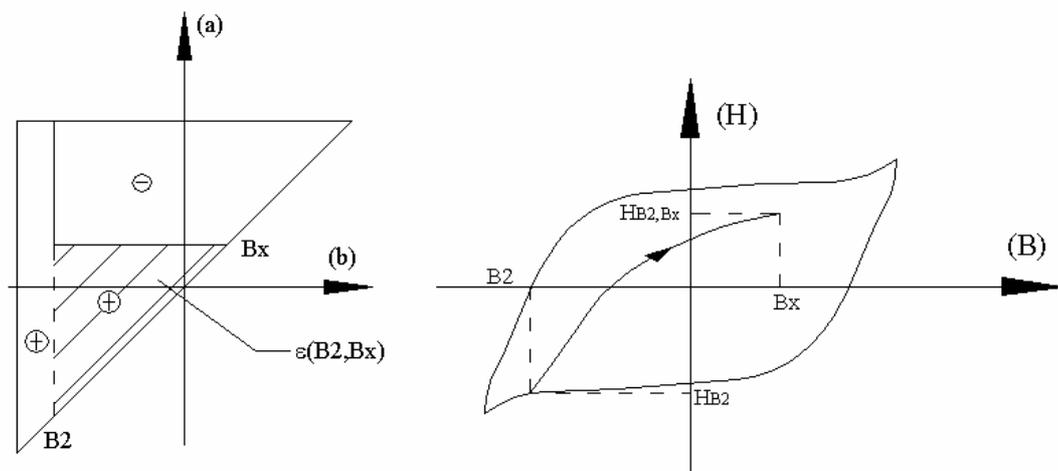
el plano de Preisach inverso (plano  $a-b$ ). Al igual que en el modelo de Preisach tradicional, sobre todo el plano de Preisach se define una función de ponderación (densidad de probabilidad) que denominamos función densidad inversa  $\nu(a,b)$ .



**Figura 5-6.** Integral de Everett inversa definida para una curva inversa de primer orden descendente invertida

Paralelamente al modelo de Preisach tradicional en el modelo propuesto también se pueden definir integrales de Everett, inversas en nuestro caso. Para curvas inversas de primer orden invertidas descendientes como la de la figura 5-6, con punto de inversión  $B_1$  la integral de Everett inversa se define así:

$$\varepsilon(B_1, B_x) \equiv \frac{1}{2} (H_{B_1} - H_{B_1 B_x}) \tag{5.5}$$

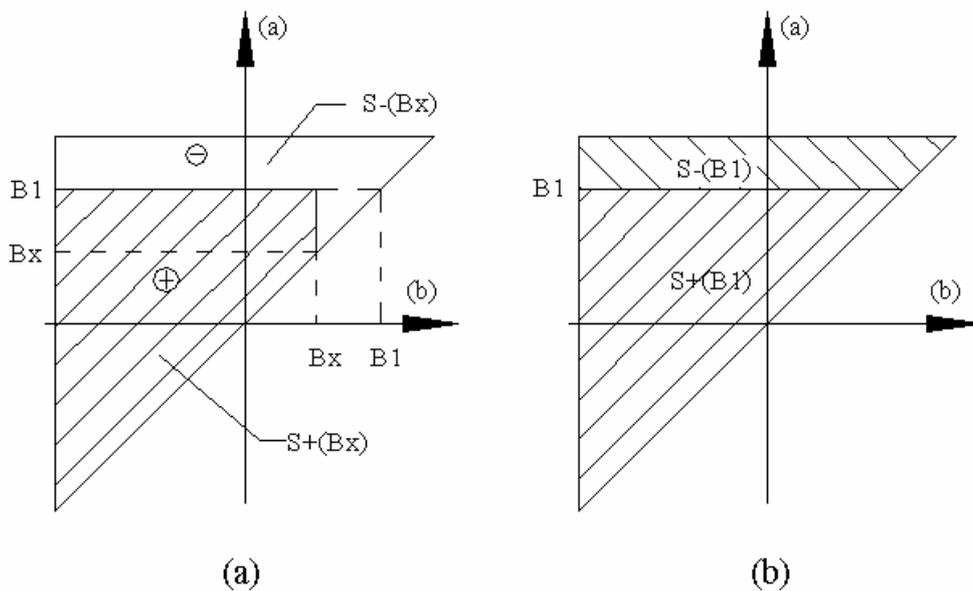


**Figura 5-7.** Integral de Everett inversa definida para una curva inversa de primer orden ascendente invertida

Así mismo para curvas inversas de primer orden ascendentes con punto de inversión  $B_2$  como la de la figura 5-7, la integral de Everett inversa se calcula como:

$$\varepsilon(B_2, B_x) \equiv \frac{1}{2} (H_{B_2 B_x} - H_{B_2}) \quad (5.6)$$

A continuación vamos a comprobar si en el modelo de Preisach inverso también podemos relacionar la función densidad inversa con la integral de Everett inversa.



**Figura 5-8.** (a) Plano de Preisach para la curva inversa de primer orden descendente invertida de la figura 5-6. (b) Relación de áreas  $S^-$  y  $S^+$  en el punto de inversión

Sea el plano de Preisach de la figura 5-8a, este plano corresponde a una curva inversa de primer orden invertida descendente con punto de inversión  $B_1$ . Si denominamos  $T(B_1, B_x)$  a la porción triangular de plano de Preisach comprendido entre los valores de inducción  $B_1$  y  $B_x$  para dicho plano de Preisach se cumple:

$$S^+(B_x) = S^+(B_1) - T(B_1, B_x) \quad (5.7)$$

$$S^-(B_x) = S^-(B_1) + T(B_1, B_x) \quad (5.8)$$

Sumando las expresiones (5.7) y (5.8) se obtiene:

$$S^+(B_x) - S^-(B_x) = -2T(B_1, B_x) \quad (5.9)$$

La resta de ambas áreas es precisamente:

$$H_{B_1, B_x} - H_{B_x} = -2 \iint_{T(B_1, B_x)} v(a, b) da db \quad (5.10)$$

Aplicando (5.5):

$$\varepsilon(B_1, B_x) = - \iint_{T(B_1, B_x)} v(a, b) da db = \int_{B_x}^{B_1} \int_b^{B_1} v(a, b) da db \quad (5.11)$$

Por tanto:

$$v(a, b) = \frac{\partial^2 \varepsilon(a, b)}{\partial a \partial b} \quad (5.12)$$

En el modelo inverso la derivada de la función de Everett sigue siendo la función densidad. Aplicando (5.6) se hubiese llegado a igual conclusión.

La ecuación (5.12) nos indica que en el modelo inverso también se puede determinar la función densidad a partir de la integral de Everett, que se puede calcular a partir de las curvas inversas de primer orden experimentales. Además también nos indica que se puede desarrollar el modelo por integrales de Everett, al igual que con el modelo directo.

En definitiva, se pueden aplicar las mismas técnicas de caracterización y desarrollo que en el modelo de Preisach directo. En nuestro caso aplicaremos el método de Mayergoyz para caracterizar el modelo.

#### 5.4 Modelo de Preisach dinámico inverso

En el momento de escribir este documento no se ha conseguido invertir el modelo de histéresis dinámico de Bertotti. Se debe recurrir al proceso de iteración comentado anteriormente.

Los intentos que hemos realizado con el modelo de Bertotti han sido de realizar una versión paralela inversa similar a la expuesta en el apartado anterior, pero todos los intentos han fracasado. De hecho no tenemos constancia que hasta el momento se haya conseguido ningún modelo dinámico tipo Preisach inverso.

### **5.5 Resultados. Validación del modelo de Preisach inverso.**

Se prueba a continuación el modelo de Preisach inverso propuesto para el trazado de varios ciclos de histéresis tomando como entrada la inducción  $B(t)$  y calculando el campo  $H(t)$ . Esto nos servirá de validación del modelo inverso. Los ciclos experimentales empleados para la validación son los mismos que los que se emplearon en la validación del modelo de Preisach clásico.

La caracterización del modelo inverso se realiza por el método de Mayergoyz, con el mismo conjunto de curvas inversas obtenidas mediante el método balístico, pero tomadas de forma inversa.

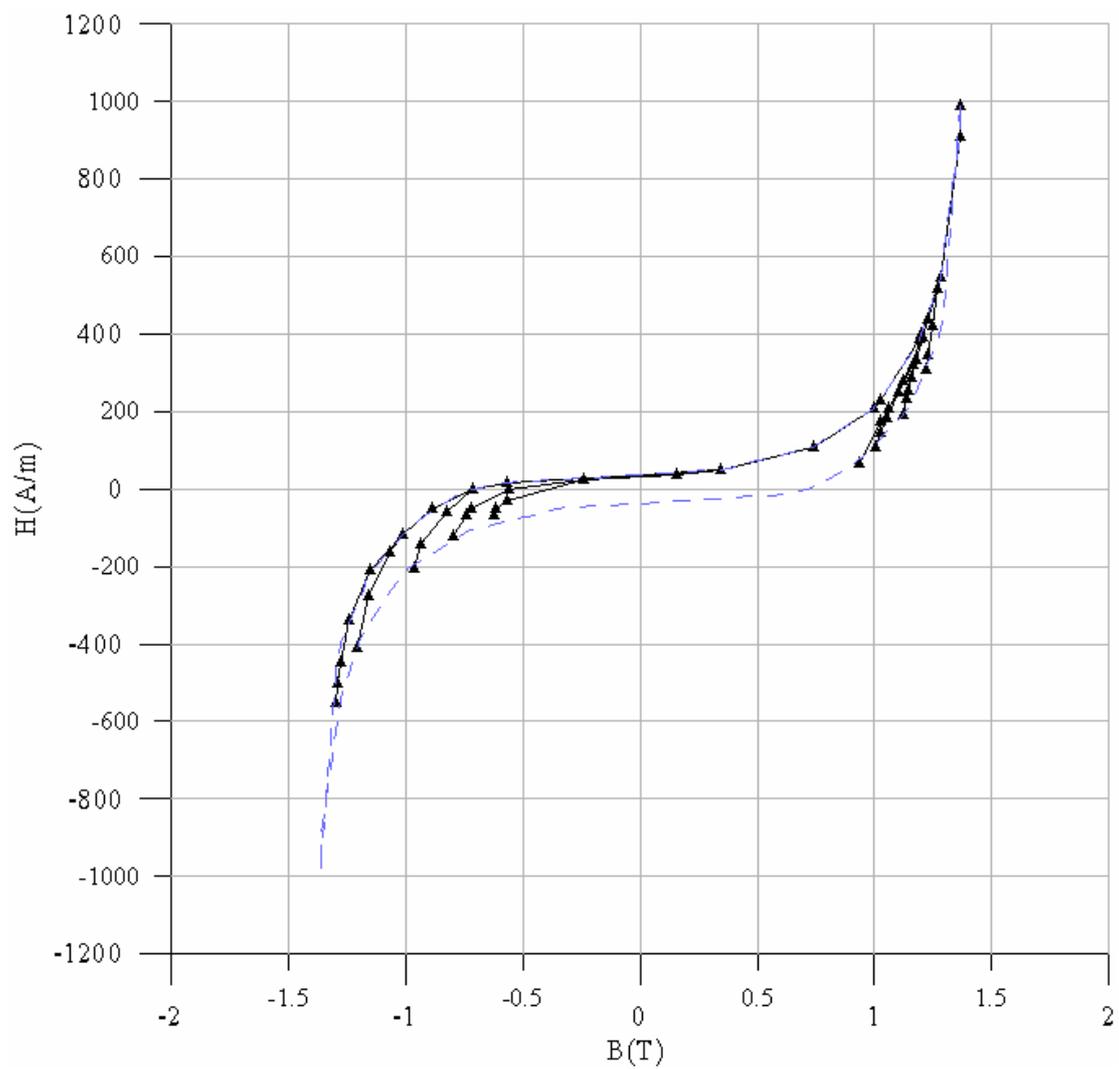
En la figura 5-9 se muestran las curvas experimentales empleadas. Para dichas curvas se calcularon las integrales de Everett inversas sobre el plano de Preisach inverso limitado por el ciclo límite. El procedimiento para el cálculo de las integrales de Everett inversas es el mismo que el empleado para las integrales de Everett directas, se aplicó el procedimiento propuesto para la caracterización mediante el método de Mayergoyz cuando se emplean pocas curvas experimentales, basado en un proceso de interpolación a tramos mediante polinomios de Hermite cúbicos. La integral de Everett inversa calculada se muestra en la figura 5-10.

Con la integral de Everett calculada para el triángulo límite del plano de Preisach inverso se procede a calcular la función densidad inversa aplicando la relación (5.12).

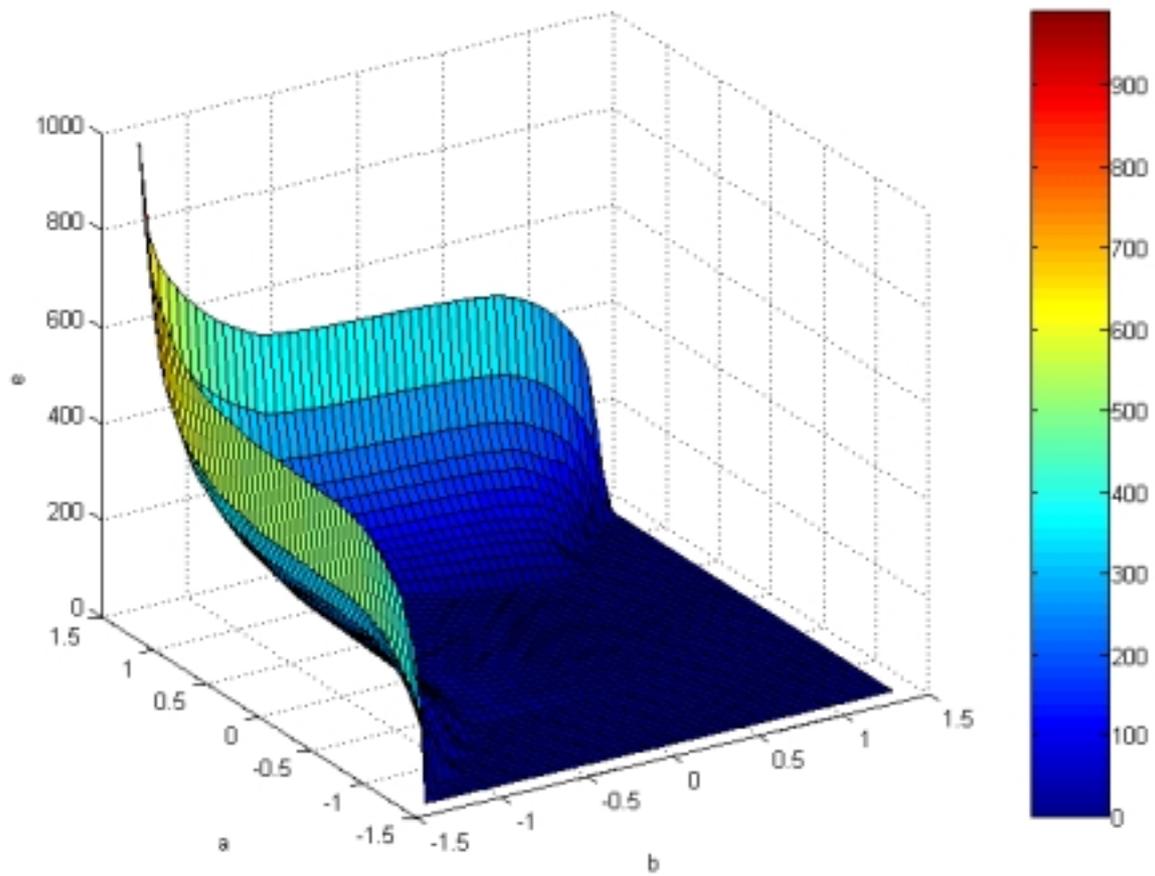
El desarrollo del modelo de Preisach se realizó por definición algebraica directa aplicando la ecuación (5.4).

En la figura 5-12 se muestra el historial de inducción  $B(t)$  empleado como entrada al modelo de Preisach inverso. El ciclo de histéresis a calcular es el ciclo límite.

En la figura 5-13 se muestra el ciclo de histéresis obtenido y se compara con el ciclo de histéresis experimental obtenido mediante el ensayo balístico.



**Figura 5-9.** Conjunto de curvas inversas de primer orden invertidas experimentales empleadas para caracterizar el modelo de Preisach inverso mediante el método de Mayergoyz para la muestra A.



*Figura 5-10. Integral de Everett inversa para la muestra A.*

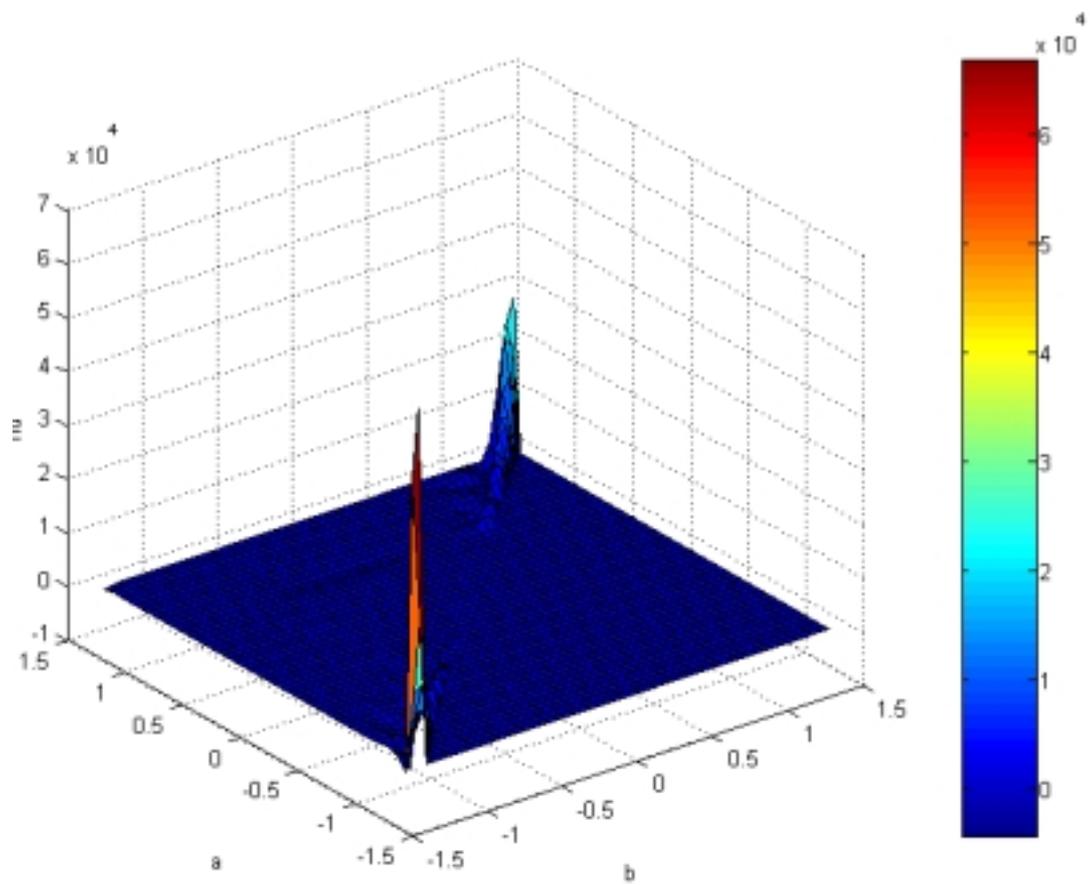
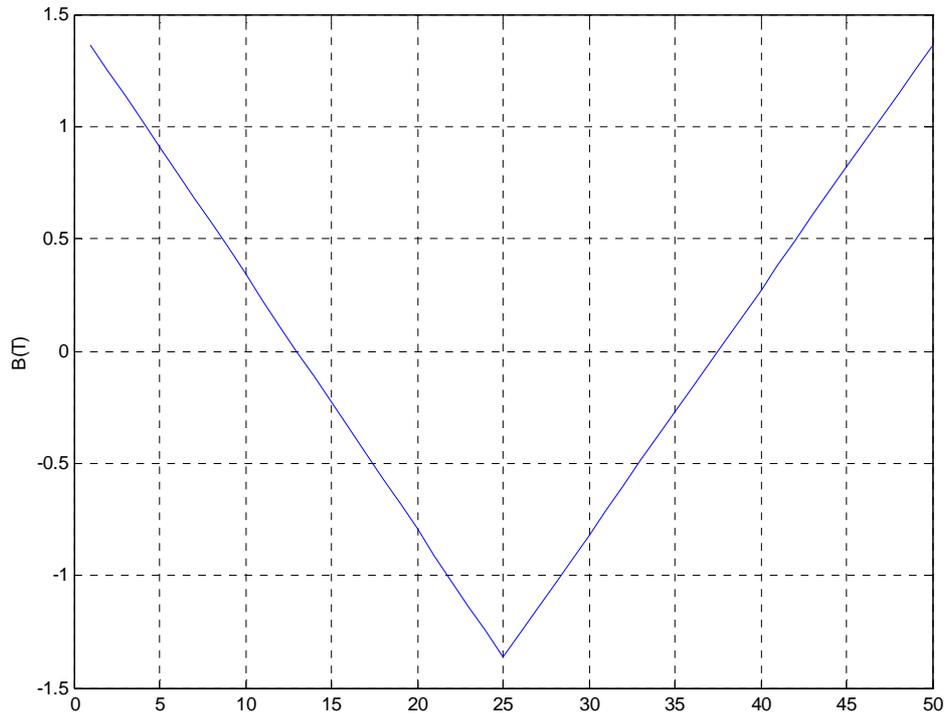
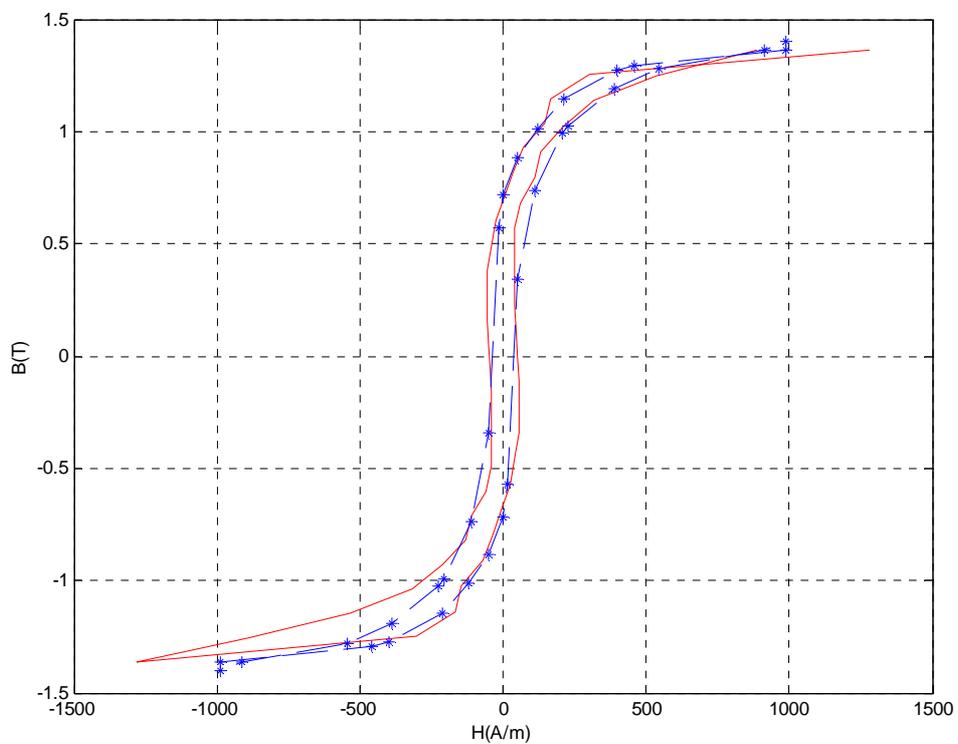


Figura 5-11. Función densidad inversa para la muestra A



**Figura 5-12.** Historial  $B$  de entrada al modelo de Preisach inverso para reproducir el ciclo límite. El eje  $X$  no tiene significación física pues el modelo de Preisach clásico (aunque sea inverso) no considera los efectos temporales



**Figura 5-13.** Ciclo límite de la muestra A calculado mediante el modelo de Preisach inverso

### **5.4 Conclusiones**

Como se puede comprobar en la figura 5-13 la histéresis determinada por el modelo de Preisach inverso es bastante aceptable. Las variaciones aparecidas con respecto al ciclo límite experimental son debidas al proceso de determinación de la integral de Everett con pocas curvas experimentales. En el caso de las curvas de primer orden invertidas, el proceso de interpolación funciona peor que cuando se empleó para el modelo de Preisach directo. Ya se ha comentado en el capítulo dedicado al modelo de Preisach clásico y en el capítulo dedicado al modelo dinámico la necesidad de obtener una colección de curvas inversas de primer orden experimentales con más curvas y mejor determinadas. Este problema se agrava cuando se determina la función densidad inversa, pues dicha función se determina mediante la derivada doble de la integral de Everett inversa.



## 6. Ensayos para la caracterización del modelo de Preisach.

### 6.1 Introducción

Para aplicar el modelo de Preisach, ya sea en su versión clásica o mediante su generalización a modelo dinámico, previamente se debe determinar la función densidad asociada al espécimen a modelizar. Ya se expuso en el capítulo 3 que la función densidad se puede caracterizar por ajuste (métodos paramétricos), o por interpolación (métodos no paramétricos). Los primeros son más sencillos de aplicar, consisten en suponer que la función densidad sigue una determinada función. Los ciclos de histéresis trazados por el modelo de Preisach empleando estas funciones tienden a ser cuadrados, por lo que los resultados no son buenos para materiales blandos, justamente el tipo de material ferromagnético empleado en los núcleos de las máquinas eléctricas. No queda otra alternativa que recurrir a los métodos no paramétricos, de estos, el que mejor permite caracterizar el modelo de Preisach es el método de Mayergoyz; este es el método aplicado en el presente trabajo.

El método de Mayergoyz permite determinar las integrales de Everett a partir de un conjunto experimental de curvas inversas de primer orden. Con las integrales de Everett ya calculadas la función densidad se determina como la derivada doble de las integrales de Everett. Este método da buenos resultados, pero implica obtener experimentalmente el conjunto de curvas inversas de primer orden. Justamente ahí radica su mayor inconveniente. La obtención de dichas curvas no es sencilla. Para trazarlas es necesario medir la variación de inducción (o de intensidad de magnetización) para un historial de intensidad de campo cuyo valor debe estar controlado en todo momento. En general los investigadores que emplean el método de Mayergoyz recurren métodos sofisticados como magnetómetros de muestra vibrante [Mayergoyz,2003; Salling y Shultz, 1988; Mayergoyz, Friedman y Salling, 1989] o bien magnetómetros ópticos de efecto Kerr [della Torre, Fry, Alejos, et al, 2000] para obtener el conjunto de curvas inversas de primer orden, pero este es un equipo sofisticado, el cual no está al alcance de todos los laboratorios; o al menos no lo está del nuestro.

Necesitamos una alternativa a estos métodos sofisticados si queremos emplear el método de Mayergoysz. Esta alternativa debe cumplir dos condiciones básicas.

La primera condición es que las curvas inversas se deben obtener para una situación cuasiestática, a frecuencia suficientemente baja como para considerar que no se producen efectos dinámicos.

Además para el modelo dinámico de Bertotti no es posible el desarrollo por integrales de Everett. Esto implica que con la interpolación a tramos por polinomios de Hermite cúbicos no se conseguirán buenos resultados, pues al determinar la función densidad como la derivada doble de la integral de Everett se amplificarán los errores y saldrá a relucir las pocas curvas con las que se ha construido la integral de Everett. Para unos buenos resultados con el método de Mayergoysz necesitamos al menos quince curvas inversas. Por tanto la otra condición es que el método nos permita trazar un conjunto de curvas suficientemente representativo.

La alternativa más directa y sencilla se encontró en el desarrollo de un ensayo balístico. En dicho ensayo la curva se construye a partir de los saltos de inducción: se provoca una serie de saltos de campo controlados. Los incrementos de inducción se miden mediante un fluxómetro balístico. Los saltos de campo se provocan mediante la variación de la tensión que alimenta a un arrollamiento de excitación del espécimen.

El ensayo balístico propuesto presenta la ventaja de no necesitar más que reóstatos, fuentes de continua, interruptores, un conmutador, varios polímetros y un fluxómetro. Equipo fácil de obtener para prácticamente cualquier laboratorio. El ensayo balístico, no obstante, presenta una serie de problemas que hacen necesario buscar otra alternativa si queremos obtener resultados válidos con el modelo de Preisach. Primero, el ensayo balístico implica la operación reiterada de varios interruptores de forma manual, con los posibles errores de operación. Segundo, al construir las curvas a base de saltos, se dispone de poca precisión a la hora de trazarlas; generalmente se hace necesario un tratamiento posterior de las curvas para corregirlas. Tercero, se pueden trazar pocas curvas inversas, y casi ninguna con puntos de inversión cercanos a 0 A/m.

La alternativa al método balístico es el método histeresígráfico [Fiorillo, 2004; ASTM A773] controlado por ordenador que nos permite determinar el conjunto de curvas de una forma semi-automática, o tan automatizada como sea posible. En un histeresigrafo la excursión de

campo se produce de forma monótona, empleando señales alternas. En el histéresígrafo propuesto las excursiones de campo se logran mediante rampas de tensión generadas por un generador de funciones, estas rampas de tensión son convertidas a rampas de intensidad mediante un amplificador de transconductancia. La inducción provocada por el campo en el espécimen se calcula integrando la señal de tensión bornes de un arrollamiento de exploración. La señal de tensión del arrollamiento de exploración es muestreada mediante una tarjeta de adquisición de datos conectada a un ordenador personal. Para el control de la adquisición de datos y el tratamiento de los datos se emplea un software desarrollado en el entorno de programación G de LabVIEW.

## 6.2 Ensayo balístico

### 6.2.1 Descripción.

El ensayo balístico fue desarrollado originariamente por Rowland [Karcz, 1972] para obtener ciclos de histéresis cuasiestáticos, en los cuales no interviene, o se puede despreciar, el efecto de las corrientes inducidas. Sobre el espécimen se realizan dos arrollamientos, un primario de excitación y un secundario de exploración. Partiendo de un punto conocido de la curva, el punto máximo  $H_m$ , se provocan variaciones de campo controladas  $\Delta H$ , midiendo la variación de inducción  $\Delta B$  provocada por dicha variación de campo. Así a partir del punto máximo del ciclo, con variaciones de campo cada vez más grandes, se construye un ciclo de histéresis completo.

Suponiendo una magnetización uniforme en el núcleo y que las espiras cubren la totalidad de la muestra, aplicando el teorema de Ampère se obtiene que las variaciones de campo  $\Delta H$  son proporcionales a las variaciones de la intensidad que circula por el arrollamiento de excitación  $\Delta I$  según la siguiente relación:

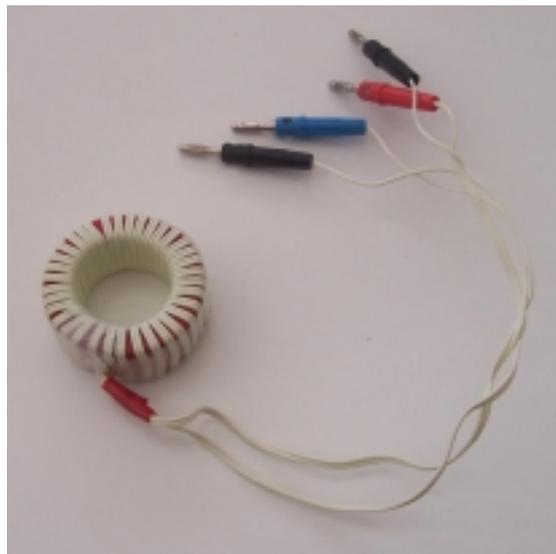
$$\Delta H = \frac{N_1 \Delta I}{l} \quad (6.1)$$

Donde  $N_1$  es el número de espiras del devanado de exploración y  $l$  es la longitud media efectiva del circuito magnético.

Las variaciones de inducción  $\Delta B$  se determinan a partir de las variaciones de flujo  $\Delta \phi$  medidas por un fluxómetro electrónico. Se trata de una variante del galvanómetro balístico,

pero a diferencia de éste, la aguja permanece fija en la medición efectuada. El fluxómetro mide la variación de flujo detectada por una bobina de exploración, debida a una variación de campo magnético. Conociendo la superficie transversal útil  $S$  abarcada por el arrollamiento de exploración se puede conocer la variación de inducción.

$$\Delta B = \frac{\Delta \phi}{S} \quad (6.2)$$



**Figura 6-1.** Fotografía de una de las muestras (muestra B)

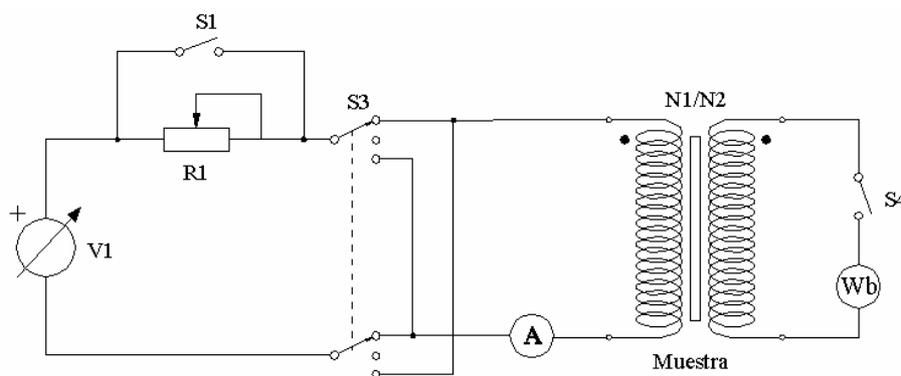
### 6.2.2 Preparación de las muestras

La muestra debe ser preparada previamente para el ensayo. Dicha muestra tendrá forma toroidal y sobre ella se arrollaran dos arrollamientos independientes superpuestos que cubrirán la totalidad de su superficie, tal y como se muestra en la figura 6-1. Los arrollamientos deberán tener un número de vueltas determinado, uno de ellos se empleará para la excitación de la muestra (arrollamiento de excitación) y el otro para medir la tensión inducida en él debida a las variaciones de flujo (arrollamiento de exploración). De hecho, la preparación de la muestra consiste en construir con ella un transformador cuyo núcleo es el espécimen a modelizar, el arrollamiento de excitación es el primario y el arrollamiento de exploración es el secundario.

También se puede emplear un equipo de Epstein. En nuestro caso, al ser una de nuestras aplicaciones la caracterización de núcleos de transformadores, se aprovechan los propios transformadores para el ensayo.

### 6.2.3 Esquema básico. Determinación del ciclo límite.

En la figura 6-2 se muestra el esquema básico del ensayo balístico para determinar ciclos de histéresis (ciclos mayores). En el presente trabajo se emplea este esquema para la determinación del ciclo límite. El fluxómetro, conectado en el secundario, directamente indica el valor de la variación de flujo concatenado por la bobina de exploración para una variación de campo determinada. Dividiendo el flujo concatenado medido por el fluxómetro entre el número de espiras del arrollamiento secundario  $N_2$  y la sección transversal útil se obtiene la variación de la inducción  $\Delta B$ .



**Figura 6-2.** Esquema del ensayo para determinar ciclos de histéresis mediante el método balístico

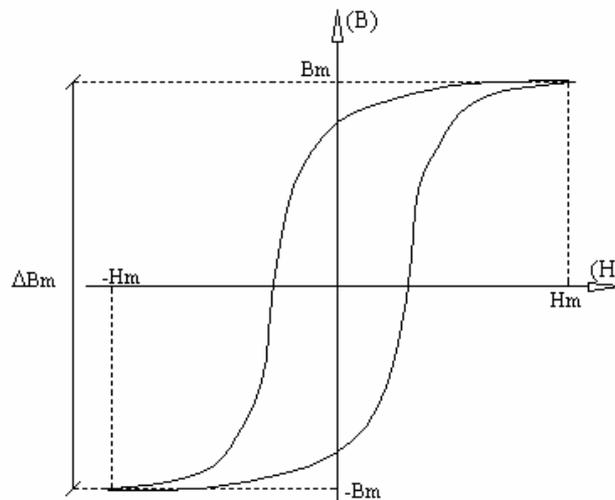
Al estar el secundario prácticamente en vacío se puede menospreciar las caídas de tensión en el arrollamiento primario y, menospreciando las pérdidas en el circuito magnético, el amperímetro del circuito primario mide la intensidad de magnetización  $I$ , la cual por el teorema de Ampère –ecuación (6.1)- es directamente proporcional al campo.

Cuando se cierra el interruptor  $S_1$  el reóstato queda anulado, se ajusta el valor de la fuente  $V_1$  para que circule la intensidad  $I_m$  correspondiente al campo máximo  $H_m$ . Cuando se abre el interruptor  $S_1$ , la intensidad circulante  $I_l$  depende del valor de resistencia del reóstato  $R_1$ . Se ajusta el reóstato para que circule la intensidad correspondiente al campo deseado  $H_l$ . Entonces la acción de abrir el interruptor supone pasar del campo  $H_m$  al campo  $H_l$ . Esto es, se provoca el salto de campo deseado  $\Delta H = H_l - H_m$ . En resumen la función del interruptor es la de provocar los saltos de campo  $\Delta H$  controlados mediante el valor de la fuente y el reóstato.

La función del conmutador  $S_3$  es la de cambiar el signo de la intensidad, accionando  $S_3$  pasamos de  $I$  a  $-I$ . Esto nos permitirá realizar los saltos de campo que impliquen pasar de un valor de campo positivo a un valor de campo negativo y viceversa.

El interruptor  $S_4$  se cierra únicamente cuando el fluxómetro debe registrar la variación de flujo para una variación de campo determinada. Esto se realiza así para que el fluxómetro no registre todas las variaciones de flujo que se producen en el procedimiento, sino sólo la variación que nos interesa para construir la curva.

Antes de comenzar con el ensayo la muestra ha de estar desmagnetizada, esto se puede lograr por cualquiera de los métodos clásicos, por ejemplo aplicando una tensión alterna decreciente.



**Figura 6-3.** Determinación del punto máximo de un ciclo de histéresis

Para trazar el ciclo límite el primer paso es determinar los puntos máximos  $(H_m, B_m)$ . Para ello, abrir  $S_4$ , cerrar  $S_1$  y alimentar a una tensión tal que circule por el primario la intensidad requerida para establecer el campo  $H_m$ . A continuación conmutar unas diez veces el conmutador  $S_3$ , así variamos de  $H_m$  a  $-H_m$  y viceversa cinco veces, con ello se pretende estabilizar el punto máximo que es el punto de partida para posteriormente construir el ciclo completo. Con el conmutador  $S_3$  en la posición correspondiente a  $+H_m$ , cerrar el interruptor  $S_4$  para que el fluxómetro registre la variación de flujo y accionar  $S_3$ , así habremos provocado la excursión de campo  $\Delta H_m = H_m - (-H_m)$ , pero ahora el fluxómetro habrá registrado la variación de flujo correspondiente, con lo cual se puede determinar la variación de inducción ( $\Delta B_m$  en la figura 6-3). Asumiendo que el ciclo de histéresis es simétrico respecto a los ejes de inducción y campo, tal y como realmente es en la mayor parte de materiales magnéticos, podemos calcular la inducción máxima  $B_m$  dividiendo entre dos.

Los restantes puntos de la curva límite (o de cualquier ciclo mayor) se realizan de forma similar. Por ejemplo para determinar el punto  $(H_1, B_1)$ . Antes de comenzar, siempre con  $S_4$  abierto, y con  $S_1$  también abierto se ajusta el reóstato para que por el primario circule la intensidad  $I_1$  correspondiente al campo  $H_1$ . Seguidamente se cierra  $S_1$  para anular el reóstato para así permitir que circule la intensidad correspondiente al punto máximo  $H_m$  y se estabiliza el punto máximo accionando varias veces el conmutador  $S_3$ . Se deja el conmutador  $S_3$  en la posición correspondiente a  $+H_m$  y se cierra el interruptor  $S_4$  para activar el fluxómetro. Si abrimos el interruptor  $S_1$ , el campo realizará la transición  $\Delta H_1 = H_1 - H_m$ , y por tanto el fluxómetro habrá registrado la transición  $\Delta B_1 = B_1 - B_m$ . Con lo cual:

$$B_1 = B_m - |\Delta B_1| \quad (6.3)$$

Siguiendo el mismo procedimiento determinamos el ciclo de histéresis punto a punto.

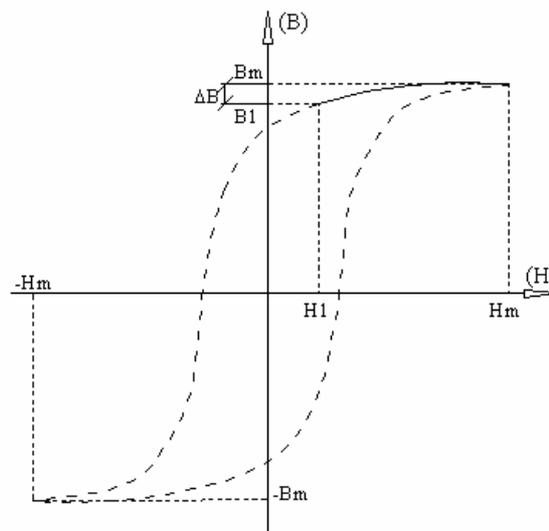
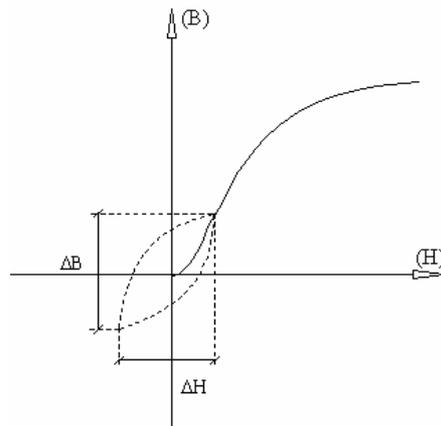


Figura 6-4. Determinación de un punto del ciclo límite

#### 6.2.4 Determinación de la característica de magnetización, característica normal o curva de primera inducción

La curva de primera inducción también denominada característica de magnetización o normal se puede determinar uniendo los puntos máximos de diversos ciclos de histéresis. El procedimiento para determinar la curva de primera inducción es por tanto el mismo que el seguido para el punto máximo del ciclo límite pero aplicándolo a diversos ciclos, empleando el mismo circuito de la figura 6-2.



**Figura 6-5.** Determinación de un punto de la curva de primera inducción

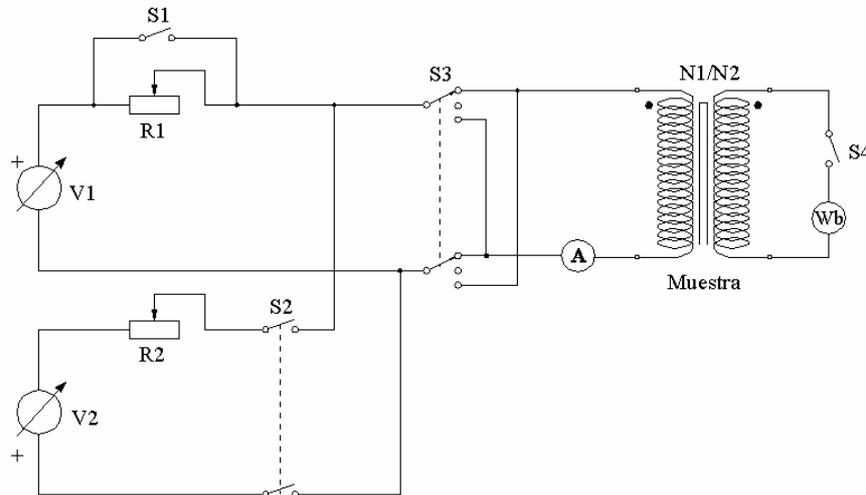
En primer lugar se debe desmagnetizar la muestra. Si deseamos obtener el punto de la curva correspondiente al campo, por ejemplo,  $H_1$ . Realizamos una excursión de intensidad  $\Delta I_1$  correspondiente a una variación de campo  $\Delta H_1$  (ver figura 6-5). Para conseguir esta variación de campo se procede igual que en el punto máximo del ciclo límite. Con el interruptor S1 abierto se regula el valor de resistencia del reóstato hasta que por el primario circule la intensidad  $I_1$  correspondiente al campo  $H_1$ , si a continuación accionamos el conmutador S<sub>3</sub> pasamos de  $H_1$  a  $-H_1$  y viceversa. Accionando varias veces el conmutador logramos estabilizar la medida [Karzc, 1972]. A continuación se cierra el interruptor S<sub>4</sub> para que el fluxómetro registre la variación de flujo, entonces se acciona una vez más el conmutador S<sub>3</sub>. La inducción  $B_1$  para el punto  $H_1$  será el incremento de inducción  $\Delta B$  registrado por el fluxómetro dividido entre dos. Para trazar la curva completa se repite el procedimiento para diversos valores de campo.

### 6.2.5 Determinación de curvas inversas de primer orden

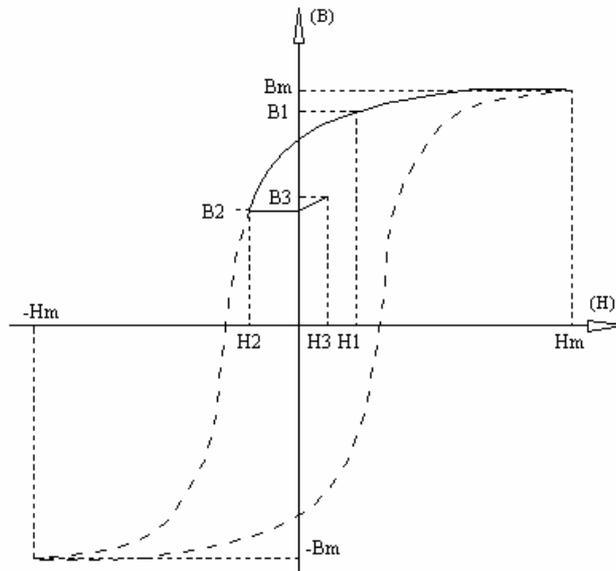
Con el esquema básico del ensayo balístico no se pueden obtener curvas inversas de primer orden. Si, por ejemplo, deseamos una curva inversa ascendente, el campo primero debería descender, y al llegar al campo correspondiente al punto de inversión volver a ascender. Para lograrlo se propone la modificación al ensayo balístico mostrada en la figura 6-6.

La parte de la curva coincidente con el ciclo límite se realiza por el mismo método que el ciclo de histéresis (apartado 6.2.3), si el ciclo límite ya ha sido determinado no es necesario volver a trazar esta parte de la curva. Sea  $(H_2, B_2)$  el punto de inversión (figura 6-7). Para llegar a él, con el interruptor S<sub>2</sub> abierto se procede igual que si deseáramos determinar este punto del ciclo límite. Con el punto  $(H_2, B_2)$  localizado se estabiliza la medida conmutado en

$S_3$ , seguidamente se pasa de  $H_m$  al punto de inversión cerrando el interruptor  $S_1$ , en este momento se cierra  $S_4$  para que el fluxómetro registre la variación de flujo. Entonces, cerrando el interruptor  $S_2$  se pasa de  $H_2$  a  $H_3$ , el flujo registrado corresponderá a este salto con lo que ya se ha localizado el punto  $(H_3, B_3)$ .



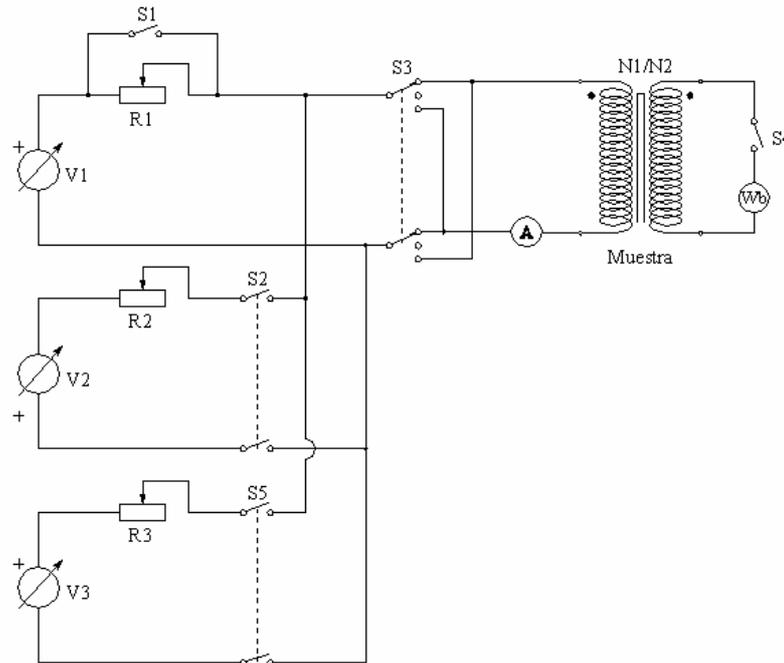
**Figura 6-6.** Esquema del ensayo balístico modificado para obtener curvas inversas de primer orden



**Figura 6-7.** Determinación de un punto de una curva inversa de primer orden

### 6.2.6 Curvas inversas de segundo orden

Las curvas inversas de segundo orden se obtienen siguiendo el mismo procedimiento que las curvas inversas de primer orden, pero el circuito se debe modificar según lo mostrado en la figura 6-8. Esto es, se debe añadir una tercera fuente para poder trazar la rama de segundo orden.



**Figura 6-8.** Esquema del ensayo balístico modificado para obtener curvas inversas de segundo orden

### 6.2.7 Resultados

Hemos probado el ensayo balístico en la muestra A que es para la que estamos aplicando el modelo de Preisach y para la que debemos determinar la función densidad. Las características de la muestra A se pueden consultar en el apéndice D. En la figura 6-10 se muestra la curva de primera inducción, en la figura 6-10 el ciclo límite, en figura 6-11 el conjunto de curvas inversas de primer orden y en la figura 6-12 una curva inversa de segundo orden.

En todos los casos, excepto la curva de segundo orden, el ensayo balístico nos ha permitido obtener de una forma barata y nada sofisticada las diversas curvas. En el caso de la curva de segundo orden la precisión de nuestros instrumentos hace que la curva obtenida sea peor. En todos los casos las curvas son correctas y siguen las previsiones teóricas. No obstante, como ya se comentó el método balístico no es una buena opción pues implica realizar muchas operaciones, sobretodo para las curvas inversas de primer y segundo orden, además se consiguen pocas curvas de pocos puntos, todo ello sin demasiada precisión. Para caracterizar el modelo de Preisach correctamente debemos superar el problema del número de curvas inversas obtenidas y su poca precisión.

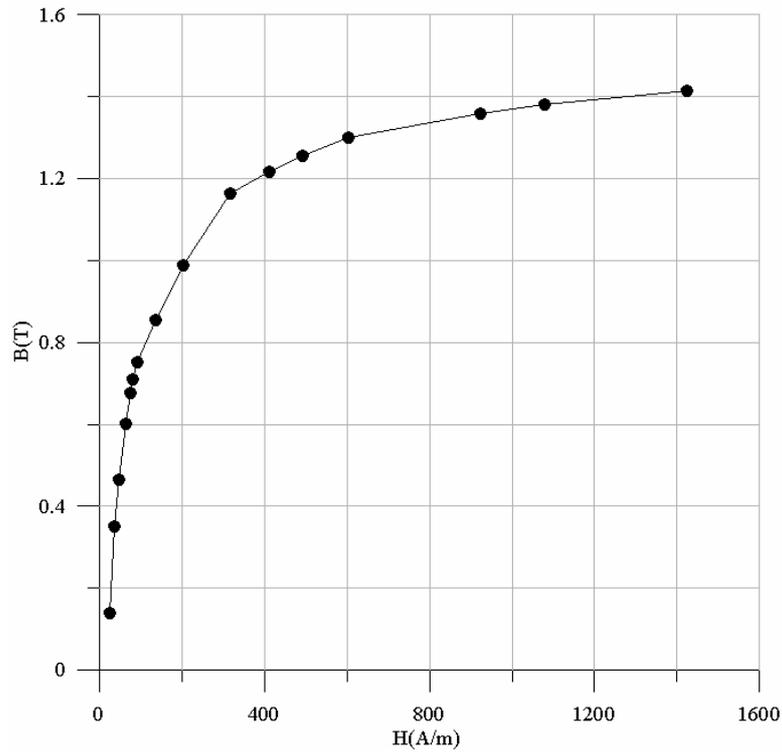


Figura 6-9. Curva de primera inducción del núcleo A mediante el método balístico

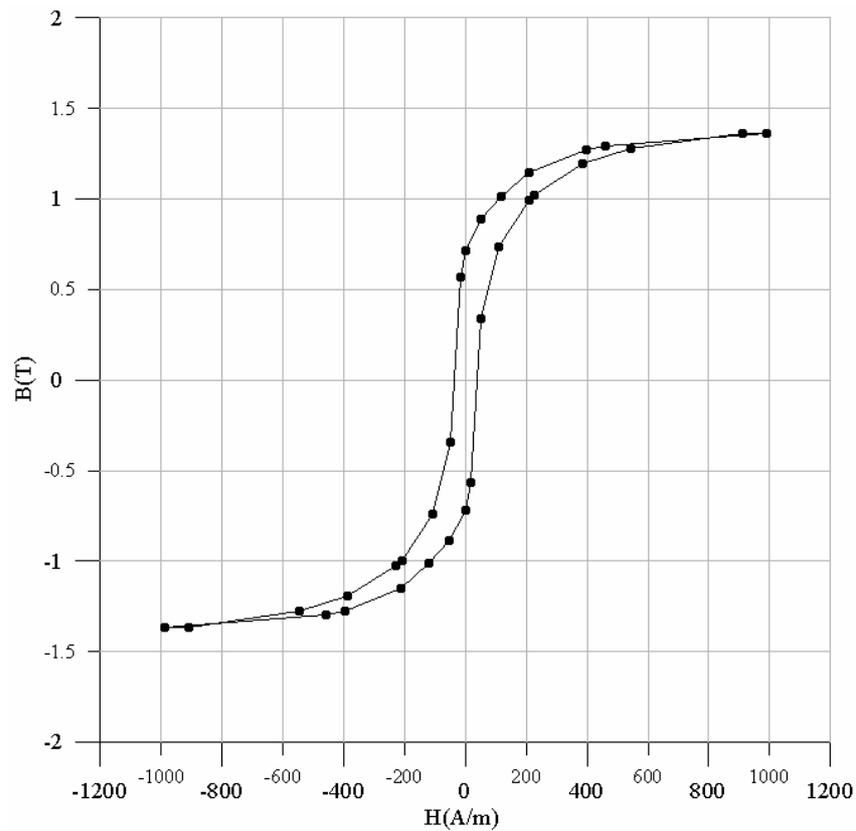


Figura 6-10. Ciclo límite (ciclo de histéresis) del núcleo A mediante el método balístico

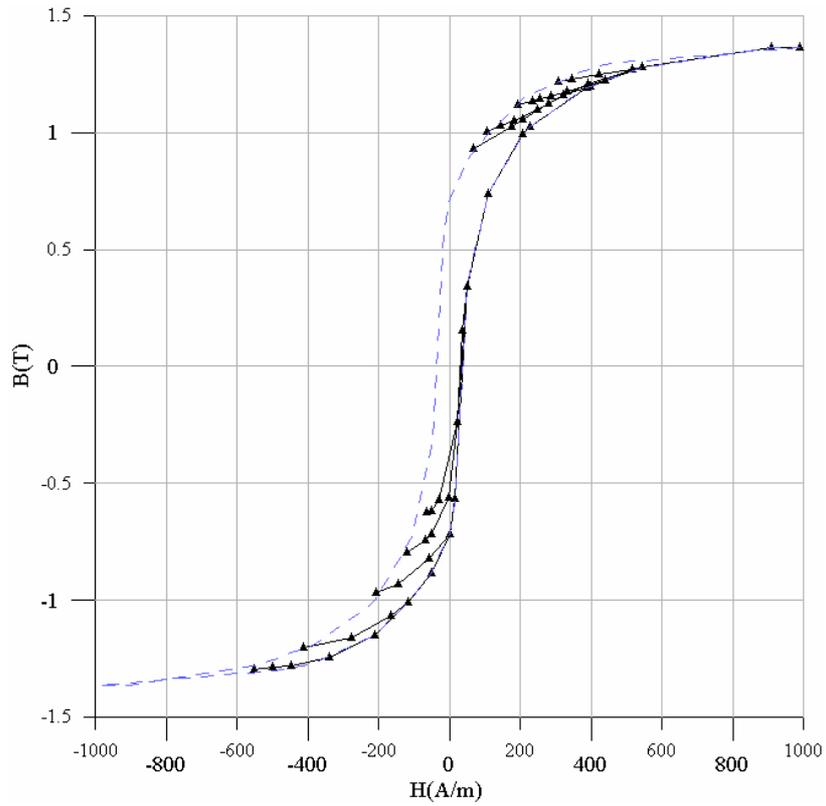


Figura 6-11. Curvas inversas de primer orden en el núcleo A mediante el método balístico

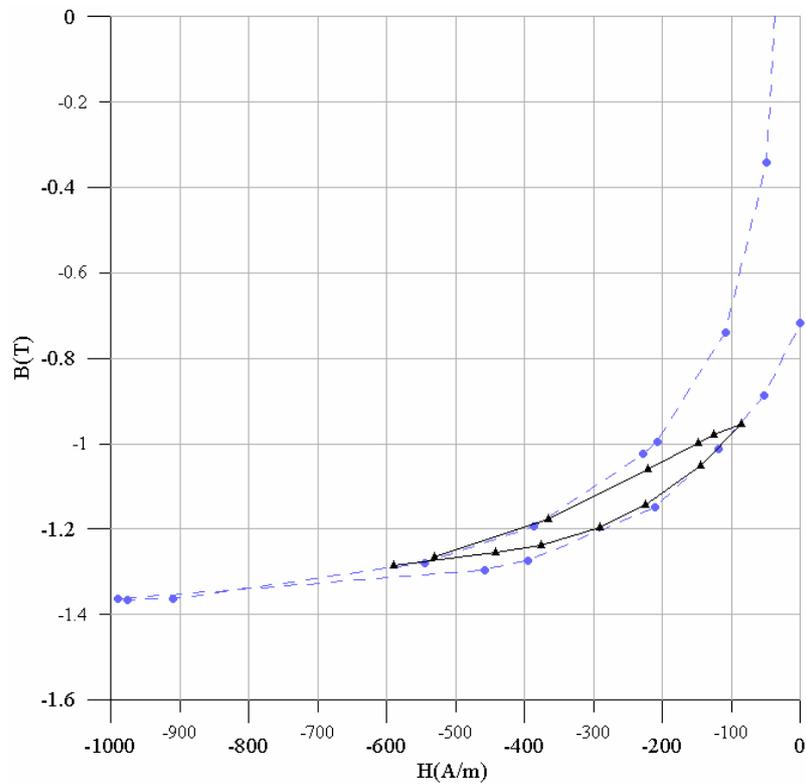


Figura 6-12. Curva inversa de segundo orden en el núcleo A mediante el método balístico

### 6.2.8 Crítica al método balístico. Posibles mejoras al método.

El método balístico ha resultado ser una opción económica y relativamente simple para determinar características magnéticas, pero insuficiente para nuestros propósitos. Mediante el método balístico hemos sido capaces de obtener las curvas inversas de primer orden necesarias para caracterizar el modelo de Preisach clásico y el modelo de Bertotti con un instrumental de fácil adquisición. Pero ello a base de un procedimiento muy laborioso, la obtención de una curva inversa de primer orden puede implicar de tres a cuatro horas de ensayo, con el operario continuamente ejecutando operaciones de medición y cambios en los interruptores en función de historial de campo deseado. Para obtener buenos resultados en el modelo de Bertotti necesitaremos al menos quince curvas, con puntos de inversión ubicados en el tramo reversible del ciclo límite. Con el método balístico esto es posible, pero muy complicado.

Una opción para superar los problemas del método balístico es automatizarlo. Esto es, la generación de los historiales, el control de las mediciones y el cálculo de la inducción y la intensidad de campo se realiza mediante un ordenador personal que gobierna a una tarjeta de adquisición de datos.

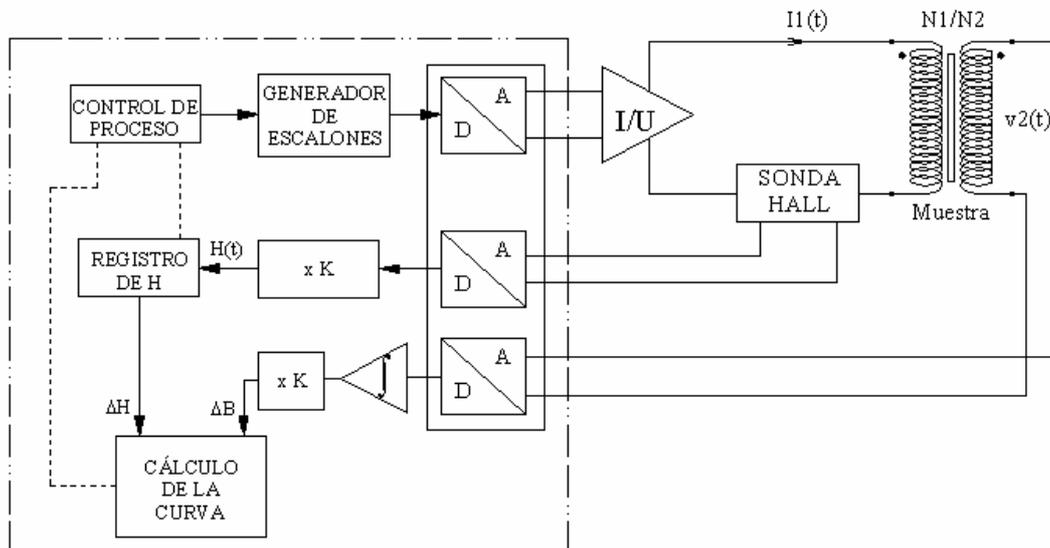


Figura 6-13. Esquema de bloques del método balístico controlado por ordenador

El sistema propuesto tendría un esquema de bloques como el mostrado en la figura 6-13. Los diversos bloques de control y cálculo se pueden realizar mediante LabVIEW. El control de proceso comanda a un generador de escalones de tensión, dicho control de proceso indica entre que valores de tensión se realiza el escalón, estos valores se generan en función del tipo

de curva a construir. El bloque “generador de escalones” crea un escalón por una de las salidas analógicas de la tarjeta de adquisición de datos. Este escalón de tensión produce un escalón de intensidad en el arrollamiento de excitación de la muestra. Como que la intensidad de salida de las tarjetas de adquisición de datos no es suficiente como para saturar a las muestras, se intercala entre la tarjeta y el arrollamiento de excitación un amplificador de transconductancia. Este amplificador convierte la tensión de entrada en intensidad, esto es, es una fuente de corriente controlada por tensión, lo cual es muy conveniente para generar los historiales de campo. En serie con el arrollamiento de excitación, a la salida del amplificador de transconductancia se conecta una sonda Hall, ésta genera una tensión proporcional a la intensidad que circula por ella. La tensión es adquirida por la tarjeta, con este valor se calcular el campo  $H(t)$ .

El arrollamiento secundario sigue cumpliendo la misma función de bobina de exploración, en sus bornes aparece una fuerza electromotriz cuya integral es la variación de flujo en el núcleo. Esta tensión es muestreada por la tarjeta y tratada por software para determinar el valor de la variación de flujo y por tanto de la variación de inducción. Con la variación de inducción y la variación de campo se puede construir la curva de primera inducción, el ciclo límite o las curvas inversas, siguiendo el mismo procedimiento de cálculo que en el método balístico manual.

El método balístico automatizado presenta una serie de problemas que no presentaba el manual. Estos problemas aparecen en el comportamiento del arrollamiento del primario ante los saltos de intensidad a los que se le somete. Ante un salto de intensidad el arrollamiento genera una fuerza electromotriz que puede adquirir valores muy altos, esto complica muchísimo el diseño del amplificador de transconductancia. Pero lo peor de todo es que en ningún momento controlamos realmente el salto de intensidad. Esto no es tan delicado para un integrador electromecánico como el fluxómetro, pero es desastroso en nuestro sistema. Precisamente ahí radicaba también uno de los problemas del método balístico manual.

En conclusión, automatizando el ensayo balístico no conseguimos simplificar el método. La solución es abandonar el método balístico y aplicar su alternativa, el histeresígrafo, para determinar las curvas inversas necesarias para el modelo de Preisach.

### **6.3 Histeresígrafo adaptado para curvas inversas de primer orden**

#### **6.3.1 Introducción**

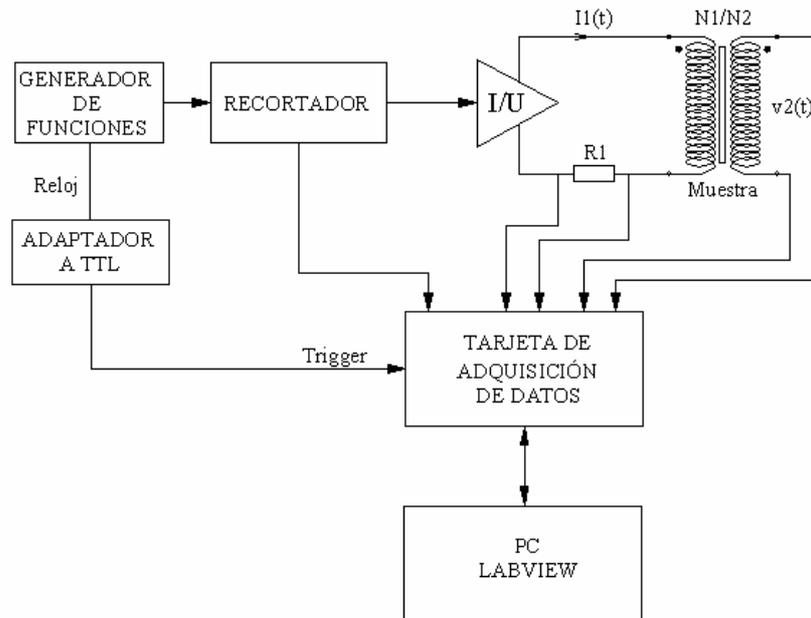
Por histeresígrafo (o equipo histeresigráfico) se entiende al equipo destinado a trazar el ciclo de histéresis de forma gradual, esto es a partir de una excitación que varía de forma continua, a diferencia del método balístico en el cual el ciclo se construye a partir de saltos de campo con su correspondiente salto de flujo magnético [Beckley, 2002; ASTM A733]. Algunos autores han empleado el método histeresigráfico para obtener ciclos de histéresis experimentales [Birkelbach, Freedon y Hempel, 1984; Birkelbach, Hemple y Schulte, 1986; Carminati y Ferrero, 1992; Cristaldi, Ferrero, Lazzaroni et al, 2003; Salceanu y David, 1999; Cardelli, della Torre y Ban, 2000; Benda. Bydzovsky. Krivosik et al, 2000] e incluso para realizar una determinación experimental del número de paredes de dominio [Sakaki, 1980], pero no se tiene constancia que se haya empleado para determinar curvas inversas.

La preparación de las muestras es exactamente la misma, así como la función de ambos arrollamientos: el primario es una bobina de excitación que establece el campo en el núcleo y el secundario es una bobina de exploración a partir de cuya fuerza electromotriz se puede determinar el flujo. De hecho el equipo es muy similar al mostrado en la figura 6-13 para automatizar el ensayo balístico. La única diferencia está en la fuente, en este caso la excitación varía gradualmente, para ello se emplean señales o bien sinusoidales o triangulares. No obstante, este cambio de excitación implica un cambio de filosofía radical.

En general, con el método histeresigráfico se procede como sigue. Un generador de funciones controlable genera una señal de tensión que corresponde al historial de campo deseado; esta intensidad provoca una variación de flujo en el interior del núcleo que induce una fuerza electromotriz en el secundario con una forma de onda determinada; al integrar esta fuerza electromotriz se obtiene la forma de onda del flujo y de la inducción. Al combinar la forma de onda del campo (intensidad en el primario) y la inducción se obtiene la curva característica deseada.

Este procedimiento general se emplea para trazar curvas de histéresis a frecuencias industriales. Para nuestra aplicación, curvas inversas cuasiestáticas, deberemos realizar algunas modificaciones. En primer lugar necesitamos controlar el campo para que responda al historial necesario para trazar las curvas inversas de primer orden, por ello se intercala un amplificador de transconductancia entre el generador de funciones y el arrollamiento de excitación. La otra variación respecto al procedimiento general es la frecuencia, en nuestro

caso es un parámetro muy delicado ya que hemos de obtener curvas cuasiestáticas, el ensayo se debe hacer a una frecuencia lo suficientemente pequeña como para que los efectos dinámicos se pueden despreciar, esto es, que las corrientes inducidas no ensanchen el ciclo de histéresis. Pero a medida que disminuye la frecuencia, menores son las tensiones inducidas en el secundario, y por tanto más complicada es su adquisición.



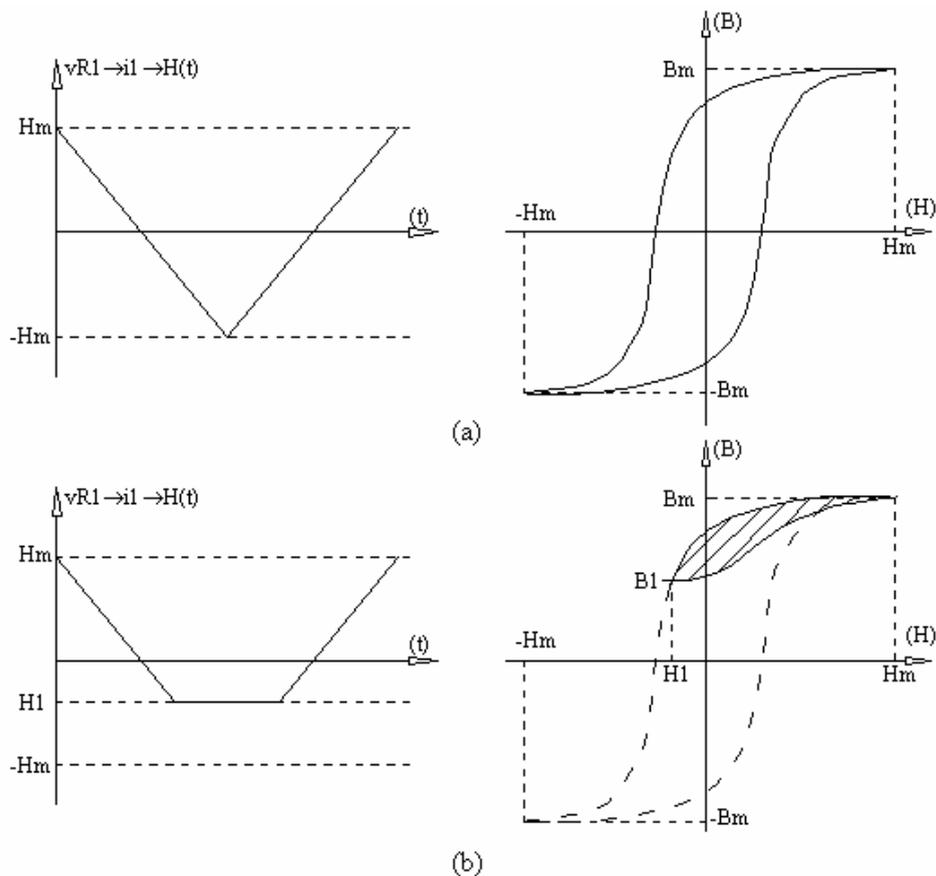
**Figura 6-14** Esquema general de bloques del histeresígrafo modificado

En la figura 6-14 se muestra el esquema de bloques del histeresígrafo modificado para curvas inversas. A continuación se explica su funcionamiento. En nuestro laboratorio no disponemos de un generador de funciones programable y hemos tenido que incorporar un circuito adicional para conseguir la forma de onda adecuada para trazar curvas inversas de primer orden. El generador de funciones genera una onda triangular simétrica centrada en cero (sin componente de continua) con frecuencia y amplitud ajustables. El generador de funciones también genera un pulso sincronizado con los puntos extremos de la onda triangular, esta señal se emplea como “*trigger*” del convertidor analógico-digital de la tarjeta. Se intercala un sencillo circuito para adaptar la señal de reloj del generador de funciones a la entrada TTL del “*trigger*” de la tarjeta de adquisición de datos.

La señal triangular simétrica debe ser modificada para que recree el historial del campo en una curva inversa de primer orden. Para ello se recorta la señal triangular a partir de un cierto valor que corresponde al punto de inversión tal y como se muestra en la figura 6-15. Para caracterizar correctamente el modelo de Preisach todas las curvas inversas deben permanecer

al mismo ciclo límite, y aunque su frecuencia sea tan pequeña que se pueda suponer cuasiestática, todas han de haber sido generadas a la misma frecuencia. Si se pretende adaptar la señal triangular añadiendo un valor de continua y modificando la amplitud (ver figura 6-16) estaremos incurriendo en un error, puesto que la señal correspondiente al ciclo límite tiene una pendiente diferente que la correspondiente a la curva inversa, con lo que las curvas inversas trazadas pertenecerían a ciclos límite diferentes.

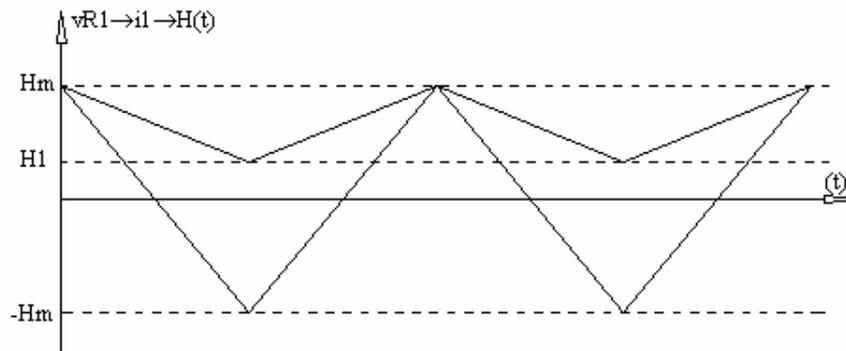
En resumen, la única opción válida para generar un conjunto de curvas inversas de primer orden pertenecientes a un mismo ciclo límite empleando un generador de funciones que genera una señal triangular simétrica es el recorte mostrado en la figura 6-15, por ello intercalamos un recortador entre la salida del generador y la entrada de amplificador de transconductancia. La señal del nivel de corte proviene de una de las salidas analógicas de la tarjeta, esta señal es controlada por software en función del punto de inversión deseado para cada curva inversa.



**Figura 6-15.** Formas de onda para recrear el historial de campo. (a) En un ciclo de histéresis. (b) En una curva inversa de primer orden

Una vez recortada la señal de tensión ya tiene la forma de onda adecuada para recrear el historial de campo correspondiente a una curva inversa de primer orden. Esta forma de onda es convertida a intensidad por el amplificador de transconductancia.

La intensidad de salida del amplificador de transconductancia circula por el arrollamiento de excitación creándose el historial de campo deseado. Se emplea la resistencia del amplificador de transconductancia como transductor de corriente. La tensión en bornes de dicha resistencia es proporcional a la intensidad que circula por ella, que es la intensidad por el arrollamiento del primario. La tensión en bornes de la resistencia se introduce en la tarjeta por uno de los canales de entrada, donde es muestreada. Dividiendo la tensión en la resistencia por el valor de la resistencia y aplicando la expresión (6.1) ya tenemos la forma de onda del campo  $H(t)$ .



**Figura 6-16.** Forma errónea de adaptar la señal triangular del generador de funciones para recrear el historial de campo correspondiente a una curva inversa de primer orden

La tensión en bornes del secundario  $u_2(t)$  es la fuerza electromotriz inducida por el flujo  $\phi(t)$  establecido en el núcleo de la muestra. Esta tensión del secundario es introducida en uno de los canales analógicos de entrada de la tarjeta donde es muestreada. Mediante el software se integra dicha tensión obteniendo la forma de onda del flujo  $\phi(t)$  y de la inducción  $B(t)$ .

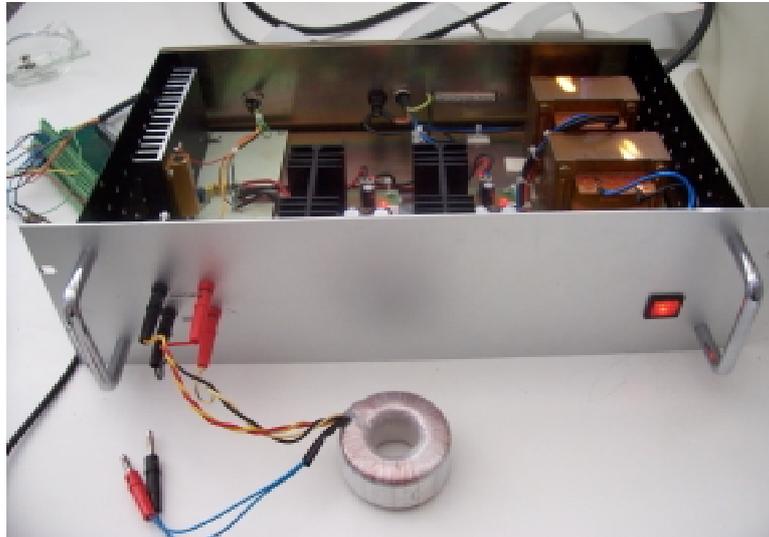
En la figura 6-17 se muestra una fotografía del equipo completo de histeresígrafo modificado para curvas inversas de primer orden.

## 6.3.2 Descripción del equipo

### 6.3.2.1 Ordenador personal y tarjeta de adquisición de datos

La función del ordenador personal es comandar la tarjeta de adquisición de datos. La programación se realiza mediante LabVIEW 5.0. La tarjeta de adquisición de datos se emplea

para tomar la tensión en el secundario de la muestra, la tensión en la resistencia el amplificador de transconductancia y generar la señal de referencia para el circuito recortador.



*Figura 6-17. Fotografía del equipo completo del histeresígrafo modificado para curvas inversas*

El ordenador personal empleado tiene un procesador Pentium-II con sistema operativo Windows'89. La tarjeta se ha ubicado en una de las ranuras libres del bus ISA del ordenador.

La tarjeta de adquisición de datos es una PCL-1800 de National Instruments, dispone de 2 canales analógicos de salida, 8 canales analógicos de entrada, 8 canales digitales de entrada/salida. El trigger puede ser comandado por una señal exterior.

La ganancia del convertidor analógico-digital es única para todos los canales. Esta ganancia, por requerimientos de LabVIEW, se introduce como una tensión límite. Esto es, se introduce la tensión máxima de la señal a muestrear, y LabVIEW calcula que ganancia tiene la tensión límite inmediatamente superior a la tensión máxima de la tensión analógica. Las tensiones límite son:  $\pm 5V$ ;  $\pm 2,5V$ ;  $\pm 1V$ ;  $\pm 500mV$ ;  $\pm 250mV$ ;  $\pm 100mV$  y  $\pm 50mV$ .

#### 6.3.2.2 Generador de funciones

El generador de funciones es un equipo desarrollado por el Dr. Manuel Sevilla del Departamento de Física e Ingeniería Nuclear de la Universidad Politécnica de Cataluña. Tanto la frecuencia como la amplitud son regulables. Además de la salida de señal dispone de una salida de pulsos sincronizados con la señal generada (señal de reloj) y una salida de tensión de  $\pm 15V$  para alimentar circuitos. Los pulsos se pueden sincronizar con el paso por

cero de la señal de salida o con los extremos de la misma. En nuestro caso hemos optado por la segunda opción.

Con el generador de funciones se obtiene una señal triangular simétrica centrada en 0V, de frecuencia 0,15Hz y amplitudes que varían entre 0V y 3V. Para trazar las curvas inversas de primer orden la señal permanece a una amplitud constante tal que su valor máximo corresponda con el campo máximo del ciclo límite  $H_m$ . Para trazar curvas de histéresis su amplitud varía para su valor máximo corresponda con el del campo máximo de la curva a trazar.

En la figura 6-18 se muestra una fotografía del generador de funciones.



**Figura 6-18.** Fotografía del generador de funciones

### 6.3.2.3 Recortador

La función del recortador es la de la modificar la señal triangular del generador de funciones para que su forma de onda corresponda con la del historial de campo necesario para lograr la curva inversa de primer orden. La señal proveniente del generador de funciones se recorta tal y como se muestra en la figura 6-15. La señal de referencia que indica a que tensión se realiza el recorte proviene de la salida analógica de la tarjeta.

En la figura 6-19 se muestra el circuito del recortador. Este circuito se ha montado en la misma caja que el amplificador de transconductancia.

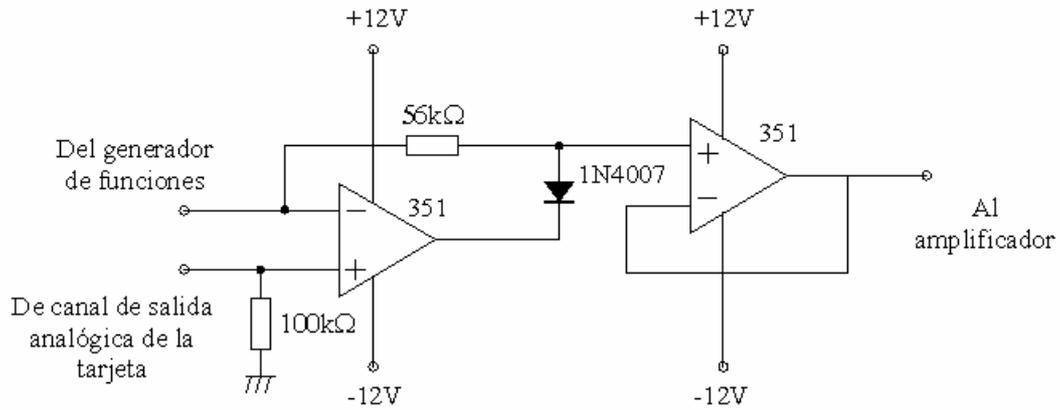


Figura 6-19. Esquema del recortador

#### 6.3.2.4 Amplificador de transconductancia

El amplificador de transconductancia es una fuente de corriente controlada por tensión. Convierte, aplicando un cierto factor que depende de una resistencia, la tensión en intensidad.

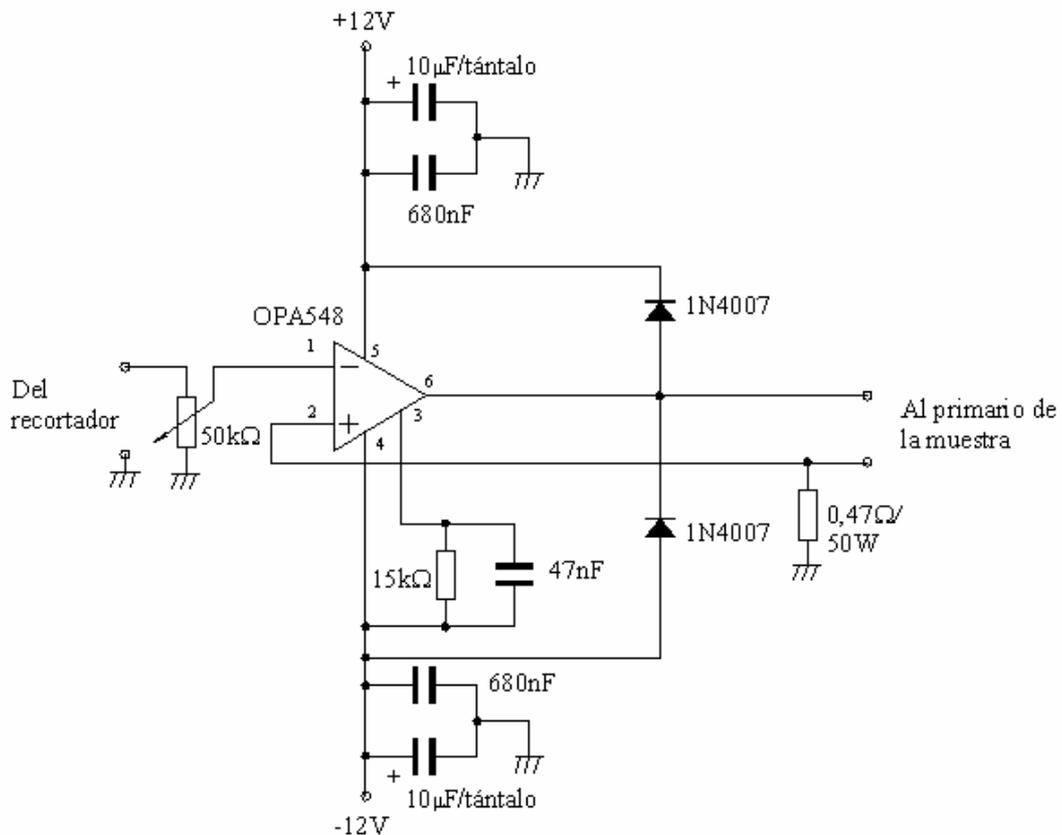


Figura 6-20. Esquema del amplificador de transconductancia

El circuito del amplificador de transconductancia es el mostrado en la figura 6-20. El amplificador operacional empleado es el OPA548, se trata de un amplificador de potencia,

capaz de proporcionar hasta 2A de continua y 5A de pico. El terminal 7 del operacional, cuando se coloca a estado “bajo” inhibe la salida de intensidad, en nuestro circuito, como que no se emplea esta opción se ha dejado el terminal libre por lo que siempre se permite la salida de corriente.

La resistencia de  $15\text{k}\Omega$  entre los terminales 3 y 4 del amplificador operacional tiene como función controlar la intensidad máxima de salida del operacional, en este caso la intensidad está limitada a 2A. El condensador de  $47\text{nF}$  en paralelo con la resistencia limitadora de corriente se coloca para reducir el efecto del ruido.

Los dos diodos 1N4007 se conectan para proteger al operacional de los picos de tensión en bornes del arrollamiento del primario de la muestra.

La resistencia de  $0,47\Omega$ , es la resistencia que empleamos como sensor de corriente. La corriente que circula por R1 es la corriente que circula por la carga del amplificador de transconductancia. Esta resistencia es la responsable de convertir la tensión en intensidad. Esta resistencia es de  $50\text{W}$ , así evitamos su calentamiento, con lo que se evita la deriva térmica de su resistencia.

El potenciómetro de  $50\text{k}\Omega$  a la entrada del amplificador operacional se ha conectado para regular la ganancia del amplificador, en nuestro caso se ha ajustado para que la corriente de salida sea de 2A cuando la tensión de entrada sea de 5V.

Para un correcto funcionamiento del amplificador operacional se le ha colocado un disipador térmico. Para que el disipador no pierda eficiencia no se ha intercalado un aislante de mica entre el cuerpo del amplificador operacional y el disipador. Esto es importante tenerlo en consideración pues entonces el disipador térmico queda en contacto eléctrico con el terminal de -12V.

El amplificador operacional se alimenta a una tensión de  $\pm 12\text{V}$ , generada por una fuente de alimentación simétrica estabilizada.

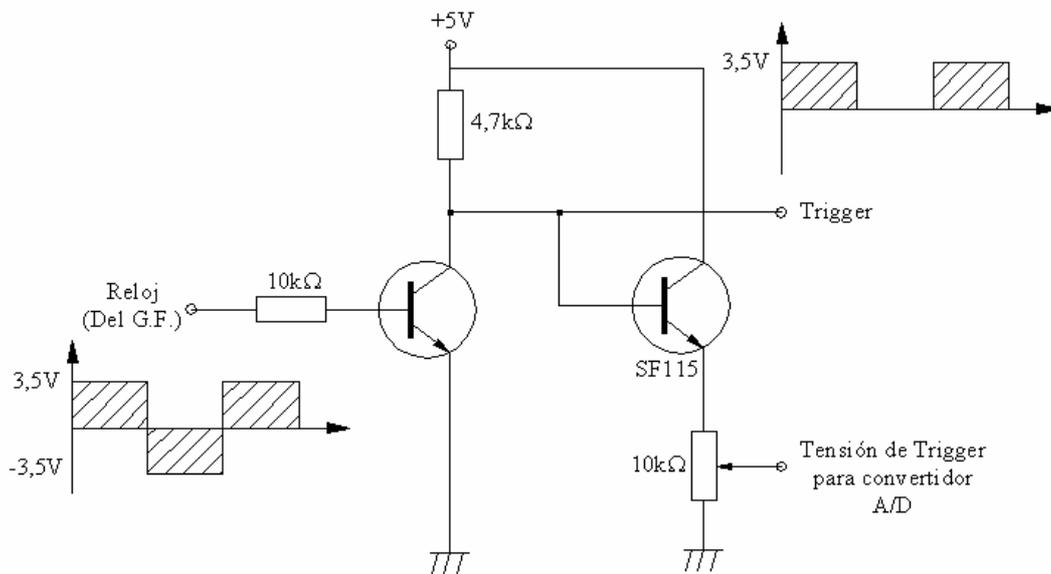
#### 6.3.2.5 Adaptador a TTL

Para activar el “trigger” de la tarjeta de adquisición de datos empleamos la salida de reloj del generador de funciones. Dicha salida de reloj está sincronizada con la señal triangular

generada por el generador de funciones. No obstante previamente se debe adaptar la señal del generador de funciones a la entrada TTL de la tarjeta de adquisición de datos.

La señal de reloj del generador de funciones es una onda cuadrada de 3,5V de pico aproximadamente, simétrica centrada en cero (ver figura 6-23). En TTL el estado lógico "0" corresponde a una tensión menor a 0,8V y el estado lógico de "1" a una tensión mayor a 2V. Para convertir la señal a TTL se elimina la parte negativa de la señal, dejando la parte positiva tal y como está.

En la figura 6-20 se muestra el circuito del convertor a TTL. Se trata de un transistor polarizado como interruptor que recorta la porción negativa de la señal de entrada.



**Figura 6-21.** Esquema del adaptador a TTL

### 6.3.2.6 Fuente de alimentación

Los diversos amplificadores operaciones del equipo se alimentan a una tensión de  $\pm 12V$ . Esta tensión se consigue conectando dos fuentes de 12V / 5A tal y como se muestra en la figura 6-22. La fuente ha estar estabilizada, pero además debe entregar la intensidad necesaria para el amplificador de transconductancia.

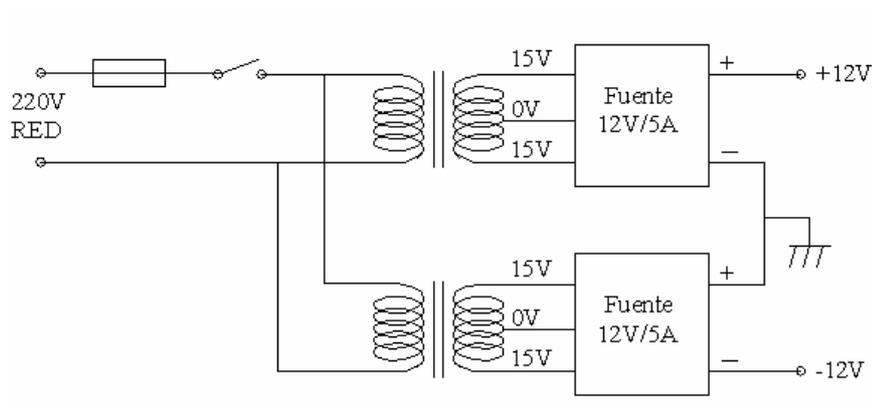


Figura 6-22. Esquema de la fuente de alimentación

### 6.3.3 Procedimientos. Software

A continuación se expone el procedimiento seguido para obtener las características magnéticas, se explicará el modo en que operan los programas. En el apéndice G se incluyen los listados de los códigos de los programas. Toda la programación del equipo se ha realizado con LabVIEW 5.1.

#### 6.3.3.1 Procedimiento.

El procedimiento de nuestro equipo histeresisgráfico consiste en recortar una señal triangular a un nivel de tensión determinado (figura 6-15). Esta señal triangular recortada es la entrada del amplificador de transconductancia que la convierte en una señal de intensidad de excitación en el primario de la muestra. El nivel corte de la señal triangular corresponde por tanto al punto de inversión de la curva inversa de primer orden. En caso de desear obtener un ciclo menor (ciclo de histéresis dentro del ciclo límite) basta con hacer que el nivel de corte sea igual o mayor al valor máximo de la señal triangular. Los valores de pico de la señal triangular corresponden con los valores máximo y mínimo ( $H_m$  y  $-H_m$  respectivamente) del ciclo de histéresis límite, o genéricamente de un ciclo de histéresis determinado.

La forma de onda de intensidad a la salida del amplificador de transconductancia  $i_1(t)$ , por el teorema de Ampère (6.1) corresponde a un forma de onda de campo  $H(t)$  que establece un flujo  $\phi(t)$  en el núcleo de la muestra. Dicho flujo induce una fuerza electromotriz en el secundario de la muestra  $u_2(t)$ .

$$u_2(t) = \frac{1}{N_2} \frac{d\phi(t)}{dt} \quad (6.4)$$

La integral de dicha tensión nos permite determinar indirectamente el flujo o la inducción en el núcleo de la muestra. Esta señal de tensión del secundario  $u_2(t)$  se muestrea y trata por software para determinar la forma de onda de la inducción  $B(t)$ .

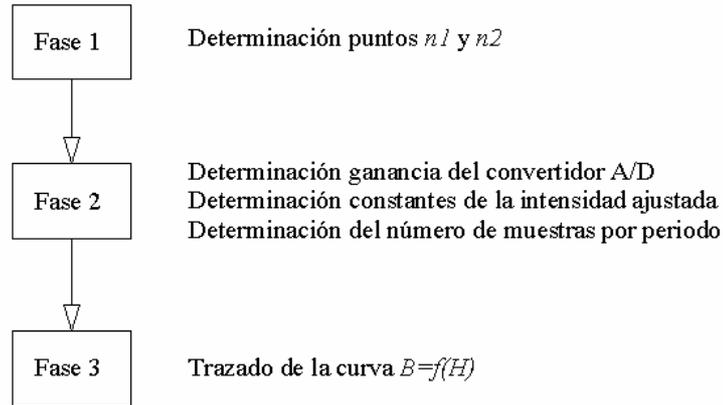
La forma de onda de la intensidad de excitación permite determinar la forma de onda del campo mediante (6.1), pero esta intensidad no se muestrea sino que se determina analíticamente. La razón de ello es la siguiente. Al ser la frecuencia tan baja (0,15Hz) la tensión inducida  $u_2(t)$  también es baja, aproximadamente de un orden de magnitud de 10 a 50 respecto a la intensidad  $i_1(t)$ . La ganancia de la tarjeta necesaria para  $u_2(t)$  es muy diferente a la necesaria para  $i_1(t)$ . El problema está en que nuestra tarjeta de adquisición de datos no permite asignar una ganancia diferente a cada canal de entrada. Como que señal de  $i_1(t)$  es mayor que  $u_2(t)$  la ganancia de la tarjeta debería ajustarse a la señal de  $i_1(t)$ , lo cual en los casos de curvas inversas con puntos de inversión de campos altos sería un grave problema, pues en estos casos la tensión  $u_2(t)$  es muy pequeña. Este problema tiene dos soluciones, o bien se construye un amplificador de altas prestaciones regulable para la tensión del secundario, o se determina la forma de onda de  $i_1(t)$  analíticamente.

Para nuestro equipo hemos optado por determinar la forma de onda de  $i_1(t)$  analíticamente. Se realiza un primer muestreo de  $i_1(t)$  ajustando esta señal mediante el método de los mínimos cuadrados. Esta intensidad ajustada por mínimos cuadrados  $i'_1(t)$  es la que se emplea, juntamente con  $B(t)$ , para calcular la forma de onda del campo  $H(t)$  y construir la curva de histéresis o la curva inversa.

El procedimiento para determinar una curva inversa o un ciclo de histéresis se divide en tres fases realizadas por un programa principal denominado “*master*”. Este programa principal llama a diversos subprogramas que realizan funciones concretas. A continuación se analiza el algoritmo principal en sus tres fases.

### 6.3.3.2 Algoritmo principal.

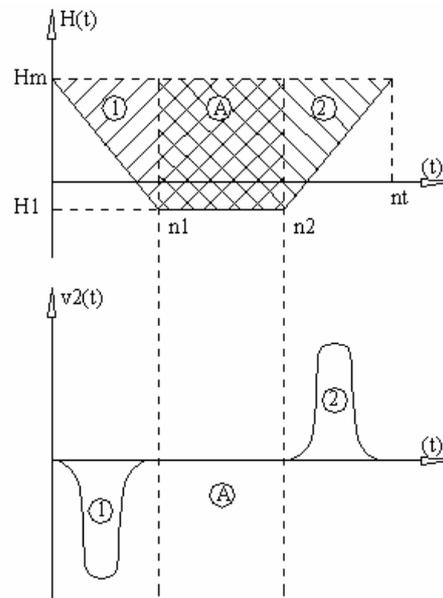
En la figura 6-23 se resumen las tres fases para determinar una curva de histéresis o una curva inversa.



**Figura 6-23.** Algoritmo principal. Fases.

### Primera fase.

Tal como se muestra en la figura 6-15, para recrear el historial necesario para una curva inversa de primer orden se corta la señal triangular de tensión, la tensión de corte corresponde con el campo del punto de inversión. Como resultado del recorte de la señal triangular esta queda dividida en tres tramos (figura 6-24). El primer tramo es una recta de pendiente negativa, el segundo tramo es una recta de pendiente nula y el tercer tramo es una recta de pendiente positiva. A los tres tramos les denominamos 1, A y 2 respectivamente.



**Figura 6-24.** Tramos de la señal de excitación y de la tensión del secundario

Para el tratamiento posterior se debe detectar en que muestra comienza y finaliza cada tramo. Sea  $n_1$  la muestra donde finaliza el tramo 1 y comienza el tramo A, y  $n_2$  la muestra donde finaliza el tramo A y comienza el tramo 2. Se determina  $n_1$  como la intersección de la recta del tramo 1 con la recta del tramo A. Igualmente se determina  $n_2$  como la intersección de la

recta del tramo A con la correspondiente al tramo 2. Así que previamente se deben ajustar las tres ecuaciones de los tres tramos.

En primer lugar se muestrea la tensión que cae en la resistencia R1 del amplificador de transconductancia, esta caída de tensión es proporcional a la intensidad de excitación que circula por el arrollamiento primario de la muestra.

$$i_1(t) = \frac{u_{R1}(t)}{R1} \quad (6.5)$$

Aplicando la relación (6.5) se obtiene la forma de onda de la intensidad en el primario, esta intensidad se muestra en la pantalla del ordenador. En este momento interviene el operario, que en función de la forma de onda mostrada en pantalla introduce los puntos  $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5$  y  $a_6$  (ver figura 6-25). Estos puntos delimitan los tramos de muestras que se emplean para ajustar las rectas de los tramos 1, A y 2.

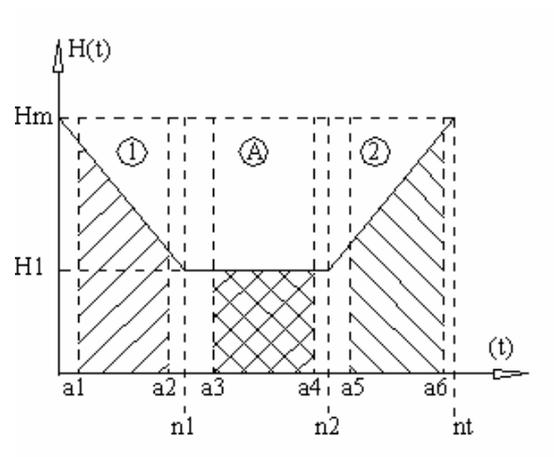


Figura 6-25. Puntos  $a_1 \dots a_6$

Una vez el operario introduce los puntos  $a_1$  a  $a_6$ , el programa determina por el método de los mínimos cuadrados las constantes de las rectas de los tramos 1, A y 2:

$$\begin{aligned} y_1 &= m_1 x + b_1 \\ y_A &= m_A x + b_A \\ y_2 &= m_2 x + b_2 \end{aligned} \quad (6.6)$$

Donde  $x$  es el número de muestra e  $y_1$ ,  $y_A$ ,  $y_2$  son, respectivamente las intensidades ajustadas de los tramos 1, 2 y A. Con las ecuaciones de las tres rectas caracterizadas el programa calcula  $n_1$ , la muestra para la cual se produce la intersección entre la recta  $y_1(x)$  e  $y_A(x)$

$$y_1(n_1) = y_A(n_1) \Rightarrow n_1 = \frac{b_A - b_1}{m_1 - m_A} \quad (6.7)$$

y  $n_2$ , la muestra donde intersecan  $y_A(x)$  e  $y_2(x)$ :

$$i_A(n_2) = i_2(n_2) \Rightarrow n_2 = \frac{b_A - b_2}{m_2 - m_A} \quad (6.8)$$

En la ecuaciones (6.7) y (6.8) las variables  $n_1$  y  $n_2$  se redondean.

Para el caso de la histéresis el procedimiento es similar, pero se deben realizar un par de cambios. En una curva de histéresis no se debe recortar la señal triangular, por lo que para que el recortador no actúe la tensión de corte debe ser:

$$|V_o| \geq |V_m| \quad (6.9)$$

La tensión de corte  $V_o$  es un parámetro que introduce el usuario en función de la curva que desea obtener. Además, como que se emplea la señal triangular completa desaparece el tramo A, por lo que  $n_1 = n_2$ , y tan solo intervienen dos rectas  $y_1(x)$  e  $y_2(x)$ . Dichas rectas siguen las mismas ecuaciones que en (6.7), por lo que el punto de intersección entre ellas indica la muestra frontera entre ambos tramos:

$$i_1(n_1) = i_2(n_1) \Rightarrow n_1 = n_2 = \frac{b_2 - b_1}{m_1 - m_2} \quad (6.10)$$

El resto del procedimiento es idéntico al expuesto para las curvas inversas. Para las histéresis, el único dato que debe introducir el usuario es el nivel de corte  $V_o$ , que debe cumplir (6.9).

En el apéndice G se incluyen sendos diagramas de flujo para cada caso.

**Segunda fase.**

El siguiente paso del algoritmo principal es básicamente de comprobación. Se vuelve a muestrear la tensión en la resistencia R1 del amplificador de transconductancia, que equivale a muestrear la intensidad de excitación  $i_1(t)$ , y también se muestrea la tensión del secundario  $u_2(t)$ . De esta forma se realiza una doble comprobación, primero se comprueba que con la intensidad de excitación ajustada a tramos  $i'_1(t)$  se reproduce fielmente la intensidad, y posteriormente se comprueba que la forma de la curva obtenida es correcta. Esta segunda comparación nos permite además tener una estimación del valor máximo de  $u_2(t)$ , con lo que se puede ajustar la ganancia de la tarjeta de en el siguiente paso.

La primera operación a efectuar es la lectura de los parámetros introducidas por el usuario, estos son únicamente el tipo de curva y la ganancia del convertidor analógico-digital. Por requerimientos de LabVIEW la ganancia no se introduce directamente, en su lugar se indica la tensión máxima de la tensión a muestrear o bien directamente la tensión límite inmediatamente superior a la tensión máxima de entrada al convertidor. Una vez leídos los parámetros introducidos por el usuario, el programa pasa a cargar los parámetros resultantes de la fase anterior: la tensión de corte  $V_l$  y las fronteras del tramo A,  $n_1$  y  $n_2$ .

Con todos los parámetros cargados, se genera la tensión de corte  $V_l$ . Ahora la intensidad de excitación  $i_1(t)$  ya ha adoptado la forma de onda correspondiente al historial de una curva inversa de primer orden o de un ciclo mayor de histéresis. El programa inicializa la conversión analógica-digital y se muestrean la tensión en la resistencia R1 del amplificador de transconductancia  $u_{R1}(t)$ , la tensión en el secundario de la muestra  $u_2(t)$  y la tensión del reloj del generador de funciones. Las tres tensiones están contenidas en una misma matriz, para separarlas en tres vectores se llama al subprograma “periodo”. Este subprograma además indica el número de muestras de un periodo completo  $n_p$ . A partir de la tensión muestreada  $u_{R1}(x)$ , mediante la ecuación (6.5) se calcula la intensidad de excitación muestreada  $i_1(x)$ .

Mediante el subprograma “periodo” se obtiene la tensión en la resistencia R1 del amplificador y la tensión en el arrollamiento secundario. A continuación se tratan ambos vectores separadamente para obtener el campo y la inducción en el núcleo.

Comenzamos por el tratamiento de la tensión en la resistencia R1 de amplificador. Esta forma de onda corresponde exactamente con la intensidad de excitación modificada por un cierto factor de escala. En concreto, aplicando la ecuación (6.5) se obtiene la intensidad  $i_1(t)$ .

Aplicando el teorema de Ampère en el vector de la intensidad de excitación se obtiene la forma de onda del campo  $H(t)$ :

$$H(t) = \frac{N_1}{l} i_i(t) = K_1 i_i(t) \quad (6.11)$$

Esta es la forma de onda del campo muestreado, pero no es la que se empleará para construir la curva de magnetización (histéresis o curva menor), como ya se comentó anteriormente se emplean las ecuaciones (6.6) ajustados por mínimos cuadrados a partir de la intensidad muestreada. En este bloque se ha muestreado la intensidad de excitación para poder comprobar que las ecuaciones (6.6) multiplicadas por (6.11) efectivamente reproducen la intensidad de excitación. Mediante (6.11) se ha obtenido la forma de onda del campo muestreado  $H(t)$ . Ahora corresponde determinar el campo analítico. El subprograma "Pseudo\_I" calcula por el método de los mínimos cuadrados las constantes de  $y_1$  e  $y_2$  de (6.6) a partir de la intensidad de excitación muestreada  $i_i(t)$  y el índice de la muestra que separa el tramo 1 del 2 una vez extraído el A, esto es, de  $n_1$ . Con las constantes calculadas el subprograma "Pseudo\_I" genera un vector con la forma de onda de la intensidad de excitación analítica  $i'_i(t)$ . Aplicando el teorema de Ampère (6.11) en este vector obtenemos la forma de onda del campo analítico  $H'(t)$ .

$$H'(t) = \frac{N_1}{l} i'_i(t) = K_1 i'_i(t) \quad (6.12)$$

$$K_1 = \frac{N_1}{l}$$

Ahora ya se puede comparar la forma de onda de  $H(t)$  y  $H'(t)$ , siendo  $H'(t)$  la que se empleará, más adelante, para trazar la curva de histéresis o curva inversa.

Analicemos a continuación el tratamiento del vector tensión del arrollamiento secundario de la muestra  $u_2(t)$ . Según la ley de Faraday integrando la fuerza electromotriz se puede obtener el flujo, aplicado a nuestra muestra se trata de integrar la expresión (6.4):

$$\phi(t) = \frac{1}{N_2} \int_0^T u_2(t) dt + \phi_0 \quad (6.13)$$

Donde  $\phi_0$  es la constante de integración, que en nuestro caso es el flujo existente en el núcleo de la muestra al comenzar la integración. La integración se realiza sobre un periodo,

recordemos que previamente el subprograma “periodo” se había encargado de generar los vectores de  $i_1(t)$  y de  $u_2(t)$  correspondientes a un periodo.

El primer término de la ecuación (6.13), esto es, la integral; la realiza el subprograma “Integral”. La integral de  $u_2(t)$  hace notorio un problema que hasta ahora no nos había molestado. Se trata del offset del convertidor analógico-digital. Este convertidor desplaza verticalmente -suma una componente de continua- a la señal muestreada. Si bien esta tensión de offset está muy por debajo del orden de las señales muestreadas, al realizar la integral se va añadiendo a cada paso del integrador con lo que su efecto se hace notorio. El offset de la señal integrada lo elimina el subprograma “Offset”, cuyo algoritmo discutiremos más adelante. La salida del programa “Offset” es la tensión  $u_2(t)$  con el efecto del offset eliminado. La tensión integrada dividida entre  $N_2$  es el flujo, por tanto, si se divide entre la sección transversal del núcleo  $S$ , se obtiene inducción:

$$B_0(t) = \frac{1}{N_2 S} \int_0^T u_2(t) dt = \frac{1}{K_2} \int_0^T u_2(t) dt \quad (6.14)$$

$$K_2 = N_2 S$$

Pero la inducción  $B_0(t)$  de la ecuación (6.14), no es la inducción real en el núcleo de la muestra. Nos falta aún considerar el segundo término de la ecuación (6.13), la constante de integración  $\phi_0$ , en el fondo no es más la adición de una tensión de desplazamiento al valor de la integral. Analicemos dicho valor en función de la curva a representar. En el caso de curvas mayores, partimos del hecho que como la excitación es periódica centrada en cero, la histéresis es simétrica, por lo que el efecto de la constante de integración es centrar la señal integrada en 0. Esto se realiza mediante el subprograma “Centrada”, que también se discutirá más adelante. Para el caso de las curvas inversas de primer orden no podemos considerar que la señal de excitación sea simétrica, ni tampoco lo será la propia curva. La curva inversa de primer orden, en nuestro caso creciente, comienza en el punto máximo del ciclo mayor ( $H_m, B_m$ ) y desciende hasta el punto de inversión  $H_1$ , donde la excitación vuelve a ser de nuevo creciente y la curva retorna al punto máximo. Por consiguiente, el flujo existente en el núcleo en el momento de comenzar la integración es el flujo correspondiente a  $B_m$ . Así pues la constante de integración, en caso de curvas inversas de primer orden crecientes, se considera sumando  $B_m$  a  $B_0$ :

$$B(t) = B_0(t) + B_m \quad (6.15)$$

Mientras que en el caso de curvas inversas de primer orden decrecientes, como que se parte del punto mínimo del ciclo mayor:

$$B(t) = B_0(t) - B_m \quad (6.16)$$

Con  $B(t)$  y  $H'(t)$  determinadas se puede representar la curva de histéresis o el ciclo mayor. Esta curva se representa para que el usuario compruebe que su aspecto es correcto, antes de obtenerla definitivamente con el siguiente bloque del algoritmo principal.

En este bloque también se representa en pantalla la forma de onda de la tensión en el arrollamiento del secundario para determinar cuales son sus valores extremos y así programar correctamente la ganancia del convertidor analógico-digital en el siguiente bloque del algoritmo.

### **Tercera fase .**

En la tercera y última fase del algoritmo principal se obtiene la curva definitiva. En esta fase sólo se muestrea la tensión del arrollamiento secundario  $u_2(t)$ , la intensidad de excitación se obtiene analíticamente a partir de las constantes de las ecuaciones (6.6) determinadas en la fase anterior.

El procedimiento es muy similar al de la segunda fase. Primero se genera la tensión de corte  $V_l$  para obtener el historial de intensidad de excitación requerido para la curva deseada.

Con la muestra excitada adecuadamente se procede al muestreo de la tensión del secundario. En algunas excursiones, sobre todo en las curvas inversas de primer orden con un punto de inversión alto, cercano al máximo del ciclo mayor, la señal muestreada presenta tanto ruido blanco que queda enmascarada en él. Para eliminar el ruido blanco de la señal, se realiza la media de la señal obtenida en  $m$  muestreos, procediendo de la siguiente forma. Se realizan sucesivos muestreos de un periodo de  $u_2(t)$  (recuérdese que en la fase anterior se había determinado el número de muestras necesario para completar un periodo de la señal), para cada nuevo muestreo se presenta en pantalla forma de onda muestreada y el resultado de la media de los muestreos. Cuando el usuario estima que en la media de los muestreos se ha eliminado correctamente el ruido blanco, detiene el proceso. La media punto a punto de las señales de los  $m$  muestreos es la  $u_2(t)$  muestreada. El tratamiento de la tensión  $u_2(t)$  es el mismo que en la fase anterior, obteniendo  $B(t)$ .

La intensidad de excitación se genera analíticamente a partir de las constantes de las ecuaciones (6.6) mediante el subprograma “Pseudo\_I”. Estas constantes se determinaron en la fase anterior, ajustando por el método de los mínimos cuadrados la señal de intensidad muestreada. El vector de intensidad de excitación  $i'_i(t)$  se multiplica por  $KI$  para obtener el vector de campo  $H'(t)$ . Combinando la excitación  $B(H)$  con el campo  $H(t)$  se obtiene la curva deseada, ya sea un ciclo mayor o una curva inversa de primer orden.

El programa permite la opción generar un archivo en formato “txt” con los puntos  $(H,B)$  de la curva trazada. Esto permite su posterior tratamiento para caracterizar el modelo de Preisach. El nombre del archivo lo determina el usuario.

### 6.3.3.3 Subprogramas

Para facilitar la programación así como el seguimiento y corrección del códigos, algunas tareas se han realizado en unos bloques que denominamos subprogramas. En la exposición anterior del algoritmo principal, tareas tales como la integración no se realizan directamente en el propio programa, sino que se llama a otro programa que efectúa la tarea y devuelve el control al programa principal.

A continuación se comenta el funcionamiento los subprogramas principales. Los restantes subprogramas se pueden consultar en el apéndice G.

#### “Periodo”

El subprograma “periodo” tiene dos funciones: determinar el número de muestras por periodo y separar la matriz de salida del convertidor analógico-digital en tres vectores:

- $v_2(t)$ . Tensión en el arrollamiento secundario de la muestra
- $v_{R1}(t)$  . Tensión en la resistencia R1 del amplificador.
- La señal de reloj del generador de funciones (entrada de trigger de la tarjeta)

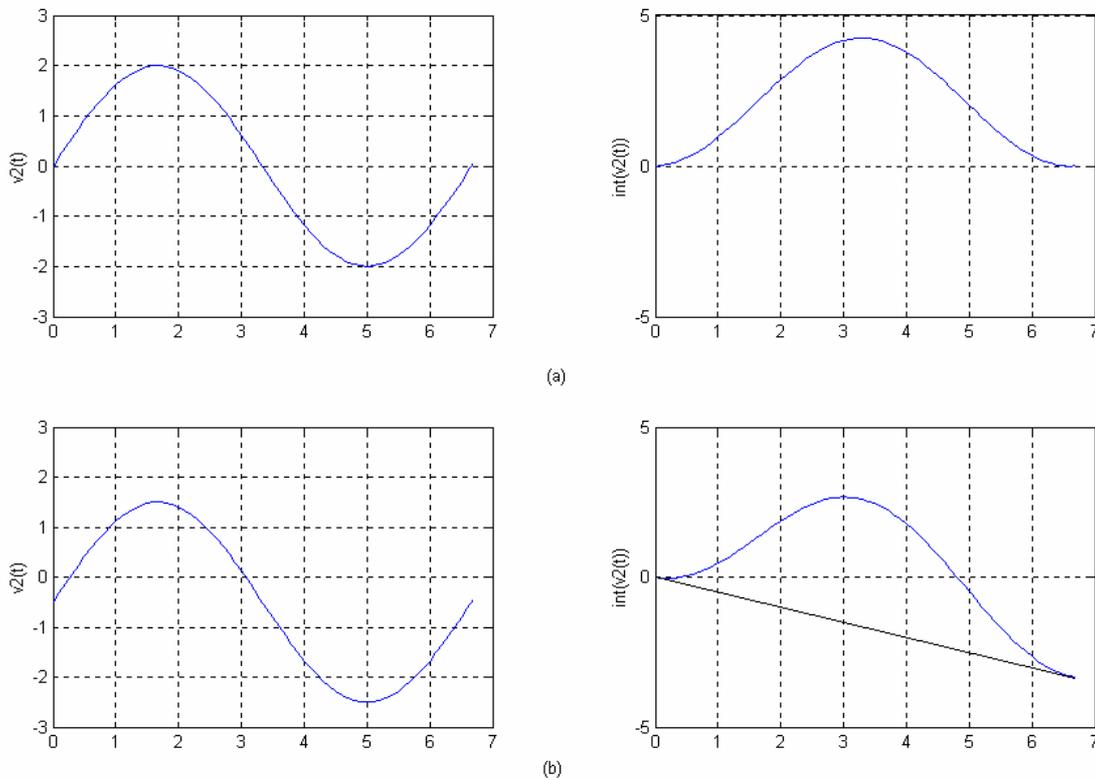
Estos vectores contienen exactamente las  $n_t$  muestras de un periodo de cada señal. El subprograma no sólo separa los tres vectores, sino que también elimina las muestras que exceden un periodo.

### “Integral”

El subprograma “integral” realiza la integral punto a punto del vector de entrada para una  $\Delta x$  determinada. Se emplea el método de integración rectangular. Suponiendo una  $\Delta x$  constante y siendo  $y(x)$  la función de entrada a integrar, la integral  $\xi$  en el punto  $i$  se calcula como:

$$\xi_i = \xi_{i-1} + y_i \Delta x \quad (6.17)$$

Se trata de un método muy básico, no obstante, como que empleamos un número de muestras por periodo alto (500 muestras por segundo) no hemos detectado ninguna dificultad.



**Figura 6-26.** Efecto del offset del convertidor analógico-digital en la tensión integrada. (a) Señal sin offset y su correspondiente integral. (b) Señal con offset y su correspondiente integral

### “Offset”

Como ya se comentó más arriba, el convertidor analógico-digital añade una componente de continua a la señal muestreada. Cuando se integra  $v_2(t)$  el efecto de la componente de continua se hace muy notorio. Como que la tensión de cada muestra de la señal tiene un desplazamiento debido al offset, por muy pequeño que sea, a medida que vamos sumando tensiones para realizar la integral el desplazamiento se va acumulando, produciéndose el efecto mostrado en la figura 6-26.

El subprograma “Offset” elimina el efecto del offset en la tensión  $v_2(t)$  integrada. Como se aprecia en la figura 6-26, al integrar la tensión con offset esta aparece desplazada según una recta  $y=m \cdot x$ . Esto es, a la señal integrada se le ha sumado una señal cuya función es una recta que pasa por (0,0). Por tanto, restando el valor de esta recta a la tensión integrada desplazada se consigue eliminar el efecto del offset en la señal integrada.

Como que la tensión  $v_2(t)$  es simétrica respecto a cero, el valor de la integral al finalizar un periodo es cero. Esto nos permite determinar la función correctora  $\lambda(x)$ :

$$\lambda(x) = -\frac{\xi(n_t)}{n_t} x \quad (6.18)$$

Donde  $x$  es el número de muestra,  $\xi(n_t)$  es el valor de la integral de  $v_2(t)$  en la última muestra y  $n_t$  es el número de muestras de un periodo. La integral corregida para la muestra  $x$ ,  $\xi'(x)$  se obtiene:

$$\xi'(x) = \xi(x) - \lambda(x) \quad (6.19)$$

### 6.3.4 Resultados

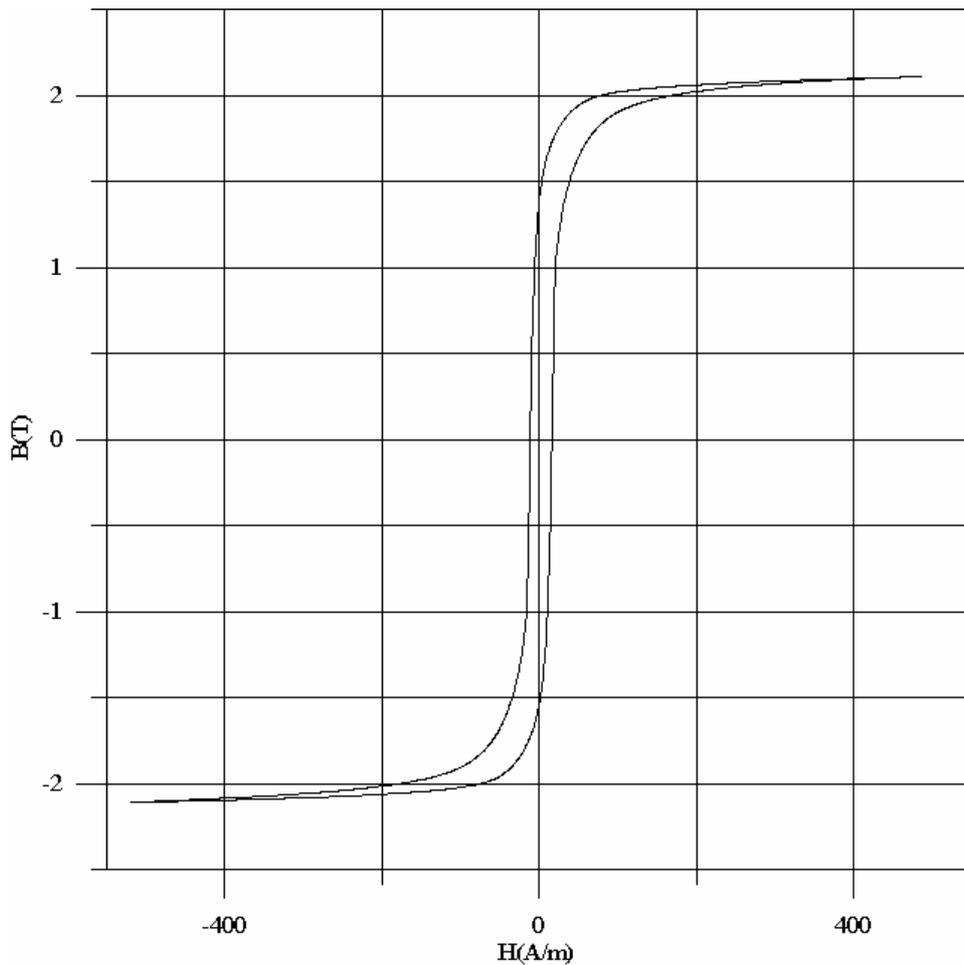
Como prueba hemos empleado el equipo histeresisgráfico para obtener un conjunto de curvas inversas de primer orden de la muestra C (en el apéndice D se indican las características de las muestras). El ciclo mayor que limita al conjunto de curvas inversas tiene un campo máximo  $H_m=484,4A/m$ . En la figura 6-27 se muestra este ciclo mayor, como se puede comprobar la muestra está muy saturado, por lo que consideramos además que dicho ciclo es el ciclo límite de la muestra C. Este ciclo se ha obtenido para una tensión de pico a pico del generador de funciones de 2V, a una frecuencia  $f=0,15Hz$  que consideramos cuasiestática.

Así pues tenemos todas las condiciones para que el conjunto de curvas inversas de primer orden obtenidas dentro de dicho ciclo se puedan emplear para caracterizar el modelo de Preisach.

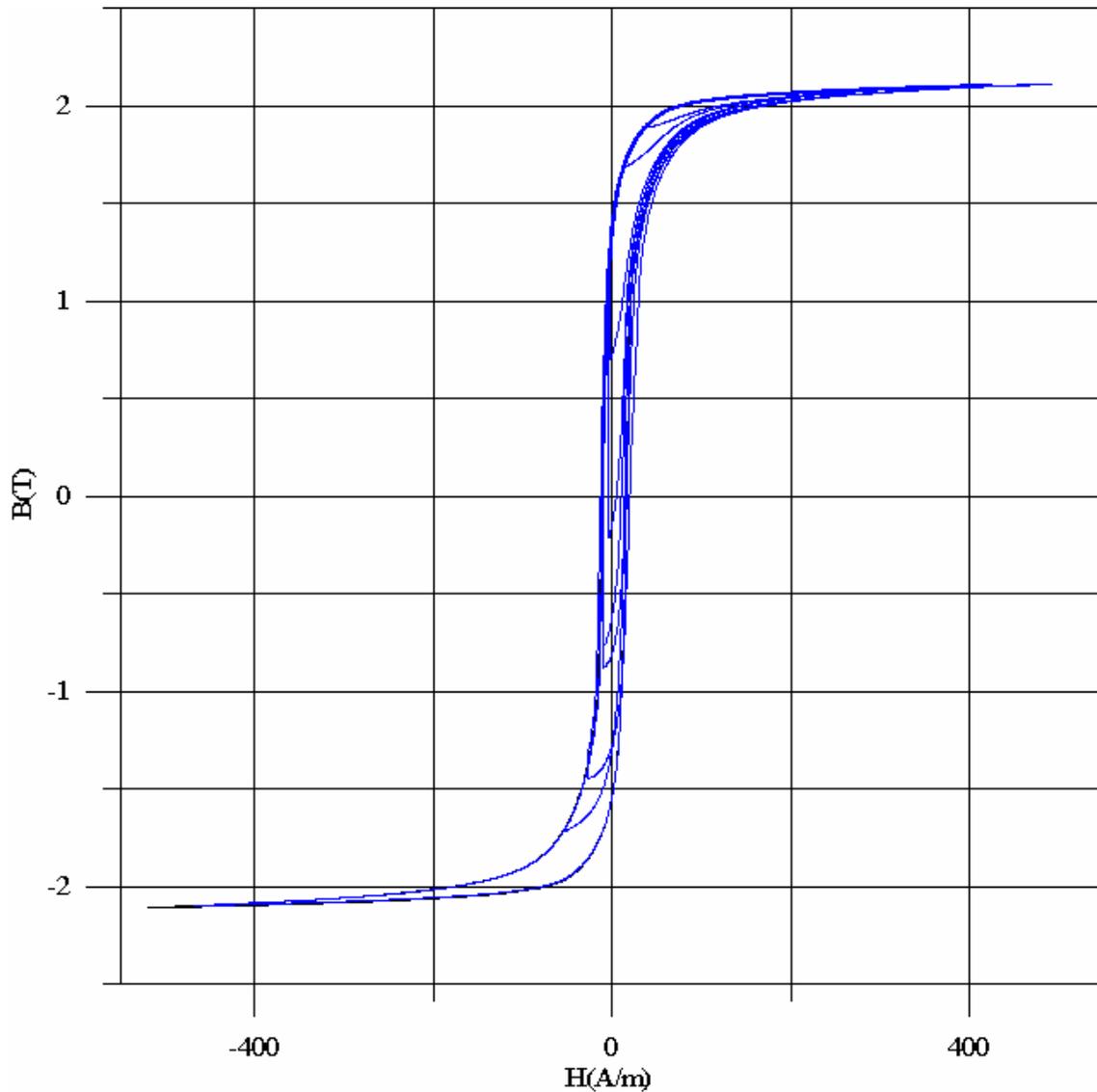
En la tabla 6-I se resumen todas las tensiones de corte  $V_I$  y el correspondiente punto de inversión  $H_I$  para cada curva inversa. El conjunto de curvas inversas de primer orden obtenido con el equipo se muestra en la figura 6-28.

**Tabla 6-1.** Relación de tensiones de corte y puntos de inversión del conjunto de curvas inversas de primer orden para el ciclo límite de la muestra C. (Excepto para el ciclo límite que indica la tensión pico a pico y el campo máximo  $H_m$ ).

	<b>Límite</b>	<b>B</b>	<b>C</b>	<b>D</b>	<b>E</b>
VI (V)	2 Vpp	-0,5	-0,1	-0,05	-0,01
HI (A/m)	±484,4	-466,883	-51,73	-27,77	-10,11
	<b>F</b>	<b>G</b>	<b>H</b>	<b>I</b>	<b>J</b>
VI (V)	-0,005	0,005	0,01	0,05	0,1
HI (A/m)	-9,536	-4,13	-2,05	5,163	8,51



**Figura 6-27.** Ciclo límite de la muestra C

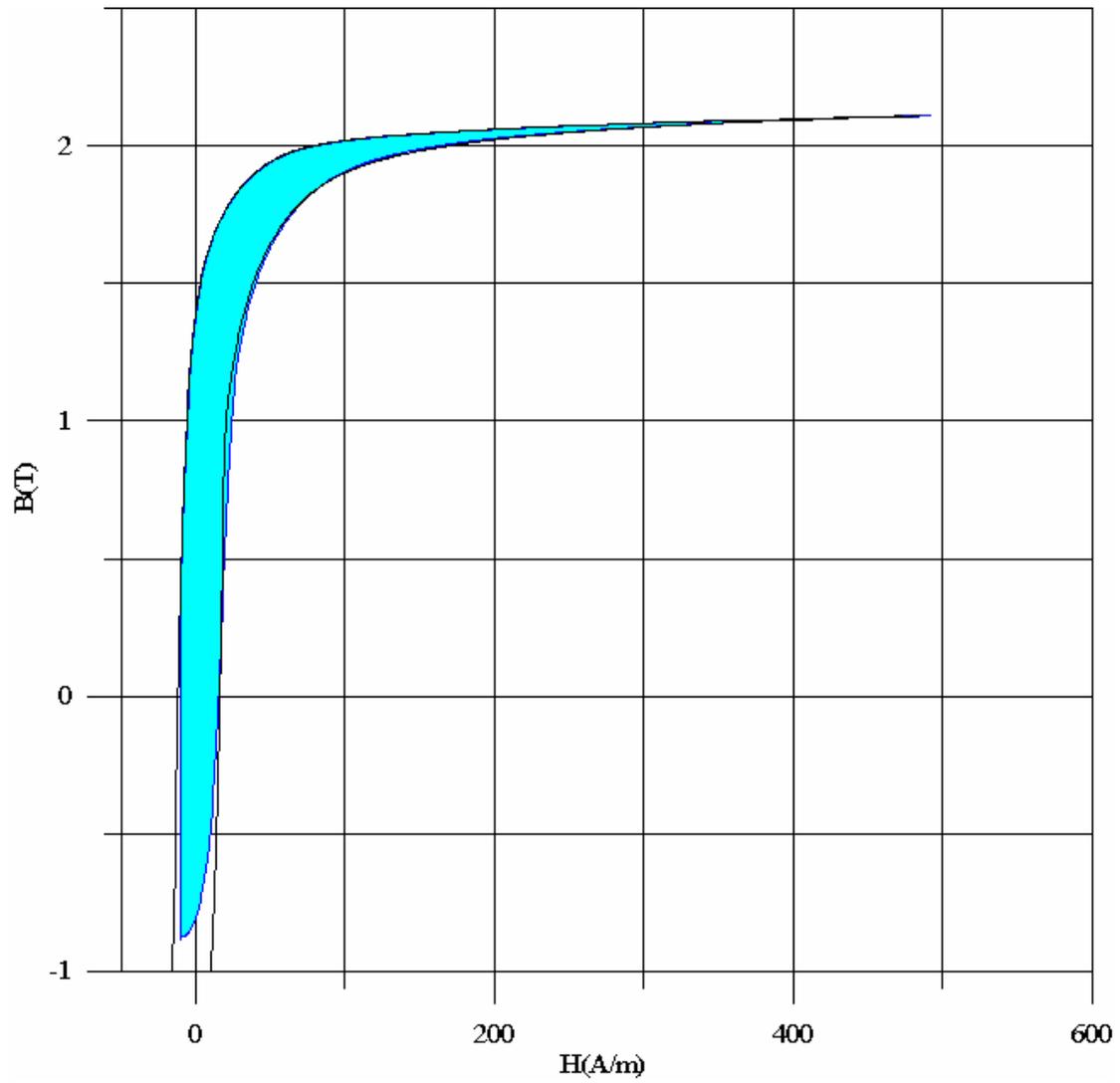


*Figura 6-28. Conjunto de curvas inversas de primer orden de la muestra C*

### 6.3.5 Análisis. Conclusiones.

Aparentemente, observando la figura 6-28 puede parecer que el conjunto de curvas obtenido es bueno. Pero lamentablemente esto no es así. Para analizar mejor las curvas obtenidas, separamos una de las curvas inversas centrales, la E, y la mostramos con el ciclo límite en la figura 6-29. También mostramos en la figura 6-30 las curvas más cercanas a los puntos máximo y mínimo del ciclo límite, las curvas B y J.

Las dos curvas más cercanas a los puntos extremos del ciclo límite son correctas, pero la curva con punto de inversión en el centro, es mala.



**Figura 6-29.** Ciclo E (trazo y área azul) y ciclo límite (trazo negro)

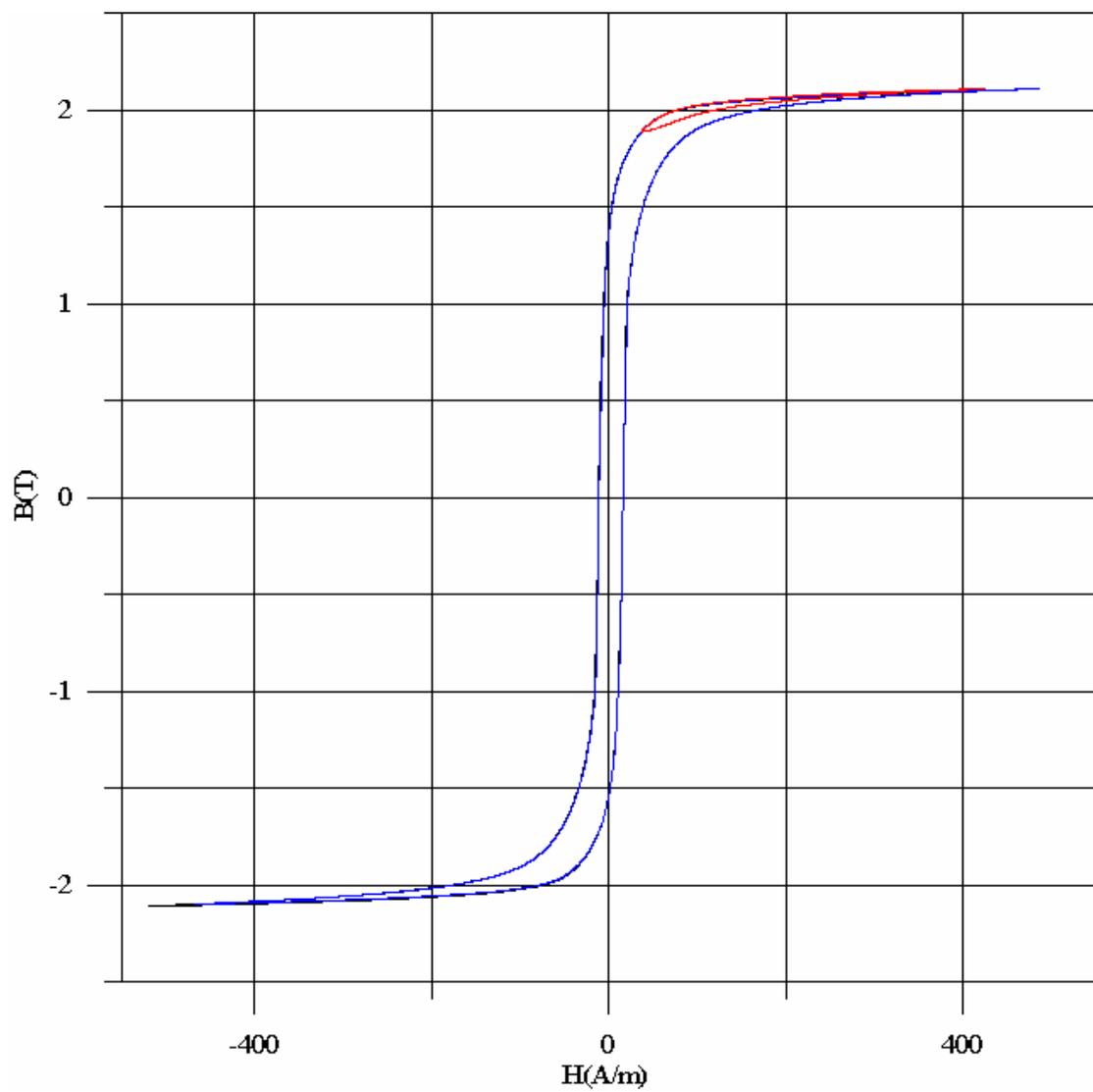


Figura 6-30. Curva B (trazo azul) y curva J (trazo rojo)

Este análisis se puede extender a todas las demás curvas. Las curvas con el punto de inversión en la zona central son erróneas. En realidad deberíamos decir, que todas las curvas cuyo punto de inversión está localizado en la región de magnetización irreversible (tramo recto) son incorrectas.

Este efecto es debido al cambio brusco de  $dH/dt$  que implica el recorte de la señal para introducir el punto de inversión (figura 6-15). En las zonas cercanas a la saturación, los cambios de  $H$  apenas no afectan a la inducción  $B$ , por ello las curvas B y J son correctas, pero en la zona de magnetización irreversible, un pequeño cambio de  $H$  implica un gran cambio de inducción  $B$ , de ahí la zona recta vertical que aparece en la curva E. Se debería investigar alguna forma de paliar este efecto para lograr que el equipo histeresigráfico nos permita obtener de una forma cómoda, rápida y precisa el conjunto de curvas inversas necesario para caracterizar con seguridad el modelo de Preisach. Al no tratarse de uno de los objetivos fundamentales de la tesis la construcción de un equipo de estas características, nosotros dejamos aquí el desarrollo del equipo para futuros trabajos de investigación.

## **7. Aplicación al cálculo del campo magnético y de las pérdidas magnéticas de un transformador (I). Formulación del problema.**

### **Método de cálculo.**

Una vez ya sabemos como modelar la histéresis ha llegado el momento de combinar el modelo de histéresis con los diversos métodos numéricos. Dedicaremos los siguientes capítulos del presente trabajo a ello. Como aplicación, dado el caso del núcleo de un transformador monofásico comercial (muestra A), vamos a determinar la distribución del campo en el núcleo, el flujo, las corrientes inducidas, así como las pérdidas magnéticas disgregadas y totales. Esta aplicación, aparte de permitirnos analizar los problemas y posibles soluciones de la combinación del modelo de histéresis con el método numérico nos sirve además de validación del sistema de cálculo.

En realidad únicamente se necesita del sistema de cálculo para determinar la distribución del campo en el núcleo del transformador, dicha variable se determina en lo que denominamos proceso. Las pérdidas en el hierro, las corrientes inducidas y el propio flujo se determinan una vez conocida la distribución del campo en el núcleo en lo que denominamos postproceso.

En el presente capítulo se presenta el problema a resolver y su formulación. En primer lugar se presentan las bases para la formulación del problema, las ecuaciones de Maxwell, ecuaciones constitutivas y los conceptos necesarios para la formulación del problema. Seguidamente se define el problema a resolver, se establecen las hipótesis para formar un modelo del transformador para el cual se quieren calcular la distribución del campo magnético y las pérdidas en el hierro. Con ello se procede a la formulación del problema. Se formula tanto para el circuito eléctrico como el núcleo magnético. En realidad no existe una formulación única del mismo problema, la elección de ésta lleva implícita una serie de ventajas e inconvenientes que hemos de ponderar a la hora de elegir una de ellas. Aquí desarrollaremos las ecuaciones de dos formulaciones distintas: formulación en  $H$  y la formulación  $A-U$ . Si bien, más adelante cuando tratemos de resolver con la formulación

mediante un método numérico, únicamente empleamos la primera para la aplicación propuesta.

En el siguiente capítulo, capítulo 8, se presentarán los resultados y la validación del cálculo, obteniéndose las conclusiones pertinentes. Finalmente en el capítulo 9 se indicarán algunas alternativas al cálculo desarrollado en el presente capítulo.

## **7.1 Introducción. Bases para la formulación del problema**

A continuación se repasan brevemente los fundamentos para la formulación del problema.

### **7.1.1 Ecuaciones de Maxwell y ecuaciones constitutivas**

#### *7.1.1.1 Nomenclatura y definiciones de análisis vectorial.*

Las relaciones fundamentales para la formulación de nuestro problema son las ecuaciones de Maxwell complementadas por las ecuaciones constitutivas. Las ecuaciones de Maxwell implican la operación de magnitudes vectoriales y escalares. Sin ser nuestra intención el exponer la teoría relativa al análisis vectorial, presentamos a continuación la nomenclatura y definiciones de las operaciones vectoriales que aparecerán en la formulación y resolución del problema.

Se define el operador nabla  $\vec{\nabla}$  como:

$$\vec{\nabla} \equiv \frac{\partial}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial}{\partial y} \hat{j} + \frac{\partial}{\partial z} \hat{k} \quad (7.1)$$

Donde  $\hat{i}$ ,  $\hat{j}$  y  $\hat{k}$  son los cosenos directores.

El operador nabla puede operar sobre una magnitud escalar o sobre una magnitud vectorial. Cuando lo hace sobre una magnitud escalar lo hace en forma de producto y a dicha operación la denominamos gradiente:

$$\overrightarrow{\text{grad}}(u) = \vec{\nabla}u = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy + \frac{\partial u}{\partial z} dz \quad (7.2)$$

Donde  $u$  es una magnitud escalar  $u(x,y,z)$ .

Cuando el operador nabla opera sobre un magnitud vectorial lo puede hacer en forma de producto escalar o como producto vectorial. En caso de operar como producto escalar a dicha operación se la denomina divergencia:

$$\text{div}(\vec{A}) = \vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \quad (7.3)$$

En cambio cuando opera como producto vectorial se le denomina rotacional<sup>1</sup>:

$$\overline{\text{rot}}(\vec{A}) = \vec{\nabla} \times \vec{A} = \begin{pmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{pmatrix} \quad (7.4)$$

Se define flujo  $\phi$  de una magnitud vectorial a:

$$\phi = \iint \vec{A} \cdot \overline{ds} \quad (7.5)$$

Donde  $\overline{ds}$  es el vector de superficie.

Además de las definiciones de los operadores se emplearán dos importantes teoremas, el teorema de la divergencia y el teorema de Stokes. La demostración de ambos teoremas se puede hallar en cualquier libro especializado [Ida y Bastos, 1997; Kemmer, 1986].

El teorema de la divergencia establece la relación entre la divergencia de una magnitud vectorial  $A$  y el flujo  $\phi$  de dicha magnitud vectorial:

$$\phi = \oiint_S \vec{A} \cdot \overline{ds} = \iiint_V (\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) dV \quad (7.6)$$

---

<sup>1</sup> En la bibliografía en lengua inglesa se le denomina "curl" y se suele representar como  $\overline{\text{curl}}(\vec{A})$

Donde  $V$  es el volumen encerrado por la superficie  $S$  cuyo vector de superficie es  $ds$ .

El teorema de Stokes establece la relación entre la circulación de una magnitud vectorial  $A$  y el rotacional de dicha magnitud vectorial:

$$\oint_l \vec{A} \cdot d\vec{l} = \iint_S (\vec{\nabla} \times \vec{A}) \cdot d\vec{s} \quad (7.7)$$

Interviene también un operador de segundo orden definido sobre el operador nábla denominado operador laplaciano  $\nabla^2$ :

$$\nabla^2 \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \quad (7.8)$$

Finalmente se pueden demostrar [Kemmer, 1986] las siguientes relaciones, que nos serán de utilidad en posteriores desarrollos:

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} u) &= \nabla^2 u \\ \text{div}(\overrightarrow{\text{grad}}(u)) &= \nabla^2 u \end{aligned} \quad (7.9)$$

$$\begin{aligned} \nabla^2 \vec{A} &= \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) - \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}) \\ \nabla^2 \vec{A} &= \overrightarrow{\text{grad}}(\text{div}(\vec{A})) - \overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{\text{rot}}(\vec{A})) \end{aligned} \quad (7.10)$$

#### 7.1.1.2 Primera ecuación de Maxwell<sup>2</sup>. Teorema de Ampère.

La expresión en derivadas (mediante el operador nábla) de la primera ecuación de Maxwell es:

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \quad (7.11)$$

Donde  $H$  es el campo magnético,  $J$  es la densidad de corriente eléctrica y  $D$  es el vector desplazamiento.

---

<sup>2</sup> Esta numeración de las ecuaciones de Maxwell es puramente arbitraria, no obedece a ningún criterio. De hecho, no existe ninguna norma respecto a la numeración de las ecuaciones de Maxwell.

Se define la corriente de conducción como  $I$ :

$$\vec{I} = \iint_S \vec{J} \cdot d\vec{s} \quad (7.12)$$

Y la corriente de desplazamiento  $I_D$ :

$$\vec{I}_D = \iint_S \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \cdot d\vec{s} \quad (7.13)$$

Aplicando las definiciones de corriente de conducción y de corriente de desplazamiento y aplicando el teorema de Stokes se obtiene la expresión integral de la que hemos denominado primera ecuación de Maxwell:

$$\oint_C \vec{H} \cdot d\vec{l} = \iint_S \vec{J} \cdot d\vec{s} + \iint_S \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \cdot d\vec{s} \quad (7.14)$$

Cuando se cumple  $\sigma \gg \omega$  se puede considerar que  $D=0$ . Esto es cierto en la mayor parte de campos variables en medios conductores; por ejemplo, en el cálculo de campos en medios ferromagnéticos, como es el caso de las máquinas eléctricas [Steele, 1997]. A los casos en los que se puede menospreciar el vector desplazamiento se les denomina cuasiestáticos<sup>3</sup> y se los distingue aquellos en los que  $D \neq 0$  que se denominan magneto-dinámicos.

El caso de interés para nuestro problema es el cuasiestático, para el cual la primera ecuación de Maxwell se expresa como:

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{J} \quad (7.15)$$

La ecuación (7.15) indica que la fuente del campo magnético es la corriente eléctrica. Si expresamos la primera ecuación de Maxwell de forma integral para el caso cuasiestático tenemos:

---

<sup>3</sup> No confundir con los casos en los que se empleaba el mismo término en el ciclo de Preisach. En tal caso nos referíamos a casos de frecuencias que tienden a cero. Aquí nos referimos a casos en los que el vector desplazamiento puede ser considerado  $D=0$ . En la literatura especializada a este caso también se le suele denominar "eddy current problem".

$$\oint_C \vec{H} \cdot d\vec{l} = \iint_S \vec{J} \cdot d\vec{s} \quad (7.16)$$

Esta ecuación constituye el llamado teorema de Ampère. Aplicando (7.16) para un núcleo rodeado por un solenoide, asumiendo que el campo se distribuye uniformemente en el núcleo, que las espiras cubren totalmente el núcleo y menospreciando los efectos de borde (si el núcleo este cerrado, como por ejemplo en un toroide, esto es cierto) se deduce:

$$Hl = NI \quad (7.17)$$

Donde  $l$  es la longitud media efectiva del circuito magnético ofrecido por el núcleo,  $N$  el número de espiras e  $I$  la intensidad que circula por ellas.

#### 7.1.1.3 Segunda ecuación de Maxwell.

La expresión diferencial de la segunda ecuación de Maxwell es:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad (7.18)$$

Donde  $\vec{B}$  es la inducción o densidad de flujo magnético. A la magnitud vectorial que cumple que su divergencia es cero se la denomina solenoidal. El que un campo sea solenoidal significa que no tiene ni fuentes, ni sumideros. El campo magnético es solenoidal.

El flujo de un campo solenoidal es conservativo, esto es, el flujo que entra en un volumen es igual al flujo que sale de él. Como que el campo magnético es solenoidal, el flujo magnético es conservativo.

Aplicando el teorema de la divergencia se puede deducir la versión integral de la segunda ecuación de Maxwell:

$$\iiint_V \vec{\nabla} \cdot \vec{B} dV = \oiint_S \vec{B} \cdot d\vec{s} = 0 \quad (7.19)$$

#### 7.1.1.4 Tercera ecuación de Maxwell. Ley de Faraday

La tercera ecuación de Maxwell tiene la siguiente expresión:

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (7.20)$$

La ecuación (7.20) se análoga a la (7.15), la primera ecuación de Maxwell en el caso cuasiestático. La tercera ecuación de Maxwell nos indica que la variación del campo magnético  $\vec{H}$  en el tiempo es una fuente de campo eléctrico  $\vec{E}$ . Esta ecuación se expresa de forma integral como:

$$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\iint_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{s} \quad (7.21)$$

El término de la derecha de la ecuación (7.21) es la fuerza electromotriz  $\mathcal{E}$ , que más adelante identificaremos con el potencial escalar eléctrico  $U$ . El segundo término de (7.21) es la derivada temporal del flujo magnético. Así pues podemos expresar la forma integral de la tercera ecuación de Maxwell como:

$$\mathcal{E} = -\frac{\partial \phi}{\partial t} \quad (7.22)$$

La ecuación (7.22) es la expresión de la ley de Faraday. En consecuencia, podemos identificar la tercera ecuación de Maxwell con la ley de Faraday.

#### 7.1.1.5 Cuarta ecuación de Maxwell

La cuarta ecuación de Maxwell establece que:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho \quad (7.23)$$

Donde  $\rho$  es la densidad volumétrica de carga eléctrica. La expresión integral de (7.23) es:

$$\oiint_S \vec{D} \cdot d\vec{s} = Q \quad (7.24)$$

Donde  $Q$  es la carga eléctrica. La ecuación (7.24) es conocida como ley de Gauss.

Si comparamos la cuarta ecuación de Maxwell con la segunda ecuación de Maxwell (7.18), apreciamos una de las diferencias fundamentales entre el campo eléctrico y el magnético. La segunda ecuación de Maxwell nos indicaba que el campo magnético es solenoidal y por tanto el flujo magnético conservativo. En cambio, el campo eléctrico no es solenoidal y por tanto su flujo no es conservativo.

#### 7.1.1.6 Ecuación de continuidad eléctrica.

Aplicando el operador divergencia a ambos lados de la primera ecuación de Maxwell (7.11) se obtiene:

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{H}) = \vec{\nabla} \cdot \vec{J} + \vec{\nabla} \cdot \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \quad (7.25)$$

Como que la divergencia del rotacional es cero, el término de la izquierda de (7.25) es cero. Entonces, combinando (7.25) con la cuarta ecuación de Maxwell obtenemos:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t} \quad (7.26)$$

En el caso cuasiestático se puede considerar que la derivada temporal de la densidad volumétrica de carga eléctrica es nula, con lo que la ecuación (7.26) resulta en:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{J} = 0 \quad (7.27)$$

Esta ecuación indica que la corriente de conducción es conservativa. La corriente entrante en un volumen es igual a la corriente saliente. Cuando no ocurre así es que existe una acumulación de cargas.

#### 7.1.1.7 Ecuaciones constitutivas

Son las ecuaciones que consideran el medio físico en el cual se establecen las magnitudes que intervienen en las ecuaciones de Maxwell, de tal forma que las complementan. Para nuestro ámbito de aplicación las ecuaciones constitutivas que nos interesan son:

$$\vec{J} = \sigma \vec{E} \quad (7.28)$$

$$\vec{B} = \mu \vec{H} \quad (7.29)$$

Donde  $\sigma$  es la conductividad eléctrica y  $\mu$  es la permeabilidad magnética. En la ecuación (7.28) podemos reconocer la ley de Ohm. Para nuestro caso, al establecer el campo magnético en materiales ferromagnéticos la permeabilidad no es constante, dicha permeabilidad la determinamos mediante el modelo de histéresis desarrollado en capítulos anteriores.

### 7.1.2 Potenciales

Los potenciales son magnitudes auxiliares que facilitan la resolución de las ecuaciones de Maxwell. Hay una cierta variedad de potenciales, el empleo de uno u otro comporta una serie de ventajas e inconvenientes en función del problema a resolver. Aquí vamos a tratar los potenciales más empleados para el caso cuasiestático en ingeniería eléctrica, esto es, los candidatos a intervenir en la formulación de nuestro problema., No entraremos en detalle, tan sólo se presentará su definición, nomenclatura y algunas particularidades.

Los potenciales clásicos son aquellos que se deducen directamente de las ecuaciones de campo de Maxwell en si mismas [Silvestre y Ferrari, 1996]. Estos potenciales son:

- Potencial vector magnético  $\mathbf{A}$
- Potencial escalar magnético  $\psi$
- Potencial vector eléctrico  $\mathbf{T}$
- Potencial escalar eléctrico  $U$

De los potenciales "no clásicos" el que se suele emplear en aplicaciones de ingeniería eléctrica es el potencial escalar eléctrico integrado en el tiempo [Kriezis, Tsiboukis, Panas et al, 1992]. Si bien, no emplearemos la formulación derivada de este potencial.

#### 7.1.2.1 Potencial vector magnético $\mathbf{A}$

Como que la inducción  $\mathbf{B}$  es solenoidal, existe una magnitud vectorial  $\mathbf{A}$  tal que cumple:

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} \quad (7.30)$$

Esta magnitud vectorial  $\mathbf{A}$  es la que denominamos potencial vector magnético.

Entre las propiedades del potencial vector magnético destacan dos. La primera es que el campo magnético es paralelo a la línea equipotencial de  $A$ .

Para la segunda propiedad debemos analizar primero el flujo magnético. Sea un problema con una geometría en dos dimensiones, en este caso el flujo  $\phi$  viene dado por unidad de profundidad. Por ejemplo, para la figura 7-1, el flujo por unidad de profundidad sería:

$$\phi = B \cdot a \quad [\text{Wb/m}] \quad (7.31)$$

El flujo magnético se determina como:

$$\phi = \iint_S \vec{B} \cdot \vec{ds} = \iint_S \vec{\nabla} \times \vec{A} \cdot \vec{ds} \quad (7.32)$$

Aplicando el teorema de Stokes, el flujo se expresa como la circulación del potencial vector magnético:

$$\phi = \oint_C \vec{A} \cdot \vec{dl} \quad (7.33)$$

Lo cual aplicado al caso de la figura 7-1 resulta en:

$$\phi = A_1 b - A_2 b \Rightarrow A_1 - A_2 = \frac{\phi}{b} \quad (7.34)$$

Esto es, la diferencia entre potenciales vector magnéticos da como resultado el flujo magnético por unidad de profundidad. Esta es la segunda propiedad del potencial vector magnético, dibujando las líneas equipotenciales de  $A$  se puede visualizar la distribución del campo magnético en el dominio.

Si bien el potencial vector magnético no tiene porqué tener un significado físico determinado, se trata de un variable auxiliar para resolver las ecuaciones de Maxwell, de la ecuación (7.30) y la de definición de rotacional se puede considerar que  $A$  da una medida de la capacidad de inducir fuerza electromotriz por parte de la campo magnético.

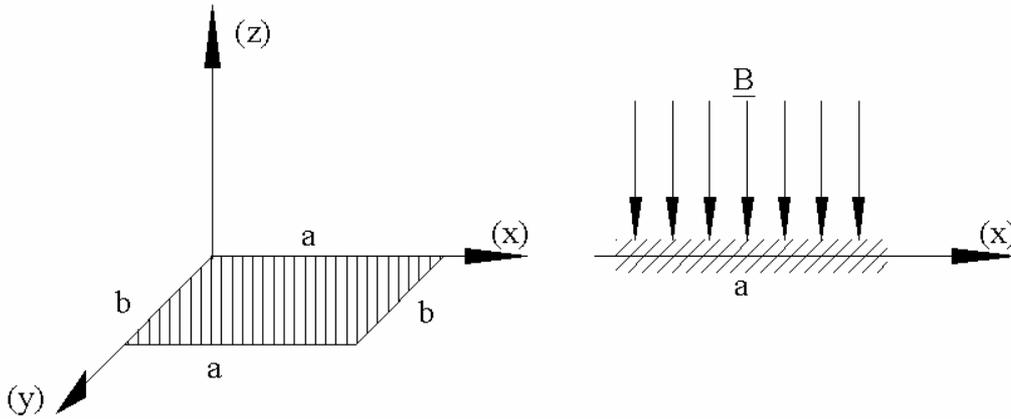


Figura 7-1

### 7.1.2.2 Potencial escalar magnético $\psi^4$

En una región libre de corrientes, la primera ecuación de Maxwell se transforma en:

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{0} \quad (7.35)$$

Existe una propiedad del rotacional (Kemmer, 1986) que indica que cuando el rotacional de una magnitud vectorial es cero (campo irrotacional), existe un potencial escalar cuyo gradiente es la propia magnitud vectorial. Aplicado esta propiedad al caso del campo  $\vec{H}$ , se deduce la existencia del potencial escalar magnético  $\psi$ :

$$\vec{H} = -\vec{\nabla} \psi \quad (7.36)$$

Además aplicando la propiedad de campo solenoidal de la inducción  $\vec{B}$  (7.18) y la ley constitutiva (7.29) obtenemos la generalización no lineal de la ecuación de Laplace:

$$\vec{\nabla} \cdot (\mu \vec{\nabla} \psi) = 0 \quad (7.37)$$

### 7.1.2.3 Potencial vector eléctrico $\mathbf{T}$

En el caso cuasiestático se puede considerar que la densidad de corriente  $\vec{J}$  es solenoidal, ecuación (7.27). En tal caso existe un potencial vector cuyo rotacional es la propia densidad de corriente, este es el que denominamos potencial vector eléctrico  $\mathbf{T}$ :

<sup>4</sup> En algunas publicaciones se representa con letra griega omega mayúscula  $\Omega$ . Nosotros reservamos dicha letra para identificar los dominios y subdominios del problema a resolver.

$$\vec{J} = \vec{\nabla} \times \vec{T} \quad (7.38)$$

Este potencial es interesante en el sentido que nos proporciona una cierta simetría entre el campo magnético y el campo eléctrico. Siguiendo un razonamiento análogo al seguido para el potencial vector magnético  $\mathbf{A}$ , para el potencial vector eléctrico  $\mathbf{T}$  se puede deducir que la diferencia de potencial es la intensidad eléctrica por unidad de profundidad:

$$T_1 - T_2 = \frac{I}{\tau} \quad (7.39)$$

Donde  $\tau$  es la profundidad.

#### 7.1.2.4 Potencial escalar eléctrico $U$ .

De la tercera ecuación de Maxwell, ecuación (7.20), se deduce:

$$\vec{\nabla} \times \left( \vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) = \vec{0} \quad (7.40)$$

Por tanto, recordando la propiedad de los campos irrotacionales, debe existir un potencial escalar  $U$  que cumpla:

$$\vec{\nabla} U = \vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \quad (7.41)$$

Este es el que denominamos potencial eléctrico  $U$ .

### 7.1.3 Normas

Según el teorema de Helmholtz sólo se puede considerar único a un campo vectorial cuando éste tiene especificados tanto su rotacional como su divergencia. Por tanto, si deseamos formular nuestro problema en función de un determinado campo vectorial, éste debe tener definidos su rotacional y su divergencia.

Las formulaciones que empleamos para nuestro problema son:

- Formulación en  $\mathbf{H}$
- Formulación en  $\mathbf{A-U}$

Para la formulación en  $\mathbf{H}$  no hay ningún problema puesto que tanto la divergencia como el rotacional están definidos por las propias ecuaciones de Maxwell. No ocurre así con el potencial vector magnético  $\mathbf{A}$ , del cual tenemos definido el rotacional por la ecuación (7.30), pero nada sabemos respecto acerca de su divergencia, la cual no queda determinada. A la condición auxiliar que se introduce en la formulación de un problema se la denomina norma<sup>5</sup>. No existe una norma única, cualquier valor de divergencia  $\vec{\nabla} \cdot \vec{A}$  resultará en el mismo rotacional  $\vec{\nabla} \times \vec{A} = \vec{B}$ , pues ambos son independientes.

#### 7.1.3.1 Norma de Coulomb

En nuestra formulación adoptaremos la norma conocida como de Coulomb que define la divergencia del potencial vector magnético  $\mathbf{A}$  como:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0 \quad (7.42)$$

Con esta norma se consigue además que las dos componentes de  $\mathbf{A}$  sean constantes al cambiar de medio, esto es,  $\mathbf{A}$  es plenamente continua.

La misma norma se puede aplicar igualmente para el potencial vector eléctrico, que tampoco tiene la divergencia definida:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{T} = 0 \quad (7.43)$$

### 7.1.4 Ecuación de difusión del campo magnético

La ecuación de difusión indica como se distribuye el campo magnético en un medio. Esta es la ecuación que emplearemos para determinar el campo en el interior del núcleo. La ecuación de difusión se determina a partir de las ecuaciones de Maxwell, las leyes constitutivas y la norma adoptada.

---

<sup>5</sup> : Hemos traducido "gauge condition" como norma

Se pueden realizar diversas formulaciones de la ecuación de difusión, en función de la magnitud adoptada. Nosotros presentamos a continuación las tres que nos pueden resultar más útiles en nuestro ámbito de aplicación. Todas las formulaciones se realizan para el caso cuasiestático.

#### 7.1.4.1 Formulación en $\mathbf{H}$

Partiendo de la primera ecuación de Maxwell para el caso cuasiestático, la ecuación (7.15), y aplicando sobre ella el rotacional a ambos lados:

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{H}) = \vec{\nabla} \times \vec{J} \quad (7.44)$$

Aplicando la relación para el operador laplaciano (7.10), la ecuación (7.44) se transforma en:

$$\vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{H}) - \nabla^2 \vec{H} = \vec{\nabla} \times \vec{J} \quad (7.45)$$

Paralelamente, combinando la segunda ecuación de Maxwell (7.18) con la ley constitutiva (7.29) obtenemos:

$$\vec{\nabla} \cdot \mu \vec{H} = 0 \quad (7.46)$$

La permeabilidad en nuestro caso es no lineal, viene definida por el modelo de histéresis adoptado, es dependiente de  $H$ , pero no del espacio, por lo que podemos sacarla del operador divergencia:

$$\mu \vec{\nabla} \cdot \vec{H} = 0 \quad (7.47)$$

Sustituyendo (7.47) en (7.44):

$$-\nabla^2 \vec{H} = \vec{\nabla} \times \vec{J} \quad (7.48)$$

Sustituyendo  $\mathbf{J}$  por la ley constitutiva  $\vec{J} = \sigma \vec{E}$  en (7.48), donde  $\sigma$  es la conductividad eléctrica del material, que supondremos constante:

$$-\nabla^2 \vec{H} = \sigma \vec{\nabla} \times \vec{E} \quad (7.49)$$

Aplicando la tercera ecuación de Maxwell:

$$-\nabla^2 \vec{H} = -\sigma \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (7.50)$$

Finalmente, aplicando de nuevo la ley constitutiva (7.29), obtenemos la ecuación de difusión del campo magnético formulada en  $\mathbf{H}$ :

$$\nabla^2 \vec{H} = \sigma \mu \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \quad (7.51)$$

La principal ventaja de esta formulación es que, en el caso más genérico, únicamente se deben resolver tres incógnitas ( $H_x$ ,  $H_y$ ,  $H_z$ ).

La desventaja es que la componente normal de  $\mathbf{H}$  es discontinua en las fronteras de materiales. Esto es un problema cuando se emplea en métodos numéricos basados en la discretización del espacio en nodos, es inadecuada para aplicarla en problemas donde existen regiones con permeabilidades diferentes.

Otro problema asociado con la formulación en  $H$  es la condición frontera, al resolver la ecuación (7.51) el campo  $H(x,y,z,t)$  aparece en función del campo en la frontera  $H_o$ . En el caso del núcleo de transformador, el campo  $H_o$  es el campo en la superficie del núcleo. El problema está en que según como sea la definición del problema no es trivial la determinación de  $H_o$ . Si el arrollamiento de excitación que establece el campo en el núcleo está alimentado por una fuente de intensidad, la determinación de  $H_o$  es inmediata mediante el teorema de Ampère, pero si el arrollamiento de excitación está alimentado por una fuente de tensión, no podemos determinar la condición frontera  $H_o$  por lo que el problema no se puede resolver y se debe recurrir a otra formulación. Más adelante incidiremos en este problema de la formulación en  $H$ .

En nuestro caso, una ventaja añadida de la formulación en  $\mathbf{H}$  es que para caracterizar la permeabilidad  $\mu$  es suficiente el modelo de histéresis directo, con el campo  $\mathbf{H}$  como entrada y  $\mathbf{B}$  con salida.

#### 7.1.4.2 Formulación en A-U

Aplicando la definición de potencial vector magnético  $\vec{A}$  (7.30) y la ley constitutiva  $\vec{B} = \mu\vec{H}$  en la primera ecuación de Maxwell para el caso cuasiestático  $\vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{J}$  obtenemos la siguiente ecuación:

$$\vec{\nabla} \times \frac{1}{\mu} \vec{\nabla} \times \vec{A} = \vec{J} \quad (7.52)$$

Atendamos ahora la naturaleza de  $\vec{J}$ . La corriente en un material puede ser debida a las corrientes inducidas  $\vec{J}_e$  o una corriente impuesta externamente  $\vec{J}_0$ .

$$\vec{J} = \vec{J}_e + \vec{J}_0 \quad (7.53)$$

Desarrollamos a continuación las corrientes inducidas, pues las corrientes impuestas son, en principio, un dato del problema. Partimos en este caso de la ecuación (7.41), despejando el campo eléctrico  $\vec{E}$ .

$$\vec{E} = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \vec{\nabla} U \quad (7.54)$$

Las corrientes inducidas en el material  $\vec{J}$  dependen de la conductividad por la ley  $\vec{J} = \sigma \vec{E}$ , sustituyendo en la ecuación (7.53):

$$\vec{J}_e = -\sigma \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \sigma \vec{\nabla} U \quad (7.55)$$

Por tanto la densidad de corriente desarrollada es:

$$\vec{J} = -\sigma \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \sigma \vec{\nabla} U + \vec{J}_0 \quad (7.56)$$

Sustituyendo en (7.52):

$$\vec{\nabla} \times \frac{1}{\mu} \vec{\nabla} \times \vec{A} + \sigma \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + \sigma \vec{\nabla} U = \vec{J}_0 \quad (7.57)$$

La expresión (7.57) es la ecuación de difusión del campo magnético formulada en  $A$ - $U$  genérica. Esta ecuación se debe adaptar en función de la naturaleza de las corrientes que circulan en la zona en la que se aplica la ecuación.

Se requieren dos condiciones de continuidad de  $A$  y  $U$  en las fronteras de materiales:

1. La componente tangencial de  $\left(\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + \vec{\nabla} U\right)$  es continua en las fronteras de materiales.

2. La componente normal cumple:  $\left(\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + \vec{\nabla} U\right) = 0$

Con esta formulación desaparecen las dificultades de la formulación en  $H$  en las fronteras. Es una formulación totalmente adecuada para su resolución por métodos numéricos que discretizan el espacio, como el método de las diferencias finitas o el método de los elementos finitos.

Por otro lado, con esta formulación se deben resolver cuatro incógnitas ( $A_x$ ,  $A_y$ ,  $A_z$  y  $U$ ), en vez las tres incógnitas de la formulación en  $H$ . Otro inconveniente es que ahora si se necesita un modelo de histéresis inverso, con la inducción  $B$  como entrada y el campo  $H$  como salida.

Yendo más allá, se puede anticipar además que esta formulación es la que menos problemas de convergencia implica cuando se aplican los métodos de resolución (método de Newton-Raphson o método del punto fijo) del sistema de ecuaciones no lineal resultante de aplicación del método de los elementos finitos.

En general, la formulación en  $A$ - $U$  es la preferida para la resolución del campo magnético por métodos numéricos en máquinas eléctricas o sistemas electromecánicos pues es la que permite tratar mejor las diversas fronteras que aparecen en tales equipos (entre otros [Ida y Bastos, 1997; Steele, 1997; Salon 1995; Saitz, 2001; Bottauscio, Chiampi, Dupré et al, 1998; Albanese y Rubinacci, 1992; Nicolet, Delincé, Bamps et al, 1993; Zhai y Vu-Quoc, 2005; Kim, Jung y Hong, 1998; Lee y Jun, 1999]).

En realidad la superioridad de esta formulación se demuestra cuando el campo del problema a analizar está establecido por un arrollamiento de excitación alimentado por tensión. Recordemos que en la formulación en  $H$  este caso no podía ser abordado, ahora aparece

directamente en la ecuación de difusión (5.57) el término  $U$  que es el potencial escalar eléctrico, en este caso directamente relacionado con la fuerza electromotriz en bornes del arrollamiento de excitación. Por tanto no hay ningún problema en relacionar las ecuaciones del circuito eléctrico asociado con el arrollamiento de excitación y la ecuación de difusión.

#### 7.1.4.3 Formulación en $T$ - $\psi$

Partiendo de [Steele, 1997]:

$$\vec{H} = \vec{T} - \vec{\nabla} \psi \quad (7.58),$$

y aplicando la primera ecuación de Maxwell se deduce que:

$$\vec{\nabla} \times \vec{T} = \vec{J} \quad (7.59)$$

Partiendo de la tercera ecuación de Maxwell, aplicando la ley constitutiva para el campo eléctrico:

$$\vec{E} = \frac{\vec{J}}{\sigma} = \frac{1}{\sigma} \vec{\nabla} \times \vec{T} \quad (7.60)$$

y la ley constitutiva para el campo eléctrico:

$$\vec{B} = \mu \vec{H} = \mu (\vec{T} - \vec{\nabla} \psi) \quad (7.61)$$

se obtiene la siguiente expresión:

$$\vec{\nabla} \times \left( \frac{1}{\sigma} \vec{\nabla} \times \vec{T} \right) = \mu \left( \frac{\partial \vec{T}}{\partial t} - \vec{\nabla} \frac{\partial \psi}{\partial t} \right) \quad (7.62)$$

La expresión (7.62) es la ecuación de difusión del campo magnético formulada en  $T$ - $\psi$ . Por otro lado partiendo de la segunda ecuación de Maxwell y aplicando de nuevo (7.61) se obtiene esta otra expresión que complementa a (7.62):

$$\vec{\nabla} \cdot \mu (\vec{T} - \vec{\nabla} \psi) = 0 \quad (7.63)$$

Según Albanese y Rubinacci [Albanese y Rubinacci, 1992] con esta formulación aplicada a sistemas no lineales, a la hora de resolver el sistema de ecuaciones, los métodos de Newton-Raphson, cuasi-Newton o punto fijo no convergen.

## 7.2 Descripción del problema

Se va a calcular la difusión del campo magnético en el núcleo, el flujo establecido y las pérdidas magnéticas en la muestra A, esto es, el transformador monofásico de 1,3kVA de Tecnotrafo. En la figura 7-2 se muestra la geometría y en la figura 7-3 las dimensiones del transformador, el resto de características de este transformador se pueden encontrar en el apéndice D dedicado a las características de las muestras.

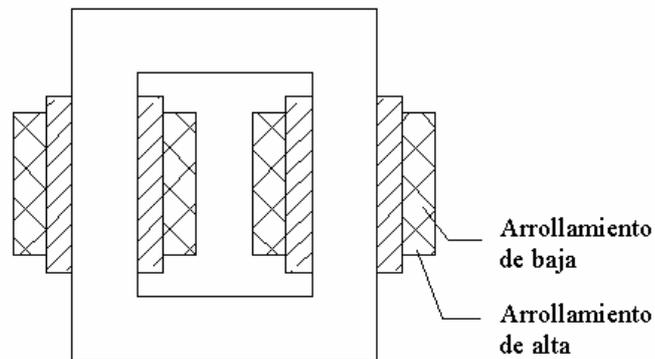


Figura 7-2. Geometría de la muestra A.

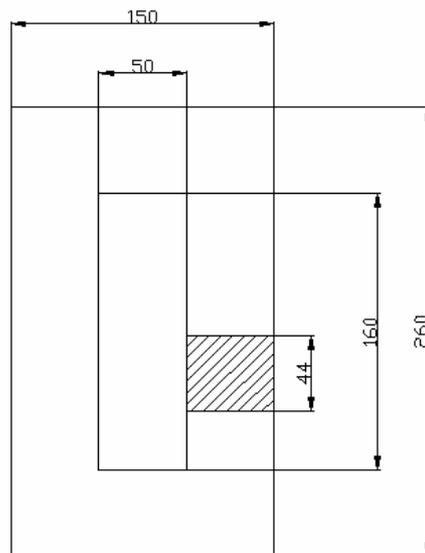


Figura 7-3. Dimensiones de la muestra A

El arrollamiento primario del transformador, esto es, el arrollamiento de excitación, es el lado de baja de 409 espiras. Los restantes arrollamientos de la muestra: el lado de alta de 671 espiras y el arrollamiento auxiliar de 40 espiras están en vacío y por ello no intervienen en nuestros cálculos.

En el circuito real o experimental el transformador está alimentado por un generador de tensión, tal y como se comenta en el capítulo 9 donde se explica el procedimiento experimental para validar los cálculos aquí mostrados. Pero en nuestra modelización cuando apliquemos la formulación en  $H$  de la ecuación de difusión supondremos que el transformador está alimentado por una fuente de corriente  $I_o(t)$ . Esta corriente  $I_o(t)$  se ha determinado previamente de modo experimental y corresponde a la corriente que circula en el transformador cuando está alimentado por el generador de tensión. Como ya se ha comentado, y volveremos a reincidir en ello más adelante, esta es la única forma que tenemos para resolver el problema con la formulación en  $H$ .

### 7.3 Modelo del problema

El núcleo real del transformador es el mostrado en la figura 7-2. Nosotros realizaremos nuestros cálculos suponiendo una geometría unidimensional. Nuestra intención es comprobar como se acopla el modelo de histéresis en los métodos numéricos, no investigar los procesos físicos que acontecen en la máquina. En el caso unidimensional, la formulación resulta en unas ecuaciones más simples que nos permitirán analizar mejor el procedimiento de acoplamiento entre el modelo de histéresis y el método numérico.

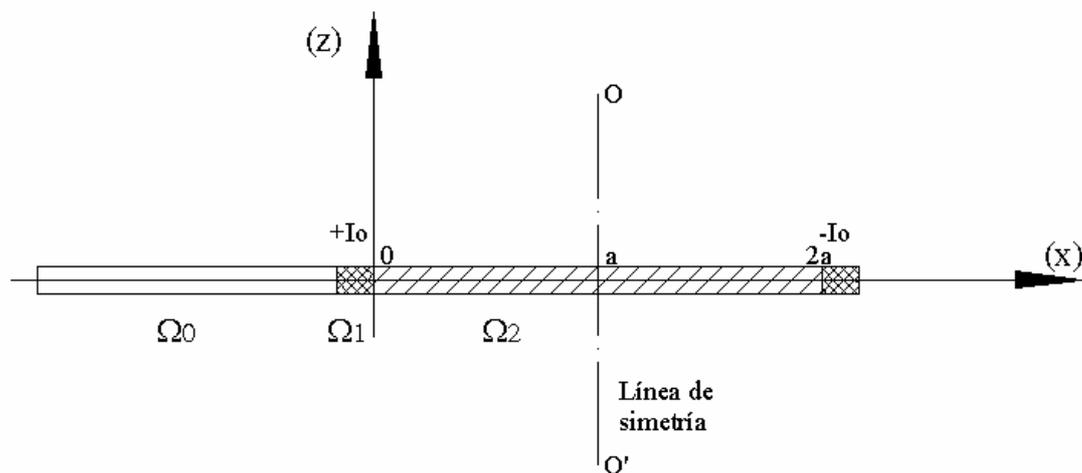


Figura 7-4. Modelo unidimensional de la muestra A

En la figura 7-4 mostramos el modelo de transformador que vamos a resolver. Debido a la simetría la zona a la izquierda del eje de simetría  $OO'$  no interviene en los cálculos. En definitiva el problema a resolver está definido por las siguientes regiones:

- Región  $\Omega_0$ . Zona de aire, exterior al transformador. De conductividad eléctrica nula y permeabilidad  $\mu_0$
- Región  $\Omega_1$ . Arrollamiento primario del transformador. El material de esta región es cobre. Conductor no ferromagnético, de conductividad eléctrica  $\sigma_1$  y permeabilidad igual a la del aire  $\mu_0$
- Región  $\Omega_2$ . Núcleo del transformador. El material es UI-40x60-MT, básicamente una aleación Fe-Si. Con conductividad  $\sigma_2$  y permeabilidad  $\mu^6$ .

Estas tres regiones están divididas por dos fronteras:

- Frontera  $\Gamma_{01}$ . Frontera entre la región de aire  $\Omega_0$  y el arrollamiento de excitación  $\Omega_1$
- Frontera  $\Gamma_{12}$ . Frontera entre la región del arrollamiento de excitación  $\Omega_1$  y la región del núcleo  $\Omega_2$ . Es la superficie exterior de núcleo donde hay arrollamientos

Si bien el bobinado de excitación únicamente está arrollado en las columnas del núcleo y no en las culatas, a efectos de modelo supondremos que el arrollamiento está extendido en todo el núcleo del transformador.

Como se muestra en la figura 7-4 se asume que el transformador se extiende en la dimensión  $x$ , y por tanto la intensidad impuesta por los arrollamientos en la región  $\Omega_1$  está en la dirección  $y$ . Al tratarse de un problema unidimensional, las variables vectoriales también lo serán. En concreto con las siguientes direcciones:

$$\vec{H} = \vec{H}_z = H(x, t) \hat{k} \quad (7.64)$$

---

<sup>6</sup> La permeabilidad se designa directamente como  $\mu$  por ser la única permeabilidad diferente a la del aire que interviene en el problema.

$$\vec{B} = \vec{B}_z = B(x, t) \hat{k} \quad (7.65)$$

$$\vec{J} = \vec{J}_y = J(x, t) \hat{j} \quad (7.66)$$

$$\vec{A} = \vec{A}_y = A(x, t) \hat{j} \quad (7.67)$$

## 7.4 Formulación del problema

A continuación desarrollamos las ecuaciones que deberemos resolver para determinar el campo establecido en el núcleo del transformador. En realidad se deberán resolver dos ecuaciones que se acoplan entre si. La primera es la distribución del campo en el núcleo, la segunda es la ecuación del circuito eléctrico de alimentación al arrollamiento de excitación. No obstante, en función de la formulación adoptada para describir la difusión del campo magnético en el núcleo la forma en que ambas ecuaciones se acoplan varía. Así pues aparte del desarrollo de la ecuación de difusión también expondremos su relación con la ecuación eléctrica.

Hemos desarrollado dos formulaciones: la formulación en  $H$  y la formulación en  $A-U$ . Al final del desarrollo se profundizará en los inconvenientes de una y otra.

### 7.4.1 Formulación en $H$

#### 7.4.1.1 Ecuación de difusión

Recordemos la difusión del campo magnético  $H$  sigue la siguiente expresión:

$$\nabla^2 \vec{H} = \sigma \mu \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \quad (7.51)$$

Esta ecuación se aplica únicamente a la región del núcleo magnético  $\Omega_2$ . La condición frontera de la ecuación es el campo en la frontera  $\Gamma_{12}$ , que como no se ve influenciada por las corrientes inducidas es directamente el campo aplicado,  $H_0$ . Se trata del campo magnético en la superficie del núcleo y se puede asimilar al campo que se establecería en el núcleo si no se tuviera en consideración el efecto de las corrientes inducidas en el núcleo.

A continuación desarrollamos la ecuación (7.51) para nuestro modelo unidimensional de transformador. Comenzamos por el término de la derecha de (7.51), se trata del laplaciano del campo  $\vec{H}$ , que se calcula como:

$$\nabla^2 \vec{H} = \nabla^2 H_x \hat{i} + \nabla^2 H_y \hat{j} + \nabla^2 H_z \hat{k} \quad (7.68)$$

Como que el campo solo tiene componente en la dirección  $z$  - ecuación (7-64)-, el laplaciano se simplifica a:

$$\nabla^2 \vec{H} = \nabla^2 H_z \hat{k} = \left( \frac{\partial^2 H_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 H_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 H_z}{\partial z^2} \right) \hat{k} \quad (7.69)$$

Pero como que el campo únicamente varía en su dimensión  $x$  -ecuación (7.64)-, finalmente

$$\nabla^2 \vec{H} = \frac{\partial^2 H}{\partial x^2} \hat{k} \quad (7.70)$$

Por tanto la ecuación de difusión inicial (7.51) se puede representar como:

$$\frac{\partial^2 H}{\partial x^2} \hat{k} = \sigma \mu \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \quad (7.71)$$

Considerando de nuevo que el campo  $\vec{H}$  únicamente tiene componente  $z$  obtenemos la ecuación de difusión definitiva para nuestro modelo de transformador:

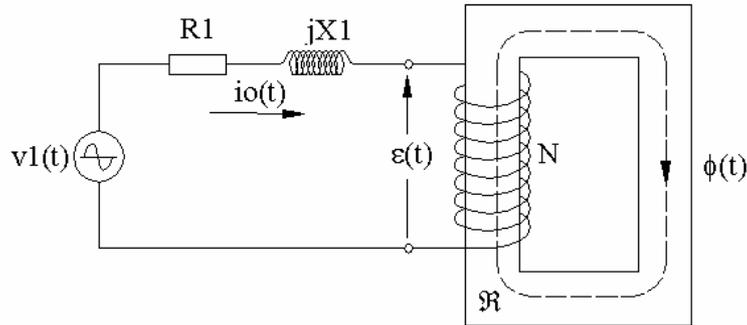
$$\frac{\partial^2 H}{\partial x^2} = \sigma \mu \frac{\partial H}{\partial t} \quad (7.72)$$

#### 7.4.1.2 Acoplamiento de la ecuación de difusión con la ecuación del circuito eléctrico

La ecuación (7.72) nos describe como se establece el campo magnético en el núcleo, pero hemos de relacionar esta ecuación con la fuente del campo, esto es, el arrollamiento de excitación y la fuente que le alimenta. En el caso de la formulación en  $H$  y de la ecuación (7.72) esta fuente del campo es  $H_0$  el campo en la superficie del núcleo. Este campo se puede relacionar directamente con la intensidad que circula por el arrollamiento de excitación  $I_0(t)$  mediante el teorema de Ampère:

$$H_o(t)l = N_1 i_o(t) \quad (7.73)$$

Si la fuente que alimenta al arrollamiento de excitación es una fuente de corriente conocemos exactamente  $i_o(t)$  y por tanto la ecuación (7.73) nos permite acoplar el circuito eléctrico y la fuente con la ecuación de difusión.



**Figura 7-5** Circuito eléctrico equivalente del arrollamiento de excitación de la muestra A

En cambio, cuando el arrollamiento de excitación está alimentado por una fuente de tensión no conocemos a priori la corriente que circula por dicho arrollamiento. Suponiendo que  $R_l$  es la resistencia del arrollamiento de excitación y  $jX_l$  su reactancia de dispersión, el circuito eléctrico equivalente del arrollamiento de excitación es el mostrado en la figura 7-5 y la ecuación que gobierna dicho circuito eléctrico es:

$$v_1(t) = R_l i_o(t) + L_l \frac{\partial i_o(t)}{\partial t} + \varepsilon(t) \quad (7.74)$$

Donde  $v_1(t)$  es la tensión de alimentación y  $\varepsilon(t)$  la fuerza electromotriz en el bornes del arrollamiento de excitación, la cual se puede relacionar con el flujo aplicando la ley de Faraday:

$$-v_1(t) + R_l i_o(t) + L_l \frac{\partial i_o(t)}{\partial t} + N_1 \frac{\partial \phi(t)}{\partial t} = 0 \quad (7.75)$$

Podemos desarrollar más la ecuación eléctrica sustituyendo el flujo  $\phi(t)$  por la inducción magnética  $B(t)$  y aplicando a su vez la ley constitutiva  $B(t) = \mu H(t)$ .

$$-v_1(t) + R_1 i_0(t) + L_1 \frac{\partial i_0(t)}{\partial t} + \frac{N_1 \mu}{S} \frac{\partial H(t)}{\partial t} = 0 \quad (7.76)$$

Si el núcleo tuviese una característica lineal  $\mu = cte$  el acoplamiento de la ecuación eléctrica (7.76) con la ecuación de difusión del campo (7.72) se podría realizar mediante el teorema de Ampère (7.73). Pero precisamente estamos trabajando con histéresis y por tanto con permeabilidades que son función del propio campo, esto implica una incógnita más en (7.76) y tratar con una ecuación no lineal. En resumen se complica mucho el cálculo de la difusión del campo en el interior del núcleo. Como veremos este problema desaparece si la ecuación de difusión la hubiésemos formulado en  $A-U$ .

En definitiva el empleo de la formulación en  $H$  no es recomendable cuando la fuente del campo proviene de un arrollamiento alimentado por una fuente de tensión.

Como nosotros disponemos de la  $i_0(t)$  obtenida experimentalmente, la emplearemos directamente como entrada, y trataremos al sistema como si estuviese alimentado por una fuente de corriente. No debemos olvidar que únicamente estamos analizando la resolución de la ecuación de difusión con el modelo de histéresis.

## 7.4.2 Formulación en $A-U$

### 7.4.2.1 Ecuación de difusión

Como ya se demostró en el apartado 7.1.4.2 la difusión del campo magnético formulada en función del potencial vector magnético  $A$  y el potencial escalar potencial  $U$  sigue la siguiente expresión:

$$\vec{\nabla} \times \frac{1}{\mu} \vec{\nabla} \times \vec{A} + \sigma \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + \sigma \vec{\nabla} U = \vec{J}_0 \quad (7.68)$$

Donde  $J_0$  es la corriente impuesta directamente por una fuente exterior. En caso que el arrollamiento de excitación este alimentado por una fuente de corriente, esta corriente es justamente  $J_0$ . Por otro lado el término  $\sigma \vec{\nabla} U$  representa la corriente debida a una fuente de tensión exterior, esta sería el término clave para acoplar la ecuación de difusión con el circuito eléctrico equivalente del arrollamiento de excitación si este estuviera alimentado por

una fuente de tensión. Pero no adelantemos acontecimientos, desarrollemos primero la ecuación (7.57) para el caso de nuestro modelo unidimensional de transformador.

Para la formulación  $A-U$  vamos a tratar el caso en que el arrollamiento de excitación está alimentado por una fuente de tensión, que es justamente el que no se podía tratar de una forma sencilla con la formulación en  $H$ . En consecuencia el término  $\mathbf{J}_0=0$  y la ecuación de difusión a desarrollar es:

$$\vec{\nabla} \times \frac{1}{\mu} \vec{\nabla} \times \vec{A} + \sigma \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + \sigma \vec{\nabla} U = 0 \quad (7.77)$$

Para nuestro caso unidimensional, considerando (7.67) el rotacional del potencial vector magnético es:

$$\vec{\nabla} \times \vec{A} = \begin{pmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & A(x,t) & 0 \end{pmatrix} = \frac{\partial A}{\partial x} \hat{k} \quad (7.78)$$

Por tanto:

$$\frac{1}{\mu} \vec{\nabla} \times \vec{A} = \frac{1}{\mu} \frac{\partial A}{\partial x} \hat{k} \quad (7.79)$$

Y finalmente el término de la izquierda de la ecuación de difusión (7.77):

$$\vec{\nabla} \times \frac{1}{\mu} \vec{\nabla} \times \vec{A} = \begin{pmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & 0 & \frac{1}{\mu} \frac{\partial A(x,t)}{\partial x} \end{pmatrix} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{\mu} \frac{\partial A}{\partial x} \right) \hat{j} = \frac{1}{\mu} \frac{\partial^2 A}{\partial x^2} \hat{j} \quad (7.80)$$

Analicemos a continuación la derecha de la ecuación de difusión (7.77). El primer término es la divergencia del potencial escalar eléctrico, esta divergencia de  $U$  es la fuerza electromotriz de una de las espiras del arrollamiento de excitación dividida por la dimensión  $y$ , o profundidad, del núcleo.

$$\sigma \vec{\nabla} U = \sigma \frac{\varepsilon_e(t)}{b} \hat{j} \quad (7.81)$$

Donde  $b$  es la dimensión y del núcleo (profundidad) y  $\varepsilon_e(t)$  es la fuerza electromotriz de una espira del arrollamiento de excitación. Considerando que dicho arrollamiento tiene  $N_1$  espiras:

$$\sigma \vec{\nabla} U = \frac{\sigma N_1}{b} \varepsilon(t) \hat{j} \quad (7.82)$$

El segundo término de la izquierda de la ecuación (7.77):

$$\sigma \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = \sigma \frac{\partial A}{\partial t} \hat{j} \quad (7.83)$$

Sustituyendo (7.80), (7.82) y (7.83) en la ecuación de difusión (7.77), obtenemos la nueva ecuación de difusión unidimensional general:

$$\frac{1}{\mu} \frac{\partial^2 A}{\partial x^2} \hat{j} = \frac{\sigma N_1}{b} \varepsilon(t) \hat{j} - \sigma \frac{\partial A}{\partial t} \hat{j} \quad (7.84)$$

O lo que es lo mismo:

$$\frac{1}{\mu} \frac{\partial^2 A}{\partial x^2} = \frac{\sigma N_1}{b} \varepsilon(t) - \sigma \frac{\partial A}{\partial t} \quad (7.85)$$

Esta es la ecuación de difusión genérica, para finalizar la formulación del problema nos resta aplicar dicha ecuación para cada una de las regiones en las que está constituido nuestro sistema.

La región  $\Omega_0$  es la zona de aire exterior al transformador. En este caso  $\sigma=0$ , con lo que la ecuación (7.85) se transforma en:

$$\Omega_0 : \frac{\partial^2 A}{\partial x^2} = 0 \quad (7.86)$$

La región  $\Omega_1$  es el espacio ocupado por el arrollamiento de excitación de cobre. Esta región tiene una conductividad eléctrica  $\sigma_1$  y al no ser el cobre un material magnético su permeabilidad es la del aire  $\mu_1 = \mu_0$ . En esta zona están las espiras que crean el campo magnético por tanto hemos de mantener el primer término de la izquierda de (7.85). Como que el devanado está formado por espiras de dimensiones despreciables frente a la profundidad de penetración consideramos despreciable el efecto de las corrientes inducidas en los arrollamientos. Como consecuencia de ello el segundo término de la izquierda de (7.85) es cero. Con estas consideraciones la ecuación de difusión para esta región es:

$$\Omega_1 : \frac{1}{\mu_0 \sigma} \frac{\partial^2 A}{\partial x^2} = \frac{\varepsilon(t)}{b} \quad (7.87)$$

Finalmente, la región  $\Omega_2$  constituida por el núcleo de material ferromagnético del tipo UI-40x60-MT. La conductividad eléctrica de la zona es  $\sigma_2$  y su permeabilidad es  $\mu^7$ . En esta región no hay ninguna fuente de tensión por lo que el primer término de la izquierda de (7.85) es cero. No obstante, como si que consideramos las corrientes inducidas en el núcleo y su efecto en la difusión del campo, el segundo término de la izquierda de (7.85) si que se mantiene. Así pues la ecuación de difusión para la región del núcleo  $\Omega_2$  es:

$$\Omega_2 : \frac{1}{\mu \sigma_2} \frac{\partial^2 A}{\partial x^2} = - \frac{\partial A}{\partial t} \quad (7.88)$$

Con las ecuaciones (7.86), (7.87) y (7.88) ya tenemos definida la difusión del potencial vector magnético, y de forma indirecta del campo magnético- en las tres regiones de nuestro problema.

#### 7.4.2.2 Acoplamiento de la ecuación de difusión con la ecuación del circuito eléctrico

El acoplamiento entre la ecuación de difusión con la ecuación del circuito eléctrico, o lo que es lo mismo, la relación entre la fuente del campo -el arrollamiento de excitación- y la difusión del campo, en el caso de la formulación en  $A-U$  es muy sencillo.

---

<sup>7</sup> Denominamos  $\mu$  sin subíndices a esta permeabilidad porque es la única diferente a la del vacío que aparece en nuestro problema. De esta forma simplificamos el aspecto de las ecuaciones y mantenemos la misma nomenclatura empleada hasta ahora.

La ecuación de difusión de la región del arrollamiento de excitación (7-87) contempla el efecto de la fuerza electromotriz de las espiras de dicho arrollamiento. Combinando esta ecuación con la ecuación del circuito eléctrico equivalente del arrollamiento (7.74) y el teorema de Ampère (7.73) ya tenemos acoplada la fuente de tensión  $v_I(t)$  con la difusión del campo.

Aquí radica la gran ventaja de la formulación  $A-U$ , cuando la fuente del campo del problema a analizar es un arrollamiento alimentado por una fuente de tensión, el acoplamiento entre las ecuaciones de difusión del campo y el circuito eléctrico es prácticamente directo. En cambio, una desventaja de esta formulación es que se requiere definir la ecuación de difusión en todas las regiones del problema, cosa que no ocurría en la formulación en  $H$ .

### 7.4.3 Modelización del laminado del núcleo

Hasta ahora no hemos tenido en cuenta la estructura del núcleo del transformador, de hecho tal y como está formulado el problema, esté núcleo sería macizo. Pero no es así, para reducir las pérdidas producidas por las corrientes inducidas en los núcleos de las máquinas eléctricas, dichos núcleos se construyen a base de láminas separadas por un barniz aislante. Este hecho no se ha tenido en cuenta hasta ahora, analicemos a continuación como podemos modelizar el núcleo de láminas del transformador.

La forma más directa es modelizar el núcleo tal y como realmente es, esto es, definir dos subregiones en el núcleo, una con la lámina de material magnético y la otra con el aislante. Pero esto tiene el inconveniente de complicar mucho la formulación del problema y ralentizar el tiempo de cálculo. Si intentemos combinar el modelo de histéresis con las ecuaciones de difusión, hemos de tener mucho cuidado pues podemos provocar que el método de resolución del sistema de ecuaciones no lineal resultante no sea capaz de converger a una solución. Por lo que en principio es mejor no tocar demasiado las ecuaciones de difusión logradas.

La alternativa a lo anterior es continuar considerando el núcleo macizo, pero considerando que tiene una reluctancia -y por tanto una permeabilidad- equivalente que considera el efecto de las zonas de aislante entre láminas de material magnético [Meeker, 2004].

En la figura 7-6a se muestra la dirección del flujo respecto al laminado del núcleo, en consecuencia se puede aproximar el núcleo al circuito magnético equivalente de la figura 7-

6b. El núcleo estaría formado por el paralelo de la reluctancia del material magnético y la reluctancia del aislante.

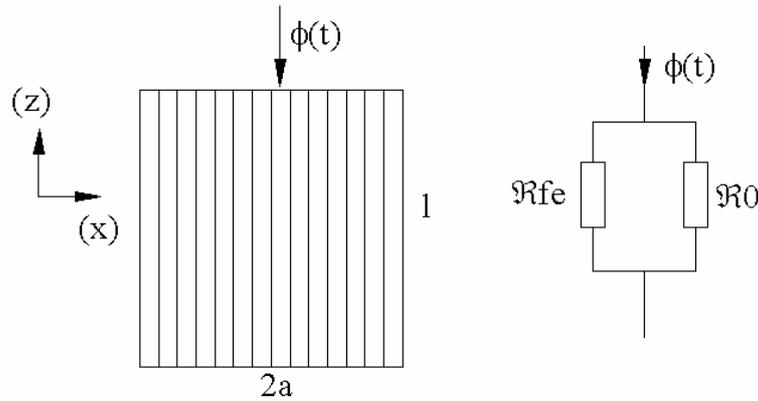


Figura 7-6. Modelación del laminado del núcleo de la muestra A mediante permeabilidad equivalente

La reluctancia específica<sup>8</sup> del aislante, por tratarse de un material no magnético se puede considerar igual a la del aire  $\mathfrak{R}_0$ :

$$\mathfrak{R}_0 = \frac{l}{\mu_o(1-c)2a} \quad (7.89)$$

Donde  $c$  es el factor de llenado (o factor de apilamiento) del núcleo,  $l$  es la longitud media efectiva del circuito magnético y  $2a$  es la anchura (dimensión  $x$ ) del núcleo. La reluctancia específica de las láminas de material ferromagnético del núcleo  $\mathfrak{R}_{Fe}$  es:

$$\mathfrak{R}_{Fe} = \frac{l}{\mu_o\mu_r c 2a} \quad (7.90)$$

Considerando el circuito paralelo de ambas reluctancias específicas resulta:

$$\mathfrak{R} = \frac{l}{\mu_o(\mu_r c + (1-c))2a} \quad (7.91)$$

Por tanto podemos definir una permeabilidad relativa equivalente:

<sup>8</sup> Estas reluctancias, al tratarse de un modelo unidimensional, no tienen unidades de reluctancia, por ello las denominamos reluctancias específica.

$$\mu_{r,eq} = \mu_r c + (1 - c) \quad (7.92)$$

Pero el factor de llenado  $c$  esta comprendido entre 0 y 1, por tanto, al tratarse de un material ferromagnético:

$$(1 - c) \ll c \mu_r \quad (7.93)$$

En consecuencia la permeabilidad relativa equivalente del paralelo de las reluctancias se simplifica como:

$$\mu_{r,eq} = c \mu_r \quad (7.94)$$

Así pues podemos tratar al núcleo construido a base de láminas como a un núcleo macizo con una permeabilidad relativa que podemos determinar a partir de (7.94). O lo que es lo mismo la inducción equivalente  $B$  es la inducción determinada mediante el modelo de histéresis  $P(H)$  multiplicada por el factor de laminado  $c$ .

$$B(H) = cP(H) \quad (7.95)$$

Tratando al núcleo mediante este procedimiento no hemos de modificar ninguna formulación ni el modelo de histéresis.

### **7.5 Estrategia de resolución. Preproceso.**

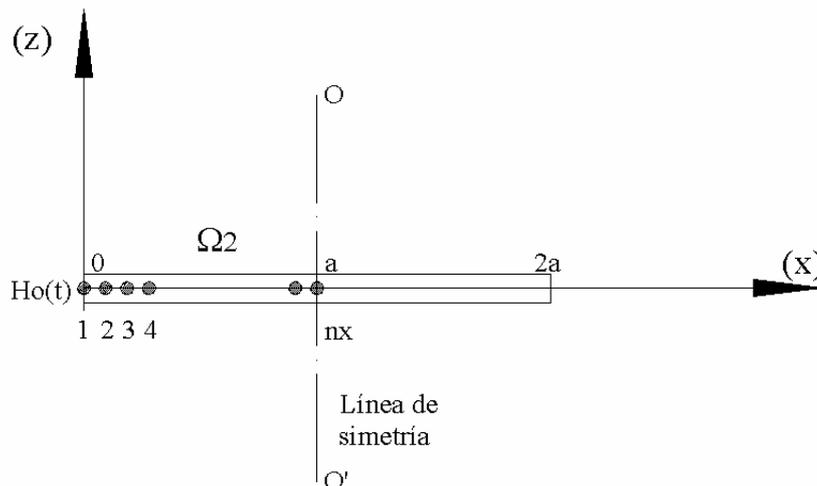
Si bien en general la formulación  $A-U$  es la opción más adecuada para resolver el caso del transformador alimentado por una fuente de tensión, mucho más genérico que el transformador alimentado por una fuente de corriente, nosotros hemos optado por emplear la formulación en  $H$ . Nuestro objetivo no es encontrar un modelo de transformador, sino poner a prueba y analizar el modelo de histéresis combinado con un método numérico. En ese sentido la formulación en  $H$  es ligeramente más sencilla que la formulación en  $A-U$ . Como disponemos de datos experimentales de la intensidad de vacío del transformador a varias frecuencias y para varias excitaciones, podemos emplear esta intensidad de vacío como

entrada al sistema de cálculo, y considerar que el transformador está alimentado por una fuente de intensidad.

En el caso real, si la fuente de tensión fuese sinusoidal, el flujo y la inducción también lo serán, pero la intensidad aparecerá deformada por el codo de saturación y la histéresis. En el caso simulado, si la fuente es de intensidad y empleamos la señal deformada, el flujo y la inducción deberán resultar sinusoidales. Así pues podemos comprobar el funcionamiento del sistema de cálculo comprobando que la inducción y el flujo son sinusoidales. Disponemos además del flujo experimental, por lo que disponemos de suficientes datos para validar el cálculo. Como se verá más adelante en el post-proceso, para calcular el flujo primero necesitamos el campo  $H(x,t)$  y la inducción  $B(x,t)$  en cada punto del núcleo, a partir de ello se determina el potencial vector magnético  $A(x,t)$  y posteriormente el flujo  $\phi(t)$ . Por tanto, si validamos el flujo, validamos el proceso de cálculo al completo.

Empleamos por tanto la formulación en  $H$ , aplicada al caso de un transformador alimentado por una fuente de intensidad  $i_0(t)$  correspondiente a la intensidad de vacío experimental del transformador. El proceso de cálculo del problema se divide en tres fases:

- Preproceso. Preparación del cálculo. En este caso, discretización del tiempo y del espacio.
- Proceso. Resolución de la ecuación de difusión. Cálculo de  $H(x,t)$  y  $B(x,t)$
- Post-proceso. Cálculo de las variables magnéticas que se derivan del campo  $H$  o  $B$



**Figura 7-7.** Preproceso. Discretización de la región  $\Omega_2$ , correspondiente al núcleo de la muestra A

El preproceso de nuestro problema tan solo consiste en dividir el tramo de núcleo en  $n_x$  nodos de espacio y un periodo de la intensidad  $i_0(t)$  en  $n_t$  nodos de tiempo. Como que hay simetría con respecto al centro del núcleo tan sólo calculamos  $H(x,t)$  y  $B(x,t)$  desde la superficie del núcleo hasta el centro del mismo (desde  $x=0$  hasta  $x=a$ ). En la figura 7-7 se muestra la geometría del modelo unidimensional de transformador para la cual aplicamos la formulación en  $H$ .

El proceso consiste en determinar el campo  $H(x,t)$  y la inducción  $B(x,t)$  en el interior del núcleo resolviendo la ecuación de difusión formulada en  $H$  (7.72). Para resolver la ecuación de difusión en el núcleo del transformador empleamos el método de las diferencias finitas y una discretización temporal basada en un esquema tipo Crank-Nicholson. Con ello nos resulta un sistema de ecuaciones, resolviendo dicho sistema encontramos el campo en cada punto del núcleo para cada nodo de tiempo  $H(x,t)$ . El problema es que debido a que la permeabilidad es no lineal (estamos aplicando un modelo de histéresis) el sistema de ecuaciones es no lineal y su resolución se complica.

Los sistemas de ecuaciones no lineales se pueden resolver mediante el método de Newton-Raphson [Burden y Faires, 2002]. Pero este método presenta un problema gravísimo si lo queremos emplear en nuestro sistema. El método se basa en una serie de iteraciones hasta que la solución converge, para cada iteración se debe calcular la matriz de Jacobi o jacobiano, lo cual en nuestro caso implicaría hacer la derivada  $\partial H(x_i, t_j) / \partial x_i$  en cada nodo de espacio  $x_i$ . Esta derivada no se realizaría sobre una función ya conocida sino sobre el resultado del modelo de histéresis, esto implica un tiempo de cálculo muy elevado y una probabilidad muy elevada de que la solución no converja debido a que la derivada nos amplificará los errores en las predicciones del modelo de histéresis.

La alternativa es el método del punto fijo, dicho método es más primario que el método de Newton-Raphson pero nos evitamos los problemas comentados de dicho método. En definitiva, el sistema de ecuaciones obtenido de aplicar el método de las diferencias finitas con un esquema de Crank-Nicholson lo resolvemos mediante el método del punto fijo.

Una vez calculados el campo  $H(x,t)$  y la inducción  $B(x,t)$  en el interior del núcleo, calculamos el resto de variables magnéticas y las pérdidas. Esta es la fase que denominamos post-proceso. En concreto en el post-proceso calculamos las siguientes variables:

- Potencial vector magnético  $A(x,t)$
- Densidad de corriente  $J(x,t)$

- Flujo magnético  $\phi(t)$
- Pérdidas en el hierro específicas  $p_{Fe}$
- Pérdidas por histéresis específicas  $p_h$
- Pérdidas por corrientes inducidas específicas  $p_c$
- Pérdidas por exceso específicas  $p_{ex}$

### **7.6 Resolución de la ecuación de difusión. Proceso.**

Como que al aplicar el método del punto fijo para resolver el sistema de ecuaciones no lineal hemos de realizar una pequeña modificación en la ecuación de difusión, y por tanto también en el sistema de ecuaciones, exponemos primero las bases del método del punto fijo y después abordamos la resolución de la ecuación de difusión por el método de las diferencias finitas y el esquema de Crank-Nicholson.

#### **7.6.1 Resolución de sistemas de ecuaciones no lineales por el método del punto fijo**

Según R.L. Burden y J. Douglas Faires [Burden y Faires, 2002] un punto fijo de una función  $g$  es un número  $p$  para el cual  $g(p)=p$ . Los problemas de búsqueda de raíces y los de punto fijo son clases equivalentes, pero los de punto fijo son más fáciles de analizar; algunas opciones de punto fijo dan origen a técnicas poderosas de búsqueda de raíces. A tal efecto R.L. Burden y J. Douglas Faires proponen el siguiente ejemplo que transcribimos de su libro [Burden y Faires, 2002]. Dado un problema de buscar una raíz  $f(p)=0$ , podemos definir una función  $g$  con un punto fijo  $p$  de diversas formas; por ejemplo, como  $g(x)=x-f(x)$  o como  $g(x)=x+3f(x)$ . Por el contrario, si la función  $g$  tiene un punto fijo en  $p$ , entonces la función definida por  $f(x)=x-g(x)$  tiene un cero en  $p$ .

Veamos como aplicamos esto a nuestro caso. La inducción  $B$  se determina a partir del campo  $H$  mediante el modelo de Preisach directo  $B=cP(H)$ , donde  $c$  es el factor de laminado, el cual nos permite modelizar la estructura de láminas del núcleo. No obstante la inducción también se puede definir como [Bottauscio, Chiampi y Chiarabaglio, 2000]:

$$B = \bar{\mu}H + R^k \quad (7.96)$$

Donde  $\bar{\mu}$  es una constante a determinar que controla el proceso de convergencia y  $R^k$  es la iteración  $k$ -ésima de la función residuo. Entonces, dicha iteración  $k$ -ésima de la función residuo se puede calcular como:

$$R^k = cP(H) - \bar{\mu}H \quad (7.97)$$

Veamos a continuación como se aplica este método a nuestro caso. La ecuación de difusión formulada en  $H$  es:

$$\frac{\partial^2 H}{\partial x^2} = \sigma \frac{\partial B}{\partial t} \quad (7.98)$$

Aplicando (7.96) la ecuación de difusión se nos transforma en:

$$\frac{1}{\sigma} \frac{\partial^2 H}{\partial x^2} = \left( \bar{\mu} \frac{\partial H}{\partial t} \right) + R \quad (7.99)$$

El método de las diferencias finitas lo aplicaremos para la ecuación de difusión (7.99). Desde un punto de vista operativo, el método del punto fijo se traduce en el siguiente algoritmo para cada paso o nodo de tiempo:

1. Se supone un valor para el residuo de cada nodo espacial  $i$ :  $R_i^0$
2. Se resuelve la ecuación de difusión (7.99). Con ello obtenemos el campo  $H_i^0$  en cada nodo  $i$  de espacio.
3. Para cada nodo de espacio  $i$  calculamos el residuo  $R_i^1$  correspondiente a la siguiente iteración mediante:

$$R_i^1 = cP(H_i^0) - \bar{\mu}H_i^0 \quad (7.100)$$

Donde además:

$$B_i^0 = cP(H_i^0) \quad (7.101)$$

4. Con los residuos por nodo calculado para las dos iteraciones aplicamos un criterio de convergencia para determinar si dicha convergencia se ha logrado o no. El criterio de convergencia empleado por nosotros es:

$$\varepsilon_i = \left| \frac{R_i^1 - R_i^0}{R_i^0} \right| < 0.001 \quad (7.102)$$

5. Si se cumple (7.102) en todos los nodos entonces se considera que la solución converge y se pasa al siguiente paso de tiempo, volviendo a aplicar el mismo algoritmo. Si no se cumple (7.102) en todos los nodos, entonces se hace  $R_i^0 = R_i^1$ , y se repiten los mismos pasos hasta que el problema converja.

En el proceso de resolución del sistema de ecuaciones no lineal necesitamos del modelo de histéresis. Nosotros aplicamos el modelo de Preisach desarrollado según la definición algebraica del mismo y caracterizado por el método de Mayergoyz, tal y como se reflejó en el capítulo 3 del presente trabajo. Si se hubiese desarrollado mediante integrales de Everett los resultados no hubieran variado. Lo que si que es remarcable es comprobar como en efecto, en la formulación en  $H$  nos basta con el modelo directo, no necesitamos invertir el modelo de Preisach. Esto es una ventaja de la formulación en  $H$ .

Ahora ya sabemos como aplicar el método del punto fijo a nuestro problema, pero aún queda una cuestión por resolver, el valor de la constante  $\bar{\mu}$ . Este es quizás el aspecto más débil del procedimiento propuesto puesto que no hay un criterio determinado para determinar  $\bar{\mu}$  y finalmente se debe recurrir a pruebas de ensayo y error. Algunos autores proponen adoptar la media de las pendientes máxima y mínima del ciclo de histéresis. Nosotros hemos adoptado este criterio, pero no se han logrado buenos resultados. Multiplicando la media de las pendientes máxima y mínima del ciclo límite por 0,01 sí hemos logrado la convergencia e incluso validar el flujo encontrado en el post-proceso.

### 7.6.2 Resolución de la ecuación de difusión

Ahora que ya sabemos como hemos de aplicar el método del punto fijo y la ecuación definitiva a resolver, la (7.99), abordamos la resolución de dicha ecuación aplicando el método de las diferencias finitas con un esquema Crank-Nicholson.

Como ya es sabido, el método de las diferencias finitas consiste en sustituir las derivadas de las funciones por diferencias finitas. De las varias posibilidades existentes [Smith, 1985; Sadiku, 2001] nosotros optamos por la versión “*forward*” con error del orden de  $\Delta x$ , esto es, las derivadas de primer orden se calculan como:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y_{i+1} - y_i}{\Delta x} \quad (7.103),$$

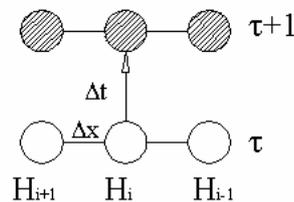
y las de segundo orden como:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{(\Delta x)^2} \quad (7.104)$$

Esto respecto a la discretización en general, para la discretización temporal adoptamos el esquema de Crank-Nicholson. En la figura 7-8 se esquematiza un paso temporal del esquema de Crank-Nicholson. Aplicando dicho esquema de Crank-Nicholson en la ecuación de difusión (7.99) obtenemos:

$$\frac{1}{2} \frac{1}{\sigma} \left( \left[ \frac{\partial^2 H}{\partial x^2} \right]_{i,\tau+1} + \left[ \frac{\partial^2 H}{\partial x^2} \right]_{i,\tau} \right) = \bar{\mu} \left[ \frac{\partial H}{\partial t} \right]_{i,\tau} + \left[ \frac{\partial R}{\partial t} \right]_{i,\tau} \quad (7.105)$$

Donde  $\tau$  son los nodos de tiempo y  $i$  los nodos espaciales.



**Figura 7-8.** Esquema de Crank-Nicholson

Finalmente aplicando el método de las diferencias finitas en las derivadas espaciales y temporales:

$$\frac{1}{2\sigma} \left[ \frac{H_{i+1,\tau+1} - 2H_{i,\tau+1} + H_{i-1,\tau+1}}{(\Delta x)^2} + \frac{H_{i+1,\tau} - 2H_{i,\tau} + H_{i-1,\tau}}{(\Delta x)^2} \right] = \bar{\mu} \left( \frac{H_{i,\tau+1} - H_{i,\tau}}{\Delta t} \right) + \left( \frac{R_{i,\tau+1} - R_{i,\tau}}{\Delta t} \right) \quad (7.106)$$

Esta es la ecuación de difusión en diferencias finitas, de ella obtenemos el sistema de ecuaciones a resolver. Pero antes desarrollamos la ecuación para que adopte una forma más conveniente. Denominamos  $\zeta$  a la siguiente constante:

$$\zeta \equiv \frac{\Delta t}{\sigma (\Delta x)^2} \quad (7.107)$$

Con esta ecuación estamos asumiendo que tanto el espaciado espacial como el temporal es constante, esto es, que entre todos los nodos de espacio existe la misma distancia  $\Delta x$ , y entre todos los nodos de espacio también el tiempo es constante  $\Delta t$ .

Además de la constante  $\zeta$ , para simplificar la lectura de la ecuación de difusión en diferencias finitas, a los valores con subíndice  $\tau$  los indicamos como  $h$ , y a los valores con subíndice  $\tau+1$  los indicamos como  $H$ :

$$\begin{aligned} h_i &= H_{i,\tau} \\ H_i &= H_{i,\tau+1} \end{aligned} \quad (7.108)$$

En realidad, desde un punto de vista del algoritmo de cálculo los valores  $h_i$  son los resultados del nodo de tiempo anterior y por tanto conocidos, mientras que los valores  $H_i$  son las incógnitas del nodo o paso de tiempo actual. Respecto a los residuos  $R_{\tau+1}$  es el residuo del nodo de tiempo actual y  $R_{\Delta}$  es el residuo del nodo de tiempo anterior. Para simplificar la lectura de las ecuaciones hacemos:

$$\begin{aligned} R_{i,\tau+1} &= R_i \\ R_{i,\tau} &= r_i \end{aligned} \quad (7.109)$$

Sustituyendo (7.107) y (7.108) en (7.106) y después de unas cuantas operaciones la ecuación de difusión en diferencias finitas se puede expresar así:

$$H_{i+1} - 2\frac{\zeta + \bar{\mu}}{\zeta} H_i + H_{i-1} = -h_{i+1} + 2\frac{\zeta - \bar{\mu}}{\zeta} h_i - h_{i-1} + \frac{2}{\zeta} (R_i - r_i) \quad (7.110)$$

De la ecuación (7.110) se deduce el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\left. \begin{aligned} i=1: H_2 - \frac{2}{\zeta}(\zeta + \bar{\mu})H_1 + H_0 &= -h_2 + \frac{2}{\zeta}(\zeta - \bar{\mu})h_1 - h_0 + \frac{2}{\zeta}(R_1 - r_1) \\ i=2: H_3 - \frac{2}{\zeta}(\zeta + \bar{\mu})H_2 + H_1 &= -h_3 + \frac{2}{\zeta}(\zeta - \bar{\mu})h_2 - h_1 + \frac{2}{\zeta}(R_2 - r_2) \\ &\vdots \\ i=n_x: H_{n_x+1} - \frac{2}{\zeta}(\zeta + \bar{\mu})H_{n_x} + H_{n_x-1} &= -h_{n_x+1} + \frac{2}{\zeta}(\zeta - \bar{\mu})h_{n_x} - h_{n_x-1} + \frac{2}{\zeta}(R_{n_x} - r_{n_x}) \end{aligned} \right\} (7.111)$$

Respecto a la ecuación del último nodo  $i=n_x$  hemos de considerar la simetría del problema respecto al centro del núcleo y por tanto:

$$\begin{aligned} H_{n_x+1} &= H_{n_x-1} \\ h_{n_x+1} &= h_{n_x-1} \end{aligned} \quad (7.112)$$

Conforme a lo cual podemos expresar la ecuación del último nodo  $i=n_x$  como:

$$i=n_x: -\frac{2}{\zeta}(\zeta + \bar{\mu})H_{n_x} + 2H_{n_x-1} = \frac{2}{\zeta}(\zeta - \bar{\mu})h_{n_x} - 2h_{n_x-1} + \frac{2}{\zeta}(R_{n_x} - r_{n_x}) \quad (7.113)$$

El sistema de ecuaciones (7.111) con la ecuación (7.113) se va a resolver de forma explícita, por lo que es más interesante expresarlo de forma matricial  $[a] \cdot [H] = [b]$ . Donde:

$$[a] = \begin{pmatrix} -\frac{2}{\zeta}(\zeta + \bar{\mu}) & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & -\frac{2}{\zeta}(\zeta + \bar{\mu}) & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{2}{\zeta}(\zeta + \bar{\mu}) & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{2}{\zeta}(\zeta + \bar{\mu}) & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 2 & -\frac{2}{\zeta}(\zeta + \bar{\mu}) \end{pmatrix} \quad (7.114a)$$

$$[H] = \begin{pmatrix} H_1 \\ H_2 \\ H_3 \\ H_4 \\ \vdots \\ H_{nx} \end{pmatrix}; \quad [b] = \begin{pmatrix} -h_2 + \frac{2}{\zeta}(\zeta - \bar{\mu})h_1 - h_0 - H_0 + \frac{2}{\zeta}(R_1 - r_1) \\ -h_3 + \frac{2}{\zeta}(\zeta - \bar{\mu})h_2 - h_1 + \frac{2}{\zeta}(R_2 - r_2) \\ -h_4 + \frac{2}{\zeta}(\zeta - \bar{\mu})h_3 - h_2 + \frac{2}{\zeta}(R_3 - r_3) \\ -h_5 + \frac{2}{\zeta}(\zeta - \bar{\mu})h_4 - h_3 + \frac{2}{\zeta}(R_4 - r_4) \\ \vdots \\ \frac{2}{\zeta}(\zeta - \bar{\mu})h_{nx} - 2h_{nx-1} + \frac{2}{\zeta}(R_{nx} - r_{nx}) \end{pmatrix} \quad (7.114b)$$

Esta es la ecuación matricial a resolver para determinar la distribución del campo en el interior del campo, esta ecuación se emplea dentro del algoritmo del método del punto fijo. El sistema de ecuaciones implícito en esta ecuación matricial lo resolvemos con la función "mldivide" de Matlab. Esta función aplica el método de Gauss-Seidel para resolver el sistema de ecuaciones.

Respecto a las soluciones  $B(x,t)$  y  $H(x,t)$  obtenidas debe tenerse en cuenta el tiempo de estabilización. Esto es, nuestro análisis del transformador se realiza en estado estacionario sin tener en consideración ningún tipo de transitorio. Al ser la tensión periódica, el flujo, el campo y las demás variables magnéticas y eléctricas también lo son. Nosotros comenzamos a resolver el problema cuando comienza un periodo de  $i_0(t)$ , dividimos este periodo en  $nt$  nodos

de tiempo y calculamos  $H$  y  $B$  para cada nodo de tiempo  $\tau$  partiendo del valor de  $H$  en la frontera y los valores  $H(x, \tau-1)$ . Pero para el primer nodo de tiempo  $\tau=1$ , no conocemos las condiciones de  $H$  anteriores, esto es, las condiciones iniciales de la distribución del campo en el núcleo  $H(x,0)$ . Esto provoca que se produzca un cierto lapso de estabilización en los resultados de  $H$ , de forma que para los primeros nodos de tiempo calculados los resultados de  $H$  no son correctos. Esto no es un problema puesto que estamos analizando una señal periódica y los resultados son asimismo periódicos. La solución es sencilla, se realizan los cálculos para  $p$  periodos de  $i_0(t)$ , pero tan solo se tienen consideración como resultados válidos los valores correspondientes al último periodo de  $i_0(t)$ .

Para los cálculos realizados a la mitad del primer periodo ya se estabilizan los resultados, por lo que con  $p=2$  ya sería suficiente. No obstante, en todos nuestros cálculos hemos tomado  $p=3$  y tomado como válido el último periodo. En consecuencia, si  $n_1$  es el nodo de tiempo donde comienza el último periodo de la simulación y  $nt$  el número total de nodos de tiempo, y considerando que el último nodo de tiempo coincide con el fin del último periodo de  $i_0(t)$ , se consideran válidos únicamente los nodos  $n_1$  a  $nt$ , y todos los cálculos del post-proceso se realizan para estos nodos.

## 7.7 Post-proceso

Una vez calculados el campo  $H(x,t)$  y la inducción  $B(x,t)$  en el interior del núcleo del transformador se pasa a la siguiente fase, el post-proceso, en ella calculamos las restantes variables magnéticas en el núcleo y las pérdidas magnéticas.

### 7.7.1 Cálculo de las variables magnéticas en el núcleo

Las variables magnéticas que se calculan en el interior del núcleo son:

- Densidad de corrientes inducidas  $J(x,t)$
- Potencial vector magnético  $A(x,t)$
- Flujo magnético  $\phi(t)$

#### 7.7.1.1 Cálculo de la densidad de corrientes inducidas

La distribución de densidad de corrientes inducidas en el núcleo se puede determinar mediante la primera ecuación de Maxwell (7.15):

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{J} \quad (7.69)$$

Aplicado a nuestro modelo unidimensional de transformador:

$$\begin{pmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & 0 & H(x,t) \end{pmatrix} = \vec{J} = J(x,t) \hat{j} \quad (7.115)$$

Por tanto:

$$-\frac{\partial H(x,t)}{\partial x} = J(x,t) \quad (7.116)$$

El signo negativo de (7.116) es intrascendente y podemos prescindir de él, sólo indica la dirección de las corrientes inducidas. La ecuación (7.116) se calcula mediante diferencias finitas con una aproximación "Backward" de error  $(\Delta x)^2$  [Sadiku, 2001], lo cual para el nodo de tiempo  $\tau$  se traduce en la siguiente expresión:

$$J_{i,\tau} = \frac{-3H_{i,\tau} + 4H_{i+1,\tau} - H_{i+2,\tau}}{2\Delta x} \quad (7.117)$$

En el nodo anterior al correspondiente al centro del núcleo, por la simetría de las corrientes inducidas, la ecuación (7.117) se transforma en:

$$J_{nx-1,\tau} = \frac{2(H_{nx,\tau} - H_{nx-1,\tau})}{\Delta x} \quad (7.118)$$

En el centro del núcleo las corrientes inducidas se anulan:

$$J_{nx,\tau} = 0 \quad (7.119)$$

### 7.7.1.2 Cálculo del potencial vector magnético

La distribución del potencial vector magnético se determina directamente de la propia definición:

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} \quad (7.70)$$

Por tanto, aplicado a nuestro modelo unidimensional de transformador:

$$\begin{pmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & A(x,t) & 0 \end{pmatrix} = \frac{\partial A(x,t)}{\partial x} \hat{k} = B(x,t) \hat{k} \quad (7.120)$$

Despejando el potencial vector magnético en (7.120) podemos calcularlo, para el nodo de tiempo  $\tau$ , como la integral de la inducción:

$$A(x, \tau) = \int_0^a B(x, \tau) dx \quad (7.121)$$

Donde  $a$  es la mitad de la dimensión  $x$  del núcleo del transformador. La integral (7.121) se evalúa numéricamente mediante el método de los trapecios.

### 7.7.1.3 Cálculo del flujo magnético

El flujo magnético se puede calcular fácilmente a partir del potencial vector magnético aplicando la ecuación (7.34):

$$\phi(t) = 2b(A(n_x, t) - A(1, t)) \quad (7.122)$$

Donde  $b$  es la dimensión  $y$  (profundidad) del núcleo. El factor 2 se aplica para considerar el efecto del núcleo completo.

El flujo calculado mediante (7.122) es el total en el núcleo, el que se induce la fuerza magnetomotriz en bornes de un arrollamiento alrededor del núcleo. Este el parámetro que nos permite validar los cálculos pues disponemos de dicho flujo determinado experimentalmente.

### 7.7.2 Pérdidas magnéticas en el núcleo (pérdidas en el hierro)

El cálculo del campo  $H(x,t)$  y la inducción  $B(x,t)$  en proceso también nos permite determinar posteriormente en el post-proceso las pérdidas en el hierro. En concreto determinaremos las siguientes pérdidas:

- Pérdidas específicas en el hierro totales  $p_{Fe}$
- Pérdidas específicas por corrientes inducidas  $p_c$
- Pérdidas específicas por histéresis  $p_h$
- Pérdidas específicas por exceso  $p_{ex}$ .

#### 7.7.2.1 Teorema de Poynting. Determinación de las pérdidas específicas en el hierro.

Para determinar las pérdidas en el hierro emplearemos el teorema de Poynting. Comencemos por tanto deduciendo, aunque sea una forma rápida, el teorema de Poynting Partiendo de la siguiente relación:

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{E} \times \vec{H}) = \vec{H} \cdot \vec{\nabla} \times \vec{E} - \vec{E} \cdot \vec{\nabla} \times \vec{H} \quad (7.123)$$

Aplicando la primera ecuación de Maxwell (7.11) y la tercera ecuación de Maxwell (7.20) en la ecuación (7.123):

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{E} \times \vec{H}) = -\vec{H} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} - \vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} - \vec{E} \cdot \vec{J} \quad (7.124)$$

Integrando la expresión (7.71) sobre un volumen  $V$ , limitado por una superficie  $S$  encontramos el teorema de Poynting en su versión magneto-dinámica:

$$\oiint_{s(V)} (\vec{E} \times \vec{H}) \cdot \vec{ds} = -\frac{\partial}{\partial t} \iiint_{V(s)} \left( \frac{\vec{H} \cdot \vec{B}}{2} + \frac{\vec{E} \cdot \vec{D}}{2} \right) dV - \iiint_{V(s)} \vec{E} \cdot \vec{J} dV \quad (7.125)$$

En nuestro problema estamos considerando un caso cuasiestático en el cual  $\mathbf{D}=\mathbf{0}$ , para dicho caso el teorema de Poynting nos queda:

$$\left| \oint_{s(V)} (\vec{E} \times \vec{H}) \cdot d\vec{s} \right| = \frac{\partial}{\partial t} \iiint_{V(s)} \left( \frac{\vec{H} \cdot \vec{B}}{2} \right) dV + \iiint_{V(s)} (\vec{E} \cdot \vec{J}) dV \quad (7.126)$$

Analizando la expresión (7.126) deducimos su interés para el cálculo de las pérdidas magnéticas en el núcleo. El primer término de parte derecha de (7.126) son las pérdidas por histéresis. El segundo término de la parte derecha de (7.126) es la energía disipada en calor, esto es, las pérdidas por efecto Joule debidas a las corrientes en el núcleo; como que en el núcleo solamente existen las corrientes inducidas por el campo, éstas son las pérdidas por corrientes inducidas. En consecuencia el término de la derecha es el flujo de energía que entra en el volumen  $V$  [Plonus, 1982; Bertotti, 1998; Ida y Bastos, 1997].

Considerando cada parte de la ecuación (7.126) se deduce que empleando el término de la derecha (7.126) podemos determinar las pérdidas totales en el hierro. Definimos el vector de Poynting como:

$$\vec{P} \equiv \vec{E} \times \vec{H} \quad (7.127)$$

Según el teorema de Poynting, el vector de Poynting representa la densidad de pérdidas totales en el núcleo. Promediando para un período, y teniendo en cuenta que hay  $f$  periodos en un segundo, donde  $f$  es la frecuencia, las pérdidas en hierro se pueden calcular como:

$$P_{Fe} = f^2 \int_0^T [(\vec{E} \times \vec{H}) \cdot \hat{n}] dt \quad (7.128)$$

Donde  $\hat{n}$  es el vector unitario a la superficie  $s$  que engloba al volumen  $V$ . En nuestro caso el vector unitario perpendicular a la superficie del núcleo.

Las pérdidas específicas se deducen dividiendo entre la masa  $m$  del núcleo:

$$p_{Fe} = \frac{f^2}{m} \int_0^T [(\vec{E} \times \vec{H}) \cdot \hat{n}] dt \quad (7.129)$$

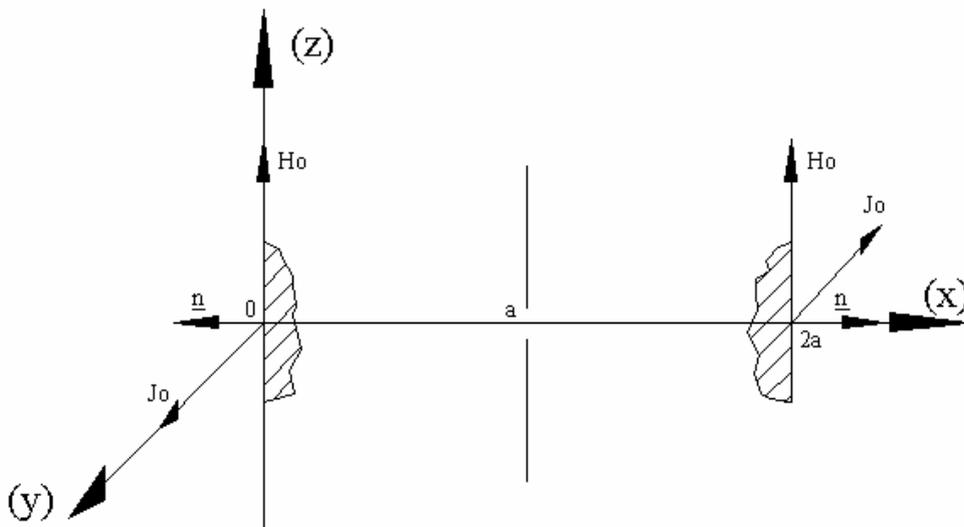
Aplicando la ecuación (7.28) podemos expresar (7.129) en función del campo  $H(x,t)$  y de la densidad de corrientes inducidas  $J(x,t)$ . El campo lo tenemos disponible del proceso y la densidad de corriente del post-proceso, de esta forma ahorramos cálculos.

$$p_{Fe} = \frac{f^2}{m\sigma_2} \int_0^T [(\vec{J} \times \vec{H}) \cdot \hat{n}] dt \quad (7.130)$$

Donde  $\sigma_2$  es la conductividad eléctrica del núcleo.

La expresión (7.130) corresponde a las pérdidas específicas en el hierro. Ya tan solo nos resta adaptar esta ecuación al modelo unidimensional del núcleo. En la figura 7-9 se muestran los vectores  $\vec{H}$  y  $\vec{J}$  a considerar en nuestro problema y su posición respecto al vector unitario  $\hat{n}$ . De dicha figura se deduce:

$$\begin{aligned} (\vec{J} \times \vec{H}) \cdot \hat{n} &= [J_0 \hat{j} \times H_0 \hat{k}] \cdot (-\hat{i}) + [-J_0 \hat{j} \times H_0 \hat{k}] \cdot (\hat{i}) = \\ &= J_0 H_0 + J_0 H_0 = 2J_0 H_0 \end{aligned} \quad (7.131)$$



**Figura 7-9.** Campo en la frontera  $H_0$ , densidad de corriente en la frontera  $J_0$  y vector unitario  $\hat{n}$  (en la figura) de las superficies del núcleo

Donde  $J_0$  y  $H_0$  son la densidad de corriente y el campo en la superficie del núcleo, esto es, aplicando la nomenclatura empleada en las ecuaciones en diferencias finitas:  $J(1,t)$  y  $H(1,t)$ . Así pues sustituyendo (7.131) en (7.130) obtenemos:

$$p_{Fe} = \frac{2f^2}{m\sigma_2} \int_0^T J(1,t) H(1,t) dt \quad (7.132)$$

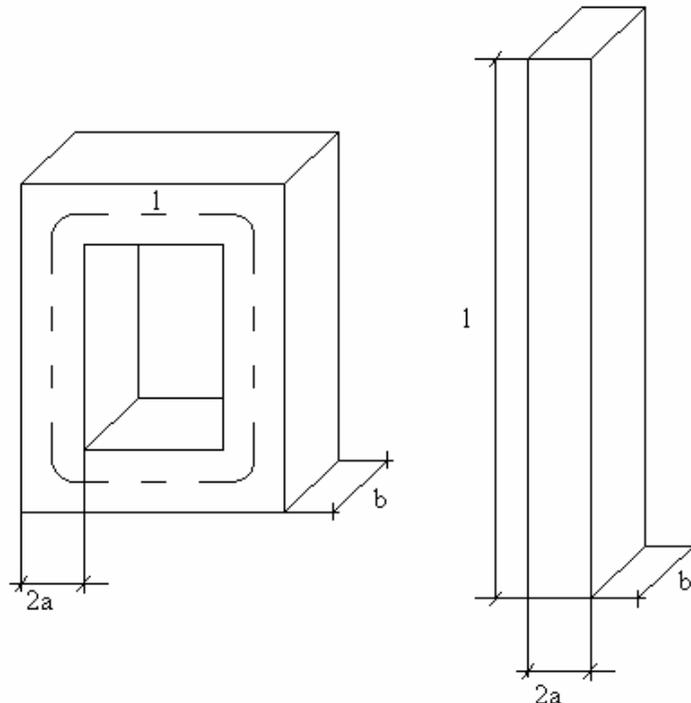
Pero las pérdidas de la ecuación anterior son  $[W/(kg \cdot m^2)]$ , únicamente se consideran las pérdidas en la dimensión  $x$  del núcleo. Nos falta todavía considerar las pérdidas en todo el volumen del núcleo para concluir. En la figura 7-10a se muestra la geometría real del núcleo, nosotros para calcular las pérdidas consideramos al núcleo como un paralelepípedo rectángulo de base  $2a \cdot b$  y altura igual a la longitud media efectiva del circuito magnético  $l$  (figura 7-10b). De forma que la ecuación de las pérdidas específicas en todo el volumen del núcleo se calcula como:

$$p_{Fe} = \frac{2blf^2}{m\sigma_2} \int_0^T J(1,t) H(1,t) dt \quad (7.133)$$

La integral se evalúa numéricamente mediante el método del trapecio. En el cálculo de la integral se debe tener en cuenta que únicamente se consideran los resultados correspondientes al último periodo de la simulación, por lo que los límites de la integral serían:

$$p_{Fe} = \frac{2blf^2}{m\sigma_2} \int_{n_1}^{n_2} J(1,t) H(1,t) dt \quad (7.134)$$

Está es la ecuación que empleamos para determinar las pérdidas totales.



**Figura 7-10.** Geometría real del núcleo (izquierda) y aproximación para determinar las pérdidas (derecha)

### 7.7.2.2 Determinación de las pérdidas específicas por histéresis

Son las pérdidas en estado estacionario de los dominios cuando se aplica un campo magnético variable. En realidad son debidas al carácter discontinuo a escala microscópica del proceso de magnetización, esto es, a las pérdidas de energía en cada salto de Barkhausen. La energía perdida en los saltos de Barkhausen no depende de la frecuencia (no es dinámica), pues la frecuencia tiene el efecto de expandir o comprimir la secuencia de saltos de Barkhausen, pero no afecta a la secuencia de saltos en si misma [de Blas, Bargalló, de la Hoz, et al, 2004; Boglietti, Cavagnino, Lazzari et al, 2003; Bertotti, 1998]

Las pérdidas por histéresis se podrían calcular directamente si fuéramos capaces de determinar los saltos de Barkhausen uno a uno. Pero no es procedente trabajar a esa escala, nos interesa trabajar en una escala en la que estos detalles no se aprecian.

La densidad volumétrica de energía perdida por los saltos de Barkhausen es el área del ciclo de histéresis cuasiestático  $A_h$  [Fiorillo y Novikov, 1990; Bertotti, 1998]:

$$w_h = \int_0^{B_{\max}} H(B) dB = A_h \quad (7.135)$$

Por tanto la energía es el área del ciclo cuasiestático por el volumen de la muestra  $V$ , y las pérdidas por histéresis se puede calcular como:

$$P_h = fA_h V \quad (7.136)$$

En consecuencia determinamos las pérdidas específicas por histéresis como:

$$p_h = \frac{fA_h V}{m} \quad (7.137)$$

Las ecuaciones (7.136) y (7.137) son un procedimiento válido para calcular las pérdidas por histéresis, pero no siempre se tiene disponible el ciclo de histéresis trazado, generalmente se aplica la ecuación semiempírica de Steinmetz:

$$P_h = \eta_h V B_m^\alpha \quad (7.138)$$

En nuestro caso podemos determinar el área del ciclo de histéresis cuasiestático mediante el modelo de Preisach, por lo que aplicamos la ecuación (7.137).

El procedimiento es sencillo. Como conocemos el historial de campo para cada nodo del núcleo  $H(x,t)$ , lo aplicamos como entrada al modelo de Preisach clásico, así determinamos el ciclo de histéresis en cada nodo y posteriormente el área de dicho ciclo en cada nodo  $A_h(x)$ . Las pérdidas por histéresis se calculan como la contribución de las áreas del ciclo de histéresis de cada nodo de espacio del núcleo. Las pérdidas obtenidas se multiplican por dos para considerar las pérdidas en todo el ancho  $2a$  del núcleo.

$$P_h = \frac{2f}{m} \int_0^a A_h(x) dx \quad (7.139)$$

Pero al igual que ocurría con las pérdidas totales, las pérdidas por histéresis calculadas mediante (7.139) únicamente contabilizan la aportación unidimensional del ancho del núcleo, se debe considerar todo el volumen. Para ello obramos igual que en las pérdidas en el hierro, consideramos al núcleo como un bloque de ancho  $2a$ , profundidad  $b$  y altura igual a la longitud media efectiva del circuito magnético  $l$  (figura 7-10b). Con lo que finalmente, calculamos las pérdidas por histéresis mediante la siguiente expresión:

$$P_h = \frac{2fbl}{m} \int_0^a A_h(x) dx \quad (7.140)$$

### 7.7.2.3 Determinación de las pérdidas específicas por corrientes inducidas

Se trata del calentamiento por efecto Joule producido por las corrientes inducidas en el núcleo. Del teorema de Poynting se deduce que la energía disipada por efecto Joule se puede determinar como:

$$P_c = \iiint_V \sigma (\vec{E})^2 dV = \frac{1}{\sigma} \iiint_V (\vec{J})^2 dV \quad (7.141)$$

Mediante una deducción similar a la seguida para las pérdidas totales en el transformador, se aplica (7.141) al modelo unidimensional del transformador, se promedia para un periodo y se multiplica por la frecuencia  $f$  que es el número de periodos por segundo. Con esto conseguimos las pérdidas en la dimensión  $x$  del núcleo, aún debemos extenderlas a todo el

núcleo. Siguiendo la aproximación mostrada en la figura 7-10, asumimos que el núcleo es un bloque de ancho  $2a$ , profundidad  $b$  y altura igual a la longitud media efectiva del circuito magnético  $l$ . En definitiva, la expresión definitiva de las pérdidas por corrientes inducidas es:

$$p_c = \frac{2b l f^2}{m\sigma} \int_{n_1}^{n_2} \int_0^a [J(x,t)]^2 dx dt \quad (7.142)$$

Los límites de la integral de tiempo ( $n_1$  y  $n_2$ ) corresponden al nodo de tiempo donde comienza el último periodo simulado y al último nodo de tiempo respectivamente. Considerando que el último nodo de tiempo coincide con el final del último periodo simulado.

#### 7.7.2.4 Determinación de las pérdidas específicas por exceso

Cuando se determinan las corrientes inducidas que producen el efecto Joule se hace a partir de las ecuaciones de Maxwell y en consecuencia no se tiene en cuenta el efecto de la estructura de dominios en las corrientes inducidas. Los dominios amplían las corrientes inducidas en las proximidades de las paredes de los dominios [Bertotti, 1998], las pérdidas calculadas a partir de las corrientes inducidas por las ecuaciones de Maxwell no tienen en cuenta estos efectos y por tanto subestiman las pérdidas.

Se puede comprobar experimentalmente que la suma de las pérdidas por histéresis y las pérdidas por corrientes inducidas clásicas no resulta en las pérdidas totales. A esta diferencia de pérdidas se la denomina pérdidas por exceso.

G. Bertotti ha desarrollado un teoría para determinar las pérdidas por exceso [Bertotti, 1998]. Nosotros aquí, como que conocemos las demás pérdidas, determinamos las pérdidas por exceso como:

$$p_{ex} = p_{Fe} - (p_h + p_c) \quad (7.143)$$

## 7.8 Resultados y validación

En el presente capítulo hemos presentado el método de cálculo, su formulación y sus fundamentos. Ahora hemos de comprobar que dicho método de cálculo funciona. Para ello se comparan los resultados calculados con los resultados experimentales disponibles. Para facilitar la lectura, estos resultados, la validación y las conclusiones las exponemos aparte, en el capítulo siguiente.

## 8. Aplicación al cálculo del campo magnético y de las pérdidas magnéticas de un transformador (II). Resultados y validación. Conclusiones.

### 8.1 Introducción.

En el capítulo anterior expusimos el modelo de transformador, la formulación y el método de cálculo. A continuación, en el presente capítulo, presentamos los resultados de las diversas soluciones y su análisis correspondiente. Del análisis de los resultados realizaremos la validación del método de cálculo, esto es, de la combinación del modelo de histéresis con el método numérico para resolver la ecuación de difusión del campo magnético.

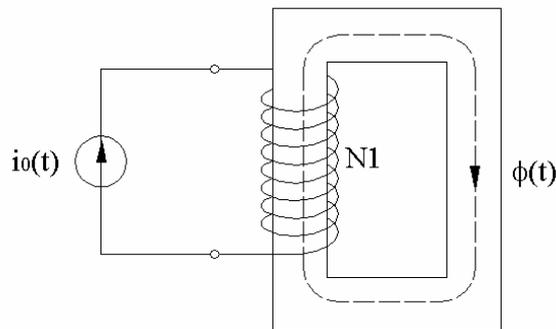


Figura 8-1

Recordemos que estamos simulando la muestra A, un transformador monofásico. La situación del transformador es la de la figura 8-1. Se determinó experimentalmente la intensidad de vacío del transformador  $i_0(t)$  para varias frecuencias y a varios valores de pico. Se supone entonces que el transformador está alimentado por una fuente de corriente  $i_0(t)$ .

Las diferentes intensidades de vacío se obtienen en el mismo proceso de determinación experimental de las pérdidas del transformador. Todo ello se expone más adelante, en el capítulo 10.

El procedimiento de cálculo es el expuesto en el capítulo anterior y que podemos resumir como sigue:

- Modelo unidimensional del transformador
- Formulación en  $H$  de la ecuación de difusión
- Se aplica el método de las diferencias finitas con esquema de Crack-Nicholson
- El sistema de ecuaciones no lineal resultante se resuelve mediante el método del punto fijo
- En el algoritmo de iteración del método del punto fijo se emplea el modelo de Preisach clásico para definir la ley constitutiva del núcleo. El modelo de Preisach se ha desarrollado directamente a partir de su definición algebraica y se ha caracterizado mediante el método de Mayergoyz. Con el mismo conjunto de curvas inversas de primer orden con que se validó en su momento (ver apartado de resultados del capítulo 3).

Una vez determinada la distribución del campo  $H(x,t)$  y de la inducción  $B(x,t)$  en el núcleo se determinan las siguientes variables:

- Potencial vector magnético  $A(x,t)$
- Densidad de corriente  $J(x,t)$
- Flujo magnético  $\phi(t)$
- Pérdidas específicas en el hierro totales  $P_{Fe}$
- Pérdidas específicas por histéresis  $P_h$
- Pérdidas específicas por corrientes inducidas  $P_c$
- Pérdidas específicas por exceso  $P_{ex}$

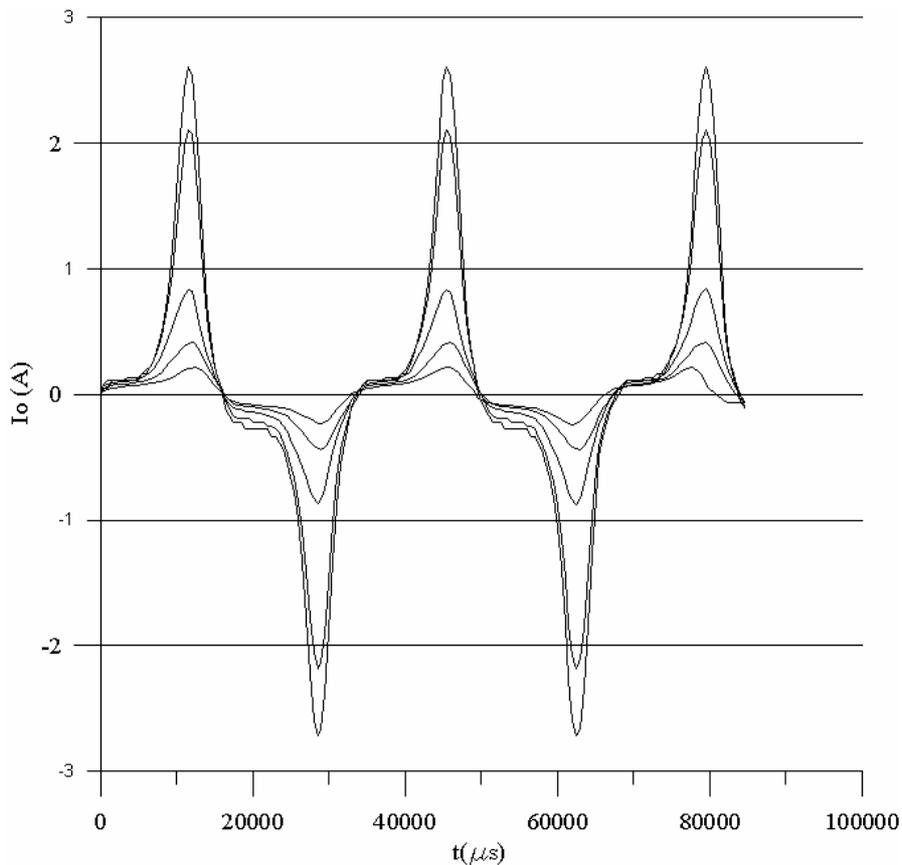
Como que disponemos del flujo y de las pérdidas determinadas experimentalmente podemos emplearlas para la validación del método de cálculo. En concreto el flujo es una variable para comparar pues para su determinación primero se debe haber calculado el campo  $H(x,t)$ , la inducción  $B(x,t)$  y el potencial magnético vector  $A(x,t)$ .

La entrada al sistema de cálculo son las corrientes de vacío para tres frecuencias 30Hz, 40Hz y 50Hz. En la tabla 8-I se indican los valores de pico de las corrientes de vacío de las

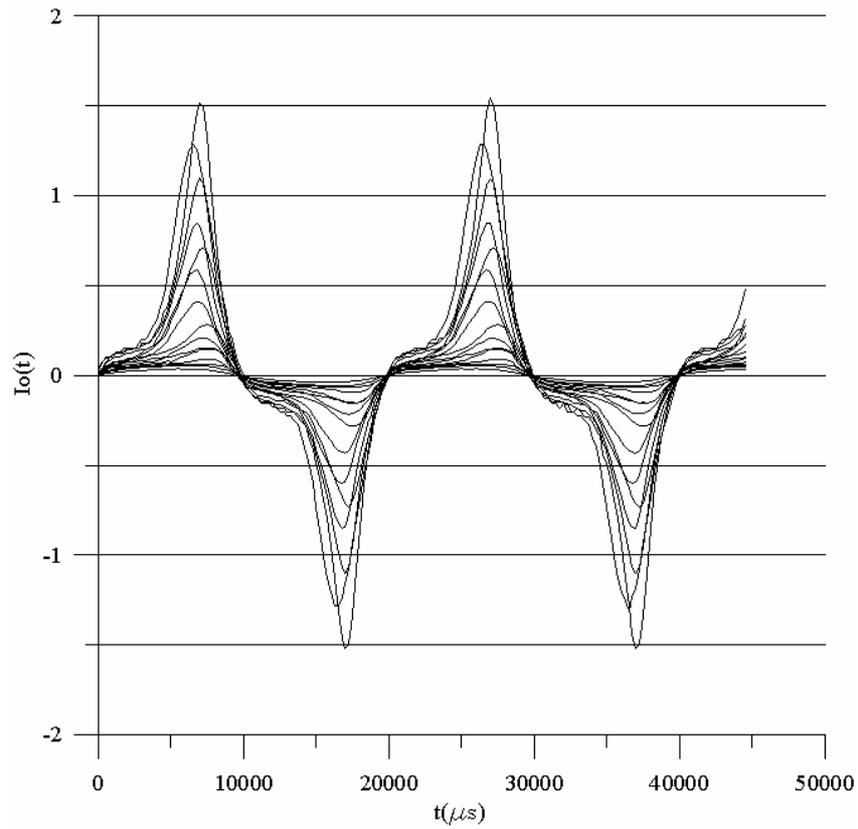
simulaciones realizadas a las tres frecuencias. En las figuras 8-2, 8-3 y 8-4 se muestran las formas de onda de  $i_o(t)$  para 30Hz, 50Hz y 70Hz respectivamente.

**Tabla 8-1.** Curvas simuladas a cada frecuencia

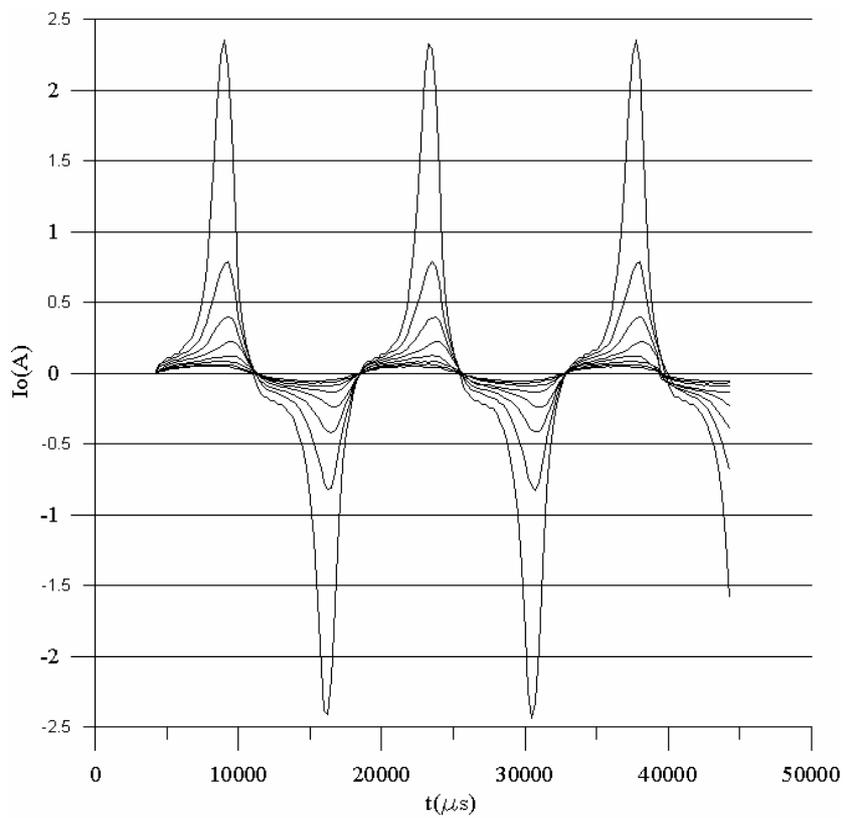
30Hz		50Hz				70Hz	
Curva	$I_{o,m}(A)$	Curva	$I_{o,m}(A)$	Curva	$I_{o,m}(A)$	Curva	$I_{o,m}(A)$
0	2.60	0	1.54	8	0.20	0	2.35
1	2.10	1	1.28	9	0.15	1	0.78
2	0.84	2	1.10	10	0.14	2	0.39
3	0.41	3	0.84	11	0.091	3	0.22
4	0.21	4	0.70	12	0.062	4	0.12
		5	0.58	13	0.056	5	0.083
		6	0.41	14	0.038	6	0.065
		7	0.28			7	0.050



**Figura 8-2.** Curvas de  $i_o(t)$  empleadas como entrada al sistema de cálculo a 30Hz



**Figura 8-3.** Curvas de  $i_o(t)$  empleadas como entrada al sistema de cálculo a 50Hz



**Figura 8-4.** Curvas de  $i_o(t)$  empleadas como entrada al sistema de cálculo a 70Hz

## 8.2 Resultados

### 8.2.1 Variables magnéticas

A continuación se muestran los resultados para las simulaciones correspondientes a la curva 1 para la frecuencia de 30Hz; las curvas 0, 2, 4 y 6 a 50Hz; y la curva 1 a 70Hz. Para cada curva de entrada se presentan los siguientes resultados.

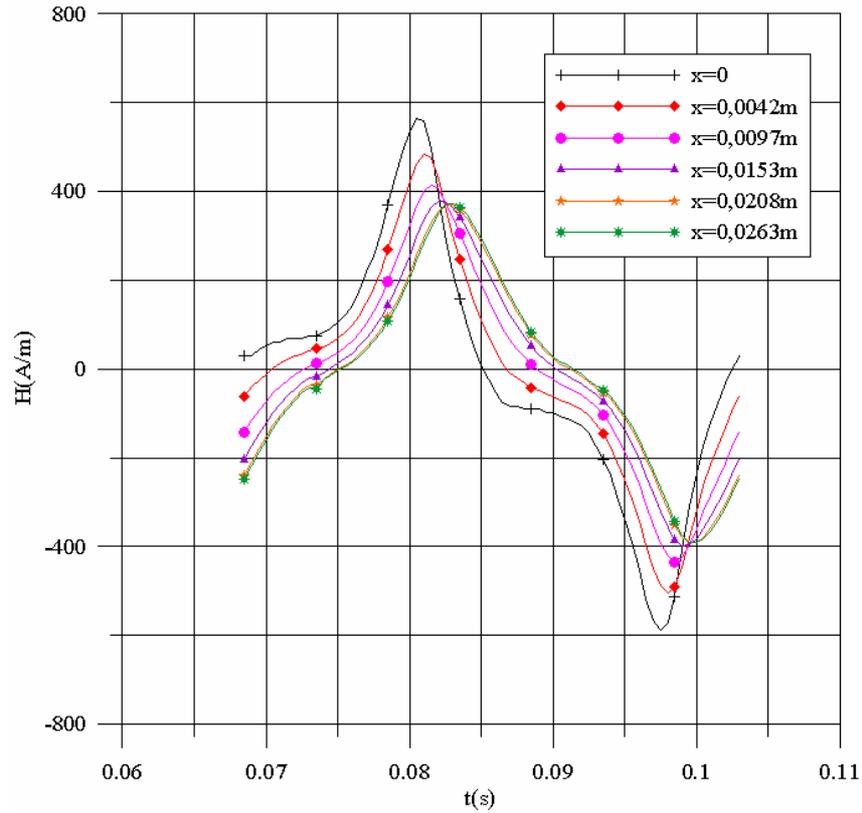
- Campo magnético
  - Forma de onda  $H(t)$  en varias profundidades  $x$  respecto a la superficie del núcleo
  - Difusión en el interior del núcleo en valor eficaz  $H_{rms}$
- Inducción
  - Forma de onda  $B(t)$  en varias profundidades  $x$  respecto a la superficie del núcleo
  - Difusión en el interior del núcleo en valor eficaz  $B_{rms}$
- Potencial vector magnético
  - Forma de onda  $A(t)$  en varias profundidades  $x$  respecto a la superficie del núcleo
  - Difusión en el interior del núcleo en valor eficaz  $A_{rms}$
- Densidad de corriente
  - Forma de onda  $J(t)$  en varias profundidades  $x$  respecto a la superficie del núcleo
  - Difusión en el interior del núcleo en valor eficaz  $J_{rms}$
- Flujo  $\phi(t)$

Las profundidades  $x$  respecto al núcleo para las cuales se obtienen los resultados son 0, 4.2mm, 9.7 mm, 15.3mm, 20.8mm y 26.3 mm. La primera corresponde a la superficie del núcleo y la última al centro del mismo.

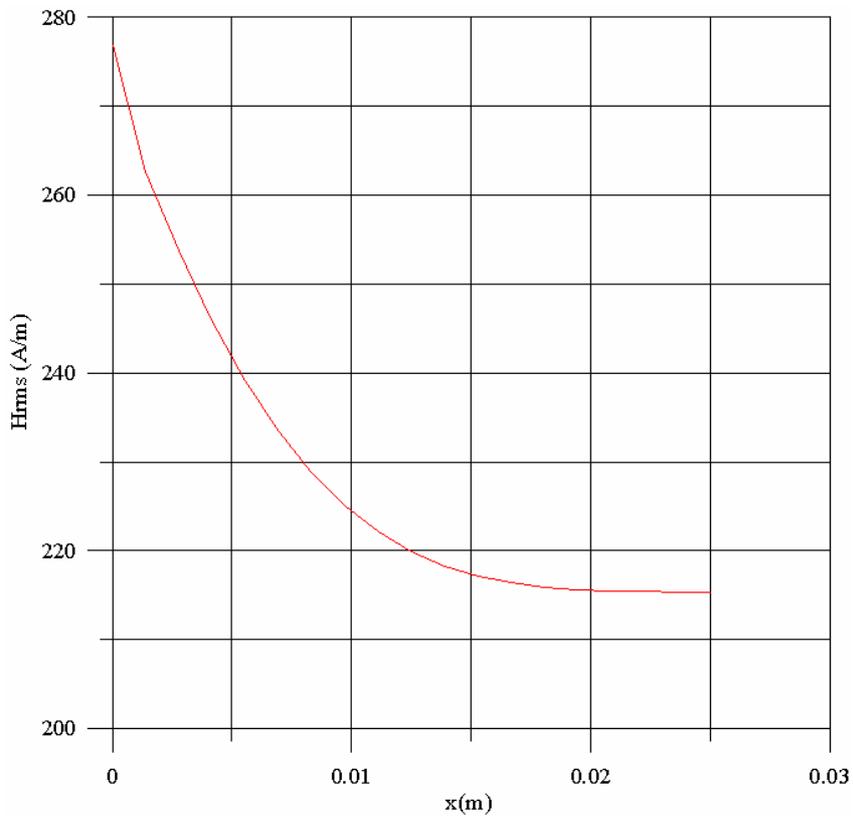
En la tabla 8-II se indican los números de figura que corresponden a cada uno de los resultados para cada frecuencia.

**Tabla 8-II.** Numero de figura de los diferentes resultados

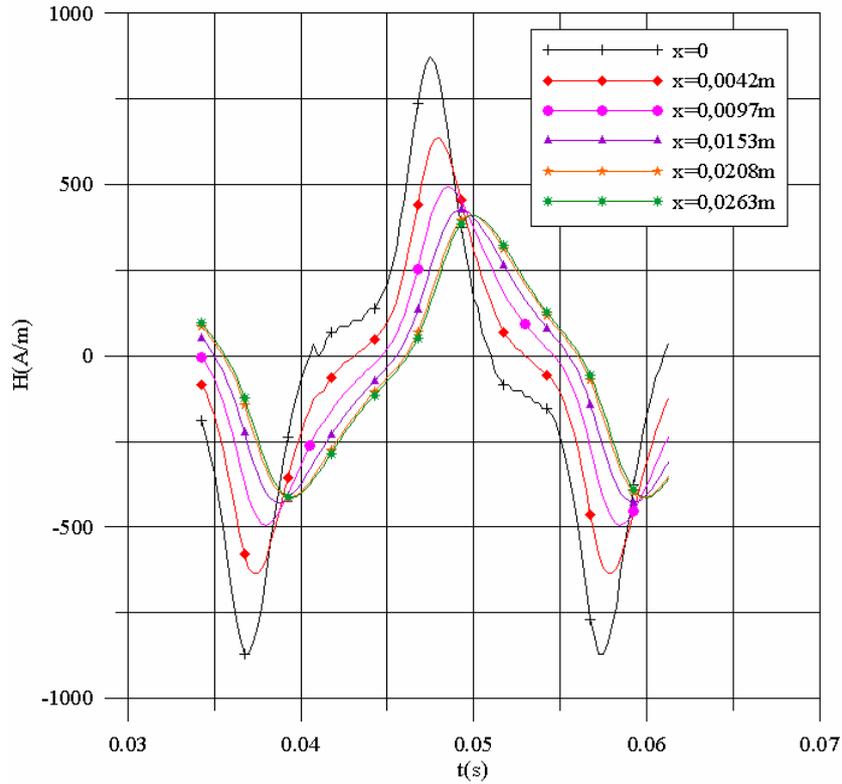
$f(\text{Hz})$	Curva	$H(x,t)$	$H_{rms}$	$B(x,t)$	$B_{rms}$	$A(x,t)$	$A_{rms}$	$J(x,t)$	$J_{rms}$	$\phi$
30Hz	1	8-5	8-6	8-14	8-15	8-23	8-24	8-32	8-33	8-41
50Hz	0	8-7	8-11	8-16	8-20	8-25	8-29	8-34	8-38	8-42
	2	8-8		8-17		8-26		8-35		8-43
	4	8-9		8-18		8-27		8-36		8-44
	6	8-10		8-19		8-28		8-37		8-45
70Hz	1	8-12	8-13	8-21	8-22	8-30	8-31	8-49	8-40	8-46



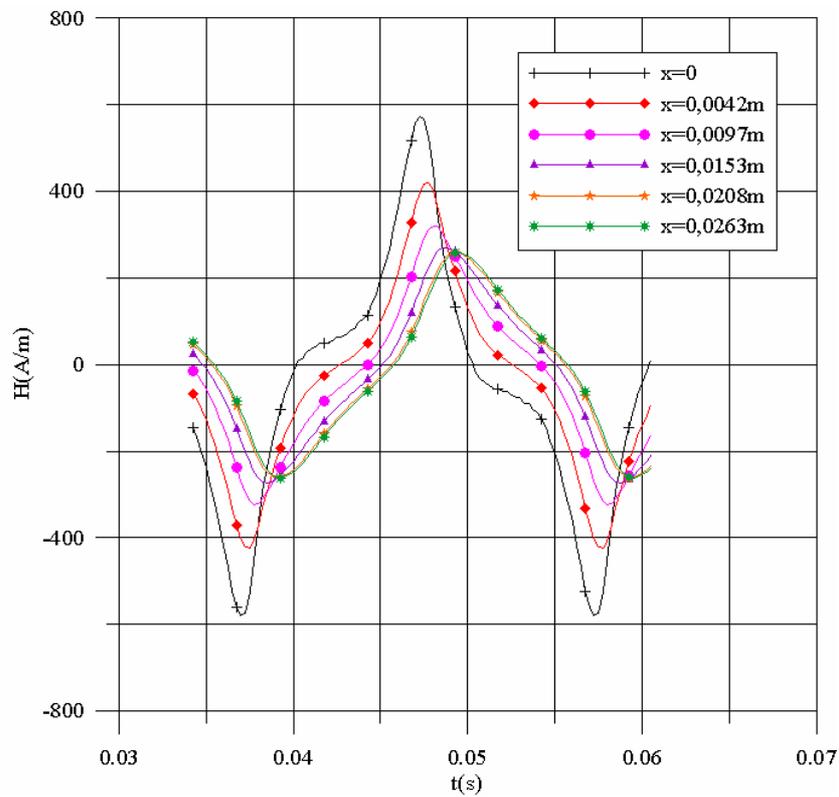
**Figura 8-5.** Formas de onda de  $H(x,t)$  a 30Hz para la curva de entrada "1" calculadas a varias profundidades  $x$  respecto a la superficie del núcleo



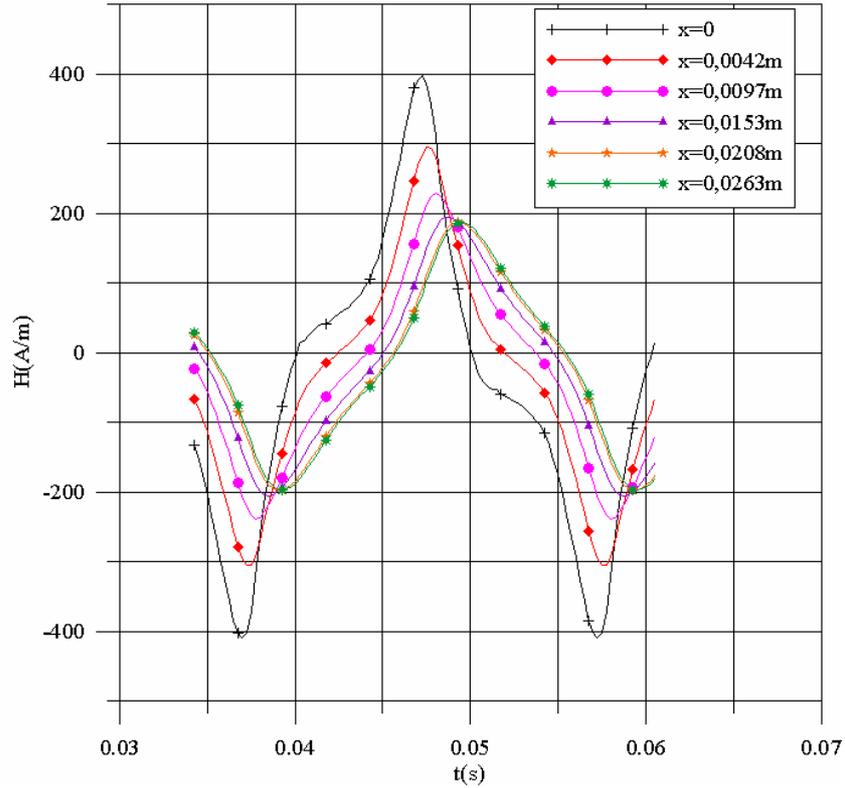
**Figura 8-6.** Difusión  $H(x)$  en valor eficaz calculada a 30Hz



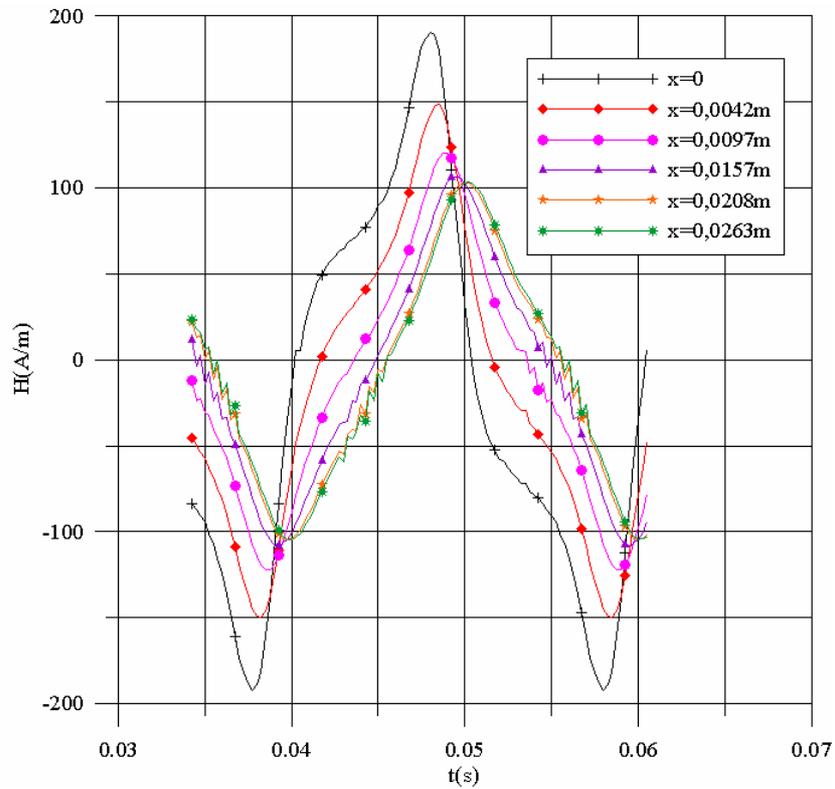
**Figura 8-7.** Formas de onda de  $H(x,t)$  a 50Hz para la curva de entrada "0" calculadas a varias profundidades  $x$  respecto a la superficie del núcleo



**Figura 8-8.** Formas de onda de  $H(x,t)$  a 50Hz para la curva de entrada "2" calculadas a varias profundidades  $x$  respecto a la superficie del núcleo



**Figura 8-9.** Formas de onda de  $H(x,t)$  a 50Hz para la curva de entrada "4" calculadas a varias profundidades  $x$  respecto a la superficie del núcleo



**Figura 8-10.** Formas de onda de  $H(x,t)$  a 50Hz para la curva de entrada "6" calculadas a varias profundidades  $x$  respecto a la superficie del núcleo

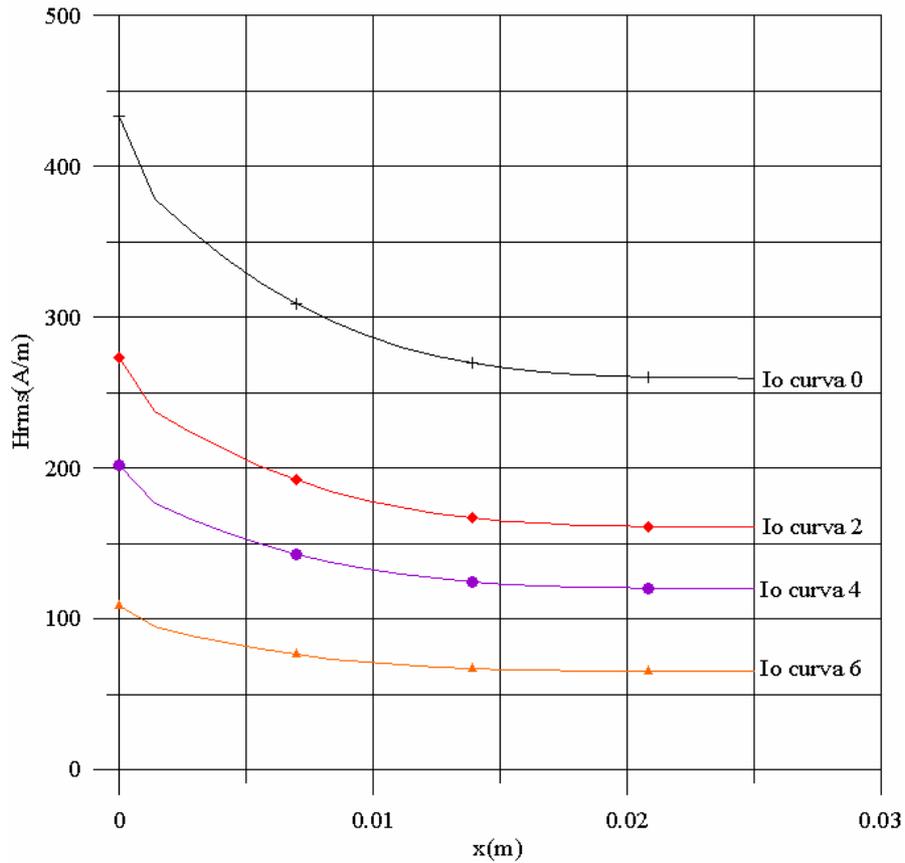


Figura 8-11. Difusión  $H(x)$  en valor eficaz calculada a 50Hz

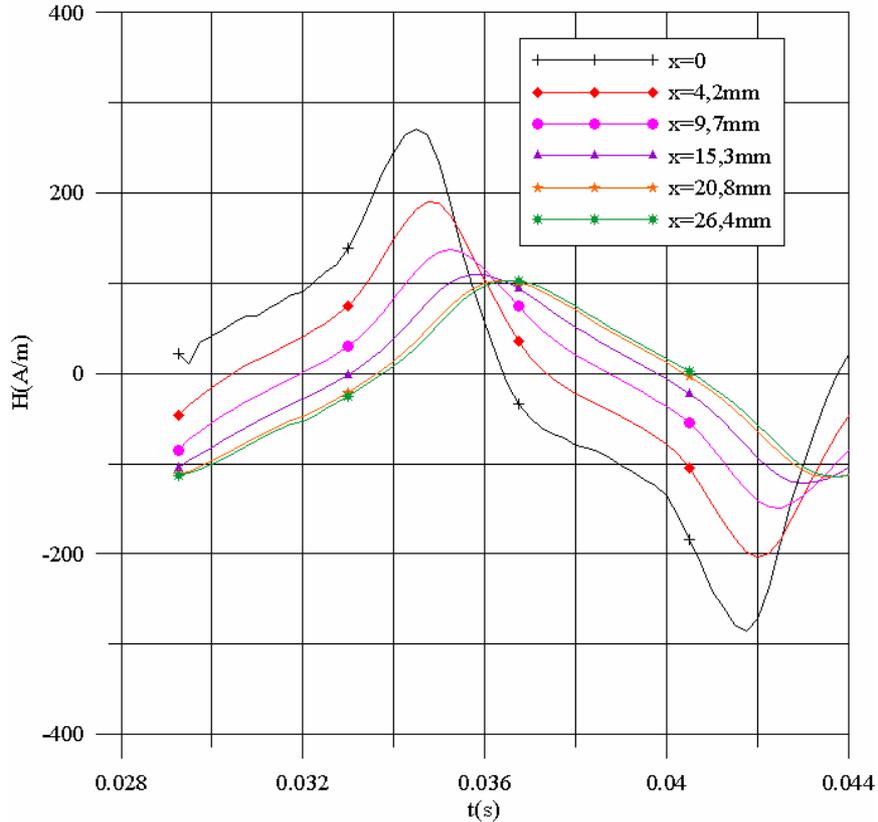


Figura 8-12. Formas de onda de  $H(x,t)$  a 70Hz para la curva de entrada "1" calculadas a varias profundidades  $x$  respecto a la superficie del núcleo

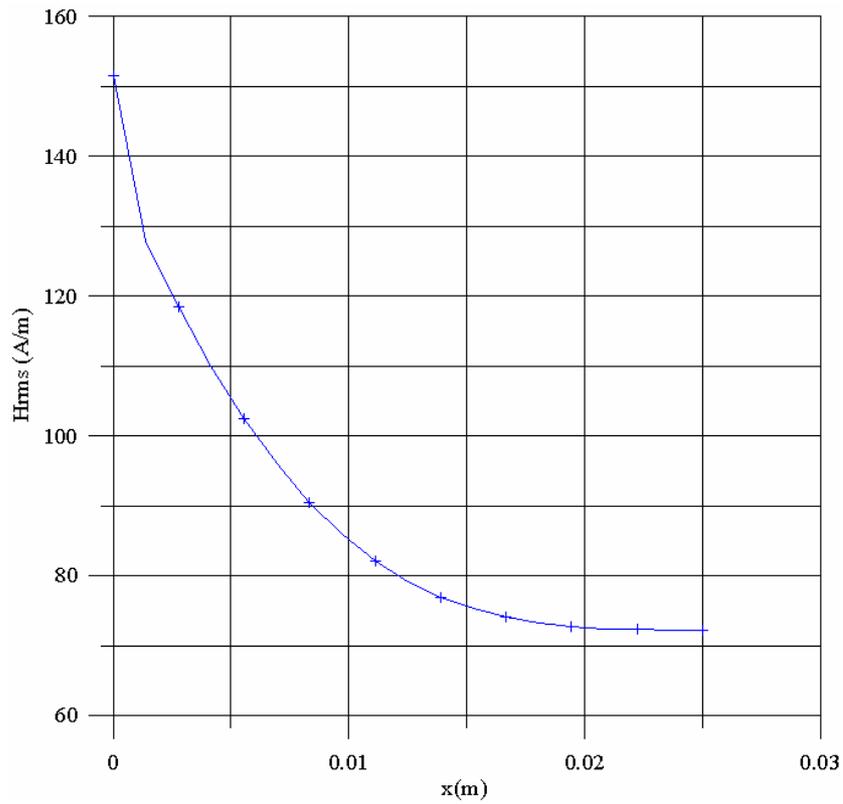


Figura 8-13. Difusión  $H(x)$  en valor eficaz calculada a 70Hz

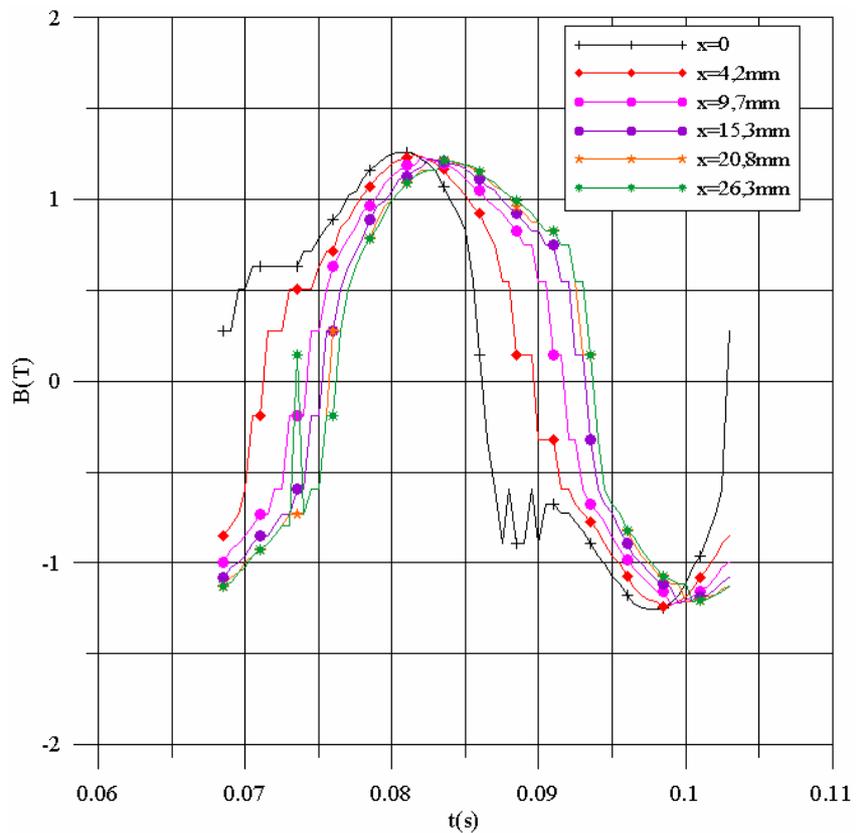


Figura 8-14. Formas de onda de  $B(x,t)$  a 30Hz para la curva de entrada "1" calculadas a varias profundidades  $x$  respecto a la superficie del núcleo

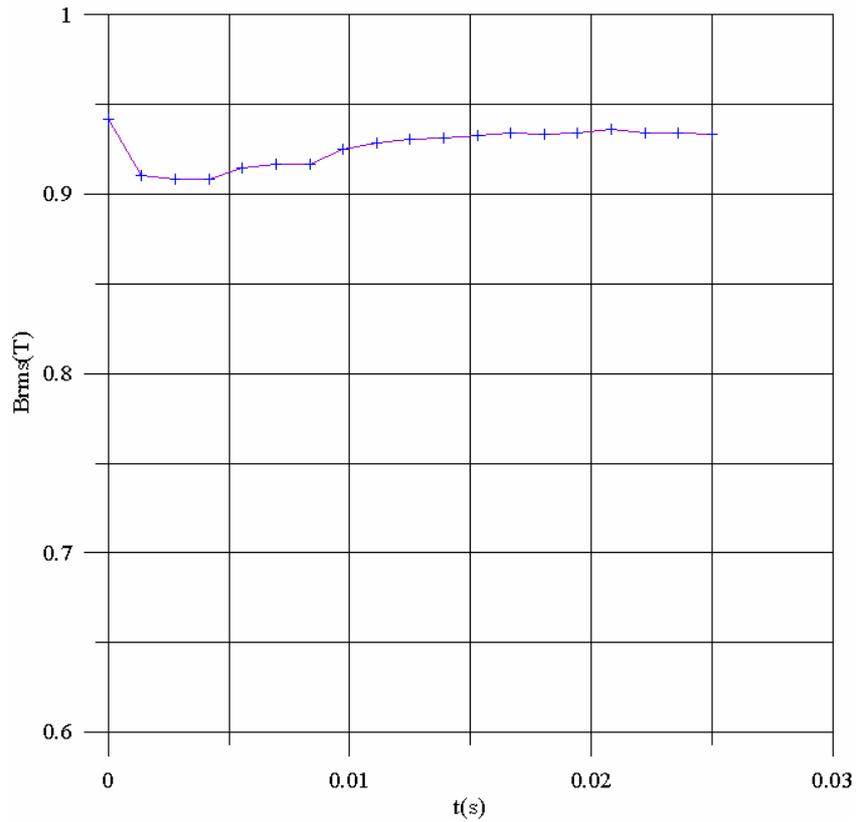


Figura 8-15. Difusión  $B(x)$  en valor eficaz calculada a 30Hz

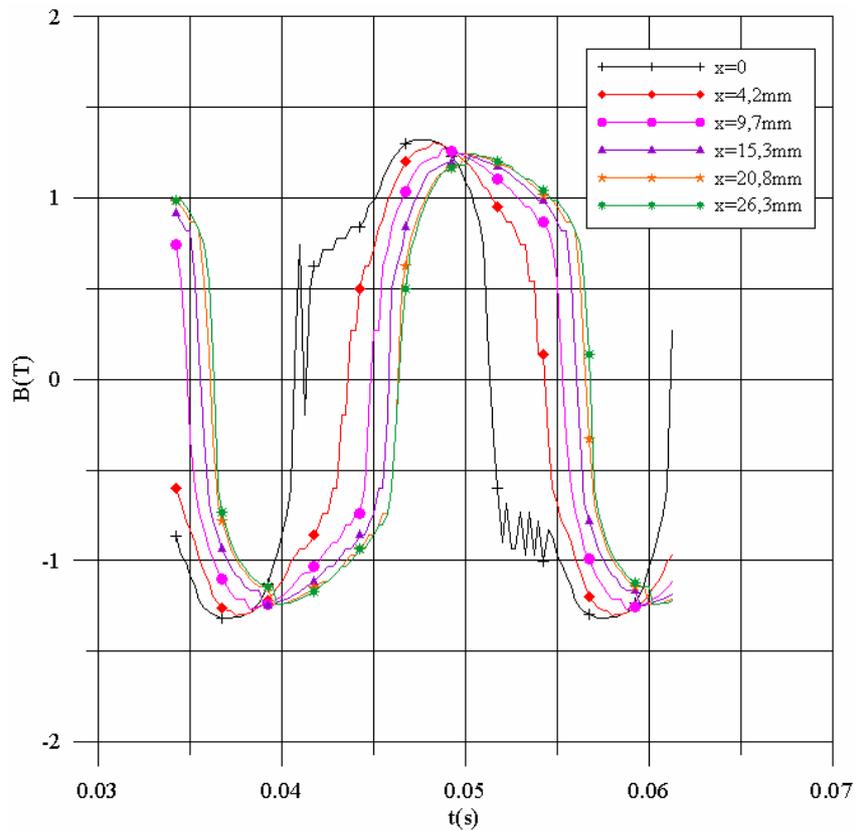
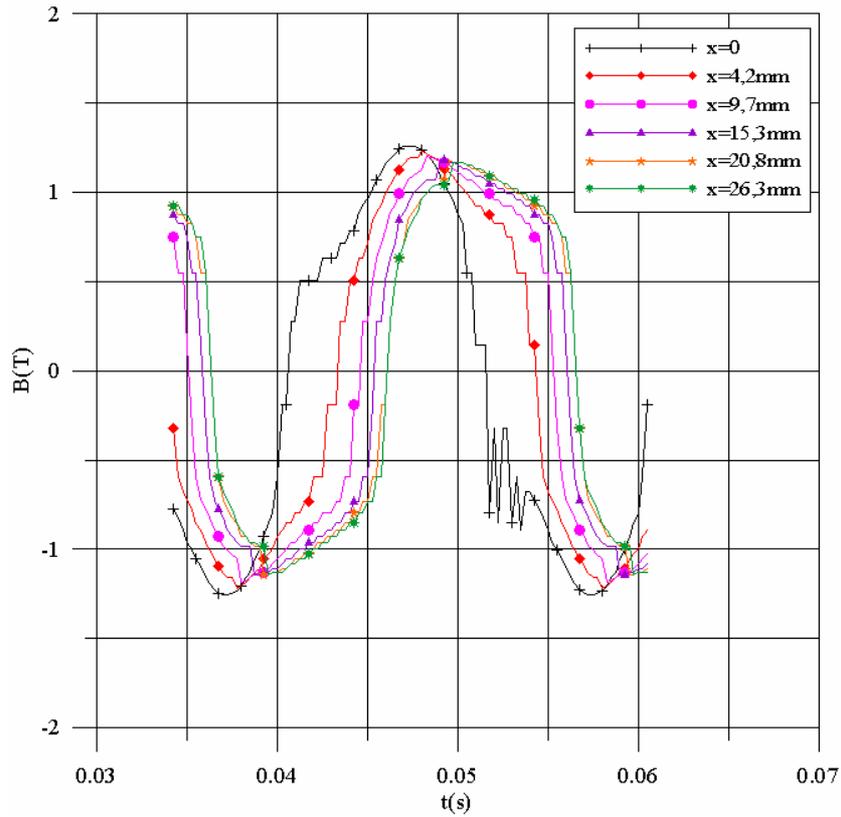
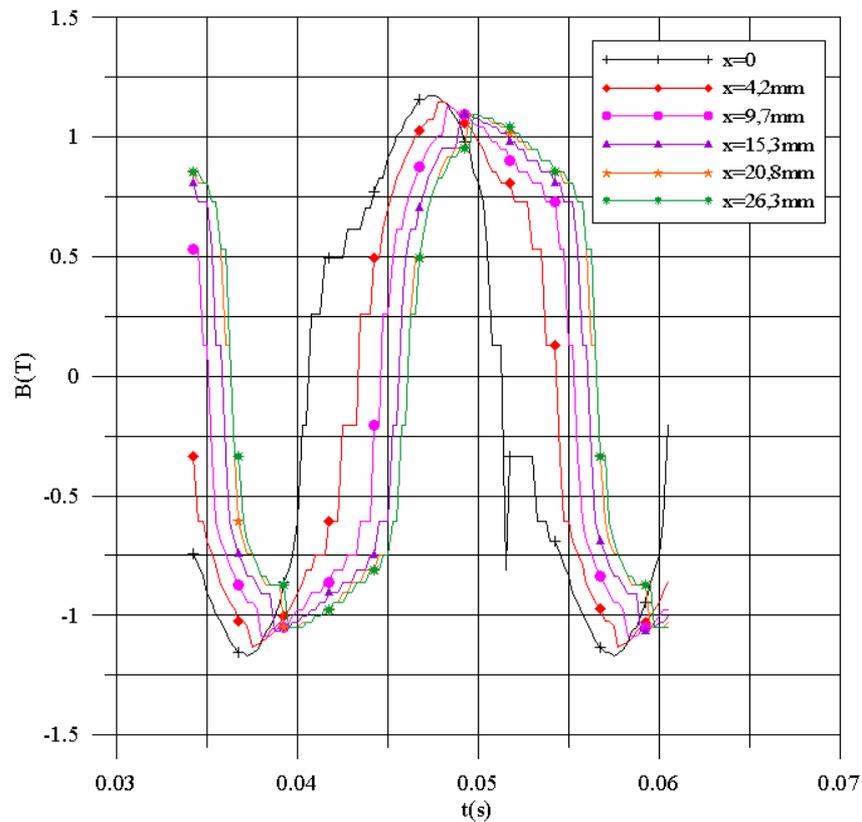


Figura 8-16. Formas de onda  $B(x,t)$  a 50Hz para la curva de entrada "0" calculadas a varias profundidades  $x$  respecto a la superficie del núcleo



**Figura 8-17.** Formas de onda  $B(x,t)$  a 50Hz para la curva de entrada "2" calculadas a varias profundidades  $x$  respecto a la superficie del núcleo



**Figura 8-18.** Formas de onda  $B(x,t)$  a 50Hz para la curva de entrada "4" calculadas a varias profundidades  $x$  respecto a la superficie del núcleo

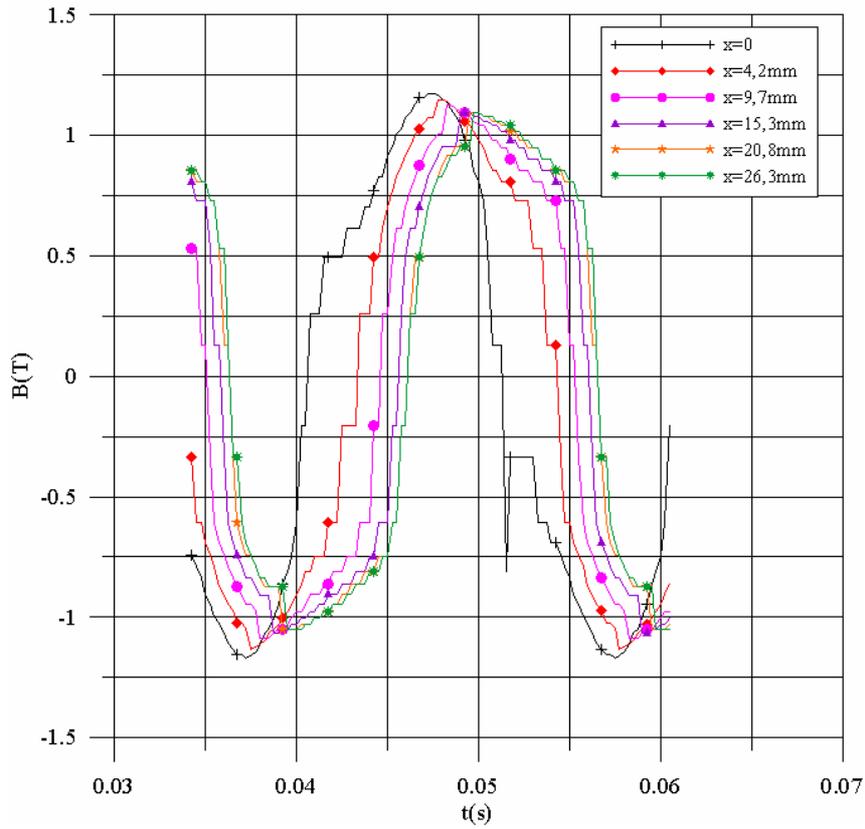


Figura 8-19. Formas de onda  $B(x,t)$  a 50Hz para la curva de entrada "6" calculadas a varias profundidades  $x$  respecto a la superficie del núcleo

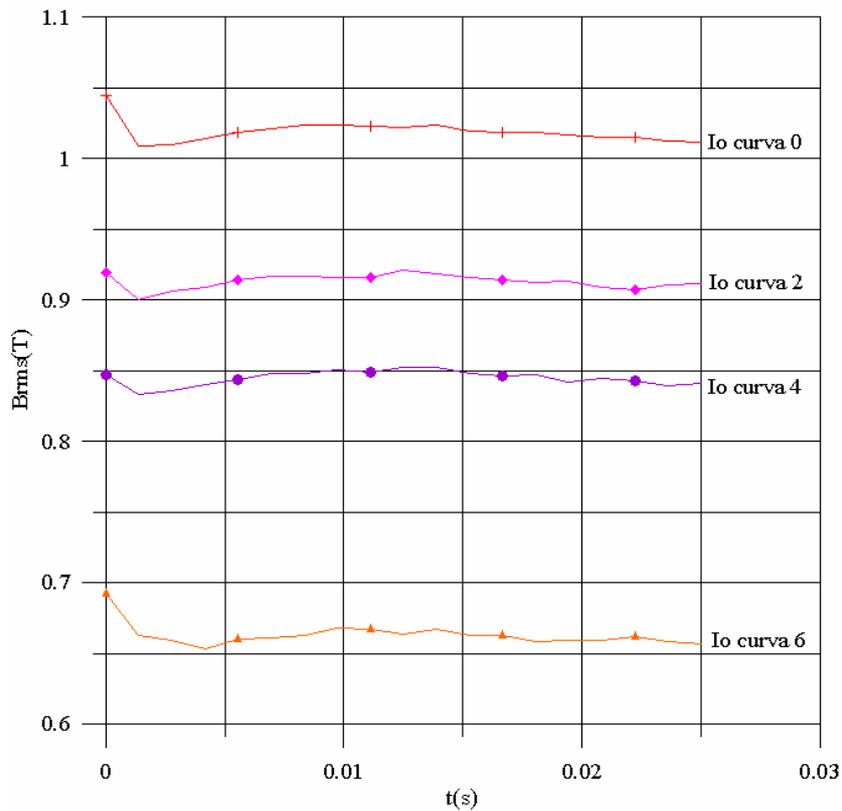
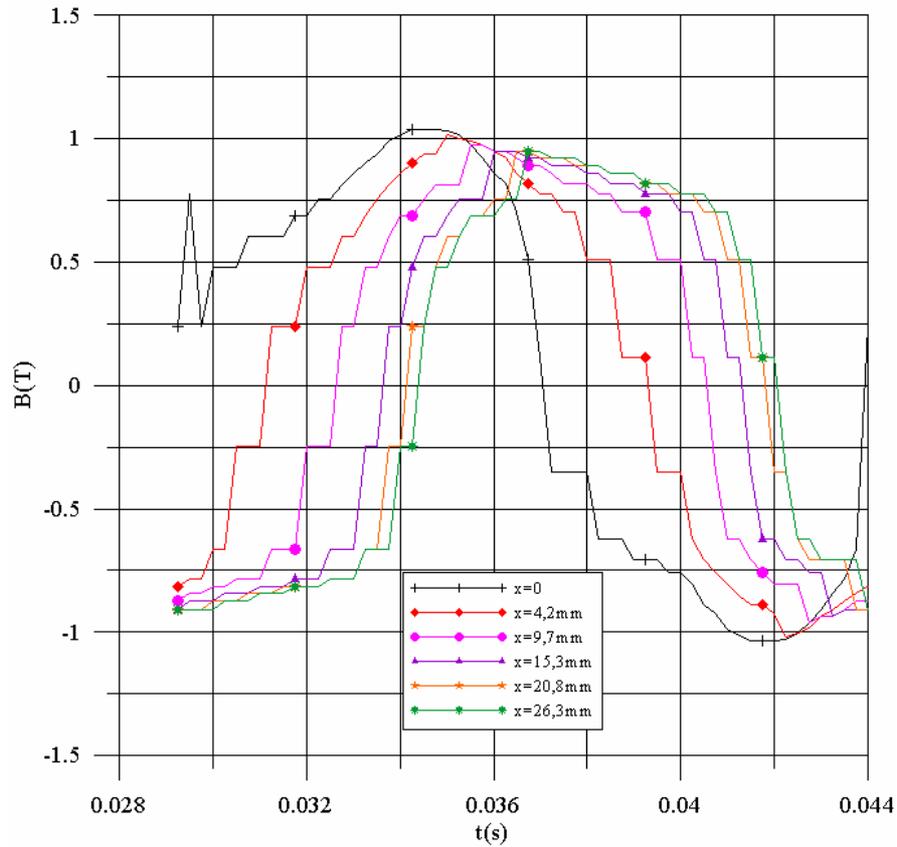
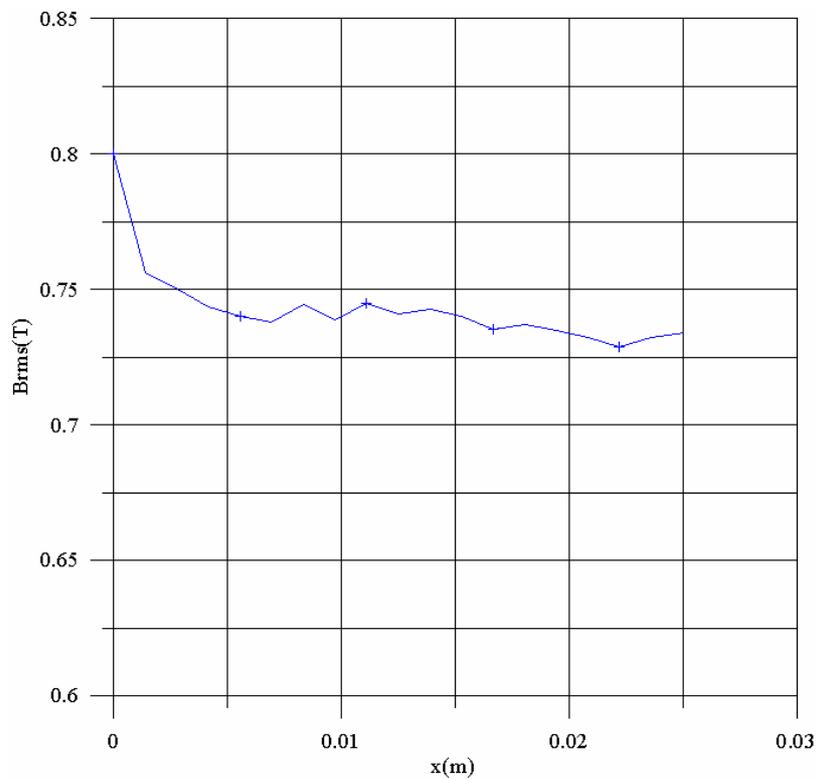


Figura 8-20. Difusión  $B(x)$  en valor eficaz calculada a 50Hz



**Figura 8-21.** Formas de onda  $B(x,t)$  a 70Hz para la curva de entrada "1" calculadas a varias profundidades  $x$  respecto a la superficie del núcleo



**Figura 2-22.** Difusión  $B(x)$  en valor eficaz calculada a 70Hz

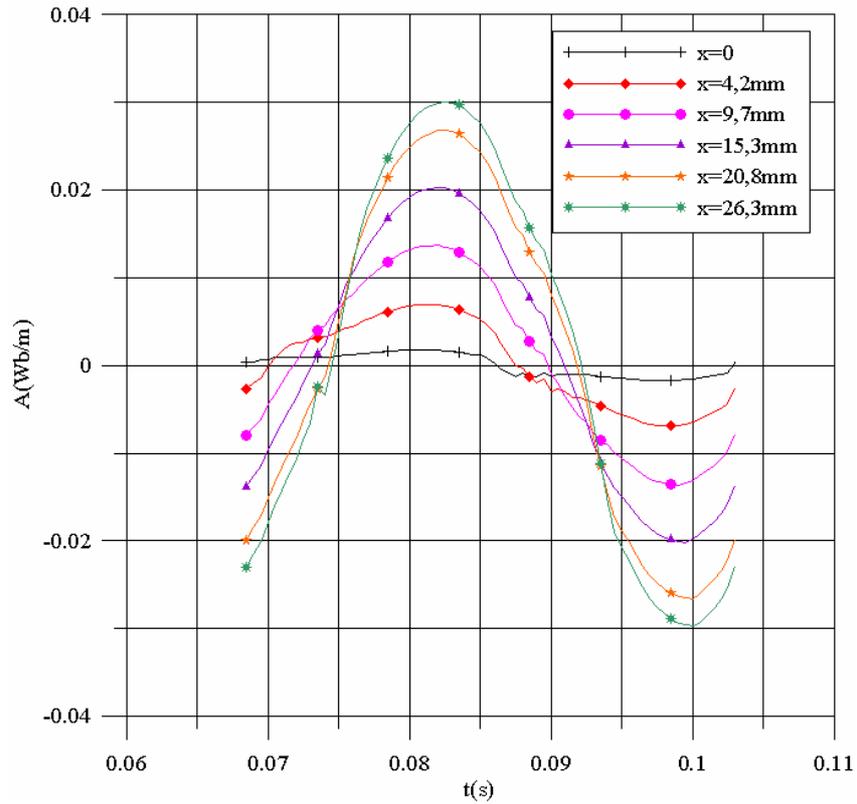


Figura 8-23. Formas de onda  $A(x,t)$  a 30Hz para la curva de entrada "1" calculadas a varias profundidades  $x$  respecto a la superficie del núcleo

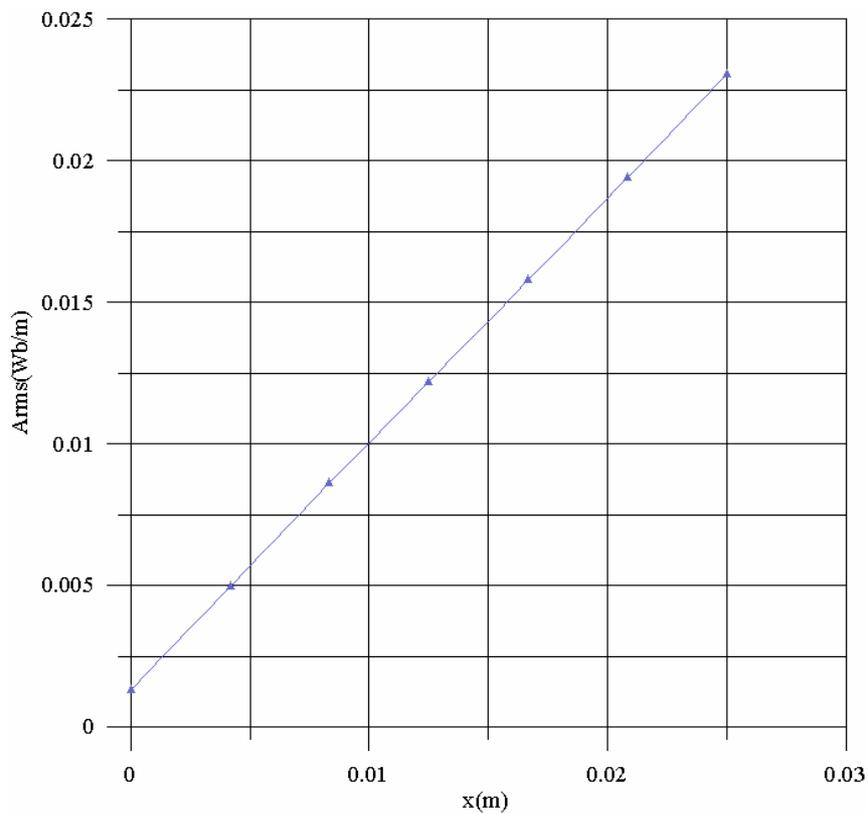
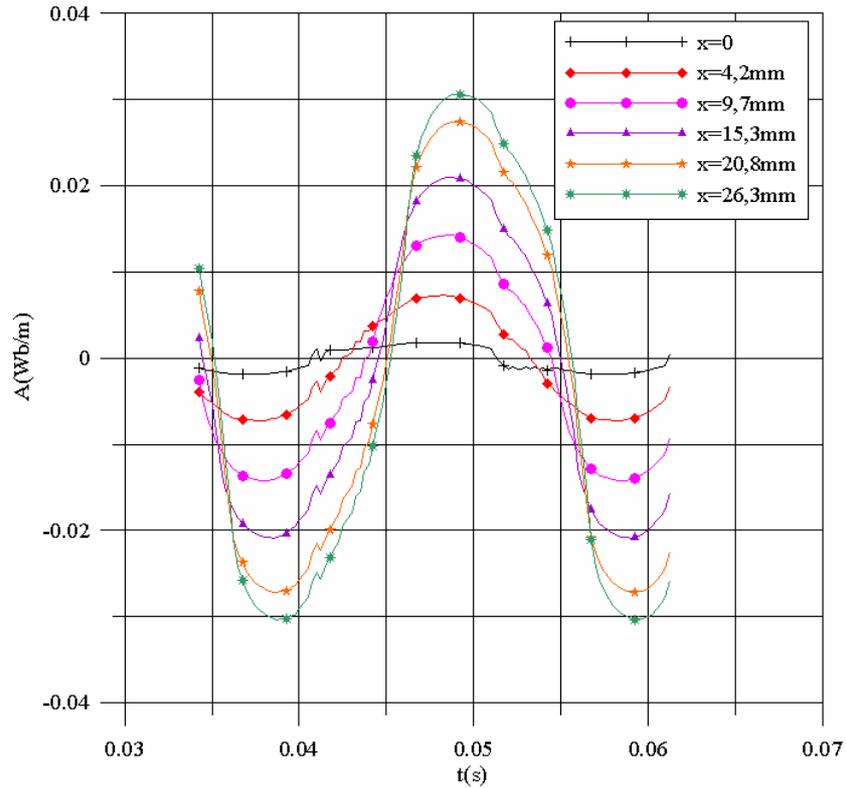
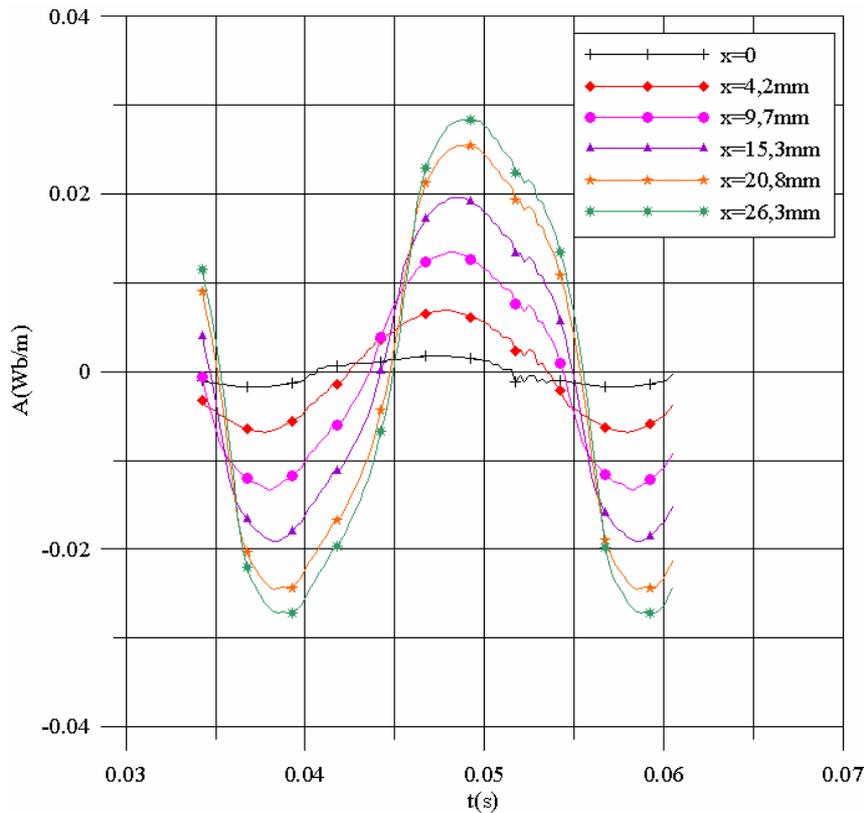


Figura 8-24. Difusión  $A(x)$  en valor eficaz calculada a 30Hz



**Figura 8-25.** Formas de onda  $A(x,t)$  a 50Hz para la curva de entrada "0" calculadas a varias profundidades  $x$  respecto a la superficie del núcleo



**Figura 8-26.** Formas de onda  $A(x,t)$  a 50Hz para la curva de entrada "2" calculadas a varias profundidades respecto a la superficie del núcleo

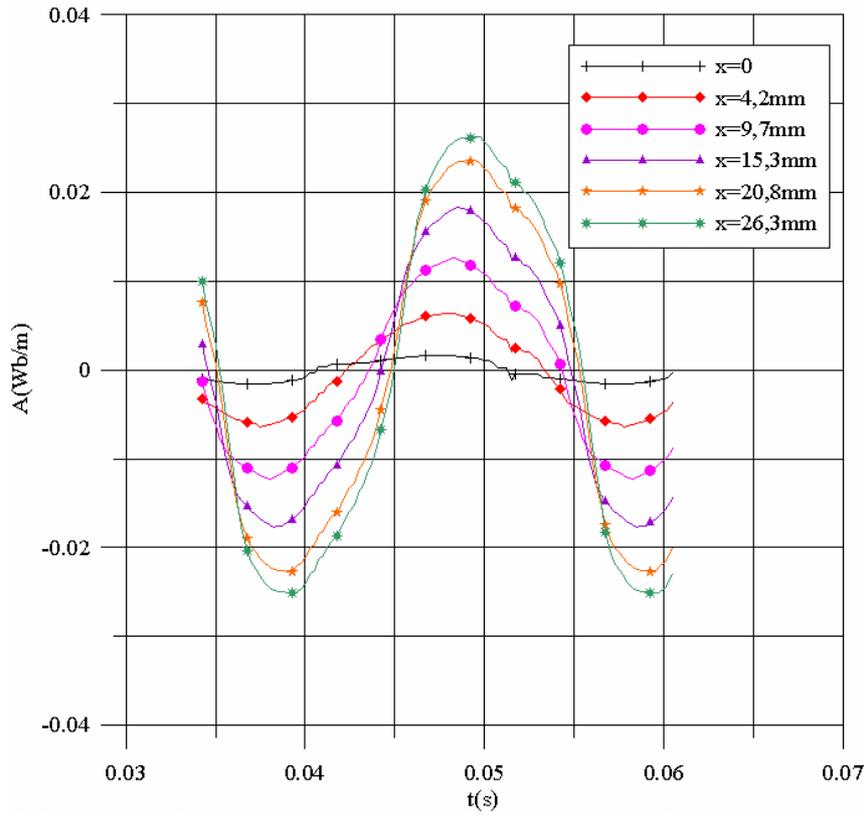


Figura 8-27. Formas de onda  $A(x,t)$  a 50Hz para la curva de entrada "4" calculadas a varias profundidades  $x$  respecto a la superficie del núcleo

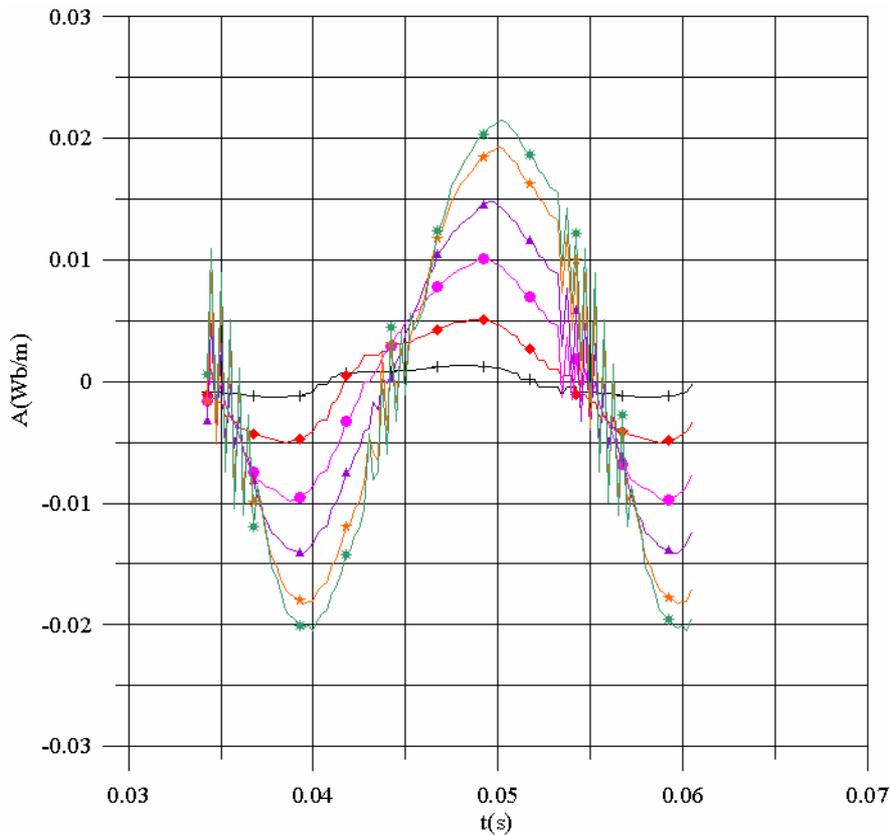


Figura 8-28. Formas de onda  $A(x,t)$  a 50Hz para la curva "6" calculadas a varias profundidades  $x$  respecto a la superficie del núcleo

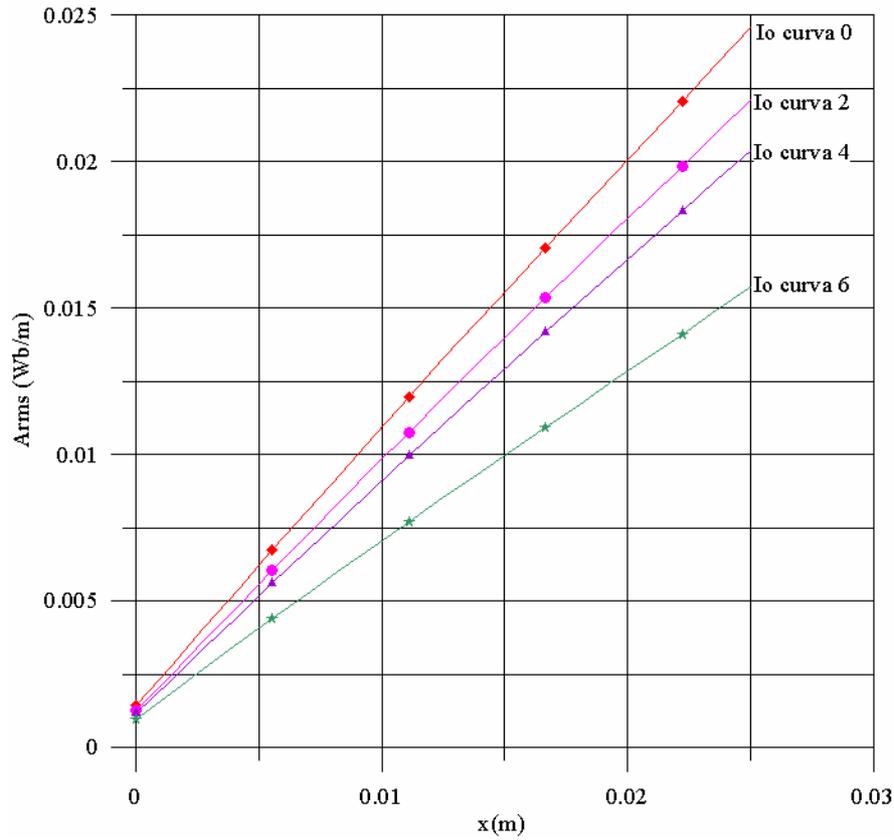


Figura 8-29. Difusión  $A(x)$  en valor eficaz calculada a 50Hz

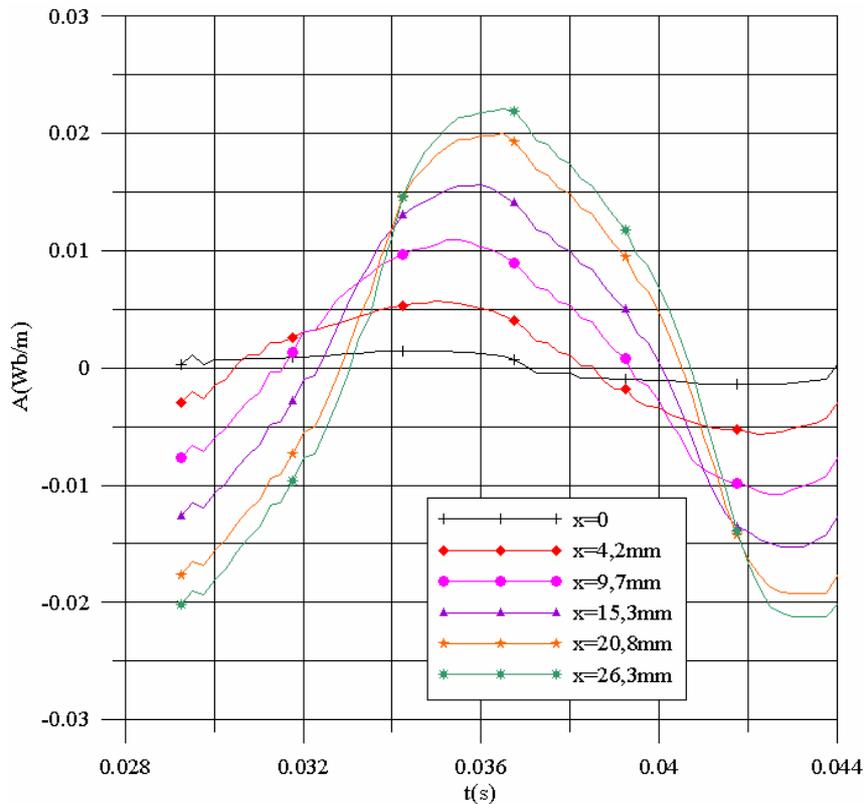


Figura 8-30. Formas de onda  $A(x,t)$  a 70Hz para la curva de entrada "1" calculada a varias profundidades  $x$  respecto a la superficie del núcleo

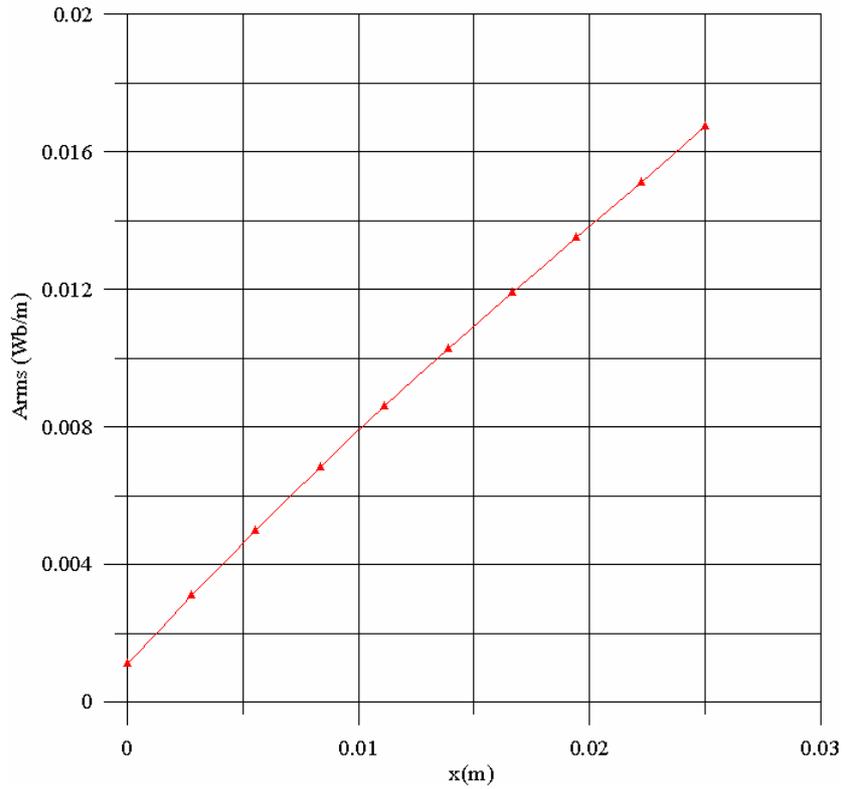


Figura 8-31. Difusión  $A(x)$  en valor eficaz calculada a 70Hz

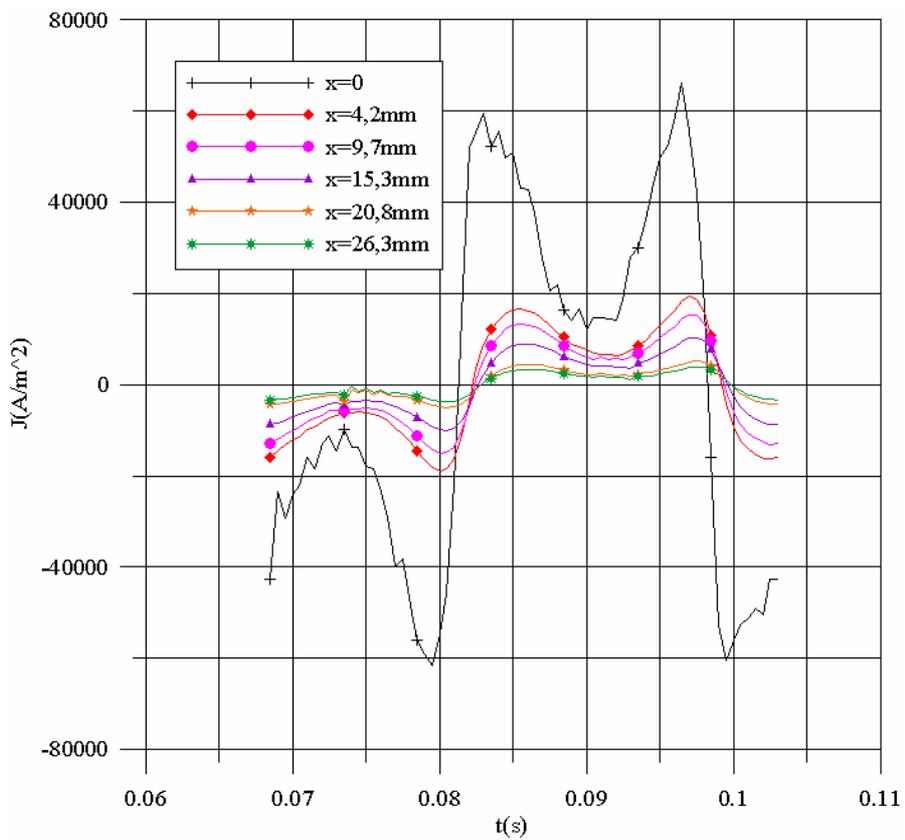


Figura 8-32. Forma de onda  $J(x,t)$  a 30Hz para la curva de entrada "1" calculada para varias profundidades  $x$  respecto a la superficie del núcleo

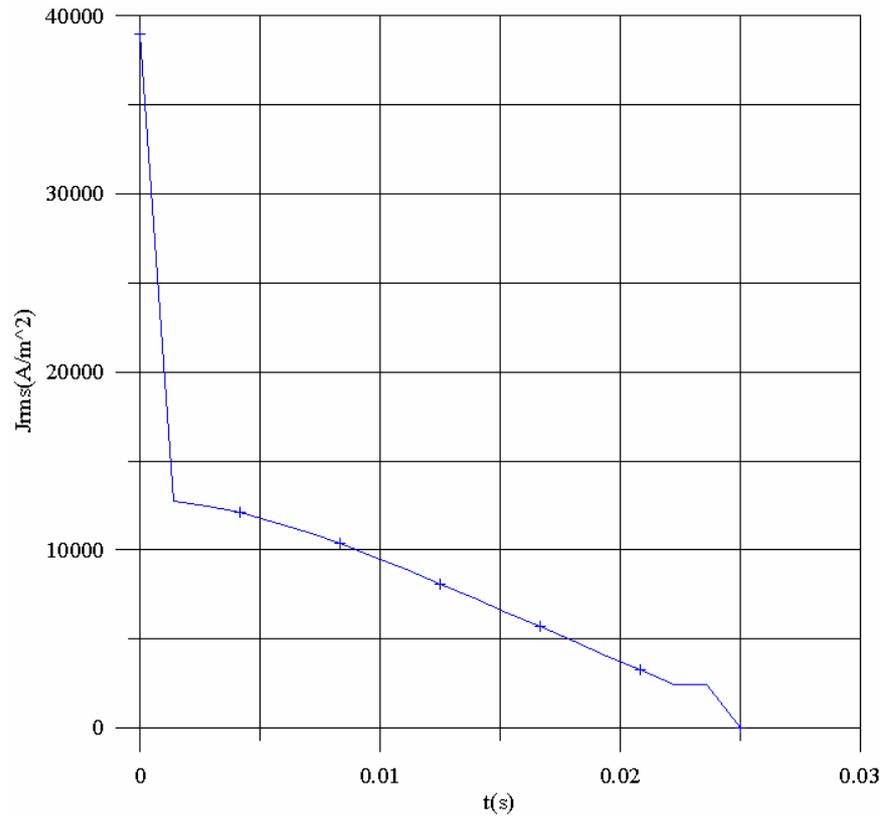


Figura 8-33. Difusión  $J(x)$  en valor eficaz calculada a 30Hz

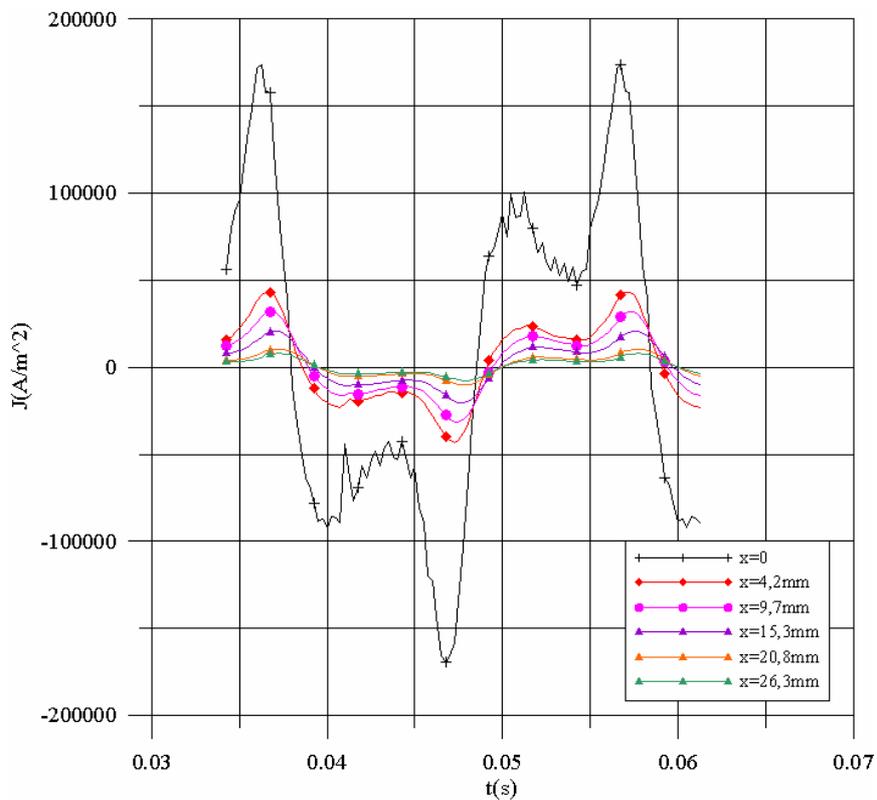


Figura 8-34. Formas de onda  $J(x,t)$  a 50Hz para la curva de entrada "0" calculada para varias profundidades  $x$  respecto a la superficie del núcleo

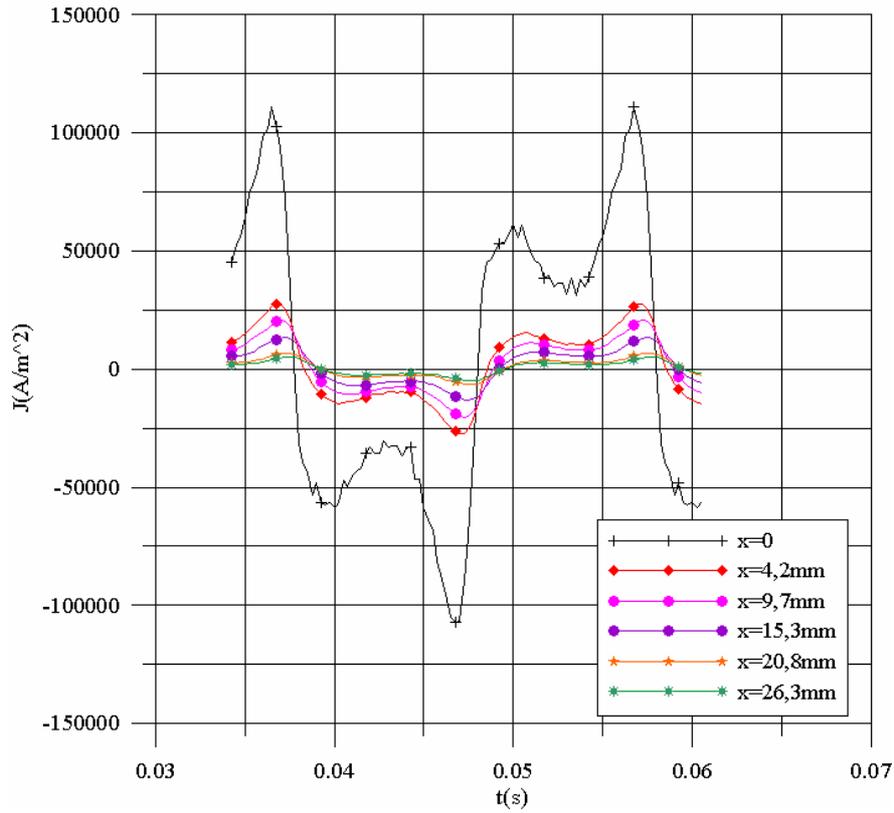


Figura 8-35. Formas de onda  $J(x,t)$  a 50Hz para la curva de entrada "2" calculadas para varias profundidades  $x$  respecto de la superficie del núcleo

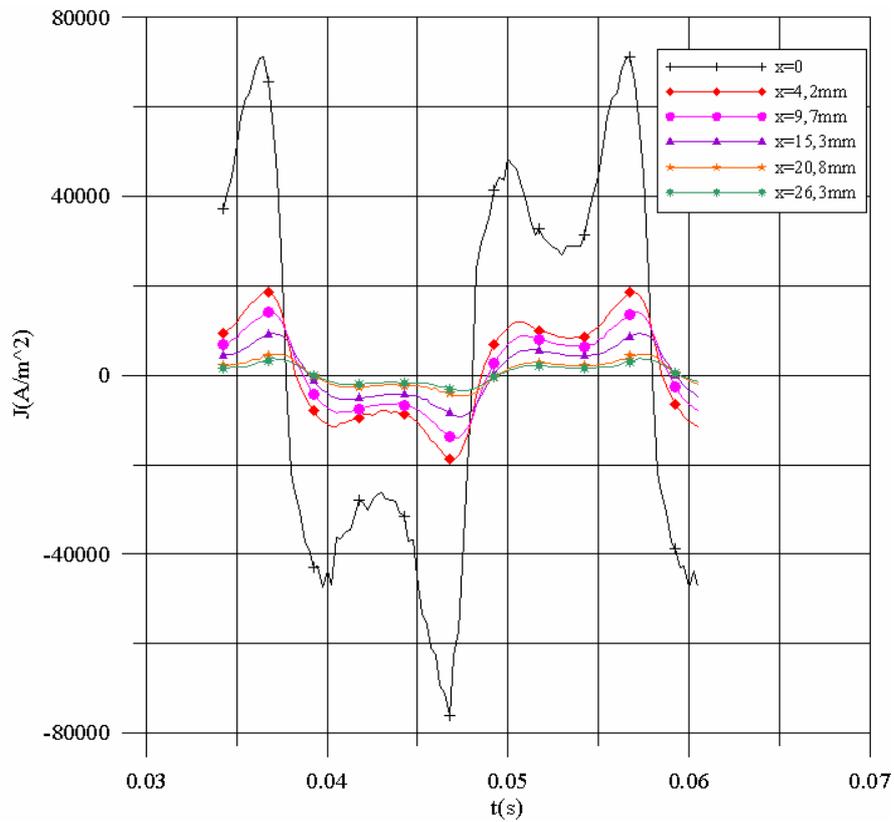
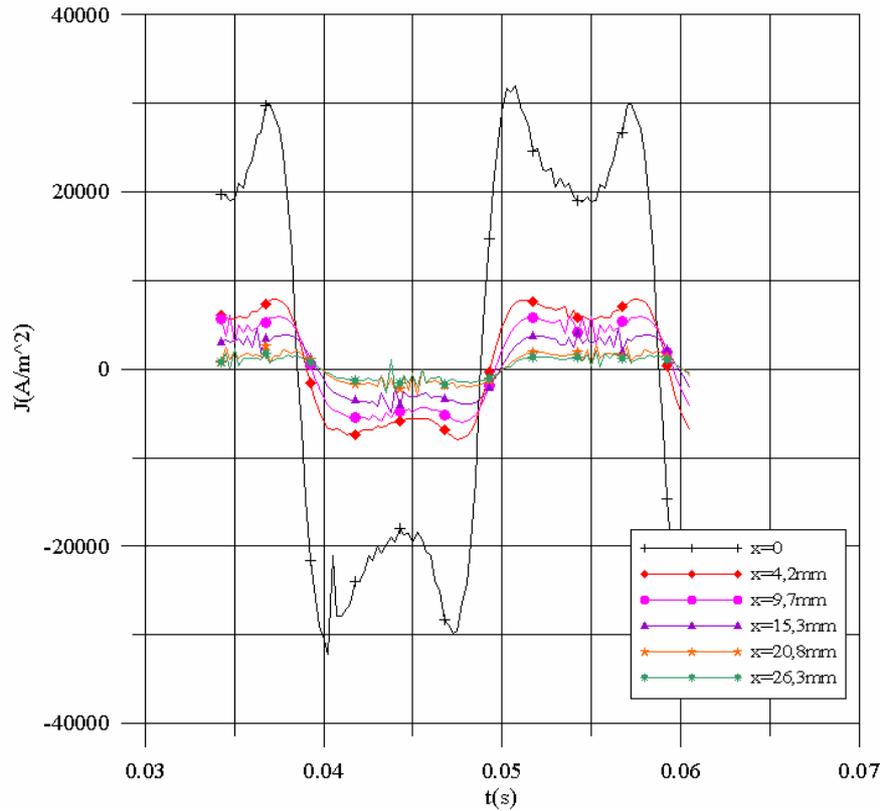
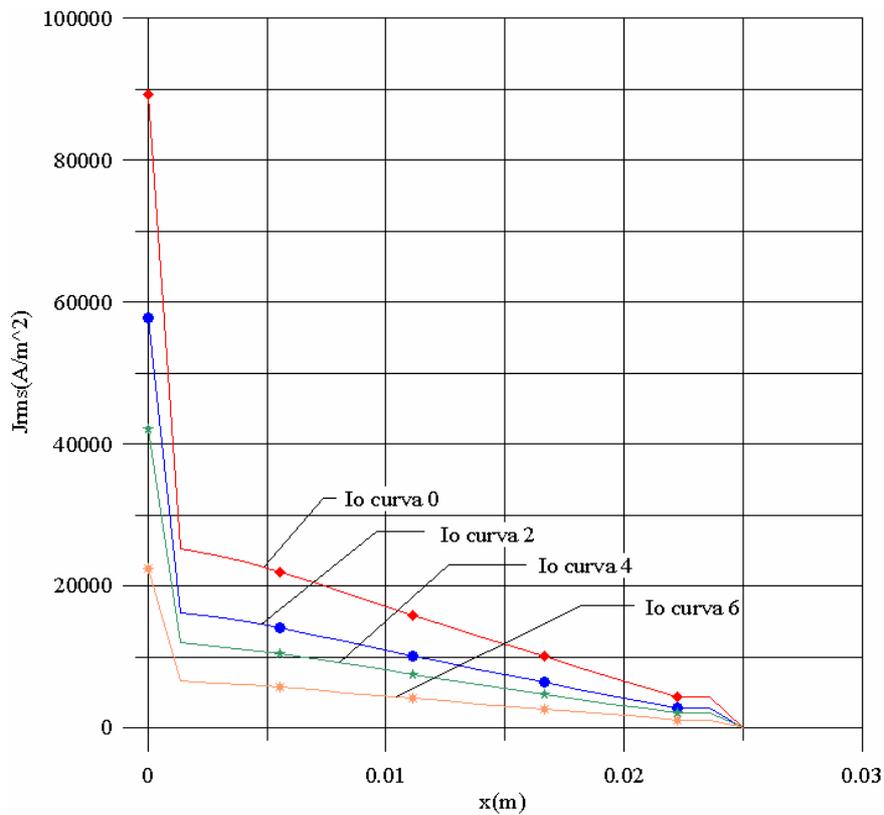


Figura 8-36 Formas de onda  $J(x,t)$  a 50Hz para la curva de entrada "4" calculadas para varias profundidades  $x$  respecto a la superficie del núcleo



**Figura 8-37.** Formas de onda  $J(x,t)$  a 50Hz para la curva de entrada "6" calculadas a varias profundidades respecto de la superficie del núcleo



**Figura 8-38.** Difusión de  $J(x)$  en valor eficaz calculada a 50Hz

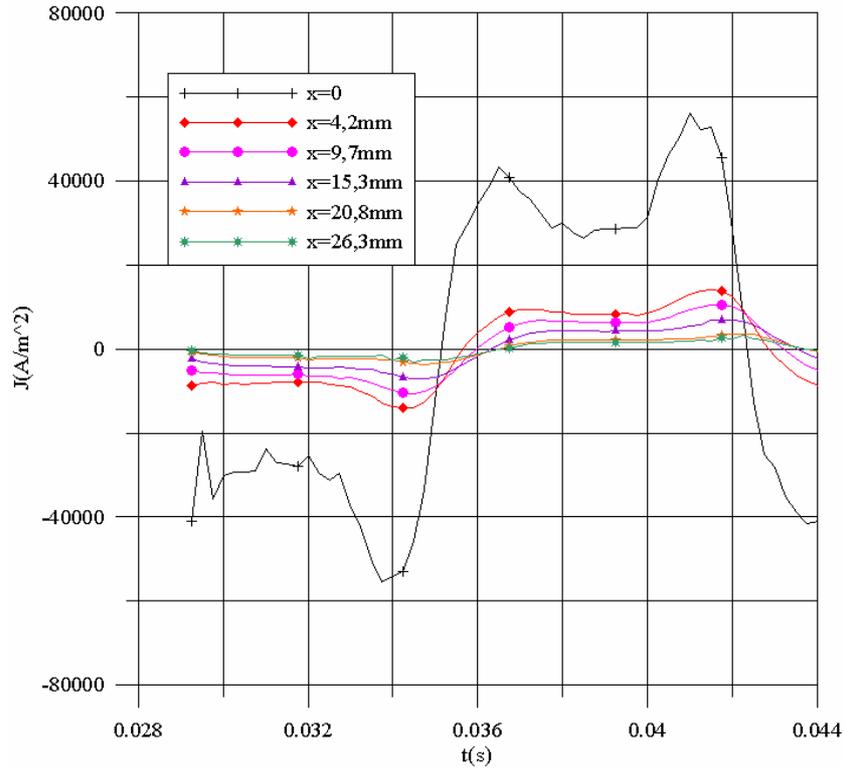


Figura 8-39. Formas de onda  $J(x,t)$  a 70Hz para la curva de entrada "1" calculadas a varias profundidades  $x$  respecto a la superficie del núcleo

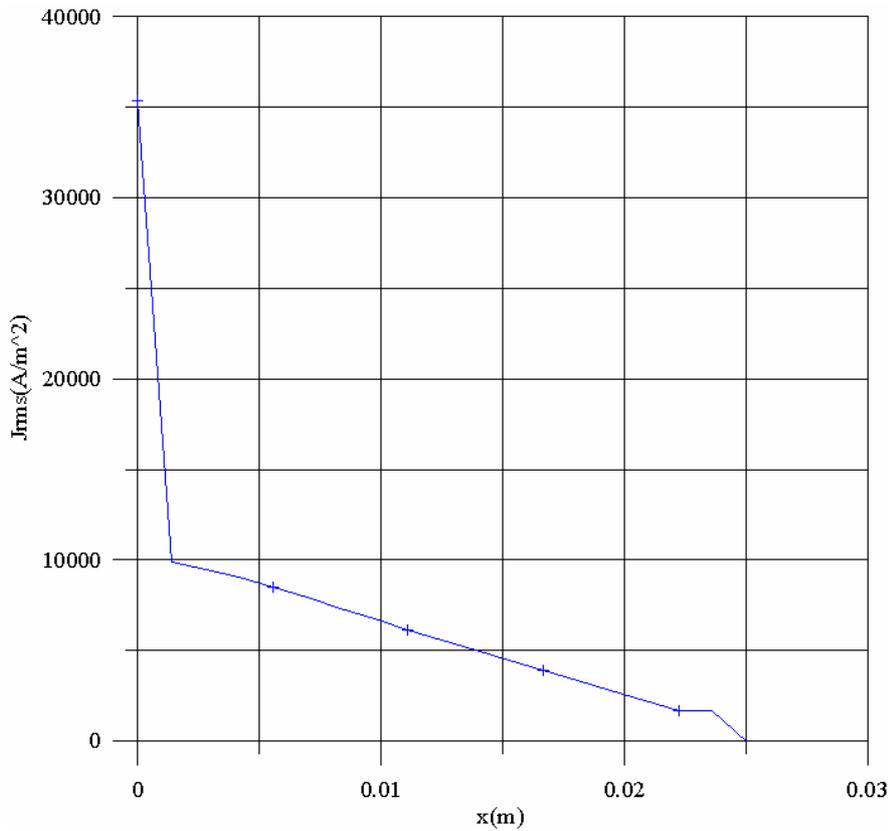
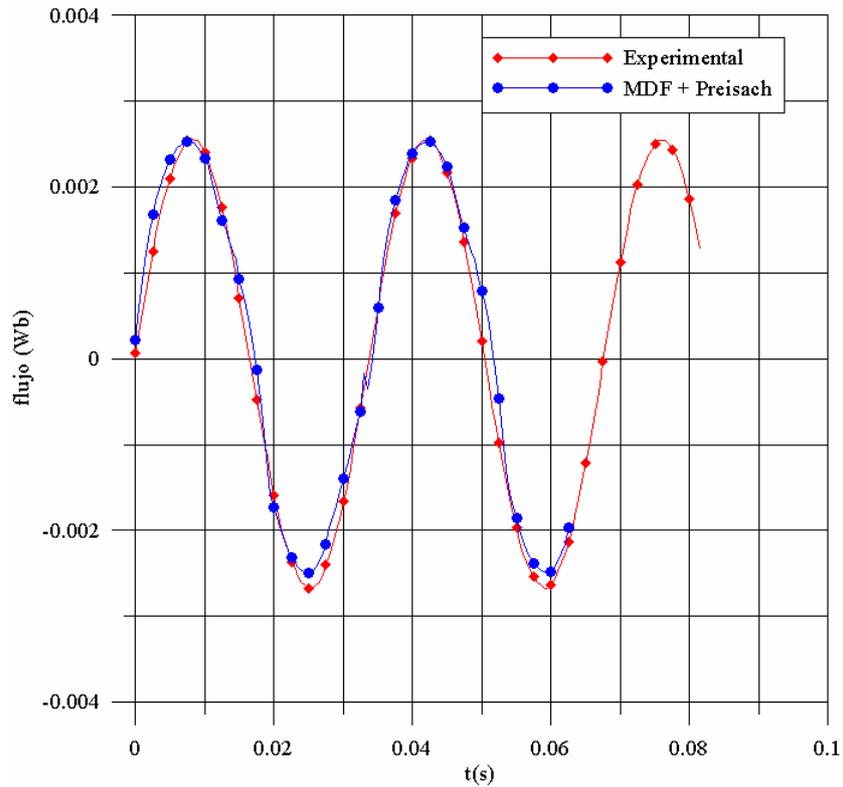
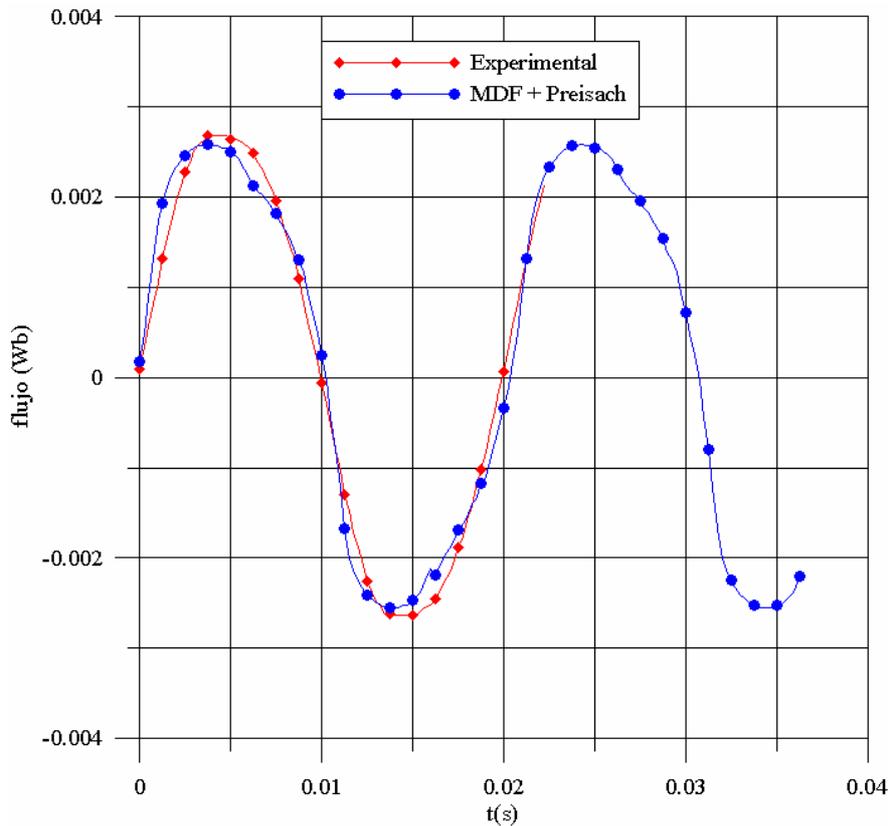


Figura 8-40. Difusión de  $J(x)$  en valor eficaz calculada a 70Hz



*Figura 8-41. Flujo calculado a 30Hz para la curva de entrada "1" y flujo experimental para la misma situación*



*Figura 8-42. Flujo calculado a 50Hz para la curva de entrada "0" y flujo experimental para la misma situación*

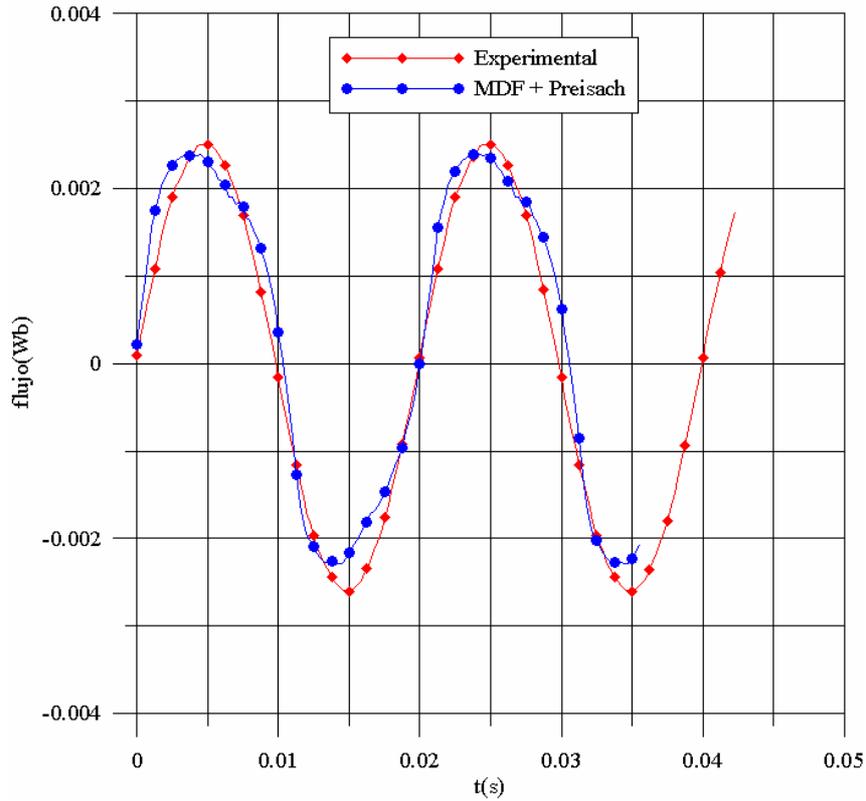


Figura 8-43. Flujo calculado a 50Hz para la curva de entrada "2" y flujo experimental para la misma situación

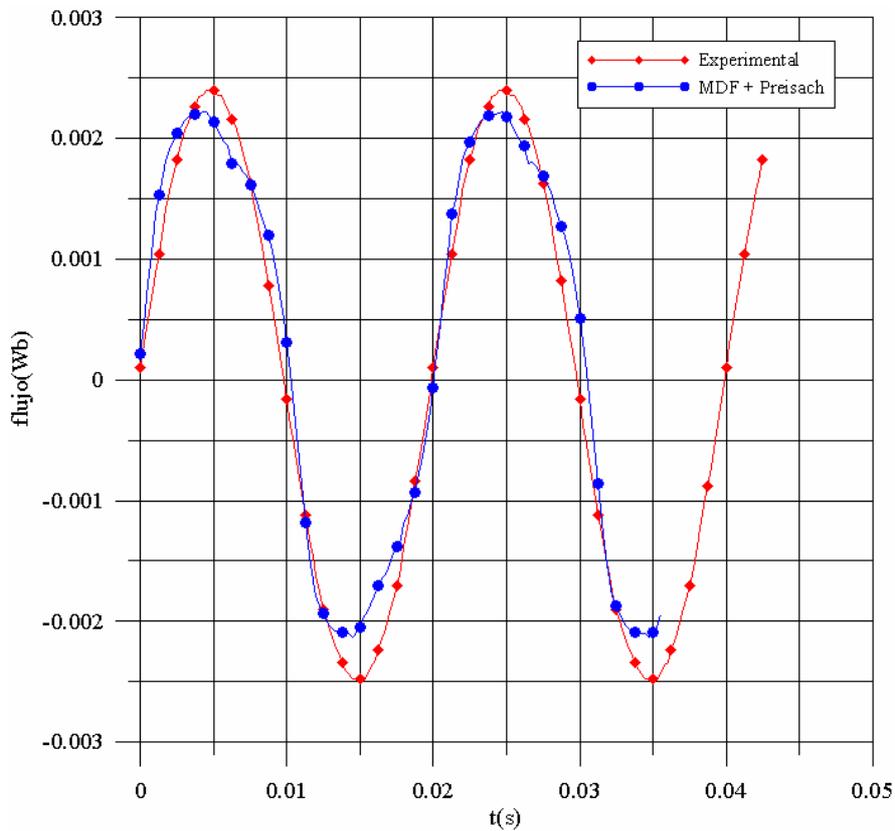


Figura 8-44. Flujo calculado a 50Hz para la curva de entrada "4" y flujo experimental para la misma situación

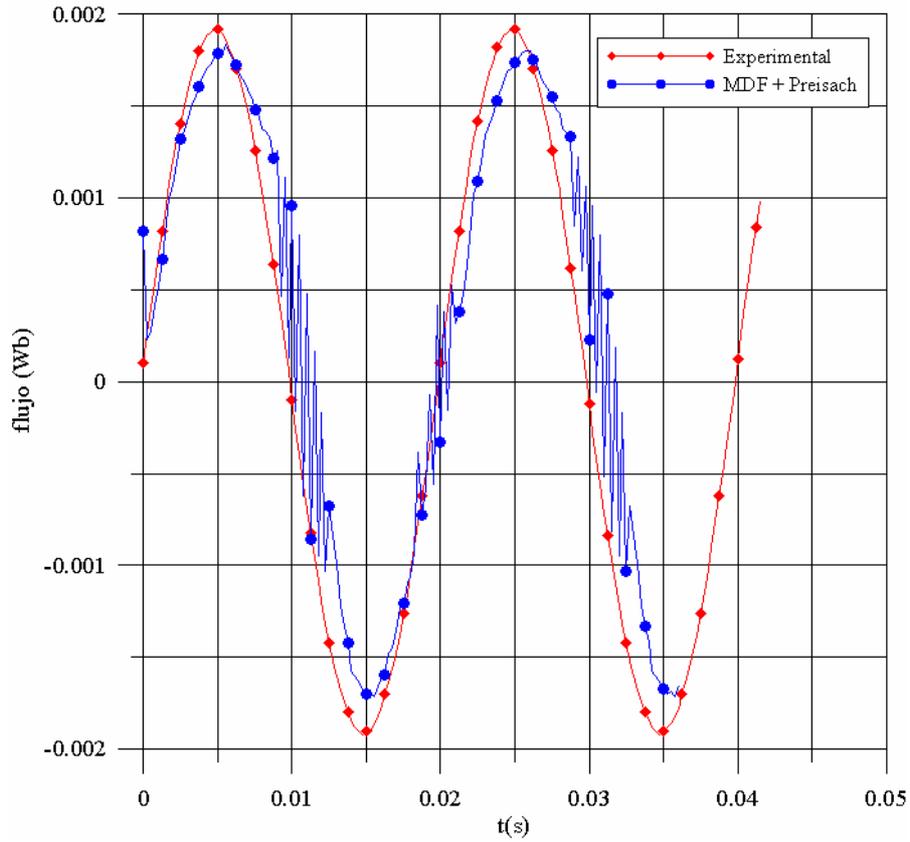


Figura 8-45. Flujo calculado a 50Hz para la curva de entrada "6" y flujo experimental para la misma situación

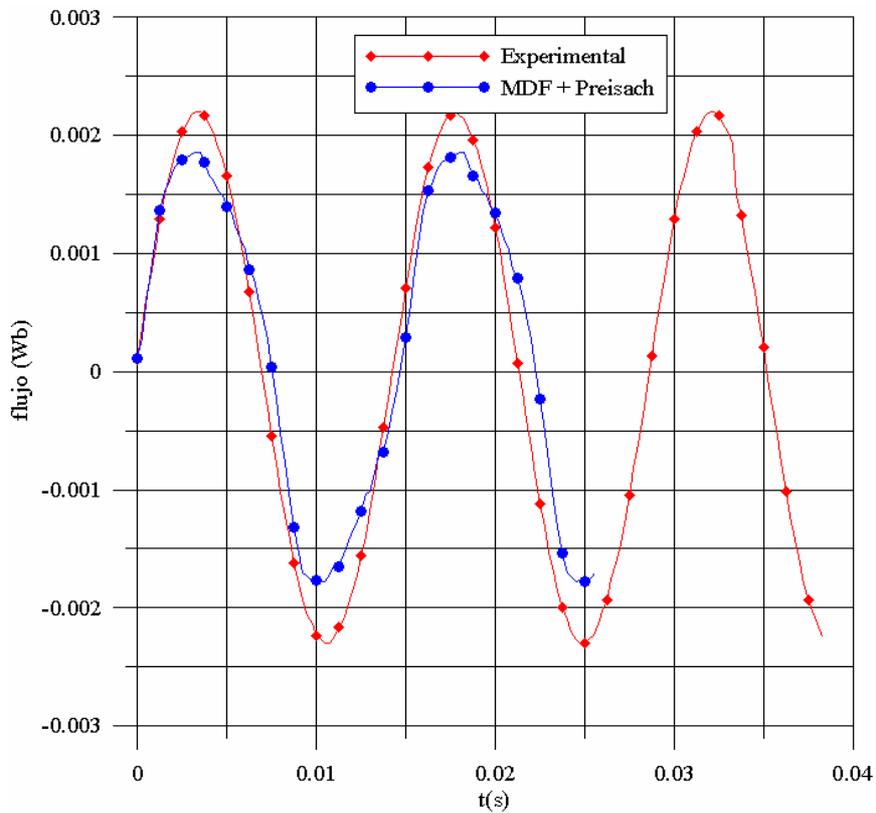


Figura 8-46. Flujo calculado a 70Hz para la curva de entrada "1" y flujo experimental para la misma situación

Para completar los resultados obtenidos incluimos cuatro figuras más, en ellas se compara la difusión de los parámetros magnéticos para las tres frecuencias.

Las curvas empleadas para cada frecuencia tienen un valor de pico de  $i_0(t)$  igual. En concreto, para 30Hz se muestran los parámetros de la curva 2, para 50Hz los parámetros de la curva 3 y para 70Hz los parámetros de la curva 1.

Los parámetros magnéticos cuya difusión se muestra son  $H$ ,  $B$ ,  $A$  y  $J$ ; todos ellos en valor eficaz. Las figuras correspondientes son la figura 8-47 para  $H$ , la figura 8-48 para  $B$ , la 8-49 para  $A$  y la 8-50 para  $J$ .

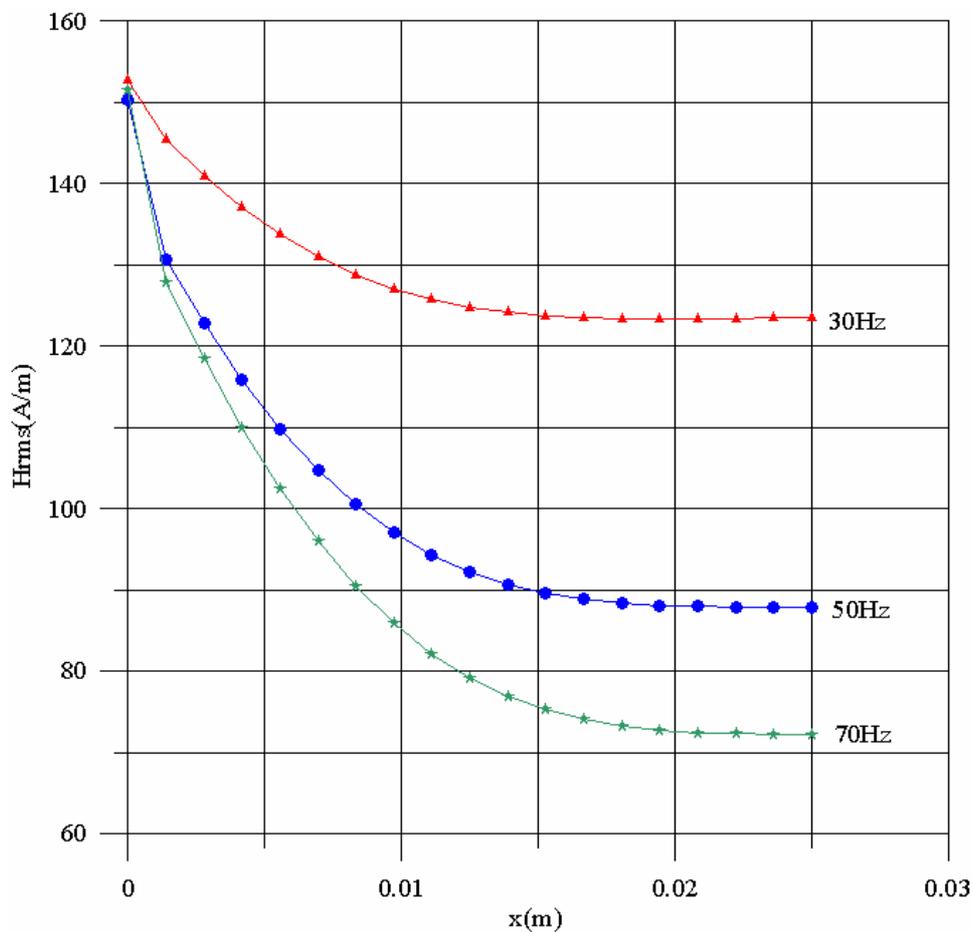


Figura 8-47. Difusión del valor eficaz del campo  $H$  para varias frecuencias

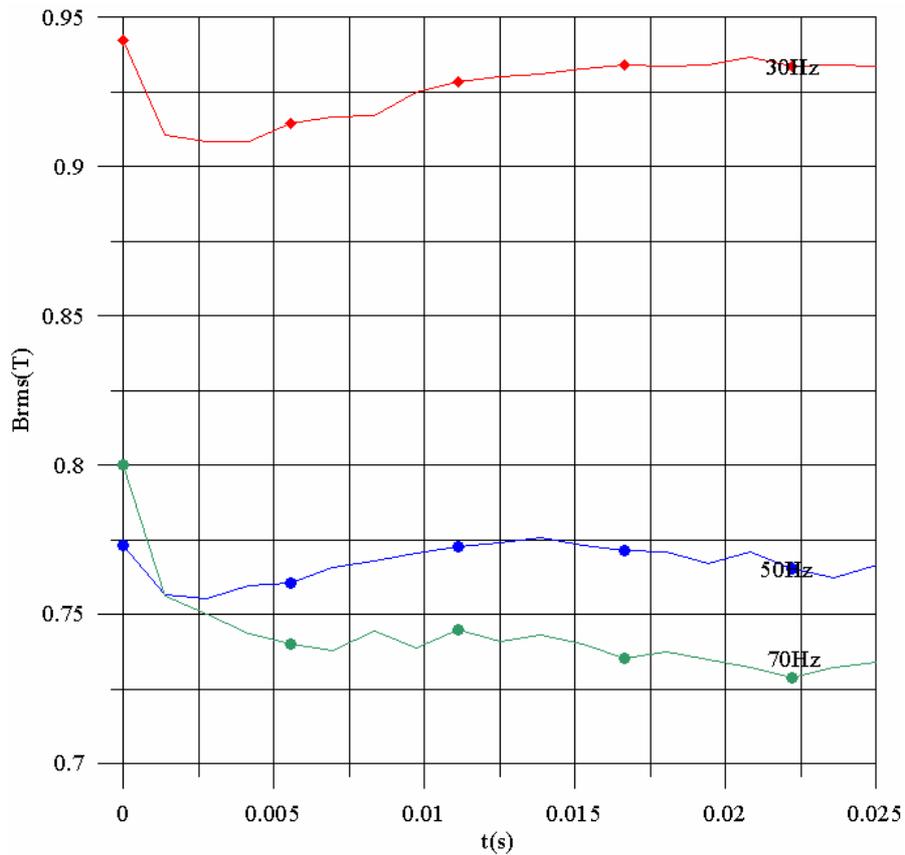


Figura 8-48. Difusión del valor eficaz de la inducción  $B$  para varias frecuencias

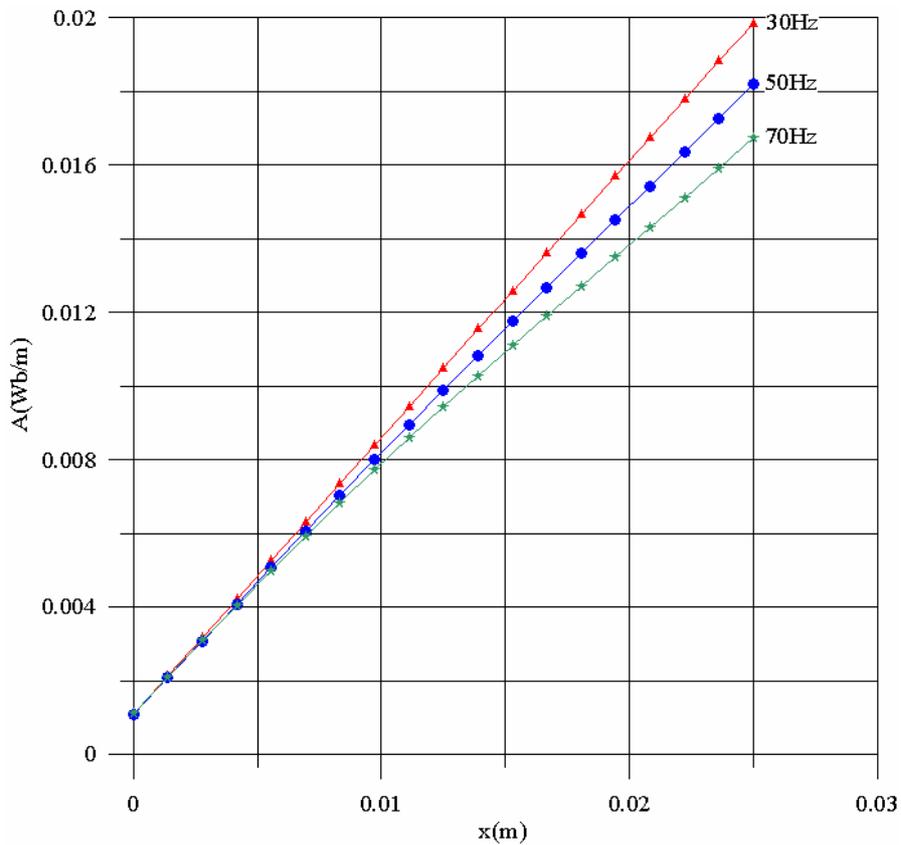


Figura 8-49. Difusión del valor eficaz del potencial vector magnético  $A$  para varias frecuencias

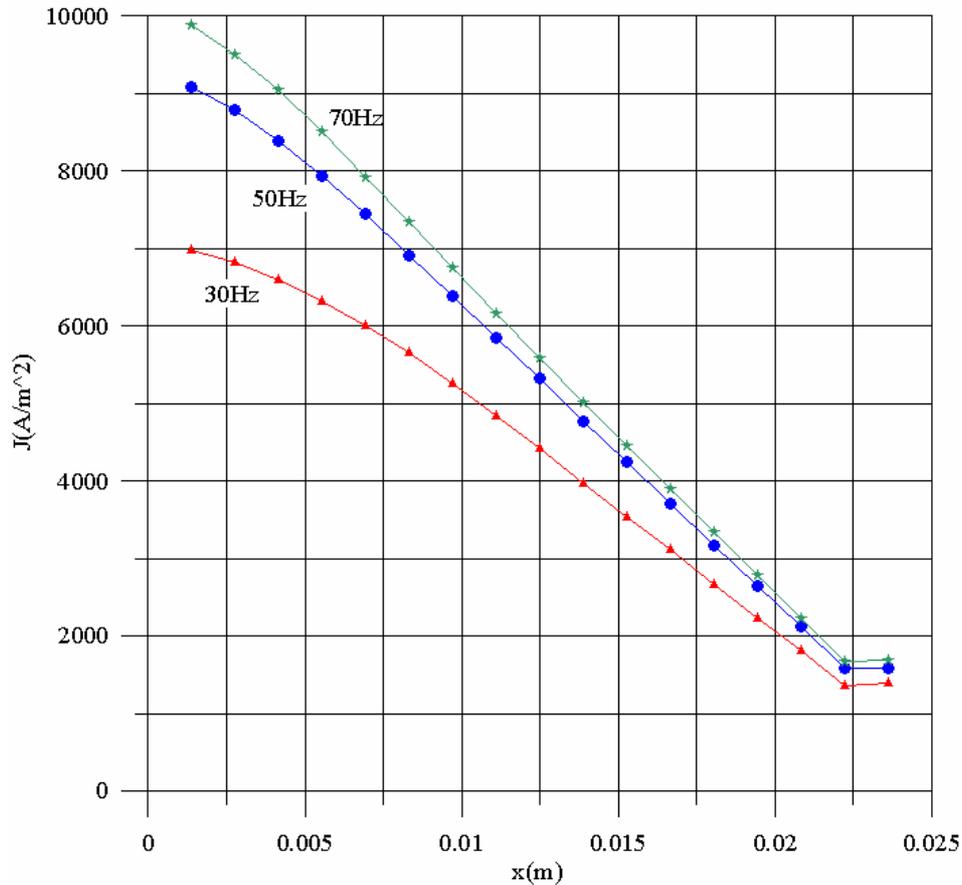


Figura 4-50. Difusión de la densidad de corriente  $J$  para varias frecuencias

### 8.2.2 Pérdidas en el hierro

Finalmente mostramos las pérdidas en el hierro disgregadas calculadas para la muestra A. Las pérdidas en el hierro se calculan a partir de las variables magnéticas mostradas en el apartado anterior siguiendo las ecuaciones que se indicaron en el capítulo 7. En consecuencia las condiciones de la simulación son las mismas.

En primer lugar se muestran las pérdidas totales  $p_{Fe}$ , las pérdidas por histéresis  $p_h$  y las pérdidas por corrientes inducidas  $p_c$ . Estas pérdidas se han determinado para 30Hz, 50Hz y 70Hz.

Seguidamente, en las figuras 8-51, 8-52 y 8-53 se muestran las curvas de  $p_{Fe}$ ,  $p_h$  y  $p_c$  para 30Hz, 50Hz y 70Hz respectivamente. Posteriormente las mismas curvas se presentan de forma alternativa, la figura 8-54 se comparan las curvas de  $p_{Fe}$ , a las tres frecuencias, en la figura 8-55 se comparan las curvas de  $p_h$  y en la figura 8-56 las curvas de  $p_c$ .

Todas las pérdidas son específicas [W/kg].

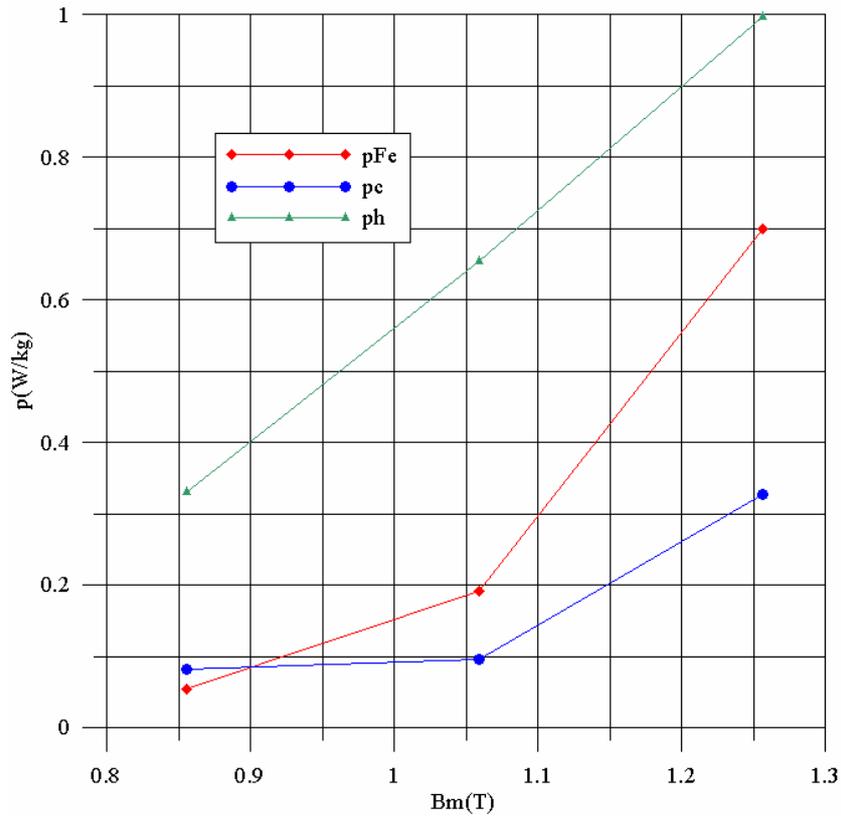


Figura 8-41. Curvas de pérdidas específicas calculadas para la frecuencia de 30Hz

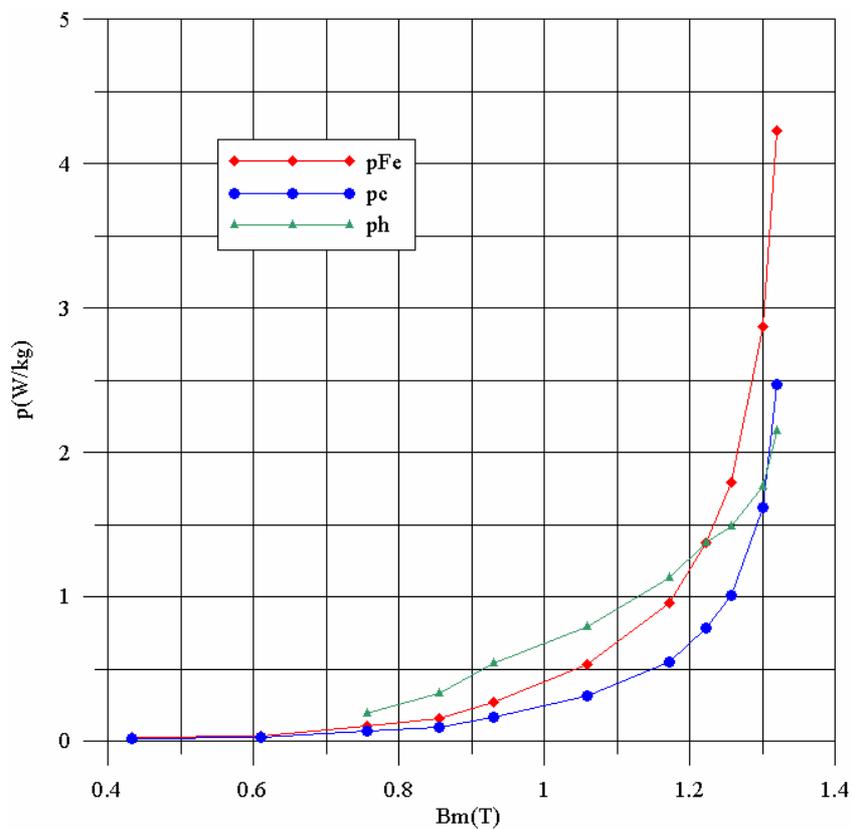


Figura 8-42. Curvas de pérdidas específicas calculadas para la frecuencia de 50Hz

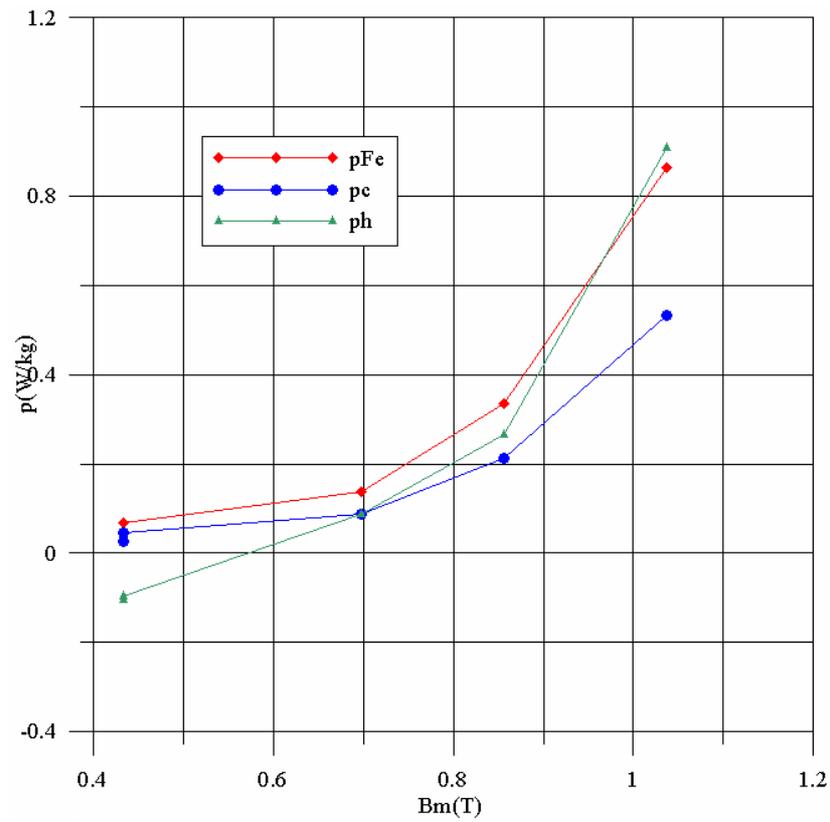


Figura 8-53. Curvas de pérdidas específicas calculadas a la frecuencia de 70Hz

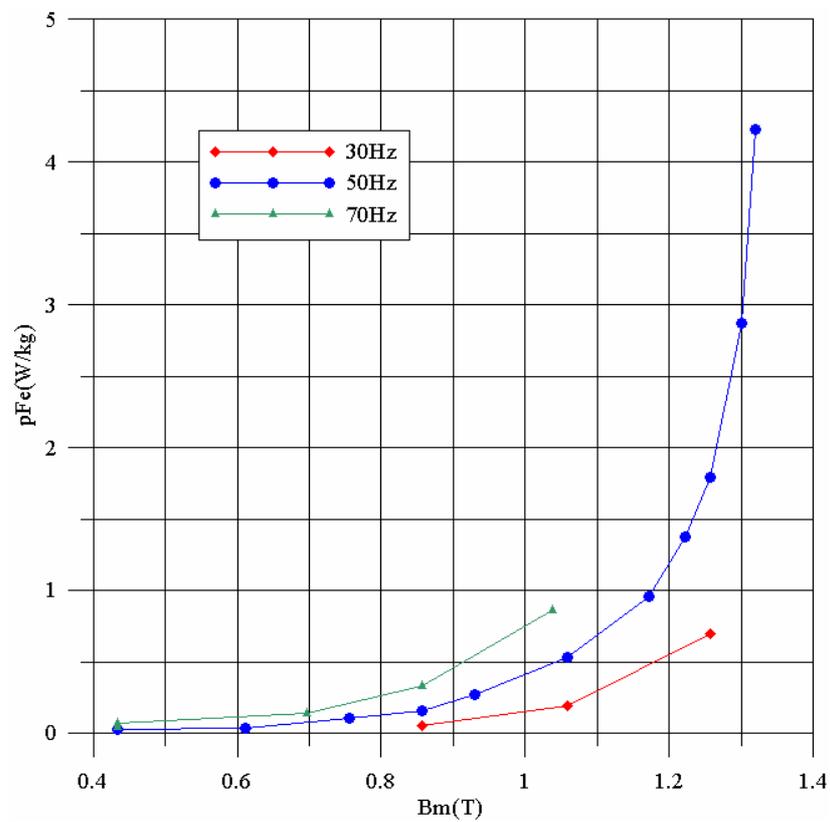


Figura 8-54. Curvas de pérdidas específicas totales calculadas a 30Hz, 50Hz y 70Hz

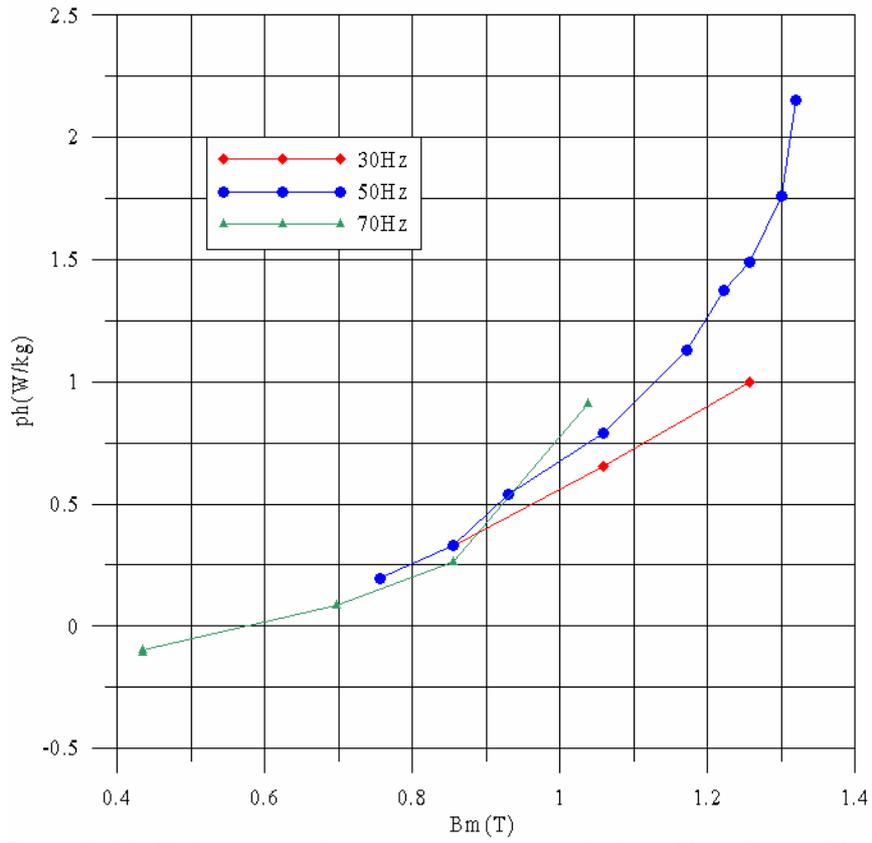


Figura 8-55. Pérdidas específicas por histéresis calculadas a 30Hz, 50Hz y 70Hz

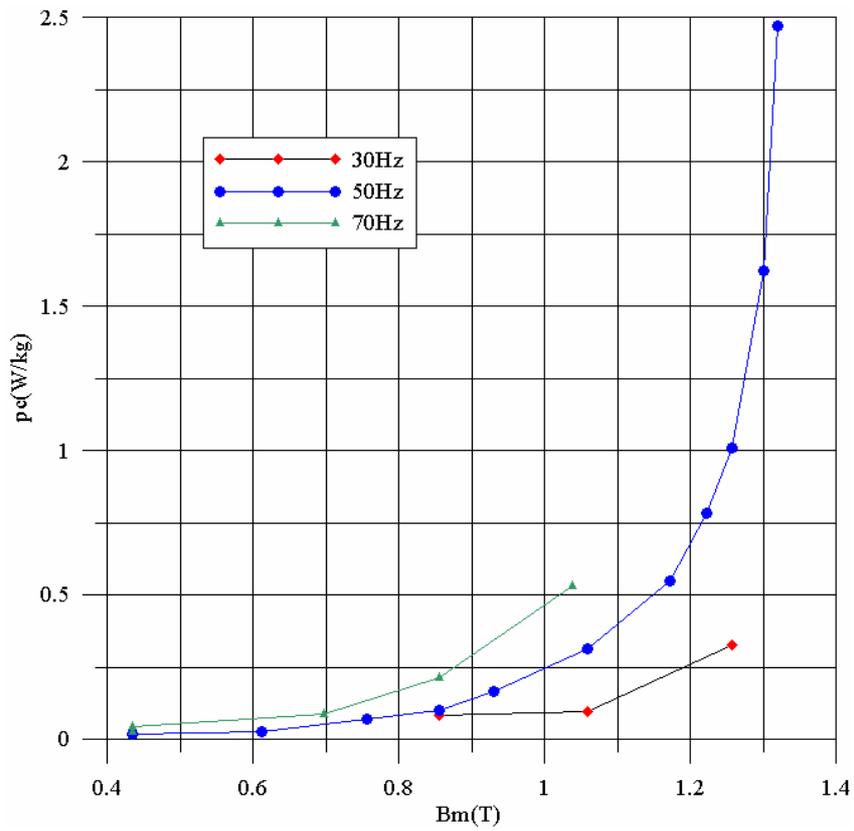
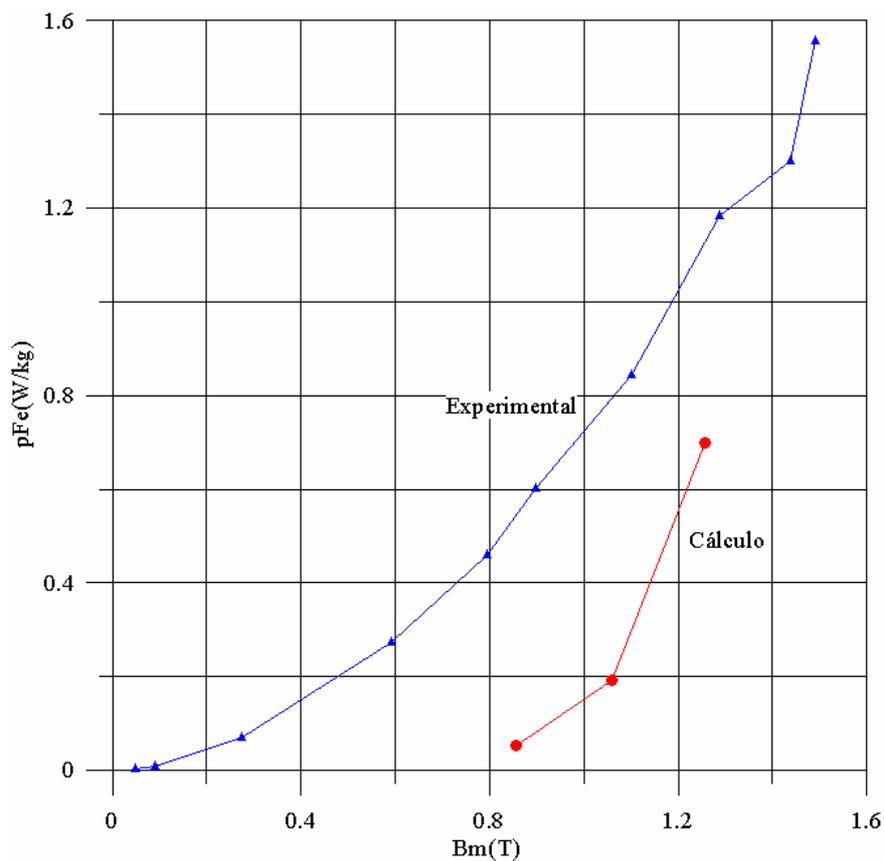


Figura 8-56. Pérdidas específicas por corrientes inducidas calculadas a 30Hz, 50Hz y 70Hz

Para finalizar, comparamos las curvas de pérdidas específicas calculadas con las curvas de pérdidas experimentales. En el capítulo 10 indicamos el procedimiento para determinar las curvas de pérdidas experimentales. En la tabla 8-III mostramos los números de figura donde se pueden encontrar las diversas comparaciones entre curvas calculadas y curvas experimentales.

**Tabla 8-III.** Número de figura de las comparaciones entre las curvas calculadas y las curvas experimentales

	$P_{Fe}$	$P_h$	$P_c$
30Hz	8-57	8-58	8-59
50Hz	8-60	8-61	8-62
70Hz	8-63	8-64	8-65



**Figura 8-57.** Comparativa entre las pérdidas en el hierro a 30Hz calculadas y experimentales

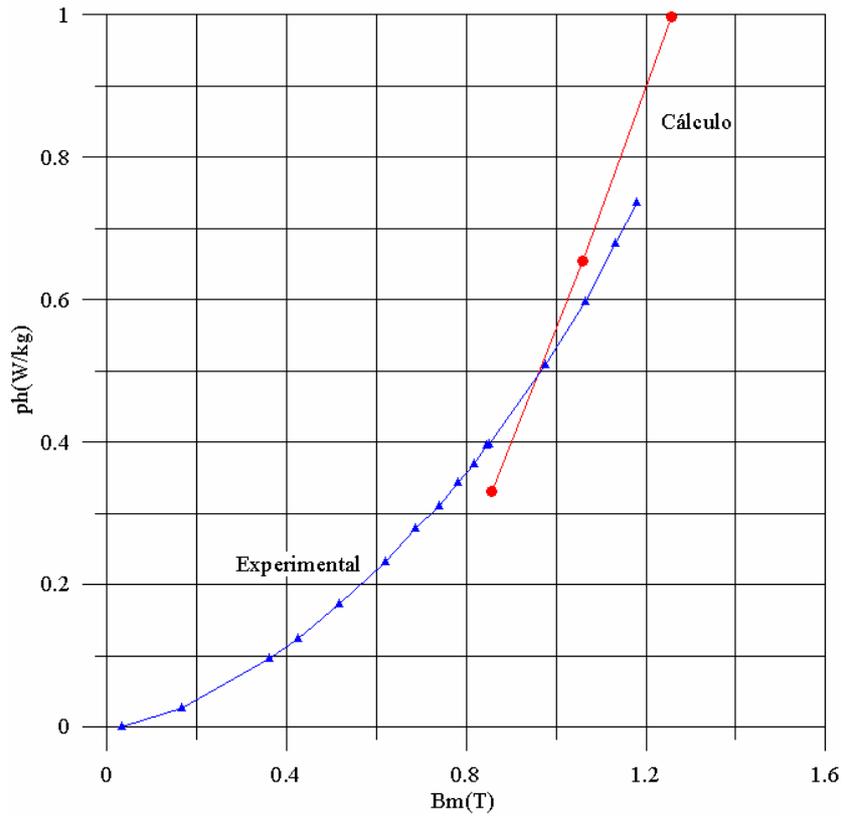


Figura 8-58. Comparativa entre las pérdidas por histéresis a 30Hz calculadas y experimentales

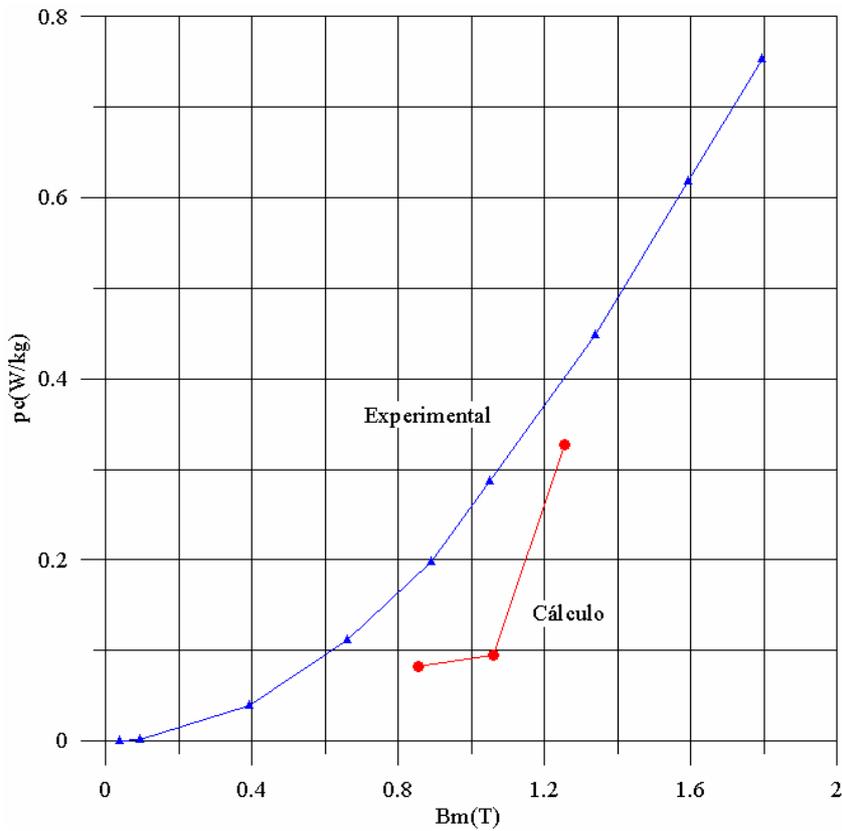


Figura 8-59. Comparativa entre las pérdidas por corrientes inducidas a 30Hz calculadas y experimentales

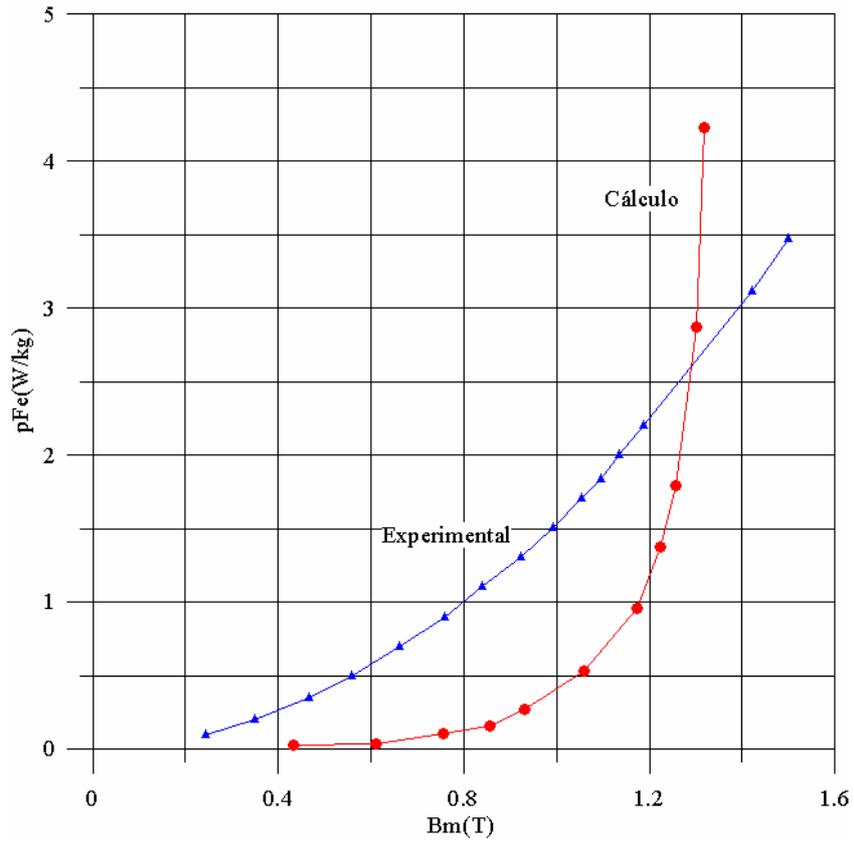


Figura 8-60. Comparativa entre las pérdidas totales a 50Hz calculadas y experimentales

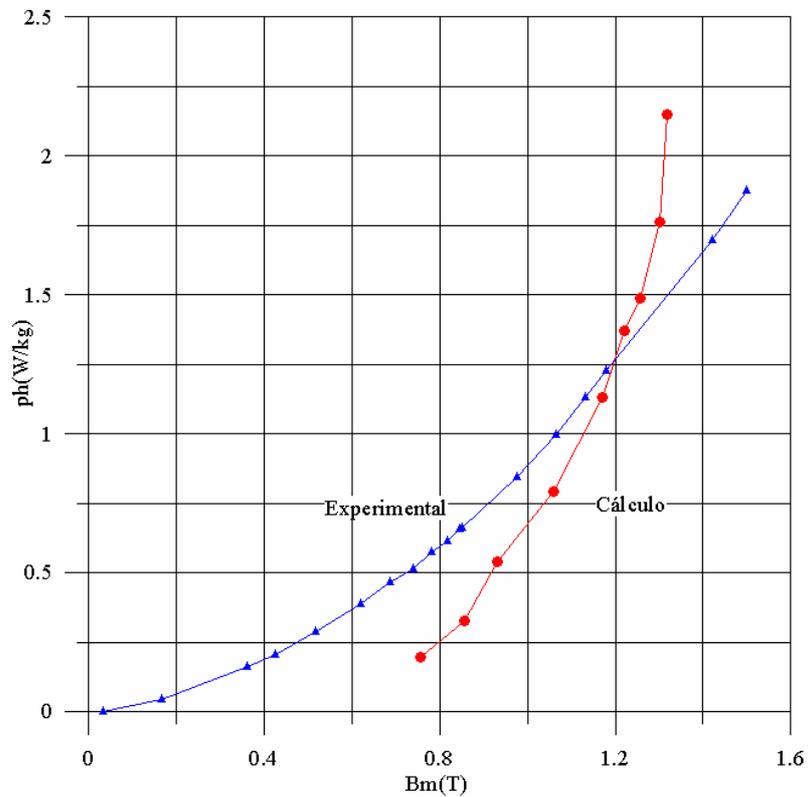


Figura 8-61. Comparativa entre las pérdidas por histéresis a 50Hz calculadas y experimentales

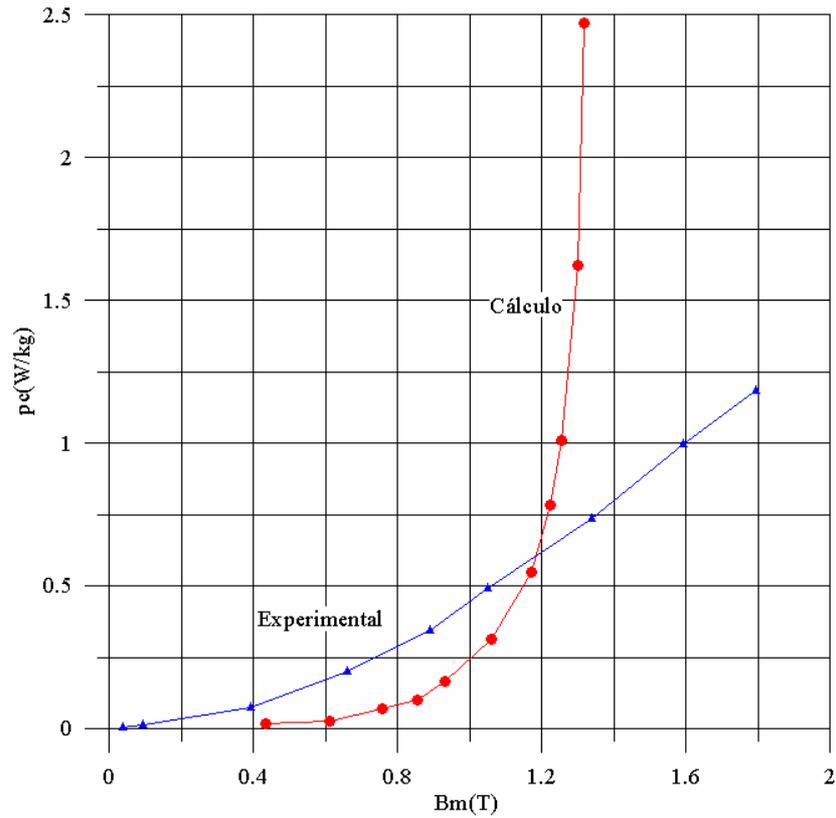


Figura 8-62. Comparativa entre las pérdidas por corrientes inducidas a 50Hz calculadas y experimentales

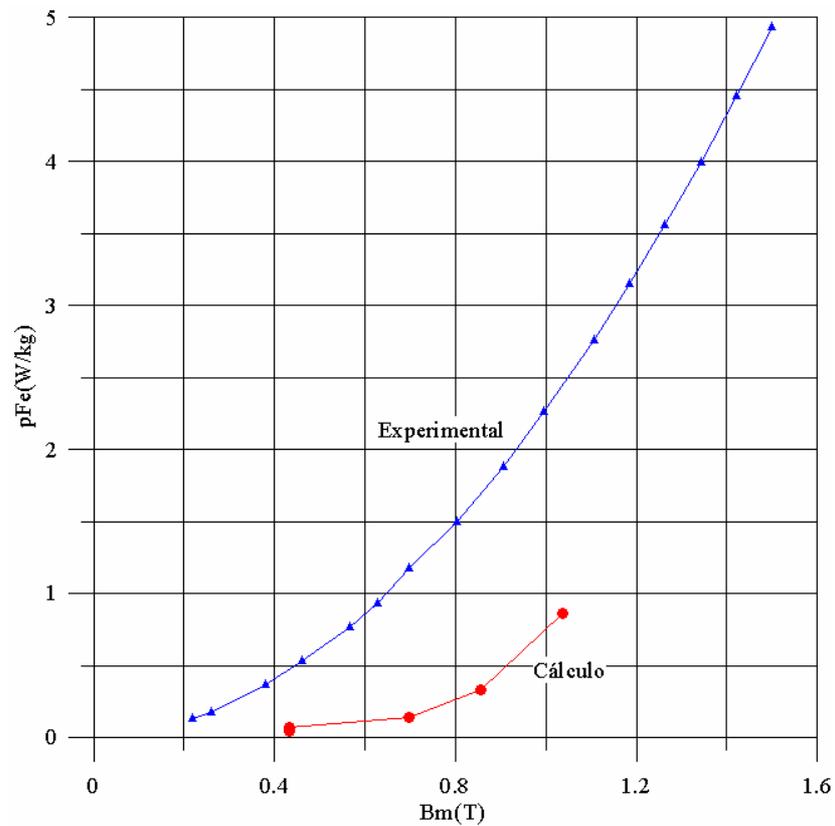


Figura 8-63. Comparativa entre las pérdidas totales a 70Hz calculadas y experimentales

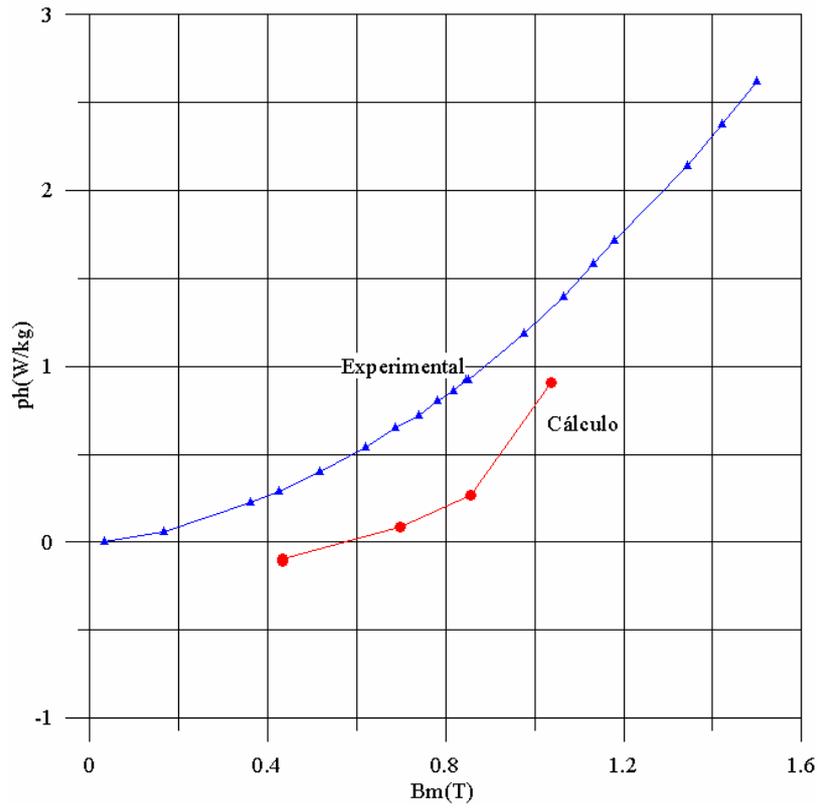


Figura 8-64. Comparativa entre las pérdidas por histéresis a 70Hz calculadas y experimentales

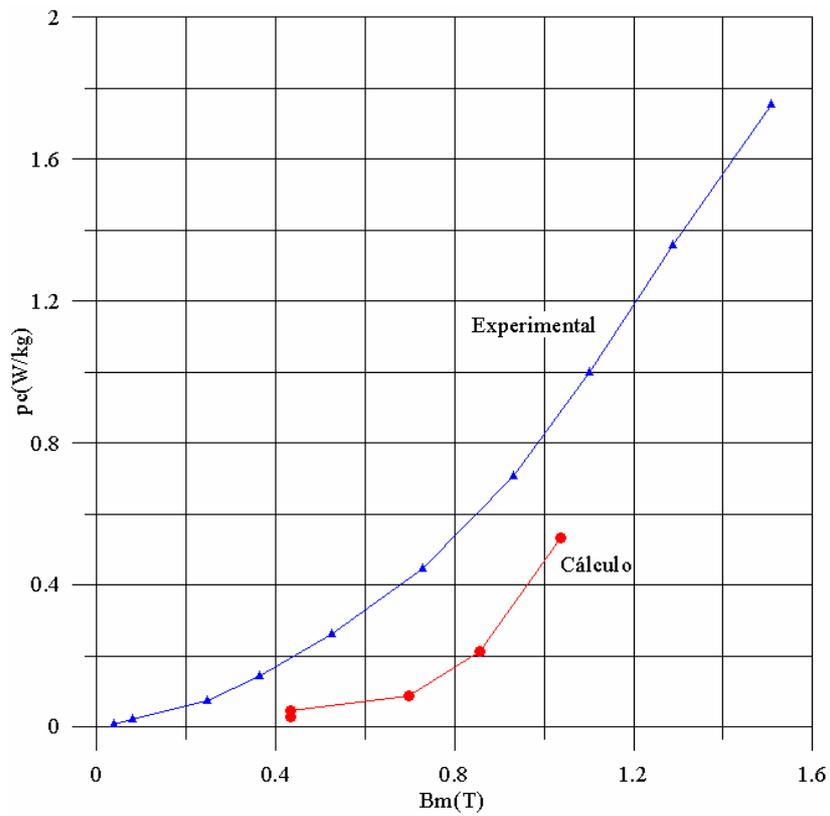


Figura 8-65. Comparativa entre las pérdidas por corrientes inducidas a 70Hz calculadas y experimentales

### 8.3 Análisis de resultados. Validación.

Realizamos el análisis de resultados en tres bloques:

- Campo  $H$  e inducción  $B$
- Variables electromagnéticas restantes ( $A$ ,  $J$  y  $\phi$ )
- Pérdidas en el hierro disgregadas

El motivo para ello es la diferente naturaleza del cálculo de los variables de cada bloque. En el primer bloque, para el cálculo de la inducción y del campo interviene únicamente la fase de proceso del sistema de cálculo. No obstante, esta es la fase más importante, pues para su cálculo combinamos el modelo de histéresis con la resolución de la ecuación de difusión por el método de las diferencias finitas, que es donde está el núcleo de nuestro sistema de cálculo. Con el campo y la inducción calculados determinamos las restantes variables electromagnéticas. Finalmente a partir de las variables anteriores se determinan las pérdidas en el hierro disgregadas. Tanto el segundo como el tercer bloque se determinan en la fase de post-proceso.

En realidad para validar el sistema de cálculo tan sólo necesitaríamos comprobar los valores del campo  $H(x,t)$  y de la inducción calculados  $B(x,t)$ , pues las restantes variables no son una aplicación, una excusa para usar nuestro sistema de cálculo. Desgraciadamente no disponemos de valores de  $H(x,t)$  o de  $B(x,t)$  experimentales para comprobar la validez de nuestros cálculos, pero si disponemos del flujo experimental. Empleamos pues esta variable para validar el sistema.

#### 8.3.1 Campo e inducción

En las figuras 8-5 a 8-12 se muestra el campo para varias profundidades y varias  $i_0(t)$  de entrada a las tres frecuencias de cálculo. En apariencia la forma de onda es buena y los valores son razonables. La difusión del campo en las tres frecuencias de cálculo se presenta en la figuras 8-6, 8-11 y 8-13. La apariencia es así mismo buena. Esta sensación se ve reforzada por la figura 8-47 en al cual se compara la difusión del campo en las tres frecuencias de cálculo. Los resultados siguen siendo totalmente razonables.

Mas interesante es la forma de onda de la inducción pues al menos sabemos de antemano que debe ser sinusoidal. En efecto, recordemos que las formas de onda de entrada de  $i_0(t)$  se obtuvieron experimentalmente con la muestra alimentada por una fuente de tensión

sinusoidal. Luego si la entrada al sistema es  $i_0(t)$ , la inducción calculada debe ser aproximadamente sinusoidal si la tensión de alimentación con la que se obtuvo  $i_0(t)$  era sinusoidal.

Comprobando las formas de onda de las inducciones calculadas en los diferentes casos (figuras 8-14, 8-16, 8-17, 8-18, 8-19 y 8-21) vemos como, efectivamente dichas formas de onda son sinusoidales. Este es un dato interesantísimo, pues para que la forma de onda de  $B(t)$  sea correcta el modelo de histéresis combinado con la ecuación de difusión ha funcionado correctamente. Tanto es así, que ha sido capaz de considerar la forma de onda y la frecuencia de la entrada. La difusión de la inducción (figuras 8-15, 8-20 y 8-22) también parece correcta.

Si bien cuantitativamente no podemos saber si las simulaciones han sido correctas, si que podemos decir que cualitativamente todo tiene buen aspecto. Sobre todo el hecho que la forma de onda de la inducción sea sinusoidal es al menos esperanzador. La validación completa la conseguiremos con el flujo, pero esto se explica en el siguiente apartado.

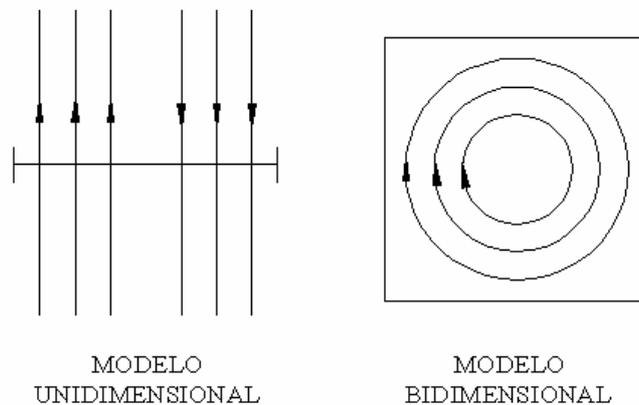
### 8.3.2 Variables electromagnéticas restantes ( $A$ , $J$ , $\phi$ )

Una vez calculado el campo  $H(x,t)$  y la inducción  $B(x,t)$  en la fase de proceso, calculamos el potencial vector magnético  $A$ , la densidad de corriente  $J$  y el flujo magnético  $\phi$  en la fase de post-proceso. En concreto, de esta última variable disponemos de datos experimentales, por lo que podemos utilizarla para validar el sistema de cálculo completo. Para su cálculo se debe determinar  $H(x,t)$  y  $B(x,t)$  en proceso y posteriormente  $A(x,t)$ . Por tanto su validación lleva implícita la validación de todas las variables que intervienen en el proceso, incluyendo el campo y la inducción que es lo que realmente nos interesa.

En la tabla 8-II se muestran los números de figuras donde se puede hallar las formas de onda y la difusión de  $A$ ,  $J$  y  $\phi$  en el núcleo del transformador. En concreto en las figuras 8-41 a 8-46 se compara el flujo calculado con el flujo experimental. En dichas figuras se puede comprobar como el flujo calculado se aproxima con bastante fiabilidad al flujo experimental. Con esto damos por validada la fase de proceso, el cálculo de  $A$  y el cálculo de  $\phi$ . Esto incluye la validación del modelo de histéresis, y del algoritmo desarrollado para el cálculo de la difusión del campo en el interior del núcleo que combina el modelo de histéresis con la ecuación de difusión.

Respecto a la densidad de corriente nada podemos decir pues no disponemos de ningún valor experimental para poder compararla. En principio no tenemos demasiada confianza en los resultados obtenidos. Dicha desconfianza se basa en varios motivos.

El primer motivo es la modelización de núcleo a partir de una permeabilidad equivalente que supone que dicho núcleo es macizo. Dicha modelización puede funcionar bien para el campo, pero no puede funcionar bien para las corrientes inducidas pues éstas "no ven" la influencia de las láminas y el material aislante entre lámina y lámina.



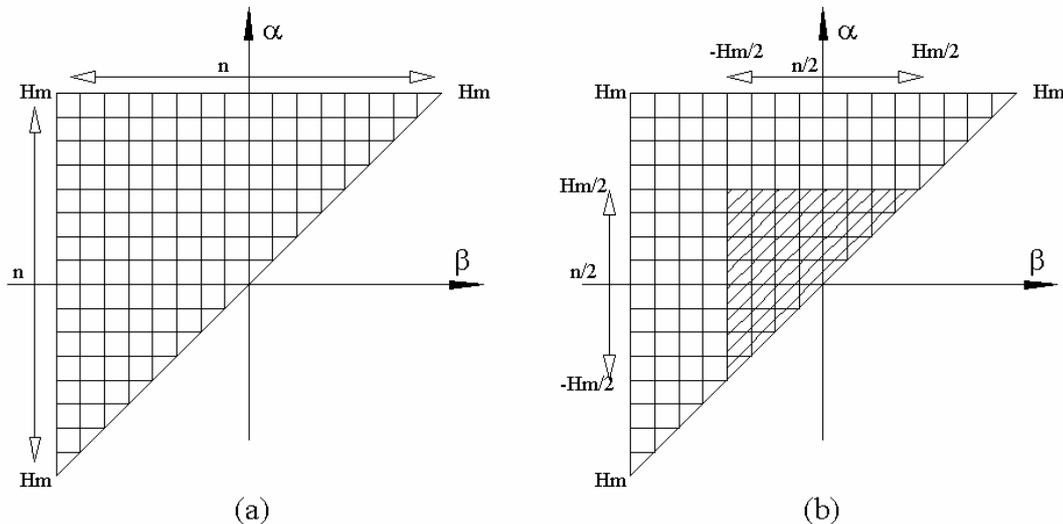
**Figura 8-66.** Comparación entre la distribución de corrientes inducidas calculada en el modelo unidimensional de transformador y la calculada en un modelo bidimensional

Además con el modelo unidimensional de transformador no se puede considerar la distribución real de las corrientes inducidas en el núcleo. Se considera que las corrientes únicamente tienen una componente  $J_y$  que extiende al infinito. En la figura 8-66 se muestra gráficamente la diferencia en la distribución de corrientes inducidas cuando estas se calculan a partir de un modelo de núcleo unidimensional y un modelo bidimensional.

Podremos reafirmar nuestras sospechas en el análisis de los resultados de las pérdidas en el hierro disgregadas, pues de dichas variables si tenemos datos experimentales y en cuyo cálculo interviene  $H$  y  $J$ .

En algunas curvas se observa un efecto de pérdida de forma de las figuras apareciendo escalones. Esto es debido a la pérdida de precisión en el ciclo de histéresis a calcular. Si discretizamos el plano de Preisach para  $n$  nodos, se realiza para el ciclo límite. Para los ciclos menores interiores al ciclo límite el triángulo del plano de Preisach es menor, con lo que el número de nodos efectivos para estos ciclos se ve drásticamente reducido (figura 8-67). La

única forma para paliar este efecto es aumentando el número de nodos en que se discretiza el ciclo límite. Siempre teniendo en consideración el aumento de tiempo de cálculo que implica aumentar el número de nodos del plano de Preisach.



**Figura 8-67.** Discretización del plano de Preisach para en función del ciclo límite. (a) Nodos efectivos para el ciclo límite y (b) nodos disponibles para un ciclo cuya amplitud es la mitad que la del ciclo límite

### 8.3.3 Pérdidas específicas en el hierro disgregadas

En la tabla 8-III se muestra la relación de figuras donde se comparan las pérdidas específicas calculadas con las pérdidas específicas experimentales. La conclusión no puede ser otra que los cálculos no son buenos, distan bastante de los resultados experimentales. Esto no nos debe preocupar, el interés principal de nuestro trabajo era modelizar la histéresis y aplicar el modelo para calcular la difusión del campo en medios ferromagnéticos, eso lo hemos conseguido, en todo caso, el cálculo de las pérdidas en hierro puede ser fruto de un trabajo futuro.

En la pérdidas en el hierro interviene tanto el campo  $H(x,t)$  como la densidad de corrientes inducidas  $J(x,t)$ . El cálculo del campo lo podemos dar por validado, pero respecto a la densidad de corriente no podemos decir lo mismo. De hecho, los resultados para las pérdidas en el hierro no hacen más que confirmar nuestras sospechas. Tanto el modelo unidimensional como el modelo de núcleo laminado no funcionan bien para el cálculo de las corrientes inducidas. Este es un tema a considerar para futuros trabajos de investigación. Pero en este momento no le resta validez a nuestro sistema de cálculo.

## 8.4 Conclusiones

Del análisis de los resultados de los cálculos y su comparación con los resultados experimentales podemos extraer las siguientes conclusiones:

1. El modelo de histéresis es apropiado para el cálculo del campo en el interior del núcleo de un transformador.
2. La combinación del modelo de histéresis con el método de resolución de la ecuación de difusión, el método de las diferencias finitas, funcionan correctamente y permiten calcular correctamente el flujo. Por tanto también calculan correctamente el campo y la inducción en el núcleo.
3. El método del punto fijo, aplicado para resolver el sistema de ecuaciones no lineales resultante de la aplicación del método de las diferencias finitas combinado con el modelo de histéresis funciona correctamente.
4. El modelo de transformador unidimensional propuesto es válido para calcular el campo, la inducción y el flujo; pero no para las corrientes inducidas ni tampoco para las pérdidas en el hierro.
5. La modelización del núcleo laminado mediante una permeabilidad aparente es buena para el cálculo del campo en el interior de dicho núcleo, pero no para calcular la distribución de corrientes inducidas en el núcleo ni tampoco para calcular las pérdidas en el hierro disgregadas.

En resumen, hemos conseguido comprobar que efectivamente el sistema de cálculo, la combinación del modelo de Preisach con la ecuación de difusión formulada en diferencias finitas, resolviendo el sistema de ecuaciones con el método del punto fijo funciona correctamente y permite calcular el campo y la inducción en un núcleo ferromagnético. Además nos permite calcular el flujo correctamente. Queda por tanto validado el sistema de cálculo. No obstante, respecto a la aplicación del sistema de cálculo para determinar la distribución de corrientes inducidas y las pérdidas en el hierro disgregadas, se debe depurar el modelo de transformador unidimensional propuesto. Esto no resta validez a nuestro sistema de cálculo, en todo caso nos indica una futura línea de investigación.

## 9. Aplicación al cálculo del campo magnético y de las pérdidas magnéticas de un transformador (III). Alternativas de cálculo

### 9.1 Introducción.

En los capítulos anteriores hemos combinado el modelo de Preisach con la ecuación de difusión para calcular la distribución del campo  $H(x,t)$  en un núcleo ferromagnético aplicando el método de las diferencias finitas con un esquema Crank-Nicholson y aplicando el método del punto fijo para resolver el sistema de ecuaciones no lineales resultante. Todo se realizó a partir de la formulación en  $H$  de la ecuación de difusión, suponiendo que el primario del transformador estaba conectado a un fuente de corriente que alimenta con una corriente  $i_o(t)$  de forma de onda conocida.

Con todo ello damos por comprobado y validado el sistema de cálculo (ver las conclusiones del capítulo 8). No obstante la expuesta no es la única alternativa de cálculo, ni tampoco la mejor, en el capítulo 7 analizamos las consecuencias de formular la ecuación de difusión en  $H$  y en  $A-U$ . Llegamos a la conclusión que la formulación en  $H$  es más sencilla y además permite aplicar el modelo de Preisach directo, pero no es una buena opción cuando el arrollamiento de excitación que establece el campo en el núcleo está alimentado por una fuente de tensión, como ocurre en la mayoría de los casos. En este caso es preferible la formulación en  $A-U$ . Si se adopta esta formulación el algoritmo de cálculo presenta algunas diferencias respecto al propuesto a la formulación en  $H$ .

En este capítulo mostramos como sería el algoritmo de cálculo si partiésemos de una ecuación de difusión en  $A-U$ . Finalmente, también proponemos una alternativa al método de resolución de la ecuación de difusión. Quedando su desarrollo propuesto para un posterior trabajo de investigación

## 9.2 Resolución a partir de una formulación A-U.

Seguiremos los mismos pasos del capítulo 7 para la resolución a partir de una formulación en  $H$  adaptándolos a la formulación en A-U. Afortunadamente podremos aprovechar la mayor parte del trabajo realizado en el capítulo 7.

### 9.2.1 Modelo del problema

Vamos a resolver el mismo problema del capítulo 7 para la formulación en  $H$ . En el apartado 7.2 describimos el problema a resolver. No nos repetiremos aquí de nuevo, recordemos que se trata de la muestra A, un transformador monofásico de 220/380V y 1,3kVA de la casa Tecnotrafo.

El modelo del problema también es el mismo que propusimos en el capítulo 7 (apartado 7.3). De hecho realizamos un modelo genérico tanto para la formulación en  $H$  como para la formulación en A-U. Se trata del modelo unidimensional que reproducimos de nuevo en la figura 9-1<sup>1</sup>.

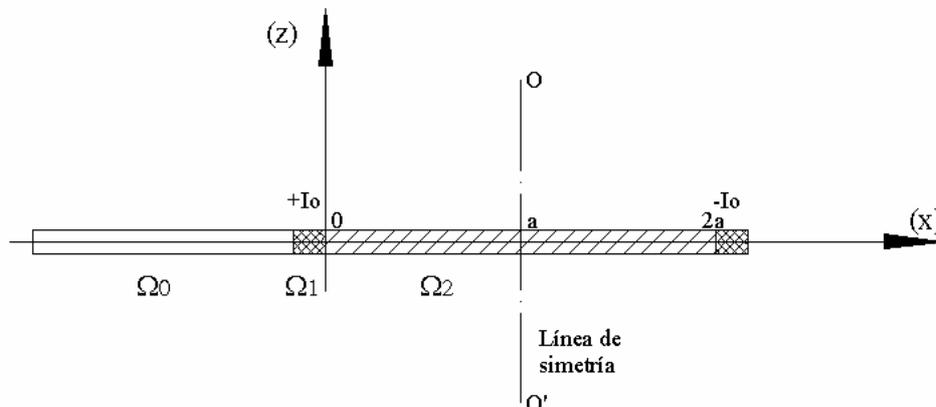


Figura 9-1. Modelo unidimensional de la muestra A

### 9.2.2 Formulación del problema

La formulación de la ecuación de difusión en A-U para el modelo de la figura ya se realizó en el capítulo 7 (apartado 7.4.2). Aquí reproducimos únicamente las ecuaciones resultantes. La ecuación de difusión genérica es:

<sup>1</sup> Para facilitar la lectura del capítulo repetimos aquí algunas de las figuras del capítulo 7

$$\frac{1}{\mu} \frac{\partial^2 A}{\partial x^2} = \frac{\sigma N_1}{b} \varepsilon(t) - \sigma \frac{\partial A}{\partial t} \quad (9.1)$$

Donde  $b$  es la dimensión y (profundidad) del núcleo del transformador y  $\varepsilon(t)$  la fuerza electromotriz de una espira del arrollamiento de excitación que establece el campo en el núcleo. Aplicando (7.1) a la región de aire exterior al transformador  $\Omega_0$ :

$$\Omega_0 : \frac{\partial^2 A}{\partial x^2} = 0 \quad (9.2)$$

Para la región  $\Omega_1$  ocupada por el arrollamiento de excitación:

$$\Omega_1 : \frac{1}{\mu_0 \sigma N_1} \frac{\partial^2 A}{\partial x^2} = \frac{\varepsilon(t)}{b} \quad (9.3)$$

Finalmente, para la región de núcleo ferromagnético:

$$\Omega_2 : \frac{1}{\mu \sigma_2} \frac{\partial^2 A}{\partial x^2} = -\frac{\partial A}{\partial t} \quad (9.4)$$

Con estas tres ecuaciones (9.2), (9.3) y (9.4) tenemos definida la distribución  $A(x,t)$  en todas las regiones del problema. Estas son las ecuaciones a resolver, teniendo en cuenta que, en realidad,  $\mu$  no es una constante sino que viene definida por el modelo de histéresis. Pero no nos adelantemos, aún nos queda por definir la entrada al sistema de cálculo  $\varepsilon(t)$ . Esta es la conexión de las ecuaciones de la difusión de campo con el circuito eléctrico exterior. En la figura 9-2 se muestra el circuito eléctrico equivalente del arrollamiento de excitación de la muestra A y la fuente de tensión.

La resistencia  $R_l$  del circuito de la figura 9-2 es la resistencia óhmica del arrollamiento de excitación y  $jX_l$  es la inductancia del flujo de dispersión de dicho arrollamiento. Considerando el efecto de ambos elementos, la ecuación que rige al circuito eléctrico es:

$$v_1(t) - R_l i_0(t) - L_1 \frac{\partial i_0(t)}{\partial t} - \varepsilon(t) = 0 \quad (9.5)$$

Despreciando el efecto de  $R_l$  y de  $jX_l$  la ecuación (9.5) se simplifica en:

$$N_1 \varepsilon(t) = v_1(t) \quad (9.6)$$

Si se emplea la ecuación (9.5) los elementos  $R_l$  y  $jX_l$  se pueden obtener fácilmente mediante el ensayo de vacío del transformador. Además necesitaremos emplear el teorema de Ampère para relacionar  $i_0(t)$  con el campo en el núcleo. Con la ecuación (9.6) relacionamos directamente la fuente de tensión con las ecuaciones de difusión del campo.

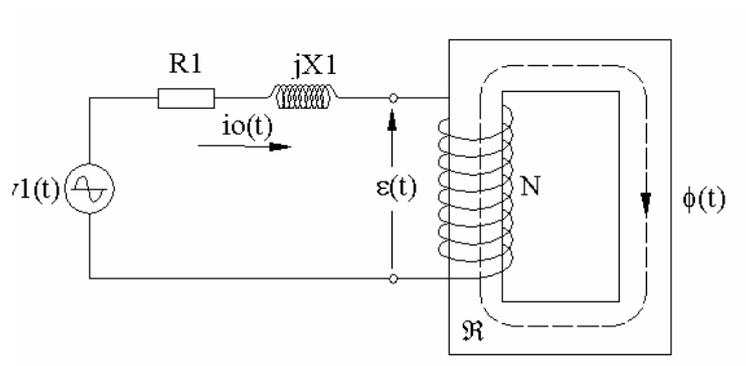


Figura 9-2. Circuito equivalente del arrollamiento de excitación de la muestra A.

### 9.2.3 Modelización del laminado del núcleo

La modelización del laminado del núcleo no se ve afectada por cambio de formulación. Tratamos el núcleo construido a base de láminas como a un núcleo macizo con una permeabilidad relativa  $\mu_{r,eq}$ :

$$\mu_{r,eq} = c\mu_r \quad (9.7)$$

Donde  $c$  es el factor de laminado o de llenado del núcleo

### 9.2.4 Estrategia de resolución

La estrategia de resolución es la misma para ambas formulaciones. El sistema de cálculo se divide en las tres fases de preproceso, proceso y post-proceso. En el preproceso se realiza la discretización del espacio, en el proceso se calcula  $A$ ,  $B$  y  $H$  y en el postproceso se representan los resultados y se calculan las variables derivadas de las variables determinadas en el proceso.

### 9.2.5 Preproceso

En el preproceso se realiza la discretización de espacio, en el caso de la formulación  $A-U$  intervienen las tres regiones que conforman el problema por lo que la discretización será ligeramente diferente que en el caso de formulación en  $H$ . En la figura 9-3 se muestra la discretización realizada para nuestro problema.

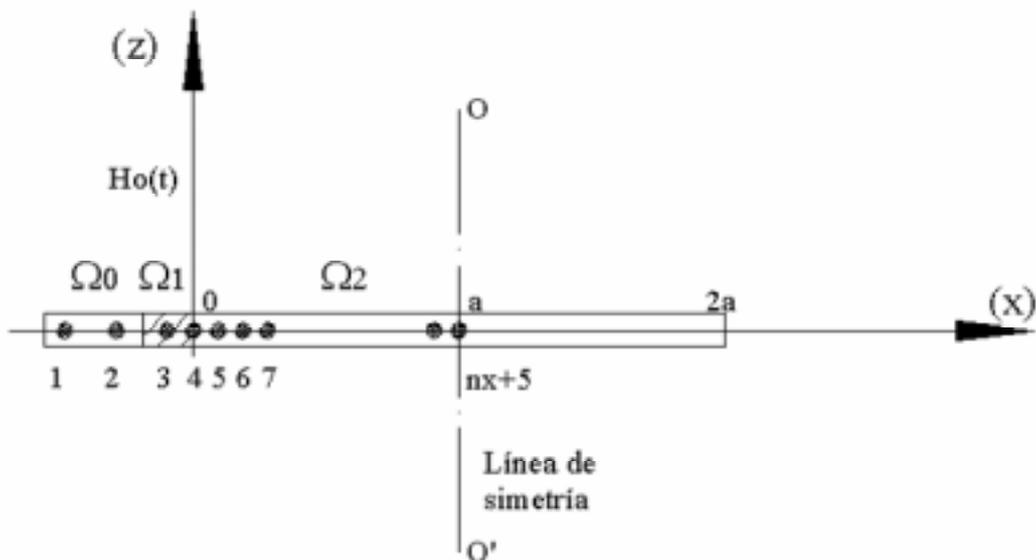


Figura 9-3. Preproceso. Discretización de las tres regiones del problema

### 9.2.6 Proceso

En el proceso resolvemos las ecuaciones de difusión (9.2), (9.3) y (9.4) combinadas con el modelo de histéresis y la ecuación del circuito eléctrico. Para resolver las ecuaciones de difusión las expresamos en diferencias finitas aplicando un esquema de Crank-Nicholson. Finalmente se obtiene un sistema de ecuaciones no lineales que se debe resolver. Este sistema lo resolvemos mediante el método del punto fijo. Como que para aplicar el método del punto fijo debemos realizar unas ligeras modificaciones sobre la ecuación de difusión, primero exponemos la aplicación del punto fijo, que en el fondo es el algoritmo de cálculo y después desarrollamos el sistema de ecuaciones a resolver.

### 9.2.6.1 Resolución del sistema de ecuaciones no lineales mediante el método del punto fijo

En el capítulo 7 (apartado 7.6.1) se justificó la aplicación del método del punto fijo y nuestra preferencia respecto al método de Newton-Raphson. En dicho capítulo también se comentaron las bases del método del punto fijo. A continuación vamos a aplicar el método del punto fijo a la formulación  $A-U$ .

En este caso la inducción  $B$  se calcula a partir del potencial vector magnético  $A$  que es la incógnita de las ecuaciones. Se determina el campo  $H$  a partir de  $B$  mediante la ley constitutiva:

$$\vec{H} = \frac{1}{c\mu} \vec{B} \quad (9.8)$$

Donde  $c$  es el factor de llenado del laminado del núcleo. Modificamos la ecuación (9.8) dividiéndola en dos términos uno lineal y un residuo  $R$  no lineal:

$$H = \frac{1}{\bar{\mu}} B + R^k \quad (9.10)$$

Donde  $\bar{\mu}$  es una constante que controla el proceso de convergencia y  $R^k$  es la iteración  $k$ -ésima de la función residuo. La iteración  $k$ -ésima de la función residuo se determina como:

$$R^k = \frac{1}{c} P^{-1}(B) - \frac{1}{\bar{\mu}} B \quad (9.11)$$

Con la formulación  $A-U$ , la inducción es conocida a partir del potencial vector magnético, calculando el campo a partir de dicha inducción. En este caso la entrada al modelo de histéresis es la inducción  $B$  y la salida el campo  $H$ , por ello en la ecuación (9.11) empleamos el modelo de Preisach inverso.

Aplicando la ecuación (9.10) en la ecuación de difusión genérica (9.1), la nueva ecuación de difusión genérica es:

$$\frac{1}{\sigma\bar{\mu}} \frac{\partial^2 A}{\partial x^2} = \frac{1}{b} \varepsilon(t) - \frac{\partial A}{\partial t} - \frac{1}{\sigma} \frac{\partial R}{\partial x} \quad (9.12)$$

Las ecuaciones de difusión para las regiones  $\Omega_0$  y  $\Omega_1$  no se ven modificadas aplicar el método del punto fijo pues están formadas por materiales no ferromagnéticos y su permeabilidad es constante. La ecuación de difusión de la región  $\Omega_2$  pasa a ser:

$$\Omega_2 : \frac{1}{\mu\sigma_2} \frac{\partial^2 A}{\partial x^2} = -\frac{\partial A}{\partial t} - \frac{1}{\sigma_2} \frac{\partial R}{\partial x} \quad (9.13)$$

En resumen, el método de las diferencias se aplicará para resolver las ecuaciones de difusión (9.2), (9.3) y (9.13). Desde un punto de vista de operación el método del punto fijo se traduce al siguiente algoritmo para cada paso de tiempo:

1. Se supone un valor inicial o semilla para el residuo de cada nodo espacial  $i$ :  $R_i^0$
2. Se resuelven las ecuaciones de difusión (9.2), (9.3) y (9.13). Así obtenemos el potencial vector magnético  $A_i^0$  en cada nodo  $i$  espacial.
3. Aplicando la definición de potencial vector magnético a nuestro modelo unidimensional calculamos la inducción en cada nodo  $i$  espacial.

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} \Rightarrow B(x,t) = \frac{\partial A(x,t)}{\partial x} \quad (9.14)$$

4. Para cada nodo de espacio  $i$  calculamos el residuo  $R_i^1$  correspondiente a la siguiente iteración mediante:

$$R_i^1 = \frac{1}{c} P^{-1}(B_i^0) - \frac{1}{\mu} B_i^0 \quad (9.15)$$

En la ecuación (9.15) se identifica claramente que:

$$H_i^0 = \frac{1}{c} P^{-1}(B_i^0) \quad (9.16)$$

5. Con los residuos por nodo calculados para la iteración actual  $k=0$  y la iteración siguiente  $k=1$  ya podemos aplicar un criterio de convergencia para determinar si podemos finalizar el proceso iterativo o no. El criterio de convergencia empleado por nosotros es:

$$\left| \frac{R_i^1 - R_i^0}{R_i^0} \right| < 0,001 \quad (9.17)$$

6. Si se cumple el criterio de convergencia en todos los nodos espaciales  $i$  se puede considerar que la solución ha convergido y se pasa al siguiente nodo de tiempo, volviendo a aplicar el mismo algoritmo. Si el criterio de convergencia no se cumple en todos los nodos, entonces debemos hacer  $R_i^0 = R_i^1$  y se repite el proceso desde el paso (2) hasta que la solución converja o se supere el número de iteraciones máximo preestablecido.

Con esto ya tenemos el algoritmo básico de cálculo, ahora nos queda determinar el sistema de ecuaciones a resolver para obtener la distribución del potencial vector magnético  $A(x,t)$ . Esto lo realizamos a continuación.

#### 9.2.6.2 Resolución de las ecuaciones de difusión

Aplicamos el método de las diferencias finitas con un esquema de Crank-Nicholson para obtener el sistema de ecuaciones del paso (2) del algoritmo de cálculo. Al igual que en la formulación en  $H$ , empleamos la versión "forward" con error del orden de  $\Delta x$  para definir las derivadas.

Aplicamos separadamente el método a las tres ecuaciones de difusión para obtener las tres ecuaciones en diferencias a partir de las cuales podemos construir el sistema de ecuaciones a resolver. Comenzamos por la ecuación de la región de aire exterior al transformador  $\Omega_0$  cuya ecuación de difusión es (9.2). Aplicando Crank-Nicholson:

$$\Omega_0 : \frac{1}{2} \left( \left[ \frac{\partial^2 A}{\partial x^2} \right]_{i,\tau+1} + \left[ \frac{\partial^2 A}{\partial x^2} \right]_{i,\tau} \right) = 0 \quad (9.18)$$

Lo cual nos lleva a la siguiente ecuación en diferencias:

$$\frac{A_{i+1,\tau+1} - 2A_{i,\tau+1} + A_{i-1,\tau+1}}{(\Delta x)^2} + \frac{A_{i+1,\tau} - 2A_{i,\tau} + A_{i-1,\tau}}{(\Delta x)^2} = 0 \quad (9.19)$$

Para facilitar la lectura de las ecuaciones hacemos:

$$\begin{aligned} A_{i,\tau+1} &= A_i \\ A_{i,\tau} &= a_i \end{aligned} \quad (9.20)$$

Donde los valores  $a_i$  son conocidos del paso de tiempo anterior, por lo que en realidad las únicas incógnitas son  $A_i$ . Aplicando (9.20) en (9.19) y operando en la ecuación llegamos a la ecuación en diferencias para la región  $\Omega_0$ :

$$\Omega_0 : A_{i+1} - 2A_i + A_{i-1} = -a_{i+1} + 2a_i - a_{i-1} \quad (9.21)$$

Continuamos con la región  $\Omega_0$  comprendida por los arrollamientos de excitación. La ecuación de difusión para la zona  $\Omega_0$  es la (9.2). Aplicando un esquema de Crank-Nicholson dicha ecuación se transforma en:

$$\Omega_1 : \frac{1}{\mu_0 \sigma_1} \frac{1}{2} \left( \left[ \frac{\partial^2 A}{\partial x^2} \right]_{i,\tau+1} + \left[ \frac{\partial^2 A}{\partial x^2} \right]_{i,\tau} \right) = \frac{\varepsilon(\tau)}{b} \quad (9.22)$$

Desarrollando las derivadas en diferencias finitas y sustituyendo (9.20) de la ecuación (9.22) obtenemos la ecuación en diferencias finitas de la región  $\Omega_1$ .

$$\Omega_1 : A_{i+1} - 2A_i + A_{i-1} = \frac{\mu_0 \sigma_1 (\Delta x)^2}{b} \varepsilon(\tau) - a_{i+1} + 2a_i - a_{i-1} \quad (9.23)$$

Finalmente desarrollamos la ecuación en diferencias para la zona del núcleo, la región  $\Omega_2$ . La ecuación de difusión para dicha región es (9.13). Aplicando el esquema de Crank-Nicholson en la ecuación de difusión:

$$\frac{1}{\bar{\mu} \sigma_2} \frac{1}{2} \left( \left[ \frac{\partial^2 A}{\partial x^2} \right]_{i,\tau+1} + \left[ \frac{\partial^2 A}{\partial x^2} \right]_{i,\tau} \right) = - \left[ \frac{\partial A}{\partial t} \right]_{i,\tau} - \frac{1}{\sigma_2} \left[ \frac{\partial R}{\partial x} \right]_{i,\tau} \quad (9.24)$$

Desarrollando las derivadas de (9.24) en diferencias finitas y aplicando (9.20):

$$\Omega_2 : \frac{1}{\bar{\mu} \sigma_2 (\Delta x)^2} (A_{i+1} - 2A_i + A_{i-1} + a_{i+1} - 2a_i + a_{i-1}) = -2 \frac{A_i - a_i}{\Delta t} - \frac{2}{\sigma_2} \frac{R_i - r_i}{\Delta t} \quad (9.25)$$

Definimos la constante  $\zeta$  como:

$$\zeta \equiv \frac{\Delta t}{\bar{\mu}\sigma_2(\Delta x)^2} \quad (9.26)$$

Sustituyendo (9.26) en (9.25) y reordenando la ecuación obtenemos la ecuación en diferencias para la región  $\Omega_2$ :

$$\Omega_2 : A_{i+1} + 2\left(\frac{1-\zeta}{\zeta}\right)A_i + A_{i+1} = -a_{i+1} + 2\left(\frac{1+\zeta}{\zeta}\right)a_i - a_{i-1} - \frac{2}{\zeta\sigma_2}(R_i - r_i) \quad (9.27)$$

A partir de las ecuaciones en diferencias para cada región, esto es, las ecuaciones (9.21), (9.23) y (9.27) construimos el sistema de ecuaciones que nos permitirá determinar el valor de en cada nodo espacial y temporal  $A(i, \tau)$ . Según la discretización de la figura 9-3 la región  $\Omega_0$  está formada por los nodos 1 y 2, la región  $\Omega_1$  por el nodo 3 y la región  $\Omega_2$  por los nodos 4 a  $n_x+5$ . Aplicando la ecuación en diferencias correspondiente a cada nodo obtenemos el sistema de ecuaciones, el cual expresamos de forma matricial como:

$$[a] \cdot [A] = [b] \quad (9.28)$$

Donde:

$$[a] = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2\left(\frac{1-\zeta}{\zeta}\right) & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2\left(\frac{1-\zeta}{\zeta}\right) & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 2\left(\frac{1-\zeta}{\zeta}\right) & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 2 & 2\left(\frac{1-\zeta}{\zeta}\right) \end{pmatrix} \quad (9.29)$$

$$[A] = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ A_4 \\ A_5 \\ \vdots \\ A_{nx+4} \\ A_{nx+5} \end{pmatrix}; \quad [b] = \begin{pmatrix} -a_2 + 2a_1 \\ -a_3 + 2a_2 - a_1 \\ \frac{\mu_0 \sigma_1 (\Delta x)^2}{b} \varepsilon(\tau) - a_4 + 2a_3 - a_2 \\ -a_5 + 2\left(\frac{1+\zeta}{\zeta}\right)a_4 - a_3 - \frac{2}{\zeta\sigma_2}(R_4 - r_4) \\ -a_6 + 2\left(\frac{1+\zeta}{\zeta}\right)a_5 - a_4 - \frac{2}{\zeta\sigma_2}(R_5 - r_5) \\ \vdots \\ -a_{nx+5} + 2\left(\frac{1+\zeta}{\zeta}\right)a_{nx+4} - a_{nx+3} - \frac{2}{\zeta\sigma_2}(R_{nx+4} - r_{nx+4}) \\ 2\left(\frac{1+\zeta}{\zeta}\right)a_{nx+5} - 2a_{nx+4} - \frac{2}{\zeta\sigma_2}(R_{nx+5} - r_{nx+5}) \end{pmatrix} \quad (9.30)$$

En la ecuación correspondiente al último nodo ( $i=n_x+5$ ), situado en la línea de simetría del campo se ha aplicado la condición de simetría  $A_{nx+6}=A_{nx+4}$ .

La ecuación matricial (9.28) es el sistema de ecuaciones que se debe resolver en el paso (2) del algoritmo del punto fijo. Con esto ya tenemos construido nuestro sistema de cálculo partiendo de una formulación  $A-U$ .

### 9.3 Alternativa al método de las diferencias finitas. El método de los elementos finitos.

El método de las diferencias finitas es sencillo y para nuestro caso la opción más recomendable pues nos ha permitido centrarnos únicamente en la resolución del sistema de ecuaciones no lineales combinado con el modelo de Preisach, sin preocuparnos de complicaciones adicionales propias de métodos más sofisticados.

Pero el método de las diferencias finitas no siempre es una buena opción. En problemas unidimensionales no hay complicaciones a priori. Pero en problemas bidimensionales, a medida que la geometría se complica también se complica la creación de las matrices del sistema de ecuaciones. En problemas tridimensionales la complejidad es tal que no es

recomendable el método de las diferencias finitas. Además de que la construcción de las matrices que conforman el sistema de ecuaciones resultante se debe definir para la geometría del modelo que se está resolviendo.

Para el análisis de máquinas eléctricas, las cuales suelen tener unas geometrías complejas, la mejor opción es el método de los elementos finitos. Su desarrollo sobrepasa el ámbito del presente trabajo, en un trabajo futuro se debería investigar la combinación del modelo de Preisach con el método de los elementos finitos.

## 10. Determinación experimental del flujo y las pérdidas magnéticas disgregadas

En los capítulos anteriores hemos combinado el modelo de histéresis con los métodos numéricos para cálculos en ingeniería eléctrica, más concretamente máquinas eléctricas. Este desarrollo se ha aplicado al cálculo del flujo y de las pérdidas magnéticas en el núcleo transformador. Para validar los resultados obtenidos previamente se ha determinado experimentalmente la forma de onda y las pérdidas en el hierro en la muestra en la cual se van a calcular dichas pérdidas.

En realidad un problema lleva al otro, pues para determinar las pérdidas magnéticas también debemos hallar el flujo y otras magnitudes del núcleo del transformador, por ello en realidad centramos este capítulo en la determinación experimental de las pérdidas magnéticas. Expondremos el proceso de determinación de las pérdidas en el hierro y los resultados obtenidos.

### 10.1 Introducción

Las pérdidas en el hierro  $P_{Fe}$ , se indicó que éstas se pueden separar en:

- Pérdidas por histéresis  $P_h$
- Pérdidas por corrientes inducidas (o pérdidas clásicas)  $P_c$
- Pérdidas de exceso  $P_e$

Nosotros procuraremos obtener, dentro de lo posible, las pérdidas del hierro disgregadas. En concreto realizaremos el siguiente proceso:

1. Determinación experimental de las pérdidas magnéticas totales  $P_{Fe}$
2. Determinación experimental de las pérdidas por histéresis  $P_h$

3. Determinación por cálculo de las pérdidas por corrientes inducidas  $P_c$
4. Determinación de las pérdidas por exceso a partir de las demás:

$$P_{Fe} = P_h + P_c + P_e \quad (10.1)$$

Las pérdidas que se determinarán son las pérdidas específicas  $p$  en W/kg, representadas en curvas de pérdidas (pérdidas específicas en función de la inducción máxima  $B_m$ ). Dichas pérdidas se obtienen para la muestra identificada como A, esto es, el transformador para el cual hemos calculado las pérdidas en el hierro. Se trata de un transformador monofásico de la factoría Tecnotrafo, de potencia aparente 1,3kVA, tensiones 220-380V, tipo TUM con referencia 001837. El núcleo de dicho transformador se fabricó con chapa magnética UI-40x60-MT. En este transformador, se realizó un tercer devanado auxiliar de 40 espiras, mediante este devanado se pudo determinar el número de espiras de los dos devanados originales.

Siguiendo los pasos indicados anteriormente en primer lugar se determinaron experimentalmente las pérdidas magnéticas específicas totales  $p_{Fe}$  en la muestra. Estas pérdidas se determinan mediante dos métodos experimentales diferentes a modo de validación.

1. *Método del vatímetro.* A partir de la lectura de un vatímetro de bajo factor de potencia a varias frecuencias
2. *Método de las áreas.* A partir del área de las curvas de histéresis a la frecuencia deseada.

Las pérdidas por histéresis  $p_h$  se obtienen siguiendo tres métodos diferentes.

1. *Experimentales (áreas).* A partir del área de curvas de histéresis obtenidas experimentalmente a una frecuencia lo suficientemente pequeña como para considerar que los efectos dinámicos, las corrientes inducidas, son despreciables. En nuestro caso, las curvas se obtienen a la frecuencia de 0,15Hz.
2. *Ecuación de Steinmetz.* A partir de la ecuación de Steinmetz para las pérdidas por histéresis. El coeficiente de Steinmetz se calcula a partir de las pérdidas totales  $p_{Fe}$  a

varias frecuencias. Las pérdidas totales empleadas para calcular el coeficiente de Steinmetz pueden ser:

- a. Las  $p_{Fe}$  determinadas mediante el método del vatímetro
  - b. Las  $p_{Fe}$  determinadas mediante el método de las áreas.
3. *Modelo de Preisach (áreas)*. Empleando el modelo de Preisach clásico. Mediante este modelo obtenemos las curvas de histéresis cuasiestáticas para varias inducciones máximas, a partir del área de estas curvas se calculan las pérdidas por histéresis.

Las pérdidas por corrientes inducidas se determinan mediante cálculo. Con estas pérdidas calculadas se determinan las pérdidas de exceso como la diferencia entre las pérdidas totales y las pérdidas por histéresis más las pérdidas por corrientes inducidas. Para las pérdidas de exceso empleamos las pérdidas en el hierro determinadas mediante el método del vatímetro y las pérdidas por histéresis determinadas experimentalmente a partir de las áreas de histéresis cuasiestáticas.

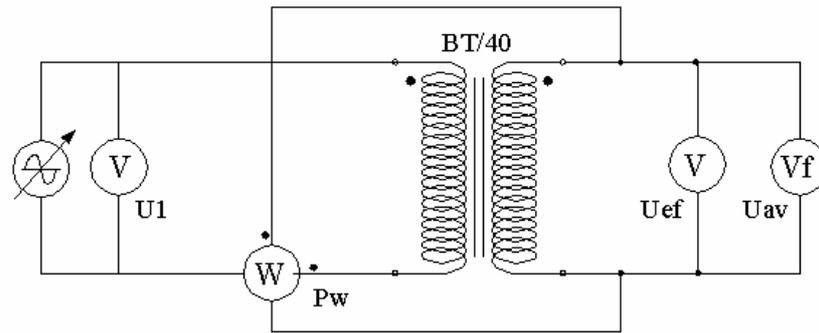
Los datos técnicos, dimensiones y características en general del transformador –muestra A- se exponen en el apéndice D.

## **10.2 Pérdidas totales.**

Las pérdidas totales en el hierro se han determinado siguiendo dos procedimientos experimentales diferentes.

### **10.2.1 Método del vatímetro**

El primer procedimiento para determinar las pérdidas totales es mediante un vatímetro. En este ensayo se ha seguido lo prescrito por el estándar ASTM A343. Este estándar está dedicado a la determinación de características magnéticas mediante el equipo de Epstein. No obstante, debido a la similitud entre un transformador monofásico y el equipo de Epstein, los procedimientos recomendados por estándar son igualmente aplicables a nuestro transformador.



**Figura 10-1.** Esquema del ensayo para determinar las pérdidas magnéticas totales mediante vatímetro

### 10.2.1.1 Descripción del ensayo

En la figura 10-1 se muestra el circuito realizado para determinar las pérdidas magnéticas totales mediante vatímetro. A continuación se expone la función de cada uno de los instrumentos de medición del circuito y los datos que se extraen de cada uno de ellos.

#### **Voltímetro de flujo. Inducción máxima o de pico.**

El elemento marcado como Vf es un voltímetro de flujo, este voltímetro mide el valor medio de la señal, en este caso la tensión del secundario del transformador. El voltímetro de flujo se emplea para determinar el valor de pico de la inducción en el núcleo de la muestra. Al conectar el voltímetro en el secundario del transformador, el cual se puede considerar que está en vacío, por lo que la tensión medida por el voltímetro  $U_{av}$  es la fuerza electromotriz en el secundario  $\mathcal{E}$ :

$$U_{av} = \mathcal{E} \quad (10.2)$$

Asumiendo una inducción sinusoidal en el núcleo, la relación entre la fuerza electromotriz  $\mathcal{E}$  y el flujo máximo o de pico en el núcleo  $\phi_m$  en weber Wb es [ASTM A343]:

$$\mathcal{E} = \sqrt{2}\pi N_2 f \phi_m \quad (10.3)$$

Donde  $N_2$  es el número de espiras en el secundario. Por tanto la inducción de pico  $B_m$  en tesla T es:

$$B_m = \frac{U_{av}}{\sqrt{2\pi} fS} \quad (10.4)$$

Donde  $S$  es la superficie transversal de núcleo en  $m^2$  y  $U_{av}$  es la lectura del voltímetro de flujo en voltios. La ecuación (10.3) es válida para flujo sinusoidal.



*Figura 10-2. Voltímetro de flujo*

Con la ecuación (10.4) se obtiene la inducción de pico a partir de la lectura del voltímetro de flujo, la frecuencia  $f$  y la sección transversal  $S$  del núcleo, que para nuestro transformador es  $0,0022m^2$ .

El voltímetro de flujo empleado en el ensayo es un 3453 de Yokogawa. En la figura 10-2 se muestra una fotografía de dicho voltímetro de flujo.

### **Voltímetro de verdadero valor eficaz. Factor de forma.**

En paralelo con el voltímetro de flujo, midiendo la tensión del secundario del transformador se conecta un voltímetro de verdadero valor eficaz. Este voltímetro se emplea en combinación con el voltímetro de flujo para determinar el factor de forma de la tensión del secundario del transformador. El factor de forma  $\xi$  indica la distorsión de la señal respecto a una sinusoidal y se define como:

$$\xi = \frac{U_{rms}}{U_{av}} \quad (10.5)$$

Donde  $U_{rms}$  es la lectura del voltímetro de verdadero valor eficaz en voltios y  $U_{av}$  la lectura del voltímetro de flujo.

### **Vatímetro de factor de potencia bajo. Pérdidas totales en el hierro.**

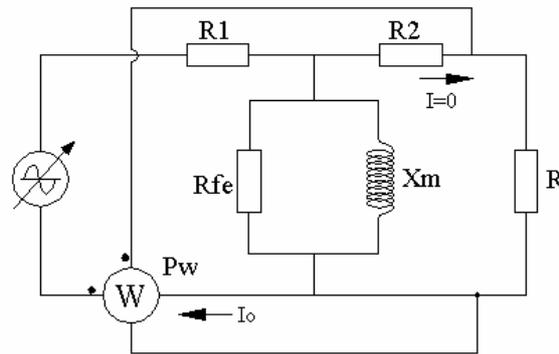
Las pérdidas totales se determinan a partir de la lectura de un vatímetro de factor de potencia bajo. En las condiciones del ensayo el transformador es muy inductivo. Si el vatímetro presenta un factor de potencia alto y la carga un factor de potencia bajo, el vatímetro acabará afectando al factor de potencia en la carga con lo que se verá falseada la medida de la potencia. Por ello el estándar ASTM A343 recomienda que en caso de utilizar un vatímetro dinamométrico, este sea de bajo factor de potencia.

La conexión del vatímetro respecto al transformador se ha realizado siguiendo las recomendaciones del ASTM A343, esto es, con el circuito de intensidad en serie con el primario y el circuito de tensión en paralelo con el secundario. En la figura 10-3 se muestra la conexión del vatímetro con el transformador representado por su circuito eléctrico equivalente. En tales condiciones de conexión, y considerando que el transformador está en vacío, el vatímetro está realizando el producto escalar entre la intensidad que circula por el primario  $I_o$  y la tensión del secundario  $U_2$ . Por tanto está midiendo la potencia disipada por las pérdidas en el hierro y las pérdidas por efecto Joule debida la resistencia interna del circuito de tensión del vatímetro:

$$P_w = P_{Fe} + \frac{U_{ef}^2}{R} \Rightarrow P_{Fe} = P_w - \frac{U_{ef}^2}{R} \quad (10.5)$$

Donde  $R$  es la resistencia en ohmios del circuito de tensión del vatímetro,  $U_{ef}$  es la lectura del voltímetro de verdadero valor eficaz y  $P_w$  es la lectura del vatímetro.

Mediante esta conexión se evita que el vatímetro mida también la potencia disipada en pérdidas por efecto Joule en el arrollamiento del primario. Las pérdidas por efecto Joule en el arrollamiento secundario se pueden despreciar pues estamos considerando que el transformador está prácticamente en vacío.



**Figura 10-3.** Conexión del vatímetro respecto al transformador, representado este por un esquema eléctrico equivalente reducido

Como que la curva de pérdidas representa las pérdidas específicas respecto a la inducción de pico, debemos dividir las pérdidas en  $W$  entre la masa efectiva en  $\text{kg } m$ .

$$P_{Fe} = \frac{1}{m} \left( P_w - \frac{U_{ef}^2}{R} \right) \quad (10.6)$$

La masa efectiva  $m$  se relaciona con la masa aparente  $m'$  por el factor de apilamiento  $k_a$ :

$$m = k_a m' \quad (10.7)$$

En el caso de nuestro transformador la masa efectiva es 10,055kg.

El vatímetro efectúa la medición de la potencia  $P_w$  considerando que la señal es sinusoidal, pero resulta que no es así, con lo cual se está cometiendo un error que debe corregirse. La corrección se realiza multiplicando las pérdidas por el factor de corrección  $A$ .

$$P_{Fe} = \frac{A}{m} \left( P_w - \frac{U_{ef}^2}{R} \right) \quad (10.8)$$

El factor de corrección se calcula siguiendo la siguiente expresión:

$$A = \frac{100}{A_h + \xi A_f} \quad (10.9)$$

Donde  $A_f$  es un factor de representa el porcentaje de pérdidas por corrientes de Foucault y  $A_h$  el porcentaje de pérdidas por histéresis. Los valores de los factores  $A_f$  y  $A_h$  se indican en la tabla 1-I en función del tipo de material.

**Tabla 10-I.** Valores de los factores  $A_h$  y  $A_f$  en función del tipo de material y espesor  
[Yokogawa, 1980]

	$A_h$	$A_f$	$A_h$	$A_f$	$A_h$	$A_f$
Laminado en caliente Orientación longitudinal			80	20	70	30
Laminado en caliente Orientación longitudinal y transversal			75	25	65	35
Grano orientado Orientación longitudinal	60	40	40	60		
	<b>0,25cm</b>		<b>0,35cm</b>		<b>0,50cm</b>	
	<b>Grososres</b>					

Las chapas del núcleo de nuestro transformador tienen un grosor  $\tau=0,5\text{cm}$ , tomamos  $A_f=0,30$  y  $A_h=0,70$ .

Finalmente, debe considerarse que la tensión que mide el circuito de tensión del vatímetro es la del secundario, la cual está afectada por la relación de transformación (recordemos que estamos considerando que el transformador está en vacío) respecto a la tensión del primario que es la que realmente debemos considerar para las pérdidas. En consecuencia la ecuación definitiva para determinar las pérdidas magnéticas totales es:

$$P_{Fe} = \frac{N_1}{N_2} \frac{A}{m'} \left( P_w - \frac{U_{ef}^2}{R} \right) \quad (10.10)$$

El vatímetro de factor de potencia bajo es el Yokogawa tipo 3254. En la figura 10-4 se muestra una fotografía del mismo.



**Figura 10-4.** *Vatímetro de factor de potencia bajo Yokogawa tipo 3254*

La resistencia interna del circuito de tensión del vatímetro depende de la escala de tensión empleada. En la tabla 10-II se muestran los valores de dicha resistencia para el vatímetro empleado.

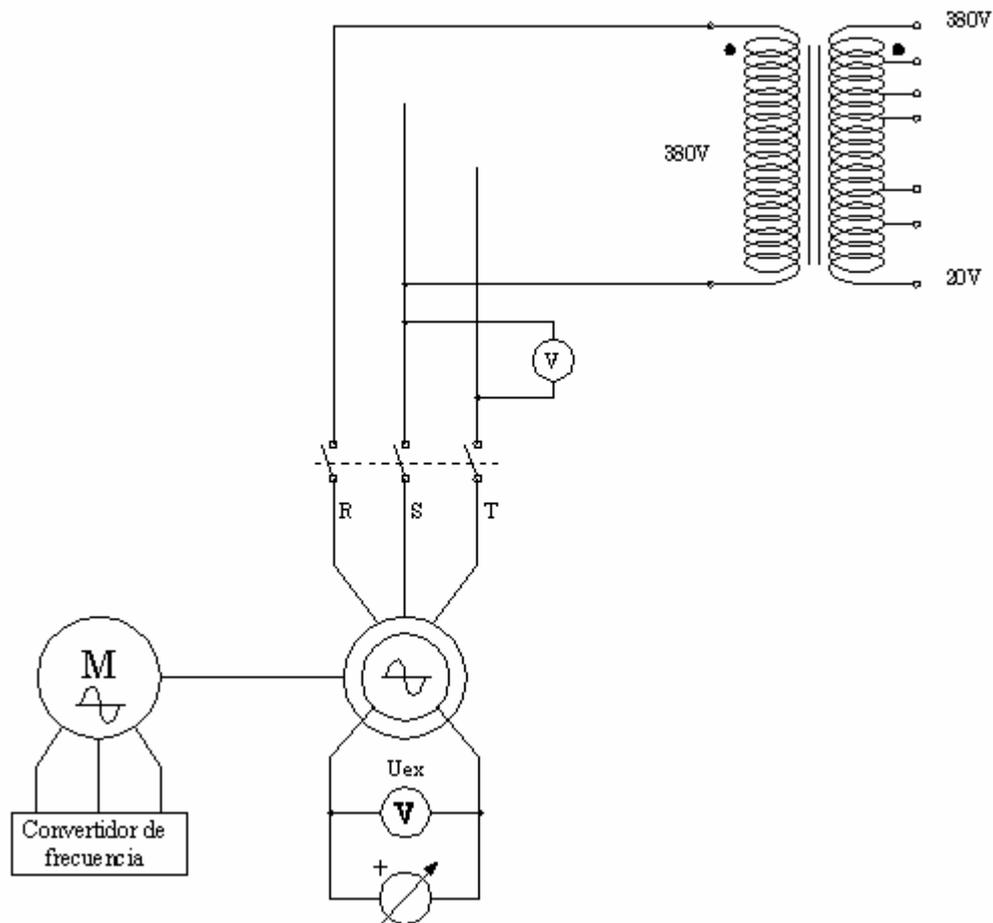
**Tabla 10-II.** *Resistencia del circuito de tensión del vatímetro empleado [Yokogawa, 1980]*

Escala	$R(\Omega)$
1A/30V	150
5A/30V	1500,06
5A/60V	3000,06

#### 10.2.1.2 Generación de la señal de excitación

La señal de excitación del circuito anterior ha de ser sinusoidal, pero además debemos poder regular su tensión eficaz y su frecuencia. Necesitamos regular la tensión eficaz, y por tanto la tensión de pico, para variar la inducción de pico, de esta forma podemos obtener las pérdidas para varios valores de inducción máxima y trazar la curva de pérdidas. También es interesante variar la frecuencia para determinar las pérdidas a varias frecuencias, esto además de comprobar la respuesta del núcleo a varias frecuencias también nos permitirá determinar el coeficiente de la ecuación de Steinmetz de pérdidas por histéresis.

Esta tensión sinusoidal de frecuencia y tensión variable la logramos mediante el sistema mostrado en la figura 10-5.



**Figura 10-5.** Sistema generador de la tensión de excitación de amplitud y frecuencia regulable. (El transformador de la figura en realidad es trifásico, pero solamente se emplea un fase)

Un convertidor de frecuencia alimenta a una máquina asincrónica de jaula de ardilla que funciona como motor. Esta máquina asincrónica está acoplada al eje de una máquina sincrónica, con cuyo inducido alimentamos el circuito de la figura 10-1. La excitación de la máquina sincrónica se alimenta mediante una fuente de alimentación regulable.

Al variar la frecuencia de alimentación de la máquina asincrónica mediante el convertidor de frecuencia estamos variando la frecuencia de sincronismo de la máquina asincrónica, que además prácticamente funciona en vacío, por la frecuencia de giro del eje estará cercana a la de sincronismo. Si variamos la velocidad de giro en el eje, a su vez variará la frecuencia de la tensión generada en el estator de la máquina, esto es, conseguimos variar la frecuencia de la señal de excitación del transformador a ensayar.

La tensión eficaz se puede regular variando la tensión de excitación de la máquina sincrónica. No obstante para ampliar la capacidad de regulación se ha intercalado entre el inducido de la

máquina sincrónica y el circuito a alimentar un transformador trifásico con siete tomas de secundario. De este transformador tan solo empleamos una de las fases.

En las tablas 10-III, 10-IV y 10-V se resumen las características de la máquina asincrónica, máquina sincrónica y el transformador trifásico respectivamente.

**Tabla 10-III.** Características nominales de la máquina asincrónica

Frecuencia	50Hz
Tensión	220/380 V $\Delta$ /Y
Intensidad	27,4/15,8 A $\Delta$ /Y
Potencia útil	7500 W
Factor de potencia	0,83
Velocidad	1450 rpm

**Tabla 10-IV.** Características nominales de la máquina sincrónica

Frecuencia	50Hz
<i>Inducido</i>	
Tensión	220/380 V
Intensidad	26,3/15,2 A
Potencia	10kVA
Factor de potencia	0,80
<i>Excitación</i>	
Tensión	65,1V
Intensidad	6A

**Tabla 10-V.** Características nominales del transformador

Frecuencia	50Hz
Potencia	2kVA
Tensión	380 / 20 ... 380 V
Intensidad	3,04 / 57,8 ... 3,04 A
Número de tomas de secundario	7
Número de fases	3

Con este sistema de alimentación la frecuencia no puede ser muy baja. El motivo es el siguiente. El convertidor de frecuencia reduce la tensión y la frecuencia de forma proporcional hasta unos 20Hz. A partir de esta frecuencia y debido a la compensación por caída de tensión no se mantiene la proporcionalidad y el núcleo de la muestra satura mucho, observándose un calentamiento excesivo de la máquina asincrónica, imposibilitando así la realización del ensayo a frecuencias bajas. En consecuencia no podremos emplear este sistema de alimentación cuando deseemos obtener ciclos de histéresis cuasiestáticos. Téngase en cuenta que para la histéresis cuasiestática vamos a trabajar a 0,15Hz.

### 10.2.1.3 Procedimiento

Se trata de obtener varios puntos de la curva de pérdidas para cada frecuencia ensayada. Esto es tomar varias lecturas de inducción máxima y potencia para una frecuencia determinada.

Las frecuencias de ensayo son 70Hz, 60Hz, 50Hz y 40Hz. Para cada frecuencia se varía la tensión de excitación de la máquina sincrónica y la toma de secundario del transformador, combinando ambas tensiones se logran varios puntos de la curva de pérdidas para cada punto de la curva de pérdidas, la inducción máxima  $B_m$  correspondiente se determina mediante (10.4), sustituyendo las constantes correspondientes del transformador:

$$B_m = 102,308 \frac{U_{av}}{f} \quad (10.11)$$

Las pérdidas específicas en el hierro se calculan a partir de la lectura del vatímetro mediante la ecuación (10.10). Sustituyendo los valores correspondientes al transformador en ensayo las pérdidas en el hierro se determinan como:

$$P_{Fe} = \frac{101,69}{70 + 30\xi} \left( P_w - \frac{U_{av}^2}{1500} \right) \quad (10.12)$$

Donde  $N_1=409$  espiras y  $N_2=40$  espiras, ya que se emplea como primario el lado de baja y como secundario el devanado auxiliar de 40 espiras.

### 10.2.2 Mediante el área del ciclo de histéresis

Como ya se ha visto anteriormente, las pérdidas en el hierro son proporcionales al área encerrada por el ciclo de histéresis. En efecto, como ya se demostró en el capítulo 2 de este trabajo, para excitaciones periódicas, las pérdidas magnéticas se pueden determinar a partir del área de histéresis descrita:

$$P_{Fe} = f \cdot V \cdot a_h \quad (10.13)$$

Donde  $a_h$  es el área de la histéresis descrita,  $f$  la frecuencia y  $V$  el volumen del núcleo de la muestra. Para el núcleo del transformador en ensayo, este volumen es  $V=1,323 \cdot 10^{-3} \text{m}^3$ .

Este método consiste pues en obtener el ciclo de histéresis para varias tensiones de alimentación a una frecuencia dada, a partir del ciclo de histéresis se obtiene la inducción máxima  $B_m$  y calculando el área de dicho ciclos se obtiene las pérdidas en el hierro correspondientes. En consecuencia tan solo se debe registrar el ciclo de histéresis correspondiente a una tensión de alimentación sinusoidal a la frecuencia dada, posteriormente ese ciclo es tratado para calcular el punto de la curva de pérdidas correspondiente.

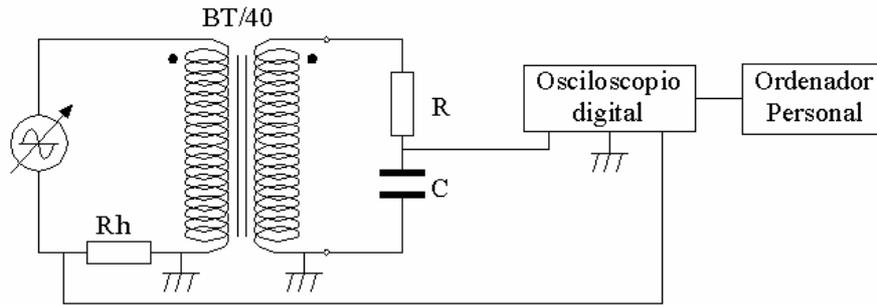
En la figura 10-6 se muestra el circuito realizado para este método. La forma de onda del campo  $H(t)$  se obtiene a partir de la caída de tensión  $U_R(t)$  en la resistencia en serie con el arrollamiento primario  $R_h$ . La ley de Ohm relaciona la intensidad  $I_1(t)$  con la caída de tensión en la resistencia:

$$I_1(t) = \frac{U_R(t)}{R_h} \quad (10.14)$$

Asumiendo ciertas las hipótesis de que el campo se distribuye uniformemente en el núcleo y que el arrollamiento cubre totalmente al núcleo, el teorema de Ampère se expresa como:

$$H(t)l = N_1 I(t) \Rightarrow H(t) = \frac{N_1}{l} \frac{U_R(t)}{R_h} \quad (10.15)$$

De esta forma se puede determinar el campo  $H(t)$  a partir de la caída de tensión en la resistencia.



**Figura 10-6.** Esquema del ensayo para determinar las pérdidas magnéticas totales a partir del área ciclo de histéresis

La inducción  $B(t)$  se obtiene a partir de la caída de tensión en el condensador del secundario. Por la ley de Faraday sabemos que la tensión en bornes del secundario  $u_2(t)$ , con  $N_2$  espiras, se puede expresar como:

$$u_2(t) = N_2 \frac{d\phi(t)}{dt} \quad (10.16)$$

Despejando para el flujo  $\phi(t)$ :

$$\phi(t) = \frac{1}{N_2} \int_0^t u_2(t) dt \quad (10.17)$$

Además, suponiendo que la resistencia  $R$  es mucho mayor que la reactancia del condensador  $C$ , la intensidad que circula por el secundario  $i_2(t)$  se puede expresar como:

$$i_2(t) \approx \frac{u_2(t)}{R} \quad (10.18)$$

Como es conocido, la tensión en bornes de un condensador es la integral de la intensidad que circula por él dividida por su capacidad, aplicando esto a nuestro caso:

$$u_C(t) = \frac{1}{C} \int_0^t i_2(t) dt \quad (10.19)$$

Sustituyendo la ecuación de la intensidad del secundario (10.18) en la ecuación de la tensión en bornes del condensador (10.19):

$$u_c(t) = \frac{1}{RC} \int_0^t u_2(t) dt \quad (10.20)$$

Si comparamos la ecuación de la tensión en el condensador (10.20) con la ecuación del flujo (10.17) se deduce una expresión que nos permite determinar el flujo en función de la tensión en el condensador y constantes conocidas:

$$\phi(t)N_2 = RCu_c(t) \quad (10.21)$$

Por tanto la inducción  $B(t)$  en la muestra:

$$B(t) = \frac{RC}{N_2S} u_c(t) \quad (10.22)$$

Donde  $S$  es la superficie transversal del núcleo de la muestra.

La resistencia del secundario  $R$  es de  $1M\Omega$  y la capacidad del condensador  $C$  es de  $1\mu F$ . La resistencia del primario tiene un valor nominal de  $0,48\Omega$ , pero como su valor es crítico para determinar el campo  $H(t)$ , el valor de  $R_h$  empleado en (10.15) se obtiene a partir de la lectura de un amperímetro  $I_R(t)$  de verdadero valor eficaz en serie con la resistencia y la lectura de tensión eficaz de  $U_R(t)$  dada por el osciloscopio digital.

$$R_h = \frac{U_R(t)}{I_R(t)} \quad (10.23)$$

Las señales de tensión en la resistencia del primario  $U_R(t)$  y la tensión en el condensador del secundario se muestrean mediante un osciloscopio digital que está conectado a un ordenador personal. Este osciloscopio genera un archivo ASCII con ambas señales, que posteriormente son procesadas para obtener la curva de histéresis  $B=f(H)$ , de esta curva se obtiene la inducción máxima a partir del punto máximo de la misma y las pérdidas aplicando la ecuación (10.13) previo cálculo del área descrita por la histéresis.

El sistema de alimentación del circuito de la figura 10-6 es el mismo que en el método basado en el vatímetro, mostrado en la figura 10-5.

Algunas de las señales obtenidas en este ensayo también se emplean para validar el modelo de Preisach dinámico (apartado 4.6).

### **10.3 Pérdidas por histéresis**

Las pérdidas por histéresis se obtienen por tres métodos diferentes:

- A partir del área descrita por las histéresis con el núcleo excitado por una señal cuasiestática.
- A partir de la ecuación de Steinmetz
- A partir del área descrita por los ciclos de histéresis determinados mediante el modelo de Preisach clásico.

De los tres métodos tan solo el primero puede ser considerado directamente experimental. A continuación se expone cada uno de los métodos.

#### **10.3.1 Experimentales (áreas de ciclos de histéresis cuasiestáticos)**

##### *10.3.1.1 Descripción del ensayo. Equipo.*

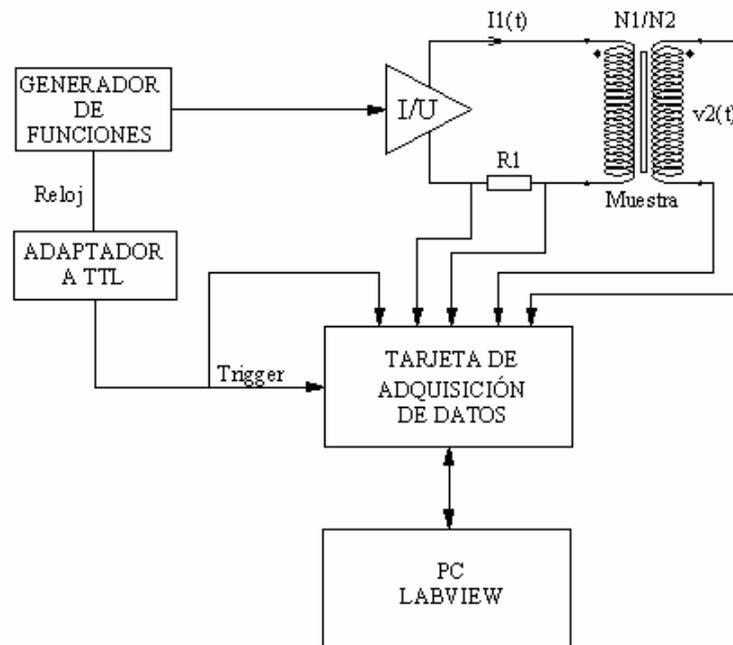
Este método, en su fundamento, es el mismo que el método para determinar las pérdidas totales mediante el área del ciclo de histéresis. Pero debido a que ahora la excitación es cuasiestática, el desarrollo es bastante diferente al expuesto en el apartado 10.2.2.

Se trata de obtener los ciclos de histéresis a una frecuencia tan baja que se puede considerar cuasiestática, esto es, los efectos de las corrientes inducidas son despreciables. En concreto, en nuestro ensayo se excitará al núcleo a una frecuencia  $f=0,15\text{Hz}$ .

El problema para emplear el ensayo expuesto en el apartado 10.2.2 es que mediante el sistema de alimentación (apartado 10.2.1.2) no se pueden alcanzar frecuencias tan pequeñas. Hemos de buscar por tanto una alternativa.

La alternativa está en emplear el equipo histeresisgráfico desarrollado para determinar las curvas inversas de primer orden con objeto de caracterizar el modelo de Preisach. En la figura 10-7 se muestra el esquema correspondiente. El equipo y su funcionamiento es el mismo que el expuesto en el capítulo 7, salvo que aquí no es necesario recortar ni tratar la

señal del generador de funciones, esta se convierte en intensidad tal y como la genera el amplificador de transconductancia.



**Figura 10-7.** Esquema del ensayo para determinar las pérdidas por histéresis a partir del área de ciclos de histéresis cuasiestáticos experimentales

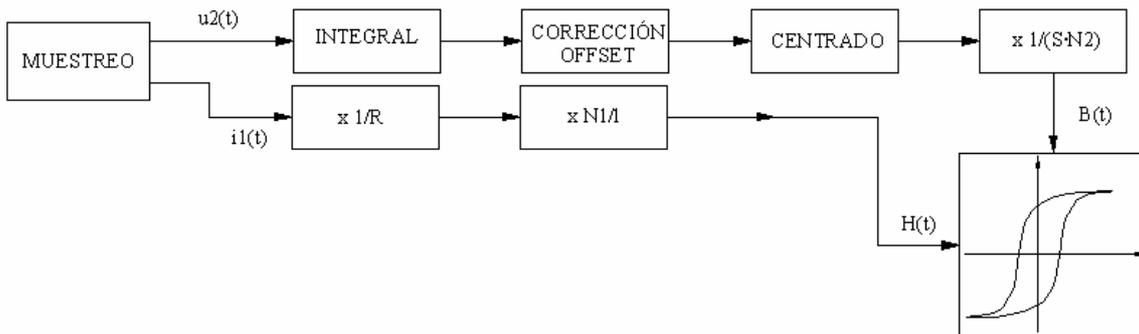
Como que la frecuencia es casi nula, la reactancia del primario es muy pequeña y este se comporta prácticamente como una resistencia, por lo que es indiferente que la excitación sea por corriente (como ahora mediante el amplificador de transconductancia) o por tensión (como en los ensayos posteriores). Además a frecuencias tan pequeñas la situación es muy diferente. En los ensayos a frecuencias cercanas a la industrial, para saturar el núcleo la tensión debía ser alta, pero con intensidad pequeña. Ahora, la situación es contraria, como que la frecuencia es baja, la fuerza electromotriz es también más pequeña, y menor la tensión de alimentación, pero mucho mayor la intensidad necesaria para saturar el núcleo.

### 10.3.1.2 Procedimiento. Obtención experimental de los ciclos de histéresis.

Se emplea la tarjeta de adquisición de datos PCL-1200 de National Instruments para muestrear las señales de tensión en la resistencia del amplificador de transconductancia y la tensión en el secundario del transformador. La primera es proporcional a la intensidad que circula por el primario, y por tanto al campo  $H(t)$ , la integral de la segunda es proporcional a la inducción  $B(t)$ .

A diferencia de la señal triangular en el caso de las curvas inversas de primer orden (capítulo 6), el generador de funciones genera una tensión sinusoidal que es convertida a intensidad por el amplificador de transconductancia., la intensidad de salida de dicho amplificador es la excitación del transformador. Como ya se ha dicho anteriormente, la tensión que cae en la resistencia del amplificador es proporcional a la intensidad de salida, por lo que muestreando dicha señal se puede obtener la forma de onda del campo  $H(t)$ . La tensión del secundario también es muestreada, para obtener la inducción  $B(t)$ . Para sincronizar el muestreo de las señales el generador de funciones genera una señal de reloj (*clock*) que se emplea como entrada de disparo (*trigger*) de la tarjeta de adquisición de datos. Se intercala un circuito entre la salida de *clock* y la entrada de *trigger* para adaptar señal de reloj de generador a TTL.

La señal de *clock* se muestrea para conocer el número de muestras que ocupa un periodo de la señal y así extraer las muestras de un único periodo.



**Figura 10-8.** Proceso de tratamiento de la señal para obtener la histéresis

Una vez las señales han sido muestreadas por la tarjeta son tratadas para convertirlas en  $H(t)$  y  $B(t)$ . En la figura 10-8 se resume el proceso de tratamiento de las señales. Para obtener la forma de onda del campo tan solo se debe convertir la tensión en intensidad multiplicando por la resistencia del amplificador, y aplicar el teorema de Ampère para obtener el campo  $H(t)$  -ecuaciones (10.14) y (10.15)-. Para obtener la inducción  $B(t)$  se requiere un procedimiento más laborioso. Se realiza la integral de la tensión del secundario, la integral resultante es sometida a dos tratamientos posteriores, el primero para corregir el offset y el segundo para centrar el ciclo de histéresis en (0,0). Estos tratamientos ya se expusieron en su momento en el capítulo 6 de este mismo trabajo.

### 10.3.1.3 Tratamiento de los ciclos de histéresis experimentales.

Una vez se obtienen las señales de  $B(t)$  y  $H(t)$  éstas se graban en un archivo ASCII para su posterior uso o tratamiento. De hecho aún no podemos dar por definitivo el trazado por el ciclo de histéresis, estos ciclos requieren de un procesamiento posterior para poder emplearlas. Este procesamiento consiste en:

- Eliminación del *offset* horizontal del ciclo de histéresis
- Suavizado de la curva de histéresis

El programa que controla la adquisición de datos y determina las señales de  $B(t)$  y  $H(t)$  corrige el *offset* de la primera, pero no de la segunda. El efecto del *offset* en la señal de  $H(t)$  es que el ciclo de histéresis aparece desplazado horizontalmente. La corrección del *offset* se realiza forzando a que el campo coercitivo de la rama ascendente y el campo coercitivo de la rama descendente estén equidistantes respecto al eje OY.

El centrado de la histéresis se realiza restando un campo  $\Delta H$  a todos sus puntos. Sea  $H_{c1}$  el campo coercitivo de la rama descendente, el cual siempre es negativo; y  $H_{c2}$  el campo coercitivo de la rama ascendente, que siempre será positivo. El campo  $\Delta H$  se calcula mediante:

$$\Delta H = H_{c1} + \frac{1}{2}(H_{c2} - |H_{c1}|) \quad (10.24)$$

La señal de  $H(t)$  presenta un cierto nivel de rizado que compromete el cálculo del área del ciclo de histéresis. Como ya se comentó en el capítulo 6, la tarjeta empleada solamente posee una ganancia para todos los canales. Por seguridad, esta ganancia se debe ajustar para el canal con una señal de mayor tensión. En nuestro caso, esta señal es la tensión del secundario  $u_2(t)$ . Esto implica que para algunos ciclos el muestreo de  $i_l(t)$  se haga a una ganancia demasiado pequeña, por ello la señal muestreada aparece con unos escalones que se traducen en un cierto rizado en la curva de histéresis. Para paliar este rizado se aplica un algoritmo de suavizado basado en una media móvil a la señal de  $H(t)$ .

El control de la tarjeta de adquisición de datos y el procesamiento posterior de la señal se programó mediante el lenguaje de programación G de LabVIEW 5.1. Los tratamientos posteriores para determinar las pérdidas se realizaron con Matlab 6.1.

#### 10.3.1.4 Cálculo de las pérdidas por histéresis.

Con los ciclos de histéresis determinados, las pérdidas por histéresis se obtienen a partir de las áreas de dicho ciclos. La deducción de la ecuación a aplicar para determinar las pérdidas por histéresis es análoga a la correspondiente a las pérdidas totales, y ya se expuso en el capítulo 2. La energía disipada por pérdidas de histéresis es el área descrita por la histéresis multiplicada por el volumen de la muestra:

$$E_h = Va_h \quad (10.25)$$

La potencia es la energía por unidad de tiempo, si el ciclo se repite  $f$  veces por segundo, la potencia disipada es:

$$P_h = fVa_h \quad (10.26)$$

#### 10.3.2 Mediante la ecuación de Steinmetz

Se trata de aplicar la ecuación semiempírica de Steinmetz para determinar las pérdidas por histéresis:

$$P_h = \eta_h f B_m^\alpha \quad (10.27)$$

Donde se puede considerar que  $\alpha=1,8$ . Más adelante, cuando se realice el ajuste de las pérdidas por histéresis experimentales, se comprobará que ésta es una buena elección para este material en este rango de inducciones.

Para poder aplicar la ecuación (10.27) se debe determinar el coeficiente de Steinmetz  $\eta_h$ . Para ello se empelan las curvas de pérdidas totales a varias frecuencias obtenidas anteriormente, ya sea a partir de las áreas o mediante el vatímetro de factor de potencia bajo.

La ecuación de Steinmetz para las pérdidas por corrientes inducidas es:

$$P_h = \eta_f (f B_m \tau)^2 \quad (10.28)$$

Por tanto las pérdidas totales despreciando las pérdidas de exceso:

$$P_{Fe} = \eta_h f B_m^2 + \eta_f (f B_m \tau)^2 \quad (10.29)$$

Sea  $P_{Fe,1}$  las pérdidas totales a una frecuencia  $f_1$ , y  $P_{Fe,2}$  las pérdidas totales para una frecuencia  $f_2$ . Aplicando (10.29) para ambas pérdidas:

$$\left. \begin{aligned} P_{Fe,1} &= \eta_h f_1 B_m^2 + \eta_f (f_1 B_m \tau)^2 \\ P_{Fe,2} &= \eta_h f_2 B_m^2 + \eta_f (f_2 B_m \tau)^2 \end{aligned} \right\} \quad (10.30)$$

Donde las únicas incógnitas son  $\eta_h$  y  $\eta_f$ . En consecuencia (10.30) es un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas, que se puede resolver si se conoce la curva de pérdidas  $P_{Fe}=f(B_m)$  para varias frecuencias.

Resolviendo el sistema (10.30) para los coeficientes de Steinmetz, se obtiene:

$$\eta_f = \frac{1}{(f_2 - f_1) \tau^2} \left( \frac{P_{Fe,2}}{f_2 B_m^2} - \frac{P_{Fe,1}}{f_1 B_m^2} \right) \quad (10.31)$$

$$\eta_h = \frac{P_{Fe,1}}{f_1 B_m^2} - \eta_f f_1 \tau^2 \quad (10.32)$$

Con las cuales se obtiene el coeficiente  $\eta_h=f(B_m)$ . En realidad el valor de  $\eta_h(B_m)$  depende del par de frecuencias empleadas para resolver el sistema de ecuaciones. Esto es, no se obtiene el mismo  $\eta_h(B_m)$  si empleamos, por ejemplo, las pérdidas totales correspondientes a 70Hz y 50Hz que si empleamos las correspondientes a 70Hz y 60Hz (ver las curvas presentadas en el apartado correspondiente a resultados en este mismo capítulo). Esto hemos de analizarlo con cuidado. En primer lugar la diferencia en el valor de  $\eta_h(B_m)$  obtenida no es excesiva, pero además esta diferencia no tiene ningún sentido físico, por lo que lo podemos achacar a errores inherentes a la determinación experimental de las curvas de pérdidas totales. En consecuencia se adopta como valor definitivo el correspondiente a la media de los valores del coeficiente  $\eta_h$  obtenidos con los diversos pares de curvas empleadas.

Otra dependencia a analizar es la variación del coeficiente de Steinmetz con la inducción máxima  $B_m$ . Como se aprecia en las curvas, a partir de cierto valor de inducción máxima, el valor del coeficiente de Steinmetz  $\eta_h$  fluctúa respecto a un valor central, incluso después de haber efectuado la media de los diversos coeficientes obtenidos para las diversos pares de

curvas de pérdidas. Esto nos indica que se puede realizar una segunda media del coeficiente. En vez de esto, hemos conservado los valores  $\eta_h(B_m)$ , aplicado la ecuación de Steinmetz (10.25) y posteriormente ajustado a un curva potencial mediante el método de los mínimos cuadrados. Estas funciones  $P_h = \alpha \cdot B^2$  se exponen en el apartado de resultados.

### **10.3.3 Mediante el modelo de Preisach clásico**

Como se ha visto en la validación del modelo de Preisach clásico, si éste es caracterizado mediante el método de Mayergoyz, es capaz de calcular los ciclos de histéresis mayores con una precisión que podemos catalogar como excelente. En consecuencia, podemos considerar una alternativa válida a la ecuación de Steinmetz el empleo del modelo de Preisach clásico para calcular las pérdidas por histéresis.

Mediante el modelo de Preisach clásico se calcula un conjunto de ciclos de histéresis cuasiestáticos. Posteriormente se calcula el área descrita por cada ciclo de histéresis y su inducción máxima.

La forma de los historiales de campo  $H(t)$  introducidos como entrada al modelo no es importante, no olvidemos que el modelo clásico es de naturaleza estática, y por tanto no es capaz de distinguir ni la forma de onda ni la frecuencia, tan solo los puntos máximos y mínimos locales. Se han empleado funciones triangulares de diferente valor de pico.

En cambio un parámetro que si es crítico es la discretización del plano de Preisach, sobretodo para los ciclos más pequeños. Esta discretización tiene que ser muy fina de lo contrario los ciclos más pequeños tienden a salir poco definidos.

Las pérdidas por histéresis se calculan a partir del área de la histéresis mediante las ecuaciones (10.25) y (10.26).

### **10.4 Pérdidas por corrientes inducidas.**

Las pérdidas por corrientes inducidas no podemos determinarlas directamente mediante métodos experimentales con el equipo disponible en nuestro laboratorio. Recurrimos por ello a la ecuación de pérdidas por corrientes inducidas demostrada en el capítulo 2:

$$P_c = \frac{\sigma\tau^2}{12} f \int_0^T \left( \frac{dB(t)}{dt} \right)^2 dt \quad (10.33)$$

Aplicando esta ecuación determinamos  $P_c = f(B_m)$ .

### 10.5 Pérdidas de exceso

Las pérdidas de exceso tampoco podemos determinarlas experimentalmente, las calculamos a partir de las demás pérdidas:

$$P_e(B_m) = P_{Fe}(B_m) - P_h(B_m) - P_c(B_m) \quad (10.34)$$

Todas las pérdidas que intervienen en la ecuación (10.34) las hemos determinado previamente. Ahora hemos de elegir cuales son las pérdidas que empleamos entre los varios métodos seguidos.

Para las pérdidas totales  $p_{Fe}$  empleamos las determinadas mediante el método de los vatímetros. Como se muestra en el siguiente apartado de resultados, en concreto en la figuras 10-15 y 10-16 en las que se comparan las curvas de pérdidas obtenidas mediante el método del vatímetro con las obtenidas mediante el método de las áreas, ambos métodos ofrecen resultados muy similares. No obstante, el método del vatímetro está normalizado, realizado con elementos expresamente diseñados para determinar las pérdidas e intervienen menos elementos que aporten un error no controlado (resistencias y condensador del método de las áreas). Es por ello que empleamos las curvas obtenidas por dicho método.

Respecto a las pérdidas por histéresis, la elección es sencillo, el método de las áreas es el método experimental más directo. Los coeficientes de la ecuación de Steinmetz se han determinado a partir de datos experimentales, pero no es método tan directo como el anterior, y en el confluyen varias fuentes de error, como ya comentaremos más adelante. La aplicación del modelo de Preisach es totalmente analítica.

Las pérdidas por corrientes inducidas no se pudieron determinar experimentalmente, se emplean las determinadas mediante la ecuación (1.33).

Para calcular las pérdidas de exceso mediante la ecuación (1.34) las pérdidas que intervienen se ajustan mediante el método de los mínimos cuadrados. Para ello se empleó el programa de libre distribución *WinCurveFit 1.1.5* desarrollado por *Kevin Raner Software*. Todas las pérdidas se ajustaron a una ecuación del tipo potencial:

$$p = a + b \cdot (B_m)^c \quad (10.35)$$

Donde  $p$  son las pérdidas específicas en W/kg,  $B_m$  la inducción de pico en T;  $a$ ,  $b$  y  $c$  con coeficientes a determinar por el método de los elementos finitos.

En el ajuste se empleó el algoritmo de Davidson-Fletcher-Powell, que es una solución de compromiso entre rapidez y estabilidad. El programa además de ajustar, también calcula la suma del cuadrado de los errores  $\zeta$  y el coeficiente de correlación  $R^2$ . La suma del cuadrado de los errores, para la función (10.35) se define por la siguiente expresión:

$$\zeta = \sum \left[ y_i - (a + bx_i^c) \right]^2 \quad (10.36)$$

Donde  $x_i$  e  $y_i$  es el dato  $i$ -ésimo a ajustar. Si el ajuste fuese perfecto  $\zeta=0$ . El otro parámetro de mérito es el coeficiente de correlación que se define como:

$$R^2 = 1 - \frac{\zeta}{n \sum y_i^2 - (\sum y_i)^2} \quad (10.37)$$

Donde  $n$  es el número de puntos a ajustar. Un ajuste perfecto sería aquel para el cual  $R^2=1$ .

## 10.6 Resultados

A continuación se exponen los resultados obtenidos para los diversos tipos de pérdidas con los métodos expuestos. También se incluyen algunas gráficas de parámetros que pueden resultar interesantes para el análisis de los resultados.

### 10.6.1 Pérdidas magnéticas totales

#### 10.6.1.1 Mediante vatímetro

En la figura 10-9 se muestran las curvas de pérdidas totales obtenidas experimentalmente mediante el método del vatímetro, las curvas se han obtenido para frecuencias de 40Hz, 50Hz, 60Hz y 70Hz.

También hemos incluido una curva del factor de forma  $\xi$  de la tensión del secundario del transformador en función de la tensión eficaz de alimentación, para cada una de las frecuencias de trabajo. Un factor de forma de 1,1 nos indica una señal sinusoidal, este parámetro nos indica cuan alejada está la señal de la tensión del secundario del transformador de una señal sinusoidal, por tanto la validez de la ecuación (10.3) para determinar la inducción máxima a partir de la lectura del voltímetro de flujo. Esta gráfica se muestra en la figura 10-10.

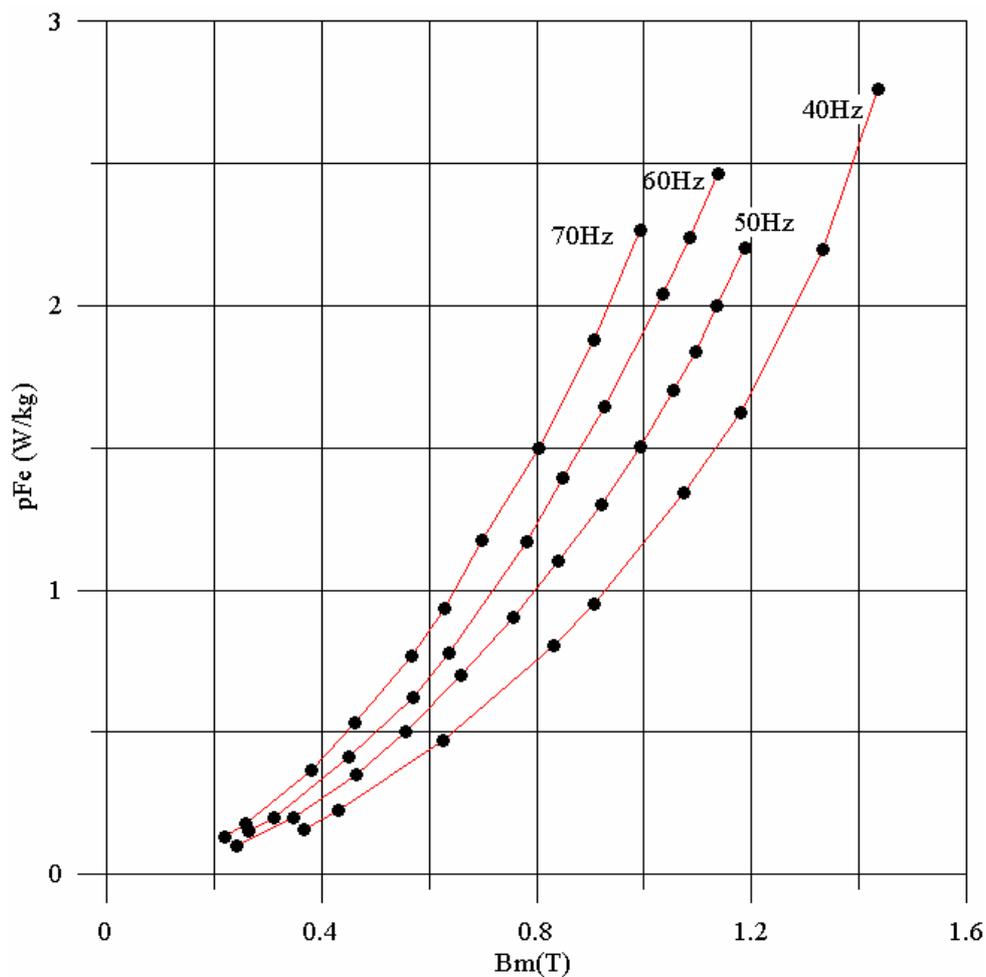
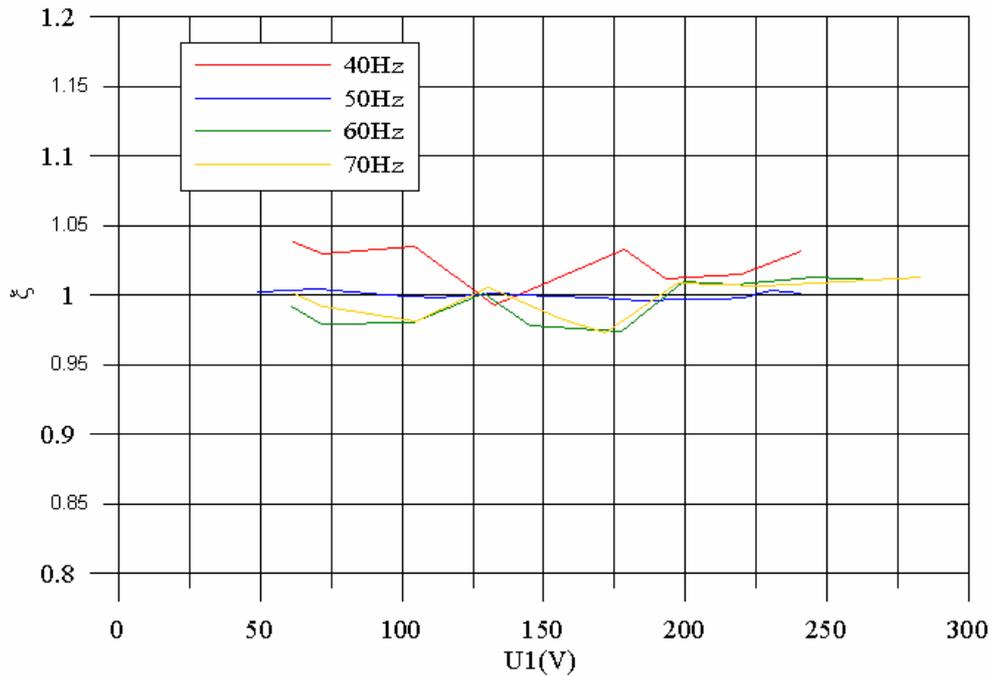


Figura 10-9. Pérdidas magnéticas totales determinadas mediante vatímetro



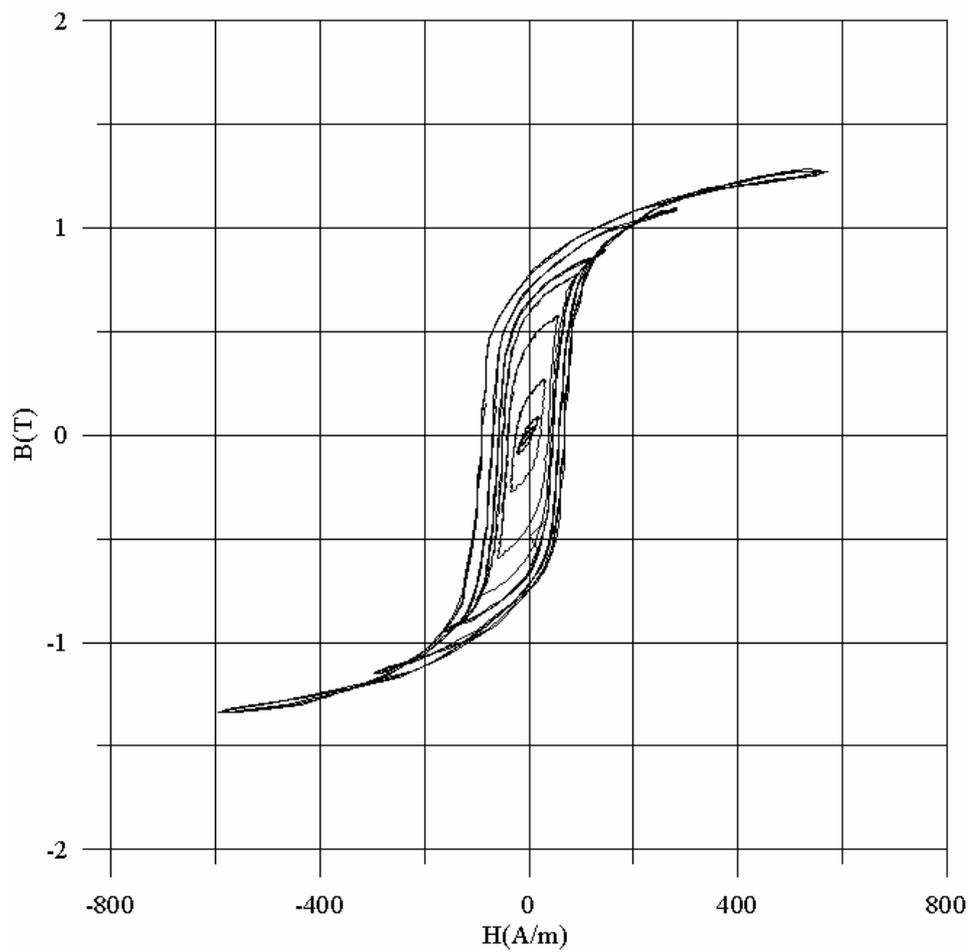
**Figura 10-10.** Factor de forma en la determinación de las pérdidas totales mediante vatímetro

#### 10.6.1.2 Mediante el área del ciclo de histéresis

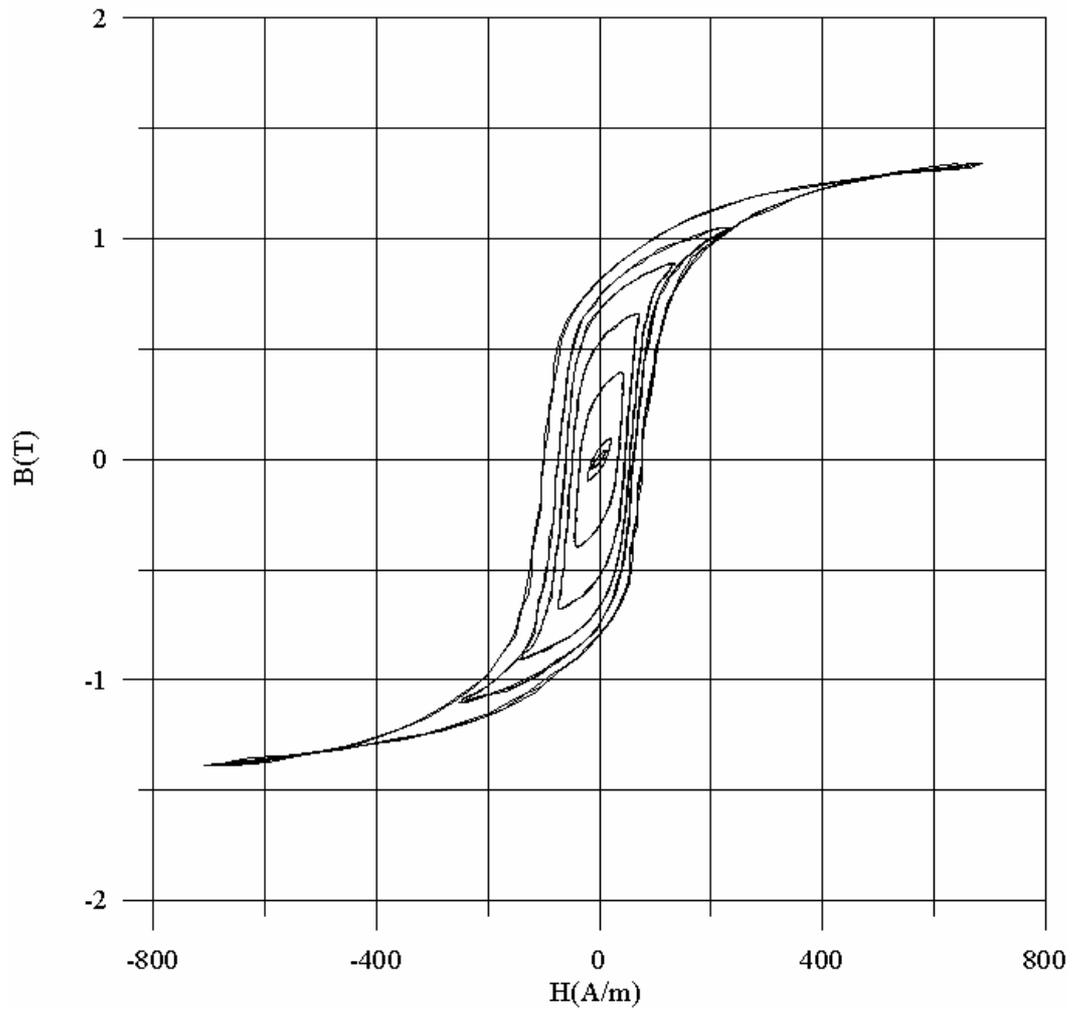
En las figuras 10-11, 10-12 y 10-13 se muestran los diversos ciclos de histéresis para las frecuencias de 30Hz, 50Hz y 70Hz respectivamente. Las curvas de pérdidas a las frecuencias anteriores se hallan en la figura 10-14.

#### 10.6.1.3 Comparativa de métodos

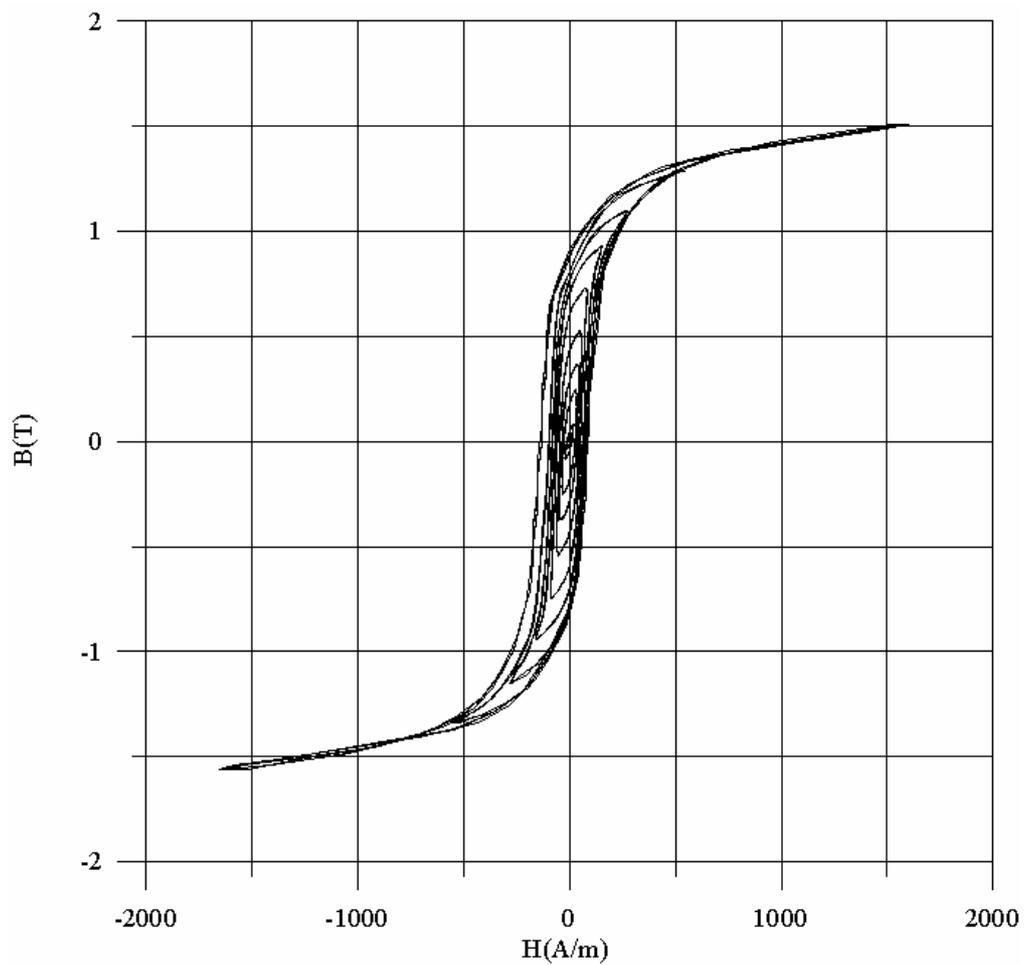
En la figura 10-15 se compara la curva de pérdidas a 50Hz obtenida mediante el vatímetro con la obtenida a partir del ciclo de histéresis. En la figura 10-16 se comparan las curvas de pérdidas a 70Hz.



*Figura 10-11. Curvas de histéresis a 30Hz para determinar las pérdidas totales*



*Figura 10-12. Curvas de histéresis a 50Hz para determinar las pérdidas totales*



**Figura 10-13.** Curvas de histéresis a 70Hz para obtener las pérdidas en el hierro

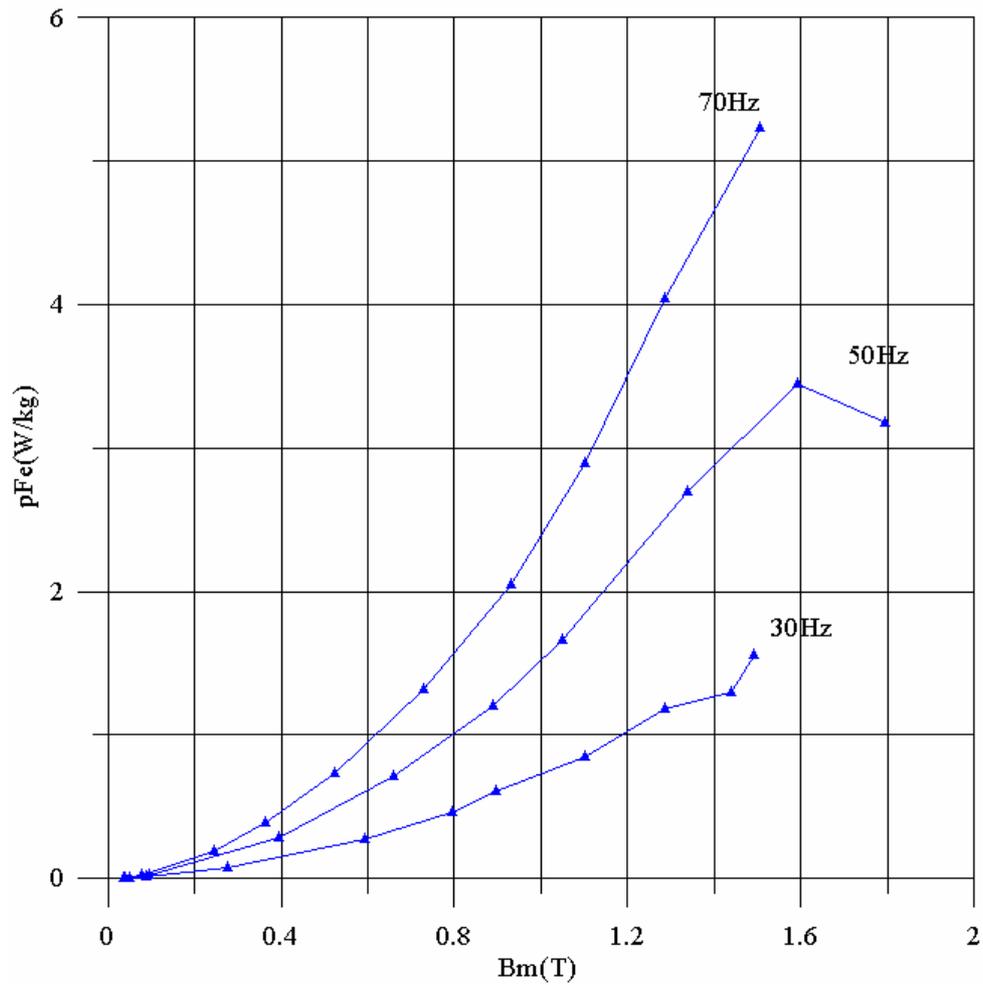
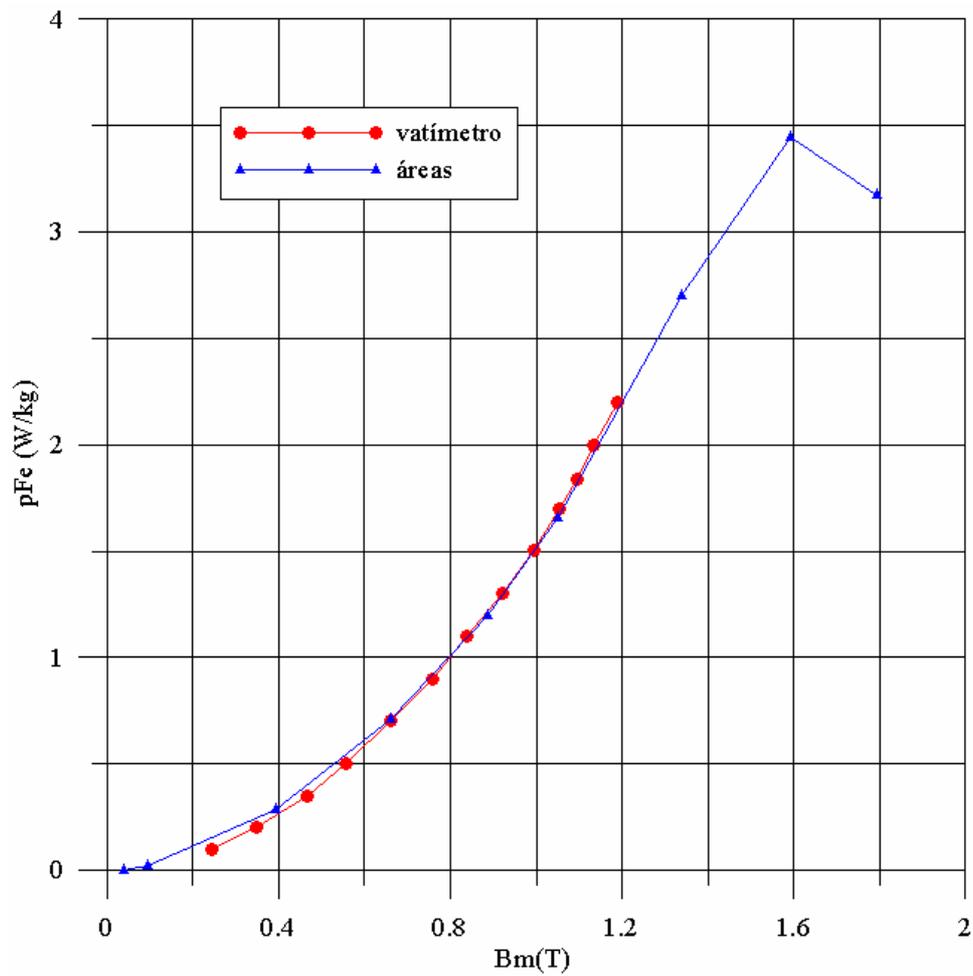
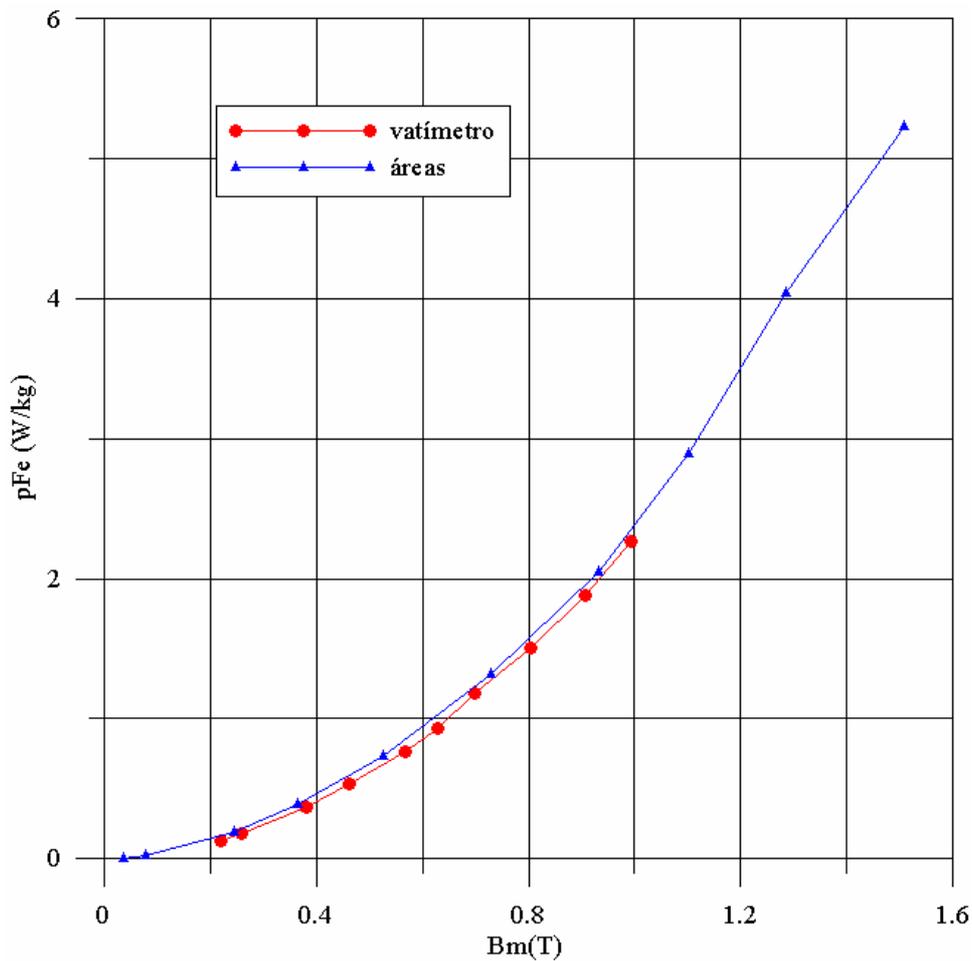


Figura 10-14. Pérdidas magnéticas totales determinadas mediante las áreas de los ciclos de histéresis



*Figura 10-15 Comparación entre las pérdidas totales a 50Hz obtenidas mediante el vatímetro y las obtenidas mediante el área de ciclos de histéresis*



**Figura 10-16** Comparación entre las pérdidas totales a 70Hz obtenidas mediante el vatímetro y las obtenidas mediante el área de ciclos de histéresis

## 10.6.2 Pérdidas por histéresis

### 10.6.2.1 A partir del área ciclo de histéresis cuasiestático obtenido experimentalmente

En la figura 10-17 se muestra el conjunto de ciclos de histéresis a partir de los cuales se ha determinado las pérdidas por histéresis. La curva de pérdidas se puede encontrar en la figura 10-18.

### 10.6.2.2 Mediante la ecuación de Steinmetz

La gráfica del coeficiente de Steinmetz, calculado a partir de las curvas de pérdidas totales obtenidas mediante el vatímetro, en función de la inducción máxima se muestra en la figura

10-19. En dicha figura se han representado los coeficientes obtenidos para cada par de curvas probado:

- Curva 1: 70Hz-60Hz
- Curva 2: 70Hz-50Hz
- Curva 3: 70Hz-40Hz
- Curva 4: 60Hz-50Hz
- Curva 5: 60Hz-40Hz
- Curva 6: 50Hz-50Hz

Para los coeficientes de Steinmetz obtenidos a partir de las curvas de pérdidas totales determinadas por las áreas de las histéresis se incluye la figura 10-20. En este caso los pares de frecuencias son:

- Curva 1: 70Hz-50Hz
- Curva 2: 50Hz-30Hz
- Curva 3: 30Hz-70Hz

En la figura 10-21 se comparan el coeficiente de Steinmetz medio obtenido a partir de las curvas de pérdidas totales determinadas mediante el vatímetro con el obtenido a partir de las áreas de histéresis.

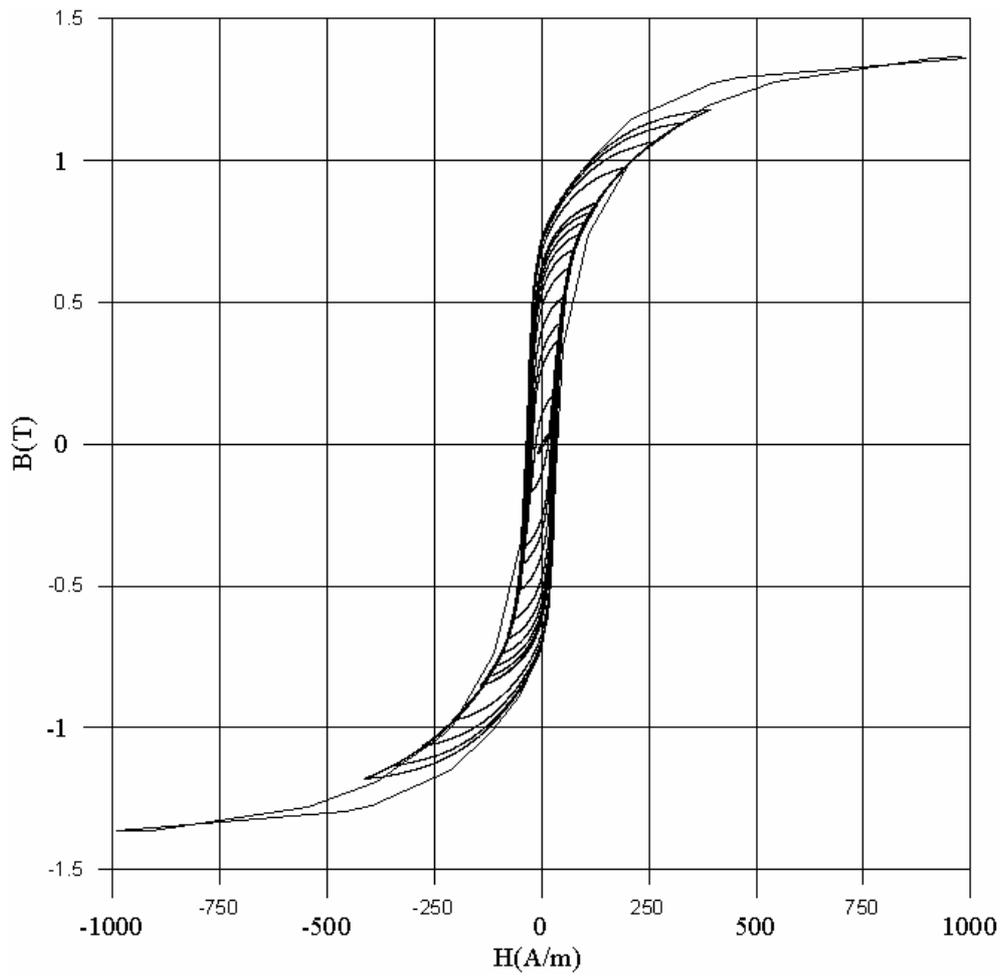
Una vez analizado el coeficiente de Steinmetz, en la figura 10-22 se exponen las curvas de pérdidas por histéresis obtenidas.

*10.6.2.3 A partir del área del ciclo de histéresis cuasiestático obtenido mediante el modelo de Preisach clásico.*

En la figura 10-23 se muestran los ciclos de histéresis calculados mediante el modelo de Preisach clásico, las curvas de pérdidas por histéresis obtenidas se muestran en la figura 10-24.

*10.6.2.4 Comparativa de métodos*

En la figura 10-25 se comparan las curvas de pérdidas por histéresis obtenidas por los tres métodos.



**Figura 10-17.** Curvas de histéresis experimentales, obtenidas con el equipo histeresisgráfico, a  $f=0,15\text{Hz}$  (cuasiestáticas)

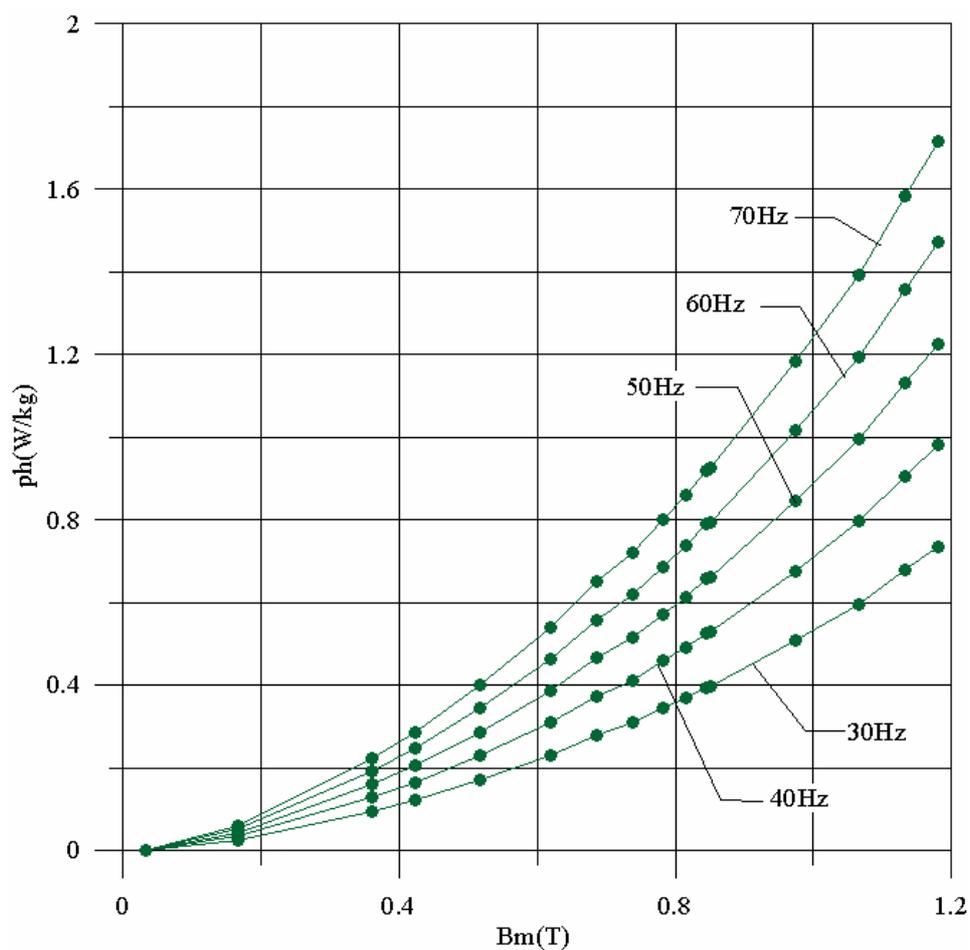
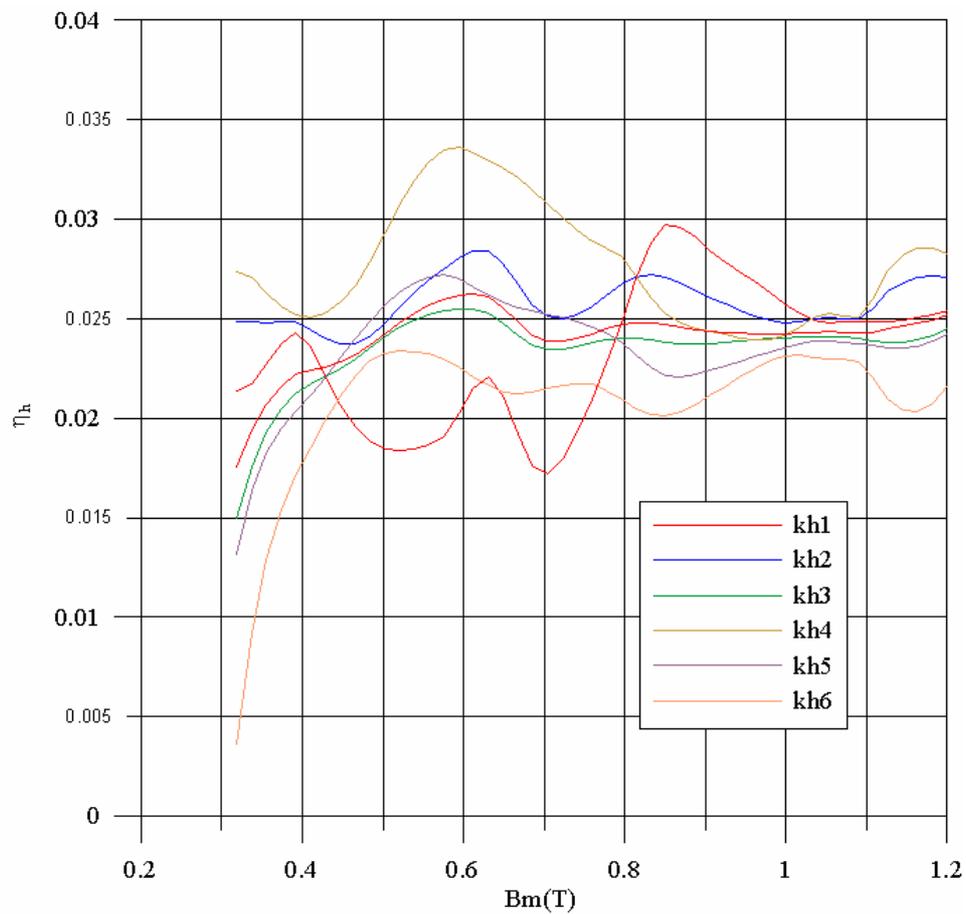


Figura 10-18. Pérdidas por histéresis experimentales obtenidas mediante el método de las áreas a partir de los ciclos de histéresis cuasiestáticos.



**Figura 10-19.** Coeficientes de Steinmetz obtenidos a partir de las curvas de pérdida determinadas mediante el vatímetro

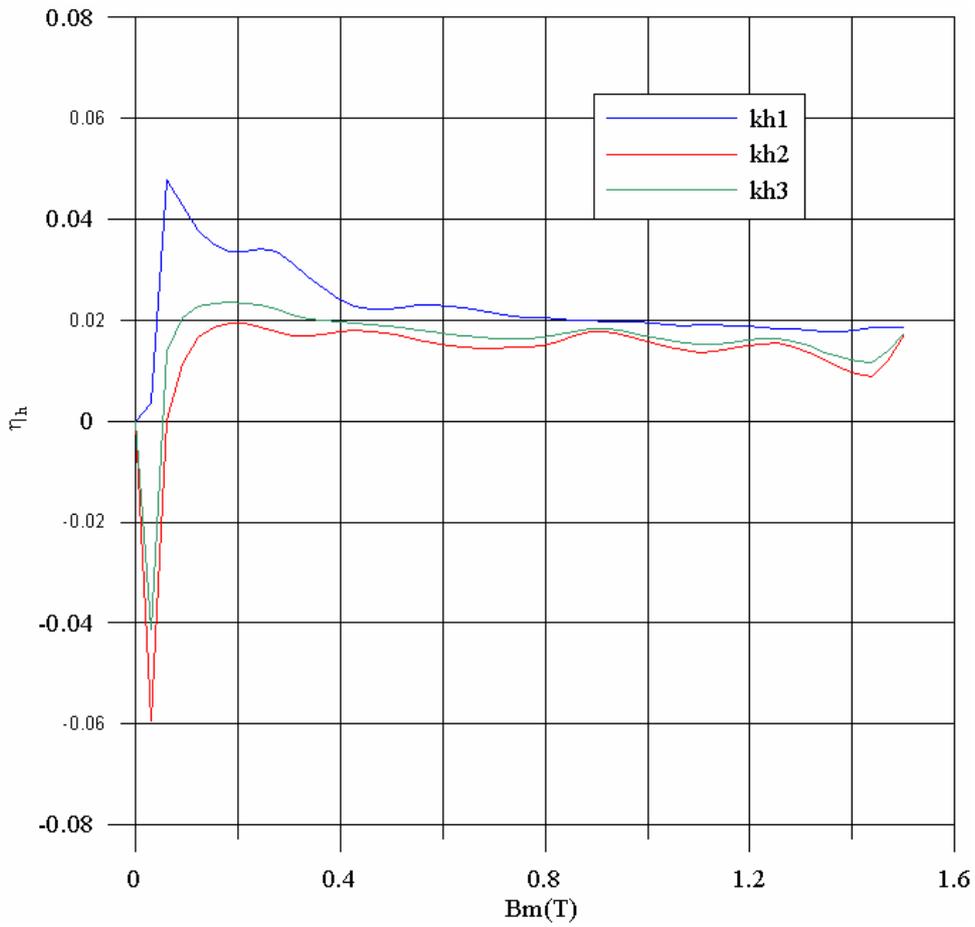


Figura 10-20. Coeficientes de Steinmetz obtenidos a partir de las curvas de pérdidas determinadas mediante el área de los ciclos de histéresis

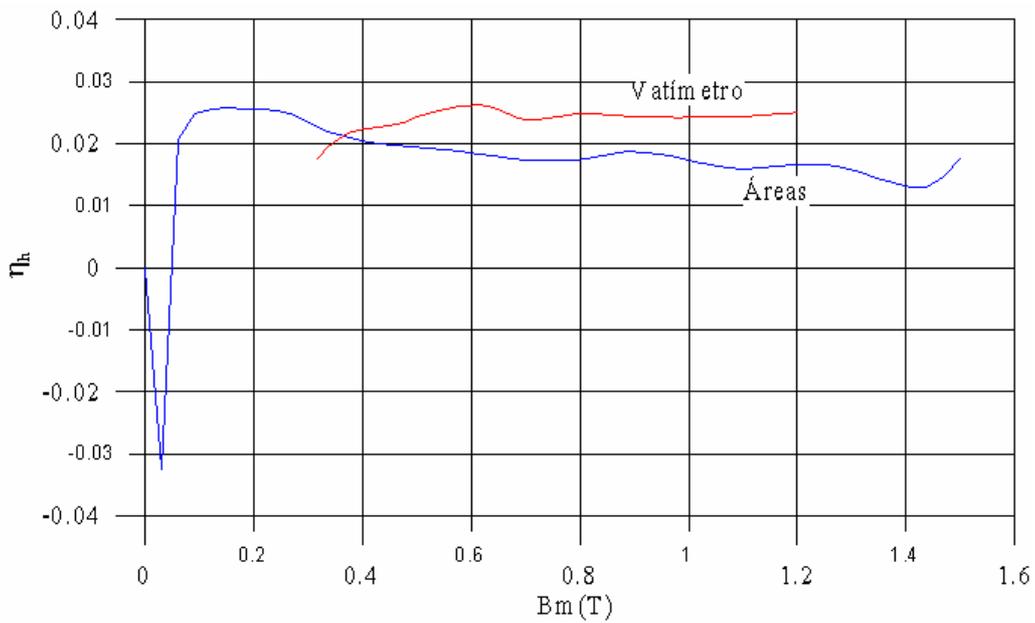
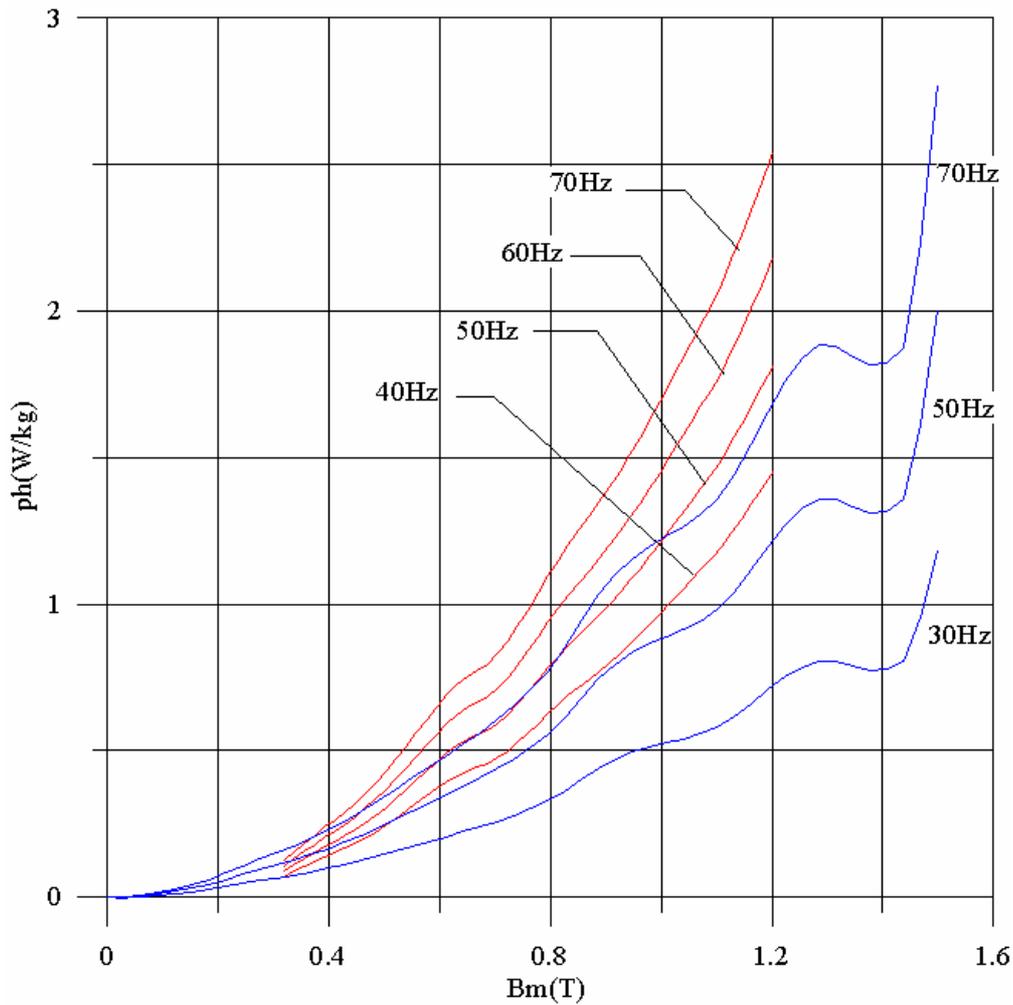
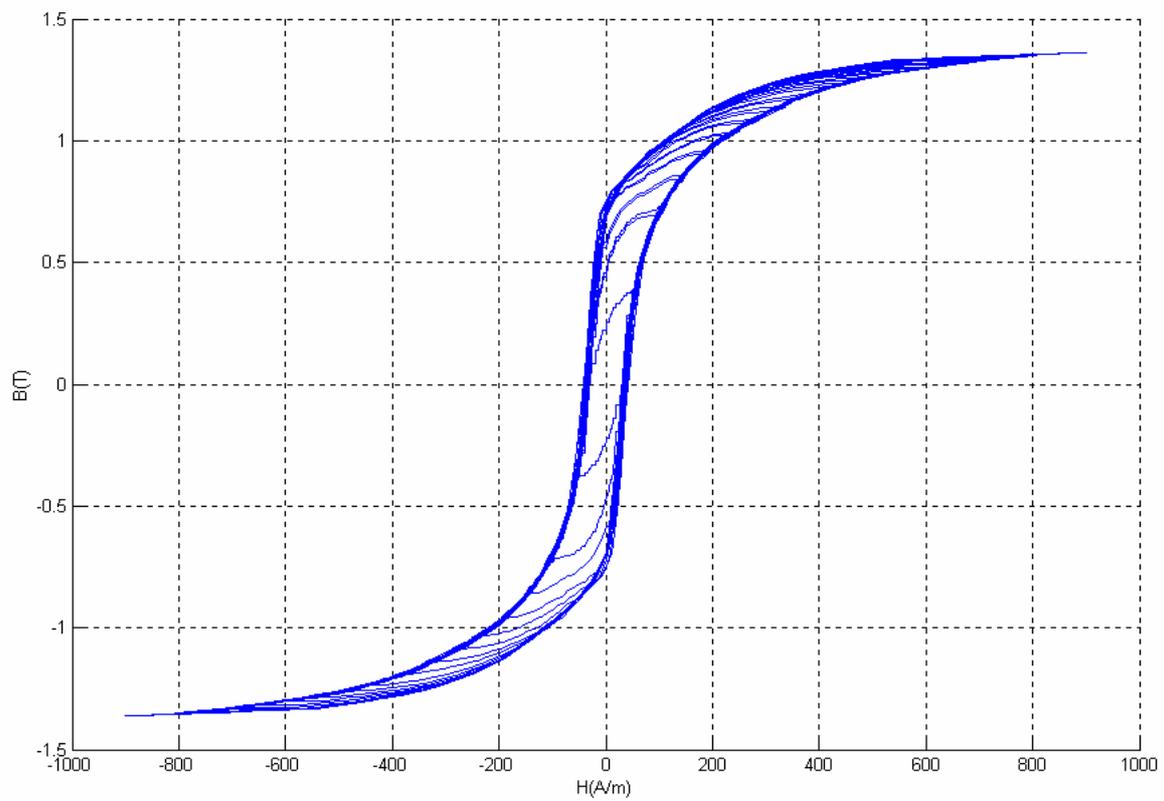


Figura 10-21. Comparativa de coeficientes de Steinmetz medios



**Figura 10-22.** Pérdidas de histéresis calculadas mediante la ecuación de Steinmetz. Las curvas azules se obtuvieron con los coeficientes de Steinmetz calculados a partir de pares de curvas de pérdidas calculadas a partir del área del ciclo de histéresis. En las curvas rojas el coeficiente de Steinmetz se obtuvo a partir de pares de curvas de pérdidas determinadas mediante un vatímetro



*Figura 10-23. Conjunto de curvas cuasiestáticas calculadas por el modelo de Preisach clásico*

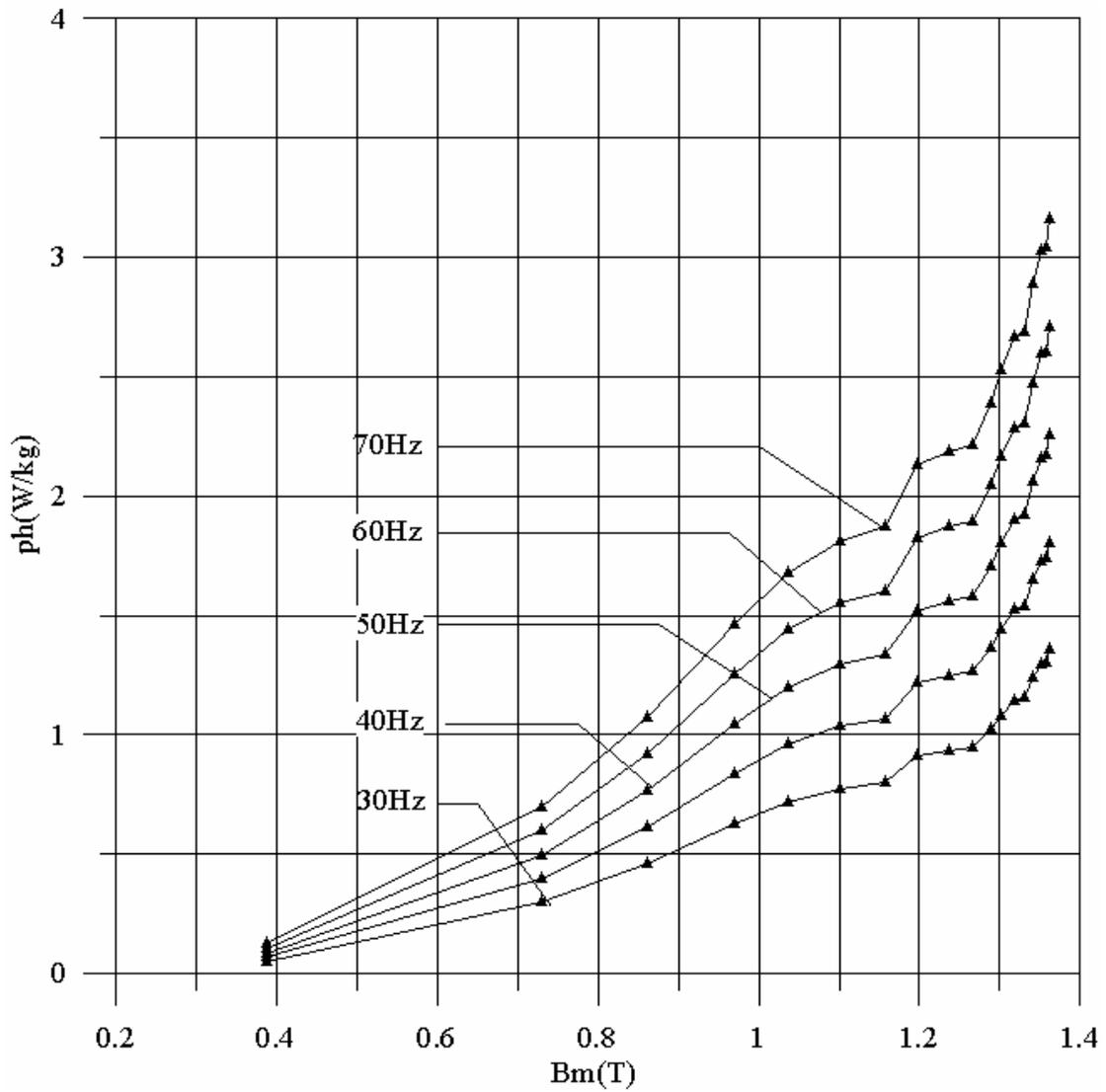
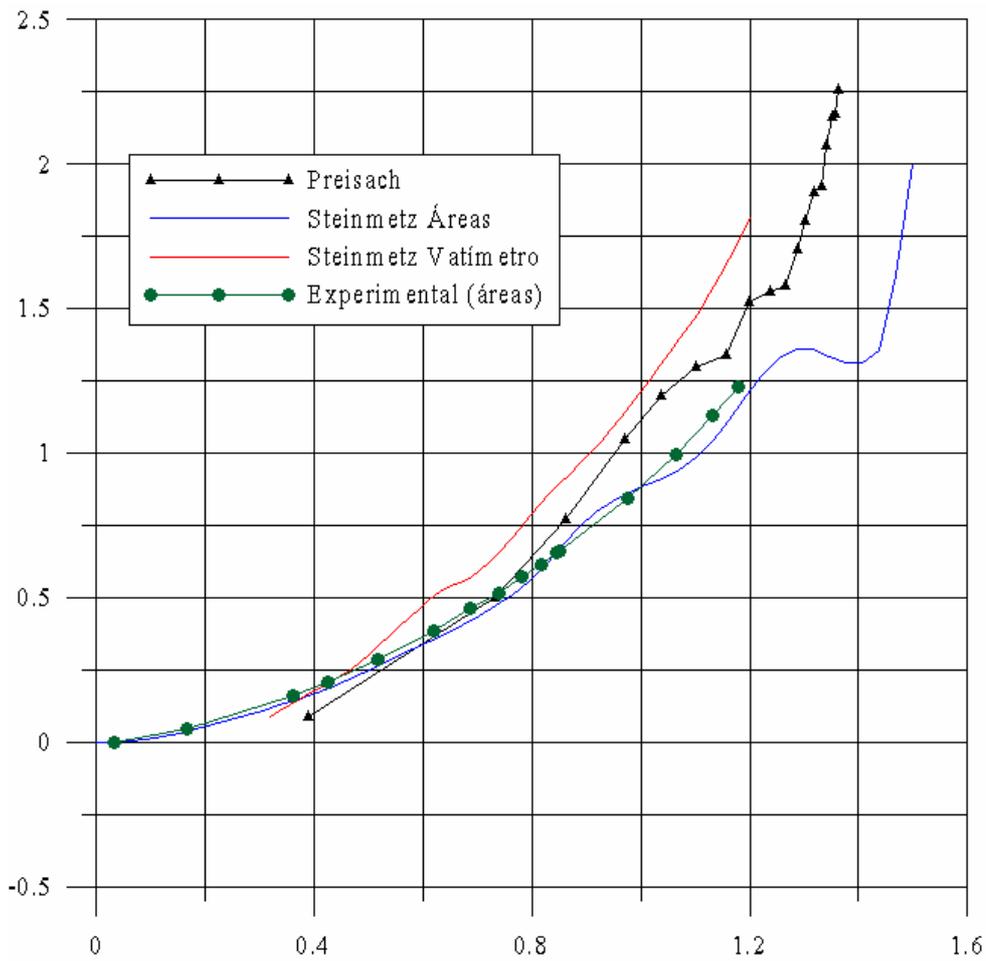
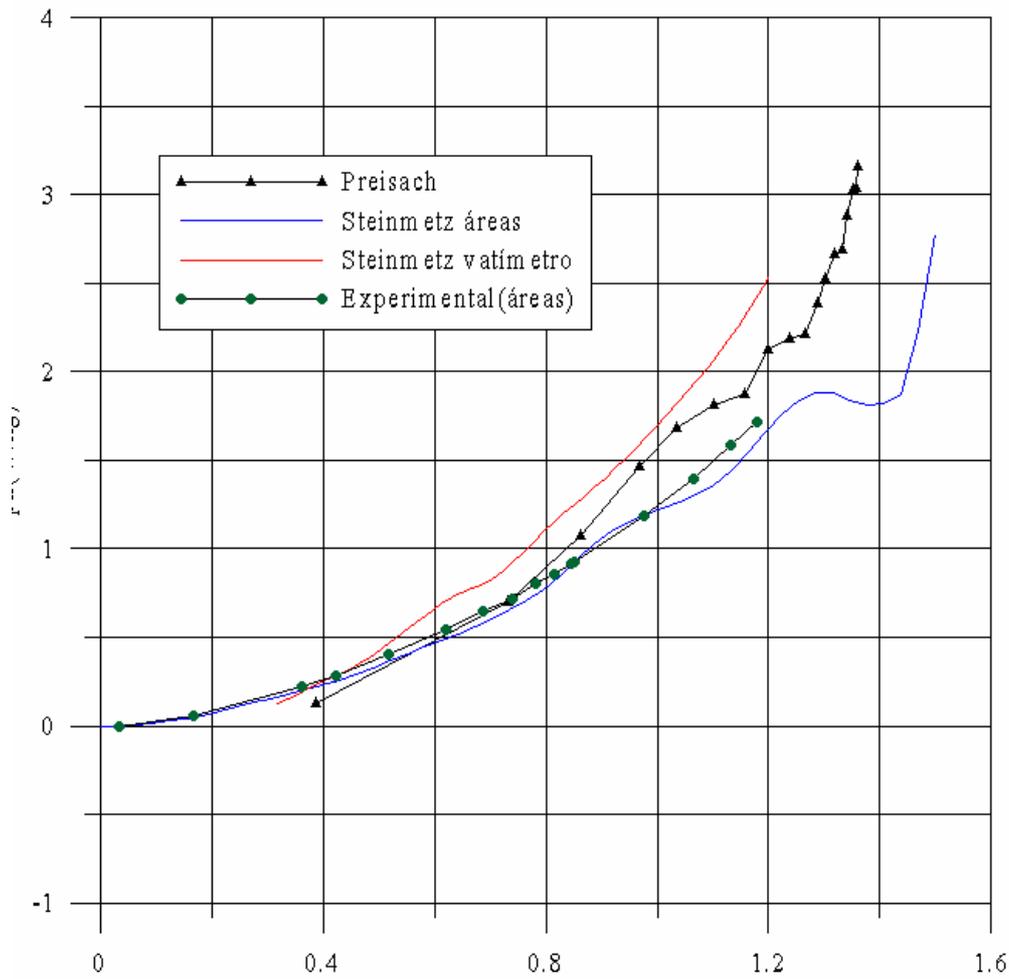


Figura 10-24. Curvas de pérdidas por histéresis calculadas a partir del modelo de Preisach clásico



**Figura 10-25.** Comparación de las pérdidas por histéresis a 50Hz obtenidas por varios métodos. El eje OX representa la inducción máxima  $B_m$  en T y el eje OY las pérdidas específicas  $W/kg$



**Figura 10-26.** Comparación de las pérdidas por histéresis a 50Hz obtenidas por varios métodos. El eje OX representa la inducción máxima  $B_m$  en T y el eje OY las pérdidas específicas  $W/kg$

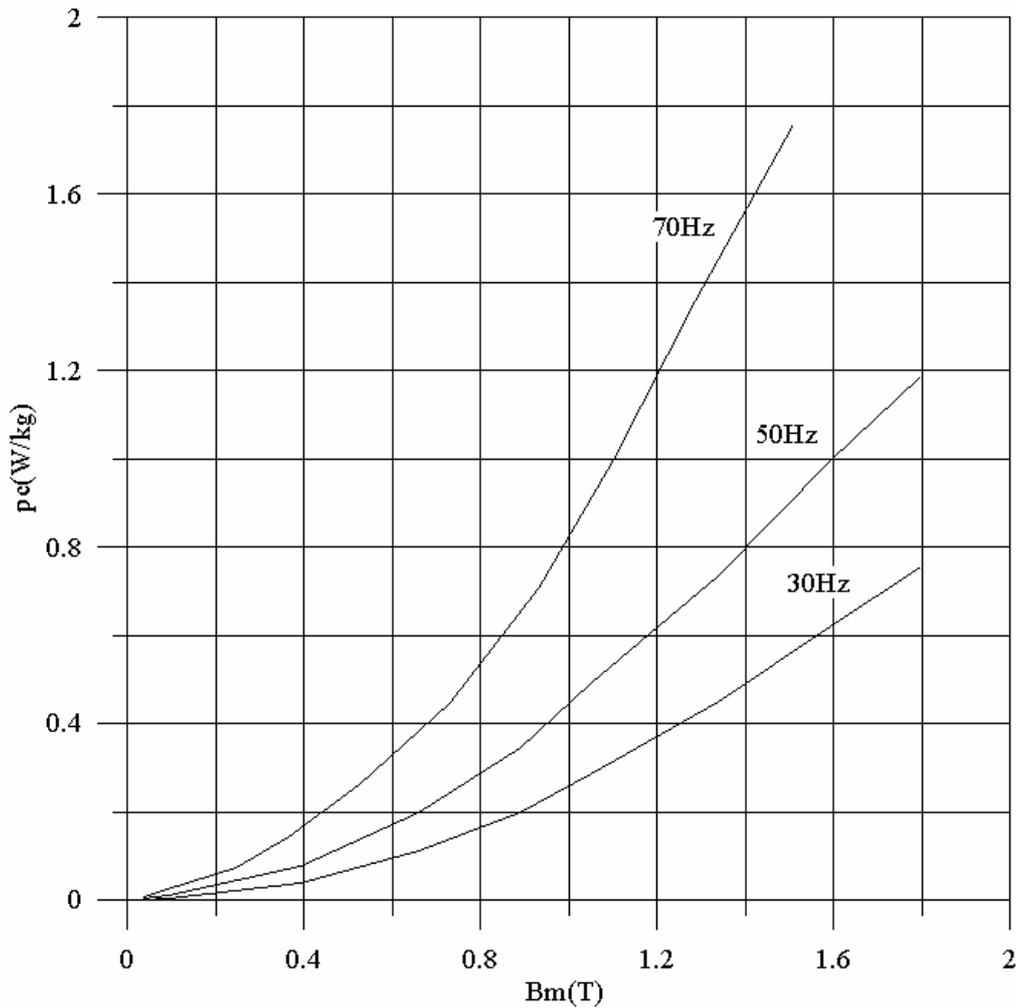


Figura 10-27. Curvas de pérdidas por corrientes inducidas

### 10.6.3 Pérdidas por corrientes inducidas

Las curvas de pérdidas por corrientes inducidas, calculadas mediante la ecuación (10.32), se muestran en la figura 10-26. Estas pérdidas se han calculado para las frecuencias de 30Hz, 50Hz y 70Hz.

Para aplicar la ecuación (10.33) es necesario calcular la derivada de la inducción en el tiempo. Se han empleado las señales de inducción  $B(t)$  obtenidas para los ciclos de histéresis de las figuras 10-11, 10-12 y 10-13. Esto es, la tensión en bornes del condensador de la Fig. 10-6. Se trata de los datos para obtener las histéresis de 30Hz, 50Hz y 70Hz, empleadas en la determinación de  $P_{Fe}$  por el método de las áreas.

#### 10.6.4 Pérdidas de exceso

Las pérdidas por exceso se han calculado para 50Hz y 70Hz. En las tablas 10-VI y 10-VII se muestran los coeficientes  $a$ ,  $b$  y  $c$  obtenidos mediante *WinCurveFit* para las frecuencias de 50Hz y 60Hz respectivamente. En dichas tablas también se indican los parámetros de mérito obtenidos en cada caso. En las figuras 10-28 y 10-29 se muestra los ajustes conseguidos para ambas frecuencias.

**Tabla 10-VI.** Parámetros de ajuste a la ecuación (10.35) para las pérdidas totales, por histéresis y por corrientes inducidas a 50Hz

	$P_{FE}$	$P_h$	$P_c$
$a$	0.0222828±0.0168976	0.0125335±0.00737356	-0.00406309±0.011306
$b$	1.5243±0.0197060	0.884592±0.00863845	0.443069±0.0153238
$c$	2.01668±0.0426674	1.83362±0.0311108	1.71239±0.0541898
$\zeta$	0.00250	0.00136	0.00159
$R^2$	0.99959	0.99933	0.99896

**Tabla 10-VII.** Parámetros de ajuste a la ecuación (10.35) para las pérdidas totales, por histéresis y por corrientes inducidas a 70Hz

	$P_{FE}$	$P_h$	$P_c$
$a$	0.0038285±0.0146591	0.0175485±0.0103262	0.0106893±0.0113301
$b$	2.27653±0.0148102	1.23842±0.0120946	0.818854±0.01710463
$c$	1.90543±0.0338659	1.83361±0.0311205	1.86961±0.0465918
$\zeta$	0.00114	0.00268	0.00249
$R^2$	0.99976	0.99933	0.99926

Como se deduce de los parámetros de mérito, como del aspecto del ajuste en las figuras 10-28 y 10-29 el ajuste es más que correcto para todos los casos.

En las figuras 10-30 y 10.31 se muestran las pérdidas por exceso para 50Hz y 70Hz respectivamente. Las curvas de pérdidas totales, por histéresis y corrientes inducidas mostradas en dichas figuras no corresponden a las curvas ajustadas si no a los valores obtenidos

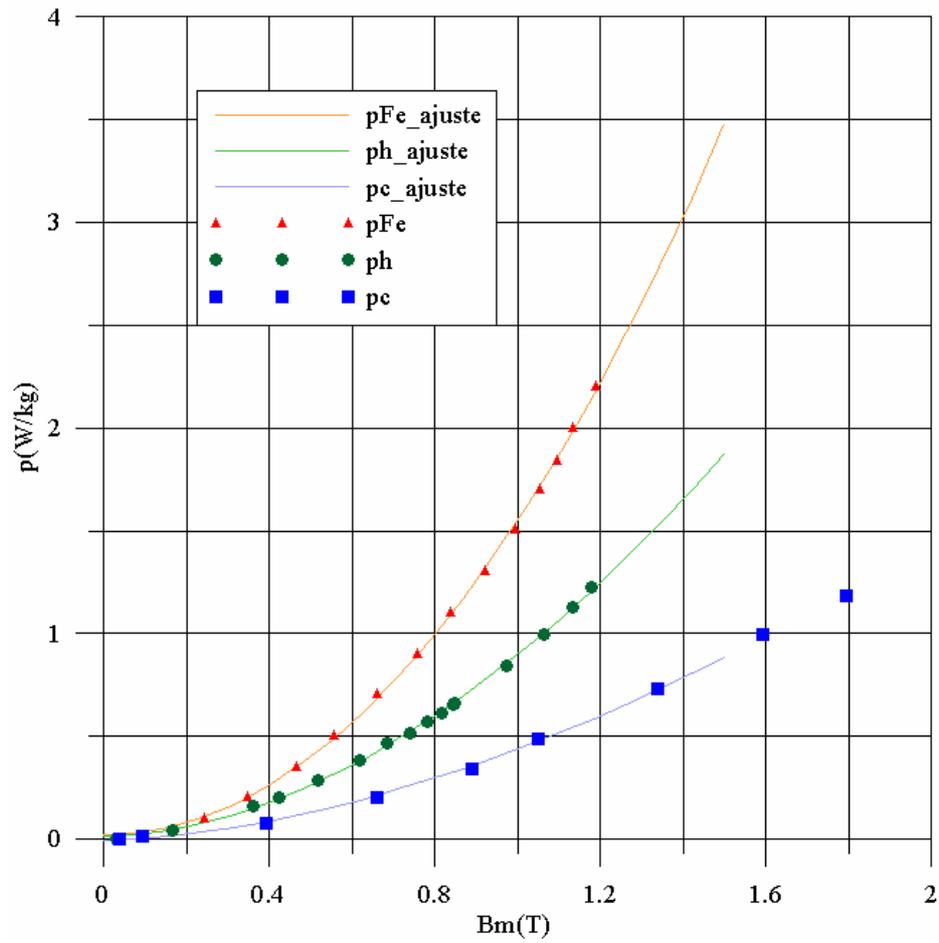
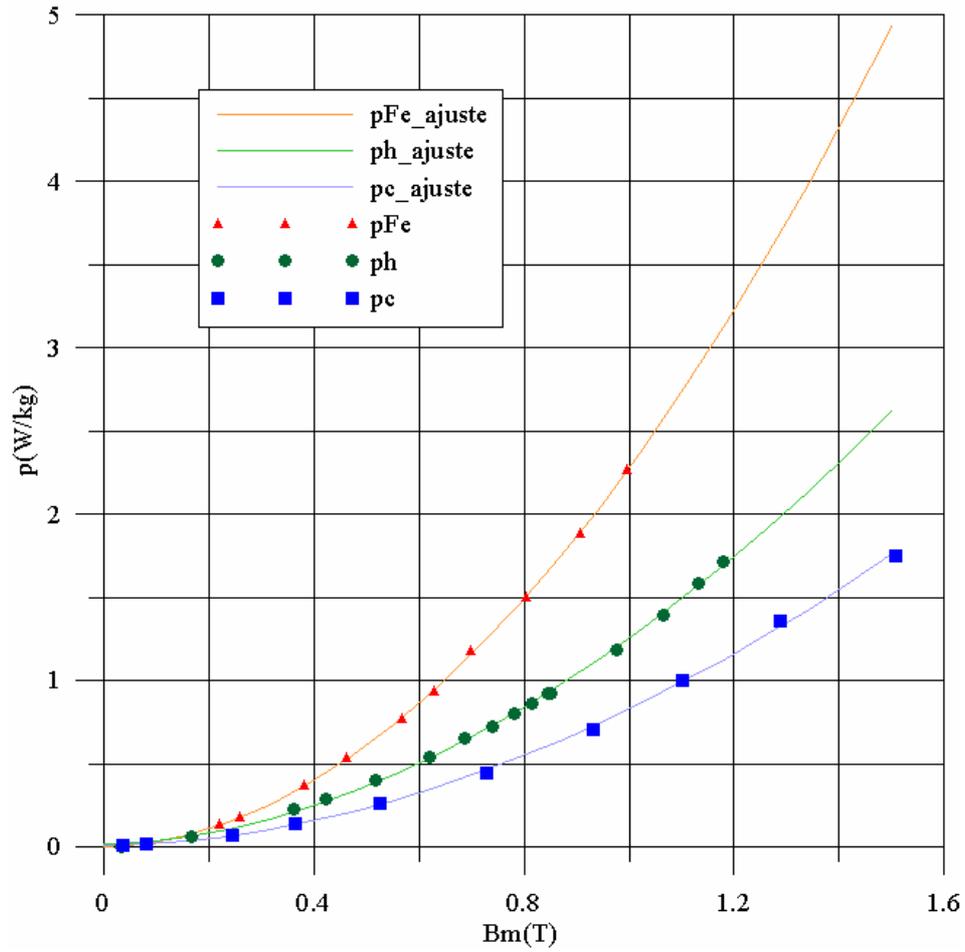


Figura 10-28. Ajuste de las pérdidas magnéticas totales, pérdidas por histéresis y pérdidas por corrientes inducidas a  $f=50\text{Hz}$  para el cálculo de las pérdidas de exceso



**Figura 10-29.** Ajuste de las pérdidas magnéticas totales, pérdidas por histéresis y pérdidas por corrientes inducidas a  $f=70\text{Hz}$  para el cálculo de las pérdidas de exceso

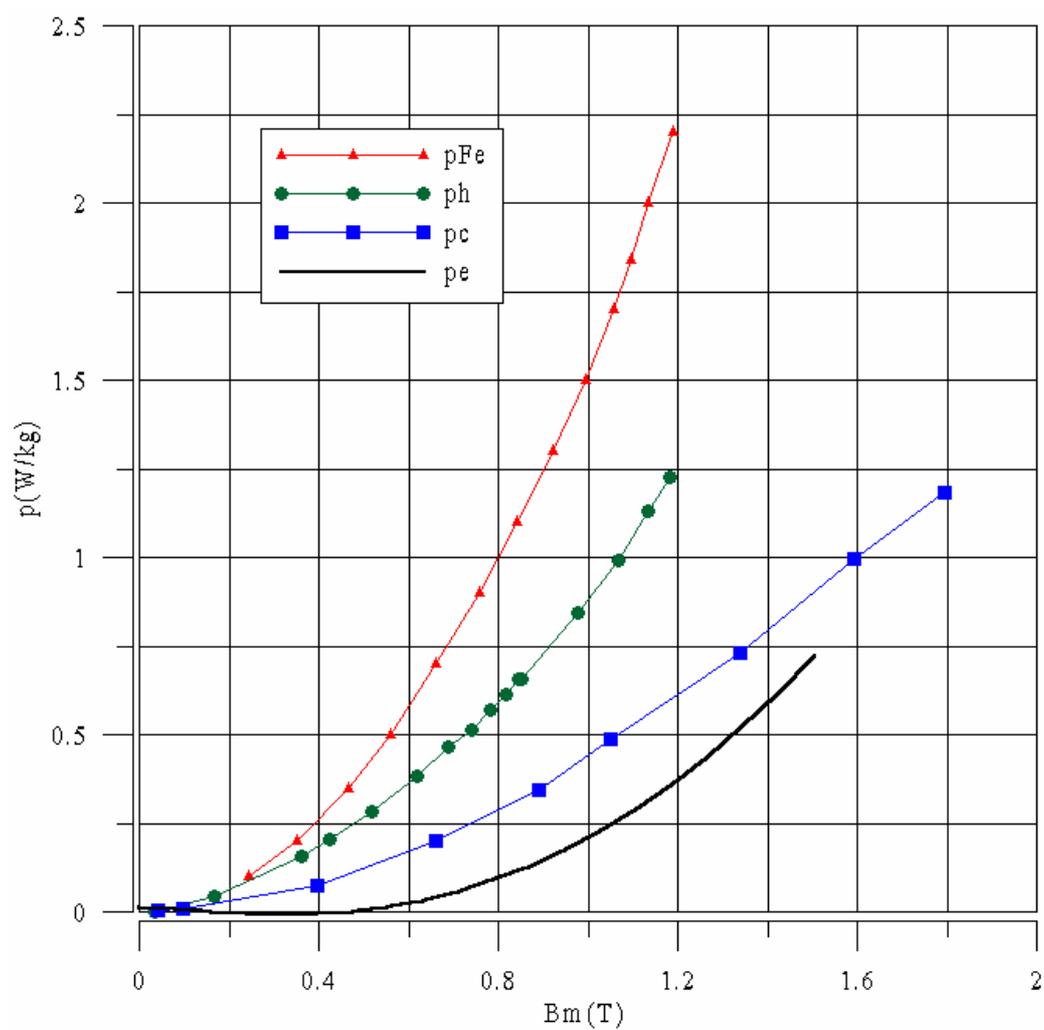


Figura 10-30. Pérdidas de exceso a 50Hz (trazo negro)

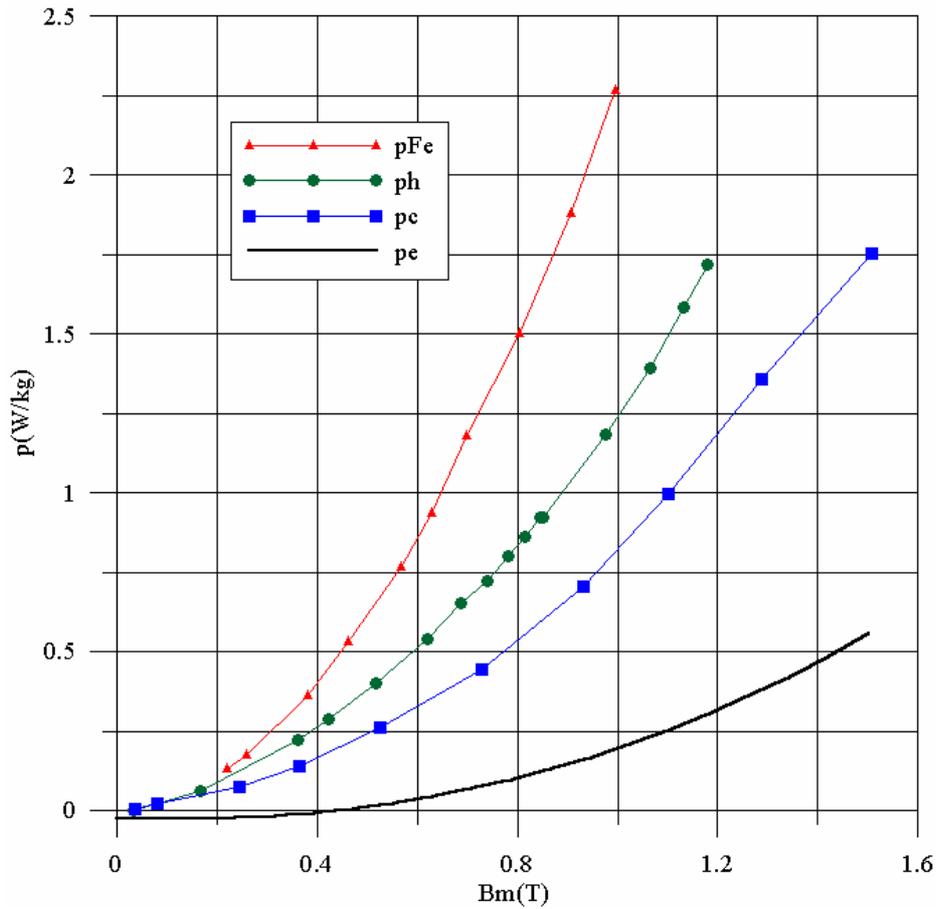


Figura 10-31. Pérdidas de exceso a 70Hz (trazo negro)

## 10.7 Conclusiones

### 10.7.1 Conclusiones generales

Con el procedimiento seguido hemos logrado determinar experimentalmente las pérdidas magnéticas disgregadas de un transformador de potencia (muestra A). Los resultados parecen razonablemente buenos y contrastados, no solo con los datos del fabricante sino también con métodos alternativos.

En resumen, de todos los métodos alternativos probados, los resultados considerados como definitivos son los siguientes:

- Las pérdidas totales obtenidas mediante el método del vatímetro.
- Las pérdidas por histéresis experimentales mediante el método de las áreas

- Para las pérdidas por corrientes inducidas, no hay alternativa, se han obtenido de forma analítica.
- Las pérdidas de exceso se obtienen a partir de las otras.

Si bien ya se comentó en su momento, a continuación analizamos los resultados para cada tipo de pérdidas.

Además de las pérdidas magnéticas disgregadas, como que ha sido necesario para determinar las pérdidas por el método de las áreas, también se han obtenido ciclos de histéresis a varias frecuencias: 70Hz, 50Hz, 30Hz y 0,15Hz, considerando estas últimas como cuasiestáticas. Por tanto, en este capítulo no solo hemos obtenido las pérdidas, si no que además disponemos de una colección de ciclos de histéresis que nos es útil para validar el modelo de histéresis no sólo dinámico sino también el estático, además nos permiten deducir el flujo en el núcleo para cada caso, lo cual nos permite validar el sistema de cálculo del capítulo 7.

#### 10.7.2 Pérdidas magnéticas totales

Las pérdidas totales  $p_{Fe}$  se han obtenido por dos métodos, ambos directamente experimentales, el método del vatímetro y el método de las áreas. En las figuras 10-15 y 10-16 se comparan los resultados obtenidos por ambos métodos para 50Hz y 70Hz respectivamente. Para 50Hz se puede considerar que las curvas obtenidas por ambos métodos coinciden. En cambio para 70Hz se aprecia que la curva obtenida mediante el método de las áreas está ligeramente por encima de la correspondiente al método del vatímetro. La razón para ello es sencilla, por motivos de infraestructura y disponibilidad del laboratorio ambos ensayos no se realizaron el mismo día, el ensayo del método de las áreas se realizó para una frecuencia ligeramente superior a 70Hz. En su momento no se previó que los ciclos de dicho ensayo se fueran a emplear para calcular las pérdidas en el hierro.

En resumen, hemos logrado determinar las pérdidas totales por dos métodos experimentales diferentes, con datos independientes, pero con resultados convergentes. No obstante, consideramos como definitivas las pérdidas totales obtenidas mediante el método del vatímetro. Este método se ha realizado siguiendo un procedimiento “estándar”, con unos instrumentos de medición expresamente diseñados para la obtención de las pérdidas en el hierro. Como ya se ha comentado el procedimiento se ha desarrollado siguiendo los preceptos del estándar ASTM A343, empleando los equipos de medición recomendados en dicho

estándar. Además en el método de las áreas se empleó un procedimiento más sensible al error, en concreto nos referimos al condensador en el secundario del transformador que actúa como integrador de la señal de tensión.

### 10.7.3 Pérdidas por histéresis

Las pérdidas por histéresis se han obtenidos por los siguientes métodos:

- Método de las áreas a partir de ciclos cuasiestáticos experimentales.
- Ecuación de Steinmetz para las pérdidas por histéresis.
  - Con el coeficiente de Steinmetz calculado a partir de las pérdidas totales determinadas por el método del vatímetro
  - Con el coeficiente de Steinmetz calculado a partir de las pérdidas totales determinadas por el método de las áreas.
- Método de las áreas a partir de ciclos cuasiestáticos calculados analíticamente mediante el modelo de Preisach clásico.

A pesar de la variedad de métodos, aquí no duda en la elección de las pérdidas consideradas como definitivas, el método de las áreas a partir de ciclos cuasiestáticos experimentales es el único directamente experimental.

Los coeficientes de la ecuación de histéresis de la ecuación de Steinmetz se obtienen a partir de las pérdidas totales, obtenidas a partir datos experimentales, pero su cálculo se basa en la ecuación (10.29), en la cual se desprecian las pérdidas de exceso. De hecho, dichos coeficientes son diferentes en función de si emplearon las pérdidas totales del método del vatímetro o las pérdidas totales del método de las áreas; lo cual es sintomático de las carencias del método. Finalmente hemos de considerar la incertidumbre en el parámetro  $\alpha$  de la ecuación de Steinmetz (10.27). En definitiva las pérdidas obtenidas mediante la ecuación de Steinmetz únicamente tienen validez como valores orientativos. No obstante, en la figura 10-25 y 10-26 se aprecia como las pérdidas obtenidas con la ecuación de Steinmetz a partir de la  $p_{Fe}$  determinada por el método de las áreas se ajuste bastante a la curva experimental.

El modelo de Preisach reflejará bien la curva de pérdidas en tanto en cuando sea capaz de calcular correctamente la inducción, lo cual depende así mismo de una buena caracterización del modelo. En este sentido, en el estado actual de nuestro trabajo de investigación arrastramos el problema de unos datos deficientes para caracterizarlo. Este problema ya se ha tratado en capítulos anteriores, por lo que no vamos a insistir de nuevo en ello.

#### 10.7.4 Pérdidas por corrientes inducidas

Las pérdidas por corrientes inducidas se han obtenido de forma analítica mediante la ecuación (10.33). Serán buenas en tanto se cumplan las hipótesis establecidas en la deducción de la expresión analítica. En principio, los valores de la curva y su aspecto son correctos, y el hecho que las pérdidas de exceso salgan coherentes, nos hace dar un voto confianza a las pérdidas por corrientes inducidas. Desgraciadamente, actualmente no disponemos de ningún sistema para determinar sus pérdidas de forma directamente experimental.

#### 10.7.5 Pérdidas por exceso

Las pérdidas por exceso se obtienen a partir de las restantes pérdidas. Los valores obtenidos serán correctos en tanto lo sean los valores de las pérdidas a partir de las cuales se calculan. En este sentido, tenemos la incógnita de las pérdidas por corrientes inducidas. En todo caso, tanto los valores obtenidos, salvo algún valor negativo a valores bajos de  $B_m$ , como la forma de la curva obtenida son coherentes. En la actualidad, en nuestro laboratorio no disponemos de ningún método experimental directo para determinar estas pérdidas.



## **11. Conclusiones generales y trabajo futuro**

Presentamos aquí las conclusiones derivadas de nuestro trabajo. Cuando un capítulo presentaba algún tipo de desarrollo, lo hemos concluido con las correspondientes conclusiones. Aquí se recopilan dichas conclusiones.

El presente trabajo de investigación es la base para futuros trabajos. De hecho, uno de los objetivos de la tesis es el de abrir una línea de investigación en nuestro departamento de Ingeniería Eléctrica de la Universidad Politécnica de Cataluña (UPC).

Finalizamos con una relación de aspectos de la tesis que requieren un desarrollo posterior y de trabajos a realizar en un futuro.

### ***11.1 Conclusiones generales***

#### **11.1.1 Sobre la elección del modelo de histéresis**

De los modelos analizados, según nuestro criterio, el modelo más adecuado para ser aplicado en combinación de métodos numéricos en cálculos para máquinas eléctricas es el modelo de Preisach.

#### **11.1.2 Sobre el modelo de Preisach clásico**

El modelo de Preisach es fenomenológico, su mecanismo no guarda ninguna relación directa con los procesos físicos que acontecen en la magnetización de los materiales ferromagnéticos. Esto no afecta su uso en nuestro ámbito de aplicación. Nos interesa obtener la inducción a partir del campo o viceversa, pero no nos interesa analizar el proceso interno de magnetización del material.

El modelo de Preisach, para su correcto funcionamiento necesita que se calcule una función asociada al mismo, la función densidad. Al cálculo de la función densidad lo denominamos caracterización. Éste es quizás el aspecto más problemático del desarrollo práctico del modelo de Preisach.

Existen dos tipos de método para caracterizar el modelo de Preisach: los métodos paramétricos o métodos por ajuste y los métodos no paramétricos o por interpolación. Los métodos paramétricos son más sencillos de aplicar y requieren de pocos datos experimentales que además son sencillos de obtener. Los métodos no paramétricos en general son más complejos de aplicar y en algunos casos requieren de datos experimentales de difícil obtención.

Los métodos paramétricos consisten en ajustar la función densidad a una función analítica. La función con la que mejores resultados se obtiene es la lorentziana factorizada. Aún así los ciclos obtenidos tienden a ser cuadrados, lo cual puede ser aceptable para materiales magnéticos duros, pero no para los materiales magnéticos blandos con los que se construyen los núcleos de las máquinas eléctricas. Se debe recurrir a los métodos no paramétricos.

El método de caracterización más adecuado es el método de Mayergoyz. Empleando el modelo de Preisach caracterizado mediante el método de Mayergoyz los resultados para materiales blandos han sido excelentes. El método de Mayergoyz necesita de una colección de curvas inversas de primer orden obtenidas experimentalmente. El problema es que estas curvas no son fáciles de obtener y se necesita de al menos catorce o quince curvas para conseguir buenos resultados con el modelo de Preisach.

Para poder aplicar el método de Mayergoyz con menos curvas experimentales hemos desarrollado un procedimiento basado en una doble interpolación a tramos de las integrales de Everett mediante polinomios de Hermite cúbicos. Los resultados logrados con el modelo de Preisach caracterizado por el método de Mayergoyz empleando este procedimiento son muy buenos. No ocurre lo mismo cuando la función densidad así calculada se aplica para el modelo dinámico o el modelo inverso, en tales casos se detectan ciertas deformaciones en las curvas calculadas.

Existen además diversas formas de desarrollar el modelo de Preisach. De las formas analizadas, las más recomendables son las que se desprenden de la aplicación directa de la propia definición del modelo, ya sea la definición algebraica o la definición geométrica. Así

mismo también es recomendable el desarrollo basado en las integrales de Everett. Con todos ellos se han logrado resultados similares. En cambio, no son tan recomendables los desarrollos basados en una caracterización del modelo a partir de únicamente el ciclo límite. Un ejemplo de ello es el método de Naidu. Este método únicamente necesita de una rama del ciclo límite y además logra describir las curvas de magnetización a partir de un conjunto de ecuaciones. Con este método tan solo se logra buenos resultados para ciclos de histéresis pero no para curvas inversas. Esto es lógico pues los datos que emplea para calcular la función densidad son muy pobres.

En definitiva con el modelo de Preisach se ha logrado excelentes resultados para núcleos de máquinas eléctricas cuando el modelo se caracteriza mediante el método de Mayergoyz y se desarrolla a partir de las integrales de Everett o a partir de la definición algebraica del modelo.

### 11.1.3 Sobre el modelo de Preisach dinámico

El modelo de Preisach es de naturaleza estática, no es capaz de considerar el efecto de la frecuencia o de la forma de onda del historial de campo de entrada. Si se desea deducir la forma de onda de la inducción  $B(t)$  a partir de la forma de onda  $H(t)$  es necesario una generalización a modelo dinámico.

Hemos analizado varias generalizaciones del modelo de Preisach a modelo dinámico, de ellas hemos escogido el modelo dinámico desarrollado a partir de una idea de Giorgio Bertotti. A este modelo lo denominamos modelo de Bertotti. El modelo de Bertotti presenta la ventaja de que no cambia los mecanismos básicos del modelo de Preisach clásico sino que se modifica el valor de los operadores de histéresis en función de la forma de onda del campo. Esto permite conservar prácticamente todo el trabajo realizado para el modelo estático. Se puede emplear la función densidad calculada por el método de Mayergoyz y el desarrollo a partir de la definición algebraica.

Los ciclos de histéresis calculados con el modelo de Bertotti presentan algunas deformaciones respecto a la curva experimental. Esto es achacable a la caracterización. En concreto hay dos causas para considerar la caracterización deficiente, o no suficientemente buena. La primera causa son las pocas curvas empleadas para calcular la función densidad, ya se ha comentado que se necesita un mínimo de curvas. Nosotros logramos reducir las curvas mínimas necesarias por un procedimiento de interpolación. La segunda causa son las propias

curvas inversas de primer orden experimentales. Tales curvas se obtuvieron mediante un ensayo balístico. Este tipo de ensayos presenta una precisión bastante baja. Ambas causas no fueron un impedimento para que el modelo clásico funcionase, pero no ocurre así con el modelo dinámico que requiere una mayor precisión en su caracterización.

En todo caso, a parte de las pequeñas deformaciones, el modelo de Bertotti desarrollado calcula aceptablemente bien las curvas de histéresis, siendo capaz de considerar el efecto de la frecuencia y de la forma de onda.

#### **11.1.4 Sobre el modelo de Preisach inverso**

El modelo de Preisach toma como entrada el campo  $H(t)$  y ofrece como salida la inducción  $B(t)$ . En algunos casos, por ejemplo, al combinar el modelo con la ecuación de difusión formulada en  $A-U$ , es necesario lo contrario. El modelo de Preisach no permite despejar la inducción y calcularla en función del campo. En nuestro trabajo hemos desarrollado un modelo de Preisach completamente inverso. La entrada al modelo es la inducción  $B(t)$  y la salida el campo  $H(t)$ .

El modelo de Preisach inverso propuesto parte de una definición paralela de los mecanismos del modelo clásico, pero inversa. Los resultados obtenidos son bastante buenos, si bien no son del todo exactos. Al igual que ocurría con el modelo dinámico, aquí también aparecen unas pequeñas deformaciones con respecto al ciclo experimental. Las razones de ello son exactamente las mismas que para el modelo dinámico, una caracterización no suficientemente precisa. No obstante, el modelo inverso también puede darse por validado.

#### **11.1.5 Sobre la obtención experimental de las curvas inversas de primer orden**

Hemos adoptado el método de Mayergoyz para caracterizar el modelo de Preisach. Esto implica determinar experimentalmente un conjunto de curvas inversas de primer orden. La determinación de estas curvas es muy importante para el modelo de Preisach funcione correctamente. A diferencia de los ciclos de histéresis las curvas inversas no son fáciles de obtener.

Para obtener experimentalmente las curvas inversas debemos ser capaces de controlar el campo  $H(t)$ . En general, su determinación experimental necesita de unos equipos que en el

momento de realizar este trabajo no estaban a nuestro alcance, por lo que tuvimos que buscar alguna alternativa. La solución la encontramos desarrollando un ensayo balístico.

Mediante el ensayo balístico se pueden obtener las curvas inversas con un material asequible para prácticamente cualquier laboratorio. Pero en realidad este ensayo balístico dista mucho de ser la solución para determinar el modelo de Preisach. Para obtener una curva se requiere operar un considerable número veces sobre interruptores y conmutadores, transcurriendo tres horas o más para determinar una curva. Tal número de operaciones durante tanto tiempo provoca errores. Pero el principal problema del método es la poca precisión disponible tanto para controlar los valores del campo  $H(t)$  como para medir la inducción  $B(t)$ . Es muy complicado conseguir curvas inversas cuyo punto de inversión tenga campos pequeños, con lo que finalmente se no se pueden lograr muchas curvas inversas representativas. Además, las curvas obtenidas son muy poco fiables.

La alternativa a los métodos balísticos para obtener características magnéticas son los métodos histéresisgráficos. Para mejorar los resultados obtenidos con el modelo de Preisach dinámico y el modelo inverso caracterizados con las curvas del ensayo balístico tratamos de desarrollar un histéresisgrafo. Este histéresisgrafo está controlado por ordenador, por lo que el proceso de caracterización se puede realizar automáticamente.

Para la determinación de ciclos de histéresis el método histéresisgráfico es sencillo de aplicar obteniéndose buenos resultados. Pero no ocurre lo mismo cuando se le quiere emplear para determinar características magnéticas más complejas como las curvas inversas. Nuestros intentos de lograr un histéresisgrafo automático adaptado para curvas inversas de primer orden, hasta el momento de escribir estas líneas, han fracasado. Con lo que hemos tenido que contentarnos con las curvas inversas obtenidas por el método balístico, con todas sus imperfecciones.

No obstante, el trabajo realizado en el desarrollo del histéresisgrafo adaptado no ha sido vano pues hemos podido emplear el equipo para determinar otras características también importantes para nuestro trabajo. En efecto, hemos podido emplear el histéresisgrafo para determinar colecciones ciclos de histéresis de las muestras para varias frecuencias. También lo hemos podido emplear en la determinación experimental de las pérdidas en el hierro disgregadas.

### **11.1.6 Sobre la combinación del modelo de Preisach con un método numérico para determinar la distribución del campo en núcleos ferromagnéticos**

Finalizamos nuestro trabajo de investigación analizando como se puede combinar el modelo de histéresis con los métodos numéricos para determinar la distribución del campo en núcleos ferromagnéticos. Este análisis lo hemos realizado mediante una aplicación, la determinación del campo, el flujo y las pérdidas disgregadas en un transformador monofásico de 220V / 380V y 1,3kVA.

Como que la intención de la aplicación no es más que mostrar las dificultades que pudieran aparecer al combinar el modelo de Preisach con los métodos numéricos, hemos empleado el método de las diferencias finitas con un modelo unidimensional del núcleo del transformador. Somos conscientes que no es la mejor opción para una buena simulación del transformador, pero es más que suficiente para nuestro propósito.

El principal problema aparece al resolver el sistema de ecuaciones no lineales resultante de aplicar el método de las diferencias finitas (si hubiésemos aplicado, por ejemplo, el método de los elementos finitos nos encontraríamos con el mismo problema). Si queremos emplear el método de Newton-Raphson para resolver el sistema de ecuaciones no lineales, habremos de determinar la matriz de Jacobi en cada paso de integración, esto implica hacer tantas veces la derivada de los resultados del modelo de histéresis como nodos tenga el problema. Esto es inabordable por la lentitud, pero sobretodo por el error que se comete al derivar. Con el método de Newton-Raphson es muy difícil lograr la convergencia.

La alternativa al método de Newton-Raphson es el método del punto fijo. Siendo ésta la opción que hemos empleado en nuestro sistema de cálculo. La aplicación de este método implica modificar la ecuación de difusión añadiendo un residuo no lineal, pero no ha representado ningún problema.

Un tema a tener en cuenta es el tipo de modelo de Preisach a aplicar en función de la formulación de la ecuación de difusión empleada. Con la formulación en  $H$  podemos emplear el modelo de Preisach directo. Pero la formulación en  $H$  no suele ser la opción más apropiada. En concreto para problemas en los cuales el arrollamiento que establece el campo en el núcleo está alimentada por una fuente de tensión (la mayor parte de simulaciones pertenece a esta categoría) es mejor emplear una formulación en  $A-U$ . Con esta formulación debemos emplear el modelo de Preisach inverso.

Volviendo a nuestra aplicación, empleando el método de las diferencias finitas con la ecuación de difusión formulada en  $H$  combinado con el modelo de Preisach hemos obtenidos excelentes resultados en el cálculo del flujo. Esto nos valida el sistema de cálculo pues para determinar el flujo previamente se debe determinar el potencial vector magnético, la inducción y el campo en cada punto del núcleo. Los resultados no han sido buenos en el cálculo de las pérdidas magnéticas disgregadas. Sin embargo esto no invalida el sistema de cálculo, sino que únicamente nos indica que el modelo de transformador unidimensional no es el más adecuado para la determinación de las pérdidas en el hierro.

### ***11.2 Trabajo futuro***

Al finalizar esta tesis surgen una serie de aspectos que debieran ser tratados en trabajos futuros, ya sea tanto para mejorar los resultados aquí obtenidos que como para ampliar el ámbito de aplicación del trabajo realizado.

El principal aspecto a mejorar es la determinación de las curvas inversas de primer orden para caracterizar mejor el modelo de Preisach. En concreto se debería investigar como conseguir un equipo alternativo al método balístico que permitiera la caracterización del modelo. La mejor opción parece el equipo histeresigráfico adaptado, pero se deberían superar los problemas encontrados.

Entre los desarrollos futuros a realizar para ampliar el ámbito de aplicación del trabajo se pueden citar:

- Desarrollo de un modelo de Preisach vectorial para poder mejorar los resultados en materiales anisótropos.
- Investigar un modelo de transformador más adecuado para calcular las pérdidas en el hierro. Seguramente se debería probar con modelos bidimensionales o tridimensionales.
- Combinar el modelo de histéresis con el método de los elementos finitos. Debido a la importancia de las aplicaciones del método de los elementos finitos, este es en nuestra opinión el trabajo más inmediato a realizar.

- Al combinar el modelo de histéresis con el método de los elementos finitos se podría aplicar el sistema de cálculo a máquinas rotativas.

## A. Referencias

### A.1 Artículos y ponencias en congresos

**[Albanese, Coccorese, Martone et al, 1991]**

R. Albanese, E. Coccorese, R. Martone, G. Miano, G. Rubinacci. *On the numerical solution of the nonlinear three-dimensional eddy current problem*. IEEE Trans. on magnetics, 27 no.5, pp.3990-3995, septiembre 1991

**[Albanese y Rubinacci, 1992]**

R. Albanese, G. Rubinacci. *Numerical procedures for the solution of nonlinear electromagnetic problems*. IEEE Trans. on magnetics, 28 no.2, pp. 1228-1231, marzo 1992

**[Atherton y Beattie, 1990]**

D.L. Atherton, J.R. Beattie. *A mean field Stoner-Wohlfarth hysteresis model*. IEEE Trans. on magnetics, 26 no.6, pp. 3059-3063, noviembre 1990.

**[Atherton, Szpunar y Szpunar, 1987]**

D.L. Atherton, B. Szpunar, J.A Szpunar. *A new approach to Preisach diagrams*. IEEE Trans. on magnetics, 23 no.3, pp.1856-1865, mayo 1987

**[Basso y Bertotti, 1996]**

V. Basso, G. Bertotti. *Hysteresis models for the description of domain wall motion*. IEEE Trans. on magnetics, 32 no.5, pp. 4210-4212, agosto 1996.

**[Benda, Bydzovsky, Krivosik et al, 2000]**

O. Benda, J. Bydzovsky, P. Krivosik, E. Usak,. *Comparison of simulated and measured magnetization curves using a rigorously identified moving Preisach model*. Journal of Magnetism and Magnetic Materials, 215-216, pp.644-646, 2000

**[Bertotti, 1992]**

B. Bertotti. *Dynamic generalization of scalar Preisach model of hysteresis*. IEEE Trans. on magnetics, 28 no.5, pp. 2599-2601, septiembre 1992.

**[Bertotti y Basso, 1993]**

G. Bertotti, V. Basso. *Considerations on the physical interpretation of the Preisach model of ferromagnetic hysteresis*. Journal of Applied Physics, 73 n°10, pp.5827-5829, mayo 1993

**[Bertotti, Basso y Pasquale, 1994]**

G. Bertotti, V. Basso, V. M. Pasquale. *Application of the Preisach model to the calculation of magnetization curves and power losses in ferromagnetic materials*. IEEE Trans. on magnetics, 30 no.2, pp. 1052-1057, marzo 1994

**[Bertotti , Fiorillo y Pasquale 1993]**

G. Bertotti, F. Fiorillo, M. Pasquale. *Measurement and prediction of dynamic loop shapes and power losses in soft magnetic materials*. IEEE Trans. on magnetics, 29 no.6, pp. 3496-3498, Noviembre 1993

**[Biorci y Pescetti, 1958]**

G. Biorci, D. Pescetti. *Analytical Theory of the behaviour of Ferromagnetic Materials*. II Nuovo Cimento, vol.II, no.6, pp 829-842, marzo 1958.

**[Biorci y Pescetti, 1959]**

G. Biorci, D. Pescetti. *Some consequences of the analytical theory of the ferromagnetic hysteresis*. Le Journal de Physique et le Radium, 20, pp. 233-236, febrero 1959

**[Birkelbach, Freeden y Hempel, 1984]**

B. Birkelbach, J.V. Freeden, K.A. Hempel. *Device for the automatic determination of the magnetic properties of electrical steel sheet*. IEEE Trans. on magnetics, 20 no.5, pp. 1711-1713, septiembre 1984

**[Birkelbach, Hempel y Schulte, 1986]**

G.B. Birkelbach, K.A. Hempel, F.J. Schulte. *Very low frequency magnetic hysteresis measurements with well-defined time dependence of the flux density*. IEEE Trans. on magnetics, 22 no.5, pp. 505-507, septiembre 1986

**[Boglietti, Cavagnino, Lazzari et al, 2003]**

A. Boglietti, A. Cavagnino, M. Lazzari, M. Pastorelli. *Predicting iron losses in soft magnetic materials with arbitrary voltage supply: an engineering approach*. IEEE Trans. on magnetics, 39 no.2, pp. 981-989, 2003

**[Bottauscio, Chiampi y Chiarabaglio, 2000]**

O. Bottauscio, M. Chiampi, D. Chiarabaglio, M. Repetto. *Preisach-type hysteresis models in magnetic field computation*. Physica B, 275, pp. 34-39. 2000

**[Bottauscio, Chiampi, Dupré et al, 1998]**

O. Bottauscio, M. Chiampi, L.R. Dupré, M. Repetto, M. Von Rauch, J. Melkebeek. *Dynamic Preisach modelling of ferromagnetic laminations: a comparison of different finite element formulations*. Journal de Physique IV, n°8 Pr2-647-650, 1998

**[Brokate, 1989]**

M. Brokate. Some mathematical properties of the Preisach model for hysteresis. IEEE Trans. on magnetics, 25 no.4, pp. 2922-2924. julio 1989

**[Brokate y della Torre, 1989]**

M. Brokate, E. Della Torre. The wiping-out property of the moving model. IEEE Trans. on magnetics, 27 no.5, pp. 3811-3814, septiembre 1991

**[Cardelli, della Torre y Ban, 2000]**

E. Cardelli, E. della Torre, G. Ban. *Experimental determination of Preisach distribution functions in magnetic cores*. Physica B, 275, pp.262-269, 2000

**[Cardelli, della Torre y Pinzaglia, 2003]**

E. Cardelli, E. della Torre, E. Pinzaglia. *Identifying the Preisach function for soft magnetic materials*. IEEE Trans. on magnetics, 39 no.3, pp. 1341-1344, 2003

**[Carminati y Ferrero, 1992]**

E. Carminati, A. Ferrero. *A virtual instrument for the measurement of the characteristics of magnetic materials*. IEEE Trans on instrumentation and measurement, 41 no.6, pp. 1005-1009, diciembre 1992

**[Carpenter, 1991]**

K.H. Carpenter. *A differential equation to minor loops in the Jiles-Atherton hysteresis model*. IEEE Trans. on magnetics, 27 no.6, pp. 4404-4406, noviembre 1991

**[Cirrincione, Miceli, Ricco Galluzzo et al, 2003]**

M. Cirrincione, R. Miceli, G. Ricco Galluzzo, M. Trapanese. *Preisach function identification by neural networks*. IEEE Trans. on magnetics, 38 no.5, pp. 2421-2423, 2002

**[Cirrincione, Miceli, Ricco Galluzzo et al, 2004]**

M. Cirrincione, R. Miceli, G Ricco Galluzzo, M. Trapanese. *A novel neural approach to the determination of the distribution function in magnetic Preisach systems*. IEEE Trans. on magnetics, 40 no.4, pp. 2131-2133, julio 2004

**[Cristaldi, Ferrero, Lazzaroni et al, 2003]**

L. Cristaldi, A. Ferrero, M. Lazzaroni, A. Morando. *Sensorless evaluation of asymmetric hysteresis loops of ferromagnetic materials*. IEEE Trans on instrumentation and measurement, 52 no.3, pp.846-851, junio 2003

**[d'Alessandro y Ferrero, 1994]**

L. D'Alessandro, A. Ferrero. *A Method for the determination of the parameters of the hysteresis model of magnetic materials*. IEEE Trans on instrumentation and measurement, 43 no.4, pp. 599-605, Agosto 1994.

**[de Blas, Bargalló, de la Hoz, 2004]**

A. de Blas, R. Bargalló, J. de la Hoz. *Modelizado del ciclo de histéresis mediante el modelo de Preisach*- Revista Internacional Investigación Tecnológica, 15 n°3, pp.31-38, 2004.

**[de Blas, Bargalló, de la Hoz, 2004]**

A. de Blas, R. Bargalló, J. de la Hoz, C. Lemos Antunes, P. G. Pereirinha. *Determination of the Hysteresis Core Losses on a Single-Phase Transformer by using a Dynamic Preisach-type Hysteresis Model*. International Conference on Electric Machines, 2004. (ICEM'2004). Cracovia (Polonia). 5 al 8 de septiembre de 2004

**[del Vecchio, 1980]**

R. M. del Vecchio. *An efficient procedure for modelling complex hysteresis processes in ferromagnetic materials*. IEEE Trans. on magnetics, 16 no.5, pp.809-811, 1980

**[della Torre, Fry, Alejos et al, 2000]**

E. della Torre, R.A. Fry, O. Alejos, E. Cardelli. *Identification of parameters in multilayer media*. IEEE Trans. on magnetics, 36 no.4, pp. 1272-1275, julio 2000.

**[della Torre y Kadar, 1987]**

E. della Torre, G. Kadar. Hysteresis modeling: II. Accommodation. IEEE Trans. on magnetics, 23 no.5, pp. 2823-2825, septiembre 1987.

**[della Torre, Oti y Kadar, 1990]**

E. della Torre, J. Oti, G. Kadar. *Preisach model and reversible magnetization*. IEEE Trans. on magnetics, 26 no.6, pp. 3052-3058, noviembre 1990

**[della Torre y Vajda, 1995]**

E. della Torre, F. Vajda. The identification of the switching field distribution components. IEEE Trans. on magnetics, 31 no.5, pp.2536-2542, 1995

**[della Torre y Vajda, 1995a]**

E. della Torre, F. Vajda. Properties of accommodation models. IEEE Trans. on magnetics, 31 no.3, pp.1775-1780, mayo 1995

**[della Torre y Vajda, 1996a]**

E. della Torre, F. Vajda. Vector hysteresis modeling for anisotropic recording media. IEEE Trans. on magnetics, 32 no.3, pp.1116-1119, mayo 1996

**[Doong y Mayergoyz, 1985]**

T. Doong, I.D. Mayergoyz. *On numerical implementation of hysteresis models*. IEEE Trans. on magnetics, 21 no.5, pp. 1853-1855, septiembre 1985

**[Dupré, Van Keer y Melkebeek, 1997]**

L.R. Dupré, R. Van Keer, J.A.A. Melkebeek. Modelling and identification of iron losses in nonoriented steel laminations using Preisach theory. IEEE Proc.-Electric. Power Appl, 144 no.4, pp.227-234, abril 1997

**[Enokizono y Fujita, 2002]**

M. Enokizono, Y. Fujita. *Improvement of E&S modelling for eddy-current magnetic fields analysis*. IEEE Trans. on magnetics, 38 no.2, pp. 881-884, Marzo 2002

**[Fiorillo y Novilkov, 1990]**

F. Fiorillo, A. Novikov, 1990. *An improved approach to power losses in magnetic laminations under nonsinusoidal induction waveform*. IEEE Trans. on magnetics, 26 n° 5, pp. 2904-2910. 1990

**[Füzi e Ivanyi, 2001]**

J. Füzi, A. Ivanyi. *Features of two rate-dependent hysteresis models*. Physica B, 306, pp. 137-142, 2001

**[Globus, 1975]**

A. Globus. *Universal hysteresis loops for ferrimagnetic material*. Proc Europ Physical Society. Conference on Soft Magnetic material, 2, p.233, 1975

**[Gyselinck, Vandervelde, Makareev et al 2000]**

J.J. C. Gyselinck, L. Vanderveelde, D. Makaveev, J.A.A. Melkebeek. *Calculation of no-load losses in an induction motor using an inverse vector Preisach model and an eddy current loss model*. IEEE Trans. on magnetics, 36 no.4, pp. 856-860, julio 2000

**[Henze y Rucker, 2002]**

O. Henze, W.M. Rucker. *Identification procedures of Preisach model*. IEEE Trans. on magnetics, 38 no.2, pp.833-836, marzo 2002

**[Jiles, 1992]**

D.C. Jiles. *A self consistent generalized model for the calculation of minor loop excursions in the theory of hysteresis*. IEEE Trans. on magnetics, 28 no.5, pp.2502-2504, septiembre 1992

**[Jiles, 1993]**

D.C. Jiles. *Frequency dependence of hysteresis curves in "non-conducting" magnetic materials*. IEEE Trans. on magnetics, 29 no.6, pp. 3490-3492, Noviembre 1993

**[Jiles, 1994]**

D.C Jiles. *Modelling the effects of eddy currents losses on frequency dependent hysteresis in electrically conducting media*. IEEE Trans. on magnetics, 30 no.6, pp. 4326-4328, Noviembre 1994

**[Jiles y Atherton, 1983]**

D.C. Jiles, D.L. Atherton. *Ferromagnetic Hysteresis*. IEEE Trans. on magnetics, 19 no.5, pp. 2183-2185, Septiembre 1983

**[Jiles y Atherton, 1986]**

D.C. Jiles, D.L. Atherton. *Theory of Ferromagnetic hysteresis*. Journal of Magnetism and Magnetic Materials, 61, pp. 48-60, 1986

**[Jiles, Thaelke, Devine, 1992]**

D.C. Jiles, J.B. Thaelke, M.K. Devine. *Numerical determination of hysteresis parameters for the modelling of magnetic properties using the theory of ferromagnetic hysteresis*. IEEE Trans. on magnetics, 28 no.1, pp. 27-35, Enero 1992

**[Kadar y della Torre, 1987]**

G. Kadar, E. della Torre. *Hysteresis modelling: I. Non congruency*. IEEE Trans. on magnetics, 23 no.5, pp. 2820-2822, septiembre 1987.

**[Kim, Hong y Jung, 2000]**

Kim, H-K.; Hong, S-K; Jung, H-K. *An improved finite element analysis of magnetic system considering magnetic hysteresis*. IEEE Trans. on magnetics, 36 no.4, pp.689-692, julio 2000

**[Kim, Jung y Hong, 1998]**

Kim, H-K.; Jung, H-K.; Hong, S-K. *Finite element analysis of hysteresis motor using the vector magnetization-dependent motor*. IEEE Trans. on magnetics, 34 no.5, pp. 3495-3498, septiembre 1998

**[Kim y Lee, 2003]**

Kim, S.; Lee, J.H.; Lee, J. *A study on hysteresis analysis of line start permanent magnet motor using Preisach modelling*. IEEE Trans. on magnetics, 39 no.5, pp. 2543-2545, 2003

**[Kriezis, Tsiboukis, Panas et al, 1992]**

E.E. Kriezis, T. Tsiboukis, S. Panas, S, J.A. Tegopoulos. *Eddy currents: Theory and applications*. Proceedings of the IEEE, 80 no.10, pp. 1559-1589, octubre 1992

**[Lee y Hyun, 1999]**

Lee, J. H.; Hyun, D. S. *Hysteresis analysis for the permanent magnet assisted synchronous reluctance motor by coupled FEM and Preisach modelling*. IEEE Trans. on magnetics, 35 no.3, pp. 1203-1206, mayo 1999

**[Liorzou, Phelps y Atherton, 2000]**

F. Liorzou, B.F. Phelps, D.J. Atherton. *Macroscopic models of magnetization*. IEEE Trans. on magnetics, 36 no.2, pp. 418-428, Marzo 2000

**[Mayergoyz, Friedman y Salling, 1989]**

I.D. Mayergoyz, G. Friedman, C. Salling. *Comparison of the classical and generalized Preisach hysteresis models with experiments*. IEEE Trans. on magnetics, 25 no.5, pp. 3925-3927, Septiembre 1989

**[Nakmahachalasint y Ngo, 2002]**

P. Nakmahachalasint. K.D.T. Ngo. *Generalized formulation for the description of hysteresis in soft magnetic materials*. IEEE Trans. on magnetics, 38 no.1, pp. 200-204, enero 2002

**[Nakmahachalasint, Ngo y Vu-Quoc 2004]**

P. Nakmahachalasint, K.D.T. Ngo, L. Vo-Quoc. *A behavioural model for frequency-dependent hysteresis in power ferrites*. IEEE Trans. on magnetics, 40 no.4, pp. 1784-1790, Julio 2004

**[Naidu, 1990]**

S.R. Naidu. *Simulation of the hysteresis phenomenon using Preisach theory*. IEE Proceedings A, 137 no.2, pp.73-79, marzo 1990

**[Naidu, 1991]**

S.R. Naidu. *Time domain model for the ferromagnetic core, including the effects of hysteresis and eddy currents*. IEE Proceedings A, 138 no.1, pp. 44-50, enero 1991.

**[Nicolet, Delince, Bamps et al, 1993]**

A. Nicolet, F. Delincé, N. Bamps, A. Genon, W. Legros. *A coupling between electric circuits and 2D magnetic field modeling*. IEEE Trans. on magnetics, 29 no.2, pp.1697-1700, marzo 1993

**[Pescetti, 1991]**

D. Pescetti. *Some remarks on Preisach modelling*. Journal of Applied Physics, 69, n°8, pp. 4605-4608, abril 1991.

**[Preisach, 1935]**

F. Preisach. *Über die magnetische Nachwirkung*. Zeitschrift für Physik, 94. pp.277-302. 1935

**[Rouvre, Waeckerle y Kedous-Lebouc, 1995]**

L-L. Rouvre, T. Waeckerle, A. Kedous-Lebouc. *Application of Preisach model to grain oriented steels: comparison of different characterizations for the Preisach function  $p(a,b)$* . IEEE Trans. on magnetics, 31 no.6, pp.3557-3559, Noviembre 1995

**[Rouvre, Waeckerle, Kedous-Lebouc et al, 1996]**

L-L. Rouvre, T. Waeckerle, A. Kedous-Lebouc, A.; J.L. Coulomb. *Determination of the parameter k of the generalized dynamic Preisach model*. IEEE Trans. on magnetics, 32 no.3, pp. 1124-1127, mayo 1996

**[Saitz, 2000]**

J. Saitz. *Computation of the core loss in an induction motor using the vector Preisach hysteresis model incorporated in finite element analysis*. IEEE Trans. on magnetics, 36 no.4, pp 769-773, julio 2000

**[Saitz, 2001]**

J. Saitz. *Magnetic field analysis of induction motors combining Preisach hysteresis modeling and finite element techniques*. IEEE Trans. on magnetics, 37 no.5, pp.3693-3697, septiembre 2001

**[Sakaki, 1980]**

Y. Sakaki. *An approach estimating the number of domain walls and eddy current losses in grain-oriented 3% Si-Fe tape wound cores*. IEEE Trans. on magnetics, 15 no.4, pp. 569-572, Julio 1980.

**[Salceanu y David, 1999]**

A. Salceanu, V. David. *Programs and virtual hysteresisgraph for scalar Preisach modelling*. Computer and Standard Interfaces, 21, pp. 349-356, 1999

**[Salling y Shultz, 1988]**

C.T. Salling, S. Schultz. *Using minor loops behaviour to investigate the Preisach distribution for particulate media*. IEEE Trans. on magnetics, 24 no.6, pp. 2877-2879, Noviembre 1988

**[Soda y Enokizono, 2000]**

N. Soda, M. Enokizono. *Improvement of T-joint part constructions in tree-phase transformer cores by using direct loss analysis with E&S model*. IEEE Trans. on magnetics, 36 no.4, pp. 1285-1288, Marzo 2000

**[Stoner y Wohlfarth, 1991]**

B.E.C. Stoner, E.P. Wohlfarth. *A mechanism of magnetic hysteresis in heterogeneous alloys*. IEEE Trans. on magnetics, 27 no.4, pp.3475-3518, julio 1991 (Reprinted of Philosophical Transactions of the Royal Society of London, Vol.A240, pp.599-642, 1948)

**[Takahashi, Miyabara, Fujiwara, 1999]**

Takahashi, N.; Miyabara, S.I.; Fujiwara, K. *Problems in practical finite element using Preisach hysteresis model*. Trans. on Magnetics, vol. 35 no. 3, pp. 1243-1246, mayo 1999

**[Vajda y della Torre, 1995]**

F. Vajda, E. della Torre. *Modelling complete (delta)-m curves using the Complete-Moving-Hysteresis model*. IEEE Trans. on magnetics, 31 no.3, pp. 1809-1812, mayo 1995

**[Vajda y della Torre, 1995a]**

F. Vajda, E. della Torre. *Ferenc Preisach, In Memoriam* IEEE Trans. on magnetics, 31 no.1, pp. i-ii, 1995

**[Zhai y VuQuoc, 2003]**

Y. Zhai, L. Vu-Quoc. *Analysis of power magnetic components with nonlinear static hysteresis: finite-element formulation*. IEEE Trans. on magnetics, 41 no.7, pp. 2243-2256, julio 2005

**[Zirka, Moroz, Marketos, et al, 2002]**

S.E. Zirka, Y.I. Moroz, P. Marketos, A.J. Moses. *Modelling losses in electrical steel laminations*. IEE Proc. Sci. Meas. Technol, 149 no.5, pp. 218-221, Septiembre 2002

## A.2 Libros

### [Bastos y Sadowski, 2003]

J. P. Bastos, N. Sadowski. *Electromagnetic modelling by finite element methods*. Marcel Dekker. New York, 2003

### [Beckley, 2002]

P. Beckley. *Electrical steels for rotating machines*. IEE. The Institution of Electrical Engineers. 2002

### [Bertotti, 1998]

G. Bertotti. *Hysteresis in magnetism*. Academic Press. San Diego, 1998.

### [Bozorth, 1993]

R. Bozorth. *Ferromagnetism*. IEEE-Press. New York, 1993

### [Burden y Faires, 2002]

R. L. Burden, J.D. Faires. *Análisis numérico*. 7ª edición. Traducción: Óscar Palmas. Thomson Learning. Méjico D.F. 2002

### [Craik, 1995]

D.J. Craik. *Magnetism. Principles and applications*. Wiley and Sons. Chichester, 1995

### [Craik y Tebble, 1965]

D.J. Craik, R.S. Tebble. *Ferromagnetismo and ferromagnetic domains*. Wiley and Sons. New York, 1986

### [Chikazumi, 1964]

S. Chizazumi. *Physics of magnetism*. Wiley and Sons. New York, 1964

### [della Torre, 1999]

E. della Torre. *Magnetic hysteresis*. IEEE Press. New York, 1999

### [Fiorillo, 2004]

F. Fiorillo. *Measurement and characterization of Magnetic Materials*. Elsevier. New York, 2004

**[Hameyer y Belmans, 1999]**

K. Hameyer, R. Belmans. *Numerical modelling and design of electrical machines and devices*. WIT Press. Southampton, 1999

**[Ida y Bastos, 1997]**

N. Ida, J. P. A Bastos. *Electromagnetics and calculation of fields*. (2ª Edición). Springer-Verlag. Nueva York, 1997

**[Jiles, 1998]**

D. Jiles. *Introduction to magnetism and magnetic materials*. (2ª Edición). Chapman & Hall, London, 1998

**[Kaganov y Tsukérnik, 1985]**

M. Kagánov, V. Tsukérnik. *La naturaleza del magnetismo*. Editorial MIR. Moscú, 1985

**[Karcz, 1972]**

A. Karcz. *Electrometría de materiales magnéticos*. Marcombo. Barcelona, 1972

**[Kemmer, 1986]**

N. Kemmer, N. *Análisis Vectorial*. Traducción, J. M. Sánchez. Ed. Reverté. Barcelona, 1986

**[Mayergoyz, 1991]**

I.D. Mayergoyz. *Mathematical models of hysteresis*. Springer-Verlag. New York, 1991

**[Mayergoyz, 1998]**

I. D. Mayergoyz. *Nonlinear diffusion of electromagnetic fields*. Academic Press. San Diego 1998

**[Mayergoyz, 2003]**

I.D. Mayergoyz. *Mathematical Models of Hysteresis and Their Applications*. Elsevier. Nueva York, 2003

**[Morrish, 2001]**

A.H. Morrish. *The physical principles of magnetism*. Wiley and Sons. New York, 1965. (Republished: IEEE Press. New York, 2001).

**[Plonus, 1982]**

M.A. Plonus. *Electromagnetismo aplicado*. Editorial Reverté. Barcelona, 1982

**[Sadiku, 2001]**

M.N.O. Sadiku. *Numerical techniques in electromagnetics*. (2ª Edición). CRC Press. LLC. Boca Ratón, 2001

**[Salon, 1995]**

S. J. Salon. *Finite element analysis of electrical machines*. Kluwer Academic Publishers. Boston, 1995

**[Silvester y Ferrari, 1996]**

P. P. Silvestre, R.L. Ferrari. *Finite Elements for electrical engineers*. (3ª Edición). Cambridge University Press. Cambridge, 1996

**[Smith, 1985]**

Smith, G.D. *Numerical solution of partial differential equations. Finite difference methods*. (3ª Edición). Oxford University Press. Oxford, 1985.

**[Spiegel, 1970]**

Spiegel, M.R. *Manual de fórmulas y tablas matemáticas*. Traducción: O. Guerrero. Mc. Graw-Hill. Méjico, 1970

**[Spooner, 1927]**

T. Spooner. *Properties and testing of magnetic materials*. Mc Graw –Hill. New York, 1927

**[Steele, 1997]**

C. W. Steele. *Numerical computation of electric and magnetic fields*. (2ª edición). Chapman & Hall. Nueva York, 1997

**[Stoll y Zakrzewzski, 1995]**

R. L. Stoll, K. Zakrzewski. *Finite-differences method*. Editor: J. K. Sykulski, *Computational Magnetics*. Chapman and Hall. Londres, 1995

**[Takacs, 2003]**

J. Takacs. *Mathematics of hysteretic phenomena*. Wiley and Sons. New York, 2003

**[Visintin, 1994]**

A. Visintin. *Differential models in electromagnetic computation*. Springer-Verlag. Berlin, 1994

**A.3 Tesis****[Beattie, 1989]**

J.R. Beattie. *Computer modelling of the magnetic behaviour of selected ferromagnetic and ferrimagnetic materials*. Tesis doctoral. Queen's University. Kingston, Ontario 1989

**[Bergqvist, 1994]**

Bergqvist, A. *On magnetic hysteresis modelling*. Royal Institute of Technology. Estocolmo, 1994

**[Zhu, 1994]**

J.G. Zhu. *Numerical modelling of magnetic materials for computer aided design of electromagnetic devices*. Tesis doctoral. University of Technology. Sydney, 1994

**[Saitz, 2001]**

J. Saitz. *Magnetic field analysis of electric machines taking ferromagnetic hysteresis into account*. Helsinki University of Technology. Helsinki, 2001

**A.4 Normas y estándares****[ASTM A343]**

ASTM A343. *Standard Test Method for Alternating-Current Properties of Materials at Power Frequencies Using Wattmeter-Ammeter-Voltmeter Method and 25-cm Epstein Test Frame*. A343/A343M-03. ASTM American Society for Testing and Materials, junio 2003

**[ASTM A773]**

ASTM A773. *Standard Test Method for DC Magnetic Properties of Materials Using Ring and Permeameter Procedures with DC Electronic Hysteresigraphs*. A773/A773M-01. ASTM American Society for Testing and Materials, septiembre 2001

**[IEEE 52-12-91-2001]**

IEEE 52-12-91-2001. *Distribution and Power Transformers*. IEEE Std.52-12-91-2001. IEEE Institute of Electrical and Electronics Engineers, 2001.

**A.5 Miscelanea****[Meeker, 2004]**

D. Meeker. *Finite Element Method Magnetics (FEMM). Version 4.0. User's Manual*.

**[Yokogawa, 1988]**

Yokogawa IM 3254-01E. *Type 3254 Electronic Fluxmeter. Instruction Manual*. Yokogawa Electric Corporation. Abril 1988.

**[Yokogawa, 1980]**

Yokogawa. IM 2041-01E. *Type 2041 Portable single phase wattmeter, portable single phase low-power factor wattmeter. Instruction Manual*. Yokogawa Electric Corporation. Junio 1980.



## B. Terminología

Debido a la gran dispersión de términos hallada en la bibliografía especializada para denominar un mismo sujeto, característica o concepto; hemos creído oportuno añadir un apéndice con algunos términos empelados en el trabajo y la correspondiente definición considerada por nosotros.

### **Curva o característica magnética.**

Ley constitutiva de un material magnético  $B=f(H)$ . Dependencia de la magnetización global de una muestra magnética respecto un campo aplicado o externo. Desde un punto de vista práctico es la representación gráfica de la relación entre la inducción y la intensidad del campo aplicado.

### **Saturación técnica.**

Punto de la característica magnética en el cual se considera que la muestra ferromagnética, debido al campo aplicado, ha desarrollado su patrón de dominios hasta estar formado por un único dominio que tiene a todos sus espines orientados con el campo aplicado. Debido a la agitación térmica no todos los espines estarán orientados con el campo. Esta es la diferencia entre la saturación técnica y la saturación real, en esta última todos los espines estarían realmente orientados con el campo. Se trata en realidad de un límite empírico que nos marcamos a la hora analizar una muestra. En este sentido, la saturación técnica marca el punto máximo del ciclo límite.

### **Ciclo de histéresis.**

Característica magnética para una muestra ferromagnética sometida a un campo externo que varía de forma periódica y simétrica respecto al eje de tiempos (salvo que se indique lo contrario).

**Punto máximo del ciclo de histéresis.**

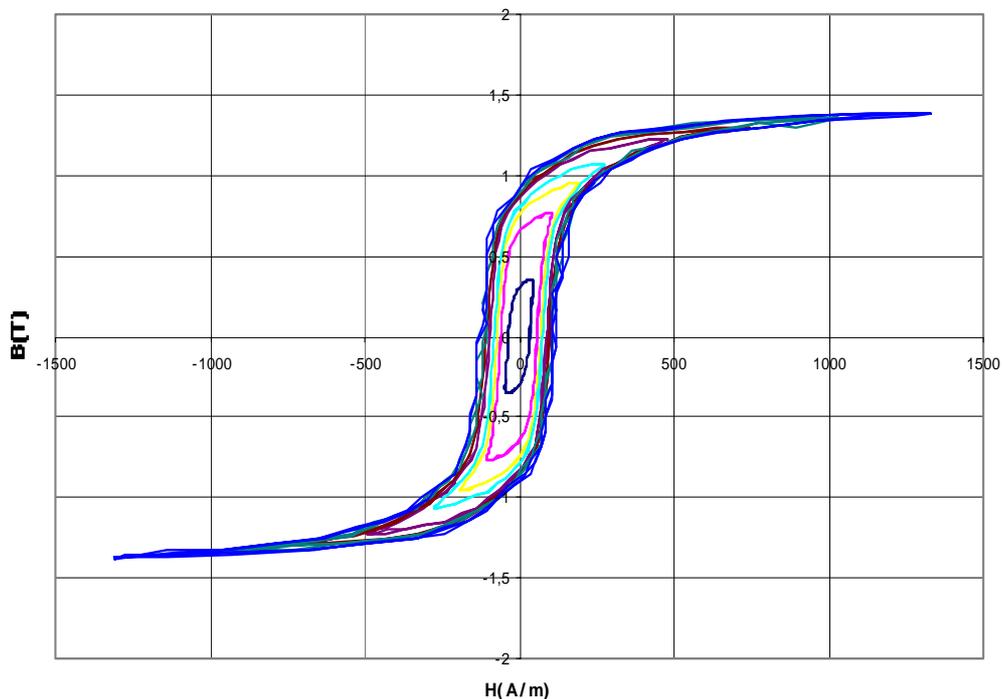
Punto del ciclo de histéresis correspondiente al valor máximo del campo periódico y simétrico aplicado.

**Ciclo límite.**

Ciclo de histéresis cuyo punto máximo es el punto de saturación técnica. En realidad es un ciclo máximo o frontera, el ciclo de histéresis formado para un campo aplicado periódico y simétrico que consideramos máximo, esto es, se supone que no se va a aplicar ningún campo superior a este, por tanto el ciclo límite engloba a todas las posibles características magnéticas que se pueden formar en la muestra. Es un límite necesario para la mayor parte de los modelos de histéresis (excepto para los modelos tipo Preisach móviles) pues necesitan acotar la característica magnética.

**Ciclo menor.**

Ciclo de histéresis cuyo punto máximo es menor al punto máximo del ciclo límite. En la figura B-1 se muestran algunos ciclos menores y un ciclo límite.



*Figura B-1. Ejemplo de ciclo límite y ciclos menores*

**Punto de inversión.**

Punto de una característica de magnetización en el que el campo cambia de tendencia, pasa de ser creciente a decreciente o viceversa.

### Curva inversa de primer orden.

Característica de magnetización que comienza desde uno de los puntos de saturación técnica del ciclo límite, continua por una de sus ramas hasta llegar a un punto de inversión, a partir de dicho punto el campo vuelve al valor correspondiente a la saturación técnica. La rama de retorno al punto de saturación técnica se realiza por el interior del ciclo límite. En la figura B-2 se muestran dos curvas de magnetización, una creciente y otra decreciente. Se denomina curva inversa de primer orden por ser la que corresponde al primer punto de inversión.

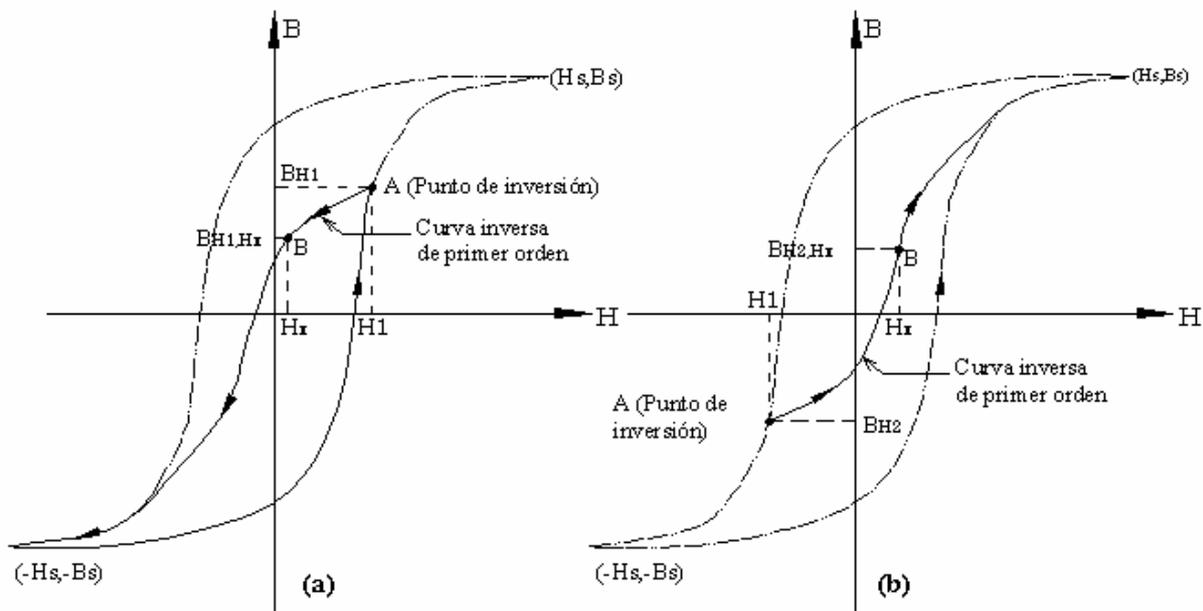


Figura B-2. Curva inversa de primer orden. (a) Decreciente y (b) creciente.

### Curva inversa de orden $n$ .

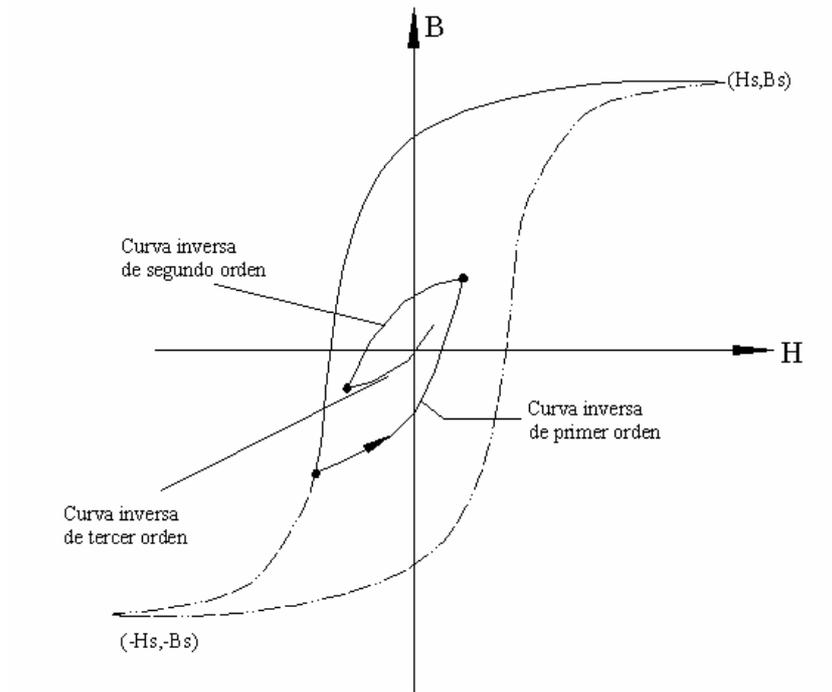
Característica de magnetización para el  $n$ -ésimo punto de inversión. La característica comienza por la saturación técnica y continua por una de sus ramas hasta que aparece un punto de inversión, a partir de este punto la curva sigue una trayectoria interior dirigida hacia el punto de saturación del cual partió, pero en dicha trayectoria aparece otro punto de inversión, la característica cambia de trayectoria hasta que aparece otro punto de inversión con el correspondiente nuevo cambio de trayectoria y así sucesivamente hasta que aparecen los  $n$  puntos de inversión. En la figura B-3 se muestra una curva inversa de segundo y tercer orden.

### Curva de primera inducción, normal o de magnetización.

Característica de magnetización para un historial de campo  $H(t)$  desde cero hasta el valor correspondiente al punto de saturación técnica en una muestra ferromagnética desmagnetizada, esto es, su inducción de remanencia es cero.

### Curva de anhistéresis.

Característica magnética para una muestra ferromagnética “ideal”, esto es, sin los fenómenos que implican la aparición de la histéresis. No se debe confundir la curva de anhistéresis con la curva de primera inducción.



**Figura B-3.** Curva inversa de segundo y tercer orden

## C. Modelos de histéresis magnética

En el presente capítulo se exponen los modelos de histéresis magnética investigados en nuestro trabajo. Excepto el modelo de Preisach que se expone en el capítulo 3, las generalizaciones a modelo dinámico del modelo de Preisach, tratadas en el capítulo 4 y el modelo de Preisach en el capítulo 5. Al final de este apéndice se comparan los diversos modelos analizados y se justifica la adopción del modelo de Preisach en nuestro trabajo.

### C.1 Modelo de Stoner-Wohlfarth

La base del modelo es la teoría desarrollada, en la década de los 40 del pasado siglo, por E.C. Stoner y E.P. Wohlfarth para explicar el proceso de orientación de dominios con anisotropía uniaxial [Stoner y Wohlfarth, 1991]. El modelo toma como fundamento un teorema demostrado por J. C. Maxwell que postula que el campo magnético de una partícula elipsoidal uniformemente magnetizada es también uniforme.

El modelo de histéresis de Stoner-Wohlfarth consiste en suponer que el material ferromagnético está formado por un conjunto de partículas que cumplen la teoría de Stoner-Wohlfarth. Estas partículas, denominadas partículas de Stoner-Wohlfarth, no presentan interacción entre ellas y están formadas por un dominio único con anisotropía uniaxial.

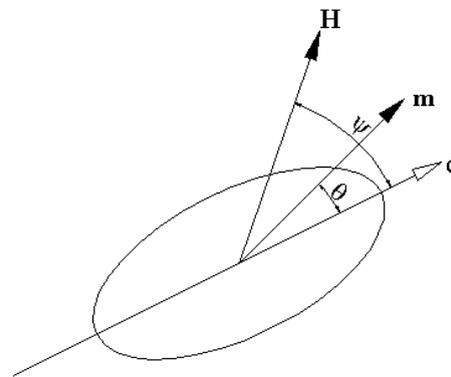
#### C.1.1 Partículas de Stoner-Wohlfarth

Una partícula de Stoner-Wohlfarth cumple:

- Está uniformemente magnetizada a su valor de saturación
- La magnetización de la partícula  $m$  es invariable
- La partícula es elipsoidal
- El eje favorable de la partícula coincide con el eje principal del elipsoide
- La partícula está formada por un único dominio

- Ningún elemento exterior, cuerpo o fuerza, impide su rotación
- La partícula rota hasta la dirección en la que su energía es mínima
- La partícula no está influida por las fuerzas cuánticas de intercambio
- Está libre de influencia de las fuerzas entre dipolos

En la figura C-1 se muestra una partícula de Stoner-Wohlfarth, donde  $c$  es el eje de anisotropía,  $m$  es la magnetización de la partícula y  $H$  el campo externo aplicado. La dirección de magnetización, a medida que varía el campo aplicado también varía y está determinada por la energía mínima en la partícula.



**Figura C-1.** Partícula de Stoner-Wohlfarth

La energía de la partícula de Stoner-Wohlfarth está formada por la energía electrostática y la energía magneto-cristalina o de anisotropía:

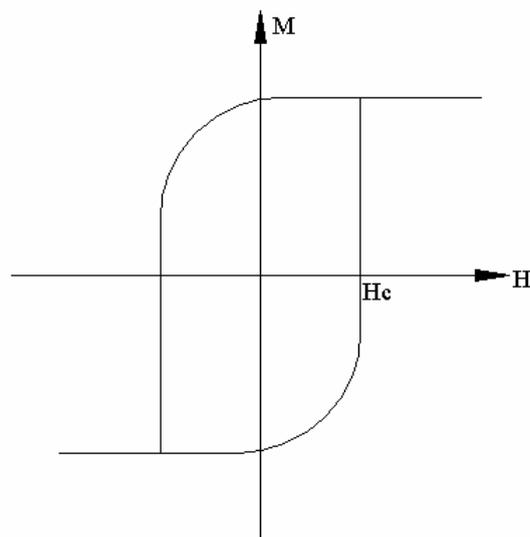
$$E = k \sin^2(\theta) - m_0 m H \cos(\theta - \psi) \quad (\text{C.1})$$

Donde  $k$  es la constante de anisotropía. El primer término de la ecuación (C.1) es la energía de anisotropía y el segundo es la energía electrostática.

Sigamos a continuación el proceso de orientación de la partícula de Stoner-Wohlfarth para un campo aplicado determinado. Por la ecuación (C.1) se puede deducir que para  $H=0$  existen dos direcciones que implican un mínimo de energía para la partícula,  $\theta_1=0^\circ$  y  $\theta_2=180^\circ$ . Generalizando para cada valor del campo aplicado  $H$ , a cada dirección  $\theta_1$  y  $\theta_2$  le corresponde un mínimo energía. La dirección a la cual rote la partícula será aquella para la cual la energía sea menor.

Supongamos que la dirección de magnetización inicial para  $H=0$  es  $\theta_1=180^\circ$ . Se aplica un campo  $H$  con dirección  $\theta$  respecto al eje de anisotropía (por ejemplo a  $30^\circ$ ). Para valores pequeños del campo aplicado el mínimo  $\theta_2$  disminuye su energía y rota hacia la izquierda, simultáneamente el mínimo  $\theta_1$  aumenta su energía mientras rota hacia la derecha. En consecuencia la dirección de magnetización (la dirección de la partícula) sigue siendo  $\theta_1$ , pero rotando ligeramente hacia la dirección del campo aplicado  $\theta$ . Estos cambios de orientación de la magnetización de la partícula son reversibles. Cuando el campo aplicado  $H$  supera cierto valor denominado campo crítico  $H_c=k/H_m$ , el mínimo de  $\theta_1$  desaparece y pasa a ser un máximo, en este momento esta dirección se ha vuelto inestable, y la magnetización salta bruscamente a la dirección  $\theta_2$  que sigue siendo un mínimo, y que como ha ido rotando hacia la izquierda ya está cercana a la dirección del campo aplicado  $\theta$ . Esta nueva rotación es irreversible, en este momento sólo prevalece un mínimo, la dirección  $\theta_2$ . Si el campo aplicado sigue aumentando por encima del campo crítico, la dirección  $\theta_2$  sigue siendo un mínimo, pero además de nuevo aparece la dirección  $\theta_1$  como mínimo. Pero la dirección de magnetización sigue siendo  $\theta_2$ , que sigue rotando hacia la dirección del campo aplicado  $\theta$ . Estas rotaciones posteriores al campo crítico de nuevo son reversibles.

El cambio de orientación brusco acontecido en el punto crítico se puede asociar con un salto de Barkhausen. Según lo expuesto, para un campo aplicado alterno y periódico, la característica de magnetización de una partícula de Stoner-Wohlfarth presentará un aspecto como el mostrado en la figura C-2. Al haber únicamente un punto crítico para una orientación del campo aplicado dada, únicamente habrá un salto de Barkhausen, de ahí que la parte irreversible de la curva tenga pendiente infinita.



**Figura C-2.** Ciclo de histéresis típico de una partícula de Stoner-Wohlfarth

### C.1.2 Cálculo de la dirección de magnetización

La dirección de magnetización  $\theta$  de la partícula de Stoner-Wohlfarth es la que corresponde al mínimo de su energía expresada por la ecuación (C.1), esto es, podemos determinar la dirección de magnetización calculando las raíces de las derivadas de la energía respecto  $\theta$  de la ecuación (C.1):

$$\begin{aligned}\frac{\partial E}{\partial \mathbf{q}} &= 0 \\ \frac{\partial^2 E}{\partial \mathbf{q}^2} &\geq 0\end{aligned}\quad (\text{C.2})$$

Se obtienen entonces dos o cuatro raíces reales dependiendo del campo aplicado  $H$ . En el caso de obtener dos raíces aparece un único máximo y por lo tanto única dirección de equilibrio para la magnetización de la partícula. Cuando se obtienen cuatro raíces se aparecen dos mínimos y por tanto dos direcciones posibles para la magnetización. Ambas rotaciones son reversibles.

El campo crítico para el cual aparece la rotación reversible se determina por:

$$\frac{\partial^2 E}{\partial \mathbf{q}^2} = 0 \quad (\text{C.3})$$

#### C.1.2.1 Astroide de Slonczewski

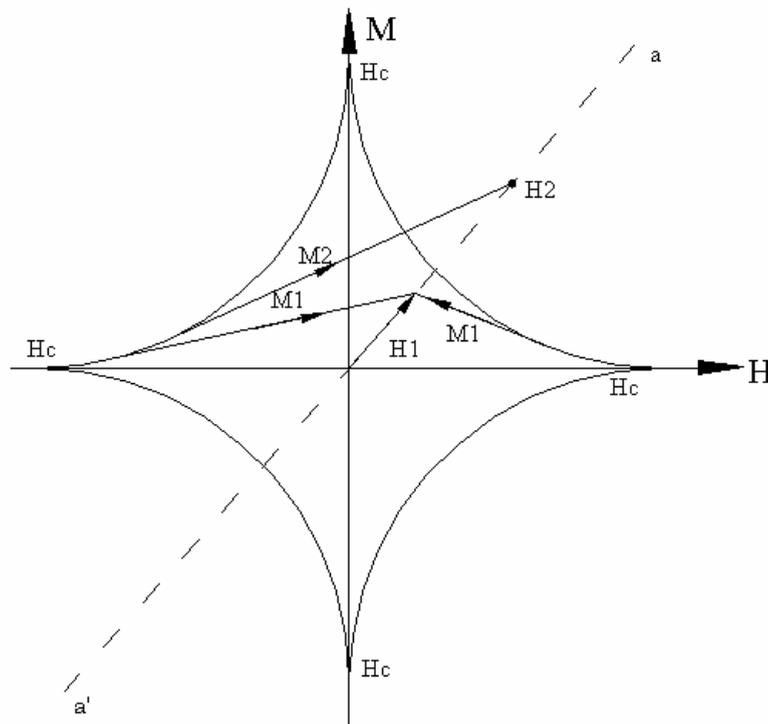
Sea el plano de todas las orientaciones posibles del campo aplicado  $H(H_x, H_y)$ . Según lo expuesto en el apartado anterior, sobre este plano se distinguirían dos zonas, una de valores de  $(H_x, H_y)$  para los cuales es posible tener dos orientaciones de magnetización estables, y otra para la cual sólo es posible tener una orientación estable. La frontera entre ambas zonas la forman los valores del campo crítico, que cumplen las siguientes condiciones:

$$\begin{aligned}\frac{\partial E}{\partial \mathbf{q}} &= 0 \\ \frac{\partial^2 E^2}{\partial \mathbf{q}^2} &= 0\end{aligned}\quad (\text{C.4})$$

Resolviendo las ecuaciones (C.4) se obtiene que la frontera cumple la siguiente ecuación:

$$H_x^{\frac{2}{3}} + H_y^{\frac{2}{3}} = H_c^{\frac{2}{3}} \quad (\text{C.5})$$

La ecuación (C.5) forma el astroide de Slonczewski, representado en la figura C-3. Los puntos en el interior del astroide son los correspondientes a la zona con dos orientaciones de magnetización, esto es, a las orientaciones metaestables. Los puntos exteriores al astroide de Slonczewski son los correspondientes a una única orientación estable, mientras que los puntos de astroide coinciden con el campo crítico.



**Figura C-3.** Astroide de Slonczewski

Sea el campo aplicado en la dirección  $aa'$  mostrado en la figura C.3, de valor  $H_1$ , menor al campo crítico. Las orientaciones de la magnetización que cumplen ser raíces reales de (C.5), son las tangentes al astroide que pasan por el extremo del vector  $H_1$ . El campo, al tener un valor menor al campo crítico, está dentro del astroide, y aparecen cuatro direcciones que cumplen la premisa de ser raíces reales de (C.5), de ellas, las orientaciones de equilibrio – aquellas que cumplen la expresión (C.1) y hacen que aparezca un mínimo – son las tangentes de menor pendiente.

Supongamos a continuación que el campo aplicado  $H$  se halla en la misma dirección pero con un valor  $H_2$ , mayor al campo crítico. Este campo está fuera del astroide, y tan solo son

posibles dos direcciones tangentes, de ellas la orientación de la magnetización es la tangente de menor pendiente que pasa por  $H_2$ .

### C.1.3 Modelo de Stoner-Wohlfarth

La histéresis de un material ferromagnético se modela como una colección de partículas de Stoner-Wohlfarth con diferente dirección del eje de anisotropía, esto es, una partícula para cada dirección discretizada. La magnetización es la suma vectorial de las contribuciones de todas las partículas. En consecuencia, aplicando esta definición del modelo de Stoner-Wohlfarth, la expresión algebraica de la componente de la magnetización alineada con el campo en coordenadas esféricas  $(r, \mathbf{f}, \mathbf{y})$  es:

$$M_H = \frac{1}{V} \int_0^{2p} \int_0^p M_s \cos[\mathbf{y} - \mathbf{q}(\mathbf{y}, H)] \mathbf{r}(\mathbf{f}, \mathbf{y}) \sin \mathbf{y} d\mathbf{y} d\mathbf{f} \quad (\text{C.6})$$

Donde  $\mathbf{q}(\mathbf{y}, H)$  es la dirección de magnetización de la partícula de Stoner-Wohlfarth para un campo aplicado  $H$  a una dirección  $\mathbf{y}$  con respecto al eje de anisotropía de la partícula.  $V$  es el volumen de la muestra.  $M_s$  es la magnetización de saturación y  $\mathbf{r}(\mathbf{f}, \mathbf{y})$  es la distribución de probabilidad de ejes de anisotropía en coordenadas esféricas.

$$\int_0^{2p} \int_0^p \mathbf{r}(\mathbf{f}, \mathbf{y}) \sin \mathbf{y} d\mathbf{y} d\mathbf{f} = 1 \quad (\text{C.7})$$

La distribución de ejes de anisotropía de las partículas se puede considerar uniforme en todas las direcciones ya que esto simplifica la caracterización del modelo. No obstante, para materiales con anisotropía sería necesaria una distribución no uniforme. En este caso, una buena solución para considerar una dirección preferencial es considerar una distribución de ejes de anisotropía gaussiana.

### C.1.4 Caracterización

Considerando que el campo crítico y la orientación de la magnetización se determinan por cálculo, los parámetros a caracterizar para el desarrollo numérico del modelo son  $k$ ,  $M_s$  y la distribución de ejes favorables  $\mathbf{r}(\mathbf{f}, \mathbf{y})$ .

La ecuación (C.1) está expresada con una única constante de anisotropía. Esto es posible siempre y cuando lo permita la estructura cristalina del material, en caso contrario, la energía de anisotropía se debe representar en función de dos constantes de anisotropía  $k_1$  y  $k_2$ . En cualquier caso, las constantes de anisotropía son directamente medibles a partir de las curvas de magnetización obtenidas para diversas direcciones de orientación del cristal. También se pueden emplear valores tabulados para ciertos materiales magnéticos [Bozorth, 1993].

La magnetización de saturación (o la inducción de saturación) se obtiene directamente de la curva normal experimental o del ciclo límite experimental. La curva normal o de primera inducción se puede obtener del fabricante o por ensayo, el ciclo límite se obtiene por ensayo. En todo caso, ambas curvas son sencillas de obtener por ensayo, siendo suficiente el ensayo balístico sin modificar.

La caracterización de la densidad de direcciones de ejes favorables  $\mathbf{r}(\mathbf{f}, \mathbf{y})$  no hay, en la actualidad, ningún procedimiento [Mayergoyz, 2003], con lo que su determinación es cuestión de intuición y muchas pruebas de ensayo y error.

### C.1.5 Desarrollo

A modo de resumen, el procedimiento para calcular un ciclo de histéresis por el modelo de Stoner-Wohlfarth es el siguiente.

1. Para cada partícula de Stoner-Wohlfarth, resolviendo la ecuación (C.4), se calcula el campo crítico  $H_c(\mathbf{y})$  y el ángulo crítico  $\mathbf{q}_c(\mathbf{y})$ , que es la orientación de la magnetización de la partícula en el momento en el que se produce la rotación irreversible al mínimo global de energía (momento en el que se alcanza el campo crítico).
2. Para cada partícula se determina la nueva dirección de mínima energía  $\mathbf{q}(\mathbf{y}, H)$  para un campo aplicado  $H$  con una dirección  $\mathbf{y}$ , partiendo de la dirección anterior  $\mathbf{q}_o$ . Esta nueva dirección se calcula determinando las raíces de (C.2) o mediante el astroide de Slonczewski.
3. Almacenar del valor  $\mathbf{q}(\mathbf{y}, H)$  obtenido en el paso 2.

4. Resolver la ecuación (C.6) o ecuación equivalente para todas las partículas de Stoner-Wohlfarth ponderadas por la densidad de direcciones favorables  $\mathbf{r}(\mathbf{f}, \mathbf{y})$ .

La generación de la curva de histéresis se realiza repitiendo los pasos 2, 3 y 4, para cada valor de  $H$  discretizado en el tiempo (técnica del *time-stepping*).

### C.1.6 Expansiones o generalizaciones del modelo de Stoner-Wohlfarth

Uno de los grandes inconvenientes del modelo de Stoner-Wohlfarth es su incapacidad para tratar la interacción entre dominios. David Atherton y J. Beattie proponen [Atherton y Beattie, 1990] aplicar el mismo tratamiento de la interacción entre dominios del modelo de Jiles-Atherton en el modelo de Stoner-Wohlfarth, que no es más que el campo de Weiss.

En 1905 el físico francés Pierre Weiss desarrollo una teoría para explicar el fenómeno de orientación de los momentos magnéticos en dominios, propio de los materiales ferromagnéticos. Según esta teoría la orientación en dominios es debida a la acción de un campo a nivel molecular, denominado campo medio de Weiss, que representa la interacción atómica que causa que los momentos atómicos vecinos se alineen entre si, ya que de esta forma la energía es más baja. El campo medio de Weiss se expresa como  $\mathbf{gM}$ . Bajo la influencia de un campo aplicado  $H$ , el átomo experimenta el denominado campo efectivo, que combina el propio campo aplicado  $H$  y el campo medio de Weiss:

$$\vec{H}_e = \vec{H} + \mathbf{g}\vec{M} \quad (\text{C.8})$$

David Jiles y David Atherton postularon un campo de interacción medio, análogo al campo medio molecular de Weiss, pero a escala del tamaño de grano [Jiles y Atherton, 1986]. El campo representa la interacción entre dominios vecinos, no entre átomos vecinos como en el caso del campo de Weiss. Para un campo aplicado  $H$ , un dominio experimenta un campo efectivo que, análogamente a la teoría de Weiss, es una combinación del campo aplicado  $H$  y el campo de interacción de Jiles-Atherton  $\mathbf{aM}$ :

$$\vec{H}_e = \vec{H} + \mathbf{a}\vec{M} \quad (\text{C.9})$$

La expansión de Atherton-Beattie consiste en aplicar el modelo Stoner-Wohlfarth, pero considerando el campo efectivo (C.9), de forma que la expresión del modelo (C.6) se convierte en:

$$M_H = \frac{1}{V} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} M_s \cos[\mathbf{y} - \mathbf{q}(\mathbf{y}, H + \mathbf{a}M)] \mathbf{r}(\mathbf{f}, \mathbf{y}) \sin \mathbf{y} \, d\mathbf{y} \, d\mathbf{f} \quad (\text{C.10})$$

En la ecuación (C.10) se considera que la magnetización  $M$  y el campo  $H$  son colineales, y por tanto pueden ser tratados como escalares.

## C.1.7 Valoración

### C.1.7.1 Ventajas

Las características más sobresalientes del modelo son:

- El modelo en si mismo es un mecanismo que permite representar los cambios reversibles e irreversibles de una forma sencilla.
- Es capaz de considerar las direcciones de orientación de los cristales.
- Considera efectos bidimensionales directamente.

### C.1.7.2 Inconvenientes

- Este modelo sólo considera la energía de anisotropía como causa de la orientación de la partícula. Las causas restantes de orientación de dominios, como las interacciones entre dominios y el enganche de las paredes de los dominios de las paredes no son consideradas.
- Como que se trata de una superposición de partículas simétricas, el modelo no es capaz de describir ciclos menores asimétricos, como las curvas inversas.
- El cálculo de la densidad de ejes favorables  $\mathbf{r}(\mathbf{f}, \mathbf{y})$  es un problema aún no resuelto. Dicho cálculo se logra a base de intuición más que de un procedimiento.

En definitiva, este modelo aporta una herramienta excelente para explicar el proceso de orientación de los dominios desde un punto de vista teórico. Pero en su estado actual no es válido para cálculos en ingeniería eléctrica. La forma de las histéresis obtenidas dista mucho de las curvas de histéresis típicas de los materiales ferromagnéticos.

## ***C.2 Modelo de Jiles-Atherton***

Se trata de un modelo propuesto por David Jiles y David Atherton en la década de los 80 del siglo pasado [Jiles y Atherton, 1983; Jiles y Atherton, 1986]. Partiendo de la curva de anhistéresis el modelo representa dos mecanismos fundamentales de la magnetización en materiales ferromagnéticos:

- Movimiento de las paredes bajo la influencia de un campo exterior  $H$ . Esto es, los dominios alineados de forma favorable con el campo crecen a expensas de los dominios de orientación no favorable.
- Rotación de los momentos alineados dentro de los dominios hacia la dirección del campo aplicado  $H$ .

En el desarrollo original del modelo, este era incapaz de realizar la clausura de los ciclos menores asimétricos. Una generalización posterior del propio David Jiles [Jiles, 1992], permite que el modelo supere esta carencia.

### **C.2.1 Fundamento del modelo**

#### *C.2.1.1 Magnetización de anhistéresis*

La teoría comienza con el desarrollo de una ecuación que represente a la curva de anhistéresis. El modelo de Jiles-Atherton parte de la hipótesis de considerar que la histéresis es debida al efecto de los impedimentos al movimiento que encuentran las paredes de los dominios. En consecuencia, la curva de anhistéresis representa la magnetización en un cuerpo ideal en el cual no hay impedimentos para el movimiento de las paredes de los dominios. Para un cuerpo real, esta curva de anhistéresis representa su curva de magnetización ideal.

La energía magnetostática por unidad de volumen  $E_m$  de un dominio es:

$$E = -\mathbf{m}_v \vec{m} \cdot \vec{H} \quad (\text{C.11})$$

Donde  $\mathbf{H}$  es el campo magnético establecido por el dominio, se trata de un campo interior no confundir con el campo aplicado, y  $\mathbf{m}$  es el momento por unidad de volumen del dominio bajo el campo  $\mathbf{H}$ .

El acoplamiento entre dominios se considera introduciendo un campo efectivo o campo medio de interacción análogo al campo medio de Weiss (ver apartado C.1.6), pero a la escala de los dominios, no a escala atómica. El campo efectivo en esta teoría es el campo experimentado por un momento magnético individual dentro de un dominio.

$$\vec{H}_e = \vec{H} + \mathbf{a} \vec{M} \quad (\text{C.12})$$

Donde  $\mathbf{a}$  es un parámetro que representa el acoplamiento entre dominios. Aplicando el campo efectivo (C.12) en la energía magnetostática volumétrica (C.11):

$$E = -\mathbf{m}_v \vec{m} \cdot (\vec{H} + \mathbf{a} \vec{M}) \quad (\text{C.13})$$

La magnetización respuesta al campo efectivo, en la dirección del campo aplicado se puede representar como:

$$M = M_s f(H_e) \quad (\text{C.14})$$

Donde  $f(h)$  es una función arbitraria que adopta un valor cero cuando el campo efectivo es nulo y uno cuando el campo efectivo tiene al infinito:

$$f(h) = \begin{cases} 0, \forall h = 0 \\ 1, \forall h \rightarrow \infty \end{cases} \quad (\text{C.15})$$

David Jiles y David Atherton proponen adoptar como función  $f(h)$  la función de Langevin modificada:

$$M_{an} = M_s \left[ \coth\left(\frac{H_e}{a}\right) - \left(\frac{a}{H_e}\right) \right] \quad (\text{C.16})$$

El parámetro  $a$  es una constante con dimensión de campo magnético que caracteriza la forma de la curva de anhistéresis.

La aparición de histéresis está relacionada con el parámetro  $a$ . Cuando este parámetro es pequeño, no hay histéresis ( $M$ , calculada con (C.16), tiene un valor único). En consecuencia, la expresión (C.16) puede representar una curva de anhistéresis. Para valores altos del parámetro  $a$ , la ecuación puede llegar a representar una histéresis, pero incompleta pues tan solo tiene en consideración el efecto de la interacción entre dominios. Para poder representar la magnetización en materiales blandos debemos añadir otro efecto, el enganche de las paredes de los dominios.

#### *C.2.1.2 Efecto del enganche de las paredes de los dominios*

Para conseguir un modelo más realista se debe considerar el efecto del enganche de las paredes acontecido en el proceso de desplazamiento de los dominios. Las fuerzas de fricción provocan el enganche de las paredes de los dominios en determinados puntos. La aparición de estos puntos de sujeción es debida a efectos de dislocaciones, inclusiones magnéticas debidas a impurezas, regiones en estado de tensión no homogéneo o fronteras de grano que causan fuerzas de oposición a cambios en la magnetización.

Se considera el efecto del enganche de las paredes de los dominios introduciendo un nuevo término de energía que complementa a la energía magnetostática; se trata de la energía disipada en la sujeción y liberación de la pared  $E_p$ .

Para el tratamiento del enganche de las paredes de los dominios, el modelo de Jiles-Atherton parte de las siguientes hipótesis:

- No se distingue entre los distintos tipos de puntos de enganche. Todos se tratan igual, considerando que todos tienen la misma energía, sea cual sea su naturaleza.
- Los puntos de enganche están uniformemente distribuidos
- Los enganches provocan un decremento de la permeabilidad inicial incrementando el campo coercitivo.

Sea  $e_o$  la energía de sujeción por unidad de volumen. Si han  $n$  puntos de enganche por unidad de volumen, la energía invertida para mover una pared entre dominios de  $180^\circ$ , de superficie  $S$ , una distancia  $dx$ , se puede expresar como:

$$dE_p = \mathbf{m}_b n e_p A dx \quad (\text{C.17})$$

Mientras que el cambio de momento magnético se expresa así:

$$dM = 2M_s A dx \quad (\text{C.18})$$

Comparando ambas expresiones se aprecia como el decremento energético es proporcional al cambio de momento magnético:

$$dE_p = k dM \quad (\text{C.19})$$

El parámetro  $k$  depende de la microestructura del material, siendo proporcional a la densidad de puntos de enganche así como a la energía de dichos puntos.

### C.2.1.3 Proceso de magnetización irreversible

La energía de magnetización es la diferencia entre la energía del material si este fuese anhisterésico menos las pérdidas por enganche que representan las pérdidas por histéresis. Como que el proceso de enganche de las paredes de los dominios es irreversible, la magnetización calculada a partir de este balance es la componente irreversible de la magnetización total:

$$\mathbf{m}_b \int M_{irr}(H) dH_e = \mathbf{m}_b \int M_{an}(H_e) dH_e - \mathbf{m}_b \int k dM_{irr} \quad (\text{C.20})$$

Este balance energético se puede reescribir como:

$$M = M_{an} - \mathbf{d}k \frac{dM}{dH_e} \quad (\text{C.21})$$

Donde  $\mathbf{d}$  es una función tal que:

$$\mathbf{d} = \begin{cases} 1, \forall \frac{dH}{dt} > 0 \\ -1, \forall \frac{dH}{dt} < 0 \end{cases} \quad (\text{C.22})$$

Finalmente, desarrollando (C.21), se obtiene:

$$\frac{dM_{irr}}{dH} = \left\langle \frac{M_{an} - M_{irr}}{\mathbf{d}k - \mathbf{a}(M_{an} - M_{irr})} \right\rangle \quad (\text{C.23})$$

Donde  $\langle x \rangle$  es un operador que cumple:

$$\langle x \rangle = \begin{cases} x, \forall x > 0 \\ 0, \forall x \leq 0 \end{cases} \quad (\text{C.24})$$

Este operador se introduce para evitar que la magnetización aumente cuando el campo disminuye y viceversa. Estas situaciones son soluciones matemáticamente posibles para la ecuación (C.23) pero carecen de sentido físico.

#### C.2.1.4 Proceso de magnetización reversible

La ecuación (C.23) únicamente representa los procesos irreversibles. Se debe considerar también la componente reversible de la magnetización. Dicha componente reversible es debida al encurvamiento de las paredes de los dominios cuando estas se hallan sujetas a puntos de enganche.

El modelo de Jiles-Atherton asume que la pared se comporta como una membrana elástica, en tal caso se puede demostrar que la componente reversible de la magnetización es proporcional a la diferencia entre la magnetización anhisterésica y la componente irreversible de la magnetización:

$$\frac{dM_{rev}}{dH} = c \left( \frac{dM_{an}}{dH} - \frac{dM_{irr}}{dH} \right) \quad (\text{C.25})$$

El parámetro  $c$  es una constante a determinar, dependiente del material.

### C.2.1.5 Magnetización total

La ecuación final del modelo es la magnetización total que comprende a las componentes reversible e irreversible:

$$\frac{dM}{dH} = \frac{dM_{irr}}{dH} + \frac{dM_{rev}}{dH} \quad (C.26)$$

Combinando las ecuaciones (C.23), (C.25) y (C.26) se obtiene la expresión matemática del modelo de Jiles-Atherton:

$$\frac{dM(H)}{dH} = \frac{M_{an}(H) - M_{irr}(H)}{\mathbf{d}k - \mathbf{a} [M_{an}(H) - M_{irr}(H)]} + c \left[ \frac{dM_{an}(H)}{dH} - \frac{dM_{irr}(H)}{dH} \right] \quad (C.27)$$

La magnetización de anhistéresis se puede determinar mediante la función de Langevin modificada.

### C.2.1.6 Clausura de curvas inversas y ciclos menores asimétricos

Con el modelo expuesto no se pueden cerrar los ciclos menores asimétricos o las curvas inversas. David Jiles [Jiles, 1992] ha propuesto una modificación al modelo original para superar esta situación. Se asumen que en un momento determinado sólo una fracción de las paredes de los dominios está activa. Como resultado, las ecuaciones anteriores se reescalan mediante constantes de proporcionalidad:

$$\frac{dM_{irr}}{dH} = v_f \left\langle \frac{M_{an} - M_{irr}}{\mathbf{d}k - \mathbf{a} (M_{an} - M_{irr})} \right\rangle \quad (C.28)$$

$$\frac{dM_{rev}}{dH} = v'_f \left( \frac{dM_{an}}{dH} - \frac{dM_{irr}}{dH} \right) \quad (C.29)$$

Los parámetros  $v_f$  y  $v'_f$  son constantes para cada par de extremos determinado y se determinan de forma que se fuerce que los ciclos menores se cierren. La propia condición de clausura se emplea para determinar estos dos parámetros:

$$v_f = \frac{M_{irr}(H_+) - M_{irr}(H_-)}{\int_{H_-}^{H_+} \frac{M_{an}(H) - M_{irr}(H)}{k\mathbf{d} - \mathbf{a}(M_{an} - M_{irr})} dH} \quad (C.30)$$

$$v_f' = \frac{M_{rev}(H_+) - M_{rev}(H_-)}{\int_{H_-}^{H_+} c \left[ \frac{dM_{an}(H)}{dH} - \frac{dM_{irr}(H)}{dH} \right] dH} \quad (C.31)$$

Donde  $H_+$  y  $H_-$  son respectivamente los valores del campo en los extremos positivos y negativos del ciclo menor.

### C.2.1.7 Variante de Carpenter

K.H Carpenter propone una aproximación alternativa a la anterior [Carpenter, 1991; Liorzou, Phelps y Atherton, 2000] que permite obtener curvas inversas sin conocer a priori el siguiente punto de inversión. Compensa el ciclo menor con porciones del ciclo límite para forzar la clausura. La magnetización del ciclo menor  $M_{mi}$  se relaciona con la magnetización del ciclo límite  $M_{ma}$  mediante la siguiente expresión:

$$M_{mi} = \mathbf{u}M_{ma} + M_o \quad (C.32)$$

Donde  $\mathbf{u}$  es un factor de escalado y  $M_o$  es un valor de compensación (*offset*) que asegura que, para el ciclo menor en cálculo, el valor máximo es el mismo que el del ciclo límite.

## C.2.2 Caracterización

Para desarrollar el modelo de Jiles-Atherton necesitamos calcular cinco parámetros:

- Magnetización espontánea  $M_S$
- Densidad de puntos de enganche  $k$
- Parámetro de interacción entre dominios en la ecuación del campo efectivo  $\mathbf{a}$
- Constante de la función de Langevin  $a$
- Componente de magnetización reversible  $c$

El método de caracterización más simple se consigue a partir de los siguientes datos experimentales:

- Susceptibilidad inicial de la curva de primera inducción  $c'_{in}$

- Susceptibilidad inicial anhisterésica  $c'_{an}$
- Campo coercitivo  $H_c$
- Susceptibilidad diferencial en el punto coercitivo  $c'_{Hc}$
- Remanencia  $M_r$  (o  $B_r$ )
- Susceptibilidad diferencial en el punto de remanencia  $c'_r$
- Magnetización (o inducción) y campo en el punto máximo del ciclo límite  $(M_m, H_m)$   
( $B_m, H_m$ )
- Susceptibilidad diferencial de la curva de primera inducción en un extremo del ciclo límite  $c'_m$

A pesar del gran número de datos experimentales a obtener, todo se resume a un par de curvas fácilmente obtenibles: el ciclo límite, la curva de primera inducción y la curva de anhisterésis, que se puede determinar a partir del ciclo límite. El parámetro  $M_s$  supuestamente es la saturación real, pero asumiéndolo igual a la saturación técnica es suficiente. Se obtiene por tanto del ciclo límite.

La susceptibilidad diferencial en el punto coercitivo se supone igual al máximo valor de susceptibilidad diferencial en el ciclo de histéresis límite  $c'_{max}$ .

Los parámetros restantes se pueden determinar mediante las siguientes expresiones:

$$c = \frac{3ac'_{an}}{M_s} \quad (C.33)$$

$$k = \frac{M_{an}(H_c)}{1-c} \left[ a + \frac{1}{\left(\frac{1}{1-c}\right)c'_{max} - \left(\frac{c}{1-c}\right)\frac{dM_{an}(H_c)}{dH}} \right] \quad (C.34)$$

$$M_r = M_{an}(M_r) + \frac{k}{\left(\frac{a}{1-c}\right) + \frac{1}{c'_r - c} \frac{dM_{an}(M_r)}{dH}} \quad (C.35)$$

$$M_m = M_{an} \left( M_m - \frac{(1-c)kc'_m}{ac'_m + 1} \right) \quad (C.36)$$

Como que las ecuaciones son implícitas se debe recurrir a la iteración para calcular el valor de los parámetros. El procedimiento propuesto para la caracterización del modelo de Jiles-Atherton es el siguiente [Jiles, Thoenke, Devine, 1992]:

1. Determinar la magnetización espontánea  $M_s$  a partir del punto máximo del ciclo límite, suponiendo que dicho ciclo entre en saturación.
2. Asignar una semilla al parámetro  $\mathbf{a}$
3. Calcular un primer valor para el parámetro  $a$  a partir de la semilla del parámetro  $\mathbf{a}$  mediante la expresión:

$$a = \frac{M_s}{3} \left( \frac{1}{c_{an}} + \mathbf{a} \right) \quad (5.24)$$

4. Calcular el parámetro  $k$  mediante (C.34).
5. Calcular el parámetro  $\mathbf{a}$  mediante (C.35)
6. Calcular el parámetro  $a$  mediante (C.36)
7. Repetir los pasos (4), (5) y (6) hasta que el error entre dentro del rango deseado
8. Calcular  $c$  mediante (C.33)

### C.2.3 Desarrollo numérico

La resolución de la ecuación diferencial (C.27) se realiza siguiendo un esquema de diferencias finitas del tipo:

$$\frac{dM}{dH} = \frac{M(t + \Delta t) - M(t)}{\Delta H} \quad (C.38)$$

Donde  $M(t)$  es la magnetización en el nodo temporal (o paso de tiempo) anterior y  $M(t + \Delta t)$  es la magnetización a calcular para el nodo de tiempo actual.

Suponiendo conocidos  $B(t)$ ,  $M(t)$  y  $H(t)$  del paso de tiempo anterior y el campo magnético del nodo tiempo actual  $H(t+\mathbf{D}t)$ , la inducción  $B(t+\mathbf{D}t)$  se calcula mediante el siguiente procedimiento [Bastos y Sadowski, 2003]:

1. Cálculo del paso de campo  $\mathbf{D}H$ :

$$\Delta H = H(t + \Delta t) - H(t) \quad (\text{C.39})$$

2. Cálculo del campo efectivo del paso de tiempo anterior:

$$H_e(t) = H(t) + \mathbf{a}M(t) \quad (\text{C.40})$$

3. Cálculo de la magnetización de anhistéresis mediante la función de Langevin, ecuación (C.16), para el campo efectivo calculado en el paso (2)

4. Cálculo de la componente irreversible de la magnetización del paso de tiempo anterior:

$$M_{irr}(t) = \frac{M(t) - c \cdot M_{an}(t)}{1 - c} \quad (\text{C.41})$$

5. Calcular la derivada de la magnetización de anhistéresis respecto al campo efectivo. Si la magnetización anhistéresica se representa mediante la función de Langevin, dicha derivada se expresa así:

$$\frac{dM_{an}}{dH_e} = \frac{M_s}{a} \left[ 1 - \coth^2 \left( \frac{H_e(t)}{a} \right) + \left( \frac{a}{H_e(t)} \right)^2 \right] \quad (\text{C.42})$$

6. Cálculo de la derivada respecto al campo de la componente irreversible:

$$\frac{dM_{irr}}{dH_e} = \frac{M_{an}(t) - M_{irr}(t)}{k\mathbf{d}} \quad (\text{C.43})$$

7. Cálculo de la derivada de la magnetización total respecto al campo:

$$\frac{dM}{dH} = \frac{(1-c) \frac{dM_{irr}}{dH_e} + c \frac{dM}{dH_e}}{1 - ac \frac{dM_{an}}{dH_e} - a(1-c) \frac{dM_{irr}}{dH_e}} \quad (C.44)$$

8. Cálculo de la magnetización del paso de tiempo actual:

$$M(t + \Delta t) = M(t) + \frac{dM}{dH} \Delta H \quad (C.45)$$

9. Cálculo de la inducción del nodo de tiempo actual:

$$B(t + \Delta t) = \mathbf{m}_b [H(t + \Delta t) + M(t + \Delta t)] \quad (C.46)$$

#### C.2.4 Modelo dinámico

El modelo de Jiles-Atherton expuesto hasta aquí es el modelo original, el cual es estático por naturaleza. David Jiles [Jiles, 1993] propuso una expansión del modelo original para hacerlo dependiente de la rapidez en la variación de la excitación (*rate-dependent*). Dicha expansión consiste que la magnetización  $M(t)$  en cada momento del tiempo compite con un valor de magnetización  $\tilde{M}(t)$  que viene dado por el modelo estático. La relación entre la magnetización dinámica  $M(t)$  y la estática  $\tilde{M}(t)$  es un proceso de relajación:

$$\frac{d^2}{dt^2} [M(t) - \tilde{M}(t)] + 2\mathbf{g} \frac{d}{dt} [M(t) - \tilde{M}(t)] + \mathbf{w}_n^2 [M(t) - \tilde{M}(t)] = 0 \quad (C.47)$$

La ecuación (C.47) implica añadir dos parámetros adicionales,  $\mathbf{g}$  y  $\mathbf{w}$ , a los cinco ya existentes en el modelo original.

El desarrollo numérico para el modelo dinámico consiste en determinar primero la magnetización estática  $\tilde{M}(t)$  con el modelo original estático siguiendo el procedimiento propuesto en el apartado C.2.3, para después resolver (C.47), repitiéndose este proceso para cada nodo de tiempo.

Esta expansión a modelo dinámico no es aplicable a medios conductores, esto es, no considera el efecto de las corrientes inducidas. David Jiles, [Jiles, 1994] propuso una segunda

expansión para considerar tal efecto. Partiendo de las mismas ecuaciones del modelo original expuesto se llega a la siguiente ecuación:

$$M = M_{irr} + M_{rev} \Rightarrow M = M_{an} - kd(1-c) \frac{dM_{irr}}{dH_e} \quad (C.48)$$

Desarrollando (C.48):

$$m_0 \int M_{an} dH_e = m_0 \int M dH_e + m_0 kd(1-c) \int dM_{irr} \quad (C.49)$$

El término de la izquierda de (C.49) es la energía de entrada, mientras que el primer término de la derecha es el cambio de energía en la magnetostática y el segundo término la pérdida de energía por enganche. Sustituyendo (C.41) en (C.49), obtenemos la siguiente ecuación:

$$m_0 \int M_{an} dH_e = m_0 \int M dH_e + m_0 kd \int \frac{dM}{dH_e} dH_e - m_0 kd c \int \frac{dM_{an}}{dH_e} dH_e \quad (C.50)$$

Como la expresión (C.50) es un balance energético, David Jiles propone que dicha ecuación corresponda a un modelo dinámico tan solo se debe introducir las pérdidas dinámicas, esto es, las pérdidas clásicas (por corrientes inducidas) y el exceso de pérdidas (efecto de las corrientes inducidas en el movimiento de las paredes). La expresión de las pérdidas clásicas para una variación sinusoidal del flujo, con frecuencias bajas e intermedias con penetración completa del flujo es:

$$\frac{dW_{cl}}{dt} = \frac{\mathbf{p}^2 B_m^2 \mathbf{t}^2 f^2}{\mathbf{br}} \quad (C.51)$$

Donde  $\mathbf{r}$  es la conductividad,  $\mathbf{t}$  es el grosor de la muestra y  $\mathbf{b}$  es un factor geométrico. La expresión de las pérdidas de exceso empleada por Jiles es la que deriva de la teoría de Bertotti [Bertotti, 1998]:

$$\frac{dW_{ex}}{dt} = \sqrt{\frac{Gt w H_o}{\mathbf{r}}} \sqrt{\left(\frac{dB}{dt}\right)^3} \quad (C.52)$$

Donde  $G$  es un parámetro adimensional que vale 0,1356 si el resto de magnitudes se expresa en el sistema internacional,  $w$  es la anchura de las laminaciones y  $H_o$  es un parámetro que representa el potencial interno experimentado por las paredes y se mide en A/m.

Añadiendo las ecuaciones (C.51) y (C.52) al balance de pérdidas (C.50) este pasa a ser dinámico, el cual se desarrolla para formularlo con una expresión más adecuada al modelo de histéresis:

$$M_{an} = M + kd \frac{dM}{dH_e} - kdc \frac{dM_{an}}{dH_e} + \frac{\mathbf{m}_0 t^2}{2\mathbf{rb}} \left( \frac{dM}{dt} \right) \frac{dM}{dH_e} + \sqrt{\frac{\mathbf{m}_0 G t w H_o}{\mathbf{r}}} \sqrt{\frac{dM}{dt} \frac{dM}{dH_e}} \quad (\text{C.53})$$

Esta ecuación se resuelve numéricamente para  $dM/dH$  empleando, por ejemplo, el método de Newton-Raphson.

### C.2.5 Valoración

El modelo presentado y el modelo de Stoner-Wohlfarth son los que están más fundamentados en los procesos físicos que intervienen en la magnetización. El modelo de Stoner-Wohlfarth se centra exclusivamente en describir el proceso de alineación de una partícula con el campo magnético aplicado, esto hace que pueda considerar directamente la anisotropía. En el modelo de Jiles-Atherton el mecanismo de magnetización no es tan claro pues consiste en resolver un balance de energías, y no puede tratar la anisotropía magnetocristalina directamente, pero es un modelo superior al de Stoner-Wohlfarth en el sentido que considera la interacción entre dominios y los procesos acontecidos en los puntos de enganche de las paredes de los dominios por lo que describe mejor la magnetización. En definitiva las ventajas del modelo de Jiles-Atherton radican en su propio fundamento físico, que le permite considerar:

- Interacciones entre dominios
- Efectos del enganche de las paredes en los dominios
- Describir la magnetización
- Describir la anhistéresis
- Se puede ampliar a dinámico
- Se pueden identificar los parámetros partiendo únicamente del ciclo límite

Los aspectos más débiles de su teoría, sobre todo comparados con el modelo de Stoner-Wohlfarth son:

- No queda definido el mecanismo de magnetización
- Modelo isótropo

Aún con estas carencias con respecto al modelo de Stoner-Wohlfarth, sigue siendo preferible el modelo de Jiles-Atherton. De hecho, el principal competidor del modelo de Jiles-Atherton es el modelo de Preisach, con respecto al cual presenta los siguientes inconvenientes:

- Necesita de una expansión adicional para cerrar los ciclos menores asimétricos y las curvas inversas
- Si bien los parámetros se determinan a partir de únicamente el ciclo límite, se deben identificar cinco parámetros y para ello se necesita de un procedimiento iterativo.
- Necesita de muchas líneas de código para su desarrollo, menos que para el modelo de Stoner-Wohlfarth, pero muchas más que el modelo de Preisach.

### ***C.3 Modelo de Globus***

#### **C.3.1 Fundamento**

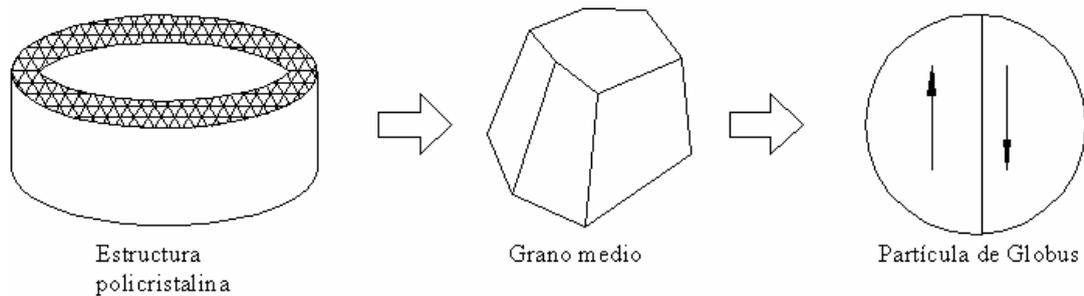
##### *C.3.1.1 Partículas de Globus*

En 1975 Anatol Globus [Globus, 1975] propuso un modelo para explicar el proceso de magnetización de una forma simple. El fundamento del modelo se basa en la hipótesis de que una muestra de material ferromagnético blando en forma de anillo, policristalina, se puede considerar como una distribución anular de partículas o granos formada por dos dominios cuya orientación dista de uno a otro  $180^\circ$ . Esta distribución es la que representa mejor continuidad de flujo de grano a grano, y además garantiza que el flujo se cierra a través de la muestra.

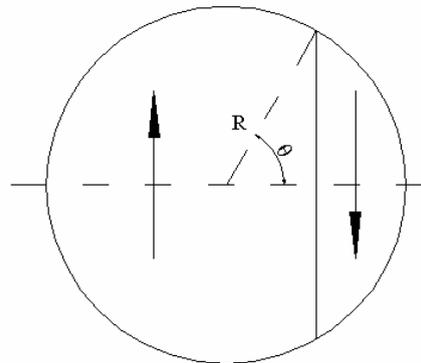
Se supone que cada partícula de la muestra policristalina está dividida únicamente por una pared de  $180^\circ$ . Así cada partícula está constituida por dos dominios antiparalelos. Con esta base Globus considera que el comportamiento de toda muestra se puede reducir al comportamiento de único grano medio, modelado por lo que denominamos partícula de Globus (figura C-4). Esta partícula de Globus es una esfera de radio  $R$  formado por dos

dominios separados por una pared de  $180^\circ$ , esto es, ambos dominios son antiparalelos (figura C-5).

Los cambios en la magnetización causados por un campo aplicado en la misma dirección que la orientación de la magnetización espontánea en los dominios de la partícula son gobernados por el movimiento de la pared dentro de la misma. Siempre suponiendo que la pared queda enganchada en algún punto de la frontera de la partícula.



**Figura C-4.** Reducción de una muestra policristalina a una partícula de Globus



**Figura C-5.** Partícula de Globus

### C.3.1.2 Procesos de magnetización irreversibles

Globus en su modelo considera que los procesos irreversibles se pueden describen por el movimiento paralelo de la pared respecto al campo aplicado cuando se supera la fuerza de enganche de la pared en la frontera de la partícula. Así mismo, Globus considera que el campo magnético requerido para mover la pared plana se evalúa minimizando la suma de tres términos de energía:

1. El primer término es la energía de fricción pared-frontera  $E_f$ . Esta energía es proporcional al radio de la partícula de Globus. La constante de proporcionalidad es el parámetro  $F$  que representa a la fuerza de fricción.

$$dE_f = 2\mathbf{p}FR^2 \sin \mathbf{q} d\mathbf{q} \quad (\text{C.54})$$

2. El segundo es un término relativo a la energía de la pared  $\mathbf{g}$ . Este término depende de la superficie de la pared.

$$dE_g = 2\mathbf{p}\mathbf{g}R^2 \sin \mathbf{q} \cos \mathbf{q} d\mathbf{q} \quad (\text{C.55})$$

3. El tercer término es la energía magnetostática que actúa en la pared a modo de presión:

$$dE_H = -2\mathbf{p}M_sHR^2 \sin^3 \mathbf{q} d\mathbf{q} \quad (\text{C.56})$$

La introducción de la energía de fricción es compatible con la energía de enganche del modelo de Jiles-Atherton. La diferencia es que los puntos de enganche no están uniformemente distribuidos en toda la muestra sino que en el caso del modelo de Globus están localizados en la frontera de la partícula de Globus.

La condición de equilibrio de los tres términos de energía:

$$dE_f + dE_g + dE_H = 0 \quad (\text{C.57})$$

De donde se deduce la expresión del campo energético en función de la posición de la pared en la partícula.

$$H = \frac{F + \mathbf{g} \cos \mathbf{q}}{M_s R \sin^2 \mathbf{q}} \quad (\text{C.58})$$

El cambio de magnetización  $dM$  durante un pequeño desplazamiento de la pared es proporcional a la variación de volumen  $dV$  de uno de los dos dominios de la partícula. Si  $V_0$  es el volumen de la partícula:

$$dM = \frac{2M_s dV}{V_0} \quad (\text{C.59})$$

Integrando (C.59) respecto a  $R \cos \mathbf{q}$  entre los límites  $\mathbf{q}=0$  y  $\mathbf{q}=\mathbf{q}$ :

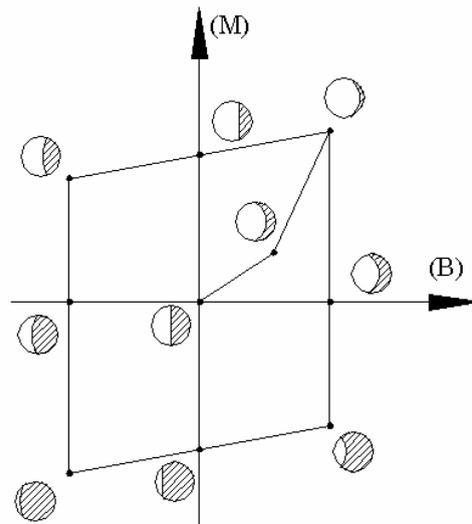
$$M = \frac{1}{2}M_s \cos \mathbf{q} (2 + \sin^2 \mathbf{q}) \quad (\text{C.60})$$

Las ecuaciones (C.58) y (C.60) describen de forma paramétrica el movimiento de la pared plana dentro de la partícula para procesos irreversibles.

### C.3.1.3 Procesos de magnetización reversibles

Asumiendo la hipótesis de pequeños pandeos, la componente reversible de la magnetización es proporcional al campo magnético:

$$M_{rev} = \frac{3}{8}M_s^2 \frac{D}{g} H \quad (\text{C.61})$$



**Figura C-6.** Ciclo de histéresis de una partícula de Globus

### C.3.1.4 Ciclo de histéresis

En la figura C-6 se muestra la formación del ciclo de histéresis en una partícula de Globus. En los tramos verticales se produce la magnetización irreversible, la pared se desplaza dentro de la partícula paralelamente al campo aplicado. En los tramos reversibles la pared únicamente se pandea en la dirección del campo aplicado. Al haber asumido la hipótesis de pandeos pequeños es imposible que uno de los dominios se extienda en toda la partícula. Esto es coherente con los postulados del modelo, pero impide que la partícula alcance la saturación.

### C.3.2 Caracterización

Para caracterizar el modelo se deben hallar cuatro parámetros  $M_s$ ,  $R$ ,  $g$  y  $F$ . Todos ellos se pueden determinar experimentalmente.

La magnetización espontánea es la magnetización correspondiente al punto máximo del ciclo límite.

El radio de la partícula de Globus se determina por observación del tamaño de los granos de la muestra.

Suponiendo que  $M_s$  y  $R$  ya han sido determinados, se puede demostrar [Guyot y Globus, 1973] que las pérdidas energéticas volumétricas debidas a la histéresis en función de la remanencia  $M_r$  y la superficie del ciclo de histéresis tienen la siguiente relación lineal:

$$E_h = 4 \frac{M_r}{R} \left( F + \frac{g}{3} M_r \right) \quad (\text{C.62})$$

Donde  $E_h$  se determina midiendo el área de un ciclo de histéresis determinado. Midiendo dos ciclos podemos formar con la ecuación (C.62) un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas, los parámetros  $F$  y  $g$ .

### C.3.3 Valoración

El modelo de Globus es un sistema sencillo y elegante de describir el proceso de magnetización. Pero justamente esta simplicidad implica una serie de carencias que lo hacen inoperante para aplicaciones de ingeniería:

- La hipótesis de que el comportamiento de una muestra policristalina se puede reducir al comportamiento de un único grano modelado como una partícula de Globus supone la ausencia de defectos o inclusiones en la estructura cristalográfica de la muestra.
- Como que las partículas de Globus no alcanzan la saturación, el modelo únicamente es aplicable a rangos de campos débiles.

- Como que la partícula se modela por una única partícula de Globus el modelo menosprecia las interacciones entre partículas.

Se debe realizar un esfuerzo en investigación para desarrollar expansiones que hagan del modelo una herramienta útil en ingeniería. Por ejemplo, desarrollando el modelo como una colección de partículas o añadiendo la interacción entre partículas mediante el concepto de campo medio efectivo del modelo de Jiles-Atherton, o como en la expansión de Atherton-Beattie del modelo de Stoner-Wohlfarth [Liorzou, Phelps y Atherton, 2000].

## C.4 Modelo de Enokizono-Soda

### C.4.1 Fundamento

Masato Enokizono y Naoya Soda han propuesto un interesante modelo de histéresis basado en el carácter tensorial de la reluctividad en los materiales anisótropos [Enokizono y Fujita, 2002; Soda y Enokizono, 2000]. En el caso de campos rotacionales (figura C-7) la relación entre el campo  $\mathbf{H}$  y la inducción  $\mathbf{B}$  es:

$$\vec{H} = \mathbf{n}\vec{B} \Rightarrow \begin{pmatrix} H_x \\ H_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n_{xx} & n_{xy} \\ n_{yx} & n_{yy} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_x \\ B_y \end{pmatrix} \quad (\text{C.63})$$

Donde  $\mathbf{n}$  es la reluctividad de la muestra:

$$\mathbf{n} = \frac{1}{\mathbf{m}} \quad (\text{C.64})$$

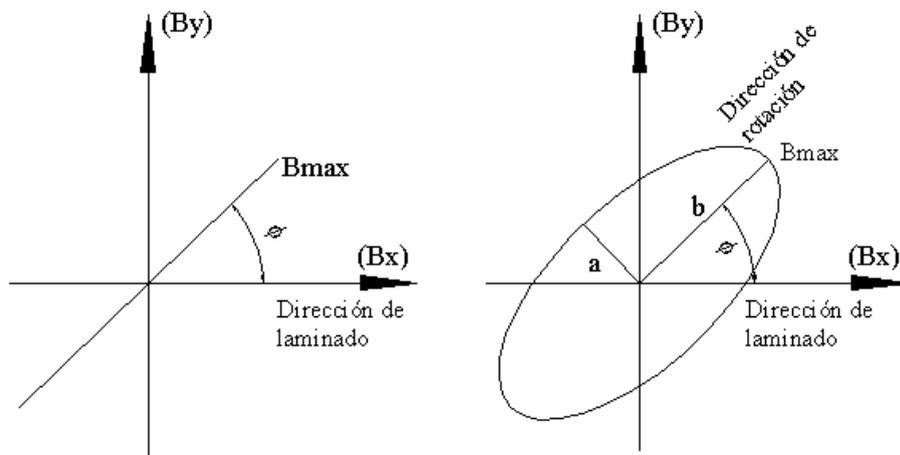


Figura C-7. Campo alternativo (izquierda) y campo rotativo (derecha)

La ecuación de partida del modelo de Enokizono-Soda es la relación entre la inducción y el campo, considerando tanto la histéresis alternativa o pulsante como la rotacional o giratoria. Dicha relación se expresa:

$$\left. \begin{aligned} H_x &= \mathbf{n}_{xv} B_x + \frac{\mathbf{n}_{xi}}{\mathbf{w}} \frac{\partial B_x}{\partial t} \\ H_y &= \mathbf{n}_{yv} B_y + \frac{\mathbf{n}_{yi}}{\mathbf{w}} \frac{\partial B_y}{\partial t} \end{aligned} \right\} \quad (\text{C.65})$$

Donde  $\mathbf{w}$  es la pulsación de la excitación, y además las reluctividades se puede expresar como:

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{n}_{xv} &= k_{xv1} + k_{xv2} B_x^2 + k_{xv3} B_x \left( \frac{\partial B_x}{\partial t} \right) + k_{xv4} \left( \frac{\partial B_x}{\partial t} \right)^2 \\ \mathbf{n}_{xi} &= k_{xi1} + k_{xi2} B_x^2 + k_{xi3} B_x \left( \frac{\partial B_x}{\partial t} \right) + k_{xi4} \left( \frac{\partial B_x}{\partial t} \right)^2 \\ \mathbf{n}_{yv} &= k_{yv1} + k_{yv2} B_y^2 + k_{yv3} B_y \left( \frac{\partial B_y}{\partial t} \right) + k_{yv4} \left( \frac{\partial B_y}{\partial t} \right)^2 \\ \mathbf{n}_{yi} &= k_{yi1} + k_{yi2} B_y^2 + k_{yi3} B_y \left( \frac{\partial B_y}{\partial t} \right) + k_{yi4} \left( \frac{\partial B_y}{\partial t} \right)^2 \end{aligned} \right\} \quad (\text{C.66})$$

#### C.4.2 Caracterización

Para caracterizar la ecuación de Enokizono-Soda debemos encontrar las cuatro reluctividades. De hecho, el modelo en si mismo es el propio proceso determinación de dichas reluctividades. Para determinar estas reluctividades se debe realizar un sistema de medida bidimensional en el cual se fuerza a que la inducción sea sinusoidal en ambas direcciones:

$$\left. \begin{aligned} B_x &= B_{xm} \cos(\mathbf{w}t + \mathbf{f}_x) \\ B_y &= B_{ym} \cos(\mathbf{w}t + \mathbf{f}_y) \end{aligned} \right\} \quad (\text{C.67})$$

Nos centramos en el desarrollo de la proyección  $x$ . Para la proyección  $y$ , el proceso es análogo:

$$B_x = B_{xm} \cos(\mathbf{w}t + \mathbf{f}_x) \quad (\text{C.68})$$

Cuya derivada temporal es:

$$\frac{dB_x}{dt} = -\omega B_{xm} \sin(\omega t + f_x) \quad (C.69)$$

Ambas expresiones se pueden describir como:

$$\left. \begin{aligned} B_x &= C_2 \cos(\omega t) + C_1 \sin(\omega t) \\ \frac{\partial B_x}{\partial t} &= \omega [C_1 \cos(\omega t) - C_2 \sin(\omega t)] \end{aligned} \right\} \quad (C.70)$$

De donde se deduce que:

$$C_1 = -B_{xm} \sin f_x \quad (C.71)$$

$$C_2 = B_{xm} \cos f_x \quad (C.72)$$

$$C_3 = B_{xm}^2 \quad (C.73)$$

La expresión de  $H_x$ , incluyendo hasta el tercer armónico:

$$H_x = A_1 \cos(\omega t + a_1) + A_2 \cos(3\omega t + a_2) \quad (C.74)$$

Que se puede describir como:

$$H_x = P \cos(\omega t) + Q \sin(\omega t) \quad (C.75)$$

De aquí se deduce que:

$$P = P_1 + P_2 \cos^2 \omega t \quad (C.76)$$

$$P_1 = A_1 \cos a_1 - 3A_2 \cos a_2 \quad (C.77)$$

$$P_2 = 4A_2 \cos a_2 \quad (C.78)$$

$$Q = Q_1 + Q_2 \sin^2 \omega t \quad (C.79)$$

$$Q_1 = -A_1 \sin \mathbf{a}_1 - 3A_2 \sin \mathbf{a}_2 \quad (\text{C.80})$$

$$Q_2 = 4A_2 \sin \mathbf{a}_2 \quad (\text{C.81})$$

Los parámetros  $C_i$  se pueden determinar a partir de la medición bidimensional de la inducción y los coeficientes P y Q a partir de la medición bidimensional de la intensidad de campo. Ahora se trata de relacionar los parámetros C, P y Q con las reluctividades de la ecuación (C.66). Sustituyendo (C.68) y (C.69) en la componente  $x$  de (C.65):

$$H_x = (C_2 \mathbf{n}_{xv} + C_1 \mathbf{n}_{xi}) \cos \omega t + (C_1 \mathbf{n}_{xv} - C_2 \mathbf{n}_{xi}) \sin \omega t \quad (\text{C.82})$$

Si se cumple (C.66) entonces:

$$\left. \begin{aligned} k_{xv1} &= \frac{C_1 P_1 + C_1 Q_1}{C_3} \\ k_{xv2} &= \frac{C_2^3 P_2 + C_1^3 Q_2}{C_3^3} \\ k_{xv3} &= \frac{2C_1 C_2 (C_2 P_2 - C_1 Q_2)}{C_3^3} \\ k_{xv4} &= \frac{C_1 C_2 (C_1 P_2 + C_2 Q_2)}{C_3^3} \end{aligned} \right\} \quad (\text{C.83})$$

Con la ecuación (8.22) ya podemos relacionar los coeficientes  $k$  con los parámetros  $C$ ,  $P$  y  $Q$  que se puede determinar a partir de datos experimentales. Por tanto, mediante (C.66) ya tenemos caracterizadas las reluctividades. Con las reluctividades calculadas, la resolución de las ecuaciones diferenciales (C.65) nos da directamente el valor de la inducción para la intensidad de campo correspondiente.

### C.4.3 Valoración

El modelo de Enokizono-Soda es un sistema simple y rápido para determinar la histéresis magnética, si bien su fundamento físico no describe con tanto detalle los procesos internos que intervienen en la magnetización como los modelos de Stoner-Wohlfarth y de Jiles-Atherton, se trata de un modelo que relaciona directamente la inducción y el campo. Esto limita su campo de aplicaciones, por ejemplo no permite el análisis de la desacomodación o el pos-efecto magnético, como si lo permiten los modelos tipo Preisach más sofisticados.

Para nuestras aplicaciones en máquinas eléctricas o en ingeniería eléctrica en general el modelo es muy adecuado:

- Modelo sencillo y directo
- Desarrollo sencillo a partir de operaciones sencillas. Tan solo se resuelve, al final de proceso una ecuación diferencial. Esto implica un código sencillo y rapidez de cálculo.
- Es un modelo perfectamente adaptable a métodos numéricos
- Considera la anisotropía de forma natural
- Considera los efectos dinámicos de forma natural

El principal problema del modelo de Enokizono-Soda, y la razón por la que no se ha empleado en nuestros cálculos, es la necesidad de realizar mediciones de inducción bidimensionales para caracterizar el modelo. Estas mediciones bidimensionales complican mucho la toma de datos experimentales con respecto a los otros modelos expuestos hasta ahora, incluyendo el modelo de Preisach con caracterización no paramétrica por el método de Mayergoyz.

### ***C.5 Comparación de los modelos analizados***

En el capítulo 3 y en los anteriores apartados del presente apéndice se han expuesto los modelos de histéresis magnética que, a conocimiento del autor del presente trabajo, poseen mayor interés en cuanto a su aplicación en cálculos de ingeniería. Para finalizar el análisis es necesaria una comparación de los modelos presentados para adoptar uno de ellos como herramienta numérica. A este modelo, o modelos, les dedicaremos nuestro esfuerzo en cuanto desarrollo de códigos, mayor profundidad de conocimiento, realización de los ensayos necesarios para su identificación.

La comparación se realiza en dos vertientes, sus características intrínsecas como modelo y su caracterización. La primera delimita su rango de aplicaciones y la segunda delimita en sí su desarrollo entra o no dentro de nuestras posibilidades, sobre todo teniendo en cuenta que nos hemos propuesto desarrollar un modelo asequible.

### C.5.1 Comparación de características

Se exponen a continuación las principales características de los modelos analizados. No será posible una comparación directa para todas las variables pues no todos los modelos tienen el mismo grado de detalle de los procesos que intervienen en la magnetización. En concreto las variables de comparación son:

- Mecanismo de representación del proceso de magnetización
- Facultad de considerar el efecto de la anisotropía magnetocristalina
- Facultad de considerar el efecto de las diversos tipos de interacción
- Facultad de considerar el efecto de los puntos de enganche en el movimiento de las paredes de los dominios
- Posibilidad de calcular curvas inversas
- Considera granos con múltiples dominios
- Complejidad del algoritmo. Tiempo estimado

#### *C.5.1.1 Mecanismo de representación del proceso de magnetización*

Cada modelo en sí establece un mecanismo basado en hipótesis para representar los procesos que intervienen en la magnetización. Esta variable de comparación analiza el fundamento sobre el que se basa dicho mecanismo.

#### **Modelo de Stoner-Wohlfarth**

Rotación de la partícula de Stoner-Wohlfarth en función del valor que adopta el campo aplicado.

#### **Modelo de Jiles-Atherton**

No hay un mecanismo directo, se trata de resolver una ecuación diferencial que deriva de un balance energético

#### **Modelo de Preisach clásico**

Se trata de un modelo fenomenológico. Considera a la muestra como a un conjunto de operadores de histéresis que conmutan individualmente para unos valores determinados del campo aplicado.

**Modelo tipo Preisach dinámico de Bertotti**

Es una variación del modelo de Preisach clásico, por tanto también es un modelo fenomenológico, con un mecanismo idéntico al modelo clásico. La diferencia estiba en que, en este caso, los operadores de histéresis pueden variar su ciclo en función del campo aplicado.

**Modelo tipo Preisach dinámico de Mayergoyz**

Es una extensión del modelo de Preisach clásico, por tanto también fenomenológico. En este caso se trata de una expansión en serie de potencias de la densidad de operadores del modelo clásico.

**Modelo de Globus**

El comportamiento de una muestra policristalina se reduce al comportamiento de un grano “medio” que se modeliza como una partícula con esférica con dos dominios separados por una pared de 180°. El proceso de magnetización se representa por el movimiento de la pared de la partícula de Globus.

**Modelo de Enokizono -Soda**

No hay mecanismo específico. Se trata de caracterizar las componentes del tensor de reluctividades de la relación  $\mathbf{H}=[\mathbf{n}]\mathbf{B}$

*C.5.1.2 Efecto de la anisotropía magnetocristalina*

Se analiza si el modelo es capaz de considerar la energía de anisotropía en su mecanismo de descripción de la magnetización.

**Modelo de Stoner-Wohlfarth**

Como que la partícula de Stoner-Wohlfarth es un elipsoide con un eje de anisotropía, si considera la energía de anisotropía, pero uniaxial.

**Modelo de Jiles-Atherton**

Trata la energía de anisotropía de forma multiaxial. El mecanismo del modelo Jiles-Atherton es la resolución de un balance energético sobre un material de características medias.

**Modelo de Preisach clásico**

No especificado. Es un modelo fenomenológico, no tiene sentido el tratamiento de la energía de anisotropía.

**Modelo tipo Preisach dinámico de Bertotti**

No especificado. En este sentido no implica ningún cambio con respecto al modelo de Preisach clásico.

**Modelo tipo Preisach dinámico de Mayergoyz**

No especificado. En este sentido no implica ningún cambio con respecto al modelo de Preisach clásico.

**Modelo de Globus**

No trata la energía de anisotropía. No está incluido en el balance energético de la partícula de Globus.

**Modelo de Enokizono-Soda**

No trata la energía de anisotropía. No tiene sentido en este modelo el tratamiento de la energía de anisotropía.

*C.5.1.3 Efecto de los diversos tipos de interacción*

Se evalúa a continuación si el modelo es capaz de considerar algún tipo de interacción, ya sean fuerzas entre dipolos, entre dominios o la interacción de intercambio.

**Modelo de Stoner-Wohlfarth**

No considera ningún tipo de interacción. Precisamente una de las características que definen a la partícula de Stoner-Wohlfarth es que no está influenciada por energías cuánticas de intercambio y que está libre de la influencia de las fuerzas entre dipolos. Como además la partícula está formada por único dominio, no hay ninguna representación tampoco de la interacción entre dominios.

En la expansión de Atherton-Beattie si que se considera la fuerza entre dominios, haciendo el mismo tratamiento que el modelo de Jiles-Atherton, esto es., introduciendo el campo efectivo.

**Modelo de Jiles-Atherton**

Si considera la interacción entre dominios, mediante la introducción del campo efectivo. El campo efectivo es un concepto análogo al del campo medio de Weiss, pero a escala de dominios, no a escala atómica.

**Modelo de Preisach clásico**

A pesar de ser un modelo fenomenológico, por analogía, analizando el comportamiento de los operadores de histéresis se deduce que no. Cada operador está aislado del resto de operadores y conmuta únicamente en función del campo aplicado. La generalización de modelo de Preisach móvil si considera una interacción entre operadores.

**Modelo tipo Preisach dinámico de Bertotti**

No lo considera. Esta generalización no aporta ningún cambio en este sentido respecto al modelo clásico.

**Modelo tipo-Preisach dinámico de Mayergoyz**

No lo considera. Esta expansión no aporta ningún cambio en este sentido respecto al modelo clásico.

**Modelo de Globus**

No considera ningún tipo de interacción. Al igual que la partícula de Stoner-Wohlfarth, la partícula de Globus está aislada.

**Modelo de Enokizono-Soda**

No especificado, en este modelo no tiene sentido el tratamiento de los efectos acontecidos en la escala de los dominios.

*C.5.1.4 Efecto de los puntos de enganche de las paredes*

Se pondera el hecho que el modelo sea capaz de considerar los efectos de los puntos de enganche en las paredes. Estos efectos pueden ser de dos tipos:

1. Irreversibles. Cuando la pared queda atrapada en un punto de enganche, pero el campo aplicado le aporta la suficiente energía como para que la pared se libere del punto de enganche. En este proceso se asume que la pared permanece rígida (modelo de pared rígida para altas energías).

2. Reversibles. Cuando la pared queda atrapada entre varios puntos de enganche y el campo aplicado no le aporta la suficiente energía como para liberarse, produciéndose un pandeo en la superficie de la pared (modelo de pandeo de paredes para bajas energías).

### **Modelo de Stoner-Wohlfarth**

Las partículas de Stoner-Wohlfarth rotan libremente y además están formadas por una única pared, no consideran por tanto ningún efecto debido a enganches de las paredes de los dominios.

### **Modelo de Jiles-Atherton**

Considera tanto el efecto reversible como el irreversible. No distingue entre tipos de puntos de enganche, asume que están uniformemente distribuidos y tienen la misma energía. Para el pandeo de la pared del dominio entre puntos de enganche trata a la pared como a una membrana elástica y deduce que la variación de magnetización debida a este efecto es proporcional a la diferencia entre la magnetización anhisterésica y la magnetización irreversible.

### **Modelo de Preisach clásico**

Al ser un modelo fenomenológico no queda especificado. No hay analogía aparente entre el mecanismo del modelo y el efecto de los puntos de enganche. No hay ninguna generalización que lo trate específicamente.

### **Modelos tipo-Preisach dinámicos (Mayergoyz y Bertotti)**

No aportan ninguna variación en este sentido con respecto al modelo clásico.

### **Modelo de Globus**

Considera tanto el proceso reversible como el irreversible. La energía de fricción de la partícula de Globus es asimilable a la energía perdida por enganche y liberación de la pared del proceso irreversible. En cuanto al pandeo de la pared lo trata como si esta fuera elástica y asumiendo la hipótesis de pandeos pequeños deduce que la magnetización reversible es proporcional al campo aplicado.

### **Modelo de Enokizono-Soda:**

No especificado, en este modelo no tiene sentido el tratamiento de los efectos acontecidos en la escala de los dominios.

### *C.5.1.5 Curvas inversas*

Se analiza si el modelo es capaz de reproducir ciclos menores asimétricos y curvas inversas de primer orden.

#### **Modelo de Stoner-Wohlfarth**

De su mecanismo se desprende que no, al tratarse de una superposición de partículas simétricas el modelo solo es capaz de tratar ciclos menores simétricos, pero no asimétricos o curvas inversas.

#### **Modelo de Jiles-Atherton**

No puede tratar ciclos menores asimétricos cerrados ni curvas inversas. Se necesita de la expansión de Jiles para ello y aun así [Philips, Dupré y Melkebeek, 1995] no se consiguen buenos resultados.

#### **Modelo de Preisach clásico**

Trata cualquier tipo historial de intensidad de campo. La única limitación reside en que si, por ejemplo, la función densidad o las integrales de Everett se ha determinado a partir de curvas inversas de primer orden; entonces los historiales de excitación que impliquen una curva inversa de un orden superior no son trazados con suficiente precisión. El orden de las curvas inversas descritas por el modelo de Preisach queda limitado por el orden de las curvas inversas experimentales empleadas para caracterizar el modelo.

#### **Modelo tipo-Preisach dinámico de Bertotti**

Presenta la misma limitación que el modelo clásico.

#### **Modelo tipo-Preisach dinámico de Mayergoyz:**

Por no cambiar el mecanismo básico del modelo clásico debería presentar la misma limitación que el modelo clásico, pero en nuestro trabajo de investigación no se ha desarrollado este modelo, por lo que no se podido comprobar.

#### **Modelo de Globus:**

El mecanismo del modelo no lo permite.

#### **Modelo de Enokizono-Soda:**

El mecanismo del modelo no lo permite.

### C.5.1.6 Granos con múltiples dominios

El único modelo que considera granos con dominios múltiples es el modelo de Jiles-Atherton, la partícula de Globus está formada por dos dominios y la partícula de Stoner-Wohlfarth por un único dominio. En el modelo de Enokizono-Soda y en los modelos tipo Preisach no queda especificado el número de dominios.

### C.5.1.7 Complejidad del algoritmo. Tiempo de cálculo estimado.

Los modelos más complicados en cuanto a su desarrollo son el modelo tipo Preisach dinámico de Mayergoyz y el modelo de Jiles-Atherton (esto sin considerar ninguna de sus expansiones, que complican aún más su desarrollo).

El modelo de Mayergoyz necesita de un procedimiento de caracterización complejo y además requiere que previamente se haya calculado la histéresis estática. Con el preproceso finalizado el cálculo de la inducción sigue siendo laborioso, en cada paso de tiempo se debe calcular el coeficiente histerésico que implica el cálculo de varias integrales.

El modelo de Jiles-Atherton también tiene una caracterización complicada que se resuelve por iteración. Con el modelo caracterizado es necesario resolver varias ecuaciones diferenciales para cada paso de tiempo. El código resultante es complejo y en consecuencia el tiempo de cálculo considerable. Si además se desarrolla la expansión para modelo dinámico, la complejidad aumenta mucho más.

El modelo de Bertotti presenta el inconveniente que el parámetro  $k$  se debe calcular por iteración y varía con la frecuencia del campo aplicado. Otro inconveniente es que no se puede desarrollar numéricamente por integrales de Everett, con la simplificación que ello comporta. Al desarrollarse por la definición directa del modelo de Preisach, se debe resolver una integral doble en cada punto de cálculo y el cálculo de previo de los operadores de histéresis para todo el plano de Preisach discretizado para todos los pasos de tiempo. Aún así se trata de un modelo dinámico y su complejidad es mucho menor que la del modelo de Mayergoyz e incluso menor que la del modelo de Jiles-Atherton estático.

El modelo de Stoner-Wohlfarth es un conjunto de partículas, por lo que si bien el desarrollo no es complejo, aparentemente consume un tiempo considerable.

Comparando modelos estáticos, el desarrollo del modelo de Preisach clásico en general es más sencillo que el modelo de Jiles-Atherton o el modelo de Stoner-Wohlfarth. La laboriosidad del desarrollo depende el método seguido para su desarrollo numérico. Si se realiza por su definición o por la interpretación geométrica se debe resolver una integral doble y calcular todos los operadores del plano de Preisach. Si se realiza por integrales de Everett todo se resume a sumas y restas directas de dichas funciones, por lo que su ejecución es así inmediata y su complejidad mínima.

El modelo de Enokizono-Soda es aun más sencillo que el modelo de Preisach clásico. Una vez calculadas las reluctancias el modelo prácticamente ya está finalizado. No obstante, sus prestaciones son menores que las del modelo de Preisach.

El modelo de Globus también es sencillo. Pero no cabe considerar su desarrollo pues tan solo considera la histéresis de una partícula y sus estimaciones son pobres.

### C.5.2 Comparación de requerimientos para caracterización

A continuación se resumen y comparan los requerimientos de caracterización para cada uno de los modelos. Para cada modelo se indican los parámetros a caracterizar y los datos experimentales necesarios para su cálculo.

#### C.5.2.1 Modelo de Stoner-Wohlfarth

**Tabla C-I.** Caracterización del modelo de Stoner-Wohlfarth

Parámetro		Caracterización
$M_s$	Magnetización espontánea	Magnetización o inducción correspondiente al punto máximo del ciclo límite
$k$	Constante de anisotropía	Hay dos opciones: <ul style="list-style-type: none"> <li>• Determinación experimental de las características magnéticas en función de los ejes del cristal.</li> <li>• Consulta en publicaciones [Bozorth, 1993]</li> </ul>
$r(f, y)$	Distribución de probabilidad de los ejes de anisotropía	Si se considera anisotropía se debe ajustar la función escogida.

Para caracterizar el modelo de Stoner-Wohlfarth tan solo necesitamos un dato experimental, el ciclo límite para la magnetización espontánea, que corresponde a la magnetización de saturación de dicho ciclo. La constante de anisotropía la podemos obtener de alguna publicación. El principal problema es la distribución de probabilidad que en realidad se ajusta por ensayo y error.

#### C.5.2.2 Modelo de Jiles-Atherton

Todos los parámetros del modelo se pueden determinar a partir de datos experimentales. La magnetización espontánea se deduce del ciclo límite. Los restantes parámetros se determinan por un proceso de iteración combinando puntos determinados del ciclo límite, la curva de primera inducción y la curva de anhistéresis.

El proceso de caracterización es laborioso, pero los datos experimentales se obtiene fácilmente, se puede emplear el mismo ensayo para determinarlos a todos. Quizás la curva que pueda resultar ser más compleja es la de anhistéresis, pero para la mayoría de materiales ferromagnéticos se puede determinar a partir del ciclo límite como la resta de la intensidad de campo de la intensidad de campo de la rama ascendente y la rama descendente para una inducción dada [Bozorth, 1993].

**Tabla C-II.** Caracterización del modelo Jiles-Atherton

Parámetro		Caracterización
$M_s$	Magnetización espontánea	Ciclo límite
$k$	Densidad de puntos de enganche	Ciclo límite.
$a$	Constante de interacción entre dominios	Curva de primera inducción. Curva de anhistéresis.
$a$	Constante de la función de Langrevin	
$c$	Constante de la componente de magnetización reversible	

#### C.5.2.3 Modelo de Preisach

La caracterización del modelo de Preisach es uno de sus puntos más delicados, este tema ya se ha tratado detalladamente en el capítulo 3 del presente trabajo. Tan solo recordar aquí que

hay dos métodos de caracterización: los métodos paramétricos o por ajuste y los métodos no paramétricos o por interpolación.

Si caracterizamos el modelo mediante un método paramétrico tan solo necesitamos el ciclo límite. El problema de este método es que para materiales blandos no hay curva que ajuste bien la función densidad. Si el ajuste es mediante una gaussiana-gaussiana Edward della Torre ha desarrollado un procedimiento de ajuste a partir de puntos del ciclo límite [della Torre, 1999].

En el capítulo 3 se deduce que el método de caracterización más ventajoso para analizar muestras de materiales blandos es el método no paramétrico de Mayergoyz. Este método calcula la función densidad de operadores mediante las integrales de Everett, esto tiene como ventaja un desarrollo más sencillo y excelentes resultados en el cálculo. El inconveniente es que se determina a partir de las curvas inversas, al menos unas quince, esto requiere de un equipo sofisticado.

**Tabla C-III.** Caracterización del modelo de Preisach clásico.

<i>Parámetro</i>		<i>Caracterización</i>
<b>Caracterización paramétrica o por ajuste.</b>		
$B_s$	Inducción de saturación	Ciclo límite
$m(a, b)$	Función densidad	Ajustar a la función escogida
<b>Caracterización no paramétrica o por interpolación</b>		
$E(a, b)$	Integral de Everett	Curvas inversas de primer orden (o orden superior)
$m(a, b)$		

#### C.5.2.4 Modelo dinámico tipo Preisach de Bertotti

**Tabla C-IV.** Caracterización del modelo tipo-Preisach dinámico de Bertotti

<i>Parámetro</i>		<i>Caracterización</i>
$k$	Constante de los operadores de Bertotti	Ciclo mayor en la frecuencia a la que se quiere calcular la inducción.

El modelo de Bertotti se caracteriza igual que el modelo de Preisach clásico, añadiendo la constante de los operadores  $k$ , cuyo cálculo se realiza por ensayo y error. Se prueban valores de  $k$  hasta que el valor del área de la curva de histéresis calculada por el modelo coincide con el área de la curva experimental dentro del rango error deseado

## C.5.2.5 Modelo dinámico tipo Preisach de Mayergoyz

Tabla C-V. Caracterización del modelo tipo-Preisach dinámico de Mayergoyz

<b>Parámetro</b>		<b>Caracterización</b>
$t_{ab}(a, b)$	Tiempos de relajamiento	Tiempo de relajamiento de la inducción respecto al campo aplicado. Se debe calcular un valor para cada punto del plano de Preisach discretizado

El modelo de Mayergoyz necesita del cálculo previo de la inducción estática por el modelo clásico por lo que también participa de la misma caracterización. Además se debe calcular los tiempos de relajamiento para todo el plano de Preisach. Esto requiere de un ensayo específico.

## C.5.2.6 Modelo de Globus

Tabla C.VI. Caracterización del modelo de Globus

<b>Parámetro</b>		<b>Caracterización</b>
$M_s$	Magnetización espontánea	Ciclo límite
$R$	Radio de la partícula de Globus	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Observación de los granos formados en la muestra.</li> <li>• Consulta en publicaciones</li> </ul>
$F$	Constante de fricción	Varios ciclos menores a la misma frecuencia
$g$	Constante de energía de la pared	

El modelo de Globus tiene una caracterización sencilla, como datos experimentales tan solo requiere un par de ciclos de histéresis. Para cada ciclo se calcula la pérdida de energía por histéresis (área) formándose un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas, la constante de fricción y la constante de energía de la pared.

## C.5.2.6 Modelo de Enokizono-Soda

Para caracterizar el modelo de Enokizono-Soda tan sólo se deben calcular cuatro constantes, que se determinan a la vez. En este sentido se puede considerar que el modelo tiene una caracterización sencilla. Pero no es así, todo lo contrario, para calcular estas cuatro constantes se necesita una medición bidimensional del campo y de la inducción en varios puntos de la

muestra. Esto implica el desarrollo de un equipo específico para el ensayo que puede resultar ciertamente complejo.

*Tabla C-VII. Caracterización del modelo de Enokizono-Soda*

<i>Parámetro</i>		<i>Caracterización</i>
$n_{xy}$	Tiempos de relajamiento	Medición bidimensional de la inducción (forzando a que sea sinusoidal) y del campo en la muestra.
$n_{xi}$		
$n_{yv}$		
$n_{yi}$		

### **C.6 Conclusiones**

De la exposición de los modelos y su posterior comparación, según nuestra apreciación, el modelo más adecuado para cálculos en máquinas eléctricas es el modelo de Preisach y la generalización a modelo dinámico de Bertotti. Las razones en las que nos apoyamos para esta afirmación son:

- Aunque no refleja la realidad física en el material las características de magnetización obtenidas con él reflejan razonablemente bien las curvas experimentales.
- El desarrollo numérico no es excesivamente complejo.
- Es un método flexible en cuanto a posibles expansiones. Como ya se comentó al final del capítulo 3, donde se expusieron las generalizaciones del modelo de Preisach, varios grupos de investigadores están trabajando en él para que considere incluso los efectos de acomodación y post-efecto. Dotándole incluso de identidad física. Si bien estos desarrollos no son cruciales para el cálculo en máquinas eléctricas.
- Si deseamos un tratamiento bidimensional de la muestra puede ser desarrollado como modelo vectorial y tratar así anisotropías. Este tipo de modelo de Preisach no se ha analizado en el presente trabajo.
- Se han desarrollado modelos tipo-Preisach que puede considerar la magnetostricción.

- El modelo de Bertotti es dinámico, considera por tanto el ensanchamiento del ciclo con la frecuencia y el efecto de la forma de onda de la excitación.

El punto más delicado del modelo de Preisach y sus expansiones o generalizaciones, cuando se aplica a muestras de materiales blandos es su caracterización. Si se emplea el método de Mayergoyz (en principio es lo más recomendable) se necesita de al menos quince curvas inversas para caracterizar el modelo de Bertotti; para el modelo clásico, interpolando a tramos por polinomios cúbicos de Hermite con cuatro es suficiente.

El modelo que rivaliza como herramienta numérica con el modelo de Preisach es el modelo de Jiles-Atherton. Este modelo presenta las siguientes ventajas respecto al modelo de Preisach:

- Tiene un fundamento físico sólido. No obstante, esto no es importante para nuestras aplicaciones pues tan solo deseamos poder calcular la histéresis.
- Se caracteriza a partir de datos experimentales sencillos de obtener, sobre todo comparado con el modelo de Preisach.

No obstante, los inconvenientes del modelo de Jiles-Atherton respecto al modelo de Preisach son mucho mayores:

- Desarrollo más complejo. Mayor tiempo de cálculo.
- Peores resultados para todas las curvas.
- No cierra ciclos menores. No es capaz de calcular bien ciclos asimétricos y curvas inversas.
- La expansión de Jiles para conseguir un modelo dinámico es más compleja que el modelo de Bertotti.

Es por ello que nuestra decisión es adoptar para nuestros cálculos el modelo de Preisach, y en concreto el modelo de Bertotti como generalización dinámica. El modelo de Preisach clásico se analiza detalladamente en el capítulo 3, los diversos modelo tipo Preisach dinámicos se analizan en el capítulo 4.

Un modelo potencialmente interesante, pero aún por desarrollar, sería una expansión del modelo de Stoner-Wohlfarth que considere la interacción y el enganche de las paredes con un tratamiento similar al del modelo de Jiles-Atherton.

## D. Características de las muestras

### D.1 Introducción

Dedicamos este apéndice a indicar las características básicas de las muestras relacionadas con el presente trabajo. Los datos que se pueden encontrar a continuación son:

- Características generales
- Características del arrollamiento.
- Características del núcleo (muestra propiamente dicha).
  - a. Geometría y dimensiones
  - b. Datos del fabricante de la chapa magnética (cuando se dispone de ellos).
  - c. Curvas características
    - i. Curva normal o de primera inducción
    - ii. Curvas de histéresis cuasiestáticas
    - iii. Curvas de histéresis a diversas frecuencias
    - iv. Curvas inversas de primer orden
    - v. Curvas inversas de segundo orden

Las curvas características se han obtenido por los diversos procedimientos comentados en capítulos anteriores.

Por diversos motivos, no se emplearon para cálculos todas los especímenes que aquí se muestran. No obstante, como que para todas ellas se obtuvieron las características magnéticas mediante el equipo histeresisgráfico, uno de los desarrollos del trabajo, se presentan aquí.

Las muestras que se incluyen son:

- Muestra A. Transformador monofásico de 1,3kVA la casa Tecnotrafo
- Muestra B. Núcleo de un transformador toroidal
- Muestra C. Transformador toroidal de 30VA de la casa AVISOR.

## ***D.2 Muestra A.***

### **D.2.1 Características generales.**

Se trata de un transformador monofásico de potencia de la casa Tecnotrafo. Este transformador presenta la siguiente placa de características:

- Potencia nominal: 1,3kVA
- Tensiones nominales: 220V/380V
- Frecuencia nominal: 50Hz
- Clase de aislamiento: E
- Tipo de servicio: 100%
- Modelo: TUM
- Referencia: 001837

El transformador se adquirió por la Escuela de Ingenieros Técnicos Industriales de Barcelona para el Laboratorio de Máquinas Eléctricas el 25-10-1982. Desde entonces se ha venido empleando para las prácticas de Máquinas Eléctricas en dicho laboratorio.

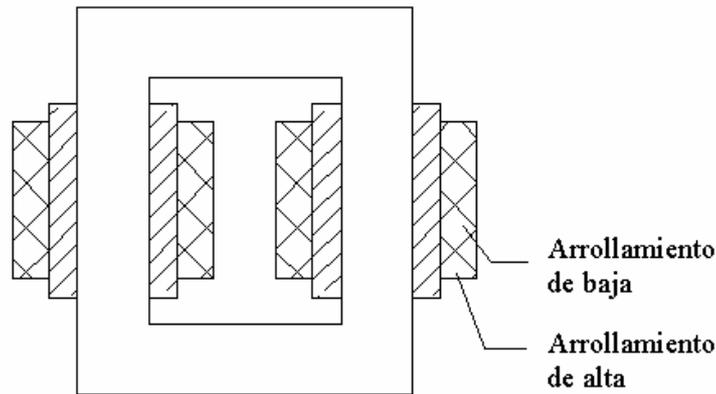
Este transformador es la muestra sobre la que realizamos los diversos cálculos. Se trata de un modelo comercial y tanto sus dimensiones físicas como sus características eléctricas son cómodas para trabajar en ellas.

### **D.2.2 Características de los arrollamientos.**

Se han conservado los arrollamientos de fábrica del transformador. Aparte de estos arrollamientos originales se ha realizado un tercer arrollamiento de 40 espiras, este es el que denominamos arrollamiento auxiliar.

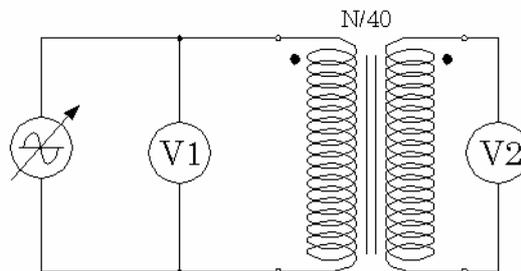
Los dos arrollamientos originales se construyeron en las columnas del núcleo, dejando libre ambas culatas. En cada columna se arrolló la mitad de cada arrollamiento, esto es, la mitad del arrollamiento del lado de baja se realizó sobre una columna del núcleo y la otra mitad en la otra columna. Sobre el arrollamiento del lado de baja se realizó el arrollamiento de alta, también la mitad en cada columna. En la figura D-1 se representan los diversos arrollamientos del transformador.

El arrollamiento auxiliar de 40 espiras se realizó sobre la culata superior. Este arrollamiento es útil en algunos ensayos en los que es mejor trabajar con un número menor de espiras que las que forman los arrollamientos originales. Además, este arrollamiento auxiliar también nos sirvió para determinar el número de espiras de los dos arrollamientos originales, que nos era desconocido.



**Figura D-1.** Disposición de los arrollamientos originales en la muestra A.

Para determinar el número de espiras de los arrollamientos originales se realizó el siguiente ensayo. El esquema del ensayo se muestra en la figura D-2. Se conecta como primario el arrollamiento del cual se quiere determinar el número de espiras  $N$ , y como secundario el arrollamiento auxiliar de 40 espiras en vacío. En paralelo con cada arrollamiento se conecta un voltímetro. Siguiendo las recomendaciones para determinar la relación de transformación de transformadores del IEEE Std.C52-12-91, ambos voltímetros deben ser iguales, y además deben cumplir que si se intercambian su lectura debe ser la misma. Los voltímetros empleados cumplían razonablemente esta condición.



**Figura D-2.** Ensayo para determinar el número de espiras de los arrollamientos originales de la muestra D

Se toman lecturas de ambos voltímetros para varias tensiones de alimentación. Aplicando la siguiente relación se determina el número de espiras:

$$\frac{N}{40} = \frac{V_1}{V_2} \quad (\text{D.1})$$

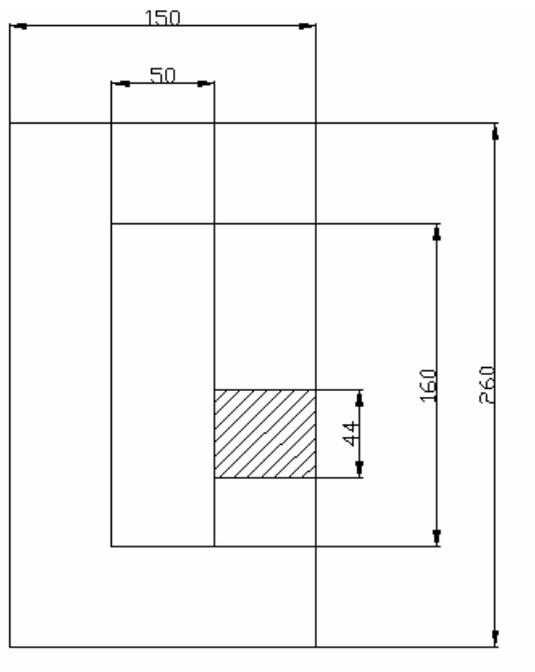
Se realiza la media del número de espiras obtenido para cada valor de la tensión de alimentación. Aplicando este procedimiento se ha hallado que el número de espiras de los arrollamientos de la muestra son:

- Número de espiras del lado de 220V (lado de baja): 409
- Número de espiras del lado de 380V (lado de alta): 671
- Número de espiras del arrollamiento auxiliar: 40

### D.2.3 Geometría y dimensiones del núcleo

La geometría del núcleo y sus dimensiones se muestra en la figura D-3. De las dimensiones del núcleo se deducen los datos dimensionales más importantes para nuestros cálculos:

- Longitud media aparente del circuito magnético<sup>1</sup>.  $l'=0,62\text{m}$
- Superficie transversal del circuito magnético.  $S=0,0022\text{m}^2$



*Figura D-3. Geometría y dimensiones del núcleo de la muestra A*

<sup>1</sup> Se le denomina longitud media aparente  $l'$  para distinguirla de la longitud media real  $l$  en la cual se considera el factor de apilamiento de la chapas del núcleo

## D.2.4 Características de la chapa magnética del núcleo.

Las características de la chapa del núcleo son<sup>2</sup>:

- Material: UI-40x60-MT
- Calidad: MT
- Espesor nominal: 0,5mm
- Pérdidas totales a 50Hz.
  - Para 1,5T: 3,3W/kg
  - Para 1,0T: 1,35W/kg
- Inducción magnética mínima:
  - Para una intensidad de campo de 2500A/m: 1,49T
  - Para una intensidad de campo de 5000A/m: 1,6T
  - Para una intensidad de campo de 10000A/m: 1,7T
- Factor de apilado mínimo: 0,97
- Densidad convencional: 7,6 kg/dm<sup>3</sup>

De estos datos se deducen además los siguientes:

- Longitud media real del circuito magnético  $l'$ : 0,6014m
- Masa aparente  $m$ : 10,366kg
- Masa real<sup>3</sup>  $m'$ : 10,055kg
- Volumen:  $1,323 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3$

## D.2.5 Características magnéticas

### D.2.5.1 Curva normal o de primera inducción.

En la figura D-4 se muestra la curva normal o de primera inducción de la muestra A obtenida por diversos procedimientos:

- Mediante el método balístico a frecuencia cuasiestática.
- Mediante el equipo histeresisgráfico a frecuencia 0,15Hz, considerada cuasiestática
- Mediante procedimiento expuesto en el apartado 10.2.2.
  - A 30Hz
  - A 50Hz

---

<sup>2</sup> Estos datos se han obtenido por gentileza del Departamento Técnico de Tecnorafo.

<sup>3</sup> Masa aparente multiplicada por el factor de apilamiento

- A 70Hz

#### D.2.5.2 Ciclos de histéresis cuasiestáticos

En la figura D-5 se muestra una colección de ciclos de histéresis obtenidos mediante el equipo histeresisgráfico a una frecuencia de 0,15Hz, a efectos prácticos se considera que esta frecuencia es cuasiestática. En la figura D-5, en trazo azul, se muestra el ciclo límite, obtenido éste mediante el método balístico. En la figura D-6 se muestra el ciclo límite separadamente.

En la tabla D-I se listan los ciclos de histéresis cuasiestáticos para la muestra A, con su correspondiente campo en el punto máximo  $H_m$ .

**Tabla D-I.** Histéresis cuasiestáticas de la muestra A

<i>Ciclo</i>	<b>A</b>	<b>B</b>	<b>C</b>	<b>D</b>	<b>E</b>	<b>F</b>
$H_m(A/m)$	16.11	26.25	38.73	44.04	51.66	64.65
<i>Procedimiento</i>	Equipo Histeresis.	Equipo Histeresis.	Equipo Histeresis.	Equipo Histeresis.	Equipo Histeresis.	Equipo Histeresis.
<i>Ciclo</i>	<b>G</b>	<b>H</b>	<b>I</b>	<b>J</b>	<b>K</b>	<b>L</b>
$H_m(A/m)$	77.75	90.49	103.89	116.60	129.78	128.51
<i>Procedimiento</i>	Equipo Histeresis.	Equipo Histeresis.	Equipo Histeresis.	Equipo Histeresis.	Equipo Histeresis.	Equipo Histeresis.
<i>Ciclo</i>	<b>M</b>	<b>N</b>	<b>Ñ</b>	<b>O</b>	<b>Límite</b>	
$H_m(A/m)$	195.76	262.25	329.26	394.12	989.51	
<i>Procedimiento</i>	Equipo Histeresis.	Equipo Histeresis.	Equipo Histeresis.	Equipo Histeresis.	Balístico	

#### D.2.5.3 Ciclos de histéresis a varias frecuencias

En la figura D-7, D-8 y D-9 se muestran los ciclos de histéresis a las frecuencias de 30Hz, 50Hz y 70,15Hz respectivamente. Estos ciclos se obtuvieron mediante el procedimiento expuesto en el apartado 10.2.2

#### D.2.5.4 Curvas inversas de primer orden

En la figura D-10 se muestran las curvas inversas de primer orden para el ciclo límite cuasiestático. Todas estas curvas se obtuvieron por el método balístico. En la tabla D-II se listan los puntos de inversión  $H_I$  las curvas inversas.

**Tabla D-II** Curvas inversas de primer orden de la muestra A

<i>Ciclo</i>	<b>I</b>	<b>J</b>	<b>K</b>	<b>A</b>	<b>B</b>	<b>L</b>
$H_I$ (A/m)	306.75	190.30	105.54	65.96	0.00	-65.96
<i>Procedimiento</i>	Balístico	Balístico	Balístico	Balístico	Balístico	Balístico
<i>Ciclo</i>	<b>D</b>	<b>M</b>	<b>C</b>	<b>N</b>	<b>Límite</b>	
$H_I$ (A/m)	-122.04	-207.79	-412.29	-550.83	989.51	
<i>Procedimiento</i>	Balístico	Balístico	Balístico	Balístico	Balístico	

#### D.2.5.5 Curvas inversas de segundo orden

En la figura D-11 se muestra una curva inversa de segundo orden obtenida mediante el método balístico. Los puntos de inversión de esta curva son  $H_1=-590,41A/m$  y  $H_2=-85,75A/m$ .

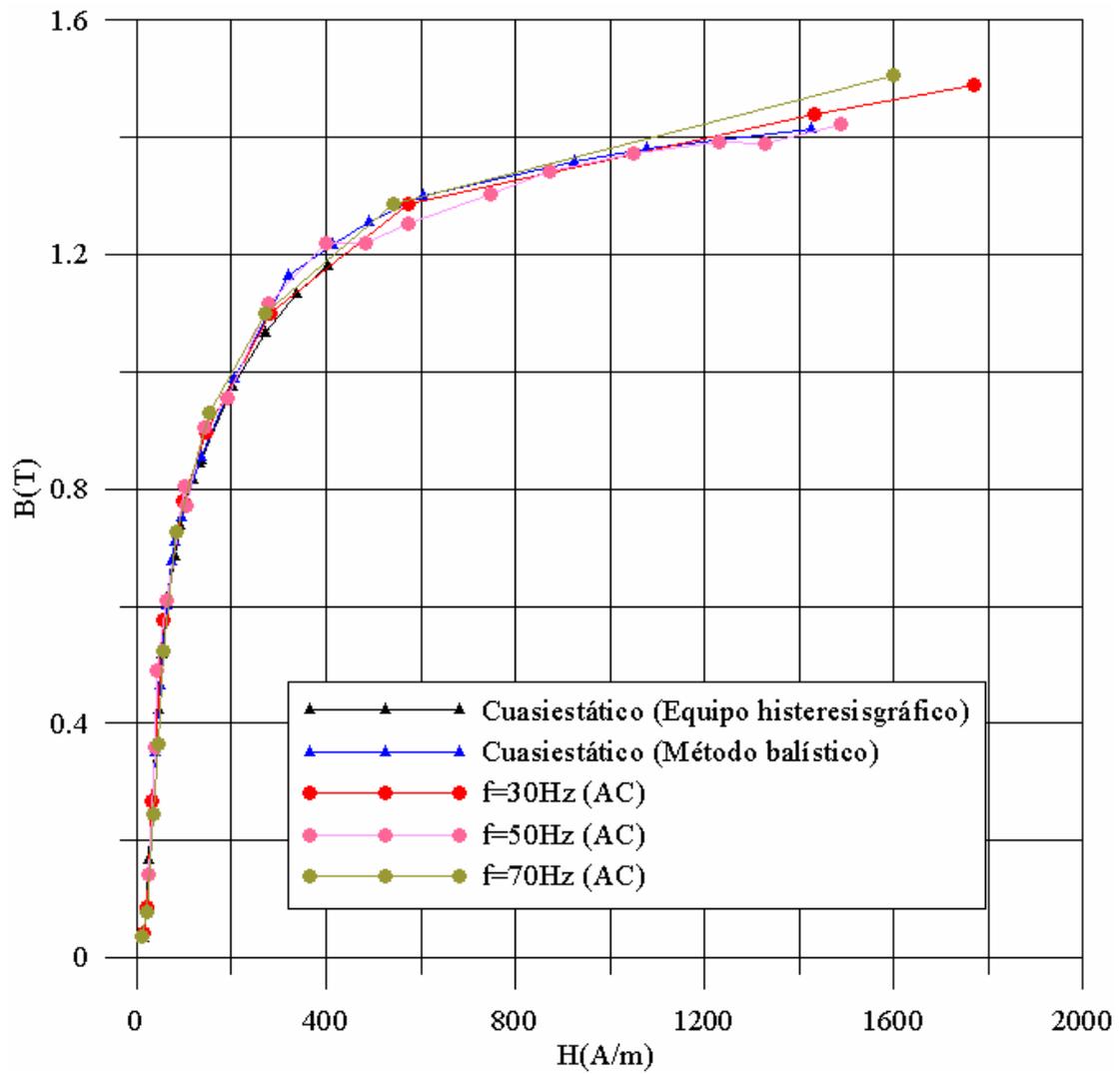
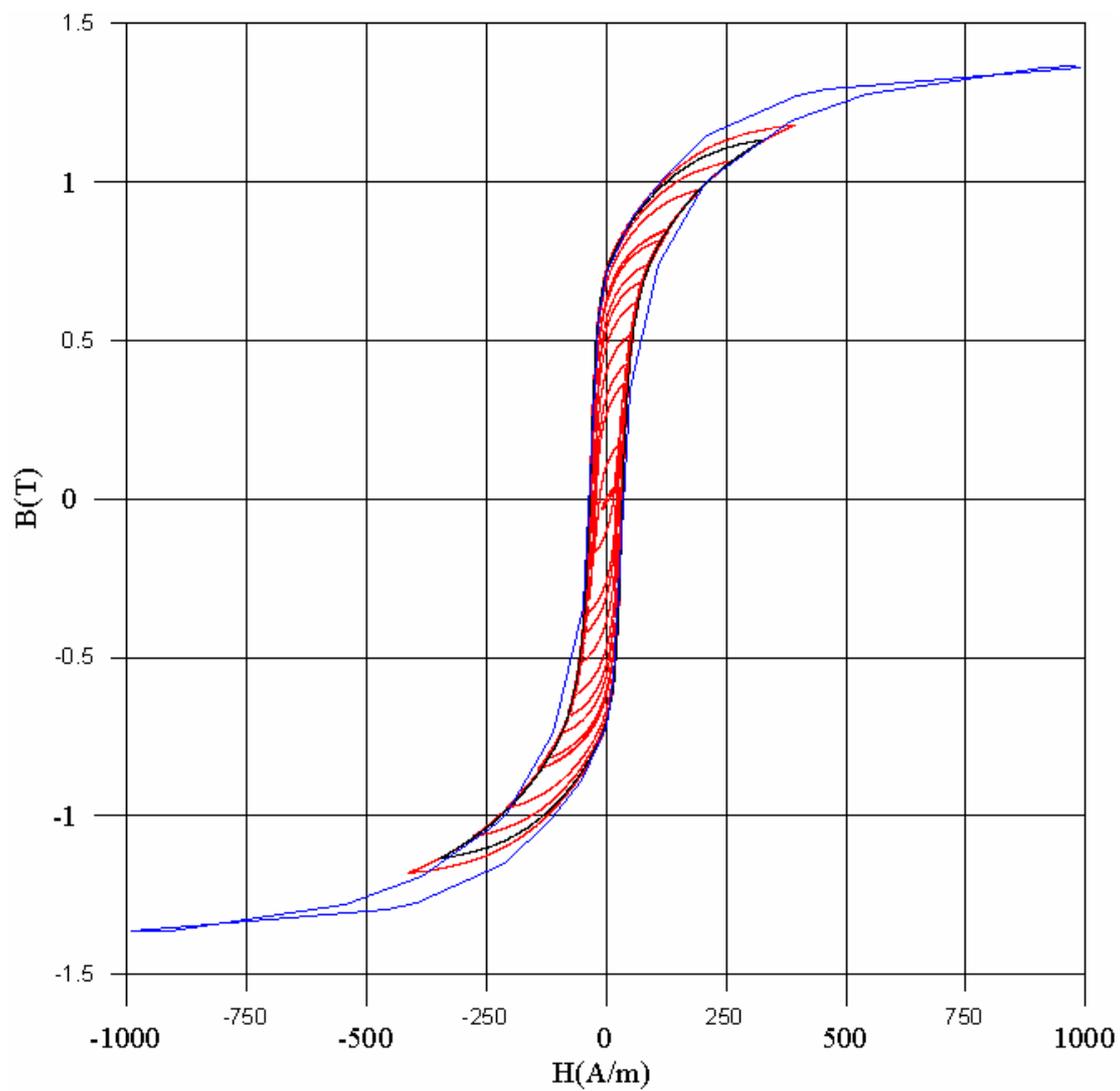
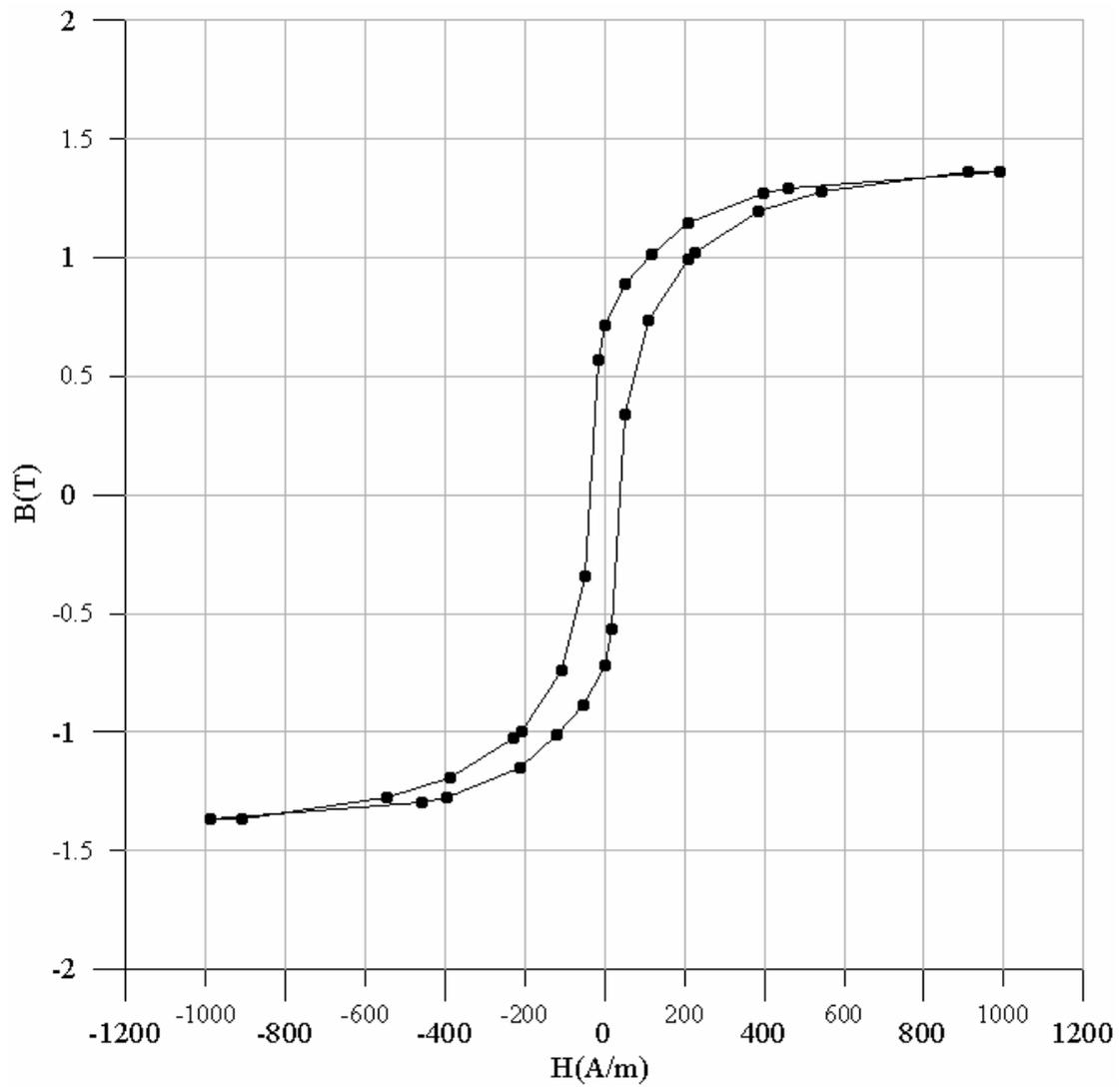


Figura D-4. Curvas normales o de primera inducción de la muestra A



**Figura D-5.** Ciclos de histéresis cuasiestáticos de núcleo A. En trazo rojo los ciclos obtenidos mediante el equipo histeresisgráfico, en trazo azul el ciclo límite obtenido con el método balístico.



*Figura D-6. Ciclo límite cuasiestático de la muestra A*

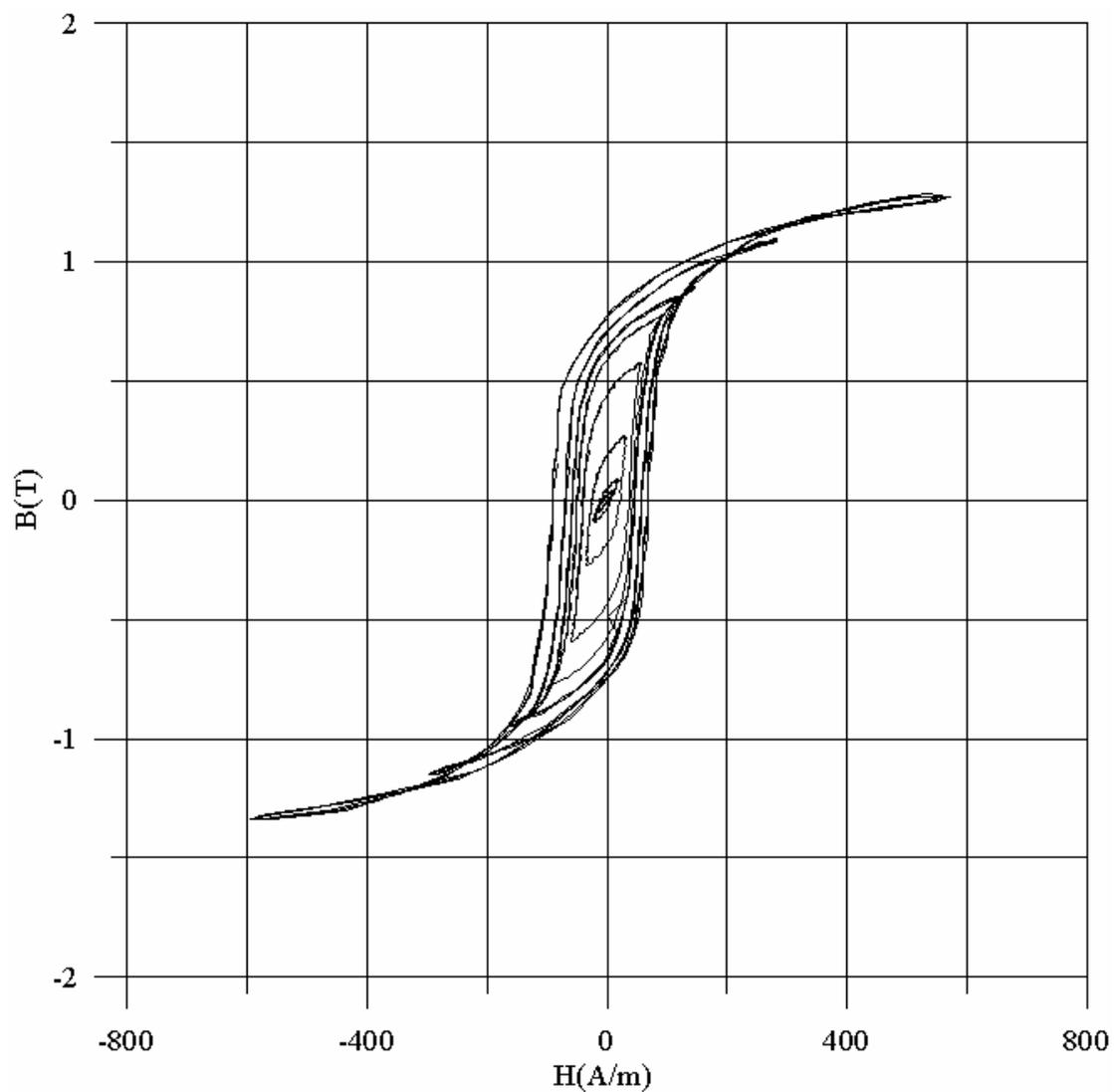
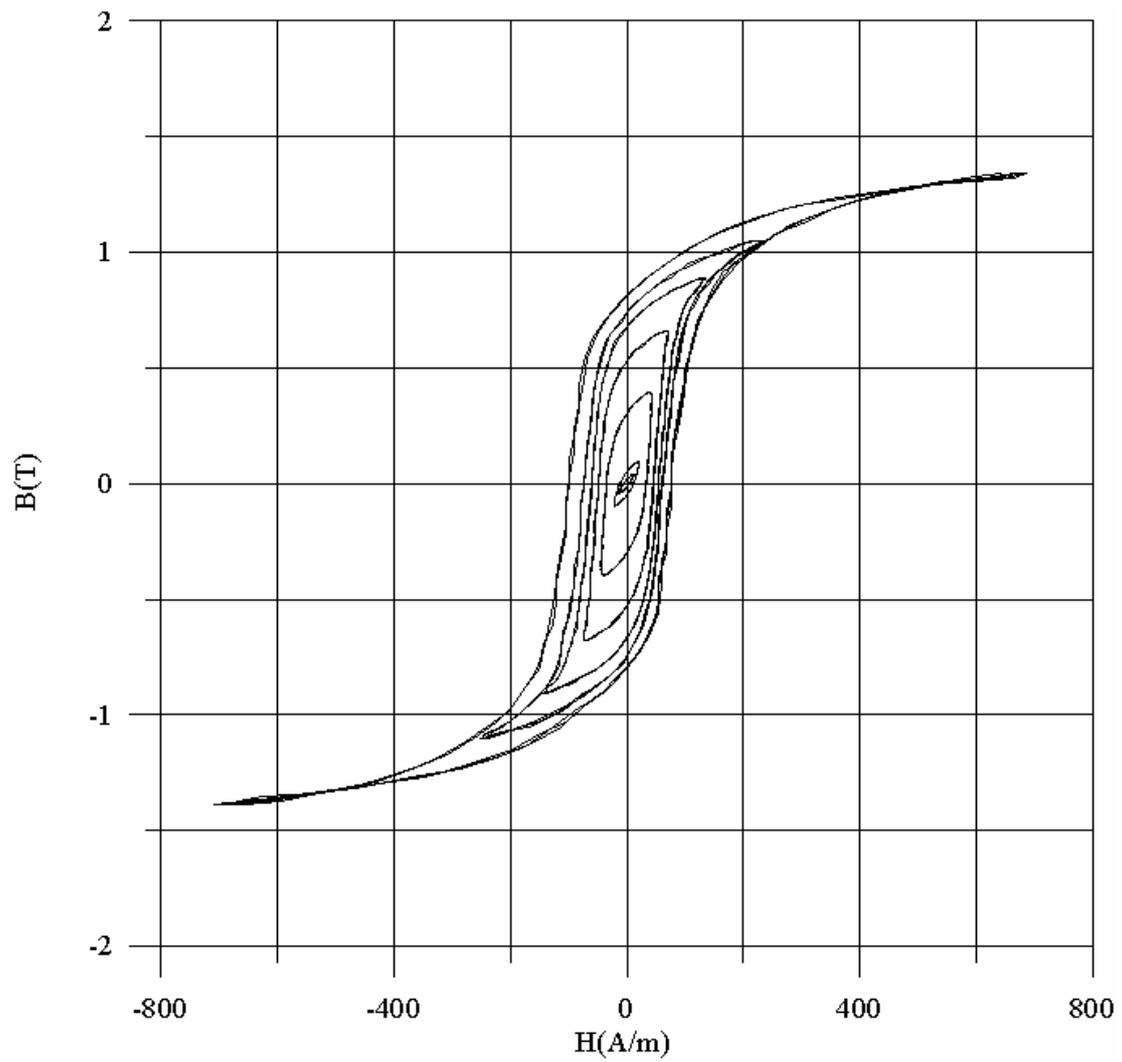
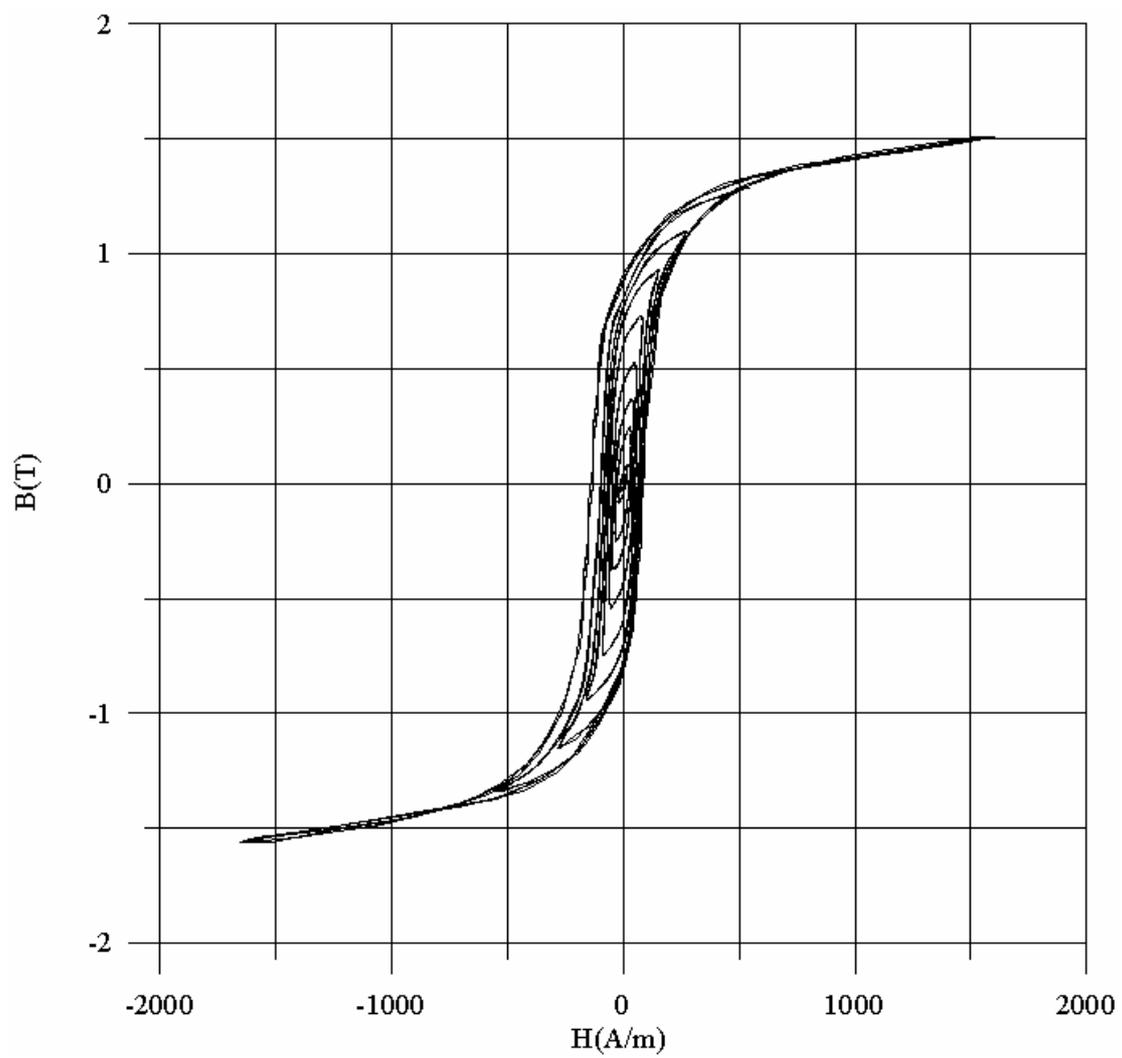


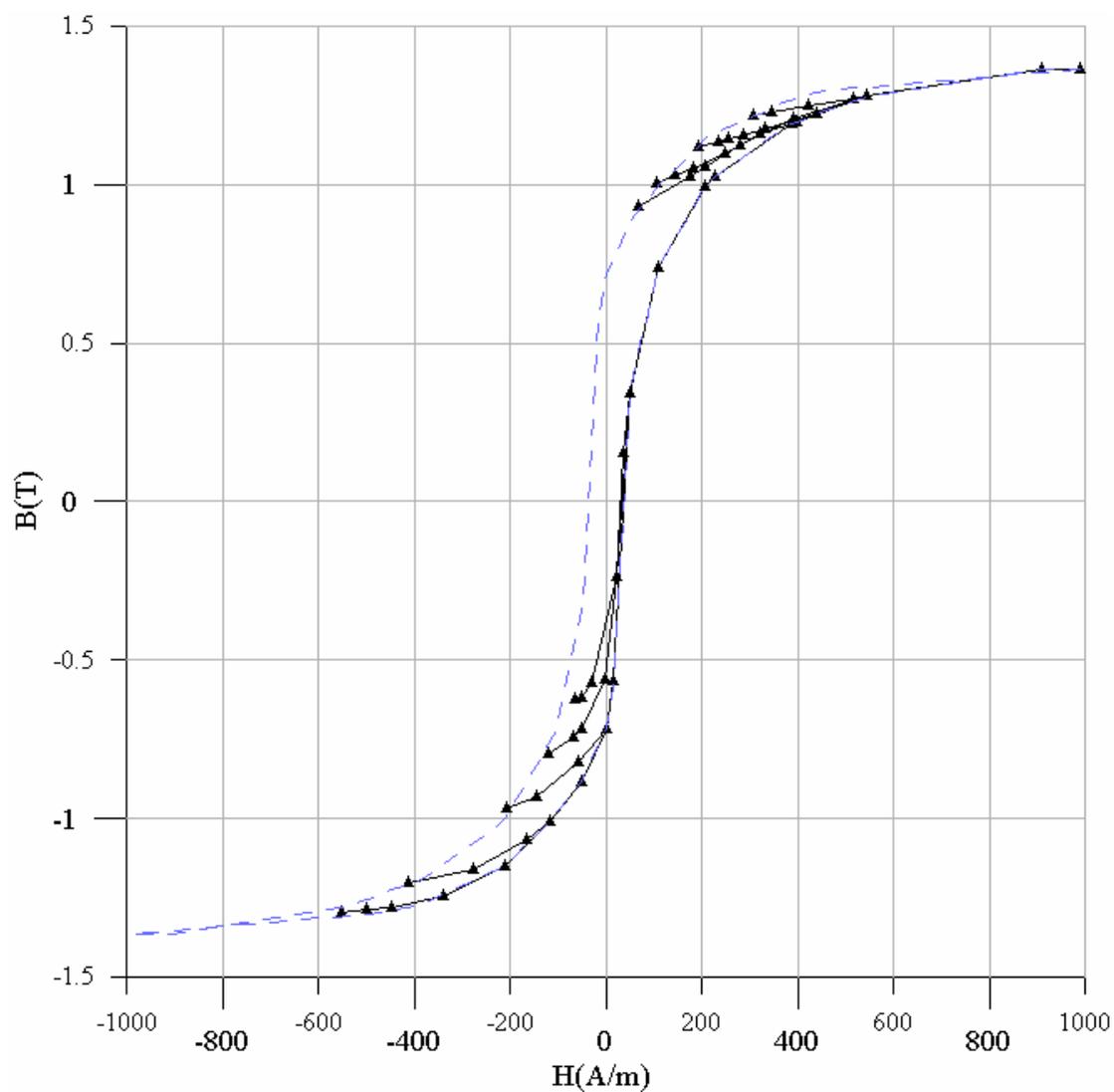
Figura D-7. Ciclos de histéresis a 30Hz de la muestra A.



**Figura D-8.** Ciclos de histéresis a 50Hz de la muestra A



*Figura D-9. Ciclos de histéresis a 70,15Hz de la muestra A.*



*Figura D-10. Curvas inversas de primer orden de la muestra A.*

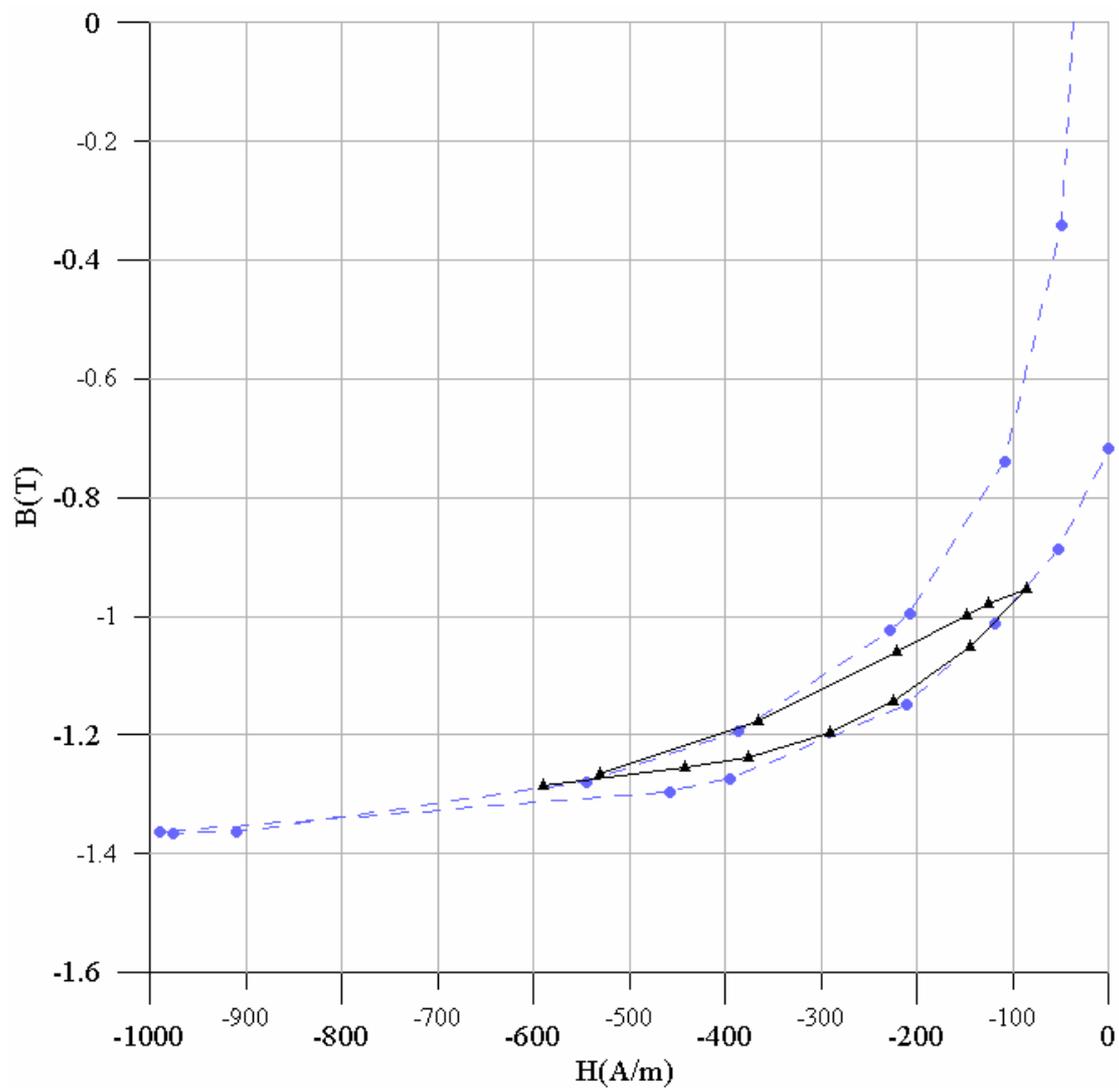


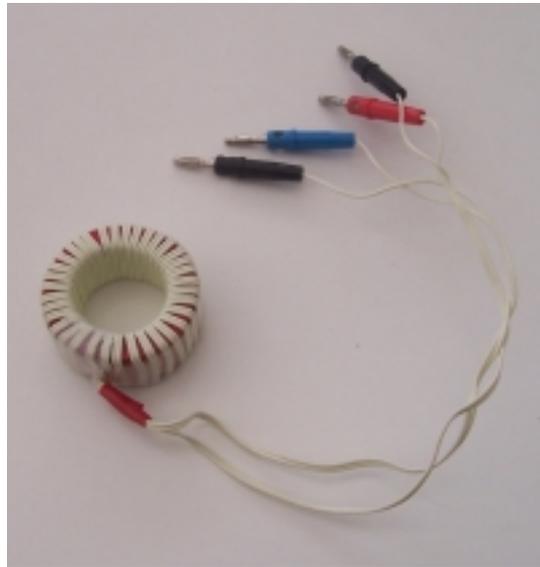
Figura D-11. Curva inversa de segundo orden de la muestra A.

### **D.3 Muestra B**

#### **D.3.1 Características generales**

La muestra B está formada por dos arrollamientos realizados manualmente sobre un núcleo de origen desconocido, proveniente seguramente de un transformador de la casa Avisor. En la figura D-12 se muestra una fotografía de la muestra B.

Dado el origen desconocido de la muestra B, únicamente la hemos empleado para probar el equipo histéresisgráfico.



*Figura D-12. Fotografía de la muestra B*

#### **D.3.2 Características de los arrollamientos.**

Los arrollamientos de la muestra B se realizaron en el laboratorio. Cubren homogéneamente al núcleo con una única capa. Para proteger a los arrollamientos de posibles cortes producidos por las aristas del núcleo cubrimos el núcleo con cinta aislante. El número de espiras de ambos arrollamientos es el mismo, 35 vueltas en cada uno.

#### **D.3.3 Geometría y dimensiones**

El núcleo de la muestra B es un anillo de sección cuadrada. En la figura D-13 se muestran la geometría y las dimensiones de su núcleo. De estas dimensiones deducimos los siguientes datos:



### D.3.5.2 Curva normal o de primera inducción.

Uniando los puntos máximos de las curvas de histéresis cuasiestáticas se ha obtenido la curva normal de la muestra B, mostrada en la figura D-15.

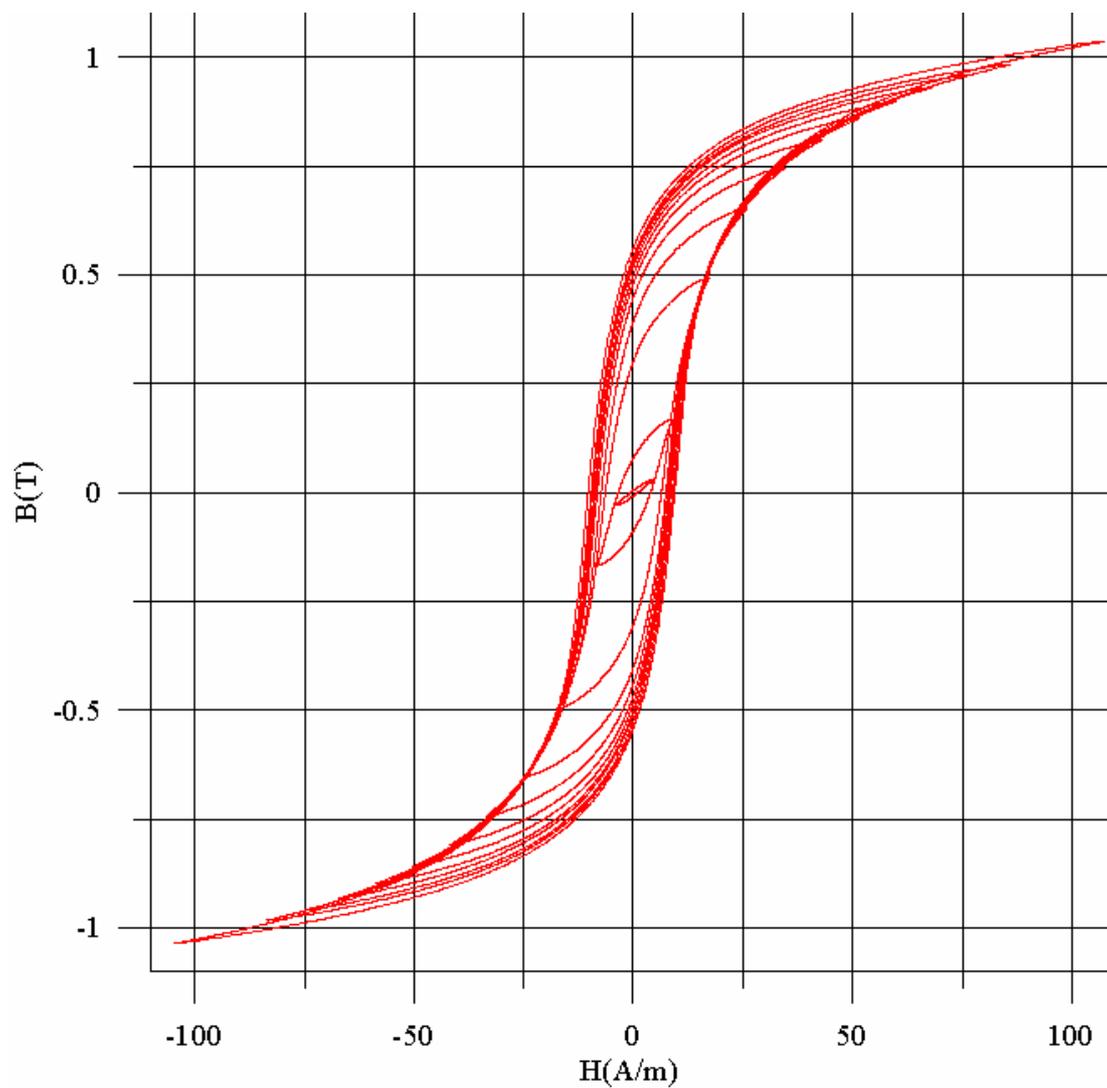
### D.3.5.3 Curvas inversas de primer orden

En la figura D-16 se muestra un conjunto de curvas inversas de primer orden para ciclo de histéresis cuasiestático K. Todas las curvas se obtuvieron mediante una primera versión del equipo histeresisgráfico que empleaba un sumador en vez de un recortador. Este versión del equipo se basaba en el procedimiento mostrado en la figura 6-18. Como ya se comentó este procedimiento es erróneo, por lo que las curvas mostradas en la figura D-16 se deben considerar únicamente a modo orientativo. No son útiles para caracterizar el modelo de Preisach mediante el método de Mayergoyz.

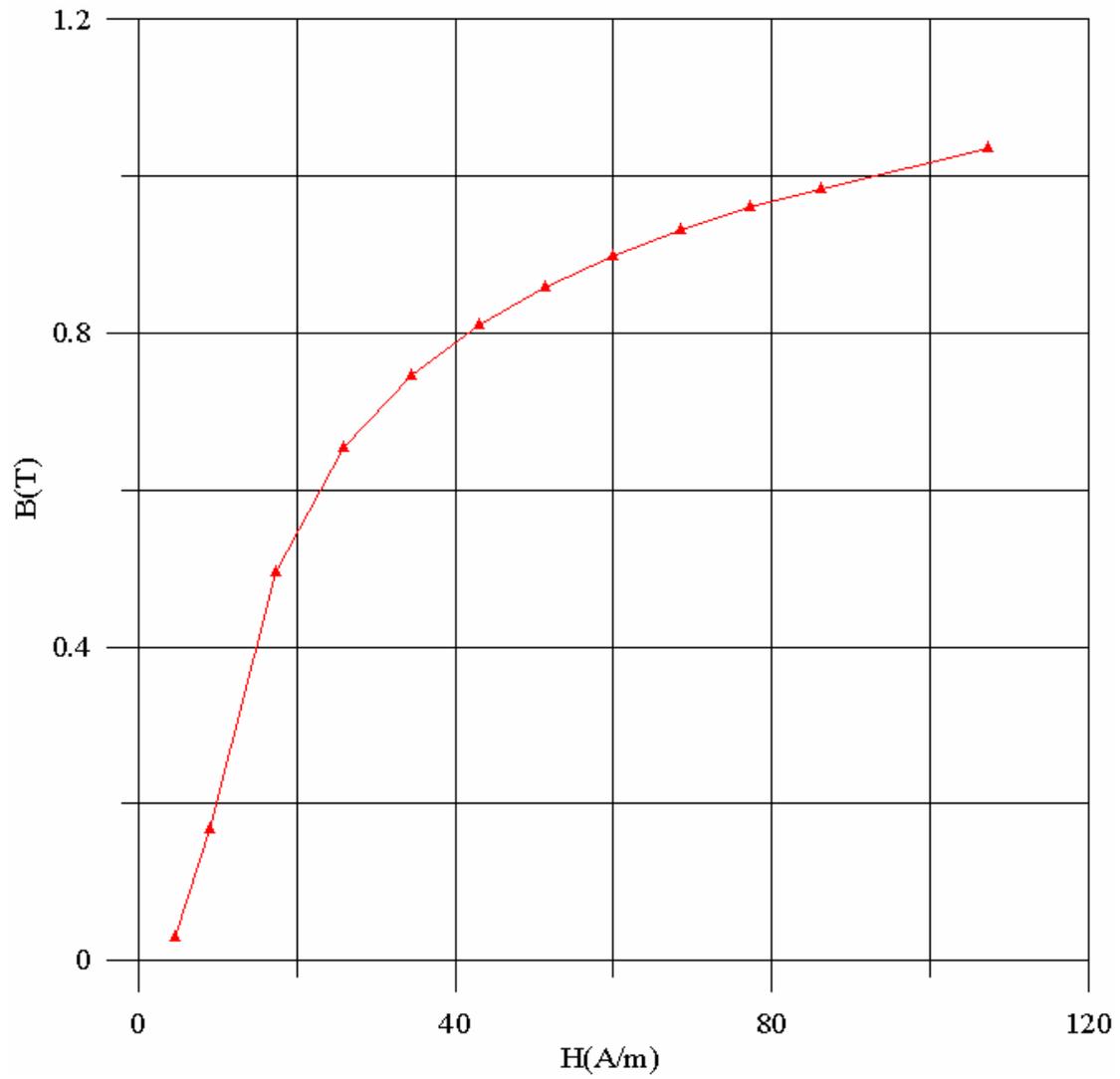
En la tabla D-IV se listan los puntos de inversión de las curvas inversas de primer orden.

**Tabla D-IV.** Puntos de inversión de las curvas inversas de primer orden de la muestra B

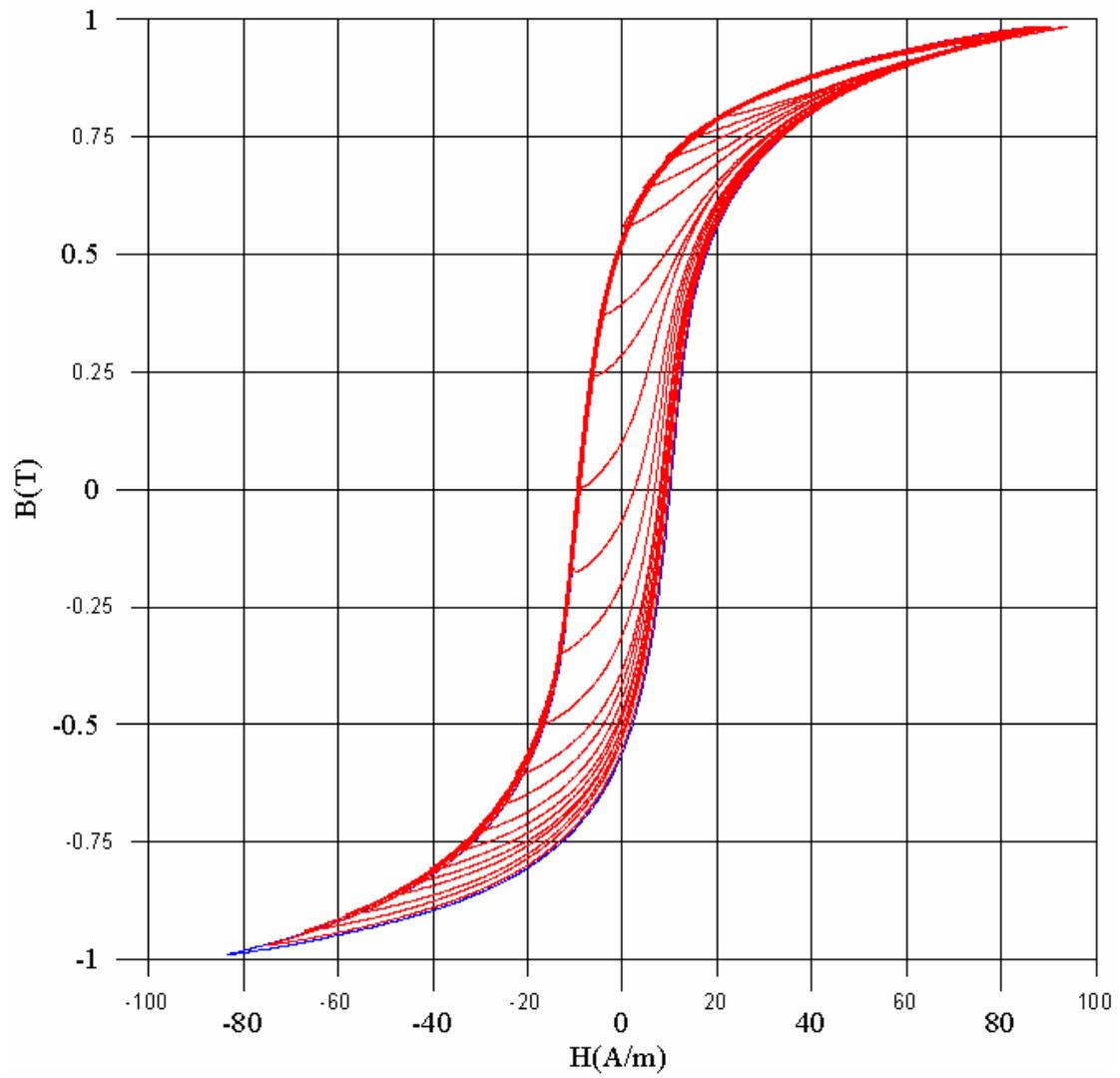
<i>Ciclo</i>	<b>A</b>	<b>B</b>	<b>C</b>	<b>D</b>	<b>E</b>	<b>F</b>
$H_1$ (A/m)	-74.88	-67.09	-58.25	-49.25	-44.25	-40.43
<i>Procedimiento</i>	Equipo Histeresis.	Equipo Histeresis.	Equipo Histeresis.	Equipo Histeresis.	Equipo Histeresis.	Equipo Histeresis.
<i>Ciclo</i>	<b>G</b>	<b>H</b>	<b>I</b>	<b>J</b>	<b>K</b>	<b>L</b>
$H_1$ (A/m)	-35.48	-31.43	-26.77	-22.47	-17.73	-13.50
<i>Procedimiento</i>	Equipo Histeresis.	Equipo Histeresis.	Equipo Histeresis.	Equipo Histeresis.	Equipo Histeresis.	Equipo Histeresis.
<i>Ciclo</i>	<b>M</b>	<b>N</b>	<b>Ñ</b>	<b>O</b>	<b>P</b>	<b>Q</b>
$H_1$ (A/m)	-10.56	-9.41	-6.40	-4.60	0.16	4.41
<i>Procedimiento</i>	Equipo Histeresis.	Equipo Histeresis.	Equipo Histeresis.	Equipo Histeresis.	Equipo Histeresis.	Equipo Histeresis.
<i>Ciclo</i>	<b>R</b>	<b>S</b>	<b>T</b>	<b>Límite</b>		
$H_1$ (A/m)	9.08	13.422	20.39	86.11		
<i>Procedimiento</i>	Equipo Histeresis.	Equipo Histeresis.	Equipo Histeresis.	Equipo Histeresis.		



*Figura D-14. Ciclos de histéresis cuasiestáticos de la muestra B*



*Figura D-15. Curva normal o de primera inducción de la muestra B*



*Figura D-16. Curvas inversas de primer orden para la muestra B. En trazo azul el ciclo límite.*

## ***D.4 Muestra C***

### **D.4.1 Características generales.**

La muestra C es un transformador monofásico de la casa Avisor. Este transformador se suele emplear para adaptar la tensión en fuentes de alimentación de equipo de uso doméstico. La placa de características del transformador es la siguiente:

- Potencia nominal: 30VA
- Tensiones: 230V/15V/15V
- Frecuencia: 50-60Hz
- Clase de aislamiento: B
- Modelo: 120011

### **D.4.2 Características de los arrollamientos**

Se han empleado los arrollamientos originales. Un arrollamiento del lado de alta, y dos arrollamientos iguales para el lado de baja. Tal y como se emplea el transformador en sus aplicaciones típicas, el arrollamiento de alta hace de primario quedando dos secundarios iguales. En nuestros ensayos no se empleará el arrollamiento de alta, uno de los arrollamientos de baja hace las funciones de primario y el otro las de secundario.

El número de espiras de cada arrollamiento nos lo comunicó gentilmente el propio Departamento Técnico de Avisor:

- Lado de alta: 2400 espiras
- Lados de baja: 180 espiras cada uno de ellos.

### **D.4.3 Geometría y dimensiones de núcleo**

Son exactamente las mismas que las del núcleo de la muestra B. Por tanto:

- Longitud media del circuito magnético  $l$ : 0,05652m
- Sección transversal del circuito magnético  $S$ :  $0,234 \cdot 10^{-3} \text{m}^2$

#### D.4.4 Características de la chapa magnética del núcleo.

Las características de la chapa magnética del núcleo son<sup>4</sup>:

- Material: M097-30N (Unisil 097-30-N5 o 30M5).
- Espesor: 0,30mm
- Pérdidas magnéticas a 50Hz.
  - Con 1,5T: 0,97W/kg
  - Con 1,7T: 1,50W/kg
- Factor de apilamiento mínimo: 0,955

En la figura D-17 se muestran algunas características del M097-30N.

#### D.4.5 Características magnéticas

##### D.4.5.1 Curva normal o de primera inducción

En la figura D-18 se muestra la curva normal de la muestra C obtenida a partir de los máximos de los siguientes conjuntos de ciclos de histéresis:

- Ciclos de 0,15Hz, considerados como cuasiestáticos.
- Ciclos de 1Hz
- Ciclos de 5Hz

Todos ellos obtenidos mediante el equipo histéresisgráfico,

##### D.4.5.2 Ciclos de histéresis cuasiestáticos

En la figura D-19 se muestra un conjunto de ciclos de histéresis obtenidos a la frecuencia de 0,15Hz mediante el equipo histeresisgráfico.

En la tabla D-V se listan los campos de los puntos máximos  $H_m$  de los ciclos de histéresis cuasiestáticos de la muestra C.

---

<sup>4</sup> Estos datos y la figura D-17 se han obtenido de la página web del fabricante de chapas Waasener Elektrotechnische Fabrik GmbH

**Tabla D-V. Ciclos de histéresis cuasiestáticos de la muestra D**

<i>Ciclos</i>	<b>A</b>	<b>B</b>	<b>C</b>	<b>D</b>	<b>E</b>
<i>Hm(A/m)</i>	13.23	22.93	33.67	44.98	55.77
<i>Procedimiento</i>	Equipo Histeresisg.	Equipo Histeresisg.	Equipo Histeresisg.	Equipo Histeresisg.	Equipo Histeresisg.
<i>Ciclos</i>	<b>F</b>	<b>G</b>	<b>H</b>	<b>I</b>	<b>J</b>
<i>Hm(A/m)</i>	66.56	88.16	108.78	130.19	173.02
<i>Procedimiento</i>	Equipo Histeresisg.	Equipo Histeresisg.	Equipo Histeresisg.	Equipo Histeresisg.	Equipo Histeresisg.
<i>Ciclos</i>	<b>K</b>	<b>L</b>	<b>M1</b>	<b>M2</b>	<b>N</b>
<i>Hm(A/m)</i>	215.88	259.71	301.04	303.93	432.25
<i>Procedimiento</i>	Equipo Histeresisg.	Equipo Histeresisg.	Equipo Histeresisg.	Equipo Histeresisg.	Equipo Histeresisg.

#### D.4.5.3 Ciclos de histéresis a varias frecuencias

En la figura D-20 se muestra un conjunto de ciclos de histéresis obtenido a la frecuencia de 1Hz mediante el equipo cuasiestático.

Debido a las prestaciones del equipo histeresisgráfico, a la frecuencia de 5Hz tan sólo se pudo obtener un ciclo (no olvidemos que el equipo se ha construido para determinar las curvas inversas de primer orden cuasiestáticas). La razón es sencilla, al aumentar la frecuencia aumenta la fuerza electromotriz en bornes de ambos arrollamientos, esto provoca que entren en funcionamiento los diodos de protección del amplificador de transconductancia.

En la figura D-21 se muestra el ciclo de histéresis a 5Hz junto con los ciclos de histéresis de igual valor máximo obtenidos para las frecuencias de 0,15Hz y 1Hz.

En la tabla D-VI se indican los campos de los puntos máximos de ciclos de histéresis a 1Hz y del ciclo de histéresis a 5Hz.

**Figura D-VI.** Ciclos de histéresis de la muestra C a 1Hz y 5Hz

<i>Ciclo</i>	<b>Ñ</b>	<b>O</b>	<b>P</b>	<b>Q</b>
<i>Hm(A/m)</i>	23.71	34.44	45.18	55.91
<i>f(Hz)</i>	1	1	1	1
<i>Procedimiento</i>	Equipo Histeresisg.	Equipo Histeresisg.	Equipo Histeresisg.	Equipo Histeresisg.
<i>Ciclo</i>	<b>R</b>	<b>S</b>	<b>T</b>	
<i>Hm(A/m)</i>	66.64	88.11	23.82	
<i>f(Hz)</i>	1	1	5	
<i>Procedimiento</i>	Equipo Histeresisg.	Equipo Histeresisg.	Equipo Histeresisg.	

**D.4.5.4 Curvas inversas de primer orden**

Las curvas inversas de primer orden, para un ciclo límite de campo máximo  $H_m=484,4A/m$ , se muestran en la figura D-22. Todas estas curvas se han obtenido mediante el equipo histeresisgráfico para una frecuencia de 0,15Hz

En la tabla D-VII se listan los puntos de inversión de las curvas inversas de primer orden obtenidas para la muestra C.

**Tabla D-VII.** Puntos de inversión de las curvas inversas de primer orden de la muestra C

<i>Curva</i>	<b>B</b>	<b>C</b>	<b>D</b>	<b>E</b>	<b>F</b>	<b>G</b>
<i>HI(A/m)</i>	-466.86	-51.73	-27.77	-10.11	-9.536	-4.13
<i>Procedimiento</i>	Equipo Histeresisg.	Equipo Histeresisg.	Equipo Histeresisg.	Equipo Histeresisg.	Equipo Histeresisg.	Equipo Histeresisg.
<i>Curva</i>	<b>H</b>	<b>I</b>	<b>J</b>	<b>Límite</b>		
<i>HI(A/m)</i>	-2.05	15.16	38.51	484.4		
<i>Procedimiento</i>	Equipo Histeresisg.	Equipo Histeresisg.	Equipo Histeresisg.	Equipo Histeresisg.		

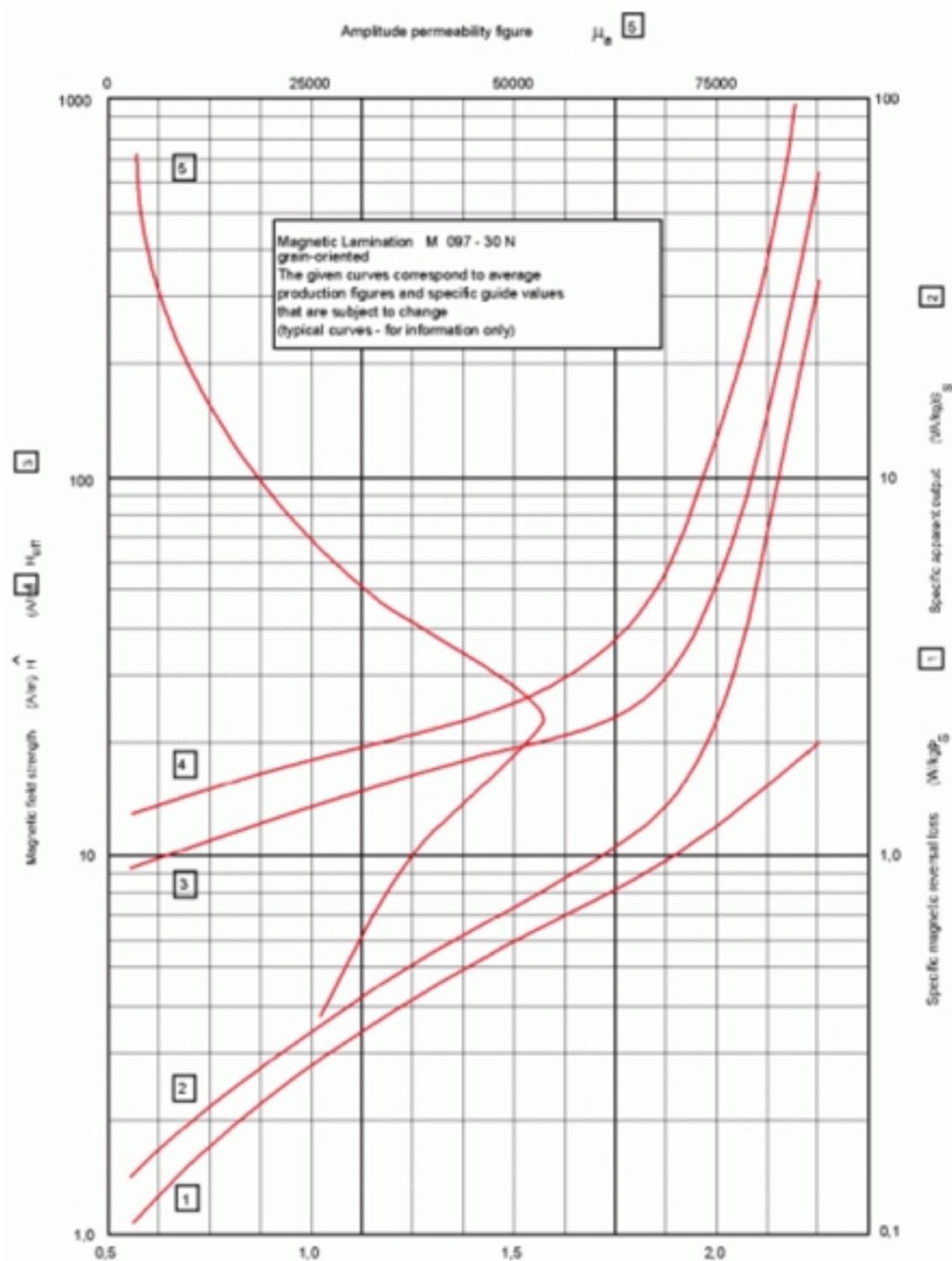
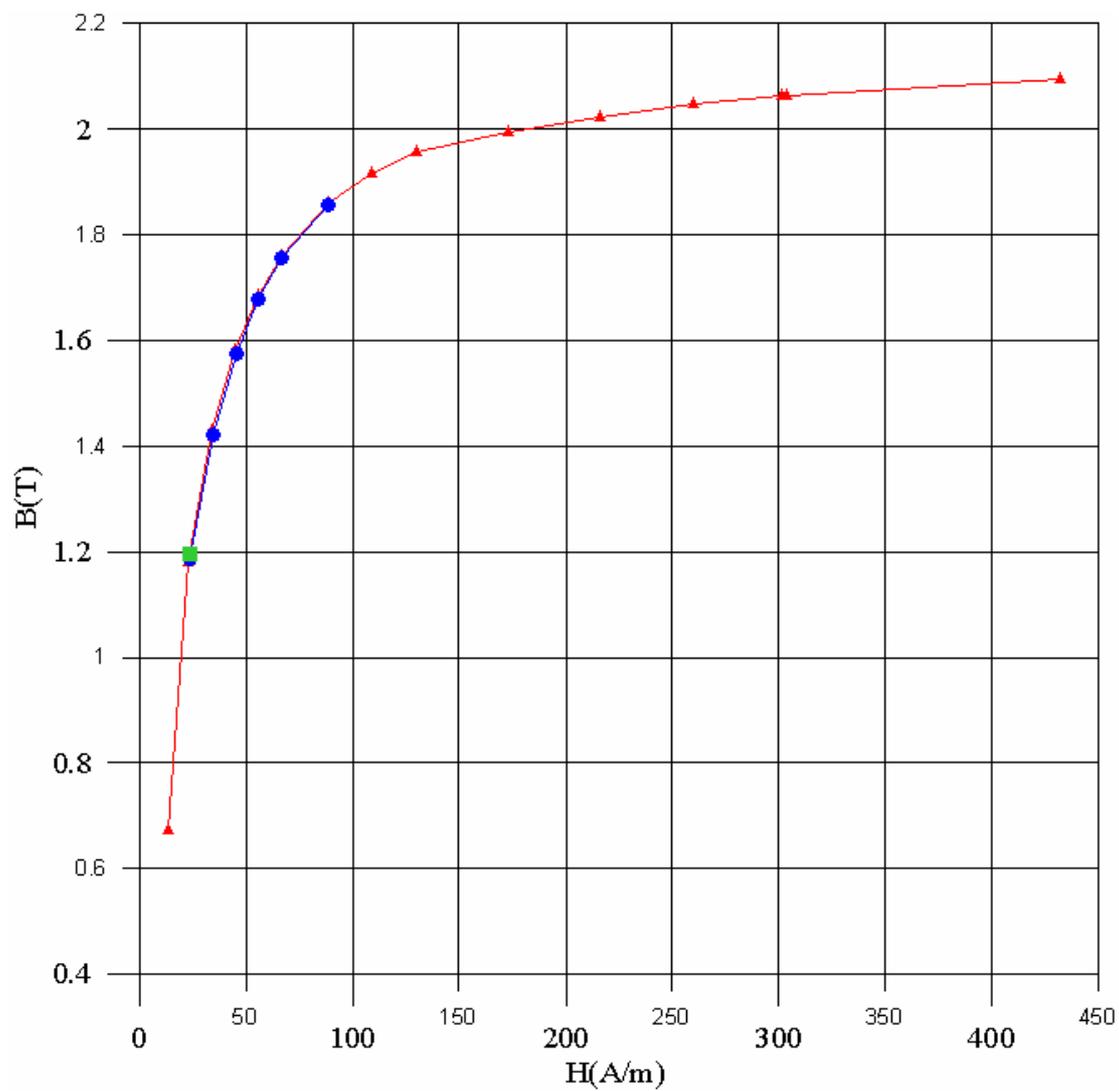
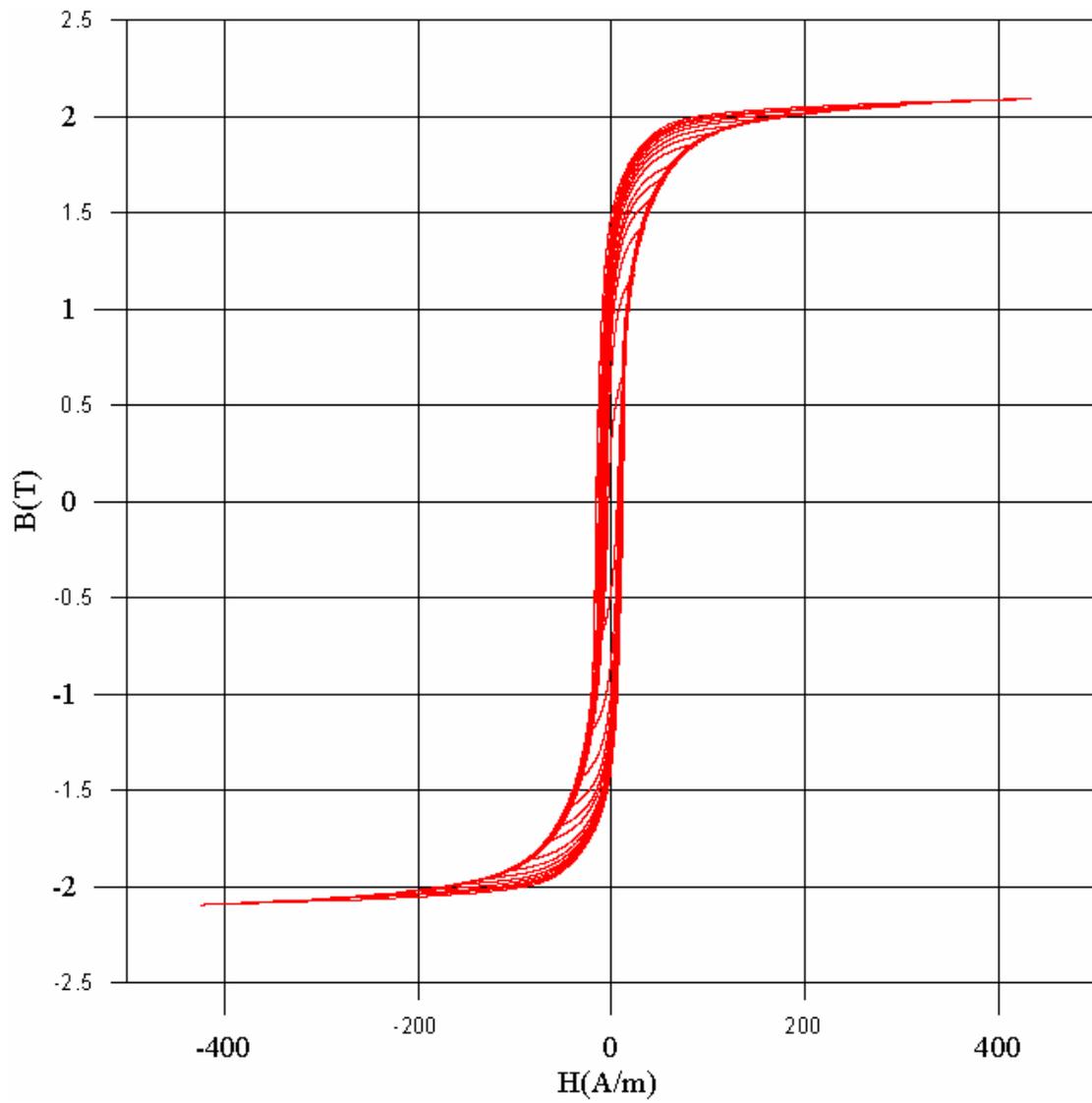


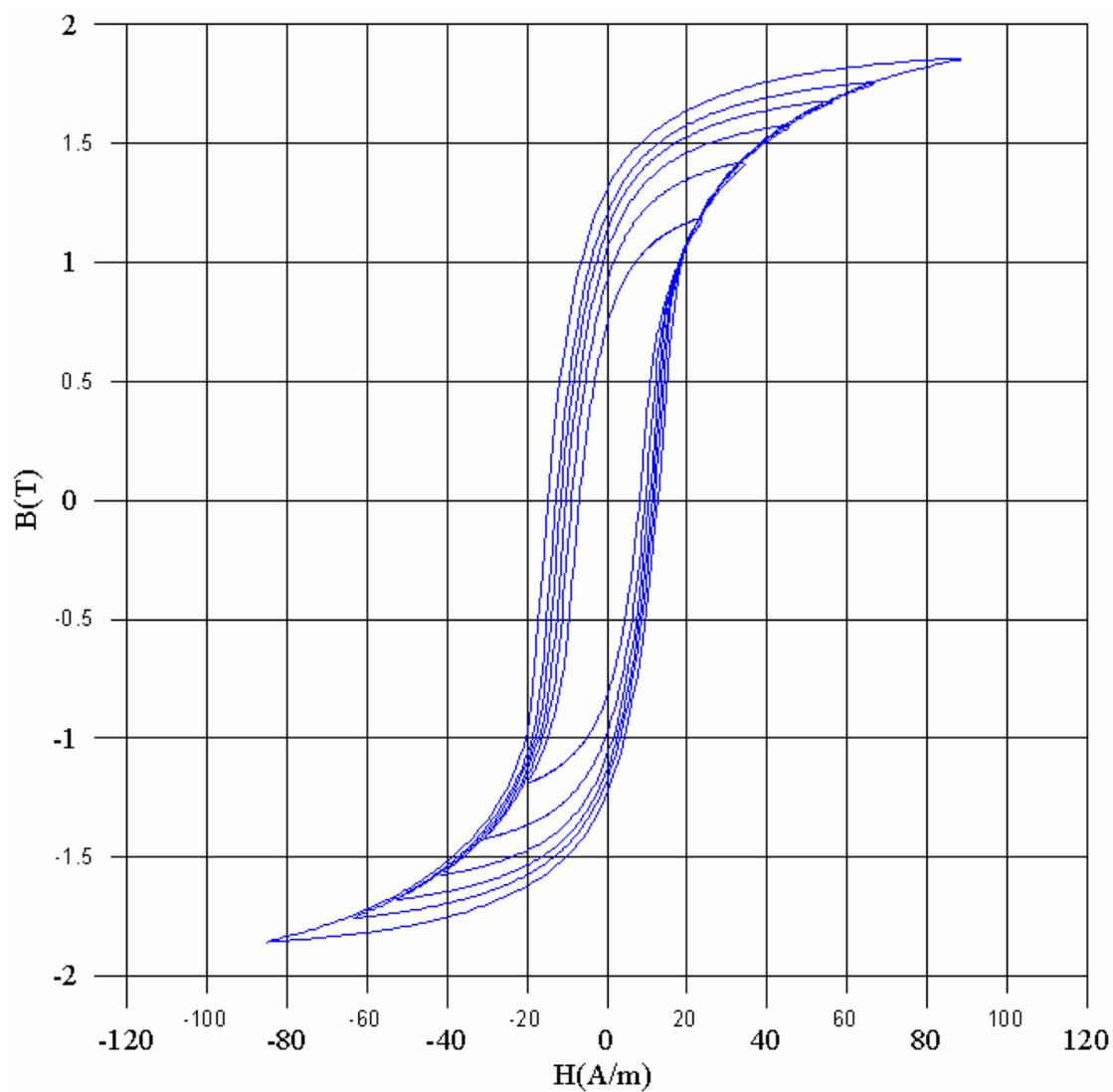
Figura D-17. Características magnéticas del M097-30N (Gráficas obtenidas de la página web de Waasener Elektrotechnische Fabrik GmbH)



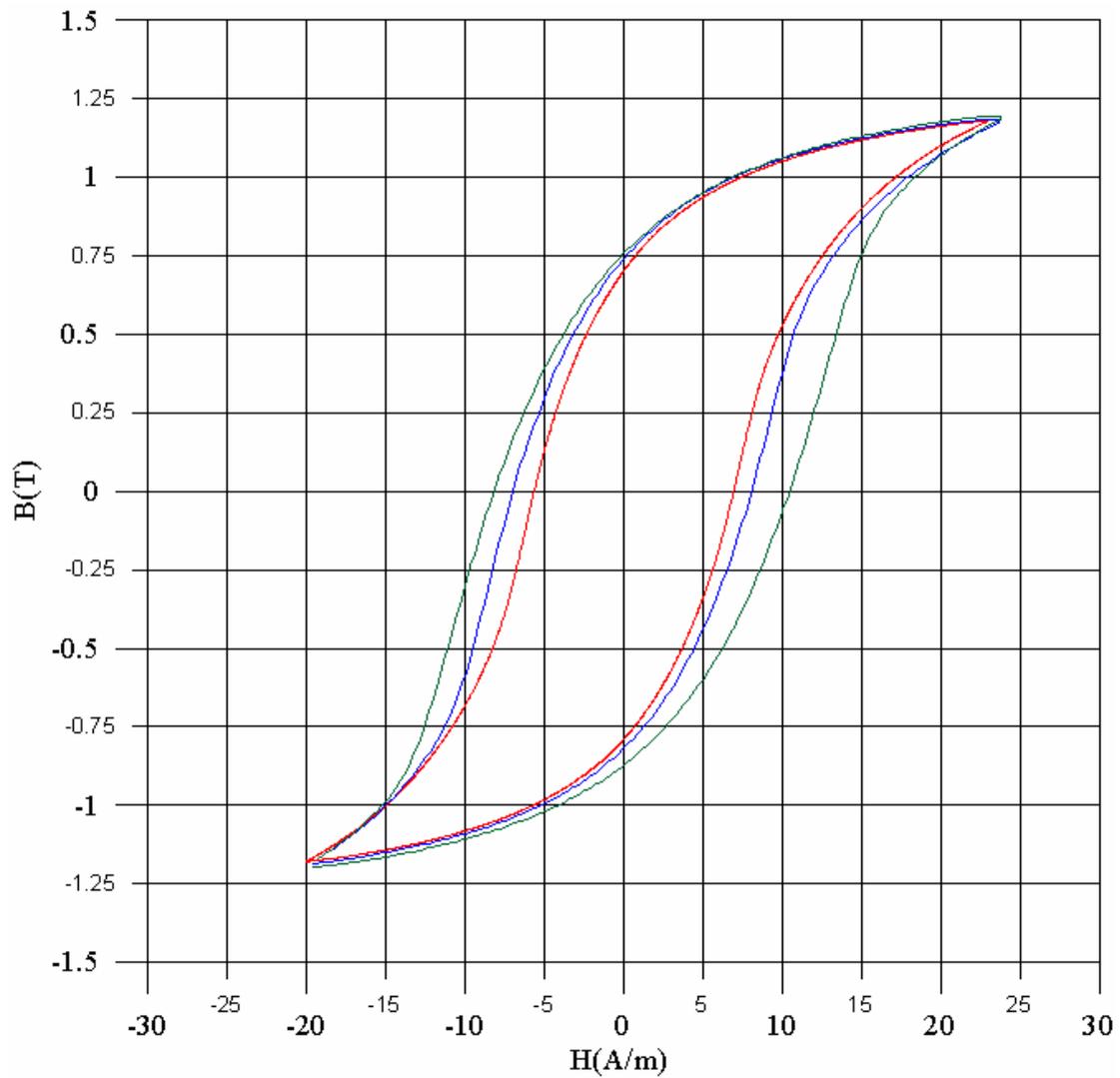
**Figura D-18.** Curva normal o de primera inducción de la muestra C. En rojo puntos obtenidos de las curvas de histéresis cuasiestáticas, en azul puntos obtenidos de las curvas de histéresis de 1Hz y en verde punto obtenido de la curva de 5Hz.



*Figura D-19. Ciclos de histéresis cuasiestáticos de la muestra C.*



*Figura D-20. Ciclos de histéresis de la muestra C, a 1Hz.*



**Figura D-21.** Ciclos a 0,15Hz (rojo), 1Hz (azul) y 5Hz (verde) de la muestra C.

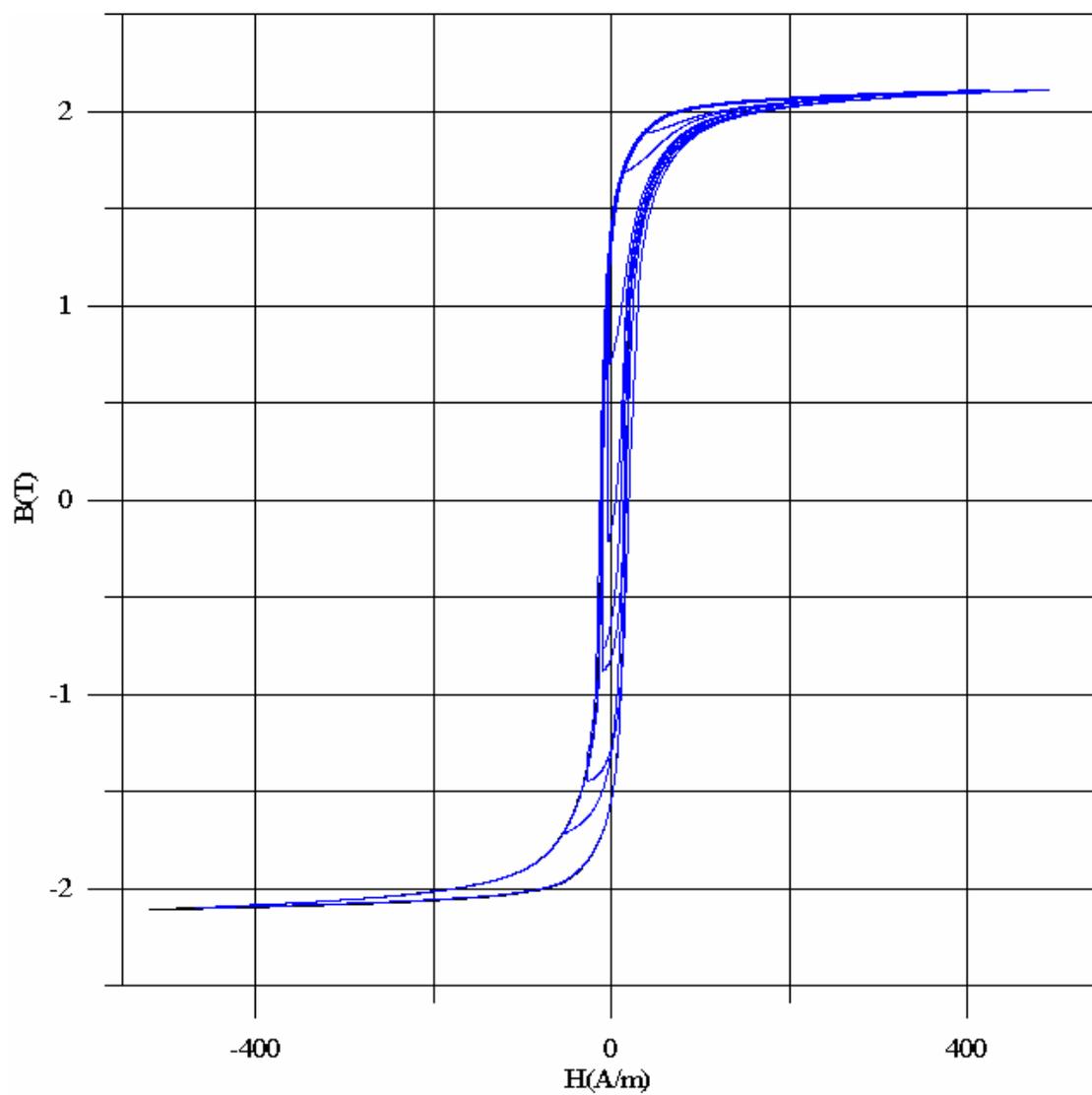


Figura D-22. Curvas inversas de primer orden de la muestra C.



## E. Características de los equipos de medición

Se exponen a continuación las características técnicas más relevantes de la instrumentación empleada en los ensayos de nuestro trabajo de investigación. En concreto, de los siguientes instrumentos de medición, por el motivo que los consideramos más “especiales”:

- Fluxómetro
- Voltímetro de flujo
- Vatímetro de factor de potencia bajo
- Tarjeta de adquisición de datos

### *E.1 Fluxómetro 3254 de Yokogawa.*

Se trata de un fluxómetro magnético con un circuito de integración RC y un amplificador de alta ganancia [Yokogawa, 1988]. Se emplea para medir cambios de flujo magnético, desde  $10^2$  a  $10^5$  kMx·vuelta. En la figura E-1 se muestra una fotografía del fluxómetro.

En nuestro trabajo de investigación el fluxómetro 3254 de Yokogawa se ha empleado en la determinación de las curvas inversas de primer orden y el correspondiente ciclo límite mediante el método balístico.

Las principales características técnicas:

- Rangos de medida. Fondo de escala:  
 $\pm 1 \cdot 10^2 / \pm 3 \cdot 10^2 / \pm 1 \cdot 10^3 / \pm 3 \cdot 10^3 / \pm 1 \cdot 10^4 / \pm 3 \cdot 10^4 / \pm 1 \cdot 10^5$  kMx·vuelta
- Precisión:  $\pm 1\%$  a fondo de escala
- Resistencia de entrada: Ver tabla E-I
- Deriva (1 minuto):  $>1\%$  a fondo de escala

**Tabla E-I.** Resistencia de entrada en función de la escala

<i>Rango kMx-vuelta</i>	$\pm 1 \cdot 10^2$	$\pm 3 \cdot 10^2 \dots \pm 3 \cdot 10^3$	$\pm 1 \cdot 10^4$	$\pm 3 \cdot 10^4$	$\pm 1 \cdot 10^5$
<i>Resistencia de entrada</i>	2k $\Omega$	6k $\Omega$	20k $\Omega$	60k $\Omega$	200k $\Omega$

**Figura E-1.** Fotografía del fluxometro Yokogawa 3254

### **E.2 Vatímetro de factor de potencia bajo 2041 de Yokogawa**

Vatímetro monofásico de tipo electro-dinámico para medida de potencia en continua o en alterna en laboratorios o entornos industriales. Especialmente indicado para medición de pérdidas en el hierro en equipo Epstein, y bajas potencias con factores de potencia bajos [Yokogawa, 1980]. En la figura E-2 se muestra una fotografía del vatímetro.

El vatímetro de factor de potencia 2041 de Yokogawa se ha empleado en la determinación de las pérdidas magnéticas totales.

Las principales características del vatímetro son:

- Precisión: 0,5% a fondo de escala.

- Divisiones de escala: 120
- Efecto del autocalentamiento:  $<0,2\%$  del valor de fondo de escala
- Efecto de la temperatura:  $<0,3\%/10^{\circ}\text{C}$
- Rango de frecuencia: 25Hz a 500Hz
- Resistencia interna: En función de la escala, ver tabla E-II.
- Escalas de tensión: 120V, 240V
- Escala de intensidad: 1A, 5A
- Factor de potencia: 0,20

**Tabla E-II.** Resistencia del circuito de tensión del vatímetro de factor de potencia bajo Yokogawa 2041 en función de la escala

Escala	$R(\Omega)$
1A/30V	150
5A/30V	1500,06
5A/60V	3000,06



**Figura E-2.** Fotografía del vatímetro de bajo factor de potencia Yokogawa 2041

### ***E.3 Tarjeta de adquisición de datos PCL-1800 de National Instruments***

Se trata de una tarjeta de adquisición de datos de propósito general, compatible con el bus ISA de los ordenadores personales PC.

Esta tarjeta de adquisición de datos se emplea para el equipo histeresisgráfico. El control de la tarjeta y el tratamiento de los datos adquiridos se realiza mediante códigos escritos con el lenguaje G de LabVIEW 5.0.

La tarjeta dispone de los siguientes canales de entrada-salida:

- Canales analógicos de salida: 2
- Canales analógicos de entrada: 8
- Canales analógicos de entrada/salida: 8

La tasa de muestreo máxima para un único canal es de 100k muestras por segundo. Si, por ejemplo, se emplean dos canales analógicos de entrada, la tasa de muestreo sería de la mitad.

Las ganancias para las entradas analógicas, con su correspondiente ancho de banda y tensiones límite, se muestran en la tabla E-III.

***Tabla E-III. Ganancias para las entradas analógicas, con su correspondiente tensión límite y ancho de banda***

<i>Ganancia</i>	<i>Tensión límite (V)</i>	<i>Ancho de Banda (kHz)</i>
1	±5	250
2	±2,5	250
5	±1	150
10	±0,5	60
20	±0,250	30
50	±0,100	30
100	±0,05	30

La tarjeta dispone de la posibilidad de temporizar la conversión analógico-digital externamente. Mediante una señal de disparo exterior se puede controlar la conversión analógico-digital, en este sentido existen dos modos de funcionamiento:

- *Modo post-trigger*, La señal de disparo controla el comienzo de una secuencia de conversión de datos.
- *Modo pre-trigger*. La señal de disparo controla el fin de una secuencia de conversión de datos. Los datos se adquieren antes y después de la señal, pero el número de muestras después de la señal de disparo exterior está limitada a un número establecido por el propio usuario.

Para el equipo histeresisgráfico empleamos el modo post-trigger.



## F. Códigos del modelo de histéresis

### F.1 Propósito y organización del apéndice

El propósito de este apéndice es el explicar los códigos realizados para el desarrollo del modelo de histéresis.

Los listados de los códigos se hallan en el CD-ROM adjunto con este documento

El apéndice está organizado en los siguientes puntos:

- Modelo de Preisach clásico
  - Caracterización por el método de Mayergoyz
  - Caracterización por ajuste a una lorentziana
  - Caracterización por ajuste a una Gaussiana-log-normal
  - Caracterización por ajuste a una Gaussiana-gaussiana
  - Desarrollo por integrales de Everett. Algoritmo genérico
  - Desarrollo por definición matemática. Algoritmo genérico
  - Desarrollo por el método de Naidu
- Modelo dinámico tipo Preisach. Modelo de Bertotti.
- Modelo de Preisach inverso.

Cada uno de los puntos anteriores, salvo excepciones, se divide en dos partes:

- Programa global o "*master*". Es el algoritmo de control. Por lo general en él no se realiza ningún cálculo, tan solo llama a varios programas, cada uno de los cuales realiza una parte de cálculo. Gestiona el flujo de cálculos así como las entradas y salidas de datos.

- Subprogramas. Son los diversos bloques de cálculos cada uno de ellos realiza una tarea específica, son llamados desde el programa master. En la medida de lo posible se ha procurado que estos programas sean genéricos, esto es, se puedan llamar desde programas master de diferentes desarrollos. Por ejemplo el subprograma que calcula la integral de Everett se puede llamar desde el master de la caracterización por el método de Mayergoyz, desde el master del desarrollo por integrales de Everett, desde el master del desarrollo por definición matemática o incluso por el master del modelo dinámico.

Cada punto comienza por el programa master, para el cual se expone:

- Función
- Código

Para los subprogramas, en general, se ha seguido la siguiente estructura:

- Función.
- Relación de entradas y salidas
- Código.

Todos los códigos se han realizado con MATLAB 6.1.

## ***F.2 Caracterización del modelo de Preisach mediante el método de Mayergoyz***

### **F.2.1 Programa master**

Caracteriza el modelo de Preisach mediante el método de Mayergoyz, toma como entrada las curvas inversas de primer orden y llama a los subprogramas necesarios para calcular la integral de Everett y la función densidad a partir de la integral de Everett.

El programa es muy sencillo. Primero se cargan las curvas inversas de primer orden de un archivo, después se llama al subprograma *plano\_preisach* que discretiza el plano de Preisach en función del ciclo límite en el cual están contenidas las curvas límite, seguidamente se calculan las integrales de Everett mediante *everett01* y finalmente se calcula la función densidad mediante *f\_densidad01*.

## F.2.2 Subprograma *plano\_preisach*.

### F.2.2.1 Función.

Realiza la discretización del plano de Preisach en función del ciclo límite de las curvas inversas de primer orden. Esta discretización, en realidad, consiste en generar los vectores *alfa* y *beta* con los valores de los nodos de los ejes  $\alpha$  y  $\beta$  del plano de Preisach. Como que el programa realiza la discretización asumiendo que ambos ejes son iguales  $\alpha=\beta$ , tan solo genera el vector *alfa*.

### F.2.2.2 Entradas-salidas

Las entradas del programa son la variable *nodos* que indica la longitud de la variable *alfa*, esto es, el número de nodos en los que se divide el plano de Preisach, y una variable que indica el nombre del archivo que contiene a las curvas inversas de primer orden y el ciclo límite.

La salida es el vector *alfa*, que contiene los valores de los nodos del eje  $\alpha$ .

## F.2.3 Subprograma *everett01*

### F.2.3.1 Función

Calcula la integral de Everett en el plano de Preisach discretizado por el subprograma *plano\_Preisach* con las curvas de primer orden experimentales contenidas el archivo de entrada.

Para paliar el bajo número de curvas inversas de primer orden experimentales con las que hemos tenido que realizar una doble interpolación a tramos por polinomios cúbicos de Hermite.

### F.2.3.2 Entradas-salidas

Las entradas son:

- *Alfa*. Vector con los nodos de plano de Preisach discretizado
- *Archivo\_entrada*. Nombre del archivo donde se halla las curvas inversas de primer orden experimentales.

- *Archivo*. Cuando *archivo*=1 indica que deseamos que el subprograma cree un archivo de salida con la integral de Everett calculada.
- *Graficos*. Cuando *graficos*=1 indica que deseamos que el subprograma genere unas pantallas de gráficos con la integral de Everett y la evolución de diversas variables de cálculo.

La salida es una matriz con la integral de Everett.

## F.2.4 Subprograma *f\_densidad01*

### F.2.4.1 Función

El subprograma *f\_densidad01* calcula la función densidad  $\mu(\alpha, \beta)$  a partir de la integral de Everett para el plano de Preisach discretizado por el subprograma *plano\_Preisach*. La función densidad se calcula como la derivada doble de la integral de Everett respecto  $\alpha$  y respecto  $\beta$ .

$$\mu(\alpha, \beta) = \frac{\partial^2 E(\alpha, \beta)}{\partial \alpha \partial \beta} \quad (\text{F.1})$$

### F.2.4.2 Entradas-salidas

Las entradas son:

- *Alfa*: Entramado del plano de Preisach discretizado
- *E*: Matriz con la integral de Everett calculada para el plano de Preisach discretizado
- *Archivo*: Indica si deseamos que el programa genere un archivo ASCII con la matriz de la función densidad
- *Gráficos*: Indica si deseamos que el programa genere unas pantallas gráficas con la función densidad calculada.

La salida es una matriz con la función densidad calculada.

### F.3 Caracterización del modelo de Preisach mediante ajuste a una lorentziana factorizada

#### F.3.1 Función.

Los siguientes códigos calculan la función densidad por ajuste a una lorentziana factorizada. La función densidad se calcula para el plano de Preisach discretizado por el subprograma *plano\_preisach*. Se han probado dos curvas lorentzianas diferentes. Los subprogramas se denominan *lorentziana1* y *lorentziana2* respectivamente.

#### F.3.2 Primera lorentziana. Subprograma *lorentziana1*

La primera lorentziana tiene la siguiente expresión [Bertotti, 1992]:

$$\mu(x, y) = \frac{K}{\left[1 + \left(x - \frac{1}{2}\right)^2\right] \left[1 + \left(y + \frac{1}{2}\right)^2\right]} \quad (\text{F.2})$$

$$x = \frac{\alpha}{H_o}; y = \frac{\beta}{H_o}$$

Donde  $H_o$  es un valor del orden del campo coercitivo del ciclo límite,  $\sigma_c$  es un valor a ajustar a partir del ciclo límite y  $K$  es una constante cercana a 0,15e-6. El valor exacto de la constante se determina por ensayo y error.

##### F.3.2.1 Entradas-salidas

Las entradas del subprograma *lorentziana1* son:

- *Alfa*: Vector con los nodos del plano de Preisach discretizado
- *Hc*: Valor del campo coercitivo del ciclo límite
- *K*: Constante
- *Archivo*: Indica si se debe generar un archivo ASCII con el la función densidad calculada
- *Gráficos*: Indica si el programa debe generar pantallas gráficas con la función densidad calculada.

La salida del programa es una matriz con la función densidad calculada.

### F.3.3 Segunda lorentziana. Subprograma *lorentziana 2*

La segunda lorentziana probada tiene esta otra expresión [Bertotti, 1998]:

$$\mu(h_c, h_i) = \frac{2}{\pi \sigma_c^2 H_o^2 \left( \frac{\pi}{2} + \arctg \frac{1}{\sigma_c} \right)} \left[ 1 + \left( \frac{h_c + h_i - H_o}{\sigma_c H_o} \right)^2 \right]^{-1} \left[ 1 + \left( \frac{h_c - h_i - H_o}{\sigma_c H_o} \right)^2 \right]^{-1} \quad (\text{F.3})$$

#### F.3.3.1 Entradas-salidas

Las entradas del subprograma *lorentzian2* son:

- *Alfa*: Vector con los nodos del plano de Preisach discretizado
- *Ho*: Constante con un valor aproximadamente igual al del campo coercitivo del ciclo límite.
- *Sigmac*: Constante a ajustar por ensayo y error
- *Bs*: Inducción máxima del ciclo límite experimental
- *K*: Factor para ajustar la amplitud del ciclo calculado.
- *Archivo*: Indica si se debe generar un archivo ASCII con el la función densidad calculada
- *Gráficos*: Indica si el programa debe generar pantallas gráficas con la función densidad calculada.

La salida es una matriz con la función densidad calculada.

### F.4 Caracterización del modelo de Preisach mediante ajuste a una gaussiana-log-normal

A continuación se muestran los subprogramas que calculan la función densidad por ajuste a una curva gaussiana-log-normal. En este caso se han probado dos curvas diferentes. La primera de ellas es la curva empleada en los trabajos de E. della Torre [della Torre, 1999]:

$$\mu(h_c, h_i) = \frac{B_s}{2\pi\sigma_i\sigma_c} e^{-\frac{1}{2} \left[ \left( \frac{h_c - H_o}{\sigma_c} \right)^2 + \frac{h_i^2}{\sigma_i^2} \right]} \quad (\text{F.4})$$

Donde  $B_s$  es la inducción asintótica del ciclo límite,  $H_o$  es el campo coercitivo del ciclo límite y las variables  $\sigma_i$  y  $\sigma_c$  se obtienen a partir del ciclo límite.

La segunda función, propuesta de G. Bertotti [Bertotti, 1998], tiene la siguiente expresión:

$$\mu(h_c, h_i) = \frac{1}{2\pi\sigma_c\sigma_i H_o^2} \frac{H_o}{h_c} e^{-\frac{1}{2\sigma_c^2} \ln^2\left(\frac{h_c}{H_o}\right)} e^{-\frac{h_i^2}{2\sigma_i^2 H_o^2}} \quad (\text{F.5})$$

Los subprogramas que ajustan las curvas (F.4) y (F.5) son respectivamente *gaussiana\_lognormal1* y *gaussiana\_lognormal2*.

#### F.4.1 Primera gaussiana-log-normal. Subprograma *gaussiana\_lognormal1*

##### F.4.1.1 Cálculos previos. Ajuste por el método della Torre-Cardelli

Para la primera lorentziana se ha seguido el método de ajuste propuesto por Edward della Torre y Ermanno Cardelli proponen el siguiente método para ajustar los parámetros al ciclo límite [della Torre y Vajda, 1995; della Torre, 1999; Cardelli, della Torre y Pinzaglia, 2003].

Para emplear método es necesario calcular la integral de Everett de una curva inversa de primer orden ascendente cuyo punto de inversión sea el campo coercitivo de la rama descendente del ciclo límite:

$$E(-H_o, H_o) = \frac{1}{2} (B_{-H_o, H_o} - B_{-H_o}) \quad (\text{F.6})$$

Este parámetro se calcula mediante el programa *master\_della\_Torre*. Este programa calcula mediante el modelo de Preisach clásico caracterizado por el método de Mayergoyz y desarrollado a partir de su definición matemática la curva inversa de primer orden necesaria para aplicar (F.6).

##### F.4.1.2 Entradas-salidas

Ahora ya nos centramos en el programa que ajusta la función densidad a la expresión (F.4), el subprograma *gaussiana\_lognormal1*, cuyas entradas son:

- *Alfa*: Vector con los nodos del entramado de discretizado del plano de Preisach.
- *Ho*: Constante aproximadamente igual al campo coercitivo del ciclo límite

- *Sigmai*: Constante a ajustar
- *Sigmac*: Constante a ajustar
- *Bs*: Inducción máxima del ciclo límite
- *K*: Constante a ajustar
- *Archivo*: Indica si se debe generar un archivo ASCII con el la función densidad calculada
- *Gráficos*: Indica si el programa debe generar pantallas gráficas con la función densidad calculada.

La salida del subprograma es una matriz con la función densidad calculada en función del discretizado del plano de Preisach realizado por el subprograma *plano\_Preisach*.

#### **F.4.2 Segunda gaussiana-log-normal. Subprograma *gaussiana-log-normal2***

El subprograma que calcula la función densidad mediante (F.5) es *gaussiana\_lognormal2*. Esta función densidad se calcula para el entramado del plano de Preisach discretizado por el subprograma *plano\_preisach*.

##### *F.4.2.1 Entradas-salidas*

Las entradas del programa son las mismas que para *gaussiana\_lognormal1* (ver apartado F.4.1.2). La salida es una matriz con la función densidad calculada.

### ***F.5 Caracterización del modelo de Preisach mediante ajuste de una gaussiana-gaussiana.***

#### **F.5.1 Subprograma *gaussiana\_gaussiana***

El cálculo de la función densidad por ajuste de una gaussiana-gaussiana lo realiza el subprograma *gaussiana\_gaussiana*. Este cálculo se realiza para los nodos del entramado del plano de Preisach discretizado por *plano\_preisach*.

La expresión de la curva gaussiana-gaussiana es [Bertotti, 1998; Henze y Rucker, 2002]:

$$\mu(h_c, h_i) = \frac{1}{2\pi\sigma_c\sigma_i H_o^2} \frac{2}{\operatorname{erf}(\sigma_c\sqrt{2}) + 1} e^{-\frac{(h_c - H_o)^2}{2\sigma_c^2 H_o^2}} e^{-\frac{h_i^2}{2\sigma_i^2 H_o^2}} \quad (\text{F.7})$$

Donde  $\operatorname{erf}$  es la función error normalizada:

$$\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-u^2} du \quad (\text{F.8})$$

### F.5.2 Entradas-salidas

Las entradas de *gaussiana-gaussiana* son las mismas que para el subprograma *gaussiana\_lognormal1*. La salida es una matriz con los valores de la función densidad calculada por ajuste a (F.7).

## F.6 Desarrollo del modelo de Preisach por integrales de Everett

### F.6.1 Programa master. Validación.

Controla la llamada a los diversos subprogramas que realizan los cálculos necesarios para calcular la inducción  $B(t)$  correspondiente a un historial  $H(t)$  de entrada. La estructura del programa master variará en función del tipo de cálculo a realizar. En general, la secuencia de pautas a seguir es:

1. Carga de datos experimentales (optativo, sólo si va a validar el programa).
2. Inicialización de variables
3. Discretización del plano de Preisach mediante *plano\_Preisach*
4. Cálculo de las integrales de Everett para el plano de Preisach discretizado mediante el subprograma *everett01*
5. Generación (o carga) del historial de campo  $H(t)$  de entrada al modelo de Preisach.

6. Cálculo de  $B(t)$  empleando el modelo de Preisach desarrollado por integrales de Everett. Esta función la realiza el subprograma *preisach\_everett*

De todos estos subprogramas los pasos que realmente se pueden considerar de desarrollo del modelo de Preisach son el 5 y el 6. El subprograma que desarrolla el modelo de Preisach es *preisach-everett*. Los subprogramas restantes están dedicados a la caracterización del modelo y ya se expusieron en apartados anteriores.

Los archivos de entrada contienen las curvas inversas de primer orden para caracterizar el modelo ('*curvas\_a.txt*') y las curvas a reproducir para validar el modelo ('*curvas\_experimentales.txt*').

## **F.6.2 Subprograma *preisach\_everett***

### *F.6.2.1 Función*

Cálculo de la inducción  $B(t)$  para un historial de campo  $H(t)$  arbitrario mediante el modelo de Preisach desarrollado por integrales de Everett.

El subprograma *Preisach\_everett* llama a su vez al subprograma auxiliar *ev* que mostramos más adelante.

### *F.6.2.2 Entradas-salidas*

Las entradas al subprograma son:

- *alfa*: Vector con los nodos del eje  $\alpha$  del plano de Preisach discretizado
- *beta*: Vector con los nodos del eje  $\beta$  del plano de Preisach discretizado
- *E*: Matriz con las integrales de Everett para el plano de Preisach discretizado
- *H*: Vector con el historial del campo  $H(t)$

La salida es un vector con la inducción  $B(t)$  correspondiente a  $H(t)$ .

### *F.6.2.3 Subprograma *ev**

El subprograma *ev* realiza devuelva el valor del integral de Everett para un valor de  $\alpha$  y  $\beta$  determinados. Cuando los valores de  $\alpha$  y  $\beta$  no coinciden con los de un nodo del plano

discretizado el subprograma realiza una interpolación a partir del valor de los nodos más cercanos.

Las entradas del subprograma *ev* son:

- *a*: Coordenada  $\alpha$
- *b*: Coordenada  $\beta$
- *alfa*: Vector con los nodos del eje  $\alpha$  del plano de Preisach discretizado
- *beta*: Vector con los nodos del eje  $\beta$  del plano de Preisach discretizado
- *E*: Matriz con las integrales de Everett para el plano de Preisach discretizado

La salida es la matriz  $E(\alpha, \beta)$ .

## ***F.7 Desarrollo del modelo de Preisach mediante su definición matemática***

Por desarrollo del modelo de Preisach mediante su definición matemática nos referimos aplicar la ecuación:

$$B(t) = B_s \iint_{\alpha \geq \beta} \mu(\alpha, \beta) \gamma_{\alpha\beta} H(t) d\alpha d\beta \quad (\text{F.9})$$

### **F.7.1 Programa master. Validación.**

Al igual que en el caso anterior (desarrollo por integrales de Everett), la estructura del programa master varía en función del tipo de cálculo a realizar. En general, las pautas a seguir son:

1. Carga de datos experimentales (optativo, sólo si va a validar el programa).
2. Inicialización de variables
3. Discretización del plano de Preisach mediante *plano\_Preisach*
4. Cálculo de las integrales de Everett para el plano de Preisach discretizado mediante el subprograma *everett01*

5. Cálculo de la función densidad para el plano de Preisach discretizado mediante el subprograma *f\_densidad01*
6. Generación (o carga) del historial de campo  $H(t)$  de entrada al modelo de Preisach.
7. Acotación del plano de Preisach para el caso de ciclos menores
8. Cálculo del valor del operador  $\gamma_{\alpha\beta}H(t)$ , para cada punto del plano discretizado de Preisach y para cada instante de tiempo del historial  $H(t)$ .
9. Cálculo de  $B(t)$  empleando el modelo de Preisach desarrollado a partir de (F.9). Esta función la realiza el subprograma *preisach\_integral*

Los pasos que implican una novedad y que, de hecho, son los propios de cálculo mediante el modelo de Preisach son el 6, 7, 8 y 9. Los restantes forman parte de la caracterización del modelo y ya se mostraron en apartados anteriores.

Ahora, con el modelo desarrollado por su definición matemática el algoritmo de cálculo es más sencillo, tan sólo se trata de calcular una integral doble. Pero previamente se deben haber calculado los operadores para cada nodo del entramado del plano de Preisach discretizado y para instante del historial de campo  $H(t)$ . Téngase en cuenta además, que ahora necesitamos calcular la función densidad, mientras que en el caso anterior, con la integral de Everett ya era suficiente. El cálculo de la función densidad mediante el método de Mayergoyz implica una calcular una derivada doble, con lo que los errores se amplifican. Esto hace que en definitiva este desarrollo sea algo más complejo que el desarrollo mediante las integrales de Everett.

Otro paso añadido a realizar si se emplea este desarrollo del modelo de Preisach, es la acotación de los límites del plano de Preisach. Tanto *everett01* como *f\_densidad01* calculan la integral de Everett y la función densidad respectivamente para el triángulo límite del plano de Preisach. Si se necesita calcular un ciclo menor periódico que parte del estado desmagnetizado, se debe considerar que los operadores que se encuentren fuera del triángulo correspondiente a dicho ciclo menor deben ser cero, de lo contrario los resultados serían diferentes a los esperados, pues sería como considerar que los ciclos menores parten del estado de saturación. Por ello en la entrada del subprograma que calcula los operadores de histéresis se deben indicar los índices de la frontera real del triángulo del plano de Preisach.

En el CD\_ROM adjunto se añade el código del programa master para validar este desarrollo del modelo de Preisach con la muestra A. En esta validación el modelo de Preisach se caracterizó siguiendo el método de Mayergoyz.

## F.7.2 Subprograma *operadores\_estaticos*

### F.7.2.1 Función

Cálculo de los operadores de histéresis del modelo de Preisach clásico para cada nodo del plano de Preisach discretizado y en cada instante del historial de campo de entrada  $H(t)$ .

### F.7.2.2 Entradas-salidas

Las entradas al subprograma *operadores\_estaticos* son:

- *Alfa*: Vector con los nodos del eje  $\alpha$  del plano de Preisach discretizado
- *Beta*: Vector con los nodos del eje  $\beta$  del plano de Preisach discretizado
- *H*: Vector con el historial de campo  $H(t)$ .
- *Archivo*: Indica si se debe generar un archivo ASCII con el la función densidad calculada
- *Gráficos*: Indica si el programa debe generar pantallas gráficas con la función densidad calculada.
- *a1, a2*: Límites del triángulo del plano de Preisach correspondientes al ciclo calculado.

La salida es una matriz  $\gamma_{\alpha\beta}H(t)$  con todos los operadores del plano de Preisach para cada instante de tiempo. Se trata de una matriz tridimensional  $op(i,j,t)$ . Los índices  $i$  y  $j$  indican la posición del operador dentro del plano de Preisach, siguiendo el mismo orden de índice que los vectores *alfa* y *beta*. El índice  $k$  indica la posición en el tiempo, siguiendo el mismo orden que el vector de entrada  $h$  con el historial de  $H(t)$ .

### **F.7.3 Subprograma *preisach\_integral***

#### *F.7.3.1 Función*

El subprograma *preisach\_integral* calcula la inducción  $B(t)$  para un historial de campo  $H(t)$  con unos operadores de histéresis  $\gamma_{\alpha\beta}H(t)$ , en un material con una densidad de operadores  $\mu(\alpha,\beta)$ , aplicando la ecuación (F.9).

#### *F.7.3.2 Entradas-salidas*

Las entradas son:

- *alfa*: Vector con los nodos del eje  $\alpha$  del plano de Preisach discretizado
- *beta*: Vector con los nodos del eje  $\beta$  del plano de Preisach discretizado
- *h*: Vector con el historial de campo  $H(t)$ .
- *den*: Matriz con la densidad de operadores en cada nodo del plano de Preisach discretizado.
- *op*: Matriz con los operadores de histéresis  $\gamma_{\alpha\beta}H(t)$ .

La salida es un vector con la inducción  $B(t)$  correspondiente a un historial de campo de entrada  $H(t)$ .

### ***F.8 Desarrollo del modelo de Preisach mediante el método de Naidu.***

El desarrollo del modelo de Preisach mediante el método Naidu se traduce en una colección de ecuaciones para cada tipo de tramo de  $H(t)$  de entrada. Por supuesto, que se podría haber creado un algoritmo genérico que englobara dicha colección de ecuaciones, empleando la ecuación adecuada en función del tramo  $H(t)$ . Pero debido a que los resultados obtenidos con este método han sido peores que con los restantes desarrollos del modelo de Preisach, hemos estimado que no era necesario elaborar más los códigos de este método.

En primer lugar se presentará el programa master que se empleó para validar el método con la muestra A, y posteriormente los diferentes subprogramas intervienen en el cálculo.

### **F.8.1 Programa master. Validación.**

El programa master presentado controla la llamada a los subprogramas necesarios para calcular una serie de características magnéticas de la muestra A. Como que se calcula todo tipo de curvas, el programa sirve como referencia de cómo emplear el método de Naidu.

Recordemos que con el método de Naidu tan solo es necesaria la rama descendente del ciclo límite para caracterizar el modelo. Esto simplifica mucho los pasos necesarios. Tan sólo se necesita cargar la rama descendente experimental, calcular las funciones  $F(H)$  y  $F(-H)$ , y aplicar la ecuación adecuada para el tramo de campo  $H(t)$  que se desee calcular.

En el CD-ROM adjunto se puede incluye el programa master para validar el método de Naidu con la muestra A.

A continuación tratamos los diversos programas que intervienen en el cálculo mediante el método de Naidu.

### **F.8.2 Subprograma *funcion\_F2***

Este subprograma calcula la función de Naidu  $F(-H)$ . La entrada es una matriz con la rama descendente experimental del ciclo límite.

### **F.8.3 Subprograma *funcion\_F1***

Calcula la función de Naidu  $F(H)$ . Como entradas necesita una matriz con la rama descendente del ciclo límite experimental y un vector con la función  $F(-H)$  calculada previamente.

### **F.8.4 Subprograma *primera\_magnetizacion***

Calcula la inducción  $B(t)$  correspondiente a la curva de primera magnetización. La entrada al programa es la rama decreciente del ciclo límite experimental.

### **F.8.5 Subprogramas *principal\_creciente* y *principal\_decreciente***

Entendemos por trayectoria principal a aquella que finaliza en el punto máximo (o mínimo si es decreciente) del ciclo límite. La trayectoria puede corresponder a un ciclo mayor o a una

curva inversa. El subprograma *principal\_creciente* calcula trayectorias principales crecientes, y el subprograma *principal\_decreciente* calcula trayectorias principales decrecientes.

En ambos casos las entradas al subprograma son:

- *b*: Matriz con la rama descendente del ciclo límite.
- *f1*: Vector con la función de Naidu  $F(H)$
- *f2*: Vector con la función de Naidu  $F(-H)$
- *h1*: Punto de inicio de la trayectoria principal
- *H*: Vector con el tramo de  $H(t)$  para el que se calcula  $B(t)$

### ***F.9 Modelo dinámico de Bertotti.***

El desarrollo del modelo dinámico tipo Preisach de Bertotti es exactamente igual al desarrollo por definición matemática directa, la única diferencia está en el cálculo de los operadores que en el caso que nos ocupa es dinámico.

#### **F.9.1 Programa master. Validación.**

El programa master es muy similar al programa master del apartado F.7. La única diferencia está en aquí se llama al subprograma *operadores\_dinamicos* que calcula los operadores de histéresis correspondientes. En el CD-ROM se incluye el código del programa master para la validación del modelo con la muestra A.

#### **F.9.2 Subprograma *operadores\_dinamicos***

##### *F.9.2.1 Funcion*

El subprograma *operadores\_dinamicos* calcula los operadores dinámicos del modelo de Bertotti para cada nodo del plano de Preisach discretizado y para cada instante de tiempo del historial de campo  $H(t)$ .

##### *F.9.2.2 Entradas-salidas.*

Las entradas del subprograma son las siguientes:

- *k*: Constante del modelo de Bertotti
- *H*: Vector con el historial de campo  $H(t)$
- *t*: Vector con los nodos de tiempo correspondientes al historial de campo  $H(t)$

- *alfa*: Vector con los nodos del eje  $\alpha$  del plano de Preisach discretizado
- *beta*: Vector con los nodos del eje  $\beta$  del plano de Preisach discretizado
- *a1, a2*: Límites del triángulo del plano de Preisach correspondientes al ciclo calculado.
- *Deriva*: Indica si deseamos que se calcule la deriva de los operadores (esta opción debería estar activada =1).
- *Gráfico*: Indica si deseamos que se generen pantallas gráficas con el valor de operadores en diferentes instantes del historial  $H(t)$ .

La salida es una matriz  $\gamma_{\alpha\beta}H(t)$  con todos los operadores del plano de Preisach para cada instante de tiempo, con las mismas características que la matriz de salida del subprograma *operadores\_estaticos*.

### ***F.10 Modelo de Preisach inverso***

El desarrollo del modelo de Preisach inverso es paralelo al modelo clásico, pero con toda la formulación definida de forma inversa. En el modelo inverso la entrada es la inducción  $B(t)$  y la salida el campo  $H(t)$ . El modelo inverso propuesto permite cualquier desarrollo y cualquier caracterización, aquí presentamos el código correspondiente a la caracterización mediante el método de Mayergoz y el desarrollo por aplicación de la definición algebraica definida de forma inversa:

$$H(t) = H_s \iint_{a \geq b} v(a, b) \delta_{ab} B(t) da db \quad (F.10)$$

#### **F.10.1 Programa master. Validación.**

El programa master presentado es el realizado para la validación del modelo inverso en la muestra A trazando su ciclo limite. La estructura del programa master es similar al programa master del desarrollo del modelo de Preisach por su definición algebraica directa. La diferencia está en que en este caso se llama a los subprogramas que calculan las funciones inversas. En principio la estructura del programa master varía en función del tipo de cálculo a realizar. Las pautas a seguir se pueden generalizar en las siguientes:

1. Carga de datos experimentales (optativo, sólo si va a validar algún cálculo).
2. Inicialización de variables.
3. Discretización del plano de Preisach mediante el subprograma *plano\_Preisach\_inverso*
4. Cálculo de las integrales de Everett inversas para el plano de Preisach discretizado mediante el subprograma *everett\_inversa01*
5. Cálculo de la función densidad inversa mediante el subprograma *f\_densidad\_inversa*
6. Generación (o carga) del historial de inducción  $B(t)$  de entrada al modelo de Preisach inverso.
7. Acotación del plano de Preisach para el caso de ciclos menores.
8. Cálculo del valor del operador inverso  $\delta_{ab}B(t)$  para cada punto del plano discretizado de Preisach y para cada instante de tiempo del historial  $B(t)$  mediante el subprograma *operadores estáticos*.
9. Cálculo de  $H(t)$  empleando el modelo de Preisach inverso mediante el subprograma *Preisach\_integral*

Como vemos la estructura es la misma que para el programa master del modelo de Preisach desarrollado por su definición integral, pero con subprogramas distintos que calculan las funciones inversas.

El valor de los operadores inversos se calcula igual que para los operadores directos, por lo que se emplea igualmente el subprograma *operadores\_estaticos*.

El programa que calcula la integral doble de (F.10) puede ser el mismo que en el modelo directo, pues en el fondo lo único que hace es calcular la integral doble del producto de la función densidad por los operadores. Si la función densidad o los operadores sean directos o inversos no le afecta para nada, el cálculo es el mismo.

En resumen, la diferencia con el desarrollo del modelo directo está en que el programa master llama a tres subprogramas distintos:

- *Plano\_Preisach\_inverso*
- *Everett\_inversa01*
- *f\_densidad\_inversa*

## **F.10.2 Subprograma *plano\_preisach\_inverso***

### *F.10.2.1 Función*

Discretiza el plano de Preisach inverso en función del ciclo límite de las curvas inversas de primer orden invertidas experimentales.

El funcionamiento es exactamente el mismo que el subprograma *plano\_preisach*, pero en este caso la discretización se realiza en función de la inducción no del campo. En consecuencia el vector de salida contiene los valores de inducción correspondientes a los nodos del plano discretizado.

La discretización se realiza asumiendo que ambos ejes son iguales  $a=b$  ( $\psi=\zeta$ ), tan solo genera el vector *psi*.

### *F.10.2.2 Entradas-salidas*

Las entradas al programa son:

- *nodos*: Longitud del vector *psi* (numero de nodos en que se divide cada eje del plano inverso).
- *archivo\_entrada*: Nombre del archivo que contiene las curvas experimentales.

La salida es el vector *psi* que contiene los valores de inducción de los nodos del eje *a*.

## **F.10.3 Subprograma *everett\_inversa01***

### *F.10.3.1 Función*

Calcula la integral de Everett en el plano de Preisach discretizado por el subprograma *plano\_Preisach\_inverso* con las curvas inversas de primer orden invertidas experimentales contenidas en el archivo de entrada.

Al igual que se realizó con la integral de Everett del modelo de Preisach clásico, aquí también se realiza una doble interpolación a tramos por polinomios cúbicos de Hermite.

#### *F.10.3.2 Entradas-salidas*

Las entradas son:

- *psi*. Vector con los nodos del plano de Preisach inverso discretizado
- *archivo\_entrada*. Nombre del archivo que contiene las curvas inversas de primer orden invertidas experimentales
- *archivo*. Variable para activar la generación de un archivo de salida ASCII con la integral de Everett calculada. (1=si, cualquier otro valor=no).
- *graficos*. Variable para activar la generación de pantallas de gráficos con la integral de Everett y la evolución de diversas variables de cálculo. (1=si, cualquier otro valor=no).

La salida del programa es una matriz con la integral de Everett inversa.

### **F.10.4 Subprograma *f\_densidad\_inversa***

#### *F.10.4.1 Función*

Calcula la función densidad inversa  $v(a,b)$  a partir de la integral de Everett inversa  $\varepsilon(a,b)$  para el plano de Preisach inverso discretizado por el subprograma *plano\_preisach\_inverso*. La función densidad se calcula como la derivada doble de la integral de Everett respecto  $a$  y  $b$ .

#### *F.10.4.2 Entradas-salidas*

Las entradas son:

- *psi*: Vector con los valores de inducción de los nodos del eje  $a$  del plano discretizado.
- *e*: Matriz con la integral de Everett calculada para el plano de Preisach discretizado.
- *archivo*: Variable para activar la generación de un archivo de salida ASCII con la función densidad inversa calculada. (1=si, cualquier otro valor=no).
- *graficos*. Variable para activar la generación de pantallas de gráficos con la función densidad inversa calculada y la evolución de diversas variables de cálculo. (1=si, cualquier otro valor=no).

La salida es un matriz con la función densidad inversa

## **G. Códigos del equipo histeresigráfico**

### ***G.1 Propósito y organización del apéndice.***

En este apéndice se muestran los códigos realizados para el equipo histeresigráfico. Todos los códigos del equipo histeresigráfico están desarrollados en lenguaje G de LabVIEW 5.1, su función es controlar la tarjeta de adquisición de datos y el tratamiento posterior de los datos para obtener las características magnéticas deseadas.

El código está estructurado en un programa principal denominado *master* y una serie de subprogramas llamados desde el programa principal que realizan tareas concretas. A continuación, para el programa principal y cada uno de los subprogramas se exponen los siguientes puntos:

- Función
- Entradas-salidas
- Código

En este apéndice tan solo se dan unas breves descripciones de las tareas y procedimientos realizados por cada programa. En el capítulo 6 se dan descripciones más detalladas de los procedimientos y sus correspondientes justificaciones teóricas.

### ***G.2 Programa master***

#### **G.2.1 Función**

Es el programa principal, realiza todas las tareas de control del proceso de adquisición de datos y el posterior tratamiento de dichos datos. Para facilitar la programación, algunas tareas las realizan otros subprogramas que son llamados desde este programa principal.

El programa master se debe ejecutar varias veces:

- En una primera ejecución del programa (o varias sucesivas si es necesario), la función del programa es la mostrar en pantalla la característica magnética deseada (ciclo de histéresis o curva inversa de primer orden) para comprobar si los parámetros de la conversión analógico-digital han sido los adecuados. En concreto, si la ganancia del convertidor es la adecuada para la señal de tensión del secundario y si el ajuste de la intensidad del primario ha sido el adecuado.
- Si la característica obtenida corresponde con lo deseado, el usuario activa la función "trazado" y ejecuta de nuevo el programa master. Este programa calcula de nuevo la intensidad del primario analítica  $i'_1(t)$ , pero ahora además llama al subprograma *curvas*, que se encarga del trazado definitivo de la curva deseada.

Es por ello que, en vistas de no complicar inútilmente el programa master, este construye las características magnéticas a partir de la integral de la tensión en el secundario  $x_2(t)$  y la intensidad del primario  $i(t)$  (analítica y muestreada), en vez de construirlas a partir de  $B(t)$  y  $H(t)$ . En realidad, tan solo se trata de un factor de escala. Además, por el mismo motivo, cuando el programa traza una curva inversa, esta no aparece a su altura real.

Tanto la decisión de la ganancia del convertidor analógico-digital como la entrada de los puntos límite  $a_1...a_6$  para el ajuste de los tramos de la señal de excitación, se podrían realizar automáticamente, sin la intervención del usuario. No se ha realizado así para no complicar el programa. Recordemos que el desarrollo del equipo histeresisgráfico, en si mismo, no era uno de los objetivos principales del presente trabajo. Se desarrolla un equipo *ad-hoc* para obtener las curvas requeridas para caracterizar el modelo de Preisach mediante el método de Mayergoyz.

### **G.2.2 Procedimiento y códigos**

Los canales de las entradas analógicas de la tarjeta están conectados de la siguiente forma:

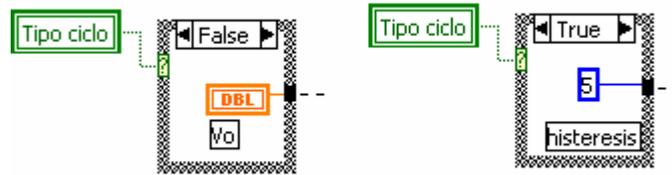
- Canal 0: Tensión del secundario de la muestra  $v_2(t)$ . Recuérdese que de esta señal se obtiene el flujo y la inducción  $B(t)$ .

- Canal 1: Caída de tensión en la resistencia del amplificador de transconductancia, esta caída de tensión es proporcional a la intensidad por el primario de la muestra  $i_1(t)$ . Esta es la intensidad impuesta por el amplificador de transconductancia. A partir de esta intensidad se calcula el campo  $H(t)$ .
- Canal 2: Impulsos de reloj del generador de funciones o señal de disparo de la tarjeta. Se muestrea para localizar las muestras que corresponden a un periodo exacto de la señal de intensidad.
- Canal 3: Esta conectado a masa, se emplea para determinar el offset de la tarjeta de adquisición de datos
- Canales 4 a 7: Están conectados a masa, no se emplean.

Además se emplea la salida analógica 1 de la tarjeta para generar la señal de nivel de corte del recortador  $v_0$ .

La secuencia de tareas realizadas por el programa es la siguiente (en las figuras G-2 y G-3 se muestra el código del programa en lenguaje G de LabVIEW, debido a las características de este lenguaje de programación es muy fácil seguir las tareas que se indican a continuación si se consultan las citadas figuras):

1. Generación de la señal de nivel de corte del recortador. En función del tipo de ciclo a realizar el procedimiento es uno u otro.
  - a. Si se va a trazar un ciclo de histéresis el nivel de corte es tal (5V) que la señal triangular de excitación no se recorta. El programa genera automáticamente la señal para el recortador sin intervención del usuario.
  - b. Si se trazan curvas inversas de primer orden el usuario debe introducir el nivel de corte deseado. Recordar que el nivel de corte corresponde con el punto de inversión de la curva inversa de primer orden.
2. Muestreo del canal 3 para determinar el offset del convertidor analógico-digital de la tarjeta. Se toman 2000 muestras del canal 3, la señal del offset del canal es la media de las 2000 muestras. Si el convertidor analógico-digital no introdujese un nivel de offset, el valor de la media de las 2000 muestras sería cero, pues con la media de este número de muestras, se elimina el ruido blanco.



**Figura G-1.** Condicional para la generación del nivel de corte (Izquierda para una curva inversa a la derecha para un ciclo de histéresis)..

3. Configuración de la tarjeta. En concreto se inicializan los siguientes parámetros::
  - Número de identificación de la tarjeta ( $device=1$ ).
  - Canales analógicos de entrada a muestrear (0, 1 y 2).
  - Número de muestras a realizar una vez la tarjeta recibe el impulso de disparo ( $N_{max}=4000$ ). Este valor es el recomendable para una frecuencia de la señal de excitación de 0,15Hz y una tasa de muestreo de 500 muestras por segundo, que el modo de funcionamiento que más hemos empelado. Si se varía alguno de estos parámetros se debe modificar también  $N_{max}$ .
  - Modo de funcionamiento del trigger: Modo post-trigger y trigger analógico.
  - Tasa de muestreo (500 muestras por segundo).
  - Tiempo límite (30 segundos)
  
4. Cuando se recibe la señal de disparo se inicia el proceso de adquisición de datos, los cuales se depositan en el buffer de la tarjeta.
  
5. Lectura de los datos muestreados que se cargan en una matriz tridimensional.
  
6. Se llama al subprograma *periodo* que realiza las siguientes tareas:
  - a. La matriz tridimensional se divide en tres vectores, una para cada señal. Así finalmente disponemos de un vector para  $i_1(t)$ , otro para  $v_2(t)$  y otro para la señal de disparo.
  - b. Con la ayuda del vector la señal de disparo se extraen de los otros dos vectores los datos correspondientes a un periodo.
  - c. La salida del subprograma periodo está formada por dos vectores, uno que contiene un periodo de  $i_1(t)$  y otro que contiene la  $v_2(t)$  correspondiente, también un periodo.

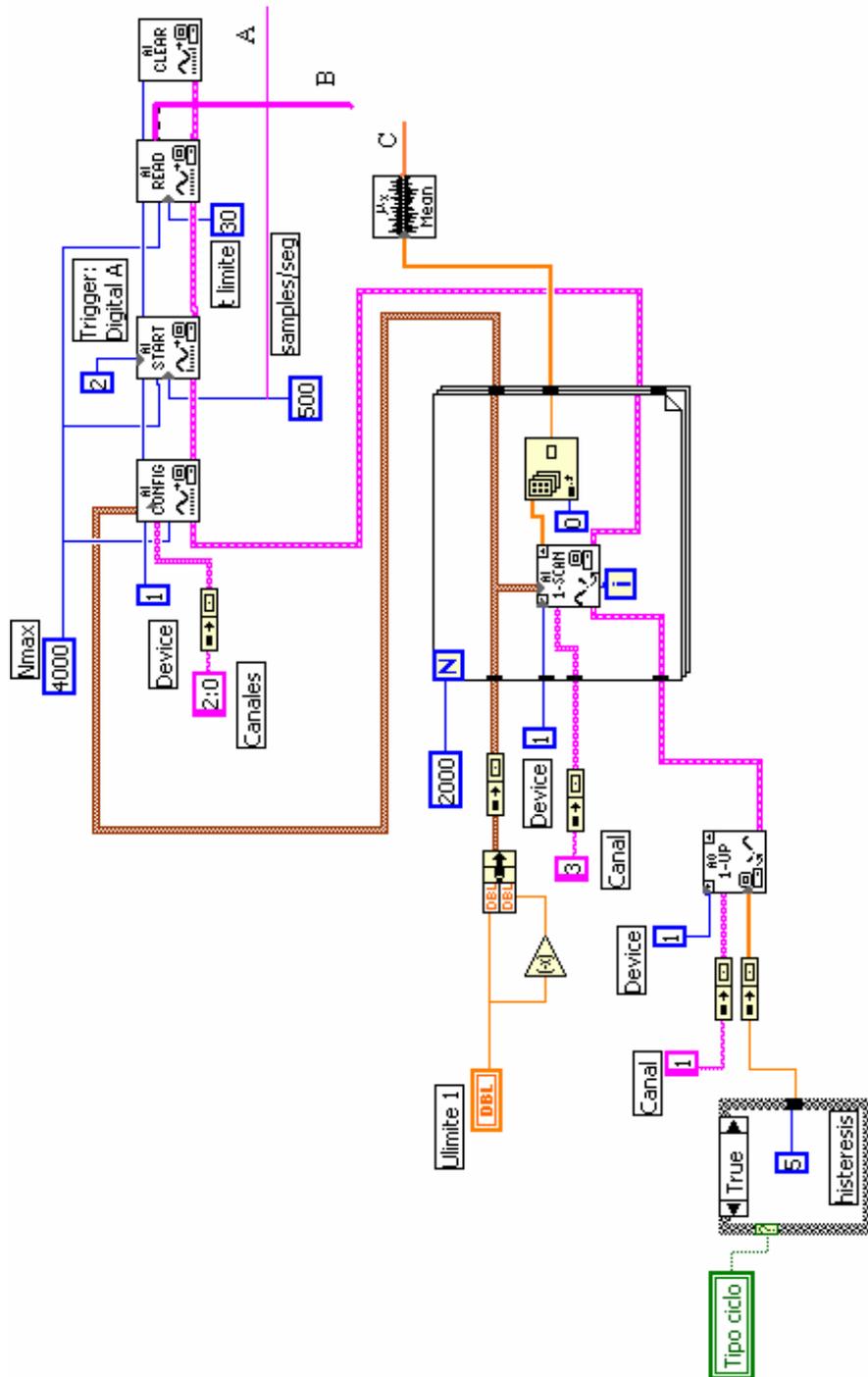


Figura G-2. Código del programa master (primera parte)

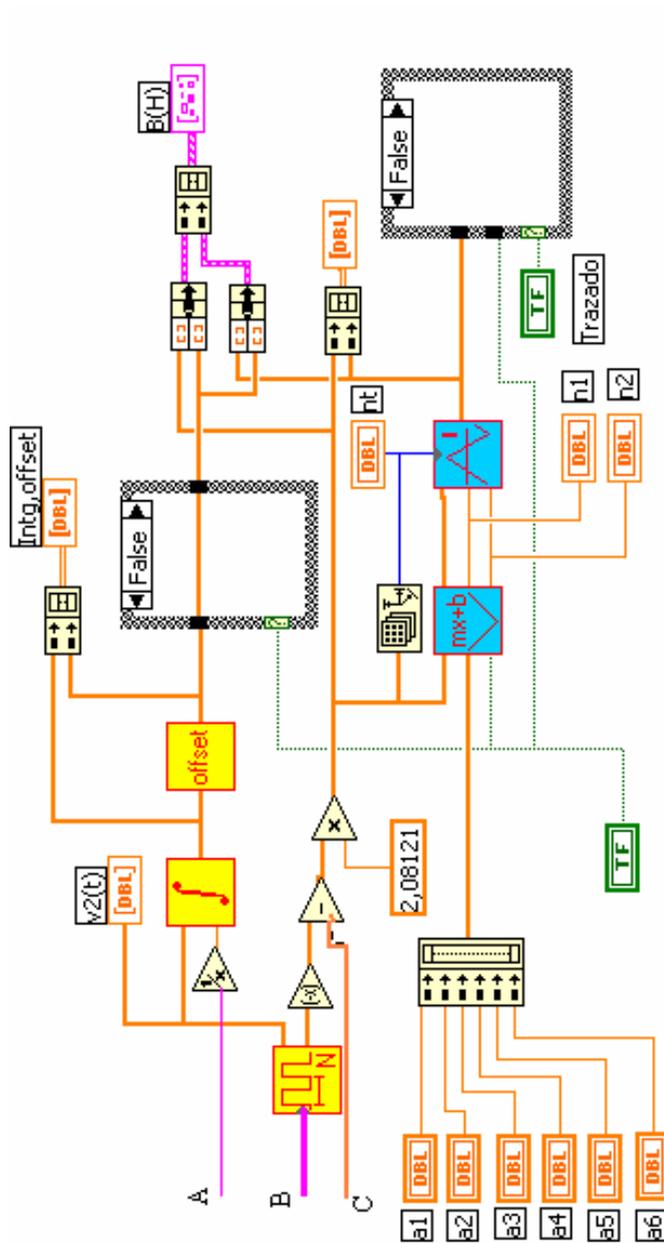
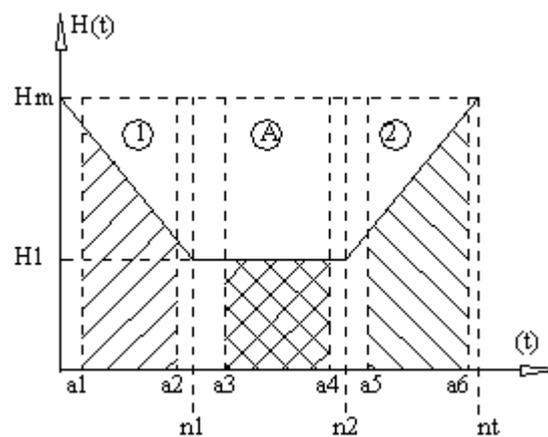


Figura G-3. Código del programa master (segunda parte)

A partir de este momento el flujo del programa se divide en el tratamiento de la señal de intensidad  $i_1(t)$  y en el tratamiento de la señal  $v_2(t)$ . La secuencia para la señal de intensidad es:

7. Se corrige el offset de la señal muestreada. Para esta señal esto se realiza restando el valor de la media de las 2000 muestras del canal 3, realizada en el paso (2).
8. Se convierte la señal de caída de tensión en la resistencia del amplificador de transconductancia en intensidad por la salida de dicho amplificador. Es ahora cuando obtenemos realmente  $i_1(t)$ . Esta señal se muestra en pantalla.



**Figura G-4.** Valores límite para el ajuste de los tres tramos de la señal de excitación

9. Recordemos que la señal empelada para construir la curva inversa o el ciclo de histéresis no es la muestreada, sino una generada analíticamente. A partir de los límites  $a_1 \dots a_6$ , introducidos por el usuario a la vista de la señal  $i_1(t)$  (ver figura G-4). Estos límite indican las porciones de señal que se emplean para que el subprograma *ajuste* calcule los coeficientes de las ecuaciones de las rectas que ajustan a los tres tramos de la señal de intensidad. El subprograma *ajuste* da como salida los coeficientes de las rectas que ajustan a los tres tramos de  $i_1(t)$  (figura G-4).
10. El subprograma *pseudo\_I* genera un vector con la señal de intensidad del primario determinada a partir de las rectas ajustadas  $i'_1(t)$ . Esta señal es mostrada en pantalla para que el usuario compruebe si el ajuste es bueno o ha habido algún problema

Respecto a la señal de tensión del secundario de la muestra<sup>1</sup>  $v_2(t)$ :

11. Para determinar la inducción a partir de la tensión del secundario  $v_2(t)$ , primero debemos integrar dicha señal –ecuación (G.1)-. La constante de integración  $f_0$  de la ecuación (G.1) es el flujo en el momento de comenzar la integración. Esta tarea la realiza el subprograma *integral*.

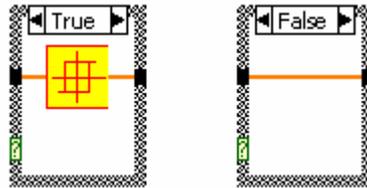
$$f(t) = \frac{1}{N_2} \int_0^t u_2(t) dt + f_0 \quad (\text{G.1})$$

12. En el vector de  $v_2(t)$  no se ha corregido el offset. El encargado de esta tarea es el subprograma *offset*, el cual corrige el offset de la señal ya integrada.
13. La señal de tensión integrada y con el offset corregido se convierte en flujo dividiendo por una constante igual a  $N_2 S$ . Donde  $N_2$  es el número de espiras del arrollamiento secundario y  $S$  es la sección transversal del núcleo magnético en  $\text{m}^2$ .
14. Aún no se ha resuelto el problema de la constante de integración de la ecuación (G.1). Al estar tratando con señales periódicas esta constante es el flujo o la inducción máxima  $B_m$  en las curvas inversas de primer orden crecientes, y la inducción mínima  $-B_m$  para las curvas inversas decrecientes. Resumiendo, el efecto de la considerar la constante de integración es que la curva trazada nos aparece desplazada, para corregir este efecto se debe proceder (figura G-5):
  - a. Ciclos de histéresis. El ciclo se centra respecto al eje X, esto es realizado por el subprograma *centrado*
  - b. Curvas inversas. Como que únicamente obtenemos las curvas inversas de primer orden crecientes, se sumaría  $B_m$  a todos los puntos de la curva. Este valor es conocido ya que previamente se ha debido trazar el ciclo límite en el cual están contenidas estas curvas inversas. No obstante, como ya hemos comentado antes, la función del programa master no es la de obtener las curvas definitivas sino comprobar que las parámetros de la conversión son los adecuados, por ello en el programa master no modifica la señal integrada y corregida si se trata de una curva inversa. Esta curva aparecerá desplazada verticalmente, pero esto no

---

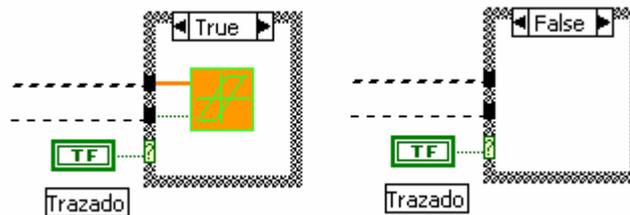
<sup>1</sup> El que la numeración de la secuencia siga con la anterior, no quiere decir que el tratamiento de  $v_2(t)$  se realicen después del tratamiento de  $iI(t)$ . Se puede considerar que se realizan de forma alternativa.

influye a la hora de determinar si los parámetros de la conversión son los correctos. Cuando el programa master llama al subprograma *curvas* este si traza las características definitivas, entonces si se suma  $B_m$  a todos los puntos de la curva.



**Figura G-5.** Condicional para sumar la constante de integración. A la izquierda, cuando se trata de un ciclo de histéresis, se centra la curva. A la derecha, cuando se trata de una curva inversa, se adiciona  $B_m$

15. Con el paso anterior realizado ya tenemos la señal  $B(t)$ . Esta señal se muestra en pantalla. El análisis en pantalla de esta señal es importante pues el usuario debe decidir si la ganancia del convertidor analógico-digital es la más adecuada.



**Figura G-6.** Condicional de trazado. Si el usuario desea trazar la característica magnética definitiva el programa master llama al subprograma *curvas* (izquierda), de lo contrario el programa finaliza.

Con las señales  $B(t)$  y  $H(t)$  se traza la curva de magnetización deseada. El usuario entonces interviene si considera que debe modificar algún parámetro para mejorar la curva obtenida. En caso que quiera obtener la curva definitiva y posteriormente generar un archivo ASCII debe activar la opción trazado (figura G-6). Si dicha opción está activa el programa *master* aun realiza un paso más:

16. Se llama al programa *curvas* para obtener la curva definitiva y su correspondiente archivo ASCII. Esta curva se genera a partir de la media de  $n$  curvas, de esta forma se elimina el ruido blanco de la señal muestreada.

En las figuras G-7 y G-8 se muestran las pantallas del programa master con los diversos gráficos y opciones para el usuario.

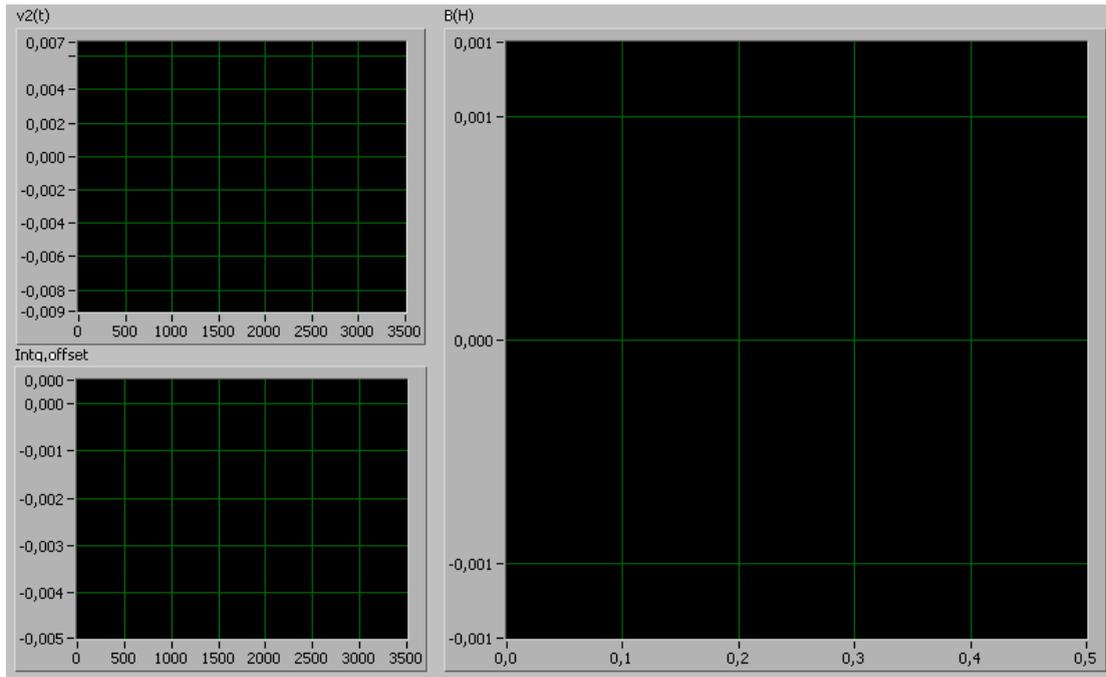


Figura G-7

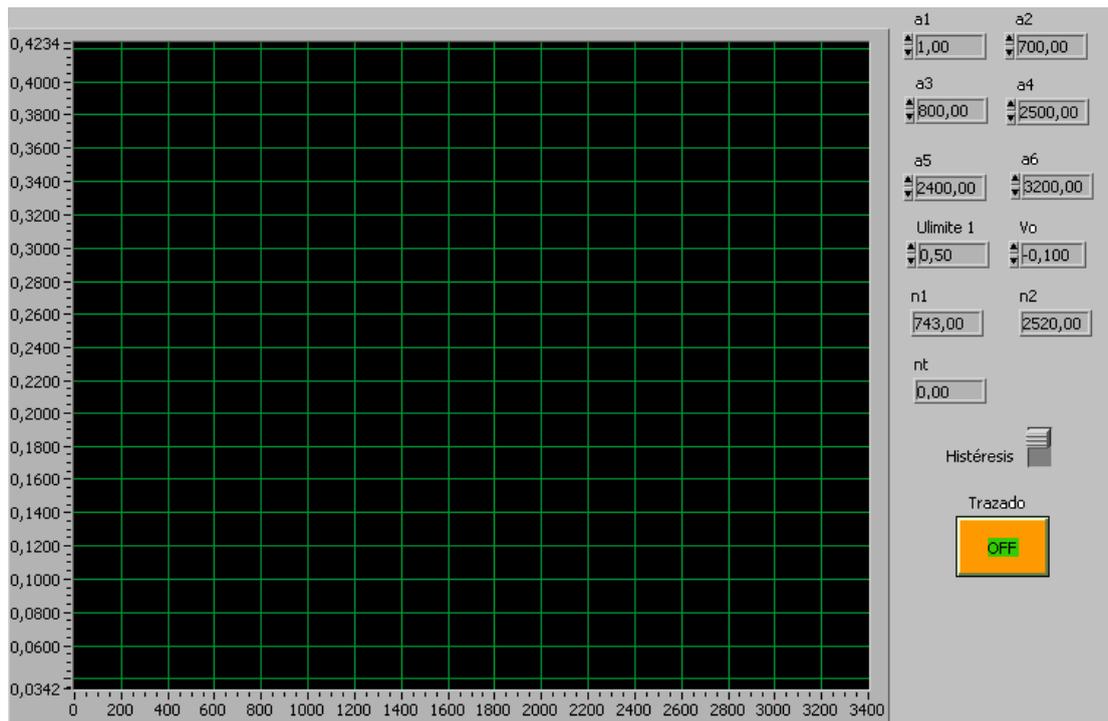


Figura G-8

## G.3 Subprograma "periodo"

### G.3.1 Función

El subprograma *periodo* extrae de la matriz que contiene los dos datos de la conversión analógico-digital un periodo de la señal de la tensión de la resistencia del amplificador de transconductancia y las muestras correspondientes de la tensión del secundario de la muestras, ambas en un vector separado.

### G.3.2 Entradas y salidas

La entrada al subprograma *periodo* es la matriz con los datos de la conversión analógico-digital. Esta matriz contiene los siguientes datos:

- Canal 0: Caída de tensión en la resistencia del amplificador de transconductancia (proporcional a la intensidad en el primario de la muestra).
- Canal 1: Tensión en el secundario de la muestra.
- Canal 2: Señal de disparo.

Las salidas del subprograma son tres vectores, uno por canal, con las muestras correspondientes con un periodo.

En la figura G-9 se muestra el icono del subprograma *periodo*.



**Figura G-9.** Icono del subprograma "periodo"

### G.3.3 Procedimiento y código

La señal de cada canal está localizada en una dimensión de la matriz tridimensional de entrada. Se emplea la señal de canal 2, la señal de disparo para determinar en que muestra finaliza el disparo.

El muestreo comienza con el flanco ascendente de la señal de trigger y finaliza cuando se han realizado las muestras indicadas en la variable  $N_{max}$ , en la declaración de parámetros de la conversión analógico-digital. Por tanto, tenemos la muestra en la que comienza un periodo, la primera muestra; pero no sabemos en que muestra finaliza el, puesto que  $N_{max}$  es un valor

arbitrario, cuya única premisa es que sea lo suficientemente grande como para que comprenda, como mínimo, un periodo completo.

La señal de disparo tiene la misma frecuencia que la señal muestreada, por lo tanto nos valemos de dicha señal para detectar en que muestra finaliza el periodo. Esta es la razón por la que se muestrea dicha señal. Si el periodo ha comenzado en el flanco ascendente de la señal de disparo, finalizará en el siguiente flanco ascendente de dicha señal.

Mediante un bucle *do...while* se detecta en que muestra se produce el segundo flanco ascendente de la señal de disparo. Posteriormente se separan las tres dimensiones de la matriz de entrada en tres vectores, cuyo primer valor es el primero de la dimensión correspondiente de la matriz, y el último valor es el correspondiente al número de muestra donde finaliza el periodo.

En la figura G-10 se muestra el código en lenguaje G de LabVIEW del subprograma *periodo*.

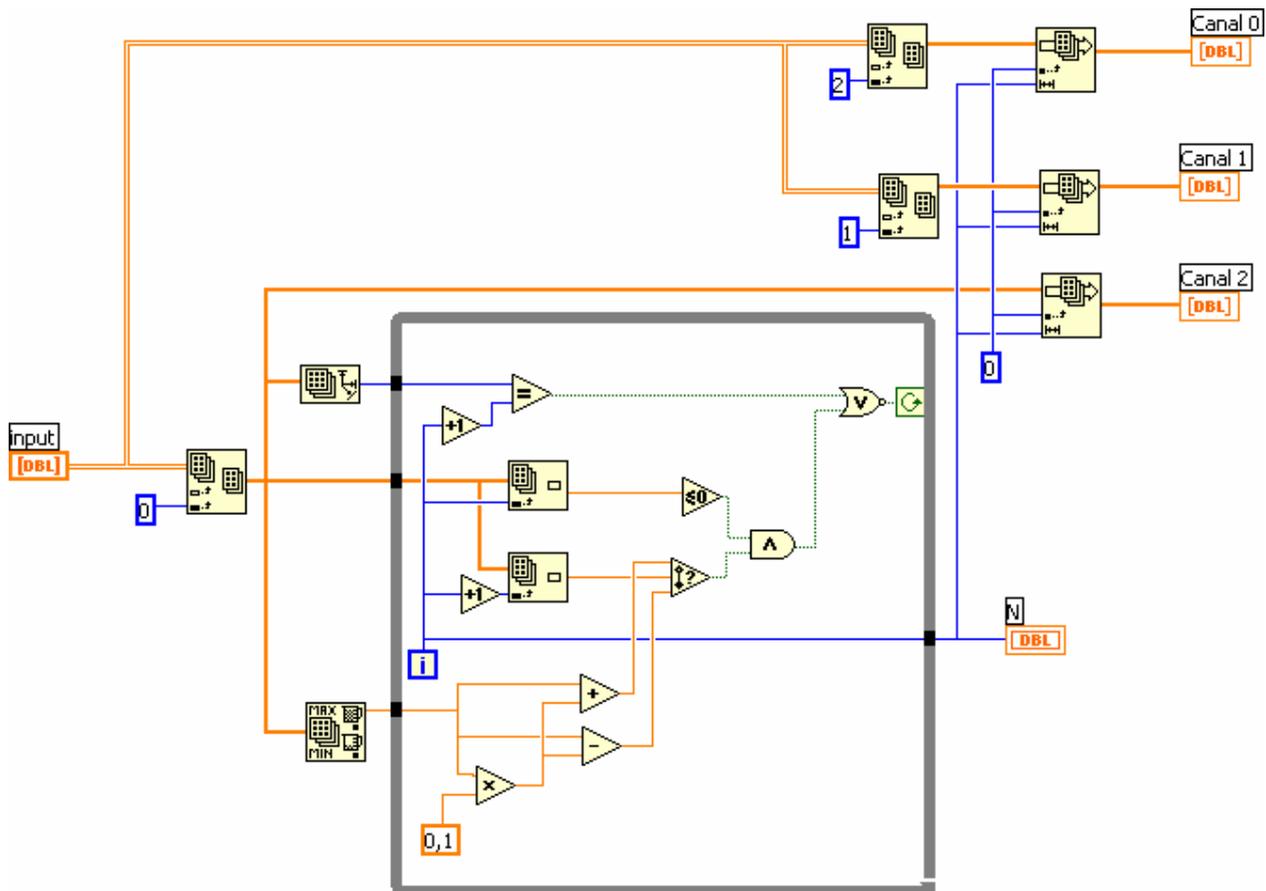


Figura G-10. Código del subprograma "periodo"

## **G.4 Subprograma "ajuste"**

### **G.4.1 Función**

Para construir la característica magnética no se emplea la señal de intensidad en el primario muestreada, sino que se emplea una señal calculada de forma analítica. El subprograma *ajuste* calcula los parámetros de la recta que se ajusta a cada tramo de la señal de excitación mediante el método de los mínimos cuadrados.

No se emplea la señal muestreada por que dicha señal no se suele obtener con una ganancia óptima del convertidor analógico-digital. Ya hemos comentado antes que el convertidor tiene una ganancia regulable, pero única para todos los canales. Esto implica que, para evitar posible perjuicios al convertidor, se debe ajustar a la ganancia más pequeña (tensión límite más grande). Esto es un problema grave cuando se tiene que muestrear una señal pequeña en un canal y una grande en otro, puesto que la ganancia se debe ajustar a la señal más grande. En nuestro caso, la ganancia se debería ajustar a la intensidad, cuya señal es mayor que la de la tensión en el secundario. En las curvas inversas con punto de inversión cercano al punto máximo esto es un problema, ya que la señal de tensión es pequeña, mucho más que la señal de intensidad, con lo que no queda debidamente muestreada. Como la señal de intensidad es triangular formada por tramos rectos, la solución están en generar esta señal de forma analítica, por ajuste a la señal muestreada. Una vez se tiene la señal generada de forma analítica, se realiza una segunda conversión analógico-digital, pero esta vez solo del canal de tensión del secundario, a una ganancia adecuada, de esta forma la característica obtenida es mucho más precisa. Esta segunda conversión la realiza el subprograma *curvas* cuando el usuario selecciona la opción "trazado".

### **G.4.2 Entradas y salidas**

La entrada es una vector que contiene a la señal de excitación. Las salidas son los parámetros de cada una de las tres rectas que ajustan a los tres tramos de la señal de excitación. El programa además también da como salida en que número de muestras se producen los cambios de tramo en la señal de excitación.

En la figura G-11 se muestra el icono del subprograma ajuste.



**Figura G-11.** Icono del subprograma "ajuste"

### G.4.3 Procedimiento y código.

El ajuste se realiza, por el método de los mínimos cuadrados, a tres rectas:

$$y = mx + b \quad (\text{G.1})$$

El programa determina los valores de  $m$  y  $b$  para cada tramo de la señal de excitación para que el subprograma *pseudo\_I* genere la señal analítica.

Cuando se desea obtener una curva inversa de primer orden, se debe recortar la señal triangular de excitación, por lo que la señal presenta los tres tramos mostrados en la figura G-4. En consecuencia se deben ajustar tres rectas. En cambio cuando se obtiene un ciclo de histéresis no se debe recortar la señal triangular, por lo que sólo se deben ajustar dos tramos. Por ello, el subprograma debe distinguir entre las dos situaciones. En la figura G-12 se muestra el código en lenguaje G para el caso de una curva inversa de primer orden y en la figura G-13 para un ciclo de histéresis. El código es el mismo, cada figura presenta el condicional en una de las opciones. En el caso de los ciclos de histéresis, para el tramo central con pendiente nula, se hace  $m_A=0$  y  $b_2=0$ .

Los valores los parámetros de las rectas se guardan en un vector, con el siguiente orden:  $m_1$ ,  $b_1$ ,  $m_A$ ,  $b_A$ ,  $m_2$ ,  $b_2$ .

El programa determina también las muestras en las cuales se produce el cambio del tramo 1 al tramo A ( $n_1$ ) y el cambio del tramo A al tramo 2 ( $n_2$ ). En el caso de tratarse de una histéresis se hace  $n_1=0$  y  $n_2$  indica la muestra en la cual se produce el cambio de pendiente negativa a pendiente positiva en la señal de excitación.

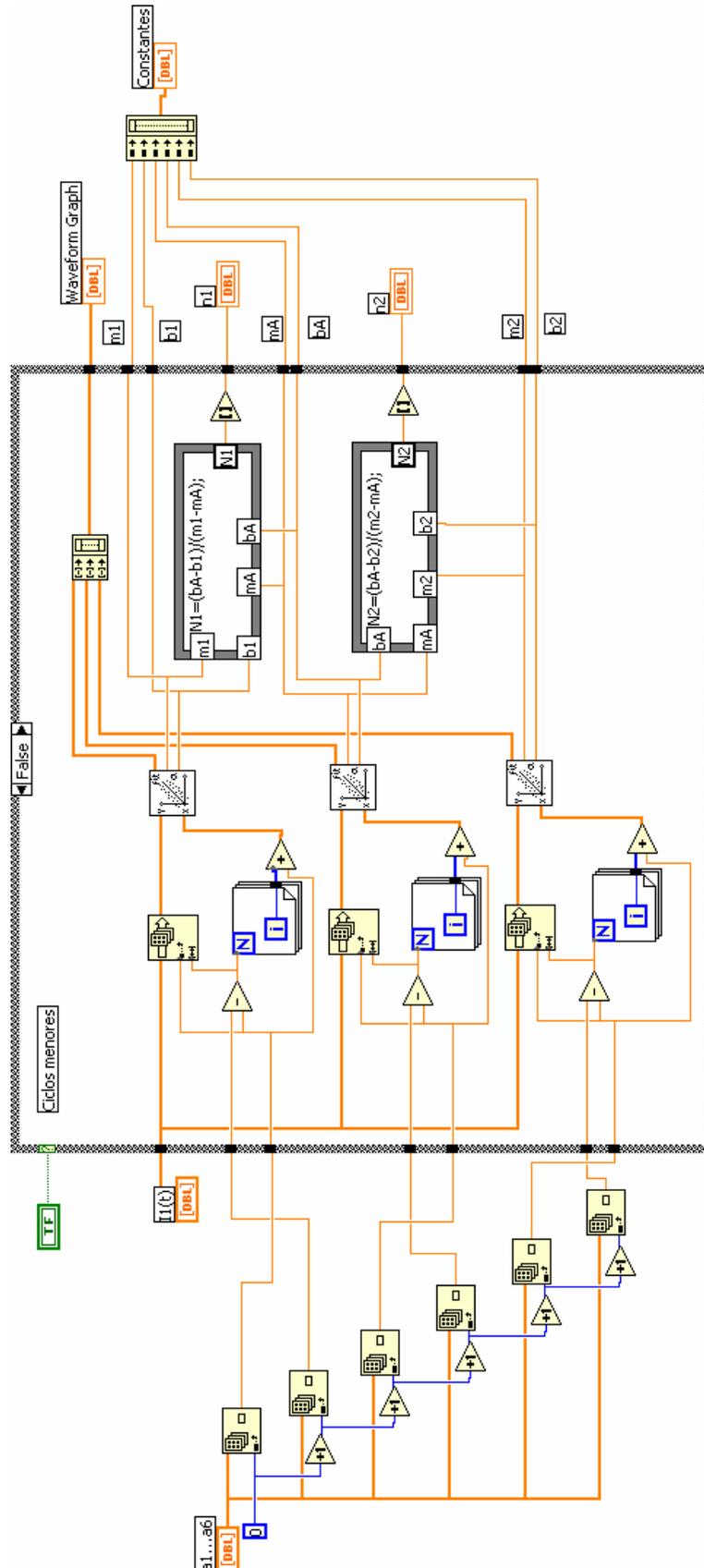


Figura G-12. Código del subprograma "ajuste" con el condicional para curvas inversas

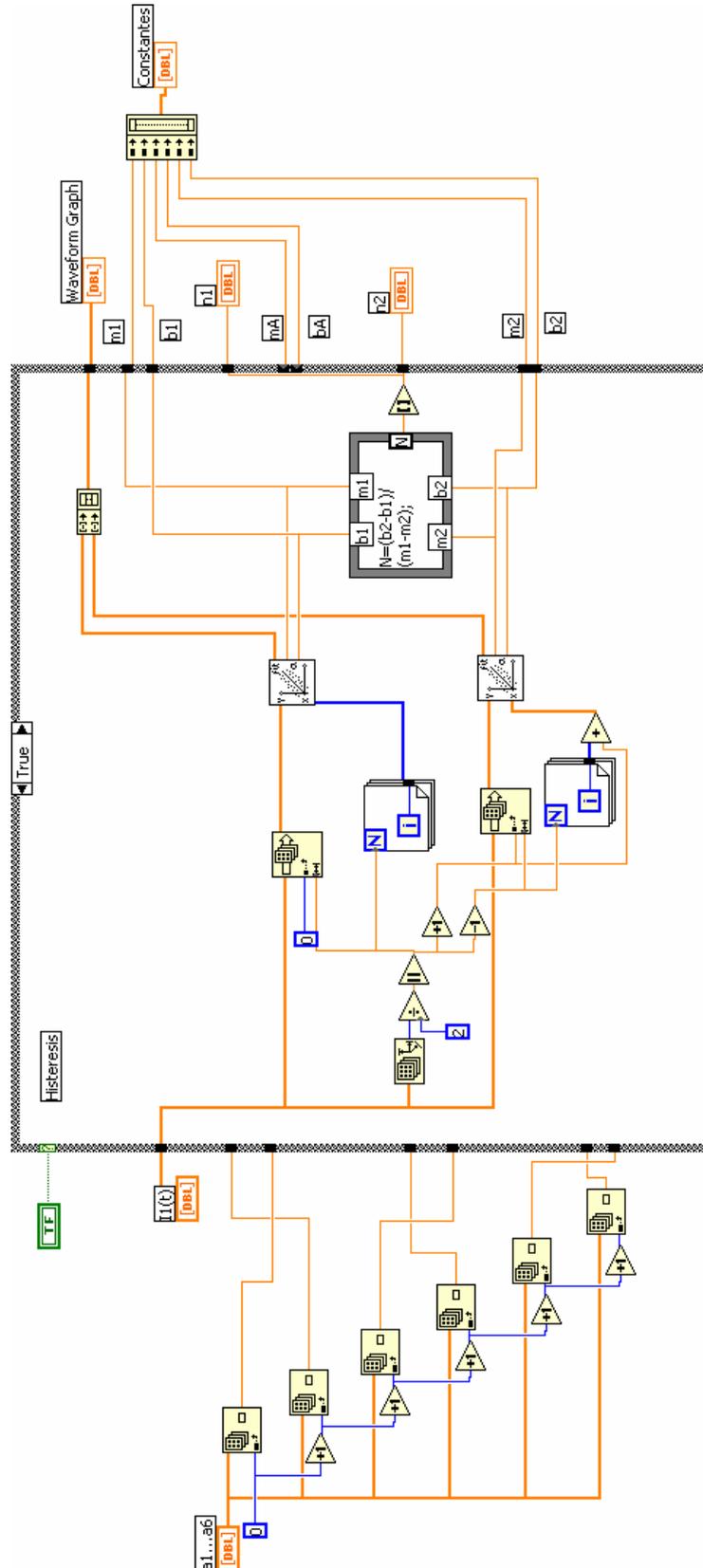


Figura G-13. Código del subprograma "ajuste" con el condicional para ciclos de histéresis

## G.5 Subprograma "pseudo\_I"

### G.5.1 Función

Genera el vector de intensidad analítica del primario  $i'_1(t)$  a partir de los parámetros de la rectas determinados por el subprograma *ajuste*.

### G.5.2 Entradas y salidas.

Las entradas al subprograma es un vector con los parámetros de las rectas que ajustan a los tramos de la señal de excitación y las muestras donde se produce el cambio de tramo en dicha señal. La salida es un vector con la señal de intensidad del primario calculada mediante (G.1).

En la figura G-14 se muestra el icono del subprograma *pseudo\_I*



Figura G-14. Icono del subprograma "pseudo\_I"

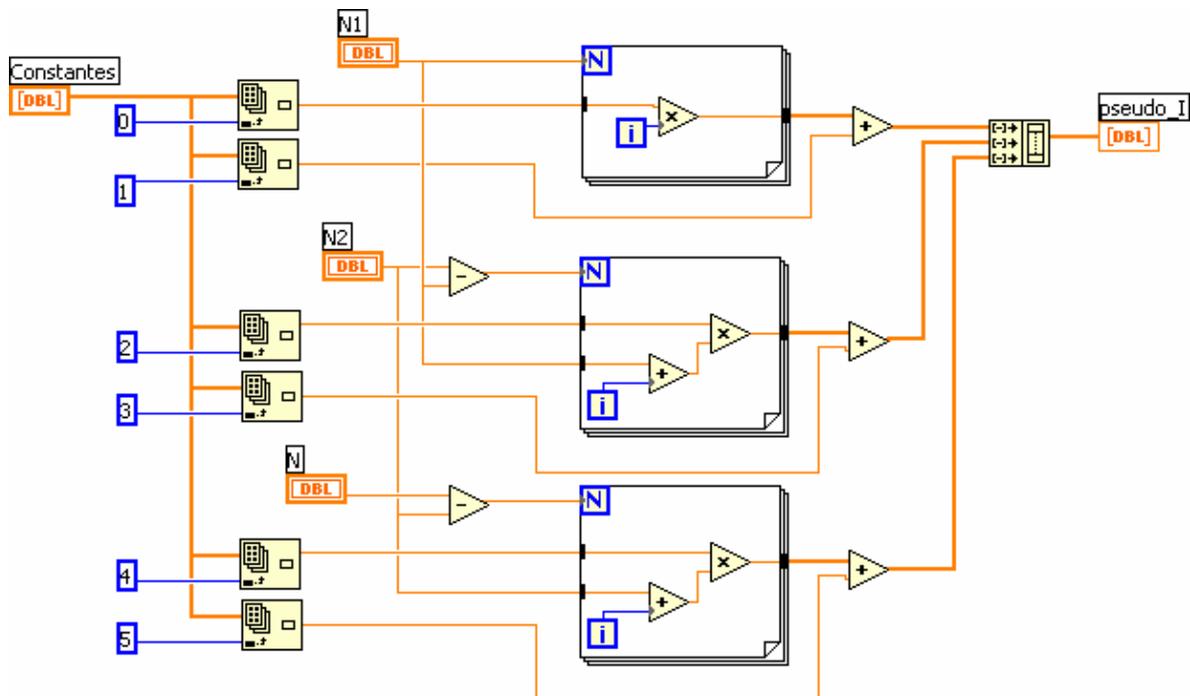


Figura G-15. Código del subprograma "pseudo\_I"

### G.5.3 Código

El subprograma aplica la ecuación (G.1) con los parámetros correspondientes a cada tramo, donde las fronteras de cada tramo están delimitadas por  $n_1$  y  $n_2$ . En la figura G-15 se muestra el código de este subprograma.

## G.6 Subprograma "integral"

### G.6.1 Función

Calcula la integral del vector de entrada. En este caso calcula la integral de  $v_2(t)$  para obtener el flujo o la inducción.

### G.6.2 Entradas y salidas

Las entradas al subprograma *integral* son el vector de tensión en el secundario de la muestra  $v_2(t)$  y la inversa de la tasa de muestreo. La salida es un vector con la señal de entrada integrada. Este vector es proporcional al flujo y a la inducción.

En la figura G-16 se muestra el icono del subprograma *integral* en lenguaje G.



Figura G-16. Icono del subprograma "integral"

### G.6.3 Procedimiento y código

El vector integral  $\mathbf{x}$  se calcula mediante el método de integración rectangular:

$$\mathbf{x}_i = \mathbf{x}_{i-1} + v_{2,i} \Delta t \quad (\text{G.2})$$

Donde  $\Delta t$  es el tiempo transcurrido entre una muestra de  $v_2$  y la siguiente. En nuestro caso,  $\Delta t$  es constante e igual al inverso del número de muestras por segundo (tasa de muestreo) del convertidor analógico digital.

En la figura G-17 se muestra el código en lenguaje G de LabVIEW del subprograma *integral*.

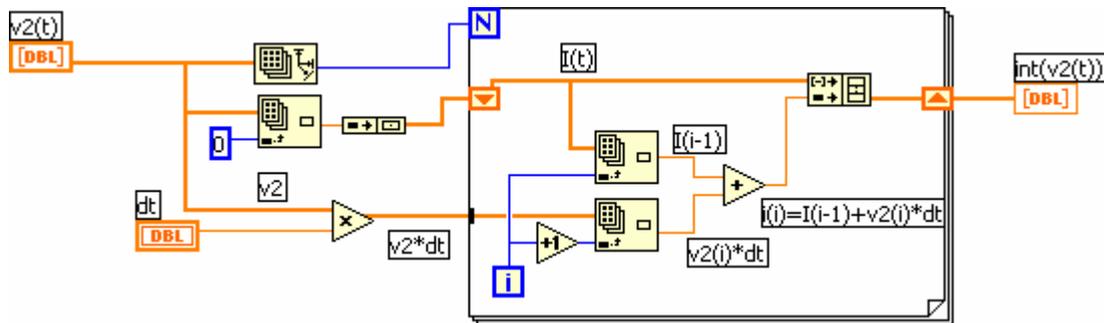


Figura G-17. Código del subprograma "integral"

## G.7 Subprograma "offset"

### G.7.1 Función

Corrige el offset en la señal  $v_2(t)$  introducido por el convertidor analógico-digital de la tarjeta de adquisición de datos.

### G.7.2 Entradas y salidas

La entrada al programa es el vector a corregir y la salida es un vector corregido. En la figura G-18 se muestra el icono con el que se llama a este subprograma mediante el lenguaje G de LabVIEW.



Figura G-18. Icono del subprograma "offset"

### G.7.3 Procedimiento y código

El procedimiento seguido para compensar el offset introducido en  $v_2(t)$  por el convertidor analógico-digital se expuso en el apartado 6.3.3.3. En la figura G-19 se muestra el código del subprograma *offset*.

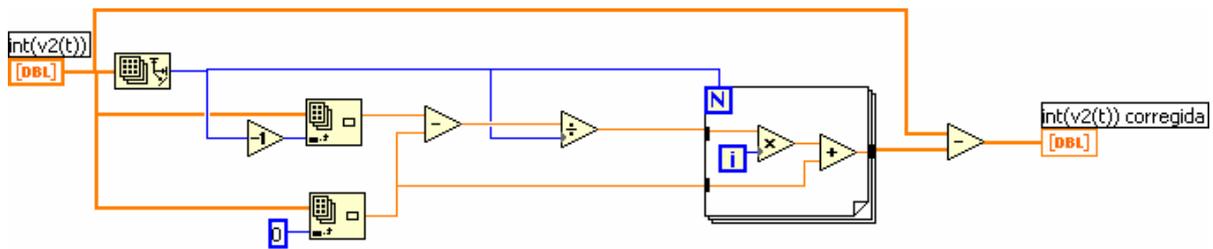


Figura G-19. Código del subprograma "offset"

## G.8 Subprograma "centrado"

### G.8.1 Función

Centra la señal de la integral de la tensión en el secundario de la muestra  $x(t)$  cuando el equipo está trazando un ciclo de histéresis. El efecto es el de centrar el ciclo de histéresis con respecto al eje de  $H$ .

### G.8.2 Entradas y salidas

La entrada es el vector  $x(t)$  sin centrar, la salida es el vector con la señal centrada  $x'(t)$ . En la figura G-20 se muestra el icono de este subprograma.



Figura G-20. Icono del subprograma "centrado"

### G.8.3 Procedimiento y código

En el momento en el que subprograma *integral* realiza la integral de  $v_2(t)$  no se tuvo en cuenta la constante de integración, como consecuencia de ello dicha integral  $x(t)$  aparece descentrada. Este es el momento de tenerla en cuenta, cuando se trata de trazar ciclos de histéresis. Como que dichos ciclos están centrados con respecto al punto (0,0), así mismo la señal de  $B(t)$  y por tanto  $x(t)$  debe estar centrado respecto a  $B=0$ . Esto se realiza mediante un sencillo algoritmo que aplica la siguiente expresión:

$$x'_i = x_i - \left[ \max(x) - \frac{\max(x) - \min(x)}{2} \right] \quad (\text{G.3})$$

En la figura G-21 se muestra el código del subprograma *centrado* en lenguaje G de LabVIEW.

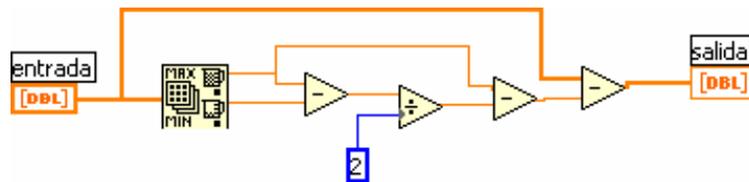


Figura G-21. Código del subprograma "centrado"

## G.9 Subprograma "curvas"

### G.9.1 Función

Realiza el trazado definitivo de la característica de histéresis deseada. Cuando el usuario ejecuta el programa master con la opción trazado activado dicho programa finaliza llamando al subprograma *curvas*.

### G.9.2 Entradas y salidas

El programa lee las siguientes entradas del programa master:

- El tipo de característica magnética a reproducir (ciclo de histéresis/curvas inversas de primer orden). Este dato se lee del programa master.
- El vector con la intensidad del primario analítica  $i'_1(t)$  previamente calculada por el programa master.

Además, el usuario debe introducir los siguientes datos:

- La ganancia del conversor analógico-digital (la tensión límite correspondiente a la ganancia adoptada).
- La inducción del punto máximo de ciclo límite
- El nombre que se le quiere dar al archivo ASCII donde el programa guarda los datos de la característica magnética.

El programa da como salida un archivo ASCII con los datos de la característica magnética trazada y muestra en pantalla dicha característica.

En la figura G-22 se muestra el icono del subprograma *curvas*.



**Figura G-22.** Icono del subprograma "curvas"

### G.9.3 Procedimiento y código

El subprograma *curvas* reproduce los pasos 11 a 15 del programa master, con las siguientes diferencias:

1. Se considera la constante de integración de la integral de  $v_2(t)$  en los dos tipos de curvas trazadas. En consecuencia se centran tanto los ciclos de histéresis como las curvas inversas de primer orden. Estas últimas se centran sumando  $B_m$  del ciclo límite a cada valor de la curva.
2. Solo se muestrea la señal  $v_2(t)$ , la señal  $i_1(t)$  se obtiene analíticamente.
3. Se muestrean  $n$  periodos de la señal de  $v_2(t)$  y se realiza la media de los  $n$  periodos muestreados. Esto se realiza para eliminar el ruido blanco de la señal de  $v_2(t)$ .

En la figura G-23 se muestra el código en lenguaje G de LabVIEW del subprograma *curvas*. El programa comienza con la declaración de variables de la conversión analógico-digital, estas variables son las mismas que en el programa master, salvo que en este caso solo se muestrea el canal 0 con la tensión del secundario de la muestra.

La conversión analógico-digital del canal 0 se ha introducido en un bucle *do...while*. En cada paso del bucle se realiza el muestreo de un periodo de  $v_2(t)$ . Una vez que finaliza la conversión se carga en un vector las muestras de la misma y se realiza la media de todas las conversiones. Seguidamente se muestra en pantalla la señal de la última conversión y la señal correspondiente a todas las muestreas. De esta forma el usuario puede decidir cuando se ha eliminado suficientemente el ruido blanco, momento en el que pulsa el botón de *stop* para que finalice el bucle.

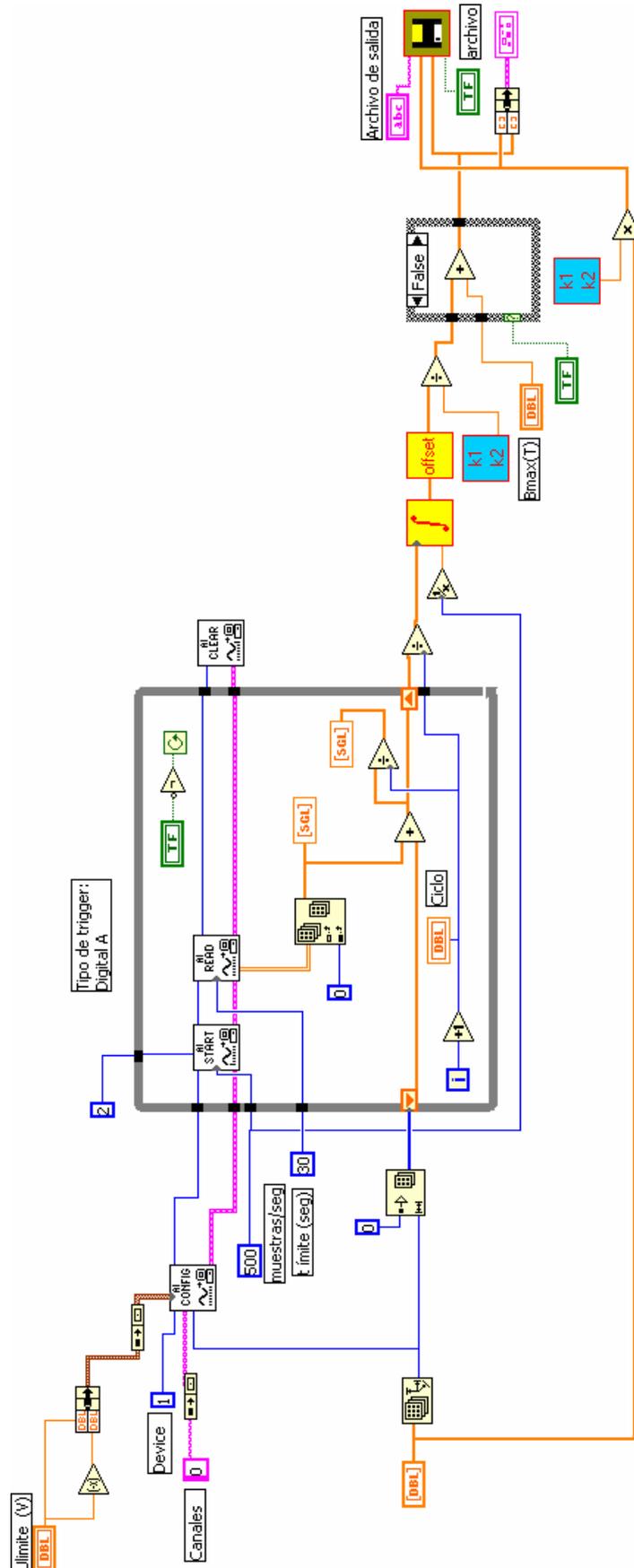


Figura G-23. Código del subprograma "curvas"

El número de muestras por cada conversión analógica-digital es igual a la longitud del vector  $i'_1(t)$ . La longitud de dicho vector viene determinada por la del vector  $i_1(t)$  que contenía justamente las muestras de un periodo. Recordemos que las conversiones comienzan con el inicio del periodo (marcado por la señal de disparo) y finalizan cuando se realizan las muestras indicadas por el usuario, pero el subprograma *periodo* extrajo la porción correspondiente a un periodo, por lo que los vectores  $i_1(t)$  e  $i'_1(t)$  contienen el número de muestras de un periodo.

El tratamiento de la señal  $v_2(t)$  es el mismo que se realizó en el programa master, pero esta vez se centran tanto los ciclos de histéresis y las curvas inversas de primer orden. Además, ahora tanto  $i'_1(t)$  como  $v_2(t)$  se multiplican por sus respectivas constantes para convertirlos en  $H'(t)$  y  $B(t)$  respectivamente. En la figura G-24 se muestra el icono del subprograma que contiene las constantes  $K_1$  y  $K_2$  de la conversión.

$$H'(t) = \frac{N_1}{l} i'_1(t) = K_1 i'_1(t) \quad (G.4)$$

$$K_1 = \frac{N_1}{l}$$

$$B(t) = \frac{1}{N_2 S} \int_0^T u_2(t) dt = \frac{1}{K_2} \int_0^T u_2(t) dt \quad (G.5)$$

$$K_2 = N_2 S$$

Donde  $N_1$  es el número de espiras del arrollamiento primario,  $N_2$  el número de espiras del arrollamiento secundario,  $l$  la longitud media efectiva del circuito magnético y  $S$  la sección transversal del circuito magnético.



**Figura G-24.** Icono del subprograma "constantes"

Finalizado el proceso se muestra en pantalla la característica magnética trazada y si el usuario ha activado la opción *archivo* se llama al subprograma *archivo* para generar un archivo ASCII con los datos de la característica.

En la figura G-25 se muestra la pantalla que aparece en la ejecución del subprograma *curvas*.

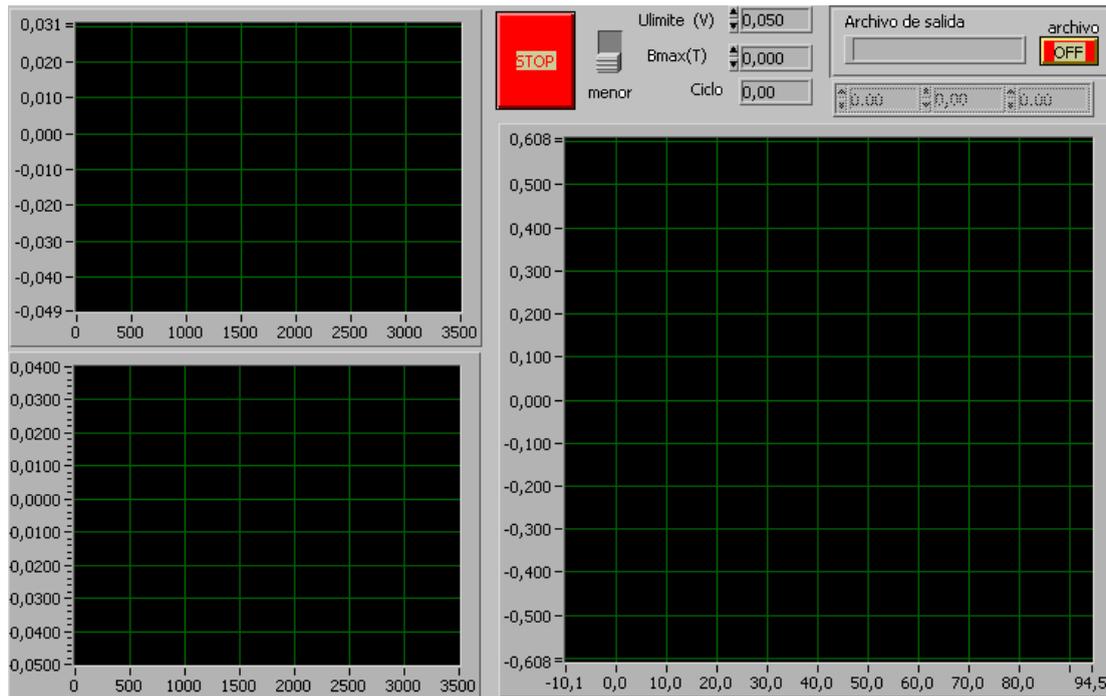


Figura G-25. Pantalla generada por el subprograma "curvas"

### G.10 Subprograma "archivo"

El subprograma *archivo* genera un archivo ASCII de la característica magnética trazada. En la figura G-26 se muestra el icono de llamada al subprograma.



Figura G-26. Icono del subprograma "archivo"

Como entradas requiere el nombre del archivo y los vectores de  $H(t)$  y  $B(t)$ , vectores  $x$  e  $y$  respectivamente. El archivo se genera en el mismo directorio donde se está ejecutando el programa que le llama. En el nombre del archivo se debe incluir la extensión ".txt". En la figura G-27 se muestra el código del subprograma.

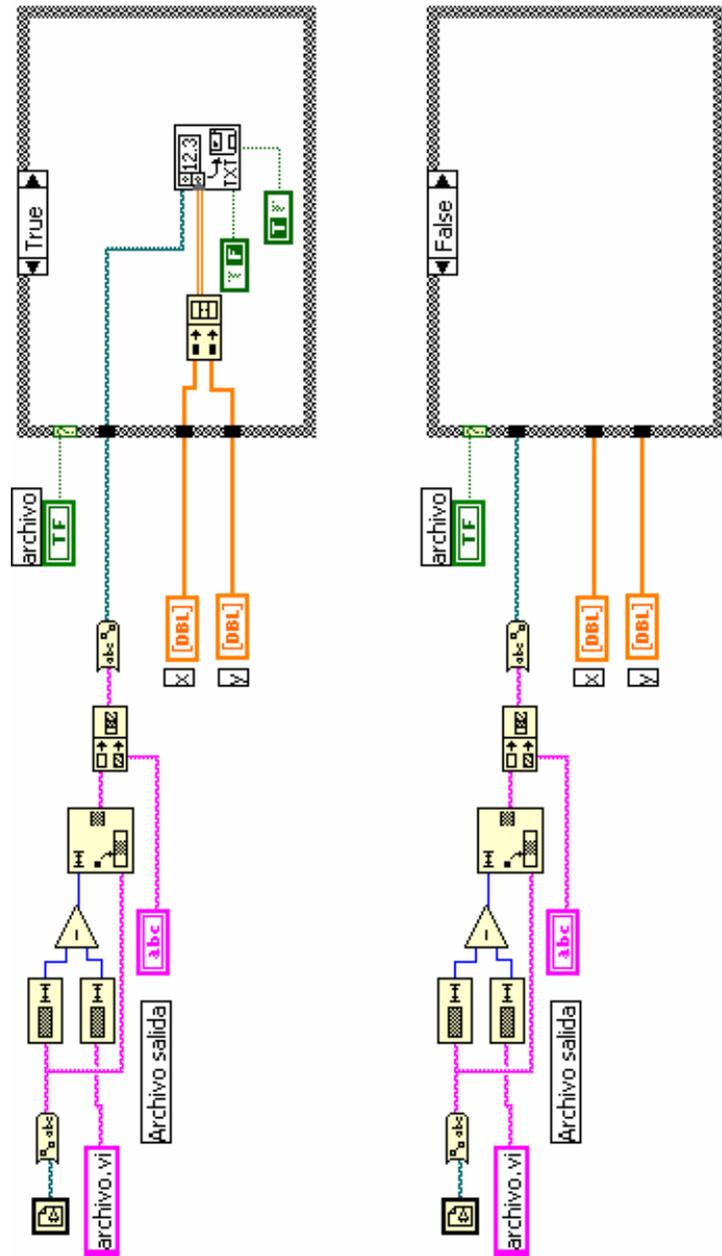


Figura G-27. Código del subprograma "archivo"

## H. Códigos de la aplicación

### *H.1 Propósito y organización del apéndice*

En este apéndice explicamos brevemente los códigos desarrollados para la aplicación de cálculo del campo, flujo y pérdidas en el hierro del transformador monofásico. Esta aplicación nos ha servido para analizar la combinación del modelo de histéresis con el método numérico, el método de las diferencias finitas.

Para la aplicación únicamente ha sido necesario desarrollar dos códigos, uno de proceso y otro de post-proceso. Incluimos aquí ambos. Estos códigos siguen los procedimientos y ecuaciones expuestos en el capítulo 7. Para su justificación se debería consultar dicho capítulo, aquí nos limitamos a su listado.

### *H.2 Proceso*

En la fase de proceso se determina la distribución del campo  $H(x,t)$  y de la inducción  $B(x,t)$  en el núcleo del transformador. Para ello se resuelve la ecuación de difusión formulada en  $H$  mediante el método de las diferencias finitas, combinada con el modelo de histéresis. El sistema de ecuaciones no lineal resultante se resuelve mediante el método del punto fijo. Todos los procedimientos y las ecuaciones resultantes fueron expuestas en el capítulo 7.

El código *proceso* realiza la fase de proceso. El modelo de Preisach se ha desarrollado como subfunciones contenidas en el mismo código *proceso*. Si el usuario lo desea el código genera dos archivos, uno con  $H(t)$  y otro con  $B(t)$  para cada nodo espacial. También existe la posibilidad de generar salidas gráficas con los resultados de la simulación. Las opciones de las salidas gráficas y los archivos de salida se activan con las variables *graficos* y *archivos* respectivamente.

Desde proceso se llama a los subprogramas *plano\_preisach*, *everett01* y *f\_densidad*. La función de estos programas ya se comentó en el apéndice F.

El código es llamado desde un programa de control. Esto permite realizar tantas simulaciones seguidas como se estime necesario.

Las entradas a *proceso* son:

- *f*: Frecuencia
- *archivo\_h*: Nombre del archivo de salida con la  $H(x,t)$  calculada
- *archivo\_b*: Nombre del archivo de salida con la  $B(x,t)$  calculada
- *archivo\_Ho*: Archivo con las curvas  $I_o(t)$  de entrada.
- *selector*: Puntero que indica en que columna de *archivo\_Ho* se encuentra la curva de entrada, en caso que dicho archivo contenga más de una curva  $I_o(t)$ .

### ***1.3 Postproceso***

En la fase de post-proceso se calculan las variables electromagnéticas derivadas del campo y la inducción. En este caso se calcula:

- Densidad de corriente  $J(x,t)$
- Potencial vector magnético  $A(x,t)$
- Flujo  $\phi(t)$
- Las pérdidas en el hierro disgregadas

Estos cálculos los realiza el código *postproceso* según lo expuesto en el capítulo 7. El programa lee los archivos creado por el código *proceso* y así mismo genera archivos con los valores de  $J(x,t)$ ,  $A(x,t)$  y  $\phi(t)$ . Los valores de las pérdidas disgregadas se muestran en la pantalla. El programa también genera unas pantallas gráficas con los resultados de los cálculos.

## I. Publicaciones derivadas de la tesis

### *I.1 Artículos en revistas*

**Autores (por orden de firma):** Alfredo de Blas, Ramón Bargalló, Jordi de la Hoz

**Título:** “Modelizado del ciclo de histéresis mediante el modelo de Preisach”

**Publicación:** Revista Internacional Investigación Tecnológica, Vol. 15, nº3

**Páginas:** 31-38

**Año:** 2004

**ISSN:** 0716-8756

### *I.2 Ponencias en congresos*

**Autores (por orden de firma):** Alfredo de Blas, Ramón Bargalló, Jordi de la Hoz

**Título:** “Aportaciones al cálculo de las pérdidas magnéticas en máquinas eléctricas operando con flujo no sinusoidal mediante elementos finitos y un modelo de histéresis dinámico tipo Preisach”

**Congreso:** XV Reunión de grupos de Investigación de Ingeniería Eléctrica. (XV-RGIIE)

**Organizador:** Asociación Española para el Desarrollo de la Ingeniería Eléctrica (AEDIE)

**Lugar y fecha de celebración:** Zaragoza, marzo de 2005

**Tipo de colaboración:** Comunicación tipo póster

**Publicación:** Actas de la XV-RGIIE. CD-ROM

**Autores (por orden de firma):** Alfredo de Blas, Ramón Bargalló, Jordi de la Hoz, Paulo G. Pereirinha, C. Lemos Antunes

**Título:** “Determination of the Hysteresis Core Losses on a Single-Phase Transformer by using a Dynamic Preisach-type Hysteresis Model”

**Congreso:** International Conference on Electric Machines, 2004. (ICEM´2004)

**Lugar y fecha de celebración:** Cracovia (Polonia). 5 al 8 de septiembre de 2004

**Tipo de colaboración:** Comunicación tipo póster

**Publicación:** Actas del congreso

**Autores (por orden de firma):** Alfredo de Blas, Ramón Bargalló, Jordi de la Hoz, Paulo G. Pereirinha, C. Lemos Antunes

**Título:** “Desarrollo de un modelo de histéresis dinámico tipo-Preisach y su aplicación al cálculo de máquinas eléctricas”.

**Congreso:** Congresso de Métodos Computacionais em Engenharia, 2004. (CMCE´2004)

**Organizador:** Associação Portuguesa de Mecânica Teórica, Aplicada e Computacional (APMTAC)

**Lugar y fecha de celebración:** Lisboa (Portugal). 31 de mayo al 2 de junio de 2004

**Tipo de colaboración:** Comunicación oral

**Publicación:** actas del congreso

**Autores (por orden de firma):** Alfredo de Blas, Ramón Bargalló, Jordi de la Hoz

**Título:** “Investigación en el cálculo por elementos finitos aplicado a las máquinas eléctricas mediante un modelo matemático dinámico de histéresis”

**Congreso:** XIV Reunión de grupos de Investigación de Ingeniería Eléctrica. (XIV-RGIIE)

**Organizador:** Asociación Española para el Desarrollo de la Ingeniería Eléctrica (AEDIE)

**Lugar y fecha de celebración:** Barcelona, 1 al 2 de abril de 2004

**Tipo de colaboración:** Comunicación tipo póster

**Publicación:** Actas de la XIV-RGIIE. CD-ROM

**Autores (por orden de firma):** Alfredo de Blas, Manuel Sevilla

**Título:** “Formulación del plano de impedancias para bobinas de tránsito de ensayos no destructivos por corrientes inducidas”

**Congreso:** 8º Congreso Luso-Español de Ingeniería Eléctrica (8 CLEIE)

**Organizador:** Associação Portuguesa para a Promoção e Desenvolvimento da Engenharia Electrotécnica

**Lugar y fecha de celebración:** Vilamoura (Portugal). 3 al 5 de julio del 2003

**Tipo de contribución:** Comunicación tipo póster

**Publicación:** Actas del 8º CLEIE. Vol. 1, pp. 161-166

**ISBN:** 972-8822-00-6; **Depósito legal:** 197599/03

**Autores (por orden de firma):** Alfredo de Blas, Ramón Bargalló, Jordi de la Hoz

**Título:** “Aplicación del modelo de Preisach para la modelización del ciclo de histéresis del núcleo de un transformador monofásico”

**Congreso:** 8º Congreso Luso-Español de Ingeniería Eléctrica (8 CLEIE)

**Organizador:** Associação Portuguesa para a Promoção e Desenvolvimento da Engenharia Electrotécnica

**Lugar y fecha de celebración:** Vilamoura (Portugal) 3al 5 de julio de 2003

**Tipo de contribución:** Comunicación tipo póster

**Publicación:** Actas del 8º CLEIE. Vol. 1, pp. 71-76

**ISBN:** 972-8822-00-6; **Déposito legal:** 197599/03

**Autores (por orden de firma):** Alfredo de Blas, Ramón Bargalló, Jordi de la Hoz

**Título:** “Modelizado del ciclo de histéresis mediante el modelo de Preisach y su empleo en el cálculo numérico de variables electromagnéticas”

**Congreso:** XIII Reunión de Grupos de Investigación de Ingeniería Eléctrica” (XIII-RGIIE)

**Organizador:** Asociación Española para el Desarrollo de la Ingeniería Eléctrica (AEDIE)

**Lugar y fecha de celebración:** Vigo, 10 al 12 de abril de 2003

**Tipo de contribución:** Comunicación tipo póster

**Publicación:** Actas de la XIII\_RGIIE. CD-ROM

**ISBN:** 84-607-6769-8; **Depósito legal:** VG-144-2003

**Autores (por orden de firma):** Manuel Sevilla, Alfredo de Blas

**Título:** “Modelo Analítico para la evaluación no destructiva de tubos de pared gruesa mediante las corrientes inducidas por una bobina de tránsito”

**Congreso:** XV Congreso Nacional de Ingeniería Mecánica (XV-CNIM)

**Organizador:** Asociación Española de Ingeniería Mecánica

**Lugar y fecha de celebración:** Cádiz, 10 al 13 de diciembre de 2002

**Tipo de contribución:** Comunicación tipo póster.

**Publicación:** Anales de Ingeniería Mecánica. Revista de la Asociación Española de Ingeniería Mecánica. Año 14, vol. II, pp. 1534 – 1537

**ISBN:** 84-607-6264-5



## **J. Índice de figuras**

- Figura 2-1. Momento magnético. 14
- Figura 2-2. Diamagnetismo. 20
- Figura 2-3. Paramagnetismo. 20
- Figura 2-4. Antiferromagnetismo. 21
- Figura 2-5. Ferrimagnetismo. 22
- Figura 2-6. Ferromagnetismo. 22
- Figura 2-7. Curvas de magnetización medidas en diferentes direcciones de un cristal de (a) una lámina anisotrópica y (b) FeSi. 23
- Figura 2-8. Patrón de dominios magnéticos en superficies axiales paralelas al campo. 25
- Figura 2-9. Anisotropía magnetocristalina en el hierro. Orientación de los dominios en los ejes favorables. 29
- Figura 2-10. Formación de patrones de dominios como proceso de minimización de la energía. 31
- Figura 2-11. Ejemplo de pared de dominio. 33
- Figura 2-12. Pared de Bloch. 35
- Figura 2-13. Pared de Néel. 35
- Figura 2-14. Ejemplo de espectro de energía potencial en el sólido. 38
- Figura 2-15. Pandeo de una pared. 38
- Figura 2-16. Proceso de magnetización. Curva de magnetización. 40
- Figura 2-17. Ciclo de histéresis. 42
- Figura 2-18. Espectro de energía de una pared y su efecto en el movimiento de la pared. 46
- Figura 2-19. Forma teórica de la curva de histéresis de Rayleigh a inducciones bajas. 48
- Figura 2-20. Interacción entre inclusiones y una pared de un dominio según la teoría de la inclusión. 51
- Figura 2-21. Distribución de polos en la superficie de una inclusión. 52
- Figura 2-22. Proceso de magnetización en un filamento. 53
- Figura 2-23. Efecto Barkhausen. 54

Figura 2-24. Evolución temporal de la estructura de dominios en una película de Co por relajamiento térmico. 57

Figura 3-1. Operador de histéresis. 60

Figura 3-2. Plano de Preisach restringido al triángulo límite. 62

Figura 3-3. Evolución de los operadores en el plano de Preisach ante una excitación arbitraria. 63

Figura 3-4. Operador de histéresis y plano de Preisach con la formulación  $h_c-h_i$ . 65

Figura 3-5. Propiedad de borrado en el modelo de Preisach. 66

Figura 3-6. Ciclos menores congruentes con el modelo de Preisach. 67

Figura 3-7. Evolución del plano de Preisach para los dos ciclos menores congruentes de la figura 3-6. 67

Figura 3-8. Curvas inversas de primer orden. 71

Figura 3-9. Evolución del plano de Preisach para una curva inversa de primer orden descendente. 72

Figura 3-10. Evolución del plano de Preisach para una curva inversa de primer orden ascendente. 73

Figura 3-11. Procedimiento para obtener la integral de Everett con pocas curvas experimentales. 76

Figura 3-12. Curvas inversas para calcular la integral de Everett promedio. 78

Figura 3-13. Evolución del plano de Preisach durante la curva de primera inducción. 79

Figura 3-14. Función  $B'(t)$ . 80

Figura 3-15. Evolución del plano de Preisach para la función  $B'(t)$ . 81

Figura 3-16. Deducción de zonas en el plano de Preisach para la función  $B'(t)$ . 82

Figura 3-17. Discretización del plano de Preisach para el cálculo de  $\mu(\alpha, \beta)$ . 83

Figura 3-18. Determinación del campo de interacción para la lorentziana móvil. 87

Figura 3-19. Integral de Everett para calcular los parámetros de la gaussiana-log-normal. 88

Figura 3-20. Evolución del plano de Preisach en los tramos (a) ascendentes y (b) descendentes de una excitación periódica de valor máximo  $H_{max}$ . 91

Figura 3-21. División de  $S_+(t)$  en trapezoides. 94

Figura 3-22. Curva de primera inducción. (a) Historial de excitación y (b) evolución del plano de Preisach. 96

Figura 3-23. Tramo creciente de una excitación periódica. (a) Historial de excitación y (b) evolución del plano de Preisach. 97

Figura 3-24. Tramo decreciente de una excitación periódica. Historial de excitación y evolución del plano de Preisach. 99

- Figura 3-25 Curva inversa creciente de primer orden. Historial de excitación y evolución del plano de Preisach. 100
- Figura 3-26 Transformación de variables entre los ejes  $\alpha\text{-}\beta$  y los ejes  $h_c\text{-}h_i$ . 102
- Figura 3-27 Función  $F(H)$  de Naidu. 104
- Figura 3-28 Tramo decreciente del ciclo límite. 105
- Figura 3-29 Tramo ascendente del ciclo límite. 106
- Figura 3-30 Relación de áreas para el tramo ascendente del ciclo límite. 108
- Figura 3-31 Evolución del plano de Preisach para el (a) el tramo ascendente del ciclo límite y (b) una curva inversa creciente de primer orden. 109
- Figura 3-32 Área diferencial en el tramo ascendente  $H_1\text{-}H_2$ . 113
- Figura 3-33 Área diferencial en el tramo descendente  $H_1\text{-}H_3$ . 113
- Figura 3-34 Plano de Preisach discretizado para aplicar el método d'Alessandro-Ferrero. 114
- Figura 3-35 Primer ciclo experimental y su correspondiente plano de Preisach discretizado. 114
- Figura 3-36 Segundo plano experimental y su correspondiente plano de Preisach discretizado. 115
- Figura 3-37 Modelo móvil. 119
- Figura 3-38 Ciclo mayor determinado por el modelo de Preisach clásico caracterizado por el método de Mayergoyz y su comparación con el ciclo límite experimental. 124
- Figura 3-39 Ciclo límite determinado por el modelo de Preisach clásico caracterizado por lorentzianas factorizadas y su comparación con el ciclo límite experimental. 125
- Figura 3-40 Ciclo límite determinado por el modelo de Preisach clásico caracterizado por curvas gaussianas-log-normal y su comparación con el ciclo límite experimental. 127
- Figura 3-41 Ciclo límite determinado por el modelo de Preisach clásico caracterizado por una curva gaussiana-gaussiana y su comparación con el ciclo límite experimental. 128
- Figura 3-42 Conjunto de curvas inversas de primer orden experimentales empleadas para caracterizar el modelo de Preisach mediante el método de Mayergoyz. 129
- Figura 3-43 Historial de campo utilizado como entrada al modelo de Preisach para la obtención de la curva de primera inducción. 130
- Figura 3-44 Curva de primera inducción. 131

- Figura 3-45 Historial del campo utilizado como entrada al modelo de Preisach para la obtención del ciclo límite. 132
- Figura 3-46 Ciclo límite. 132
- Figura 3-47 Historial de campo utilizado como entrada al modelo de Preisach para la obtención de las cuatro trayectorias de curvas inversas de primer orden y la curva inversa de segundo orden. 133
- Figura 3-48 Trayectoria A. 134
- Figura 3-49 Trayectoria B. 134
- Figura 3-50 Trayectoria C. 135
- Figura 3-51 Trayectoria D. 135
- Figura 3-52 Curva inversa de segundo orden. 137
- Figura 3-53 Señales de campo  $H(t)$  del conjunto de ciclos de histéresis experimentales. 139
- Figura 3-54 Conjunto de historiales de campo  $h(t)$  de entrada al modelo de Preisach. 140
- Figura 3-55 Comparación del ciclo de histéresis calculado por el modelo de Preisach tomando como entrada la señal  $H(t)$  y tomando como entrada el historial triangular de igual amplitud  $h(t)$ . Ciclo experimental. 141
- Figura 3-56 Ciclos experimentales A, B y C y ciclos calculados por el modelo de Preisach. 142
- Figura 3-57 Ciclos experimentales E, F y G y ciclos calculados por el modelo de Preisach. 143
- Figura 3-58 Ciclos experimentales I, J y K y ciclos calculados por el modelo de Preisach. 144
- Figura 3-59 Ciclos experimentales M, N, Ñ y O y ciclos calculados por el modelo de Preisach. 145
- Figura 3-60 Discretización del plano de Preisach. (a) Para el ciclo límite, (b) para un ciclo de amplitud mitad a la del ciclo límite. 146
- Figura 3-61 Comparación entre un ciclo obtenido con el modelo balístico y un ciclo obtenido mediante el equipo histeresisgráfico. 147
- Figura 4-1 Comparación entre un operador del modelo de Preisach clásico y un posible operador en un momento determinado del modelo de Bertotti. 151
- Figura 4-2 Operación suma truncada. 152
- Figura 4-3 Ejemplo de deriva en el límite superior de un operador de Bertotti sometido a un campo periódico. 152
- Figura 4-4 Determinación de  $\Delta t\alpha$ . 153
- Figura 4-5 Determinación de  $\Delta t\beta$ . 154

- Figura 4-6 Subdivisión del plano de Preisach en las zonas de la tabla 4-I. 155
- Figura 4-7 Ejemplo de operador dinámico y sus cuatro estados. 157
- Figura 4-8 Evolución del estado de los operadores dinámicos en el plano de Preisach para (a) un campo decreciente y (b) un campo creciente. 157
- Figura 4-9 (a) Historial de  $H(t)$ , (b) respuesta de  $B(t)$  con su proceso de relajamiento y (c) plano  $\alpha\text{-}\beta$ . 162
- Figura 4-10 (a) Historial de  $H(t)$ , (b) respuesta de  $B(t)$  con su proceso de relajamiento y (c) plano  $\alpha\text{-}\beta$ . 163
- Figura 4-11 Triángulo límite del plano  $\alpha\text{-}\beta$  descompuesto en paralelogramos. 167
- Figura 4-12 Esquema de bloques del modelo de Nakmahachalasint-Ngo-VuQuoc. 167
- Figura 4-13 Algoritmo de cálculo del campo modificado en el modelo Füzü-Ivanyi. 175
- Figura 4-14 Circuito para determinar experimentalmente los ciclos de histéresis de la muestra A. 177
- Figura 4-15 Señales de campo experimentales. 178
- Figura 4-16 Señales de inducción experimentales. 178
- Figura 4-17 Ciclos de histéresis experimentales. 179
- Figura 4-18 Ciclos límite (50Hz) determinados mediante el modelo de Preisach para diversos parámetros  $k$ . El área corresponde al ciclo experimental. 180
- Figura 4-19 Señales de inducción para el ciclo límite (50Hz). 181
- Figura 4-20 Ciclo 1 (50Hz) determinado mediante el método de Bertotti. 182
- Figura 4-21 Señales de inducción para el ciclo 1 (50Hz). 183
- Figura 4-22 Ciclo 2 (50Hz) determinado mediante el modelo de Bertotti. 184
- Figura 4-23 Señales de inducción para el ciclo 2 (50Hz). 185
- Figura 4-24 Ciclo 3 (50Hz) determinado mediante el modelo de Bertotti. 186
- Figura 4-25 Señales de inducción para el ciclo 3 (50Hz). 187
- Figura 4-26 Ciclo 4 (30Hz) determinado mediante el modelo de Bertotti. 188
- Figura 4-27 Ciclo 5 (30Hz) determinado mediante el modelo de Bertotti. 188
- Figura 4-28 Señal de inducción para el ciclo 5 (30Hz). 189
- Figura 4-29 Ciclo 6 (50Hz) determinado mediante el modelo de Bertotti. 189
- Figura 4-30 Ciclo 7 (70Hz) determinado con el modelo de Bertotti. 190
- Figura 4-31 Ciclo 8 (70Hz) determinado con el modelo de Bertotti. 190
- Figura 4-32 Ciclo 9 (70Hz) determinado con el modelo de Bertotti. 191
- Figura 4-33 Señal de inducción para el ciclo 9 (70Hz). 191
- Figura 4-34 Ciclo límite (50Hz) calculado mediante el modelo de Bertotti con  $k=20$ . El área corresponde al ciclo límite experimental. 193

- Figura 4-35 Ciclo límite (50Hz) calculado mediante el modelo de Bertotti con  $k=200$ . El área corresponde al ciclo límite experimental. 194
- Figura 4-36 Inducciones calculadas mediante el modelo de Bertotti con  $k=20$  y  $k=200$  comparadas con la inducción experimental. 195
- Figura 4-37 Discretización del plano de Preisach y nodos disponibles para (a) el ciclo límite y (b) un ciclo cuya amplitud máxima es la mitad que la del ciclo límite. 196
- Figura 5-1 Relación entre la rama descendente del ciclo límite y los parámetros  $a$ . 200
- Figura 5-2 Relación entre una curva inversa de primer orden y los parámetros  $b$ . 200
- Figura 5-3 Cálculo de la función densidad definida sobre el plano de Preisach discretizado a partir de los parámetros  $a, b, \dots$  201
- Figura 5-4 Determinación de los parámetros  $a$  y  $b$  para el modelo de Preisach invertido. 201
- Figura 5-5 Operador de histéresis del modelo de Preisach inverso. 202
- Figura 5-6 Integral de Everett inversa definida para una curva inversa de primer orden descendente invertida. 203
- Figura 5-7 Integral de Everett inversa definida para una curva inversa de primer orden ascendente invertida. 203
- Figura 5-8 (a) Plano de Preisach para la curva inversa de primer orden descendente invertida de la figura 5-6. (b) Relación de áreas  $S^-$  y  $S^+$  en el punto de inversión. 204
- Figura 5-9 Conjunto de curvas inversas de primer orden invertidas experimentales empleadas para caracterizar el modelo de Preisach inverso mediante el método de Mayergoyz para la muestra A. 207
- Figura 5-10 Integral de Everett inversa para la muestra A. 208
- Figura 5-11 Función densidad inversa para la muestra A. 209
- Figura 5-12 Historial B de entrada al modelo de Preisach inverso para reproducir el ciclo límite. El eje X no tiene significación física pues el modelo de Preisach clásico (aunque sea inverso) no considera los efectos temporales. 210
- Figura 5-13 Ciclo límite de la muestra A calculado mediante el modelo de Preisach inverso. 210
- Figura 6-1 Fotografía de una de la muestras (muestra B). 216
- Figura 6-2 Esquema del ensayo para determinar ciclos de histéresis mediante el método balístico. 217

- Figura 6-3 Determinación del punto máximo de un ciclo de histéresis. 218
- Figura 6-4 Determinación de un punto del ciclo límite. 219
- Figura 6-5 Determinación de un punto de la curva de primera inducción. 220
- Figura 6-6 Esquema del ensayo balístico modificado para obtener curvas inversas de primer orden. 221
- Figura 6-7 Determinación de un punto de una curva inversa de primer orden. 221
- Figura 6-8 Esquema del ensayo balístico modificado para obtener curvas inversas de segundo orden. 222
- Figura 6-9 Curva de primera inducción del núcleo A mediante el método balístico. 223
- Figura 6-10 Ciclo límite (ciclo de histéresis) del núcleo A mediante el método balístico. 223
- Figura 6-11 Curvas inversas de primer orden en el núcleo A mediante el método balístico. 224
- Figura 6-12 Curva inversa de segundo orden en el núcleo A mediante el método balístico. 224
- Figura 6-13 Esquema de bloques del método balístico controlado por ordenador. 225
- Figura 6-14 Esquema general de bloques del histeresígrafo modificado. 228
- Figura 6-15 Formas de onda para recrear el historial de campo. (a) En un ciclo de histéresis. (b) En una curva inversa de primer orden. 229
- Figura 6-16 Forma errónea de adaptar la señal triangular del generador de funciones para recrear el historial de campo correspondiente a una curva inversa de primer orden. 230
- Figura 6-17 Fotografía del equipo completo del histeresígrafo modificado para curvas inversas. 231
- Figura 6-18 Fotografía del generador de funciones. 232
- Figura 6-19 Esquema del recortador. 233
- Figura 6-20 Esquema del amplificador de transconductancia. 233
- Figura 6-21 Esquema del adaptador a TTL. 235
- Figura 6-22 Esquema de la fuente de alimentación. 236
- Figura 6-23 Algoritmo principal. Fases. 238
- Figura 6-24 Tramos de la señal de excitación y de la tensión del secundario. 238
- Figura 6-25 Puntos  $a_1 \dots a_6$ . 239
- Figura 6-26 Efecto del offset del convertidor analógico-digital en la tensión integrada. (a) Señal sin offset y su correspondiente integral. (b) Señal con offset y su correspondiente integral. 246
- Figura 6-27 Ciclo límite de la muestra C. 248

- Figura 6-28 Conjunto de curvas inversas de primer orden de la muestra C. 249
- Figura 6-29 Ciclo E y ciclo límite. 250
- Figura 6-30 Curva B y curva J. 251
- 
- Figura 7-1 Página. 263
- Figura 7-2 Geometría de la muestra A. 271
- Figura 7-3 Dimensiones de la muestra A. 271
- Figura 7-4 Modelo unidimensional de la muestra A. 272
- Figura 7-5 Circuito eléctrico equivalente del arrollamiento de excitación de la muestra A. 276
- Figura 7-6 Modelización del laminado del núcleo de la muestra A mediante permeabilidad equivalente. 282
- Figura 7-7 Preproceso. Discretización de la región  $\Omega_2$  correspondiente al núcleo de la muestra A. 284
- Figura 7-8 Esquema de Crack-Nicholson. 289
- Figura 7-9 Campo en la frontera  $H_0$ , densidad de corriente en la frontera  $J_0$  y vector unitario  $\hat{n}$  de las superficies del núcleo. 298
- Figura 7-10 Geometría real del núcleo y aproximación para determinar las pérdidas. 299
- 
- Figura 8-1 Página. 303
- Figura 8-2 Curvas de  $i_0(t)$  empleadas como entrada al sistema de cálculo a 30Hz. 305
- Figura 8-3 Curvas de  $i_0(t)$  empleadas como entrada al sistema de cálculo a 50Hz. 306
- Figura 8-4 Curvas de  $i_0(t)$  empleadas como entrada al sistema de cálculo a 70Hz. 306
- Figura 8-5 Formas de onda de  $H(x,t)$  a 30Hz para la curva de entrada "1" calculadas a varias profundidades  $x$  respecto a la superficie del núcleo. 308
- Figura 8-6 Difusión  $H(x)$  en valor eficaz calculada a 30Hz. 308
- Figura 8-7 Formas de onda de  $H(x,t)$  a 50Hz para la curva de entrada "0" calculadas a varias profundidades  $x$  respecto a la superficie del núcleo. 309
- Figura 8-8 Formas de onda de  $H(x,t)$  a 50Hz para la curva de entrada "2" calculadas a varias profundidades  $x$  respecto a la superficie del núcleo. 309
- Figura 8-9 Formas de onda de  $H(x,t)$  a 50Hz para la curva de entrada "4" calculadas a varias profundidades  $x$  respecto a la superficie del núcleo. 310
- Figura 8-10 Formas de onda de  $H(x,t)$  a 50Hz para la curva de entrada "6" calculadas a varias profundidades  $x$  respecto a la superficie del núcleo. 310
- Figura 8-11 Difusión  $H(x)$  en valor eficaz calculada a 50Hz. 311

- Figura 8-12 Formas de onda de  $H(x,t)$  a 70Hz para la curva de entrada "1" calculadas a varias profundidades  $x$  respecto a la superficie del núcleo. 311
- Figura 8-13 Difusión  $H(x)$  en valor eficaz calculada a 70Hz. 312
- Figura 8-14 Formas de onda de  $B(x,t)$  a 30Hz para la curva de entrada "1" calculadas a varias profundidades  $x$  respecto a la superficie del núcleo. 312
- Figura 8-15 Difusión  $B(x)$  en valor eficaz calculada a 30Hz. 313
- Figura 8-16 Formas de onda de  $B(x,t)$  a 50Hz para la curva de entrada "0" calculadas a varias profundidades  $x$  respecto a la superficie del núcleo. 313
- Figura 8-17 Formas de onda de  $B(x,t)$  a 50Hz para la curva de entrada "2" calculadas a varias profundidades  $x$  respecto a la superficie del núcleo. 314
- Figura 8-18 Formas de onda de  $B(x,t)$  a 50Hz para la curva de entrada "4" calculadas a varias profundidades  $x$  respecto a la superficie del núcleo. 314
- Figura 8-19 Formas de onda de  $B(x,t)$  a 50Hz para la curva de entrada "6" calculadas a varias profundidades  $x$  respecto a la superficie del núcleo. 315
- Figura 8-20 Difusión  $B(x)$  en valor eficaz calculada a 50Hz. 315
- Figura 8-21 Formas de onda de  $B(x,t)$  a 70Hz para la curva de entrada "1" calculadas a varias profundidades  $x$  respecto a la superficie del núcleo. 316
- Figura 8-22 Difusión  $B(x)$  en valor eficaz calculada a 70Hz. 316
- Figura 8-23 Formas de onda de  $A(x,t)$  a 30Hz para la curva de entrada "1" calculadas a varias profundidades  $x$  respecto a la superficie del núcleo. 317
- Figura 8-24 Difusión  $A(x)$  en valor eficaz calculada a 30Hz. 317
- Figura 8-25 Formas de onda de  $A(x,t)$  a 50Hz para la curva de entrada "0" calculadas a varias profundidades  $x$  respecto a la superficie del núcleo. 318
- Figura 8-26 Formas de onda de  $A(x,t)$  a 50Hz para la curva de entrada "2" calculadas a varias profundidades  $x$  respecto a la superficie del núcleo. 318
- Figura 8-27 Formas de onda de  $A(x,t)$  a 50Hz para la curva de entrada "4" calculadas a varias profundidades  $x$  respecto a la superficie del núcleo. 319
- Figura 8-28 Formas de onda de  $A(x,t)$  a 50Hz para la curva de entrada "6" calculadas a varias profundidades  $x$  respecto a la superficie del núcleo. 319
- Figura 8-29 Difusión  $A(x)$  en valor eficaz calculada a 50Hz. 320
- Figura 8-30 Formas de onda de  $A(x,t)$  a 70Hz para la curva de entrada "1" calculadas a varias profundidades  $x$  respecto a la superficie del núcleo. 320
- Figura 8-31 Difusión  $A(x)$  en valor eficaz calculada a 70Hz. 321
- Figura 8-32 Formas de onda de  $J(x,t)$  a 30Hz para la curva de entrada "1" calculadas a varias profundidades  $x$  respecto a la superficie del núcleo. 321
- Figura 8-33 Difusión  $J(x)$  en valor eficaz calculada a 30Hz. 322

- Figura 8-34 Formas de onda de  $J(x,t)$  a 50Hz para la curva de entrada "0" calculadas a varias profundidades  $x$  respecto a la superficie del núcleo. 322
- Figura 8-35 Formas de onda de  $J(x,t)$  a 50Hz para la curva de entrada "2" calculadas a varias profundidades  $x$  respecto a la superficie del núcleo. 323
- Figura 8-36 Formas de onda de  $J(x,t)$  a 50Hz para la curva de entrada "4" calculadas a varias profundidades  $x$  respecto a la superficie del núcleo. 323
- Figura 8-37 Formas de onda de  $J(x,t)$  a 50Hz para la curva de entrada "6" calculadas a varias profundidades  $x$  respecto a la superficie del núcleo. 324
- Figura 8-38 Difusión  $J(x)$  en valor eficaz calculada a 50Hz. 324
- Figura 8-39 Formas de onda de  $J(x,t)$  a 70Hz para la curva de entrada "1" calculadas a varias profundidades  $x$  respecto a la superficie del núcleo. 325
- Figura 8-40 Difusión  $J(x)$  en valor eficaz calculada a 70Hz. 325
- Figura 8-41 Flujo calculado a 30Hz para la curva de entrada "1" y flujo experimental para la misma situación. 326
- Figura 8-42 Flujo calculado a 50Hz para la curva de entrada "0" y flujo experimental para la misma situación. 326
- Figura 8-43 Flujo calculado a 50Hz para la curva de entrada "2" y flujo experimental para la misma situación. 327
- Figura 8-44 Flujo calculado a 50Hz para la curva de entrada "4" y flujo experimental para la misma situación. 327
- Figura 8-45 Flujo calculado a 50Hz para la curva de entrada "6" y flujo experimental para la misma situación. 328
- Figura 8-46 Flujo calculado a 70Hz para la curva de entrada "1" y flujo experimental para la misma situación. 328
- Figura 8-47 Difusión del valor eficaz del campo  $H$  para varias frecuencias. 329
- Figura 8-48 Difusión del valor eficaz de la inducción  $B$  para varias frecuencias. 330
- Figura 8-49 Difusión del valor eficaz del potencial vector magnético  $A$  para varias frecuencias. 330
- Figura 8-50 Difusión de la densidad de corriente  $J$  para varias frecuencias. 331
- Figura 8-51 Curvas de pérdidas específicas calculadas para la frecuencia de 30Hz. 332
- Figura 8-52 Curvas de pérdidas específicas calculadas para la frecuencia de 50Hz. 332
- Figura 8-53 Curvas de pérdidas específicas calculadas para la frecuencia de 70Hz. 333
- Figura 8-54 Curvas de pérdidas específicas calculadas a 30Hz, 50Hz y 70Hz. 333
- Figura 8-55 Curvas de pérdidas específicas por histéresis calculadas a 30Hz, 50Hz y 70Hz. 334

- Figura 8-56 Curvas de pérdidas específicas por corrientes inducidas calculadas a 30Hz, 50Hz y 70Hz. 334
- Figura 8-57 Comparativa entre las pérdidas en el hierro a 30Hz calculadas y experimentales. 335
- Figura 8-58 Comparativa entre las pérdidas por histéresis a 30Hz calculadas y experimentales. 336
- Figura 8-59 Comparativa entre las pérdidas por corrientes inducidas a 30Hz calculadas y experimentales. 336
- Figura 8-60 Comparativa entre las pérdidas en el hierro a 50Hz calculadas y experimentales. 337
- Figura 8-61 Comparativa entre las pérdidas por histéresis a 50Hz calculadas y experimentales. 337
- Figura 8-62 Comparativa entre las pérdidas por corrientes inducidas a 50Hz calculadas y experimentales. 338
- Figura 8-63 Comparativa entre las pérdidas en el hierro a 70Hz calculadas y experimentales. 338
- Figura 8-64 Comparativa entre las pérdidas por histéresis a 70Hz calculadas y experimentales. 339
- Figura 8-65 Comparativa entre las pérdidas por corrientes inducidas a 70Hz calculadas y experimentales. 339
- Figura 8-66 Comparación entre la distribución de corrientes inducidas calculada en el modelo unidimensional de transformador y la calculada en un modelo bidimensional. 342
- Figura 8-67 Discretización del plano de Preisach en función del ciclo límite. (a) Nodos efectivos para el ciclo límite y (b) nodos disponibles para un ciclo cuya amplitud es la mitad que la del ciclo límite. 343
- Figura 9-1 Modelo unidimensional de la muestra A. 346
- Figura 9-2 Circuito equivalente del arrollamiento de excitación de la muestra A. 348
- Figura 9-3 Preproceso. Discretización de las tres regiones del problema. 349
- Figura 10-1 Esquema del ensayo para determinar las pérdidas magnéticas totales mediante vatímetro. 360
- Figura 10-2 Voltímetro de flujo. 361
- Figura 10-3 Conexión del vatímetro respecto al transformador, representado este por un esquema eléctrico equivalente reducido. 363

- Figura 10-4 Voltímetro de factor de potencia bajo Yokogawa tipo 3254. 365
- Figura 10-5 Sistema generador de la tensión de excitación, de amplitud y frecuencia regulable. 366
- Figura 10-6 Esquema del ensayo para determinar las pérdidas magnéticas totales a partir del área del ciclo de histéresis. 370
- Figura 10-7 Esquema del ensayo para determinar las pérdidas por histéresis a partir del área de ciclos de histéresis cuasiestáticos experimentales. 373
- Figura 10-8 Proceso de tratamiento de la señal para obtener la histéresis. 374
- Figura 10-9 Pérdidas magnéticas totales determinadas mediante vatímetro. 381
- Figura 10-10 Factor de forma en la determinación de las pérdidas totales mediante vatímetro. 382
- Figura 10-11 Curvas de histéresis a 30Hz para determinar las pérdidas totales. 383
- Figura 10-12 Curvas de histéresis a 50Hz para determinar las pérdidas totales. 384
- Figura 10-13 Curvas de histéresis a 70Hz para determinar las pérdidas totales. 385
- Figura 10-14 Pérdidas magnéticas totales determinadas mediante las áreas de los ciclos de histéresis. 386
- Figura 10-15 Comparación entre las pérdidas totales a 50Hz obtenidas mediante el vatímetro y las obtenidas mediante el área de ciclos de los ciclos de histéresis. 387
- Figura 10-16 Comparación entre las pérdidas totales a 70Hz obtenidas mediante el vatímetro y las obtenidas mediante el área de los ciclos de histéresis. 388
- Figura 10-17 Curvas de histéresis experimentales, obtenidas con el equipo histeresigráfico, a  $f=0,15\text{Hz}$  (cuasiestática). 390
- Figura 10-18 Pérdidas por histéresis experimentales obtenidas mediante el método de las áreas a partir de los ciclos de histéresis cuasiestáticos. 391
- Figura 10-19 Coeficientes de Steinmetz obtenidos a partir de las curvas de pérdidas determinadas mediante el vatímetro. 392
- Figura 10-20 Coeficientes de Steinmetz obtenidos a partir de las curvas de pérdidas determinadas mediante el área de los ciclos de histéresis. 393
- Figura 10-21 Comparativa de coeficientes de Steinmetz medios. 393
- Figura 10-22 Pérdida de histéresis calculadas mediante la ecuación de Steinmetz. 394
- Figura 10-23 Conjunto de curvas cuasiestáticas calculadas por el modelo de Preisach clásico. 395
- Figura 10-24 Curvas de pérdidas por histéresis calculadas a partir del modelo de Preisach clásico. 396

- Figura 10-25 Comparación de las pérdidas por histéresis a 50Hz obtenidas por varios métodos. El eje OX representa la inducción máxima  $B_m$  en T y el eje OY las pérdidas específicas en W/kg. 397
- Figura 10-26 Comparación de las pérdidas por histéresis a 70Hz obtenidas por varios métodos. El eje OX representa la inducción máxima  $B_m$  en T y el eje OY las pérdidas específicas en W/kg. 398
- Figura 10-27 Curvas de pérdidas por corrientes inducidas. 399
- Figura 10-28 Ajuste de las pérdidas magnéticas totales, pérdidas por histéresis y pérdidas por corrientes inducidas a  $f=50\text{Hz}$  para el cálculo de las pérdidas de exceso. 401
- Figura 10-29 Ajuste de las pérdidas magnéticas totales, pérdidas por histéresis y pérdidas por corrientes inducidas a  $f=70\text{Hz}$  para el cálculo de las pérdidas de exceso. 402
- Figura 10-30 Pérdidas de exceso a 50Hz. 403
- Figura 10-31 Pérdidas de exceso a 70Hz. 404
- 
- Figura B-1 Ejemplo de ciclo límite y ciclos menores. 434
- Figura B-2 Curva inversa de primer orden. 435
- Figura B-3 Curva inversa de segundo y tercer orden. 436
- 
- Figura C-1 Partícula de Stoner-Wohlfarth. 438
- Figura C-2 Ciclo de histéresis típico de una partícula de Stoner-Wohlfarth. 439
- Figura C-3 Astroide de Slonczewski. 441
- Figura C-4 Reducción de una muestra policristalina a una partícula de Globus. 460
- Figura C-5 Partícula de Globus. 460
- Figura C-6 Ciclos de histéresis de una partícula de Globus. 462
- Figura C-7 Campo alternativo y campo rotativo. 464
- 
- Figura D-1 Disposición de los arrollamientos originales en la muestra A. 485
- Figura D-2 Ensayo para determinar el número de espiras de los arrollamientos originales de la muestra D. 485
- Figura D-3 Geometría y dimensiones del núcleo de la muestra A. 486
- Figura D-4 Curvas normales o de primera inducción de la muestra A. 490
- Figura D-5 Ciclos de histéresis cuasiestáticos del núcleo A. 491
- Figura D-6 Ciclo límite cuasiestático de la muestra A. 492
- Figura D-7 Ciclos de histéresis a 30Hz de la muestra A. 493
- Figura D-8 Ciclos de histéresis a 50Hz de la muestra A. 494
- Figura D-9 Ciclos de histéresis a 70,15Hz de la muestra A. 495

- Figura D-10 Curvas inversas de primer orden de la muestra A. 496
- Figura D-11 Curva inversa de segundo orden de la muestra A. 497
- Figura D-12 Fotografía de la muestra B. 498
- Figura D-13 Geometría y dimensiones de la muestra B en centímetros. 499
- Figura D-14 Ciclos de histéresis cuasiestáticos de la muestra B. 501
- Figura D-15 Curva normal o de primera inducción de la muestra B. 502
- Figura D-16 Curvas inversas de primer orden para la muestra B. 503
- Figura D-17 Características magnéticas del M097-30N. 508
- Figura D-18 Curva normal o de primera inducción de la muestra C. 509
- Figura D-19 Ciclos de histéresis cuasiestáticos de la muestra C. 510
- Figura D-20 Ciclos de histéresis de la muestra C, a 1Hz. 511
- Figura D-21 Ciclos de histéresis a 0,15Hz, 1Hz y 5Hz de la muestra C. 512
- Figura D-22 Curvas inversas de primer orden de la muestra C. 513
- 
- Figura E-1 Fotografía del fluxómetro Yokogawa 3254. 516
- Figura E-2 Fotografía del vatímetro de factor de potencia bajo Yokogawa 2041. 517
- 
- Figura G-1 Condicional para la generación del nivel de corte. 544
- Figura G-2 Código del programa master (primera parte). 545
- Figura G-3 Código del programa master (segunda parte). 546
- Figura G-4 Valores límite para el ajuste de los tres tramos de la señal de excitación. 547
- Figura G-5 Condicional para sumar la constante de integración. 549
- Figura G-6 Condicional de trazado. 549
- Figura G-7 Página. 550
- Figura G-8 Página. 550
- Figura G-9 Icono del subprograma "periodo". 551
- Figura G-10 Código del subprograma "periodo". 552
- Figura G-11 Icono del subprograma "ajuste". 554
- Figura G-12 Código del subprograma "ajuste" con el condicional para curvas inversas. 555
- Figura G-13 Código del subprograma "ajuste" con el condicional para ciclos de histéresis. 556
- Figura G-14 Icono del subprograma "pseudo\_I". 557
- Figura G-15 Código del subprograma "pseudo\_I". 558
- Figura G-16 Icono del subprograma "integral". 559
- Figura G-17 Código del subprograma "integral". 559
- Figura G-18 Icono del subprograma "offset". 559

- Figura G-19 Código del subprograma "offset". 560
- Figura G-20 Icono del subprograma "centrado". 560
- Figura G-21 Código del subprograma "centrado". 561
- Figura G-22 Icono del subprograma "curvas". 562
- Figura G-23 Código del subprograma "curvas". 563
- Figura G-24 Icono del subprograma "constantes". 564
- Figura G-25 Pantalla generada por el subprograma "curvas". 565
- Figura G-26 Icono del subprograma "archivo". 565
- Figura G-27 Código del subprograma "archivo". 566



## K. Índice de tablas

- Tabla 3-I. Amplitudes de las señales de campo  $H(t)$  de los ciclos de histéresis experimentales para la validación general del modelo de Preisach. 138
- Tabla 4-I Zonas del plano de Preisach y constantes de integración. 155
- Tabla 6-I Relación de tensiones de corte y puntos de inversión del conjunto de curvas inversas de primer orden para el ciclo límite de la muestra C. 248
- Tabla 8-I Curvas simuladas a cada frecuencia. 305
- Tabla 8-II Número de figura de los diferentes resultados. 307
- Tabla 8-III Número de figura de las comparaciones entre las curvas calculadas y las curvas experimentales. 335
- Tabla 10-I Valores de los factores  $A_h$  y  $A_f$  en función del tipo de material y el espesor. 363
- Tabla 10-II Resistencia del circuito de tensión del vatímetro empleado. 365
- Tabla 10-III Características nominales de la máquina asincrónica. 367
- Tabla 10-IV Características nominales de la máquina sincrónica. 367
- Tabla 10-V Características nominales del transformador. 367
- Tabla 10-VI Parámetros de ajuste a la ecuación (10.35) para las pérdidas totales, por histéresis y por corrientes inducidas a 50Hz. 400
- Tabla 10-VII Parámetros de ajuste a la ecuación (10.35) para las pérdidas totales, por histéresis y por corrientes inducidas a 70Hz. 400
- Tabla C-I Caracterización del modelo de Stoner-Wohlfarth. 476
- Tabla C-II Caracterización del modelo de Jiles-Atherton. 477
- Tabla C-III Caracterización del modelo de Preisach clásico. 478
- Tabla C-IV Caracterización del modelo tipo-Preisach dinámico de Bertotti. 478
- Tabla C-V Caracterización del modelo tipo-Preisach dinámico de Mayergoyz. 479

- Tabla C-VI Caracterización del modelo de Globus. 479
- Tabla C-VII Caracterización del modelo de Enokizono-Soda. 480
- 
- Tabla D-I Histéresis cuasiestáticas de la muestra A. 488
- Tabla D-II Curvas inversas de primer orden de la muestra A. 489
- Tabla D-III Ciclos de histéresis cuasiestática de la muestra B. 499
- Tabla D-IV Puntos de inversión de las curvas inversas de primer orden de la muestra B. 500
- Tabla D-V Ciclos de histéresis cuasiestáticos de la muestra D. 506
- Tabla D-VI Ciclos de histéresis de la muestra C a 1Hz y 5Hz. 507
- Tabla D-VII Puntos de inversión de las curvas inversas de primer orden de la muestra C. 507
- 
- Tabla E-I Resistencia de entrada en función de la escala. 516
- Tabla E-II Resistencia del circuito de tensión del vatímetro de factor de potencia bajo Yokogawa 2041 en función de la escala. 517
- Tabla E-III Ganancias para las entradas analógicas, con su correspondiente tensión límite y ancho de banda. 518