

Capítol 2

Antecedents

En aquest capítol ens plantegem en primer lloc la introducció dels diferents tipus de simetria utilitzats en visió per ordinador i dels diferents mètodes de detecció. A continuació presentem les definicions i propietats de cada tipus. Finalment estudiarem les diferents línies de recerca a l'hora de detectar la simetria, analitzant comparativament les seves avantatges i inconvenients.

Quan es parla de simetria en general, immediatament pensem en la simetria de reflexió definida per l'existència d'un eix rectilini que divideix una forma en dues parts, on una part és el mirall de l'altra, com es pot veure a la Fig 2.1 (a). Aquesta definició és en realitat molt restrictiva perquè, com es veurà més endavant, exigeix un punt de vista absolutament ortogràfic a l'escena. Un punt d'observació més pròxim i oblic entre la càmera i l'escena desfà la simetria, tal com l'acabem de definir, ja que no es podrà trobar un eix que divideixi la forma en dues parts de manera que l'una sigui el mirall de l'altra. No obstant la manera més corrent en que observem la simetria és amb el punt de vista oblic i psicològicament ens apareix com una simetria de reflexió real Fig 2.1 (b).

Així doncs, la definició de simetria de reflexió anterior ha de ser modificada per tal de poder inferir aquest tipus de simetria a partir d'una imatge obtinguda des d'un punt de vista oblic no ortogràfic.



(a)



(b)

Figura 2.1: Diferents punts de vista alhora d'observar la simetria.(a) Punt de vista ortogonal. (b) Punt de vist oblic

La simetria observada amb un punt de vista oblic entre la càmera i l'escena, deforma la simetria a la imatge i dóna lloc a una nova definició de simetria que s'anomena **simetria obliqua**. En visió per ordinador serà doncs interessant detectar aquesta simetria, pel fet que és la projecció d'una simetria real. Per altra banda Kanade [Kanade 81] demostra que aquest tipus de simetria permet inferir la representació 3-D a partir de formes 2-D. Aquestes dues raons han motivat molts treballs dedicats a l'obtenció d'algorismes de detecció de la simetria obliqua. Així [Ponce 90] presenta un mètode de detecció basat en una propietat local dels punts que formen una simetria obliqua, [Saint-Marc 93] mostra que la modelització dels arcs de corba a partir de B-splines facilita la detecció de la simetria obliqua, mentre que [Cham 94] obté els eixos de simetria obliqua amb l'ajuda de la transformada de Hough.

Des d'un altre punt de vista, com es pot veure a la Fig 2.2. es pot considerar també la simetria com una invariància respecte a un gir, en aquest cas, l'anomenem **simetria de rotació**. Les formes amb aquesta propietat presenten múltiples eixos de simetria cada un d'ells associat a un angle de rotació. La rotació de la forma a partir de l'eix i amb l'angle associat porta a una forma idèntica. [Tsai 91] obté un conjunt d'equacions per tal d'obtenir



Figura:2.2: Exemple de simetria de rotació

els diferents angles de rotació dels eixos principals d'una forma amb simetria de rotació.

Per altra banda l'ésser humà de forma intuïtiva també reconeix a la natura simetries on l'eix és curvilini. Això ens porta a una extensió natural de la simetria de reflexió on els eixos poden ser curvilinis.

F.Ulupinar i R.Nevatia [Ulupinar 90] introdueixen l'anomenada **simetria paral·lela** com una extensió de la simetria de reflexió entre corbes, on es permeten eixos curvilinis i on les corbes poden o no transcórrer paral·lelament. A la Fig.2.3 es mostren unes imatges on apareixen formes on les corbes dels contorns presenten simetria paral·lela



Figura.2.3: Exemples de simetria paral·lela

Una altra forma més artificial de detectar les simetries en imatges que intuïtivament l'home no detectaria com tal, requereix de mètodes matemàtics per justificar propietats que compleixen una definició de simetria. Així doncs altres autors partint del conegut mètode de generació formes 2D anomenades "cintes", obtenen noves definicions de simetria. Les cintes són formes 2D obtingudes passejant una determinada figura geomètrica (generador) al llarg d'una corba plana al voltant de la qual la forma és localment simètrica. Rosenfeld [Rosenfeld 86] proporciona una interessant comparació entre els casos més coneguts com són les "Cintes" de Blum [Blum 67], generades a partir d'un cercle (Fig 2.4(a)), les de Brook [Brook 81] i les de Brady [Brady 84], generades ambdues a partir d'un segment (Fig 2.4(b)). Les simetries més conegudes d'aquest tipus són la "**Symmetry axis transform**" (SAT) deduïda de les cintes de Blum i la "**Smooth local symmetry**" (SLS) deduïda de les cintes

de Brady i que s'anomena d'aquesta forma perquè els punts simètrics de les cintes compleixen una propietat local de simetria. A la Fig 2.5 mostrem una imatge amb un objecte on les corbes que formen els seus contorns presenten simetria SLS.

La detecció de les cintes anteriors, formant part de formes de la imatge, determinen l'existència d'eixos de simetria curvilinis que poden ajudar a la descripció global de la forma.

La simetria deduïda de les cintes de Blum (SAT) dona lloc a una representació de formes planes coneguda a la bibliografia amb el nom de "*Skeleton*" i que ha estat tractat per molt autors. Com veurem més endavant la representació obtinguda és molt intuïtiva però

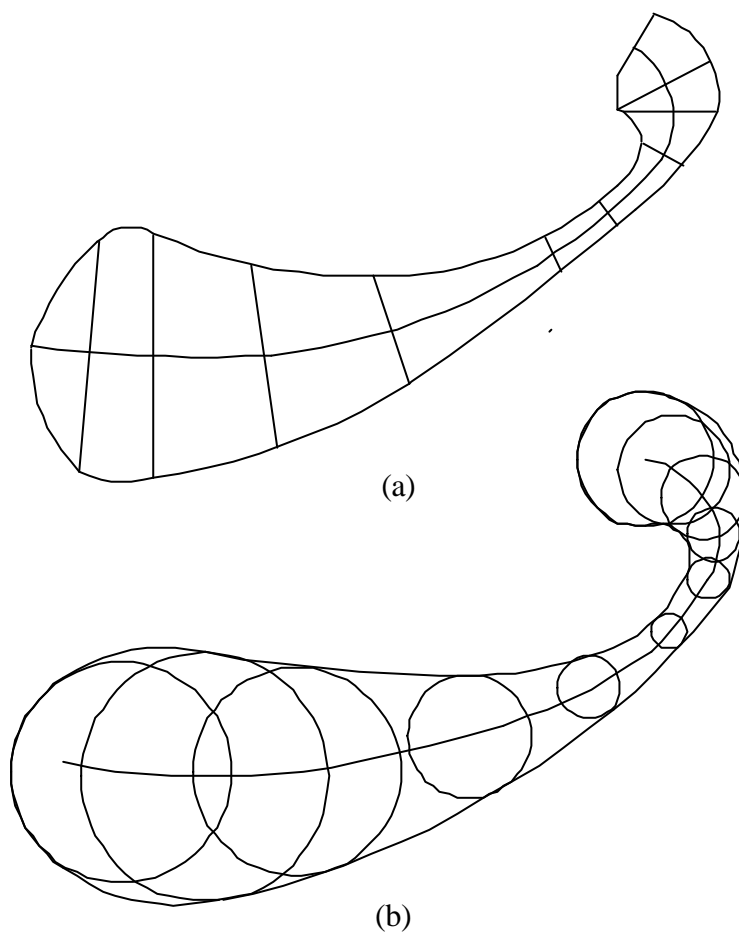


Figura 2.4: Cintes obtingudes passejant una figura geomètrica al llarg d'una corba plana. (a) Cinta de Brook obtinguda a partir de cercles. (b) Cinta de Blum obtinguda a partir de segments.

presenta la problemàtica que obvia eixos de simetria que són molt significatius (Fig.2.17).

La simetria local “*Smooth*” (SLS) deduïda del les cintes de Brady, dóna lloc per la seva definició a un nombre considerable de eixos locals alguns dels quals són poc significatius. Cal triar els més importants per tal de ser útils a la descripció de la forma. H. Rom [Rom 93] suggereix que combinant la descripció local de SLS amb la informació més global de la simetria paral·lela es pot obtenir una millor descripció. Per aquest motiu podem trobar treballs orientats a detectar aquests dos últims tipus de simetria.



Figura.2.5:Exemple de simetria SLS

2.1. Definicions i propietats dels diferents tipus de simetria

2.1.1. Consideracions sobre l'abast dels eixos de simetria

Una definició de simetria consistirà en una propietat que han de complir els punts d'una imatge o forma per ser considerats simètrics. És evident que el cas que tots els punt d'una imatge d'una escena donada compleixin la definició, és un cas particular on la simetria és global (Fig.2.6 (a)). El més corrent és que la imatge compleixi parcialment la definició de forma que apareix el concepte de simetria local (Fig.2.6 (b)). De la mateixa manera una forma plana determinada pot ser globalment simètrica, si tots els seus punts compleixen la definició de simetria o localment simètrica, si només la compleixen un subconjunt de punts de la forma esmentada. Així doncs parlarem de simetria global i local i dels seus respectius eixos de simetria locals i globals.



(a)

(b)

Figura 2.6: Eixos globals i locals. (a) Eix global (b) Eixos locals

Cal aclarir que quan ens referim a una forma o objecte simètric concrets dins d'una escena, l'eix de simetria pot ser considerat local respecte l'escena i global respecte al propi objecte. Per altra banda, formes o objectes globalment simètrics però fragmentats a la imatge per causa d'ombres o oclusions donen lloc a eixos locals o parcials de simetria.

2.1.2. Simetria de reflexió

Ens referim en aquest apartat al tipus de simetria més natural (real) que ens apareix quan una forma es pot dividir en dues parts iguals, on l'una és el mirall de l'altra. Amb altres paraules existeix una recta que divideix la forma en dues parts, de manera que l'una és la reflexió de l'altra. La recta que separa les dues parts és l'eix de simetria de reflexió.

Formalment:

Direm que una imatge presenta simetria de reflexió si existeix un eix rectilini de forma que, els punts (x,y) i els seus homòlegs (x',y') equidistant a l'eix i units per una línia orthogonal a ell, són invariants.

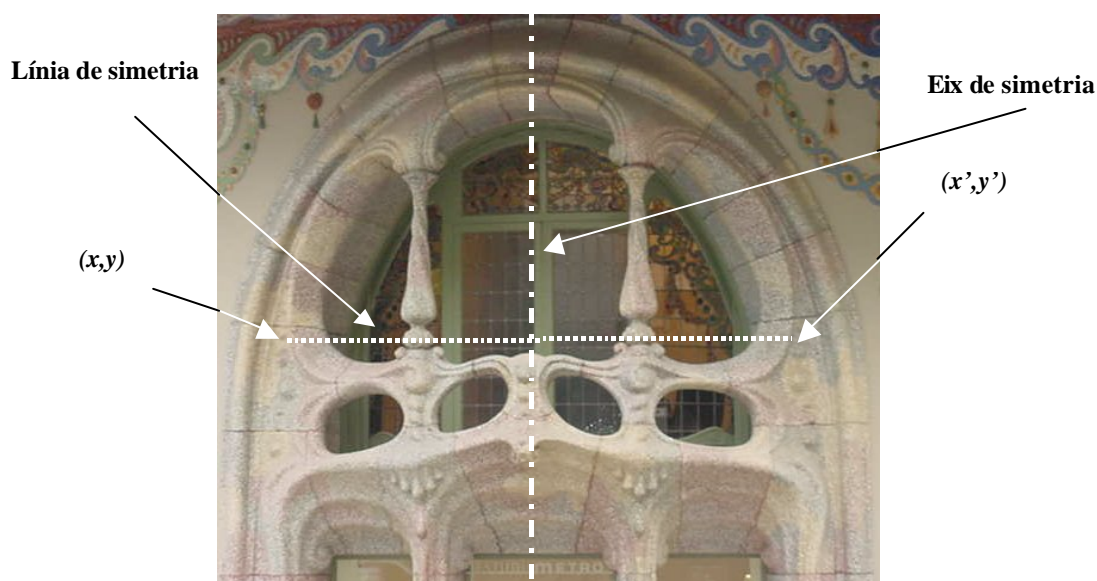


Figura 2.7: Simetria de reflexió

Des del punt de vista de la visió per ordinador aquesta invariància es tradueix en la igualtat d'una determinada característica als dos costats de la simetria. En imatges sense color s'ha de complir la igualtat o quasi igualtat del nivell de gris, es a dir, s'ha de complir l'equació:

$$I(x,y) - I(x',y') < \epsilon \quad \text{on} \quad I(x,y) \text{ és la intensitat del pixel } (x, y)$$

Cal fer notar, tal com es veu a la Fig.2.7, que si bé la definició anterior es vàlida per introduir el concepte de simetria de reflexió, serà molt difícil que es compleixi en algunes imatges d'escenes simètriques, doncs petits canvis en les condicions de la imatge com ara: la lluminació, les textures, les ombres, la brutícia, envelliment, fa que punts simètrics no tinguin la mateixa intensitat. No obstant el fet que, tot i l'existència d'aquestes perturbacions, l'ésser humà percep la simetria, ens fa pensar que utilitzem un mecanisme basat més aviat en els contorns de les formes de la imatge que en la distribució del nivell de gris.

Podem definir, per tant, la simetria a partir dels contorns. Aquí la simetria de reflexió es detectarà per l'existència de punts de contorn simètrics. Així, a la definició, en lloc de demanar la igualtat (quasi igualtat) en la intensitat dels píxels simètrics, demanarem l'existència de punts del contorn que equidisten de l'eix.

Formalment:

Direm que una forma presenta simetria de reflexió si, existeix un eix rectilini tal que, l'existència d'un punt (x,y) del contorn determina l'existència d'un homòleg (x',y') equidistant a l'eix i units per una línia ortogonal a ell.

També aquí es plantegen dificultats depenent de la qualitat dels contorns obtinguts. (Fig 2.8)

Propietat:

Si definim les línies de simetria com els segments que uneixen dos punts simètrics d'una forma, es compleix: aquestes línies formen un angle recte amb l'eix de reflexió i defineixen, conjuntament, uns eixos de coordenades naturals de la forma simètrica Fig 2.7.

Es dedueix doncs, que per poder trobar aquest tipus de simetria en una forma d'una escena, el punt de vista entre la càmera i la forma ha de ser absolutament ortogonal. Altrament les línies de simetria i l'eix de simetria de la forma ja no són ortogonals i no es compleix la definició anterior.

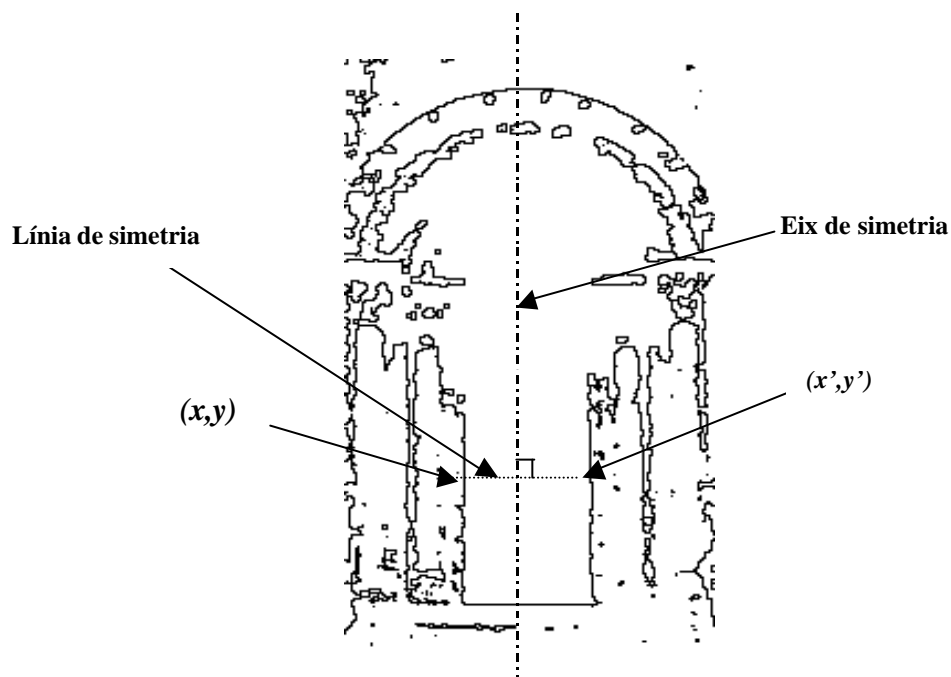


Figura 2.8: Simetria a partir de contorns

2.1.3. Simetria obliqua

Com hem dit en l'apartat anterior un punt de vista oblic entre la càmera i l'escena desfà la simetria de reflexió, obtenint una imatge que conté la transformació lineal (projecció) de la simetria real. En visió per computador un punt de vista absolutament perpendicular és molt menys freqüent que una visió obliqua. S'entén doncs que és interessant detectar la simetria en aquestes condicions. Caldrà, per tan, relaxar les exigències de la definició anterior i obtenir-ne una de nova que contempli aquest cas.

Per altra banda, tal com suggereixen un interessant conjunt d'experiments psicològics al respecte [Stevens 79], l'ésser humà percep aquesta simetria com a real. Les línies de simetria i l'eix de simetria formen uns nous eixos, que tot i que ja no són ortogonals com en

el cas de la simetria de reflexió, també formen uns eixos de coordenades naturals de la forma.

Aquest tipus de simetria defineix dues direccions, com es pot veure a la Fig 2.9, la del pla que conté l'eix de simetria obliqua i la del pla que conté les línies de simetria amb angles α , β respectivament i que defineixen el pla en que la simetria està inclosa. [Kanade 81]. En aquest cas, com es mostra a la figura Fig.2.9, l'eix de simetria i les línies de simetria no són ortogonals com a la simetria de reflexió si no que formen un angle fix θ en el pla de l'objecte anomenat angle d'obliquïtat.

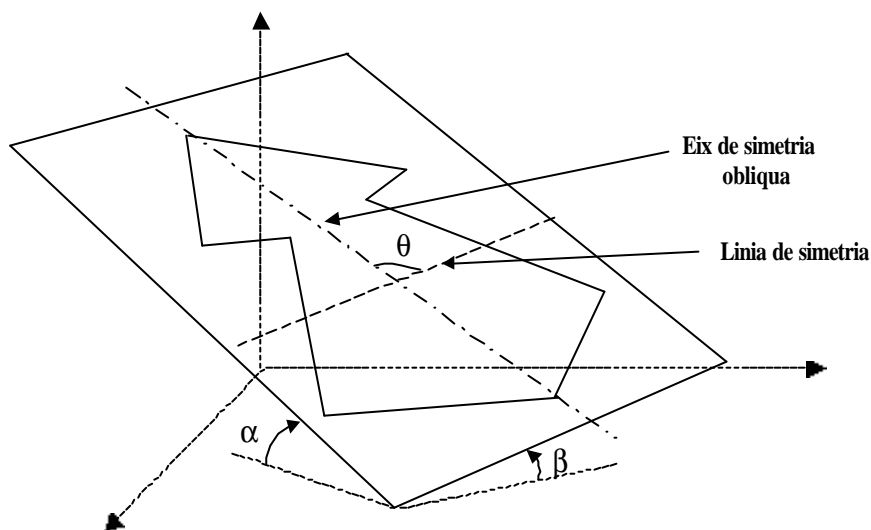


Fig.2.9. Simetria obliqua amb les dues direccions dels eixos

Formalment:

Direm que una imatge presenta simetria obliqua, si existeix un eix rectilini de forma que, els punts (x, y) i els seus homòlegs (x', y') equidistant a l'eix i units per una línia amb un angle fix a ell, són invariants.

Com en el cas anterior aquesta invariància en imatges sense color es tradueix en la igualtat (quasi igualtat) en la intensitat dels punts simètrics i per tant han de complir l'equació següent:

$$I(x, y) - I(x', y') < \epsilon \quad \text{on} \quad I(x, y) \text{ és la intensitat del pixel } (x, y)$$

Tal com es va dir en les cas anterior, petits canvis en les condicions de la imatge com ara: la luminació, les textures, etc., fa que punts simètrics no tinguin la mateixa intensitat i es recorri a identificar la simetria a partir dels contorns. També aquí podem definir la simetria obliqua per l'existència de punts dels contorns equidistant a un eix i unit per una línia que forma un angle fix amb ell.

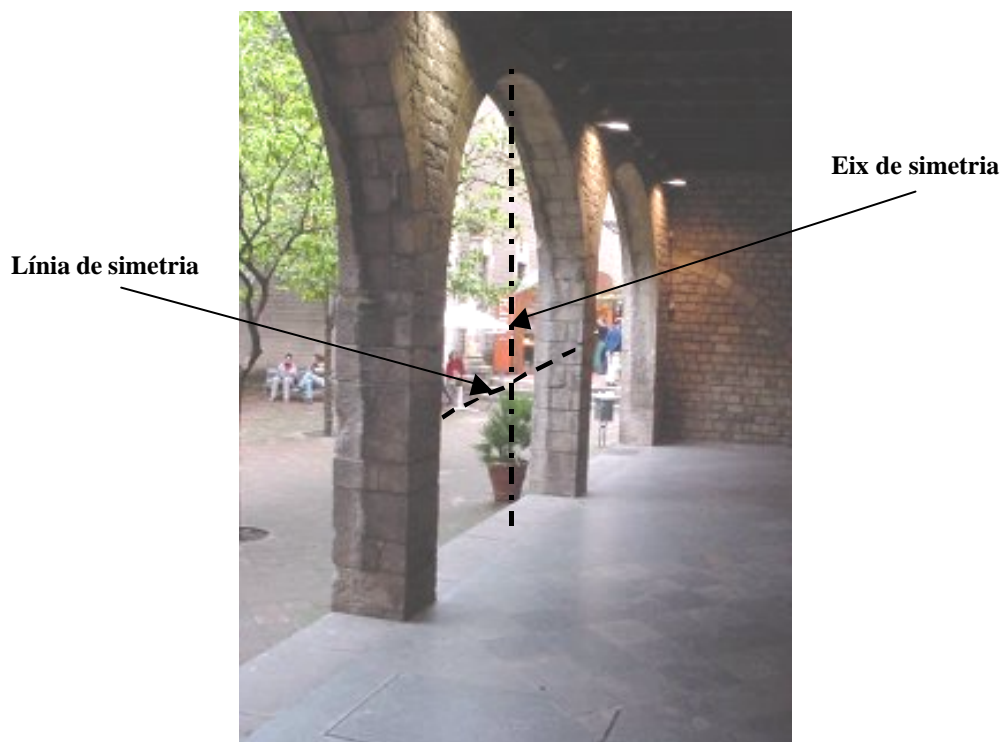


Figura 2.10: Simetria obliqua

Formalment:

Direm que una forma presenta simetria obliqua, si existeix un eix rectilini tal que, l'existència d'un punt (x,y) del contorn determina l'existència d'un homòleg (x',y') equidistant a l'eix i units per una línia que forma un angle fix amb ell.

En realitat aquesta definició es una condició necessària però no suficient per afirmar que una simetria obliqua detectada correspon a una simetria real a l'escena. Kanade [Kanade81]

dóna una condició, basada en una restricció del gradient del pla que inclou la simetria obliqua que ho garanteix

De les definicions anteriors es poden deduir la següents propietats.

Propietat 1

Les línies de simetria són paral·leles i formen un angle fix \mathbf{q} amb l'eix de simetria (Veure Fig. 2.9)

Propietat 2

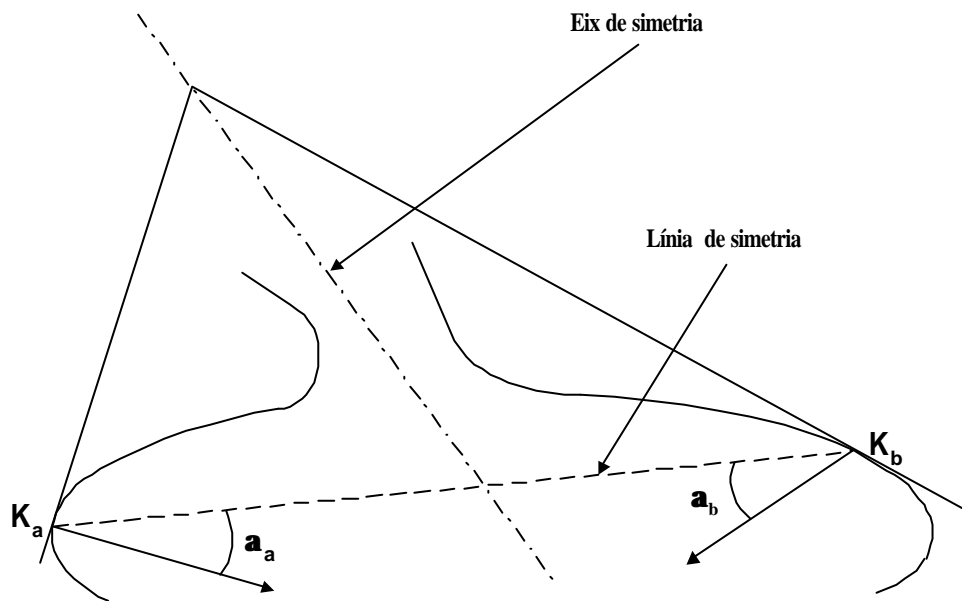


Fig 2.11 Propietat de les tangents en una simetria obliqua

La línia formada per els punts mitjos de les línies de simetria constitueix l'eix de simetria obliqua (veure Fig. 2.11)

Per altra banda es pot demostrar que la simetria obliqua compleix la següent propietat [Cham94]:

Propietat 3

Les tangents d'un parell de punts que presenten simetria obliqua es creuen a l'eix de simetria obliqua. I es compleix que :

$$\frac{k_a}{k_b} = \left(\frac{\cos \alpha_a}{\cos \alpha_b} \right)^3$$

on k_a , k_b són les curvatures dels punt a, b respectivament i α_a , α_b els angles format per la línia de simetria amb la normal de les tangents en els punts a i b respectivament (Fig. 2.11).

2.1.4. Simetria de rotació

Existeixen un tipus específic de formes que tot i que poden o no mostrar algun dels tipus de simetria que hem vist fins ara, presenten addicionalment una invariància a una o més rotacions. De forma que un gir respecte un centre de rotació amb uns determinats angles, ens porta a una figura idèntica, tal com es pot veure a la Fig 2.12. D'aquesta forma cada angle de rotació defineix un eix de simetria que passa per el centre de rotació. El nombre d'angles de rotació possibles defineix l'anomenat ordre de la simetria de rotació.

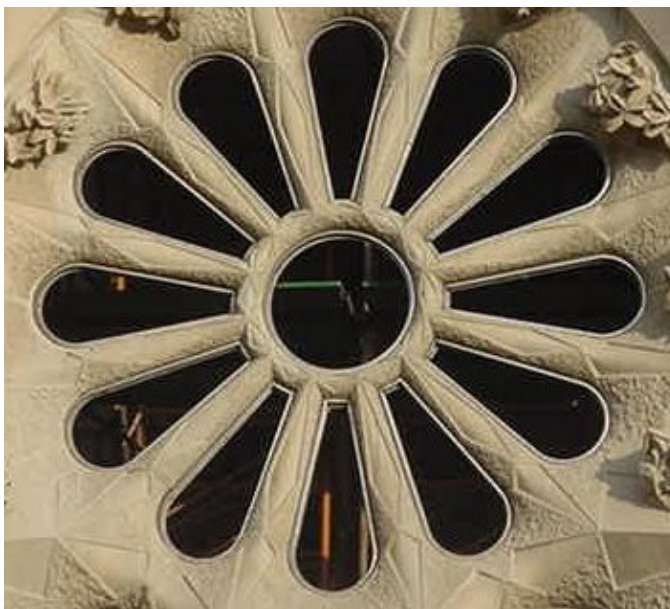


Figura 2.12: Simetria de Rotació

Aquest tipus de invariància és anomenada per molts autors, simetria de rotació amb la definició que segueix [Yuen 90]:

Formalment:

Una forma presenta simetria de rotació si existeix un eix A de rotació i un angle:

$$q = \frac{2kp}{n} \quad k = 1, 2, 3, \dots, n \geq 3 \quad ; \text{ on } k = \text{ordre de la simetria}$$

tal que una rotació de q entorn de l'eix A dona una figura idèntica.

Amb aquesta definició es dedueix que no s'exclou el cas de formes amb simetria de rotació puguin presentar altres tipus de simetria tal com es veu a la Fig 2.13

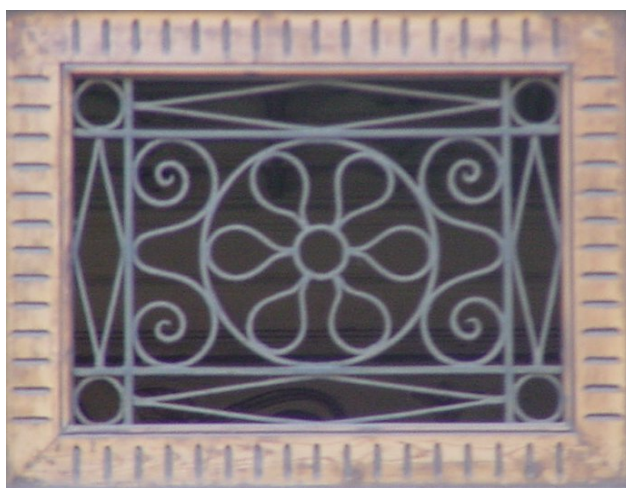


Figura 2.13: Doble Simetria de reflexió i rotació

2.1.5. Simetria paral·lela

S'ha de dir que el nom escollit per descriure aquest tipus de simetria no és molt afortunat per representar el concepte que vol expressar. Inicialment la simetria paral·lela s'entenia com una extensió de la simetria de reflexió, en la que es permetia que els eixos fossin curvilinis, de manera que les corbes dels contorns simètrics transcorrien paral·lelament (cas lineal) [Ulupinar 90] (Fig 2.14 (a)). Posteriorment per tal de fer més útil aquest tipus de



(a)



(b)

Figura 2.14: Simetria Paral·lela. (a) Cas lineal. (b) Cas no lineal



Figura 2.15: Eix curvilini de simetria paral·lela

Simetria, per la descripció global de formes planes, el concepte ha evolucionat i ja no es demana que les corbes simètriques siguin paral·leles sinó que la pendent a cada punt d'una de les corbes estigui relacionada amb l'altra per una única funció (inclou el cas no lineal). (Fig.2.14 (b))

La definició formal és una definició general de simetria entre dues corbes [Saint-Marc93]:

Formalment: Si $C_i(s) = (x_i(s), y_i(s))$ per $i=1,2$ són dues corbes paramètriques planes i $\mathbf{q}_i(s)$ és la orientació de la tangent. Es diu que $C_1(s)$ i $C_2(s)$ presenten simetria paral·lela si existeix una funció monòtona contínua $f(s)$ tal que $\mathbf{q}_1(s) = \mathbf{q}_2(f(s))$. Les línies que uneixen dos punts simètrics són les línies de simetria i el conjunt de punts mitjos d'aquestes línies constitueixen un eix curvilini de simetria. (Fig 2.15).

2.1.6. Simetria Axial (SAT)

Ja hem dit en la introducció d'aquest apartat, que les formes planes generades a partir de les denominades cintes (formes 2D obtingudes passejant una determinada figura geomètrica centrada sobre una corba plana) presenten simetria. Aquí presentem la simetria deduïda de les cintes generades a partir d'un disc i suggerides per Blum [Blum 67]. És evident que la corba plana on es centren els cercles generadors coincideix amb l'eix de simetria i pot permetre una descripció axial de la forma. La definició d'aquest tipus de simetria és en conseqüència una transformació dels punts de contorn de la forma en els punts de l'eix generador. Concretament:

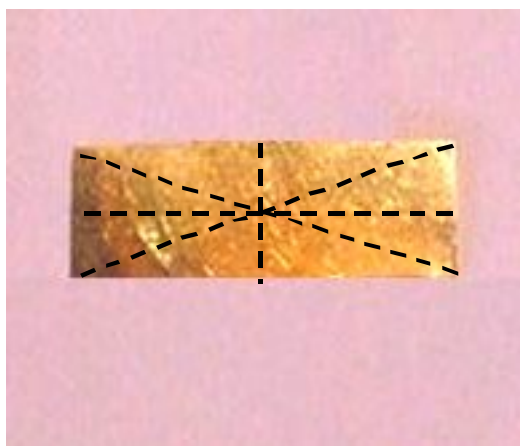
Donada una regió R , on C és el conjunt de punts de contorn, i una mètrica d , direm que $\bar{x} = (x, y)$ pertany a l'eix si existeix més d'un punt del contorn C a distància mínima de \bar{x} en termes de la mètrica d .

Formalment: Si definim distància entre un punt $\bar{x} = (x, y)$ de R y C com $d_s(\bar{x}, C) = \min(d(\bar{x}, \bar{z}) / \bar{z} \in C)$ Direm que $\bar{x} \in Eix$ si existeix més d'un $\bar{z}_i \in C$ on $i = 1, 2, 3$ tal que:

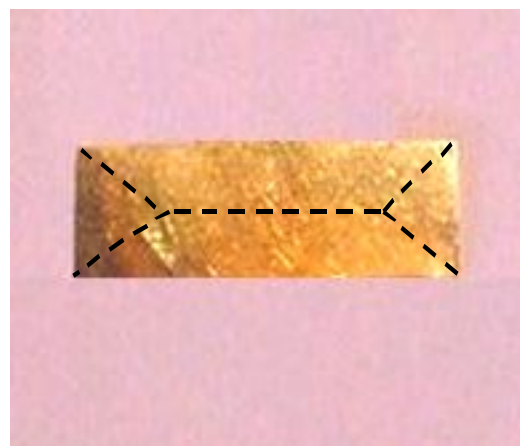
$$d(\bar{x}, \bar{z}_i) = d_s(\bar{x}, C)$$



Figura.2.16: Eixos de simetria SAT



(a)



(b)

Figura 2.17: Eixos de simetria SAT. (a) Eixos de simetria potencials. (b) Eixos segons la definició.

Segons això a partir del conjunt de parelles $\{\bar{x}, d_s(\bar{x}, C)\}$ es pot recuperar (conceptualment) la forma original amb la unió de tots els discs generadors (en la mètrica apropiada) centrats en els punts de l'eix. Aquest mètode de representar les formes es denomina o "*Medial Axis Transform*" (MAT) o "*Symmetry Axis Transform*". (SAT). Aquesta definició com es pot veure a la Fig 2.16 dona una representació axial més o menys intuïtiva de la forma, coneguda amb el nom de "*skeleton*". Una de les problemàtiques d'aquesta definició és que obvia alguns dels eixos de simetria més significatius (Fig 2.17). M Wright, R. Cipolla i alt. [Wright 95] presenten una extensió de la transformació anterior que permet capturar més simetries.

2.1.7. Simetria local "Smooth" (SLS)

Es consideren aquí les "cintes" de Brady obtingudes a partir d'un segment generador. Com en el cas anterior obtenim un tipus de simetria que permet la descripció de formes (Fig 2.18) però que recull millor les simetries locals de les formes o objectes. Això ha donat lloc a que alguns autors utilitzin aquest tipus de simetria local per a la descomposició i descripció de formes [Rom 93].

La definició de simetria, en aquest cas, es basa en comparar una propietat local dels punts d'una corba que presentem a continuació [Brady 84] (Fig 2.19).



Figura 2.18: Eixos de simetria SLS

Formalment:

Dos punts A i B d'una corba plana, formen simetria local SLS si l'angle entre el vector en direcció BA i la normal a la corba en A és igual al format per la normal a la corba en B i el vector en direcció AB. Hi haurà per tant simetria local SLS entre dos punts A i B si, com mostra la figura, α_1 és igual a α_2 . L'eix de simetria és una corba formada pel conjunt de punts mitjos de les línies de simetria.

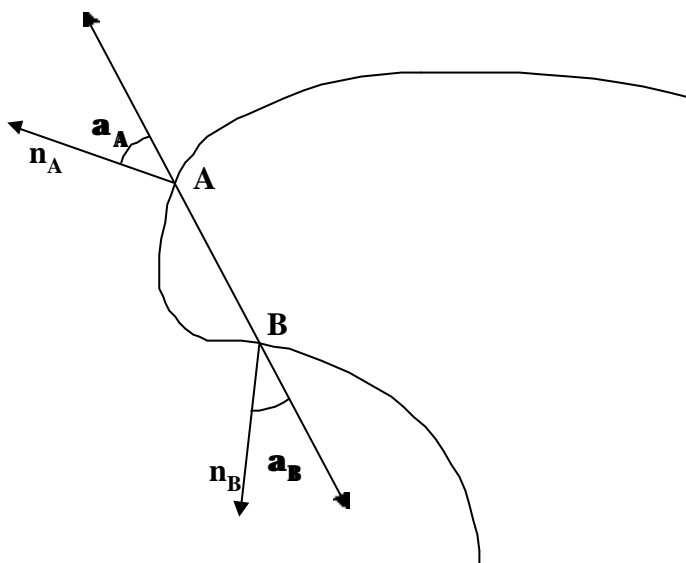


Fig 2.19 Definició de simetria SLS

El principal problema d'aquesta definició és la sensibilitat al soroll i la dificultat de recuperar els eixos principals de simetria. Això és motivat per el caràcter local de la definició que, per un costat pot generar eixos falsos a partir del soroll i que per l'altre genera gran quantitat d'eixos excessivament locals i per tant poc significatius. Una dificultat afegida és que la comprovació de la definició per tots els punt ens porta a un algorisme d'ordre $O(n^2)$. No obstant, com mostra la Fig.2.20 recull molt millor els eixos principals de simetria.

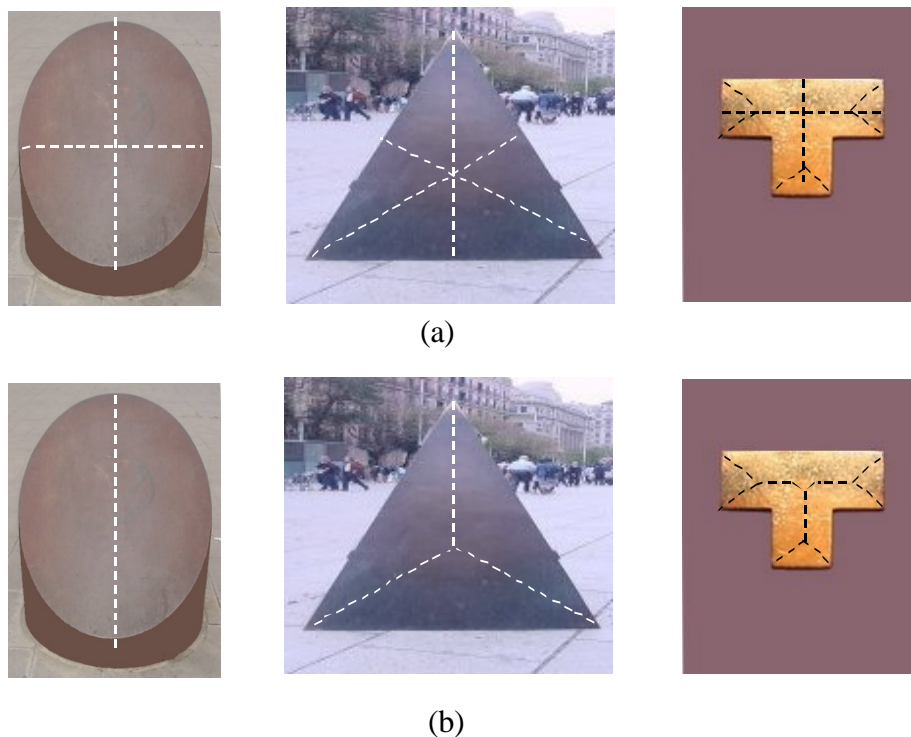


Figura 2.20: Comparació entre SLS i SAT. (a) Simetria SLS. (b) Simetria SAT.

2.2. La detecció de simetria: Principals línies de recerca

Per el que hem dit fins ara es pot deduir que el tema de detecció de simetria és molt extens, no solament per l'existència de diferents tipus de simetria sinó per les diferents maneres possibles de definir i interpretar cada una d'elles, així com per la gran diversitat d'aplicacions

La detecció de la simetria en imatges té un alt nivell de complexitat a causa de la dificultat de trobar una característica invariant (intensitat, color, textura ...) als dos costats de l'eix de simetria. Cal tenir en compte la dificultat afegida que simetries en l'escena real apareixen molts cops en la imatge, deformades per diferents causes com la discretització, perspectiva, etc. de forma que la simetria no es conserva.

Per altra banda, suposant que salvéssim la dificultat anterior encara hauríem d'explorar l'existència de simetria per tots els eixos potencials, la qual cosa implica tenir en compte totes les orientacions possibles, això comporta un elevat augment del cost de computació. Concretament per una imatge de resolució $n = N \cdot M$ tenim $N + M$ possibles orientacions i per tant $(N + M) \cdot n$ eixos potencials. Com que per cada eix s'han d'explorar tots els píxels de la imatge a cada costat de l'eix de simetria el cos resulta ser:

$$Cost = k \cdot n \cdot \frac{n}{2} = k \cdot \left(\frac{n^2}{2} \right) ; \text{ on } k = N + M$$

Per aquest motiu la majoria d'autors treballen amb els punts dels contorns o bé amb agrupacions d'aquest, és a dir, rectes, corbes, arcs, B-splines, etc. Per altra banda, es troben pocs treballs que detectin la simetria directament de la imatge multಿನಿವೆલ [Marola 89(2)].

La detecció de simetria a partir dels contorns de la imatge té d'entrada l'avantatge de la reducció del cost de computació però, el que és més important, s'ha substituït l'exigència que els punts simètrics siguin invariants respecte d'una determinada característica, per la simple existència de punts de contorn als dos costats de l'eix de simetria.

Per altra banda, el tractament a partir de contorns permet obtenir definicions de simetria a partir de propietats locals dels punts del contorn, que porten a detectar eixos de simetria locals que poden permetre detectar simetries de la imatge, tot i que els contorns siguin incomplets o parcialment erronis. Apareix així el compromís entre un anàlisi local o global que discutirem més endavant. (Apart. 2.2.2)

No cal insistir en que, en aquest cas, apareix la dificultat afegida d'obtenir uns contorns suficientment fidels, de forma que la detecció de la simetria no dependrà exclusivament de la bondat del nostre algoritme de detecció sinó, també del nivell de soroll de la imatge i de la precisió de l'algorisme de detecció de contorns.

Per afrontar la problemàtica de les deformacions i distorsions comentades anteriorment alguns autors proposen deixar de tractar la simetria com una característica discreta i

treballar amb un concepte de quasi simetria o de grau de simetria, que ens porta a veure la simetria com una característica continua. Aquest punt de vista obre una nova línia de treball que també analitzarem més endavant. (Apart. 2.2.4)

Presentarem també els mètodes que utilitzen invariants per detectar la simetria i els que utilitzen la simetria per la descripció de formes planes.



(a)



(b)



(c)

Figura 2.21: La simetria una característica discreta. (a) Forma simètrica. (b) Forma quasi simètrica. (c) Forma sense simètrica.

2.2.1. La simetria una característica discreta

La majoria d'autors des dels inicis de la detecció de simetria en visió per computador tracten la simetria com una característica discreta, és a dir, consideren que els objectes o formes es poden classificar en dos grups: els que presenten algun tipus de simetria i els que no, deixant fora les formes quasi simètriques (Fig 2.20 (b)). En aquesta línia cal agrupar tots aquells treballs que tracten amb el problema de detectar eixos de simetria globals o locals, de un determinat tipus de simetria, aplicant les definicions corresponents. Tot i que existeixen molts treballs que tracten la simetria d'aquesta forma, cal dir que es troben amb la dificultat que hem comentat anteriorment, que objectes simètrics a l'escena no ho són a la imatge per causa de les deformacions que imposa digitalització i la projecció 2D.

Per tal de superar aquesta problemàtica treballs més recents (veure ap. 2.2.4) tracten de quantificar el grau de simetria d'un objecte o forma en lloc d'intentar detectar l'existència d'eixos de simetria.

2.2.2. El compromís anàlisi global anàlisi local

L'anàlisi global considera que tots els punts de contorn han de satisfer la definició de simetria i obté un eix global vàlid per a tots ells (Fig 2.22 (a)). Contràriament l'anàlisi local utilitza una característica local computada individualment sobre cada punt del contorn, obtenint diferents agrupacions de punts que donen lloc a diferents eixos locals de simetria (Fig 2.22 (b)).

De forma genèrica es pot afirmar que l'anàlisi global és molt sensible a les oclusions i a la degradació de contorns (Fig 2.23) però més insensible al soroll, pel fet buscar els eixos de simetria a partir de tots els punts dels contorns.

L'anàlisi local contràriament és més insensible a les oclusions i a la degradació dels contorns pel fet de treballar amb propietats locals dels punts dels contorns, però en contrapartida, pel mateix motiu, comporta més sensibilitat al soroll. Aquesta metodologia és també més inestable i detecta normalment un nombre elevat d'eixos de poca



Figura 2.22: Detecció d'eixos de simetria de reflexió. (a) Aplicant un anàlisi global.

(b) Aplicant un anàlisi local.

importància, és a dir excessivament locals, que s'han de filtrar i que es poden considerar soroll.

Un inconvenient important de l'anàlisi global és que en la majoria de casos s'ha de conèixer a priori l'abast d'aplicació de l'algorisme de detecció per obtenir resultats correctes, per el fet que aquesta metodologia precisa del compliment de la definició de simetria per tots els punts. Dit d'una altra manera, es precisa del coneixement previ de les formes o objectes que componen la imatge (presegmentació de formes), ja que en cas contrari només obtindríem resultats en imatges que continguessin una sola forma o objecte. Aquest és el cas de mètodes que utilitzen els moments d'inèrcia o centres de gravetat. Com és conegut la segmentació anterior és un dels objectius més importants en visió per computador i al mateix temps, en la majoria de casos, una tasca molt feixuga.

Per altra banda és fàcil obtenir algorismes de detecció de simetria global amb cost de computació $O(n \log n)$ [Atallah 85], mentre que l'anàlisi local porta inicialment a algorismes amb un cost de computació quadràtic, $O(n^2)$ pel fet de tenir que comparar la propietat d'invariància local per cada punt amb tots el altres i detectar les parelles simètriques.

Els primers treballs apareguts de detecció de simetria, tracten el problema d'obtenir eixos de simetria en un objecte o en una distribució geomètrica de punts aplicant un anàlisi global. Inicialment els treballs tracten la detecció de simetria de reflexió, que després s'estenen per tal de suportar simetria obliqua. Els algorismes intenten reduir el cost de computació utilitzant diferents tècniques, com calcular el centre de gravetat, els eixos d'inèrcia o aplicar la transformada de Hough als punts mitjos de cada parella de punts de contorn.

Així [Levitt 84] detecta la simetria de reflexió en un conjunt de punts utilitzant la transformada de Hough. [Yuen 90] l'estén a la detecció de simetria obliqua, rotant la imatge en diferents angles respecte l'origen i calculant els punts mitjos dels parells de punts, definides per les hipotètiques línies paral·leles de simetria (veure Propietat 3 ap.2.1.3). Aquell conjunt de punts mitjos que constitueixi una línia recta serà l'eix de simetria obliqua i l'angle de rotació serà l'angle d'obliquïtat (veure ap. 2.1.3). Un cop més la transformada de Hough s'utilitza per extreure les línies rectes d'un conjunt de punts.

Més endavant Yuen i Chan [Yuen 94] estenen aquest mètode per tal de detectar eixos de simetria de rotació però amb un cost de computació elevat, a causa de la quantificació de totes les possibles rotacions. Yip i alt. [Yip 94] proposen un mètode en tres passos per tal de reduir aquest cost: en el primer detecten els potencials centres de rotació, en el segon detecten l'ordre de la simetria de rotació (veure ap. 2.1.4), finalment en el tercer pas verifiquen el centres de rotació i l'ordre de la simetria de rotació .

[Atallah 85] utilitza la definició de simetria de reflexió a distribucions de figures geomètriques i agrupacions de punts, reduint l'exploració dels potencials eixos de simetria a les rectes que passen pel centre de gravetat de la distribució disminuint d'aquesta forma el cost de computació.

[Friedberg 86] presenta un mètode basat en els moments de inèrcia per trobar simetria obliqua.

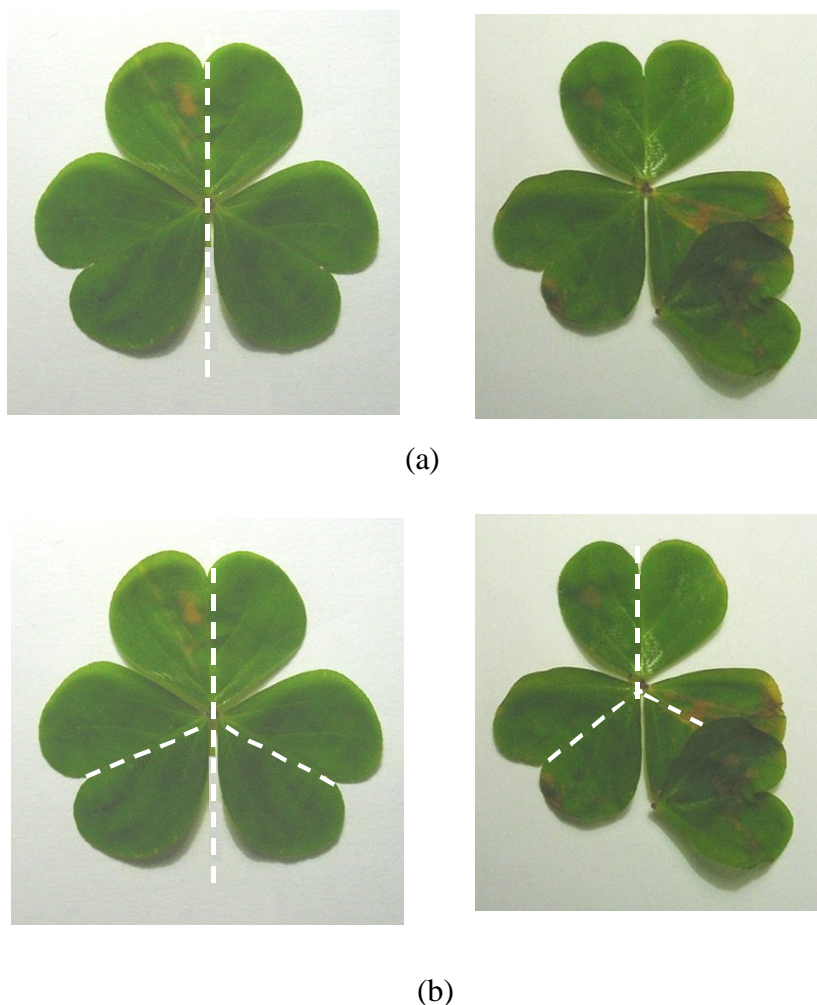


Figura 2.23: Sensibilitat a les oclusions.(a) L'anàlisi global no detecta cap eix de simetria. (b) L'anàlisi local detecta els eixos de les parts descobertes

Com hem dit abans aquest mètodes tenen la problemàtica que són sensibles a les oclusions i a la degradació dels contorns. Més recentment [Lei 99] i [Yip 00] han presentat mètodes de detecció de simetria de reflexió i obliqua basats en la transformada de Hough en presència d'occlusions .

Pel que fa a l'anàlisi local [Ponce 90] demostra que les parelles de punts de contorn que presenten simetria obliqua compleixen una propietat que relaciona la curvatura de cada punt de la parella amb l'angle d'obliquïtat de la simetria. Els punts mitjos d'aquestes parelles constituirà l'eix de simetria. La problemàtica que apareix aquí, és que per trobar les

parelles que compleixen la propietat hem de comparar cada un dels punts del contorn amb tots els altres i això comporta cost d'ordre $O(n^2)$. Per tal de reduir-lo utilitza un mètode proposat per Nevatia [Nevatia 77] consistent en discretitzar les direccions dels possibles eixos locals, que redueix l'ordre de computació a un cost, $O(K \times n)$ on K és el nombre de discretitzacions. Aplicant aquest algorisme amb $K=25$, obté els eixos de simetria i comprova com es pot inferir el 3D a partir dels diferents plans de simetria obliqua, tal com havia demostrat Ulupinar [Ulupinar 90].

Philippe Saint-Marc [Saint-Marc 93] presenta un mètode basat amb l'aproximació dels contorns a partir de B-splines i mostra que aquesta representació facilita l'extracció de les simetries de forma suficientment estable, independentment de l'extracció dels contorns. Obté algorismes d'extracció pels casos de simetria obliqua, paral·lela i SLS basats en la comparació local dels diferents B-Splines. D'aquesta forma l'ordre de computació quadràtic, en el nombre de punt de contorn, passa a ser-ho en nombre de segments B-Splines que aproximen els contorns, que és un nombre molt inferior. La dificultat que apareix és que en els casos de curvatures molt suaus la representació pot ser inestable, oscil·lant entre curvatura positiva o negativa. Per altra banda no dóna solució a la problemàtica de seleccionar els eixos de simetria principals a partir del conjunt d'eixos de simetria local.

T. Cham i R. Cipolla [Cham 94][Cham 95] proposen un algorisme a partir de la propietat de les tangents de les parelles de punt de contorn que presenten simetria obliqua, les quals es tallen en un punt d'intersecció, (Veure propietat 3 ap 2.1.3). Els subconjunts de punts d'intersecció anteriors, que formin línies rectes constituïran els potencials eixos de simetria. Així, a partir de la transformada Hough, extreuen les alineacions rectilínies de punts d'intersecció obtenint així els candidats a ser eixos de simetria obliqua. A diferència dels treballs anteriors es planteja filtrar els eixos de simetria menys significatius per tal d'obtenir els eixos reals. El mètode presenta resultats correctes en imatges on els objectes són fàcils de segmentar. Per altra banda no redueix el cost $O(n^2)$ que comporta tot anàlisi local sobre parelles de punts del contorn.

Existeixen altres treballs que utilitzen l'anàlisi local però tracten la simetria amb nous punts de vista, de manera que s'han classificat en apartats diferents. És el cas d'alguns treballs que detecten la simetria a partir d'invariants, que tractarem en l'apartat següent i d'alguns treballs que utilitzen l'avaluació numèrica del grau de simetria dels objectes i formes, que descrivim en l'apartat "la simetria com una característica continua"(veure ap. 2.2.4).

Per altra banda, hem citat aquí els treballs més rellevants que utilitzen l'anàlisi local per tal d'obtenir eixos de simetria rectilinis locals o globals i hem omès deliberadament anàlisis locals, que porten a l'obtenció de eixos de simetria curvilinis. Aquests treballs orientats bàsicament a la descripció de formes presegmentades, a partir dels eixos de simetria paral·lels i SLS o de la transformació axial (SAT), es consideren més endavant a l'apartat de "representació axial" (Veure ap. 2.2.5)

2.2.3. Anàlisi a partir d' invariants

Els progressos en visió per computador en la última dècada han revelat la importància dels invariants en el reconeixement d'objectes i identificació [Gool 91], [Weiss 93], [Pauwels 95], [Rothwell 95]. S'utilitzen dos tipus d'invariants en visió per computador: invariants algebraics [Zisserman 92] [Rothwell 95] i invariants diferencials [Cyganski 87] [Weiss 93]. Els invariants algebraics expressen relacions invariants sota transformacions geomètriques. Les transformacions més familiars són les Euclidianes (rotacions i translacions) on els invariants més importants són les distàncies i els angles.

Respecta la projecció ortogonal, el invariant fonamental és l'anomenat *Cross-ratio* [Guggenheimer 77]. Molts resultats en geometria projectiva es poden interpretar en termes de *Cross-ratio* de forma que J.L Mundy i A. Zisserman [Mundy 92] suggereixen que sembla probable que totes les propietats invariants d'una configuració geomètrica es poden interpretar, en últim terme, en funció de construccions *cross-ratio*

Els invariants diferencials s'estudien en geometria diferencial i parteixen de la definició de funció invariant següent [Guggenheimer 77]:

“Una funció $f(x)$ és un invariant a un grup de transformacions $F(\mathbf{x},a)$ si $f(x) = f(F(\mathbf{x},a))$ “

Així, el grup curvatures (ex. Curvatures euclidianes i afins) i les seves derivades són invariants sota el grup de transformacions i s’anomenen invariants diferencials.

Es útil també classificar els invariants per l’extensió de la seva definició; així els invariants definits globalment tal com els moments invariants [Abu 84],[Taubin 92], els descriptors de Fourier invariants [Arbter 90] i altres [Verri 96] s’anomenen invariants globals, mentre que els diferencials són locals.

El invariants diferencials requereixen sovint derivades de ordre elevat. Per exemple, les curvatures afins precisen de les derivades de quart ordre [Guggenheimer 77], mentre que els invariants diferencials sota projecció ortogonal precisen de les derivades de ordre vuit [Weis 93]. Tot i que aquestes derivades es poden computar utilitzant corbes en forma polinòmica [Weis 93], el resultat és inestable i petits sorolls en la imatge generen grans errors en els invariants. Contràriament els invariants algebraics no precisen de derivades i, per tant, són menys sensibles al soroll.

L’avantatge dels invariants diferencials és que al estar definits localment en punts individuals, es poden calcular encara que existeixin corbes amb oclusions o parcialment degradades en el procés d’extracció, mentre que els invariants globals, especialment els moments invariants, són fortament sensibles a les oclusions.

Més recentment s’han utilitzat invariants per a la detecció de simetria tot i que des de fa temps Van Gool i alt. [Gool 90] van introduir un espai transformat (“Arc length Space ALS”), basat en la longitud dels arcs de les corbes dels contorns, per tal de modelar les simetries i altres semblances on intervé la invariància. Més endavant [Gool 95 (1)] mostra com en aquest espai les corbes simètriques es transformen en línies rectes i que aquest resultat pot ser utilitzat per la detecció de simetria. Finalment el mateix autor [Gool 95 (2)] presenta un conjunt de propietats invariants per corbes que presenten simetria obliqua

J.Sato i R.Cipolla [Sato 97] proposa un invariant integral per tal de detectar simetria obliqua. Aquest mètode té les avantatges de l'anàlisi local, dels invariants diferencials, però amb menys sensibilitat al soroll. Així, es pot considerar que aquest punt de vista aporta la superació, en part, del compromís “anàlisi global vs. anàlisi local” ja que s'obté un mètode amb les avantatges del anàlisi local, sense patir-ne les problemàtiques clàssiques de inestabilitat i sensibilitat al soroll. Els resultats del mètode es mostren amb imatges reals però amb un sol objecte sobre un fons uniforme.

D.Shen i alt [Shen 00] presenta una tècnica de detecció de simetria obliqua local i global basada en l'obtenció d'un vector de característiques invariants sota transformació afí que captura característica locals i semilocals desenvolupada en un treball anterior [Shen 99]. En aquest mètode la detecció de la simetria obliqua es simplifica a la detecció de línies rectes d'orientació coneguda. Els resultats es mostren sobre formes segmentades prèviament.

2.2.4. La simetria com una característica contínua

Ja hem comentat en apartats anteriors la dificultat de trobar eixos de simetria en imatges d'escenes reals a partir de les definicions, a causa que les deformacions inherents a l'obtenció de la imatge destrueixen la simetria pròpiament dita.

Si considerem la simetria com una característica discreta, els objectes quasi simètrics (Fig 2.24) o simètrics però sotmesos a deformacions, quedaran exclosos a l'aplicar els algorismes clàssics. Sembla doncs lògic introduir el concepte de quasi simetria o de grau de simetria, considerant la simetria com una característica continua. Aquest punt de vista, novell en visió per computador, ja va ser tractat en el 1962 per [Grünbaum 63] que va fer una revisió dels mètodes de mesura geomètrica de la simetria, mentre que més recentment [Yodogawa 82] presenta una avaluació de la simetria de figures que anomena Simetropia.

En visió per computador G. Marola [Marola 89 (1)] defineix un coeficient de simetria per imatges quasi simètriques, per un eix donat a partir del nivell de gris de la següent forma:

$$b = 1 - \frac{\frac{1}{2} \iint [w(x, y) - w(\bar{x}, \bar{y})]^2 dx dy}{\iint w^2(x, y) dx dy}$$

On $w(x, y)$ y $w(\bar{x}, \bar{y})$ són les intensitats de la imatge en punt $p(x, y)$ y el seu simètric $\bar{p}(\bar{x}, \bar{y})$ respecte d'un determinat eix I amb angle q .

És fàcil veure que, per una forma perfectament simètrica, el coeficient de simetria b , quant l'eix explorat coincideix amb l'eix de simetria, és igual a la unitat ($b=1$). Per formes sense simetria o per eixos que no són de simetria, aquest mateix coeficient tindrà un valor molt petit ($b \approx 0$). Així aquest coeficient varia entra $0 \leq b \leq 1$ i els eixos explorats que donin coeficients de simetria pròxims a la unitat seran eixos de simetria de la imatge. Marola [Marola 89(1)] utilitza aquesta definició per desenvolupar un algoritme que dóna el nombre



(a)



(b)



(c)

Figura 2.24: Les cares són quasi simetries. (a) Cara real. (b) Cara construïda amb la part dreta i la seva reflexió. (c) Cara construïda amb la part esquerra i la seva reflexió

i la posició dels eixos de simetria en formes simètriques o quasi simètriques basat en minimitzar el coeficient anterior. Més endavant [Marola 89(2)] presenta un mètode de detecció i localització d'objectes basat també en el càlcul del coeficient de simetria anterior. Aquesta forma de mesurar el grau de simetria d'una forma és, en el fons, una quantificació global de la simetria, per tant, té tots els inconvenients de l'anàlisi global, és a dir, sensibilitat a les oclusions i la necessitat d'una segmentació prèvia de formes.

G. Gilat [Gilat 89] presenta una idea similar consistent en calcular la desviació respecte la simetria de reflexió que presenta un objecte per un determinat pla de reflexió. El càlcul es basa en obtenir la diferència de volum entre l'objecte i la seva reflexió per diferents plans de reflexió. La desviació mínima pels diferents plans de reflexió possibles ens donen el pla de màxima la simetria que s'anomena "*Chirality*".

H.Ogawa [Ogawa 89] proposa una mesura de simetria local consistent en calcular la simetria associada a cada punt P_i de la línia de contorn a partir del nombre k de punts simètrics que es poden trobar en ambdós costats del punt considerat P_i . Com es pot veure a la Fig.2.25 aquesta mesura dóna màxims locals en els vèrtex de les corbes. En aquest treball es presenta un algorisme basat en aquesta mesura de simetria local, per tal de detectar els vèrtex. La idea és relativament senzilla però la seva implementació sobre corbes requereix eines geomètriques que fan difícil i poc eficient la programació, a causa de la dificultat d'identificar les parelles de punts simètrics respecte el punt P_i .

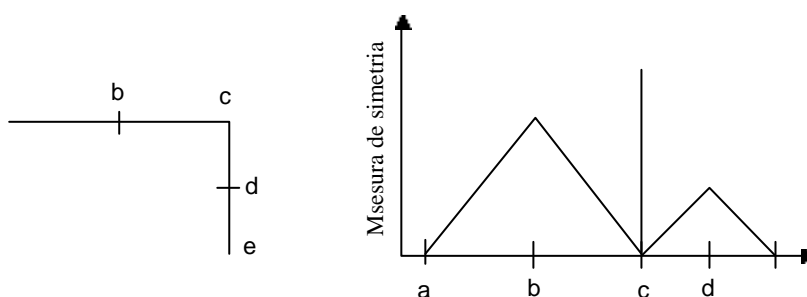


Figura 2.25: Mesura de simetria a cada punt d'una línia.

Fins a l'any 1995 no es reprèn la idea de detectar la simetria a partir de l'avaluació del grau de simetria de les formes. H Zabrosdsky i S. Peleg [Zabrosky 95] formalitzen aquesta idea defineixen el concepte de "Simetria Contínua" i el generalitzen a diferent tipus de simetria. Presenten una mesura general de la simetria anomenada "*Distància de simetria*" (*SD*) definida com " la quantificació de l'esforç requerit per transformar una figura donada en una figura simètrica". Aquest esforç, és mesurat a partir de les distàncies al quadrat, mesurades des de la posició dels punts que s'han hagut de moure per fer la figura simètrica, fins la posició inicial d'aquest punts en la figura original.

Formalment :

Anomenem Ω a l'espai de totes les figures de dimensió donada, on cada figura P es representa per una seqüència de n punts $\{P_i\}_i^{n-1}$. Definim una mètrica d sobre aquest espai de la següent manera:

$$d : \Omega \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$$

$$d(P, Q) = d(\{P_i\}, \{Q_i\}) = \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \|P_i - Q_i\|^2$$

Aquesta mètrica defineix una funció de distància entre les dos figures dins l'espai Ω

Si ara definim la *Transformada simètrica* de la figura P com la figura simètrica \bar{P} més proxima a P , en termes de la mètrica d , podem definir la *Distància de simetria* (*SD*) d'una figura P com la distància entre ella i la seva transformada simètrica \bar{P} computada de la següent manera:

$$SD = d(P, \bar{P}) = \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \|P_i - Q_i\|^2$$

Aquesta definició general de distància de simetria, permet una comparació del grau de simetria de diferents formes i del grau de simetria d'una determinada forma per els diferents tipus simetria (Fig 2.26). A partir d'aquestes definicions, l'autor presenta diferents

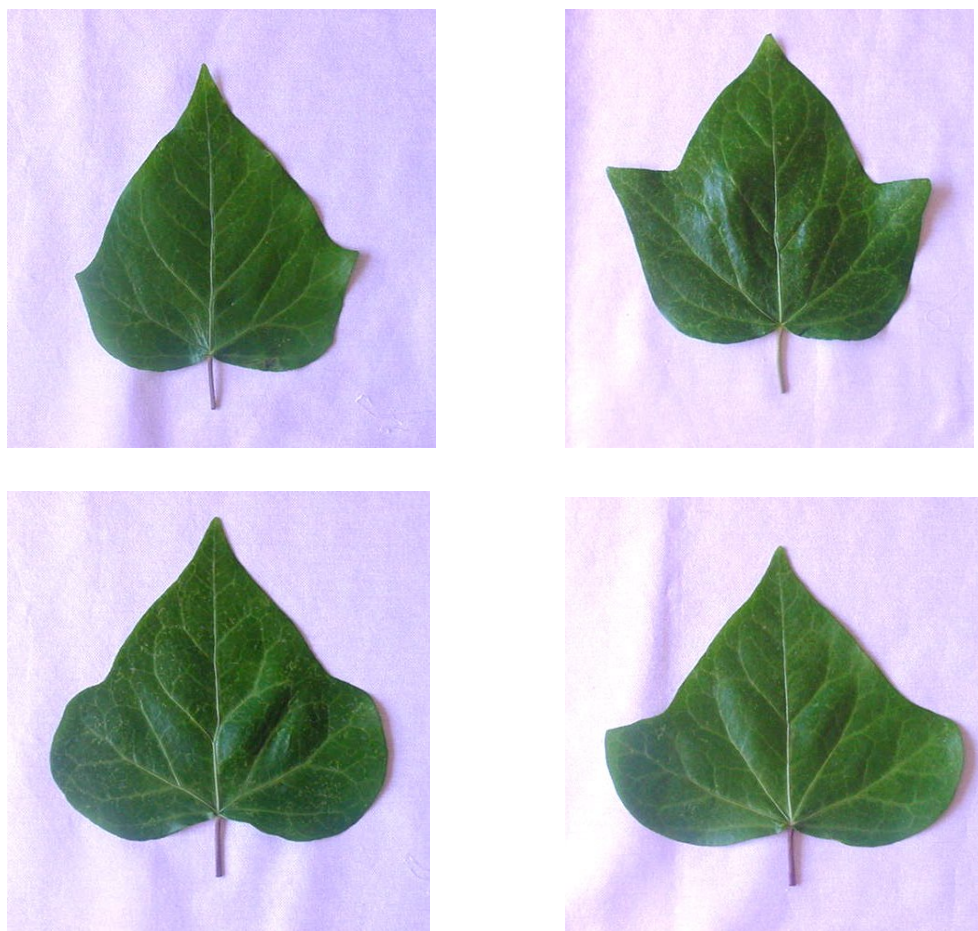


Figura 2.26: La simetria com una característica continua: Quantificació del nivell de simetria. Fulles quasi simètriques amb diferents nivells de simetria

algorismes per tal d'obtenir la "*Transformada simètrica*" i presenta diferents aplicacions, com ara trobar, l'orientació d'objectes 3D, trobar la localització de regions simètriques així com la reconstrucció de formes amb oclusió parcial. El treball dóna poca importància a la detecció de simetria pròpiament dita.

Cal fer notar que per poder aplicar aquest mètode, les formes a analitzar han d'estar identificades prèviament, a diferència dels mètodes que utilitzen definicions locals de simetria sobre els contorns.

Tal com mostra K.Kanatani [Kanatani 96] existeix una dificultat teòrica en aquest plantejament pel fet que la simetria té jerarquia, de manera que una forma amb simetria d'ordre n (n simetries) inclou les simetries d'ordre inferior. Això permet que formes amb menys grau de simetria, puguin donar distància de simetria inferior a altres que tenen un grau de simetria més elevat, com es pot observar en alguns exemples del treball de Zabrosdsky [Zabrosky 95].

J.M Iniesta i alt. [Iniesta 96] presenta un algorisme basat en la mesura local de simetria comentada anteriorment i introduïda per H.Ogawa [Ogawa 89], que anomenen "Deficiència de simetria local (DSL)". Ja s'ha comentat anteriorment que aquesta mesura era complexa de computar. Aquí es presenta una possibilitat basada en codificar les corbes mitjançant cadenes de Freeman [Freeman 61] que redueix la complexitat a un ordre pròxim al lineal.

F.Y. Shih i W.Wong [Shih 99] recullen les idees de Ogawa i Iniesta que acabem de comentar. Presenten un algorisme que obté, en una sola passada sobre els contorns, la "Deficiència de simetria local" (DSL), basada també en la codificació de les corbes en cadenes, obtenint un cost de computació lineal. L'algorisme presentat és, a més a més, paral·lelitzable.

Els mètodes que hem vist fins ara precisen d'algun tipus de segmentació prèvia (subconjunts de punts, objectes o formes..) que determinen l'abast del càlcul del grau de simetria, a excepció dels dos últims mètodes basats en la idea de Ogawa que, pel fet d'aplicar un anàlisi local, no precisa d'aquest coneixement previ. A. D Cross i alt. [Cross 99] presenten un mètode d'obtenció de punts simètrics, basat en el càlcul del vector potencial, obtingut a partir del gradient de la imatge multinivell que té l'avantatge de que no necessita cap tipus de segmentació prèvia d'entitats.

2.2.5. La simetria en la descripció axial de formes planes.

Com hem dit en apartats anteriors, la simetria en general pot ajudar a la descripció de formes planes, sobretot si permetem que els eixos puguin ser parcials o totalment curvilinis (Fig.2.27). Per tant, les simetries que considerarem en aquest apartat, són les que tenen

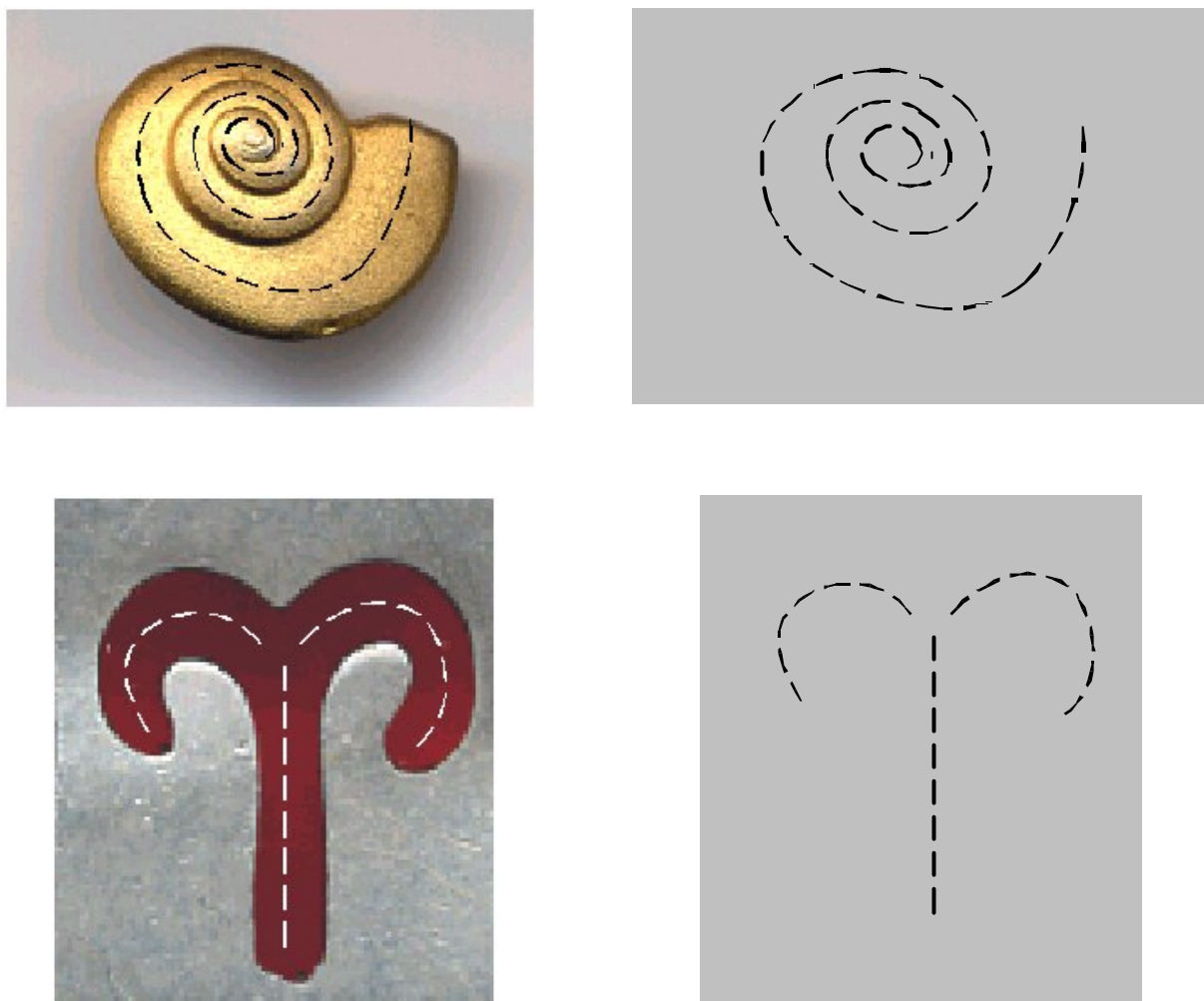


Figura 2.27: Descripció axial de formes a partir de la detecció de simetria paral·lela

aquesta propietat, és a dir, la simetria deduïda de la simetria de transformació axial STA, la simetria paral·lela i la simetria local SLS.

Des del punt de vista de la detecció, la primera és la més prohibitiva a nivell de cost de computació doncs, segons la definició (veure ap. 2.1.6), implica calcular les distàncies de tots els punts interiors de la regió a transformar, amb tots els punts que formen el contorn. Aquest càlcul ens porta a un cost de computació d'ordre $O(n \times k)$ on n són el nombre de píxels interiors a la forma i k els punts del contorn. Els altres dos tipus de simetria, treballen amb una propietat local aplicada a cada un dels punts de contorn i que cal comparar amb tots els altres (veure ap. 2.1.5 i 2.1.7). Això porta inicialment a algorismes amb cost

d'ordre $O(n^2)$, on n és el nombre de punts de contorn, que tot i ser un nombre més reduït continua sent un cost molt elevat.

Per altra banda, els tres tipus de definicions porten a algorismes molt sensibles al soroll. Per tant, si ens limitem a aplicar directament les definicions apareixen, com és lògic, les problemàtiques associades a l'anàlisi local: cost de computació elevat, sensibilitat al soroll i inestabilitat.

El mètode per reduir la sensibilitat al soroll en els algorismes que detecten simetria del tipus STA, consisteixen en suavitzar el contorn utilitzant aproximacions poligonals o considerar només un subconjunt dels punts interiors a distància superior a un determinat llindar. La última aproximació genera discontinuïtats en els eixos obtinguts.

Aquestes problemàtiques, afegides a l'elevat cost de computació, ha fet que molts autors optin per abandonar el càlcul de la distància transformada i utilitzin algorismes "d'aprimament". Aquests algorismes consisteixen en l'erosió iterativa de la regió del contorn, tenint en compte restriccions tal com: respectar els punts terminals, no trencar la connectivitat i no erosionar excessivament la regió. S'obtenen així algorismes que convergeixen en algun tipus de representació axial de la regió [Rosenfeld 76] [Pavlidis 77] però ja no utilitzen conceptualment la simetria.

Altres treballen en dominis restringits, així [Lee 82] obté un algorisme amb un cost de computació d'ordre $O(n \log n)$ en dominis poligonals connectats de forma simple, que alguns autors han generalitzat a dominis amb connexió múltiple amb contorns formats per segments i arcs circulars. [Preparata 85] [Yap 87] [Held 91]

Quan les corbes dels contorns són més generals, els progressos són més petits, així més recentment [Chou 95] descriu un interessant mètode que tracta amb aquest cas mentre que [Alt 95] presenta un mètode per obtenir l'eix (SAT) en objectes curvilinis.

Finalment [Choi 97] presenta un lema de descomposició de dominis, que permet dividir els dominis més complicats en trossos més petits i simples, obtenint un algorisme eficient i estable.

M. Brady i H. Asada [Brady 84] introdueixen i estudien les característiques de la simetria local SLS i, com hem dit anteriorment, mostren que aquesta recull millor els eixos de simetria locals principals, que la simetria de transformació axial (STA) que hem tractat anteriorment. Presenten un algorisme de detecció, consistent en comparar cada punt de contorn amb tots els altres, basat en la definició de la simetria local SLS (veure ap. 2.1.7) i que lògicament, manté les problemàtiques de l'ordre de computació $O(n^2)$ i la sensibilitat al soroll. Per tal reduir aquestes problemàtiques, proposen aproximar els contorns mitjançant línies rectes i arcs circulars, obtenint un algorisme més robust i amb una reducció de cost a $O(N^2)$, on N és ara el nombre d'arcs i línies d'aproximació, molt inferior al nombre de punts de contorn.

Una dificultat addicional és que, a diferència de la transformació SAT, apareixen infinitat d'eixos excessivament locals i per tant molt poc significatius, que compliquen l'obtenció dels eixos principals. J.H. Cornell i M. Brady [Cornell 87] proposen obtenir tots els eixos locals i posteriorment aplicar regles d'agrupació, per tal d'obtenir els eixos més significatius.

P. Saint-Marc i alt [Saint-Marc 90] [Saint-Marc 93] mostren que l'aproximació dels contorns a partir de B-splines, facilita l'extracció de diferents tipus de simetria (obliqua i paral·lela) i, en particular, la simetria local SLS. Presenten un algorisme consistent en comparar parelles de B-splines, a partir dels segments curvilinis que les aproximen i posteriorment agrupar els eixos a partir de la seva connectivitat. Amb aquesta aproximació, obtenen un algorisme més estable i robust al soroll que proporciona els eixos principals amb un cost de computació $O(n_1 \times n_2)$, on n_i és el nombre de segments curvilinis que inclou un B-Spline en aproximar la corba C_i . Aquest cost és aproximadament el mateix que l'obtingut per l'aproximació d'arcs circulars.

Finalment H. Rom i G. Medioni [Rom 93] descomponen les formes en diferents parts i apliquen l'algorisme anterior sobre les particions, obtenint una descripció axial d'aquestes parts. Utilitzen, per altra banda, la simetria paral·lela per tal d'obtenir la informació global

de la relació de cada part dins la forma. D'aquesta manera s'aconsegueix un descripció axial força natural de la forma.