Aportaciones a la representabilidad de juegos simples y al cálculo de soluciones de esta clase de juegos

Mª Albina Puente

13 de mayo de 2004

Índice General

Agradecimientos

Deseo expresar mi agradecimiento al director de la tesis, el Doctor Josep Freixas Bosch, quien con su apoyo y sus conocimientos me ha orientado durante la preparación de esta memoria, haciendo posible que ésta vea la luz.

Al Doctor Francesc Carreras Escobar que, con sus interesantes cursos de doctorado, me incentivó a emprender esta línea de investigación.

A todos los integrantes del Departamento de Matemática Aplicada III de la Escuela Universitaria Politécnica de Manresa, por prestarme siempre su colaboración.

A mi familia, por su comprensión y paciencia.

Introducción

El nacimiento de la Teoría de Juegos se remonta a mediados de siglo y se debe, en gran parte, a J. von Neumann y O. Morgenstern, autores en 1944 del libro "Theory of Games and Economic Behavior". Aunque hace cincuenta años era prácticamente desconocida, e incluso hace treinta años poco más de treinta investigadores se dieron cita en un congreso en Jerusalén para dar a conocer los avances y resultados obtenidos, en la actualidad esta situación ha cambiado substancialmente y la Teoría de Juegos es hoy un campo dinámico y en continua expansión. Economistas y matemáticos son sus principales representantes, aunque existen especialistas de las Ciencias Sociales, de la Biología y de las Finanzas que se muestran interesados en sus aplicaciones.

Un juego puede definirse como un problema de decisión en el que existe más de un agente decisor y en donde las decisiones tomadas por un jugador tienen efectos sobre los demás. Por lo tanto, en todo juego no trivial tiene lugar un conflicto de intereses. Está claro que en nuestro mundo podemos observar numerosas situaciones de conflicto, por lo que no resulta extraño que las aplicaciones de la Teoría de Juegos ofrezcan un gran número de posibilidades. Intuitivamente podríamos definirla como la parte de las Matemáticas que resuelve situaciones conflictivas en las que dos o más jugadores se ven involucrados. Dado que existen diferentes tipos de situaciones conflictivas en las que intervienen diversos agentes, existen también varias clases de juegos, siendo la primera gran clasificación la que distingue entre **juegos cooperativos** y **juegos no cooperativos**.

La Teoría de Juegos no cooperativos, de la que no nos ocuparemos, estudia el comportamiento de los agentes en cualquier situación en donde la elección de cada jugador está encaminada a maximizar sus propios intereses, sin preocuparse de los de los demás. Sin embargo, si en el juego se permite la comunicación entre los jugadores, que se establezcan acuerdos y, consecuentemente, que se formen coaliciones entre ellos, entonces estamos hablando de juegos cooperativos. Dichos juegos vienen caracterizados por el conjunto de jugadores, N, y por una función, llamada función característica, que asigna a cada coalición un número real, y que sobre el conjunto vacío vale 0. Para estos juegos se han propuesto diferentes tipos de solución siguiendo siempre criterios de racionalidad: por un lado soluciones unívocas, que asignan a cada jugador un cierto pago en unidades de utilidad transferible, y por otro soluciones multívocas, que asignan al juego todo un conjunto de vectores de pago.

Ocupando un lugar importante dentro de los juegos cooperativos se encuentran los juegos simples, aquéllos en los que la función característica tan solo toma los valores 0 y 1, y que describen a los sistemas de decisión. Basta recordar la frase de Shapley (1962) que hace referencia a ellos: "Muchos de los sofisticados aparatos analíticos que han sido inventados para resolver o hacer frente a los juegos numéricos más generales son más fáciles de aplicar en el contexto de los juegos simples, en los que sólo en raras ocasiones se reducen a la trivialidad".

Dichos juegos pueden aplicarse al estudio de situaciones parlamentarias, sociedades de accionistas, modelos de múltiples alternativas... Existen además, como veremos a lo largo de la memoria, estrechas relaciones entre la Teoría de Juegos y campos como la Electrónica y la Fiabilidad de Sistemas. Formalmente, un juego simple es análogo a una "función interruptor" o función Booleana si se prescinde de la condición de que en el vacío tome el valor cero y a una estructura semi-coherente en términos de Fiabilidad. En estas dos áreas se identifica N, el conjunto de jugadores, con el conjunto de componentes del sistema o de la estructura. Se considera que el estado del sistema (funcionamiento o fallo) depende exclusivamente del estado de las componentes (funcionamiento o fallo), lo que implica la existencia de una función Booleana que asigne a cada conjunto de componentes el estado del sistema. Esta función Booleana se denomina función estructura y no es más que la función característica utilizada en términos de Teoría de Juegos.

Una subclase de los juegos simples la forman los juegos de mayoría ponderada, definidos asignando un peso a cada jugador y una cuota, que desempeñan un importante papel en esta memoria. También pueden ser interpretados como funciones interruptor con umbral o como sistemas aditivos, utilizando la terminología de la Electrónica y de la Fiabilidad de Sistemas, respectivamente. En ambos casos cada uno de los pesos mide la contribución de cada componente al funcionamiento del sistema en el sentido de que el sistema funciona mientras la suma de los pesos asociados a cada una de las componentes en funcionamiento supera el umbral o cuota.

El problema de buscar una condición sencilla que caracterice a los juegos de mayoría ponderada entre los juegos simples ha sido muy estudiado. Esta cuestión ha sido tratada, entre otros, por Elgot (1960), Muroga (1971), Hammer, Ibaraki y Peleg (1981), Einy y Lehrer (1989) y Taylor y Zwicker (1992). La ideal crucial se encuentra en la relación de **desplazamiento**, introducida por Isbell (1956), y la propiedad de **completitud** considerada por Winder (1962), Maschler y Peleg (1966), Carreras (1984) y Einy (1985) y satisfecha por todo juego de mayoría ponderada. La relación de desplazamiento dio pie a Carreras y Freixas (1996) a estudiar los **juegos simples completos** como una vía natural para la discusión de los juegos de mayoría ponderada. Podemos considerar a los juegos completos, en los que el orden inducido por la relación de desplazamiento es total, como una extensión natural de los juegos de mayoría ponderada. Carreras y Freixas asociaron a cada juego completo unos invariantes característicos, concretamente un vector y una matriz. Si esta matriz posee una sola fila, obtenemos los **juegos completos con mínimo**.

Hemos titulado la memoria "Aportaciones a la representabilidad de juegos simples y al cálculo de soluciones de esta clase de juegos" en alusión directa a las dos partes de las que consta. Ha sido estructurada en cinco capítulos que, a continuación, resumimos brevemente.

En el primero de ellos exponemos los conceptos y resultados que hemos creído indispensable recordar como antecedentes del trabajo. Su contenido no es, por tanto, original. Cabe señalar que en este capítulo se han uniformizado notaciones, extraído los resultados más importantes y recapitulado los temas que eran de mayor interés para nuestros propósitos.

En el segundo capítulo se inicia la tesis propiamente dicha. Es un hecho conocido que sociedades de accionistas, modelos políticos e incluso modelos de la Electrónica pueden ser descritos mediante juegos de mayoría ponderada, que pueden verse alterados si se experimentan variaciones en los pesos y/o la cuota que los definen. Gambarelli (1983) estudió los efectos que causaba en el juego el aumento del peso de un jugador en perjuicio de los otros, así como la disminución del mismo en favor del aumento de los otros. Esta situación puede ser generalizada en el caso en que existan variaciones en cada uno de los pesos y la cuota, que es el caso que nos ocupa. Carreras (1993) estudió los efectos en el valor de Shapley de un juego de mayoría ponderada en el que los pesos están fijados y es la cuota la que se modifica. Particularmente estudió estos efectos en el Parlamento Europeo. Estos artículos están relacionados con nuestro capítulo en el sentido de que en ambos se producen modificaciones, bien de los pesos o de la cuota.

La parte fundamental del capítulo se basa en determinar el máximo porcentaje permitido en la variación de los pesos y la cuota de una representación estricta de un juego de mayoría ponderada que hace que el juego no cambie. Teniendo como punto de partida los resultados obtenidos por Hu (1965) en el campo de la Electrónica, estableceremos el paralelismo entre la Teoría de Juegos y áreas como Fiabilidad de Sistemas y Teoría de Circuitos. Se resumen y se mejoran los resultados obtenidos por Hu para la **tolerancia**, a la vez que se define el concepto de **amplitud** de representaciones estrictas de juegos de mayoría ponderada, que será el máximo porcentaje de las variaciones de los pesos y de la cuota que mantienen el juego invariante. Como una consecuencia inmediata deduciremos que este valor mejora la tolerancia. Daremos también una expresión simplificada de la amplitud para representaciones estrictas de juegos de mayoría ponderada monótonos. Determinaremos la cuota que hace que la amplitud sea máxima cuando los pesos están fijados. Como casos particulares de la amplitud, introduciremos el concepto de **amplitud coalicional**, en donde las variaciones de los pesos afectarán a un número determinado de jugadores, y el concepto de **amplitud coalicional con suma de pesos constante.**

La primera sección del capítulo tercero no es original, ya que está dedicada a recordar los conceptos y resultados fundamentales obtenidos por Carreras y Freixas (1996) sobre los juegos completos. A continuación definiremos y estudiaremos los juegos completos con mínimo utilizando los invariantes característicos. El núcleo (**kernel**) y el nucleolo han sido estudiados para ciertas clases de juegos. El objeto del estudio de dichas clases era en ocasiones puramente matemático, motivado por el deseo de entender mejor la naturaleza de las soluciones y comprobar si los resultados teóricos adquirían sentido. En otros casos, la motivación era resultado directo de sus aplicaciones, principalmente a las Ciencias Sociales. Uno de los resultados más atractivos hace referencia a los juegos de mayoría ponderada de suma constante. Si todas las coaliciones ganadoras minimales tienen el mismo peso según cierta representación, diremos que es una **representación homogénea** del juego y, si existe una tal representación, el juego se denomina **homogéneo**. Von Neumann y Morgenstern (1953) ya demostraron que no todo juego de mayoría ponderada tiene pesos homogéneos e Isbell (1959) expresó el deseo de encontrar para cada juego de mayoría ponderada de suma constante una única representación (normalizada) que reduzca la representación homogénea si el juego es homogéneo. Este problema permaneció abierto hasta que nueve años después Peleg (1968) probó que el nucleolo es siempre un sistema de pesos, y que éstos son homogéneos si el juego es homogéneo. De este modo, si estamos de acuerdo en que el nucleolo tiene un sentido intuitivo, llegamos a la conclusión de que la condición deseada por Isbell se cumple..... A partir de la relación de desplazamiento y teniendo en cuenta que a jugadores indiferentes les corresponde el mismo vector de pago, podemos definir el vector normalizado para el nucleolo, cuyas componentes corresponden al jugador perteneciente a la I-clase N_k, y obtenerlo como solución de un sistema determinado de ecuaciones.

El núcleo (**kernel**) fue introducido por Davis y Maschler (1965) como un concepto auxiliar de solución cuyo principal papel era revelar ciertas propiedades del conjunto de negociaciones y computar parte de este conjunto. El núcleo tiene interesantes propiedades matemáticas que reflejan de varias maneras la estructura del juego. Aumann, Peleg y Rabinowitz (1965) y Aumann, Rabinowitz y Schmeidler (1966) calcularon el núcleo para diferentes clases de juegos simples. Obsevando los resultados de estos cómputos, Maschler y Peleg (1966, 1979) analizaron la estructura de los politopos que componen el núcleo y redujeron considerablemente el número de sistemas de inecuaciones necesario para calcularlo. Kopelowitz (1967) computó el núcleo de todos los juegos de mayoria ponderada de suma constante de 6 y 7 jugadores y de todos los juegos superaditivos de 6 jugadores. Recientemente Peleg, Rosenmüller y Sudhölter (1995) calcularon el núcleo de los juegos homogéneos.

Es un hecho conocido que en un juego completo sin clases triviales el núcleo y el pre-núcleo coinciden (Peleg, Rosenmuller y Sudhölter, 1995). Si además tenemos en cuenta que tanto el núcleo como el pre-núcleo respetan la relación de desplazamiento (Isbell, 1956), esta propiedad nos sugerirá la definición de **núcleo maximal** de un juego completo. A partir de aquí, caracterizaremos la maximalidad del núcleo para juegos completos con mínimo en función del número de jugadores con veto y el de jugadores nulos.

Proporcionaremos un método para calcular los semivalores, entre ellos el valor de Banzhaf y el valor de Shapley. Este cálculo es suficiente realizarlo para cada I-clase puesto que jugadores indiferentes tienen asociado el mismo semivalor y, a su vez, el semivalor de una I-clase está definido aditivamente a partir de los semivalores individuales. La cobertura superaditiva de un juego fue introducida por Aumann y Drèze (1974) y garantiza el cumplimiento de la superaditividad. En la parte final del capítulo determinaremos la cobertura superaditiva de un juego simple completo, no necesariamente con mínimo, también a partir de sus invariantes característicos.

El cuarto capítulo está dedicado al cálculo de la dimensión de ciertos juegos simples. La definición de dimensión de un juego simple proviene del concepto de dimensión (Dushnik y Miller, 1941) de un conjunto parcialmente ordenado como el mínimo número de órdenes lineales cuya intersección es el orden parcial inicial. El hecho de que un juego simple pueda expresarse como intersección de juegos de mayoría ponderada da lugar al concepto de dimensión de un juego simple. En la primera parte del capítulo determinaremos la dimensión de los juegos completos con mínimo utilizando sus invariantes característicos. Como hemos comentado anteriormente, los juegos completos son una extensión natural de los juegos de mayoría ponderada. Algunos de los ejemplos que describen situaciones reales (por ejemplo la propuesta para establecer enmiendas a la Constitución del Canadá o el mecanismo de toma de decisiones del Congreso de los Estados Unidos) tienen dimensión 2, si bien algunos de ellos no son completos. La primera cuestión que surge es si es posible construir juegos simples de cualquier dimensión. Taylor y Zwicker (1995) dieron respuesta a dicho problema y demostraron que para todo número natural $n \geq 1$ existe un juego simple de dimensión n, es decir, existen familias de juegos tales que su dimensión aumenta con el número de jugadores. Sin embargo, a raíz de que todos los juegos presentados no eran completos, surge la segunda pregunta: ¿es posible construir juegos completos de cualquier dimensión? La respuesta a esta cuestión la obtenemos como consecuencia inmediata de la determinación de la dimensión de los juegos completos con mínimo dada en este capítulo, de donde se deduce que también para todo natural $n \geq 1$ existe un juego completo (con mínimo) cuya dimensión es n. Este resultado amplía y complementa el citado anteriormente, a la vez que demuestra que la complejidad de la dimensión del juego no está directamente relacionada con el hecho de que la relación de desplazamiento sea total.

En la segunda parte del capítulo, y al igual que en el capítulo II, se establecerán conexiones con la Electrónica y con la Fiabilidad de Sistemas. Determinaremos la dimensión de dos clases de juegos simples que pueden interpretarse como casos particulares de los llamados juegos simples compuestos definidos por Shapley en 1962, y los denominaremos **composición de juegos individualistas vía unanimidad** y **composición de juegos de unanimidad vía individualismo**. Los jugadores pertenecen a una de las m cámaras que existen y un acuerdo es previamente aceptado o rechazado en cada una de ellas, para finalmente aplicar una decisión global que incluya todos los posibles resultados. Veremos que ambos tipos de juegos generan juegos simples de cualquier dimensión. La parte final del capítulo está dedicada a determinar la dimensión de juegos simples que son una generalización de los anteriores.

Desde que Shapley introdujo la noción de valor como una evaluación a priori de la expectativa de cada jugador en un juego cooperativo, gran parte de la Teoría de Juegos se ha centrado en el análisis de este concepto de solución, así como en la búsqueda y discusión de otras alternativas y generalizaciones. Con la aparición del índice de poder de Shapley-Shubik (1954), se abrieron nuevas posibilidades para la aplicación de la Teoría de Juegos al campo de la política. La eficiencia es una de las características básicas del valor de Shapley y, sin embargo, su inevitabilidad ha sido cuestionada por varios autores, que han considerado la posibilidad de eliminarla. Banzhaf (1965) ha sido quizás el primer autor que ha pasado por alto dicha propiedad al proponer su índice de poder.

Dos de las más relevantes contribuciones a esta línea de investigación se deben a los trabajos de Dubey, Von Neyman y Weber (1981) y Weber (1988). Los primeros introdujeron la noción de **semivalor**, como una amplia familia de soluciones que incluye al valor de Banzhaf y que tiene al valor de Shapley como único miembro eficiente. En el segundo trabajo se definen los **valores probabilísticos** (evaluaciones del juego de carácter individual), que admiten una reformulación como evaluaciones de grupo, constituyendo en este caso, una familia más débil y de carácter más general que la de los semivalores. Los valores probabilísticos están caracterizados por la linealidad, la positividad y el axioma del títere. A partir de ellos, los semivalores se caracterizan como valores probabilísticos de grupo, además, por la simetría y, finalmente, el valor de Shapley es el semivalor caracterizado por la eficiencia.

En la primera parte del capítulo quinto definiremos y caracterizaremos los semivalores para juegos simples monótonos, basándonos en la caracterización mediante coeficientes de ponderación dada por Dubey, Von Neyman y Weber (1981). Demostraremos que los semivalores de juegos simples monótonos generan un subespacio vectorial de dimensión n del espacio de todas las aplicaciones de $\mathcal{S}_N^*$ (conjunto de juegos simples monótonos de n jugadores) en R^n que verifican el axioma de transferencia. Estos coeficientes nos permitirán definir los **semivalores binomiales** y dar un método para calcularlos a partir de la extensión multilineal de la función característica. Determinaremos una base del subespacio generado por los semivalores de $\mathcal{S}_N^*$ formada por n semivalores binomiales, lo que nos permitirá calcular cualquier semivalor como combinación lineal de ellos y, como consecuencia del resultado anterior, todo semivalor podrá calcularse a partir de la extensión multilineal. Estos resultados son extrapolables a los juegos cooperativos en general.

Ampliamos el concepto de semivalor (que tan solo está definido para un juego con un número determinado de jugadores n) al de polisemivalor, que lo extiende al conjunto de todos los juegos simples, es decir, semivalores definidos para cualquier n.

Los coeficientes de ponderación nos permitirán además destacar tres familias que aparecerán a lo largo del capítulo: los **semivalores regulares**, los **semivalores V-regulares** y los poli**semivalores hereditarios**, a las que pertenecen los conocidos valores de Shapley y de Banzhaf. Felsenthal y Machover (1995) estudiaron el comportamiento de los cuatro principales índices de poder (Shapley, 1954, Banzhaf 1965, Deegan-Packel, 1978 y Johnston, 1978) ante una serie de postulados. Teniendo como punto de partida este trabajo y considerando el estudio de nuevas propiedades, ampliaremos dichos resultados al aplicarlos a la familia de los semivalores y de los polisemivalores, en donde jugarán un papel importante las tres familias anteriores.

En la parte final del capítulo presentaremos una serie de aplicaciones de los semivalores a la Fiabilidad de Sistemas basadas inicialmente en la propiedad de "versatilidad" definida por Carreras y Freixas (1999), para a continuación introducir una interpretación probabilística de los coeficientes de ponderación que definen al semivalor y que podrá extenderse al estudio de los valores probabilísticos.

Para medir la importancia de una componente podemos dar una versión probabilística, según la cual dicha importancia viene dada por la probabilidad de que el funcionamiento o fallo de esa componente provoque el funcionamiento o el fallo del sistema. Si suponemos además que cada componente tiene una probabilidad $\widetilde{p}_i$ de estar en funcionamiento y una probabilidad complementaria $\widetilde{q}_i = 1 - \widetilde{p}_i$ de estar en estado de fallo, y que las componentes son independientes, la fiabilidad del sistema no es más que la probabilidad de que el sistema funcione, y se deduce que coincide con la extensión multilineal de la función estructura. En términos de Teoría de Juegos, se refiere a la extensión multilineal de la función característica del juego dada por Owen (1972). Birnbaum (1969) y Barlow y Proschan (1975), al tratar de cuantificar la importancia estructural relativa de las componentes de un sistema, redescubrieron el índice de Banzhaf y el índice de Shapley-Shubik, respectivamente.

Teniendo en cuenta estos resultados veremos que es posible interpretar la distribución dada por los coeficientes de ponderación que definen un semivalor binomial como la probabilidad de que unas ciertas componentes funcionen o no y calcular el semivalor a partir de la función de fiabilidad del sistema. Este resultado podrá extenderse a los valores probabilísticos si las probabilidades de funcionamiento de las componentes del sistema no coinciden.

La motivación y uno de los objetivos de este trabajo, que se centra, como ya hemos comentado, en los juegos simples, es contribuir en la medida de lo posible al desarrollo de la Teoría de Juegos y sus aplicaciones, haciendo especial énfasis en las que pueden ser trasladadas a la Electrónica y a la Investigación Operativa, sin por ello dejar de lado las clásicas aplicaciones a la Economía y a la Política. Queremos destacar que, a pesar de las analogías existentes entre la Teoría de Juegos y estos dos campos, los resultados que aparecen son originales y no trasladados a la Teoría de Juegos desde la Electrónica o desde Fiabilidad de Sistemas. Además, pretendemos aportar resultados que solucionen los siguientes problemas:

(a) Determinar el máximo porcentaje permitido en la variación de los pesos y la cuota de representaciones estrictas de juegos de mayoría ponderada que hace que el juego permanezca invariante. Estudiar casos particulares cuando dichas variaciones afecten tan solo a un número determinado de jugadores.

(b) Caracterizar los juegos completos con mínimo y calcular su número. A partir de sus invariantes característicos obtener métodos que nos permitan calcular, de forma más simplificada, diferentes tipos de soluciones, como el nucleolo y los semivalores, así como determinar la maximalidad del núcleo (kernel), la cobertura superaditiva y la dimensión del juego.

(c) Determinar la dimensión de los siguientes tipos de juegos simples:

- Juegos completos con mínimo.
- Composición de juegos individualistas vía unanimidad.
- Composición de juegos de unanimidad vía individualismo.
- Una generalización de los dos últimos.

(d) Definir, caracterizar y estudiar una serie de propiedades de los semivalores sobre juegos simples monótonos. Calcularlos a partir de la extensión multilineal de juego sobre el que se aplican. Caracterizar al valor de Banzhaf como el único polisemivalor hereditario que verifica los axiomas de superaditividad y de subaditividad. Presentar una serie de aplicaciones de los semivalores y los valores probabilísticos a la Fiabilidad de Sistemas. Definir una medida de la importancia de una componente de un sistema, ampliando así los resultados existentes en este campo, como pueden ser los índices de Birnbaum y de Barlow y Proschan.

Por último, tres breves comentarios. Primero, la mayoría de los ejemplos presentados intentan ajustarse a situaciones reales, ya sean económicas, políticas o del campo de la Electrónica. Segundo, cuando un resultado no es original, aparece por primera vez en el texto, va acompañado de su correspondiente referencia bibliográfica (excepto en esta introducción). Tercero y último, la bibliografía contiene también otras referencias de trabajos que han dido consultados durante la elaboración y redacción de la memoria, aunque en ella no se citen de forma explícita.

Capítulo 1

Preliminares

En este primer capítulo recordamos de forma concisa una serie de conceptos y resultados para que sirvan como antecedentes de los resultados que irán apareciendo a lo largo de la memoria. Se trata de una exposición a modo de pequeño resumen en el que también se establecerán la notaciones que aparecerán en los capítulos posteriores.

1.1 Juegos cooperativos

Definición 1.1 Un juego cooperativo es un par (N, v) formado por un conjunto finito $N = \{1, 2, ..., n\}$ y una función $v : 2^N \to \mathbb{R}$ que asigna a cada subconjunto S de N un número real $v(S)$, con la condición de que $v(\emptyset) = 0$.

Los elementos del conjunto N son los **jugadores**, y cada subconjunto de N es una **coalición**. La función v se denomina **función característica** del juego. Cuando no existe ambigüedad acerca del conjunto de jugadores N al que nos referimos, es frecuente denotar el juego simplemente por v.

El conjunto de los juegos cooperativos de n jugadores es un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$ de dimensión $2^n - 1$. Una base está formada, por ejemplo, por los llamados **juegos de unanimidad**, u_S , definidos para cada $S \neq \emptyset$ por:

$$u_S(T) = \begin{cases} 1 & \text{si } S \subseteq T \\ 0 & \text{si } S \nsubseteq T \end{cases}$$

Un juego cooperativo (N, v) de n jugadores se expresa como combinación lineal de los juegos de unanimidad como:

$$v = \sum_{\emptyset \neq S \subseteq N} C_S(v) u_S$$

donde $C_S(v) = \sum_{R \subseteq S} (-1)^{s-r} v(R)$, siendo $s = |S|$, $r = |R|$.

Teniendo en cuenta ciertas propiedades de la función característica podemos dar distintos calificativos al juego cooperativo. Así:

- Un juego cooperativo (N, v) es **monótono** si $v(S) \leq v(T)$ cuando $S \subseteq T$.
- Un juego cooperativo (N, v) es **superaditivo** si $v(S \cup T) \geq v(S) + v(T)$ cuando $S \cap T = \emptyset$.
- Un juego cooperativo (N, v) es de **suma constante** si $v(S) + v(N - S) = v(N)$, para toda $S \subseteq N$.

Debemos destacar que si el juego es monóto, $|S| < |T|$ no implica necesariamente que $v(S) \leq v(T)$, siendo $|S|$ el cardinal de S.

Definición 1.2 Dado un juego cooperativo (N, v) definimos el juego dual (N, v^*) tomando para toda coalición $S \subseteq N$

$$v^*(S) = v(N) - v(N - S).$$

En el presente trabajo nos ocuparemos de un tipo especial de juegos cooperativos, los juegos simples, y que a continuación pasamos a describir.

1.2 Juegos simples

Definición 1.3 Un juego cooperativo (N, v) es simple si $v(S) = 0$ ó 1 para toda $S \subseteq N$.

Una coalición S es **ganadora** si $v(S) = 1$ y **perdedora** si $v(S) = 0$. El conjunto de coaliciones ganadoras lo representaremos por W y el de las coaliciones perdedoras por $\mathcal{L}$.

Teniendo en cuenta la definición de juego cooperativo monótono dada anteriormente, podemos decir que un juego simple es monótono si todas las subcoaliciones de coaliciones perdedoras son también perdedoras o, equivalentemente, si todas las supracoaliciones de coaliciones ganadoras son también ganadoras. A lo largo de la memoria nos restringiremos a juegos simples monótonos no nulos.

Si cada subcoalición de una coalición ganadora es perdedora, diremos que esta coalición es **minimal**. El conjunto de coaliciones ganadoras minimales lo denotaremos por W^m. Es decir

$$W^m = \{S \in W : T \subset S \Rightarrow T \notin W\}.$$

Diremos que una coalición es **perdedora maximal** si toda coalición que la contiene es ganadora. El conjunto de coaliciones perdedoras maximales lo representaremos por $\mathcal{L}^M$. Es decir

$$\mathcal{L}^M = \{S \in \mathcal{L} : S \subset T \Rightarrow T \in W\}.$$

Podemos definir también un juego simple monótono no nulo a partir de sus coaliciones ganadoras, como un par (N, W) donde $W \subseteq 2^N$ verifica:

$$\begin{array}{rcl} \emptyset & \notin & W, \quad N \in W \text{ y} \\ S & \in & W, \quad S \subseteq T \Rightarrow T \in W. \end{array}$$

Se dice que W es un filtro de orden. En este tipo de juegos simples el conjunto de las coaliciones ganadoras minimales determinan el juego (y se denomina **base del filtro**), ya que, debido a que N es finito, W^m es no vacío y podemos obtener las coaliciones ganadoras como sigue:

$$W = \{S \subseteq N : R \subseteq S \quad \text{para alguna } R \in W^m\}.$$

Las coaliciones ganadoras minimales verifican:

- $\emptyset \notin W^m$, $W^m \neq \emptyset$,
- $T \not\subset S \quad \forall T, S \in W^m$.

A partir de este momento, si un juego (N, v) es simple escribiremos (N, W).

Daremos a continuación una clasificación exhaustiva de los diferentes tipos de coaliciones y destacaremos ciertos tipos especiales de jugadores.

- Una coalición S es ganadora **decisiva** si $S \in W$ y $N - S \notin W$.
- Una coalición S es ganadora **conflictiva** si $S \in W$ y $N - S \in W$.
- Una coalición S es de **bloqueo** si $S \notin W$ y $N - S \notin W$.
- Una coalición S es **perdedora estricta** si $S \notin W$ y $N - S \in W$.

Representaremos a estas cuatro familias por D, C, B y P respectivamente. Se verifica:

$$\begin{aligned} W &= D \cup C, \\ \mathcal{L} &= B \cup P. \end{aligned}$$

Como una aplicación de estos conceptos consideremos el significado de coaliciones electorales en cuerpos electorales. N es aquí el conjunto de personas que forman un cuerpo que toma decisiones. Por ejemplo podría ser el conjunto de miembros de un comité, el pleno del ayuntamiento de un municipio, el de una convención o el de un parlamento. Cada miembro puede dar un cierto número de votos. La decisión de si una medida se aprueba o no puede tomarse por mayoría simple, por 2/3 del quórum, etc.

Supongamos que un subconjunto de los miembros de un cuerpo forma una coalición para hacer aprobar una medida. La cuestión es si dispone o no de votos para garantizar la aprobación de la misma. Si tienen suficientes votos para lograr su propósito, decimos entonces que forman una coalición ganadora. Si los miembros que pertenecen a la coalición no pueden hacer aprobar una medida suya, decimos entonces que la coalición es una coalición perdedora. Finalmente, si los miembros de la coalición no pueden hacer prosperar su propuesta y los miembros que no pertenecen a la coalición tampoco pueden aprobar la suya, entonces la coalición es de bloqueo.

Partiendo de la clasificación dada anteriormente para coaliciones, podemos definir los siguientes tipos de jugadores:

- Un jugador $i \in N$ es **dictador** si $\{i\} \in D$.

- Un jugador $i \in N$ es **capaz** si $\{i\} \in C$.
- Un jugador $i \in N$ tiene **veto** si $N - \{i\} \notin W$.
- Un jugador $i \in N$ es **nulo** si $\{i\} \notin S$, $\forall S \in W^m$.
- Un jugador $i \in N$ es **ganador** si $\{i\} \in W$.

Observemos, a partir de estas definiciones, que es imposible que en un mismo juego exista un jugador i con veto y un jugador j capaz.

Teniendo en cuenta ciertas relaciones entre las coaliciones complementarias de un juego simple (N, W), distinguiremos diferentes tipos de juegos:

- Un juego simple (N, W) es **propio** si $N \setminus S \notin W$ cuando $S \in W$. Es decir, el juego es propio si $C = \emptyset$.
- Un juego simple (N, W) es **fuerte** si $N \setminus S \in W$ cuando $S \notin W$. Es decir, el juego es fuerte si $Q = \emptyset$.

Por lo tanto, teniendo en cuenta las definiciones anteriores, un juego simple se denomina **impropio** si $C \neq \emptyset$ y **débil** si $Q \neq \emptyset$.

Ejemplos de juegos propios son los juegos con veto y las dictaduras, e impropios aquéllos en los que existe algún jugador capaz. Ejemplos de juegos fuertes son las dictaduras y los juegos con jugadores capaces, y débiles aquéllos con jugadores con veto.

El conjunto de los juegos simples de n jugadores es un retículo distributivo y completo con las operaciones $\cup$ y $\cap$. Para ello, basta definir la unión y la intersección de juegos simples de la forma

$$\begin{aligned}(N, W_1) \cup (N, W_2) &= (N, W_1 \cup W_2)\\ (N, W_1) \cap (N, W_2) &= (N, W_1 \cap W_2).\end{aligned}$$

Si (N, W) es un juego simple no nulo tal que $W^m = \{S_1, S_2, ..., S_r\}$, entonces

$$(N, W) = (N, u_{S_1}) \cup (N, u_{S_2}) \cup ... \cup (N, u_{S_r}),$$

donde (N, u_{S_i}), $i = 1, ..., r$ son los juegos de unanimidad.

De manera análoga podrían considerarse las operaciones de supremo e ínfimo con las funciones características

$$\begin{aligned}(u \vee v)(S) &= \max\{u(S), v(S)\}\\(u \wedge v)(S) &= \min\{u(S), v(S)\}\end{aligned}$$

que conducen a la misma estructura de retículo.

Dado un juego simple (N, W), diremos que $(M, W(M))$ es el **juego inducido** en M por el juego simple (N, W) si $M \subseteq N$ y $W(M) = \{S \cap M : S \in W\}$.

Diremos que (M, W_M) es un **subjuego** del juego simple (N, W) si $M \subseteq N$ y $W_M = \{S \in W : S \subseteq M\}$. En realidad, (M, W_M) equivale a restringir la función característica, y las coaliciones ganadoras del subjuego son las de $W_M = W \cap 2^M$.

Si los jugadores de $N - M$ son todos nulos diremos que el subjuego (M, W_M) es **denso.**

A un juego simple (N, W) podemos asociarle el juego dual, que también es simple, y que se denota por (N, W^*), en donde, teniendo en cuenta la Definición 1.2, $W^* = \{S \subseteq N : N - S \notin W\}$.

Definimos a continuación el concepto de juego compuesto.

Definición 1.4 (Shapley, 1962) Sean $\Gamma_i = (N_i, W_i)$, para $i = 1, ..., m$, m juegos simples tales que $N_i \cap N_j = \emptyset$ para $i \neq j$, y $\Gamma_0 = (M, u)$ un juego cooperativo tal que $M = \{1, 2, ..., m\}$. El juego compuesto $\Gamma = \Gamma_0(\Gamma_1, ..., \Gamma_m)$ se define sobre el conjunto $N = N_1 \cup N_2 \cup ... \cup N_m$ y su función característica v viene dada por

$$v(S) = u(\{i \in M : S \cap N_i \in W_i\}) \text{ para cada } S \subseteq N.$$

Los juegos simples son de gran utilidad porque sirven, como hemos comentado ya, como modelos para ciertos organismos de decisión que se rigen mediante votaciones.

Presentamos a continuación como ejemplos de juegos simples el sistema de enmiendas a la Constitución del Canadá, que aparecerá en diversos capítulos de la memoria, y el Congreso de los Estados Unidos.

Ejemplo 1.1 Consideremos el sistema de enmiendas a la Constitución del Canadá (Kilgour, 1983). Desde 1982 una ley es aprobada si:

(a) es aprobada, como mínimo por 7 de las 10 provincias; y

(b) el porcentaje de población de la suma de las 7 provincias debe ser mayor o igual que el 50% de la población total.

Los porcentajes de población de cada provincia son: Prince Edward Island (1%), Newfoundland (3%), New Brunswick (3%), Nova Scotia (4%), Manitoba (5%), Saskatchewan (5%), Alberta (7%), British Columbia (9%), Quebec (29%) y Ontario (34%).

Se trata de un juego simple en el que las 10 provincias son los 10 jugadores y las 112 coaliciones ganadoras minimales son de estas formas:

$$\{\text{Ontario} + 6 \text{ prov.}\}, \{\text{Quebec} + \ 6 \text{ prov.}\}, \{\text{Ontario} + \text{Quebec} + \ 5 \text{ prov.}\}.$$

Ejemplo 1.2 (Congreso de los Estados Unidos). Está formado por 537 miembros: 435 de la Cámara de representantes, 100 del Senado, el vicepresidente y el presidente. El vicepresidente tiene voto de calidad en el Senado, y el presidente tiene veto que puede ser anulado por los $2/3$ de los votos de la Cámara de representantes y del Senado. Para que un proyecto de ley sea aceptado debe ser aprobado por:

1. 218 ó más miembros de la Cámara de representantes y 51 ó más senadores (con o sin el vicepresidente) y el presidente, o
2. 218 ó más miembros de la Cámara de representantes y 50 senadores y el vicepresidente y el presidente, o
3. 290 ó más miembros de la Cámara de representantes y 67 ó más senadores (con o sin el vicepresidente y el presidente).

Se trata de un juego simple de 537 jugadores cuyas coaliciones ganadoras minimales y coaliciones perdedoras maximales son, respectivamente:

$$W^m = \{\text{p} + 51\,\text{sen.} + 218\,\text{rep.},\ \text{p} + \text{vp} + 50\,\text{sen.} + 218\,\text{rep.},\ 67\,\text{sen.} + 290\,\text{rep.}\},$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^M \ = \ & \{\text{p} + 50\,\text{sen.} + 435\,\text{rep.},\ \text{p} + \text{vp} + 49\,\text{sen.} + 435\,\text{rep.},\ \text{vp} + 66\,\text{sen.} + \\ & +435\,\text{rep.},\ \text{p} + \text{vp} + 100\,\text{sen.} + 217\,\text{rep.},\ \text{vp} + 100\,\text{sen.} + 289\,\text{rep.}\}. \end{aligned}$$

1.2.1 Juegos de mayoría ponderada

Pasamos a comentar a continuación una clase importante de juegos simples, los llamados juegos de mayoría ponderada (J.M.P.), que tienen especial protagonismo en esta memoria.

Definición 1.5 Un juego simple (N, W) es de mayoría ponderada si y sólo si existen números reales, $w_1, w_2, ..., w_n, q$, con $q > 0$, tales que $v(S) = 1$ si $w(S) \geq q$ y $v(S) = 0$ si $w(S) < q$, donde $w(S) = \sum_{i \in S} w_i$.

Diremos entonces que $[q; w_1, w_2, ..., w_n]$ es una representación del juego de mayoría ponderada (N, W) y escribiremos $(N, W) \equiv [q; w_1, w_2, ..., w_n]$. En este caso, la familia de coaliciones ganadoras es $W = \{S \subseteq N : w(S) \geq q\}$.

Si q es tal que $v(S) = 1$ si $w(S) > q$ y $v(S) = 0$ si $w(S) < q$, entonces $[q; w_1, w_2, ..., w_n]$ es una representación estricta de (N, W).

Suele interpretarse w como una distribución de pesos (acciones, votos,...) entre los elementos de N, que hacen el papel de accionistas o representantes de grupos parlamentarios con disciplina de voto, mientras que q simboliza la mayoría exigida para tomar decisiones.

No todo juego simple puede representarse mediante un juego de mayoría ponderada. En particular, un juego simple débil e impropio no es representable como juego de mayoría ponderada.

Ejemplo 1.3 El juego simple asociado al sistema de enmiendas a la Constitución del Canadá no es representable como juego de mayoría ponderada.

Para ello consideremos cada una de las provincias como uno de los 10 jugadores: Prince Edward Island (10), Newfoundland (9), New Brunswick (8), Nova Scotia (7), Manitoba (6), Saskatchewan (5), Alberta (4), British Columbia (3), Quebec (2) y Ontario (1).

Supongamos que existen $w_1, w_2, ..., w_{10}, q$, como en la definición. Veremos que llegamos a una contradicción.

Consideremos las coaliciones ganadoras siguientes:

$$S = \{2, 3, 4, 5, 6, 9, 10\} \quad T = \{1, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}.$$

Entonces

$$\begin{aligned} S' &= \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \notin W \\ T' &= \{3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\} \notin W, \end{aligned}$$

ya que S' contiene tan solo 6 provincias y T' está formada por 8 provincias, pero no contiene ni a 1 ni a 2.

Comparando S y S' obtenemos que $w_9 + w_{10} > w_1$. Si comparamos T y T', la desigualdad es ahora $w_9 + w_{10} < w_1$. Ambas condiciones son incompatibles.

Ejemplo 1.4 El juego simple asociado al Congreso de los Estados Unidos no es representable como juego de mayoría ponderada.

Como hemos comentado anteriormente, el conjunto de coaliciones ganadoras minimales es:

$$\{\text{p} + 51\,\text{sen.} + 218\,\text{rep.}, \text{vp} + \text{p} + 50\,\text{sen.} + 218\,\text{rep.},\ 67\,\text{sen.} + 290\,\text{rep.}\}.$$

Si existiese una representación como juego de mayoría ponderada con pesos $w_p, w_{vp}, w_{s_1}, ..., w_{s_{100}}, w_{r_1}, ..., w_{r_{435}}$ y cuota q como en la definición, teniendo en cuenta que la coalición formada por el presidente, los 51 primeros senadores y por los 218 primeros representantes (excepto el primero) es ganadora y que la coalición formada por el presidente, los 50 senadores anteriores (distintos del primero) y los 219 primeros representantes es perdedora, deberá verificarse

$$w_p + w_{s_1} + w_{s_2} + ... + w_{s_{51}} + w_{r_2} + ... + w_{r_{219}} > w_p + w_{s_2} + ... + w_{s_{51}} + w_{r_1} + w_{r_2} + ... + w_{r_{219}},$$

y de aquí deducimos que $w_{s_1} > w_{r_1}$.

Sin embargo, si consideramos la coalición ganadora formada por el presidente, los 51 primeros senadores (distintos del primero) y los 218 primeros representantes y la coalición perdedora formada por el presidente, los 52 primeros senadores y los 217 primeros representantes (distintos del primero), la desigualdad que obtenemos es ahora:

$$w_p + w_{s_2} + ... + w_{s_{52}} + w_{r_1} + ... + w_{r_{218}} > w_p + w_{s_1} + w_{s_2} + ... + w_{s_{52}} + w_{r_2} + ... + w_{r_{218}},$$

y de aquí se deduce que $w_{r_1} > w_{s_1}$, que contradice la desigualdad anterior.

Veamos a continuación que el juego que describe el Parlamento Europeo constituye un claro ejemplo de juego de mayoría ponderada.

Ejemplo 1.5 (El Parlamento Europeo, 1999) El Parlamento Europeo está formado por 626 representantes de los 15 países, elegidos internamente en cada uno de ellos. Existe una partición transversal en grupos parlamentarios, que se constituyen según afinidades y homologaciones políticas y reflejan con fidelidad las estructuras ideológicas internas de las diferentes naciones. Ambas divisiones, por países y grupos, influyen poderosamente en las actitudes de los representantes, y en cierta forma esta bidimensionalidad favorece la disensión en lugar del consenso, por lo que no es sorprendente que el Parlamento tome sus decisiones habitualmente por mayoría simple.

Aunque la nacionalidad no sea el distintivo excluyente de cada miembro de la Cámara, a efectos de comparar la posición estratégica de cada país en ésta y en las otras instituciones comunitarias debemos computar el poder como si el Parlamento fuese un grupo de mayoría ponderada jugado por las 15 naciones. Los resultados obtenidos en las pasadas elecciones del $13-VI-99$ se recogen en la siguiente tabla.

País	**Escaños**
Alemania	99
Francia	87
Italia	87
Gran Bretaña	87
España	64
Holanda	31
Bélgica	25
Grecia	25
Portugal	25
Suecia	22
Austria	21
Dinamarca	16
Finlandia	16
Irlanda	15
Luxemburgo	6

Una representación como juego de mayoría ponderada es la dada por:

$$[314; 99, 87, 87, 87, 64, 31, 25, 25, 25, 22, 21, 16, 16, 15, 6]$$

Si un juego simple es de mayoría ponderada existen infinitas representaciones del mismo, sin embargo, es un hecho conocido que siempre es posible utilizar **representaciones naturales**, aquéllas en las que todos los pesos son enteros no negativos y con cuota natural.

Una clase especial y reducida de juegos de mayoría ponderada la constituyen los llamados **juegos homogéneos**, aquéllos para los cuales existe una representación en la que todas las coaliciones ganadoras minimales tienen el mismo peso. Dicha representación se denomina **representación homogénea**.

Con respecto al juego dual de un juego de mayoría ponderada, resulta que un juego (N, W) es un juego de mayoría ponderada si y sólo si su dual (N, W^*) lo es. Basta tener en cuenta que si $[q; w_1, w_2, ..., w_n]$ es una representación natural de (N, W), entonces $[w(N) - q + 1; w_1, w_2, ..., w_n]$ es también una representación natural de (N, W^*).

Otros resultados interesantes que afectan a la representabilidad de un subjuego de un juego simple se resumen en el siguiente teorema.

Teorema 1.1 (a) Si (N, W) es un juego de mayoría ponderada, entonces todo subjuego (M, W_M) también lo es.

(b) Sea (M, W_M) un subjuego denso de mayoría ponderada del juego simple (N, W). Entonces (N, W) también es de mayoría ponderada.

Demostración:

(a) Por hipótesis $(N, W) \equiv [q; w_1, w_2, ..., w_n]$. Si $M = \{1, 2, ..., m\} \subseteq N$, consideramos $(M, W') \equiv [q; w_1, w_2, ..., w_m]$.

Veamos que $(M, W') \equiv (M, W_M)$.

$S \in W' \Leftrightarrow S \subseteq M$ y $\sum_{i \in S} w_i \geq q \Leftrightarrow S \subseteq M$ y $S \in W \Leftrightarrow S \in W_M$.

(b**)** Sea $M = \{1, 2, ..., m\} \subseteq N$. Por hipótesis, $(M, W_M) \equiv [q; w_1, w_2, ..., w_m]$. Teniendo en cuenta que los jugadores de $N - M$ son nulos, basta considerar $(N, W) \equiv [q; w_1, w_2, ..., w_m, 0, ..., 0]$. 2

1.2.2 Dimensión de un juego simple

Es un hecho conocido que todo juego simple puede ser representado como la intersección de juegos de mayoría ponderada; sin embargo es conveniente preguntarnos por la eficiencia de dicha representación, es decir, parece lógico intentar expresar el juego simple como intersección del mínimo número de juegos de mayoría ponderada. Esta pregunta da lugar a la aparición del concepto de dimensión de un juego. Un juego simple (N, W) diremos que es de dimensión k si y sólo si puede ser representado como intersección de k juegos de mayoría ponderada, pero no como la intersección de $k - 1$ de ellos. Observemos, por ejemplo, que un juego simple es de dimensión 1 si y sólo si es de mayoría ponderada.

La dimensión de un juego es como máximo el número de coaliciones perdedoras maximales (Taylor y Zwicker, 1992), pero esta representación tiende a ser enormemente ineficiente pues, por ejemplo, si consideramos el Congreso de los Estados Unidos como un juego simple de 537 jugadores observamos que tiene más de 10^{15} coaliciones perdedoras maximales y, consecuentemente, necesitaríamos más de 10^{15} juegos de mayoría ponderada para representarlo.

Definición 1.6 La dimensión de un juego simple (N, W) es el mínimo k tal que existen juegos de mayoría ponderada $(N, W_1), ..., (N, W_k)$ tales que

$$W = W_1 \cap ... \cap W_k.$$

Teorema 1.2 (Taylor y Zwicker 1992) Todo juego simple tiene dimensión, y ésta está acotada superiormente por el numero de coaliciones perdedoras maximales.

Ejemplo 1.6 (Taylor y Zwicker, 1992) El procedimiento de enmiendas a la Constitución de Canadá y el Congreso de los Estados Unidos son dos interesantes ejemplos de juegos simples de dimensión 2.

Veamos en primer lugar que el procedimiento de enmiendas a la Constitución de Canadá tiene dimensión 2. Recordemos que el conjunto de jugadores, N, estaba formado por las diez provincias. A partir de aquí podemos considerar dos juegos simples (N, W_1) y (N, W_2), donde el primer juego tiene como coaliciones ganadoras aquéllas formadas como mínimo por 7 provincias y el segundo juego tiene como coaliciones ganadoras las que representan como mínimo el 50% de la población.

(N, W_1) es un juego de mayoría ponderada: para ello es suficiente asignar peso 1 a todas las provincias y fijar la cuota en 7. Análogamente, el segundo juego (N, W_2) también es un juego de mayoría ponderada, en donde ahora los pesos asignados a cada provincia no son más que los porcentajes de población que representan y la cuota es 50.

A partir de aquí, para describir el sistema de enmiendas a la Constitución del Canadá podríamos decir que una coalición es ganadora si y sólo si lo es en los dos sistemas anteriores. Es decir, si identificamos W como el conjunto de coaliciones ganadoras en el sistema de enmiendas a la Constitución del Canadá, entonces una coalición es de W si y sólo si lo es de W_1 y W_2. Este hecho nos permite decir que $W = W_1 \cap W_2$.

Como hemos visto anteriormente, el sistema de enmiendas a la Constitución del Canadá no era un juego de mayoría ponderada, y teniendo en cuenta que $W = W_1 \cap W_2$ podemos asegurar que es un juego simple de dimensión 2.

Ya hemos visto que el Congreso de los Estados Unidos tampoco es un juego de mayoría ponderada; por lo tanto, para demostrar que tiene dimensión 2 es suficiente comprobar que puede expresarse como intersección de 2 juegos de mayoría ponderada. Recordemos que en este caso el conjunto de jugadores, N, estaba formado por el presidente, el vicepresidente, 100 senadores y 435 miembros de la Cámara de representantes.

A partir de aquí podemos considerar los dos juegos de mayoría ponderada (N, W_1) y (N, W_2). El primero asigna peso 0 a los representantes, peso 1 a los senadores, peso 0.5 al vicepresidente y peso 16.5 al presidente, siendo $q = 67$. En el segundo juego los pesos son: 1 para los representantes, 0 para los senadores y el vicepresidente y 72 para el presidente, y $q = 290$. Se comprueba que, efectivamente, $W = W_1 \cap W_2$, en donde W representa el conjunto de coaliciones ganadoras en el Congreso.

1.2.3 Juegos completos

El problema de encontrar alguna condición "atractiva" que caracterice a los juegos de mayoría ponderada se remonta, como mínimo a Isbell (1956). Esta cuestión ha sido tratada, entre otros, por Elgot (1960), Muroga (1971), Hammer, Ibaraki y Peled (1981), Einy y Lehrer (1989) y Taylor y Zwicker (1992). La ideal crucial se encuentra en la **relación de desplazamiento**, introducida por Isbell (1956), y la **propiedad de completitud** considerada por Winder (1962), Maschler y Peleg (1966), Carreras (1984) y Einy (1985) y satisfecha por todo juego de mayoría ponderada.

Aunque la relación de desplazamiento y la propiedad de completitud son extensibles a los juegos cooperativos (Carreras y Owen, 1997), creemos que es en los juegos simples donde la relación de indiferencia -la relación de equivalencia asociada al desplazamiento- es más efectiva, en el sentido de simplificar realmente el estudio del juego.

Definición 1.7 Sea (N, W) un juego simple. Definimos la relación binaria de desplazamiento D en N por

$$i\,D\,j \Leftrightarrow (\forall S \subseteq N - \{i,j\}, \quad S \cup \{j\} \in W \Rightarrow S \cup \{i\} \in W\}\,).$$

Diremos que i desplaza a j, es decir, i es, como mínimo tan deseable como j como compañero de coalición.

Es fácil comprobar que D es reflexiva y transitiva, es decir, un preorden. La ausencia de antisimetría obliga a definir la relación de equivalencia asociada, I, dada por

$$i\,I\,j \Leftrightarrow i\,D\,j \quad \text{y} \quad j\,D\,i$$

y, así, $i\,I\,j$ significa que i y j son jugadores indiferentes. D induce un orden $\geq$ en el conjunto de las $I-$clases

$$N/I = \{N_1, N_2, ..., N_t\}.$$

De este modo, $N_p \geq N_q$ si y sólo si $\exists\, i \in N_p$, $\exists\, j \in N_q$ tales que $i\,D\,j$.

El problema básico de la relación de desplazamiento es que no siempre es total.

Definición 1.8 Un juego simple (N, W) es completo si la relación de desplazamiento es completa, es decir, si dos jugadores cualesquiera siempre son comparables por D.

Es decir, $\forall\, i, j \in N\ i\, D\, j$ o $j\, D\, i$. Equivalentemente, la relación $\geq$ es total: $\forall N_p, N_q \in N/I$, $N_p \geq N_q$ ó $N_q \geq N_p$.

En este caso las $I-$clases están linealmente ordenadas. Consideraremos siempre que $N_1 > N_2 > ... > N_t$.

Los jugadores nulos de un juego, si los hay, forman una $I-$clase, que es la mínima para la relación de orden $\geq$, mientras que los jugadores con veto, si los hay, constituyen la $I-$clase máxima para la misma relación. Además los jugadores ganadores, si los hay, también forman la $I-$clase máxima. Si un juego completo tiene jugadores con veto y jugadores ganadores, entonces las dos $I-$clases coinciden, su cardinal es uno y los demás jugadores, si los hay, son nulos.

Como consecuencia inmediata de la definición de juego completo se deduce que todo juego de mayoría ponderada es completo, ya que los pesos siempre se pueden comparar, y, por lo tanto, los jugadores también. Sin embargo, el recíproco no es cierto. Así pues, una condición necesaria para que un juego simple sea de mayoría ponderada es que sea completo.

Ejemplo 1.7 Consideremos el 4-juego simple tal que $W^m = \{\{1, 2\}, \{3, 4\}\}$. Este es el juego no completo más sencillo.

Observemos que $N_1 = \{1, 2\}$ y $N_2 = \{3, 4\}$, pero N_1 y N_2 no son comparables. Por ejemplo veamos que $1 \not\!D\, 3$ y $3 \not\!D\, 1$, es decir:

$$\begin{aligned} 1 \not\!D\, 3 \ &: \ \exists\, S_1 \subseteq N - \{1, 3\} \text{ tal que } S_1 \cup \{1\} \notin W \text{ y } S_1 \cup \{3\} \in W, \\ 3 \not\!D\, 1 \ &: \ \exists\, S_2 \subseteq N - \{1, 3\} \text{ tal que } S_2 \cup \{3\} \notin W \text{ y } S_2 \cup \{1\} \in W. \end{aligned}$$

Basta considerar $S_1 = \{4\}$ y $S_2 = \{2\}$.

Por lo tanto $\geq$ no es total y el juego no es completo. A partir de este resultado podemos asegurar que tampoco será de mayoría ponderada.

El primer juego completo que no es de mayoría ponderada lo encontramos para $n = 6$.

Ejemplo 1.8 Veamos a continuación que el $6-$juego simple (N, W) definido por

$$\begin{aligned} W^m = \ & \{\{1,3,5\},\{1,3,6\},\{1,4,5\},\{1,4,6\},\{3,4,5\},\{1,5,6\},\{3,5,6\}, \\ & \{2,3,5\},\{2,3,6\},\{2,4,5\},\{2,4,6\},\{3,4,6\},\{2,5,6\},\{4,5,6\}\} \end{aligned}$$

es un juego completo pero no es un juego de mayoría ponderada.

Es fácil comprobar que $N_1 = \{5,6\}$, $N_2 = \{3,4\}$, $N_3 = \{1,2\}$ y además $N_1 > N_2 > N_3$. Por lo tanto, (N, W) es completo.

Sin embargo, no es de mayoría ponderada ya que se trata de un juego débil (la coalición $\{5,6\}$ es de bloqueo) e impropio (la coalición $\{1,4,5\}$ es ganadora conflictiva).

Ejemplo 1.9 El sistema de enmiendas a la Constitución del Canadá no es un J.M.P. y sí es un juego completo.

Ya hemos comentado anteriormente que no era representable como juego de mayoría ponderada; sin embargo, se trata de un juego completo en el que

$$N_1 = \{1,2\},\ N_2 = \{3,4,5,6,7,8,9,10\} \text{ y } N_1 > N_2.$$

Ejemplo 1.10 El juego asociado al Congreso de los Estados Unidos no es un juego completo.

Las cuatro clases de indiferencia son: $N_1 = \{p\}$, $N_2 = \{vp\}$, $N_3 = \{s_1, ..., s_{100}\}$ y $N_4 = \{r_1, ...r_{435}\}$, en donde s_i, para $i = 1, ...100$ son los senadores y r_j, para $j = 1, ..., 435$ son los miembros de la Cámara de representantes. Sin embargo, por ejemplo, N_3 y N_4 no son comparables. Veamos que $s_1 \not\!D\, r_{435}$ y $r_{435} \not\!D\, s_1$, es decir:

$$\begin{aligned} s_1 \not\!D\, r_{435} \quad &: \quad \exists\, S_1 \subseteq N - \{s_1, r_{435}\} \text{ tal que } S_1 \cup \{s_1\} \notin W \text{ y } S_1 \cup \{r_{435}\} \in W \\ r_{435} \not\!D\, s_1 \quad &: \quad \exists\, S_2 \subseteq N - \{s_1, r_{435}\} \text{ tal que } S_2 \cup \{r_{435}\} \notin W \text{ y } S_2 \cup \{s_1\} \in W \end{aligned}$$

Basta considerar S_1 como la coalición formada por el presidente, los 51 últimos senadores y los 217 últimos representantes y S_2 la formada por el presidente, los 50 primeros senadores y los 218 primeros representantes.

1.3 Conceptos de solución para juegos cooperativos

Sea (N, v) un juego cooperativo de n jugadores. Un concepto de solución para esta clase de juegos es, en general, una regla que asigna a cada juego un subconjunto de R^n siguiendo unas normas predeterminadas.

Hay conceptos de solución que asignan todo un conjunto de vectores para cada juego, como por ejemplo los conjuntos estables de von Neumann y Morgenstern (1944) o el core (Gillies, 1953). Otros, sin embargo, seleccionan un único vector de pagos, como el valor de Shapley (Shapley, 1953), el valor de Banzhaf (Banzhaf, 1965), los semivalores (Dubey, 1981) o el nucleolo (Schmeidler, 1969).

En particular, en Ciencias Políticas uno de los problemas básicos a tener en cuenta lo constituye el análisis del poder. En general es difícil definir la idea de poder, pero para el caso especial de poder de votación, existen índices de poder que han sido frecuentemente utilizados. El primero de estos índices fue propuesto por Shapley y Shubik (1954) que aplican el valor de Shapley (1953) a los juegos simples. Otro concepto para medir el poder de votación fue introducido por Banzhaf (1965).

Un concepto de solución que incluye a los dos anteriores está formado por los semivalores que, al igual que ellos, se obtienen, como veremos a continuación, a partir de las contribuciones marginales de cada jugador a las coaliciones a las que pertenece.

1.3.1 El valor de Shapley

Es el primer concepto de solución que asigna a cada juego cooperativo un único vector de pago y es uno de los más estudiados.

Definición 1.9 Un jugador i es títere en v si $v(S \cup \{i\}) = v(S) + v(\{i\})$, para toda $S \subseteq N - \{i\}$.

Definición 1.10 Un jugador i es nulo en v si $v(S \cup \{i\}) = v(S)$, para toda $S \subseteq N - \{i\}$.

Definición 1.11 Si (N, W) es un juego simple y $S \subseteq N$ es una coalición, diremos que el jugador i es pivote en S si $S \in W$ y $S - \{i\} \notin W$.

Definición 1.12 Sea (N, v) un juego cooperativo de n jugadores y π una permutación sobre N. El juego $(N, \pi v)$ está definido para cada coalición S por

$$(\pi v)(S) = v(\pi^{-1}(S)).$$

Definición 1.13 Un conjunto $K \subseteq N$ es un soporte del juego (N, v) si $v(S) = v(S \cap K)$ para toda coalición $S \subseteq N$.

Sea $\mathcal{G}_N$ el espacio vectorial de los juegos cooperativos de n jugadores. El valor de Shapley es una aplicación

$$\Phi : \mathcal{G}_N \rightarrow \mathrm{R}^n$$

que asigna a cada juego cooperativo v un vector $\Phi[v] = (\Phi_1[v], ..., \Phi_n[v])$ y cumple las siguientes propiedades:

1. Eficiencia: Para todo soporte K del juego v
$$\sum_{i \in K} \Phi_i[v] = v(K).$$
2. Simetría: Para todo juego v y toda permutación π de N
$$\Phi_i[v] = \Phi_{\pi(i)}[\pi v].$$
3. Aditividad: Si $u, v \in \mathcal{G}_N$, entonces
$$\Phi[u + v] = \Phi[u] + \Phi[v].$$

Teorema 1.3 (Shapley, 1953). Existe una única función Φ: $\mathcal{G}_N \rightarrow \mathrm{R}^n$ que satisface las propiedades anteriores, y es la dada por

$$\Phi_i[v] = \sum_{\substack{S \subseteq N \\ i \in S}} \frac{(s-1)!(n-s)!}{n!} [v(S) - v(S - \{i\})], \text{ para cada } i \in N,$$

donde $n = |N|$ y $s = |S|$.

Este valor es una media de las contribuciones marginales $v(S) - v(S - \{i\})$ del jugador i en todas las coaliciones S que lo contienen.

Definición 1.14 Una solución Ψ satisface el axioma del jugador nulo si $\Psi_i[v] = 0$ para todo juego v en el que i es nulo.

A partir de esta definición, el primer axioma del valor de Shapley es equivalente a exigir eficiencia para N, es decir $\sum\limits_{i \in N} \Phi_i[v] = v(N)$, y que se verifique el axioma del jugador nulo. Teniendo en cuenta esta observación, podemos decir que el valor de Shapley es la única función que verifica los axiomas de eficiencia en N, jugador nulo, simetría y aditividad.

En el caso concreto de los juegos simples el axioma de aditividad no tiene sentido, ya que la suma de juegos simples no es, en general, un juego simple.

Dubey (1975) modificó dicho axioma y lo adecuó a los juegos simples. Para ello definió las siguientes operaciones entre juegos simples:

$$\begin{aligned} (u \vee v)(S) &= \max\{u(S), v(S)\} \\ (u \wedge v)(S) &= \min\{u(S), v(S)\}, \end{aligned}$$

con las cuales, como ya hemos comentado anteriormente, el conjunto de los juegos simples es un retículo distributivo.

El axioma de aditividad puede ser substituído en $\mathcal{S}_N$ (conjunto de juegos simples de n jugadores) por el posteriormente llamado axioma de transferencia (Feltkamp, 1995):

$$\Phi[u \vee v] + \Phi[u \wedge v] = \Phi[u] + \Phi[v] \quad \forall u, v \in \mathcal{S}_N.$$

Teorema 1.4 (Dubey, 1975) Existe una única función Φ:$\mathcal{S}_N \to \mathrm{R}^n$ que satisface las propiedades de eficiencia, simetría y transferencia, y es el índice de Shapley-Shubik.

En este caso

$$\Phi_i[v] = \sum_{\substack{i \in S \\ \mathrm{S \in W, S - \{i\} \notin W}}} \frac{(s-1)!(n-s)!}{n!}$$

es el número de permutaciones en las que i es pivote dividido entre el número total de permutaciones de N.

1.3.2 El valor de Banzhaf

El valor de Banzhaf es otro de los conceptos de solución para juegos cooperativos que asigna un único vector de pagos. Inicialmente fue propuesto por Banzhaf (1965), e independientemente por Coleman (1971), como índice de poder, es decir, sólo para juegos simples. Owen (1975) extendió su dominio a la clase de los juegos cooperativos. Ha sido caracterizado axiomáticamente por Owen (1978), Lehrer (1988), Haller (1994) o Feltkamp (1995). Mientras que el valor de Shapley se preocupa del orden en el que se puede formar una coalición ganadora, el de Banzhaf no tiene en consideración este orden de formación.

Si v es un juego con n jugadores, consideremos

$$\overline{\eta}[v] = \frac{1}{2^{n-1}} \sum_{i \in N} \sum_{\substack{S \subseteq N \\ \mathrm{i} \in \mathrm{S}}} [v(S) - v(S - \{i\})].$$

Teorema 1.5 (Feltkamp, 1995). Existe una única función $\Psi : \mathcal{G}_N \to \mathrm{R}^n$ que satisface las propiedades de simetría, jugador nulo, aditividad y $\sum_{i \in N} \Psi_i[v] = \overline{\eta}[v]$, y es la dada por:

$$\Psi_i[v] = \sum_{\substack{S \subseteq N \\ \mathrm{i} \in \mathrm{S}}} \frac{1}{2^{n-1}} [v(S) - v(S - \{i\})] \text{ para cada } i \in N.$$

Si nos restringimos a juegos simples monótonos no nulos podemos definir para cada jugador i el conjunto $\eta_i[v]$ como el número de coaliciones en las que i es pivote . Es decir:

$$\eta_i[v] = |\{S \subseteq N - \{i\} : S \notin W \text{ y } S \cup \{i\} \in W\}|,$$

o equivalentemente

$$\eta_i[v] = |\{S \subseteq N : S \in W \text{ y } S - \{i\} \notin W\}|.$$

El índice de Banzhaf normalizado $\beta'_i[v]$ se define como resultado de normalizar el anterior de manera que sea proporcional a $\eta_i[v]$, es decir:

$$\beta'_i[v] = \frac{\eta_i[v]}{\sum_{j=1}^{n} \eta_j[v]}.$$

El índice de Banzhaf **absoluto** (Owen, 1975), que no es normalizado, se obtiene substituyendo el denominador anterior por 2^{n-1}, y se define como:

$$\beta_i[v] = \frac{\eta_i[v]}{2^{n-1}}.$$

Ejemplo 1.11 Consideremos de nuevo el ejemplo del Parlamento Europeo y calculemos el índice de Shapley-Shubik y el índice de Banzhaf para cada uno de los países miembros.

Los resultados obtenidos son los siguientes:

i	Φ_i	β_i
1	0.168379	0.4046
$2, 3, 4$	0.144952	0.3509
5	0.100813	0.2589
6	0.044938	0.1080
$7, 8, 9$	0.037404	0.0903
10	0.032146	0.0788
11	0.030395	0.0748
$12, 13$	0.023438	0.0577
14	0.021137	0.0530
15	0.008247	0.0209

1.3.3 Semivalores

Desde que Shapley introdujo la noción de valor como una evaluación a priori de la expectativa de cada jugador en un juego cooperativo, gran parte de la Teoría de Juegos se ha centrado en el análisis de este concepto de solución, así como en la búsqueda y discusión de otras alternativas y generalizaciones. Como ya hemos comentado, con la aparición del índice de Shapley-Shubik se abrieron nuevas posibilidades para la aplicación de la Teoría de Juegos al campo de la política.

Siguiendo esta misma línea de investigación, Dubey, Von Neyman y Weber (1981) introdujeron la noción de **semivalor**, como una amplia familia de soluciones que incluye al valor de Banzhaf y que tiene al valor de Shapley como único miembro eficiente.

Definición 1.15 (Dubey, Von Neyman y Weber, 1981). Una solución $\Psi : \mathcal{G}_N \rightarrow \mathsf{R}^n$ es un semivalor si satisface los siguientes axiomas:

1. Linealidad.
2. Simetría.
3. Positividad: si v es monótono, entonces $\Psi_i[v] \geq 0$ para todo $i \in N$.
4. Títere: si i es un títere en el juego v, entonces $\Psi_i[v] = v(\{i\})$.

El siguiente resultado establece una caracterización de los semivalores mediante coeficientes que utilizaremos en capítulos posteriores.

Teorema 1.6 (Dubey, Von Neyman y Weber, 1981).

(a) Dados $(p_k)_{k=0}^{n-1}$ tales que $\sum\limits_{k=0}^{n-1} p_k\binom{n-1}{k} = 1$ y $p_k \geq 0$ para todo k, entonces

$$\Psi_i[v] = \sum_{S \subseteq N - \{i\}} p_s[v(S \cup i) - v(S)] \quad \forall i \in N, \ \forall v \in \mathcal{G}_N \ \ (s = |S|)$$

define un semivalor Ψ.

(b) Recíprocamente, todo semivalor puede obtenerse de esta forma.

(c) La correspondencia dada por $(p_k) \longmapsto \Psi$ es biyectiva.

En particular, los coeficientes $p_k = \frac{1}{n\binom{n-1}{k}}$ definen el valor de Shapley, mientras que tomando $p_k = \dfrac{1}{2^{n-1}}$ para todo k se obtiene el valor de Banzhaf absoluto, β. Los índices dictatorial y marginal, introducidos por Owen (1978) están definidos, respectivamente, por

$$\begin{aligned} \delta_i[v] &= v(\{i\}), \\ \mu_i[v] &= v(N) - v(N - \{i\}). \end{aligned}$$

En el primer caso, tenemos que $p_0 = 1$ y $p_k = 0$ para todo $k \neq 0$. En el segundo caso, $p_{n-1} = 1$ y $p_k = 0$ para todo $k \neq n-1$.

1.3.4 Valores probabilísticos

Definidos por Weber (1988), proporcionan inicialmente evaluaciones del juego de carácter individual, aunque admiten una reformulación como evaluaciones de grupo que permiten considerarlos como un concepto de solución de carácter más general que la de semivalor, pudiendo decir que los semivalores se caracterizan a partir de ellos por la simetría.

Definición 1.16 (Weber, 1988).Fijado $i \in N$, φ_i es un valor probabilístico en $\mathcal{G}_N$ si verifica los axiomas de :

1. Linealidad: $\varphi_i[u+v] = \varphi_i[u]+\varphi_i[v]$ y $\varphi_i[\lambda v] = \lambda\varphi_i[v]$ para cualesquiera $u, v \in \mathcal{G}_N$ y $\lambda \in \mathrm{R}$.
2. Positividad: Si v es monótono, entonces $\varphi_i[v] \geq 0$.
3. Títere: si i es un títere en el juego v, entonces $\varphi_i[v] = v(\{i\})$.

Teorema 1.7 (Weber, 1988). Fijado $i \in N$ y dados $\{p^i_S : S \subseteq N - \{i\}\}$ tales, que para toda $S \subseteq N - \{i\}$, $\sum_{S\subseteq N-\{i\}} p^i_S = 1$ y $p^i_S \geq 0$ entonces,

$$\varphi_i[v] = \sum_{S\subseteq N-\{i\}} p^i_S[v(S \cup i) - v(S)],$$

define un valor probabilístico en $\mathcal{G}_N$, y viceversa.

1.3.5 Nucleolo

Este concepto de solución ha sido utilizado en muchos problemas relacionados con las Ciencias Sociales. Antes de pasar a su descripción necesitamos una serie de definiciones previas.

Definición 1.17 Fijado un juego cooperativo (N, v) definimos el conjunto de pre-imputaciones del juego como

$$\mathcal{I}^*(v) = \{x \in \mathrm{R}^n : \sum_{i\in N} x_i = v(N)\}.$$

En este caso decimos que los vectores $x \in \mathrm{R}^n$ son vectores de pago eficientes, interpretando el valor x_i como la cantidad que recibe el jugador i teniendo en cuenta la distribución de pagos x, y $v(N)$ como la cantidad global que tienen que repartirse entre todos los jugadores.

Definición 1.18 Análogamente, definimos el conjunto de imputaciones del juego (N, v) por

$$\mathcal{I}(v) = \{x \in \mathcal{I}^*(v) : \, x_i \geq v(i) \;\; \forall i \in N\}.$$

En el concepto de imputación estamos exigiendo además que los vectores de pago verifiquen el principio de racionalidad individual, según el cual cada jugador debe recibir un pago al menos igual a lo que podría conseguir por sí solo en el juego (N, v). Este conjunto puede ser $\emptyset$.

Definición 1.19 Dado un juego cooperativo (N, v) definimos la función exceso como

$$e(S, x) = v(S) - x(S) = v(S) - \sum_{i \in S} x_i,$$

para toda coalición $S \subseteq N$ y para todo $x \in \mathcal{I}^*(v)$.

Si (N, v) es un juego cooperativo y $x \in \mathcal{I}^*(v)$ definimos el 2^n-vector $(\theta \circ e)(x)$ como aquél cuyas componentes son los excesos de las 2^n coaliciones $S \subseteq N$ ordenados de forma decreciente, es decir,

$$(\theta \circ e)_k(x) = e(S_k, x),$$

donde $S_1, S_2, ..., S_{2^n}$ son los subconjuntos de N ordenados por

$$e(S_k, x) \geq e(S_{k+1}, x), \;\; k = 1, ..., 2^n - 1.$$

Ejemplo 1.12 El 3-juego simple definido por $W^m = \{\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}\}$ y el vector de pagos $x = (0.3, 0.5, 0.2) \in \mathcal{I}^*(v)$ dan lugar a los siguientes excesos

S	$e(S,x)$
$\emptyset$	0
$\{1\}$	-0.2
$\{2\}$	-0.3
$\{3\}$	-0.5
$\{1,2\}$	0.2
$\{1,3\}$	0.5
$\{2,3\}$	0.3
N	0

A partir de aquí

$$(\theta \circ e)(x) = (0.5, 0.3, 0.2, 0, 0, -0.2, -0.3, -0.5).$$

Definición 1.20 Dados $x, y \in \mathrm{R}^n$ definimos el orden lexicográfico $\preceq_{lex}$ como

$x \preceq_{lex} y$ si $x = y$ o existe un índice $k \leq n$ tal que $x_i = y_i$ para $i < k$ y $x_k < y_k$.

El orden lexicográfico $\preceq_{lex}$es un orden total en R^n.

Definición 1.21 Si restringimos la función exceso a las coaliciones $S \subset N$, $S \neq \emptyset$, el nucleolo $\mathcal{N}(v)$ de un juego cooperativo (N, v), se define como

$$\mathcal{N}(v) = \{x \in \mathcal{I}(v) : (\theta \circ e)(x) \preceq_{lex} (\theta \circ e)(y) \text{ para todo } y \in \mathcal{I}(v)\}.$$

Es decir, el nucleolo está formado por las imputaciones x que minimizan la función $(\theta \circ e)$ (en el orden lexicográfico).

Si reemplazamos $\mathcal{I}(v)$ por $\mathcal{I}^*(v)$ en la definición anterior obtenemos el prenucleolo del juego, $\mathcal{N}^*(v)$.

$\mathcal{N}^*$ es positivo: si (N, v) es monótono, entonces $\mathcal{N}_i^* \geq 0$ para todo $i \in N$. Si $\mathcal{I}(v) \neq \emptyset$, el nucleolo y el prenucleolo de un juego está formado por un sólo punto, y $\mathcal{N}(v) = \mathcal{N}^*(v)$ si y sólo si $\mathcal{N}^*(v) \in \mathcal{I}(v)$ (Schmeidler, 1969; Sobolev, 1975; Potters y Tijs, 1990).

Un método que permite su cálculo, propuesto por Owen (1974), viene dado por el siguiente problema de programación lineal:

$$\begin{array}{ll} \text{mínimo} & \alpha \\ \text{tal que} & \sum\limits_{i\in S} x_i + \alpha \geq v(S),\ \emptyset \neq S \subset N \\ & x \in \mathcal{I}(v). \end{array}$$

Sea α_1 el mínimo de este programa. Si se alcanza en un único punto, x, entonces $\mathcal{N}(v) = x$. Generalmente, sin embargo, este mínimo es alcanzado sobre un cierto conjunto $\mathcal{I}^1$ y existe una colección de coaliciones $\mathcal{B}_1$ tal que para toda $S \in \mathcal{B}_1$ y para $x \in \mathcal{I}^1$

$$e(S, x) = \alpha_{1.}$$

Ante esta situación debemos resolver el siguiente programa lineal

$$\begin{array}{ll} \text{mínimo} & \alpha \\ \text{tal que} & \sum\limits_{i\in S} x_i + \alpha \geq v(S),\ S \notin \mathcal{B}_1 \\ & x \in \mathcal{I}^1. \end{array}$$

La solución del mismo nos proporcionará un segundo exceso α_2 y un nuevo conjunto de coaliciones $\mathcal{B}_2$ como en el caso anterior. Repitiendo este procedimiento obtendremos finalmente un único punto que es la solución de la secuencia de programas lineales descritos. Este punto es el nucleolo.

Ejemplo 1.13 Consideremos el $4-$juego cooperativo (N, v) tal que

$v(N) = 100$,
$v(\{1,2,3\}) = 95$, $v(\{1,2,4\}) = 85$, $v(\{1,3,4\}) = 80$, $v(\{2,3,4\}) = 55$,
$v(\{i,j\}) = 50$, si $i \neq j$ y
$v(\{i\}) = 0$ para todo i.

Veamos cuál es su nucleolo.

El primer programa lineal que tenemos que resolver es:

$$\begin{array}{ll} \text{mínimo} & \alpha \\ \text{tal que} & x_1 + x_2 + x_3 + \alpha \geq 95 \\ & x_1 + x_2 + x_4 + \alpha \geq 85 \\ & x_1 + x_3 + x_4 + \alpha \geq 80 \\ & x_2 + x_3 + x_4 + \alpha \geq 55 \\ & x_i + x_j + \alpha \geq 50 \\ & x_i + \alpha \geq 0 \\ & x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 100 \\ & x_i \geq 0. \end{array}$$

La solución es $\alpha_1 = 10$ y se alcanza sobre el conjunto

$$\mathcal{I}^1 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) : x_1 + x_2 = 60,\ x_1 \geq 30,\ x_2 \geq 25,\ x_3 = 25,\ x_4 = 15\},$$

siendo

$$\mathcal{B}_1 = \{\{1, 2, 3\}, \{1, 2, 4\}, \{3, 4\}\}.$$

El segundo problema de programación lineal que se nos plantea es:

$$\begin{array}{ll} \text{mínimo} & \alpha \\ \text{tal que} & x_1 + x_3 + x_4 + \alpha \geq 80 \\ & x_2 + x_3 + x_4 + \alpha \geq 55 \\ & x_1 + x_3 + \alpha \geq 50 \\ & x_1 + x_4 + \alpha \geq 50 \\ & x_2 + x_3 + \alpha \geq 50 \\ & x_2 + x_4 + \alpha \geq 50 \\ & x_i + \alpha \geq 0 \\ & x \in \mathcal{I}^1 \end{array}$$

Utilizando la definición de $\mathcal{I}^1$, el problema queda reducido a

$$\begin{array}{ll} \text{mínimo} & \alpha \\ \text{tal que} & x_1 + \alpha \geq 40 \\ & x_2 + \alpha \geq 15 \\ & x_1 + \alpha \geq 25 \\ & x_1 + \alpha \geq 35 \\ & x_2 + \alpha \geq 25 \\ & x_2 + \alpha \geq 35 \\ & x_1 + x_2 = 60 \\ & x_1 \geq 30 \\ & x_2 \geq 25, \end{array}$$

y, más simplificado todavía,

$$\begin{array}{ll} \text{mínimo} & \alpha \\ \text{tal que} & x_1 + \alpha \geq 40 \\ & x_2 + \alpha \geq 35 \\ & x_1 + x_2 = 60 \\ & x_1 \geq 30 \\ & x_2 \geq 25. \end{array}$$

La solución es $\alpha_2 = 7.5$, con $x_1 = 32.5$, $x_2 = 27.5$ y $\mathcal{B}_2 = \{\{1, 3, 4\}, \{2, 3, 4\}\}$.
Por lo tanto

$$\mathcal{N}(v) = (32.5, 27.5, 25, 15).$$

Si nos restringimos a juegos simples monótonos resulta que $\mathcal{I} = \emptyset$ si (N, W) tiene dos o más jugadores ganadores. En otro caso resulta que $\mathcal{N} = \mathcal{N}^*$, a menos que (N, W) tenga un único jugador ganador y no todos los jugadores restantes sean nulos. Finalmente, el prenucleolo y el nucleolo respetan la relación de desplazamiento, es decir, si $i\,D\,j$ entonces $\mathcal{N}_i \geq \mathcal{N}_j$ y $\mathcal{N}_i^* \geq \mathcal{N}_j^*$.

1.3.6 Núcleo (*Kernel*)

El núcleo (kernel) fue introducido por Davis y Maschler (1965) como un concepto auxiliar de solución cuyo principal papel era revelar ciertas propiedades del conjunto de negociaciones y computar parte de este conjunto. El núcleo tiene interesantes propiedades matemáticas que reflejan de varias maneras la estructura del juego y está basado principalmente en dos ideas: la de exceso, ya definida, y la de excedente o superávit de i contra j.

Definición 1.22 Sea (N, v) un juego cooperativo y sean $i \neq j$ en N y $x \in \mathcal{I}^*(v)$. Definimos el excedente de i contra j como

$$s_{ij}(x) = \max e(S, x),$$

donde el máximo se refiere a las coaliciones S tales que $i \in S$ y $j \notin S$.

Es decir, $s_{ij}(x)$ representa lo máximo que el jugador i espera ganar sin la cooperación del jugador j, en las mejores circunstancias.

Definición 1.23 Dado un juego cooperativo (N, v), el núcleo $\mathcal{K}(v)$ de v es el conjunto de puntos $x \in \mathcal{I}(v)$ para los que si

$$s_{ij}(x) > s_{ji}(x)$$

entonces

$$x_j = v(j).$$

Es decir, no existen jugadores $i, j \in N$ tales que $s_{ij}(x) > s_{ji}(x)$ y $x_j > v(j)$.

El prenúcleo de v viene dado por

$$\{x \in \mathcal{I}^* : s_{ij}(x) = s_{ji}(x) \text{ si } \; i, j \in N, \text{ e } i \neq j\}.$$

Ejemplo 1.14 Dado el 3-juego simple definido por $W^m = \{\{1,2\},\{1,3\},\{2,3\}\}$, veamos que $\mathcal{K}(v) = (\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$.

Construímos la tabla de los excesos:

S	$e(S,x)$
$\emptyset$	0
$\{1\}$	$-x_1$
$\{2\}$	$-x_2$
$\{3\}$	$-x_3$
$\{1,2\}$	$1-x_1-x_2$
$\{1,3\}$	$1-x_1-x_3$
$\{2,3\}$	$1-x_2-x_3$
N	0

Imponiendo que $x \in \mathcal{I}(v)$, es decir, que

$$\begin{array}{l} x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_i \geq 0,\ \ i = 1,2,3, \end{array}$$

calculamos $s_{ij}(x)$ y $s_{ji}(x)$ para $i,j \in N$, $i \neq j$.

$$\begin{array}{rcl} s_{12}(x) & = & \max\{-x_1, 1-x_1-x_3\} = x_2 \\ s_{21}(x) & = & \max\{-x_2, 1-x_2-x_3\} = x_1 \\ s_{13}(x) & = & \max\{-x_1, 1-x_1-x_2\} = x_3 \\ s_{31}(x) & = & \max\{-x_3, 1-x_2-x_3\} = x_1 \\ s_{23}(x) & = & \max\{-x_2, 1-x_1-x_2\} = x_3 \\ s_{32}(x) & = & \max\{-x_3, 1-x_1-x_3\} = x_2 \end{array}$$

y obtenemos que $x_1 = x_2 = x_3 = \frac{1}{3}$, tal y como queríamos.

1.4 La extensión multilineal de un juego

En un juego cooperativo (N,v), v es una función real cuyo dominio es 2^N, es decir, el conjunto formado por todos los subconjuntos de N. Este dominio puede interpretarse como el conjunto de vectores

$$\{(x_1,...,x_n) \in \mathsf{R}^n : x_i = 0 \text{ ó } 1, \text{ para } i = 1,2,...,n\},$$

puesto que cada subconjunto $S \subseteq N$ se corresponde con el vector de R^n cuyas componentes son $x_i = 1$ si $i \in S$ y $x_i = 0$ si $i \notin S$. Es decir, podemos identificar 2^N con $\{0,1\}^n$, que no es más que el conjunto de los vértices del cubo unidad en el espacio n-dimensional, y podemos pensar que v es una función definida en este conjunto. A partir de esta idea, Owen (1972) extiende dicha función a todo el cubo unidad

$$[0,1]^n = \{(x_1, ..., x_n) \in \mathsf{R}^n : 0 \leq x_i \leq 1, \text{ para } i = 1, 2, ..., n\},$$

de manera que la función resultante es lineal respecto a cada variable.

Definición 1.24 Sea (N, v) un juego cooperativo de n jugadores. La extensión multilineal (EML) de v es la función real de n variables

$$f(x_1, x_2, ..., x_n) = \sum_{S \subseteq N} \{\prod_{i \in S} x_i \prod_{i \notin S} (1 - x_i)\} v(S).$$

Teniendo en cuenta la identificación anterior entre subconjuntos de N y vectores de $\{0,1\}^n$ no es difícil ver que f coincide con v en los vértices de $[0,1]^n$. De esta forma queda justificada la afirmación de que f es una extensión de v. Además, como f es afín respecto de cada variable x_i se trata de una extensión "multilineal" de v. Es más, se demuestra que f es la única aplicación multilineal definida en $[0,1]^n$ que coincide con v en los vértices de $[0,1]^n$.

La EML admite una interesante interpretación probabilística. Si X es una coalición aleatoria (un subconjunto de N que debe formarse aleatoriamente), x_j es la probabilidad de que el jugador j pertenezca a X para $j = 1, 2, ..., n$, y se supone que dichas probabilidades son independientes, entonces para cada $S \subseteq N$ se tiene

$$\text{Prob}\{X = S\} = \prod_{i \in S} x_i \prod_{i \notin S} (1 - x_i).$$

Por lo tanto,

$$f(x_1, x_2, ..., x_n) = E[v(X)],$$

donde E representa la esperanza matemática.

Veamos a continuación como se pueden calcular los valores de Shapley y de Banzhaf a partir de la EML.

Teorema 1.8 (Owen, 1975). Sean (N, v) un juego cooperativo de n jugadores y $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ su EML. Entonces:

(a) el valor de Shapley de un jugador $i \in N$ es

$$\Phi_i[v] = \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x_i}(t, t, ..., t)\, dt;$$

(b) el valor de Banzhaf de un jugador $i \in N$ es

$$\beta_i[v] = \frac{\partial f}{\partial x_i}(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, ..., \frac{1}{2}).$$

1.5 Fiabilidad de Sistemas y Teoría de Juegos

Teniendo en cuenta que en los capítulos segundo, cuarto y quinto de la tesis se establecen paralelismos entre la Teoría de Juegos, la Electrónica y la Fiabilidad de Sistemas, en esta sección pasamos a comentar brevemente ciertos conceptos que afectan a dichos campos y que serán estudiados con precisión en dichos capítulos.

Sea $N \neq \emptyset$ un conjunto finito y sea $\mathcal{P}$ una colección de subconjuntos de N tal que:

(a) $\emptyset \notin P$.

(b) $N \in P$.

(c) $S \subseteq T$ y $S \in P \Rightarrow T \in P$.

La estructura anterior ha sido estudiada por los matemáticos durante muchos años para distintas aplicaciones y bajo una gran variedad de nombres. Así por ejemplo, incluye a las funciones Booleanas monótonas, a las estructuras coherentes y a los juegos simples. No debe sorprendernos que ciertos resultados conocidos por personas que trabajan en un área determinada sean completamente desconocidos para otras que trabajan en un área distinta. Como ejemplo podemos citar el índice de Shapley-Shubik, que fue intoducido, como ya hemos comentado, en el contexto de juegos simples, y que fue redescubierto por Barlow y Proschan 20 años después para un tipo similar de aplicación en Fiabilidad de Sistemas.

En Fiabilidad de Sistemas o en Electrónica, se identifica N con el conjunto de componentes de un cierto sistema o estructura. Supongamos que $\mathcal{P}$ es el conjunto de componentes que están en funcionamiento. Diremos que $\mathcal{P}$ es un conjunto **camino** cuando el sistema también funciona. Una estructura cuya colección de conjuntos camino satisface las tres propiedades anteriores diremos que es una **estructura semi-coherente**. Esto es equivalente a que se verifique : (a) la estructura no funciona cuando ninguna de las componentes funciona, (b) la estructura funciona cuando todas las componentes funcionan y (c) una mejora del funcionamiento de las componentes implica una mejora del funcionamiento de la estructura.

La descripción anterior puede trasladarse a la Teoría de Juegos, y en particular a los juegos simples monótonos que, como ya hemos visto, corresponden a modelos de votación. Aquí se identifica N con el conjunto de jugadores, un grupo de individuos que tiene que decidir la aceptación o el rechazo de cierta propuesta. Una coalición no es más que un subconjunto de N. Cada jugador vota "sí" o "no". Si $\mathcal{P}$ es el conjunto de jugadores que vota "sí", diremos que $\mathcal{P}$ es una coalición ganadora si la propuesta es aceptada. En el contexto de juegos simples, las coaliciones ganadoras también verifican las tres propiedades anteriores, que en este caso tienen la siguiente interpretación: (a) la coalición $\emptyset$ nunca gana, (b) la gran coalición, es decir, N, siempre gana y (c) coaliciones perdedoras no contienen coaliciones ganadoras.

Después de estos comentarios resulta obvio que los conceptos de estructura semi-coherente y juego simple son equivalentes.

Como hemos comentado, un sistema o estructura está formado por n componentes y, sin pérdida de generalidad se utiliza $N = \{1, 2, ..., n\}$ para designar el conjunto de dichas componentes. Consideramos que el estado del sistema depende tan solo del estado de las componentes, que puede ser estado de funcionamiento o estado de fallo. Para ello se asigna una variable binaria x_i a cada componente i, que es 1 si funciona y 0 si falla. Análogamente, la variable binaria y indica el estado del sistema, es decir, 1 si funciona y 0 si falla.

La suposición de que el estado del sistema esté completamente determinado por el estado de sus componentes implica la existencia de una función Booleana $f : \{0,1\}^n \rightarrow \{0,1\}$ tal que $y = f(\mathsf{x})$, donde $\mathsf{x} = (x_1, ..., x_n)$. A esta función se la denomina **función estructura**, que no es más que la **función característica** utilizada en términos de Teoría de Juegos.

Capítulo 2

Amplitud de representaciones estrictas de J.M.P.

Es un resultado conocido que sociedades de accionistas, modelos políticos e incluso aplicaciones de la Electrónica pueden ser descritos mediante juegos de mayoría ponderada, que pueden verse alterados si los pesos y/o la cuota que los definen se modifican. En este capítulo determinaremos inicialmente el máximo porcentaje permitido en la variación de los pesos y la cuota que hace que el juego no cambie. Para ello utilizaremos representaciones estrictas de J.M.P.

Por ejemplo, el aumento del capital de una sociedad de accionistas provoca en los inversores un aumento o un descenso de sus acciones, al mismo tiempo que provoca una readaptación, previo consenso, de la cuota para adaptarse a la nueva situación. Para poder asegurar que la nueva distribución no interfiere en la lucha por el control de la compañía es necesario estimar el máximo porcentaje en las variaciones de los pesos y en la cuota que dejan invariante el juego asociado a la situación inicial.

Análogamente, en la realización de una función umbral por medio de un mecanismo electrónico, las componentes usadas para fijar los pesos y el umbral no pueden ser calculadas con plena exactitud. Por lo tanto, es necesario estimar el máximo porcentaje de error permitido en los pesos y en el umbral que hace posible conseguir que dicho mecanismo se corresponda con la función.

En Fiabilidad de Sistemas es interesante saber qué subconjuntos de componentes hacen que un sistema aditivo funcione cuando estos subconjuntos funcionan, y qué subconjuntos hacen que el sistema falle cuando ellos fallan. Los sistemas aditivos están caracterizados por los pesos de cada componente y el umbral de fallo. Naturalmente, este problema puede ser trasladado a la Teoría de Juegos. Para ello tan solo es necesario considerar, como ya hemos comentado, las componentes como jugadores y los subconjuntos de componentes como coaliciones.

Este capítulo tiene como punto de partida la tolerancia, solución obtenida por Hu en la resolución de este problema en el campo de la Electrónica. Este resultado será mejorado por lo que denominaremos amplitud, que se obtiene al trasladar dicho problema a la Teoría de Juegos.

2.1 Notaciones básicas y definiciones

Sea $Q = \{0, 1\}$. Para cada natural n, consideremos el producto cartesiano

$$Q^n = Q \times ... \times Q.$$

Los elementos de Q^n son las 2^n-tuplas $(x_1, ..., x_n)$.

Definición 2.1 Una función $f : Q^n \to Q$ es una función interruptor de n variables.

Definición 2.2 Una función interruptor $f : Q^n \to Q$ es linealmente separable si admite un sistema

$$[T; w_1, ..., w_n]$$

tal que para un punto arbitrario $(x_1, ..., x_n)$ del n-cubo Q^n tenemos

$$\begin{array}{lcll} w_1x_1 + ... + w_nx_n & \geq & T & \text{si } f(x) = 1, \\ w_1x_1 + ... + w_nx_n & < & T & \text{si } f(x) = 0. \end{array}$$

Diremos que f es una función umbral de n variables.

Siempre es posible modificar la cuota de manera que las definiciones pueden ser reescritas utilizando desigualdades estrictas. En este caso el sistema se denomina un **sistema separador estricto** de la función linealmente separable f. Los n números reales $w_1, ..., w_n$ se denominan **pesos**, y el primer número real T se refiere al **umbral** o **cuota**. Formalmente una función interruptor f tal que $f(0, ..., 0) = 0$ es equivalente a un juego simple, y un sistema separador estricto es equivalente a una representación estricta de un J.M.P. añadiendo la condición $T > 0$.

2.2 Tolerancia

En esta sección aparecen resumidos los principales resultados obtenidos por Hu sobre la tolerancia, a la vez que se verán mejorados al ser interpretados en el contexto de la Teoría de Juegos.

A lo largo de esta sección, sea $f : Q^n \to Q$ una función umbral de n variables, y sea $[T; w_1, ..., w_n]$ un sistema separador estricto de la función f.

Para cada punto $x = (x_1, ..., x_n)$ de Q^n sea

$$w(x) = w_1 x_1 + ... + w_n x_n.$$

A partir de la definición de un sistema separador estricto podemos decir

$$\begin{aligned} w(x) &> T \quad \text{si } f(x) = 1, \\ w(x) &< T \quad \text{si } f(x) = 0. \end{aligned}$$

Sea A el máximo de la función $w(x)$ para todo $x \in f^{-1}(0)$, y sea B el mínimo de la función $w(x)$ para todo $x \in f^{-1}(1)$. Si $f^{-1}(0)$ es vacío tomamos $A = \infty$; si $f^{-1}(1)$ es vacío, entonces $B = \infty$. A partir de aquí tenemos $A < T < B$.

Adaptando estas definiciones a representaciones estrictas de J.M.P. tenemos los siguientes resultados.

Sea A el máximo de $w(S)$ para toda $S \in \mathcal{L}$ y sea B el mínimo de $w(S)$ para toda $S \in W$. Entonces tenemos $A < T < B$ y $A \geq 0$ (ya que $w(\emptyset) = 0$).

Consideremos ahora $m = \min\{T - A, B - T\}$ y $M = T + |w_1| + ... + |w_n|$.

Sean $\lambda_1, ..., \lambda_n$ y Λ $n + 1$ números reales arbitrarios y definamos

$$\begin{aligned} w_i^{'} &= (1 + \lambda_i) w_i, \quad i = 1, ..., n \\ T' &= (1 + \Lambda) T. \end{aligned}$$

Los números $\lambda_1, ..., \lambda_n$, Λ representan las variaciones relativas si utilizamos los números $w_1^{'}, ..., w_n^{'}$ y T' en lugar de los originales $w_1, ..., w_n, T$ como pesos y cuota, respectivamente. En este capítulo pretendemos encontrar el máximo real positivo δ, tal que si

$$|\Lambda| < \delta, \quad |\lambda_i| < \delta \quad i = 1, ..., n$$

entonces $[T'; w_1^{'}, ..., w_n^{'}]$ es también una representación estricta del juego inicial.

Este número real positivo δ fue dado por Hu (1965) para sistemas separadores estrictos. Definió el nímero $\dfrac{m}{M}$ (tomando $|T|$ en M en lugar de T), que está completamente determinado por el conjunto de números reales $T, w_1, ..., w_n$.

Teorema 2.1 (Hu, 1965) Sea $f : Q^n \to Q$ una función umbral de n variables y sea $[T; w_1, ..., w_n]$ un sistema separador estricto de f. Si $|\lambda_i| < \frac{m}{M}$ para cada $i = 1, ..., n$ y si $|\Lambda| < \frac{m}{M}$, entonces $[T'; w_1^{'}, ..., w_n^{'}]$ es también un sistema separador estricto de f.

Hu denominó a este valor tolerancia del sistema y la representó por

$$\tau[T; w_1, ..., w_n] = \frac{m}{M}.$$

Teorema 2.2 (Hu, 1965) Sea $f : Q^n \to Q$ una función umbral de n variables y sea $[T; w_1, ..., w_n]$ un sistema separador estricto de f. Entonces:

(a) $\tau[T; w_1, ..., w_n] \leq 1$.

(b) $\tau[T; w_1, ..., w_n] \leq \tau[C; w_1, ..., w_n]$ donde $C = \frac{A+B}{2}$. Si $T \neq C$ la desigualdad es estricta.

Adaptando los resultados de Hu para representaciones estrictas de J.M.P. tenemos el siguiente teorema.

Teorema 2.3 Sea $[T; w_1, ..., w_n]$ una representación estricta de un J.M.P. Entonces:

(a) $\tau[T; w_1, ..., w_n] \leq 1$.

(b) $\tau[T; w_1, ..., w_n] \leq \tau[C; w_1, ..., w_n]$ donde $C = \frac{A+B}{2}$. Si $T \neq C$ la desigualdad es estricta.

Nuestro principal objetivo es encontrar el máximo valor $\delta > 0$ tal que si

$$|\Lambda| < \delta, \quad |\lambda_i| < \delta \quad i = 1, ..., n$$

entonces $[T'; w_1^{'}, ..., w_n^{'}]$ es también una representación del juego inicial. Para ello distinguiremos entre el caso en que el juego sea monótono y el caso en que no lo sea.

Sin embargo veamos, en primer lugar, como la cota dada por Hu para la tolerancia puede ser mejorada si nos restringimos a representaciones estrictas de J.M.P.

Teorema 2.4 Sea $[T; w_1, ..., w_n]$ una representación estricta de un J.M.P. Entonces,

$$\tau[T; w_1, ..., w_n] \leq \frac{1}{3}.$$

Demostración:

Por el Teorema 2.3, la tolerancia alcanza su máximo cuando $T = \frac{A+B}{2}$. A partir de este hecho tenemos que $m = \frac{B-A}{2}$ y $M = \frac{A+B}{2} + |w_1| + ... + |w_n|$. Dado que v no es idénticamente igual a cero, existe una coalición S tal que $w(S) \geq B$ y, consecuentemente, $|w_1| + ... + |w_n| \geq B$.

Por lo tanto:

$$\tau[T; w_1, ..., w_n] = \frac{m}{M} \leq \frac{\frac{B-A}{2}}{\frac{A+B}{2} + |w_1| + ... + |w_n|} \leq \frac{B-A}{A+B+2B} \leq \frac{B}{A+3B} \leq \frac{1}{3}.$$

2

El siguiente resultado demuestra que el valor $\frac{1}{3}$ es alcanzado y caracteriza a las representaciones estrictas de J.M.P. monótonos que lo alcanzan.

Proposición 2.1 El conjunto de representaciones estrictas de un J.M.P. monótono con tolerancia $\frac{1}{3}$ es

$$[T; 2T, 0, ..., 0].$$

Demostración:

Sea $[T; w_1, ..., w_n]$ una representación estricta de un J.M.P. Su tolerancia es

$$\tau[T; w_1, ..., w_n] = \frac{m}{M},$$

donde $m = \min\{T - A, B - T\}$ y $M = T + |w_1| + ... + |w_n|$.

Queremos determinar cómo son las representaciones estrictas de un J.M.P. monótono con tolerancia $\frac{1}{3}$.

Por el Teorema 2.3 debemos considerar $T = \frac{A+B}{2}$. Entonces:

$$\tau[T; w_1, ..., w_n] = \frac{B - A}{A + B + 2 \cdot (|w_1| + ... + |w_n|)} = \frac{1}{3} \Leftrightarrow B - 2A = |w_1| + ... + |w_n|.$$

Como $|w_1| + ... + |w_n| \geq B$ y $A \geq 0$, deducimos que

$$A = 0 \text{ y } |w_1| + ... + |w_n| = B.$$

A partir de $A = 0$, $B = 2T$ y $|w_1| + ... + |w_n| = 2T$ podemos deducir que el juego es, efectivamente, de la forma

$$[T; w_1, ..., w_n] \equiv [T; 2T, 0, ..., 0].$$

2

Veamos a continuación que para el caso de juegos no monótonos este máximo es menor.

Teorema 2.5 Sea $[T; w_1, ..., w_n]$ una representación estricta de un J.M.P. no monótono. Entonces,

$$\tau[T; w_1, ..., w_n] \leq \frac{1}{5}.$$

Demostración:

La tolerancia alcanza su máximo cuando $T = \frac{A+B}{2}$. A partir de aquí $m = \frac{B-A}{2}$ y $M = \frac{A+B}{2} + |w_1| + ... + |w_n|$.

Dado que el juego es no monótono, existen coaliciones $R \subset S$ tal que $v(R) = 1$ y $v(S) = 0$ y $w_i < 0 \quad \forall i \in S - R$. Por lo tanto:

$$\sum_{i \in R} w_i \geq B \quad \text{y} \quad \sum_{i \in S} w_i \leq A,$$

con lo cual

$$\sum_{i \in S} |w_i| = \sum_{i \in R} |w_i| + \sum_{i \in S-R} |w_i| \geq B + (B - A) = 2B - A.$$

A partir de aquí obtenemos que

$$\tau[T; w_1, ..., w_n] = \frac{m}{M} \leq \frac{\frac{B-A}{2}}{\frac{A+B}{2} + |w_1| + ... + |w_n|} \leq \frac{B - A}{A + B + 2\sum\limits_{i \in S} |w_i|} \leq$$

$$\leq \frac{B - A}{A + B + 2(2B - A)} = \frac{B - A}{5B - A} \leq \frac{1}{5}.$$ 2

Proposición 2.2 El conjunto de representaciones estrictas de J.M.P. no monótonos con tolerancia $\frac{1}{5}$ es

$$[T; 2T, 0, ..., 0, -2T].$$

Demostración:

A partir del Teorema 2.3 debemos considerar $T = \frac{A+B}{2}$. Entonces,

$$\tau[T; w_1, ..., w_n] = \frac{B-A}{A+B+2\cdot(|w_1|+...+|w_n|)} = \frac{1}{5} \Leftrightarrow 2B - 3A = |w_1| + ... + |w_n|.$$

Por la demostración del Teorema 2.5 sabemos que $|w_1| + ... + |w_n| \geq 2B - A$ y como $A \geq 0$ obtenemos que $A = 0$ y $|w_1| + ... + |w_n| = 2B$.

A partir de que $A = 0$, $B = 2T$ y $|w_1| + ... + |w_n| = 4T$ podemos deducir que, efectivamente,

$$[T; w_1, ..., w_n] \equiv [T; 2T, 0, ..., 0, -2T].$$

2

2.3 Amplitud de representaciones estrictas de J.M.P.

Nuestro principal objetivo es, como ya hemos comentado anteriormente, encontrar, para representaciones estrictas de J.M.P., el máximo real positivo δ tal que si

$$|\Lambda| < \delta, \quad |\lambda_i| < \delta \quad i = 1, ..., n$$

entonces $[T'; w_1^{'}, ..., w_n^{'}]$ es equivalente a $[T; w_1, ..., w_n]$.

Denominaremos a esta constante amplitud de la representación y veremos que es el máximo error relativo permitido en las variaciones de los pesos y la cuota que hacen que el juego permanezca invariante. Como la tolerancia da una cota que garantiza que el juego no varíe, de aquí se deduce que la tolerancia debe ser menor o igual que la amplitud.

Dada una representación estricta de un J.M.P., $[T; w_1, ..., w_n]$, para cada coalición $S \subseteq N$ definimos

$$\begin{aligned} a(S) &= |w(S) - T|, \\ b(S) &= T + \sum_{i \in S} |w_i|. \end{aligned}$$

Observemos que ambos valores son positivos.

Definición 2.3 Sea $[T; w_1, ..., w_n]$ una representación estricta de un J.M.P. Definimos la amplitud de la representación como $P = \min_{S \subseteq N} \dfrac{a(S)}{b(S)}$ y lo designaremos por

$$\mu[T; w_1, ..., w_n] = P.$$

El mínimo P es alcanzado por, como mínimo, una coalición, a la que denominaremos a partir de ahora S_0.

Teorema 2.6 Si $|\lambda_i| < P$ para cada $i = 1, ..., n$ y $|\Lambda| < P$, entonces $[T'; w_1^{'}, ..., w_n^{'}]$ es equivalente a $[T; w_1, ..., w_n]$ y P es la máxima cota superior para las constantes $\lambda_1, ..., \lambda_n, \Lambda$.

Demostración:

Observemos, en primer lugar, que $T' = (1+\Lambda)T > 0$. Esto es consecuencia de que, a partir de la definición, $P < 1$ y como estamos suponiendo que $|\Lambda| < P$, entonces se deduce que, efectivamente $T' > 0$.

Para cada coalición $S \subseteq N$, sea

$$w'(S) = \sum_{i\in S} w_i' \ .$$

Para la primera parte de la demostración es suficiente probar que $w'(S) > T'$ para toda coalición $S \in \mathcal{W}$ y que $w'(S) < T'$ para toda coalición $S \in \mathcal{L}$.

Supongamos en primer lugar que $S \in W$. Entonces,

$$a(S) = w(S) - T \ .$$

Por la definición de $w'(S)$ tenemos:

$$w'(S)-T' = \sum_{i\in S} w_i' - T' = \sum_{i\in S}(1+\lambda_i)w_i - (1+\Lambda)T = [w(S)-T] + \left|\sum_{i\in S}\lambda_i w_i - \Lambda T\right|$$

Como $w(S) - T = a(S)$ y

$$\left|\sum_{i\in S}\lambda_i w_i - \Lambda T\right| \leq \sum_{i\in S}|\lambda_i|\,|w_i| + |\Lambda|\,T < P[\sum_{i\in S}|w_i| + T] = \frac{a(S_0)}{b(S_0)}b(S) \leq a(S),$$

deducimos que $w'(S) - T' > 0$ y de aquí que $w'(S) > T'$.

Supongamos ahora que $S \in \mathcal{L}$. Entonces,

$$a(S) = T - w(S).$$

Análogamente al caso anterior, tenemos:

$$T' - w'(S) = (1+\Lambda)T - \sum_{i\in S}(1+\lambda_i)w_i = [T - w(S)] + [\Lambda T - \sum_{i\in S}\lambda_i w_i]$$

Como $T - w(S) = a(S)$ y

$$\left|\Lambda T - \sum_{i\in S}\lambda_i w_i\right| \leq |\Lambda|\,T + \sum_{i\in S}|\lambda_i|\,|w_i| < P[T + \sum_{i\in S}|w_i|] = \frac{a(S_0)}{b(S_0)}b(S) \leq a(S),$$

deducimos que $T' - w'(S) > 0$ y de aquí que $w'(S) < T'$.

Para la segunda parte de la demostración supongamos que existe $Q > P$ y veremos que, en este caso, el juego dado por

$$[T(1+\Lambda); (1+\lambda_1)w_1, ..., (1+\lambda_n)w_n]$$

no es equivalente al juego inicial $[T; w_1, ..., w_n]$ para todo Λ y λ_i tales que $|\Lambda| < Q$ y $|\lambda_i| < Q$ para $i = 1, ..., n$.

Sea $S_0 \subseteq N$ tal que $\dfrac{a(S_0)}{b(S_0)} = P$. Si $S_0 \in W$, tomando

$$\Lambda = \epsilon \quad \text{y} \quad \lambda_i = \begin{cases} -\epsilon & \text{si } w_i \geq 0 \\ \epsilon & \text{si } w_i < 0 \end{cases}$$

con $P < \epsilon < Q$, veamos que llegamos a una contradicción sobre S_0.

$$w'(S_0) - T' = [w(S_0) - T] - \epsilon[T + \sum_{i \in S_0} |w_i|] = a(S_0) - \epsilon b(S_0) < a(S_0) - \frac{a(S_0)}{b(S_0)} b(S_0) = 0$$

y, por lo tanto, $S_0 \notin W$.

De manera análoga, si $S_0 \in \mathcal{L}$, tomando

$$\Lambda = -\epsilon \quad \text{y} \quad \lambda_i = \begin{cases} \epsilon & \text{si } w_i \geq 0 \\ -\epsilon & \text{si } w_i < 0 \end{cases}$$

con $P < \epsilon < Q$, veamos que llegamos también a una contradicción sobre S_0.

$$T' - w'(S_0) = [T - w(S_0)] - \epsilon[T + \sum_{i \in S_0} |w_i|] = a(S_0) - \epsilon b(S_0) < a(S_0) - \frac{a(S_0)}{b(S_0)} b(S_0) = 0$$

y, por lo tanto, $S_0 \notin \mathcal{L}$. 2

Corolario 2.1 Dada una representación estricta de un J.M.P., $[T; w_1, ..., w_n]$, la tolerancia es menor o igual que la amplitud.

Demostración:

Es consecuencia inmediata de que la amplitud es la máxima cota que garantiza que el juego permanezca invariante. 2

2.4 Amplitud de representaciones estrictas de J.M.P. monótonos

Si nos restingimos al caso de representaciones estrictas de J.M.P. monótonos, el peso de cada uno de los jugadores no nulos es positivo (tan solo tenemos que comparar una coalición ganadora minimal, que contenga a este jugador no nulo, con la misma coalición sin él, que será una coalición perdedora. La desigualdad resultante nos demuestra que el peso de dicho jugador debe ser positivo). Por lo tanto, un peso sólo podrá ser no positivo si corresponde a un jugador nulo. En este caso, definimos D como el conjunto de jugadores nulos con peso negativo (si los hay). Teniendo en cuenta estos comentarios, para juegos monótonos veremos que la expresión de la amplitud hallada en la sección anterior puede simplificarse.

Teorema 2.7 Si $[T; w_1, ..., w_n]$ es una representación estricta de un J.M.P. monótono de amplitud P, entonces

$$P = \min\left\{\frac{B-T}{B+T-2w(D)}, \frac{T-A}{T+A}\right\}.$$

Demostración:

Demostremos en primer lugar que

$$P \geq \min\left\{\frac{B-T}{B+T-2w(D)}, \frac{T-A}{T+A}\right\}.$$

Teniendo en cuenta que $P = \min\limits_{S \subseteq N} \dfrac{a(S)}{b(S)}$, es suficiente demostrar que

1. Si $S \in \mathcal{L}$, entonces $\dfrac{a(S)}{b(S)} \geq \dfrac{T-A}{T+A}$.

   Es decir, tenemos que ver que

$$2AT + A\left(\sum_{i \in S} |w_i| - w(S)\right) - T\left(\sum_{i \in S} |w_i| + w(S)\right) \geq 0.$$

Como $\sum_{i\in S}|w_i| - w(S) = -2w(S\cap D)$, $\sum_{i\in S}|w_i| + w(S) = 2w(S-D)$ y teniendo en cuenta la definición de jugador nulo, $w(S-D)\leq A$, obtenemos que, efectivamente

$$2[T(A-w(S-D)) - Aw(S\cap D)] \geq 0.$$

2. Si $S\in W$, entonces $\dfrac{a(S)}{b(S)} \geq \dfrac{B-T}{B+T-2w(D)}$.

   Como $\sum_{i\in S}|w_i| - w(S) = -2w(S\cap D)$, $\sum_{i\in S}|w_i| + w(S) = 2w(S-D)$, tenemos que ver que

$$2[-BT + Tw(D) - w(D)w(S) + Bw(S\cap D) + Tw(S-D)] \geq 0.$$

   Reagrupando términos queda reducido a comprobar que

$$2[T(w(D)+w(S-D)-B) - w(D)w(S) + Bw(S\cap D)] \geq 0.$$

   Teniendo en cuenta que $w(S)\geq B$, es suficiente demostrar que

$$2[T(w(D)+w(S-D)-B) + B(w(S\cap D) - w(D)] \geq 0.$$

   El primer sumando es positivo porque si S es ganadora, entonces la coalición $(S-D)\cup D$ es también ganadora. El segundo sumando es no negativo porque $w(S\cap D)\geq w(D)$. Así pues,

$$2[T(w(D)+w(S-D)-B) + B(w(S\cap D) - w(D)] \geq 0.$$

   Por lo tanto,

$$P \geq \min\left\{\frac{B-T}{B+T-2w(D)}, \frac{T-A}{T+A}\right\}.$$

Demostremos a continuación la segunda desigualdad, es decir,

$$P \leq \min\left\{\frac{B-T}{B+T-2w(D)}, \frac{T-A}{T+A}\right\}.$$

Para ello distinguiremos dos casos:

1. Sea $S_0\in W$ tal que $w(S_0)=B$. Entonces $D\cap S_0 = D$ y

$$P = \min_{S\subseteq N}\frac{a(S)}{b(S)} \leq \frac{a(S_0)}{b(S_0)} = \frac{B-T}{B+T-2w(D)}.$$

2. Sea $S_0 \in \mathcal{L}$ tal que $w(S_0) = A$. Entonces $D \cap S_0 = \emptyset$ y

$$P = \min_{S \subseteq N} \frac{a(S)}{b(S)} \leq \frac{a(S_0)}{b(S_0)} = \frac{T-A}{T+A}.$$

Por lo tanto,

$$P \leq \min \left\{ \frac{B-T}{B+T-2w(D)}, \frac{T-A}{T+A} \right\}.$$

2

Sociedades de accionistas y la mayoría de modelos políticos pueden ser descritos asignando pesos no negativos a los jugadores. Esta situación da lugar al siguiente corolario.

Corolario 2.2 Si $[T; w_1, ..., w_n]$ es una representación estricta de un J.M.P. monótono de amplitud P, en la que $w_i \geq 0$, para todo $i = 1, ..., n$, entonces,

$$P = \min \left\{ \frac{B-T}{B+T}, \frac{T-A}{T+A} \right\}.$$

Demostración:

Es consecuencia inmediata del teorema anterior, aplicado al caso particular en que $D = \emptyset$. 2

Observemos, a partir de la definición de P, que la amplitud verifica $0 < \mu < 1$, y para cada $x \in (0,1)$ existe un 2-juego

$$\left[\frac{1+x}{1-x}; \left(\frac{1+x}{1-x} \right)^2, 1 \right]$$

cuya amplitud es x.

Ejemplo 2.1 Una ciudad ha firmado un acuerdo bianual con 3 compañías de gas, X, Y y Z de manera que el suministro de gas de la ciudad esté garantizado con la colaboración, como mínimo, de dos de ellas. El primer año las necesidades de la ciudad fueron de 75 Km^3, y cada una de las compañías ofreció una cantidad fija de 60 Km^3, 30 Km^3 y 60 Km^3, respectivamente.

Esta situación puede ser descrita mediante el J.M.P.

$$[75; 60, 30, 60].$$

Toda coalición formada por dos o más de las firmas es suficiente para satisfacer las necesidades de la ciudad, es decir:

$$W^m = \{\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}\}.$$

Teniendo en cuenta que $A = \max_{S \in \mathcal{L}} w(S)$ y $B = \min_{S \in W} w(S)$, en este caso tenemos que $A = 60$ y $B = 90$.

La amplitud de esta representación es

$$\mu[75; 60, 30, 60] = \min \left\{ \frac{T - A}{T + A}, \frac{B - T}{B + T} \right\} = \frac{1}{11}.$$

La situación en el segundo año, teniendo en cuenta que tanto las necesidades de la ciudad como las disponibilidades de las compañías se verán modificadas sensiblemente, podemos describirla de la forma siguiente:

$$[75(1 + \Lambda); 60(1 + \lambda_1), 30(1 + \lambda_2), 60(1 + \lambda_3)].$$

A partir de la ampitud obtenida podemos asegurar que el máximo porcentaje de dichas variaciones que garantice el cumplimiento del acuerdo debe ser de un 9.09 %.

Sin embargo, si hubiésemos utilizado como referencia la tolerancia tendríamos

$$\tau[75; 60, 30, 60] = \frac{\min\{T - A, B - T\}}{T + |w_1| + ... + |w_n|} = \frac{1}{15},$$

y por lo tanto, el máximo porcentaje en las variaciones debería ser de tan solo un 6.66%.

Ejemplo 2.2 Supongamos que una sociedad de accionistas está constituída por tres socios mayoritarios, cada uno de los cuales posee 50.000, 25.000 y 25.000 acciones respectivamente, y un océano de pequeños accionistas que poseen un total de 5.000 acciones. Una propuesta es aprobada por la compañía si la suma de las acciones pertenecientes a los inversores que la apoyan es superior a 60.000 acciones.

Esta situación se corresponde con el siguiente J.M.P. :

$$[60000; 50000, 25000, 25000, w_4, ..., w_n], \quad A = 55000,\ B = 75000,$$

en donde los subíndices $4, ..., n$ representan a los pequeños accionistas, tales que $\sum_{i=4}^{n} w_i = 5000$ y $w_i > 0$ para $i = 4, ..., n$.

Se puede preveer que al final del año se producirá una variación del capital que afectará a la distribución, tanto de las acciones, como de la cuota. Si exclúımos la posibilidad de que se produzca la entrada de nuevos socios, la situación puede ser descrita mediante la siguiente representación:

$$[60000(1+\Lambda); 50000(1+\lambda_1), 25000(1+\lambda_2), 25000(1+\lambda_3), w_4(1+\lambda_4), ..., w_n(1+\lambda_n)].$$

Si calculamos su amplitud, obtenemos

$$\mu[75; 60, 30, 60] = \min\left\{\frac{T-A}{T+A}, \frac{B-T}{B+T}\right\} = \frac{1}{23}.$$

Por lo tanto toda variación tal que $|\Lambda| < \frac{1}{23}$, $|\lambda_i| < \frac{1}{23}$, para $i = 1, ..., n$ asegura que el control de la compañía no se verá alterado por dichas modificaciones.

Así, por ejemplo, la distribución

$$[62500; 47916, 26041, 23958, w_4(1+\lambda_4), ..., w_n(1+\lambda_n)]$$

representa la misma situación que la que definía la primera representación.

2.5 Amplitud máxima

En esta sección determinamos el máximo valor que puede alcanzar la amplitud de una representación estricta de un J.M.P. cuando los pesos de los jugadores no varían.

Como hemos comentado anteriormente, la cuota de una representación estricta de un J.M.P. es un número real comprendido entre A y B. Supondremos a lo largo de esta sección que $A > 0$, con lo cual la situación será la siguiente

$$0 < \max_{S \in \mathcal{L}} w(S) = A < T < B = \min_{S \in W} w(S).$$

Definimos la función

$$f(S,T) = \frac{a(S,T)}{b(S,T)} \quad \text{para } S \subseteq N \quad \text{y} \quad T \in (A,B),$$

donde $a(S,T) = |w(S) - T|$, $b(S,T) = T + \sum_{i \in S} |w_i|$, y sean

$$\begin{aligned} F(T) &= \min_{S \in \mathcal{L}} f(S,T), \\ G(T) &= \min_{S \in W} f(S,T). \end{aligned}$$

Tenemos que $f(S,T) \leq 1$ y como $A > 0$, se deduce que $F(T) < 1$.

Teorema 2.8 Para cada representación estricta de un J.M.P. $[T; w_1, ..., w_n]$ con $0 < A < T < B$ tenemos que

$$\mu[T; w_1, ..., w_n] \leq \mu[T^*; w_1, ..., w_n],$$

donde T^* es el único valor tal que $F(T) = G(T)$. Si $T \neq T^*$, la desigualdad es estricta.

Demostración:

Para cada coalición S, la función $f(S,T)$ es continua y derivable respecto a T en (A,B), y consecuentemente, $F(T)$ y $G(T)$ son también continuas. Fijando S, la derivada de $f(S,T)$ respecto a T es:

$$\begin{aligned} \frac{\sum_{i \in S} |w_i| + w_i}{\left(T + \sum_{i \in S} |w_i|\right)^2} &\geq 0 \qquad \text{si } S \in \mathcal{L}, \\ -\frac{\sum_{i \in S} |w_i| + w_i}{\left(T + \sum_{i \in S} |w_i|\right)^2} &< 0 \qquad \text{si } S \in W. \end{aligned}$$

Por lo tanto, $F(T)$ es una función no decreciente, y $G(T)$ es estrictamente decreciente. Para obtener el valor de $T \in (A,B)$ que defina la amplitud máxima para la representación dada del juego, consideramos la función

$$P(T) = \min\{F(T), G(T)\} \text{ para } A < T < B$$

y veremos que existe un único T^* que alcanza el $\max\limits_{T\in(A,B)} P(T)$.

La unicidad es consecuencia del no decrecimiento de F y del decrecimiento de G.

La existencia se demuestra a partir del Teorema de Bolzano:

$$\lim_{T\to B^-} F(T) - G(T) = \lim_{T\to B^-} F(T) > 0$$

y, teniendo en cuenta que $A > 0$, resulta que $\lim\limits_{T\to A^+} F(T) = 0$. Con lo cual,

$$\lim_{T\to A^+} F(T) - G(T) = \lim_{T\to A^+} -G(T) < 0.$$

Por lo tanto, existe $T^* \in (A, B)$ solución de $F(T) = G(T)$. 2

Corolario 2.3 Si $[T; w_1, ..., w_n]$ es una representación estricta de un J.M.P. monótono con $0 < A < T < B$, entonces

$$\mu[T; w_1, ..., w_n] \leq \mu[T^*; w_1, ..., w_n],$$

donde $T^* = \dfrac{w(D) + \sqrt{(w(D))^2 + 4AB - 4Aw(D)}}{2}$.

Demostración:

Teniendo en cuenta el teorema anterior, la amplitud de una representación estricta de un J.M.P. monótono, $P = \min\{\frac{B-T}{B+T-2w(D)}, \frac{T-A}{T+A}\}$, alcanza su máximo cuando $\dfrac{B-T}{B+T-2w(D)} = \dfrac{T-A}{T+A}$ y de aquí se obtiene

$$T^* = \frac{w(D) + \sqrt{(w(D))^2 + 4AB - 4Aw(D)}}{2}.$$

2

Corolario 2.4 Si $[T; w_1, ..., w_n]$, $w_i \geq 0$, para $i = 1, ..., n$, es una representación estricta de un J.M.P. monótono con $0 < A < T < B$, entonces

$$\mu[T; w_1, ..., w_n] \leq \mu[T^*; w_1, ..., w_n],$$

donde $T^* = \sqrt{AB}$.

Demostración:

El hecho de que $w_i \geq 0$, para $i = 1, ..., n$, como hemos comentado anteriormente nos indica que $D = \emptyset$, y consecuentemente, $w(D) = 0$. Por lo tanto, el resultado es consecuencia inmediata del corolario anterior.

Observemos que en este caso el valor que maximiza la amplitud, T^* no es otro que la media geométrica entre A y B, mientras que en el Teorema 2.3 Hu demuestra que la tolerancia alcanza su máximo cuando $T = \frac{A+B}{2}$, es decir, la media aritmética entre A y B. 2

2.6 Amplitud coalicional

Dada $[T; w_1, ..., w_n]$ una representación estricta de un J.M.P., sea R una coalición, $\emptyset \neq R \subseteq \{0\} \cup N$ tal que $i \in R$ si y sólo si $\lambda_i \neq 0$. Identificaremos a lo largo de esta sección λ_0 con Λ. Teniendo en cuenta la construcción de R, $\lambda_0 = 0$ si la cuota no ha sido modificada, es decir si $0 \notin R$; mientras que $\lambda_0 \neq 0$ en caso contrario, es decir, si $0 \in R$. Pretendemos encontrar, para representaciones estrictas de juegos de mayoría ponderada, el máximo real positivo δ tal que si

$$|\lambda_i| < \delta, \text{ para cada } i \in R,$$

entonces $[T'; w'_1, ..., w'_n]$, donde

$$w'_i = \begin{cases} (1 + \lambda_i)w_i & \text{si } i \in R \\ w_i & \text{si } i \notin R \end{cases}$$

$$T' = \begin{cases} (1 + \lambda_0)T & \text{si } 0 \in R \\ T & \text{si } 0 \notin R \end{cases}$$

es una representación equivalente a la inicial $[T; w_1, ..., w_n]$.

Este problema no es más que un caso particular del tratado en la Sección 2.3 en el sentido de que estamos suponiendo que las variaciones de los pesos afectan tan solo a un determinado número de jugadores. Observemos que en esta nueva situación queda también contemplada la posibilidad de modificar o no la cuota del juego.

Para cada coalición $S \subseteq N$ definimos

$$a(S) = |w(S) - T|$$

$$c_R(S) = \begin{cases} 0 & \text{si } R \cap S = \emptyset, \\ T + \sum_{i \in R \cap S} |w_i| & \text{si } 0 \in R \text{ y } R \cap S \neq \emptyset, \\ \sum_{i \in R \cap S} |w_i| & \text{si } 0 \notin R \text{ y } R \cap S \neq \emptyset. \end{cases}$$

Definición 2.4 Sea $[T; w_1, ..., w_n]$ una representación estricta de un juego de mayoría ponderada. Definimos la R-amplitud coalicional de la representación como $P(R) = \min_{\substack{S \subseteq N \\ R \cap S \neq \emptyset}} \dfrac{a(S)}{c_R(S)}$ y la designaremos por

$$\mu_R[T; w_1, ..., w_n] = P(R).$$

Si $c_R(S) = 0$, entonces $\dfrac{a(S)}{c_R(S)} = \infty$. El mínimo $P(R)$ es alcanzado por, como mínimo, una coalición a la que denominaremos S_0. Observemos que si $R = \{0\} \cup N$ obtenemos la amplitud del juego, ya calculada en la Sección 2.3.

Teorema 2.9 Para cada $R \subseteq \{0\} \cup N$, si $|\lambda_i| < P(R)$ para todo $i \in R$, entonces $[T'; w'_1, ..., w'_n]$ es equivalente a $[T; w_1, ..., w_n]$ y $P(R)$ es la máxima cota superior para las constantes λ_i, $i \in R$.

Demostración:

Observemos en primer lugar que $T' > 0$, ya que $T' = T > 0$ si $0 \notin R$, o bien $T' = (1 + \lambda_0)T$ si $0 \in R$. Este último caso es consecuencia inmediata de que $|\lambda_0| < P(R) < 1$.

Para cada coalición $S \subseteq N$, sea

$$w'(S) = \sum_{i \in S} w'_i.$$

Para la primera parte de la demostración es suficiente probar que $w'(S) > T'$ para toda coalición $S \in W$ y que $w'(S) < T'$ para toda coalición $S \in \mathcal{L}$. Para ello distinguiremos dos casos:

1. Si $0 \in R$, entonces $c_R(S) = T + \sum_{i \in R \cap S} |w_i|$ y $P(R) = \min_{\substack{S \subseteq N \\ R \cap S \neq \emptyset}} \dfrac{a(S)}{T + \sum_{i \in R \cap S} |w_i|}$.

   Supongamos en primer lugar que $S \in W$. Entonces

$$a(S) = w(S) - T.$$

$$\begin{aligned} w'(S) - T' &= \sum_{i \in S} w_i' - T' = \sum_{i \in R \cap S} (1 + \lambda_i) w_i + \sum_{i \in S - R} w_i - (1 + \lambda_0) T = \\ &= [w(S) - T] + [\sum_{i \in R \cap S} \lambda_i w_i - \lambda_0 T]. \end{aligned}$$

   Como $w(S) - T = a(S)$ y

$$\begin{aligned} \left| \sum_{i \in R \cap S} \lambda_i w_i - \lambda_0 T \right| &\leq \sum_{i \in R \cap S} |\lambda_i| \, |w_i| + |\lambda_0| \, T < P(R)[\sum_{i \in R \cap S} |w_i| + T] = \\ &= \frac{a(S_0)}{c_R(S_0)} c_R(S) \leq a(S), \end{aligned}$$

   deducimos que $w'(S) - T' > 0$, y de aquí $w'(S) > T'$.

   Supongamos ahora que $S \in \mathcal{L}$. Entonces

$$a(S) = T - w(S).$$

   Análogamente al caso anterior tenemos que

$$\begin{aligned} T' - w'(S) &= T' - \sum_{i \in S} w_i' = (1 + \lambda_0) T - \sum_{i \in R \cap S} (1 + \lambda_i) w_i - \sum_{i \in S - R} w_i = \\ &= [T - w(S)] + [\lambda_0 T - \sum_{i \in R \cap S} \lambda_i w_i]. \end{aligned}$$

   Como $T - w(S) = a(S)$ y

$$\begin{aligned} \left| \lambda_0 T - \sum_{i \in R \cap S} \lambda_i w_i \right| &\leq |\lambda_0| \, T + \sum_{i \in R \cap S} |\lambda_i| \, |w_i| < P(R)[T + \sum_{i \in R \cap S} |w_i|] = \\ &= \frac{a(S_0)}{c_R(S_0)} c_R(S) \leq a(S), \end{aligned}$$

   deducimos que $T' - w'(S) > 0$, y de aquí que $w'(S) < T'$.

   Para la segunda parte de la demostración supongamos que $\exists\, Q > P(R)$ y veremos que, en este caso, el juego dado por $[T'; w_1', ..., w_n']$ no es equivalente al juego inicial $[T; w_1, ..., w_n]$, para todo λ_i, $i \in R$ tal que $|\lambda_i| < Q$.

Sea $S_0 \subseteq N$ tal que $P(R) = \dfrac{a(S_0)}{c_R(S_0)}$. Si $S_0 \in W$, tomando

$$\lambda_0 = \epsilon \ \text{ y } \ \lambda_i = \begin{cases} -\epsilon & \text{si } w_i \geq 0,\ i \in R \\ \epsilon & \text{si } w_i < 0,\ i \in R \end{cases}$$

con $P(R) < \epsilon < Q$, veamos que llegamos a una contradicción sobre S_0.

$$\begin{aligned} w'(S_0) - T' &= [w(S_0) - T] + [\sum_{i \in R \cap S_0} \lambda_i w_i - \lambda_0 T] = a(S_0) - \epsilon\,[T + \sum_{i \in R \cap S_0} |w_i|] = \\ &= a(S_0) - \epsilon\, c_R(S_0) < a(S_0) - \frac{a(S_0)}{c_R(S_0)} c_R(S_0) = 0, \end{aligned}$$

y, por lo tanto, $S_0 \notin W$.

De manera análoga, si $S_0 \in \mathcal{L}$, tomando

$$\lambda_0 = -\epsilon \ \text{ y } \ \lambda_i = \begin{cases} \epsilon & \text{si } w_i \geq 0,\ i \in R \\ -\epsilon & \text{si } w_i < 0,\ i \in R \end{cases}$$

con $P(R) < \epsilon < Q$, veamos que también llegamos a una contradicción sobre S_0.

$$\begin{aligned} T' - w'(S_0) &= [T - w(S_0)] + [\lambda_0 T - \sum_{i \in R \cap S_0} \lambda_i w_i] = a(S_0) - \epsilon\,[T + \sum_{i \in R \cap S_0} |w_i|] = \\ &= a(S_0) - \epsilon\, c_R(S_0) < a(S_0) - \frac{a(S_0)}{c_R(S_0)} c_R(S_0) = 0, \end{aligned}$$

y, por lo tanto, $S_0 \notin \mathcal{L}$.

2. Si $0 \notin R$, entonces $T' = T$, $c_R(S) = \sum_{i \in R \cap S} |w_i|$ y $P(R) = \min\limits_{\substack{S \subseteq N \\ R \cap S \neq \emptyset}} \dfrac{a(S)}{\sum_{i \in R \cap S} |w_i|}$

Supongamos en primer lugar que $S \in W$. Entonces

$$a(S) = w(S) - T.$$

$$w'(S) - T' = \sum_{i \in S} w'_i - T' = \sum_{i \in R \cap S} (1 + \lambda_i) w_i + \sum_{i \in S - R} w_i - T = [w(S) - T] + \sum_{i \in R \cap S} \lambda_i w_i.$$

Como $w(S) - T = a(S)$ y

$$\left| \sum_{i \in R \cap S} \lambda_i w_i \right| < P(R) \sum_{i \in R \cap S} |w_i| = \frac{a(S_0)}{c_R(S_0)} c_R(S) \leq a(S),$$

deducimos que $w'(S) - T' > 0$, y de aquí que $w'(S) > T'$.

Supongamos ahora que $S \in \mathcal{L}$. Entonces

$$a(S) = T - w(S).$$

Análogamente al caso anterior tenemos que

$$\begin{aligned} T' - w'(S) &= T' - \sum_{i \in S} w'_i = T - \sum_{i \in R \cap S} (1 + \lambda_i) w_i - \sum_{i \in S - R} w_i = \\ &= [T - w(S)] - \sum_{i \in R \cap S} \lambda_i w_i. \end{aligned}$$

Como $T - w(S) = a(S)$ y

$$\left| \sum_{i \in R \cap S} \lambda_i w_i \right| < P(R) \sum_{i \in R \cap S} |w_i| = \frac{a(S_0)}{c_R(S_0)} c_R(S) \leq a(S),$$

deducimos que $T' - w'(S) > 0$, y de aquí que $w'(S) < T'$.

Para la segunda parte de la demostración supongamos que $\exists\, Q > P(R)$ y veremos que en este caso, el juego dado por $[T'; w'_1, ..., w'_n]$ no es equivalente al juego inicial $[T; w_1, ..., w_n]$, para todo λ_i, $i \in R$ tal que $|\lambda_i| < Q$.

Sea $S_0 \subseteq N$ tal que $P(R) = \dfrac{a(S_0)}{c_R(S_0)}$. Si $S_0 \in W$, tomando

$$\lambda_i = \begin{cases} -\epsilon & \text{si } w_i \geq 0,\ i \in R \\ \epsilon & \text{si } w_i < 0,\ i \in R \end{cases}$$

con $P(R) < \epsilon < Q$, veamos que llegamos a una contradicción sobre S_0.

$$\begin{aligned} w'(S_0) - T' &= [w(S_0) - T] + \sum_{i \in R \cap S_0} \lambda_i w_i = [w(S_0) - T] - \epsilon \sum_{i \in R \cap S_0} |w_i| = \\ &= a(S_0) - \epsilon\, c_R(S_0) < a(S_0) - \frac{a(S_0)}{c_R(S_0)} c_R(S_0) = 0, \end{aligned}$$

y, por lo tanto, $S_0 \notin W$.

De manera análoga, si $S_0 \in \mathcal{L}$, tomando

$$\lambda_i = \begin{cases} \epsilon & \text{si } w_i \geq 0,\ i \in R \\ -\epsilon & \text{si } w_i < 0,\ i \in R \end{cases}$$

con $P(R) < \epsilon < Q$, veamos que también llegamos a una contradicción sobre S_0.

$$\begin{aligned} T' - w'(S_0) &= [T - w(S_0)] - \sum_{i \in R \cap S_0} \lambda_i w_i = a(S_0) - \epsilon \sum_{i \in R \cap S_0} |w_i| = \\ &= a(S_0) - \epsilon\, c_R(S_0) < a(S_0) - \frac{a(S_0)}{c_R(S_0)} c_R(S_0) = 0, \end{aligned}$$

y, por lo tanto, $S_0 \notin \mathcal{L}$. 2

Observemos que si $0 \notin R$, es decir, si no se modifica la cuota del juego, no es necesario exigir que la representación inicial sea estricta. Basta imponer la condición de que si existen coaliciones cuyo peso sea T, entonces éstas deben tener intersección vacía con R, es decir,

$$\exists\, S \subseteq N : w(S) = T \Rightarrow S \cap R = \emptyset.$$

De aquí se deduce, aplicando la definición de w', que estas coaliciones verifican que $w'(S) = w(S) = T$, y la demostración sería análoga a la realizada para el caso 1.

Al igual que en la Sección 2.4, si nos restringimos a representaciones de juegos de mayoría ponderada monótonos el peso de cada uno de los jugadores no nulos es positivo, y un peso sólo puede ser no positivo si corresponde a un jugador nulo. Supondremos a partir de este momento que $D = \emptyset$.

Teorema 2.10 Si $[T; w_1, ..., w_n]$ es una representación estricta de un J.M.P. monótono con $D = \emptyset$, de R-amplitud coalicional $P(R)$, siendo $\emptyset \neq R \subseteq \{0\} \cup N$ tal que $i \in R$ si y sólo si $\lambda_i \neq 0$, entonces

$$P(R) = \min_{\substack{S \subseteq N \\ R \cap S \neq \emptyset}} \frac{a(S)}{T + w(R \cap S)} \quad \text{si } 0 \in R$$

$$P(R) = \min_{\substack{S \subseteq N \\ R \cap S \neq \emptyset}} \frac{a(S)}{w(R \cap S)} \quad \text{si } 0 \notin R.$$

Demostración:

Es inmediata, ya que, teniendo en cuenta que $D = \emptyset$, se deduce que

$$\sum_{i \in R \cap S} |w_i| = w(R \cap S).$$

2

Ejemplo 2.3 Calculemos la amplitud coalicional para $R = \{1, 2\}$ de la representación $[3; 2, 2, 3]$.

Observemos que no se trata de una representación estricta, ya que $w_3 = T$; sin embargo,

$$\{S \subseteq N : w(S) = T\} = \{\{3\}\} \text{ y } \{\{3\}\} \cap R = \emptyset.$$

Aplicando la definición obtenemos que $\mu_R = \dfrac{1}{4}$, por lo tanto, si $|\lambda_i| < \dfrac{1}{4}$, para $i = 1, 2$, entonces toda representación de la forma

$$[3; 2(1 + \lambda_1), 2(1 + \lambda_2), 3]$$

es equivalente a la inicial.

Ejemplo 2.4 Supongamos que una sociedad de accionistas está constituída por cuatro socios, cada uno de los cuales posee 50.000, 25.000, 25.000 y 5.000 acciones respectivamente. Una propuesta es aprobada por la compañía si la suma de las acciones pertenecientes a los inversores que la apoyan es superior a 60.000 acciones.

Esta situación se corresponde con la representación estricta :

$$[60000; 50000, 25000, 25000, 5000], \quad A = 55000, \ B = 75000.$$

Se puede preveer que al final del año se producirá una variación del capital que afectará a la distribución, tanto de las acciones de los tres primeros accionistas, como de la cuota. Si excluímos la posibilidad de que se produzca la entrada de nuevos socios, la situación puede ser descrita mediante la siguiente representación:

$$[60000(1 + \lambda_0); 50000(1 + \lambda_1), 25000(1 + \lambda_2), 25000(1 + \lambda_3), 5000].$$

Si calculamos su amplitud coalicional para $R = \{0\} \cup \{1, 2, 3\}$ obtenemos

$$\mu_R = \frac{1}{27}.$$

Este último resultado nos permite asegurar que si $|\lambda_i| < \dfrac{1}{27}$, $i = 0, 1, 2, 3$, entonces toda representación de la forma anterior es equivalente a la inicial.

Así, por ejemplo, la representación $[62143; 48214, 25893, 24107, 5000]$ sería una de ellas.

2.6.1 Amplitud coalicional con suma de pesos constante

A continuación pasamos a estudiar un caso particular del descrito para la amplitud coalicional en la que las modificaciones de los pesos tan solo afectarán a dos jugadores, mientras que la cuota de la representación se mantiene constante, al igual que la suma de los pesos de los n jugadores del juego. Teniendo en cuenta esta nueva situación, no será necesario considerar representaciones estrictas de J.M.P.

El hecho de suponer que la suma de los pesos de los jugadores permanezca constante nos permite interpretar a los jugadores implicados como **donante** y **receptor** del juego (o viceversa), pues la disminución que afecta al peso de uno coincide con el incremento que experimenta el peso del otro.

Esta nueva versión de la amplitud coalicional podrá aplicarse en el estudio de situaciones en las que se produzca un intercambio de acciones entre dos accionistas, sin que ello afecte al control de la compañía.

Dada $[T; w_1, ..., w_n]$ una representación de un J.M.P. monótono consideremos, sin pérdida de generalidad, que la coalición de 2 jugadores es la formada por $R = \{1, 2\}$ y que

$$\exists\, S \subseteq N : w(S) = T \Rightarrow S \cap \{1, 2\} = \emptyset,$$

es decir, las coaliciones que tienen peso T no contienen ni al jugador 1 ni al 2.

En este caso, pretendemos encontrar, para representaciones de juegos de mayoría ponderada, el máximo real positivo δ, tal que si

$$|\lambda_1| < \delta$$

entonces

$$[T'; w_1', w_2', w_3', ..., w_n'],$$

en donde

$$\begin{cases} T' = T \\ w_i' = (1 + \lambda_i) w_i \ \text{ si } i = 1, 2 \\ w_i' = w_i \ \text{ si } i \neq 1, 2 \end{cases}$$

es una representación equivalente a la inicial $[T; w_1, ..., w_n]$, con la condición adicional de que la suma de los pesos de los jugadores de ambas representaciones sea constante, es decir, $\sum_{i=1}^{n} w_i = \sum_{i=1}^{n} w'_i$.

Definición 2.5 Sea $[T; w_1, ..., w_n]$ una representación de un juego de mayoría ponderada monótono tal que $w_1 \geq w_2$, $R = \{1, 2\}$ y si $\exists\, S \subseteq N$ tal que $w(S) = T$, entonces $S \cap \{1, 2\} = \emptyset$. Definimos la R-amplitud coalicional con suma de pesos constante de la representación como

$$P_C(R) = \min \{ \min_{\substack{S \subseteq N \\ S \cap R = \{1\}}} \frac{a(S)}{w_1}, \min_{\substack{S \subseteq N \\ S \cap R = \{2\}}} \frac{a(S)}{w_1} \},$$

y la designaremos por

$$\mu_R^C[T; w_1, ..., w_n] = P_C(R).$$

El mínimo $P_C(R)$ es alcanzado por, como mínimo, una coalición, a la que denominaremos S_0.

Teorema 2.11 Para $R = \{1, 2\}$, si $|\lambda_1| < P_C(R)$, $w_1 \geq w_2$ y si $\exists\, S \subseteq N$ tal que $w(S) = T$, entonces $S \cap \{1, 2\} = \emptyset$, entonces la representación $[T; (1 + \lambda_1)w_1, (1 + \lambda_2)w_2, w_3, ..., w_n]$ es equivalente a $[T; w_1, ..., w_n]$ y $P_C(R)$ es la máxima cota superior para la constante λ_1.

Demostración:

La condición de que la suma de los pesos sea constante nos permite deducir que

$$\lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2 = 0.$$

Observemos en primer lugar que si $\exists\, S \subseteq N$ tal que $w(S) = T$, entonces por hipótesis debe verificarse que $S \cap \{1, 2\} = \emptyset$ y de aquí se deduce que $w(S) = w'(S) = T$. A partir de este momento excluiremos este caso.

Teniendo en cuenta la observación anterior, para la primera parte de la demostración es suficiente probar que $w'(S) > T$ para toda coalición $S \in W$ y que $w'(S) < T$ para toda coalición $S \in \mathcal{L}$.

Teniendo en cuenta que

$$w'(S) - T = [w(S) - T] + \sum_{i \in R \cap S} \lambda_i w_i,$$

si $R \cap S = \emptyset$ ó $R \cap S = \{1, 2\} = R$, entonces $w'(S) = w(S)$, y está claro que si $S \in W$ entonces $w'(S) > T$, y, análogamente, si $S \in \mathcal{L}$, tenemos que $w'(S) < T$.

Si excluimos estos dos casos, supongamos en primer lugar que $S \in W$. Entonces $w(S) > T$ y

$$a(S) = w(S) - T.$$

- Si $R \cap S = \{1\}$, entonces

  $$w'(S) - T = [w(S) - T] + \lambda_1 w_1.$$

  Como $a(S) = w(S) - T$ y $|\lambda_1 w_1| < P_C(R) \cdot w_1 \leq a(S)$, deducimos que $w'(S) - T > 0$, y de aquí que $w'(S) > T$.

- Si $R \cap S = \{2\}$, entonces

  $$w'(S) - T = [w(S) - T] + \lambda_2 w_2 = [w(S) - T] - \lambda_1 w_1,$$

  y aplicando el mismo razonamiento deducimos que $w'(S) > T$.

Supongamos ahora que $S \in \mathcal{L}$. Entonces

$$a(S) = T - w(S)$$

- Si $R \cap S = \{1\}$, entonces

  $$T - w'(S) = [T - w(S)] - \lambda_1 w_1$$

  Como $a(S) = T - w(S)$ y $|\lambda_1 w_1| < P_C(R) \cdot w_1 \leq a(S)$, deducimos que $T - w'(S) > 0$, y de aquí $w'(S) < T$.

- Si $R \cap S = \{2\}$, entonces

  $$T - w'(S) = [T - w(S)] - \lambda_2 w_2 = [T - w(S)] + \lambda_1 w_1,$$

  y al igual que antes obtenemos que $w'(S) < T$.

Para la segunda parte de la demostración supongamos que $\exists\, Q > P_C(R)$ y veamos que el juego $[T;(1+\lambda_1)w_1,(1+\lambda_2)w_2,w_3,...,w_n]$ no es equivalente al inicial $[T;w_1,...,w_n]$, para $|\lambda_1| < Q$.

Sea $S_0 \subseteq N$ tal que $P_C(R) = \dfrac{a(S_0)}{w_1}$.

Si $S_0 \in W$ y $1 \in S_0$, tomando $\lambda_1 = -\epsilon$, con $P_C(R) < \epsilon < Q$, veamos que llegamos a una contradicción sobre S_0.

$$w'(S_0) - T = [w(S_0) - T] + \lambda_1 w_1 = a(S_0) - \epsilon\, w_1 < a(S_0) - P_C(R)\, w_1 = 0,$$

y por lo tanto, $S_0 \notin W$.

Si $S_0 \in W$ y $2 \in S_0$, tomando $\lambda_1 = \epsilon$, con $P_C(R) < \epsilon < Q$, veamos que también llegamos a una contradicción sobre S_0.

$$w'(S_0)-T = a(S_0)+\lambda_2 w_2 = a(S_0)-\lambda_1 w_1 = a(S_0)-\epsilon\, w_1 < a(S_0)-P_C(R)\, w_1 = 0,$$

y al igual que antes, $S_0 \notin W$.

De manera análoga, si $S_0 \in \mathcal{L}$ y $1 \in S_0$, tomando $\lambda_1 = \epsilon$, con $P_C(R) < \epsilon < Q$, veamos que llegamos a una contradicción sobre S_0.

$$T - w'(S_0) = [T - w(S_0)] - \lambda_1 w_1 = a(S_0) - \epsilon\, w_1 < a(S_0) - P_C(R)\, w_1 = 0,$$

y por lo tanto, $S_0 \notin \mathcal{L}$.

Finalmente, si $S_0 \in \mathcal{L}$ y $2 \in S_0$, tomando $\lambda_1 = -\epsilon$, con $P_C(R) < \epsilon < Q$, veamos que también llegamos a una contradicción sobre S_0.

$$T-w'(S_0) = a(S_0)-\lambda_2 w_2 = a(S_0)+\lambda_1 w_1 = a(S_0)-\epsilon\, w_1 < a(S_0)-P_C(R)\, w_1 = 0,$$

y de aquí tendríamos que $S_0 \notin \mathcal{L}$. 2

Ejemplo 2.5 Calculemos la tolerancia, la amplitud y la R-amplitud coalicional de un J.M.P. monótono definido por la siguiente representación estricta: $[75;40,40,10,10,10]$.

En este caso la única coalición ganadora minimal es $\{1,2\}$ y

$$\begin{aligned} A &= \max_{S\in\mathcal{L}} w(S) = 70, \\ B &= \min_{S\in W} w(S) = 80, \end{aligned}$$

por lo tanto

$$\begin{aligned}\tau &= \min\{\frac{T-A}{T+\sum_{i=1}^{n}|w_i|}, \frac{B-T}{T+\sum_{i=1}^{n}|w_i|}\} = \frac{1}{37},\\ \mu &= \min\{\frac{T-A}{T+A}, \frac{B-T}{B+T}\} = \frac{1}{29}.\end{aligned}$$

Si ahora consideramos la R-amplitud coalicional de la representación con $R = \{1,2\}$ obtenemos

$$\mu_R = \min_{\substack{S\subseteq N\\ R\cap S\neq\emptyset}} \frac{|w(S)-T|}{w(R\cap S)} = \frac{1}{16}.$$

Este último resultado nos permite asegurar que si $|\lambda_i| < \frac{1}{16}$, $i = 1,2$, entonces toda representación de la forma

$$[75; 40(1+\lambda_1), 40(1+\lambda_2), 10, 10, 10]$$

es equivalente a la inicial. Así, por ejemplo, la representación

$$[75; 38, 38, 10, 10, 10],$$

sería una de ellas.

Finalmente, si imponemos la condición de que la suma de pesos sea constante obtenemos

$$\mu_R^C = \frac{1}{8}.$$

Así pues, si $|\lambda_1| < \frac{1}{8}$ y $40\lambda_1 + 40\lambda_2 = 0$, entonces toda representación del tipo

$$[75; 40(1+\lambda_1), 40(1+\lambda_2), 10, 10, 10]$$

es equivalente a la inicial. Por ejemplo, si tomamos $\lambda_1 = \frac{1}{10}$, la representación $[75; 44, 36, 10, 10, 10]$ sería una de ellas.

Sin embargo, si consideramos $\lambda_1 = \frac{1}{8} = \mu_R^C$, la representación que se obtiene es

$$[75; 45, 35, 10, 10, 10],$$

que ya no es equivalente a la inicial, puesto que en esta nueva situación

$$W^m = \{\{1,2\}, \{1,3,4,5\}\}.$$

Ejemplo 2.6 Calculemos a continuación la R-amplitud coalicional con suma de pesos constante de la representación: $[7; 15, 6.5, 6, 0.5]$ para $R = \{1, 3\}$.

Observemos que no se trata de una representación estricta, pues $w_2 + w_4 = 7$, pero sin embargo se verifica que

$$\{S \subseteq N : w(S) = T\} = \{\{2, 4\}\} \text{ y } \{\{2, 4\}\} \cap \{\{1, 3\}\} = \emptyset.$$

Aplicando la definición obtenemos que

$$\mu_R^C = \min\{ \min_{\substack{S \subseteq N \\ S \cap R = \{1\}}} \frac{a(S)}{w_1}, \min_{\substack{S \subseteq N \\ S \cap R = \{3\}}} \frac{a(S)}{w_1} \} = \frac{1}{30},$$

por lo tanto, si $|\lambda_1| < \dfrac{1}{30}$ y $15\lambda_1 + 6\lambda_3 = 0$, entonces toda representación del tipo

$$[7; 15(1 + \lambda_1), 6.5, 6(1 + \lambda_3), 0.5]$$

es equivalente a la inicial.

Ejemplo 2.7 Los resultados de las elecciones del 19-X-1997 al Parlamento gallego fueron: 41 escaños para el PP, 19 para el BNG y 15 para el PSOE. Calculemos la R-amplitud coalicional y la R-amplitud coalicional con suma de pesos constante para $R = \{1, 2\}$.

Observemos que dichos resultados pueden ser interpretados como un J.M.P., siendo una de sus representaciones estrictas la dada por

$$[38; 41, 19, 15].$$

A partir de aquí se deduce que $W^m = \{\{1\}\}$, es decir, se trata del juego de unanimidad del PP.

Calculemos a continuación la R-amplitud coalicional con suma de pesos constante. El resultado es

$$\mu_R^C = \min\{ \min_{\substack{S \subseteq N \\ S \cap R = \{1\}}} \frac{a(S)}{w_1}, \min_{\substack{S \subseteq N \\ S \cap R = \{2\}}} \frac{a(S)}{w_1} \} = \frac{3}{41},$$

y por lo tanto, si $|\lambda_1| < \dfrac{3}{41}$ y $41\lambda_1 + 19\lambda_2 = 0$, entonces toda representación del tipo

$$[38; 41(1+\lambda_1), 19(1+\lambda_2), 15]$$

es equivalente a la inicial.

Este valor nos proporciona el nímero máximo de escaños que se pueden intercambiar el PP y el BNG, de manera que la nueva distribución no afecte al resultado obtenido inicialmente en las elecciones.

Si tomamos $\lambda_1 = -\dfrac{3}{41}$, entonces $\lambda_2 = \dfrac{3}{19}$ y obtenemos la representación

$$[38; 38, 22, 15],$$

que deja de ser estricta, aunque define el mismo juego.

Si consideramos $\lambda_1 = -\dfrac{4}{41}$, entonces $\lambda_2 = \dfrac{4}{19}$ y la representación que se obtiene,

$$[38; 37, 23, 15],$$

tampoco es equivalente a la inicial, puesto que ahora

$$W^m = \{\{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}\}.$$

Ejemplo 2.8 Los resultados de las pasadas elecciones municipales del 13-VI-99 en el ayuntamiento de Sevilla fueron los siguientes: el PP obtuvo 13 regidores, el PSOE 12, el Partido Andalucista 6 e IU 2 regidores.

Observemos en primer lugar que esta situación puede definirse mediante la siguiente representación estricta del juego de mayoría ponderada

$$[17; 13, 12, 6, 2].$$

El conjunto de coaliciones ganadoras minimales viene dado por

$$W^m = \{\{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}\}.$$

Calculemos a continuación la R-amplitud coalicional con suma de pesos constante para $R = \{2,4\}$. El resultado es

$$\mu_R^C = \min\{ \min_{\substack{S\subseteq N\\ S\cap R=\{2\}}} \frac{a(S)}{w_2}, \min_{\substack{S\subseteq N\\ S\cap R=\{4\}}} \frac{a(S)}{w_2} \} = \frac{1}{12},$$

y por lo tanto, si $|\lambda_2| < \dfrac{1}{12}$ y $12\lambda_2 + 2\lambda_4 = 0$, entonces toda representación del tipo

$$[17; 13, 12(1+\lambda_2), 6, 2(1+\lambda_4)]$$

es equivalente a la inicial.

Este valor nos proporciona el nímero máximo de regidores que se pueden intercambiar el PSOE e IU, de manera que la nueva distribución no afecte al resultado obtenido inicialmente en las elecciones.

Si tomamos $\lambda_2 = -\dfrac{1}{3}$, entonces $\lambda_4 = 2$ y la representación que se obtiene

$$[17; 13, 8, 6, 6],$$

no es equivalente a la inicial, puesto que ahora

$$W^m = \{\{1,2\}, \{1,3\}, \{1,4\}, \{2,3,4\}\}.$$

Análogamente podríamos repetir el proceso para $R = \{2,3\}$ y calcular μ_R^C para saber el número máximo de regidores que pueden intercambiar el PSOE y el PA sin que se altere el resultado electoral.

En este caso la amplitud coalicional con suma de pesos constante es $\mu_R^C = \dfrac{1}{6}$, con lo cual toda representación del tipo

$$[17; 13, 12(1+\lambda_2), 6(1+\lambda_3), 2]$$

es equivalente a la inicial si $|\lambda_1| < \dfrac{1}{6}$ y $2\lambda_2 + \lambda_3 = 0$.

Si tomamos $\lambda_2 = \dfrac{1}{3}$, entonces $\lambda_3 = -\dfrac{2}{3}$ y la representación que se obtiene

$$[17; 13, 16, 2, 2],$$

no es equivalente a la inicial, puesto que ahora

$$W^m = \{\{1,2\}, \{2,3\}, \{2,4\}, \{1,3,4\}\}.$$

Si $\lambda_2 = \dfrac{5}{12}$, entonces $\lambda_3 = -\dfrac{5}{6}$ y la representación que se obtiene

$$[17; 13, 17, 1, 2],$$

no es equivalente a la inicial, puesto que ahora

$$W^m = \{\{2\}\}$$

y por lo tanto, quedaría reducido a una dictadura, es decir, el PSOE tendría mayoría absoluta.

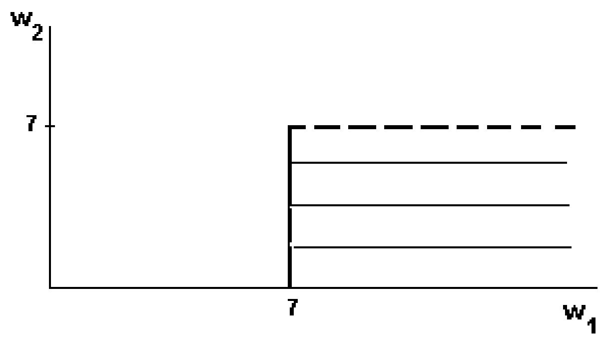
Finalmente, consideremos a continuación un ejemplo sencillo que nos permita interpretar gráficamente los conceptos de R-amplitud coalicional y R-amplitud coalicional con suma de pesos constante.

Ejemplo 2.9 Dada la representación estricta de un J.M.P $[7; 15, 6]$, calculemos, para $R = \{1, 2\}$ ambas amplitudes coalicionales.

Observemos, en primer lugar, que $W^m = \{\{1\}\}$. Si consideramos cada juego de la forma $[7; w_1, w_2]$ como un punto del plano $w_1 w_2$, el conjunto de representaciones equivalentes a la inicial, suponiendo que tan solo se modifican los pesos de los 2 jugadores, viene dado por

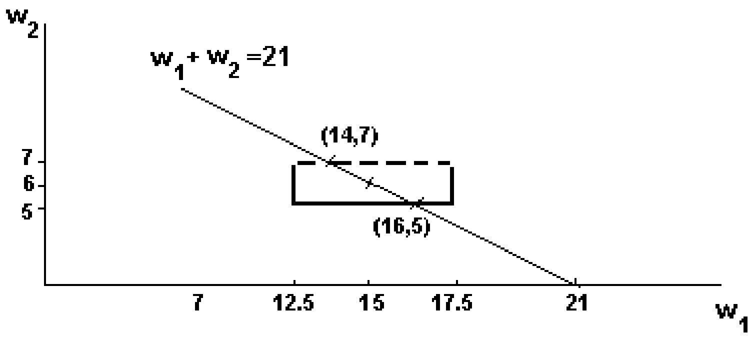
$$\{(w_1, w_2) : w_1 \geq 7 \text{ y } w_2 < 7\}.$$

Es decir, gráficamente es



El valor de la R-amplitud coalicional es $\mu_R = \dfrac{1}{6}$, mientras que $\mu_R^C = \dfrac{1}{15}$. En este caso tenemos que $\mu_R^C < \mu_R$.

Gráficamente tenemos la siguiente situación:



en donde el rectángulo

$$\{(w_1, w_2) : 12.5 \leq w_1 \leq 17.5, \quad 5 \leq w_2 < 7\}$$

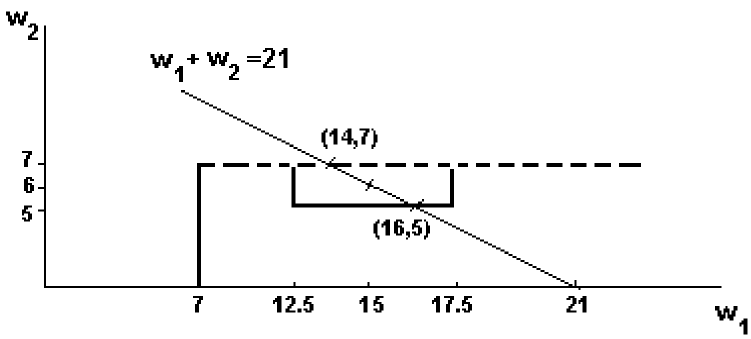
se obtiene a partir de la R-amplitud coalicional $\mu_R = \dfrac{1}{6}$ y el segmento

$$\{(w_1, w_2) : w_1 + w_2 = 21, \quad 14 < w_1 \leq 16\}$$

se obtiene como consecuencia de $\mu_R^C = \dfrac{1}{15}$.

En ambas zonas tenemos garantizado que el juego no cambia.

Finalmente, si incluímos todos los resultados presentados, la gráfica es



Capítulo 3

Juegos completos con mínimo

Una extensión natural de los juegos de mayoría ponderada son los juegos completos. Carreras y Freixas (1996) asociaron a cada juego completo unos invariantes característicos y establecieron sus propiedades básicas. Demostraron, en realidad, que dichos invariantes determinan el juego (unicidad), y que todo sistema admisible formado por estos invariantes está asociado a algún juego simple completo.

En este capítulo estudiaremos diferentes conceptos de solución utilizando los invariantes característicos, restringiéndonos al caso de los juegos completos con mínimo. Para un número de jugadores arbitrario obtendremos el nucleolo por medio de un sistema compatible determinado de ecuaciones, a la vez que caracterizaremos la maximalidad del núcleo (kernel) y proporcionaremos un método para calcular semivalores que es válido para todo juego completo. Finalmente calcularemos la cobertura superaditiva de un juego completo. Recordemos en primer lugar, los principales resultados obtenidos por Carreras y Freixas.

3.1 El retículo asociado a un juego simple completo

Sea (N, W) un juego simple completo de $I-$clases $N_1 > N_2 > ... > N_t$.

Consideremos N el conjunto de los números naturales. Si $\overline{n} \in \mathsf{N}^t$, definimos

$$\Lambda(\overline{n}) = \{\overline{s} \in (\mathsf{N} \cup \{0\})^t : \overline{n} \geq \overline{s}\},$$

donde $\geq$ representa el orden ordinario entre componentes, es decir, $\overline{s} \geq \overline{r}$ si y sólo si $s_k \geq r_k$ para $k = 1, ..., t$. Por lo tanto, si $\overline{n} = (n_1, ..., n_t)$, $\Lambda(\overline{n})$ es el conjunto de todos los vectores $\overline{s} = (s_1, ..., s_t)$ cuyas componentes son naturales y satisfacen $0 \leq s_k \leq n_k$ para todo k.

Necesitamos considerar no sólo la relación de orden $\geq$, sino también el orden más débil, δ, dado por comparación de las sumas parciales, esto es,

$$\overline{s}\, \delta\, \overline{r} \Leftrightarrow s_1 + ... + s_k \geq r_1 + ... + r_k \text{ para } k = 1, .., t.$$

Si $\overline{s}\, \delta\, \overline{r}$ diremos que $\overline{s}$ **domina** $\overline{r}$. A partir de ahora escribiremos

$$\textstyle\sum_k(\overline{s}) = s_1 + ... + s_k \text{ para } k = 1, ..., t$$

y

$$\textstyle\sum(\overline{s}) = (\sum_1(\overline{s}), ..., \sum_t(\overline{s})).$$

Por lo tanto,

$$\overline{s}\, \delta\, \overline{r} \Leftrightarrow \textstyle\sum(\overline{s}) \geq \sum(\overline{r}).$$

El par $(\Lambda(\overline{n}), \delta)$ es un retículo porque $\Lambda(\overline{n})$ contiene el supremo $\overline{r} \vee \overline{s}$ y el ínfimo $\overline{r} \wedge \overline{s}$ (respecto δ) de dos elementos cualesquiera $\overline{r}, \overline{s} \in \Lambda(\overline{n})$, que vienen dados por

$$\begin{aligned}
(\overline{r} \vee \overline{s})_1 &= \max\{r_1, s_1\} \\
(\overline{r} \vee \overline{s})_k &= \max\{\textstyle\sum_k(\overline{r}), \sum_k(\overline{s})\} - \max\{\sum_{k-1}(\overline{r}), \sum_{k-1}(\overline{s})\}\ , k = 2, ..., t,
\end{aligned}$$

y de manera análoga tendríamos las expresiones para el ínfimo, utilizando min en lugar de max.

El retículo es distributivo y posee un elemento máximo, $\overline{n} = (n_1, ..., n_t)$ y un mínimo, $\overline{0} = (0, ..., 0)$.

El siguiente resultado es el teorema de caracterización dado por Carreras y Freixas en 1996.

Teorema 3.1 (Carreras y Freixas, 1996) Dado un vector $\overline{n} \in \mathsf{N}^t$ y una matriz $\mathcal{M}$ cuyas filas $\overline{m}_p = (m_{p1}, ..., m_{pt})$ para $1 \leq p \leq r$ satisfacen las siguientes propiedades:

1. $0 \leq \overline{m}_p \leq \overline{n}$ para $1 \leq p \leq r$,

2. $\overline{m}_p$ y $\overline{m}_q$ no son $\delta-$comparables si $p \neq q$,

3. si $t = 1$ entonces $m_{11} > 0$; si $t > 1$ entonces para cada $k < t$ existe algún p tal que
$$m_{pk} > 0, \quad m_{p(k+1)} < n_{k+1},$$

4. $\mathcal{M}$ está ordenada lexicográficamente por sumas parciales: si $p < q$ existe algún k tal que
$$\sum_h(\overline{m}_p) = \sum_h(\overline{m}_q) \text{ para } h < k \text{ y } \sum_k(\overline{m}_p) \ > \sum_k(\overline{m}_q);$$

entonces existe un juego simple completo (N, W) asociado a $(\overline{n}, \mathcal{M})$.

Teorema 3.2 (Carreras y Freixas, 1996) Dos juegos simples completos (N, W) y (N', W') son isomorfos si y sólo si $\overline{n} = \overline{n}'$ y $\mathcal{M} = \mathcal{M}'$.

Mostramos a continuación como se obtienen los invariantes característicos $(\overline{n}, \mathcal{M})$ a partir de las coaliciones ganadoras y recíprocamente.

Para cada coalición S consideramos el vector de índices $\overline{s}$ definido como
$$\overline{s} = (|S \cap N_1|, ..., |S \cap N_t|).$$

En particular existen $C_{\overline{n},\overline{s}} = \binom{n_1}{s_1}...\binom{n_t}{s_t}$ coaliciones con el mismo vector de índices. Las filas de $\mathcal{M}$ son vectores de índices ordenados lexicográficamente por sumas parciales y corresponden a las coaliciones ganadoras minimales del orden δ en el retículo $\Lambda(\overline{n})$.

Recíprocamente, dados $(\overline{n}, \mathcal{M})$ verificando las condiciones del teorema, el juego (N, W) puede construirse, salvo isomorfismos, a partir de los r vectores (filas de $\mathcal{M}$), junto con la secuencia de tamaños de las clases de indiferencia. El cardinal es $n = \sum_t(\overline{n})$ y $N = \{1, 2, ..., n\}$ está definido siendo $N_1, ..., N_t$ subconjuntos de N formados, respectivamente por $n_1, ..., n_t$ elementos, que deben ser elegidos en el orden natural. Para cada coalición $S \subseteq N$ con vector de índices $\overline{s} = (|S \cap N_1|, ..., |S \cap N_t|)$, obtenemos $v(S)$ teniendo en cuenta que
$$W = \{S \subseteq N : \overline{s}\,\delta\,\overline{m}_p \text{ para algún } p\}.$$

En particular, las coaliciones ganadoras $\delta-$minimales son aquellas cuyo vector de índices es una fila de la matriz $\mathcal{M}$, es decir,

$$W^{\delta m} = \{S \subseteq N : \overline{s} = \overline{m}_p \text{ para algún } p\}.$$

De manera análoga podemos definir los representantes de las coaliciones perdedoras $\delta-$maximales

$$\mathcal{L}^{\delta M} = \{S \subseteq N : \overline{s} \not\delta\, \overline{m}_p, \forall p \text{ y } \overline{r}\,\delta\,\overline{s} \Rightarrow R \in W\}.$$

Cada uno de los modelos de $\mathcal{L}^{\delta M}$ admite un vector de índices, $\overline{\alpha}_k$, que se ubica en la k-ésima fila de la matriz $\mathcal{L}$, que satisface:

1. $\overline{\alpha}_k$ y $\overline{\alpha}_l$ no son $\delta-$comparables si $k \neq l$.
2. Para $m = 1, ...(m < t \text{ si } t > 1)$, existe k tal que $\alpha_{km} < n_m, \ \alpha_{k(m+1)} > 0$.

Ejemplo 3.1 Consideremos el juego simple (N, W) con $n = 6$ y definido por

$$\begin{aligned} W^m = \; & \{\{1,2,3\},\{1,2,4\},\{1,2,5\},\{1,2,6\}, \\ & \{1,3,4\},\{1,3,5\},\{1,3,6\},\{1,4,5\},\{1,4,6\},\{1,5,6\}, \\ & \{2,3,4\},\{2,3,5\},\{2,3,6\},\{2,4,5\},\{2,4,6\},\{2,5,6\}\}. \end{aligned}$$

Este es un juego completo en el que $N_1 = \{1,2\} > N_2 = \{3,4,5,6\}$.

El retículo asociado a este juego es:

$$\begin{array}{ccccc}
 & & & & \boxed{(2,4)} \\
 & & & & \uparrow \\
 & & \boxed{(1,4)} & \longrightarrow & \boxed{(2,3)} \\
 & & \uparrow & & \uparrow \\
(0,4) & \longrightarrow & \boxed{(1,3)} & \longrightarrow & \boxed{(2,2)} \\
\uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\
(0,3) & \longrightarrow & \boxed{(1,2)} & \longrightarrow & \boxed{(2,1)} \\
\uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\
(0,2) & \longrightarrow & (1,1) & \longrightarrow & (2,0) \\
\uparrow & & \uparrow & & \\
(0,1) & \longrightarrow & (1,0) & & \\
\uparrow & & & & \\
(0,0) & & & &
\end{array}$$

en donde los pares enmarcados corresponden a las coaliciones ganadoras.

Los invariantes característicos asociados al juego son

$$\overline{n} = (2,4) \text{ y } \mathcal{M} = (1 \quad 2).$$

Ejemplo 3.2 Dados $\overline{n} = (3,4,2)$ y $\mathcal{M} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 4 & 2 \end{pmatrix}$ veamos como podemos construir el único juego simple completo definido por dichos invariantes.

Consideremos el conjunto de jugadores $N = \{1,2,3,...,9\}$ que forman las I-clases:

$$N_1 = \{1,2,3\} > N_2 = \{4,5,6,7\} > N_3 = \{8,9\}.$$

Las coaliciones δ-minimales vienen dadas por los modelos

$$(2,2,0), \ (1,3,1) \text{ y } (0,4,2),$$

y el resto de las coaliciones ganadoras minimales por los modelos

$$(3,1,0) \text{ y } (1,4,0).$$

En la tabla siguiente determinamos cuantas coaliciones están asociadas a cada modelo.

modelo	número	coaliciones ganadoras minimales
$(2,2,0)$	18	$\{1,2,4,5\},\{1,2,4,6\},...$
$(1,3,1)$	24	$\{1,4,5,6,8\},\{1,4,5,6,9\},...$
$(0,4,2)$	1	$\{4,5,6,7,8,9\}$
$(3,1,0)$	4	$\{1,2,3,4\},\{1,2,3,5\},...$
$(1,4,0)$	3	$\{1,4,5,6,7\},\{2,4,5,6,7\},\{3,4,5,6,7\}$

Por lo tanto se necesitarían 50 coaliciones ganadoras minimales para describir el juego (N,W) en la forma clásica.

3.2 Nucleolo de un juego completo

Sea (N,W) un juego completo (sin jugadores ganadores) con I-clases $N_1 > N_2 > ... > N_t$ e invariantes característicos $(\overline{n},\mathcal{M})$. A partir de la relación de desplazamiento podemos definir el vector normalizado para el nucleolo $\overline{\mathcal{N}}$, cuyas componentes $\mathcal{N}^k$, $1 \leq k \leq t$, corresponden al nucleolo del jugador perteneciente a la I-clase N_k, es decir,

$$\mathcal{N} = \sum_{k=1}^{t} \mathcal{N}^k e_{N_\mathsf{k}},$$

siendo e_{N_k} el vector característico de la coalición N_k, es decir,

$$\begin{array}{rcl} (e_{N_\mathsf{k}})_i & = & 1 \text{ si } i \in N_k \\ (e_{N_\mathsf{k}})_i & = & 0 \text{ si } i \notin N_k. \end{array}$$

Teniendo en cuenta que a jugadores indiferentes les corresponde el mismo pago, podemos definir, análogamente a como se definió el conjunto de preimputaciones, el conjunto

$$\mathcal{J} = \{\overline{x} \in \mathsf{R}^t : \overline{x} \cdot \overline{n} = 1\}.$$

Entonces, la primera etapa del método descrito por Peleg (ver Kopelowitz, 1967) para encontrar el nucleolo para juegos simples completos utilizando programación lineal es:

$$\begin{array}{lll} \text{mínimo} & \alpha & \\ \text{tal que} & \overline{x} \cdot \overline{s} + \alpha \geq 1 & \text{si } \overline{s}\ \delta\, \overline{m}_p \text{ para algún } p \\ & \overline{x} \cdot \overline{s} + \alpha \geq 0 & \text{si } \overline{s}\ \not\delta\, \overline{m}_p \text{ para todo } p \\ & \overline{x} \in \mathcal{J}. & \end{array}$$

Sea α_1 el mínimo de este programa. Si éste es alcanzado por un único punto $\overline{x}$, entonces, $\overline{x} = \overline{\mathcal{N}}$. Generalmente, sin embargo, este mínimo es alcanzado sobre un cierto conjunto, $\mathcal{J}^1$. Existirá, por lo tanto, una cierta colección $\mathcal{B}_1$ de vectores $\overline{s}$ en $\Lambda(\overline{n})$ tal que, para todo $\overline{s} \in \mathcal{B}_1$ y $\overline{x} \in \mathcal{J}^1$

$$1 - \overline{s} \cdot \overline{x} = \alpha_1.$$

Tenemos entonces que resolver el siguiente problema:

$$\begin{array}{lll} \text{mínimo} & \alpha & \\ \text{tal que} & \overline{x} \cdot \overline{s} + \alpha \geq 1 & \text{si } \overline{s}\,\delta\overline{m}_p,\ \text{para algún } p,\ \overline{s} \notin \mathcal{B}_1 \\ & \overline{x} \cdot \overline{s} + \alpha \geq 0 & \text{si } \overline{s}\ \not\delta\,\overline{m}_p, \text{ para todo } p,\ \overline{s} \notin \mathcal{B}_1 \\ & \overline{x} \in \mathcal{J}.^1 & \end{array}$$

La solución nos proporcionará el segundo exceso, α_2 y una nueva colección de vectores $\mathcal{B}_2$, como en el caso anterior. Si continuamos este proceso, obtendremos un único punto que es la solución de la secuencia de los programas lineales descritos. Esta solución es $\overline{\mathcal{N}}$.

Utilizando este procedimiento, Kopelowitz (1967) proporcionó un solo programa lineal, la solución del cual es el nucleolo. El inconveniente de este método es que necesitaba $2^n!$ restricciones, un número demasiado elevado para calcular el nucleolo de un juego de más de 4 jugadores. Owen (1974) redujo el método a la utilización de 4^n restricciones a cambio de introducir más variables y complicar la función objetivo.

La situación puede verse mejorada si se tiene en cuenta propiedades especiales que pueda poseer un determinado juego.

3.3 Juegos completos con mínimo

Definición 3.1 Un juego simple completo (N, W) cuyos invariantes son $(\overline{n}, \mathcal{M})$ tiene mínimo si $\mathcal{M}$ se reduce a una fila.

En este caso el juego se define, usando las tres primeras condiciones del Teorema 3.1, mediante un par $(\overline{n}, \overline{m})$ tal que:

$$\begin{aligned} 1 &\leq m_1 \leq n_1 \\ 1 &\leq m_k \leq n_k - 1 \text{ si } 2 \leq k \leq t-1 \\ 0 &\leq m_t \leq n_t - 1. \end{aligned}$$

Observemos que si $m_t = 0$ el juego tiene n_t jugadores nulos. Si $n_1 = m_1$ el juego tiene n_1 jugadores con veto. Si $m_1 = 1$ y $t = 1$ el juego tiene n_1 jugadores ganadores. Finalmente, si $m_1 = 1$, $t = 2$ y $m_2 = 0$ el juego tiene n_1 jugadores ganadores y n_2 jugadores nulos.

Si suponemos que el juego no tiene clases triviales, la matriz de representantes de coaliciones perdedoras $\delta-$maximales es:

$$\begin{pmatrix} \alpha_{11} & n_2 & n_3 & \dots & n_t \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & n_3 & \dots & n_t \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} & \dots & n_t \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha_{t1} & \alpha_{t2} & \alpha_{t3} & \dots & \alpha_{tt} \end{pmatrix}$$

siendo $\alpha_{ij} = \max\{0, \min\{m_1 + ... + m_i - 1 - n_1 - ... - n_{j-1}, n_j\}\}$.

Ejemplo 3.3 Consideremos de nuevo el procedimiento de enmiendas a la Constitución del Canadá (Ejemplo 1.1). Recordemos que una enmienda era aprobada si era aceptada, como mínimo, por 7 de las 10 provincias del Canadá, siempre y cuando la suma de sus poblaciones fuera, como mínimo el 50% de la población total del Canadá. Los porcentajes de dichas provincias son (censo 1961) :

Prince Edward Island (1%)	Saskatchewan (5%)
Newfoundland (3%)	Alberta (7%)
NewBrunswick (3%)	British Columbia (9%)
Nova Scotia (4%)	Quebec (29%)
Manitoba (5%)	Ontario (34%)

Este sistema es un juego completo con mínimo, con $I-$clases

$$N_1 = \{1,2\} > N_2 = \{3,4,5,6,7,8,9,10\},$$

y cuyos invariantes característicos son

$$\overline{n} = (2,8), \quad \overline{m} = (1,6).$$

Veamos a continuación que la nueva ley de la Propiedad Horizontal, aprobada el 6 de abril de 1999, nos ofrece claros ejemplos de juegos con mínimo.

Ejemplo 3.4 Una comunidad de vecinos está constituída por 9 propietarios, cuyas cuotas de participación son del $23.\widehat{3}\,\%$ para tres de ellos, del $9\,\%$ para otros tres y del 1 % para los tres restantes. Para la instalación o adaptación de infraestructuras comunes de acceso a los servicios de telecomunicación o suministros energéticos colectivos es necesaria la aprobación por una tercera parte de los propietarios que a su vez representen la tercera parte de las cuotas de participación.

Veamos que este sistema es un juego completo con mínimo.

En primer lugar observemos que esta situación puede ser descrita mediante un juego simple (N,W), en donde N es el conjunto de propietarios del inmueble y el conjunto de coaliciones ganadoras viene definido por:

$$W = \{S \subseteq N : \sum_{i\in S} v_i \geq \frac{1}{3},\ |S| \geq \frac{1}{3}\,|N|\},$$

siendo v_i, $i = 1, ..., 9$, los porcentajes de participación asignados a cada vecino y tales que

$$\sum_{i \in S} v_i = 1,$$
$$v_1 \geq v_2 \geq ... \geq v_n.$$

Teniendo en cuenta las cuotas de participación se deduce que (N, W) es un juego completo con tres $I-$clases de indiferencia, formada cada una de ellas por tres vecinos, es decir, $\overline{n} = (3, 3, 3)$.

La matriz de coaliciones ganadoras δ-minimales asociada, utilizando tan solo dichos porcentajes es :

$$\mathcal{M} = \left(\begin{array}{ccc} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{array} \right)$$

Sin embargo, si tenemos en cuenta que las coaliciones ganadoras deben verificar también que $|S| \geq \frac{1}{3}|N| = 3$, veremos que la matriz queda reducida a una fila, lo que demostraría que se trata de un juego completo con mínimo, es decir, $\mathcal{M} = \overline{m} = (1, 1, 1)$. Veamos a continuación que, efectivamente se verifica

$$(N, W) \equiv (\overline{n}, \overline{m}),$$

$(\subseteq)$ Supongamos, por contradicción, que $S \notin (\overline{n}, \overline{m})$.

Es suficiente suponer que S es una coalición perdedora δ-maximal, es decir, $\overline{s} = (0, 3, 3)$, $\overline{s} = (1, 0, 3)$ o $\overline{s} = (2, 0, 0)$. Veamos que dichos modelos corresponden a coaliciones perdedoras de (N, W). Para ello observemos que

$$\begin{array}{l} \text{si } \overline{s} = (0,3,3), \text{ entonces } \sum_{i \in S} v_i = \frac{27}{100} + \frac{3}{100} = \frac{3}{10} < \frac{1}{3}, \\ \text{si } \overline{s} = (1,0,3), \text{ entonces } \sum_{i \in S} v_i = \frac{7}{30} + \frac{3}{100} = \frac{79}{300} < \frac{1}{3}, \\ \text{si } \overline{s} = (2,0,0), \text{ entonces } |S| = 2 < 3. \end{array}$$

$(\supseteq)$ Es suficiente comprobar que $S \in W$, siendo $\overline{s} = \overline{m}$. Para ello basta tener en cuenta que $\displaystyle\sum_{i \in S} v_i = \frac{7}{30} + \frac{9}{100} + \frac{1}{100} = \frac{1}{3}$ y que $|S| = 3$.

Teorema 3.3 El número de juegos simples completos con mínimo de n jugadores es $\rho(n) = 2^n - 1$.

Demostración:

Procederemos por inducción.

- Si $n = 1$, existe un único juego completo con mínimo, cuyos invariantes son
$$\overline{n} = (1), \quad \overline{m} = (1),$$
y por lo tanto, en este caso se verifica $\rho(1) = 2 - 1 = 1$.

- Supongamos a continuación que $n > 1$. Veamos en primer lugar que podemos establecer la siguiente relación entre el número de juegos completos con mínimo de n jugadores y el número de juegos completos con mínimo de $n+1$ jugadores
$$\rho(n+1) = 1 + 2\rho(n).$$
Para ello, definimos $\mathcal{P}_n$ como el conjunto de descomposiciones del número n como suma de números naturales.

  Para cada elemento $(n_1, n_2, ..., n_t) \in \mathcal{P}_n$ pueden obtenerse, teniendo en cuenta la definición,
$$n_1(n_2 - 1)...(n_{t-1} - 1)n_t$$
juegos completos con mínimo. Por lo tanto,
$$\rho(n) = \sum_{(n_1,n_2,...,n_t)\in\mathcal{P}_n} n_1(n_2 - 1)...(n_{t-1} - 1)n_t.$$
Si el juego tiene $n+1$ jugadores, definimos $\mathcal{P}_{n+1}$ de manera análoga a la anterior.

  Sea $\mathcal{Q}$ el subconjunto de $\mathcal{P}_{n+1}$ formado por las descomposiciones cuya primera componente es 1. Entonces,
$$|\mathcal{Q}| = |\mathcal{P}_{n+1} - \mathcal{Q}| = |\mathcal{P}_n|,$$
y las biyecciones
$$\begin{array}{cccc} \varphi: & \mathcal{P}_n & \to & \mathcal{Q} \\ & (n_1, n_2, ..., n_t) & \to & (1, n_1, n_2, ..., n_t) \end{array}$$
$$\begin{array}{cccc} \psi: & \mathcal{P}_n & \to & \mathcal{P}_{n+1} - \mathcal{Q} \\ & (n_1, n_2, ..., n_t) & \to & (n_1 + 1, n_2, ..., n_t) \end{array}$$
permiten obtener que, efectivamente,
$$\begin{aligned} \rho(n+1) = \; & 1 + \sum_{(1,n_1,n_2,...,n_t)\in\mathcal{Q}} 1 \cdot (n_1 - 1)(n_2 - 1)...(n_{t-1} - 1)n_t + \\ & + \sum_{(n_1,n_2,...,n_t)\in\mathcal{P}_{n+1}-\mathcal{Q}} (n_1 + 1)(n_2 - 1)...(n_{t-1} - 1)n_t = \\ & = 1 + \sum_{(n_1,n_2,...,n_t)\in\mathcal{P}_n} 1 \cdot (n_1 - 1)(n_2 - 1)...(n_{t-1} - 1)n_t + \\ & + (n_1 + 1)(n_2 - 1)...(n_{t-1} - 1)n_t = 1 + 2\rho(n). \end{aligned}$$

El 1 que aparece en el primer sumando se debe a que en el caso en que $n_1 = n$ existen n_1 juegos con vector $(1, n_1)$, y no $n_1 - 1$ como indica el primer miembro del sumatorio.

Finalmente, veamos que si $\rho(n) = 2^n - 1$, entonces, $\rho(n+1) = 2^{n+1} - 1$. Utilizando el resultado anterior, sabemos que

$$\rho(n+1) = 1 + 2\rho(n),$$

y por hipótesis de inducción sabemos que $\rho(n) = 2^n - 1$, con lo cual,

$$\rho(n+1) = 1 + 2(2^n - 1) = 2^{n+1} - 1.$$

2

3.3.1 Nucleolo

El siguiente teorema muestra cómo se puede obtener el nucleolo como solución de un sistema compatible determinado de ecuaciones, simplificando el método existente.

Teorema 3.4 Sea (N, W) un juego completo con mínimo cuyos invariantes son $(\overline{n}, \overline{m})$. Sea $K = \max\limits_{1 \leq k \leq t} \frac{\sum_{k}(\overline{m})}{\sum_{k}(\overline{n})}$ y $k_1 < k_2 < ... < k_r$, los índices que alcanzan el máximo K. Entonces, el vector $\overline{\mathcal{N}}$ correspondiente al nucleolo es la única solución del sistema

$$\begin{array}{lll}
x^{k_l} & = (r - l + 1)x^{k_r} & \text{si } 1 \leq l \leq r-1 \\
x^j & = x^{k_1} & \text{si } k_1 > 1,\ \ j < k_1 \\
x^j & = x^{k_l} & \text{si } k_{l-1} < j < k_l,\ 2 \leq l \leq r \\
x^j & = 0 & \text{si } k_r < t,\ j > k_r, \\
\sum\limits_{j=1}^{t} x^j n_j & = 1. &
\end{array}$$

Demostración:

Resolviendo el primer problema de programación lineal descrito para juegos completos y adaptado a los juegos completos con mínimo

$$\begin{array}{ll}
\text{mínimo} & \alpha \\
\text{tal que} & \overline{x} \cdot \overline{s} + \alpha \geq 1 \quad \text{si } \overline{s}\,\delta\,\overline{m} \\
 & \overline{x} \cdot \overline{s} + \alpha \geq 0 \quad \text{si } \overline{s}\ \not\delta\,\overline{m} \\
 & \overline{x} \in \mathcal{J},
\end{array}$$

se deduce que

$$\begin{aligned}
\alpha_1 &= 1-K,\\
\mathcal{B}_1 &= \{\overline{s}\,\delta\,\overline{m} : \textstyle\sum_{k_l}(\overline{s}) = \sum_{k_l}(\overline{m}),\ 1\le l\le r\},\\
\mathcal{J}^1 &= \text{envoltura convexa } \{\overline{u}^1,...,\overline{u}^r\},
\end{aligned}$$

donde

$$\overline{u}^l = \left(\underbrace{\frac{1}{\sum_{k_l}(\overline{n})},...,\frac{1}{\sum_{k_l}(\overline{n})}}_{k_l},\underbrace{0,...,0}_{t-k_l}\right),\ \ 1\le l\le r.$$

Si $r=1$, $\mathcal{J}^1$ se reduce a un punto y $\overline{\mathcal{N}} = \overline{u}^1$.

Si $r>1$, resolviendo el segundo problema de programación lineal:

$$\begin{array}{ll}
\text{mínimo} & \alpha\\
\text{tal que} & \overline{x}\cdot\overline{s}+\alpha\ge 1 \quad \text{si } \overline{s}\,\delta\,\overline{m},\ \overline{s}\notin\mathcal{B}_1\\
& \overline{x}\cdot\overline{s}+\alpha\ge 0 \quad \text{si } \overline{s}\ \not\delta\,\overline{m},\ \overline{s}\notin\mathcal{B}_1\\
& \overline{x}\in\mathcal{J}^1,
\end{array}$$

obtenemos que

$$\begin{aligned}
\alpha_2 &= 1-K-\frac{1}{\sum\limits_{l=1}^{r} l(\sum_{k_{r+1-l}}(\overline{n})-\sum_{k_{r-l}}(\overline{n}))}, \quad (\textstyle\sum_0(\overline{n})=0),\\
\mathcal{B}_2 &= \{\overline{s}\,\delta\,\overline{m} : \sum_{l=1}^{r}(\textstyle\sum_{k_l}(\overline{s})-\sum_{k_l}(\overline{m}))=1\}.
\end{aligned}$$

De la eficiencia, igualando los excesos de los modelos pertenecientes a $\mathcal{B}_2$ y usando sólo las variables $k_1,...,k_r$ obtenemos el sistema:

$$\begin{array}{l}
x^{k_l}+x^{k_{l+2}} = 2x^{k_{l+1}}, \quad l=1,...,r-2\\
x^{k_{r-1}} = 2x^{k_r},
\end{array}$$

es decir,

$$\left\{\begin{array}{l}
x^{k_1}+x^{k_3}=2x^{k_2}\\
x^{k_2}+x^{k_4}=2x^{k_3}\\
x^{k_3}+x^{k_5}=2x^{k_4}\\
\vdots\\
x^{k_{r-2}}+x^{k_r}=2x^{k_{r+1}}\\
x^{k_{r-1}}=2x^{k_r}.
\end{array}\right.$$

Es sencillo comprobar que este sistema es equivalente a

$$x^{k_l} = (r - l + 1)x^{k_r} \quad \text{si } 1 \leq l \leq r - 1,$$

que no son más que las $r - 1$ primeras ecuaciones del sistema propuesto inicialmente en el teorema.

Finalmente, el sistema inicial

$$\begin{array}{lll} x^{k_l} & = (r - l + 1)x^{k_r} & \text{si } 1 \leq l \leq r - 1 \\ x^j & = x^{k_1} & \text{si } k_1 > 1, \;\; j < k_1 \\ x^j & = x^{k_l} & \text{si } k_{l-1} < j < k_l, \;\; 2 \leq l \leq r \\ x^j & = 0 & \text{si } k_r < t, \; j > k_r, \\ \sum\limits_{j=1}^{t} x^j n_j & = 1. & \end{array}$$

es compatible determinado, y por lo tanto $\mathcal{J}^2$ tiene una única imputación que coincide con $\overline{\mathcal{N}}$. 2

Corolario 3.1 Si (N, W) es un juego simple completo con mínimo con jugadores con veto, entonces $\overline{\mathcal{N}} = \{(\frac{1}{n_1}, 0, ..., 0)\}$, es decir, el nucleolo es 0 para los jugadores que no tienen veto y es igual al pago para los jugadores con veto.

Demostración:

Como el juego tiene jugadores con veto, entonces $m_1 = n_1$, y a partir de este hecho, el valor

$$K = \max_{1 \leq k \leq t} \frac{\sum_k (\overline{m})}{\sum_k (\overline{n})} = 1,$$

se alcanza en el índice $k_1 = 1$. Aplicando el teorema anterior obtenemos que el nucleolo del juego es la solución del siguiente sistema:

$$\begin{array}{ll} x^j = 0, & \text{si } 1 = k_1 > t\,, \;\; j > 1 \\ \sum\limits_{j=1}^{t} x^j n_j = 1, & \end{array}$$

es decir,

$$\begin{array}{l} x^1 = \dfrac{1}{n_1}, \\ x^j = 0, \qquad j > 1. \end{array}$$

Si el juego tiene una única I-clase, entonces $\overline{n} = (n_1)$ y $\overline{m} = (m_1)$. Como estamos suponiendo que el juego tiene jugadores con veto, tenemos que $m_1 = n_1$ y

$$K = \frac{m_1}{n_1} = 1.$$

Este valor se alcanza en el índice $k_1 = 1$, y aplicando el teorema anterior, el nucleolo es la solución de

$$x^1 n_1 = 1,$$

es decir, $x^1 = \dfrac{1}{n_1}$. 2

Ejemplo 3.5 Consideremos $N = \{1, 2, ..., 10\}$ y pensemos que los jugadores de $N_1 = \{1, 2\}$ son blancos, los de $N_2 = \{3, 4, 5, 6\}$ son azules y los de $N_3 = \{7, 8, 9, 10\}$ rojos. Diremos que una coalición S es ganadora si satisface:

1. S tiene como mínimo 5 miembros,
2. S tiene como mínimo 2 miembros que no son rojos, y
3. S tiene como mínimo 1 miembro blanco.

Claramente este juego es completo con mínimo con 3 clases de indiferencia: dos jugadores del mismo color son igualmente deseables y el rojo es menos deseado que el azul, que es menos deseable que el blanco. Es decir,

$$N_1 > N_2 > N_3.$$

No es difícil ver que una coalición S que tenga asociado el vector $(1, 1, 3)$ es una coalición ganadora δ-minimal, y el resto de coaliciones ganadoras minimales viene dado por los modelos:

$$(1, 2, 2),\ (1, 3, 1), (1, 4, 0), (2, 0, 3),\ (2, 1, 2),\ (2, 2, 1) \text{ y } (2, 3, 0).$$

Utilizando los invariantes característicos el juego viene determinado por:

$$\begin{aligned} \overline{n} &= (2, 4, 4), \\ \overline{m} &= (1, 1, 3), \end{aligned}$$

mientras que para describirlo mediante el método clásico serían necesarias 194 coaliciones ganadoras minimales.

Utilizando el Teorema 3.4 obtenemos que

$$K = \max\left\{\frac{1}{2}, \frac{2}{6}, \frac{5}{10}\right\} = \frac{1}{2}.$$

Este máximo es alcanzado por los índices $(k_1, k_2) = (1, 3)$. A partir de aquí obtenemos el (pre)nucleolo del juego resolviendo el sistema compatible determinado siguiente:

$$\begin{aligned} x^1 &= 2x^3 \\ x^2 &= x^3 \\ 2x^1 + 4x^2 + 4x^3 &= 1. \end{aligned}$$

La solución del cual es

$$\overline{\mathcal{N}} = (\frac{2}{12}, \frac{1}{12}, \frac{1}{12}),$$

es decir, asigna $\frac{2}{12}$ a cada miembro de color blanco, y asigna $\frac{1}{12}$ al resto de miembros.

Ejemplo 3.6 En el sistema de enmiendas a la Constitución del Canadá, como ya hemos comentado, el juego está definido por $\overline{n} = (2, 8)$ y $\overline{m} = (1, 6)$.

En este caso

$$K = \max\left\{\frac{1}{2}, \frac{7}{10}\right\} = \frac{7}{10},$$

y es alcanzado por el índice $k_1 = 2$. Utilizando el Teorema 3.4, obtenemos que el nucleolo es la solución del sistema compatible determinado siguiente:

$$\begin{aligned} x^1 &= x^2 \\ 2x^1 + 8x^2 &= 1, \end{aligned}$$

es decir,

$$\overline{\mathcal{N}} = (\frac{1}{10}, \frac{1}{10}).$$

Para constatar la eficiencia y economía del método presentamos el siguiente ejemplo.

Ejemplo 3.7 Consideremos ahora un juego simple completo con mínimo de 100 jugadores definido por

$$\begin{aligned} \overline{n} &= (10, 6, 12, 7, 13, 22, 9, 2, 10, 9) \\ \overline{m} &= (3, 5, 6, 2, 5, 14, 3, 1, 6, 5). \end{aligned}$$

El cardinal del conjunto de las coaliciones ganadoras minimales es

$$|W^m| = \sum_{\substack{\overline{s}\delta\overline{m} \\ \sum t(\overline{s})=50}} C_{\overline{n},\overline{s}}.$$

Veamos cual es su nucleolo. En este caso $K = \frac{1}{2}$. Este máximo es alcanzado por los índices

$$(k_1, k_2, k_3, k_4) = (2, 3, 6, 10).$$

A partir de aquí obtenemos el (pre)nucleolo del juego resolviendo el sistema compatible determinado siguiente

$$\begin{array}{lll} x^{k_l} & = (r-l+1)x^{k_r} & \text{si } 1 \leq l \leq 3 \\ x^1 & = x^{k_1} & \\ x^j & = x^{k_l} & \text{si } k_{l-1} < j < k_l,\ 2 \leq l \leq 4 \\ \sum_{j=1}^{t} x^j n_j & = 1, & \end{array}$$

es decir,

$$\begin{array}{l} x^2 = 4x^{10} \\ x^3 = 3x^{10} \\ x^6 = 2x^{10} \\ x^1 = x^2 \\ x^4 = x^5 = x^6 \\ x^7 = x^8 = x^9 = x^{10} \\ \sum_{j=1}^{t} x^j n_j = 1, \end{array}$$

cuya solución es

$$\overline{\mathcal{N}} = (\frac{4}{214}, \frac{4}{214}, \frac{3}{214}, \frac{2}{214}, \frac{2}{214}, \frac{2}{214}, \frac{1}{214}, \frac{1}{214}, \frac{1}{214}, \frac{1}{214}).$$

3.3.2 Núcleo (*Kernel*)

El núcleo fue introducido por Davis y Maschler como un concepto auxiliar de solución cuyo principal objetivo era desvelar ciertas propiedades del conjunto de negociaciones y computar parte de este conjunto.

Si (N, W) es un juego completo sin clases triviales, entonces el núcleo y el prenúcleo coinciden (Peleg, Rosenmuller y Sudhölter, 1995). Si $x \in \mathcal{K}(v)$ y

$i\,D\,j$ entonces $x_i \geq x_j$, es decir, el núcleo y el prenúcleo respetan la relación de desplazamiento (Isbell, 1956). Esta propiedad desencadena la siguiente definición.

Definición 3.2 El núcleo de un juego completo (N, W) es maximal si coincide con el conjunto de todas las imputaciones y si respeta la relación de desplazamiento.

En esta sección pretendemos determinar bajo qué condiciones el núcleo de un juego simple completo con mínimo es maximal. Consideremos en primer lugar el siguiente lema que hace referencia a los juegos simples completos en general.

Lema 3.1 Sea (N, W) un juego simple completo cuyos invariantes $(\overline{n}, \mathcal{M})$ son tales que $0 < m_{pq} < n_q$ para todo p, q, $1 \leq p \leq r$, $1 \leq q \leq t$. Entonces, $\mathcal{K}(v)$ es maximal.

Demostración:

Demostraremos en primer lugar que el máximo exceso, $s_{ij}(x)$, para $x \in \mathcal{K}(v)$ es alcanzado por las coaliciones ganadoras δ-minimales.

Consideremos $S \in W$, $i \in S$, $j \notin S$, y sea $\overline{s}$ su vector de índices. Entonces $\overline{s}\,\delta\,\overline{m}_p$ para algún p. Como $0 < m_{pq} < n_q$ para todo p, q, existe una coalición R cuyo vector de índices es $\overline{m}_p$ y que verifica $i \in R$, $j \notin R$. Debido a que x respeta la relación de desplazamiento, resulta que $x(S) \geq x(R)$. A partir de aquí

$$e(S, x) \leq e(R, x) \text{ para toda } S \text{ tal que } i \in S,\ j \notin S,$$

es decir,

$$s_{ij}(x) = e(R, x),$$

donde R es una coalición ganadora δ-minimal.

Veamos a continuación que si $x \in \mathcal{I}(v)$ y x respeta la relación de desplazamiento, entonces $x \in \mathcal{K}(v)$.

Como $0 < m_{pq} < n_q$ para todo p, q, existirán coaliciones R y T con el mismo vector de índices que verifican $i \in R$, $j \notin R$, $i \notin T$, $j \in T$. Además,

$v(R) = v(T)$, $x(R) = x(T)$, y por lo tanto,

$$e(R, x) = e(T, x) \text{ y } s_{ij}(x) = s_{ji}(x),$$

con lo cual $x \in \mathcal{K}(v)$.

Concretamente, si $\overline{\mathcal{K}}$ es el núcleo normalizado, resulta que

$$\overline{\mathcal{K}} = \text{envoltura convexa } \{\overline{u}^1, \overline{u}^2, ..., \overline{u}^r\},$$

donde

$$\overline{u}^k = \left(\underbrace{\frac{1}{\sum_k(\overline{n})}, ..., \frac{1}{\sum_k(\overline{n})}}_{k}, \underbrace{0, ..., 0}_{t-k} \right), \text{ para todo } k.$$

2

Teorema 3.5 Sea (N, W) un juego simple completo con mínimo tal que $\mathcal{I}(v)$ contiene más de un punto. Entonces

$K(v)$ es maximal $\Leftrightarrow$ (N, W) no tiene ni jugadores con veto ni jugadores nulos.

Demostración:

$(\Rightarrow)$ Si (N, W) tiene jugadores con veto es sabido que el núcleo está formado por un solo punto, y como $\mathcal{I}(v)$ contiene más de un punto y el núcleo respeta la relación de desplazamiento, podemos afirmar que el núcleo no es maximal.

Si (N, W) tiene n_t jugadores nulos, debido a que el núcleo es razonable en el sentido de Milnor (Maschler, Peleg y Shapley, 1979), tenemos que $x_j = 0$ para todo $j \in N_t$, y de aquí se deduce que el núcleo no es maximal.

$(\Leftarrow)$ Supongamos que (N, W) no tiene jugadores con veto ni jugadores nulos; entonces $m_1 \neq n_1$ y $m_t \neq 0$. Es decir, nos encontramos en la siguiente situación:

$$1 \leq m_k \leq n_k - 1 < n_k, \quad 1 \leq k \leq t.$$

Utilizando el lema anterior, obtenemos que el núcleo es maximal. 2

Observemos, sin embargo, que un hecho conocido es que todos los juegos simples completos con una única I-clase y todos los juegos simples completos con mínimo con un jugador ganador tienen núcleo maximal. En ambos casos el conjunto de imputaciones queda reducido a un único punto, con lo cual, estos dos casos particulares no contradicen los resultados presentados.

Ejemplo 3.8 Estudiemos la maximalidad del núcleo del Ejemplo 3.5.

Utilizando el teorema anterior, como el juego no tiene jugadores con veto ($m_1 = 1 < 2 = n_1$) ni jugadores nulos ($m_3 = 3 \neq 0$), entonces el núcleo es maximal.

Ejemplo 3.9 Tratemos a continuación el caso del sistema de enmiendas a la Constitución del Canadá (Ejemplo 3.3).

Al igual que en el ejemplo anterior el juego carece de jugadores con veto ($m_1 = 1 < 2$) y de jugadores nulos ($m_2 = 7 \neq 0$), y, por el Teorema 3.5, podemos asegurar que el núcleo es maximal.

3.3.3 Semivalores

En esta sección pretendemos adaptar las fórmulas ya existentes para el cálculo de semivalores al caso en que el juego sea completo con mínimo y venga definido a través de los invariantes característicos en lugar de por las coaliciones ganadoras minimales. La ventaja de definir el juego de esta forma, tal y como mostraron Carreras y Freixas, es que puede ser generado con la utilización de un pequeño número de dígitos, y por lo tanto, desde el punto de vista computacional, es conveniente readaptar dichas fórmulas.

Remarcamos el hecho de que, cuando el núcleo es maximal, los semivalores pueden ser elementos del núcleo, siempre y cuando sean imputaciones.

Los resultados obtenidos en esta sección son extrapolables a los juegos completos en general.

Lema 3.2 Sea (N, v) un juego cooperativo y Ψ un semivalor, entonces

$$i\, I\, j \Rightarrow \Psi_i[v] = \Psi_j[v].$$

Demostración:

Consideremos la permutación $\pi = t_{ij}$. Como $i\,I\,j$, entonces se verifica que $\forall S \subseteq N - \{i, j\}$ $v(S \cup i) = v(S \cup j)$, por lo tanto $\pi v = v$ y, aplicando el axioma de simetría se deduce que

$$\Psi_j[v] = \Psi_{\pi(i)}[v] = \Psi_i[v].$$

2

Si (N, W) es un juego simple completo con mínimo con invariantes $(\overline{n}, \overline{m})$, entonces el semivalor de una $I-$clase está definido aditivamente a partir de los semivalores individuales y, como jugadores indiferentes tienen el mismo semivalor, es suficiente calcularlo para cada I-clase.

Teorema 3.6 Sea (N, W) un juego simple completo con mínimo definido por sus invariantes $(\overline{n}, \overline{m})$, y Ψ un semivalor. Entonces:

$$\Psi(N_i) = \sum_{\overline{s} \in \Lambda_i} p_{\sum_t(\overline{s})} C_{\overline{n},\overline{s}} (n_i - s_i), \quad 1 \leq i \leq t,$$

donde $\Lambda_i = \{\overline{s} \in \Lambda(\overline{n}) : \overline{s} \not\delta\, \overline{m}\ ,\ \overline{n}\,\delta\,\overline{s} + \overline{e}_i\,\delta\,\overline{m}\ \}$ y $\{\overline{e}_i\}$, $i = 1, ..., t$ es la base canónica de R^t, es decir, $e_{ij} = 1$ si $i = j$ y $e_{ij} = 0$ si $i \neq j$. (Λ_i es el conjunto de todos los modelos de coalición, $\overline{s} \in \Lambda(\overline{n})$, en los que los jugadores de la clase i son pivotes).

Demostración:

Como (N, W) es un juego simple, $v(S \cup \{j\}) - v(S)$ será nulo excepto en el caso en que $S \cup \{j\} \in W$ y $S \notin W$, es decir, excepto en las coaliciones en las que j es pivote. Teniendo esto en cuenta, el semivalor del jugador j en el juego es

$$\Psi_j[v] = \sum_{\substack{S \subseteq N - \{j\} \\ S \notin W,\ S \cup \{j\} \in W}} p_s, \text{ donde } s = |S|$$

Para deducir la fórmula dada en el teorema es suficiente tener en cuenta que el juego es completo, y un jugador $j \in N_i$, $j \notin S$ satisface $v(S \cup \{j\}) - v(S) = 1$ cuando el modelo $\overline{s}$ de S pertenece a Λ_i. Además, para cada una de estas coaliciones S de Λ_i, hay $C_{\overline{n},\overline{s}}$ coaliciones con el mismo vector de índices $\overline{s}$, y, finalmente, existen $n_i - s_i$ jugadores en $N_i - S$ que son pivotes en S .

Por último, observemos que $\sum_t(\overline{s})$ es el cardinal de cada coalición que tiene modelo $\overline{s}$ y por lo tanto, $p_s = p_{\sum_t(\overline{s})}$. 2

En particular, los coeficientes

$$p_{\sum_t(\overline{s})} = \frac{(\sum_t(\overline{s}))!(\sum_t(\overline{n}) - \sum_t(\overline{s}) - 1)!}{n!} \quad \text{si } \overline{s} \in \Lambda_i$$

definen el valor de Shapley, mientras que los coeficientes

$$p_{\sum_t(\overline{s})} = \frac{1}{2^{\sum_t(\overline{n})-1}} = \frac{1}{2^{n-1}} \quad \text{si } \overline{s} \in \Lambda_i$$

definen el valor de Banzhaf.

En general, para calcular los semivalores de un juego simple son necesarias todas las coaliciones ganadoras minimales. Utilizando invariantes característicos este cálculo se reduce enormemente, excepto, claro está, en el caso en que cada I-clase esté formada por un solo jugador, pero esta situación no se da si el juego tiene mínimo y $n > 2$.

Ejemplo 3.10 Utilizando el teorema anterior calcularemos el valor de Shapley y el valor de Banzhaf para el juego definido en el ejemplo 3.5.

En este caso

$$\begin{aligned}
\Lambda_1 = \; & \{(0,1,3),(0,1,4),(0,2,2),(0,2,3),(0,2,4),(0,3,1),(0,3,2),\\
& (0,3,3),(0,3,4),(0,4,0),(0,4,1),(0,4,2),(0,4,3),(0,4,4),\\
& (1,0,3),(1,0,4),(1,1,2),(1,2,1),(1,3,0)\}\\
\Lambda_2 = \; & \{(1,0,3),(1,0,4),(1,1,2),(1,2,1),(1,3,0),(2,0,2),(2,1,1),\\
& (2,2,0)\}\\
\Lambda_3 = \; & \{(1,1,2),(1,2,1),(1,3,0),(2,0,2),(2,1,1),(2,2,0)\},
\end{aligned}$$

y, utilizando el teorema anterior obtenemos:

$$\begin{aligned}
\beta_{N_1} &= 0.8554\\
\beta_{N_2} &= 0.7264\\
\beta_{N_3} &= 0.6952
\end{aligned}$$

y por lo tanto,

$$\begin{aligned}
\beta_1 &= \beta_2 = 0.4277\\
\beta_3 &= \beta_4 = \beta_5 = \beta_6 = 0.1816\\
\beta_7 &= \beta_8 = \beta_9 = \beta_{10} = 0.1738.
\end{aligned}$$

De forma análoga, los resultados para el valor de Shapley de cada I-clase son:

$$\begin{aligned} \Phi_{N_1} &= 0.4222 \\ \Phi_{N_2} &= 0.2952 \\ \Phi_{N_3} &= 0.2824, \end{aligned}$$

y los valores correspondientes a cada uno de los jugadores,

$$\begin{aligned} \Phi_1 &= \Phi_2 = 0.2111 \\ \Phi_3 &= \Phi_4 = \Phi_5 = \Phi_6 = 0.0738 \\ \Phi_7 &= \Phi_8 = \Phi_9 = \Phi_{10} = 0.0706 \end{aligned}$$

Ejemplo 3.11 En el caso del sistema de enmiendas de la Constitución del Canadá, a partir de los invariantes característicos,

$$\overline{n} = (2,8), \quad \overline{m} = (1,6)$$

y del Teorema 3.6, sin necesidad de definir el juego mediante sus 112 coaliciones ganadoras minimales, veamos como podemos calcular el valor de Shapley y el valor de Banzhaf de cada jugador.

En este caso

$$\begin{aligned} \Lambda_1 &= \{(0,6),(0,7),(0,8),(1,5)\}, \\ \Lambda_2 &= \{(1,5),(2,4)\}, \end{aligned}$$

y, a partir de aquí, podemos deducir que

$$\Phi_{N_2} = \frac{6!(10-6-1)!}{10!}\binom{2}{1}\binom{8}{5}3 + \frac{6!(10-6-1)!}{10!}\binom{2}{2}\binom{8}{4}4 = 0.7333.$$

Aplicando la eficiencia del valor de Shapley obtenemos que

$$\Phi_{N_1} = 0.2666,$$

y, por lo tanto, el valor de Shapley de cada jugador es:

$$\begin{aligned} \Phi_1 &= \Phi_2 = 0.1333 \\ \Phi_i &= 0.0916, \ i \neq 1,2. \end{aligned}$$

Análogamente, para el valor de Banzhaf tenemos que

$$\begin{aligned}\beta_{N_1} &= \frac{1}{2^9}\left[\binom{2}{0}\binom{8}{6}2+\binom{2}{0}\binom{8}{7}2+\binom{2}{0}\binom{8}{8}2+\binom{2}{1}\binom{8}{5}1\right]=0.3632,\\ \beta_{N_2} &= \frac{1}{2^9}\left[\binom{2}{1}\binom{8}{5}3+\binom{2}{2}\binom{8}{4}4\right]=1.203125,\end{aligned}$$

y, por lo tanto, para cada jugador,

$$\begin{aligned}\beta_1 &= \beta_2 = 0.1816\\ \beta_i &= 0.1504,\ i\neq 1,2.\end{aligned}$$

3.4 La cobertura superaditiva de un juego completo

En algunos juegos cooperativos se supone la existencia de un bien que debe ser distribuído entre los jugadores, que puede ser cuantificado numéricamente y dividido tantas veces como sea necesario, y respecto del cual las preferencias de los agentes del juego son equiparables. Los posibles repartos de dicho bien entre los jugadores son los que dan lugar a incrementos y disminuciones de la utilidad de los mismos y, por esta razón, estos juegos cooperativos se denominan juegos con utilidad transferible o juegos TU. En estos casos se considera la utilidad mínima que cada coalición puede conseguir y se describe mediante un único número real.

Sin embargo, si el juego no es superaditivo, los jugadores podrían organizarse en subcoaliciones y alcanzar una ganancia superior a la que les correspondería si se produjese una cooperación entre todos ellos. Una forma de modificar el juego para que se garantice el cumplimiento de la superaditividad es la propuesta por Aumann y Drèze y que a continuación pasamos a definir.

Definición 3.3 Un juego simple (N, v) es superaditivo $\Leftrightarrow v(S\cup T)\geq v(S)+v(T)$ cuando $S\cap T=\emptyset$.

Definición 3.4 (Aumann y Drèze, 1974) La cobertura superaditiva de un juego v es el juego $\widehat{v}$ definido por

$$\widehat{v}(S)=\max\{\sum_{i=1}^{p} v(S^i) : (S^1,...,S^p) \text{ es una partición de } S\}.$$

Naturalmente, la cobertura superaditiva de un juego simple no superaditivo da lugar a un juego cooperativo que no es simple.

En esta última sección determinaremos la cobertura superaditiva de un juego simple completo, no necesariamente con mínimo.

Teorema 3.7 Dado un juego simple completo definido por los invariantes $(\overline{n}, \mathcal{M})$, la cobertura superaditiva $(N, \widehat{v})$ es la solución del programa lineal

$$\begin{array}{ll} \max & \lambda_1 + ... + \lambda_r \\ \text{tal que} & \overline{s}\,\delta\,\lambda_1\overline{m}_1 + ... + \lambda_r\overline{m}_r \\ & \lambda_i \in \mathsf{N} \cup \{0\}. \end{array}$$

para cada coalición S cuyo modelo es $\overline{s}$.

Demostración:

Veamos que efectivamente, para cada coalición S cuyo modelo es $\overline{s}$, $\widehat{v}(S)$ es la solución del programa anterior.

- Si $S \notin W$, entonces $\overline{s} \not\delta\, \overline{m}_k$ para $1 \leq k \leq r$. De aquí se deduce que la solución del programa anterior es $\lambda_1 + ... + \lambda_r = 0$, $(\lambda_1 = ... = \lambda_r = 0)$, que coincide con el valor $\widehat{v}(S) = 0$ que obtenemos aplicando la definición.

- Si $S \in W$ sea l el número máximo de coaliciones ganadoras disjuntas cuya unión está contenida en S. Entonces

  $$\widehat{v}(S) = l.$$

  Sea $\{S^1, S^2, ..., S^l\}$ un conjunto de coaliciones que verifican la propiedad anterior y cuyos modelos son, respectivamente, $\overline{m}^1, \overline{m}^2, ..., \overline{m}^l$. Entonces

  $$\overline{s} \geq \sum_{i=1}^{l} \overline{m}^i.$$

  Para cada modelo $\overline{m}^i$ existe un mínimo valor k, tal que $\overline{m}^i\,\delta\,\overline{m}_k$ (en donde $\overline{m}_k$ es la k-ésima fila de $\mathcal{M}$). Para cada $1 \leq k \leq r$ consideramos el subconjunto $\mathcal{F}_k$ de $\{S^1, S^2, ..., S^l\}$ definido por

  $$\mathcal{F}_k = \{S^i : \overline{m}^i\,\delta\,\overline{m}_k,\ \overline{m}^i \not\delta\, \overline{m}_j \text{ si } j < k\}.$$

Si tomamos $\lambda_k = |\mathcal{F}_k|$, resulta que

$$\overline{s} \geq \sum_{i=1}^{l} \overline{m}^i \,\delta\, \lambda_1 \overline{m}_1 + ... + \lambda_r \overline{m}_r$$

y por lo tanto,

$$l = \lambda_1 + ... + \lambda_r.$$

2

Ejemplo 3.12 Calculemos la cobertura superaditiva del juego simple completo cuyos invariantes son :

$$\overline{n} = (2,2) \text{ y } \mathcal{M} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

A partir de estos invariantes podemos deducir que

$$N = \{1,2,3,4\} \text{ y } N_1 = \{1,2\} > N_2 = \{3,4\}.$$

Además, las coaliciones $\delta-$minimales vienen dadas por los modelos

$$(1,0) \text{ y } (0,2),$$

y el resto de las coaliciones ganadoras por los modelos

$$(2,0),\ (1,1),\ (1,2),\ (2,1) \text{ y } (2,2).$$

Veamos en primer lugar que no se trata de un juego superaditivo. Para ello es suficiente observar que

$$v(\{1,2\}) = 1 < v(\{1\}) + v(\{2\}) = 2.$$

Para construir la cobertura superaditiva del juego tenemos que resolver el siguiente programa lineal

$$\begin{array}{ll} \max & \lambda_1 + \lambda_2 \\ \text{tal que} & \overline{s}\,\delta\, \lambda_1 \overline{m}_1 + \lambda_2 \overline{m}_2 \\ & \lambda_i \in \mathsf{N} \cup \{0\}, \end{array}$$

para cada coalición S cuyo modelo es $\overline{s}$, en donde $\overline{m}_1 = (1,0)$ y $\overline{m}_2 = (0,2)$.

Está claro que para toda coalición perdedora S, la solución de este programa será $\widehat{v}(S) = 0$.

Para cada modelo de coalición ganadora los resultados son los siguientes:

$$
\begin{aligned}
\widehat{v}((1,0)) &= 1 \\
\widehat{v}((0,2)) &= 1 \\
\widehat{v}((2,0)) &= 2 \\
\widehat{v}((1,1)) &= 1 \\
\widehat{v}((1,2)) &= 2 \\
\widehat{v}((2,1)) &= 2 \\
\widehat{v}((2,2)) &= 3.
\end{aligned}
$$

Finalmente, el valor de $\widehat{v}(S)$ para toda $S \subseteq N$ es:

$\widehat{v}(\{\emptyset\}) = \widehat{v}(\{3\}) = \widehat{v}(\{4\}) = 0$,
$\widehat{v}(\{1\}) = \widehat{v}(\{2\}) = 1$,
$\widehat{v}(\{1,2\}) = 2$, $\widehat{v}(\{1,3\}) = \widehat{v}(\{1,4\}) = \widehat{v}(\{2,3\}) = \widehat{v}(\{2,4\}) = \widehat{v}(\{3,4\}) = 1$,
$\widehat{v}(\{1,2,3\}) = \widehat{v}(\{1,2,4\}) = \widehat{v}(\{1,3,4\}) = \widehat{v}(\{2,3,4\}) = 2$,
$\widehat{v}(\{1,2,3,4\}) = 3$.

Corolario 3.2 Dado un juego simple completo definido por los invariantes $(\overline{n}, \mathcal{M})$, entonces

$$(\overline{n}, \mathcal{M}) \text{ es superaditivo} \Leftrightarrow \overline{n} \not\delta\, \overline{m}_k + \overline{m}_l \text{ si } 1 \leq k \leq l \leq r.$$

Demostración:

$(\Leftarrow)$ Supongamos, por contradicción que $(\overline{n}, \mathcal{M})$ no es superaditivo, es decir,

$$\exists\, S, T \in W \text{ tales que } S \cap T = \emptyset.$$

De aquí se deduce que, por ejemplo, $T \subset N - S$ y como $T \in W$, podemos asegurar que $N - S \in W$. Utilizando la condición de que el juego es completo y, suponiendo que la coalición S tiene como modelo $\overline{s}$, tenemos que

$$\exists\; 1 \leq k \leq l \leq r \text{ tales que } \overline{s}\, \delta\, \overline{m}_k \text{ y } \overline{n} - \overline{s}\, \delta\, \overline{m}_l.$$

A partir de aquí obtenemos, tal y como queríamos, que

$$\exists\; 1 \leq k \leq l \leq r \text{ tales que } \overline{n}\, \delta\, \overline{m}_k + \overline{m}_l.$$

($\Rightarrow$) Supongamos, por contradicción que existen $1 \leq k \leq l \leq r$ tales que $\overline{n}\,\delta\,\overline{m}_k + \overline{m}_l$. Sea $S \in W$ tal que $\overline{s} = \overline{m}_k$. Entonces, la coalición $N - S$ es también ganadora ya que $\overline{n} - \overline{s}\,\delta\,\overline{m}_l$. A partir de aquí se deduce que el juego no es superaditivo pues

$$v(N) = 1 < v(S) + v(N - S) = 2.$$

2

Capítulo 4

Dimensión de ciertos juegos simples

Este capítulo está estructurado en dos grandes bloques: en el primero de ellos determinaremos la dimensión de juegos completos con mínimo a partir de sus invariantes característicos, y en el segundo estudiaremos en primer lugar la dimensión de juegos simples que son composición de juegos individualistas vía unanimidad y de juegos simples que son composición de juegos de unanimidad vía individualismo, para a continuación dar una generalización de la dimensión de la clase de juegos simples que pueden expresarse como intersección de m juegos cuyos juegos inducidos son composición de k_i juegos de unanimidad vía individualismo.

Recordemos en primer lugar la definición de dimensión de un juego simple dada en el capítulo de preliminares.

Definición 4.1 La dimensión de un juego (N, W) es el mínimo k tal que existen juegos de mayoría ponderada $(N, W_1), ..., (N, W_k)$ tales que

$$W = W_1 \cap ... \cap W_k.$$

Como ya hemos comentado, los juegos que describen el Congreso de los Estados Unidos y el procedimiento de enmiendas a la Constitución de Canadá son dos interesantes ejemplos de juegos simples de dimensión 2.

Teorema 4.1 Todo juego simple tiene dimensión, y ésta está acotada superiormente por el numero de coaliciones perdedoras maximales.

Veremos a lo largo del capítulo como esta cota de la dimensión de un juego puede verse mejorada en ciertos casos.

4.1 Juegos completos con mínimo

Esta primera sección está dedicada a determinar la dimensión de juegos completos con mínimo a partir de sus invariantes característicos, $(\overline{n}, \overline{m})$, que ya han sido definidos en el capítulo anterior. Inicialmente nos restringiremos a aquéllos que no tienen clases triviales, es decir,

$$\begin{aligned} \overline{n} &= (n_1, ..., n_t) \\ \overline{m} &= (m_1, ..., m_t) \text{ tal que } 1 \leq m_k \leq n_k - 1,\ k = 1, ..., t. \end{aligned}$$

En primer lugar veamos como podemos mejorar la cota de su dimensión con respecto a la dada en el Teorema 4.1 en función de los modelos de coaliciones perdedoras $\delta-$maximales, cuyo número coincide con el de I-clases.

Proposición 4.1 Si $(\overline{n}, \overline{m})$ es un juego completo con mínimo sin clases triviales, entonces

$$\dim(\overline{n}, \overline{m}) \leq t = \text{n}^o \text{ de } I\text{-clases.}$$

Demostración:

Los modelos de coaliciones perdedoras $\delta-$maximales son:

$$\mathcal{L} = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & n_2 & n_3 & \dots & n_t \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & n_3 & \dots & n_t \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} & \dots & n_t \\ : & : & : & & : \\ : & : & : & & : \\ \alpha_{t1} & \alpha_{t2} & \alpha_{t3} & & \alpha_{tt} \end{pmatrix}$$

donde

$$\alpha_{ij} = \max\{0, \min\{m_1 + ... + m_i - 1 - n_1 - ... - n_{j-1}, n_j\}\}.$$

Como consecuencia de su definición de deduce que

$$\alpha_{i1} + ... + \alpha_{ii} = m_1 + ... + m_i - 1 \text{ para } 1 \leq i \leq t.$$

Para $1 \leq k \leq t$, sean $\overline{\alpha}_k = (\alpha_{k1}, ..., \alpha_{kk}, n_{k+1}, ..., n_t)$ los modelos de coaliciones perdedoras $\delta-$maximales y consideramos los juegos de mayoría ponderada

$$(N, W_k) \equiv [q^k; w_1^k, ..., w_n^k]$$

definidos por:

$$\begin{aligned} w_j^k &= \begin{cases} 1 & \text{si } j \in N_l,\ l \geq k+1 \\ \sum\limits_{i=k+1}^{t} (n_i - m_i) + 1 & \text{si } j \in N_l,\ l \leq k \end{cases} \\ q^k &= (m_1 + ... + m_k) \cdot \left(\sum_{i=k+1}^{t} (n_i - m_i) + 1 \right) + m_{k+1} + ... + m_t, \end{aligned}$$

que tienen como modelo de coalición perdedora δ-maximal a $\overline{\alpha}_k$.

Veamos que

$$W = \bigcap_{k=1}^{t} W_k.$$

($\subseteq$) Si $S \in W$, es suficiente considerar el modelo de coalición ganadora $\delta-$minimal $\overline{m} = (m_1, ..., m_t)$ y comprobar que $\overline{m} \in \bigcap\limits_{k=1}^{t} W_k$.

$$w^k(\overline{m}) = (m_1 + ... + m_k) \cdot \left(\sum_{i=k+1}^{t} (n_i - m_i) + 1 \right) + m_{k+1} + ... + m_t = q^k, \ \forall\, k$$

y por lo tanto, $S \in \bigcap\limits_{k=1}^{t} W_k$.

($\supseteq$) Supongamos, por contradicción, que $S \notin W$, y veamos que $\exists\ k = 1, ..., t$ tal que $S \notin W_k$.

Es suficiente considerar modelos de coaliciones perdedoras $\delta-$maximales. Sea $S \notin W$ tal que $\overline{\alpha}_k = (\alpha_{k1}, ..., \alpha_{kk}, n_{k+1}, ..., n_t) = \overline{s}$, veamos que $S \notin W_k$.

$$\begin{aligned} w^k(\overline{\alpha}_k) &= (\alpha_{k1} + ... + \alpha_{kk}) \cdot \left(\sum_{i=k+1}^{t} (n_i - m_i) + 1 \right) + n_{k+1} + ... + n_t = \\ &= (m_1 + ... + m_k - 1) \cdot \left(\sum_{i=k+1}^{t} (n_i - m_i) + 1 \right) + n_{k+1} + ... + n_t = \\ &= q^k - 1 < q^k. \end{aligned}$$

2

Lema 4.1 Sea $(\overline{n}, \overline{m})$ un juego completo con mínimo sin clases triviales tal que $\exists\ k = 2, ..., t$ tal que $m_k = 1$. Entonces existe un juego de mayoría ponderada $[q; w_1, ..., w_n]$ en el que las coaliciones representadas por $\overline{m}$ son ganadoras y las coaliciones cuyos modelos son $\overline{\alpha}_{k-1}$ y $\overline{\alpha}_k$ son perdedoras.

Demostración:

Supongamos, en primer lugar que $k \neq t$.

Sea $[q; w_1, ..., w_n]$ el juego de mayoría ponderada definido por:

$$\begin{aligned} w_j &= \begin{cases} [1 + \sum_{i=k+1}^{t} (n_i - m_i)] \cdot n_k & \text{si } j \in N_l,\ 1 \leq l \leq k-1 \\ 1 + \sum_{i=k+1}^{t} (n_i - m_i) & \text{si } j \in N_k, \\ 1 & \text{si } j \in N_l,\ k+1 \leq l \leq t \end{cases} \\ q &= a \cdot \sum_{i=1}^{k-1} m_i + \sum_{i=k+1}^{t} n_i + 1, \text{ donde } a = [1 + \sum_{i=k+1}^{t} (n_i - m_i)] \cdot n_k. \end{aligned}$$

Tenemos que comprobar que:

1. $w(\overline{m}) \geq q$, donde $\overline{m} = (m_1, ...m_{k-1}, 1, m_{k+1}, ...m_t)$.

$$\begin{aligned} w(\overline{m}) &= a \cdot \sum_{i=1}^{k-1} m_i + [1 + \sum_{i=k+1}^{t} (n_i - m_i)] + \sum_{i=k+1}^{t} m_i = \\ &= a \cdot \sum_{i=1}^{k-1} m_i + \sum_{i=k+1}^{t} n_i + 1 = q. \end{aligned}$$

2. $w(\overline{\alpha}_k) < q$, en donde $\overline{\alpha}_k = (\alpha_{k,1},...,\alpha_{k,k-1},0,n_{k+1},...,n_t)$ y se verifica que $\sum\limits_{i=1}^{k}\alpha_{k,i} = \sum\limits_{i=1}^{k-1}\alpha_{k,i} = \sum\limits_{i=1}^{k} m_i - 1 = \sum\limits_{i=1}^{k-1} m_i$.
$$w(\overline{\alpha}_k) = a\cdot\sum_{i=1}^{k-1}\alpha_{k,i} + \sum_{i=k+1}^{t} n_i = a\cdot\sum_{i=1}^{k-1} m_i + \sum_{i=k+1}^{t} n_i = q-1.$$

3. $w(\overline{\alpha}_{k-1}) < q$, en donde $\overline{\alpha}_{k-1} = (\alpha_{k-1,1},...,\alpha_{k-1,k-1},n_k,...,n_t)$ y se verifica que $\sum\limits_{i=1}^{k-1}\alpha_{k-1,i} = \sum\limits_{i=1}^{k-1} m_i - 1$.
$$\begin{aligned} w(\overline{\alpha}_{k-1}) &= a\cdot\sum_{i=1}^{k-1}\alpha_{k-1,i} + n_k\cdot[1+\sum_{i=k+1}^{t}(n_i-m_i)] + \sum_{i=k+1}^{t} n_i = \\ &= a\cdot[\sum_{i=1}^{k-1} m_i - 1] + a + \sum_{i=k+1}^{t} n_i = a\cdot\sum_{i=1}^{k-1} m_i + \sum_{i=k+1}^{t} n_i = \\ &= q-1. \end{aligned}$$

Por último, si $k = t$, consideramos el juego de mayoría ponderada $[q; w_1,...,w_n]$ definido por:
$$\begin{aligned} w_j &= \begin{cases} n_t & \text{si } j\in N_l,\ l\le t-1 \\ 1 & \text{si } j\in N_t \end{cases} \\ q &= n_t\cdot\sum_{i=1}^{t-1} m_i + 1. \end{aligned}$$

Al igual que en el caso anterior tenemos que demostrar que:

1. $w(\overline{m}) \geq q$, siendo $\overline{m} = (m_1,...,m_{t-1},1)$.
$$w(\overline{m}) = n_t\cdot\sum_{i=1}^{t-1} m_i + 1 = q.$$

2. $w(\overline{\alpha}_t) < q$, siendo $\overline{\alpha}_t = (\alpha_{t,1},...,\alpha_{t,t-1},0)$ y se verifica además que $\sum\limits_{i=1}^{t}\alpha_{t,i} = \sum\limits_{i=1}^{t-1}\alpha_{t,i} = \sum\limits_{i=1}^{t} m_i - 1 = \sum\limits_{i=1}^{t-1} m_i$.
$$w(\overline{\alpha}_t) = n_t\cdot\sum_{i=1}^{t-1}\alpha_{t,i} = n_t\cdot\sum_{i=1}^{t-1} m_i = q-1.$$

3. $w(\overline{\alpha}_{t-1}) < q$, siendo $\overline{\alpha}_{t-1} = (\alpha_{t-1,1}, ..., \alpha_{t-1,t-1}, n_t)$ y se verifica que $\sum_{i=1}^{t-1} \alpha_{t-1,i} = \sum_{i=1}^{t-1} m_i - 1$.

$$w(\overline{\alpha}_{t-1}) = n_t \cdot \sum_{i=1}^{t-1} \alpha_{t-1,i} + n_t = n_t \cdot [\sum_{i=1}^{t-1} m_i - 1] + n_t = q - 1.$$

2

Lema 4.2 Sea $(\overline{n}, \overline{m})$ un juego completo con mínimo sin clases triviales tal que $\exists\ k = 2, ..., t$ tal que $n_k - m_k = 1$. Entonces existe un juego de mayoría ponderada $[q; w_1, ..., w_n]$ en el que las coaliciones representadas por $\overline{m}$ son ganadoras y las coaliciones cuyos modelos son $\overline{\alpha}_{k-1}$ y $\overline{\alpha}_k$ son perdedoras.

Demostración:

En primer lugar supongamos que $k \neq t$.

Sea $[q; w_1, ..., w_n]$ el juego de mayoría ponderada definido por:

$$w_j = \begin{cases} (1 + m_k - \alpha_{k,k})[1 + \sum_{i=k+1}^{t} (n_i - m_i)] = a & \text{si } j \in N_l,\ 1 \leq l \leq k-1 \\ (m_k - \alpha_{k,k})[1 + \sum_{i=k+1}^{t} (n_i - m_i)] = b & \text{si } j \in N_k \\ 1 & \text{si } j \in N_l,\ k+1 \leq l \leq t \end{cases}$$

$$q = w(\overline{m}) = a \sum_{i=1}^{k-1} m_i + b \cdot m_k + \sum_{i=k+1}^{t} m_i$$

Tenemos que comprobar que:

1. $w(\overline{\alpha}_k) < q$, donde $\overline{\alpha}_k = (\alpha_{k,1}, ..., \alpha_{k,k}, n_{k+1}, ..., n_t)$ y $\sum_{i=1}^{k} \alpha_{k,i} = \sum_{i=1}^{k} m_i - 1$.

$$w(\overline{\alpha}_k) = a \sum_{i=1}^{k-1} \alpha_{k,i} + b \cdot \alpha_{k,k} + \sum_{i=k+1}^{t} n_i,$$

Teniendo en cuenta que

$$\sum_{i=1}^{k-1} \alpha_{k,i} = \sum_{i=1}^{k} m_i - 1 - \alpha_{k,k} = \sum_{i=1}^{k-1} m_i + m_k - 1 - \alpha_{k,k}$$

y reagrupando términos, obtenemos que

$$w(\overline{\alpha}_k) = a \sum_{i=1}^{k-1} m_i + b \cdot m_k + \sum_{i=k+1}^{t} m_i - 1 = q - 1.$$

2. $w(\overline{\alpha}_{k-1}) < q$, en donde $\overline{\alpha}_{k-1} = (\alpha_{k-1,1}, ..., \alpha_{k-1,k-1}, n_k, ..., n_t)$ y sabemos que $\sum_{i=1}^{k-1} \alpha_{k-1,i} = \sum_{i=1}^{k-1} m_i - 1$.

$$w(\overline{\alpha}_{k-1}) = a \sum_{i=1}^{k-1} \alpha_{k-1,i} + b \cdot n_k + \sum_{i=k+1}^{t} n_i.$$

Si tenemos en cuenta que $\sum_{i=1}^{k-1} \alpha_{k-1,i} = \sum_{i=1}^{k-1} m_i - 1$, que $n_k - m_k = 1$, es decir, $n_k = 1 + m_k$ y agrupando términos, obtenemos que

$$w(\overline{\alpha}_{k-1}) = a \sum_{i=1}^{k-1} m_i + b \cdot m_k + \sum_{i=k+1}^{t} m_i - 1 = q - 1.$$

Finalmente, si $k = t$, definimos el siguiente juego de mayoría ponderada $[q; w_1, ..., w_n]$:

$$\begin{aligned} w_j &= \begin{cases} 1 + m_t - \alpha_{t,t} & \text{si } j \in N_l,\ l \leq t-1 \\ m_t - \alpha_{t,t} & \text{si } j \in N_t \end{cases} \\ q &= w(\overline{m}) = (1 + m_t - \alpha_{t,t}) \cdot \sum_{i=1}^{t-1} m_i + m_t \cdot (m_t - \alpha_{t,t}) \end{aligned}$$

Como en el caso anterior, veamos que

1. $w(\overline{\alpha}_t) < q$, donde $\overline{\alpha}_t = (\alpha_{t,1}, ..., \alpha_{t,t})$ y $\sum_{i=1}^{t} \alpha_{t,i} = \sum_{i=1}^{t} m_i - 1$.

$$w(\overline{\alpha}_t) = (1 + m_t - \alpha_{t,t}) \sum_{i=1}^{t-1} \alpha_{t,i} + (m_t - \alpha_{t,t}) \cdot \alpha_{t,t}$$

Utilizando que $\sum_{i=1}^{t-1} \alpha_{t,i} = \sum_{i=1}^{t} m_i - 1 - \alpha_{t,t} = \sum_{i=1}^{t-1} m_i + m_t - 1 - \alpha_{t,t}$ obtenemos que

$$w(\overline{\alpha}_t) = (1 + m_t - \alpha_{t,t}) \sum_{i=1}^{t-1} m_i + m_t \cdot (m_t - \alpha_{t,t}) - 1 = q - 1.$$

2. $w(\overline{\alpha}_{t-1}) < q$, siendo $\overline{\alpha}_{t-1} = (\alpha_{t-1,1}, ..., \alpha_{t-1,t-1}, n_t)$ y verificándose que $\sum_{i=1}^{t-1} \alpha_{t-1,i} = \sum_{i=1}^{t-1} m_i - 1$.

$$w(\overline{\alpha}_{t-1}) = (1 + m_t - \alpha_{t,t}) \sum_{i=1}^{t-1} \alpha_{t-1,i} + (m_t - \alpha_{t,t}) \cdot n_{t,t}$$

Teniendo en cuenta que $n_t - m_t = 1$, es decir, $n_t = m_t + 1$, se deduce que

$$w(\overline{\alpha}_{t-1}) = q - 1.$$

2

Proposición 4.2 Sea $(\overline{n}, \overline{m})$ un juego completo con mínimo sin clases triviales y $\overline{\alpha}_i$, $\overline{\alpha}_j$, $i < j$, $j = 2, ..., t$, dos modelos de coaliciones perdedoras $\delta-$maximales. Entonces,

Existe un juego de mayoría ponderada $[q; w_1, ..., w_n]$ en el que las coaliciones representadas por $\overline{m}$ son ganadoras y las coaliciones cuyos modelos son $\overline{\alpha}_i$ y $\overline{\alpha}_j$ son perdedoras $\Leftrightarrow j = i + 1$, $m_j = 1$ ó $j = i + 1$, $n_j - m_j = 1$.

Demostración:

$(\Leftarrow)$ Si $j = i + 1$ y $m_{i+1} = 1$, por el Lema 4.1 sabemos que existe un juego de mayoría ponderada en el que las coaliciones representadas por $\overline{m}$ son ganadoras y las coaliciones cuyos modelos son $\overline{\alpha}_i$ y $\overline{\alpha}_{i+1}$ son perdedoras.

Análogamente, si $j = i + 1$ y $n_{i+1} - m_{i+1} = 1$, la implicación es consecuencia inmediata del Lema 4.2.

$(\Rightarrow)$ Procederemos por reducción al absurdo y distinguiremos dos casos:

1. Supongamos que existe un juego de mayoría ponderada $[q; w_1, ..., w_n]$ en el que las coaliciones representadas por $\overline{m}$ son ganadoras y las coaliciones cuyos modelos son $\overline{\alpha}_i$ y $\overline{\alpha}_j$, con $j = i+1$, $m_j > 1$ y $n_j - m_j > 1$ son perdedoras.

   Sean $\overline{\alpha}_i = (\alpha_{i,1}, ..., \alpha_{i,i}, n_{i+1}, ..., n_t)$ y $\overline{\alpha}_j = (\alpha_{j,1}, ..., \alpha_{j,j}, n_{j+1}, ..., n_t)$, con $j = i + 1$, dichos modelos.

   Como $m_j = m_{i+1} > 1$ deducimos que

   $\alpha_{i+1,i+1} = \max\{0, \min\{m_1+...+m_{i+1}-1-n_1-...-n_i, n_{i+1}\}\} \leq m_{i+1}-2,$

   y, teniendo en cuenta que $\sum_{k=1}^{i+1} \alpha_{i+1,k} = \sum_{k=1}^{i+1} m_k - 1$, esto es equivalente a que

   $$\alpha_{i+1,i+1} = \sum_{k=1}^{i+1} m_k - 1 - \alpha_{i+1,1} - ... - \alpha_{i+1,i} \leq m_{i+1} - 2,$$

   es decir,
   $$\alpha_{i+1,1} + ... + \alpha_{i+1,i} \geq m_1 + ... + m_i + 1.$$

   Teniendo esto en cuenta y que $n_{i+1} - m_{i+1} > 1$, es decir, $n_{i+1} \geq 2 + m_{i+1}$, podemos definir los siguientes modelos de coaliciones:

   $$\begin{array}{l} \overline{r}_i = \overline{\alpha}_i - \{p, q\} \cup \{l\}, \\ \overline{r}_j = \overline{\alpha}_j - \{l\} \cup \{p, q\}, \\ p, q \in N_{i+1},\ l \in N_k,\ k \leq i. \end{array}$$

   Ambos modelos corresponden a coaliciones ganadoras ya que

   $$\begin{array}{rcl} \sum_i(\overline{r}_i) & = & r_{i1} + ... + r_{ii} = m_1 + ... + m_i \\ \sum_j(\overline{r}_j) & = & r_{j1} + ... + r_{jj} = m_1 + ... + m_j, \end{array}$$

   y por lo tanto,
   $$\overline{r}_i \,\delta\, \overline{m} \text{ y } \overline{r}_j \,\delta\, \overline{m}.$$

   Si comparamos los modelos $\overline{\alpha}_i$ y $\overline{r}_i$ obtenemos

   $$2\, w_{i+1} < w_k,$$

   mientras que si comparamos $\overline{\alpha}_j$ y $\overline{r}_j$ obtenemos

   $$2\, w_{i+1} > w_k.$$

   Ambas desigualdades contradicen el hecho de que pertenezcan a un mismo juego de mayoría ponderada.

2. Supongamos que existe un juego de mayoría ponderada $[q; w_1, ..., w_n]$ en el que las coaliciones representadas por $\overline{m}$ son ganadoras y las coaliciones cuyos modelos son $\overline{\alpha}_i$ y $\overline{\alpha}_j$, $j > i+1,$ son perdedoras.

   Por definición, $n_{i+1} - 1 \geq m_{i+1}$ y $n_{i+2} - 1 \geq m_{i+2}$. Además también se verifica que
$$\alpha_{i+2,\, i+1} + \alpha_{i+2\, ,i+2} \leq m_{i+1} + m_{i+2} - 2.$$

   Como $\alpha_{i+2,\, i+1} + \alpha_{i+2,\, i+2} = \sum_{k=1}^{i+2} m_k - 1 - \sum_{k=1}^{i} \alpha_{i+2,\, k}$, obtenemos que

$$\sum_{k=1}^{i} \alpha_{i+2,\, k} \geq m_1 + ... + m_i + 1,$$

   y a partir de aquí podemos asegurar que

$$\alpha_{j,1} + ... + \alpha_{j,i} \geq m_1 + ... + m_i + 1 \text{ para todo } j > i+1.$$

   Teniendo estos resultados en cuenta podemos definir los siguientes modelos de coaliciones

$$\begin{array}{l} \overline{r}_i = \overline{\alpha}_i - \{p, q\} \cup \{l\}, \\ \overline{r}_j = \overline{\alpha}_j - \{l\} \cup \{p, q\}, \\ \ p \in N_{i+1}, q \in N_{i+2}\, ,\, l \in N_k,\ k \leq i. \end{array}$$

   Ambos modelos corresponden a coaliciones ganadoras ya que

$$\begin{array}{rcl} \sum_i(\overline{r}_i) & = & r_{i1} + ... + r_{ii} = m_1 + ... + m_i \\ \sum_j(\overline{r}_j) & = & r_{j1} + ... + r_{jj} = m_1 + ... + m_j, \end{array}$$

   y por lo tanto,
$$\overline{r}_i\, \delta\, \overline{m} \ \text{ y } \overline{r}_j\, \delta\, \overline{m}.$$

   Si comparamos los modelos $\overline{\alpha}_i$ y $\overline{r}_i$ obtenemos

$$w_p + w_q < w_l,$$

   mientras que si comparamos $\overline{\alpha}_j$ y $\overline{r}_j$ obtenemos

$$w_p + w_q > w_l.$$

   Ambas desigualdades contradicen el hecho de que pertenezcan a un mismo juego de mayoría ponderada. 2

A continuación pasamos a enunciar el teorema que nos permite calcular la dimensión de un juego completo con mínimo sin clases triviales. La idea del mismo se basa en considerar inicialmente el vector $\overline{a} = (a_1, ..., a_t)$ cuyas componentes son

$$a_i = \min\{m_i, n_i - m_i\},\ i = 1, ..., t,$$

y, teniendo en cuenta la Proposición 4.2, ver que la dimensión del juego, que es siempre menor o igual que t, disminuye si alguna de las $t-1$ últimas componentes es 1. A continuación pasamos a describir las variables que aparecerán en dicho teorema.

Si $\{j > 1 : a_j = 1\} \neq \emptyset$, sea $\widehat{j} = \max\{j > 1 : a_j = 1\}$. A partir de aquí construimos el vector binario $\overline{b} = (b_1, ..., b_t)$ que viene definido por: $b_1 = 0$, $b_{\widehat{j}} = 1$ y, si $\widehat{j} < t$, entonces $b_j = 0$ si $j > \widehat{j}$. El resto de sus componentes las definimos recurrentemente desde $\widehat{j} - 1$ hasta 2 en función de a_j y b_{j+1} de la siguiente forma:

$$b_j = \begin{cases} 0 & \text{si } a_j > 1 \text{ o } b_{j+1} = 1 \\ 1 & \text{si } b_{j+1} = 0,\ a_j = 1. \end{cases}$$

A partir de este momento podemos introducir la variable p definida como:

$$p = \begin{cases} 0 & \text{si } \{j > 1 : a_j = 1\} = \emptyset, \\ \sum_{i=1}^{t} b_i & \text{en caso contrario,} \end{cases}$$

y enunciar el teorema.

Teorema 4.2 Si $(\overline{n}, \overline{m})$ es un juego completo con mínimo sin clases triviales y $a_i = \min\{m_i, n_i - m_i\}$, $i = 1, ..., t$, entonces

$$\dim(\overline{n}, \overline{m}) = t - p.$$

Demostración:

Veamos en primer lugar que $\dim(\overline{n}, \overline{m}) \leq t - p$, es decir, que (N, W) se puede expresar como intersección de $t - p$ juegos de mayoría ponderada.

Sean $j_1, ..., j_p$ las p componentes del vector $\overline{b}$ que son 1.

Para $k = 1, ..., p$ definimos los juegos de mayoría ponderada (N, W_k) que contienen, cada uno de ellos, a los modelos de coaliciones perdedoras δ-maximales

$\{\overline{\alpha}_{j_k-1}, \overline{\alpha}_{j_k}\}$ y en los que $\overline{m}$ corresponde a coaliciones ganadoras, tal y como hemos visto en el Lema 4.1 y en el Lema 4.2.

Para $k = p+1, ..., t-p$ consideramos los juegos de mayoría ponderada (N, W_k) que contienen al modelo de coalición perdedora δ-maximal $\overline{\alpha}_k$, $k \neq j_r$, $k \neq j_r - 1$, $\forall\, r = 1, ..., p$ y en los que $\overline{m}$ corresponde a coaliciones ganadoras, tal y como hemos visto en la Proposición 4.1.

A partir de aquí, quedará claro que

$$W = \bigcap_{k=1}^{t-p} W_k.$$

$(\subseteq)$ Si $S \in W$ es suficiente considerar el modelo de coalición ganadora δ-minimal $\overline{s} = (m_1, ..., m_t)$, y aplicando los lemas y la proposición anteriormente citados se deduce que $S \in W_k$ para todo $k = 1, ..., t-p$.

$(\supseteq)$ Supongamos, por contradicción que $S \notin W$, y veremos que $\exists\, k = 1, ..., t-p$ tal que $S \notin W_k$.

Para ello es suficiente considerar los modelos de coaliciones perdedoras δ-maximales, es decir, $\overline{s} = \overline{\alpha}_k$, $k = 1, ..., t$.

- Si $\exists\, r = 1, ..., p$ tal que $\overline{\alpha}_k = \overline{\alpha}_{j_r}$, entonces $S \notin W_r$.
- Si $\forall\, r = 1, ..., p$, $\overline{\alpha}_k \neq \overline{\alpha}_{j_r}$ y $\overline{\alpha}_k \neq \overline{\alpha}_{j_r-1}$, entonces $\exists\, k = p+1, ..., t-p$ tal que $S \notin W_k$.

Veamos a continuación que $\dim(\overline{n}, \overline{m}) = t - p$.

Supongamos, por contradicción que $\dim(\overline{n}, \overline{m}) = t - p - 1$, es decir,

$$W = \bigcap_{k=1}^{t-p-1} W_k,\ (N, W_k) \text{ J.M.P..}$$

Si consideramos los $t-p$ modelos de coaliciones perdedoras maximales siguientes

$$\{\overline{\alpha}_1, ..., \overline{\alpha}_t\} - \{\overline{\alpha}_{j_1-1}, ..., \overline{\alpha}_{j_p-1}\},$$

existiría un juego de mayoría ponderada (N, W_k), $k = 1, ..., t-p-1$ que contendría a dos de estos modelos, y por lo visto en la proposición anterior, esto es imposible. 2

Ejemplo 4.1 El juego completo con mínimo definido por $\overline{n} = (4, 4, 5, 6, 7)$ y $\overline{m} = (2, 1, 3, 5, 3)$ tiene dimensión 3.

Calculemos en primer lugar los modelos de coaliciones perdedoras δ-maximales.

$$\mathcal{L} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & 0 & 5 & 6 & 7 \\ 4 & 1 & 0 & 6 & 7 \\ 4 & 4 & 2 & 0 & 7 \\ 4 & 4 & 5 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- Utilizando la Proposición 4.1 se deduce que $\dim(\overline{n}, \overline{m}) \leq t = 5$.
- Teniendo en cuenta el Lema 4.1 podemos asegurar que existe un juego de mayoría ponderada en el que las coaliciones representadas por $\overline{m}$ son ganadoras y las coaliciones cuyos modelos son $\overline{\alpha}_1$ y $\overline{\alpha}_2$ son perdedoras.

  Teniendo en cuenta el Lema 4.2 podemos asegurar que existe un juego de mayoría ponderada en el que las coaliciones representadas por $\overline{m}$ son ganadoras y las coaliciones cuyos modelos son $\overline{\alpha}_3$ y $\overline{\alpha}_4$ son perdedoras.

  Como consecuencia de estos dos resultados la dimensión del juego es menor o igual que 3.
- Si suponemos que $\dim(\overline{n}, \overline{m}) = 2$, es decir,

  $$W = \bigcap_{k=1}^{2} W_k, \ (N, W_k) \text{ J.M.P,}$$

  aplicando el teorema anterior tenemos que $a_i = \min\{m_i, n_i - m_i\}$, $i = 1, ..., 5$ y podemos construir los vectores

  $$\begin{aligned} \overline{a} &= (2, 1, 2, 1, 3) \\ \overline{b} &= (0, 1, 0, 1, 0) \end{aligned}$$

  y a partir de este último deducir que

  $$\begin{aligned} j_1 = 2 \\ j_2 = 4. \end{aligned}$$

  Si consideramos los modelos de coaliciones perdedoras δ-maximales

  $$\{\overline{\alpha}_1, ..., \overline{\alpha}_5\} - \{\overline{\alpha}_{j_1-1}, \overline{\alpha}_{j_2-1}\} = \{\overline{\alpha}_2, \overline{\alpha}_4, \overline{\alpha}_5\},$$

entonces existiría un juego de mayoría ponderada (N, W_k), $k = 1, 2$, que contendría a dos de estos modelos, y esto es imposible teniendo en cuenta los resultados obtenidos en la Proposición 4.2.

Como hemos comentado anteriormente, los juegos completos son una extensión natural de los juegos de mayoría ponderada. Algunos de los ejemplos de juegos simples que describen situaciones reales, como pueden ser el procedimiento de enmiendas a la Constitución del Canadá o el Congreso de los Estados Unidos, hemos visto que tienen dimensión 2, si bien el segundo de ellos no es completo.

Ante esta situación nos hemos planteado la siguiente pregunta: ¿es posible construir familias de juegos completos cuya dimensión aumente con el número de jugadores?, es decir, ¿para todo natural $n \geq 1$, existe un juego simple completo de dimensión n? Taylor y Zwicker (1995) demostraron que era posible construir juegos simples de cualquier dimensión, es decir, para todo natural $n \geq 1$, existe un juego simple de dimensión n. Sin embargo, los juegos presentados no eran completos. Veremos que la respuesta a la pregunta planteada la obtenemos como consecuencia inmediata de la determinación de la dimensión de los juegos completos con mínimo dada en el teorema anterior, de donde se deduce que sí es posible construir juegos completos (con mínimo) de cualquier dimensión. Este resultado deja patente que la complejidad de la dimensión del juego no está directamente relacionada con el hecho de que la relación de desplazamiento sea total, a la vez que amplía los resultados obtenidos por Taylor y Zwicker (1995) citados anteriormente.

Veamos a continuación como es posible generar para todo natural $n \geq 1$ juegos completos con mínimo de dimensión n.

Corolario 4.1 Para todo natural $n \geq 1$ existe un juego completo con mínimo de dimensión n.

Demostración:

Teniendo en cuenta el teorema anterior es suficiente considerar juegos completos con mínimo con n I-clases de indiferencia no triviales y de manera que $\min\{n_i - m_i, m_i\} > 1$, para todo $i = 2, ..., n$. 2

El siguiente resultado determina la dimensión de juegos completos con mínimo en los que el vector $\overline{a} = (a_1, ..., a_t)$ tiene las $t-1$ últimas componentes 1, es decir, $\overline{a} = (a_1, \underbrace{1, ..., 1}_{t-1})$.

Corolario 4.2 Si $(\overline{n}, \overline{m})$ es un juego completo con mínimo sin clases triviales tal que $\min\{m_i, n_i - m_i\} = 1$, para todo $i = 2, ..., t$, entonces

$$\dim(\overline{n}, \overline{m}) = \begin{cases} \dfrac{t}{2} & \text{si } t \text{ es par} \\ \\ \dfrac{t+1}{2} & \text{si } t \text{ es impar.} \end{cases}$$

Demostración:

- Supongamos en primer lugar que t es par, es decir, $t = 2k$, $k \geq 1$. Obtenemos los siguientes resultados:

$$\begin{aligned} j_1 &= 2 \\ j_2 &= 4 \\ &\vdots \\ j_{p-1} &= 2k-2 \\ j_p &= 2k \end{aligned}$$

en donde $p = k$. Si aplicamos el teorema anterior deducimos que

$$\dim(\overline{n}, \overline{m}) = t - p = 2k - k = k = \frac{t}{2}.$$

- Supongamos que t es impar, es decir, $t = 2k+1$, $k \geq 1$. Los resultados obtenidos en esta situación son los siguientes:

$$\begin{aligned} j_1 &= 3 \\ j_2 &= 5 \\ &\vdots \\ j_{p-1} &= 2k-1 \\ j_p &= 2k+1, \end{aligned}$$

en donde $p = k$. Por lo tanto,

$$\dim(\overline{n}, \overline{m}) = t - p = 2k + 1 - k = k + 1 = \frac{t+1}{2}.$$

2

Una interesante aplicación real de este resultado la volvemos a encontrar, al igual que en el capítulo anterior, al estudiar la recientemente aprobada ley de la Propiedad Horizontal.

Ejemplo 4.2 Una comunidad de vecinos está constituída por 9 propietarios, cuyas cuotas de participación son del $23.\widehat{3}\,\%$ para tres de ellos, del $9\,\%$ para otros tres y del 1 % para los tres restantes. Para la instalación o adaptación de infraestructuras comunes de acceso a los servicios de telecomunicación o suministros energéticos colectivos es necesaria la aprobación por una tercera parte de los propietarios que a su vez representen la tercera parte de las cuotas de participación.

Veamos que se trata de un juego completo con mínimo de dimensión 2.

Como ya hemos comentado en el Ejemplo 3.4, se trata del juego completo con mínimo cuyos invariantes característicos son $\overline{n} = (3, 3, 3)$ y $\overline{m} = (1, 1, 1)$. Utilizando el corolario anterior se deduce que su dimensión es $\dfrac{t+1}{2} = 2$.

Utilizando el Corolario 4.2 y el Teorema 4.2 podemos obtener juegos completos con mínimo de cualquier dimensión con un número reducido de jugadores. Concretamente, es posible construir juegos completos con mínimo cuya dimensión sea n utilizando $4n - 2$ jugadores. Por ejemplo, para obtener un juego completo con mínimo de dimensión 2 necesitaríamos 6 jugadores, para obtener uno de dimensión 3, serían necesarios 10 jugadores...

Corolario 4.3 Si $(\overline{n}, \overline{m})$ es un juego completo con mínimo sin clases triviales, entonces

$$\begin{cases} \dfrac{t}{2} \le \dim(\overline{n}, \overline{m}) \le t & \text{si } t \text{ es par} \\[2ex] \dfrac{t+1}{2} \le \dim(\overline{n}, \overline{m}) \le t & \text{si } t \text{ es impar.} \end{cases}$$

Demostración:

Es consecuencia de la Proposición 4.1 y del corolario anterior. 2

Ejemplo 4.3 Dado el juego completo con mínimo cuyos invariantes característicos son $\overline{n} = (4,5,6,7,3,2)$ y $\overline{m} = (2,1,5,1,2,1)$, veamos que tiene $\dim(\overline{n},\overline{m}) = 3$.

Teniendo en cuenta que $a_i = \min\{m_i, n_i - m_i\}$, $i = 1,...,6$, podemos construir el vector

$$\overline{a} = (2,1,1,1,1,1)$$

Aplicando el Corolario 4.2 para el caso t par, tenemos que:

$$\dim(\overline{n},\overline{m}) = \frac{t}{2} = 3.$$

Determinaremos a continuación la dimensión de juegos completos con mínimo con clases triviales y veremos que la presencia de jugadores nulos o de jugadores con veto no afecta a la dimensión del juego, pero para ello necesitamos el siguiente lema previo que será utilizado a lo largo del capítulo.

Lema 4.3 Si (M, W_M) es un subjuego denso de dimensión k de un juego (N,W), entonces la dimensión de (N,W) también es k.

Demostración:

Demostremos en primer lugar que $\dim(N,W) \leq k$.

Como (M, W_M) tiene dimensión k sabemos que

$$W_M = \bigcap_{i=1}^{k} (W_i)_M, \text{ donde } (M,(W_i)_M) \text{ son J.M.P.}$$

Es decir, $(M,(W_i)_M) \equiv [q^i; w_1^i, ..., w_m^i]$, para $i = 1,...,k$. Como (M, W_M) es denso, es decir, los jugadores de $N - M$ son nulos, si $(M,(W_i)_M)$ es J.M.P., entonces, según el Teorema 1.1 del primer capítulo, (N, W_i) también lo es, para $i = 1,...,k$. Por lo tanto, podemos considerar

$$(N, W_i) \equiv [q^i; w_1^i, ..., w_m^i, \underbrace{0, ..., 0}_{n-m}] \text{ para } i = 1,...,k.$$

A partir de aquí es fácil comprobar que

$$W = \bigcap_{i=1}^{k} W_i, \text{ donde } (N, W_i) \text{ son los J.M.P. anteriores.}$$

($\subseteq$) $S \in W^m$, como los jugadores de $N-M$ son nulos $\Rightarrow S \subseteq M$ y $S \in W \Rightarrow S \in W_M \Rightarrow S \in \bigcap\limits_{i=1}^{k} (W_i)_M \Rightarrow S \in \bigcap\limits_{i=1}^{k} W_i$.

($\supseteq$) $S \in \bigcap\limits_{i=1}^{k} W_i \Rightarrow \sum\limits_{j \in S} w_j^i \geq q^i$ para todo $i = 1, ..., k \Rightarrow S = R \cup T$, $R \subseteq M$ y $T \subseteq N - M$. Por lo tanto, $\sum\limits_{j \in S} w_j^i = \sum\limits_{j \in R} w_j^i \geq q^i$ para todo $i = 1, ..., k \Rightarrow R \in W_M \Rightarrow S \in W$.

Demostremos finalmente que $\dim(N, W) = k$.

Supongamos, por contradicción, que $\dim(N, W) = k - 1$. Entonces

$$W = \bigcap_{i=1}^{k-1} W_i, \text{ donde } (N, W_i) \equiv [q^i; w_1^i, ..., w_n^i].$$

Como (N, W_i) son J.M.P., para $i = 1, ..., k-1$, utilizando el Teorema 1.1 sabemos que los correspondientes juegos $(M, (W_i)_M)$ también son J.M.P. Veamos que entonces la $\dim(M, W_M) = k - 1$, con lo cual llegaremos a contradicción. Para ello es suficiente comprobar que

$$W_M = \bigcap_{i=1}^{k-1} (W_i)_M, \text{ donde } (M, (W_i)_M) \equiv [q^i; w_1^i, ..., w_m^i].$$

($\subseteq$) $S \in W_M \Rightarrow S \subseteq M$ y $S \in W \Rightarrow S \subseteq M$ y $S \in \bigcap\limits_{i=1}^{k-1} W_i \Rightarrow S \in \bigcap\limits_{i=1}^{k-1} (W_i)_M$.

($\supseteq$) $S \in \bigcap\limits_{i=1}^{k-1} (W_i)_M \Rightarrow S \subseteq M$ y $S \in (W_i)_M$ $\forall i = 1, ..., k-1 \Rightarrow S \subseteq M$ y $S \in W_i$ para todo $i = 1, ..., k-1 \Rightarrow S \subseteq M$ y $S \in W \Rightarrow S \in W_M$. 2

En la siguiente proposición veremos como la dimensión de un juego completo con jugadores nulos coincide con la dimensión del juego completo con una I-clase menos (la de los jugadores nulos).

Proposición 4.3 Si $(\overline{n}, \overline{m})$ es un juego completo con jugadores nulos, entonces

$$\dim(\overline{n}, \overline{m}) = t - 1 - p.$$

Demostración:

Es decir, estamos en la siguiente situación

$$\overline{n} = (n_1, ..., n_t) \text{ y } \overline{m} = (m_1, ..., m_{t-1}, 0).$$

Consideramos el juego completo con mínimo sin jugadores nulos definido por

$$\overline{n}_* = (n_1, ..., n_{t-1}) \text{ y } \overline{m}_* = (m_1, ..., m_{t-1}),$$

cuya dimensión es, a partir del Teorema 4.2, es

$$\dim(\overline{n}_*, \overline{m}_*) = t - 1 - p.$$

Ahora bien, $(\overline{n}_*, \overline{m}_*)$ es un subjuego denso del juego $(\overline{n}, \overline{m})$ y, utilizando el lema anterior, tenemos que

$$\dim(\overline{n}, \overline{m}) = \dim(\overline{n}_*, \overline{m}_*) = t - 1 - p.$$

2

El siguiente resultado nos garantiza que la dimensión de un juego no varía si se añaden jugadores con veto.

Lema 4.4 Si (N, W) es un juego simple de dimensión k, entonces la dimensión del juego (N', W') es también k, en donde $N' = N \cup \{i\}$, $i \notin N$ es un jugador con veto en el juego (N', W')

Demostración:

Como $i \in N'$ es un jugador con veto en el juego (N', W') las coaliciones ganadoras de este juego serán:

$$W' = \{S \subseteq N' : S = T \cup \{i\}, T \in W\}.$$

Demostremos en primer lugar que $\dim(N', W') \leq k$.

Como (N, W) tiene dimensión k sabemos que

$$W = \bigcap_{j=1}^{k} W_j, \text{ donde } (N, W_j) \equiv [q^j; w_1, ..., \widehat{w}_i, ..., w_n].$$

Veamos que entonces

$$W' = \bigcap_{j=1}^{k} W'_j, \text{ donde } (N', W'_j) \equiv [q^j + w_i; w_1, ..., w_i, ..., w_n] \text{ y } w_i = \sum_{r \neq i} w_r.$$

$(\subseteq)$ $S \in W' \Leftrightarrow S = T \cup \{i\}$, $T \in W \Rightarrow w(T) \geq q^j$, $\forall j = 1, ..., k \Rightarrow w(S) \geq q^j + w_i$, $\forall j = 1, ..., k \Rightarrow S \in \bigcap_{j=1}^{k} W'_j$.

$(\supseteq)$ $S \in \bigcap_{j=1}^{k} W'_j \Leftrightarrow w(S) \geq q^j + w_i$, $\forall j = 1, ..., k$ y como $w_i = \sum_{r \neq i} w_r$, se deduce que $i \in S$, es decir, $S = T \cup \{i\}$, $w(T) \geq q^j$, $\forall j = 1, ..., k$. A partir de aquí tenemos que $S = T \cup \{i\}$, $T \in W$, con lo cual $S \in W'$.

Veamos finalmente que $\dim(N', W') = k$.

Supongamos, por contradicción que $\dim(N', W') = k - 1$, es decir

$$W' = \bigcap_{j=1}^{k-1} W'_j, \text{ donde } (N', W'_j) \equiv [q^j; w_1, ..., w_i, ..., w_n].$$

Veamos que (N, W) puede expresarse como intersección de $k - 1$ juegos de mayoría ponderada, lo que contradice el hecho de que tenga dimensión k.

$$W = \bigcap_{j=1}^{k-1} W_j, \text{ donde } (N, W_j) \equiv [q^j - w_i; w_1, ..., \widehat{w}_i, ..., w_n].$$

$(\subseteq)$ $S \in W \Rightarrow S \cup \{i\} \in W' \Leftrightarrow w(S \cup \{i\}) \geq q^j$, para todo $j = 1, ..., k-1 \Rightarrow w(S) \geq q^j - w_i$, para todo $j = 1, ..., k-1 \Rightarrow S \in \bigcap_{j=1}^{k-1} W_j$.

$(\supseteq)$ $S \in \bigcap_{j=1}^{k-1} W_j \Leftrightarrow w(S) \geq q^j - w_i$, para todo $j = 1, ..., k-1 \Rightarrow w(S \cup \{i\}) \geq q^j$, para todo $j = 1, ..., k-1 \Rightarrow S \cup \{i\} \in W' \Rightarrow S \in W$ 2

Proposición 4.4 Si $(\overline{n}, \overline{m})$ es un juego completo con jugadores con veto, entonces $\dim(\overline{n}, \overline{m}) = t - 1 - p$.

Demostración:

Es decir, estamos en la siguiente situación

$$\overline{n} = (n_1, n_2, ..., n_t) \text{ y } \overline{m} = (n_1, m_2, ..., m_t).$$

Consideramos el juego completo con mínimo sin jugadores con veto definido por

$$\overline{n}_* = (n_2, ..., n_t) \text{ y } \overline{m}_* = (m_2, ..., m_t),$$

cuya dimensión es, a partir del Terorema 4.2,

$$\dim(\overline{n}_*, \overline{m}_*) = t - 1 - p.$$

Utilizando el lema anterior, tenemos que

$$\dim(\overline{n}, \overline{m}) = \dim(\overline{n}_*, \overline{m}_*) = t - 1 - p.$$

2

La anterior proposición muestra como la dimensión de un juego completo con jugadores con veto coincide con la dimensión del juego completo con una I-clase menos (la de los jugadores con veto)

Ejemplo 4.4 La dimensión del juego completo con mínimo $\overline{n} = (4, 4, 6, 5)$, $\overline{m} = (4, 1, 2, 2)$ es 3.

Consideremos el juego completo con mínimo y sin jugadores con veto cuyos invariantes son $\overline{n}_* = (4, 6, 5)$ y $\overline{m}_* = (1, 2, 2)$. En este caso $\overline{a} = (1, 2, 2)$, y aplicando el Teorema 4.2 tenemos que $p = 0$ y $\dim(\overline{n}_*, \overline{m}_*) = 3$. Finalmente, aplicando la proposición anterior deducimos que $\dim(\overline{n}, \overline{m}) = 3$.

Las dos clases de juegos simples que abordaremos en las secciones 4.2 y 4.3 pueden ser considerados como un caso particular de los llamados juegos simples compuestos, definidos por Shapley en 1962. Los jugadores pertenecen a una de las m cámaras que existen y un acuerdo es previamente aceptado o rechazado en cada una de ellas, para, finalmente, aplicar una decisión global que incluya todos los posibles resultados.

Veremos que ambos tipos de juegos generan juegos simples de cualquier dimensión, es decir, para cada natural $n \geq 1$ existen composiciones de juegos individualistas vía unanimidad y composiciones de juegos de unanimidad vía individualismo de dimensión n.

Una interesante interpretación de estas dos clases de juegos simples la podemos encontrar tanto en el campo de Fiabilidad de Sistemas como en el de Teoría de Circuitos, en donde las llamadas funciones umbral y los sistemas aditivos se corresponden con los juegos de mayoría ponderada. Para entender este paralelismo es necesario tan solo considerar, tal y como ya hemos comentado en el Capítulo II, las componentes del sistema como jugadores, y los subconjuntos de componentes como coaliciones. Desde este nuevo punto de vista, los juegos que acabamos de presentar corresponden, respectivamente, con los sistemas serie-paralelo y paralelo-serie o con los circuitos serie-paralelo y paralelo-serie.

4.2 Composición de juegos individualistas vía unanimidad.

En esta sección determinamos la dimensión de juegos cuyo conjunto de jugadores $N = \{1, 2, ..., n\}$ admite una partición $N_1, ..., N_m$ tal que

$$W = \{S \subseteq N : |S \cap N_i| \geq 1, \forall\, i = 1, ..., m\}.$$

Sea $n_i = |N_i|$, $i = 1, ..., m$ y supongamos a lo largo de toda la sección que $1 \leq n_1 \leq ... \leq n_m$. Observemos que si $n_m = 1$, entonces $m = n$ y el juego queda reducido al juego de unanimidad, en el que la única coalición ganadora es la coalición total, N. Este juego es de mayoría ponderada, y por lo tanto, de dimensión 1. Admite la representación $[n; \underbrace{1, ..., 1}_{n}]$. A partir de este momento, excluiremos este caso.

En este tipo de juegos la aprobación de un acuerdo requiere un total, de como mínimo, m de los n posibles votos, y como consecuencia, requiere que, como mínimo un voto debe ser obtenido en cada una de las cámaras N_i , $i = 1, ..., m$.

Estos juegos pueden ser interpretados como un caso particular de los juegos compuestos que pueden expresarse de la forma $v[u_1, ..., u_m]$, donde

$$v : \{1, ..., m\} \to \{0, 1\},$$

es el juego de unanimidad jugado por las m cámaras, y cada uno de los

$$u_i : N_i \to \{0, 1\} \quad i = 1, ..., m,$$

es un juego individualista jugado en cada una de las cámaras. Por lo tanto, en este primer caso que trataremos, el juego es individualista en cada una de las cámaras, es decir, un acuerdo es aceptado en una cámara arbitraria si uno o más de sus miembros vota a favor, mientras que la decisión final debe ser dada por unanimidad en el juego jugado por todas las cámaras. En este caso diremos que el juego es **composición de m juegos individualistas (N, u_i) vía unanimidad.**

Como consecuencia inmediata de la definición se deduce que:

$$\begin{aligned} W^m &= \{S \subseteq N : |S \cap N_i| = 1, \forall\, i = 1, ..., m\}, \\ \mathcal{L} &= \{S \subseteq N : |S \cap N_i| = 0, \text{ para algún } i = 1, ..., m\}, \\ \mathcal{L}^M &= \{N - N_1, ..., N - N_m\}. \end{aligned}$$

Lema 4.5 Sea (N, W) una composición de m juegos individualistas (N, u_i), $i = 1, ..., m$ vía unanimidad. Entonces la dimensión de (N, W) es menor o igual que m.

Demostración:

A partir de la última definición tenemos que $\mathcal{L}^M = \{N - N_1, ..., N - N_m\}$ y, utilizando el Teorema 4.1, la demostración es inmediata. 2

Veamos a continuación que si, como mínimo, una de las cámaras está constituída por un único jugador, el resultado anterior puede ser mejorado.

Proposición 4.5 Sea (N, W) una composición de m juegos individualistas (N, u_i), $i = 1, ..., m$, vía unanimidad tal que $1 \leq n_1 \leq ... \leq n_m$, y sea $p < m$ tal que $n_p = 1$, $n_{p+1} > 1$, o $p = 0$ si $n_1 > 1$. Entonces la dimensión de (N, W) es menor o igual que $m - p$.

Demostración:

Es suficiente demostrar que (N, W) puede ser expresado como intersección de $m - p$ J.M.P., es decir:

$$W = \bigcap_{j=1}^{m-p} W_j \quad \text{donde } (N, W_j)\ ,\ j = 1, ..., m-p \text{ es un J.M.P.}$$

Definamos en primer lugar el J.M.P. $(N, W_1) \equiv [q^1; w_1^1, ..., w_n^1]$ donde,

$$\begin{aligned} w_i^1 &= \begin{cases} 0 & \text{si} \quad i \in N_k\,,\ k \geq p+2 \\ 1 & \text{si} \quad i \in N_{p+1} \\ n_{p+1} & \text{si} \quad i \in N_k\,,\ k \leq p \end{cases} \\ q^1 &= p \cdot w_1^1 + 1. \end{aligned}$$

Sabemos que $\left|\mathcal{L}^M\right| = m$ y $\mathcal{L}^M = \{R_1, R_2, ..., R_m\}$, donde $R_i = N - N_i$, para $i = 1, ..., m$.

Observemos que en este primer J.M.P. (N, W_1), las coaliciones perdedoras maximales son:

$$\mathcal{L}_1^M = \{R_1, ..., R_p, R_{p+1}\}$$

ya que $w(R_i) = q^1 - 1$, para $i = 1, ..., p+1$.

El resto de los J.M.P $(N, W_j) \equiv [q^j; w_1^j, ..., w_n^j]$ para cada $j = 2, ..., m-p$ vienen definidos por:

$$\begin{aligned} w_i^j &= \begin{cases} 0 & \text{si} \quad j \in N_k\,,\ k \neq p+j \\ 1 & \text{si} \quad j \in N_{p+j} \end{cases} \\ q^j &= 1. \end{aligned}$$

En cada uno de ellos, las coaliciones perdedoras maximales son $\mathcal{L}_j^M = \{R_{p+j}\}$, $j = 2, ..., m-p$, ya que $w(R_{p+j}) = q^j - 1$, para todo $j = 2, ..., m-p$.

Consecuentemente, el conjunto de coaliciones perdedoras maximales de W y $\bigcap_{j=1}^{m-p} W_j$ coincide. 2

Teorema 4.3 Sea (N, W) una composición de m juegos individualistas (N, u_i), $i = 1, ..., m$, vía unanimidad tal que $1 \leq n_1 \leq ... \leq n_m$ y sea $p < m$ tal que $n_p = 1$, $n_{p+1} > 1$ o $p = 0$ si $n_1 > 1$. Entonces, la dimensión de (N, W) es $m - p$.

Demostración:

Utilizando el resultado obtenido en la proposición anterior es suficiente demostrar que (N, W) no puede ser definido como intersección de $m - p - 1$ J.M.P.

Supongamos, por contradicción, que

$$W = \bigcap_{i=1}^{m-p-1} W_i \quad \text{donde } (N, W_i) \ , \ i = 1, ..., m-p-1 \text{ es un J.M.P}$$

Para $i = p+1, ..., m$, sea $R_i = N - N_i$. Como R_i no es una coalición ganadora, podemos elegir uno de los $m-p-1$ J.M.P en los que R_i tiene peso menor que la cuota de este juego. Entonces, con una reordenación sin pérdida de generalidad, podemos suponer que existe un J.M.P, (N, W_r), en el que las coaliciones R_{m-1} y R_m son perdedoras.

Veamos que ocurre si R_{m-1} y R_m intercambian un jugador. Consideremos las coaliciones T_{m-1} y T_m definidas como:

$$\begin{aligned} &T_{m-1} = R_{m-1} - \{j\} \cup \{k\}, \\ &T_m = R_m - \{k\} \cup \{j\}, \quad \text{donde } j \in N_m, \ k \in N_{m-1}. \end{aligned}$$

Estas dos nuevas coaliciones son ganadoras en (N, W) y su peso debe ser, como mínimo, igual a la cuota del J.M.P en el que R_{m-1} y R_m son ambas perdedoras. Sin embargo, esto es imposible, puesto que si comparamos las coaliciones R_{m-1} y T_{m-1} obtenemos que

$$w_k^r > w_j^r,$$

mientras que si comparamos R_m y T_m, obtenemos que:

$$w_k^r < w_j^r.$$

Ambas desigualdades contradicen el hecho que (N, W_r) sea un J.M.P. 2

La dimensión de este tipo de juegos puede ser interpretada como el número de clases de jugadores equivalentes en el juego menos el número de jugadores con veto.

Es interesante hacer notar el hecho de que esta clase de juegos genera juegos simples de cualquier dimensión, es decir, para todo natural $n > 1$ existe una composición de juegos individualistas vía unanimidad de dimensión n, y es necesario considerar un mínimo de $2n$ jugadores.

Es importante tener en cuenta que una descripción de estos juegos mediante sus coaliciones ganadoras minimales necesita un total de $n_1 \cdot n_2 \cdot ... \cdot n_m$ coaliciones, cada una de las cuales formada por m jugadores, y por lo tanto, serían necesarios $m \cdot n_1 \cdot n_2 \cdot ... \cdot n_m$ dígitos para definirlo. Sin embargo, utilizando el concepto de dimensión, necesitamos la intersección de $m-p$ J.M.P. de n jugadores cada uno, y el número de dígitos es en este caso de $(n+1) \cdot (m-p)$, que generalmente es mucho menor que el anterior.

Ejemplo 4.5 Sea (N, W) un juego simple de 30 jugadores, composición de 3 juegos individualistas vía unanimidad, en los que $n_1 = n_2 = n_3 = 10$.

En este caso $m = 3$, $p = 0$. El juego tiene 1000 coaliciones ganadoras minimales, y cada una de ellas está constituída por 3 jugadores. Si utilizamos las coaliciones ganadoras minimales para describirlo serían necesarios 3000 dígitos. Si tenemos en cuenta que la dimensión del juego es 3, el número de dígitos requeridos para definirlo como intersección de 3 J.M.P. es ahora de 93.

4.3 Composición de juegos de unanimidad vía individualismo

En esta sección determinaremos la dimensión de juegos simples cuyo conjunto de jugadores $N = \{1, ..., n\}$ admite una partición $N_1, ..., N_m$ tal que:

$$W = \{S \subseteq N : \exists\ N_i \text{ tal que } N_i \subseteq S\}.$$

En esta clase de juegos la aprobación de un acuerdo requiere, como mínimo, todos los votos de alguna cámara N_i , $i = 1, ..., m$.

Estos juegos pueden ser interpretados como un caso particular de los juegos compuestos, en los que ahora

$$v : \{1, ..., m\} \to \{0, 1\}$$

es el juego individualista jugado por las m cámaras, y cada uno de los juegos

$$u_i : N_i \to \{0, 1\} \quad i = 1, ..., m,$$

es el juego de unanimidad jugado en la cámara N_i .En este caso tenemos la situación dual, es decir, el juego en cada una de las cámaras es de unanimidad, mientras que la decisión global es un juego individualista jugado por todas las cámaras. En este caso diremos que el juego es **composición de m juegos de unanimidad, (N, u_i) vía individualismo.**

A partir de su definición obtenemos que las coaliciones ganadoras minimales son

$$W^m = \{N_1, ..., N_m\}.$$

Sea $n_i = |N_i|$, $i = 1, ..., m$ y supongamos que a lo largo de esta sección se verifica que $1 \leq n_1 \leq ... \leq n_m$.

Las coaliciones maximales son:

$$\mathcal{L}^M = \{S \subseteq N : |S \cap N_i| = n_i - 1 \text{ , para todo } i = 1, ..., m\}.$$

Si $m = 1$, entonces $N = N_1$ y $W^m = \{N\}$, con lo cual el juego queda reducido al de unanimidad, que ya hemos comentado en la sección anterior que es de mayoría ponderada.

Si $m > 1$ y $n_{m-1} = 1$, el juego es

$$W^m = \{\{1\}, ..., \{m-1\}, \{m, ..., n\}\},$$

que claramente es de mayoría ponderada, y por lo tanto, de dimensión 1, admitiendo como representación

$$[n - m + 1; \underbrace{n - m + 1, ..., n - m + 1}_{m-1}, \underbrace{1, ..., 1}_{n-m+1}].$$

A partir de este momento excluiremos ambos casos.

Lema 4.6 Sea (N, W) una composición de m juegos de unanimidad (N, u_i), para $i = 1, ..., m$ vía individualismo. Entonces la dimensión de (N, W) es menor o igual que $n_1 \cdot n_2 \cdot ... \cdot n_m$.

Demostración:

A partir de la definición se deduce que $\left|\mathcal{L}^M\right| = n_1 \cdot n_2 \cdot ... \cdot n_m$ y, utilizando el Teorema 4.1, se demuestra la desigualdad. 2

Si suponemos que, como mínimo, una de las cámaras está constituída por más de un jugador, el resultado anterior puede mejorarse.

Proposición 4.6 Sea (N, W) una composición de m juegos de unanimidad (N, u_i) , $i = 1, ..., m$ vía individualismo tal que $1 \leq n_1 \leq ... \leq n_m$. Entonces, la dimensión de (N, W) es menor o igual que $n_1 \cdot n_2 \cdot ... \cdot n_{m-1}$.

Demostración:

Si $m = 1$ o $n_{m-1} = 1$ ya hemos visto que el juego es de dimensión 1. Si $n_{m-1} > 1$ es suficiente demostrar que (N, W) puede ser definido como intersección de $n_1 \cdot ... \cdot n_{m-1}$ J.M.P. (N, W_j), donde $j = 1, ..., n_1 \cdot ... \cdot n_{m-1}$.

En cada uno de estos J.M.P. la cuota es $q = n_m$ y existe un único jugador de cada cámara N_i , $i = 1, ..., m-1$, cuyo peso coincide con la cuota q, mientras que el resto de jugadores pertenecientes a estas cámaras tienen peso 0. Por último, los jugadores pertenecientes a N_m tienen peso 1.

Veamos que, efectivamente

$$W = \bigcap_{j=1}^{n_1 \cdot n_2 \cdot ... \cdot n_{m-1}} W_j.$$

$(\subseteq)$ Observemos, en primer lugar, que $N_i \in \bigcap_{j=1}^{n_1 \cdot n_2 \cdot ... \cdot n_{m-1}} W_j$, para todo $i = 1, ..., m$, ya que para $i = 1, ..., m-1$ existe un jugador ganador que pertenece a N_i en cada (N, W_j), $j = 1, ..., n_1 \cdot ... \cdot n_{m-1}$, y la suma de los pesos de los jugadores de N_m es q. Además, N_i , $i = 1, ..., m$ son las coaliciones ganadoras minimales de (N, W) ya que cualquier coalición estrictamente contenida en N_i , $i = 1, ..., m-1$ es perdedora. Para ello es suficiente darse cuenta de que hay juegos en la intersección que dan peso 0 a cada uno de los jugadores de dicha coalición. Finalmente, cada coalición estrictamente contenida en N_m tiene peso menor que q en todos los juegos de la intersección.

$(\supseteq)$ Para demostrar esta inclusión, supongamos, por contrarrecíproco que $S \notin W$ (basta suponer que $S \in \mathcal{L}^M$), y veamos que $\exists\, j = 1, ..., n_1 \cdot ... \cdot n_{m-1}$ tal que $S \notin W_j$.

$$S \in \mathcal{L}^M \Leftrightarrow |S \cap N_i| = n_i - 1 \text{ para todo } i = 1, ..., m.$$

Sea k_i el único elemento de $N_i - S$, para $i = 1, ..., m$. Entonces S es perdedora en el J.M.P. W_j tal que los jugadores $k_i \in N_i - S$, $i = 1, ..., m-1$ tienen peso $q = n_m$, los jugadores de N_m, tienen peso 1 y el resto de los jugadores tienen peso 0. 2

Lema 4.7 Sea (N,W) una composición de m juegos de unanimidad (N,u_i), para $i=1,...,m$ vía individualismo tal que $1\leq n_1\leq ...\leq n_m$. Entre $1+n_m$ coaliciones perdedoras maximales de (N,W) existen dos de ellas, R y T, tales que

$$\begin{aligned} \exists\, i &\in R-T, \quad i\in N_p \\ \exists\, j &\in T-R, \quad j\in N_q\,,\, q\neq p. \end{aligned}$$

Demostración:

Sean $R_1,...,R_{1+n_m}$ coaliciones perdedoras maximales distintas del juego (N,W). Consideremos R_1 y R_2. Si estas coaliciones no cumplen la propiedad anterior, entonces existirá $1\leq p\leq m$ tal que

$$\begin{aligned} R_1\cap N_p &\neq R_2\cap N_p \\ R_1\cap N_q &= R_2\cap N_q \text{ si } q\neq p. \end{aligned}$$

Ahora, el conjunto

$$\mathcal{A}^p_{R_1}=\{S\in\mathcal{L}^M : S\cap N_p=N_p-\{k\}\ \ \forall k\in N_p,\ S\cap N_q=R_1\cap N_q \ \text{ si } q\neq p\}$$

cumple

$$R_1,R_2\in\mathcal{A}^p_{R_1} \text{ y } \left|\mathcal{A}^p_{R_1}\right|=n_p.$$

Como $1+n_m>n_p$, existirá, como mínimo, R_l, $l=3,...,1+n_m$ tal que $R_l\notin\mathcal{A}^p_{R_1}$ y

$$R_l\cap N_p\neq R_1\cap N_p \text{ ó } R_l\cap N_p\neq R_2\cap N_p.$$

Si definimos

$$\begin{aligned} R &= \begin{cases} R_2 \text{ si } R_l\cap N_p=R_1\cap N_p \\ R_1 \text{ en caso contrario} \end{cases} \\ T &= R_l, \end{aligned}$$

entonces R y T verifican la propiedad del lema. 2

Teorema 4.4 Sea (N,W) una composición de m juegos de unanimidad (N,u_i), $i=1,...,m$ vía individualismo tal que $1\leq n_1\leq ...\leq n_m$. Entonces, la dimensión de (N,W) es $n_1\cdot n_2\cdot ...\cdot n_{m-1}$.

Demostración:

Si $n_{m-1} > 1$, utilizando la última proposición, es suficiente comprobar que (N, W) no puede definirse como intersección de $n_1 \cdot ... \cdot n_{m-1} - 1$ J.M.P.

Supongamos, por contradicción que

$$W = \bigcap_{i=1}^{n_1 \cdot n_2 \cdot ... \cdot n_{m-1} - 1} W_i \text{ , donde } (N, W_i) \text{ , } i = 1, ..., n_1 \cdot ... \cdot n_{m-1} - 1 \text{ es un J.M.P.}$$

Como $\left|\mathcal{L}^M\right| = n_1 \cdot n_2 \cdot ... \cdot n_m$ y

$$\frac{n_1 \cdot n_2 \cdot ... \cdot n_m}{n_1 \cdot n_2 \cdot ... \cdot n_{m-1} - 1} > n_m,$$

existirían, como mínimo $1 + n_m$ coaliciones perdedoras maximales en un mismo J.M.P. (N, W_k) . Entre estas $1+n_m$ coaliciones perdedoras maximales, utilizando el lema anterior, siempre es posible encontrar dos coaliciones R, T tal que

$$\begin{aligned} \exists i &\in R - T, \quad i \in N_p \\ \exists j &\in T - R, \quad j \in N_q \text{ , } p \neq q. \end{aligned}$$

A partir de este hecho observamos que:

$$\begin{aligned} &R \notin W_k \\ &R - \{i\} \cup \{j\} \in W_k, \end{aligned}$$

ya que $N_q \subseteq R - \{i\} \cup \{j\}$. Comparando los pesos de ambas coaliciones en el juego (N, W_k) resulta que $w_j^k > w_i^k$.

Por otra parte,

$$\begin{aligned} &T \notin W_k \\ &T - \{j\} \cup \{i\} \in W_k, \end{aligned}$$

ya que $N_p \subseteq T - \{j\} \cup \{i\}$. Si comparamos los pesos de ambas coaliciones en el juego (N, W_k) resulta que $w_j^k < w_i^k$.

Esta desigualdad junto con la anterior contradicen el hecho de que (N, W_k) sea un J.M.P. 2

Este último teorema nos permite generar juegos simples monótonos de dimensión exponencial, quedando patente que la complejidad del juego no está causada necesariamente por la no monotonía del mismo.

Corolario 4.4 Sean m y k enteros positivos, y sea (N,W) una composición de m juegos de unanimidad (N,u_i), $i=1,...,m$, vía individualismo tal que $k=n_1=...=n_m$. Entonces, la dimensión de (N,W) es k^{m-1}.

Si un juego es de dimensión q , es decir, es intersección de q J.M.P., entonces, intersecando $p \leq q$ de estos J.M.P, se obtiene un juego de dimensión p.

Utilizando este resultado y el Teorema 4.4, podemos obtener juegos de cualquier dimensión con un número reducido de jugadores. La siguiente tabla muestra para diferentes dimensiones, p, una cota superior del mínimo número de jugadores requeridos n para conseguir dicha dimensión.

p	n		p	n
2	4		$65 \leq p \leq 81$	15
$3 \leq p \leq 4$	6		$82 \leq p \leq 128$	16
$5 \leq p \leq 8$	8		$129 \leq p \leq 162$	17
9	9		$163 \leq p \leq 256$	18
$10 \leq p \leq 16$	10		$257 \leq p \leq 324$	19
$17 \leq p \leq 18$	11		$325 \leq p \leq 512$	20
$19 \leq p \leq 32$	12		$513 \leq p \leq 729$	21
$33 \leq p \leq 36$	13		$730 \leq p \leq 1024$	22
$37 \leq p \leq 64$	14		$1025 \leq p \leq 1458$	23

Estos resultados, para el caso de n impar, mejoran los obtenidos por Taylor y Zwicker (1995), quienes demostraron la existencia de juegos simples monótonos, con un número par de jugadores, de dimensión mayor o igual que $2^{\frac{n}{2}}-1$.

4.4 Ejemplos

Ejemplo 4.6 Consideremos el juego simple (N,W) de 9 jugadores cuyas coaliciones ganadoras minimales son:

$$\begin{aligned} W^m \;=\; & \{\{1,2,3,5,7\},\{1,2,3,5,8\},\{1,2,3,5,9\},\\ & \{1,2,3,6,7\},\{1,2,3,6,8\},\{1,2,3,6,9\},\\ & \{1,2,4,5,7\},\{1,2,4,5,8\},\{1,2,4,5,9\},\\ & \{1,2,4,6,7\},\{1,2,4,6,8\},\{1,2,4,6,9\}\}. \end{aligned}$$

Es un juego compuesto

$$v[u_1, ..., u_5] \rightarrow \{0,1\},$$

donde

$$v : \{1, ..., 5\} \rightarrow \{0,1\}$$

es el juego de unanimidad jugado por las 5 cámaras, y cada uno de los juegos

$$u_i : N_i \rightarrow \{0,1\},\ i = 1, ..., 5$$

es un juego individualista jugado en N_i, $i = 1, ..., 5$, siendo en este caso las cámaras, $N_1 = \{1\}$, $N_2 = \{2\}$, $N_3 = \{3,4\}$, $N_4 = \{5,6\}$, $N_5 = \{7,8,9\}$.

Es decir, (N, W) es composición de 5 juegos individualistas vía unanimidad. Utilizando los resultados de la Sección 4.2 podemos deducir que la dimensión del juego es $m - p = 5 - 2 = 3$.

Una de las representaciones de este juego mediante la intersección de J.M.P. ha sido dada en la proposición 4.5, y por lo tanto

$$W = [5; 2,2,1,1,0,0,0,0,0] \cap [1; 0,0,0,0,1,1,0,0,0] \cap [1; 0,0,0,0,0,0,1,1,1].$$

Como hemos comentado en la introducción del capítulo, existen diversos campos, además del de Teoría de Juegos, en los que se utiliza la representación de diferentes modelos mediante funciones booleanas (Fiabilidad de Sistemas, Teoría de Circuitos,...) y en los que resulta interesante expresar dichas funciones booleanas como intersección de funciones umbral (J.M.P), asignando un peso a cada componente (jugador) de la función booleana. Estas analogías entre Estructuras Coherentes y los Juegos Simples han sido mostradas por Ramamurthy (1990).

Para indicar el estado de la i-ésima componente, en Fiabilidad de Sistemas se asigna un indicador binario x_i a la componente i, de manera que

$$x_i = \begin{cases} 1 & \text{si la componente } i \text{ funciona} \\ 0 & \text{si la componente } i \text{ no funciona} \end{cases}$$

Análogamente, la variable binaria y indica el estado de la estructura. Es decir

$$y = \begin{cases} 1 & \text{si el sistema funciona} \\ 0 & \text{si el sistema no funciona} \end{cases}$$

La suposición de que el estado del sistema está completamente determinado por el estado de sus componentes implica la existencia de una función Booleana tal que $y = f(\mathsf{x})$, donde $\mathsf{x} = (x_1, ..., x_n)$. Esta función, en términos de Fiabilidad de Sistemas se denomina función de estructura.

A continuación mostramos dos ejemplos típicos de Fiabilidad de Sistemas que están descritos por la misma función de estructura.

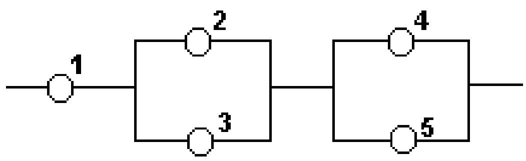
Ejemplo 4.7 Un sistema stereo hi-fi está formado por las siguientes 5 componentes: (1) Amplificador, (2) Sintetizador, (3) Compact-disc, (4) Altavoz A y (5) Altavoz B. Consideramos que el sistema funciona cuando es posible escuchar música (mono o stereo), a través de FM o discos.

Ejemplo 4.8 El vuelo de un avión puede ser también interpretado como un sistema constituído por 3 sub-sistemas: avión (sub-sistema N_1 o componente 1), piloto (sub-sistema N_2) y aeropuerto (sub-sistema N_3). El sub-sistema N_2 puede considerarse un sistema paralelo, formado por el piloto (componente 2) y el coplíloto (componente 3). El sub-sistema N_3 es también un sistema paralelo cuyas componentes son el aeropuerto (componente 4) y un aeropuerto alternativo (componente 5).

La función estructura viene dada en ambos casos por:

$$f(\mathbf{x}) = x_1[1 - (1 - x_2)(1 - x_3)][1 - (1 - x_4)(1 - x_5)] \text{ para todo } \mathbf{x} \in \{0, 1\}^5.$$

Los dos ejemplos constituyen el mismo sistema serie-paralelo de dimensión 2 y su diagrama es



La representación dada en la Proposición 4.5, teniendo en cuenta que:

$$\begin{aligned} N &= N_1 \cup N_2 \cup N_3 = \{1\} \cup \{2, 3\} \cup \{4, 5\} \\ p &= 1 \text{ y } m = 3 \end{aligned}$$

es en este caso:

$$(N,W) \equiv [3;2,1,1,0,0] \cap [1;0,0,0,1,1].$$

Su correspondencia en el campo de Teoría de juegos la encontraríamos en un juego simple de 5 jugadores tal que sus coaliciones ganadoras minimales son

$$W^m = \{\{1,2,4\},\{1,2,5\},\{1,3,4\},\{1,3,5\}\}.$$

Ejemplo 4.9 Consideremos el juego simple (N,W) de 7 jugadores, composición de 3 juegos de unanimidad vía individualismo definido por:

$$W^m = \{\{1,2\},\{3,4\},\{5,6,7\}\}.$$

Veamos que tiene dimensión 4.

Observemos que:

$$W^m = \{N_1,N_2,N_3\} = \{\{1,2\},\{3,4\},\{5,6,7\}\}.$$

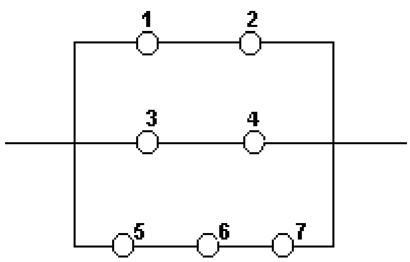
Aplicando el Teorema 4.4, la dimensión de (N,W) es:

$$n_1 \cdot n_2 = 2 \cdot 2 = 4$$

y la representación mediante la intersección de 4 J.M.P. dada en la Proposición 4.6 es:

$$\begin{aligned}(N,W) &= [3;3,0,3,0,1,1,1] \cap [3;0,3,3,0,1,1,1] \cap [3;3,0,0,3,1,1,1] \cap \\ &\cap [3;0,3,0,3,1,1,1].\end{aligned}$$

Si interpretamos el juego como un sistema paralelo-serie, su diagrama es



4.5 Generalización

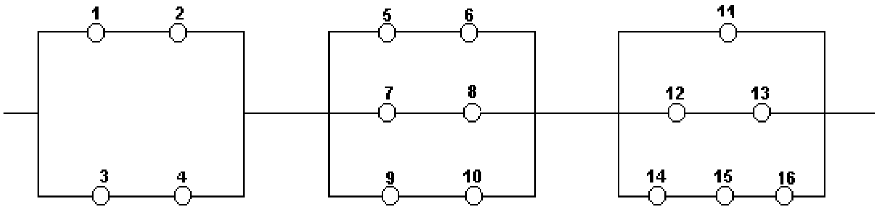
A continuación daremos una generalización de la dimensión de la clase de juegos simples que pueden expresarse como intersección de m juegos cuyos juegos inducidos son composición de k_i juegos de unanimidad vía individualismo.

Con el fin de facilitar el entendimiento de la notación utilizada en esta sección hemos creído conveniente iniciarla con el siguiente ejemplo.

Ejemplo 4.10 Consideremos el $16-$juego simple tal que sus coaliciones ganadoras minimales son

$$\begin{aligned} W^m = \; & \{\{1,2,5,6,11\},\{1,2,5,6,12,13\},\{1,2,5,6,14,15,16\},\\ & \{1,2,7,8,11\},\{1,2,7,8,12,13\},\{1,2,7,8,14,15,16\},\\ & \{1,2,9,10,11\},\{1,2,9,10,12,13\},\{1,2,9,10,14,15,16\},\\ & \{3,4,5,6,11\},\{3,4,5,6,12,13\},\{3,4,5,6,14,15,16\},\\ & \{3,4,7,8,11\},\{3,4,7,8,12,13\},\{3,4,7,8,14,15,16\},\\ & \{3,4,9,10,11\},\{3,4,9,10,12,13\},\{3,4,9,10,14,15,16\}\}. \end{aligned}$$

Su diagrama viene dado por la figura



La notación que utilizaremos es la siguiente:

$$N = N_1 \cup N_2 \cup N_3 = \{1,2,3,4\} \cup \{5,6,7,8,9,10\} \cup \{11,12,13,14,15,16\},$$

donde

$$\begin{aligned} N_1 &= N_{11} \cup N_{12} = \{1,2\} \cup \{3,4\} \\ N_2 &= N_{21} \cup N_{22} \cup N_{23} = \{5,6\} \cup \{7,8\} \cup \{9,10\} \\ N_3 &= N_{31} \cup N_{32} \cup N_{33} = \{11\} \cup \{12,13\} \cup \{14,15,16\} \end{aligned}$$

Designamos por $n_{ij} = |N_{ij}|$, para todo $i = 1, 2, 3$ y para todo $j = 1, ..., k_i$ y supondremos siempre que

$$1 \leq n_{i1} \leq n_{i2} \leq ... \leq n_{ik_i} \text{ , para todo } i$$

En nuestro caso tenemos que $k_1 = 2$, $k_2 = k_3 = 3$ y efectivamente se verifica

$$\begin{aligned} 1 &\leq n_{11} \leq n_{12} \\ 1 &\leq n_{21} \leq n_{22} \leq n_{23} \\ 1 &\leq n_{31} \leq n_{32} \leq n_{33} \end{aligned}$$

Observamos que las coaliciones ganadoras minimales del juego podemos escribirlas de la forma

$$\begin{aligned} W^m = \; & \{N_{11} \cup N_{21} \cup N_{31}, N_{11} \cup N_{21} \cup N_{32}, N_{11} \cup N_{21} \cup N_{33} \\ & N_{11} \cup N_{22} \cup N_{31}, N_{11} \cup N_{22} \cup N_{32}, N_{11} \cup N_{22} \cup N_{33}, \\ & N_{11} \cup N_{23} \cup N_{31}, N_{11} \cup N_{23} \cup N_{32}, N_{11} \cup N_{23} \cup N_{33}, \\ & N_{12} \cup N_{21} \cup N_{31}, N_{12} \cup N_{21} \cup N_{32}, N_{12} \cup N_{21} \cup N_{33}, \\ & N_{12} \cup N_{22} \cup N_{31}, N_{12} \cup N_{22} \cup N_{32}, N_{12} \cup N_{22} \cup N_{33}, \\ & N_{12} \cup N_{23} \cup N_{31}, N_{12} \cup N_{23} \cup N_{32}, N_{12} \cup N_{23} \cup N_{33}\}. \end{aligned}$$

Es decir,

$$W^m = \{N_{1i_1} \cup N_{2i_2} \cup N_{3i_3},\ i_1 = 1, 2;\ i_2 = 1, 2, 3\,;\ i_3 = 1, 2, 3\}.$$

Las coaliciones perdedoras del juego son:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^M = \; & \{\{\{1, 3\} \cup N_2 \cup N_3\}, \{\{1, 4\} \cup N_2 \cup N_3\}, \{\{2, 3\} \cup N_2 \cup N_3\}, \\ & \{\{2, 4\} \cup N_2 \cup N_3\}, \{N_1 \cup \{5, 7, 9\} \cup N_3\}, \{N_1 \cup \{5, 7, 10\} \cup N_3\}, \\ & \{N_1 \cup \{5, 8, 9\} \cup N_3\}, \{N_1 \cup \{5, 8, 10\} \cup N_3\}, \{N_1 \cup \{6, 7, 9\} \cup N_3\}, \\ & \{N_1 \cup \{6, 7, 10\} \cup N_3\}, \{N_1 \cup \{6, 8, 9\} \cup N_3\}, \{N_1 \cup \{6, 8, 10\} \cup N_3\}, \\ & \{N_1 \cup N_2 \cup \{12, 14, 15\}\}, .\{N_1 \cup N_2 \cup \{12, 14, 16\}\} \\ & \{N_1 \cup N_2 \cup \{12, 15, 16\}\}, \{N_1 \cup N_2 \cup \{13, 14, 15\}\}, \\ & \{N_1 \cup N_2 \cup \{13, 14, 16\}\}, \{N_1 \cup N_2 \cup \{13, 15, 16\}\}. \end{aligned}$$

Las representaremos de la forma:

$$\mathcal{L}^M = \{\mathsf{R}_1 \cup N_2 \cup N_3, N_1 \cup \mathsf{R}_2 \cup N_3, N_1 \cup N_2 \cup \mathsf{R}_3\},$$

donde $\mathsf{R}_1 \subseteq N_1$, $\mathsf{R}_2 \subseteq N_2$ y $\mathsf{R}_3 \subseteq N_3$ son las familias de coaliciones que verifican

$$\begin{aligned} |\mathsf{R}_1 \cap N_{1j}| &= n_{1j} - 1 \text{ para todo } j = 1, ..., k_1 \\ |\mathsf{R}_2 \cap N_{2j}| &= n_{2j} - 1 \text{ para todo } j = 1, ..., k_2 \\ |\mathsf{R}_3 \cap N_{3j}| &= n_{3j} - 1 \text{ para todo } j = 1, ..., k_3. \end{aligned}$$

En nuestro caso

$$
\begin{aligned}
\mathsf{R}_1 &= \{\{1,3\},\{1,4\},\{2,3\},\{2,4\}\} \\
\mathsf{R}_2 &= \{\{5,7,9\},\{5,7,10\},\{5,8,9\},\{5,8,10\}, \\
&\quad \{6,7,9\},\{6,7,10\},\{6,8,9\},\{6,8,10\}\} \\
\mathsf{R}_3 &= \{\{12,14,15\},\{12,14,16\},\{12,15,16\}, \\
&\quad \{13,14,15\},\{13,14,16\},\{13,15,16\}\}.
\end{aligned}
$$

A partir de esta representación es fácil deducir que

$$\left|\mathcal{L}^M\right| = n_{11}\cdot n_{12} + n_{21}\cdot n_{22}\cdot n_{23} + n_{31}\cdot n_{32}\cdot n_{33} = 4+8+6 = 18.$$

Una vez establecida la notación que utilizaremos, pasamos a presentar formalmente el tipo de juego que pretendemos estudiar.

En esta sección determinaremos la dimensión de juegos simples (N,W) cuyo conjunto de jugadores $N=\{1,2,...,n\}$ admite una partición $N_1,...,N_m$, de manera que, a su vez, cada $N_i, i=1,...,m$, admite una subpartición, $N_{i1},...,N_{ik_\mathrm{i}}$ tal que, si $n_{ij}=|N_{ij}|\,,\ i=1,...,m,\ \ j=1,...,k_i$, entonces:

$$
\begin{aligned}
W^m &= \{S\subseteq N : S = N_{1i_1}\cup ...\cup N_{mi_\mathrm{m}}\ ,\ i_1=1,...,k_1,...,i_m=1,...,k_m\}, \\
\mathcal{L}^M &= \{S\subseteq N\ : S = N_1\cup ...N_{i-1}\cup \mathsf{R}_i\cup N_{i+1}\cup ...\cup N_m, \\
&\quad R_i\subseteq N_i,\ |R_i\cap N_{ij}| = n_{ij}-1,\ \ \forall j=1,...,k_{i},\ i=1,...,m\}.
\end{aligned}
$$

Supondremos a lo largo de esta sección que $1\le n_{i1}\le ...\le n_{ik_\mathrm{i}}$, para todo $i=1,...,m$.

Lema 4.8 La dimensión de (N,W) es menor o igual que $n_{11}\cdot n_{12}\cdot ...n_{1k_1} + ... + n_{m1}\cdot n_{m2}\cdot ...\cdot n_{mk_\mathrm{m}}$.

Demostración:

De la definición de $\mathcal{L}^M$ obtenemos que

$$\left|\mathcal{L}^M\right| = n_{11}\cdot n_{12}\cdot ...\cdot n_{1k_1} + ... + n_{m1}\cdot n_{m2}\cdot ...\cdot n_{mk_\mathrm{m}}$$

y la demostración, a partir de Teorema 4.1, es inmediata. 2

Ejemplo 4.11 La dimensión del 16-juego simple anterior, es, por lo tanto, menor o igual que 18.

Ya hemos comentado anteriormente que

$$\left|\mathcal{L}^M\right| = n_{11} \cdot n_{12} + n_{21} \cdot n_{22} \cdot n_{23} + n_{31} \cdot n_{32} \cdot n_{33} = 4 + 8 + 6 = 18,$$

y a partir de aquí el resultado es inmediato.

Proposición 4.7 Esta clase de juegos puede ser interpretada como intersección de m juegos simples, (N, W_i), $i = 1, ..., m$, donde

$$W_i^m = \{N_{i1}, N_{i2,}..., N_{ik_i}\}$$

y tal que los respectivos juegos inducidos, (N_i, W_i), $i = 1, ..., m$, son composición de k_i juegos de unanimidad vía individualismo.

Demostración:

Tenemos que ver en primer lugar que $W = \bigcap\limits_{i=1}^{m} W_i$, donde

$$W_i^m = \{N_{i1}, N_{i2,}..., N_{ik_i}\}.$$

$(\subseteq)$ Si $S \in W^m \Rightarrow \exists\, i_1 = 1, ..., k_1; ...; \exists\, i_m = 1, ..., k_m$ tales que $S = N_{1i_1} \cup ... \cup N_{mi_m} \Rightarrow N_{1i_1} \subseteq S$,...,$N_{mi_m} \subseteq S \Rightarrow S \in \bigcap\limits_{i=1}^{m} W_i$.

$(\supseteq)$ Si $S \in \bigcap\limits_{i=1}^{m} W_i \Rightarrow S \in W_i, \forall\, i = 1, ..., m \Rightarrow \forall\, i = 1, ..., m, \exists\, j = 1, ..., k_i$ tal que $N_{ij} \subseteq S \Rightarrow S \in W$.

En segundo lugar, está claro que los juegos (N_i, W_i), $i = 1, ..., m$ son composición de k_i juegos de unanimidad vía individualismo, pues se corresponden con la definición dada en la Sección 4.3. 2

Ejemplo 4.12 Veamos como podemos expresar el ejemplo anterior como intersección de 3 juegos simples.

En nuestro caso, recordemos que $N = N_1 \cup N_2 \cup N_3$, y a partir de la proposición anterior, tenemos que

$$(N, W) = (N, W_1) \cap (N, W_2) \cap (N, W_3),$$

donde

$$\begin{aligned}W_1^m &= \{\{1,2\},\{3,4\}\} = \{N_{11}, N_{12}\}\\ W_2^m &= \{\{5,6\},\{7,8\},\{9,10\}\} = \{N_{21}, N_{22}, N_{23}\}\\ W_1^m &= \{\{11\},\{12,13\},\{14,15,16\}\} = \{N_{31}, N_{32}, N_{33}\},\end{aligned}$$

y además, (N_1, W_1) es composición de 2 juegos de unanimidad vía individualismo, (N_2, W_2) y (N_3, W_3) son composición de 3 juegos de unanimidad vía individualismo.

Lema 4.9 La dimensión de (N, W_i) es $n_{i1} \cdot n_{i2} \cdot ... \cdot n_{ik_i-1}, \quad i = 1, ..., m.$

Demostración:

Este resultado es consecuencia, en primer lugar, de que $(N_i, W_i),\ i = 1, ..., m$ es composición de k_i juegos de unanimidad vía individualismo, y por lo visto en la Sección 4.3, tiene dimensión $n_{i1} \cdot n_{i2} \cdot ... \cdot n_{ik_i-1}$.

Además, (N_i, W_i) es un subjuego denso del juego (N, W_i), para $i = 1, ..., m$, y utilizando el lema 4.3, deducimos que tienen la misma dimensión. 2

Proposición 4.8 La dimensión de (N, W) es menor o igual que

$$n_{11} \cdot n_{12} \cdot ... n_{1k_1-1} + ... + n_{m1} \cdot n_{m2} \cdot ... \cdot n_{mk_m-1} = \dim(N, W_1) + ... + \dim(N, W_m)$$

Demostración:

Es consecuencia inmediata de la Proposición 4.7, según la cual (N, W) es intersección de m juegos simples (N, W_i), $i = 1, ..., m$, de dimensión $n_{i1} \cdot n_{i2} \cdot ... \cdot n_{ik_i-1}$, tal y como hemos visto en el lema anterior. 2

Ejemplo 4.13 Veamos a continuación que la dimensión del 16-juego simple inicial es menor o igual que $n_{11} + n_{21} \cdot n_{22} + n_{31} \cdot n_{32} = 2 + 4 + 2 = 8.$

Sabemos que

$$(N, W) = (N, W_1) \cap (N, W_2) \cap (N, W_3),$$

y aplicando el Lema 4.9 y los resultados vistos en la sección anterior para composición de juegos de unanimidad vía individualismo podemos asegurar que

$$\begin{aligned}\dim(N,W_1) &= \dim(N_1,W_1)=n_{11}=2\\ \dim(N,W_2) &= \dim(N_2,W_2)=n_{21}\cdot n_{22}=4\\ \dim(N,W_3) &= \dim(N_3,W_1)=n_{31}\cdot n_{32}=2,\end{aligned}$$

y a partir de aquí, está claro que

$$\dim(N,W)\leq 8.$$

La representación como intersección de 8 juegos de mayoría ponderada se obtiene utilizando la Proposición 4.6, el Lema 4.3 y el Lema 4.9.

$$(N_1,W_1)\equiv[2;2,0,1,1]\cap[2;0,2,1,1]$$

Si asignamos peso 0 a los jugadores de $N-N_1$, tenemos que

$$(N,W_1)\equiv[2;2,0,1,1,\underbrace{0,...,0}_{14}]\cap[2;0,2,1,1,\underbrace{0,...,0}_{14}]\ .$$

Análogamente, para (N,W_2) tenemos en primer lugar que

$$(N_2,W_2)\equiv[2;2,0,2,0,1,1]\cap[2;2,0,0,2,1,1]\cap[2;0,2,2,0,1,1]\cap[2;0,2,0,2,1,1],$$

y asignando peso 0 a los jugadores de $N-N_2$ deducimos que

$$\begin{aligned}(N,W_2)\ \equiv\ & [2;\underbrace{0,...,0}_{4},2,0,2,0,1,1,\underbrace{0,...,0}_{6}]\cap[2;\underbrace{0,...,0}_{4},2,0,0,2,1,1,\underbrace{0,...,0}_{6}]\cap\\ & [2;\underbrace{0,...,0}_{4},0,2,2,0,1,1,\underbrace{0,...,0}_{6}]\cap[2;\underbrace{0,...,0}_{4},0,2,0,2,1,1,\underbrace{0,...,0}_{6}].\end{aligned}$$

Por último, para (N,W_3) tenemos inicialmente que

$$(N_3,W_3)\equiv[3;3,3,0,1,1,1]\cap[3;3,0,3,1,1,1],$$

y asignando peso 0 a los jugadores de $N-N_3$ deducimos que

$$(N,W_3)\equiv[3;\underbrace{0,...,0}_{10},3,3,0,1,1,1]\cap[3;\underbrace{0,...,0}_{10},3,0,3,1,1,1].$$

Ejemplo 4.14 Consideremos el juego simple (N,W) de 9 jugadores tal.que $W^m=\{\{1,4,5\},\{1,6,7\},\{1,8,9\},\{2,3,4,5\},\{2,3,6,7\},\{2,3,8,9\}$. Veamos que la dimensión de (N,W) es menor o igual que

$$n_{11}+n_{21}\cdot n_{22}=\dim(N,W_1)+\dim(N,W_2)=5.$$

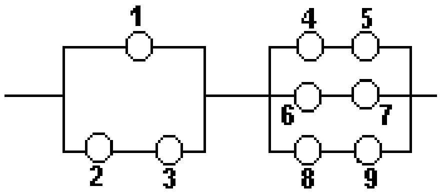
En primer lugar observamos que

$$N = N_1 \cup N_2 = \{1, 2, 3\} \cup \{5, 6, 7, 8, 9\},$$

siendo

$$\begin{array}{l} N_1 = \{1, 2, 3\} = N_{11} \cup N_{12} = \{1\} \cup \{2, 3\} \\ N_2 = \{4, 5, 6, 7, 8, 9\} = N_{21} \cup N_{22} \cup N_{23} = \{4, 5\} \cup \{6, 7\} \cup \{8, 9\}. \end{array}$$

El diagrama correspondiente al juego es:



Es fácil comprobar que $(N, W) = (N, W_1) \cap (N, W_2)$, donde:

$$\begin{array}{rcl} W_1^m & = & \{\{1\}, \{2, 3\}\} \\ W_2^m & = & \{\{4, 5\}, \{6, 7\}, \{8, 9\}\} \end{array}$$

Veamos que cada uno de estos juegos verifica que:

$$\begin{array}{rcl} \dim(N, W_1) & = & n_{11} = 1 \\ \dim(N, W_2) & = & n_{21} \cdot n_{22} = 4. \end{array}$$

Para ello es suficiente observar que el juego

$$(N_1, W_1) \text{ tal que } \left\{ \begin{array}{ll} N_1 = & \{1, 2, 3\} \\ W_1^m = & \{\{1\}, \{2, 3\}\} = \{N_{11}, N_{12}\} \end{array} \right.$$

es composición de 2 juegos de unanimidad vía individualismo, y por lo visto en la sección anterior tiene dimensión

$$n_{11} = 1.$$

Utilizando la Proposición 4.6 podemos decir que:

$$(N_1, W_1) \equiv [2; 2, 1, 1]$$

A partir de este resultado y el Lema 4.9, considerando como nulos a los jugadores $4, 5, 6, 7, 8, 9$ en el juego (N, W_1), y asignándoles peso cero, podemos deducir que:

$$(N, W_1) \equiv [2; 2, 1, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0],$$

es decir, $\dim(N, W_1) = 1$.

De manera análoga tenemos que el juego

$$(N_2, W_2) \text{ tal que } \begin{cases} N_2 = & \{4,5,6,7,8,9\} \\ W_2^m = & \{\{4,5\},\{6,7\},\{8,9\}\} = \{N_{21}, N_{22}, N_{23}\} \end{cases}$$

es composición de 3 juegos de unanimidad vía individualismo, y por lo tanto, su dimensión es

$$n_{21} \cdot n_{22} = 4.$$

Utilizando la Proposición 4.6 podemos decir que:

$$(N_2, W_2) \equiv [2;2,0,2,0,1,1] \cap [2;2,0,0,2,1,1] \cap [2;0,2,2,0,1,1] \cap [2;0,2,0,2,1,1].$$

A partir de este resultado y del Lema 4.9, considerando como nulos a los jugadores $1, 2, 3$ en el juego (N, W_2), y asignándoles peso cero, podemos deducir que $\dim(N, W_2) = 4$ y

$$\begin{aligned} (N, W_2) \equiv\ & [2;0,0,0,2,0,2,0,1,1] \cap [2;0,0,0,2,0,0,2,1,1] \cap \\ & [2;0,0,0,0,2,2,0,1,1] \cap [2;0,0,0,0,2,0,2,1,1]. \end{aligned}$$

Finalmente, aplicando estos resultados a $(N, W) = (N, W_1) \cap (N, W_2)$, obtenemos que:

$$\begin{aligned} (N, W) \equiv\ & [2;2,1,1,0,0,0,0,0,0] \cap [2;0,0,0,2,0,2,0,1,1] \cap \\ & [2;0,0,0,2,0,0,2,1,1] \cap [2;0,0,0,0,2,2,0,1,1] \cap \\ & [2;0,0,0,0,2,0,2,1,1]. \end{aligned}$$

Es decir, la dimensión de (N, W) es menor o igual que 5.

La siguiente proposición nos muestra como la dimensión del juego puede reducirse si existe algún subconjunto N_i formado por un solo elemento. Supondremos, sin pérdida de generalidad, que todos estos subconjuntos, si los hay, son los primeros.

Proposición 4.9 Sea (N, W) el juego definido anteriormente, y sea $p < m$ tal que $|N_p| = 1$, $|N_{p+1}| > 1$ o $p = 0$ si $|N_1| > 1$; $1 \leq n_{i1} \leq ... \leq n_{ik_i}$, $i = p+1, ..., m$. Entonces,

$$\dim(N, W) \leq \sum_{i=p+1}^{m} n_{i1} \cdot ... \cdot n_{ik_i - 1} = \dim(N, W_{p+1}) + ... + \dim(N, W_m).$$

Demostración:

Es suficiente demostrar que (N, W) puede expresarse como intersección de $A = \sum_{i=p+1}^{m} n_{i1} \cdot ... \cdot n_{ik_i-1}$ juegos de mayoría ponderada. Es decir,

$$W = \bigcap_{i=1}^{A} \widetilde{W_i} \text{ donde } (N, \widetilde{W_i}), \quad i = 1, ..., A \text{ es un J.M.P.},$$

Definimos en primer lugar los $n_{p+11} \cdot ... \cdot n_{p+1k_{p+1}-1}$ J.M.P. tales que la cuota es q y de manera que existe un jugador en N_{p+1i} para $i = 1, ..., k_{p+1} - 1$ que tiene peso $a = n_{p+1k_{p+1}}$, mientras que el resto de los jugadores de esta clase tienen peso 0, y los jugadores de $N_{p+1k_{p+1}}$ tienen peso $b = 1$.

El peso de los jugadores de $N_1, ..., N_p$ es $(k_{p+1} - 1)a + 1$. El peso de los jugadores de N_r, para $r \neq 1, ..., p, p+1$ es 0. La cuota es $q = pw_1 + a$.

En estos J.M.P. las coaliciones ganadoras minimales, para $i = 1, ..., n_{p+11} \cdot ... \cdot n_{p+1k_{p+1}-1}$, son

$$\begin{aligned} (\widetilde{W_i})^m &= \{N_1 \cup ... \cup N_p \cup \{i_1\},\ N_1 \cup ... \cup N_p \cup \{i_2\}, ..., \\ &\quad N_1 \cup ... \cup N_p \cup \{i_{k_{p+1}-1}\},\ N_1 \cup ... \cup N_p \cup N_{p+1k_{p+1}}, \\ &\quad i_j \in N_{p+1j},\ \ j = 1, ..., k_{p+1} - 1\}. \end{aligned}$$

A continuación, para $j = p+2, ..., m$ definimos los $n_{j1} \cdot ... \cdot n_{jk_j-1}$ J.M.P. tales que la cuota es $q = n_{jk_j}$ y de manera que existe un jugador en cada clase N_{ji} $i = 1, ..., k_j - 1$ que tiene peso q y el resto de los jugadores de esta clase tienen peso 0, mientras que los jugadores de N_{jk_j} tienen peso 1. Los jugadores de N_r, $r \neq j$ tienen peso 0.

En esta segunda serie de J.M.P. las coaliciones ganadoras minimales, para $j = p+2, ..., m$ y para $i = 1, ..., n_{j1} \cdot ... \cdot n_{jk_j-1}$, son:

$$(\widetilde{W}_i^j)^m = \{\{i_1\}, ..., \{i_{k_j-1}\}, N_{jk_j} \text{ donde } i_l \in N_{jl},\ l = 1, .., k_j - 1\}.$$

Veamos que

$$W = \bigcap_{i=1}^{A} \widetilde{W_i}.$$

$(\subseteq)$ $S \in W^m \Leftrightarrow \exists\, i_{p+1} = 1, ..., k_{p+1}, ..., \exists\, i_m = 1, ..., k_m$ tal que

$$S = N_1 \cup ... \cup N_p \cup N_{p+1i_{p+1}} \cup ... \cup N_{mi_m}$$

y de aquí se deduce, teniendo en cuenta la definición $\widetilde{W_i}$, que $S \in \bigcap_{i=1}^{A} \widetilde{W_i}$.

$(\supseteq)$ Supongamos, por contrarrecíproco que $S \in \mathcal{L}^M$, y veremos que S es perdedora en, como minimo, uno de los J.M.P. definidos anteriormente.

$S \in \mathcal{L}^M \Leftrightarrow \exists\, i = 1, ..., m$ tal que $S = N_1 \cup ... \cup N_{i-1} \cup \mathsf{R}_i \cup N_{i+1} \cup ... \cup N_m$,

donde $\mathsf{R}_i \subseteq N_i$, $|\mathsf{R}_i \cap N_{ij}| = n_{ij} - 1$, para todo $j = 1, ..., k_i$.

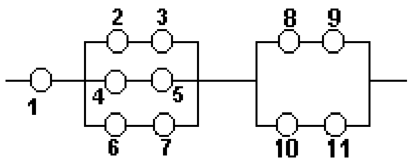
A partir de aquí distinguiremos 2 casos:

1. Si $i \leq p$, entonces S es perdedora en los $n_{p+11} \cdot ... \cdot n_{p+1k_{p+1}-1}$ J.M.P. iniciales.
2. Si $i \geq p+1$, entonces S es perdedora en el J.M.P. tal que el peso de los jugadores de $N_{ij} - \mathsf{R}_i$ sea n_{ik_i}, para $j = 1, ..., k_i - 1$, y el peso del resto de los jugadores, de acuerdo con la definición dada anteriormente. 2

Ejemplo 4.15 Consideremos el juego simple (N, W) de 7 jugadores tal que $W^m = \{\{1,2,3,8,9\}, \{1,2,3,10,11\}, \{1,4,5,8,9\}, \{1,4,5,10,11\}, \{1,6,7,8,9\}, \{1,6,7,10,11\}\}$. Veamos que

$$\dim(N, W) \leq n_{21} \cdot n_{22} + n_{31} = \dim(N, W_2) + \dim(N, W_3) = 4 + 2 = 6.$$

El diagrama asociado a este juego es



En este caso, $p = 1$.

$$N = N_1 \cup N_2 \cup N_3$$

donde

$N_1 = \{1\}$
$N_2 = \{2,3,4,5,6,7\} = N_{21} \cup N_{22} \cup N_{23} = \{2,3\} \cup \{4,5\} \cup \{6,7\}$
$N_3 = \{8,9,10,11\} = N_{31} \cup N_{32} = \{8,9\} \cup \{10,11\}$

En primer lugar observemos que

$$(N,W) = (N,W_1) \cap (N,W_2) \cap (N,W_3)$$

donde

$$W_1^m = \{1\}\,, W_2^m = \{\{2,3\},\{4,5\},\{6,7\}\}\,, W_3^m = \{\{8,9\},\{10,11\}\}.$$

Por el Lema 4.9 y la Proposición 4.6 sabemos que

$\dim(N,W_1) = 1$

$$(N,W_1) \equiv [1;1,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0].$$

$\dim(N,W_2) = 4$

$$\begin{aligned}(N,W_2) \;&\equiv\; [2;0,2,0,2,0,1,1,0,0,0,0] \cap [2;0,2,0,0,2,1,1,0,0,0,0] \cap \\ &\cap [2;0,0,2,2,0,1,1,0,0,0,0] \cap [2;0,0,2,0,2,1,1,0,0,0,0].\end{aligned}$$

$\dim(N,W_3) = 2$

$$(N,W_3) \equiv [2;0,0,0,0,0,0,0,2,0,1,1] \cap [2;0,0,0,0,0,0,0,0,2,1,1].$$

Por lo tanto,

$$\dim(N,W) \leq \dim(N,W_1) + \dim(N,W_2) + \dim(N,W_3) = 1+4+2 = 7.$$

Aplicando ahora la Proposición 4.9 , veremos que, en realidad, la.dimensión de (N,W) es menor o igual que 6. Para ello definamos los 4 J.M.P. en los que

$$\begin{aligned} a &= n_{23} = 2 \\ b &= 1 \\ w_1 &= (k_2-1)\cdot a + b = 2\cdot 2 + 1 = 5 \\ q &= p \cdot w_1 + a = 7 \end{aligned}$$

- $(N,\widetilde{W_1})$ tal que $\widetilde{W_1}^m = \{\{1,2\},\{1,4\},\{1,6,7\}\}$

  $(N,\widetilde{W_1}) \equiv [7;5,2,0,2,0,1,1,0,0,0,0]$
- $(N,\widetilde{W_2})$ tal que $\widetilde{W_2}^m = \{\{1,2\},\{1,5\},\{1,6,7\}\}$

  $(N,\widetilde{W_2}) \equiv [7;5,2,0,0,2,1,1,0,0,0,0]$
- $(N,\widetilde{W_3})$ tal que $\widetilde{W_3}^m = \{\{1,3\},\{1,4\},\{1,6,7\}\}$

  $(N,\widetilde{W_3}) \equiv [7;5,0,2,2,0,1,1,0,0,0,0]$

- $(N,\widetilde{W_4})$ tal que $\widetilde{W}_4^m = \{\{1,3\},\{1,5\},\{1,6,7\}\}$
  $(N,\widetilde{W_4}) \equiv [7;5,0,2,0,2,1,1,0,0,0,0]$

A continuación definimos los 2 J.M.P. restantes:

- $(N,\widetilde{W_5})$ tal que $\widetilde{W}_5^m = \{\{8\},\{10,11\}\}$
  $(N,\widetilde{W_5}) \equiv [2;0,0,0,0,0,0,0,2,0,1,1]$
- $(N,\widetilde{W_6})$ tal que $\widetilde{W}_5^m = \{\{9\},\{10,11\}\}$
  $(N,\widetilde{W_6}) \equiv [2;0,0,0,0,0,0,0,0,2,1,1]$

A partir de aquí tenemos que :

$$W = \bigcap_{i=1}^{6} \widetilde{W_i} \ , \ (N,\widetilde{W_i}) \ \text{ J.M.P.}, \ i = 1,...,6.$$

Lema 4.10 Sea (N,W) una composición de m juegos de unanimidad (N,u_i), para $i = 1,...,m$, vía individualismo tal que $1 \le n_1 \le ... \le n_m$. Entonces, si $n_{m-1} > 1$, existe una familia, $\mathcal{A}$, de $n_1 \cdot ... \cdot n_{m-1}$ coaliciones perdedoras maximales tal que $\forall\, R,\ S\, \in \mathcal{A}$,

$$\begin{array}{rcl} \exists\, i & \in & R - S\,,\ i \in N_p \\ \exists\, j & \in & S - R\,,\ j \in N_q,\ q \neq p. \end{array}$$

Demostración:

Las coaliciones $R \in \mathcal{A}$, como deben ser perdedoras maximales, deben verificar que

$$|R \cap N_i| = n_i - 1,\ \forall i = 1,...,m.$$

Sea $\mathcal{B}$ la familia de coaliciones formadas con 1 jugador de cada cámara N_i, $i = 1,...,m$, es decir,

$$\mathcal{B} = \{\{i_{1k_1}\} \cup ... \cup \{i_{mk_m}\},\ \text{donde}\ i_{jk_j} \in N_j,\ k_j = 1,...,n_j,\ j = 1,...,m\}.$$

A partir de la definición es fácil comprobar que $|\mathcal{B}| = n_1 \cdot ... \cdot n_m$ y que $\mathcal{B}$ no es más que el complementario de $\mathcal{L}^M$.

Nuestro problema equivale a demostrar que existe una familia de coaliciones, $\mathcal{C}^{(m)} \subset \mathcal{B}$, de cardinal $\left|\mathcal{C}^{(m)}\right| = n_1 \cdot ... \cdot n_{m-1}$, tal que $\forall\, R,\ S\ \in \mathcal{C}^{(m)}$ tienen, como mínimo, 2 jugadores diferentes.

Procederemos por inducción sobre m.

- Para $m = 2$ veamos que existe una familia de coaliciones, $\mathcal{C}^{(2)} \subset \mathcal{B}$, $\left|\mathcal{C}^{(2)}\right| = n_1$ tal que $\forall\, R,\ S\ \in \mathcal{C}^{(2)}$ tienen, como mínimo, 2 jugadores diferentes.

  Como $n_1 \leq n_2$, puedo definir

$$\mathcal{C}^{(2)} = \left\{ \begin{array}{l} \{i_{11}\} \cup \{i_{21}\} \\ \{i_{12}\} \cup \{i_{22}\} \\ ... \\ \{i_{1n_1}\} \cup \{i_{2n_1}\} \end{array} \right\}$$

  que verifica las condiciones exigidas.

- Para $m = 3$ veamos que existe $\mathcal{C}^{(3)} \subset \mathcal{B}$, $\left|\mathcal{C}^{(3)}\right| = n_1 \cdot n_2$ tal que $\forall\, R,\ S\ \in \mathcal{C}^{(3)}$ tienen, como mínimo, 2 jugadores diferentes.

  A partir de $\mathcal{C}^{(2)}$ construimos n_2 conjuntos, $\mathcal{C}_j^{(2)}$, $j = 1, ..., n_2$, del mismo cardinal que $\mathcal{C}^{(2)}$, resultado de hacer una biyección entre los elementos de N_2. Así obtenemos:

$$\mathcal{C}_1^{(2)} = \left\{ \begin{array}{l} \{i_{11}\} \cup \{i_{21}\} \\ \{i_{12}\} \cup \{i_{22}\} \\ ... \\ \{i_{1n_1}\} \cup \{i_{2n_1}\} \end{array} \right\}$$

$$\mathcal{C}_2^{(2)} = \left\{ \begin{array}{l} \{i_{11}\} \cup \{i_{22}\} \\ \{i_{12}\} \cup \{i_{23}\} \\ ... \\ \{i_{1n_1}\} \cup \{i_{2n_1+1}\} \end{array} \right\}$$

$$\vdots$$

$$\mathcal{C}_{n_2}^{(2)} = \left\{ \begin{array}{l} \{i_{11}\} \cup \{i_{2n_2}\} \\ \{i_{12}\} \cup \{i_{21}\} \\ ... \\ \{i_{1n_1}\} \cup \{i_{2n_1-1}\} \end{array} \right\}$$

Tenemos que $\left|\mathcal{C}_j^{(2)}\right| = n_1$, para $j = 1, .., n_2$.

Observemos que si $\exists\, j = 1, ..., n_2$ tal que $R, S \in \mathcal{C}_j^{(2)}$, entonces tienen 2 jugadores distintos, y si $\exists\, j, k\ j \neq k$, tal que $R \in \mathcal{C}_j^{(2)}$ y $S \in \mathcal{C}_k^{(2)}$, entonces tienen, como mínimo, 1 jugador distinto.

Construimos, para $j = 1, ..., n_2$, las familias $\mathcal{C}_j^{(3)}$, completando cada coalición de $\mathcal{C}_j^{(2)}$ con 1 jugador de N_3 de la siguiente forma:

$$\mathcal{C}_1^{(3)} = \left\{ \begin{array}{l} \{i_{11}\} \cup \{i_{21}\} \cup \{\mathsf{i}_{31}\} \\ \{i_{12}\} \cup \{i_{22}\} \cup \{\mathsf{i}_{31}\} \\ \cdots \\ \{i_{1n_1}\} \cup \{i_{2n_1}\} \cup \{\mathsf{i}_{31}\} \end{array} \right\}$$

$$\mathcal{C}_2^{(3)} = \left\{ \begin{array}{l} \{i_{11}\} \cup \{i_{22}\} \cup \{\mathsf{i}_{32}\} \\ \{i_{12}\} \cup \{i_{23}\} \cup \{\mathsf{i}_{32}\} \\ \cdots \\ \{i_{1n_1}\} \cup \{i_{2n_1+1}\} \cup \{\mathsf{i}_{32}\} \end{array} \right\}$$

$$\vdots$$

$$\mathcal{C}_{n_2}^{(3)} = \left\{ \begin{array}{l} \{i_{11}\} \cup \{i_{2n_2}\} \cup \{\mathsf{i}_{3n_2}\} \\ \{i_{12}\} \cup \{i_{21}\} \cup \{\mathsf{i}_{3n_2}\} \\ \cdots \\ \{i_{1n_1}\} \cup \{i_{2n_1-1}\} \cup \{\mathsf{i}_{3n_2}\} \end{array} \right\}$$

Podemos hacer este proceso porque $n_2 \leq n_3$.

Por lo tanto, para $j = 1, ..., n_2$

$$R \in \mathcal{C}_j^{(3)} \Leftrightarrow R = R_j \cup \{i_{3j}\}, \text{ donde } R_j \in \mathcal{C}_j^{(2)}.$$

A partir de aquí definimos

$$\mathcal{C}^{(3)} = \bigcup_{j=1}^{n_2} \mathcal{C}_j^{(3)}$$

y como $\left|\mathcal{C}_j^{(3)}\right| = n_1$, $j = 1, .., n_2$, tenemos que, tal y como queríamos $\left|\mathcal{C}^{(3)}\right| = n_1 \cdot n_2$.

Veamos que $\forall\, R,\ S\ \in \mathcal{C}^{(3)}$ tienen, como mínimo, 2 jugadores diferentes. Para ello distinguiremos dos casos:

1. $\exists\, j = 1, ..., n_2$ tal que $R,\ S\ \in \mathcal{C}_j^{(3)}$. Entonces

$$
\begin{aligned}
R &= R_j \cup \{i_{3j}\},\ R_j \in \mathcal{C}_j^{(2)} \\
S &= S_j \cup \{i_{3j}\},\ S_j \in \mathcal{C}_j^{(2)}
\end{aligned}
$$

   y por hipótesis de inducción, R_j y S_j tienen dos elementos distintos.

2. $R \in \mathcal{C}_j^{(3)}$ y $S \in \mathcal{C}_k^{(3)}, k \neq j$. Entonces

$$
\begin{aligned}
R &= R_j \cup \{i_{3j}\},\ R_j \in \mathcal{C}_j^{(2)} \\
S &= S_k \cup \{i_{3k}\},\ S_k \in \mathcal{C}_k^{(2)}
\end{aligned}
$$

   $i_{3j} \neq i_{3k}$ y como $R_j \in \mathcal{C}_j^{(2)}$ y $S_k \in \mathcal{C}_k^{(2)}$, sabemos que R_j y S_k tienen, como mínimo un elemento distinto. Por lo tanto, R y S, tendrán dos elementos distintos.

- Supongamos finalmente que el razonamiento es válido para $m-1$, es decir, existe una familia $\mathcal{C}^{(m-1)} \subset \mathcal{B}$ de cardinal

$$\left|\mathcal{C}^{(m-1)}\right| = n_1 \cdot n_2 \cdot ... \cdot n_{m-2}$$

  tal que $\forall R, S \in \mathcal{C}^{(m-1)}$ tienen dos elementos distintos.

  Queremos ver que también lo es para m, es decir, existe una familia $\mathcal{C}^{(m)} \subset \mathcal{B}$ de cardinal

$$\left|\mathcal{C}^{(m)}\right| = n_1 \cdot n_2 \cdot ... \cdot n_{m-1}$$

  tal que $\forall R, S \in \mathcal{C}^{(m)}$ tienen dos elementos distintos.

  A partir de $\mathcal{C}^{(m-1)}$ construimos las n_{m-1} familias de su mismo cardinal, $n_1 \cdot n_2 \cdot ... \cdot n_{m-2}$, resultado de hacer una biyección entre los elementos de N_{m-1}.

  Obtenemos las familias

$$\mathcal{C}_1^{(m-1)}, \mathcal{C}_2^{(m-1)}, ..., \mathcal{C}_{n_{m-1}}^{(m-1)}$$

  cuyo cardinal es $\left|\mathcal{C}_j^{(m-1)}\right| = n_1 \cdot n_2 \cdot ... \cdot n_{m-2}$, para $j = 1, ..., n_{m-1}$.

  A partir de ellas construimos las correspondientes familias $\mathcal{C}_j^{(m)}$, para $j = 1, ..., n_{m-1}$, completando cada coalición de $\mathcal{C}_j^{(m-1)}$ con el jugador $i_{mj} \in N_m$. Es decir, para $j = 1, ..., n_{m-1}$

$$R \in \mathcal{C}_j^{(m)} \Leftrightarrow R = R_j \cup \{i_{mj}\}, \text{ donde } R_j \in \mathcal{C}_j^{(m-1)}.$$

Esto es posible puesto que $n_{m-1} \leq n_m$.

Finalmente definimos

$$\mathcal{C}^{(m)} = \bigcup_{j=1}^{n_{m-1}} \mathcal{C}_j^{(m)},$$

y como $\left|\mathcal{C}_j^{(m)}\right| = n_1 \cdot n_2 \cdot ... \cdot n_{m-2}$, para $j = 1, ..., n_{m-1}$, tenemos, tal y como queríamos, que

$$\left|\mathcal{C}^{(m)}\right| = n_1 \cdot n_2 \cdot ... \cdot n_{m-2} \cdot n_{m-1}.$$

Comprobemos que $\forall R, S \in \mathcal{C}^{(m)}$ tienen dos jugadores distintos. Distinguiremos dos casos:

1. $\exists\, j = 1, ..., n_{m-1}$ tal que$R,\ S\ \in \mathcal{C}_j^{(m)}$. Entonces

$$\begin{aligned} R &= R_j \cup \{i_{mj}\},\ R_j \in \mathcal{C}_j^{(m-1)} \\ S &= S_j \cup \{i_{mj}\},\ S_j \in \mathcal{C}_j^{(m-1)} \end{aligned}$$

   y por hipótesis de inducción, R_j y S_j tienen dos elementos distintos, con lo cual, R y S también.

2. $R \in \mathcal{C}_j^{(m)}$ y $S \in \mathcal{C}_k^{(m)}, k \neq j$. Entonces

$$\begin{aligned} R &= R_j \cup \{i_{mj}\},\ R_j \in \mathcal{C}_j^{(m-1)} \\ S &= S_k \cup \{i_{mk}\},\ S_k \in \mathcal{C}_k^{(m-1)} \end{aligned}$$

   $i_{mj} \neq i_{mk}$ y como $R_j \in \mathcal{C}_j^{(m-1)}$ y $S_k \in \mathcal{C}_k^{(m-1)}$, sabemos que R_j y S_k tienen, como mínimo un elemento distinto. Por lo tanto, R y S, tendrán dos elementos distintos.

Definimos la familia $\mathcal{A}(\subset \mathcal{L}^M, |\mathcal{A}| = n_1 \cdot ... \cdot n_{m-1},)$ que estamos buscando como el complementario de la familia $\mathcal{C}^{(m)}$.

Está claro que $|\mathcal{A}| = n_1 \cdot ... \cdot n_{m-1}$ y $\mathcal{A} \subset \mathcal{L}^M$.

Sean R,$S \in \mathcal{C}^{(m)}$. A partir de la definición, estas coaliciones, tendrán, como mínimo 2 jugadores diferentes. Queremos ver que sus complementarios, $\overline{R}$ y $\overline{S}$ verifican que

$$\begin{aligned} \exists\, i &\in \overline{R} - \overline{S},\ i \in N_p \\ \exists\, j &\in \overline{S} - \overline{R},\ j \in N_q,\ q \neq p. \end{aligned}$$

Supongamos, sin pérdida de generalidad que

$$\begin{aligned} R &= \{i_{11}\} \cup \{i_{21}\} \cup \{i_{31}\} \cup ... \cup \{i_{m1}\},\ i_{11}, i_{21} \in R - S \\ S &= \{i_{12}\} \cup \{i_{22}\} \cup \{i_{31}\} \cup ... \cup \{i_{m1}\},\ i_{12}, i_{22} \in S - R \end{aligned}$$

Veamos que los complementarios de estas coaliciones, $\overline{R}$ y $\overline{S}$ son de $\mathcal{A}$.

$$\begin{aligned} \overline{R} &= N_1 - \{i_{11}\} \cup N_2 - \{i_{21}\} \cup N_3 - \{i_{31}\} \cup ... \cup N_m - \{i_{m1}\} \\ \overline{S} &= N_1 - \{i_{12}\} \cup N_2 - \{i_{22}\} \cup N_3 - \{i_{31}\} \cup ... \cup N_m - \{i_{m1}\} \end{aligned}$$

En primer lugar, $\overline{R}$ y $\overline{S}$ son coaliciones perdedoras maximales, y en segundo lugar, podemos asegurar que

$$\begin{aligned} i_{12} &\in \overline{R} - \overline{S},\ i_{12} \in N_1 \\ i_{21} &\in \overline{S} - \overline{R},\ i_{21} \in N_2. \end{aligned}$$

2

Teorema 4.5 Sea (N, W) el juego definido en el inicio de esta sección, y sea $p < m$ tal que $|N_p| = 1, |N_{p+1}| > 1$ o $p = 0$ si $|N_1| > 1$, $1 \leq n_{i1} \leq ... \leq n_{ik_i}$, $i = p+1, ..., m$. Entonces:

$$\dim(N, W) = \sum_{i=p+1}^{m} n_{i1} \cdot ... \cdot n_{ik_i - 1} = \dim(N, W_{p+1}) + ... + \dim(N, W_m).$$

Demostración:

Por la proposición 4.9 es suficiente demostrar que (N, W) no puede definirse como intersección de $n_{p+11} \cdot ... \cdot n_{p+1k_{p+1}-1} + ... + n_{m1} \cdot ... \cdot n_{mk_m - 1} - 1$ J.M.P.

Supongamos, en primer lugar, que $n_{ik_{i-1}} > 1$, para todo $i = p+1, ..., m$.

Consideremos, en primer lugar, los juegos (N_i, W_i), $i = p+1, ..., m$, que, como ya hemos visto, son composición de k_i juegos de unanimidad vía individualismo, y aplicando el lema anterior, podemos deducir que

$$\begin{aligned} \exists\, \mathcal{A}_i &\subset \mathcal{L}_i^M,\ |\mathcal{A}_i| = n_{i1} \cdot ... \cdot n_{ik_i - 1} \text{ tal que } \forall\, R, S \in \mathcal{A}_i \\ \exists\, k &\in R - S,\ k \in N_{ir} \\ \exists\, j &\in S - R,\ k \in N_{iq},\ q \neq r \end{aligned}$$

A partir de estas familias $\mathcal{A}_i$, teniendo en cuenta la definición de $\mathcal{L}^M$, construimos las siguientes coaliciones perdedoras maximales de (N, W) :

$$\mathcal{B}_i = N_1 \cup ... \cup N_{i-1} \cup R_i \cup N_{i+1} \cup ... \cup N_m, \ i = p+1, ..., m$$

donde $R_i \in \mathcal{A}_i$.

Observemos que $|\mathcal{B}_i| = n_{i1} \cdot ... \cdot n_{ik_i-1}$. Finalmente consideramos el conjunto de coaliciones perdedoras maximales $\mathcal{B} = \bigcup\limits_{i=p+1}^{m} \mathcal{B}_i$. El cardinal de este conjunto es

$$|\mathcal{B}| = \sum_{i=p+1}^{m} n_{i1} \cdot ... \cdot n_{ik_i-1},$$

y se verifica $\forall\, R, S \in \mathcal{B}$

$$\begin{aligned} \exists\, k &\in R - S, \ k \in N_{ir} \\ \exists\, j &\in S - R, \ j \in N_{iq}, \ q \neq r \end{aligned}$$

o bien,

$$\begin{aligned} \exists\, k &\in R - S, \ k \in N_s \\ \exists\, j &\in S - R, \ j \in N_t, \ t \neq s. \end{aligned}$$

Supongamos, por contradicción que (N, W) puede expresarse como intersección de $\sum\limits_{i=p+1}^{m} n_{i1} \cdot ... \cdot n_{ik_i-1} - 1 = \alpha$ J.M.P., es decir,

$$W = \bigcap_{j=1}^{\alpha} W_j, \text{ donde } (N, W_j) \text{ son J.M.P.}$$

Si consideramos las $\sum\limits_{i=p+1}^{m} n_{i1} \cdot ... \cdot n_{ik_i-1}$ coaliciones perdedoras maximales de $\mathcal{B}$, entonces existiría un (N, W_l), J.M.P., $l = 1, ..., \sum\limits_{i=p+1}^{m} n_{i1} \cdot ... \cdot n_{ik_i-1} - 1$, que contendría a 2 de estas coaliciones perdedoras maximales. Sean R y S estas coaliciones. Veamos que este hecho nos lleva a contradicción. Distinguiremos 2 casos:

1. $\exists\, k \in R - S, \ k \in N_{ir}, \ \ \exists\, j \in S - R, \ j \in N_{iq}, \ q \neq r$. Entonces:

$$\begin{aligned} &R \notin W_l \\ &R - \{k\} \cup \{j\} \in W_l \end{aligned}$$

ya que $R - \{k\} \cup \{j\} = N_1 \cup ... \cup N_{i-1} \cup N_{iq} \cup N_{i+1} \cup ... \cup N_m$.

Comparando los pesos de ambas coaliciones en el juego (N, W_l) resulta que $w_k^l < w_j^l$.

Por otra parte,

$$\begin{array}{l} S \notin W_l \\ S - \{j\} \cup \{k\} \in W_l \end{array}$$

ya que $S - \{j\} \cup \{k\} = N_1 \cup ... \cup N_{i-1} \cup N_{ir} \cup N_{i+1} \cup ... \cup N_m$.

Comparando los pesos de ambas coaliciones en el juego (N, W_l) resulta que $w_j^l < w_k^l$.

Esta igualdad, junto con la anterior, contradicen el hecho de que (N, W_l) sea un J.M.P.

2. $\exists\, k \in R - S,\ k \in N_s,\ \exists\, j \in S - R,\ j \in N_t,\ t \neq s.$

$$\begin{array}{l} R \notin W_l \\ R - \{k\} \cup \{j\} \in W_l \end{array}$$

Comparando los pesos de ambas coaliciones en el juego (N, W_l) resulta que $w_k^l < w_j^l$.

Por otra parte,

$$\begin{array}{l} S \notin W_l \\ S - \{j\} \cup \{k\} \in W_l \end{array}$$

Comparando los pesos de ambas coaliciones en el juego (N, W_l) resulta que $w_j^l < w_k^l$.

Esta igualdad, junto con la anterior, contradicen el hecho de que (N, W_l) sea un J.M.P.

Supongamos a continuación que $\exists\, i = p+1, ..., m$ tal que $n_{ik_i-1} = 1$. Supongamos, sin pérdida de generalidad que $n_{p+1k_{p+1}-1} = 1$. En este caso queremos demostrar que

$$\dim(N, W) = 1 + \sum_{i=p+2}^{m} n_{i1} \cdot ... \cdot n_{ik_i-1}.$$

Sea $R_{p+1} \subset N_{p+1}$ tal que $\left|R_{p+1} \cap N_{p+1k_{p+1}}\right| = n_{p+1k_{p+1}} - 1$. A partir de ella construimos la siguiente coalición perdedora maximal de (N, W) :

$$\mathcal{B}_{p+1} = N_1 \cup ... \cup N_p \cup R_{p+1} \cup ... \cup N_m.$$

Para $i = p+2, ..., m$ repetimos el razonamiento del inicio de la demostración y construimos la siguientes familias de coaliciones perdedoras maximales

$$\mathcal{B}_i = N_1 \cup ... \cup N_{i-1} \cup R_i \cup N_{i+1} \cup ... \cup N_m, \; i = p+2, ..., m$$

donde $R_i \in \mathcal{A}_i$. El cardinal de cada una de estas familias es

$$|\mathcal{B}_i| = n_{i1} \cdot ... \cdot n_{ik_i-1}.$$

Finalmente consideramos el conjunto de coaliciones perdedoras maximales $\mathcal{B} = \bigcup_{i=p+1}^{m} \mathcal{B}_i$. El cardinal de esta familia es

$$|\mathcal{B}| = 1 + \sum_{i=p+2}^{m} n_{i1} \cdot ... \cdot n_{ik_i-1},$$

y se verifica, al igual que en el caso anterior, $\forall\, R, S \in \mathcal{B}$

$$\begin{array}{rcl} \exists\, k & \in & R - S, \; k \in N_{ir} \\ \exists\, j & \in & S - R, \; j \in N_{iq}, \; q \neq r \end{array}$$

o bien,

$$\begin{array}{rcl} \exists\, k & \in & R - S, \; k \in N_s \\ \exists\, j & \in & S - R, \; j \in N_t, \; t \neq s. \end{array}$$

A partir de aquí, la demostración es análoga a la ya realizada. 2

Corolario 4.5 Si (N, W) es composición de m juegos individualistas vía unanimidad, con $1 \leq n_1 \leq n_2 \leq ... \leq n_m$ y sea $p < m$ tal que $n_p = 1$, $n_{p+1} > 1$ o $p = 0$ si $n_1 > 1$, entonces,

$$\dim(N, W) = m - p.$$

Demostración:

Aplicamos el teorema anterior al caso particular de que :

$$\begin{cases} n_{p+1i} = 1, \quad i = 1, ..., k_{p+1} \\ ... \\ n_{mi} = 1, \quad i = 1, ..., k_m \end{cases}$$

Entonces:

$$\dim(N,W)=\sum_{i=p+1}^{m} n_{i1}\cdot\ldots\cdot n_{ik_i-1}=1+\overbrace{\ldots}^{m-p}+1=m-p$$

2

Corolario 4.6 Sea (N,W) una composición de k juegos de unanimidad (N,u_i) $i=1,...,k$ vía individualismo tal que $1\leq n_1\leq ...\leq n_k$. Entonces, la dimensión de (N,W) es igual que $n_1\cdot n_2\cdot\ldots\cdot n_{k-1}$.

Demostración:

Aplicamos el Teorema 4.5 al caso particular en que

$$\begin{array}{l} m=1 \text{ y } p=0\\ k_1=k\\ n_{1i}=n_i,\ i=1,...,k\end{array}$$

Entonces:

$$\dim(N,W)=\sum_{i=p+1}^{m} n_{i1}\cdot\ldots\cdot n_{ik_i-1}=n_{11}\cdot\ldots\cdot n_{1k_1-1}=n_1\cdot\ldots\cdot n_{k-1}$$

2

Ejemplo 4.16 La dimensión del juego del Ejemplo 4.11 es 8.

En este caso $p=0$, y utilizando el Teorema 4.5 sabemos que

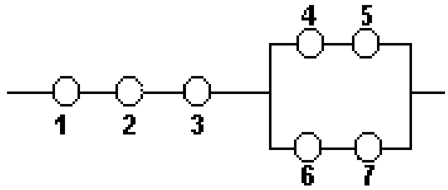
$$\dim(N,W)=n_{11}+n_{21}\cdot n_{22}+n_{31}\cdot n_{32}=8.$$

La representación como intersección de 8 juegos de mayoría ponderada ya la hemos dado en el Ejemplo 4.14.

Ejemplo 4.17 Consideremos el juego simple (N,W) de 7 jugadores tal que $W^m=\{\{1,2,3,4,5\},\{1,2,3,6,7\}\}$. Veamos que

$$\dim(N,W)=n_{41}=\dim(N,W_4)=2.$$

El diagrama asociado al juego es



En este caso $p = 3$,

$$N = N_1 \cup N_2 \cup N_3 \cup N_4$$

donde

$$\begin{aligned} N_1 &= \{1\} \\ N_2 &= \{2\} \\ N_3 &= \{3\} \\ N_4 &= \{4,5,6,7\} = N_{41} \cup N_{42} = \{4,5\} \cup \{6,7\} \end{aligned}$$

En primer lugar observemos que

$$(N,W) = (N,W_1) \cap (N,W_2) \cap (N,W_3) \cap (N,W_4)$$

donde

$$W_1^m = \{1\},\ W_2^m = \{2\},\ W_3^m = \{3\},\ W_4^m = \{\{4,5\},\{6,7\}\}.$$

Por el lema 4.9 y la Proposición 4.6 tenemos que

$$\begin{array}{ll} \dim(N,W_1) = 1 & (N,W_1) \equiv [1;1,0,0,0,0,0,0] \\ \dim(N,W_2) = 1 & (N,W_2) \equiv [1;0,1,0,0,0,0,0] \\ \dim(N,W_3) = 1 & (N,W_3) \equiv [1;0,0,1,0,0,0,0] \\ \dim(N,W_4) = 2 & (N,W_4) \equiv [2;0,0,0,2,0,1,1] \cap [2;0,0,0,0,2,1,1]. \end{array}$$

Por lo tanto,

$$\dim(N,W) \leq 1+1+1+2 = 5.$$

Aplicando ahora la Proposición 4.9, veremos que $\dim(N,W) \leq 2$. Para ello defino los 2 J.M.P. siguientes:

$$\begin{aligned} a &= n_{42} = 2 \\ b &= 1 \\ w_1 &= w_2 = w_3 = (k_4 - 1) \cdot a + b = 3 \\ q &= p \cdot w_1 + a = 3 \cdot 3 + 2 = 11 \end{aligned}$$

- $(N, \widetilde{W_1})$ tal que $\widetilde{W_1}^m = \{\{1,2,3,4\},\{1,2,3,6,7\}\}$

  $(N, \widetilde{W_1}) \equiv [11; 3,3,3,2,0,1,1]$

- $(N, \widetilde{W}_2)$ tal que $\widetilde{W}_2^m = \{\{1,2,3,5\},\{1,2,3,6,7\}\}$
  $(N, \widetilde{W}_2) \equiv [11; 3,3,3,0,2,1,1]$

A partir de aquí tenemos que :

$$W = \bigcap_{i=1}^{2} \widetilde{W}_i \ , \ (N, \widetilde{W}_i) \ \text{ J.M.P}, \ i = 1, ..., 2$$

Veamos ahora que $\dim(N, W) = 2$. Si suponemos que $\dim(N, W) = 1$, entonces (N, W) sería un J.M.P. Consideremos las 2 coaliciones perdedoras maximales siguientes:

$$\begin{aligned} R_1 &= \{1,2,3,4,6\} \notin W \\ R_2 &= \{1,2,3,5,7\} \notin W \end{aligned}$$

Sin embargo,

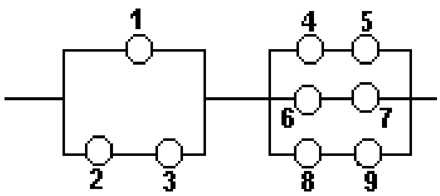
$$\begin{aligned} T_1 &= R_1 - \{6\} \cup \{5\} = \{1,2,3,4,5\} \in W \\ T_2 &= R_2 - \{5\} \cup \{6\} = \{1,2,3,6,7\} \in W \end{aligned}$$

Si comparamos R_1 y T_1, deducimos que $w_6 < w_5$, mientras que si comparamos R_2 y T_2 obtenemos que $w_5 < w_6$, lo cual contradice el hecho de que (N, W) sea un J.M.P.

Ejemplo 4.18 Consideremos el juego simple (N, W) de 9 jugadores tal que $W^m = \{\{1,4,5\},\{1,6,7\},\{1,8,9\},\{2,3,4,5\},\{2,3,6,7\},\{2,3,8,9\}\}$. Veamos que

$$\dim(N, W) = n_{11} + n_{21} \cdot n_{22} = 1 + 4 = 5 = \dim(N, W_1) + \dim(N, W_2)$$

El diagrama asociado al juego es



En este caso $p = 0$.

$$N = N_1 \cup N_2$$

$$N_1 = \{1,2,3\} = \{1\} \cup \{2,3\} = N_{11} \cup N_{12}$$
$$N_2 = \{4,5,6,7,8,9\} = \{4,5\} \cup \{6,7\} \cup \{8,9\} = N_{21} \cup N_{22} \cup N_{23}$$

Aplicando el Teorema 4.5 vemos que $\dim(N,W) = n_{11} + n_{21} \cdot n_{22} = 5$. Para ello definimos los 5 J.M.P. siguientes:

- $(N, \widetilde{W_1})$ tal que $\widetilde{W_1}^m = \{\{1\},\{2,3\}\}$
  $(N, \widetilde{W_1}) \equiv [2; 2,1,1,0,0,0,0,0,0]$
- $(N, \widetilde{W_2})$ tal que $\widetilde{W_2}^m = \{\{4\},\{6\},\{8,9\}\}$
  $(N, \widetilde{W_2}) \equiv [2; 0,0,0,2,0,2,0,1,1]$
- $(N, \widetilde{W_3})$ tal que $\widetilde{W_3}^m = \{\{4\},\{7\},\{8,9\}\}$
  $(N, \widetilde{W_3}) \equiv [2; 0,0,0,2,0,0,2,1,1]$
- $(N, \widetilde{W_4})$ tal que $\widetilde{W_4}^m = \{\{5\},\{6\},\{8,9\}\}$
  $(N, \widetilde{W_4}) \equiv [2; 0,0,0,0,2,2,0,1,1]$
- $(N, \widetilde{W_5})$ tal que $\widetilde{W_5}^m = \{\{5\},\{7\},\{8,9\}\}$
  $(N, \widetilde{W_5}) \equiv [2; 0,0,0,0,2,0,2,1,1]$

A partir de aquí tenemos que:

$$W = \bigcap_{i=1}^{5} \widetilde{W_i} \ , \ (N, \widetilde{W_i}) \text{ J.M.P.}$$

Supongamos que la dimensión del juego es 4, es decir, W es intersección de 4 juegos de mayoría ponderada. Si consideramos las $n_{11} + n_{21} \cdot n_{22} = 1 + 4 = 5$ coaliciones perdedoras maximales siguientes

$$\begin{aligned}\mathcal{A} &= \{\{2,4,5,6,7,8,9\},\{1,2,3,4,6,8\},\{1,2,3,4,7,9\},\{1,2,3,5,6,9\},\\ &\quad \{1,2,3,5,7,8\}\},\end{aligned}$$

como estamos suponiendo que la dimensión es 4, entonces existiría uno de estos 4 J.M.P. que contendría a 2 de estas 5 coaliciones perdedoras maximales, y esto es imposible, puesto que $\forall\, R,\, T \in \mathcal{A}$

$$\begin{aligned}\exists i &\in R - T,\ \exists j \in T - R \text{ tal que } i \in N_{2r} \text{ y } j \in N_{2q},\ q \neq r \text{ ó}\\ \exists i &\in R - T,\ \exists j \in T - R \text{ tal que } i \in N_r \text{ y } j \in N_q,\ q \neq r.\end{aligned}$$

Capítulo 5

Semivalores sobre juegos simples monótonos

Una parte importante de la Teoría de Juegos se centra en el estudio del valor, entendiendo el concepto de valor como una evaluación a priori de la expectativa de cada jugador en un juego cooperativo. Shapley inició el camino y a partir de él se han introducido nuevas posibilidades. Dos de las más relevantes contribuciones a esta línea de investigación hacen referencia a los **semivalores** y los **valores probabilísticos**, introducidos por Dubey, Von Neyman y Weber; y Weber, respectivamente.

En este capítulo pretendemos, en primer lugar, adaptar el concepto de semivalor dado en el capítulo inicial al caso concreto de los juegos simples monótonos, caracterizándolo mediante coeficientes de ponderación de manera análoga a la presentada para los juegos cooperativos. A continuación estudiaremos una serie de propiedades que afectarán a determinadas subfamilias de semivalores, entre las que se encontrarán los ya conocidos valores de Shapley y de Banzhaf. Finalmente, presentaremos una serie de aplicaciones de los semivalores y los valores probabilísticos a la Fiabilidad de Sistemas. Dado que la tesis se enmarca en el contexto de los juegos simples, hemos creído conveniente centrar el capítulo en esta clase de juegos, aunque los resultados obtenidos en la Sección 5.2 y algunas de las propiedades estudiadas en la Sección 5.3 pueden extenderse a los juegos cooperativos en general.

Recordaremos en primer lugar la definición de semivalor sobre juegos cooperativos dada en el capítulo de preliminares.

Definición 5.1 Una solución $\Psi : \mathcal{G}_N \to \mathbb{R}^n$ es un semivalor si satisface los siguientes axiomas:

1. Linealidad: $\Psi[u+v] = \Psi[u] + \Psi[v]$ y $\Psi[\lambda v] = \lambda\Psi[v]$ para cualesquiera $u, v \in \mathcal{G}_N$ y $\lambda \in \mathbb{R}$.
2. Simetría: $\Psi_{\pi i}[\pi v] = \Psi_i[v]$ para toda permutación π de N, para cualquier i de N y cualquier v de $\mathcal{G}_N$.
3. Positividad: si v es monótono, entonces $\Psi_i[v] \geq 0$ para todo $i \in N$.
4. Títere: si i es un títere en el juego v, entonces $\Psi_i[v] = v(\{i\})$.

5.1 Axiomática para juegos simples monótonos

Al restringirnos a los juegos simples, el axioma de linealidad carece de sentido, pues, como es sabido, la suma de dos juegos simples no es, en general, un juego simple. Para solucionar este inconveniente, recordemos que $\mathcal{S}_N \subseteq \mathcal{G}_N$ es un retículo con las operaciones unión e intersección

$$\begin{aligned} (u \vee v)(S) &= \max\{u(S), v(S)\} \\ (u \wedge v)(S) &= \min\{u(S), v(S)\}, \end{aligned}$$

y a partir de aquí podemos considerar el siguiente axioma.

Definición 5.2 Una solución, $\Psi : \mathcal{S}_N \to \mathbb{R}^n$ verifica el axioma de transferencia si

$$\Psi[u \vee v] = \Psi[u] + \Psi[v] - \Psi[u \wedge v] \quad \forall u, v \in \mathcal{S}_N$$

Teniendo en cuenta este nuevo axioma, la siguiente proposición nos sugiere como definir el concepto de semivalor para juegos simples.

Proposición 5.1 Dado un semivalor Ψ en $\mathcal{G}_N$, su restricción a $\mathcal{S}_N$ satisface los axiomas de transferencia, simetría, positividad y títere.

Demostración:

Ψ satisface los axiomas de simetría, positividad y títere. Además

$$u+v=(u\vee v)+(u\wedge v)\ \forall\, u,\, v\in\mathcal{S}_N,$$

y aplicando el axioma de linealidad de Ψ obtenemos que

$$\Psi[u]+\Psi[v]=\Psi[u+v]=\Psi[u\vee v]+\Psi[u\wedge v],$$

y por lo tanto

$$\Psi[u\vee v]=\Psi[u]+\Psi[v]-\Psi[u\wedge v],$$

es decir, Ψ también satisface el axioma de transferencia. 2

A partir de este momento interpretaremos $\mathcal{S}_N^*$ como el conjunto de juegos simples monótonos de n jugadores.

Teniendo en cuenta este resultado, podemos dar la siguiente definición.

Definición 5.3 Un semivalor sobre $\mathcal{S}_N^*$ es una aplicación

$$\Psi:\mathcal{S}_N^*\to \mathrm{R}^n$$

que asigna a cada $v\in\mathcal{S}_N^*$ un vector $\Psi[v]=(\Psi_1[v],...,\Psi_n[v])$ y que verifica los axiomas siguientes:

1. Transferencia: $\Psi[u\vee v]=\Psi[u]+\Psi[v]-\Psi[u\wedge v]$ para cualesquiera $u,v\in\mathcal{S}_N^*$.
2. Simetría: $\Psi_{\pi i}[\pi v]=\Psi_i[v]$ para toda permutación π de N, para cualquier i de N y cualquier $v\in\mathcal{S}_N^*$.
3. Positividad: $\Psi_i[v]\geq 0$ para todo i.
4. Títere: si i es un títere en el juego v, entonces $\Psi_i[v]=v(\{i\})$.

Teorema 5.1 (a) Dados $(p_k)_{k=0}^{n-1}$ tales que $\sum\limits_{k=0}^{n-1}p_k\binom{n-1}{k}=1$ y $p_k\geq 0$ para todo k, entonces

$$\Psi_i[v]=\sum_{\substack{S\subseteq N-\{i\}\\ S\notin W\\ S\cup\{i\}\in W}}p_s\ ,\forall i\in N,\,\forall v\in\mathcal{S}_N^*\ \ (s=|S|)$$

define un semivalor Ψ en $\mathcal{S}_N^*$.

(b) Recíprocamente, todo semivalor en $\mathcal{S}_N^*$ puede obtenerse de esta forma.

(c) La correspondencia dada por $(p_k) \longmapsto \Psi$ es biyectiva.

Demostración:

(a) Teniendo en cuenta la caracterización dada por Dubey para los semivalores de juegos cooperativos que aparece en el capítulo de preliminares, sabemos que

$$\Psi_i[v] = \sum_{S \subseteq N-\{i\}} p_s \left[v(S \cup i) - v(S)\right],\ \forall i \in N,\ \forall v \in \mathcal{G}_N \ \ (s = |S|)$$

define un semivalor en $\mathcal{G}_N$.

Como estamos suponiendo que $v \in \mathcal{S}_N^*$, entonces $v(S \cup i) - v(S)$ será cero excepto en el caso en que $S \notin W$ y $S \cup i \in W$, y de aquí se deduce que

$$\Psi_i[v] = \sum_{\substack{S \subseteq N-\{i\} \\ S \notin W \\ S \cup \{i\} \in W}} p_s = \sum_{S \in \mathcal{C}(i,v)} p_s,$$

en donde $\mathcal{C}(i,v)$ es el conjunto de coaliciones en las que el jugador i es pivote en el juego v. Utilizaremos también la notación equivalente $\Psi_i[W]$, siendo W el conjunto de las coaliciones ganadoras del juego.

Como consecuencia de la Proposición 5.1, Ψ verifica los 4 axiomas de la Definición 5.3.

(b) Sea S el subespacio generado por todos los semivalores de juegos simples monótonos dentro del espacio vectorial de las aplicaciones de $\mathcal{S}_N^*$ en R^n que verifican el axioma de transferencia. Veamos en primer lugar que $\dim(S) = n$.

Todo $\Psi \in S$ es de la forma

$$\Psi = \lambda_1 \varphi_1 + ... + \lambda_k \varphi_k,$$

en donde $\varphi_1, ..., \varphi_k$ son semivalores.

Entonces Ψ satisface los axiomas de transferencia y simetría. El axioma de títere lo satisface en el caso concreto en que el jugador sea nulo.

Veamos que Ψ está determinado por su acción sobre los juegos de unanimidad. Teniendo en cuenta que todo juego simple no nulo v se puede expresar de la forma $v = u_{S_1} \vee ... \vee u_{S_r}$, en donde $W^m = \{S_1, ..., S_r\}$, procederemos por inducción sobre el número de coaliciones ganadoras minimales.

Si $r = 1$, entonces $v = u_{S_1}$ y efectivamente $\Psi[v] = \Psi[u_{S_1}]$.

Supongamos que es cierto para $r - 1$ y veamos que también lo es para r.

En este caso

$$v = u_{S_1} \vee ... \vee u_{S_r} = u \vee u',$$

en donde

$$\begin{aligned} u &= u_{S_1} \vee ... \vee u_{S_{r-1}} \\ u' &= u_{S_r}. \end{aligned}$$

Aplicando el axioma de transferencia y que $u_S \wedge u_T = u_{S \cup T}$, $\forall S, T$, tenemos que:

$$\begin{aligned} \Psi[v] &= \Psi[u \vee u'] = \Psi[u] + \Psi[u'] - \Psi[u \wedge u'] = \\ &= \Psi[u_{S_1} \vee ... \vee u_{S_{r-1}}] + \Psi[u_{S_r}] - \Psi[(u_{S_1} \vee ... \vee u_{S_{r-1}}) \wedge u_{S_r}] = \\ &= \Psi[u_{S_1} \vee ... \vee u_{S_{r-1}}] + \Psi[u_{S_r}] - \Psi[(u_{S_1} \wedge u_{S_r}) \vee ... \vee (u_{S_{r-1}} \wedge u_{S_r})] = \\ &= \Psi[u_{S_1} \vee ... \vee u_{S_{r-1}}] + \Psi[u_{S_r}] - \Psi[u_{S_1 \cup S_r} \vee ... \vee u_{S_{r-1} \cup S_r}]. \end{aligned}$$

Finalmente, aplicando el proceso de inducción en cada uno de los tres sumandos tenemos que Ψ queda determinado por su acción sobre los juegos de unanimidad.

El axioma del títere implica que $\Psi_i[u_T] = 0$ para $i \notin T$ y el axioma de simetría implica que $\Psi_i[u_T] = \Psi_j[u_T]$ para todo $i, j \in T$. Además, si $i \in T$, $j \in S$ y $|S| = |T|$, aplicando de nuevo el axioma de simetría se deduce que $\Psi_i[u_T] = \Psi_j[u_S]$. Por lo tanto, Ψ está completamente determinado por n números, es decir,

$$\alpha_1 = \Psi_1[u_1],\ \alpha_2 = \Psi_1[u_{\{1,2\}}],\ \alpha_3 = \Psi_1[u_{\{1,2,3\}}]\ , ..., \alpha_n = \Psi_1[u_N],$$

y de aquí se deduce que $\dim(S) \leq n$.

Consideremos a continuación los semivalores Ψ^0, $\Psi^1, ...,$ Ψ^{n-1}, en donde cada Ψ^j está definido a partir de los coeficientes de ponderación $\{p_k^j\}$ dados por

$$p_j^j = \frac{1}{\binom{n-1}{j}}$$
$$p_k^j = 0.$$

Veamos que estos semivalores son linealmente independientes.

Si $\lambda_0\Psi^0 + \lambda_1\Psi^1 + ... + \lambda_{n-1}\Psi^{n-1} = 0$, aplicando sucesivamente esta combinación lineal a los juegos u_N, $u_{N-\{n\}}$, $u_{N-\{n,n-1\}}, ..., u_1$ y estudiando siempre el poder del jugador 1 obtenemos que

$$\lambda_{n-1} = \lambda_{n-2} = ... = \lambda_1 = \lambda_0 = 0.$$

Por lo tanto, $\dim(S) = n$, $\{\Psi^0, \Psi^1, ..., \Psi^{n-1}\}$ es una base de S y todo semivalor Ψ en $\mathcal{S}_N^*$ puede expresarse de manera única como combinación lineal de Ψ^0, $\Psi^1, ..., \Psi^{n-1}$, es decir

$$\Psi = \sum_{j=0}^{n-1} \lambda_j \Psi^j.$$

Veamos a partir de este resultado que todo semivalor puede definirse mediante coeficientes de ponderación.

Sea $\Psi = \sum_{j=0}^{n-1} \lambda_j \Psi^j$ un semivalor en $\mathcal{S}_N^*$. Si lo aplicamos a $v \in \mathcal{S}_N^*$, para todo $i \in N$, teniendo en cuenta la definición de los coeficientes de ponderación de los semivalores Ψ^j, obtenemos:

$$\Psi_i[v] = \sum_{j=0}^{n-1} \lambda_j \Psi_i^j[v] = \sum_{j=0}^{n-1} \lambda_j \sum_{\substack{S\in\mathcal{C}(i,v) \\ |S|=j}} p_j^j = \sum_{S\in\mathcal{C}(i,v)} \lambda_s p_s^s = \sum_{S\in\mathcal{C}(i,v)} \frac{\lambda_s}{\binom{n-1}{s}}.$$

Finalmente tenemos que comprobar que:

1. $\lambda_s \geq 0$, $\forall s$.

   Para un valor k dado, consideramos el juego simple monótono definido por:
   $$v(T) = \begin{cases} 1 & \text{si } |T| > k \\ 0 & \text{si } |T| \leq k. \end{cases}$$

Utilizando el axioma de positividad se deduce que

$$0 \leq \Psi_1[v] = \sum_{S \in \mathcal{C}(1,v)} \frac{\lambda_s}{\binom{n-1}{s}} = \sum_{\substack{S \subseteq N-\{1\} \\ |S|=k}} \frac{\lambda_k}{\binom{n-1}{k}} = \lambda_k.$$

2. $\sum_{s=0}^{n-1} \lambda_s = 1.$

   Teniendo en cuenta que el jugador 1 es títere en el juego u_1 y aplicando el axioma de títere obtenemos:

$$1 = \Psi_1[u_1] = \sum_{S \in \mathcal{C}(1,v)} \frac{\lambda_s}{\binom{n-1}{s}} = \sum_{s=0}^{n-1} \binom{n-1}{s} \frac{\lambda_s}{\binom{n-1}{s}} = \sum_{s=0}^{n-1} \lambda_s.$$

(c) En el apartado anterior ya hemos demostrado que esta aplicación es exhaustiva. Para ver que también es inyectiva es suficiente observar que los coeficientes de ponderación p_k pueden generarse a partir de las $\lambda's$ como $p_k = \frac{\lambda_k}{\binom{n-1}{k}}$ para todo k. 2

En particular, recordemos que el valor de Shapley estaba definido por los coeficientes $p_k = \frac{1}{n\binom{n-1}{k}}$, mientras que tomando $p_k = \frac{1}{2^{n-1}}$, para todo k, se obtiene el valor de Banzhaf, β.

5.2 Cálculo de semivalores mediante la extensión multilineal

En esta sección introduciremos el concepto de semivalor binomial y veremos cómo es posible calcular esta clase de semivalores a partir de la extensión multilineal del juego al que lo aplicamos. Como consecuencia inmediata de que el espacio generado por los semivalores de $\mathcal{S}_N^*$ tiene dimensión n veremos que este cálculo puede extenderse a cualquier semivalor. Para ello será suficiente demostrar que todo semivalor puede expresarse de manera única como combinación lineal de n semivalores binomiales linealmente independientes.

Todos los resultados obtenidos en esta sección continúan siendo válidos si nos referimos a los juegos cooperativos.

Recordemos que la extensión multilineal de un juego cooperativo $v \in \mathcal{G}_N$ fue introducida por Owen como la función de n variables

$$f(x_1, ..., x_n) = \sum_{S \subseteq N} \prod_{k \in S} x_k \prod_{j \notin S} (1 - x_j) v(S).$$

A partir de ella obtuvo las siguientes relaciones para el valor de Shapley y el valor de Banzhaf: para todo $i \in N$,

$$\begin{aligned} \Phi_i[v] &= \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x_i}(t, ..., t) dt, \\ \beta_i[v] &= \frac{\partial f}{\partial x_i}(\frac{1}{2}, ..., \frac{1}{2}). \end{aligned}$$

Veremos una forma de extender estas fórmulas para el resto de los semivalores.

Si nos restringimos a juegos simples, la E.M.L queda reducida a:

$$f(x_1, ..., x_n) = \sum_{S \in W} \prod_{k \in S} x_k \prod_{j \notin S} (1 - x_j).$$

Proposición 5.2 Sea $0 \leq p \leq 1$ y sea $q = 1 - p$. Entonces los coeficientes $p_k = p^k q^{n-1-k}$, para $k = 0, ..., n-1$, definen un semivalor, Ψ^p, al que denominaremos semivalor binomial.

Demostración:

Tenemos que comprobar que:

1. $p_k \geq 0$, para $k = 0, ..., n-1$. Es inmediato a partir de la definición.
2. $\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} p_k = 1$.

   $\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} p_k = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} p^k q^{n-1-k} = (p+q)^{n-1} = 1.$ 2

Este resultado nos permite generar semivalores a partir de cualquier valor de p tal que $0 \leq p \leq 1$.

Es fácil comprobar que el valor de Banzhaf es un semivalor binomial. Para ello es suficiente tener en cuenta que si $p = \dfrac{1}{2}$ entonces $q = \dfrac{1}{2}$ y los coeficientes de ponderación que se obtienen son

$$p_k = p^k q^{n-1-k} = \frac{1}{2^{n-1}}, \quad \text{para todo } k = 0, ..., n-1,$$

que son los que definen el valor de Banzhaf.

La siguiente proposición nos muestra como es posible calcular también los semivalores binomiales a partir de la E.M.L. de cada juego.

Proposición 5.3 Si Ψ^p es un semivalor binomial definido por los coeficientes $p_k = p^k q^{n-1-k}$, para $k = 0, ..., n-1$, y f es la E.M.L. de un juego simple monótono v, entonces

$$\Psi_i^p[v] = \frac{\partial f}{\partial x_i}(p, p, ..., p), \text{ para todo } i.$$

Demostración:

Recordemos que

$$f(x_1, ..., x_n) = \sum_{S \in W} \left\{ \prod_{k \in S} x_k \prod_{j \notin S} (1 - x_j) \right\}.$$

A partir de aquí, es fácil observar que

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1, ..., x_n) = \sum_{\substack{S \subseteq N - \{i\} \\ S \notin W \\ S \cup \{i\} \in W}} \{ \prod_{k \in S} x_k \prod_{\substack{j \notin S \\ j \neq i}} (1 - x_j) \}$$

y, por lo tanto,

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(p, p, ..., p) = \sum_{\substack{S \subseteq N - \{i\} \\ S \notin W \\ S \cup \{i\} \in W}} p^s (1 - p)^{n-1-s}.$$

Teniendo en cuenta la caracterización de los semivalores de un juego simple monótono dada en la sección inicial del capítulo sabemos que si Ψ es un semivalor entonces

$$\Psi_i[v] = \sum_{\substack{S \subseteq N - \{i\} \\ S \notin W \\ S \cup \{i\} \in W}} p_s,$$

y en nuestro caso, utilizando los coeficientes de ponderación que definen a Ψ^p y los cálculos anteriores, se deduce que

$$\Psi_i^p[v] = \sum_{\substack{S \subseteq N-\{i\} \\ S \notin W \\ S \cup \{i\} \in W}} p^s(1-p)^{n-1-s} = \frac{\partial f}{\partial x_i}(p,p,...,p).$$

2

El valor de Banzhaf se obtiene tomando $p = \frac{1}{2}$ y, utilizando la proposición anterior, se deduce el resultado que hemos comentado anteriormente, es decir,

$$\beta_i[v] = \frac{\partial f}{\partial x_i}(\frac{1}{2},\frac{1}{2},...,\frac{1}{2}).$$

A partir de la Proposición 5.3 veremos cómo es posible calcular cualquier semivalor a partir de la E.M.L. Para ello, teniendo en cuenta que el subespacio generado por los semivalores es un espacio vectorial de dimensión n dentro del espacio vectorial de las aplicaciones de $\mathcal{S}_N^*$ en R^n que verifican el axioma de transferencia, es suficiente expresar cualquier semivalor como combinación lineal de n semivalores binomiales linealmente independientes.

Veamos en primer lugar la actuación de un semivalor binomial en un juego de unanimidad.

Lema 5.1 Si Ψ^p es un semivalor binomial, entonces $\Psi_i^p[u_S] = p^{s-1}$, para todo $i \in S$ y para toda coalición $S \subseteq N$, $S \neq \emptyset$, siendo $s = |S|$.

Demostración:

$$\Psi_i^p[u_S] = p_{s-1} + \binom{n-s}{1}p_s + \binom{n-s}{2}p_{s+1} + ... + \binom{n-s}{n-s}p_{n-1}.$$

Teniendo en cuenta la definición de semivalor binomial sabemos que Ψ^p viene definido por los coeficientes de ponderación $p_k = p^k(1-p)^{n-1-k}$ para todo $k = 0,...,n-1$ y, por lo tanto,

$$\begin{aligned}\Psi_i^p[u_S] &= p^{s-1}(1-p)^{n-s} + \binom{n-s}{1}p^s(1-p)^{n-s-1} + ... + \binom{n-s}{n-s}p^{n-1} = \\ &= p^{s-1}[(1-p)^{n-s} + \binom{n-s}{1}p(1-p)^{n-s-1} + ... + \binom{n-s}{n-s}p^{n-s}] = \\ &= p^{s-1}[(p+(1-p))]^{n-s} = p^{s-1}.\end{aligned}$$

2

Proposición 5.4 Dados p_i, $0 \leq p_i \leq 1$, $i = 1, ..., n$, tales que $p_i \neq p_j$ para $i \neq j$, entonces los semivalores binomiales asociados $\Psi^{p_1}, ..., \Psi^{p_n}$ son linealmente independientes.

Demostración:

Teniendo en cuenta la definición de semivalor binomial sabemos que Ψ^{p_i} viene definido por los coeficientes de ponderación $p_{k,i} = p_i^k(1-p_i)^{n-1-k}$ para $i = 1, ..., n$ y para $k = 0, ..., n-1$.

Si $\lambda_1\Psi^{p_1} + ... + \lambda_n\Psi^{p_n} = 0$, aplicando sucesivamente esta combinación lineal a los juegos u_N, $u_{N-\{n\}}$, $u_{N-\{n,n-1\}}, ..., u_1$ y estudiando siempre el poder del jugador 1, obtenemos, como consecuencia inmediata del lema anterior, el sistema lineal homogéneo de n ecuaciones y n incógnitas

$$\left\{\begin{array}{lllll} \lambda_1 p_1^{n-1} & +\lambda_2 p_2^{n-1} & +...+ & \lambda_n p_n^{n-1} & = 0 \\ \lambda_1 p_1^{n-2} & +\lambda_2 p_2^{n-2} & +...+ & \lambda_n p_n^{n-2} & = 0 \\ : & : & : & : & \\ \lambda_1 p_1 & +\lambda_2 p_2 & +...+ & \lambda_n p_n & = 0 \\ \lambda_1 & +\lambda_2 & +...+ & \lambda_n & = 0 \end{array}\right.$$

cuyo determinante

$$\left|\begin{array}{llll} p_1^{n-1} & p_2^{n-1} & \cdots & p_n^{n-1} \\ p_1^{n-2} & p_2^{n-2} & \cdots & p_n^{n-2} \\ : & : & & : \\ p_1 & p_2 & \cdots & p_n \\ 1 & 1 & & 1 \end{array}\right| = \prod_{i>j}(-1)^n(p_i - p_j),$$

es no nulo porque estamos suponiendo que $p_i \neq p_j$ para $i \neq j$. Por lo tanto, la solución de dicho sistema es

$$\lambda_1 = \lambda_2 = ... = \lambda_n = 0,$$

lo que demuestra que los semivalores son linealmente independientes. 2

Corolario 5.1 Todo semivalor es combinación lineal de n semivalores binomiales Ψ^{p_i}, tales que $p_i \neq p_j$, si $i \neq j$ y puede calcularse a partir de la extensión multilineal del juego al que vamos a aplicarlo.

Demostración:

La proposición anterior nos asegura que n semivalores binomiales Ψ^{p_i} , tales que $p_i \neq p_j$, si $i \neq j$, forman una base del subespacio generado por los semivalores, y por lo tanto, todo semivalor Ψ puede expresarse como combinación lineal de ellos, es decir,

$$\Psi = \lambda_1 \Psi^{p_1} + \lambda_2 \Psi^{p_2} + ... + \lambda_n \Psi^{p_n}.$$

Si tenemos en cuenta que Ψ viene definido por n coeficientes de ponderación, $\overline{p}_0, \overline{p}_1, ..., \overline{p}_{n-1}$ y aplicando el mismo procedimiento que en la Proposición 5.4, entonces las $\lambda's$ son la solución del siguiente sistema lineal de n ecuaciones, n incógnitas y rango n

$$\left\{ \begin{array}{lllll} \lambda_1 p_1^{n-1} & +\lambda_2 p_2^{n-1} & +...+ & \lambda_n p_n^{n-1} & = \overline{p}_{n-1} \\ \lambda_1 p_1^{n-2} & +\lambda_2 p_2^{n-2} & +...+ & \lambda_n p_n^{n-2} & = \overline{p}_{n-2} + \overline{p}_{n-1} \\ : & : & : & : & \\ \lambda_1 p_1 & +\lambda_2 p_2 & +...+ & \lambda_n p_n & = \overline{p}_1 + \binom{n-2}{1}\overline{p}_2 + ... + \binom{n-2}{n-2}\overline{p}_{n-1} \\ \lambda_1 & +\lambda_2 & +...+ & \lambda_n & = 1. \end{array} \right.$$

Utilizando de nuevo la Proposición 5.3 podemos asegurar que

$$\Psi_i[v] = \lambda_1 \frac{\partial f}{\partial x_i}(p_1, p_1, ..., p_1) + ... + \lambda_n \frac{\partial f}{\partial x_i}(p_n, p_n, ..., p_n),$$

en donde f es la E.M.L. de v, 2

Para finalizar esta sección, remarcar que los resultados aquí presentados pueden extenderse de forma natural a los juegos cooperativos.

5.3 Propiedades complementarias de los semivalores

Algunas de las propiedades que aparecen en este apartado fueron estudiadas por Felsenthal y Machover (1995) sobre los cuatro principales índices de poder (Shapley; Banzhaf; Deegan-Packel, 1978; Johnston, 1978). Nuestro objetivo es considerar éstas y nuevas propiedades y ampliar así dichos resultados al aplicarlos a la familia de semivalores sobre juegos simples monótonos. Para ello será necesario definir tres importantes familias de semivalores que irán apareciendo a lo largo de esta sección.

A partir de ahora y para facilitar el entendimiento de las propiedades que estudiaremos a continuación, utilizaremos una notación ligeramente diferente de la empleada hasta el momento en la que se consideraba siempre el concepto de semivalor definido en $\mathcal{S}_N^*$ o en $\mathcal{G}_N$, en donde el número de jugadores era un valor $n = |N|$, determinado.

Definición 5.4 Para $m = 1, 2, 3, ...,$ sea $N^m = \{1, ..., m\}$ el conjunto de jugadores y $\mathcal{S}_{N^m}^*$ el conjunto de juegos simples monótonos de N^m jugadores. Diremos que $\Psi = (\Psi_1, ..., \Psi_m, ...)$ es un polisemivalor si $\Psi^m : \mathcal{S}_{N^m}^* \to \mathrm{R}^m$, $\Psi^m = (\Psi_1^m, ..., \Psi_m^m)$, es un semivalor para todo $m \geq 1$.

Definición 5.5 Un polisemivalor Ψ es regular $\Leftrightarrow p_k^m > 0$, $\forall\, k = 0, ..., m-1$, para todo $m \geq 1$.

Definición 5.6 Un polisemivalor Ψ es V-regular $\Leftrightarrow$ $p_k^m + p_{k+1}^m > 0$, para todo $k = 0, ..., m-2$, para todo $m \geq 2$.

El valor de Shapley y el valor de Banzhaf constituyen dos claros ejemplos de estas dos subfamilias de polisemivalores.

Proposición 5.5 Supongamos $m \geq 2$. Si $(p_k^m)_{k=0}^{m-1}$ tal que $p_k^m \geq 0$, para $k = 0, ..., m-1$ y $\sum\limits_{k=0}^{m-1} p_k^m \binom{m-1}{k} = 1$ definen un semivalor en $\mathcal{S}_{N^m}^*$ entonces, $(p_k^{m-1})_{k=0}^{m-2}$ tales que $p_k^{m-1} = p_k^m + p_{k+1}^m$, $k = 0, ..., m-2$ definen un semivalor en $\mathcal{S}_{N^{m-1}}^*$.

Demostración:

Tenemos que comprobar:

1. $p_k^{m-1} \geq 0$, $k = 0, ..., m-2$.

Es inmediato, a partir de su definición y teniendo en cuenta que $p_k^m \geq 0$, para todo $k = 0, ..., m-1$.

2. $\sum\limits_{k=0}^{m-2} p_k^{m-1} \binom{m-2}{k} = 1$.

$$\sum_{k=0}^{m-2} p_k^{m-1}\binom{m-2}{k} = \sum_{k=0}^{m-2}\left(p_k^m + p_{k+1}^m\right)\binom{m-2}{k} = \left(p_0^m + p_1^m\right)\binom{m-2}{0} + ...+$$

$$+\left(p_{m-2}^m + p_{m-1}^m\right)\binom{m-2}{m-2} = p_0^m + p_1^m\left[\binom{m-2}{0}+\binom{m-2}{1}\right] + p_2^m\left[\binom{m-2}{1}+\binom{m-2}{2}\right]+$$

$$+... + p_{m-2}^m\left[\binom{m-2}{m-3}+\binom{m-2}{m-2}\right] + p_{m-1}^m = p_0^m + p_1^m\binom{m-1}{1} + p_2^m\binom{m-1}{2} + ...+$$

$$+p_{m-2}^m\binom{m-1}{m-2} + p_{m-1}^m = \sum_{k=0}^{m-1} p_k^m\binom{m-1}{k} = 1.$$

2

Sin embargo, veamos a continuación que la implicación contraria no es cierta, es decir, la relación anterior entre los coeficientes de ponderación no permite establecer siempre una conexión entre un semivalor de $\mathcal{S}^*_{N^{\mathsf{m}-1}}$ y un semivalor de $\mathcal{S}^*_{N^{\mathsf{m}}}$.

Observación: Supongamos $m \geq 2$. Si $(p_k^{m-1})_{k=0}^{m-2}$ tal que $p_k^{m-1} \geq 0$, para $k = 0, ..., m-2$ y $\sum\limits_{k=0}^{m-2} p_k^{m-1}\binom{m-2}{k} = 1$ definen un semivalor en $\mathcal{S}^*_{N^{\mathsf{m}-1}}$, entonces, $(p_k^m)_{k=0}^{m-1}$, solución del sistema $p_k^{m-1} = p_k^m + p_{k+1}^m$, $k = 0, ..., m-2$ no definen, en general, un semivalor en $\mathcal{S}^*_{N^{\mathsf{m}}}$.

El sistema planteado

$$p_k^{m-1} = p_k^m + p_{k+1}^m, \quad k = 0, ..., m-2$$

es un sistema lineal de $m-1$ ecuaciones y m incógnitas, p_k^m, $k = 0, ..., m-1$. Veamos que tiene rango $m-1$. Para ello escribimos la matriz asociada, M, de m columnas y $m-1$ filas.

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & ... & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & ... & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & ... & 0 & 0 \\ : & : & : & : & : & & : & : \\ : & : & : & : & : & & : & : \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & ... & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & ... & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Observemos que $\det(\overline{M}) \neq 0$, en donde $\overline{M}$ es la submatriz de M formada por las $m-1$ primeras columnas y las $m-1$ filas de M. Por lo tanto, el sistema es compatible indeterminado con un grado de libertad y es equivalente a:

$$\begin{cases} p_0^m + p_1^m = p_0^{m-1} \\ p_1^m + p_2^m = p_1^{m-1} \\ p_2^m + p_3^m = p_2^{m-1} \\ \vdots \\ \vdots \\ p_{m-3}^m + p_{m-2}^m = p_{m-3}^{m-1} \\ p_{m-2}^m = p_{m-2}^{m-1} - p_{m-1}^m \end{cases}$$

Las soluciones de dicho sistema, p_k^m, $k = 0, ..., m-1$, son:

$$\begin{array}{l} p_{m-1}^m = p_{m-1}^m \text{ (grado de libertad)} \\ p_{m-2}^m = p_{m-2}^{m-1} - p_{m-1}^m \\ \vdots \\ p_1^m = p_1^{m-1} - p_2^m \\ p_0^m = p_0^{m-1} - p_1^m \end{array}$$

es decir,

$$\begin{array}{ll} p_{m-1}^m & = p_{m-1}^m \text{ (grado de libertad)} \\ p_k^m & = p_k^{m-1} - p_{k+1}^{m-1} + ... + (-1)^{m-k} p_{m-2}^{m-1} + (-1)^{m-k+1} p_{m-1}^m, \ k = 0, ..., m-2 \end{array}$$

y verifican

$$\sum_{k=0}^{m-1} p_k^m \binom{m-1}{k} = 1.$$

La demostración es análoga a la de la proposición anterior pero, sin embargo, no podemos asegurar que $p_k^m \geq 0$, para $k = 0, ..., m-1$.

Por ejemplo, si consideramos un semivalor de $\mathcal{S}_{N^3}^*$, es decir, en el que

$$N^3 = \{1, 2, 3\}$$

definido por

$$\begin{array}{rcl} p_0^3 & = & 0, \\ p_1^3 & = & \frac{1}{2}, \\ p_2^3 & = & 0, \end{array}$$

veamos como la solución del sistema

$$\begin{cases} p_0^4 + p_1^4 = 0 \\ p_1^4 + p_2^4 = \frac{1}{2} \\ p_2^4 + p_3^4 = 0 \end{cases}$$

no define un semivalor en $\mathcal{S}_{N^4}^*$.

Es un sistema lineal de 3 ecuaciones, 4 incógnitas y rango 3. La solución del mismo es :

$$\begin{aligned} p_0^4 &= -\frac{1}{2} - p_3^4 \\ p_1^4 &= \frac{1}{2} + p_3^4 \\ p_2^4 &= -p_3^4 \\ p_3^4 &= p_3^4 \text{ (grado de libertad)} \end{aligned}$$

Observemos que se verifica

$$\sum_{k=0}^{3} p_k^4 \binom{3}{k} = p_0^4 + 3p_1^4 + 3p_2^4 + p_3^4 = 1,$$

pero, para que definan un semivalor, debe cumplirse también que $p_k^4 \geq 0$, para $k = 0, ..., 3$, y esto es imposible. Para ello basta tener en cuenta que al imponer que $p_3^4 \geq 0$ y $p_2^4 \geq 0$ se obtiene que $p_3^4 = 0$ y de aquí se deduce que $p_1^4 = \dfrac{1}{2}$, pero $p_0^4 = -\dfrac{1}{2}$. 2

Mostramos a continuación dos casos particulares del paso de semivalores de $\mathcal{S}_{N^{m-1}}^*$ a semivalores de $\mathcal{S}_{N^m}^*$.

Ejemplo 5.1 Si $p_0^1 = 1$ define un semivalor en $S_{N^1}^*$, entonces, las soluciones, p_0^2 y p_1^2 de la ecuación, $p_0^1 = p_0^2 + p_1^2$ definen un semivalor en $S_{N^2}^*$ si $0 \leq p_1^2 \leq 1$.

Dichas soluciones son:

$$\begin{aligned} p_1^2 &= p_1^2 \text{ (grado de libertad)} \\ p_0^2 &= p_0^1 - p_1^2. \end{aligned}$$

Para asegurarnos que definen un semivalor en $S_{N^2}^*$ es suficiente comprobar que $p_1^2 \geq 0$ y $p_0^2 \geq 0$. Para que esto ocurra debe verificarse que

$$0 \leq p_1^2 \leq p_0^1 = 1.$$

Ejemplo 5.2 Si p_0^2, p_1^2 definen un semivalor en $S_{N^2}^*$, entonces, p_0^3, p_1^3 y p_2^3, soluciones del sistema

$$\begin{aligned} p_0^2 &= p_0^3 + p_1^3 \\ p_1^2 &= p_1^3 + p_2^3, \end{aligned}$$

definen un semivalor en $S_{N^3}^*$ si $\max\{0, p_1^2 - p_0^2\} \leq p_2^3 \leq p_1^2$.

Resolviendo el sistema obtenemos

$$\begin{aligned} p_2^3 &= p_2^3 \text{ (grado de libertad)} \\ p_1^3 &= p_1^2 - p_2^3 \\ p_0^3 &= p_0^2 - p_1^2 + p_2^3 \end{aligned}$$

y para que $p_k^3 \geq 0$, $k = 0, 1, 2$ debe verificarse que

$$\max\{0, p_1^2 - p_0^2\} \leq p_2^3 \leq p_1^2.$$

Estos comentarios nos sugiere considerar una nueva familia de polisemivalores.

Definición 5.7 Un polisemivalor Ψ es hereditario $\Leftrightarrow p_k^{m-1} = p_k^m + p_{k+1}^m$, para todo $k = 0, ..., m-2,$ para todo $m \geq 2$.

Ejemplo 5.3 El valor de Shapley y los semivalores binomiales (en particular el valor de Banzhaf) son polisemivalores hereditarios.

Recordemos que ambos valores venían definidos por los siguientes coeficientes de ponderación:

$$\begin{aligned} p_k^m &= \frac{1}{m\binom{m-1}{k}},\ k = 0, ..., m-1, \text{ para el valor de Shapley} \\ p_k^m &= p^k(1-p)^{m-1-k},\ k = 0, ..., m-1, \text{ para los binomiales.} \end{aligned}$$

Veamos, en primer lugar, que el valor de Shapley es hereditario:

$$p_k^m + p_{k+1}^m = \frac{1}{m\binom{m-1}{k}} + \frac{1}{m\binom{m-1}{k+1}} = \frac{k!(m-k-2)!}{(m-1)!} = \frac{1}{(m-1)\binom{m-2}{k}} = p_k^{m-1}.$$

Análogamente, para los semivalores binomiales tenemos:

$$\begin{aligned} p_k^m + p_{k+1}^m &= p^k(1-p)^{m-1-k} + p^{k+1}(1-p)^{m-2-k} = \\ &= p^k(1-p)^{m-2-k}((1-p)+p) = p_k^{m-1}. \end{aligned}$$

Comentario: Teniendo en cuenta los resultados obtenidos en la Proposición 5.5 parece lógico utilizar polisemivalores hereditarios al estudiar subjuegos y juegos inducidos de un determinado juego.

Es interesante observar que las tres subfamilias de polisemivalores, definidas en el contexto de los juegos simples, pueden extenderse de forma natural a los juegos cooperativos.

La elección de un polisemivalor o de un semivalor para medir el poder de un jugador en un determinado juego implica el cumplimiento de unas ciertas propiedades "básicas". Es decir, sería conveniente que verificase los axiomas del jugador nulo, del jugador no nulo, de exclusión de un jugador nulo, del bloque, de monotonía y de monotonía estricta, de dominancia y de dominancia estricta y de donación. Es por esta razón que a continuación pasamos a estudiar el comportamiento de los polisemivalores y de los semivalores ante una serie de axiomas que aparecen enunciados para una medida arbitraria, $K_i[W]$, del poder del jugador i en el juego simple monótono (N, W). Concretamente, si en los axiomas intervienen juegos con distinto número de jugadores (axioma de superaditividad, axioma de exclusión de un jugador nulo y axioma del bloque), se estudiará el comportamiento de los polisemivalores, mientras que si los juegos tienen igual número de jugadores (axioma del jugador no nulo, axioma de monotonía, axioma de dominancia y de dominancia estricta, axioma de donación y axioma de redistribución), nos centraremos en el comportamiento de los semivalores, que como ya hemos comentado, están definidos para un valor determinado del número de jugadores.

5.3.1 Axiomas de superaditividad y de subaditividad.

Observemos que ambos axiomas no aparecen en la lista de propiedades "básicas" que hemos citado anteriormente puesto que, como veremos en esta subsección, son mucho más restrictivas que las anteriores.

Necesitamos definir formalmente qué significa que dos jugadores i, j de un juego simple (N, W) formen un bloque y actúen como un solo jugador. Claramente, esto dará lugar a la aparición de un nuevo juego en el que el conjunto de jugadores se obtendrá eliminando a los jugadores i, j de N y añadiendo un nuevo jugador, que será el representante del bloque, al que denotaremos como $i\&j$. Si el juego es de mayoría ponderada, es obvio que el nuevo juego también lo será, y el peso del jugador $i\&j$ será la suma de los pesos de los jugadores i y j en el juego inicial.

Definición 5.8 Dado (N, W) un juego simple, i, $j \in N$, tomando $i\&j$ como un nuevo jugador, definimos el nuevo juego simple $(N', W[i\&j])$, en el que $N' = N - \{i, j\} \cup \{i\&j\}$ tiene un jugador menos y $W[i\&j]$ está formado por todas las coaliciones S que satisfacen una de las dos condiciones siguientes:

1. $S \subseteq N - \{i, j\}$ y $S \in W$
2. $S = T \cup \{i\&j\}$ para algún T tal que $T \subseteq N - \{i, j\}$ y $T \cup \{i, j\} \in W$.

A partir de aquí, nos preguntamos qué relación puede existir entre el poder del bloque $i\&j$ en el nuevo juego y los poderes de los dos jugadores i, j en el juego inicial.

Para simplificar la notación, para referirnos a $K_{i\&j}[W[i\&j]]$ escribiremos $K_{i\&j}[i\&j]$.

Axioma de superaditividad: $K_{i\&j}[i\&j] \geq K_i[W] + K_j[W]$.

Es decir, cuando dos jugadores forman un bloque, el poder del bloque (en el nuevo juego) es como mínimo la suma de los poderes de los dos jugadores en el juego inicial.

Axioma de subaditividad: $K_{i\&j}[i\&j] \leq K_i[W] + K_j[W]$.

En este caso el poder del bloque (en el nuevo juego) es como máximo la suma de los poderes de los dos jugadores en el juego inicial.

Como es natural, el objetivo de una fusión entre dos jugadores es que sea beneficiosa, es decir, que se verifique el axioma de superaditividad, sin embargo veremos que este hecho no puede ser siempre garantizado.

El siguiente resultado nos permite caracterizar al valor de Banzhaf como el único polisemivalor hereditario que verifica el axioma de superaditividad y el axioma de subaditividad.

Teorema 5.2 Sea Ψ un polisemivalor hereditario.

(a) Ψ verifica el axioma de superaditividad $\Leftrightarrow \Psi = \beta$, valor de Banzhaf.

(b) Ψ verifica el axioma de subaditividad $\Leftrightarrow \Psi = \beta$, valor de Banzhaf.

Demostración:

(a)

($\Leftarrow$) Veamos que β verifica el axioma (en realidad verifica la igualdad). Para ello definimos los siguientes conjuntos:

$$\begin{aligned}
B &= \{S \subseteq N^m - \{i,j\} : S \notin W,\ S \cup \{i\} \in W,\ S \cup \{j\} \notin W\} \\
C &= \{S \subseteq N^m - \{i,j\} : S \notin W,\ S \cup \{i\} \notin W,\ S \cup \{j\} \in W\} \\
D &= \{S \subseteq N^m - \{i,j\} : S \notin W,\ S \cup \{i\} \in W,\ S \cup \{j\} \in W\} \\
E &= \{S \subseteq N^m - \{i,j\} :\ S \cup \{i\} \notin W,\ S \cup \{j\} \notin W,\ S \cup \{i\} \cup \{j\} \in W\}.
\end{aligned}$$

A partir de ellos obtenemos que:

$$\beta_{i\&j}[i\&j] = (|B| + |C| + |D| + |E|) \cdot p_s^{m-1}$$

$$\beta_i[W] + \beta_j[W] = |B| \cdot (p_s^m + p_{s+1}^m) + 2\,|D| \cdot p_s^m + 2\,|E| \cdot p_{s+1}^m + |C| \cdot (p_s^m + p_{s+1}^m)$$

y, teniendo en cuenta que $p_s^m = p_{s+1}^m = \dfrac{1}{2^{m-1}}$ y que $p_s^{m-1} = \dfrac{1}{2^{m-2}}$, se deduce que

$$\beta_{i\&j}[i\&j] = \beta_i[W] + \beta_j[W].$$

($\Rightarrow$) Supongamos que $\Psi \neq \beta$, es decir, $\exists\, m \geq 2$, $\exists\, s = 0, ..., m-2$ tal que $p_s^m \neq p_{s+1}^m$. Veamos que Ψ no verifica el axioma de superaditividad, es decir existe un juego tal que

$$\Psi_{i\&j}[i\&j] < \Psi_i[W] + \Psi_j[W].$$

- Supongamos, en primer lugar que $p^m_{s+1} < p^m_s$.

  Sea $S \subseteq N^m - \{i,j\}$ tal que $|S| = s$. Definimos el juego simple monótono que tiene por coaliciones ganadoras minimales

  $$W^m = \{S \cup \{k\} : \ k \in N^m - S\}.$$

  A partir de aquí obtenemos el nuevo juego

  $$W^m[i\&j] = \{S \cup \{k\}, \, S \cup \{i\&j\}, \ k \in N^{m-1} - S\}.$$

  Si comparamos los semivalores correspondientes, vemos que

  $$\Psi_i[W] = \Psi_j[W] = p^m_s,$$

  mientras que

  $$\Psi_{i\&j}[i\&j] = p^{m-1}_s = p^m_s + p^m_{s+1},$$

  y, por lo tanto,

  $$\Psi_{i\&j}[i\&j] = p^m_s + p^m_{s+1} < 2p^m_s = \Psi_i[W] + \Psi_j[W].$$

- Supongamos ahora que $p^m_{s+1} > p^m_s$.

  Sea $S \subseteq N^m - \{i,j\}$ tal que $|S| = s$. Definimos el juego simple monótono que tiene por coaliciones ganadoras minimales

  $$W^m = \{S \cup \{k\} \cup \{i\} : \ k \in N^m - S\}$$

  Si calculamos los semivalores correspondientes utilizando los conjuntos B, C, D y E definidos anteriormente obtenemos que

  $$\Psi_{i\&j}[i\&j] = \sum_{S \in B} p^{m-1}_s + \sum_{S \in C} p^{m-1}_s + \sum_{S \in D} p^{m-1}_s + \sum_{S \in E} p^{m-1}_s$$

  $$\Psi_i[W] + \Psi_j[W] = [\sum_{S \in B} (p^m_s + p^m_{s+1}) + \sum_{S \in D} p^m_s + \sum_{S \in E} p^m_{s+1}] +$$

  $$+[\sum_{S \in C} (p^m_s + p^m_{s+1}) + \sum_{S \in D} p^m_s + \sum_{S \in E} p^m_{s+1}].$$

  En este caso $D = \emptyset$, $E = S$ y, como $p^{m-1}_s = p^m_s + p^m_{s+1}$, por ser Ψ hereditario, tenemos que:

  $$\Psi_{i\&j}[i\&j] - \Psi_i[W] - \Psi_j[W] = p^{m-1}_s - 2p^m_{s+1} = p^m_s - p^m_{s+1} < 0,$$

  es decir,

  $$\Psi_{i\&j}[i\&j] < \Psi_i[W] + \Psi_j[W].$$

(b)

($\Leftarrow$) β verifica el axioma (en realidad verifica la igualdad, como hemos visto en el apartado (a)).

($\Rightarrow$) Supongamos que $\Psi \neq \beta$, es decir, $\exists\, m \geq 2$, $\exists\, s = 0, ..., m-2$ tal que $p_s^m \neq p_{s+1}^m$. Veamos que Ψ no verifica el axioma de subaditividad, es decir existe un juego tal que

$$\Psi_{i\&j}[i\&j] > \Psi_i[W] + \Psi_j[W].$$

- Supongamos, en primer lugar que $p_{s+1}^m > p_s^m$.

  Sea $S \subseteq N^m - \{i, j\}$ tal que $|S| = s$. Definimos el juego simple monótono que tiene por coaliciones ganadoras minimales

  $$W^m = \{S \cup \{k\} :\ k \in N^m - S\}.$$

  A partir de aquí obtenemos el nuevo juego

  $$W^m[i\&j] = \{S \cup \{k\},\ S \cup \{i\&j\},\ k \in N^{m-1} - S\}.$$

  Si comparamos los semivalores correspondientes, vemos que

  $$\Psi_i[W] = \Psi_j[W] = p_s^m,$$

  mientras que

  $$\Psi_{i\&j}[i\&j] = p_s^{m-1} = p_s^m + p_{s+1}^m,$$

  y, por lo tanto,

  $$\Psi_{i\&j}[i\&j] = p_s^m + p_{s+1}^m > 2p_s^m = \Psi_i[W] + \Psi_j[W].$$

- Supongamos ahora que $p_{s+1}^m < p_s^m$.

  Sea $S \subseteq N^m - \{i, j\}$ tal que $|S| = s$. Definimos el juego simple monótono que tiene por coaliciones ganadoras minimales

  $$W^m = \{S \cup \{k\} \cup \{i\} :\ k \in N^m - S\}$$

  Si calculamos los semivalores correspondientes utilizando los conjuntos B, C, D y E definidos anteriormente obtenemos que

  $$\Psi_{i\&j}[i\&j] = \sum_{S \in B} p_s^{m-1} + \sum_{S \in C} p_s^{m-1} + \sum_{S \in D} p_s^{m-1} + \sum_{S \in E} p_s^{m-1}$$

  $$\Psi_i[W] + \Psi_j[W] = [\sum_{S \in B} (p_s^m + p_{s+1}^m) + \sum_{S \in D} p_s^m + \sum_{S \in E} p_{s+1}^m] +$$

  $$+[\sum_{S \in C} (p_s^m + p_{s+1}^m) + \sum_{S \in D} p_s^m + \sum_{S \in E} p_{s+1}^m].$$

En este caso $D = \emptyset$, $E = S$ y, como $p_s^{m-1} = p_s^m + p_{s+1}^m$, por ser Ψ hereditario, tenemos que:

$$\Psi_{i\&j}[i\&j] - \Psi_i[W] - \Psi_j[W] = p_s^{m-1} - 2p_{s+1}^m = p_s^m - p_{s+1}^m > 0,$$

es decir,

$$\Psi_{i\&j}[i\&j] > \Psi_i[W] + \Psi_j[W].$$

2

Haller (1994) demostró de una forma alternativa que β es el único polisemivalor aditivo (superaditivo y subaditivo), dejando abiertas las siguientes cuestiones: ¿Existen polisemivalores superaditivos distintos del de Banzhaf? ¿Existen polisemivalores subaditivos distintos del de Banzhaf? Las respuestas a ambas preguntas se deducen del Teorema anterior que nos asegura que cualquier fusión entre dos jugadores arbitrarios es neutral si utilizamos Banzhaf, mientras que para cualquier otro polisemivalor siempre existen juegos y jugadores en los que dicha fusión puede ser positiva o negativa.

5.3.2 Axiomas del jugador nulo y del bloque

Axioma del jugador nulo: Si i es un jugador nulo en (N, W), entonces $K_i[W] = 0$.

Es obvio que todo semivalor verifica este axioma (no es más que un caso particular del axioma del títere).

En la anterior sección hemos discutido la relación entre los semivalores de dos jugadores, i, j en un juego W y el semivalor del bloque $i\&j$ en el juego $W[i\&j]$. Para tratar los siguientes axiomas necesitamos introducir la siguiente definición.

Definición 5.9 Si i es un jugador nulo en el juego (N, W), entonces, el juego obtenido a partir de (N, W) por exclusión de i es (N', W'), en donde, $N' = N - \{i\}$ y $W' = \{S \in W : i \notin S\}$.

Axioma de exclusión de un jugador nulo: Si (N', W') se obtiene por exclusión de un nulo en el juego (N, W), entonces $K_j[W'] = K_j[W]$, para todo $j \in N'$.

La clara justificación de este postulado es que la exclusión de un jugador nulo de un juego no afecta al resto de los jugadores, es decir, garantiza el mismo poder a aquellos jugadores que no son nulos.

Proposición 5.6 Sea Ψ un polisemivalor.

Ψ verifica el axioma de exclusión de un jugador nulo $\Leftrightarrow$ Ψ es hereditario.

Demostración:

$(\Leftarrow)$ Supongamos que $i \in N^m$ es un jugador nulo en el juego (N^m, W), entonces:

$\{S \subseteq N^m - \{i,j\} : S \notin W,\ S \cup \{j\} \in W\} = \{S \subseteq N^m - \{i,j\} : S \cup \{i\} \notin W, S \cup \{i\} \cup \{j\} \in W\}$.

Calculemos en primer lugar $\Psi_j[W]$:

$$\Psi_j[W] = \sum_{\substack{S \subseteq N^m - \{j\} \\ S \notin W \\ S \cup \{j\} \in W}} p_s^m = \sum_{\substack{S \subseteq N^m - \{j,i\} \\ S \notin W \\ S \cup \{j\} \in W}} p_s^m + \sum_{\substack{S \subseteq N^m - \{j,i\} \\ S \cup \{i\} \notin W \\ S \cup \{j\} \cup \{i\} \in W}} p_{s+1}^m = \sum_{\substack{S \subseteq N^m - \{j,i\} \\ S \notin W \\ S \cup \{j\} \in W}} (p_s^m + p_{s+1}^m).$$

Calculemos a continuación $\Psi_j[W']$ teniendo en cuenta que (N', W') tiene un jugador menos:

$$\Psi_j[W'] = \sum_{\substack{S \subseteq N' - \{j\} \\ S \notin W' \\ S \cup \{j\} \in W'}} p_s^{m-1} = \sum_{\substack{S \subseteq N^m - \{j,i\} \\ S \notin W \\ S \cup \{j\} \in W}} p_s^{m-1}$$

Teniendo en cuenta que Ψ es un polisemivalor hereditario obtenemos que, efectivamente,

$$\Psi_j[W] = \Psi_j[W'] \quad \forall j \neq i.$$

$(\Rightarrow)$ Supongamos que Ψ no es un polisemivalor hereditario, es decir,

$$\exists\, m \geq 2,\ \exists\, s = 0, ..., m-2 \text{ tal que } p_s^{m-1} \neq p_s^m + p_{s+1}^m$$

Sea $S \subseteq N^m - \{i,j\}$ tal que $|S| = s$. Definimos el juego simple monótono (N^m, W) que tiene las siguientes coaliciones ganadoras minimales:

$$W^m = \{S \cup j : j \neq i\}$$

Observemos que en este juego el jugador i es nulo. El juego (N', W') obtenido por exclusión de i tiene como coaliciones ganadoras minimales

$$(W')^m = \{S \cup j : j \neq i\}$$

Veamos que no se verifica el axioma de exclusión de un nulo.

$$\Psi_j[W] = p_s^m + p_{s+1}^m$$

$$\Psi_j[W'] = p_s^{m-1},$$

y como estamos suponiendo que Ψ no es hereditario, tenemos que

$$\Psi_j[W] \neq \Psi_j[W']$$

2

Corolario 5.2 El valor de Shapley y el valor de Banzhaf verifican este axioma.

Basta tener en cuenta que ambos valores, tal y como ya hemos comentado, constituyen dos claros ejemplos de polisemivalores hereditarios.

Al igual que hemos hecho anteriormente, escribiremos $K_{i\&j}[i\&j]$ para referirnos a $K_{i\&j}[W[i\&j]]$.

Teorema 5.3 Si i es un jugador nulo y j es otro jugador de (N, W), entonces

$$\left.\begin{array}{l} \Psi_{i\&j}[i\&j] = \Psi_j[W] \\ \Psi_k[i\&j] = \Psi_k[W] \text{ para todo } k \in N - \{i,j\} \cup \{i\&j\} \end{array}\right\} \Leftrightarrow \Psi \text{ hereditario}$$

Demostración:

$(\Leftarrow)$ Sea (N', W') el juego obtenido a partir de (N, W) por exclusión del jugador nulo i. Definimos una función entre el conjunto de jugadores de $W[i\&j]$, $N - \{i,j\} \cup \{i\&j\}$, y $N' = N - \{i\}$, de manera que $f(i\&j) = j$ y $f(k) = k$ para todo $k \neq i$, j. Es fácil ver que f es un isomorfismo entre los juegos $W[i\&j]$ y W'. Por lo tanto,

$$\Psi_{i\&j}[i\&j] = \Psi_j[W']$$

$$\Psi_k[i\&j] = \Psi_k[W'],$$

y, utilizando el axioma de exclusión de un jugador nulo, $\Psi_j[W'] = \Psi_j[W]$, y $\Psi_k[W'] = \Psi_k[W]$, con lo cual

$$\Psi_{i\&j}[i\&j] = \Psi_j[W]$$

$$\Psi_k[i\&j] = \Psi_k[W].$$

($\Rightarrow$) Supongamos que i es un jugador nulo, es decir, $B = D = E = \emptyset$, y por lo tanto,

$$\Psi_j[W] = \sum_{S \in C} (p_s^m + p_{s+1}^m)$$

$$\Psi_{i\&j}[i\&j] = \sum_{S \in C} p_s^{m-1}.$$

Supongamos también, por contradicción, que Ψ no es hereditario, es decir,

$$\exists\, m \geq 2,\ \exists\, s = 0, ..., m-2 \text{ tal que } p_s^{m-1} \neq p_s^m + p_{s+1}^m.$$

Veremos que $\Psi_j[W] \neq \Psi_{i\&j}[i\&j]$.

Sea $S \subseteq N^m - \{i, j\}$ tal que $|S| = s$. Definimos el juego simple monótono (N^m, W) tal que

$$W^m = \{S \cup k : k \neq i,\ k \notin S\}.$$

En este juego i es nulo, y sin embargo, teniendo en cuenta que

$$(W[i\&j])^m = \{S \cup \{i\&j\}\},$$

obtenemos que

$$\Psi_j[W] = p_s^m + p_{s+1}^m \neq p_s^{m-1} = \Psi_{i\&j}[i\&j].$$

2

Axioma del bloque: Si $i, j \in (N, W)$ y j no es un jugador nulo, entonces $K_{i\&j}[i\&j] > K_i[W]$.

¿Cuál es la justificación de este axioma? El bloque $i\&j$ puede ser interpretado como el resultado de una fusión voluntaria entre los jugadores i y j, pero puede ser también vista como el resultado de un relevo o compra, en el que i, habiendo añadido los derechos de votación de j, ahora actúa bajo el nuevo nombre '$i\&j$'. La suposición de que el jugador i debe ganar poder por 'absorción' de otro jugador j que no es nulo, parece intuitivamente comprensible. Una fusión voluntaria lo verificará sólo si como resultado de ella ambas partes son, como mínimo, tan buenas después como lo eran antes. Formalmente, esto abrió el camino a la condición de superaditividad, que como hemos visto, tan solo era verificada por el valor de Banzhaf. Sin embargo, en un relevo o compra, no es necesario que salgan beneficiadas ambas partes. Intuitivamente, parece inconcebible que un jugador no se beneficie si añade a sus derechos de votación los de otro jugador que no es nulo, y el axioma anterior es la expresión formal de esta intuición. Veamos qué ocurre cuando la aplicamos a polisemivalores.

Proposición 5.7 Sea Ψ un polisemivalor hereditario.

Ψ verifica el axioma del bloque $\Leftrightarrow$ Ψ es regular.

Demostración:

($\Leftarrow$) Si Ψ es regular, entonces $p_s^m > 0$ para todo $s = 0, ..., m-1$, y para todo $m \geq 1$.

Utilizando los conjuntos B, C, D y E definidos anteriormente, tenemos que:

$$\Psi_{i\&j}[i\&j] = \sum_{S\in B} p_s^{m-1} + \sum_{S\in C} p_s^{m-1} + \sum_{S\in D} p_s^{m-1} + \sum_{S\in E} p_s^{m-1}$$

$$\Psi_i[W] = \sum_{S\in B} (p_s^m + p_{s+1}^m) + \sum_{S\in D} p_s^m + \sum_{S\in E} p_{s+1}^m$$

Queremos ver que $\Psi_{i\&j}[i\&j] > \Psi_i[W]$. Sin embargo, teniendo en cuenta que Ψ es hereditario, es suficiente comprobar que

$$\Psi_{i\&j}[i\&j] - \Psi_i[W] = \sum_{S\in C} (p_s^m + p_{s+1}^m) + \sum_{S\in D} p_{s+1}^m + \sum_{S\in E} p_s^m > 0.$$

Como j no es un jugador nulo, entonces $C \neq \emptyset$, $D \neq \emptyset$ o $E \neq \emptyset$ y como Ψ es regular, la desigualdad anterior es cierta.

($\Rightarrow$) Supongamos que Ψ no es regular, es decir, $\exists\, m \geq 2$, $\exists\, s = 0, ..., m-2$ tal que $p_s^m = 0$.

Sea $S \subseteq N^m - \{i,j\}$ tal que $|S| = s$. Definimos el juego simple monótono (N^m, W), que tiene las siguientes coaliciones ganadoras minimales:

$$W^m = \{S \cup \{i\} \cup \{k\} : \forall k \neq i,\ k \notin S\}.$$

Observemos que en este juego j no es nulo. En este caso $C = D = \emptyset$ y $E = S$ y por lo tanto,

$$\Psi_{i\&j}[i\&j] - \Psi_i[W] = \sum_{S\in C}(p_s^m + p_{s+1}^m) + \sum_{S\in D} p_{s+1}^m + \sum_{S\in E} p_s^m = p_s^m = 0.$$

2

Corolario 5.3 El valor de Shapley y el valor de Banzhaf verifican el axioma del bloque.

Los axiomas que presentamos a continuación hacen referencia a juegos con el mismo número de jugadores ($n = |N|$), por lo tanto, teniendo en cuenta lo expuesto anteriormente, nos centraremos en el estudio del comportamiento de los semivalores ante ellos.

Axioma del jugador no nulo: Si i es un jugador no nulo en (N, W), entonces $K_i[W] > 0$.

Proposición 5.8 Sea Ψ un semivalor.

Ψ verifica el axioma del jugador no nulo $\Leftrightarrow$ Ψ es regular.

Demostración:

($\Leftarrow$) Si i no es nulo en el juego (N, W), entonces $\exists\, S \subseteq N - \{i\}$ tal que $S \notin W$ y $S \cup \{i\} \in W$, es decir, $\mathcal{C}(i, W) \neq \emptyset$, y teniendo en cuenta que Ψ es regular podemos deducir que

$$\Psi_i[W] = \sum_{S\in\mathcal{C}(i,W)} p_s \geq p_s > 0.$$

($\Rightarrow$) Supongamos que Ψ no es regular, es decir, $\exists\, s = 0, ..., n-1$ tal que $p_s = 0$.

Sea $S \subseteq N - \{i\}$ tal que $|S| = s$. Definimos el juego simple monótono (N, W) tal que

$$W^m = \{S \cup j : j \in N - S\}.$$

En este juego el jugador i no es nulo, y sin embargo, $\Psi_i[W] = p_s = 0$. 2

Los axiomas que citamos a continuación, aunque ya han sido estudiados, hemos creído conveniente citarlos en la siguiente subsección.

5.3.3 Axiomas de monotonía y de dominancia

Si nos restringimos a juegos de mayoría ponderada $(N, W) \equiv [q; w_1, ..., w_n]$, intuitivamente parece razonable que si $w_i \leq w_j$, entonces el jugador j tenga, como mínimo, el mismo poder que el jugador i, ya que toda contribución que el jugador i pueda hacer para que se apruebe una determinada resolución puede ser igualada o superada por el jugador j. Esto sugiere el siguiente axioma.

Axioma de monotonía: Si $(N, W) \equiv [q; w_1, ..., w_n]$ y $w_i \leq w_j$, entonces $K_i[W] \leq K_j[W]$.

El mismo razonamiento puede generalizarse para cualquier juego simple. Para ello es necesario explicar el significado de que un jugador sea 'mejor compañero de coalición' que otro, y esto nos lleva a la relación de desplazamiento ya comentada en el primer capítulo. Así pues, el axioma anterior, adaptado a juegos simples será:

Axioma de monotonía: Dado (N, W) un juego simple, si $i\, D\, j$, entonces $K_i[W] \geq K_j[W]$.

La justificación de este axioma es similar a la dada para el caso de juegos de mayoría ponderada: si i desplaza j, entonces toda contribución que j pueda hacer para conseguir que una coalición gane puede ser igualada o mejorada por i. Por lo tanto, intuitivamente, i es como mínimo tan poderoso como j.

Es un hecho conocido que todo semivalor verifica este axioma.

Axioma de dominancia o monotonía estricta: Dado (N, W) un juego simple monótono, si $i\, D\, j$ y $j \not D\, i$, entonces $K_i[W] > K_j[W]$.

En este caso existe al menos una coalición en la que la contribución de i a la victoria no puede ser igualada por j, por lo tanto, i debe ser más poderoso que j.

El cumplimiento de este axioma queda asegurado si y sólo si Ψ es V-regular, por lo tanto, el valor de Shapley y el valor de Banzhaf verifican este axioma.

5.3.4 Axiomas de donación y de redistribución

A lo largo de esta sección consideraremos juegos de mayoría ponderada $(N, W) \equiv [q; w_1, ..., w_n]$ y $(N, W') \equiv [q; w'_1, ..., w'_n]$ tales que $\sum_{i=1}^{n} w_i = \sum_{i=1}^{n} w'_i$.

Definición 5.10 En la situación anterior, diremos que un jugador i es donante si $w_i > w_i^{'}$ y un jugador i es receptor si $w_i < w_i^{'}$.

La idea intuitiva es que (N, W) representa la distribución inicial de los pesos y $(N, W^{'})$ se obtiene a partir de (N, W) tras producirse una nueva distribución de los pesos como consecuencia de la donación y recepción de pesos entre los jugadores, de manera que cada donante pierde peso y cada receptor lo aumenta, mientras que la suma total de los pesos permanece constante.

Axioma de donación: Dados 2 juegos de mayoría ponderada con las características citadas en el inicio de la sección y tales que existe un único donante i y un único receptor, j, entonces, $K_i[W] \geq K_i[W^{'}]$.

Es decir, la situación actual podríamos resumirla de la siguiente forma:

$$
\begin{array}{l}
(N, W) \equiv [q; w_1, ..., w_n] \\
(N, W') \equiv [q; w_1^{'}, ..., w_n^{'}] \\
\sum_{i=1}^{n} w_i = \sum_{i=1}^{n} w_i^{'} \\
w_i > w_i^{'},\ i \text{ es el donante} \\
w_j < w_j^{'},\ j \text{ es el receptor} \\
w_k = w_k^{'},\ \ k \neq i,\ j
\end{array}
$$

En particular, se deduce que

$$w_i + w_j = w_i^{'} + w_j^{'}.$$

La siguiente proposición nos asegura que todos los semivalores verifican este axioma.

Proposición 5.9 Todo semivalor, Ψ, verifica este axioma.

Demostración:

Queremos ver que en las condiciones anteriores, $\Psi_i[W] \geq \Psi_i[W']$, es decir

$$\sum_{S \in \mathcal{C}(i,W)} p_s \geq \sum_{S \in \mathcal{C}(i,W')} p_s.$$

Para ello es suficiente demostrar que

$$\mathcal{C}(i, W') \subseteq \mathcal{C}(i, W).$$

Supongamos que $S \in \mathcal{C}(i, W')$. Entonces:

$$S \subseteq N - \{i\},\ S \notin W' \text{ y } S \cup \{i\} \in W' \Leftrightarrow w'(S) < q \text{ y } w'(S) + w'_i \geq q.$$

Tenemos que comprobar que $S \in \mathcal{C}(i, W)$, es decir, $w(S) < q$ y $w(S)+w_i \geq q$. Para ello distinguiremos dos casos:

1. Si $j \in S$, entonces:

$$w(S) = w_j + w(S - \{j\}) = w_j + w'(S - \{j\}) < w'_j + w'(S - \{j\}) = w'(S) < q$$

$$w(S) + w_i = w_j + w(S - \{j\}) + w_i = w'_j + w'(S - \{j\}) + w'_i = w'(S) + w'_i \geq q$$

2. Si $j \notin S$, entonces:

$$w(S) = w'(S) < q$$

$$w(S) + w_i = w'(S) + w_i > w'(S) + w'_i \geq q.$$

2

Axioma de donación estricto: Dados 2 juegos de mayoría ponderada con las características citadas en el inicio de la sección y tales que existe un único donante i y un único receptor, j, entonces, $K_i[W] > K_i[W']$.

Proposición 5.10 Sea Ψ un semivalor.

Ψ verifica el axioma de donación estricto $\Leftrightarrow$ Ψ es regular.

Demostración:

($\Leftarrow$) Veamos que la inclusión demostrada en la proposición anterior siempre es estricta si los juegos son distintos. Es decir, si $W \neq W'$, entonces

$$\mathcal{C}(i, W') \text{ Ã } \mathcal{C}(i, W).$$

Como $W \neq W'$ se producirá una de las siguientes situaciones:

1. $\exists\, S \subseteq N$, $i \in S$, $j \notin S$ tal que $w(S) \geq q$ y $w'(S) < q$.
   Veamos que en este caso $S - \{i\} \in \mathcal{C}(i, W)$ y $S - \{i\} \notin \mathcal{C}(i, W')$.
   Comprobemos en primer lugar que $S - \{i\} \in \mathcal{C}(i, W)$:
   $$\begin{array}{l} w(S - \{i\}) = w'(S - \{i\}) < q \\ w(S) \geq q \end{array}$$
   Sin embargo, $S - \{i\} \notin \mathcal{C}(i, W')$, ya que $w'(S - \{i\}) < q$ y $w'(S) < q$.

2. $\exists\, S \subseteq N$, $i \notin S$, $j \in S$ tal que $w(S) < q$ y $w'(S) \geq q$.
   Veamos que es este caso $S \in \mathcal{C}(i, W)$ y $S \notin \mathcal{C}(i, W')$.
   Comprobemos en primer lugar que $S \in \mathcal{C}(i, W)$:
   $$\begin{array}{l} w(S) < q \\ w(S \cup \{i\}) = w(S) + w_i = w'(S \cup i) \geq q. \end{array}$$
   Sin embargo, $S \notin \mathcal{C}(i, W')$, ya que $w'(S) \geq q$.

Por lo tanto, teniendo en cuenta que $p_s > 0$ para todo s,

$$\Psi_i[W] = \sum_{S \in \mathcal{C}(i,W)} p_s > \sum_{S \in \mathcal{C}(i,W')} p_s = \Psi_i[W'].$$

($\Rightarrow$) Supongamos que Ψ no es regular, es decir, $\exists\, s = 0, ..., n-1$ tal que $p_s = 0$. Sea $S \subseteq N - \{i\}$ tal que $|S| = s$. Veremos que $\Psi_i[W] = \Psi_i[W']$. Para ello definimos los juegos de mayoría ponderada siguientes:

$$(N, W) \equiv [2s+2; s+2, s, \underbrace{1, 1, ..., 1}_{s}]$$
$$(N, W') \equiv [2s+2; s+1, s+1, \underbrace{1, 1, ..., 1}_{s}]$$

en donde el jugador $i = 1$ es el donante, el jugador $j = 2$ es el receptor y $S = \{3, 4, 5, ..., n\}$.

Teniendo en cuenta que $p_s = 0$ y que

$$\begin{array}{l} W^m = \{\{1,2\}, \{1,3,4,...,n\}\} \\ (W^{'})^m = \{\{1,2\}\}, \end{array}$$

deducimos que

$$\Psi_1[W] = \sum_{T \in \mathcal{C}(1,W)} p_t = \sum_{T \in \mathcal{C}(1,W')} p_t + p_s = \sum_{T \in \mathcal{C}(1,W')} p_t = \Psi_1[W^{'}].$$

2

Dos ejemplos de semivalores que verifiquen el axioma anterior son los valores de Shapley y de Banzhaf.

Axioma de redistribución: Dados dos juegos de mayoría ponderada como los considerados al inicio de la sección, si existe i donante, entonces $K_i[W] \geq K_i[W^{'}]$.

En este caso no se exige la existencia de un único donante y un único receptor como ocurría en el axioma anterior. Veamos, con un contraejemplo, que este axioma no se verifica en general para los semivalores.

Ejemplo 5.4 Consideremos $(N, W) \equiv [8; 3, 3, 3]$ y $(N, W^{'}) \equiv [8; 2, 1, 6]$ y calculemos $\Psi_1[W]$ y $\Psi_1[W']$, donde Ψ es un semivalor regular.

Es fácil observar que los jugadores 1 y 2 son donantes, mientras que el jugador 3 es receptor, sin embargo,

$$\begin{array}{l} \Psi_1[W] = p_2 \\ \Psi_1[W'] = p_1 + p_2, \end{array}$$

es decir,

$$\Psi_1[W] = p_2 < p_1 + p_2 = \Psi_1[W^{'}].$$

El jugador 1 ha dado una unidad de su peso, pero, paradójicamente, ha visto aumentado su semivalor.

5.4 Aplicaciones de los semivalores a la Fiabilidad de Sistemas

El objetivo de esta sección es el de continuar en la misma línea seguida en la de otros capítulos de la memoria estableciendo ciertos paralelismos entre la Teoría de Juegos y la Fiabilidad de Sistemas, restringiéndonos en este caso al estudio de la importancia de una componente de un determinado sistema.

Presentamos una serie de aplicaciones de los semivalores basadas inicialmente en la propiedad de "versatilidad" definida por Carreras y Freixas (1998) y que en ciertos casos refleja mejor la importancia estructural de una determinada componente, para a continuación, suponiendo que se conocen las probabilidades de funcionamiento de cada una de las componentes en un cierto intervalo de tiempo, introducir una interpretación probabilística de los coeficientes de ponderación que definen al semivalor y que podrá extenderse al estudio de los valores probabilísticos. Dicha interpretación probabilística nos permitirá proporcionar una medida a priori de la importancia de una componente de un sistema, complementando así los resultados ya existentes en este campo como pueden ser los índices de Birnbaum (1969) y Barlow y Proschan (1975), que no son más que los índices de Banzhaf y de Shapley-Shubik, respectivamente, tan conocidos en la Teoría de Juegos.

Recordemos el paralelismo existente entre campos como la Electrónica y la Fiabilidad de Sistemas y la Teoría de Juegos, en el sentido de que podíamos identificar las componentes del sistema como jugadores, y los conjuntos de componentes como coaliciones. Ahora bien, ¿qué interpretación podemos dar en estas áreas al concepto de semivalor de una componente? Nuestro interés se centra, a partir de ahora, en evaluar la importancia relativa de cada una de las componentes de un sistema para lograr una alta fiabilidad del mismo. Este problema es equivalente al que se presenta en la Teoría de Juegos a la hora de evaluar la influencia que tiene un jugador en el resultado de un juego simple. En este contexto se identifica un juego simple como un modelo de votación, en donde un grupo de personas (el conjunto de jugadores) debe aceptar o rechazar una determinada propuesta. Cada uno de ellos vota "sí" o "no", y las coaliciones ganadoras son aquéllas que aseguran la aceptación de la propuesta. Si nos trasladamos al lenguaje de Fiabilidad de Sistemas, el funcionamiento (fallo) de una componente es equivalente al voto "sí" ("no") de un jugador. Análogamente, el funcionamiento (fallo) de un sistema es equivalente a la aceptación (rechazo) de la propuesta.

Intuitivamente, el poder de un jugador es su habilidad para cambiar el resultado de un juego mediante el cambio de su voto. Para medir la importancia (poder) de una componente (jugador) podemos dar una versión probabilística, según la cual dicha importancia viene dada por la probabilidad de que el funcionamiento o fallo de una componente (un voto "sí" o "no" de un jugador) provoque el funcionamiento o el fallo del sistema (aceptación o rechazo de la propuesta).

A partir de ahora supondremos que $N = \{1, 2, ..., n\}$ es el conjunto de componentes del sistema. Para indicar el estado de cada componente, tal y como ya hemos comentado en el segundo capítulo, asignamos a cada componente i la variable binaria x_i:

$$x_i = \begin{cases} 1 & \text{si } i \text{ funciona} \\ 0 & \text{si } i \text{ falla} \end{cases}$$

Análogamente, la variable binaria y indica el estado del sistema

$$y = \begin{cases} 1 & \text{si el sistema funciona} \\ 0 & \text{si el sistema falla} \end{cases}$$

Suponemos que el estado del sistema está completamente determinado por el estado de sus componentes, es decir, existe una función Booleana

$$f : \{0, 1\}^n \to \{0, 1\}$$

tal que $y = f(\mathsf{x})$, donde $\mathsf{x} = (x_1, ..., x_n)$. A esta función se la denomina función estructura, que no es más que la función característica utilizada en Teoría de Juegos.

Birnbaum y Barlow y Proschan en el estudio de cuantificar la importancia estructural relativa de las componentes de un sistema redescubrieron el índice de Banzhaf y el índice de Shapley-Shubik, respectivamente.

5.4.1 Versatilidad de los semivalores

Teniendo en cuenta los resultados obtenidos en la primera sección del capítulo podemos identificar a los semivalores, para un valor de n fijo, como los puntos de un simplex de dimensión $(n - 1)$, que es la intersección de un hiperplano con el ortante positivo. Esto da lugar a $n - 1$ grados de libertad, y nos hace pensar que cada semivalor nos puede permitir introducir alguna clase de información adicional con el fin de obtener el máximo provecho de las contribuciones marginales de las coaliciones en función de su tamaño.

De este modo, el valor de Banzhaf, para el que los coeficientes de ponderación que lo definen son constantes, no discrimina según el tamaño de las coaliciones, mientras que el valor de Shapley favorece a las coaliciones extremas, es decir, las de menor y mayor tamaño. Podemos también definir, por ejemplo, semivalores "centralizados", como aquéllos que favorecen a las contribuciones marginales de las coaliciones de tamaño intermedio; semivalores "individualistas", para los que $p_k = 0$ para valores grandes de k, o semivalores "solidarios", aquellos en los que $p_k = 0$ para valores pequeños de k...

Siguiendo estas pautas, Carreras y Freixas consideraron modificaciones del valor de Banzhaf y del valor de Shapley, que a continuación pasamos a comentar.

Dados $0 \leq m_1 \leq m_2 \leq n-1$, se define el semivalor $\beta_{m_1}^{m_2}$, mediante los coeficientes ponderados

$$p_k = \begin{cases} 0 & \text{si } k \notin [m_1, m_2], \\ \dfrac{1}{\sum\limits_{h=m_1}^{m_2} \binom{n-1}{k}} & \text{si } k \in [m_1, m_2]. \end{cases}$$

Como es obvio, $\beta_{m_1}^{m_2}$ es una generalización del valor de Banzhaf, en el sentido que sus coeficientes ponderados discriminan tan sólo entre dos clases de tamaños, pero permanecen constantes en cada una de estas clases.

Si $m_1 = m_2 = h$, obtenemos β_h^h (en particular, $\beta_0^0 = \delta$, el índice dictatorial definido por $\delta_i[v] = v(\{i\})$, y $\beta_{n-1}^{n-1} = \mu$, el índice marginal definido por $\mu_i[v] = v(N) - v(N - \{i\})$). Si $m_1 = 0$ y $m_2 < n-1$ obtenemos un valor individualista, mientras que para $0 < m_1$ y $m_2 = n-1$ se obtiene un semivalor solidario. Si $0 < m_1 < m_2 < n-1$ se trata de un semivalor centralizado. Finalmente, si $0 = m_1$ y $m_2 = n-1$ se obtiene β el valor de Banzhaf original.

Respecto al valor de Shapley, dados $0 \leq m_1 \leq m_2 \leq n-1$, se define el semivalor $\Phi_{m_1}^{m_2}$, mediante los coeficientes ponderados

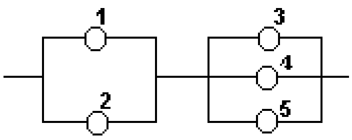
$$p_k = \begin{cases} 0 & \text{si } k \notin [m_1, m_2], \\ \dfrac{1}{\binom{n-1}{k}(m_2 - m_1 + 1)} & \text{si } k \in [m_1, m_2]. \end{cases}$$

Análogamente al caso anterior, $\Phi_{m_1}^{m_2}$ es una generalización del valor de Shapley en el sentido que si $m_1 = 0$ y $m_2 < n-1$ descrimina a favor de las coaliciones de menor tamaño y si $m_1 > 0$ y $m_2 \leq n-1$ entonces descrimina a favor de las coaliciones de mayor tamaño. La discusión es análoga a la utilizada en los casos particulares de $\beta_{m_1}^{m_2}$. En particular, si $0 = m_1$ y $m_2 = n-1$ se deduce que $\Phi_0^{n-1} = \Phi$, el valor de Shapley clásico.

Cuando consideramos juegos asociados a situaciones políticas (por ejemplo resultados electorales) observamos que es poco probable que se formen coaliciones de gran tamaño, y esto sugiere que quizás la utilización de semivalores individualistas reflejan mejor la distribución de poder que los semivalores clásicos. En cambio, en juegos asociados a situaciones económicas (por ejemplo, sociedades de accionistas), existen pequeños grupos de jugadores que carecen del poder suficiente para influir en la toma de decisiones; en este caso quizás serían los semivalores solidarios los que describirían mejor la situación.

Presentamos a continuación algunos ejemplos en los que las variaciones del valor de Banzhaf y del valor de Shapley se pueden aplicar a la Fiabilidad de Sistemas y que, en nuestra opinión, reflejan adecuadamente la importancia de una componente de un sistema.

Ejemplo 5.5 Supongamos que tenemos el sistema



en el que se estima (el fabricante lo certifica mediante la normativa ISO-9000) que la probabilidad de fallo de una componente arbitraria es muy pequeña. Veamos a continuación los resultados que obtenemos para medir la importancia de las componentes utilizando distintos índices.

En términos de Teoría de Juegos se trataría de un juego simple de 5 jugadores cuyo conjunto de coaliciones ganadoras minimales viene dado por:

$$W^m = \{\{1,3\},\{1,4\},\{1,5\},\{2,3\},\{2,4\},\{2,5\}\}$$

- Semivalor arbitrario

$$\Psi_i = 3p_1 + 3p_2 + p_3, \text{ para } i = 1,2$$
$$\Psi_i = 2p_1 + p_2, \text{ para } i = 3,4,5.$$

- Banzhaf (Birnbaum), en donde $p_k = \dfrac{1}{16}$, $k = 1, ..., 5$

$$\beta_i = \frac{7}{16}, \text{ para } i = 1, 2$$

$$\beta_i = \frac{3}{16}, \text{ para } i = 3, 4, 5.$$

  es decir, la proporción es $7 : 7 : 3 : 3 : 3$.

- Shapley (Barlow y Proschan), en donde $p_k = \dfrac{1}{5\binom{4}{k}}$, $k = 1, ..., 5$.

$$\Phi_i = \frac{9}{30}, \text{ para } i = 1, 2$$

$$\Phi_i = \frac{4}{30}, \text{ para } i = 3, 4, 5.$$

  es decir, la proporción es $9 : 9 : 4 : 4 : 4$.

- Semivalores centralizados β_1^4 y Φ_1^4

  Dado que es imposible que el sistema funcione con una componente, parece lógico utilizar los semivalores modificados β_1^4 y Φ_1^4.

  Si consideramos β_1^4, definido por:

$$\begin{aligned} p_0 &= 0 \\ p_i &= \frac{1}{\sum\limits_{h=1}^{3} \binom{4}{h}} = \frac{1}{14} \text{ para } i = 1, 2, 3, 4 \end{aligned}$$

  obtenemos

$$(\beta_1^4)_i = \frac{7}{14}, \text{ para } i = 1, 2$$

$$(\beta_1^4)_i = \frac{3}{14}, \text{ para } i = 3, 4, 5.$$

  En este caso las proporciones son $7 : 7 : 3 : 3 : 3$.

  Si consideramos Φ_1^4, definido por:

$$\begin{aligned} p_0 &= 0 \\ p_i &= \frac{\binom{n-1}{k}^{-1}}{m_2 - m_1 + 1} = \frac{\binom{4}{k}^{-1}}{3} \text{ para } i = 1, 2, 3, 4 \end{aligned}$$

obtenemos

$$(\Phi_1^4)_i = \frac{1}{2}, \text{ para } i = 1, 2$$

$$(\Phi_1^4)_i = \frac{2}{9}, \text{ para } i = 3, 4, 5.$$

En este caso las proporciones son 9 : 9 : 4 : 4 : 4.

Teniendo en cuenta que en el sistema descrito se observa que no hay contribuciones marginales de tamaño 0 ni de tamaño 4, es decir, los únicos coeficientes relevantes son p_1, p_2 y p_3, no es de extrañar que las proporciones sean las mismas que las obtenidas al estudiar Banzhaf y Shapley respectivamente.

- Banzhaf modificado β_2^3

  Bajo las hipótesis mencionadas (probabilidad de fallo de cada componente muy pequeña) es altamente improbable que el sistema funcione y a su vez tres componentes no lo hagan (o equivalentemente, que un sistema funcione con solo dos componentes).

  Por ejemplo, si el fabricante precisa que $1-p = 0.01$ es la probabilidad de fallo de cada componente, la probabilidad anterior es

  $$6p^2(1-p)^3 \approx 6(1-p)^3 = 6 \cdot 10^{-6},$$

  cantidad prácticamente despreciable en comparación con la probabilidad de que el sistema funcione y funcionen tres o cuatro componentes, que es

  $$9p^3(1-p)^2 + 5p^4(1-p) \approx 9(1-p)^2 + 5(1-p) = 0.0509.$$

  Por esta razón parece razonable no tener en cuenta las contribuciones marginales a coaliciones de tamaño uno, es decir, considerar $p_1 = 0$ y a partir de aquí utilizar el semivalor β_2^3 definido por:

  $$\begin{aligned} p_0 &= p_1 = p_4 = 0 \\ p_i &= \frac{1}{\sum_{h=2}^{3} \binom{4}{h}} = \frac{1}{10} \text{ para } i = 2, 3. \end{aligned}$$

  Los resultados son:

  $$(\beta_2^3)_i = \frac{4}{10}, \text{ para } i = 1, 2$$

  $$(\beta_2^3)_i = \frac{1}{10}, \text{ para } i = 3, 4, 5.$$

  La proporción es ahora 4 : 4 : 1 : 1 : 1.

- Shapley modificado Φ_2^3

  Utilizando el semivalor anterior, β_2^3, no se discrimina entre las contribuciones marginales de coaliciones de tamaño 2 y las de tamaño 3, siendo mucho más probable, como acabamos de ver, que si el sistema funciona sea debido a que cuatro de sus componentes lo hagan y no a que sólo lo hagan tres de ellas. Estas probabilidades son, respectivamente

  $$5p^4(1-p) \approx 5 \cdot 10^{-2},$$
  $$9p^3(1-p)^2 \approx 9 \cdot 10^{-4}.$$

  Por esta razón parece lógico aplicar un semivalor que discrimine a favor de las contribuciones marginales de las coaliciones de tamaño 3 frente a las de tamaño 2, tal y como hace Φ_2^3.

  En este caso Φ_2^3 viene definido por:

  $$p_0 = p_1 = p_4 = 0$$
  $$p_i = \frac{\binom{n-1}{k}^{-1}}{m_2 - m_1 + 1} = \frac{\binom{4}{k}^{-1}}{2} \text{ para } i = 2, 3,$$

  y obtenemos

  $$(\Phi_2^3)_i = \frac{3}{8}, \text{ para } i = 1, 2$$

  $$(\Phi_2^3)_i = \frac{1}{12}, \text{ para } i = 3, 4, 5.$$

  La proporción es $9:9:2:2:2$.

- Shapley modificado Φ_3^3

  Teniendo en cuenta el razonamiento anterior podemos considerar la discriminación hasta el caso extremo en que $p_2 = 0$, lo que nos lleva al valor Φ_3^3 definido por:

  $$p_i = 0 \text{ para } i = 0, 1, 2, 4$$
  $$p_3 = \frac{\binom{n-1}{3}^{-1}}{m_2 - m_1 + 1} = \frac{1}{4}$$

  y obtenemos

  $$(\Phi_3^3)_i = \frac{1}{4}, \text{ para } i = 1, 2$$

  $$(\Phi_3^3)_i = 0, \text{ para } i = 3, 4, 5.$$

Comentarios

1. Si el juego (sistema) es conocido de antemano y se tiene información exógena del mismo (como pueden ser las probabilidades de funcionamiento de las componentes de un sistema) parece lógico aplicar modificaciones de los índices de Shapley y de Banzhaf.

2. Si las probabilidades de funcionamiento son desconocidas y no existe ninguna razón que nos permita suponer que sean grandes o pequeñas nos decantamos por aplicar el índice de Banzhaf.

3. En el ejemplo anterior nos inclinamos por aplicar Φ_2^3 o Φ_3^3, si bien, como veremos en la siguiente sección, sería más apropiado considerar un semivalor que "respete" las probabilidades, si éstas son conocidas.

4. Si nos restringimos a la Teoría de Juegos, la utilización de los semivalores "versátiles" en situaciones puramente políticas, como pueden ser los resultados de unas elecciones, es del todo realista puesto que la probabilidad de que se formen coaliciones de gran tamaño es pequeña ya que existe un trasfondo ideológico que juega un papel fundamental en dichas posibles uniones.

5.4.2 Importancia relativa de una componente de un sistema a partir de las probabilidades de funcionamiento de cada una de ellas

Supongamos además en esta sección que cada componente tiene una probabilidad $\widetilde{p}_i$ de estar en funcionamiento durante un determinado intervalo de tiempo y una probabilidad complementaria $\widetilde{q}_i = 1 - \widetilde{p}_i$ de estar en estado de fallo. Sea $\mathsf{X} = (X_1, ..., X_n)$ la variable aleatoria que representa el estado de cada componente

$$X_i = \begin{cases} 1 & \text{si la componente } i \text{ funciona} \\ 0 & \text{si la componente } i \text{ no funciona} \end{cases}$$

Supondremos que las componentes son independientes. El estado del sistema viene dado por la variable $f(\mathsf{X})$, definida por

$$f(\mathsf{X}) = \begin{cases} 1 & \text{si el sistema funciona} \\ 0 & \text{si el sistema no funciona} \end{cases}$$

La fiabilidad del sistema no es más que la probabilidad de que el sistema funcione, es decir,

$$\Pr\{f(\mathsf{X}) = 1\}.$$

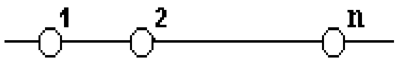
Definición 5.11 La función de fiabilidad de una función estructura con componentes independientes, $\widehat{f}$, dada en N es la función $\widehat{f} : [0,1]^n \to [0,1]$ definida por

$$\widehat{f}(\mathsf{p}) = \Pr\{f(\mathsf{X}) = 1\} = \sum_{S \in W} \left\{ \prod_{j \in S} \widetilde{p}_j \prod_{j \notin S} (1 - \widetilde{p}_j) \right\},$$

en donde $\mathsf{p} = (\widetilde{p}_1, ..., \widetilde{p}_n)$.

Observemos que $\widehat{f}$ no es más que la extensión multilineal de f. En términos de Teoría de Juegos, se refiere a la extensión multilineal de la función característica del juego dada por Owen.

Ejemplo 5.6 La siguiente figura representa un sistema en serie de n componentes. Estos sistemas funcionan si y sólo si funcionan todas sus componentes.



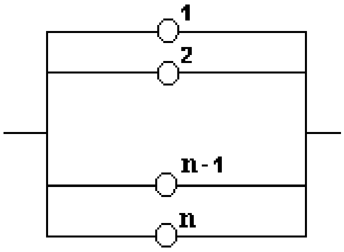
Su función estructura viene dada por:

$$f(\mathbf{x}) = \prod_{i=1}^{n} x_i \quad \text{para } \mathbf{x} \in \{0,1\}^n,$$

y su función de fiabilidad será:

$$\widehat{f}(\mathbf{p}) = \widetilde{p}_1 \cdot \widetilde{p}_2 \cdot ... \cdot \widetilde{p}_n \text{ para todo } \mathbf{p} \in [0,1]^n.$$

Ejemplo 5.7 Un sistema en paralelo funciona si y sólo si como mínimo alguna de sus componentes funciona. Su diagrama aparece en la siguiente figura:



Su función estructura viene dada por:

$$f(\mathbf{x}) = 1 - \prod_{i=1}^{n}(1 - x_i) \quad \text{para } \mathbf{x} \in \{0,1\}^n,$$

y su función de fiabilidad será:

$$\widehat{f}(\mathbf{p}) = 1 - (1 - \widetilde{p}_1)(1 - \widetilde{p}_2)...(1 - \widetilde{p}_n) \quad \text{para todo } \mathbf{p} \in [0,1]^n.$$

En este contexto podemos formularnos la siguiente pregunta: ¿Cuál es la probabilidad de que el sistema funcione con la componente i en posición "ON" y no funcione con la componente i en posición "OFF"?

Para dar respuesta a esta cuestión es necesario definir una distribución de probabilidad para las $\widetilde{p}_k$, $k = 1, ..., n$. Aunque existen muchas formas de definir esta función de probabilidad, a continuación pasamos a definir dos posibles casos que son utilizados en términos de Teoría de Juegos.

Suposición de independencia: Cada $\widetilde{p}_k$ es elegido independientemente a partir de la distribución uniforme en el intervalo $[0,1]$.

Suposición de homogeneidad: Un número p es elegido a partir de la distribución uniforme en $[0,1]$ y $\widetilde{p}_k = p$ para todo k.

La respuesta a la pregunta anterior bajo la suposición de independencia la encontramos en el índice de Banzhaf (Birnbaum). Sin embargo, bajo la suposición de homogeneidad, la respuesta nos la da el índice de Shapley-Shubik (Barlow y Proschan), obteniendose en este caso el conocido resultado:

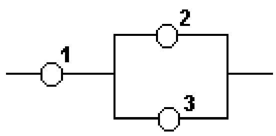
$$\Phi_i = \int_0^1 \frac{\partial \widehat{f}}{\partial \widetilde{p}_i}(p, p, ..., p)dp$$

La expresión anterior del índice de Barlow y Proschan nos permite afirmar, por lo tanto, que Φ_i es la probabilidad de que la componente i cause el fallo del sistema bajo la suposición de que la vida de las componentes es una variable aleatoria independiente e idénticamente distribuida.

Si nos restringimos exclusivamente al caso que nos ocupa y dejamos de lado los razonamientos que son utilizados en la Teoría de Juegos, podemos añadir una tercera posibilidad basada en el hecho de que las probabilidades de funcionamiento de cada una de las componentes del sistema sean conocidas en un intervalo de tiempo determinado. Bajo esta nueva hipótesis veremos como es posible dar respuesta a la pregunta formulada inicialmente a través de los semivalores binomiales (ya definidos en la Sección 5.2 y que ahora recuperan parte de su protagonismo) y una clase de valores probabilísticos que aparecerán en la parte final del capítulo.

En este contexto podemos dar una nueva interpretación a los coeficientes de ponderación que definen a un semivalor binomial y a partir de él medir la importancia relativa de las componentes de un sistema conocidas sus probabilidades de funcionamiento, que serán precisamente el valor p $(0 \leq p \leq 1)$ que define al semivalor binomial Ψ^p. Es decir, p será ahora la probabilidad de cada una de las componentes de un sistema funcione en un intervalo de tiempo determinado y Ψ^p vendrá definido por los coeficientes de ponderación $p_k = p^k(1-p)^{n-1-k}$, $k = 0, ..., n-1$.

Ejemplo 5.8 Consideremos el sistema serie-paralelo formado por dos subsistemas cuyo diagrama viene dado por



Para un semivalor arbitrario, Ψ, los resultados son:

$$\Psi_1 = 2p_1 + p_2.$$
$$\Psi_i = p_1, \text{ para } i = 2, 3.$$

Utilizando el razonamiento anterior sabemos que p es la probabilidad de que cada una de las 3 componentes de las que consta el sistema funcione. A partir de aquí construimos el semivalor binomial Ψ^p, cuyos coeficientes ponderados, tal y como hemos definido en la Sección 5.2, son:

$$\begin{aligned} p_0 &= (1-p)^2 = q^2 \\ p_1 &= p \cdot q = p(1-p) \\ p_2 &= p^2. \end{aligned}$$

Así pues, para un semivalor binomial arbitrario, los resultados serían:

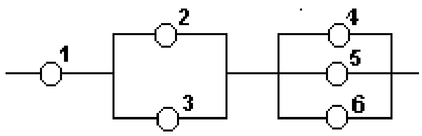
$$\begin{aligned} \Psi_1^p &= 2p - p^2, \\ \Psi_i^p &= p - p^2, \text{ para } i = 2, 3. \end{aligned}$$

La siguiente tabla muestra los resultados obtenidos con Ψ^p, para $p = 0.99$, y para los índices de Shapley-Shubik y de Banzhaf:

i	Φ_i	β_i	Ψ^p
1	$\frac{2}{3}$	$\frac{3}{4}$	0.9999
$2, 3$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{4}$	0.0099

Las proporciones son, respectivamente, $4:1:1$, $3:1:1$ y $100:1:1$.

Ejemplo 5.9 Consideremos el sistema cuyo diagrama viene dado por



Si se traslada a la Teoría de Juegos se trata de un 6-juego simple en el que sus coaliciones ganadoras minimales son

$$W^m = \{\{1,2,4\},\{1,2,5\},\{1,2,6\},\{1,3,4\},\{1,3,5\},\{1,3,6\}\}.$$

Para un semivalor arbitrario, Ψ, los resultados son:

$$\begin{aligned} \Psi_1 &= 6p_2 + 9p_3 + 5p_4 + p_5. \\ \Psi_i &= 3p_2 + 3p_3 \ + p_4, \text{ para } i = 2, 3. \\ \Psi_i &= 2p_2 + p_3, \text{ para } i = 4, 5, 6. \end{aligned}$$

La siguiente tabla muestra los diferentes resultados obtenidos en función de los semivalores utilizados:

i	β_i	$(\beta_3^5)_i$	$(\beta_4^5)_i$	$(\beta_5^5)_i$	Φ_i
1	$\frac{21}{32}$	$\frac{15}{16}$	1	1	$\frac{35}{60}$
$2, 3$	$\frac{7}{32}$	$\frac{4}{16}$	$\frac{1}{6}$	0	$\frac{8}{60}$
$4, 5, 6$	$\frac{3}{32}$	$\frac{1}{16}$	0	0	$\frac{3}{60}$

En este caso el semivalor Ψ^p viene definido por los coeficientes de ponderación:

$$\begin{aligned} p_0 &= q^5 \\ p_1 &= p \cdot q^4 \\ p_2 &= p^2 \cdot q^3 \\ p_3 &= p^3 \cdot q^2 \\ p_4 &= p^4 \cdot q \\ p_5 &= p^5 \end{aligned}$$

Para $p = 0.99$ los resultados son:

i	Ψ_i^p
1	0.99989899
$2,3$	0.009899987
$4,5,6$	0.000098989

La proporción es en este caso 10.100 : 100 : 1

Teniendo en cuenta los resultados obtenidos por Owen para el cálculo, tanto del valor de Shapley como el de Banzhaf, a partir de la extensión multilineal, los índices respectivos de Barlow y Proschan y Birnbaum pueden calcularse análogamente a partir de la función de fiabilidad como:

$$\Phi_i = \int_0^1 \frac{\partial \widehat{f}}{\partial \widetilde{p}_i}(p,p,...,p)dp$$

$$\beta_i = \frac{\partial \widehat{f}}{\partial \widetilde{p}_i}(\frac{1}{2},\frac{1}{2},...,\frac{1}{2}).$$

Los resultados obtenidos en la Sección 5.2 son extrapolables a la Fiabilidad de Sistemas, para ello es suficiente tan solo substituir el concepto de extensión multilineal por el de función de fiabilidad. Concretamente, recordemos que la Proposición 5.3 nos permitía obtener los semivalores binomiales a partir de la E.M.L del juego. El siguiente resultado no es más que su interpretación en términos de Fiabilidad de Sistemas:

Proposición 5.11 Si Ψ^p es un semivalor binomial definido por los coeficientes $p_k = p^k q^{n-1-k}$, para $k = 0,...,n-1$, en donde p $(0 \leq p \leq 1)$ es la probabilidad (conocida) de que funcionen cada una de las componentes de un sistema en un intervalo de tiempo determinado,entonces

$$\Psi_i^p = \frac{\partial \widehat{f}}{\partial \widetilde{p}_i}(p,p,...,p) \qquad \forall i,$$

en donde $\widehat{f}$ es la función de fiabilidad del sistema.

El índice Birnbaum (Banzhaf) se obtiene tomando $p = \dfrac{1}{2}$ y, utilizando la proposición anterior, se deduce el resultado que hemos comentado anteriormente, es decir,

$$\beta_i = \frac{\partial \widehat{f}}{\partial \widetilde{p}_i}(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, ..., \frac{1}{2}).$$

Corolario 5.4 Si Ψ^p es un semivalor binomial en el que p $(0 \leq p \leq 1)$ es la probabilidad (conocida) de funcionamiento de cada una de las componentes del sistema, entonces Ψ_i^p puede interpretarse como la probabilidad de que el sistema funcione con la componente i en posición "ON" y no funcione con la componente i en posición "OFF".

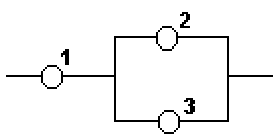
Demostración:

La probabilidad de que el sistema funcione con la componente i en posición "ON" y no funcione con la componente i en posición "OFF" viene dada en general por

$$\frac{\partial \widehat{f}}{\partial \widetilde{p}_i}(\widetilde{p}_1, \widetilde{p}_2, ..., \widetilde{p}_n) = \sum_{\substack{S \subseteq N - \{i\} \\ S \notin W \\ S \cup \{i\} \in W}} \{\prod_{j \in S} \widetilde{p}_j \prod_{\substack{j \notin S \\ j \neq i}} (1 - \widetilde{p}_j)\}$$

En nuestro caso, teniendo en cuenta que la probabilidad de funcionamiento de cada una de las componentes es conocida y vale p, la expresión anterior queda reducida a $\dfrac{\partial \widehat{f}}{\partial \widetilde{p}_i}(p, p, ..., p)$ que, utilizando la proposición anterior, no es más que Ψ_i^p. 2

Ejemplo 5.10 Consideremos de nuevo el sistema



y calculemos, aplicando la proposición anterior, el semivalor binomial de cada componente.

La función de fiabilidad es

$$\widehat{f}(\widetilde{p}_1,\widetilde{p}_2,\widetilde{p}_3)=\widetilde{p}_1\widetilde{p}_2(1-\widetilde{p}_3)+\widetilde{p}_1(1-\widetilde{p}_2)\widetilde{p}_3+\widetilde{p}_1\widetilde{p}_2\widetilde{p}_3=\widetilde{p}_1\widetilde{p}_2+\widetilde{p}_1\widetilde{p}_3-\widetilde{p}_1\widetilde{p}_2\widetilde{p}_3$$

Calculemos las derivadas parciales respectivas:

$$\frac{\partial \widehat{f}}{\partial \widetilde{p}_1}(\widetilde{p}_1,\widetilde{p}_2,\widetilde{p}_3)=\widetilde{p}_2+\widetilde{p}_3-\widetilde{p}_2\widetilde{p}_3$$

$$\frac{\partial \widehat{f}}{\partial \widetilde{p}_2}(\widetilde{p}_1,\widetilde{p}_2,\widetilde{p}_3)=\widetilde{p}_1-\widetilde{p}_1\widetilde{p}_3$$

$$\frac{\partial \widehat{f}}{\partial \widetilde{p}_3}(\widetilde{p}_1,\widetilde{p}_2,\widetilde{p}_3)=\widetilde{p}_1-\widetilde{p}_1\widetilde{p}_2.$$

Si ahora evaluamos estas parciales en (p,p,p) obtenemos los semivalores binomiales de cada componente.

$$\Psi_1^p=\frac{\partial \widehat{f}}{\partial \widetilde{p}_1}(p,p,p)=2p-p^2$$

$$\Psi_2^p=\frac{\partial \widehat{f}}{\partial \widetilde{p}_2}(p,p,p)=p-p^2$$

$$\Psi_3^p=\frac{\partial \widehat{f}}{\partial \widetilde{p}_3}(p,p,p)=p-p^2.$$

En particular, si evaluamos las parciales anteriores en $p=\dfrac{1}{2}$ obtenemos el valor de Banzhaf

$$\begin{aligned}\beta_1 &= \frac{3}{4}\\ \beta_2 &= \beta_3=\frac{3}{4},\end{aligned}$$

y si las integramos entre 0 y 1 obtenemos el valor de Shapley:

$$\begin{aligned}\Phi_1 &= \frac{2}{3}\\ \Phi_2 &= \Phi_3=\frac{1}{6}.\end{aligned}$$

Teniendo en cuenta el razonamiento utilizado en los ejemplos precedentes, parece lógico preguntarnos qué ocurriría si las probabilidades de funcionamiento de cada una de las componentes del sistema no fueran las mismas.

La respuesta a esta pregunta nos lleva a considerar valores probabilísticos. Recordemos, para un mejor entendimiento del problema, cual es su caracterización.

Teorema 5.4 (Weber, 1988) Fijado $i \in N$ y dados $\{p_S^i : S \subseteq N - \{i\}\}$ tales, que para toda $S \subseteq N - \{i\}$, $\sum\limits_{S \subseteq N-\{i\}} p_S^i = 1$ y $p_S^i \geq 0$ entonces,

$$\varphi_i[v] = \sum_{S \subseteq N-\{i\}} p_S^i [v(S \cup i) - v(S)],$$

define un valor probabilístico en $\mathcal{G}_N$, y viceversa.

Observemos que en este caso los coeficientes asociados a coaliciones del mismo tamaño no tienen por qué ser iguales, como ocurría en el estudio de los semivalores. De aquí se intuye que los valores probabilísticos de grupo que verifican el axioma de simetría son precisamente los semivalores.

La caracterización para el caso concreto de los juegos simples (monótonos) la obtenemos en el siguiente teorema:

Teorema 5.5 (Weber, 1988) Fijado $i \in N$ y dados $\{p_S^i : S \subseteq N - \{i\}\}$ tales que para toda $S \subseteq N - \{i\}$, $\sum\limits_{S \subseteq N-\{i\}} p_S^i = 1$ y $p_S^i \geq 0$ entonces,

$$\varphi_i[v] = \sum_{\substack{S \subseteq N-\{i\} \\ S \notin W \\ S \cup \{i\} \in W}} p_S^i$$

define un valor probabilístico en $\mathcal{S}_N^*$, y viceversa.

Hecho este pequeño paréntesis, veamos cómo podemos generar valores probabilísticos en función de las probabilidades de funcionamiento de las componentes de un determinado sistema.

Proposición 5.12 Sea $0 \leq \widetilde{p}_j \leq 1$, la probabilidad (conocida) de que la componente j de un sistema funcione, para $j = 1, ..., n$, y sea $\widetilde{q}_j = 1 - \widetilde{p}_j$. Entonces los coeficientes $p_S^i = \prod\limits_{j \in S} \widetilde{p}_j \prod\limits_{\substack{j \notin S \\ j \neq i}} \widetilde{q}_j$, para $S \subseteq N - \{i\}$, definen un valor probabilístico, al que denominaremos $\widetilde{\varphi}_i$. (Si $N = \{1\}$ se toma $p_\emptyset^1 = 1$).

Demostración:

Tenemos que comprobar que:

1. $p_S^i \geq 0$, para $S \subseteq N - \{i\}$. Es inmediato a partir de la definición.
2. $\sum\limits_{S \subseteq N-\{i\}} p_S^i = 1$.

Demostraremos que

$$\sum_{S \subseteq N-\{i\}} p_S^i = \sum_{S \subseteq N-\{i\}} (\prod_{j \in S} \widetilde{p}_j \prod_{\substack{j \notin S \\ j \neq i}} \widetilde{q}_j) = \prod_{j \neq i} (\widetilde{p}_j + \widetilde{q}_j) = 1.$$

Procederemos por inducción sobre el número de jugadores n.

- $n = 1$
  Tenemos que $p_\emptyset^1 = 1$.
- $n = 2$. Para $i \neq j$ tenemos que
  $$p_\emptyset^i = \widetilde{q}_j$$
  $$p_{\{j\}}^i = \widetilde{p}_j$$
  y se verifica $p_\emptyset^i + p_{\{j\}}^i = \widetilde{q}_j + \widetilde{p}_j = 1$.
- $n = 3$. Para $i \neq j, k$ y $j \neq k$ tenemos que
  $$p_\emptyset^i = \widetilde{q}_j \cdot \widetilde{q}_k$$
  $$p_{\{j\}}^i = \widetilde{p}_j \cdot \widetilde{q}_k$$
  $$p_{\{k\}}^i = \widetilde{q}_j \cdot \widetilde{p}_k$$
  $$p_{\{j,k\}}^i = \widetilde{p}_j \cdot \widetilde{p}_k$$
  y se verifica que
  $$\sum_{S \subseteq N-\{i\}} p_S^i = \widetilde{q}_j \cdot \widetilde{q}_k + \widetilde{p}_j \cdot \widetilde{q}_k + \widetilde{q}_j \cdot \widetilde{p}_k + \widetilde{p}_j \cdot \widetilde{p}_k = (\widetilde{p}_j + \widetilde{q}_j)(\widetilde{p}_k + \widetilde{q}_k) = 1.$$

- Supongamos que es cierto para $n-1$ y veamos que también se verifica para n.

$$\sum_{S\subseteq N-\{i\}} p_S^i = \sum_{S\subseteq N-\{i\}} (\prod_{j\in S}\widetilde{p}_j \prod_{\substack{j\notin S\\ j\neq i}} \widetilde{q}_j) = [\sum_{S\subseteq N-\{i,n\}} (\prod_{j\in S}\widetilde{p}_j \prod_{\substack{j\notin S\\ j\neq i, j\neq n}} \widetilde{q}_j)](\widetilde{p}_n+\widetilde{q}_n),$$

aplicando la hipótesis de inducción sabemos que

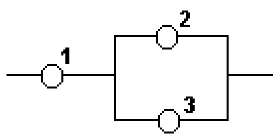
$$\sum_{S\subseteq N-\{i,n\}} (\prod_{j\in S}\widetilde{p}_j \prod_{\substack{j\notin S\\ j\neq i, j\neq n}} \widetilde{q}_j) = \prod_{\substack{j\neq i\\ j\neq n}}(\widetilde{p}_j+\widetilde{q}_j) = 1,$$

con lo cual

$$\sum_{S\subseteq N-\{i\}} p_S^i = \prod_{\substack{j\neq i\\ j\neq n}}(\widetilde{p}_j+\widetilde{q}_j)(\widetilde{p}_n+\widetilde{q}_n) = \prod_{j\neq i}(\widetilde{p}_j+\widetilde{q}_j) = 1.$$

2

Ejemplo 5.11 Consideremos el sistema serie-paralelo formado por dos subsistemas del Ejemplo 5.9, y cuyo diagrama venía dado por



Para un valor probabilístico arbitrario, los resultados son:

$$\varphi_1 = p^1_{\{2\}} + p^1_{\{3\}} + p^1_{\{2,3\}}$$

$$\varphi_2 = p^2_{\{1\}}$$

$$\varphi_3 = p^3_{\{1\}}.$$

El semivalor probabilístico $\widetilde{\varphi}_i$ viene definido, teniendo en cuenta la proposición anterior, por los coeficientes

$$p^1_{\{2\}} = \widetilde{p}_2 \cdot \widetilde{q}_3$$

$$p^1_{\{3\}} = \widetilde{p}_3 \cdot \widetilde{q}_2$$

$$p^1_{\{2,3\}} = \widetilde{p}_2 \cdot \widetilde{p}_3$$

$$p^2_{\{1\}} = \widetilde{p}_1 \cdot \widetilde{q}_3$$

$$p^3_{\{1\}} = \widetilde{p}_1 \cdot \widetilde{q}_2.$$

Por lo tanto,

$$\begin{array}{l} \widetilde{\varphi}_1 = \widetilde{p}_2 \cdot \widetilde{q}_3 + \widetilde{p}_3 \cdot \widetilde{q}_2 + \widetilde{p}_2 \cdot \widetilde{p}_3 = \widetilde{p}_2 + \widetilde{p}_3 - \widetilde{p}_2 \cdot \widetilde{p}_3 \\ \widetilde{\varphi}_2 = \widetilde{p}_1 \cdot \widetilde{q}_3 = \widetilde{p}_1 - \widetilde{p}_1 \cdot \widetilde{p}_3 \\ \widetilde{\varphi}_3 = \widetilde{p}_1 \cdot \widetilde{q}_2 = \widetilde{p}_1 - \widetilde{p}_1 \cdot \widetilde{p}_2 \end{array}$$

Tomando $\widetilde{p}_1 = 0.9$, $\widetilde{p}_2 = 0.5$ y $\widetilde{p}_3 = 0.1$, los resultados que se obtienen son:

$$\begin{array}{l} \widetilde{\varphi}_1 = 0.55 \\ \widetilde{\varphi}_2 = 0.81 \\ \widetilde{\varphi}_3 = 0.45. \end{array}$$

Tomando $\widetilde{p}_1 = 0.5$, $\widetilde{p}_2 = 0.9$ y $\widetilde{p}_3 = 0.99$, los resultados que se obtienen son:

$$\begin{array}{l} \widetilde{\varphi}_1 = 0.999 \\ \widetilde{\varphi}_2 = 0.005 \\ \widetilde{\varphi}_3 = 0.05. \end{array}$$

Observemos, tal y como comentábamos anteriormente, que se pierde la simetría, puesto que $2\, I\, 3$, y sin embargo $\widetilde{\varphi}_2 \neq \widetilde{\varphi}_3$.

De manera análoga a lo realizado para el cálculo de semivalores binomiales, procedemos a continuación a presentar una manera de calcular esta clase de valores probabilísticos a partir de la función de fiabilidad.

Proposición 5.13 Fijado $i \in N$, si $\widetilde{\varphi}_i$ es un valor probabilístico definido por los coeficientes $p^i_S = \prod_{j\in S} \widetilde{p}_j \prod_{\substack{k\notin S \\ k\neq i}} \widetilde{q}_k$, para $S \subseteq N - \{i\}$, siendo $\widetilde{q}_j = 1 - \widetilde{p}_j$, entonces

$$\widetilde{\varphi}_i = \frac{\partial \widehat{f}}{\partial \widetilde{p}_i}(\widetilde{p}_1, \widetilde{p}_2, ..., \widetilde{p}_n) \qquad \forall i,$$

en donde $\widehat{f}$ es la función de fiabilidad del sistema.

Demostración:

La función de fiabilidad viene dada por

$$\widehat{f}(\widetilde{p}_1, \widetilde{p}_2, ..., \widetilde{p}_n) = \sum_{S \in W} \left\{ \prod_{j \in S} \widetilde{p}_j \prod_{j \notin S} (1 - \widetilde{p}_j) \right\}$$

y, tal y como hemos comentado anteriormente,

$$\frac{\partial \widehat{f}}{\partial \widetilde{p}_i}(\widetilde{p}_1, \widetilde{p}_2, ..., \widetilde{p}_n) = \sum_{\substack{S \subseteq N - \{i\} \\ S \notin W \\ S \cup \{i\} \in W}} \{ \prod_{j \in S} \widetilde{p}_j \prod_{\substack{j \notin S \\ j \neq i}} (1 - \widetilde{p}_j) \}$$

Teniendo en cuenta la caracterización de los valores probabilísticos de un juego simple dada en Teorema 5.5 sabemos que si φ_i es un valor probabilístico, entonces

$$\varphi_i = \sum_{\substack{S \subseteq N - \{i\} \\ S \notin W \\ S \cup \{i\} \in W}} p_s^i .$$

En nuestro caso tenemos

$$\widetilde{\varphi}_i = \sum_{\substack{S \subseteq N - \{i\} \\ S \notin W \\ S \cup \{i\} \in W}} \{ \prod_{j \in S} \widetilde{p}_j \prod_{\substack{j \notin S \\ j \neq i}} \widetilde{q}_j \} = \sum_{\substack{S \subseteq N - \{i\} \\ S \notin W \\ S \cup \{i\} \in W}} \{ \prod_{j \in S} \widetilde{p}_j \prod_{\substack{j \notin S \\ j \neq i}} (1 - \widetilde{p}_j) \} = \frac{\partial \widehat{f}}{\partial \widetilde{p}_i}(\widetilde{p}_1, \widetilde{p}_2, ..., \widetilde{p}_n).$$

2

Corolario 5.5 Fijado $i \in N$, si $\widetilde{\varphi}_i$ es un valor probabilístico definido por los coeficientes $p_S^i = \prod_{j \in S} \widetilde{p}_j \prod_{\substack{k \notin S \\ k \neq i}} \widetilde{q}_k$, para $S \subseteq N - \{i\}$, siendo $\widetilde{q}_j = 1 - \widetilde{p}_j$, entonces $\widetilde{\varphi}_i$ puede interpretarse como la probabilidad de que el sistema funcione con la componente i en posición "ON" y no funcione con la componente i en posición "OFF".

Demostración:

Análoga a la del Corolario 5.4. 2

Ejemplo 5.12 Apliquemos este resultado al ejemplo anterior.

La función de fiabilidad es

$$\widehat{f}(\widetilde{p}_1, \widetilde{p}_2, \widetilde{p}_3) = \widetilde{p}_1\widetilde{p}_2(1-\widetilde{p}_3) + \widetilde{p}_1(1-\widetilde{p}_2)\widetilde{p}_3 + \widetilde{p}_1\widetilde{p}_2\widetilde{p}_3 = \widetilde{p}_1\widetilde{p}_2 + \widetilde{p}_1\widetilde{p}_3 - \widetilde{p}_1\widetilde{p}_2\widetilde{p}_3$$

Calculemos las derivadas parciales respectivas:

$$\frac{\partial \widehat{f}}{\partial \widetilde{p}_1}(\widetilde{p}_1, \widetilde{p}_2, \widetilde{p}_3) = \widetilde{p}_2 + \widetilde{p}_3 - \widetilde{p}_2 \cdot \widetilde{p}_3$$

$$\frac{\partial \widehat{f}}{\partial \widetilde{p}_2}(\widetilde{p}_1, \widetilde{p}_2, \widetilde{p}_3) = \widetilde{p}_1 - \widetilde{p}_1 \cdot \widetilde{p}_3$$

$$\frac{\partial \widehat{f}}{\partial \widetilde{p}_3}(\widetilde{p}_1, \widetilde{p}_2, \widetilde{p}_3) = \widetilde{p}_1 - \widetilde{p}_1 \cdot \widetilde{p}_2$$

y vemos que efectivamente coinciden con $\widetilde{\varphi}_1$, $\widetilde{\varphi}_2$ y $\widetilde{\varphi}_3$, calculados anteriormente.

Finalmente, si nos restringimos a Teoría de Juegos, comentar que estos últimos resultados son extrapolables a juegos cooperativos, no necesariamente simples.

Conclusiones

La motivación y uno de los objetivos del trabajo es, como ya hemos comentado anteriormente, contribuir en la medida de lo posible al desarrollo de la Teoría de Juegos y de sus aplicaciones, dando especial importancia a aquéllas que la acercan a campos, en principio tan distintos, como la Electrónica, la Teoría de Circuitos o la Fiabilidad de Sistemas, sin por ello dejar de lado las clásicas aplicaciones a la Economía y a la Política. El paralelismo entre las áreas anteriormente citadas y la Teoría de Juegos queda patente a lo largo de la memoria, concretamente en los capítulos segundo, cuarto y quinto. Debemos aclarar, sin embargo, que los resultados que se obtienen son originales, y en ningún caso han sido trasladados de la Electrónica, de la Teoría de Circuitos o de la Fiabilidad de Sistemas a la Teoría de Juegos. A continuación, pasamos a resumir los principales resultados obtenidos.

El primer capítulo es un compendio de los conceptos y resultados conocidos que constituyen el punto de partida de esta memoria.

El segundo capítulo hace referencia exclusivamente a los juegos de mayoría ponderada, concretamente a las representaciones estrictas de esta clase de juegos. Nuestro principal resultado es la determinación del máximo porcentaje permitido en la variación de los pesos y de la cuota de una representación estricta de un juego de mayoría ponderada que hace posible que el juego no varíe, al que denominamos amplitud de la representación. Este problema tiene sentido en términos de Fiabilidad de Sistemas o de la Electrónica, en donde, como ya hemos comentado, los juegos de mayoría ponderada se identifican con los sistemas aditivos y con las funciones interruptor con umbral, respectivamente. Como casos particulares estudiamos situaciones en las que las modificaciones afectan tan solo a un determinado número de jugadores y/o a la cuota, obteniendo así la que hemos denominado amplitud coalicional de la representación, y situaciones todavía más concretas en las que tan solo se modifican los pesos de dos jugadores, pero se exige que la suma de pesos de ambas representaciones sea constante. En este último caso estamos refiriéndonos a la amplitud coalicional con suma de pesos constante.

En el tercer capítulo aparece ya el concepto de solución de un juego simple, más concretamente, de los que denominamos juegos simples completos con mínimo. Realizamos un estudio exhaustivo de esta clase de juegos a partir de sus invariantes característicos. Concretamente, calculamos el nucleolo como la solución de un sistema lineal de ecuaciones, reduciendo de esta manera el programa lineal necesario para su cálculo. Vemos también como es posible determinar la maximalidad del núcleo teniendo en cuenta el número de jugadores con veto y de jugadores nulos del juego. El último concepto de solución que tratamos es el de semivalor, y que volverá a aparecer en el último capítulo de la tesis. El método que proporcionamos para calcularlos está basado en el hecho de que jugadores indiferentes tienen el mismo semivalor y reduce substancialmente los cálculos requeridos en la utilización del método tradicional. Por último, y como consecuencia de la determinación de la cobertura superaditiva de un juego completo, deducimos bajo que condiciones un juego completo es superaditivo.

El cuarto capítulo está dedicado al cálculo de la dimensión de ciertos juegos simples, para lo cual es indispensable retomar de nuevo el concepto de juego de mayoría ponderada para, a partir de él, definir el concepto de dimensión de un juego simple. En la primera parte determinamos la dimensión de los juegos completos con mínimo a partir de sus invariantes característicos. Como consecuencia inmediata de este resultado se prueba que es posible construir juegos de este tipo de cualquier dimensión. En la segunda parte del capítulo determinamos la dimensión de juegos que son composición de juegos individualistas vía unanimidad y de composiciones de juegos de unanimidad vía individualismo. En Fiabilidad de Sistemas ambos tipos de juegos son interpretados como sistemas serie-paralelo y sistemas paralelo-serie, respectivamente, pudiéndose, por lo tanto, extrapolar los resultados obtenidos en esta parte del capítulo a este campo. Al igual que en el caso de los juegos completos con mínimo, se demuestra que estos tipos de juegos generan juegos simples de cualquier dimensión. Finalmente determinamos la dimensión de juegos simples que son una generalización de los dos últimos.

El último capítulo está dedicado principalmente al estudio y caracterización de los semivalores sobre juegos simples monótonos, aunque en la parte final del mismo se haga una breve mención de los valores probabilísticos. De la caracterización mediante coeficientes de ponderación se deduce que los semivalores sobre juegos simples monótonos generan un subespacio vectorial de dimensión n en el espacio de las aplicaciones de $\mathcal{S}_N^*$ en R^n que verifican el axioma de transferencia. Teniendo en cuenta que podemos determinar una base de este subespacio formada por los llamados semivalores binomiales y que éstos pueden calcularse a partir de la E.M.L. del juego sobre el que se aplican, se deduce que todo semivalor también puede calcularse de esta forma.

Los coeficientes de ponderación nos permiten definir también los que hemos denominado polisemivalores hereditarios y que creemos más adecuados para establecer comparaciones entre el poder de determinados jugadores en juegos con distinto número de jugadores (por ejemplo, entre un juego y un subjuego o un juego y un juego inducido). Entre las propiedades que se estudian en el capítulo cabe destacar la caracterización del valor de Banzhaf como el único polisemivalor hereditario que verifica los axiomas de superaditividad y de subaditividad, ampliando así los resultados existentes en este tema. En la parte final del capítulo se presentan diversas aplicaciones de los semivalores y los valores probabilísticos a la Fiabilidad de Sistemas, utilizando parte de los resultado obtenidos en la primera parte.

Además de los resultados particulares que se han obtenido y que acabamos de resumir brevemente, exponemos a continuación otros aspectos globales de la memoria que deseamos destacar como conclusiones más relevantes.

Los desarrollos teóricos que hemos realizado en los diferentes capítulos han sido ilustrados posteriormente mediante ejemplos, utilizando, siempre que ha sido posible, situaciones reales, a los que les han aplicado las nuevas técnicas y resultados obtenidos.

Aunque en la memoria aparecen dos partes temáticas bien diferenciadas, existen diversos elementos que sirven de nexo entre ellas y que son utilizados recurrentemente en ambas, proporcionándole homogeneidad de estilo y de metodología. Esta dicotomía temática no impide que el objetivo perseguido sea común.

Mientras que en una de estas partes se hace referencia exclusivamente a juegos de mayoría ponderada y a la representabilidad de determinados juegos simples como intersección de ellos (Capítulo II y Capítulo IV), en la otra se aborda el concepto de solución de un juego simple. Concretamente, en el Capítulo III se estudian y calculan diferentes conceptos de solución de los juegos completos con mínimo y en el Capítulo V el estudio se centra en los semivalores sobre juegos simples monótonos.

Por último comentar que alguno de los resultados que aparecen en la tesis han sido publicados y presentados en diferentes congresos y seminarios.

Artículos publicados:

(a) J. Freixas y A. Puente (1998): "Amplitude of weighted majority games: strict representations". Qüestiió 23, 1, 43-60

(b) J. Freixas y A. Puente (1999): "Complete games with minimum". Annals of Operations Research 84, 97-109.

Participación en congresos, cursos y seminarios:

(a) J. Freixas y A. Puente: "Complete games with minimum". International Workshop on Game Theory and Politics & Spanish Meeting on Game Theory, Santiago de Compostela, julio 1996.

(b) J. Freixas y A. Puente: "Tolerancia". XXIIII Congreso Nacional de Estadística e Investigación Operativa, Valencia, marzo 1997.

(c) J. Freixas y A. Puente: participación en el seminario "Juegos de mayoría ponderada", organizado por el Departamento de Estadística e Investigación Operativa de la Universidad Pública de Navarra del 11 al 13 de febrero de 1998.

(d) J. Freixas y A. Puente: "Postulados para índices de poder basados en contribuciones marginales". Third Spanish Meeting on Game Theory and Applications, Barcelona, junio 1998.

(e) J. Freixas, S. Gómez, F. Mallor y A. Puente: "Dimensión de composición de juegos individualistas vía unanimidad y composición de juegos de unanimidad vía individualismo". XXIV Congreso Nacional de Estadística e Investigación Operativa, Almería, octubre 1998.

Conferencias, cursos y seminarios impartidos:

(a) A. Puente: conferencia titulada "Tolerancia y amplitud de juegos de mayoría ponderada estrictos" en el Departamento de Estadística e Investigación Operativa de la Universidad Pública de Navarra el 13-02-98.

Bibliografía

[1] AUMANN, R.J.; PELEG, P. Y RABINOWITZ, P. (1965)
A method for computing the kernel of n-person games.
Mathematics of Computation 19, 531-555.

[2] AUMANN, R.J.; DRÈZE, J. H. (1974)
Cooperative games with coalitions structures.
International Journal of Game Theory, 3, 217-237.

[3] AUMANN, R.J.; HART, S. (1992)
Handbook of Game Theory.
North-Holland.

[4] AUMANN, R.J.; RABINOWITZ, P. Y SCHMEIDLER, D. (1966)
Kernels of superadditive simple 5-person games.
Research Program in Game Theory and Mathematical Economics. The Hebrew University of Jerusalem.

[5] BANZHAF, J. F. (1965)
Weighted voting doesn't work: A mathematical analysis.
Rutges Law Review, 19, 317-343.

[6] BARLOW, R. E.; PROSCHAN, F. (1975).
Importance of system components and fault treee event.
Stochastic Processes and their applications, 3, 153-172.

[7] BIRNBAUM, Z.W. (1969)
On the importance of different components in a multicomponent system.

Multivariate Analysis II. P.R. Krishnaiah, Academic Press, New York.

[8] CARRERAS, F. (1984)

A characterization of the Shapley-Shubik index power via automorphisms.

Stochastica, 8, 171-179.

[9] CARRERAS, F. (1993)

Cooperation and national defense.

Qüestiió 17, 1, 103-134.

[10] CARRERAS, F.; OWEN, G. (1997)

Automorphisms and weighted values.

International Journal of Game Theory.

[11] CARRERAS, F. Y FREIXAS, J. (1996)

Complete simple games.

Mathematical Social Sciences 32, 139-155.

[12] CARRERAS, F. Y FREIXAS, J. (1998)

Some theorical reasons for using (regular) semivalues.

Logic, Game Theory and Social Choice 140-154.

[13] CARRERAS, F. Y FREIXAS, J. (1999)

"A note on regular semivalues".

Aceptado en International Game Theory Review.

[14] COLEMAN, J.S. (1971)

Control of collectivities and the power of a collectivity to act.

Social Choice. Gordon and Breach, New York 269-300.

[15] DAVIS, M. Y MASCHLER, M. (1965)

The kernel of a cooperative game.

Naval Research Logistics Quartely. 12, 223-259.

[16] DUBEY, P.; VON NEYMAN, A. Y WEBER, R. (1981)

Value theory without efficiency.

Mathematics of operations research 6, 122-128.

[17] DUBEY, P. Y SHAPLEY, L. S. (1979).
Mathematical properties of the Banzhaf power index.
Mathematics of Operations Research, 4, 99-131.

[18] EINY, E. (1985)
The desirability relation of simple games.
Mathematical. Social Sciences, 10, 155-168.

[19] EINY, E; LEHRER, E. (1989)
Regular simple games.
International Journal of Game Theory, 18, 195-207.

[20] ELGOT, C.C (1960).
Truth functions realizable by single threshold organs.
AIEE Conference Paper 60-1311

[21] FELSENTHAL, D. Y MACHOVER, M. (1995)
Postulates and paradoxes of relative voting power.
Theory and Decision 38, 195-229.

[22] FELTKAMP, V. (1995)
Alternative axiomatic characterizations of the Shapley and Banzhaf values.
International Journal of Game Theory, 24, 179-186.

[23] FREIXAS, J. (1994).
Estructura de juegos simples.
Tesis doctoral. Departamento de Matemática Aplicada III. Universidad Politécnica de Cataluña.

[24] FREIXAS, J. (1997).
Different ways to represent weighted majority games.
Top 5, 2, 201-212.

[25] FREIXAS, J. Y GAMBARELLI, G. (1997)
Common internal properties among power indices.
Control Cybernet 26, 4, 591-603.

[26] GAMBARELLI, G. (1983).
Common behaviour of power indices.
International Journal of Game Theory 12, 237-244.

[27] GAMBARELLI, G. (1994).
Power indices for political and financial decision making: A review.
Annals of Operations Research 51, 165-173.

[28] GILLIES, D. B. (1953)
Some theorems on n-person games.
Tesis doctoral. Princeton University Press, Princeton, New Jersey.

[29] HALLER, H. (1994).
Collusion properties of values.
International Journal of Game Theory 23, 261-281.

[30] HAMMER, P.L, IBARAKI, T.; PELED U.N. (1981)
Theshold numbers and threshold completions.
P. Hansen, ed., Studies on Graphs and Discrete Programming (Noth Holland) 125-145.

[31] HU, S. (1965).
Threshold logic.
University of California Press.

[32] ISBELL, J.R. (1956)
A class of majority games.
Quarterly Journal of Mathematics, Oxford Series. 7, 183-187.

[33] ISBELL, J.R (1959)
On the enumeration of majority games.
Mathematical Tables and OtherAids to Computation,. 13, 21-28.

[34] KILGOUR, D.M. (1983)
A formal analysis of amending formula of Canada's Constitution.
Act., Canadian J. of Pol. Sci. 16, 771-777.

[35] KOPELOWITZ, A. (1967).

Computation of the kernels of simple games and the nucleolus of n-person games.

Research Program in Game Theory. The Hebrew University of Jerusalem.

[36] LEHRER, E. (1988)

An axiomatization of the Banzhaf value.

International Journal of Game Theory, 17, 89-99.

[37] MASCHLER, M.; PELEG, B. (1966)

A characterization, existence proof and dimension bounds for the kernel of a game.

Pacificific Journal. of Mathematics, 18, 289-328.

[38] MASCHLER, M.; PELEG, B. Y SHAPLEY, L.S. (1979).

Geometric properties of the kernel, nucleolus and related concepts.

Mathematics of Operations Research 4, 303-338.

[39] MONDERER, D. (1988).

Values and semivalues on subspaces of finite games.

International Journal of Game Theory 17, 301-310.

[40] MUROGA, S. (1971)

Threshold logic and its applications.

Wiley-Interscience.

[41] OWEN, G. (1972)

Multilinear extensions of games.

Management Science 18, 64-79.

[42] OWEN, G. (1974).

A note on the nucleolus.

International Journal of Game Theory 3, 101-103.

[43] OWEN,G. (1975)

Multilinear extensions and the Banzhaf value.

Naval Research Logistics Quarterly, 22, 741-750.

[44] OWEN, G. (1978)

A characterization of the Banzhaf-Coleman index.

SIAM Journal of Applied Mathematics, 35, 315-327.

[45] OWEN, G.(1995)

Game Theory, 3rd. edition.

Academic Press.

[46] PELEG, B.; ROSENMÜLLER, J. Y SUDHÖLTER (1995).

The kernel of homogeneous games with steps.

Essays in honor of M Maschler, 163-192.

[47] POTTERS, J. A. M.; TIJS, S. H. (1992).

The nucleolus of matrix games and other nucleoli.

Mathematics of Operations Research 17, 164-174.

[48] RAMAMURTHY, K. G. (1990).

Coherent Structures and Simple Games.

Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

[49] SHAPLEY, L. S. (1953)

Contributions to the theory of games II (ed. Por Kuhn, H. y Tucker, A.). Princeton University Press. Princeton, 307-317.

[50] SHAPLEY, L.S. (1962)

Compound simple games I: solutions of sums and products.

RM-3192 The RAND Corporation, Santa Monica, California.

[51] SHAPLEY, L. S.; SHUBIK, M. (1954)

A method for evaluating the distribution of power in a committee system.

American Political Science Review, 48, 787-792.

[52] SCHMEIDLER, D. (1969).

The nucleolus of a characteristic finction game.

SIAM Journal. of Applied Mathematics, 17, 1163-1170.

[53] SOBOLEV, A.I. (1975)

A characterization of optimality principles in cooperative games by finctional equations.

Math. Meth. in the Soc. Scien., 6, 94-151.

[54] TAYLOR, A. Y ZWICKER, W. (1992).

A characterization of weighted voting.

Mathematical Social Sciences 115, 1089-1094.

[55] TAYLOR, A. (1995).

Mathematics and Politics.

Springer, New York.

[56] TAYLOR, A. Y ZWICKER, W. (1999).

Simple Games: desirability relations, trading and pseuweightings.

Princeton University Press.

[57] VON NEUMANN, J.; MORGENSTERN, O. (1944)

Theory of games and economic behaviour.

Princeton University Press. Princeton, New Jersey.

[58] WINDER, R. O. (1962)

Threshold Logic.

Dept. of Math. Priceton University.

[59] WEBER, R. (1988).

Probabilistic values for games.(ed. por Alvin E. Roth)

Cambridge University Press.