

# Aspectos geométricos del control disipativo de sistemas mecánicos y sistemas no holónomos

Tesis Doctoral

Fco. JAVIER YÁNIZ FERNÁNDEZ  
DIRECTOR: DR. MIGUEL CARLOS MUÑOZ LECANDA

*Departamento de Matemática Aplicada IV  
Universidad Politécnica de Cataluña*

1 de Septiembre de 2002



D. Miguel Carlos Muñoz Lecanda, Catedrático de Matemática Aplicada

CERTIFICA

que la presente memoria titulada

*Aspectos geométricos del control disipativo de sistemas mecánicos y  
sistemas no holónomos*

ha sido realizada en el Departamento de Matemática Aplicada IV de la Universidad Politécnica de Cataluña bajo su dirección, por D. Javier Yániz Fernández, y autoriza su presentación para que sea calificada como Tesis Doctoral.

Barcelona, 1 de Septiembre de 2002.



A mis padres, hermano y a toda mi familia



# Índice General

<b>1</b>	<b>Introducción</b>	<b>11</b>
<b>2</b>	<b>Nociones previas y notaciones</b>	<b>17</b>
<b>3</b>	<b>Geometría de sistemas mecánicos</b>	<b>25</b>
3.1	Sistemas dinámicos. . . . .	25
3.2	Sistemas mecánicos Newtonianos . . . . .	26
3.2.1	Sistemas mecánicos . . . . .	26
3.2.2	Sistemas mecánicos con ligaduras holónomas. . . . .	29
3.2.3	Sistemas mecánicos no holónomos. . . . .	31
3.3	Sistemas Lagrangianos. . . . .	40
<b>4</b>	<b>Estabilidad de sistemas mecánicos.</b>	<b>45</b>
4.1	Estabilidad de puntos de equilibrio . . . . .	46
4.2	Estabilidad de la subvariedad de equilibrio . . . . .	50
4.3	Estabilidad de sistemas mecánicos . . . . .	53
4.4	Estabilidad de sistemas no holónomos. . . . .	57
4.5	Estabilidad de sistemas Lagrangianos . . . . .	62
<b>5</b>	<b>Control de sistemas mecánicos</b>	<b>65</b>
5.1	Sistemas con control y sistemas pasivos. . . . .	66
5.2	Sistemas mecánicos con control . . . . .	68
5.2.1	Estabilización en los puntos de equilibrio. . . . .	69
5.2.2	Estabilización en un punto arbitrario. . . . .	71
5.3	Sistemas mecánicos no holónomos con control. . . . .	75
5.3.1	Estabilización de la variedad de puntos de equilibrio. . . . .	75
5.3.2	Estabilización en una subvariedad dada. . . . .	76
5.4	Comentario al caso Lagrangiano . . . . .	78
<b>6</b>	<b>Control y sistemas cinemáticos</b>	<b>79</b>
6.1	Sistemas mecánicos no holónomos con control . . . . .	80

6.1.1	Sistemas completamente actuados . . . . .	81
6.1.2	Sistemas infractuados . . . . .	85
6.2	Sistemas mecánicos con control y simetrías . . . . .	92
<b>7</b>	<b>Reducción de sistemas Lagrangianos</b>	<b>99</b>
7.1	Sistemas Lagrangianos dependientes del tiempo . . . . .	100
7.1.1	El fibrado 1-jet de $\pi: Q \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ . Estructuras Geométricas y conexiones . . . . .	100
7.1.2	Formalismo Lagrangiano dependiente del tiempo. Conexiones y función energía Lagrangiana . . . . .	102
7.1.3	Formalismo no holónimo Lagrangiano dependiente del tiempo . . . . .	105
7.2	Simetrías de sistemas Lagrangianos . . . . .	106
7.2.1	Caso Lagrangiano dependiente del tiempo . . . . .	106
7.2.2	Caso no holónimo Lagrangiano dependiente del tiempo	107
7.3	Reducción de sistemas Lagrangianos . . . . .	108
7.3.1	Caso Lagrangiano dependiente del tiempo . . . . .	110
7.3.2	Caso no holónimo Lagrangiano dependiente del tiempo	111
7.4	Propiedades del sistema Lagrangiano Reducido . . . . .	112
<b>8</b>	<b>Conclusiones</b>	<b>117</b>



# Lista de símbolos

$B_r(q)$ :	Bola abierta de centro $q$ y radio $r$
$D$ :	Distribución diferenciable
$D_c$ :	Distribución generada por los campos de control
$D(x, N)$ :	Distancia punto-conjunto
$\mathcal{L}_X$ :	Derivada de Lie a lo largo del campo $X$
$\mathfrak{X}(D)$ :	Campos vectoriales en el fibrado tangente que son tangentes a $D \subset TQ$
$\mathfrak{X}(Q, \tau_Q)$ :	Campos a lo largo de la proyección $\tau_Q$
$\Gamma(D)$ :	Secciones de la distribución $D$
$(Q, g, F)$ :	Sistema mecánico, $F$ es el campo de fuerzas
$(Q, g, U)$ :	Sistema mecánico simple
$(Q, g, U, F_1, \dots, F_m)$ :	Sistema mecánico simple con control
$(Q, g, U, R)$ :	Sistema mecánico con $F = -\text{grad } U + R$ con $R$ disipativo
$(Q, g, F, D)$ :	Sistema mecánico no holónimo
$(Q, g, U, D)$ :	Sistema mecánico no holónimo simple
$(Q, L, D)$ :	Sistema Lagrangiano no holónimo
$(Q, L, D, \alpha)$ :	Sistema Lagrangiano no holónimo con fuerza exterior $\alpha$
$\Omega^1(Q, \tau_Q)$ :	1-formas a lo largo de la proyección $\tau_Q$
$\widehat{\omega} \in C^\infty(TQ)$ :	$\widehat{\omega}(v_q) = \omega(v_q)$ donde $\omega \in \Omega^1(Q)$



# Capítulo 1

## Introducción

En los últimos años un tema de interés para un buen número de investigadores ha sido el tratamiento intrínseco de cuestiones relacionadas con la Teoría de Control no lineal a través de la aplicación de técnicas propias de la geometría diferencial. Diferentes problemas como: controlabilidad de sistemas, seguimiento y estabilización de trayectorias, planificación de movimientos, etc. han sido estudiados de esta manera ([9], [46], [50], [63], [81], [87]).

El uso de métodos geométricos se ha mostrado eficaz para describir las propiedades de los sistemas de control, arrojar luces sobre la relación entre ellos y mejorar los métodos usados en el diseño de controles. Una mirada a los artículos de Brockett y Sussman [18], Isidori [45], Nijmeijer y van der Schaft [83] o Lewis [66] y las referencias que éstos contienen es suficiente para darse perfecta cuenta de que estos métodos han sido ampliamente estudiados y usados.

Los sistemas no holónomos han sido objeto de estudio en la mecánica clásica desde d'Alembert, Lagrange y Gauss. No obstante, el estudio sistemático de estos sistemas no se hace hasta finales del siglo XIX con las importantes contribuciones de Hertz (1894), Ferrers (1871), Neumann (1888), Vierkandt (1992) y Chaplygin (1897) entre otros. Actualmente se ha producido un importante crecimiento del interés en esta área y muchos de los recientes trabajos utilizan métodos y técnicas propios de la geometría diferencial. Buena prueba de ello son las diferentes formulaciones geométricas que se utilizan para obtener ecuaciones invariantes del movimiento: estructuras casi producto ([24],[56], [57], [58]), conexiones ([14], [63], [91]), fibrados de jets ([75], [76]), etc.

Dichos sistemas surgen al imponer a un sistema mecánico restricciones no integrables, es decir, restricciones que no pueden escribirse como la derivada de una cierta función que dependa solamente de las coordenadas generaliza-

das del espacio de configuración. El interés que tienen los sistemas mecánicos no holónomos con control es que los problemas que originan no se pueden abordar mediante la teoría de control lineal y tampoco pueden transformarse en problemas lineales, requieren esencialmente técnicas no lineales. Por otra parte este tipo de sistemas son lo suficientemente buenos como para poder realizar avances en su estudio. Existen numerosos ejemplos de sistemas no holónomos con control: el filo de un cuchillo deslizando sobre un plano ([10], [12]), un disco o una esfera rodando sin deslizar ([9], [11]), un camión con varios remolques ([99]), etc.

Los sistemas no holónomos con control surgen en diversas situaciones:

- Cuando el movimiento de un sistema mecánico está sometido a la conservación de ciertas cantidades, siendo éstas no integrables. Quizá el caso más habitual es aquel en que hay una función no integrable del momento angular que se conserva ([52], [53]).
- Cuando el sistema mecánico posee simetrías y restricciones no holónomas. Este es el caso del "snakeboard" ([67], [88]), donde las restricciones resultan de imponer la condición de no deslizamiento sobre las ruedas y la conservación del momento angular.
- Cuando se imponen restricciones en el diseño de los controles, si éstas no son integrables.

Estos sistemas están siendo ampliamente estudiados en robótica (manipulación mediante robots, robótica espacial, vehículos rodantes, movimiento de robots, etc.) y muchos de ellos tienen también gran interés para otras ramas de la ingeniería.

Nuestra intención es, partiendo del desarrollo geométrico que nos ofrecen los trabajos antes mencionados, tratar de abordar cuestiones de estabilidad y control, así como la reducción en el caso dependiente del tiempo.

Con respecto a la estabilización y control de sistemas no holónomos, cabe destacar los trabajos de A.M. Bloch, N.H. Mc.Clamroch, M. Reyhanoglu y P.E. Crouch ([8], [9], [10], [11], [12], [89]). En estos se establece un marco general de trabajo para el control de sistemas dinámicos no holónomos, de manera particular se hace hincapié en las propiedades de control de estos sistemas poniendo de manifiesto las diferencias con el caso holónimo. Presentan condiciones para asegurar la estabilidad asintótica de la subvariedad de puntos de equilibrio y demuestran que un punto de equilibrio no puede ser estable asintóticamente mediante una retroalimentación continua.

Finalmente desarrollan de manera más geométrica el control de sistemas dinámicos de Chaplygin, es decir, sistemas no holónomos con simetrías que

vienen caracterizadas localmente por ser acíclicas en ciertas variables. Los desarrollos teóricos se aplican a sistemas físicos como el control del filo de un cuchillo deslizándose sobre una superficie plana o el de un disco rodando sin deslizar.

La línea en la que nos hemos propuesto profundizar estas cuestiones es la del estudio de la formulación y las propiedades geométricas de estos sistemas y las consecuencias que para su control se derivan. Así como los resultados de los trabajos antes mencionados son prácticamente todos ellos de carácter local, están dados en coordenadas locales, escondiendo las propiedades geométricas del espacio de estados y de los campos vectoriales que definen el sistema, en esta tesis se pretende conseguir una descripción intrínseca de algunas propiedades del control de dichos sistemas.

Este modo de proceder ha sido empleado ampliamente por autores como: A.D. Lewis, R. Murray, F. Bullo ([19], [63], [65]), J.P. Ostrowski, J.W. Burdick ([86], [87]) y J.E. Marsden [14] entre otros. Así, en [65], se dan condiciones suficientes para asegurar controlabilidad en las configuraciones para sistemas mecánicos simples con control. En estas condiciones juega un papel esencial la conexión de Levi-Civita de la métrica de la energía cinética del sistema y proporciona una interpretación de las mismas que permitirá generalizarlas al caso de una conexión afín general y extender el análisis de controlabilidad al caso de sistemas no holónomos. En [14] se desarrolla la formulación geométrica de los sistemas no holónomos lagrangianos con simetrías basándose en la generalización del uso de las conexiones y aplicaciones momento asociadas al grupo de simetría.

Finalmente, en [86] y [87] se utilizan técnicas geométricas cuando el sistema no holónimo se encuentra afectado por simetrías. La presencia de éstas producen, en muchos casos, que movimientos periódicos en la base den lugar a movimientos en todo el espacio o fibra. Esta propiedad se usa frecuentemente para controlar el sistema a través de movimientos en la base. La herramienta matemática que se ha mostrado eficaz en la descripción, el estudio del movimiento y la generación de patrones de desplazamiento ha sido la teoría de conexiones. Utilizando resultados de Teoría de Control se establecen tests de controlabilidad y accesibilidad basándose en la geometría del sistema reducido, así como algoritmos que generan los controles adecuados en la base para conseguir un cierto movimiento en la fibra.

A continuación damos una descripción de los diferentes capítulos, indicando las novedades que aportan.

## Capítulo 2

En este capítulo se recuerdan de manera sucinta algunos conceptos matemáticos necesarios para tratar geoméricamente los sistemas mecánicos y su control: conexiones Riemannianas, Teorema de Frobenius, geometría del fibrado tangente, variedades simplécticas y acciones de grupos de Lie.

## Capítulo 3

Se desarrolla el formalismo geométrico para la descripción de los sistemas dinámicos de la Mecánica Clásica, esto es, Newtoniana. Se aborda el estudio de los casos en los que hay ligaduras ya sean holónomas o no holónomas. En el caso no holónimo se da una caracterización de la subvariedad de puntos de equilibrio y se clarifica el papel que juegan los multiplicadores de Lagrange. Se introducen los sistemas mecánicos disipativos.

Por otra parte, en Física existen muchos tipos de sistemas dinámicos que no son puramente mecánicos y que, no obstante, pueden también ser descritos geoméricamente. Se presenta también el formalismo geométrico Lagrangiano que posteriormente es utilizado para generalizar a esta situación algunos resultados que se obtienen en el caso mecánico.

## Capítulo 4

Aquí se estudia la estabilidad de los sistemas mecánicos disipativos y parcialmente disipativos desde un punto de vista geométrico. Ya que el ambiente geométrico apropiado para llevar a cabo este estudio son las variedades de Riemann, lo primero que se aborda es la generalización de los teoremas de estabilidad y estabilidad asintótica de La Salle de puntos de equilibrio de sistemas dinámicos al caso de variedades de Riemann completas. Posteriormente esta generalización se amplía a las subvariedades de puntos de equilibrio. La estabilidad de los sistemas mecánicos disipativos se estudia haciendo uso de las particulares propiedades geométricas del fibrado tangente.

Con las herramientas antes desarrolladas, se trata la estabilidad de los sistemas mecánicos simples no holónomos, es decir, aquellos en los que el espacio de configuración es una variedad de Riemann  $(Q, g)$ , la lagrangiana es de tipo mecánico y la subvariedad de ligaduras viene definida por una distribución  $D \subset TQ$ . Se establecen resultados sobre la estabilidad de ésta a través de los teoremas de La Salle generalizados.

El hecho de trabajar con funciones lagrangianas del tipo  $L = T - V \in C^\infty(TQ)$ , es decir mecánicas, tiene la desventaja de dejar fuera importantes sistemas físicos, como por ejemplo las fuerzas magnéticas. Se generalizan

también las propiedades de estabilidad al caso de sistemas lagrangianos cualesquiera.

## Capítulo 5

Por medio de la aplicación de los resultados obtenidos en el capítulo anterior, se trata la estabilización por pasividad de los sistemas mecánicos con control. Este tipo de técnicas se diseñan para estabilizar puntos de equilibrio. También se trabaja el caso de sistemas parcialmente disipativos y se usan extensiones dinámicas, clarificando lo que son desde un punto de vista geométrico, para estabilizar el sistema en una configuración deseada.

Una vez estudiada la estabilidad en sistemas mecánicos simples no holónomos se aborda el caso con control. Nos centraremos en la aplicación de la estabilidad de sistemas no holónomos disipativos al diseño de controles que permitan estabilizar un sistema en su variedad de puntos de equilibrio (control por pasividad) o en una variedad prefijada (extensiones dinámicas) mediante técnicas de pasividad.

## Capítulo 6

En este capítulo analizamos la equivalencia entre las ecuaciones de segundo orden que rigen la dinámica de los sistemas mecánicos y las ecuaciones del sistema cinemático asociado en el caso de sistemas no holónomos con control y sistemas mecánicos con simetrías.

En el caso de sistemas no holónomos con control, estudiamos separadamente el caso completamente actuado del caso infractuado. En la primera situación se prueba que las curvas solución del sistema mecánico y las del sistema cinemático son las mismas. Por otro lado, en la segunda, hay que imponer una condición sobre las fuerzas externas que actúan sobre el sistema para que los sistemas sean equivalentes.

En el segundo caso, si el sistema tiene un grupo de simetrías, se prueba que la dinámica del sistema, restringida a la superficie de nivel cero de la aplicación momento asociada, corresponde a un sistema no holónimo y por tanto podemos aplicar los teoremas de equivalencia entre el sistema dinámico y su sistema cinemático asociado.

## Capítulo 7

Aquí se hace la reducción de la formulación de contacto para sistemas lagrangianos dependientes del tiempo que poseen una simetría infinitesimal

generada por el campo vectorial asociado a una conexión. El sistema resultante de la reducción es un sistema hamiltoniano donde la función hamiltoniana es la proyección de la función energía lagrangiana, la forma simpléctica es la proyección de la parte vertical de la 2-forma de Poincaré-Cartan y el campo dinámico, la proyección del campo dinámico correspondiente al sistema inicial sin reducir.

Posteriormente se trabaja esta reducción en el caso de sistemas no holónomos lagrangianos dependientes del tiempo con simetría. El objetivo es reducir la formulación de contacto para una lagrangiana dependiente del tiempo en un sistema no holónimo a una formulación simpléctica cuando existe una simetría infinitesimal. El problema clave consiste en el estudio de la relación que se debe dar entre el campo de simetría y la variedad de ligaduras.

## Capítulo 8

En este Capítulo se resumen los nuevos resultados que se aportan en este trabajo y se sugieren futuros campos de investigación.



# Capítulo 2

## Nociones previas y notaciones

En este capítulo presentamos sucintamente algunos conceptos matemáticos necesarios para tratar geoméricamente los sistemas mecánicos y su control. Todas las variedades y las aplicaciones son de clase  $C^\infty$ , salvo que se diga explícitamente lo contrario. Las nociones necesarias de control se introducirán en el momento en que se necesiten.

### Introducción y Notaciones

Las variedades diferenciales con las que trataremos en todo el trabajo serán  $C^\infty$ , paracompactas y Hausdorff. Si  $\phi : M \rightarrow N$  es una aplicación diferenciable de la variedad  $M$  a la variedad  $N$ , denotaremos la aplicación tangente por  $T\phi : TM \rightarrow TN$  donde  $TM$  es el fibrado tangente a  $M$ . El conjunto de todas las aplicaciones diferenciables de  $M$  a  $N$  se denota por  $C^\infty(M, N)$ . Si  $N = \mathbb{R}$  pondremos simplemente  $C^\infty(M)$ .

El conjunto de  $(r, s)$ -campos tensoriales,  $r$ -covariantes y  $s$ -contravariantes, en  $M$  se denota por  $\mathcal{T}_s^r(M)$ . Los elementos de  $\mathcal{T}_0^1(M)$  se llaman campos vectoriales en  $M$  y denotaremos este conjunto por  $\mathfrak{X}(M)$ . El conjunto de campos vectoriales con el paréntesis de Lie forma un álgebra de Lie. Los campos tensoriales antisimétricos  $k$ -covariantes reciben el nombre de  $k$ -formas. Denotaremos el conjunto de las  $k$ -formas sobre  $M$  de la forma  $\Omega^k(M)$ . Por convenio tomamos  $\Omega^0(M) = C^\infty(M)$ . Denotaremos por  $\Omega(M) = \bigoplus_{k=0}^\infty \Omega^k(M)$  al álgebra exterior de  $M$  con las operaciones suma y producto exterior. La diferencial exterior la denotaremos  $d : \Omega^k(M) \rightarrow \Omega^{k+1}(M)$ . Diremos que una  $k$ -forma  $\alpha$  es cerrada si  $d\alpha = 0$  y exacta si  $\alpha = d\beta$  para alguna  $\beta \in \Omega^{k-1}(M)$ . Dado un campo vectorial  $X$  y una  $k$ -forma  $\alpha$ , el *producto interior* de  $X$  y  $\alpha$  es una  $(k - 1)$ -forma que denotaremos  $i(X)\alpha$ . Dado el campo vectorial  $X$ , denotaremos por  $\mathcal{L}_X : \mathcal{T}_s^r(M) \rightarrow \mathcal{T}_s^r(M)$  al operador *derivada de Lie* respecto a  $X$ .

Recordemos ahora algunas nociones básicas sobre fibrados. Un *fibrado diferenciable* viene dado por una submersión exhaustiva  $\pi : M \rightarrow B$  que tiene la propiedad de ser localmente trivial. Esto es, existe una variedad  $F$  tal que , para cada  $b \in B$ , existe un entorno  $U$  de  $b$  y un difeomorfismo  $\phi : \pi^{-1}(U) \rightarrow U \times F$  tal que  $\pi \circ \phi|_U^{-1} = \text{id}_U$ . El *subfibrado vertical* de  $\pi$  es el subfibrado de  $TM$  definido por  $V(M) = \ker(T\pi)$ . Llamaremos a un campo vectorial en  $M$  vertical si toma valores en  $V(M)$ . Los denotaremos por  $\mathfrak{X}^V(M, \pi)$ .

Una clase especial de fibrados son los vectoriales cuyas fibras tienen una estructura de espacio vectorial. Una sección de un fibrado vectorial  $\pi : E \rightarrow M$  es una aplicación  $X : M \rightarrow E$  tal que  $\pi \circ X = \text{id}_M$ . El conjunto de *secciones de un fibrado vectorial* se denota de la forma  $\Gamma(E)$ .

Sea  $\pi : E \rightarrow M$  un fibrado y  $f : N \rightarrow M$  una aplicación diferenciable. Llamaremos *sección de  $E$  a lo largo de la aplicación  $f$*  a una aplicación diferenciable  $\sigma : N \rightarrow E$  tal que  $\pi \circ \sigma = f$ . Cuando  $E = TM$  o  $E = T^*M$  hablaremos de *campos o formas a lo largo de la proyección  $f$*  y denotaremos los respectivos conjuntos de la forma  $\mathfrak{X}(M, f)$  y  $\Omega^1(M, f)$ .

### Conexiones Riemannianas

Una *métrica pseudo-Riemanniana* en una variedad  $M$  es una sección no degenerada de  $\mathcal{T}_2^0(M)$ . Si es definida positiva en cada fibra diremos que es una *métrica de Riemann*. Una variedad Riemanniana es una pareja,  $(M, g)$ , donde  $M$  es una variedad diferenciable y  $g$  una métrica de Riemann en  $M$ . Dada una métrica pseudo-Riemanniana podemos definir dos isomorfismos de  $C^\infty(M)$ -módulos:

$$\sharp : \Omega^1(M) \rightarrow \mathfrak{X}(M)$$

$$\flat : \mathfrak{X}(M) \rightarrow \Omega^1(M)$$

La aplicación  $\flat$  viene definida por  $\flat(X) = i(X)g \in \Omega^1(M)$  y  $\sharp$  es su inversa. En particular, si  $f$  es una función sobre  $M$ , definimos el gradiente de  $f$  como  $\text{grad } f = (df)^\sharp$ .

Una variedad Riemanniana está dotada de una *conexión afín*. En general una conexión afín es una aplicación de  $\mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M)$  a  $\mathfrak{X}(M)$ , denotada por  $\nabla_X Y$ , con las siguientes propiedades:

1.  $\mathbb{R}$ -lineal tanto en  $X$  como en  $Y$ .
2.  $\nabla_{fX} Y = f \nabla_X Y$
3.  $\nabla_X fY = f \nabla_X Y + (Xf)Y$  para toda  $f \in C^\infty(M)$

Llamaremos a  $\nabla_X Y$  la derivada covariante de  $Y$  con respecto a  $X$ . Dada una conexión afín y un conjunto de coordenadas  $(x^1, \dots, x^n)$  para  $M$ , definimos los símbolos de Christoffel para la conexión afín en estas coordenadas como

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^j}} \frac{\partial}{\partial x^k} = \Gamma_{jk}^i \frac{\partial}{\partial x^i}.$$

De las propiedades de la conexión afín, se tiene que

$$\nabla_X Y = \left( \frac{\partial Y^i}{\partial x^j} X^j + \Gamma_{jk}^i X^j Y^k \right) \frac{\partial}{\partial x^i}.$$

Dada una curva diferenciable  $\gamma : [0, T] \rightarrow M$  y  $v_{\gamma(0)} \in T_{\gamma(0)}M$ , existe un único campo vectorial  $X(t)$  a lo largo de  $\gamma$  con la propiedad de que  $\nabla_X \dot{\gamma}(t) = 0$ . Entonces, esto define una aplicación de  $T_{\gamma(s)}M$  a  $T_{\gamma(t)}M$  para  $s, t \in [0, T]$  que envía  $X(s)$  a  $X(t)$ . Esta aplicación se denomina transporte paralelo.

Si  $(M, g)$  es una variedad Riemanniana, existe una única conexión afín en  $M$  tal que  $\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y]$  y además  $\nabla_X g = 0$ . En este caso, el transporte paralelo respecto a esta conexión es una isometría de  $g$ . Esta conexión se denomina *conexión de Levi-Civita*. Se verifica que los símbolos de Christoffel de la conexión de Levi-Civita vienen dados por

$$\Gamma_{jk}^i = \frac{1}{2} g^{il} \left( \frac{\partial g_{lj}}{\partial x^k} + \frac{\partial g_{lk}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{lk}}{\partial x^l} \right)$$

Una curva  $\gamma : [0, T] \rightarrow M$  en una variedad Riemanniana se denomina geodésica si  $\nabla_{\dot{\gamma}(t)} \dot{\gamma}(t) = 0$ . En coordenadas locales, una geodésica viene dada por las soluciones de la siguiente ecuación diferencial de segundo orden:

$$\ddot{x}^i + \Gamma_{jk}^i \dot{x}^j \dot{x}^k = 0$$

Esta ecuación diferencial es la representación local de un campo vectorial en  $TM$ . Este campo vectorial se denomina campo geodésico. Lo denotaremos por  $X_g$ . En coordenadas locales

$$X_g = v^i \frac{\partial}{\partial x^i} - \Gamma_{jk}^i v^j v^k \frac{\partial}{\partial v^i}$$

### Teorema de Frobenius

Sea  $M$  una variedad diferenciable. Una *distribución* diferenciable en  $M$  es un subfibrado de  $TM$ . Llamaremos rango de  $D$  a la dimensión de  $D_x$ . Diremos que una distribución  $D$  es *involutiva* si  $[X, Y] \in \Gamma(D)$  para todo  $X, Y \in \Gamma(D)$ . Una subvariedad integral de  $D$  es una subvariedad  $N$  tal que

$T_x N = D_x$  para todo  $x \in N$ . Una distribución se dice *completamente integrable* si para cada  $x \in M$  existe una subvariedad integral  $N$  de  $D$ . El teorema de Frobenius asegura que la involutibilidad y la integrabilidad de una distribución son nociones equivalentes.

Un modo de dar una distribución es mediante una familia de campos vectoriales, es decir, un subconjunto  $V \subseteq \mathfrak{X}(M)$ . Dada la familia  $V$ , podemos definir una distribución en  $M$  de la siguiente manera:

$$D_x = \langle X(x) \mid X \in V \rangle.$$

Dada una distribución  $D$  definiremos su anulador como la codistribución, subfibrado de  $T^*M$ , dada por

$$D_x^0 = \{\alpha \in T_x^*M \mid \alpha(v) = 0, \forall v \in D_x\}.$$

Una *foliación*,  $\mathcal{F}$ , de una variedad diferenciable  $M$  es una colección disjunta de subvariedades inmersas en  $M$  cuya unión es igual a  $M$ . Llamaremos a cada una de las subvariedades de  $\mathcal{F}$  una hoja de la foliación. Dada una distribución integrable  $D$ , el conjunto de subvariedades integrales maximales de  $D$  define una foliación. Una foliación de  $M$  define una relación de equivalencia en  $M$  donde dos puntos son equivalentes si pertenecen a la misma hoja. El conjunto de clases de equivalencia se denomina espacio de hojas.

## Geometría del Fibrado Tangente

En el fibrado tangente existen estructuras geométricas canónicas interesantes para este trabajo: el fibrado vertical, el endomorfismo vertical y el campo de Liouville. Además son característicos en  $TM$  los campos vectoriales que corresponden a ecuaciones diferenciales de segundo orden en la variedad  $M$ . Denotaremos por  $(x^i, v^i)$  las coordenadas naturales en  $TM$  asociadas a las coordenadas  $(x^i)$  en  $M$ .

Sea  $\tau_M : TM \rightarrow M$  la proyección natural y consideremos  $T\tau_M : T(TM) \rightarrow TM$  su aplicación tangente. Se denomina *fibrado vertical* de  $TM$  al subfibrado vectorial

$$V(TM) = \bigcup_{u_x \in TM} V_{u_x}(TM)$$

donde  $V_{u_x}(TM) = \ker T_{u_x}\tau_M$ . Se denominan *campos verticales* a las secciones del fibrado  $V(TM)$ . El conjunto de estos campos los designaremos por  $\mathfrak{X}^V(TM)$ .

Dado  $u_x \in TM$  con  $\tau_M(u_x) = x$ , consideremos la aplicación  $\lambda_x^{u_x} : T_x M \rightarrow V_{u_x}(TM)$  definida de la siguiente manera. Si  $v_x \in T_x M$ , entonces  $\lambda_x^{u_x}(v_x)$

viene dada por:

$$\lambda_x^{u_x}(v_x)f = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x, u + tv) - f(x, u)}{t}$$

donde  $f \in C^\infty(TM)$ . Denominaremos a esta aplicación *levantamiento vertical* de  $v_x$  al punto  $u_x$ . Su extensión natural a campos vectoriales

$$\lambda : \mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathfrak{X}^V(TM),$$

a la que seguiremos llamando levantamiento vertical, viene dada mediante  $\lambda(X)(u_x) = \lambda_x^{u_x}(X(x))$ . En coordenadas locales  $(x^i, v^i)$ , si  $X = \sum_{i=1}^n f^i \frac{\partial}{\partial x^i}$  se tiene que  $\lambda(X) = \sum_{i=1}^n \tau_M^* f^i \frac{\partial}{\partial v^i}$ .

Sea  $u_x \in T_x M$  y  $w \in T_{u_x}(TM)$ . Denominaremos *endomorfismo vertical* a la aplicación  $J_{u_x} : T_{u_x}(TM) \rightarrow T_{u_x}(TM)$  definida por  $J_{u_x}(w) = (\lambda_x^{u_x} \circ T_{u_x} \tau_M)(w)$ . Obsérvese que  $J_{u_x}$  no es más que proyectar sobre  $T_x M$  y levantar verticalmente. Esta aplicación se extiende de manera natural a los campos vectoriales:

$$J : \mathfrak{X}(TM) \rightarrow \mathfrak{X}^V(TM).$$

$J(X)(u_x) = \lambda_x^{u_x}(T_{u_x} \tau_M(X(u_x)))$ . En coordenadas locales  $(x^i, v^i)$ , si  $X = \sum_{i=1}^n f^i \frac{\partial}{\partial x^i} + g^i \frac{\partial}{\partial v^i}$  se tiene que  $J(X) = \sum_{i=1}^n \tau_M^* f^i \frac{\partial}{\partial v^i}$ .

Definimos el *campo de Liouville* como el campo vertical  $\Delta \in \mathfrak{X}(TM)$  tal que  $\Delta(u_x) = \lambda_x^{u_x}(u_x)$ . En coordenadas locales  $\Delta = \sum_{i=1}^n v^i \frac{\partial}{\partial v^i}$ .

Diremos que un campo  $X \in \mathfrak{X}(TM)$  es de *segundo orden* si sus curvas integrales son subidas canónicas a  $TM$  de curvas en  $M$ . La condición necesaria y suficiente para que  $X \in \mathfrak{X}(TM)$  sea de segundo orden es que  $T\tau_M \circ X = \text{id}_{TM}$  o equivalentemente  $J(X) = \Delta$ . Algunos autores denominan a este tipo de campos campos holónomos.

## Variedades simplécticas

Una *variedad casi simpléctica* es una pareja  $(M, \Omega)$ , donde  $M$  es una variedad diferenciable y  $\Omega$  es una 2-forma no degenerada. Diremos que una variedad casi simpléctica es *simpléctica* si  $d\Omega = 0$ .

Ya que la forma simpléctica  $\Omega$  es no degenerada, la aplicación  $\Omega^\flat : \mathfrak{X}(M) \rightarrow \Omega^1(M)$  es un isomorfismo. Denotaremos a la inversa de  $\Omega^\flat$  por  $\Omega^\sharp$ . Si  $f \in C^\infty(M)$ , definimos el correspondiente *campo vectorial Hamiltoniano* de la forma  $X_f = \Omega^\sharp df$ . Los campos vectoriales Hamiltonianos dejan invariante la forma simpléctica, esto es,  $\mathcal{L}_{X_f} \Omega = 0$ . Un campo vectorial se dice *localmente hamiltoniano* si deja invariante la forma simpléctica.

### Acciones de Grupos de Lie

Sea  $G$  una variedad diferencial, y supongamos que posee estructura de grupo  $(G, \cdot)$ . Diremos que  $G$  es un *grupo de Lie* si las aplicaciones

$$\begin{aligned} G \times G &\rightarrow G & G &\rightarrow G \\ (g_1, g_2) &\mapsto g_1 g_2 & g &\mapsto g^{-1} \end{aligned}$$

son ambas de clase  $C^\infty$ .

Dado  $g \in G$ , denotaremos por  $L_g: G \rightarrow G$  y  $R_g: G \rightarrow G$  la multiplicación por  $g$  a izquierda y a derecha, respectivamente, esto es,  $L_g(h) = gh$  y  $R_g(h) = hg$ . Podemos considerar el conjunto de *campos vectoriales invariantes a izquierda* en  $G$  que denotaremos por  $\mathfrak{X}_l(G)$ .  $X \in \mathfrak{X}_l(G)$  si y sólo si  $L_{g*}X = X$  para todo  $g \in G$ . El conjunto  $\mathfrak{X}_l(G)$  forma una subálgebra de  $\mathfrak{X}(G)$ , es decir, el paréntesis de Lie de dos campos invariantes a izquierda es otro campo invariante a izquierda. El álgebra de Lie  $\mathfrak{X}_l(G)$  se denomina *álgebra de Lie* asociada a  $G$  y se denota por  $\mathfrak{g}$ . El fácil ver que  $\mathfrak{g}$  se identifica de manera natural con  $T_e G$ , donde denotamos por  $e$  al elemento neutro del grupo.

Sea  $\xi$  un elemento del álgebra de Lie  $\mathfrak{g}$ . Consideremos el campo vectorial invariante asociado,  $X_\xi$ . Sea  $\phi_\xi: \mathbb{R} \rightarrow G$  la curva integral de  $X_\xi$  que pasa por  $e$  en  $t = 0$ . La *aplicación exponencial* del grupo de Lie,  $\exp: \mathfrak{g} \rightarrow G$ , se define como  $\exp(\xi) = \phi_\xi(1)$ .

Una *acción a izquierda* de un grupo de Lie  $G$  sobre una variedad diferenciable  $M$  es una aplicación diferenciable  $\Phi: G \times M \rightarrow M$  tal que:

1.  $\Phi(e, x) = x$ , para todo  $x \in M$ .
2.  $\Phi(g, \Phi(h, x)) = \Phi(gh, x)$ , para todo  $g, h \in G, x \in M$ .

La *órbita* de la  $G$ -acción que pasa por  $x$  es  $\text{Orb}_G(x) = \{gx \mid g \in G\}$ . Se dirá que la acción es *libre* si no tiene puntos fijos, es decir, si  $\Phi(g, x) = x$ , implica  $g = e$ . La acción se denomina *propia* si  $\bar{\Phi}: G \times M \rightarrow M \times M$  definida por  $\bar{\Phi}(g, x) = (x, \Phi(g, x))$  es una aplicación propia, es decir,  $\bar{\Phi}^{-1}(K)$  es compacto si  $K \subset M \times M$  lo es. Finalmente, una acción se dice *regular* si el conjunto  $M/G$  tiene una estructura de variedad diferenciable tal que la proyección canónica de  $M$  en  $M/G$  es una submersión. Si  $\Phi$  es libre y propia, entonces es regular y por lo tanto  $M/G$  es una variedad diferenciable y  $\pi: M \rightarrow M/G$  una submersión.

Sea  $G$  un grupo de Lie y una acción de  $G$  sobre  $M$  que supondremos libre y propia. Si  $\mathfrak{g}$  es el álgebra de Lie de  $G$  y  $\xi \in \mathfrak{g}$ , entonces la aplicación  $\Phi^\xi: \mathbb{R} \times M \rightarrow M$  dada por  $\Phi^\xi(t, x) = \Phi(\exp(t\xi), x)$  es una  $\mathbb{R}$ -acción en  $M$ , esto es,  $\Phi^\xi$  es un flujo en  $M$ . El campo vectorial correspondiente a ese flujo

dado por

$$\xi^M(x) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \Phi(\exp(t\xi), x)$$

se llama *campo fundamental* de la acción correspondiente a  $\xi$ .





# Capítulo 3

## Geometría de los sistemas mecánicos

Se describe en este capítulo el formalismo geométrico para estudiar la dinámica de los sistemas mecánicos en una variedad de Riemann en los casos sin ligaduras y con ligaduras, tanto holónomas como no holónomas. Se introducen las nociones de sistema disipativo y estrictamente disipativo.

La descripción de la dinámica de los sistemas no holónomos como campos vectoriales de segundo orden en el espacio de fases ha permitido dar una interpretación geométrica de los multiplicadores de Lagrange y ha proporcionado un método eficiente para su cálculo (Proposición 3.7). Como consecuencia de esto se obtiene una caracterización de la subvariedad de los puntos de equilibrio del sistema (Proposición 3.8).

Finalmente se describe el formalismo Lagrangiano que se utilizará posteriormente para generalizar algunos de los resultados que se dan en el caso mecánico.

### 3.1 Sistemas dinámicos.

Sea  $M$  una variedad diferenciable. Un *sistema dinámico* en  $M$  es un campo vectorial  $Y \in \mathfrak{X}(M)$ . Llamaremos  $M$  al *espacio de fases* del sistema. La ecuación diferencial asociada a  $Y$ , esto es, la ecuación de las curvas integrales de  $Y$ , llamada *ecuación de evolución*, viene dada por

$$Y \circ \gamma = \dot{\gamma}$$

donde  $\gamma$  es una curva en  $M$  y  $\dot{\gamma}$  el levantamiento canónico de  $\gamma$  a  $TM$ .

El campo vectorial  $Y \in \mathfrak{X}(M)$  define un *sistema disipativo* si existe una función no negativa  $S \in C^\infty(M)$  *decreciente* a lo largo de las curvas integrales de  $Y$ , esto es,  $\mathcal{L}_Y S \leq 0$ . Se dice que  $S$  es *función de disipación* para  $Y$ .

Si  $\mathcal{L}_Y S < 0$ , es decir,  $S$  es *estrictamente decreciente* a lo largo de las curvas integrales de  $Y$ , diremos que el sistema es *estrictamente disipativo*.

## 3.2 Sistemas mecánicos Newtonianos.

La mecánica Newtoniana se reconoce como una de las teorías físicas más precisas que se han elaborado. Trescientos años después de la publicación de los *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica* (1687), ha sido necesario emplear una gran sutileza, ingenio y experiencias muy refinadas para proponer cambios adecuados que mejoren la aproximación a las leyes físicas.

La relatividad y la teoría cuántica han cambiado la visión clásica de la física, no obstante el formalismo matemático de la mecánica clásica desempeña todavía un papel esencial. Suministra al mismo tiempo un marco para la interpretación y una valiosa intuición geométrica, indispensable para cualquier uso avanzado de las aplicaciones de las matemáticas en la física moderna y en la tecnología. Además el nivel de precisión es adecuado al uso necesario de esas leyes.

### 3.2.1 Sistemas mecánicos en una variedad de Riemann.

Sea  $(Q, g)$  una variedad de Riemann,  $\dim Q = n$ , y sea  $\nabla$  la conexión de Levi-Civita asociada a la métrica de Riemann  $g$ . Diremos que una curva diferenciable,  $\gamma : I \rightarrow Q$ , es una *trayectoria*, o una *solución*, del sistema mecánico asociado al campo vectorial  $F \in \mathfrak{X}(Q)$ , si  $\gamma$  satisface la ecuación diferencial

$$\nabla_{\dot{\gamma}} \dot{\gamma} = F \circ \gamma \quad (3.1)$$

$F$  se denomina campo vectorial de *fuerzas externas*. En coordenadas locales  $(q^i)$  de  $Q$ , las componentes  $(\gamma^1, \dots, \gamma^n)$  de  $\gamma$  satisfacen las ecuaciones diferenciales

$$\ddot{\gamma}^k + \sum_{i,j=1}^n \Gamma_{ij}^k \dot{\gamma}^i \dot{\gamma}^j = F^k(\gamma^1, \dots, \gamma^n) \quad k = 1, \dots, n \quad (3.2)$$

donde  $\{\Gamma_{ij}^k\}$  son los símbolos de Christoffel de la conexión  $\nabla$  en las coordenadas dadas. Las ecuaciones (3.1) y (3.2) son las clásicas *ecuaciones de Newton de la mecánica*.

Sea  $TQ$  el fibrado tangente de  $Q$ , con  $\tau_Q : TQ \rightarrow Q$  la proyección natural, la *energía cinética* del sistema es la función

$$\begin{aligned} T : TQ &\longrightarrow \mathbb{R} \\ v_q &\longmapsto \frac{1}{2}g_q(v_q, v_q). \end{aligned}$$

En coordenadas locales, su expresión es  $T(q^i, v^i) = \frac{1}{2}g_{ij}(q)v^i v^j$ , donde  $(q^i, v^i)$  son las coordenadas naturales en  $TQ$  asociadas a las coordenadas  $(q^i)$  en  $Q$ . Haciendo uso de esta expresión local podemos escribir las ecuaciones (3.2) en la siguiente forma equivalente:

$$\left. \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial v^i} \right|_{\dot{\gamma}} - \left. \frac{\partial T}{\partial q^i} \right|_{\dot{\gamma}} = \sum_{j=1}^n g_{ij} F^j \circ \gamma \quad i = 1, \dots, n$$

llamadas *ecuaciones de Euler-Lagrange*.

Si existe una función diferenciable  $U : Q \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $F = -\text{grad } U$ , llamaremos a  $U$  *función potencial*.

Un *sistema mecánico simple* viene dado por una variedad de Riemann,  $(Q, g)$ , que denominaremos *espacio de configuración*, y un campo vectorial  $F = -\text{grad } U$ . Denotaremos este tipo de sistemas de la forma  $(Q, g, U)$ .

En los sistemas mecánicos simples, la *función Lagrangiana* se define como  $L = T - \tau_Q^* U$ , que por simplicidad escribiremos como  $L = T - U$ .

De manera habitual, el campo de fuerzas  $F$ , descompone en suma de dos campos vectoriales, uno de los cuales proviene de una función potencial. Entonces, si  $F = -\text{grad } U + R$ , las ecuaciones dinámicas se escriben como

$$\nabla_{\dot{\gamma}} \dot{\gamma} = -\text{grad } U \circ \gamma + R \circ \gamma \quad (3.3)$$

y, haciendo uso de la función lagrangiana, estas ecuaciones son equivalentes a las ecuaciones de Euler-Lagrange que ahora adoptan la forma:

$$\left. \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial v^i} \right|_{\dot{\gamma}} - \left. \frac{\partial L}{\partial q^i} \right|_{\dot{\gamma}} = \sum_{j=1}^n g_{ij} R^j \circ \gamma \quad i = 1, \dots, n. \quad (3.4)$$

En esta situación, denotaremos el sistema mecánico de la forma  $(Q, g, U, R)$ .

Es bien sabido que las ecuaciones dinámicas de la mecánica son ecuaciones de segundo orden en la variedad de configuración  $Q$ , es decir, ecuaciones de primer orden en el fibrado tangente  $TQ$ . Por lo tanto, las curvas soluciones de las ecuaciones (3.3) o (3.4) son las curvas integrales de un campo vectorial de segundo orden  $Y \in \mathfrak{X}(TQ)$  asociado a las ecuaciones de Newton. En coordenadas locales  $(q^i, v^i)$  de  $TQ$ , este campo vectorial  $Y$  se expresa como

$$\begin{aligned} Y &= \sum_{i=1}^n \left( v^i \frac{\partial}{\partial q^i} + \left( F^i - \sum_{j,k=1}^n \Gamma_{jk}^i v^j v^k \right) \frac{\partial}{\partial v^i} \right) \\ &= \sum_{i=1}^n \left( v^i \frac{\partial}{\partial q^i} - \sum_{j,k=1}^n \Gamma_{jk}^i v^j v^k \frac{\partial}{\partial v^i} \right) + \sum_{i=1}^n F^i \frac{\partial}{\partial v^i} = X_g + F^v \end{aligned}$$

donde  $X_g$  es el *campo geodésico* de la métrica de Riemann  $g$  y  $F^v$  es el levantamiento vertical del campo de fuerzas  $F$  de  $Q$  a  $TQ$ .

Ya que  $Y \in \mathfrak{X}(TQ)$  satisface la condición de segundo orden, es un campo vectorial holónomo en  $TQ$ , sus curvas integrales son levantamientos canónicos de curvas en la variedad  $Q$ . Al fibrado tangente  $TQ$ , se le denomina *espacio de fases* del sistema mecánico. Ver [1] para más detalles sobre  $TQ$  y las propiedades de los campos vectoriales de segundo orden.

Cuando trabajamos con sistemas mecánicos, es usual considerar fuerzas que dependen de las velocidades. Son campos vectoriales en la variedad  $Q$  a lo largo de la proyección  $\tau_Q : TQ \rightarrow Q$ , esto es, aplicaciones  $R : TQ \rightarrow TQ$  tales que  $\tau_Q \circ R = \tau_Q$ . Denotemos por  $\mathfrak{X}(Q, \tau_Q)$  el conjunto de tales campos de vectores.

Las ecuaciones de los sistemas mecánicos con campo vectorial de fuerzas dado por  $F = -\text{grad } U + R$  con  $R \in \mathfrak{X}(Q, \tau_Q)$  son

$$\nabla_{\dot{\gamma}} \dot{\gamma} = -(\text{grad } U) \circ \gamma + R \circ \dot{\gamma}.$$

Observemos que en estas ecuaciones tenemos  $R \circ \dot{\gamma}$  en lugar de  $R \circ \gamma$ , ya que  $R$  depende de las velocidades.

### Sistemas mecánicos disipativos.

Dado  $R \in \mathfrak{X}(Q, \tau_Q)$ , decimos que es un campo *disipativo* si cumple que  $g_p(R(v_q), v_q) \leq 0$  para cada  $v_q \in TQ$ . Un *sistema mecánico disipativo* es un sistema mecánico,  $(Q, g, U, R)$ , con  $R$  disipativo. Si  $R \in \mathfrak{X}(Q, \tau_Q)$  verifica  $g_q(R(v_q), v_q) \leq -\alpha g_q(v_q, v_q)$  para cada  $v_q \in TQ$ , con  $\alpha$  un número real,  $\alpha > 0$ , entonces  $R$  se denomina *estrictamente disipativo* y decimos que el sistema es *estrictamente disipativo*.

Recordemos que la *energía* asociada a un sistema mecánico dado por  $(Q, g, U, R)$  es la función  $E = T + \tau_Q^* U \in C^\infty(TQ)$ , que escribiremos  $E = T + U$ . El campo vectorial  $R$  se denomina disipativo debido al siguiente resultado:

**Proposición 3.1** *Sea  $\Sigma = (Q, g, U, R)$  un sistema mecánico. Si el campo vectorial  $R$  es disipativo, entonces la energía decrece a lo largo de las soluciones. Además, si  $R$  es estrictamente disipativo y la trayectoria  $\gamma$  satisface que  $\dot{\gamma}(t) \neq 0$  para todo  $t$ , entonces  $E$  es estrictamente decreciente a lo largo de  $\gamma$ .*

**Demostración:** Sea  $\gamma : I \rightarrow Q$  una trayectoria del sistema mecánico. En-

tonces tenemos que

$$\begin{aligned}
\frac{d(E \circ \dot{\gamma})}{dt} &= \nabla_{\dot{\gamma}}(E \circ \dot{\gamma}) = \nabla_{\dot{\gamma}}(T \circ \dot{\gamma} + U \circ \dot{\gamma}) \\
&= \nabla_{\dot{\gamma}}\left(\frac{1}{2}g(\dot{\gamma}, \dot{\gamma})\right) + \nabla_{\dot{\gamma}}(U \circ \gamma) = g(\nabla_{\dot{\gamma}}\dot{\gamma}, \dot{\gamma}) + \nabla_{\dot{\gamma}}(U \circ \gamma) \\
&= g(-(\text{grad } U) \circ \gamma, \dot{\gamma}) + g(R(\dot{\gamma}), \dot{\gamma}) + \nabla_{\dot{\gamma}}(U \circ \gamma) \\
&= g(R \circ \dot{\gamma}, \dot{\gamma}) \leq 0.
\end{aligned}$$

Si  $R$  es estrictamente disipativo, entonces

$$\frac{d(E \circ \dot{\gamma})}{dt} = g(R \circ \dot{\gamma}, \dot{\gamma}) \leq -\alpha g(\dot{\gamma}, \dot{\gamma})$$

que es estrictamente más pequeño que cero ya que  $\dot{\gamma}(t) \neq 0$  para todo  $t$ .

□

Resumiendo lo anterior tenemos: Si  $\Sigma = (Q, g, U, R)$  es un sistema mecánico y  $R$  es una fuerza disipativa, entonces el campo vectorial asociado  $Y = X_g - (\text{grad } U)^v + R^v$  define un sistema disipativo en el espacio de fases  $TQ$  en el sentido definido en la sección 3.1. En este caso, la función de disipación es la energía total  $E$ .

Un ejemplo bien conocido de sistema disipativo, ver [103], consiste en un proyectil que se mueve en el aire considerando que la resistencia de éste depende de la velocidad del proyectil. Para velocidades pequeñas la resistencia es aproximadamente proporcional al cuadrado de la velocidad, mientras que si la velocidad es grande el comportamiento es lineal. Estos ejemplos ya fueron estudiados por Newton, en concreto el caso de fuerzas resistivas proporcionales a la velocidad o su cuadrado se encuentra en los *Principia*. El caso de resistencia proporcional a cualquier potencia de la velocidad fue estudiado por Johann Bernoulli en 1711.

### 3.2.2 Sistemas mecánicos con ligaduras holónomas.

Sea  $(Q, g)$  una variedad de Riemann y  $N \subset Q$  una subvariedad de  $Q$ ,  $\dim N = k$ , que llamaremos *subvariedad de ligaduras holónomas*. Consideramos un campo de fuerzas  $F \in \mathfrak{X}(Q)$ . Diremos que una curva diferenciable  $\gamma : I \rightarrow Q$  es solución del problema holónomo definido por  $N$  y  $F$  si satisface la siguiente ecuación diferencial:

$$\begin{aligned}
\nabla_{\dot{\gamma}}\dot{\gamma} &= F \circ \gamma + G \circ \dot{\gamma} \\
\gamma(t) &\in N
\end{aligned} \tag{3.5}$$

donde  $G \in \mathfrak{X}(Q, \tau_Q)$  es la *fuerza de ligadura* que obliga al sistema a permanecer en  $N$  y que en general no depende sólo de la posición, sino también

de la velocidad. Dicha fuerza es, en principio, desconocida y por lo tanto se constituye en una nueva incógnita. Es necesario imponer alguna condición sobre el campo  $G$ , ésta viene dada por el *principio de d'Alembert*.

**Principio de d'Alembert:** *La fuerza de ligadura  $G \in \mathfrak{X}(Q, \tau_Q)$  es ortogonal a la subvariedad  $N$ , es decir,  $g_p(u, G(p, v)) = 0, \forall p \in N, \forall u, v \in T_p N$ .*

Consideremos ahora el sistema mecánico  $\Sigma_N = (N, g|_N, \pi_N(F))$  sin ligaduras, donde  $g|_N$  es la restricción de la métrica a la subvariedad  $N$  y  $\pi_N : TQ|_N = TN \oplus TN^\perp \rightarrow TN$  es la proyección ortogonal de  $TQ|_N$  sobre  $TN$ .

**Proposición 3.2** *El sistema mecánico  $\Sigma = (Q, g, F)$  con ligadura holónoma  $N$  y el sistema mecánico sin ligadura  $\Sigma_N = (N, g|_N, \pi_N(F))$  tienen las mismas soluciones.*

**Demostración:** En los puntos de  $N$  la ecuación (3.5) se puede descomponer haciendo uso de la métrica  $g$  de la siguiente manera:

$$\pi_N(\nabla_{\dot{\gamma}} \dot{\gamma}) = \pi_N(F \circ \gamma) \quad (3.6)$$

$$\pi_N^\perp(\nabla_{\dot{\gamma}} \dot{\gamma}) = \pi_N^\perp(F \circ \gamma) + G \circ \dot{\gamma} \quad (3.7)$$

donde  $\pi_N(G \circ \dot{\gamma}) = 0$  debido al principio de d'Alembert. Por otra parte se tiene que  $\pi_N \circ \nabla$  es la conexión de Levi-Civita de  $g|_N$  ya que restringe a campos tangentes a  $N$ , es simétrica y Riemanniana respecto a  $g|_N$ .

Por lo tanto las soluciones de (3.5) cumplen (3.6) y viceversa ya que las soluciones de (3.6) son curvas en  $N$  que sustituidas en (3.7) permiten calcular la fuerza de ligadura a lo largo de esa trayectoria.

□

De todo lo anterior se obtiene que la dinámica de un sistema mecánico  $\Sigma = (Q, g, F)$  obligado a moverse en la subvariedad  $i : N \hookrightarrow Q$  es la misma que la del sistema mecánico sin ligaduras  $\Sigma_N = (N, g|_N, \pi_N(F))$ . Por consiguiente las ecuaciones de Euler-Lagrange de  $\Sigma$  se pueden escribir de la siguiente manera:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T_N}{\partial \bar{v}^i} \Big|_{\dot{\gamma}} - \frac{\partial T_N}{\partial \bar{q}^i} \Big|_{\dot{\gamma}} = \sum_{j=1}^k (g|_N)_{ij} \pi_N(F)^j \circ \gamma \quad i = 1, \dots, k$$

donde  $(\bar{q}_i, \bar{v}_i)$  son las coordenadas en  $TN$  y  $T_N : TN \rightarrow \mathbb{R}$  está definida por  $T_N(v_q) = \frac{1}{2} g|_N(v_q, v_q)$ .

Observemos que  $T_N$  verifica que  $T_N = i^*(T)$  siendo  $T \in C^\infty(Q)$  la energía cinética en toda la variedad. Por otra parte, si  $F = -\text{grad } U$ , haciendo uso de la función lagrangiana  $L_N = T_N + i^*(U) = i^*(L)$  obtenemos las ecuaciones:

$$\left. \frac{d}{dt} \frac{\partial L_N}{\partial \dot{v}^i} \right|_{\dot{\gamma}} - \left. \frac{\partial L_N}{\partial \dot{q}^i} \right|_{\dot{\gamma}} = 0 \quad i = 1, \dots, k.$$

### 3.2.3 Sistemas mecánicos no holónomos.

El estudio sistemático de los sistemas no holónomos se remonta a finales del siglo XIX con las importantes contribuciones de Hertz (1894), Ferrers (1871), Neumann (1888), Vierkandt (1992) y Chaplygin (1897) entre otros. Existen numerosos ejemplos de sistemas no holónomos, muchos de los cuales tienen gran interés en la ingeniería. La literatura que trata sobre la formulación de las ecuaciones del movimiento y la dinámica de este tipo de sistemas es amplia; una excelente referencia general es el libro de Neimark y Fufaev [82].

Actualmente se ha producido un importante crecimiento del interés en esta área y muchos de los recientes trabajos utilizan métodos y técnicas propias de la geometría diferencial, introducidos en el tema por Vershik, para obtener ecuaciones del movimiento invariantes utilizando estructuras geométricas adecuadas: conexiones ([14], [91]), estructuras casi-producto ([24], [58]), fibrados de jets ([75], [76]). También algunos consideran la reducción por grupos de simetría ([44], [48]) o las relaciones con la teoría de control. Estos aspectos y referencias no pretenden ser en ningún sentido exhaustivos, solamente se dan a título de ejemplo acerca de lo variado del tema.

Un sistema mecánico se denomina no holónimo en sentido genérico, cuando el conjunto de posibles velocidades del sistema forma una subvariedad  $D \subset TQ$ , a la que llamaremos *subvariedad de ligaduras no holónoma*. Esta limitación proviene generalmente de la interacción de las diferentes partes del sistema entre ellas mismas o con elementos externos. Estas interacciones dan lugar a la aparición de *fuerzas de ligadura*, análogamente al caso holónimo, que obligan al sistema a moverse en  $D$ . Estas fuerzas son, en principio, desconocidas y por lo tanto las ecuaciones dinámicas quedan indeterminadas, necesitaremos pues una condición adicional, ésta es el *principio de d'Alembert*.

Cuando el subconjunto de posibles velocidades forma una distribución no integrable  $D$  sobre  $Q$  o de manera más general un subfibrado afín de  $TQ$ , el principio de d'Alembert afirma que las fuerzas de ligadura pertenecen a la distribución ortogonal a  $D$ . Observemos que si la distribución fuera integrable nos encontraríamos en el caso de ligaduras holónomas o geométricas.

Muchos autores se han preguntado sobre la adecuación a la realidad física

del principio de d'Alembert. En particular Kozlov [51] propuso otro método de deducir las ecuaciones de Euler-Lagrange a partir de un principio variacional, llamado método vakónomo. Ver también [6]. Las ecuaciones que se obtenían eran diferentes de aquellas que resultaban de la aplicación del principio de d'Alembert. No obstante ambas coincidían si las restricciones eran integrables, es decir, holónomas.

Por lo que hemos podido obtener, la opinión más generalizada es que en la mayoría de los casos las ecuaciones obtenidas aplicando el principio de d'Alembert no holónimo describen con mayor precisión el movimiento real del sistema que el método vakónomo. En [64], Lewis y Murray comparan los dos tipos de ecuaciones en el caso de una esfera rodando sobre una plataforma giratoria. La resolución de las ecuaciones de modo numérico mostró que las ecuaciones que más se ajustaban a los resultados experimentales eran las provenientes del principio de d'Alembert. Otra comparación puede encontrarse en [23] con los mismos resultados. El método vakónomo es más apropiado para describir otro tipo de problemas, en particular los de control óptimo, ver [41] para más detalles y referencias. Un punto de vista geométrico que engloba los dos métodos puede verse también en [41].

En el caso general de sistemas no holónomos en los que el conjunto de posibles velocidades es una subvariedad  $D \subset TQ$  tal que  $\tau_Q(D) = Q$ , no necesariamente un subfibrado lineal o afín, el principio de d'Alembert se formula de la siguiente manera.

Sea  $u_p \in D$ , llamamos *tangente vertical a D* en  $u_p$  al subfibrado  $T^V D$  cuya fibra en  $u_p$  viene dada por

$$T_{u_p}^V D = V_{u_p}(TQ) \cap T_{u_p} D$$

Consideremos el subespacio de  $T_p Q$  isomorfo a  $T_{u_p}^V D$  definido por

$$(T_{u_p}^V D)_p = \{v_p \in T_p Q \mid \lambda_p^{u_p}(v_p) \in T_{u_p}^V D\} \subset T_p Q$$

donde  $\lambda_p^{u_p} : T_p Q \rightarrow V_{u_p}(TQ)$  es la aplicación levantamiento vertical.

**Principio de d'Alembert no holónimo:** *Dado el sistema no holónimo  $(Q, g, F)$  con subvariedad de ligaduras  $D$ , la fuerza de ligadura  $G \in \mathfrak{X}(Q, \tau_Q)$  satisface que para todo  $u_p \in D$*

$$G(u_p) \in (T_{u_p}^V D)_p^\perp,$$

es decir,  $g(G(u_p), v) = 0, \forall v \in (T_{u_p}^V D)_p$ . Ver [77] para más detalles.

**Lema 3.3** *Sea el sistema no holónimo  $(Q, g, F)$ , con subvariedad de ligaduras  $D$ . Si  $D \subset TQ$  es una distribución, entonces la fuerza de ligadura  $G \in \mathfrak{X}(Q, \tau_Q)$  verifica que  $G(u_p) \in D_p^\perp, \forall u_p \in D$ .*



**Demostración:** Ya que  $D$  es una distribución se tiene que  $T_{u_p}^V D = \lambda_p^{u_p}(D_p) = \{w \in V_{u_p}(TQ) \mid \exists v_p \in D_p \text{ tal que } w = \lambda_p^{u_p}(v_p)\}$ . En consecuencia  $(T_{u_p}^V D)_p = D_p$  de donde se sigue el resultado.

□

Observemos que si  $D$  es una distribución integrable entonces la fuerza de ligadura es ortogonal a las variedades integrales de  $D$ .

Una de las primeras generalizaciones del principio de d'Alembert al caso de una subvariedad de ligaduras cualquiera fue dada por Chetaev [26]. Alrededor de 1930 propuso una regla para determinar el conjunto de posibles fuerzas de ligadura, no obstante ésta no dio los resultados esperados al aplicarla al ejemplo considerado por Appell [3] unos años atrás.

### Sistemas mecánicos no holónomos.

Sea  $(Q, g)$  una variedad de Riemann,  $\dim Q = n$ , y  $\nabla$  la conexión de Levi-Civita asociada a la métrica de Riemann  $g$ . Consideremos  $D \subset TQ$  una distribución, en general, no integrable en  $Q$  tal que  $\tau_Q(D) = Q$ . Supondremos que el rango de  $D$  como distribución  $\text{rang}(D) = n - m$ . En este caso la dimensión de  $D$  como subvariedad de  $TQ$  es  $2n - m$ . Utilizaremos la misma notación  $D$  para entenderla como distribución o como subvariedad de  $TQ$ . Llamamos  $\Gamma(D)$  a las secciones de  $D$ , esto es,  $\Gamma(D) = \{X \in \mathfrak{X}(Q) \mid X(p) \in D_p, \forall p \in Q\}$ .

Una curva diferenciable  $\gamma : I \rightarrow Q$  es una solución del sistema no holónimo asociado al campo de fuerzas  $F \in \mathfrak{X}(Q)$ , si  $\gamma$  satisface la siguiente ecuación diferencial con ligaduras

$$\begin{aligned} \nabla_{\dot{\gamma}} \dot{\gamma} &= F \circ \gamma + G \circ \dot{\gamma} \\ \dot{\gamma}(t) &\in D \end{aligned} \quad (3.8)$$

donde  $G \in \mathfrak{X}(Q, \tau_Q)$  es la fuerza de ligadura. Además, por el principio de d'Alembert se verifica que  $G(v_q) \in D_q^\perp$ ,  $\forall v_q \in D$ .

Si  $(q^i)$  son coordenadas locales en  $Q$ , las componentes  $(\gamma^1, \dots, \gamma^n)$  de  $\gamma$  satisfacen

$$\begin{aligned} \ddot{\gamma}^k + \sum_{i,j=1}^n \Gamma_{ij}^k \dot{\gamma}^i \dot{\gamma}^j &= F^k \circ \gamma + G^k \circ \dot{\gamma} \quad k = 1, \dots, n \\ \dot{\gamma}(t) &\in D \end{aligned} \quad (3.9)$$

donde  $\{\Gamma_{ij}^k\}$  son los símbolos de Christoffel de la conexión  $\nabla$  en las coordenadas  $(q^i)$ . Las ecuaciones (3.8) y (3.9) son las ecuaciones de Newton clásicas para sistemas no holónomos.

Un *sistema mecánico no holónimo simple*,  $\Sigma$ , viene dado por una variedad de Riemann,  $(Q, g)$ , el espacio de configuración, una distribución no integrable  $D \subset TQ$ , la subvariedad de ligaduras, y una función  $U \in C^\infty(Q)$ , la función potencial, tal que  $F = -\text{grad} U$ . Denotaremos este tipo de sistemas de la forma  $\Sigma = (Q, g, U, D)$ , si la fuerza no proviene de potencial escribiremos  $\Sigma = (Q, g, F, D)$ .

Supongamos que la distribución  $D \subset TQ$  viene definida por la anulación de una familia finita de 1-formas diferenciales linealmente independientes, es decir, existen  $\omega^1, \dots, \omega^m \in \Omega^1(Q)$  linealmente independientes tales que  $v_q \in D$  si y solo si  $\omega^i(v_q) = 0$ ,  $i = 1, \dots, m$ . Entonces la ecuación dinámica (3.8) se puede escribir como

$$\begin{aligned} \nabla_{\dot{\gamma}} \dot{\gamma} &= F \circ \gamma + \sum_{j=1}^m (\lambda^j \circ \dot{\gamma}) Z_j \circ \gamma \\ \dot{\gamma}(t) &\in D \end{aligned} \quad (3.10)$$

donde  $Z_j \in \mathfrak{X}(Q)$  es tal que  $i(Z_j)g = \omega^j$ . Habitualmente los coeficientes  $\lambda^j \in C^\infty(TQ)$  son llamados *multiplicadores de Lagrange*, que están por determinar con la condición de que  $\dot{\gamma}(t) \in D$ . Haciendo uso de la función lagrangiana  $L = T - U$ , obtenemos las ecuaciones de Euler-Lagrange para sistemas no holónomos [82]

$$\left. \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial v^i} \right|_{\dot{\gamma}} - \left. \frac{\partial L}{\partial q^i} \right|_{\dot{\gamma}} = \sum_{j=1}^m (\lambda^j \circ \dot{\gamma}) \omega_i^j \circ \gamma \quad i = 1, \dots, n$$

donde  $(q_i, v_i)$  son las coordenadas en  $TQ$  y  $\omega^j = \sum_{i=1}^n \omega_i^j dq^i$ .

De igual modo que en secciones anteriores podemos asociar un campo vectorial  $Y \in \mathfrak{X}(TQ)$  a la ecuación (3.10). Éste se escribe de la siguiente manera

$$Y = X_g + F^v + \sum_{j=1}^m \lambda^j Z_j^v \quad (3.11)$$

en donde  $\lambda^j$  son tales que  $Y(v_q) \in T_{v_q}D$ ,  $\forall v_q \in D$ . Notemos que  $Y \in \mathfrak{X}(TQ)$  satisface la condición de segundo orden, es decir, las curvas integrales en  $TQ$  son levantamientos canónicos a  $TQ$  de curvas en la variedad  $Q$ .

**Proposición 3.4** *Si  $\Sigma = (Q, g, U, D)$  es un sistema mecánico no holónimo simple, entonces, la energía  $E = T + U \in C^\infty(TQ)$  es una constante del movimiento.*

**Demostración:** Sea  $\gamma : I \rightarrow Q$ ,  $\dot{\gamma}(t) \in D$ , una trayectoria del sistema mecánico  $\Sigma$ . Entonces se tiene que

$$\begin{aligned} \frac{d(E \circ \dot{\gamma})}{dt} &= \nabla_{\dot{\gamma}}(E \circ \dot{\gamma}) = \nabla_{\dot{\gamma}}(T \circ \dot{\gamma} + U \circ \dot{\gamma}) \\ &= \nabla_{\dot{\gamma}}\left(\frac{1}{2}g(\dot{\gamma}, \dot{\gamma})\right) + \nabla_{\dot{\gamma}}(U \circ \gamma) = g(\nabla_{\dot{\gamma}}\dot{\gamma}, \dot{\gamma}) + \nabla_{\dot{\gamma}}(U \circ \gamma) \\ &= g(-(\text{grad } U) \circ \gamma, \dot{\gamma}) + g\left(\sum_{i=1}^m \lambda^i \circ \dot{\gamma} Z_i \circ \gamma, \dot{\gamma}\right) + \nabla_{\dot{\gamma}}(U \circ \gamma) \\ &= g\left(\sum_{i=1}^m \lambda^i \circ \dot{\gamma} Z_i \circ \gamma, \dot{\gamma}\right) = \sum_{i=1}^m \lambda^i \circ \dot{\gamma} g(Z_i \circ \gamma, \dot{\gamma}) = 0. \end{aligned}$$

□

### Interpretación geométrica de los multiplicadores de Lagrange.

Sea  $\omega \in \Omega^1(Q)$ , la función asociada  $\widehat{\omega} \in C^\infty(\text{T}Q)$  está definida por

$$\begin{aligned} \widehat{\omega} : \text{T}Q &\longrightarrow \mathbb{R} \\ v_q &\mapsto \omega_q(v_q). \end{aligned}$$

**Lema 3.5** Dada  $\omega \in \Omega^1(Q)$ , consideremos el subfibrado vectorial  $\ker \omega = \{v_q \in \text{T}Q \mid \omega_q(v_q) = 0\}$ . Si  $Y \in \mathfrak{X}(\text{T}Q)$  es tal que  $Y|_{\ker \omega} \in \mathfrak{X}(\ker \omega)$ , entonces  $\mathcal{L}_Y \widehat{\omega}|_{\ker \omega} = 0$ .

**Demostración:** Sea  $v_q \in \ker \omega$  y consideremos  $\gamma : I \rightarrow \text{T}Q$  la curva integral de  $Y$  tal que  $\gamma(0) = v_q$ . Como  $Y|_{\ker \omega} \in \mathfrak{X}(\ker \omega)$ , entonces  $\gamma(t) \in \ker \omega$  para todo  $t$  y en consecuencia se verifica

$$(\mathcal{L}_Y \widehat{\omega})(v_q) = Y(v_q)(\widehat{\omega}) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} (\widehat{\omega} \circ \gamma) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} (\omega(\gamma(t))) = 0.$$

□

Sea ahora  $Y \in \mathfrak{X}(\text{T}Q)$  el campo vectorial (3.11) correspondiente a la ecuación (3.10). Para que  $Y$  sea solución del problema no holónomo debe cumplirse que  $Y|_D \in \mathfrak{X}(D)$ , en consecuencia tenemos que

$$(\mathcal{L}_Y \widehat{\omega})|_D = 0$$

para toda  $\omega \in \Omega^1(Q)$  tal que  $\omega(X) = 0$ ,  $\forall X \in \Gamma(D)$ . Ya que  $Y = X_g + F^v + \sum_{j=1}^m \lambda^j Z_j^v$ , utilizando la linealidad de la derivada de Lie, se tiene que

$$0 = (\mathcal{L}_Y \widehat{\omega})|_D = (\mathcal{L}_{X_g} \widehat{\omega})|_D + (\mathcal{L}_{F^v} \widehat{\omega})|_D + \sum_{j=1}^m \lambda^j|_D (\mathcal{L}_{Z_j^v} \widehat{\omega})|_D \quad (3.12)$$

**Lema 3.6** Sea  $\widehat{\omega} \in C^\infty(\text{T}Q)$  la función asociada a  $\omega \in \Omega^1(Q)$ , entonces se cumple:

1.  $\mathcal{L}_{X^v}\widehat{\omega} = \tau_Q^*(i(X)\omega)$  si  $X \in \mathfrak{X}(Q)$
2.  $\mathcal{L}_{X_g}\widehat{\omega} = \widehat{\nabla\omega}$ , donde llamamos  $\widehat{\nabla\omega} \in C^\infty(\mathrm{T}Q)$  a la función  $(\widehat{\nabla\omega})(v_q) = (\nabla_{v_q}\omega)(v_q)$ .

**Demostración:** Observemos que  $\mathcal{L}_{X^v}\widehat{\omega} = i(X^v)\widehat{\omega} = \tau_Q^*(i(X)\omega)$ ,  $\forall X \in \mathfrak{X}(Q)$ . Para demostrar la segunda, es suficiente con probar la igualdad en coordenadas locales

$$\mathcal{L}_{X_g}\widehat{\omega} = v^i v^j \frac{\partial w_j}{\partial q^i} - \Gamma_{ij}^k v^i v^j w_k = \widehat{\nabla\omega}.$$

□

Reescribiendo la ecuación (3.12) para las formas  $\omega^h \in \Omega^1(Q)$  que definen la distribución  $D$  y utilizando el lema anterior, obtenemos el siguiente sistema de ecuaciones lineales para los multiplicadores  $\{\lambda^j\}_{j=1, \dots, m}$

$$-(\widehat{\nabla\omega^h})|_D - (\tau_Q^*(i(F)\omega^h))|_D = \sum_{j=1}^m \lambda_{|D}^j \tau_Q^*(i(Z_j)\omega^h)|_D, \quad h = 1, \dots, m \quad (3.13)$$

que tiene solución única restringida a  $D$  ya que la matriz del sistema es  $(i(Z_j)\omega^j) = (g(Z_j, Z_i))$ , que es no singular por ser la matriz de Gram de  $g$  restringida al subespacio generado por  $Z_1, \dots, Z_m$  que son linealmente independientes en todos los puntos.

Como consecuencia de lo dicho hasta ahora se tiene que:

**Proposición 3.7** *Los multiplicadores de Lagrange, restringidos a  $D$ , están determinados unívocamente por la condición de que  $Y|_D \in \mathfrak{X}(D)$ . Su expresión se puede calcular mediante el sistema lineal (3.13).*

□

### Subvariedad de puntos de equilibrio.

Consideremos el sistema mecánico no holónomo dado por  $\Sigma = (Q, g, F, D)$ . Llamaremos *puntos de equilibrio* del sistema a los puntos del espacio de fases donde se anula el campo vectorial  $Y \in \mathfrak{X}(\mathrm{T}Q)$  asociado a  $\Sigma$ . Ya que  $Y$  satisface la condición de segundo orden, los puntos de equilibrio de  $\Sigma$  son de la forma  $0_q \in \mathrm{T}_q Q$ . Llamamos  $PE_\Sigma$  al conjunto de puntos de equilibrio del sistema  $\Sigma$ .

**Proposición 3.8** *Dado el sistema no holónomo  $\Sigma = (Q, g, F, D)$ , el conjunto de puntos de equilibrio del sistema viene dado por*

$$PE_\Sigma = \{0_q \in \mathbb{T}Q \mid \pi_D F(q) = 0\}.$$

*Si  $PE_\Sigma$  es una subvariedad, su dimensión es mayor o igual que  $n - m$ .*

**Demostración:** Sea  $Y \in \mathfrak{X}(\mathbb{T}Q)$  el campo vectorial asociado al sistema no holónomo  $\Sigma$ . Ya que  $Y|_D \in \mathfrak{X}(D)$  y  $0_q \in D$ , se tiene:

$$\begin{aligned} \mathbb{T}_{0_q} D \ni Y(0_q) &= X_g(0_q) + F^v(0_q) + \sum_{i=1}^m \lambda^i(0_q) Z_i^v(0_q) \\ &= F^v(0_q) + \sum_{i=1}^m \lambda^i(0_q) Z_i^v(0_q) \in V_{0_q}(\mathbb{T}Q) \end{aligned}$$

De la expresión anterior se deduce que

$$Y(0_q) = (F(q) + \sum_{i=1}^m \lambda^i(0_q) Z_i(q))^v \in \mathbb{T}_{0_q}^V D$$

y ya que  $\mathbb{T}_{u_p}^V D = \lambda_p^{u_p}(D_p)$ , entonces  $F(q) + \sum_{i=1}^m \lambda^i(0_q) Z_i(q) \in D_q$ . Por otra parte del principio de d'Alembert se tiene que  $Z_i(q) \in D_q^\perp$ , lo que implica que los multiplicadores de Lagrange son las únicas funciones tales que  $\sum_{j=1}^m \lambda^j(0_q) Z_j(q) = -\pi_{D^\perp} F(q)$ . Denotamos por  $\pi_D$  y  $\pi_{D^\perp}$  las proyecciones sobre  $D$  y  $D^\perp$  asociadas a la descomposición ortogonal  $\mathbb{T}Q = D \oplus D^\perp$ .

De todo lo anterior se tiene que  $Y(0_q) = \pi_D F(q)$ , y en consecuencia los puntos de equilibrio serán aquellos que verifiquen la ecuación

$$0 = Y(0_q) = \pi_D F(q)$$

de donde el resultado buscado. □

Si el sistema es tal que  $F = -\text{grad}U$ , entonces  $PE_\Sigma = \{0_q \in \mathbb{T}Q \mid \pi_D(\text{grad}U)(q) = 0\}$ . Observemos que cuando el sistema carece de fuerzas exteriores, todos los puntos de  $Q$  son puntos de equilibrio. Ejemplos en este sentido pueden encontrarse en [63].

En el caso de sistemas mecánicos simples sin ligaduras los puntos de equilibrio vienen dados por el conjunto  $\{0_q \mid \text{grad}U(q) = 0\}$ , que es genéricamente una subvariedad de dimensión cero y por lo tanto tiene sentido hablar de puntos de equilibrio aislados y estudiar su estabilidad. Esto no sucede en

los sistemas mecánicos no holónomos ya que los puntos de equilibrio forman genéricamente una subvariedad de dimensión mayor o igual a uno.

En consecuencia en el caso no holónimo genérico no habrá puntos de equilibrio asintóticamente estables, pues para cualquier entorno que tomemos, éste siempre contendrá otros puntos de equilibrio.

### Sistemas mecánicos no holónomos disipativos.

Un *sistema no holónimo disipativo* es un sistema mecánico no holónimo  $\Sigma = (Q, g, F, D)$  tal que  $F = -\text{grad}U + R$ , con  $R \in \mathfrak{X}(Q, \tau_Q)$  disipativo sobre  $D$ , es decir,  $g_p(\pi_D R(v_q), v_q) \leq 0$  para cada  $v_q \in D$ .

Si  $R \in \mathfrak{X}(Q, \tau_Q)$  satisface  $g_q(\pi_D R(v_q), v_q) \leq -\alpha g_q(v_q, v_q)$  para cada  $v_q \in D$ , con  $\alpha > 0$ , entonces  $R$  se denomina *estrictamente disipativo*.

Se tiene el siguiente resultado similar al de la Proposición 3.1

**Proposición 3.9** *Sea  $\Sigma = (Q, g, F = -\text{grad}U + R, D)$  un sistema mecánico no holónimo. Si el campo vectorial  $R \in \mathfrak{X}(Q, \tau_Q)$  es disipativo, entonces la energía decrece a lo largo de las soluciones. Además, si  $R$  es estrictamente disipativo y  $\gamma$  es una trayectoria que satisface que  $\dot{\gamma}(t) \neq 0$  para todo  $t$ , entonces  $E$  es estrictamente decreciente.  $S$*

□

### Algunos ejemplos de sistemas no holónomos.

#### El disco rodante.

Consideremos un disco homogéneo de masa  $m$ , que rueda sin deslizar por un plano horizontal. Supongamos que durante el movimiento el disco no abandona la posición vertical. Este ejemplo ha sido estudiado con detalle por diversos autores, por ejemplo, Bloch, McClamroch y Reyhanoglu [12], Bloch y Crouch [9] y Bloch, Krishnaprasad, Marsden y Murray [14].

El espacio de configuración del disco rodante es  $Q = \mathbb{R}^2 \times S^1 \times S^1$  y está localmente parametrizado por las coordenadas  $q = (x, y, \theta, \phi)$ , que denotan la posición del punto de contacto con el plano, el ángulo de rotación y de orientación del disco respectivamente.

La lagrangiana del sistema está compuesta solo por la energía cinética

$$L(x, y, \theta, \phi, \dot{x}, \dot{y}, \dot{\theta}, \dot{\phi}) = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \frac{1}{2}I\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}J\dot{\phi}^2$$

donde  $I$  es el momento de inercia del disco alrededor del eje que pasa por el centro del disco y es paralelo al plano y  $J$  es el momento de inercia en torno al eje que pasando por el centro del disco es ortogonal al plano.

Si  $r$  es el radio del disco, las ligaduras no holónomas correspondientes a rodar sin deslizar son

$$\begin{aligned}\dot{x} &= r(\cos \phi)\dot{\theta} \\ \dot{y} &= r(\sin \phi)\dot{\theta}\end{aligned}$$

por lo tanto la subvariedad de ligaduras  $D \subset TQ$ , que en este caso se trata de una distribución, está definida por  $\omega^1 = dx - r \cos \phi d\theta$  y  $\omega^2 = dy - r \sin \phi d\theta$ .

La ecuación dinámica se escribe de la forma:

$$\begin{aligned}\nabla_{\dot{\gamma}}\dot{\gamma} &= \lambda^1 Z_1 + \lambda^2 Z_2 \\ \dot{\gamma} &\in D\end{aligned}$$

donde  $\nabla$  es la conexión de Levi-Civita en  $Q$  correspondiente a la métrica de la energía cinética

$$g = \begin{pmatrix} m & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & J \end{pmatrix}$$

Calculando los multiplicadores y sustituyendo en la ecuación anterior obtenemos las ecuaciones de la dinámica restringidas a  $D$

$$\begin{aligned}\ddot{x} &= -r \sin \theta \dot{\phi} \dot{\theta} \\ \ddot{y} &= r \cos \theta \dot{\phi} \dot{\theta} \\ \ddot{\theta} &= 0 \\ \ddot{\phi} &= 0\end{aligned}$$

Una versión algo más sofisticada consiste en permitir que el disco se desvíe de la vertical. Una referencia en la que se trata este caso es el trabajo de Hermans [43].

### Una esfera rodando sobre un disco [64].

Consideremos una esfera homogénea de masa  $m$  y radio  $r$  rodando sin deslizar sobre un disco que gira con velocidad angular  $\Omega$  alrededor del eje  $z$ . Sea  $mk^2$  el momento de inercia de la esfera respecto a cualquier eje. El espacio de configuración del sistema es  $Q = \mathbb{R}^2 \times SO(3)$ , donde  $(x, y, R)$  representa un punto cualquiera de  $Q$ . Las restricciones del sistema vienen dadas por:

$$\begin{aligned}\dot{x} - re_1^T \dot{R} R^T e_3 &= -\Omega y \\ \dot{y} - re_3^T \dot{R} R^T e_2 &= \Omega x\end{aligned}$$

donde  $\{e_1, e_2, e_3\}$  es la base canónica de  $\mathbb{R}^3$ . Como la matriz  $\dot{R}R^T$  es antisimétrica, podemos asociarle un vector  $\omega = (\omega_x, \omega_y, \omega_z)$  que representa la velocidad angular de la bola respecto a un sistema de referencia inercial. Con todo esto, podemos reescribir las ligaduras de la forma

$$\begin{aligned}\dot{x} - r\omega_y &= -\Omega y \\ \dot{y} + r\omega_x &= \Omega x\end{aligned}$$

La lagrangiana del sistema es

$$L = \frac{1}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \frac{1}{2}mk^2(\omega_x^2 + \omega_y^2 + \omega_z^2).$$

La dinámica del sistema viene determinada por las ecuaciones de Newton

$$\begin{aligned}m\ddot{x} &= Z_x + F_x \\ m\ddot{y} &= Z_y + F_y \\ mk^2\dot{\omega}_x &= rZ_y + T_1 \\ mk^2\dot{\omega}_y &= -rZ_x + T_2 \\ mk^2\dot{\omega}_z &= T_3\end{aligned}$$

donde  $Z_x, Z_y$  son las fuerzas de ligadura que deben ser determinadas a partir de las ecuaciones de las ligaduras y  $F_x, F_y, T_1, T_2, T_3$  las fuerzas exteriores. En el caso de que el sistema sea libre, es decir, sin fuerzas exteriores, podemos escribir las ecuaciones del movimiento en función de las variables  $x, y$  de la siguiente forma

$$\begin{aligned}\ddot{x} + \frac{k^2\Omega}{r^2 + k^2}\dot{y} &= 0 \\ \ddot{y} + \frac{k^2\Omega}{r^2 + k^2}\dot{x} &= 0\end{aligned}$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones diferenciales vemos que el punto de contacto de la bola con el disco describe un círculo sobre éste.

### 3.3 Sistemas Lagrangianos.

Se denomina *sistema dinámico Lagrangiano* a toda pareja  $(Q, L)$  donde  $Q$  representa el espacio de configuración de un sistema físico y  $L \in C^\infty(TQ)$  es la *función Lagrangiana* del sistema.



Dada  $L : \text{T}Q \rightarrow \mathbb{R}$  podemos definir la 1-forma y la 2-forma Lagrangianas:

$$\begin{aligned}\theta_L &= dL \circ J \in \Omega^1(\text{T}Q) \\ \omega_L &= -d\theta_L \in \Omega^2(\text{T}Q)\end{aligned}$$

donde  $J : \mathfrak{X}(\text{T}Q) \rightarrow \mathfrak{X}^V(\text{T}Q)$  es el endomorfismo vertical en el fibrado tangente. Es importante señalar que la 2-forma Lagrangiana es siempre cerrada pero no necesariamente no degenerada. Si  $\omega_L$  es no degenerada decimos que  $L$  es regular. Tomando una carta natural  $(q_i, v_i)$  de  $\text{T}Q$ , las expresiones locales de estas formas son:

$$\begin{aligned}\theta_L &= \frac{\partial L}{\partial v^i} dq^i \\ \omega_L &= \frac{\partial^2 L}{\partial q^j \partial v^i} dq^i \wedge dq^j + \frac{\partial^2 L}{\partial v^j \partial v^i} dq^i \wedge dv^j\end{aligned}$$

Por otra parte, llamaremos *energía Lagrangiana* a la función

$$E_L = \Delta(L) - L \in C^\infty(\text{T}Q)$$

donde  $\Delta \in \mathfrak{X}^V(\text{T}Q)$  es el campo de Liouville.

Las trayectorias dinámicas, o soluciones, del sistema Lagrangiano  $(Q, L)$  son las curvas integrales de un campo vectorial  $X_L \in \mathfrak{X}(\text{T}Q)$  que es solución del sistema

$$i(X_L)\omega_L = dE_L. \quad (3.14)$$

El campo vectorial  $X_L$ , si existe, se denomina *campo dinámico Lagrangiano*. Cuando el sistema es regular, es decir,  $L \in C^\infty(\text{T}Q)$  es regular, entonces existe un único campo vectorial  $X_L \in \mathfrak{X}(\text{T}Q)$  que es solución de (3.14) y además cumple la condición de segundo orden, esto es,  $J(X_L) = \Delta$ . Observemos que las funciones Lagrangianas de tipo mecánico  $L = T - \tau_Q^*(U)$  son siempre regulares (en realidad son hiperegulares).

Si el sistema no es regular, la ecuación (3.14) es, en general, incompatible e incluso en el caso de que tenga solución, ésta no es única, ni necesariamente cumple la condición de segundo orden. Sin embargo, en Física es habitual requerir que las ecuaciones del movimiento puedan obtenerse a partir de un principio variacional y para ello es necesaria que las curvas integrales del campo dinámico  $X_L$  sean levantamientos de curvas integrales en la base  $Q$ , es decir, que  $X_L$  ha de ser un campo de segundo orden.

En consecuencia, dado un sistema  $(Q, L)$ , se denominan soluciones del *sistema dinámico Lagrangiano* a las curvas integrales del campo vectorial

$X_L$  que verifica las condiciones

$$\begin{aligned} i(X_L)\omega_L &= dE_L \\ J(X_L) &= \Delta \end{aligned}$$

En adelante supondremos que la Lagrangiana,  $L \in C^\infty(\mathrm{T}Q)$ , es regular.

Consideremos el sistema Lagrangiano  $(Q, L)$  y supongamos que está sometido a la acción de una fuerza exterior que consideramos modeladas por una 1-formas. Las ecuaciones dinámicas del sistema Lagrangiano son en este caso

$$i(X_L)\omega_L = dE_L + \alpha$$

donde  $\alpha \in \mathrm{Im} J^*$ , es decir,  $\alpha$  es una 1-forma en  $Q$  a lo largo de la proyección  $\tau_Q : \mathrm{T}Q \rightarrow Q$ ,  $\alpha \in \Omega^1(Q, \tau_Q)$ . Denotaremos este sistema de la forma  $(Q, L, \alpha)$ .

Los *puntos de equilibrio* del sistema corresponden a los puntos del espacio de fases donde se anula el campo dinámico  $X_L$ . Estos son de la forma  $0_q \in \mathrm{T}_q Q$  al ser  $X_L$  un campo de segundo orden.

Diremos que  $\alpha \in \Omega^1(\mathrm{T}Q)$  es una fuerza *disipativa* si  $\hat{\alpha} \leq 0$  y *estrictamente disipativa* si existe  $f \in C^\infty(\mathrm{T}Q)$ ,  $f \geq 0$  tal que se verifica que  $\hat{\alpha} \leq -kf$  y  $f(v_q) = 0$  si y sólo si  $v_q = 0_q$ . Recordemos que  $\hat{\alpha} : \mathrm{T}Q \rightarrow \mathbb{R}$  viene definido por  $\hat{\alpha}(v_q) = \alpha_q(v_q)$ .

### Sistemas Lagrangianos no holónomos

Consideremos ahora una distribución  $D \subset \mathrm{T}Q$  y supongamos que el movimiento del sistema  $(Q, L)$  está restringido de manera que las únicas velocidades admitidas son aquellas que pertenecen a  $D$ . Llamamos *sistema no holónimo Lagrangiano* a toda tripleta  $(Q, L, D)$ . El principio de d'Alembert en esta formulación se enuncia de la siguiente forma: las soluciones de tal sistema son las curvas integrales del campo vectorial  $X_L \in \mathfrak{X}(\mathrm{T}Q)$  que son soluciones del sistema

$$\begin{aligned} i(X_L)\omega_L - dE_L &\in J^*(\mathrm{T}D^0) \\ X_L|_D &\in \mathfrak{X}(D) \end{aligned}$$

donde  $\mathrm{T}D^0 = \{\omega \in \Omega^1(\mathrm{T}Q) \mid \omega(X) = 0, \forall X \in \mathfrak{X}(D)\}$ . Sea  $D^0 = \{\beta \in \Omega^1(Q) \mid \beta(X) = 0, \forall X \in \Gamma(D)\}$ , si  $D^0 = \langle \omega^1, \dots, \omega^m \rangle$  entonces se cumple que  $J^*(\mathrm{T}D^0) = \langle \tau_Q^*(\omega^1), \dots, \tau_Q^*(\omega^m) \rangle$ . En consecuencia, las ecuaciones de la dinámica pueden escribirse como

$$i(X_L)\omega_L - dE_L = \sum_{i=1}^m \lambda^i \tau_Q^* \omega^i$$

$$i(X_L)d\widehat{\omega}^i|_D = 0, \forall i = 1, \dots, m$$

Teniendo en cuenta que  $L$  es regular, la primera ecuación implica que  $X_L$  es de segundo orden. De ahí podemos escribir como ecuaciones de la dinámica las siguientes:

$$i(X_L)\omega_L - dE_L = \sum_{i=1}^m \lambda^i \tau_Q^* \omega^i$$

$$i(X_L)\tau_Q^* \omega^i = 0, \forall i = 1, \dots, m$$

$$i(X_L)d\widehat{\omega}^i = 0, \forall i = 1, \dots, m$$

en donde el tercer grupo es la condición de que  $X_L$  sea tangente a  $D$ .

Para más detalles sobre la formulación geométrica de estos sistemas, ver [24, 57, 58]. Las curvas integrales de  $X_L$  verifican las ecuaciones de Euler-Lagrange

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial v^i} \Big|_{\dot{\gamma}} - \frac{\partial L}{\partial q^i} \Big|_{\dot{\gamma}} = \sum_{j=1}^m (\lambda^j \circ \dot{\gamma}) \omega_i^j \circ \gamma \quad i = 1, \dots, n.$$

**Proposición 3.10** *Sea  $(Q, L, D)$  un sistema Lagrangiano no holónomo. Entonces, la función energía Lagrangiana  $E_L \in C^\infty(\mathbb{T}Q)$  es una constante del movimiento.*

**Demostración:** Dado que  $i(X_L)\omega_L - dE_L = \sum_{i=1}^m \lambda^i \tau_Q^* \omega^i$  se tiene:

$$i(X_L)dE_L|_D = i(X_L)(i(X_L)\omega_L - \sum_{i=1}^m \lambda^i \tau_Q^* \omega^i)|_D$$

$$= - \sum_{i=1}^m \lambda^i i(X_L)\tau_Q^* \omega^i|_D = 0$$

por el segundo grupo de ecuaciones.

□

Si el sistema no holónimo Lagrangiano  $(Q, L, D)$  está sometido a la acción de una fuerza externa, las ecuaciones dinámicas resultan ser:

$$\begin{aligned} i(X_L)\omega_L - dE_L - \alpha &\in J^*(TD^0) \\ X_L|_D &\in \mathfrak{X}(D) \end{aligned}$$

o equivalentemente

$$\begin{aligned} i(X_L)\omega_L - dE_L - \alpha &= \sum_{i=1}^m \lambda^i \tau_Q^* \omega^i \\ i(X_L)\tau_Q^* \omega^i &= 0, \forall i = 1, \dots, m \\ i(X_L)d\hat{\omega}^i &= 0, \forall i = 1, \dots, m \end{aligned}$$

donde  $\alpha \in \text{Im } J^*$ . Denotaremos este sistema de la forma  $(Q, L, D, \alpha)$ .

Diremos que  $\alpha$  es *disipativa* sobre  $D$  si  $\hat{\alpha}|_D \leq 0$  y *estrictamente disipativa* si existe  $f \in C^\infty(\text{T}Q)$ ,  $f|_D \geq 0$ ,  $f(v_q) = 0$  si y sólo si  $v_q = 0_q$  y  $k \in \mathbb{R}$ ,  $k > 0$  tales que se verifica  $\hat{\alpha}|_D \leq -kf|_D$ .

**Proposición 3.11** *Si  $(Q, L, D, \alpha)$  es un sistema Lagrangiano no holónimo con  $\alpha$  disipativa, entonces la energía decrece a lo largo de las soluciones. Además, si  $\alpha$  es estrictamente disipativa y  $\gamma$  es una trayectoria tal que  $\dot{\gamma}(t) \neq 0$  para todo  $t$ , entonces  $E_L$  es estrictamente decreciente sobre  $\gamma$ .*

□

# Capítulo 4

## Estabilidad de sistemas mecánicos.

Uno de los métodos de estudio más eficaces, al tratar la estabilidad de sistemas no lineales, ha sido la teoría que introdujo a finales del siglo XIX el matemático ruso Alexandr Mikhailovich Lyapunov. Este trabajo, *The General Problem of motion Stability* (1892) [69], incluye dos métodos para el análisis de la estabilidad: la linealización y el método directo. El método de linealización proporciona respuestas sobre la estabilidad alrededor de un punto de equilibrio. Por otra parte, el método directo no se restringe a un movimiento local y determina las propiedades de estabilidad por medio de la construcción de una cierta función "energía" para el sistema.

Durante toda la primera mitad del siglo XX, el trabajo de Lyapunov recibió muy poca atención fuera de Rusia, aunque fue traducido al francés en 1908 y reeditado por Princeton University Press en 1947. La publicación del trabajo de Lur'e, ver [95], y el libro de La Salle y Lefschetz [90] hizo que, alrededor de 1960, muchos ingenieros que trabajaban en control comenzaran a interesarse por los estudios de Lyapunov. Hoy en día el método de linealización es una de las justificaciones teóricas de parte del control no lineal y el método directo se ha convertido en una de las principales herramientas para el análisis y el diseño de sistemas no lineales.

Los problemas que se estudian en este capítulo son:

- Generalización de los teoremas de estabilidad y de estabilidad asintótica de La Salle para campos vectoriales en variedades de Riemann completas tanto en el caso de un punto de equilibrio aislado (Proposiciones 4.1, 4.4, 4.5) como en el de una subvariedad de puntos de equilibrio (Proposiciones 4.6, 4.7, 4.8, Corolarios 4.9, 4.10).
- Estudio de la estabilidad de los puntos de equilibrio de los sistemas

mecánicos disipativos (Proposición 4.11) y parcialmente disipativos (Proposición 4.12).

- Estudio de la estabilidad de la subvariedad de puntos de equilibrio de los sistemas no holónomos disipativos (Proposiciones 4.13, 4.14) y parcialmente disipativo (Proposición 4.15).
- Aplicación de los teoremas de estabilidad al caso de sistemas Lagrangianos (Proposiciones 4.16, 4.17) y sistemas Lagrangianos no holónomos (Proposiciones 4.18, 4.19).

## 4.1 Estabilidad de puntos de equilibrio en una variedad de Riemann

Sea  $(M, g)$  una variedad de Riemann. Es un hecho suficientemente conocido que a partir de la métrica  $g$  podemos definir una distancia,  $d$ , de manera que la topología métrica inducida por ésta coincida con la topología original en  $M$ . Se dice que  $(M, g)$  es una *variedad completa* si la distancia inducida lo es. Condiciones equivalentes para que una variedad sea completa pueden encontrarse en [25]. A lo largo de toda la sección supondremos que  $(M, g)$  es una variedad de Riemann completa. Una condición equivalente a la completitud de  $(M, g)$  es que un subconjunto de  $M$  es compacto si y sólo si es cerrado y acotado (Teorema de Hopf-Rinow). Esta manera de expresar la completitud se va a utilizar expresamente en varias de las demostraciones de este capítulo.

Sea  $X \in \mathfrak{X}(M)$ . Consideremos el sistema dinámico asociado,  $X \circ \gamma = \dot{\gamma}$  donde  $\gamma: (a, b) \rightarrow M$  es una curva diferenciable. Si  $x \in M$ , denotaremos por  $\gamma(t; x)$ , la solución con condición inicial  $\gamma(0; x) = x$ . Diremos que  $\gamma(t; x)$  está acotada si su imagen está acotada como subconjunto del espacio métrico  $M$ .

Dado  $X \in \mathfrak{X}(M)$ , el objetivo de esta sección es encontrar condiciones para la estabilidad del punto de equilibrio del campo  $X$ , en el caso en que la variedad de Riemann es completa y el campo vectorial  $X$  también lo es. Con este fin generalizaremos los resultados de La Salle en  $\mathbb{R}^n$  a esta situación. Ver [105] para más detalles sobre los resultados en  $\mathbb{R}^n$ .

Recordemos que un punto de equilibrio  $x_0$  es *estable* si para todo  $\epsilon > 0$  existe  $\delta > 0$ , tal que si  $d(x, x_0) \leq \delta$  entonces  $d(\gamma(t; x); x_0) \leq \epsilon$  y *asintóticamente estable* si es estable y existe un entorno  $O$  de  $x_0$  tal que para todo  $x \in O$ ,  $\lim_{t \rightarrow \infty} d(\gamma(t; x), x_0) = 0$ . Si  $O = M$  decimos que  $x_0$  es *globalmente asintóticamente estable*.

**Funciones de Lyapunov.**

Si  $x_0 \in M$  es un punto de equilibrio de  $X \in \mathfrak{X}(M)$ , decimos  $V \in C^\infty(M)$  es una *función de Lyapunov* del campo  $X$  en el punto de equilibrio  $x_0$  si

- $V(x_0) = 0$ ,  $V(x) > 0$  para todo  $x \neq x_0$
- $\mathcal{L}_X V(x) \leq 0$ , para todo  $x \in M$ .

En realidad ya que los resultados son locales es suficiente que  $V$  esté definida en un entorno de  $x_0$ .

**Proposición 4.1** (ver [105]) *Si existe una función de Lyapunov,  $V \in C^\infty(M)$  de  $X$  en  $x_0$ , entonces  $x_0$  es estable.*

**Demostración:** Dado  $r \in \mathbb{R}$ ,  $r > 0$ , sea  $B_r(x_0) = \{x \in M \mid d(x, x_0) < r\}$ . Sea  $\partial B_r(x_0) = \{x \in M \mid d(x, x_0) = r\}$ . Obviamente  $\partial B_r(x_0)$  es cerrado y acotado. Ya que  $(M, g)$  es completa, el teorema de Hopf-Rinow asegura que es compacto. Entonces sea  $\beta \in \mathbb{R}$  el mínimo de la función  $V$  sobre este conjunto compacto.

Sea  $\alpha \in (0, \beta)$  y consideremos  $K_\alpha = \{x \in B_r(x_0) \mid V(x) < \alpha\}$ . Probaremos que  $K_\alpha$  es invariante por el flujo de  $X$ . Tomemos  $x \in K_\alpha$  y consideremos  $\gamma(t; x)$ . Como  $V(\gamma(t; x))$  es una función decreciente, ésta satisface que  $V(\gamma(t; x)) \leq V(\gamma(0; x)) < \alpha$ , y en consecuencia  $\gamma(t; x) \in K_\alpha \subset B_r(x_0)$  para  $t \geq 0$  ya que  $\alpha < \beta$ .

Entonces  $K_\alpha$  es un abierto invariante y por lo tanto existe  $r' > 0$  con  $B_{r'}(x_0) \subset K_\alpha$  tal que si  $x \in B_{r'}(x_0)$  entonces  $d(\gamma(t; x); x_0) \leq r$ , de donde se deduce el resultado.

□

De esta proposición se deduce que si  $X$  es un campo disipativo y la función de disipación  $S$  tiene un mínimo local estricto en el punto de equilibrio  $x_0$ , entonces  $x_0$  es estable ya que  $V = S - S(x_0)$  es una función de Lyapunov apropiada en un cierto entorno.

**Teorema de La Salle.**

Sea  $X \in \mathfrak{X}(M)$  un campo vectorial completo en una variedad de Riemann completa  $(M, g)$ . Dado  $x \in M$ , consideremos el conjunto

$$W(x) = \{y \in M \mid \exists (t_k) \subset \mathbb{R}, t_k > 0, t_k \rightarrow \infty, \lim_{k \rightarrow \infty} \gamma(t_k; x) = y\}.$$

Esto es, el conjunto de puntos límite de la curva integral  $\gamma(t; x)$ .

**Lema 4.2**  $W(x)$  es un conjunto invariante.

**Demostración:** Sea  $\hat{x} \in W(x)$  y  $(t_k)$  tal que  $\lim_{k \rightarrow \infty} \gamma(t_k; x) = \hat{x}$ . Para ver que  $W(x)$  es invariante por  $X$ , debemos probar que  $\gamma(t; \hat{x}) \in W(x)$  para todo  $t \in \mathbb{R}$ . Para cada  $t \in \mathbb{R}$ , tomemos la secuencia  $(t + t_k)$ , por el teorema de existencia y unicidad de soluciones para una EDO  $\gamma(t + t_k; x) = \gamma(t; \gamma(t_k; x))$ . La continuidad respecto a condiciones iniciales implica que  $\lim_{k \rightarrow \infty} \gamma(t + t_k; x) = \lim_{k \rightarrow \infty} \gamma(t; \gamma(t_k; x)) = \gamma(t; \hat{x})$ , de donde  $\gamma(t; \hat{x}) \in W(x)$ ,  $\forall t \geq 0$ .

□

**Lema 4.3** Si la solución  $\gamma(t; x)$  está acotada, entonces  $W(x)$  es un conjunto compacto en  $M$  y se verifica que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} D(\gamma(t; x), W(x)) = 0,$$

siendo  $D$  la distancia punto-conjunto.

**Demostración:** Ya que  $\gamma(t; x)$  está acotada, entonces  $W(x)$  también está acotado. Por lo tanto para probar la compacidad de  $W(x)$ , solo necesitamos probar que es cerrado en virtud del teorema de Hopf-Rinow. Sea  $(x_n) \subset W(x)$  y supongamos que  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \hat{x}$ . Ya que  $x_n \in W(x)$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ , existe  $(t_k^n)$  tal que  $\lim_{k \rightarrow \infty} \gamma(t_k^n; x) = x_n$  para todo  $n > 0$ . Entonces podemos encontrar una sucesión  $(\hat{t}_m)$  de  $(t_k^n)$  tal que  $\lim_{m \rightarrow \infty} d(\gamma(\hat{t}_m; x), \hat{x}) = 0$ , esto es,  $\lim_{m \rightarrow \infty} \gamma(\hat{t}_m; x) = \hat{x}$  de donde se sigue el resultado.

Para la segunda parte, supongamos que  $\lim_{t \rightarrow \infty} D(\gamma(t; x), W(x)) \neq 0$ . Entonces existe  $\epsilon > 0$  y una sucesión  $(t_m)$ , con  $t_m \rightarrow \infty$ , tal que  $d(\gamma(t_m; x), y) \geq \epsilon$  para todo  $y \in W(x)$ . Sin embargo,  $\gamma(t; x)$  está contenida en un conjunto compacto, ya que está acotada y  $(M, g)$  es una variedad completa. De esta manera podemos encontrar una sucesión parcial convergente  $(\hat{t}_k; x)$  tal que  $\lim_{k \rightarrow \infty} \gamma(\hat{t}_k; x) = \hat{y}$  para algún  $\hat{y} \in W(x)$ . Por otro lado, esto no es posible ya que  $\hat{y} \in W(x)$  y  $d(\hat{y}, y) \geq \epsilon$  para todo  $y \in W(x)$ .

□

Notemos que es esencial para poder decir algo sobre el comportamiento asintótico de la solución que esté acotada, pues son bien conocidos sistemas dinámicos en  $\mathbb{R}^3$ , variedad de Riemann completa, los cuales tienen soluciones no acotadas que no estabilizan [95].

**Proposición 4.4 (Teorema de La Salle)** Sea  $X \in \mathfrak{X}(M)$  un campo vectorial completo en una variedad de Riemann completa  $(M, g)$ . Sea  $x_0$  un punto de equilibrio de  $X$  y  $V \in C^\infty(M)$  una función de Lyapunov de  $X$  en  $x_0$ . Supongamos que  $x \in M$  es tal que  $\gamma(t; x)$  está acotada. Entonces



1.  $W(x) \subseteq \{y \in M \mid \mathcal{L}_X V(y) = 0\}$
2. Si  $K \subseteq M$  es el conjunto invariante maximal por el flujo de  $X$  tal que  $K \subseteq \{y \in M \mid \mathcal{L}_X V(y) = 0\}$ , se tiene que  $\lim_{t \rightarrow \infty} D(\gamma(t; x), K) = 0$ .

**Demostración:** La función  $v(t) = V(\gamma(t; x))$  es positiva y decreciente, entonces  $\lim_{t \rightarrow \infty} v(t) = \hat{v} \geq 0$ . Tomemos  $y \in W(x)$ ; existe  $(t_k)$  tal que  $\lim_{k \rightarrow \infty} \gamma(t_k; x) = y$ . Por ser  $V$  continua, se sigue que

$$V(y) = \lim_{k \rightarrow \infty} V(\gamma(t_k; x)) = \hat{v}.$$

Por lo tanto  $V$  es constante sobre  $W(x)$ . Como  $W(x)$  es invariante, tenemos  $V(\gamma(t; y)) = V(y)$  para todo  $y \in W(x)$  y por lo tanto

$$\mathcal{L}_X V(y) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{V(\gamma(t; y)) - V(y)}{t} = 0.$$

Para la segunda parte, supongamos que  $\lim_{t \rightarrow \infty} D(\gamma(t; x), K) \neq 0$ , entonces existe  $\epsilon > 0$  y una secuencia  $(t_m)$  tal que  $d(\gamma(t_m; x), y) \geq \epsilon$  para todo  $y \in K$ . Ya que  $\gamma(t; x)$  está contenido en un conjunto compacto, podemos encontrar una subsecuencia parcial convergente  $\gamma(\hat{t}_k; x)$  tal que  $\lim_{k \rightarrow \infty} \gamma(\hat{t}_k; x) = \hat{y} \in W(x) \subseteq K$ . Pero esto es una contradicción ya que  $d(\hat{y}, y) \geq \epsilon$  para todo  $y \in K$ .

□

**Proposición 4.5** Sea  $X \in \mathfrak{X}(M)$  un campo vectorial completo en una variedad de Riemann completa  $(M, g)$ . Sea  $x_0$  un punto de equilibrio aislado de  $X$  y  $V \in C^\infty(M)$  una función de Liapounov de  $X$  en  $x_0$ . Entonces:

1. Si existe un entorno  $O$  de  $x_0$  tal que  $\mathcal{L}_X V(x) < 0$  para  $x \in O$ ,  $x \neq x_0$ , entonces  $x_0$  es asintóticamente estable.
2. Si las curvas integrales de  $X$  están acotadas y la función de Lyapunov  $V$  de  $X$  en  $x_0$  satisface  $\mathcal{L}_X V(x) < 0$  para  $x \neq x_0$ , entonces  $x_0$  es globalmente asintóticamente estable.

**Comentario:** En (1) no es necesario que las curvas estén acotadas, pues ya que  $x_0$  es estable, se puede encontrar un entorno tal que toda curva integral con condición inicial en este entorno esté acotada.

**Demostración:**

- Demostraremos primero (2). Ya que  $V$  es una función de Lyapunov, entonces  $x_0$  es un punto de equilibrio estable. Por otra parte, se cumple que  $\{x_0\} \subseteq K \subseteq \{y \in M \mid \mathcal{L}_X V(y) = 0\} = \{x_0\}$ . De la proposición anterior se tiene que para todo  $x \in M$ ,  $\lim_{t \rightarrow \infty} D(\gamma(t; x), x_0) = 0$  y de ahí el resultado.
- Sea  $r > 0$  tal que  $B_r(x_0) \subset O$  no contenga otros puntos de equilibrio. Como  $x_0$  es estable, existe  $\delta > 0$  tal que si  $x \in B_\delta(x_0)$ , entonces  $\gamma(t; x) \in B_r(x_0)$  para todo  $t$ . Aplicando el mismo razonamiento que en el apartado anterior tenemos que

$$W(x) \subseteq K \subseteq \{y \in B_r(x_0) \mid \mathcal{L}_X V(y) = 0\} = \{x_0\}, \forall x \in B_\delta(x_0)$$

y en consecuencia  $\lim_{t \rightarrow \infty} d(\gamma(t; x), x_0) = 0$ ,  $x \in B_\delta(x_0)$ .

□

### Comentarios:

1. Como consecuencia tenemos que si  $X$  es estrictamente disipativo, las curvas integrales están acotadas y la función de disipación tiene un mínimo estricto absoluto en  $x_0$ , entonces  $x_0$  es globalmente asintóticamente estable.
2. Con el fin de asegurar que las curvas integrales están acotadas, si  $M$  no es compacta, es suficiente que la función de Lyapunov verifique que

$$\lim_{d(q, x_0) \rightarrow \infty} V(q) = \infty.$$

## 4.2 Estabilidad de la subvariedad de puntos de equilibrio en una variedad de Riemann.

El interés por estudiar las subvariedades de puntos de equilibrio radica en ser éstas las que aparecen al tratar con sistemas mecánicos no holónomos. En esta sección se pretende dar una generalización a esta situación de los resultados vistos previamente sobre estabilidad de puntos de equilibrio.

Sea  $(M, g)$  una variedad de Riemann. Supongamos que los puntos de equilibrio de  $X$  forman una subvariedad  $M$  a la que llamaremos  $PE$ .

Recordemos que la subvariedad de puntos de equilibrio  $PE \subset M$  es *estable* si para todo  $\epsilon > 0$  existe un  $\delta > 0$  tal que si  $D(x, PE) \leq \delta$ , entonces  $D(\gamma(t; x), PE) \leq \epsilon$ , donde  $D$  es la distancia punto conjunto,  $t > 0$ . Llamaremos a la subvariedad *estable en sentido débil* si para todo  $\epsilon > 0$  existe un

abierto  $U$ , tal que si  $x \in U$ , entonces  $D(\gamma(t; x), PE) \leq \epsilon$ . Si  $PE$  es compacto y es estable en sentido débil, entonces es estable. Por otra parte diremos que  $PE$  es *asintóticamente estable* si es estable y existe  $r \in \mathbb{R}$ ,  $r > 0$ , tal que si  $x \in O = \{x \in M \mid D(x, PE) \leq r\}$ , entonces  $\lim_{t \rightarrow \infty} D(\gamma(t; x), PE) = 0$ . Si  $O = M$  diremos que  $PE$  es *globalmente asintóticamente estable*.

## Funciones de Lyapunov.

Si  $PE \subset M$  es la subvariedad de puntos de equilibrio de  $X \in \mathfrak{X}(M)$ , diremos que  $V \in C^\infty(M)$  es una función de Lyapunov de  $X$  en  $PE$  si

- $V(x) = 0$ ,  $\forall x \in PE$  y  $V(x) \geq 0$ ,  $\forall x \in M$ .
- $\mathcal{L}_X V \leq 0$ ,  $\forall x \in M$ .

Si estas condiciones sólo se dieran en un cierto entorno  $U \supset PE$ , bastaría tomar como variedad de Riemann  $(U, g|_U)$ .

**Proposición 4.6** *Sea  $(M, g)$  una variedad de Riemann,  $X$  un campo vectorial sobre  $M$  y  $PE$  la correspondiente subvariedad de puntos de equilibrio. Si existe una función de Lyapunov,  $V \in C^\infty(M)$  de  $X$  en  $PE$  y  $\lambda \in \mathbb{R}^+$ , tal que toma un mínimo sobre los conjuntos  $\partial B_r = \{x \in M \mid D(x, PE) = r\}$ ,  $r \leq \lambda$ , entonces  $PE$  es estable en sentido débil.*

**Demostración:** Dado  $\epsilon > 0$ , tomemos  $B_r = \{x \in M \mid D(x, PE) \leq r\}$ ,  $r \leq \min(\epsilon, \lambda)$ , y sea  $\beta \in \mathbb{R}$  el mínimo de la función  $V$  sobre  $\partial B_r$ . Sea  $\alpha \in (0, \beta)$  y consideremos  $K_\alpha = \{x \in B_r \mid V(x) < \alpha\}$ . Probaremos que  $K_\alpha$  es invariante por el flujo de  $X$ . Tomemos  $x \in K_\alpha$  y consideremos  $\gamma(t; x)$ . Como  $V(\gamma(t; x))$  es una función decreciente, ésta satisface que  $V(\gamma(t; x)) \leq V(\gamma(0; x)) < \alpha$ , y en consecuencia  $\gamma(t; x) \in K_\alpha \subset B_r$  para  $t \geq 0$  ya que  $\alpha < \beta$ . Entonces  $K_\alpha$  es un abierto invariante y por lo tanto  $PE$  es estable en sentido débil.

□

Ya sabemos que si  $(M, g)$  es una variedad de Riemann completa, el teorema de Hopf-Rinow [25] asegura que un subconjunto de  $M$  es compacto si y sólo si es cerrado y acotado. Por lo tanto si  $PE$  es un conjunto compacto, entonces  $\partial B_r = \{x \in M \mid D(x, PE) = r\}$  es compacto al ser cerrado y acotado. En consecuencia si existe función de Lyapunov, se cumple trivialmente la hipótesis de la proposición anterior y, por lo tanto,  $PE$  será estable en sentido débil. Además también se cumple:

**Proposición 4.7** *Sea  $(M, g)$  una variedad de Riemann completa,  $X \in \mathfrak{X}(M)$  y  $V \in C^\infty(M)$  una función de Lyapunov de  $X$  en  $PE$ . Si  $PE$  es compacto, entonces es estable.*

**Demostración:** De la Proposición 4.6 tenemos que dado  $\epsilon > 0$ , existe  $K_\alpha \subset B_\epsilon$  tal que si  $x \in K_\alpha$ , entonces  $\gamma(t; x) \in B_\epsilon$  para todo  $t$ . Como  $PE$  es compacto, existe  $y \in PE$  tal que

$$m = \min D(PE, \overline{K_\alpha}) = \min D(y, \overline{K_\alpha})$$

donde  $\overline{K_\alpha}$  denota al conjunto complementario del abierto  $K_\alpha$ . Se cumple que  $m > 0$ , pues de lo contrario se tendría que  $y \in \overline{K_\alpha}$  y ésto no puede ser ya que  $y \in PE$ . Si tomamos  $\delta < m$ , se verifica que  $B_\delta \subset K_\alpha$  y por lo tanto si  $x \in B_\delta$ , entonces  $\gamma(t; x) \in B_\epsilon$  para todo  $t$ .

□

## Teorema de La Salle.

Enunciamos ahora el Teorema de La Salle para el caso de un campo vectorial con subvariedad de puntos de equilibrio. Las demostraciones son exactamente iguales que en el caso de un punto de equilibrio, de donde no las volveremos a hacer. Lo interesante son los cololarios, en particular el Corolario 4.10 en el que se obtienen condiciones suficientes para que  $PE$  sea globalmente asintóticamente estable en el caso en que sea compacta.

**Proposición 4.8 (Teorema de La Salle)** *Sea  $X \in \mathfrak{X}(M)$  un campo vectorial completo en una variedad de Riemann completa  $(M, g)$ . Sea  $PE$  la variedad de puntos de equilibrio de  $X$  y  $V \in C^\infty(M)$  una función de Lyapunov de  $X$  en  $PE$ . Supongamos que  $x \in M$  es tal que  $\gamma(t; x)$  está acotada. Entonces*

1.  $W(x) \subseteq \{y \in M \mid \mathcal{L}_X V(y) = 0\}$ .
2. Si  $K \subseteq M$  es el conjunto invariante maximal por el flujo de  $X$  tal que  $K \subseteq \{y \in M \mid \mathcal{L}_X V(y) = 0\}$ , entonces  $\lim_{t \rightarrow \infty} D(\gamma(t; x), K) = 0$ .

□

**Comentario:** Observemos que  $PE$  está incluido en el conjunto invariante maximal  $K$ .

**Corolario 4.9** Sea  $(M, g)$  variedad de Riemann completa y  $X \in \mathfrak{X}(M)$  un campo vectorial completo. Si las curvas integrales de  $X$  están acotadas y existe una función de Lyapunov  $V$  de  $X$  en  $PE$  verificando  $\mathcal{L}_X V(x) < 0$  para  $x \notin PE$ , entonces  $\lim_{t \rightarrow \infty} D(\gamma(t; x), K) = 0$  para todo  $x \in M$ .

□

**Corolario 4.10** Sea  $(M, g)$  variedad de Riemann completa y  $X \in \mathfrak{X}(M)$  un campo vectorial completo tal que  $PE$  sea un conjunto compacto.

1. Si existe  $\epsilon > 0$  y  $V$  función de Liapounov de  $X$  en  $PE$  en el entorno  $B_\epsilon$ , tal que  $\mathcal{L}_X V(x) < 0$  para  $x \notin PE$ ,  $x \in B_\epsilon$ , entonces  $PE$  es asintóticamente estable.
2. Si las curvas integrales de  $X$  están acotadas y existe una función de Lyapunov  $V$  de  $X$  en  $PE$  verificando  $\mathcal{L}_X V(x) < 0$  para  $x \notin PE$ , entonces  $PE$  es globalmente asintóticamente estable.

**Comentario:** En (1) no es necesario que las curvas estén acotadas, pues ya que  $PE$  es compacto, se puede encontrar un entorno tal que toda curva integral con condición inicial en este entorno esté acotada.

**Demostración:**

- Veamos primero (2). Ya que  $V$  es una función de Lyapunov, entonces  $PE$  es una subvariedad estable. Por otra parte, se cumple que  $PE \subseteq K \subseteq \{y \in M \mid \mathcal{L}_X V(y) = 0\} = PE$ . De la proposición anterior se tiene que para todo  $x \in M$ ,  $\lim_{t \rightarrow \infty} D(\gamma(t; x), PE) = 0$ .
- Sea  $0 < r < \epsilon$ , como  $PE$  es estable, existe  $\delta > 0$  tal que si  $x \in B_\delta$ , entonces  $\gamma(t; x) \in B_r$  para todo  $t$ . Aplicando el mismo razonamiento que en el apartado anterior tenemos que

$$W(x) \subseteq K \subseteq \{y \in B_r \mid \mathcal{L}_X V(y) = 0\} = PE, \forall x \in B_\delta$$

y en consecuencia  $\lim_{t \rightarrow \infty} D(\gamma(t; x), PE) = 0$ ,  $x \in B_\delta$ .

□

### 4.3 Estabilidad en sistemas mecánicos Newtonianos.

Ya que los sistemas mecánicos vienen dados por campos en  $TQ$ , de acuerdo con el capítulo 3, a fin de estudiar su estabilidad utilizando los resultados

de la sección previa es necesario dotar al fibrado tangente de una variedad de Riemann completa  $Q$  de una métrica completa para poder establecer los resultados en un contexto general.

Esto es posible si tomamos como métrica en  $TQ$  la métrica de Sasaki  $g^T$  [1, 92].

Dada una conexión  $\nabla$ , es bien sabido (ver [29, 97]), que ésta determina una única descomposición del fibrado  $T(TQ)$  en subfibrado vertical y horizontal. De manera más precisa se tiene que  $T(TQ) = H^\nabla(TQ) \oplus V(TQ)$ , esto es,  $T_{v_q}(TQ) = H_{v_q}^\nabla(TQ) \oplus V_{v_q}(TQ)$ ,  $\forall v_q \in TQ$ .  $H^\nabla(TQ)$  se denomina *subfibrado horizontal* definido por  $\nabla$  y sus secciones sobre  $TQ$  se llaman *campos horizontales* respecto a  $\nabla$ . Si  $Z \in \mathfrak{X}(TQ)$ ,  $Z$  descompone en  $Z = Z^h + Z^v$  en donde  $Z^h$  es un campo horizontal y  $Z^v$  un campo vertical. Como  $V_{v_q}(TQ) = \ker T_{v_q}\tau_Q$  tenemos que  $T_{v_q}\tau_Q$  restringido a  $H_{v_q}^\nabla(TQ)$  es un isomorfismo lineal

$$T_{v_q}\tau_Q : H_{v_q}^\nabla(TQ) \rightarrow T_qQ.$$

En consecuencia si  $X$  es un campo vectorial en  $Q$ , podemos definir el levantamiento horizontal de  $X$  a  $TQ$  como el campo vectorial horizontal  $X^h$  en  $TQ$  tal que

$$T\tau_Q(X^h(v_q)) = X(q), \quad v_q \in TQ.$$

De todo lo anterior se tiene que dada  $g$ , una métrica de Riemann en  $Q$ , y la conexión de Levi-Civita  $\nabla$ , podemos definir una métrica de Riemann  $g^T$  en  $TQ$  de la siguiente forma:

Sea  $v_q \in T_qQ$  y  $X_{v_q}, Y_{v_q} \in T_{v_q}(TQ)$  tales que  $X_{v_q} = X_{v_q}^h + X_{v_q}^v$ ,  $Y_{v_q} = Y_{v_q}^h + Y_{v_q}^v$ . Entonces definimos:

$$\begin{aligned} g_{v_q}^T(X_{v_q}, Y_{v_q}) &= g_q((\lambda_q^{v_q})^{-1}(X_{v_q}^v), (\lambda_q^{v_q})^{-1}(Y_{v_q}^v)) \\ &+ g_q(T\tau_Q|_{H_{v_q}^\nabla}(X_{v_q}^h), T\tau_Q|_{H_{v_q}^\nabla}(Y_{v_q}^h)). \end{aligned}$$

donde  $\lambda_q^{v_q}$  es la aplicación levantamiento vertical.

En cada punto  $v_q \in TQ$ , el subespacio horizontal es ortogonal por  $g^T$  al subespacio vertical.  $g^T$  es una métrica Riemanniana y por lo tanto la topología inducida por  $g^T$  coincide con la natural en  $TQ$ . Además si  $g$  es completa entonces  $g^T$  también es completa. En consecuencia  $(TQ, g^T)$  es una variedad de Riemann completa, y podemos aplicar los resultados de la sección anterior. Ver [2] y [104] para más detalles.

Consideremos el sistema mecánico  $\Sigma = (Q, g, U, R)$ , donde la variedad de configuración  $(Q, g)$  es una variedad de Riemann completa y  $R \in \mathfrak{X}(Q, \tau_Q)$  un campo vectorial disipativo. El campo dinámico del sistema es  $Y = X_g -$

$(\text{grad } U)^v + R^v$ , que es de segundo orden, y por tanto los puntos de equilibrio son de la forma  $0_{q^o} \in T_{q^o}Q$ .

Además, si  $R \in \mathfrak{X}(Q, \tau_Q)$  verifica que  $R(0_q) = 0$  para cada  $q \in Q$ , por ejemplo si  $R$  proviene de una función de Rayleigh, entonces  $q^o$  es además un cero del gradiente de  $U$ .

Por otra parte es conocido que si  $U \in C^\infty(Q)$  está inferiormente acotado, y  $R \in \mathfrak{X}(Q, \tau_Q)$  es disipativo, entonces  $Y \in \mathfrak{X}(TQ)$  es positivamente completo, ver [1] para más detalles. En consecuencia, podemos estudiar el comportamiento asintótico de cualquier solución.

**Proposición 4.11 (Lagrange)** *Sea  $(Q, g)$  una variedad de Riemann completa y consideremos un sistema mecánico  $\Sigma = (Q, g, U, R)$  con  $R \in \mathfrak{X}(Q, \tau_Q)$  disipativo. Supongamos que  $q^o$  es un mínimo local estricto de  $U$  y  $R(0_q) = 0$  para cada  $q \in Q$ . Se cumple que:*

1.  $0_{q^o}$  es un punto de equilibrio estable. (El caso  $R \equiv 0$  también está incluido)
2. Si  $R \in \mathfrak{X}(Q, \tau_Q)$  es estrictamente disipativo, entonces  $0_{q^o}$  es asintóticamente estable.
3. En las mismas condiciones que (2), si  $0_{q^o}$  es el único punto de equilibrio y las soluciones están acotadas, entonces es globalmente asintóticamente estable.

#### Demostración:

- La estabilidad se deduce de que  $\tilde{E} = T + U - U(q^o)$  es una función de Lyapunov del sistema en un cierto entorno, ver Proposición 4.1. Esto es,  $\tilde{E}(v_q) > 0$  para todo  $v_q \neq 0_{q^o}$  y  $\mathcal{L}_Y \tilde{E}(v_q) \leq 0$ , por la Proposición 3.1.
- Demostraremos primero (3) porque la argumentación nos servirá para el segundo caso. Consideremos  $\dot{\gamma}(t; v_q)$  una solución del sistema, entonces se verifica que

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_Y \tilde{E}(v_q) &= g(R \circ \dot{\gamma}(t; v_q), \dot{\gamma}(t; v_q))|_{t=0} \leq -\alpha g(\dot{\gamma}(t; v_q), \dot{\gamma}(t; v_q))|_{t=0} \\ &= -\alpha g_q(v_q, v_q) \end{aligned}$$

para algún  $\alpha > 0$ . De esta manera el conjunto invariante maximal  $K$ , definido en la Proposición 4.4, verifica

$$K \subseteq \{y \in TQ \mid \mathcal{L}_X \tilde{E}(y) = 0\} \subseteq \{0_q \mid q \in Q\},$$

como sólo existe un único punto de equilibrio, entonces  $K = \{0_{q^o}\}$  y por lo tanto  $0_{q^o}$  es globalmente asintóticamente estable.

- Sea  $r > 0$  tal que  $B_r(0_{q^o}) \subset \text{T}Q$  no contenga otros puntos de equilibrio. Por ser  $0_{q^o}$  estable tenemos que existe  $\delta > 0$  tal que si  $v_q \in B_\delta(0_{q^o})$ , entonces  $\dot{\gamma}(t; v_q) \in B_r(0_{q^o})$ , para todo  $t$ . Argumentando de la misma forma que para la parte (3) se tiene que  $\lim_{t \rightarrow \infty} \dot{\gamma}(t; v_q) = 0_{q^o}$  para todo  $v_q \in B_\delta(0_{q^o})$  y por lo tanto  $0_{q^o}$  es asintóticamente estable.

□

### Sistemas mecánicos parcialmente disipativos.

Sean  $(Q_1, g_1)$ ,  $(Q_2, g_2)$  variedades de Riemann completas con conexiones de Levi-Civita  $\nabla_1$  y  $\nabla_2$ . Podemos considerar la variedad producto  $Q = Q_1 \times Q_2$  con la métrica de Riemann  $g = g_1 \oplus g_2$ , la cual es completa si  $g_1$  y  $g_2$  son completas. La conexión de Levi-Civita para  $(Q, g)$  es  $\nabla = \nabla^1 \oplus \nabla^2$ , es decir,  $\nabla_X X = \nabla_{X_1}^1 X_1 + \nabla_{Y_2}^2 Y_2$  si  $X = (X_1, X_2)$ ,  $Y = (Y_1, Y_2)$  son elementos de  $\mathfrak{X}(Q)$ .

Por lo tanto, las ecuaciones dinámicas del sistema  $\Sigma = (Q, g, U, R)$  se pueden escribir de la manera siguiente:

$$\begin{aligned} \nabla_{\dot{\gamma}_1}^1 \dot{\gamma}_1 &= -(\text{grad}_1 U) \circ (\gamma_1, \gamma_2) + R_1 \circ (\dot{\gamma}_1, \dot{\gamma}_2) \\ \nabla_{\dot{\gamma}_2}^2 \dot{\gamma}_2 &= -(\text{grad}_2 U) \circ (\gamma_1, \gamma_2) + R_2 \circ (\dot{\gamma}_1, \dot{\gamma}_2), \end{aligned} \quad (4.1)$$

donde  $i(\text{grad}_i U)g_i = -d_i U$ ,  $i = 1, 2$ , y  $d_i$  es la diferencial exterior en  $Q_i$ . Si  $v_q \in \text{T}_q Q = \text{T}_{q_1} Q_1 \oplus \text{T}_{q_2} Q_2$ , entonces pondremos  $v_q = v_{q_1} + v_{q_2}$  para indicar la descomposición natural,  $v_{q_1} \in \text{T}_{q_1} Q_1$ ,  $v_{q_2} \in \text{T}_{q_2} Q_2$ .

El campo vectorial  $R \in \mathfrak{X}(Q, \tau_Q)$  se denomina *parcialmente estrictamente disipativo* en  $Q_2$  si verifica que  $g(R \circ v_q, v_q) \leq -\alpha g_2(v_{q_2}, v_{q_2})$ , con  $\alpha$  un número real,  $\alpha > 0$ , para todo  $v_q \in \text{T}_q Q$ . Esta condición significa que  $R$  es estrictamente disipativo en  $(Q_2, g_2)$ .

**Proposición 4.12** *Sea  $\Sigma = (Q = Q_1 \times Q_2, g = g_1 \oplus g_2, U, R)$  un sistema mecánico con  $R \in \mathfrak{X}(Q, \tau_Q)$  tal que si  $v_q = 0$  entonces  $R(v_q) = 0$ . Supongamos que  $U \in C^\infty(Q)$  tiene un mínimo local estricto en  $q^o \in Q$ . Se cumple que:*

1. *Supongamos que  $R$  es parcialmente estrictamente disipativo y que existe un entorno  $O \subseteq \text{T}Q$  de  $0_{q^o}$  tal que cada solución  $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2)$  con  $\dot{\gamma}(0) \in O$  verifica que si  $\dot{\gamma}_2 = 0$  se tiene que  $\lim_{t \rightarrow \infty} \dot{\gamma}(t) = 0_{q^o}$ . Entonces  $0_{q^o}$  es asintóticamente estable.*
2. *En las mismas condiciones que (2) si  $O = \text{T}Q$ ,  $0_{q^o}$  es mínimo absoluto y las soluciones están acotadas, entonces  $0_{q^o}$  es globalmente asintóticamente estable.*



**Demostración:**

- Demostraremos primero el caso (2) ya que el argumento nos valdrá para probar (1). Observemos que de la Proposición 4.11 se tiene que  $0_{q^o}$  es estable.

Consideremos ahora una solución del sistema  $\Sigma$ ,  $\dot{\gamma}(t; v_q)$ , y tomemos la función  $\tilde{E} = T + U - U(q^o)$ . Ya que  $\tilde{E} \geq 0$  y verifica

$$\frac{d(\tilde{E} \circ \dot{\gamma})}{dt} = g(R \circ \dot{\gamma}, \dot{\gamma}) \leq -\alpha g(\dot{\gamma}_2, \dot{\gamma}_2) \leq 0 \quad (4.2)$$

para un  $\alpha \in \mathbb{R}$ ,  $\alpha > 0$ . De ahí existe  $\lim_{t \rightarrow \infty} \tilde{E}(\dot{\gamma}(t; v_q)) = a_0 \geq 0$ . Por continuidad de  $\tilde{E}$ ,  $\tilde{E}(\hat{x}) = a_0$  para todo  $\hat{x} \in W(v_q)$ .

Consideremos ahora la solución  $\dot{\gamma}(t; \hat{x})$  donde  $\hat{x} \in W(v_q)$ . De la desigualdad (4.2) y teniendo en cuenta la invariancia de  $W(v_q)$ , se deduce que  $g_2(\dot{\gamma}_2(t; \hat{x}), \dot{\gamma}_2(t; \hat{x})) = 0$ . Por lo tanto  $\dot{\gamma}_2(t; \hat{x}) = 0$ ,  $t \geq 0$ , y se verifica que  $\lim_{t \rightarrow \infty} (\dot{\gamma}(t; \hat{x})) = 0_{q^o}$ . En consecuencia  $a_0 = \tilde{E}(\dot{\gamma}(t; \hat{x})) = 0$  y por lo tanto  $0 = \tilde{E}(\dot{\gamma}(0; \hat{x})) = \tilde{E}(\hat{x})$  con lo que  $W(v_q) = \{0_{q^o}\}$ . Utilizando ahora el Lema 4.3 tenemos que  $\lim_{t \rightarrow \infty} d(\dot{\gamma}(t; v_q), 0_{q^o}) = 0$ .

- Sea  $r > 0$  tal que  $B_r(0_{q^o}) \subseteq O$  y que no contenga otros mínimos. Por ser  $0_{q^o}$  estable tenemos que existe  $\delta > 0$  tal que si  $v_q \in B_\delta(0_{q^o})$ , entonces  $\dot{\gamma}(t; v_q) \in B_r(0_{q^o})$ , para todo  $t$ . Argumentando de la misma forma que en apartado anterior se tiene que  $\lim_{t \rightarrow \infty} \dot{\gamma}(t; v_q) = 0_{q^o}$  para todo  $v_q \in B_\delta(0_{q^o})$  y por lo tanto  $0_{q^o}$  es asintóticamente estable.

□

En este tipo de sistemas al actuar la disipación sólo sobre una componente del mismo, para asegurar la estabilidad asintótica de todo el sistema, es necesario imponer que si estabiliza la componente donde actúa la disipación, también lo hace la que está libre de ésta, de ahí las condiciones sobre la componente  $\gamma_2$  de la trayectoria  $\gamma$ .

## 4.4 Estabilidad de sistemas no holónomos.

A este tipo de sistemas les corresponden campos vectoriales en  $TQ$  tangentes a la distribución  $D$  de las ligaduras y por lo tanto para poder tratar el problema de la estabilidad desde un punto de vista global, debemos dotar a esta subvariedad  $D$  del fibrado tangente de una métrica completa al igual que hicimos en el caso sin ligaduras.

$g^T$  es completa, como ya sabemos, y al ser  $D$  una subvariedad cerrada, entonces la distancia inducida por  $g^T$  en  $D$  es completa. Así se tiene que  $(D, g^T|_D)$  es una variedad de Riemann completa.

Consideremos el sistema mecánico no holónimo  $\Sigma = (Q, g, F = -\text{grad } U + R, D)$ , donde  $(Q, g)$  es una variedad de Riemann completa,  $D$  es una distribución y  $R \in \mathfrak{X}(Q, \tau_Q)$  un campo vectorial disipativo. El campo vectorial asociado a  $\Sigma$  es

$$Y = X_g - (\text{grad } U)^v + R^v + \sum_{i=1}^k \lambda^i Z_i \in \mathfrak{X}(TQ).$$

Si se cumple que  $R(0_q) = 0$ ,  $\forall q \in Q$ , entonces la subvariedad de puntos de equilibrio viene dada por  $PE_\Sigma = \{0_q \mid \pi_D(\text{grad } U)(q) = 0\}$  según la Proposición 3.8. Dado que los puntos de  $PE_\Sigma$  son de la forma  $0_q$  supondremos que  $PE_\Sigma \subseteq Q$  identificando  $Q$  con la sección cero de  $TQ$ .

Supondremos que  $U \in C^\infty(Q)$  es tal que  $U(q) = 0$  para todo  $q \in PE_\Sigma$ ,  $U(q) > 0$  si  $q \in Q \setminus PE_\Sigma$ .

**Proposición 4.13** *Sea  $(Q, g)$  una variedad de Riemann completa. Consideremos el sistema mecánico no holónimo  $\Sigma = (Q, g, F = -\text{grad } U + R, D)$  con  $R \in \mathfrak{X}(Q, \tau_Q)$  disipativo tal que  $R(0_q) = 0$  para todo  $q \in Q$ . Se tiene que:*

1. *Si existe  $\lambda \in \mathbb{R}^+$  tal que  $E \in C^\infty(TQ)$  toma un mínimo sobre los conjuntos  $\partial B_r = \{v_q \in TQ \mid D(v_q, PE_\Sigma) = r\}$ ,  $\forall r \leq \lambda$  (donde  $D$  es la distancia punto-conjunto inducida por  $g^T|_D$ ), entonces  $PE_\Sigma$  es estable en sentido débil. (El caso  $R \equiv 0$  está incluido)*
2. *Si  $PE_\Sigma$  es estable,  $R$  es estrictamente disipativo y las soluciones están acotadas, se cumple que  $PE_\Sigma$  es globalmente asintóticamente estable.*

**Demostración:**

1. Para demostrar la estabilidad débil, por la Proposición 4.6, es suficiente con probar que  $E = T + U$  es una función de Lyapunov. Esto es,  $E(v_q) > 0$  para todo  $v_q \in TQ \setminus PE_\Sigma$  y  $\mathcal{L}_Y E(v_q) \leq 0$ . La primera condición se deduce de las hipótesis sobre la  $U$ . Para probar la segunda, consideremos  $\dot{\gamma}(t; v_q)$  una solución del sistema. Entonces, como  $R$  es disipativa, tenemos que  $\mathcal{L}_Y E(v_q) = g(R \circ \dot{\gamma}(t; v_q), \dot{\gamma}(t; v_q))|_{t=0} = g(R(v_q), v_q) \leq 0$ .
2. Para ver que es globalmente asintóticamente estable, utilizaremos el teorema de La Salle. Consideremos una solución del sistema  $\dot{\gamma}(t; v_q)$ ,

entonces

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_Y E(v_q) &= g(R \circ \dot{\gamma}(t; v_q), \dot{\gamma}(t; v_q))|_{t=0} \leq -\alpha g(\dot{\gamma}(t; v_q), \dot{\gamma}(t; v_q))|_{t=0} \\ &= -\alpha g(v_q, v_q) \leq 0\end{aligned}$$

con  $\alpha > 0$ . De esta manera el conjunto invariante maximal  $K$ , definido en Proposición 4.8, verifica que

$$K \subseteq \{y \in \text{T}Q \mid \mathcal{L}_Y E(y) = 0\} \subseteq \{0_q \mid q \in Q\}$$

y que  $\{0_q \mid \pi_D(\text{grad } U)(q) = 0\} \subseteq K$  al ser estos los puntos de equilibrio.

Supongamos ahora que  $\{0_q \mid \pi_D(\text{grad } U)(q) = 0\} \not\subseteq K$ . Entonces, existe  $q^\circ \in Q$  tal que  $\pi_D(\text{grad } U)(q^\circ) \neq 0$  y  $0_{q^\circ} \in K$ . Al no ser punto de equilibrio se cumple que  $Y(0_{q^\circ}) = -(\pi_D(\text{grad } U))^v(q^\circ)$ , con lo que  $\dot{\gamma}(t; 0_{q^\circ}) \notin \{0_q \mid q \in Q\}$  para todo  $t$  y por lo tanto  $K$  no podría ser un conjunto invariante.

De todo lo anterior se deduce que  $K = \{0_q \mid \pi_D(\text{grad } U)(q) = 0\} = PE_\Sigma$ . Aplicando ahora el teorema de La Salle se tiene que

$$0 = \lim_{t \rightarrow \infty} D(\gamma(t; v_q), K) = \lim_{t \rightarrow \infty} D(\gamma(t; v_q), PE_\Sigma)$$

y por lo tanto  $PE_\Sigma$  es globalmente asintóticamente estable.

□

**Proposición 4.14** *Sea  $(Q, g)$  una variedad de Riemann completa. Consideremos el sistema mecánico no holónimo  $\Sigma = (Q, g, F = -\text{grad } U + R, D)$  con  $R \in \mathfrak{X}(Q, \tau_Q)$  disipativo. Supongamos que  $R(0_q) = 0$  para todo  $q \in Q$  y que  $PE_\Sigma$  es compacta, entonces:*

1.  $PE_\Sigma$  es estable. (El caso  $R \equiv 0$  está incluido)
2. Si  $R$  es estrictamente disipativo en un entorno  $O$  de  $PE_\Sigma$ , entonces es asintóticamente estable.
3. Si  $R$  es estrictamente disipativo y las soluciones están acotadas, se cumple que  $PE_\Sigma$  es globalmente asintóticamente estable.

**Demostración:** La parte (1) y (3) son consecuencia directa de las Proposiciones 4.7 y 4.13. Para probar (2), utilizando el mismo razonamiento que en la Proposición 4.7, consideremos  $\epsilon > 0$  tal que  $B_\epsilon \subset O$ . Como sabemos por (1) que  $PE_\Sigma$  es estable, tomemos  $\delta > 0$  tal que para todo  $v_q \in B_\delta$ , se cumple que  $\dot{\gamma}(t; v_q) \in B_\epsilon$ . Notemos que  $B_\epsilon$  es compacto y por lo tanto  $\dot{\gamma}(t; v_q)$  está acotada. Haciendo uso del argumento de la segunda parte de la Proposición 4.13 se obtiene que  $\lim_{t \rightarrow \infty} D(\dot{\gamma}(t; v_q), PE_\Sigma) = 0, \forall v_q \in B_\delta$ .

□

En el caso particular de que  $\text{grad } U \equiv 0$  una demostración alternativa es la siguiente:

$$D(v_q, PE) \leq d(v_q, 0_q) \leq \int_0^1 \sqrt{g^T(\dot{\xi}, \dot{\xi})} = \int_0^1 \sqrt{g_q(v, v)} = \sqrt{2E(v_q)}$$

donde  $\xi(t) = (q; 0_q + tv_q) \in TQ$  es una curva en la fibra y  $E(v_q) = \frac{1}{2}T(v_q, v_q)$ .

Consideremos  $\gamma(t; v_q)$  solución del sistema  $\Sigma$ , de lo anterior se tiene que  $D(\gamma(t; v_q), PE) \leq \sqrt{2E(\gamma(t; v_q))}$  y por ser  $R$  estrictamente disipativo

$$\lim_{t \rightarrow \infty} D(\gamma(t; v_q), PE_\Sigma) \leq \lim_{t \rightarrow \infty} \sqrt{2E(\gamma(t; v_q))} = 0.$$

**Comentario:** Algunas de las condiciones que se imponen en los resultados anteriores, no siempre se verifican. Veamos un ejemplo en el que no es cierto que  $U|_{PE_\Sigma} \equiv 0$ .

Consideremos la dinámica de una varilla uniforme con dos ruedas en sus extremos moviéndose sobre un plano inclinado con ángulo  $\alpha$ . Sean  $\psi_1$  y  $\psi_2$  los ángulos de rotación de las ruedas respecto a un estado inicial arbitrario. La posición de la varilla viene dada por las coordenadas  $(x, y)$  del centro de masas sobre el plano y la orientación respecto a la recta horizontal sobre el plano dado por el ángulo  $\theta$ . El espacio de configuración es la variedad de Riemann  $Q = \mathbb{R}^2 \times S^1 \times S^1 \times S^1$  con coordenadas locales  $(x, y, \theta, \psi_1, \psi_2)$ . La métrica

$$g = \begin{pmatrix} m & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & J & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & J_w & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & J_w \end{pmatrix}$$

donde  $m$  es la masa del sistema,  $J$  es el momento de inercia de la varilla y  $J_w$  el de las ruedas.

Supongamos que el sistema se mueve sin deslizar, es decir, cada rueda puede avanzar en la dirección a la que apunta y girar entorno a su eje vertical. Las restricciones del movimiento son:

$$\begin{aligned} \dot{x} \cos \theta + \dot{y} \sin \theta - \frac{1}{2}(\dot{\psi}_1 + \dot{\psi}_2) &= 0 \\ -\dot{x} \sin \theta + \dot{y} \cos \theta &= 0 \\ \dot{\theta} - \frac{1}{2}(\dot{\psi}_1 - \dot{\psi}_2) &= 0 \end{aligned}$$

donde hemos considerado que el diámetro de las ruedas y la longitud de la varilla es dos. La distribución está generada por los siguientes campos vectoriales, ortogonales entre si:

$$\begin{aligned} X_1 &= \frac{\partial}{\partial x} + \tan \theta \frac{\partial}{\partial y} + \frac{1}{\cos \theta} \frac{\partial}{\partial \psi_1} + \frac{1}{\cos \theta} \frac{\partial}{\partial \psi_2} \\ X_2 &= -\frac{\partial}{\partial \theta} - \frac{\partial}{\partial \psi_1} + \frac{\partial}{\partial \psi_2} \end{aligned}$$

La energía cinética del sistema viene dada por

$$T = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \frac{1}{2}J\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}J_w(\dot{\psi}_1^2 + \dot{\psi}_2^2)$$

y la energía potencial  $U = mgy \cos \alpha$ . Como  $g(\text{grad } U, X_2) = 0$ , entonces

$$\pi_D(\text{grad } U) = \frac{g(\text{grad } U, X_1)X_1}{g(X_1, X_1)}$$

Calculando se obtiene que:

$$\begin{aligned} g(X_1, X_1)\pi_D(\text{grad } U) &= \frac{m^2 \cos \alpha \sin \theta}{\cos \theta} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{m^2 \cos \alpha \sin^2 \theta}{\cos^2 \theta} \frac{\partial}{\partial y} \\ &+ \frac{mJ_w \cos \alpha \sin \theta}{\cos^2 \theta} \frac{\partial}{\partial \psi_1} + \frac{mJ_w \cos \alpha \sin \theta}{\cos^2 \theta} \frac{\partial}{\partial \psi_2} \end{aligned}$$

En consecuencia, la variedad de puntos de equilibrio del sistema satisface que  $PE = \mathbb{R}^2 \times \{0, \pi\} \times S^1 \times S^1$  y por lo tanto la función potencial no toma su valor mínimo sobre  $PE$ . Así pues no podemos aplicar los teoremas de estabilidad, en concreto, la experiencia nos muestra que la subvariedad de puntos de equilibrio es inestable, pues para cualquier pequeña variación de la posición de equilibrio de la varilla se precipita pendiente abajo.

□

### Sistemas mecánicos no holónomos parcialmente disipativos.

Consideremos el sistema no holónomo  $\Sigma = (Q, g, F = -\text{grad}U + R, D)$  donde  $Q = Q_1 \times Q_2$ ,  $g = g_1 \oplus g_2$  y  $D = D_1 \times D_2$ , siendo  $D_1$  y  $D_2$  distribuciones.

Diremos que  $R \in \mathfrak{X}(Q, \tau_Q)$  es *parcialmente estrictamente disipativo* si verifica

$$g(R \circ v_q, v_q) \leq -\alpha g_2(v_{q_2}, v_{q_2}),$$

con  $\alpha$  un número real,  $\alpha > 0$ , para todo  $v_q \in D \subset TQ \equiv TQ_1 \times TQ_2$ .

**Proposición 4.15** *Sea el sistema mecánico no holónimo  $\Sigma$  con  $R \in \mathfrak{X}(Q, \tau_Q)$  tal que  $R(0_q) = 0$  para todo  $q \in Q$  y  $PE_\Sigma$  compacta. Supongamos que  $R$  es parcialmente estrictamente disipativo, que las soluciones están acotadas y que para toda solución  $\gamma(t) = (\gamma_1, \gamma_2)$  tal que  $\dot{\gamma}_2 = 0$ ,  $\lim_{t \rightarrow \infty} D(\dot{\gamma}(t), PE) = 0$ . Entonces  $PE$  es globalmente asintóticamente estable.*

**Demostración:** Consideremos ahora una solución del sistema  $\Sigma$ ,  $\dot{\gamma}(t; v_q)$ ,  $v_q \in D$ , y tomemos la función  $\tilde{E} = T + U$ . Ya que  $\tilde{E} \geq 0$  y verifica

$$\frac{d(\tilde{E} \circ \dot{\gamma})}{dt} = g(R \circ \dot{\gamma}, \dot{\gamma}) \leq -\alpha g(\dot{\gamma}_2, \dot{\gamma}_2) \leq 0 \quad (4.3)$$

para un  $\alpha \in \mathbb{R}$ ,  $\alpha > 0$ . De ahí existe  $\lim_{t \rightarrow \infty} \tilde{E}(\dot{\gamma}(t; v_q)) = a_0 \geq 0$ . Por continuidad de  $\tilde{E}$ ,  $\tilde{E}(\hat{x}) = a_0$  para todo  $\hat{x} \in W(v_q)$ .

Consideremos ahora la solución  $\dot{\gamma}(t; \hat{x})$  donde  $\hat{x} \in W(v_q)$ . De la desigualdad (4.3) y teniendo en cuenta la invariancia de  $W(v_q)$ , se deduce que  $g_2(\dot{\gamma}_2(t; \hat{x}), \dot{\gamma}_2(t; \hat{x})) = 0$ . Por lo tanto  $\dot{\gamma}_2(t; \hat{x}) = 0$ ,  $t \geq 0$ , y se verifica que  $\lim_{t \rightarrow \infty} D(\dot{\gamma}(t; \hat{x}), PE_\Sigma) = 0$ . En consecuencia, al ser  $PE_\Sigma$  compacta,  $a_0 = \tilde{E}(\dot{\gamma}(t; \hat{x})) = 0$  y por lo tanto  $0 = \tilde{E}(\dot{\gamma}(0; \hat{x})) = \tilde{E}(\hat{x})$  con lo que  $W(v_q) = PE_\Sigma$ . Utilizando ahora el Lema 4.3 tenemos que  $\lim_{t \rightarrow \infty} D(\dot{\gamma}(t; v_q), PE_\Sigma) = 0$ .

□

## 4.5 Estabilidad de sistemas Lagrangianos

Consideremos el sistema Lagrangiano  $(Q, L, \alpha)$ , donde la variedad de configuración  $Q$  es una variedad de Riemann completa con métrica  $g$  y  $\alpha \in \text{Im } J^* \subset \Omega(TQ)$  es una fuerza disipativa. Supongamos que para los puntos de equilibrio del sistema,  $0_{q^0} \in T_{q^0}Q$ , se verifica que  $\alpha(0_{q^0}) = 0$ .

**Proposición 4.16** *Sea  $(Q, g)$  una variedad de Riemann completa y consideremos el sistema Lagrangiano  $(Q, L, \alpha)$  con  $\alpha$  disipativo. Supongamos que el punto de equilibrio  $0_{q^0}$  es un mínimo local estricto de  $E_L$ . Se cumple:*

1.  $0_{q^0}$  es un punto de equilibrio estable. (El caso  $R \equiv 0$  también está incluido)
2. Si  $\alpha$  es estrictamente disipativo, entonces  $0_{q^0}$  es asintóticamente estable.
3. En las mismas condiciones que (2), si  $0_{q^0}$  es el único punto de equilibrio y las soluciones están acotadas, entonces es globalmente asintóticamente estable.

**Demostración:** Ver Proposición 4.11.

□

### Sistemas Lagrangianos parcialmente disipativos

Sea  $Q = Q_1 \times Q_2$  una variedad de Riemann completa con métrica  $g$  y donde denotamos por  $\pi_2 : Q_1 \times Q_2 \rightarrow Q_2$  la proyección natural. Consideremos el sistema Lagrangiano  $(Q = Q_1 \times Q_2, L, \alpha)$  con  $\alpha \in \text{Im } J^*$  fuerza externa. Diremos que  $\alpha$  es *parcialmente estrictamente disipativa* si se verifica que existe  $f \in C^\infty(\text{T}Q_2)$ ,  $f \geq 0$  tal que se verifica  $\tilde{\alpha} \leq -kf$  y  $f(v_{q_2}) = 0$  si y sólo si  $v_{q_2} = 0$ .

**Proposición 4.17** *Sea el sistema Lagrangiano  $(Q = Q_1 \times Q_2, L, \alpha)$ . Supongamos que  $E_L \in C^\infty(\text{T}Q)$  tiene un mínimo local estricto en  $0_{q^0}$ . Se cumple que:*

1. *Si  $\alpha$  es parcialmente estrictamente disipativo y existe un entorno  $O \subseteq \text{T}Q$  de  $0_{q^0}$  tal que cada solución  $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2)$  con  $\dot{\gamma}(0) \in O$  verifica que si  $\dot{\gamma}_2 = 0$  se tiene que  $\lim_{t \rightarrow \infty} \dot{\gamma}(t) = 0_{q^0}$ . Entonces  $0_{q^0}$  es asintóticamente estable.*
2. *En las mismas condiciones que (1) si  $O = \text{T}Q$ ,  $0_{q^0}$  es mínimo absoluto y las soluciones están acotadas, entonces  $0_{q^0}$  es globalmente asintóticamente estable.*

**Demostración:** Ver Proposición 4.12.

□

### Sistemas Lagrangianos no holónomos

Consideremos el sistema Lagrangiano no holónimo  $(\text{T}Q, L, D, \alpha)$  donde  $Q$  es una variedad de Riemann completa con métrica  $g$ ,  $D$  es una distribución y  $\alpha \in \text{Im } J^*$  una fuerza disipativa. Supongamos que  $E_L(0_q) = 0$  para todo  $0_q \in PE$  y  $E_L(v_q) > 0$  si  $v_q \in \text{T}Q \setminus PE$ .

**Proposición 4.18** *Sea  $(Q, g)$  una variedad de Riemann completa y consideremos el sistema Lagrangiano no holónimo  $(Q, L, D, \alpha)$  con  $\alpha$  disipativa. Se tiene que:*

1. *Si existe  $\lambda \in \mathbb{R}^+$  tal que  $E_L \in C^\infty(\text{T}Q)$  toma un mínimo sobre el conjunto  $\partial B_r = \{v_q \in \text{T}Q \mid D(v_q, PE) = r\}$ ,  $\forall r \leq \lambda$  (donde  $D$  es la distancia punto-conjunto inducida por  $g_{|D}^T$ ), entonces  $PE$  es estable en sentido débil. (El caso  $\alpha \equiv 0$  está incluido)*

2. Si  $PE$  es estable,  $\alpha$  es estrictamente disipativa y las soluciones están acotadas, se cumple que  $PE$  es globalmente asintóticamente estable.

**Demostración:** Ver Proposición 4.13.

□

**Proposición 4.19** Sea  $(Q, g)$  una variedad de Riemann completa y consideremos el sistema Lagrangiano no holónomo  $(Q, L, D, \alpha)$  con  $\alpha$  disipativo. Supongamos que  $PE$  es compacta, entonces:

1.  $PE$  es estable. (El caso  $\alpha \equiv 0$  está incluido)
2. Si  $\alpha$  es estrictamente disipativo en un entorno, entonces es asintóticamente estable.
3. Si  $\alpha$  es estrictamente disipativo y las soluciones están acotadas, se cumple que  $PE$  es globalmente asintóticamente estable.

**Demostración:** Ver Proposición 4.14.

□



# Capítulo 5

## Control de sistemas mecánicos

El control de sistemas mecánicos proporciona una interesante área de investigación que cae entre el estudio de la mecánica clásica y la teoría del control no lineal. Desde el punto de vista teórico, la estructura geométrica de los sistemas mecánicos proporciona un camino para mejorar los algoritmos de control obtenidos para sistemas genéricos no lineales.

Una de las primeras referencias es el trabajo de Brockett en teoría de control y mecánica analítica [17] y los trabajos relacionados [15, 16] sobre sistemas definidos en grupos y esferas. Control óptimo, integrabilidad, flujos hamiltonianos y gradientes, dinámica del cuerpo rígido y sistemas no holónomos son algunas de las diferentes materias que han sido tratadas con estas técnicas por autores como Baillieul [7], Bloch [9], Crouch [31, 32], Koditschek [47], Krishnaprasad [54], Marsden [13], van der Schaft [100, 101] y otros.

Por otra parte el trabajo no sólo se reduce al campo teórico, sino que se extiende a muchas aplicaciones en la ingeniería: manipulación de robots, ver Murray, Li, Sastry [80], diseño y control de aviones, ver Etkin [38], vehículos acuáticos [60], control de sistemas electro-mecánicos [4], etc. Ver [49] para ejemplos de aplicaciones en sistemas no holónomos.

En este capítulo estudiamos los siguientes problemas:

- Estabilización de puntos de equilibrio mediante pasividad en el caso de sistemas dinámicos y sistemas mecánicos con control en variedades de Riemann completas (Proposiciones 5.1, 5.3, 5.5).
- Estabilización de sistemas mecánicos en un punto arbitrario mediante extensiones dinámicas (Proposiciones 5.6, 5.7).
- Generalización de los problemas anteriores al caso de sistemas mecánicos no holónomos con control (Proposiciones 5.8, 5.9, 5.10).

Estudios previos sobre estos problemas que se han usado para ese trabajo son [22, 84, 85].

## 5.1 Sistemas con control y sistemas pasivos.

Un *sistema con control* en una variedad  $M$  viene dado por un campo vectorial  $X$ , llamado *campo de deriva*, y los *campos de control*  $X_1, \dots, X_m$ . El campo vectorial asociado al sistema es  $Y = X + \sum_{i=1}^m u_i X_i \in \mathfrak{X}(M)$ , donde  $u_i : M \rightarrow \mathbb{R}$  son los *controles* o *entradas* del sistema.

Normalmente, en un sistema con control, además de la ecuación de evolución, tenemos las *salidas* del sistema, funciones  $y_1 = h_1, \dots, y_m = h_m$ ,  $h_i \in C^\infty(M)$ , relacionadas con las variables observables del sistema.

De acuerdo con [22], se introduce la idea de *pasividad* como generalización de la noción de disipación al caso de sistemas con control. Consideremos un sistema con control dado por  $Y = X + \sum_{i=1}^m u_i X_i$  en la variedad  $M$  con salidas  $y_1, \dots, y_m$ . Llamaremos a este sistema *pasivo* si existe una función no negativa  $S \in C^\infty(M)$  tal que

$$S(\gamma(T)) - S(\gamma(0)) \leq \int_0^T \sum_{i=1}^m y_i(\gamma(s)) u_i(\gamma(s)) ds$$

para cada solución  $\gamma(t)$  con las entradas  $u_1, \dots, u_m$  dadas. La función  $S$  se denomina *función de almacenamiento*. La última expresión puede entenderse como una desigualdad en la evolución de la energía del sistema, esta interpretación quedará justificada cuando apliquemos estas ideas al caso de sistemas mecánicos.

### Estabilización de sistemas con control.

Consideremos ahora el sistema dinámico con control  $\Sigma$  en una variedad de Riemann completa  $(M, g)$  dado por  $Y = X + \sum_{i=1}^m u_i X_i$  con salidas  $y_i = h_i \in C^\infty(M)$   $i = 1, \dots, m$ . Sea  $x_0$  un punto de equilibrio aislado del campo de deriva  $X$ .

**Proposición 5.1** *Supongamos que el sistema  $\Sigma$  es pasivo y que la función de almacenamiento  $S$  tiene un mínimo local estricto en  $x_0$ . Si existe una función  $\phi = (\phi_1, \dots, \phi_m) \in C^\infty(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^m)$  tal que  $\sum_{i=1}^m y_i \phi_i(y_1, \dots, y_m) \geq 0$  y  $\phi_i(y_1(x_0), \dots, y_m(x_0)) = 0$ ,  $i = 1, \dots, m$ , entonces, si tomamos como controles*

$$u_i(x) = -\phi_i(y_1(x), \dots, y_m(x)), \quad i = 1, \dots, m$$

*el punto de equilibrio  $x_0$  se hace estable.*

**Demostración:** Basta con probar que la función de almacenamiento  $S$  es una función de Lyapunov en un cierto entorno de  $x_0$  (ver Proposición 4.1) del campo vectorial  $Z = X - \sum_{i=1}^m X_i \phi_i(y_1, \dots, y_m)$ . Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que  $S(x_0) = 0$  y por lo tanto  $S(x) > 0$  para  $x \neq x_0$ .

Ya que el sistema de control verifica que  $\sum_{i=1}^m y_i \phi_i(y_1, \dots, y_m) \geq 0$  y es pasivo, la siguiente desigualdad se satisface:

$$S(\gamma(T)) - S(\gamma(0)) \leq - \int_0^T \sum_{i=1}^m y_i(\gamma(s)) \phi_i(y_1(\gamma(s)), \dots, y_m(\gamma(s))) ds \leq 0,$$

para toda  $\gamma$ , curva integral del campo vectorial  $Z$ . Por lo tanto  $S$  es decreciente a lo largo de las curvas integrales de  $Z$ .

□

**Comentario:** Al tomar esos controles, el sistema  $\Sigma$  se transforma en el sistema dinámico,  $Z = X - \sum_{i=1}^m X_i \phi_i(y_1, \dots, y_m)$  que tiene en  $x_0$  un punto de equilibrio estable.

**Corolario 5.2** Si  $\sum_{i=1}^m y_i \phi_i(y_1, \dots, y_m)$  es estrictamente positiva en un entorno  $O$  de  $x_0$ , entonces  $x_0$  es un punto de equilibrio asintóticamente estable del sistema  $Z = X - \sum_{i=1}^m X_i \phi_i(y_1, \dots, y_m)$ .

**Demostración:** Ver apartado 1 de la Proposición 4.5.

□

**Proposición 5.3** Supongamos que el sistema es pasivo y que la función de almacenamiento  $S$  tiene un único punto crítico que es mínimo estricto en  $x_0$  y es propia. Si existe una función  $\phi = (\phi_1, \dots, \phi_m)$  tal que

- $\sum_{i=1}^m y_i \phi_i(y_1, \dots, y_m) > 0, (y_1, \dots, y_m) \neq 0$
- $\phi_i(y_1(x_0), \dots, y_m(x_0)) = 0, i = 1, \dots, m$

entonces la realimentación

$$u_i = -\phi_i(y_1(x), \dots, y_m(x)), i = 1, \dots, m$$

hace  $x_0$  globalmente asintóticamente estable.

**Demostración:** De la Proposición 5.1 se tiene que  $x_0$  es un punto de equilibrio estable. Por otra parte se cumple que  $\gamma(t)$  está definida para todo  $t \geq 0$  ya que la función de almacenamiento es decreciente a lo largo de las curvas integrales de  $Z = X - \sum_{i=1}^m X_i \phi_i(y_1, \dots, y_m)$  y por lo tanto  $\gamma(t)$  está acotada, pues  $\gamma(t) \subseteq S^{-1}([0, \alpha])$  donde  $S^{-1}([0, \alpha])$  son conjuntos compactos, es decir, cerrados y acotados. Aplicando la Proposición 4.5, apartado 2, tenemos que  $x_0$  es un punto de equilibrio globalmente asintóticamente estable.  $\square$

Comparar el resultado anterior con el Teorema 3.2 de [22].

## 5.2 Sistemas mecánicos con control y sistemas mecánicos pasivos.

En los *sistemas mecánicos con controles*, los campos vectoriales de control son genéricamente fuerzas y las entradas son los coeficientes que modulan la intensidad de esas fuerzas. Entonces la ecuación del movimiento es

$$\nabla_{\dot{\gamma}} \dot{\gamma} = -(\text{grad } U) \circ \gamma + (u_1 F_1 + \dots + u_m F_m) \circ \dot{\gamma}$$

donde  $F_1, \dots, F_m$  son las fuerzas de control que habitualmente dependen de la posición y de la velocidad, y  $u_i : \text{T}Q \rightarrow \mathbb{R}$  son las entradas o controles.

Las *salidas naturales*, ver [83], de un sistema mecánico con controles son las funciones  $h_i(v_q) = g(F_i(v_q), v_q)$ , esto es,  $h_i = \widehat{i(F_i)g}$  para  $i = 1, \dots, m$ , donde  $i(F_i)g$  es la contracción tensorial habitual. De ahora en adelante, un sistema mecánico simple con control con las salidas naturales lo denotaremos como  $\Sigma = (Q, g, U, F_1, \dots, F_m)$ .

Consideremos ahora un sistema mecánico  $\Sigma$  con una componente disipativa  $R$ , y con controles,  $\Sigma = (Q, g, U, R, F_1, \dots, F_m)$ . De acuerdo con las definiciones y comentarios anteriores, y con las notaciones del capítulo 3, podemos verlo como un sistema de control con las siguientes características:

- Espacio de fases:  $M = \text{T}Q$
- Campo vectorial del sistema:  $Y = X_g + F^v + \sum_{i=1}^m u_i X_i$ , con  $F = -\text{grad } U + R$  and  $X_i = F_i^v$ .
- Salidas naturales:  $y_i = h_i = \widehat{i(F_i)g} \in C^\infty(\text{T}Q)$ ,  $i = 1, \dots, m$ .

Como hemos apuntado anteriormente, el campo vectorial  $Y \in \mathfrak{X}(\text{T}Q)$  satisface la condición de segundo orden en  $\text{T}Q$ .

**Proposición 5.4** *Supongamos que  $U(q) \geq 0$  para cada  $q \in Q$ , o equivalentemente  $U$  está acotada inferiormente; entonces el sistema  $\Sigma$  es un sistema pasivo con la energía como función de almacenamiento.*

**Demostración:** De la Proposición 3.1 tenemos

$$\frac{d(E \circ \dot{\gamma})}{dt} = g(R \circ \dot{\gamma}, \dot{\gamma}) + \sum_{i=1}^m (u_i \circ \dot{\gamma}) g(F_i, \dot{\gamma}).$$

Integrando esta expresión desde 0 hasta  $t$ , se sigue que

$$\begin{aligned} E(\dot{\gamma}(t)) - E(\dot{\gamma}(0)) &= \int_0^t g(R \circ \dot{\gamma}, \dot{\gamma}) + \int_0^t \sum_{i=1}^m y_i(\dot{\gamma}(s)) u_i(\dot{\gamma}(s)) ds \\ &\leq \int_0^t \sum_{i=1}^m y_i(\dot{\gamma}(s)) u_i(\dot{\gamma}(s)) ds \end{aligned}$$

que es la condición de pasividad para  $E$ .

□

Observemos que la última desigualdad es el balance energético al que nos referíamos en la sección anterior. El segundo miembro es el trabajo de las fuerzas externas, mientras el inicial es la energía almacenada.

### 5.2.1 Estabilización en los puntos de equilibrio.

Sea  $(Q, g)$  una variedad de Riemann completa y sea  $0_{q^\circ}$  un punto de equilibrio del sistema mecánico simple  $(Q, g, U)$ . Consideremos el sistema mecánico con control  $\Sigma = (Q, g, U, F_1, \dots, F_m)$  con las salidas naturales. Entonces tenemos:

**Proposición 5.5** *Si la función potencial  $U$  tiene un mínimo local estricto en  $q^\circ$ , se cumple que:*

1.  $0_{q^\circ}$  es un punto de equilibrio estable del sistema  $\tilde{\Sigma} = (Q, g, U, R)$ , donde  $R(v_q) = -\beta \sum_{i=1}^m F_i(v_q) g_q(F_i(v_q), v_q)$ ,  $\beta > 0$ .
2. Si  $\text{rang}\langle F_1, \dots, F_m \rangle = \dim Q$  en un cierto entorno  $O$  de  $0_{q^\circ}$ , entonces  $0_{q^\circ}$  es un punto de equilibrio asintóticamente estable del sistema  $\tilde{\Sigma}$ .
3. Si  $\text{rang}\langle F_1, \dots, F_m \rangle = \dim Q$ ,  $0_{q^\circ}$  es el único punto de equilibrio y las soluciones están acotadas, entonces  $0_{q^\circ}$  es globalmente asintóticamente estable

Observemos que el sistema  $\tilde{\Sigma}$  se obtiene de  $\Sigma$  mediante la realimentación  $u_i(v_q) = -\beta h_i(v_q) = -\beta g_q(F_i(v_q), v_q)$  con  $\beta$  un número real,  $\beta > 0$ .

**Demostración:**

1. La función  $\tilde{E} = T + U - U(q^o)$  es una función de Lyapunov de  $\tilde{\Sigma} = (Q, g, U, R)$  ya que  $\tilde{E}(v_q) > 0$  para cada  $v_q \neq 0_{q^o}$  y

$$\mathcal{L}_Z \tilde{E}(v_q) = -\beta \sum (g(F_i(v_q), v_q))^2 \leq 0,$$

donde  $Z \in \mathfrak{X}(TQ)$  es el campo vectorial asociado al sistema  $\tilde{\Sigma} = (Q, g, U, R)$ .

2. Sea  $r > 0$  tal que  $B_r(0_{q^o}) \subset O \subset TQ$  no contenga otros puntos de equilibrio. Por ser  $0_{q^o}$  estable tenemos que existe  $\delta > 0$  tal que si  $v_q \in B_\delta(0_{q^o})$ , entonces  $\gamma(t; v_q) \in B_r(0_{q^o})$ , para todo  $t$ . Por otro lado para todo  $v_q \in B_\delta(0_{q^o})$ ,  $v_q \neq 0_{q^o}$ , se cumple que

$$\mathcal{L}_Z \tilde{E}(v_q) = -\beta \sum (g(F_i(v_q), v_q))^2$$

De esta manera el conjunto invariante maximal  $K$ , definido en Proposición 4.8, verifica que

$$K \subseteq \{v_q \in B_r(0_{q^o}) \mid \mathcal{L}_Z \tilde{E}(v_q) = 0\} = \{0_q \mid q \in B_r(0_{q^o}) \cap Q\}$$

ya que si  $\mathcal{L}_Z \tilde{E}(v_q) = 0$ , entonces  $g(F_i(v_q), v_q) = 0$ ,  $\forall i = 1, \dots, m$ , de donde  $v_q = 0_q$ .

Veamos ahora que  $K = \{0_{q^o}\}$ . Supongamos que existe  $0_q \in B_r(0_{q^o}) \cap Q$  *cap*  $K$  tal que  $0_q \neq 0_{q^o}$ . Al ser  $K$  un conjunto invariante se cumple que  $\gamma(t, 0_q) \in K \subseteq \{0_q \mid q \in B_r(0_{q^o}) \cap Q\}$  para todo  $t$  y por lo tanto  $\gamma(t, 0_q) = 0_q$  de donde se tiene que  $0_q$  es un punto de equilibrio y en consecuencia  $0_q = 0_{q^o}$ .

De todo lo anterior se tiene que  $K = \{0_{q^o}\}$  y al estar  $\gamma(t; v_q)$  acotada, se cumple que  $\lim_{t \rightarrow \infty} \gamma(t; v_q) = 0_{q^o}$  para todo  $v_q \in B_\delta(0_{q^o})$ .

3. Consecuencia directa de 2 y de la Proposición 4.4.

□

**Comentario:** La condición  $\text{rang}\langle F_1, \dots, F_m \rangle = \dim Q$  implica que el campo vectorial  $R = -\beta \sum_{i=1}^m \widehat{i(F_i)} g F_i$  se anule solamente si  $v_q = 0_q$ . Esta condición es más débil que ser estrictamente disipativo pero más fuerte que ser disipativo. Comparar con el apartado 2 de la Proposición 4.11.

### 5.2.2 Estabilización en un punto arbitrario.

En la sección precedente hemos estudiado cómo estabilizar los puntos de equilibrio de un sistema mecánico mediante una adecuada realimentación que convierta el sistema original en un sistema disipativo (control por pasividad).

En muchas aplicaciones en ingeniería se busca que el sistema en estudio tenga un cierto comportamiento que no tiene por qué corresponderse con el que se da de manera natural. Es decir: "no interesa lo que la naturaleza hace de por sí sino hacer que la naturaleza haga lo que nos interesa". En particular resulta útil saber cómo estabilizar el sistema en un cierto punto diferente al punto de equilibrio. Una técnica que se emplea para resolver este problema consiste en acoplar a nuestro sistema original (planta) otro sistema (controlador) tal que el sistema completo tenga el punto elegido como punto de equilibrio y ciertos nuevos controles estabilicen ese punto de equilibrio. Los controles del sistema completo, llamado extensión dinámica del sistema dado, dependen tanto de las variables de estado de la planta como del controlador.

Las ideas originales para desarrollar estos conceptos, se han tomado de [84, 85], en donde se utilizan en otro contexto más aplicado a la ingeniería.

#### Extensiones dinámicas de un sistema de control.

Sea  $\Sigma_p$  un sistema dinámico con control en la variedad  $M_p$ , esto es,  $\Sigma_p = (M_p, Y_p = X_p^0 + \sum_{i=1}^m u_i^p F_i^p)$ , con controles  $u_i^p \in C^\infty(M_p)$ .

Notemos por  $\Sigma_c$  la pareja formada por una variedad  $M_c$  y un campo vectorial  $Y_c \in \mathfrak{X}(M_c, \pi_c)$ , donde  $\pi_c : M_p \times M_c \rightarrow M_c$  es la proyección natural. Por lo tanto  $\Sigma_c = (M_c, Y_c)$  no es un sistema dinámico en  $M_c$  ya que el campo vectorial  $Y_c$  depende de los puntos de la variedad  $M_p$ .

Dados  $\Sigma_p$  y  $\Sigma_c$ , podemos definir un nuevo sistema dinámico con control  $\Sigma = (M, Y)$ , al que denominaremos *extensión dinámica* de  $\Sigma_p$ , de la siguiente forma:

- Espacio de fases:  $M = M_p \times M_c$
- Campo dinámico:  $Y = (X_p^0, Y_c) + \sum_{i=1}^m u_i(F_i^p, 0)$
- Controles:  $u_i \in C^\infty(M)$

Notemos que los controles  $u_i$  dependen de las variables de estado de  $M_p$  y  $M_c$ .

Si  $\Sigma_c$  tiene buenas propiedades, por ejemplo si es un sistema disipativo, entonces estas propiedades pueden ser usadas para estabilizar o en general para modificar el comportamiento de  $\Sigma_p$ . Observemos que  $\Sigma_c$  no tiene dinámica propia y el sistema  $\Sigma$  evoluciona dependiendo de  $\Sigma_p$  y  $\Sigma_c$ .

La notación proviene de la utilizada en ingeniería de control,  $M_p$  designa la planta, el sistema principal, y  $M_c$  el controlador.

### Extensiones dinámicas de sistemas mecánicos.

Vamos a particularizar la noción anterior al caso de sistemas mecánicos.

Sea  $\Sigma_p = (Q_p, g_p, U_p, F_1^p, \dots, F_{m_p}^p)$  el sistema mecánico con controles. Consideremos  $\Sigma_c = (Q_c, g_c, U_c, R_c)$ , en donde  $(Q_c, g_c)$  es una variedad de Riemann,  $U_c \in C^\infty(Q_p \times Q_c)$  y  $R_c \in \mathfrak{X}(Q_c, \tau_c)$  en donde  $\tau_{Q_c} : TQ_c \rightarrow Q_c$  es la proyección natural. Observemos que  $\Sigma_c$  no es un sistema mecánico, ni siquiera un sistema dinámico, pero nos va a permitir construir un nuevo sistema mecánico que haga variar la dinámica propia de  $\Sigma_p$ .

Consideremos el sistema mecánico con controles dado por:

- Espacio de configuración:  $Q = Q_p \times Q_c$
- Métrica de Riemann:  $g = g_p \oplus g_c$
- Campo de fuerzas:  $F = -(\text{grad}_p U_p, \text{grad}_c U_c) + (0, R_c)$
- Campos de control:  $F_i = (F_i^p, 0)$ ,  $i = 1, \dots, m_p$
- Controles:  $u_i \in C^\infty(Q)$

al que llamaremos *extensión dinámica* de  $\Sigma_p$  por  $\Sigma_c$ . Su campo dinámico es:

$$Y = (X_g^p, X_g^c) - (\text{grad}_p U_p, \text{grad}_c U_c)^v + R^v + \sum_{i=1}^{m_p} u_i F_i^v$$

donde  $X_g^p$  y  $X_g^c$  son los campos geodésicos en  $(Q_p, g_p)$  y  $(Q_c, g_c)$  respectivamente,  $R = (0, R_c)$  y  $F_i = (F_i^p, 0)$ . El campo vectorial  $Y$  es un campo de segundo orden en  $TQ$ .

Una vez más los nuevos controles dependen de los estados de  $Q_p$  y  $Q_c$ , no solamente de  $Q_p$ . Notemos que en la extensión dinámica  $\Sigma$  no hay ninguna fuerza que provenga de potencial pues  $(\text{grad}_p U, \text{grad}_c U)$  no es en general un gradiente en  $Q$ , por lo tanto  $\Sigma$  no es un sistema mecánico simple. Más adelante se exigirá que  $\text{grad}_p U_c$  esté contenido en la distribución generada por los controles a fin de poder substituir la fuerza por  $\text{grad} U$  y tener un sistema mecánico simple disipativo con controles.



**Estabilización mediante extensiones dinámicas.**

Dado un sistema mecánico con control  $\Sigma_p = (Q_p, g_p, U_p, F_1^p, \dots, F_{m_p}^p)$ , suponemos que  $q_p^0 \in Q_p$  es el punto donde queremos estabilizar el sistema. La idea a utilizar consiste en encontrar un sistema  $\Sigma_c = (Q_c, g_c, U_c, R_c)$ , controlador, tal que con una adecuada realimentación la extensión dinámica  $\Sigma$  de  $\Sigma_p$  con  $\Sigma_c$  sea mecánico tal que la nueva función potencial  $U$  tenga un mínimo local estricto en  $(q_p^0, q_c^0)$ , donde  $q_c^0$  puede ser cualquier punto de la variedad  $Q_c$ .

Sea  $\Sigma$  es una extensión dinámica de  $\Sigma_p$  dada por  $\Sigma_c = (Q_c, g_c, U_c, R_c)$ , y supongamos que  $\text{grad}_p U_c \in \langle F_1^p, \dots, F_{m_p}^p \rangle$ .

Las dos proposiciones siguientes estudian las condiciones que ha de cumplir el sistema  $\Sigma_c$  para que la extensión dinámica estabilice un punto.

**Proposición 5.6** *Supongamos que  $q^0 = (q_p^0, q_c^0)$  es un mínimo local estricto de  $U = U_p + U_c$  y  $R_c \in \mathfrak{X}(Q_c, \tau_c)$  es un campo vectorial disipativo tal que  $R_c(0_{q_c}) = 0$ , para cada  $q_c \in Q_c$  y que  $\text{grad}_p U_c \in \langle F_1^p, \dots, F_{m_p}^p \rangle$ . Entonces la realimentación  $u_i \in C^\infty(Q)$  tal que  $\sum_{i=1}^{m_p} u_i F_i = \text{grad}_p U_c$ , hace  $0_{q^0}$  estable.*

**Comentario:** Observemos que el sistema que resulta de  $\Sigma$  mediante la realimentación previamente descrita es el sistema mecánico simple con disipación  $\tilde{\Sigma} = (Q, g, U = U_p + U_c, R = (0, R_c))$ .

**Demostración:** Notemos que si  $R_c \in \mathfrak{X}(Q_c, \tau_{Q_c})$  es disipativo, esto es, si verifica que  $g_c(R_c(v_c), v_c) \leq 0$ , entonces  $R = (0, R_c)$  es también disipativo con respecto a la métrica  $g$ , ya que  $g(R(v_p, v_c), (v_p, v_c)) = g_p(0, v_p) + g_c(R_c(v_c), v_c) = g_c(R_c(v_c), v_c) \leq 0$ .

Entonces la función  $\tilde{E} = T + U - U(q^0)$ , es una función de Lyapunov de  $\tilde{\Sigma} = (Q, g, U, R)$  ya que  $\tilde{E}(v_p, v_c) > 0$  para cada  $(v_p, v_c) \neq 0_{q^0}$  y  $\mathcal{L}_Z \tilde{E}((v_p, v_c)) = g(R((v_p, v_c)), (v_p, v_c)) \leq 0$  con  $Z$  el campo dinámico asociado a la extensión dinámica.

□

**Proposición 5.7** *Bajo las mismas condiciones que en la proposición anterior, supongamos que  $R_c \in \mathfrak{X}(Q_c, \tau_c)$  es estrictamente disipativo y existe un entorno  $O \subseteq \text{T}Q$  de  $0_{q^0}$  tal que cada solución  $\gamma = (\gamma_p, \gamma_c)$  del sistema  $\tilde{\Sigma} = (Q, g, U, R)$  tal que  $\dot{\gamma}(0) \in O$  verifica que si  $\dot{\gamma}_c(t) = 0$  se tiene que  $\lim_{t \rightarrow \infty} \dot{\gamma}(t) = 0_{q^0}$ . Entonces  $0_{q^0}$  es un punto asintóticamente estable del sistema  $\tilde{\Sigma}$ . Si  $O = \text{T}Q$ , las soluciones están acotadas y  $0_{q^0}$  es un mínimo absoluto, entonces es globalmente asintóticamente estable.*

**Demostración:** Como  $R \in \mathfrak{X}(Q, \tau_Q)$  es parcialmente estrictamente disipativo, estamos en las condiciones de la Proposición 4.12, de donde se sigue el resultado. □

Una vez conocidas condiciones suficientes para  $U_c$  a fin de que el sistema  $\Sigma$  estabilice, resumimos el procedimiento.

Dado el sistema mecánico con control  $\Sigma_p$ , supongamos que  $q_p^0 \in Q_p$  es el punto donde queremos estabilizar el sistema. De acuerdo con las proposiciones anteriores, es suficiente con encontrar un sistema  $\Sigma_c$  con la condición de que la nueva función potencial  $U = U_p + U_c$  tenga un mínimo local estricto en  $(q_p^0, q_c^0)$ , donde  $q_c^0$  puede ser cualquier punto de la variedad  $Q_c$ .

Observemos que el proceso tiene dos partes:

1. Encontrar la función potencial  $U_c$ , con el propósito de obtener una nueva función  $U = U_p + U_c$  que tenga un mínimo estricto absoluto en  $(q_p^0, q_c^0)$ .
2. Diseñar los controles  $u_i$  con el objetivo de obtener una extensión dinámica la cual pueda estabilizar el sistema en  $q_p^0$  usando la fuerza disipativa asociada a  $\Sigma_c$ . La Proposición 5.7 determina dichos controles.

Un tipo de sistemas mecánicos que se pueden estabilizar utilizando extensiones dinámicas son los robots con articulaciones flexibles. El fenómeno de las articulaciones flexibles puede modelarse mediante un muelle giratorio a modo de eje que va desde la junta de dos brazos consecutivos hasta el motor correspondiente (ver [71, 98] para más detalles).

Para un brazo robótico con  $n$  articulaciones la variedad de configuración es  $Q = (S^1 \times S^1) \times \cdots \times (S^1 \times S^1)$  donde la pareja  $i$ -ésima de coordenadas corresponde al ángulo en la articulación y al ángulo de giro del motor. Si tomamos como coordenadas locales  $(q_1, q_2)$ ,  $q_1, q_2 \in \mathbb{R}^n$ , siendo estos los ángulos correspondientes a la articulación y al motor respectivamente, la energía cinética y potencial resultan

$$T = \frac{1}{2}(\dot{q}_1, \dot{q}_2)^T D(q_1)(\dot{q}_1, \dot{q}_2)$$

$$U(q_1, q_2) = \frac{1}{2}(q_1, q_2)^T K(q_1, q_2) + U_g(q_1)$$

donde  $D(q_1)$  es la matriz de inercia del robot,  $K$  la energía potencial correspondiente a los muelles y  $U_g$  es el potencial debido a la gravedad. Los controles son los pares que se aplican a cada motor.

El objetivo es estabilizar el sistema en una cierta posición de los ángulos entre los distintos brazos. Supondremos que las únicas salidas disponibles del sistema son los ángulos de giro del motor. En [85] se presentan dos sistemas de control  $\Sigma_c$  tal que las extensiones dinámicas correspondientes resuelven nuestro problema de regulación.

### 5.3 Sistemas mecánicos no holónomos con control.

Llamamos *sistemas mecánicos no holónomos con controles* a los sistemas mecánicos con controles donde la solución está obligada a pertenecer a una cierta distribución  $D \subseteq TQ$ . Entonces podemos escribir las ecuaciones del movimiento de la siguiente manera:

$$\nabla_{\dot{\gamma}} \dot{\gamma} = -(\text{grad } U) \circ \gamma + \sum_{j=1}^m \lambda^j \circ \dot{\gamma} Z_j \circ \dot{\gamma} + \sum_{i=1}^k u^i \circ \dot{\gamma} G_i \circ \dot{\gamma}$$

$$\dot{\gamma} \in D$$

donde  $G_1, \dots, G_k$  son las fuerzas de control las cuales habitualmente dependen de la posición y de la velocidad, y  $u_i \in C^\infty(TQ)$  son las entradas o controles que modulan la intensidad de las fuerzas. Podemos suponer que se verifica que  $G_i(v_q) \in D_q, \forall v_q \in D_q$ .

Las *salidas naturales* de un sistema mecánico no holónimo con controles son las funciones  $h_i(v_q) = g(G_i(v_q), v_q)$ , esto es,  $h_i = i(G_i)g, i = 1, \dots, k$ . De ahora en adelante, un sistema mecánico no holónimo simple con control con las salidas naturales lo denotaremos como  $\Sigma = (Q, g, U, D, G_1, \dots, G_k)$ .

#### 5.3.1 Estabilización de la variedad de puntos de equilibrio.

Sea  $(Q, g)$  una variedad de Riemann completa y sea  $PE_\Sigma$  la subvariedad de puntos de equilibrio del sistema no holónimo  $\Sigma = (Q, g, U, D)$ . Consideremos el sistema mecánico no holónimo con control  $(Q, g, U, D, G_1, \dots, G_k)$ . Se tiene que:

**Proposición 5.8** *Si  $PE_\Sigma$  es compacta y se verifica que  $U(q) > 0, \forall q \notin PE$  y  $U(q) = 0, \forall q \in PE$ , entonces:*

- $PE_\Sigma$  es la subvariedad de puntos de equilibrio estable del sistema  $\tilde{\Sigma} = (Q, g, F = -\text{grad } U + R, D)$  donde  $R(v_q) = -\beta \sum_{i=1}^k G_i(v_q)g_q(G_i(v_q), v_q)$ ,  $\beta > 0$

- Si  $\text{rang}\langle G_1, \dots, G_k \rangle = \text{rang}D$  en un entorno  $O$  de  $PE_\Sigma$ , entonces  $PE_\Sigma$  es asintóticamente estable para el sistema  $\tilde{\Sigma}$ .
- Si  $\text{rang}\langle G_1, \dots, G_k \rangle = \text{rang}D$  y las soluciones de  $\tilde{\Sigma}$  están acotadas, entonces  $PE_\Sigma$  es globalmente asintóticamente estable.

**Comentario:** El sistema  $\tilde{\Sigma}$  se obtiene de  $\Sigma$  mediante la retroalimentación  $u_i(v_q) = -\beta h_i(v_q) = -\beta g_q(G_i(v_q), v_q)$  con  $\beta$  un número real,  $\beta > 0$ .

**Demostración:** La parte (1) es consecuencia directa de primer apartado de la proposición 4.14. Por otro lado (2) y (3) se siguen directamente de los argumentos utilizados en las proposiciones 4.13,5.5.

□

Para mayor claridad, hemos supuesto que la subvariedad de puntos de equilibrio es compacta. Una proposición similar podría enunciarse substituyendo esta condición por otra del tipo de la Proposición 4.6.

### 5.3.2 Estabilización en una subvariedad dada.

#### Extensión dinámica no holónoma

Particularizaremos ahora el concepto de extensión dinámica de la sección 5.2.2 al caso de sistemas no holónomos con control.

Sea  $\Sigma_p = (Q_p, g_p, U_p, D_p, (G_1^p, \dots, G_{m_p}^p))$  un sistema mecánico no holónimo con control, con  $(Q_p, g_p)$  variedad de Riemann completa,  $\dim D_p = m$  y  $G_i^p$  las fuerzas de control. Denotaremos por  $Z_i^p, i = 1, \dots, m$  a las fuerzas de ligadura.

Consideremos  $(Q_c, g_c)$  una variedad de Riemann completa,  $U_c \in C^\infty(Q_p \times Q_c)$  y  $R_c \in \mathfrak{X}(Q_c, \tau_c)$ , donde  $\tau_{Q_c} : TQ_c \rightarrow Q_c$  es la proyección natural. Denotemos por  $\Sigma_c$  el conjunto  $(Q_c, g_c, U_c, R_c)$ . A partir de  $\Sigma_p$  y  $\Sigma_c$  podemos definir el sistema  $\Sigma$ , que denominaremos *extensión dinámica no holónoma* de la manera siguiente:

- Espacio de configuración:  $Q = Q_p \times Q_c$
- Métrica de Riemann:  $g = g_p \oplus g_c$
- Campo de fuerza:  $F = -(\text{grad}_p U_p, \text{grad}_c U_c) + (0, R_c)$
- Variedad de ligaduras:  $D \times TQ_c$
- Fuerzas de control:  $G_i = (G_i^p, 0)$

- Controles:  $u_i \in C^\infty(Q)$

El campo dinámico es

$$Y = (Y_1, Y_2) = (X_g^p, X_g^c) - (\text{grad}_p U_p, \text{grad}_c U_c)^v + \sum_{i=1}^m \lambda^i Z_i^v + R^v + \sum_{i=1}^{m_p} G_i^v u_i$$

donde  $F_i = (Z_i^p, 0)$  y los multiplicadores de Lagrange  $\lambda_i \in C^\infty(\text{T}Q)$  son tales que verifican  $Y_1|_{D_p} \in \mathfrak{X}(D_p)$ .

Notemos que  $\Sigma$  no es un sistema mecánico no holónimo simple con controles ya que no tenemos una función potencial  $U \in C^\infty(Q)$  tal que  $\text{grad} U$  sea el campo de fuerza.

### Estabilización mediante extensión dinámica

Nuestro objetivo es diseñar controles que estabilicen el sistema en una cierta subvariedad  $PE'$ . Para conseguir esto acoplaremos a nuestro sistema,  $\Sigma_p$ , otro sistema  $\Sigma_c$  de forma que la extensión dinámica no holónoma de  $\Sigma_p$  por  $\Sigma_c$  haga  $PE'$  estable mediante una apropiada retroalimentación.

Sea  $\Sigma_p = (Q_p, g_p, U_p, D_p, (G_1^p, \dots, G_{m_p}^p))$  y  $\Sigma_c = (Q_c, g_c, U_c, R_c)$ . Supongamos que  $\pi_{D_p}(\text{grad}_p U_c) \in \langle G_1^p, \dots, G_{m_p}^p \rangle$ . Entonces la realimentación  $u_i \in C^\infty(Q)$  tal que  $\sum_{i=1}^{m_p} u_i G_i^p = \pi_{D_p}(\text{grad}_p U_c)$  transforma la extensión dinámica no holónoma  $\Sigma$  en el sistema mecánico no holónimo simple

$$\tilde{\Sigma} \equiv (Q = Q_p \times Q_c, g = g_p \oplus g_c, U = U_p + U_c, D = D_p \times \text{T}Q_c)$$

con subvariedad de puntos de equilibrio

$$PE_{\tilde{\Sigma}} = \{0_{(q_p, q_c)} \in \text{T}Q \mid \pi_{D_p} \text{grad}_p (U_p + U_c) = 0, \text{grad}_c U_c = 0\}$$

En las siguientes proposiciones se dan condiciones suficientes para asegurar la estabilidad de la subvariedad  $PE_{\tilde{\Sigma}}$ .

**Proposición 5.9** *Consideremos el sistema no holónimo  $\tilde{\Sigma}$ . Supongamos que  $PE_{\tilde{\Sigma}}$  es compacto y que verifica  $U(q) > 0, \forall q \notin PE_{\tilde{\Sigma}}$  y  $U(q) = 0, \forall q \in PE_{\tilde{\Sigma}}$ . Si  $R_c \in \mathfrak{X}(Q_c, \tau_c)$  es un campo vectorial disipativo tal que  $R_c(0_{q_c}) = 0$ , para cada  $q_c \in Q_c$ . Entonces  $PE_{\tilde{\Sigma}}$  es estable.*

**Demostración:** Notemos que si  $R_c \in \mathfrak{X}(Q_c, \tau_{Q_c})$  es disipativo, esto es, si verifica que  $g_c(R_c(v_c), v_c) \leq 0$ , entonces  $R = (0, R_c)$  es también disipativo con respecto a la métrica  $g$ , ya que  $g(R(v_p, v_c), (v_p, v_c)) = g_p(0, v_p) + g_c(R_c(v_c), v_c) = g_c(R_c(v_c), v_c) \leq 0$ .

Entonces la función  $E = T + U$ , es una función de Lyapunov de  $\tilde{\Sigma}$  ya que  $\mathcal{L}_Z E((v_p, v_c)) = g(R((v_p, v_c)), (v_p, v_c)) \leq 0$  con  $Z$  el campo dinámico del sistema  $\tilde{\Sigma}$ .

□

**Proposición 5.10** *En las mismas condiciones que en la proposición anterior, si  $R_c \in \mathfrak{X}(Q_c, \tau_c)$  es estrictamente disipativo y cada solución  $\gamma = (\gamma_p, \gamma_c)$  de  $\tilde{\Sigma}$  tal que  $\dot{\gamma}_c(t) = 0$  verifica que  $\lim_{t \rightarrow \infty} D(\dot{\gamma}(t), PE_{\tilde{\Sigma}}) = 0$ , entonces  $PE_{\tilde{\Sigma}}$  es globalmente asintóticamente estable.*

**Demostración:** Ya que  $R \in \mathfrak{X}(Q, \tau_Q)$  es parcialmente estrictamente disipativo, tenemos las condiciones de la Proposición 4.15.

□

Dado el sistema mecánico no holónimo con control  $\Sigma_p$ , supongamos que  $PE' \subset Q_p$  es la subvariedad donde queremos estabilizar el sistema. De acuerdo con las proposiciones anteriores, es suficiente con encontrar un sistema  $\Sigma_c$  con la condición de que la nueva función potencial  $U = U_p + U_c$  del sistema retroalimentado,  $\tilde{\Sigma}$ , verifique que  $PE_{\tilde{\Sigma}} = PE'$ , donde  $\pi_{Q_p} : Q_p \times Q_c \rightarrow Q_p$  es la proyección natural.

## 5.4 Comentario al caso Lagrangiano

Las proposiciones que se han enunciado para sistemas mecánicos sin ligaduras y sistemas mecánicos no holónomos, pueden enunciarse de manera similar en el caso Lagrangiano.

# Capítulo 6

## Sistemas mecánicos con control y sistemas cinemáticos

Los sistemas mecánicos son sistemas de segundo orden, las ecuaciones diferenciales que rigen su dinámica contienen las derivadas segundas de las coordenadas de las curvas integrales. Sin embargo en el caso de sistemas mecánicos con control, es frecuente utilizar la noción de sistema cinemático asociado. Éste es un sistema de primer orden formado mediante combinaciones funcionales de los campos de control del sistema inicial. En el estudio de la controlabilidad de los sistemas mecánicos es frecuente olvidar las ecuaciones diferenciales de segundo orden que dan la dinámica del sistema, y utilizar exclusivamente las ecuaciones del sistema cinemático. Un buen número de ejemplos en este sentido se pueden encontrar en la capítulo 7 de [80].

En este capítulo analizamos con precisión la equivalencia entre sistemas mecánicos con control y sus sistemas cinemáticos asociados en dos situaciones particulares:

- Sistemas no holónomos con control: se trata tanto el caso completamente actuado (Teorema 6.1) como el infractuado (Teorema 6.5, Proposición 6.6). En el caso infractuado si los sistemas no son "equivalentes" se caracterizan diferentes conjuntos de soluciones del sistema cinemático que lo son también del sistema dinámico (Proposiciones 6.7, 6.8).
- Sistemas mecánicos con simetrías (Proposiciones 6.13, 6.14, 6.15).

A lo largo del capítulo se presentan como aplicación de la teoría los siguientes ejemplos: el disco rodante, el snakeboard (Proposiciones 6.9, 6.10) y el satélite con propulsores (Proposición 6.18).

Otros aspectos relacionados con este problema pueden verse por ejemplo en [20, 21, 62].

## 6.1 Sistemas mecánicos no holónomos con control

Sea  $(Q, g)$  una variedad de Riemann con  $\dim Q = n$ . Consideremos el sistema mecánico no holónimo con controles  $\Sigma = (Q, g, F, D, G_1, \dots, G_m)$  donde podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que  $G_i(v_q) \in D, \forall v_q \in D$ , pues la componente en  $D^\perp$  es anulada por los multiplicadores de Lagrange que aparecen en las ecuaciones dinámicas del sistema. Diremos que una curva  $\gamma : I \rightarrow Q$  es solución de  $\Sigma$  para unos ciertos controles  $u_i \in C^\infty(\mathbb{R})$  si verifica las condiciones:

$$\begin{aligned} \nabla_{\dot{\gamma}} \dot{\gamma} &= F \circ \dot{\gamma} + \sum_{j=1}^{n-h} \lambda^j \circ \dot{\gamma} Z_j \circ \dot{\gamma} + \sum_{i=1}^m u^i \circ \dot{\gamma} G_i \circ \dot{\gamma} \\ \dot{\gamma} &\in D \end{aligned} \quad (6.1)$$

donde  $D = \langle Y_1, \dots, Y_h \rangle$ ,  $\text{rang } D = h$ , es el subfibrado de ligaduras y  $D^\perp = \langle Z_1, \dots, Z_{n-h} \rangle$ . Denotaremos por  $D_c \subseteq D$  la distribución generada por los campos de control, es decir,  $D_c = \langle G_1, \dots, G_m \rangle$ . Ya hemos establecido en el capítulo 3, que las soluciones de (6.1) son las curvas integrales,  $\sigma : I \rightarrow \text{T}Q$ , del campo vectorial en  $\text{T}Q$

$$Y = X_g + F^v + \sum_{j=1}^{n-h} \lambda^j Z_j^v + \sum_{i=1}^m u_i G_i^v \in \mathfrak{X}(\text{T}Q)$$

tales que  $\sigma(0) \in D$ . Sabemos que  $\sigma$  serán levantamientos a  $\text{T}Q$  de curvas  $\gamma$  en  $Q$  por ser el campo vectorial  $Y$  de segundo orden.

Por otro lado, diremos que una curva  $\gamma : I \rightarrow Q$  es solución del *sistema no holónimo cinemático* asociado a (6.1) si existen  $v_i \in C^\infty(\mathbb{R}), i = 1, \dots, m$ , tales que

$$\dot{\gamma}(t) = \sum_{i=1}^m v_i(t) G_i(\gamma(t)) \quad (6.2)$$

es decir,  $\gamma$  es curva integral del campo vectorial  $X = \sum_{i=1}^m v_i G_i$  para ciertos  $v_i \in C^\infty(\mathbb{R})$ . Diremos que (6.1) y (6.2) son *equivalentes* si toda solución de (6.1) es también solución de (6.2) y viceversa, donde las funciones de control no es necesario que sean las mismas en ambos sistemas.



### 6.1.1 Sistemas completamente actuados

Dado el sistema no holónimo con controles  $\Sigma$ , si  $\text{rang } D_c = \text{rang } D$ , diremos que el sistema está *completamente actuado*.

**Teorema 6.1** *Si el sistema no holónimo  $\Sigma$  está completamente actuado, entonces es equivalente al sistema cinemático asociado.*

En este caso la distribución  $D_c = \langle G_1, \dots, G_m \rangle$  coincide con la de ligaduras  $D = \langle Y_1, \dots, Y_h \rangle$ . Antes de dar la demostración probaremos un lema técnico que necesitaremos en el desarrollo de la misma.

**Lema 6.2** *Dada la distribución  $D = \langle Y_1, \dots, Y_h \rangle$  se tiene que  $T^V D = TD \cap V(TQ) = \langle Y_1^v, \dots, Y_h^v \rangle$ , donde  $Y_i^v$  es el levantamiento vertical de  $Y_i$  a  $TQ$ .*

**Demostración:** Observar que  $\dim T^V D = h$ , basta ver que  $\langle Y_1^v, \dots, Y_h^v \rangle \subset T^V D$ .

Por otra parte, ya que  $D$  es un subfibrado de  $TQ$ , y por tanto viene definido por la anulación de funciones lineales sobre las fibras de  $TQ$ , es suficiente probar que si  $Y \in \Gamma(D)$ , entonces  $\mathcal{L}_{Y^v} \hat{\omega} = 0$ , si  $\omega \in \Omega^1(Q)$  es nula sobre las secciones de la distribución  $D$ .

Pero el Lema 3.6 nos asegura que  $\mathcal{L}_{Y^v} \hat{\omega} = \tau_Q^*(i(Y)\omega)$ , si  $Y \in \mathfrak{X}(Q)$ ,  $\omega \in \Omega^1(Q)$ , con lo que el resultado queda visto.

□

Estamos ahora en condiciones de probar el Teorema 6.1.

#### Demostración:

Sea  $\gamma(t)$  una solución de (6.1), es decir, una curva integral del campo  $Y$  con  $\dot{\gamma}(0) \in D$ . Como  $\dot{\gamma}(0) \in D_{\gamma(0)}$  y  $Y|_D \in \mathfrak{X}(D)$ , entonces  $\dot{\gamma}(t) \in D_{\gamma(t)}$  para todo  $t$ . En consecuencia, ya que  $D = \langle Y_1, \dots, Y_h \rangle$ , existen funciones  $v_i \in C^\infty(\mathbb{R})$  tales que

$$\dot{\gamma}(t) = \sum_{i=1}^h v_i(t) Y_i(\gamma(t)).$$

Recíprocamente, sea  $\gamma(t)$  solución de (6.2) para ciertas  $v_i \in C^\infty(\mathbb{R})$ . Consideremos la curva en  $TQ$ ,  $\sigma(t) = (\gamma(t); \dot{\gamma}(t))$ , el levantamiento natural de  $\gamma$  a  $TQ$ . Por ser  $D = \langle Y_1, \dots, Y_h \rangle$ , se tiene que  $\sigma(t) \in D_{\gamma(t)}$ , para todo  $t$ . Para probar que  $\sigma$  es solución de (6.1) hemos de ver que es curva integral de  $Y$ , esto es, que existen ciertas funciones  $u_i \in C^\infty(TQ)$  tales que se cumpla  $\dot{\sigma} = Y \circ \sigma$  para esos  $u_i$ .

Tenemos que  $\dot{\sigma}(t) \in T_{\sigma(t)}D$  y por definición de los multiplicadores de Lagrange  $X_g(\sigma(t)) + F^v(\sigma(t)) + \sum_{j=1}^{n-h} \lambda^j(\sigma(t)) Z_j^v(\sigma(t)) \in T_{\sigma(t)}D$ , de ahí

$$\dot{\sigma}(t) - X_g(\sigma(t)) - F^v(\sigma(t)) - \sum_{j=1}^{n-h} \lambda^j(\sigma(t)) Z_j^v(\sigma(t)) \in T_{\sigma(t)}D. \quad (6.3)$$

Por otra parte como  $\dot{\sigma}(t) - X_g(\sigma(t)) \in V_{\sigma(t)}(TQ)$ , también se verifica que

$$\dot{\sigma}(t) - X_g(\sigma(t)) - F^v(\sigma(t)) - \sum_{j=1}^{n-h} \lambda^j(\sigma(t)) Z_j^v(\sigma(t)) \in V_{\sigma(t)}(TQ). \quad (6.4)$$

A la vista de (6.3) y (6.4) se cumple que

$$\dot{\sigma}(t) - X_g(\sigma(t)) - F^v(\sigma(t)) - \sum_{j=1}^{n-h} \lambda^j(\sigma(t)) Z_j^v(\sigma(t)) \in T_{\sigma(t)}^V D, \forall t.$$

Haciendo uso del Lema 6.2, se tiene que existen  $u_i$  tales que

$$\dot{\sigma}(t) - X_g(\sigma(t)) - F^v(\sigma(t)) - \sum_{j=1}^{n-h} \lambda^j(\sigma(t)) Z_j^v(\sigma(t)) = \sum_{i=1}^m u_i(\sigma(t)) G_i^v(\sigma(t))$$

ya que en este caso  $D_c = \langle G_1, \dots, G_m \rangle = \langle Y_1, \dots, Y_h \rangle = D$  y en consecuencia,  $\sigma$  es una curva integral de  $Y$  para esos controles  $u_i$ .

□

Comparar el resultado anterior con los de [20, 21].

El sistema (6.1) es *controlable en las configuraciones* si dados  $q_0, q_f \in Q$ , existe  $T > 0$ , número real y una solución del sistema,  $\gamma$ , tal que  $\dot{\gamma}(0) = 0_{q_0}$  y  $\dot{\gamma}(T) = 0_{q_f}$ . Por otra parte, se llamará *localmente controlable en las configuraciones* en  $q_0$  si podemos alcanzar puntos cercanos en un tiempo arbitrariamente pequeño y permanecer cerca de  $q_0$  todo el tiempo. De manera más precisa, sea un abierto  $V \subseteq Q$  y definamos  $R^V(q_0, T)$  de la siguiente manera

$$R^V(q_0, T) = \{q \in Q \mid \exists \gamma : I \rightarrow Q, \gamma(0) = q_0, \gamma(T) = q, \gamma(t) \in V\}$$

El sistema (6.1) es localmente controlable en las configuraciones en  $q_0$  si  $R^V(q_0, \leq T) = \bigcup_{0 < \tau \leq T} R^V(q_0, \tau)$  contiene un abierto de  $q_0$  para todo  $V$  abierto de  $q_0$  y  $T > 0$ .

Como consecuencia de la equivalencia probada tenemos

**Proposición 6.3** *Si el sistema no holónimo con control  $\Sigma$  está completamente actuado, entonces es controlable en las configuraciones (localmente controlable en las configuraciones) si y sólo si el sistema cinemático asociado es controlable en las configuraciones (localmente controlable en las configuraciones).*

**Demostración:** Se deduce directamente del hecho que los sistemas son equivalentes.

□

Una de las ventajas de poder reducir el sistema no holónimo dinámico al sistema cinemático asociado está en que en este último caso tenemos un criterio para decidir cuando es localmente controlable.

**Teorema 6.4 (W.L. Chow [28])** *El sistema cinemático no holónimo es localmente controlable en  $q_0$  si se verifica que  $\text{rang } \mathcal{L}(Y_1, \dots, Y_h)(q_0) = n$ , donde  $\mathcal{L}(Y_1, \dots, Y_h)$  es la subálgebra de Lie de  $\mathfrak{X}(Q)$  generada por  $Y_1, \dots, Y_h$ .*

□

Si el sistema cinemático es localmente controlable en todas las configuraciones, entonces podemos llevar el sistema desde cualquier configuración inicial a cualquier configuración final, ver [80]. Existe una amplia colección de trabajos en torno a los sistemas no holónomos cinemáticos ya que un buen número de sistemas mecánicos no holónomos se pueden estudiar desde este punto de vista al resultar equivalentes las ecuaciones: automóviles con tracción delantera [81], camiones con múltiples remolques [96, 99], cuerpos rígidos en el vacío [52], etc.

### Ejemplo: Disco rodante

Consideremos el disco rodante que hemos tratado en el capítulo 3. El espacio de configuración es la variedad  $Q = \mathbb{R}^2 \times S^1 \times S^1$  y la Lagrangiana del sistema mecánico está compuesta sólo por la energía cinética

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \frac{1}{2}I\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}J\dot{\phi}^2$$

donde  $I$  es el momento de inercia del disco alrededor del eje que pasa por el centro del disco y es paralelo al plano y  $J$  es el momento de inercia entorno al eje que pasando por el centro del disco es ortogonal al plano. La métrica

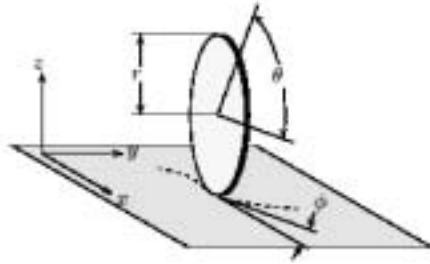


Figura 6.1: Figura tomada de <http://penelope.mast.queensu.ca/~andrew/research/mechanics.shtml>

en  $Q$  es:

$$g = \begin{pmatrix} m & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & J \end{pmatrix}$$

Supongamos, sin pérdida de generalidad, que el disco tiene radio unidad, entonces las ligaduras no holónomas correspondientes a rodar sin deslizar son:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \cos \phi \dot{\theta} \\ \dot{y} &= \sin \phi \dot{\theta} \end{aligned}$$

Por lo tanto la subvariedad de ligaduras,  $D \subset TQ$ , es el anulador de las 1-formas

$$\begin{aligned} \omega_1 &= dx - \cos \phi d\theta \\ \omega_2 &= dy - \sin \phi d\theta \end{aligned}$$

y está generada por los campos vectoriales

$$\begin{aligned} X_1 &= \cos \phi \frac{\partial}{\partial x} + \sin \phi \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial \theta} \\ X_2 &= \frac{\partial}{\partial \phi} \end{aligned}$$

En consecuencia las ecuaciones del movimiento las podemos escribir de la forma

$$\begin{aligned} \nabla_{\dot{\gamma}} \dot{\gamma} &= \sum_{j=1}^2 \lambda^j \circ \dot{\gamma} Z_j \circ \dot{\gamma} + \sum_{i=1}^2 u^i \circ \dot{\gamma} G_i \circ \dot{\gamma} \\ \dot{\gamma} &\in D \end{aligned} \quad (6.5)$$

donde  $G_1 = (d\theta)^{\flat}$ ,  $G_2 = (d\phi)^{\flat}$  siendo  $\flat = \sharp^{-1}$

$$\begin{aligned} \sharp : \mathfrak{X}(Q) &\longrightarrow \Omega(Q) \\ X &\longmapsto i(g)X \end{aligned}$$

y  $\nabla$  la conexión de Levi-Civita asociada a  $g$ .  $G_1$  y  $G_2$  no pertenecen a la distribución, no obstante, podemos tomar como fuerzas de control sus proyecciones, pues la componente que no está en  $D$  será anulada por los multiplicadores de Lagrange.

Como  $\text{rang } D_c = \dim \langle \pi_{TD} G_1, \pi_{TD} G_2 \rangle = 2 = \text{rang } D$ , el sistema no holónomo (6.5) está totalmente actuado y por lo tanto es equivalente al sistema cinemático

$$X = v_1(t)X_1 + v_2(t)X_2 \quad (6.6)$$

El sistema cinemático (6.6) es localmente controlable ya que el álgebra de Lie generada por  $\{X_1, X_2\}$  tiene rango máximo pues

$$\dim \langle X_1, X_2, [X_1, X_2], [[X_1, X_2], X_2] \rangle = 4$$

### 6.1.2 Sistemas infractuados

Consideremos ahora el caso en que el sistema no holónomo  $\Sigma$  verifica que  $\text{rang } D_c = \dim \langle G_1, \dots, G_m \rangle < \text{rang } D$ , diremos que  $\Sigma$  es un *sistema infractuado*. Podemos suponer sin pérdida de generalidad que  $D_c$  también está generado por  $Y_1, \dots, Y_m$ ,  $m < h$ , es decir, por un subconjunto de los campos vectoriales generadores de  $D$ . Consideremos el sistema cinemático dado por

$$X = \sum_{i=1}^m v_i Y_i \quad (6.7)$$

con  $v_i \in C^\infty(\mathbb{R})$  como controles. Diremos que (6.1) y (6.7) son *equivalentes en sentido débil* si toda solución de (6.7) es solución de (6.1) y si toda solución  $\gamma$  de (6.1) tal que  $\dot{\gamma}(0) \in D_c$  es solución de (6.7). Observemos que si  $\gamma$  es solución de (6.7), entonces  $\dot{\gamma}(0) \in D_c \subseteq D$ .

**Teorema 6.5** *Si el sistema  $\Sigma = (Q, g, F, D, G_1, \dots, G_m)$  es infractuado y  $\pi_{TD}(X_g + F^v)|_{D_c} \in \mathfrak{X}(D_c)$ , entonces  $\Sigma$  y el sistema cinemático asociado (6.7) son equivalentes en sentido débil.*

**Comentario:** Denotamos por  $\pi_{TD}(X_g + F^v) \in \mathfrak{X}(D)$  al campo  $Y = X_g + F^v + \sum_{i=1}^{n-h} \lambda^i Z_i^v \in \mathfrak{X}(D)$  tal que  $\lambda^j \in C^\infty(TQ)$  son los multiplicadores de Lagrange (ver capítulo 3). Observemos que  $\lambda^j$  son únicos restringidos a  $D$  y dado que sólo los utilizamos en puntos de  $D$ , el campo está unívocamente determinado.

**Demostración:** Sea  $\gamma(t)$  una solución de (6.1) con  $\dot{\gamma}(0) \in D_c \subseteq D$ , como  $\dot{\gamma}(0) \in D_c$  y  $Y|_{D_c} \in \mathfrak{X}(D_c) \subset \mathfrak{X}(D)$ , entonces  $\dot{\gamma}(t) \in D_c$  para todo  $t$ . En consecuencia  $\gamma(t)$  es solución de (6.7).

De manera recíproca, si  $\gamma(t)$  es solución de (6.7), basta con probar que existen  $u_i(\sigma(t))$ ,  $i = 1, \dots, m$  tales que  $\sigma(t) = (\gamma(t); \dot{\gamma}(t))$  cumple  $\dot{\sigma} = Y \circ \sigma$  para esos  $u_i$ . Como  $\pi_{TD}(X_g + F^v)|_{D_c} \in \mathfrak{X}(D_c)$ , se verifica que

$$\dot{\sigma} - X_g \circ \sigma - F^v \circ \sigma - \sum_{i=1}^{n-h} (\lambda^i \circ \sigma) Z_i^v \circ \sigma$$

es tangente a  $D_c$  y vertical. Siguiendo ahora el mismo razonamiento que en la prueba del Teorema 6.1 se deduce el resultado. □

**Proposición 6.6** *Supongamos que  $D = \langle Y_1, \dots, Y_h \rangle$ ,  $D_c = \langle Y_1, \dots, Y_m \rangle$ ,  $m < h$  y  $D = D_c \perp \langle Y_{m+1}, \dots, Y_h \rangle$ . Entonces la condición  $\pi_{TD}(X_g + F^v)|_{D_c} \in \mathfrak{X}(D_c)$  equivale a*

$$\mathcal{L}_{(X_g + F^v)} \widehat{\Omega}^j|_{D_c} = 0, j = m + 1, \dots, h$$

donde  $\widehat{\Omega}^j(v_q) = i(Y_j)g \in \Omega^1(Q)$ .

**Demostración:**

Sean  $D_c = \langle Y_1, \dots, Y_m \rangle$  y  $D = D_c \perp \langle Y_{m+1}, \dots, Y_h \rangle$ . Como  $D^\perp = \langle Z_1, \dots, Z_{n-m} \rangle$ , si  $\omega^j = i(Z_j)g$ ,  $i = 1, \dots, n - m$  y  $\Omega^j = i(Y_j)g$ ,  $j = m + 1, \dots, h$  se tiene que

$$\ker\langle \omega^1, \dots, \omega^{n-m} \rangle = D$$

$$\ker\langle \omega^1, \dots, \omega^{n-m}, \Omega^{m+1}, \dots, \Omega^h \rangle = D_c.$$

Además  $\pi_{TD}(X_g + F^v) = X_g + F^v + \sum_{j=1}^{n-h} \lambda^j Z_j^v$  con  $\lambda^j \in C^\infty(TQ)$  los multiplicadores de Lagrange. Ya que  $\pi_{TD}(X_g + F^v)|_D \in \mathfrak{X}(D)$  se tiene que

$$\mathcal{L}_{\pi_{TD}(X_g + F^v)} \widehat{\omega}^i|_D = 0, i = 1, \dots, n - m.$$

De ahí, la condición necesaria y suficiente para que  $\pi_{TD}(X_g + F^v)|_{D_c} \in \mathfrak{X}(D_c)$  es que

$$\mathcal{L}_{\pi_{TD}(X_g + F^v)} \widehat{\Omega}^i|_{D_c} = 0, \quad i = m + 1, \dots, h$$

Pero por el Lema 3.6,  $\mathcal{L}_{Z_i^v}(\widehat{\Omega}^j) = i(Z_i)\Omega^j = g(Y_j, Z_i) = 0, \forall i, j$ , por lo que queda

$$\mathcal{L}_{(X_g + F^v)} \widehat{\Omega}^i|_{D_c} = 0, \quad i = m + 1, \dots, h$$

como única condición. □

Observemos que la proposición anterior nos proporciona un método eficiente para ver cuando los sistemas (6.1) y (6.7) son equivalentes en sentido débil.

En ciertas ocasiones dado un sistema no holónimo infractuado, sucede que no es equivalente en sentido débil al sistema cinemático asociado. En estas situaciones, a efectos del control, nos interesará conocer que tipo de soluciones del sistema cinemático lo son también del sistema dinámico.

Sea el sistema no holónimo  $\Sigma$  con  $D = \langle Y_1, \dots, Y_h \rangle$ . Supongamos que  $\text{rang } D_c < \text{rang } D$  y que  $D_c = \langle Y_1, \dots, Y_m \rangle$ . Consideremos una distribución  $S = \langle X_1, \dots, X_s \rangle \subset TQ$  donde  $\{X_1, \dots, X_s\} \subset \langle Y_1, \dots, Y_m \rangle$  y su sistema cinemático asociado

$$X = \sum_{i=1}^s v_i X_i \quad (6.8)$$

**Proposición 6.7** *Si  $\pi_{TD}(X_g + F^v)|_S \in \mathfrak{X}(D_c)$ , entonces toda solución de (6.8) es también del sistema no holónimo  $\Sigma$ .*

**Demostración:** Sea  $\gamma(t)$  solución de (6.8), basta con probar que existen  $u_i(\sigma(t)), i = 1, \dots, m$  tales que  $\sigma(t) = (\gamma(t); \dot{\gamma}(t))$  sea curva integral del campo

$$Y = X_g + F^v + \sum_{j=1}^{n-h} \lambda^j Z_j^v + \sum_{i=1}^m u_i Y_i^v.$$

Tenemos que  $\dot{\sigma}(t) \in T_{\sigma(t)}S \subset T_{\sigma(t)}D_c$  y por definición de los multiplicadores de Lagrange

$$X_g(\sigma(t)) + F^v(\sigma(t)) + \sum_{j=1}^{n-h} \lambda^j(\sigma(t)) Z_j^v(\sigma(t)) \in T_{\sigma(t)}D,$$

para todo  $t$ . Ya que  $\pi_{TD}(X_g + F^v)|_S \in \mathfrak{X}(D_c)$ , se cumple que

$$\dot{\sigma}(t) - X_g(\sigma(t)) - F^v(\sigma(t)) - \sum_{j=1}^{n-h} \lambda^j(\sigma(t)) Z_j^v(\sigma(t)) \in T_{\sigma(t)}D_c.$$

Por otra parte

$$\dot{\sigma}(t) - X_g(\sigma(t)) - F^v(\sigma(t)) - \sum_{j=1}^{n-h} \lambda^j(\sigma(t)) Z_j^v(\sigma(t)) \in V_{\sigma(t)}(TQ).$$

y por lo tanto haciendo uso del Lemma 6.2 se deduce el resultado. □

Observemos que con el fin de verificar la condición de tangencia será conveniente utilizar el resultado de la Proposición 6.6.

**Proposición 6.8** *Consideremos distribuciones  $S_1 = \langle X_1, \dots, X_s \rangle$  y  $S_2 = \langle X_{s+1-p}, \dots, X_r \rangle$  con  $s \geq p \geq 0$  y  $\{X_1, \dots, X_r\} \subset \langle Y_1, \dots, Y_m \rangle$ . Supongamos que  $\pi_{TD}(X_g + F^v)|_{S_1} \in \mathfrak{X}(D_c)$  y  $\pi_{TD}(X_g + F^v)|_{S_2} \in \mathfrak{X}(D_c)$ , entonces se verifica que si una curva  $\gamma : I \rightarrow Q$  verifica*

$$\dot{\gamma}(t) = \sum_{i=1}^{s-p} v_i(t) X_i(\gamma(t)) + \sum_{i=s+1-p}^s v_i(t) X_i(\gamma(t)) + \sum_{i=s+1}^r v_i(t) X_i(\gamma(t)) \quad (6.9)$$

con  $(v_1, \dots, v_r) \in \{(v_1, \dots, v_s, 0, \dots, 0), (0, \dots, 0, v_{s+1-p}, \dots, v_r)\}$ , entonces  $\gamma$  es solución del sistema no holónomo  $\Sigma$ .

**Demostración:** Es consecuencia directa de la proposición anterior. □

De manera similar se generaliza este resultado al caso de  $k$  distribuciones. Cuando las distribuciones están generadas por un solo campo vectorial, recuperamos la noción de campos vectoriales desacoplados, ver [21].

### Ejemplo: Snakeboard

En [67], Lewis, Ostrowski, Murray y Burdick estudian este sistema y se obtiene la idea de que es localmente controlable. Posteriormente Ostrowski en [86] prueba la controlabilidad local, usando técnicas presentadas en [14] para sistemas no holónomos con simetrías.





El snakeboard consiste en dos plataformas móviles unidas mediante una barra rígida tal y como se muestra en la figura. Modelaremos el sistema suponiendo que las ruedas delanteras y traseras forman un mismo ángulo respecto a la barra que las une. En consecuencia el espacio de configuración es la variedad Riemanniana de dimensión cinco  $Q = SE(2) \times S^1 \times S^1$  con métrica

$$g = \begin{pmatrix} m & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & J + J_r + J_w & J_r & 0 \\ 0 & 0 & J_r & J_r & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & J_w \end{pmatrix}$$

donde  $SE(2)$  es el grupo de movimientos euclideos de  $\mathbb{R}^2$ . La Lagrangiana

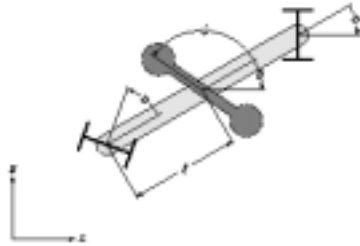


Figura 6.2: Figura tomada de [67]

del sistema corresponde únicamente a la energía cinética

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \frac{1}{2}J\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}J_r(\dot{\psi} + \dot{\theta})^2 + J_w(\dot{\phi}^2 + \dot{\theta}^2)$$

donde  $m$  es la masa total,  $J$  el momento de inercia de la barra rígida respecto a su centro,  $\frac{1}{2}J_w$  el momento de inercia de las ruedas respecto a su punto de

rotación y  $J_r$  el momento correspondiente al rotor (que modela al pasajero) respecto a su centro de giro.

Supondremos que las ruedas del snakeboard giran sin deslizar, esta condición viene modelada por dos restricciones no holónomas. En las ruedas traseras implica que

$$-\sin(\phi + \theta) \dot{x} + \cos(\phi + \theta) \dot{y} - l \cos \phi \dot{\theta} = 0$$

y de manera similar en las delanteras

$$\sin(\phi - \theta) \dot{x} + \cos(\phi - \theta) \dot{y} + l \cos \phi \dot{\theta} = 0$$

por lo tanto las velocidades admisibles deben pertenecer a la distribución  $D = \ker\{\omega_1, \omega_2\} = \langle X_1, X_2, X_3 \rangle$  donde

$$\begin{aligned} \omega_1 &= -\sin(\phi + \theta) dx + \cos(\phi + \theta) dy - l \cos \phi d\theta \\ \omega_2 &= \sin(\phi - \theta) dx + \cos(\phi - \theta) dy + l \cos \phi d\theta \end{aligned}$$

y los campos vectoriales  $X_1, X_2, X_3$  los tomamos ortogonales respecto a la métrica  $g$

$$\begin{aligned} X_1 &= l \cos \phi \cos \theta \frac{\partial}{\partial x} + l \cos \phi \sin \theta \frac{\partial}{\partial y} - \sin \phi \frac{\partial}{\partial \theta} \\ X_2 &= c^{-1}(\phi)(l J_r \cos \phi \cos \theta \sin \phi) \frac{\partial}{\partial x} + c^{-1}(\phi)(l J_r \cos \phi \sin \theta \sin \phi) \frac{\partial}{\partial y} \\ &\quad - c^{-1}(\phi)(J_r \sin^2 \phi) \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{\partial}{\partial \psi} \\ X_3 &= \frac{\partial}{\partial \phi} \end{aligned}$$

con  $c(\phi) = ml^2 \cos^2 \phi + (J + J_r + J_w) \sin^2(\phi)$ . Los controles son los pares sobre los ángulos  $\psi$  y  $\theta$ . Las ecuaciones del movimiento las podemos escribir de la forma

$$\begin{aligned} \nabla_{\dot{\gamma}} \dot{\gamma} &= \sum_{j=1}^2 \lambda^j \circ \dot{\gamma} Z_j \circ \dot{\gamma} + \sum_{i=1}^2 u^i \circ \dot{\gamma} G_i \circ \dot{\gamma} \\ \dot{\gamma} &\in D \end{aligned} \tag{6.10}$$

donde  $i(G_1)g = d\psi$ ,  $i(G_2)g = d\phi$  y  $u^1, u^2$  son los pares correspondientes a  $\psi$  y  $\theta$  respectivamente. Por otra parte se verifica que  $D_c = \langle \pi_{TD} G_1, \pi_{TD} G_2 \rangle =$

$\langle X_2, X_3 \rangle$  y como  $\text{rang } D_c = 2 < 3 = \text{rang } D$ , tenemos que el sistema está infractuado.

Las ecuaciones de Euler-Lagrange del sistema no holónimo vienen dadas por

$$\begin{aligned} m\ddot{x} - \lambda_1 \sin(\phi + \theta) + \lambda_2 \sin(\phi - \theta) &= 0 \\ m\ddot{y} + \lambda_1 \cos(\phi + \theta) + \lambda_2 \cos(\phi - \theta) &= 0 \\ (J + J_r + 2J_w)\ddot{\theta} + J_r\ddot{\psi} - \lambda_1 l \cos \phi + \lambda_2 l \cos \phi &= 0 \\ J_r\ddot{\psi} + J_r\ddot{\theta} &= u_1 \\ 2J_w\ddot{\phi} &= u_2 \end{aligned}$$

**Proposición 6.9** *El sistema (6.10) no es débilmente equivalente al sistema cinemático*

$$X = v_1 X_2 + v_2 X_3 \quad (6.11)$$

**Demostración:** Al ser  $X_1, X_2, X_3$  ortogonales, se tiene que

$$D_c = \ker\{\omega^1, \omega^2, \omega^3\}$$

donde  $\omega^3 = i(X_1)g$ . Por lo tanto, de acuerdo con la Proposición 6.6, basta ver que  $\mathcal{L}_{X_g}(\widehat{\omega^3})|_{D_c} \neq 0$ . Sin más que hacer el cálculo anterior se comprueba que

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{X_g}(\widehat{\omega^3})|_{D_c} &= X_g(\widehat{\omega^3})|_{D_c} \\ &= \frac{\mu\alpha J_r l^2 m \cos \phi}{(J + J_r + J_w - l^2 m) \cos^2 \phi - (J + J_r + J_w)} \neq 0. \end{aligned}$$

donde  $X_g = \dot{x}\frac{\partial}{\partial x} + \dot{y}\frac{\partial}{\partial y} + \dot{\theta}\frac{\partial}{\partial \theta} + \dot{\psi}\frac{\partial}{\partial \psi} + \dot{\phi}\frac{\partial}{\partial \phi}$  y  $(\dot{x}, \dot{y}, \dot{\theta}, \dot{\psi}, \dot{\phi}) = \alpha X_2 + \mu X_3$

□

**Proposición 6.10** *Las curvas  $\dot{\gamma}(t) = v_1(t)X_2(\gamma(t)) + v_2(t)X_3(\gamma(t))$  tales que  $(v_1, v_2) \in \{(v_1, 0), (0, v_2)\}$  son soluciones del sistema no holónimo (6.10).*

**Demostración:** Como  $\mathcal{L}_{X_g}(\widehat{\omega^3})|_{\langle X_2 \rangle} = 0$  y  $\mathcal{L}_{X_g}(\widehat{\omega^3})|_{\langle X_3 \rangle} = 0$ , aplicando la Proposición 6.8 se tiene el resultado.

□

El método de los campos desacoplados utilizado en [21] llega sólo a este último resultado. La aplicación de las Proposiciones 6.7 y 6.8 permite ir más allá que con el método de los campos desacoplados, ya que se puede estudiar qué soluciones del sistema cinemático son soluciones del sistema no holónimo con mayor generalidad.

## 6.2 Sistemas mecánicos con control y simetrías

Sea  $(Q, g)$  una variedad de Riemann,  $\dim Q = n$ . Consideremos el sistema mecánico con controles  $\Sigma = (Q, g, F, G_1, \dots, G_m)$  cuyas ecuaciones del movimiento son

$$\nabla_{\dot{\gamma}} \dot{\gamma} = F \circ \dot{\gamma} + \sum_{i=1}^m u^i \circ \dot{\gamma} G_i \circ \dot{\gamma}$$

y el campo dinámico  $Y = X_g + F^v + \sum_{i=1}^m u^i G_i^v$ .

Sea  $G$  un grupo de Lie y  $\phi$  una acción de  $G$  sobre  $Q$  que supondremos libre y propia. Sea  $\mathfrak{g}$  el álgebra de Lie de  $G$  y  $\xi \in \mathfrak{g}$ . Denotaremos por  $\xi^Q$  al campo fundamental correspondiente a  $\xi$ .

Diremos que  $G$  es un *grupo de simetrías del sistema*  $\Sigma$  si se verifica que:

1.  $\mathcal{L}_{\xi^Q} g = 0$ , es decir,  $G$  actúa por isometrías de la métrica  $g$ .
2.  $g(\xi^Q, F) = 0$
3.  $g(\xi^Q, G_j) = 0, \forall j = 1, \dots, m$

para todo  $\xi \in \mathfrak{g}$ .

La condición (1) nos da  $\mathcal{L}_{\xi^Q} i_F g = i_{[\xi^Q, F]} g$  y la condición (2),  $\mathcal{L}_{\xi^Q} i_F g = i_{\xi^Q} di_F g$ . De ahí si  $F$  proviene de potencial,  $F = -\text{grad } U$ ,  $dU = -i_F g$  y por tanto  $[\xi^Q, F] = 0$ , luego  $F$  es invariante por la acción de  $G$ . Por lo tanto, en el caso en que  $F = -\text{grad } U$  las condiciones (1) y (2) equivalen a que la acción deje invariante la lagrangiana.

La existencia de  $G$  implica que el espacio de configuración usado para escribir la dinámica del sistema, es en cierto sentido redundante. Por lo tanto, existen cantidades conservadas -constantes del movimiento- que nos permiten quitar estas redundancias para poder reducir el sistema.

**Lema 6.11** *Sea  $(Q, g)$  una variedad de Riemann y  $\nabla$  la conexión de Levi-Civita correspondiente. Dados  $X, Y \in \mathfrak{X}(Q)$  se verifica que*

$$g(\nabla_Y X, Y) = \frac{1}{2}(\mathcal{L}_X g)(Y, Y) \quad (6.12)$$

**Demostración:** Dados  $X, Y \in \mathfrak{X}(Q)$ , por ser  $\nabla$  de torsión nula se cumple que

$$g(\nabla_Y X, Y) = g(\nabla_X Y, Y) + g([Y, X], Y). \quad (6.13)$$

Por otra parte,

$$\mathcal{L}_X(g(Y, Y)) = (\mathcal{L}_X g)(Y, Y) + 2g([X, Y], Y) \quad (6.14)$$

$$\mathcal{L}_X(g(Y, Y)) = \nabla_X(g(Y, Y)) = 2g(\nabla_X Y, Y) \quad (6.15)$$

Combinando (6.13) y (6.15) se tiene que

$$g(\nabla_Y X, Y) = \frac{1}{2}\mathcal{L}_X(g(Y, Y)) + g([Y, X], Y),$$

finalmente de la expresión anterior y la ecuación (6.14) se tiene que

$$g(\nabla_Y X, Y) = \frac{1}{2}(\mathcal{L}_X g)(Y, Y)$$

□

Observemos que la función 6.12 es tensorial para  $Y$ , pero no lo es para  $X$ , es decir, para calcularla en el punto  $p \in Q$  respecto a  $Y$ , basta conocer  $Y(p)$ .

**Proposición 6.12 (Teorema de Noether)** *Sea  $G$  un grupo de simetrías del sistema mecánico con control  $\Sigma = (Q, g, F, G_1, \dots, G_m)$ . Sea  $\xi \in \mathfrak{g}$ , entonces la función  $J_\xi : \mathbb{T}Q \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $J_\xi(v_q) = \widehat{i(\xi^Q)}g(v_q)$  es constante a lo largo de las trayectorias del sistema  $\Sigma$ .*

**Demostración:** Consideremos  $\gamma : I \rightarrow Q$  una trayectoria del sistema mecánico con controles  $\Sigma$ . Entonces tenemos que

$$\begin{aligned} \frac{d(J_\xi \circ \dot{\gamma})}{dt} &= \nabla_{\dot{\gamma}}(J_\xi \circ \dot{\gamma}) = \nabla_{\dot{\gamma}}(g(\dot{\gamma}, \xi^Q \circ \gamma)) = \\ &= g(\nabla_{\dot{\gamma}} \dot{\gamma}, \xi^Q \circ \gamma) + g(\dot{\gamma}, \nabla_{\dot{\gamma}} \xi^Q \circ \gamma) \\ &= g(F \circ \dot{\gamma} + \sum_{i=1}^m u_i \circ \dot{\gamma} G_i \circ \dot{\gamma}, \xi^Q \circ \gamma) + g(\dot{\gamma}, \nabla_{\dot{\gamma}} \xi^Q \circ \gamma) \\ &= g(F \circ \dot{\gamma}, \xi^Q \circ \gamma) + \sum_{i=1}^m u_i \circ \dot{\gamma} g(G_i \circ \dot{\gamma}, \xi^Q \circ \gamma) + g(\dot{\gamma}, \nabla_{\dot{\gamma}} \xi^Q \circ \gamma) \\ &= g(\dot{\gamma}, \nabla_{\dot{\gamma}} \xi^Q \circ \gamma). \end{aligned}$$

ya que  $g(F, \xi^Q) = 0$  y  $g(G_i, \xi^Q) = 0$ . Finalmente, del Lema 6.11, que se puede aplicar por la observación al mismo tomando  $Y(\gamma(t)) = \dot{\gamma}(t)$ , se tiene que  $g(\nabla_{\dot{\gamma}} \xi^Q \circ \gamma, \dot{\gamma}) = \frac{1}{2}(\mathcal{L}_{\xi^Q} g)(\dot{\gamma}, \dot{\gamma})$  que es cero pues  $\mathcal{L}_{\xi^Q} g = 0$ .

□

En otro lenguaje, los resultados anteriores se enuncian de la siguiente forma:

Consideremos el sistema Lagrangiano dado por  $Q$  como espacio de configuración y  $L = T$ , la energía cinética, como Lagrangiana. Tenemos el sistema simpléctico  $(TQ, \omega_L)$ , en donde  $\omega_L = -d\theta_L$ ,  $\theta_L = dT \circ S$ , siendo  $S$  el endomorfismo vertical.

Entonces las condiciones de simetría que hemos impuesto sobre la acción de  $G$  sobre  $Q$ , hacen que sea una acción simpléctica en  $(TQ, \omega_L)$  y por lo tanto la aplicación momento asociada

$$\begin{aligned} J: TQ &\longrightarrow \mathfrak{g}^* \\ v_q &\mapsto J(v_q) : \xi \mapsto g(\xi_Q, v_q) \end{aligned}$$

nos permite construir constantes del movimiento del sistema mecánico con control  $\Sigma = (Q, g, F, G_1, \dots, G_m)$ . De ahí si  $J(\dot{\gamma}(0)) = \mu \in \mathfrak{g}^*$ , entonces  $J(\dot{\gamma}(t)) = \mu, \forall t$ , con lo que las hojas de la aplicación momento son variedades invariantes del sistema  $\Sigma$ .

En consecuencia, dada una velocidad inicial del sistema  $v_0$ , la soluciones de  $\Sigma$ ,  $\gamma : I \rightarrow Q$  con  $\dot{\gamma}(0) = v_0$ , verifican que  $J(\dot{\gamma}(t)) = \mu = J(v_0), \forall t \in I$ . Para un grupo de Lie  $l$ -dimensional, esto implica que las cantidades conservadas definen  $l$  ligaduras "internas" del sistema.

De la expresión de la aplicación momento se tiene que estas ligaduras son lineales en las velocidades y por lo tanto  $D = J^{-1}(\mathfrak{o}), \mathfrak{o} \in \mathfrak{g}^*$ , es una distribución sobre  $Q$  de rango  $n - l$  por ser la acción libre. Tomando  $\{\xi_1, \dots, \xi_l\}$  una base de  $\mathfrak{g}$  resulta que  $D = \langle \xi_1^Q, \dots, \xi_l^Q \rangle^\perp$ .

En consecuencia dado un sistema mecánico con control  $\Sigma$  con un grupo de simetrías  $G$ , la dinámica del sistema restringida a  $D$  corresponde a la del sistema no holónomo

$$\begin{aligned} \nabla_{\dot{\gamma}} \dot{\gamma} &= F \circ \dot{\gamma} + \sum_{i=1}^m u^i \circ \dot{\gamma} G_i \circ \dot{\gamma} \\ \dot{\gamma} \in D &= J^{-1}(\mathfrak{o}) \end{aligned}$$

donde los multiplicadores de Lagrange son idénticamente nulos. De todo lo anterior se tiene

**Proposición 6.13** *Sea  $\Sigma = (Q, g, F, G_1, \dots, G_m)$  un sistema mecánico con control con un grupo de Lie  $G$  como grupo de simetrías,  $\dim G = l$ . Si  $\dim \langle G_1, \dots, G_m \rangle = n - l$ , entonces la dinámica de  $\Sigma$ , restringida a  $D$ , es equivalente a la del sistema cinemático*

$$\dot{\gamma}(t) = \sum_{i=1}^{n-l} v_i(t) Y_i(\gamma(t))$$

donde  $D = \langle Y_1, \dots, Y_{n-l} \rangle$

**Demostración:** Se sigue directamente del Teorema 6.1 y de todo lo dicho anteriormente.

□

**Proposición 6.14** *En las mismas condiciones de la proposición anterior, si  $\dim \langle G_1, \dots, G_m \rangle < n-l$  y  $(X_g + F^v)|_{D_c} \in \mathfrak{X}(D_c)$ , entonces la dinámica de  $\Sigma$ , restringida a  $D$ , es equivalente en sentido débil a la del sistema cinemático*

$$\dot{\gamma}(t) = \sum_{i=1}^m v_i(t) Y_i(\gamma(t))$$

donde  $D_c = \langle G_1, \dots, G_m \rangle = \langle Y_1, \dots, Y_m \rangle$  y  $D = \langle Y_1, \dots, Y_{n-l} \rangle$ .

**Demostración:** Se sigue directamente de la Proposición 6.5.

□

**Proposición 6.15** *Consideremos el sistema  $\Sigma = (G, g, F, G_1, \dots, G_m)$  con  $\dim G = l$  y  $\text{rang } D_c < n-l$ . Sean distribuciones  $S_1 = \langle X_1, \dots, X_s \rangle$  y  $S_2 = \langle X_{s+1-p}, \dots, X_r \rangle$  con  $s \geq p \geq 0$  y  $\{X_1, \dots, X_r\} \subset D_c$  tales que  $(X_g + F^v)|_{S_1} \in \mathfrak{X}(D_c)$  y  $(X_g + F^v)|_{S_2} \in \mathfrak{X}(D_c)$ . Entonces se verifica que*

$$\dot{\gamma}(t) = \sum_{i=1}^{s-p} v_i(t) X_i(\gamma(t)) + \sum_{i=s+1-p}^s v_i(t) X_i(\gamma(t)) + \sum_{i=s+1}^r v_i(t) X_i(\gamma(t))$$

con  $(v_1, \dots, v_r) \in \{(v_1, \dots, v_s, 0, \dots, 0), (0, \dots, 0, v_{s+1-p}, \dots, v_r)\}$  es solución del sistema no holónomo  $\Sigma$ .

**Demostración:** Se sigue directamente de la Proposición 6.8 y de lo dicho hasta ahora.

□

### Satélite con propulsores

Consideremos un cuerpo rígido con el centro de masas fijo, dotado de propulsores que proporcionan pares alrededor de los dos primeros ejes principales de inercia. El espacio de configuración es la variedad de Riemann  $Q = SO(3)$  con la métrica invariante correspondiente al tensor de inercia (energía cinética). Además  $SO(3)$  tiene estructura de grupo de Lie.

Un *sistema mecánico de control en un grupo de Lie*  $G$  viene definido por una métrica invariante a izquierda en el espacio de configuración  $G$  y unos campos de control  $G_1, \dots, G_m \in \mathfrak{X}(G)$  también invariantes. Observemos que dada una curva  $\gamma(t)$  en  $G$ , podemos definir una curva  $\omega(t)$  en el álgebra de Lie,  $\mathfrak{g}$ , con  $w(t) = T_{\gamma(t)}L_{\gamma^{-1}(t)}(\dot{\gamma}(t))$ . Es conocida la siguiente proposición:

**Proposición 6.16** *Consideremos un sistema mecánico con control sobre un grupo de Lie  $\Sigma = (G, g, G_1, \dots, G_m)$ . Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1.  $\gamma(t)$  *satisface las ecuaciones de la mecánica:*

$$\nabla_{\dot{\gamma}(t)}\dot{\gamma}(t) = \sum_{i=1}^m u^i(t)G_i(\gamma(t))$$

*para ciertos  $u^i(t)$ .*

2.  $\omega(t)$  *cumple las ecuaciones de Euler-Poincaré:*

$$\dot{w} = (\text{ad}_w^* w^\flat)^\sharp + \sum_{i=1}^m v^i(t)g_i \quad (6.16)$$

*donde  $g_i = G^i(e) \in \mathfrak{g}$ .*

**Demostración:** Ver [93].

□

En nuestro caso tenemos que  $Q = SO(3)$ ,  $\mathfrak{g} = \mathfrak{so}(3) \cong \mathbb{R}^3$  y el tensor de inercia  $\mathbb{I} : \mathfrak{so}(3) \times \mathfrak{so}(3) \rightarrow \mathbb{R}$  tiene como matriz en la base de ejes principales

$$\mathbb{I} = \begin{pmatrix} I_1 & 0 & 0 \\ 0 & I_2 & 0 \\ 0 & 0 & I_3 \end{pmatrix},$$

donde  $I_i$  son los momentos de inercia alrededor de estos ejes. Por otro lado  $G_i \in \mathfrak{X}(G)$ ,  $i = 1, 2$  son los campos invariantes a izquierda tales que  $g_i =$



$(dw_i)^b$ ,  $i = 1, 2$  donde  $w = (w_1, w_2, w_3) \in \mathfrak{so}(3)$  son las coordenadas en una cierta base. En consecuencia las ecuaciones (6.16) se escriben:

$$\begin{pmatrix} \dot{w}_1 \\ \dot{w}_2 \\ \dot{w}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{I_2 - I_3}{I_1} w_2 w_3 \\ \frac{I_3 - I_1}{I_2} w_3 w_1 \\ \frac{I_1 - I_2}{I_3} w_1 w_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{u^1}{I_1} \\ \frac{u^2}{I_2} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

La trayectoria  $R(t) \in SO(3)$  viene determinada por la ecuación  $\dot{R}(t) = R(t)w(t)$ , interpretando  $w \in \mathfrak{so}(3)$  como matriz antisimétrica.

Consideremos ahora el subgrupo  $S \subset G = SO(3)$  de rotaciones entorno al tercer eje principal. Como  $S = \{\exp^{\theta\xi}; \theta \in \mathbb{R}\}$ , donde  $\exp : \mathfrak{so}(3) \rightarrow SO(3)$  es la aplicación exponencial y  $\xi = (0, 0, 1) \in \mathbb{R}^3 \cong \mathfrak{so}(3)$ , tenemos que su álgebra de Lie  $\mathfrak{s} = \langle \xi \rangle \subset \mathfrak{so}(3)$  y por lo tanto  $\dim S = 1$ .

**Proposición 6.17** *S es un grupo de simetrías del sistema mecánico con control  $\Sigma = (SO(3), \mathbb{I}, g_1, g_2)$ .*

**Demostración:** Basta con probar que  $\mathcal{L}_{\xi^Q} g = 0$  y que  $g(\xi^Q, G_i) = 0$ ,  $i = 1, 2$  con  $\xi = (0, 0, 1)$ . La primera se deduce del hecho de ser  $g$  invariante y  $\xi^Q$  un campo fundamental. Por otro lado  $g(\xi^Q, G_i) = \mathbb{I}(\xi, g_j) = 0$ ,  $i = 1, 2$  ya que  $g_1 = (1/I_1, 0, 0)$  y  $g_2 = (0, 1/I_2, 0)$ .

□

Como consecuencia de la proposición anterior, tenemos la cantidad conservada  $J : TSO(3) \rightarrow \mathfrak{s}^*$ , que por ser invariante basta con definirla en  $\mathfrak{so}(3)$ :

$$\begin{aligned} J_{|\mathfrak{so}(3)} : \mathfrak{so}(3) &\longrightarrow \mathfrak{s}^* \\ w &\mapsto J(w) : \xi \mapsto \mathbb{I}(\xi, w) = I_3 w_3. \end{aligned}$$

Ésta define una distribución  $D = J^{-1}(\mathfrak{o})$  invariante tal que  $D_e = J_{|\mathfrak{so}(3)}^{-1}(\mathfrak{o}) = \langle \xi \rangle^\perp$ . Con todo lo dicho hasta el momento se tiene:

**Proposición 6.18** *Sea el sistema  $\Sigma = (SO(3), \mathbb{I}, G_1, G_2)$  con  $S$  el subgrupo de las rotaciones alrededor del tercer eje principal, como grupo de simetría. Como  $\dim \langle G_1, G_2 \rangle = \dim SO(3) - \dim S$ , la dinámica de  $\Sigma$ , restringida a  $D = J^{-1}(\mathfrak{o})$ , es equivalente al sistema cinemático*

$$\dot{\gamma}(t) = v_1(t)G_1(\gamma(t)) + v_2(t)G_2(\gamma(t)) \quad (6.17)$$

**Demostración:** Se sigue directamente de aplicar la Proposición 6.13 a este caso particular.

□



# Capítulo 7

## Reducción de sistemas Lagrangianos dependientes del tiempo

El problema de la reducción de sistemas dinámicos con simetrías ha ocupado el interés de un buen número de investigadores cuya pretensión era reducir el número de ecuaciones del movimiento por medio de la búsqueda de integrales primeras. El trabajo fundamental de carácter geométrico en esta materia, se debe a Marsden y Weinstein [74](ver también [1, 68, 102]). Demostraron que dada una acción libre y propia de un grupo de Lie (conexo) en una variedad simpléctica (conexa) y un valor débilmente regular de la aplicación momento asociada a esta acción, el espacio reducido tiene una estructura de variedad simpléctica y hereda un sistema dinámico Hamiltoniano proveniente del sistema inicial. No obstante, el problema de la reducción se puede estudiar bajo diferentes aspectos.

Cuando tratamos con sistemas mecánicos provenientes de Lagrangianas regulares, nos encontramos con diferentes formulaciones: si la Lagrangiana es autónoma, podemos utilizar el formalismo simpléctico, pero si la Lagrangiana depende del tiempo, entonces la formulación más apropiada es la de contacto. Las estructuras de contacto se construyen en variedades de dimensión impar, mientras que las simplécticas en las de dimensión par, que son los espacios de fase de coordenadas-velocidades.

No obstante no son éstas las únicas diferencias entre ambas formulaciones. En el caso simpléctico, la estructura geométrica está dada por una 2-forma no degenerada, mientras que en el caso de contacto, la 2-forma estructural es degenerada y su núcleo tiene dimensión uno. Este núcleo proporciona en cada punto la dirección del campo vectorial dinámico.

Obviamente, se puede utilizar la formulación de contacto para una La-

grangiana autónoma. Entonces, la simetría dada por la independencia del tiempo nos permitirá reducir el sistema, haciendo cociente por la acción del tiempo, reduciendo la dimensión de la variedad donde están escritas las ecuaciones del movimiento y obteniendo una formulación simpléctica.

En este capítulo estudiaremos la reducción de la formulación de contacto para Lagrangianas dependientes del tiempo si existe una simetría infinitesimal de la Lagrangiana. Cuando el campo vectorial asociado a una conexión es una simetría de la Lagrangiana (ver Proposiciones 7.6,7.8 y Corolario 7.7), podemos repetir el proceso del caso autónomo y obtener una formulación simpléctica (ver Proposiciones 7.12,7.13,7.14,7.15) en una variedad apropiada dada por el cociente de  $TQ \times \mathbb{R}$  por la acción del campo vectorial de la conexión (ver Proposiciones 7.18,7.19,7.20,7.21 y Corolario 7.22). Por lo tanto, cada vez que tenemos una Lagrangiana dependiente del tiempo con una adecuada simetría, el sistema puede reducirse, pudiéndose utilizar la formulación simpléctica. Uno de los objetivos del capítulo es estudiar si el sistema reducido es un sistema lagrangiano, esto es, si su espacio de fases es un fibrado tangente y la forma simpléctica proviene de una función lagrangiana.

Por otro lado se generalizan los resultados anteriores al caso de sistemas no holónomos Lagrangianos dependientes del tiempo (Proposiciones 7.5,7.9,7.10,7.11,7.17). En estos sistemas se usan las notaciones y resultados de [56, 58]

## 7.1 Sistemas Lagrangianos dependientes del tiempo

### 7.1.1 El fibrado 1-jet de $\pi: Q \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ . Estructuras Geométricas y conexiones

**El fibrado 1-jet de  $\pi: Q \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$**

Consideremos el fibrado  $\pi: Q \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , donde  $Q$  es una variedad diferenciable  $n$ -dimensional, por ejemplo el espacio de configuración de un sistema físico. El fibrado 1-jet de secciones de  $\pi$  es  $\pi_1: TQ \times \mathbb{R} \rightarrow Q \times \mathbb{R}$ .

**Proposición 7.1** *Los siguientes elementos en  $\pi: Q \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  pueden construirse de forma conónica unos de otros:*

1. Una sección de  $\pi_1: TQ \times \mathbb{R} \rightarrow Q \times \mathbb{R}$ , esto es, una aplicación  $\nabla: Q \times \mathbb{R} \rightarrow TQ \times \mathbb{R}$  tal que  $\pi_1 \circ \nabla = \text{Id}_{Q \times \mathbb{R}}$ .

7.1. SISTEMAS LAGRANGIANOS DEPENDIENTES DEL TIEMPO 101

2. Un subfibrado  $H(\nabla)$  de  $T(Q \times \mathbb{R})$  tal que

$$T(Q \times \mathbb{R}) = V(\pi) \oplus H(\nabla) \quad (7.1)$$

3. Una 1-forma semibásica  $\tilde{\nabla}$  en  $Q \times \mathbb{R}$  con valores en  $T(Q \times \mathbb{R})$ , tal que  $\alpha \circ \tilde{\nabla} = \alpha$ , para toda forma semibásica  $\alpha \in \Omega^1(Q \times \mathbb{R})$ .

**Demostración:** La prueba de esta proposición, en el caso general de un fibrado  $\pi: E \rightarrow M$ , se puede encontrar en [94].

□

Una *conexión* en el fibrado  $\pi: Q \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  es uno de los anteriores elementos equivalentes.  $\nabla$  se denominada *campo de jets*,  $H(\nabla)$  subfibrado *horizontal* de  $T(Q \times \mathbb{R})$  asociado a  $\nabla$  y sus secciones *campos vectoriales horizontales*. Finalmente, nos referiremos a  $\tilde{\nabla}$  como la forma de *conexión de Ehresmann*.

Dado el subfibrado  $H(\nabla)$  y la descomposición (7.1), tenemos las aplicaciones siguientes

$$h_{\nabla}: T(Q \times \mathbb{R}) \rightarrow H(\nabla) \quad , \quad v_{\nabla}: T(Q \times \mathbb{R}) \rightarrow V(\pi)$$

denominadas proyecciones *horizontal* y *vertical* respectivamente. Usaremos los mismos símbolos  $h_{\nabla}$  y  $v_{\nabla}$  para designar las extensiones naturales de estas aplicaciones a campos vectoriales.

En coordenadas locales  $(q^\mu, t, v^\mu)$ , las expresiones de todos estos elementos son

$$\begin{aligned} \nabla(q, s) &= (q, s, \Gamma^\mu(q, s)), \quad \tilde{\nabla} = dt \otimes \left( \frac{\partial}{\partial t} + \Gamma^\mu \frac{\partial}{\partial q^\mu} \right), \\ H(\nabla) &= \text{span} \left\{ \frac{\partial}{\partial t} + \Gamma^\mu \frac{\partial}{\partial q^\mu} \right\} \end{aligned}$$

para todo  $(q, s) \in Q \times \mathbb{R}$ .

**Proposición 7.2** *Una conexión en el fibrado  $\pi: Q \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  es equivalente a un campo vectorial dependiente del tiempo en  $Q$ , esto es, un campo vectorial a lo largo de  $\pi_Q: Q \times \mathbb{R} \rightarrow Q$ .*

**Demostración:** Ver [35].

□

Dada una conexión  $\nabla$  y sea  $Y$  su campo vectorial asociado. Entonces definimos la *suspensión* de  $Y$  como el campo vectorial  $\tilde{Y} := \frac{\partial}{\partial t} + Y$ .

Para más detalles sobre fibrados de jets, ver [42, 94].

### Estructuras Geométricas

En el formalismo Lagrangiano dependiente del tiempo, la dinámica tiene lugar en la variedad  $TQ \times \mathbb{R}$ . En consecuencia necesitamos introducir algunos elementos geométricos en el fibrado  $\pi_1 : TQ \times \mathbb{R} \rightarrow Q \times \mathbb{R}$  (ver [34], [39], [40] y [94]). Cuando sea necesario, usaremos un sistema local de coordenadas dado por  $(q^\mu, t, v^\mu)$ .

Podemos definir una 1-forma  $\vartheta$  en  $TQ \times \mathbb{R}$ , con valores en  $\pi_1^*V(\pi)$ , de la siguiente manera:

$$\vartheta(((q, s), u); X) := (T_{((q,s),u)}\pi_1 - T_{((q,s),u)}(\phi \circ \pi \circ \pi_1))(X_{(q,s)})$$

donde  $\phi$  es un representante de  $((q, s), u) \in TQ \times \mathbb{R}$ .  $\vartheta$  se llama *forma canónica de estructura* de  $TQ \times \mathbb{R}$ . Su expresión local es

$$\vartheta = (dq^\mu - v^\mu dt) \otimes \frac{\partial}{\partial q^\mu}.$$

Teniendo en cuenta que  $\pi_1 : TQ \times \mathbb{R} \rightarrow Q \times \mathbb{R}$  es un fibrado vectorial, y la fibra sobre  $(q, s) \in Q \times \mathbb{R}$  es  $T_q Q \times \{s\}$ , existe un difeomorfismo canónico entre el subfibrado vertical de  $\pi_1$  y  $\pi_1^*(TQ \times \mathbb{R})$ , esto es,

$$V(\pi_1) \simeq \pi_1^*(TQ \times \mathbb{R}) \simeq \pi_1^*\pi_Q^*TQ \simeq \pi_1^*V(\pi)$$

Denotemos por  $\mathcal{S} : \pi_1^*V(\pi) \rightarrow V(\pi_1)$  la realización de este isomorfismo, y usemos la misma notación  $\mathcal{S}$  para su acción sobre los módulos de secciones de estos fibrados.  $\mathcal{S}$  es un elemento de  $\Gamma(TQ \times \mathbb{R}, \pi_1^*V^*(\pi)) \otimes \Gamma(TQ \times \mathbb{R}, V(\pi_1))$ . Teniendo en cuenta que la forma de estructura  $\vartheta$  es un elemento de  $\Omega^1(TQ \times \mathbb{R}, \pi_1^*V(\pi_1)) = \Omega^1(TQ \times \mathbb{R}) \otimes \Gamma(TQ \times \mathbb{R}, \pi_1^*V(\pi))$ , utilizando la dualidad natural y contrayendo  $\mathcal{S}$  con  $\vartheta$ , obtenemos un elemento

$$\mathcal{V} := i(\mathcal{S})\vartheta \in \Omega^1(TQ \times \mathbb{R}) \otimes \Gamma(TQ \times \mathbb{R}, V(\pi_1))$$

cuya expresión local es  $\mathcal{V} = (dq^\mu - v^\mu dt) \otimes \frac{\partial}{\partial v^\mu}$ . Observemos que  $\mathcal{V}$  se puede ver como un morfismo de  $C^\infty(TQ \times \mathbb{R})$ -módulos  $\mathcal{V} : \mathfrak{X}(TQ \times \mathbb{R}) \rightarrow \mathfrak{X}(TQ \times \mathbb{R})$  cuya imagen son campos  $\pi_1$ -verticales.  $\mathcal{S}$  y  $\mathcal{V}$  se llaman *endomorfismos verticales* de  $TQ \times \mathbb{R}$ .

### 7.1.2 Formalismo Lagrangiano dependiente del tiempo. Conexiones y función energía Lagrangiana

Una *función Lagrangiana dependiente del tiempo* es una función  $L \in C^\infty(TQ \times \mathbb{R})$ . Las 1 y 2-forma de Poincaré-Cartan asociadas a la función Lagrangiana

7.1. SISTEMAS LAGRANGIANOS DEPENDIENTES DEL TIEMPO 103

$L$  son las formas en  $TQ \times \mathbb{R}$  definidas por

$$\Theta_L := dL \circ \mathcal{V} + Ldt, \quad \Omega_L := -d\Theta_L$$

cuyas expresiones en coordenadas son

$$\begin{aligned} \Theta_L &= \frac{\partial L}{\partial v^\mu} (dq^\mu - v^\mu dt) + Ldt = \left( L - v^\mu \frac{\partial L}{\partial v^\mu} \right) dt + \frac{\partial L}{\partial v^\mu} dq^\mu \\ \Omega_L &= -d \left( \frac{\partial L}{\partial v^\mu} \right) \wedge dq^\mu + d \left( \frac{\partial L}{\partial v^\mu} v^\mu - L \right) \wedge dt \end{aligned}$$

Observemos que estos elementos no dependen de la conexión.

Una función Lagrangiana  $L$  es *regular* si la forma asociada  $\Omega_L$  tiene rango máximo, lo que es equivalente a pedir que  $\det \left( \frac{\partial^2 L}{\partial v^\mu \partial v^\nu} \right)$  sea diferente de cero en cada punto.

Por otra parte, sea  $\nabla$  una conexión en  $\pi : Q \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  y  $\tilde{\nabla}$  su levantamiento canónico a  $\pi_1 : TQ \times \mathbb{R} \rightarrow Q \times \mathbb{R}$ . Entonces podemos descomponer  $\Theta_L$  y  $\Omega_L$  en suma de dos formas, una vertical y otra horizontal. La forma vertical (resp. horizontal) se caracteriza por el hecho de que se anula bajo la acción de campos vectoriales horizontales (resp. verticales) asociados a la conexión  $\tilde{\nabla}$ .

Por lo tanto  $\Omega_L = \Omega_L^H + \Omega_L^V$  donde  $\Omega_L^H = dt \wedge i(j^1 \tilde{Y})\Omega_L$  y  $\Omega_L^V = \Omega_L - \Omega_L^H$ . La descomposición de  $\Theta_L$  se realiza de igual forma,  $\Theta_L^H = dt \wedge i(j^1 \tilde{Y})\Theta_L$ , y  $\Theta_L^V = \Theta_L - \Theta_L^H$ .

**Comentario:** Es fácil ver que esta construcción puede ser generalizada para cualquier  $\alpha \in \Omega^r(F)$  donde  $F$  es una variedad fibrada sobre la base  $B$ ; ver [55] para más detalles.

Suponiendo la regularidad de  $L$ , la dinámica del sistema está descrita por un campo vectorial  $X_L \in \mathfrak{X}(TQ \times \mathbb{R})$ , que es una *Ecuación Diferencial de Segundo Orden* (SODE), tal que:

$$i(X_L)\Omega_L = 0 \quad , \quad i(X_L)dt = 1 \tag{7.2}$$

Una situación diferente se presenta cuando intentamos definir intrínsecamente la *función energía Lagrangiana*.

Sea  $\nabla$  una conexión en  $\pi : Q \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\tilde{Y} \in \mathfrak{X}(Q \times \mathbb{R})$  la suspensión del campo vectorial asociado y  $j^1 \tilde{Y} \in \mathfrak{X}(TQ \times \mathbb{R})$  su levantamiento canónico. La *función energía Lagrangiana* asociada a la función Lagrangiana  $L$  y la conexión  $\nabla$  es  $E_L^\nabla = -i(j^1 \tilde{Y})\Theta_L$

En coordenadas locales, si  $\tilde{Y} = \frac{\partial}{\partial t} + \Gamma^\mu \frac{\partial}{\partial q^\mu}$ , tenemos

$j^1\tilde{Y} = \frac{\partial}{\partial t} + \Gamma^\mu \frac{\partial}{\partial q^\mu} + \left( \frac{\partial \Gamma^\mu}{\partial t} + v^\nu \frac{\partial \Gamma^\mu}{\partial q^\nu} \right) \frac{\partial}{\partial v^\mu}$  y por lo tanto

$$E_L^\nabla = \frac{\partial L}{\partial v^\mu} (v^\mu - \Gamma^\mu) - L.$$

Es obvio a partir de la expresión anterior que la energía Lagrangiana depende de la conexión. Si  $\Gamma^\mu = 0$ , la correspondiente conexión es la conexión estándar. El uso de esta conexión oculta, en mecánica clásica, que la energía depende explícitamente de ésta.

**Proposición 7.3** [35] *Sea  $X_L \in \mathfrak{X}(TQ \times \mathbb{R})$  el campo vectorial dinámico, solución de las ecuaciones (7.2). Entonces*

$$X_L(E_L^\nabla) = -(j^1\tilde{Y})L$$

**Demostración:**

$$\begin{aligned} X_L(E_L^\nabla) &= i(X_L)dE_L^\nabla = -i(X_L)d i(j^1\tilde{Y})\Theta_L \\ &= i(X_L) i(j^1\tilde{Y})d\Theta_L - i(X_L) L(j^1\tilde{Y})\Theta_L \\ &= i(j^1\tilde{Y}) i(X_L)\Omega_L + i([j^1\tilde{Y}, X_L])\Theta_L - L(j^1\tilde{Y}) i(X_L)\Theta_L \\ &= -L(j^1\tilde{Y}) i(X_L)(dL \circ \mathcal{V} + Ldt) = -L(j^1\tilde{Y}) i(\mathcal{V}(X_L))dL \\ &\quad - L(j^1\tilde{Y})(L i(X_L)dt) = -(j^1\tilde{Y})L \end{aligned}$$

donde hemos tenido en cuenta que  $[j^1\tilde{Y}, X_L]$  es  $\pi_1$ -vertical (ya que  $X_L$  es una SODE y  $j^1\tilde{Y}$  es el levantamiento canónico [30]) y  $\Theta_L$  es una forma  $\pi_1$ -semibásica, por lo tanto  $i([j^1\tilde{Y}, X_L])\Theta_L = 0$ .

□

**Proposición 7.4** [35] *Si  $L$  es una función Lagrangiana tal que su transformación de Legendre asociada es diferente de cero en cada punto, entonces todas las integrales primeras del campo vectorial dinámico  $X_L$  son la energía asociada a alguna conexión.*

**Demostración:** Sea  $\nabla$  una conexión tal que su campo vectorial asociado  $Y$  verifica que  $(j^1\tilde{Y})L = 0$ , entonces se cumple que  $E_L^\nabla$  es una cantidad conservada. Recíprocamente, si  $f \in C^\infty(TQ \times \mathbb{R})$  verifica  $X_L(f) = 0$ , tomemos la conexión asociada a cualquier campo vectorial  $Y$  tal que  $i(j^1\tilde{Y})\Theta_L = -f$ . Teniendo en cuenta que  $\Theta_L$  es  $\pi_1$ -semibásica y usando la definición de la transformación de Legendre  $FL$ , esta ecuación puede ser escrita como  $Y \circ FL + i\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)\Theta_L = -f$ , la cual puede resolverse para  $Y$  si  $FL$  es diferente de cero en todo punto. Entonces se tiene que  $E_L^\nabla = f$ .

□



### 7.1.3 Formalismo no holónimo Lagrangiano dependiente del tiempo

Consideremos una distribución  $D \subset TQ$  y supongamos que el movimiento del sistema  $(Q, L)$ , con  $L \in C^\infty(TQ \times \mathbb{R})$  está restringido de manera que las únicas velocidades admitidas son aquellas que pertenecen a  $D$ . Llamaremos sistema no holónimo Lagrangiano dependiente del tiempo a la tripleta  $(Q, L, D)$ .

El *principio de d'Alembert* en esta formulación se enuncia de la siguiente forma, ver [56]: las soluciones de tal sistema son las curvas integrales del campo vectorial  $X_L \in \mathfrak{X}(TQ \times \mathbb{R})$  con condición inicial en  $D$  que son solución del siguiente sistema en los puntos de  $D$ :

$$\begin{aligned} i(X_L)\omega_L &\in \mathcal{V}^*(TD^0) \\ i(X_L)dt &= 1 \\ X_L|_D &\in \mathfrak{X}(D) \end{aligned} \tag{7.3}$$

donde  $TD^0 = \{\omega \in \Omega^1(TQ) \mid \omega(X) = 0, \forall X \in \mathfrak{X}(D)\}$  y

$$\mathcal{V}^* : \Omega^1(TQ \times \mathbb{R}) \rightarrow \Omega^1(TQ \times \mathbb{R})$$

se define como  $\mathcal{V}^*(\omega)(X) = \omega(\mathcal{V}(X))$ .

Sea  $D^0 = \{\beta \in \Omega^1(Q) \mid \beta(X) = 0, \forall X \in \Gamma(D)\}$ , si  $D^0 = \langle \omega^1, \dots, \omega^m \rangle$  entonces se cumple que

$$\mathcal{V}^*(TD^0) = \langle -\widehat{\omega}^1 \tau_{\mathbb{R}}^* dt + \tau_Q^*(\omega^1), \dots, -\widehat{\omega}^m \tau_{\mathbb{R}}^* dt + \tau_Q^*(\omega^m) \rangle$$

donde  $\tau_{\mathbb{R}} = \pi \circ \pi_1$  y  $\tau_Q = \pi_Q \circ \pi_1$ . En consecuencia, las ecuaciones de la dinámica en  $D$  pueden escribirse como

$$\begin{aligned} i(X_L)\omega_L &= \sum_{i=1}^m \lambda^i \tau_Q^* \omega^i \\ i(X_L)dt &= 1 \\ X_L|_D &\in \mathfrak{X}(D) \end{aligned}$$

Sea una conexión en  $\pi : Q \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  tal que el campo vectorial asociado  $Y \in \mathfrak{X}(Q)$  cumple que  $Y \in \Gamma(D)$ . Consideremos  $\widetilde{Y} \in \mathfrak{X}(Q \times \mathbb{R})$  la suspensión de  $Y$  y  $j^1 \widetilde{Y} \in \mathfrak{X}(TQ \times \mathbb{R})$  su levantamiento canónico. En estas condiciones se tiene que:

**Proposición 7.5** *Sea  $X_L$  el campo vectorial dinámico solución de 7.3. Entonces en los puntos de  $D$  se cumple que*

$$X_L(E_L^\nabla) = -i(j^1 \widetilde{Y})L$$

**Demostración:** De la Proposición 7.3 tenemos que

$$X_L(E_L^\nabla) = -i(j^1\tilde{Y})L + i(j^1\tilde{Y})i(X_L)\Omega_L$$

como  $i(X_L)\Omega_L \in \mathcal{V}^*(TD^0)$ , sobre los puntos de  $D$  se verifica que

$$\begin{aligned} X_L(E_L^\nabla) &= -i(j^1\tilde{Y})L + i(j^1\tilde{Y})\left(\sum_{i=1}^m \lambda^i \tau_q^* \omega^i\right) \\ &= -i(j^1\tilde{Y})L + \sum_{i=1}^m \lambda^i i(Y)\omega^i = -i(j^1\tilde{Y})L \end{aligned}$$

donde hemos tenido en cuenta que  $i(Y)\omega^i|_D = 0$  ya que  $Y \in \Gamma(D)$ .

□

## 7.2 Simetrías de sistemas Lagrangianos dependientes del tiempo. Simetrías infinitesimales y conexiones

Sea  $L \in C^\infty(TQ \times \mathbb{R})$  una Lagrangiana dependiente del tiempo y  $\Phi$  un difeomorfismo de fibrados de  $Q \times \mathbb{R}$  tal que su restricción  $\Phi_{\mathbb{R}} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  verifica  $\Phi_{\mathbb{R}}(t) = t + c$ .

### 7.2.1 Caso Lagrangiano dependiente del tiempo

$\Phi$  es una *simetría* si  $(j^1\Phi)^*L = L$ , esto es,  $L$  es invariante por  $j^1\Phi$ . Recordemos que en esta situación las formas canónicas  $\Theta_L$  y  $\Omega_L$  son también invariantes por  $j^1\Phi$ , ver [1].

**Proposición 7.6** *Si  $L$  es invariante por  $j^1\Phi$  y  $X_L$  es una solución de las ecuaciones (7.2), entonces  $(j^1\Phi)^*X_L$  es también una solución.*

**Demostración:** Ya que  $(j^1\Phi)^*L = L$  y  $(j^1\Phi)^*dt = d((j^1\Phi)^*t) = d(t + c) = dt$ , tenemos que

$$0 = j^1\Phi^*(i(X_L)\Omega_L) = i(j^1\Phi^*(X_L))j^1\Phi^*(\Omega_L) = i(j^1\Phi^*(X_L))\Omega_L$$

y de manera similar

$$1 = j^1\Phi^*(i(X_L)dt) = i(j^1\Phi^*(X_L))dt.$$

□

Como  $L$  es regular, tenemos que  $(j^1\Phi)^*X_L = X_L$ , por lo tanto si  $\sigma$  es una curva integral de  $X_L$ , entonces  $\Phi^*\sigma$  también lo es.

Dado  $Y \in \mathfrak{X}(Q, \pi_Q)$  un campo vectorial a lo largo de la proyección  $\pi_Q$ , consideremos el campo vectorial  $j^1\tilde{Y} \in \mathfrak{X}(TQ \times \mathbb{R})$  donde  $\tilde{Y} = \frac{\partial}{\partial t} + Y$ . Diremos que  $j^1\tilde{Y}$  es una *simetría infinitesimal* del sistema si  $\mathcal{L}(j^1\tilde{Y})L = 0$ . Como consecuencia de la proposición anterior, tenemos:

**Corolario 7.7** Si  $\mathcal{L}(j^1\tilde{Y})L = 0$ , entonces  $\mathcal{L}(j^1\tilde{Y})\Omega_L = 0$ ,  $\mathcal{L}(j^1\tilde{Y})dt = 0$ ,  $\mathcal{L}(j^1\tilde{Y})X_L = 0$  y  $\mathcal{L}(j^1\tilde{Y})E_L^\nabla = 0$ .

□

Como caso particular, podemos considerar la invariancia bajo una conexión. Sea  $\nabla$  una conexión con  $j^1\tilde{Y} \in \mathfrak{X}(TQ \times \mathbb{R})$  la prolongación 1-jet del campo vectorial  $\tilde{Y}$  asociado con  $\nabla$ , que supondremos completo. El sistema Lagrangiano se denomina *invariante bajo la conexión*  $\nabla$  si  $\mathcal{L}(j^1\tilde{Y})L = 0$ .

**Proposición 7.8** Si  $\mathcal{L}(j^1\tilde{Y})L = 0$  entonces  $d\Theta_L^V = -\Omega_L^V$ ,  $d\Theta_L^H = -\Omega_L^H$ .

**Demostración:**

$$\begin{aligned} d\Theta_L^V &= d(\Theta_L - i(j^1\tilde{Y})\Theta_L dt) = -\Omega_L - d(i(j^1\tilde{Y})\Theta_L) \wedge dt \\ &= -\Omega_L - i(j^1\tilde{Y})\Omega_L \wedge dt + \mathcal{L}(j^1\tilde{Y})\Omega_L = -\Omega_L + dt \wedge i(j^1\tilde{Y})\Omega_L \\ &= -\Omega_L^V \end{aligned}$$

□

### 7.2.2 Caso no holónimo Lagrangiano dependiente del tiempo

Consideremos  $(Q, L, D)$  el sistema no holónimo Lagrangiano dependiente del tiempo. Diremos que el difeomorfismo  $\Phi : \mathbb{R} \times Q \rightarrow \mathbb{R} \times Q$  es una simetría del sistema si  $j^1\Phi^*L = L$  y  $(j^1\Phi_t)_*(D) = D$  para todo  $t \in \mathbb{R}^+$ , en donde  $\Phi_t : Q \rightarrow Q$  es  $\Phi_t(q) = \phi(t, q)$ .

**Lema 7.9** Si  $\Phi$  es una simetría de  $(Q, L, D)$ , entonces

$$j^1\Phi^*(\mathcal{V}^*(TD^0)) = \mathcal{V}^*(TD^0)$$

**Demostración:** Al ser  $j^1\Phi$  un difeomorfismo, basta con ver que si  $\omega \in TD^0$ , entonces  $j^1\phi^*(\mathcal{V}^*\omega) \in \mathcal{V}^*(TD^0)$ .

$$\begin{aligned} j^1\Phi^*(\mathcal{V}^*\omega)(Z) &= (j^1\Phi^*(\omega \circ \mathcal{V}))(Z) = \omega(\mathcal{V}(j^1\Phi_*(Z))) \\ &= \omega((j^1\Phi)_* \circ \mathcal{V}(Z)) = (\omega \circ (j^1\Phi)_* \circ \mathcal{V})(Z) \\ &= \mathcal{V}^*(\omega \circ (j^1\Phi)_*)(Z) \end{aligned}$$

donde  $Z \in \mathfrak{X}(TQ)$  y  $\mathcal{V} \circ (j^1\Phi)_* = (j^1\Phi)_* \circ \mathcal{V}$  (ver [36] para más detalles sobre esta propiedad).

De lo anterior tenemos que es suficiente con mostrar que  $\omega \circ (j^1\Phi)_* \in TD^0$ . Así pues, sea  $Z \in \mathfrak{X}(D)$ , entonces se verifica que

$$(\omega \circ (j^1\Phi)_*)(Z) = \omega((j^1\Phi_*)Z) = \omega((j^1\Phi_t)_*Z) = 0$$

ya que  $(j^1\Phi_t)_*(D) = D$ .

□

**Proposición 7.10** *Si  $\Phi$  es una simetría y  $X_L$  es una solución de la ecuación dinámica 7.3, entonces  $(j^1\Phi)^*X_L$  es también una solución.*

**Demostración:** De la prueba de la Proposición 7.6 tenemos que

$$i(j^1\Phi(X_L))\Omega_L = j^1\Phi^*(i(X_L)\Omega_L)$$

que pertenece a  $\mathcal{V}^*(TD^0)$  por el resultado del lema anterior. Por otra parte también se verifica que  $i(j^1\Phi^*(X_L))dt = 1$  y  $j^1\Phi^*(X_L) \in TD$ .

□

**Corolario 7.11** *Si  $\mathcal{L}(j^1\tilde{Y})L = 0$ , entonces  $\mathcal{L}(j^1\tilde{Y})\Omega_L = 0$ ,  $\mathcal{L}(j^1\tilde{Y})dt = 0$ ,  $\mathcal{L}(j^1\tilde{Y})X_L = 0$  y  $\mathcal{L}(j^1\tilde{Y})E_L^\nabla = 0$ .*

□

### 7.3 Reducción de sistemas Lagrangianos dependientes del tiempo invariantes por $\nabla$

Sea  $j^1\tilde{Y}$  una simetría infinitesimal del sistema  $(TQ \times \mathbb{R}, L)$ . Consideremos la acción de  $j^1\tilde{Y}$  en  $TQ \times \mathbb{R}$  y sea  $[TQ \times \mathbb{R}] \equiv (TQ \times \mathbb{R})/j^1\tilde{Y}$  el conjunto de las clases de equivalencia. Sea  $\pi^1 : TQ \times \mathbb{R} \rightarrow [TQ \times \mathbb{R}]$  la proyección natural. Asumiremos que  $[TQ \times \mathbb{R}]$  es una variedad diferencial y  $\pi^1$  una submersion.

Recordemos que dada la proyección entre variedades  $\tilde{\pi} : M \rightarrow M/\sim$ , y  $\omega \in \Omega^h(M)$ , diremos que  $\omega$  es  $\tilde{\pi}$ -proyectable si existe  $\tilde{\omega}$  tal que  $\tilde{\pi}^*(\tilde{\omega}) = \omega$ . Una condición necesaria y suficiente para asegurar la proyectabilidad es que  $i(X)\omega = 0$  y  $\mathcal{L}(X)\omega = 0$ , para todo  $X \in \mathfrak{X}^V(\tilde{\pi})$  o equivalentemente  $i(X)\omega = 0$  y  $i(X)d\omega = 0$ , para  $X \in \mathfrak{X}^V(\tilde{\pi})$  (ver [68] para más detalles). Observemos que en nuestro caso  $\mathfrak{X}^V(\tilde{\pi}^1)$  está generado por  $j^1\tilde{Y}$ .

Sea  $\Omega_L^H = dt \wedge i(j^1\tilde{Y})\Omega_L$ ,  $\Omega_L^V = \Omega_L - \Omega_L^H$  y  $\Theta_L^H = (i(j^1\tilde{Y})\Theta_L) dt$ ,  $\Theta_L^V = \Theta_L - \Theta_L^H$  la descomposición inducida por  $\tilde{\nabla}$ , entonces se cumple que:

**Proposición 7.12**  $\Theta_L^V, \Omega_L^V$  son  $\tilde{\pi}^1$ -proyectables.

**Demostración:** Teniendo en cuenta que  $i(j^1\tilde{Y})dt = 1$  y  $i(j^1\tilde{Y})i(j^1\tilde{Y})\Omega_L = 0$ , ya que  $\Omega_L$  es antisimétrica, tenemos:

$$\begin{aligned} i(j^1\tilde{Y})\Omega_L^V &= i(j^1\tilde{Y})\Omega_L - (i(j^1\tilde{Y})dt)i(j^1\tilde{Y})\Omega_L + (i(j^1\tilde{Y})i(j^1\tilde{Y})\Omega_L)dt = 0 \\ i(j^1\tilde{Y})d\Omega_L^V &= -i(j^1\tilde{Y})(d(dt) \wedge i(j^1\tilde{Y})\Omega_L) + i(j^1\tilde{Y})(dt \wedge d(i(j^1\tilde{Y})\Omega_L)) \\ &\quad + i(j^1\tilde{Y})d\Omega_L = i(j^1\tilde{Y})(dt \wedge d(i(j^1\tilde{Y})\Omega_L)) \end{aligned}$$

donde la última expresión es igual a cero ya que  $d(i(j^1\tilde{Y})\Omega_L) = \mathcal{L}(j^1\tilde{Y})\Omega_L - i(j^1\tilde{Y})d\Omega_L$ . De manera análoga se prueba para  $\Theta_L^V$ .

□

Por lo tanto, existen formas diferenciales  $\omega$  y  $\theta$  en  $[TQ \times \mathbb{R}]$ , tales que  $\tilde{\pi}^1^*(\omega) = \Omega_L^V$  y  $\tilde{\pi}^1^*(\theta) = \Theta_L^V$ .

**Proposición 7.13**  $E_L^{\nabla}$  es  $\tilde{\pi}^1$ -proyectable

**Demostración:** La función energía Lagrangiana cumple que:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(j^1\tilde{Y})E_L^{\nabla} &= i(j^1\tilde{Y})E_L^{\nabla} = (dE_L^{\nabla})(j^1\tilde{Y}) = -d(i(j^1\tilde{Y})\Theta_L)(j^1\tilde{Y}) \\ &= -(i(j^1\tilde{Y})\Omega_L)(j^1\tilde{Y}) = -i(j^1\tilde{Y})i(j^1\tilde{Y})\Omega_L = 0. \end{aligned}$$

En consecuencia existe una función  $\mathcal{E} \in C^\infty([TQ \times \mathbb{R}])$  verificando que  $\tilde{\pi}^1^*(\mathcal{E}) = E_L^{\nabla}$ .

□

**Proposición 7.14**  $([TQ \times \mathbb{R}], \omega)$  es una variedad simpléctica.

**Demostración:** Debemos probar que  $\omega$  es cerrada y no degenerada.

- $\bar{\pi}^1*(d\omega) = d(\bar{\pi}^1*\omega) = d\Omega_L^V = d\Omega_L - d\Omega_L^H = -d(dt \wedge i(j^1\tilde{Y})\Omega_L) = dt \wedge d(i(j^1\tilde{Y})\Omega_L) = 0$ .

Ya que  $\bar{\pi}^1$  es una submersión, el hecho de que  $\bar{\pi}^1*(d\omega) = 0$ , implica que  $d\omega = 0$ .

- Supongamos que  $i(Z)\omega = 0$ , sea  $X \in \mathfrak{X}(TQ \times \mathbb{R})$  tal que  $\bar{\pi}^1_*(X) = Z$ , entonces  $0 = i(Z)\omega = i(X)\Omega_L^V = i(X^V + X^H)\Omega_L^V = i(X^V)\Omega_L^V = i(X^V)\Omega_L$ .

Como  $L$  es regular, entonces  $X^V = 0$ , lo que implica que  $Z = 0$ .

□

### 7.3.1 Caso Lagrangiano dependiente del tiempo

Consideremos la ecuación de la dinámica en  $TQ \times \mathbb{R}$ , la escribiremos de manera adecuada para poder obtener fácilmente la dinámica en el cociente.

$$\begin{aligned} 0 &= i(X_L)\Omega_L = i(X_L)(\Omega_L^H + \Omega_L^V) = i(j^1\tilde{Y})\Omega_L - dt(i(X_L)i(j^1\tilde{Y})\Omega_L) \\ &+ i(X_L)\Omega_L^V = i(j^1\tilde{Y})\Omega_L + i(X_L)\Omega_L^V = -dE_L^\nabla + i(X_L)\Omega_L^V. \end{aligned}$$

$i(X_L)i(j^1\tilde{Y})\Omega_L = 0$ , ya que  $X_L$  es una solución de (7.2) y  $i(j^1\tilde{Y})\Omega_L = -\mathcal{L}(j^1\tilde{Y})\Theta_L + d(i(j^1\tilde{Y})\Theta_L) = -dE_L^\nabla$ .

Como la conexión  $\tilde{\nabla}$  asociada a  $j^1\tilde{Y}$  permite descomponer  $T(TQ \times \mathbb{R}) = H(\nabla) \oplus V(\pi \circ \pi^1)$ , entonces  $X_L = X_L^H + X_L^V$  y

$$\begin{aligned} 0 &= -dE_L^\nabla + i(X_L^H + X_L^V)\Omega_L^V = -dE_L^\nabla + i(X_L^H)\Omega_L^V + i(X_L^V)\Omega_L^V \\ &= -dE_L^\nabla + i(X_L^V)\Omega_L^V. \end{aligned}$$

ya que  $i(fj^1\tilde{Y})\Omega_L^V = fi(j^1\tilde{Y})\Omega_L^V = 0$ . Observemos que la segunda ecuación no nos proporciona ninguna información sobre  $X_L^V$ , ya que  $i(X_L^V)dt = 0$  siempre se cumple. Por lo tanto tenemos que  $i(X_L^V)\Omega_L^V = dE_L^\nabla$ .

De las proposiciones anteriores se cumple que

$$0 = -d(\bar{\pi}^1*(\mathcal{E})) + i(X_L^V)\bar{\pi}^1*\omega = \bar{\pi}^1*(-d\mathcal{E}) + \bar{\pi}^1*(i(\mathcal{X})\omega) = \bar{\pi}^1*(-d\mathcal{E} + i(\mathcal{X})\omega).$$

Esto implica que  $0 = -d\mathcal{E} + i(\mathcal{X})\omega$ , por ser  $\bar{\pi}^1$  una submersión. Así la ecuación dinámica en  $[TQ \times \mathbb{R}]$  es  $i(\mathcal{X})\omega = d\mathcal{E}$ .

**Proposición 7.15** ( $[TQ \times \mathbb{R}], \omega, \mathcal{E}$ ) es un sistema Hamiltoniano y  $\mathcal{E}$  es una integral primera del sistema ( $[TQ \times \mathbb{R}], \omega, \mathcal{E}$ ).

**Demostración:** Ya que  $(j^1\tilde{Y})L = 0$ , la función energía  $E_L^\nabla$  es constante a lo largo de las trayectorias de (7.2). Por otra parte  $X_L^H(E_L^\nabla) = 0$  pues  $(dE_L^\nabla)X_L^H = -i(fj^1\tilde{Y})i(j^1\tilde{Y})\Omega_L = 0$ . En consecuencia,  $0 = X_L(E_L^\nabla) = X_L^H(E_L^\nabla) + X_L^V(E_L^\nabla) = X_L^V(E_L^\nabla)$ . De lo anterior resulta que  $0 = X_L^V(E_L^\nabla) = \bar{\pi}^{1*}(\mathcal{X}(\mathcal{E}))$  y  $\mathcal{X}(\mathcal{E}) = 0$ .

□

La restricción del sistema Hamiltoniano  $([TQ \times \mathbb{R}], \omega, \mathcal{E})$  a la hipersuperficie definida por  $\mathcal{E} = ctn$ , consigue el mismo resultado que si aplicáramos el proceso de reducción presimpléctica, estudiado en [37], al sistema Lagrangiano inicial  $(TQ \times \mathbb{R}, L)$  bajo la acción de  $j^1\tilde{Y}$ .

Ahora supongamos que  $\mathcal{X} \in \mathfrak{X}([TQ \times \mathbb{R}])$  es una solución de la ecuación dinámica  $i(\mathcal{X})\omega = d\mathcal{E}$ . Queremos recuperar la solución  $X_L \in \mathfrak{X}(TQ \times \mathbb{R})$  de (7.2) a partir de  $\mathcal{X}$ . Sea  $Z := j^1\tilde{Y} + v_\nabla(X) \in \mathfrak{X}(TQ \times \mathbb{R})$ , donde  $X \in \mathfrak{X}(TQ \times \mathbb{R})$  verifica que  $\bar{\pi}_*^1(X) = \mathcal{X}$ . Esta bien definido ya que todo  $X \in \mathfrak{X}(TQ \times \mathbb{R})$  tal que  $\bar{\pi}_*^1(X) = \mathcal{X}$  tiene la misma parte vertical. Entonces:

**Proposición 7.16**  $Z \in \mathfrak{X}(TQ \times \mathbb{R})$  es una solución de (7.2).

**Demostración:** Al ser  $dt$  una forma semibásica se tiene que:

$$\begin{aligned} i(Z)dt &= i(j^1\tilde{Y})dt + i(v_\nabla(X))dt = 1 + i(v_\nabla(X))dt = 1 \\ i(Z)\Omega_L &= i(j^1\tilde{Y})\Omega_L + i(v_\nabla(X))\Omega_L^V = i(j^1\tilde{Y})\Omega_L + i(X)\Omega_L^V \\ &= -\bar{\pi}^{1*}(d\mathcal{E}) + i(X)\bar{\pi}^{1*}\omega = -\bar{\pi}^{1*}(d\mathcal{E}) + \bar{\pi}^{1*}(i(\mathcal{X})\omega) \\ &= \bar{\pi}^{1*}(-d\mathcal{E} + i(\mathcal{X})\omega) = 0 \end{aligned}$$

□

### 7.3.2 Caso no holónimo Lagrangiano dependiente del tiempo

Consideremos la ecuación dinámica del sistema no holónimo Lagrangiano dado por  $(Q, L, D)$ . Sin más que seguir el mismo razonamiento que en el apartado anterior tenemos que

$$i(X_L)\Omega_L = \bar{\pi}^{1*}(-d\mathcal{E} + i(\mathcal{X})\omega) \in \mathcal{V}^*(TD^0)$$

esto implica que

$$\begin{aligned} i(\mathcal{X})\omega - d\mathcal{E} &\in \mathfrak{J} \\ \mathcal{X} &\in \mathfrak{X}([D \times \mathbb{R}]) \end{aligned} \tag{7.4}$$

donde  $\mathfrak{J} = \{\omega \in \Omega^1([TQ \times \mathbb{R}]) \mid \bar{\pi}^{1*}(\omega) \in \mathcal{V}^*(TD^0)\}$

**Proposición 7.17**  $\mathcal{E}$  es una integral primera del sistema 7.4.

**Demostración:** Se sigue de la misma manera que en la Proposición 7.15. □

## 7.4 Propiedades del sistema Lagrangiano Reducido

Consideremos la variedad  $[Q \times \mathbb{R}] := (Q \times \mathbb{R})/\tilde{Y}$  y la submersión  $\bar{\pi} : Q \times \mathbb{R} \rightarrow [Q \times \mathbb{R}]$ . Para cada elemento  $[(q, t)] \in [Q \times \mathbb{R}]$  podemos escoger un representante de la forma  $(\tilde{q}, 0)$ : si  $(q, t) \in [(q, t)]$  entonces,  $(\tilde{q}, 0) = \varphi_{-t}(q, t)$  donde  $\varphi_s(q, t) = (\varphi_s^Q(q, t), t + s)$  es el flujo de  $\tilde{Y}$ . Este elemento es único, ya que si existe  $(q^1, 0)$  y  $(q^2, 0)$  en la misma clase de equivalencia  $[(q, t)]$ , entonces para algún  $s \in \mathbb{R}$ , tenemos  $(q^2, 0) = (\varphi_s^Q(q^1, 0), s)$ . De donde podemos concluir que  $s = 0$  y por lo tanto  $q^1 = q^2$ .

De las consideraciones anteriores se tiene que existe una biyección natural  $\psi$  de  $[Q \times \mathbb{R}]$  en  $Q$ .

$$\begin{array}{ccc} \psi : [Q \times \mathbb{R}] & \longrightarrow & Q \\ & [(q, t)] & \longrightarrow \varphi_{-t}^Q(q, t) \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} \psi^{-1} : Q & \longrightarrow & [Q \times \mathbb{R}] \\ & q & \longrightarrow [(q, 0)] \end{array}$$

Es claro que  $\psi \circ \psi^{-1} = Id|_Q$  y  $\psi^{-1} \circ \psi = Id|_{[Q \times \mathbb{R}]}$ .

**Proposición 7.18**  $\psi$  es un difeomorfismo.

**Demostración:** Consideremos el diagrama

$$\begin{array}{ccc} Q \times \mathbb{R} & \xrightarrow{\bar{\pi}} & [Q \times \mathbb{R}] \\ & \searrow \phi & \downarrow \psi \\ & & Q \end{array} \qquad \begin{array}{c} \uparrow \psi^{-1} \\ \downarrow \psi \end{array}$$

donde  $\phi(t, q) = \varphi_t^Q(t, q)$ .  $\psi$  es diferenciable si y sólo si  $\phi$  es diferenciable, ver [42] y  $\phi$  es diferenciable trivialmente.

Por otra parte, podemos ver  $Q$  como como variedad cociente de  $Q \times \mathbb{R}$ , entonces siguiendo el razonamiento anterior,  $\psi^{-1}$  es diferenciable ya que  $\bar{\pi}$  lo es. En consecuencia  $\psi$  es un difeomorfismo. □



Observemos que por medio de  $\psi$  podemos construir un sistema local de coordenadas naturales en  $[Q \times \mathbb{R}]$ . Sea  $\{U_\alpha, \zeta_\alpha\}$  un atlas en  $Q$ , entonces es fácil ver que  $\{\psi^{-1}(U_\alpha), \zeta_\alpha \circ \psi\}$  es un atlas en  $[Q \times \mathbb{R}]$ .

De igual modo que en la proposición anterior, podemos construir un difeomorfismo

$$\tilde{\psi} : [TQ \times \mathbb{R}] \longrightarrow TQ$$

La proyección  $\pi_1 : [TQ \times \mathbb{R}] \longrightarrow [Q \times \mathbb{R}]$  está bien definida ya que dada una curva integral,  $\gamma$ , de  $j^1\tilde{Y}$ ,  $\pi_1 \circ \gamma$  es una curva integral de  $\tilde{Y}$ .

$$\begin{aligned} \pi_1 : [TQ \times \mathbb{R}] &\longrightarrow [Q \times \mathbb{R}] \\ [(v_q, t)] &\longrightarrow [(q, t)] \end{aligned}$$

**Proposición 7.19**  $\pi_1$  es una submersión.

**Demostración:** En coordenadas naturales,  $\pi_1(t, q, v) = (t, q)$ , de donde  $\pi_1$  es diferenciable y exhaustiva. □

De todo lo anterior se tiene que el siguiente diagrama es conmutativo:

$$\begin{array}{ccccc} TQ \times \mathbb{R} & \xrightarrow{\pi_1} & [TQ \times \mathbb{R}] & \xrightarrow[\cong]{\tilde{\psi}} & TQ \\ \pi_1 \downarrow & & \downarrow \pi_1 & & \downarrow \tau_Q \\ Q \times \mathbb{R} & \xrightarrow{\bar{\pi}} & [Q \times \mathbb{R}] & \xrightarrow[\cong]{\psi} & Q \end{array}$$

Ya que  $L \in C^\infty(TQ \times \mathbb{R})$  es constante a lo largo de las curvas integrales de  $j^1\tilde{Y}$ , podemos definir una función  $\mathfrak{L}$  en  $[TQ \times \mathbb{R}]$ . Consideremos las formas Lagrangianas  $\theta_{\tilde{\mathfrak{L}}}$  y  $\omega_{\tilde{\mathfrak{L}}}$  en  $TQ$  asociadas con la función Lagrangiana  $\tilde{\mathfrak{L}} = \tilde{\psi}_*(\mathfrak{L})$ . Nuestro propósito es comparar éstas con  $\tilde{\psi}_*\omega$  y  $\tilde{\psi}_*\theta$ .

**Proposición 7.20**  $(\tilde{\psi} \circ \pi_1)^*(\theta_{\tilde{\mathfrak{L}}}) = \Theta_L^V = \pi_1^*(\theta)$ .

**Demostración:** Es suficiente con probarlo en coordenadas locales. Sea  $\phi := \tilde{\psi} \circ \pi_1$

$$\phi(t, q^i, v^i) = \left( \varphi_{-t}^i(q^i, t), \frac{\partial \varphi_s^i}{\partial t}(-t; (q^i, t)) + \frac{\partial \varphi_s^i}{\partial q^j}(-t; (q^i, t)) v^j \right) =: (\bar{q}^i, \bar{v}^i)$$

y  $L(t, q^i, v^i) = \bar{\mathfrak{L}}(\phi(t, q^i, v^i))$ , tenemos que

$$\begin{aligned}
 (\tilde{\psi} \circ \bar{\pi}^1)^*(\theta_{\bar{\Sigma}}) &= \frac{\partial \bar{\mathcal{L}}}{\partial \bar{v}^i} \Big|_{\phi(t, q^i, v^i)} \left( \frac{\partial \varphi_{-t}^i}{\partial q^j} \Big|_{(t, q^i)} dq^j + \frac{\partial \varphi_{-t}^i}{\partial t} \Big|_{(t, q^i)} dt \right) \\
 &= \left( \frac{\partial \bar{\mathcal{L}}}{\partial \bar{v}^i} \Big|_{\phi(t, q^i, v^i)} \frac{\partial \varphi_{-t}^i}{\partial q^j} \Big|_{(t, q^i)} \right) dq^j + \frac{\partial \bar{\mathcal{L}}}{\partial \bar{v}^i} \Big|_{\phi(t, q^i, v^i)} \frac{\partial \varphi_{-t}^i}{\partial t} \Big|_{(t, q^i)} dt \\
 &= \frac{\partial L}{\partial v^j} \Big|_{(t, q^i, v^i)} dq^j + \frac{\partial \bar{\mathcal{L}}}{\partial \bar{v}^i} \Big|_{\phi(t, q^i, v^i)} \frac{\partial \varphi_{-t}^i}{\partial t} \Big|_{(t, q^i)} dt + \\
 &\quad \frac{\partial \bar{\mathcal{L}}}{\partial \bar{v}^i} \Big|_{\phi(t, q^i, v^i)} \left( -\Gamma^j(q, t) \frac{\partial \varphi_{-t}^i}{\partial q^j} \Big|_{(t, q^i)} + \Gamma^j(q^i, t) \frac{\partial \varphi_{-t}^i}{\partial q^j} \Big|_{(t, q^i)} \right) dt \\
 &= \frac{\partial L}{\partial v^j} \Big|_{(t, q^i, v^i)} dq^j + \frac{\partial \bar{\mathcal{L}}}{\partial \bar{v}^i} \Big|_{\phi(t, q^i, v^i)} \left( -\Gamma^j(q, t) \frac{\partial \varphi_{-t}^i}{\partial q^j} \Big|_{(t, q^i)} \right) dt + \\
 &\quad \frac{\partial \bar{\mathcal{L}}}{\partial \bar{v}^i} \Big|_{\phi(t, q^i, v^i)} \left( \frac{\partial \varphi_{-t}^i}{\partial t} \Big|_{(t, q^i)} + \Gamma^j(q^i, t) \frac{\partial \varphi_{-t}^i}{\partial q^j} \Big|_{(t, q^i)} \right) dt \\
 &= \frac{\partial L}{\partial v^j} \Big|_{(t, q^i, v^i)} dq^j - \Gamma^j(q^i, t) \frac{\partial L}{\partial v^j} \Big|_{(t, q^i, v^i)} dt = \Theta_L^V
 \end{aligned}$$

donde hemos tenido en cuenta que

$$\frac{\partial L}{\partial v^i} \Big|_{(t, q^i, v^i)} = \frac{\partial \bar{\mathcal{L}}}{\partial \bar{v}^j} \Big|_{\phi(t, q^i, v^i)} \frac{\partial \varphi_s^j}{\partial q^i} \Big|_{(-t, (t, q^i))} = \frac{\partial \bar{\mathcal{L}}}{\partial \bar{v}^j} \Big|_{\phi(t, q^i, v^i)} \frac{\partial \varphi_{-t}}{\partial q^j} \Big|_{(t, q^i)}.$$

Observemos que  $\frac{\partial \varphi_{-t}^i}{\partial t} \Big|_{(t, q^i)} + \Gamma^j \Big|_{(t, q^i)} \frac{\partial \varphi_{-t}^i}{\partial q^j} \Big|_{(t, q^i)} = 0$ , ya que la aplicación  $(t, q^i) \mapsto (t, \varphi_{-t}^i(q^i, t))$  transforma el campo vectorial  $\frac{\partial}{\partial t} + \Gamma^i(q^i, t) \frac{\partial}{\partial q^i}$  en  $\frac{\partial}{\partial t}$ .

□

El resultado anterior se debe al hecho de que la simetría es natural, esto es, una prolongación jet de un campo vectorial en  $Q \times \mathbb{R}$ .

**Proposición 7.21**  $\bar{\pi}^1 * (\tilde{\psi}^*(\omega_{\bar{\Sigma}})) = \Omega_L^V$

**Demostración:** Ya que  $\omega_{\bar{\Sigma}} = -d\theta_{\bar{\Sigma}}$ , tenemos que  $(\psi \circ \bar{\pi}^1)^*(d\theta_{\bar{\Sigma}}) = d((\psi \circ \bar{\pi}^1)^*\theta_{\bar{\Sigma}}) = d\Theta_L^V$ . Por otra parte se verifica que  $d\Theta_L^V = -\Omega_L^V$ . En consecuencia

$$\bar{\pi}^1 * (\tilde{\psi}^*(\omega_{\bar{\Sigma}})) = \Omega_L^V.$$

□

**Corolario 7.22**  $\theta = \tilde{\psi}^*(\theta_{\bar{\mathcal{L}}})$  y  $\omega = \tilde{\psi}^*(\omega_{\bar{\mathcal{L}}})$ .

**Demostración:** De la proposición anterior tenemos que  $\bar{\pi}^{1*}(\tilde{\psi}^*(\theta_{\bar{\mathcal{L}}})) = \bar{\pi}^{1*}(\theta)$ , entonces ya que  $\bar{\pi}^1$  es una submersión,  $\theta = \tilde{\psi}^*(\theta_{\bar{\mathcal{L}}})$ . La segunda afirmación se sigue del mismo modo.

□

Una situación diferente se presenta cuando intentamos hacer lo mismo con la energía. Sea  $\mathcal{E}_{\bar{\mathcal{L}}} := \Delta\bar{\mathcal{L}} - \bar{\mathcal{L}}$  la energía asociada a la Lagrangiana  $\bar{\mathcal{L}}$ . En general  $\bar{\pi}^{1*}(\tilde{\psi}^*(\mathcal{E}_{\bar{\mathcal{L}}})) \neq E_L^\nabla$ . Por lo tanto el sistema Hamiltoniano  $([TQ \times \mathbb{R}], \omega, \mathcal{E})$  no es, en general, Lagrangiano.

**Ejemplo:**

Sea  $(\mathbb{T}\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}, \Omega_L)$  un sistema Lagrangiano regular asociado a la función lagrangiana

$$L(t, x, y, v_x, v_y) = \frac{1}{2}(v_x^2 + v_y^2) - V(y) + (t - x)v_x + (t - x)v_y.$$

Consideremos la simetría infinitesimal  $j^1\tilde{Y} = \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}$ . Teniendo en cuenta la expresión local del flujo,  $\tilde{\mathcal{L}}(\bar{x}, \bar{y}, \bar{v}_x, \bar{v}_y) = \frac{1}{2}(\bar{v}_x^2 + \bar{v}_y^2) - V(\bar{y}) - \bar{x}\bar{v}_x - \bar{x}\bar{v}_y$ . De las consideraciones anteriores tenemos que  $\theta_{\bar{\mathcal{L}}} = (\bar{v}_x - \bar{x})d\bar{x} + (\bar{v}_y - \bar{x})d\bar{y}$  y como ya sabemos

$$\begin{aligned} \varphi^*(\theta_{\bar{\mathcal{L}}}) &= (v_x - x + t)(dx - dt) + (v_y - x + t)dy = \\ &= (x - v_x + t)dt + (v_x - x + t)dx + (v_y - x + t)dy = \Theta_L^V \end{aligned}$$

Por otra parte como  $E_L^\nabla = \frac{1}{2}(v_x^2 + v_y^2) + V(y) + x - t - v_x$ , tenemos que  $\mathcal{E} = \frac{1}{2}(\bar{v}_x^2 + \bar{v}_y^2) + V(\bar{y}) + (\bar{x} - \bar{v}_x)$  que es diferentes de  $\mathcal{E}_{\bar{\mathcal{L}}} = \frac{1}{2}(\bar{v}_x^2 + \bar{v}_y^2) + V(\bar{y})$ .

Ahora podemos resolver la ecuación dinámica  $i(\mathcal{X}_{\bar{\mathcal{L}}})\omega_{\bar{\mathcal{L}}} = d\mathcal{E}$ , obteniendo que

$$\mathcal{X}_{\bar{\mathcal{L}}} = (\bar{v}_x - 1)\frac{\partial}{\partial \bar{x}} + \bar{v}_y\frac{\partial}{\partial \bar{y}} - (1 + \bar{v}_y)\frac{\partial}{\partial \bar{v}_x} + (\bar{v}_x - 1 - \frac{\partial \bar{V}}{\partial \bar{y}})\frac{\partial}{\partial \bar{v}_y}$$

y en consecuencia  $X_L = \frac{\partial}{\partial t} + v_x\frac{\partial}{\partial x} + v_y\frac{\partial}{\partial y} - (1 + v_y)\frac{\partial}{\partial v_x} + (v_x - 1 - \frac{\partial V}{\partial y})\frac{\partial}{\partial v_y}$ .

**Comentario y Ejemplo:** Aunque en el caso mecánico si es posible hallar una solución del sistema reducido, en el caso no holónomo esto puede no suceder. Veamos un ejemplo:

Sea  $(\mathbb{T}\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}, \Omega_L, D)$  el sistema Lagrangiano no holónimo regular asociado a la función lagrangiana

$$L(t, x, y, z, v_x, v_y, v_z) = \frac{1}{2}(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2) - V(y, z) + (t-x)v_x + (t-x)v_y + (t-x)v_z.$$

y a la distribución no integrable

$$D = \left\langle \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial z}, \frac{\partial}{\partial y} \right\rangle$$

Consideremos la simetría infinitesimal del sistema  $Y = \frac{\partial}{\partial x}$ . Como  $D^0 = \langle -ydx + dz, dt \rangle$  se tiene que

$$\mathcal{V}^*(TD^0) = \langle (yv_x - v_z)dt - ydx + dz \rangle$$

y haciendo los cálculos adecuados se obtiene que

$$\mathfrak{J} = \{ \omega \in \Omega^1([\mathbb{T}Q \times \mathbb{R}]) \mid \pi^{1*}(\omega) \in \mathcal{V}^*(TD^0) \} = \{0\}.$$

Por lo tanto la ecuación de la dinámica del sistema reducido es  $i(\mathcal{X})\omega - d\mathcal{E} = 0$ . Siguiendo el razonamiento del apartado anterior se tiene que

$$\mathcal{X} = (\bar{v}_x - 1) \frac{\partial}{\partial \bar{x}} + \bar{v}_y \frac{\partial}{\partial \bar{y}} + \bar{v}_z \frac{\partial}{\partial \bar{z}} - (1 + \bar{v}_y + \bar{v}_z) \frac{\partial}{\partial \bar{v}_x} + (\bar{v}_x - 1 - \frac{\partial \bar{V}}{\partial \bar{y}}) \frac{\partial}{\partial \bar{v}_y} + (\bar{v}_x - 1 - \frac{\partial \bar{V}}{\partial \bar{z}}) \frac{\partial}{\partial \bar{v}_z}$$

que no verifica que  $\mathcal{X} \in \mathfrak{X}([D \times \mathbb{R}])$  y por lo tanto el sistema reducido no tiene solución.

# Capítulo 8

## Conclusiones

En este trabajo se han estudiado diferentes aspectos relacionados con el tratamiento geométrico de los sistemas no holónomos. Esta línea de investigación ha permitido profundizar en el estudio de la formulación y propiedades de estos sistemas y las consecuencias que para su control se derivan. El ámbito genérico en el que se tratan todos los problemas es el de los sistemas mecánicos en variedades de Riemann. En concreto los aspectos más importantes que se han abordado y sobre los que se han aportado resultados originales son:

1. Descripción de los sistemas no holónomos como campos vectoriales en el fibrado tangente. Caracterización geométrica de los multiplicadores de Lagrange y de la subvariedad de puntos de equilibrio.
2. Generalización al caso de variedades de Riemann completas de los teoremas de estabilidad y estabilidad asintótica de La Salle para campos vectoriales, tanto en el caso de puntos de equilibrio aislados como en el de subvariedades. Aplicación de estos resultados a los sistemas no holónomos disipativos y parcialmente disipativos. Generalización de los resultados de estabilidad a los sistemas Lagrangianos.
3. Estabilización de puntos de equilibrio mediante pasividad en el caso de sistemas dinámicos y de sistemas mecánicos con control en variedades de Riemann completas.
4. Formulación geométrica de la noción de extensión dinámica. Aplicación al caso de estabilización de sistemas mecánicos en un punto arbitrario. Generalización al caso de sistemas mecánicos no holónomos con control.
5. Equivalencia entre sistemas mecánicos con control y sus sistemas cinemáticos asociados en el caso de sistemas no holónomos con control y sis-

temas mecánicos con simetrías. Para el caso de sistemas no holónomos infractuados, se han caracterizado conjuntos de soluciones del sistema cinemático que lo son también del sistema dinámico.

6. Reducción de la formulación de contacto para Lagrangianas dependientes del tiempo si existe una simetría infinitesimal de la misma tanto en el caso sin restricciones como en el caso no holónimo.

El trabajo presentado aquí constituye un paso más en el tratamiento geométrico de los problemas enunciados. Damos a continuación una lista de posibles direcciones en las que se podría seguir trabajando:

- Descripción de los sistemas con simetrías no holónomas como campos vectoriales en el fibrado tangente. Invariancia de los multiplicadores de Lagrange. Reducción al álgebra de Lie.
- Estudio de la estabilidad en el caso de sistemas mecánicos con un grupo de simetrías  $G$  tanto en el caso sin ligaduras como en el caso no holónimo.
- Estudio de la estabilidad en sistemas mecánicos con control que poseen grupo de simetrías. Estabilización por pasividad y mediante extensiones dinámicas. Generalización al caso de sistemas mecánicos no holónomos.
- Generalización de la reducción Lagrangiana a situaciones más generales. En particular: sistemas dependientes del tiempo no regulares y sistemas Lagrangianos dependientes del tiempo cuyo espacio de configuración es un fibrado no trivial tanto en el caso regular como no regular.
- Ahondar en el estudio geométrico de las extensiones dinámicas. Relacionar la existencia de extensiones dinámicas "especiales" con propiedades globales de los sistemas con controles.
- Estudiar la aplicación de estos métodos al problema del seguimiento de trayectorias.

# Índice de Materias

- campo de
  - control, 66
  - deriva, 66
- campo dinámico Lagrangiano, 41
- campo vectorial
  - disipativo, 28, 38, 42,44
  - estrictamente disipativo, 28, 38, 42,42
  - parcialmente estrictamente disipativo, 56, 61, 63
- conexión, 101
- controlabilidad
  - en las configuraciones, 82
  - local en las configuraciones, 82
- equivalencia en sentido débil, 85
- extensión dinámica, 71
  - no holónoma, 76
- formas Lagrangianas, 41
- fuerza de ligadura, 29, 33
- función de
  - almacenamiento, 66
  - control, 66
  - Lyapunov, 47, 51
  - salida, 66
  - salida natural, 68
- multiplicadores de Lagrange, 34
- principio
  - de d'Alembert, 30
  - de d'Alembert no holónomo, 32, 105
- punto de equilibrio
  - estable, 46
  - asintóticamente estable, 46
  - globalmente asintóticamente estable, 46
- simetría, 106
- sistema
  - con control, 66
  - completamente actuado, 81
  - infractuado, 85
  - pasivo, 66
- sistema Lagrangiano, 40
  - Lagrangiano no holónomo, 42
  - Lagrangiano no holónomo disipativo, 44
  - Lagrangiano no holónomo estrictamente disipativo, 44
- sistema no holónomo cinemático, 80
- sistema mecánico
  - simple, 27
  - disipativo, 28
  - no holónomo simple, 34
  - no holónomo disipativo, 38
- subfibrado
  - horizontal, 54, 101
  - vertical, 18, 20
- subvariedad
  - asintóticamente estable, 51
  - estable , 50
  - estable débilmente, 50
  - globalmente asintóticamente estable, 51
- subvariedad de
  - ligaduras holónoma, 29
  - ligaduras no holónoma, 31
  - puntos de equilibrio, 36





# Bibliografía

- [1] R. ABRAHAM, J.E. MARSDEN, *Foundations of Mechanics*, Addison-Wesley, 1978.
- [2] R. ABRAHAM, J.E. MARSDEN, T. RATIU, *Manifolds, Tensor Analysis, and Applications*, Springer-Verlag, New-York, 1988.
- [3] P. APPELL, “Exemple de Mouvement d’un Point Assujetti à une Liaison Exprimeé par une Relation non Linéaire entre les Composantes de la Vitesse”, *Rend. Circ. Mat. Palermo* **32**(1911) 48–50.
- [4] S. ARIMOTO, *Control Theory of Non-Linear Mechanical Systems: A Passivity-Based and Circuit-Theoretic Approach*, volume 49 of OESS. Oxford University Press, Oxford, UK,1996.
- [5] V.I. ARNOLD, *Mathematical Methods of Classical Mechanics*, Springer-Verlag, New-York, 1989.
- [6] V.I. ARNOLD, V.V. KOZLOV, A.I. NEIHTADT, “Mathematical Aspects of Classical and Celestial Mechanics”, *Dynamical systems III*, Springer-Verlag, Berlin, 1988.
- [7] J. BAILLIEUL, *Stable Average Motions of Mechanical Systems Subject to Periodic Forcing*, In M.J. Enos, editor, Dynamics and Control of Mechanical Systems, volume 1, 1–23. Field Institute Communications, 1993.
- [8] A.M. BLOCH, “Stability of Nonholonomic Control Systems”, *Automatica* **28** (2)(1992) 431–435.
- [9] A.M. BLOCH, P.E. CROUCH, “Nonholonomic Control Systems on Riemannian Manifolds”, *SIAM J. Control Optim.* **33**(1995) 126–148.
- [10] A.M. BLOCH, N.H. MCCLAMROCH, “Control of Mechanical System with Classical Nonholonomic Constraints”, *Proceedings of the 28th IEEE Conference on Decision and Control* (1989) 201–205.

- [11] A.M. BLOCH, N.H. MCCLAMROCH, M. REYHANOGLU, “Controllability and Stability of Nonholonomic Dynamic Systems”, *Proceedings of the 29th IEEE Conference on Decision and Control* (1990) 1312–1314.
- [12] A.M. BLOCH, N.H. MCCLAMROCH, M. REYHANOGLU, “Control and Stabilization of Nonholonomic Dynamic Systems”, *IEEE Trans. Automat. Contr.* **37**(1992) 1746–1757.
- [13] A.M. BLOCH, P.S. KRISHNAPRASAD, J.E. MARSDEN, G.S. DE ALVAREZ, “Stabilization of Rigid Body Dynamics by Internal and External Torques”, *Automatica* **28** (4)(1992) 745–756.
- [14] A.M. BLOCH, P.S. KRISHNAPRASAD, J.E. MARSDEN, R.M. MURRAY, “Nonholonomic Mechanical Systems with Symmetry”, *Arch. Rational Mech. Anal.* **136** (1)(1996) 21–99.
- [15] R. BROCKETT, “System Theory on Group Manifolds and Coset Spaces” *SIAM Journal of Control* **10** (2)(1972) 265–284.
- [16] R. BROCKETT, “Lie Theory and Control Systems defined on Spheres” *SIAM Journal of Applied Mathematics* **25** (2)(1973) 213–225.
- [17] R. BROCKETT, *Control Theory and Analytical Mechanics* In R. Hermann and C. Martin, editors, *Geometric Control Theory, volume 7 of Lie Groups: History Frontiers and Applications*, 1–46. *Mathematical Scientific Press. Brookline, MA, 1977.*
- [18] R. BROCKETT, R. MILLMANN, H. SUSSMANN, *Differential Geometric Control Theory*, Birkhäuser, Boston, 1983.
- [19] F. BULLO, A.D. LEWIS, “Configuration Controllability of Mechanical System on Lie Groups”, *Proc. MTNS’96*.
- [20] F. BULLO, A.D. LEWIS, K.M. LYNCH, “Controllable Kinematic Reductions for Mechanical Systems: Concepts, Computational Tools, and Examples”, *Proc. MTNS’02 University of Notre Dame, 2002.*
- [21] F. BULLO, K.M. LYNCH, “Kinematic Controllability for Decoupled Trajectory Planning in Underactuated Mechanical Systems”, *IEEE Trans. Robotot and Automation*, **17** (2001) 402–412.
- [22] C. BYRNES, A. ISIDORI, J. WILLEMS, “Passivity, Feedback Equivalence, and the Global Stabilization of Minimum Phase Nonlinear Systems”, *IEEE Trans. Automatic Control*, **36** (1976) 1228–1240.

- [23] F. CARDIN, M. FAVRETTI, “On nonholonomic and Vakonomic Dynamics of Mechanical Systems with Nonintegrable Constraints”, *J. Geometry and Physics* **18**(1996) 295–325.
- [24] J.F. CARIÑENA, M.F. RAÑADA, “Lagrangians Systems with Constraints: a Geometric Approach to the Method of Lagrange Multipliers”, *J. Phys. A: Math. Gen.* **26**(1993) 1335–1351.
- [25] M.P. DO CARMO, *Riemannian geometry*, Birkhuser, Boston, 1992.
- [26] N.G. CHETAEV, “On Gauss Principle ” In Russian, *Ivz. Kazan Fiz. Mat. Obs.* **6** (1932) 323–326.
- [27] Y. CHOQUET-BRUHAT, “Géométrie Différentielle et Systemes Extérieurs”, Dunod, Paris, 1968.
- [28] W.L. CHOW, “Über Systeme von Linearen Partiellen Differential Gleichungen Erster Ordnung”, *Math. Annalen* **117**(1940) 998–1050.
- [29] L. CONLON, *Differentiable Manifolds: a First Course*, Birkhuser, Boston, 1993.
- [30] M. CRAMPIN, “Tangent Bundle Geometry for Lagrangian Dynamics”, *J. Phys. A: Math. Gen.* **16** (1983) 3755-3772.
- [31] P. E. CROUCH, “Geometric Structures in Systems Theory ”, *IEEE Proceedings* **128** (5)(1981) 242–252.
- [32] P. E. CROUCH, A.J. VAN DER SCHAFT, *Variational and Hamiltonian Control Systems, Lecture Notes in Control and Information Sciences*, volume 101. Springer Verlag, New York, 1987.
- [33] D. EBIN, “On Completeness of Hamiltonian Vector Fields”, *Proc. Am. Math. Soc.* **26**(1970) 632–634.
- [34] A. ECHEVERRÍA-ENRÍQUEZ, M.C. MUÑOZ-LECANDA, N. ROMÁN-ROY, “Geometrical Setting of Time-dependent Regular Systems. Alternative models”, *Rev. Math. Phys.* **3** (3) (1991) 301-330.
- [35] A. ECHEVERRÍA-ENRÍQUEZ, M. C. MUÑOZ-LECANDA, N. ROMÁN-ROY, “Non-standard Connections in Classical Mechanics”, *J.Phys. A: Math. Gen.* **28** (1995) 553-5567.
- [36] A. ECHEVERRÍA-ENRÍQUEZ, M. C. MUÑOZ-LECANDA, N. ROMÁN-ROY, “Geometry of Lagrangian First-order Classical Field Theories”, *Fortschr. Phys.* **44** (1996) 235-280.

- [37] A. ECHEVERRÍA-ENRÍQUEZ, M.C. MUÑOZ-LECANDA, N. ROMÁN-ROY, “Reduction of Presymplectic Manifolds with Symmetry.”, *Rev. Math. Phys.* **11**(10) (1999) 1209-1247.
- [38] B. ETKIN, *Dynamics of Flight: Stability and Control* John Wiley and Sons, New York, 1982.
- [39] P.L. GARCÍA, “The Poincaré-Cartan Invariant in the Calculus of Variations”, *Symp. Math.* **14** (1974) 219-240.
- [40] H. GOLDSCHMIDT, S. STERNBERG, “The Hamilton-Cartan Formalism in the Calculus of Variations”, *Ann. Inst. Fourier Grenoble* **23** (1), (1973) 203-267.
- [41] X. GRÀCIA, J. MARÍN-SOLANO, M.C. MUÑOZ-LECANDA, *Variational Principles in Mechanics: Geometric Aspects*, Actas del VII Encuentro de Otoño de Geometría Diferencial y sus Aplicaciones Publicaciones de la Real Sociedad Matemática Española, volumen 1, 1998.
- [42] W. GREUB, S. HALPERING, S. VANSTONE, “Connections, Curvature and Cohomology ” (vol I), Acad. Press, New York, 1972.
- [43] J.A. HERMANS, *Rolling Rigid Bodies, with and without Symmetries* Ph.D. Thesis, University of Utrecht, 1995.
- [44] J.A. HERMANS, “A Symmetric Sphere Rolling on a Surface”, *Nonlinearity* **8** (4)(1995) 493–515.
- [45] A. ISIDORI, *Nonlinear Control Systems*, Springer-Verlag, Berlin, 1989.
- [46] S.D. KELLY, R.M. MURRAY, “Geometric Phases and Robotic Locomotion”, *J. Robotic System* **12** (6)(1995) 417–431.
- [47] D.E. KODITSCHKEK, *The Application of total Energy as a Lyapunov Function for Mechanical Control Systems*, In J.E. Marsden, P.S. Krishnaprasad, and J.C. Simo, editors, *Dynamics and Control of Multibody Systems*, volume 97, 131–157. AMS, 1989.
- [48] J. KOILLER, “Reduction of some Classical Non-holonomic Systems with Symmetry”, *Arch. Rational Mech. Anal.* **118**(1992) 113–148.
- [49] I. KOLMANOVSKY, N.H. MCCLAMROCH, “Developments in Nonholonomic Control Problems”, *Control Systems Magazine* **15**(1995) 20–36.

- [50] W.S. KOON, J.E. MARSDEN, “Optimal Control for Holonomic and Nonholonomic Mechanical Systems with Symmetry and Lagrangian Reduction”, *SIAM J. Control Optim.* **35**(1997) 901–929.
- [51] V.V. KOZLOV, “Realization of Nonintegrable Constraints in Classical Mechanics”, *Soviet Physics. Doklady. A translation of the physics sections of Doklady Akademii Nauk SSSR*, 28, 735–737.
- [52] H. KRISHNAN, M. REYHANOGLU, N.H. MCCLAMROCH, “Attitude Stabilization of a Rigid Spacecraft using two Control Torques: a Non-linear Control Approach Based on the Spacecraft Attitude Dynamics”, *Automatica* **30** (6)(1994) 1023–1027.
- [53] H. KRISHNAN, M. REYHANOGLU, N.H. MCCLAMROCH, “Attitude Stabilization of a Rigid Spacecraft using two Momentum Wheel Actuators”, *AIAA Journal of Guidance, Control and Dynamics* to appear.
- [54] P.S. KRISHNAPRASAD, “Lie Poisson Structures, Dual-Spin Spacecraft and Asymptotic Stability”, *Nonlinear Analysis, Theory, Methods and Applications* **9**(10) (1985) 1011–1035.
- [55] M. DE LEÓN, J. MARÍN, J.C. MARRERO, M. MUÑOZ-LECANDA, N. ROMÁN-ROY, “Characterization of Constraints for Singular Lagrangians on Jet Bundles”, *Fortschr. Phys.* **50** (2)(2002) 105–169.
- [56] M. DE LEÓN, JUAN C. MARRERO, D. MARTÍN DE DIEGO, “Time-Dependent Mechanical Systems with non-linear Constraints”, *International Conference on Diff. Geometry, Budapest, 1996*.
- [57] M. DE LEÓN, D. MARTÍN DE DIEGO, “Solving Non-Holonomic Lagrangian Dynamics in Terms of almost Product Structures”, *Extracta Mathematicae* **11** (2) (1996) 325–347.
- [58] M. DE LEÓN, D. MARTÍN DE DIEGO, “On the Geometry of Non-Holonomic Lagrangian Systems”, *J. Math. Phys.* **37**(1996) 1–26.
- [59] M. DE LEÓN, P.R. RODRIGUES, *Methods of Differential Geometry in Analytical Mechanics*, North-Holland Mathematics Studies 158, 1989.
- [60] N.E. LEONARD, “Mechanics and Nonlinear Control: Making Underwater Vehicles Ride and Glide”, *Nonlinear Control Systems Design* **1**(1998)1–6.
- [61] A.D. LEWIS, “Affine Connections and Distributions with Applications to Nonholonomic Mechanics”, *Rep. Math. Phys.* **42** (1)(1998)135–164.

- [62] A.D. LEWIS, “When is a Mechanical Control System Kinematic?”, *Proceedings of the 38th IEEE Conference on Decision and Control*(1999)1162–1167.
- [63] A.D. LEWIS, “Simple Mechanical Control Systems with Constraints”, *IEEE Transactions on Automatic Control*. **45**(2000)1420–1436.
- [64] A. LEWIS, R. MURRAY, “Variational Principles for Constrained Systems: theory and experiment”, *Int. J. Non-Linear Mechanics*, **30**(1995) 793–815.
- [65] A. LEWIS, R. MURRAY, “Controllability of Simple Mechanical Control Systems”, *SIAM J. Contr. Optim.*, **35 (3)**(1997) 766–790.
- [66] A. LEWIS, R. MURRAY, “Configuration Controlability of Simple mechanical Control Systems”, *Siam Review*, **41**(1999) 555–575.
- [67] A. LEWIS, J.P. OSTROWSKI, R. MURRAY, J. BURDICK, “Nonholonomic Mechanic and Locomotion: The Snakeboard Exemple”, *Proceedings of the International Conference on Robotics and Automation*(1994) 2391–2397.
- [68] P. LIBERMANN, C.M. MARLE, “Symplectic Geometry and Analytical Dynamics”, *D. Reidel Publ. Co., Dordrecht*, 1987.
- [69] A. M. LYAPUNOV, “The General Problem of Motion Stability”, (1892), en *Ruso. Traducido al francés*, *Ann. Fac. Sci. Toulouse*, **9** (1907) 203–474. Reimpreso en *Ann. Math. Study*, **17** Princeton Univ. Press (1949).
- [70] L. MANGIAROTTI, G. SARDANASHVILY, “Gauge Mechanics”, *World Scientific, Singapore*, 1998.
- [71] R. MARINO, S. NICOSIA, “On the Feedback Control of Industrial Robots with Elastic Joints: a Singular Perturbation Approach”, In *1st IFAC Symp. Robot Control*(1985) 11–16.
- [72] C.M. MARLE, “Various Approaches to Conservative and Nonconservative Nonholonomic Systems”, *Reports on Mathematical Systems* **42**(1998) 211–229.
- [73] J.E. MARSDEN, J. SCHEURLE, “The Reduced Euler-Lagrange Equations”, *Fields Inst. Comm.* **1** (1993) 139-164.
- [74] J.E. MARSDEN, A. WEINSTEIN, “Reduction of Symplectic Manifolds with Symmetry”, *Rep. Math. Phys.* **5** (1974) 121-130.

- [75] E. MASSA, E. PAGANI, “Classical Dynamics of Non-holonomic Systems: a Geometric Approach”, *Ann. Inst. Henri Poincaré, Physique théorique* **55** (1)(1991)511–544.
- [76] E. MASSA, E. PAGANI, “A New Look at Classical Mechanics of Constrained Systems”, *Ann. Inst. Henri Poincaré, Physique théorique* **66** (1)(1997)1–36.
- [77] M.C. MUÑOZ-LECANDA, N. ROMÁN-ROY, “Geometría de los Sistemas Dinámicos”, preprint.
- [78] M.C. MUÑOZ-LECANDA, N. ROMÁN-ROY, F.J. YÁNIZ-FERNÁNDEZ, “Time-Dependent Lagrangians Invariant by a Vector Field”, *Letters in Mathematical Physics* **57** (2)(2001) 107–121.
- [79] M.C. MUÑOZ-LECANDA, F.J. YÁNIZ-FERNÁNDEZ, “Dissipative Control of Mechanical Systems: a Geometric Approach”, *SIAM J. Control and Optimization* **40** (5)(2002) 1505–1516.
- [80] R.M. MURRAY, Z.X. LI, S.S. SASTRY, *A Mathematical Introduction to Robotic Manipulation*, CRC Press, Boca Raton, FL, 1994.
- [81] R.M. MURRAY, S.S. SASTRY, “Nonholonomic Motion Planning: Steering Using Sinusoids”, *IEEE Transactions on Automatic Control*. **38** (5)(1993)700–716.
- [82] JU.I. NEIMARK, N.A. FUFÁEV, *Dynamics of Nonholonomic Systems*, *Translations of Mathematical Monographs* 33, American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, 1972.
- [83] H. NIJMEIJER, A. VAN DER SCHAFT, *Nonlinear Dynamical Control Systems*, Springer-Verlag, New-York, 1990.
- [84] R. ORTEGA, A. LORIA, R. KELLY, L. PRALY, “On Passivity Based Output Feedback And Global Stabilization of Euler-Lagrange Systems”, *Int. J. Robust and Nonlinear Control* **5**(1995) 313–323.
- [85] R. ORTEGA, A. LORIA, P.J. NICKLASSON, H. SIRA-RAMÍREZ, *Passivity-base Control of Euler-Lagrange Systems*, Springer-Verlag, London, 1998.
- [86] J.P. OSTROWSKI, *The Mechanics and Control of Undulatory Robotic Locomotion*, Ph.D. dissertation, Calif. Inst. Technol., Pasadena, 1995.

- [87] J.P. OSTROWSKI, J.W. BURDICK, “Controllability Test for Mechanical Systems with Symmetries and Constraints”, *J. Appl. Math. Comp. Sci.* **7** (2)(1997)101–127.
- [88] J.P. OSTROWSKI, J.W. BURDICK, A.D. LEWIS, R.M. MURRAY, “The Mechanics of Undulatory Locomotion: The Mixed Kinematic and Dynamic Cases”, *Proceedings of the IEEE International Conference on Robotics and Automation*(1995).
- [89] M. REYHANOGLU, N.H. MCCLAMROCH, “Controllability and Stability of Planar Multibody System with Angular Momentum Preserving Control Torques”, *Amer. Contr. Conf.*(1991), Boston.
- [90] J. LA SALLE, S. LEFCHETZ, *Stability by Lyapunov’s Direct Method*, Academic Press, 1961.
- [91] W. SARLET, F. CANTRIJN, D.J. SAUNDERS, “A Geometrical Framework for the Study of Nonholonomic Lagrangian Systems”, *J. Phys. A: Math. Gen.* **28**(1995) 3253–3268.
- [92] S. SASAKI, “On the differential geometry of tangent bundles of Riemannian manifolds”, *Tohoku Math. J.* **10**(1958) 338–354.
- [93] D.H. SATTINGER, O.L. WEAVER, “Lie Groups and Algebras, with Applications to Physics, Geometry and Mechanics”, AMS 61, Springer Verlag, New York, 1986.
- [94] D.J. SAUNDERS, “The Geometry of Jet Bundles”, *London Mathematical Society Lecture Note Series 142*, Cambridge University Press.
- [95] J.E. SLOTINE, W. LI *Applied Nonlinear Control* Prentice-Hall, New Jersey, 1991.
- [96] O.J. SORDALEN, “Conversion of Kinematics of a Car with N Trailers into Chained Form”, *Proceedings of the IEEE International Conference on Robotics and Automation* (1993) 382–387.
- [97] M. SPIVAK, *A Comprehensive Introduction to Differential Geometry*, Berkley, 1979.
- [98] M. SPONG, “Modeling and Control of Elastic Joint Robots”, *ASME J. Dyn. Syst. Meas. Contr.* **109**, (1987) 310–319.



- [99] D. TILBURY, R. MURRAY, S. SASTRY, “Trajectory Generation for the  $N$ -trailer Problem using the Goursat Normal Form”, *Proceedings of the 32nd IEEE Conference on Decision and Control (1993)* 971–977.
- [100] A.J. VAN DER SCHAFT, “Linearization of Hamiltonian and Gradient Systems”, *IMA Journal of Mathematical Control and Information* **1**(1984) 185–198.
- [101] A.J. VAN DER SCHAFT, “Stabilization of Hamiltonian Systems”, *Non-linear Analysis, Theory, Methods and Applications* **10** (10)(1986) 1021–1035.
- [102] A. WEINSTEIN, “Lectures on Symplectic Manifolds”, *C.B.M.S. Reg. Conf. Ser. Math.* **29**(1979).
- [103] E.T. WHITTAKER, *A Treatise on the Analytical Dynamics of Particles and Rigid Bodies* Cambridge University Press, 1904 (Fourth edition 1937).
- [104] K. YANO AND S. ISHIHARA, *Tangent and Cotangent Bundles*, Marcel Dekker, New York, 1973.
- [105] J. ZABCZYK, *Mathematical Control Theory* Birhauser, Boston, 1992.