

5. EL METODO DE LOS ELEMENTOS FINITOS (MEF ó FEM).

5.1. El método general.

5.1.1. Definición del método.

El método de los elementos finitos es un método de aproximación de problemas continuos, de tal forma que [105] :

- El continuo se divide en un número finito de partes, “**elementos**”, cuyo comportamiento se especifica mediante un número finito de parámetros asociados a ciertos puntos característicos denominados “**nodos**”. Estos nodos son los puntos de unión de cada elemento con sus adyacentes.
- La solución del sistema completo sigue las reglas de los problemas discretos. El sistema completo se forma por ensamblaje de los elementos.
- Las incógnitas del problema dejan de ser funciones matemáticas y pasan a ser el valor de estas funciones en los nodos.
- El comportamiento en el interior de cada elemento queda definido a partir del comportamiento de los nodos mediante las adecuadas **funciones de interpolación ó funciones de forma**.

El MEF, por tanto, se basa en transformar un cuerpo de naturaleza continua en un modelo discreto aproximado, esta transformación se denomina discretización del modelo. El conocimiento de lo que sucede en el interior de este modelo del cuerpo aproximado, se obtiene mediante la interpolación de los valores conocidos en los nodos. Es por tanto una aproximación de los valores de una función a partir del conocimiento de un número determinado y finito de puntos.

5.1.2. Aplicación del método.

La forma más intuitiva de comprender el método, al tiempo que la más extendida, es la aplicación a una placa sometida a tensión plana. El MEF se puede entender, desde un punto de vista estructural, como una generalización del cálculo matricial de estructuras al análisis de sistemas continuos. De hecho el método nació por evolución de aplicaciones a sistemas estructurales.

Un elemento finito e viene definido por sus nodos (i,j,m) y por su contorno formado por líneas que los unen. Los desplazamientos \mathbf{u} de cualquier punto del elemento se aproximan por un vector columna \vec{u}

$$\vec{u} = \sum N_i a_i^e = [N_i \quad N_j \quad \dots] \begin{pmatrix} \vec{a}_i \\ \vec{a}_j \\ \dots \end{pmatrix} = N a^e \quad (5.1)$$

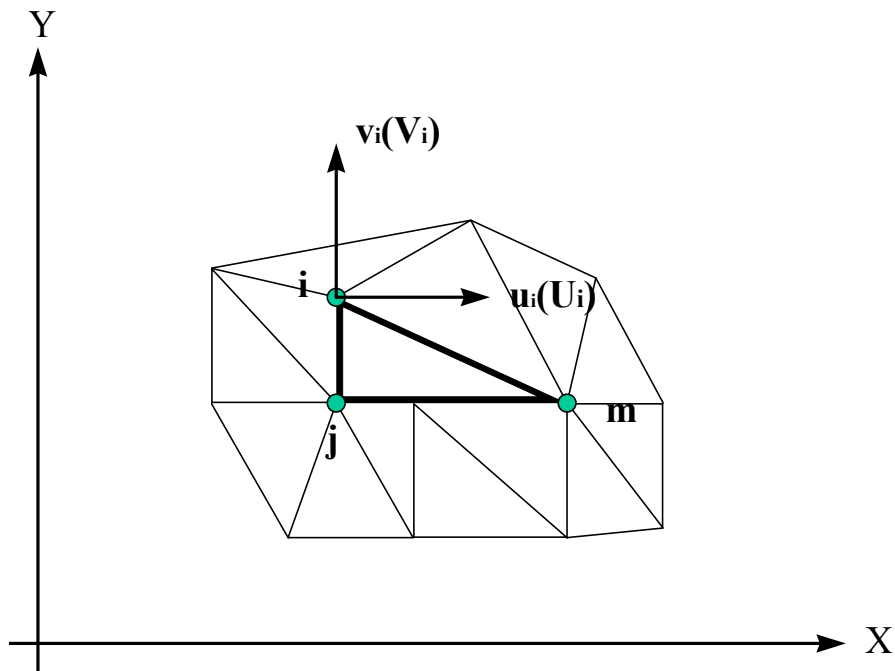


Figura 94. Coordenadas nodales (i, j, k) y desplazamientos de los nodos.

\mathbf{N} son funciones de posición dadas (funciones de forma) y \mathbf{a}^e es un vector formado por los desplazamientos nodales de los elementos considerados. Para el caso de tensión plana (figura 87)

$$\mathbf{u} = \begin{Bmatrix} u(x, y) \\ v(x, y) \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{a}_i = \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \end{Bmatrix}$$

- \mathbf{u} : son los movimientos horizontal y vertical en un punto cualquiera del elemento.
- \mathbf{a}_i : Son los desplazamientos del nodo i .

Las funciones $\mathbf{N}_i, \mathbf{N}_j, \mathbf{N}_m$, han de escogerse de tal forma que al sustituir en (5.1) las coordenadas nodales, se obtengan los desplazamientos nodales.

Conocidos los desplazamientos de todos los puntos del elemento, se pueden determinar las deformaciones (ϵ) en cualquier punto. Que vendrán dadas por una relación del tipo siguiente:

$$\varepsilon = Su \quad (5.2)$$

Siendo \mathbf{S} un operador lineal adecuado. Sustituyendo, la expresión (5.1) en (5.2) se obtiene las expresiones siguientes,

$$\varepsilon = Ba \quad (5.3)$$

$$B = SN \quad (5.4)$$

Suponiendo que el cuerpo está sometido a unas deformaciones iniciales ε_0 debidas a cambios térmicos, cristalizaciones, etc. y que tiene tensiones internas residuales σ_0 la relación entre tensiones y deformaciones en el cuerpo viene dada por

$$\sigma = D(\varepsilon - \varepsilon_0) + \sigma_0 \quad (5.5)$$

Siendo \mathbf{D} una matriz de elasticidad que contiene las propiedades del material o materiales.

Se define,

$$q^e = \begin{Bmatrix} q_i^e \\ q_j^e \\ \dots \end{Bmatrix}$$

como las fuerzas que actúan sobre los nodos, que son estáticamente equivalentes a las tensiones en el contorno y a las fuerzas distribuidas que actúan sobre el elemento. Cada fuerza q_i^e debe tener el mismo número de componentes que el desplazamiento nodal a_i correspondiente y debe ordenarse en las direcciones adecuadas. En el caso particular de tensión plana (ver figura), las fuerzas nodales son

$$q_i^e = \begin{Bmatrix} U_i \\ V_i \end{Bmatrix}$$

Las fuerzas distribuidas (\mathbf{b}) son las que actúan por unidad de volumen en direcciones correspondientes a los desplazamientos \mathbf{u} en ese punto. La relación entre las fuerzas nodales y tensiones en el contorno y fuerzas distribuidas se determina por medio del método de los trabajos virtuales (ver [105], Capítulo 2 para demostración). El resultado es el siguiente (V^e es el volumen del elemento \mathbf{e}),

$$q^e = \int_{V^e} B^T \sigma \cdot dV - \int_{V^e} N^T b \cdot dV \quad (5.6)$$

Esta expresión es válida con carácter general cualesquiera que sean las relaciones entre tensiones y deformaciones. Si las tensiones siguen una ley lineal como (5.5), se puede describir la ecuación en la forma siguiente,

$$\boxed{q^e = K^e a^e + f^e} \quad (5.7)$$

$$K^e = \int_{V^e} B^T D B \cdot dV$$

$$f^e = - \int_{V^e} N^T b \cdot dV - \int_{V^e} B^T D \varepsilon_0 \cdot dV + \int_{V^e} B^T \sigma_0 \cdot dV$$

En la expresión de f^e aparecen, por este orden, las fuerzas debidas a las fuerzas distribuidas, las deformaciones iniciales y las tensiones iniciales. K es la matriz de rigideces.

Si existiesen fuerzas distribuidas por unidad de superficie (t), se tendría que añadir un término adicional a las fuerzas nodales del elemento cuyo contorno posee una superficie A^e . el término adicional sería,

$$- \int_{A^e} N^T t \cdot dA$$

t tendrá que tener el mismo número de componentes que u para que la expresión anterior sea válida.

Una vez obtenidos los desplazamientos nodales por resolución de las ecuaciones, se puede calcular las tensiones en cualquier punto del elemento,

$$\sigma = D B a^e - D \varepsilon_0 + \sigma_0$$

5.1.3. Funciones de forma.

La interpolación es un elemento clave del MEF, puesto que es a través de las funciones de forma, o interpolación, que se consigue reducir el problema a la determinación de los corrimientos de unos nodos. Estas funciones deben dar valores suficientemente aproximados de los corrimientos de cualquier punto del elemento, en función de los corrimientos de los nodos.

5.1.3.1. Propiedades de las funciones de forma.

Propiedades de las funciones de forma [107]:

- Derivabilidad.

Si el operador S es de orden m la función de forma deberá soportar la m -ésima derivada.

- Integrabilidad.

Por coherencia con la ecuación (5.6), una vez se realiza la m -ésima derivada, la función de forma debe ser integrable.

- Semejanza con las leyes de distribución de corrimientos.

Las leyes de distribución de corrimientos son continuas, por lo que también lo deben ser las funciones una vez aplicado el operador \mathbf{S} .

- Condición de polinomio completo.

Si la función de forma escogida es polinómica, lo que suele ser lo más habitual, para que la función se aproxime hasta el término m -ésimo a la solución real, el polinomio debe ser completo.

5.1.3.2. Criterio de la parcela.

Es conveniente que las funciones de forma tengan la propiedad de valer la unidad en los nodos a los que están asociadas y que tengan un valor nulo en el resto. Este tipo de elementos se llaman **elementos conformes**, y aseguran la continuidad de la ley de corrimientos entre elementos.

Los **elementos no conformes** son, por tanto, los que no aseguran la unicidad de la ley de corrimientos, hecho que provoca la existencia de deformaciones infinitas en el contorno entre elementos. Este tipo de elementos es válido siempre que no disipe trabajo entre los contornos.

Es para este tipo de elementos no conformes que se emplea el criterio de la parcela, que comprueba la buena convergencia de este tipo de elementos. Consiste en aislar una porción de ellos del conjunto, aplicar un estado de corrimientos que provoque una deformación constante, si ésta se produce, no se disipa trabajo y el elemento es válido para la formulación.

5.1.3.3. Tipos de funciones de forma.

En cada elemento se pueden distinguir tres tipos de nodos, Primarios, secundarios e intermedios.

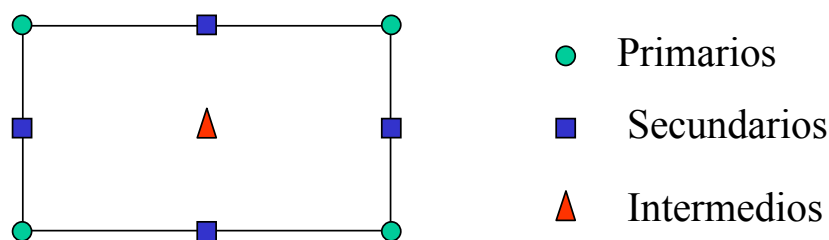


Figura 95. Tipos de nodos de un elemento.

Las funciones de forma se agrupan en dos familias principales en función del tipo de nodos [106] :

- Serendípicas: en las que sólo existen nodos frontera (primarios y secundarios).
- Lagrangianas: Incluyen además nodos intermedios.

Con el fin de conseguir un mayor ajuste de los elementos a la geometría del cuerpo, existe también una interpolación de tipo geométrico. Esto permite obtener elementos de lados curvos a partir de un elemento de referencia.

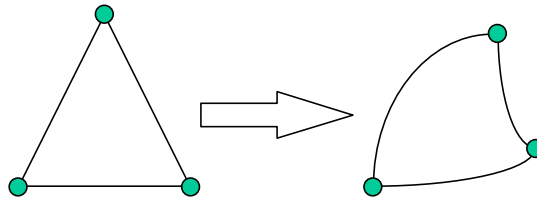


Figura 96. Transformación de la geometría mediante el empleo de funciones de interpolación.

No sólo pueden distorsionarse elementos bidimensionales en otros también bidimensionales, sino que se puede distorsionar elementos bidimensionales en elementos tridimensionales. Esto es así estableciendo una correspondencia biunívoca entre las coordenadas cartesianas y curvilíneas.

Es conveniente emplear funciones de forma también en las transformaciones curvilíneas que permiten la obtención de lados curvos.

Las transformaciones deben ser unívocas, es decir a cada punto del sistema cartesiano le debe corresponder un único punto del sistema curvilíneo, y viceversa. Es decir no pueden existir elementos con pliegues.

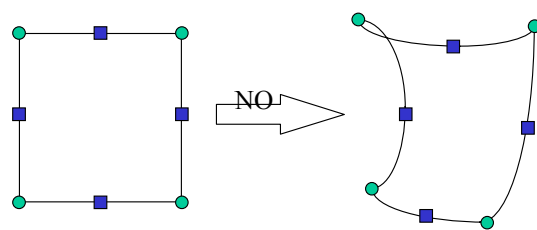


Figura 97. Transformación biunívoca que provoca pliegues en el elemento transformado.

Además no puede haber huecos ni solapes entre los elementos transformados.

Lo anterior se resume en dos teoremas que se pueden encontrar en [105] :

Teorema 1:

Cuando dos elementos contiguos están engendrados por “elementos generatrices” cuyas funciones de forma satisfacen las condiciones de continuidad, los elementos distorsionados (transformados) serán entonces continuos.

Teorema 2:

Si las funciones de forma N empleadas son tales que la continuidad de los corrimientos u se mantiene en las coordenadas del elemento generatriz, las condiciones de continuidad se satisfarán entonces en los elementos distorsionados.

Cuando el número de nodos que definen la forma geométrica del elemento es inferior al número de los utilizados en la interpolación de los corrimientos, se dice que el elemento es *subparamétrico*. Cuando es superior se dice que es *superparamétrico*.

En la mayoría de los casos se emplean las mismas funciones de interpolación para la geometría y para los corrimientos, siendo en este caso, los elementos *isoparamétricos*.

La transformación isoparamétrica mantiene la continuidad de los corrimientos entre elementos.

Como conclusión cabe decir que las funciones de forma tienen 3 cometidos principales dentro del MEF:

- Obtener resultados en cualquier punto del elemento por interpolación de los valores nodales.
- Permitir transformaciones geométricas que permiten adaptar el mallado a la forma del cuerpo analizado de una manera más exacta.
- Realizar la integración de las ecuaciones mediante la sustitución de las funciones elementales por polinomios de Legendre (ver 5.4).

5.1.4. Integración numérica.

Las transformaciones curvilíneas transforman las coordenadas x, y, z a las coordenadas locales ζ, η, ξ .

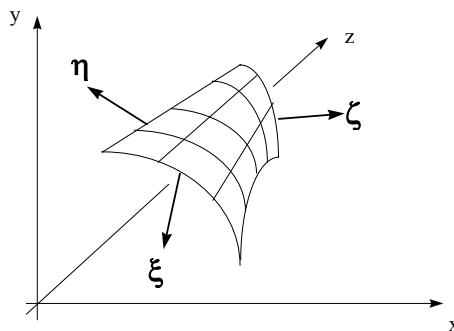


Figura 98. Sistema de coordenadas locales (ζ, ξ, η) y sistema global de coordenadas cartesianas (X, Y, Z).

Esto implica introducir un cambio de variable en las ecuaciones integrales que describen el comportamiento de los elementos. Las derivadas de las funciones de forma que intervienen en la expresión de \mathbf{B} son respecto a $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}$, que guardan la relación (5.8) respecto a las coordenadas locales.

$$K^e = \int_{V^e} B^T DB \cdot dV$$

$$f_b^e = - \int_{V^e} N^T b \cdot dV \qquad f_\sigma^e = - \int_{V^e} B^T \sigma_0 \cdot dV$$

$$f_\varepsilon^e = - \int_{V^e} B^T D \varepsilon_0 \cdot dV \qquad f_t^e = - \int_{A^e} N^T t \cdot dA$$

$$\frac{\partial N_j}{\partial x_i} = [J]^{-1} \frac{\partial N_j}{\partial \zeta_i} \qquad (5.8)$$

Donde \mathbf{J} es la matriz Jacobiana de la transformación.

$$[J] = \begin{bmatrix} \partial x / \partial \zeta & \partial y / \partial \zeta & \partial z / \partial \zeta \\ \partial x / \partial \eta & \partial y / \partial \eta & \partial z / \partial \eta \\ \partial x / \partial \xi & \partial y / \partial \xi & \partial z / \partial \xi \end{bmatrix} \qquad (5.9)$$

Los diferenciales de volumen en cada sistema de coordenadas vienen relacionados de la forma,

$$dx \cdot dy \cdot dz = \det[J] \cdot d\zeta \cdot d\eta \cdot d\xi$$

Una vez realizada la transformación, la integración es más sencilla en el sistema de coordenadas local (ζ, η, ξ) , que en el cartesiano $(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z})$ en el que los dominios están distorsionados. Pero la obtención del resultado final puede presentar ciertos problemas ya que [106].

- $\det[J]$ puede ser cero a causa de una mala discretización, por lo que la solución no es posible;
- el proceso de elaboración del jacobiano es laborioso y consume recursos.
- el jacobiano puede estar mal condicionado ($\det [J]$ próximo a cero).

Es el último de los problemas enunciados el más peligroso de todos, puesto que puede introducir errores numéricos difíciles de detectar. En otras palabras, puede producir una $[J]^{-1}$ errónea.

La integración numérica consiste en sustituir la función que se pretende integrar por un polinomio de interpolación (otra función de forma) que pase por un determinado número de puntos llamados **puntos**

de Gauss. La integración del polinomio se realiza posteriormente a través de una suma ponderada de los valores de la función en estos puntos de Gauss (5.10).

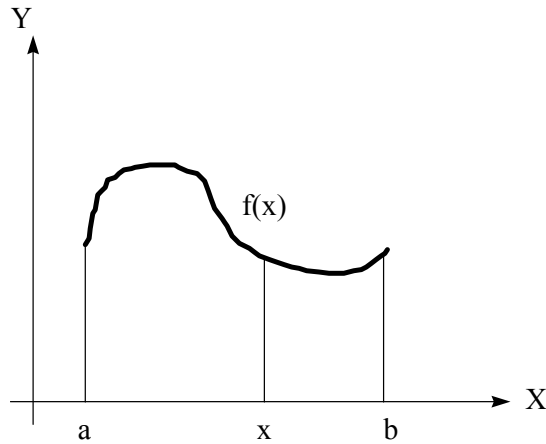


Figura 99. Límites de integración de la función f.

$$\int_a^b f(x) \cdot dx \approx \int_a^b P(x) \cdot dx$$

$$\int_a^b P(x) \cdot dx = \sum H_i \cdot f(x_i); H_i; \text{factor de peso.} \tag{5.10}$$

El método más empleado para sustituir la función por un polinomio es la *cuadratura de Gauss-Legendre*. El método permite integrar cualquier función entre **-1** y **+1**, sustituyendo la función a integrar (f(x)) por un polinomio de Legendre de grado **2n-1**. Tomando como base los **n** puntos de Gauss se puede obtener un valor tan aproximado a la integral como se desee.

Las abscisas de los puntos de Gauss corresponden a las raíces del polinomio de Legendre escogido.

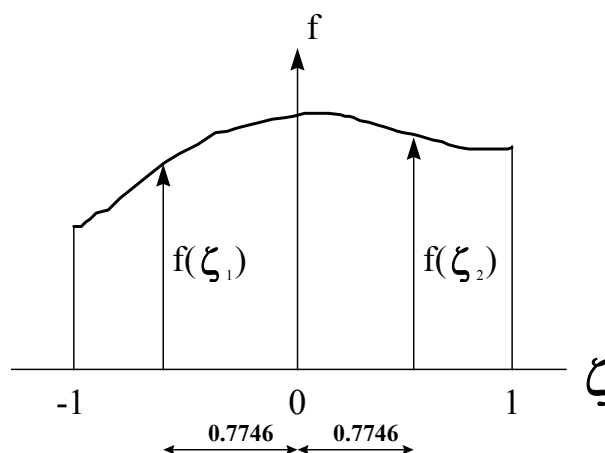


Figura 100. Integración de Gauss-Legendre de la función f.

Los valores de los factores de peso para los distintos grados de polinomios de Legendre se pueden ver en la tabla adjunta , reproducida de [105] hasta n=7.

$\int_{-1}^1 f(x) \cdot dx = \sum_{j=1}^n H_j \cdot f(a_j); H_j; \text{factor de peso.}$		
±a	n	H
0	1	2.00000 00000 00000
0.57735 02691 89626	2	1.00000 00000 00000
0.77459 66692 41483 0.00000 00000 00000	3	0.55555 55555 55555 0.88888 88888 88888
0.86113 63115 94053 0.33998 10435 84856	4	0.34785 48451 37454 0.65214 51548 62546
0.90617 98459 38664 0.53846 93101 05683 0.00000 00000 00000	5	0.23692 68850 56189 0.47862 86704 99366 0.56888 88888 88889
0.93246 95142 03152 0.66120 93864 66265 0.23861 91860 83197	6	0.17132 44923 79710 0.36076 15730 48139 0.46791 39345 72691
0.94910 79123 42759 0.74153 11855 99394 0.40584 51513 77397 0.00000 00000 00000	7	0.12948 49661 68870 0.27970 53914 89277 0.38183 00505 05119 0.41795 91836 73469

Como conclusión final se dirá que los **puntos de Gauss** son los puntos óptimos para la evaluación de tensiones y deformaciones [106] (o cualesquiera otras incógnitas a despejar). En los otros puntos del elemento la aproximación es pobre y los errores pueden llegar a ser muy considerables. Por ello, las tensiones nunca deben ser evaluadas en los nodos directamente, a diferencia de los corrimientos, sino en los puntos de Gauss. Y sus valores en éstos se deben obtener por extrapolación de los resultados en los puntos de Gauss.

5.1.5. Estimación del error y mallado adaptativo.

Son diversas las fuentes de error en el análisis de problemas empleando el MEF. Se recogen a continuación un esquema de errores posibles extraído de [106] :

- Errores de modelización:
 - * En la modelización de cargas exteriores
 - * Modelización de condiciones de contorno.

- * Propiedades de los materiales.
- Errores en la discretización:
 - * *Errores en la aproximación de la geometría.* Por falta de capacidad de las funciones de forma geométricas de representar con exactitud la geometría real. Este problema se resuelve aumentando el mallado o refinándolo en las zonas conflictivas.
 - * *Errores en la discretización.* Relacionados con el tamaño del elemento y la función de forma de los corrimientos de los nodos. Como norma general se emplean elementos pequeños en las zonas de variación rápida de la solución, y elementos grandes en las zonas de variación lenta.
- Errores de computación.
 - * *Error en la integración sobre los elementos.* Dado que hay que tomar un grado de polinomio de Legendre, hay que aceptar un cierto grado de error (asociado al grado del polinomio).
 - * *Error en la resolución del sistema de ecuaciones.* Por errores de truncamiento en la representación interna del ordenador de los números reales, y por errores de redondeo.

5.1.5.1. Estimación del error.

La forma exacta de determinar los errores asociados a la solución del problema, es conocer la solución exacta y restarle el valor obtenido.

$$e_{\text{corrimientos}} = u_{\text{real}} - u_{\text{calculada}} \quad (5.11 \text{ a})$$

$$e_{\text{deformaciones}} = \varepsilon_{\text{real}} - \varepsilon_{\text{calculada}} \quad (5.11 \text{ b})$$

$$e_{\text{tensiones}} = \sigma_{\text{real}} - \sigma_{\text{calculada}} \quad (5.11 \text{ c})$$

Los estimadores de error que se emplean se basa en *normas*, que representan alguna cantidad escalar integral, para medir el error o la función misma.

La norma que se suele emplear es la norma de energía, que viene dada por,

$$\|e\| = \left[\int_{\Omega} (\varepsilon_{\text{real}} - \varepsilon_{\text{calculada}}) \cdot (\sigma_{\text{real}} - \sigma_{\text{calculada}}) \cdot d\Omega \right]^{1/2} \quad (5.12)$$

Expresión que guarda una relación directa con la energía de deformación del sistema, que viene dada por la expresión [105] :

$$dU = \int_{\Omega} d\varepsilon^T \cdot \sigma \cdot d\Omega$$

La dificultad estriba en que nunca se conocen los valores reales. Por ello la única manera que se ha encontrado de evaluar la bondad de las soluciones es mediante estimadores de error que comparan la solución $\sigma_{calculada}$ obtenida respecto a una solución obtenida interpolando con funciones \mathbf{N} del mismo tipo que las empleadas para representar el campo de corrimientos $u_{calculada}$. El resultado obtenido es $\hat{\sigma}$, un campo de tensiones “aplanado”. El error estimado es

$$e_{\sigma} = \hat{\sigma} - \sigma_{calculada} \quad (5.13)$$

Este valor e_{σ} se puede introducir en la norma (5.12) para calcular el error de esta norma o cualquier otra (corrimientos, deformaciones, etc).

5.1.5.2. Mallado adaptativo.

La importancia de disponer de un medio para evaluar el error que se comete en el cálculo radica en que permite el refinamiento de los mismos. La finalidad es conseguir obtener resultados por debajo de un error marcado.

Existen 3 formas de refinamiento de los problemas:

- **Método H:** Consiste en la reducción del error actuando directamente sobre el tamaño del elemento y manteniendo constante la función de forma. Presenta dos inconvenientes, es el método más lento, desde el punto de vista de velocidad de convergencia; y se pierde el control sobre el mallado, pudiendo generarse mallas distorsionadas.
- **Método P:** Consiste en ir aumentando progresivamente el grado de los polinomios de interpolación (funciones de forma), manteniendo fijo el tamaño de los elementos. Tiene mayor velocidad de convergencia que el método H, pero presenta el problema de que requiere acotar el grado máximo del polinomio. Un grado muy alto podría provocar rizado en las soluciones.
- **Método HP:** Consiste en el uso secuencial de ambas técnicas. En primer lugar se optimiza el mallado a la geometría, y posteriormente se modifica el grado del polinomio hasta alcanzar el error deseado.

En la resolución de los problemas de este proyecto de tesis no se ha empleado ninguna técnica de mallado adaptativo. La razón de no emplearlo ha sido condicionada por la no existencia en el programa de elementos finitos de elementos electromagnéticos que dispusieran de esta opción. La

razón, como se verá en 6.4, son las discontinuidades que se producen en la interfase entre materiales diferentes.

5.1.6. Pasos a seguir en el cálculo MEF. Funcionamiento de un programa de elementos finitos.

Los programas para cálculo por elementos finitos disponen de tres módulos de trabajo:

- Pre-procesador: Donde se prepara el modelo para el cálculo. en el se realizan las operaciones de
 - * Dibujo del modelo, o importación si se ha generado por medio de un sistema CAD que genere ficheros compatibles.
 - * Selección del tipo de elemento o elementos a emplear. En función del tipo de cálculos a realizar estos programas suelen disponer de diferentes tipos de elementos que son especiales para cada aplicación. Por ejemplo, suelen tener elementos especiales para cálculos de tensiones planas, tensiones 3D, electrostática, magnetostática, elementos de contacto, etc.
 - * Selección de los materiales a emplear, que pueden obtenerse por librerías, o ser definidos por el usuario. Esto último es común cuando se emplean materiales de propiedades no lineales o materiales anisotrópicos.
 - * Asignación de elemento y propiedades de materiales a los diferentes componentes del modelo.
 - * Mallado de los componentes del modelo.
 - * Aplicación de las cargas exteriores (puntuales, lineales o superficiales).
 - * Aplicación de las condiciones de contorno del modelo.
- Calculador: Es la parte del programa que realiza todo el cálculo del MEF y genera las soluciones. Los pasos que sigue son los siguientes:
 - Selección del tipo de cálculo a realizar, por ejemplo si es un análisis transitorio, en régimen armónico, estático, etc.
 - Configuración de los parámetros de cálculo. Selección de intervalos de tiempo, norma del error, número de iteraciones, etc.
 - Inicio del cálculo: el programa empieza transfiriendo las cargas al modelo, genera las matrices de rigidez, realiza la triangulación de la matriz, resuelve el sistema de ecuaciones y genera la solución.
- Post-procesador: es la herramienta que permite la representación gráfica de los resultados, así como resultados indirectos que se pueden obtener operando las soluciones del modelo.

5.2. EL MEF APLICADO AL ELECTROMAGNETISMO.

5.2.1. Ecuaciones de partida.

Las ecuaciones que rigen el comportamiento de los campos electromagnéticos son las 4 ecuaciones de Maxwell,

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \vec{J}_s + \vec{J}_e + \vec{J}_v + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \quad (6.1)$$

$$\nabla \times \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (6.2)$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \quad (6.3)$$

$$\nabla \cdot \vec{D} = \rho \quad (6.4)$$

$\nabla \times$:	Operador rotacional.
∇ :	Operador divergencia.
\vec{H} :	Vector intensidad de campo magnético.
\vec{J} :	Vector densidad de corriente.
\vec{J}_s :	Vector densidad de corriente fuente.
\vec{J}_e :	Vector densidad de corriente de pérdidas inducidas.
\vec{J}_v :	Vector densidad de corriente de velocidad.
\vec{D} :	Vector desplazamiento o densidad de flujo eléctrico.
t:	Tiempo
\vec{E} :	Vector intensidad de campo eléctrico.
\vec{B} :	Vector densidad de flujo magnético.
ρ :	Densidad de carga eléctrica.

La ecuación de continuidad $\nabla \cdot \left[\vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right] = 0$, se deriva de la (6.1) y debe cumplirla cualquier conjunto de ecuaciones de Maxwell.

La relación entre los vectores de densidad e intensidad de campo magnético viene dada por,

$$\vec{B} = [\mu] \cdot \vec{H} \quad (6.5)$$

donde $[\mu]$ es la matriz de permeabilidad magnética que es, generalmente, función de \vec{H} y/o de la temperatura. Si es función únicamente de la temperatura, viene dada en la forma,

$$[\mu] = \mu_0 \begin{bmatrix} \mu_{rx} & 0 & 0 \\ 0 & \mu_{ry} & 0 \\ 0 & 0 & \mu_{rz} \end{bmatrix} \quad (6.6)$$

μ_0 : permeabilidad del vacío.

μ_{rx} : permeabilidad relativa en la dirección X.

Si es función únicamente del campo, la expresión es,

$$[\mu] = \mu_h \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (6.7)$$

μ_h : Permeabilidad obtenida de la curva B-H

Cuando se incluye en el análisis imanes permanentes, la relación (6.5) se convierte en la (6.8).

$$B = [\mu] \cdot \vec{H} + \mu_0 \vec{M}_0 \quad (6.8)$$

\vec{M}_0 : Vector magnetización remanente.

El vector intensidad de campo se puede obtener despejándolo de la ecuación anterior.

$$\vec{H} = [\nu] \cdot \vec{B} - \frac{1}{\nu_0} [\nu] \cdot \vec{M}_0 \quad (6.9)$$

$[\nu]$: Matriz de reluctividad $[\mu]^{-1}$

ν_0 : reluctividad del vacío $1/\mu_0$

Las relaciones equivalentes par el campo eléctrico son las que se muestran a continuación,

$$\vec{J} = [\sigma] \cdot \vec{E} + \vec{v} \times \vec{B} \quad (6.10)$$

\vec{v} : Vector velocidad.

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{zz} \end{bmatrix} \quad \text{Matriz de conductividad eléctrica.}$$

σ_{xx} : Conductividad en la dirección X.

$$\vec{D} = [\varepsilon] \cdot \vec{E} \quad (6.11)$$

$$[\varepsilon] = \begin{bmatrix} \varepsilon_{XX} & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_{YY} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{ZZ} \end{bmatrix} \quad \text{Matriz de permitividades.}$$

ε_{XX} : Permitividad en la dirección X.

5.2.2. Métodos de resolución por el MEF.

Los métodos de resolución de problemas de campos electromagnéticos emplean funciones de potencial. Existen dos tipos:

- Funciones potencial vector.
- Funciones potencial escalar.

Las regiones donde se aplican los métodos de resolución son los mostrados en la figura siguiente.

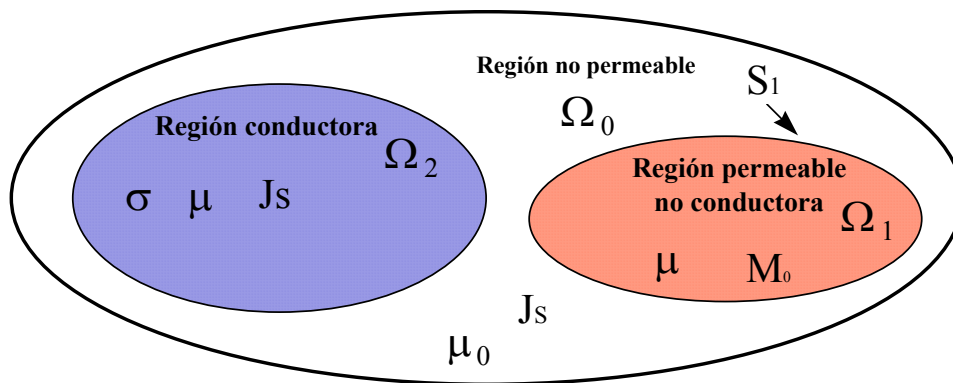


Figura 101. Dominios de aplicación del MEF.

5.2.3. Solución empleando el Potencial Escalar Magnético.

Se emplea en magnetostática (dominios Ω_0 y Ω_1), es decir, cuando se ignoran los efectos del tiempo sobre las magnitudes electromagnéticas. Esto reduce las ecuaciones de Maxwell a dos,

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J}_s \quad (6.12)$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0$$

Sólo se tienen en cuenta las regiones Ω_0 y Ω_2 . La solución buscada tiene la forma siguiente,

$$\vec{H} = \vec{H}_g - \nabla \phi_g \quad (6.13)$$

$$\nabla \cdot [\mu] \nabla \phi_g - \nabla \cdot [\mu] \vec{H}_g - \nabla \cdot \mu_0 \vec{M}_0 = 0 \quad (6.14)$$

\vec{H}_g : Campo magnético de prueba.

ϕ_g : Potencial generalizado.

El campo de prueba debe satisfacer la ley de Ampère (6.12) y el potencial generalizado da el resto del campo hasta llegar al campo buscado. El valor absoluto de \vec{H}_g debe ser mayor que $\nabla \phi_g$.

Existen tres estrategias diferentes de solución de las ecuaciones empleando el potencial escalar, y en todas ellas es esencial la correcta selección del campo de prueba \vec{H}_g . La elección de este campo de prueba va siempre asociado a la Ley de Biot-Savart y al campo obtenido de ella \vec{H}_s ,

$$\vec{H}_s = \frac{1}{4\pi} \cdot \int_V \frac{\vec{J}_s \times \vec{r}}{|\vec{r}|^3} dV \quad (6.15)$$

\vec{r} : Vector posición de la fuente de corriente al nodo.

V : Volumen ocupado por la fuente de corriente \vec{J}_s .

La ecuación (6.15) se puede reducir a una integral de superficie [110],

$$H_s = \frac{1}{4\pi} \int_A \frac{\vec{J}_s}{\vec{r}} dA \quad (6.16)$$

A : Superficie de la fuente de corriente.

Hay tres estrategias diferentes para obtener la solución [109]:

- RSP: Reduced Scalar Potential (Potencial Escalar Reducido).
- DSP: Difference Scalar Potential (Diferencias de Potencial Escalar).

- GSP: General Scalar Potential (Potencial Escalar General).

5.2.3.1. Estrategia RSP.

Aplicable cuando la permeabilidad relativa vale la unidad, es decir, cuando $[\mu] = \mu_0 [I]$, o cuando no existen fuentes de corriente $\vec{J}_s = 0$. Fue desarrollada por O.C. Zienkiewicz [105] y [106] y es un procedimiento de un sólo paso, las ecuaciones (6.13) y (6.14) se resuelven haciendo,

$$\vec{H}_g = \vec{H}_s \quad (6.17)$$

permite tener en cuenta materiales no lineales e imanes permanentes. Se aplica a las regiones Ω_1 y Ω_0 .

5.2.3.2. Estrategia DSP.

Se emplea cuando existen fuentes de corriente $\vec{J}_s \neq 0$ y regiones de permeabilidad distinta a la del vacío que no encierran corriente alguna. Es decir que la integral circular de campo en esta región debe tender a cero cuando la permeabilidad tiende a infinito.

$$\oint H \cdot dl \rightarrow 0 \text{ cuando } \mu \rightarrow \infty \quad (6.18)$$

Se realiza en dos pasos, el primero es sustituir en (6.13) y (6.14)

$$\vec{H}_g = \vec{H}_s \text{ en } \Omega_0 \text{ y } \Omega_1 \quad (6.19)$$

sujeta a la siguiente condición

$$\vec{n} \times \vec{H}_g = 0 \text{ en } S_1 \quad (6.20)$$

Esta condición de contorno se cumple empleando valores muy altos de permeabilidad en la región Ω_1 . Esto provoca que el campo efectivo en esta región sea prácticamente cero $\vec{H}_1 = 0$. El campo en la zona Ω_0 es,

$$\vec{H}_0 = \vec{H}_s - \nabla \phi_g \text{ en } \Omega_0 \quad (6.21)$$

En un segundo paso, se emplean los campos calculados en el primer paso como campos de prueba para las ecuaciones (6.13) y (6.14).

$$\vec{H}_g = 0 \text{ en } \Omega_1$$

$$\vec{H}_g = \vec{H}_0 \text{ en } \Omega_0$$

En este paso se tienen en cuenta la no linealidad de los materiales y la presencia, si la hay, de imanes permanentes. Este paso produce los campos siguientes,

$$\vec{H}_1 = -\nabla \phi_g \text{ en } \Omega_1$$

$$\vec{H}_0 = \vec{H}_g - \nabla \phi_g \text{ en } \Omega_0$$

5.2.3.3. Estrategia GSP.

Se aplica cuando existen en fuentes de corriente $\vec{J}_s \neq 0$ y cuando existen regiones de permeabilidad distinta a la del vacío (Ω_1) con fuentes de corriente en su interior. Este método requiere tres pasos.

- Primer paso.

Se aplica una solución a la región Ω_1 mediante la sustitución, $\vec{H}_g = \vec{H}_s$, sujeto a la siguiente restricción, $\vec{n} \cdot [\mu] \cdot (\vec{H}_g - \nabla \phi_g) = 0 \text{ en } S_1$. En este paso se pueden considerar las saturaciones, pero no los imanes permanentes, si los hay. El campo resultante es

$$\vec{H}_1 = \vec{H}_s - \nabla \phi_g$$

- Segundo paso.

Se busca la solución para la región Ω_0 haciendo la siguiente sustitución $\vec{H}_g = \vec{H}_s$, sujeta a la restricción en S_1 ,

$$\vec{n} \times \vec{H}_g = \vec{n} \times \vec{H}_1$$

Esta restricción se satisface de manera automática restringiendo el potencial escalar solución ϕ_g a la superficie S_1 tal como se tomó en el paso 1. La solución que se obtiene en Ω_0 es,

$$\vec{H}_0 = \vec{H}_s - \nabla \phi_g$$

- Tercer paso.

Se emplean los campos calculados en los dos pasos anteriores como campo de prueba en las ecuaciones (5.13) y (5.14). $\vec{H}_g = \vec{H}_1$ en Ω_1 y $\vec{H}_g = \vec{H}_0$ en Ω_0 .

En este paso se pueden tener en cuenta tanto saturaciones como imanes permanentes.

5.2.4. Solución empleando el Potencial Vector Magnético.

En este método se consideran campos estáticos y dinámicos, pero se desprecian los efectos de las corrientes de desplazamiento. Las ecuaciones de Maxwell con las que se trabaja son las siguientes,

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J} \quad (6.21)$$

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (6.22)$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \quad (6.23)$$

La solución se busca introduciendo el potencial vector magnético \vec{A} , que permite expresar los campos eléctrico (\vec{E}) y magnético (\vec{B}) en la forma que se muestra a continuación.

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A} \quad (6.24)$$

$$\vec{E} = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \nabla V \quad (6.25)$$

\vec{A} : Potencial Vector Magnético

V : Potencial eléctrico escalar.

Las ecuaciones empleadas en el método son [109],

$$\nabla \cdot \left(-[\sigma] \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - [\sigma] \nabla V + \vec{v} \times [\sigma] \nabla \times \vec{A} \right) = 0 \text{ en } \Omega_2 \quad (6.26)$$

$$\nabla \times [v] \nabla \times \vec{A} - \nabla v_e \nabla \cdot \vec{A} = \vec{J}_s + \nabla \times \frac{1}{v_0} [v] \vec{M}_0 \text{ en } \Omega_0 + \Omega_1 \quad (6.27)$$

siendo $v_e = \frac{1}{3} \text{tr}[v] = \frac{1}{3} (v(1,1) + v(2,2) + v(3,3))$.

Se ha comprobado que en modelos tridimensionales con diferentes permeabilidades este método no es recomendable. Se ha demostrado que se obtienen soluciones erróneas cuando la componente normal del potencial vector \vec{A} es elevada en la interfase entre elementos con distinta permeabilidad [109].

Los problemas se pueden resolver empleando elementos que admiten componente normal discontinua para el potencial vector. **ANSYS dispone de un elemento de este tipo denominado SOLID 117, que ha sido el elemento empleado en las simulaciones.**

5.2.5. Método de resolución de campos electrostáticos. Potencial Escalar Eléctrico.

Los campos electrostáticos cumplen las ecuaciones de Maxwell,

$$\nabla \times \vec{E} = 0 \quad (6.28)$$

$$\nabla \cdot \vec{D} = \rho \quad (6.29)$$

siendo ρ la densidad de carga libre. La relación entre ambos campos es la constante dieléctrica ε ,

$$\vec{D} = [\varepsilon] \cdot \vec{E} \quad (6.30)$$

Las condiciones de contorno a tener en cuenta al trabajar con campos electrostáticos se refieren a las relaciones entre componentes en la interfase entre medios distintos.

$$\vec{E}_{t1} - \vec{E}_{t2} = 0 \quad \text{Relación entre componentes tangenciales y normales}$$

$$\vec{D}_{n1} - \vec{D}_{n2} = \rho_S \quad \rho_S: \text{densidad superficial de carga}$$

La solución se obtiene introduciendo el potencial escalar eléctrico V que permite expresar el campo en la forma,

$$\vec{E} = -\nabla V \quad (6.31)$$

La ecuación correspondiente a la divergencia del vector desplazamiento es la que sigue,

$$-\nabla \cdot [\varepsilon] \nabla V = \rho \quad (6.32)$$

5.2.6. Matrices de parámetros electromagnéticos.

5.2.6.1. Empleando el Potencial escalar magnético.

Su empleo está restringido a campos estáticos con permeabilidad no lineal limitada.

- Grados de libertad:

$$\phi_e : \text{Potencial escalar magnético}$$

- Matriz de Coeficientes:

$$[K^m] = [K^L] + [K^N] \quad (6.33)$$

$$[K^L] = \int_V (\nabla \vec{N}^T)^T \cdot [\mu] \cdot (\nabla \vec{N}^T)^T \cdot dV \quad (6.34)$$

$$[K^N] = \int_V \frac{d\mu_h}{d|\vec{H}|} (\vec{H}^T \nabla \vec{N}^T)^T (\vec{H}^T \nabla \vec{N}^T)^T \frac{dV}{|\vec{H}|} \quad (6.35)$$

- Cargas:

$$J_i = \int_V (\nabla \vec{N}^T)^T \cdot [\mu] \cdot (\vec{H}_g + \vec{H}_c) dV \quad (6.36)$$

\vec{N} : Funciones de forma $\phi = \vec{N}^T \cdot \phi_e$.

V : Volumen del elemento.

\vec{H}_g : Campo de prueba.

\vec{H}_c : Campo coercitivo.

$[\mu]$: Matriz de permeabilidad.

$\frac{d\mu_h}{d|\vec{H}|}$: Derivada de la permeabilidad. Se obtiene de la curva B-H.

El campo coercitivo está relacionado con la magnetización remanente a través de la siguiente expresión.

$$[\mu] \cdot \vec{H}_c = \mu_0 \cdot \vec{M}_0 \quad (6.37)$$

La ecuación básica a resolver es,

$$\boxed{[K^m] \cdot \phi_e = \vec{J}_i} \quad (6.38)$$

5.2.6.2. Empleando el Potencial vector magnético.

Las expresiones resultantes son aplicables a campos estáticos y/o dinámicos, permeabilidad no lineal y campos parcialmente ortótropos.

- Ecuación a resolver,

$$\boxed{[C] \cdot \frac{d}{dt} \vec{u} + [K] \cdot \vec{u} = \vec{J}_i} \quad (6.39)$$

- Grados de libertad:

$$\vec{u} = \begin{bmatrix} \vec{A}_e \\ \vec{v}_e \end{bmatrix} \quad (6.40)$$

\vec{A}_e : Potenciales vectores magnéticos de los elementos

v_e : Potencial escalar eléctrico integrado $v = \int V \cdot dt$

- Matrices de coeficientes:

$$[K] = \begin{bmatrix} [K^A] & [0] \\ [K^B] & [0] \end{bmatrix} \quad (6.41)$$

$$[K^A] = [K^L] + [K^N] + [K^G] \quad (6.42)$$

$$[K^L] = \int_V (\nabla \times [N_A]^T)^T \cdot [v] \cdot (\nabla \times [N_A]^T - [N_A] \cdot [\sigma] \cdot (\vec{v} \times \nabla \times [N_A]^T)) \cdot dV \quad (6.43)$$

$$[K^G] = \int_V (\nabla \cdot [N_A]^T)^T \cdot [\mu] \cdot (\nabla \cdot [N_A]^T) \cdot dV \quad (6.44)$$

$$[K^N] = 2 \cdot \int_V \frac{d\mathbf{v}_h}{d(B^2)} \cdot (\vec{B}^T \cdot (\nabla \times [N_A]^T))^T \cdot (\vec{B}^T \cdot (\nabla \times [N_A]^T)) \cdot dV \quad (6.45)$$

$$[K^B] = - \int_V (\nabla \cdot [N]^T)^T \cdot [\sigma] \cdot (\vec{v} \times \nabla \times [N_A]^T) \cdot dV \quad (6.46)$$

$$[C] = \begin{bmatrix} [C^A] & [C^{AB}] \\ [C^{AB}]^T & [C^B] \end{bmatrix} \quad (6.47)$$

$$[C^A] = \int_V [N_A] \cdot [\sigma] \cdot [N_A]^T \cdot dV \quad (6.48)$$

$$[C^A] = \int_V [N_A] \cdot [\sigma] \cdot \nabla \cdot \vec{N}^T \cdot dV \quad (6.49)$$

$$[C^A] = \int_V (\nabla \cdot \vec{N}^T)^T \cdot [\sigma] \cdot \nabla \cdot \vec{N}^T \cdot dV \quad (6.50)$$

- Cargas:

$$\vec{J}_i = \begin{bmatrix} \vec{J}^A \\ \vec{I}^t \end{bmatrix} \quad (6.51)$$

$$\vec{J}^A = \vec{J}^S + \vec{J}^M \quad (6.52)$$

$$\vec{J}^S = \int_V \vec{J}_S \cdot [N_A]^T \cdot dV \quad (6.53)$$

$$\vec{J}^M = \int_V (\nabla \times [N_A]^T) \cdot \vec{H}_C \cdot dV \quad (6.54)$$

$$\vec{I}^t = \int_V \vec{J}_t \cdot [N_A]^T \cdot dV \quad (6.55)$$

$[N_A]$:	Matriz de funciones de forma elementales para el potencial vector magnético \vec{A} . $\vec{A} = [N_A]^T \cdot \vec{A}_e$.
\vec{N} :	Vector de funciones de forma elementales para el potencial eléctrico escalar V. $V = \vec{N}^T \cdot \vec{V}_e$. \vec{V}_e : vector formado por los potenciales elementales.
\vec{J}_S :	Vector densidad de corriente de la fuente de corriente.
\vec{J}_t :	Vector densidad de corriente total.
V :	Volumen del elemento-
\vec{H}_C :	Campo coercitivo.
ν_0 :	Reluctividad del vacío.
$[\nu]$:	Matriz de reluctividad.
$\frac{d\nu_h}{d(B^2)}$:	Derivada que se obtiene de la curva B-H.
$[\sigma]$:	Matriz de conductividades.
\vec{v} :	Vector velocidad.

La relación entre la magnetización remanente y el campo coercitivo viene dado por la relación,

$$H_C = \frac{1}{\nu_0} [\nu] \cdot [M_0] \quad (6.56)$$

5.2.6.3. Empleando el Potencial escalar eléctrico.

Aplicable a problemas donde el campo es electrostático.

- Ecuación a resolver,

$$\boxed{[K_e^P] \cdot \vec{V}_e = \vec{Q}_e} \quad (6.57)$$

- Matriz de coeficientes:

$$[K_e^P] = \int_V (\nabla \cdot \vec{N}^T)^T \cdot [\epsilon] \cdot (\nabla \cdot \vec{N}^T) \cdot dV \quad (6.58)$$

- Cargas:

$$\vec{Q}_e = Q_e^V + Q_e^S \quad (6.59)$$

$$\vec{Q}_e^V = \int_V \vec{\rho} \cdot \vec{N}^T \cdot dV \quad (6.60)$$

$$\vec{Q}_e^S = \int_S \vec{\rho}_S \cdot \vec{N}^T dS \quad (6.61)$$

- \vec{N} : Vector de funciones de forma elementales $V = \vec{N}^T \cdot \vec{V}_e$
- $\vec{\rho}$: Vector densidad de carga.
- $\vec{\rho}_S$: Vector densidad superficial de carga.

5.2.7. Magnitudes resultantes.

5.2.7.1. Resultado obtenido por el método del Potencial escalar magnético.

El resultado que se obtiene de resolver el sistema (6.38) es el potencial escalar generalizado ϕ_g . Por medio de las funciones de forma se obtiene el vector intensidad de campo.

$$\vec{H}_\alpha = -\nabla \cdot \vec{N}^T \cdot \phi_g \quad \vec{N}: \text{Funciones de forma.} \quad (6.62)$$

El campo total resultante se obtiene de sumar a este campo el campo generalizado descrito en 6.3.

$$\vec{H} = \vec{H}_g + \vec{H}_\alpha \quad (6.63)$$

La densidad de campo se obtiene directamente multiplicando el campo resultante por la matriz de permeabilidades.

$$\vec{B} = [\mu] \cdot \vec{H}$$

5.2.7.2. Resultado obtenido por el método del Potencial vector magnético.

De la ecuación (6.39) se obtiene el potencial vector magnético, a partir del cual se determina la densidad de flujo,

$$\vec{B} = \nabla \times [N_A]^T \cdot \vec{A}_e \quad (6.64)$$

\vec{N}_A : Funciones de forma.
 \vec{A}_e : Potencial vector nodal.

A partir de estos valores se determina el valor de la intensidad de campo por medio de la matriz de reluctividades.

$$\vec{H} = [v] \cdot \vec{B} \quad (6.65)$$

Si se analiza un problema donde hay variación temporal del potencial vector, se calculan las densidades de corriente.

$$\vec{J}_t = \vec{J}_e + \vec{J}_s + \vec{J}_v \quad (6.66)$$

$$\vec{J}_e = -[\sigma] \cdot \frac{\partial A}{\partial t} = -[\sigma] \cdot \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n [N_A]^T \cdot \dot{\vec{A}}_e \quad (6.67)$$

$$\vec{J}_s = -[\sigma] \cdot \nabla \cdot V = -[\sigma] \cdot \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \nabla \cdot \vec{N}^T \cdot \vec{V}_e \quad (6.68)$$

$$\vec{J}_v = \vec{v} \times \vec{B} \quad (6.69)$$

\vec{J}_e : Componente de la densidad de corriente debida a la variación temporal de A.
 n : Número de puntos de integración.
 $[N_A]$: Funciones de forma elementales para el potencial vector, evaluadas en los puntos de integración (Gauss).
 $\dot{\vec{A}}_e$: Derivada temporal del potencial vector magnético.
 \vec{J}_s : Densidad de corriente debida al potencial eléctrico V .

\vec{V}_e :	Potencial escalar eléctrico.
\vec{N} :	Funciones de forma elementales para V , evaluadas en los puntos de integración (puntos de Gauss).
\vec{J}_V :	Densidad de corriente de velocidad.
\vec{v} :	Vector velocidad aplicado.

5.2.7.3. Cálculo de Fuerzas.

Fuerzas de Lorentz.

Son las que aparecen en conductores por los que circula una corriente. Se obtiene de forma numérica en la forma,

$$\vec{F}_L = \int_V \vec{N}^T \cdot (\vec{J} \times \vec{B}) \cdot dV \quad (6.70)$$

\vec{N} : Vector de funciones de forma.

En un análisis bidimensional, el par electromagnético en la dirección Z resultante viene dado por,

$$T_L = \vec{z}_U \cdot \int_V \vec{r} \times (\vec{J} \times \vec{B}) \cdot dV \quad (6.71)$$

\vec{z}_U : Vector unitario de Z.

\vec{r} : Vector posición en el sistema global de coordenadas cartesianas.

Cuando se realizan análisis temporales o armónicos (régimen senoidal permanente), se obtienen fuerzas y pares promediados en el tiempo..

$$\vec{\bar{F}}_L = \frac{1}{2} \int_V \vec{N}^T \cdot (\vec{J}^* \times \vec{B}) \cdot dV \quad (6.72)$$

$$\vec{\bar{T}}_L = \vec{z}_U \cdot \int_V \vec{r} \times (\vec{J} \times \vec{B}) \cdot dV \quad (6.73)$$

\vec{J}^* : Vector complejo conjugado de \vec{J}

Fuerzas de Maxwell.

Se emplea para determinar fuerzas en regiones ferromagnéticas, se calcula empleando el tensor de tensiones de Maxwell. En un problema bidimensional las fuerzas de Maxwell se calcularían de la forma siguiente.

$$\vec{F}_M = \frac{1}{\mu_0} \int_S \begin{bmatrix} B_x^2 - \frac{1}{2}|B|^2 & B_x \cdot B_y \\ B_x \cdot B_y & B_y^2 - \frac{1}{2}|B|^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \vec{n}_x \\ \vec{n}_y \end{bmatrix} \quad (6.74)$$

El par electromagnético correspondiente en la dirección Z es,

$$T_M = \vec{z}_U \cdot \frac{1}{\mu_0} \int_S \vec{r} \times \left[(\vec{n} \cdot \vec{B}) \cdot \vec{B} - \frac{1}{2} (\vec{B} \cdot \vec{B}) \cdot \vec{n} \right] \cdot dS \quad (6.75)$$

\vec{n} : Vector unitario normal a la superficie en el sistema global de coordenadas cartesianas.

Esta fuerza se calcula en superficies de material con $\mu=\mu_0$. En análisis temporales o en régimen senoidal permanente, se calculan valores promedio de fuerza y par.

$$\vec{F}_M = \frac{1}{2\mu_0} \int_S \left[\text{Re} \left\{ (\vec{n} \cdot \vec{B}^*) \cdot \vec{B} \right\} - \frac{1}{2} (\vec{B} \cdot \vec{B}^*) \cdot \vec{n} \right] \cdot dS \quad (6.76)$$

$$T_M = \vec{z}_U \cdot \frac{1}{2\mu_0} \int_S \vec{r} \times \left[\text{Re} \left\{ (\vec{n} \cdot \vec{B}^*) \cdot \vec{B} \right\} - \frac{1}{2} (\vec{B} \cdot \vec{B}^*) \cdot \vec{n} \right] \cdot dS \quad (6.77)$$

\vec{B}^* : Vector complejo conjugado de \vec{B} .

Fuerzas obtenidas por el método de los trabajos virtuales.

Se calculan mediante la derivada de la energía frente al desplazamiento de la parte móvil. Es válido sólo para una capa de aire que rodea a la parte móvil, para obtener la fuerza total se suman las fuerzas de todos los nodos de esta capa.

$$\vec{F}_s = \int_V \vec{B}^T \frac{\partial \vec{H}}{\partial s} \cdot dV + \int_V \frac{\partial}{\partial s} \cdot \left(\int \vec{B}^T \cdot dH \right) \cdot dV \quad (6.78)$$

\vec{F}_s : Fuerza en el elemento en la dirección s.

s: Desplazamiento virtual en el sistema de coordenadas nodal

V: Volumen del elemento.

El par asociado, para un análisis bidimensional, en la dirección Z es,

$$T_s = \bar{z}_U \cdot \frac{1}{\mu_0} \int_V \bar{r} \times \left[\frac{1}{2} (\bar{B} \cdot \bar{B}) \cdot \nabla \cdot \bar{s} - (\bar{B} \cdot \nabla \cdot \bar{s}) \cdot \bar{B} \right] \cdot dV \quad (6.79)$$

Al igual que en los apartados anteriores, en análisis temporal o en régimen permanente se obtienen valores promediados de fuerza y par.

$$\bar{F}_V = \frac{1}{2\mu_0} \int_V \left[\frac{1}{2} (\bar{B}^* - \bar{B}) \cdot \nabla \cdot \bar{s} - \text{Re} \left\{ (\bar{B}^* \cdot \nabla \cdot \bar{s}) \cdot \bar{B} \right\} \right] \cdot dV \quad (6.80)$$

$$T_V = \bar{z}_U \cdot \frac{1}{2\mu_0} \int_V \bar{r} \times \left[\frac{1}{2} (\bar{B}^* - \bar{B}) \cdot \nabla \cdot \bar{s} - \text{Re} \left\{ (\bar{B}^* \cdot \nabla \cdot \bar{s}) \cdot \bar{B} \right\} \right] \cdot dV \quad (6.81)$$

5.2.7.4. Cálculo de pérdidas por efecto Joule.

Se calcula a partir de los resultados obtenidos por el método del potencial vector magnético, siempre que el elemento no tenga resistividad nula. El cálculo se realiza de forma distinta según el cálculo realizado sea estático, transitorio o en régimen senoidal permanente.

Análisis estático o transitorio.

$$Q_V = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n [\rho] \cdot \bar{J}_{ii}^e \cdot \bar{J}_{ii}^e \quad (6.82)$$

- Q_V : Energía disipada por efecto Joule por unidad de volumen.
 n : Número de puntos de integración (puntos de Gauss).
 J_{ii}^e : Densidad de corriente en el elemento en el punto de integración i .

Análisis en régimen senoidal permanente.

$$Q_V = \text{Re} \left\{ \frac{1}{2n} \cdot \sum_{i=1}^n [\rho] \cdot \bar{J}_{ii}^e \cdot \bar{J}_{ii}^{e*} \right\} \quad (6.83)$$

Cálculo de campos electrostáticos.

$$\bar{E} = -\nabla \cdot \bar{N}^T \cdot \bar{V}_e \quad (6.84)$$

- \bar{N} : Funciones de forma.
 \bar{V}_e : Potencial escalar eléctrico nodal.

5.2.7.5. Fuerzas electrostáticas.

Se determinan empleando el tensor de tensiones de Maxwell.

$$\vec{F}_E = \epsilon_0 \int_S \begin{bmatrix} E_x^2 - \frac{1}{2}|E|^2 & E_x \cdot E_y \\ E_x \cdot E_y & E_y^2 - \frac{1}{2}|E|^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \vec{n}_x \\ \vec{n}_y \end{bmatrix} \quad (6.85)$$

5.2.8. Funciones de forma. El elemento ANSYS SOLID 117.

Como se mencionó en 6.4, el empleo del potencial vector magnético puede ocasionar problemas de continuidad, estos problemas se pueden superar empleando funciones de forma frontera. Este tipo de funciones son las que emplea el elemento SOLID 117 del programa ANSYS, que es el elemento base para el análisis electromagnético a baja frecuencia.

5.2.8.1. Elemento bidimensional de 8 nodos.

La siguiente figura muestra el elemento frontera de 8 nodos, los vértices I, J, K, L se emplean para describir la geometría, orientar los lados del elemento y permitir la integración de la variable potencial eléctrico.

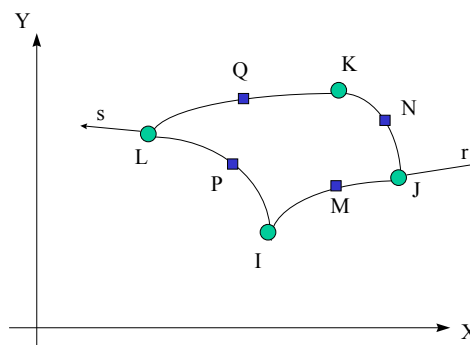


Figura 102. Elemento de 8 nodos con referencias a coordenadas isoparamétricas r,s y t.

Los nodos M, N, O, P se emplean para determinar la variable potencial vector, en el contorno. Esta variable se emplea tanto para cálculos estáticos como dinámicos.

El potencial vector magnético \vec{A} y la integral temporal del potencial eléctrico $(\int V \cdot dt = \phi)$ se describen de la forma,

$$A = A_M E_M + A_N E_N + A_O E_O + A_P E_P \quad (6.86)$$

$$V = V_I N_I + V_J N_J + V_K N_K + V_L N_L \quad (6.87)$$

A_M, A_N, A_O, A_P : Potencial vector en los lados del elemento.

V_I, V_J, V_K, V_L : Integral temporal del potencial eléctrico.

E_M, E_N, E_O, E_P : Funciones de forma vectoriales laterales.

N_I, N_J, N_K, N_L : Funciones de forma escalares nodales.

El potencial vector en los nodos principales se obtiene a partir de los nodos secundarios y sus respectivas funciones de forma. El potencial vector en los nodos intermedios se obtiene a partir de los nodos principales y sus correspondientes funciones de forma.

La relación entre las coordenadas cartesianas globales \mathbf{X}, \mathbf{Y} y las coordenadas isoparamétricas \mathbf{r} y \mathbf{s} es la siguiente,

$$X = N_I(r, s) \cdot X_I + N_J(r, s) \cdot X_J + N_K(r, s) \cdot X_K + N_L(r, s) \cdot X_L \quad (6.88)$$

$$Y = N_I(r, s) \cdot Y_I + N_J(r, s) \cdot Y_J + N_K(r, s) \cdot Y_K + N_L(r, s) \cdot Y_L \quad (6.89)$$

$$N_I = (1 - r) \cdot (1 - s) \quad (6.90)$$

$$N_J = r \cdot (1 - s) \quad (6.91)$$

$$N_K = r \cdot s \quad (6.92)$$

$$N_L = (1 - r) \cdot s \quad (6.93)$$

$$E_M = +(1 - s) \cdot grad(r) \quad (6.94)$$

$$E_N = r \cdot grad(s) \quad (6.95)$$

$$E_O = -s \cdot grad(r) \quad (6.96)$$

$$E_P = -(1 - r) \cdot grad(s) \quad (6.97)$$

5.2.8.2. Elemento tridimensional de 20 nodos.

Al igual que en el elemento bidimensional, los nodos de los vértices se emplean para describir la geometría, orientar los lados del elemento y permitir la integración del potencial eléctrico escalar.

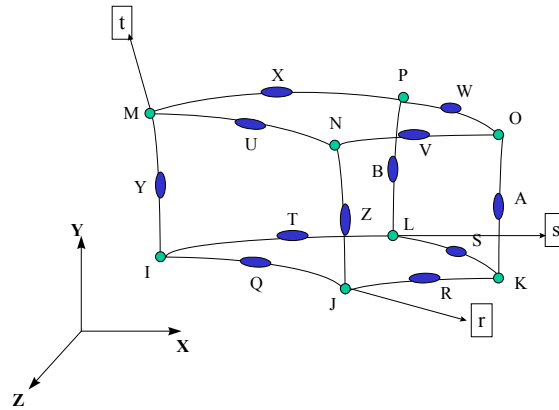


Figura 103. Elemento tridimensional de 20 nodos. r,s,t son las coordenadas isoparamétricas, o coordenadas locales del elemento.

Los nodos intermedios se emplean para permitir el cálculo del flujo en la frontera y para definir la orientación de los lados del elemento.

El potencial vector, \vec{A} , y la integral temporal del potencial escalar \vec{V} se obtiene a partir de las siguientes expresiones,

$$A = A_R E_R + A_S E_S + \dots + A_W E_W + A_X E_X \quad (6.98)$$

$$V = V_I N_I + V_J N_J + \dots + V_O N_O + V_P N_P \quad (6.99)$$

$A_R, A_S, \dots, A_W, A_X$: Potencial vector en los lados del elemento.

$V_I, V_J, \dots, V_O, V_P$: Integral temporal del potencial eléctrico escalar.

E_M, E_N, E_O, E_P : Funciones de forma vectoriales laterales.

N_I, N_J, N_K, N_L : Funciones de forma nodales escalares.

En este caso la relación entre coordenadas cartesianas globales \mathbf{X} e \mathbf{Y} , y coordenadas isoparamétricas \mathbf{r} y \mathbf{s} es,

$$X = N_I(r, s, t) \cdot X_I + \dots + N_M(r, s, t) \cdot X_M \quad (6.100)$$

$$Y = N_I(r, s, t) \cdot Y_I + \dots + N_M(r, s, t) \cdot Y_M \quad (6.101)$$

$$Z = N_I(r, s, t) \cdot Z_I + \dots + N_M(r, s, t) \cdot Z_M \quad (6.102)$$

Y las funciones de forma nodales y vectoriales,

$$N_I = (1 - r) \cdot (1 - s) \cdot (1 - t) \quad (6.103)$$

$$N_J = r \cdot (1 - s) \cdot (1 - t) \quad (6.104)$$

$$N_K = r \cdot s \cdot (1-t) \quad (6.105)$$

$$N_L = (1-r) \cdot s \cdot (1-t) \quad (6.106)$$

$$N_M = (1-r) \cdot (1-s) \cdot t \quad (6.107)$$

$$N_N = r \cdot (1-s) \cdot t \quad (6.108)$$

$$N_O = r \cdot s \cdot t \quad (6.109)$$

$$N_I = (1-r) \cdot s \cdot t \quad (6.110)$$

$$E_Q = +(1-s) \cdot (1-t) \cdot \text{grad}(r) \quad (6.111)$$

$$E_R = +r \cdot (1-t) \cdot \text{grad}(s) \quad (6.112)$$

$$E_S = -s \cdot (1-t) \cdot \text{grad}(r) \quad (6.113)$$

$$E_T = -(1-r) \cdot (1-t) \cdot \text{grad}(s) \quad (6.114)$$

$$E_U = +(1-s) \cdot t \cdot \text{grad}(r) \quad (6.115)$$

$$E_V = +r \cdot t \cdot \text{grad}(s) \quad (6.116)$$

$$E_W = -s \cdot t \cdot \text{grad}(r) \quad (6.117)$$

$$E_X = -(1-r) \cdot t \cdot \text{grad}(s) \quad (6.118)$$

$$E_Y = +(1-s) \cdot (1-r) \cdot \text{grad}(t) \quad (6.119)$$

$$E_Z = +s \cdot (1-r) \cdot \text{grad}(t) \quad (6.120)$$

$$E_A = +s \cdot r \cdot \text{grad}(t) \quad (6.121)$$

$$E_B = +(1-s) \cdot r \cdot \text{grad}(t) \quad (6.122)$$

La geometría de paralelepípedo de 20 nodos puede degenerar a un tetraedro de 10 nodos, pirámide de 13 nodos o un prisma triangular de 15 nodos.

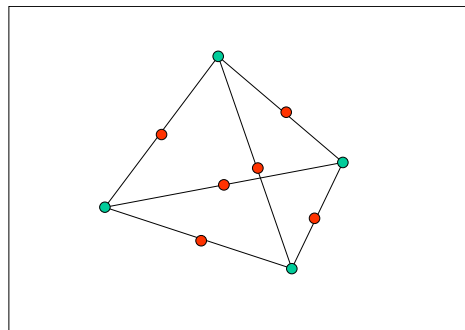


Figura 104. Tetraedro de 10 nodos.

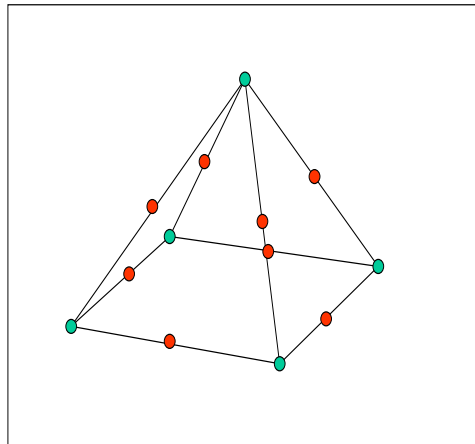


Figura 105. Pirámide de 13 nodos.

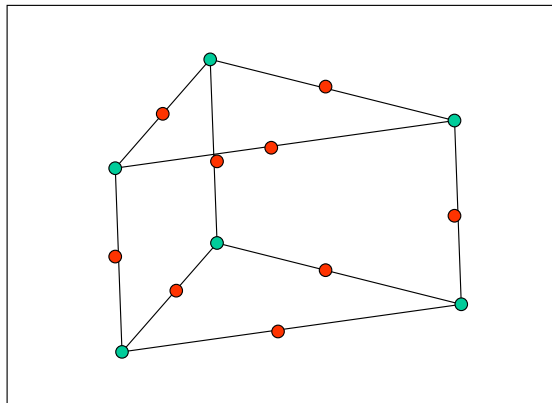


Figura 106. Prisma triangular de 15 nodos.