Equacions de Difusió
amb
Condicions de Contorn No Lineals

Neus Cónsul Porras

Universitat Politècnica de Catalunya

1997

Equacions de Difusió
amb
Condicions de Contorn No Lineals

Neus Cónsul Porras

Memòria presentada per a aspirar al grau
de Doctora en Matemàtiques

Departament de Matemàtica Aplicada I
Universitat Politècnica de Catalunya

Barcelona, Març del 1997

CERTIFICO que la present memòria ha estat realitzada per na Neus Cónsul Porras sota la meva direcció, al Departament de Matemàtica Aplicada I de la Universitat Politècnica de Catalunya.

Barcelona, Març de 1997.

Dr. Joan Solà-Morales i Rubió
Catedràtic d'Universitat de Matemàtica Aplicada
Universitat Politècnica de Catalunya

a en Juanje

Agraïments

Vull aprofitar aquest espai per donar les gràcies a totes aquelles persones que, d'alguna manera o altra, han fet possible la realització d'aquesta memòria.

En primer lloc vull mostrar el meu agraïment de tot cor al meu director de tesi, en Joan Solà-Morales. Ell em va introduir en aquest treball i ha estat ell qui, pacientment, m'ha estat ensenyant i ajudant tots aquests anys. És per això que li haig d'agrair tot el temps que m'ha dedicat, les seves suggerències i idees i els seus consells en el desenvolupament d'aquesta tesi. I no puc deixar de banda la meva gratitud envers d'en Joan quan en aquells moments més baixos i més difícils m'ha estat recolzant i animant. Per tot això i per moltes altres coses que segurament estic ometent, gràcies Joan.

Haig d'estendre el meu agraïment a tots els altres membres del Seminari d'Equacions en Derivades Parcials / Sistemes Dinàmics UAB-UPC, amb els quals m'he trobat molt a gust tot aquest temps.

Durant tots aquests anys he comptat amb la companyia i el recolzament de tots els companys del Departament de Matemàtica Aplicada I. A tots ells moltes gràcies per l'ànim que en tot moment he estat rebent. No puc deixar d'agrair a l'Àngel Jorba el seu ajut informàtic. També recordo amb molta simpatia tots els moments compartits amb el que ha estat el meu company de despatx tots aquests anys, en Miguel Ángel Barja.

Molt especialment haig d'agrair als meus estimats pares tota la seva comprensió, companyia i paciència que m'han ofert en tot moment. Haig de fer extensiu aquest agraïment als meus sogres.

Finalment, un agraïment molt emocionat a la persona que m'ha acompanyat en aquest llarg camí, en Juanje. Sense el seu ànim i recolzament durant tots aquests anys no hagués arribat al final d'aquest treball. Gràcies per la paciència mostrada en tot moment i per la teva comprensió infinita en aquells moments de desànim que només tu vas conéixer.

Introducció

El problema parabòlic no lineal

$$\begin{cases} u_t &= \Delta u + f(u) \ , \quad \text{a } \Omega \ , \\ u_\nu &= 0 \ , \quad\quad\quad\quad \text{a } \partial\Omega \ , \\ u(x,0) &= u_0(x) \ , \end{cases} \tag{1}$$

en un domini acotat $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ representa l'evolució en el temps de la concentració u d'una determinada substància en un contenidor isolat, el qual està sotmés als efectes d'una reacció no lineal representada per la funció f i d'una difusió lineal homogènia.

És fàcil comprovar que els zeros de la funció f són solucions d'equilibri constants per al problema (1). L'existència de solucions d'equilibri estables no constants per al problema (1) i amb $n \geq 2$ és un fenomen important, que sovint s'anomena "morfogènesi" o formació de patrons.

Motivats per aquest problema amb condicions de contorn de Neumann homogènies, el que anem a presentar en aquesta memòria pretén contribuir a l'estudi de solucions d'equilibri estables no constants per a una equació de difusió amb condicions de contorn de Neumann no lineals. El problema que considerarem és el següent:

$$\begin{cases} u_t &= \Delta u \ , \quad\quad \text{a } \Omega \ , \\ u_\nu &= f(u) \ , \quad \text{a } \partial\Omega \ . \end{cases} \tag{2}$$

Suposem que el domini $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, és acotat i amb frontera $\partial\Omega$ regular. En la condició de contorn, $\dfrac{\partial}{\partial \nu}$ denota la derivada normal en sentit exterior a la frontera. La solució $u = u(x,t)$ és una funció de $\overline{\Omega} \times \mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ i la funció $f(u) : \partial\Omega \to \mathbb{R}$.

De manera semblant a allò que dèiem per al problema (1), podem interpretar (2) com l'equació que modela l'evolució d'una concentració sota els efectes conjunts d'una difusió lineal homogènia a l'interior d'un contenidor i una reacció no lineal que succeeix únicament a la frontera i que ve representada per f. Per exemple, per la presència d'un catalitzador.

L'observació de fenòmens físics, químics, biològics i d'enginyeria que es poden modelar amb aquest tipus d'equacions presenten sovint condicions de contorn no lineals. Aquest fet fa augmentar l'interés en l'estudi de problemes com el (2).

Tal com passa per al problema (1), els zeros de la funció f són solucions d'equilibri constants del problema (2). Ens preguntem, però, per l'existència o no de solucions d'equilibri estables no constants.

Observem, per exemple, que si el domini Ω és no connex es poden construir de manera trivial equilibris estables no constants assignant a cada component connexa diferents valors constants α_i, tals que $f(\alpha_i) = 0$ i $f'(\alpha_i) < 0$. (L'estabilitat d'aquests equilibris no és immediata i se seguirà d'un principi d'estabilitat per linealització per al problema (2), tal com es veurà en el capítol 2 d'aquesta memòria.)

Com ja es pot deduir del que acabem de dir, en el moment que vàrem decidir estudiar equilibris estables, es feia necessari tenir criteris per tal de determinar l'estabilitat de les solucions d'equilibri. Per exemple, un principi d'estabilitat per linealització.

Amb aquest objectiu se'ns va fer necessari un estudi més profund del problema de valor inicial per a (2). És per això que allò que vàrem qüestionar-nos en un primer moment era en quins espais de funcions estava ben plantejat el problema i quines condicions calia imposar sobre f per tal de tenir existència i unicitat de solució. Una vegada resolta aquesta qüestió intentaríem obtenir un principi d'estabilitat per linealització. En el primer capítol d'aquesta memòria respondrem a les qüestions d'existència i unicitat i dedicarem el capítol 2 a les d'estabilitat dels equilibris.

És conegut que la formulació abstracta de problemes de valor inicial per a equacions de reacció-difusió com

$$\begin{cases} u_t - \Delta u &= g(u) , & \text{a } \Omega , \\ \dfrac{\partial u}{\partial \nu} &= f(u) , & \text{a } \partial\Omega , \\ u(x,0) &= u_0(x) . \end{cases} \tag{3}$$

en un domini acotat $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, com un problema d'evolució en un espai de funcions s'acostuma a fer, quan les condicions de frontera són lineals, incorporant les esmentades condicions en la definició de l'espai de fases. Destaquem algunes referències: [20], [30], ...

Ara bé, els problemes amb condicions de contorn no lineals són quelcom més difícil, com es pot veure a [3], [4], [5], [7] i [12]. La incorporació en aquest cas de les condicions de contorn a l'espai de funcions no dóna un espai vectorial, per la qual cosa l'ús de les tècniques de l'Anàlisi Funcional sembla, en una primera aproximació al problema, no massa senzill.

Existeix un camí, suggerit per H. Amann, per tal de poder superar aquesta dificultat. Aquest punt de vista ha estat usat per ell mateix en l'estudi de problemes parabòlics quasilineals i de sistemes amb condicions de contorn no lineals, com es pot veure a [3], [5]. Igualment, altres autors, com per exemple [12], [34], estudien problemes diversos amb condicions de contorn no lineals usant les tècniques i els resultats de H. Amann. En aquesta memòria desenvoluparem en una primera part el punt de vista de H. Amann per al cas d'equacions parabòliques semilineals amb condicions de contorn de tipus Neumann no lineals, com a (3),

Abans, però, d'iniciar l'estudi del problema (2), ens va semblar natural començar pel cas més senzill d'un interval, és a dir, per a dimensió $n = 1$. Els resultats obtinguts ens semblen prou interessants com per reservar un espai, l'apèndix A, on exposar-los. Cal dir que aquest va ésser el primer contacte amb el problema (2) i que el que s'obté per als equilibris resulta il·lustratiu per a alguns casos de dimensió major, com els que presentarem al capítol 4.

Tornem novament al problema (2), per a dimensió $n \geq 2$. De fet, els resultats d'existència i unicitat de solució i el principi d'estabilitat que donarem en els dos primers capítols de la memòria seran per al problema més general (3). Amb els resultats que veurem als capítols 1 i 2 ja es tenen les eines necessàries per tal d'estudiar el nostre objectiu principal: l'existència o no d'equilibris estables no constants per al problema (2).

Els tres darrers capítols d'aquesta memòria estaran dedicats a aquestes qüestions de la morfogènesi. Concretament, en el capítol 3 veurem alguns casos on no és possible que existeixin equilibris estables no constants i en els dos últims, és a dir, en els capítols 4 i 5, es veuran alguns exemples on sí es tindrà existència d'equilibris estables no constants. En el capítol 4 es consideraran dominis a $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, connexos amb vora disconnexa i en el capítol 5 dominis amb vora connexa.

Finalment, després de l'apèndix A que citàvem abans, acabarem la memòria amb un segon apèndix on es fan càlculs explícits de solucions com aquelles de les quals s'haurà provat l'existència en el capítol 5.

Descripció dels resultats

Tal com dèiem abans hem utilitzat en el plantejament funcional del nostre problema el punt de vista que dóna H. Amann ([3], secció 12) per a aquest tipus de problemes. Aquest punt de vista consisteix, essencialment, en considerar espais de funcions prou grans i veure com, amb una bona elecció d'aquests espais, anomenats espais de fase, i dels operadors lineals involucrats, s'aconsegueix incorporar les condicions de contorn en una equació semilineal com una nova no linealitat.

Així doncs, en el capítol 1 es mostrarà com es pot formular de manera semilineal el problema (3), és a dir, en la forma

$$\begin{cases} u_t &= A\,u + F(u)\,, \\ u(0) &= u_0\,, \end{cases} \tag{4}$$

on A serà un operador lineal i F contindrà tant la part no lineal de l'equació, g, com la no linealitat de la frontera, f. Per tal d'arribar a la formulació semilineal (4) considerarem una col·lecció d'espais de funcions obtinguts per interpolació entre els espais de Banach $W^2_{p,\mathcal{B}}(\Omega)$ i $L^p(\Omega)$, on $W^2_{p,\mathcal{B}}(\Omega)$ denota l'espai de les funcions de $W^2_p(\Omega)$ tals que $\partial u/\partial\nu = 0$ a $\partial\Omega$. La interpolació ens donarà una col·lecció d'espais de Banach ordenats entre l'espai menor $W^2_{p,\mathcal{B}}(\Omega)$ i el més gran $L^p(\Omega)$, entre els quals triarem els espais de fases. A més, sobre els espais extrems es poden triar de manera natural uns operadors lineals $A_{0,p}$ i $A_{-1,p'}$, $A_{0,p} : W^2_{p,\mathcal{B}} \to L^p$ i $A_{-1,p} : L^p \to (W^2_{p,\mathcal{B}})'$ tals que $A_{-1,p}$ restringit a $W^2_{p,\mathcal{B}}$ coincideixi amb $A_{0,p}$ i de manera que, sobre els espais intermitjos, les restriccions de $A_{-1,p}$ siguin igualment operadors lineals continus.

Veurem que nosaltres considerarem com a espai de fases l'espai $W^1_p(\Omega)$, amb $p > n$ ($\Omega \subset \mathbb{R}^n$). El que farem, però, és mirar-nos-el com un espai d'interpolació i aprofitar-ne les propietats que això ofereix. Aquesta forma d'escollir l'espai de fases, ens permetrà prendre l'espai d'arribada de l'operador no lineal F més petit que l'espai d'arribada de la part lineal A. Aquesta és una diferència notable amb la formulació que fan alguns autors, com per exemple D. Henry i A. Pazy, a L^p. En aquells casos es té què F s'aplica d'un subespai dens d'un espai de Banach en l'espai de Banach.

Per a la formulació (4) es podrà admetre una fórmula de variació de les constants que donarà una equació integral per a la solució, és a dir,

$$u(t) = e^{-At}u_0 + \int_0^t e^{-A(t-\tau)}F(u(\tau))\,d\tau\ . \tag{5}$$

En la proposició 1.1 veurem que si f i g són funcions de Lipschitz sobre acotats o bé són de classe $\mathcal{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$, aleshores F és igualment de Lipschitz sobre acotats o de classe $\mathcal{C}^1$, respectivament, de W^1_p en $(W^{2-2\beta-1/p'}_{p'})'$, amb $1/2 < \beta < 1/2 + 1/2p$.

Seguidament, en la secció 1.3 provarem, en el teorema 1.1, que si F és de Lipschitz sobre acotats existeix una única solució per al problema (3) per a $t \in [0, T)$ i valor inicial $u_0 \in W^1_p$ donat.

Finalment, a la secció 1.4 veurem que el sistema dinàmic $T(t)$ que defineix (4) a W^1_p i que ve donat per $T(t)u_0 = u(t)$ segons (5) és compacte per a tota $t > 0$. També ens preguntarem per la regularitat que presenta la solució. En la proposició 1.2 es provarà que la solució de (4) u és derivable respecte de t a valors a W_p^1, cosa que usarem per tal de provar en el teorema 1.3 que la solució $u(x,t)$ de (4) és de classe $\mathcal{C}^1$ en t a valors a $\mathcal{C}^\alpha(\overline{\Omega})$ i de classe $\mathcal{C}^{2+\alpha}(\overline{\Omega})$ per a $t > 0$, per a alguna $\alpha > 0$. A més, $u(x,t)$ és solució clàssica del problema (3).

Una vegada vistos aquests resultats d'existència, unicitat i regularitat de la solució, en el capítol 2 tractarem les qüestions de l'estabilitat dels equilibris. Aquest segon capítol està dividit en dues seccions. En la primera donarem un principi d'estabilitat i inestabilitat per linealització per al problema (3). Aquest és el resultat que es recull en el teorema 2.1 i que ens dóna el caràcter estable o inestable d'un equilibri en funció del signe de l'espectre de l'operador lineal que apareixerà en la linealització.

En la segona secció donarem una caracterització més assequible que la que oferirà el principi d'estabilitat de la secció anterior per al valor propi màxim de l'operador linealitzat. El que farem en aquesta secció és donar un quocient de Rayleigh per al primer valor propi, és a dir, veurem que aquest es pot trobar com el suprem d'un quocient sobre funcions a W_2^1. Com s'ha dit anteriorment nosaltres considerarem que l'espai de fases és W_p^1, amb $p > n$. Aleshores, l'obtenció del quocient de Rayleigh a W_2^1 no serà suficient sinó que caldrà veure que el valor propi trobat amb el quocient donat caracteritza, de fet, el valor propi màxim de l'operador a W_p^1. El teorema 2.2 és el que recull el quocient del qual parlem.

El tercer capítol l'hem dedicat a la no existència d'equilibris estables no constants per al problema (2), és a dir, a l'estudi en funció de f i de Ω d'aquells casos on només poden tenir-se solucions d'equilibri estables constants.

El capítol està dividit en tres seccions. A la primera es dóna una acotació a priori de la solució si se suposa que la funció f és tal que existeixen a i b, amb $a \leq b$, tals que $f(u)\,u < 0$ si $u < a$ o $u > b$. Aleshores, tota solució u de (2) satisfà $a \leq u(x) \leq b$, per a tota $x \in \overline{\Omega}$.

La segona secció parlarà de condicions sobre f per tal que tot equilibri estable sigui una solució constant. El primer resultat el donarem en el teorema 3.2 i diu que si f és una funció com la de la secció anterior i és, a més, de Lipschitz a $[a,b]$ o bé globalment Lipschitz a $\mathbb{R}$, amb constant de Lipschitz petita, llavors tota solució d'equilibri és constant. Cal notar que no només els equilibris estables s'obtenen constants, sinó que també ho seran els inestables.

El segon resultat, en la mateixa línia anterior, que es donarà és un resultat que ja era conegut per a problemes de reacció-difusió amb condicions de Neumann homogènies, com el problema (1). R.G. Casten i C.J. Holland a [11] consideren el problema (1) i proven que si f és una funció de classe $\mathcal{C}^2$ amb $f'' > 0$ o $f'' < 0$, aleshores, tota solució d'equilibri estable és constant. En el nostre cas, per al problema (2) provarem en el teorema 3.3 que si f és una funció còncava o convexa en el rang de valors que pren la solució, aleshores tota solució d'equilibri estable és constant.

Finalment, dedicarem la tercera i última secció d'aquest capítol a donar alguna condició sobre el domini per a la qual, com abans, només es tinguin equilibris estables constants. Per exemple, per al problema (1) R.G. Casten i C.J. Holland a [11] i H. Matano a [27] proven que si el domini Ω és convex i u és una solució d'equilibri no constant de classe $\mathcal{C}^3(\overline{\Omega})$, aleshores, u és inestable. Per al problema (2) allò que nosaltres provarem és que si Ω és una bola a $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, aleshores les úniques solucions d'equilibri estables són les constants. Si bé no presentarem un resultat sobre convexos, volem destacar que les tècniques utilitzades per tal de provar el nostre resultat són molt diferents d'aquelles que usen els autors anteriors per als convexos. Així doncs, necessitarem provar que si $\lambda = 0$ és el primer valor propi de l'operador lineal que s'obté en la linealització del problema amb funció pròpia u, aleshores λ és un valor propi (algebraicament i geomètricament) simple i $u(x) > 0$ per a tota $x \in \overline{\Omega}$.

Els dos capítols finals de la memòria estan dedicats a la morfogènesi o formació de patrons. Així doncs, el capítol 4 recollirà un resultat d'existència d'equilibris estables no constants en dominis amb vora disconnexa. En aquest capítol i dividit en tres seccions es veurà com és possible trobar equilibris estables no constants si el domini Ω és connex i té la vora disconnexa. Veurem que en aquest cas s'obté una solució d'equilibri no constant molt propera a la solució de $\Delta u = 0$ a Ω amb valors constants a cada una de les components de $\partial\Omega$, que hauran d'ésser diferents com a mínim a dues d'aquestes components. Serà l'obtenció de subsolucions i supersolucions la que permetrà provar-ho i la que ens donarà "a priori" solucions estables. De fet, en el teorema 4.2 veurem que la solució trobada amb aquest mètode és no constant i no tan sols estable sinó que resultarà asimptòticament estable.

En el darrer i últim capítol, dedicat com dèiem abans també a la morfogènesi, es consideraran, a diferència del capítol 4, dominis amb vora connexa. En aquest capítol veurem que existeixen equilibris estables no constants per a dominis tipus halter ("dumbbell" a la literatura habitual en anglès). Novament, comparant el nostre problema amb (1), es coneixen per a aquest darrer problema i sota determinades condicions sobre f, resultats que proven l'existència d'equilibris estables no constants per a aquests dominis halter. Cal citar el treball [27] en aquesta línia. Aquest treball de H. Matano va ésser l'origen de l'estudi del nostre problema en aquest tipus de dominis.

Volem fer notar, però, que si bé s'obtindran resultats paral·lels a aquells de [27], les tècniques que nosaltres usarem seran molt diferents. Així doncs, mentre Matano basa l'existència dels equilibris estables no constants en el lema de Zorn i aprofita la monotonia del flux, nosaltres arribem a provar l'existència d'equilibris estables no constants per a (2) basant-nos en la u-dimensionalitat d'una varietat central.

Els resultats principals d'aquest capítol es donaran en els teoremes 5.2 i 5.3. Els primers d'aquests teoremes donarà les condicions que s'han de satisfer per tal que existeixi algun equilibri estable no constant. En el segon, i sempre suposant que la funció f satisfà alguna hipòtesi ad·dicional a les dels capítols anteriors, es veurà l'existència per a tota f d'un domini D per al qual valgui el teorema primer, és a dir, existeixin equilibris estables no constants. El domini que s'obté té una forma semblant a un halter ja que resulta unió de dos subdominis disjunts a través d'un tercer subdomini "petit" comparativament als primers.

Acabarem la memòria amb dos apèndixos referents, com ja hem dit abans, el primer al problema (2) en dimensió $n = 1$ i el segon a qüestions numèriques relacionades amb el darrer capítol.

Com acabem de dir, en relació al cinquè capítol neix l'apèndix B. Una vegada obtinguts els resultats per a dominis de tipus halter ens va semblar interessant intentar calcular numèricament alguns d'aquests equilibris estables no constants per a un domini fixat d'aquests a $\mathbb{R}^2$. Per tal de simplificar els càlculs vàrem considerar D un domini unió de tres rectangles, dos d'ells disjunts i grans comparativament a un tercer més estret i petit que els uneix.

Després d'un primer intent usant sèries de Fourier vàrem optar per la via dels elements finits. Aquest camí i els resultats que ens va proporcionar és el que es recull en l'apèndix B d'aquesta memòria. En aquell es justificarà en primer lloc perquè es tria D d'una determinada forma i quina funció f ens convindrà triar. Una vegada fixats D i f cercarem un conjunt de valors per a un paràmetre k que haurem afegit davant de la f, de forma que ens situem sota les hipòtesis del capítol 5 i es pugui intentar calcular alguns equilibris estables no constants, dels quals es va provar l'existència en aquell capítol.

Finalment, amb un domini fixat i una funció f donada presentarem en la darrera secció com s'ha usat el mètode dels elements finits. I per acabar, donarem alguns gràfics que representin algunes solucions d'equilibri estables no constants.

Capítol 1

Plantejament funcional

En aquest capítol estudiarem alguns resultats analítics per al problema evolutiu de reacció difusió

$$\left\{ \begin{array}{rcll} u_t & = & \Delta u + g(u)\,, & \text{a } \Omega\,, \\ u_\nu & = & f(u)\,, & \text{a } \partial\Omega\,, \\ u(x,0) & = & u_0(x)\,. & \end{array} \right. \tag{1.1}$$

Suposem que Ω és un domini acotat amb vora $\partial\Omega$ prou regular. Suposem que $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ i $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ són dues funcions amb el grau de regularitat que es precisarà més endavant. Denotem per $f(u) = f(u(x,t))$, per a $x \in \partial\Omega$ i per $g(u) = g(u(x,t))$, per a $x \in \Omega$, on $u : \overline{\Omega} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ i $0 < t < \infty$. Aquí u_ν denota la derivada normal exterior i la condició inicial u_0 la suposem coneguda.

Els resultats analítics dels quals parlem donen resposta a diverses de les preguntes, en torn del problema (1.1), que ens plantejàvem a la introducció anterior. Així doncs, veurem que (1.1) admet una formulació semilineal a $W_p^1(\Omega)$ i que es pot usar, a partir d'això, una fórmula de variació de les constants. També veurem quines condicions caldrà imposar sobre la part no lineal per tal de tenir existència i unicitat de solució del problema i acabarem el capítol amb una secció dedicada a la regularitat de la solució i a la compacitat del semigrup definit pel problema.

1.1 Formulació semilineal

En la primera secció d'aquest capítol introduirem alguns espais i operadors per tal que el problema (1.1) es pugui escriure en forma semilineal i admeti la utilització d'una fórmula de variació de les constants. Per fer-ho, usarem el punt de vista de H. Amann ([3], secció 12 i [7]).

La idea de H. Amann és considerar certs espais, definits per interpolació, com a espais de fase i uns operadors sobre ells que siguin generadors de semigrups no lineals. Aquesta formulació permet posar problemes més generals que el que aquí considerem, en forma semilineal i s'aplica també a problemes quasilineals. En els treballs de H. Amann dels quals parlem, un cop s'aconsegueix posar en forma semilineal el problema, apareix una fórmula de variació de constants que permet mirar-se la solució com una equació integral.

Altres autors, com per exemple D. Henry a [20] i A. Pazy a [30], estudien equacions semilineals del tipus

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \dfrac{du(t)}{dt} + Au(t) & = & f(t, u(t)) \, , \quad t > t_0 \\ u(t_0) & = & x_0 \end{array} \right. \tag{1.2}$$

per als quals $-A$ és el generador infinitessimal d'un semigrup analític en un espai de Banach X. Per a aquests operadors A es poden considerar, per a $0 \leq \alpha \leq 1$, les potències fraccionàries A^α (vegi's [30], secció 2.6) i el domini $D(A^\alpha)$ de les quals resulta un espai de Banach amb la norma del graf. En aquests casos suposen que la funció $f : U \to X$, $U \subset \mathbb{R}^+ \times D(A^\alpha)$ un obert, és localment Hlder contínua en t i localment Lipschitz en x, a U.

En aquests treballs, però, es consideren condicions de contorn o bé homogènies o bé lineals. A més, la formulació de H. Amann s'aplica a una col·lecció més àmplia de problemes i dóna més regularitat en la solució que altres formulacions que, també vàlides, requereixen més restriccions en les hipòtesis del problema.

Els espais que considerarem seran espais de Banach obtinguts per mètodes d'interpolació i que, com veurem més endavant, es poden caracteritzar totalment, obtenint bàsicament espais de Sobolev.

Abans de donar els espais que volem usar, anem a recordar breument què fa la interpolació entre espais de Banach.

Siguin A_0 i A_1 dos espais de Banach encabits en un espai lineal de Haussdorf $\mathcal{A}$. Anomenem $\{A_0, A_1\}$ una parella d'interpolació. Suposem que tenim dues parelles d'interpolació $\{A_0, A_1\}$ i $\{B_0, B_1\}$, amb B_0 i B_1 a $\mathcal{B}$ com abans. Sigui T un operador lineal de $\mathcal{A}$ en $\mathcal{B}$, tal que les restriccions $T_{|A_i}$, $i = 0, 1$, són lineals contínues d'A_i en B_i. El que busca la interpolació són espais de Banach $A \subset \mathcal{A}$ i $B \subset \mathcal{B}$, tals que la restricció $T_{|A}$ sigui un operador lineal continu d'A en B. En aquest cas es diu que A i B tenen la propietat d'interpolació.

La teoria de la interpolació, introduïda per J.L. Lions, A.P. Calderon, E. Gagliardo i S.G. Krejn entre 1958 i 1961, es centra en dues qüestions bàsicament: d'una banda, trobar "construccions", F, tals que $A = F(\{A_0, A_1\})$ i $B = F(\{B_0, B_1\})$ tinguin la propietat d'interpolació i, per altra banda, la descripció tant d'aquests espais A i B com de les construccions F.

La primera qüestió troba resposta, entre d'altres, a [8] i [36], on es donen els mètodes d'interpolació de tipus real i complex.

Notem que si es prenen parelles d'espais de Banach ordenats, és a dir, $A_0 \subset A_1$, la interpolació ens dóna una família d'espais de Banach intermitjos i ordenats entre A_0 i A_1. Els espais que nosaltres usarem aquí s'obtenen d'aplicar interpolació algunes vegades real i altres complexa a parelles d'espais de Sobolev, cosa que dóna espais intermitjos que, com es veurà més endavant, també són espais de Sobolev.

Finalment, recordem que la notació usual és la següent: donada una parella d'interpolació $\{A_0, A_1\}$, $(A_0, A_1)_{\alpha,p}$ denota l'espai d'interpolació relatiu a ella usant el mètode real, on $0 \leq \alpha \leq 1$ i $1 \leq p \leq \infty$ i $[A_0, A_1]_\alpha$ l'espai d'interpolació relatiu a ella usant el mètode complex, on $0 \leq \alpha \leq 1$. Si $\alpha = 0$ s'obté A_0 i si $\alpha = 1$ s'obté A_1 en ambdós casos. ç Sigui $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un domini acotat amb vora regular $\partial\Omega$. Per tal de simplificar la notació, denotarem per L^p i W_p^r els espais $L^p(\Omega)$ i els espais de Sobolev $W_p^r(\Omega)$, respectivament, sempre que no hi pugui haver confusió. Sigui $W_{p,\mathcal{B}}^2$ l'espai de les funcions de W_p^2 tals que $u_\nu = 0$ a $\partial\Omega$.

Considerem ara alguns espais obtinguts per mètodes d'interpolació real, que denotarem per E_α i $E_{\alpha-1}$, definits per

$$\begin{aligned} E_\alpha &= (L^p, W^2_{p,\mathcal{B}})_{\alpha,p} \\ E_{\alpha-1} &= \Big((L^{p'}, W^2_{p',\mathcal{B}})_{1-\alpha,p'}\Big)' \end{aligned}$$

per a $0 \leq \alpha \leq 1$ i $\alpha \neq 1/2$ i per a $\alpha = 1/2$, considerem els espais que s'obtenen de la interpolació complexa

$$\begin{aligned} E_{1/2} &= [L^p, W^2_{p,\mathcal{B}}]_{1/2} \\ E_{-1/2} &= ([L^{p'}, W^2_{p',\mathcal{B}}]_{1/2})' \,. \end{aligned}$$

Aquí p i p' són exponents conjugats, és a dir, $1/p + 1/p' = 1$.

Estem interessats en que els nostres espais de fase siguin aquests espais d'interpolació i voldríem, si fós possible, donar una millor i més senzilla caracterització d'aquests. És quan volem caracteritzar els espais E_α que ens apareix una "singularitat" per al cas $\alpha = 1/2$. Usant la interpolació real es poden identificar els espais obtinguts amb espais de Besov, que resulten ser espais de Sobolev si $\alpha \neq 1/2$. Per tal que per a $\alpha = 1/2$ s'obtingui també un espai de Sobolev convé usar la interpolació complexa, que dóna espais de Bessel, identificables amb W^1_p quan $\alpha = 1/2$.

Per al primer cas, P. Grisvard, a [17] (teorema 7.5), dóna una caracterització dels E_α ens termes d'espais de Besov que per a $\alpha \neq 1/2$ resulten ser els espais de Sobolev següents

$$E_\alpha = \begin{cases} W^{2\alpha}_p \,, & \text{si } 0 \leq 2\alpha < 1 + 1/p \,, \\ W^{2\alpha}_{p,\mathcal{B}} \,, & \text{si } 1 + 1/p < 2\alpha \leq 2 \,, \end{cases}$$

i per als espais duals

$$E_{\alpha-1} = \begin{cases} (W^{2-2\alpha}_{p'})' \,, & \text{si } 0 \leq 2 - 2\alpha < 1 + 1/p' \,, \\ (W^{2-2\alpha}_{p',\mathcal{B}})' \,, & \text{si } 1 + 1/p' < 2 - 2\alpha \leq 2 \,. \end{cases}$$

Per a $\alpha = 1/2$, R. Seeley, a [33] (teorema 4.1), caracteritza en termes d'espais de Bessel alguns espais obtinguts usant interpolació complexa i que en el nostre cas resulten ser els espais: $E_{1/2} = W^1_p$ i $E_{-1/2} = (W^1_{p'})'$.

Veurem que els espais E_α, per a $1/2 \leq \alpha < 1/2 + 1/2p$ i $p > n$, seran els espais de fase del nostre semigrup no lineal.

Sabem que es satisfan les inclusions $W^2_{p,\mathcal{B}} \subset W^1_p \subset L^p$ i $(L^{p'})' \subset (W^1_{p'})' \subset (W^2_{p',\mathcal{B}})'$, les quals són denses i contínues. D'ara endavant identificarem els espais $(L^p)'$ i $L^{p'}$, $1/p + 1/p' = 1$. Recordem que $E_{-1} = (W^2_{p',\mathcal{B}})'$, $E_0 = L^p$ i $E_1 = W^2_{p,\mathcal{B}}$ en la notació dels espais d'interpolació.

Considerem els operadors lineals continus $A_{0,p}$ i $A_{-1,p}$, definits per

$$\begin{array}{rcccl} A_{0,p} : & E_1 & \longrightarrow & E_0 \\ & u & \longrightarrow & -\Delta u + u \end{array} \qquad \text{i} \quad \begin{array}{rcccl} A_{-1,p} : & E_0 & \longrightarrow & E_{-1} \\ & u & \longrightarrow & \varphi_u \end{array}$$

on φ_u és la forma lineal contínua

$$\begin{array}{rcccl} \varphi_u : & W^2_{p',\mathcal{B}} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & v & \longrightarrow & \displaystyle\int_\Omega (-u\Delta v + uv)\, dx\ . \end{array}$$

Observem que $A_{-1,p} = (A_{0,p'})'$, és a dir, $A_{-1,p}$ és l'operador dual d'$A_{0,p'}$: certament, si $\omega \in (L^p)'$, per a l'operador dual d'$A_{0,p'}$ tenim

$$((A_{0,p'})'\omega)v =< \omega, A_{0,p'}\, v >= \int_\Omega (-\Delta v\, \omega + v\omega)\, dx = (A_{-1,p}\, \omega)v$$

per a tota $v \in L^p$, cosa que prova que $(A_{0,p'})' = A_{-1,p}$.

Observem també que la restricció $A_{-1,p|_{E_1}} = A_{0,p}$. Aquesta propietat és una aplicació de la fórmula de Green i de la identificació de L^p i $(L^{p'})'$, que ens dóna una relació u a u entre $A_{0,p}u \in L^p \equiv (L^{p'})'$ i $-\Delta u + u \in L^p$, per a tota $u \in W^2_{p,\mathcal{B}}$.

Els espais d'interpolació E_α i $E_{\alpha-1}$, $0 \leq \alpha \leq 1$, són espais intermitjos ordenats entre E_1 i E_0 i entre E_0 i E_{-1}, respectivament, és a dir, $E_1 \subset E_\alpha \subset E_0$ i $E_0 \subset E_{\alpha-1} \subset E_{-1}$. A més, acabem de definir un operador lineal continu $A_{-1,p}$ de manera que E_0 i E_{-1} tenen la propietat d'interpolació. Per tant, per la propietat d'interpolació, és permès considerar els operadors lineals continus $A_{\alpha-1}$ definits de l'espai E_α en l'espai $E_{\alpha-1}$ per $A_{\alpha-1} = A_{-1,p|_{E_\alpha}}$. Podem representar la situació amb el següent esquema

$$\begin{array}{ccccc} W^2_{p,\mathcal{B}} & \hookrightarrow & E_\alpha & \hookrightarrow & L^p \\ \downarrow A_{0,p} & & \downarrow A_{\alpha-1} & & \downarrow A_{-1,p} \\ L^p & \hookrightarrow & E_{\alpha-1} & \hookrightarrow & (W^2_{p',\mathcal{B}})' \end{array}$$

en el qual hem usat novament que $(L^{p'})' = L^p$.

En el cas particular que $\alpha = 1/2$, $A_{-1/2}$ està definit per

$$\begin{array}{rccl} A_{-1/2} : & W_p^1 & \longrightarrow & (W_{p'}^1)' \\ & u & \longrightarrow & A_{-1/2}\, u \ , \end{array}$$

on $A_{-1/2}\, u$ és la forma lineal contínua definida per

$$\begin{array}{rccl} A_{-1/2}\, u : & W_{p'}^1 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & v & \longrightarrow & \displaystyle\int_\Omega (\nabla u \nabla v + uv)\, dx \ . \end{array}$$

Considerem $\alpha \in [1/2, 1/2 + 1/2p)$. En aquest cas els espais d'interpolació E_α que s'obtenen no contenen la condició de contorn $u_\nu = 0$ a $\partial\Omega$, cosa que sí passa si es pren $\alpha < 1/2$. Sigui u una solució clàssica de (1.1). En particular, $u(\cdot, t) \in W_p^2 \subset E_\alpha$ i $u_t(\cdot, t) \in L^p = E_0$. Considerem $v \in W_{p'}^1$. Usant el producte de dualitat entre L^p i $L^{p'}$ i la fórmula de Green, del problema (1.1) s'obté

$$\int_\Omega u_t v\, dx + \int_\Omega (\nabla u \nabla v + uv)\, dx = \int_\Omega (g(u) + u) v\, dx + \int_{\partial\Omega} f(\gamma_p u) \gamma_{p'} v\, d\ell \ , \quad (1.3)$$

on γ_p i $\gamma_{p'}$ denoten els operadors traça sobre $\partial\Omega$, és a dir,

$$u_{|\partial\Omega} = \gamma_p u \, , \quad \gamma_p : W_p^{2\alpha} \longrightarrow W_p^{2\alpha - 1/p}(\partial\Omega)$$

i

$$v_{|\partial\Omega} = \gamma_{p'} v \, , \quad \gamma_{p'} : W_{p'}^{2-2\alpha} \longrightarrow W_{p'}^{2-2\alpha-1/p'}(\partial\Omega) \ .$$

Prenem $\alpha = 1/2$. Si denotem per $< \cdot, \cdot >$ i per $< \cdot, \cdot >_{\partial\Omega}$ els productes de dualitat entre $(W_{p'}^1)'$ i $W_{p'}^1$ usant que $L^p = (L^{p'})' \subset (W_{p'}^1)'$ i entre $(W_{p'}^{1-1/p'}(\partial\Omega))'$ i $W_{p'}^{1-1/p'}(\partial\Omega)$, respectivament, (1.3) s'escriu

$$< u_t, v > + < A_{-1/2}\, u, v > = < g(u) + u, v > + < f(\gamma_p u), \gamma_{p'} v >_{\partial\Omega} \ . \quad (1.4)$$

Notem que estem fent un abús quan suposem que la funció f és tal que $f(\gamma_p u)$, per exemple, és de $L^p(\partial\Omega) \subset (W_{p'}^{2-2\alpha-1/p'}(\partial\Omega))'$. Precisarem més endavant la regularitat d'aquesta funció tenint en compte, entre d'altres, aquest fet.

Observació 1.1 H. Amann prova a *[3]* que es satisfà també una igualtat com *(1.4)* per a $\alpha > 1/2$, és a dir, per a $A_{\alpha-1}$, en lloc de $A_{-1/2}$, i per als espais E_α i $E_{\alpha-1}$, en lloc de $E_{1/2}$ i $E_{-1/2}$.

Observació 1.2 En els resultats futurs ens convindrà restringir l'estudi del problema *(1.1)* a l'espai W_p^1, és a dir, al cas $\alpha = 1/2$. És per això que, per qüestions pràctiques i de simplicitat, d'ara endavant, considerarem $\alpha = 1/2$. No obstant això, els resultats que es veuran a les seccions *1.2* i *1.3* són igualment vàlids canviant $E_{1/2} = W_p^1$ per E_α i $E_{-1/2} = (W_{p'}^1)'$ per $E_{\alpha-1}$ amb $\alpha \in [1/2, 1/2 + 1/2p)$.

En la identitat (1.4) observem que apareixen dos productes de dualitat diferents. Ens interessaria, per tal de poder arribar a una formulació semilineal del problema (1.1), tenir un únic producte. Per exemple, poder traduir el producte de dualitat entre espais a la frontera en producte de dualitat entre espais a l'interior.

Per tal d'aconseguir aquest propòsit considerem l'operador adjunt de $\gamma_{p'}$ i el denotem per $\gamma_{p'}'$. Es por veure que $\gamma_{p'}'$ aplica $L^p(\partial\Omega)$ en $(W_{p'}^1(\partial\Omega))'$. Aleshores, si donat que estem suposant que $f(\gamma_p u) \in L^p(\partial\Omega)$, per dualitat tenim

$$< f(\gamma_p u), \gamma_{p'} v >_{\partial\Omega} = < \gamma_{p'}' f(\gamma_p u), v > \quad .$$

Per tant, a (1.4) ens queda

$$< u_t, v > + < A_{-1/2}\, u, v > = < g(u) + u, v > + < \gamma_{p'}' f(\gamma_p u), v > ,$$

per a tota $v \in W_{p'}^1$.

Denotem $A = A_{-1/2}$ i denotem per F l'operador no lineal

$$F(u) = g(u) + u + \gamma_{p'}' f(\gamma_p u) \ .$$

Amb aquesta notació arribem a veure que el problema (1.1) pot posar-se en la forma semilineal

$$\left\{ \begin{array}{rcl} u_t + Au & = & F(u) \ , \\ u(0) & = & u_0 \ , \end{array} \right. \tag{1.5}$$

a W_p^1, amb $p > 2$, tot i que veurem en la secció següent que convé prendre $p > n$.

Veurem en la propera secció amb més precisió com és l'operador no lineal F. De fet, F aplica E_α, no tan sols en $E_{\alpha-1}$ sinó en un subespai més petit $E_{\beta-1}$, amb $\beta > \alpha$. A més, veurem quines són les condicions per tal que F estigui ben definit i de quina manera es reflexen les hipòtesis de regularitat de les funcions f i g sobre la part no lineal F.

Cal remarcar una diferència notable en la formulació que hem fet aquí respecte d'aquella usada quan les condicions de contorn són homogènies. Mentre que $F : E_\alpha \to E_{\beta-1} \subset E_{\alpha-1}$ en aquest cas, tal i com dèiem al principi d'aquesta secció, en el punt de vista de D. Henry i A. Pazy a L^p es té que l'operador no lineal F aplica un subespai dens d'un espai de Banach en l'espai de Banach. És a dir, en aquell cas l'espai d'arribada de la part lineal i de la part no lineal són el mateix. No és així, però, com acabem de dir, per a la formulació semilineal (1.5) obtinguda per al problema (1.1) usant espais d'interpolació.

1.2 Condicions sobre els termes no lineals

L'objectiu de la secció següent és donar condicions sobre les dues funcions no lineals f i g per tal que l'operador no lineal F que en resulta a la formulació semilineal (1.5) satisfaci les condicions que es necessiten per poder obtenir l'existència de solució a W_p^1. Veurem que si F és una funció de Lipschitz sobre acotats podem provar existència i unicitat de solució i que per a les qüestions referents a l'estabilitat caldrà demanar una mica més, caldrà que F sigui de classe $\mathcal{C}^1$.

En funció de la regularitat que presentin les funcions f i g veurem que F està definit de W_p^1, no tan sols en $E_{-1/2}$, sinó que l'espai d'arribada pot prendre's més petit, $E_{\beta-1} \subset E_{-1/2}$, amb $\beta > 1/2$.

Recordem que f i g són funcions reals de variable real i que per $f(u)$ i $g(u)$ entenem $f(u(x,t))$, per a $x \in \partial\Omega$, i $g(u(x,t))$, per a $x \in \Omega$, respectivament, i $t \in \mathbb{R}^+$. Suposem, a més, que $u \in W_p^1$ i que $\gamma_p u \in W_p^{1-1/p}(\partial\Omega)$, on γ_p :

$W_p^1 \to W_p^{1-1/p}(\partial\Omega)$ denota, com a la secció anterior, l'operador traça sobre la vora $\partial\Omega$. Recordem també que $F(u) = u + g(u) + \gamma'_{p'} f(\gamma_p u)$, on $\gamma'_{p'}$ és l'adjunt de l'operador traça $\gamma_{p'} : W_{p'}^1 \to W_{p'}^{1-1/p'}(\partial\Omega)$. Aleshores, tenim la següent proposició :

Proposició 1.1 *Sigui Ω un domini satisfent la propietat del con. Suposem que f i g són funcions reals de variable real i que β és tal que $1/2 < \beta < 1/2 + 1/2p$ i $p > n$. Aleshores*

(i) Si f i g són funcions de Lipschitz sobre acotats, llavors F és una funció de Lipschitz sobre acotats de $E_{1/2}$ en $E_{\beta-1}$.

(ii) Si f i g són funcions de classe $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, llavors F és una funció de classe $\mathcal{C}^1$ (en el sentit de Fréchet) de $E_{1/2}$ en $E_{\beta-1}$.

Observació 1.3 Estem suposant en aquesta proposició que el domini sobre el qual considerem el problema *(1.1)* és tal que satisfà la propietat del con. Fins el moment no havíem fixat en cap moment la regularitat que ha de tenir Ω, només havíem dit que el suposaríem prou regular. L'objecte d'aquesta restricció és que es satisfacin aquells encabiments de Sobolev necessaris en la prova d'aquest resultat. Ara bé, com veurem més endavant, això no serà cap restricció per a nosaltres, ja que els dominis que considerarem seran prou regulars per a què satisfacin l'esmentada propietat.

Anem a recordar què vol dir que un domini satisfaci la propietat del con:

Definició 1.1 *Es diu que un domini Ω satisfà la propietat del con si existeix un con finit C tal que tot punt $x \in \Omega$ és el vèrtex d'un con finit C_x contingut a Ω i congruent amb C.*

Per exemple, el domini de $\mathbb{R}^2$, $\{(x, y) : 0 < y < x^2\ ,\ 0 < x < 1\}$ no satisfà la propietat del con. Notem, però, que els dominis amb vora regular sempre satisfan aquesta propietat. És per això que dèiem abans que no resultarà una hipòtesi restrictiva en els resultats posteriors.

<u>Demostració de la Proposició 1.1</u>. Considerem $F(u)$ com la suma $F_1(u) + F_2(u)$, on

$$F_1(u) = g(u) + u \quad \text{i} \quad F_2(u) = \gamma'_{p'} f(\gamma_p u)\,.$$

Si som capaços de veure que F_1 i F_2 són funcions de Lipschitz sobre acotats de W_p^1 en $E_{\beta-1}$ ja haurem provat que F és de Lipschitz sobre acotats de W_p^1 en $E_{\beta-1}$.

La funció F_i és de Lipschitz sobre acotats si sobre qualsevol acotat $B \subset W_p^1$, F_i és una funció de Lipchitz, $i = 1, 2$. Equivalentment, per a totes les $u, v \in B$, existeixen C_1 i C_2 constants, tals que només depenen de B i es satisfà

$$\|F_i(u) - F_i(v)\|_{E_{\beta-1}} \le C_i \|u - v\|_{W_p^1} \qquad \text{per a } i = 1, 2\,.$$

Començarem per F_1. Siguin B, u i v les que acabem de dir.

$$\| \ F_1(u) - F_1(v) \ \|_{E_{\beta-1}} = \sup_{\|\varphi\|_{W^{2-2\beta}_{p',\mathcal{B}}}=1} \left| \int_\Omega (g(u) - g(v))\varphi + (u - v)\varphi)\ dx \right|$$

$$\le \sup_{\|\varphi\|_{W^{2-2\beta}_{p',\mathcal{B}}}=1} \left\{ \int_\Omega |g(u) - g(v)| \cdot |\varphi|\, dx + \int_\Omega |u - v| \cdot |\varphi|\, dx \right\}\ . \tag{1.6}$$

Estem suposant que g és una funció de Lipschitz sobre acotats, és a dir, que per a qualsevol compacte $J \subset \mathbb{R}$ existeix una constant $C = C(J)$ tal que

$$|g(x) - g(y)| \le C\,|x - y|$$

per a qualssevol $x, y \in J$.

Donat que Ω satisfà la propietat del con, el teorema 5.4 de [1] ens diu que si $1 < p < \infty$ i considerem $s > 0$, si $n < (s - j)p$ per a algun enter no negatiu j, es satisfà la inclusió

$$W_p^s(\Omega) \hookrightarrow \mathcal{C}_b^j(\Omega)$$

i és contínua, on $\mathcal{C}_b^j(\Omega)$ és el conjunt de funcions $u \in \mathcal{C}^j(\Omega)$amb $D^\alpha u$ acotada a Ω si $|\alpha| \le j$.

En el nostre cas $s = 1$ i considerem $j = 0$. Aleshores, com $p > n$, és cert l'encabiment $W_p^1 \subset \mathcal{C}_b^0(\Omega)$. Per tant, com $u, v \in W_p^1$, u i v són funcions contínues i acotades sobre Ω. Com $u, v \in B \subset \mathcal{C}_b^0(\Omega)$, existeix una constant $M = M(B)$ tal que $\omega(x) \in [-M, M]$ per a tota $x \in \Omega$ i per a tota $\omega \in B$. Per tant, usant ara que g és Lipschitz sobre acotats, a (1.6), ens queda

$$\begin{aligned} \| F_1(u) - F_1(v) \|_{E_{\beta-1}} &\leq \sup_{\|\varphi\|_{W^{2-2\beta}_{p',\mathcal{B}}}=1} \int_\Omega (C_M|u-v|\,|\varphi| + |u-v|\,|\varphi|)\, dx \\ \leq \ (C_M+1)\|u-v\|_{L^p} &\sup_{\|\varphi\|_{W^{2-2\beta}_{p',\mathcal{B}}}=1} \|\varphi\|_{L^{p'}} \leq k\,(C_M+1)\,\|u-v\|_{W_p^1} \ , \end{aligned}$$

cosa que prova que F_1 és Lipschitz sobre B, prenent $C_1 = k(C_M + 1)$.

Considerem ara l'altra funció, és a dir, F_2. Donades u, v i B com abans tenim

$$\| F_2(u) - F_2(v) \|_{E_{\beta-1}} = \sup_{\|\varphi\|_{W^{2-2\beta}_{p',\mathcal{B}}}=1} \left| \int_\Omega \Big(\gamma'_{p'}\, f(\gamma_p u) - \gamma'_{p'}\, f(\gamma_p v) \Big)\, \varphi\, dx \right| .$$

Estem suposant que $\beta < 1/2 + 1/2p$, cosa que implica que $2 - 2\beta > 1/p'$. Per tant, té sentit prendre la traça sobre $\partial\Omega$ de la funció $\varphi \in W^{2-2\beta}_{p',\mathcal{B}}$. Així doncs,

$$\| F_2(u) - F_2(v) \|_{E_{\beta-1}} \leq \sup_{\|\varphi\|_{W^{2-2\beta}_{p',\mathcal{B}}}=1} \int_{\partial\Omega} |f(\gamma_p u) - f(\gamma_p v)| \cdot |\gamma_{p'}\varphi|\, d\ell \ .$$

Usant ara arguments anàlegs als usats per a F_1, l'encabiment $W_p^{1-1/p}(\partial\Omega) \subset \mathcal{C}_b^0(\partial\Omega)$, ja que $p > n$, i la continuïtat dels operadors traça γ_p i $\gamma_{p'}$, ens donen

$$\begin{aligned} \| F_2(u) - F_2(v) \|_{E_{\beta-1}} &\leq C' \sup_{\|\varphi\|_{W^{2-2\beta}_{p',\mathcal{B}}}=1} \{\| \varphi \|_{W^{2-2\beta}_{p'}}\}\, C'' \ \| u - v \|_{W_p^1} \\ &\leq C_2 \ \| u - v \|_{W_p^1} \end{aligned}$$

tal i com volíem. Ara, la desigualtat triangular prova que F és Lipschitz sobre acotats, amb la qual cosa acabem la demostració de l'apartat (i).

Anem a provar la diferenciabilitat de F, provant que F_1 i F_2 són diferenciables. Comencem per F_1. Primer de tot veurem que l'operador diferencial de Fréchet de F_1

$$\begin{array}{rccc} DF_1(u): & W_p^1 & \longrightarrow & E_{\beta-1} \\ & h & \longrightarrow & DF_1(u)\, h \end{array}$$

està definit per

$$\begin{array}{rccl} DF_1(u)\, h: & W_{p',\mathcal{B}}^{2-2\beta} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & v & \longrightarrow & \displaystyle\int_\Omega ((g'(u)h + h)\, v)\, dx\,. \end{array}$$

Cal veure que

$$\frac{\| \, F_1(u+h) - F_1(u) - DF_1(u)h \, \|_{E_{\beta-1}}}{\| \, h \, \|_{W_p^1}} \longrightarrow 0$$

quan $\| \, h \, \|_{W_p^1} \to 0$. Comencem per acotar el numerador

$$\begin{aligned} &\| \, F_1(u+h) - F_1(u) - DF_1(u)h \, \|_{E_{\beta-1}} \\ &\qquad \leq \sup_{\|\varphi\|_{W_{p',\mathcal{B}}^{2-2\beta}}=1} \left\{ \int_\Omega |g(u+h) - g(u) - g'(u)h| \cdot |\varphi| \, dx \right\} \\ &\qquad \leq \sup_{\|\varphi\|_{W_{p',\mathcal{B}}^{2-2\beta}}=1} \left\{ \int_\Omega |g'(\psi) - g'(u)| \cdot |h| \cdot |\varphi| \, dx \right\} \end{aligned}$$

ja que estem suposant $g \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Com a l'apartat (i), donat que $p > n$, es satisfà l'encabiment $W_p^1 \subset \mathcal{C}_b^0(\Omega)$. Aleshores podem considerar la constant $M := \sup_{x\in\Omega} |g'(\psi(x)) - g'(u(x))|$, la qual tendeix a 0 quan $\|h\|_{W_p^1} \to 0$, ja que $\psi(x)$ està entre $u(x)$ i $u(x) + h(x)$ i g' és uniformement contínua sobre compactes. Usant la desigualtat de Hlder s'obté

$$\begin{aligned} &\| \, F_1(u+h) - F_1(u) - DF_1(u)h \, \|_{E_{\beta-1}} \\ &\qquad \leq M \, \| \, h \, \|_{L^p} \cdot \sup_{\|\varphi\|_{W_{p',\mathcal{B}}^{2-2\beta}}=1} \| \, \varphi \, \|_{L^{p'}} \\ &\qquad \leq M \, \|h\|_{L^p}\,, \end{aligned}$$

amb la qual cosa veiem que l'operador diferencial de F_1 és DF_1.

Queda veure que DF_1 és continu. Suposem $\varepsilon > 0$ donat. Volem veure que existeix $\delta = \delta(\varepsilon)$ tal que si $\|u - v\|_{W_p^1} < \delta$, aleshores

$$\| \, DF_1(u) - DF_1(v) \, \|_{\mathcal{L}(W_p^1, E_{\beta-1})} \leq \varepsilon\,.$$

Comencem acotant

$$
\begin{aligned}
&\| \, DF_1(u) - DF_1(v) \, \|_{\mathcal{L}(W_p^1, E_{\beta-1})} \\
&\quad = \sup_{\|h\|_{W_p^1}=1} \| \, DF_1(u)h - DF_1(v)h \, \|_{E_{\beta-1}} \\
&\quad \leq \sup_{\|h\|_{W_p^1}=1} \sup_{\|\varphi\|_{W^{2-2\beta}_{p',\mathcal{B}}}=1} \left\{ \int_\Omega \left(|g'(u) - g'(v)| \, |h| \, |\varphi| + |u-v| \, |h| \, |\varphi| \right) dx \right\} \\
&\quad \leq \sup_{\|h\|_{W_p^1}=1} \sup_{\|\varphi\|_{W^{2-2\beta}_{p',\mathcal{B}}}=1} \left\{ M_1 \int_\Omega |h| \, |\varphi| \, dx + M_2 \int_\Omega |h| \, |\varphi| \, dx \right\}
\end{aligned}
$$

on $M_1 = \sup\limits_{x\in\Omega} |g'(u(x)) - g'(v(x))|$ i $M_2 = \sup\limits_{x\in\Omega} |u(x) - v(x)|$ i estan ben definides per ser $u, v \in \mathcal{C}_b^0(\Omega)$ i g' contínua, per hipòtesi. Usant ara la desigualtat de Hlder s'arriba a

$$
\| \, DF_1(u) - DF_1(v) \, \|_{\mathcal{L}(W_p^1, E_{\beta-1})} \leq M_1 + M_2 \, .
$$

Del fet que g' és uniformement contínua sobre un interval adequat i, novament, que $W_p^1 \subset \mathcal{C}_b^0(\Omega)$, és possible triar δ prou petit de manera que $M_1 \leq \varepsilon/2$ i $M_2 \leq \varepsilon/2$, cosa que prova la continuïtat de DF_1.

Cal provar el mateix per a F_2. En aquest cas i de manera anàloga es prova que

$$
\begin{array}{rccc}
DF_2(u): & W_p^1 & \longrightarrow & E_{\beta-1} \\
 & h & \longrightarrow & DF_2(u)\, h
\end{array}
$$

definit per

$$
\begin{array}{rccl}
DF_2(u)\, h: & W^{2-2\beta}_{p',\mathcal{B}} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\
 & v & \longrightarrow & \displaystyle\int_{\partial\Omega} \left(f'(\gamma_p u) \cdot \gamma_p h \cdot \gamma_{p'} v \right) d\ell
\end{array}
$$

és l'operador diferencial de Fréchet de F_2. Usem, com abans, la continuïtat de g', la inclusió de $W_p^{1-1/p}(\partial\Omega) \subset \mathcal{C}_b^0(\partial\Omega)$ i la continuïtat dels operadors traça γ_p i $\gamma_{p'}$.

Per tal de veure la continuïtat de l'operador DF_2 s'usa novament l'encabiment $W_p^{1-1/p}(\partial\Omega) \subset \mathcal{C}_b^0(\partial\Omega)$, la continuïtat uniforme de g' i la continuïtat de γ_p i $\gamma_{p'}$, a més de la desigualtat de Hlder.

Per tant, F és una funció $\mathcal{C}^1$ de W_p^1 en $E_{\beta-1}$, com volíem veure a l'apartat (ii). ∎

1.3 Existència i unicitat de solució

En aquest moment tenim a punt les eines necessàries per tal de provar que el problema (1.5), és a dir, el problema en forma semilineal corresponent al problema (1.1) a W_p^1, té solució única per a tota condició inicial $u_0 \in W_p^1$ donada. Primer de tot, anem a veure què s'entén per solució de (1.5).

Definició 1.2 *Una funció $u : [0,T] \to W_p^1$ és una solució de (1.5) si satisfà:*

(i) u és contínua a $[0,T]$.

(ii) $u \in \mathcal{C}^1((0,T), E_{-1/2})$.

(iii) u satisfà (1.5) si $t \in (0,T)$.

Usant resultats d'interpolació i, novament, el punt de vista de H. Amann es pot provar (vegi's [4] (apèndix), [3] i [7]) que, per a tota μ tal que $1/2 \leq \mu < 1/2 + 1/2p$, $-A$ és el generador infinitessimal d'un semigrup analític $\{e^{-tA},\, t \geq 0\}$ a $E_{\mu-1}$.

Aleshores, és vàlida una fórmula de variació de les constants per al problema (1.5) que ens dóna l'equació integral següent per a la solució u,

$$u(t) = e^{-tA}u_0 + \int_0^t e^{-(t-\tau)A} F(u(\tau))\, d\tau\,, \tag{1.7}$$

per a tota $t \in [0,T]$. (Pot consultar-se [4], [7] i [12] per tal de veure l'obtenció d'aquesta equació).

Observem que l'equació integral (1.7) es dedueix de l'equació (1.5) en el sentit que tota solució de (1.5) és solució de (1.7): efectivament, si u és solució de (1.5), considerem

$$\begin{aligned} D_s(e^{-A(t-s)}u(s)) &= e^{-A(t-s)}u_s(s) + e^{-A(t-s)}Au(s) \\ &= e^{-A(t-s)}F(u(s)) \end{aligned}$$

i integrem a $(0,T)$, obtenim (1.7).

Ara bé, del fet que el semigrup generat per l'operador $-A$ sigui un semigrup analític, es dedueix que tota solució de (1.7) és solució de (1.5). Per tant, hi ha una equivalència entre les solucions de (1.5) i les de (1.7). (Vegi's [7] i [12] per a més detalls).

Amb tot això, anem a veure l'existència de solució per al problema (1.5) situant-nos, si és possible, sota les hipòtesis d'algun teorema del punt fix o, per ésser més precisos, provarem de tenir condicions suficients per tal d'aplicar un teorema de contracció. Aquesta és la raó per la qual ens interessaria tenir per al semigrup $\{e^{-tA}, t \geq 0\}$ una desigualtat com la que satisfan els semigrups que H. Amann obté per als seus problemes (teorema 10, [4]) i que donem tot seguit:

Observació 1.4 Sigui $\{e^{-tA}\}$ el semigrup analític sobre l'espai $E_{\alpha-1}$ generat per l'operador $A = A_{\alpha-1}$, $1/2 \leq \alpha < 1/2 + 1/2p$, com a la secció 1.1. Si $\sigma > \omega$, es satisfà

$$\|e^{-tA}\|_{\mathcal{L}(E_{\beta-1},E_\alpha)} \leq M t^{\beta-\alpha-1} e^{\sigma t}\,, \quad t > 0 \tag{1.8}$$

on $\omega > 0$ és tal que

$$\|e^{-tA}\|_{\mathcal{L}(E_{\alpha-1})} \leq m e^{\omega t}$$

i la constant $M = M(\alpha, \beta)$.

Recordem que en el nostre cas $\alpha = 1/2$.

Veurem que la desigualtat (1.8) és essencial en la demostració del següent teorema.

Teorema 1.1 *Suposem que $F : W_p^1 \to E_{\beta-1}$, amb $1/2 < \beta < 1/2 + 1/2p$, és una funció de Lipschitz sobre acotats. Aleshores, per a tot acotat $B \subset W_p^1$ i per a qualsevol $u_0 \in B$, existeix $T = T(B) > 0$ tal que el problema (1.5) té una única solució a $[0, T]$, amb valor inicial u_0. A més, la solució $u(t)$ és contínua respecte de la condició inicial u_0.*

<u>Demostració</u>. Suposem que F és una funció de Lipschitz sobre acotats. Donat $B \subset W_p^1$ sigui $L = L(B)$ la constant de Lipschitz de la funció F sobre B, és a dir, per a tota $v, w \in B$ es satisfà $\|F(v) - F(w)\|_{E_{\beta-1}} \leq L\,\|v - w\|_{W_p^1}$.

Sigui B_R una bola a W_p^1 de radi R que contingui B, és a dir, $B \subset B_R$ per a una R fixada.

Siguin $K > 0$ i $T = T(B) > 0$ tals que

$$\|e^{-At}u_0\|_{W_p^1} < \frac{R+K}{2}, \qquad \text{si } 0 \le t \le T$$
$$M(L(B_{R+K})(R+K) + \|F(u_0)\|_{E_{\beta-1}}) \int_0^T e^{\sigma s} s^{\beta-3/2}\, ds < \frac{R+K}{2}.$$

Considerem, a més, el conjunt

$$S = \left\{ v \in W_p^1 \,:\, v \text{ contínua, } v(0) = u_0 \text{ i } \|v(t)\|_{W_p^1} \le R+K \text{ si } t \in [0,T] \right\} .$$

No és difícil veure que S és un espai mètric complet amb la distància

$$\text{dist } (v,w) = \sup_{0 \le t \le T} \|v(t) - w(t)\|_{W_p^1} .$$

Donat $v \in S$, considerem

$$\begin{array}{rccc} G(v): & [0,T] & \longrightarrow & W_p^1 \\ & t & \longrightarrow & G(v)(t) \end{array}$$

definit per

$$G(v)(t) = e^{-At}u_0 + \int_0^t e^{-A(t-s)} F(v(s))\, ds .$$

Veurem que G aplica S en S i és una transformació contínua i contractiva. Així doncs,

$$\begin{aligned}
&\|G(v)(t)\|_{W_p^1} \\
&\quad \le \|e^{-At}u_0\|_{W_p^1} + \int_0^t \|e^{-A(t-s)}\|_{\mathcal{L}(E_{\beta-1},E_{1/2})} \|F(v(s))\|_{E_{\beta-1}}\, ds \\
&\quad \le \frac{R+K}{2} + \int_0^t M e^{\sigma(t-s)} (t-s)^{\beta-3/2} \Big(\|F(v(s)) - F(v(0))\|_{E_{\beta-1}} \\
&\quad + \|F(v(0))\|_{E_{\beta-1}} \Big)\, ds \\
&\quad \le \frac{R+K}{2} + M(L(B_{R+K})(R+K) + \|F(u_0)\|_{E_{\beta-1}}) \int_0^T e^{\sigma s} s^{\beta-3/2}\, ds \\
&\quad < R+K .
\end{aligned}$$

És a dir, $G(v) \in B_{R+K}$. A més, és clar que $G(v) \in W_p^1$ i $G(v)(0) = u_0$ per construcció. Es comprova també que $G(v)$ és contínua a $[0,T]$, amb la qual cosa, $G : S \to S$.

Siguin ara $v, w \in S$ i calculem

$$\begin{aligned} &\|G(v)(t) - G(w)(t)\|_{W_p^1} \\ \leq\ & \int_0^t \|e^{-A(t-s)}\|_{\mathcal{L}(E_{\beta-1},E_{1/2})} \|F(v(s)) - F(w(s))\|_{E_{\beta-1}}\, ds \\ \leq\ & ML(B_{R+K}) \sup_{0\leq t\leq T} \|v(t) - w(t)\|_{W_p^1} \int_0^t e^{\sigma s} s^{\beta-3/2}\, ds\ , \end{aligned}$$

desigualtat certa per a tota $t \in [0,T]$. Per tant, de la definició de T, deduïm

$$\text{dist } (G(v), G(w)) \leq \frac{1}{2} \text{ dist } (v, w)\ .$$

És a dir, G és una transformació contractiva i, per tant, contínua.

Aleshores, del teorema del punt fix deduïm que existeix una única funció $u \in S$ que és un punt fix per a G, és a dir, $u(t) = G(u)(t)$, $t \in [0,T]$, la qual cosa equival a dir que existeix una única solució de l'equació (1.7) i això acaba la demostració de la primera part del teorema, ja que, com hem dit abans, per a semigrups analítics això equival a dir que u és solució única del problema en forma semilineal (1.5), com volíem. ■

Amb aquest resultat, de l'equivalència entre solució del problema (1.7) i del (1.5), deduïm l'existència d'una única solució local per al problema original (1.1). La condició que F sigui una funció de Lipschitz sobre acotats, si $p > n$, es tradueix sobre les funcions f i g de (1.1) en què, segons es provà en la proposició 1.1, també siguin funcions de Lipschitz sobre acotats a $\mathbb{R}$.

Observació 1.5 Segons hem provat al teorema 1.1, si F és una funció de Lipschitz sobre acotats, el problema (1.5) té una única solució, donats $u_0 \in B$ i $B \subset W_p^1$ acotat, a $[0, \overline{T})$ amb $\overline{T} > T = T(B) > 0$. Diem que $\overline{T}$ és maximal si deixa d'haver solució del problema a $[0, T_1)$ si $T_1 > \overline{T}$.

En les hipòtesis del teorema 1.1, es pot veure que si $\|u(t)\|_{W_p^1} \leq K$, per a alguna constant $K > 0$ i per a tota $t < \overline{T}$, aleshores $\overline{T} = \infty$. És a dir, si la solució es manté acotada per a tot temps d'existència es pot continuar la solució per a tot temps $t > 0$.

Certament, suposem que $\|u(t)\|_{W_p^1} \leq K$ per a alguna $K > 0$, és a dir, que la solució es manté dins d'una bola B_K a W_p^1 de radi K i per a tota $t < T(B)$. Triem ara ε prou petita. Si apliquem ara el teorema 1.1 a l'acotat B_K, amb condició inicial $u(T(B)-\varepsilon)$, existeix un temps $T(B_K) > 0$ tal que existeix una única solució del problema (1.5), $u_1(t)$, si $t < T(B_K)$, amb $u_1(0) = u(T(B)-\varepsilon)$. Si s'ha triat ε prou petita, és clar que $T_1 = T(B) - \varepsilon + T(B_K) > T(B)$. A més, es veu que la funció $v(t)$ definida

$$v(t) = \begin{cases} u(t)\,, & 0 \leq t \leq T(B) - \varepsilon \\ u_1(t)\,, & T(B) - \varepsilon \leq t \leq T_1 \end{cases}$$

és solució de (1.5) a $[0, T_1)$. És clar que la reiteració d'aquest argument de continuació de la solució ens dóna l'exitència de solució per a tota $t > 0$.

1.4 Regularitat i compacitat

Fins el moment hem vist que donada $p > n$ el problema (1.1) pot escriure's com un problema de valor inicial semilineal abstracte a $(W_{p'}^1)'$, de la forma (1.5), amb espai de fases (és a dir, el domini de l'operador lineal A i del no lineal F) W_p^1. Hem vist també que es pot reduir a una equació integral usant la fórmula de variació de constants. Igualment, por trobar-se que defineix un sistema dinàmic regular $T(t)$,

$$T(t)u_0 = e^{-At}u_0 + \int_0^t e^{-A(t-\tau)} F(T(\tau)u_0)\, d\tau \tag{1.9}$$

a W_p^1. La mateixa demostració del teorema 1.1 ens assegura que $T(t)u_0$ és contínua respecte de la condició inicial u_0, mentre que estigui definit.

En aquesta secció anem a donar alguns resultats referents a la compacitat del sistema dinàmic $T(t)$ i a la regularitat que es pot assegurar per a la solució de (1.1), donada una condició inicial u_0 a W_p^1. Per a les qüestions de compacitat suposarem que la funció F és una funció de Lispchitz sobre acotats, mentre que en els temes de la regularitat caldrà que suposem que F és una funció $\mathcal{C}^1(E_{1/2}, E_{\beta-1})$.

Començarem veient que $T(t)$ és *condicionalment compacte*, és a dir, que si $B \subset W_p^1$ és acotat i el conjunt $\{T(s)u \,:\, u \in B \text{ i } 0 < s < t\}$ també ho és, aleshores $T(t)B$ és compacte.

Teorema 1.2 *Suposem que F és una funció de Lipschitz sobre acotats. Per a $t > 0$, el sistema dinàmic $T(t) : W_p^1 \to W_p^1$, definit a (1.9), és condicionalment compacte.*

Per tal de provar aquest resultat seguirem el mateix esquema que una demostració de compacitat feta per J. Hale a [19] per a sistemes dinàmics d'equacions d'evolució sectorials.

Abans de veure la demostració d'aquest teorema, necessitem introduir la mesura de no compacitat de Kuratowski d'un subconjunt d'un espai de Banach, així com un resultat previ que donarem en el lema 1.1. Comencem per la definició:

Definició 1.3 *Donat un espai de Banach X, sigui $B \subset X$ un subconjunt. La mesura de no compacitat de Kuratowski de B, $\alpha(B)$, es defineix per*

$$\alpha(B) = \inf \{\, d \;:\; \textit{existeix un recobriment finit de } B \textit{ amb boles de diàmetre } \le d \,\}\,.$$

La funció α satisfà les següents propietats, de les quals només n'usarem dues a la demostració del teorema 1.2 :

(i) $\alpha(B) = 0$ per a $B \subset X$ si i només si B és relativament compacte.

(ii) $\alpha(A \cup B) = \max(\alpha(A), \alpha(B))$, on $A, B \subset X$.

(iii) $\alpha(A + B) \le \alpha(A) + \alpha(B)$, on $A, B \subset X$.

(iv) $\alpha(\overline{co}B) = \alpha(B)$, on $B \subset X$ i $\overline{co}$ denota l'envolvent convexa tancada.

El lema del qual parlàvem és el següent:

Lema 1.1 *Per a tota $t > 0$, l'operador e^{-tA} és compacte de W_p^1 en $E_{-1/2}$.*

<u>Demostració</u>. Fixat $t > 0$, e^{-tA} és continu de W_p^1 en W_p^1. Ara bé, sabem que la inclusió $W_p^1 \subset E_{-1/2}$ és compacta. Per tant, e^{-tA} és compacte de W_p^1 en $E_{-1/2}$. ∎

Passem ara a la demostració del teorema 1.2.

<u>Demostració del Teorema 1.2</u>. Sigui B un conjunt acotat a W_p^1. Considerem ara el conjunt

$$B_1 = \left\{ \int_0^t e^{-A\tau} F(T(t-\tau)u)\, d\tau \;:\; u \in B \right\}.$$

Fixat $t > 0$, considerem, a més, el conjunt

$$C = \{T(t-\tau)u \;:\; u \in B \text{ i } 0 \le \tau \le t\}.$$

Per hipòtesi, C és acotat a W_p^1.

Triem $\varepsilon > 0$ tal que $0 < \varepsilon < t$ i considerem

$$\begin{aligned} & \int_0^t e^{-A\tau} F(T(t-\tau)u)\, d\tau \\ = & \int_0^\varepsilon e^{-A\tau} F(T(t-\tau)u)\, d\tau + \int_\varepsilon^t e^{-A\varepsilon} e^{-A(\tau-\varepsilon)} F(T(t-\tau)u)\, d\tau \\ = & \; I(0,\varepsilon) + e^{-A\varepsilon}\, I(\varepsilon, t). \end{aligned}$$

Considerem primer $I(\varepsilon, t)$ i veurem que està acotat a W_p^1.

$$\begin{aligned} \left\| \int_\varepsilon^t e^{-A(\tau-\varepsilon)} F(T(t-\tau)u)\, d\tau \right\|_{W_p^1} & \le M \frac{(t-\varepsilon)^{\beta-1/2}}{\beta - 1/2} \\ & \le M \frac{t^{\beta-1/2}}{\beta - 1/2} \end{aligned}$$

on $M = M(C)$. Per tant, és acotat. En el lema 1.1 hem vist que $e^{-A\varepsilon}$ és compacte, amb la qual cosa, es dedueix que $e^{-A\varepsilon}\, I(\varepsilon, t)$ és compacte. Aleshores, la mesura de Kuratowski $\alpha(e^{-A\varepsilon}\, I(\varepsilon, t)) = 0$.

Per altra banda

$$\|I(0,\varepsilon)\|_{W_p^1} = \left\| \int_0^\varepsilon e^{-A\tau} F(T(t-\tau)u)\, d\tau \right\|_{W_p^1} \leq m\, \frac{\varepsilon^{\beta-1/2}}{\beta - 1/2}\,.$$

Aleshores, per les propietats de la mesura de Kuratowski, s'obté $\alpha(B_1) \leq \alpha(I(0,\varepsilon)) + \alpha(e^{-A\varepsilon}\, I(\varepsilon,t)) = \alpha(I(0,\varepsilon))$, és a dir,

$$\alpha(B_1) \leq m\, \frac{\varepsilon^{\beta-1/2}}{\beta - 1/2}$$

per a tota $\varepsilon > 0$. D'aquí $\alpha(B_1) = 0$. És a dir, B_1 és relativament compacte i, aplicant el lema 1.1 al primer sumand de $T(t)u_0$, deduïm que $T(t)$ és condicionalment compacte. ■

Passem ara a veure quina regularitat es pot assegurar per a la solució de (1.5), donada una condició inicial u_0 a W_p^1.

Teorema 1.3 *Suposem que f i g són funcions de classe $\mathcal{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$. Donada $u_0 \in W_p^1$, existeix $\alpha > 0$ tal que la solució $u(x,t) = T(t)u_0$ de (1.5) és de classe $\mathcal{C}^1$ en t a valors en $\mathcal{C}^\alpha(\overline{\Omega})$ i de classe $\mathcal{C}^{2+\alpha}(\overline{\Omega})$ per a cada $t > 0$. A més, $u(x,t)$ és solució clàssica del problema (1.1).*

Abans de provar aquest teorema anem a donar el següent resultat de regularitat de u respecte de t.

Proposició 1.2 *Suposem que F és una funció de classe $\mathcal{C}^1(E_{1/2}, E_{\beta-1})$ amb $1/2 < \beta < 1/2 + 1/2p$. Donada $u_0 \in W_p^1$, la solució $u(x,t) = T(t)u_0$ de (1.5) és de classe $\mathcal{C}^1$ en $t > 0$ a valors a W_p^1.*

<u>Demostració</u>. Considerem el problema d'evolució

$$\left\{ \begin{array}{rcll} v_t + \mu A v &=& \mu F(v)\,, & \text{a } \Omega \\ v(0) &=& u_0\,, & \text{a } \partial\Omega\,. \end{array} \right. \tag{1.10}$$

on el paràmetre $\mu > 0$.

Si v és solució de (1.10), per a tota $0 \le t \le T$ es prova que v és un punt fix de l'aplicació

$$\begin{aligned} G : \mathcal{C}([0,T], W_p^1) \times (0,\infty) &\longrightarrow \mathcal{C}([0,T], W_p^1) \\ (v,\mu) &\longrightarrow G(v,\mu) \end{aligned}$$

definida per

$$G(v,\mu) = e^{-\mu A t} u_0 + \int_0^t e^{-\mu A(t-\tau)} \mu F(v(\tau))\, d\tau\,.$$

Com a la demostració del teorema 1.1 es veu que $G(\mu)$ és una contracció uniforme a $\mathcal{C}([0,T], W_p^1)$. Sabem que es satisfà (1.8) per al semigrup generat per $-A$. Procedint de manera anàloga a la demostració del teorema 1.1 i definim T, K, i S com allà, es comprova que G aplica S en S i també que

$$\begin{aligned} &\|G(\mu)(v) - G(\mu)(u)\|_{W_p^1} \\ &\quad\le\ |\mu| M L \max_{0\le t\le T} |v(t) - u(t)| \int_0^t |\mu|^{\beta-3/2} |t-\tau|^{\beta-3/2}\, d\tau \\ &\quad\le\ |\mu|^{\beta-1/2}\, M\, L \text{ dist } (u,v) \end{aligned}$$

on dist $(\cdot,\cdot)$ és la del teorema 1.1. Aleshores, podem triar $T = T(\mu)$ de manera que $|\mu|^{\beta-1/2} ML < 1$, amb la qual cosa provem que G és una contracció uniforme a $S \subset \mathcal{C}([0,T], W_p^1)$. Per tant, existeix un únic punt fix per a G, depenent de la μ, que anomenarem $v = v(\mu) = v(t; u_0, \mu)$.

Anem a veure que l'aplicació

$$\mu \longrightarrow v(t; u_0, \mu)$$

és de classe $\mathcal{C}^1(I, W_p^1)$, $I \subset (0,\infty)$. Si veiem que $G \in \mathcal{C}^1(\mathcal{C}([0,T], W_p^1) \times I, \mathcal{C}([0,T], W_p^1))$ ja ho tindrem. I això és equivalent a veure que existeixen les derivades parcials $\partial G/\partial v$ i $\partial G/\partial \mu$ i que són contínues. Del fet que $F \in \mathcal{C}^1(W_p^1, E_{\beta-1})$ es dedueix el que volíem.

Per a tota $\mu > 0$, considerem $v(t) = v(t; u_0, \mu)$. Sigui $u(t) = u(t; u_0)$ la solució de (1.5). Aleshores, és clar que $u(t; u_0) = v(t/\mu; u_0, \mu)$. Per a $t > 0$, considerem $\mu = t$, amb la qual cosa obtenim $u(t; u_0) = v(1; u_0, t)$. Acabem de veure que v és derivable amb continuïtat respecte del paràmetre μ, a valors a W_p^1 i per tant ho és respecte de t. ■

<u>Demostració del Teorema 1.3</u>. La primera part del teorema és conseqüència de la proposició 1.2: donat que $p > n$, existeix alguna α, amb $0 \leq \alpha < 1 - n/p$, tal que $W_p^1 \subset \mathcal{C}^\alpha(\overline{\Omega})$. Ara, com u és de classe $\mathcal{C}^1$ en t a valors a W_p^1, també ho serà a valors a $\mathcal{C}^\alpha(\overline{\Omega})$.

Deduïm d'aquí, a més, que fixat $x_0 \in \Omega$, existeix la funció $\dfrac{\partial}{\partial t} u(x_0, t)$ per a $t > 0$ i és contínua.

Anem a veure ara que $u \in \mathcal{C}^{2+\alpha}(\overline{\Omega})$ per a cada $t > 0$. Recordem que per la proposició 1.2 sabem que $u_t \in W_p^1$. Per tal de veure-ho considerem el següent problema auxiliar

$$\left\{ \begin{array}{rcll} -\Delta w & = & \varphi\,, & \text{a } \Omega\,, \\ w_\nu + w & = & \psi\,, & \text{a } \partial\Omega\,. \end{array} \right. \tag{1.11}$$

on $\varphi = -u + g(u)$ i $\psi = f(\gamma_p u) + \gamma_p u$, amb u la solució del problema (1.1). Donat que estem suposant que $f, g \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ i $u \in W_p^1$ es pot veure que $\varphi \in W_p^1$ i $\psi \in W_p^{1-1/p}(\partial\Omega)$.

Anem a veure en primer lloc que la solució w de (1.11) és de classe $\mathcal{C}^{2+\alpha}(\overline{\Omega})$ per a alguna $0 < \alpha < 1$. Com $p > n$, existeix α, amb $0 \leq \alpha < 1 - n/p$, per a la qual els encabiments $W_p^1 \subset \mathcal{C}^\alpha(\overline{\Omega})$ i $W_p^{1-1/p}(\partial\Omega) \subset \mathcal{C}^\alpha(\partial\Omega)$ són certs.

Veurem tot seguit que la funció $\psi \in \mathcal{C}^{1+\alpha}(\partial\Omega)$: usant la densitat de la inclusió $\mathcal{C}^{1+\alpha}(\partial\Omega) \subset W_p^{1-1/p}(\partial\Omega)$, considerem una successió de funcions $(\psi_n)_n$, $\psi_n \in \mathcal{C}^{1+\alpha}(\partial\Omega)$, tals que $\psi_n \to \psi$ a W_p^1. Per a cada ψ_n considerem el problema

$$\left\{ \begin{array}{rcll} -\Delta w_n & = & \varphi\,, & \text{a } \Omega\,, \\ (w_n)_\nu + w_n & = & \psi_n\,, & \text{a } \partial\Omega\,, \end{array} \right. \tag{1.12}$$

on $\varphi \in W_p^1$ és la d'abans. A [15] es prova que existeixen i són úniques les solucions dels problemes (1.12), per a $n \geq 1$. A més, $w_n \in \mathcal{C}^{2+\alpha}(\overline{\Omega})$, per a $n \geq 1$.

Ara, l'encabiment $\mathcal{C}^{2+\alpha}(\overline{\Omega}) \subset W_p^2$ ens permet aplicar el teorema 15.2 de [2] a les diferències $w_n - w_m$, si $n \neq m$, d'on en resulta

$$\|w_n - w_m\|_{W_p^2} \leq C\left(\|\varphi - \varphi\|_{L^p} + \|\psi_n - \psi_m\|_{W_p^{1-1/p}(\partial\Omega)} + \|w_n - w_m\|_{L^p}\right). \quad (1.13)$$

És clar que $\|\psi_n - \psi_m\|_{W_p^{1-1/p}(\partial\Omega)} \to 0$ si $n, m \to \infty$. Veurem més endavant que $\|w_n - w_m\|_{L^p} \to 0$ si $n, m \to \infty$, amb la qual cosa el terme de la dreta de la desigualtat (1.13) tendeix a 0 quan $n, m \to \infty$. Així doncs, la successió de solucions $(w_n)_n$ és una successió de Cauchy a W_p^2 i, per tant, $w_n \to w$ a W_p^2 quan $n \to \infty$, essent w solució de (1.11). Per tant, la solució del problema (1.11) és una funció de classe $\mathcal{C}^{1+\alpha}(\overline{\Omega})$ ja que $W_p^2 \subset \mathcal{C}^{1+\alpha}(\overline{\Omega})$.

Passem a veure que $\|w_n - w_m\|_{L^p} \to 0$ si $n, m \to \infty$. Per a això considerem el problema (1.12) per a w_n i per a w_m i els restem. S'obté

$$\left\{\begin{array}{rcll} -\Delta(w_n - w_m) & = & 0\,, & \text{a } \Omega\,, \\ (w_n - w_m)_\nu + (w_n - w_m) & = & \psi_n - \psi_m\,, & \text{a } \partial\Omega\,. \end{array}\right. \quad (1.14)$$

Per tant, la diferència $w_n - w_m$ és una funció harmònica i pel principi del màxim de Hopf ([31]) obtenim

$$\begin{array}{rcl} \sup_{\overline{\Omega}}(w_n - w_m) & \leq & \sup_{\partial\Omega}(\psi_n - \psi_m) \\ \inf_{\overline{\Omega}}(w_n - w_m) & \geq & \inf_{\partial\Omega}(\psi_n - \psi_m) \end{array}$$

d'on acabem deduint

$$\sup_{\overline{\Omega}} |w_n - w_m| \leq \sup_{\partial\Omega} |\psi_n - \psi_m| = \|\psi_n - \psi_m\|_{\mathcal{C}^0(\partial\Omega)} \leq K\, \|\psi_n - \psi_m\|_{W_p^{1-1/p}(\partial\Omega)}\,.$$

Per tant, $\|w_n - w_m\|_{L^p} \to 0$ quan $n, m \to \infty$.

Aleshores, hem obtingut que la solució ω del problema (1.11) és de classe $\mathcal{C}^{1+\alpha}(\overline{\Omega})$. A més, sabíem que $\varphi \in W_p^1$ i $\psi \in W_p^{1-1/p}(\partial\Omega)$. Per tant, aplicant les estimacions de Schauder es veu, com fan D.Gilbarg i N.S. Trudinger a [15], que, de fet, la solució de (1.11) és més regular, és a dir, que $w \in \mathcal{C}^{2+\alpha}(\overline{\Omega})$.

Anem a veure tot seguit que, de fet, $u = w$, cosa que prova la regularitat desitjada per a la solució u de (1.5).

Donada $v \in W^1_{p'}$, la solució del problema (1.1) satisfà

$$\int_\Omega u_t v\, dx + \int_\Omega \nabla u \nabla v\, dx = \int_\Omega g(u) v\, dx + \int_{\partial\Omega} f(\gamma_p u)\gamma_{p'} v\, d\ell\ ,$$

com havíem vist a (1.3). De la mateixa forma es pot veure que la solució w del problema (1.11) satisfà

$$\begin{aligned}\int_\Omega u_t v\, dx + \int_\Omega \nabla w \nabla v\, dx = \int_\Omega g(u) v\, dx + \int_{\partial\Omega} f(\gamma_p u)\gamma_{p'} v\, d\ell \\ + \int_{\partial\Omega} (\gamma_p u - \gamma_p w)\gamma_{p'} v\, d\ell\ .\end{aligned}$$

Ara, restant les dues igualtats ens queda

$$\int_\Omega (\nabla u - \nabla w)\nabla v\, dx + \int_{\partial\Omega} (\gamma_p u - \gamma_p w)\gamma_{p'} v\, d\ell = 0$$

per a tota $v \in W^1_{p'}$. Considerem $v = u - w \in W^1_p \subset W^1_{p'}$, ja que $p' \leq p$ si $p \geq n \geq 2$. Aleshores,

$$\int_\Omega \nabla(u-w)^2\, dx + \int_{\partial\Omega} (\gamma_{p'}(u-w))^2\, d\ell = 0\ ,$$

d'on es dedueix que $u = w$. Per tant, la solució u del problema (1.1) en forma feble és de classe $\mathcal{C}^{2+\alpha}(\overline{\Omega})$. Ara bé, si u és solució única de (1.3) i $u \in \mathcal{C}^{2+\alpha}(\overline{\Omega})$, aleshores u és solució de (1.1), amb la qual cosa acabem la demostració del teorema. ■

Capítol 2

Estabilitat i inestabilitat d'equilibris

D'ara endavant el nostre interès es centrarà en l'estudi de solucions d'equilibri per al problema d'evolució (1.1) que vàrem considerar al capítol 1, és a dir, en les solucions del problema

$$\begin{cases} \Delta u + g(u) & = & 0\,, & \text{a } \Omega\,, \\ u_\nu & = & f(u)\,, & \text{a } \partial\Omega\,, \end{cases} \tag{2.1}$$

on $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ és un domini acotat amb frontera $\partial\Omega$ regular.

En el capítol anterior vàrem veure que el problema (1.1) pot posar-se en forma semilineal, és a dir, en la forma (1.5). Anem a donar, en primer lloc, algunes definicions sobre estabilitat d'equilibris.

Definició 2.1 *Sigui*

$$u_t + Au = F(u) \tag{2.2}$$

una equació semilineal. Diem que $u(t) \equiv u_0$ *és un punt d'equilibri si és una solució de* (2.2)*,és a dir, si* $u_0 \in D(A)$ *i* $Au_0 = F(u_0)$.

Definició 2.2 *(Definicions d'estabilitat)*

Un punt d'equilibri u_0 és estable a W^1_p si, per a tota $\varepsilon > 0$, existeix $\delta > 0$ tal que tota solució $v \in W^1_p$ amb $\|v(0) - u_0\|_{W^1_p} < \delta$ existeix a $t \in [0, +\infty)$ i satisfà $\|v(t) - u_0\|_{W^1_p} < \varepsilon$ per a tota $t \geq 0$.

El punt d'equilibri u_0 és uniformement asimptòticament estable *si és estable i hi ha un entorn*

$$V = \{v \in W^1_p : \|v - u_0\|_{W^1_p} < r\}$$

tal que $\|v(t) - u_0\|_{W^1_p} \to 0$ quan $t \to +\infty$, uniformement per a $v \in V$.

Un punt d'equilibri u_0 és inestable *si no és estable.*

En la primera secció veurem que la linealització del problema (1.1) al voltant d'un punt d'equilibri u_0, ens dóna un principi d'estabilitat i inestabilitat lligat al signe del valor propi màxim de l'operador lineal que en resulta, com passa en general en els problemes semilineals.

En la secció 2.2 donarem una caracterització d'aquest valor propi màxim de l'operador linealitzat. Aquesta caracterització ve donada per un quocient de Rayleigh, és a dir, el valor propi màxim ve donat pel suprem (2.13) en l'espai Hilbert W^1_2. Ara bé, el problema (2.1) l'estem considerant a W^1_p, per la qual cosa cal provar que el valor propi així trobat i la funció pròpia associada a ell a W^1_2, són el valor propi màxim amb igual funció pròpia a W^1_p, cosa no trivial d'entrada.

2.1 Estabilitat i inestabilitat per linealització

Suposem que f i g són funcions $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ i que u_0 és un punt d'equilibri de

$$\left\{ \begin{array}{rcl} u_t + Au & = & F(u) \\ u(0) & = & u_0 \,. \end{array} \right. \tag{2.3}$$

Hem vist a la proposició 1.1 de la secció 1.2 que si f i g són funcions de classe $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ aleshores l'operador no lineal F és de classe $\mathcal{C}^1(W^1_p, E_{\beta-1})$, per a qualsevol β tal que $1/2 < \beta < 1/2 + 1/2p$ i per a tota $p > n$.

Sota aquestes hipòtesis tenim

$$F(u_0 + v) = F(u_0) + DF(u_0)v + G(v)$$

amb $\|G(v)\|_{E_{\beta-1}} = o(\| v \|_{W_p^1})$ quan $\| v \|_{W_p^1} \to 0$. Aquesta descomposició ens suggereix considerar la linealització del problema (2.3), és a dir,

$$v_t + Av = DF(u_0)\, v \tag{2.4}$$

i relacionar l'estabilitat de l'equilibri u_0 amb el signe del valor propi màxim de l'operador lineal que apareix a (2.4).

Tal i com dèiem a la introducció del capítol, el que anem a donar en primer lloc és un principi d'estabilitat i inestabilitat que recollim en el següent teorema:

Teorema 2.1 *Sigui u_0 un punt d'equilibri de (2.3) i sigui $\sigma(B)$ l'espectre de l'operador $B = DF(u_0) - A$. Aleshores*

(i) Si $\sigma(B) \subset \{Re\ \lambda < a\}$ per a alguna $a < 0$, aleshores u_0 és uniformement asimptòticament estable a W_p^1.

(ii) Si $\sigma(B) \cap \{Re\ \lambda > 0\}$ és un conjunt espectral no buit, aleshores u_0 és un punt d'equilibri inestable a W_p^1.

L'apartat *(i)* és el mateix que dir que si la linealització (2.4) és uniformement asimptòticament estable aleshores u_0 és uniformement asimptòticament estable a W_p^1. De fet, el que veurem és que existeix $\rho > 0$ i $M \geq 1$ tals que si

$$\| u_0 - u_1 \|_{W_p^1} \leq \frac{\rho}{2M}$$

aleshores existeix una única solució de

$$\left\{ \begin{array}{rcll} u_t + Au & = & F(u)\ , & \text{si } t \geq 0 \\ u(0) & = & u_1 & \end{array} \right. \tag{2.5}$$

definida a $[0, +\infty)$ tal que satisfà, per a tota $t \geq 0$

$$\| u - u_0 \|_{W_p^1} \leq 2Me^{at} \| u_1 - u_0 \|_{W_p^1}\ .$$

De manera semblant, per a l'apartat *(ii)* el que veurem és que existeix $\varepsilon_0 > 0$ i $\{u_n, n \geq 1\}$, amb $\|u_n - u_0\|_{W_p^1} \to 0$ quan $n \to +\infty$, que per a tota n satisfà

$$\sup_{t\geq 0} \|u(t; u_n) - u_0\|_{W_p^1} \geq \varepsilon_0 > 0 \tag{2.6}$$

on el suprem es pren sobre l'interval maximal d'existència.

Per a la demostració d'aquests dos resultats és essencial la desigualtat (1.8) vista al capítol anterior.

<u>Demostració</u>. Anem a veure l'apartat (i): Sigui $\sigma(B)$ l'espectre de l'operador $B = DF(u_0) - A$. Anàlogament a l'operador A, l'operador B satisfà una desigualtat com (1.8) amb $\omega = -a$, és a dir, que si a' és tal que $\operatorname{Re} \sigma(B) < a' < a < 0$, existeix una constant $M \geq 1$ tal que

$$\| e^{Bt} v \|_{W_p^1} \leq M t^{\beta - \frac{3}{2}} e^{a' t} \| v \|_{W_p^1}$$

per a tota $t > 0$.

Triem $\mu > 0$ suficientment petita de manera que

$$M\mu \int_0^\infty s^{\beta - \frac{3}{2}} e^{(a'-a)s}\, ds < \frac{1}{2}$$

i $\rho > 0$ tal que si $\|v\|_{W_p^1} \leq \rho$, es tingui

$$\| G(v) \|_{E_{\beta-1}} \leq \mu \| v \|_{W_p^1} \ .$$

Considerem $v(t) = u(t; u_1) - u_0$. Si es pren u_1 tal que

$$\| u_0 - u_1 \|_{W_p^1} \leq \frac{\rho}{2M}$$

la solució de (2.5) existirà i satisfarà la desigualtat $\|v(t)\|_{W_p^1} \leq \rho$ en algun interval de temps.

Com u_0 satisfà l'equació

$$Au_0 = F(u_0)$$

i u l'equació

$$\begin{aligned} u_t + Au &= F(u) = F(u_0 + v) \\ &= F(u_0) + DF(u_0)v + G(v)\,, \end{aligned}$$

restant les dues igualtats es comprova que v satisfà l'equació següent:

$$v_t + Bv = G(v)\,. \tag{2.7}$$

A més, mentre $\|v(t)\|_{W_p^1} \leq \rho$, la desigualtat

$$\begin{aligned}
\| \, v \, \|_{W_p^1} &= \| \, e^{Bt)}(u_1 - u_0) + \int_0^t e^{B(t-s)} G(v(s))\, ds \, \|_{W_p^1} \\
&\leq M\, e^{at} \, \| \, u_1 - u_0 \, \|_{W_p^1} + M\mu \int_0^t (t-s)^{\beta - \frac{3}{2}} e^{a'(t-s)} \, \| \, v(s) \, \|_{W_p^1} \, ds \\
&\leq \frac{\rho}{2} + M\rho\mu \int_0^t (t-s)^{\beta-\frac{3}{2}} e^{a'(t-s)}\, ds < \rho
\end{aligned}$$

és certa, és a dir, és de fet una desigualtat estricta.

Sigui t_1 el valor més gran de temps per al qual és certa la desigualtat $\| \, v(t) \, \|_{W_p^1} < \rho$ per a $0 \leq t < t_1$. Aleshores, o bé $t_1 = \infty$, o bé $\| \, v(t_1) \, \|_{W_p^1} = \rho$, (vegi's l'observació 1.5). Així doncs, donat que $\| \, v(t_1) \, \|_{W_p^1} = \rho$ contradiu l'última desigualtat, existeix solució per a tota $t > 0$ satisfent

$$\| \, v(t) \, \|_{W_p^1} = \| \, u(t) - u_0(t) \, \|_{W_p^1} < \rho\,.$$

Sigui

$$\overline{v}(t) = \sup_{0 \leq s \leq t} \{ \, \| \, v(s) \, \|_{W_p^1} \, e^{-as} \}\,.$$

Aleshores, es satisfà:

$$\begin{aligned}
&\| \, v(t) \, \|_{W_p^1} \, e^{-at} \\
&\quad = e^{-at} \, \| \, e^{Bt}(u_1 - u_0) + \int_0^t e^{B(t-s)} G(v(s))\, ds \, \|_{W_p^1} \\
&\quad \leq e^{-at} \, M \, e^{a't} \, \| \, u_1 - u_0 \, \|_{W_p^1} \\
&\quad + \int_0^t M(t-s)^{\beta-\frac{3}{2}} e^{a'(t-s)} \mu \, \| \, v(s) \, \|_{W_p^1} \, e^{-at}\, ds \\
&\quad \leq M \, \| \, u_1 - u_0 \, \|_{W_p^1} \\
&\quad + M\mu\overline{v}(t) \int_0^t (t-s)^{\beta-\frac{3}{2}} e^{(a'-a)(t-s)}\, ds \\
&\quad \leq M \, \| \, u_1 - u_0 \, \|_{W_p^1} + \frac{1}{2}\, \overline{v}(t)
\end{aligned}$$

per a tota $t \geq 0$. D'aquí,

$$\overline{v}(t) \leq M \, \| \, u_1 - u_0 \, \|_{W_p^1} + \frac{1}{2}\, \overline{v}(t)\,,$$

és a dir,

$$\overline{v}(t) \leq 2M \parallel u_1 - u_0 \parallel_{W_p^1},$$

com volíem provar.

Per a l'apartat (ii), siguin $\sigma_1 = \sigma(B) \cap \{\mathrm{Re}\,\lambda > 0\}$ i $\sigma_2 = \sigma(B) - \sigma_1$. Siguin P_1 i P_2 les projeccions sobre l'espai $E_{-1/2}$ associades a σ_1 i σ_2, respectivament, i denotem per $X_j = P_j(E_{1/2})$ aquestes projeccions, si $j = 1, 2$. Aleshores, $E_{-1/2} = X_1 \oplus X_2$, X_j són invariants per B i, a més, si denotem per B_j les restriccions de B sobre X_j, es té $\sigma(B_j) = \sigma_j$, per a $j = 1, 2$. (Vegi's [20] i [14], per als detalls).

Es prova que existeixen dues constants $\eta > 0$ i $M \geq 1$ tals que són certes les següents estimacions: per a $t > 0$

$$\|e^{B_2 t}\, E_2\, u\|_{W_p^1} \leq M e^{\eta t} t^{\beta - \frac{3}{2}} \|u\|_{E_{\beta-1}}$$

i per a $t \leq 0$,

$$\|e^{B_1 t}\, E_1\, u\|_{W_p^1} \leq M e^{3\eta t} \|u\|_{E_{\beta-1}}\,.$$

Donada $\overline{u} \in W_p^1 \cap X_1$, considerem l'equació integral següent

$$v(t) = e^{B_1(t-T)}\overline{u} + \int_T^t e^{B_1(t-s)} P_1 G(v(s))\, ds + \int_{-\infty}^t e^{B_2(t-s)} P_2 G(v(s))\, ds\,, \quad (2.8)$$

per a $t \leq T$.

Sabem que $\|G(v)\|_{E_{\beta-1}} \leq k(\rho)\|v\|_{W_p^1}$ si $\|v\|_{W_p^1} \leq \rho$ i amb $k(\rho) \to 0$ quan $\rho \to 0$. Aleshores, podem triar $\rho > 0$ prou petita de manera que

$$M\, k(\rho) \left[\frac{\|P_1\|}{\eta} + \|P_2\| \int_0^\infty s^{\beta - \frac{3}{2}} e^{-\eta s}\, ds \right] < \frac{1}{2}\,.$$

Veurem tot seguit que si $\overline{u} \in W_p^1$ és tal que $\|\overline{u}\|_{W_p^1} \leq \rho/2M$, l'equació integral (2.8) té una única solució $v(t)$ a $-\infty < t \leq T$ que satisfà

$$\|v(t)\|_{W_p^1} \leq \rho e^{2\eta(t-T)}\,.$$

Per tal de veure-ho, considerem el conjunt

$$S = \{v \ : \ v : (-\infty, T] \to W_p^1 \text{ contínua, } P_1 v(T) = \overline{u} \text{ i } \|v(t)\|_{W_p^1} \leq \rho e^{2\eta(t-T)} \text{ per a } t \leq T\}\,.$$

Fixada $v \in S$ considerem l'operador

$$\begin{array}{rcccc} H(v) & : & (-\infty, T] & \longrightarrow & W_p^1 \\ & & t & \longrightarrow & H(v(t)) \end{array}$$

definit per l'equació integral (2.8). Es comprova que S és un espai mètric complet amb la distància

$$\text{dist }(u,v) = \sup_{t \leq T} \{ \| u(t) - v(t) \|_{W_p^1} \} \, .$$

A més, H és una transformació que aplica S en S, contínua i contractiva. Vegem-ho: per definició $H(v)$ és contínua i $P_1(H(v(T))) = \overline{u}$. A més,

$$\begin{aligned}
&\|H(v)(t)\|_{W_p^1} \\
&\quad \leq \; \|e^{B_1(t-T)}\overline{u}\|_{W_p^1} + \int_T^t \|e^{B_1(t-s)}\|_{\mathcal{L}(W_p^1 \cap X_1, E_{\beta-1})} \|P_1 G(v(s))\|_{E_{\beta-1}} \, ds \\
&\quad + \; \int_{-\infty}^t \|e^{B_2(t-s)}\|_{\mathcal{L}(W_p^1 \cap X_2, E_{\beta-1}} \|P_2 G(v(s))\|_{E_{\beta-1}} \, ds \\
&\quad \leq \; M e^{3\eta(t-T)} \|\overline{u}\|_{W_p^1} + \int_T^t M e^{3\eta(t-s)} k(\rho) \|P_1 v\|_{W_p^1} \, ds \\
&\quad + \; \int_{-\infty}^t M (t-s)^{\beta - \frac{3}{2}} e^{\eta(t-s)} k(\rho) \|P_2 v\|_{W_p^1} \, ds \\
&\quad \leq \; M e^{3\eta(t-T)} \|\overline{u}\|_{W_p^1} \\
&\quad + \; M k(\rho) \|v\|_{W_p^1} \left[\frac{\|P_1\|}{\eta} + \|P_2\| \int_0^\infty s^{\beta - \frac{3}{2}} e^{-\eta s} \, ds \right] \\
&\quad \leq \; M \|\overline{u}\|_{W_p^1} e^{3\eta(t-T)} + \frac{\rho}{2} e^{2\eta(t-T)} \\
&\quad \leq \; \rho e^{2\eta(t-T)} \, .
\end{aligned}$$

Així doncs, $H : S \to S$. Vegem ara que H és una contracció: per a tota $t \leq T$ es té,

$$\begin{aligned}
&\|H(v(t)) - H(u(t))\|_{W_p^1} \\
&\qquad \leq M k(\rho) \, \text{dist }(u,v) \left[\int_T^t \|P_1\| e^{3\eta(t-s)} \, ds + \int_0^\infty \|P_2\| s^{\beta - \frac{3}{2}} e^{-\eta s} \, ds \right] \\
&\qquad \leq \frac{1}{2} \, \text{dist }(u,v) \, .
\end{aligned}$$

És a dir,

$$\text{dist }(H(u), H(v)) \leq \frac{1}{2} \, \text{dist }(u,v) \, ,$$

deduint que H és una contracció i és, per tant, contínua.

Estem, doncs en condicions d'aplicar el teorema del punt fix, que ens diu que existeix un únic punt fix $v(t)$, és a dir, $H(v(t)) = v(t)$ per a tota $t \in (-\infty, T]$, solució de l'equació integral (2.8). Denotarem aquesta solució per $v(t) = v(t; T, \overline{u})$. Donat que $v(t)$ satisfà

$$\|v(t)\|_{W_p^1} \leq 2Me^{2\eta(t-T)} \|\overline{u}\|_{W_p^1}\,, \quad t \leq T\,,$$

deduïm

$$\begin{aligned}
&\|v(T) - \overline{u}\|_{W_p^1} = \\
&\quad = \| \int_{-\infty}^{T} e^{B_2(t-s)} P_2(G(v(s)))\, ds\|_{W_p^1} \\
&\quad \leq \int_{-\infty}^{T} 2M^2 k(\rho) \|P_2\|\, \|\overline{u}\|_{W_p^1} (t-s)^{\beta - \frac{3}{2}} e^{\eta(t-s)} e^{2\eta(t-T)}\, ds \\
&\quad \leq \frac{1}{2}\, \|\overline{u}\|_{W_p^1}\,,
\end{aligned}$$

si triem $\rho > 0$ prou petita. Per tant,

$$\|v(T)\| \geq \frac{1}{2}\, \|\overline{u}\|_{W_p^1}\,.$$

A més, a partir de l'equació integral (2.8) es pot observar directament que v també és solució de

$$v_t = Bv + G(v)\,, \quad t \leq T\,.$$

Amb tot això, anem a construir una successió $\{u_n\}_n$ que satisfaci (2.6). Siguin

$$u_n = v(0; n, \overline{u})\,.$$

Aleshores, la solució $u(t; u_n)$ satisfà $u(t; u_n) = v(t; n, \overline{u})$, per a $0 \leq t \leq n$ i

$$\begin{aligned}
\sup_{0 \leq t \leq T} \|u(t; u_n)\| &\geq \|u(T; u_n)\| \\
&= \|v(T; n, \overline{u})\| \\
&\geq \frac{1}{2}\, \|\overline{u}\| > 0
\end{aligned}$$

mentre que, per altra banda

$$\|u_n\| = \|v(0; n, \overline{u})\| \leq \rho e^{-2\eta n} \to 0\,,$$

quan $n \to +\infty$.

Per tant deduïm que u_0 is inestable, tal i com volíem provar. ∎

El teorema que acabem de provar ens dóna una caracterització de l'estabilitat i la inestabilitat d'un equilibri encara que, a la pràctica, no és fàcil utilitzar el teorema així enunciat per tal de determinar l'estabilitat d'un determinat equilibri. En la propera secció donarem un quocient de Rayleigh que caracteritzi el valor propi màxim de l'operador linealitzat B.

2.2 El quocient de Rayleigh

Per tal d'aconseguir una caracterització més assequible del valor propi màxim hauríem de conéixer quelcom més de l'espectre de l'operador B. Veurem que, usant que B genera un semigrup analític, es pot provar que, per a alguna $K \in \mathbb{R}$ prou gran, l'operador $(KI + B)$ és invertible amb inversa compacta. Aleshores es veurà que $\sigma(B)$ consta únicament dels valors propis de B. A més, si $\lambda \in \sigma(B)$ observarem que les funcions pròpies associades a ell són solucions dèbils del problema lineal

$$\left\{ \begin{array}{rcll} \Delta u + g'(u_0)u & = & \lambda u\,, & \text{a } \Omega\,, \\ u_\nu & = & f'(u_0)u\,, & \text{a } \partial\Omega\,, \end{array} \right. \tag{2.9}$$

a $L^2(\Omega)$, és a dir, són solució de l'equació (2.11).

Gràcies a això podrem provar que el primer valor propi de l'operador B, és a dir, el valor propi màxim de $\sigma(B)$, es pot trobar com el suprem d'un quocient sobre les funcions no nul·les a W_2^1, és a dir, en un espai de Hilbert.

Primer de tot anem a veure que l'operador $B = DF(u_0) - A$ té resolvent compacta i, conseqüentment, l'espectre és un espectre puntual (vegi's [23]).

Tenim

$$A : W_p^1 \to E_{-1/2} = (W_{p'}^1)'$$

que és un operador lineal acotat i

$$DF(u_0) : W_p^1 \to E_{\beta-1} \subset E_{-1/2}$$

que és també lineal i acotat.

Com $-A$ és el generador infinitessimal d'un semigrup analític, aleshores es satisfan les següents propietats

(i) A és tancat amb $\overline{D(A)} = W_p^1$.

(ii) El conjunt resolvent, $\rho(A)$, conté $(\omega, +\infty)$ i es satisfà la desigualtat

$$\|(\lambda I - A)^{-n}\| \leq \frac{M}{(\lambda - \omega)^n}$$

per a tota $\lambda > \omega$ i $n = 1, 2, \ldots$

on M i ω són constants, $M \geq 1$ i $\omega > 0$, tals que

$$\|T(t)\| \leq Me^{\omega t}$$

$t \geq 0$, si $T(t)$ és el semigrup generat per $-A$. (Vegi's [30]).

Així doncs, $(\lambda I - A)$ és un operador invertible si $\lambda > \omega$. Anem a veure que $(\mu I + B)$ és també invertible, per a μ prou gran. Podem, per a això, considerar que l'operador lineal $DF(u_0)$ és una pertorbació relativament acotada del generador infinitessimal d'un semigrup analític. Aleshores, a [23] i a [30] es prova que $DF(u_0) - A = B$ és també el generador infinitessimal d'un semigrup analític.

Pels mateixos arguments d'abans tenim què $\rho(B)$ conté $(\overline{\omega}, +\infty)$ per a alguna $\overline{\omega} \in \mathbb{R}$ i, a més, la desigualtat

$$\|(\mu I + B)^{-n}\| \leq \frac{\overline{M}}{(\mu - \overline{\omega})^n}$$

és certa per a tota $\mu > \overline{\omega}$ i $n = 1, 2, \ldots$

Aleshores, $(\mu I + B)$ és un operador invertible.

Podem considerar K prou gran de manera que $K > \max\{\omega, \overline{\omega}\}$. Llavors, existeixen $(KI - A)^{-1}$ i $(KI + B)^{-1}$. A més tenim el següent resultat

Lema 2.1 *$(KI + B)^{-1}$ és un operador compacte.*

<u>Demostració</u>. Observem que $(KI - A)^{-1}$ és un operador compacte de $E_{-1/2}$ en $E_{-1/2}$ ja que és un operador acotat de $E_{-1/2}$ en $E_{1/2}$, com a conseqüència del teorema de la gràfica tancada i de la compacitat de l'encabiment d'$E_{1/2}$ en $E_{-1/2}$.

Denotarem per T l'operador $KI - A$ i per S l'operador $DF(u_0)$. Aleshores

$$\begin{aligned}(KI + B)^{-1} &= (T + S)^{-1} = (T + ST^{-1}T)^{-1} \\ &= [(I + ST^{-1})T]^{-1} = T^{-1}(I + ST^{-1})^{-1}\end{aligned}$$

Hem vist abans que T^{-1} és un operador compacte. Vegem ara que l'operador $(I + ST^{-1})^{-1}$ és continu. Es satisfà

$$(I + ST^{-1})^{-1} = T(KI + B)^{-1}$$

on T és continu de W_p^1 en $E_{-1/2}$ i, pel teorema de la gràfica tancada, $(KI+B)^{-1}$ també és continu d'$E_{-1/2}$ en W_p^1. Es dedueix, per tant, que $(I + ST^{-1})^{-1}$ és continu de $E_{-1/2}$ en $E_{-1/2}$.

Hem vist, doncs, que $(KI + B)^{-1}$ és composició d'un operador continu seguit d'un operador compacte, cosa que ens prova que $(KI + B)^{-1}$ és un operador compacte com volíem demostrar. ∎

Considerem ara el següent resultat de [23].

Proposició 2.1 *Sigui $\mathcal{A}$ un operador tancat en un espai de Banach E tal que la resolvent $(KI - \mathcal{A})^{-1}$ existeix i és compacta per a alguna K. Aleshores l'espectre d'$\mathcal{A}$ consisteix totalment de valors propis isolats amb multiplicitats algebraiques finites, i $(\lambda I - \mathcal{A})^{-1}$ és un operador compacte per a tota $\lambda \in \rho(\mathcal{A})$.*

De l'aplicació del lema 2.1 i la proposició 2.1 es veu que B té un espectre puntual, és a dir, que $\sigma(B)$ consta únicament dels valors propis de B. Per tant, si $\lambda \in \sigma(B)$, λ és un valor propi de B, és a dir,

$$Bv = \lambda v$$

per a alguna $v \in W_p^1$ o, equivalentment

$$DF(u_0)v - Av = \lambda v\,. \tag{2.10}$$

Si ara multipliquen (2.10) per una $\varphi \in W_{p'}^1$, usant el producte de dualitat entre L^p i $L^{p'}$, tenim

$$\begin{aligned} -\int_\Omega (\nabla v\, \nabla \varphi + v\varphi)\, dx \quad &+ \quad \int_\Omega g'(u_0)v\varphi + v\varphi\, dx + \int_{\partial\Omega} f'(u_0)v\varphi\, dx \\ &= \quad \lambda \int_\Omega v\varphi\, dx\,. \end{aligned} \tag{2.11}$$

Si $v \in W_p^2$ podem aplicar la fórmula de Green, d'on s'obté

$$\begin{aligned} \int_\Omega \Delta v\, \varphi\, dx \quad &- \quad \int_{\partial\Omega} v_\nu \varphi\, d\ell + \int_\Omega g'(u_0)v\varphi\, dx \\ &+ \quad \int_{\partial\Omega} f'(u_0)v\varphi\, d\ell = \lambda \int_\Omega v\varphi\, dx\,. \end{aligned}$$

Observem, doncs, que v és una solució dèbil del problema lineal de valor propi

$$\left\{ \begin{array}{rcll} \Delta v + g'(u_0)v & = & \lambda v\,, & \text{a } \Omega\,, \\ v_\nu & = & f'(u_0)v\,, & \text{a } \partial\Omega\,, \end{array} \right. \tag{2.12}$$

a $L^2(\Omega)$.

En el següent teorema anem a veure com es pot trobar el més gran dels valors propis de l'espectre $\sigma(B)$.

Teorema 2.2 *El primer valor propi de l'espectre de l'operador B és*

$$\lambda_0 = \sup_{\substack{u \in W_2^1 \\ u \neq 0}} \frac{\displaystyle\int_\Omega (-(\nabla u)^2 + g'(u_0)u^2\, dx) + \int_{\partial\Omega} f'(u_0)u^2\, d\ell}{\displaystyle\int_\Omega u^2\, dx}\,. \tag{2.13}$$

Observem que el valor propi queda determinat per un suprem que es calcula a W_2^1 però no a l'espai on tenim definit el problema, és a dir, a W_p^1, amb $p > n$. Per tant, a més de provar que el quocient anterior ens dóna el valor propi buscat haurem de veure que la funció pròpia associada, que serà de l'espai W_2^1 en principi, pertany de fet a W_p^1.

Per tal de demostrar el teorema 2.2 usarem el següent resultat general per a espais de Hilbert.

Proposició 2.2 *Sigui E un espai de Hilbert i sigui $j : E \hookrightarrow E'$ una inclusió densa i contínua que suposarem simètrica, és a dir, $j(u)[v] = j(v)[u]$. Sigui $S : E \to E'$ un operador bicontinu tal que la forma quadràtica $S(u)[v]$ sigui simètrica i coerciva, és a dir, $S(u)[v] = S(v)[u]$ i $S(u)[u] \geq \alpha \|u\|_E^2$ per a $\alpha > 0$, respectivament.*

Aleshores, existeix un producte escalar equivalent, $< \cdot, \cdot >_E$, tal que Sj^{-1} és un operador autoadjunt en el producte escalar dual associat a $< \cdot, \cdot >_{E'}$. A més, el primer valor del seu espectre és

$$\mu_0 = \sup_{\substack{u \in E \\ u \neq 0}} \frac{S(u)[u]}{j(u)[u]} . \tag{2.14}$$

Per tal de provar aquest resultat necessitem el lema següent.

Lema 2.2 *Sigui E un espai de Hilbert i $S : D(S) \to E$ un operador autoadjunt, positiu i invertible. Aleshores, el primer punt de l'espectre pot calcular-se indistintament per una de les dues fórmules següents*

$$\lambda_0 = \sup_{\substack{u \in D(S) \\ u \neq 0}} \frac{< Su, u >}{< u, u >} = \sup_{\substack{u \in E \\ u \neq 0}} \frac{< u, u >}{< S^{-1}u, u >} .$$

<u>Demostració</u>. La primera fórmula és el clàssic quocient de Rayleigh. Considerem l'operador $S^{1/2} : D(S^{1/2}) \to E$ que també és autoadjunt i invertible. Aleshores tenim

$$\begin{aligned}
\sup_{\substack{u \in D(S) \\ u \neq 0}} \frac{< Su, u >}{< u, u >} &= \sup_{\substack{u \in D(S) \\ u \neq 0}} \frac{< S^{1/2}u, S^{1/2}u >}{< S^{-1/2}S^{1/2}u, S^{-1/2}S^{1/2}u >} \\
&= \sup_{\substack{u \in D(S) \\ u \neq 0}} \frac{< S^{1/2}u, S^{1/2}u >}{< S^{-1}S^{1/2}u, S^{1/2}u >} .
\end{aligned}$$

Sigui ara $v = S^{1/2}u$. Llavors en el quocient anterior ens queda

$$\lambda_0 = \sup_{\substack{v\in D(S^{1/2})\\ v\neq 0}} \frac{< v, v >}{< S^{-1}v, v >}\,.$$

Sabem que $D(S^{1/2}) \subset E$ de manera densa i que $< v, v >$ i $< S^{-1}v, v >$ són continus, fets dels quals deduïm que

$$\lambda_0 = \sup_{\substack{v\in E\\ v\neq 0}} \frac{< v, v >}{< S^{-1}v, v >}$$

com volíem veure. ■

Demostració de la proposició 2.2. Definim

$$< u, v >_E = S(u)[v]$$

que és un producte escalar equivalent a l'original. Donats $u^* \in E'$ i $v \in E$ es té

$$u^*[v] = < S^{-1}u^*, v >_E \ .$$

Sabent això, anem a veure com és el producte escalar dual associat. Siguin $u^*, v^* \in E'$, aleshores

$$< u^*, v^* >_{E'} = < S^{-1}u^*, S^{-1}v^* >_E = u^*[S^{-1}v^*]\,.$$

Hem de veure ara que Sj^{-1} és autoadjunt en el producte dual que acabem de determinar. Primer, però, veurem que Sj^{-1} és simètric. Per a això considerem $u^*, v^* \in j(E)$. Sabem que $u^* = j(u)$ i $v^* = j(v)$ per a certes $u, v \in E$. Per definició

$$\begin{aligned} < Sj^{-1}u^*, v^* >_{E'} &= < Sj^{-1}j(u), j(v) >_{E'} = < u, S^{-1}j(v) >_E \\ &= < S^{-1}j(v), u >_E = j(v)[u] \end{aligned}$$

que estem suposant per hipòtesi que és simètric, cosa que ens dóna la simetria per a Sj^{-1}.

Per altra banda, l'operador $Sj^{-1} : j(E) \subset E' \to E'$ és un operador densament definit, ja que, per hipòtesi, la inclusió $j : E \hookrightarrow E'$ és densa. Observem, a més, que Sj^{-1} és exhaustiu ja que, per a tota $\varphi \in E'$, només cal prendre $u^* = j(u)$, amb $u = S^{-1}\varphi$, i ja tindrem $Sj^{-1}u^* = \varphi$. I pel teorema de Lax-Milgram existeix aquesta $u \in E$ tal que $Su = \varphi$.

Per tant, com Sj^{-1} és un operador densament definit, exhaustiu i simètric es conclou que Sj^{-1} és autoadjunt.

Només queda veure que el primer punt de l'espectre ve donat pel quocient (2.14). Per a això anem a usar la segona fórmula del lema 2.2, segons la qual

$$\lambda_0 = \sup_{\substack{u^* \in E' \\ u^* \neq 0}} \frac{< u^*, u^* >_{E'}}{< jS^{-1}u^*, u^* >_{E'}} = \sup_{\substack{u^* \in E' \\ u^* \neq 0}} \frac{< S^{-1}u^*, S^{-1}u^* >_E}{< S^{-1}jS^{-1}u^*, S^{-1}u^* >_E} .$$

Posant ara $v = S^{-1}u^*$ tenim

$$\lambda_0 = \sup_{\substack{v \in E \\ v \neq 0}} \frac{< v, v >_E}{< S^{-1}jv, v >_E} = \sup_{\substack{v \in E \\ v \neq 0}} \frac{S(v)[v]}{j(v)[v]}$$

tal com volíem veure. ■

Finalment, abans de demostrar el teorema 2.2, anem a provar el següent lema.

Lema 2.3 *Si $u \in W^1_p$, amb $p \geq 2$, la solució del problema*

$$\left\{ \begin{array}{rcll} \Delta\varphi - \varphi &=& u \, , & \text{a } \Omega \, , \\ \varphi_\nu &=& 0 \, , & \text{a } \partial\Omega \, , \end{array} \right. \tag{2.15}$$

pertany a l'espai W^3_p.

<u>Demostració</u>. Sigui $0 < \alpha < 1$. Considerem una successió $(u_n)_n$ de funcions de $\mathcal{C}^{1+\alpha}(\overline{\Omega})$ tals que $u_n \to u$, quan $n \to \infty$, a W^1_p. Sabem que aquesta successió existeix per densitat.

Donada $(u_n)_n$, considerem per a cada $u_n \in \mathcal{C}^{1+\alpha}(\overline{\Omega}) \subset W^1_p$ el problema (2.15) i denotem per φ_n la solució, és a dir,

$$\left\{ \begin{array}{rcll} \Delta\varphi_n - \varphi_n &=& u_n \, , & \text{a } \Omega \, , \\ (\varphi_n)_\nu &=& 0 \, , & \text{a } \partial\Omega \, . \end{array} \right. \tag{2.16}$$

És conegut que les solucions d'aquest problema satisfan que $\varphi_n \in \mathcal{C}^{3+\alpha}(\overline{\Omega})$, és a dir, que les solucions φ_n pertanyen a l'espai W_p^3, per a tota $p \geq 2$.

Veurem que la successió $(\varphi_n)_n$ és una successió de Cauchy a W_p^3. Per a això considerem la funció $\varphi_n - \varphi_m$, per a $n \neq m$, i restant els problemes que cada una d'elles satisfà s'obté que la diferència satisfà el problema

$$\left\{ \begin{array}{rcll} \Delta(\varphi_n - \varphi_m) - (\varphi_n - \varphi_m) & = & (u_n - u_m)\ , & \text{a } \Omega\ , \\ (\varphi_n - \varphi_m)_\nu & = & 0\ , & \text{a } \partial\Omega\ . \end{array} \right. \tag{2.17}$$

Com $\varphi_n - \varphi_m \in W_p^3$, podem aplicar el teorema 15.2 de [2] i obtenim la següent acotació per a la norma a W_p^3 de la diferència:

$$\|\varphi_n - \varphi_m\|_{W_p^3} \leq C \left(\|u_n - u_m\|_{W_p^1} + \|\varphi_n - \varphi_m\|_{L^p} \right)\ . \tag{2.18}$$

Veurem ara que de fet en el segon membre de la desigualtat (2.18) és el terme important a l'hora de veure que $\|\varphi_n - \varphi_m\|_{W_p^3} \to 0$ és $\|u_n - u_m\|_{W_p^1}$. És a dir, que la norma a L^p de $\varphi_n - \varphi_m$ és un terme sense massa rellevància en el moment de veure que el segon membre d'aquesta desigualtat tendeix a zero quan n i m tendeixen a infinit.

Farem un raonament de reducció a l'absurd. És a dir, com què $(u_n)_n$ és una successió de Cauchy a W_p^1 per hipòtesi, sabem que $\|u_n - u_m\|_{W_p^1} \to 0$ quan $n, m \to \infty$, i suposarem que $\|\varphi_n - \varphi_m\|_{W_p^3}$ no tendeix a zero, quan $n, m \to \infty$.

Existirà, doncs, una parcial de $(\varphi_n - \varphi_m)_{n,m}$, que fent un abús de notació la denotarem de la mateixa manera, tal que $\|\varphi_n - \varphi_m\|_{W_p^3} > \varepsilon$ per a tota $n, m > N$. Així doncs tenim una successió acotada a W_p^3 amb $\|\varphi_n - \varphi_m\|_{W_p^3} > \varepsilon$ i sabem que $W_p^3 \subset W_p^1$ de manera compacta. Per tant, existirà una parcial que denotarem per $(\psi_k)_k$ convergent a W_p^1. Sigui $\psi \in W_p^1$ aquest límit.

Sigui ara v una funció de $W_{p'}^1$, amb p' l'exponent conjugat de $p \geq 2$. Les funcions ψ_k i les funcions u_k corresponents a la parcial de $(u_n - u_m)_{n,m}$ associada a $(u_k)_k$, són funcions de l'espai W_p^1. Si multipliquem la primera equació de (2.17) per v, integrem a Ω i apliquen la fórmula de Green usant la segona equació, obtenim

$$-\int_\Omega (\nabla\psi_k \nabla v + \psi_k v)\ dx = \int_\Omega u_k v\ dx\ .$$

Prenent ara límit quan $k \to \infty$ en aquesta última igualtat obtenim per a la funció límit ψ

$$-\int_\Omega (\nabla\psi\nabla v + \psi v)\ dx = 0\ .$$

Com $p \geq 2$ l'exponent conjugat $p' \leq 2$. Per tant, $W_p^1 \subset W_{p'}^1$ i podem prendre $v = \psi$, amb la qual cosa en la darrera igualtat s'obté

$$-\int_\Omega \left((\nabla\psi)^2 + \psi^2\right)\ dx = 0\ .$$

És a dir, $\psi = 0$, o equivalentment $\varphi_n - \varphi_m \to 0$ a W_p^3. I això contradiu que $\|\varphi_n - \varphi_m\|_{W_p^3} > \varepsilon$.

Deduïm, doncs, que si $\|u_n - u_m\|_{W_p^1} \to 0$, aleshores $\|\varphi_n - \varphi_m\|_{W_p^3} \to 0$. Per tant, la successió de solucions dels problemes (2.16) formen una successió de Cauchy a W_p^3. Sigui $\overline{\varphi} \in W_p^3$ el seu límit.

Acabarem la demostració veient que $\overline{\varphi}$ és la solució del problema (2.15).

Per a això suposem que $\varphi \in W_2^1$ és la solució dèbil del problema (2.15) i que $\overline{\varphi} \in W_p^3$ és la d'abans.

Donada $w \in W_2^1$, la solució φ de (2.15) satisfà

$$-\int_\Omega (\nabla\varphi\nabla w + \varphi w)\ dx = \int_\Omega uw\, dx\ . \tag{2.19}$$

Ara, multiplicant la primera equació de (2.16) per $w \in W_2^1$, integrant a Ω, aplicant la fórmula de Green i usant la segona equació obtenim per a les φ_n una equació integral com la que satisfà φ, és a dir,

$$-\int_\Omega (\nabla\varphi_n\nabla w + \varphi_n w)\ dx = \int_\Omega u_n w\, dx\ . \tag{2.20}$$

Restant ara (2.19) i (2.20) s'obté per a la diferència

$$-\int_\Omega (\nabla(\varphi - \varphi_n)\nabla w + (\varphi - \varphi_n)w)\ dx = \int_\Omega (u - u_n)w\, dx\ . \tag{2.21}$$

on $u - u_n \in W_p^1$, $\|u - u_n\|_{W_p^1} \to 0$ quan $n \to \infty$, $\varphi_n \in W_p^3 \subset W_p^1$ i $\varphi \in W_2^1$. Com $\varphi - \varphi_n \in W_2^1$ podem posar a (2.21) $w = \varphi - \varphi_n$. Obtenim en aquest cas

$$-\int_\Omega \left((\nabla(\varphi - \varphi_n))^2 + (\varphi - \varphi_n)^2\right)\ dx = \int_\Omega (u - u_n)\,(\varphi - \varphi_n)\, dx\ .$$

Prenent límits quan $n \to \infty$ en aquesta darrera igualtat es té

$$-\int_\Omega \left((\nabla(\varphi - \overline{\varphi}))^2 + (\varphi - \overline{\varphi})^2 \right) dx = 0 \ .$$

És a dir, $\varphi - \overline{\varphi} = 0$. Per tant, la solució φ del problema (2.15) satisfà que $\varphi = \overline{\varphi} \in W_p^3$, com volíem provar. ■

Observació 2.1 Si $p = 2$, la demostració anterior és més senzilla ja que en aquest cas

$$\|\varphi\|_{L^2} \leq \|u\|_{L^2} \ ,$$

cosa que s'obté directament multiplicant la primera equació del problema per φ i, després d'aplicar la fórmula de Green, acotant per la desigualtat de Cauchy-Schwarz.

Aleshores, en la desigualtat (2.18) podem acotar directament el terme de la dreta i s'obté

$$\|\varphi_n - \varphi_m\|_{W_p^3} \leq C'\|u_n - u_m\|_{W_p^1} \ .$$

Per tant, com per hipòtesi $\|u_n - u_m\|_{W_p^1} \to 0$ quan $n, m \to \infty$, deduïm que la successió $(\varphi_n)_n$ és una successió de Cauchy a W_p^3.

La resta de la demostració s'acabaria de la mateixa manera.

Aplicarem tot seguit aquests darrers resultats a la prova del teorema 2.2.

<u>Demostració del Teorema 2.2</u>. Sigui T l'operador lineal

$$\begin{array}{rcl} T \ : \ W_2^1 & \longrightarrow & (W_2^1)' \\ u & \longrightarrow & T(u) \end{array}$$

definit per

$$\begin{array}{rcl} T(u) \ : \ W_2^1 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ v & \longrightarrow & \int_\Omega(-\nabla u \nabla v - Kuv + g'(u_0)uv)\, dx + \int_{\partial\Omega} f'(u_0)uv\, d\ell \end{array}$$

on K és la mateixa del lema 2.1. Sigui j la inclusió habitual de W_2^1 en $(W_2^1)'$, $W_2^1 \subset L^2 = (L^2)' \subset (W_2^1)'$. D'ara endavant, usant aquesta inclusió i sempre i quan no hi pugui haver confusió, usarem u en lloc de ju i T en lloc de Tj^{-1}. Notem que T és una extensió a W_2^1 de l'operador $\overline{B} = B + KI$ definit a W_p^1, amb $p > n$.

De la proposició 2.2 anterior obtenim que el primer valor propi de T és

$$\begin{aligned}
\mu_0 &= \sup_{\substack{u\in W_2^1\\ u\neq 0}} \frac{T(u)[u]}{j(u)[u]} \\
&= \sup_{\substack{u\in W_2^1\\ u\neq 0}} \frac{\displaystyle\int_\Omega ((-\nabla u)^2 - Ku^2 + g'(u_0)u^2)\,dx + \int_{\partial\Omega} f'(u_0)u^2\,d\ell}{\displaystyle\int_\Omega u^2\,dx}.
\end{aligned}$$

Sabem que si λ és un valor propi de B, llavors $\lambda + K$ és valor propi de $\overline{B}$. Aleshores, allò que volem demostrar es redueix ara a provar que $\mu_0 + K = \lambda_0$, on λ_0 denota com a l'enunciat del teorema el primer valor propi de B. És a dir, caldrà veure que μ_0 és també el primer valor propi de $\overline{B}$, d'on es deduirà que el primer valor propi de l'espectre de B, λ_0, ve donat per (2.13). Per veure això el que farem és demostrar que l'espectre de T, $\sigma(T)$, i l'espectre de $\overline{B}$, $\sigma(\overline{B})$, són iguals tot i estar definits en espais diferents.

Observem que tant $\sigma(\overline{B})$ com $\sigma(T)$ consten únicament de valors propis. Per a l'espectre de $\overline{B}$ ho vàrem veure en la proposició 2.1 i per a l'espectre de T podem usar els mateixos arguments.

A l'hora de veure que $\sigma(T) = \sigma(\overline{B})$, observem que la inclusió $\sigma(\overline{B}) \subset \sigma(T)$ és immediata: si λ és un valor propi de $\overline{B}$ a W_p^1, com $W_p^1 \subset W_2^1$ ja que $p > n \geq 2$, λ és també un valor propi de T a W_2^1.

La resta de la demostració la dedicarem a veure la inclusió contrària: $\sigma(T) \subset \sigma(\overline{B})$. Sigui λ un valor propi de T amb funció pròpia $u \in W_2^1$. El que farem en tot el que ens queda és veure que, de fet, $u \in W_p^1$ per a tota $p \geq 2$. Amb això tindrem què té sentit $\overline{B}u$ i, a més, $\overline{B}u = Tu = \lambda u$, amb la qual cosa haurem vist que λ és també valor propi de $\overline{B}$ amb funció pròpia $u \in W_p^1$. Per tant, $\sigma(T) \subset \sigma(\overline{B})$, cosa que acabarà la demostració.

El pas de provar que una funció pròpia u de W_2^1 és, de fet, una funció pròpia a W_p^1, amb $p > n$, no és una cosa trivial. El que farem és donar un procés iteratiu, començant a $p_0 = 2$, que consistirà en trobar una successió creixent d'índexos $p_k > 2$ i que no s'acumulin mai, de manera que en cada pas de la iteració s'aconseguirà provar que $u \in W_p^1$, per a tota $p < p_k$. Veurem que el nombre de passos que caldrà depèn de la dimensió n fixada.

Amb més precisió, començarem amb $p_0 = 2$ i veurem que si $u \in W_2^1$ és una funció pròpia de T, aleshores $u \in W_p^1$ per a tota $p > 2$ si $n \leq 4$ i $u \in W_p^1$ per a tota $p \in [p_0, p_1]$ si $n > 4$. Per tant, veurem que p_1 depèn de n. Llavors, suposant que $u \in W_q^1$ amb $q \in [p_{k-1}, p_k]$, amb $k \geq 1$, veurem que $u \in W_p^1$ per a tota $p \geq p_k$ si $n \leq 2p_k$ i que $u \in W_p^1$ per a $p \in [p_k, p_{k+1}]$ si $n > 2p_k$. Observem, doncs, que el procés inductiu que farem s'acabarà en el moment que la successió d'índexos trobada satisfaci que $2p_k \geq n$, fixada n i per a alguna $k \geq 1$.

Anem a veure com es poden obtenir els índexos de la successió anterior, és a dir, donada $u \in W_2^1$, com es pot anar avançant l'índex p per tal que $u \in W_p^1$.

Sigui $\overline{B}_q : W_q^1 \to (W_{q'}^1)'$, amb $q > 2$, la restricció de l'operador T a $W_q^1 \subset W_2^1$. Sabem que aquests $\overline{B}_q$ són invertibles i que, per les mateixes raons que per a $\overline{B}$, l'espectre $\sigma(\overline{B}_q)$ consta únicament de valors propis. Suposem, seguint la notació del principi de la demostració, que som capaços de provar que $j(W_{p_k}) \subset (W_{p'_{k+1}}^1)'$, per a $k = 0, 1, 2, \ldots$, amb p'_{k+1} l'exponent conjugat de p_{k+1} i $p_{k+1} > p_k$. En aquest cas, si $u \in W_{p_k}^1$ és funció pròpia de $\overline{B}_{p_k} j^{-1}$ amb valor propi λ, s'obté que $u \in W_{p_{k+1}}^1$ és funció pròpia de $\overline{B}_{p_{k+1}} j^{-1}$ amb valor propi λ. Certament, com $j(W_{p_k}^1) \subset (W_{p'_{k+1}}^1)'$, si $u \in W_{p_k}^1$, tenim $j(u) \in (W_{p'_{k+1}}^1)'$. Aleshores, com $\overline{B}_{p_{k+1}}$ és invertible, existirà alguna $v \in W_{p_{k+1}}^1$ tal que $\dfrac{1}{\lambda}\overline{B}_{p_{k+1}} v = j(u)$. D'aquí, $u = v$ a $W_{p_{k+1}}^1$ i és funció pròpia de valor propi λ.

Per tant, en cada una de les iteracions que farem per anar trobant els índexos p_k, $k \geq 0$, el que es buscarà és aconseguir que sigui cert l'encabiment $j(W_{p_k}^1) \subset (W_{p'_{k+1}}^1)'$, amb $p_0 = 2$ i $k = 0, 1, 2, \ldots$

Comencem, doncs amb el procés inductiu que hem estat explicant fins ara. El que farem és donar amb detall un pas general i després construirem la successió d'índexos $(p_k)_k$ de la qual parlàvem abans. Finalment veurem que sortint de $p_0 = 2$ podem arribar a tota $p > n$, fixada n.

Sigui $p \geq 2$ i $q > p$. Com ja hem explicat abans, ens preguntem per a quins valors de q serà certa la inclusió $j(W_p^1) \subset (W_{q'}^1)'$.

Sigui $v \in W_p^1$. Si per a tota v es satisfà

$$\int_\Omega vw\,dx \leq C\,\|w\|_{W_{q'}^1} \qquad \text{per a tota } w \in W_{q'}^1\ ,$$

amb $C = C(v)$, la inclusió $j(W_p^1) \subset (W_{q'}^1)'$ serà certa.

Donada $v \in W_p^1$ considerem el problema auxiliar següent

$$\left\{ \begin{array}{rcll} \Delta\varphi - \varphi & = & v\ , & \text{a } \Omega\ , \\ \varphi_\nu & = & 0\ , & \text{a } \partial\Omega\ . \end{array} \right. \tag{2.22}$$

Suposem que existeix $q > p$ tal que la solució φ de (2.22) pertanyi a l'espai W_q^1. Aleshores considerant una funció $w \in W_p^1 \subset W_{q'}^1$, multipliquant la primera equació de (2.22) per w, integrant a Ω i apliquant la fórmula de Green, queda

$$\int_\Omega vw\,dx = \int_\Omega (\Delta\varphi - \varphi)w\,dx = -\int_\Omega (\nabla\varphi\nabla w + \varphi w)\,dx \leq C'\,\|\varphi\|_{W_q^1}\|w\|_{W_{q'}^1}\ ,$$

usant la desigualtat de Hlder a l'última integral.

És a dir, prenent $C = C'\|\varphi\|_{W_q^1}$ tenim $j(W_p^1) \subset (W_{q'}^1)'$, amb $q > p$, com es volia, sempre i quan la solució φ de (2.22) pertanyi a W_q^1.

Ara bé, donat el problema (2.22) amb $v \in W_p^1$, hem vist en el lema 2.3, que la solució φ pertany a W_p^3. Els encabiments de Sobolev (vegi's [1]), ens donen

$$W_p^3 \subset W_q^1 \quad \text{si} \left\{ \begin{array}{ll} q \geq p & \text{si } n \leq 2p\,, \\ p \leq q \leq \dfrac{np}{n-2p} & \text{si } n > 2p\,. \end{array} \right.$$

Per tant, la solució $\varphi \in W_q^1$ per a q les de la inclusió anterior, que veiem que depenen de n.

Aleshores, si $n \leq 2p$ s'obté que $u \in W_q^1$ per a tota $q \geq p$. És a dir, $\sigma(T) \subset \sigma(\overline{B})$ i haurem acabat la demostració. En canvi, si $n > 2p$ només hem aconseguit provar que $\sigma(T) \subset \sigma(\overline{B}_q)$ per a tota $q \in [p, \dfrac{np}{n-2p}]$.

Així doncs, si $n > 2p$ hem avançat una mica més enllà de p, però en principi no tenim perquè haver assolit l'espai que volíem. Anem a veure que un procés iteratiu, començant a $p_0 = 2$ i usant el que acabem de fer per a $p < q$, ens dóna una successió d'índexos p_k que resulta ésser creixent i que ens permet assolir W_p^1 per a qualsevol $p \geq 2$, avançant mica en mica segons l'esquema anterior.

Anem a definir, per tant, la successió $(p_k)_k$, amb $k \geq 0$, de la qual estem parlant. Sigui $p_0 = 2$. Aleshores, si $n \leq 4$ tenim $u \in W_p^1$ per a tota $p \geq 2$. En canvi, si $n > 4$, tenim $u \in W_p^1$ només per a $p \in [2, \dfrac{np_0}{n-2p_0}]$. Definim, doncs, $p_1 = \dfrac{np_0}{n-2p_0}$. Suposem ara que $u \in W_{p_1}^1$. Aleshores, si $n \leq 2p_1$ tenim $u \in W_p^1$ per a tota $p \geq p_1$ i si $n > 2p_1$ tenim $u \in W_p^1$ per a tota $p \in [p_1, p_2]$, on $p_2 = \dfrac{np_1}{2-np_1}$. Per tant, després de k passos, partint de p_k, trobem que si $n \leq 2p_k$ es té $u \in W_p^1$ per a tota $p \geq p_k$ i si $n > 2p_k$ es té $u \in W_p^1$ per a tota $p \in [p_k, p_{k+1}]$, amb $p_{k+1} = \dfrac{np_k}{n-2p_k}$.

Per tant, la successió que estàvem buscant acabem de veure que és la següent:

$$\begin{cases} p_0 = 2 \ , \\ p_k = \dfrac{np_{k-1}}{n-2p_{k-1}} \ , \text{ per a } k \geq 0 \ . \end{cases}$$

Aturarem la iteració quan p_k sigui tal que, fixada n, $p_k \geq n/2$, ja que aleshores tindrem $u \in W_p^1$ per a tota $p \geq 2$. Cal veure, per tant, que fixada la dimensió n, les p_k formen una successió creixent i que no s'acumula. Llavors, en un nombre finit de passos, superarem $n/2$.

Sigui $f(x) = \dfrac{nx}{n-2x}$ amb $x \geq 2$. Es pot veure que mentre $2 < x < n/2$, $f(x) > \dfrac{n^2}{(n-4)^2}x$. Per tant, mentre $p_k < n/2$ tenim

$$p_k > \frac{n^2}{(n-4)^2} p_{k-1} \ , \text{ per a tota } k \geq 1 \ .$$

Aleshores,

$$p_k > \left(\frac{n}{n-4}\right)^{2k} p_0 \ .$$

Observem que $\dfrac{n^2}{(n-4)^2} > 1$ És a dir, la successió $(p_k)_k$ és més gran que una progressió geomètrica amb raó més gran que 1. De tot això es dedueix que $(p_k)_k$ és estrictament creixent i no s'acumula mai. Amb això deduïm que existeix alguna $k_0 < \infty$ tal que $p_{k_0} < n/2$ per a la qual $p_{k_0+1} \geq n/2$, és a dir, que s'assoleix $n/2$ en $k_0 + 1$ passos. Amb això s'acaba la demostració ja que, segons hem vist abans, per a aquest últim índex s'aconsegueix provar que $u \in W_p^1$, per a tota $p \geq 2$ tal i com es volia. ■

Amb la demostració del teorema 2.2 obtenim una caracterització de l'estabilitat de l'equilibri u_0 més "natural" que la donada al teorema 2.1. Aleshores, l'estabilitat de l'equilibri u_0 queda reduïda a comprovar el signe del numerador del quocient que apareix a (2.13) i que denotarem per $I(u)$.

Així doncs, si $I(u)$ és negatiu per a tota $u \in W_2^1$, tenim u_0 estable. En canvi, si existeix alguna $u \in W_2^1$ tal que $I(u)$ sigui positiu, u_0 és inestable. En aquells casos que només es pugui provar que $I(u) \leq 0$ per a tota $u \in W_2^1$, caldrà quelcom més per tal de determinar l'estabilitat de u_0.

Capítol 3

Sobre la no existència d'equilibris estables no constants

En aquesta secció anem a tornar al problema d'evolució de difusió

$$\begin{cases} u_t &= \Delta u\,, \qquad \text{a } \Omega\,, \\ u_\nu &= f(u)\,, \qquad \text{a } \partial\Omega\,, \\ u(x,0) &= u_0(x)\,, \end{cases} \tag{3.1}$$

per a un domini $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ acotat amb vora $\partial\Omega$ regular, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funció regular (ja determinarem més endavant de quina regularitat parlem) i $f(u) = f(u(x,t))$ per a tota $x \in \partial\Omega$ i $t \in \mathbb{R}$ amb $u : \overline{\Omega} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Noti's que respecte dels capítols anteriors anem a prendre $g = 0$.

De fet, nosaltres anem a buscar solucions del problema d'equilibri associat a (3.1), és a dir,

$$\begin{cases} \Delta u &= 0\,, \qquad \text{a } \Omega\,, \\ u_\nu &= f(u)\,, \quad \text{a } \partial\Omega\,. \end{cases} \tag{3.2}$$

Aquest problema té algunes solucions trivials: les solucions constants corresponents als zeros de la funció f. En aquesta secció volem donar condicions, tant sobre el domini Ω, com sobre la no linealitat de la condició de contorn f, de manera que els únics equilibris estables (vegi's capítol 2) del problema (3.1) siguin solucions constants. És a dir, sota determinades suposicions sobre f i Ω, veurem que el problema (3.2) només podrà tenir solucions estables constants que, com és clar, seran alguns dels zeros de f,

En el cas de les equacions de reacció-difusió amb condicions de contorn de Neumann homogènies

$$\begin{cases} u_t = \Delta u + f(u)\,, & \text{a } \Omega\,, \\ u_\nu = 0\,, & \text{a } \partial\Omega\,, \\ u(x,0) = u_0(x)\,, & \end{cases} \tag{3.3}$$

es coneixen alguns resultats sobre la no existència d'equilibris estables no constants per a determinats tipus de dominis Ω i de funcions f (vegi's [11], [25], [27]). Per exemple, R.G. Casten i C.J. Holland, a [11], i H. Matano, a [27], proven en el cas de dominis convexos que tota solució d'equilibri no constant del problema (3.3) és inestable, és a dir, només solucions d'equilibri constants poden ésser equilibris estables. També a [11], R.G. Casten i C.J. Holland proven el mateix resultat en el cas que f sigui una funció amb $f'' > 0$ o $f'' < 0$.

Donarem en aquesta part del treball alguns resultats, semblants als coneguts per al problema (3.3), per al problema (3.1).

En la primera secció anem a donar una acotació “a priori” de la solució sota algunes hipòtesis sobre el signe de la funció f. En la secció següent veurem que si f és una funció de Lipschitz amb constant de Lipschitz prou petita, aleshores els únics equilibris (estables i inestables) per a (3.1) són les solucions constants. Per altra banda, també veurem que només les solucions d'equilibri constants poden ésser estables per a (3.1) si f és una funció còncava o convexa. Finalment, a la tercera i última secció, veurem que aquest mateix resultat pot provar-se per a una f arbitrària si Ω és una bola a $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$.

3.1 Una acotació a priori.

En aquesta secció anem a veure que tota solució de (3.2) està acotada per sota i per sobre si suposem que per a la funció f existeixen a i b, amb $a \leq b$, tals que

$f(u) > 0$ si $u < a$ i $f(u) < 0$ si $u > b$. Notem que el que estem demanant-li a f és que tingui una forma que resulta molt freqüent en els problemes de reacció-difusió.

L'acotació de la solució de la qual parlàvem fa un moment la recollim en el següent lema:

Lema 3.1 *(Acotació a priori) Sigui f una funció tal que existeixen a i b amb $a \leq b$ tals que $f(u) > 0$ si $u < a$ i $f(u) < 0$ si $u > b$. Aleshores, tota solució u del problema* (3.2) *satisfà $a \leq u(x) \leq b$, per a qualsevol $x \in \overline{\Omega}$.*

Abans de provar aquest resultat anem a recordar l'anomenat principi del màxim de Hopf (vegi's [31], pàg. 65).

Teorema 3.1 *Suposem que u satisfà la desigualtat*

$$L[u] = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i \frac{\partial u}{\partial x_i} \geq 0$$

en un domini D en el qual L és uniformement el·líptic. Suposem que $u \leq M$ a D i que $u = M$ en un punt de la vora P. Suposem que P està a la vora d'una bola continguda a D. Si u és contínua a $D \cup P$ i existeix la derivada normal exterior $\dfrac{\partial u}{\partial \nu}$ a P, aleshores

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} > 0 \quad a\ P$$

a menys que $u \equiv M$.

<u>Demostració del lema 3.1</u>. La solució u del problema (3.2) és una funció harmònica a Ω. Pel principi del màxim per a funcions harmòniques sabem que u assoleix el seu màxim, que denotarem per M, i el seu mínim, que denotarem per m, a la vora del domini. Siguin $P, Q \in \partial\Omega$ dos punts de la frontera on s'assoleixen M i m respectivament, és a dir, $u(P) = M$ i $u(Q) = m$.

Estem sota les hipòtesis necessàries per tal d'aplicar el principi del màxim de Hopf que acabem d'enunciar, amb la qual cosa deduïm que $u_\nu(P) \geq 0$ i $u_\nu(Q) \leq 0$ o, equivalentment, $f(u(P)) \geq 0$ i $f(u(Q)) \leq 0$.

Per hipòtesi, això implica que $u(P) \in (-\infty, b]$ i $u(Q) \in [a, \infty)$. Ara bé, $u(Q) \leq u(P)$, cosa que força que $u(P) \geq a$ i $u(Q) \leq b$. Per tant, com $u(Q) \leq u(x) \leq u(P)$, per a tota $x \in \overline{\Omega}$ i $a \leq b$ deduïm que $a \leq u(x) \leq b$, per a tota $x \in \overline{\Omega}$. ■

3.2 Condicions sobre f.

Anem a veure algunes condicions sobre la funció f que fan que no existeixin equilibris estables no constants per a (3.1).

Suposarem per començar que f és una funció de Lipschitz. En primer lloc anem a suposar que f és una funció de Lipschitz a $[a, b]$. Les constants a i b són les mateixes constants de la secció anterior, si les condicions sobre f són les del lema 3.1. Suposem que la constant de Lipschitz de f a $[a, b]$ és prou petita. Aleshores, els únics equilibris són les solucions constants. Veurem que podem provar el mateix resultat si f és una funció globalment Lipschitz a $\mathbb{R}$ amb constant de Lipschitz a $\mathbb{R}$, com abans, prou petita. En el següent teorema recollim el que acabem de dir.

Teorema 3.2 *Sigui f una funció que compleix una de les dues hipòtesis següents:*

(i) f és globalment Lipschitz a $\mathbb{R}$ i Lip $(f) = \varepsilon$.

(ii) Existeixen a i b amb $a \leq b$ tals que $f(u) > 0$ si $u < a$ i $f(u) < 0$ si $u > b$, i f és de Lipschitz a $[a, b]$ amb Lip $(f) = \varepsilon$ (a $[a, b]$).

Existeix $\varepsilon_0 > 0$, que depèn únicament del domini Ω tal que si $\varepsilon \leq \varepsilon_0$, aleshores tota solució d'equilibri de (3.1) és constant.

Observem que no només els equilibris estables han d'ésser solucions constants, sinó que també els inestables ho seran, és a dir, tota solució de (3.2) ha d'ésser constant.

Abans de demostrar el teorema anem a enunciar i provar un lema previ, necessari per a la prova d'aquell.

Lema 3.2 *Si $w \in W_2^1$ i $\int_{\partial\Omega} \omega \, d\ell = 0$, aleshores*

$$\int_{\partial\Omega} \omega^2 \, d\ell \leq \frac{1}{\rho_2} \int_\Omega |\nabla\omega|^2 \, dx \ ,$$

on ρ_2 és el segon valor propi del problema de Stekloff

$$\left\{ \begin{array}{rcll} \Delta\Psi & = & 0 \ , & a\ \Omega \ , \\ \dfrac{\partial\Psi}{\partial\nu} & = & \rho\Psi \ , & a\ \partial\Omega \ . \end{array} \right. \tag{3.4}$$

<u>Demostració</u>. Siguin ρ_i, $i = 1, 2, \ldots$ els valors propis del problema de Stekloff (3.4). Sabem que $0 = \rho_1 < \rho_2 \leq \rho_3 \leq \ldots$ i que el segon valor propi es troba mitjançant el quocient

$$\rho_2 = \min_{\int_{\partial\Omega} \omega \, d\ell = 0} \frac{\displaystyle\int_\Omega |\nabla\omega|^2 \, dx}{\displaystyle\int_{\partial\Omega} \omega^2 \, d\ell}$$

(vegi's [22]). Per tant, deduïm que $\rho_2 \displaystyle\int_{\partial\Omega} \omega^2 \, d\ell \leq \int_\Omega |\nabla\omega|^2 \, dx$ si $\displaystyle\int_{\partial\Omega} \omega \ d\ell = 0$ tal i com volíem. ■

<u>Demostració del Teorema 3.2</u>. Donada u, sigui $\overline{u} = \dfrac{1}{|\partial\Omega|} \displaystyle\int_{\partial\Omega} u \, d\ell$. Considerem $v = u - \overline{u}$. Observem que $\overline{v} = 0$.

Si considerem el problema (3.2) es veu que per a aquesta v satisfà:

$$\left\{ \begin{array}{rcll} \Delta v & = & 0 \ , & \text{a } \Omega \ , \\ \dfrac{\partial v}{\partial\nu} & = & f(u) \ , & \text{a } \partial\Omega \ . \end{array} \right. \tag{3.5}$$

Si multipliquem ara la primera igualtat de (3.5) per v, integrem a Ω i usem la fórmula de Green obtenim

$$\int_\Omega |\nabla v|^2 \ dx = \int_{\partial\Omega} f(u) v \, d\ell \ .$$

Ja que suposem que Lip $(f) = \varepsilon$ a $\mathbb{R}$ en el primer cas i que Lip $(f) = \varepsilon$ a $[a,b]$ i hem vist al lema 3.1 que $a \le u \le b$ a $\overline{\Omega}$ en el segon i com $\overline{v} = 0$, tenim

$$\int_\Omega |\nabla v|^2 \, dx \le \varepsilon \int_{\partial\Omega} uv \, d\ell$$

Una altra vegada, usant que $\overline{v} = 0$, si substituïm u per $v + \overline{u}$ en aquesta darrera desigualtat obtenim

$$\int_\Omega |\nabla v|^2 \, dx \le \varepsilon \int_{\partial\Omega} v^2 \, d\ell\,.$$

I novament, del fet que $\overline{v} = 0$, el lema 3.2 ens serveix per acotar l'última desigualtat de la manera següent

$$\int_\Omega |\nabla v|^2 \, dx \le \frac{\varepsilon}{\rho_2} \int_\Omega |\nabla v|^2 \, d\ell\,.$$

D'aquí, si suposem que u és no constant, v és també no constant i, per tant, $\dfrac{\varepsilon}{\rho_2} \ge 1$, és a dir, $\varepsilon \ge \rho_2$. Llavors, si ε és prou petit arribem a contradicció, ja que ρ_2 només depèn de Ω i $\rho_2 > 0$. Per tant, en aquest cas, únicament les solucions constants poden ser solucions d'equilibri, tant les estables com les inestables. ∎

Anem a veure ara que, com en el cas del problema (3.3) ([11], teorema 3), es pot provar un resultat similar per als equilibris estables de (3.1) en el cas que f sigui una funció còncava o convexa.

Teorema 3.3 *Sigui u una solució de (3.2) que pren valors a un cert interval J. Si f és una funció còncava o convexa per a tota $x \in J$ i u és una solució d'equilibri estable, aleshores u és constant.*

Per tal de demostrar aquest resultat recordem que a la secció 2.1 del capítol 2 vàrem donar un principi d'estabilitat i inestabilitat en el teorema 2.1 que determinava el caràcter estable o inestable d'un equilibri en termes del signe del valor propi màxim de l'operador lineal que resultava de la linealització del problema. Ara bé, vàrem veure que aquest es podia determinar, de manera més natural, del que anomenàvem quocient de Rayleigh (teorema 2.2). En aquesta demostració veurem que, si se suposa u una solució no constant, aleshores som capaços de trobar alguna funció de W_2^1 per a la qual el quocient de Rayleigh és positiu, cosa que prova que no pot ésser estable, o, equivalentment, que u és inestable.

Observació 3.1 Donat $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un domini qualsevol, observem que si u_0 és una solució de *(3.2)* tal que satisfà

$$\int_{\partial\Omega} f'(u_0(x))\, dx > 0 \,,$$

aleshores, u_0 és inestable.

Per a veure-ho, només cal prendre en el quocient de Rayleigh (2.13) donat en el capítol anterior la funció $u \equiv 1$, per a la qual s'obté que el numerador

$$I(u) = \int_\Omega -(\nabla u)^2\, dx + \int_{\partial\Omega} f'(u_0) u^2\, d\ell > 0 \,, \tag{3.6}$$

és a dir, u_0 és inestable.

<u>Demostració Del Teorema 3.3</u>. Suposem que u és una solució d'equilibri no constant de (3.1), és a dir, és una solució de (3.2) no constant. Volem veure que u és inestable.

Suposem que f és convexa per a tota $x \in [a,b]$. Denotem per $I(v)$ el numerador del quocient de Rayleigh obtingut al teorema 2.2, que en el nostre cas és

$$I(v) = \int_\Omega -|\nabla v|^2\, dx + \int_{\partial\Omega} f'(u) v^2\, d\ell \,.$$

Sigui $m = \min\limits_{x\in\overline{\Omega}} u(x)$ i considerem $I(u-m)$. Pel principi del màxim de Hopf (teorema 3.1, en aquest mateix capítol) sabem que $m = u(P)$ per a alguna $P \in \partial\Omega$ i $u_\nu(P) < 0$, és a dir, $f(m) < 0$. Aleshores

$$\begin{aligned} I(u-m) &= \int_{\partial\Omega} f'(u)(u-m)^2\, d\ell - \int_\Omega |\nabla u|^2\, dx \\ &= \int_{\partial\Omega} \Big(f'(u)(u-m)^2 - f(u)u \Big)\, d\ell \,. \end{aligned}$$

Donat que u satisfà (3.2), es segueix que $\displaystyle\int_{\partial\Omega} f(u) = 0$. Llavors

$$I(u-m) = \int_{\partial\Omega} \left(f'(u)(m-u) + f(u) \right)(m-u)\, d\ell \,.$$

Com, per hipòtesi, estem suposant que f és convexa sabem que la recta $f(u) + f'(u)(m-u)$ està per sota de $f(m)$, és a dir,

$$f(u) + f'(u)(m-u) \leq f(m) < 0\,.$$

Sabem que $m - u \leq 0$. De fet, $m - u(x) < 0$ en un conjunt de valors $x \in \partial\Omega$ de mesura positiva, ja que en cas contrari u seria una solució constant.

Per tant, la convexitat de la funció juntament amb aquest darrer fet, dóna que $I(u-m) > 0$, cosa que prova que u és inestable.

Per al cas que f sigui còncava es pot fer el mateix però considerant $I(u-M)$, amb $M = \max\limits_{x\in\overline{\Omega}} u(x)$. ■

3.3 Condicions sobre el domini.

Anem a veure en aquesta secció com la geometria del domini pot influir en la no existència d'equilibris estables no constants. En el cas del problema de reacció-difusió (3.3) amb condició de contorn homegènia és conegut que totes les solucions d'equilibri estables per a dominis convexos són solucions constants. Es pot veure [11] i [27]. En particular R.G. Casten i C.J. Holland a [11] proven el següent resultat

Teorema 3.4 *Sigui Ω un domini convex de $\mathbb{R}^n$ i u una solució d'equilibri de (3.3) no constant de classe $\mathcal{C}^3(\overline{\Omega})$. Aleshores, u és inestable.*

Per tal de provar aquest resultat els autors troben una funció ω tal que $I(\omega) > 0$, on $I(\omega)$ és el numerador del quocient de Rayleigh que s'obté per al problema (3.3). En la cerca d'aquesta funció juga un paper molt important que la condició de contorn sigui homogènia. El que fan és un canvi de sistema de coordenades capaç d'aprofitar la convexitat de $\partial\Omega$.

Cal esmentar que H. Matano provà, de manera independent, a [27], el mateix resultat usant arguments anàlegs a aquells de R.G. Casten i C.J. Holland.

En el cas de condicions de contorn no lineals, la cosa no resulta tan senzilla i arguments semblants als usats per al cas homogeni no ens condueixen en lloc.

El resultat podria ser igualment cert per a problemes de difusió amb condicions de contorn no lineals com el que estem estudiant. Ara bé, els intents realitzats en aquesta direcció no han estat profitosos. No obstant això, el que sí hem obtingut és un resultat anàleg en el cas que f sigui una funció arbitrària i Ω sigui una bola a $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$.

Teorema 3.5 *Sigui Ω la bola de radi R a $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$. Aleshores les úniques solucions d'equilibri estables per al problema (3.1) són les constants.*

Observació 3.2 El cas $n = 1$ és molt diferent. Quan Ω és un interval, tal i com veiem en l'apèndix A, és possible tenir equilibris estables no constants. De fet, el cas u-dimensional està més proper als casos de dimensions més grans amb dominis connexos amb vora disconnexa, que tractarem més endavant en el capítol 4.

Per a la demostració del teorema 3.5 es necessita un resultat auxiliar referent a la simplicitat del valor propi zero de l'operador $B = DF(u_0) - A$, en el cas que el zero sigui el primer valor propi i on u_0 és una solució d'equilibri per a (3.1). Recollim aquest resultat en la proposició següent, basada en el teorema de Krein Rutman.

Proposició 3.1 *Suposem que $\lambda = 0$ és el primer valor propi de l'operador B amb funció pròpia associada u. Aleshores, λ és un valor propi algebraicament i geomètricament simple i $u(x) > 0$, per a tota $x \in \overline{\Omega}$.*

La demostració d'aquesta proposició serà una aplicació del teorema de Krein-Rutman (vegi's [13]), que recordarem seguidament, després de donar un parell de definicions.

Definició 3.1 *Diem que un conjunt tancat K en un espai de Banach X és un con a X si satisfà les tres propietats següents:*

(i) $0 \in K$,

(ii) *Si* $u, v \in K$, *aleshores* $\alpha u + \beta v \in K$, *per a qualssevol* α, $\beta \in \mathbb{R}$,

(iii) *Si* $v \in K$ *i* $-v \in K$, *aleshores* $v = 0$.

Un con $K \subset X$ *s'anomena* reproductor *si* $X = K - K$.

Definició 3.2 *Sigui* $\mathcal{B} \in \mathcal{L}(X)$ *i* K *un con a* X, *amb* X *un espai de Banach. Es diu que* $\mathcal{B}$ *és un operador* fortament positiu *si per a tota* $v \in K$, $v \neq 0$, *es té* $\mathcal{B}v \in \overset{\circ}{K}$.

Teorema 3.6 *(Teorema de Krein-Rutman).*

Sigui K *un con reproductor, amb interior* $\overset{\circ}{K} \neq \emptyset$, *i sigui* $\mathcal{B}$ *un operador compacte fortament positiu sobre* K.

Aleshores, el radi espectral de $\mathcal{B}$, $\rho(\mathcal{B})$, *és un valor propi (algebraicament i geomètricament) simple de* $\mathcal{B}$ *i els seus respectius vectors propis associats pertanyen a* $\overset{\circ}{K}$.

A més, tots els altres valors propis són estrictament menors en valor absolut que $\rho(\mathcal{B})$.

<u>Demostració de la Proposició 3.1</u>. Cosiderem l'operador

$$T : W_p^{1-1/p}(\partial\Omega) \longrightarrow W_p^{1-1/p}(\partial\Omega) ,$$

definit per $T\varphi = \gamma v$ on v és la solució del problema

$$\left\{ \begin{array}{rcll} \Delta v &=& 0\,, & \text{a } \Omega\,, \\ v_\nu + (K - f'(u_0))v &=& \varphi\,, & \text{a } \partial\Omega\,, \end{array} \right. \tag{3.7}$$

amb K una constant tal que $K - f'(u_0(x)) > 0$ per a tota $x \in \partial\Omega$. Aquí γv denota la traça de la funció v sobre $\partial\Omega$.

Sigui

$$C = \{\varphi \in W_p^{1-1/p}(\partial\Omega) \text{ tal que } \varphi(x) \geq 0 \text{ per a tota } x \in \partial\Omega\}\,.$$

És fàcil veure que C és un con reproductor, és a dir, que C és un con tal que $W_p^{1-1/p}(\partial\Omega) = C - C$ amb interior no buit, ja que, com $p > n$, és cert l'encabiment $W_p^{1-1/p}(\partial\Omega) \subset \mathcal{C}^\alpha(\partial\Omega)$ per a $0 \leq \alpha \leq 1 - n/p$. Igualment, és fàcil veure que T és un operador lineal. A més, pel principi del màxim i, donat que $K - f'(u_0) > 0$, podem veure que T és un operador fortament positiu.

Anem a veure que T és un operador compacte. Sigui $E \subset W_p^{1-1/p}(\partial\Omega)$ un subconjunt acotat i sigui $\varphi \in E$. Considerem per a aquesta φ la imatge per T, és a dir, $T\varphi = \gamma v$. De la densitat de l'encabiment $C^{1+\alpha}(\partial\Omega) \subset W_p^{1-1/p}(\partial\Omega)$, amb $0 < \alpha < 1 - n/p$ com abans, podem considerar una successió de funcions $(\varphi_n)_n$, $\varphi_n \in C^{1+\alpha}(\partial\Omega)$ amb límit φ a $W_p^{1-1/p}(\partial\Omega)$. Ara, per a cada n considerem

$$\left\{ \begin{array}{rcll} \Delta v_n &=& 0\,, & \text{a } \Omega\,, \\ (v_n)_\nu + (K - f'(u_0))v_n &=& \varphi_n\,, & \text{a } \partial\Omega\,. \end{array} \right. \tag{3.8}$$

Un resultat de [6] afirma que la solució v_n existeix i $v_n \in C^{2+\alpha}(\overline{\Omega})$. A més, pel teorema 15.2 de [2] i utilitzant arguments anàlegs a aquells usats en la demostració del lema 2.3, es pot assegurar que $(v_n)_n$ és una successió de Cauchy a W_p^2 amb límit v, essent v una solució de (3.7) i, novament els mateixos arguments i resultats de [2], ens donen

$$\| v \|_{W_p^2} \leq C \ \| \varphi \|_{W_p^{1-1/p}(\partial\Omega)} \leq C'\,,$$

C' constant, ja que $v \in \mathcal{C}^\alpha(\partial\Omega)$ i $\varphi \in E$. Així doncs, $T(E) \subset W_p^{2-1/p}(\partial\Omega)$ és acotat. Per acabar, la compacitat de l'encabiment $W_p^{2-1/p}(\partial\Omega) \subset W_p^{1-1/p}(\partial\Omega)$ implica que $T(E)$ és relativament compacte a $W_p^{1-1/p}(\partial\Omega)$. Per tant, T és un operador compacte.

Estem ara en condicions d'aplicar el teorema de Krein-Rutman a l'operador T, que diu que el radi espectral de T, $\rho(T)$, és un valor propi algebraicament i geomètricament simple.

Considerem ara els dos problemes de valor propi següents

$$\left\{ \begin{array}{rcll} \Delta u &=& \lambda u\,, & \text{a } \Omega\,, \\ u_\nu &=& f'(u_0)u\,, & \text{a } \partial\Omega\,, \end{array} \right. \tag{3.9}$$

i

$$\begin{cases} \Delta w = 0\,, & \text{a } \Omega\,, \\ w_\nu + (K - f'(u_0))w = \mu w\,, & \text{a } \partial\Omega\,. \end{cases} \tag{3.10}$$

Per al problema (3.9) sabem que els valors propis són tots reals i com per hipòtesi estem suposant que el primer valor propi de B és el zero, aquests satisfan $0 = \lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \lambda_3 \geq \ldots$. Denotarem per $u_1, u_2, u_3, \ldots$ les seves funcions pròpies. Observem que per a (3.10), $\mu = K$ és un valor propi amb funció pròpia associada u_1. Es pot veure que $\eta_n = \dfrac{1}{\mu_n}$ són valors propis de T. Aleshores, $\eta = \dfrac{1}{K}$ és un valor propi de T amb funció pròpia associada u_1.

Si integrem $(T\varphi)\varphi$ sobre $\partial\Omega$, usant (3.7) s'obté

$$\begin{aligned} \int_{\partial\Omega} (T\varphi)\varphi\, d\ell &= \int_{\partial\Omega} v(v_\nu + (K - f'(u_0))v)\, d\ell = \\ &= \int_{\partial\Omega} v v_\nu\, d\ell + \int_{\partial\Omega} (K - f'(u_0))v^2\, d\ell = \\ &= \int_{\Omega} (\nabla v)^2\, dx + \int_{\partial\Omega} (K - f'(u_0))v^2\, d\ell \geq 0\,. \end{aligned}$$

Igualment, del problema (3.9) obtenim

$$\int_\Omega \Delta u \cdot u\, dx = \int_\Omega -(\nabla u)^2\, dx + \int_{\partial\Omega} f'(u_0)u^2\, dx \leq 0$$

per a tota u, ja que $\lambda_i \leq 0$ per a tota $i \geq 1$. De les dues darreres desigualtats es dedueix

$$\int_{\partial\Omega} (T\varphi)\varphi\, d\ell \geq K \int_{\partial\Omega} v^2\, d\ell = K \int_{\partial\Omega} (T\varphi)^2\, d\ell\; j$$

per a tota φ.

Considerem ara η_i i φ_i, valors propis i funcions pròpies, respectivament, de T, és a dir, $T\varphi_i = \eta_i\varphi_i$. Aleshores,

$$\int_{\partial\Omega} \eta_i \varphi_i^2\, d\ell \geq K \int_{\partial\Omega} \eta_i^2 \varphi_i^2\, d\ell\,.$$

Si suposem que $\eta_i \neq 0$, obtenim $\eta_i \geq K\eta_i^2$, o equivalentment, $\eta_i \leq 1/K$ per a tota $i \geq 1$.

Per tant, $\eta = 1/K$ és el valor propi de T més gran, és a dir, $\rho(T) = 1/K$. D'aquí que $\eta = 1/K$ és un valor propi algebraicament i geomètricament simple.

Igualment, $\mu = K$ serà el valor propi més petit per a (3.10) i serà també un valor propi simple, així com $\lambda = 0$ per a (3.9).

Ara bé, (3.9) és el problema lineal de valor propi associat a la linealització del nostre problema, com vàrem veure a la secció 2.1. Així doncs, si $\lambda = 0 \in \sigma(B)$ hem vist que $\lambda = 0$ és un valor propi geomètricament simple de B. Cal veure, però, que és algebraicament simple. Per a això suposem que no ho és, és a dir, que existeixen $u, v \in W_p^1$, $u, v \neq 0$ i $u \neq v$, tals que $(DF(u_0) - A)u = 0$ i $(DF(u_0) - A)v = u$. De l'última igualtat s'obté

$$\int_\Omega -\nabla v \nabla u \, dx + \int_{\partial\Omega} f'(u_0)\, v\, u \, d\ell = \int_\Omega u^2 \, dx \; .$$

Ara bé, usant ara la fórmula de Green i sabent que $(DF(u_0) - A)u = 0$, deduïm que $u = 0$, és a dir, arribem a contradicció. Per tant, $\lambda = 0$ ha d'ésser un valor propi algebraicament simple.

Finalment, per tal de veure que $u(x) > 0$ per a tota $x \in \Omega$ usem el principi del màxim i novament el teorema de Krein-Rutman, que ens diu que la funció pròpia $u \in \overset{\circ}{C}$, és a dir, $u(x) > 0$ per a tota $x \in \partial\Omega$. Com, per hipòtesi, $K - f'(u_0) > 0$ el principi del màxim ens porta a concloure que $u(x) > 0$ per a tota $x \in \Omega$. Per tant, la funció pròpia associada a $\lambda = 0$ és positiva a $\overline{\Omega}$. ■

Demostració del Teorema 3.5. Si Ω és la bola de radi R a $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, la derivada normal exterior és, de fet, la derivada radial exterior i (3.2) pot escriure's

$$\begin{cases} \Delta u = 0 \, , & \text{a } \Omega \, , \\ u_r = f(u) \, , & \text{si } r = R \, . \end{cases} \tag{3.11}$$

Anem a veure primer el teorema en el cas que $n = 2$ i després per al cas general $n \geq 3$. Sigui u un punt d'equilibri no constant, és a dir, una solució de (3.11) no constant.

Cas $n = 2$. Suposem primer que u depèn únicament de r, és a dir, que $u = u(r)$. Aleshores, com $\Delta u = 0$, sabem que $u = a \ln r + b$. Si imposem que u estigui acotada quan $r = 0$, només les solucions constants poden ésser solucions de (3.11). De la condició de contorn veiem que les úniques constants possibles són els zeros de la funció f.

Suposem ara que $u = u(r,\theta)$ és solució de (3.11) i suposem que $u_\theta \neq 0$. Pot provar-se que $u(r,\theta+\varepsilon)$ és igualment solució. Aleshores, deduïm que u_θ és solució del problema

$$\left\{ \begin{array}{rcll} \Delta v & = & 0\,, & \text{a}\;\Omega\,, \\ v_r & = & f'(u)v\,, & \text{si}\; r = R\,, \end{array} \right. \tag{3.12}$$

és a dir, u_θ és una funció pròpia de valor propi 0 per al problema

$$\left\{ \begin{array}{rcll} \Delta v & = & \lambda v\,, & \text{a}\;\Omega\,, \\ v_r & = & f'(u)v\,, & \text{si}\; r = R\,. \end{array} \right. \tag{3.13}$$

Aleshores, $\lambda = 0$ és valor propi de l'operador B. Tal com s'ha vist en la proposició 3.1, si $\lambda = 0$ és el primer valor propi és simple i amb funció pròpia u_θ positiva. Ara bé, $u_\theta > 0$ contradiu la periodicitat de u respecte de la variable θ. Per tant, $\lambda = 0$ no pot ésser el primer valor propi de B, cosa que implica que existeix algun valor propi positiu, és a dir, que u és inestable.

Cas $n \geq 3$. Considerem en primer lloc com fèiem abans que la solució u depèn únicament de r, la laplaciana en polars confirma que només són possibles solucions constants. Sigui u una solució de (3.11) no constant que no depèn únicament de r. És segur que en aquest cas existiran com a mínim dos punts P_1 i P_2, amb la mateixa coordenada r, però tals que $u(P_1) \neq u(P_2)$. Considerem ara el pla descrit per P_1, P_2 i el centre de la bola. Fixat aquest pla, considerem coordenades polars sobre ell i les completem per tal que formin un sistema de coordenades ortogonals (per exemple, amb $n-2$ coordenades cartesianes ortogonals al pla fixat). Amb aquesta elecció de coordenades tenim $u_\theta \neq 0$ i, usant el mateix argument que en el cas $n = 2$, provem que tota solució d'equilibri no constant és inestable. ■

Capítol 4

Sobre l'existència d'equilibris estables no constants en dominis amb vora disconnexa

En els propers dos capítols anem a veure, bàsicament, dues famílies d'exemples d'existència de solucions d'equilibri estables no constants per al problema (3.1), afegint un paràmetre a la condició de contorn. La posició d'aquest paràmetre en la condició de contorn canvia en cada exemple i és en funció de la seva grandària que provem l'existència. L'estudi de l'existència d'equilibris estables no constants, per a $n \geq 2$, és un fenomen molt important que s'ha anomenat sovint morfogènesi o formació de patrons. Separarem l'estudi d'aquests dos casos ja que, tot i que el resultat que s'obté és el mateix, les eines emprades en cada un d'ells són molt diferents.

En aquest primer capítol anem a veure que existeixen funcions f tals que, si el domini, que denotarem per Ω, és un domini connex amb vora no connexa, és possible veure l'existència d'equilibris estables no constants.

En aquest cas, de dominis amb forats, usarem mètodes monòtons, és a dir, trobarem algunes subsolucions i algunes supersolucions que ens permetin provar l'existència d'un equilibri entre aquelles, que resultarà, més endavant, estable i no constant.

En la primera secció d'aquest capítol introduirem el problema tot descrivint amb detall el domini i la funció. Després, en una segona secció, donarem algunes definicions i alguns resultats coneguts necessaris per tal de, a la tercera i última secció d'aquest capítol, exposar els resultats que hem obtingut per a dominis amb vora disconnexa. També donarem, és clar, les demostracions d'aquests resultats.

4.1 Plantejament del problema

El problema que anem a estudiar aquest capítol és el següent

$$\begin{cases} u_t = \Delta u \,, & \text{a } \Omega \,, \\ \varepsilon u_\nu = f(u) \,, & \text{a } \partial\Omega \,, \\ u(0,x) = u_0(x) \,, \end{cases} \tag{4.1}$$

amb $\varepsilon > 0$ un paràmetre que triarem segons ens convingui més endavant.

Suposem que $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, és un domini acotat, connex, tal que la seva vora $\partial\Omega$ és regular i no connexa, però amb un nombre finit de components connexes que denotarem per $\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_N$, amb $N \geq 2$.

Suposem que $f \in \mathcal{C}^{1+\alpha}(\mathbb{R})$, $0 < \alpha < 1$. Siguin α_i, per a $1 \leq i \leq M$, els zeros de la funció f tals que $f'(\alpha_i) < 0$ per a tota i. Suposem que com a mínim n'hi ha dos, és a dir, $M \geq 2$. Bàsicament, el que anem a provar és l'existència d'alguna solució estable no constant del problema estacionari

$$\begin{cases} \Delta u = 0 \,, & \text{a } \Omega \,, \\ \varepsilon u_\nu = f(u) \,, & \text{a } \partial\Omega \,, \end{cases} \tag{4.2}$$

si ε és prou petita, molt propera a la solució de $\Delta u = 0$ a Ω amb valors constants a cada Γ_j, $j = 1, \ldots, N$, iguals a alguna α_i, suposant que com a mínim en dues components de la frontera hi ha dues constants diferents.

Observem que quan la frontera del domini que considerem és disconnexa, tal i com passa en el cas u-dimensional quan Ω és un interval, el resultat que acabem d'avançar és molt semblant al que s'obté en el cas $n = 1$. Com ja s'ha dit en algun moment anterior, l'apèndix A recull els resultats que s'obtenen per al cas de l'interval.

Tal com hem dit a la introducció del capítol, usarem mètodes monòtons, és a dir, anem a utilitzar la teoria desenvolupada en torn dels conceptes de subsolució i supersolució, que permeten provar l'existència d'equilibris estables. En el nostre cas, la forma de la subsolució i la supersolució trobades ens portarà a provar que l'equilibri estable que ens proporciona aquest mètode és no constant.

Abans de passar a donar els resultats que s'obtenen, anem a veure en la secció següent algunes definicions i resultats previs que necessitarem més endavant.

4.2 Sub i supersolucions: definicions i resultats previs

Els conceptes de subsolució i supersolució van ésser introduits per H.B. Keller, en [24], i H. Amann, en [6], per tal d'estudiar problemes el·líptics amb difusió no lineal, el primer, i l'existència de solucions positives per a problemes de valor a la frontera el·líptics no lineals, el segon. Poc després, D.H. Sattinger usarà a [32] les mateixes tècniques dels treballs de H.B. Keller i H. Amann per tal de provar l'existència i l'estabilitat de solucions de problemes de valor a la frontera parabòlics i el·líptics usant mètodes monòtons. Cal remarcar que tota solució trobada per aquest mètode és "a priori" estable.

Primerament, anem a veure com es defineixen subsolució i supersolució per al problema (4.2).

Definició 4.1 *u_0 és una supersolució de (4.2) si satisfà*

$$\left\{ \begin{array}{rcll} \Delta u_0 & \leq & 0\,, & a\,\Omega\,, \\ \varepsilon(u_0)_\nu - f(u_0) & \geq & 0\,, & a\,\partial\Omega\,, \end{array} \right. \tag{4.3}$$

i v_0 és una subsolució de (4.2) si satisfà

$$\begin{cases} \Delta v_0 \geq 0\,, & a\,\Omega\,, \\ \varepsilon(v_0)_\nu - f(v_0) \leq 0\,, & a\,\partial\Omega\,. \end{cases} \tag{4.4}$$

Observi's que les supersolucions són funcions superharmòniques i les subsolucions són subharmòniques. Si prescindíssim de les condidions de contorn i fixéssim un valor a la vora, la subsolució estaria per sota de la solució del problema de Dirichlet amb aquest valor frontera i la supersolució estaria per sobre. Ara bé, amb les condicions de contorn que apareixen a (4.3) i a (4.4) no té per què existir aquesta ordenació. El cas, però, on sí es poden trobar una subsolució v_0 i una supersolució u_0 tals que $v_0 \leq u_0$ és especialment interessant i és el que anem a considerar tot seguit.

En el següent resultat es veu sota quines condicions de regularitat, donades una subsolució i una supersolució, existeix una solució entre ambdues. El teorema que ara enunciem fou provat primer per H. Amann a [6] i més tard, D.H. Sattinger va donar, a [32], una demostració per completitud.

Teorema 4.1 *Siguin u_0 una supersolució i v_0 una subsolució del problema (4.2) tals que $u_0 \geq v_0$ i suposem que $f \in \mathcal{C}^{1+\alpha}\left(\left[\min_{\partial\Omega} v_0, \max_{\partial\Omega} u_0\right]\right)$. Aleshores, existeix una solució ω del problema (4.2) que satisfà $v_0(x) \leq w(x) \leq u_0(x)$, per a tota $x \in \overline{\Omega}$.*

A més, pot veure's, directament de la demostració d'aquest teorema, que existeixen solucions $\tilde{u}$ i $\tilde{v}$, que es poden construir a partir de u_0 i de v_0, que són solucions maximal i minimal a $v_0 \leq u \leq u_0$, respectivament, en el sentit que si ω és una solució de (4.2) tal que $v_0 \leq \omega \leq u_0$, aleshores $\tilde{v} \leq u \leq \tilde{u}$.

4.3 Existència d'equilibris estables no constants en dominis amb vora no connexa

El que pretenem en aquesta secció, per tal de provar que per al problema (4.1) existeix alguna solució d'equilibri estable i no constant, és trobar una subsolució i una supersolució per al problema estacionari (4.2). Si fóssim capaços de trobar-les, aplicant el teorema 4.1, podríem afirmar que existeix una solució de (4.2) entre la subsolució i la supersolució. Finalment veurem, usant la caracterització de l'estabilitat dels equilibris que ens dóna el quocient de Rayleigh associat a aquest problema, que la solució així trobada és no només estable sinó asimptòticament estable.

Proposició 4.1 *Sigui $\overline{u}$ la solució del problema*

$$\begin{cases} \Delta u &= 0\,, & a\,\Omega\,, \\ u_{|\Gamma_i} &= \alpha_{j(i)}\,, & 1 \leq i \leq N\,, \end{cases} \tag{4.5}$$

on $f(\alpha_{j(i)}) = 0$ amb $f'(\alpha_{j(i)}) < 0$, $N \geq 2$ i $j(k) \neq j(l)$, per a alguna k i l. Aleshores, existeixen $\varepsilon_0 > 0$ i una constant $s > 0$ tals que, si $\varepsilon \leq \varepsilon_0$, llavors $\overline{u} - s\varepsilon$ és una subsolució i $\overline{u} + s\varepsilon$ és una supersolució de (4.2).

Observació 4.1 La funció $\overline{u}$ existeix i és no constant ja que és solució de $\Delta u = 0$ a Ω amb condicions de contorn de Dirichlet que pren valors constants diferents al menys en dues de les N components de la frontera.

<u>Demostració</u>. Siguin

$$m = \max_{x \in \partial\Omega} |\overline{u}_\nu(x)| \quad \text{i} \quad M = \max_{x \in U_\delta} f'(x)\,,$$

on $U_\delta = \bigcup_{i=1}^{N} [\alpha_{j(i)} - \delta, \alpha_{j(i)} + \delta]$ i $\delta > 0$ és pren de manera que $M < 0$. Considerem, en funció d'aquestes constants m, M i δ, la següent constant

$$\varepsilon_0 = -\frac{M}{m}\,\delta\,.$$

Sigui $u = \overline{u} + \delta$. Es comprova que u satisfà el problema

$$\begin{cases} \Delta u &= 0\,, & \text{a}\,\Omega\,, \\ \varepsilon u_\nu - f(u) &= \varepsilon \overline{u}_\nu - f'(\alpha_{j(i)} + \eta(x))\delta\,, & \text{a}\,\Gamma_i\,, \end{cases} \tag{4.6}$$

per a tota $i = 1, \ldots, N$, ja que, com $f \in \mathcal{C}^{1+\alpha}$ per hipòtesi, podem escriure

$$f(\overline{u} + \delta) = f(\overline{u}) + f'(\overline{u} + \eta(x))\delta = f'(\alpha_{j(i)} + \eta(x))\delta$$

a la vora, on $\eta(x) \in [-\delta, \delta]$ i $x \in \partial\Omega$.

Aleshores, per a tota $\varepsilon \leq \varepsilon_0$, sobre $\partial\Omega$ es té

$$\begin{aligned} \varepsilon u_\nu - f(u) &= \varepsilon \overline{u}_\nu - f'(\alpha_{j(i)} + \eta(x))\delta \\ &\geq -\varepsilon|\overline{u}_\nu| - f'(\alpha_{j(i)} + \eta(x))\delta \\ &\geq -\varepsilon_0 m - f'(\alpha_{j(i)} + \eta(x))\delta \\ &= [M - f'(\alpha_{j(i)} + \eta(x))]\delta \geq 0\,. \end{aligned}$$

Prenent ara $s = -\dfrac{m}{M}$ hem vist que $\overline{u} + s\varepsilon$ és una supersolució de (4.2).

Anàlogament, considerem ara $u = \overline{u} - \delta$. Es comprova que u satisfà el problema

$$\left\{ \begin{array}{rcll} \Delta u &=& 0\,, & \text{a } \Omega\,, \\ \varepsilon u_\nu - f(u) &=& \varepsilon \overline{u}_\nu + f'(\alpha_{j(i)} + \eta(x))\delta\,, & \text{a } \Gamma_i\,, \end{array} \right. \tag{4.7}$$

per a tota $i = 1, \ldots, N$, ja que, com abans,

$$f(\overline{u} - \delta) = f(\overline{u}) - f'(\overline{u} + \eta(x))\delta = -f'(\alpha_{j(i)} + \eta(x))\delta$$

a la vora, on $\eta(x) \in [-\delta, \delta]$ i $x \in \partial\Omega$.

Aleshores, per a tota $\varepsilon \leq \varepsilon_0$ sobre $\partial\Omega$ es té

$$\begin{aligned} \varepsilon u_\nu - f(u) &= \varepsilon \overline{u}_\nu + f'(\alpha_{j(i)} + \eta(x))\delta \\ &\leq \varepsilon|\overline{u}_\nu| + f'(\alpha_{j(i)} + \eta(x))\delta \\ &\leq \varepsilon_0 m + f'(\alpha_{j(i)} + \eta(x))\delta \\ &= [-M + f'(\alpha_{j(i)} + \eta(x))]\delta \leq 0\,. \end{aligned}$$

Igual que en el cas anterior, si es pren $s = -\dfrac{m}{M}$ deduïm que $\overline{u} - s\varepsilon$ és una subsolució de (4.2). ■

Ara, com una aplicació immediata del teorema 4.1, obtenim el corol·lari següent.

Corol·lari 4.1 *Existeix una solució v de (4.2) tal que $\overline{u} - s\varepsilon \leq v \leq \overline{u} + s\varepsilon$. A més, $v = v(\varepsilon) \longrightarrow \overline{u}$ quan $\varepsilon \to 0$ a $\mathcal{C}^0(\overline{\Omega})$.*

<u>Demostració</u>. L'existència de v és una aplicació directa del teorema 4.1.

És obvi que $v(\varepsilon) \to \overline{u}$ quan $\varepsilon \to 0$ a $\mathcal{C}^0(\overline{\Omega})$ per la forma que tenen la subsolució i la supersolució. ■

Finalment, es pot veure que la solució trobada és una solució d'equilibri estable i és no constant.

Teorema 4.2 *La solució $v(\varepsilon)$ és una solució d'equilibri asimptòticament estable i no constant per al problema (4.1).*

<u>Demostració</u>. Sigui $v = v(\varepsilon)$ la solució d'equilibri de la qual parlem. El problema lineal de valor propi associat a (4.1) és

$$\begin{cases} \Delta u &= \lambda u \,, \quad \text{a } \Omega \,, \\ \varepsilon u_\nu &= f'(v) u \,, \quad \text{a } \partial\Omega \,. \end{cases} \tag{4.8}$$

El quocient de Rayleigh que en resulta en aquest cas és

$$J(u) = \frac{\displaystyle\int_\Omega -(\nabla u)^2 \, dx + \int_{\partial\Omega} \frac{1}{\varepsilon} f'(v) u^2 \, d\ell}{\displaystyle\int_\Omega u^2 \, dx} \,.$$

Hem pres ε prou petita de manera que el signe de $f'(v)$ és el mateix que el de $f'(\overline{u})$. Estem suposant que $\overline{u}_{|\Gamma_i} = \alpha_{j(i)}$ amb $f'(\alpha_{j(i)}) < 0$ per a tota i. Aleshores, $J(u) < r$ per a tota $u \in W^1_p$ i per a alguna $r < 0$.

Per tant, v és una solució d'equilibri asimptòticament estable com a conseqüència del teorema 2.2 anterior. A més, donat que $\overline{u}$ és no constant, $v(\varepsilon)$, amb $\varepsilon < \varepsilon_0$, és també no constant. ■

Capítol 5

Sobre l'existència d'equilibris estables no constants en dominis amb vora connexa

Seguint amb les qüestions del capítol 4, en aquest cinquè capítol anem a veure que també existeixen solucions d'equilibri estables no constants si considerem determinades condicions sobre f i dominis tipus "halter", és a dir, dominis resultants de la unió de dos dominis connexos disjunts a través d'un " petit pont", anomenats en la literatura dominis de tipus "dumbbell". Cal esmentar que les hipòtesis sobre f necessàries en aquest cas són lleugerament diferents a les que es necessitaren en el capítol anterior per als dominis amb vora disconnexa.

L'existència d'equilibris estables no constants per al cas dels dominis halter veurem que és una extensió dels mètodes d'un treball de H. Matano (vegi's [27]) per a una equació de reacció difusió en un domini D del mateix tipus i condicions de contorn de Neumann homogènies a la frontera ∂D.

5.1 Plantejament del problema

El problema que d'ara endavant anem a considerar és el següent

$$\begin{cases} u_t = \Delta u \,, & \text{a } D \,, \\ u_\nu = k\, f(u) \,, & \text{a } \partial D \,, \\ u(0,x) = u_0(x) \,, \end{cases} \tag{5.1}$$

on anomenem $D \subset \mathbb{R}^n$ un domini del tipus anterior i que precisarem més endavant i on ara considerem el paràmetre a l'altre costat de la condició de contorn i l'anomenem k, en lloc de ε com en la secció anterior.

L'origen de l'estudi d'aquest problema en aquest tipus de domini es troba, com hem assenyalat abans, en el treball de H. Matano (vegi's [27]), on es considera el problema parabòlic no lineal

$$\begin{cases} u_t = \Delta u + k\, f(u) \,, & \text{a } D \,, \\ u_\nu = 0 \,, & \text{a } \partial D \,, \\ u(0,x) = u_0(x) \,, \end{cases} \tag{5.2}$$

en un domini acotat $D \subset \mathbb{R}^n$. Aquest problema descriu l'evolució en el temps d'una concentració u d'una substància en un contenidor isolat que es troba sota els efectes d'una reacció no lineal, representada pel coeficient $k > 0$ i la funció f, i una difusió lineal homogènia. Obviament, els zeros de la funció f són solucions d'equilibri constants.

El resultat de H. Matano del qual parlem es refereix a l'estudi de l'existència d'equilibris estables no constants per a (5.2), per a $n \geq 2$ i que recollirem en el teorema 5.1. Abans, però, considerem la següent hipòtesi sobre la funció f:

Hipòtesi (H).- *Diem que la funció f satisfà la hipòtesi (H) si satisfà les tres propietats següents:*

(i) $f(a) = f(0) = f(b) = 0$ *per a algunes* $a < 0 < b$.

(ii) $0 < uf(u) \leq u^2$ *si* $a < u < b$ *i* $u \neq 0$.

(iii) Definint $F(u) = \int_0^u f(s)\, ds$, *suposem que* $F(b) \geq F(a)$. *(Es tractaria de manera anàloga el cas* $F(a) \geq F(b)$*).*

Teorema 5.1 *([27], teorema 6.2 i corol·lari 6.3)*

Sigui $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ una funció regular que satisfà la hipòtesi (H).

(i) Sigui $D \subset \mathbb{R}^n$ un domini acotat amb vora regular i $n \geq 2$. Siguin D_1 i D_2 dos subdominis de D amb vora regular i $\lambda_2(D_1)$ i $\lambda_2(D_2)$ els segons valors propis del problema de Neumann per a $-\Delta$ sobre D_1 i D_2.

El problema (5.2) té com a mínim una solució d'equilibri estable no constant si el conjunt

$$\Big\{ v \in \mathcal{C}^1(\overline{D}) \quad : \quad a \leq v \leq b \ a\ \overline{D}\,, \quad \int_{D_1} v < 0\,, \quad \int_{D_2} v > 0\,, \\ J(v) < \varepsilon_0 - kF(b)|D| \,\Big\}$$

és no buit, on

$$J(v) = \int_D \left(\frac{1}{2} |\nabla v|^2 - kF(v) \right) dx$$

i

$$\varepsilon_0 = F(b) \min \left\{ |D_1| \min\{k, \lambda_2(D_1)\}\,,\ |D_2| \min\{k, \lambda_2(D_2)\} \right\}\,.$$

(ii) Per a qualsevol $k > 0$ i per a f una funció arbitrària satisfent (H), existeix un domini D tal que (5.2) té algun equilibri estable no constant.

Observació 5.1 De fet, pot veure's que (ii) és una conseqüència de (i) per a un domini tipus halter construït de la següent forma: Siguin D_1 i D_2 dos dominis acotats regulars amb clausures disjuntes i tals que $\lambda_2(D_i) \geq k$, $i = 1, 2$. Aleshores el domini D es pot prendre com la unió de D_1 i D_2 per un "petit pont" regular que només ha de satisfer que tingui volum n-dimensional prou petit.

Hem de fer notar que la forma que li donem aquí a aquest resultat de H. Matano no és la que l'autor dóna a [27]. També, cal dir que la descripció del domini, si bé donem el mateix tipus de recinte que va trobar Matano, tampoc té exactament la mateixa forma que la donada per ell en el seu article. La causa d'això és que hem volgut donar a aquests resultats la forma més semblant possible, sense modificar els continguts, a la que usarem per al nostre problema. D'aquesta manera serà més senzill fer comparacions entre els dos problemes. D'altra banda també resultarà més clar, creiem, per al lector, adonar-se de les semblances i les diferències existents entre ambdós.

Anem a veure que és possible seguir un camí similar per tal de construir exemples d'existència de solucions d'equilibri estables no constants per al problema (5.1). El problema (5.1) presenta algunes semblances, com dèiem fa un moment, amb (5.2) com, per exemple, el fet que els zeros de la funció f són solucions d'equilibri constants i el fet que (5.1) pot considerar-se un problema d'evolució en el temps de la concentració d'una substància u sota els efectes d'una difusió lineal a l'interior d'un contenidor i una reacció no lineal que es produeix únicament a la vora (com, per exemple, degut a la presència d'un catalitzador).

Observem que, si D és un domini no connex, es poden construir, de manera trivial, solucions d'equilibri estables no constants assignant diferents valors constants α_i a cada component connexa, de manera que aquestes α_i siguin zeros de f amb derivada estrictament negativa i sempre i quan n'hi hagi com a mínim dues de diferents i s'assigni dos valors distints, com a mínim, a dues components diferents. L'estabilitat d'aquestes solucions es pot determinar usant el principi d'estabilitat lineal que hem donat al capítol 2, secció 2.1.

Ara bé, el que anem a estudiar en aquest moment, de manera similar al teorema de Matano, és el cas més difícil d'un domini "gairebé disconnex", construït com la unió de dos subdominis connexos amb clausures disjuntes a través d'un "petit pont" regular.

5.2 Existència d'equilibris estables no constants en dominis amb vora connexa

Tot seguit anem a veure l'existència d'equilibris estables no constants per al problema (5.1), on $D \subset \mathbb{R}^n$ és un domini regular acotat connex amb vora regular connexa ∂D. La funció $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ la suposem regular amb $f(u) =$

$f(u(x,t))$ per a $x \in \partial D$. Suposem, a més, que f satisfà, igual que per al problema (5.2), la hipòtesi (H) donada en la secció anterior.

En el cas que estudia H. Matano (vegi's [27]) se suposa que D conté dos subdominis D_1 i D_2 connexos disjunts que satisfan la segona desigualtat de Poincaré, és a dir, tals que existeixen constants positives $\lambda_2(D_1)$ i $\lambda_2(D_2)$ de manera que per a tota funció $\omega \in H^1(D_i)$ es satisfà la desigualtat

$$\frac{1}{\lambda_2(D_i)} \int_{D_i} |\nabla \omega|^2 \, dx + \frac{1}{|D_i|} \left(\int_{D_i} \omega \, dx \right)^2 \geq \int_{D_i} \omega^2 \, dx \, , \quad i = 1, 2 \, , \tag{5.3}$$

on $|D_i|$ és la mesura de Lebesgue a $\mathbb{R}^n$ de D_i. Les constants òptimes en la desigualtat anterior són els segons valors propis de $-\Delta$ amb condicions de contorn de Neumann per a cada D_i, sempre que les vores ∂D_i siguin regulars ($i = 1, 2$). Observem que $\lambda_2(D_i)$, $i = 1, 2$, són les constants, depenent del domini, que apareixien en el teorema 5.1.

Per al problema (5.1) necessitarem una nova desigualtat, semblant a l'anterior, però on ens convindrà que apareguin integrals de frontera. Vegem aquest tipus de desigualtat en el lema següent:

Lema 5.1 *Donat un domini acotat, regular, Ω, existeix una constant positiva $\rho_2(\Omega)$, que depèn únicament del domini, tal que per a tota $\omega \in W_2^1(\Omega)$ es satisfà la desigualtat*

$$\int_{\partial\Omega} \omega^2 \, d\ell \leq \frac{1}{\rho_2(\Omega)} \int_{\Omega} |\nabla \omega|^2 \, dx + \frac{1}{|\partial\Omega|} \left(\int_{\partial\Omega} \omega \, d\ell \right)^2 . \tag{5.4}$$

La constant $\rho_2(\Omega)$ òptima en la desigualtat (5.4) és el segon valor propi del problema de Stekloff

$$\left\{ \begin{array}{rcll} \Delta \omega^i & = & 0 \, , & a \, \Omega \, , \\ \omega^i_\nu & = & \rho_i \omega^i \, , & a \, \partial\Omega \, . \end{array} \right. \tag{5.5}$$

<u>Demostració</u>. Aquest lema és conseqüència immediata del lema 3.2. En efecte, donada una $\omega \in W_2^1(\Omega)$ qualsevol, considerem $u = \omega - \overline{\omega}$, on $\overline{\omega} = \dfrac{1}{|\partial\Omega|} \displaystyle\int_{\partial\Omega} \omega \, d\ell$. Pel lema 3.2, sabem que és certa la desigualtat

$$\int_{\partial\Omega} u^2 \, d\ell \leq \frac{1}{\rho_2(\Omega)} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 \, dx \, ,$$

ja que $\overline{u} = 0$, on $\rho_2(\Omega) > 0$ és el segon valor propi del problema (5.5). Aleshores, substituint u pel seu valor en termes de ω s'obté la desigualtat (5.4) com volíem provar. ■

Observació 5.2 De fet, si Γ és una porció regular de la vora $\partial\Omega$ del domini Ω, amb $|\Gamma| > 0$, la desigualtat *(5.4)* implica la següent variant per a Γ:

$$\int_\Gamma \omega^2 \, d\ell \leq \frac{1}{\rho_2(\Omega)} \int_\Omega |\nabla \omega|^2 \, dx + \frac{1}{|\Gamma|} \left(\int_\Gamma \omega \, d\ell \right)^2 . \tag{5.6}$$

En efecte, si $u \in W_2^1(\Omega)$ satisfà $\displaystyle\int_\Gamma u \, d\ell = 0$, tenim

$$\int_{\partial\Omega} u^2 \, d\ell \leq \frac{1}{\rho_2(\Omega)} \int_\Omega |\nabla u|^2 \, dx + \frac{1}{|\partial\Omega|} \left(\int_{\partial\Omega\setminus\Gamma} u \, d\ell \right)^2 . \tag{5.7}$$

Ara bé, per la desigualtat de Cauchy-Schwarz, es satisfà

$$\left(\int_{\partial\Omega\setminus\Gamma} u \, d\ell \right)^2 \leq |\partial\Omega \setminus \Gamma| \int_{\partial\Omega\setminus\Gamma} u^2 \, d\ell \, .$$

Substituint ara aquesta desigualtat a (5.7), s'obté

$$\begin{aligned} \int_{\partial\Omega} u^2 \, d\ell &\leq \frac{1}{\rho_2(\Omega)} \int_\Omega |\nabla u|^2 \, dx + \frac{|\partial\Omega \setminus \Gamma|}{|\partial\Omega|} \int_{\partial\Omega\setminus\Gamma} u^2 \, d\ell \\ &\leq \frac{1}{\rho_2(\Omega)} \int_\Omega |\nabla u|^2 \, dx + \int_{\partial\Omega\setminus\Gamma} u^2 \, d\ell \, . \end{aligned}$$

Agrupant integrals en aquestes últimes desigualtats resulta

$$\int_\Gamma u^2 \, d\ell \leq \frac{1}{\rho_2(\Omega)} \int_\Omega |\nabla u|^2 \, dx \, , \tag{5.8}$$

sempre i quan $\displaystyle\int_\Gamma u \, d\ell = 0$.

Finalment, donada qualsevol $\omega \in W_2^1(\Omega)$, considerem $u = \omega - \overline{\omega}$, on $\overline{\omega}$ denota $\displaystyle\frac{1}{|\Gamma|} \int_\Gamma \omega \, d\ell$. Clarament, $\overline{u} = 0$ i estem en condicions d'aplicar la desigualtat (5.8), la qual, després de petites operacions dóna la desigualtat (5.6) que volíem provar.

Observació 5.3 Donat un domini $D \subset \mathbb{R}^n$, sigui $\overline{D}$ el domini que s'obté de D per una homotècia de raó R. Siguin $\rho_2 = \rho_2(D)$ i $\overline{\rho_2} = \rho_2(\overline{D})$. Aleshores, $\rho_2 = \overline{\rho_2}R$.

En efecte, si usem que ρ_2 i $\overline{\rho_2}$ són les constants òptimes en les desigualtats

$$\int_{\partial D} w^2 \, d\ell \leq \frac{1}{\rho_2} \int_D (\nabla w)^2 \; dx + \frac{1}{|\partial D|} \left(\int_{\partial D} w \, d\ell \right)^2 \tag{5.9}$$

i

$$\int_{\partial \overline{D}} \overline{w}^2 \, d\ell \leq \frac{1}{\overline{\rho_2}} \int_{\overline{D}} (\nabla \overline{w})^2 \; dx + \frac{1}{|\partial \overline{D}|} \left(\int_{\partial \overline{D}} \overline{w} \, d\ell \right)^2 . \tag{5.10}$$

Sigui $\overline{x} = Rx$, per a $x \in D$ i $\overline{x} \in \overline{D}$, i $\overline{w}(\overline{x}, \overline{y}) = w(\overline{x}/R, \overline{y}/R)$, fent un canvi de variable a (5.9) obtenim que $\overline{\rho_2} \geq \rho_2/R$ i fent-lo a (5.10) obtenim que $\overline{\rho_2} \leq \rho_2/R$. Per tant, $\overline{\rho_2} = \rho_2/R$.

Hi ha diferents autors (vegi's [22], [26]) que, en treballs relatius a membranes i valors propis, donen cotes i aproximacions numèriques del primer valor propi del problema de Stekloff. Així doncs, en [26], per exemple, podem trobar que $\rho_2 = 1/R$ quan D és un disc a $\mathbb{R}^2$ de radi R. També es troben de manera implícita el primer valor propi per al cas d'un rectangle qualsevol, juntament amb unes quantes aproximacions numèriques dels mateixos.

Introduïm ara el funcional d'energia associat a (5.1)

$$J(u) = \int_D \frac{1}{2} |\nabla u|^2 \, dx - \int_{\partial D} k \, F(u) \, d\ell \, , \tag{5.11}$$

on $F(u) = \displaystyle\int_0^u f(s) \, ds$ com abans. Suposem que f és de classe $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Proposició 5.1 *Si f és una funció de classe $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, el funcional d'energia $J : W_p^1 \longrightarrow \mathbb{R}$ és un funcional continu dues vegades derivable amb continuïtat.*

<u>Demostració</u>. Suposem que $u, v \in W_p^1$ són tals que $\|u - v\|_{W_p^1} \leq \delta$. Volem veure que, donat $\varepsilon > 0$ qualsevol, $|J(u) - J(v)| < \varepsilon$ si s'ha triat adequadament

$\delta = \delta(\varepsilon)$.

$$\begin{aligned} |J(u) - J(v)| &\leq \frac{1}{2}\int_D (|\nabla u|^2 - |\nabla v|^2)\, dx + k \int_{\partial D} |F(u) - F(v)|\, d\ell \\ &= \frac{1}{2}\int_D |\nabla u - \nabla v|\, |\nabla u + \nabla v|\, dx \\ &+ k \int_{\partial D} \left| \int_0^u f(s)\, ds - \int_0^v f(s)\, ds \right| d\ell = I_1 + I_2\,. \end{aligned}$$

Anem a acotar ara independentment I_1 i I_2. Comencem per I_2.

$$\begin{aligned} \frac{1}{k} I_2 &= \int_{\partial D} \left| \int_0^u f(s)\, ds - \int_0^v f(s)\, ds \right| d\ell = \int_{\partial D} \left| \int_v^u f(s)\, ds \right| d\ell \\ &\leq K(f) \sup\nolimits_{x\in\partial D} |u(x) - v(x)| \cdot |\partial D| \leq K(f)\, |\partial D| \|u - v\|_{\mathcal{C}(\overline{D})} \\ &\leq K(f)\, |\partial D| \|u - v\|_{W_p^1(D)}\,, \end{aligned}$$

usant que $W_p^1(D) \subset \mathcal{C}(\overline{D})$, ja que $p > n$.

Per al sumand I_1 tenim

$$\begin{aligned} I_1 &= \frac{1}{2}\int_D |\nabla u - \nabla v|\, |\nabla u + \nabla v|\, dx \\ &\leq \frac{1}{2}\left[\int_D |\nabla u|\, |\nabla u - \nabla v|\, dx + \int_D |\nabla v|\, |\nabla u - \nabla v|\, dx\right] \\ &\leq \frac{1}{2}\left[\left(\int_D |\nabla u|^2\, dx\right)^{1/2} + \left(\int_D |\nabla v|^2\right)^{1/2} dx\right] \left(\int_D |\nabla u - \nabla v|^2\right)^{1/2} \end{aligned}$$

usant la desigualtat de Cauchy-Schwarz ja que $W_p^1 \subset W_2^1$, per a $p \geq 2$.

Si suposem $\|u - v\|_{W_p^1} \leq \delta$, del fet que $W_p^1 \subset W_2^1$, deduïm que també $\|u-v\|_{W_2^1} \leq \delta$, és a dir, en particular, $\|\nabla u - \nabla v\|_{L^2} \leq \delta$. A més, si $\|\nabla u\|_{L^2} \leq C$ tenim $\|\nabla v\|_{L^2} \leq C + \delta$. Aleshores,

$$I_1 \leq K(\delta)\|\nabla u - \nabla v\|_{L^2} \leq K(\delta)\|u - v\|_{W_2^1} \leq C(\delta)\|u - v\|_{W_p^1}\,.$$

Aleshores, donat $\varepsilon > 0$ qualsevol, existeix $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ tal que si u i v són tals que $\|u - v\|_{W_p^1} < \delta$,

$$|J(u) - J(v)| \leq C\|u - v\|_{W_p^1} < \varepsilon\,,$$

cosa que prova que J és un funcional continu de W_p^1 en $\mathbb{R}$.

Anem a veure ara que J és derivable. Per a això anem a comprovar que $DJ(u) \in \mathcal{L}(W_p^1, \mathbb{R})$ definit per

$$\begin{array}{rcl} DJ(u) \; : \; W_p^1 & \to & \mathbb{R} \\ h & \to & \int_D \nabla u \nabla h \, dx - \int_{\partial D} k\, f(u)\, h \, d\ell \end{array}$$

correspon a la derivada del funcional J. És a dir, anem a veure en primer lloc que

$$\frac{|J(u+h) - J(u) - DJ(u)h|}{\|h\|_{W_p^1}} \longrightarrow 0 \tag{5.12}$$

si $\|h\|_{W_p^1} \to 0$.

Considerem el numerador. Podem acotar-lo de la forma següent:

$$\begin{aligned} |J(u+h) - J(u) - DJ(u)h| &= \left| \int_D \frac{1}{2} \left(|\nabla(u+h)|^2 - |\nabla u|^2 - 2\nabla u \nabla h \right) dx \right. \\ &- \left. \int_{\partial D} k \left(\int_0^{u+h} f(s)\, ds - \int_0^u f(s)\, ds - f(u)h \right) d\ell \right| \\ &\leq \frac{1}{2} \int_D |\nabla h|^2 \, dx + k \int_{\partial D} \left| \int_u^{u+h} f(s)\, ds - f(u)h \right| d\ell \\ &\leq \frac{1}{2} \|h\|^2_{W_2^1} + k \int_{\partial D} \left| \int_u^{u+h} (f(s) - f(u))\, ds \right| d\ell \\ &\leq C\, \|h\|^2_{W_p^1} + k\, K(f)\, |\partial D| \sup_{x \in \partial D} |h(x)|^2 \\ &\leq C' \, \|h\|^2_{W_p^1} \, . \end{aligned}$$

Per tant, amb això comprovem que es satisfà (5.12), és a dir, que J és derivable. Veurem ara que $DJ(u)$ és contínua. Donada $\varepsilon > 0$ anem a veure que existeix $\delta > 0$, $\delta = \delta(\varepsilon)$ tal que si $\|u - v\|_{W_p^1} < \delta$ aleshores $\|DJ(u) - DJ(v)\|_{\mathcal{L}(W_p^1, \mathbb{R})} < \varepsilon$.

$$\begin{aligned} \|DJ(u) - DJ(v)\|_{\mathcal{L}(W_p^1,\mathbb{R})} &= \sup_{\|h\|_{W_p^1} \leq 1} |DJ(u)h - DJ(v)h| \\ &= \sup_{\|h\|_{W_p^1} \leq 1} \left| \int_D (\nabla u - \nabla v) \nabla h \, dx - \int_{\partial D} k\, (f(u) - f(v))\; h \, d\ell \right| \\ &\leq \sup_{\|h\|_{W_p^1} \leq 1} \Big(\|\nabla u - \nabla v\|_{W_2^1} \, \|\nabla h\|_{W_2^1} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+ \quad k\,K(f)\,\|h\|_{W_p^1} \sup_{x\in\partial D} |u(x)-v(x)|\,|\partial D|\Big) \\
&\le \quad (C + k\,K(f)\,|\partial D|)\,\|u-v\|_{W_p^1} < \varepsilon
\end{aligned}
$$

si δ és prou petit. Per tant, acabem de veure que el funcional $J \in \mathcal{C}^1$.

Finalment queda veure que $DJ(u)$ és derivable i la seva derivada és contínua. Com abans anem a veure primer de tot que $D^2J(u) \in \mathcal{L}(W_p^1, \mathcal{L}(W_p^1, \mathbb{R}))$, definida per

$$
\begin{array}{rccl}
D^2J(u)v & : & W_p^1 & \to \mathbb{R} \\
 & & w & \to \int_D \nabla v \nabla w\,dx - \int_{\partial D} k\,f'(u)\,v\,w\,d\ell =: D^2J(u)(v,w)
\end{array}
$$

correspon a la segona derivada de J. És a dir, hem de comprovar que es satisfà

$$
\frac{\|DJ(u+h) - DJ(u) - D^2J(u)h\|_{\mathcal{L}(W_p^1,\mathbb{R})}}{\|h\|_{W_p^1}} \longrightarrow 0 \tag{5.13}
$$

quan $\|h\|_{W_p^1} \to 0$. Vegem-ho:

$$
\begin{aligned}
&\|DJ(u+h) - DJ(u) - D^2J(u)h\|_{\mathcal{L}(W_p^1,\mathbb{R})} \\
&\quad = \sup_{\|v\|_{W_p^1}\le 1} \Big| DJ(u+h)v - DJ(u)v - D^2J(u)(h,v) \Big| \\
&\quad = \sup_{\|v\|_{W_p^1}\le 1} \Big| \int_D \left(\nabla(u+h)\nabla v - \nabla u \nabla v - \nabla h \nabla v\right)\,dx \\
&\quad - \quad k \int_{\partial D} (f(u+h)v - f(u)v - f'(u)hv)\,d\ell \Big| \\
&\quad \le \sup_{\|v\|_{W_p^1}\le 1} k \int_{\partial D} |f(u+h) - f(u) - f'(u)h|\,|v|\,d\ell \\
&\quad \le \sup_{\|v\|_{W_p^1}\le 1} k \int_{\partial D} |f'(\eta) - f'(u)|\,|h|\,|v|\,d\ell \\
&\quad \le k \sup_{\|v\|_{W_p^1}\le 1} \left(\|h\|_{W_p^1} \|v\|_{W_p^1} |\partial D| \sup_{x\in\partial D} |f'(\eta(x)) - f'(u(x))| \right) \\
&\quad \le k\,|\partial D|\,\|h\|_{W_p^1} \sup_{x\in\partial D} |f'(\eta(x)) - f'(u(x))|\,,
\end{aligned}
$$

on hem usat que f és de classe $\mathcal{C}^1$. Està clar que $\sup_{x\in\partial D} |f'(\eta(x)) - f'(u(x))| \to 0$ quan $\|h\|_{W_p^1} \to 0$ ja que η és tal que $u(x) \le \eta(x) \le u(x) + h(x)$, per a tota $x \in \partial D$, i usant la continuïtat de f'.

Per tant, es satisfarà (5.13) quan $\|h\|_{W_p^1} \to 0$, cosa que prova que J és derivable dues vegades. Només ens queda veure per tal d'acabar la demostració de la proposició que $D^2 J$ és contínua. Per a això, tal com fèiem abans, donada $\varepsilon > 0$ qualsevol anem a veure que existeix $\delta > 0$, $\delta = \delta(\varepsilon)$ tal que si $\|u - \overline{u}\|_{W_p^1} < \delta$ aleshores $\|D^2 J(u) - D^2 J(\overline{u})\|_{\mathcal{L}(W_p^1, \mathcal{L}(W_p^1, \mathbb{R}))} < \varepsilon$. Vegem-ho:

$$\begin{aligned}
&\|D^2 J(u) - D^2 J(\overline{u})\|_{\mathcal{L}(W_p^1, \mathcal{L}(W_p^1, \mathbb{R}))} \\
&\quad = \sup_{\|v\|_{W_p^1} \le 1} \sup_{\|w\|_{W_p^1} \le 1} |D^2 J(u)(v, w) - D^2 J(\overline{u})(v, w)| \\
&\quad \le \sup_{\|v\|_{W_p^1} \le 1} \sup_{\|w\|_{W_p^1} \le 1} k \int_{\partial D} |f'(u) - f'(\overline{u})| \, |v| \, |w| \, d\ell \\
&\quad \le k \, |\partial D| \sup_{x \in \partial D} |f'(u(x)) - f'(\overline{u}(x))| < \varepsilon \,,
\end{aligned}$$

si es pren δ prou petita. Observem que en la última desigualtat hem usat arguments anàlegs als usats anteriorment per tal de provar que DJ era contínua així com que f és de classe $\mathcal{C}^1$. Per tant, amb això hem vist que J és dues vegades derivable amb continuïtat, cosa que acaba la prova de la proposició. ∎

Vàrem veure al capítol 1, teorema 1.3, que si u és una solució de (5.1), aleshores u és derivable respecte de t amb valors a W_p^1, per a $t > 0$. Aleshores, podem veure per al funcional d'energia J el següent resultat.

Proposició 5.2 *El funcional d'energia $J(u)$ definit a (5.11) és estrictament decreixent en el temps, llevat dels equilibris.*

<u>Demostració</u>. Per tal de veure-ho, derivem respecte de t el funcional $J(u)$, cosa que podem fer gràcies a què la derivada parcial $u_t \in W_p^1$. S'obté

$$\frac{d}{dt} J(u) = \int_D \nabla u \cdot \nabla u_t \, dx - k \int_{\partial D} f(u) u_t \, d\ell \,.$$

Com u és solució de (5.1) i $p \ge 2$, podem aplicar la fórmula de Green i obtenim

$$\frac{d}{dt} J(u) = - \int_{\partial D} u_t^2 \, d\ell \le 0$$

per a tota u i es satisfà la igualtat només quan $u_t = 0$, és a dir, només quan u és una solució d'equilibri. ■

El principal resultat d'aquesta secció el recollim en el següent teorema. Observem que pot comparar-se directament amb la part (i) del teorema de H. Matano 5.1 donat anteriorment.

Teorema 5.2 *Sigui $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funció regular que satisfà la hipòtesi (H) anterior. Sigui $D \subset \mathbb{R}^n$, amb $n \geq 2$, un domini acotat regular, amb vora ∂D també regular. Siguin D_1 i D_2 dos subdominis de D amb vores ∂D_i regulars, $i = 1, 2$. Siguin Γ_i porcions regulars de $\partial D_i \cap \partial D$ amb $|\Gamma_i| > 0$, $i = 1, 2$. Triem $p > n$, de manera que serà cert l'encabiment $W_p^1(D) \subset \mathcal{C}(\overline{D})$.*

Aleshores, el problema (5.1) té com a mínim una solució d'equilibri estable no constant si el conjunt

$$R = \Big\{ v \in W_p^1(D) : a \leq v \leq b \ \text{a} \ \overline{D} \, ,$$

$$\int_{\Gamma_1} v \, d\ell < 0 \, , \int_{\Gamma_2} v \, d\ell > 0 \, , \; J(v) < \varepsilon_0 - k \, F(b) \, |\partial D| \Big\}$$

és no buit, on $J(v)$ és el funcional d'energia (5.11) i

$$\varepsilon_0 = F(b) \min \left\{ |\Gamma_1| \min\{k, \rho_2(D_1)\} \, , \, |\Gamma_2| \min\{k, \rho_2(D_2)\} \right\} \, .$$

Observació 5.4 Hi ha algunes diferències naturals entre la demostració del teorema *5.2* i aquella de H. Matano, degudes, evidentment, a les diferències entre el problema *(5.2)* i el problema *(5.1)*. Ara bé, a part d'això, volem esmentar una diferència notable, referent a les tècniques usades per tal de demostrar els dos resultats. En la prova del nostre teorema usarem un argument basat en la u-dimensionalitat d'una varietat central. En canvi, en la demostració de (i), H. Matano usa una propietat de monotonia del flux juntament amb el lema de Zorn.

DEMOSTRACIÓ DEL TEOREMA 5.2. La demostració que anem a veure és la unió de la prova de tres resultats que enunciarem al llarg de la demostració, dividint, per aquesta raó, la prova en tres parts o passos.

Pas 1.- *El conjunt R és positivament invariant sota el flux $T(t)$.*

Aquest resultat és conseqüència del principi del màxim, del fet que $J(u)$ decreix en el temps (proposició 5.2) i del fet que D_1 i D_2 són dos subdominis de D per als quals es satisfà la desigualtat (5.6).

Donada una condició inicial $u_0 \in R$, donat que $a \leq u_0 \leq b$, el principi del màxim implica que $a \leq T(t)u_0 \leq b$, per a tota $t \geq 0$.

Suposem ara que existeix una $t_i > 0$, $i = 1$ o 2, tal que $\int_{\Gamma_i} T(t)u_0 \, d\ell = 0$, per a $t = t_i$ i per a $i = 1$ o $i = 2$. Sigui $u_i =: T(t_i)u_0$. Apliquem ara la desigualtat (5.6), per a la funció u_i, al subdomini D_i.

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_i} u_i^2 \, d\ell &\leq \frac{1}{\rho_2(D_i)} \int_{D_i} |\nabla u_i|^2 \, dx + \frac{1}{|\Gamma_i|} \left(\int_{\Gamma_i} u_i \, d\ell \right)^2 \\ &= \frac{1}{\rho_2(D_i)} \int_{D_i} |\nabla u_i|^2 \, dx \, . \end{aligned}$$

Per tant,

$$\int_{D_i} |\nabla u_i|^2 \, dx \geq \rho_2(D_i) \int_{\Gamma_i} u_i^2 \, d\ell \geq 2\rho_2(D_i) \int_{\Gamma_i} F(u_i) \, d\ell \, . \tag{5.14}$$

Considerem ara $J(u_i)$:

$$\begin{aligned} J(u_i) &= \frac{1}{2} \int_D |\nabla u_i|^2 \, dx - \int_{\partial D} kF(u_i) \, d\ell \\ &= \frac{1}{2} \int_{D \setminus D_i} |\nabla u_i|^2 \, dx - \int_{\partial D \setminus \Gamma_i} kF(u_i) \, d\ell + \frac{1}{2} \int_{D_i} |\nabla u_i|^2 \, dx \\ &- \int_{\Gamma_i} kF(u_i) \, d\ell \\ &\geq \frac{1}{2} \int_{D_i} |\nabla u_i|^2 \, dx - k \, F(b) \, |\partial D \setminus \Gamma_i| - \int_{\Gamma_i} kF(u_i) \, d\ell \, . \end{aligned}$$

Usant la desigualtat (5.14) ens queda

$$J(u_i) \geq \rho_2(D_i) \int_{\Gamma_i} F(u_i) \, d\ell - kF(b)|\partial D \setminus \Gamma_i| - \int_{\Gamma_i} kF(u_i) \, . \tag{5.15}$$

Ara bé, hem vist a la proposició 5.2 que J és decreixent en t i, per tant,

$$J(u_i) < \varepsilon_0 - kF(b)|\partial D|\,, \tag{5.16}$$

ja que u_0 satisfà la mateixa desigualtat en ésser un element de R.

Unint ara les desigualtats (5.15) i (5.16) obtenim

$$(\rho_2(D_i) - k)\int_{\Gamma_i} F(T(t_i)u_0)\,d\ell < \varepsilon_0 - kF(b)|\Gamma_i|\,,$$

o, equivalentment,

$$\begin{aligned} \varepsilon_0 &> (\rho_2(D_i) - k)\int_{\Gamma_i} F(T(t_i)u_0)\,d\ell + kF(b)|\Gamma_i| \\ &\geq F(b)|\Gamma_i|\min\{k\,,\ \rho_2(D_i)\}\,, \end{aligned}$$

que és una contradicció amb la definició de la ε_0.

Finalment, com $J(u)$ decreix en el temps l'última condició que apareix a R es satisfà, amb la qual cosa queda provat que R és invariant sota $T(t)$.

Pas 2.- *Si R és no buit, aleshores l'interior de R és també no buit i el mínim absolut del funcional J en R s'assoleix (com a mínim) en un punt (d'equilibri) e_0, el qual és un punt interior de R.*

Diem que e_0 és un punt d'equilibri de (5.1) si satisfà

$$\left\{\begin{array}{rcll} \Delta e_0 &=& 0\,, & \text{a } D\,, \\ (e_0)_\nu &=& kf(e_0)\,, & \text{a } \partial D\,. \end{array}\right. \tag{5.17}$$

Sigui E el conjunt d'equilibris de (5.1).

Si cosiderem $R\cap E$, es pot veure que és un conjunt relativament compacte a W_p^1. Sabem que $T(t)$ és compacte (teorema 2.1) i és fàcil veure que $R\cap E$ és un conjunt acotat i positivament invariant, ja que acabem de veure que R ho és. Aleshores, com $R\cap E = T(t)(R\cap E)$, és un subconjunt a W_p^1 relativament compacte.

Si R és no buit, aleshores $R\cap E$ és també no buit: suposem que existeix $\omega_0 \in R$. Llavors $J(\omega_0) < \varepsilon_0 - kF(b)|\partial D|$. Hem vist en el pas 1 anterior que R

és positivament invariant. Per tant, $\gamma^+(\omega_0) \in R$ per a tota $t \geq 0$. Del fet que el conjunt ω-límit de ω_0, és a dir, $\omega(\omega_0)$, pertanyi a E, deduïm que $R \cap E$ és un conjunt no buit.

Hem vist a la proposició 5.1 que J és un funcional continu de W_p^1 en $\mathbb{R}$. Acabem de veure que $\overline{R \cap E}$ és un conjunt compacte a W_p^1, ja que $R \cap E$ és relativament compacte a W_p^1. Aleshores, existirà algun e_0 que serà un mínim de J a $\overline{R \cap E}$. Aquest mínim resulta ésser un mínim de J a R. Suposem que no és així, és a dir, e_0 no és un mínim de J a R. Aleshores, existirà alguna $u \in R$ tal que $J(u) < J(e_0)$. Considerem ara les òrbites positives $\gamma^+(u)$ i $\gamma^+(e_0)$, per a les quals, donat que J decreix en t sobre elles, llevat dels equilibris, es satisfà que $J(\gamma^+(u)) \leq J(u) < J(e_0) = J(\gamma^+(e_0))$. Ara, com el conjunt ω-límit $\omega(u) \subset E$, tenim $J(\omega(u)) < J(e_0)$ a $\overline{R \cap E}$, la qual cosa contradiu que e_0 sigui un mínim de J a $\overline{R \cap E}$. Per tant, e_0 ha d'ésser un mínim de J a R.

Si veiem que $e_0 \in \overset{\circ}{R}$ ja haurem acabat. No és possible que $e_0 = a$ ó $e_0 = b$ ja que aleshores no es poden satisfer les condicions de signe de les dues integrals de frontera que apareixen a R, ni tampoc la desigualtat d'energia. A més, si $J(e_0) = \varepsilon_0 - kF(b)|\partial D|$ obtenim $J(u) \geq J(e_0) = \min_{v \in R} J(v)$, però, $J(u) < \varepsilon_0 - kF(b)|\partial D|$ pel fet què $u \in R$. Aleshores, $e_0 \in \overset{\circ}{R}$, e_0 és un punt d'equilibri i és el mínim absolut de J en R.

<u>Pas 3</u>.- *L'equilibri e_0 obtingut en el pas 2 és estable.*

Observem primer que, donat que e_0 és un punt interior a R, aleshores e_0 és un mínim relatiu de J a W_p^1. Llavors, els valors propis del problema lineal de valor propi associat a (5.1)

$$\left\{ \begin{array}{rcll} \Delta v &=& \lambda v \,, & \text{a } D \,, \\ v_\nu &=& kf'(e_0)v \,, & \text{a } \partial D \,, \end{array} \right. \tag{5.18}$$

el signe dels quals determina l'estabilitat de l'equilibri e_0, no poden ésser positius.

El signe dels valors propis de (5.18) es pot conèixer si es coneix el signe del primer valor propi, el qual ve donat pel quocient de Rayleigh, tal i com vàrem veure a la secció 2.1 del capítol 2. El signe d'aquest primer valor propi coincideix amb el signe del numerador d'aquest quocient, que en aquest cas és

$$I(u) = \int_D -|\nabla u|^2\, dx + \int_{\partial D} f'(e_0)u^2\, d\ell\,.$$

Suposem que $\lambda_1 > 0$, és a dir, suposem que existeix alguna funció u tal que $I(u) > 0$.

Com e_0 és un mínim de J, es satisfà que $DJ(e_0) = 0$ i $D^2J(e_0) \geq 0$. Anem a veure que $\lambda_1 > 0$ implica que $D^2J(e_0)$ no és semidefinida positiva, amb la qual cosa arribarem a contradicció.

Recordem com es definia a (5.11) el funcional d'energia J. Aleshores, l'operador diferencial $DJ(u) \in \mathcal{L}(W^1_p, \mathbb{R})$ estarà definit per

$$\begin{array}{rccl} DJ(u): & W^1_p & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & h & \longrightarrow & \displaystyle\int_D \nabla u \nabla h\, dx - \int_{\partial D} kf(u)h\, d\ell =: DJ(u)h \end{array}$$

i, anàlogament, $D^2J(u) \in \mathcal{L}(W^1_p, \mathcal{L}(W^1_p, \mathbb{R}))$ correspon a

$$\begin{array}{rccl} D^2J(u): & W^1_p & \longrightarrow & \mathcal{L}(W^1_p, \mathbb{R}) \\ & v & \longrightarrow & D^2J(u)v \end{array}$$

que està definit per

$$\begin{array}{rccl} D^2J(u)v: & W^1_p & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & w & \longrightarrow & \displaystyle\int_D \nabla v \nabla w\, dx - \int_{\partial D} kf'(u)vw\, d\ell =: D^2J(u)(v,w)\,. \end{array}$$

Com e_0 és un equilibri, es satisfà

$$\int_D \nabla e_0 \nabla u\, dx - \int_{\partial D} f(e_0)u\, d\ell = 0$$

per a tota $u \in W^1_p$, és a dir, $DJ(e_0)u = 0$. A més, per a $u \in W^1_p$ qualsevol

$$D^2J(u)(v,w) = \int_D |\nabla u|^2\, dx - \int_{\partial D} kf'(e_0)u^2\, d\ell = -I(u)\,.$$

Per tant, $D^2J(e_0)(u,u) < 0$ per a alguna $u \in W^1_p$, la qual cosa contradiu que e_0 sigui un mínim. D'aquí, doncs, que el problema (5.18) no pugui tenir valors propis positius, ó bé, que $\lambda_1 \leq 0$. En aquest cas poden passar dues coses: o bé tots els valors propis són negatius, o bé, el primer valor propi és zero.

Si tots els valors propis són negatius, es va veure al teorema 2.1 del capítol 2, que e_0 és asimptòticament estable. A més, observem que $e_0 \in R$ implica que e_0 és no constant, amb la qual cosa acabem la demostració del teorema.

Si el primer valor propi és el zero, la proposició 3.1 ens diu que aquest és algebraicament simple. En aquest cas es poden aplicar els resultats de la secció 4 de [34] que proven l'existència d'una varietat central local, $\mathcal{M}$, tangent en e_0 a la corresponent direcció pròpia. Per tant, $\mathcal{M}$, serà una varietat invariant de dimensió 1. Aleshores, la secció 5 del mateix treball [34] prova que $\mathcal{M}$ té la propietat que si el punt d'equilibri e_0 és estable dins de $\mathcal{M}$, aleshores e_0 és també estable a W_p^1. Per tant, l'estabilitat de l'equilibri e_0 pot reduir-se a l'estudi de l'estabilitat a $\mathcal{M}$, que és u-dimensional.

Ara bé, en dimensió u i essent el flux un flux gradient anem a demostrar que un mínim local de la funció potencial sempre és estable. Per a fixar idees, identifiquem $\mathcal{M}$ amb l'interval $-r < x < r$ i identifiquem e_0 amb $x = 0$. Veurem que 0 és estable per la dreta i per l'esquerra es faria igual. Distingirem dos casos segons si l'equilibri $x = 0$ és un mínim estricte de la funció potencial J o no a $[0, r)$.

En primer lloc considerem el cas que l'equilibri $x = 0$ és un mínim estricte. Com $J(0) = 0$, tenim $J(x) > 0$ a $[0, r_1]$. Donada $\varepsilon > 0$ sigui J_ε el mínim de J a $[\varepsilon, r_1]$. Ara, per la continuïtat de J sabem que existeix alguna $\delta > 0$ tal que si $|x| < \delta$ aleshores $J(x) < J_\varepsilon$. Si $x \in [0, \delta]$, com J decreix amb t, $J(T(t)x) < J_\varepsilon$ per a tota $t \geq 0$. Per tant, $T(t)x \notin [\varepsilon, r_1]$ per a tota $t \geq 0$ i d'aquí que $x = 0$ és estable ja que acabem de veure que $T(t)x \in [0, \varepsilon]$.

Si $x = 0$ no és un mínim estricte existirà una successió de punts $x_n \to 0$ tals que $J(x_n) = 0$. Aquest x_n són equilibris. Aleshores donada $\varepsilon > 0$ existeix algun equilibri x_ε tal que $0 < x_\varepsilon < \varepsilon$. L'interval $[0, x_\varepsilon]$ té dos equilibris per extrems i per tant, és positivament invariant. Prenent $\delta = x_\varepsilon$ es té $T(t)x \in [0, \varepsilon]$ per a tota $t > 0$, si $x \in [0, \delta]$. És a dir, $x = 0$ és estable.

És a dir, l'equilibri e_0 sempre és estable a $\mathcal{M}$ o equivalentment, e_0 és estable a W_p^1, com volíem veure. A més, igual que havíem dit en el cas anterior, e_0 és no constant i es conclou així la prova del teorema. ■

Observació 5.5 L'existència de la varietat central $\mathcal{M}$ així com la determinació de l'estabilitat restringint-nos a aquesta varietat es podria provar també de manera semblant a com ho fa D. Henry a [21] per al cas de les aplicacions.

Tanmateix, D. Henry, també, a [20] ho fa per al cas de les equacions parabòliques semilineals en espais de potències fraccionàries.

Acabem de veure en aquest últim teorema que si el conjunt R és no buit, aleshores el problema (5.1) té alguna solució d'equilibri estable no constant. Ara bé, les hipòtesis del teorema 5.2, són hipòtesis possibles? Caldria veure ara que és possible tenir una funció f i algun domini D per als quals s'apliqui el teorema anterior. El següent teorema és el que ens diu que el resultat anterior no és absurd en el sentit que parlés d'hipòtesis impossibles. També, és en el següent resultat que es dóna la construcció d'exemples d'existència d'equilibris estables no constants per a dominis tipus halter.

Teorema 5.3 *Per a qualsevol $k > 0$ i per a f una funció arbitrària que satisfà (H), existeix un domini D tal que per al problema (5.1) existeixen solucions d'equilibri estables no constants.*

Observació 5.6 Tal i com comentàvem abans en l'observació *5.4*, hi ha algunes diferències en la demostració d'aquest darrer teorema i aquella de la part (ii) del teorema de H. Matano, pròpies de la diferència entre els problemes *(5.2)* i *(5.1)*. Hem de dir també que en aquest teorema, per al cas $n = 2$, no tenim tanta llibertat en la construcció del domini com la que hi havia en l'observació *5.1* anterior referent al problema *(5.2)*.

<u>DEMOSTRACIÓ</u>. Distingirem entre els casos $n = 2$ i $n \geq 3$.

<u>Cas $n = 2$</u>.- Siguin D_1 i D_2 dos subdominis a $\mathbb{R}^2$ tals que $\rho_2(D_i) \geq k$, per a $i = 1, 2$. Sense pèrdua de generalitat podem suposar que $|\partial D_1| \leq |\partial D_2|$. Suposem, a més, que estan tan a prop un de l'altre que, si anomenem $l = \text{dist}\,(\overline{D}_1, \overline{D}_2) > 0$, aleshores,

$$kF(a)|\partial D_1| - kF(b)3l > 0\,. \tag{5.19}$$

Existeixen dos punts $P_1 \in \partial D_1$ i $P_2 \in \partial D_2$ i un segment S que uneix P_1 i P_2, de longitud l, que no talla $\overline{D}_1$ ni $\overline{D}_2$ llevat dels extrems.

Considerem ara una funció $\omega(x, y)$, definida a tot $\mathbb{R}^2$, que sigui $\mathcal{C}^1$ i tal que

$$\omega(x,y) = \begin{cases} a & \text{si } (x,y) \in D_1 \\ b & \text{si } (x,y) \in D_2\,, \end{cases}$$

$a \leq \omega(x, y) \leq b$, per a tots els punts $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, i amb gradient $|\nabla\omega(x, y)|$ globalment acotat. Denotarem per M aquesta cota.

Aleshores, és obvi que existeix un domini $D \subset \mathbb{R}^2$ tal que satisfà

(i) $D_1, D_2 \subset D$.

(ii) $S \subset D$.

(iii) ∂D és regular.

(iv) Considerem $\Gamma_i := \partial D_i \setminus D$, $i = 1, 2$. Demanem que es satisfaci

$$kF(a)|\Gamma_1| - kF(b)|\partial D \setminus (\Gamma_1 \cup \Gamma_2)| > \frac{M^2}{2}|D \setminus (D_1 \cup D_2)|\,,$$

la qual cosa és possible ja que es certa la desigualtat (5.19). A més, $|\Gamma_1| \leq |\Gamma_2|$.

Un possible domini $D \subset \mathbb{R}^2$ està representat a la figura 5.1. Observem la forma del domini, que ens recorda un halter. D'aquí el nom que es dóna a aquest tipus de recintes.

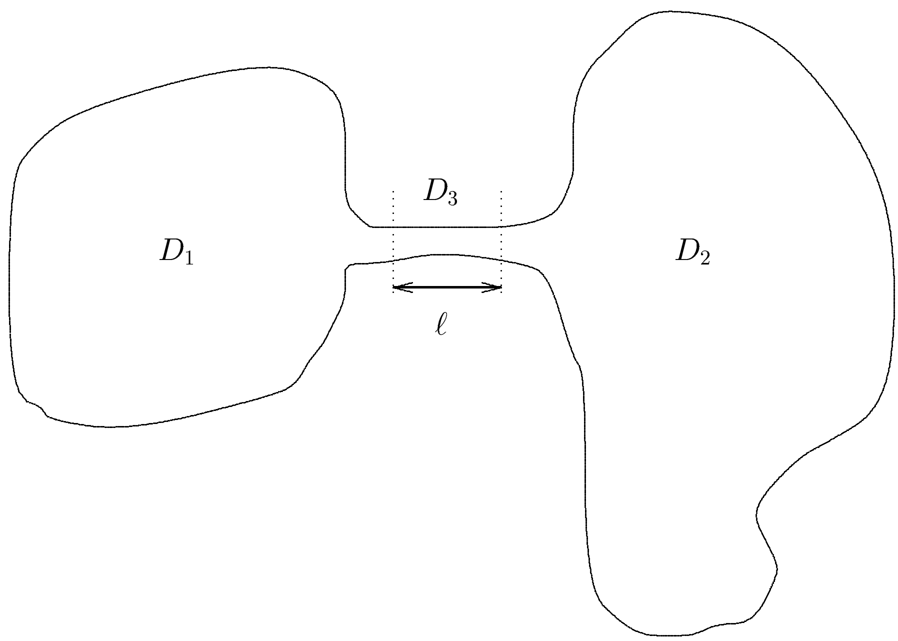


Figura 5.1: Domini D

En aquest cas, $\varepsilon_0 = kF(b)|\Gamma_1|$.

Anem a veure que la restricció de $\omega(x,y)$ a D pertany al conjunt R definit al teorema 5.2.

Per construcció, $\omega \in W_p^1(D)$, $a \leq \omega(x,y) \leq b$ per a tot $(x,y) \in \overline{D}$ i $\int_{\Gamma_1} \omega(x,y)\,d\ell = a|\Gamma_1| < 0$ i $\int_{\Gamma_2} \omega(x,y)\,d\ell = b|\Gamma_2| > 0$. Només ens queda veure que $J(\omega) < \varepsilon_0 - kF(b)|\partial D|$. En efecte,

$$\begin{aligned} J(\omega) &= \frac{1}{2}\int_D |\nabla\omega|^2\,dx - \int_{\partial D} kF(\omega)\,d\ell \\ &= \frac{1}{2}\int_{D\setminus(D_1\cup D_2)} |\nabla\omega|^2\,dx - kF(a)|\Gamma_1| \\ &\quad -kF(b)|\Gamma_2| - \int_{\partial D\setminus(\Gamma_1\cup\Gamma_2)} kF(\omega)\,d\ell \\ &\leq \frac{M^2}{2}|D\setminus(D_1\cup D_2)| - kF(a)|\Gamma_1| \\ &\quad -kF(b)|\Gamma_2| - \int_{\partial D\setminus(\Gamma_1\cup\Gamma_2)} kF(\omega)\,d\ell\,. \end{aligned}$$

Estem suposant que es satisfà (iv). Per tant, podem seguir acotant l'energia usant (iv) i menyspreant l'últim sumand, que és negatiu. Així, doncs,

$$\begin{aligned} J(\omega) &< kF(a)|\Gamma_1| - kF(b)|\partial D \setminus (\Gamma_1 \cup \Gamma_2)| \\ &\quad -kF(a)|\Gamma_1| - kF(b)|\Gamma_2| \\ &= -kF(b)|\partial D \setminus \Gamma_1| = \varepsilon_0 - kF(b)|\partial D|\,. \end{aligned}$$

Per tant, $\omega \in R$, amb la qual cosa, $R \neq \emptyset$ i el teorema 5.2 prova que, donades $k > 0$ i f satisfent (H), existeix un domini $D \subset \mathbb{R}^2$ construït, per exemple com acabem de veure, tal que existeix com a mínim una solució d'equilibri estable no constant per al problema (5.1).

De manera semblant també poden construir-se altres dominis on no es té per què satisfer que $\rho_2(D_i) \geq k$ per a $i = 1, 2$.

Cas $n > 2$.- Per a aquest cas podem fer una construcció similar a la feta per al cas $n = 2$. Ara bé, hi ha una diferència notable en el que s'obté seguint el mateix procediment. Mentre que en el cas anterior el "pont" que uneix D_1 i D_2 ha d'ésser curt i d'àrea petita, és a dir, no pot ésser tampoc massa ample, en aquest cas, D_1 i D_2 no necessiten estar tan a prop un de l'altre, ja que podem fer la mesura $(n-1)$-dimensional de $\partial D \setminus (\Gamma_1 \cup \Gamma_2)$ petita, alhora que fem petita la mesura n-dimensional de $D \setminus (D_1 \cup D_2)$, per a valors de l no necessàriament petits. ■

Apèndix A

El problema u-dimensional

L'apèndix següent neix amb l'origen de tot aquest treball. Quan un es planteja el problema

$$\begin{cases} \Delta u &= 0\,, & \text{a}\ \Omega\,, \\ u_\nu &= kf(u)\,, & \text{a}\ \partial\Omega\,, \end{cases} \tag{A.1}$$

per a un domini acotat $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, és natural pensar primer què passa en el cas més senzill $n = 1$. La veritat és que quan Ω és un interval a $\mathbb{R}$ s'obtenen resultats molt il·lustratius d'allò que podem esperar en dimensions majors i prou interessants com per a que els tractem tot seguit.

Pel que fa a aquest problema en dimensió u, cal destacar alguns treballs de J.M. Ball i L.A. Peletier ([9], [10]) entre d'altres autors. Concretament a [9] els autors proven per al problema d'evolució associat a (A.1) que la solució, si la condició inicial pertany a $\mathcal{C}([0,1])$, és prou regular com per poder aplicar el principi d'invariància. Amb els resultats d'existència i regularitat provats acaben el treball veient que per a tota condició inicial a $u_0 \in \mathcal{C}([0,1])$ es té que $T(t)u_0 \to v$ quan $t \to \infty$ amb v una solució d'equilibri, és a dir, solució de (A.1).

Siguin $\alpha < 0 < \beta$ tals que $f(\alpha) = f(0) = f(\beta) = 0$. Tal i com passa per a dimensió $n > 1$, els zeros de la funció f són solucions trivials de (A.1).

Si suposem, com fèiem a la secció 3.1 del capítol 3, que la funció f és tal que $uf(u) < 0$ per a tota $u < \alpha$ i $u > \beta$ el lema 3.1 s'aplica en aquest cas i obtenim que la solució u satisfà l'acotació $\alpha \leq u(x) \leq \beta$, per a tota $x \in \overline{\Omega}$.

Si se suposa, a més, que la funció f és tal que $uf(u) > 0$ per a tota $\alpha < u < \beta$ tal que $u \neq 0$, és cert el següent lema:

Lema A.1 *Tota solució de (A.1) no constant talla la solució constant* $u = 0$.

<u>Demostració</u>. Sigui u una solució de (A.1) no constant. Suposem que u no talla la solució constant $u = 0$. Aleshores $u(x) \neq 0$ per a tota $x \in \Omega$, o equivalentment, $u > 0$ o $u < 0$ a Ω. Suposarem en primer lloc que $u > 0$.

Pel principi del màxim, $u \geq 0$ a $\partial\Omega$, és a dir, per hipòtesi, $f(u) \geq 0$. Per altra banda, el teorema de la divergència ens dóna $\int_{\partial\Omega} f(u)\, d\ell = 0$. Aleshores deduïm que $f(u) = 0$ a $\partial\Omega$, cosa que implica que u ha d'ésser constant. Hem arribat, per tant, a una contradicció.

El cas $u < 0$ a Ω és anàleg. Per tant, tota solució u no constant talla la solució zero. ■

Anem a suposar ara que $n = 1$, $\Omega = (0,1)$ i que la funció $f(u) = u - u^3$. Aleshores el problema (A.1) es redueix al següent

$$\left\{ \begin{array}{rcl} u_{xx} & = & 0\ , \quad x \in (0,1)\ , \\ -u_x(0) & = & kf(u(0))\ , \\ u_x(1) & = & kf(u(1))\ . \end{array} \right. \tag{A.2}$$

bviament, les solucions són rectes que han de satisfer les condicions de contorn.

Sabem pel teorema 3.2 que si k és prou petita i f és una funció de Lipschitz només poden existir solucions constants. Sabem que les solucions de (A.2) corresponen a les solucions d'equilibri del problema d'evolució $u_t = u_{xx}$ amb les mateixes condicions de contorn. Per tant, tenim les solucions d'equilibri constants $u = -1$, $u = 0$ i $u = 1$, de les quals, la primera i l'última són estables i $u = 0$ és inestable.

Ara bé, aquests tres equilibris constants són els únics equilibris existents per a tota k? Pot ser que en augmentar la k vagin apareixent nous equilibris no constants? Quina estabilitat tenen? Quants n'hi pot haver com a màxim? Què passa quan $k \to \infty$?

Les solucions de (A.2) són les rectes $u(x) = (u(1) - u(0))x + u(0)$, $x \in (0, 1)$, on els extrems $u(0)$ i $u(1)$ satisfan

$$u(1) = u(0) - k(u(0) - u(0)^3) \ , \tag{A.3}$$

$$u(0) = u(1) - k(u(1) - u(1)^3) \ . \tag{A.4}$$

Així doncs, fixada k, hi ha tantes solucions com interseccions entre les dues darreres equacions hi ha a $[-1, 1]$. Aquestes solucions corresponen als segments que uneixen els punts $(0, u(0))$ i $(1, u(1))$ trobats. La qüestió és veure com varia el número d'interseccions amb la k.

Per tal de trobar quantes solucions d'equilibri hi ha en funció de k, anem a veure com és $u(0)$ en funció de k. De (A.3) i (A.4) obtenim que $u(0)$ i $u(1)$ satisfan

$$f(u(0)) + f(u(1)) = 0 \tag{A.5}$$

que, usant (A.3), és equivalent a

$$f(u(0)) + f(u(0) - kf(u(0))) = 0 \ . \tag{A.6}$$

Observem que de la igualtat (A.5) es dedueix que els signes de $f(u(0))$ i $f(u(1))$ han d'ésser diferents, a menys que valguin zero. Per hipòtesi els signes de $u(x)$ i de $f(u(x))$ a $x \in (-1, 1)$ són els mateixos. Per tant, $u(0)$ i $u(1)$ tenen signes diferents. Això no ens ha de sorprendre ja que el lema A.1 prova que tota solució talla la solució zero. Així doncs, tota recta passant per $u(0)$ que travessa $u = 0$ ha de tenir imatge en l'u amb signe contrari.

La igualtat (A.6) equival a

$$(p(u_0) + u_0)\left(p(u_0)^2 - u_0 p(u_0) + u_0^2 - 1\right) = 0 \ , \tag{A.7}$$

on u_0 denota $u(0)$ i $p(u_0) = u_0 - kf(u_0)$. Aleshores,

$$p(u_0) = -u_0 \quad \text{i} \quad p(u_0) = \frac{u_0 \pm \sqrt{4 - 3u_0^2}}{2}$$

són les tres solucions de (A.7).

De la definició de $p(u_0)$ podem aillar k en funció només de u_0 usant aquestes arrels. Estudiant aquestes funcions, sabent que $-1 \leq u_0 \leq 1$, obtenim l'esquema que apareix a la figura A.1.

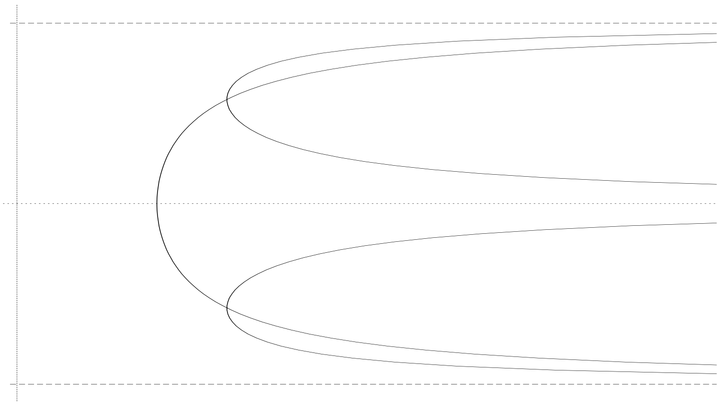


Figura A.1: Nombre de solucions en funció de k

Observant la figura A.1 es pot veure que per a $0 \leq k \leq 2$, tenim només les tres solucions constants $u = -1$, $u = 0$ i $u = 1$, que, de manera trivial, es mantenen per a tota k. Si $2 < k \leq 3$ apareixen dues noves solucions no constants. Finalment, per a $k > 3$, cada una de les solucions no constants, bifurca en dues noves solucions no constants, donant un total de nou solucions.

Nou és el nombre màxim de solucions que podem tenir i, quan el paràmetre $k \to \infty$, tendeixen a ésser les nou possibles rectes que s'obtenen unint els punts $\{(0, -1), (0, 0), (0, 1)\}$ i $\{(1, -1), (1, 0), (1, 1)\}$.

En l'esquema de la figura A.2 mostrem l'aparició d'aquestes solucions. En aquell, les línies contínues representen les solucions estables i les línies discontínues les inestables. L'estabilitat de cada solució la podem determinar a partir del signe de f' pel principi d'estabilitat lineal que vàrem donar al capítol 2.

La simetria que s'observa en els gràfics de la figura A.2 és deguda al fet que

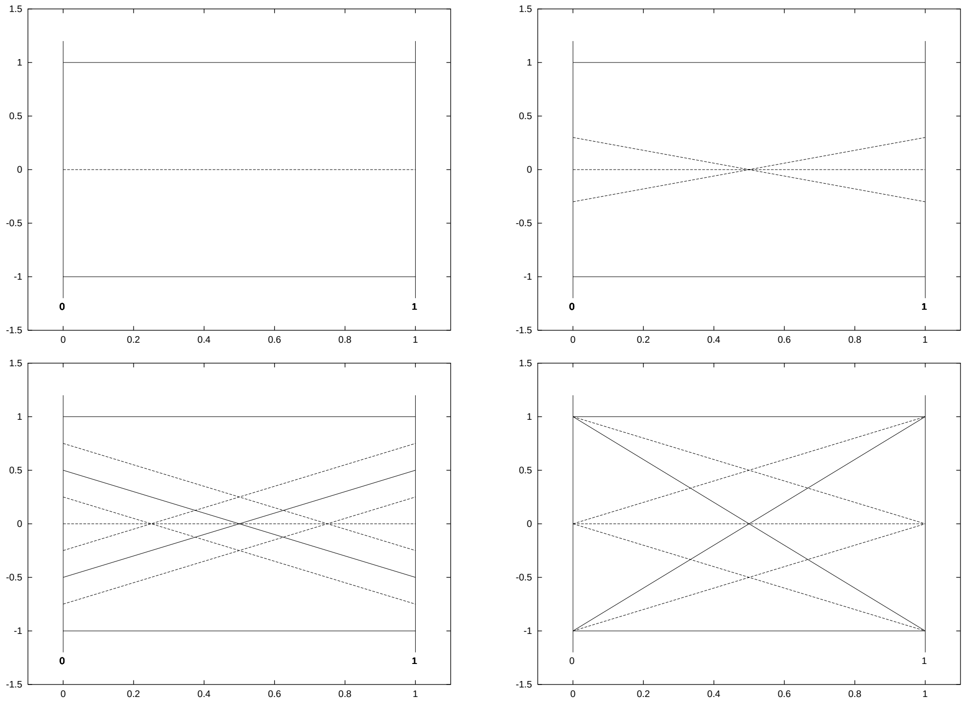


Figura A.2: Superior esquerra: $0 \leq k \leq 2$. Superior dreta: $2 < k \leq 3$. Inferior esquerra: $k \geq 3$. Inferior dreta: $k \to \infty$.

estem suposant senar la funció f. Abans hem dit que les solucions es troben de la intersecció entre les equacions (A.3) i (A.4) i que el nombre d'interseccions correspon al nombre de solucions. Per tant, els nombre de solucions depèn de k. En aquests moments coneixem com varia aquest nombre amb k. Anem a veure la coincidència d'aquests resultats amb els que havíem obtingut anteriorment. A la figura A.3 observem que per a $k = 1$ i $k = 2$ (línies contínues gruixuda i prima, respectivament) les equacions (A.3) i (A.4) es tallen en els punts 1, 2 i 3, punts que corresponen a les solucions constants trivials. Per a $k = 3$ (línia discontínua gruixuda) veiem que hi ha dues noves interseccions a més de les tres anteriors, que corresponen a l'aparició de dues noves solucions i que són no constants. Finalment, per a $k = 5 > 3$ (línia discontínua prima) tenim nou interseccions. A més, és clar que quan $k \to \infty$ no apareixen més interseccions i les dues cúbiques tendeixen asimptòticament a les rectes -1, 0 i 1.

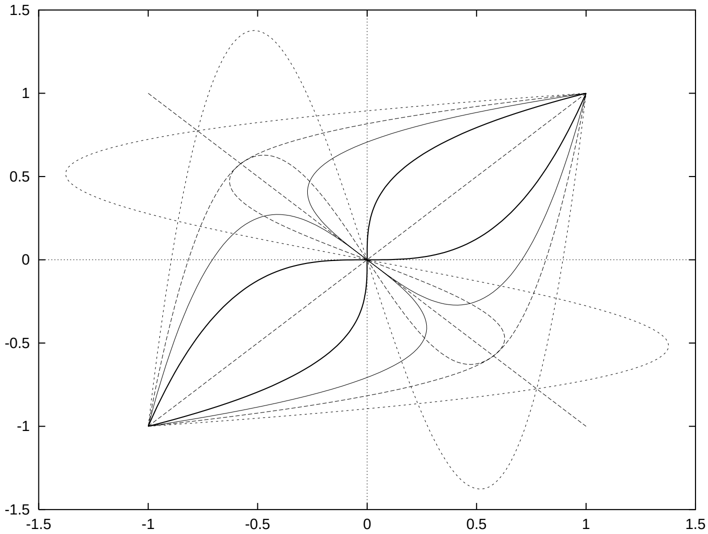


Figura A.3: Línia contínua gruixuda: $k = 1$. Línia contínua prima: $k = 2$. Línia discontínua gruixuda: $k = 3$. Línia discotínua prima: $k = 5$

.

Hem vist, en un cas particular i per a dimensió $n = 1$, que per a determinats valors de k només hi ha solucions d'equilibri constants, tant estables com inestables. En créixer k podem observar l'aparició de solucions d'equilibri no constants encara que resulten inestables, és a dir, només hi ha equilibris estables constants. Però, finalment, si k és prou gran, apareixen solucions estables no constants. La magnitud de la k, òbviament, depén en cada cas de la funció f considerada.

Observem que per a un domini connex amb vora disconnexa apareixen, a partir d'un determinat valor del paràmetre, solucions d'equilibri estables no constants que corresponen, en dimensió $n = 1$, a rectes amb valors als extrems de l'interval tals que la derivada de f és negativa en ambdós.

Aquest fenomen és semblant al que es dóna en els exemples del capítol 4 per a dominis connexos amb vora disconnexa en dimensions majors.

bviament, s'obtenen gràfics i valors de bifurcació diferents si es canvia la funció f, tot i que podem reproduir els mateixos resultats. També volem observar que si f deixa de ser senar perdem la simetria en l'aparició dels equilibris, encara que es conserva el nombre, si hi ha el mateix nombre de zeros, i el caràcter d'estabilitat dels mateixos.

Apèndix B

Una experimentació numèrica

En el següent apèndix es pretén mostrar alguns exemples d'existència d'equilibris estables no constants en dominis de tipus "halter" com els tractats en el capítol 5 d'aquesta memòria. Sabem que donada una funció f satisfent la hipòtesi (H) de la secció 5.1 i fixada una constant $k > 0$, existeix un domini D del tipus buscat de manera que es satisfan les hipòtesis del teorema 5.2, que dóna l'existència d'un equilibri estable no constant per al problema (5.1). En primer lloc veurem com hauria d'ésser un domini D que fós unió de dos quadrats D_1 i D_2 per un "pont" estret i rectangular, D_3, per tal que siguin certs els resultats del capítol 5.

Una vegada trobats uns límits per a les mides dels subdominis D_1, D_2 i D_3, escollirem un domini D i ens plantejarem trobar, de manera analítica, intervals per al paràmetre k.

En aquesta primera aproximació, trobats un domini D i una funció f, ens haurem fet una idea de la magnitud del paràmetre k per al qual existeixen equilibris estables no constants.

El que presentarem en segon lloc en aquest apèndix és una experimentació numèrica d'aquest fet. És a dir, fixant una funció f i prenent un domini $D = D_1 \cup D_2 \cup D_3$ com el que dèiem abans i una k dins de l'interval trobat de manera analítica, calcularem explícitament un equilibri estable i comprovarem que, efectivament, és no constant.

En la darrera secció de l'apèndix explicarem amb detall quins han estat els mètodes numèrics usats en els càlculs fets i donarem algunes figures que il·lustrin els resultats.

B.1 Cerca d'un exemple: un domini D

En aquesta primera secció anem a estudiar com ha d'ésser un domini $D \subset \mathbb{R}^2$ de tipus "halter" format per dos quadrats D_1 i D_2 de costats α i β, respectivament, amb $\alpha \leq \beta$, units per un rectangle estret, D_3, de llargada ℓ i amplada ε i de manera que el domini D resultant sigui simètric respecte d'una recta pel centre de D_1, D_2 i D_3. És a dir, D és com a la figura B.1

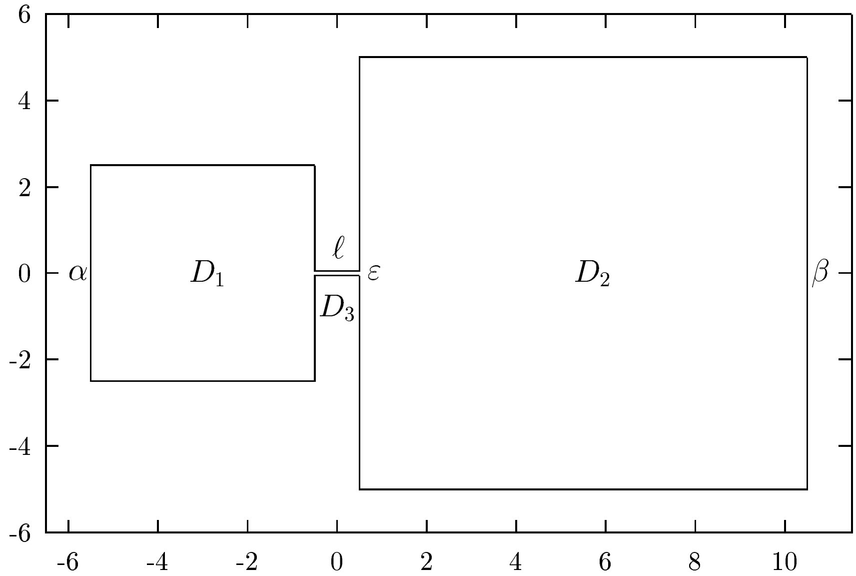


Figura B.1: Domini D

i pretenem determinar alguns valors per a α, β, ℓ i ε de manera que es satisfacin les hipòtesis del teorema 5.2.

Si bé és cert que en el teorema 5.2 s'assumeix que la frontera del domini D és regular, la comoditat de poder treballar amb rectangles ens ha fet prescindir d'aquesta hipòtesi i suposar que el comportament de les solucions d'equilibri del problema (5.1) no és molt diferent que per a ∂D regular.

A més, en les hipòtesis del teorema 5.2 apareixen unes desigualtats que depenen dels segons valors propis dels problemes de Stekloff associats als dominis D_1 i D_2. Tal i com dèiem a l'observació 5.3 i als comentaris posteriors aquests valors, $\rho_2(D_1)$ i $\rho_2(D_2)$, es coneixen de manera explícita ens el cas dels quadrats. És per això, per tal de simplificar els càlculs i de ser més precisos, que considerem D com a la figura B.1. En aquest cas, doncs, sabem que $\rho_2(D_1) = p/\alpha$ i $\rho_2(D_2) = p/\beta$, on $p = 1.3765$, com pot veure's a [26].

Per a D, a més, tenim $|\Gamma_1| = 4\alpha - \varepsilon$, $|\Gamma_2| = 4\beta - \varepsilon$ i $|\partial D| = 4\alpha + 4\beta + 2\ell - 2\varepsilon$, seguint la notació utilitzada al capítol 5.

La funció f que apareix al terme de frontera ha de satisfer la hipòtesi (H). Suposarem que $f(-1) = f(0) = f(b) = 0$, és a dir, que $a = -1$ i $b > 0$ la deixem indeterminada de moment. Evidentment, podríem fer els càlculs deixant a i b indeterminades però d'aquesta forma no es perd generalitat i es simplifiquen les expressions que s'obtenen. Considerem, aleshores,

$$f(u) = -m(u(u+1)(u-b)) = -m(u^3 + (1-b)u^2 - bu)\ , \tag{B.1}$$

per a alguna $m > 0$. Ara bé, la segona condició de la hipòtesi (H) dóna una cota superior d'aquesta m i que és

$$m \leq \frac{4}{(b+1)^2}\ . \tag{B.2}$$

De (B.1) s'obté

$$\begin{aligned} F(-1) &= \frac{m}{12}(2b+1)\ , \\ F(b) &= \frac{m}{12}b^3(b+2)\ . \end{aligned}$$

Per tant, la condició (iii) de la hipòtesi (H) equival a $b^3(b+2) \geq 2b+1$ i aquesta darrera desigualtat es satisfà si i només si $b \leq -1$ o $b \geq 1$. Ara bé, com $b > 0$ es té que b ha d'ésser major o igual que 1.

El teorema 5.2 diu que existeix un equilibri estable no constant per al problema (5.1) si el conjunt R és no buit. Per tant, anem a veure que som capaços de trobar una $v \in W_p^1$ que estigui a R. Aquest conjunt R depén de ε_0, que recordem està definida de la forma següent

$$\varepsilon_0 = F(b) \min \left\{ |\Gamma_1| \min\{k, \rho_2(D_1)\}, |\Gamma_2| \min\{k, \rho_2(D_2)\} \right\} .$$

Observem que ε_0 depén de f, de D i de k. La funció f i el domini D han estat fixats en certa forma. Ens resta, però, la constant k. De la definició de ε_0 observem que cal distingir els tres casos següents:

(i) $k < \rho_2(D_2)$,

(ii) $\rho_2(D_2) \leq k \leq \rho_2(D_1)$,

(iii) $k > \rho_2(D_1)$.

Suposant que $\alpha \leq \beta$, es calcula ε_0 en els tres casos i s'obté que es redueixen, de fet, a dos casos ja que per als dos primers $\varepsilon_0 = kF(b)|\Gamma_1|$ i per al tercer $\varepsilon_0 = \rho_2(D_1)F(b)|\Gamma_1|$.

Considerem, finalment, $v \in W_p^1$ la funció

$$v(x,y) = \begin{cases} -1 \ , & \text{a } D_1 \ , \\ \dfrac{b+1}{\ell} x + \dfrac{b-1}{2} \ , & \text{a } D_3 \ , \\ b \ , & \text{a } D_2 \ , \end{cases}$$

suposant que $D_3 = [-\ell/2, \ell/2] \times [-\varepsilon/2, \varepsilon/2]$. Aleshores, el funcional d'energia

$$\begin{aligned} J(v) &= \frac{1}{2} \int_D (\nabla v)^2 \, dx - k \int_{\partial D} F(v) \, d\ell \\ &= \frac{1}{2} \frac{(b+1)^2}{\ell^2} \varepsilon \ell - kF(-1)|\Gamma_1| - kF(b)|\Gamma_2| - k \int_{\partial D \setminus (\Gamma_1 \cup \Gamma_2)} F(v) \, d\ell \\ &= \frac{(b+1)^2 \varepsilon}{2\ell} - \frac{km}{60} \Big[5(2b+1)(4\alpha - \varepsilon) + 5b^3(b+2)(4\beta - \varepsilon) \\ &+ 2\ell(2b^4 + 3b^3 - 3b^2 + 3b + 2) \Big] \ . \end{aligned}$$

Considerem en primer lloc el cas (i) i (ii), és a dir, que $\varepsilon_0 = kF(b)|\Gamma_1|$. Evidentment, $-1 \leq v \leq b$, $\int_{\Gamma_1} v \, d\ell < 0$ i $\int_{\Gamma_2} v \, d\ell > 0$, per construcció de la v. Queda imposar només que la darrera condició

$$J(v) < \varepsilon_0 - kF(b)|\partial D| \ , \tag{B.3}$$

es satisfaci.

Substituint els valors de $J(v)$ i ε_0 en aquesta darrera desigualtat i simplificant s'obté la desigualtat

$$\frac{(b+1)^2\varepsilon}{\ell} < km\left[\frac{2b+1}{6}(4\alpha-\varepsilon)+\ell\left(-\frac{b^4}{5}-\frac{7b^3}{15}-\frac{b^2}{5}+\frac{b}{5}+\frac{2}{15}\right)\right] . \quad \text{(B.4)}$$

Usant ara que $k < \rho_2(D_1) = p/\alpha$ i (B.4) obtenim per a la longitud ℓ i l'amplada ε del pont rectangular que uneix D_1 i D_2, les dues desigualtats següents

$$\ell < \frac{5(2b+1)(4\alpha-\varepsilon)}{2(3b^4+7b^3+3b^2-3b-2)} , \quad \text{(B.5)}$$

$$\varepsilon < \frac{2mp\ell[10(2b+1)\alpha-\ell(3b^4+7b^3+3b^2-3b-2)]}{5[6(b+1)^2\alpha+(2b+1)mp\ell]} . \quad \text{(B.6)}$$

Per tal de donar de manera explícita un domini D per al qual es satisfaci el teorema 5.2, caldrà fixar algun dels paràmetres no determinats fins el moment. Per exemple, prendrem $\alpha = 5$ i $\beta = 10$, és a dir, considerarem que D_1 és un quadrat de costat 5 i que D_2 és un quadrat de costat 10. De la desigualtat (B.2) anem a considerar el cas límit, és a dir, suposarem que $m = 4/(b+1)^2$, ja que és el valor que, mantenint la hipòtesi (H), dóna una ε major.

Amb totes aquestes constants fixades hem aconseguit que només depengui de b, és a dir, del zero positiu de la funció f. No obstant, cal recordar, però, que $b \geq 1$. Així doncs, anem a considerar en primer lloc que $b = 1$. En aquest cas la grandària de D_3 està restringida a aquells valors de ℓ i ε tals que

$$\ell < \frac{15}{16}(20-\varepsilon) \quad \text{(B.7)}$$

i, tenint en compte que $m = 1$,

$$\varepsilon < \frac{300p\ell - 16p\ell^2}{600+15p\ell} . \quad \text{(B.8)}$$

Si s'estudien les dues inequacions i es té en compte que $\varepsilon > 0$ i $\ell > 0$, s'observa que la intersecció d'ambdues condicions és, de fet, la desigualtat

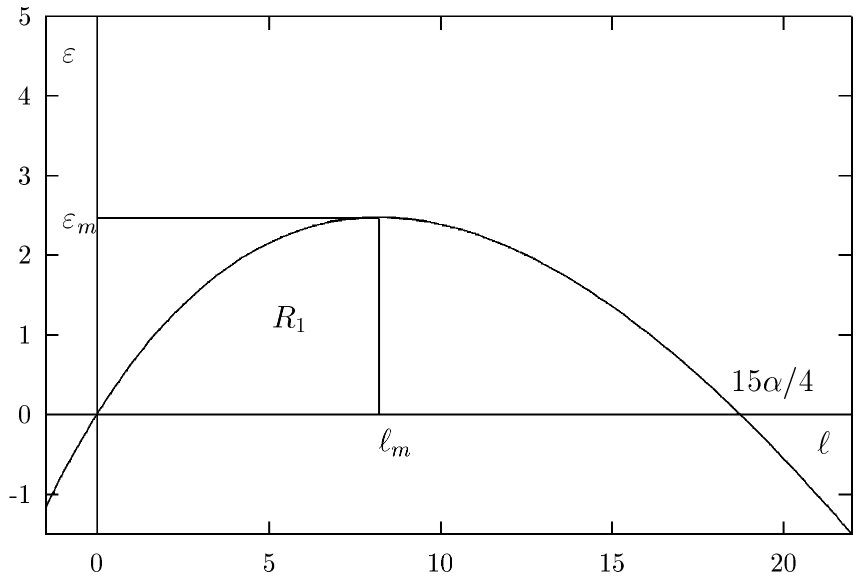


Figura B.2: Cas $b = 1$

(B.8). Així doncs, es pot triar qualsevol valor de ℓ i ε continguts en la regió R_1 que apareix a la figura B.2.

Per raons òbvies, de cara als càlculs numèrics que volem fer més endavant, ens convindria prendre valors de ε propers a ε_m. Si es calcula el punt màxim en aquest cas s'obté que $\ell \simeq 8.2$ i $\varepsilon \simeq 2.4$. Així doncs, considerar $D_3 = [-4,4] \times [-1,1]$ seria una elecció que estaria dins de les hipòtesis desitjades.

Anem a considerar ara que $b = 2$ i compararem els resultats. En aquest cas $m = 4/9$ i ℓ i ε venen determinades per

$$\ell < \frac{25}{216}(20 - \varepsilon) \tag{B.9}$$

i

$$\varepsilon < \frac{500p\ell - 216p\ell^2}{3600 + 25p\ell} \,. \tag{B.10}$$

Com en al cas anterior, la intersecció de les dues desigualtats es redueix a la segona condició (B.10), condició que dóna la regió R_2 representada a la figura B.3.

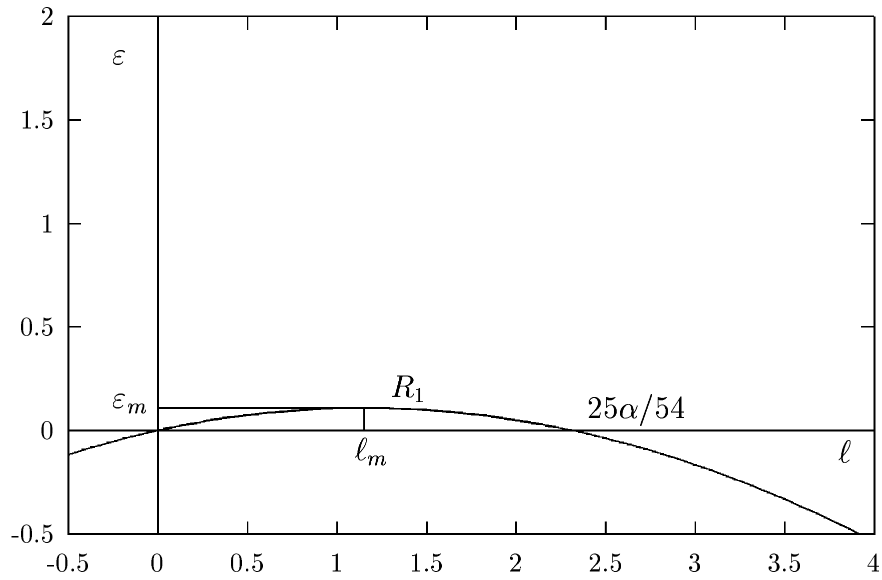


Figura B.3: Cas $b = 2$

En aquest cas els valors màxims per a ℓ i ε són $\ell \simeq 1.1$ i $\varepsilon \simeq 0.1$. Prendre $D_3 = [-0.5, 0.5] \times [-0.045, 0.045]$ seria un exemple satisfent les hipòtesis del teorema.

Observem que en aquest segon cas el domini D que s'obté, fixats D_1 i D_2, és més "petit" que el domini que ens podem permetre per al cas $b = 1$. Equivalentment, $R_2 \subset R_1$. De fet, si diem R_b al domini per a (ℓ, ε) que s'obté per a una determinada b, observem que R_b decreix a mida que la b creix i es satisfà $R_b \subset R_{b'}$ si $b > b'$. Per tant, el domini obtingut per a $b = 2$ és un domini per al qual existirà algun equilibri estable no constant per al problema (5.1) per a tota $1 \leq b \leq 2$.

Per tant, d'ara endavant, centrarem els nostres càlculs en el cas que $b \in [1, 2]$ i amb el domini D fixat com a la figura B.1 amb $\alpha = 5$, $\beta = 10$, $\ell = 1$ i $\varepsilon = 0.09$.

Fins el moment hem estat considerant el cas que $\varepsilon_0 = kF(b)|\Gamma_1|$. Ara bé, càlculs semblants als fets per al primer cas, mostren que fixat el domini D trobat anteriorment i suposant $1 \leq b \leq 2$, per al cas $\varepsilon_0 = \rho_2(D_1)F(b)|\Gamma_1|$ existeixen valors del paràmetre $k > \rho_2(D_1)$ per als quals se segueixen satisfent la hipòtesi (H) i aquelles que fan que $v \in R$.

En la secció següent veurem quins valors de k són permisibles per tal que s'apliqui el teorema 5.2.

B.2 Determinació de valors per al paràmetre k

En aquesta secció anem a trobar valors en funció de b per al paràmetre k per als quals existeixin equilibris estables no constants per al problema (5.1). Per a això el que fem és fixar la funció f i el domini D i volem trobar valors de k per als quals es satisfacin les hipòtesis del teorema 5.2.

Així doncs, sigui f com a la secció anterior i D el domini trobat en aquella mateixa secció, és a dir, $D = D_1 \cup D_2 \cup D_3$ com a la figura B.1.

Si f és la de (B.1), recordem que la hipòtesi (H) equival a prendre $m \leq 4/(b+1)^2$ i $b \geq 1$. A més, fixat el domini D, tenim $\rho_2(D_1) = 0.2753$ i $\rho_2(D_2) = 0.13765$. Sigui $v(x,y) \in W_p^1$ la mateixa funció lineal a trossos considerada a la secció anterior i imposem en el dos casos $\varepsilon_0 = kF(b)|\Gamma_1|$ i $\varepsilon_0 = \rho_2(D_1)F(b)|\Gamma_1|$ la desigualtat (B.3) que ha de satisfer el funcional $J(v)$.

En el primer cas, $\varepsilon_0 = k\,\dfrac{20-0.09}{3}\,\dfrac{b^3(2+b)}{(b+1)^2}$ i (B.3) es redueix a

$$
\begin{aligned}
\frac{0.09}{2}(b+1)^2 &< k\,m\left[\frac{99.55}{60}(2b+1) + \left(\frac{199.55}{60} - 3.4925\right) b^3(b+2)\right.\\
&+ \left.\frac{1}{30}(2b^4 + 3b^3 - 3b^2 + 3b + 2)\right]\\
&= k\,m\,\frac{1}{30}[-3b^4 - 7b^3 - 3b^2 + 102.55b + 51.775]\\
&= k\,m\,P(b)\ .
\end{aligned}
$$

Observem que $P(b) = 0$ només per a $b_1 = -0.5042982$ i $b_2 = 2.7310033$ i $P(b) > 0$ per a $b_1 < b < b_2$. Per tant, si $1 \leq b < b_2$ podem aillar k de la darrera desigualtat de la manera següent

$$k > \frac{0.045(b+1)^4}{4P(b)} \ ,$$

on hem substituit $m = 4/(b+1)^2$.

Si anomenem

$$Q(b) = \frac{0.045(b+1)^4}{4P(b)}$$

observem que aquest quocient és creixent amb b, si $1 \leq b \leq 2$. Per exemple, alguns valors que pren els mostrem a la taula següent

b	$Q(b)$
1	0.038210
1.5	0.082378
2	0.194055

Observem que, fixada b, $Q(b)$ ens dóna una cota inferior per a la k. Per tant, en el primer cas obtenim

$$k \in [Q(b), p/\alpha]$$

ja que la cota superior és p/α, per hipòtesi.

En el segon cas, recordem que se suposa $k > p/\alpha = 0.2753$ i aleshores es té $\varepsilon_0 = \dfrac{p}{\alpha} \dfrac{(20-0.09)}{3} \dfrac{b^3(2+b)}{(b+1)^2}$. D'aquí, (B.3) es redueix a la desigualtat

$$\begin{aligned} & \frac{0.09}{2}(b+1)^2 - k\,\frac{m}{60}\Big[99.51\,(2b+1) + 199.55\,b^3\,(b+2) \\ + \ & 2\,(2b^4+3b^3-3b^2+3b+2)\Big] \\ < \ & \frac{m}{12}\,b^3\,(2+b)\,[0.2753\,(20-0.09) - k\,(62-0.18)] \ . \end{aligned}$$

Aillant ara $k = k(b)$ s'obté una cota superior en funció de la b per als valors de les k que estem buscant, és a dir,

$$k \in (p/\alpha, k(b)] \ .$$

Aleshores, el conjunt de valors admissibles al paràmetre k serà la unió dels dos intervals trobats, és a dir,

$$k \in [Q(b), k(b)] \ .$$

Estem suposant que $b \in [1, 2]$. Recollim a la taula següent alguns d'aquests intervals per a alguns valors fixats de b.

b	I_b
1	[0.038210, 4.46364]
1.5	[0.082378, 0.34745]
2	[0.194055, 0.29370]

B.3 Alguns resultats numèrics

En aquesta tercera secció donarem els mètodes numèrics que hem usat per tal de calcular equilibris estables no constants per a (5.1) i per a diferents valors de b, amb $1 \leq b \leq 2$. És a dir, fixant alguna k per a la qual existeixen equilibris estables no constants, el que farem és calcular numèricament algun equilibri estable per al problema (5.1) i comprovarem que és una solució d'equilibri no constant.

Per tal de dur a terme aquests càlculs usarem el mètode dels elements finits sobre una malla triangular no regular del domini D. A aquesta malla li demanarem que sigui més fina allà on el domini és més petit ja que, precisament en el pont serà on esperem que hi hagi la transició d'una solució gairebé constant a D_1 i gairebé constant a D_2, però amb una constant diferent que la de D_1.

Una vegada discretitzat el problema sobre els nodes d'aquest mallat observarem que s'arriba a un sistema d'equacions diferencials ordinàries no lineal.

Finalment integrarem el sistema usant un mètode d'Euler semiimplícit i en cada iteració, com es veurà caldrà resoldre un sistema lineal que per la simetria que presenta la matriu dels sistema, serà resolt usant la seva factorització de Txolesky i resolent els dos sistemes triangulars superior i inferior que s'obtenen.

B.3.1 Mallat del domini

Donat el domini $D = D_1 \cup D_2 \cup D_3$ de la figura B.1 amb $\alpha = 5$, $\beta = 10$, $\varepsilon = 0.09$ i $\ell = 1$ considerarem sobre D una malla no regular amb elements triangulars que tindrà 10 elements a $x = -5.5$ i 20 elements a $x = 10.5$. Partint de $x = -5.5$ la malla s'anirà adaptant al domini a mida que la x vagi creixent. Degut a la grandària del pont D_3 que uneix D_1 i D_2, caldrà prendre sobre D_3 elements molt petits en comparació a aquells que prenem en els extrems del domini. Ara bé, tot i que això genera una malla no regular, cosa que és admisible, allò que no podem admetre és tenir elements amb angles massa petits. Per tant, el mallat que esperem obtenir tindrà el següent aspecte: hi haurà a D_1 i a D_2 dues zones als extrems esquerre i dret, respectivament, amb triangles de la mateixa mida que, segons veurem, a $x = -2$ i $x = 4$, començaran a fer-se cada vegada més i més petits fins a arribar als extrems de D_3, on arriben tant petits com fa falta per tal que a D_3 s'obtingui una malla regular amb elements d'alçada $\varepsilon/4$.

Per tal de generar aquesta malla hem utilitzat un programa mallador realitzat al Departament de Matemàtica Aplicada I de l'Escola Tècnica Superior d'Enginyers Industrials de Barcelona de la Universitat Politècnica de Catalunya a [28]. L'esmentat mallador genera malles adaptatives al domini, no estructurades, amb elements finits el més simples possible a $\mathbb{R}^n$, és a dir, segments a $\mathbb{R}^1$, triangles a $\mathbb{R}^2$ i tetraedres a $\mathbb{R}^3$. En el nostre cas, D és un domini a $\mathbb{R}^2$, amb la qual cosa obtindrem una malla que consta de triangles.

L'algorisme que genera aquestes malles es basa en l'anomenada triangularització de Delaunay, que en dimensió dos està caracteritzada per ésser aquella que, donat un conjunt de punts de $\mathbb{R}^2$ i totes les possibles malles triangulars sobre aquells, dóna aquella malla que fa màxim l'angle mínim de tots els triangles.

Una vegada fixat el sistema de triangularització que s'usa, l'algorisme que es segueix és un algorisme iteratiu de refinament d'una malla de partida grollera que va donant en cada iteració de mallat una malla amb elements refinats en funció de la morfologia de cada zona del domini.

En el cas del domini D, partint d'una malla com la de la figura B.4, s'arriba a la malla adaptativa no estructurada que s'observa a la figura B.5.

B.3.2 El mètode dels elements finits

El mètode dels elements finits, com és ben conegut, és una tècnica numèrica per tal de donar solucions aproximades a alguns problemes. Bàsicament el que es fa és buscar una aproximació de la solució per una funció interpoladora sobre una discretització del domini i que ens portarà a un sistema d'equacions diferencials ordinàries. La integració d'aquest sistema permetrà trobar els coeficients de la funció interpoladora que dóna la solució aproximada del problema.

Anem a formular l'esquema d'aquest mètode en el nostre cas. Es pot estructurar en els tres passos següents:

(i) Formulació variacional del problema.

(ii) Aproximació de la solució sobre un domini discretitzat.

(iii) Formulació matricial del sistema d'equacions obtingut a (ii).

Sigui V el següent conjunt de funcions test:

$$V = \{v \in \mathcal{C}^0(\Omega) \,:\, v \text{ és } \mathcal{C}^1 \text{ a trossos } \} .$$

Donada $v \in V$, podem multiplicar la primera equació de (5.1) , és a dir, la primera equació de

$$\left\{ \begin{array}{rcll} u_t &=& \Delta u \,, & \text{a } D \,, \\ u_\nu &=& kf(u) \,, & \text{, a } \partial D \,, \end{array} \right. \tag{B.11}$$

per v i integrant a D, usant la fórmula de Green i la condició de frontera es té

$$\int_D (u_t v + \nabla u \nabla v)\, dx - \int_{\partial D} f(u) v \, d\ell = 0$$

per a tota $v \in V$.

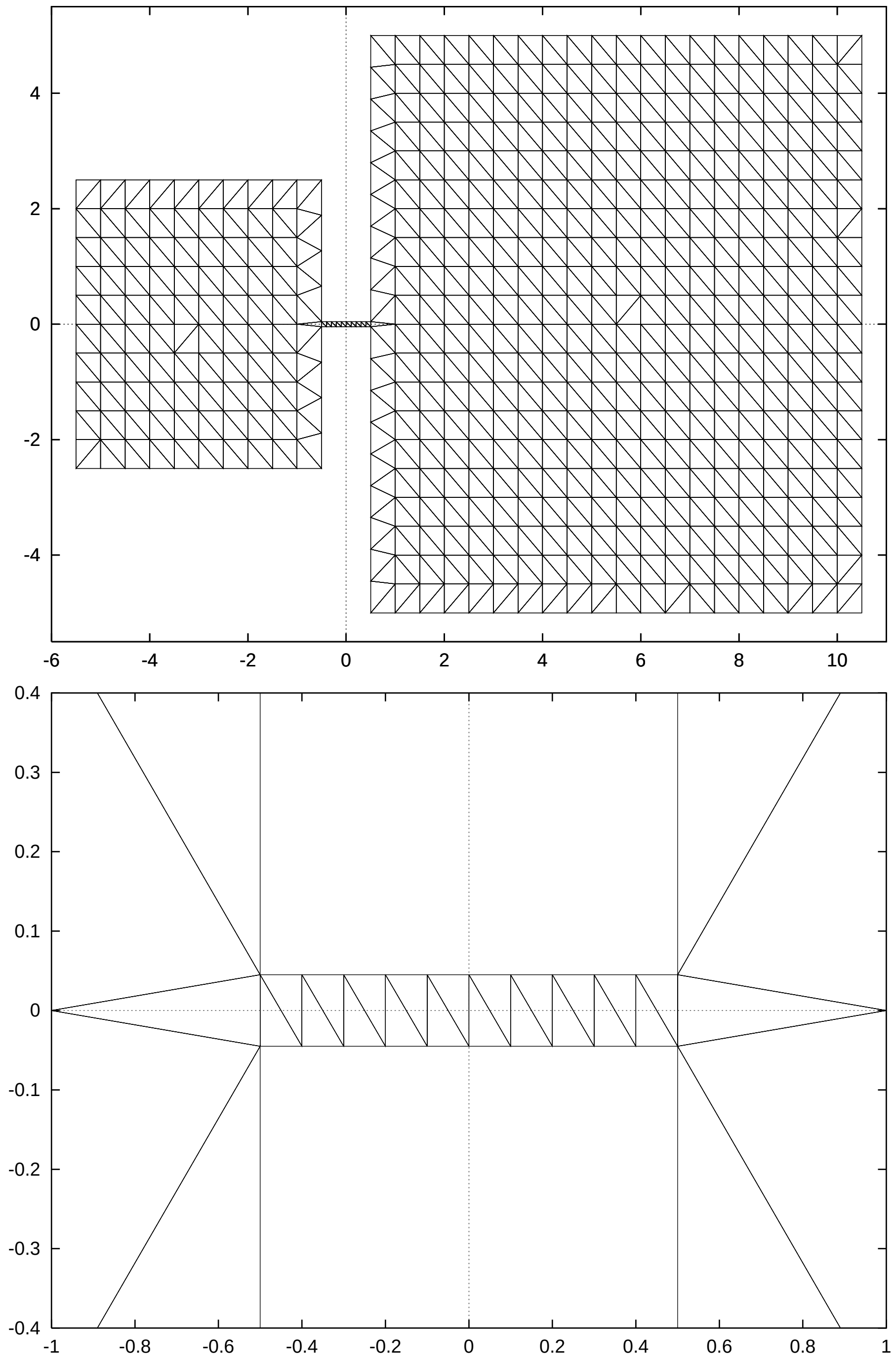
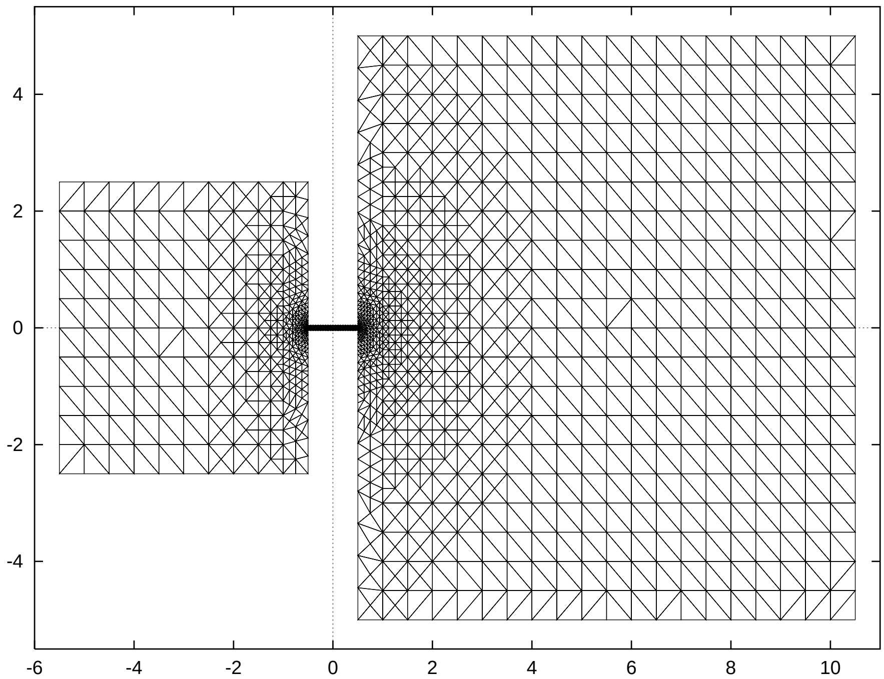


Figura B.4: <u>Superior</u>: D amb una malla grollera. <u>Inferior</u>: Detall de D_3 amb una malla grollera.



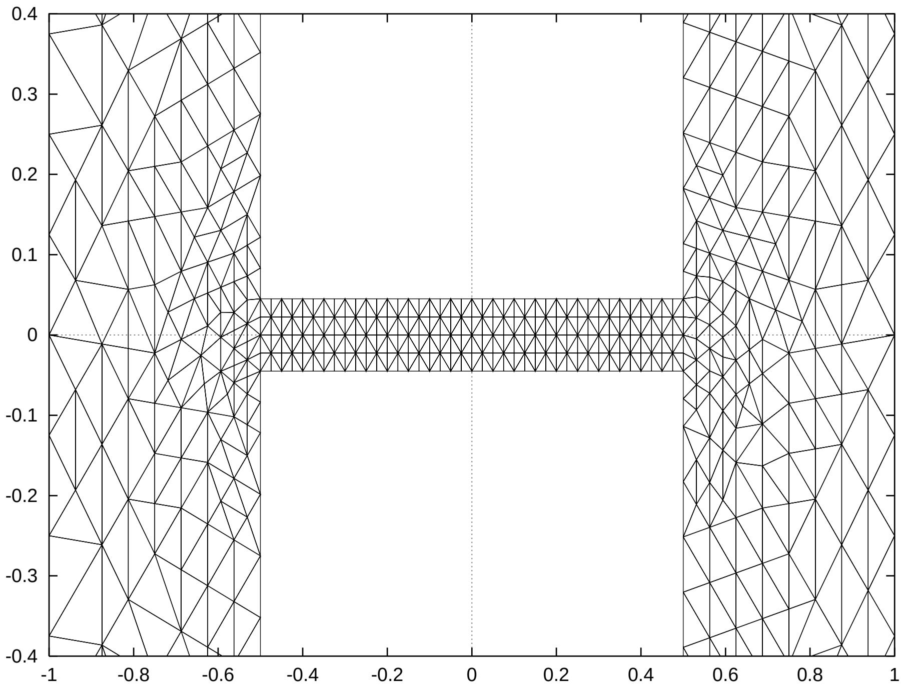


Figura B.5: Superior: D amb una malla refinada. Inferior: Detall de D_3 amb una malla refinada.

Denotem ara

$$\int_D u_t v\, dx = < u_t, v > ,$$

$$\int_D \nabla u \nabla v\, dx = a(u,v) \text{ i}$$

$$\int_{\partial D} f(u) v\, d\ell = < f(u), v >_{\partial D} \ .$$

Aleshores, l'anomenada formulació variacional del problema no és més que escriure (B.11) com

$$< u_t, v > + a(u,v) = < f(u), v >_{\partial D} \ . \tag{B.12}$$

Observem la forma variacional que s'obté a l'hora d'intentar aproximar numèricament la solució té molta similitud amb l'equació (1.4) que s'obtenia amb la formulació abstracta del problema al capítol 1.

Suposem que hem discretitzat el domini segons la malla que s'observa en la figura superior de la figura B.5. Sigui N el nombre de nodes que apareixen en el mallat. Aleshores, considerem una col·lecció de funcions $\{\varphi_i\}_{i=1,\ldots,N}$ a V de la forma següent: donat el node k-èsim considerem φ_k que sigui una funció lineal que valgui 1 en aquest node i zero en tots els altres, per a $1 \leq k \leq N$.

Diem h al diàmetre màxim de tots els triangles de la triangularització del domini. Aleshores, sigui $V_h \subset V$ l'espai generat per les $\{\varphi_i\}_{i=1,\ldots,N}$, és a dir,

$$V_h = < \varphi_i >_{i=1,\ldots,N} \subset V \ .$$

Aleshores, imposar que (B.12) es compleixi per a tot element de V_h equival a dir que tenim

$$< u_t, \varphi_k > + a(u,\varphi_k) = < f(u), \varphi_k >_{\partial D} \ . \tag{B.13}$$

per a tota $1 \leq k \leq N$.

El que farem ara és buscar una solució aproximada de (B.11) dins de l'espai V_h, és a dir,

$$u(x,t) = \sum_{i=1}^{N} u_i(t)\varphi_i(x) = \sum_{i=1}^{N} u_i \varphi_i \ . \tag{B.14}$$

Imposant que aquesta u satisfaci (B.13) obtenim

$$\sum_{i=1}^{N} \dot{u}_i < \varphi_i, \varphi_k > + \sum_{i=1}^{N} u_i\, a(\varphi_i, \varphi_k) = \int_{\partial D} f(\sum_{i=1}^{N} u_i \varphi_i)\, \varphi_k \, d\ell \tag{B.15}$$

per a tota $1 \leq k \leq N$. Aquí $\dot{u}_i = \dfrac{d}{dt}(u_i(t))$.

Veiem, doncs, que hem obtingut un sistema no lineal d'equacions diferencials ordinàries. Podem expressar aquest sistema en forma matricial si diem

$$A = (< \varphi_i, \varphi_k >)_{i,k} \in \mathcal{M}_{N\times N} \ ,$$

$$B = (a(\varphi_i, \varphi_k))_{i,k} \in \mathcal{M}_{N\times N} \ ,$$

$$F(u) = \left(< f(\sum_{i=1}^{N} u_i \varphi_i), \varphi_k >_{\partial D} \right)_k \in \mathbb{R}^N \ .$$

Aleshores, si $u = (u_1, \dots, u_N)^t$, el sistema (B.15) s'escriu

$$A\dot{u} + Bu = F(u) \ . \tag{B.16}$$

Per tant, la resolució numèrica del problema (B.11) queda traslladada a la resolució sobre el domini discretitzat del sistema (B.16). Això ens donarà el valor de la solució en els nodes de la xarxa i la funció interpoladora (B.14) una aproximació de la solució u a tot D.

Abans de descriure el mètode d'integració del sistema que usarem anem a veure com són les matrius A i B i el terme independent $F(u)$.

Observem que els coeficients d'A i de B seran zero si les funcions φ_i i φ_k tenen suports disjunts ja que

$$< \varphi_i, \varphi_k > = \sum_{l=1}^{M} \int_{T_l} \varphi_i \varphi_k \, dx \quad \text{i}$$

$$a(\varphi_i, \varphi_k) = \sum_{l=1}^{M} \int_{T_l} \nabla\varphi_i \nabla\varphi_k \, dx$$

on T_l denota el triangle l-èsim de la triangularització feta i M és el nombre total de triangles que la formen. Per tant, ordenant els nodes de manera adequada s'obtenen matrius banda, depenent l'amplada de la banda del lloc que ocupen en l'ordenació dels nodes els nodes de triangles adjacents. És a dir, ens convé ordenar els nodes de manera que nodes pertanyents a triangles adjacents tinguin números en aquesta ordenació el més propers possible.

Per tal de calcular els coeficients d'A, observem que com les funcions $\{\varphi_i\}$ són lineals a trossos, podem fer-ho de manera exacta usant el mètode de Simpson per a integració. Els coeficients de B també són senzills de calcular tenint en compte que de la linealitat a trossos de les $\{\varphi_i\}$ sabem que $\{\nabla\varphi_i\}$ són constants. Aleshores

$$a(\varphi_i,\varphi_k)=\sum_{l=1}^{M}\nabla\varphi_i\nabla\varphi_k\ \text{ àrea }(T_l)\ .$$

Per a la matriu A, com la malla és no estructurada, usem un canvi de variable en el càlcul de les integrals de manera que el domini del canvi sigui el mateix triangle per a tots els triangles T_l de la malla. Per tant reduint les integrals a integrals sobre el triangle de vèrtexos $(0,0)$, $(1,0)$ i $(0,1)$ obtenim

$$\begin{aligned}<\varphi_i,\varphi_k> &= \int_{T_l}\varphi_i\varphi_k\,dx\,dy=|J|\int_0^1\int_0^{1-u}(\varphi_i\varphi_k)(u,v)\,du\,dv\\ &= \frac{|J|}{36}\left[(\varphi_i\varphi_k)(0,0)+4(\varphi_i\varphi_k)(0,1/2)+(\varphi_i\varphi_k)(0,1)\right.\\ &+ \left.2(\varphi_i\varphi_k)(1/2,0)+8(\varphi_i\varphi_k)(1/2,1/4)+2(\varphi_i\varphi_k)(1/2,1/2)\right]\ .\end{aligned}$$

Pel que fa a la matriu B cal conèixer, donada una φ, l'expressió del seu gradient, $\nabla\varphi$, i, donat un triangle qualsevol T de vèrtexos a, b i c, quant val la seva àrea.

Donat T com abans, suposem que φ és la funció de V_h que val u en el vèrtex a i zero en els altres. És a dir,

$$\varphi=\frac{(b_x-c_x)y+(c_y-b_y)x+c_xb_y-c_yb_x}{(a_x-b_x)(c_y-b_y)+(a_y-b_y)(c_x-b_x)}\ .$$

D'aquí, si $d=(a_x-b_x)(c_y-b_y)+(a_y-b_y)(c_x-b_x)$, per al gradient es té

$$\nabla\varphi=\frac{1}{d}((c_y-b_y),(b_x-c_x))\ .$$

A més, l'àrea de T ve donada per

$$\text{àrea } (T) = \frac{1}{2} \left| (c_x - a_x)(b_y - a_y) - (b_x - a_x)(c_y - a_y) \right| \ .$$

Hem vist de quina manera calcularem els coeficients de les matrius A i B. Ens queda, però, veure com és i com calcularem el vector $F(u)$.

Recordem que estàvem suposant que f és de la forma

$$f(u) = -m(u^3 - (a+b)u^2 + abu) \ ,$$

amb $m > 0$ i $a < 0 < b$ dos zeros de f, a més del 0. Aleshores, la component k-èsima del vector $F(u)$ és la integral

$$\begin{aligned}
I_k &= \int_{\partial D} f(\sum_{i=1}^{N} u_i(t)\varphi_i(x))\varphi_k(x)\, d\ell \\
&= -m \Bigg[\sum_{i=1}^{N} u_i^3 \int_{\partial D} \varphi_i^3 \varphi_k \, d\ell + 6 \sum_{l>j} \sum_{j>i} \sum_{i=1}^{N-2} u_i u_j u_l \int_{\partial D} \varphi_i \varphi_j \varphi_j \varphi_k \, d\ell \\
&+ 3 \sum_{j \neq i} \sum_{i=1}^{N} u_i^2 u_j \int_{\partial D} \varphi_i^2 \varphi_j \varphi_k \, d\ell + \alpha \sum_{i=1}^{N} u_i^2 \int_{\partial D} \varphi_i^2 \varphi_k \, d\ell \\
&+ 2\alpha \sum_{j>i} \sum_{i=1}^{N} u_i u_j \int_{\partial D} \varphi_i \varphi_j \varphi_k \, d\ell + \beta \sum_{i=1}^{N} u_i \int_{\partial D} \varphi_i \varphi_k \, d\ell \Bigg] \ .
\end{aligned}$$

Fixada k, moltes d'aquestes integrals són zero ja que en la majoria els suports de les funcions φ que hi apareixen són disjunts.

Les integrals de frontera que apareixen són suma d'integrals sobre intervals. Suposem que ordenem i numerem els nodes de ∂D començant a $x_0 = (-5.5, -2.5)$ i girant sobre ∂D en sentit horari. Considerem, doncs, cada integral sobre ∂D com la suma de les integrals sobre els intervals adjacents $[x_{l-1}, x_l] = J_l$ amb extrems dos nodes contingus segons aquesta ordenació.

La funció φ_l té suport $J_l \cup J_{l+1} = [x_{l-1}, x_{l+1}]$, és lineal a trossos, contínua i $\varphi_l(x_l) = 1$, és a dir,

$$\varphi_l(x) = \begin{cases} 0\ , & \text{si } x \leq x_{l-1}\ , \\ \frac{1}{h_l}(x - x_{l-1})\ , & \text{si } x \in J_l\ , \\ \frac{1}{h_{l+1}}(-x + x_{l+1})\ , & \text{si } x \in J_{l+1}\ , \\ 0\ , & \text{si } x \geq x_{l+1}\ , \end{cases}$$

on $h_l = x_l - x_{l-1}$ i $h_{l+1} = x_{l+1} - x_l$ són les longituds dels intervals J_l i J_{l+1}, respectivament.

A més,

$$\int_{J_l} \varphi_l \, d\ell = \int_0^1 t\, h_l \, dt = \frac{h_l}{2}\ ,$$

$$\int_{J_{l+1}} \varphi_l \, d\ell = \int_0^1 (1-t)\, h_{l+1} \, dt = \frac{h_{l+1}}{2}$$

i $\int_{J_k} \varphi_l \, d\ell = 0$ per a tota $k \neq l, l+1$.

Els valors de les diferents integrals de vora que apareixen a I_k són:

$$\int_{\partial D} \varphi_i \varphi_k \, d\ell = \begin{cases} \frac{h_k}{6}\ , & \text{si } i = k-1\ , \\ \frac{h_k}{3} + \frac{h_{k+1}}{3}\ , & \text{si } i = k\ , \\ \frac{h_{k+1}}{6}\ , & \text{si } i = k+1\ , \end{cases}$$

$$\int_{\partial D} \varphi_i \varphi_j \varphi_k \, d\ell = \begin{cases} \frac{h_k}{12}\ , & \text{si } i = k-1 \text{ i } j = k\ , \\ \frac{h_{k+1}}{12}\ , & \text{si } i = k+1 \text{ i } j = k+1\ , \end{cases}$$

$$\int_{\partial D} \varphi_i^2 \varphi_k \, d\ell = \begin{cases} \dfrac{h_k}{12} \, , & \text{si } i = k-1 \, , \\ \dfrac{h_k}{4} + \dfrac{h_{k+1}}{4} \, , & \text{si } i = k \, , \\ \dfrac{h_{k+1}}{12} \, , & \text{si } i = k+1 \, , \end{cases}$$

$$\int_{\partial D} \varphi_i^2 \varphi_j \varphi_k \, d\ell = \begin{cases} \dfrac{h_k}{30} \, , & \text{si } i = k-1 \text{ i } j = k \, , \\ \dfrac{h_k}{20} \, , & \text{si } i = k \text{ i } j = k-1 \, , \\ \dfrac{h_{k+1}}{20} \, , & \text{si } i = k \text{ i } j = k+1 \, , \\ \dfrac{h_{k+1}}{30} \, , & \text{si } i = k+1 \text{ i } j = k \, , \end{cases}$$

$$\int_{\partial D} \varphi_i \varphi_j \varphi_k \varphi_l \, d\ell = 0 \, ,$$

$$\int_{\partial D} \varphi_i^3 \varphi_k \, d\ell = \begin{cases} \dfrac{h_k}{20} \, , & \text{si } i = k-1 \, , \\ \dfrac{h_k}{5} + \dfrac{h_{k+1}}{5} \, , & \text{si } i = k \, , \\ \dfrac{h_{k+1}}{20} \, , & \text{si } i = k+1 \, . \end{cases}$$

Totes les integrals restants s'anul·len.

Per tant, fixada k, la component k-èsima I_k del vector $F(u)$ és:

$$\begin{aligned} I_k \;\; = \;\; & -m \left[u_{k-1}^3 \, \frac{h_k}{20} + u_k^3 \, \left(\frac{h_k}{5} + \frac{h_{k+1}}{5} \right) + u_{k+1}^3 \, \frac{h_{k+1}}{20} \right. \\ & + 3 \left(u_{k-1}^2 \, u_k \, \frac{h_k}{30} + u_k^2 \, u_{k-1} \, \frac{h_k}{20} + u_k^2 \, u_{k+1} \, \frac{h_{k+1}}{20} + u_{k+1}^2 \, u_k \, \frac{h_{k+1}}{30} \right) \\ & + \alpha \left(u_{k-1}^2 \, \frac{h_k}{12} + u_l^2 \, \left(\frac{h_k}{4} + \frac{h_{k+1}}{4} \right) + u_{k+1}^2 \, \frac{h_{k+1}}{12} \right) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
& + 2\alpha \left(u_{k-1}\, u_k\, \frac{h_k}{12} + u_k\, u_{k+1}\, \frac{h_{k+1}}{12} \right) \\
& + \beta \left(u_{k-1}\, \frac{h_k}{6} + u_k \left(\frac{h_k}{3} + \frac{h_{k+1}}{3} \right) + u_{k+1}\, \frac{h_{k+1}}{6} \right) \Bigg] \\
= \quad & \frac{-m}{60} \Big[h_k \Big(3\, u_{k-1}^2 + 12\, u_k^3 + 6\, u_{k-1}^2\, u_k + 9\, u_k^2\, u_{k-1} + 5\, \alpha\, u_{k-1}^2 \\
& + 15\, \alpha\, u_k^2 + 10\, \alpha\, u_{k-1}\, u_k + 10\, \beta\, u_{k-1} + 20\, \beta\, u_k \Big) \\
& + h_{k+1} \Big(12\, u_k^3 + 3\, u_{k+1}^3 + 9\, u_k^2\, u_{k+1} + 6\, u_{k+1}^2\, u_k + 15\, \alpha\, u_k^2 \\
& + 5\, \alpha\, u_{k+1}^2 + 10\, \alpha\, u_k\, u_{k+1} + 20\, \beta\, u_k + 10\, \beta\, u_{k+1} \Big) \Big] \ .
\end{aligned}
$$

Fins el moment, en aquesta subsecció hem vist que podem calcular una aproximació de la solució resolent sobre el domini discretitzat el sistema (B.16). També hem vist de quina forma es calcularan les matrius A i B que hi apareixen i com pot avaluar-se $F(u)$.

Resta ara donar un mètode d'integració del sistema (B.16), cosa que veurem en la següent subsecció.

B.3.3 El mètode d'Euler

Donat el problema de valor inicial

$$
\begin{cases} u_t &= G(t,u) \\ u(t_0) &= u_0 \ , \end{cases}
$$

i una vegada fixada $h \neq 0$ i donada la condició inicial $u(t_0) = u_0$, es poden obtenir en el conjunt equidistant de punts $t_i = t_0 + ih$, $i = 1, 2, \ldots$, aproximacions, que denotarem per u_i, dels valors $u(t_i)$ de la solució exacta usant el mètode d'Euler explícit:

$$
\begin{cases} u_0 = u(t_0) \\ u_{i+1} = u_i + h\, G(t_i, u_i) \ , \quad i = 0, 1, 2, \ldots \end{cases}
$$

o bé mitjançant el mètode d'Euler implícit, que ve donat per:

$$\begin{cases} u_0 = u(t_0) \\ u_{i+1} = u_i + h\,G(t_{i+1}, u_{i+1}) \ , \quad i = 0, 1, 2, \ldots \end{cases}$$

que resulta ésser més adequat a l'hora de discretitzar equacions parabòliques. (Vegi's [35]).

L'aplicació d'aquests mètodes, amb pas $h > 0$ constant, a un sistema d'equacions diferencials donarà una successió de vectors v_n que aproximen la solució.

En la subsecció anterior s'ha vist que el mètode dels elements finits ens porta al sistema d'equacions diferencials ordinàries

$$A\dot{v} + Bv = F(v) \ ,$$

essent $v = (u_1, u_2, \ldots, u_N)^t$ amb $u_i = u(x_i)$, $i = 1, 2, \ldots, N$ i x_i el node i-èsim.

Com que F és no lineal anem a prendre un esquema iteratiu semiimplícit, que sigui explícit a F i implícit a B, que és lineal:

$$\begin{cases} v_0 = v(0) \ , \\ (A + hB)v_{n+1} = Av_n + hF(v_n) \ , \quad n = 0, 1, 2, \ldots \end{cases} \tag{B.17}$$

o, equivalentment,

$$\begin{cases} v_0 = v(0) \ , \\ v_{n+1} = (A + hB)^{-1}\left[Av_n + hF(v_n)\right] \ , \quad n = 0, 1, 2, \ldots \end{cases} \tag{B.18}$$

Usarem aquest esquema amb h prou petita per a trobar solucions d'equilibri estables fent $n \to \infty$.

Per tal d'implementar aquest mètode de resolució caldrà fixar una bona condició inicial si volem que convergeixi a un equilibri estable no constant. Una vegada triat aquest vector inicial el que farem per tal de dur a terme les iteracions és usar (B.17) en lloc de (B.18). És a dir, no invertirem per raons d'estabilitat numèrica la matriu $A + hB$ del sistema, sinó que el que farem en cada pas és resoldre el sistema (B.17).

En els càlculs de les matrius A i B vistos a la subsecció anterior s'observa que ambdues matrius són simètriques. Per tant, $A+hB$, amb $h>0$ constant, és també simètrica i pot veure's que és definida positiva. Aleshores, el que fem en cada iteració és resoldre els dos sistemes triangulars superior i inferior que s'obtenen de la factorització de Txolesky de la matriu $A+hB$. Notem que només cal fer una única vegada aquesta factorització.

Per tant, el mètode de resolució emprat en els càlculs que presentarem en la propera subsecció és el donat a (B.17) usant la factorització de Txolesky per tal de resoldre el sistema que s'obté en cada pas.

B.3.4 Alguns càlculs numèrics

En aquesta subsecció anem a presentar alguns càlculs fets, l'objectiu dels quals ha estat trobar de manera explícita i numèricament alguns equilibris estables no constants per al problema (5.1) en les hipòtesis que hem anat trobant en les seccions anteriors. Recordem-les: suposem que D és el domini trobat a la secció B.1, és a dir, D és de la figura B.1 amb $\alpha=5$, $\beta=10$, $\ell=1$ i $\varepsilon=0.09$. Considerem a D el mallat de la figura B.5. Suposem, a més, que k pertany al l'interval trobat a la secció B.2 i que corresponia al cas que $f(u)=-m(u^3-(a+b)\,u^2+a\,b\,u)$, $m=4/(b+1)^2$.

Fixats D i f resolem el problema usant (B.17) segons tot allò que s'ha vist a la subsecció B.3.3. Per a això s'ha programat el mètode explicat en les subseccions anteriors i hem triat una condició inicial adequada.

Per tal de trobar equilibris estables no constants, segons s'havia vist al capítol 5, cal que el conjunt que denotàvem per R sigui no buit. S'havia vist també que la funció $v(x,y)$ donada a la secció B.1 pertanyia a R. Sembla, doncs, natural prendre com a condició inicial la següent funció:

$$v_0=\begin{cases} -1\,, & \text{a } D_1\,,\\ (b+1)\,x+\dfrac{b-1}{2}\,, & \text{a } D_3\,,\\ b\,, & \text{a } D_2\,, \end{cases}$$

és a dir, d'una funció que pren valors constants -1 a D_1 i 1 a D_2 i que és lineal en x a D_3 de manera que la funció resultant sigui contínua, i esperar obtenir l'equilibri cercat per a cada valor de b com l'evolució en el temps d'aquesta condició inicial.

Així doncs, el que presentarem tot seguit són alguns dibuixos que il·lustren les solucions d'equilibri estables i no constants que hem obtingut per a diferents valors de b i per a k el punt mig de cada un dels intervals que, en funció de la b s'havien obtingut a la secció B.2. Més concretament, a la figura B.6 representem el cas $b = 1$ i $k = 2.25093$ i a B.7 i a B.8, els casos $b = 1.5$ amb $k = 0.21491$ i $b = 2$ amb $k = 0.24388$, respectivament.

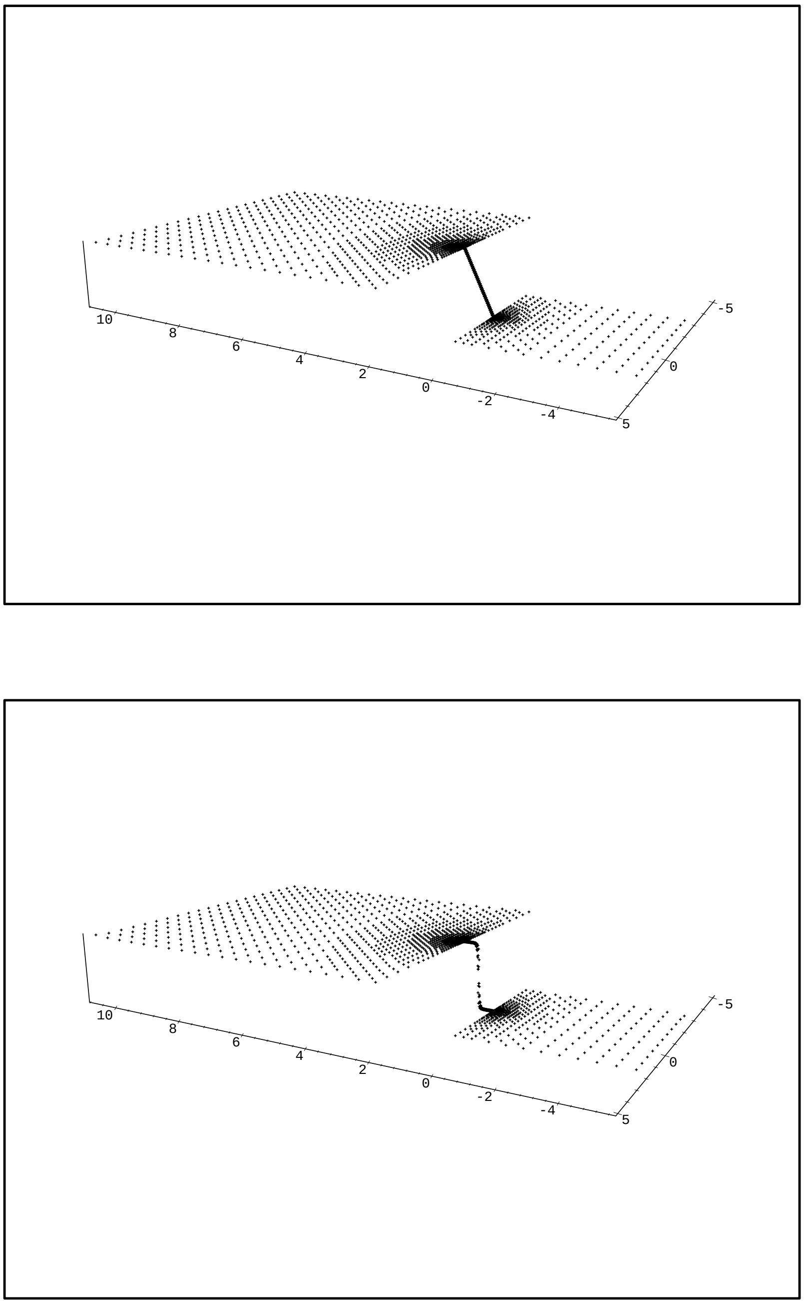
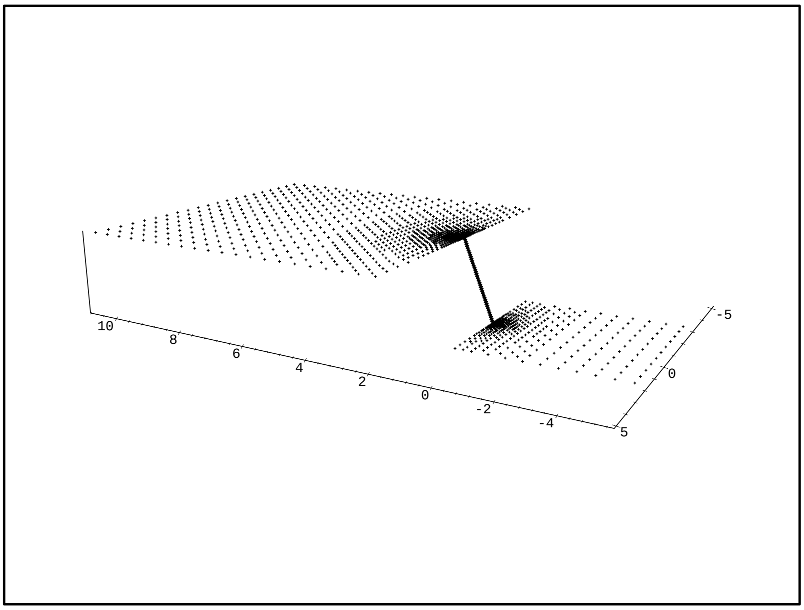


Figura B.6: Cas $b = 1$. Superior: Condició inicial. Inferior: Solució d'equilibri estable no constant. (L'eix vertical representa el segment $-1 \leq u \leq 1$.)



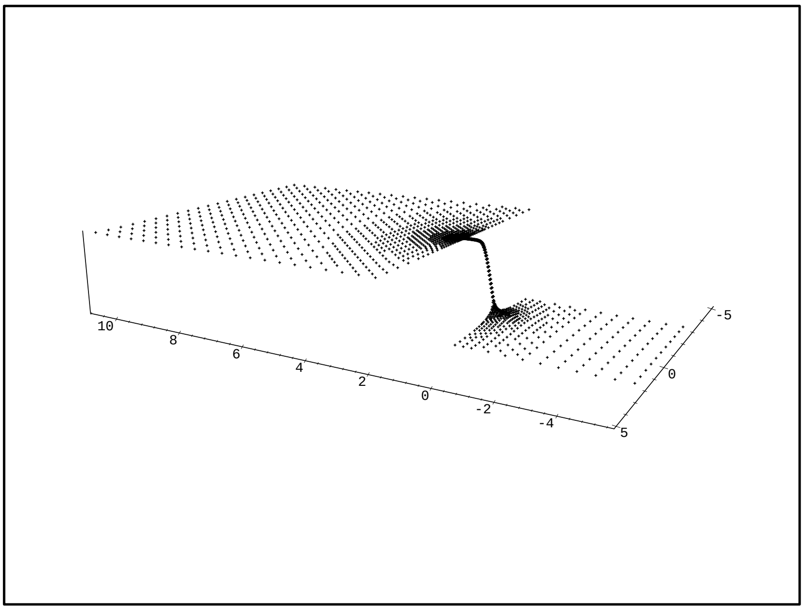


Figura B.7: Cas $b = 1.5$. Superior: Condició inicial. Inferior: Solució d'equilibri estable no constant. (L'eix vertical representa el segment $-1 \leq u \leq 1.5$.)

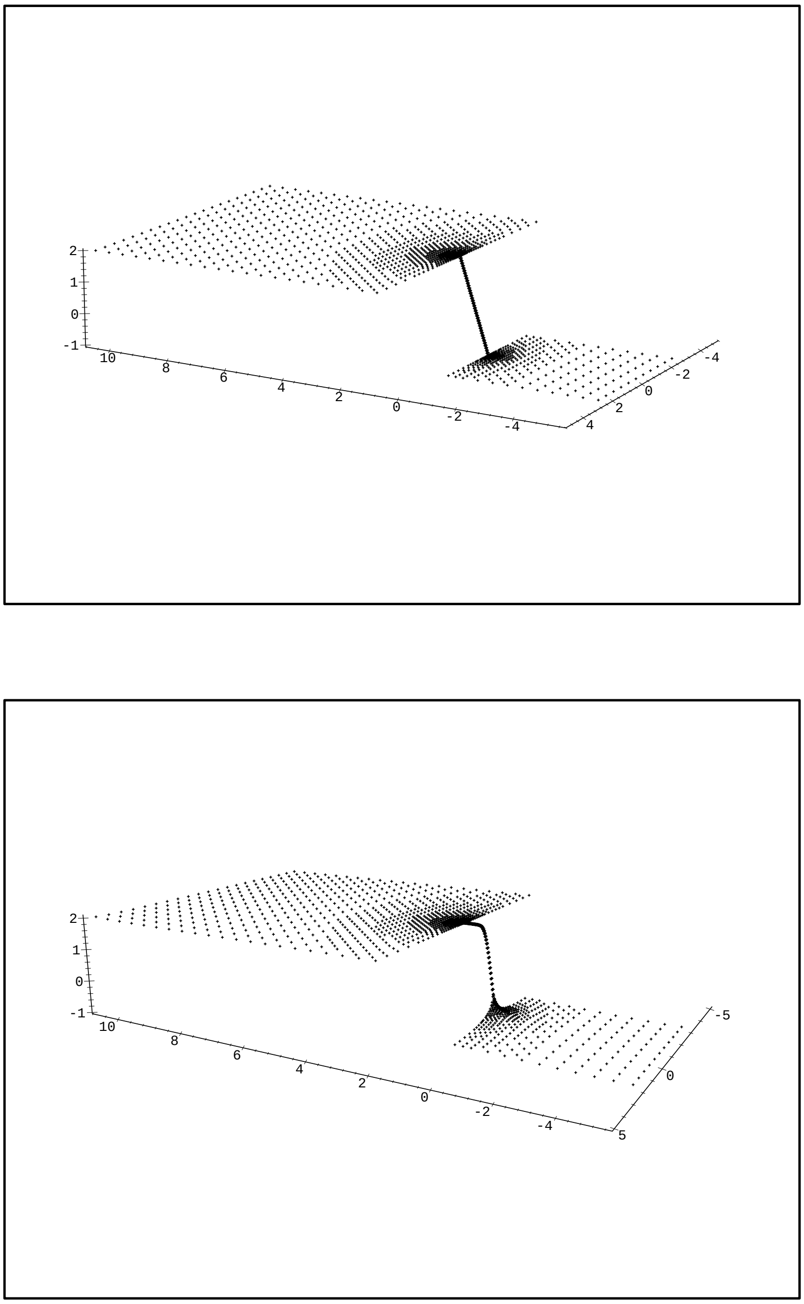


Figura B.8: Cas $b = 2$. Superior: Condició inicial. Inferior: Solució d'equilibri estable no constant. (L'eix vertical representa el segment $-1 \leq u \leq 2$.)

Bibliografia

[1] ADAMS, R.A. *Sobolev Spaces*, Academic Press, New York, 1975. Pure and Applied Mathematics - 65.

[2] AGMON, S.; DOUGLIS, A.; NIREMBERG, L. "Estimates Near the Boundary for Solutions of Elliptic Partial Differential Equations Satisfying General Boundary Conditions. I ", *Comm. on Pure and App. Math.* **12** (1959), 623-725.

[3] AMANN, H. "Parabolic Evolution Equations and Nonlinear Boundary Conditions ", *Jour. of Diff. Eq.* **72** (1988), 201-269.

[4] AMANN, H. "Semigroups and Nonlinear Evolution Equations ", *Linear Algebra and its Applications* **84** (1986), 3-32.

[5] AMANN, H. "Parabolic Evolution Equation in Interpolation and Extrapolation Spaces ", *Jour. of Func. Anal.* **78** (1988), 233-270.

[6] AMANN, H. "On the Existence of Positive Solutions of Nonlinear Elliptic Boundary Value Problems", *Indiana Univ. Math. J.* **21** (1971), 125-146.

[7] AMANN, H. *Linear and Quasilinear Parabolic Problems* (Vol 1), Birkhöuser Verlag, Berlin, 1995. Monographs in Mathematics - 89.

[8] BERG, J.; LÖFSTRÖM, J. *Interpolation Spaces*, Springer Verlag, Berlin, 1976.

[9] BALL, J.M.; PELETIER, L.A. "Stabilization of Concentration Profiles in Catalyst Particles", *Jour. of Diff. Eq.* **20** (1976), 356-368.

[10] BALL, J.M.; PELETIER, L.A. "Global Attraction for the One-Dimensional Heat Equation with Nonlinear Time-Dependent Boundary Conditions", *Arch. Rat. Mech. Anal.* **65** (1977), 193-201.

[11] CASTEN, R.G.; HOLLAND, C.J. "Instability Results for Reaction Diffusion Equations with Neumann Boundary Conditions", *Jour. of Diff. Eq.* **27** (1978), 266-273.

[12] DANERS, D.; KOCH MEDINA,P. *Abstract evolution equations, periodic problems and applications*, Longman Scientific and Technical, London, 1992. Pitman Research Notes in Mathematical Series - 279.

[13] DAUTREY, R; LIONS, J.L. *Mathematical Analysis and Numerical Methods for Science and Technology*, Volum 3, Springer-Verlag, Berlin, 1990.

[14] DUNFORD, N.; SCHWARZ, J.T. *Linear Operators*, Parts I i II, Wiley-Interscience, New York, 1966.

[15] GILBARG, D.; TRUDINGER, N.S. *Elliptic Partial Differential Equations of Second Order*, Springer-Verlag, Berlin, 1977. Grundlehren der mathematischen Wissenschaften - 224.

[16] GRISVARD, P. "Caractérisation de Quelques Espaces d'Interpolation", *Arch. Rational Mech. Anal.* **25** (1967), 40-63.

[17] GRISVARD, P. "Équations Différentielles Abstraites", *Ann. Scient. Éc. Norm. Sup.* Série 4, t. 2 (1969), 311-395.

[18] HALE, J.K. *Asymptotic Behavior of Dissipative Systems*, American Mathematical Society, U.S.A., 1988. Mathematical Surveys and Monographs - 25.

[19] HALE, J.K. *Asymptotic behavior and dynamics in infinite dimensions.* LCDS Reports ♯ 84-28, August 1984.

[20] HENRY, D. *Geometric Theory of Semilinear Parabolic Equations*, Springer Verlag, Berlin, 1989 (2on ed.). Lectures Notes in Mathematics - 840.

[21] HENRY, D. *Variedades Invariantes perto dum ponto fixo.* Notes Manuscites, U.S.P. (1983).

[22] HORGAN, C.O.; PAYNE, L.E. "Lower Bounds for Free Membrane and Related Eigenvalues", *Rendiconti di Matematica* **10** (Serie VII) (1990), 457-491.

[23] KATO, T. *Perturbation Theory for Linear Operators*, Springer Verlag, New York, 1966.

[24] KELLER, H.B. “Elliptic Boundary Value Problem suggested by Nonlinear Diffusion Processes”, *Arch. Rat. Mech. Anal.* **35** (1969), 363-381.

[25] KISHIMOTO, K.; WEINBERGER, H.F. “The Spatial Homogeneity of Stable Equilibria of Some Reaction-Diffusion Systems on Convex Domains”, *Jour. of Diff. Eq.* **58** (1985), 15-21.

[26] KUTTLER, J.R.; SIGILLITO, V.G. “Inequalities for Membrane and Stekloff Eigenvalues”, *Jour. of Math. An. and App.* **23** (1968), 148-160.

[27] MATANO, H. “Asymptotic Behavior and Stability of Solutions of Semilinear Diffusion Equations”, *Publ. RIMS, Kyoto University* **15** (1979), 401-451.

[28] MINGUEZA DE LA VILLA, D. *Diseño e implementación de un mallador para elementos finitos en dos y tres dimensiones.* Projecte final de carrera (1996), ETSEIB, Universitat Politcnica de Catalunya. (Director: Ángel Jorba).

[29] MORA, X. *Sistemes dinàmics determinats per equacions diferencials semilineals sobre espais de Banach*, Tesi Doctoral, (1982), Universitat Autònoma de Barcelona.

[30] PAZY, A. *Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations*, Springer Verlag, New York, 1983. Applied Mathematics Sciences - 44.

[31] PROTTER, M.H.; WEINBERGER, H.F. *Maximum Principles in Differential Equations*, Prentice-Hall, 1967.

[32] SATTINGER, D.H. “Monotone Methods in Nonlinear Elliptic and Parabolic Boundary Value Problems”, *Indiana Uni. Math. J.* **Vol 21**, N. 11 (1972), 979-1000.

[33] SEELEY, R. “Interpolation in L^p with Boundary Conditions”, *Studia Mathematica* **T. XLIV** (1972) 47-60.

[34] SIMONETT, G. “Center Manifolds and Integral Equations”, *Diff. and Int. Eq.* **4**, Volume 8 (1995), 753-796.

[35] STOER, J.; BULIRSCH, R. *Introduction to Numerical Analysis*, Springer-Verlag, Berlin, 1980.

[36] TRIEBEL, H. *Interpolation Theory, Functional Spaces, Differential Operators*, North Holland, German Democratic Republic, 1978.