UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA

APORTACIÓN AL ESTUDIO DEL SOFTWARE NECESARIO PARA LA INFORMATIZACIÓN DE LOS MÉTODOS DE APRENDIZAJE DE LAS TÉCNICAS DE EXPRESIÓN GRÁFICA, Y SU POSTERIOR IMPLEMENTACIÓN

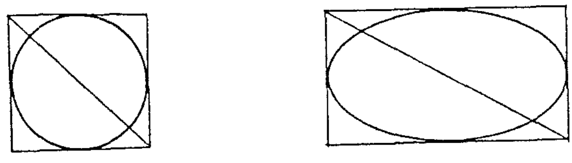
Autor: Miquel Castillo i Ballarda
Director: Jordi Mestres i Sardà

1988

Introducción.

Puede parecer, dado que nuestro estudio se ha centrado en las 3D, que los programas que trabajan en 2D tienen resueltas todas las operaciones, tanto de creación como de manipulación, de puntos, rectas y curvas. Sobre todo en el caso de las curvas, eso está bastante lejos de ser cierto, cuando tratamos con arcos de circunferència si que podemos considerar que tenemos implementados todas las construcciones posibles, pero existen dos casos claros en los que esto no es asi.

Cuando las curvas no tienen una ecuación que las define, nos encontramos con dificultades para representarla, dado que el proceso de determinación informático necesita apoyarse en alguna propiedad analitica para trabajar. Este caso será estudiado al final de este capitulo. Existe un tipo de curvas que pese a tener una ecuación que las define, tampoco están totalmente resueltas en paquetes de 2D: las cónicas. Aun en el caso de que se traten cónicas en un programa informático, de hecho sólo se trabaja con una, la elipse. Más aun, el sistema de trabajo con la elipse también es bastante sorprendente, veámoslo. El programa decano en el campo del CAD, AutoCAD, para definir una elipse lo hace de la siguiente forma:



Previamente ha creado y almacenado una entidad, llamada grupo, formada por un cuadrado y una circunferència inscrita dentro de èl. Es este dibujo deformado el que nos darà la elipse, transformàndose el cuadrado en un rectàngulo. El programa lo que pide es el tamaño de la diagonal de ese rectàngulo y devuelve la imagen de, sòlo, la elipse. A pesar de lo dicho, hay que reconocer que existen programas que trabajan este problema de las elipses mucho màs correctamente, incluso permiten el trabajo con arcos de elipse. Entre estos programas se encuentra PC-Draft, alemán, que, a mi juicio, es el mejor paquete para el trabajo riguroso en 2D.

Estudio Analitico de las Cònicas.

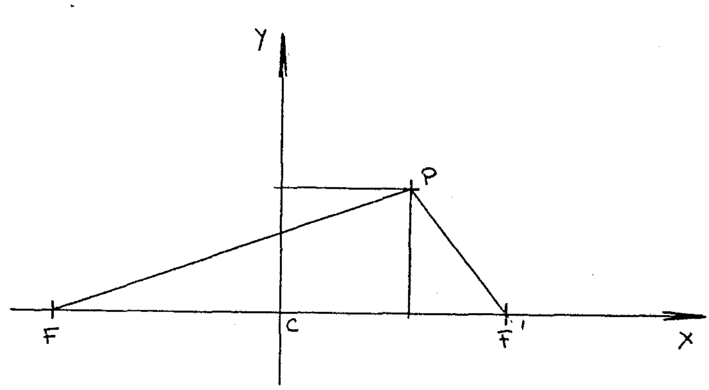
No pretendo realizar un estudio exhaustivo sobre las cònicas, sino manejar algunas propiedades de ellas, ya sean analiticas o proyectivas para, por su mediaciòn, ver de que manera podremos implementar un programa que se plantee el trabajar con ellas con la mayor soltura posible (1). Para ello recapacitemos en que forma se dibujan dichas curvas partiendo del hecho de que tienen una ecuaciòn que podemos conocer; mientras que el proceso de obtener puntos de una cònica y unirlos es un concepto bastante discutible para usarlo trabajando con làpiz y papel, desde un punto de vista informàtico serà el òptimo, veamos porquè. Se puede aceptar que el dibujar, a mano, una cònica mediante la obtenciòn y posterior uniòn de varios de sus puntos, es vàlido a efectos de representaciòn de una ecuaciòn, y segùn la habilidad del dibujante la sensaciòn òptica puede ser òptima. Ahora bien, nadie medianamente riguroso aceptará como válida la intersección de varias cónicas obtenidas de esa forma, ya que los errores pueden ser grandes y acumulativos; recurrimos en estos casos a la Geometría Proyectiva para, con su ayuda, hallar tangentes a una cónica por un punto, intersección con una recta, etc. Para todo lo cual debemos obtener de dichas cónicas una serie de elementos que las definen como focos, ejes, directrices, vértices, etc.

Son las propiedades que tienen esos elementos que obtenemos las que nos dàn los puntos que necesitamos; pensemos que, de alguna forma, pasamos de tener un problema con curvas de segundo orden, a tener un problema con puntos (vértices, focos,..), rectas (ejes, directrices,..), circulos (circulo focal, distancias a dos puntos fijos que se resuelve como intersección de dos lugares geométricos que son circunferéncias,...), etc. De esta manera solucionamos correctamente el problema de falta de precisión tradicionalmente. En el caso de un tratamiento informàtizado del mismo problema, la representación de una cónica sigue siendo válida cuando lo hacemos mediante la materialización y posterior unión de los puntos que obtenemos a partir de su ecuación, con la ventaja sobre un usuario manual de poder dibujar un enorme número de puntos, los que sean necesarios para nuestros fines. Para el ordenador la diferencia entre la obtención y unión de un número pequeño de puntos o uno mayor es nimia, dado, una vez más, el carácter repetitivo de estas operaciones, no podemos decir lo mismo en el caso de nuestro hipotético usuario. Como ventaja intersección de dicha cónica con la polar respecto a ella del punto exterior en cuestión. Desdoblamos, asi, el problema en una parte especifica, el cálculo de la polar, y otra general, intersección de dos ecuaciones.

En ocasiones omitiremos alguna demostración, dado que no es este el objeto de este capitulo, por el mismo razonamiento sólo comentaremos lo que tenga una aplicación inmediata. Es por esto que en el proximo apartado damos por conocida la generación de cónicas de Apolonio, como secciones de un cono, asi como algunas propiedades métricas.

Ecuación Implicita.

Partiendo de la definición de cónica como lugar geométrico de puntos cuya "suma" de distancias a dos puntos fijos es constante, vamos a llegar a la expresión más conocida, analiticamente, de cónica, que es su ecuación implicita como curva de segundo orden.



Sea en la figura, P un punto del lugar geométrico que queremos definir y F y F' los dos puntos fijos, a los que llamamos focos en el tratamiento geomètrico general, y supongamos que la cònica que vamos a definir es una elipse, (el procedimiento, a pesar de esta particularizaciòn al caso elipse, es completamente general), se cumplirá:

$$PF+PF'=2a$$

si consideramos los ejes coordenados con origen en el centro de la cònica, y sabemos que la distancia FF' es igual a 2c, sustituyendo en la expresiòn anterior los segmentos por su valor en funciòn de los ejes tendremos:

$$\sqrt{((c-x)^2+y^2}+\sqrt{(x+c)^2+y^2})=2a$$

de donde:

$$\sqrt{((c-x)^2+y^2)}=2a-\sqrt{((x+c)^2+y^2)}$$
$$(c-x)^2+y^2=4a^2+(x+c)^2+y^2-4a\sqrt{((x+c)^2+y^2)}$$
$$4cx-4a^2=4a\sqrt{((x+c)^2+y^2)}$$
$$c^2x^2+a^4+2a^2cx=a^2((x+c)^2+y)$$
$$c^2x^2+a^4+2a^2cx=a^2x^2+a^2c^2+2a^2cx+a^2y^2$$

agrupando:

$$a^4-a^2c^2=x^2(a^2-c^2)+a^2y^2$$
$$a^2(a^2-c^2)=x^2(a^2-c^2)+a^2y^2$$

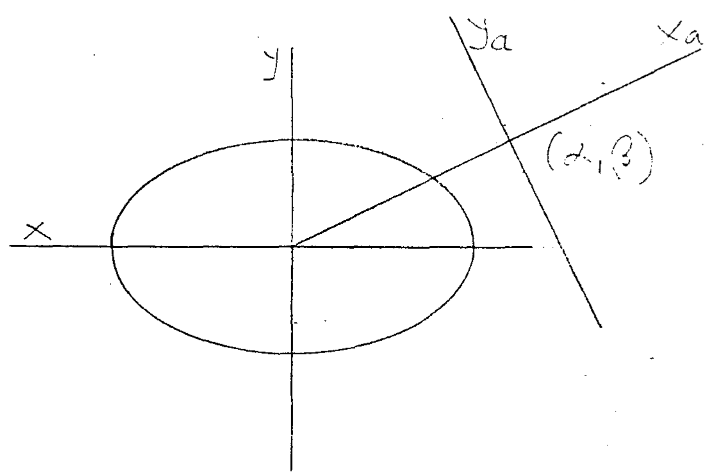
existe una relaciòn entre 2a, distancia entre los vertices del eje focal, 2c, distancia entre los focos,y 2b, distancia entre los vèrtices del eje no focal, que es la de formar un triángulo rectángulo de hipotenusa 2a, en el caso de la elipse. Se cumplirá, pues, que $b^2=a^2-c^2$, lo que sustituido en la anterior expresiòn nos llevará a:

$$a^2b^2=x^2b^2+x^2y^2$$

que nos conduce inmediatamente a :

$$x^2/a^2+y^2/b^2=1$$

La anterior expresiòn, la cumplen todos los puntos de la cònica referida èsta a sus ejes y por lo tanto con el origen de coordenadas en su centro; refiramos, ahora, estos ejes relativos a unos absolutos Xa, Ya:



la expresiòn analitica de las coordenadas absolutas de los puntos de la cònica será:

$$x=\alpha+Xa.\cos\delta-Ya.\operatorname{sen}\delta$$

$$y=\beta+Xa.\operatorname{sen}\delta+Ya.\cos\delta$$

El lugar geomètrico que estamos estudiando depende, en consecuencia, de 5 variables independientes, a saber:

a: valor de la semidistancia entre los vèrtices del eje focal.

b: valor de la semidistancia entre los vèrtices del eje no focal.

α y β: coordenadas del centro de la cònica respecto a unos ejes absolutos.

y δ: àngulo entre los ejes relàtivos y absolutos.

Podemos escribir dicho lugar geomètrico de la siguiente forma:

$$Ax^2+By^2+Cxy+Dx+Ey+F=0$$

que es una curva de segundo orden que depende de 5 variables A',B',C',D' y E', pudiendo ser estas variables el resultado de dividir las de la ecuación por cualquiera de los seis términos, siempre y cuando éste sea distinto de cero. Tenemos, pues, cinco grados de libertad.

Como vimos en el Apéndice A, es conveniente trabajar con coordenadas homogéneas, tanto desde un punto de vista matemático-geométrico como informático, por lo que los puntos pueden quedar definidos por x=x/t e y=y/t. t=1 nos da los puntos en dos dimensiones que estamos acostumbrados a manejar. La expresión implicita de la cónica, queda despues de esta transformación, de la siguiente forma:

$$Ax^2+By^2+Cxy+Dxt+Eyt+Ft^2=0$$

Para manejar puntos impròpios, las coordenadas homogéneas nos son muy útiles, ya que tratándose de direcciones, los podremos representar como un punto de coordenadas homogéneas (1,m,0), siendo m la inclinación, con lo que todos los conceptos proyectivos de Desargues, pueden tener una traducción analitica inmediata.

Operaciones con cónicas.

Normalmente la ecuación implicita de una cónica no se representa con los coeficientes A,B,... que hemos usado anteriormente, sino que convencionalmente, se escribe:

$$A_{11}x^2+A_{22}y^2+2A_{12}xy+2A_{13}xt+2A_{23}yt+A_{33}t^2=0 \quad (a)$$

el hecho de que los tèrminos no cuadràticos se noten como $2A_{ij}$ se justificarà un poco màs adelante.

Intersecciòn de una recta con una cònica.

Sea Mx+Ny+Ot=0, la recta en cuestiòn. La intersecciòn con la cònica nos darà, lògicamente, dos puntos cuya obtenciòn no representa ninguna dificultad.

Si la recta con la que queremos cortar la cònica es impròpia, por lo que hemos dicho antes, podrà tener una direcciòn determinada, pero lo que es seguro es que t valdrà cero. Podemos, pues hacer un estudio general de los puntos de intersecciòn de una cònica con una recta impròpia. Sustituyendo t=0, en la ecuaciòn de la cònica tendremos:

$A_{11}x^2+2A_{12}xy+A_{22}y^2=0$, como x vale 1 tendremos:

$$A_{11}+2A_{12}y+A_{22}y^2=0$$

la soluciòn de esta ecuaciòn de segundo grado nos darà los dos puntos de intersecciòn de la cònica con una recta impròpia. El discriminante de la ecuaciòn nos sirve habitualmente para estudiar el nùmero de soluciones de dicha ecuaciòn. Sabemos, por otra parte, que la hipèrbola tiene dos puntos impropios (dos soluciones), la paràbola uno (una soluciòn doble) y la elipse ninguno (dos soluciones imaginarias). Luego segùn sea el discriminante podremos saber el tipo de cònica con la que estamos trabajando. La intersección de una cónica con una recta imprópia nos sirve, pues, para clasificarla. Nuevamente el sistema seguido coincide con el geométrico tradicional.

Si $A_{12}^2-A_{11}.A_{22}>0$ --2 soluciones reales--Hipérbola.
Si $A_{12}^2-A_{11}.A_{22}<0$ --2 soluciones imaginarias--Elipse.
Si $A_{12}^2-A_{11}.A_{22}=0$ --1 solución real doble--Parábola.

Polaridad respecto a una cónica.

La expresión (a), es la ecuación implicita de una cónica, puede escribirse como $f(x,y,t)=0$. Si la derivamos respecto de x, por ejemplo tendremos la siguiente expresión:

$$f'_x=2.A_{11}x+2.A_{12}y+2.A_{13}t$$

que recibe el nombre de derivada parcial respecto de x. Si dividimos por 2 toda la expresión, nos quedará lo que se conoce como "semiderivada parcial respecto de x", de ahi la conveniencia de definir $f(x,y,t)=0$ con algunos terminos dobles.

Las tres semiderivadas parciales, tendrán las expresiones:

$$f'_x=A_{11}x+A_{12}y+A_{13}t$$

$$f'_y=A_{12}x+A_{22}y+A_{23}t \qquad (b)$$

$$f'_t=A_{13}x+A_{23}y+A_{33}t$$

Dado un punto del plano, (x_1,y_1,t_1), analicemos la expresión:

$$x.f'_{x1}+y.f'_{y1}+t.f'_{t1}=0 \qquad (c)$$

dicha expresión recibe el nombre de Operador. Veamos sus propiedades: vemos que es una recta asociada al punto (x_1,y_1,t_1). Si tenemos una recta cualquiera $Mx+Ny+Ot=0$, y queremos hallar un punto (x_1,y_1,t_1) para que coincida con el operador, deberá cumplirse:

$$f'_{x1}/M=f'_{y1}/N=f'_{t1}/O$$

de donde:

$f'_{x1}=M/O.f'_{t1}$--

$A_{11}x_1+A_{12}y_1+A_{13}t_1=M/O(A_{13}x_1+A_{23}y_1+A_{33}t_1)$

$f'_{y1}=N/O.f'_{t1}$--

$A_{12}x_1+A_{22}y_1+A_{23}t_1=N/O(A_{13}x_1+A_{23}y_1+A_{33}t_1)$

dividiendo por t_1, tenemos dos ecuaciones con dos incognitas $X=x_1/t_1$, $Y=y_1/t_1$ con solución única; lo que quiere decir que el operador a cada punto le asocia una recta y a cada recta un punto.

A esta relación establecida por el operador se le llama POLARIDAD, la expresión (c) es la de la polar de un punto (x_1,y_1,t_1), siendo este punto el polo de la recta (c).

Propiedad de la polaridad.

Si multiplicamos las expresiones (b) por x_2, y_2 y t_2 cada una de ellas obtendremos:

$$x_2 \cdot f'_{x1}=A_{11}x_2y_1+A_{12}x_2y_1+A_{13}x_2t_1$$

$$y_2 \cdot f'_{y1}=A_{12}x_1y_2+A_{22}y_1y_2+A_{23}t_1y_2$$

$$t_2 \cdot f'_{t1}=A_{13}x_1t_2+A_{23}y_1t_2+A_{33}t_1t_2$$

sumando y agrupando, es fácil ver que se cumple que:

$$x_1 \cdot f'_{x2}+y_1 \cdot f'_{y2}+t_1 \cdot f'_{t2} \equiv x_2 \cdot f'_{x1}+y_2 \cdot f'_{y1}+t_2 \cdot f'_{t1} \qquad \text{(d)}$$

Lo anterior se puede expresar como: si un punto 1 se encuentra en una recta r_2 que es la polar de otro punto 2, éste se encuentra sobre la polar r_1 del primer punto.

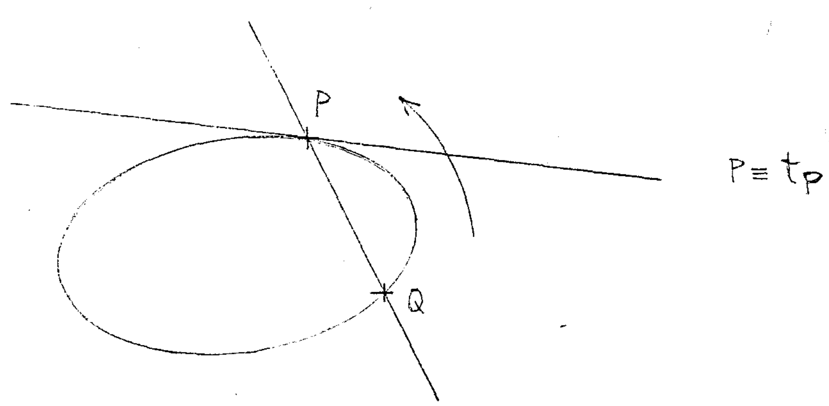
Hasta este momento la polaridad no es más que una propiedad que hemos obtenido aplicando el operador, pero no hemos visto, aun, su traducción geométrica, veamos para ello que ocurre cuando un punto se encuentra sobre su própia polar. Sea (x_1, y_1, t_1) dicho punto, deberá cumplirse:

$$x_1 \cdot f'_{x1}+y_1 \cdot f'_{y1}+t_1 \cdot f'_{t1}=0$$

desarrollando dicha expresión, tendremos:

$$x_1\cdot(A_{11}x_1+A_{12}y_1+A_{13}t_1)+y_1\cdot(A_{12}x_1+A_{22}y_1+A_{23}t_1)+$$
$$+t_1\cdot(A_{13}x_1++A_{23}y_1+A_{33}t_1)=A_{11}x_1^2+A_{22}y_1^2+A_{33}t_1^2+$$
$$+2A_{12}x_1y_1t_1+2A_{13}x_1t_1+$$
$$+2A_{23}y_1t_1=0$$

de donde se infiere que el punto pertenece a la cònica. Supongamos que el punto en cuestiòn es el P de la figura:



si suponemos que la polar de P corta a la cònica en otro punto Q, la aplicaciòn de la propiedad (d), nos dice que si Q se encuentra sobre la polar de P, èste debe encontrarse sobre la polar de Q y eso sòlo es posible si P y Q coinciden. Luego la polar de un punto de la cònica, es la tangente en ese punto a la cònica.

Definición de una cónica.

Vamos sólo a contemplar tres casos de definición de una cónica:

- Dados cinco puntos de paso.

- Dados cuatro puntos y la tangente en uno de ellos.

- Dados tres puntos y las tangentes en dos de ellos.

Primer caso.

Dar cinco puntos de paso de una cónica es dar la posibilidad de establecer un sistema de cinco ecuaciones con cinco incognitas de fácil aunque laboriosa resolución.

Dado el carácter de sistema lineal de ecuaciones pueden darse casos de incongruencia de puntos de paso. Si los puntos dados dan lugar a ecuaciones que sean combinación lineal de otras, el sistema usado para resolver el problema puede resultar inoperante pues la matriz de coeficientes tiene filas "iguales", dando como resultado que el sistema no tiene solución, cuando geométricamente sabemos que eso no es cierto.

Para resolver esta dificultad habrá que usar un sistema de Algebra Lineal que consiste en hallar la expresión del haz de cónicas que pasa per cuatro de los puntos, e imponer que dicho haz contenga al quinto punto. Este sistema no puede dar casos de incongruencia como los arriba nombrados.

Segundo caso.

Sean los datos los puntos (x_1,y_1,t_1), (x_2,y_2,t_2), (x_3,y_3,t_3) y (x_4,y_4,t_4) y la tangente en este último punto T_4 dada por $Mx+Ny+Ot=0$.

Imponiendo:

$$f(x_1,y_1,t_1)=0$$

$$f(x_2,y_2,t_2)=0$$

$$f(x_3,y_3,t_3)=0$$

aplicando aqui la propiedad de que la polar en un punto de la cónica es la tangente en este punto, tendremos que:

$$x.f'_{x4}+y.f'_{y4}+t.f'_{t4}=0$$

debe ser:

$$Mx+Ny+Ot=0$$

de donde: $f'_{x4}/M=f'_{y4}/N=f'_{t4}/O$, relación que nos da las dos ecuaciones que nos hacen falta para tener el sistema de cinco ecuaciones con cinco incógnitas.

El tercer caso no es más que una generalización del segundo, que acabamos de ver.

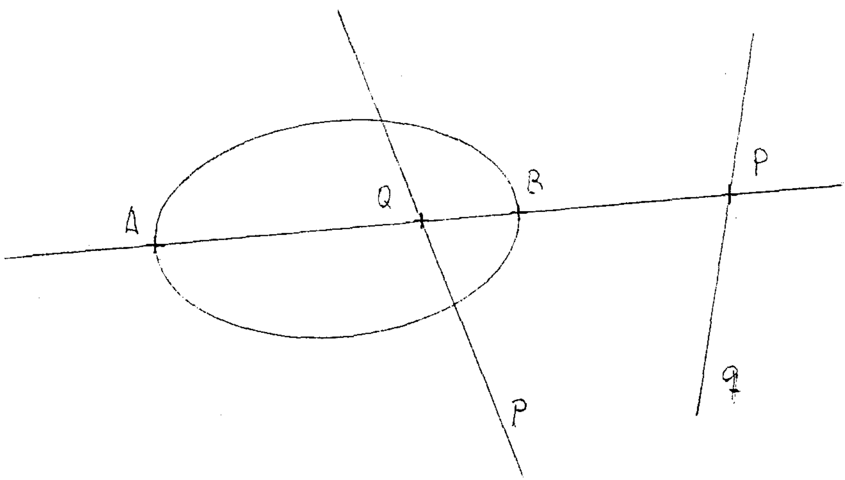
Ejes de una cónica.

Hemos visto anteriormente que la expresión:

$$x_2 \cdot f'_{x1} + y_2 \cdot f'_{y1} + t_2 \cdot f'_{t1} = 0$$

nos relaciona dos puntos de forma que uno se encuentra en la polar del otro; los puntos que están relacionados de esta forma se llaman puntos conjugados.

Los puntos conjugados tienen la propiedad de que la recta que los une corta a la cónica, respecto a la que son conjugados, según dos puntos que cumplen que su razón doble vale -1.



Aplicando esa propiedad a puntos imprópios, $(1, m_1, 0)$, $(1, m_2, 0)$, tendremos dos puntos imprópios conjugados, o mejor dicho dos direcciones conjugadas, direcciones que hacièndolas pasar por el centro de la cònica, dan lugar a los diàmetros conjugados.

Veamos la expresiòn que nos da dichos diàmetros conjugados:

$$1.f'_1+m_2.f'_{m1}+0.f'_0=0$$

$$1.(A_{11}+A_{12}.m_1)+m_2.(A_{12}+m_1.A_{22})+0=0$$

Los diametros que ademàs de ser conjugados son perpendiculares, reciben el nombre de ejes de la cònica. Imponer que los diàmetros obtenidos de la expresiòn anterior son perpendiculares, es hacer:

$$m_1=-1/m_2$$

lo que da lugar a una ecuaciòn de segundo grado.

Centro de una cònica.

De las relaciones de una cònica con las recta impròpia hemos hablado anteriormente. Dichas relaciones nos servian para clasificar a la cònica. Una nueva propiedad de las relaciones de una recta impròpia con la cònica es el centro de la cònica, definido como el polo de la recta impròpia. Como t=0, es la condiciòn de recta impròpia, el polo de dicha recta serà:

$$x.f'_{x1}+y.f'_{y1}+t.f'_{t1}=0$$

$$x.f'_{x1}+y.f'_{y1}=0$$

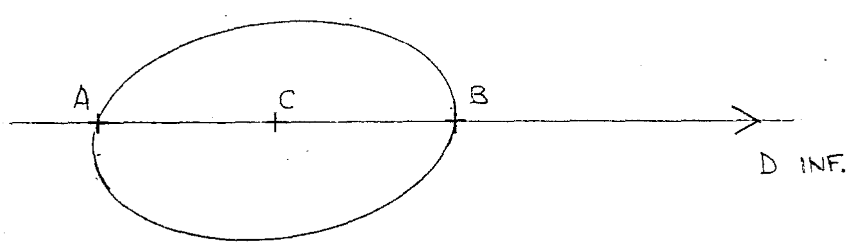
para que sea identicamente igual a cero, (debe ser igual a t=0), los coeficientes de x e y deben ser nulos, de donde tenemos el sistema de dos ecuaciones con dos incognitas:

$$f'_{x1}=0$$

$$f'_{y1}=0$$

obteniendo asi las coordenadas del centro de la cónica.

El centro de una cónica lo es de simetria, dado que sobre cualquier recta que pase por él habrá de cumplirse que la razón doble formada por los dos puntos de intersección y el centro y el punto imprópio de la recta, debe valer -1.



Aplicando la expresión de la razón doble tenemos $(A,B,C,D_{inf})=-1$, de donde:

$$-1=(A,B,C,D_{inf}) = (A,B,C)/(B,C,D_{inf})= AC/BC:CD_{inf}/BD_{inf}$$

la segunda fracción vale la unidad, de donde obtenemos que $AC=-BC$, que es el resultado esperado, de que el centro divide a cualquier recta que pase por él, (diámetro), en dos segmentos iguales.

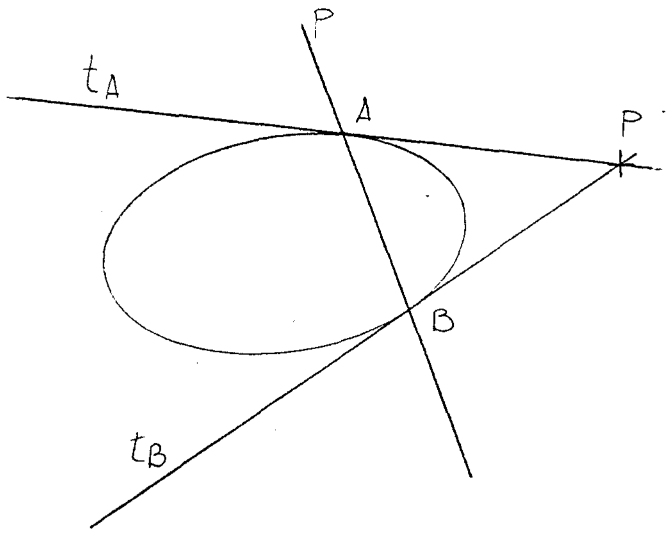
Vértices de una cónica.

Son, sencillamente, las intersecciones de los ejes con la cónica. El eje mayor recibe el nombre de eje focal. Normalmente, cuando se habla de vértices de una cónica, se sobrentiende que nos estamos refiriendo a los que se encuentran en el eje focal.

Tangentes por un punto exterior a una cónica.

Los extremos de las tangentes desde un punto exterior a una cónica se obtienen como intersección de la polar de dicho punto con la cónica.

Sea P el punto y p la polar de dicho punto respecto de la cónica de la figura:



Como p corta a la cònica en dos puntos A y B, sus rectas polares, por ser ellos de la cònica deberán ser las tangentes t_A y t_B, como A y B son conjugados de P, las tangentes por dichos puntos deberán pasar por P, con el resultado que esperàbamos.

Tratamiento informàtico de la obtención de la ecuación de una cònica.

Pese a los matices comentados anteriormente, vamos a hacer un estudio del sistema seguido para la obtención de la ecuación de una cònica y la posterior clasificación de la misma.

Trabajaremos con la ecuación de la cònica:

$$A_{11}.X^2+A_{22}.Y^2+2.A_{12}.XY+2.A_{01}.X+2.A_{02}.Y+A_{00}=0$$

si pretendemos determinarla deberemos conocer los valores de los seis coeficientes de la ecuación. Hemos demostrado anteriormente que una cónica se define con cinco condiciones, luego el caso más obvio consistirá en dar cinco puntos de paso y con ellos obtener los seis coeficientes. Como se desprende de la última frase habrá que fijar el valor de alguno de dichos coeficientes o dividir por alguno de ellos, como ya dijimos, a todos los demás. Normalmente lo que se hace es asignarle un valor unitario al termino independiente (en el programa y para evitar en la medida de lo posible los valores fraccionarios usamos el valor 100, continúo , sin embargo, los comentarios con el valor unitario). Si imponemos que un punto (X_1,Y_1) cumpla la ecuación general de una cónica tendremos, despejando el termino independiente.

$$X_1^2.A_{11}+Y_1^2.A_{22}+2.X_1Y_1.A_{12}+2X_1.A_{01}+2Y_1.A_{02}= -1$$

pese a su aparente complejidad, notemos que se trata de una ecuación lineal en A_{11}, A_{22}, A_{12}, A_{01} y A_{02}, por lo tanto al imponer que cinco puntos cumplan la ecuación de la cónica tendremos un sistema lineal de cinco ecuaciones con cinco incognitas que en notación matricial quedará:

$$\begin{vmatrix} X_1^2 & Y_1^2 & 2.X_1Y_1 & 2.X_1 & 2.Y_1 \\ X_2^2 & Y_2^2 & 2.X_2Y_2 & 2.X_2 & 2.Y_2 \\ X_3^2 & Y_3^2 & 2.X_3Y_3 & 2.X_3 & 2.Y_3 \\ X_4^2 & Y_4^2 & 2.X_4Y_4 & 2.X_4 & 2.Y_4 \\ X_5^2 & Y_5^2 & 2.X_5Y_5 & 2.X_5 & 2.Y_5 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} A_{11} \\ A_{22} \\ A_{12} \\ A_{01} \\ A_{02} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \end{vmatrix}$$

(e)

la resolución de este sistema no entraña ninguna dificultad adicional, la forma escogida ha sido la del método del pivote, según el listado adjunto:

```
CALCULO

NORM.MAT:
           a9₧=0
           for j=1 to n
             t₧=0
             for i=1 to n
               t₧=t₧+abs(a₧(i,j))
             next i
             if t₧>a9₧ then a9₧=t₧
           next j

FACTORIZACION:
           i0(n)=1
           n1=n-1
           for k=1 to n1
             k1=k+1
             m=k
             for i=k1 to n
           if abs(a₧(i,k))>abs(a₧(m,k)) then m=i
             next i

             i0(k)=m
             if m<>k then i0(n)=-i0(n)
             t₧=a₧(m,k)
             a₧(k,k)=t₧
             if t₧=0 then goto FI.K
             for i=k1 to n
               a₧(i,k)=-a₧(i,k)/t₧
             next i
             for j=k1 to n
               t₧=a₧(m,j)
               a₧(m,j)=a₧(k,j)
               a₧(k,j)=t₧
               if t₧<>0 then for i=k1 to n:
                      a₧(i,j)=a₧(i,j) +
                             a₧(i,k) * t₧
                             next i
              next j
```

```
FI.K:
          next k

          dPt=1
          for i=1 to n
            dPt=dPt*aPt(i,i)
          next i
          dPt=dPt*i0(n)
         print "DETERMINANTE DE A="; dPt

          if n<=1 then cPt=1:
             if aPt(1,1)<>0 then goto ESTIMACION
                                      else beep:
             goto ACABA
             print "LA MATRIZ ES SINGULAR 1":
             goto ACABA

          k=1

SIGUE.1:
          tPt=0
          if k<>1 then k1=k-1:
             for i=1 to k1
               tPt=tPt+aPt(i,k)*bPt(i)
             next i
          e1Pt=1
          if tPt<0 then e1Pt=-1
          if aPt(k,k)=0 then beep:goto ACABA
          print "LA MATRIZ ES SINGULAR 2":
          goto ACABA
          bPt(k)=-(e1Pt+tPt)/aPt(k,k)
          k=k+1
          if k<(n+1) then goto SIGUE.1
          for k2=1 to n1
            k=n-k2
            tPt=0
            k1=k+1
               for i=k1 to n
                 tPt=tPt+aPt(i,k)*bPt(k)
               next i
               bPt(k)=tPt
               m=i0(k)
               if m<>k then tPt=bPt(m):
                            bPt(m)=bPt(k):
                            bPt(k)=tPt
          next k2
          y1Pt=0
          for i=1 to n
            y1Pt=y1Pt+abs(bPt(i))
          next i
```

```
          gosub 2340
          z1₧=0
          for i=1 to n
            z1₧=z1₧+abs(b₧(i))
          next i
          c₧=a9₧*z1₧/y1₧
          if c₧<1 then c₧=1

ESTIMACION:

     print "ESTIMACION DE LA CONDICION"
     print
     print "DE LA MATRIZ A"
     print
              print "C =":c₧
          if c₧>(c₧+1)  then print  "A is singular
to working precission"
          if opcio$="1" then
                    for i=1 to n
                      b₧(i)=-1
                    next i:goto SIGUE.2  (2)
          if opcio$="2" then
                    for i=1 to 4
                      b₧(i)=-1
                      b₧(5)=0
                    next i:goto SIGUE.2  (2)
          if opcio$="3" then
                    for i=1 to 3
                      b₧(i)=-1
                      b₧(4)=0
                      b₧(5)=0
                    next i:goto SIGUE.2  (2)

SIGUE.2:
          goto 2340

          limit₧=0.0000000001

          terme.x2₧=-b₧(3)*100
          terme.y2₧=-b₧(5)*100
          terme.xy₧=-2*b₧(4)*100
          terme.x₧=-2*b₧(1)*100
          terme.y₧=-2*b₧(2)*100
          terme.ind₧=-100
```

COEFICIENTES:

a00Pt=-1
a01Pt=terme.xPt/-2/terme.indPt
a02Pt=terme.yPt/-2/terme.indPt
a11Pt=terme.x2Pt/-terme.indPt
a12Pt=terme.xyPt/-2/terme.indPt
a22Pt=terme.y2Pt/-terme.indPt

Si pretendemos hallar la ecuación de la cónica mediante cuatro puntos de paso y la tangente en uno de ellos, deberemos imponer que la tangente en este punto sea la recta dada, para ello derivaremos la ecuación general de las cónicas obteniendo:

$$2.A_{11}.X+2.A_{22}.Y.dY/dX+2.A_{12}.Y+2.A_{12}.X.dY/dX+$$
$$+2.A_{01}+2.A_{02}.dY/dX=0$$

agrupando los terminos afectados por dY/dX y los que no, tendremos:

$$(A_{22}.Y+A_{12}.X+A_{02}).dY/dX= -(A_{11}.X+A_{12}.Y+A_{01})$$

Si la recta tangente tiene de ecuación A.X+B.Y+C=0, dY/dX es justamente la expresión de su pendiente que en el punto de tangencia (X_p,Y_p) debe coincidir con la misma expresión obtenida sobre la cónica, tendremos pues:

$$dY/dX=-(A_{11}.X_p+A_{12}.Y_p+A_{01})/(A_{12}.X_p+A_{22}.Y_p+A_{02})=-A/B$$

operando obtenemos la ecuación:

$$B.A_{11}.X_p+B.A_{12}.Y_p+B.A_{01}-A.A_{12}.X_p-A.A_{22}.Y_p-A.A_{02}=0$$

recordemos que las incognitas son los coeficientes, luego agrupando:

$$B.X_P.A_{11}-A.Y_P.A_{22}+(B.Y_P-A.X_P).A_{12}+B.A_{01}-A.A_{02}=0$$
(f)

Consecuencia de lo anterior será que la primera matriz de la expresión (e) se deberá variar una de sus filas y dar cabida a la expresión (f).

Si el problema que nos interesa resolver es el de tres puntos y dos tangentes el planteamiento será análogo, sustituyendo otra fila de la matriz por una expresión expresión del tipo de la (f) aplicada en el punto correspondiente. En los comentarios anteriores, se ve que el razonamiento hubiera podido ser justo el contrario empezando por imponer el definir la cónica por las tangentes y que los puntos de tangencia fueran introduciendo nuevas condiciones a las matrices de definición, algo parecido ocurre con los teoremas de Pascal y Brianchon a los que las operaciones reseñadas sustituyen -aunque en rigor, el sistema expuesto en los párrafos anteriores es análogo al de Pascal no al de Brianchon-.

Clasificación de las cónicas.

El punto de vista desde el que vamos a clasificar las cónicas va a ser puramente algebraico, por lo que me dedicaré a indicar cuales serán los pasos a seguir, sin justificarlos plenamente.

Los coeficientes de una cónica pueden ser agrupados en una matriz a partir de la cual obtendremos una serie de parámetros que nos permitirán su clasificación, dicha matriz es la siguiente:

$$\begin{vmatrix} A_{00} & A_{01} & A_{02} \\ A_{01} & A_{11} & A_{12} \\ A_{02} & A_{12} & A_{22} \end{vmatrix}$$

Los parámetros que podemos obtener de los términos de esa matriz son:

- DET, que no es más que el valor del determinante de la matriz.

- MEN, es el valor del menor correspondiente al termino independiente, luego vale: $MEN=A_{11}.A_{22}-A_{12}.A_{12}$.

- DIAG, suma de los dos elementos de la diagonal de la matriz distintos de A_{00}, $DIAG= A_{11}+A_{22}$.

- ME1, menor de A_{11}, $ME1=A_{00}.A_{22}-A_{02}.A_{02}$.

- ME2, menor de A_{22}, $ME2=A_{00}.A_{11}-A_{02}.A_{01}$.

- ME12, suma de los dos parámetros anteriores, ME12=ME1+ME2.

- MOO, es nuevamente el valor del menor de A_{00}, más adelante justificaremos el porque de esta notación. MOO=MEN.

- M01, menor de A_{01}, M01=-$A_{01} \cdot A_{22} + A_{12} \cdot A_{02}$.

- M02, menor de A02, M02=$A_{01} \cdot A_{12} - A_{11} \cdot A_{02}$.

- SIGN, variable definida para determinar la igualdad o diferencia de signo entre DET y DIAG, consecuentemente vale SIGN=DET.DIAG.

Vamos, con estos parámetros, a determinar las ecuaciones de las cónicas, y en el caso de las tres no degeneradas además vamos a encontrarle alguna de sus caracteristicas. El proceso a seguir va a ser una traducción del algoritmo implementado realmente para la clasificación:

Si DET=0 y MEN=0 y ME12=0 nos encontramos en el caso de cónica degenerada en DOS RECTAS PARALELAS COINCIDENTES.

Si DET=0 y MEN=0 pero ME12>0, estamos ante otra cónica degenerada formada por DOS RECTAS PARALELAS IMAGINARIAS.

Si DET=0 y MEN=0 con DET<0, tambien es una cónica degenerada en DOS RECTAS PARALELAS, pero en este caso reales de ecuación reducida:

$$R00+R11.X^2=0$$

Con R11=ME12 y R00=ME12/DIAG

Si DET=0 y MEN>0, nuevamente cónica degenerada en DOS RECTAS IMAGINARIAS en este caso.

Si DET=0 y MEN<0, DOS RECTAS, nuevamente un caso de cónica degenerada de ecuación reducida $R11.X^2+R22.Y^2=0$.

Con R11.R22=MEN y R11+R22=ME12.

Si DET<>0 y MEN=0, nos encontramos ante la primera de las tres cónicas no degenerada: la PARABOLA.

Caracteristicas de la parábola.

Ecuación reducida: $2.R01.Y+R11.Y^2=0$, los valores de los coeficientes valen, en función de los parámetros vistos anteriormente:

R11=DIAG.

$R02=\sqrt{(-DET/DIAG)}$

El eje es la polar del punto $(0,A_{11},A_{12})$.

Si DET<>0 y MEN>0 y SIGN<0, estamos en el caso de ELIPSE REAL.

Características de la Elipse.

Ecuación reducida: $R11.X^2+R22.Y^2+R00=0$.

Con:

R00=DET/MEN.

R11 y R22 son las soluciones de la ecuación de segundo grado consecuencia de hacer que se cumpla el sistema de dos ecuaciones con dos incognitas:
R11+R22=DIAG
R11.R22=MEN.

Las coordenadas del centro de la elipse se obtienen mediante las fracciones: M01/M00 y M02/M00.

De ahi el notar a MEN como MOO, con la intención de dar homogeneidad a las expresiones anteriores.

Los ejes serán rectas pasando por el centro con las pendientes que cumplen la ecuación:

$$A_{12}.M^2+(A_{11}-A_{22}).M-A_{12}=0$$

Si DET<>0 y MEN>0 y SIGN>0 nos encontramos en el caso de ELIPSE IMAGINARIA.

Y finalmente, si DET<>0 y MEN<0 estamos en el caso de una HIPERBOLA.

Caracteristicas de la Hipèrbola.

Ecuación reducida: $R_{11}.X^2+R_{22}.Y^2+R_{00}=0$, los coeficientes son los mismos que los vistos en el caso de la elipse, asi como el centro.

Las asintotas son las soluciones de la ecuación:

$$A_{22}.M^2+2A_{12}.M+A_{11}=0$$

Notas y Referencias.

(1) A diferencia del programa HYPATIA, que tenia un carácter teórico, èste, dedicado a la generación y manipulación de cónicas, realmente existe y ha sido probado y creado por el Departament de Tècniques d'Expressió Gráfica de la Escola Tècnica Superior d'Enginyers Industrials de Barcelona, durante el presente curso 1986/1987.

(2) El listado está entresacado del programa general, es por ello que refiere a otras posiciones o subrutinas como 2340. Están previstos los tres casos implementados en el programa didáctico, a saber: cinco puntos, cuatro puntos y una tangente, y tres puntos y dos tangentes.