UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA

APORTACIÓN AL ESTUDIO DEL SOFTWARE NECESARIO PARA LA INFORMATIZACIÓN DE LOS MÉTODOS DE APRENDIZAJE DE LAS TÉCNICAS DE EXPRESIÓN GRÁFICA, Y SU POSTERIOR IMPLEMENTACIÓN

Autor: Miquel Castillo i Ballarda
Director: Jordi Mestres i Sardà

1988

GEOMETRIA DE PUNTO, RECTA Y PLANO.

Distancias.

En este capitulo nos proponemos hallar las distancias entre los tres tipos de magnitudes fundamentales con las que estamos trabajando: puntos, rectas y planos, tanto entre elementos de la misma familia, de punto a punto, de recta a recta, etc., como entre elementos de familias distintas, de punto a plano, de punto a recta....

Cuando trabajamos en 2D el càlculo de distancias no encierra màs que las dificultades propias de la falta de precisiòn de los instrumentos que tengamos a nuestro alcance (recordemos los problemas con que se encontraron los griegos al descubrir la existencia de magnitudes **inconmensurables**), mientras que cuando lo hacemos con las proyecciones de magnitudes de 3D existe una dificultad añadida: la magnitud medida no ES la magnitud real en la mayoria de los casos. Para resolver esta dificultad existen dos soluciones que nuestro programa tambièn adoptarà aunque de otra forma, como veremos: manipular los elementos hasta ponerlos en alguna posiciòn singular que nos permita medirlo con la certeza de que su medida coincide con la real, como puede ser girar un segmento hasta colocarlo frontal, en Dièdrico, y medir su magnitud en su proyecciòn sobre el plano vertical; o tomando nota de que estamos trabajando con proyecciones, manipularlas y relacionarlas hasta obtener la verdadera magnitud que estamos buscando. La primera opción será objeto de comentarios en varios de los capitulos posteriores, mientras que la segunda será la que vamos a comentar a continuación.

Los casos que pretendemos estudiar son:

- Verdadera magnitud de un segmento.

- Distancia de un punto a un plano.

- Distancia de un punto a una recta.

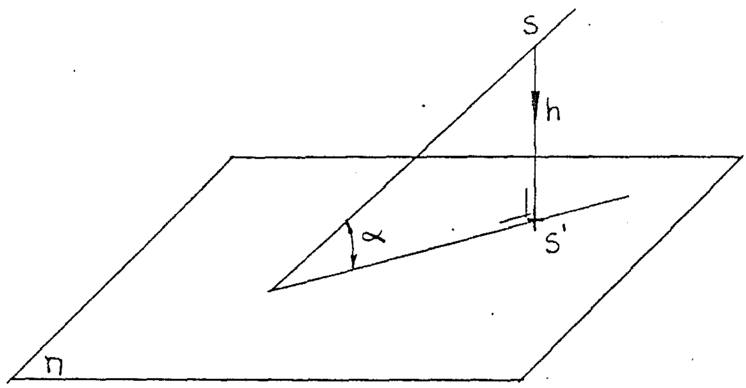
- Distancia entre dos rectas paralelas.

- Distancia entre dos planos paralelos.

- Mínima distancia entre dos rectas que se cruzan.

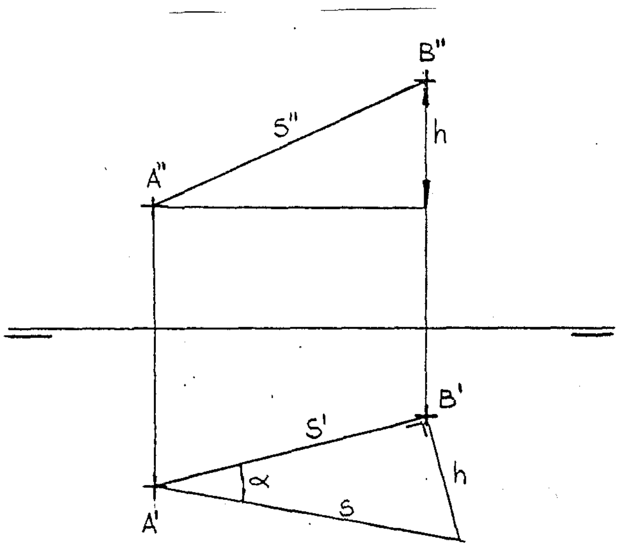
Verdadera magnitud de un segmento.

Tanto si estamos trabajando en el Sistema Diédrico como si lo hacemos en Axonométrico, un segmento se proyecta con una magnitud inferior, o igual a lo sumo, a la real en el espacio.

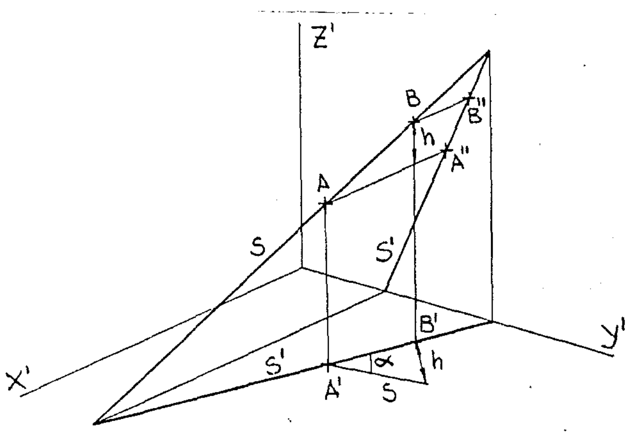


s', en la figura, tiene un valor menor que s, dependiendo del valor del àngulo α. Se forma un triàngulo rectàngulo dentro del plano formado por la intersecciòn de s y s', en este triàngulo s' es un cateto, s la hipotenusa y el otro cateto nos viene determinado por la distancia del extremo del segmento al plano. Este triàngulo rectàngulo mantiene una relaciòn de semejanza con cualquier otro que obtengamos considerando otro punto como extremo del segmento, ya que el àngulo recto y α no varian. Este triàngulo se encuentra en el espacio y nosotros trabajamos en un plano, las propiedades que existan en 3D, nos interesa proyectarlas en 2D . Si giramos, que no abatimos como impròpia y muy comunmente se dice, el triàngulo alrededor de la proyecciòn de la recta conseguiremos tenerlo sobre el plano y del mismo tamaño y propiedades que en el espacio, la proyecciòn es el dato que tenemos sobre el papel, sòlo nos es menester saber cuanto vale la magnitud h.

Si estamos trabajando en Diėdrico, al tener dos proyecciones del segmento podremos realizar la operaciòn en cualquiera de ellas dàndonos la informaciòn del desnivel la otra proyecciòn:



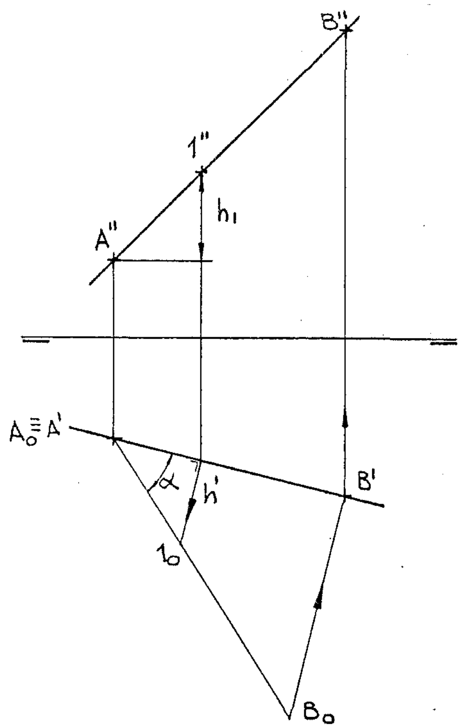
En Axonomėtrico implicarìa el uso de las proyecciones previas, lo que queda muy gràfico pero bastante prolijo de uso.



Para su implementación deberemos hacer especial hincapié en la precisión en los métodos de selección de rectas y posteriormente en los de selección sobre ellas de puntos. Una vez obtenidos dichos puntos el cálculo de la distancia real no implica usar, tampoco en este caso, una traducción del usado en Diédrico sino que analiticamente se halla el valor de esta magnitud y se puede enviar a la linea o hoja de diálogo optativamente junto con las coordenadas de los puntos consultados. En varios programas comerciales se añaden a estas informaciones la distancia proyectada que es la distancia que tiene el segmento considerando ambos puntos como de 2 dimensiones. Puede ser interesante pues nos da una idea de la inclinación real de la recta por su proximidad o no al valor de la distancia real, sobre todo si se programa que ambas informaciones se den en la misma pantalla de información, contiguas. Como la relación entre dichas magnitudes es el coseno del ángulo α, puede estar implementado el cálculo de este ángulo y escribirlo justo al lado de la relación de distancias proyectada y real.

Más interesante es el problema inverso: señalar sobre una recta (nuevamente hago hincapié en que el concepto recta-segmento es usado continuamente de forma ambivalente), un punto que se encuentre sobre ella, a una distancia determinada de otro punto y en un sentido determinado.

En Diédrico se construye según el mismo esquema usado para hallar la verdadera magnitud de un segmento:



Se selecciona un punto 1 arbitrario del que se calcula su distancia real al punto de referencia A, si como es probable este punto no cumple la condiciòn de estar a la distancia requerida, la recta A_01_0 al menos nos da la informaciòn de la inclinaciòn de la recta real, sobre la verdadera magnitud de dicha recta asi obtenida se busca el punto B_0, y de alli obtenemos el punto B buscado.

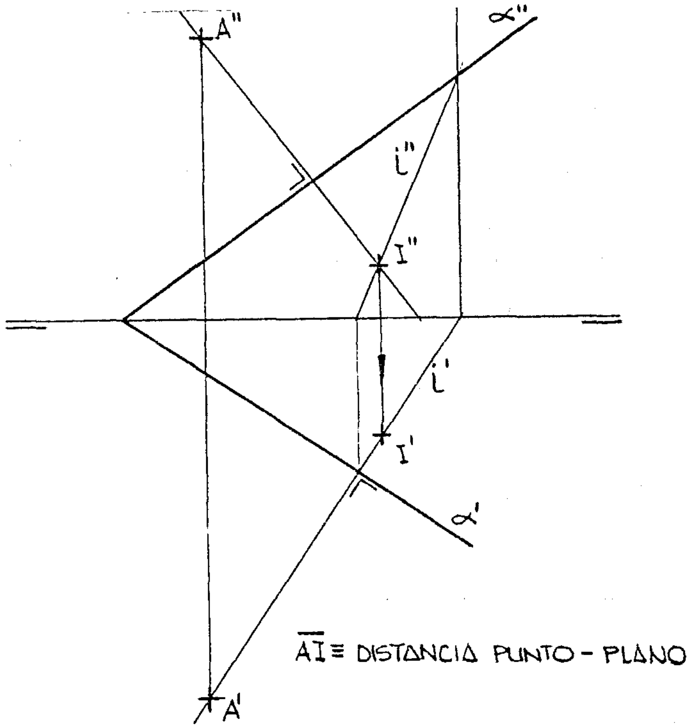
En nuestro caso serà menester efectuar tres acciones complementàrias: primero señalar la recta sobre la que queremos operar, a continuaciòn indicar cual es el punto de referencia y finalmente con el cursor escogemos en cual de los dos sentidos de la recta debe encontrarse el punto buscado, despues de haber entrado por teclado el valor de la distancia deseada.

Finalmente debe tenerse prevista la eventualidad de eliminar gráficamente la parte de recta que deje de ser necesaria en una operación determinada. Ejemplo: tenemos la dirección de la altura de una pirámide, sobre ella calculamos la posición del vértice que resulta que da lugar a un segmento de distinto tamaño del que teníamos anteriormente; nos interesará en este caso eliminar la parte sobrante a partir de V. Normalmente en los programas de Informática Gráfica está previsto en algún lugar de la matriz correspondiente el asignar un 0 o un 1, según se desee que el elemento en cuestión, pese a tener toda la información sobre él almacenada, sea dibujado o nó (o al revés). Aquí se plantea una nueva posibilidad intermedia en cierta forma.

La solución puede estar en la acción, ya implementada en algún programa consultado, de ROMPER la recta, y transformarla en varias rectas superpuestas que se dibujan sin ninguna diferencia aparente pero que al ser, de hecho, independientes se pueden eliminar una a una dando el resultado apetecido de eliminación parcial de la información.

Distancia de un punto a un plano.

De hecho ya hemos hablado de este concepto en el capítulo 6, al tratar el tema de la perpendicularidad de recta y plano, con uso de las propiedades inherentes al Teorema de las Tres Perpendiculares. Recordemos que en Diédrico sólo hallábamos la dirección de la perpendicular al plano y era necesaria una segunda operación para obtener la intersección de la recta con el plano, mediante el uso de algún plano proyectante.



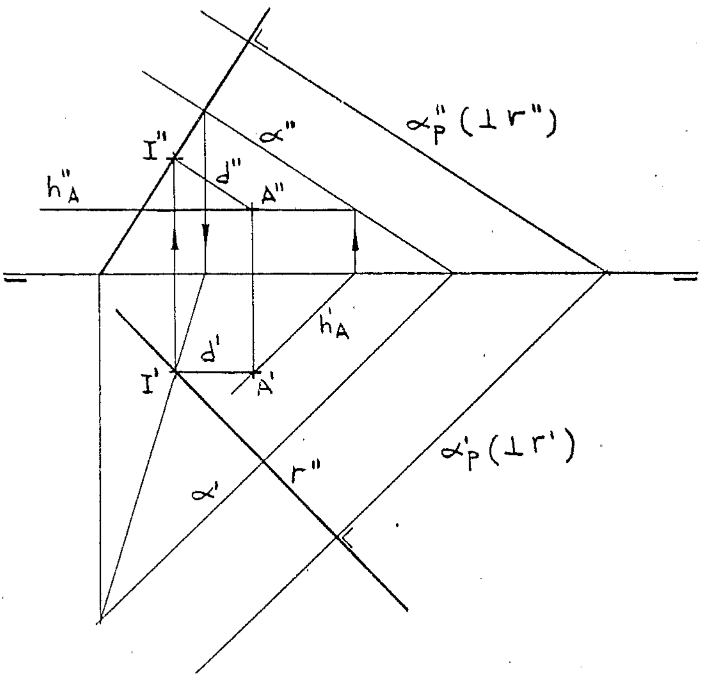
Aparece aqui, por primera vez, un concepto que hará acto de presencia profusamente en este capitulo, el de la diferencia entre verdadera magnitud y verdadera posición. Una vez hallado el punto de intersección de la perpendicular con el plano, ¿está resuelta la cuestión de la distancia del punto al plano?, lógicamente no, pues tenemos dos puntos sobre la proyección diédrica de una recta y hemos visto que, normalmente, esta magnitud es inferior al valor real de la distancia entre estos dos puntos. Nos queda pues la operación hecha en el apartado anterior de cálculo de dicha distancia. Concluimos que la distancia entre los puntos proyectados no es necesariamente la distancia del punto al plano, pero si la verdadera posición de dicha distancia, quiere esto decir que cualquier otro punto del plano se encontrará a mayor distancia de nuestro punto que el hallado.

Ya vimos que nuestra opción iba dirigida en el sentido de hallar ya de entrada el punto de intersección de la perpendicular con el plano, para asi tener inmediatamente definida la recta sin tener que recurrir al uso de las trazas para ello. Una vez dibujado el segmento tenemos la verdadera posición de la recta, y en la linea de diálogo exactamente la misma respuesta que habiamos previsto antes para la distancia entre dos puntos de una recta: coordenadas de los dos puntos, distancia real y proyectada, y ángulo de la recta proyectada respecto a la real.

Distancia de un punto a una recta.

Puede parecer extraño que tanto aqui como en cualquier libro de texto que aborde la Geometria de Punto, Recta y Plano, siempre se hable primero de distancia de punto a plano que de distancia de punto a recta (en cierta forma es mucho más sorprendente el caso del sistem Cónico en donde, por las razones que ya hemos comentado en otra parte de esta tesis, se habla primero de la definición de la recta que de la del punto), y ello es debido al número de operaciones que lleva inherentes. El proceso a seguir es trazar el plano perpendicular a la recta que pase por el punto, éste plano corta a la recta en un punto, es la distancia entre estos dos puntos la distancia buscada.

El proceso en Diédrico es muy laborioso, no digamos ya en Axonométrico, sea r y A la recta y el punto respectivamente:



Para calcular α, plano perpendicular a r pasando por A, sólo tenemos la información de que sus trazas deben ser perpendiculares a las proyecciones diédricas de r. Como ya hemos hecho en otras ocasiones trazamos un plano arbitrario α_p que cumpla esa condición, y posteriormente imponemos que un plano paralelo a éste contenga a A. Debemos a continuación hallar la intersección de α con r, mediante el uso de algún plano proyectante, obteniendo el punto I, de forma que AI es la verdadera posición de la distancia que estamos buscando. Queda finalmente la operación de obtener la verdadera magnitud de dicha distancia.

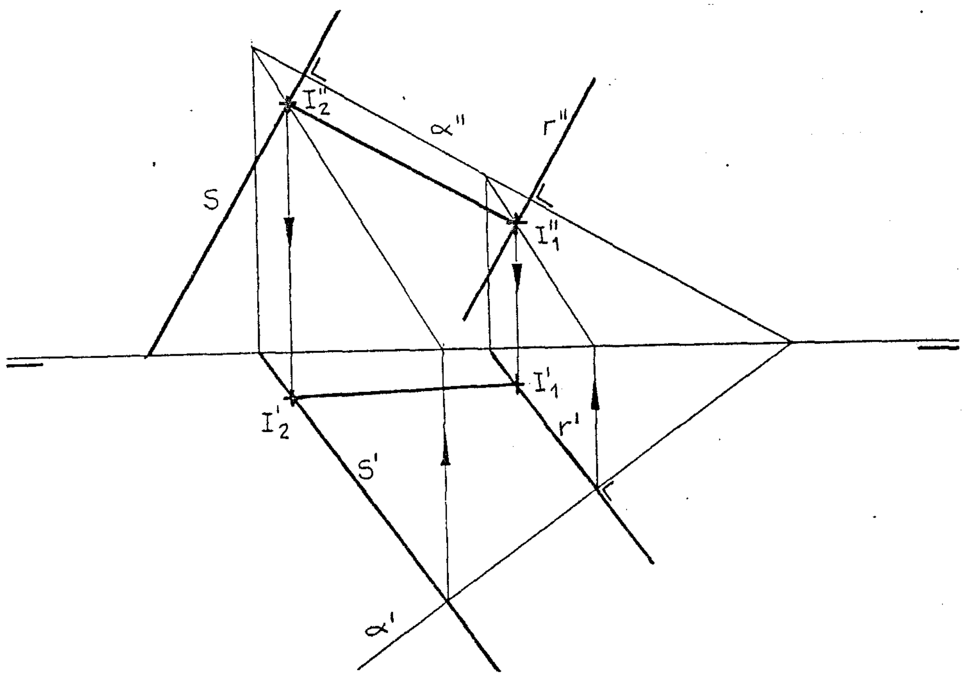
A pesar de lo farragoso de la exposición, como ya he comentado en otras ocasiones, el àlgebra del sistema Diédrico es muy sistemàtica, valga la redundancia, lo que ayuda a su ejecución quizàs en detrimento de su comprensión. Es menester tener la visión de lo que se està realizando para evitar posibles errores, y que èstos no pasen desapercibidos, evitando asi su acumulación. El sistema Axonomètrico es màs complejo, pero sus resultados son màs facilmente comprobables, incluso para un neofito, de ahi su elección para la presentación gràfica de las operaciones analiticas realizadas por el ordenador.

La respuesta gràfica a la distancia de un punto a una recta es, por comparación con los sistemas de representación tradicionales, sorprendentemente simple, ya que sólo se trata de señalar el punto I de verdadera posición de la distancia y posteriormente la información literal habitual.

Distancia entre dos rectas paralelas.

Finalizado el apartado dedicado al punto y su relación con la recta y el plano, empecemos ocupàndonos de un caso particular de rectas que no se cruzan sino que se cortan, eso si en un punto impròpio. Son pues rectas coplanarias, y su distancia se obtendrà mediante la construcción de una perpendicular común, y su intersección posterior con las rectas en cuestión. También hay autores que razonan que la distancia entre este tipo de rectas se puede obtener mediante la consulta de la distancia de un punto cualquiera de una de ellas a la otra. Prefiero, por sistemático, el primer razonamiento.

Veamos, como es habitual, su resolución en el Sistema Diédrico:



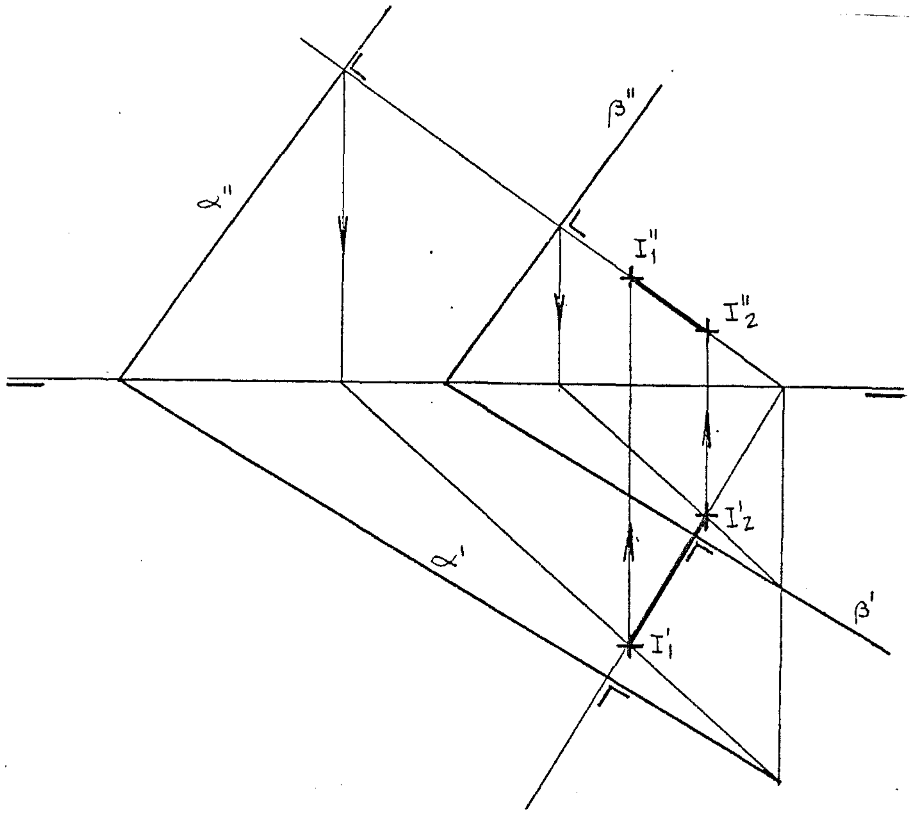
El plano α perpendicular, donde se encontrará la perpendicular común, lo trazamos en cualquier posición, posteriormente lo intersecamos con r y s, los punto I_1 e I_2 están a la distancia buscada, la obtendremos de la forma habitual.

Nuestro programa HYPATIA tiene varias posibles respuestas a este caso. Analiticamente no hay problema ninguno ya que no es necesario señalar cuales son los puntos que nos indican la verdadera posición de la distancia, ya que pueden ser cualquier par de ellos; y las ecuaciones que nos definen las rectas tendrán los coeficientes proporcionales. No creo, sin embargo, que deba preveerse una orden especial para el cálculo de la distancia entre rectas paralelas, considero mucho mejor que este caso se encuentre englobado en el caso general, que veremos más adelante, aunque tanto su respuesta gráfica como la literal sean distintas a las que se darán en aquel caso. El diálogo puede ser: DISTANCIA ENTRE DOS RECTAS, una vez seleccionadas nos puede devolver la información RECTAS PARALELAS-DISTANCIA =.... En el caso de rectas cualesquiera habria otras dos posibles respuestas, como veremos, RECTAS CONCURRENTES y DISTANCIA MINIMA, será en este último caso que habrá que preveer el cálculo de esta distancia minima y de su verdadera posición, o sea el devolver la información de que puntos sobre ambas rectas se encuentran a dicha distancia minima.

Distancia entre planos paralelos.

Este caso es el inverso del anterior, la distancia entre dos planos nos vendrá dada por la porción de perpendicular común que queda limitada por dichos planos.

Con la misma sencillez del concepto lo resolveremos en Diédrico, mediante la obtención de una perpendicular cualquiera, ni siquiera imponiendo que pase por un punto dado, y cortándola con los dos planos:



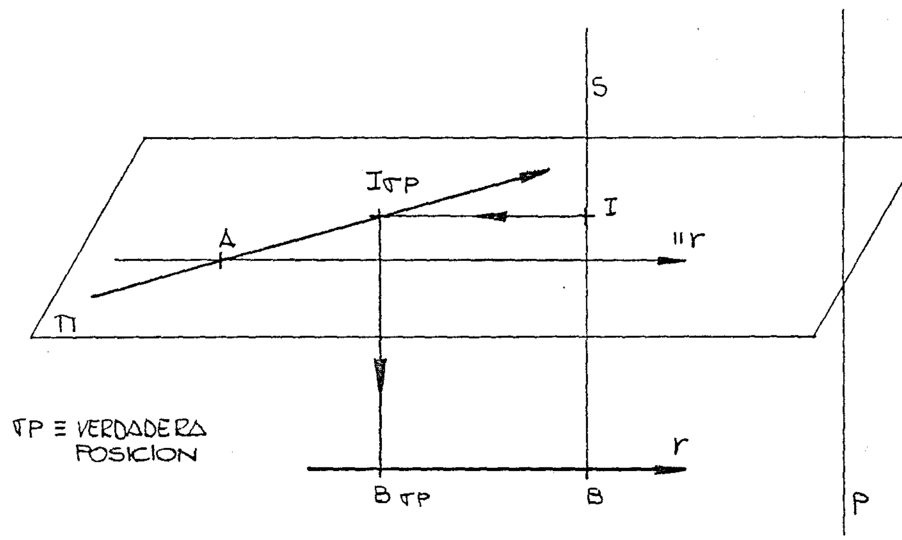
Para la intersección de la recta con cada uno de los planos, hacemos uso de un solo plano proyectante.

Siendo como se ve una cuestión básicamente de consulta, en nuestra implementación informática no creo necesario preveer la respuesta gráfica que incluya el dibujo de un segmento equivalente al que se usa en Diédrico, bastará como en el caso de rectas paralelas la información sobre el paralelismo y la respuestas literal del valor de la distancia consultada. No se da aqui la posibilidad de tener varias opciones como en el caso de las rectas, ya que dos planos siempre se cortan, consecuentemente su distancia es, en este sentido, nula, dándose el caso de distancia mesurable sólo cuando su recta de intersección es impròpia.

Minima distancia entre dos rectas que se cruzan.

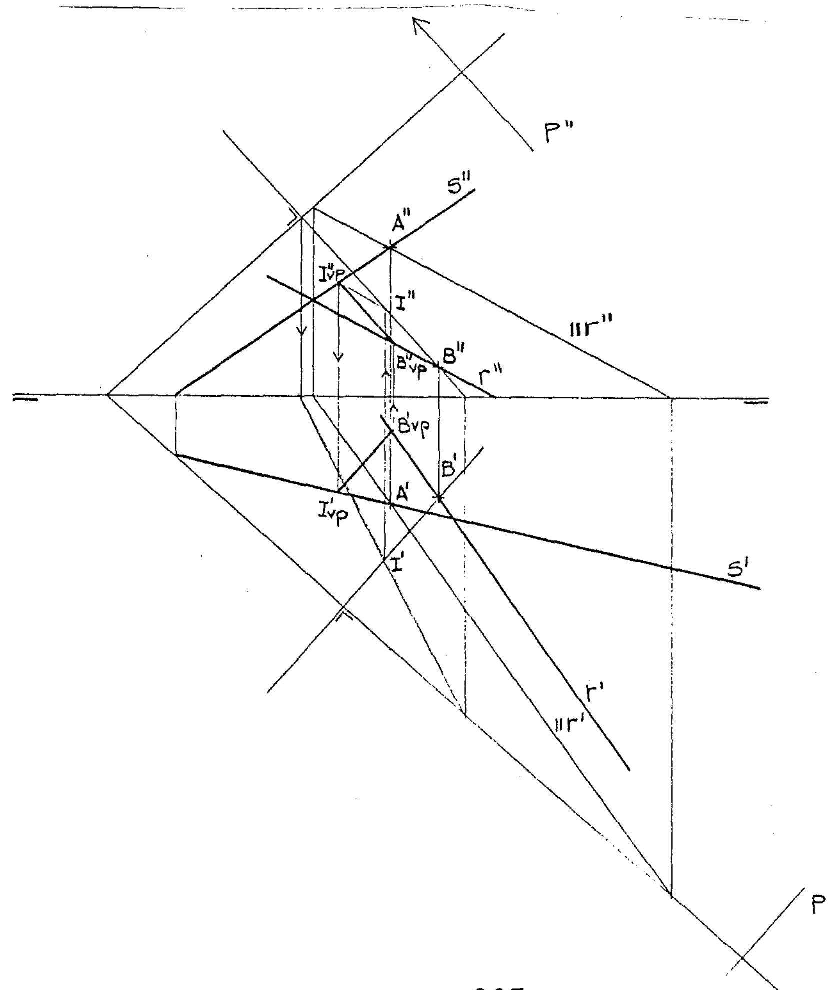
Este caso y el de distancia entre dos puntos sobre una recta son los conceptos bàsicos entre los que se contemplan en este capitulo. Particularmente en la busqueda de la distancia minima entre dos rectas que se cruzan se encuentran muy claramente explicitados los conceptos de verdadera magnitud y verdadera posiciòn, veàmoslo. La distancia entre dos rectas que se cruzan es la magnitud del segmento obtenido al cortar la recta perpendicular comùn a ambas rectas con ellas. Obtenemos dos puntos, uno sobre cada recta, que son los que se encuentran a la distancia minima, de ahi que normalmente se pida encontrar la distancia minima entre dos rectas en magnitud y posiciòn.

Veamos el proceso que se sigue en el Sistema Dièdrico, para ello previamente esquematicemos cuales seràn las operaciones que vamos a realizar. El segmento que nos dè la verdadera magnitud de la distancia debe encontrarse sobre la perpendicular comùn a ambas rectas, si èstas fueran coplanarias la direcciòn de esta perpendicular seria obviamente la de la perpendicular a dicho plano; dado que no es el caso, ya que por hipòtesis ambas rectas se cruzan, deberemos conducir nuestro razonamiento de otra forma.

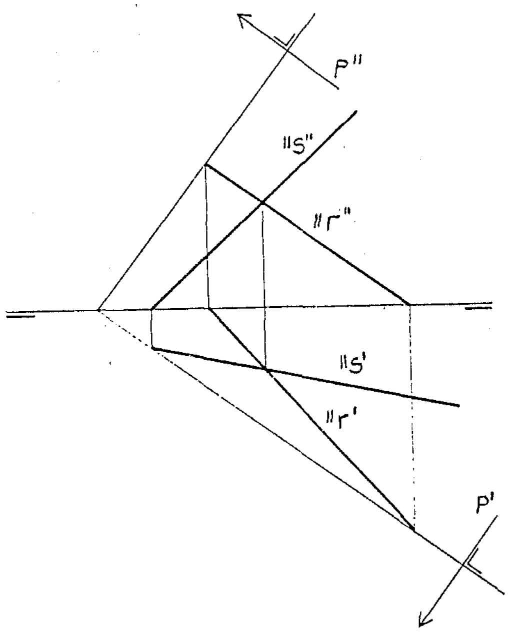


A pesar de que las dos rectas no sean coplanarias tienen un punto imprópio cada una, y el concepto de perpendicularidad, como hemos visto anteriormente, está intimamente ligado a estos puntos imprópios independientemente de otros conceptos. Podemos definir un plano dàndole como caracteristica diferenciadora la recta imprópia formada por la "unión" de los puntos imprópios de las dos rectas dato, de ahi podremos calcular la dirección, punto imprópio, de la recta perpendicular a ambas rectas. El anterior razonamiento se traduce por trazar por un punto cualquiera de s una paralela a r, ambas rectas formarán un plano al que deberá ser perpendicular la recta que nos dé la distancia mínima.

Una vez obtenida la dirección de la perpendicular al plano, trazando por un punto cualquiera de r una paralela a ésta, sabemos que la intersección de la recta obtenida con el plano formado anteriormente, nos dará un punto que unido con el escogido sobre r formará el segmento de distancia mínima entre ambas rectas. No queda aun resuelto el problema de cuales son los puntos que, sobre ambas rectas, se encuentran a dicha distancia mínima, aunque ya tengamos el valor de ésta. El punto I, intersección de la perpendicular con el plano, es harto improbable que esté sobre la recta s, para que así sea basta con desplazarlo sobre el plano paralelamente a r, como los puntos del otro extremo del segmento continuamente se apoyan en esta recta, cuando I lo haga sobre s, tendremos en verdadera posición al segmento de distancia mínima. Veamos la traducción diédrica del razonamiento realizado:



Algunos autores, para no complicar excesivamente el dibujo, realizan las operaciones de obtención de la dirección de la perpendicular aparte mediante paralelas a las dos rectas, en vez de mantener una y por ella trazar la paralela a la otra:



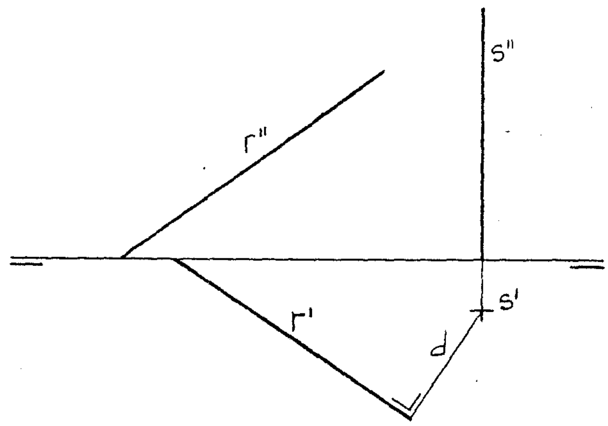
El procedimiento a seguir, posteriormente, es idéntico al realizado más arriba.

A diferencia de otros casos vistos en este capitulo, ahora si que nos interesa conocer además de la distancia minima, donde se da esta circunstancia, debemos, pues, implementar la obtención de dichos puntos. Es posible que alguien piense que dada la enorme capacidad que tiene un ordenador de realizar operaciones repetitivas, y que de hecho prácticamente siempre nos plantearemos el hallar distancias entre segmentos, seria facil programar que sistemáticamente hagamos un barrido de puntos sobre una recta y calculemos su distancia a todos los puntos de la otra, almacenando cada vez la distancia menor y la información de los puntos que la dan, para finalmente llegar a unir gráficamente los dos puntos obtenidos. El razonamiento es impecable y se usa en diversos algoritmos algebraicos, pero pensemos que para ello se requiere realizar bucles repetitivos en los que hay que preestablecer el salto, entendiendo por tal la unidad que nos permita discernir un punto de la recta del siguiente, de forma que podamos afinar la precisión a voluntad, resultando que podemos transformar un segmento finito en prácticamente infinito. Personalmente no soy proclive a realizar una operación tan burda, independientemente de la gran precisión que se pueda obtener, y prefiero realizar una variante del sistema expuesto anteriormente para resolver el problema en diédrico.

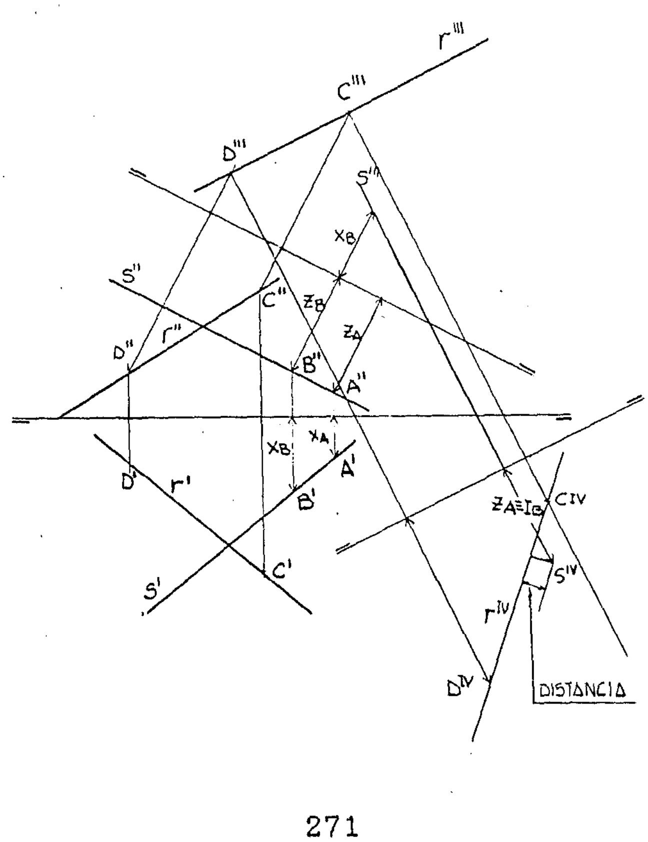
En dicho razonamiento hay algo parecido al algoritmo repetitivo que he comentado en el párrafo anterior, el ir desplazando el segmento que nos da la distancia mínima hasta que obtengamos la verdadera posición con el segmento apoyándose sobre las dos rectas. Intentemos huir de este tanteo y sustituirlo por dos ecuaciones que representen a dos lugares geométricos y que nos dén una solución única y válida. Vemos en la figura espacial que nos ha servido para aclarar las operaciones que posteriormente hemos realizado en diédrico, que una vez definida la dirección de la normal común a las dos rectas, ésta puede formar con cualquiera de ellas un plano que las corta precisamente en los puntos que buscamos. Posteriormente se puede preveer el dibujar un segmento que una dichos puntos, con lo que tendremos la respuesta gráfica de la distancia minima.

Para ello bastará por un punto arbitrario, (x,y,z), cortar las paralelas a las dos rectas y obtener la ecuación del plano que definen, de ahi encontrar los coeficientes de la recta perpendicular. Por un punto cualquiera de la primera de las rectas, (dicho punto puede ser el de su definición o incluso uno de los traza), imponer que pasen la perpendicular y dicha recta; una vez obtenida la ecuación del plano, pasamos a encontrar su intersección con las rectas dato de forma que encontramos los puntos que nos definen la minima distancia. Las respuestas literal y gráfica serán las habituales que hemos visto hasta ahora.

Las operaciones programadas para resolver la cuestión de distancia minima entre dos rectas, recuerdan por su complejidad a la intersección de planos con sólidos, tanto en un caso como en otro, la geometria usa la manipulación de los elementos para ponerlos en posiciones que nos simplifiquen el trabajo. En el caso de intersección de un sólido por un plano, ya hemos visto que usábamos el cambio de plano de proyección poniendo el plano seccionador de canto; en el caso de distancia minima entre rectas que se cruzan, si alguna de ellas estuviera en la posición que hemos llamado de punta, se simplificaria mucho la consulta de su distancia, ya que la distancia seria la perpendicular trazada desde dicha recta, en la proyección en la que la vemos reducida a un punto, a la otra recta:



Normalmente se puede conseguir lo anterior también mediante cambios de plano de proyección (también se suelen usar giros):



No es mi interès extenderme en este tema, dado que precisamente la Informatizaciòn de la Geometrìa permite no tener que recurrir a estos procedimientos, como estamos viendo, pero me sirve de introducciòn al proximo capitulo en donde continuamente estaremos cotejando este tipo de herramientas gràficas como son los cambios de plano de proyecciòn.