

**UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA**

**APORTACIÓN AL ESTUDIO DEL  
SOFTWARE NECESARIO PARA LA  
INFORMATIZACIÓN DE LOS  
MÉTODOS DE APRENDIZAJE DE LAS  
TÉCNICAS DE EXPRESIÓN GRÁFICA, Y  
SU POSTERIOR IMPLEMENTACIÓN**

Autor: Miquel Castillo i Ballardà  
Director: Jordi Mestres i Sardà

1988

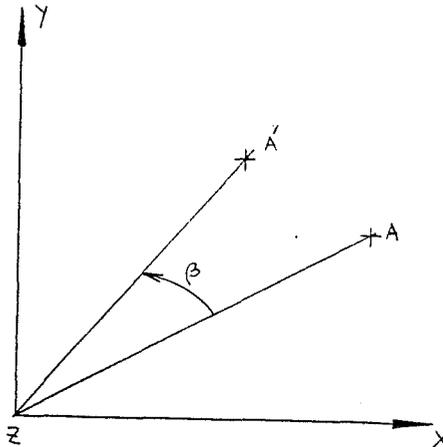
IMAGENES PLANAS DE OBJETOS TRIDIMENSIONALES.

En este apéndice llegaremos a la conclusión de lo expuesto en los dos anteriores: cómo representar en 2D objetos 3D, como pasar de los tres ejes del espacio  $X_e, Y_e, Z_e$ , a los "tres" de pantalla  $X_p, Y_p$  y...  $Z_p$ .

PREVIO.

Proceso matemático de las transformaciones de los ejes.

Supongamos que queremos resolver el problema de girar un punto alrededor de un eje, que supondremos que es el Z, y en la posición de la figura:

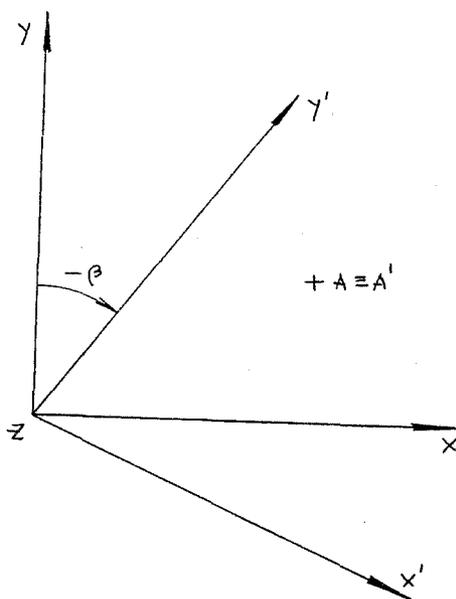


las expresiones analíticas que rigen esta transformación, ya las habíamos visto, son:

Apéndice C.

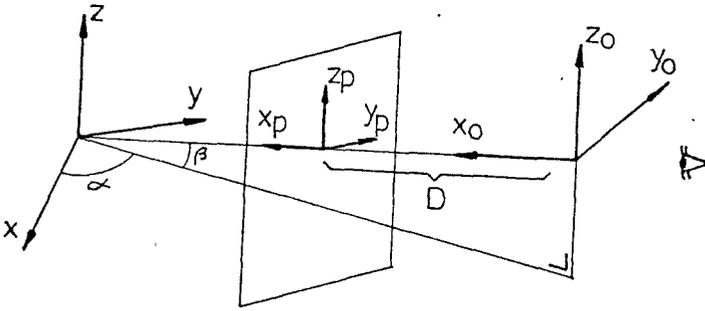
$$\begin{vmatrix} \cos\beta & \text{sen}\beta & 0 & 0 \\ -\text{sen}\beta & \cos\beta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

si queremos obtener el mismo resultado, podemos mover los ejes, el ángulo ahora será  $-\beta$ , con lo que la matriz del cambio será la inversa de la anterior (ver Apéndice B). Para ver el efecto de los ejes girados escogemos un punto sobre el eje X y otro sobre el eje Y, los giramos y los unimos con la proyección del eje Z:



De todo ello se infiere que la matriz de giro de un sistema de ejes es la inversa de la matriz de giro de un punto cualquiera de dicho sistema. La utilidad de dicha propiedad la veremos, más adelante, en este mismo apéndice.

CONCEPTOS FUNDAMENTALES DE PROYECCION EN 2D.



En la figura se representa el proceso que hemos de analizar matemáticamente, relacionando tres sistemas de coordenadas distintos: los del cuerpo  $X_c, Y_c, Z_c$ , los de la pantalla en donde será representado éste  $X_p, Y_p, Z_p$  y los del observador  $X_o, Y_o, Z_o$ , las relaciones de trabajo, entre ellos, serán:

- D, distancia entre el observador y la pantalla.

- la pantalla es perpendicular al eje  $O_cO_o$ , que une el observador con el origen del eje  $X_c, Y_c, Z_c$ .

- para que se produzca el efecto de-

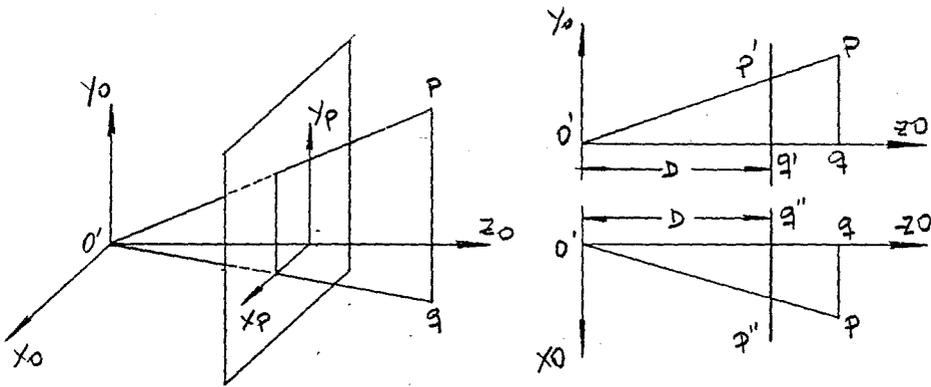
seado, que tres ejes  $X_c, Y_c$  y  $Z_c$ , pasen a ser  $X_p, Y_p$  y  $Z_p$ , de forma que  $X_p, Y_p$  sean los lógicos de 2D y  $Z_p$  esté sobre  $O_c O_o$ , los ejes del observador deben estar, como se aprecia en la figura, en una posición determinada,  $Y_o$  vertical,  $X_o$  hacia la derecha y  $Z_o$  en la dirección y sentido de  $O_o$  a  $O_c$ .

Estudiaremos una serie de relaciones entre estos tres sistemas de ejes.

La relación entre  $X_o, Y_o, Z_o$  y  $X_c, Y_c, Z_c$ , se establece, en principio, situando el origen del sistema asociado al observador, por coordenadas esféricas, como hemos visto, anteriormente, mediante  $R, \alpha$  y  $\beta$ .

Situémonos en la relación entre el observador y la pantalla, tenemos, mediante relaciones de semejanza:

Apéndice C.



$$x_p = D \cdot x_0 / z_0 \quad ; \quad y_p = D \cdot y_0 / z_0$$

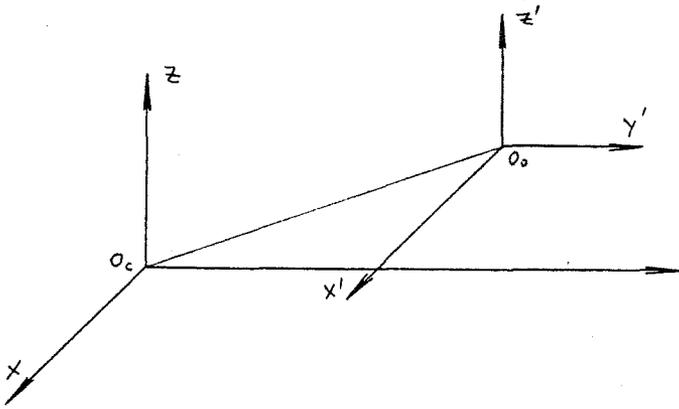
Llegados a este punto, es necesario hacer una opción de trabajo. La operación de observar un cuerpo de forma que lo veamos en una posición determinada, ya sea para ver la verdadera magnitud de una cara, para ver la inclinación de una arista, etc, se puede realizar de dos formas: manteniéndonos nosotros quietos y moviendo, con la mano por ejemplo, el cuerpo hasta la posición deseada, o al contrario mantener el cuerpo parado y movernos nosotros a su alrededor. Aunque analíticamente no hay diferencia entre las dos opciones, en Informática Gráfica se suele usar el segundo de estos métodos; concluyendo que los ejes del cuerpo serán fijos mientras que los asociados al observador serán móviles.

Vamos a resolver, analíticamente, las transformaciones necesarias para, partiendo de unos ejes cualesquiera llegar a otros  $X_0, Y_0, Z_0$ , que cumplan las condiciones de la figura que abre este

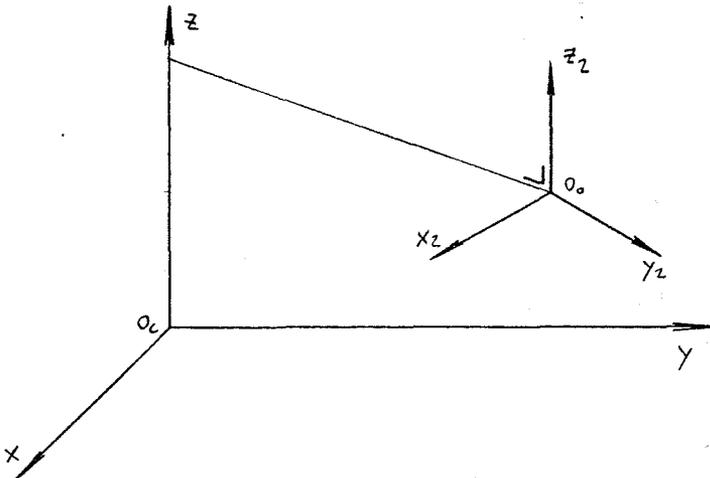
## Apéndice C.

apartado, mediante cuatro transformaciones de los ejes originales, las sucesivas posiciones de los ejes las notaremos  $X_1, Y_1, Z_1, \dots, X_2, Y_2, Z_2, \dots$ , hasta llegar a  $X_0, Y_0, Z_0$ . Las cuatro transformaciones básicas son:

- 1) Traslación del origen  $O_c$  al del observador  $O_o$ .

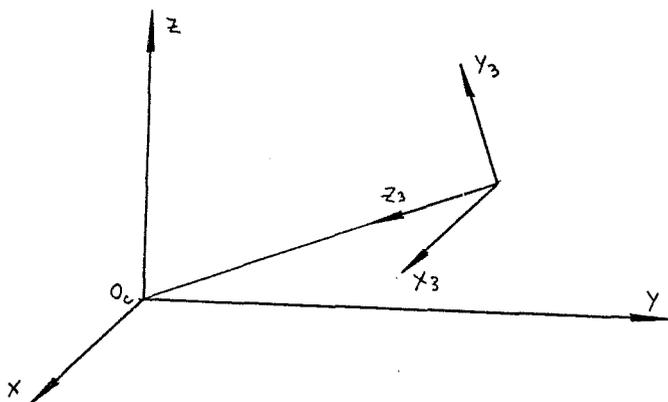


- 2) Un giro, alrededor de  $Z_1$ , para conseguir que el eje  $Y_1$  pase a ser  $Y_2$ , cortando al eje  $Z_c$ .

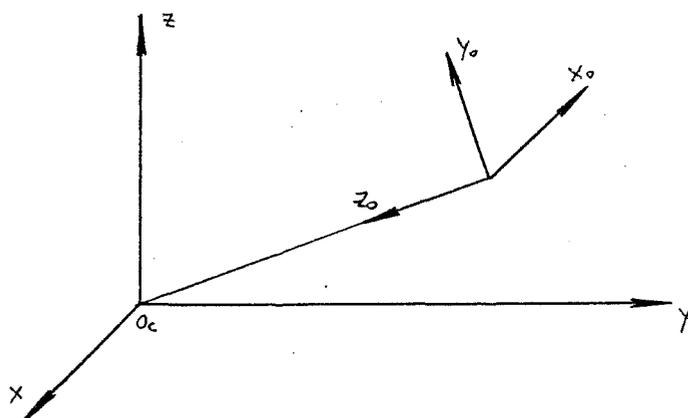


## Apéndice C.

3) Un nuevo giro, alrededor de  $X_2$ , de forma que el transformado de  $Z_2$ , que será  $Z_3$ , tenga la dirección  $O_cO_c$ .



4) Después de estas tres transformaciones, los ejes ya nos quedan casi en la posición deseada, aunque  $X_3$  está orientado hacia la izquierda. Para conseguir que  $X_3$  quede orientado hacia la derecha, tendremos suficiente con una matriz que cambie el sentido de dicho eje.



Para la primera transformación, T1, que no es más que una traslación, solo nos hace falta conocer las coordenadas del observador respecto de los ejes del cuerpo, llamándoles M, N y P, como es habitual, tendremos:

$$T1 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -M & -N & -P & 1 \end{vmatrix} \quad \text{con : } \begin{aligned} M &= R \cdot \cos\alpha \cdot \cos\beta \\ N &= R \cdot \text{sen}\alpha \cdot \cos\beta \\ P &= R \cdot \text{sen}\beta \end{aligned}$$

para el giro de X1, Y1, Z1 alrededor del eje Z1 usaremos la propiedad comentada anteriormente, el giro de los ejes tiene como matriz la inversa de la matriz de giro de los puntos de un sistema, si dicha matriz es:

$$\begin{vmatrix} \cos\alpha & \text{sen}\alpha & 0 & 0 \\ -\text{sen}\alpha & \cos\alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

su inversa será:

$$\begin{vmatrix} \cos\alpha & -\operatorname{sen}\alpha & 0 & 0 \\ \operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

el ángulo de giro no es  $\alpha$  sino su complementario  $\alpha'$ , de donde definitivamente tenemos:

$$T2 = \begin{vmatrix} \operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha & 0 & 0 \\ -\cos\alpha & \operatorname{sen}\alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Un nuevo giro nos conducirá a conseguir que Z3 tenga la dirección de  $OcOo$ , el eje alrededor del cual deberá realizarse dicho giro será X2, y el ángulo el complementario de  $\beta$ , de donde T3 valdrá:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\operatorname{sen}\beta & -\cos\beta & 0 \\ 0 & \cos\beta & -\operatorname{sen}\beta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Finalmente, para conseguir que el sentido de X3 cambie, pasando a ser  $Xo$ , nos basta multiplicar por una matriz que nos lo deje todo igual excepto este signo, será pues una matriz diagonal con -1 en la columna que corresponda a las x:

$$T4 = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

El producto de estas cuatro matrices, será la matriz que nos relacionará las coordenadas del cuerpo con las coordenadas de ejes asociados al observador:

## Apéndice C.

$$X_o = -X_c \cdot \text{sen}\alpha + Y_c \cdot \text{cos}\alpha$$

$$Y_o = -X_c \cdot \text{cos}\alpha \cdot \text{sen}\beta - Y_c \cdot \text{sen}\alpha \cdot \text{sen}\beta + Z_c \cdot \text{cos}\beta$$

$$Z_o = -X_c \cdot \text{cos}\alpha \cdot \text{cos}\beta - Y_c \cdot \text{sen}\alpha \cdot \text{cos}\beta - Z_c \cdot \text{sen}\beta + R$$

Vamos, por último, a relacionar estas tres coordenadas respecto al eje del observador, a unas coordenadas de pantalla, aplicando las relaciones de semejanza que hemos visto anteriormente:

$$X_p = D \cdot X_o/Z_o ; Y_p = D \cdot Y_o/Z_o$$

si el observador está en el infinito  $D$  y  $Z_o$  son iguales, luego:

$$X_p = X_o ; Y_p = Y_o$$

Hemos resuelto, analíticamente, el problema de la representación de una figura poliédrica, mediante la representación, convenientemente transformada, de cada uno de sus vértices. Para que la representación en la pantalla sea lo más realista posible, conviene que las aristas que queden tapadas por alguna de las caras del cuerpo no queden dibujadas, dicho de otro forma, queda por resolver uno de los problemas clásicos de la Informática Gráfica: la eliminación de líneas ocultas.

Este problema es muy complejo, aquí daremos una serie de conceptos generales, dividiéndolo en dos partes lógicas:

- a) El problema de las líneas ocultas

de un cuerpo. De hecho no es correcto hablar de líneas ocultas, sino que, en rigor, habría que decir superficies ocultas, lo que ocurre es que al eliminar las aristas que forman una cara, estamos dejando de dibujar dicha cara. El problema a resolver es el de un cuerpo, en una determinada posición, y de él eliminar las caras que un espectador no vería en la realidad.

b) El segundo problema, se refiere a un caso más complejo. Resuelve la situación de las superficies ocultas de una serie de cuerpos, en cada uno de los cuales se han eliminado las caras ocultas por el sistema a), que se ocultan total o par-

cialmente unos a otros. En este caso no se tratará de dejar de dibujar totalmente aristas, que es lo que en el fondo realiza el apartado a), sino de dejar de dibujar, en muchos casos parcialmente, aristas que han superado el primer test.

Cuando dibujamos los poliedros sin eliminar las líneas ocultas, permitáseme usar esta expresión, en Informática Gráfica recibe el nombre de modelo de alambre, y de hecho la imagen semántica es afortunada, pues no son más que una serie de vértices unidos por líneas en un determinado orden, pero las caras que forman cada tres vértices, no tienen ninguna consistencia, en una palabra no son planos geométrica y analíticamente definidos como tales. Lo que se persigue con la eliminación de líneas ocultas, es que aunque la figura diste mucho de representar un sólido, dé una sensación de solidez estimable. Algo parecido ocurre, cuando en la Geometría Clásica realizamos una serie de operaciones en Diédrico, cuando el cuerpo que ha resultado de aquellas cumple lo que pretendíamos, hacemos un Axonométrico de él; normalmente omitimos las líneas ocultas, mas que eso de hecho ni siquiera recurrimos al artilugio de dibujar las líneas ocultas con trazo intermitente, dado que dicha figura axo-

nométrica solo la usamos como representación de algo, y pretendemos que la imagen sea lo más realista posible, y normalmente no pensamos someter a la perspectiva axonométrica a nuevas manipulaciones geométricas.

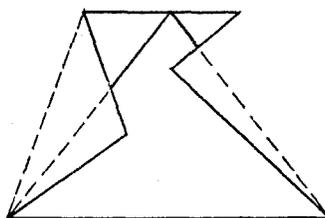
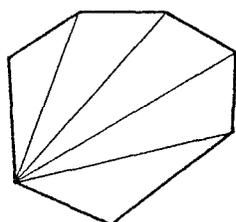
Para resolver el problema analíticamente, nos será necesario identificar las caras y aristas de un cuerpo, para ello vamos a establecer tres hipótesis, restrictivas, de trabajo:

- Sea cual sea el objeto a representar, lo simplificaremos, representándolo como una serie de polígonos. Incluso cuando hayan arcos o circunferencias enteras, haremos que sean polígonos del número de lados suficiente para dar la sensación correcta. Puede darse el caso de que eso no sea posible, y nos queden arcos muy groseramente representados por polígonos, lo que es muy habitual. Los polígonos serán fáciles de

manipular analíticamente pues están formados por segmentos, y los segmentos son elementos básicos que unen puntos, que son los elementos más sencillos con que nos podemos encontrar.

- Todas las caras poligonales con las que vamos a trabajar deben ser planas. En otras palabras, las aristas que separan dos caras cualesquiera en encuentran en el mismo plano.

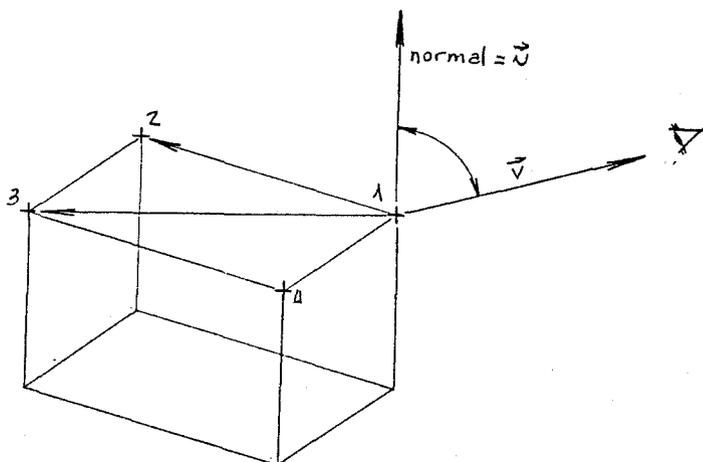
- Los objetos con los que trabajaremos deben ser convexos, no cóncavos.



Ya que todos los puntos de un objeto convexo pueden ser unidos mediante segmentos que se encuentran dentro de dicho objeto, tal y como se ve en la figura.

Vamos a trabajar cada cara del objeto a estudiar, y vamos a indentificarlas mediante el vector normal a dichas caras. Las relaciones entre esas normales y la dirección de visión de un observador, serán las que nos darán los criterios de visibilidad que estamos buscando. Es facil intuir que si una cara tiene un vector normal en la misma dirección y sentido opuesto a la dirección de visión, será vista, mientras que si tiene la misma dirección y el mismo sentido será oculta. Logicamente lo dicho anteriormente corresponde a un caso extremo, veamos un tratamiento más general.

Supongamos, que tratamos de dibujar el poliedro más sencillo que nos podemos imaginar, que será un cubo. En la posición más óptima del observador podemos ver 3 caras a la vez de dicho cubo elemental, veamos como podemos seleccionar cuales son. Trabajaremos con dos vectores: el normal a cada cara y el de la dirección de la visual, el ángulo entre dichos vectores nos dará el test de visibilidad que buscamos, si este ángulo vale en 0 y 90 grados la cara es vista y si el ángulo es superior a los 90 grados no.



La mecánica del cálculo del ángulo nombrado en el párrafo anterior no es complicada, basta con numerar los vértices de cada cara a estudiar. Esta numeración es completamente arbitraria, pero una vez escogido el primero es necesario numerar los restantes en el sentido contrario a las agujas de un reloj , de esta forma el vector normal siempre tendrá el sentido "hacia afuera" de la cara en estudio. La obtención del vector  $n$ , normal de la cara, podemos realizarla fácilmente mediante el producto vectorial de dos vectores de dicha cara, por ejemplo los obtenidos uniendo el vértice 1 con el 2 y el vértice 1 con el 3. Nos falta ahora encontrar el vector  $v$  que nos define la visual, que es sencillamente el que parte del ojo del observador y llega hasta el vértice 1, su obtención es sencilla:

$$v = (R \cdot \text{sen}\alpha \cdot \text{cos}\beta, R \cdot \text{sen}\alpha \cdot \text{sen}\beta, R \cdot \text{cos}\alpha) - (X_1, Y_1, Z_1)$$

siendo  $R$ ,  $\alpha$  y  $\beta$  los parámetros que nos definen el punto de vista y  $X_1, Y_1$  y  $Z_1$  las coordenadas del vértice 1. Del producto escalar de  $n$  y  $v$ , obtendremos facilmente el valor del ángulo que estamos buscando.

De hecho, como en la operación de la obtención del ángulo entre los dos vectores interviene la obtención del arco coseno de su producto escalar partido por el producto de los módulos de ambos vectores, se puede simplificar el proceso sabiendo que si dicho arco coseno es mayor que cero, positivo, el ángulo es menor de 90 grados y a la inversa, con lo que el signo del producto escalar de los dos vectores se convierte, de hecho, en el test de visibilidad que estábamos buscando. Lógicamente, queda el caso de que dicho producto escalar valga cero, lo que implica que toda esta cara quedará representada por una línea, impropriamente podríamos decir que la vemos de perfil o de canto.

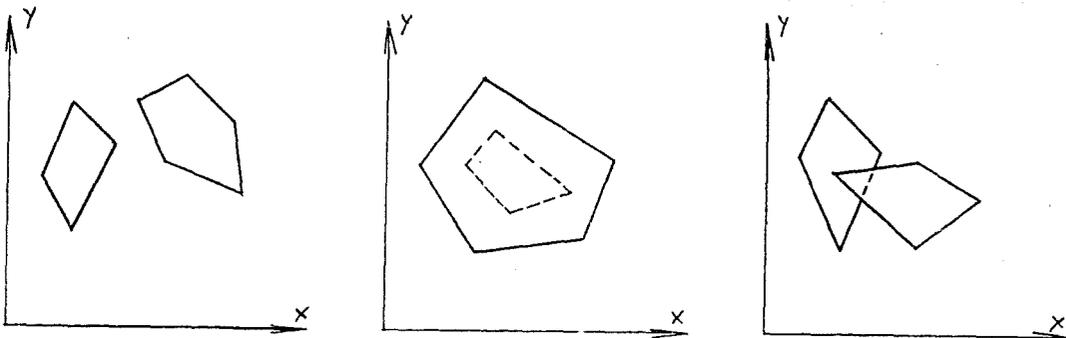
En el caso más general, en donde unos cuerpos pueden interferir ópticamente con los otros, existen dos tipos distintos de algoritmos para su estudio: los que trabajan con el espacio-objeto y los que lo hacen con el espacio-imagen.

Los algoritmos que trabajan en el espacio-objeto, buscan las relaciones de distancia físicas (o posiciones relativas) entre las distintas partes del objeto, de forma que reproducen

exactamente el proceso lógico de coger un objeto y observarlo: quedarán ocultos, generalizando, los puntos más alejados y más bajos de la figura en cuestión. Los algoritmos de espacio-imagen sólo empiezan a trabajar una vez tenemos ya en pantalla el dibujo bidimensional del objeto.

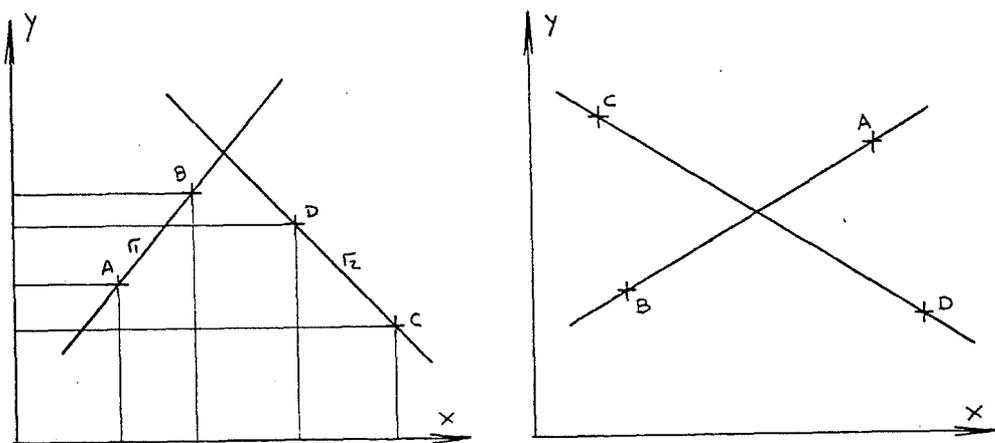
Aunque el procedimiento que comentaremos a continuación es, en cierta forma, mixto, por lo general se acepta que los algoritmos de espacio-objeto son los idóneos para problemas de líneas ocultas y los de espacio-imagen lo son para superficies ocultas.

Utilizaremos algoritmos de espacio-objeto para determinar y eliminar las líneas ocultas, y, a continuación, los de espacio-imagen para rematar el trabajo eliminando las superficies ocultas. Supondremos, como hemos dicho anteriormente, que los distintos cuerpos que forman el conjunto ya han pasado el primer test de visibilidad; el primer paso a realizar es ver de dos aristas de distintos cuerpos, que se "cortan", cual está delante de cual. Veámoslo paso a paso.



como vemos en la primera figura, sencilla, dos caras de cuerpos distintos pueden ser completamente disjuntas, ocultarse una a la otra o hacerlo solo parcialmente. Empecemos por este último caso, que es el más general, dividiremos el estudio en dos partes: una primera que será solo en 2D, en donde obtendremos criterios para discernir si dos segmentos se cortan, y una segunda, en la que intervendrá el concepto de profundidad, que nos permitirá conocer, en el caso de "intersección" cual es la arista que está más próxima de las dos, al observador.

Conviene no perder de vista el funcionamiento de estos algoritmos, que no trabajaran en casos tan obvios como los del ejemplo, e incluso en muchos casos, generalmente, realizarán su trabajo sin el conocimiento puntual ocular del usuario. El proceso, pues, es la confirmación o no de que dos aristas se interfieren sus imágenes y a continuación trabajar con la profundidad de cada arista.



vemos en las figuras, que los segmentos nos quedan definidos por las coordenadas Y y Z, de sus extremos. Primero podemos ver, mediante una condición que estableceremos, si dichas rectas  $r_1$  y  $r_2$ , se "cortan". Nota.- Hablando propiamente la palabra es se cruzan, por lo que a partir de este punto será así como se nombrarán.

No habrá ningún tipo de cruce entre dos rectas  $r_1$  y  $r_2$ , si haciendo una comparación de coordenadas dos a dos, se cumple alguna de las condiciones siguientes:

$$\begin{aligned} \max X r_1 &< \min X r_2 \\ \max X r_2 &< \min X r_1 \\ \max Y r_1 &< \min Y r_2 \\ \max Y r_2 &< \min Y r_1 \end{aligned}$$

Aplicando este criterio a las figuras anteriores vemos su utilización práctica. Vemos, en la segunda figura que las que se cruzan son las prolongaciones de los segmentos, no éstos. En la figura 3, vemos que el cruce se verifica, nos planteamos ahora la búsqueda del punto de cruce y a continuación un criterio para poder discernir cual de las dos rectas está más cerca del observador. En este caso estamos trabajando en el espacio-imagen, ya que lo hacemos como si realmente las rectas se cortasen, cuando lo correcto es decir que sus imágenes se cortan. Cuando se trabaja en el Sistema Diédrico, el criterio para saber que recta está oculta por otra, es muy similar al que estamos empleando aquí, se busca en cual de las dos proyecciones, para simplificar, se cortan las proyecciones y este

punto se lleva a la otra proyección que es en donde procedemos a ver cual es la recta más cercana al observador.

De ambas rectas, consideradas como elementos de un espacio 2D, tenemos suficientes datos como para que nos queden analíticamente definidas, llamemos-las L1 y L2, tendrán las expresiones:

$$A1.X + B1.Y + C1 = 0$$

$$A2.X + B2.Y + C2 = 0$$

el determinante, DET, de este sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas será el que nos dará los criterios para saber las distintas posiciones que pueden ocupar estas rectas, sabiendo de antemano que se cruzan sus imágenes.

Si  $DET = 0$ , las rectas son paralelas. Si los coeficientes de las dos rectas son proporcionales, las rectas están superpuestas. Y, en el caso más general, tendremos un punto de intersección-cruce de coordenadas  $X_i, Y_i$ , determinado por:

$$X_i = (B1.C1 - B2.C1) / (A1.B2 - A2.B1)$$

$$Y_i = (C1.A2 - C2.A1) / (A1.B2 - A2.B1)$$

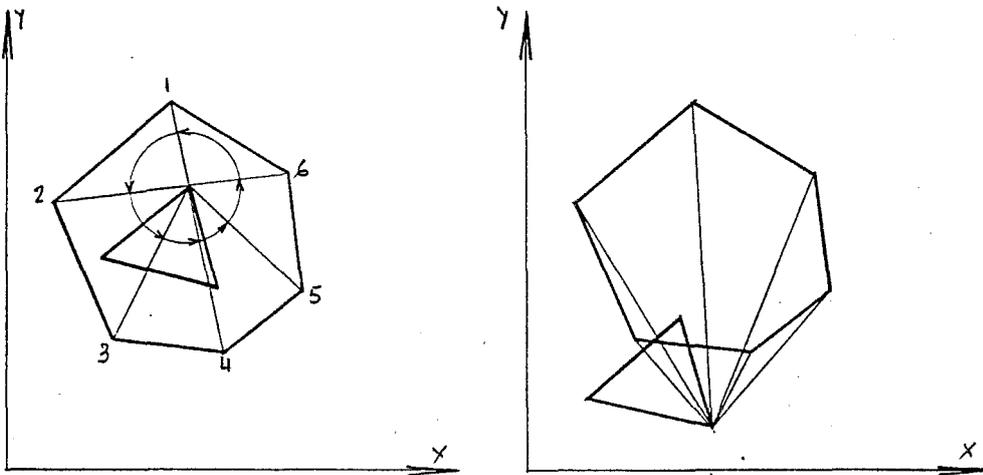
El siguiente paso sería conocer las ecuaciones de los planos que contienen a L1 y L2, y sustituyendo en esas ecuaciones las coordenadas de  $X_i$  e  $Y_i$ , ver cual de los dos tiene una Z mayor y cuál menor. Encontrar los planos implica tener en cuenta que los segmentos no son algo aislado sino que forman parte de una cara de un cuerpo, el trabajar con

adicional, una vez obtenida la ecuación que nos define la cónica, tenemos todos los elementos necesarios para trabajar con ella y cortarla con una recta, pongamos por caso, ya que los dos puntos de intersección deseados serán los que obtengamos al plantear el sistema de ecuaciones correspondiente. Los únicos problemas que podemos tener son los propios de alguna indeterminación o división por cero, en función de los coeficientes de la recta, que se resuelven por los procedimientos usuales.

De todo lo anterior se deduce que el único problema que deberíamos intentar resolver en esta primera parte del capítulo, es el de determinación de la ecuación de una cónica a partir de una serie de condiciones, pues una vez en posesión de dicha ecuación no existen dificultades específicas distintas de cualesquiera otras planteadas con líneas determinadas por su ecuación. No obstante, no hay que olvidar la componente didáctica de nuestro estudio, de ahí que nuestro enfoque será el de un diálogo constante análisis-representación gráfica. Además dado que conocemos una serie de características analíticas propias de las cónicas, su uso será aplicado en determinadas ocasiones. Ejemplo de lo anterior puede ser la obtención de las tangentes desde un punto exterior a una cónica; el proceso, una vez obtenida la ecuación de la cónica, podría ser general independientemente de que se tratara de este tipo de curva, pero no lo haremos así sino que razonaremos de forma que obtendremos los puntos de tangencia sobre la cónica, que posteriormente uniremos con el punto exterior, mediante el concepto analítico de que deben encontrarse sobre la

los distintos elementos que forman dicha cara nos ayudará a definir analíticamente dicho plano.

No obstante, lo dicho anteriormente, queda un caso por precisar antes de ponernos a buscar la ecuación del plano de la cara y es el que puede darse cuando de dos caras de cuerpos distintos no obtengamos la información de que se cruzan, pero queda aun la posibilidad de que una cara quede completamente oculta por otra, es una posibilidad que no se puede dejar de tener en cuenta. Para ello usaremos un nuevo algoritmo, que básicamente es para cada vértice de una cara hallar la suma de los ángulos con que se ven desde dicho vértice, todos los de la otra cara en estudio, veámoslo más despaciosamente, sean las dos caras de la figura:



numeramos los vértices de cada polígono, nuevamente, en el sentido contrario a las agujas de un

reloj. Deberemos asignar un signo convencional según el sentido en que se midan los ángulos, siendo el sentido de numeración uno determinado asignaremos el signo positivo el del ángulo que va en dicho sentido de numeración, y negativo al contrario. No es difícil ver que si el punto desde el que miramos los distintos vértices de un polígono es interior a éste, la suma algebraica de todos los ángulos definidos anteriormente debe ser 360 grados, ya que habremos dado una vuelta completa, siempre en el mismo sentido. Por el contrario si el punto es exterior al polígono, los ángulos irán sumándose y restándose de forma que la suma resultante valdrá cero.

En la segunda de las figuras se puede ver que este criterio nos sirve también para ver si dos lados de caras distintas quedan parcialmente cubiertos, ya que nos quedará un vértice dentro de la otra cara y otro fuera de ella.

Vamos, finalmente, a definir el test de profundidad, que concluirá nuestro estudio de superficies ocultas. Análogamente al proceso que habíamos hecho con el test para ver si una cara de un poliedro aislado era vista o no, tenemos los vértices de todas las caras de nuestros poliedros numeradas en el sentido contrario a las agujas del reloj, podíamos allí encontrar la dirección de la normal, mediante el producto de los vectores que unían el vértice 1 con el 2 y el vértice 1 con el 3, de hecho el vector normal tiene las componentes A, B y C del plano de la cara que tendría por ecuación general:  $A.X+B.Y+C.Z+D=0$ . Ahora nos interesará encontrar los

## Apéndice C.

cuatro coeficientes de dicho plano, lo que no será difícil ya que conocemos las coordenadas de los vértices de los polígonos (es importante observar, que en tanto en cuanto estamos trabajando con las tres coordenadas de los puntos, estamos trabajando en el espacio-objeto).

Del producto de los dos vectores 1-2 y 1-3, obtenemos A, B y C, e imponiendo que dicho plano pasa por cualquiera de los puntos de la cara obtendremos D, de la siguiente forma:

$$D = -A.X_3 - B.Y_3 - C.Z_3$$

una vez conocido completamente el plano y con la información, obtenida anteriormente, de las coordenadas en el espacio-imagen del punto de intersección-cruce  $X_i, Y_i$ , pasamos a ver que plano tapa a cual. Para ellos suponemos que los coeficientes de uno de los planos sea  $A_1, B_1, C_1$  y  $D_1$ , y los del otro  $A_2, B_2, C_2$  y  $D_2$ , haciendo cumplir a  $X_i, Y_i$  las ecuaciones de ambos planos:

$$A_1.X_i + B_1.Y_i + C_1.Z_p + D_1 = 0$$

$$A_2.X_i + B_2.Y_i + C_2.Z_p + D_2 = 0$$

Obtenemos dos valores distintos de  $Z_p$ , el polígono que tenga una  $Z_p$  más pequeña será el que se encontrará más cerca y será el que cubrirá al otro polígono.