UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA

APORTACIÓN AL ESTUDIO DEL SOFTWARE NECESARIO PARA LA INFORMATIZACIÓN DE LOS MÉTODOS DE APRENDIZAJE DE LAS TÉCNICAS DE EXPRESIÓN GRÁFICA, Y SU POSTERIOR IMPLEMENTACIÓN

Autor: Miquel Castillo i Ballarda
Director: Jordi Mestres i Sardà

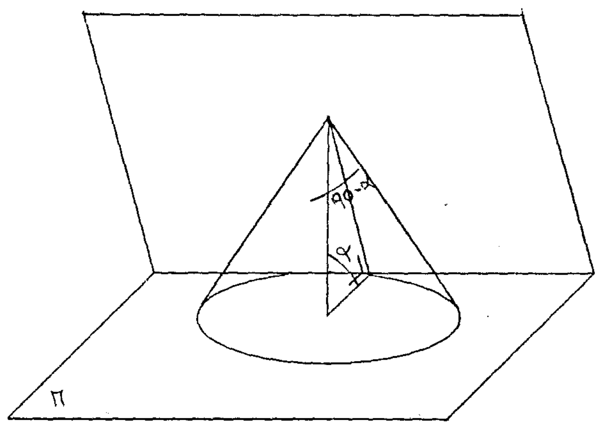
1988

GEOMETRIA DE PUNTO, RECTA Y PLANO.

Determinación de elementos.

Bajo el epigrafe determinación de elementos pretendo incluir los casos de obtención de rectas y planos no como el resultado de manipulación entre elementos preexistentes en nuestro dibujo, sino de manera que vengan prefijados por unas condiciones especificas como son los ángulos con determinadas rectas y/o planos. Una vez hallada la dirección que debe tener el elemento buscado, una traslación lo situará en la posición deseada. Pocas partes del estudio hecho hasta aqui tienen una traducción tan inmediata analiticamente, con el uso de los cosenos directores de rectas y planos para la primera operación, y la obligación de cumplir las coordenadas o una ecuación sustituyendo a la operación de la traslación posterior. A pesar de ello, creo que el estudio pormenorizado de a que puede sustituir, el proceso analitico, y como, es interesante, pese a la posible aridez del tema.

El fundamento de todos los casos que vamos a estudiar se encuentra en el uso del cono de revolución.

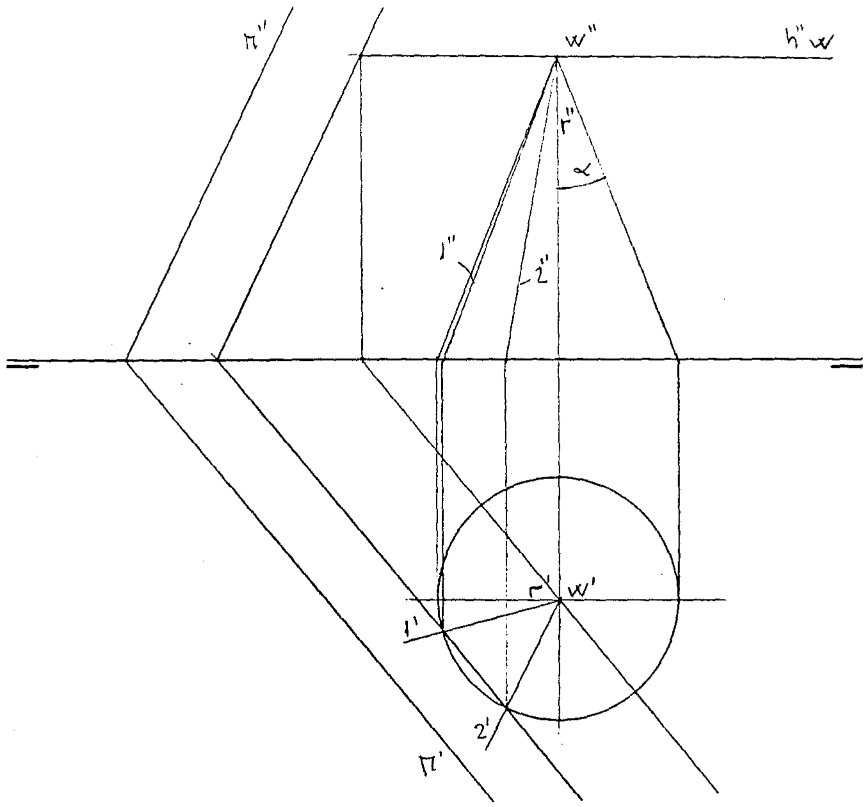


En la figura vemos que podemos construir triàngulos rectàngulos en el pie de la altura del cono, los otros dos àngulos, complementarios, seràn los que nos permitiràn imponer la inclinaciòn que nos convenga en cada caso. La generatriz que forma el àngulo α con π puede ser una recta determinada, o la recta de contacto de un plano Γ que cumpla la misma condiciòn.

Determinaciòn de rectas.

En nuestro estudio omitiremos la traslaciòn de los resultados una vez obtenidos, centràndonos en el càlculo de las direcciones que cumplan los condiciones exigidas. Sea, un primer caso, en el que queremos obtener la direcciòn de una recta que debe cumplir el formar un àngulo determinado con otra recta y ser paralela a un plano dado. Se observarà que en todos los casos que estudiaremos en este apartado se presentaràn las rectas y los planos en las posiciones màs òptimas, de forma que los càlculos sean lo màs claros posibles; esto no quita generalidad al razonamiento ya que se considerarà que en cualquier momento podremos cambiar la proyecciòn de forma que veamos los elementos en dicha posiciòn, mediante las operaciones de cambio de plano y giros.

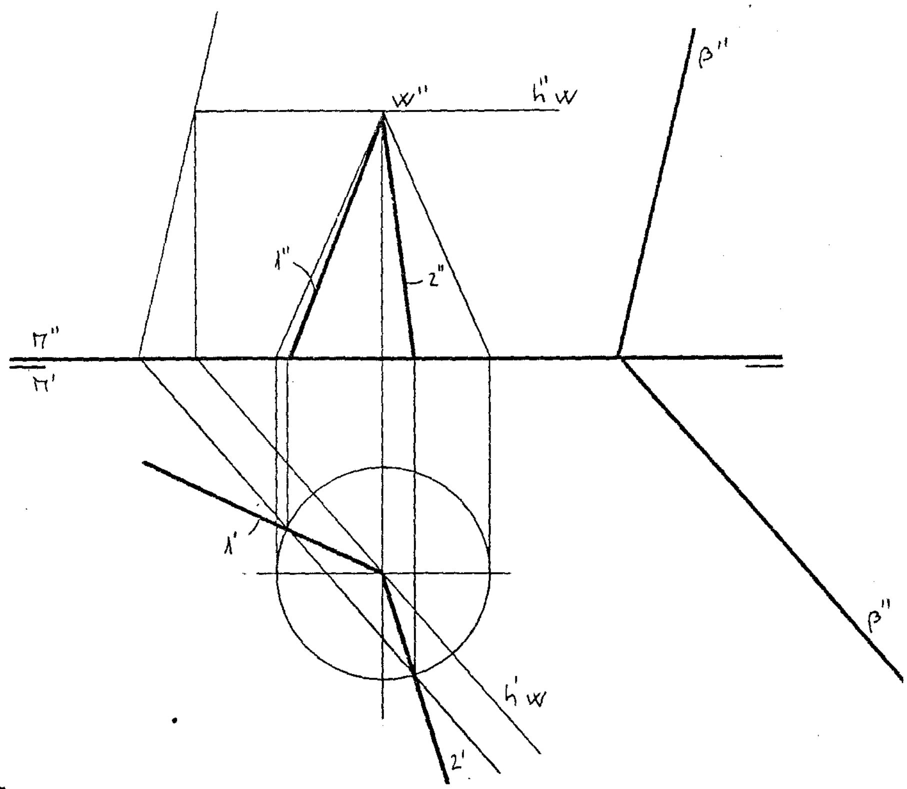
Supongamos que la recta dato la tenemos proyectada vertical (de punta y perpendicular al plano horizontal), la recta que buscamos serà una de las generatrices del cono vertical de semiabertura el àngulo pedido:



El cono lo hemos determinado pasando por un punto cualquiera, W, de la recta vertical, de las infinitas rectas que por ser generatrices del cono cumplen la condición de formar el ángulo α, habrá que escoger la que sea paralela al plano Γ, recordemos que la condición para que una recta sea paralela a un plano es que lo sea a una de las rectas de dicho plano. Para ello, impondremos que el punto W esté contenido en un plano paralelo al dado. La intersección de dicho plano con el cono nos dará la proyección de la recta que deseamos. Por traslación la dibujaríamos en donde se nos haya pedido.

Se observa que la intersección de un plano y un cono puede ser de dos generatrices, una o ninguna, según las posiciones relativas de la circunferencia de la base del cono y la traza correspondiente del plano.

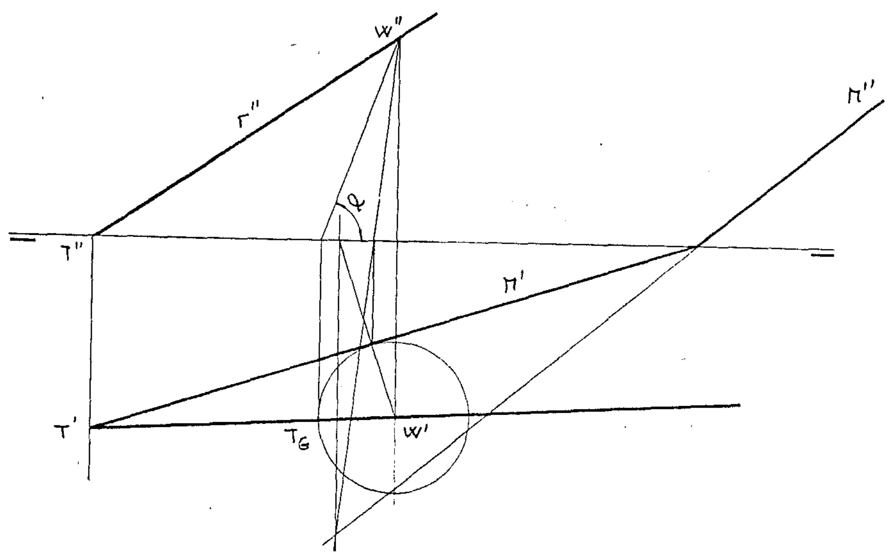
Veamos ahora el caso de una recta que forme un ángulo determinado con un plano y deba ser paralela a otro plano. Aqui el elemento dibujado en posición singular será el plano con el que la recta ha formar el ángulo prefijado. Dicho plano Γ lo consideraremos, mediante los cambios oportunos, como el horizontal de referencia.



El cono también nos quedará en posición vertical, pero ahora el ángulo α no estará en su vértice, sino en su base, análogamente al caso anterior impondremos que el vértice, arbitrario, del cono esté en un plano paralelo al otro plano. La intersección de plano y cono nos da la solución o soluciones al caso propuesto.

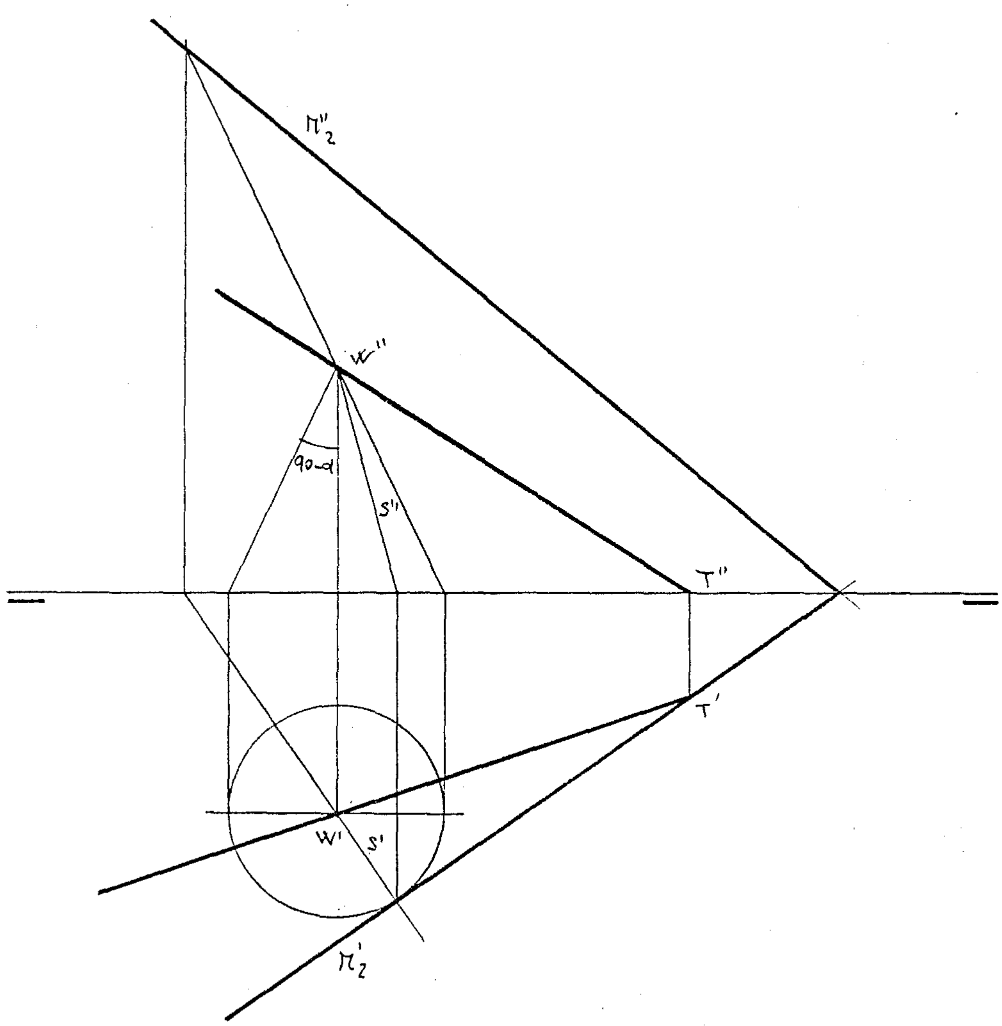
Determinación de planos.

Planteèmonos ahora el caso de obtener un plano que contenga a una recta y forme con otro plano un ángulo determinado α. Sea este último plano el horizontal de referencia y r la recta que ha de contener nuestro plano Γ:



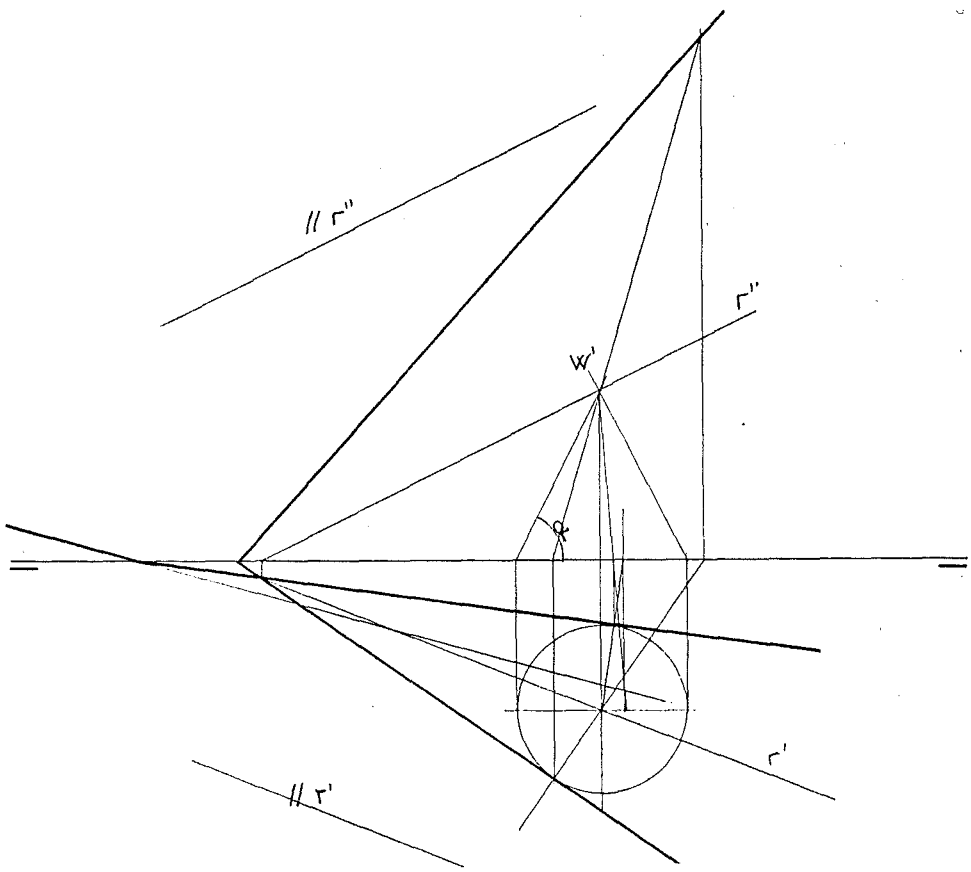
Por un punto W de r trazamos el cono con la inclinación exigida. Como hemos visto anteriormente, para que un plano forme un ángulo con el eje de un cono debe ser tangente a dicho cono; eso lo podremos imponer en la proyección horizontal, que aqui se confunde con el plano dato. El punto traza horizontal de la recta, intersección de ésta con el plano anterior, debe ser del plano buscado, luego debe ser de la correspondiente recta traza horizontal. Para hallarla, impongamos la condición de tangencia. Hemos de trazar desde el punto traza de la recta la tangente o tangentes, si las hay, a la circunferencia de base del cono; con lo cual tenemos definida la traza horizontal de Γ, mediante el punto traza de la generatriz obtendremos la traza vertical, con la que tendremos completamente definido el plano.

Mientras que, en los casos que hemos visto, determinábamos rectas que pasaban por un punto y cumplían una determinadas condiciones, tratándose de planos impondremos primeramente que contengan a una recta, como por ejemplo: determinar los planos que conteniendo a una recta r formen con otra s un ángulo α determinado.



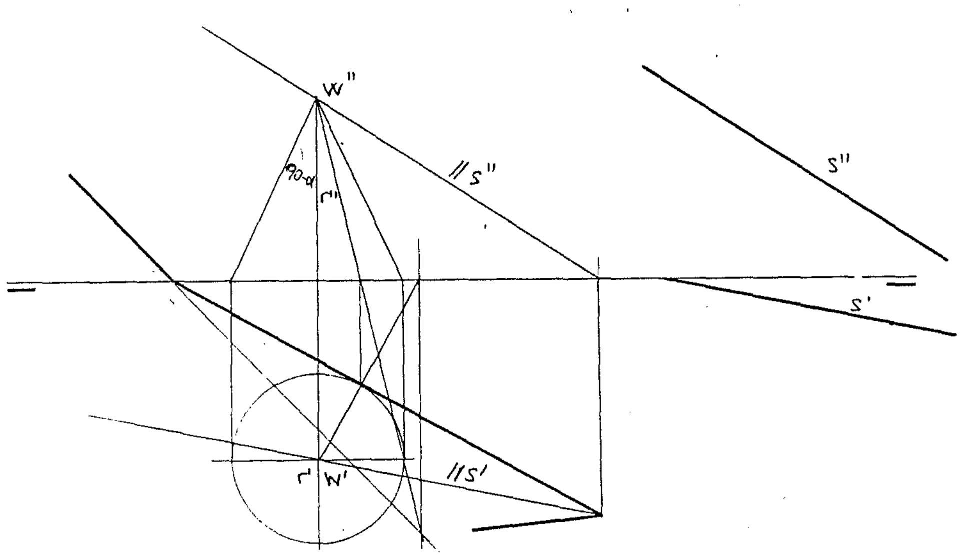
Por un punto W de r, trazamos una recta paralela a s, como siempre para simplificar impondremos que dicha recta sea vertical, los planos que formen α grados con s serán tangentes en las generatrices del cono de semiabertura 90-α. Además deben cumplir el contener a r, consecuentemente han de contener el punto traza de esta recta T; será por T desde donde trazaremos sendas tangentes a la circunferencia de base del cono, obteniendo, finalmente, los planos solución. Nuevamente el número de soluciones depende de la posibilidad de trazar dichas tangentes.

Veamos ahora dos casos de planos que pasando por un punto, cumplan determinadas condiciones. En el primero de ellos se pretende hallar los planos que pasen por un punto W, sean paralelos a una recta r y formen con otro plano Γ un ángulo determinado α.



Suponemos nuevamente que Γ es el plano horizontal de referencia, despues de haber hecho las operaciones oportunas, y perpendicularmente a èl trazamos un cono de revoluciòn de semiabertura 90-α. Los planos que cumplan con las condiciones exigidas deberàn ser tangentes al cono segùn sendas generatrices, para determinarlos totalmente nos falta el que sean paralelas a la recta r, lo que se conseguirà imponiendo que contengan a una paralela a ella. Tracèmosla por W, su intersecciòn con Γ, nos darà el punto por donde trazar las tangentes que nos determinaràn las trazas de los planos buscados.

Finalmente, planteèmonos el caso de planos que formen con una recta r un àngulo α determinado y sean paralelos a otra recta s.



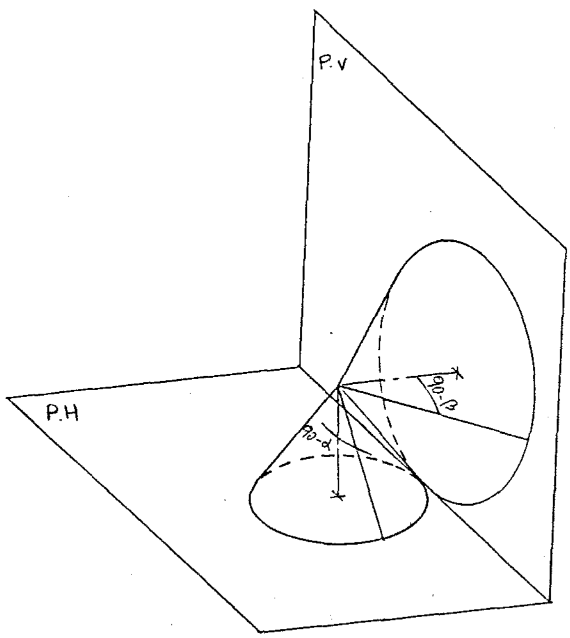
Pondremos r vertical, y por el punto W tradicional, trazaremos el cono de revolución de semiabertura 90-α, la paralela a s por W nos determinará el punto traza desde el que haremos las tangentes pertinentes a la base del cono para determinar los planos deseados.

Determinación de rectas y planos referidos a los planos de proyección.

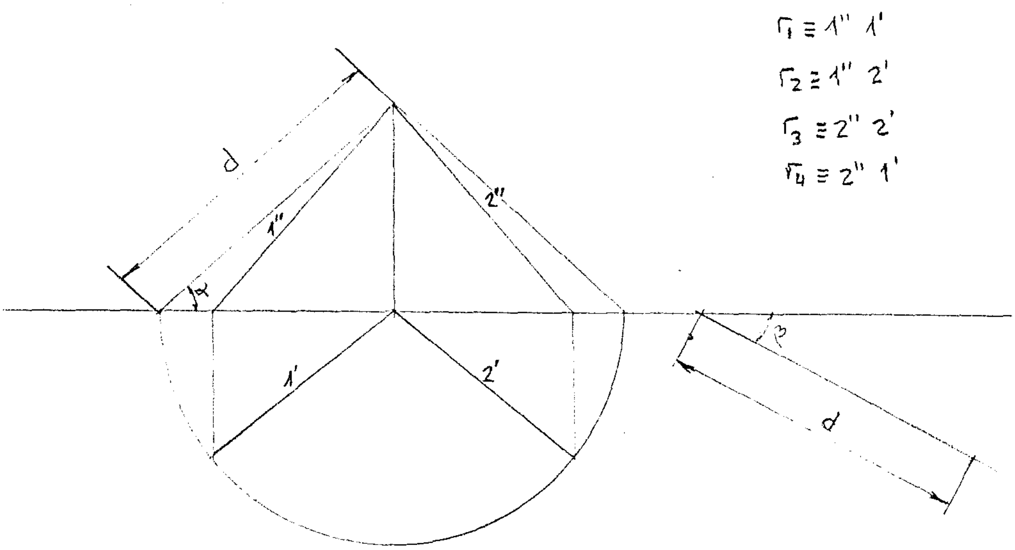
Los casos comentados hasta aqui nö sirven màs que para demostrar la ductilidad del Sistema Diédrico para resolver diversos casos de determinación de rectas y planos. Casos que analiticamente pueden ser resueltos paso a paso y traducidos gráficamente siguiendo el mismo razonamiento si es preciso. Cuando los planos a los que nos referimos son los de proyección, mientras que en Diédrico no reciben un tratamiento diferenciado, yo les doy la misma importancia que a los de "definición" de los elementos.

Ya en el capitulo dedicado a la definición de elementos quedó anotado que una de dichas formas era por los ángulos que forman con los planos de proyección; equiparo, en cierta forma, el definir, por ejemplo, un plano por la intersección de dos rectas a dar los ángulos de dicho plano con los de referencia. Paradójicamente en los tratados de Geometria no sólo no se contempla dicha posibilidad, sino que incluso como determinación de elementos se les dedica poco espacio, o ninguno en algunos casos.

En Diėdrico, es suficiente resolver el caso de recta que forma ȧngulos determinados con los de proyecciȯn, resolviendo la definiciȯn de planos, en las mismas condiciones, por referencia al de rectas. Nuevamente la resoluciȯn se basarȧ en el uso del cono de revoluciȯn, dos en este caso. Resolviendo el caso de que los planos de referencia sean el vertical y el horizontal, para que la soluciȯn sea la mȧs conocida, seleccionemos un punto W sobre la recta soluciȯn, este punto deberȧ ser el vėrtice del cono de semiabertura 90-α respecto al plano horizontal y el de 90-ß respecto del vertical.



En diėdrico veremos los dos conos como dos triȧngulos en los que su abertura se proyecta en verdadera magnitud. Normalmente no se trabaja con los dos conos completos si no con los elementos minimos que nos permitan operar correctamente sin ensuciar demasiado el dibujo (debemos tener en cuenta, volviendo el problema al revès, que aqui no tenemos, normalmente, previsto el uso del equivalente a los niveles, por lo que estas operaciones se realizan en rincones del papèl, de forma que molesten lo menos posible).



Observemos que, ademàs, hemos desplazado el eje del cono de forma que podemos trabajar con media base, lo que recuerda mucho el trabajo con giros, y que es menester imponer la misma magnitud sobre cada generatriz de manera que el vèrtice sea està a la misma altura en ambos casos.

El nùmero de soluciones es de cuatro, (todas las combinaciones posibles entre las proyecciones verticales y horizontales obtenidas), por lo que el contexto de trabajo nos deberà decir cual de ellas es la deseada. Una vez obtenida, por paralelisme trazamos la recta en la posición previamente determinada.

El caso del plano tiene una resolución análoga, dado que en Diédrico trabajamos con las trazas y una vez obtenidas las direcciones de éstas, podemos imponer que un plano paralelo al hallado sea la solución buscada. No obtenemos, sin embargo, la dirección de las trazas directamente, sino que lo hacemos a través de las direcciones de una recta perpendicular a dicho plano.

Sabemos que la perpendicularidad espacial entre rectas y planos se conserva en las proyecciones cilíndricas, caso del Sistema Diédrico, y como lo que nos interesa del plano es exclusivamente la dirección de sus trazas, resolvemos por el método visto anteriormente el problema de encontrar la proyección de una recta que forme con los planos de proyección los ángulos COMPLEMENTARIOS de los que debe formar el plano. Una vez obtenida la proyección de dicha recta, las direcciones de las trazas serán las perpendiculares correspondientes.