Universitat Autònoma de Barcelona

Departament de Didàctica de la Matemàtica i de les Ciències Experimentals

Un estudio sobre el Conocimiento Didáctico del Contenido (CDC) de profesores de matemáticas que enseñan cálculo diferencial a estudiantes de carreras de ciencias económicas

La Enseñanza Basada en Problemas (EBP) como estrategia metodológica y didáctica

Tesis Doctoral

Luis A. García Oropeza

Dirigida por las doctoras
Carmen Azcárate Giménez y M. Mar Moreno Moreno

Septiembre 2009

Con especial afecto, a mis amadas mujeres:
Kenya y Manuela, pues ellas con sus palabras,
silencios y miradas supieron generar todo el
ambiente idóneo para culminar este proyecto...

Agradecimiento

Definitivamente un proyecto de esta naturaleza difícilmente se puede hacer solo, ni siquiera proponiéndoselo uno, que además no es el caso. Por el contrario, la cantidad de personas que aportaron algo, en menor o mayor proporción, son tantas que la memoria termina pasándome factura y dejándome mal ante aquellas, cuyos nombres no aparecen, pero que puedo dar fe de que están en algún rincón de mi mente. Quiero además expresar que no sólo el aporte y apoyo académico son fundamentales para el desarrollo y culminación de un trabajo como el presente; también lo son, y en la misma medida, el apoyo y estímulo personales, bien sea en el contacto directo del día a día o desde la distancia.

Por otra parte, la consolidación de un trabajo como el que aquí se presenta no es fruto de un desarrollo lineal, aquí se esconden un cúmulo de tristezas, desesperaciones, fracasos, momentos de impotencia, entre otros; donde, precisamente, un sin número de personas me animaron a sortear estos obstáculos para convertirlos en alegrías, optimismo y ánimo para seguir adelante. En otras palabras, este grupo enorme de personas llegaron en el momento oportuno para decir o hacer lo indicado y permitirme salir de esos "bajones" que se convirtieron en un gran aprendizaje que hoy en día se ve cristalizado como parte de mi desarrollo personal y profesional.

Comenzaré por reconocer y agradecer a dos personas que han sido el pilar fundamental de este proyecto: Carmen Azcárate Giménez y Mar Moreno Moreno. Estas dos personas han sabido dirigir este trabajo, de tal manera que sus orientaciones y apoyo, tanto académico como personal, han servido para que en el día de hoy se vea cristalizada una obra que me llena de júbilo el haber compartido con ellas la elaboración de la misma. Sus opiniones y comentarios fueron siempre los más acertados. Mar, Carmen, con ustedes no sólo he aprendido a andar por el escabroso camino de la Didáctica de las Matemáticas sino que además he aprendido de otros temas, tal vez lejanos a esta área pero profundamente cercanos a lo humano. A ustedes, no menos que infinitas gracias.

Otra persona que no me puedo permitir dejar de mencionar y que contribuyó a enriquecer este trabajo, sobre todo a inyectarme mucha de esa energía y dinamismo que le caracterizan, me refiero a Edelmira Badillo. Un lujo de amiga, de investigadora, en muchas partes de este proyecto estará siempre tu nombre.

De igual manera, quiero agradecer la gentileza de cinco profesores que supieron escucharme y que en distintas fases del proyecto aportaron elementos que fortalecieron la calidad del mismo, ellos son: Joan Miralles, Lorenzo Blanco, Matías Camacho, Jordi Deulofeu y José Carrillo. A ustedes, muchas gracias por reservar un espacio de tiempo para mi.

A todos mis compañeros de doctorado debo agradecer y reconocerles su gran aporte, nunca podré olvidar todos aquellos gratos momentos vividos en "*La Saleta*". Sin embargo, quiero aprovechar la oportunidad para destacar el nombre de tres personas con las que compartí momentos especiales. Mi amiga Natasha Mayerhofer, siempre atenta y consecuente en el ámbito académico y también en el personal. También incluyo dos valiosas personas con las que discutí muchas veces la metodología de análisis y la estructura del marco teórico, debo destacar su particular forma de saber escuchar, son ellos: Patricia Toro y José Omar Zúñiga. Recuerdo los momentos del montón de papeles sobre la mesa, discutiendo sobre qué decisión tomar y los cafés en el bar de la facultad, la nostalgia me crece de forma exponencial.

A los profesores de mi Universidad de Los Andes que participaron e hicieron posible esta investigación, gracias por soportar todas mis exigencias y estar pendientes del buen desarrollo de la misma. Más que agradecer, quiero dejar plasmado que esta tesis es más de ustedes que mía.

A mis hermanos Juan Carlos y Yasmín, quiero agradecerles el apoyo moral y afectivo que siempre me transmitieron. Ustedes fueron y serán personas claves no sólo en la consecución de este proyecto sino también en mi vida.

Quiero finalizar estas líneas dándole las gracias a tres amigos especiales que han sido fundamentales no sólo en este trabajo sino a lo largo de mis estudios de doctorado: Lisset Salazar, Delfín Viera y Hánzel Lárez, son ese tipo de personas que poco abundan y que todos deseamos tener como amigos, a ustedes gracias por su apoyo y confianza.

Índice general

Introducción

Este trabajo es el resultado de un amplio estudio sobre el conocimiento profesional del profesor de matemáticas de universidad que enseña cálculo matemático a estudiantes de ciencias económicas, así como su desarrollo profesional y la enseñanza de las matemáticas basada en la resolución de problemas como estrategia metodológica alternativa de enseñanza. No obstante, antes de entrar en detalle sobre el contenido de esta memoria, no podemos obviar que la misma se inició con una inquietud personal, puesto que el autor, además de iniciarse en el campo de la investigación en la didáctica de las matemáticas, también es profesor universitario de matemáticas para carreras relacionadas con las ciencias económicas.

En este orden de ideas, lo que se persiguió en este estudio fue responder a preguntas aparentemente simples de plantear como: ¿cuál es el conocimiento didáctico del contenido (CDC) de los profesores de matemáticas para las carreras de ciencias económicas?, ¿qué contenido económico llevan al aula de clases y cómo lo presentan?, ¿conocen la enseñanza basada en problemas (EBP) como estrategia de enseñanza y la ponen en práctica en algún momento?; todos estos cuestionamientos y otros tantos orientaron e impulsaron nuestros primeros pasos en este estudio.

De todo lo anterior esperamos dejar claro que el foco principal de esta investigación es el profesor de matemáticas de universidad y, como objeto de estudio de este profesional, abordamos el conocimiento didáctico del contenido. Estudiar e indagar sobre el conocimiento del profesor resulta una tarea compleja en sí misma; además, su grado de complejidad se incrementa cuando la relación entre el investigador y los profesores participantes es estrecha, ya que todos trabajan en el mismo departamento de matemáticas y siempre surge la inquietud por parte del profesor participante de sentirse evaluado.

Aquí presentamos un estudio sobre aspectos muy concretos del CDC del profesor de matemáticas de universidad, el cual desarrollamos a partir de un seminario de discusión en torno a la enseñanza del objeto matemático "derivada de una función". También abordamos conceptos afines como el dominio de una función, la monotonía de una función y los valores extremos, todo esto con el fin de aproximarnos de forma heterogénea a los profesores participantes en este estudio. De esta manera buscamos contribuir al fortalecimiento de la investigación en esta línea de la didáctica de las matemáticas y, más concretamente de las didácticas específicas.

El elemento principal que utilizamos para generar las distintas discusiones y reflexiones sobre los diversos objetos matemáticos señalados anteriormente fue la EBP, ya que la misma sirvió para aproximarnos de manera indirecta a los profesores participantes y al mismo tiempo nos permitió indagar sobre el conocimiento del profesor respecto a esta estrategia metodológica de enseñanza; es decir, la EBP jugó un doble papel en este proyecto: (*i*) como estrategia metodológica de recogida de datos y, (*ii*) como elemento de discusión para el estudio del CDC del profesor de matemáticas de universidad.

Pero, ¿por qué la utilización de la EBP como pieza fundamental en este trabajo? Recordemos que ya hablamos de los objetos matemáticos que intervienen en este proyecto y que el mismo se enmarca en el CDC del profesor de matemáticas de universidad que enseña cálculo en carreras de ciencias económicas; pues bien, una de las características de la EBP, vista como estrategia metodológica de enseñanza, consiste en explotar la multidisciplinariedad o en vincular dos o más áreas de estudio en el proceso de enseñanza-aprendizaje. Es por ello que recurrimos a esta estrategia de enseñanza, ya que el vínculo existente entre el cálculo diferencial y otras áreas de las matemáticas tienen una estrecha relación con las ciencias económicas y que, cada día, se van ampliando estos lazos con áreas de las matemáticas como el álgebra lineal, los sistemas dinámicos, la teoría de la medida o el análisis convexo, por citar algunas.

Por otra parte, nos encontramos con la reducción y el análisis de los datos. En este proyecto se explota la dinámica trabajada entre los participantes durante las sesiones del seminario; pero además, se estudia también la interconexión entre sesiones o entre el seminario y el resto de los instrumentos. Es por ello que hicimos uso del análisis de contenido, prevaleciendo el análisis relacional, puesto que no sólo los contenidos disciplinares guardan una estrecha vinculación entre sí, sino también los componentes del CDC que fueron estudiados en este trabajo.

Respecto a la estructura del trabajo, lo hemos organizado en seis capítulos, correspondiendo el último a las conclusiones del mismo. En cada uno de ellos hacemos una pequeña introducción que permita al lector conocer de antemano los hechos más relevantes que se abordarán, discutirán y en definitiva, sobre los que se profundizarán, en el capítulo. A continuación hacemos una breve descripción de cada uno de ellos, lo que a su vez, nos dará una visión global de la tesis.

En el primer capítulo, tratamos el problema de investigación, los objetivos y los distintos contextos en los que se desarrolla el proyecto. Hablamos del punto de partida con el que dimos inicio a este trabajo y los antecedentes del mismo hasta llegar, de forma general, a los orígenes del CDC y de la EBP. Concluimos este capítulo con una justificación de índole personal, el motivo de nuestra investigación y la elaboración de un cuadro-resumen en el que se muestra un esquema de ésta.

El capítulo dos lo dedicamos al marco teórico, es decir, explicar todos los elementos que nos han servido para construir un modelo que nos permitiera explicar e interpretar la información disponible. Los elementos claves de nuestro marco teórico son: La enseñanza universitaria como objeto de investigación, dado la peculiaridad de la institución y del sistema académico. El conocimiento profesional del profesor de matemáticas, como gran pilar alrededor del cual se construye el modelo. Y finalmente, el CDC y la EBP. Todos estos elementos teóricos nos permiten construir un marco teórico a partir del cual desde la perspectiva del profesor, de su CDC y en base a la EBP, explique el modelo de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en un contexto como lo es el económico.

El capítulo tercero corresponde a la metodología, tanto de recogida de datos como de análisis. En él el lector profundizará en aspectos tales como: los instrumentos de recogida de datos, los participantes, las técnicas de análisis empleadas, etc.

En este punto, si me gustaría detenerme especialmente. Si bien los capítulos 4 y 5 corresponden al análisis de datos, en sí mismos, hay una gran diferencia entre ellos. Con la perspectiva de la investigación acabada, podemos decir que el capítulo 4 es un capítulo de análisis de datos menos elaborado, con una secuencia de análisis lineal, tal como nos marcaba la secuencia del instrumento principal y en el que no cruzábamos información. El capítulo 5 es mucho más elaborado. De hecho, un lector ajeno podría pensar que el 5 es el importante y el 4 no aporta nada, de hecho, podríamos haber prescindido del 4, no obstante hemos decidido incluirlo porque el 5 es el resultado del 4, y sin haber pasado previamente por el tipo de análisis que planteamos en el 4 habría sido imposible presentar los resultado que presentamos en el capítulo 5. Uno no tiene sentido sin el otro, aunque al lector le resultará mucho más rico e interesante el 5, dado que en éste, sí cruzamos información, analizamos la coherencia de las respuestas de los profesores. Observamos cómo se triangulan los datos, etc.

Finalmente, en el sexto y último capítulo exponemos las conclusiones. Hemos dividido las conclusiones en: metodológicas y didácticas, atendiendo a la misma división que en su momento hicimos de los objetivos. La última parte del capítulo la reservamos a hacer un análisis crítico de las limitaciones del estudio y en qué medida han condicionado los resultados y la investigación;

y por último, nos aventuramos a exponer algunas líneas abiertas de trabajo por donde podríamos continuar la investigación tan interesante que hemos iniciado en este campo de conocimiento.

Capítulo 1

El Problema, objetivos y contextos

Introducción

En el presente capítulo presentamos el problema objeto de estudio así como los objetivos de la investigación. El capítulo consta de seis apartados: (i) antecedentes, (ii) contexto espacio-temporal, (iii) las preguntas de la investigación, (iv) objetivos, (v) justificación personal y (vi) un esquema donde se resume este trabajo. En la primera parte mencionamos las motivaciones que sirvieron como punto de partida para involucrarnos en esta línea de trabajo y, de igual manera, el trabajo desarrollado por algunos autores de reconocido prestigio que dieron pie para la consolidación de este estudio, así mismo, incluimos un apartado que muestra el contexto dónde y cuándo se desarrolló la investigación. Posteriormente formulamos las preguntas que nos condujeron a la realización de este proyecto para continuar con un apartado destinado a hablar de los objetivos que nos planteamos cubrir por medio de este trabajo. No podíamos concluir este capítulo sin una reflexión personal sobre el valor de este trabajo de investigación y sus repercusiones tanto desde el punto de vista docente como de investigadores con el que deseamos contribuir al desarrollo de la didáctica de las matemáticas, ya que como docentes de matemáticas de universidad e investigadores en el campo de la didáctica de las matemáticas, nos vemos inclinados y con el deber de contribuir en el proceso de enseñanza-aprendizaje del cálculo a nivel superior. Finalmente, cerramos con un cuadro que, a modo de resumen, intenta mostrar de forma esquemática los distintos pasos que conforma este trabajo.

1.1. Antecedentes de la investigación

Comenzaremos por decir que el presente trabajo se sustenta a partir de dos pilares; uno es, el del conocimiento profesional del profesor y, de todas las distintas componentes que lo conforman, no obstante, sólo nos quedamos con el *conocimiento didáctico del contenido* de profesores de matemáticas de universidad, en adelante CDC; el otro pilar es el modelo de la enseñanza de las matemáticas basada en problemas, en adelante EBP a secas aun cuando en el proceso de enseñanza-aprendizaje de otras disciplinas o ciencias se utiliza la misma terminología. Sin embargo, en los momentos en los que consideremos que se debe diferenciar entre la didáctica de las matemáticas respecto a la de cualquier otra área, se lo indicaremos al lector al igual que en el caso del CDC. Conviene advertir al lector que nos apoyamos en la EBP en dos sentidos, por una parte, como *metodología de enseñanza activa* y, por otra, como *metodología para la recolección de datos*.

Más aún hay que resaltar, en primer lugar, lo difícil que resulta realizar investigaciones en el ámbito universitario o, más concretamente, en el económico, de lo cual hablaremos en su momento en el **Apartado 1.2**. Por otra parte; la mayoría de la literatura especializada, por no decir toda, cuando nos referimos a los pilares en los que se basa este trabajo, está centrada en profesores en formación inicial o a profesores en ejercicio, pero en ambos casos de enseñanza básica o a lo sumo preuniversitaria (primaria, secundaria o bachillerato) Carrillo *et al*. (2007), Climent (2002), Llinares (1998) y Carrillo (1996). También nos permitimos mencionar el trabajo desarrollado por Marín (2004) enmarcado en el profesor de universidad, pero en el que no se refiere en ningún momento al profesor de matemáticas. Toda esta situación nos obligó a ir con precaución puesto que no siempre es aceptable una "traducción" al escenario en el que nos encontramos. Con esto queremos resaltar que, a partir de los trabajos citados anteriormente, **hemos diseñado nuestro propio modelo teórico, destacando aún más que hemos realizado un esfuerzo de abstracción en el caso de investigaciones relacionadas con el profesor, pero de niveles y contextos educativos muy lejanos al universitario en el que está centrado el presente trabajo**.

De todos los trabajos que anteceden al presente, existe uno que de manera natural nos condujo y permitió abrir las puertas a esta investigación; éste es, nuestro *treball de recerca* que forma parte del programa de doctorado en didáctica de las matemáticas de la UAB, el cual fue codirigido por las Doctoras Carmen Azcárate y Mar Moreno.

1.1.1. La tesis de maestría o *treball de recerca*

El punto principal de partida de este trabajo es la tesis de maestría desarrollada bajo la codirección de las doctoras Carmen Azcárate (UAB) y Mar Moreno (UdL), titulado: "*Un estudio sobre profesores que enseñan cálculo diferencial a estudiantes de ciencias económicas. Creencias, Concepciones y Conocimiento Profesional*" y presentado en 2004 en la UAB.

Inicialmente, a través del trabajo antes citado, realizamos un estudio de carácter exploratorio cuyo objetivo principal fue el de indagar sobre las creencias, concepciones y conocimiento profesional por medio de un cuestionario abierto con el que se buscó, a partir de éste, analizar y caracterizar los tres pilares antes señalados, así como también, estudiar el conocimiento profesional del profesor de matemáticas en el sentido siguiente:

¿**Qué puede aportar el profesor al programa vigente en cuanto a contenido curricular y a nuevas estrategias para la enseñanza del cálculo diferencial**?

Ahora bien, más allá del modelo de análisis de García (2004), lo importante, es que el mismo se desarrolla en el ámbito universitario y, más concretamente, que el mismo se centra en el profesor, esto quiere decir, en la enseñanza. En este sentido, estamos apostando por la apertura de una línea de investigación de didáctica en el nivel de educación superior o universitario.

Más aún, nuestra tesis de maestría estuvo centrada en aspectos como: (i) la importancia concedida a la derivada en los programas oficiales de ciencias económicas (o afines) y a la relación de ésta con los conceptos específicos de las ciencias económicas, (ii) la influencia de formación profesional de los profesores en la enseñanza que imparten; y de igual modo, (iii) los aportes de los profesores, en materia de innovación, a la enseñanza de la derivada como muestra de su conocimiento profesional.

A partir de dicha investigación, nos dimos cuenta que si bien era imprescindible conocer las creencias y concepciones del profesor de matemáticas sobre situaciones muy particulares de su labor como docente, esto no era suficiente para dar respuesta a preguntas relacionadas con el conocimiento profesional, como la remarcada en el párrafo anterior u otras planteadas en ese mismo trabajo y que no fueron respondidas, como por ejemplo: "*¿se ha replanteado su metodología de enseñanza*?", "*¿sabe el profesor de matemáticas lo útil que es el cálculo diferencial en las ciencias económicas*?", "*¿sabe el profesor de matemáticas qué matemáticas enseñar a los estudiantes de ciencias económicas*?" (García, 2004), o el trabajo sobre una propuesta que quedó abierta en el trabajo antes citado relacionada con "*la implementación de la resolución de problemas para introducir el concepto de la derivada*".

La metodología que se siguió en el *treball de recerca* fue del tipo cualitativa, enmarcada en el estudio de casos; consistió, como dijimos anteriormente en el diseño de un instrumento (cuestionario abierto) que tratase en profundidad cada uno de los objetivos que nos planteamos. Una vez aplicado el instrumento y recogidos los datos, hicimos uso de las redes sistémicas con objeto de estructurar toda la información obtenida, para finalmente hacer un análisis de tipo inductivo, descriptivo e interpretativo de los datos.

Entre los resultados y conclusiones que se derivan de este trabajo podemos destacar las siguientes:

1. Los profesores, en general, le dan una fuerte peso a la manera como fue tratado el tema durante su propia formación, aun cuando son carreras completamente distintas.
2. Como consecuencia inmediata del punto anterior, en la enseñanza que imparten, valoran más el contenido matemático que el contenido económico.
3. El tema de aplicaciones de la derivada lo conciben y orientan más a resolver ejercicios de cálculo que a la resolución de problemas, como lo sostienen algunos profesores en sus respuestas.
4. El aporte que la mayoría de los profesores otorgan al contenido programático es muy pobre; en general se inclinan por seguir un contenido genérico, más propio de un curso general de cálculo.
5. Detectamos algunas carencias didácticas relacionadas con el ámbito profesional del estudiante, tales como: el escaso manejo de conceptos específicos de las ciencias económicas, la interpretación de la derivada en el contexto económico; lo que nos hace sugerir: la creación de un espacio que propicie el intercambio de experiencias didácticas entre los profesores.
6. Como consecuencia del punto anterior, se propone de algún tipo de actividad enmarcada en la formación profesional que permita abarcar las partes didáctica y conceptual relacionadas con el contenido económico.

Estos resultados sumados a la necesidad de querer dar respuesta y profundizar a partir de las preguntas anteriormente expuestas y que no alcanzaron a ser respondidas en García (2004), nos condujeron a diseñar este nuevo estudio en el que finalmente decidimos ahondar sobre:

i Cómo concibe el profesor de matemáticas el proceso de enseñanza-aprendizaje en los cursos de cálculo para estudiantes de ciencias económicas,

ii En qué contexto basa su enseñanza,

iii El conocimiento profesional a partir de un trabajo de autorreflexión,

iv Qué conocimiento de economía debe tener el profesor de matemáticas, entre otros.

Ya que, por una parte, los programas oficiales de las asignaturas contienen un tema reservado a las aplicaciones de la derivada a la economía y, por otra, porque "*...la universidad latinoamericana y en particular la venezolana; actualmente, apuestan por cambios fundamentalmente de tipo metodológicos que impliquen una dinámica más activa y participativa por parte del estudiante*" (García *et al.*, 2006b), razón por la cual apostamos por una enseñanza contextualizada de las matemáticas.

Pero la novedad del presente estudio es doble, por un lado, porque pretendemos continuar con una línea de investigación aún bastante reciente y poco desarrollada como es la de la enseñanza de las matemáticas en el ámbito universitario y; por otro, porque la propia metodología de enseñanza EBP se utiliza al mismo tiempo como metodología de investigación e instrumento de recogida de datos.

1.1.2. Otros trabajos

Al igual que el trabajo anterior, un referente que debemos mencionar es el desarrollado por Moreno (2000). Esta tesis doctoral está centrada en el profesor de matemáticas de universidad; aquí la autora se apoyó en los siguientes aspectos: cognitivos, del pensamiento y didácticos, todos del profesor de matemáticas de universidad, para indagar sobre las creencias y concepciones de los profesores acerca de la enseñanza de las ecuaciones diferenciales. De hecho, lo que perseguía Moreno era, en esencia, determinar las características más relevantes de la *enseñanza* de las ecuaciones diferenciales, explicar *la persistencia de métodos de enseñanza tradicionales* de las ecuaciones diferenciales; así como también, caracterizar a los profesores universitarios de matemáticas en función de sus creencias sobre el proceso de enseñanza-aprendizaje, y en particular sobre la materia que enseñan.

Por otro lado, Flores (1996) sitúa su investigación dentro del paradigma del pensamiento del profesor. El problema de investigación que se planteó Flores fue el estudio de la evolución de las creencias y concepciones de los futuros profesores sobre el *conocimiento matemático*, y sobre la *enseñanza y aprendizaje de las matemáticas*, teniendo como fuente de información los trabajos realizados en la asignatura de prácticas de enseñanza de matemáticas de *futuros maestros de primaria*.

Otro trabajo, este más próximo al nuestro, que sirve como punto de partida, tanto por estar enfocado hacia el conocimiento profesional del profesor, como por el concepto matemático en el que se centra el mismo y, por qué no, por su proximidad al contexto sociocultural en el que se desarrolla esta investigación, pues la misma se desenvuelve en Colombia y más concretamente dentro del sistema educativo colombiano a nivel de bachillerato; es el trabajo de Badillo (2003). En esta tesis doctoral, la autora estudia la relación entre el conocimiento del contenido matemático y el CDC, para ello eligió la *enseñanza de la derivada* como concepto matemático. En este sentido, describe la naturaleza y formas de conocer el concepto de la derivada en dos direcciones: por un lado como objeto matemático y por otro como objeto de enseñanza y aprendizaje. Para cumplir con algunos de los objetivos propuestos, Badillo (2003) centra su atención en la caracterización de las tareas que proponen los profesores para introducir y evaluar el concepto de la derivada.

Un estudio cercano al citado anteriormente y, en consecuencia, muy vinculado al nuestro es la tesis doctoral de la Dra. Carmen Azcárate, quien además es codirectora de la presente memoria. En Azcárate (1990) podemos notar un estudio sobre la comprensión del concepto de derivada, esto quiere decir, que el individuo tenga una visión consistente y coherente de este concepto, pasando por encima del mero ejercicio del cálculo sin llegar a profundizar en la interpretación del mismo. En esta tesis se estudia la derivada desde el punto de vista de la física, teniendo como punto de partida para entender el concepto de derivada hay que comprender en profundidad algunos conceptos previos como por ejemplo: velocidad media e instantánea, tasa media de variación y pendiente de una recta. Todo esto lo hemos sabido tomar en cuenta a la hora de elaborar nuestro instrumento, sólo que además del enfoque físico-matemático también hemos incorporado un enfoque económico.

Por otra parte, mencionamos algunos de los trabajos que se han desarrollado, de manera próxima a nuestra línea específica de interés, por algunos investigadores de reconocido prestigio en el área, como son: los trabajos realizados por Bolívar (2005), Deulofeu (2002), Marcelo (2001, 1999, 1992), Contreras (1999), Carrillo (1996), Llinares (1998, 1992), Puig (1996), Schoenfeld (1985), Pólya (1984), entre otros.

1.1.3. Los orígenes del CDC

Este apartado lo reservamos para hablar de manera breve sobre los orígenes del conocimiento didáctico del contenido (CDC), como línea de investigación. En este caso, Lee S. Shulman y colaboradores son los precursores de esta línea de investigación; específicamente Shulman (1986) desarrolló y dio a conocer una nueva estructura teórica en cuanto al conocimiento y formación de profesores, introduciendo el término: *Conocimiento del Contenido Pedagógico*, CCP o PCK por sus siglas en inglés de "*Pedagogical Content Knowledge*"; no obstante, utilizaremos el término "*Conocimiento Didáctico del Contenido*", en adelante CDC, justificado en Bolívar (2005), Marcelo (1992) y Doyle (1992); con Doyle (1992) justificamos la sustitución que hacemos de "pedagógico" por "didáctico". Shulman (1986) consideró que se debía conjugar durante la formación inicial de los profesores el conocimiento disciplinar y el conocimiento pedagógico, de manera que estos pudiesen contar con una formación más idónea.

Para este fin, en un proyecto sobre el estudio de profesores en formación[1], Lee S. Shulman (1986) conjuntamente con sus colaboradores desarrollaron el CCP; específicamente, estudiaron en los profesores en formación el contenido disciplinar que ellos adquirían y cómo repercutía ese conocimiento en la enseñanza de estos individuos a la hora de iniciarse como profesores.

Para entonces, el CDC fue definido como la interconexión de tres tipos de conocimiento: el conocimiento del **contenido disciplinar**, el conocimiento **didáctico** en sí y el conocimiento del **currículo**; hablaremos de ellos en el capítulo siguiente.

En el caso de España, dos referentes importantes, aun cuando hay varios otros, son Carlos Marcelo y Salvador Llinares, ya que ellos trabajaban en la línea del conocimiento profesional del profesor; pero es en 1992 cuando ambos coincidieron en el Congreso "Las didácticas específicas en la formación del profesorado", realizado en Santiago de Compostela. Carlos Marcelo presentó una ponencia titulada "*Cómo conocen los profesores la materia que enseñan. Algunas contribuciones de la investigación sobre conocimiento didáctico del contenido*", en esta oportunidad el autor realizó una amplia introducción sobre el CDC y trata aspectos muy concretos de esta área como por ejemplo: el tipo de conocimiento especial que supone el CDC en los profesores en formación, la metodología desarrollada en investigaciones sobre esta área y considera, además, el caso de las investigaciones enfocadas hacia las matemáticas y el CDC.

Por su parte, Salvador Llinares participó con la ponencia titulada "*Aprender a enseñar matemáticas. Conocimiento de Contenido Pedagógico y entornos de aprendizaje*"; en este estudio el autor realiza un trabajo más detallado del CDC en el área de la formación de profesores de matemáticas, motivado a la "Reforma Educativa" que vivía España para el momento. Aquí Llinares (1992) comienza por identificar de manera clara dos aspectos a tomar en cuenta sobre el conocimiento de un profesor de matemáticas en formación o en ejercicio.

[1] Knowledge Growth in Teaching Project

> En primer lugar, el conocimiento y destrezas que los profesores de Matemáticas deben poseer para enseñar Matemáticas de manera efectiva. En segundo lugar, la forma en que los estudiantes para profesor y los profesores en ejercicio acceden a este nuevo conocimiento y destrezas
>
> (Llinares, 1992, p. 378)

Otro punto a destacar en el documento citado de Salvador Llinares y que Climent (2002) también lo refleja, tiene que ver con el conocimiento del profesor de matemáticas en dos aspectos; a tomar en cuenta para ellos y que en nuestro marco teórico explicaremos el porqué nosotros no lo consideramos, estos son: el *conocimiento **de** las matemáticas* y el *conocimiento **sobre** las matemáticas*. En el primer caso, Climent (2002) lo define como: "*Conjuntos de conceptos y procedimientos matemáticos*", mientras que el conocimiento sobre las matemáticas para Llinares (1992) tiene que ver con "*el uso que el profesor hace de su conocimiento matemático para conseguir el aprendizaje de sus alumnos*". Finalmente, Salvador Llinares caracteriza el conocimiento de contenido pedagógico del profesor de matemáticas[2]

1.1.4. Los orígenes de la EBP

En este apartado hablaremos en forma general de algunos de los resultados obtenidos hasta ahora en investigaciones sobre EBP como estrategia didáctica, tanto en ciencias como en matemáticas, dejando para el marco teórico un desarrollo más amplio, no sólo como estrategia didáctica, sino también como metodología de recogida de datos. Antes de comenzar a hablar conviene dejar claro que diversos autores se refieren a esta estrategia como ABP (siglas de aprendizaje basado en problemas) o PBL (por las siglas del término en inglés, *problem based learning*), puesto que los trabajos que se han desarrollado en esta línea se han centrado más en el aprendizaje que en la enseñanza; aun así, estos nos han aportado ideas claves para el presente trabajo.

El mayor desarrollo sobre la EBP o ABP, tanto como estrategia didáctica como en investigación en didáctica propiamente, está enmarcado en el área de la salud[3] (medicina, enfermería o afines a éstas) y en el área de bioquímica, destacando en ambas áreas los aportes de Mowshowitz (2006), White (2006, 2005, 2004a, 2004b), McCarthy (2005), Voet (2001), Finucane *et al*. (1998), Barrows (1996, 1986, 1985), Savery y Duffy (1995), Smith (1995), Albanese y

---

[2]Aclaramos que este término nosotros lo llamamos conocimiento didáctico del contenido del profesor de matemáticas o CDC.

[3]La EBP como modelo general de enseñanza se desarrolló en el área de la medicina y la enfermería a mediados de la década de los años 50 del siglo pasado (Savery y Duffy, 1995), concretamente en los primeros años de carrera, en asignaturas como: anatomía, farmacología, fisiología, entre otras.

Mitchell (1993) y Boud y Feletti (1991). También podríamos destacar el aporte en otras áreas del conocimiento como el derecho, la arquitectura, la ingeniería (Savery y Duffy, 1995) pero no lo consideramos pertinente en esta oportunidad; no obstante, conviene mencionar el aporte en el área de ciencias económicas de Milter y Stinson (1995) y Bridges y Hallinger (1992), por ejemplo. Pero en el caso de la didáctica de las matemáticas, que es el tema de nuestro trabajo, también hay un extenso desarrollo del tema.

Aun así, haremos una pausa para aclararle al lector un punto relacionado con la didáctica de la matemática y la EBP. Generalmente, en la literatura relacionada con el campo de la didáctica de las matemáticas se encuentra con mayor frecuencia el término **resolución de problemas**, en adelante R-P, en lugar de EBP, donde la R-P abarca un amplio contenido relacionado con el término en sí, como por ejemplo: enseñanza de las matemáticas basada en la R-P (Deulofeu, 2002; Codina y Rivera, 2001; Carrillo, 1996), enseñanza de técnicas y estrategias para resolver problemas (Contreras, 1999; Puig, 1996; Schoenfeld, 1985; Pólya, 1984), la R-P como actividad que ayuda a consolidar un contenido matemático discutido en clase (Carrillo, 1996; Schoenfeld, 1985; Pólya, 1984).

1.1.4.1. En el área de la salud y afines

Tal como dijimos anteriormente, las investigaciones realizadas sobre EBP en el área de la salud son muy numerosas y aun cuando los inicios de esta estrategia didáctica data de los años 1950's, el desarrollo y consolidación como línea de investigación en didáctica ha cobrado fuerza en los últimos treinta años (Sonmez y Lee, 2003). Por ejemplo, Savery y Duffy (1995) consideran la EBP como un *modelo de enseñanza consistente de tipo constructivista*, que provee una clara conexión entre la teoría y la práctica, en el que se deben tomar en cuenta algunos aspectos claves, de los que hablaremos en el marco teórico, con el fin de poner en marcha esta metodología. Ellos desarrollan su trabajo haciendo referencia al proceso de enseñanza para una escuela de medicina y destacan cuatro aspectos generales sobre la EBP: (**a**) objetivos de aprendizaje, (**b**) generación o elección del problema, (**c**) presentación del problema y (**d**) papel del profesor o facilitador. Ya que nuestro tema de interés es el profesor de universidad, destacaremos lo que estos autores opinan al respecto en los puntos (**a**) y (**d**); y así, ir mostrando algunas características de la EBP relacionadas con el profesor.

> De (**a**):
> El facilitador asume un mayor rol en el modelo del pensamiento metacognitivo, asociado al proceso de resolución de problemas.
> De (**d**): [Del Modelo de Barrow]
> En una sesión [de EBP], el facilitador modela un orden superior de pensamiento por medio de la realización de preguntas que conducen al estudiante a

> profundizar su conocimiento. Para hacer esto, el facilitador constantemente pregunta "¿por qué?", "¿qué entiendes tú?", "¿cómo sabes tú que eso es verdad?"
>
> (Savery y Duffy, 1995, pp. 35-37, traducción realizada por el autor.)

Aunque la EBP surgió como una metodología práctica para formar médicos en contraposición con un sistema de enseñanza tradicional con contenidos definidos, de entrada, por el profesor, ésta no emergió como respuesta a una teoría del campo educativo, sino que surgió como una alternativa que permite la interconexión e integración de disciplinas para que ayudara al estudiante de medicina a emitir el diagnóstico de un paciente, basado en la necesidad de saber y aprender (White, 2001; 2004a).

No obstante, White (2001) deja ver que aun cuando la EBP es una metodología con ciertas bondades, de hecho es recomendada por el NRCP[4], los cambios curriculares han estado marcados por inconvenientes y generado controversias, pero con buena aceptación en determinadas ocasiones ganando cada vez más seguidores; tanto es así que en el año 2000 se reunieron en Alabama más de quinientos institutos y facultades de distintas universidades procedentes de ocho países para discutir y reflexionar sobre la EBP en el congreso titulado: "*PBL 2000 - Problems, Breakthroughs, and Lessons*[5]".

En este congreso destacamos la participación de Bárbara Duch, quien para ese momento era la directora asociada del *Mathematics and Science Education Resource Center at the University of Delaware* y quien cautivó a la audiencia con diversas actividades relacionadas con la EBP, poniendo de manifiesto la importancia de esta estrategia en el campo de las matemáticas, dejando por sentada su efectividad y los requerimientos necesarios que no se encuentran en otras estrategias didácticas habituales. Además, resaltó el rol que juega el profesor en relación con el estudiante, siendo estos últimos los que marcan la pauta en el proceso de enseñanza-aprendizaje (White, 2001).

Continuando con la efectividad de la EBP dentro de la *enseñanza universitaria*, White (2004a) se refiere al informe que la Comisión Boyer[6] realizó en 1998 sobre la investigación que hacen los estudiantes de universidad en niveles de pregrado y en el que manifiestan que se tiene que enfatizar más en la investigación en esta etapa de educación universitaria, en contraposición con algunos profesores universitarios que no ven con buen ojo que los estudiantes de pregrado se involucren cada vez más en actividades de laboratorio o actividades prácticas, puesto que no contemplan entre sus estrategias metodológicas la *enseñanza basada en la investigación*[7] (EBI) y nada mejor que la EBP para implementar la EBI. Esta última metodología, sugiere la Comisión Boyer, debería

[4]*National Resource Center for Paraprofessionals*

[5]Problemas, Avances, y Clases

[6]Comisión Boyer (1998)

[7]El término en inglés es Research-based learning.

implementarse como estándar en el proceso de enseñanza-aprendizaje. Más aún, sobre la EBP dicen:

> Es una excelente manera de estimular la actitud investigadora del estudiante y, tal vez, rescatar parte de la curiosidad de la niñez. Esto pone un valor añadido para plantear preguntas relevantes con el objetivo de buscar respuestas a éstas y así involucrar a los estudiantes en la literatura de investigación.
>
> (White, 2004a, p. 49, traducción realizada por el autor.)

Otra ventaja de la EBP en los estudiantes es que los conduce a un desarrollo del pensamiento crítico y analítico en su carrera, ya que, entre otras cosas, la EBP promueve la necesidad de resolver problemas que, por lo general, son de la vida real. Es por ello que, en las facultades de medicina, un tipo de problema frecuentemente implementado y que se ajusta a esta carrera universitaria es el *estudio de casos* (McCarthy, 2005). Con esta modalidad de EBP,

> [...] el alumno es llevado a un *escenario* para identificar, analizar, valorar, decidir, resolver... en definitiva, *posicionarse*, respecto a lo que en el *caso* se describe, teniendo en cuenta las distintas dimensiones que conforman esa realidad, generalmente compleja.
>
> (Benito *et al.*, 2005, p. 50)

McCarthy (2005) y Aspy *et al*. (1993) coinciden en que los estudiantes de medicina pueden aprender con la EBP diversas asignaturas de forma simultánea como por ejemplo: anatomía, psicología, genética, bioquímica, microbiología, patología y estudios del metabolismo, resaltando de Aspy *et al*. (1993) que estos estudiantes superan en conocimiento a los que siguen cursos de enseñanza tradicional y en el caso de los primeros, les desarrolla la capacidad de integrar asignaturas de ciencias básicas con asignaturas de la rama clínica.

Siguiendo esta línea comparativa de la EBP respecto a una enseñanza tradicional, entre los resultados de McCarthy (2005) nos permitimos destacar los siguientes puntos: (**a**) los estudiantes aprovechan mucho más un curso enmarcado en la EBP por el papel que juega en sí esta estrategia metodológica, (**b**) el grado de compromiso del profesor con los estudiantes es mayor; con lo cual, (**c**) los estudiantes pueden profundizar más sobre el proceso de investigación en ciencias; y finalmente, (**d**) la EBP aporta grandes ventajas en la toma de decisiones cuando el profesor se plantea qué es más importante en la enseñanza: la metodología para enseñar o el contenido que se enseña, ya que la EBP permite combinar ambos aspectos. Nosotros hacemos énfasis en el último punto por la relación directa que guarda con el conocimiento didáctico del contenido, constructo del que hablaremos más adelante puesto que forma, junto con la EBP, la columna vertebral de este trabajo.

Como ya hemos mencionado, Savery y Duffy (1995) destacan cuatro aspectos a la hora de implementar la EBP y en este momento hablaremos del segundo: *generación o elección del problema*. Mowshowitz (2006) presenta unos resultados sobre la elección de algunos problemas para un curso básico o introductorio de biología molecular y muestra una reflexión sobre la efectividad de los mismos en cuanto al incremento del aprendizaje por parte de los estudiantes. Los problemas utilizados en el estudio de Mowshowitz (2006), ella los cataloga de *problemas avanzados*. La investigadora deja claro que desde que comenzó a enseñar el curso de *células y biología molecular*, no encontró problemas adecuados en cuanto al grado de dificultad, lo que le llevó a escribir sus propios problemas.

Aun cuando existen diversos tipos de materiales especializados para llevar a cabo una EBP en diversas ramas de las matemáticas, en el caso particular sobre enseñanza de la derivada para cursos de ciencias económicas, los resultados no fueron los esperados cuando indagamos al respecto. Este hecho nos estimuló para el desarrollo de nuestro trabajo. La creación de un material adecuado para poner en práctica la EBP no es tarea fácil. En este sentido, vale la pena señalar los tres aspectos que Mowshowitz (2006) toma en cuenta para el desarrollo y elaboración de sus problemas y que tomamos como base para el diseño y elaboración de nuestro material, estos son:

(**a**) Origen y uso de los problemas: pone de manifiesto que muchos de los problemas surgieron de las preguntas de exámenes, las cuales fueron cuidadosamente revisadas y discutidas con otros colegas durante años.

(**b**) Naturaleza de los problemas: la investigadora afirma que el objetivo principal de los problemas consiste en desarrollar un amplio aprendizaje en los estudiantes.

(**c**) Objetivos de los problemas: generalmente los problemas están basados en situaciones experimentales reales o inventadas.

Cuando los problemas son extraídos de vivencias experimentales, bien sean reales o no, el estudiante desarrolla un aprendizaje que le involucra directamente en el campo de la investigación y además los sumerge en su área de formación (Mowshowitz, 2006; White, 1993).

Hasta ahora hemos hablado de los orígenes de la EBP enmarcada en el área de la salud y la biología, pero es hora de pasar al terreno en el que se centra parte de este trabajo como es la educación matemática.

1.1.4.2. En matemáticas

Hablar de los orígenes de la EBP en el campo de la enseñanza de las matemáticas, vista como estrategia didáctica y como línea de investigación, tal como se hizo en la sección anterior, no resulta tarea fácil. Entre otras cosas porque a lo largo de la historia tanto en las matemáticas como en la enseñanza de las matemáticas, el término ***resolución de problemas*** es ambigua y ha sido empleado para referirse a todo lo que implique (aunque suene redundante) resolver problemas matemáticos, o bien para realizar la actividad en sí misma o como estrategia didáctica para enseñar un concepto matemático o no matemático. De hecho, los matemáticos se han centrado en resolver problemas para el desarrollo permanente de las matemáticas en toda su extensión. Tanto es así que Contreras (1998) en su tesis doctoral advierte sobre las distintas acepciones o significados que tienen tanto el término "*problema*" como la "*R-P*".

En este orden de ideas conviene diferenciar entre EBP y R-P en este trabajo aun cuando ambas actividades puedan ser vistas en la literatura como estrategias metodológicas dentro de la enseñanza de las matemáticas. En nuestro caso entendemos, *grosso modo*, la R-P como una actividad que va de la teoría a la práctica, es decir, dada una teoría matemática se procede a resolver problemas relacionados con esta teoría de manera que estos problemas permitan profundizar en la comprensión de un concepto y al mismo tiempo estudiar las aplicaciones de esta teoría matemática en otras ciencias o en las propias matemáticas; otro aspecto importante de la R-P es el de adquirir y consolidar técnicas de resolución, destacando así la importancia de la R-P como actividad didáctica que permite afianzar conocimientos (Roanes, 1997).

Dicho de otra manera, la R-P es una metodología didáctica mediante la cual el estudiante debe enfrentar una situación (el problema) que no le es familiar, valiéndose de una teoría adquirida previamente que debe utilizar y aplicar para solventar esta situación (Krulik y Rudnick, 1989). Por ejemplo, Vila y Callejo (2004), para diferenciar una actividad de otra, las llaman de igual manera resolución de problemas, pero vistas según el interés o necesidad del profesor, bien *como objeto* (R-P), o bien, *como herramienta de aprendizaje* (EBP). En este orden de ideas, mostramos las diferencias en un sentido y en otro:

> Los problemas se pueden proponer a los alumnos persiguiendo diversos objetivos como desarrollar estrategias y procesos generales o específicos del pensamiento matemático, o motivar y hacer significativa la introducción de una noción. En el primer caso, la RP es objeto de aprendizaje y hablamos de "aprender a resolver problemas" o a "pensar matemáticamente". En el segundo caso, la RP es instrumento o herramienta de aprendizaje y hablamos de "aprender resolviendo problemas".
>
> (Vila y Callejo, 2004, p. 165)

En este sentido podemos afirmar que la EBP y la R-P no sólo tienen mucho en común en la literatura, sobre todo porque la segunda forma parte de la primera, sino que una actividad u otra va a estar marcada no precisamente por el nombre con que se etiquete a la misma; en todo caso será el enfoque que se le dé al problema y en qué momento del currículo aparece el mismo lo que nos permitirá decir si estamos hablando de EBP o R-P a secas. Según Vila y Callejo (2004) los problemas pueden tener varias connotaciones dentro del proceso de enseñanza-aprendizaje, una de ellas consiste en mostrar un *problema como instrumento de aprendizaje* o de enseñanza; en este caso, ellos opinan:

> Cuando el profesorado propone una situación problema pretende que el alumnado construya los conocimientos, modelos o procesos matemáticos necesarios para resolver el problema. O sea, aquí el problema se constituye en *instrumento* en tanto en cuanto es el motor para indagar en un nuevo campo de conocimiento o profundizar en uno ya conocido. No se busca tanto la funcionalidad como la construcción del saber.
>
> (Vila y Callejo, 2004, p. 157)

Ahora bien, así como dijimos lo que significa en este trabajo la R-P, de forma general, daremos una aproximación personal de la EBP, en este caso la entendemos como una estrategia didáctica para la enseñanza de las matemáticas, pero que a diferencia de la R-P en la que se imparte una teoría previamente, la EBP la entendemos como una actividad que permite la construcción de una teoría a partir de una serie de problemas cuidadosamente planteados (García *et al*., 2006b). Por su parte, DeLoach (2001) considera que la enseñanza de las matemáticas basada en problemas aproxima al estudiante, tanto al trabajo colaborativo como al desarrollo cognitivo por medio de problemas reales y ambiciosos desde el punto de vista didáctico, llevando además al alumno a plantearse él mismo sus propias preguntas.

Pero como el tema que nos ocupa es el origen de la R-P dentro del campo de la educación matemática y más específicamente la EBP como estrategia didáctica para la enseñanza de las matemáticas en cursos de universidad, tomaremos como referencia el artículo de Kilpatrick (1985) en el que hace una revisión de los últimos veinticinco años sobre investigaciones realizadas referente a la enseñanza de las matemáticas y la R-P, con lo cual estaríamos hablando del final de los años 1950's. En este caso, coincidimos con el autor en comenzar citando a George Pólya, entre otras cosas, por lo harto conocido que significa Pólya en el mundo de la R-P en matemáticas y también porque es la época en la que Jeremy Kilpatrick enseñaba por primera vez un curso de matemáticas para bachillerato y, al mismo tiempo, atendía un curso de maestría en educación en la Universidad de California.

Es George Pólya con su obra *How To Solve It*, tal vez, el primer autor que escribió un libro de texto sobre R-P, y aunque el mismo data de 1945, es un libro que sigue siendo una buena referencia para esta actividad. El mismo Kilpatrick, en 1958, comenzó a interesarse en el tema debido a las dificultades pedagógicas que suponía para los estudiantes los problemas de palabras que se discutían en un curso básico de álgebra (Kilpatrick, 1985).

Otro autor que también destaca la obra de Pólya y que bien merece la pena sacar a colación por su indiscutible trayectoria dentro de la R-P es Alan Schoenfeld. Después de quedar cautivado con el libro de Pólya, *How To Solve It*, Schoenfeld se interesó en la R-P por dos razones fundamentales; la primera, porque quería dar respuesta a la pregunta: "*¿qué significa pensar matemáticamente?*", y en segundo lugar, *cómo se puede ayudar a los estudiantes a pensar matemáticamente* (Schoenfeld, 1985).

Sin embargo, lo dicho hasta ahora está directamente relacionado con la R-P en sí misma, no queriendo decir con esto que la R-P no sea una estrategia didáctica para la enseñanza de las matemáticas; sólo que reiteramos lo antes dicho, esto es, entendemos la R-P (a secas) como una estrategia para afianzar o reforzar una teoría que se está estudiando o ya estudiada. De hecho, respetando y tomando en cuenta todo el aporte que han dado los investigadores sobre R-P durante los años siguientes a las fechas antes citadas, damos un salto hasta 1989, año en el cual la *National Council Teachers of Mathematics* consideró que la R-P fuese tomada en cuenta entre los estándares para la enseñanza de las matemáticas (NCTM, 1991); sin embargo, en este documento se habla de manera indistinta cuando se refiere a la R-P; en el primer caso, como actividad posterior a una teoría adquirida y, en el segundo, como herramienta para generar aprendizaje de un contenido:

> ...como [la] aplicación de los conocimientos previamente adquiridos y de los métodos, los algoritmos o los procedimientos rutinarios propios de un dominio conceptual...
>
> ...para que los aprendizajes que se institucionalicen sean los que se pretenden enseñar...
>
> (NCTM, 1991, p. 11, traducción realizada por el autor.)

Otros autores destacados y que han realizado un aporte significativo dentro de la investigación sobre la R-P en el campo de las matemáticas son Luis Puig, José Carrillo y Luis Carlos Contreras entre otros. En Puig (1996), por ejemplo, el autor nos muestra algunos resultados sobre la experiencia vivida en un curso de R-P en el marco de la enseñanza universitaria para estudiantes de futuros profesores de matemáticas; en este caso la R-P es planteada como actividad cognitiva en sí misma, es decir, se busca que el futuro profesor de matemáticas aprenda a resolver problemas y todo lo que implica organizar y desarrollar un curso de R-P con sus estudiantes.

Por ejemplo, Puig (1996), siguiendo los estándares del NCTM (1991), destaca cuatro características sobre el papel de la R-P en el currículo y que mencionamos a continuación: como contenido prioritario, *como medio de aprendizaje y refuerzo de contenidos*, *como método más conveniente para aprender matemáticas* y como aplicación. Sin duda alguna ponemos nuestra lupa en el segundo y tercero, puesto que son dos características fundamentales de la EBP.

Más adelante Puig (1996) desarrolla su trabajo en un espacio muy próximo al nuestro, esto es, relacionado con cursos de matemáticas de universidad; y además, cómo se puede "jugar" con los problemas en la clase, hecho clave dentro de la EBP, puesto que la elección, modificación (según sea el caso), presentación y discusión del problema son elementos fundamentales que el docente debe tener siempre presente para el diseño curricular de un curso enmarcado en la EBP (Forsythe, 2002).

Por su parte Contreras (1998), en su tesis doctoral, realiza un estudio exhaustivo sobre la resolución de problemas; el cual lo divide en cuatro apartados y que nosotros haremos mención a los tres primeros: *¿qué es resolver problemas*?, *¿cuál es el papel de la resolución de problemas en el currículo*? y *¿cómo usan los profesores la resolución de problemas en el aula*?, siendo las dos últimas de particular interés para nosotros; ya que los currículos, en general, suelen hablar de manera superficial o genérica del término, dejando al profesor la libertad de aplicarlo de acuerdo a los intereses metodológicos de éste.

Cuando Carrillo (1996) estudia los tipos de problemas, advierte que existen "*muchísimos*" criterios para clasificar los problemas. No obstante, este autor habla de una clasificación de problemas muy general, una clasificación que guarda relación directa con las dos preguntas que resaltamos en el párrafo anterior, puesto que por un lado habla de la *intencionalidad* con la que están enunciados los problemas o, en el otro caso, según la *procedencia* de los problemas. Si nos centramos en el primer tipo, podemos observar que si un problema es incluido en un currículo es porque tiene un propósito didáctico justificado y el cómo debe ser implementado en el aula depende del profesor.

El mismo Contreras (1998), cuando estudia los distintos significados de la R-P en el aula, hace mención a Hatfield (1978) quien categoriza esta actividad dentro del aula desde tres perspectivas o tipos diferentes:

1. *Teaching for Problem Solving*.
2. *Teaching about Problem Solving*.

3. ***Teaching via Problem Solving***.

Según Contreras (1998), este tercer tipo (resaltado por nosotros) se puede interpretar como el uso de la R-P como herramienta evolutiva de enseñanza de las matemáticas por medio de la R-P. Característica de la R-P que está en sintonía directa con el esquema que le queremos dar en este trabajo y que se aproxima a lo que nosotros entendemos como EBP. También este *tipo* se identifica con lo dicho por Carrillo (1996) en las memorias de su tesis doctoral, desarrollada con profesores de matemáticas de secundaria.

> **LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS** no es sólo una necesidad surgida por el crecimiento del conocimiento, **ES TAMBIÉN UNA OPCIÓN METODOLÓGICA** [de enseñanza].
>
> (Carrillo, 1996, `http://www.uhu.es/luis.contreras/tesis2/CAPS/CAP3.HTM`)

En la cita anterior se habla de forma general de la R-P como *opción metodológica*, algo que no es de extrañar en la literatura en didácticas de las matemáticas, pero Codina y Rivera (2001) dejan ver que ya hay documentos que comienzan a mostrar la implementación, en los nuevos currículos, de una enseñanza basada en problemas.

> En los recientes cambios curriculares, se puede observar a nivel de documentos, cómo la instrucción basada en la resolución de problemas está siendo incorporada como eje que vertebra la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas.
>
> (Codina y Rivera, 2001, p. 125)

Otro aspecto que destaca Contreras (1998) es el papel que le otorgan los profesores, en el aula, a la R-P; en este apartado el autor saca a colación el papel de las creencias del profesor de matemáticas a la hora de implementar la R-P en el aula. Ya en trabajos como los de García (2004) y Moreno (2000) se estudiaron las creencias del profesor de matemáticas y el papel de éstas en el proceso de enseñanza, ya que las mismas juegan un rol importante a la hora de seguir una clase y todo lo que ello significa. Aun así, no es suficiente que el profesor tenga unas concepciones y creencias "apropiadas" (Cooney, 1985) para poner en funcionamiento un proceso de enseñanza enmarcado en la R-P; es necesario además, la posición del profesor respecto al nivel de protagonismo que estos otorgan a la R-P, el rol que juegan los alumnos para ellos y los objetivos que estos persiguen en un curso enmarcado en esta metodología, entre otros.

Ahora bien, sobre el papel que pueda otorgarle el currículo y, en particular, el profesor de matemáticas a la R-P en el aula, hacemos énfasis; ya que si bien resulta un "*procedimiento didáctico*" que permite un mejor rendimiento respecto a otras metodologías de enseñanza de las matemáticas, para que la R-P alcance un nivel de efectividad óptimo en lo que a materia de enseñanza se refiere, esta debe ser trabajada de forma exhaustiva en el aula. En otras palabras, el profesor de matemáticas, en ningún momento, puede entender la R-P como una actividad que consiste en proponer y corregir problemas al igual que lo hace cuando trabaja con ejercicios (Carrillo, 1996).

Hasta ahora no hemos dado una definición precisa de lo que es la EBP y en que se diferencia de la R-P, algo que dejaremos para el siguiente capítulo; sin embargo, no queremos cerrar esta parte del trabajo sin dejar de enfatizar que **un problema matemático que se lleva al aula y que está enmarcado en la EBP, tiene y debe jugar como principal papel el de servir como herramienta para generar una teoría matemática**; rol que no necesariamente juega un problema en la R-P vista de forma general.

1.1.4.3. En ciencias económicas

Consideramos justificado hablar de los orígenes de la EBP dentro de las carreras de ciencias económicas por dos razones fundamentales; en primer lugar, porque el tema central de nuestro trabajo es el conocimiento profesional del profesor que enseña matemáticas para carrera de ciencias económicas y el uso de la EBP como estrategia metodológica de enseñanza de las matemáticas. En segundo lugar, por el amplio desarrollo que ha tenido la EBP dentro de las carreras de economía y de administración de empresas en los últimos años.

Para muestra de nuestra afirmación haremos referencia a Gijselaers *et al*. (1995), ya que es un libro cuyo tema central es la EBP en el marco de la economía y la administración de empresas. Este libro es el resultado del gran auge que ha ganado la enseñanza de las ciencias económicas dentro de la educación superior y en consecuencia, la preocupación de los profesores por mejorar la calidad de la educación ajustada a la adquisición de conocimientos de acuerdo con las necesidades del profesional de hoy en día.

Por otra parte, mencionamos también la publicación electrónica *Handbook for Economics Lecturers*[8] el cual consta de cuatro secciones y haremos especial referencia a la primera sección ya que está relacionada con la enseñanza, y en particular con el trabajo de Forsythe (2002).

Para hablar con la mayor precisión sobre los inicios de la EBP en el campo de las ciencias económicas, citaremos a Win Gijselaers quien dice que:

> En los últimos diez años, el aprendizaje basado en problemas ha sido puesto en práctica, especialmente, en disciplinas que tradicionalmente han tenido una

[8] `http://www.economicsnetwork.ac.uk/handbook/`

> orientación hacia la profesión, como la medicina y el derecho. Durante este período, el aprendizaje basado en problemas ha adquirido una gran reputación en materia de innovación dentro de la educación superior[...] Más recientemente, el aprendizaje basado en problemas también ha sido visto como una alternativa de enseñanza atractiva para carreras que tienen una orientación académica natural (e.g. economía).
>
> (Gijselaers, 1995, p. 39, traducción realizada por el autor.)

Con lo cual podemos afirmar que la implementación de la EBP dentro las ciencias económicas a nivel universitario tiene poco más de quince años, algo si se quiere, relativamente nuevo; pero algo que se debe añadir a la cita anterior es que los profesores que trabajan en ciencias económicas y que utilizan la EBP como estrategia didáctica se manifiestan de manera favorable sobre esta metodología y ven respondidas las preguntas: ¿qué enseñar? y ¿cómo enseñar? (Gijselaers, 1995).

Tal vez, una de las razones que obligue a los profesores en economía y administración de empresas a sentirse a gusto con la EBP es la posibilidad que les ofrece ésta de darle el enfoque multidisciplinar que caracteriza a las ciencias económicas, un aspecto que cada vez es más frecuente dentro de los currículos de economía, dejando a un lado el enfoque lineal o monodisciplinar que tradicionalmente ha caracterizado la enseñanza en estas carreras (Milter y Stinson, 1995).

Por su parte, Forsythe (2002) dice que algunas universidades del Reino Unido que surgieron de la división ocurrida en 1992 en universidades e institutos politécnicos, han cambiado su modelo de enseñanza. Precisamente, en el campo de las ciencias económicas, se está enfocando la enseñanza hacia un conjunto o programas multidisciplinarios, donde la herramienta clave es la EBP. Si nos fijamos en las fechas a las que hacen referencia Forsythe (2002) y Gijselaers (1995), podemos observar que son bastante cercanas; con lo cual, esto nos permite tener una idea bastante próxima de la implementación de la EBP en carreras de economía y administración de empresas.

1.2. Contexto espacio-temporal

Tal como se indicó anteriormente, esta investigación tiene como protagonista al profesor universitario de matemáticas, concretamente al que enseña cálculo diferencial a estudiantes de las licenciaturas de ciencias económicas, administración de empresas y contaduría pública.

Como tema central, elegimos el objeto matemático derivada para el estudio del CDC del profesor de matemáticas en ejercicio. En cualquier caso no debemos olvidar que nuestro trabajo se centra en la enseñanza, de ahí el título del mismo. Dicho esto, es pertinente aclarar que los cursos de cálculo diferencial en los que enseñan estos profesores forman parte de las licenciaturas de Economía y Administración de Empresas y Contaduría Pública de la Universidad de Los Andes en Venezuela. En cualquiera de los casos, estas asignaturas se sitúan en el segundo semestre de los diez que conforman estas carreras.

Para desarrollar nuestra investigación hemos contado con cinco profesores de matemáticas (aunque originalmente fueron seis) con formaciones diferentes: tres licenciados en matemáticas (egresados de una facultad de ciencias) y dos en educación con mención en matemáticas (egresados de una facultad de educación); sin embargo daremos más detalles de los profesores participantes en el **Capítulo 3**.

1.3. Las preguntas de la investigación

El presente trabajo se deriva de una serie de inquietudes o preguntas que nos hemos planteado y que a continuación exponemos, dando origen a los objetivos que más adelante mostraremos.

1. En virtud de que los programas oficiales hablan de R-P, ¿hasta qué punto los profesores están preparados para asumir una enseñanza siguiendo esta metodología?

2. ¿El profesor de matemáticas imparte una enseñanza contextualizada?

    a) ¿El profesor posee un conocimiento disciplinar económico?

    b) ¿El profesor conoce el vínculo de los dos conocimientos disciplinares (matemático y económico)?

    c) ¿Qué conceptos económicos maneja?

3. ¿Es posible, a través de una propuesta didáctica enmarcada en la EBP, generar un espacio de discusión y reflexión con profesores de matemáticas de universidad? Como dato adicional, ¿la creación de este espacio nos podrá permitir hablar de formación profesional?

4. ¿Es posible, con el mismo material mencionado en el ítem anterior, estudiar de manera indirecta el CDC en general y, dentro de éste, la EBP en particular?

5. ¿Qué tipos de problemas plantea el profesor y qué persigue?

6. Qué aporta el seminario como:

   a) Metodología de recogida de datos.

   b) Actividad de reflexión sobre el conocimiento profesional del profesor participante.

1.4. Objetivos

Los objetivos del presente trabajo los hemos dividido en dos líneas bien definidas y diferenciadas; por una parte, partimos de una propuesta curricular cuyo material, después de su diseño y validación por expertos, fue discutido en un seminario con el fin de llegar a unos objetivos de carácter didáctico dentro de la enseñanza de las matemáticas y; por otro lado, utilizar el ya mencionado seminario para evaluar y valorar esta actividad como metodología de trabajo de formación de profesores de universidad, además de la evaluación de los instrumentos de recogida de datos.

1.4.1. Objetivos Metodológicos

A continuación señalamos los objetivos de tipo metodológico:

OM1 Evaluar la validez de los instrumentos de recogida de datos en investigaciones cualitativas sobre el conocimiento del profesor.

OM2 Evaluar el seminario, esta vez no como instrumento de recogida de datos, sino como espacio de trabajo y discusión por el valor formativo que pueda tener esta metodología de trabajo en aspectos como el desarrollo profesional del profesor de universidad.

OM3 Contribuir a la comunidad científica del área mediante el instrumento de análisis de datos y resaltar los elementos más importantes en materia de análisis.

1.4.2. Objetivos Didácticos

Entre los objetivos didácticos podemos destacar los siguientes:

OD1 Analizar el CDC de cada profesor a través de una propuesta curricular, la cual fue discutida en un seminario y complementada con cuestionarios y entrevistas. A partir de este análisis, determinar el perfil de cada profesor e intentar determinar la existencia de un perfil común entre los participantes.

OD2 Detectar hasta qué punto el profesor es consciente de las dificultades específicas de los estudiantes para abordar un determinado tema matemático y de las dificultades específicas de la enseñanza de los conceptos matemáticos relacionados con conceptos propios de otras áreas de conocimiento como la economía.

OD3 Indagar sobre el conocimiento disciplinar que poseen estos profesores sobre el cálculo diferencial en las ciencias económicas, así como las estrategias que siguen para la enseñanza del mismo.

OD4 Estudiar el papel del profesor frente a propuestas metodológicas alternativas para la enseñanza de las matemáticas, utilizando EBP.

OD5 Estudiar y profundizar en el CDC y, a partir de éste, aportar caracterizaciones del CDC en materia de las didácticas específicas.

OD6 Estudiar y profundizar en la EBP y, a partir de ésta, aportar caracterizaciones de la EBP y sus diferencias con la R-P, vista la primera como estrategia de enseñanza que busca estudiar una teoría a partir de problemas planteados en el aula.

OD7 Determinar la permeabilidad o algún cambio en los participantes a lo largo del seminario.

OD8 Validar el material discutido en el seminario de cara a su posible implementación en los cursos de cálculo diferencial de la Universidad de Los Andes, en las carreras de ciencias económicas.

1.5. Justificación personal de la investigación

Cada vez la investigación sobre la enseñanza universitaria centra más la atención de los investigadores y el caso de las matemáticas no es la excepción. En particular, estudiar el profesor de universidad, su conocimiento profesional, su planificación docente, las estrategias que sigue en el proceso de enseñanza-aprendizaje, es un tema clave que nos permite conocer con detalle la enseñanza que se imparte en nuestras universidades y cómo se imparte.

Por otra parte, nos hemos referido en líneas anteriores al proceso de cambio que se viene gestando dentro del sistema educativo universitario a nivel europeo y mundial, es por ello que no sólo consideramos esto como una justificación de nuestra investigación, sino que consideramos oportuno y conveniente el desarrollo de una investigación como ésta, que redunde no sólo en el campo científico sino también en el campo docente universitario como punto de reflexión para todos los profesores que formamos parte del sistema educativo de enseñanza superior.

1.6. A modo de resumen

De lo dicho hasta ahora se pueden resaltar aspectos o preguntas como ¿para y por qué esta investigación? A éstas respondemos en líneas generales que, en primer lugar, se busca contribuir al desarrollo de la comunidad científica relacionada con el área, así como el aporte que pueda significar este trabajo dentro del Departamento de Matemáticas de la Universidad de Los Andes. Por otra parte, a través del mismo, podemos conocer situaciones concretas de este Departamento en cuanto al proceso enseñanza-aprendizaje del cálculo diferencial en relación con las carreras objeto de este estudio.

Para tal fin, partimos de investigaciones previas relacionadas con este trabajo; como son el caso de Bolívar (2005), **García** (**2004**), Badillo (2003), Deulofeu (2002), Marcelo (2001, 1999, 1992), Moreno (2000), Carrillo (1996), Flores (1998), Llinares (1998, 1992), Puig (1996), Schoenfeld (1985), Pólya (1984), entre otros y de los cuales se habló en el **Apartado 1.1**. Ahora bien, tal como se dijo al inicio de este capítulo, el trabajo en cuestión fue desarrollado dentro del Departamento de Matemáticas de la Universidad de Los Andes por nuestra relación directa con el mismo y los temas elegidos tanto matemático (la derivada) como la enseñanza de la derivada en carreras de ciencias económicas, obedecen a la labor que ha destinado a ello por poco más de diez años el autor de esta memoria. Por tanto, queremos resaltar que el presente trabajo queda enfocado hacia el profesor de matemáticas de universidad, su conocimiento didáctico del contenido y la enseñanza de las matemáticas basada en problemas. En este sentido, el conocer, de alguna manera, a los participantes, los programas oficiales de la asignaturas y el trabajo desarrollado en García (2004), entre otros nos permitió dar pie al desarrollo de esta investigación.

En la página siguiente presentamos una visión esquemática (**Figura 1.1**) que resume el diseño y desarrollo de la investigación[9]. Tal como lo hemos señalado, el **antecedente principal** de nuestro proyecto es el trabajo de García (2004), ya que quedaron preguntas por responder y, al mismo tiempo, nos abrió

[9]Este cuadro está diseñado para ser leído de abajo hacia arriba, ya que consideramos que es la manera natural de presentar la evolución del presente trabajo. El color difuminado de las flechas gruesas indica que a medida que avanzamos se va aclarando el "panorama".

el camino hacia nuevos intereses más concretos. Estos aspectos hacia los que nos inclinamos, CDC y EBP, son precisamente la **base teórica** de este trabajo.

En este orden de ideas nos planteamos **el problema** a investigar y para intentar resolver el mismo, nos formulamos una serie de **preguntas** de las que resaltamos las más importantes. Esta serie de preguntas nos condujeron a plantearnos unos **objetivos** de carácter *didáctico*. Para atender a estos objetivos diseñamos un **instrumento** constituido por tres piezas: un *material didáctico* enmarcado en la EBP (aplicado en un seminario), una serie de *cuestionarios* y una *entrevista*. Por medio de este instrumento se abordaron, principalmente, aspectos propios de la enseñanza y el aprendizaje. Como consecuencia del diseño del instrumento, nos planteamos *a posteriori* unos objetivos de carácter **metodológicos**.

La investigación aquí desarrollada sigue una **metodología** del tipo *cualitativa*, atendiendo al estudio de casos (un grupo de profesores de matemáticas de la Universidad de Los Andes - Venezuela). Por otra parte y siguiendo el proceso explicativo sobre el desarrollo de este trabajo, diremos que el *análisis de los datos* es de naturaleza descriptiva, exploratoria e interpretativa. Un desarrollo exhaustivo de la metodología que se siguió en el desarrollo de este trabajo se expone en el **Capítulo 3**.

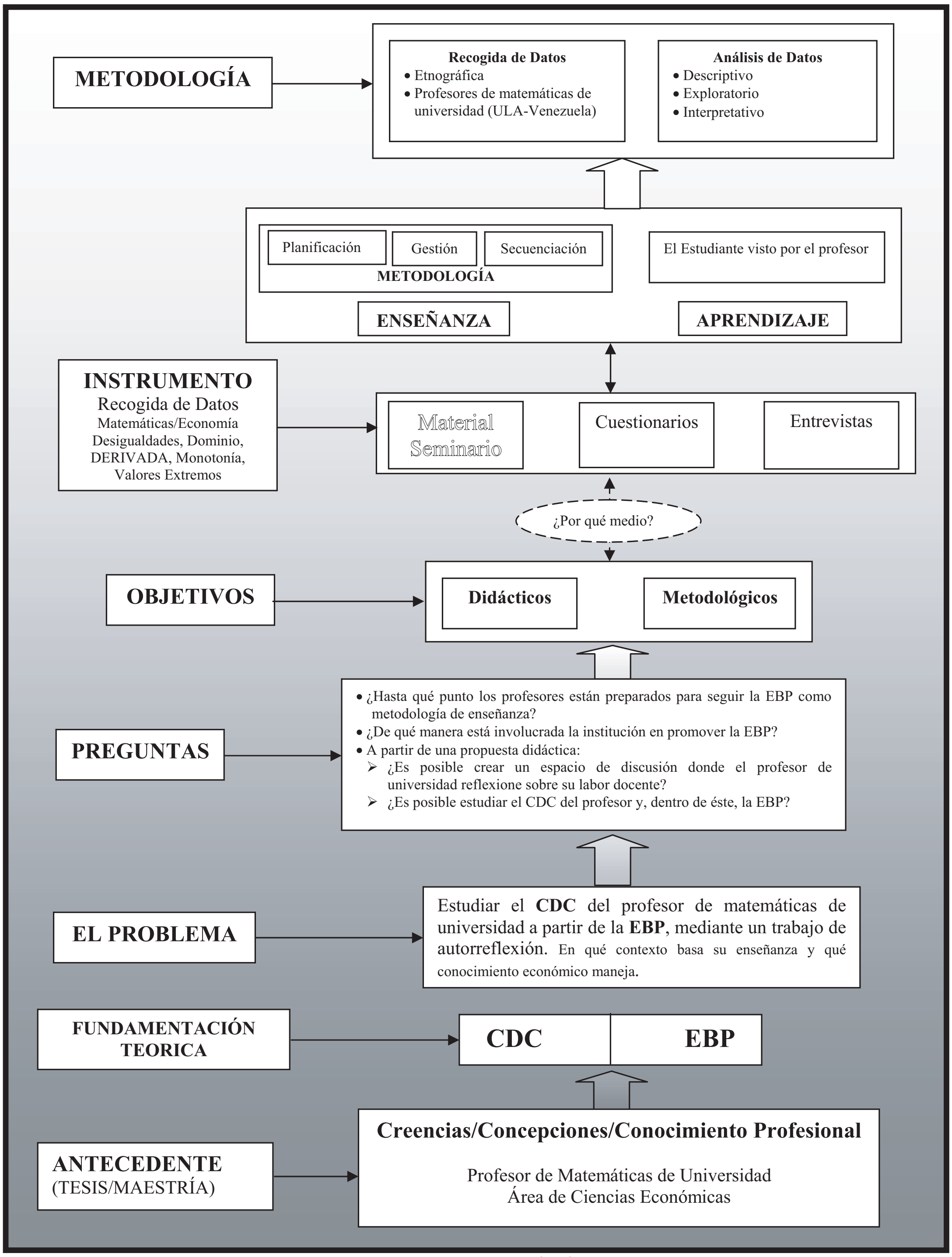


Figura 1.1: Diseño de la Investigación

Capítulo 2

Marco Teórico

Introducción

Comenzaremos por fundamentar nuestro marco teórico en aspectos generales del conocimiento profesional del profesor; en tal sentido, hablaremos de la formación de éste y del rol que juega dentro de la enseñanza universitaria. Por otra parte, hay que destacar el papel que juega el sistema de educación superior y, en particular, el profesor de universidad como objeto de investigación en la actualidad; de allí nuestro interés por estudiar al profesor de matemáticas de universidad y su Conocimiento Didáctico del Contenido (CDC) y lo que ello supone. Finalmente y dado que parte de nuestra investigación se centra en la enseñanza de la matemática basada en problemas (EBP) en cursos de cálculo para estudiantes de ciencias económicas y afines, concluimos este capítulo con algunos aspectos relacionados con esta línea dentro del área de la didáctica de las matemáticas a nivel superior.

2.1. La Enseñanza Universitaria como tema de investigación (EU)

No podemos dudar que la educación a nivel superior o universitario cada vez cobra más auge como tema de investigación tanto en didáctica como en sus distintas áreas que la conforman; aun así, aclaramos que sólo nos remitiremos al área de la enseñanza y lo relacionado con la didáctica de las matemáticas. Como muestra de la relevancia que viene cobrando esta línea de investigación, de la educación superior, remitimos los trabajos de: Knight (2006), relacionado con la formación del profesor; Zabalza (2003), que tiene que ver con las competencias del profesor; Biggs (2005), enmarcado en el aprendizaje o García-Valcárcel (2001a), quien trata, de forma general, la didáctica en la educación superior. Más aún, si atendemos a publicaciones como: la *Revista de la Educación Superior*[1], la cual es editada en México desde 1972, la *Revista Electrónica Interuniversitaria de Formación del Profesorado*[2], editada en España desde 1987 o la *Higher Education*[3], editada por la Springer-Verlag en Holanda desde 1972, podemos observar la evolución que ha tenido la educación universitaria como línea de investigación, así como las ramificaciones que se han derivado de la misma.

Sin embargo, nuestro interés por la enseñanza universitaria no obedece a que sea, precisamente, un tema de moda, en todo caso son otras las causas que nos inducen a explorar y trabajar en este campo; en primer lugar, el autor de esta memoria es profesor universitario de matemáticas y ha venido desarrollando de manera conjunta con sus directores un trabajo orientado en esta línea, más específicamente, en el profesor de universidad. Por otra parte, entendemos que hay una necesidad de atender y mejorar la educación superior y, en este sentido, Díaz (1999) justifica de manera contundente esta exigencia.

> La enseñanza en el nivel universitario es una práctica que requiere con urgencia ser asumida científicamente y con pertinencia social. Es decir, debe ser considerada como un «campo de estudio» que demanda mayores investigaciones, redefiniciones, validaciones y reconstrucciones teóricas para que como «práctica» pueda estar a tono con las exigencias de las transformaciones sociales, políticas, científicas y técnicas del nuevo siglo y, fundamentalmente, incidir en la calidad de profesionales y en la calidad de vida del tercer milenio.
>
> (Díaz, 1999, p. 108)

Como punto adicional que nos mueve a seguir esta línea de investigación, están los procesos de cambios que se vienen gestando dentro de la educación superior mundial y a los que no está exento el sistema universitario venezolano.

Ahora bien, para nosotros hablar de la *enseñanza* significa hablar del *profesor* como el "*especialista de alto nivel dedicado a la enseñanza y miembro de una comunidad académica*" (García-Valcárcel, 2001b), entre otros aspectos que lo caracterizan; sin embargo esto no deja de ser una visión, en exceso, general de lo que es un docente universitario. El profesor de universidad y, en particular, el profesor de matemáticas, usualmente no ha recibido una formación en didáctica[4], la cual; por lo general, es consecuencia de su experiencia personal, de lo visto en los libros de texto, del intercambio de opiniones con otros

[1] `http:www.anuies.mx/servicios/p\_anuies/publicaciones/revsup/index.html`
[2] `http:www3.uva.es/aufop/publica/revaufop.htm`
[3] `http:www.springerlink.com/content/102901/`
[4] En este caso nos referimos de manera concreta al profesor de universidad en Venezuela.

colegas o, como suele ocurrir en la mayoría de los casos, la docencia que éste imparte está influenciada por sus creencias y concepciones (Moreno, 2000), y sobre todo, por la manera como se le enseñó determinada asignatura (García, 2004). A lo anterior hay que añadir que su formación en otras áreas del saber depende fundamentalmente de su propio interés o necesidad; en el caso de las ciencias económicas, sus conocimientos se derivan de los libros de texto que en su momento han consultado para el tema de aplicaciones (García, 2004).

En este orden de ideas nos comenzamos a perfilar hacia el principal punto de interés como objeto de estudio del presente trabajo, es decir, el profesor de matemáticas que atiende cursos de cálculo diferencial en carreras de ciencias económicas. No obstante, no permitimos indicar que la línea de investigación que supone estudiar al docente universitario es muy amplia, ésta abarca aspectos como: desarrollo profesional y formación inicial y permanente (Knight, 2006; García-Valcárcel, 2001b), funciones del docente: administrativas, docentes, investigación y extensión (García, 2004), fundamentación disciplinar de la materia y estrategias metodológicas de enseñanza en sus distintos enfoques (Marcelo, 2001; Medina, 2001), evaluación de los aprendizajes (Biggs, 2005; Zabalza, 2001), entre otros.

Así, es el momento indicado para señalarle al lector el enfoque particular que hacemos sobre la universidad, aun cuando reconocemos que la universidad es un mundo más complejo de lo que a continuación indicamos. Para el caso que nos ocupa, entendemos la universidad como **una institución formadora de conocimiento y, a su vez, como generadora de recurso humano, de profesionales capacitados para desempeñar una función social y profesional, que tiene como uno de sus principales protagonistas al profesor universitario**.

Pero bien, como dijéramos en el capítulo precedente, nuestro trabajo se enmarca en la enseñanza de las matemáticas a nivel universitario. De manera más precisa, estudiamos el conocimiento profesional del profesor de matemáticas y dentro de ésta, el CDC y la EBP, recordando que la segunda juega un doble papel en este estudio; esto es, como metodología de enseñanza y como metodología de recogida de datos. En nuestro caso concreto, nos referimos a la formación profesional del profesor de matemáticas, y centraremos mucho más nuestra atención en el profesor de matemáticas para carreras como ciencias económicas, administración de empresas y/o contaduría pública, donde las matemáticas vienen a ser un **instrumento** imprescindible para el profesional de estas carreras. No obstante, la formación de éste y del profesor universitario en general es una "*actividad asistemática y con escaso rigor*" (García-Valcárcel, 2001b).

El motivo de resaltar la palabra instrumento en el párrafo anterior viene justificada en González y Gil (2000), quienes sostienen que para el profesional de las ciencias económicas "*el objetivo fundamental no consiste en emplear las matemáticas por sí mismas*" al igual que los físicos; por el contrario, éstas deben ser vistas como herramienta para "*estudiar y analizar una realidad concreta*", razón por la cual las matemáticas y sus aplicaciones no deben ir por caminos disjuntos.

En este orden de ideas, ilustramos en la siguiente **Figura 2.1**, tomado de González y Gil (2000), la relación directa que guardan las matemáticas y las ciencias económicas.

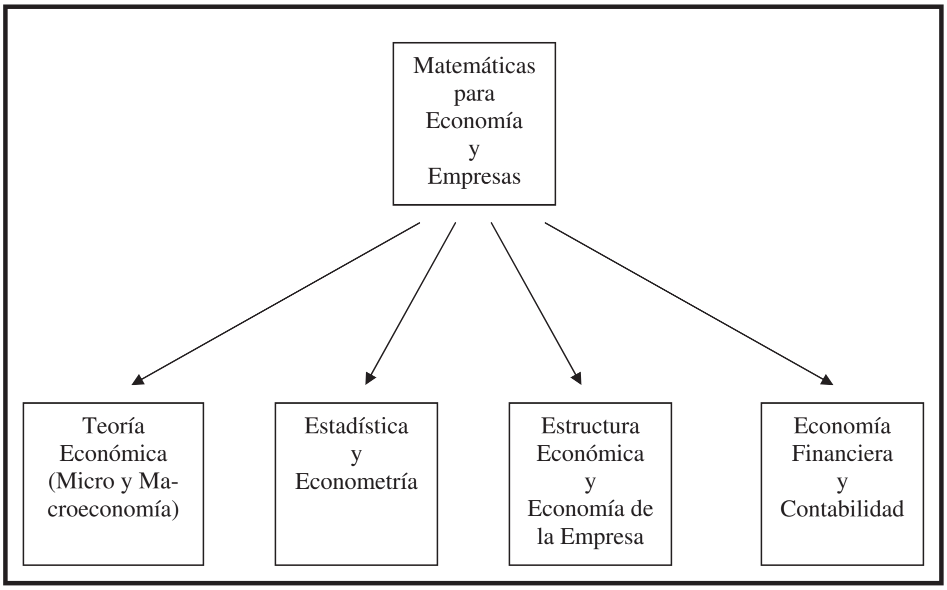


Figura 2.1: Matemáticas → Cc. Económicas

En este sentido, en las secciones subsiguientes desarrollaremos el CDC del profesor de universidad hasta caracterizar aspectos que le son más propios del profesor de matemáticas y, de igual manera, haremos un trabajo similar para la EBP.

2.2. Conocimiento Profesional del Profesor de Matemáticas

Antes de adentrarnos en uno de los temas centrales de esta memoria, nos detendremos brevemente a hablar del conocimiento del profesor de una manera general; caracterizando este conocimiento, para luego entrar de lleno en uno de los temas de nuestro interés, es decir, el CDC del profesor de matemáticas de universidad. Es así como, en primer lugar, comenzaremos por decir lo que es para nosotros, según el caso que nos ocupa, un profesor de universidad y, luego, hablaremos del *conocimiento* de éste.

Dado que pretendemos estudiar el CDC del profesor de matemáticas de universidad, veremos a éste, únicamente, en su plano docente, teniendo en cuenta que también es una persona dedicada a la investigación y, en algunos casos, a la gestión administrativa. Por lo tanto, para el caso de nuestro trabajo, seguimos a De La Orden (1987) en su visión del profesor visto como profesional de la docencia, quien manifiesta que "*el profesor universitario, en cuanto profesor, es una persona profesionalmente dedicada a la enseñanza, un profesional de la educación que necesariamente comparte con los profesores de otros niveles unas funciones básicas orientadas a que otras personas aprendan*". Para ello se vale de su *conocimiento*, el cual pone en práctica durante el proceso de enseñanza-aprendizaje.

Ahora bien, si entendemos el conocimiento desde el punto de vista filosófico, diremos que es el producto de una operación o actividad intelectual en la que el hombre adquiere saber, fundamentada en el razonamiento lógico. Más aún, con la adquisición de conocimiento se consigue entender las propiedades y funciones de las cosas, además de su valor objetivo para la práctica (Russ, 1999; DSF, 1965).

Pero demos un paso adelante y hablemos del profesor, es decir, del *conocimiento del profesor* y de su conocimiento como profesional de la enseñanza. Así y en otro sentido más acorde con nuestra investigación, mostramos la definición de *conocimiento del profesor* que ofrece Bodur (2003), aunque aclaramos al lector que no estamos conforme del todo por lo genérico del concepto, no obstante consideramos que es una buena aproximación de cara a nuestro interés.

> *Conocimiento.* El conocimiento se refiere al entendimiento que hemos convenido dentro de la comunidad escolar como una actividad que merece la pena y es válida. La definición operativa de "conocimiento" se refiere al conocimiento que se adquiere durante la formación de profesor respecto a una educación multicultural durante los cursos contemplados en el programa de educación básica.
>
> (Bodur, 2003, p. 8, traducción realizada por el autor.)

Si atendemos a esta visión del profesor, podemos darnos cuenta que Bodur se refiere al conocimiento del profesor de educación básica o primaria; el profesor de universidad, a diferencia del de bachillerato o niveles inferiores, por lo general no ha recibido formación alguna para la enseñanza, en este sentido podemos inferir que el profesor de universidad puede carecer de aspectos metodológicos de enseñanza, los cuales se fundamentan, principalmente, en sus creencias y concepciones sobre la docencia o en la forma como a ellos se les enseñó (García, 2004; Moreno y Azcárate, 2003).

Más aún, debemos hacer un inciso para recalcar que los profesores objeto de esta investigación proceden de dos carreras universitarias diferentes: unos son licenciados en matemáticas, formados en una facultad de ciencias y que, por ende, no recibieron formación alguna en didáctica; los otros son licenciados en educación, mención matemática, formados en una facultad de humanidades y educación y que, contrario a los primeros, sí han recibido formación en el campo de la enseñanza. En este orden de ideas y siguiendo a Bodur (2003), el conocimiento de este grupo de profesores no es ni podría ser el mismo, puesto que la formación de los mismos proviene de dos entornos o contextos bien diferenciados.

Pero bien, si la idea es definir y caracterizar el conocimiento profesional del profesor de matemáticas es cierto que debemos tomar en cuenta distintos elementos que conforman tal conocimiento. Algo en lo que queremos enfatizar en este trabajo es que queremos ver al profesor de universidad como un profesional de la docencia. Entonces, si nuestro trabajo se enmarca en el profesor de matemáticas de universidad es momento para aproximarnos al conocimiento de éste partiendo de las caracterizaciones hechas por Almeida (2002) y Moreno (2000) referidas al profesor de matemáticas de universidad como el profesional que es. De esta manera, Moreno (2000) caracteriza al profesor de matemáticas señalando que debe poseer o ser, según sea el caso:

> - Dedicación al estudio frente a la transmisión de información.
> - Profesional de la enseñanza por encima de todo.
> - Profesional reflexivo, crítico y competente en su disciplina.
>
> (Moreno, 2000, p. 35)

Por su parte, Almeida (2002) considera cuatro aspectos que deben ser considerados en la profesionalidad docente, los cuales deben formar parte del conocimiento del profesor de matemáticas de universidad, estos son:

- Actitud crítica.
- Contenido matemático.
- Contenido pedagógico-estratégico.
- Contenido didáctico.

En este sentido, podemos afirmar que los aspectos antes señalados y las características del profesor de matemáticas de universidad forman parte o están directamente relacionados con el conocimiento profesional de éste; tanto es así que Bromme (1988) identifica ocho categorías como componentes del conocimiento profesional del profesor de matemáticas, aunque no se refiere de manera específica a profesores de universidad:

- Conocimiento de matemáticas.
- Conocimientos curriculares, los cuales están descritos en los planes de estudio y codificados en los libros de texto y otras herramientas didácticas.
- Conocimiento sobre la clase. La materia explícitamente transmitida por el profesor.
- Conocimiento sobre lo que los alumnos aprenden.
- Metaconocimientos, los cuales definen el marco de orientación en el que se valoran los conocimientos y su relación con la propia profesión.
- Conocimientos sobre didáctica de la asignatura. La estructura lógico-matemática de la asignatura no permite por sí misma decisiones.
- Conocimientos pedagógicos. Nos referimos al campo de los conocimientos que son válidos con relativa independencia de la asignatura.

(Bromme, 1988, pp.25-26)

Por su parte, Rico (1998) refiriéndose al profesor de matemáticas de secundaria a través de su conocimiento profesional afirma que "*al ejercicio como profesor de matemáticas de secundaria se llega con una formación inicial descompensada*", si esta formación inicial sólo la entendemos desde el punto de vista didáctico es un aspecto que también es válido para el docente universitario como lo señalamos anteriormente, algo que no vale si hablamos desde el punto de vista del contenido o la disciplina a enseñar. Ya que el profesor de matemáticas de universidad al momento de ingresar como miembro del cuerpo profesoral realiza una oposición exhaustiva en la que el contenido matemático es el protagonista principal de esta prueba.

Por otro lado Porlán y Rivero (1998) en su trabajo sobre el conocimiento de los profesores, y que nosotros intentamos adaptarlo al profesor de matemáticas de universidad, sostienen que es un conocimiento que está en conexión directa con la práctica, el cual debe adaptarse a situaciones o áreas científicas determinadas. Así, nuestra definición de conocimiento profesional del profesor de matemáticas que seguiremos en este trabajo es el que mostramos a continuación; ya que, como lo señalamos en el capítulo anterior, nuestro interés en este trabajo se fundamenta en el estudio del conocimiento del profesor en relación con su labor docente y en la que destacamos: las dificultades que presentan sus estudiantes en el aula al abordar un tema matemático, sobre el contenido matemático en relación con otros contenidos disciplinares, así como el conocimiento sobre metodologías de enseñanza, entre otros.

***El conocimiento profesional del profesor de matemáticas*, al igual que otros profesionales como por ejemplo el de los médicos o los ingenieros, es un tipo de conocimiento *científico-práctico*, especializado y dirigido a la intervención en ámbitos sociales determinados o concretos (Porlán y Rivero, 1998). Éste debe agrupar todas las creencias, concepciones (García, 2004), saberes y experiencias que un profesor tiene y que pone en práctica durante**

su función como docente (Jiménez y Wamba, 2004) a partir de la reflexión constante de esta labor. Más aún, este conocimiento exige adaptarse a las condiciones del entorno, de los estudiantes, de contextos y áreas específicas de interés propias de las matemáticas o afines a éstas, según sea el caso (Porlán y Rivero, 1998).

Si a lo anterior le añadimos, basándonos en Blanco *et al*. (1995), que un profesor en ejercicio es un profesional que reflexiona constantemente, toma decisiones, posee creencias y concepciones, fija posiciones y entendemos que todo esto conforma una estructura que cambia según el escenario en el que se encuentre el profesor, bien sea por los estudiantes o los lineamientos que sugiere la institución; entonces, el profesor no debe ser visto como un técnico o conocedor de un oficio en el que se aplican un conjunto de recetas aprendidas y estandarizadas.

Entre el párrafo anterior y la definición que le precede nos permiten entender el conocimiento profesional como algo en constante cambio y que obliga a la toma de decisiones, el cual se desarrolla en el orden en que se generen nuevos espacios de discusión y reflexión en los que intervengan los alumnos (aula de clase), colegas del área (profesores de matemáticas con cursos comunes o afines), colegas de otras áreas (profesores de otras áreas no matemáticas pero con afinidad a éstas). No obstante, esta definición está en directa consonancia con lo que Porlán *et al*. (1998) definen como *conocimiento profesional deseable o ideal*.

> El conocimiento profesional deseable es un conocimiento «interesado», puesto que **contiene determinadas actitudes y valores encaminadas a la transformación del contexto escolar y profesional**.
>
> (Porlán *et al*., 1998, p.271, el resaltado es nuestro)

Tal como dijimos arriba, el profesor de universidad en su labor como docente se enfrenta a la toma de decisiones antes, durante y después de la clase, por lo tanto existe una importante conexión entre el *conocimiento profesional* y la *formación continua* o permanente del profesor (Porlán y Rivero, 1998). En consecuencia, este conocimiento debe estar estructurado por un conjunto de "*teorías prácticas*" que comprenden entre otras: los objetivos de la educación, el proceso de construcción del saber y el seguimiento de dicho conocimiento.

En resumen, caracterizamos el conocimiento profesional del profesor de matemáticas de universidad como una estructura que supone:

- Dominio del contenido matemático y su relación con conceptos.
    - De las mismas matemáticas.
    - De otros contenidos disciplinares (Biología, Física, Ingeniería, Economía, entre otras).
- Manejo robusto de la enseñanza y sus componentes.
    - Planificación docente y toma de decisiones.
    - Psicopedagogía.
    - Administración y gestión de la clase.
    - Conocimiento y manejo sobre el material de apoyo para enseñar (libros de texto y otros materiales didácticos).
- Conocimiento y capacidad de discernir sobre el aprendizaje de los alumnos.
    - Conocer características de los estudiantes (errores, actitudes, ventajas).
    - Alcance y profundidad de los conocimientos adquiridos.
    - Evaluación.
- Conocimiento del contenido curricular.
    - Conocimiento sobre qué enseñar.
    - Conocimiento tanto de los programas como de los libros de texto.
- **Conocimiento didáctico del contenido**.
- Conecta el conocimiento matemático propiamente y el conocimiento que el profesor imparte a sus alumnos.
- Conocimiento científico-práctico.
- Agrupa concepciones y creencias sobre las matemáticas y su enseñanza.
- Capacidad de reflexión sobre la actividad docente.
- Conocimiento del contexto.

Por supuesto que todas estas características no dejan de mostrar una visión muy general sobre el conocimiento profesional, algo que resulta excesivo e inmanejable si quisiéramos estudiar todos estos aspectos particulares del profesor. Es por ello que seguimos en la idea de ir moviendo nuestro zoom hacia el tema de nuestro proyecto; esto es, el conocimiento del profesor puesto en práctica mediante su labor docente, específicamente, en el contexto de las matemáticas económicas. Visto de otra manera, nos proponemos indagar sobre los *saberes* y *experiencias* que el profesor posee (conocimiento teórico) y cómo hace uso de ellos durante la docencia que imparte (experiencia práctica), cómo transforman ese conocimiento en una enseñanza provechosa para sus alumnos.

En este sentido, consideramos que el marco ideal para abordar lo inmediatamente expuesto es el conocimiento didáctico del contenido ya que en palabras de uno de sus precursores, lo define como "*una amalgama especial de contenido disciplinar y pedagogía*" (Shulman, 2005), concepto que concreta Marcelo (2002):

> Representa la combinación adecuada entre el conocimiento de la materia a enseñar y el conocimiento pedagógico y didáctico referido a cómo enseñarlo.
>
> (Marcelo, 2002, p. 53)

Pero qué es y qué contempla realmente el CDC y, más aún, qué aspectos de aquellos que componen este conocimiento tan particular estudiaremos nosotros en el profesor de matemáticas de universidad. A estas preguntas responderemos en el siguiente apartado.

2.3. Conocimiento Didáctico del Contenido (CDC)

En primer lugar diremos que como área de interés en el campo de la investigación educativa, el CDC simboliza "*la confluencia de esfuerzos de investigadores didácticos con investigadores de* ***materias específicas***[5] *preocupados por la formación de analogías y metáforas*" (Marcelo, 2002), ya que es posible que la enseñanza sufra cambios significativos según la materia que se enseñe. En tal sentido, lo que se busca estudiar mediante el CDC son las relaciones entre el conocimiento que posee el profesor de una disciplina específica con la manera de enseñarla, ya que guardan una estrecha relación (Climent, 2002).

Los trabajos recientes enmarcados en el CDC se han inclinado fundamentalmente por investigar la enseñanza de contenidos disciplinares específicos, entre los que destacan las matemáticas, la química, la física y la educación física, entre otras áreas[6]. En el caso de las matemáticas destacamos a Climent

[5]En el caso que nos ocupa trabajamos con profesores de matemáticas que enseñan en cursos de cálculo para estudiantes de ciencias económicas. En particular, estudiaremos algunos aspectos sobre la enseñanza de la derivada en un marco muy particular, como es la relación entre este concepto matemático y el campo de las ciencias económicas.

[6]Estos datos se pueden verificar tanto en la base de datos ERIC:
http://www.eric.ed.gov/) como en el Google Académico (http://scholar.google.es/

(2002), Contreras (1998), Badillo (2003), An *et al*. (2004), Kahan *et al*. (2003), Llinares (1998), Blanco *et al*. (1995), entre otros. Pero si atendemos a los trabajos de las distintas áreas del conocimiento, podemos notar que los mismos tocan temas particulares dentro de estos contenidos; los cuales, además, se ocupan en su mayoría de trabajar con profesores en formación y más aún, son contadas las investigaciones que estudian al profesor de universidad y en ninguno de los casos al profesor de matemáticas para cursos de cálculo a estudiantes de ciencias económicas, situación que viene a darle un significado muy particular a este trabajo en el área de la educación matemática.

Pero retomemos las preguntas formuladas al final del apartado anterior:

¿Qué es y qué contempla el CDC como constructo vinculado al profesor?

Comenzaremos por la definición de CDC de Veal y MaKinster (1999), quienes dicen que es una estructura con características particulares que le permite al profesor *transferir* a sus estudiantes el conocimiento que este tiene sobre un contenido disciplinar. Esta estructura contiene las diversas maneras de representar ideas, analogías, ejemplos adecuados, ilustraciones y explicaciones, tanto de forma verbal como escritas, de forma que la transferencia del conocimiento se haga comprensible a los estudiantes.

En este sentido, podemos entender el CDC como un conocimiento práctico con el que el profesor persigue, mediante estrategias metodológicas diversas, hacer que el estudiante capte y aprenda un contenido disciplinar. Todo esto visto como una sola pieza de la didáctica.

Por otra parte Reyes y Gárritz (2006) dan una definición de CDC enmarcada en profesores universitarios que trabajan el concepto de *Reacción Química*; ellas comienzan haciendo hincapié en que se debe distinguir el CDC del conocimiento pedagógico general, tomando en cuenta que en este último se incluyen los fundamentos genéricos de organización y dirección en el aula de clases, las teorías generales y métodos de la enseñanza. También destacan que un aspecto significativo a tomar en cuenta en el CDC es que el profesor conozca al máximo sobre el *conocimiento previo* (An *et al*., 2004) de sus estudiantes, en particular, sobre las "*concepciones alternativas de los estudiantes*[7]". Esto recalca que:

[7] A las respuestas contradictorias con los conocimientos científicos vigentes, ampliamente extendidas, que se suelen dar de manera rápida y segura (apenas se dejan contestaciones en blanco), que se repiten insistentemente y que se hallan relacionadas con determinadas interpretaciones de diversos conceptos científicos, se las denomina frecuentemente errores conceptuales y a las ideas que llevan a cometerlos **concepciones alternativas** (porque realmente responden a la existencia de ideas muy diferentes a las ideas científicas que queremos enseñar). Esas ideas alternativas son las que en las cuestiones anteriores llevan a contestar mayoritariamente de forma coherente con ellas y constituyen un serio obstáculo para el aprendizaje de las ciencias (Carrascosa, 2005, pp. 186-187. El resaltado es nuestro).

> [...] el conocimiento de una disciplina [por parte del profesor] se vuelve infructuoso si no se consideran los puntos de vista acerca del contenido que tienen los estudiantes.
>
> Diversos estudios han demostrado la necesidad de esta relación entre el conocimiento profundo de la disciplina y de las ideas previas de los estudiantes.
>
> (Salazar, 2005, p. 5)

Más aún, la manera de desarrollar el CDC de los profesores expertos de universidad es *transformar* el conocimiento del contenido disciplinar en esquemas o formas que sean más comprensibles a sus alumnos, adaptándolo al contexto del tema específico que se esté desarrollando. En este sentido, lo que se ha vuelto crucial en este tipo de investigación es "*la importancia de la relación entre lo que los profesores piensan y cómo lo enseñan*" (Reyes y Gárritz, 2006).

Si tratamos de enlazar lo que sostienen Veal y MaKinster (1999) con lo que afirman Reyes y Gárritz (2006) y Salazar (2005); pero, además, adaptado al contexto matemático, llegamos a que este conocimiento exige, entre otras cosas, que el profesor de matemáticas: tenga claro los conceptos, imágenes, estructuras y planteamientos básicos vinculados a un tema (en el caso de la derivada: el concepto de límite, las distintas interpretaciones de la derivada, los conceptos de monotonía y valores extremos, etc.); pero que además sepa identificar en sus estudiantes las dificultades y errores conceptuales que enfrentarán estos (problemas con las reglas de derivación, como por ejemplo las del producto, cociente o de la cadena), así como lo que esto signifique en su aprendizaje. Este conocimiento también reclama al profesor que, **mediante actividades o estrategias metodológicas**[8], el estudiante pueda identificar y discernir sobre sus ideas previas.

En otro orden de ideas, Talanquer (2004), en su trabajo con profesores de química, habla sobre distintas acepciones o puntos de vista sobre el CDC como por ejemplo:

1. Es el resultado de la aplicación del conocimiento didáctico y pedagógico de carácter general a la enseñanza de una disciplina en particular.

2. El desarrollo del CDC ocurre, principalmente, a través de la experiencia y la práctica en el aula.

3. En otro contexto, sostiene que el CDC debería ser el eje central en el diseño curricular en los programas de formación profesional, procurando el

[8]La idea de resaltar esta frase es por el hecho de estar plenamente en consonancia con la metodología aplicada en nuestro proyecto, ya que la implementación del seminario se identifica con las actividades mencionadas.

análisis y la reflexión en espacios integradores así como la discusión del contenido disciplinar desde el punto de vista didáctico-pedagógico.

Si este tipo de conocimiento tiene una clara influencia en la eficacia del docente en el aula, resulta interesante tratar de identificar de qué manera el CDC determina la forma de pensar del docente, las decisiones que toma, y las acciones que emprende en el salón de clases. Sin embargo, un punto en el que Talanquer (2004) enfatiza y coincide con Reyes y Gárritz (2006) y Salazar (2005) es sobre el conocimiento que el profesor debe tener en relación con sus estudiantes. Algo que queda explícito en estos párrafos anteriores es que el estudiante juega un papel fundamental en el CDC del profesor, tanto es así que los autores antes citados hacen especial hincapié en las concepciones alternativas y; en general, a todo el conocimiento con el que el estudiante llega al curso, además de la actitud de este último respecto a determinados conceptos o situaciones propias de la materia a estudiar.

En este orden de ideas nos permitimos afirmar que **conocer** al estudiante es un paso crucial para mejorar la enseñanza de las matemáticas o de cualquier disciplina, ya que el profesor puede planificar y tomar decisiones a partir de lo que éste conozca de sus alumnos.

Por lo tanto y con lo dicho hasta ahora caracterizamos el CDC del profesor en general.

- Conocimiento del contenido disciplinar.
    - Conocimiento y dominio de conceptos, imágenes y estructuras básicas.
    - Conocimiento con otros contenidos disciplinares.
- Conocimiento sobre la enseñanza (metodología para hacer y construir conocimiento).
- Vincula de manera significativa los dos anteriores.
- Posee estructura de transferencia de conocimiento mediante una diversa gama de acciones y esquemas.
- Conocimiento sobre el aprendizaje y los estudiantes (este conocimiento induce a mejorar la toma de decisiones).
    - Concepciones alternativas de los estudiantes.
    - Actitudes.
    - Errores.

Ahora bien, de acuerdo a las caracterizaciones mostradas del CDC y de lo dicho hasta ahora del mencionado conocimiento, coincidimos con Marcelo (1995) sobre la manera como se genera el mismo, éste afirma que:

> El CDC se construye a partir del conocimiento del contenido que el profesor posee, así como del conocimiento pedagógico general, y del conocimiento de los alumnos, y también es consecuencia de la propia biografía personal y profesional del profesor. Sin embargo no todos los autores están de acuerdo en aceptar que el *Conocimiento Didáctico del Contenido* existe diferenciado del conocimiento propio del contenido.
>
> (Marcelo, 1995, p. 6)

Desde nuestro punto de vista, la última parte de la cita cobra un fuerte valor cuando nos referimos al profesor de matemáticas de universidad y más aún, si estos atienden cursos para carreras en las que las matemáticas son vistas como una herramienta para, además de resolver problemas, entender teorías propias de estas carreras pero con un amplio contenido matemático. En este caso inferimos que el conocimiento disciplinar es la base fundamental del CDC. Además, fijamos posición respecto al conocimiento del contenido que debe poseer un profesor de matemáticas para carreras de ciencias económicas y afines, el cual se tiene que extender a conceptos y teorías básicas de economía, eso sí, sin la necesidad de llegar al nivel de un profesional de la economía.

Ahora bien, en el ánimo de seguir avanzando e ir esculpiendo nuestro marco teórico hacia la especificidad de nuestro proyecto, nos referiremos a algunos trabajos enmarcados en el CDC dentro de la didáctica de las matemáticas, los cuales no sólo destacamos por el contenido disciplinar sino por los objetos que se estudian, ya que en algunos de los casos hay cierta proximidad al nuestro. Sin embargo hacemos la observación siguiente: en cualquiera de los trabajos que citamos a continuación ninguno se desarrolla en un marco del profesor de universidad, hecho que nos hace ir con especial cuidado y nos conduce a procurar ofrecer un aporte a esta línea de investigación en el campo de la didáctica de las matemáticas.

Por ejemplo, además de los dicho hasta ahora sobre el CDC, Blanco *et al*. (1995) en su trabajo con profesores en formación o estudiantes para profesores (de educación secundaria y bachillerato) de ciencias y matemáticas destacan dos aspectos o componentes dentro del conocimiento profesional de profesores; que a saber son: *componente estática* y *componente dinámica*. En atención a la primera, ésta se refiere a aspectos de interés general que son independientes de un profesor en particular y del ambiente específico en el cual desenvuelve el trabajo docente. Esta componente tiene la particularidad de ser *impersonal* y puede ser adquirida a través de materiales y métodos diversos. Aun cuando en el presente trabajo intervienen licenciados en matemáticas y licenciados en educación matemática, lo que quiere decir que su formación es distinta, nuestro objetivo no consiste en estudiar esta componente del CDC con los profesores participantes en esta investigación.

Por otra parte, la componente dinámica, estos autores la definen como: "*la parte del conocimiento profesional que se genera y evoluciona a partir de los propios conocimientos* [disciplinares], *creencias y actitudes, que requiere una implicación personal, y que evoluciona mediante un proceso didáctico entre la teoría asimilada y la práctica desarrollada*", estructura que va en constante cambio si tomamos en cuenta el hecho de que, además de tener estudiantes distintos en cada período escolar, entendemos el profesor universitario de matemáticas como un profesional reflexivo que a partir de su actividad docente se plantea "*reconsiderar su conocimiento estático, modificando o reafirmando parte del mismo*" (Blanco *et al*., 1995). Esta componente, sostienen los citados autores, permite distinguir a profesores de matemáticas expertos de los noveles. En esta investigación y aun cuando no hacemos un seguimiento amplio y exhaustivo a cada profesor, nuestro trabajo busca estudiar la componente dinámica de los participantes.

En otro orden de ideas destacamos el trabajo desarrollado por Nuria Climent (2002) en su tesis doctoral en la que trabajó el CDC de matemáticas con una maestra en ejercicio de educación primaria. Tres aspectos a resaltar en este trabajo en relación con el CDC es la diferenciación que sostiene la autora respecto al conocimiento disciplinar, es decir, el conocimiento "*de*" y "*sobre*" las matemáticas. Otro aporte significativo sobre el CDC son las categorías de *conocimiento didáctico del contenido respecto de la enseñanza* (CDC-E) y el *conocimiento didáctico del contenido respecto del aprendizaje* (CDC-A), hecho que consideramos relevante para profundizar con más detalle el CDC del profesor de matemáticas de universidad y, finalmente, la diferencia "*cuantitativa* " y "*cualitativamente*" entre los conocimientos disciplinar y de contenido (algo que para nosotros es lo mismo y que hemos puesto de manifiesto hasta ahora al no hacer observación alguna al respecto); para el caso del primero, incluye todo lo que abarca la disciplina en sí y cuando se refiere al contenido significa la parte de la disciplina que forma parte del currículo.

Respecto a esto último, partimos de una idea personal y nos desmarcamos de la posición de Climent (2002) cuando nos referimos al profesor de universidad, ya que éste, como lo hemos sostenido hasta ahora, es un profesional y especialista de las matemáticas y que por lo general desarrolla su labor docente relacionada con su área de investigación o en cursos básicos de matemáticas, siendo este último el caso que nos ocupa.

En cuanto a la diferencia entre *de* y *sobre* respecto al conocimiento matemático al que se refiere Climent (2002), nos permitimos decir que en nuestro trabajo entendemos el conocimiento disciplinar de las matemáticas como un único bloque, el cual abarca toda la estructura de la disciplina; pero este conocimiento también incluye las normas sintácticas, conocimiento de los algoritmos y procedimientos que conforman el saber hacer matemáticas y la resolución de problemas, el desarrollo histórico de la disciplina y su relación con otras áreas afines a las matemáticas. En otras palabras, la distinción de conocimiento *de* y *sobre* las matemáticas que sostiene Climent (2002) en su estudio con una maestra de primaria, asumimos que no cala del todo en el caso de estudios con profesores de universidad; ya que, como dijimos anteriormente, el profesor de universidad es un profesional que generalmente relaciona su labor docente con su área de investigación o próxima a ella.

Una de las componentes del CDC con las que contribuye Climent (2002) a ampliar los estudios en esta línea de trabajo están relacionadas directamente con el proceso de enseñanza-aprendizaje; estas son, el conocimiento didáctico del contenido respecto de la enseñanza y del aprendizaje; estas dos componentes cobran especial significado en nuestro trabajo ya que las mismas son estudiadas de manera indirecta durante las sesiones del seminario. Más aún, si este tipo de conocimiento tiene una clara influencia en la eficacia del docente en el aula, resulta interesante tratar de identificar de qué manera el CDC determina la forma de pensar del docente, las decisiones que toma, y las acciones que emprende en el salón de clases. (Talanquer, 2004).

Como un aporte personal al estudio del CDC del profesor de matemáticas de universidad, estudiar el CDC en este contexto supone, en nuestro caso y a diferencia de otros trabajos que estudian a maestros de primaria o profesores de secundaria, **estudiar también el conocimiento del contenido matemático y su relación con otras disciplinas del saber**, concretamente con las ciencias económicas, ya que en éste se destacan: (a) un fundamento profundo en el conocimiento de hecho, (b) un entendimiento de los hechos e ideas en el contexto de un marco contextual (la interrelación entre las matemáticas y las ciencias económicas), y (c) una organización del conocimiento en el sentido de facilitar la aplicación y el poder solventar algún inconveniente (Kahan *et al*. 2003). Esto nos permitirá analizar y entender muchos aspectos de los profesores en cuanto al proceso de enseñanza-aprendizaje se refiere; puesto que cuando se estudia al profesor de matemáticas y su CDC éste va más allá de un conocimiento simple de matemáticas que no necesariamente un matemático pueda poseer (Kahan *et al*., 2003).

Por todo lo anterior, basaremos nuestro estudio en la definición de CDC que aportan An *et al*. (2004) y que complementamos con los trabajos de Climent (2002), Reyes y Gárritz (2006), García (2004), Salazar (2005), Talanquer (2004), Kahan *et al*. (2003), Veal y MaKinster (1999), Blanco *et al*. (1995), Marcelo (1995); esto quiere decir *grosso modo*, que entendemos el CDC como el conocimiento para una enseñanza efectiva que incluye cuatro componentes o tipos de conocimiento: (a) **conocimiento del contenido matemático**, (b) **conocimiento del currículo**, (c) **conocimiento relacionado con la enseñanza** y

(d) **conocimiento relacionado con el aprendizaje**. El profesor debe ser capaz de conectar estas cuatro componentes de forma que las mismas interactúen entre ellas y se logre el aprendizaje deseado.

De manera más específica, definimos el CDC del profesor de matemáticas de universidad como: **la intersección entre el conocimiento del contenido matemático (la materia), el conocimiento de la estructura didáctica para llevar al aula de clases el contenido matemático (el conjunto de elementos que permiten construir un proceso efectivo de enseñanza-aprendizaje, es decir, desde la planificación hasta la evaluación) y el conocimiento del contenido curricular (programas oficiales de la materia, libros de texto, entre otros); todos estos elementos no son puntos aislados**.

En nuestro caso concreto, **el profesor debe manejar; por un lado, un conocimiento de contenido dual, es decir, de matemáticas y economía**[9]**, tomando en cuenta las interrelaciones entre ambos contenidos, según el curso con el cual se esté trabajando. Por otra parte, el profesor tiene que conocer y manejar las distintas estrategias y metodologías de enseñanza, el contenido curricular de la materia a enseñar, el contexto en el que se va a desarrollar el proceso de enseñanza-aprendizaje, el estudiante con quien desarrollará su trabajo (concepciones alternativas, dificultades, ventajas y actitud frente a la materia), el material de apoyo didáctico (libros de texto, herramientas informáticas) y, finalmente, cómo será evaluado el contenido enseñado**.

Cuando el profesor en ejercicio pone en funcionamiento todo esta estructura, la misma pasa a formar parte de un ejercicio de retroalimentación personal que le permite al profesor activar la componente dinámica de su conocimiento, todo esto con el objeto de modificar y mejorar su CDC, situación que intentamos explorar mediante el instrumento que diseñamos para la recolección de datos.

2.3.1. Conocimiento del Contenido

Es hora de hablar de las componentes principales de lo que entendemos como el CDC de un profesor de matemáticas de universidad, en tal sentido comenzaremos por centrarnos en el conocimiento del contenido o conocimiento disciplinar, el cual es la componente principal del CDC (Kahan *et al*. 2003); es por ello que hablaremos obligatoriamente de dos contenidos, el matemático y el económico, tomando en cuenta que la justificación sobra a estas alturas. Sin embargo, dado que el trabajo se enmarca dentro de las didácticas específicas y

[9]Para casos en los cuales el profesor de matemáticas trabaje con estudiantes de otras áreas como la ingeniería, la física, la biología, etc., el conocimiento sobre la economía se sustituye por la disciplina respectiva.

en particular en un tema bien delimitado dentro de la didáctica de las matemáticas, como es el estudio del CDC en profesores universitarios de matemáticas que atienden cursos de cálculo diferencial para las carreras de ciencias económicas, consideramos pertinente qué tipo de conocimiento disciplinar debe poseer este profesional.

A lo anterior hay que añadir que aun cuando estudiamos al profesor de matemáticas, nuestro interés principal no consiste en estudiar el conocimiento del contenido matemático *per se*; puesto que entendemos, como ya lo expresamos anteriormente, que el profesor de universidad es un profesional y especialista de la disciplina que enseña, situación que no necesariamente ocurre con docentes de niveles inferiores al universitario. No obstante, un elemento clave en el conocimiento disciplinar de este profesor es el *saber matemático* que posee en relación con el contenido económico.

2.3.1.1. Conocimiento del Contenido Matemático

Para hablar de este tipo de conocimiento tomamos como punto de partida el trabajo desarrollado por Kahan *et al.* (2003), quienes realizan una investigación enmarcada en la relación entre el conocimiento del contenido matemático del profesor y su enseñanza. Ellos, antes de caracterizar el conocimiento del contenido matemático recurren a Bransford, Brown y Cocking (2000) para señalar que:

> [...] la competencia en un área requiere de tres componentes: (**a**) "una construcción profunda del conocimiento *efectivo* o *de hecho*", (**b**) entendimiento de las "ideas e información en referencia a un marco específico", y (**c**) organización del conocimiento "en el sentido de facilitar explicaciones y aplicaciones del contenido".
>
> (Bransford, Brown y Cocking (2000) citados en Kahan *et al.*, 2003, p. 225, traducción realizada por el autor.)

En este sentido, los autores antes citados ahondan en el conocimiento del contenido matemático del profesor y lo definen como la conformación de las tres componentes arriba mencionadas, esto significa que el conocimiento debe estar interiorizado en un entendimiento profundo de las matemáticas para ser enseñadas (esta parte explica el ítem (**a**) de la cita de arriba), además, el conocimiento en cuestión posee dos componentes: una "*procedimental*" y otra "*conceptual*", relacionadas directamente con el conocimiento "*de*" y "*sobre*" las matemáticas, respectivamente, de Climent (2002); teniendo la componente conceptual una estrecha relación con los ítem (**b**) y (**c**) de arriba.

Ahora bien, supongamos que estamos considerando únicamente a un profesor de matemáticas de universidad que atiende cursos básicos de cálculo diferencial e integral, en tal sentido hablemos del conocimiento del contenido de éste como base de la *componente dinámica* (Blanco *et al*., 1995) de este conocimiento. Entendemos que estos profesionales tienen un amplio conocimiento de la disciplina en sí misma y con la profundidad deseada para ser enseñada, pero nos interesa, en esencia, el segundo aspecto por encima del primero, tal como lo señalamos en líneas anteriores cuando nos referimos a los conocimientos "*de*" y "*sobre*" las matemáticas que hace Climent (2002).

En este sentido, desarrollamos a continuación un breve apartado relacionado con el conocimiento del contenido respecto al cálculo diferencial, como parte de la idea de seguir profundizando en el campo de las didácticas específicas, reiterándole al lector nuestro interés por destacar un conocimiento del contenido en relación con su enseñanza.

Conocimiento del Contenido respecto al Cálculo Diferencial

Puesto que el presente trabajo consiste en el estudio del CDC de profesores de matemáticas que enseñan cálculo diferencial en careras de economía, consideramos de especial importancia el pronunciarnos sobre el conocimiento disciplinar que estos profesores deben poseer y qué características debe tener el mismo, no sólo para darle solidez a nuestro marco teórico, sino para contribuir en esta línea de trabajo que cada vez cobra mayor fuerza e interés en el campo de la didáctica de las matemáticas.

El simple hecho de referirnos al tema del cálculo diferencial y de la derivada en particular, nos sumerge en el campo del Pensamiento Matemático Avanzado (PMA) y, por su puesto, en el análisis matemático, debido a que éstos abarcan temas que van desde los números reales y sus propiedades, pasando por el estudio de las funciones (de una y varias variables), límite y continuidad, derivación, integración, sucesiones y series, teoría de la medida, álgebra lineal, análisis funcional y análisis complejo, entre otros (Artigue, 1991). En este sentido, no sólo estamos en el PMA y en el análisis matemático como constructos de la didáctica de las matemáticas, sino por el contenido del mismo en el campo de las matemáticas (funciones, límite, continuidad, derivada, entre otros) en el caso del análisis matemático.

Ahora bien, cuál es el conocimiento del contenido respecto a esta área, de acuerdo a nuestro interés para este estudio. Retomando las ideas de Climent (2002) y Kahan *et al*. (2003), consideramos que el profesor de matemáticas debe poseer un **conocimiento profundo**[10] de toda la estructura que supone el cálculo diferencial; esto es, conocimiento sobre el desarrollo histórico del concepto, definición de derivada y los teoremas relacionados con el concepto, notaciones, reglas de derivación, interpretaciones diversas en distintos campos

[10]En el sentido que señala Kahan *et al*. (2003).

del conocimiento, aplicación de la derivada dentro de las matemáticas como en otras áreas. Pero conocer toda esta estructura implica, obviamente, tener un manejo del tema de funciones o conceptos relacionados como: dominio, monotonía, valores extremos, límite, continuidad, entre otros.

Pero como no se trata de conocer estos elementos de manera aislada, a todo lo anterior hay que añadirle el conocimiento de: las normas sintácticas que permiten combinar y relacionar estos elementos, los algoritmos y procedimientos que conforman el saber hacer matemáticas y abordar la resolución de problemas enmarcados tanto en un contexto matemático como en otras áreas afines a las matemáticas como; en nuestro caso, las ciencias económicas.

2.3.1.2. Conocimiento del Contenido Económico[11]

Antes de abordar esta subsección, hablemos en forma breve del papel de las matemáticas como instrumento en las ciencias económicas y cómo comienzan a ser usadas:

> Una de las tareas del economista teórico es la de razonar deductivamente a partir de unos postulados (supuestos sobre el comportamiento económico), para llegar a unas conclusiones. Hay modos más o menos eficientes de pasar de los postulados a las conclusiones al expresar la teoría económica. Un argumento puramente verbal es fácilmente inteligible para una audiencia mayor, pero, como reconoció Cournot, la exposición literaria tiene algunas limitaciones. Cuando se requiere un razonamiento elaborado, las exposiciones matemáticas y gráficas ofrecen una mayor precisión.
>
> Las matemáticas fueron utilizadas por autores neoclásicos como Jevons, para explicar teorías sencillas del comportamiento del consumidor, pero a medida que los economistas comenzaron a abordar problemas más complejos, se hicieron necesarios nuevos métodos de expresión y las matemáticas se convirtieron en un instrumento esencial del economista teórico.
>
> (Cámara, 2000, p. 105)

Pero bien, un punto importante a destacar en relación con este conocimiento es el hecho de que nos referimos a profesores de matemáticas, es decir, a profesionales formados, principalmente, en esta área del conocimiento, lo que significa que durante su formación universitaria no han tenido por qué tener contacto con materias relacionadas con las ciencias económicas. Otro punto a tomar en cuenta tiene que ver con el tipo de conocimiento económico que debe poseer el profesor de matemáticas, tomando en cuenta que éste no es un profesional de la economía.

[11] Esta parte del trabajo la entendemos como un aporte personal a las didácticas específicas.

En algunas reuniones sostenidas con dos especialistas de la Universidad Pompeu Fabra de Barcelona; además de los libros de texto consultados como Lial y Hungerford (2000), Haeussler y Paul (1997), Balbás *et al*. (1989), Arya y Lardner (1987), Whipkey *et al*. (1987), Wonnacott (1983) y el trabajo desarrollado por García *et al*. (2006c), el conocimiento de economía que un profesor de matemáticas debe poseer y manejar consiste de un contenido básico de conceptos, terminologías e interpretaciones que, en la mayoría de los casos, el profesor llega a este conjunto de elementos cognitivos de forma personal. A esto último surge la siguiente pregunta: ¿un profesor de matemáticas para carreras de ciencias económicas[12] está en capacidad de **llegar a ese contenido**[13] de manera personal o requiere de asesoramiento por parte de profesionales del área?

Partamos del hecho de que los licenciados en matemáticas o en educación matemática poseen un amplio conocimiento y una formación que les permite abordar los distintos conceptos económicos que se requieren para los cursos de nuestro interés y que, además, ellos están interesados en abordar y profundizar en estos conceptos; entonces, el contenido económico que debe poseer un profesor de matemáticas para estas carreras o los conceptos económicos que tienen que manejar son, en líneas generales, los siguientes: **Beneficio** o **utilidad** (medio, total y marginal), Bienes (complementarios y sustitutivos), Capital, Competencia (monopolista y perfecta), Consumo, **Coste** o **Costo** (medio, total y marginal), Crecimiento económico, Déficit del consumidor y del productor, **Demanda**, **Demanda** (elástica, inelástica, marginal), Depreciación o Devaluación, Economía, Equilibrio de mercado, **Impuestos** (directos, indirectos y marginal), **Ingreso** (medio, total y marginal), Oferta, **Oferta marginal**, **Producción marginal**, **Propensión marginal** al ahorro y al consumo, Superávit del consumidor y del productor, entre otros. Pero no sólo tener conocimiento de estos conceptos o términos económicos, sino también las relaciones entre sí y sus interpretaciones en las matemáticas.

Pero pongamos atención especial a los términos resaltados en el párrafo anterior, ya que los mismos están vinculados de manera directa al cálculo diferencial y que forman parte de lo que en las ciencias económicas se denomina análisis marginal, contenido que desarrollamos a continuación y que ya trabajamos en García (2004).

---

[12]Para el caso que nos ocupa nos referimos a licenciados en matemáticas o licenciados en educación matemáticas.

[13]En el sentido de manejar los conceptos económicos y sus interpretaciones en el campo de las matemáticas, ya que partimos de una enseñanza contextualizada de las matemáticas.

Conocimiento del Contenido respecto al Análisis Marginal

La intención de este apartado es presentar por una parte, la importancia de la derivada dentro de las ciencias económicas desde el punto de vista didáctico y, por otra, mostrar algunas consideraciones, de orden matemático-económico, que los programas oficiales, de la Universidad de Los Andes (Venezuela), de las asignaturas objeto de este estudio no toman en cuenta dentro de sus contenidos[14]. Además, queremos enfatizar que, el no considerar estos detalles relacionados con la economía, por muy obvios que parezcan, podrían ir en detrimento de la formación del estudiante como lo sostiene García (2004). En tal sentido, estos aspectos deben formar parte de la enseñanza de la derivada en la economía, siempre que se piense que esta enseñanza deba ser contextualizada.

Así, comencemos por atender lo expuesto en las primeras líneas del párrafo anterior, es decir, la importancia de la derivada en las ciencias económicas, para ello recurrimos a Cámara (2000), quien de forma clara y precisa sostiene:

> El instrumento matemático más útil para el economista es el cálculo diferencial. Trata esencialmente las tasas de variación y es el instrumento natural que emplea el economista en la construcción y discusión de teorías económicas.
>
> Los economistas están más interesados en las cantidades marginales que en las cantidades totales. Un ejemplo es la teoría de la maximización del beneficio de Cournot, en la que el ingreso marginal ha de ser igual al coste marginal.
>
> (Cámara, 2000, p. 105)

Pero, ¿qué es en esencia el *análisis marginal*? En el mundo de los negocios y en las ciencias económicas, se llama *análisis marginal* a la utilización de **la derivada** o **la diferencial** para estimar el cambio que experimenta una función que modele una situación relacionada con la economía (ingreso, costo, utilidad, producción, etc.) al incrementar en una unidad la variable independiente (Cámara, 2000; Lial y Hungerford, 2000). Si ahondamos un poco más en conceptos económicos en los que la derivada está presente, apreciaremos lo importante que resulta para un profesional de las ciencias económicas la derivada y sus múltiples aplicaciones. Una prueba de ello la apreciamos a continuación:

> Aproximadamente, el costo marginal en algún nivel de producción x es el costo de producir el artículo $(x+1)$, [es decir, el costo de producir la unidad adicional].
>
> (Lial y Hungerford, 2000, p. 431)

[14] Advertimos al lector que en ningún momento pretendemos hacer un análisis sobre el contenido curricular de los programas oficiales de matemáticas para estas carreras.

Además de las funciones marginales de ingreso, costo, utilidad o producción; están otras como la elasticidad de la demanda, la propensión al ahorro o al consumo, en las que la derivada sirve como herramienta principal para el análisis de las mismas. Pero de dónde sale el término *análisis marginal*.

El término *marginal* obedece a que los economistas neoclásicos del *período marginalista* (1838-1947) (Arrow & Intriligator, 1981), le dieron a la economía un enfoque esencialmente matemático, focalizando sus aportaciones en el concepto de la marginalidad o última unidad; es decir, realizaron estudios de cómo una variable modifica sus valores en el *margen*, ante aumentos infinitesimales de otra variable. Los mismos Arrow & Intriligator (1981), se refieren a este período como el primer período de la economía matemática y en el que las ciencias económicas tomaron prestadas metodologías de las ciencias físicas vinculadas a las matemáticas para desarrollar una teoría formal basada, en buena parte, en el cálculo.

La herramienta matemática básica fue el cálculo; en particular, el uso de las *derivadas totales* y *parciales* y los *multiplicadores de lagrange* para caracterizar máximos. Vale la pena destacar que, en este período se desarrollaron los fundamentos matemáticos que sirvieron para que progresaran las teorías modernas del consumidor y el productor, oligopolio y equilibrio general. En esta etapa de desarrollo de la economía matemática destacaron economistas como Walras, Jevons, Marshall, Pareto, Ramsey, Hicks y Samuelson, entre otros.

A fin de ver la solidez e importancia que tienen las matemáticas en la economía y, en gran medida, justificar un conocimiento económico en profesores de matemáticas, nos situamos en una pregunta que aparece en Archibald & Lipsey (1967) que dice: *¿Qué es una aproximación matemática a la economía y por qué ésta debe ser estudiada?* En la respuesta que los autores dan a esta pregunta, ellos hablan de siete puntos o aspectos en los que están presente las matemáticas en la economía; sin embargo, para no perdernos en un contexto matemático general, extraemos lo concerniente al tema que nos ocupa, la derivada.

> **(v)** 'Maximización de la utilidad': esta suposición y toda la parafernalia asociada de costo marginal, ingreso marginal, etc., es obviamente una aplicación de la noción matemática de maximización, independientemente de la manera cómo se haga, en palabras, en diagramas o algebraicamente.
>
> **(vi)** 'Conceptos marginales'. Todos los conceptos marginales tales como costo marginal, ingreso, utilidad, producto, propensión al consumo, ahorro, importe, etc., etc., son de hecho primeras derivadas de las funciones respectivas bajo el mismo nombre, pero sin el término marginal.
>
> (Archibald & Lipsey, 1967, p. 3 traducción realizada por el autor.)

De estos dos puntos como de los otros de la lista se debe dejar claro el fuerte vínculo entre la economía y la matemática, de allí una de las razones que permiten que algunas situaciones, por no decir todas, pueden ser representadas adecuadamente por modelos matemáticos. Antes de continuar hablando del análisis marginal, es oportuno reservar unas líneas al tema de funciones dentro de la economía y así justificar la expresión "adecuadamente" usada arriba.

Cuando el profesor de matemáticas enseña cálculo contextualizado en la economía o, como generalmente le llaman, *aplicado a la economía*, además del análisis marginal, éste manipulará funciones con restricciones muy propias de la economía, tomando en cuenta que se manejarán cantidades relacionadas como precios, sueldos, tiempo, empleados, cantidades de un determinado artículo, entre otras; así por ejemplo, el dominio de una función estará, en la mayoría de los casos, restringido. Como una muestra de lo antes dicho, estudiaremos el dominio de una función de costo tomada de Haeussler y Paul (1997).

> Para un fabricante la función de costo total es
>
> $$C(q) = 0,02q^3 + 10,4,$$
>
> donde q representa tanto el número de unidades producidas como el de unidades vendidas.
>
> (Haeussler y Paul, 1997, p. 171)

Si una persona tiene que estudiar el dominio de esta función y no se le advierte que representa el costo de fabricar un determinado artículo, la respuesta será de forma tajante $Dom_C = \mathbb{R}$, pero en caso de que se le haga tal advertencia, su respuesta se restringirá en este caso $Dom_C = \mathbb{R}_0^+ = [0, +\infty)$; pues hablar de una cantidad negativa de unidades producidas no tiene sentido en economía y se generaría una inconsistencia; no obstante, hay otras restricciones de igual importancia como: la cantidad máxima de artículos que se pueden fabricar, supongamos K, con lo que el dominio sería $Dom_C = [0, K]$; o en el caso de que el fabricante produzca piezas como edificios o vehículos de carga, donde las unidades de producción son cantidades enteras o racionales muy particulares para aquellos casos en los que la producción viene expresada en miles, por ejemplo.

Tal y como hemos señalado hasta ahora, el conocimiento del contenido económico mostrado en las líneas anteriores no consiste en manejar conceptos en el área, sino que exige un conocimiento del contenido matemático y la relación entre ambos; esto lo definimos como *conocimiento **dual** del contenido*[15].

Ahora bien, transformar ese conocimiento dual del contenido, en el caso de un profesor universitario de matemáticas que, por lo general, no ha recibido formación para la enseñanza y que por otra parte sólo ha recibido una instrucción eminentemente matemática, es una tarea que requiere un mayor compromiso con el trabajo docente. Por supuesto, todo esto tiene sentido siempre que hablemos de una enseñanza contextualizada de las matemáticas en las carreras ya mencionadas o en otras donde las matemáticas tienen una fuerte presencia como los son las ingenierías, la biología, la física, entre otras. En resumen, mostramos a continuación algunas componentes del conocimiento del contenido económico y en particular el relacionado con el análisis marginal.

Características del conocimiento del contenido económico

En resumen, el profesor de matemáticas de universidad (tomando en cuenta que no es un profesional de la economía), concretamente, el profesor de cálculo diferencial para las carreras de ciencias económicas y administrativas debe tener dominio de un contenido económico básico pero profundo en lo que respecta a la relación matemáticas y economía, del cual destacamos lo siguiente:

- Conceptos básicos de economía como: beneficio o utilidad, bienes, capital, costo, crecimiento económico, déficit y superávit del consumidor y del productor, demanda, economía, equilibrio de mercado, impuesto, ingreso, oferta, entre otros.
- Historia y evolución del cálculo diferencial en las ciencias económicas y destacar algunos aspectos relevantes dentro de la didáctica de las matemáticas.
- Interpretación económica de la derivada, es decir, cómo se relacionan las matemáticas y la economía en el cálculo diferencial.

[15]Si el lector desea conocer otras aplicaciones de las matemáticas en las ciencias económicas lo remitimos a Cámara (2000), quien destaca entre otros constructos matemáticos: el cálculo integral (organización industrial, hacienda pública, excedente del consumidor), el álgebra (estimar las relaciones e interrelaciones en el equilibrio general walrasiano), el álgebra matricial (tratamiento de grandes cantidades de ecuaciones y variables). "*Algunos de los instrumentos matemáticos más complejos y elaborados se han aplicado a estos temas. Instrumentos como la teoría de juegos, la teoría de conjuntos y la teoría de la medida, que han introducido los teoremas del punto fijo y otras formas de matemática avanzada, han sido utilizados para analizar las cuestiones técnicas planteadas por la teoría del núcleo de Edgeworth* (p.106)".

- Restricciones del dominio de las funciones matemáticas en el campo de la economía y todas aquellas sutilezas que pudiesen generar conflictos en el estudiante a la hora de abordar un problema matemático en el contexto económico.

Sin embargo, un conocimiento profundo y exhaustivo del contenido no es suficiente para alcanzar una enseñanza efectiva (An *et al*., 2004; Kahan *et al*. 2003), un profesor de matemáticas debe poseer también un conocimiento amplio y profundo en materia de enseñanza-aprendizaje y en el campo curricular, de manera que pueda hacerle llegar a los estudiantes el conocimiento disciplinar que maneja. Es por ello que pasamos a desarrollar los otros tipos de conocimientos que, para nosotros, conforman el CDC.

2.3.2. Conocimientos respecto a la Enseñanza y el Aprendizaje

Esto tipos de conocimientos vienen a ser el segundo y tercer pilar del CDC, los mismos reúnen toda la estructura metodológica que conecta al profesor y sus estudiantes. En el caso del profesor de matemáticas de universidad, estos conocimientos tienen un fuerte fundamento en las creencias, concepciones y en el proceso discente (García, 2004 y Llinares, 1995) o como lo engloba Knight (2006), "*conocimiento del yo*"; ya que, como hemos dicho en repetidas oportunidades, el profesor de universidad no ha pasado por un proceso formativo en el campo de la enseñanza, aparte de que esta actividad es infravalorada y descalificada a este nivel (Zabalza, 2003; García-Valcárcel, 2001b). Sin embargo, desde nuestro punto de vista, las cuatro componentes antes citadas juegan un papel clave como parte del conocimiento respecto al proceso de enseñanza-aprendizaje dentro de la educación superior en las carreras objeto de este estudio.

Ahora bien, aunque en la literatura se refieren con frecuencia al conocimiento respecto a la enseñanza-aprendizaje, para nosotros resulta apropiado hacer una separación del mencionado proceso por la razón de seguir apuntando hacia las didácticas específicas, aunque reconocemos que en determinados momentos no es fácil o, mejor dicho, nos resulta difícil apreciar con claridad la línea de separación; no obstante, para el caso que nos ocupa dividimos en enseñanza y aprendizaje y lo explicamos a continuación. En el caso de la primera, la enseñanza, la relacionamos directamente con el profesor propiamente y, en la otra, con el estudiante o más precisamente, con el conocimiento que el profesor posee sobre diversos aspectos de sus estudiantes; aspecto este que abordaremos en su momento.

Volviendo al tema de la docencia en la universidad y el poco valor que ésta recibe por algunos colegas, recurrimos a Zabalza (2003) quien aboga por esta actividad y exige darle el puesto que se merece, al respecto sostiene:

> Quisiera insistir en que la enseñanza, en tanto que actividad profesional, posee su propia lógica e impone sus condiciones. No todo vale en la enseñanza. Por eso, **saber enseñar implica poseer los conocimientos suficientes sobre lógica y las condiciones que afectan a su desarrollo**.
>
> (Zabalza, 2003, p. 65, el resaltado es nuestro.)

Pero bien, es hora de hablar por separado del conocimiento del profesor de matemáticas de universidad en relación tanto con la enseñanza como con el aprendizaje, algunas referencias claves son Climent (2002), Knight (2006), Zabalza (2003), García-Valcárcel (2001b), Blanco *et al*. (1995), entre otros. Para ello comenzaremos por el conocimiento relacionado con la enseñanza.

2.3.2.1. Conocimiento respecto a la Enseñanza

Comenzaremos por entender la enseñanza, siguiendo a Knight (2006), como una actividad reflexiva y de "*carácter intencional*" (García-Valcárcel, 2001b) que, en estos momentos, requiere de un esfuerzo significativo de "*desarrollo formativo del profesorado*". Sobre esto último, el autor antes citado sostiene y respalda la idea de que "*no se reduzcan ni se eliminen las unidades de desarrollo del profesorado*". Pero más allá de lo que entendemos por enseñanza, lo que mostramos a continuación es el tema que nos ocupa; el *conocimiento respecto a la enseñanza*.

En su tesis doctoral, Climent (2002) manifiesta que este conocimiento forma parte del CDC y lo define como:

> ...el conocimiento y uso de recursos y modelos, el conocimiento de distintos modos de representar el contenido y su potencialidad, destrezas para evaluar las tareas en función de los alumnos, *la habilidad para analizar críticamente materiales publicados* [y reflexionar sobre su propia práctica docente], el diseño y selección de actividades, la adecuación de éstas a las características de sus alumnos, **la gestión de la actividad matemática en el aula** (la capacidad para plantear situaciones que reten a los alumnos y se adecúen al transcurso de la acción, saber ofrecer ayudas adecuadas, la capacidad para mantener la actividad...) y **la evaluación del aprendizaje matemático**.
>
> (Climent, 2002, p. 91, el resaltado es nuestro)

Consideramos que la definición antes mostrada es amplia, profunda y recorre casi todo el conocimiento que en materia de enseñanza debe poseer un profesor de universidad, pero bien vale la pena incluir el **conocimiento sobre la planificación docente** que, conjuntamente con los dos aspectos resaltados en la cita anterior de Climent (2002), conforman lo que García-Valcárcel (2001b) identifica como las tres fases o actividades de la función docente y que también forman parte de los diez aspectos que, considera Zabalza (2003), se deben tomar en cuenta por el profesor cuando éste quiera abordar una docencia universitaria de calidad; estos son:

- **Planificación**
- Espacios [donde se desarrolla la actividad docente]
- Selección de contenidos
- Materiales de apoyo
- **Metodología**
- Nuevas tecnologías
- Apoyo a los estudiantes
- Coordinación con los colegas
- **Evaluación**
- Revisión del proceso

(Zabalza, 2003, pp. 210-214, el resaltado es nuestro)

Ahora bien, entendemos que estas tres componentes están fuertemente sujetas a la toma de decisiones, acción esta que relaciona este conocimiento con el resto de los que conforman el CDC. Pero es hora de dar el paso acostumbrado hacia las didácticas específicas, es por ello que coincidimos con Blanco *et al*. (1995), quienes incluyen dentro de este conocimiento las estrategias de enseñanza de tópicos concretos; en nuestro caso, la enseñanza del cálculo diferencial en la ciencias económicas, es decir, el análisis marginal, el conocimiento de un currículo específico (objetivos, contenido) y la capacidad de reflexionar sobre su actividad docente como parte de la componente dinámica. Sin embargo y aunque reconocemos que el conocimiento del currículo está fuertemente ligado al conocimiento en discusión, lo consideramos como el tercer pilar del CDC.

Planificación

Esta primera fase o "*fase preactiva*" (García-Valcárcel, 2001b) que forma parte de la enseñanza, la relaciona Hernández (1989) con la toma de decisiones que ejecuta el profesor de universidad antes de poner en marcha el currículo, en el que debe tomar en cuenta el escenario o "*espacio de instrucción*" dónde se desarrollará el mismo. La toma de decisiones implica, en este caso, una actividad de "*resolución de problemas*" por encima de "*una aplicación lineal* [y sistemática] *de ciertos principios y reglas*" (García-Valcárcel, 2001b). Dado el carácter intencional de la enseñanza, en la planificación de la misma el profesor se anticipa a la puesta en marcha del currículo, atendiendo de manera clara y flexible a dos principios: "*qué se quiere conseguir*" (generación de conocimiento) y "*cómo se quiere conseguir*" (estrategias metodológicas) (*ibid*), teniendo presente la relación entre objetivos y contenidos (Marcelo, 2001). Por su parte, Godino (2003) toma en cuenta dos referentes a la hora de desarrollar la planificación de la enseñanza: la institución y el tiempo del cual se dispone para ejecutar la enseñanza.

Esta componente además forma parte de los descriptores que conforman la lista de aspectos a estudiar en el profesor de matemáticas, en este sentido, lo que queremos indicar es que estudiaremos el *conocimiento relacionado con la planificación* a partir de los problemas y preguntas que conforman el instrumento de investigación, permitiendo así un ejercicio de reflexión sobre su labor como docente.

Metodología

Pasando a la segunda fase de la enseñanza o "*fase interactiva*" (García-Valcárcel, 2001b), sostenemos lo siguiente: hay que tener presente que la enseñanza, dentro del sistema de educación superior mundial, es aceptada como un proceso de transmisión de información; tanto es así que las aulas y los medios de enseñanza están diseñados para llevar a cabo una instrucción unidireccional (Rosales, 2001) donde el profesor es el centro del proceso de enseñanza-aprendizaje (Biggs, 2005). Esta transmisión de información, generalmente, se ejecuta mediante *la explicación*, la cual "*consiste en una exposición oral de un texto seguido de un comentario*" (Marcelo, 2001); también destacamos la "*enseñanza en grupo*" y el "*estudio de casos*", entre otros (*ibid*).

Pero, ¿qué entendemos por conocimiento de la metodología?, es aquel que posee el profesor sobre un conjunto de estrategias y actividades para la enseñanza (García-Valcárcel, 2001b) de las matemáticas en un escenario determinado, generalmente el salón de clases. Estas estrategias y actividades están fuertemente ligadas al contenido disciplinar y, sobre las mismas, se ha reflexionado y analizado en la fase anterior para ponerlas en práctica. En nuestro contexto, nos referiremos a dos dimensiones a tomar en cuenta en la enseñanza: el conocimiento sobre la ejecución de problemas matemáticos contextualizados en la economía, lo que definimos como el *conocimiento sobre la secuenciación del problema* y; el *conocimiento sobre la enseñanza basada en problemas* a partir de problemas matemático-económicos.

Lange (1996) realizó un trabajo minucioso sobre la enseñanza de las matemáticas puras Vs. aplicadas y la inclusión de estas últimas en el currículo escolar, justificando que el gran beneficiado es el estudiante. Si nosotros extrapolamos esta situación a la universidad y concretamente a carreras donde las matemáticas conforman una poderosa herramienta no sólo para resolver problemas sino para poder entender situaciones propias de estas carreras, no permitimos afirmar que tal justificación tiene mayor peso.

Evaluación[16]

El conocimiento sobre la *fase postactiva* de la enseñanza, como se refiere García-Valcárcel (2001b) a la evaluación, consiste en saber medir una serie de elementos que validan el proceso de enseñanza-aprendizaje; además, es una de las componentes claves de este proceso por lo que implica para el profesor; un ejercicio de "*retroacción*" sobre su labor docente (Marcelo, 2001). Esta cumple un doble rol, el de valorar el aprendizaje de los estudiantes y el de certificar el conocimiento alcanzado por estos (Zabalza, 2003). En cierta medida, la evaluación forma parte del currículo (*ibid*), pero también enlaza de manera directa con las dos fases anteriores, ya que ésta debe ser planificada y su ejecución debe estar sujeta a la enseñanza llevada al aula: **objetivos**, **contenidos**, **estrategias** (Marcelo, 2001).

Todo lo anterior nos encamina a definir el conocimiento del profesor respecto a esta componente para cursos de cálculo diferencial en carreras de ciencias económicas; situación que además permite abrir paso a desarrollar un trabajo de investigación en esta línea específica. Tomemos en cuenta que el trabajo se enmarca en un *contenido disciplinar dual* (matemáticas y economía), pero no debemos olvidar que, en esencia, es un curso de cálculo; en este sentido, hay que tener presente el peso que se le debe dar al contenido a evaluar, el cual debe guardar directa relación con el desarrollado en el aula. Otro aspecto a tomar en cuenta tiene que ver con lo siguiente: "*este proceso se inicia al principio de curso cuando profesor y alumno entran en contacto*" (Marcelo, 2001) y el primero discute los objetivos del curso, entre otros puntos a tomar en cuenta.

Por otra parte, está el conjunto de estrategias de enseñanza que se desarrollan en el aula. En este caso, tanto profesores como estudiantes, tradicionalmente, entienden un examen por sistema de evaluación, esto se debe a que por lo general, la metodología de enseñanza es *la explicación* como nos referimos en la segunda fase de la enseñanza. Ahora bien, si se opta por la enseñanza basada en problemas, es claro que esto implica un mayor compromiso con todo el proceso de enseñanza-aprendizaje[17] donde

[16]Aun cuando hacemos un breve desarrollo sobre esta componente del proceso de enseñanza-aprendizaje, queremos dejar claro que no está dentro nuestros objetivos estudiar el conocimiento que el profesor tiene sobre evaluación. Las pocas preguntas relacionadas con el tema que aparecen en el instrumento, fueron hechas de manera intencional como parte de la estrategia de recogida de datos.

[17]En el apartado correspondiente se puede apreciar un breve comentario sobre la evaluación en esta estrategia didáctica.

la evaluación no es la excepción y, en consecuencia, cobra mayor fuerza la anterior cita de Marcelo (2001).

Características del conocimiento respecto a la Enseñanza

Ahora mostramos algunas características puntuales de este conocimiento, las cuales nos permitirán generar las categorías de cara al análisis de datos:

- **Planificación**
  - Criterios para la toma de decisiones.
  - Conocimiento del currículo, en particular los objetivos del curso.
  - Conocer al estudiante.
  - Tener presente la disponibilidad del tiempo.
- **Metodología**
  - Involucrar las estrategias lícitas de enseñanza, entre ellas la resolución de problemas *como estrategia de enseñanza*.
  - Conocer al estudiante.
  - Conocer las herramientas informáticas y su aplicación como herramienta didáctica.
- **Evaluación**
  - Saber medir el alcance del proceso de enseñanza-aprendizaje teniendo presente los objetivos del curso.
  - tener presente que es un proceso que se inicia con el curso.

2.3.2.2. Conocimiento respecto al Aprendizaje

Previo al desarrollo de este conocimiento nos detendremos de forma sucinta para referirnos a lo que entendemos como aprendizaje; más allá de una forma global de adquisición de conocimientos, es algo más serio y complejo que Biggs (2005) lo ilustra de manera sencilla:

> ...el aprendizaje es una forma de interactuar con el mundo. A medida que aprendemos, cambian nuestras concepciones de los fenómenos y vemos el mundo de forma diferente. La adquisición de información en sí no conlleva ese cambio, pero nuestra forma de estructurar esa información y de pensar con ella sí lo hace.
>
> (Biggs, 2005, p. 31)

En este orden de ideas, entendemos el aprendizaje como una acción que genera cambios, favorables o no, en el estudiante; bien sea por la correspondencia que pueda tener con sus concepciones sobre el contenido que se estudia, por el esquema que organice y plantee el profesor durante la clase o los obstáculos de tipo cognitivo que el estudiante confronte en el desarrollo del curso, entre otros. Sobre todos estos aspectos y otros de los que hablaremos a continuación, el profesor está en la obligación de saber cómo interpretar esos cambios y hasta qué punto, estos generen transformaciones en el proceso de enseñanza.

Cuando nos referimos a este conocimiento lo relacionamos directamente con el estudiante, es decir, el conocimiento que el profesor tiene sobre el estudiante, sobre las *dificultades y obstáculos* para el aprendizaje de contenidos matemáticos (Climent, 2002), sobre la *actitud* de estos frente a determinados escenarios o situaciones matemáticas (problemas matemáticos o de aplicación, implementación de estrategias alternativas de enseñanza a las tradicionales, entre otras); de igual manera, se debe tomar en cuenta dentro de esta parte del CDC, el conocimiento sobre los diversos *errores* matemáticos en los que con frecuencia incurren los estudiantes frente a problemas matemáticos en particular.

Así como hablamos del conocimiento del profesor sobre las dificultades de los estudiantes, debe quedar implícito el conocimiento sobre las facilidades o ventajas que representan para los estudiantes la discusión de un determinado problema, todo esto implica desarrollar una habilidad para interpretar el aprendizaje de los estudiantes a partir de distintas expresiones en el aula de clase (participación en clase, prácticas dentro del aula, exámenes escritos u orales) o en las sesiones de consulta. Por otra parte, recordemos las "*concepciones alternativas*" de los estudiantes que señala Carrascosa (2005) y las "*ideas previas*" de los estudiantes (Salazar, 2005), estas dos componentes no sólo se refieren a las creencias y concepciones de los estudiantes para tratar un tema matemático específico, sino también la relación que estos puedan encontrar con áreas afines.

Todas estas componentes señaladas anteriormente vienen a conformar y estructurar lo que entendemos como conocimiento del contenido respecto o sobre el aprendizaje; de éstas, queremos destacar las tres que abordamos en nuestro trabajo y que en un principio consideramos en el instrumento, aunque merece la pena aclararle al lector que, de estas tres, la última la descartamos por la poca riqueza de los datos obtenidos a lo largo de la aplicación de los instrumentos. Nos referimos entonces, al conocimiento sobre: (**i**) las dificultades y/o facilidades, (**ii**) las actitudes y, (**iii**) los errores que muestran los estudiantes durante el proceso de enseñanza-aprendizaje.

Antes de pasar a desarrollar estas tres componentes haremos referencia a los trabajos de Knight (2006) y Biggs (2005), ambos enmarcados en la educación superior y el segundo en el tema del aprendizaje. Estos investigadores coinciden en que al momento de hablar de aprendizaje tratan el tema de la evaluación, lo que nos dice esto es la estrecha relación existente entre este conocimiento y el tratado en la subsección anterior (**2.3.2.1**). En este orden de ideas, entendemos la evaluación no sólo como el ejercicio de valorar el aprendizaje y certificar el conocimiento alcanzado por los estudiantes (Zabalza, 2003), sino también como el ejercicio de observación y reflexión que, sobre diversas actitudes, opiniones y expresiones, realizan los estudiantes a lo largo del curso.

Dificultades y/o facilidades

Lo entendemos como el conocimiento que muestra el profesor a partir de los problemas propuestos y discutidos en el material, tomando en cuenta las dificultades y/o facilidades (para el aprendizaje) que puedan tener los estudiantes cuando el profesor plantea uno de estos problemas en el aula. Con esto pretendemos profundizar en la orientación de los cursos de matemáticas que presenta el profesor o, en otro sentido, los cambios que éste tiene que enfrentar en algunos momentos y reorientar el curso. Situación, ésta, que incide en la mejora de nuestra propuesta didáctica.

Por otra parte, el conocimiento que el profesor pueda tener sobre sus estudiantes, no solo en cuanto a las dificultades o ventajas que pueda significar un problema o concepto matemático en particular, así como la actitud frente a determinado escenario en el aula, obliga al profesor a profundizar y reflexionar sobre la enseñanza que éste sigue en el salón de clases y; más aún, a revisar y discurrir sobre su conocimiento disciplinar.

Nosotros partimos de la idea de una enseñanza contextualizada de las matemáticas y, en consecuencia, buscamos estudiar el conocimiento que tiene el profesor a la hora de abordar problemas matemáticos enmarcados en las ciencias económicas. Entre otras cosas porque la enseñanza que siguen, en general, es del tipo tradicional, ciñéndose a lo que sugieren los programas oficiales o los libros de texto (García, 2004).

Actitud

En este caso nos referimos al conocimiento que tiene el profesor sobre sus estudiantes, específicamente respecto a la actitud que muestran estos últimos frente a un determinado tipo de problema. En otras palabras, tomamos en cuenta el dominio que tenga el profesor sobre determinadas acciones, gestos e impresiones de sus estudiantes ante determinadas situaciones planteadas en el aula, como los son: tareas, problemas, gestión de la enseñanza; entre otros, lo cual le permite a éste discernir sobre su actividad en el aula en relación con el contenido en sí y la forma como es presentado.

Ya mencionamos que el estudiante de universidad, en este caso concreto, está acostumbrado a seguir un proceso de enseñanza tradicional y unidireccional, donde el protagonista del proceso de enseñanza-aprendizaje es el profesor (Zabalza, 2003). Entonces, llevar a cabo una actividad como la que proponemos a futuro, pero que ya fue trabajada con los profesores participantes y en la que se abordan problemas contextualizados que promueven la participación del estudiante, supone o inferimos que debe generar inquietudes en estos últimos. Así, y dado que queremos poner en marcha, a futuro, una propuesta didáctica enmarcada en la EBP, nos resulta de vital importancia que el profesor contribuya a mejorar tal propuesta y lo hacemos a través de esta parte del conocimiento que tiene el profesor en relación con sus estudiantes.

Para nosotros, la actitud del estudiante frente a un tema matemático tratado en el aula está en línea directa no sólo con la motivación que éste tenga sino con el conocimiento que para ese momento posee el estudiante respecto al tema que se aborda y, también, por la forma como el profesor lo desarrolla.

> Los profesores sabemos que la motivación con que alumnos y alumnas afrontan las actividades académicas dentro y fuera del aula es uno de los determinantes más importantes del aprendizaje.
>
> (Tapia, 2001, p. 79)

La actitud y motivación del estudiante incide en gran medida en las estrategias metodológicas de enseñanza que el profesor ponga en marcha en el aula de clases y viceversa, pero para ello, el docente debe tener un conocimiento claro de cuán motivado está el estudiante, además de interpretar y valorar la actitud del alumno. Ya en García (2004), uno de los participantes habló sobre la actitud de los estudiantes tanto a la hora de abordar problemas de matemáticas aplicados a la economía como en las evaluaciones escritas, dejando muy claro que existe un rechazo hacia este tipo de problemas contextualizados; sin embargo, lo interesante a nuestro juicio, sería estudiar el por qué se rechazan estos problemas.

Ahora bien, conocer al estudiante de universidad no es una tarea que resulte fácil para el profesor, si bien es cierto que existen patrones generales sobre la conducta, actitud y el mismo conocimiento de los estudiantes para un determinado nivel dentro de la universidad, se debe tomar en cuenta aspectos como: *el nivel sociocultural*, *dónde cursó sus estudios de bachillerato*, por citar sólo dos.

Errores[18]

Aun cuando la literatura sobre el tema de errores de los estudiante es abundante, nosotros nos referimos a los *errores*, en esta parte del trabajo, como el conocimiento que tiene el profesor sobre esta componente del proceso de aprendizaje en los que, generalmente, incurren los estudiantes y sus causas, al discutir o estudiar un problema o un tema matemático específico. En el cálculo diferencial son diversos los errores que con relativa frecuencia, cometen los estudiantes, estos son: aplicación indebida de la regla de derivación, errores de interpretación de la derivada (geométrica, física y en algunos casos económicos), cálculo de valores extremos (García, 2004).

Características del conocimiento respecto al Aprendizaje

Tal como hemos venido haciendo con los tipos de conocimiento desarrollados en este trabajo, presentamos al lector características propias sobre el conocimiento respecto al aprendizaje:

- **Dificultades/Facilidades**
  - El profesor debe estar al tanto de las dificultades u obstáculos que presenta el estudiante frente a problemas particulares, así como el conocimiento de alternativas lícitas que permitan solventar los mismos
  - Capacidad para reorientar el curso en caso de dificultades manifestadas por el estudiante
- **Actitudes**
  - Saber discernir y valorar sobre gestos y/o acciones de los estudiantes en el aula
  - Detectar cuánto le motiva una actividad matemática determinada
- **Errores**
  - Conocer los errores para cada tema matemático y las alternativas que permitan aminorar o solventar estos errores
  - Determinar las causas de estos errores

[18]Al igual que lo hicimos con la Evaluación, esta componente la desarrollamos de forma breve puesto que no es de nuestro interés, en estos momentos, estudiar el conocimiento del profesor sobre los errores matemáticos del estudiante. El pequeño número de preguntas llevadas a discusión con los profesores participantes, fueron realizadas de manera intencional como parte de la estrategia de recogida de datos.

2.3.3. Conocimiento del Contenido Curricular

Dentro del campo de la docencia universitaria con poca frecuencia se habla del currículo, tema que además resulta un tanto tedioso para los docentes (Zabalza, 2003); en el proceso de enseñanza-aprendizaje como el caso que nos ocupa, donde el protagonista es el profesor, el currículo consiste en una "*lista de elementos de contenido que, una vez expuestos desde la tarima, están «cubiertos»*" (Biggs, 2005). En particular, el profesor no "*analiza de manera específica cómo los estudiantes reciben esos contenidos ni cuál debe ser la profundidad de su comprensión*" (*ibid*). Hay una realidad sobre el currículo en relación con el profesor de matemáticas de la que poco se habla y que mostramos a continuación:

> El profesor es un profesional que, por lo general, se ha iniciado en la práctica de la enseñanza mediante ensayo y error, que ha logrado un nivel de competencia y capacitación con escasa ayuda institucional. Es tarea del profesor ayudar a sus alumnos a introducirse en una comunidad de conocimientos y capacidades que otros ya poseen. **Su trabajo es una actividad social que lleva a cabo mediante el desarrollo y puesta en práctica del currículo de matemáticas**.
>
> (Rico, 1998, p. 25, el resaltado es nuestro)

Pero, qué entendemos por currículo. Según Zabalza (2003):

> El *currículo* es el proyecto formativo que se pretende llevar a cabo en una institución formativa, en este caso la Universidad. Una buena definición de currículo debería incluir, además, la idea de «unicidad» y «cohesión interna» característica que resulta esencial a la perspectiva curricular.
>
> (Zabalza, 2003, p. 21)

El autor antes citado va más allá e interpreta el currículo como un *proyecto formativo integrado*[19], del cual destacamos la palabra "*integrado*", ya que lo que se busca con el currículo es estructurar y darle continuidad a un conjunto de conocimientos que no pueden estar aislados, en nuestro caso además, destacamos el hecho de poder integrar dos contenidos disciplinares, el matemático y el económico; o, como lo identifican Hargreaves *et al*. (2001), "*currículo interdisciplinar*" . Aunque también señala, que la interpretación más frecuente sobre el currículo en la educación universitaria está compuesta por los "*planes de estudio*", programa oficial de la asignatura y el elaborado por el profesor. Este último, a su vez, elaborado a partir de libros de texto (Doyle, 1992).

En este sentido,

[19]Este autor hace un desarrollo pormenorizado del currículo, donde explica qué significan cada una de las tres palabras de la frase *proyecto formativo integrado*.

> **El profesor de matemáticas necesita conocimientos sólidos sobre los fundamentos teóricos del currículo** y sobre los principios para el diseño, desarrollo y evaluación de unidades didácticas de matemáticas. Cuando los profesores no tienen una formación teórica adecuada ven limitadas sus funciones a las de meros ejecutores de un campo de decisiones cuya coherencia y lógica no dominan y no entienden.
>
> (Rico, 1998, p. 25, el resaltado es nuestro)

Ahora bien, la cita anterior habla de "*conocimientos sólidos sobre los fundamentos teóricos del currículo*", estos fundamentos son, en esencia, cuatro: (**a**) contenido, (**b**) metodología, (**c**) evaluación, y (**d**) bibliografía recomendada (Rico, 1998). Si ponemos atención, observamos que las tres primeras ya han sido incluidas de forma explícita en apartados anteriores, lo que nos indica la interrelación entre las componentes del CDC. Esto significa que el profesor debe manejar ampliamente estas componentes y saber explotarlas en el aula.

Así, entendemos el conocimiento curricular partiendo de Zabalza (2003), Hargreaves *et al*. (2001) y Rico (1998), pero tomando en cuenta además a Climent (2002) y An *et al*. (2004), como **el conocimiento de libros de texto, programas oficiales, programas informáticos y materiales diversos que resulten legítimos para la enseñanza de las matemáticas**[20] **y el conjunto de estrategias que permiten el uso de estos materiales para ponerlos en práctica en el proceso de enseñanza-aprendizaje; pero no basta con saber que existen todos los elementos anteriores, el conocimiento curricular exige la capacidad de discernir y analizar tales elementos y ver de qué manera se pueden llevar al aula y sus posibles implicaciones**. Esto significa que el profesor al manejar, estructurar y poner en práctica todo lo dicho atrás lo convierte en un hacedor de currículo (Doyle, 1992).

Ahora bien, cuando en el párrafo anterior nos referimos al *conjunto de estrategias que permiten el uso de estos materiales*, entra en juego un aspecto tomado en cuenta por Climent (2002): "*la habilidad para analizar críticamente materiales publicados*"[21] y dado que todo el material discutido en el seminario se derivó de libros de texto y de los programas oficiales, nos interesamos en estudiar el conocimiento del profesor a la hora de analizar nuestro material. Más aún, sabemos que en la mayoría de los casos, el profesor toma como

[20] Aquí entendemos la enseñanza de las matemáticas en el sentido curricular de Hargreaves *et al*. (2001), es decir, las matemáticas integradas a otras ramas del saber.

[21] A esta componente le damos un trato especial por lo siguiente: como se verá más adelante, el diseño de recogida de datos se basó en un proceso de discusión y reflexión a partir de unos problemas seleccionados y organizados por nosotros para este fin. En cierta manera, pretendíamos que los profesores participantes validaran el material diseñado con fines de hacer una propuesta didáctica a futuro y de ahondar en otros tópicos como la enseñanza basada en problemas. Pero hay más, esta componente nos pareció sugerente considerarla como eje transversal de nuestro trabajo, a partir de los reiterados análisis de los datos.

base el programa oficial para la elaboración de su currículo y, en cuanto a los libros de texto, los profesores suelen orientar sus clases a partir de estos (Doyle, 1992), una práctica muy habitual en la enseñanza de las matemáticas en la universidad venezolana (García, 2004).

Análisis crítico de materiales publicados

El proceso de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas exige al profesor universitario, entre un conjunto diverso de acciones relacionadas con la labor docente, una revisión constante de los materiales didácticos (dossieres, libros de texto, guías de actividades, etc.) y de las nuevas tecnologías (software didácticos o especializados, uso de la internet, etc.), así como también la elaboración de estos materiales; todo esto, con el fin de desarrollar la componente dinámica del conocimiento y mejorar la calidad de la enseñanza (Zabalza, 2001).

Pero el ejercicio no puede quedar en una simple revisión, por el contrario, el profesor de universidad como profesional reflexivo que es, debe mostrar una capacidad de análisis que le permita discernir y conformar una estructura sólida del contenido que llevará al aula, es decir, tomando también en cuenta al estudiante; a esta capacidad de análisis se refiere Climent (2002) de la siguiente manera:

> La habilidad para analizar críticamente materiales publicados estará en gran medida en función de la riqueza del conocimiento de contenido del profesor (aunque no sólo), o el análisis de dificultades, obstáculos y preconcepciones de los alumnos en relación con los contenidos va parejo también a la profundización en el propio contenido (para su enseñanza).
>
> (Climent, 2002, p. 91)

Esta actividad de análisis está fuertemente ligada al conocimiento del contenido matemático que tiene el profesor (Climent, 2002) y, por supuesto, al económico. En otras palabras, se conjugan dos *disciplinas académicas*, una *pura* y otra *aplicada* (Schommer-Aikins *et al.*, 2003), de modo que el profesor pueda fusionar ambos contenidos hasta verlos como uno sólo siempre que se pueda. Más aún, este proceso le permite al profesor seleccionar problemas matemáticos y modificarlos, si fuese necesario, para llevarlos al aula. En este sentido, el análisis de los materiales publicados está en franca relación con la práctica diaria de la clase. Entonces, este ejercicio le va a permitir acceder al conocimiento metodológico que necesitará a la hora de desarrollar su docencia, o a mejorarlo.

Características del conocimiento del currículo

Cerramos el apartado correspondiente al CDC caracterizando el conocimiento del contenido curricular:

- Amplio conocimiento disciplinar dual (matemáticas y economía).
- Conocer el programa oficial y los libros de texto.
- Ser consciente del tiempo disponible.
- Claridad en los objetivos del curso.
- Plantearse estrategias de enseñanza adecuadas y viables.
- Conocimiento y criterios para evaluar.
- **Análisis de materiales**[22]
    - Capacidad para analizar materiales didácticos del contenido disciplinar.
    - Exige saber modificar y/o crear problemas en el contexto matemático-económico para su implementación en el aula.

Para cerrar este apartado, concluimos con algunos aportes personales en el marco del CDC, los mismos apuntan hacia una didáctica específica como es el caso del conocimiento profesional del profesor sobre la enseñanza del cálculo diferencial en carreras de ciencias económicas.

2.3.4. Aportes personales al CDC

Es claro que el CDC es un tema altamente desarrollado en al campo de la didáctica, sin embargo, si nos centramos en todo lo que supone el conocimiento del profesor de matemáticas y, en particular, en aquel que trabaja en niveles de educación superior, nos encontramos con el hecho que todavía resulta un tema incipiente. La razón de construir un marco teórico que delimite y considere aspectos concretos consiste en ir depurar e ir ajustando el *zoom* hacia un tema en particular. Sobre el CDC del profesor de ha desarrollado todo un marco teórico amplio y sólido pero que el mismo apunta hacia profesores de primaria y secundaria o bien, se refiere al profesor en general.

Es claro que mientras un docente de primaria o secundaria posee un conocimiento general de la materia que enseña; sobre todo el de primaria, el profesor

[22]El resaltado de esta característica obedece a que es tema de interés para este trabajo.

de universidad es un especialista de la materia que por lo general, además de enseñar tal disciplina, hace investigación en la misma. Aun cuando nuestro concepto de CDC se fundamenta principalmente en An *et al*. (2004) y el mencionado trabajo está relacionado con profesores de matemáticas, el mismo no resultó suficiente ya que ellos trabajaron con profesores de secundaria. esto nos obligó a ir con cuidado y repensar algunas ideas expuestas por ellos.

En este sentido nuestro aporte viene dado por el conocimiento del contenido económico que un profesor de matemáticas debe tener a la hora de atender cursos en carreras de ciencias económicas y cuyos cursos sean presentados en el marco de la contextualización matemático-económica. Es por ello que hablamos de un *conocimiento dual del contenido*, donde le damos mayor peso al contenido económico que al matemático, partiendo de la idea que al ser profesores de matemáticas no ponemos en duda su conocimiento en esta área.

Por otra parte, en la revisión bibliográfica realizada por nosotros, pudimos apreciar que los autores se refieren a los temas de enseñanza y aprendizaje como uno sólo; en nuestro caso los diferenciamos y tratamos por separado, pero siempre desde la óptica del profesor. Con ello intentamos separar la visión del profesor sobre estos dos aspectos del proceso educativo y al mismo tiempo profundizar en el análisis de datos.

En otro orden de ideas, hacemos mención al *análisis crítico de materiales publicados*, atendiendo a que el mismo lo enfocamos dentro del contexto del CDC como parte del conocimiento del profesor, ya que exige un *conocimiento dual del contenido*. Sin embargo, también lo planteamos como estrategia de recogida de datos, puesto que con el material discutido con los profesores en el seminario lo que se planteó y persiguió en todo momento era la reflexión a partir de situaciones concretas relacionadas con las matemáticas y la economía.

2.4. La Enseñanza Basada en Problemas (EBP)

En didáctica de las matemáticas, el término *resolución de problemas* es ambiguo y abarca distintos enfoques en materia de enseñanza (García *et al*., 2006b); los más usuales son: (**i**) afianzar y consolidar un concepto matemático mediante situaciones problemáticas, (**ii**) trabajar y fortalecer técnicas de resolución de problemas y, por último, (**iii**) llegar a un concepto matemático a partir de una estructura o escenario conformado por problemas debidamente pensados y diseñados para este fin, tal como lo explicáramos en **1.1.4.2**. En este orden de ideas, en nuestro trabajo se entiende la resolución de problemas mediante el tercer enfoque y nos referiremos a él como enseñanza basada en problemas o EBP.

La EBP, en sus distintas variantes, es una de las estrategias de enseñanza que ha ganado, y sigue ganando prestigio en la educación superior, como metodología alternativa a la clase magistral. Aun cuando la EBP, como modelo general de enseñanza, tiene sus orígenes en el campo de la salud ésta ha tenido gran aceptación en otras áreas. Entrando en detalle, enseñar matemáticas vía resolución de problemas, significa acercar al estudiante a una realidad social, marcada por la necesidad que muchas veces tiene el individuo de resolver problemas de su entorno a través de una herramienta matemática.

A medida que el individuo crece o avanza en su escolarización, crecen también los grados de dificultad y exigencia para atender situaciones, en el caso del profesional universitario, enmarcadas o relacionadas directamente con su profesión (García *et al.*, 2006b). Según Schoenfeld (1985), el conocimiento necesario para una adecuada caracterización sobre el desarrollo de la resolución de problemas matemáticos aborda cuatro categorías (recursos, heurística, control y sistemas de creencias), las cuales están directamente relacionadas con los tres pilares que conforman el conocimiento didáctico del contenido. Así, la interrelación entre un constructo y otro fortalece nuestra investigación.

Si partimos de la opinión de Contreras (1999): "*En educación matemática y en investigación en educación matemática la resolución de problemas ocupa un lugar destacado; por otro lado, los nuevos currículos apuestan por orientar la matemática escolar de la enseñanza obligatoria desde la perspectiva de la resolución de problemas*". No obstante, con los últimos procesos de cambio dentro del panorama de integración europea y lo que supone la declaración de Bolonia que apuesta por promover la convergencia entre los sistemas nacionales de educación superior, lo dicho anteriormente por Contreras vale también para la educación universitaria, ya que uno de los objetivos principales hacia donde apunta la citada declaración, tiene que ver con el desarrollo curricular de la educación superior. Por otra parte, los programas de algunas materias de las que son objeto esta investigación, sugieren como estrategia metodológica la enseñanza de las matemáticas vía resolución de problemas.

Asimismo, la declaración de Bolonia dirige especial atención a una mayor participación (que supone un mayor compromiso) del estudiante en el proceso enseñanza-aprendizaje, tal como se puede observar con el nuevo sistema de créditos ECTS[23]. Ahora bien, no sólo en las universidad europea se están gestando cambios en el proceso de enseñanza; en la universidad venezolana y, concretamente, en la Universidad de Los Andes se viene impulsando y promoviendo la participación del estudiante en el marco del proceso de enseñanza-aprendizaje. Es por ello que nos propusimos estudiar el CDC del profesor de matemáticas de universidad a partir de un modelo alternativo

[23]Por sus siglas en inglés, European Credit Transfer and Accumulation System.

de enseñanza como lo es la EBP, puesto que el mismo le ofrece al profesor dirigir una enseñanza hacia un aprendizaje por descubrimiento, entendido éste como una construcción propia del estudiante asistida por el profesor (Carrillo, 1998), y es aquí donde la EBP comienza a jugar un papel significativo en este proyecto.

Moreno B. (2000), señala cuatro aspectos que se deben considerar dentro de la resolución de problemas como estrategia didáctica para la enseñanza de las matemáticas, tomando en cuenta los aspectos positivos y negativos que puedan significar la enseñanza por medio de la resolución de problemas, ella destaca: (**a**) Enseñar a resolver "problemas tipo", (**b**) inducir la reformulación verbal del problema a resolver, (**c**) facilitar por medio de preguntas el análisis del enunciado del problema, (**d**) facilitar la explicitación de los razonamientos presentes durante el proceso de resolución del problema.

Es de hacer notar que estas cuatro estrategias didácticas asociadas a la resolución de problemas están relacionadas con el conocimiento profesional que el profesor debe tener, siempre que veamos a éste como el facilitador y administrador de la difícil tarea que supone la enseñanza de las matemáticas por esta vía.

Así, lo que pretendemos estudiar en este trabajo es: (**a**) el conocimiento del profesor sobre esta estrategia de enseñanza, (**b**)hasta qué punto la enseñanza que siguen estos profesores se aproximan a la EBP, sobre todo en la enseñanza del cálculo diferencial en las carreras de ciencias económicas, (**c**) cómo valoran esta metodología de enseñanza, tomando en cuenta que, en general, siguen un modelo de enseñanza tradicional (García, 2004), entre otros.

En resumen y partiendo de Lee & Bae (2008), Benito *et al*. (2005), Humphrey *et al*. (2005), Kolmos (2004), Morales y Landa (2004), Roh (2003), Lewis (2003), Sonmez & Lee (2003) y Barrows (1986), entendemos la EBP como **una estrategia metodológica activa, centrada en el estudiante y con el profesor como guía, que desafía a los primeros a generar un conocimiento a partir de la búsqueda de soluciones a través de problemas cuidadosamente planteados, los cuales están relacionados con su entorno profesional, académico o ambos, bien sea entre ellos o en grupos, en contraposición con la enseñanza centrada en lecturas y libros de texto; pero siempre orientados por el profesor o tutor**. Con la implementación de esta metodología, el proceso de enseñanza-aprendizaje se inicia con un problema matemático ha ser resuelto, de tal manera que se genere en los estudiantes un "*conflicto cognitivo*" (Morales y Landa, 2004) y estos requieran de un nuevo o nuevos conocimientos para resolver el problema en cuestión.

Más allá de llegar a la respuesta correcta, lo que se busca es que los estudiantes analicen e interpreten el problema, identifiquen el o los contenidos disciplinares que se requieren para la solución y, así, generar una discusión sobre las posibles soluciones y las formas de llegar a éstas, donde la heurística juega un papel clave. Más aún, Lee & Bae (2008) se refieren a esta estrategia metodológica como una "*manera eficaz de proporcionar a los estudiantes de ser expuestos a situaciones del mundo real*" (su campo profesional en este caso) y de poder "*adquirir nuevas ideas en varias disciplinas*" al mismo tiempo. Por lo tanto, la entendemos como una actividad multidisciplinar que permite la interacción, siempre que se pueda, con diversas materias o asignaturas que conforman el currículo.

No obstante, esta metodología no goza de la total aceptación de los especialistas, existen opiniones encontradas sobre la utilización de esta metodología. White (2004b) manifiesta que hay profesores de matemáticas que no están de acuerdo con el uso de esta metodología como estrategia didáctica para la enseñanza de las matemáticas. Ellos consideran que las matemáticas se logran dominar a través del esfuerzo individual y que el trabajo en grupo distrae al estudiante de la adquisición de los objetivos de enseñanza. Así mismo,"...*consideran las matemáticas como una abstracción hermosa que de algún modo es corrompida por las aplicaciones*..." (Ibid); ello justifica que algunos profesores de matemáticas mantengan fuertes reservas sobre la implementación de la EBP. Sin embargo, Jhon White, profesor de bioquímica, afirma que: "*viniendo de una disciplina donde las matemáticas se aplican con frecuencia, me resulta difícil pensar en las matemáticas sin asociarlas a problemas de la vida real*" (Ibid).

Por otra parte, Angeli (2002) sostiene que los profesores entienden al estudiante como un ser pasivo e incapaz de ser responsable de su propio aprendizaje, lo que significa que el control del aprendizaje de los estudiantes no puede recaer en éstos y sino que tiene que ser llevado por el profesor.

Para estudiar todo esto recurrimos a una estrategia metodológica que explicaremos en el capítulo siguiente; en este sentido, es pertinente caracterizar la EBP en la enseñanza de las matemáticas en la educación superior, justificar nuestra apuesta por este modelo alternativo de enseñanza, qué aspectos debe tomar en cuenta el profesor de matemáticas al implementar esta metodología respecto a la enseñanza tradicional, entre otros.

2.4.1. Algunas características de la EBP en matemáticas

Como hemos señalado anteriormente, en el capítulo **1**, la EBP es considerada una estrategia didáctica activa, donde el estudiante se ve involucrado desde un inicio o mejor dicho, donde el profesor debe saber involucrar al estudiante desde el mismo planteamiento del problema, ya que el segundo pasa a ser la pieza fundamental de su propio aprendizaje, de la construcción de su conocimiento (Benito *et al.*, 2005; Humphrey *et al.*, 2005; Kolmos, 2004 y Roh, 2003). Un aspecto especial a tomar en cuenta en la EBP tiene que ver con el espacio ideal en la que se utiliza como estrategia didáctica. Tal vez por razones históricas y por los contenidos curriculares, el principal escenario donde se trabaja con esta metodología es en la educación superior, recordemos que fue en una Escuela de Medicina donde se dan los primeros pasos para ser implementada, por otra parte y dado que se apuesta por la multidisciplinariedad, algunas carreras universitarias se prestan para tal fin, entre ellas: medicina, enfermería, biología, matemáticas, derecho, ciencias económicas, etc.

Por lo general, los cursos de matemáticas básicas en la universidad, como el cálculo diferencial e integral, son presentados por el profesor como una actividad cuyo protagonista principal es la asignatura en sí misma (García *et al.*, 2006a) y quien le sigue en ese rol protagónico es el mismo profesor; éste, generalmente, relega a los estudiantes a un papel secundario, lo que conduce a estos últimos a ver los cursos como algo rutinario, en este sentido, la R-P es vista como una tarea superficial, la cual se centra en el uso de fórmulas pero no como constructora de conocimiento.

Entonces, si nos acogemos a los orígenes y fundamentos de la EBP podemos destacar algunas características que resultan propias de esta actividad que, insistimos, tiene como objetivo principal la construcción del conocimiento a partir de problemas que involucren uno o varios conceptos interrelacionados; bien sean, como en nuestro caso, matemáticos (cálculo diferencial) o bien matemáticos y económicos (cálculo diferencial - análisis marginal). Así mismo, refiriéndonos a los orígenes, mientras hay autores como Roh (2003) y Savery y Duffy (1995), apoyándose en H. S. Barrows, quienes consideran la EBP como un buen ejemplo de metodología constructivista, otros como White (2004a) piensan que no hay conexión entre la teoría constructivista y la EBP.

En este sentido, la EBP también se caracteriza porque tiene especial incidencia en el estudiante, al ser una metodología activa de trabajo (Benito *et al.*, 2005) que permite el desarrollo de habilidades del pensamiento, desde el punto de vista crítico y analítico, que se consolidan y perduran en el tiempo y que se abren a otras disciplinas (McCarthy, 2005); algo que desde nuestro punto de vista consideramos muy interesante por la relación existente entre las matemáticas y las ciencias económicas, un buen referente para destacar esta relación es el libro de González y Gil (2000).

Ahora bien, caracterizar la EBP no resulta una tarea fácil, entre otras cosas por los fundamentos teóricos en los que se basa esta estrategia didáctica, tomemos en cuenta que la misma jamás ha sido desarrollada sobre la base de una teoría o varias teorías en particular, sino que, por el contrario, se ha desarrollado desde la práctica, donde el ensayo y el error han jugado un papel significativo (Kolmos, 2004).

En este orden de ideas, la autora antes citada sostiene que la EBP varía según el tema a tratar, la organización y políticas de la universidad, la cultura de los estudiantes y el profesor. No obstante, ella habla de ocho principios teóricos sobre el proceso de enseñanza-aprendizaje asistido por EBP que, en líneas generales, forman parte del currículo, estos son:

1. El proceso de enseñanza-aprendizaje está basado en la formulación de un problema.
2. Los procesos de aprendizaje tienen que ser dirigidos por los participantes.
3. Hay que tomar en cuenta que el aprendizaje se basa en la experiencia de los participantes.
4. El proceso de enseñanza-aprendizaje se fundamenta en una actividad.
5. La interdisciplinariedad juega un papel fundamental.
6. La ejemplaridad también juega un rol determinante dentro del contexto.
7. Hay que tomar en cuenta la relación entre la teoría y la práctica.
8. Se considera la opción del trabajo en grupo o equipo.

En resumen y centrándonos en nuestra área de interés, es decir, la didáctica de las matemáticas a nivel universitario, destacamos algunos aspectos o características en referencia a la EBP como estrategia didáctica:

a. Es una estrategia metodológica activa centrada en el estudiante (Kolmos, 2004; Roh, 2003; Barrows, 1986)

b. Es una metodología que permite un desarrollo integral y plural en los estudiantes (Lee & Bae, 2008; Lewis, 2003); además que les permite enlazar de manera particular la construcción del conocimiento matemático partiendo de la propia matemática o de otras áreas como el caso de las ciencias económicas.

c. De la anterior se desprende que la EBP facilita una enseñanza contextualizada de las matemáticas, puesto que la misma permite plantear una clase en un escenario multidisciplinar.

d. Si tomamos en cuenta que los problemas pueden ser extraídos de vivencias reales o experimentales, esto le permite al estudiante desarrollar un aprendizaje que lo involucre tanto en el campo de la investigación como en área de formación (Mowshowitz, 2006; White, 1993).

e. Los problemas forman el eje central de la organización y el estímulo para el proceso de aprendizaje (Barrows, 1996).

f. Los problemas, además de ser una herramienta para la construcción del conocimiento, son un vehículo para el desarrollo de habilidades de la resolución de problemas (Barrows, 1996).

g. Permite que predomine la adquisición y consolidación del conocimiento frente a la memorización (Morales y Landa, 2004).

Finalmente y en otra dirección, queremos recordar que uno de los objetivos de este trabajo consiste en validar si la EBP es una herramienta metodológica para la recogida de datos en un marco como el señalado en esta memoria. De igual manera, queremos ser enfáticos que no pretendemos estudiar la EBP de forma exhaustiva como estrategia de enseñanza, ya que la misma no es puesta en práctica por los participantes en estos momentos, pero sí nos proponemos realizar un diagnóstico de carácter exploratorio de cara a una futura puesta en marcha del material que se discutió durante el seminario de investigación y recogida de datos. No obstante, reservamos el siguiente capítulo para hablar en detalle de esta situación.

Ahora bien, en el ánimo de continuar desarrollando el tema relacionado con las características de la EBP, debemos hacer referencia a los tipos de EBP que se desarrollan en la actualidad en el campo de la didáctica; entre estos tipos de estrategias metodológicas de enseñanza enmarcadas dentro de la EBP Savin-Baden (2003) señala siete tipos distintos, aunque algunos muy próximos, de modelos de EBP, los cuales varían de acuerdo al curso o la materia en la que se desee implementar tal estrategia. Aún así, el estudio de casos, usado en el área de la salud, el derecho y las ciencias económicas, es uno de los que mayormente se aplica. Este consiste en plantear un caso real o hipotético del área respectiva; por ejemplo, un juicio en el caso del derecho o el estudio de un paciente para el caso de la salud y se forman pequeños grupos donde se promueve la discusión para la construcción del conocimiento.

Por lo pronto pasamos a explicar el por qué de nuestra apuesta por la EBP, lo cual tiene que ver con dos líneas claramente diferenciados y que ya hemos mencionado en distintos puntos de esta memoria.

2.4.2. Por qué apostamos por la EBP

El apostar por la EBP supone para nosotros apuntar en dos direcciones que a saber son las siguientes, una es, (**a**) como estrategia didáctica de enseñanza de las matemáticas y, la otra, (**b**) como estrategia metodológica de recolección de datos. Sobre la primera debemos manifestar lo siguiente: nosotros apuntamos hacia una enseñanza contextualizada de las matemáticas y en particular del cálculo diferencial en carreras de ciencias económicas, es por ello y después de lo dicho hasta ahora sobre esta metodología de enseñanza que vemos en la EBP unas características especiales si la comparamos con la clase tradicional de matemáticas.

Por otra parte sostenemos, siguiendo a Humphrey *et al*. (2005), que hay una necesidad crítica de un nuevo paradigma educativo que apunta hacia la nueva formación de profesionales competentes, en particular, de los futuros economistas, administradores y contadores públicos. La EBP como estrategia facilitadora de interacciones multidisciplinarias responde, desde nuestro punto de vista, a este nuevo paradigma. Por otra parte, consideramos que no podemos permitirnos el seguir formando estudiantes de forma aislada en cuanto a contenido se refiere, es decir, enmarcados en disciplinas vistas como un único elemento y donde el estudiante se forme con ideas disjuntas de las materias que conforman su plan de estudios.

Una justificación hacia el cambio que exige hoy en día el proceso de enseñanza-aprendizaje actual lo presentamos a continuación:

> En las últimas décadas hemos sido testigos de los grandes cambios producidos en casi todos los aspectos de nuestra vida: la manera como nos comunicamos, se dirigen los negocios, se accede a la información y se utiliza la tecnología, son ejemplos claros. Actualmente nuestros estudiantes deben prepararse para incorporarse a un entorno laboral muy diferente al que existía hace solo diez años atrás. Los problemas que estos futuros profesionales deberán enfrentar cruzan las fronteras de las disciplinas y demandan enfoques innovadores y habilidades para la resolución de problemas complejos.
>
> (Morales y Landa, 2004, p. 146)

En este orden de ideas, nos decantamos por la EBP, aun cuando tenemos presente que ello implica una transformación en el modelo que se sigue actualmente de enseñanza-aprendizaje, esto quiere decir, cambios en los profesores y estudiantes. Esto implica una necesidad de cambios fundamentales en lo que se refiere a ambos grupos. No obstante, recordemos que en el presente trabajo sólo abordamos el caso del profesor de universidad.

Sobre esta necesidad de cambios recurrimos nuevamente a los autores citados anteriormente, quienes retratan la situación actual del modelo de educación superior que se sigue en general:

> Muy pocos docentes en la educación superior tienen algún tipo de formación en pedagogía, simplemente enseñan como les enseñaron, es decir, a través de clases expositivas. Esta modalidad de enseñanza normalmente está focalizada hacia los contenidos, priorizando los conceptos abstractos sobre los ejemplos concretos y las aplicaciones. Las técnicas de evaluación se limitan a comprobar la

> memorización de información y de hechos, ocupándose muy rara vez de desafiar al estudiante a alcanzar niveles cognitivos más altos de comprensión.
>
> (Morales y Landa, 2004, p. 146, el resaltado es nuestro)

El otro punto por el que apostamos por la EBP tiene que ver, como dijimos arriba, con el uso ya no como estrategia de enseñanza sino de recogida de datos en una investigación de tipo cualitativa como la que estamos presentando. Claro está que toda la literatura revisada por nosotros entiende la EBP como lo señalado en el punto (**a**), pero nosotros nos hemos propuesto explotar el uso de la *EBP como una técnica para la recolección de datos*, ya que la misma está fuertemente vinculada con algunas componentes del CDC.

2.4.3. Aspectos a tomar en cuenta por el profesor en la EBP

Un aspecto a destacar en la EBP, vista como estrategia de enseñanza, es el papel que juega el profesor, en este sentido tomaremos en cuenta lo señalado por Lewis (2003) y Roh (2003), entre otros; quienes afirman que la EBP permite conjugar el aprendizaje de diferentes áreas del conocimiento, en nuestro caso, nos referimos al cálculo diferencial para estudiantes de ciencias económicas y las consideraciones que un profesor de matemáticas debe tener presente a la hora de tomar en cuenta la enseñanza de las matemáticas basada en problemas para carreras de economía o afines.

En líneas generales, los profesores que utilizan la EBP como estrategia metodológica de enseñanza en sus cursos o asignatura deben considerar algunos fundamentos dentro del CDC; en particular, destacamos aquellos relacionados directamente con el estudiante y con la asignatura en sí. En el caso del estudiante, porque éste se está convirtiendo en el protagonista del proceso de enseñanza-aprendizaje; en el caso de la asignatura o contenido de la misma, por la fuerte relación existente entre las matemáticas y las ciencias económicas.

Al respecto señalamos algunos puntos como referentes sobre el papel del profesor en la EBP, los cuales son tomados de los autores señalados arriba:

1. El uso de *la EBP obliga al profesor a ceder el rol protagónico*, que éste ocupa en la enseñanza tradicional, al estudiante, es decir, se invierte el proceso de enseñanza-aprendizaje. El profesor debe saber cuándo y cómo intervenir, para que el alumno conserve su actitud participativa y reflexiva y no adopte la actitud pasiva que supone la clase tradicional.

2. Lo anterior supone un *mayor compromiso y un nivel de profesionalismo más crítico* por parte del profesor.

3. El profesor debe poseer un conocimiento ajustado a las aplicaciones, lo que implica un *conocimiento más profundo del contenido*. Este conocimiento va en consonancia con el que identificamos como **conocimiento dual**. La falta de un conocimiento profundo de las matemáticas puede incidir en la planificación, selección y elaboración de los problemas a tratar.

4. El profesor al implementar la EBP se ve en la obligación de *aplicar una amplia gama de habilidades pedagógicas*.

5. El profesor debe ser consciente que no sólo tiene que producir un conocimiento matemático en sí, sino que *debe saber involucrar a los estudiantes en los procesos de resolución de problemas y aplicaciones del conocimiento matemático*.

6. El profesor *está obligado a tener conocimiento sobre el estudiantes* con los que trabajará y desarrollará un determinado tema. En el caso de las ciencias económicas, el docente tiene que estar al tanto del conocimiento tanto matemático como de contenido económico que posee el estudiante para ese momento.

7. Las ciencias económicas, por su estrecho vínculo con las matemáticas, permiten el uso de la EBP para la enseñanza de estas últimas. La elección del problema es clave en esta metodología y el profesor universitario de matemáticas debe tener presente, a la hora de elegir el problema que servirá de base para generar conocimiento en el estudiante, la distribución adecuada de contenidos matemático y económico.

2.4.4. Aportes personales a la EBP

Finalizamos el apartado relacionado con la EBP destacando algunos puntos que hemos discutido a lo largo del mismo y que consideramos son un aporte a la didácticas específicas. En primer lugar, mostramos un concepto de EBP que queda claramente diferenciado de la R-P en la didáctica de las matemáticas y de esta manera, le restamos ambigüedad al concepto de R-P, tal como se viene manejando en esta área.

Por otra parte, el hecho de reservar un apartado a la EBP cobra sentido si pensamos que el instrumento de investigación se elaboró sobre la base de esta metodología alternativa de enseñanza, fundamentalmente con la firme intención de aproximarnos al profesor de manera indirecta y generar inquietudes en ellos y, así, enriquecer la discusión y reflexión que los participantes pudieran hacer sobre la EBP y sobre aspectos concretos del CDC.

De igual manera, el haber caracterizado la EBP en el área de la enseñanza de las matemáticas permite acercar el *zoom* hacia situaciones concretas. En la literatura existente, generalmente se caracteriza la EBP en áreas como la salud, la química, bioquímica, entre otras; pero poco se encuentra sobre matemáticas. Esta caracterización permite ir depurando y consolidando un marco teórico que hasta ahora resulta flojo en cuanto a las matemáticas se refiere.

También es cierto que esta estrategia metodológica es muy extensa y abarca variados fundamentos dentro del campo de la didáctica, pero el hecho de que nuestro trabajo esté enmarcado en el estudio del CDC del profesor de matemáticas de universidad, nos impulsó a hablar del rol que juega éste en la implementación de esta estrategia y más aún, de ilustrar la relación existente entre la EBP y el CDC.

Por último y sabiendo que en el análisis de los datos se abordarán aspectos sobre el CDC y la EBP en un escenario muy concreto, estimamos que disponemos de los instrumentos suficientemente sólidos para llevar a cabo un estudio sobre el conocimiento didáctico del contenido del profesor de matemáticas de universidad y una aproximación al conocimiento de estos en relación con la enseñanza de las matemáticas basada en problemas; todo ello, para cubrir los objetivos que nos planteamos al inicio e intentar realizar un aporte en lo que se refiere al profesor de matemáticas de universidad como elemento de investigación en el campo de la didáctica.

Capítulo 3

Metodología

Introducción

A continuación presentamos la metodología utilizada en el presente trabajo, tanto para la recolección de datos como para el análisis de los mismos. Al mismo tiempo, reservamos un espacio para hablar sobre los profesores participantes. En primer lugar, comenzaremos hablando sobre la recolección de datos, la cual se hizo a través de un seminario de discusión y reflexión en el que se trabajó con un material diseñado por nosotros y validado por investigadores expertos en didáctica de las matemáticas que desarrollan su labor docente en una facultad de ciencias económicas de una reconocida universidad en Cataluña, España; pero además, externos a este trabajo. Las sesiones del seminario, cuatro en total, fueron grabadas en audio y posteriormente fueron transcritas, al final de cada sesión se le entregó a cada profesor un breve cuestionario abierto relacionado con la actividad del día, el cual debía ser entregado al inicio de la siguiente sesión. También diseñamos y aplicamos una entrevista con preguntas abiertas, esta entrevista la realizamos una vez acabado el seminario. Como siguiente punto, nos referimos al grupo de profesores de universidad que participaron en el presente estudio. En el tercer y último punto de este capítulo, hablaremos sobre la metodología empleada para el análisis de la información obtenida por parte de los participantes.

También es importante destacar que este trabajo se basa en un estudio de tipo cualitativo. Por medio de él, investigamos sobre el conocimiento didáctico del contenido (CDC) de un grupo de profesores de matemáticas de universidad; para finalmente, hacer nuestras reflexiones, interpretaciones y comentarios a partir de los datos obtenidos.

3.1. Metodología de la investigación

A continuación presentamos el marco metodológico en el cual está inmerso el presente trabajo, en otras palabras, partimos del hecho de explicarle al lector dónde se enmarca la investigación, así como el proceso que se siguió para la organización y el análisis de los datos obtenidos. En este sentido, ilustramos que en un primer paso *preparamos y abonamos* todo el terreno (diseño y elaboración del instrumento), para luego proceder a *cultivar* (recogida de datos) y, finalmente, *cosechar* (análisis de los datos, resultados y conclusiones).

En el presente trabajo se estudia el CDC del profesor de matemáticas de universidad a partir de la EBP, básicamente, mediante la discusión de un material en el que se induce un proceso de reflexión a partir de un seminario de discusión. Tanto el material como la forma de desarrollar el seminario se centran en la manera como el profesor dice que enseña el tema de la derivada, eso sí, tomando en cuenta la componente básica de la enseñanza; es decir, los estudiantes y sus referentes.

Es por ello que en las dos secciones que siguen nos referimos, de manera específica, al tipo de investigación con el que se identifica la presente memoria con su debida justificación, así como también las exigencias previas que nos propusimos cubrir con el objeto de que la investigación se sustente en sí misma, tal como lo requiere un trabajo de esta naturaleza.

3.1.1. Marco metodológico

Comenzaremos por decir que para el desarrollo de nuestro estudio la metodología que seguimos es del tipo *cualitativa* y de naturaleza *descriptiva*, *exploratoria* e *interpretativa*, ya que lo que buscamos estudiar son aquellos aspectos sobre el conocimiento profesional del profesor de matemáticas de universidad que fueron definidos en el **Capítulo 2** y su relación con las carreras de ciencias económicas; además, investigamos la enseñanza basada en problemas (EBP) como estrategia activa de enseñanza de las matemáticas en las carreras antes mencionadas y como herramienta para la recogida de datos.

El método de investigación que mejor se ajustó a nuestros intereses, tomando en cuenta el escenario en el que nos moveríamos, es el *estudio de casos*[1], el cual se adapta tanto a los objetivos que perseguimos como a la información que íbamos a recoger. La elección de esta metodología de investigación se hizo en atención a que quisimos abordar algunos aspectos del conocimiento del

[1]Aunque hay que aclarar, tal como lo explicaremos en la metodología de análisis, que lo que buscamos estudiar es la interrelación entre los participantes. En este sentido, cuando nos referimos al estudio de casos es porque en un principio vemos los participantes por separado.

profesor, con cierta intensidad y en un intervalo de tiempo relativamente corto. El verdadero potencial de este diseño radica en su capacidad para generar hipótesis y descubrimientos, en centrar su interés en un individuo o situación y en su flexibilidad y aplicabilidad a situaciones naturales (Latorre *et al*., 1996) aunque luego, en el Capítulo 5 queda evidenciado que lo que hacemos es partir del estudio de casos para llegar al *análisis relacional*.

Compartimos los supuestos de Merriam (1988, citado en Arnal *et al*., 1994), quien señala cuatro propiedades esenciales en el estudio de casos: *particular*, *descriptivo*, porque pretendemos realizar una descripción del fenómeno por estudiar lo más densa posible; *heurístico*, en la medida en que los resultados nos abran las puertas hacia la comprensión de los casos, llevándonos en lo posible a descubrir nuevas situaciones y significados; e *inductivo*, puesto que a partir de los resultados se puede llegar a algunas generalizaciones o al descubrimiento de nuevas relaciones y conceptos.

Otro aspecto que conviene destacar en esta investigación, es que el estudio de casos se aplica a varios individuos de manera simultánea o sucesivamente comparada, lo que implica una *inducción analítica* y el *método de la comparación constante* (Ballester, 2001). Este trabajo queda bien diferenciado dentro del estudio de casos y, al respecto, diremos que se corresponde con una *microetnografía* (Arnal *et al*., 1994; Ballester, 2001), esta microetnografía se corresponde con un pequeño grupo de profesores de universidad que se ocupan de algo en común, enseñar matemáticas a estudiantes de ciencias económicas en la Universidad de Los Andes en Venezuela.

A todo lo anterior añadimos que en este trabajo realizamos un estudio de casos de una forma muy particular, puesto que los datos provienen de dos ambientes claramente diferenciados; por una parte están los datos que provienen de un espacio colectivo de discusión (el seminario), en el cual las opiniones emitidas por los participantes podrían estar sujetas a los comentarios o actitudes de los otros participantes y, por otro lado, los datos derivados de los cuestionarios y entrevistas que aplicamos de manera individual a cada uno de los profesores.

En el caso de los cuestionarios, estos fueron respondidos por los profesores de forma individual y en total privacidad, ya que los mismos se los llevaban a sus lugares de habitación y eran entregados con un margen de tiempo de una semana; en cambio, las entrevistas fueron realizadas al final de la última sesión del seminario. Toda esta situación tiene la propiedad de enriquecer el conjunto de datos pero al mismo tiempo exige ser más cuidadosos en el análisis de los mismos. Podemos decir que ambas situaciones corresponden a técnicas *directas* o *interactivas* de recogida de datos (Massot *et al*. 2004; Goetz y LeCompte, 1988) dentro de las investigación cualitativa.

3.1.2. Exigencias previas a la investigación

Al final del **Capítulo 1** mostramos la estructura del presente trabajo, en la cual se presentaron de manera esquemática los principales aspectos que se tocan en este estudio. Por otra parte, el presente capítulo lo hemos reservado para hablar de la metodología empleada y todo lo relacionado con situaciones propias de este tipo de investigación. Una vez ubicado el modelo de investigación en el que centramos nuestro trabajo, así como el paradigma y contexto en el que se enmarca toda la dinámica abordada hasta ahora, es conveniente hablar, según Ferreres *et al*. (1997), de las exigencias fundamentales que se deben seguir en una investigación cualitativa y que están relacionadas con la *representatividad*, *relevancia* y *plausibilidad*; así como las relacionadas con la *fundamentación teórica* de la investigación y, las que se derivan tanto de la *dinámica relacional* como de la *dimensión ético-social*. Todo esto, con el objetivo de guardar, a lo largo del desarrollo del estudio los patrones de rigor que merece el mismo.

Representatividad

A la hora de abordar la *representatividad* como exigencia previa en este tipo de estudio, destinamos este espacio para referirnos a situaciones propias derivadas del **análisis**, así como también a los **participantes** y al **objeto matemático elegido**, en este caso, la derivada. En este sentido y con el objetivo de poder extendernos y profundizar en el planteamiento de nuestro trabajo hemos ampliado, a través del análisis, las opiniones de los profesores participantes. Por otra parte, puntualizamos que al tratarse de un estudio de casos es probable que el conjunto de profesores que intervienen en este trabajo no represente al total de profesores que enseñan matemáticas en carreras de ciencias económicas en la Universidad de Los Andes, poniendo en evidencia una de las desventajas del estudio de casos (Stake, 1999), pero sin restarle importancia a los resultados de la investigación por lo señalado en la **Sección 3.1.1** y en el **Apartado 3.3**.

Finalmente, la elección de la derivada como objeto o concepto matemático no posee una característica propia y significativa a la hora de compararlo con algún otro concepto del cálculo como la integral, las sucesiones y series o cualquier otro concepto, por ejemplo, del álgebra matricial o de alguna otra área de las matemáticas; por el contrario, inferimos que al abordar alguno de estos conceptos por separado los resultados serían similares, con lo cual la representatividad que pueda tener la derivada como pilar de este trabajo debe ser vista como una vía que eligió el investigador para acercarse a los profesores y así indagar y profundizar en el CDC y la EBP. En otras palabras, la derivada, en este caso, resulta ser un vehículo que nos permite conectar con los participantes en este estudio.

Relevancia

Al igual que la representatividad, la *relevancia* como exigencia previa de este trabajo, está relacionada con el problema de investigación que aquí se trata y lo significativo que pueda ser para el grupo de profesores participantes el desarrollo del presente trabajo. Así, nos permitimos enfocar la relevancia con una visión en la que el investigador suele plantearse el problema como *tema de propio interés*; no obstante, la posición del investigador en este caso es mostrar lo significativo que podría resultar el conocer algunos aspectos fundamentales que nos orientan hacia futuros trabajos, que sigan esta línea, de cara a profundizar en cuestiones más específicas de la enseñanza del cálculo en carreras de ciencias económicas y, por qué no, en otras carreras universitarias como la ingeniería, entre otras.

Ya en la **Sección 1.1.2** mencionamos algunos de los trabajos que nos impulsaron y que fueron tomados en cuenta para el desarrollo de esta memoria; sin embargo, no podemos dejar de mencionar investigaciones como: An *et al*. (2004), Angeli (2002), Blanco *et al*. (1995), Bransford *et al*. (2000), Bridges y Hallinger (1992), Cámara (2000), Carrillo *et al*. (2007), Codina y Riviera (2001), DeLoach (2001), Forsythe (2002), García (2006b), Gijselaers (1995), Jiménez y Wamba (2004), Kahan *et al*. (2003), Milter y Stinson (1995) y Roh (2003), entre otros, las cuales nos permitieron definir claramente nuestra línea de investigación. Si atendemos a cada uno de estos trabajos, podemos apreciar que algunos hablan del CDC, otros la EBP, pero ninguno conjuga de forma explícita ambos tópicos y, mucho menos, enmarcado en el tema de la enseñanza de las matemáticas en carreras afines a las ciencias económicas.

En tal sentido, la relevancia de nuestro trabajo obedece a los pocos trabajos que hay en esta línea que reúne: el conocimiento del profesor de matemáticas de universidad, la enseñanza de las matemáticas vía resolución de problemas como estrategia didáctica y las matemáticas económicas. Es así como pretendemos rellenar ese hueco dentro de las didácticas específicas.

Plausibilidad

Cuando nos planteamos este trabajo y notamos lo relevante o significativo del mismo dentro del contexto espacial en el que está inmerso, se pudo observar con bastante claridad la justificación del mismo. En otras palabras, la relevancia de la investigación incidió en lo *plausible* de la misma. Así, desde nuestro punto de vista y por nuestro propio interés como investigadores, consideramos plenamente justificable el desarrollo de este estudio, ya que por medio del mismo podemos conocer, o al menos aproximarnos a, una realidad que hoy en día se muestra como una necesidad básica e ineludible para el perfeccionamiento del docente, así como el desarrollo y evolución de los programas curriculares que señalan Colás y Buendía (1998), por ejemplo.

Por otra parte, el trabajo aquí presentado ha ganado terreno dentro de la aplicabilidad del mismo por parte de uno de sus autores, puesto que uno de ellos se desempeña como investigador y docente universitario en el campo de las matemáticas económicas. Más aún, el trabajo en si mismo ha servido como herramienta motivadora y como elemento impulsor para otros colegas del departamento donde labora este autor. Recordemos además que uno de los objetivos de este trabajo consiste en poner en práctica el material discutido durante la recolección de datos.

Fundamentación teórica

Aun cuando partimos de algunos trabajos como piezas claves para el desarrollo de esta investigación, tal como se expuso en el **Capítulo 1**, la información obtenida a través de los instrumentos nos obligó a sostener un *feedback* entre los antecedentes de nuestra investigación y los datos recabados; obligándonos a buscar en otras fuentes teóricas pero sin descuidar ni restarle importancia a la valiosa información suministrada por los profesores participantes. En todo caso, queremos dejar claro que desde el inicio de este trabajo tomamos como norte, ser cuidadosos y objetivos a fin de no tergiversar o manipular la información de los profesores. Por otra parte, el ampliar la literatura nos ha permitido ser más cuidadosos de cara a futuros trabajos, con lo cual el enriquecimiento intelectual en los temas de la EBP y del CDC del profesor de matemáticas de universidad ha sido provechoso; de manera que esto ha repercutido de forma directa en el marco teórico dándole mayor solidez y obligándonos a profundizar en el mismo.

Dinámica relacional

Una de las grandes inquietudes que afloraron antes de iniciar este trabajo, fue el temor a la no receptividad y participación por parte de los profesores colaboradores en este proyecto, ya que casi todos habían participado en García (2004) y la distancia geográfica entre los investigadores y los participantes era significativa. Pero para satisfacción nuestra, la receptividad y atención prestada por medio de sus respuestas y opiniones a lo largo de toda la aplicación del instrumento (seminario, cuestionarios y entrevistas), muchas de ellas con gran detalle y precisión, nos impulsó y alentó a proseguir en el desarrollo y evolución de la investigación. Más aún, las sugerencias y el aporte de ideas de algunos participantes nos han motivado a continuar y, al mismo tiempo, a pensar en nuevos trabajos donde se relacionan las matemáticas y las ciencias económicas como es el caso del *álgebra matricial* y el estudio de *puntos de equilibrio de mercado*, el *modelo insumo-producto*, entre otras.

En este sentido, es conveniente sacar a colación algunas opiniones personales de los participantes, quienes coinciden en lo interesante y pertinente que resulta un estudio como este, así como la necesidad de que se consoliden trabajos de investigación como el que estamos mostrando o, al menos, la creación de espacios o actividades como la realizadas en el seminario de cara a la formación permanente del profesor:

(Alexis) *Ahora, me parece y es bueno que uno aquí haga un grupo de trabajo con problemas de aplicaciones a la economía*.

(Elio) *...me agradó mucho este tipo de reuniones, este tipo de cosas..., y ojalá que se pudieran seguir haciendo..., ...me preocupa el enfoque que le estamos dando muchas veces a esos contenidos*.

(Kenya) *...contribuyó a plantearme dudas interrogantes o cuestiones que realmente nunca me las había planteado y a reflexionar sobre algunas situaciones..., bueno que están allí latentes pero que a veces uno como que no las percibe.*

(Manuel) *...uno adquiere otra forma de ver las cosas. Por ejemplo, a mi me gustó esa actividad, la manera de implementar la regla de la cadena ya con..., de una vez con las aplicaciones, entonces dije: "¡caramba!, me parece interesante hacerlo de esta manera". Entonces, ya aprendí otra cosa que además no había visto antes*.

Dimensión ético-social

Para acercarnos a los profesores participantes tomamos en cuenta algunas consideraciones y exigencias vinculadas con este tipo de investigación, aunque debemos reiterar que ya cinco de los seis profesores que participaron en el presente trabajo ya lo habían hecho en García (2004). No obstante, los participantes fueron debidamente invitados a participar de forma voluntaria y, de igual modo que en *ibid*, se les informó sobre las pretensiones del trabajo. Por otra parte, quedó garantizado de manera seria y clara el anonimato de cada uno de ellos, resaltando así el compromiso ético y social que corresponde a este tipo de trabajo.

3.2. Recogida de datos

Para la recolección de datos hemos diseñado un material, el cual consiste en una propuesta didáctica teórica, enmarcada en la EBP como estrategia metodológica de enseñanza del cálculo diferencial en carreras de ciencias económicas; este material se discutió durante un seminario con los profesores participantes. En este sentido la EBP, tal como lo hemos venido señalando, jugó un doble papel en este trabajo: por una parte, como estrategia metodológica de recogida de datos, permitiéndonos llegar de manera indirecta al grupo de profesores, y en segundo lugar, dado que es una estrategia metodológica de enseñanza sugerida por los programas oficiales y que forma parte del CDC, para determinar el conocimiento que tiene este grupo de profesores sobre la mencionada metodología de enseñanza.

Aunado al material antes mencionado se diseñaron cuatro cuestionarios abiertos relacionados directamente con cada una de las sesiones programadas del seminario para que los profesores, de forma individual, complementaran la información emitida durante la respectiva sesión. Finalmente, después de la última sesión del seminario, se entrevistó a cada profesor por separado y en este caso, la entrevista se fundamentó en preguntas abiertas, de manera que cada uno de los participantes aportara más material sobre su CDC y al mismo tiempo sirviera para que valoraran la actividad realizada, vista toda como un conjunto. En resumen, podemos decir que la recogida de datos que realizamos es del tipo *interactiva* (Massot *et al.*, 2004; Goetz y LeCompte, 1988) y en la que el investigador está presente en todo momento.

La idea de diseñar un instrumento de recolección de datos conformado por tres partes viene a estar justificado por el hecho de buscar mayor profundidad en las opiniones de los participantes. Sobre este hecho en particular citamos a Massot *et al.* (2004)

> La utilización de distintas técnicas de recogida de información de forma complementaria o bien simultánea es necesaria para poder contrastar y enriquecer la información obtenida sobre la realidad, pues cada una de las técnicas utilizadas nos ofrece una visión particular de la misma.
>
> (Massot *et al.*, 2004, p. 332)

No es un secreto que las opiniones de una persona sobre determinado tema cambian de acuerdo con el escenario en el que se encuentre ésta, razón por la cual nos propusimos obtener información del profesor en tres escenarios distintos: (1) durante las sesiones del seminario, en un ambiente interactivo con la presencia de pares y del investigador, (2) en relación al cuestionario, los profesores lo contestaban cada uno por su cuenta y lo entregaban en la siguiente sesión de seminario y, (3) en la entrevista realizada después de la última sesión del seminario y de la entrega del cuestionario correspondiente a esta sesión, en este caso el participante estuvo frente al investigador. En las dos secciones que conforman este apartado describimos en detalle el instrumento así como el diseño y aplicación del mismo.

3.2.1. El instrumento de investigación

Como ya se dijo en líneas anteriores, diseñamos una propuesta didáctica teórica cuyo contenido matemático central es el concepto de derivada y temas relacionados con el mismo como: cálculo e interpretación física y económica de la derivada, regla de la cadena y análisis matemático y económico. Además, incluimos temas como el dominio de definición de una función tanto en el contexto matemático como económico, monotonía de una función, valores extremos de una función entre otros; teniendo siempre presente la *contextualización económica* en cada uno de los problemas que conforman el material de discusión.

La propuesta didáctica[2] se diseñó para ser desarrollada en cuatro partes, siguiendo la estructura de los programas oficiales que actualmente se implementan en la Universidad de Los Andes. Con esta estructura se buscó darle a la recogida de datos un *carácter continuo* (Massot *et al.*, 2004) a este proceso. Estas partes, discutidas en igual número de sesiones del seminario, estuvieron conformadas de la siguiente manera:

- Introducción al concepto de derivada de una manera no tradicional mediante una aproximación empírica o menos formal y con una interpretación económica de la derivada.
- Conceptos del análisis matemático asociados a la derivada o al tema de funciones en una variable real como: monotonía, puntos críticos, valores extremos, dominio de definición.
- Introducción de la regla de la cadena a través de interpretaciones económicas y matemáticas.
- Análisis de funciones en un contexto económico y matemático para la toma de decisiones.

Cada apartado de la propuesta didáctica estuvo formado por dos o tres problemas. En cada uno de los problemas se abordaron preguntas relacionadas con el CDC como los son; en nuestro caso, conocimiento disciplinar matemático-económico, conocimiento del aprendizaje, conocimiento de

[2]Para detalle en extenso de este material remitimos a los **Apéndices A** y **B**.

la enseñanza y conocimiento del currículo; dándole mayor peso a los puntos centrales de nuestro interés, tal como lo señaláramos en el marco teórico.

Observación 1: Se debe tener siempre presente que las opiniones y comentarios emitidos por los participantes se basan, en la mayoría de los casos, en su experiencia como docentes universitarios y, en ningún momento, son derivados de haber llevado a la práctica (al aula de clases) ninguna de las actividades contempladas en el seminario. En todo caso, y a fin de profundizar en esta línea de investigación, se tiene previsto darle continuidad a este trabajo mediante el desarrollo de una actividad con profesores y estudiantes. Sin embargo, para los efectos y objetivos que se persiguen por el momento, nos limitamos únicamente a trabajar con el profesor.

Observación 2: Por razones geográficas y de disponibilidad de tiempo de los participantes, los seis profesores fueron divididos en dos grupos, **A** y **B**, cada grupo de tres profesores. Sin embargo, uno de los profesores del grupo A, sólo participó en la primera sesión del seminario y tuvo que abandonar por razones ajenas a su voluntad. A lo anterior hay que añadir que durante las sesiones del seminario, cuando se realizaba una pregunta, procuramos darle rotación a los participantes, es decir, era el investigador quien decidía en la mayoría de los casos, quién comenzaría a responder; esto último, para evitar que sólo un participante tomara la iniciativa o liderara al resto del grupo y darle un carácter heterogéneo a la información.

3.2.2. Diseño y aplicación del instrumento

A continuación pasamos a describir la manera como se llevó a cabo la elaboración y aplicación de los instrumentos, reservando para el siguiente apartado lo que concierne a la validación de los mismos. Sin embargo, debemos comenzar por afirmar que la base del diseño y estructura de nuestro instrumento de recogida de información obedece tanto a los resultados obtenidos en García (2004) como a las diversas inquietudes o interrogantes que nos planteamos en el citado trabajo y, que por diversas razones no pudimos abordar en ese momento.

Ahora bien, si algo tuvimos siempre claro al inicio de esta investigación, fue y sigue siendo el tema principal a ser estudiado; es decir, el conocimiento didáctico del contenido (CDC), por otra parte, la herramienta o concepto matemático que nos sirviera de enlace para abordar el tema antes señalado (la derivada) y el área de conocimiento de las carreras universitarias en las que se trabaja con este concepto, esto es, las ciencias económicas.

De estos tres puntos, los dos últimos se repiten respecto a García (2004), pero cambiamos las concepciones y creencias del profesor de matemáticas de universidad por el CDC. Más adelante surgió la idea de implementar la enseñanza de las matemáticas basada en problemas (EBP) vista como estrategia metodológica de enseñanza. La idea original consistía en discutir una lista de problemas matemáticos, pero la colaboración de un revisor externo del instrumento inicial nos motivó a seguir por esta vía después de una discusión pormenorizada entre el investigador que presenta esta memoria y sus directoras.

A continuación pasamos a explicar en qué consiste el instrumento de recogida de datos elaborado para cumplir con los objetivos de este trabajo, así como las distintas formas o estrategias que utilizamos para implementar cada parte del instrumento.

3.2.2.1. El material

Para el desarrollo de todo este proyecto hemos diseñado un material, el cual lo entendemos, casi en el estricto sentido de la palabra, como la *columna vertebral* de la presente investigación, el cual consiste en una serie de problemas enmarcados en el tema de nuestro interés, es decir, el cálculo diferencial para carreras de ciencias económicas. Estos problemas los elegimos a *conveniencia* de libros de textos, los cuales aparecen sugeridos o recomendados en los programas oficiales de las carreras ya mencionadas en la Universidad de Los Andes, a fin de buscar la mayor familiarización por parte de los participantes con los problemas a ser discutidos. El contenido de todo este material se puede ver con todo detalle en los **Apéndices A** y **B** al final de este trabajo.

Los problemas que se eligieron, salvo los de la primera sesión, corresponden al tema de aplicaciones de los libros de texto que fueron consultados (Arya y Lardner, 1987; Haeussler y Paul, 1997; Lial y Hungerford, 2000; Whipkey *et al.*, 1987; Wonnacott, 1983), solo que para este trabajo, los problemas fueron modificados por nosotros con el objeto de plantearlos bajo el esquema de la EBP y, al mismo tiempo, que tales problemas nos permitieran acercarnos a los profesores y estudiar las partes del CDC de nuestro interés. En otras palabras, los problemas sirvieron como herramienta para obtener información específica a partir de un conjunto de preguntas vinculadas al CDC y relacionadas con el problema en discusión.

La forma de aplicar el mencionado material se realizó, fundamentalmente, mediante un seminario de discusión; de cada sesión del seminario se derivó un breve cuestionario y al cabo de la última sesión del seminario y del cuestionario correspondiente realizamos una entrevista a cada uno de los participantes. Pasamos a explicar todas estas estrategias de recogida de información en las siguientes subsecciones.

3.2.2.2. El seminario

Este tipo de técnica para recoger información se conoce también como *entrevista de grupo* (Flick, 2004) o *grupos de discusión* (Massot *et al*., 2004); estos últimos se refieren a esta estrategia de la siguiente manera:

> ...es una técnica cualitativa que recurre a la entrevista realizada a todo un grupo de personas para recopilar información relevante sobre el problema de investigación. Por lo tanto, la primera característica que se evidencia en esta técnica es su carácter colectivo que se contrasta con la singularidad personal de la entrevista en profundidad.
>
> (Massot *et al*., 2004, p. 343)

Por otra parte, sobre el alcance y la potencialidad de esta técnica nos acogemos a lo que sostiene Patton (1990) citado en Flick (2004), quien dice que es una:

> ...técnica de recogida de datos cualitativa sumamente eficiente [que proporciona] algunos controles de calidad sobre la recogida de datos, ya que los participantes tienden a proporcionarse controles y comprobaciones los unos a los otros que suprimen las opiniones falsas o extremas... y es bastante sencillo evaluar hasta qué punto hay una visión relativamente coherente compartida... entre los participantes.
>
> (Patton, 1990, pp. 335-336, citado en Flick (2004), p. 127)

Ahora bien, antes de pasar a explicar en qué consiste nuestra estrategia queremos dejar por sentado que las sesiones del seminario como tales, no fueron sesiones de resolución de problemas; los problemas allí discutidos se les entregaban a los participantes con sus respectivas soluciones al inicio de cada sesión, buscando en todo momento la reconstrucción lo más aproximada posible a las situaciones vividas en un aula de clase, evitando estudiar el CDC del profesor en un *aislamiento artificial* (Pollock, 1955) contrario a si lo hubiésemos hecho de forma individual. Todo esto se corresponde con la forma natural como se producen, manifiestan e intercambian las opiniones (Flick, 2004) en el escenario académico universitario. De esta manera "*el grupo se convierte en una herramienta para reconstruir las opiniones individuales más apropiadamente*" (*ibid*).

En otro orden de ideas y refiriéndonos al papel del investigador en esta modalidad de recogida de información, destacamos de este último que el mismo deja de ser un mero entrevistador para convertirse en un *conductor* y *moderador*, caracterizándose además por ser flexible, objetivo y empático con el grupo, además de controlar las intervenciones de los participantes

(Massot *et al.*, 2004). Conductor significa aquí que el investigador es director de la discusión y, cuando nos referimos a moderador lo hacemos en el sentido no de dirección sino como ente regulador del proceso de discusión. De igual manera, aquí entendemos la objetividad del investigador como elemento mediador entre los participantes, procurando en todo momento una participación homogénea del grupo a ser estudiado, de forma que el tema sea cubierto por todos (Flick, 2004).

En atención a lo antes dicho, el seminario se diseñó en consonancia con la estructura de la propuesta didáctica; esto es, para ser desarrollado en cuatro sesiones en las que se buscó la discusión y reflexión de los puntos señalados anteriormente. En cada sesión se buscó explorar al máximo los diversos componentes del CDC y que para más detalles remitimos al lector a la tabla de la **Figura 3.1** que mostramos en la siguiente página, en ésta se ilustra mediante (•), las veces que tocamos algún aspecto del CDC en cada uno de los problemas de las sesiones, en los cuestionarios posteriores a cada sesión del seminario y en la entrevista final.

La justificación principal por la que apostamos por el seminario fue y es porque uno de nuestros intereses u objetivos en este trabajo consistía, y lo sigue siendo, en hacerles un seguimiento a los profesores y determinar la permeabilidad o algún cambio que se generase a lo largo de la discusión del material. Por otra parte, consideramos de gran riqueza para la investigación el poder desarrollar un espacio de discusión entre profesionales de la enseñanza, ya que, generalmente, en la enseñanza universitaria pocas veces el profesor comparte sus opiniones y experiencias docentes con sus colegas. Como detalle particular de esta actividad, aclaramos que todas las sesiones del seminario fueron grabadas en audio para su posterior trascripción.

No obstante, siempre fuimos conscientes del riesgo que se corría al poner *cara a cara* a dos o más profesores de universidad, ya que en el caso de estos profesionales de la enseñanza, sus creencias y concepciones tienen un gran peso a la hora de impartir un curso (García *et al.*, 2006a; Moreno y Azcárate, 2003 y Thompson, 1992), hecho que se acentúa mucho más por la libertad de cátedra de la que gozan estos profesores en la Universidad de Los Andes (García, 2004).

Para cada sesión del seminario se diseñó un guión que explicamos a continuación: cada uno de los problemas, definidos como **episodios**, que conforman la sesión fueron divididos en tantas partes como consideráramos necesarias, entendidas estas partes como **microepisodios**; por lo general, cada una de estas partes era una pregunta del problema en discusión. Después de leer cuidadosamente cada pregunta, buscamos qué aspectos concretos del CDC y de nuestro interés se podían explotar; una vez sometido a la discusión de los validadores expertos (ver **Sección 3.2.3**), se terminaba de diseñar esta parte del instrumento. Un ejemplo de una sesión del seminario se ilustra en la tabla de la **Figura 3.2**.

Preguntas relacionadas con		Sesión 1			Sesión 2			Sesión 3				Sesión 4			Entrevista Final
		E1.1	E1.2	C1	E2.1	E2.2	C2	E3.1	E3.2	E3.3	C3	E4.1	E4.2	C4	
Conocimiento del contenido	Matemático	•	•		•	•		•	•		•	•			•
	Económico		•		•	•		•	•		•	•			•
Conocimiento sobre el aprendizaje	Dificultades y/o Ventajas para el estudiante	•	•		•				•		•	•	•	•	•
	Actitudes del estudiante / actividades			•	•					•	•	•	•	•	•
	Errores del estudiante	•		•							•	•	•		•
Conocimiento sobre la enseñanza	Planificación docente	•		•	•		•	•	•		•		•	•	•
	Metodología (gestión de la clase)	•	•	•	•	•		•	•		•		•		•
	Evaluación						•			•			•		
Conocimiento del currículo	Objetivos de los programas oficiales	•	•		•			•	•		•	•		•	•
	Objetivo de los libros de texto			•	•		•			•					•
El seminario como actividad de discusión y reflexión															•

Figura 3.1: Tabla de aplicación del instrumento

• Episodio 1 (Problema 1) ◦ Microepisodio 1.1 ◦ Microepisodio 1.2 ◦ Microepisodio 1.3 ⋮ ◦ Microepisodio 1.6
• Episodio 2 (Problema 2) ◦ Microepisodio 2.1 ◦ Microepisodio 2.2 ◦ Microepisodio 2.3 ⋮ ◦ Microepisodio 2.6
• Cuestionario (A entregar en la siguiente sesión del seminario)

Figura 3.2: Guión de una sesión

Así, cumplimos con lo sostenido por Massot *et al*. (2004) cuando se refieren a *las fases* y *exigencias metodológicas* de esta técnica, las cuales consisten en elaborar un guión de trabajo que abarque el contenido a discutir de forma estructurada, en el que se contemplen además los objetivos que se persiguen en la investigación.

En este orden de ideas, destacamos algunos aspectos que nos propusimos estudiar al aplicar esta parte del instrumento y que, en consecuencia, nos permitirían alcanzar parte de los objetivos de la investigación.

(a) Validar el material (propuesta didáctica teórica) de cara a su futura implementación en los cursos de cálculo diferencial para las carreras de ciencias económicas de la Universidad de Los Andes.

(b) Validar el seminario como herramienta metodológica de recogida de información en el campo de la didáctica.

3.2.2.3. Los cuestionarios

Otra pieza que conforma nuestra metodología de recogida de información es un conjunto de cuestionarios, cuatro en total, los cuales fueron diseñados para complementar la información obtenida durante el seminario, lo que quiere decir que esta herramienta se aplicó de forma paralela al seminario de discusión (ver en los **Apéndices A** y **B**, las últimas cuatro secciones correspondientes a las actividades desarrolladas durante cada una de las sesiones del seminario). De esta manera se busca establecer un proceso de *triangulación metodológica* y de *triangulación de datos* (Flick, 2004) a partir de la información obtenida entre el seminario y los cuestionarios. Es por ello que para el diseño y construcción de los cuestionarios seguimos tomando en cuenta nuestro tema objeto de estudio, pero sobre todo, buscamos la máxima relación entre las preguntas que nos planteamos en este instrumento respecto al material discutido en la sesión correspondiente al seminario, hecho que viene a justificar de manera directa esta parte del instrumento ya que, como señalan Del Rincón *et al*. (1995), uno de los objetivos de estos cuestionarios es *contrastar hipótesis u opiniones* de los entrevistados sobre un determinado tema.

En este sentido, nuestro instrumento sigue el objetivo antes mencionado, puesto que lo que pretendemos es, en esencia, contrastar las opiniones emitidas por los profesores participantes durante la sesión respectiva del seminario, entre otras cosas, porque, desde nuestro punto de vista, la opinión individual o personal de cada participante podría cobrar un matiz distinto respecto a la opinión colectiva emitida durante el seminario. Por esta razón nos decantamos por cuestionarios del tipo semiestructurado (Massot *et al*., 2004 y Cohen *et al*., 2000), ya que el guión determina de antemano cuál es la información relevante proviene del seminario (Massot *et al*., 2004)

Los cuestionarios fueron respondidos por cada participante de forma escrita, teniendo que entregarlo al inicio de la sesión siguiente del seminario (una semana aproximadamente), con ello permitimos que respondieran sin presión alguna o en todo caso, con la mínima presión posible.

Ahora bien, tal como hicimos con el instrumento anterior, presentamos a continuación determinados aspectos que perseguimos mediante la aplicación de los cuestionarios.

(a) Contrastar las opiniones de los participantes, emitidas durante las sesiones del seminario.

(b) Profundizar en algún conocimiento específico que forme parte del CDC, que fuese abordado durante el seminario de forma superficial.

3.2.2.4. La entrevista

La tercera pieza de nuestro instrumento consiste en una batería de preguntas abiertas que fueron aplicadas en forma de entrevista oral e individual, la cual se realizó después de la cuarta sesión del seminario (habiendo transcurrido por lo menos dos días después de la última sesión[3]) y que fue grabada

[3]Para la aplicación de la entrevista, el participante tenía que entregar el cuestionario correspondiente a la cuarta sesión, sobre todo para motivarle a responder el cuestionario y no correr el riesgo de que lo dejase a un lado.

en formato de audio digital para posteriormente ser transcritas como aparecen en el **Apéndice C** de este trabajo. Aun cuando en las preguntas de la entrevista se contemplaron aspectos del CDC, con este instrumento buscábamos una reflexión de los participantes sobre toda la actividad realizada (material+seminario+cuestionario+entrevista), en general.

En otras palabras, con este instrumento perseguimos la valoración por parte de los profesores que intervinieron en la actividad, sobre el seminario, el cuestionario y, por su puesto, sobre la propuesta didáctica teórica; entre otras cosas, porque de las respuestas obtenidas podríamos conseguir o no, una valoración externa de la actividad desarrollada. De igual manera caracterizamos este instrumento como una *entrevista final* (Massot *et al.*, 2004), *centrada en el problema* y *aplicada a expertos* (Flick, 2004).

La entrevista estuvo formada por diez preguntas abiertas en las que planteamos, tal como se dijo anteriormente, preguntas relacionadas con el CDC y otras de carácter reflexivo. En este sentido, uno de los objetivos principales de la entrevista, al igual que lo señalamos en el caso del cuestionario, era el de contrastar las opiniones obtenidas en la entrevista con las emitidas durante las sesiones del seminario y las respuestas de los cuestionarios.

Siguiendo el esquema de los instrumentos antes mencionados (seminario y cuestionarios), mostramos a continuación algunos aspectos relevantes que se persiguen con la entrevista.

(a) Validar toda la actividad llevada a cabo como espacio innovador de *discusión*, *reflexión* y *formación profesional*.

(b) Contrastar las opiniones emitidas durante las sesiones del seminario y los cuestionarios.

3.2.3. Validación de los instrumentos

Ahora bien, hasta este momento hemos hablado de los instrumentos y de la aplicación de estos, pero es claro (como en toda investigación de esta naturaleza) que los mismos son el resultado de una depuración y optimización de un conjunto de preguntas que surgieron a *priori* por nuestra parte y otras que aparecen en otras investigaciones ya citadas, como es el caso de Moreno (2000) y García (2004). En este sentido, el procedimiento que se empleó para validar los instrumentos, fue el juicio o validación por investigadores expertos. Aquí *validez* significa que el instrumento está en condiciones óptimas para ser aplicado, es decir, que el mismo reúne características de pulcritud, coherencia, comprensión, entre otros, en relación con el tema que se quiere investigar (Cohen *et al.*, 2004)

En este caso, fueron dos los profesores expertos en didáctica de las matemáticas y externos a la investigación que colaboraron para la validación de los instrumentos, resaltando además que estos profesores se desempeñan como docentes en una facultad de ciencias económicas. El proceso se desarrolló en tres etapas en las que se estudiaron aspectos como coherencia, claridad, profundidad, plausibilidad, limitaciones por parte del investigador para la aplicación de los mismos y que las actividades y preguntas garantizaran en la mayor manera posible el anonimato de los participantes. En la primera etapa, nos reunimos, por separado con cada uno de los validadores, previo suministro del conjunto de preguntas y los objetivos de este trabajo. De esta primera reunión, surgieron cambios radicales por la gran cantidad de preguntas y objetivos planteados al inicio del trabajo, con lo cual se acotaron los objetivos, se descartaron preguntas por no ser aplicables en la metodología de recogida de información que se tenían pensada para ese momento (el seminario de discusión). Más aún, de uno de los validadores surgió la idea de implementar la EBP como metodología de enseñanza, ya que la misma forma parte del CDC del profesor y algunos de los problemas que se discutieron se ajustaban a esta estrategia metodológica.

La segunda fase de la validación fue muy similar a la primera, con el detalle adicional que ya teníamos para ese momento una lista de problemas enmarcados en la EBP, la estructura de cómo serían desarrollado el seminario y los cuestionarios post-seminario. En esta etapa los validadores tuvieron el material con suficiente tiempo para leerlo y analizarlo, donde les aclaramos (1) las diferencias respecto al material discutido en la etapa inicial, (2) los objetivos que nos planteamos cubrir mediante la aplicación del instrumento y también, (3) se les hizo saber las limitaciones que teníamos para la aplicación del mismo. Esta segunda fase constó de dos reuniones con cada validador, puesto que lo extenso del material así lo requirió. Tomando en cuenta los tres puntos antes señalados, se eliminaron algunos problemas y modificamos determinadas preguntas que se adaptaban más para una entrevista individual que para un grupo de discusión.

Antes de llegar a la tercera y última etapa de validación, decidimos incluir una entrevista individual al final de la aplicación del instrumento hasta ahora diseñado (seminario+cuestionarios). Esta entrevista, tal como señalamos anteriormente, nos permitiría triangular información, validar la actividad desarrollada mediante la aplicación del instrumento y conocer opiniones personales e individuales de los participantes. En tal sentido, sometimos a la consideración de los revisores expertos las modificaciones sugeridas por ellos en la etapa anterior y, además, se les entregó una entrevista formada por diecisiete preguntas abiertas que fueron reducidas a diez. De esta manera quedó estructurado el instrumento que describimos anteriormente.

3.3. Participantes en el estudio

A fin de llevar a cabo el trabajo en cuestión se invitó a participar a los diez profesores de matemáticas de la Universidad de Los Andes que colaboraron en García (2004); de estos, sólo cinco aceptaron continuar participando más uno que de manera voluntaria, y por comentarios con otros profesores, decidió trabajar con nosotros. De los seis profesores, cuatro son licenciados en matemáticas y dos licenciados en educación-matemática (los primeros formados en una facultad de ciencias y los otros en una facultad de educación), cinco poseen título de maestría y, de estos cinco, uno posee el título de doctor en el área de pedagogía matemática. Como detalle adicional, destacamos que estos profesores y los demás miembros del Departamento de Matemáticas de la ULA se rotan por los distintos cursos que están adscritos al mismo. Sólo los cursos del ciclo profesional de la propia carrera de matemáticas como ecuaciones diferenciales, análisis funcional, topología, variable compleja, álgebra lineal o estructuras algebraicas; entre otros, son atendidos por los miembros de los grupos de investigación relacionados con estos cursos.

Criterios de selección de los participantes

Para el siguiente trabajo, primaron fundamentalmente dos aspectos para la selección de los participantes. Por una parte, uno de tipo afectivo, ya que son colegas de la universidad donde labora el investigador de esta memoria desde hace poco más de doce años y; por otra parte, la representatividad de este grupo de informantes, respecto a los profesores de matemáticas que atienden estos cursos es significativa.

Si tomamos en cuenta que el presente trabajo es una investigación de tipo cualitativa, podemos decir que nuestra "muestra"[4] se define de manera global como una *muestra intencional;* esto es, la muestra de un grupo particular en la que el investigador está en total conocimiento de que la muestra no representará a una población muy amplia, sino que ésta simplemente se representa a sí misma o a un grupo muy particular (Cohen *et al.*, 2000).

Ahora bien, dentro de los tipos de muestra intencional que señalan Cohen *et al.* (2000), en esta investigación empleamos el de *muestra por conveniencia*. El muestreo por conveniencia involucra la elección de los individuos más cercanos para que sirvan como entrevistados y que permitan continuar el proceso hasta que el tamaño de la muestra requerida se haya obtenido. El

[4]El término "*muestra*" usado aquí se refiere al grupo de participantes, dejando claro al lector que no se quiere dar la misma connotación que se usa en el caso de las investigaciones de tipo cuantitativa, sino por la traducción literal de la palabra inglesa *sampling*.

investigador escoge la muestra, simplemente, de aquellos individuos a quienes tiene fácil acceso. Como cualquier grupo no se representa de manera aislada, el investigador no busca generalizar sobre una población mucho más amplia. Una muestra por conveniencia puede ser la estrategia elegida para un estudio de caso o una serie de estudios de casos (*ibid*).

Por otra parte, el número de participantes en el estudio se adecúa a nuestros intereses y a las características de la metodología a seguir, tal como lo sostienen Massot *et al*. (2004), quienes sugieren que el grupo de discusión debe ser los suficientemente pequeño con el objeto de inducir en los participantes una buena reflexión y discernimiento sobre el tema.

3.4. Reducción y organización de los datos

La reducción y organización de los datos significa una pieza fundamental en todo este engranaje, sobre todo si tenemos presente que hay tres instrumentos interrelacionados que sirvieron para recabar toda la información para el presente trabajo. Bien es cierto que nuestro instrumento principal es el material diseñado en forma de propuesta didáctica y aplicado en forma de seminario; sin embargo, no son menos importantes los otros dos instrumentos, los cuales nos permitieron realizar el proceso de triangulación de la información que este tipo de investigación requiere según Flick (2004). En tal sentido, queremos señalar que desde la misma aplicación de los instrumentos comenzamos a articular el proceso de organización de los datos, de manera que pudiésemos llevar una secuencia del tema elegido, como es la derivada y, al mismo tiempo, plantearnos una estrategia de estudio en los posibles cambios que se pudieran suscitar en los participantes a lo largo del estudio.

En otras palabras, la finalidad de la aplicación de los instrumentos no era otra que obtener, de manera sistemática y ordenada, información sobre un determinado tema que; en nuestro caso ya hemos dicho, consisten en el estudio conjunto del CDC del profesor de matemáticas de universidad y la EBP como estrategia metodológica para la enseñanza del cálculo diferencial en carreras de ciencias económicas y, esto a su vez, sobre una determinada muestra (Visauta, 1989), la cual consiste en un grupo de profesores de matemáticas de la Universidad de Los Andes en Venezuela. En este orden de ideas nos permitimos recalcar que en el diseño para la aplicación del instrumento, tomamos en cuenta que el mismo nos facilitara el trabajo para la organización y estructuración de los datos. Aun así, esto no significa que la reducción de los datos no supuso un proceso de *selección*, *categorización*, *comparación* e *interpretación* de los datos obtenidos, a partir de múltiples manipulaciones del material como lo explican Massot *et al*. (2004).

Ahora bien, la estructura que utilizamos para organizar los datos va en línea directa con el tipo de metodología que pensamos utilizar para el análisis de los mismos. Esta metodología, de la cual hablaremos más adelante, es el *análisis de contenido*, y más concretamente el *análisis documental de contenido* (Pinto y Gálvez, 1996). Es así como a cada problema discutido en las sesiones del seminario lo hemos denominado **episodio** y cada pregunta de discusión asociada al problema la identificamos como **microepisodio**, como fue señalado en la **Subsección 3.2.2.2**. Los datos que aportaron cada uno de los microepisodios fueron reducidos y estructurados, en un principio, en tablas de doble entrada como se señala en la tabla de la **Figura 3.3**, sólo que para aprovechar la riqueza del material obtenido y lo que perseguíamos en el análisis, los datos se estructuraron por episodios, ya que en un primer intento de reducción, lo hicimos por microepisodios y se debilitaba el análisis de los datos; puesto que, en algunos casos, no todos los profesores participaban en determinados microepisodios o su participación era poca debido a la propia dinámica del seminario de discusión.

Para la organización de los datos se tomaron en cuenta las categorías y subcategorías establecidas por nosotros, en función de los objetivos del proyecto, y que surgieron de manera natural a partir de la elaboración del instrumento, estas categorías quedaron reflejadas en la tabla de la **Figura 3.1**; no obstante, tal como lo señaláramos en el **Capítulo 2**, sólo nos quedamos con una parte de los componentes del CDC debido a la escasez o debilidad del contenido de las respuestas relacionadas con componentes como la *evaluación*. Así, agrupamos la información en cuatro grupos principales: conocimiento disciplinar, conocimiento del proceso de enseñanza, conocimiento del proceso de aprendizaje y análisis crítico de materiales publicados, este último como parte del conocimiento curricular. Estos cuatro grupos obedecen a los datos obtenidos del seminario. Los datos obtenidos tanto de los cuestionarios como de la entrevista final se estudiaron por separado, ya que el objetivo principal de esta parte del instrumento es la de triangular información y en el caso concreto de la entrevista, la de validar el seminario como actividad de reflexión y de formación profesional.

Si observamos la tabla de la **Figura 3.1**, esta la podemos entender como una rejilla de doble entrada, *Categorías* Vs. *Instrumentos*, mientras que la tabla de la **Figura 3.3** representa la opinión de los *Participantes* Vs. *Categorías*, con el detalle adicional que cada una de estas tablas de este último tipo representa un *episodio* y sólo fueron utilizadas para la reducción de los datos transcritos; es decir, únicamente sirvieron como instrumento de reducción de datos para aproximarnos a nuestro análisis. En otras palabras, lo que pretendemos dejar

Episodio N		Conocimiento Disciplinar	Conocimiento sobre el Aprendizaje			Conocimiento de la Enseñanza Metodología		Análisis Crítico de Materiales
	Participantes	Matemáticas/Economía	Dificultades/Ventajas	Actitud	Errores	Planificación/Gestión	Secuenciación	Aspectos Did.
	Ramón							
	Manuel							
	Pedro							
	Kenya							
	Alexis							
	Elio							

Figura 3.3: Tabla modelo para la reducción de datos del seminario

por sentado es que desde el inicio quisimos aprovechar el diseño de la aplicación del instrumento para la estructuración y organización de los datos, mostrando de esta manera una secuencia lógica entre las metodologías de aplicación del instrumento y la del análisis de datos; hecho que vendría a validar en cierta manera el proceso de recogida de datos. Sin embargo, hubo una primera reducción de los datos provenientes del seminario, estos datos se redujeron a textos estrictamente relacionados con el interés del trabajo, descartando cualquier contenido aislado del tema de investigación.

A continuación algunas observaciones relacionadas con la reducción y estructuración de los datos, de modo que el lector se familiarice con la lectura de las tablas y el análisis de los datos que contienen éstas.

Observación 1: La tabla de la **Figura 3.3** sólo se muestra como referencia, pero en esta memoria no se incluyen las distintas tablas que arrojaron cada uno de los episodios, ya que lo consideramos innecesario por el volumen que las mismas ocupaban.

Observación 2: En el análisis se renuncia al "dice que:" y en algunos casos se va de la 3ª a la 1ª persona de manera indistinta. Una cosa es lo que dice el profesor y otra es lo que dice el profesor de forma reducida.

Observación 3: El contenido de estas tablas nos condujeron a realizar todo el desarrollo del capítulo siguiente.

A continuación pasamos a desarrollar el apartado donde se explica la metodología empleada para el análisis de los datos, los fundamentos teóricos de la misma y la justificación por la cual la elegimos en nuestro trabajo.

3.5. Metodología para el análisis

La metodología que se empleó para el análisis de datos en relación con el CDC es de tipo *inductiva* aun cuando las categorías estaban de alguna manera predefinidas, las subcategorías no lo estaban del todo y, en absoluto, de los patrones de interpretación de los datos se tenía una visión previa; las subcategorías se terminaron de consolidar de la información obtenida y los patrones de interpretación emergieron de los objetivos a cubrir una vez obtenida la reducción de los datos. Por otra parte, es preciso destacar que el análisis es de tipo *descriptivo*, *interpretativo* y *exploratorio*, acogiéndonos a las ideas de Latorre *et al.*, (2003). Es descriptivo porque se exploran relaciones (entre los distintos constructos del CDC y la EBP) y se tratan de asociar grupos de datos (Arnal *et al.*, 1994), describiendo hechos o posiciones de un grupo (en nuestro caso, profesores que enseñan cálculo a estudiantes de ciencias económicas). Por lo tanto, esta investigación forma parte de la llamada *etnografía educativa* (*ibid*). En este sentido, los autores antes citados sostienen:

> ... la etnografía tiene como fin el estudio sociocultural o estilo de vida de la sociedad, **describiendo las creencias y prácticas del grupo**, mostrando cómo las diversas partes de la comunidad contribuyen a crear la cultura como un todo unificado y consistente.
>
> (Arnal *et al*., 1994, p. 200, el resaltado es nuestro)

En el caso de la etnografía educativa:

> El objeto de la etnografía educativa es aportar valiosos datos **descriptivos** de los contextos, actividades y **creencias de los participantes en los escenarios educativos**.
>
> (Goetz y LeCompte, 1988, p. 41, el resaltado es nuestro)

Pero bien, más que describir una escena, una situación concreta o el punto de vista de los participantes respecto a aspectos concretos planteados de manera intencional en los instrumentos; la idea es, también, desarrollar, ampliar e interrelacionar, en la medida de lo posible, las opiniones de los informantes tomando el marco teórico como referencia.

Por otra parte, el carácter exploratorio de la metodología empleada en nuestro trabajo se fundamenta en dos aspectos claramente diferenciados; por una parte, el interés que se tiene en indagar y explorar sobre el CDC y la EBP en el contexto espacial ya definido y; por otra, explorar y profundizar en el principal instrumento de esta investigación como lo es el seminario, visto como un espacio de discusión y de utilidad para la formación permanente del profesor universitario. Puede resultar repetitivo y hasta chocante para el lector el énfasis que hacemos sobre el término "explorar" en este párrafo, pero es totalmente intencionado, ya que el sentido que le damos no es otro que el de ahondar sobre "*lo no dicho*" (Piñuel, 2002), sobre "lo oculto" en el texto a ser analizado, en lugar de lo evidente. Esto nos induce a la inferencia y la extrapolación (Bardin, 1986); de esta situación hablaremos en su momento pertinente.

Finalmente, diremos que nuestra metodología es interpretativa puesto que aun cuando las categorías estaban predefinidas y de forma parcial las subcategorías, estas últimas se terminaron de consolidar con la interpretación de los datos suministrados, que en algunos casos pasaron por un proceso recursivo en el que se buscaba un análisis depurado y representativo de los hechos en palabras del investigador.

Pero concretemos, ya que hasta ahora hemos estado divagando y falta concreción en el modelo de análisis a seguir, pues sólo hemos dicho características del tipo de análisis a emplear. Por lo tanto, la metodología a seguir es del tipo cualitativa, inmersa dentro de la línea del *análisis de contenido* que plantean Piñuel (2002), Pinto y Gálvez (1996), Krippendorf (1990) y Bardin (1986), predominando la de los dos primeros. En este sentido, entendemos el análisis de contenido:

> ...al conjunto de **procedimientos interpretativos** de *productos comunicativos* (mensajes, textos, discursos) que proceden de **procesos singulares** de comunicación previamente registrados, y que, basados en técnicas de medida, [...], a veces ***cualitativas*** (lógicas basada en la combinación de categorías) tienen por objeto elaborar y procesar datos relevantes sobre las condiciones mismas en que se han producido aquellos textos, o sobre la condiciones que puedan darse **para su empleo posterior**.
>
> (Piñuel, 2002, p. 2, el resaltado es nuestro)

Centrándonos un poco más en el tipo de análisis que emplearemos en este trabajo, definimos el análisis documental de contenido:

> Concebimos el ADC [análisis documental de contenido] como un proceso doble de identificación y representación del contenido del texto/documento, proceso que trasciende las nociones convencionales del contenido como objeto de estudio, y está estrechamente ligado a concepciones más recientes sobre los fenómenos simbólicos...
>
> (Pinto y Gálvez, 1996, p. 31)

Los "*fenómenos simbólicos*" a los que se refieren las dos autoras antes citadas van en línea directa con "*lo no dicho*" o "*lo oculto*" (Piñuel, 2002) en el texto, pero que igual dan una estructura al contenido del documento. En nuestro caso, interpretaremos los discursos escritos generados durante el seminario, los cuestionarios y la entrevista; los cuales surgieron a partir de las categorías preestablecidas, todo esto, con el fin de estudiar el CDC y la EBP de los profesores participantes y buscar un perfil de estos atendiendo a los dos pilares antes señalados.

En otro orden de ideas, queremos dejar por sentado que de los datos obtenidos no nos interesa estudiar la *frecuencia* de lo que se dice sobre una determinada categoría dentro de los textos a analizar; sino que, por el contrario, nos interesa en alto grado sobre *qué* y *cuánto* (en extensión y no en repetición) se dice sobre una categoría o subcategoría, hecho que resulta tan valioso (o más) que la frecuencia de aparición. "*Entonces más que nunca hay que releer el material, alternar relectura e interpretaciones, desconfiar de la evidencia (¿no* *hay una evidencia contraria?), funcionando por aproximaciones sucesivas*". (Bardin, 1986). En este sentido, el análisis documental de contenido se entiende, según Pinto y Gálvez (1996), como un caso especial de "*resolución de problemas*", donde el analista se convierte en un procesador de información en activo, el cual emplea rutinas generales y específicas con ciertas limitaciones, como por ejemplo, el hecho de mantener el contenido analizado en la memoria en corto plazo.

Ahora bien, según Piñuel (2002), todo análisis de esta naturaleza debe incluir los siguientes pasos:

> **a)** selección de la comunicación que será estudiada;
>
> **b)** selección de las categorías que se utilizarán;
>
> **c)** selección de las unidades de análisis, y
>
> **d)** selección del sistema de recuento o de medida.
>
> (Piñuel, 2002, p. 7)

Así, respecto al primer literal, ya hemos dicho cuál es el material a ser analizado y que el mismo se fundamentará en la interpretación, la exploración y la descripción del texto. En cuanto a la selección de las categorías o subcategorías, las mismas se han derivado de las representaciones que permiten la mirada del objeto a ser analizado, es decir, el CDC y la EBP. Siguiendo el orden de selecciones, las unidades de análisis las conforman las distintas componentes del cálculo diferencial y otro temas matemáticos afines a éste, tal como van emergiendo en el instrumento de recogida de datos, donde se utiliza un "*diseño triangular*" como el explicado por Piñuel (2002). Finalmente, el sistema de medida de los datos es del tipo "*cualitativo*" y más específicamente, el "*análisis de contenido relacional*", puesto que el mismo permite en materiales como el obtenido a partir del seminario y el resto de instrumentos de recogida de datos, determinar: oposiciones, proximidades, secuencialidad (Piñuel, 2002) entre los participantes.

Un segundo cuerpo del análisis tiene que ver con el seminario, esta vez no lo vemos como instrumento de recogida de datos sino como espacio de discusión, reflexión y formación profesional. Para este caso extrajimos distintos segmentos o momentos de algunas de las sesiones, donde resaltaba la interacción en cada uno de los *grupos de discusión*. Recordemos que uno de nuestros objetivos consiste en valorar el seminario como actividad formadora del profesor, tomando en cuenta que nosotros apostamos por la EBP como estrategia metodológica alternativa de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en carreras afines a las ciencias económicas, lo que implica profundizar en el CDC del profesor de matemáticas de universidad de cara a una propuesta didáctica formal ante este grupo de profesores.

3.5.1. Justificación sobre la metodología

Es claro que si nos preguntamos *para qué* se analizan los datos de este trabajo, la respuesta, aunque obvia, ha quedado respondida en los objetivos que nos planteamos en este proyecto; esto quiere decir, *grosso modo*, para estudiar el CDC y la EBP en profesores de matemáticas de universidad. Este estudio lo quisimos hacer de forma sistemática y progresiva y para ello elegimos el concepto de derivada y algunos temas relacionados con el cálculo diferencial, los cuales desarrollamos en el mismo orden en el que aparecen en los programas oficiales. Más aún, la estructura del CDC lo mismo que los profesores participantes son ideales para un análisis de contenido de tipo *relacional*, la misma forma de cómo se obtuvieron los datos y las características de los mismos se ajustan a un análisis descriptivo (Piñuel, 2002).

3.5.2. Técnica para el análisis

Teniendo claro el *para qué* analizar, nos permite tener una visión sobre el *cómo* analizar (Bardin, 1986). Es por ello que elegimos el análisis documental de contenido, más aún, nos decantamos por el *análisis de relaciones* o *análisis relacional de contenido* como técnica de análisis, ya que toda la estructura del instrumento de recogida de datos y la obtención de la información se amoldan a este tipo de análisis y, por supuesto, entre los puntos que pretendemos explotar en esta investigación tenemos: la secuencialidad que muestren los participantes a lo largo de la recogida de datos (relación temporal o en el tiempo), la influencia de algún participante en las opiniones de los otros (relaciones interpersonales de los participantes), entre otros.

Veamos por un momento lo que dice un manual *online* de análisis de contenido de la Universidad Estatal de Colorado:

> El análisis relacional consiste, al igual que el análisis conceptual, en identificar estructuras conceptuales que aparecen en un determinado texto o conjunto de textos, pero que además de la presencia de estas estructuras, éste persigue la relación entre las estructuras conceptuales identificadas.
>
> (En `http://writing.colostate.edu/guides/research/content/`, traducción realizada por el autor.)

Para nuestro caso y tomando en cuenta los dos puntos que ilustramos anteriormente, las estructuras a las que hace mención la definición anterior pueden ser: o bien las componentes del CDC del profesor o los mismos profesores participantes.

Con el fin de estudiar no sólamente el CDC y la EBP en los profesores participantes sino que además buscamos estudiar, en la medida de lo posible, cambios en estos profesores, decidimos realizar el análisis de los datos de manera progresiva respecto a la aplicación del instrumento, situación que contribuye en el proceso de triangulación y que forma parte del análisis. En este orden de ideas, conviene recordar que por razones geográficas y de disponibilidad de tiempo fue necesario partir en dos grupos de tres profesores cada uno al conjunto de participantes; estos dos grupos los hemos identificados como A y B, donde por razones de fuerza mayor, un profesor del grupo A (Pedro) tuvo que abandonar su participación. No obstante, por lo relevante de sus opiniones y reflexiones hemos decidido dejarlo, aun cuando sólo estuvo en la primera sesión del seminario.

Para cerrar este cuerpo del trabajo, hemos analizado el seminario como actividad de reflexión y formación valiéndonos de las interacciones entre los participantes, pero sólo en aquellas donde se aprecie un intercambio de opiniones que muestren una *reflexión* sobre la actividad docente o sobre la *formación del profesor*, en otras palabras, analizamos la valoración del seminario por parte de los participantes. Si partimos de que el seminario de discusión lo entendemos como una *entrevista de grupo* (Flick, 2004) o *grupo de discusión* (Massot *et al*., 2004), cuyos miembros poseen algunas características similares (profesores de matemáticas, miembros de la misma universidad, atienden las mismas carreras, su formación profesional es similar, entre otras) que facilitan la discusión sobre temas específicos.

Por otra parte, hemos utilizando algunos datos provenientes de la entrevista final con el objeto de triangular la información obtenida del seminario y enriquecer el análisis, es así como aprovechamos las respuestas de las preguntas 1, 2, 3, 5, 6, 9 y 10 del último instrumento aplicado, la entrevista.

Observaciones previas al análisis

1 El conocimiento del contenido matemático no es tomado en cuenta en profundidad para el análisis, puesto que el contenido matemático es básico y, por otra parte, los profesores participantes poseen una experiencia mínima de seis años en la docencia universitaria. No obstante, no se descarta hacer alguna observación al respecto en caso de ser necesaria y que además sea relevante para la investigación.

2 Las componentes del CDC, vistas como categorías, y que tomaremos en cuenta para el análisis de los datos son los conocimientos: del *contenido económico*, sobre la *enseñanza*, sobre el *aprendizaje* y el *análisis crítico de materiales*; descartando los conocimientos referidos al currículo y a la evaluación. Paralelo al CDC se analizará la EBP como estrategia de enseñanza-aprendizaje.

3 Las vías que utilizamos para estudiar en los profesores participantes las categorías antes señaladas, son los conceptos matemáticos que aparecen de forma intencional en el instrumento de recogida de datos, los cuales están vinculados al cálculo diferencial y al análisis matemático; estos son: dominio de una función, interpretación de la derivada, monotonía y valores extremos (optimización), regla de la cadena, contextualización matemático-económica.

4 Aunque resulte redundante, no está demás decir que el estudio lo hacemos de forma sistemática sobre cada uno de los participantes, sin embargo, el análisis no se puede hacer de manera aislada entre episodios ni entre participantes, en el caso del primero, los distintos episodios tocan en más de una oportunidad algún concepto o situación matemática, como por ejemplo: el dominio o la contextualización matemático-económica; por otra parte, las opiniones de los participantes, en algunos casos, están sujetas a las opiniones de los otros participantes, lo cual es la idea principal del seminario.

3.6. Aportes metodológicos personales

Hemos reservado el final de este capítulo para exponerle al lector algunos hechos que consideramos, desde el punto de vista metodológico, contribuyen a esta línea de trabajo. Comenzaremos por reiterar que trabajar con profesores de universidad y que, además, forman parte del entorno profesional del investigador no resulta sencillo, con lo cual debimos andar con paso firme a la hora de interactuar con los participantes. Es por ello que, una estrategia que sostenemos como clave para acercarnos a este grupo de profesionales de la enseñanza es la aproximación indirecta; puesto que, desde el mismo inicio de las actividades de aplicación del instrumento no se presentaron ningún tipo de inconvenientes en cuanto a las opiniones, como por ejemplo: *para qué responder a algo que tú conoces* o, en todo caso, atender a las preguntas con respuestas escuetas donde se deja por sobreentendido al investigador que éste conoce los detalles de la respuesta.

El seminario

En el caso específico del seminario de discusión conjuntamente con los problemas abordados durante las cuatro sesiones, sirvieron para que los participantes, en general, reflexionaran sobre su propio CDC y aproximarnos, de alguna manera, al *conocimiento de la acción* partiendo del *conocimiento declarativo*, puesto que entre el instrumento y la aplicación del mismo se provocó, en cierta medida, la imagen de la acción de los profesores participantes, ya que sus opiniones estuvieron sustentadas en base al trabajo realizado por ellos en el aula.

En este caso, no podemos afirmar que estamos frente a un estudio totalmente centrado en el conocimiento de la acción, tomando en cuenta que no fuimos al aula, pero tampoco es un trabajo enmarcado únicamente en el conocimiento declarativo, sino que es una fusión de ambos conocimientos con sus consecuentes matices. Por esta razón no hacemos mención alguna en nuestro marco teórico sobre estos tipos de conocimientos.

No obstante, la estrategia de *grupo de discusión* como elemento de doble función en este trabajo fue fundamental para el desarrollo del mismo; es claro que tratar de mantener la consolidación de un grupo, en nuestro caso dos pequeños grupos, durante cuatro sesiones de discusión permitió fortalecer la calidad de los datos a partir de sus reflexiones. Por otro lado, el espacio en sí mismo como actividad generadora de conocimiento permitió conocer en profundidad la visión global de todos en conjunto sobre aspectos específicos del CDC del profesor de matemáticas de universidad.

Sobre esto último nos extenderemos un poco más al final del análisis del seminario en el **Apartado 5.3**, ya que las actividades metodológicas principales del seminario fueron las discusiones y las reflexiones de los participantes, dándole mayor peso a las segundas por guardar estrecha relación con el CDC del profesor universitario, tal como lo señala Marín (2004) en su trabajo sobre creencias del profesor universitario. Esta investigadora afirma que:

> La reflexión propicia en el docente universitario:
>
> **1°.** La capacidad necesaria para ver los problemas que se producen durante el acto educativo.
>
> **2°.** Proporciona y/o potencia la capacidad de cuestionar situaciones educativas, sus habilidades y estrategias cognitivas.
>
> **3°.** Permite analizar la situación para el desarrollo de habilidades comunicativas.
>
> **4°.** La capacidad de percibirse a si mismo y a los demás.
>
> **5°.** Aprender a vivir concierto grado de incertidumbre.
>
> (Marín, 2004, p. 43)

En este orden de ideas, entendemos el ejercicio de reflexión sobre la práctica docente como una pieza fundamental de cara al proceso de formación permanente del profesor universitario de matemáticas y en consecuencia, impera la necesidad de un espacio con los elementos necesarios para llevar a cabo los procesos reflexivos. Sin embargo, estos procesos no deben ser aislados o distantes entre sí, por el contrario, la reflexión debe ser un ejercicio permanente y sistemático en el profesor universitario, ya que por medio de ésta se profundiza en elementos como el aprendizaje de los estudiantes (Santos, 1993). Es por ello que apostamos por el seminario como espacio para la discusión y la reflexión permanente sobre el proceso de enseñanza y aprendizaje.

Sin embargo, conviene aclarar que, en un grupo de discusión uno de los puntos que más estudian los investigadores son las interacciones entre los participantes, no obstante, analizar las interacciones en sí mismas como elementos de las discusiones no es tema de nuestro interés; por el contrario, sí nos interesa el contenido de las mismas es aspectos específicos del CDC como metodología de enseñanza, conocimiento del contenido, conocimiento curricular, entre otros. Además de las implicaciones a futuro que suponen las diversas reflexiones en conjunto sobre el contenido del material.

La propuesta didáctica teórica y la EBP

En cuanto a la EBP como estrategia metodológica para aproximarnos de manera indirecta a los profesores, también creemos que aporta a esta línea de trabajo el hecho de acercarnos a la reflexión sobre su práctica docente y de forma parcial al conocimiento de la acción, ya que en la misma se plantean situaciones concretas y muy próximas a las actividades del aula, las cuales plantean un escenario similar al que vive el profesor en sus clases.

El haber diseñado un material que involucró la resolución de problemas como vía de enseñanza del cálculo diferencial, donde según palabras de algunos de los participantes, como veremos en su momento, fue valorado de manera significativa en materia de innovación; es decir, aun cuando el material debe modificarse y repensarse en algunas partes, ya con fines específicos de enseñanza, la estructura tanto de forma como de fondo fue vista con buen ojo por ellos como herramienta para la enseñanza de las matemáticas que podría involucrar al estudiante a reforzar su conocimiento. De igual manera, la propuesta discutida nos ha permitido acercarnos a los participantes para ir pensando en un material enfocado hacia la formación profesional del docente en ejercicio o en formación.

Capítulo 4

Reducción de los datos y Análisis I

Introducción

Ya señalamos en el capítulo anterior que nuestro análisis de datos se enmarca, fundamentalmente, en un análisis de tipo *descriptivo*, *interpretativo* y *exploratorio* en el que explotamos el ejercicio de la *inferencia*. Lo primero que hicimos, y es de lo que hablaremos al principio de este capítulo, fue cómo abordamos el análisis de los datos. Una vez establecidas las categorías: *conocimiento disciplinar matemático-económico*[1], *conocimiento sobre la enseñanza*, *conocimiento sobre el aprendizaje* y *conocimiento sobre el currículo*; de este último sólo estudiamos la parte definida en el **Capítulo 2** como *análisis crítico de materiales*, pasamos al primer bloque del análisis, el cual se realizó con los datos que aportaron cada una de las sesiones del seminario con sus correspondientes episodios y los cuestionarios correspondientes a cada sesión. En esta primera etapa que hemos llamado **Análisis I**, damos un primer paso hacia el estudio del CDC del profesor de matemáticas y nos centramos en las categorías de: enseñanza, aprendizaje y currículo, ya que lo correspondiente al contenido disciplinar lo analizamos en el siguiente capítulo. En otras palabras, este capítulo consiste en reducir y hacer un primer análisis provenientes de los instrumentos ya mencionados.

El *conocimiento sobre la EBP* no lo consideramos como una categoría disjunta de las otras ya que, por un lado, este forma parte del conocimiento sobre

[1]Ya dijimos en el capítulo anterior que el conocimiento disciplinar matemático, visto como un elemento puro o aislado, no lo tomaremos en cuenta para el análisis y argumentamos las razones; sin embargo, al ser un trabajo enmarcado en la didáctica de las matemáticas resulta contradictorio descartar las matemáticas, es por ello que el estudio que hacemos de éstas lo relacionamos en todo momento a las ciencias económicas. En otras palabras, **los conceptos matemáticos que analizamos como parte del conocimiento disciplinar matemático, los estudiamos dentro del contexto económico**.

la enseñanza (si vemos la EBP como estrategia metodológica de enseñanza) y, por otra parte, nosotros la estudiamos a lo largo y ancho del trabajo en virtud de que la misma la entendemos como un eje transversal del presente estudio. El análisis relacional de esta parte se fundamenta en la interacción de los participantes en cada uno de los episodios del seminario y las preguntas del cuestionario vinculadas a la respectiva sesión.

Con este primer análisis, donde estudiaremos el CDC del profesor de matemáticas, buscamos abrir las puertas al siguiente capítulo, en el cual realizaremos un análisis más preciso sobre el perfil del profesor. Para esta segunda parte utilizaremos los datos que arroja el análisis de este capítulo y los aportados por la entrevista final.

Observación: Vale la pena destacar que aun cuando la recogida de datos se realizó de forma muy similar en ambos grupos de profesores, decidimos mantener por separado el conjunto de datos y analizarlos por grupos en esta primera parte del análisis, de acuerdo al tipo de análisis y a los objetivos de este estudio.

En este sentido, el análisis que realizamos a continuación está organizado sistemáticamente, según el orden de aplicación de los instrumentos, es decir, *sesión por sesión*, tal como el lector verá más adelante, ya que uno de los objetivos consiste en observar y analizar algún tipo de **cambio** en el CDC de los participantes. Por lo tanto, y debido a la proximidad entre el contenido del instrumento y la afinidad de las preguntas de discusión a lo largo del seminario, hacemos uso del *análisis relacional*, el cual nos permite observar la regularidad o no de las opiniones de los profesores, así como la influencia que pueda causar un participante en la opinión de algún otro, permitiéndonos de esta manera destacar, si fuere el caso, el seminario como actividad de discusión y formación profesional. En otras palabras, en lo que se intenta profundizar en este capítulo es en la *interacción* que realizan los participantes en cada sesión para emitir sus opiniones.

Por otra parte, hacemos énfasis en señalar que una de las dificultades de llevar a cabo este análisis viene dado por la manera en que se obtuvieron los datos, tanto en el seminario como en los cuestionarios. Recordemos que el seminario de discusión se realizó en cuatro sesiones y los cuestionarios se aplicaron en igual número de oportunidades. De la segunda sesión del seminario en adelante, los participantes se refirieron a sesiones anteriores o a los cuestionarios post-seminario, de allí que apostamos por la *recursividad* en el análisis relacional. Aspecto este que viene a consolidar el seminario como actividad en la formación profesional del profesor de matemáticas de universidad.

Finalmente, cerramos esta introducción mostrando el esquema que seguiremos en el análisis de esta parte del trabajo, el cual se fundamenta en unos ejemplos que muestran Pinto y Gálvez (1996) y que adaptamos a nuestros objetivos e intereses.

EPISODIO N° / PARTICIPANTE

Cuadro 4.1: Árbol Genérico (adaptación de Pinto y Gálvez, 1996)

Esquema para el Análisis I

1) **Representaciones de las categorías**. En este primer paso del análisis presentamos las categorías que serán analizadas, las cuales se hacen por episodios (problemas discutidos). Para esta parte del análisis presentamos el problema que se discutió en el episodio correspondiente y las preguntas que generaron la discusión partir del mismo, a continuación mostramos las categorías y subcategorías que se estudiarán en dicho episodio. En otras palabras, lo que se busca es introducir al lector en el análisis, además de ilustrarle qué es lo que se va a analizar en concreto.

2) **Conceptualización, reducción del contenido y esquematización**[2]. Se reserva para esta parte del análisis la elaboración de una especie de mapa cognitivo de cada uno de los profesores respecto a las categorías que intervienen durante el episodio o en los cuestionarios post-seminario (en el **Cuadro 4.1** se muestran las categorías dentro de una elipse y las subcategorías correspondientes debajo de cada categoría dentro de un rectángulo).

3) **Redacción del resumen** del análisis. En este tercera y última parte de este análisis elaboramos un resumen *informativo* y *descriptivo* que traduce al lenguaje escrito lo representado en los puntos anteriores. Se trata de exponer en un nuevo texto de forma clara y precisa toda la información relevante de los datos originales. Esta última parte nos abrirá las puertas al análisis que desarrollaremos en el siguiente capítulo.

Estudio del CDC del profesor de matemáticas

4.1. Análisis de la Sesión 1

La sesión del seminario que analizaremos a continuación está relacionada con la **introducción al concepto de derivada**, para este fin escogimos dos problemas; el primero, un problema clásico de la física para la enseñanza de la derivada en cursos de cálculo en general, como lo es el estudio de la *velocidad instantánea*; la elección de este problema obedece a razones históricas y de tipo curricular[3]; el segundo, un problema donde se estudia el *impuesto marginal* relacionado con el ingreso anual de un trabajador tomado de Wonnacott (1983), en este problema se hace uso de la derivada para estudiar el pago del impuesto de un empleado.

Aprovechamos la oportunidad para hacer la siguiente observación: **esta es la única sesión donde se aborda un problema de contenido no económico**, esto quiere decir que el contexto económico está presente de manera *transversal* en el resto del instrumento. Además de la observación anterior resaltamos el hecho de que **el problema de física, al inicio del seminario, tiene la firme intención de brindarle a los participantes un clima de seguridad y tranquilidad**, permitiéndonos *romper el hielo* entre participantes e investigador. Recordemos que los profesores que colaboraron en este trabajo son licenciados en

[2]Para Pinto y Gálvez (1996), estos tres aspectos los consideran por separado; sin embargo, dadas las características como están estructurados nuestros datos y para no hacer del análisis una actividad repetitiva, los hemos englobado en uno sólo.

[3]En el programa oficial de las carreras de ciencias económicas (ULA), está contemplada la interpretación de la derivada como razón de cambio vía velocidad instantánea.

matemáticas o licenciados en educación matemática y en ningún caso especialistas en economía. Sin olvidar el detalle que algunos de ellos participaron en García (2004), donde mostraron fuertes inclinaciones hacia la física y las matemáticas no económicas, de igual manera recordamos al lector que estos profesores se rotan por los distintos cursos que atiende el Departamento de Matemáticas tal como lo advertimos en el **Apartado 3.3**.

Mediante el primer problema nos aproximamos a la discusión sobre el CDC, destacando, en particular, el *conocimiento del contenido disciplinar* matemático, el *conocimiento sobre la enseñanza* (planificación, gestión-secuencia de la clase), el *conocimiento sobre el aprendizaje* (dificultades-ventajas, actitud del estudiante) y el *conocimiento sobre el currículo* (análisis del material). En el segundo problema, aun cuando hay menos preguntas para la discusión y que, estructuralmente, es muy similar al primero, profundizamos más en las componentes del CDC, apareciendo en éste el contexto económico. De esta manera abrimos la puerta al tema que nos ocupará de aquí en adelante, es decir, la discusión sobre el CDC del profesor de matemáticas y para ello nos apoyamos en el cálculo diferencial y su enseñanza de forma contextualizada en las ciencias económicas. Sin embargo, el cuestionario asociado a esta sesión tiene su peso en los *conocimientos sobre enseñanza y aprendizaje*, esto quiere decir que con el cuestionario buscamos adentrarnos en aspectos más de nuestro interés. También se busca ahondar sobre el *análisis crítico de materiales* y para no ser repetitivos, esta categoría aparece de manera natural en el resto de las sesiones, ya que toda la discusión gira en torno al material diseñado para el seminario.

4.1.1. Episodio 1.1: Tasas de variaciones y pendientes. Velocidad instantánea, velocidad media, incrementos, introducción a la derivada

Pregunta 1: Calcular la posición del objeto cuando $t = 5{,}0$; $t = 5{,}001$; $t = 5{,}01$; $t = 5{,}1$; $t = 5{,}2$; $t = 5{,}3$; $t = 5{,}4$; $t = 5{,}5$; $t = 6{,}0$; $t = 9{,}0$; $t = 12{,}0$ y $t = 15{,}0$. A medida que avanza el tiempo, ¿qué puede decir de la posición del objeto?

Respuesta: En la segunda fila de la **Tabla A.1** se pueden observar las distintas posiciones del objeto para distintos instantes de tiempo. Respecto a la segunda parte de la pregunta, a medida que avanza el tiempo la distancia recorrida es mayor, además la **Tabla A.1** *nos hace pensar que el objeto nunca se detiene*.

Microepisodio 1.1.1: Hasta ahora, el estudiante está familiarizado con el tema de funciones y en este sentido, no debería tener inconveniente para realizar esta tarea en la que se plantea un **estudio muy general de incrementos**.

Para este momento, en el que queremos introducir el concepto de derivada y *una interpretación de la misma, ¿consideran ustedes que, desde el punto de vista metodológico, éste es un primer paso "acertado" para introducir el concepto de derivada, o por el contrario, resulta una tarea inapropiada y sin mayor valor cognitivo?*

Pregunta 2: ¿En cuánto varía la posición o cuánto se ha desplazado el objeto cuando el tiempo transcurre de 5.0 a 15.0 segundos; de 5.0 a 12.0 segundos; de 5.0 a 9.0 segundos; de 5.0 a 6.0 segundos; de 5.0 a 5.5 segundos, de 5.0 a 5.4 segundos, de 5.0 a 5.3 segundos, de 5.0 a 5.2 segundos, de 5.0 a 5.1 segundos, de 5.0 a 5.01 segundos y de 5.0 a 5.001? ¿Qué observa en cada uno de los desplazamientos estudiados?

Respuesta: En la segunda columna de la **Tabla A.2** podemos ver cómo varía la posición del objeto cuando éste se ha desplazado en distintos intervalos de tiempos.

Microepisodio 1.1.2: En la tarea anterior se estudió la posición del objeto para distintos instantes de tiempo, ahora estudiamos variaciones de la posición para intervalos de tiempo particulares; es decir, qué *variaciones* experimenta la posición del objeto cuando el tiempo cambia en distintos intervalos.

En una experiencia con estudiantes con los que realicé esta actividad, ellos mostraron dificultades para visualizar las distintas variaciones, ¿consideran ustedes que esta tarea promueve, de alguna manera, el concepto de incrementos de una variable? ¿De qué manera? ¿Cómo?

Pregunta 3: Calcular la velocidad media en los intervalos de tiempo:
$[5{,}0; 15{,}0]$, $[5{,}0; 12{,}0]$, $[5{,}0; 9{,}0]$, $[5{,}0; 6{,}0]$, $[5{,}0; 5{,}5]$, $[5{,}0; 5{,}4]$, $[5{,}0; 5{,}3]$, $[5{,}0; 5{,}2]$, $[5{,}0; 5{,}1]$; $[5{,}0; 5{,}01]$; $[5{,}0; 5{,}001]$.

Respuesta: En la última columna de la **Tabla A.2** se aprecian las distintas velocidades promedios para los intervalos de tiempos indicados.

Microepisodio 1.1.3: Tal como se muestra en la pregunta, lo que se busca en este caso, es que el estudiante observe y discuta sobre las distintas velocidades promedio y por supuesto, que el profesor discuta con ellos, de modo que surja una primera aproximación **empírica** y con **tratamiento numérico** del concepto de derivada. Algo que no se contempla en los programas oficiales de cálculo diferencial.

En algunas investigaciones sobre el tema, existen opiniones encontradas a la hora de introducir un concepto matemático; hay quienes se inclinan por dar la definición con todo el rigor matemático que ello supone y posteriormente realizar una explicación pormenorizada de ésta (la definición), mientras que hay profesores que apuestan por una construcción detallada del concepto.

¿Consideran adecuado partir de una situación como ésta para aproximarnos al concepto de derivada o conviene más; introducir, de entrada, el concepto de derivada de

manera formal y tradicional; es decir, partiendo de la idea formal de límite? Se supone que el estudiante conoce los conceptos de función, límite y continuidad.

Pregunta 4: La velocidad media del objeto para un intervalo de tiempo $[t_0; t]$ y con $f(t_0) < f(t)$ viene dada por

$$\mathcal{V}(t) = \frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0} = \frac{\text{Desplazamiento desde } f(t_0) \text{ a } f(t)}{\text{Tiempo transcurrido desde } t_0 \text{ a } t}$$

Para el caso particular en el cual el objeto parte con $t_0 = 0$ y su posición es $s = 0$, la velocidad media del objeto se reduce a $\mathcal{V}(t) = \frac{f(t)}{t}$.

Pregunta 4.1: Construir una tabla y calcular $\mathcal{V}(t)$ para $t = 5{,}001$; $t = 5{,}01$; $t = 5{,}1$; $t = 5{,}2$; $t = 5{,}3$; $t = 5{,}4$; $t = 5{,}5$; $t = 6{,}0$; $t = 9{,}0$; $t = 12{,}0$ y $t = 15{,}0$, suponiendo que $t_0 = 5,0$.

Respuesta: La tercera columna de la **Tabla A.2** coincide con $\mathcal{V}(t)$, sólo que en el orden inverso.

Pregunta 4.2: Obtener una fórmula para $\mathcal{V}(t)$ y verificarla con la respuesta de 1.

Respuesta: En este caso la fórmula que se obtiene para la velocidad promedio es $\mathcal{V}(t) = \frac{8t^2-200}{t-5}$ y coincide con la respuesta del ítem anterior.

Microepisodio 1.1.4: El objetivo que se persigue con estas dos tareas es que el estudiante al invertir los datos de la tabla, tenga una mejor visualización de las velocidades promedios para distintos intervalos y así tener mayor dominio y profundidad del problema.

Desde el punto de vista metodológico, ¿creen ustedes que esto ayuda al estudiante a darse una idea de velocidad instantánea y por ende, a llegar al concepto e interpretación de la derivada?

Pregunta 4.3: Cómo es el comportamiento de la velocidad media, $\mathcal{V}(t)$, en cada uno de los instantes de tiempo respecto a la velocidad instantánea $\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \lim_{h \to 0} \frac{f(t_0+h)-f(t_0)}{h}$ para $t_0 = 5,0$?

Respuesta: La velocidad media $\mathcal{V}(t)$ en cualquiera de los casos estudiados es siempre superior a

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} &= \lim_{h \to 0} \frac{80h}{h} \\ &= 80,00 \end{aligned}$$

Microepisodio 1.1.5: *De esta situación, ¿qué discusión les parece a ustedes sugerente que se debe plantear a los estudiantes relacionada con esta tarea?*

Pregunta 4.4: Esbozar una gráfica aproximada de $f(t)$, para $t \in [4{,}0, 16{,}0]$, y trazar cada una de las rectas que pasan por $(5, f(5))$ y los puntos $(15, f(15))$, $(12, f(12))$, $(9, f(9))$, $(6, f(6))$, $(5{,}5, f(5{,}5))$, $(5{,}4, f(5{,}4))$, $(5{,}3, f(5{,}3))$, $(5{,}2, f(5{,}2))$, $(5{,}1, f(5{,}1))$, $(5{,}01, f(5{,}01))$ y $(5{,}001, f(5{,}001))$, respectivamente. Discutir sobre la interpretación geométrica y física que sugiere esta tarea, donde $t_0 = 5$.

Respuesta: Las gráficas que se muestran en las **Figuras B.1** y **B.2** ilustran lo que se pide en esta tarea y se aprecia geométricamente que la pendiente de la recta que pasa por los puntos $(5, f(5))$ y $(5{,}001, f(5{,}001))$, se aproximan a la velocidad instantánea, $\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t}$, de la tarea anterior y toca a la curva, aparentemente, en un sólo punto (recta tangente), mientras que las otras rectas tocan a la curva en más de un punto (rectas secantes).

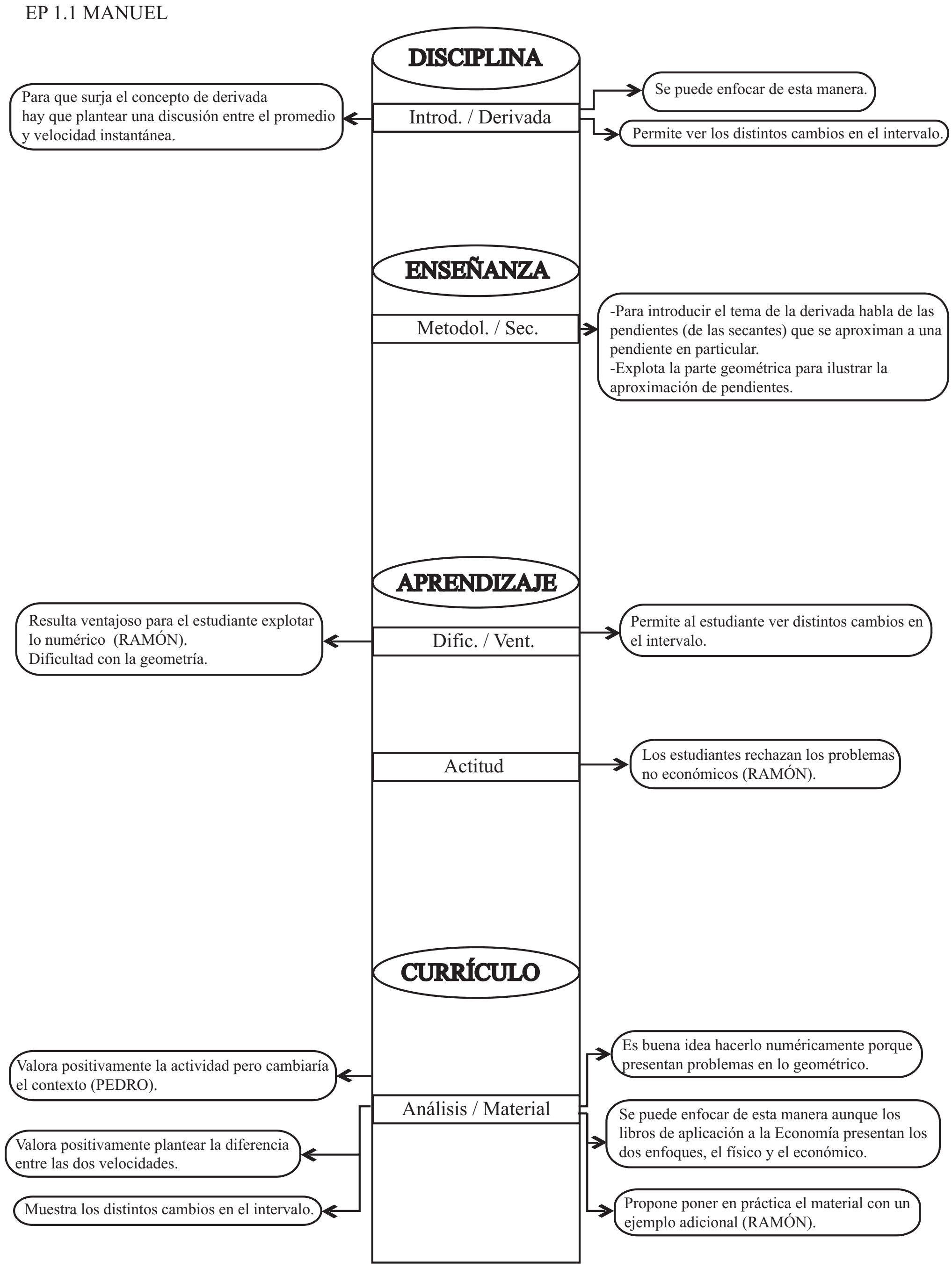
Microepisodio 1.1.6: Finalmente, con esta tarea, se muestran dos interpretaciones de la derivada de manera simultánea con un tratamiento numérico y dejando a un lado el rigor del límite. Esta forma de introducir la derivada resulta carente de todo rigor para muchos profesores y en distintos artículos relacionados con la didáctica se plantean discusiones sobre este hecho.

¿Cuál es la posición de ustedes sobre los enfoques (1) Analítico-Algebraico, (2) Geométrico y (3) Numérico para introducir el concepto de derivada, es decir, supone algún tipo de dificultad para el estudiante hablar de dos interpretaciones de un mismo hecho, cuál es su experiencia en este sentido?

Conceptualización, reducción y esquematización

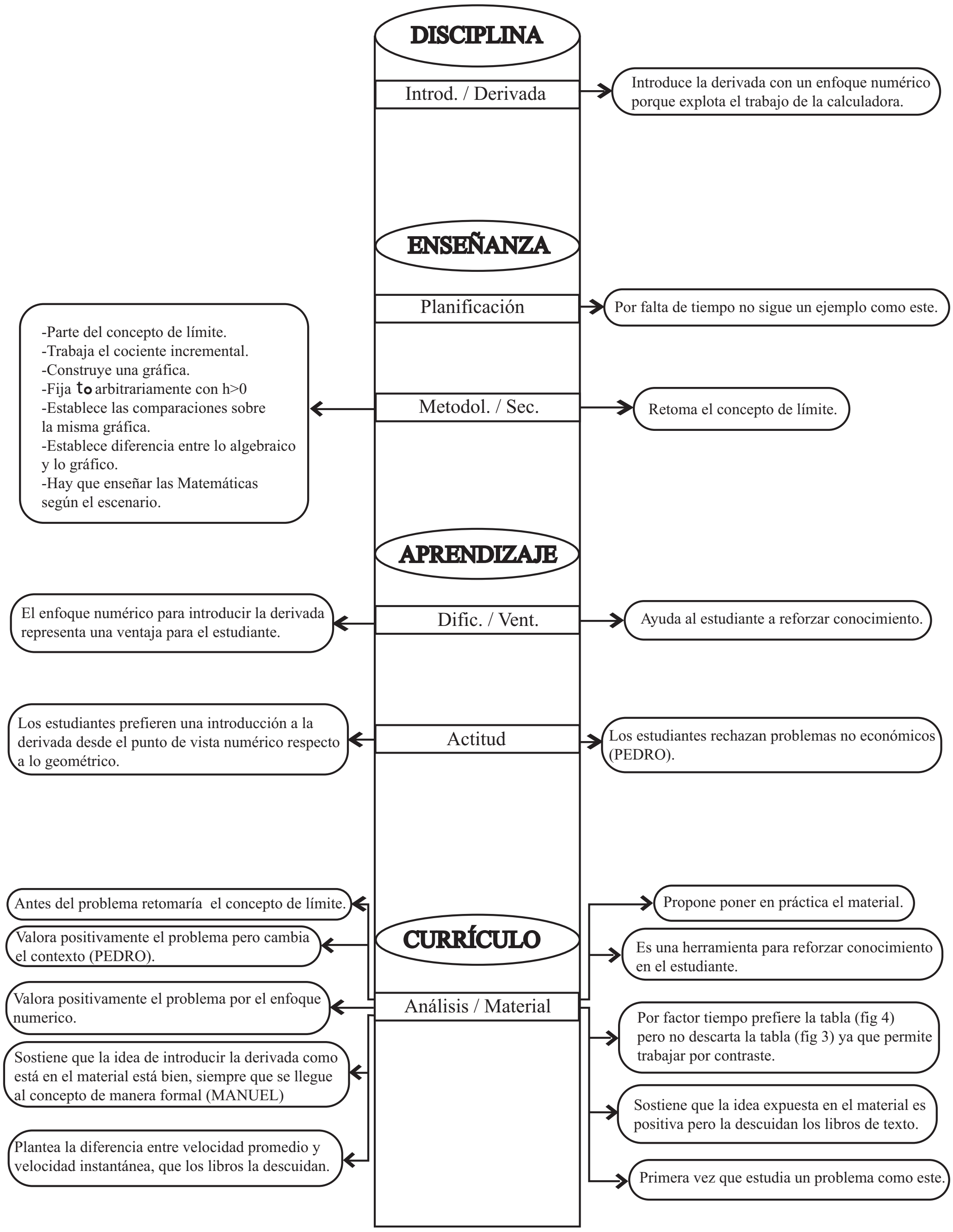
A continuación mostramos los diagramas correspondientes a este episodio en el que la discusión del mismo se centró en el estudio del conocimiento sobre la enseñanza, el aprendizaje y el currículo, todos estos de forma muy general por el contenido del problema discutido.

Grupo A



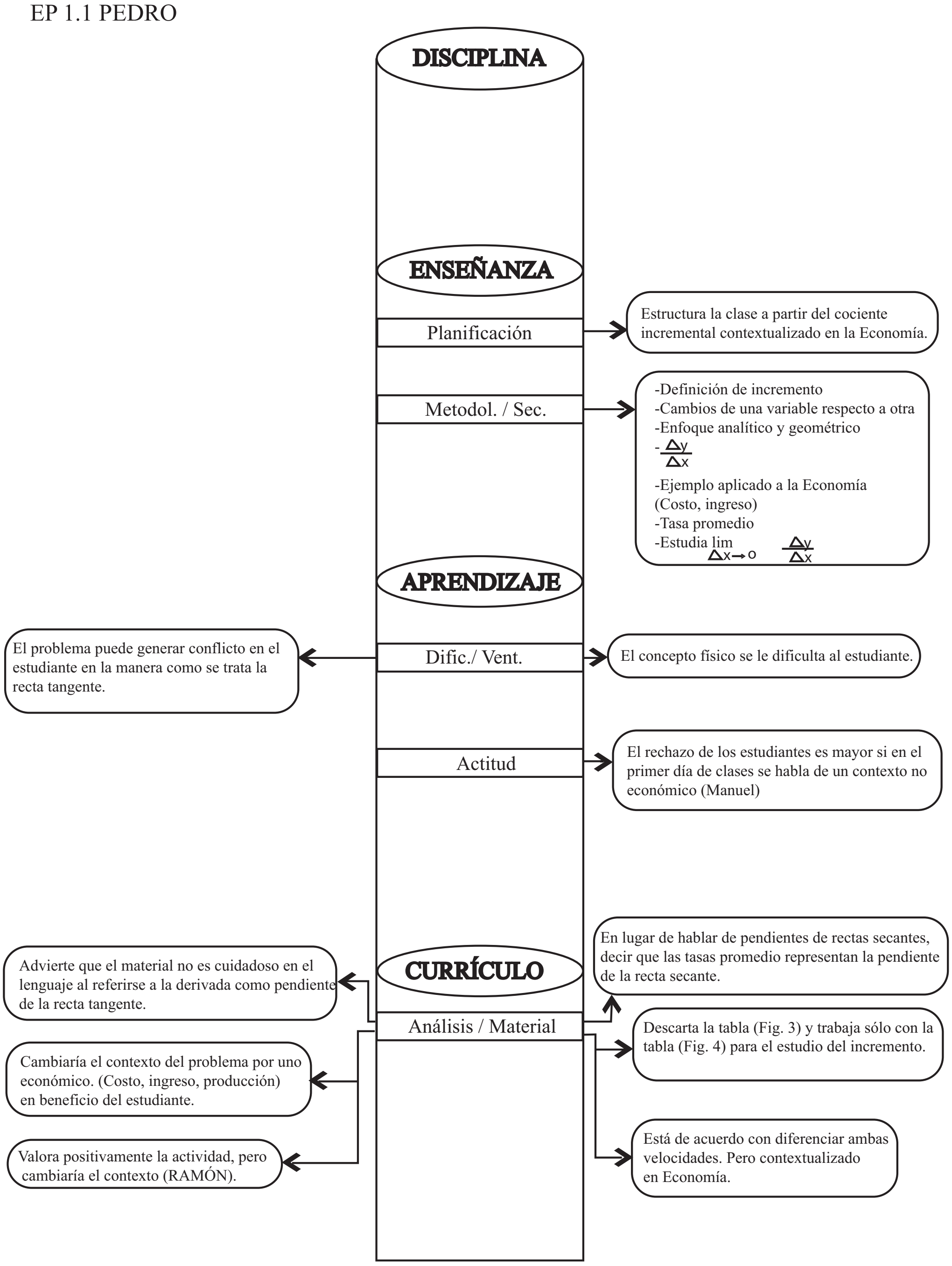
Cuadro 4.2: Episodio 1.1 - Manuel

EP 1.1 RAMÓN



Cuadro 4.2: Episodio 1.1 - Ramón

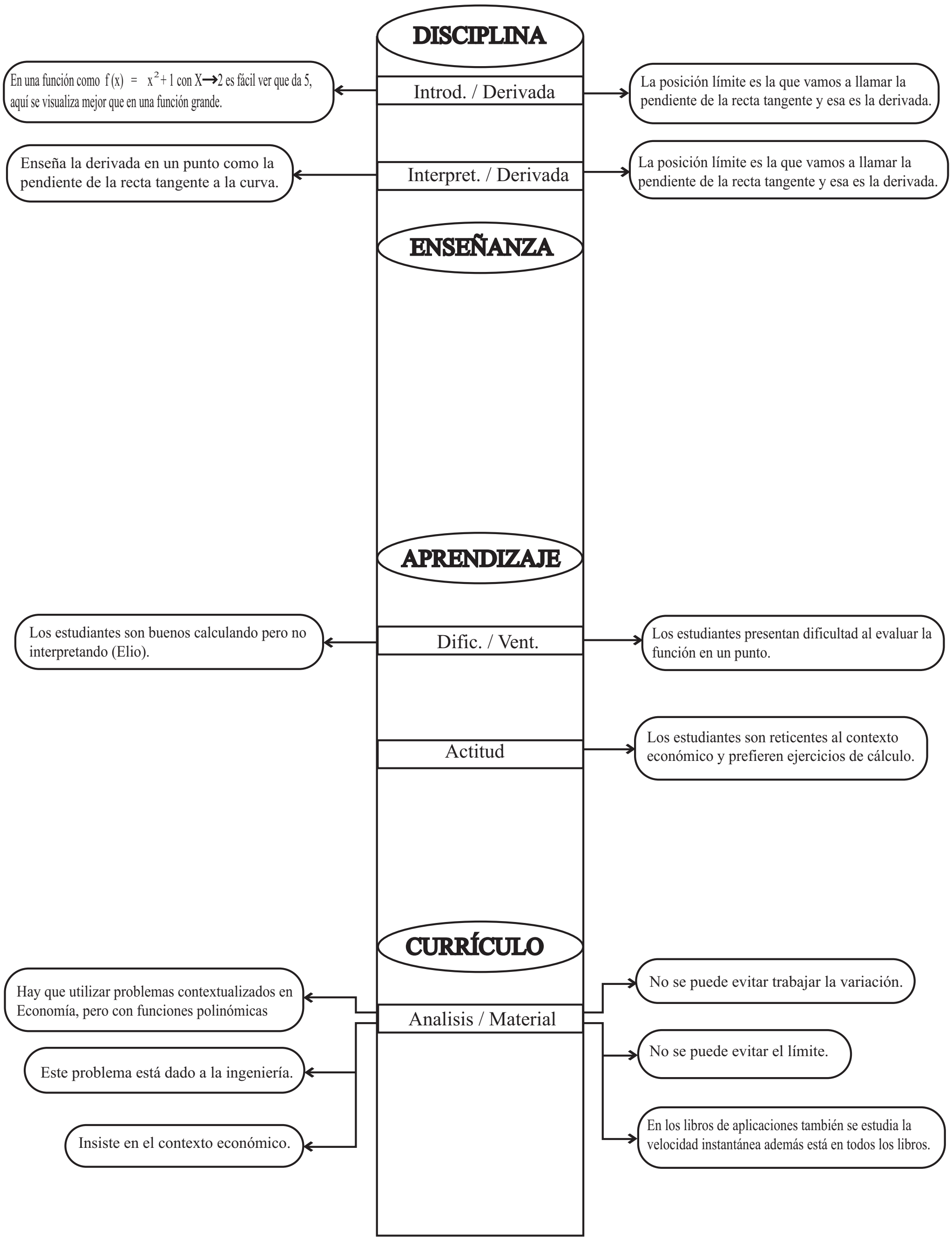
EP 1.1 PEDRO



Cuadro 4.2: Episodio 1.1 - Pedro

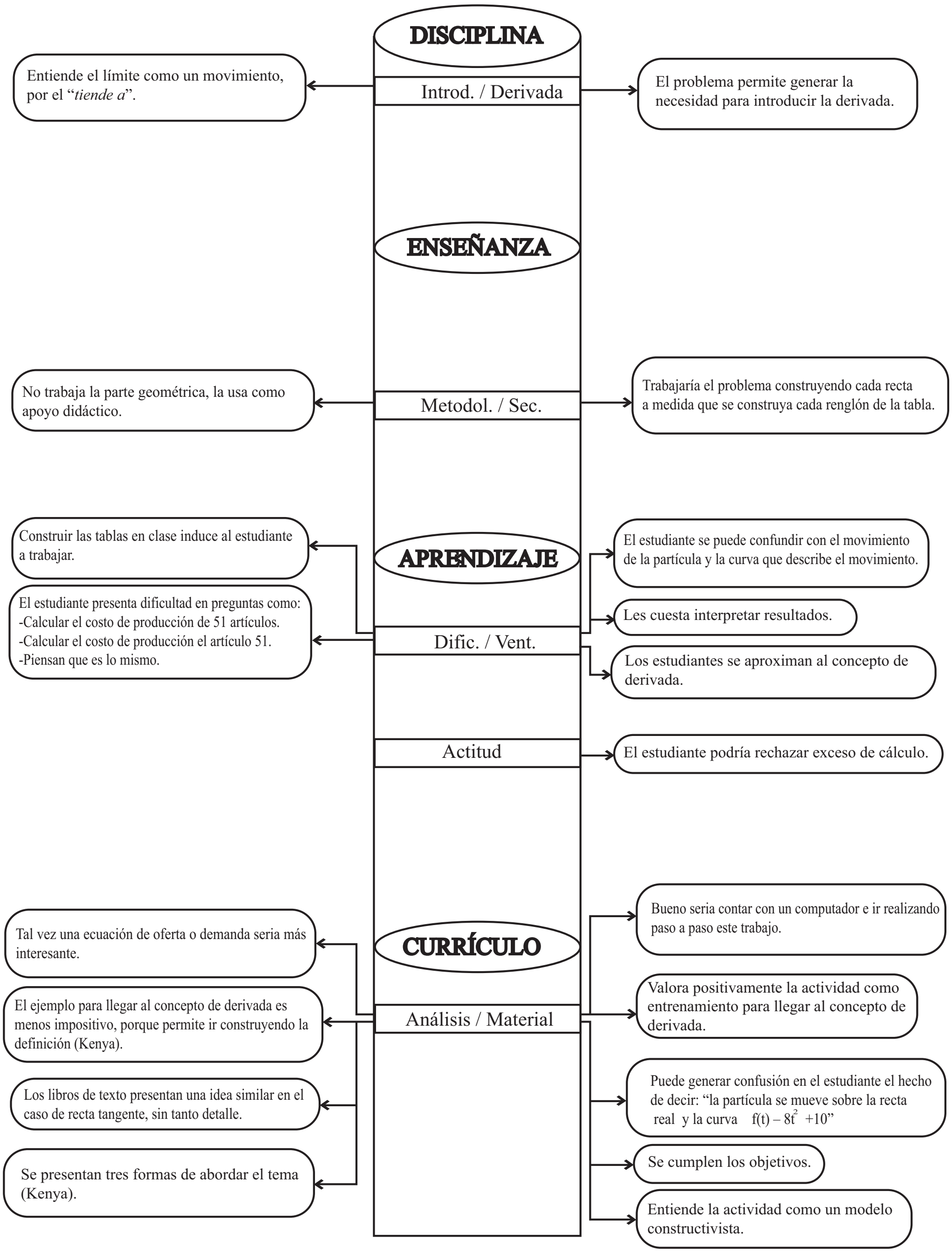
Grupo B

EP 1.1 ALEXIS



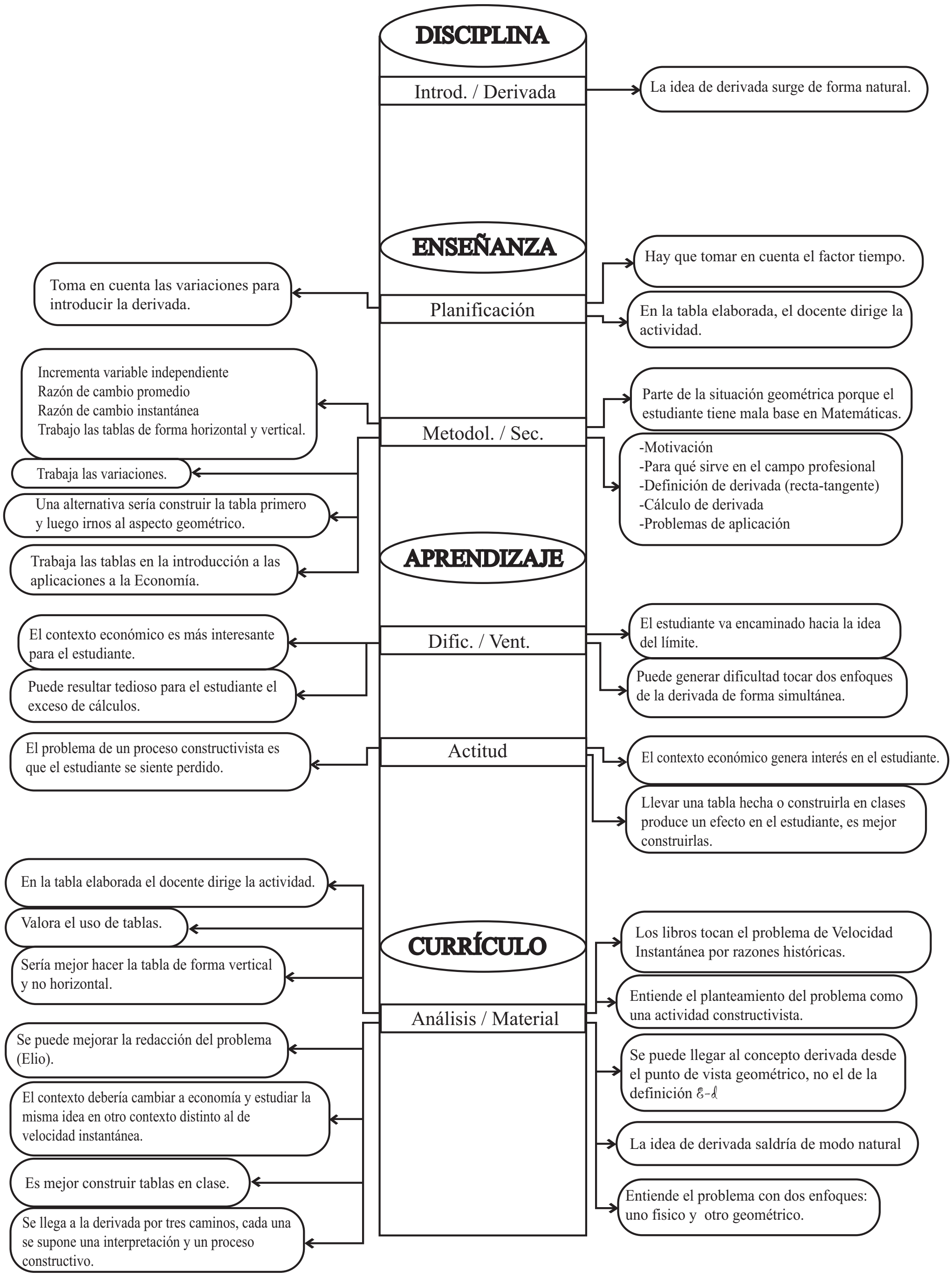
Cuadro 4.3: Episodio 1.1 - Alexis

EP 1.1 ELIO



Cuadro 4.3: Episodio 1.1 - Elio

EP 1.1 KENYA



Cuadro 4.3: Episodio 1.1 - Kenya

Resumen del análisis

Centramos nuestro análisis en la enseñanza, el aprendizaje y el currículo, descartando lo aportado sobre la disciplina matemática en sí misma, ya que dentro de nuestros objetivos no está el estudiar el conocimiento matemático *per se*, tal como lo manifestáramos en su momento.

Esta primera sesión y, en particular, este primer episodio tuvieron como función primordial *romper el hielo* con y entre los participantes; en tal sentido, se busca crear un ambiente distendido, procurando obtener una información lo menos sesgada y forzada posible, debido a la presencia de los otros colegas y del moderador del seminario, quien es el autor de esta memoria y, además, compañero de trabajo de los participantes. Por otra parte, era la primera vez que todos los profesores, de ambos grupos, participaban en una actividad como esta.

Mediante este problema se les presenta una situación hipotética a los participantes, en la que se supone que hay opiniones encontradas por especialistas en el campo de la didáctica a la hora de introducir el concepto de derivada. En este sentido, buscamos, de forma indirecta, que los participantes fijen su posición frente al escenario hipotético planteado a la hora de ir aproximándose al concepto de derivada de una manera contraria a la que, tradicionalmente, utilizan los profesores en una facultad de ciencias, por ejemplo. Por otra parte, se explota el uso de tablas y gráficos para la introducción del concepto de derivada.

Conocimiento sobre la Enseñanza (Grupo A)
Ante la situación planteada respecto a la enseñanza, los participantes prefieren hablar de sus experiencias en clase y no propiamente de lo que se aborda a lo largo del problema o, mejor dicho, terminan haciendo una comparación entre lo que dicen que hacen en relación con nuestro planteamiento.

Por una parte, consideran la velocidad instantánea como un ejemplo poco apropiado para los alumnos de ciencias económicas, puesto que éstos rechazan los problemas fuera de un contexto económico. No obstante, no descartan del todo el problema de velocidad instantánea, tanto por el hecho de ser un ejemplo con el que vivimos día a día como lo señala Pedro: *"...la velocidad que uno ve en el velocímetro del auto..."*, como por la presencia que ocupa en los libros de texto como lo indica Manuel: *"...la mayoría de los libros de aplicaciones [a la economía] usan las dos motivaciones, tanto el ejemplo físico como el económico, entonces algo tiene que tomarse en cuenta..."*. Ahora bien, si nos ubicamos en el comentario de Manuel, el mismo está en sintonía con Doyle (1992) quien señala que en la mayoría de los casos es frecuente que el profesor planifique y siga la secuencia de los libros de texto para sus clases.

En otro orden de ideas, las tablas de este episodio, correspondientes a cada uno de estos profesores, en particular, Pedro y Ramón, reflejan que la estructura de enseñanza que siguen como secuencia metodológica es la que sugieren los programas oficiales o los libros de texto, lo cual se traduce además en un aplicación lineal y sistemática (García-Valcárcel, 2001b) de estos dos elementos antes mencionados; destacándose un hecho característico entre estos dos profesores y que se puede apreciar con mayor detalle en las transcripciones de las sesiones respectivas del seminario (Ver **Apéndice A**).

Estas secuencias metodológicas, aunque estructuralmente parecen ser iguales, la contextualización no es la misma para ambas; por una parte Pedro señala que toda su secuencia la sigue en el contexto económico, mientras que Ramón deja ver que sigue todo el esquema tradicional para finalizar con aplicaciones de la derivada a la economía. Más aún, este último deja claros visos de la importancia del rigor matemático en materia de enseñanza. Por su parte Manuel, por su poca participación al respecto, nos hace inferir que sigue más la estructura de Ramón que la de Pedro.

Conocimiento sobre la Enseñanza (Grupo B)
En el caso de estos participantes, pareciera haber consenso en cuanto al ejemplo planteado, en lo que respecta al paso inicial hacia el concepto de derivada, pero Kenya, quien lidera desde un principio este grupo por la amplitud y precisión de sus opiniones, se mantiene firme sobre lo inadecuado de la contextualización, aspecto al que se van acogiendo los otros dos participantes. Por otra parte Kenya, al inicio, interpreta o nos da a entender que el material que estamos discutiendo sigue una línea de *enseñanza constructivista*, hecho clave para el desarrollo del seminario por la línea de la EBP que pretendemos estudiar.

Este grupo ve como un paso acertado que se inicie de esta manera la introducción al tema de la derivada, ya que como dice Elio: *"...resolver este problema o esta pregunta les daría una especie de entrenamiento de lo que se va a hacer más adelante..."*

En lo que respecta al uso de tablas como herramienta de apoyo para la enseñanza y, como hecho concreto, aquí la implementación de tablas busca ilustrar la aproximación de las velocidades promedios a una velocidad límite. En este sentido destacamos la discusión entre dos de los participantes sobre lo pertinente o no de mostrarle una tabla ya elaborada con los cálculos que exige la pregunta, donde el factor tiempo surge como inconveniente para el desarrollo de la actividad. Kenya advierte que llevar la tabla ya elaborada convierte al profesor en protagonista del proceso de enseñanza-aprendizaje, pero por otro lado, el construir las tablas en clase supone para Elio una motivación al trabajo para el estudiante.

Más adelante, estos dos participantes mantienen un diálogo relacionado con los enfoques numérico y geométrico; por su parte, Kenya sugiere dividir el pizarrón puesto que, *"...pareciera como que son dos asuntos..."*, lo que permitiría, desde su punto de vista, la discusión entre los estudiantes, pero Elio considera que colocar toda la tabla y realizar todas las gráficas puede resultar pesado para el estudiante y sugiere, *"...Bueno sería contar con un computador..."* y de esta manera explotar el poder visual que posee esta herramienta informática.

En resumen, las opiniones en materia de enseñanza resultan muy diversas y poco concretas, con lo que no podemos sacar una conclusión relevante en este tema. No obstante hay que destacar la escasa participación de Alexis y así queda reflejado en su correspondiente diagrama, quien en todo momento prefiere acogerse a las opiniones y comentarios de los otros dos.

Conocimiento sobre el Aprendizaje (Grupo A)
El presentar un problema contextualizado en la física y pretender ahondar en el conocimiento del profesor sobre aspectos concretos vinculados al estudiante de ciencias económicas tiene su razón de ser; en primer lugar, ver si el profesor utiliza un problema de este tipo o similar en sus cursos y su justificación. Por otra parte, aproximarnos al conocimiento del profesor sobre el aprendizaje y, en consecuencia, analizar la relación o influencia de este conocimiento con el analizado anteriormente.

En este orden de ideas, Pedro es tajante al sostener que no utiliza problemas de un contexto distinto al económico para estos cursos, mientras que Ramón y Manuel dejan ver que sí implementan problemas de esta naturaleza pero no como problema principal, aunque los tres afirman que los estudiantes rechazan problemas de contextualización no económica. Esto significa que la actitud del estudiante de economía ante problemas no económicos es negativa, situación que incide en el aprendizaje del estudiante pero también debería incidir en la planificación de la clase.

Ahora bien, más allá del contexto, Manuel y Ramón valoran positivamente el enfoque numérico del problema para introducir la derivada, puesto que está vía supone una ventaja para el aprendizaje del estudiante frente al enfoque geométrico. Pero algo en lo que coinciden los tres profesores del grupo es que el presentar la enseñanza de la matemática con un enfoque meramente matemático genera serias dificultades en el estudiante de económicas. En otras palabras, estos profesores son conscientes de la actitud del estudiante ante problemas específicos y, en consecuencia, sus clases dependen de esta situación en concreto.

Conocimiento sobre el Aprendizaje (Grupo B)
Este grupo se decanta por la función cuadrática ($f(x) = x^2$) para la enseñanza de la derivada; dos de estos profesores le dan peso a la parte geométrica y uno de ellos lo justifica por la formación de los alumnos para el momento en que llegan al curso de cálculo diferencial; Kenya sostiene que *"...yo he partido siempre de la parte geométrica porque tengo el prejuicio de que los estudiantes que nosotros atendemos traen muy mala base..."*, es decir, la elección de esta función radica en la experiencia de cursos anteriores y se ha conformado con mantener el ejemplo. Por otra parte, Elio sólo se apoya en el gráfico como complemento a la parte analítica y hace una observación sobre el material, *"...trato de hacer lo que está por aquí en las tablas pero no con tanto cálculo..."*.

Centrándonos ahora en el tema de las dificultades que generalmente presentan los estudiantes al abordar el tema de la derivada con un problema similar al de la discusión, Alexis dice que: *"Los estudiantes presentan dificultad al evaluar la función en un punto..."*, a esto le añade Elio que para los estudiantes *"...calcular el costo de producción de 51 artículos y calcular el costo de producción del artículo 51 es lo mismo..."*. Estos elementos vinculados al aprendizaje del estudiante resultan claves para la planificación y gestión de la clase, es decir, el hecho de que el profesor sea consciente de las dificultades del estudiante frente a situaciones matemáticas particulares le indican al docente cómo abordar las mismas en la práctica de la enseñanza.

Por su parte, la opinión de Kenya se centra en la estructura que presenta el problema y nos dice que: "...el problema de un proceso constructivista es que el estudiante se siente perdido..."; en primer lugar, advertimos que en ningún momento se dijo durante el seminario que una de las características del material es que se de corte constructivista, en todo caso así lo identifica esta profesora; por otra parte, Kenya muestra tener conocimiento de lo que significa una enseñanza de este tipo, donde el compromiso del estudiante es mayor en relación a la metodología de enseñanza tradicional. Finalmente, Elio se acoge a la opinión de Kenya sin mayor justificación. Pero volviendo a la frase de la profesora, ésta nos advierte que trabajar con un esquema como el que muestra el material debe suponer cambios en el estudiante; sin embargo, preferimos no adelantarnos y hacer conclusiones *a priori*.

Conocimiento sobre el Currículo (Grupo A)
Tal como lo indicamos en el conocimiento sobre la enseñanza, los tres profesores consideran el ejemplo de velocidad instantánea poco indicado para los alumnos de ciencias económicas por el rechazo que supone para ellos los problemas fuera del contexto económico, por lo que sugieren cambiar el contexto del problema, de la física a la economía. Aun así, dos de ellos no desechan del todo el problema en cuestión y su justificación ya se dijo cuando hablamos del conocimiento sobre la enseñanza. Estos dos profesores, Manuel y Ramón, están de acuerdo con el hecho de comparar las velocidades promedios e instantánea. Por su parte, la posición de Pedro se ciñe a la contextualización de la actividad; él, en lugar de hablar de velocidades hablaría de costo promedio y de estudiar el costo en pequeños incrementos, lo cual nos muestra su posición respecto a la enseñanza contextualizada en la economía.

Salvo la contextualización del problema, los participantes están de acuerdo con el material mostrado hasta el momento como herramienta didáctica; destacan la preferencia que tienen por hablar en sus clases de pendientes de rectas secantes en lugar de rectas secantes únicamente; aún así, uno de los profesores participantes hace una observación al material: puesto que en el mismo consideramos el límite como un valor específico y no como una aproximación, Pedro argumenta que *"...hay que tener mucho cuidado aquí ya* *que la recta tangente se define como una aproximación, el Δ_x se aproxima a 0 y no la definición de recta tangente que uno conoce y que el estudiante conoce para ese momento..."*. De esta manera se cumple lo que destacáramos de Climent (2002) en la **sección 2.3.3**, es decir, la capacidad de análisis del profesor sobre materiales va en función del conocimiento disciplinar que éste posee.

También, Ramón y Manuel destacan como aspecto didáctico positivo del material, el enfoque numérico presentado aquí por la facilidad que supone para el estudiante trabajar el tema de la derivada desde este punto de vista. En este mismo punto, Ramón señala que la relación que se plantea en el material entre velocidades promedio e instantánea es un punto de valor didáctico que los libros de texto descuidan. Finalmente, Ramón expresa que el material es una buena herramienta para introducir del concepto de derivada siempre que se llegue a la formalización del concepto. Estos tres puntos que hemos destacado están ligados a aspectos metodológicos de enseñanza, en particular con el *cómo* enseñar.

Conocimiento sobre el Currículo (Grupo B)
Estos profesores hacen observaciones sobre el material mostrado para la discusión; primero, la presentación del ejemplo podría conducir al estudiante a un conflicto conceptual, por otro lado, el contexto del problema lo ven poco adecuado para el universo de estudiantes al que se supone destinado el material, ellos proponen de forma unánime que se considere el contexto económico en lugar en lugar del físico, proponiendo ejemplos como la oferta o la demanda, aunque Alexis resalta que los libros de texto de aplicaciones a la economía trabajan también la velocidad instantánea, a esto argumenta Kenya que este hecho obedece a razones históricas, pero se inclina por modificar el contexto del problema al área de la economía.

Ahora bien, un cambio de contexto supone un conocimiento profundo del docente sobre el nuevo contexto, situación esta que dejaremos, de momento, en el aire para abordarla más adelante.

Otro aspecto que destacan Kenya y Elio tiene que ver con el contenido del material para introducir el concepto de derivada, ellos lo entienden como un material constructivista, en el que el concepto de derivada saldría de forma natural, evitándose la formulación tradicional, $\varepsilon - \delta$. En este sentido podemos apreciar que las opiniones de estos dos participantes se mueven más hacia aspectos metodológicos de enseñanza.

4.1.2. Episodio 1.2: El Impuesto Marginal, introducción a la derivada, incrementos, contextualización económica

Supongamos que una persona gana \$6000 al año. Ésta tiene la opción de trabajar más horas, pero para ver si le convendría, primero quisiera determinar los **efectos del impuesto en los ingresos**. Para simplificar las cosas, supongamos que el impuesto que debe pagar viene dado por un polinomio de segundo grado, $y = f(x) = 0{,}04x^2$, donde

$$x = \text{ingresos gravables (expresado en unidades de \$1.000)}$$
$$y = f(x) = \text{impuesto (expresado en unidades de \$1.000).}$$

A partir de esta función se discutirán una serie de preguntas, pero antes se le solicita al alumno que calcule el impuesto para ingresos anuales de \$1.000 hasta unos \$12.000, por ejemplo. Recuerde que x está expresada en unidades de \$1.000.

Pregunta 1: En cuánto varía el impuesto que ha de pagar cuando el ingreso del trabajador cambia de \$6.000 a \$12.000; de \$6.000 a \$11.000; de \$6.000 a \$10.000; de \$6.000 a \$9.000; de \$6.000 a \$8.000 y de \$6.000 a \$7.000. ¿Qué observa en cada uno de los cambios de ingreso al año?

Respuesta: En la segunda columna de la **Tabla B.3** podemos ver cómo varía el impuesto a pagar en función de los incrementos que sufra el sueldo del trabajador más allá de los \$6.000 que gana actualmente.

Microepisodio 1.2.1: Al inicio de esta actividad y antes de entrar a realizar las tareas correspondientes, se le pidió al estudiante que calculara el impuesto a pagar para distintos ingresos, ahora estudiamos variaciones del impuesto para intervalos de ingresos particulares; es decir, qué variaciones experimenta el impuesto del trabajador cuando obtiene ingresos superiores a los \$6.000 que actualmente gana.

¿Consideran ustedes que esta tarea promueve, de alguna manera, el concepto de incrementos de una variable? ¿De qué manera? ¿Cómo?

Pregunta 2: Si la persona **incrementa** sus ingresos en \$1000, **¿qué cantidad de este incremento** será para impuestos? ¿Qué porcentaje?

Respuesta: Dado que sus ingresos, x, se miden en unidades de \$1000, su incremento podría expresarse simbólicamente como

$$\Delta x = 1, \ \textbf{cada unidad representa \$1000}$$

¿En cuánto se incrementarán sus impuestos? Es decir, ¿cuál es el incremento correspondiente Δy?

$$\begin{aligned} \Delta y &= f(7) - f(6) \\ &= 1{,}96 - 1{,}44 \\ &= 0{,}52 \end{aligned}$$

Así, podemos decir que la tajada al fisco es de 52 % por los siguientes \$1000 que gane (a los \$6000 que ya gana). A esta *variación del impuesto*, (Δy), los economistas le llaman **impuesto marginal**.

Microepisodio 1.2.2: Con esta tarea buscamos que el estudiante se aproxime a la definición de derivada por medio del incremento de una variable respecto a otra (cociente incremental), pero además se llega al monto que el trabajador pagaría en impuestos por los \$1000 adicionales, que es el 52 % de esto \$1000. En otras palabras, la persona solo se quedará con \$480 de estos \$1000.

Un planteamiento como éste, en el que buscamos trabajar, de forma puntual, el tema de los incrementos, partiendo del contexto económico. ¿Les parece adecuado que la variable x se exprese en unidades de mil, o no supone mayor inconveniente y permite la discusión adecuada sobre incrementos?

Pregunta 3: Hasta ahora no hemos hablado de *límite* ni de *cociente incremental*. Aún cuando la función de impuesto del ejemplo antes visto se expresó en unidades de mil dólares, cualquier unidad hubiera sido satisfactoria. Por ejemplo, suponga que se quiere estudiar el *impuesto marginal* de una persona que gana \$6.000, para un incremento de \$100, esto es,

$$\Delta x = 0,1.$$

Entonces el impuesto correspondiente es

$$\begin{aligned} \Delta y &= f(6,1) - f(6,0) \\ &= 1,4884 - 1,4400 \\ &= 0,0484. \end{aligned}$$

Por lo tanto, el incremento del impuesto en relación con el incremento de los ingresos es

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{0,0484}{0,1} = 0,484,$$

que los economistas denominan la tasa del impuesto marginal y los *matemáticos llaman el cociente incremental*.

Microepisodio 1.2.3: Ahora, cuando el incremento del ingreso es de \$100 ($\Delta x = 0,1$), el incremento en Δy cambia respecto al caso anterior. Cuando el incremento en el ingreso era de \$1.000, la tajada al fisco era del 52 %, pero cuando el incremento es de \$100, la tajada es de 48,4 %. De esta manera y según la necesidad del caso a estudiar, nuestro incremento lo podemos hacer tan pequeño como sea.

¿Qué interés puede suponer para ustedes, desde el punto de vista metodológico, esta actividad en la que se busca dar un paso más hacia la definición de derivada?

Microepisodio 1.2.4: Finalmente hemos llegado a la definición de derivada de una manera que a muchos profesores no les gusta o mejor dicho, no están de acuerdo por toda la estructura que significa una construcción de esta naturaleza; además, consideran que el estudiante se distrae y se pierde en esencia el objetivo perseguido.

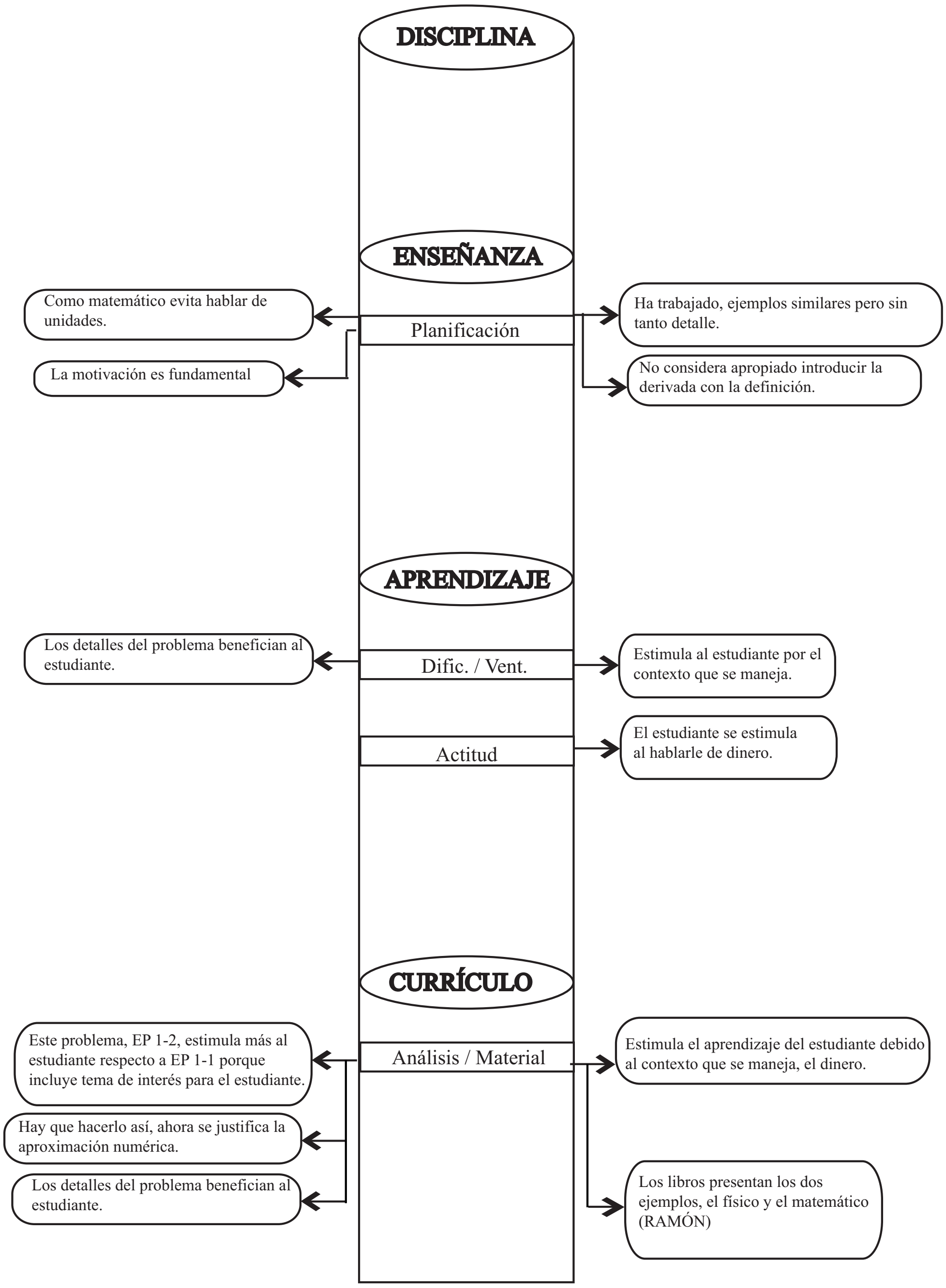
¿Qué opinión tienen ustedes sobre este hecho (el de introducir el concepto de derivada de esta manera), en relación con los objetivos que se buscan en el curso?

Conceptualización, reducción y esquematización

Los diagramas que mostramos a continuación corresponden al episodio EP1-2, en esta parte del seminario la discusión se centró en el estudio del conocimiento sobre la enseñanza, el aprendizaje y el currículo, pero contextualizados en el campo de la economía por el mismo contenido del problema, lo que significa que ya nos vamos adentrando en el estudio del conocimiento del contenido disciplinar.

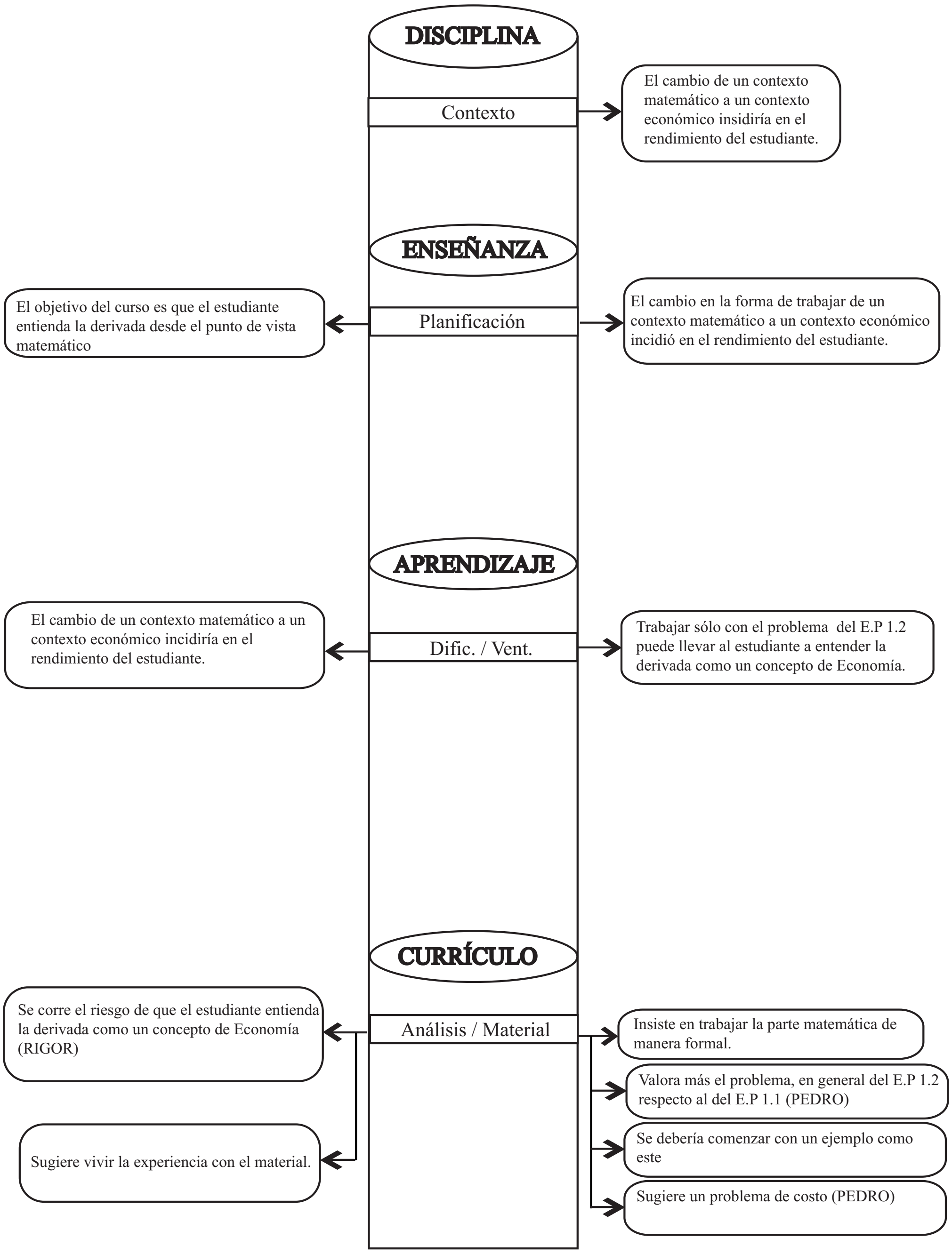
Grupo A

EP 1.2 MANUEL



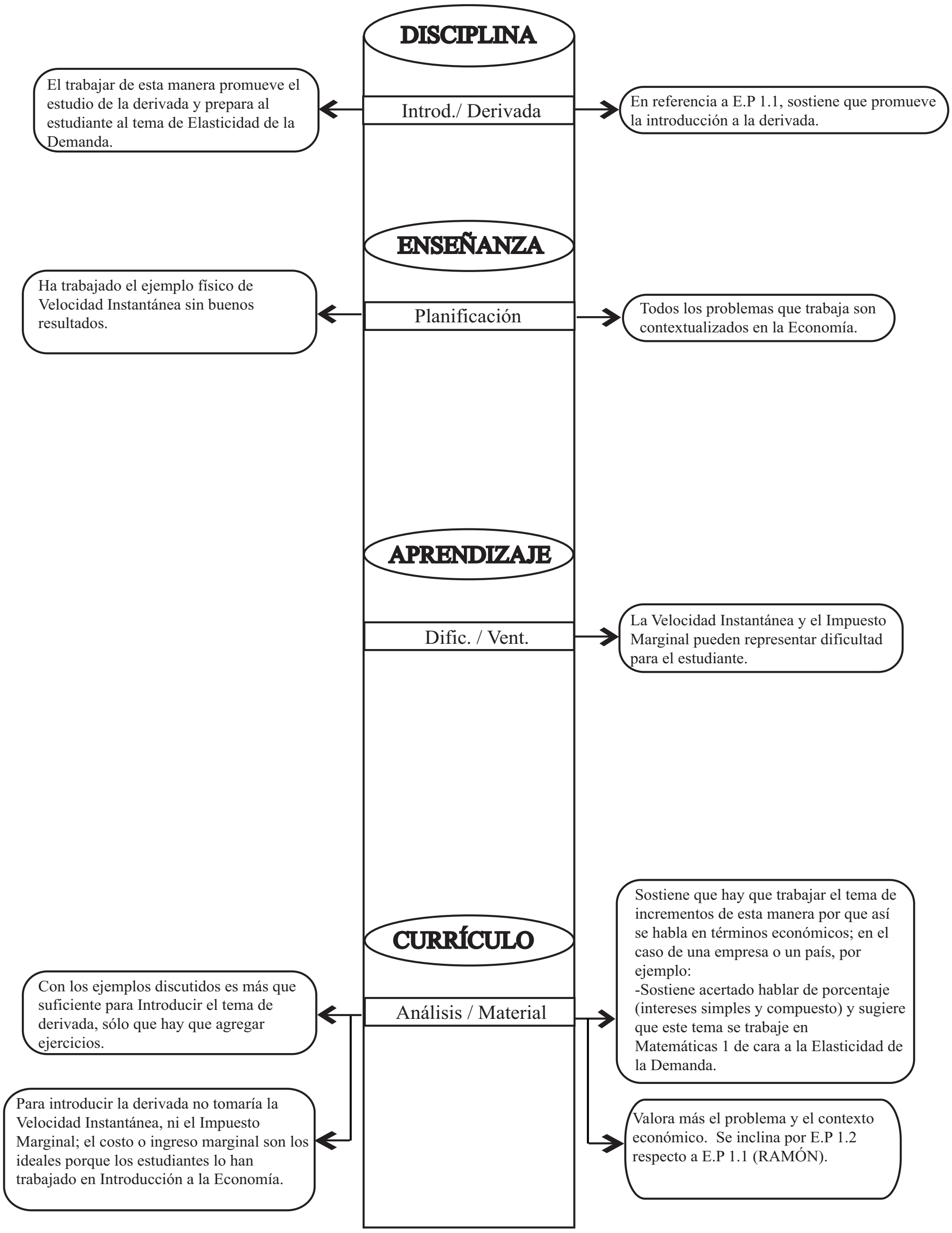
Cuadro 4.4: Episodio 1.2 - Manuel

EP 1.2 RAMÓN



Cuadro 4.4: Episodio 1.2 - Ramón

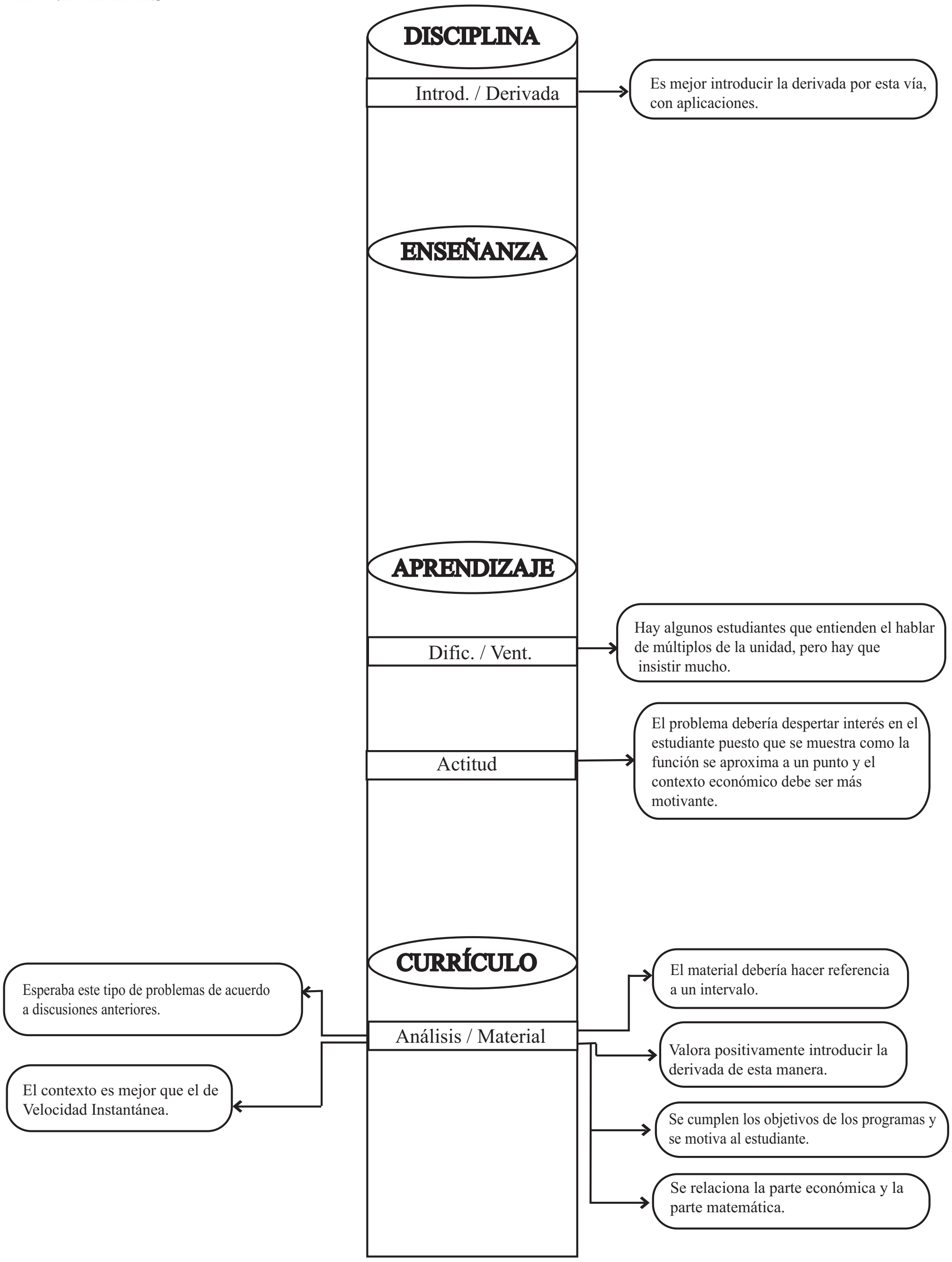
EP 1.2 PEDRO



Cuadro 4.4: Episodio 1.2 - Pedro

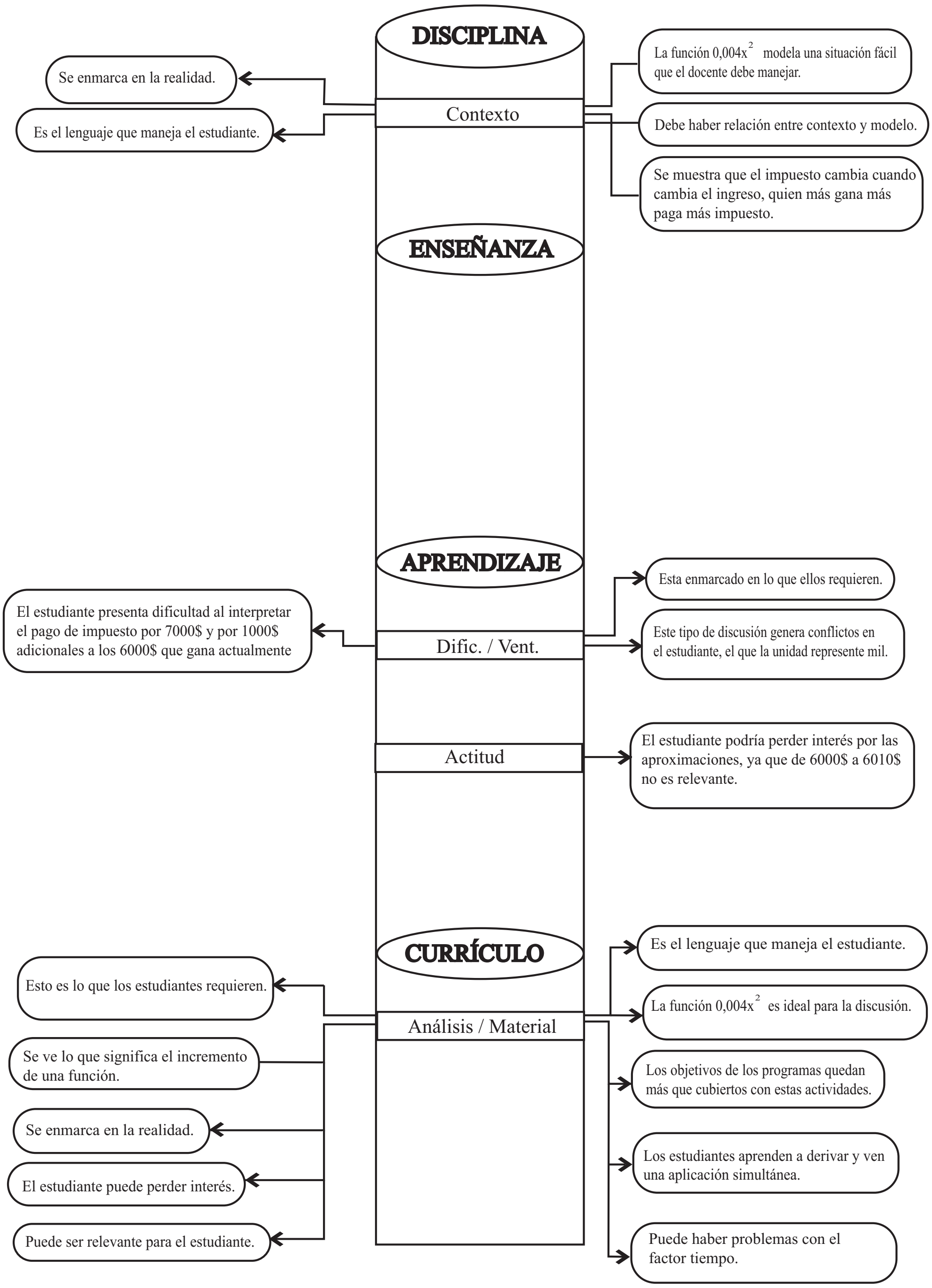
Grupo B

EP 1.2 ALEXIS

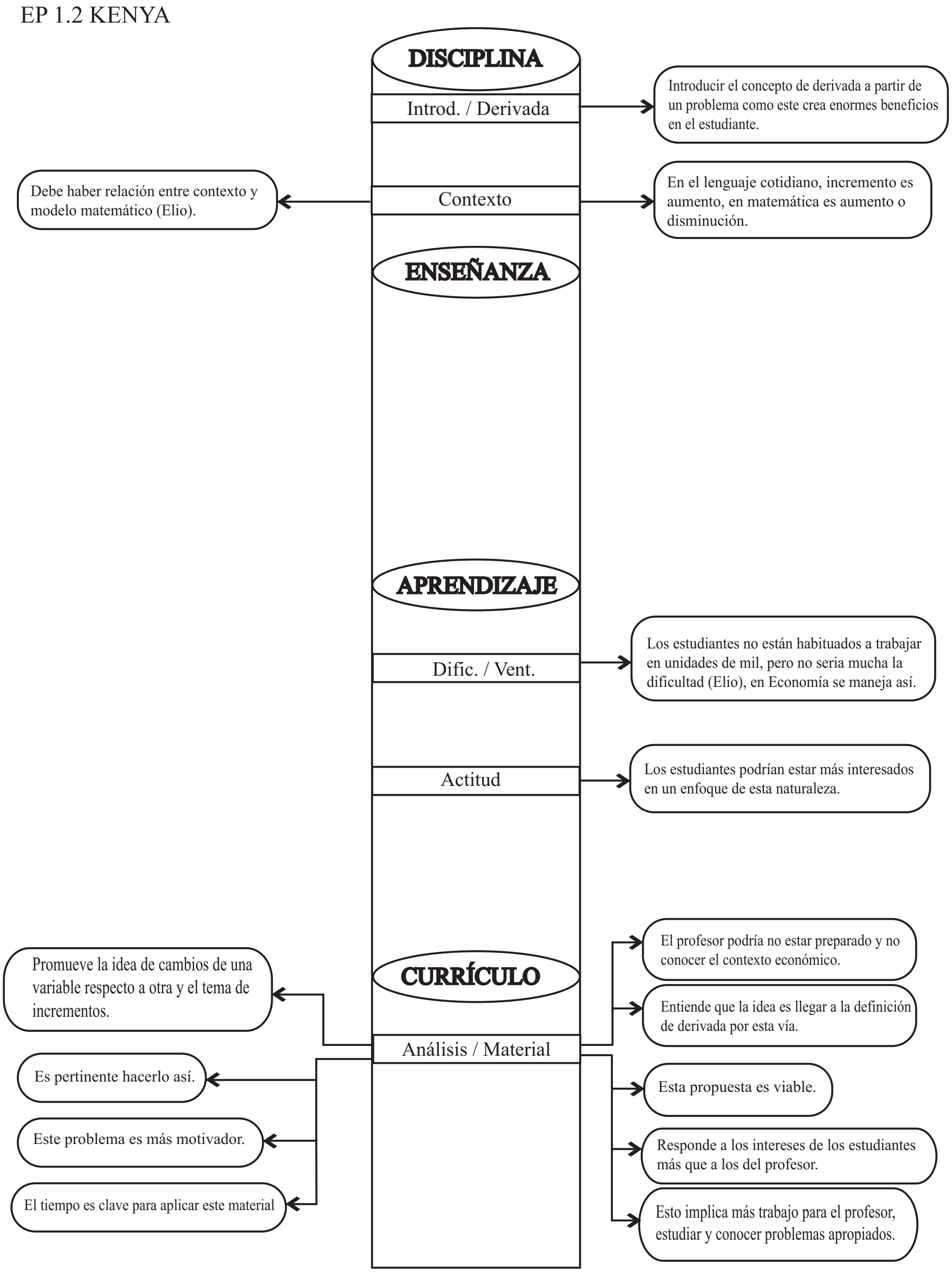


Cuadro 4.5: Episodio 1.2 - Alexis

EP 1.2 ELIO



Cuadro 4.5: Episodio 1.2 - Elio



Cuadro 4.5: Episodio 1.2 - Kenya

Resumen del análisis

En este caso orientamos nuestro análisis hacia los conocimientos de la enseñanza, el aprendizaje y el currículo, donde el contenido matemático-económico sirve como telón de fondo para generar cada una de las discusiones tratadas en esta sesión del seminario, pero además nos valemos de este problema para ir dando los primeros pasos hacia el estudio del conocimiento disciplinar.

Una vez terminado de discutir el primer problema y generado un ambiente de participación colectiva entre los participantes, pasamos a discutir un problema contextualizado en la economía, específicamente, trabajamos el *impuesto marginal*; problema este tomado del libro de texto de Wonnacott (1983).

Mediante este problema se les presenta una situación hipotética relacionada con el pago del impuesto de un trabajador en función de su ingreso anual. En esta parte buscamos estudiar tanto la actitud con las dificultades o beneficios que resultan para el estudiante, desde el punto de vista del profesor, el trabajar un problema de esta naturaleza; de igual manera, pretendemos estudiar los aspectos de la enseñanza que nos son de interés en este estudio y, por supuesto, estudiar las reflexiones que hacen los participantes sobre el material como parte del conocimiento del currículo.

Conocimiento sobre la Disciplina (Grupo A)
Al respecto, el único participante que se pronunció de manera concreta sobre el contenido disciplinar fue Pedro: *"...hay que trabajar el tema de incrementos de esta manera porque así se habla en términos económicos en el caso de una empresa o de un país..."*, donde sugiere, además, que se incluya en el programa oficial de Matemática 1 el tema de "*porcentajes*". Aun cuando el problema tenía la firme intención de discutir acerca de la introducción de la derivada, sin embargo, este profesor, en función de su larga experiencia en la docencia de las matemáticas en el campo de las ciencias económicas, muestra un conocimiento sólido y consistente con el contenido disciplinar matemático-económico. En el **Apéndice A** se muestra en detalle todo lo que él expresa para justificar la enseñanza de incrementos de esta manera y la necesidad del tema del porcentaje de cara al estudio de la elasticidad de la demanda, concepto este que es propio de las ciencias económicas y que se expresa en términos porcentuales.

Conocimiento sobre la Disciplina (Grupo B)
Las opiniones de estos profesores, en materia de contenido disciplinar, son superficiales y sólo Kenya y Elio se pronuncian y sus comentarios están alineados; ellos se refieren al lenguaje económico del problema y a la función matemática utilizada en el modelo del impuesto, pero con frases como la de Elio: *"...es el lenguaje que maneja el estudiante..."* o la de Kenya: *"... en el lenguaje cotidiano, incremento es aumento, en matemática es aumento o disminución..."*, pero ninguno de los dos profundiza al respecto.

Conocimiento sobre la Enseñanza (Grupo A)
Las opiniones en cuanto al conocimiento de la enseñanza son muy variadas para estos profesores, donde dos de ellos dejan ver su formación matemática;

por un lado, Manuel evita hablar de unidades en los problemas que aborda en sus clases, pero advierte que no comienza el tema de derivada con la definición sino con una motivación económica; mientras que Ramón entiende que el objetivo del curso es que "...el estudiante entienda la derivada desde el punto de vista matemático..." y que un problema como este (EP1-2) lleve al estudiante a entender la derivada como un concepto propio del la economía, aunque reconoce que anteriormente sus cursos los planificaba en un contexto matemático y fue cambiando hacia el contexto económico por sugerencia de los propios estudiantes.

De Ramón inferimos que sigue una enseñanza del tipo *teoría+aplicaciones*, en la que hace hincapié en la teoría en un contexto matemático para luego hablar de las aplicaciones; en otras palabras, este profesor sigue el esquema del programa oficial y de los libros de texto, característica similar a la manifestada por Manuel en el EP1-1 y señalada por Doyle (1992).

Por su parte, Pedro, en referencia a los problemas EP1-1 y EP1-2 advierte que su enseñanza está enmarcada en el contexto económico y que su experiencia con problemas en el contexto físico arrojó malos resultados por parte de los estudiantes, razón por la cual se decantó por una enseñanza que apunta hacia el contexto económico. En este caso, el profesor al tener una experiencia negativa por un tema elegido, explora con otro tema en el que el estudiante se siente a gusto y en consecuencia planifica su curso en el nuevo contexto, aquí también señalamos el cambio de este profesor, en materia de enseñanza, del contexto matemático al económico debido a los propios estudiantes quienes, a diferencia de los de Ramón, obtenían un mal rendimiento.

Pero algo relevante para nuestro trabajo, y que podemos aprovechar del comentario de Ramón, es que nos da luces de su perfil como docente y, al mismo tiempo, nos permite estudiar su posición frente a una propuesta metodológica alternativa para la enseñanza de las matemáticas.

Volviendo al inicio del análisis de este apartado, cuando nos referíamos a Ramón, quien objeta que puede surgir un conflicto de conceptualización en el estudiante al utilizar un ejemplo de economía para la enseñanza de la derivada, este indica *"...sigo teniendo mi reparo en cuanto a que si se le enseña de esta manera, el estudiante de economía va a tener un concepto de derivada muy particular y no el concepto como lo mira un matemático..."*. Si atendemos a la teoría en la que se basa la EBP en el caso de las matemáticas, ésta no especifica que se debe enseñar las matemáticas desde las mismas matemáticas, por otra parte el futuro economista no tiene por qué ver la derivada como un matemático, en todo caso lo importante para el economista es conocer las interpretaciones económicas de la derivada (González y Gil, 2000). Además, tal como lo señaláramos en la **Sección 2.4.1** cuando nos referimos a las características de la EBP y sus orígenes, la interconexión entre disciplinas o conceptos es de gran provecho y es lo que se suele explotar en esta estrategia de enseñanza.

Finalmente, un punto a destacar en el seminario como actividad de discusión, tiene que ver cuando Pedro se refiere a la inclusión del porcentaje como contenido del programa oficial y los otros profesores, aunque opinan de forma superficial, terminan estando de acuerdo con él. Especulamos que en una entrevista con cada uno de los participantes, por separado, difícilmente se podría llegar a los mismos resultados.

Conocimiento sobre la Enseñanza (Grupo B)
En relación a la enseñanza, los participantes no dicen nada concreto y decidimos, en consecuencia, descartar el contenido relacionado con esta categoría.

Conocimiento sobre el Aprendizaje (Grupo A)
Pedro, haciendo uso de su experiencia docente y del conocimiento disciplinar matemático-económico, sostiene que tanto el ejemplo del EP1-1 como el del EP1-2 *"...pueden representar dificultades para el estudiante..."*, puesto que este último rechaza cualquier ejemplo físico y, además, para el momento del currículo de la carrera en el que se estudia la derivada, el estudiante no ha trabajado el tema del impuesto; en este último caso se estaría trabajando con un concepto económico que el estudiante desconoce. Situación que hay que destacar si pretendemos implementar la enseñanza de las matemáticas vía EBP, ya que al desconocer el estudiante un concepto económico incluido en el problema, podría generar conflictos de aprendizaje en este.

Lo que pretendemos resaltar de esta observación es lo siguiente: al plantear un problema dentro de la metodología de la EBP en determinado escenario, el profesor del curso debe tener presente que los estudiantes deben manejar algunos conceptos asociados al problema, de manera que estos últimos se involucren en la discusión esperada, situación ésta que sería difícil de lograr si ninguno o muy pocos estudiantes conocieras los conceptos involucrados.

Por su parte, Ramón en una posición *formalista* sostiene que trabajar sólo este ejemplo, EP1-2, para introducir la derivada podría conducir al estudiante a entender la derivada como un concepto propio de la economía; también afirma que el cambio del contexto matemático o físico al económico puede incidir favorablemente en el estudiante. Atendiendo a estos dos comentarios, mantenemos nuestra idea sobre la estructura de la clase que sigue este profesor, tal como lo señaláramos en el apartado de enseñanza de este mismo episodio.

De Manuel destacamos lo siguiente: *"...los detalles del problema benefician al estudiante..."*, donde además reconoce que él mismo ha *"...trabajado problemas similares pero sin tanto detalle..."*; también advierte que la actitud del estudiante, al trabajar con problemas en el que se habla de dinero, es positiva. Por lo tanto, este profesor conoce algunas de las características del estudiante que promueve su aprendizaje; como es el lenguaje del campo profesional del futuro economista o administrador de empresas. En este caso recordamos a Salazar (2005) y las *ideas previas de los estudiantes*.

Conocimiento sobre el Aprendizaje (Grupo B)
En cuanto al conocimiento del contenido del aprendizaje, estos tres profesores y de forma unánime, coinciden en que al decirle al estudiante que la variable está expresada en unidades de mil o que la unidad está particionada para luego introducir el concepto de derivada de forma intuitiva, puede generar conflictos en el estudiante; estos profesores dejan ver que ellos no trabajan un problema con características similares al discutido. Elio resulta ser preciso en sus comentarios y sostiene que *"...el estudiante presenta dificultad al interpretar el pago del impuesto por $ 7000 y por $ 1000 adicionales a los $6000 que gana actualmente el empleado..."*; en este sentido, Elio es coherente con lo expresado en EP1-1 sobre esta misma categoría, al manifestar que el estudiante confunde $f(51)$ y $f(51) - f(50)$.

Por otro lado hay opiniones encontradas sobre la actitud del estudiante respecto a este problema; mientras Kenya y Alexis consideran que el problema podría despertar interés en el estudiante, Elio piensa que el estudiante al estudiar la variación del impuesto para incrementos muy pequeños en el sueldo del empleado le causaría desmotivación y pérdida de interés, lo cual incide en el aprendizaje del estudiante de acuerdo con Tapia (2001).

Si pensamos por un momento en la EBP como estrategia de enseñanza, debemos destacar que este tipo de sutilezas, como las reflejadas por los profesores, hay que tomarlas en cuenta a la hora de la elaboración de un material enmarcado en esta metodología de enseñanza, cuestión que nos resulta de gran valor de cara a nuestra reflexión sobre el material de discusión.

Conocimiento sobre el Currículo (Grupo A)
Las opiniones sobre el material trabajado están divididas en dos; por una parte, Pedro es tajante al decir que para introducir la derivada, el ejemplo más apropiado es el de *costo* o *ingreso*, contrarios a los de velocidad instantánea e impuesto marginal. En el curso de *Introducción a la Economía*, en el primer semestre, el estudiante trabaja los conceptos de ingreso, costo, beneficio y los desarrolla en profundidad, de manera que estudiar la derivada a partir de estos conceptos podría incidir favorablemente en el estudiante. También se debe tomar en cuenta que si se quiere llevar a cabo una enseñanza basada en problemas, el profesor debe considerar el conocimiento previo que posee el estudiante para una enseñanza efectiva (Reyes y Gárritz, 2006; Salazar, 2005 y Talanquer, 2004).

Ramón, por su parte, objeta que con la aplicación del material el estudiante puede entender la derivada como un concepto económico, en otras palabras, su posición obedece más a su formación como matemático que como profesor de matemáticas para ciencias económicas; es decir, sus estudios universitarios inciden en su trabajo como docente, una característica del profesor de matemáticas de universidad que ya observamos en García (2004).

Entre las opiniones favorables al material, se mantienen dos líneas claramente diferenciadas; una tiene que ver con la estructura que presenta el material y la otra con el contexto, salvo el comentario de Pedro, que aunque está de acuerdo con el contexto económico, sugiere cambiar el concepto tratado, es decir, impuesto por ingreso o costo. Aun así, lo importante a destacar en este caso es que las opiniones de los profesores se fundamentan tomando en cuenta al estudiante. Un ejemplo de ello lo muestra, en palabras de Manuel, *"...este problema, EP1-2, estimula más al estudiante..."*, *"...se habla de dinero y eso le gusta al estudiante..."*, *"...los detalles del problema benefician al estudiante..."*; mientras que Pedro al fijar posición sobre el material, advierte que tal como se presenta el contenido es el indicado, pues ese es el lenguaje que se maneja en el campo de la economía.

En resumen, el análisis del material discutido lo hacen en función, tanto del conocimiento del contenido disciplinar económico como del conocimiento del contenido respecto del aprendizaje como lo señala Climent (2002), componentes claves a ser tomadas en cuenta para el manejo del currículo.

Conocimiento sobre el Currículo (Grupo B)

Las posiciones que adopta cada profesor respecto al material son diversas; en primer lugar sacan a relucir el contexto del problema, estando todos de acuerdo en lo beneficioso que resulta para el estudiante de ciencias económicas abordar problemas ligados a su futuro campo profesional, esto quiere decir que sigue prevaleciendo el que las opiniones de estos profesores se derivan del conocimiento que estos tienen sobre sus estudiantes. Elio, por ejemplo, afirma: *"...esto es lo que los estudiantes requieren..."*, *"...es el lenguaje que maneja el estudiante..."*; por su parte, Kenya señala: *"...promueve la idea de cambios de una variable respecto a otra..."*, refiriéndose al tema de incrementos en una variable, también expresa que *"...esta propuesta es viable..."* y *"...responde a los intereses de los estudiantes..."*. Alexis, siguiendo a los otros dos participantes, opina que *"...se cumplen los objetivos de los programas y se motiva al estudiante..."*.

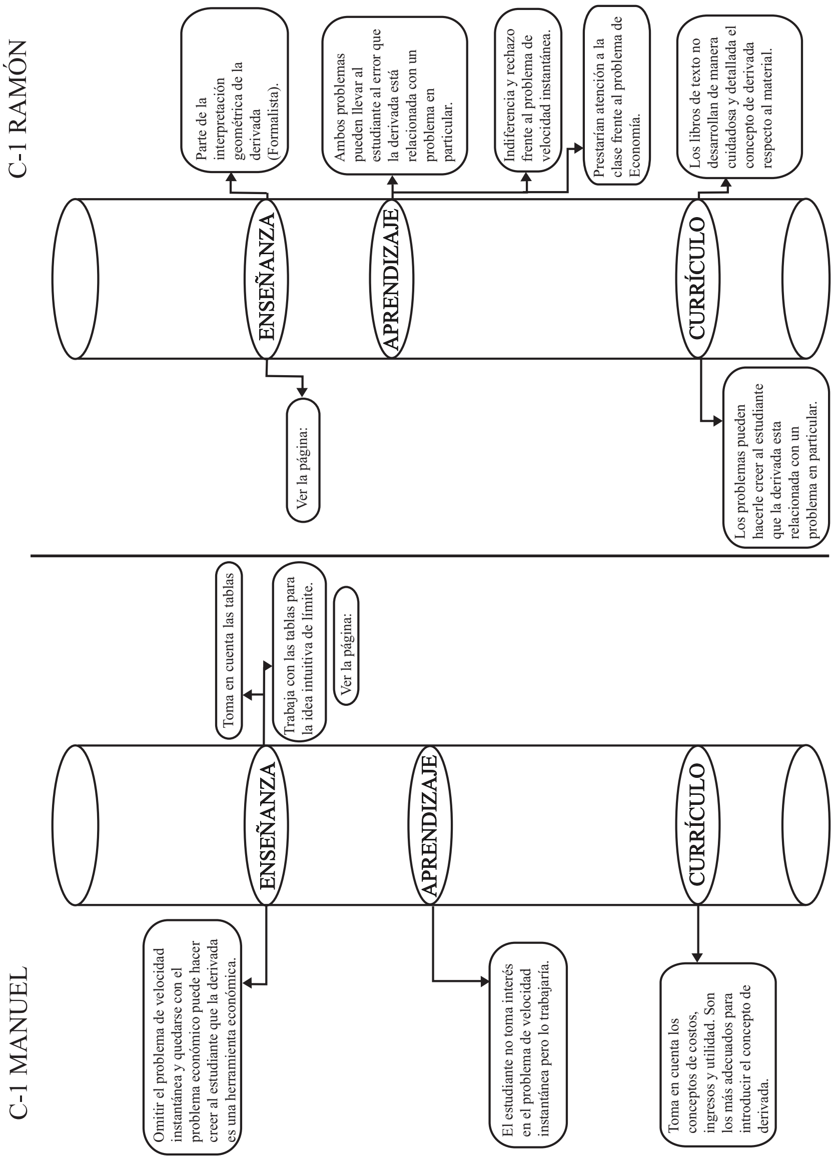
En resumen, tal como dijimos antes, el estudiante resulta ser el *leitmotiv* de las reflexiones de cada uno de los profesores. Sin embargo, si atendemos en detalle a cada una de estas opiniones, se puede apreciar que todos van más allá de la *motivación* a la que se refiere Tapia (2001). Estas críticas o reflexiones más bien obedecen a dos tipos de conocimientos, disciplinar y sobre la enseñanza, que tienen estos profesores y que responden a sus puntos de vista sobre el *qué* enseñar. Ahora bien, Kenya hace un comentario sobre el material que se deriva de la discusión del seminario y que se justifica con algo comentado por ella misma en el EP1-1, cuando dijo que la enseñanza que se pretende con el material es de corte constructivista. En este caso afirma que seguir una enseñanza como se ilustra en el material *"...implica más trabajo para el profesor, estudiar y conocer problemas apropiados..."*. Más aún, para esta profesora la implementación del material supone una formación profesional encaminada, al menos, hacia el contexto económico. Para ella, el hecho de que hayan profesores que rechazan una enseñanza contextualizada de las matemáticas, *"...puede ser que a lo mejor [el profesor] no está preparado, no conoce el contexto..."*.

Es claro que enseñar matemáticas desde un contexto no matemático requiere de un conocimiento de este otro campo (en nuestro caso, el económico); es por ello que el profesor que imparte o pretenda impartir una enseñanza de las matemáticas, en carreras de ciencias económicas, desde la EBP, tiene que involucrarse en el contexto económico, manejar no sólo conceptos básicos de economía, sino las interpretaciones que tiene, para el caso que nos ocupa, la derivada en la economía, apuntando en todo caso hacia Biggs (2005), quien sostiene que *"los conocimientos sólidos se basan en interconexiones"*.

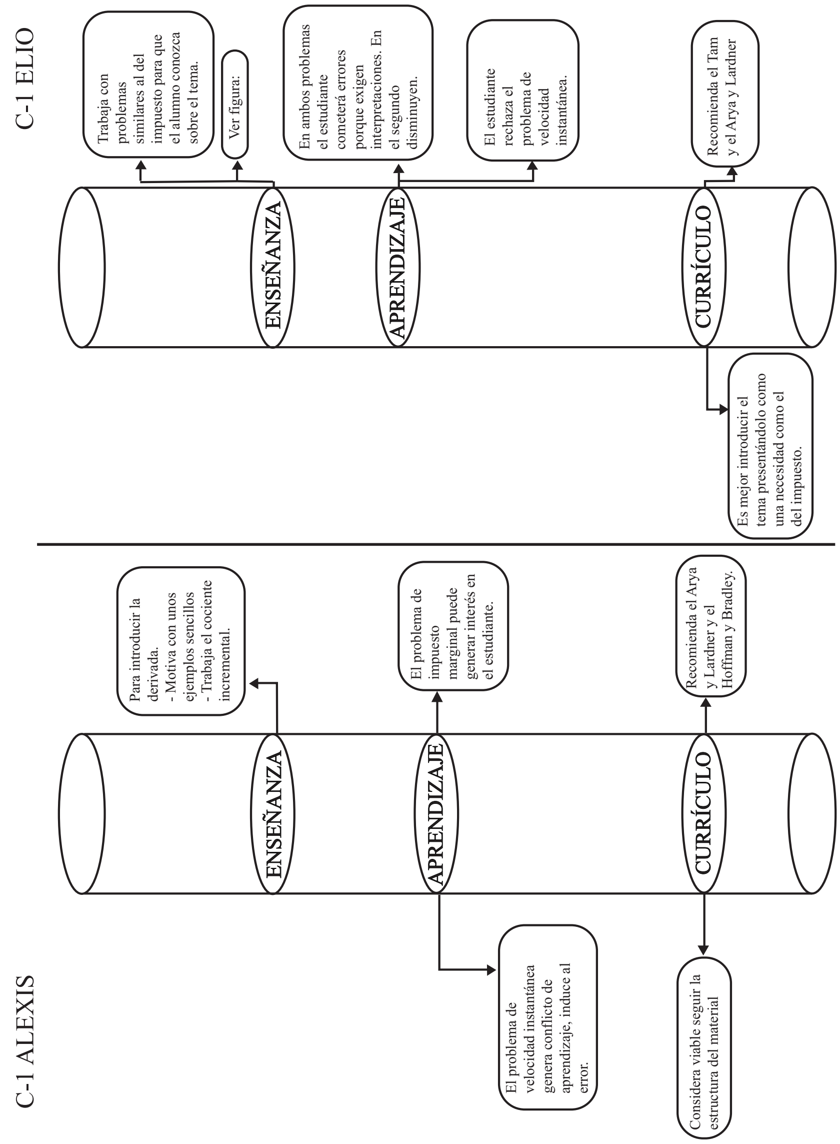
Un punto a resaltar de esta profesora es que ella tiene estudios doctorales en pedagogía y específicamente en educación matemática, lo cual le facilita identificar situaciones de orden metodológicas en cuanto a la enseñanza se refiere. Ella destaca el mayor compromiso que supone para el docente llevar una enseñanza basada en problemas, concretamente en la planificación de la clase.

4.1.3. Cuestionario 1

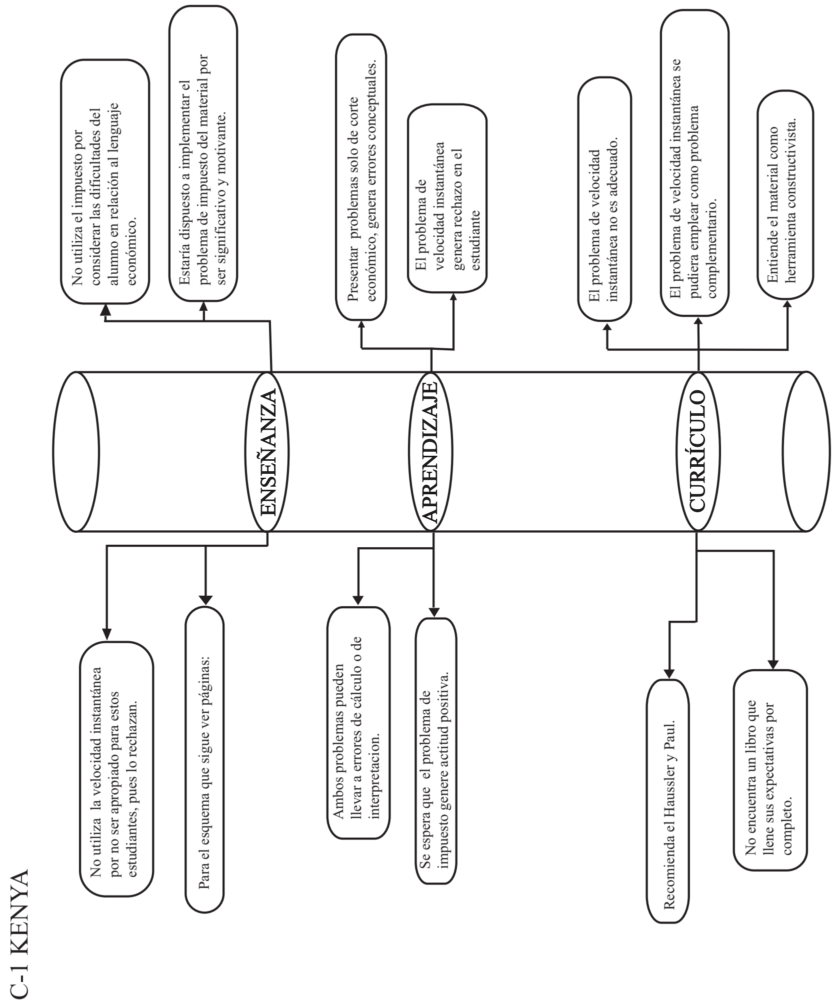
Ya para finalizar con esta parte del primer bloque del análisis, pasamos a estudiar las respuestas del primer cuestionario, en adelante C-1, las cuales nos permitieron, entre otras cosas, llevar a cabo un proceso de triangulación con las reflexiones aportadas por los participantes en la primera sesión del seminario.



Cuadro 4.6: Cuestionario 1 - Manuel y Ramón



Cuadro 4.6: Cuestionario 1 - Alexis y Elio



Cuadro 4.6: Cuestionario 1 - Kenya

C-1 (Grupo A)
A modo de información, le recordamos al lector que el profesor Pedro sólo participó en la primera sesión del seminario y ni siquiera respondió el C-1. Aun así, la información suministrada por este profesor la consideramos relevante y ya en su momento expondremos los motivos que nos llevaron a no retirarlo del trabajo.

Tanto Manuel como Ramón, en los esquemas presentados en las respuestas a la pregunta 4 del C-1, se puede verificar en las páginas 384 y 389 del **Apéndice A**, respectivamente, por una parte, lo que manifestó Ramón en la sesión del seminario y, por otra, lo que inferimos de Manuel en relación con la estructura que sigue en sus clases para la enseñanza de la derivada. Aunque este último presenta un esquema únicamente para la introducción a la derivada, dejando claro que utiliza tanto el problema de velocidad instantánea como algún otro del análisis marginal, es decir que sigue el programa oficial a rajatabla, una característica típica de algunos profesores de universidad (Zabalza, 2003); pero más aún, Ramón nos muestra que inicia el tema de la derivada a partir de la misma definición, mostrando así rigor y formalismo matemático en la enseñanza de este tema, aun cuando se trata de estudiantes de ciencias económicas.

Además, éste mantiene la idea de trabajar ambos problemas, EP1-1 (velocidad instantánea) y EP1-2 (impuesto marginal), para que el estudiante no asocie o identifique el concepto a un tema en particular; lo que implica, una vez más, una clara coherencia con lo dicho durante el seminario, lo que significa una posición formalista respecto a la enseñanza de las matemática en cursos de economía.

En resumen, destacamos la visión formalista de estos dos profesores sobre la enseñanza de las matemáticas, pero el pensar que al trabajar problemas contextualizados en una única área no-matemática pueda llevar al estudiante a un error de tipo conceptual, es algo que está lejos de nuestro planteamiento; en todo caso, nuestra propuesta apunta hacia una enseñanza de las matemáticas en consonancia con lo expuesto por Medina (2001):

> La docencia universitaria se ha de fundamentar en un sistema metodológico **coherente con los intereses y necesidades de los estudiantes y la disciplina que se enseña**, generando situaciones de aprendizaje formativas y transformadoras en las que los participantes sientan un compromiso con el estudio y adquieran actitudes adecuadas a los **nuevos retos de su futura profesión**.
>
> (Medina, 2001, p. 192, el resaltado es nuestro.)

Al respecto nos referimos a lo ya mencionado en el análisis del EP1-2, cuando señalamos el valor didáctico que tiene el interconectar dos áreas del conocimiento como estrategia de enseñanza dentro de la EBP. Es por ello que inferimos que para este par de profesores, el implementar la EBP como metodología de enseñanza de las matemáticas con problemas contextualizados en el campo de la economía, aun cuando ellos sostienen que los estudiantes rechazan problemas no económicos y, por el contrario, se sienten a gusto con problemas de su área de estudio, es un punto del que se encuentran distantes, dado el perfil que muestran por medio del seminario y el cuestionario.

C-1 (Grupo B)
En materia de enseñanza se puede apreciar que existe coherencia entre el seminario y el cuestionario, en lo dicho tanto por Elio como por Kenya, sobre todo, en cuanto a la estructura que siguen en sus clases a la hora de abordar el tema de la derivada; ambos esquemas (ver páginas 495, 500 y 501 en el **Apéndice B**) ilustran una enseñanza tradicional que nos permitimos resumir como: *definición+ejercicio+aplicaciones*.

Un punto a tomar en cuenta y en el que hay una relación estrecha entre el seminario y el cuestionario, son las respuestas de Alexis; durante el seminario mantuvo una actitud pasiva en la que, por lo general, prefirió acogerse a lo dicho por los otros profesores. De igual manera, sus respuestas en C-1 son breves y aportan poco a la investigación; sin embargo, este hecho nos permite iniciar una caracterización de este participante.

En otro orden de ideas, la estructura metodológica del material discutido durante el seminario supone para Kenya una estructura constructivista, lo cual también dejó ver durante el seminario, en el que además manifestó, y lo ratifica en C-1, que el problema de velocidad instantánea genera rechazo en el estudiante, así como también lo señalan Elio y Alexis. De igual modo, en el cuestionario existe consenso en que un problema del contexto económico, como el del impuesto marginal, podría generar más interés en el estudiante; aunque la profesora Kenya apunta que no emplea en sus clases problemas similares, ella sostiene que utilizar únicamente problemas del campo económico puede generar errores conceptuales en el estudiante.

En relación a lo antes dicho, acotamos que un curso estructurado en la EBP permite la flexibilidad de interconectar áreas y conceptos, pero el mayor provecho consiste en la participación del estudiante con los conocimientos previos que este posee (Salazar, 2005); entonces, un punto que es conveniente aclarar es que no todos los problemas que se trabajen tanto dentro como fuera del aula tienen que estar contextualizados en un área específica, lo que sí hay que subrayar es que el problema utilizado como generador del concepto a estudiar tiene que estar, preferiblemente, enmarcado en el campo profesional del estudiante, en este caso estamos hablando de las ciencias económicas, pero está claro que es totalmente válido emplear problemas afines o no a la carrera del estudiante como problemas complementarios, tal como sugiere Kenya que se trabaje el de velocidad instantánea.

Sobre esto último queremos aclarar y enfatizar que en ningún momento pretendemos ni proponemos que únicamente se utilicen problemas enmarcados en un área en particular, sino que el problema que se plantee al inicio para abordar el tema o concepto matemático, sea cual fuere y este lo permita, esté directamente vinculado al campo del futuro profesional, donde se le saque provecho a lo conocido por el estudiante y, en consecuencia, se logre un *"aprendizaje profundo"*, donde el nuevo conocimiento se engrane con el conocimiento previo (Biggs, 2005).

4.2. Análisis de la Sesión 2

En esta sesión que discutiremos y analizaremos a continuación intervienen conceptos del contenido matemático asociados al cálculos diferencial, pero también al análisis matemático en general. Entre estos temas resaltamos la interpretación de la derivada y el estudio de valores extremos y de la monotonía de una función, así como de su dominio. Todos estos temas los discutimos a través de dos problemas, cuyo eje transversal es el contenido económico, recordando lo dicho en líneas anteriores: nuestro instrumento intenta tratar de manera amplia la contextualización económica.

Es de hacer notar que, aunque nuestro trabajo se centra en el cálculo diferencial como objeto matemático de estudio, hacemos uso de conceptos como el dominio de definición de una función o el trabajo con unidades expresadas en fracciones o múltiplos de diez; consideramos que estos son temas asociados al cálculo diferencial, en general, o relacionados con las ciencias económicas, pero también nos interesan la amplitud y diversidad que estos conceptos pueden aportar al desarrollo de nuestro trabajo, en cuanto al CDC del profesor de matemáticas de universidad se refiere.

Con el primer problema intentamos que los participantes opinen sobre el planteamiento de un problema que estudia la dualidad de contenidos como estrategia didáctica; por otra parte, queremos saber la opinión de los profesores sobre la aproximación a un concepto matemático partiendo de un hecho no matemático (o que en principio se supone que no lo es) y su repercusión en el aprendizaje del estudiante.

A lo anterior, le sigue un punto de discusión respecto a la interpretación de la derivada y las unidades en las que viene expresado el problema, ya que en las ciencias económicas es un hecho bastante frecuente con el que el estudiante se enfrenta; en este orden de ideas, buscamos conocer qué piensan los participantes al respecto. Para finalizar, con este problema planteamos una discusión sobre monotonía y valores extremos de una función, en el que nos aproximamos a estos temas de forma no tradicional o distinta a la sugerida en los programas oficiales; estudiando, de esta manera, un concepto del análisis matemático que se puede estudiar a través de la derivada.

En el segundo problema planteamos una discusión sobre la derivada como aproximación a un valor real para ver de qué manera los profesores abordan un hecho como éste en el caso de que así lo hagan, los conflictos que se podrían presentar en el aula de clases y cómo gestionarían una clase ante una situación hipotética como la propuesta en el material.

Como podemos observar, los dos problemas tienen bastante relación no sólo con el tema del análisis matemático, sino que también contemplan una introducción al tema de optimización e interpretación de la derivada. Este planteamiento nos permiten estudiar más a fondo el conocimiento profesional del profesor en estos ámbitos.

4.2.1. Episodio 2.1: Dominio, interpretación de la derivada, monotonía, valores extremos, optimización, contextualización dual, tasas de cambio

Una fábrica de lápices, después de realizar un estudio exhaustivo, concluye que el costo por semana de producir x artículos (x en unidades de mil) de uno de sus productos principales, el lápiz mágico, viene dado por la función $C(x) = 2000 + 0,15x$ *um* y el ingreso obtenido por la venta de x lápices viene dado por $R(x) = 1,5x - 0,0001x^2$ *um*. La fábrica en cuestión produce 2 millones de lápices mágicos semanales y se está estudiando la idea de incrementar la producción a 2.650.000.

Pregunta 1: Cuál es el dominio para cada una de las funciones $C(x), R(x)$ y $\boldsymbol{U(x)}$ (donde $\boldsymbol{U(x)}$ representa la **función de beneficio** o **utilidad**), vistas como funciones matemáticas en general y como funciones de la economía. **Discuta sobre esta situación**.

Respuesta: En primer lugar, antes de hablar de los dominios de las funciones, debemos obtener la función de beneficio $\boldsymbol{U(x)}$, la cual se define como sigue:

$$\boldsymbol{U(x)} = R(x) - C(x) = -0,0001x^2 + 1,35x - 2000.$$

Por otra parte, en el **Cuadro 4.7** se muestran los dominios de cada una de las funciones mencionadas en la pregunta.

	$C(x)$	$R(x)$	$U(x)$
Dominio Mat.	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$
Dominio Ec.	$\mathbb{R}_0^+$ ($\mathbb{Q}_0^+$)	$\mathbb{R}_0^+$ ($\mathbb{Q}_0^+$) <15000	$[1695; 11805]$

Cuadro 4.7: Dominio de funciones en dos contextos

Microepisodio 2.1.1: En las dos situaciones se observa que para la misma función el dominio no es el mismo, suponiendo una economía hipotética sencilla (**se trata de introducir e involucrar al estudiante y no de plantear situaciones económicas complejas por muy reales que éstas lo sean**).

No obstante, en una situación económica real, el dominio en cualquiera de las funciones estaría acotado también por la derecha, dependiendo en este caso de la capacidad de producción y venta del fabricante, por ejemplo. Más aún, si

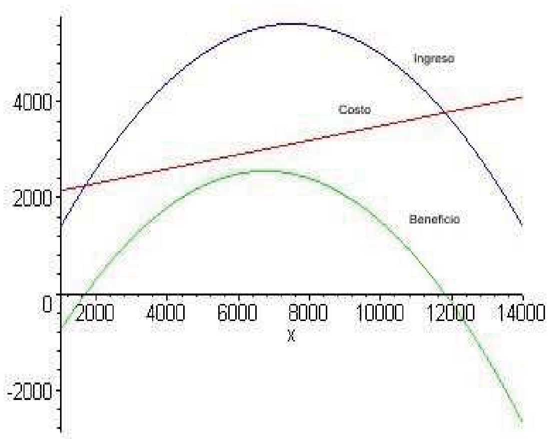


Figura 4.1: Funciones R, C y U

nos fijamos en detalle en el enunciado del problema, los objetos fabricados son lápices y la x está expresada en miles, con lo cual el dominio económico sería $\mathbb{Q}_0^+$ sin excederse en tres decimales (por lo de las unidades de x).

¿Que importancia supone para ustedes implementar este tipo de dualidades (económicas y matemáticas) en estos cursos o por el contrario; supone más bien que el estudiante tiende a confundirse? ¿Por qué?

Pregunta 2: Determine el **beneficio promedio**, $\overline{U}(x)$ *um*, por millares de lápices producidos. Calcule $\overline{U}(2100)$ y dé una interpretación económica de este resultado. Además, si queremos calcular la **tasa de cambio promedio del beneficio** en un intervalo particular $[x_1, x_2]$, este beneficio lo denotamos por $\overline{U}_{(x_1,x_2)}$ y se define como $\overline{U}_{(x_1,x_2)} = \frac{U(x_2)-U(x_1)}{x_2-x_1}$. Calcular la tasa de cambio del beneficio promedio en $[1900, 2200]$.

Respuesta: El beneficio promedio denotado por $\overline{U}(x)$ viene dado por

$$\begin{aligned}\overline{U}(x) &= \frac{U(x)}{x} \\ &= -0,0001x + 1,35 - \frac{2000}{x}\end{aligned}$$

Así, $\overline{U}(2100) \approx 0,1876$ *um*; es decir, el beneficio promedio que resulta de fabricar y vender 2.100.000 lápices es de 0,1876 *um*.

Por otra parte, la tasa de cambio promedio del beneficio de producir y vender entre 1.900.000 y 2.200.000 es $\overline{U}_{(1,900,2,200)} = \frac{U(2,200)-U(1,900)}{2,200-1,900} = \frac{486-204}{300} = 0,94$ *um*.

Microepisodio 2.1.2: Está claro que hablar de la tasa promedio dentro del concepto de derivada, supone una aproximación o mejor dicho, nos permite acercar al estudiante al concepto de la derivada.

En el campo de la didáctica existen opiniones encontradas por los especialistas en el sentido siguiente: partir de la contextualización no matemática (en nuestro caso económica), supone para el estudiante una herramienta que promueve a consolidar el aprendizaje matemático de éstos. ¿Para ustedes supone lo mismo? ¿Por qué? ¿En general, cuál es o sería la actitud del estudiante ante tal situación, (alguna experiencia)?

Pregunta 3: Cuál es el **costo marginal** de producir 2.100.000 unidades. ¿Qué **interpretación económica** le puedes dar a este resultado?

Respuesta: El costo marginal sabemos que es la derivada de la función costo, así, $C'(x) = 0,15$ (una función constante). Pero, ¿qué significado económico tiene este resultado? Esto significa que las **mil unidades adicionales** a las 2.100.000, le costarán al fabricante 0,15 *um* o 15 céntimos de *um*.

Microepisodio 2.1.3: Ahora bien, en esta pregunta se tocan dos puntos de manera simultánea como son: la interpretación económica de la derivada en la función de costos y las unidades (en miles) en las que se trabaja el problema. Recordemos que x está expresada en *miles*, por lo tanto las 2.100.000 unidades se reducen a $x = 2{,}100$. Por otra parte, si $C(x)$ representa la función de costo, la interpretación de la derivada para esta función en un punto x_0 es $(C'(x_0))$ el costo de producir la unidad adicional $x_0 + 1$.

Se entiende que incluir dos puntos como estos en un problema puede conllevarle al estudiante a dificultades de razonamiento del problema e interpretación de los resultados o interés y madurez por el tema, ¿puedes especificar qué dificultades (si crees que las hay) pueden surgir en el estudiante preguntas como estas o crees que en todo acaso le ayudan a entender y madurar los conceptos involucrados? ¿Por qué?

Pregunta 4: En qué intervalos las funciones de costo, ingreso y beneficio $(C(x),\ R(x),\ U(x))$, **aumentan** en función de la producción de lápices (o resulta **creciente**) o **disminuye** en función de la producción de lápices (o resulta **decreciente**). En otras palabras, ¿será cierto que mientras mayor sea la producción de lápices, se mantendrá el comportamiento de estas funciones?

Respuesta: En este caso surge la necesidad de estudiar la monotonía de una función a lo largo de su dominio y entran en juego las definiciones de funciones creciente y decreciente en un intervalo.

Así, la función de costo, $C(x)$, es creciente siempre que $C'(x) = 0,15 > 0$ para todo x en su dominio. Por otra parte, la función de ingreso, $R(x)$, es creciente en $(0, 7500)$ y decreciente en $(7500, +\infty)$. Finalmente, la función de beneficio, $U(x)$, es creciente en $(0, 6750)$ y decreciente en $(6750, +\infty)$.

Microepisodio 2.1.4: El concepto de monotonía de una función es fundamental para el análisis tanto matemático como económico, ya que permite estudiar desde el punto de vista *analítico* el comportamiento de una función en determinados “momentos” de su dominio y de esta manera *interpretar* situaciones en ambos contextos. De hecho, es un tema que aparece en los libros y programas de cálculo diferencial en general.

¿Consideran que se pierde profundidad en el contenido matemático con un planteamiento de esta naturaleza: mucho, regular, nada? ¿Por qué?

Microepisodio 2.1.5: *Los objetivos que ustedes persiguen se podrían alcanzar de igual forma con un planteamiento como éste? ¿Por qué?*

Pregunta 5: Para qué cantidad de lápices producidos y vendidos, el beneficio alcanza su nivel **máximo**.

Respuesta: En este punto después de generar una discusión con los estudiantes para llegar a la definición de valores extremos (máximos y mínimos), se llega a la respuesta: en $x_0 = 6750$, el beneficio $U(x)$ **es máximo**.

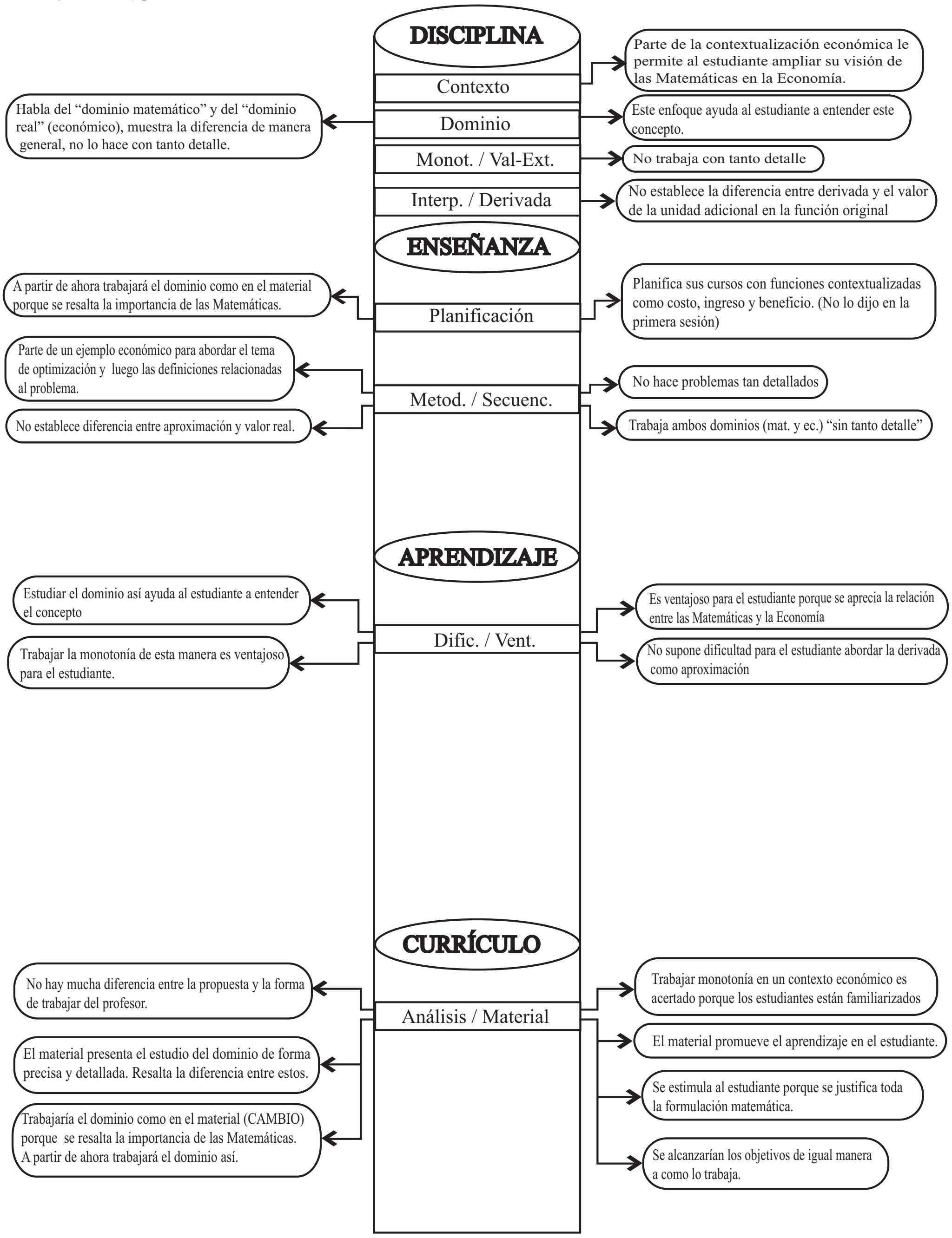
Microepisodio 2.1.6: En diversas áreas del saber relacionadas con el cálculo, estudiar los extremos relativos tiene un significado importante por sus diversas aplicaciones en procesos de optimización; el caso de la ciencias económicas no es la excepción. Se supone que el profesional de la economía, en áreas específicas, constantemente está estudiando la manera de aminorar costos de producción de un determinado producto, por ejemplo, o al menos buscar aproximarse a ese punto ideal donde un determinado proceso sea óptimo. Generalmente los textos de cálculo diferencial, consideran este apartado como un tema de aplicaciones después de haber estudiado y aprendido una teoría que el estudiante debe manejar para abordar y resolver este tipo de problemas.

En una discusión reciente con otros profesores de matemáticas que trabajan en una facultad de economía, dos de ellos manifestaron que una actividad como ésta no es innovadora para sus estudiantes y sus argumentos fueron varios; pero además, surgieron comentarios encontrados en cuanto a aspectos metodológicos. ¿Consideran ustedes que esta es una actividad que conlleva a un mayor esfuerzo en el sentido metodológico (desarrollo de la clase)?

Microepisodio 2.1.7: *Por otra parte, consideran ustedes que es una actividad rutinaria que lejos de promover el aprendizaje, distrae al estudiante y lo conduce a errores (de qué tipos)? ¿Por qué?*

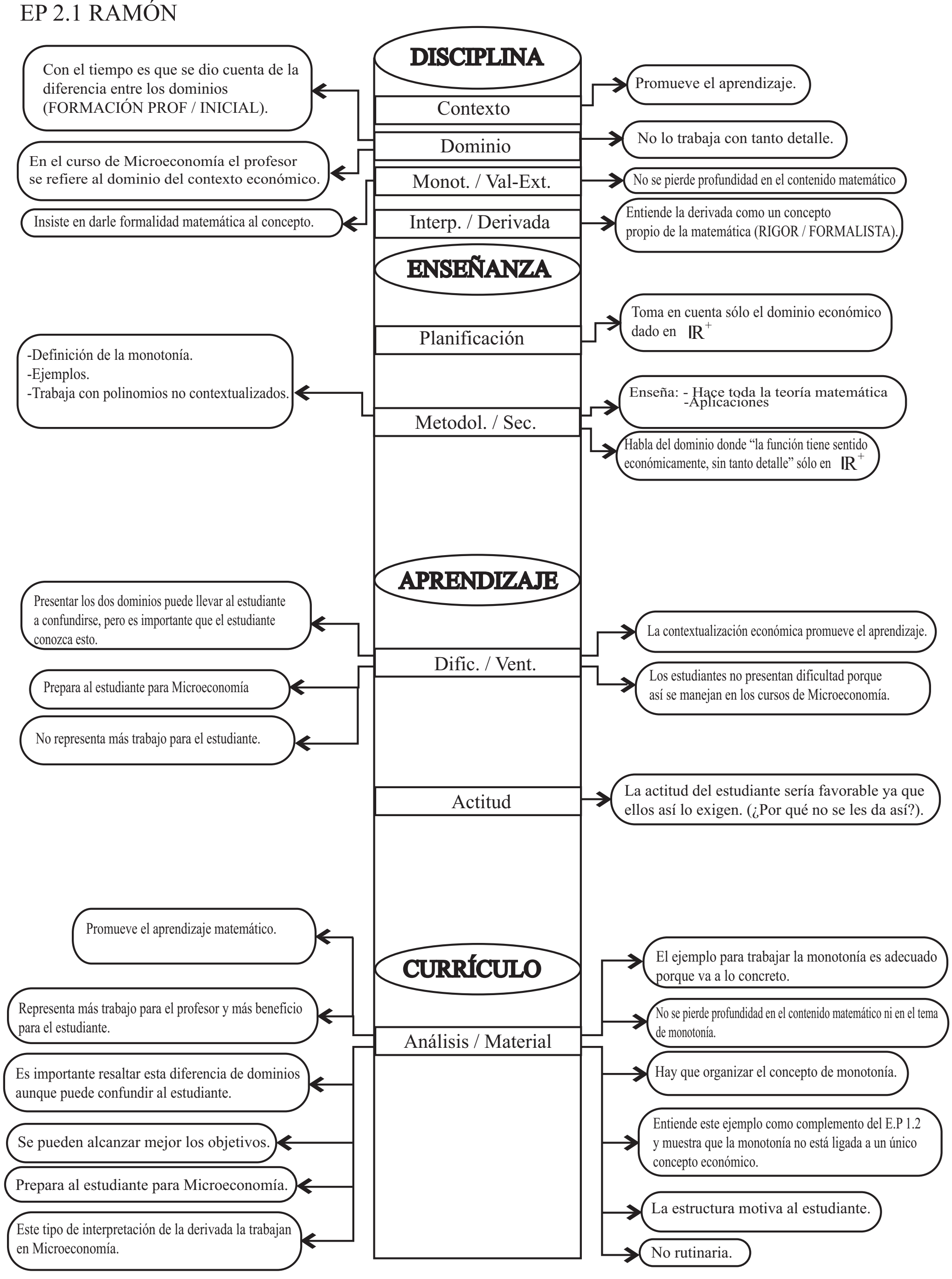
Grupo A

EP 2.1 MANUEL



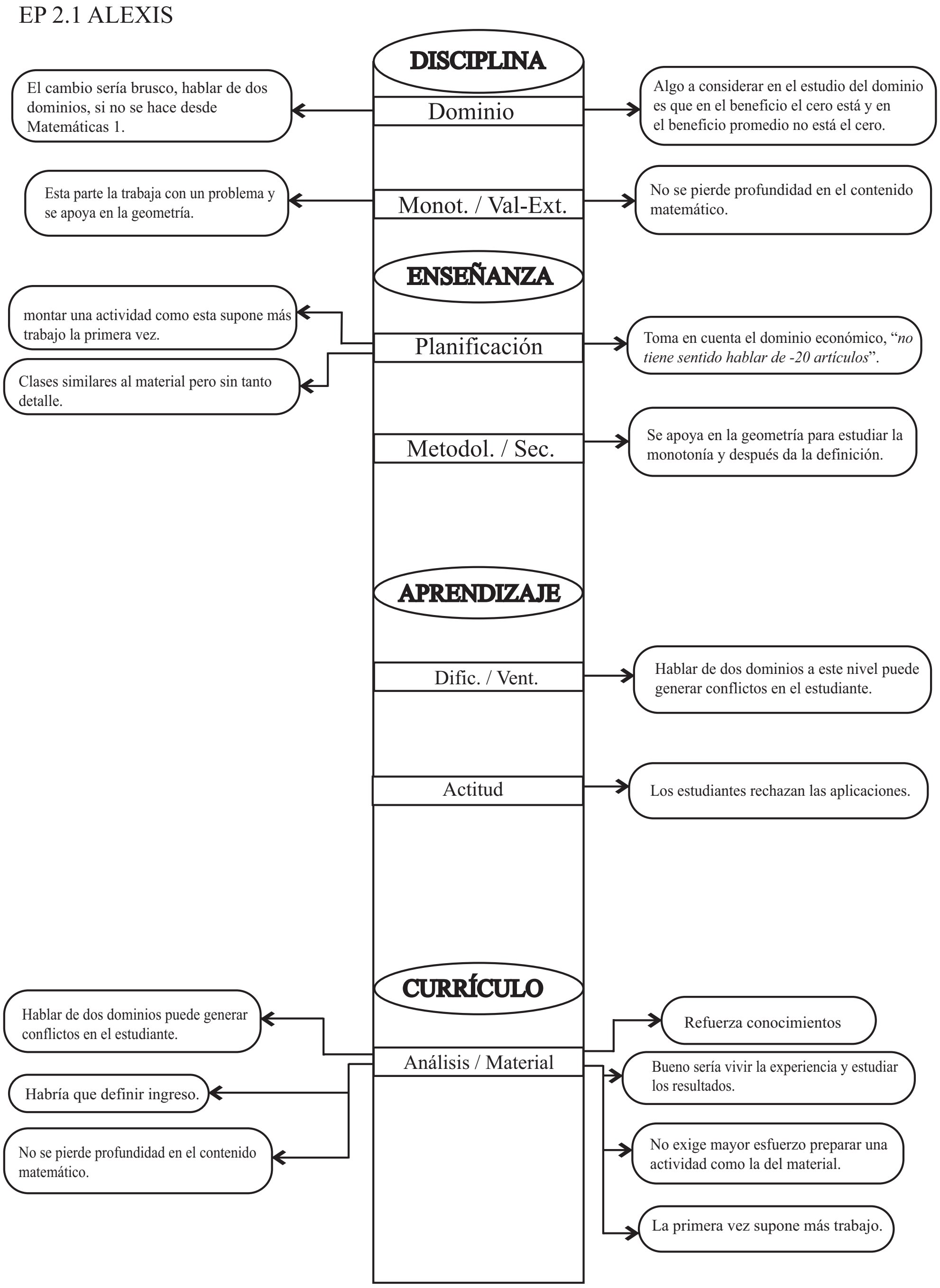
Cuadro 4.8: Episodio 2.1 - Manuel

EP 2.1 RAMÓN



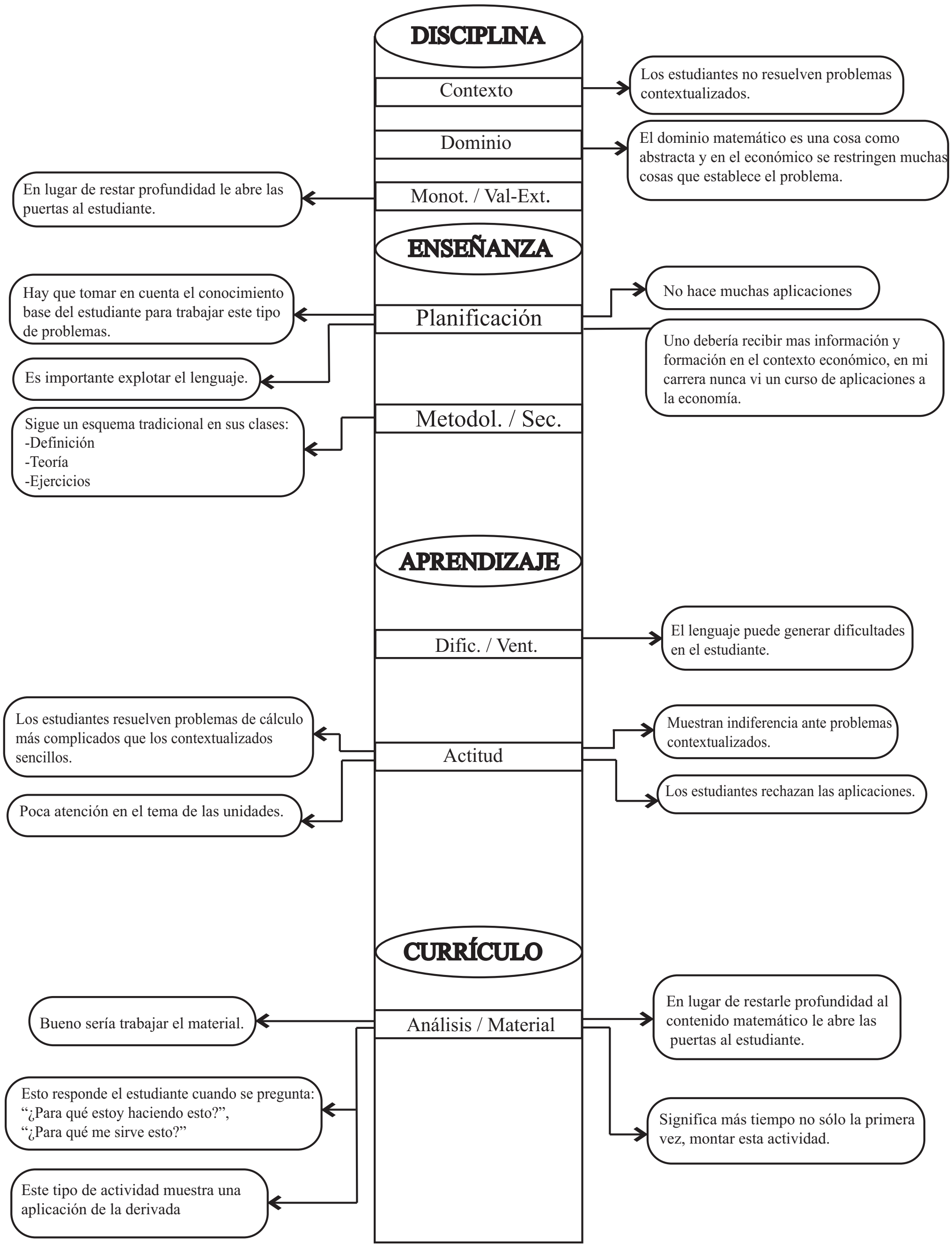
Cuadro 4.8: Episodio 2.1 - Ramón

Grupo B

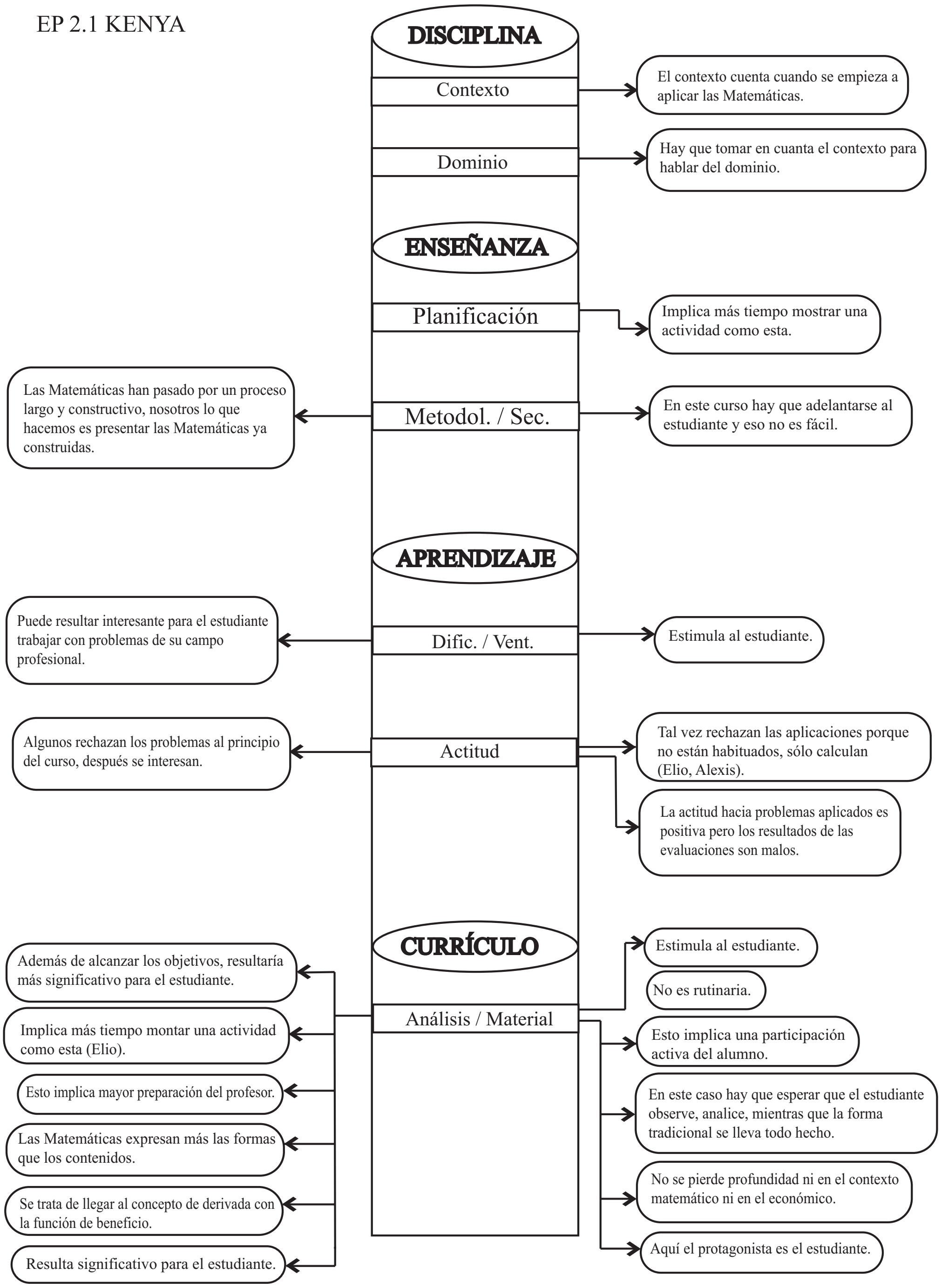


Cuadro 4.9: Episodio 2.1 - Alexis

EP 2.1 ELIO



Cuadro 4.9: Episodio 2.1 - Elio



Cuadro 4.9: Episodio 2.1 - Kenya

Resumen del análisis

Iniciamos nuestro resumen haciendo la siguiente observación: como pudimos observar, sólo hay dos diagramas correspondientes al grupo **A**; esto se debe al abandono involuntario de Pedro en este proyecto de investigación, tal como lo hemos señalado.

Ahora bien, entrando propiamente en materia del análisis, nos permitimos decir que es a partir de esta sesión del seminario que los participantes comienzan a sentirse más relajados y seguros en sus respuestas, al mismo tiempo se muestran menos evaluados, algo que resulta beneficioso para la investigación, puesto que lo que se busca en todo momento es generar un espacio de discusión en el que las opiniones de los participantes sean lo más próximo a la realidad.

En este episodio, EP2-1, abordamos conceptos matemáticos que tienen un alto valor instrumental en las ciencias económicas y se afrontan los mismos desde el campo del futuro profesional como son: el dominio de una función, la interpretación de la derivada y la monotonía y valores extremos, también consideramos la contextualización económica dentro del conocimiento disciplinar. De igual manera estudiamos aspectos propios tanto de la enseñanza como del aprendizaje, piezas estas que forman parte del CDC del profesor de matemáticas de universidad y finalizamos estudiando, también, la cuarta categoría involucrada en este estudio, es decir, el conocimiento sobre el currículo y más concretamente, el análisis que realizan los profesores respecto al material discutido en el seminario.

Pero, hablemos un poco sobre el dominio de una función, aunque es un tema que precisaremos en detalle en la sección **5.2.1**, cuando abordamos este concepto estamos estudiando un conjunto muy especial y bien identificado, desde nuestro punto de vista, esto es *grosso modo*, el conjunto cuyos elementos le dan sentido a la función, o dicho de otra manera, los elementos de este conjunto son los únicos que pueden ser evaluados en la función que se está estudiando.

En los programas oficiales de matemáticas para las carreras de ciencias económicas en la Universidad de Los Andes está contemplado el tema del dominio de una función en una variable real, específicamente en Matemáticas 1, pero no está incluido el hablar de las *restricciones del dominio* ni de las posibles aplicaciones de este concepto u objeto matemático en la economía; los mismos libros de texto que nosotros revisamos no lo tratan en profundidad, en todo caso se refieren de manera superficial a la situación planteada por nosotros.

Dos preguntas que surgen al respecto son las siguientes: ¿tiene sentido trabajar en estos cursos la restricción del dominio?, ¿por qué razón obvian trabajar el dominio de una función que modela una situación económica?

Nosotros hemos incluido el estudio del dominio de una función en nuestro material, dentro del conocimiento disciplinar, porque desde nuestro punto de vista este concepto permite que el estudiante, al abordar un problema contextualizado, pueda entender la amplitud o restricción del problema en estudio; por otra parte, el dominio de una función guarda estrecha relación con el estudio de otros conceptos matemáticos como: puntos críticos o la propia derivada, esto quiere decir, que desde el punto de vista didáctico puede ser utilizado en la EBP, por la interrelación que guarda este concepto con otros.

Conocimiento sobre la Disciplina (Grupo A)
Ahora bien, en el momento que discutimos sobre el dominio de las tres funciones: ingreso, costo y beneficio en los contextos matemático y económico, tanto Manuel como Ramón dejan claro que no trabajan en profundidad el tema del domino en el contexto económico, más aún, Ramón sostiene "*en el curso de microeconomía el profesor se refiere al dominio del contexto económico*" y Manuel, en la discusión sobre el dominio manifiesta que "*este enfoque ayuda al estudiante a entender este concepto*".

El hecho de que estos profesores reconozcan que el estudio del dominio en un contexto dual incide significativamente en el aprendizaje del estudiante, nos conduce a un cuestionamiento similar al de Moreno (2000) en su tesis doctoral, el cual tiene que ver con el *"qué y cómo se enseña, así como sobre los objetivos terminales que se desean alcanzar"*. Entonces nosotros nos preguntamos: ¿por qué ambos profesores no trabajan el dominio con las restricciones del caso en el contexto económico? Esta pregunta la retomaremos en el **Apartado 5.2** en el que analizaremos algunos conceptos matemáticos.

Cuando entramos en la discusión sobre monotonía y valores extremos, Manuel mantiene una opinión repetitiva: "*no lo trabajo con tanto detalle*", así se expresó respecto al dominio y en la S-1 cuando se discutió sobre la introducción de la derivada. Recordemos que este profesor en el C-1, cuando escribió su esquema de trabajo, nos mostró una estructura tradicional para la enseñanza de la derivada, lo que nos hace inferir que la expresión "*sin tanto detalle*" obedece, en todo caso, a que trabaja problemas similares como parte de las aplicaciones y no en el sentido presentado en el material.

Por su parte, Ramón en una posición formalista pero contradictoria afirma: *"...no se pierde profundidad en el contenido matemático..."* al trabajar problemas de esta naturaleza, pero insiste en darle formalidad matemática al concepto de monotonía al igual que lo sugirió en la S-1 con la definición de derivada y de igual manera reitera que *"la derivada es un concepto propio de la matemática"*. En ningún momento hemos dicho lo contrario, en todo caso nuestra discusión, por estar centrada en la EBP, la presentamos con los problemas contextualizados en la economía.

Conocimiento sobre la Disciplina (Grupo B)
Al discutir e intentar reflexionar sobre el dominio de una función, la visión que tienen estos profesores son las siguientes; por un lado, Elio lo entiende, en el sentido matemático, *"como algo abstracto"* y, en el campo de la economía, como un conjunto con las restricciones propias que exige el problema, pero no

profundiza sobre las necesidades o importancia que pueda tener el estudio del dominio de una función en estas carreras; aunque también reconoce no hacer muchas aplicaciones y la carencia de información y formación profesional en el área económica.

Es claro que al no manejar o tener poco conocimiento en un área o disciplina en particular, esto obliga al docente a no considerar aspectos de esa disciplina por diversas razones, entre otras, para no sentirse comprometido o incomodado con algún estudiante al momento de una discusión.

De esta situación particular con Elio surgen dos puntos a tomar en cuenta; en primer lugar, uno de los conceptos matemáticos considerados como concretos es el dominio, con lo que se deja ver la poca precisión en el manejo de este objeto matemático. En segundo lugar, cuando hablamos del dominio, este profesor sostiene que *"no hace muchas aplicaciones"*; esta situación nos lleva a inferir que la "cantidad de aplicaciones" que pueda trabajar este profesor en el aula obedece a la poca formación profesional en el campo económico que posee.

Alexis, por su parte, es enfático al decir que *"...el cambio sería brusco, hablar de dos dominios, si no se hace desde Matemática 1..."*, que es la asignatura en la que se trabaja el tema del dominio de una función. En este comentario queda explícito que no se trabaja, al menos él, el dominio en un contexto dual en el primer curso de la carrera; esta situación nos obliga a preguntarnos: ¿por qué este o algún otro profesor no trabaja el dominio en problemas contextualizados en la economía? Una respuesta inmediata la vinculamos a los programas oficiales y libros de texto. Lo otra es, qué conocimiento tiene el profesor, no sólo respecto a este objeto matemático asociado a las ciencias económicas, sino también las necesidades del futuro profesional en esta materia. Más aún, nos preguntamos cuál es el compromiso de la institución con el futuro profesional al no considerar aspectos que inciden en un aprendizaje de las matemáticas como instrumento de análisis y resolución de problemas en el campo económico.

A modo de conclusión inferimos que el profesor, en general, no trabaja objetos matemáticos contextualizados en las ciencias económicas por tres razones:

1. No posee una formación básica en materia económica.

2. Los programas oficiales no incluyen o no sugieren trabajar problemas de esta naturaleza.

3. Los libros de texto usados por los profesores no contienen problemas que incluyan estudiar el dominio de una función en un contexto dual.

Conocimiento sobre la Enseñanza (Grupo A)
En relación a la enseñanza de la monotonía y los valores extremos, las opiniones de los participantes son dispersas entre sí, mientras Manuel habla de planificación de sus cursos de derivada y, en particular, de este tema con funciones contextualizadas en el campo económico, una cuestión que pasó por alto en la primera sesión del seminario y que no se corresponde con las respuestas de C-1; Ramón, para sus clases, planifica este tema como se observa en el diagrama correspondiente EP2-1, esto es, *definición de monotonía + ejemplos + aplicaciones*, lo que viene a destacar su posición formalista respecto a las matemáticas y su enseñanza, lo cual refleja que este profesor sigue una enseñanza tradicional como lo reflejado hasta ahora.

Conocimiento sobre la Enseñanza (Grupo B)
Tomamos los tres puntos señalados al final del espacio reservado al conocimiento disciplinar de este episodio para analizar las reflexiones y opiniones, que en materia de enseñanza, aportan estos profesores y que asociamos a lo que supone planificar y seguir una enseñanza como la que sugerimos en el material.

La posición de Kenya es que *"implica más tiempo montar una actividad como esta"*, ella argumenta que con un curso como este *"hay que adelantarse al estudiante y eso no es fácil"*. Esta justificación obedece a que la profesora conoce, y así lo ha dejado saber, que lo que se plantea en el material consiste en seguir una enseñanza constructivista, razón por la cual el docente está obligado a conocer al estudiante y, más aún, tomarle la delantera ante cualquier eventualidad que pueda surgir en el aula. De sus comentarios también podemos apreciar que la profesora no sigue una enseñanza en la línea del material.

Alexis, en cambio, comienza afirmando que esta actividad no le supone más tiempo, debido a que la estructura de sus clases *"son similares a la del material"*; sin embargo, en claro debate con Kenya, ésta lo hace cambiar de opinión ligeramente y termina aceptando éste que *"planificar una actividad como esta supone más trabajo cuando se hace por primera vez"*.

Aquí vuelve a ponerse en evidencia que una actividad como el seminario de discusión sirvió para debatir y reflexionar sobre un tema en particular, de modo que se pudiera, a partir de las opiniones o posiciones de un participante, hacer cambiar de opinión a otro. Así, podemos dar testimonio que el seminario fue y es un espacio ideal para el intercambio de ideas, pero también es un escenario para la formación profesional del docente.

Por su parte Elio, manteniéndose al margen de la discusión, pero siguiendo a Kenya, manifiesta que planificar e implementar una actividad como la del material exige *"tomar en cuenta el conocimiento base del estudiante"*. Ya en el **Capítulo 2** mostramos que una de las características propias del CDC aborda el conocimiento que tiene el profesor sobre sus estudiantes de cara a la enseñanza y que desatacan Reyes y Gárritz (2006) y Salazar (2005).

Los comentarios de los tres profesores muestran que, en primer lugar, ellos no siguen una enseñanza de las matemáticas basada en problemas, lo cual no nos resulta nada novedoso, ya que así lo han manifestado desde la primera sesión del seminario, S-1, y en las respuestas de C-1; sin embargo, también podemos resaltar el conocimiento que muestran en el tema de la planificación Kenya y Elio, al considerar como pieza clave al estudiante en lo que respecta a esta materia.

Conocimiento sobre el Aprendizaje (Grupo A)
Al analizar los datos concernientes a esta categoría nos encontramos con unas reflexiones, sobre el contenido del material, por parte de estos dos profesores que terminan siendo algo contradictorias. No es secreto que el tener conocimiento profundo sobre el estudiante le permite al profesor llevar a cabo un proceso de enseñanza-aprendizaje de mejor calidad. Ambos profesores, como producto de la discusión, afirman que trabajar tanto la estructura como el contenido del material supone algunas ventajas para el estudiante; por ejemplo, Manuel apunta que *"estudiar el dominio así, ayuda al estudiante a entender el concepto"*, más adelante y en la misma dirección añade que *"trabajar la monotonía de esta manera es ventajoso para el estudiante..., porque se aprecia la relación entre las matemáticas y la economía"*.

Por su parte, Ramón sigue en este mismo orden de ideas y se pronuncia de lo general a lo específico, mostrando conocimiento intenso sobre el estudiante; comienza diciendo: *"la contextualización económica promueve el aprendizaje"*, para luego perfilarse hacia un punto más específico relacionado con la carrera, *"prepara al estudiante para microeconomía"* y el dominio se trabaja *"en los cursos de microeconomía"*, aunque *"presentar los dos dominios puede llevar al estudiante a conflictos, pero es importante que el estudiante conozca esto"*.

Sobre el último comentario de Ramón, inferimos que se basa en que los programas oficiales no consideran el estudio del dominio en el contexto económico, por lo que trabajar este punto en Matemática 2 habiéndolo trabajado en un contexto exclusivamente matemático puede llevar al estudiante a un conflicto o error conceptual.

Ahora bien, volvemos a cuestionar la posición de estos profesores, ya que si ellos muestran una percepción de los estudiantes respecto a un trabajo hipotético con el material, ¿por qué no trabajan objetos matemáticos como el dominio, la monotonía o los valores extremos con un perfil similar al discutido? Tal vez la falta de formación o compromiso con estos cursos por parte del profesor o la posición de la institución de no promover programas de formación y actualización profesional ante una realidad y necesidad que emerge día a día frente al futuro profesional, razón por la cual destacamos el valor formativo de la actividad realizada por nosotros en el marco de la formación del docente.

Conocimiento sobre el Aprendizaje (Grupo B)
En materia del conocimiento sobre el aprendizaje, nos centraremos, en este caso, en la actitud del estudiante frente a problemas contextualizados. Elio y Alexis coinciden en que los estudiantes rechazan *problemas de aplicaciones*, aunque no justifican el porqué de este rechazo. Por su parte, Kenya es más cuidadosa y advierte que *"algunos rechazan los problemas al principio del curso, después se interesan"*, su argumento sobre la actitud del estudiante en relación a este punto es que *"tal vez rechazan las aplicaciones porque no están habituados, sólo calculan"*.

Cuando lo profesores hacen mención a los problemas que rechazan los estudiantes, estos se refieren a *problemas de aplicaciones*, es decir, a problemas que tienen una ubicación específica en cuanto a la etapa en la que se trabaja, usualmente al final del tema de derivada, por ejemplo. Los programas oficiales y los libros de texto reservan para el final del tema de derivada el apartado de aplicaciones, si a esto le sumamos que los profesores siguen una enseñanza tradicional, el conocimiento disciplinar es escaso (por lo visto hasta ahora) y el factor tiempo juega siempre en contra, se entiende porqué el profesor de matemáticas trabaja poco lo problemas contextualizados o de *aplicaciones* y en consecuencia cobra valor lo expresado por Kenya, cuando se refiere a que los estudiantes *"... no están habituados, sólo calculan"*.

Conocimiento sobre el Currículo (Grupo A)
Al estudiar esta categoría nos ubicamos, claro está, en las opiniones e interpretaciones que de manera directa hacen estos profesores sobre el material, visto este como propuesta didáctica para la enseñanza. Los dos objetos matemáticos que destacamos en este episodio son el dominio y la monotonía, ya en el apartado de este grupo correspondiente al conocimiento sobre el aprendizaje se discutió y analizó la posición de estos profesores en relación a lo que supondría para el estudiante la implementación de este material. Es por ello que analizaremos otros aspectos relacionados con el material pero que no lo estén con el estudiante.

Manuel, refiriéndose al dominio en los dos contextos, opina que *"el material presenta el estudio del dominio de forma precisa y detallada, se resalta la diferencia entre estos"*; suponemos que esta actividad causa tan buena impresión en este profesor que más adelante sostiene: *"trabajaría el dominio como en el material porque se resalta la importancia de las matemáticas"*. Esto es un claro reflejo de un posible cambio en su enseñanza, en su planificación, con lo cual seguimos en la idea de valorar más que el material, el seminario como espacio de reflexión y, por qué no, de formación profesional. Pero retomando las dos opiniones de Manuel, deducimos que no se ha topado con esta situación en los libros de texto que él consulta y que nos permitimos catalogar como innovadora para nuestro participante.

Por otra parte, al opinar sobre el material, Manuel afirma que *"se alcanzarían los objetivos de igual manera a como yo lo trabajo"* ya que *"no hay mucha diferencia entre la propuesta y la forma de trabajar"* del profesor. Hacemos una breve pausa para retomar la idea de considerar como innovador el tratamiento del dominio en una contextualización dual, puesto que aun cuando reconoce que su forma de trabajar es similar a la del material.

Ramón, al referirse a los objetivos del curso, sostiene que *"se pueden alcanzar mejor los objetivos"* al trabajar con el material; destaca además que *"el ejemplo para trabajar la monotonía es adecuado porque va a lo concreto"*, también resalta que *"no se pierde profundidad ni en el contenido matemático ni en el contenido económico"*. Este profesor nos muestra que para sus comentarios, además de tener presente a los estudiantes, toma en cuenta las matemáticas; recordemos lo formalista de es este profesor en cuanto a las matemáticas como disciplina y a su enseñanza se refiere.

Conocimiento sobre el Currículo (Grupo B)

Un punto que sigue aflorando cuando el profesor analiza, opina y reflexiona sobre el material discutido en el seminario, de cara a una posible puesta en marcha del mismo, está directamente relacionado con el estudiante, su pensamiento y conocimiento sobre la disciplina o asignatura. Dado que es un escenario hipotético, Elio y Alexis consideran que *"...bueno sería vivir la experiencia con el material y estudiar los resultados"* ya que en materia de aprendizaje, para el primero, le abre las puertas al estudiante hacia el contenido matemático, mientras que para Alexis *"refuerza conocimientos"* en el estudiante.

Sin embargo, Alexis no apoya del todo el contenido del material y considera que *"hablar de dos dominios puede generar conflictos en el estudiante"*. Esto porque el tema del dominio se estudia en Matemática 1 y la derivada en Matemática 2; no obstante, ya explicamos en su momento la idea de incluir una discusión sobre el dominio de una función obedece, fundamentalmente, a la idea de darle diversidad matemática al instrumento y que, aunque el objeto matemático principal es la derivada, nosotros buscamos ampliar el instrumento a otros temas del análisis matemático.

Por otro lado Kenya, atendiendo a su condición de especialista y conocedora del área pedagógica, fundamenta sus opiniones en dos direcciones, una relacionada con el docente en sí, es decir, que la puesta en práctica del material supone *"...mayor preparación del profesor..."* que *"...implica más tiempo montar una actividad como esta..."*, en otras palabras, aquí salta a la vista el tema de la formación profesional del docente. Las otras apuntan hacia el estudiante como es de esperar, pues esta profesora al entender el material como una actividad constructivista, considera que *"...el protagonista es el estudiante..."*, donde al trabajar de esta manera *"hay que esperar que el estudiante observe, analice..."*, más aún, *"implica una participación activa del alumno"*.

En resumen, es obvio que esta profesora capta y entiende el enfoque que pretendemos con el material como propuesta didáctica, su estructura y contenido. También, como ella reconoce que su enseñanza es del tipo tradicional, muestra la diferencia entre la enseñanza que sigue y la de la propuesta, afirmando que con esta última *"...además de alcanzar los objetivos del curso, resultaría más significativo para el estudiante"*.

4.2.2. Episodio 2.2: Incrementos, tasas, optimización, interpretación de la derivada

El costo de producción de x unidades diarias de un artículo de consumo masivo es $C(x) = \frac{1}{8}x^2 + 3x + 98$ dólares y el precio para la venta por unidad es $p(x) = 25 - \frac{1}{3}x$ dólares

Pregunta 1: A partir de las funciones de costo, $C(x)$, y de precio, $p(x)$, calcular:

a: A partir de la función de costo marginal, calcular el costo de producir la unidad 10. ¿Cuál es el costo real de producir la unidad 10?

Respuesta: Para la función de costo, $C(x)$, se tiene que el costo marginal es $C'(x) = \frac{1}{4}x + 3$ dólares, y el costo *aproximado* de producir la unidad 10 es $C'(9) = \frac{1}{4}(9) + 3 = \mathbf{5,25}$ dólares. El costo real de la décima unidad es $C(10) - C(9) = 140,5 - 135,125 = \mathbf{5{,}375}$ dólares.

b: Calcule la **función de ingreso marginal**, $\boldsymbol{R'(x)}$, para la situación planteada. Luego, calcule el ingreso que resulta de la venta de la décima unidad. ¿Cuál es el ingreso real derivado de la venta de la unidad 10?

Respuesta: En este caso, la **función de ingreso**, $\boldsymbol{R(x)}$, se obtiene a partir del precio, $p(x)$, suministrado. Esto es,

$$\begin{aligned} R(x) &= x \cdot p(x) \\ &= 25x - \tfrac{1}{3}x^2 \end{aligned}$$

Así, el ingreso marginal es $R'(x) = 25 - \frac{2}{3}x$. El ingreso *aproximado* que se obtiene por la venta de la décima unidad es $R'(9) = 25 - \frac{2}{3}(9) = \mathbf{19}$ dólares. El ingreso real generado por la venta de la décima unidad es $R(10) - R(9) = 216,66 - 198 = \mathbf{18,66}$ dólares.

c: Halle el **beneficio** $\boldsymbol{U(x)}$ asociado con la producción de x unidades, calcule el beneficio marginal y determine con éste el beneficio del décimo artículo vendido. ¿Cuál es el beneficio real derivado de la venta del décimo artículo?

Respuesta: La **función de beneficio**, $\boldsymbol{U(x) = R(x) - C(x)}$, en este caso es:

$$\begin{aligned} U(x) &= 25x - \tfrac{1}{3}x^2 - (\tfrac{1}{8}x^2 + 3x + 98) \\ &= -\tfrac{11}{24}x^2 + 22x - 98 \end{aligned}$$

En consecuencia, el beneficio marginal es $U'(x) = -\frac{11}{12}x + 22$ y el beneficio *aproximado* generado por la venta de la unidad 10 es $U'(9) = -\frac{11}{12}(9) + 22 = \mathbf{13,75}$ dólares. Pero, el beneficio real generado por la venta de la décima unidad es $U(10) - U(9) = 76,16 - 62,875 = \mathbf{13,285}$ dólares.

Microepisodio 2.2.1: En esta única pregunta subdividida en tres partes, se contempla un aspecto relacionado con la derivada como lo es, la interpretación de la derivada como una "buena" aproximación a la función dada en un entorno; de allí el remarcado de los resultados obtenidos.

En este caso, se puede apreciar en las tres respuestas que los valores real y aproximado para cada una de las situaciones resultan cercanos en los dos primeros casos y no mucho en el tercero.

De acuerdo a tu experiencia, ¿qué conflictos de aprendizaje podrían surgir en el estudiante, el hecho de que una herramienta matemática como la derivada, que él espera sea exacta, difiera en algunos casos en varias décimas? ¿Cómo abordarían ustedes la solución a este conflicto? El $\boldsymbol{x_0 + 1}$ *es mucho. Incrementos (discreto) Vs. derivada (continuo).*

Microepisodio 2.2.2: ¿Cómo gestionan o gestionarían la clase en caso de conflictos?

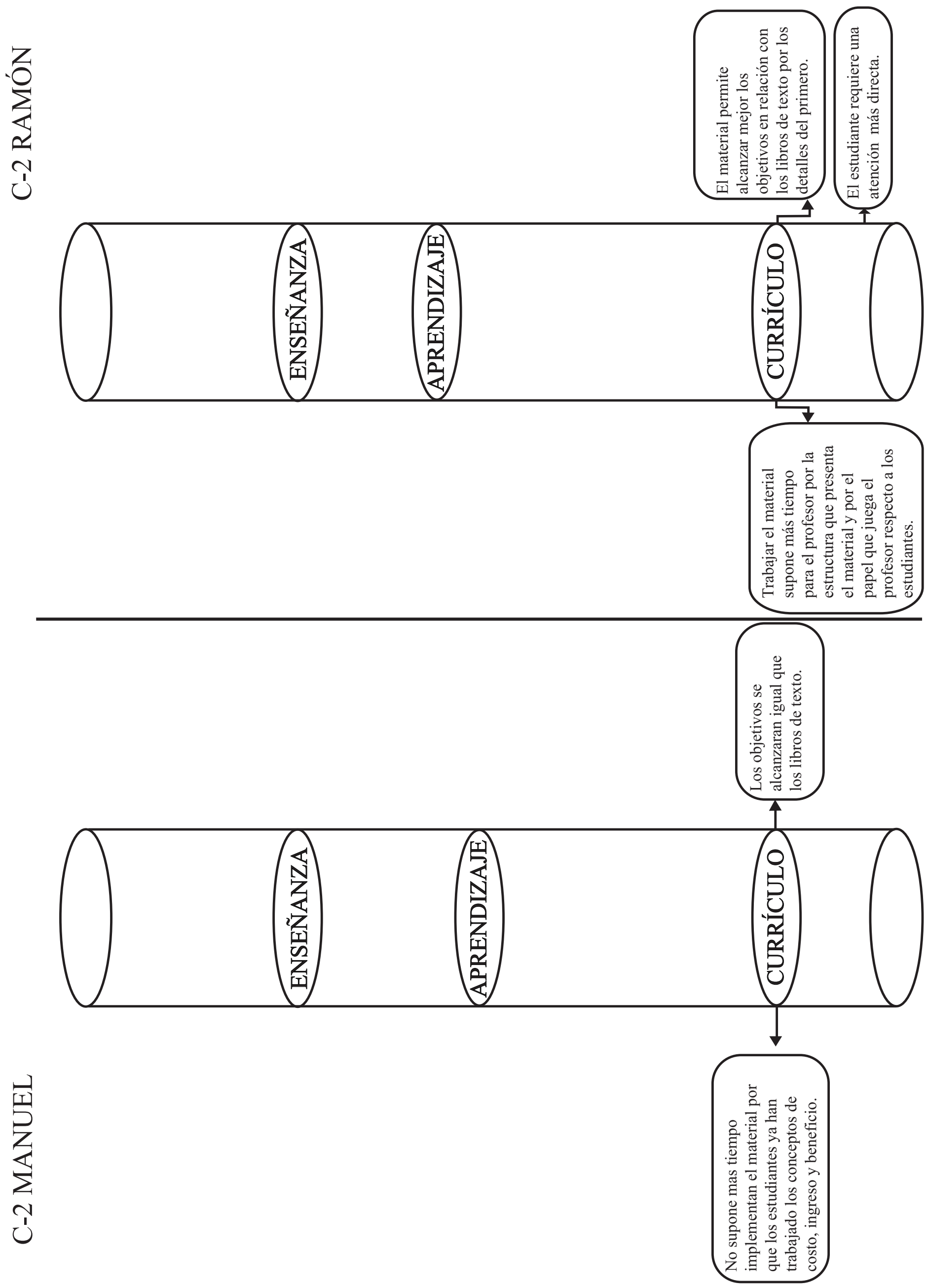
Microepisodio 2.2.3: Por otro lado, se incluye la necesidad de obtener una función que represente el ingreso, $\boldsymbol{R(x)}$ (pero en ningún momento se les dice que lo pueden hacer a partir del *precio*, de modo que ellos (los estudiantes) discurran sobre esta situación) para obtener el ingreso marginal a partir de ésta.

Ante esta situación, ¿cómo gestionarían ustedes una actividad de discusión y reflexión con los estudiantes, de manera que se logren los objetivos deseados, éstos son: (a) obtener unos resultados a partir de unos datos que no son explícitos, y (b) llegar al concepto de un término económico (ingreso marginal) a partir de otro (precio) mediante una situación económica-matemática?

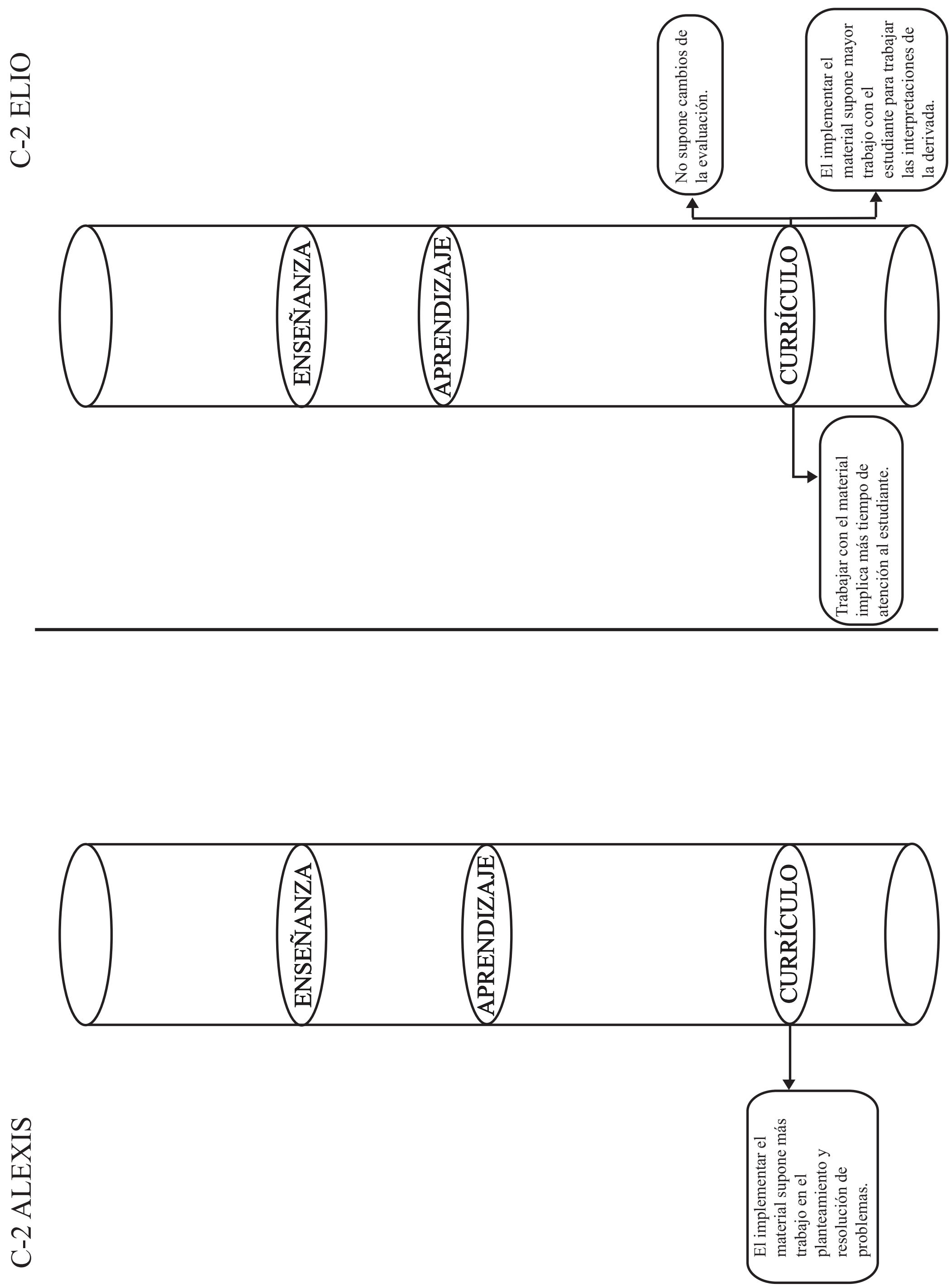
Resumen del análisis Lo aportado en el presente episodio EP2-2 por los participantes es poco lo que contribuye a la investigación, razón por la cual <u>decidimos no analizarla</u>.

4.2.3. Cuestionario 2

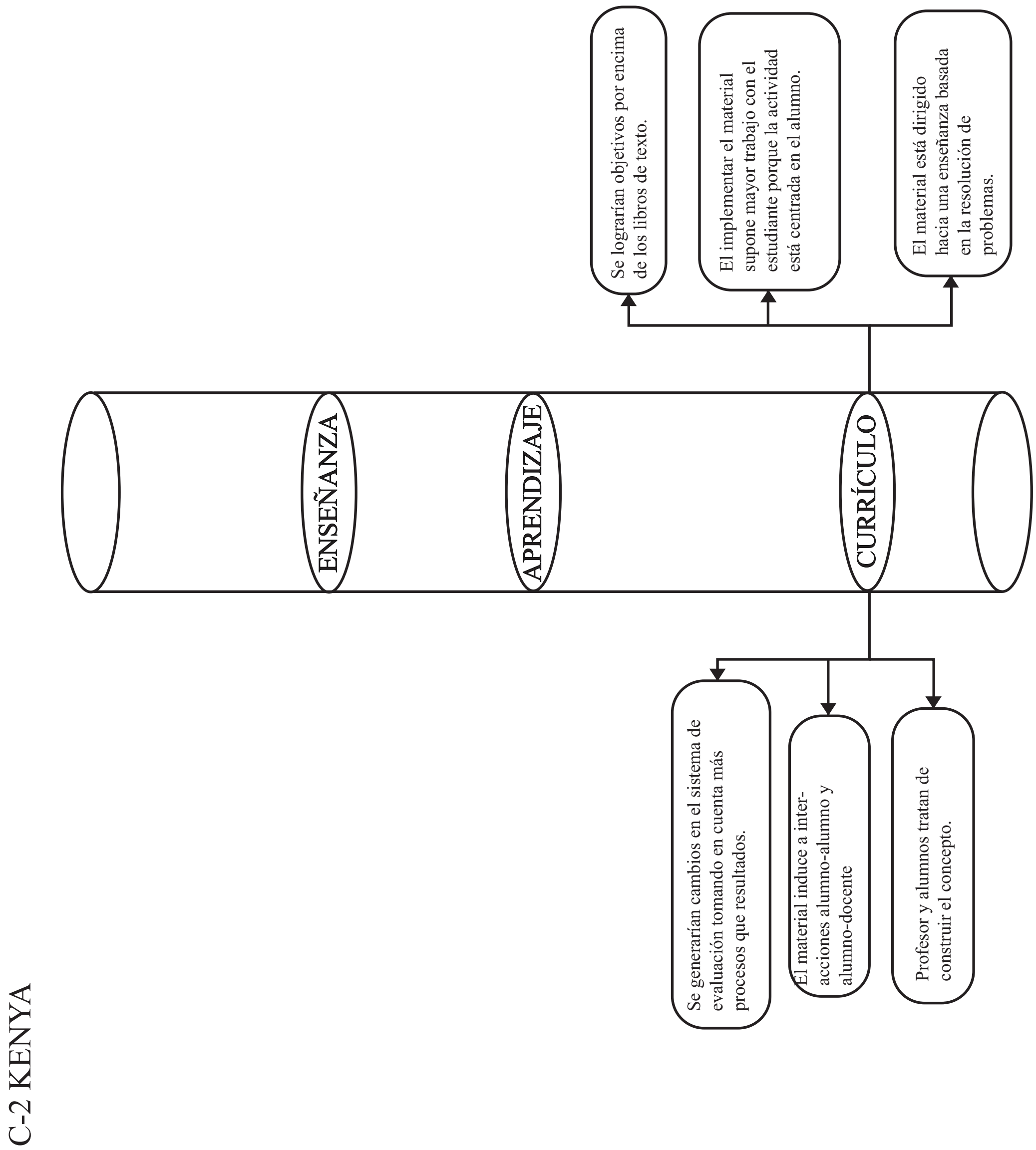
En este cuestionario, C-2, instrumento complementario a la segunda sesión del seminario, analizamos las opiniones de los profesores en relación a lo que supone implementar o desarrollar una enseñanza basada en la estructura y el contenido que presentamos en el material discutido en el seminario.



Cuadro 4.10: Cuestionario 2 - Manuel y Ramón



Cuadro 4.10: Cuestionario 2 - Alexis y Elio



Cuadro 4.10: Cuestionario 2 - Kenya

C-2 (Grupo A)
Las respuestas que obtuvimos de este grupo apuntan en dos direcciones, por su parte Manuel, no observa ventajas o diferencias favorables en el material en relación a los libros de texto, ya lo dijo durante la S-2, que *"los objetivos se alcanzan igual que con los libros de texto"*, recordemos además que en el seminario este profesor afirmó que *"no hay mucha diferencia entre el material y la forma de trabajar"*. La otra dirección a la que apuntan las respuestas tiene que ver con el *factor tiempo*, a este mismo profesor *"no le supone más tiempo implementar el material"* o una actividad similar en el aula, su justificación se fundamenta en el trabajo que han realizado los estudiantes en otros cursos vinculados al área

de economía; esto nos dice que el tiempo invertido en la clase depende, en esencia, del conocimiento previo del estudiante.

Ahora bien, a modo de comentario, un punto a destacar en todo esto es que la inversión de tiempo no debe estar únicamente asociada al estudiante, puesto que la planificación, por ejemplo, también exige tiempo para reflexionar y tomar decisiones adecuadas a los objetivos que se persiguen.

Ramón, en cambio, cuando habla del tiempo que implica un trabajo con el material discutido, en clara referencia a la estructura de este último, afirma que supone más tiempo, más aún, implica una mayor inversión de tiempo *"por el papel que juega el profesor respecto a los estudiantes"*. Este profesor se apoya en la estructura y los detalles del contenido para sus reflexiones y deja ver, de manera implícita, su forma y esquema de enseñanza son distintos a lo discutido en nuestra propuesta. Un ejemplo de ello está en una de sus respuestas, *"el estudiante requiere una atención más directa"* que posiblemente no la tenga en la actualidad. También considera que *"el material permita alcanzar mejor los objetivos en relación con, los libros de texto por los detalles del primero"*. En el C-1 también se refirió a los "detalles" de la propuesta frente a los libros de texto.

Este conjunto de ideas aportadas por Ramón en el C-2 nos permite ir creando un perfil sobre su trabajo en el aula; de éste resaltamos, hasta ahora, lo siguiente: sigue una enseñanza tradicional, fundamentada en el programa oficial y los libros de texto, no termina de identificar el tipo de enseñanza-aprendizaje que, desde el punto de vista de la didáctica, sugiere nuestra propuesta en discusión, pero sí observa que el estudiante es el centro de esta actividad.

El caso de Manuel nos resulta más complejo, ya que con las respuestas de C-1 se perfila hacia una enseñanza de corte tradicional enmarcada en los programas oficiales y libros de texto, pero entre S-2 y C-2 nos afirma que su enseñanza es muy próxima a la discutida en el material, en este orden de ideas, no es posible emitir o aproximarnos a una conclusión parcial de este profesor, más allá de lo inconsistente de su discurso entre la primera y segunda sesión, incluyendo los cuestionarios correspondientes.

C-2 (Grupo B)

Los diagramas correspondientes a este cuestionario muestran el compromiso de participación por parte de los profesores en este proyecto, muy similar, en proporción a C-1. Aunque este no es el tema de nuestra investigación nos aporta datos sobre el perfil de los participantes. Ahora bien, posicionándonos sobre el tema que nos ocupa, estas son las respuestas en referencia al material.

Comenzaremos nuestro análisis con lo aportado por Alexis; durante la S-2 consideró que no le suponía más trabajo planificar una actividad como la del material, puesto que realiza *"clases similares al material pero sin tanto detalle"*, es decir, afirma fundamentar su respuesta en el hecho de que trabaja sus clases con aplicaciones a la economía. Cuando atiende el cuestionario C-2 sostiene que *"implementar el material supone más trabajo en el planteamiento y resolución de problemas"*, en otras palabras se apoya en el estudiante. Entendemos que el profesor tiene conocimiento sobre las dificultades específicas del estudiante, en este caso, sobre *planteamiento y resolución de problema*.

Por su parte, Elio, sostiene también que *"trabajar el material en el aula implica más tiempo de atención al estudiante, ...para trabajar la interpretación de la derivada"*; esta dificultad, a la que hace mención Elio, ya la sacó a colación en la S-1. De las respuestas de Elio y Alexis concluimos dos cosas, una ya mencionada, como lo es el conocimiento que ambos tienen sobre las dificultades del estudiante; la otra tiene que ver con el hecho de que la implementación del material como propuesta de enseñanza, para ellos significa más trabajo y mayor compromiso al desarrollo de una clase con el esquema de nuestra propuesta.

Por último, reservamos este espacio en el que incluimos el análisis de los datos aportados por Kenya y que a la hora de compararlos con sus opiniones durante S-2, guardan consistencia con su discurso. Desde el punto de vista de la enseñanza, ella afirma que *"el material está dirigido hacia una enseñanza basada en la resolución de problemas"* en el que se *"induce a interacciones alumno-alumno y alumno-docente"*; de esta manera la profesora deja en evidencia que conoce la metodología que se persigue al implementar el material. Por otra parte y derivado de lo anterior, en lo que concierne a la puesta en escena, *"el material supone mayor trabajo con el estudiante porque la actividad está centrada en el alumno"*; una característica de la EBP.

Otra característica de la EBP es el alcance que esta promueve en el aprendizaje; Kenya también identifica en el material este elemento al manifestar que en caso de llevar esta propuesta al aula de clase *"se lograrían objetivos por encima de los libros de texto"* con los que esta misma profesora trabaja.

4.3. Análisis de la Sesión 3

El material que vamos a discutir y analizar en la presente sesión está centrado, principalmente, en la *regla de la cadena*, así como la interpretación de la misma en problemas del contexto económico y las notaciones usadas en los libros de texto para este tema. Para esta parte del trabajo elegimos tres problemas, siendo el contenido económico el eje transversal, tal como lo hicimos en el episodio anterior. Los dos primeros problemas se presentan de una manera muy peculiar, ya que se induce o promueve la necesidad de una nueva regla de derivación, no conocida hasta ahora por el estudiante; es por ello que se impulsa una discusión para llegar a la regla en cuestión y de esta manera poder resolver los problemas, una característica de la EBP. Se vuelve a trabajar con el dominio de una función y la contextualización como estrategia de enseñanza.

En el primer problema se pretende estudiar la introducción de la regla de la cadena de una manera *no tradicional*, haciendo uso de las *tasas relacionales*, las cuales juegan un papel relevante en el campo de las ciencias económicas. En este problema, la derivada de la función interna aparece en el mismo enunciado del problema, algo atípico en un problema introductorio. Por otra parte se retoma el concepto de dominio y se estudia en un contexto dual, algo similar a lo ocurrido en el problema del **episodio 4.2.2**. Adicional a los temas antes señalados, trabajamos con la contextualización, la interpretación económica de la derivada y una de las notaciones sugeridas por los programas, la de Leibnitz. En cuanto a los contenidos de enseñanza y aprendizaje, se explora sobre la metodología de enseñanza y las dificultades que suponen la regla de la cadena, respectivamente.

En el segundo problema planteamos una discusión similar al problema anterior, pero además trabajamos aspectos como la metodología de enseñanza para esta regla, otra de las notaciones para el tema de derivada, la de Lagrange. En cuanto al conocimiento sobre el aprendizaje, buscamos estudiar las *dificultades* que afronta el estudiante en problemas como el propuesto y la actitud que muestran frente a problemas de este tipo.

En el último problema se plantea una situación donde la interpretación de la derivada y la notación de Leibnitz son la piezas claves de la discusión; pero también se plantea una reflexión en relación con la planificación docente que realiza el profesor para llevar al aula un problema de esta naturaleza y la actitud del estudiante frente a problemas de este tipo.

4.3.1. Episodio 3.1: Regla de la cadena, tasas relacionadas, dominio, contextualización dual, introducción a la regla de la cadena, notación

Una empresa tiene la función de costo $C(x) = 25 + 2x - \frac{1}{20}x^2$ (en cientos de miles de dólares), en donde x es el nivel de producción de la empresa y éste depende del tiempo t. Si el nivel de producción es de $x = 5$ (millones de artículos por año) y está creciendo a una tasa de $0,7$ millones de artículos por año, tomando en cuenta que la capacidad de producción de la empresa no puede superar los 15 millones de artículos por año.

Pregunta 1: Determine el dominio de la función de costo $C(x)$ en un contexto matemático general y en el económico en particular. ¿Qué diferencia observa entre uno y otro?

Respuesta: El dominio es el señalado en el **Cuadro 4.11**.

	$C(x)$
Dominio Mat.	$\mathbb{R}$
Dominio Ec.	$[0, 150]$

Cuadro 4.11: Dominio del costo, $C(x)$, en dos contextos

Microepisodio 3.1.1: Aún cuando el costo es una función polinómica cuyo dominio es el conjunto $\mathbb{R}$, en el contexto económico debemos tomar en cuenta que lo menos que puede producir la empresa es 0 artículos y el máximo de producción de ésta, tal como se señala en el enunciado, es de 15 millones de artículos por año; y como x está expresada en cientos de miles, el dominio es $[0, 150]$.

En una actividad anterior, una de las preguntas contenía una situación similar. ¿Consideran importante que se debe mantener o reforzar esta diferencia entre los dominios? ¿Por qué?

Pregunta 2: Calcule la tasa para la cual los costos de producción se están elevando en la actualidad.

Observación: Antes de dar respuesta a esta pregunta conviene introducir la **regla de la cadena**. Para una función y que depende de u y siendo a su vez ésta una función que depende de x, con y derivable en u y u derivable en x, se tiene que la derivada de y respecto a x ($\frac{dy}{dx}$), se define como

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}}$$

Así, estudiar la razón de cambio de $\boldsymbol{y}$ respecto a $\boldsymbol{x}$ consiste en multiplicar la razón de cambio de $\boldsymbol{y}$ respecto a $\boldsymbol{u}$ por la razón de cambio de $\boldsymbol{u}$ respecto a $\boldsymbol{x}$.

Respuesta: Del enunciado tenemos que $\frac{dx}{dt} = 0,7$ (cuando el tiempo se mide en años). El costo marginal está dado por

$$\frac{dC}{dx} = 2 - \frac{x}{10}.$$

Por consiguiente,

$$\begin{aligned} \frac{dC}{dt} &= \frac{dC}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} \\ &= (2 - \frac{x}{10}) \cdot \frac{dx}{dt} \end{aligned}$$

Sustituyendo $x = 5$, el nivel de producción actual, obtenemos

$$\begin{aligned}\frac{dC}{dt} &= (2 - \tfrac{5}{10})(0,7) \\ &= 1,05.\end{aligned}$$

Por lo tanto los costos de producción se están incrementando a una tasa de 1,05 (cientos de miles) de dólares por año o, dicho de otra manera, en 105000 dólares por año.

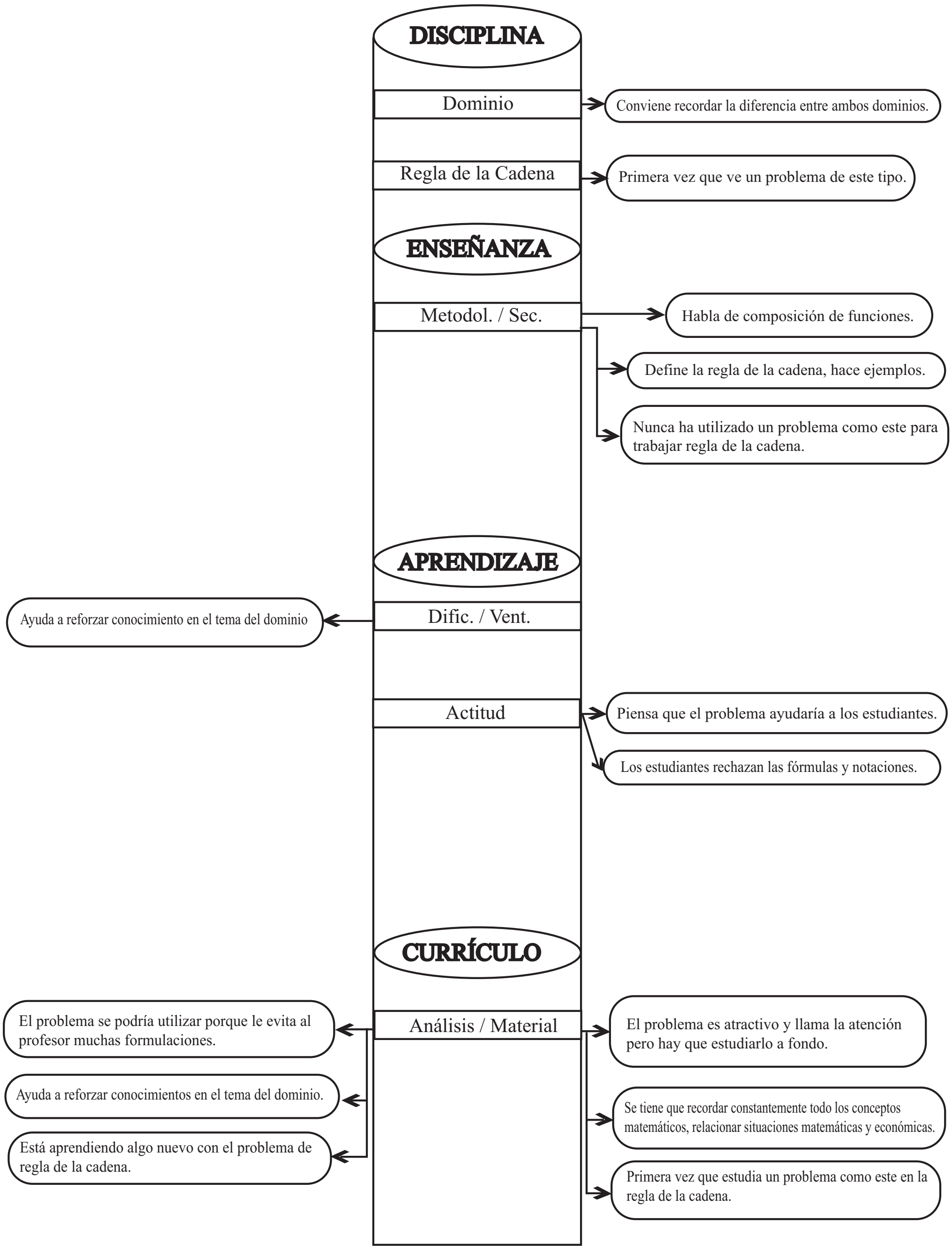
Microepisodio 3.1.2: *En este ejemplo de la regla de la cadena, la derivada de la función interna es parte del enunciado. ¿Utilizan ustedes un problema similar para introducir la regla de la cadena?*

1. $\boxed{\textit{Sí}}$. *¿Por qué?*
2. $\boxed{\textit{No}}$. *¿Lo utilizarían ahora para introducir la regla de la cadena, lo modificarían (¿cómo?) o simplemente lo harían de otra manera (¿por qué?)?*

Microepisodio 3.1.3: En atención a que la respuesta de ustedes es negativa, ¿intentarían ustedes introducir la regla de la cadena con un problema como éste o piensan que generaría conflictos en el estudiante?

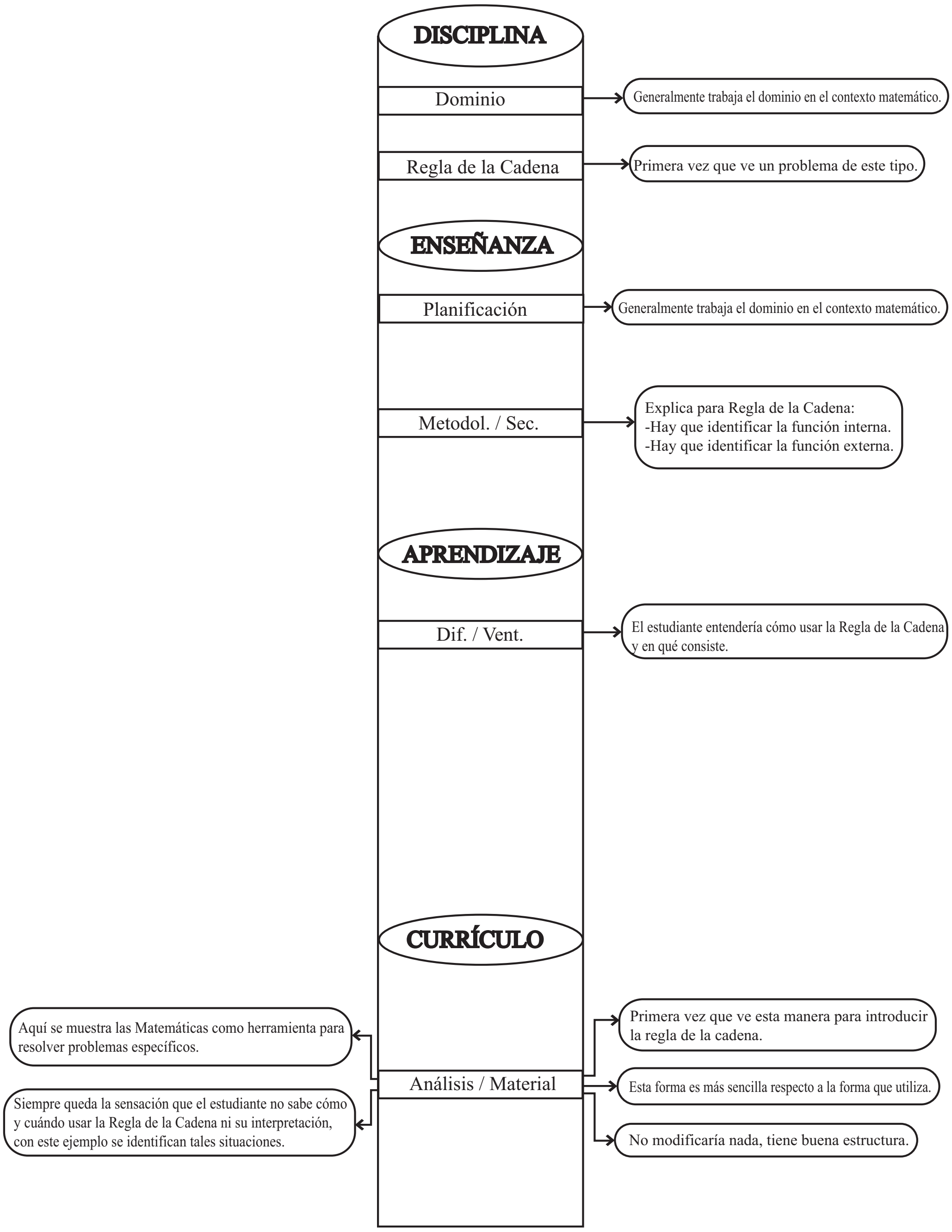
Grupo A

EP 3.1 MANUEL



Cuadro 4.12: Episodio 3.1 - Manuel

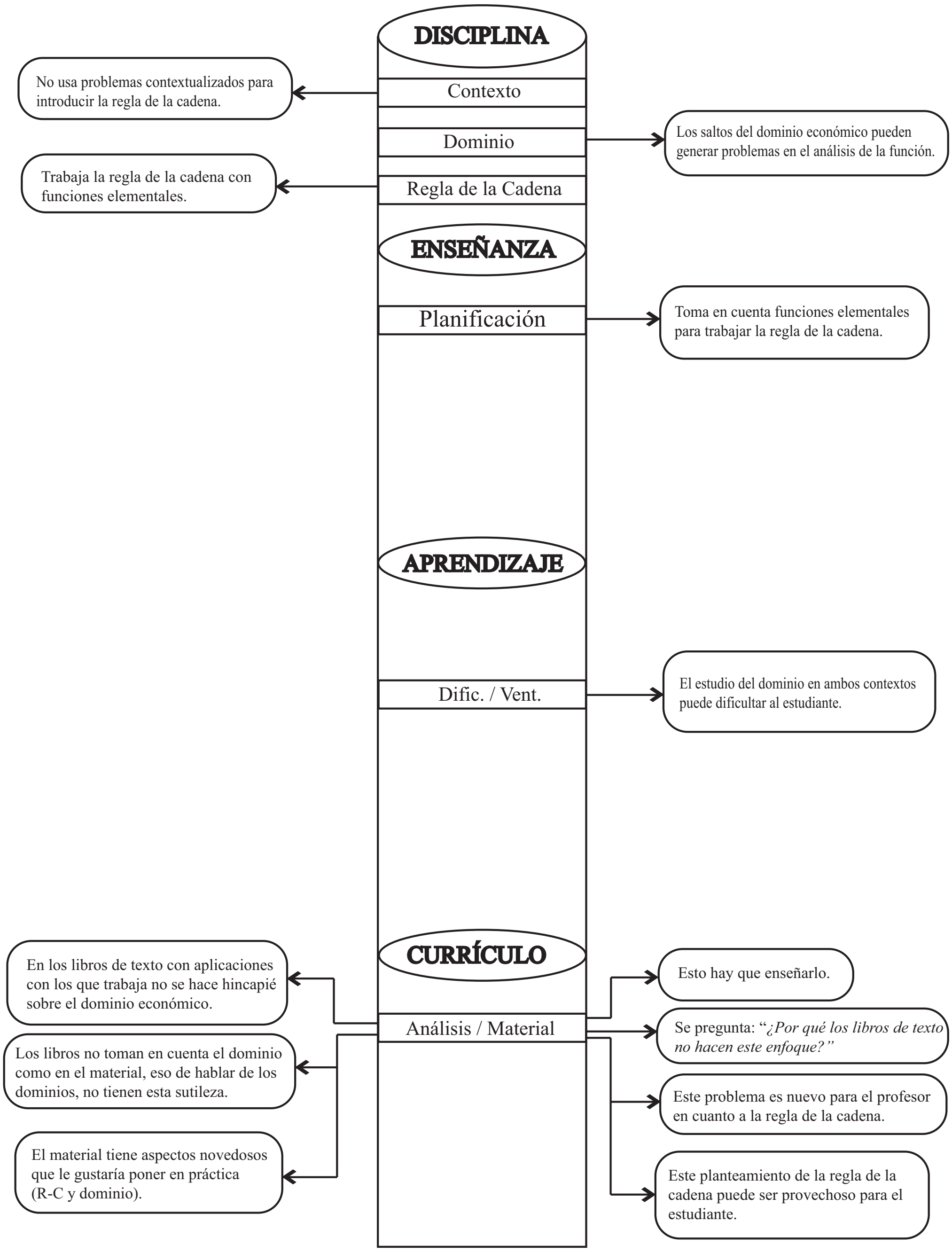
EP 3.1 RAMÓN



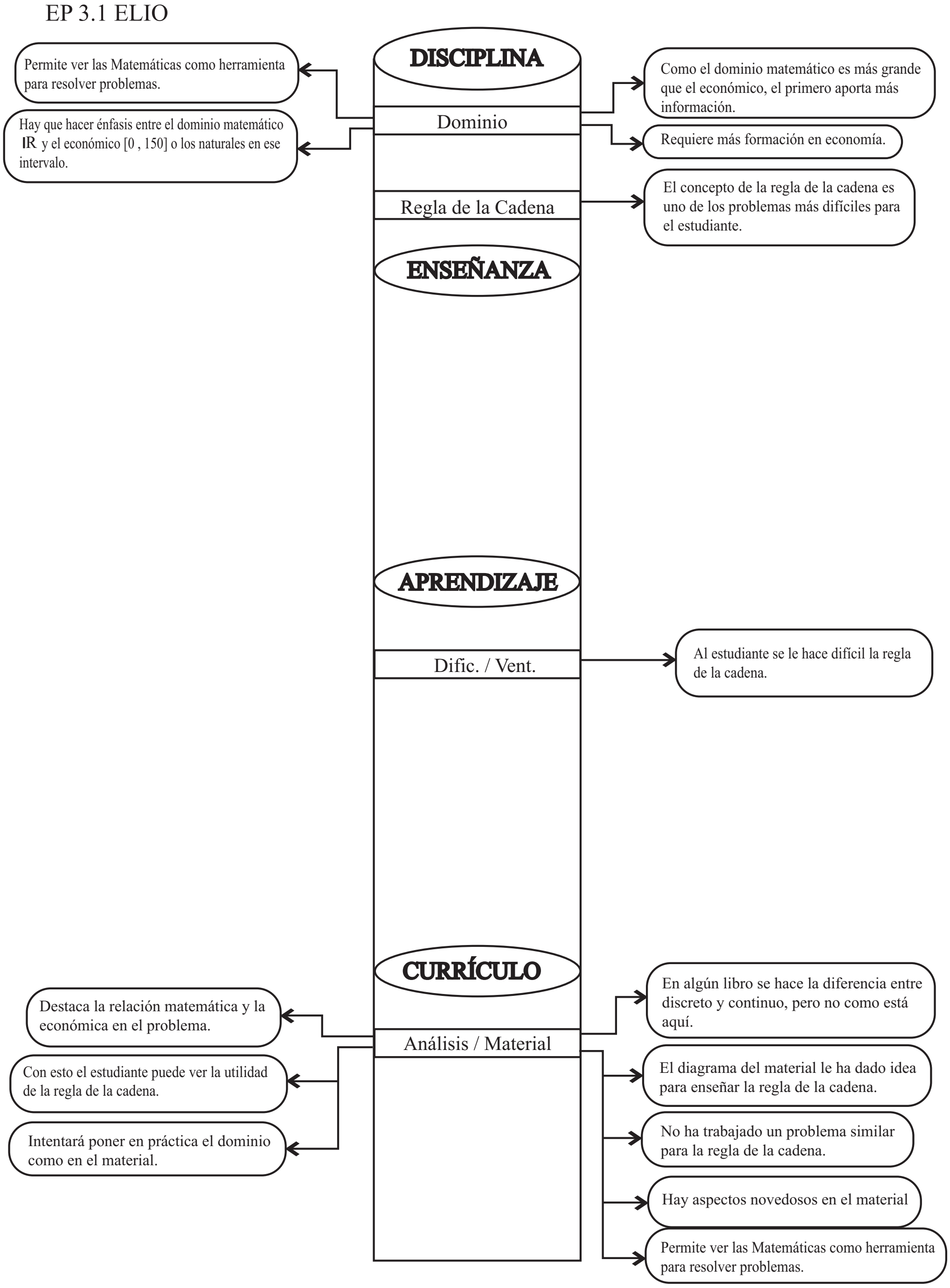
Cuadro 4.12: Episodio 3.1 - Ramón

Grupo B

EP 3.1 ALEXIS

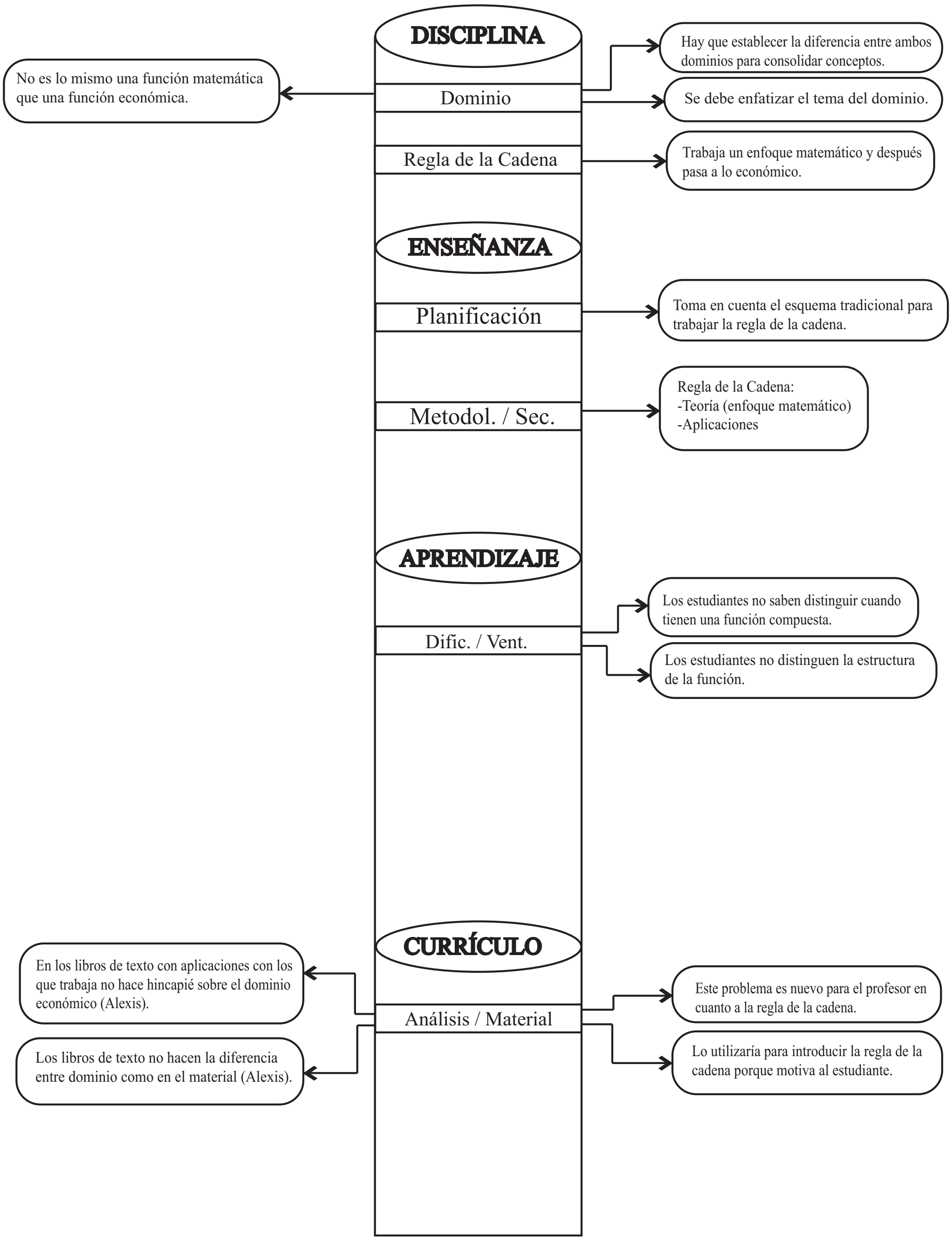


Cuadro 4.13: Episodio 3.1 - Alexis



Cuadro 4.13: Episodio 3.1 - Elio

EP 3.1 KENYA



Cuadro 4.13: Episodio 3.1 - Kenya

Resumen del análisis En el problema anteriormente discutido, tal como hemos podido observar, abordamos como tema matemático principal la regla de la cadena. Aun cuando se abordan distintos aspectos del CDC y de la EBP, llegamos a los mismos desde la regla de la cadena, entre otras cosas, porque seguimos haciendo uso de la derivada para estudiar el conocimiento del profesor. La dinámica que seguimos para el análisis de este episodio es similar al realizado en los episodios anteriores, esto quiere decir que no ahondamos en el aspecto disciplinar porque para ello reservamos el Bloque 2; pero donde sí nos concentramos, en este caso, es en el conocimiento del contenido curricular.

En este episodio retomamos el tema del dominio aun cuando este no es propio del contenido reservado en el estudio de la derivada; sin embargo lo incluimos por dos razones: por un lado, para relacionar lo aportado en el EP2-1 y en este, y por otra parte, porque hay que tener presente que en el análisis de una función se estudia el dominio de la misma y el de su derivada. Así mismo, apostamos por este problema para estudiar el CDC y ver si el profesor ha trabajado con un problema similar para introducir la regla de la cadena, en el cual la derivada interna está considerada dentro del mismo problema (tasa de crecimiento); o por el contrario, lo desconoce o no se ha propuesto trabajar con un problema de esta naturaleza y, por último, ver cuán relevante es el mismo desde el punto de vista didáctico.

Conocimiento sobre la Disciplina (Grupo A)
Sobre los dos objetos matemáticos que trabajamos en este problema, el dominio y la regla de la cadena, lo que aportan estos dos profesores no es muy relevante si únicamente nos centramos en el contexto matemático *per se*; pero si atendemos a las reflexiones que ellos hacen respecto al dominio y la regla de la cadena en relación con su práctica docente, el aporte a nuestro trabajo es significativo, dejando de forma explícita la interrelación con las otras categorías del CDC. Por ejemplo, Ramón sostiene que *"generalmente trabaja el dominio en el contexto matemático"*, lo cual nos dice que no trabaja problemas del dominio de una función en el contexto económico; pero además, si recurrimos a los episodios anteriores y sus respectivos cuestionarios, podemos apreciar la consistencia de este profesor en cuanto a su perfil como docente, **quien entiende la enseñanza de las matemáticas desde las propias matemáticas**.

Manuel, por su parte, indica que *"conviene recordar la diferencia entre ambos dominios"*, el matemático y el económico, puesto que *"ayuda a reforzar conocimientos en el tema del dominio"*; no obstante observamos un vacío entre su posición respecto al problema en discusión y su práctica docente, puesto que en la segunda el profesor no advierte que ponga en práctica ejemplos similares.

Ya manifestamos en su momento que ambos profesores siguen una enseñanza basada en los programas oficiales y libros de texto, y este tipo de problema no es sugerido por los primeros, ni aparece en los libros de texto que ellos siguen como problema introductorio; esta podría ser la razón que nos lleve a inferir que no trabajen este tipo de problemas en sus clases.

Por otro lado, lo observado por nosotros sobre la regla de la cadena es similar al caso del dominio: ambos profesores sostienen que es la primera vez que tratan un problema de esta naturaleza para introducir la regla de la cadena. Es claro que no es un problema tradicional, sobre todo para entrar en este tema, pero recordemos que la elección de los problemas del material tiene como objetivo generar inquietudes y reflexiones en el participante, de manera que este último se pronuncie sobre aspectos específicos del CDC. En este orden de ideas, a partir del problema discutido, los dos profesores manifiestan tener una posición tradicional sobre la regla de la cadena y, más aún, el conocimiento que reflejan en este tema es de corte eminentemente matemático.

Para finalizar esta parte del análisis haremos referencia a la EBP en dos aspectos que no debemos pasar por alto; uno es el conocimiento del profesor relacionado con el contexto o los contextos en los que se enseña o pretende enseñar, quedando en evidencia poca formación en el contexto económico por parte de estos profesores. Otro aspecto a destacar tiene que ver con la elección del problema, en el cual se deben considerar preguntas de tópicos que ya el estudiante conozca, de forma que no impacte en este último el planteamiento del problema. En este caso, el dominio además de ser útil en el análisis de una función, resulta ser un tema ya estudiado en el curso anterior (Matemáticas 1) al de cálculo diferencial.

Conocimiento sobre la Disciplina (Grupo B)
Comenzaremos por centrarnos en el dominio de una función como parte del contenido disciplinar; en este sentido, la reflexión de Elio sobre el dominio tal como se muestra en el material, es que se presenta *"la matemática como herramienta para resolver los problemas"* y luego precisa su interés en el dominio económico de esta función (recordemos al lector que el dominio económico de esta función son los números racionales con tres decimales en [0, 150]), puesto que es un conjunto muy particular y poco usual en los cursos de matemáticas para ciencias económicas, generalmente las restricciones en el dominio no se estudian y todo se limita al conjunto de los números reales ($\mathbb{R}$). En este caso, el participante muestra un amplio conocimiento de lo que significa la diferencia del dominio en ambos contextos, lo cual resulta clave al momento de emplear la EBP como estrategia didáctica, ya que en la misma se contempla la interdisciplinariedad.

Por su parte, la intervención de Alexis muestra su perfil de matemático al decir *"¿ahí no va a haber problemas cuando grafique o se le haga todo el análisis de la función? Lo digo por los saltos..."*, es claro que el participante tiene presente que estamos estudiando el tema de la derivada y que la función en el contexto económico no es continua, pues así lo muestra el dominio, con lo cual no es derivable en este contexto. En otras palabras, lo que nos advierte Alexis es que el llevar un problema como este al aula de clases puede generar dificultades en el estudiante, ya que lo que conoce este último es el estudio del dominio en el contexto matemático. Aquí queda reflejado el contenido que este profesor lleva al aula.

Más adelante, el mismo Alexis respaldado por Kenya, refiriéndose al dominio, sostiene que *"En los libros que yo tengo..., ellos no hacen hincapié sobre eso..."*, *"no hay esa sutileza de decir lo que se está diciendo aquí..."*. Lo que podemos inferir de las palabras de Alexis y Kenya es que es la primera vez que estudian un problema de esta naturaleza para el tema del dominio y, en consecuencia, no lo han trabajado en clase; recordemos que estos profesores siguen una enseñanza tradicional. Sin embargo, más allá del perfil de estos profesores, lo que es importante resaltar de todo esto es la interacción sostenida por estos dos participantes, como se puede apreciar en el **Apéndice B**, lo cual nos muestra el valor del seminario como actividad de reflexión sobre un tema en particular y como espacio de formación profesional.

Observación: En relación al tema de la regla de la cadena como contenido disciplinar no aportan nada relevante.

Conocimiento sobre la Enseñanza (Grupo A)
En la categoría del conocimiento sobre la enseñanza nos ocuparemos principalmente de lo concerniente a la metodología y secuenciación de la clase, puesto que al discutir el material; los profesores, además de reconocer que es la primera vez que ven un problema de este tipo para introducir la regla de la cadena, como lo señaláramos en el conocimiento disciplinar, sin embargo, también dejan ver que siguen una estructura clásica (programas oficiales + libros de texto) en la enseñanza que imparten, como es el caso de Manuel (definición de la regla de la cadena + ejemplos + aplicaciones).

Por otra parte podemos destacar la función del seminario como elemento de formación profesional, puesto que en palabras de Manuel se resalta lo siguiente: *"...De hecho, estoy aprendiendo algo nuevo con este problema..."*, o la reflexión de Ramón: *"...Primera vez que veo esta manera de introducir la regla de la cadena con aplicaciones de economía..."*. Con esto no pretendemos concluir que hay poco conocimiento del contenido disciplinar por parte de los profesores o sobre la enseñanza, que es el tema que nos ocupa, sino que queremos destacar la necesidad de una actividad como el seminario, de modo que un espacio como este sirva para intercambiar ideas entre los profesores, conocer y compartir otras alternativas de enseñanza y que sea el estudiante el principal favorecido de toda esta actividad. Recordemos que la EBP apuesta por una revisión y discusión constante de los problemas que se utilizan para la enseñanza. En todo caso destacamos la actitud positiva de ambos profesores frente a esta propuesta metodológica alternativa.

Conocimiento sobre la Enseñanza (Grupo B)
Debido a la poca información aportada por los participantes respecto a esta categoría, hemos decidido no hacer el análisis de la misma.

Conocimiento sobre el Aprendizaje (Grupo A)
Debido a la poca información aportada por los participantes respecto a esta

categoría, hemos decidido no hacer el análisis de la misma.

Conocimiento sobre el Aprendizaje (Grupo B)
Debido a la poca información aportada por los participantes respecto a esta categoría, hemos decidido no hacer el análisis de la misma.

Conocimiento sobre el Currículo (Grupo A)
Las reflexiones a ser tomadas en cuenta en esta categoría están relacionadas con la regla de la cadena en cuanto al objeto matemático se refiere y a las posiciones que asumen frente al material como herramienta didáctica. Comenzaremos con el aporte de Ramón, quien se pronuncia de forma favorable en correspondencia con el problema, algo que no había hecho en los episodios anteriores, en los que dejaba ver un *sí pero*. Este profesor comienza por reconocer que es la *"primera vez que veo esta manera de introducir la regla de la cadena con aplicaciones de economía"*, luego prosigue, *"me parece que esta manera de introducir la regla de la cadena es más sencilla en comparación a como lo hago actualmente"*, añadiendo además, *"yo no le modificaría nada, así como está expuesto me parece que tiene una buena estructura"*.

Visto así, nos da la sensación de no ser demasiado relevantes las opiniones de Ramón, pero haciendo un zoom sobre estas frases destacamos de la primera la *novedad* del problema. Si no hubiesen más opiniones tendría poco o ningún valor didáctico, pero ya con las siguientes surge el tema: *metodología de enseñanza*, relacionando la segunda con su labor docente. Sin embargo hay una reflexión que no podemos obviar ya que está en consonancia con el aprendizaje, *"...con tu ejemplo quedan bien identificados los dos factores [el uso y la interpretación de la regla de la cadena]"*. Todas estas opiniones están fuertemente ligadas al conocimiento del contenido matemático que tiene el profesor (Climent, 2002), en particular, con la regla de la cadena.

El otro participante, Manuel, también comienza reconociendo: *"...primera vez que veo un problema de ese tipo"*, *"...estoy aprendiendo algo nuevo con este problema"*. Sin embargo, sobre la posible implementación del problema en su curso se mantiene cauto y señala lo siguiente: *"...es primera vez que lo veo y tendría que estudiarlo más a fondo..., ...se evita uno muchas formulaciones..."*. En el caso de este profesor, sus dos primeras opiniones nos ubican en dos términos, *novedad* y *formación profesional*, de la cual nos centramos en lo segundo, destacando el seminario como actividad formativa del profesor.

Finalizamos exponiendo algunos puntos que destacamos como positivos y que el grupo en cuestión manifiesta respecto al problema discutido:

1. La sencillez como se llega a la regla de la cadena respecto a la forma actual.

2. Presenta una estructura adecuada, con lo cual no se requiere de cambios en el problema.

3. Facilitaría el aprendizaje sobre el uso y aplicación de la regla de la cadena.
4. A través de este problema quedan identificadas de manera clara las funciones interna y externa; factor clave en el aprendizaje de la regla de la cadena, ya que es una de las dificultades que más presenta el estudiante.
5. Es atractivo para el profesor.
6. Evitaría trabajar con las formulaciones habituales utilizadas en la enseñanza tradicional.

Conocimiento sobre el Currículo (Grupo B)
Las opiniones que consideramos para el análisis en esta categoría se refieren tanto al dominio como a la regla de la cadena; estos profesores se pronuncian respecto al material en distintas líneas que conviene ordenar de acuerdo con nuestros objetivos. Comenzaremos con el dominio de una función como objeto matemático de discusión; como lo señalamos en la categoría del conocimiento disciplinar, Elio se pronuncia sobre el estudio de este tema en ambos contextos y destaca la relación matemática y económica que explota el problema, además que este último *"permite ver las matemáticas como herramienta para resolver problemas"*.

Alexis, durante la discusión en el seminario hace algunas observaciones sobre el dominio de una función, respecto a la forma de cómo se trabaja el problema en el material, y finaliza preguntando: *"¿por qué los libros de texto no hacen este enfoque?"*. Kenya, de igual manera, opina que los libros de texto con los que ella trabaja tampoco plantean esta diferencia o restricciones del dominio. Es claro que Alexis y Kenya, puesto que planifican y organizan sus clases de matemáticas a partir de los libros de texto, entienden este problema como una actividad innovadora, al igual que la estructura como se estudia la regla de la cadena; manifiestan abiertamente la disposición de poner en práctica el material, en lo que coinciden con Elio.

Por otro lado y ya entrando en materia relacionada con la regla de la cadena, sacamos a colación lo dicho por Kenya, quien señala que es la primera vez que estudia un problema como este para introducir la regla de la cadena, pero también sostiene que lo podría implementar para introducir el tema en cuestión *"porque motiva al estudiante"*; con esto inferimos que lo que Kenya quiere decir es que entiende el problema como un elemento novedoso, atractivo para el estudiante y con características didácticas.

Hacia una dirección similar se dirige Elio, quien se refiere al diagrama que se muestra en el problema y que discutimos en el seminario, como un elemento para la enseñanza de la regla de la cadena y al mismo tiempo, ya pensando en el estudiante, afirma que mediante la discusión de este problema en el aula de clases, *"el estudiante puede ver la utilidad de la regla de la cadena"*. Por medio de las opiniones de Elio, nos ubicamos en las categorías de enseñanza y aprendizaje, dicho de otro modo, sus reflexiones se basan en la enseñanza que sigue actualmente y en la experiencia vivida con sus estudiantes. Para Alexis también resulta novedoso el enfoque del problema para introducir el tema en discusión y está dispuesto a llevarlo al aula de forma exploratoria, ya que *"...puede ser provechoso para el estudiante..."*.

Ahora bien, resulta natural preguntarnos: ¿por qué un problema como el del presente episodio resulta nuevo para estos tres profesores, como elemento para introducir la regla de la cadena? La respuesta a esta pregunta obedece a cuatro razones fundamentales que son producto de su práctica docente y que exponemos a continuación:

1. Ellos siguen una enseñanza tradicional ajustada a los programas oficiales y libros de texto, por lo tanto,
2. No realizan una enseñanza de las matemáticas contextualizada en las ciencias económicas.
3. Un problema como este es reservado en los libros de texto al apartado o capítulo de aplicaciones de la derivada, y
4. La falta de un espacio de discusión con profesores especialistas tanto en didáctica de las matemáticas como del área de economía limita la posibilidad de abordar distintas estrategias de enseñanza a las que siguen actualmente.

4.3.2. Episodio 3.2: Utilidad y publicidad, introducción a la regla de la cadena, interpretación de la derivada, valores extremos, optimización

Un determinado artículo puede fabricarse y venderse con una utilidad o beneficio de \$10 cada uno. Si el fabricante gasta x dólares en la publicidad del artículo, el número de artículos que pueden venderse será igual a $1000(1 - e^{-kx})$, en donde $k = 0,001$. Si U denota la utilidad neta por las ventas y tomando en cuenta que el fabricante no está dispuesto a gastar más de \$8500 en publicidad.

Pregunta 1: Calcule $U'(x)$ e **interprete esta derivada**.

Observación: Antes de dar respuesta a estas preguntas conviene introducir la **regla de la cadena**. Para una función f que depende de g y ésta a su vez es una función que depende de x, con f derivable en $g(x)$ y g derivable en x, se tiene que la derivada de f respecto a x ($f'(x)$), se define como

$$\boxed{f'(x) = f'[g(x)] \cdot g'(x)}.$$

Así, estudiar la derivada de ***f*** respecto a ***x*** consiste en multiplicar la derivada de ***f*** respecto a ***g(x)*** por la derivada de ***g*** respecto a ***x***.

Respuesta: Puesto que cada artículo produce una utilidad de \$10, la utilidad bruta total originada por las ventas se obtiene multiplicando el número de ventas por \$10. La utilidad neta se obtiene entonces sustituyendo los costos de publicidad:

$$U(x) = 10{,}000(1 - e^{-kx}) - x.$$

Por lo tanto,

$$U'(x) = -10{,}000 \cdot (e^{-kx})' - 1$$

Y por la regla de la cadena,

$$\begin{aligned} U'(x) &= -10{,}000(-ke^{-kx}) - 1 \\ &= 10{,}000ke^{-kx} - 1 \end{aligned}$$

y como $k = 0,001$ se tiene que

$$U'(x) = 10e^{-0{,}001x} - 1$$

La **interpretación** de esta derivada es que *mide la tasa de cambio de la utilidad neta con respecto a los gastos de publicidad*. En otras palabras, $U'(x)$ da el incremento en el número de dólares en la utilidad neta producida por un gasto adicional (en dólares) en publicidad.

Microepisodio 3.2.1: A través del problema buscamos que el estudiante descubra la necesidad e importancia de la herramienta (la regla de la cadena), puesto que la función e^{-kx} no tiene derivada inmediata. Una vez discutido con el estudiante y generando entre ellos un diálogo que conduzca a esta regla, el problema se puede atacar sin mayores problemas ¿o no?

Generalmente, la forma tradicional de llegar a la regla de la cadena consiste en definirla y de inmediato hacer ejemplos,en principio, matemáticos que permitan visualizar la regla para posteriormente realizar ejercicios o problemas de aplicación.

¿Consideran ustedes un ejemplo como éste, la manera apropiada para llegar a la regla de la cadena o harían alguna modificación para lograr los objetivos de este tema; como por ejemplo, realizar cambios en la función compuesta o modificarla?

Microepisodio 3.2.2: *¿Cuáles son las dificultades que presentan sus estudiantes ante este tipo de problemas?*

Microepisodio 3.2.3: Y por ejemplo, ¿qué estrategias siguen o seguirían ustedes para resolver esta problemática?

Pregunta 2: ¿Será cierto que mientras más se invierta en publicidad, mayor será la utilidad? Como respuesta parcial a esta pregunta, evalúe $U'(x)$ en $x = 1000$ y en $x = 3000$. **Interprete los resultados**.

Respuesta:Conviene prestar atención a los dos casos que se estudian a continuación.

Cuando $x = 1000$,

$$U'(1000) = 10e^{-1} - 1 = 10(0,3679) - 1 = 2,679.$$

Para el caso en que $x = 3000$,

$$U'(3000) = 10e^{-3} - 1 = 10(0,0498) - 1 = -0,502.$$

Microepisodio 3.2.4: De modo que si se gastan \$1000 en publicidad, **cada dólar adicional produce un incremento** de \$2,68 en la utilidad neta. Mientras que si se gastan \$3000 en publicidad, **cada dólar adicional produce una disminución** de \$0,50 en la utilidad neta. En este caso es claro que el fabricante no debería hacer más publicidad (el costo de publicidad extra incrementaría en exceso el valor de las ventas adicionales que se generarían). De hecho, cuando $x = 3000$, **ya se está gastando de más en publicidad**.

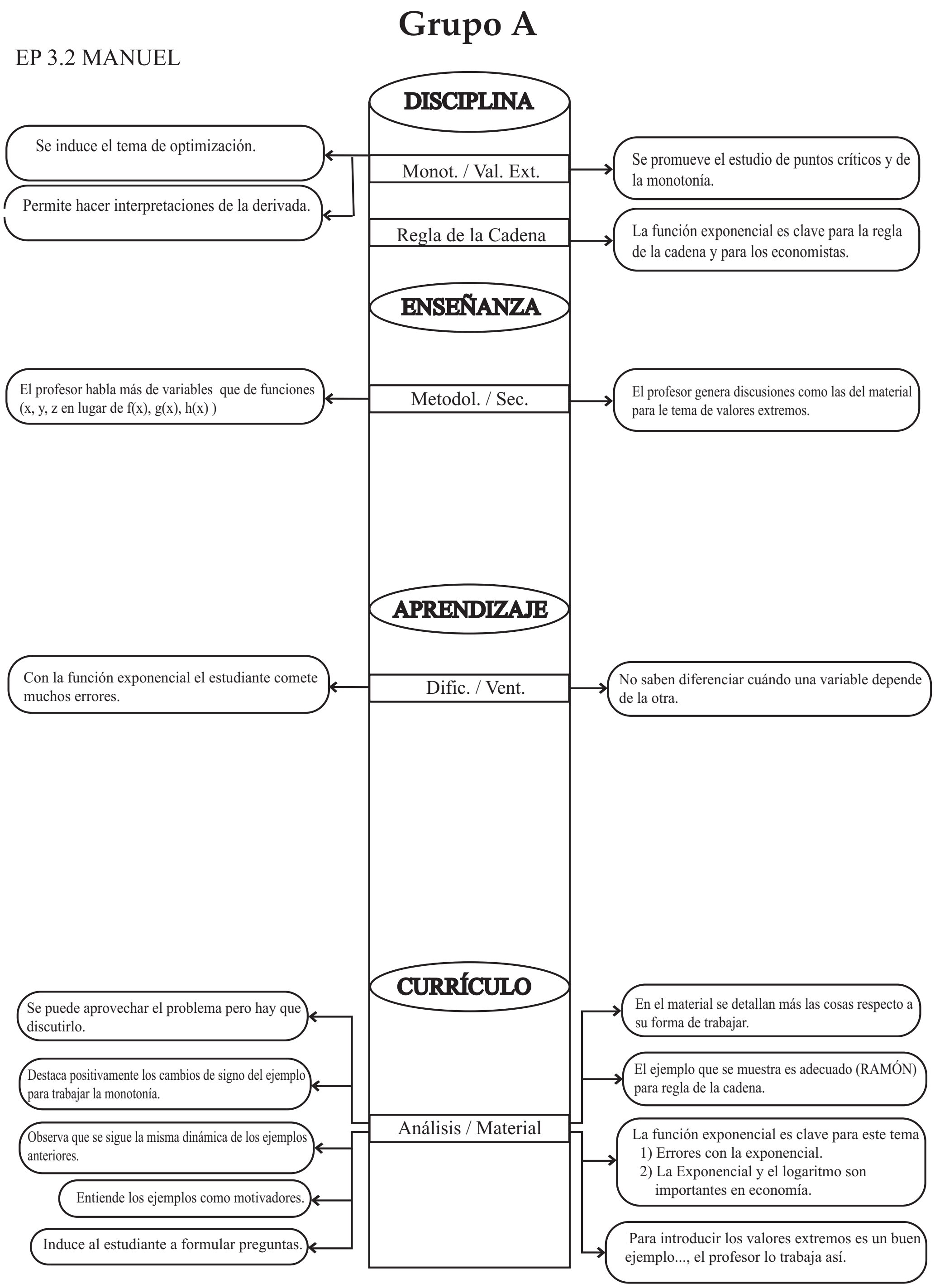
¿Y si se invierten \$2.000 en publicidad, o \$2.100?

¿Consideran ustedes que este planteamiento tiene aspectos innovadores, en materia de enseñanza, que permite al estudiante la maduración y consolidación del concepto, así como la utilidad de esta herramienta en el campo de las ciencias económicas? ¿Por qué?

Microepisodio 3.2.5: En un seminario similar, cuando pregunté si este tipo de preguntas conducen o promueven el estudio de monotonía de una función (crecimiento y decrecimiento) y más aún de extremos relativos (máximos y mínimos); uno de los participantes en el seminario mantuvo firme objeción a nuestro planteamiento y utilizó dos o tres argumentos, como por ejemplo: hay que invertir mucho tiempo, el estudiante no está preparado para un planteamiento como este, entre otros. Por el contrario, los otros participantes vieron con buenos ojos nuestra propuesta y uno dijo que intentaría ponerla en práctica y experimentar un poco *por eso de la motivación*.

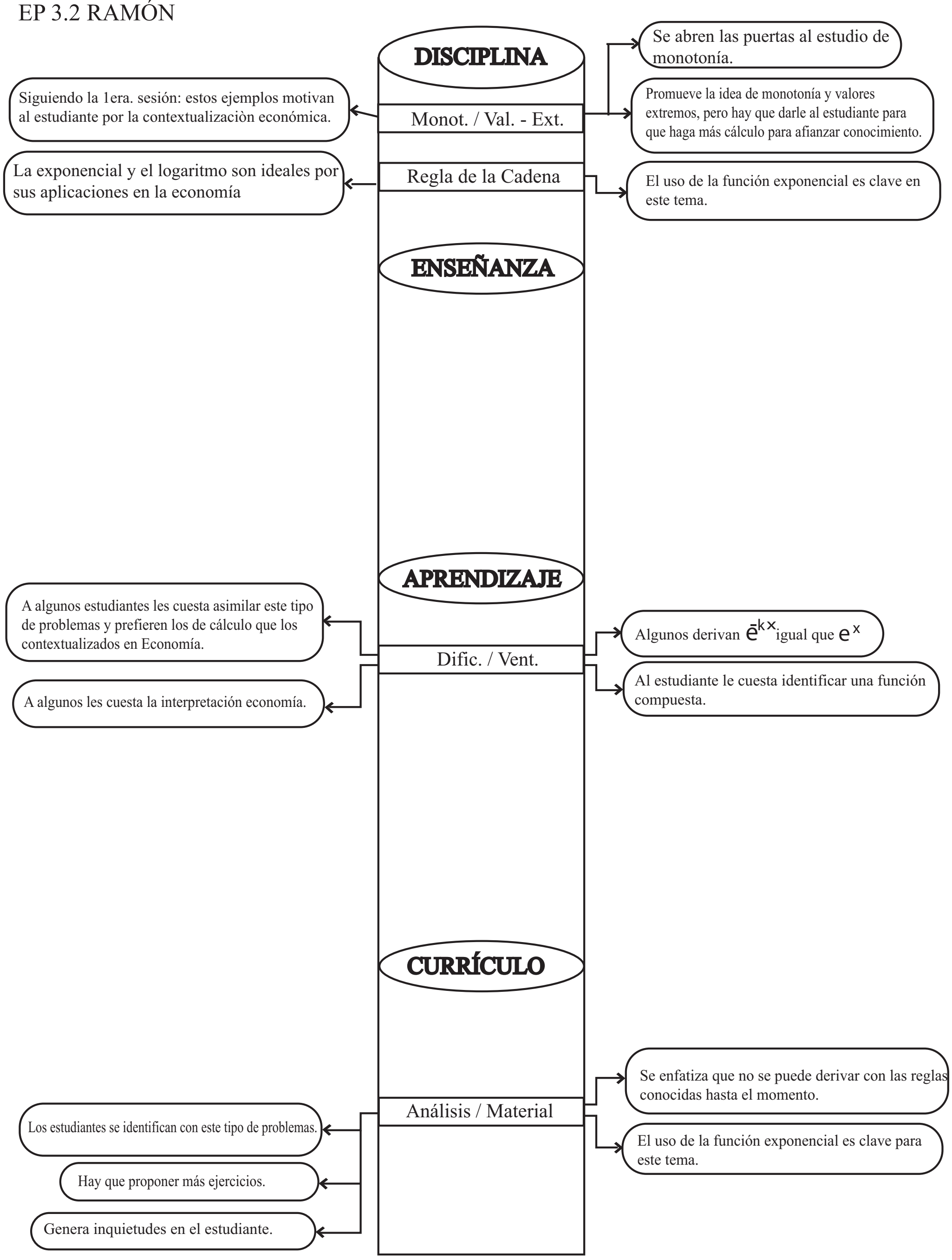
Me gustaría conocer la opinión de ustedes al respecto; es decir, este hecho particular de evaluar la función de utilidad en dos puntos que nosotros sabemos que dan

interpretaciones contrarias, ¿promueven el estudio de monotonía de una función en los estudiantes?



Cuadro 4.14: Episodio 3.2 - Manuel

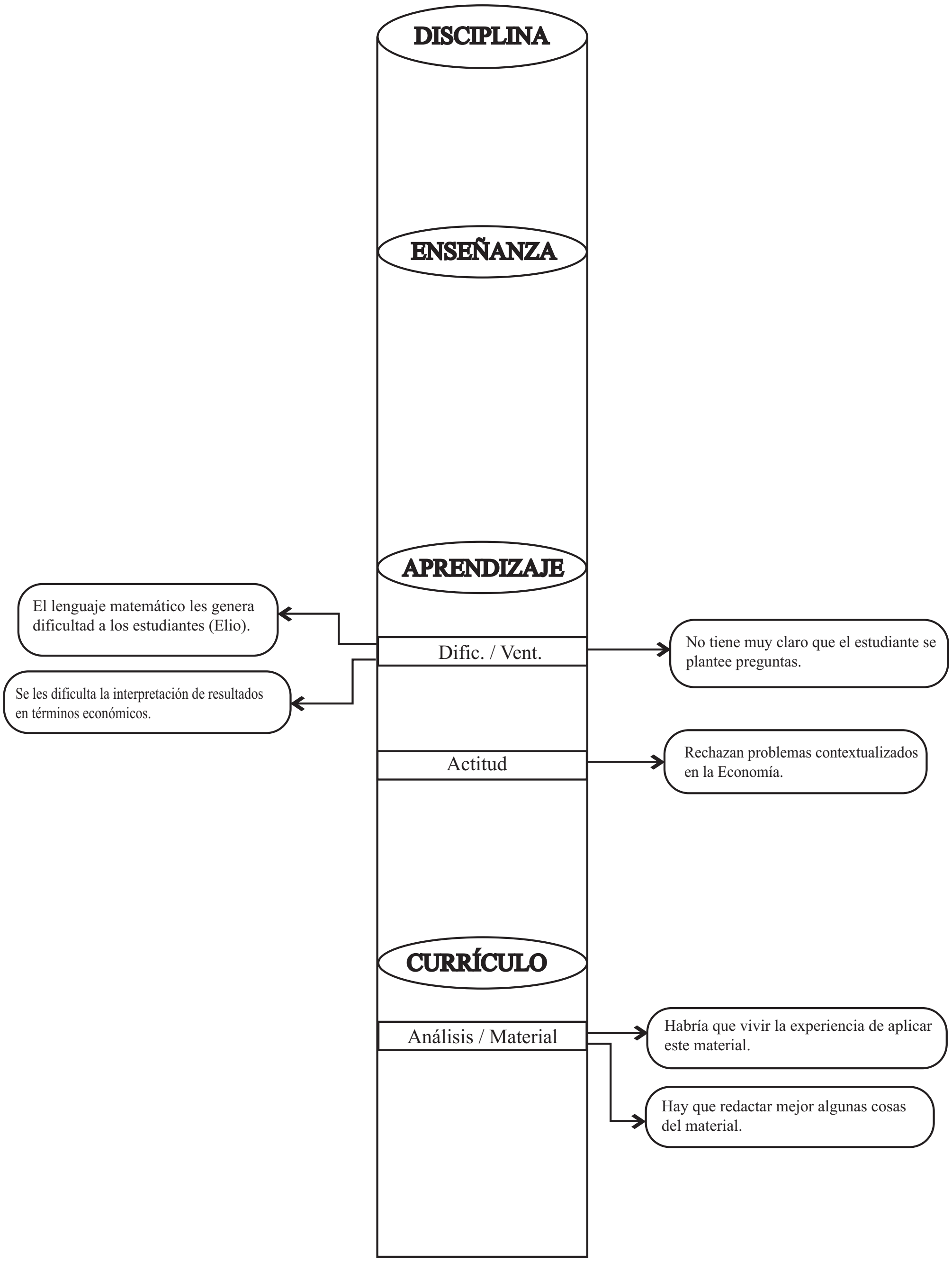
EP 3.2 RAMÓN



Cuadro 4.14: Episodio 3.2 - Ramón

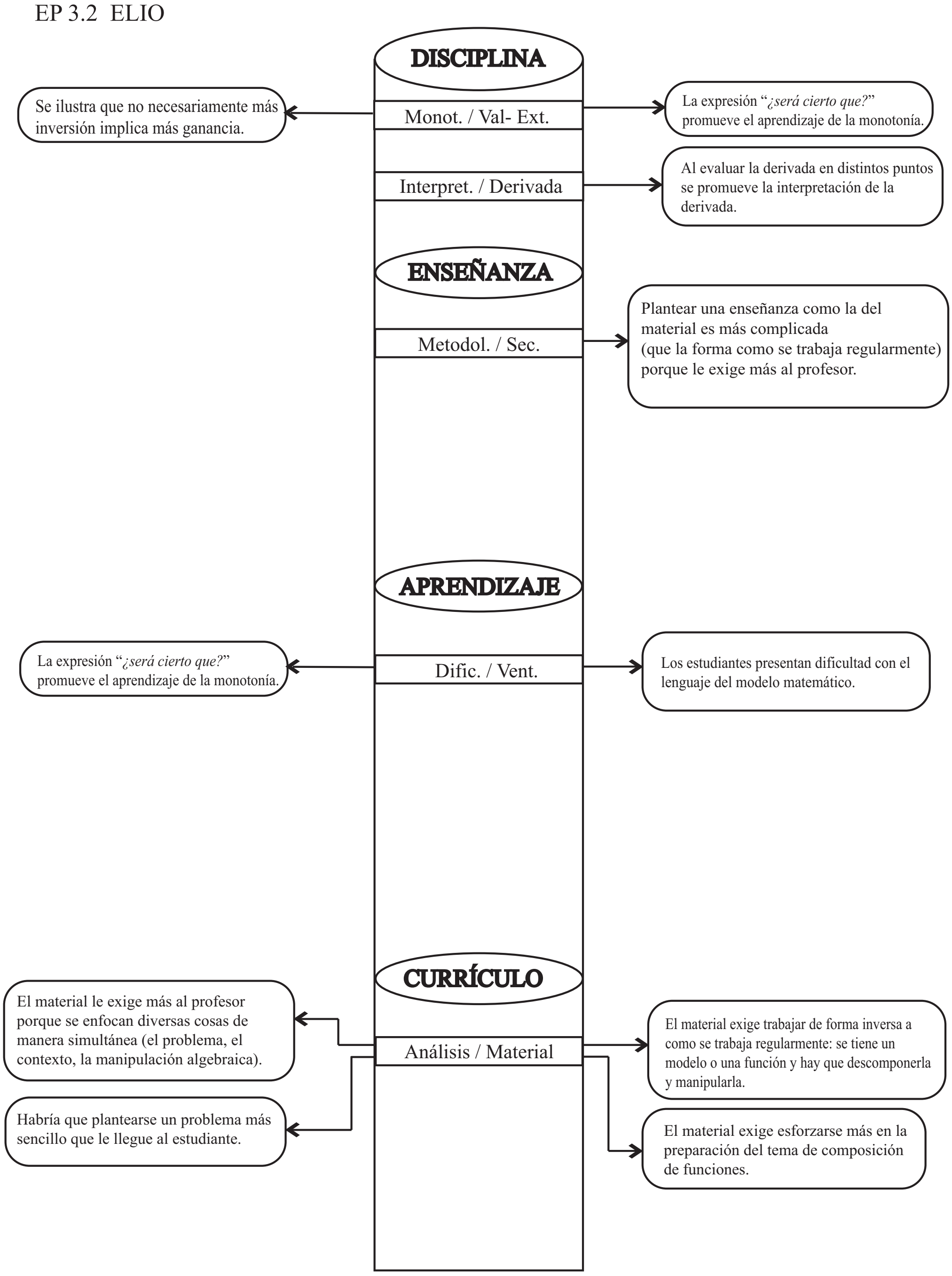
Grupo B

EP 3.2 ALEXIS

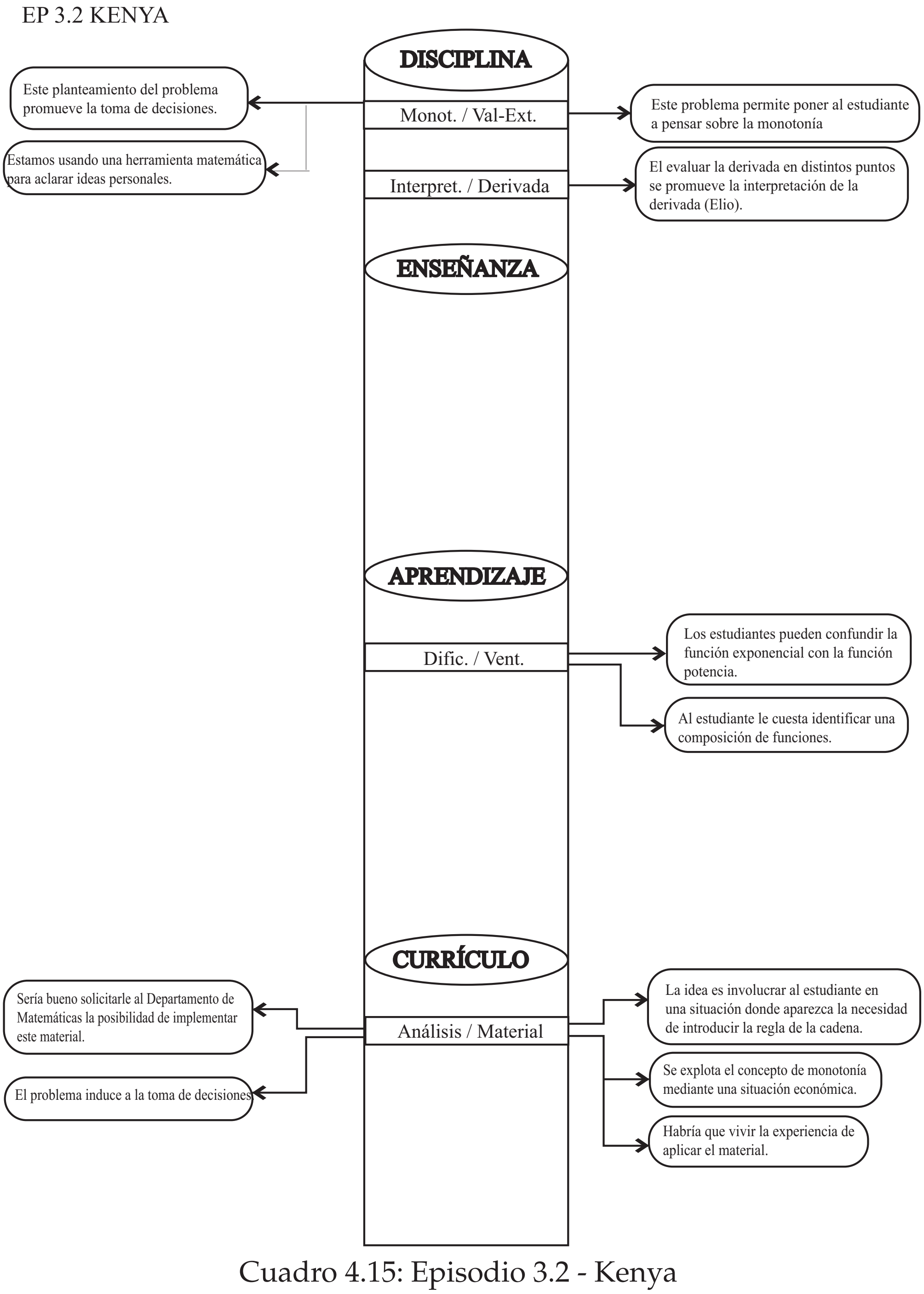


Cuadro 4.15: Episodio 3.2 - Alexis

EP 3.2 ELIO



Cuadro 4.15: Episodio 3.2 - Elio



Cuadro 4.15: Episodio 3.2 - Kenya

Resumen del análisis Aun cuando en este episodio continuamos con la regla de la cadena, ya que es el tema principal de esta tercera sesión del seminario, hemos incluido el tema de monotonía y valores extremos. A diferencia del problema anterior en el que las reflexiones estuvieron basadas sobre una función polinómica, en el actual se discute a partir de una función exponencial. Las categorías del CDC que tomaremos en cuenta para el análisis son las vinculadas al conocimiento disciplinar y al conocimiento del currículo, involucrando las otras dos, enseñanza y aprendizaje, en la del currículo; esto en el caso del grupo A, mientras que del grupo B sí hablaremos, aunque de forma sucinta, sobre la categoría reservada al aprendizaje. La razón de esta decisión viene dada por la poca información obtenida debido, entre otras cosas, al propio diseño del instrumento.

Conocimiento sobre la Disciplina (Grupo A)
En las dos situaciones matemáticas claramente diferenciadas, la regla de la cadena y la monotonía, los participantes, en el caso de la función exponencial, manifiestan *"que es una función clave tanto para estudiar la regla de la cadena como por la utilidad de la misma en el campo de la economía"*. Pero Manuel va más allá y sostiene que además de la exponencial, la función logarítmica se debe trabajar por los errores que usualmente cometen los estudiantes con estas funciones y al mismo tiempo señala su importancia en el área económica, haciendo alusión al hecho de que los libros de texto con aplicaciones a la economía reservan un capítulo únicamente para estas dos funciones.

En efecto, libros de texto como el de Arya y Lardner (1987) y Haeussler y Paul (1997), entre otros, dedican un capítulo a estas dos funciones por lo que significan las mismas para las ciencias económicas como el *estudio a largo plazo de la inversión de capital*, *el crecimiento del producto nacional bruto* o la *toma de decisión sobre ventas de bienes inmuebles*. Aun cuando nuestro objetivo no es estudiar la función exponencial en sí misma sino la regla de la cadena, la misma genera opiniones como la de Ramón: *"algunos [estudiantes] derivan e^{-kx} igual que e^x"*. Desde nuestro punto de vista, lo relevante de esta frase es que el conocimiento disciplinar de este profesor traspasa el contenido matemático-económico y se adentra en lo que entendemos como conocimiento sobre el aprendizaje, en otras palabras, la opinión que este profesor aporta sobre la enseñanza de las matemáticas la fundamenta desde su experiencia con los estudiantes.

Aquí lo que pretendemos reflejar es que las componentes que conforman el CDC no son elementos disjuntos, pero además, la frontera o línea de separación entre una categoría y otra no están claramente demarcadas.

Nosotros planteamos una situación muy particular en la que a partir de la contextualización económica se supone que al invertir más en publicidad los beneficios serán mayores. Un enfoque como este atiende a la metodología de la EBP, en el que se entiende que el estudiante aún no ha trabajado el tema de la monotonía.

Ante este escenario, tanto Manuel como Ramón advierten que ellos introducen el tema de la monotonía de una forma similar a la del material por su carácter motivador. Ramón añade además que las preguntas del problema generan inquietud en el estudiante y lo involucran en el tema en cuestión. Por su parte, Manuel considera que *"...se induce al tema de optimización..., se promueve el estudio de puntos críticos y de monotonía"*, pero destaca, entre otras cosas, el hecho de explotar el cambio de signo en la derivada de forma intencionada. En efecto, estudiar la monotonía de una función consiste en estudiar el cambio de signo de la derivada de la función a lo largo del dominio. En este sentido, estos participantes entienden que mediante esta actividad es viable llegar al concepto de monotonía basando sus reflexiones en las respectivas experiencias con sus estudiantes.

Conocimiento sobre la Disciplina (Grupo B)
Comenzaremos por acotar que las opiniones obtenidas en esta categoría provienen únicamente de los profesores Kenya y Elio, ya que la participación de Alexis, tal como se muestra en el diagrama correspondiente, es escasa, característica de este profesor a lo largo del seminario. También hay que tomar en cuenta que las propias características del problema en discusión dejan mucha libertad a los participantes para referirse al contenido disciplinar en sí; sin embargo, destacamos que tanto las opiniones de Kenya como de Elio van en la misma dirección y el mismo concepto matemático, la monotonía. Este hecho no es gratuito y obedece fundamentalmente al esquema del seminario como actividad de discusión e intercambio de ideas u opiniones. Kenya, por ejemplo, sostiene que mediante la estructura del problema se está *"usando una herramienta matemática para aclarar ideas personales"*, aunque Elio entra más en detalle y advierte que *"se ilustra que no necesariamente más inversión implica más ganancia"*. Estas *"ideas personales"* a las que se refiere Kenya las identificamos, aunque no del todo, con las *"concepciones alternativas del estudiante"* que define Carrascosa (2005).

Estas opiniones nos conducen directamente a hablar de la EBP, ya que el profesor identifica las preguntas con la introducción al objeto matemático en discusión; tomemos en cuenta que implementar la EBP implica partir de un escenario problemático para llegar a un concepto o conjunto de estos. Tengamos presente que en ningún momento en el problema se plantea de forma explícita el estudio de la monotonía de una función, en todo caso lo que se muestra de forma directa es la interpretación de la derivada. No obstante, estos profesores se identifican con las preguntas del problema como *"herramientas"* para aproximarnos al concepto ya mencionado.

En otro orden de ideas, Kenya da un paso adelante al observar que *"el planteamiento del problema promueve la <u>toma de decisiones</u>"*; la razón de subrayar esto último obedece a que el profesional de carreras como Economía, Administración de Empresas o Contaduría Pública, entre otras, está sujeto a constantes situaciones que le obligan a la toma de decisiones en el campo laboral, con lo cual esta profesora no sólo entiende el problema como una actividad para el estudio de la monotonía sino que, además, lo ve como estrategia para inducir la toma de decisiones, es decir, explota la multidisciplinariedad en el problema, característica particular de la EBP.

Conocimiento sobre el Aprendizaje (Grupo B)
En materia de aprendizaje, Elio sostiene *"que los estudiantes presentan dificultad con el lenguaje del modelo matemático"*; Kenya manifiesta que al *"...estudiante le cuesta identificar composición de funciones"* y Alexis, en la misma tónica, indica que los estudiantes *"rechazan problemas contextualizados en la economía"*. Sin ánimo de especular, pero recurriendo a las opiniones de los episodios anteriores, nos atrevemos a afirmar, entre otras cosas, que estos profesores trabajan poco o ningún problema contextualizado en la economía en el marco de su actividad docente, lo que nos hace inferir que ante problemas como estos es el profesor quien comienza por rechazarlos (tal vez de forma involuntaria), debido a la supuesta actitud o propio rendimiento del estudiante frente a actividades similares, en caso de haberlas vivido.

De todo lo anterior no nos queda duda que estos profesores dan visos de conocer a sus estudiantes y la realidad de ellos en el aula; en eso se apoyan para sus reflexiones, pero de alguna manera, los participantes de este grupo, dejan ver cierta actitud de indiferencia ante el comportamiento del estudiante, bien sea porque intentaron alguna innovación en pasadas ocasiones sin obtener lo esperado por parte de sus estudiantes o porque su insuficiente formación en el campo de las ciencias económicas no les permite plantearse problemas alternativos a los utilizados en su momento. Todo esto nos hace apuntar a una falta de formación profesional tanto en el ámbito económico como el metodológico, en particular, en metodologías alternativas de enseñanza que se ajusten en la medida de lo posible tanto al conocimiento como a la actitud del estudiante.

Conocimiento sobre el Currículo (Grupo A)
El objetivo principal de esta estrategia como se llevó a cabo la aplicación del instrumento es, precisamente, la de generar opiniones a favor o en contra del material discutido, pero partiendo o basándose siempre en la experiencia docente de los participantes. El primer punto a destacar del material es que ambos profesores lo entienden como un *instrumento motivador* para el estudio de la regla de la cadena y monotonía de una función; también Manuel lo entiende como un elemento *"adecuado porque de alguna manera, se solventa ese inconveniente que ellos tienen, de ver una función como una como composición de otras"*.

En este caso, Manuel saca a colación las dificultades que tiene el estudiante respecto a un concepto matemático como la composición de funciones; es decir, su opinión obedece a la experiencia vivida durante el ejercicio de la docencia. Respecto a este hecho haremos una observación al final del análisis de esta categoría.

Por su parte Ramón, en el marco de la regla de la cadena, sostiene que *"algunos se identifican con este tipo de problemas, aunque muchos tienen problemas en identificar la composición"*; más adelante indica, sobre la monotonía, que el problema genera inquietudes en el estudiante, situación ratificada por Manuel cuando se discute sobre los dos valores dados de forma intencional en el material y que la derivada en estos puntos tienen signos contrarios; Manuel considera que el estudiante se podría preguntar *"¿qué ocurre matemáticamente aquí?"*, aunque ellos consideran que se debería tomar en cuenta más puntos para que el estudiante los trabaje y reflexione sobre los resultados. En este sentido es pertinente mencionar la EBP como estrategia de enseñanza, puesto que con esta metodología lo que se busca es la reflexión de los estudiantes, que discutan entre ellos para que se aproximen de la mejor manera posible a un determinado concepto.

Conocimiento sobre el Currículo (Grupo B)
Al trabajar esta categoría con el grupo A comenzamos por recordar los objetivos que se persiguen en la forma de aplicar este instrumento; en este sentido, el grupo B es muy cuidadoso sobre esta parte discutida del material y los tres indican que prefieren *"vivir la experiencia"*, pero con distintos matices, como por ejemplo Alexis, quien sugiere hacerle modificaciones al material o Kenya que habla de *"solicitarle al Departamento de Matemática la posibilidad de implementar el material"* con el objeto de darle validez institucional por encima de la personal. Cabe destacar que se tiene previsto, como parte complementaria del presente trabajo, la puesta en práctica de este material de forma exploratoria, ya que es uno de nuestros objetivos a futuro pero que no está contemplado dentro de este proyecto.

En otro orden de ideas y centrándonos más hacia la EBP, Kenya considera apropiado el problema, puesto que permitiría involucrar al estudiante en la necesidad de aprender una nueva regla de derivación a partir de una situación económica, aunque Elio se mantiene reticente ante el problema en discusión, porque al involucrar la composición de funciones con el lenguaje económico puede traer dificultades en el proceso de enseñanza-aprendizaje. En este momento le mostramos al lector dos posiciones encontradas sobre la posible aplicación del material, destacando por parte nuestra el valor del seminario como actividad de discusión, pero también la necesidad de la misma como espacio de formación profesional; recordemos que en un comentario anterior, Elio reconocía su poca formación en el área de las ciencias económicas y, en consecuencia, la necesidad de una formación profesional en esta área. Pero además, este último participante nos sigue mostrando el carácter formal como concibe él sus clases.

También Kenya observa que el problema en discusión es una herramienta innovadora para la enseñanza de las matemáticas como lo señaláramos en el conocimiento disciplinar, ya que permite, a través de un ejemplo, visualizar de manera analítica una creencia muy generalizada, *"...mientras más se invierte en publicidad más se gana..."* Además, el trabajar con la interpretación de la derivada en este ejemplo *"...permite la toma de decisiones..."*, comentario que ya analizamos en el contenido disciplinar.

Ya por último, cerramos esta parte del análisis con la observación que indicáramos líneas arriba, donde hablamos de la opinión del profesor tomando como referencia su experiencia vivida en el ejercicio de la docencia. Sobre este hecho en particular, si el lector vuelve a la **Sección 2.3.3** puede apreciar que cuando desarrollamos el conocimiento del contenido curricular y, en particular, el análisis crítico de materiales publicados, no hicimos mención a qué parte de esta actividad depende de la experiencia vivida con los estudiantes, situación esta que se ha venido acentuando en las reflexiones y opiniones que los profesores de ambos grupos hacen cuando se refieren al material.

4.3.3. Episodio 3.3: Análisis e interpretación Eco-Mat, interpretación de la derivada, regla de la cadena

Suponga que el costo total (en dólares) de fabricación C en cierta fábrica es una función que depende de las q unidades producidas, que a su vez es una función que depende del tiempo, t, que representa las horas durante las cuales ha estado funcionando la fábrica.

Preguntas: Las siguientes preguntas están relacionadas con los contenidos matemático y económico en general.

Pregunta 1: ¿Qué cantidad se representa mediante la derivada $\frac{dC}{dq}$? ¿En qué unidades se mide esta cantidad?

Respuesta: La expresión $\frac{dC}{dq}$ representa la razón de cambio del costo C respecto al número de unidades producidas q. Esta cantidad se mide en dólares/unidades.

Pregunta 2: ¿Qué cantidad representa la expresión $\frac{dq}{dt}$? ¿En qué unidades se mide esta cantidad?

Respuesta: La expresión $\frac{dq}{dt}$ representa la razón de cambio de las unidades producidas q respecto al tiempo t. Esta cantidad se mide en unidades/horas.

Pregunta 3:¿Qué cantidad representa la expresión $\frac{dC}{dt} = \frac{dC}{dq}\frac{dq}{dt}$? ¿En qué unidades se mide esta cantidad?

Respuesta: La expresión $\frac{dC}{dt} = \frac{dC}{dq}\frac{dq}{dt}$ representa la razón de cambio del costo C respecto al tiempo t. Esta cantidad se mide en dólares/horas.

Microepisodio 3.3.1: Para finalizar el tema de la regla de la cadena, discutamos ahora sobre una pregunta como esta, de corte teórico, donde las exigencias de análisis e interpretación, tanto económico como matemático, son mayores que aquellas de contenido numérico.

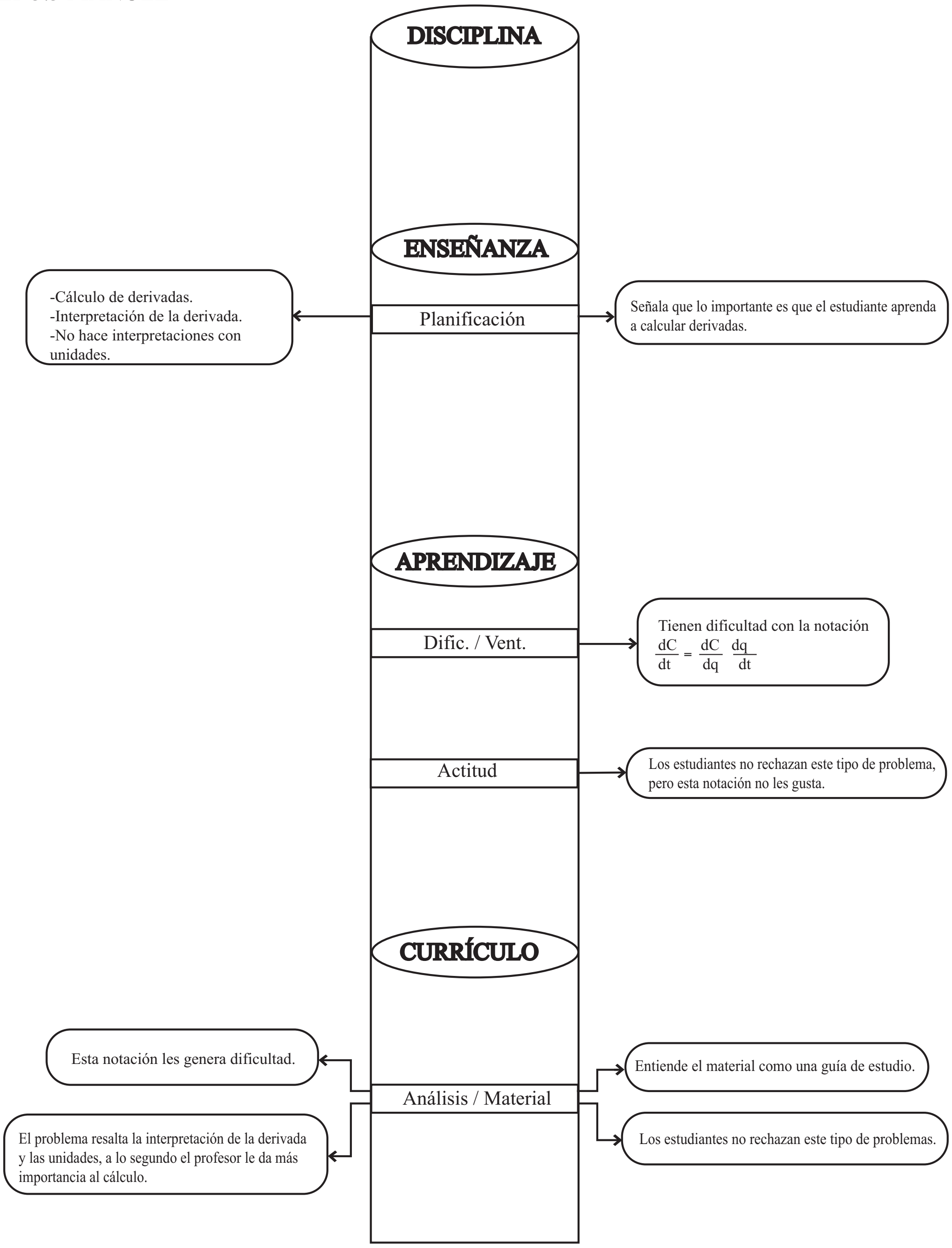
¿Conduce al estudiante a una actitud de rechazo este tipo de problemas?

Microepisodio 3.3.2: *¿Un problema como este, conduce a cubrir los objetivos que se plantean los libros de texto que ustedes utilizan?*

Microepisodio 3.3.3: *¿Un problema como éste, sería ideal para preguntarlo en una evaluación del tema de derivadas?*

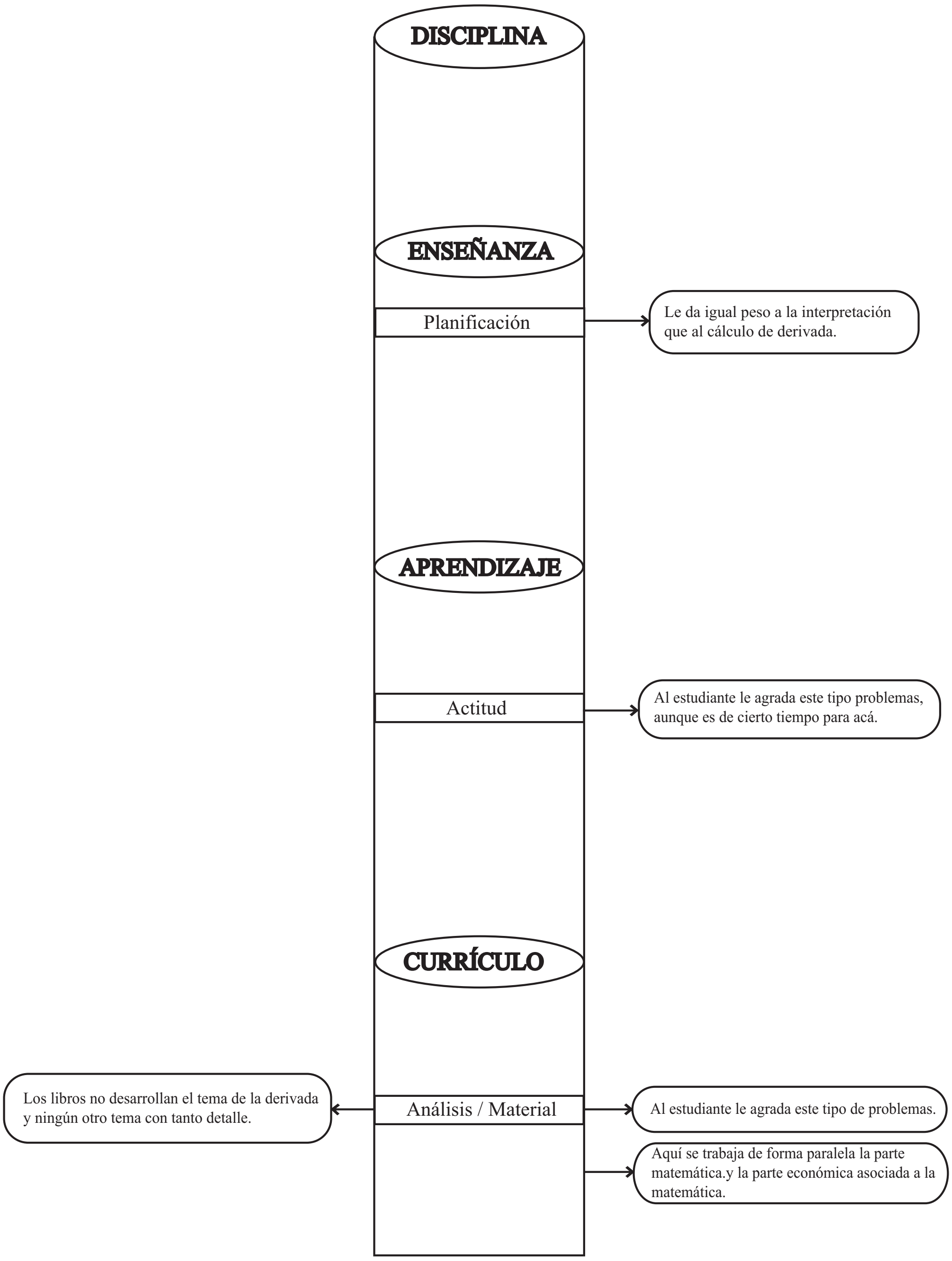
Grupo A

EP 3.3 MANUEL



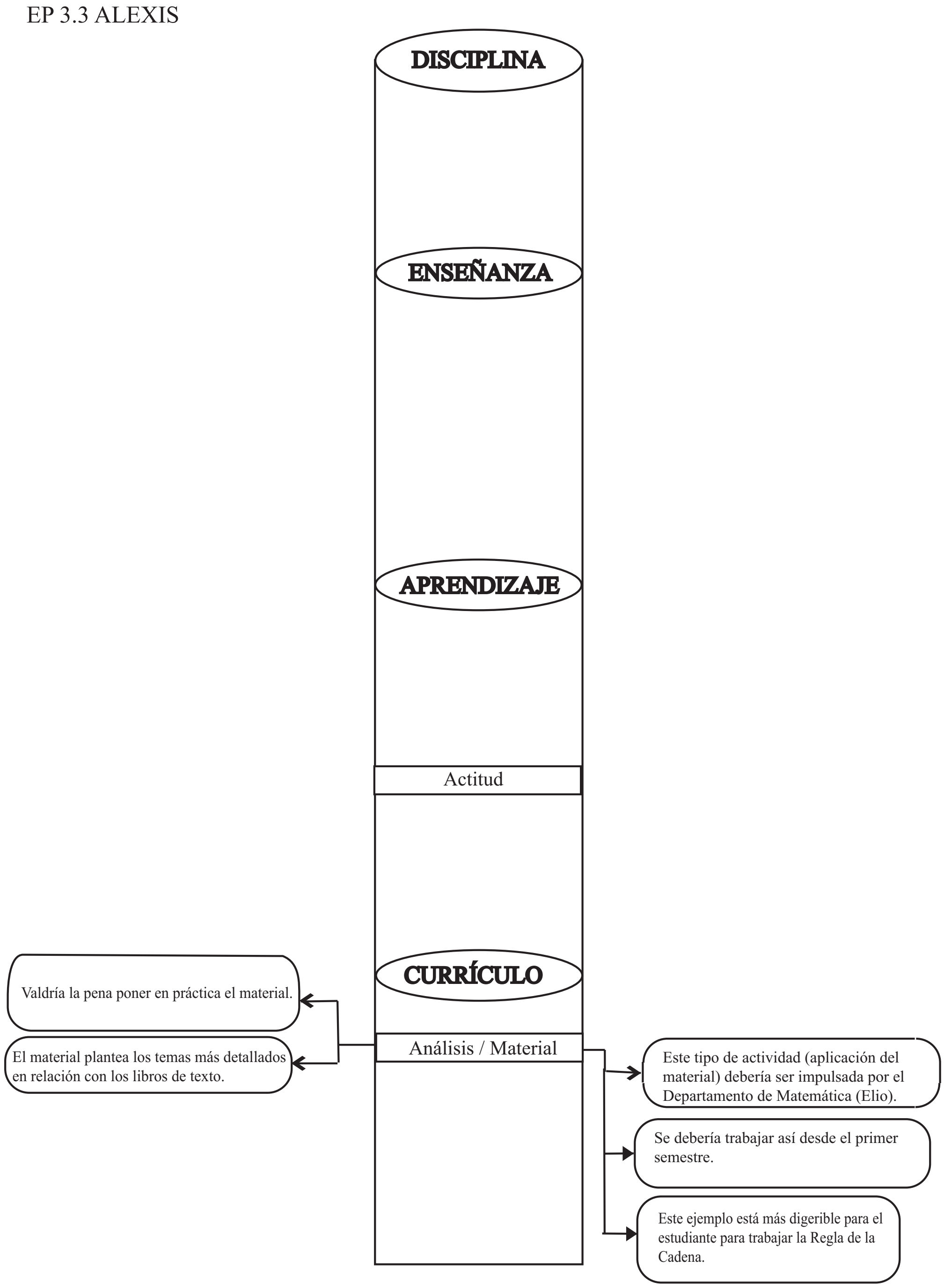
Cuadro 4.16: Episodio 3.3 - Manuel

EP 3.3 RAMÓN



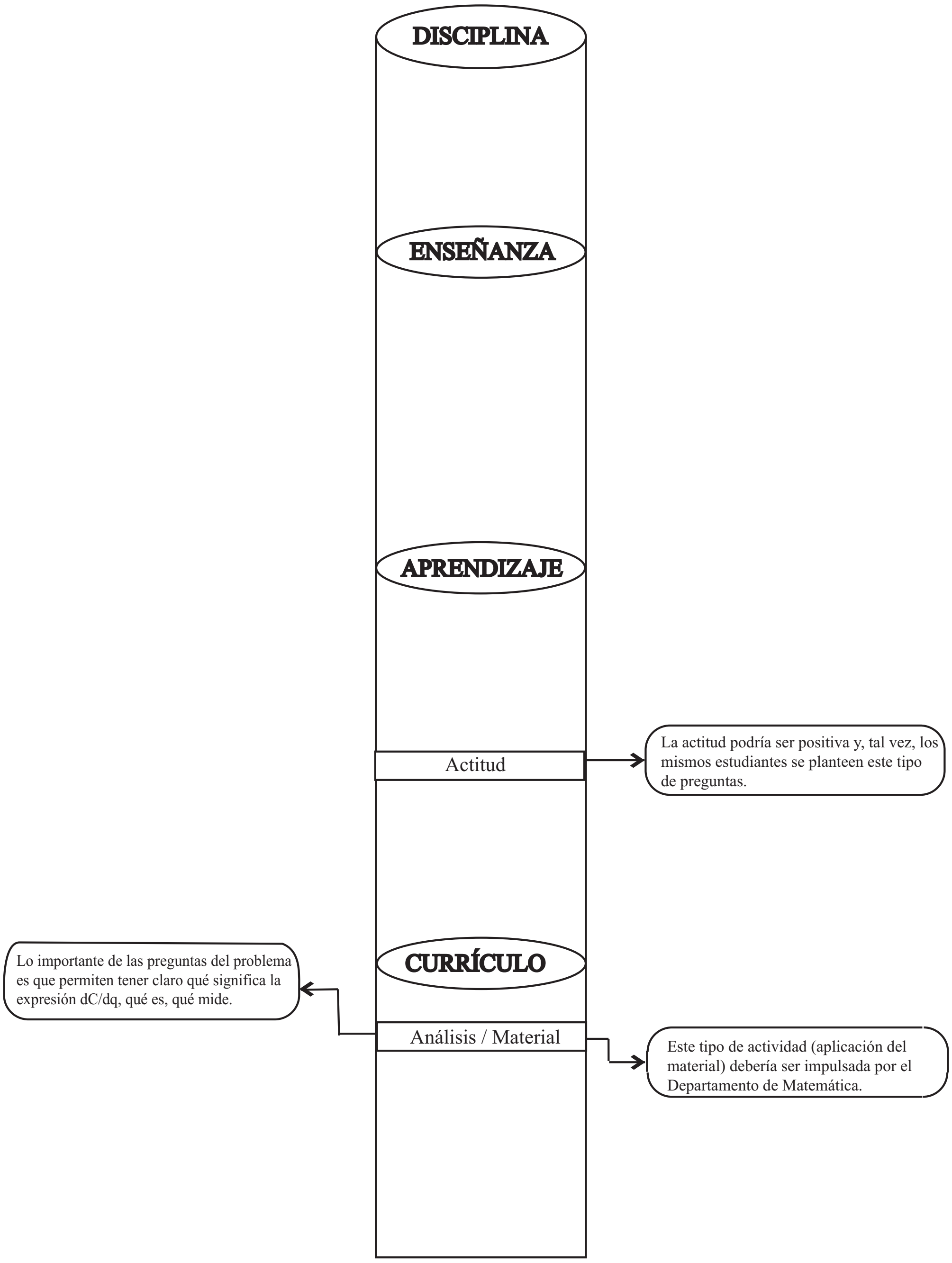
Cuadro 4.16: Episodio 3.3 - Ramón

Grupo B

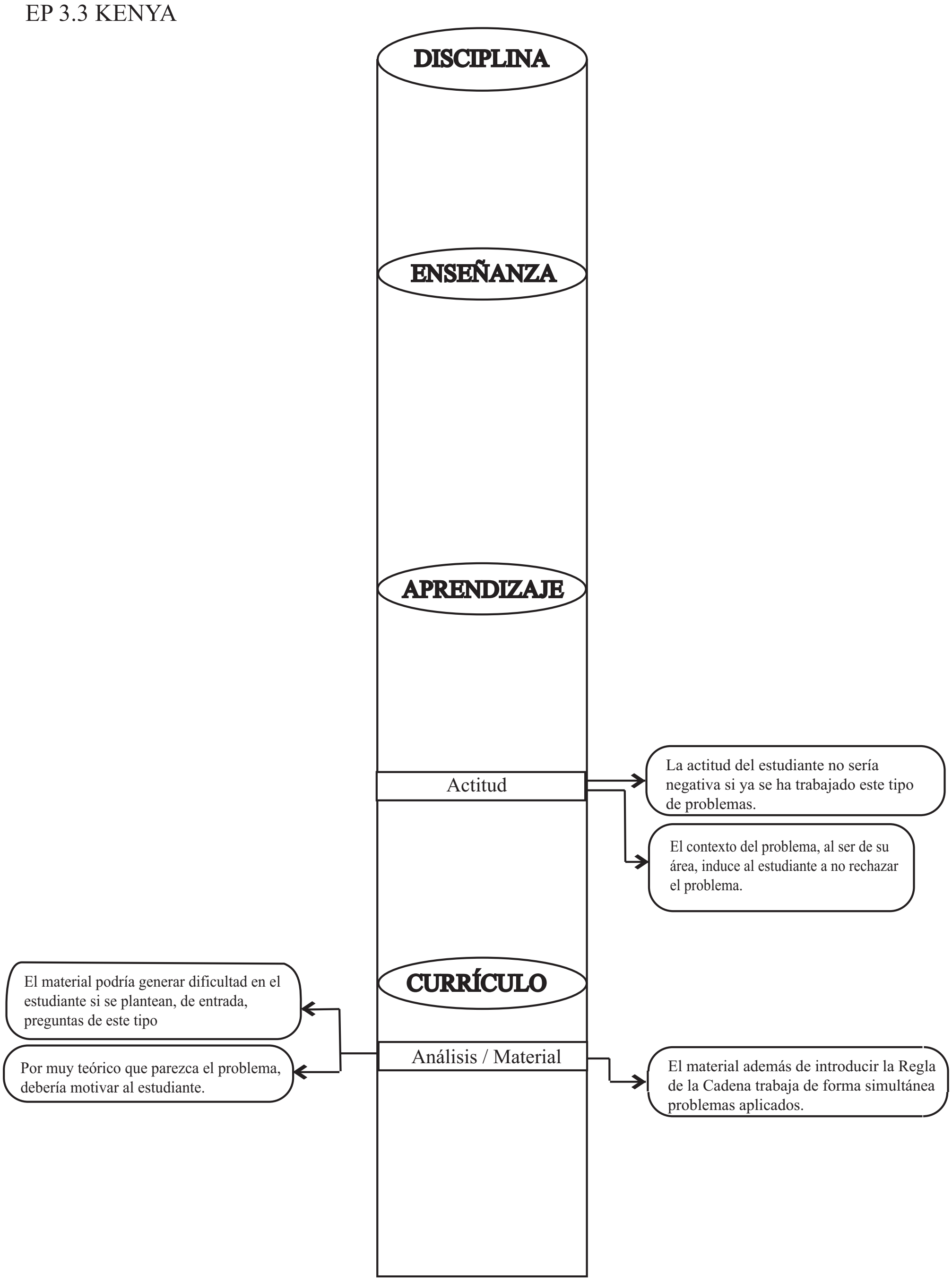


Cuadro 4.17: Episodio 3.3 - Alexis

EP 3.3 ELIO



Cuadro 4.17: Episodio 3.3 - Elio



Cuadro 4.17: Episodio 3.3 - Kenya

Resumen del análisis

Este episodio tiene unas características muy particulares en relación con los otros que ya hemos tratado; lo primero en destacar es lo corto del mismo, solamente tres preguntas se formulan durante la discusión del problema; por otra parte, el contenido del problema en sí obedece, fundamentalmente, a la interpretación de la derivada con un planteamiento eminentemente teórico, lo cual tiene como objetivo, en primer lugar, romper con la rutina que se ha seguido hasta ahora en el seminario; en general, todos los problemas han presentado las mismas características, además, que problemas como éste, en el que se insiste en la interpretación económica de la derivada, requieren de *conocimiento del contenido económico* por parte del profesor, para poder llevarlo al aula y discutirlo con los estudiantes.

En los programas oficiales de cálculo diferencial para las carreras de ciencias económicas se reserva un tema en el que se contemplan las aplicaciones de la derivada a la economía; interpretar la derivada en términos económicos y reconocer en qué unidades viene expresada la derivada, es la aplicación más inmediata que debe conocer el estudiante y, por supuesto, el profesor.

En tal sentido, el análisis de este episodio, en ambos grupos, lo enmarcamos en la categoría relacionada con el conocimiento curricular, aun cuando se realizan comentarios asociados a otras categorías como lo señalan los diagramas anteriores.

Conocimiento sobre el Currículo (Grupo A)
Las opiniones que los dos profesores expresan en este episodio apuntan hacia el estudiante, la notación empleada en el problema y sobre el material en sí. Al discutir sobre el problema, los profesores sostienen que la actitud del estudiante es de *"agrado"*, comenta Ramón, mientras que Manuel advierte que *"no rechazan este tipo de problema"*. Conocer al estudiante es un punto fundamental en la actividad docente, pero lo es más cuando hablamos de la EBP, ya que al llevar un problema al aula para ser discutido, y que el mismo sea aceptado por los estudiantes, permite generar un ambiente propicio de cara al debate que exige esta metodología de enseñanza; cuestión que no sería posible o, en todo caso, supondría un mayor esfuerzo si el estudiante rechaza de entrada el problema.

Ahora bien, pasemos a hablar del material en sí; Manuel, por ejemplo, entiende *"el material como una guía de estudio"* más que como un material para facilitar la enseñanza, mientras que Ramón, al comparar el material con los libros de texto, afirma que los segundos *"no desarrollan el tema de la derivada y ningún otro tema con tanto detalle"*. Estas reflexiones, aunque en cierta medida resultan contrarias, permiten validar el material e inducirnos a una revisión del mismo de cara a mejorarlo, puesto que nuestra propósito a futuro es el de producir un material con característica superiores a la de una "guía de estudio" y más aún, el de realizar una nueva revisión de los objetivos tanto de los libros de texto como de los programas oficiales, pero teniendo siempre presente las necesidades del futuro profesional. Por supuesto que todo esto forma parte de una segunda etapa que no está contemplada para ser desarrollada en este proyecto.

Conocimiento sobre el Currículo (Grupo B)
Las reflexiones de los participantes que se derivan de este episodio se centran en el material discutido, aunque la base de los argumentos es siempre el estudiante. Alexis, en el marco de la discusión, insiste en *"poner en práctica el material"*, *"se debería trabajar así desde el primer semestre"*. Por otro lado, destacamos de dos reflexiones de Kenya que guardan estrecha relación con la última frase citada de Alexis; ella advierte que *"la actitud del estudiante no sería negativa si ya se ha trabajado este tipo de problema"* (le recordamos al lector que el tema de la derivada corresponde al segundo semestre de las carreras objeto de estudio) y *"el material podría generar dificultad en el estudiante si se plantean, de entrada, preguntas de este tipo"*.

Es claro que intentar implementar una estrategia de enseñanza distinta a la tradicional y, además, trabajar con ésta a partir de un segundo semestre, y con un tema en particular, puede ir en detrimento del estudiante; es por ello que aclaramos una vez más que el tema de la derivada no es más que un medio para acercarnos a los participantes y, de esta forma, procurar validar el material como herramienta didáctica. En tal sentido, nos identificamos con ambos profesores cuando advierten sobre la conveniencia de trabajar de esta manera desde el inicio de carrera.

Recordemos un momento uno de nuestros objetivos, el cual consiste en *estudiar el papel del profesor frente a propuestas metodológicas alternativa para la enseñanza de las matemáticas*. Desde nuestro punto de vista y recurriendo al desarrollo de todos los episodios trabajados hasta el momento entendemos que estos tres profesores, aunque en menor medida Elio, apoyan la idea de poner en práctica este material; sin embargo, nuestro objetivo no consiste en que el profesor apoye o no esta herramienta, sino en los argumentos que utilicen en sus comentarios o reflexiones, permitiéndonos así ahondar en el CDC del profesor.

En este orden de ideas recurrimos nuevamente a posiciones de los participantes que entendemos como justificaciones para llevar el material al aula. Alexis sostiene que *"este ejemplo está más digerible para el estudiante para trabajar la regla de la cadena"*, además que *"el material plantea los temas más detallados en relación con los libros de texto"*; a esto agregamos la visión que tiene Kenya sobre el material discutido y, en particular, sobre el problema de este episodio: *"...además de introducir la regla de la cadena [se] trabaja de forma simultánea problemas aplicados [a la economía]"*. Finalmente, cerramos con la reflexión de Elio, quien argumenta *"lo importante de las preguntas del problema es que permiten tener claro qué significa* $\frac{dC}{dq}$*, qué es, qué mide..."*.

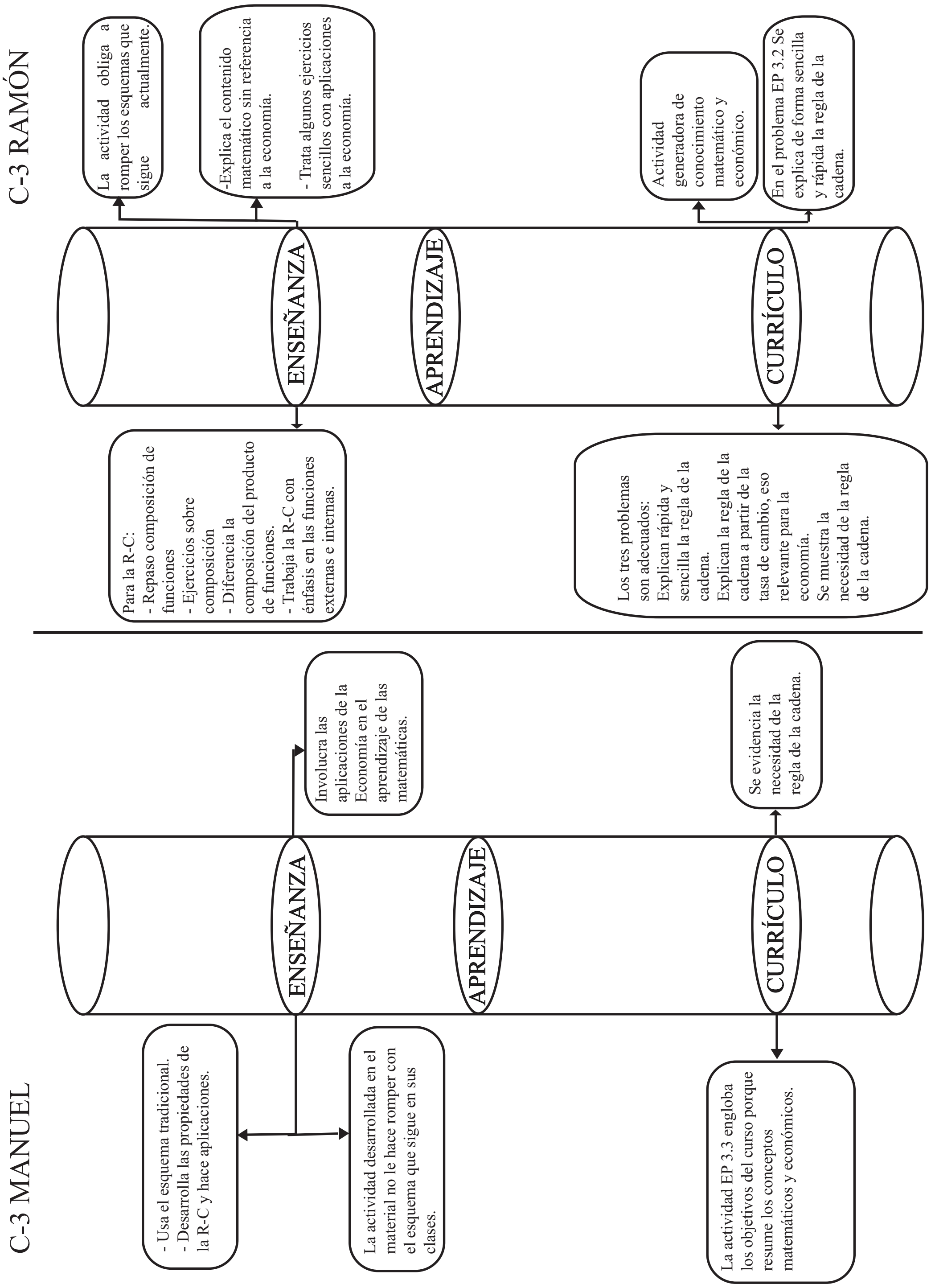
En el párrafo anterior se deja evidencia del CDC, por parte de estos profesores, en componentes como el conocimiento disciplinar y el curricular, los cuales, además de formar parte de nuestros objetivos, muestran características personales de cada participante.

Ya para cerrar esta parte del análisis invocamos a Elio, quien manifiesta que *"este tipo de actividad debería ser impulsado por el Departamento de Matemática"*, refiriéndose al seminario de discusión, propuesta que apoya abiertamente Alexis. En este caso destacamos el seminario como ambiente para el intercambio de ideas y opiniones en el que, sin lugar a duda, no hubiese sido posible obtener toda la riqueza de esta información en caso de haber trabajado con cada profesor por separado.

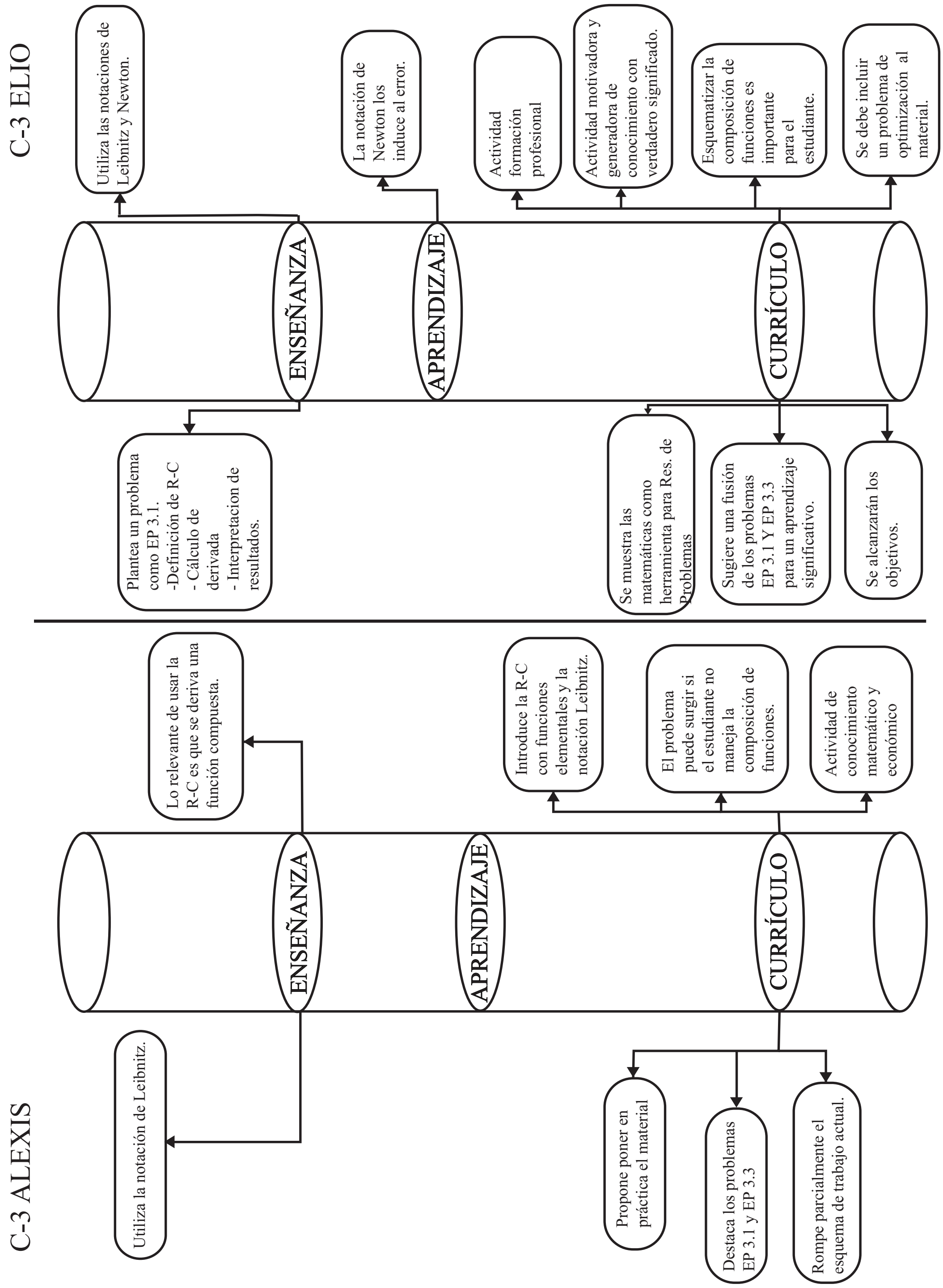
4.3.4. Cuestionario 3

En esta parte complementaria de la tercera sesión del seminario, el cuestionario C-3, analizamos las opiniones de los profesores en relación con lo que supone implementar o desarrollar una enseñanza basada en la estructura y el contenido que presentamos en el material discutido en el seminario. Sin embargo, de las seis preguntas que contiene este cuestionario, pondremos especial atención en tres de ellas (2a, 5a y 6a), ya que las mismas nos permitirán caracterizar a los participantes.

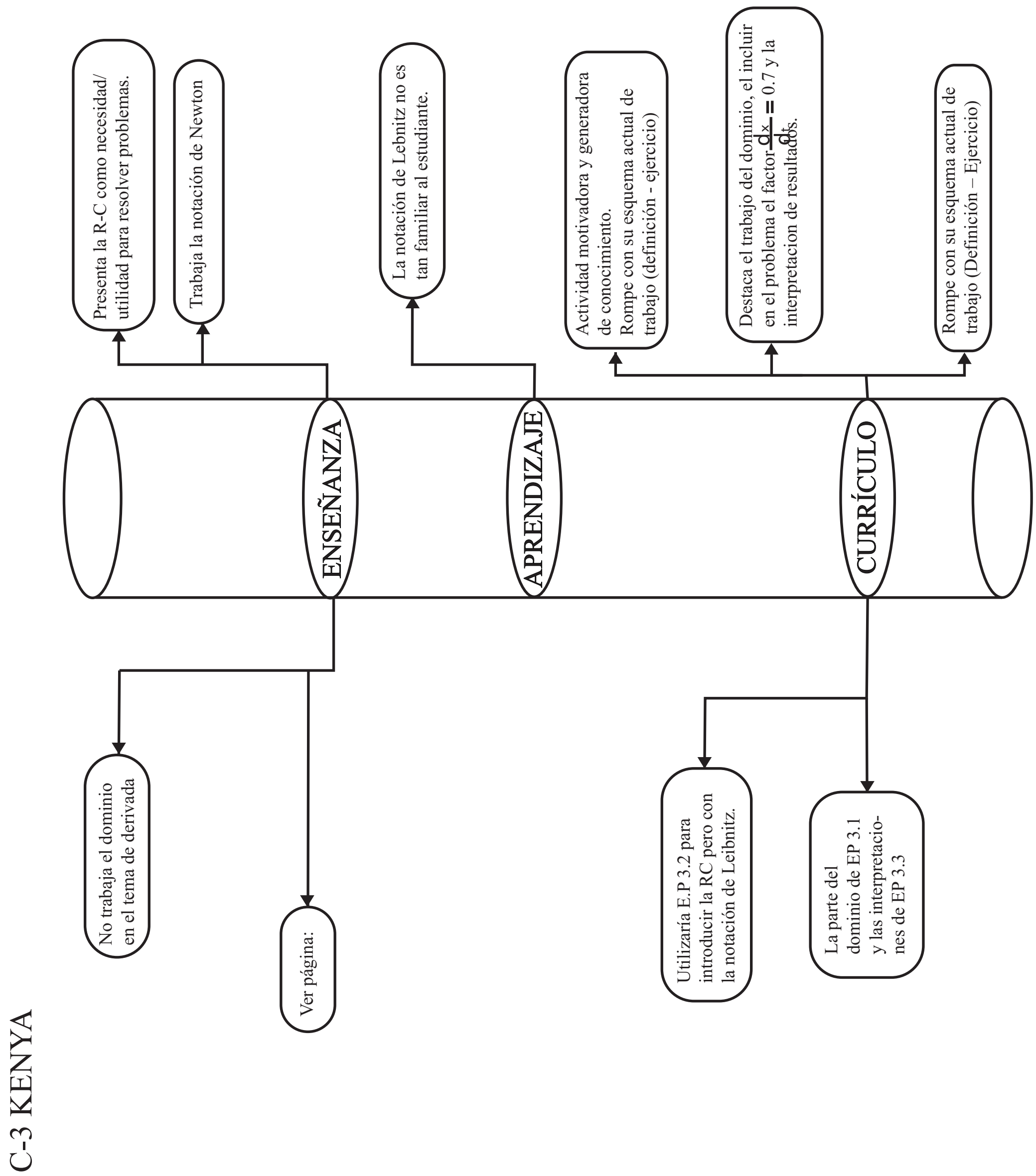
Como se pudo apreciar en los tres problemas discutidos en esta sesión del seminario que denotamos por S-3, el tema central es la regla de la cadena y es en este objeto matemático en el que basamos el análisis de este cuestionario. Es conveniente recordar que en el EP3-1 trabajamos con una función polinómica y la notación de Leibnitz, en el EP3-2 la función empleada fue la exponencial y la notación de Newton; finalmente, en el EB3-3 se trabajó un problema teórico donde la interpretación de la derivada es la pieza principal a estudiar y nuevamente se hace uso de la notación de Leibnitz.



Cuadro 4.18: Cuestionario 3 - Manuel y Ramón



Cuadro 4.18: Cuestionario 3 - Alexis y Elio



Cuadro 4.18: Cuestionario 3 - Kenya

C-3 (Grupo A)

Al indagar sobre el problema de mayor relevancia didáctica, de los tres discutidos, Manuel sostiene que es el EP3-3, ya que el mismo *"resume los conceptos matemáticos y económicos"* mientras que Ramón detalla más su respuesta y afirma que *"los tres son adecuados"* y sus argumentos se pueden apreciar en su correspondiente diagrama. Ahora bien, en el caso de Manuel no debe resultar extraño que vea en este problema mayor relevancia didáctica para abordar el tema de la regla de la cadena, ya que este profesor nos ha dejado ver a lo largo de la aplicación del instrumento su condición de matemático, en lo que respecta a la enseñanza de las matemáticas, aun para estos cursos.

Ya en García (2004) se abordó el tema de las creencias y concepciones del profesor de matemáticas en esta misma área y la influencia que ejercen en el docente los profesores que ellos mismos tuvieron durante sus estudios de formación. A esto hay que agregar el hecho de no haber recibido una formación mínima en el área de economía y la falta de voluntad, por parte del profesor, al cambio en el campo de la práctica docente. Esto último lo sacamos a colación porque, aun cuando Ramón tiene una formación similar a la de Manuel, el primero ha reconocido que los mismos estudiantes lo han inducido a cambiar su modelo de enseñanza.

Ahora bien, los datos aportados por las dos preguntas que faltan por analizar guardan estrecha relación y por eso los tratamos en un sólo grupo; por otra parte, las preguntas están relacionadas con la enseñanza y el currículo. Ramón, por ejemplo, se muestra consistente en sus respuestas, ya que reconoce que sigue un esquema tradicional para la enseñanza de la derivada y la regla de la cadena en particular.

Cuando indagamos sobre el esquema que siguen para introducir y desarrollar la regla de la cadena nos encaminamos a profundizar sobre el perfil del profesor. Al respecto, Manuel reconoce abiertamente que sigue *"el esquema tradicional"* donde *"desarrolla las propiedades de la regla de la cadena y hace aplicaciones"*, es decir, lo que hemos venido señalando como teoría+aplicaciones. Esto corrobora, una vez más, que el libro de texto y el programa oficial son la base para la planificación de sus clases.

En ningún momento pretendemos decir que tal estructura no sea conveniente para la enseñanza; en todo caso, lo que sí queremos dejar claro es la contradicción de Manuel, cuando en el seminario afirma que sigue una enseñanza similar a la que plantea el material en discusión y en el cuestionario afirma algo distinto. Más aun, en el mismo cuestionario también se contradice cuando afirma que este tipo de actividad, como la reflejada en el material, *"no"* le obliga a romper con su actual esquema de enseñanza. En todo caso, nos permitimos sospechar, en cierta medida, que esta posición que mantiene Manuel podría ser generada o propiciada por el seminario, en virtud de la presencia de otro colega de su propio departamento.

La situación de Ramón es totalmente distinta, puesto que reconoce que sigue una enseñanza tradicional, como lo refleja el diagrama correspondiente y que, además, lo ratifica en el momento de reconocer que este tipo de actividad *"sí obliga a romper mi esquema de exposición, porque lo que he hecho siempre es que explico primero el contenido matemático, sin hacer referencia alguna a la Economía"*. No obstante, lo relevante aquí no es la consistencia que muestra este profesor a lo largo de su discurso en el desarrollo de esta actividad, sino que el mismo se muestra ganado al cambio. Recordemos que él mismo dice que ha cambiado su modelo de enseñanza por sugerencia de los mismos estudiantes. Situación esta que no suele ser habitual en un profesor.

Una pregunta natural que puede surgir es ¿qué relación tiene todo esto con el CDC, por ejemplo? Para dar respuesta a esta interrogante recurrimos a las tres preguntas que resaltamos en esta parte del cuestionario y en las que se muestra evidente relación con el conocimiento sobre la enseñanza y el contenido curricular, en particular, con el "qué" y "cómo" enseña y su posición frente al material.

C-3 (Grupo B)
Los profesores de este grupo, cuando atienden al cuestionario en relación a la relevancia didáctica de los tres problemas discutidos, consideran que los problemas de los episodios EP3-1 y EP3-3 poseen características idóneas para trabajar la regla de la cadena y cubrir los objetivos propuestos para el curso; entre otras cosas, destacan la notación de Leibnitz como relevancia principal. Tan significativa resulta esta notación que Kenya *"optaría por el [EP3-2] pero incorporando la presentación de la regla de la cadena bajo la notación de Leibnitz..."*, ya que le parece adecuado para trabajar problemas económicos, no obstante, esta misma profesora advierte que trabaja la notación de Newton *"porque los estudiantes están más familiarizados con esta notación´´*.

El punto a destacar en este caso es la notación por la que se inclinan para desarrollar el tema de la regla de la cadena; los tres justifican esta notación tomando en cuenta a sus estudiantes, situación esta que viene siendo sistemática en las opiniones de los participantes en la mayoría de los casos; Elio, por ejemplo, sostiene que *"la notación de Newton les induce [a los estudiantes] al error"*. Es claro que si el marco referencial es el estudiante, podemos inferir la proximidad de los profesores con el estudiante, en otras palabras, estamos hablando de conocimiento del contenido sobre el aprendizaje.

Dejamos atrás la relevancia didáctica de los tres problemas discutidos y pasamos a estudiar el esquema utilizado por los participantes para introducir y desarrollar la regla de la cadena en el aula de clases. En este punto debemos subrayar la variedad con la que atienden los profesores esta parte del cuestionario y que es, en general, una característica sistemática en este grupo. Cuando nos referimos a variedad lo hacemos en el sentido de diversidad de puntos de vista y profundidad como abordan el tema los participantes.

Ya dijimos que Alexis, por ejemplo, atiende de forma escueta a las preguntas del cuestionario; por su parte Elio, atiende a estas preguntas con más interés y desarrolla sus respuestas, permitiéndonos ahondar en el tema objeto de estudio. Kenya, mientras tanto, es aún más cuidadosa en sus respuestas y sus reflexiones en el tema tratado suelen ser extensas y pormenorizadas, contribuyendo de esta manera a un estudio más profundo de sus comentarios. Curiosamente, esta característica de los tres participantes es similar al participar en el seminario.

Comenzaremos por comentar el esquema que sigue Alexis, que dicho sea de paso no presenta un esquema como tal, sino que inferimos de su respuesta que introduce la regla de la cadena de forma tradicional, utilizando la notación de Leibnitz y luego pasa al tema de aplicaciones. Sin embargo sostiene que este tipo de actividad no le obliga a *"romper del todo"* el esquema que sigue actualmente. Más allá de la contradicción en la que cae Alexis, lo relevante a destacar es el perfil que como matemático nos muestra este profesor en su labor docente. Ahora bien, cuando este participante advierte que trabaja las aplicaciones como los ejemplos EP3-1 y EP3-3, pero sin entrar en mayor detalle y tomando en cuenta los comentarios de episodios y cuestionarios anteriores, nos atrevemos a afirmar que este profesor posee poco dominio del contenido económico y es por ello que sus respuestas en esta materia las aborda de forma superficial.

Elio nos presenta un esquema formalista para el desarrollo de la regla de la cadena en el que enfatiza en la interpretación de *"los resultados obtenidos"*; es decir, un perfil formalista como docente. Pero lo interesante para nosotros, en este caso, no es únicamente el perfil de Elio en su labor como docente, sino también la visión que él tiene sobre el material como estrategia de enseñanza, puesto que considera que seguir una metodología como la que sugerimos no le obliga a romper con el esquema que actualmente pone en práctica en el aula de clases. Elio sostiene que enfoca sus clases de forma similar al material, aunque el esquema que sigue, tanto para la regla de la cadena como para el desarrollo del tema de la derivada, en general, es de corte tradicional y formalista, lo que refleja un grado alto de inconsistencia en sus respuestas.

Finalmente cerramos con Kenya, quien muestra un esquema pormenorizado sobre cómo desarrolla la regla de la cadena y que podemos ver en las **páginas 572** y **573**, en el que además se aprecia la estructura tradicional para la enseñanza de esta regla de derivación. Sin embargo, lo interesante a destacar de Kenya es el reconocer que al implementar en el aula de clases un material como el discutido, le obliga a romper con su esquema de enseñanza actual, cuestión esta que no fue reconocida por los otros dos miembros de este grupo. Conviene además recordar que de estos tres profesores, la única que ha mostrado conocimiento sobre la EBP es Kenya.

4.4. Análisis de la sesión 4

En la presente sesión se discuten y analizan dos problemas enmarcados en el análisis y la interpretación económico-matemática de la derivada, en tal sentido, son problemas un poco más exigentes que los discutidos en las sesiones anteriores. En estos problemas la contextualización económica juega un papel fundamental, ya que le da un peso significativo a las matemáticas como herramienta para entender y resolver problemas económicos.

En líneas generales, en ambos problemas se estudian las mismas componentes del CDC y sus respectivas subcategorías. Cerramos con estos problemas con el propósito de hacer un recorrido por lo discutido hasta ahora en las distintas sesiones.

4.4.1. Episodio 4.1: Análisis e interpretación Eco-Mat 1, contextualización, valores extremos, optimización

El valor de cierto cultivo de frutas (en dólares) es $\mathcal{V} = \mathcal{A}(1 - e^{-kI})$ donde $\mathcal{A}$, k son constantes positivas e I es el número de libras por hectárea de insecticida con que se fumiga el cultivo. Si el costo de fumigación está dado por $C = BI$, con B una constante (precio del insecticida).

Pregunta 1: Encuentre el valor de I que hace a $\mathcal{V} - C$ máxima.

Respuesta: Como $\mathcal{V} = \mathcal{A}(1 - e^{-kI})$, se tiene que $\mathcal{V} - C = \mathcal{A}(1 - e^{-kI}) - BI$.

Así,

$$\frac{d}{dI}(\mathcal{V} - C) = \mathcal{A}k(e^{-kI}) - B$$

Por lo tanto, para $I = \frac{-1}{k}\ln(\frac{B}{\mathcal{A}k})$, $\mathcal{V} - C$ alcanza un máximo.

Microepisodio 4.1.1: El problema aquí planteado exige más conocimientos que los planteados hasta el momento, en este caso se obliga al estudiante a manejar herramientas de análisis matemático, trabajar con funciones exponenciales, entre otras. Aún cuando el contexto es económico, todo el planteamiento y resolución del mismo (hasta aquí) es matemático.

¿Qué aportes tiene este tipo de problemas en el aprendizaje de los estudiantes?

Microepisodio 4.1.2: *¿Qué dificultades supone este tipo de problemas para el estudiante?*

Pregunta 2: ¿Para las siguientes condiciones, $0 < \mathcal{A}k < B$ y $0 < B < \mathcal{A}k$, cuál de las dos le da sentido a la situación anterior? Justifique su respuesta.

Respuesta: En el caso en que $0 < \mathcal{A}k < B$, se tiene que $0 < 1 < \frac{B}{\mathcal{A}k}$. Por lo tanto, $I < 0$. Aunque desde el punto de vista matemático, este resultado es válido; desde el punto de vista económico no lo es, puesto que I representa el número de libras por hectáreas.

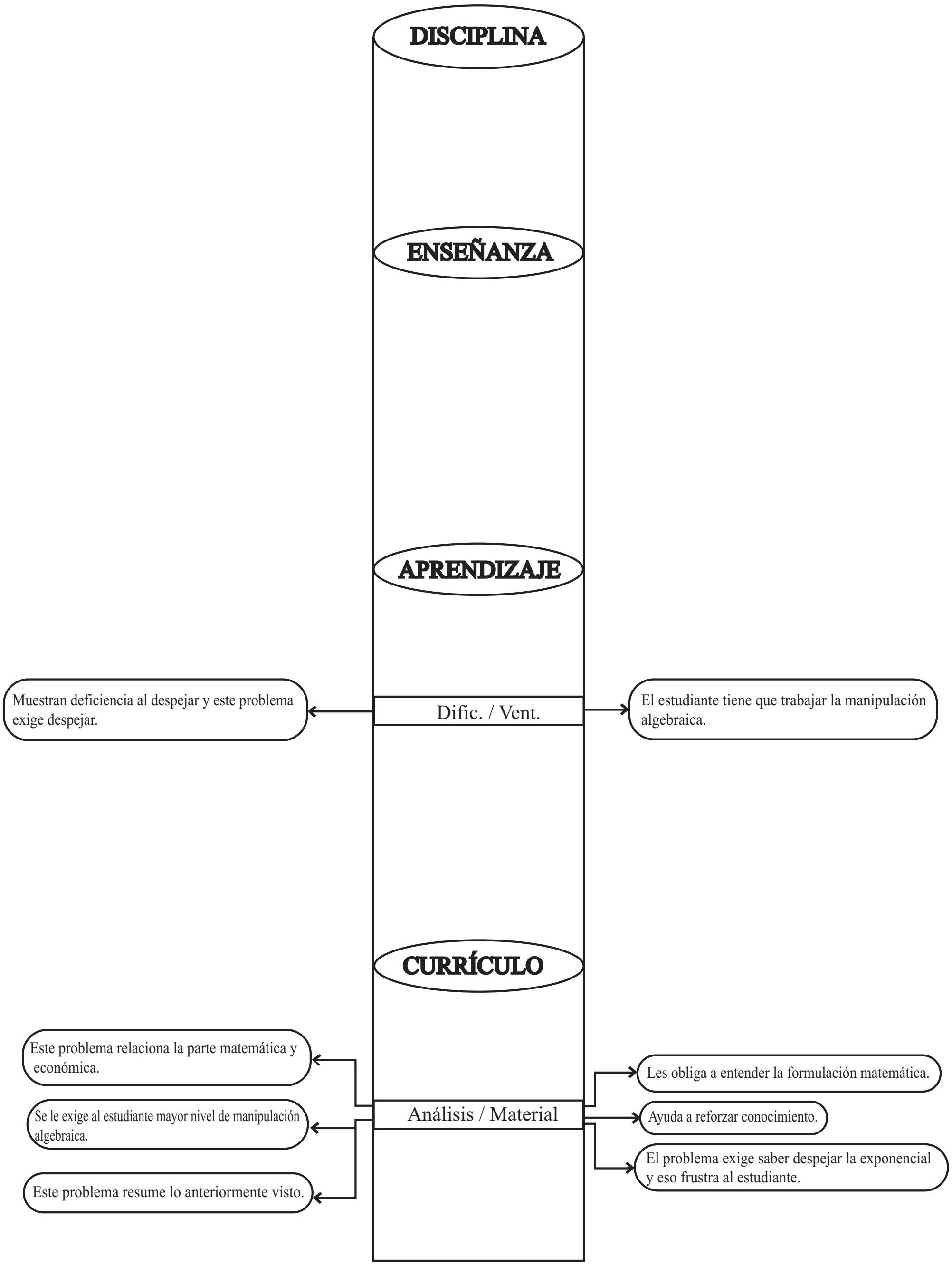
En el caso en que $0 < B < \mathcal{A}k$, se satisface $0 < \frac{B}{\mathcal{A}k} < 1$. Por lo tanto, $I > 0$ y esto tiene sentido tanto matemático como económico.

Microepisodio 4.1.3: En esta tarea aparecen condiciones algebraicas para estudiar el comportamiento de la función y su sentido dentro de dos contextos, no obstante, me he encontrado con profesores de cálculo que no comparten nuestra opinión, , en el sentido de relacionar ambos contextos para promover y consolidar el aprendizaje en los estudiantes.

Relacionar tareas teóricas contextualizadas de derivada y manipulaciones algebraicas, ¿qué incidencias tienen en el aprendizaje matemático y económico en los estudiantes?

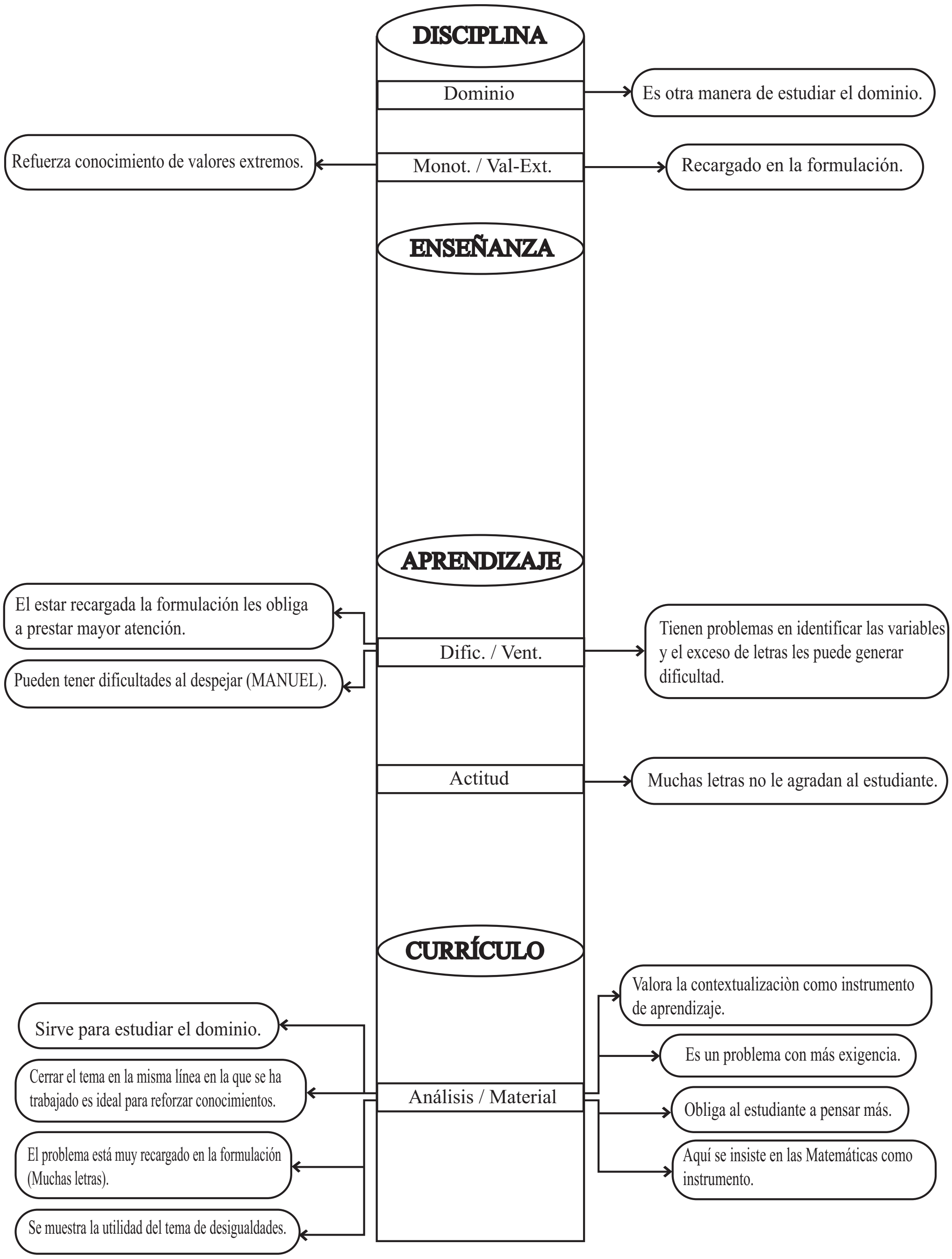
Grupo A

EP 4.1 MANUEL



Cuadro 4.19: Episodio 4.1 - Manuel

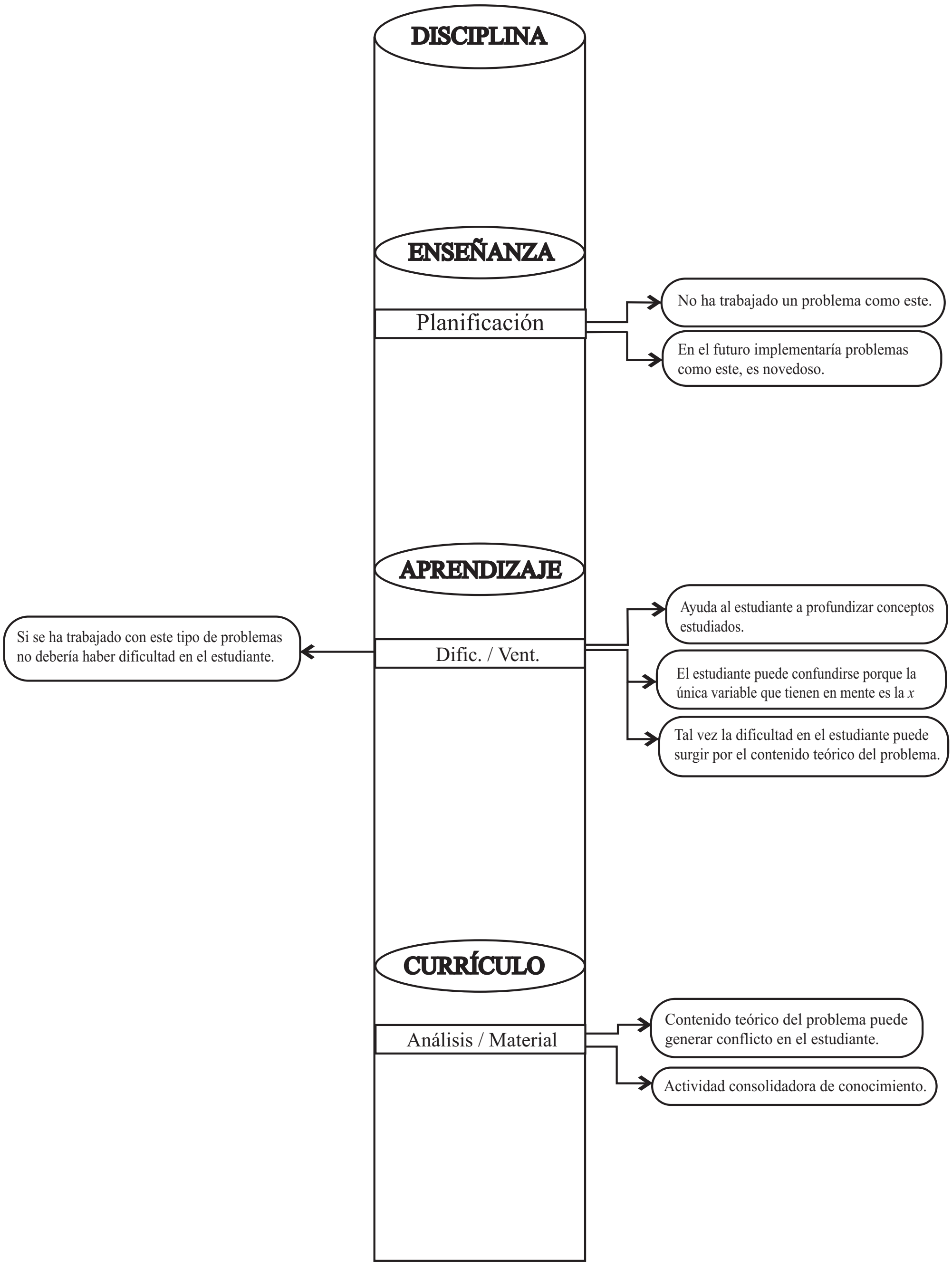
EP 4.1 RAMÓN



Cuadro 4.19: Episodio 4.1 - Ramón

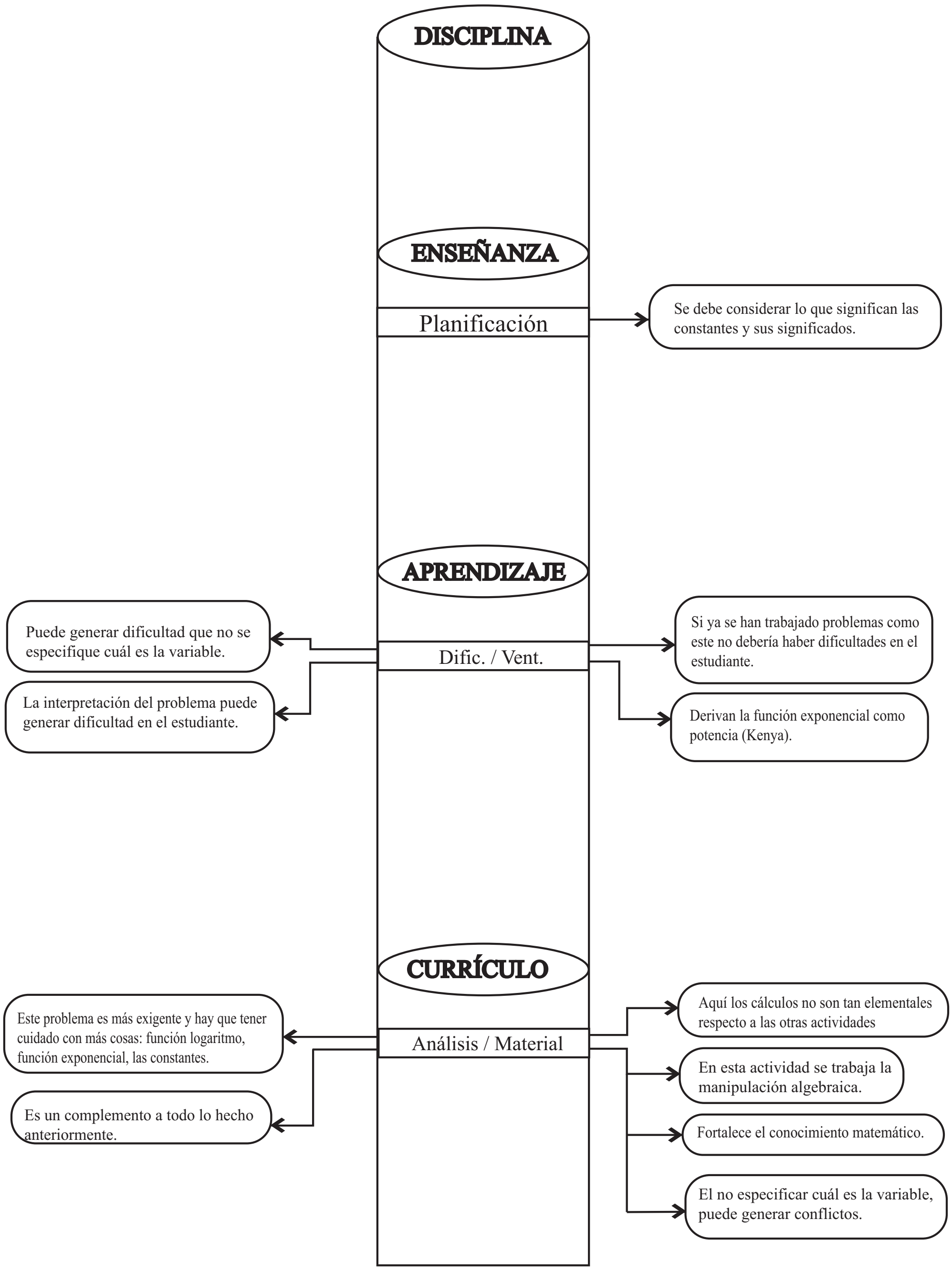
Grupo B

EP 4.1 ALEXIS



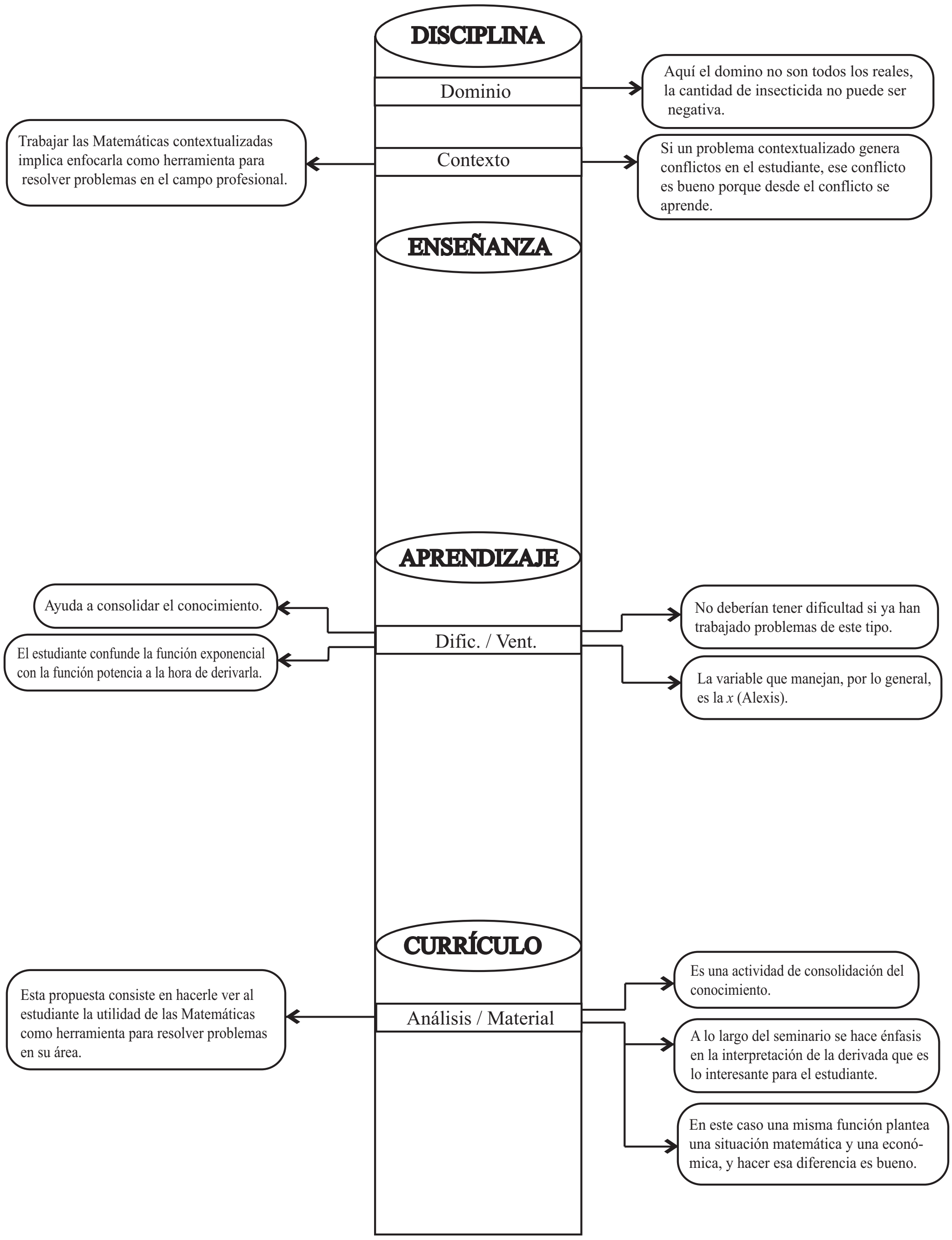
Cuadro 4.20: Episodio 4.1 - Alexis

EP 4.1 ELIO



Cuadro 4.20: Episodio 4.1 - Elio

EP 4.1 KENYA



Cuadro 4.20: Episodio 4.1 - Kenya

Resumen del análisis

Antes de pasar al análisis de este episodio comenzaremos por hacer una observación: como se puede apreciar, en las preguntas formuladas para la discusión en el seminario, las tres están enmarcadas en el estudiante o, mejor dicho, en el aprendizaje; por tal razón, el análisis va dirigido hacia el conocimiento sobre el aprendizaje y, por supuesto, hacia el conocimiento curricular, en particular, en lo que respecta al material objeto de la discusión.

En este sentido, recordamos que uno de nuestros objetivos consiste en *detectar hasta qué punto el profesor es consciente de las dificultades específicas de los estudiantes para un determinado tema matemático*; en este caso el problema en discusión requiere o exige para su estudio, tal como lo señaláramos en la parte introductoria del mismo, de un grado mayor de conocimiento respecto a los anteriores problemas discutidos.

Conocimiento sobre el Aprendizaje (Grupo A)
En atención a los comentarios surgidos durante la sesión, ambos profesores están de acuerdo en que este problema es más exigente que cualquiera de los anteriores, tanto por la formulación matemática como por el contenido económico. Ramón, en un principio, objeta el enfoque teórico del problema ya que al estar recargado de texto genera una actitud negativa en el estudiante, pero más adelante afirma que *"el estar recargada la formulación, les obliga a prestar mayor atención"* y, finalmente, concluye que *"cerrar el tema [de la derivada] en la misma línea en la que se ha trabajado es ideal para reforzar conocimientos"*.

Manuel, por su parte, observa que el problema exige al estudiante *"trabajar la manipulación algebraica"*; en particular, se refiere al caso concreto en el que se tiene que *"despejar el argumento de la función exponencial"*; en relación a este punto, el profesor en cuestión afirma que esto *"les frustraría"*, ya que los estudiantes *"muestran deficiencia al despejar"*, punto en el que también coincide Ramón.

Aquí hay dos subcategorías que se conjugan en las reflexiones de ambos profesores, estas son, dificultades/ventajas y actitud del estudiante frente a un problema tipo. En tal sentido, conviene recurrir a opiniones de ambos profesores derivadas del seminario y los cuestionarios, ya que han dejado ver que el esquema de trabajo que llevan al aula de clases dista de forma significativa del esquema y el contenido del material de discusión. Ya mencionamos en el marco teórico, pág. 64, que el estudiante de universidad está acostumbrado a seguir una enseñanza tradicional (Zabalza, 2003), situación que es totalmente aplicable en el contexto en el que se desarrolla este trabajo, lo que significa que un problema de esta naturaleza y, sobre todo, con el tratamiento que nosotros le damos, al parecer, estos profesores no lo llevan al aula de clases, aun cuando son problemas tomados de los libros de texto sugeridos en los programas oficiales o, en todo caso, en algún momento los trabajaron y ahora da la impresión que no lo hacen.

Lo anterior lo sacamos a colación puesto que nosotros entendemos el proceso de aprendizaje, de la siguiente manera, *"...el aprendizaje ocurre a través de procesos activos en un contexto y con una actividad..."* (Climent, 2002, p. 94), en nuestro caso estaríamos hablando del contexto matemático-económico y de la EBP como *"actividad"* o estrategia metodológica de enseñanza. En otras palabras, nosotros apostamos por una enseñanza dinámica, en la que el estudiante juegue un rol protagonista y que se sumerja directamente en la contextualización matemático-económica.

En resumen, lo que pretendemos destacar de todo esto es que el aprendizaje que se puede generar en los estudiantes depende tanto de la actitud como de las dificultades que puedan generar un problema en particular. Está claro que los profesores tienen conocimiento sobre sus estudiantes, aun si consideramos que tanto la actitud como las dificultades que puedan generar problemas con características y enfoque particulares obedece, en todo caso, al momento en el que se trabajan los mismos; es decir, si desde el inicio de la carrera se abordasen problemas de esta naturaleza, probablemente la posición del estudiante sería otra. En tal sentido, esto nos conduce a hablar de la formación del profesor.

Esta formación debe ir en las dos direcciones de la cita reciente de Climent (2002), es decir, *contexto* y *actividad*; en cuanto a lo primero, apostamos por una formación básica en materia de economía, que permita al profesor de matemáticas de universidad manejar los fundamentos económicos desde el punto de vista de las matemáticas. De igual manera apostamos por una formación del docente en materia de estrategias didácticas que involucren al estudiante en una labor dinámica, donde el aprendizaje de las matemáticas esté fuertemente asociado al campo de la economía.

En otro orden de ideas, tanto Manuel como Ramón destacan la importancia de la *manipulación algebraica* y las *desigualdades* cuando abordamos el tema del aprendizaje matemático-económico; sin embargo, es Ramón quien entiende el trabajo con las desigualdades como una *"herramienta"* matemática para estudiar, por ejemplo, el dominio de una función desde el punto de vista económico. Sin embargo, ambos profesores poco aportan con sus respuestas y simplemente entienden esta tarea como actividad de consolidación del aprendizaje, pero no hablan de las incidencias (positivas o negativas) en el aprendizaje mediante la discusión de un problema como este cuando se estudian cada una de las desigualdades. En todo caso, sólo se limitan a estar de acuerdo con la actividad del material. De acuerdo con estos comentarios, nos permitimos deducir que estos dos profesores no trabajan un problema como el de la discusión o similar a éste; sin embargo, ambos docentes han manifestado que trabajan problemas de aplicaciones a la economía en el aula de clases, pero de los discutidos hasta ahora, ninguno de ellos ha expresado que trabaje con alguno de estos problemas o similares.

Lo relevante a destacar de todo este último comentario tiene que ver con la actitud de estos profesores frente a cada uno de los problemas discutidos, tanto por su contenido como por la estructura metodológica seguida en cada uno de ellos. La aprobación del material por parte de cada uno de estos profesionales no sólo nos estimula a continuar con el desarrollo del mismo, sino que, además, demuestra que están abiertos a un proceso de cambios en lo que respecta al ejercicio de su labor docente.

Conocimiento sobre el Aprendizaje (Grupo B)
Si atendemos a los tres diagramas de cada uno de los profesores, sus opiniones se centran en las dificultades que implica trabajar con un problema como el que está en discusión, sin embargo hay que resaltar que también se les pregunta sobre los aportes o incidencia de un problema como este en el aprendizaje de los estudiantes; aun así, únicamente lo entienden como actividad consolidadora del conocimiento.

Dentro de las dificultades específicas que supone para el estudiante trabajar un problema como el del EP4-1, enumeramos las siguientes, en las que coinciden al menos dos profesores en cada una de éstas:

1. El que no aparezca de forma explícita la variable independiente de la función, por lo general es la *"x"* con la que trabajan.
2. El estudiante confunde la función exponencial con la función potencia a la hora de derivar.
3. El contenido teórico del problema.

Esto nos revela cuánto conocen los profesores a sus estudiantes, lo cual forma parte de lo que hemos llamado conocimiento sobre el aprendizaje; pero profundicemos un poco más en las opiniones de los participantes, en especial, en lo dicho por Alexis, quien reconoce abiertamente no haber trabajado problemas de esta naturaleza en cursos de cálculo para economía, aunque sí para estudiantes de ingeniería; él fundamenta sus argumentos sobre supuestos y en ningún momento se derivan de la práctica docente. Los otros dos profesores aun cuando no dicen que no trabajan este tipo de situaciones problemáticas en sus clases, sospechamos que, en virtud de los episodios y cuestionarios anteriores, no las implementan, hemos visto que ellos siguen una enseñanza clásica (teoría+aplicaciones) y en el caso de Elio, ya este profesor manifestó francamente que su formación en el área económica es poca.

Si volvemos nuevamente al primer y tercer punto, donde se hace mención al tema de la variable y el contenido teórico del problema, respectivamente, podemos aproximarnos al *"qué"* enseñan estos profesores a sus estudiantes, ya que de acuerdo con opiniones como las de Alexis (y que comparte Kenya): *"...la única variable que tienen en mente [los estudiantes] es la x..."*, esto nos lleva a suponer que esto ocurre porque es la <u>única</u> letra utilizada por estos profesores o, más aún, es la única que han trabajado los estudiantes desde el primer curso. En este caso, volvemos a hablar del aprendizaje en el sentido de Climent (2002), es decir, contexto y actividad. Si nos referimos a lo primero, no queda duda que el hecho de que el estudiante maneje una única letra como variable muestra lo reducido del contexto en el que se trabaja; cuestión esta que incide en lo segundo, puesto que al trabajar en un contexto reducido, suponemos que la actividad desarrollada en el aula de clases para lograr un aprendizaje efectivo también lo es.

Conocimiento sobre el Currículo (Grupo A)
Aun cuando los comentarios relacionados con el material son todos favorables, hay una opinión de Ramón que nos da a entender que un problema como el EP4-1 no lo trabaja en clase; él afirma que *"el problema está muy recargado en su formulación"*, refiriéndose a que tiene *"muchas letras"* y eso genera una actitud negativa en el estudiante. Sobre este punto volvemos a señalar que nuestra propuesta va dirigida al trabajo con este tipo de problemas desde el inicio de carrera. Sin embargo, lo que hay que destacar de este profesor es que conoce la posición del estudiante frente a situaciones problemáticas como la discutida; aun así no lo descarta del todo, de lo que podemos inferir que no está cerrado a un enfoque como el propuesto por nosotros, algo característico en este profesor a lo largo de la aplicación del instrumento.

Ahora bien, pasando a los aspectos didácticos que los participantes destacan positivamente del material, señalamos lo siguiente: ambos observan que este problema exige más, desde el punto de vista cognitivo, en relación con los anteriores a la hora de abordarlo; en consecuencia, Ramón afirma: *"...obliga al estudiante a pensar más..."*, *"...se insiste en las Matemáticas como instrumento..."*, pero al mismo tiempo, Manuel sostiene que *"...ayuda a reforzar el conocimiento..."*, *"se le exige al estudiante mayor nivel de manipulación algebraica..."*.

Cuando un profesor toma la decisión de incluir un problema dentro de su planificación docente, es porque éste ve características de distinta índole en todo lo que significa el proceso de enseñanza-aprendizaje. En particular, nosotros consideramos que el profesor de matemáticas de universidad para carreras como Economía o Administración de Empresas, siempre que considere la contextualización como herramienta didáctica, tiene que tener presente la interdisciplinariedad. En el caso de Ramón y Manuel, ambos se limitan a resaltar el contenido matemático y lo que ello supone para el estudiante, dejando a un lado el tema económico.

Si ponemos la lupa en estas opiniones o en cualquier otra de las que aparecen en los diagramas respectivos, se puede apreciar que casi todas están asociadas al estudiante, este tipo de argumentación viene siendo recurrente a lo largo de la discusión del material. Resulta relevante para nosotros el hecho de que los comentarios se fundamentan en el estudiante, ya que de manera indirecta muestran el conocimiento que tienen ambos profesores sobre sus alumnos. Hecho relevante dentro del CDC y en particular, a la hora de la planificación de la clase, por ejemplo. Zabalza (2003) señala que los profesores toman en cuenta para la planificación de sus clases, entre otras cosas, las conjeturas que estos se hacen en torno a sus estudiantes y, en general, sobre la información que dispone el docente sobre sus estudiantes.

Conocimiento sobre el Currículo (Grupo B)
Tal como lo reflejan los diagramas de estos tres profesores, el principal aporte de este problema y en eso coincide el grupo en pleno, tiene que ver con el aprendizaje del estudiante; por ejemplo, Kenya lo entiende como *"...actividad de consolidación del conocimiento"*. Sin embargo, Alexis y Elio, aun cuando se inclinan a favor de esta profesora, ellos ponen reparo en cuanto al contenido teórico del problema, aunque el primero dice que si se ha trabajado a lo largo del tema con esta metodología, el estudiante no debería presentar mayores dificultades. Por su parte, Elio, para evitar algún tipo de conflicto en el estudiante, matizaría el problema cambiando algunas de las constantes por valores numéricos y luego, en una discusión posterior, lo dejaría tal como está, entendiendo que el cambio de constantes arbitrarias a números específicos le ofrecería más seguridad al estudiante en una primera discusión.

El atender a las sugerencias de Elio nos lleva a una revisión profunda del material, ya que uno de nuestros propósitos, como es sabido, consiste en llevar al aula el presente material. Él también añade que el estudiante puede presentar problemas con la variable utilizada, *"...aquí no está del todo claro cuál es la variable, lo dice en palabras pero no lo especifica..., ...pero me parece que deberías escribir $\mathcal{V}(I)$ en lugar de $\mathcal{V}$, eso ayudaría al estudiante y no cambiaría en mucho el problema"*.

En resumen, podemos apreciar que este profesor va de lo global a lo local, de lo general a lo específico y con su aporte, nos permitimos afirmar que al tener un conocimiento profundo y pormenorizado del estudiante, ello nos permite replantearnos todo lo que conforma la estructura y desarrollo del esquema de enseñanza que nos proponemos llevar a la práctica en el aula mediante el material.

En este mismo orden de ideas y refiriéndose a la idea del material en discusión, Kenya afirma que el mismo muestra la *"...utilidad que tiene la matemática como herramienta para resolver problemas de su campo profesional, pero haciéndole ver la diferencia que hay entre una situación real y una situación que es modelizada por una función matemática..."*; lo reflejado aquí por Kenya realza las características didácticas del material en el escenario hacia el cual nosotros apuntamos, es decir, la enseñanza de las matemáticas en el contexto económico. Por lo tanto, queda en evidencia el conocimiento del currículo por parte de esta profesora.

4.4.2. Episodio 4.2: Análisis e interpretación Eco-Mat 2, contextualización, valores extremos, optimización

Sea Q la cantidad que minimiza el costo total T debido a la obtención y almacenamiento del material por cierto período. El material demandado es de 10.000 unidades por año; el precio al costo del material es de \$1 por unidad; el costo de volver a llenar la existencia de material por orden, sin importar el tamaño Q de la orden es del 12,5 % del valor promedio de las existencias($Q/2$).

Pregunta 1: Pruebe que $T = 10{,}000 + \frac{250{,}000}{Q} + \frac{Q}{16}$.

Respuesta: En efecto,

$$\begin{aligned} 10{,}000 &= 10{,}000 \times 1 \\ \tfrac{250{,}000}{Q} &= \tfrac{25\times 10{,}000}{Q} \\ \tfrac{Q}{16} &= \tfrac{12{,}5}{100} \times \tfrac{Q}{2} \end{aligned}$$

Microepisodio 4.2.1: Aún cuando en la tarea, se le pide al estudiante una demostración, la actividad se centra en generar un modelo a partir de unos datos establecidos.

¿Cómo gestionas o gestionarías tus clases ante actividades como estas, en las que es frecuente que los estudiantes presenten dificultades para visualizar y llegar al modelo solicitado y en consecuencia, construir un conocimiento del contenido en ambos contextos (económico y matemático)?

Pregunta 2: Encuentre el tamaño del lote económico y el costo total T correspondiente a tal valor de Q.

Respuesta: Dado que Q es la cantidad que minimiza a T, calculamos la derivada de T respecto a Q; es decir,

$$T' = -\frac{250{,}000}{Q^2} + \frac{1}{16}.$$

Así, $T' = 0 \Leftrightarrow Q = \pm 2{,}000$, pero nos quedamos con $Q > 0$ por estar hablando de un material como libros, herramientas, etc.

De lo anterior tenemos que el costo total, T, se minimiza en $Q = 2{,}000$ dólares y el valor de este costo es de $T = 10{,}250$ dólares.

Microepisodio 4.2.2: A estas alturas del tema de derivada, cuando ya se supone que los estudiantes han trabajado y discutido diversos problemas de este tema y en ambos contextos, generalmente los estudiantes tienden a cometer ciertos errores y en algunos casos (después de una discusión con profesores de otra universidad), la actitud de los estudiantes es de rechazo a este tipo de problemas.

En atención a la experiencia de ustedes, ¿cuál es su opinión en estas dos líneas (errores y actitud)?

Pregunta 3: Determine el costo total cuando cada orden es fijada en 2.500 unidades.

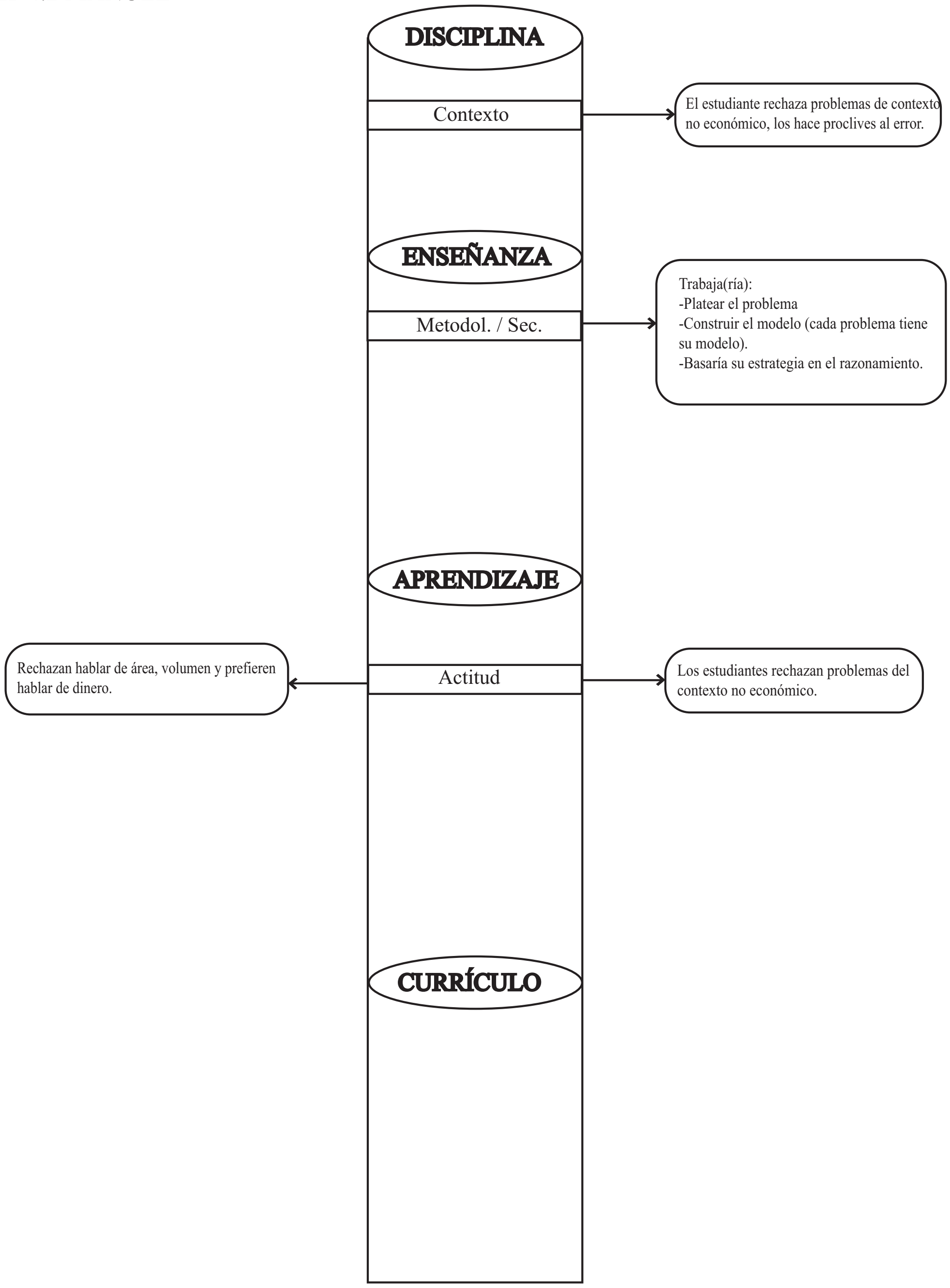
Respuesta: En este caso, sólo basta con calcular la imagen de T para $Q = 2{,}500$; así, el costo total cuando cada orden es fijada en 2.500 unidades es de $T = 10{,}256, 25$.

Microepisodio 4.2.3: Si observamos con detalle, esta tarea posee un mínimo de dificultad respecto a las dos anteriores.

Ya en el cierre del tema de derivada, ¿consideran acertado realizar esta pregunta en una evaluación o creen que puede conducir al estudiante a un error; como por ejemplo, que éste calcule la derivada de la función y la evalúe en 2.500?

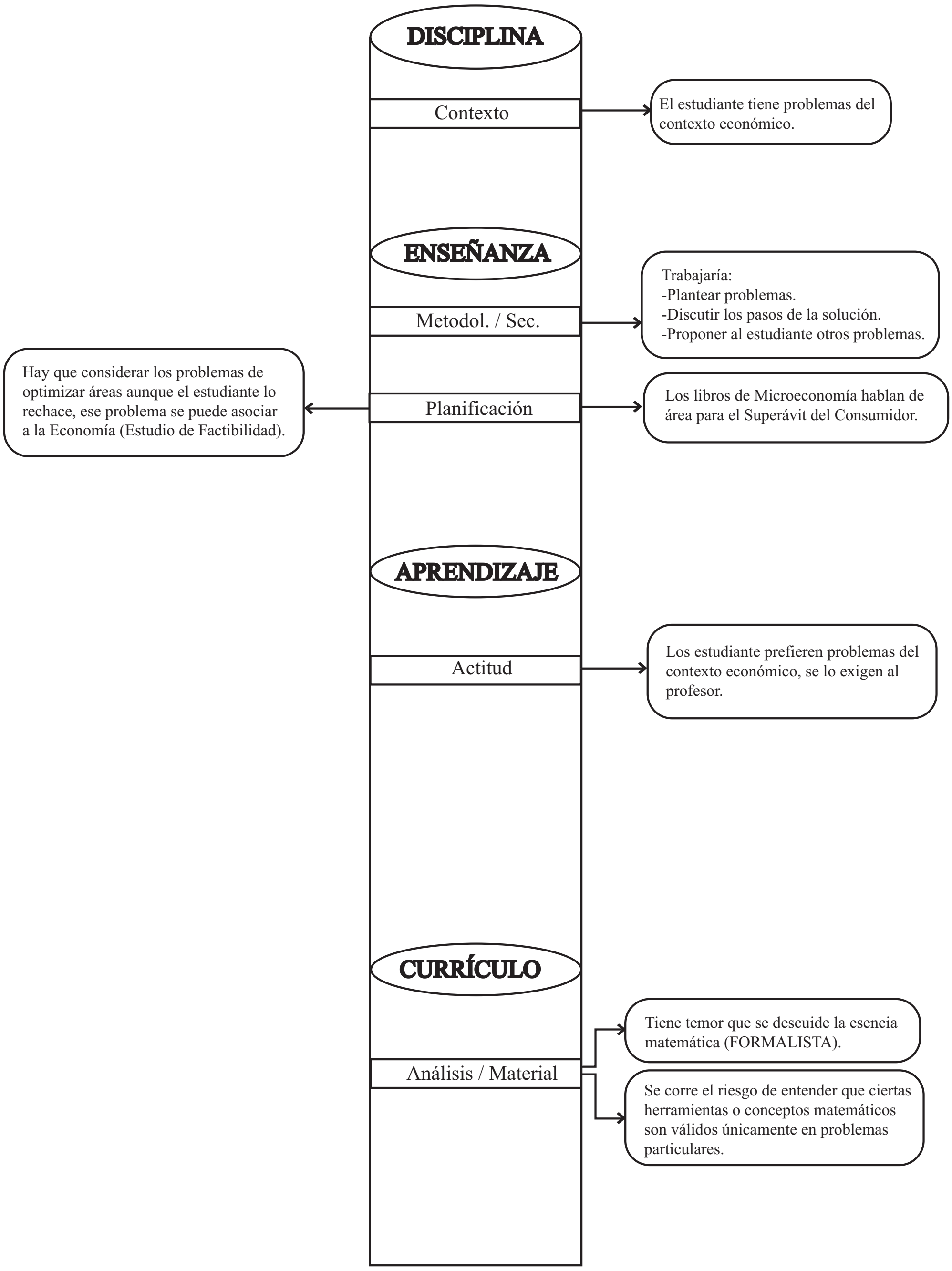
Grupo A

EP 4.2 MANUEL



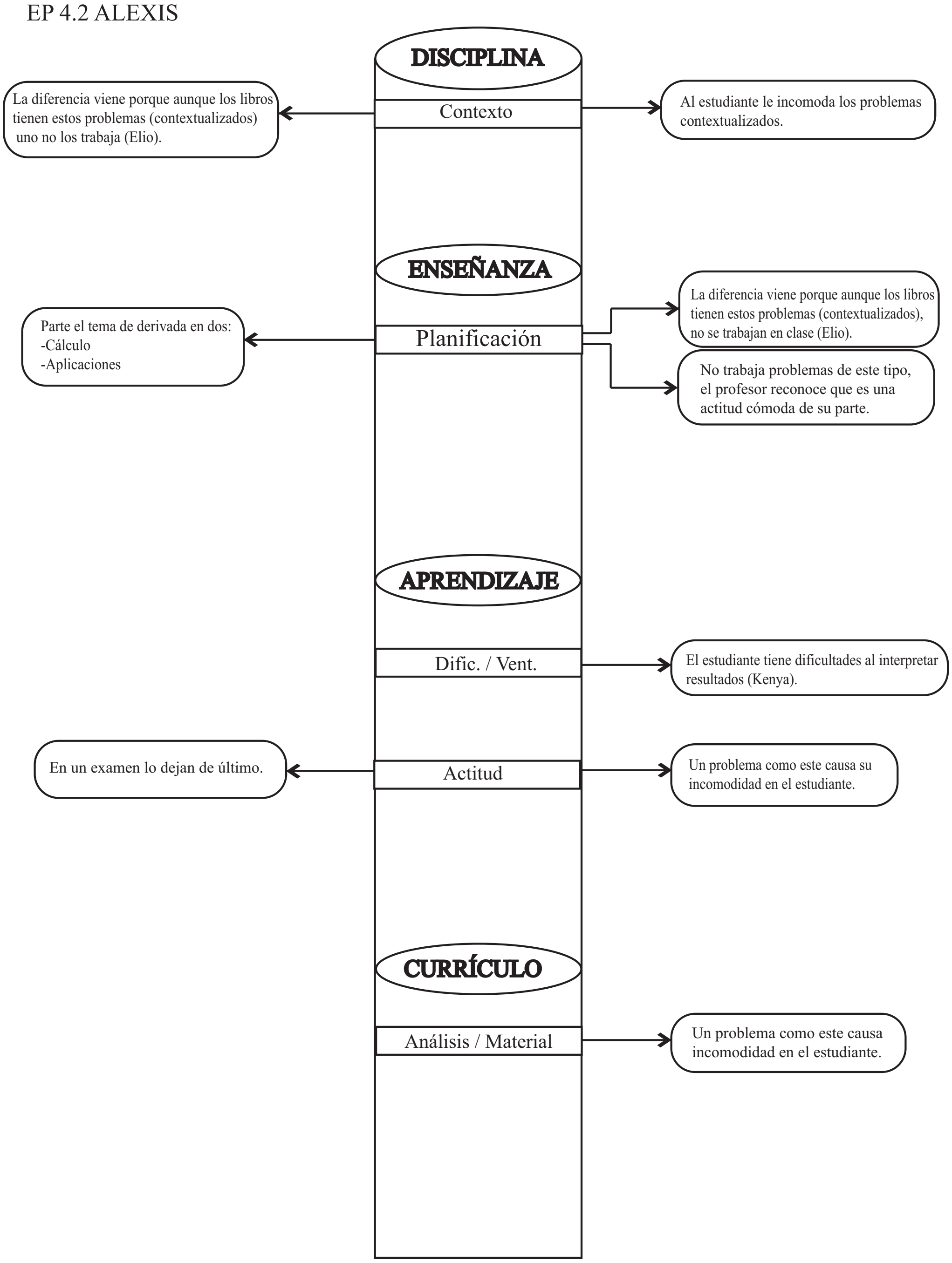
Cuadro 4.21: Episodio 4.2 - Manuel

EP 4.2 RAMÓN



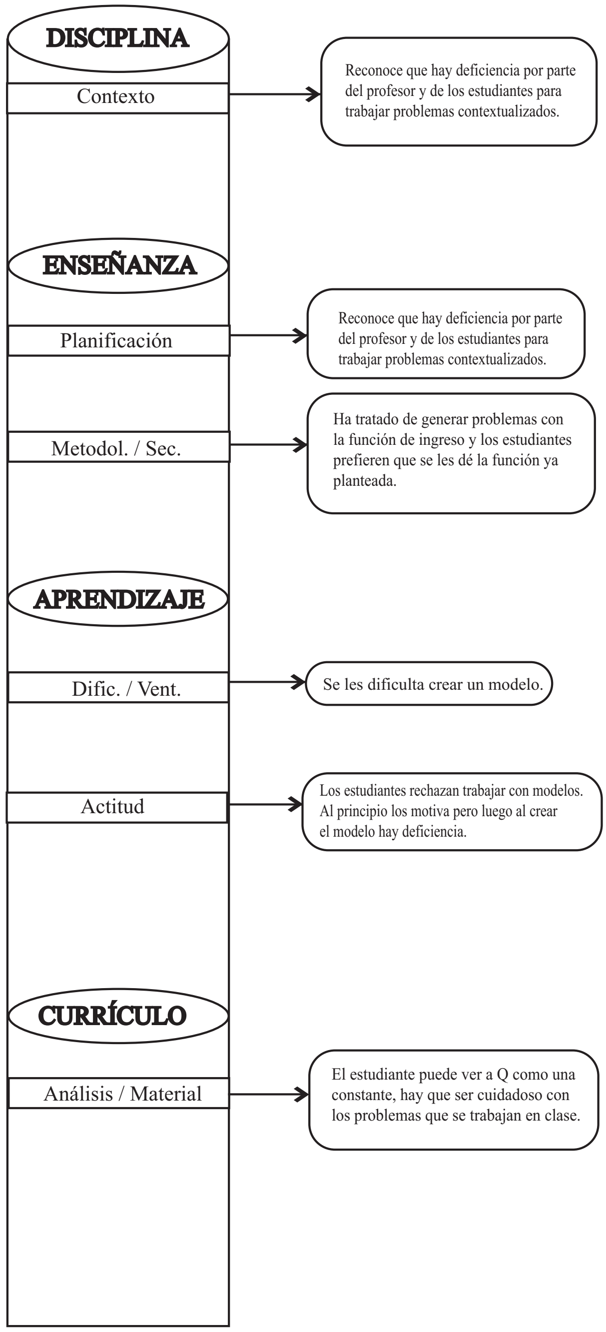
Cuadro 4.21: Episodio 4.2 - Ramón

Grupo B



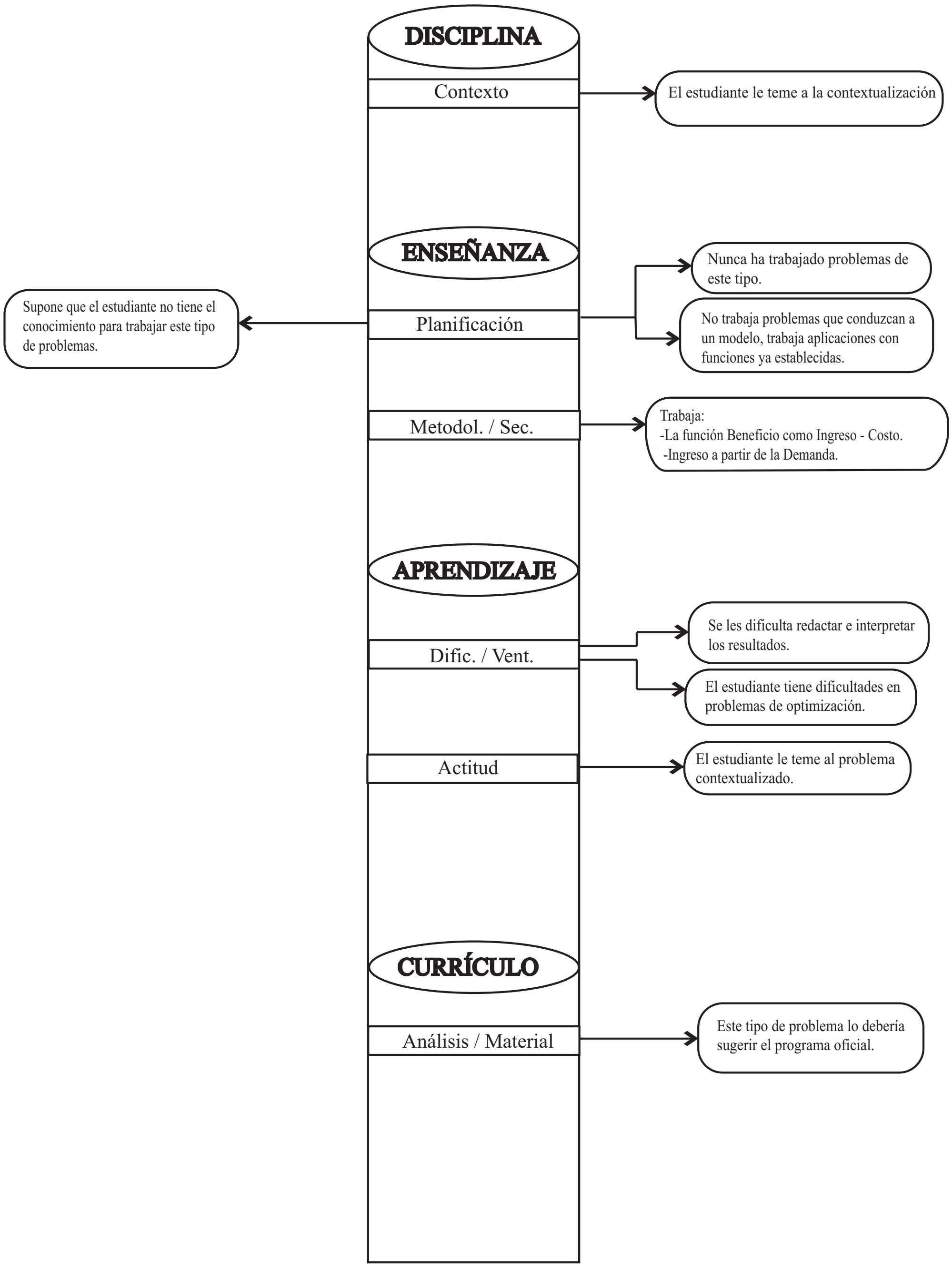
Cuadro 4.22: Episodio 4.2 - Alexis

EP 4.2 ELIO



Cuadro 4.22: Episodio 4.2 - Elio

EP 4.2 KENYA



Cuadro 4.22: Episodio 4.2 - Kenya

Resumen del análisis En este último problema (EP4-2) se abordan dos componentes del CDC de forma directa, estas son: enseñanza y aprendizaje; de manera indirecta se contempla el conocimiento sobre aspectos de orden curricular. En el caso de la enseñanza, ahondamos en lo que respecta a la gestión de la clase ante un escenario particular; mientras que en el tema del aprendizaje nos proponemos indagar en un aspecto ya discutido en sesiones anteriores, es decir, el conocimiento del profesor relacionado con la actitud del estudiante ante un problema matemático, pero contextualizado en el ámbito económico. En todo caso, partimos del hecho siguiente: existen modelos matemáticos que aparecen en los libros de cálculo diferencial para ciencias económicas como $C_T = C_V + C_F$ (Costo total = Costo variable + Costo fijo), $U = I - C$ (Utilidad = Ingreso - Costo), etc., estos modelos además de ser básicos, aparecen de manera frecuente en todo el ámbito económico. Es por ello que consideramos como significativo que el profesor tome en cuenta este tipo de situaciones para llevarlas al aula y, de esta manera, generar una discusión con sus estudiantes, buscando fortalecer su conocimiento en el área de su formación.

El abordar el tema de la gestión de la clase y en particular, la gestión para la enseñanza de un modelo matemático que represente una situación económica, nos permite indagar en el conocimiento que tiene el profesor en esta materia, sobre todo si tomamos en cuenta que hemos venido hablando de una enseñanza de las matemáticas contextualizada en la economía.

Conocimiento sobre la Enseñanza (Grupo A)
Si el lector atiende a los diagramas respectivos de cada uno de los participantes y observa la categoría de *enseñanza* y dentro de ésta, lo relacionado con *metodología/secuenciación*, puede observar en el encabezado del resumen de Ramón aparece la palabra: *trabajaría*, mientras que en el de Manuel dice: *trabaja(ría)*, puesto que no nos queda claro si realmente lo trabaja. Comenzamos nuestro análisis con esta introducción ya que en ningún momento el profesor Ramón dice que este tipo de situación la *trabaja* de una manera particular; mientras que en el caso de Manuel sostiene que es un problema básico de economía, pero no recuerda alguno en particular. Sin embargo, lo relevante en este caso no es precisamente el hecho de que lo trabajen o no, sino cómo abordarían en el aula de clases una situación como la de la discusión.

En líneas generales, ambos esquemas tienen similitud, pero lo que queremos resaltar de todo esto son dos puntos relacionados con el conocimiento sobre libros de texto, aun cuando no sea tema específico de este trabajo, y el de vincular la gestión de un problema eminentemente matemático al contexto económico. Ramón fundamentaría su gestión siguiendo el problema clásico de *"...parcelar un área con la máxima cantidad de alambre que implique el mínimo costo..."*, *"...exponer varios de esos problemas, dos o tres problemas de esos bajo, la esperanza de que ellos vean cuál es el mecanismo..."*, aunque hace la observación de que los problemas deben ser contextualizados en el área económica. La justificación de trabajar en el aula el problema de *optimizar áreas* lo asocia en el campo económico con el *"estudio de factibilidad"*. En este caso, no sólo destacamos el conocimiento del profesor en conceptos vinculados al área económica, sino que además nos muestra una conexión entre dos conceptos que pueden ser estudiados mediante un problema con características similares.

No obstante, no es lo único que puede resaltarse de este profesor, puesto que el poseer un conocimiento *dual*, como lo hemos llamado en el marco teórico, permite apuntar hacia la EBP como estrategia metodológica de enseñanza de las matemáticas en carreras de ciencias económicas, ya que es una característica fundamental a la hora de implementar esta herramienta didáctica.

En otro orden de ideas, sacamos a colación una discusión que surge entre estos dos profesores, motivada por la importancia que le da Ramón al estudio del área de una figura geométrica en el caso de cursos para estudiantes de ciencias económicas, mientras que Manuel sostiene que el estudio de ese tema en estos cursos *"distrae"* al estudiante. La argumentación de Ramón es más sólida y consistente puesto que sostiene que el estudio del *Superávit del Productor* y del *Consumidor* son interpretaciones de la integral definida, es decir, del área bajo la curva. Más aún, este último profesor, cita un libro texto de microeconomía (Pindyck & Rubinfeld[4]), en el que de manera explícita se habla de este caso. Así, queda demostrado el conocimiento de este profesor en el área económica, sobre libros de texto (curricular) y en materia de conocimiento dual; características todas ellas que conforman el CDC del profesor de matemáticas en las carreras objeto de estudio.

Conocimiento sobre la Enseñanza (Grupo B)
De estos tres profesores, sólo Kenya y Elio reconocen trabajar problemas parcialmente similares al planteado, aunque Kenya advierte que no trabaja problemas que conduzcan a un modelo, ella adopta la modalidad de trabajar con problemas de aplicación a la economía donde las funciones ya vienen formuladas en el problema; por ejemplo, ella hace uso de modelos como "$B = I - C$" y trabaja con el *"Ingreso a partir de la Demanda"*. Por su parte, Alexis manifiesta abiertamente que no trabaja este tipo de problemas, reconociendo además que es *"una actitud cómoda"* de su parte.

Aun así, lo que verdaderamente nos llama la atención son los argumentos o, en todo caso, la justificación de estos profesores para no abordar este tipo de problemas en el aula de clases. En el párrafo anterior mostramos la posición de Alexis en relación con la no utilización de estos problemas, aun cuando él mismo señala que los libros de texto incluyen problemas de esta naturaleza. Kenya por su parte, considera que *"el estudiante no tiene el conocimiento para trabajar este tipo de problemas"* y descarta de entrada la posibilidad de incluir estos problemas. Finalmente cerramos con el argumento de Elio puesto que

[4]El libro texto de Pindyck, R. y Rubinfeld, D. de Microeconomía es el principal libro de texto recomendado en el curso de Microeconomía para las carreras de Economía, Administración de Empresas y Contaduría Pública en la ULA.

consideramos que los comentarios de los dos anteriores se perfilan hacia lo sostenido por éste, cuando reconoce que hay deficiencia por su parte y de los estudiantes para trabajar problemas contextualizados.

Haremos una pausa para recurrir a episodios anteriores donde el mismo Elio manifiesta su poca formación en el área económica, también Alexis y Kenya han dejado ver su poca formación en economía, pero con menos firmeza. Por otra parte, cuando estos profesores nos han mostrado sus esquemas de trabajo para la enseñanza de la derivada, no han sido precisos a la hora de hablar de aplicaciones. Ahora bien, ya hemos señalado que el no tener formación en economía no se puede ver como un punto en contra siempre que se lleve una enseñanza de las matemáticas de forma tradicional; sin embargo, si el planteamiento de la enseñanza se enmarca en la EBP, la interdisciplinariedad cobra un papel fundamental y, en consecuencia, se dificultaría el planteamiento de problemas matemáticos contextualizados en la economía con fines didácticos.

A lo anterior conviene añadir que una nueva dimensión a ser tomada en cuenta de cara a mejorar la enseñanza universitaria y considerarla dentro de la *planificación* del curso, es la *"contextualización del proyecto"*, en el sentido de enfocarlo según el *"perfil profesional"*, *"el plan de estudios"*, entre otros (Zabalza, 2003).

Antes de pasar al análisis relacionado con el conocimiento sobre el aprendizaje, nos permitimos hacer una introducción al mismo por las características del problema. El conocer la *actitud* del estudiante frente a un tema en particular, definitivamente permite marcar la diferencia a la hora de llevar al aula el contenido del mismo con todo lo que ello implique, es decir, metodología didáctica, contenido de la materia, material de apoyo, entre otros. En parte la actitud va en línea directa con la motivación que pueda tener el estudiante, Alonso (2001, p.79) sostiene que *"la ausencia de una motivación adecuada constituye, por ello, un problema en todos los niveles escolares, incluido el universitario"*. Para nosotros, ambos términos, actitud y motivación, están fuertemente relacionados, sobre todo en la dirección: *motivación* $\rightarrow$ *actitud*. Esto quiere decir, que si el profesor conoce al estudiante puede generar una actitud favorable en este último, por medio de la motivación.

Conocimiento sobre el Aprendizaje (Grupo A)

En referencia a la actitud de los estudiantes frente a este tipo de problemas, ambos profesores manifiestan que al trabajar con "problemas de aplicaciones", los estudiantes rechazan los que **no** están relacionados con las ciencias económicas. Ramón manifiesta que *"la actitud siempre va a ser positiva, siempre y cuando las aplicaciones sean de su área, de economía..."*, mientras que si se trabaja con problemas que no son de economía, Manuel afirma que los estudiantes *"...buscan hablar con el profesor para evitar este tipo de problemas..."*. Tal actitud se pone de manifiesto en el aprendizaje, un ejemplo de ello son lo errores que suelen cometer los estudiantes ante situaciones problemáticas. Sobre este tema, Manuel afirma que en caso de que el problema sea de economía, los errores suelen ser mínimos, es decir, *"...descuido en un signo..."*, identificación incorrecta de una función, *"...pero siempre relacionado con la matemática..."*; por otra parte, este profesor concluye que generalmente no cometen errores relacionados con la parte económica.

De todo esto nos permitimos inferir que el estudiante tiene una fuerte incidencia en todo lo que conforma el desarrollo de la clase, tanto en la planificación de ésta como en el desarrollo y gestión de la misma. El estudiante es tomado en cuenta en todo momento para la toma de decisiones del profesor en materia de enseñanza.

Conocimiento sobre el Aprendizaje (Grupo B)
Respecto a la actitud de los estudiantes, Kenya afirma que los estudiantes *"...sienten más temor hacia problemas de este tipo que hacia problemas de cálculo..."*, de igual manera, Elio y Alexis también advierten que este tipo de problemas, contextualizados, son rechazados por los estudiantes. Este último manifiesta, además, que en caso de que una evaluación contenga un problema como el que está en discusión, el estudiante *"...lo deja de último..."* y *"...por lo general no lo hace"*.

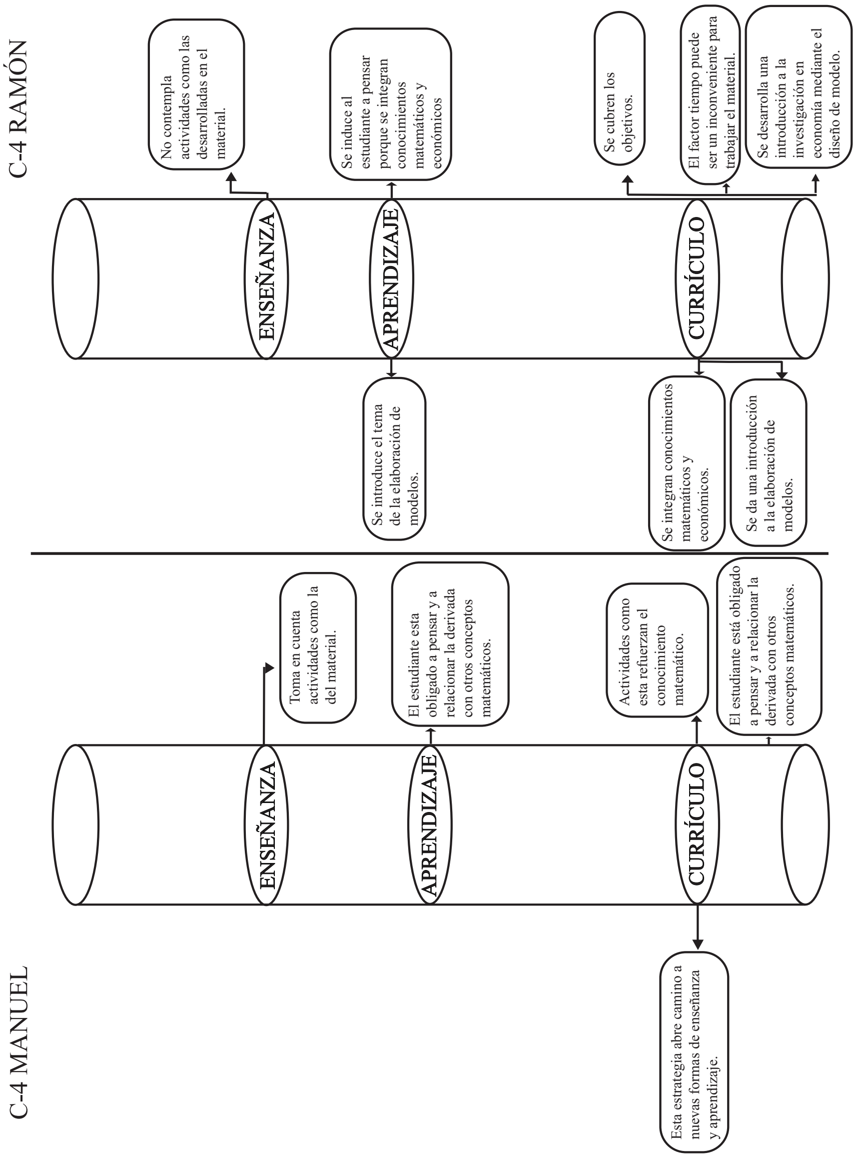
Aprovechamos para hacer una pausa y preguntarnos ¿por qué el rechazo de los estudiantes a este tipo de problemas?, ¿cómo han sido trabajado estos problemas en el aula? Ya en oportunidades anteriores y más recientemente en el análisis de la categoría anterior, hemos observado que estos dos profesores han manifestado su poca formación en el área de las ciencias económicas, hecho que podría repercutir en esta actitud de rechazo por parte de los estudiantes. Ahora bien, la profesora Kenya aun cuando afirma que los estudiantes rechazan este tipo de problemas, destaca el compromiso que tienen los estudiantes en enfrentar estos problemas siempre que se trabajen en el aula de clases. En este caso entra en juego la implicación a la que hiciéramos mención en la parte introductoria a esta parte del análisis, *motivación → actitud*.

En cuanto a los errores que cometen los estudiantes con mayor frecuencia ante problemas de esta naturaleza, estos profesores los tienen bien identificados: presentan dificultades a la hora de interpretar los resultados obtenidos o incluso en interpretar la imagen de una función que representa un modelo de economía,

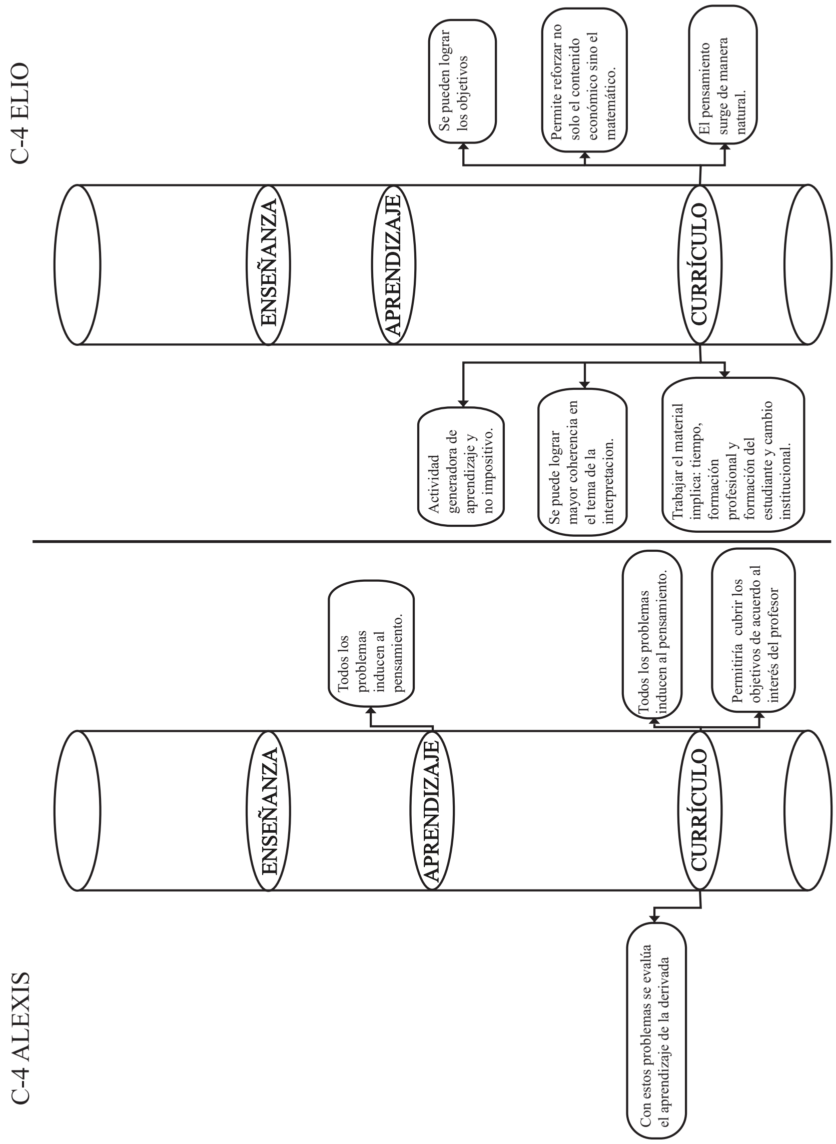
4.4.3. Cuestionario 4

Estamos en presencia de lo que significa el final de la aplicación del instrumento, esto quiere decir que no sólo estamos abordando el cuestionario final de esta investigación, sino que con la aplicación del mismo damos por terminado todo lo que significa el tema de recogida de datos. Con la aplicación de este cuestionario, C-4, buscamos indagar en las opiniones de los profesores aspectos puntuales sobre la gestión de su clase y al mismo tiempo analizar lo que significa llevar al aula problemas como los discutidos en la sesión S-4 del seminario.

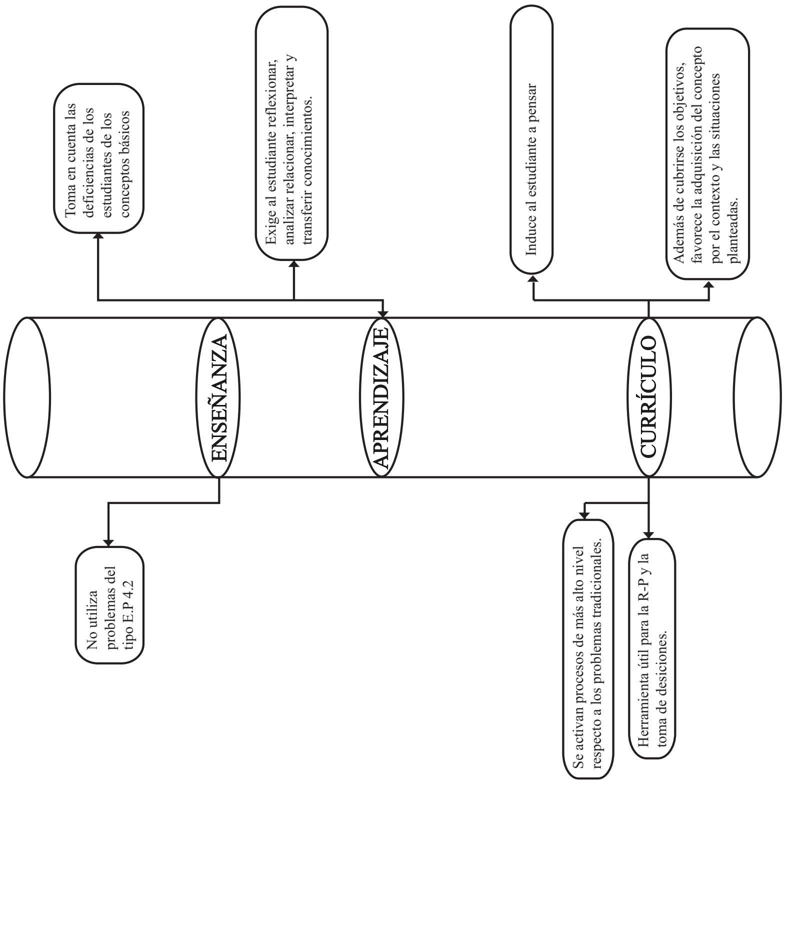
Si volvemos por un momento a los dos problemas discutidos en S-4, podemos observar que hay una diferencia entre estos problemas y los discutidos en sesiones anteriores. En este caso los problemas, vistos en conjunto, requieren mayor manipulación algebraica, la creación de un modelo que permita el análisis de la situación económica planteada y, en consecuencia, una mayor participación del profesor en lo que respecta al contenido económico. En este orden de ideas, las preguntas formuladas en el cuestionario no se refieren a un problema en particular como lo hicimos en el C-3, en esta oportunidad las preguntas hacen referencia a toda la actividad de forma global.



Cuadro 4.23: Cuestionario 4 - Manuel y Ramón



Cuadro 4.23: Cuestionario 4 - Alexis y Elio



Cuadro 4.23: Cuestionario 4 - Kenya

C-4 (Grupo A)
Al observar los diagramas de estos dos profesores podemos apreciar que existen opiniones encontradas respecto al material discutido en la S-4; mientras Manuel afirma que toma en cuenta actividades como esta en su planificación docente, ya que permite *"reforzar el conocimiento matemático"* en el estudiante, Ramón sostiene que *"nunca"* se le ocurrió un trabajo en clases con problemas similares a los discutidos y la única objeción que tiene ante este tipo de trabajo, en caso de ser implementado, es la falta de *"tiempo suficiente"* de acuerdo a las horas estipuladas en el curso. Frente a estas dos posiciones, podemos destacar algunos puntos que nos llaman la atención; por una parte y aunque no es tema de estudio en este trabajo, observamos que no hay unicidad a la hora de enseñar una materia, esto lo permite la *autonomía de cátedra*, lo cual trae como consecuencia una diferencia significativa en los cursos.

Observación: Le recordamos al lector que todos los problemas discutidos en las distintas sesiones son tomados de los libros de texto sugeridos en los programas oficiales; en todo caso, lo que sí reconocemos haber hecho es modificar la estructura de presentación y discusión de los mismos a fin de presentarlos con un esquema próximo a la EBP. Decimos esto a modo de aclaratoria para dejar por sentado que los problemas no fueron sacados de libros desconocidos.

Volviendo al análisis, destacamos la actitud de Ramón en relación al material, visto este como propuesta metodológica alternativa de enseñanza, ya que en todo momento este profesor ha manifestado la aceptación del material, siendo esto es poco significativo frente a las característica que él encuentra a lo largo de la discusión.

En general, ambos profesores consideran que el material *induce* u *obliga* al estudiante a pensar, ya que se integran los contenidos matemático y económico; pero más aún, Ramón destaca del material que *"se da una introducción a la elaboración de modelos y, como sabemos, no hay reglas precisas para la elaboración de los mismos"*, a lo anterior este mismo profesor añade, cuando se le pregunta si los objetivos del curso quedan cubiertos, que *"se cumple un objetivo más a los contemplados en el curso"*, puesto que se promueve al estudiante a la *"investigación en economía"*. Esta observación de Ramón nos permite validar el material y al mismo tiempo, sacamos a colación que en ningún momento nos planteamos con la actividad introducir la elaboración de modelos; en todo caso, vemos esto como parte de la EBP, entendida ésta como estrategia de enseñanza que es donde se enmarca nuestro instrumento.

Por su parte, Manuel es más cauto: él considera que se cubren los objetivos del curso y resalta del material la estructura del mismo, pues considera que *"esta estrategia abre caminos a **nuevas**[5] formas de enseñanza y aprendizaje"*. A nuestro modo de ver y aun cuando este participante ha manifestado en anteriores oportunidades, tanto en el seminario como en los cuestionarios, que su trabajo es muy próximo al instrumento discutido, con esta última reflexión recién citada nos permitimos inferir que la proximidad no es tal. En este caso vuelve a surgir el *"qué"* y *"cómo"* enseña este profesor, pues nos queda el reto, ante esta inconsistencia manifiesta por parte de Manuel, de definir el perfil de este profesor.

C-4 (Grupo B)

Antes de iniciar el análisis correspondiente al cuestionario del grupo B, vale la pena hacer la siguiente observación: los profesores Elio y Alexis cuando responden a la primera pregunta, da la impresión que interpretan mal la misma, es decir, que donde dice *"contemplas"* ellos entienden *"contemplarías"*. Por otra parte, Alexis nos proporciona unas respuestas poco provechosas.

[5]El resaltado es voluntario del autor, ya que lo identificamos con el tema de innovación educativa.

Cuando se les pregunta si contemplan actividades como la de la S-4 para cerrar el tema de derivada, Kenya afirma que *"en cierta forma, sí..."*, aunque sostienes que no realiza preguntas como la primera del EP4-2, en la que se pide demostrar que el modelo que se plantea en el problema es $T = 10{,}000 + \frac{250{,}000}{Q} + \frac{Q}{16}$. Ella afirma que utiliza este tipo de problemas cuando trabaja problemas de **optimización** y las funciones que toma en cuenta son: *"**costo**, ingreso, beneficio, precio, pero con un contenido más sencillo"*. La razón de resaltar en negrita estas dos palabras es que, si vamos al enunciado del problema, podemos observar que el problema es de optimización (minimizar la función T) y la función T representa el costo total. En todo caso, inferimos que cuando esta profesora se refiere a *"un contenido más sencillo"*, lo hace con planteamientos menos exigentes a la hora de plantear un problema, cuya justificación analizaremos en el siguiente párrafo.

Sin embargo, un asunto que resaltamos en las reflexiones de Kenya, tiene que ver con lo que ella persigue con un problema como los de la S-4 al cerrar el tema de derivada y que citamos a continuación: 1) *"consolidar conocimientos adquiridos"*, 2) *"apreciar posibles lagunas´´*, en el que se debe evitar *"el cálculo excesivo o complicado"* para no *"perder de vista la esencia del problema"*. Esta profesora sugiere que el docente debe tener claro cuál es el objetivo del problema, qué se persigue con este y, sobre todo, tomar en cuenta el lugar específico que ocupa dentro de la planificación. Nos deja ver que hay diferencias didácticas en el uso de un problema según el momento que ocupa en el currículo. En resumen, queda manifiesto el conocimiento sobre la enseñanza que tiene Kenya, en particular, en lo que respecta a la planificación de la clase.

En lo que respecta a Elio y Alexis, ellos persiguen con estos problemas, *"reforzar"* conocimientos en los contenidos económico y matemático, el caso del primero, y *"evaluar´´* el aprendizaje del alumno en el tema de aplicaciones de la derivada, en el caso de Alexis. No obstante apreciamos inconsistencia en sus respuestas y es por ello que conviene retomar la observación con la que iniciamos este análisis, ya que si recurrimos a las respuestas aportadas a lo largo de la aplicación del instrumento, podemos observar que este tipo de problemas no lo trabajan estos participantes. Elio por ejemplo, ha manifestado en repetidas oportunidades su falta de formación en el área económica, además de reconocer que no trabaja este tipo de problemas. Alexis, de igual manera, también ha admitido su poca formación económica y su trabajo con problemas contextualizados son del tipo $U = I - C$ o similares, puesto que él mismo reconoce que los estudiantes tienen poca formación para trabajar estos problemas y manifiestan actitud de rechazo. En otras palabras, ellos observan características didácticas en estos problemas pero no entran en sus respectivas planificaciones.

En otro orden de ideas, tanto Kenya como Elio consideran que actividades como las de la S-4 inducen al estudiante a pensar; Elio, por ejemplo, afirma que *"...el presentar un problema ligado a los intereses particulares, el pensamiento surge de manera natural, inducido por la situación planteada"*; esta es una de las características de la EBP, lo cual no sólo nos impulsa hacia la futura implementación del material discutido, sino que además, ratificamos la afinidad que muestra este participante en relación a nuestra propuesta metodológica alternativa. Kenya resalta aún más las bondades del material ya que concluye que *"...se activan procesos cognitivos de más alto nivel que los que ameritan la manipulación algebraica"*, es decir, se profundiza en materia del pensamiento del estudiante, lo cual incide en su aprendizaje. En ambos casos, vuelve a ser el estudiante el motivo de las respuestas. Por lo tanto estamos ante reflexiones ligadas al conocimiento sobre el aprendizaje y sobre el conocimiento curricular.

Para finalizar, estudiamos las posiciones de Elio y Kenya en materia de *logro de los objetivos del tema de derivada*, en caso de implementar este material. Ambos profesores consideran que los objetivos se pueden cubrir, pero Kenya va un poco más allá, ya que considera que todo *"...el* ***proceso seguido*** *favorece la adquisición del concepto y nociones relacionadas de modo significativo"*; debido a esto se plantea ***en contextos y situaciones de problemas*** relacionados con el área de los estudiantes. Si atendemos a lo resaltado en las citas, podemos entender que tanto la estructura como el contenido del material tienen un importante significado didáctico para esta profesora. Tomemos en cuenta que desde un principio Kenya se sintió identificada con el material y al mismo tiempo lo relacionó con una enseñanza de las matemáticas basada en la resolución de problemas.

Sobre este mismo punto, Elio saca a colación tres aspectos que se deben tomar en cuenta a la hora intentar poner en funcionamiento el material, estos son: 1) *"tiempo"*, 2) *"preparación del docente"* y 3) *"preparación y conocimientos previos del estudiante"*, los cuales nos permitimos identificar con la planificación, conocimiento profesional y conocimiento sobre el estudiante, respectivamente. Es decir, tres aspectos fundamentales que forman parte del CDC. Ahora bien, este profesor no sólo ha manifestado cómo es su metodología de enseñanza sino que también nos ha dejado entrever la de algunos otros colegas; en este orden de ideas, el expresa que para alcanzar los objetivos mediante este material hace falta un cambio en dos direcciones: *docente* e *institucional*; pero es que, precisamente, la EBP exige estos cambios.

Capítulo 5

Análisis II

Introducción

Este capítulo consta de tres partes claramente diferenciadas; la primera, arroja los resultados del capítulo anterior en lo que respecta a tres elementos del CDC, enseñanza, aprendizaje y currículo. La segunda parte la conforman tres de los conceptos matemáticos que se discutieron a lo largo del seminario: *dominio de una función*, *regla de la cadena* y *monotonía y valores extremos*; para esta parte tomamos en cuenta todos los episodios o microepisodios donde se hace mención de tales conceptos y, en este apartado, el *análisis relacional* se explota en función del tiempo y de la situación matemática planteada. La tercera y última parte está destinada a la *validación del seminario* como actividad de discusión, reflexión y formación profesional; para este bloque final, hacemos uso de las entrevistas que se realizaron al final de la última sesión del seminario más algunas opiniones que surgieron durante las sesiones del seminario por parte de los participantes.

5.1. Análisis del CDC

Atendiendo a los objetivos que nos planteamos al inicio de este trabajo pasamos a hacer un resumen del análisis realizado en el capítulo anterior, todo esto, con el fin de caracterizar algunos aspectos del CDC de los profesores participantes. Si bien es cierto que en el capítulo precedente analizamos cada uno de los episodios y cuestionarios por grupos de profesores, este análisis previo nos ayudó a plantearnos un esquema de cada uno de estos profesionales en cuanto a cuestiones específicas del CDC, cuestión esta que contribuye a enriquecer nuestro análisis global de este proyecto. De esta manera pudimos apreciar algunas coincidencias entre los participantes que nos permitirán crear un perfil sobre el CDC de los mismos; no obstante, existen algunos matices que marcan sutiles diferencias entre ellos; en este orden de ideas podemos hablar de características generales, compartidas y particulares. Con todo esto entramos en un análisis más profundo y detallado, de modo que podamos caracterizar a cada profesor en determinados aspectos del CDC.

Con el fin de llegar a estos tres tipos de caracterizaciones hemos elaborado tres tablas al final de cada una de las secciones siguientes (la última dividida en dos partes por su tamaño) a partir del desarrollo del **Capítulo 4**, en éstas queda resumido el análisis de este apartado. En la primera tabla ilustramos diversos aspectos del conocimiento sobre la enseñanza, en la segunda tabla destacamos situaciones concretas en materia de aprendizaje y, finalmente, la tercera y última tabla la hemos reservado para mostrarle al lector algunos aspectos relacionados con el conocimiento del currículo, todos ellos derivados de las opiniones y comentarios que hicieron los profesores respecto al material discutido. Sin embargo, conviene aclarar que los datos que aparecen en estas tablas sobre fondo gris provienen de la entrevista final que realizamos a cada profesor de forma individual; todo esto con el firme propósito de indicar la procedencia de los datos en cuestión y darle transparencia al trabajo. Ya para cerrar esta parte introductoria, hacemos la siguiente observación: los cuadros que aparecen en blanco en cada una de las tablas obedecen a que los profesores no aportaron algún dato significativo correspondiente al punto en estudio.

A fin de categorizar los resultados, es decir, la proximidad o distanciamiento entre el CDC de los profesores, identificaremos con las letras G, C y P (general, compartido y particular, respectivamente) cuando coincidan cuatro o cinco profesores, en el primer caso, dos o tres, en el segundo y, haremos uso de la última letra cuando sólo uno de los participantes tenga una posición distinta de los otros cuatro; cada una de estas letras irá acompañada de un número a fin de establecer un orden en las secciones siguientes, ya que en éstas también emplearemos la misma codificación.

5.1.1. Conocimiento sobre la enseñanza

Los esquemas de trabajo que actualmente siguen los profesores para enseñar el tema de la derivada son, en líneas generales, muy próximos unos de otros. Una muestra de ello la podemos apreciar en las distintas oportunidades en las que se pronunciaron al respecto a lo largo del seminario y, también, en sus respuestas a los cuestionarios de las sesiones 1 y 3 (ver **Apéndices A** y **B**, **Secciones A.1.3**, **B.1.3**, **A.3.4** y **B.3.4**). Todos los profesores siguen el esquema de *teoría + aplicaciones*, aunque en el desarrollo teórico del tema hay matices como el de Manuel, quien basa su enseñanza en la *razón de cambio*;

Alexis, aunque no realiza un esquema concreto sobre la estructura que sigue, también utiliza la *razón de cambio* para introducir la derivada, pues así lo deja ver en la primera sesión del seminario. Por su parte, Ramón, Elio y Kenya introducen el tema vía *interpretación geométrica*. Un punto a resaltar en materia de enseñanza es que sólo Kenya y Elio aceptan o reconocen que no trabajan problemas como los del material para llegar al concepto de derivada, justificando ambos que el *factor tiempo* les impide seguir un esquema más próximo al del material. En otro orden de ideas y aun cuando la enseñanza que siguen es de corte tradicional, los cinco participantes le dan a las matemáticas, en estos cursos, un carácter instrumental, aunque los que más lo manifiestan son Manuel y Ramón, quienes además mostraron, a lo largo de seminario, estar más familiarizados con el contexto económico que se maneja en estos cursos.

Con relación al tipo de problemas de aplicaciones que cada profesor emplea en sus cursos correspondientes, las respuestas de los profesores acaban siendo bastante generales, ya que todos los profesores hablan del análisis marginal y de forma alternante, mencionan problemas de ingreso, costo o utilidad, pero sin referirse de forma específica a un problema en particular en el que se destaque alguna característica didáctica. En todo caso, hacemos alusión a las opiniones de Elio, quien se desmarca de los otros profesores, puesto que en reiteradas oportunidades acepta su poca formación en el área económica y es por esta razón que reconoce su escaso trabajo con problemas contextualizados en la economía. Otro punto a destacar sobre problemas contextualizados en el área económica, es que los únicos que reconocen abiertamente que motivan al estudiante con problemas de esta naturaleza son Kenya y Manuel; ellos consideran pertinente mostrar la necesidad de estudiar la derivada como herramienta para resolver problemas del campo profesional del estudiante.

Respecto a la notación que utilizan, en particular, en la regla de la cadena, tres profesores trabajan de forma simultánea las notaciones de Leibnitz y Newton, mientras que los otros dos, Alexis y Kenya, prefieren trabajar con las notaciones de Leibnitz y Newton respectivamente; ahora bien, Kenya, Ramón, Manuel y Elio justifican el uso de la notación de Newton porque al estudiante le resulta más difícil la de Leibnitz, aunque los dos primeros reconocen que es mejor para el campo de la economía trabajar con la de Leibnitz.

Al respecto vale la pena señalar que nuestro interés por conocer la notación que utilizan los profesores en la enseñanza de la derivada obedece a lo siguiente: aun cuando los libros de texto trabajan las notaciones de Newton y Leibnitz, generalmente se inclinan por la segunda, sobre todo cuando estudian la interpretación de la derivada. Haeussler y Paul (1997) y Arya y Lardner (1987), por ejemplo, dejan ver que la notación de Leibnitz se ajusta mejor cuando hay que interpretar la derivada en términos económicos, es decir, la derivada vista como razón de cambio. Sin embargo, ningún libro de texto de los consultados muestra una preferencia explícita por alguna de las notaciones, aunque hay conceptos económicos asociados a la derivada que son presentados en cualquiera de los libros de texto con la notación de Leibnitz, como es el caso de las *propensiones marginales al consumo o al ahorro*[1] o la *elasticidad de la demanda*[2].

Por otra parte y aun cuando el dominio no entra en el tema de la derivada, lo incluimos aquí para darle más amplitud matemática a nuestro estudio. Sobre este particular, cuatro profesores conocen la restricción económica más común del dominio de una función ($\mathbb{R}_0^+ = [0, +\infty)$) y cuál es la estructura que manejan del mismo a la hora de llevarlo al aula de clases. Esta estructura del dominio en el contexto económico no nos debe extrañar, ya que es la usual en los pocos libros de texto con aplicaciones a la economía que trabajan o incluyen este concepto y, como recordaremos, ya hemos dicho que estos profesores fundamentan su enseñanza en los libros de texto y los programas oficiales.

Sin embargo, vale la pena hacer la siguiente observación: los profesores Kenya y Elio aun cuando manifiestan conocer estas restricciones del dominio en el campo económico, no hacen hincapié o simplemente no toman en cuenta la misma en sus respectivas clases; más aún, Kenya sostiene que ya en el tema de derivada *"no vuelve a estudiar el dominio"* en los problemas de aplicaciones a la economía. Elio, por su parte, admite que no trabaja el tema del dominio económico en sus clases e incluso, este profesor admite que es por *"falta de formación en el contenido económico"*.

Ahora toca el momento de analizar la regla de la cadena desde el punto de vista de la enseñanza, aunque vale la pena señalar que más adelante, en la **Sección 5.2.2**, hacemos un análisis de esta regla vista como un objeto matemático relacionado al campo económico. En este sentido, expondremos el conocimiento de los profesores sobre esta regla aunque también en los **Apéndices A** y **B** (páginas 434, 440, 559, 565, 572, 573) se puede apreciar en detalle cuál es el esquema que siguen los profesores en la enseñanza de la regla de la cadena. Todos los profesores siguen los libros de texto para la enseñanza de esta regla; sin embargo, en las entrevistas finales, tanto Kenya como Elio admiten que no se han planteado la enseñanza de esta herramienta matemática generando la necesidad de la misma en el campo de la economía. Más aún, todos los profesores manifiestan que es la primera vez que ven un planteamiento como el del material para enseñar la regla de la cadena.

[1]La *propensión marginal al consumo* se define como la razón de cambio del consumo con respecto al ingreso $\frac{dC}{dI}$. Por otra parte, definimos $\frac{dS}{dI} = 1 - \frac{dC}{dI}$ como la *propensión marginal al ahorro* (Haeussler y Paul, 1997).

[2]La *elasticidad de la demanda* es un medio por el cual los economistas miden cómo un cambio en el precio de un producto afecta la cantidad demandada. En términos generales, la elasticidad de la demanda es la razón de cambio porcentual en la cantidad demandada que resulta de un cambio porcentual dado en el precio. Ésta se define como $\eta = \frac{\frac{p}{q}}{\frac{dp}{dq}}$ (Haeussler y Paul, 1997).

Finalmente cerramos esta parte del análisis con la enseñanza de la monotonía y valores extremos de una función, aun cuando en el instrumento no hay preguntas concretas sobre la enseñanza que siguen para estos conceptos, lo que quiere decir que los datos obtenidos al respecto son el producto de discusiones en la que abordamos tales contenidos de forma indirecta. En este caso, durante el seminario se puede apreciar que la metodología empleada por los profesores participantes, a la hora de trabajar en el aula estos dos conceptos, es similar a la que siguen en la regla de la cadena y que se ajusta al esquema tradicional de enseñar el tema de la derivada. Aquí también coinciden todos en motivar con un ejemplo para luego definir monotonía y valores extremos. Sin embargo, lo más importante a destacar acá, al igual que en la regla de la cadena, es que la interpretación de la derivada posiblemente pasa a un segundo plano, prevaleciendo el cálculo como actividad principal.

Estos tres tópicos (dominio, regla de la cadena y monotonía y valores extremos), estudiados desde el punto de vista de la enseñanza, nos permitirán aproximarnos a lo que queremos estudiar en el **Apartado 5.2**, solo que en este caso estudiaremos el conocimiento de estos objetos matemáticos en el contexto económico.

Características generales

G1 Todos los profesores *siguen el mismo esquema de trabajo* para la enseñanza de la derivada, *un esquema tradicional*.

G2 Como consecuencia de lo anterior, el conocimiento que reflejan estos profesores respecto a los problemas matemáticos contextualizados en la economía es que: *entienden éstos como problemas de aplicaciones*.

G3 En cuanto a la *regla de la cadena*, todos los profesores *siguen los libros de cálculo* para enseñar esta regla.

G4 De manera consistente a los tres puntos anteriores, todos los participantes *siguen una estructura clásica* para estudiar la monotonía y los valores extremos: motivan con un ejemplo para luego entrar en la definición correspondiente.

G5 Manuel, Ramón, Alexis y Kenya consideran más apropiado el uso de la *notación de Leibnitz* en problemas contextualizados en el campo económico, aunque ninguno de ellos lo justifica.

Características compartidas

C1 De G1 tenemos que Ramón y Alexis consideran que *en sus clases hay más rigor matemático* respecto al material.

C2 Por su parte, Elio y Kenya justifican su actual esquema de trabajo debido al *factor tiempo*; para ellos, implementar el material en el aula supone invertir más tiempo en ésta.

C3 De G2 se deriva que Manuel y Kenya *motivan el concepto* de derivada *empleando problemas contextualizados*.

C4 El enfoque que le dan a la derivada para introducirla, Manuel y Alexis es vía *razón de cambio*.

C5 Kenya, Ramón y Elio trabajan la *interpretación geométrica* para introducir la derivada.

C6 Manuel y Ramón son los *únicos* que trabajan el dominio de una función en el *contexto económico*, aunque sólo de la forma $\mathbb{R}_0^+ = [0, +\infty)$.

C7 Por su parte, Alexis y Kenya no trabajan o *no hacen ningún tipo de restricciones económicas* en el estudio del dominio de las funciones, aun cuando conocen la restricción más usada, $\mathbb{R}_0^+ = [0, +\infty)$.

C8 De G3 se desprende un detalle adicional de parte de Kenya y Elio: ellos afirman que *no se han propuesto enseñar* la regla de la cadena *a partir del planteamiento de un problema*.

C9 En cuanto a la notación que utilizan para enseñar la derivada no resulta fácil caracterizar este hecho; por ejemplo, aun cuando Manuel, Ramón y Elio *emplean las notaciones de Leibnitz y Newton* de forma simultánea, sin embargo, Manuel y Elio sostienen que *prefieren la de Newton* porque a los estudiantes se les dificulta la de Leibnitz, posición que también es compartida por Kenya.

Características particulares

P1 La única característica a destacar sobre la enseñanza tiene que ver con el dominio, Elio no sólo *reconoce que no trabaja el dominio económico en el aula*, sino que además nos deja ver que *no conoce las restricciones del dominio en el campo económico*.

Todo lo anterior pone en evidencia la formación profesional del profesor y más precisamente el CDC en materia de enseñanza; en consecuencia, la visión que este tiene de las matemáticas respecto a los cursos de las carreras de ciencias económicas. Dos cosas quedan bien claras en lo que respecta al conocimiento sobre la enseñanza: la primera, la fuerte presencia de los libros de texto y los programas oficiales para la estructura de sus clases y, la otra, la influencia, no solo para la estructura de sus clases sino también para gestión de las mismas, de los cursos que recibieron durante su formación en la carrera universitaria; ya esta última situación fue verificada en García (2004). En otras palabras, después de analizar el actual esquema de trabajo, cómo enseñan algunos conceptos matemáticos y cómo trabajan los problemas contextualizados en el área económica, tenemos una visión clara y precisa de la planificación que siguen estos profesores en sus cursos de cálculo.

Es claro que la *toma de decisiones* de la que hablábamos en nuestro marco teórico (ver pág. 58) y que realizan estos profesores para su planificación no es precisamente esa *resolución de problemas* a la que nos referimos en ese momento, sino más bien a la *"aplicación lineal y sistemática de principios y reglas"* (García-Valcárcel, 2001b) ya estandarizados en los libros de texto y programas oficiales. Sólo Elio y Kenya justifican la estructura o esquema que siguen en sus clases en el *factor tiempo*, referente éste que Godino (2003) sostiene, se debe tener presente a la hora de llevar a cabo la planificación de la enseñanza. Algo adicional a destacar de estos dos profesores y que pone de manifiesto el fuerte apego a los libros de texto es el hecho de reconocer que no se han planteado una enseñanza como la del material.

Por otra parte, es indiscutible que no existe uniformidad de criterios sobre la enseñanza de las matemáticas en los cursos de cálculo diferencial para las carreras en cuestión, en todo caso, los criterios utilizados se derivan de los documentos con los que planifican sus clases más el tipo de enseñanza que recibieron durante su formación. El primer punto a destacar sobre la metodología que siguen estos profesores, es que ponen en práctica una *enseñanza unidireccional* (Rosales, 2001) con mucha proximidad al esquema que citamos de Marcelo (2001), es decir, *"una exposición oral de un texto"*.

Al ver la metodología que siguen para la enseñanza del dominio, monotonía, valores extremos, regla de la cadena y las reflexiones de estos respecto a lo planteado por nosotros en el material, podemos apreciar la estrecha relación entre la metodología aplicada y el contenido que enseñan, lo que queremos decir con esto es que debido al peso que le confieren al contenido matemático, muy por encima del económico, la naturaleza de las estrategias puestas en práctica son las que siguen los libros tradicionales de cálculo. En C1, por ejemplo, Ramón y Alexis sostienen que en sus clases *hay más rigor matemático que el que se muestra en el material*. Aunque en otros casos, como el de Elio, por ejemplo, el conocimiento disciplinar tiene incidencia en la enseñanza, pues él se inclina mayoritariamente por una estructura netamente matemática, ya que reconoce abiertamente su poca o nula formación en el área económica.

	MANUEL	RAMÓN	ALEXIS	ELIO	KENYA
Actual esquema de trabajo	Tradicional (libros con aplicaciones y programas oficiales)	Tradicional (libros con aplicaciones y programas oficiales) Más rigor matemático que el material	Tradicional (libros con aplicaciones) Más rigor matemático que el material Trabaja problemas muy básicos	Tradicional (libros varios y programas oficiales), por el tiempo	Tradicional (libros con aplicaciones y programas oficiales) por el tiempo
¿Motiva con problemas de economía?	Sí	No	No	No	Sí
¿Cómo enseña el dominio en el aula?	$R_0^+ = [0,+\infty)$	$R_0^+ = [0,+\infty)$	(*) $R_0^+ = [0,+\infty)$, pero no lo trabaja en el aula	No trabaja el dominio económico en el aula	(*) $R_0^+ = [0,+\infty)$, pero no lo trabaja en el aula
¿Cómo enseña la regla de la cadena en el aula?	De forma distinta al material, sigue los libros de cálculo	Sigue los libros de cálculo	Sigue los libros de cálculo	No se ha planteado la regla de la cadena generando la necesidad, sigue los libros de cálculo	No trabaja la regla de la cadena generando la necesidad, sigue los libros de cálculo
¿Cómo enseña monotonía y valores extremos en el aula?	Motiva con un ejemplo y continúa con la definición	Motiva con un ejemplo y continúa con la definición	Motiva con un ejemplo y continúa con la definición	Motiva con un ejemplo y continúa con la definición	Motiva con un ejemplo y continúa con la definición
¿Trabaja problemas contextualizados como aplicaciones?	Sí	Sí	Sí Pocos problemas y sencillos	Sí Pocos problemas y sencillos	Sí Problemas sencillos
¿Qué notación utiliza?	Leibnitz y Newton	Leibnitz y Newton	Leibnitz	Leibnitz y Newton	Newton

Figura 5.1: Enseñanza

Por medio de la tabla que presentamos en la **Figura 5.1** podemos observar, a manera de resumen, la "*distancia*" que existe entre los profesores participantes en materia de enseñanza. En este caso, destacamos como puntos relevantes: el esquema actual que siguen en sus clases, qué uso le dan a los problemas contextualizados en la economía, cómo enseñan el dominio económico, la regla de la cadena, la monotonía y los valores extremos y qué notación emplean en la enseñanza de la derivada. Tal como se puede apreciar en esta tabla, las coincidencias en cuanto al esquema actual que siguen en sus clases para la enseñanza de la derivada no debe resultar sorprendente, ya que en reiteradas ocasiones hemos señalado que los dos pilares fundamentales donde estos profesores basan su enseñanza son los libros de texto y los programas oficiales. Además, como veremos más adelante, ya que es tema de esta parte del trabajo, en varias oportunidades los profesores manifestaron que era la primera vez que trabajaban un problema como el del material.

5.1.2. Conocimiento sobre el aprendizaje

En todo el desarrollo del análisis previo que hicimos en el **Capítulo 4**, los descriptores o subcategorías que utilizamos para estudiar el conocimiento sobre el aprendizaje fueron: la *actitud* que, generalmente, manifiestan los estudiantes en el aula frente al estudio de conceptos, situaciones o escenarios matemáticos; por otra parte, nos interesó estudiar las *dificultades* y/o *ventajas* que presentan los estudiantes a la hora de abordar determinados problemas matemáticos. Este análisis, visto así, podría resultar poco significativo en un trabajo como este, no obstante, el mismo nos permitió llegar a aspectos muy concretos dentro del conocimiento sobre el aprendizaje y, en consecuencia, poder determinar un perfil del profesor de matemáticas vinculado a estas subcategorías; ya que el conocimiento que el profesor tiene sobre sus estudiantes está en conexión directa con el modelo de enseñanza que el primero lleva al aula; ya de esto hablamos en el **Capítulo 2** (ver pág. 43), pero también obliga a reflexionar y revisar su propio conocimiento disciplinar.

Ahora mostraremos la "*distancia*" de los profesores en materia de conocimiento sobre el aprendizaje partiendo del análisis previo realizado en el capítulo anterior. Aunque en repetidas oportunidades hemos mencionado que los libros de texto y los programas oficiales son la columna vertebral de la estructura que siguen estos profesores para la enseñanza que desarrollan en el aula, el estudiante, o mejor dicho, el conocimiento sobre el estudiante es también un punto de referencia para el esquema de enseñanza y así, del CDC del profesor de matemáticas de universidad. En este sentido, estudiar el conocimiento que tiene el profesor sobre sus estudiantes se hace vital para nuestro trabajo. En este caso, las opiniones de los participantes son variopintas y aportan perfiles con matices interesantes.

Un punto que conviene aclarar, aun cuando ya lo mencionamos en oportunidades anteriores, es el hecho de que algunas de estas respuestas son hipotéticas, puesto que el material discutido en ningún momento fue puesto en práctica en el aula e incluso, muchos de los problemas, por no decir todos, son "nuevos"[3] para los profesores. No obstante, la propia característica de este material nos permitió profundizar en asuntos concretos sobre el conocimiento del profesor en materia de aprendizaje y cuánto conoce el profesor a sus estudiantes.

En primer lugar comenzaremos por hablar sobre la actitud del estudiante frente a problemas contextualizados en el área económica y no-económica. De esta manera podremos indagar sobre puntos concretos como el trabajo con modelos, el dominio de conceptos básicos de economía y matemáticas, así como la interpretación de las matemáticas en el contexto económico.

Otro punto a considerar dentro del conocimiento sobre el aprendizaje consiste en estudiar la implicación que tiene en el estudiante trabajar conceptos como el dominio, la monotonía, los valores extremos y la regla de la cadena, de acuerdo al esquema presentado en el material. Tomamos en cuenta estos conceptos u objetos matemáticos por ser los que más se discuten en el seminario. Aun cuando las opiniones de cada profesor resultan próximas en estos conceptos, hemos decidido estudiarlos por separado a fin de determinar matices en cada concepto.

Nuestra propuesta de trabajar el dominio de una función en un doble contexto de forma simultánea obedece, principalmente, a explotar la EBP como estrategia de enseñanza; por otra parte, consideramos de carácter innovador estudiar el dominio de esta manera ya que ninguno de los textos consultados así lo hace, y de esta manera también estaríamos explotando la interdisciplinariedad (Hargreaves *et al.*, 2001). Tanto es así que Alexis y Kenya lo reconocen abiertamente y al mismo tiempo surge la reflexión sobre el por qué los libros de texto no plantean este tipo de estudio. Por ejemplo, Kenya y Elio se mantienen al margen y sostienen que no se han planteado trabajar el dominio de esta manera, mientras que Alexis, lo reconoce en la entrevista final como veremos más adelante cuando caractericemos las opiniones de los profesores. Manuel y Ramón además de dar su opinión sobre la implicación que tiene trabajar el dominio de esta manera, manifiestan que trabajan el dominio económico como se vio en la tabla de la **Figura 5.1**; ahora bien, Alexis y Ramón matizan sus comentarios, pues ellos consideran que trabajar el dominio en un *contexto dual* puede generar conflicto en el estudiante, aunque Ramón en su reflexión argumenta que: *"es importante hacerlo así"* y que además

[3]Aun cuando los problemas que conforman el instrumento son tomados de los libros de texto que, usualmente, utilizan los profesores participantes, la estructura de los mismos fueron modificados por dos razones fundamentales: la primera, darle características de problemas tipo EBP y, la segunda, poder generar discusiones de interés en nuestra investigación.

se *"prepara al estudiante para el curso de microeconomía"*, dejando evidencia de su conocimiento disciplinar en economía.

Por su parte, las ventajas que observa Manuel en el estudio del dominio, de acuerdo a como lo planteamos en el material, son de carácter cognitivo, por un lado, tal planteamiento permite al estudiante entender el concepto en cuestión y, por otro, ayuda a visualizar la interconexión entre las matemáticas y la economía. Aun así, este profesor opina con cautela y es de la idea de que se debería poner en práctica el material antes de dar una conclusión definitiva.

En cuanto a monotonía y valores extremos, comenzaremos por señalar que el aporte de Alexis en esta materia no es significativo. Aquí los otros profesores tienen una posición que nosotros catalogamos de general, puesto que la comparten los cuatro restantes, aunque sus frases no son las mismas; ellos consideran que estudiar la monotonía y los valores extremos mediante esta estructura *"promueve el aprendizaje de estos conceptos"* y se motiva al estudiante en la interpretación de la derivada; no obstante, el apoyo de Ramón no es del cien por ciento, él sugiere que se trabajen otros ejemplos de manera que el estudiante no entienda que estos conceptos de monotonía y valores extremos sean propios de la economía. Este profesor ha manifestado inquietudes similares en otras discusiones, donde muestra recelo en cuanto a la presentación de conceptos matemáticos enfocados desde el punto de vista económico.

Iniciamos nuestro resumen de la regla de la cadena indicándole al lector que, para todos los participantes, era la primera vez que veían y discutían cualquiera de los problemas de este tema, de allí que se observe el carácter hipotético de sus respuestas. Sin embargo, para nosotros, resulta interesante estudiar lo que representa para los estudiantes el estudio de la regla de la cadena con problemas contextualizados en el área económica. De este punto resaltamos que los cinco profesores destacan las bondades de los problemas para estudiar la regla de la cadena, aunque nosotros subrayamos las opiniones de Manuel y Ramón sobre el uso de la función exponencial al estudiar la regla de la cadena por la importancia de la misma en el contexto económico. Una vez más queda al descubierto el conocimiento disciplinar económico de estos dos profesores.

Pasamos ahora a estudiar el conocimiento que tienen los profesores sobre las *dificultades* que presentan sus estudiantes en lo que respecta al cálculo diferencial y conceptos afines, puesto que el conocer las dificultades de los estudiantes permite, entre otras cosas, una mejor planificación y selección de problemas para ser discutidos en clase y, en consecuencia, una clase que le llegue más al estudiante. Aquí los profesores muestran un conocimiento profundo y muy variado; tal vez quien aporta más detalles de todos es Elio, contrario a Manuel y Alexis, quien por lo general se ciñe a las opiniones de los otros de su grupo.

Los conceptos o temas en los que presentan dificultad los estudiantes y que más destacan los profesores son: la regla de la cadena, la derivada de la función exponencial (Manuel, Ramón, Elio y Kenya), la interpretación de la derivada (Ramón, Alexis, Elio y Kenya) y la notación de Leibnitz (Manuel, Elio y Kenya). Hay otras dificultades que, cuando mucho, son compartidas por dos profesores como: el despejar una ecuación (Manuel y Ramón) o el lenguaje matemático (Alexis y Elio). Sin embargo, aquí lo que resulta interesante no es el amplio conocimiento del profesor en esta materia, sino la *aceptación* de estas dificultades sin el planteamiento de alguna estrategia específica para paliar la situación en cualquiera de los temas que ellos mencionan.

Ya para finalizar esta parte del conocimiento sobre el aprendizaje, nos centramos en el conocimiento que tiene el profesor sobre la formación del estudiante respecto a estrategias o métodos de enseñanza como el que se muestra en el material discutido. Ya que este punto complementa el conocimiento que pueda tener el profesor sobre las dificultades del estudiante, pues no basta con conocer los obstáculos o dificultades sobre un determinado concepto, también el profesor debe tener presente qué estrategia permite al estudiante un mejor aprendizaje.

En este sentido las opiniones están divididas en cuanto a la formación del estudiante, pues dos profesores consideran que sus estudiantes tienen la capacidad de abordar la estructura que sigue nuestro material, mientras que tres no consideran que sus estudiantes estén formados para seguir nuestra propuesta en el aula de clases; pero además, surgen matices significativos para nuestro trabajo y que mostraremos dentro de las características que siguen a continuación en materia del conocimiento del aprendizaje.

En resumen, el conocimiento sobre el aprendizaje que manejan estos profesores muestra una gran amplitud y profundidad, el cual caracterizamos a continuación:

Características generales

G6 Todos coinciden en que los estudiantes *rechazan* problemas del contexto no-económico.

G7 Aun cuando no hay un acuerdo mayoritario sobre la actitud del estudiante frente a problemas contextualizados en la economía, cuatro profesores consideran estos problemas sirven como *elementos motivadores* para el aprendizaje; en particular, aquellos donde está contemplado el estudio de la monotonía y valores extremo, lo cual representa para nosotros cierta contradicción, ya que dos de estos profesores, Elio y Kenya, opinan que sus estudiantes rechazan problemas del contexto económico.

G8 Hay tres puntos en el que hay una coincidencia generalizada por cuatro profesores respecto a las dificultades que presentan los estudiantes en problemas relacionados al cálculo diferencial y temas afines, estos son:

- La *interpretación de la derivada* (Ramón, Alexis, Elio y Kenya).
- La *regla de la cadena* (Manuel, Ramón, Elio y Kenya).
- *Derivar la función exponencial* (Manuel, Ramón, Elio y Kenya).

Características compartidas

C6 La actitud de los estudiantes frente a problemas contextualizados en el área económica está dividida, esta división está asociada a los dos grupos de profesores que participaron en nuestro trabajo[4], ya que Manuel y Ramón no solo manifiestan que sus estudiantes aceptan este tipo de problemas sino que además *"los exigen"* frente a problemas de cálculo o del contexto no-económico; más aún, Manuel advierte que este tipo de problemas motiva al estudiante, mientras que Ramón afirma que las respuestas de sus estudiantes frente a estos problemas son correctas, por lo general.

C7 Kenya, Alexis y Elio advierten que sus estudiantes *rechazan* los problemas de contexto económico, entre otras cosas, porque sus estudiantes presentan *dificultad al trabajar modelos* de esta área y con la *interpretación de la derivada*.

C8 Otro tema a considerar y que les podría causar dificultad a los estudiantes es el *estudio del dominio* de una función en un contexto dual; Ramón y Alexis advierten que esto les puede *generar conflicto*.

C9 Otra de las dificultades que presentan los estudiantes y que lo manifiestan tres de los participantes es el emplear la *notación de Leibnitz*.

C10 Manuel y Ramón consideran importante el problema de *la regla de la cadena* que incluye la exponencial (EP3-2), entre otras cosas, por la *importancia de esta función en el campo de la economía*.

[4]Recordemos que aunque son profesores que pertenecen a la misma universidad e imparten clases a las mismas carreras, los campus en los que trabajan quedan en ciudades distintas, están adscritos a departamentos distintos y la población estudiantil muestra diferencias socioculturales diferentes, sin embargo, esto último no lo tomamos en cuenta por no ser de interés en el presente trabajo.

C11 Sobre monotonía y valores extremos, Manuel, Elio y Kenya consideran que trabajar estos conceptos de acuerdo al enfoque presentado en el material *promueve el aprendizaje* de estos conceptos.

C12 En cuanto a la formación del estudiante para abordar el material, las opiniones vuelve a estar divididas al igual que en C6: Manuel y Ramón consideran que sus estudiantes tienen la formación necesaria para seguir el material.

C13 En posición contraria a C12, Alexis, Elio y Kenya consideran que sus estudiantes *no están preparados* para seguir una enseñanza con la estructura que sigue el material nuestro. Sin embargo, estos tres profesores *sugieren poner en práctica el material* de cara a mejorar el aprendizaje de los estudiantes

Características particulares

P6 De C7 se sigue lo siguiente: Kenya es la única en reconocer que sus estudiantes *"no están habituados a trabajar problemas del contexto económico"*.

P7 De C8 surge el siguiente matiz por parte de Ramón debido al conocimiento disciplinar en economía que éste maneja, él considera que es importante *trabajar el dominio* de esta manera *"ya que prepara al estudiante para microeconomía"*.

P8 Manuel, por su parte, no considera que el *estudio del dominio* en un doble contexto signifique dificultad alguna para el estudiante, en todo caso, *"permite visualizar la relación entre las matemáticas y la economía"*.

P9 De C12 resaltamos la posición de Manuel, quien sostiene que *"el papel del profesor es clave"*.

P10 Mientras que Ramón advierte que además de estar formado el estudiante, éste se involucra más en la clase.

En conclusión, podemos señalar distintos aspectos en cuanto al conocimiento sobre el aprendizaje que contribuyen a generar el perfil del profesor de matemáticas de universidad y la relación que guardan estos con las otras componentes del CDC. Es por ello que aunque haremos una síntesis del conocimiento respecto al aprendizaje aprovecharemos, siempre que sea posible, para buscar conexión con el conocimiento respecto a la enseñanza, el cual fue analizado antes. En este orden de ideas, veamos qué nos dice el conocimiento respecto a las dificultades y las actitudes de los estudiantes.

Como hemos repetido en oportunidades anteriores, el material discutido durante el seminario tiene la estructura de la EBP; en tal sentido intentamos conocer la actitud del estudiante frente a problemas del contexto económico, pero no visto estos como problemas de aplicaciones. Ya vimos que hay opiniones divididas respecto a estos problemas y la posición del estudiante al trabajarlos. Tres profesores coinciden en el rechazo por parte de los estudiantes al intentar llevar al aula problemas contextualizados en el área económica debido a la dificultad que supone para el estudiante la interpretación de la derivada en general; pero también el trabajo con modelos matemáticos supone un obstáculo para el estudiante.

Ahora bien, si entendemos el curso de cálculo diferencial en estas carreras como un conjunto de herramientas que permitirían la resolución de problemas en economía, resulta contradictorio lo expresado por Kenya, quien es uno de estos tres profesores citados arriba: ella sostiene que sus *"estudiantes no están habituados a trabajar este tipo de problemas"*. Sin embargo, consideramos que esto es responsabilidad directa del docente el que se trabaje en el aula, o no, determinado concepto o tema y que además forma parte del currículo oficial. Esta situación nos conecta con el conocimiento disciplinar, es decir, puede darse el caso que el profesor no aborde este tipo de problemas contextualizados en el campo de la economía por no tener el conocimiento suficiente para abordarlos en el aula de clases. Sobre esto último, Elio ha mantenido una posición consecuente a lo largo del seminario, reconociendo abiertamente su falta de formación en materia económica.

Por otra parte, los otros dos profesores expresan que sus estudiantes exigen problemas contextualizados en el área de la economía, pero además ellos reconocen trabajar en clase este tipo de problemas. Es claro, y lo veremos más adelante, que el conocimiento disciplinar económico que estos dos participantes manejan es acorde a la exigencia de los cursos y más todavía, su conocimiento disciplinar y su esquema de enseñanza obedecen a la disposición de los estudiantes a trabajar problemas matemáticos con *aplicaciones a la economía*.

Pasemos ahora a hablar de las dificultades del estudiante como parte del conocimiento sobre el aprendizaje, esto quiere decir, los obstáculos que supone para el estudiante trabajar un concepto matemático, un problema tipo o esquema del mismo. Sobre este particular, cada uno de los participantes deja reflejado lo conscientes que son de sus estudiantes y las dificultades que estos manifiestan. Desde aspectos generales como la *interpretación de la derivada*, la *regla de la cadena* o la *derivada de la función exponencial*, hasta detalles más precisos como la *notación de Leibnitz* o el enfrentarse a un *estudio del dominio como la estructura que presentamos en el material*, en la que se sugiere el estudio del dominio en un doble contexto matemático-económico y con un enfoque tipo EBP.

Pero, ¿qué significa para nosotros o cuán relevante es para nuestro trabajo este tipo de conocimiento?, pues bien, visto esto como simples características de los estudiantes conocidas por sus profesores no representa mayor relevancia desde el punto de vista didáctico; pero si consideramos que el docente toma en cuenta todos estos detalles que conoce del estudiante de cara a su planificación docente y estrategias de enseñanza, entonces, todo este conjunto de elementos asociados al aprendizaje del estudiante pasan a tener un valor didáctico incuestionable en el proceso de enseñanza-aprendizaje; por supuesto, sin dejar a un lado las *ideas previas* (Salazar, 2005) que puedan tener los alumnos sobre un tema específico.

Ahora bien, así como consideramos importante conocer las dificultades u obstáculos que manifiestan los estudiantes respecto a conceptos o problemas matemáticos, también lo es el conocer las ventajas o facilidades que supone trabajar un problema o la estrategia para abordar el mismo. Cuando discutimos sobre las implicaciones que significa trabajar objetos matemáticos como el dominio, la monotonía o la misma regla de la cadena con la estructura presentada en el material, estos profesores se manifestaron favorables al material, pues con ello se podría lograr: entender la relación matemáticas-economía, la preparación del estudiante al curso de microeconomía, estimular la toma de decisiones, entre otros. En otras palabras, estarían apoyando la EBP como estrategia de enseñanza de cara a mejorar el aprendizaje.

Ya para cerrar esta parte del análisis sobre el aprendizaje, haremos una breve parada en un aspecto que surgió de forma espontánea en la entrevista final y que no está reseñado en el marco teórico de forma explícita, éste tiene que ver con la *formación del estudiante* respecto a la implementación del material o más precisamente, su formación respecto a la EBP[5]. En nuestro marco teórico hablamos de *concepciones alternativas* (Carrascosa, 2005), *ideas previas* (Salazar, 2005) y de *conocimiento previo del estudiante* (An *et al.*, 2001). Estos tres conceptos están fuertemente ligados a lo que entendemos como formación del estudiante.

En este caso, las opiniones están divididas en el mismo sentido en que se caracterizan los profesores en cuanto al trabajo con problemas de aplicaciones que estos siguen en clase. Aquellos profesores que consideran a sus estudiantes formados para llevar a cabo una enseñanza basada en problemas son los mismos que más explotan los problemas de aplicaciones, mientras que los que no lo hacen no creen que sus estudiantes tengan formación para abordar el material. Más aún, y así lo veremos más adelante en el **Apartado 5.2**, los participantes que reconocen que sus estudiantes poseen preparación para abordar una enseñanza con el material discutido son aquellos que tienen un mayor conocimiento disciplinar económico.

[5]Aquí asumimos de entrada que la estrategia de enseñanza que siguen estos profesores no es la EBP, de acuerdo al trabajo previo realizado en García (2004).

	MANUEL	RAMÓN	ALEXIS	ELIO	KENYA
Actitud del estudiante frente al contexto económico	Aceptación Así lo exigen Motivación	Aceptación Así lo exigen Motivación Responden bien a estos problemas	Rechazo Prefieren ejercicios de cálculo Rechazan problemas de aplicaciones	Indiferencia Rechazo Prefieren problemas de cálculo Motivación	Motivación Rechazo al principio, después se interesan No están habituados a estos problemas Prefieren problemas de cálculo
Actitud del estudiante frente al contexto no-económico	Rechazo	Rechazo	Rechazo	Rechazo Rechazan problemas con exceso de cálculo	Rechazo Temor
Formación del estudiante respecto al material	Sí está formado, pero el papel del profesor es clave	Sí está formado para seguir cada paso del material (**por la estructura del mismo**) El estudiante se involucra más	No están preparados, habría que seguir esta estructura desde el inicio de carrera	No están preparados, habría que seguir esta estructura desde el inicio de carrera Estos problemas pueden generar mayor aprendizaje	No están preparados, pero hay que probar Al principio puede generar conflicto por el cambio de estructura
Dominio (¿qué implica trabajarlo así?)	Ayuda a entender el concepto de dominio Ayuda a entender la relación matemáticas-economía Refuerza conocimiento	Puede confundir pero es importante hacerlo así Prepara al estudiante para microeconomía	Podría generar conflicto No se lo ha planteado	No se lo ha planteado	No se lo ha planteado
Monotonía y valores extremos (¿qué implica trabajarlo así?)	Ayuda a entender el concepto de monotonía y valores extremos Ayuda a entender la relación matemáticas-economía	Puede confundir al estudiante si no se hace otro tipo de problema		Se promueve el aprendizaje de monotonía e interpretación de la derivada	Estimula el pensamiento y la toma de decisiones Motiva la interpretación de la derivada
Regla de la cadena (¿qué implica trabajarlo así?)	El problema de la exponencial es clave	Ayuda a entender cómo usarla y en qué consiste El problema de la exponencial es clave	Puede ser provechoso	Se ve la utilidad de esta regla Se muestran las matemáticas como herramienta Se aclara qué significa dC/dq	Motiva al estudiante
En general, tienen dificultad con:	Regla de la cadena Notación de Leibnitz Derivada de la exponencial Despejar	Interpretación de la derivada Derivada de la exponencial Identificar la función compuesta Regla de la cadena Problemas no-económicos Despejar	Interpretación de la derivada Lenguaje matemático	Interpretación de la derivada Problemas contextualizados El lenguaje matemático Regla de la cadena Notación de Leibnitz Derivada de la exponencial Creación de modelos	Identificar funciones compuestas Derivada de la exponencial Regla de la cadena Notación de Leibnitz Interpretación de resultados Problemas de optimización

Figura 5.2: Aprendizaje

Esto nos lleva a inferir que la planificación que realiza en profesor va en línea directa con la formación de los estudiantes; incidiendo, en consecuencia, en una mejor preparación de estos últimos en materia económica. Deducimos también que tal situación podría influir en la formación de algún profesor en materia económica, puesto que éste se conformaría con su actual conocimiento considerando que sus estudiantes no le van a hacer mayores exigencias.

La tabla de doble entrada que se muestra en la **Figura 5.2**, al igual que lo hicimos en la sección anterior, es el resultado del trabajo realizado en el **Capítulo 4** y expresa a modo de resumen el análisis desarrollado en esta sección de esta memoria. Aquí resaltamos: la actitud del estudiante frente a problemas en contextos económicos y no-económicos, las implicaciones cognitivas que tiene para el estudiante trabajar el dominio, la monotonía, los valores extremos y la regla de la cadena y, finalmente, las dificultades que muestran los estudiantes en el curso de cálculo diferencial.

5.1.3. Conocimiento sobre el currículo

Así como lo indicamos en las dos secciones previas, los puntos o aspectos de interés vinculados a la enseñanza y el aprendizaje, respectivamente, de igual manera comenzamos esta parte del trabajo señalando que el punto a tratar es el conocimiento respecto al *análisis crítico de materiales publicados* (Climent, 2002), cuyo material ha ser tomado en cuenta para esta actividad es el desarrollado por nosotros para las discusiones en el seminario. Dentro de este amplio y robusto tema como lo es el análisis crítico de materiales, tomamos en cuenta: posibles ventajas y/o desventajas que supone para el aprendizaje del estudiante la implementación del material o el alcance de los objetivos[6]; por otra parte, ¿qué exigencias supone para el profesor la aplicación del mismo?, ¿qué tipos de modificaciones sugiere el profesor en el material?, ¿cómo entiende o concibe el material discutido?, la valoración respecto a los libros de texto[7], entre otros. Ahora bien, si volvemos por un momento al **Capítulo 4**, podemos observar que sólo hablamos de *análisis del material*; sin embargo, es aquí donde entramos en detalle por medio de componentes que sugerimos a fin de descomponer lo amplio que puede resultar el análisis crítico de materiales.

Conviene señalar que uno de los puntos más importantes de este trabajo es el análisis relacionado al conocimiento del currículo, ya que el mismo tiene una fuerte relación con los dos conocimientos analizados anteriormente, pero

[6]Análisis tomando en cuenta como referencia al estudiante. En la **Sección 5.1.2** mencionamos que el conocimiento sobre el estudiante es también un punto de referencia para el esquema de enseñanza, lo que implica su relación con el conocimiento sobre el currículo.

[7]Análisis tomando en cuenta los conocimientos en didáctica y disciplinar del profesor.

además, y tal vez de mayor importancia aún, es que en esta parte de nuestra investigación, validamos implícitamente y de forma transversal, el material discutido en el seminario. Por otro lado y al igual que lo señaláramos en la sección anterior, las respuestas y opiniones sobre este conocimiento son también hipotéticas.

Pero, ¿qué buscamos con esta parte del análisis?, es decir, ¿de qué nos sirve indagar sobre el conocimiento curricular del profesor de matemáticas de universidad y sus implicaciones en su labor docente? Para responder a estas dos interrogantes comenzaremos por decir que hoy por hoy existe una fuerte tendencia, al menos en carreras eminentemente prácticas como las ciencias económicas, a plantearse un *currículo interdisciplinar* como lo identifican Hargreaves *et al*. (2001), donde se busca fusionar más de una materia que sean afines y estudiar las mismas de forma interconectada. Por otra parte nos interesa conocer las opiniones y reflexiones de los participantes respecto a nuestra propuesta didáctica con el objeto de validar la misma e intentar ponerla en práctica a futuro. Como punto adicional a lo anterior, tenemos también que, mediante el punto de vista que fije el profesor respecto al material, éste manifestará parte de su conocimiento disciplinar respecto al aprendizaje y la enseñanza (Climent, 2002); lo que significa que emerge una interrelación entre las distintas componentes del CDC.

Sin embargo, un punto significativo para el análisis de esta sección proviene de la discusión que surgió de nuestra propuesta, vista como un material vulnerable y susceptible a cambios, característica esta que resalta Zabalza (2003) en los materiales utilizados para la enseñanza en ambientes universitarios. Aún así, una característica propia de esta investigación consiste en lo particular de sus resultados, es decir, si otros hubiesen sido los participantes, serían otros los resultados derivados de estas discusiones.

Ahora mostraremos la "*distancia*" de los profesores en materia de conocimiento sobre el currículo, más concretamente sobre análisis crítico de materiales partiendo de lo analizado en el capítulo anterior. Para ello, el orden que desarrollaremos para el análisis es el siguiente: comenzaremos por estudiar las ventajas y/o inconvenientes que conllevan la puesta en práctica de nuestra propuesta didáctica de cara al aprendizaje, así como el alcance del material respecto a los objetivos del curso. Esto quiere decir que estudiaremos el conocimiento curricular del profesor desde el punto de vista del estudiante o, mejor dicho, exploraremos hasta dónde el profesor toma en cuenta a los estudiantes en sus reflexiones sobre un determinado material y cómo influiría en los segundos. De esta primera parte destacamos la fuerte participación de los profesores en cuanto a las *ventajas* que éstos observan en nuestra propuesta y, de igual manera, las escasas *desventajas* que supone para cada uno de los participantes.

Pero, ¿qué situaciones concretas estamos interesados en indagar en este primer escalón del conocimiento sobre el currículo?, pues aquí lo que despierta inquietud es analizar las ventajas, obstáculos y el alcance del material en relación con los objetivos del curso desde el punto de vista cognitivo por encima de cualquier otro enfoque, como podría ser el institucional, emocional, entre otros. En esta oportunidad advertimos que aun cuando hay coincidencias generales entre los participantes, como es el caso del problema EP1-2, que lo consideran más apropiado que EP1-1 para introducir el tema de la derivada; o también, lo significativo que resulta el material porque *se relacionan las matemáticas y la economía*, surgen otras opiniones particulares en la que se desmarcan entre sí, como el caso de Ramón, quien observa características en nuestra propuesta aduciendo que prepara al estudiante para cursos de la rama económica como la microeconomía.

Por otra parte, y aunque la problemática o inconvenientes observados son escasos, es poca o nula la coincidencia entre los participantes; por ejemplo, Ramón y Alexis consideran que estudiar el dominio en un doble contexto puede generar conflictos en el estudiante, aun cuando el primero también lo ve como una ventaja, posición entendible en el caso de este profesor, ya que manifestó en varias oportunidades su posición sobre el rigor matemático inclusive para estos cursos; en concreto, este participante considera que si se introduce la derivada con el ejemplo EP1-2 *"se corre el riesgo de entender la derivada como un concepto propio de la economía"*. Sobre la regla de la cadena también hay una clara advertencia por parte de dos profesores quienes sostienen que el material puede traer problemas en el estudio de esta regla si no se maneja la composición de funciones; no obstante, entendemos que cualquiera que sea el material, el estudiante tendrá problemas con la regla de la cadena si tiene problemas con la composición de funciones, es decir, que tal como nosotros lo vemos no es un punto en contra de nuestra propuesta sino un obstáculo que se puede dar en el estudiante.

En cuanto a los objetivos y el cubrimiento de los mismos, el panorama es similar a lo expuesto en el párrafo anterior en cuanto a la participación de los profesores; todos menos Manuel coinciden en que los objetivos *se alcanzan mejor respecto a su actual forma de trabajo* e incluso, dos de ellos opina que los objetivos *se alcanzan por encima de los libros de texto*. Estas dos posiciones le dan un fuerte impulso a nuestra propuesta didáctica.

Pasando a lo que sería nuestro segundo peldaño en esta parte del análisis, nos detuvimos a indagar sobre las exigencias que suponen para el profesor llevar al aula el material discutido, lo cual implica profundizar en aspectos como: el factor tiempo, formación profesional o trabajo dentro y fuera del aula. Nos centraremos en estos tres aspectos como piezas fundamentales a ser tomados en cuenta a la hora de intentar poner en práctica cualquier material distinto al que trabaja en la actualidad, pues nosotros entendemos que del análisis que realiza un profesor sobre un documento o material didáctico surge como consecuencia una *toma de decisión* en la que se deben considerar ciertas implicaciones; por ejemplo, si el docente decide llevar un problema al aula, éste debe tener suficiente *conocimiento disciplinar* para abordarlo, pero también tiene que tomar en cuenta el factor tiempo y determinar si es viable, desde este punto de vista, la discusión del problema.

Otro punto a tomar en cuenta en el análisis del material es el trabajo que implique dentro y fuera del aula la puesta en escena del material, pues de alguna manera, esto está relacionado con el factor tiempo y el aprendizaje del estudiante. Sobre esta parte del análisis resaltamos lo importante que resultó la entrevista final, ya que en ella hicimos preguntas concretas relacionadas con la formación del profesor para la implementación del material. Aquí las opiniones están divididas pero destacamos dos situaciones que resultaron sistemáticas a lo largo de la aplicación del instrumento; la primera, Kenya fue la única en reconocer que la estructura del material es de corte constructivista y más aún, enmarcado en la EBP. Lo otro tiene que ver con la consistencia de Elio, quien reconoció abiertamente su escasa preparación para poner en práctica el material, principalmente, por su falta de conocimiento económico.

Posteriormente continuamos nuestro trabajo atendiendo a la posible aceptación de la puesta en práctica en el aula de nuestro material y sus eventuales modificaciones. Lo primero guarda estrecha relación con el final del párrafo anterior; sin embargo acá tomamos en cuenta las justificaciones que dan los participantes de cara a la aceptación o rechazo de llevar el material al aula de clases. Por otra parte, entendemos que nuestra propuesta reúne las características que considera Zabalza (2003): debe tener un currículo o parte de éste; esto es, que el mismo sea proclive al cambio y modificable de acuerdo con las necesidades o exigencias que amerita el curso. En este particular, Elio y Kenya, más allá de un apoyo personal al material, son de la idea de buscar un apoyo institucional, propuesta que también sigue Alexis. Sin embargo, lo relevante en este caso son las sugerencias que aportan de cara a los cambios en el material, eso sí, sin justificación alguna o con escasa argumentación.

Finalmente, cerramos esta parte del análisis estudiando cómo entienden el material, su comparación respecto a los libros de texto en materia de estructura y contenido y, por último, explorar si nuestra propuesta induce al cambio en el profesor en cuanto a su práctica docente. Recordemos que el material que forma parte de nuestro instrumento fue diseñado con dos propósitos fundamentales; uno, el recoger unos datos para estudiar el CDC del profesor de matemáticas de universidad, el otro, validar el mismo de cara a una futura puesta en escena tomando como metodología de enseñanza la EBP. Es por ello que nos interesa saber cómo entiende el profesor nuestra propuesta didáctica. El otro punto que nos interesa estudiar y que repercute en el anterior consiste en la relación que pueden ver los participantes en relación a los libros de texto que actualmente utilizan. Ya para concluir esta parte del análisis buscaremos explorar los posibles cambios que genera en el profesor el material discutido durante el seminario. Aquí nos encontramos con diversas opiniones que dan pie a la valoración del material.

A continuación pasamos a caracterizar aquellos aspectos más relevantes que, en materia de conocimiento sobre el currículo manifiestan los participantes, aunque aprovechamos para advertir que aun cuando el aporte en esta materia resultó significativo tanto por la cantidad de información aportada como por lo relevante de la misma, solo nos quedamos con aquella que marca la diferencia por su representatividad o relevancia.

Características generales

G9 La característica de más atributo para el material en la que todos los participantes coinciden es que con el mismo *se motiva al estudiante* tanto por su estructura detallada del contenido como por el contexto económico incluido en el mismo.

G10 Ahora bien, ya entrando en detalle en el documento discutido, los profesores, cuando se realizó la primera sesión, consideraron de forma unánime que el problema del *EP1-2 resulta más apropiado para introducir la derivada* que el del EP1-1, sobre todo por el contexto económico que se maneja en el citado de primero.

G11 Otro aspecto que consideran todos los participantes como ventajoso en nuestra propuesta es *la relación entre las matemáticas y la economía* que se mantiene a los largo de todo el material; pero más adelante, en las características compartidas y personales veremos detalles asociados a esta característica.

G12 De la característica anterior se puntualiza lo siguiente: todos los profesores consideran ventajoso para el estudiante que se trabaje *el dominio en los dos contextos*, el matemático y el económico, pues esto incide en el fortalecimiento del aprendizaje.

G13 Nuestra propuesta de enseñanza para la regla de la cadena corre la misma suerte que el estudio del dominio en doble contexto; aquí también todos los profesores *se inclinan por la estructura* que ofrecemos para el estudio de la regla de la cadena, aunque hay matices compartidos o particulares al respecto.

G14 Aunque en líneas generales todos los participantes manifiestan un fuerte apoyo al material, todos menos Manuel consideran que, de ponerse en práctica nuestra propuesta, *los objetivos quedarían cubiertos de mejor manera* respecto a su actual esquema de trabajo. En el caso de Manuel, éste manifestó a lo largo del seminario que su esquema de enseñanza es muy próximo al del material, salvo que en este último se detalla más el contenido.

G15 Para los cinco profesores, poner el material en práctica rompe con su actual esquema de trabajo (teoría + aplicaciones); no obstante, Manuel sostiene que se rompe parcialmente, puesto que él afirma que su metodología de enseñanza es similar a la del material. Aun así, de aquí se desprenden particularidades da cada uno de los profesores que mencionamos entre P20 y P22.

G16 Desde el punto de vista matemático, *todos se sienten capacitados* para seguir el material; sin embargo, en el contexto económico, *se autocalifican entre 6 y 9*, como se muestra en la **Figura 5.3**, en una escala de 1 a 10.

G17 Pudimos observar, y así queda reflejado en la **Figura 5.4**, que *todos los participantes recomiendan poner en práctica el material*, aunque con ligeras particularidades, principalmente de tipo metodológicos.

G18 Por ejemplo, todos los profesores consideran que *hay que cambiar el contexto del problema EP1-1* y enmarcarlo en el campo de las ciencias económicas.

G19 Pasando ahora al tema sobre cómo entienden nuestra propuesta, las opiniones son muy variadas, pero entre ellas señalamos que *los cinco profesores observan aspectos de carácter innovador*. Más aún, en el caso concreto de la regla de la cadena, todos los participantes aprecian características didácticas en los tres problemas donde se aborda esta regla. Algo similar ocurre con el estudio del dominio de una función, pues todos admiten que en esta materia nuestra propuesta también tiene carácter novedoso y de incidencia en el estudiante.

G20 Es claro que al discutir nuestro instrumento todos los participantes, de forma directa o indirecta, *se han mostrado dispuestos* en mayor o menor medida a tomar en cuenta nuestro material para sus futuras labores docentes. En otras palabras, consideramos que todo este proceso de discusión y reflexión ha generado inquietudes entre los participantes que inducen o promueven un cambio dentro de su actual modelo de enseñanza en lo que se refiere al contenido matemático.

Características compartidas

C14 De G11 obtenemos que Ramón, Elio y Kenya consideran que en el material *se muestran las matemáticas como herramienta* y entienden esto como una ventaja didáctica.

C15 De G13 se sigue, por ejemplo, que Manuel y Alexis *se inclinan por los problemas de los episodios EP3-1 y EP3-3*; esto lo justifican en virtud de *la notación* empleada en los mismos.

C16 Por su parte, Kenya y Ramón se inclinan por el problema EP3-2, aunque Kenya emplearía la notación de Leibnitz en este problema, pues ella considera que la de Newton genera dificultad en el estudiante.

C17 Ramón y Manuel valoran positivamente el empleo de la función exponencial en el estudio de la regla de la cadena, entre otras cosas, porque el estudio de esta función es de importancia en el campo de la economía.

C18 Como ventaja metodológica, Alexis, Manuel y Ramón destacan que *el contenido del material es más detallado* en comparación con su actual forma de trabajo y respecto a los libros de texto.

C19 Pasando ahora a los inconvenientes que pueden surgir al implementar el material, Manuel y Alexis consideran que si los estudiantes no dominan la composición de funciones *se les puede dificultar la regla de la cadena*. Sin embargo, ya fijamos nuestra posición al respecto, puesto que consideramos que esto es una problemática del estudiante y no del material.

C20 Aun cuando todos apoyaron el estudio del dominio en un contexto dual, Ramón y Alexis tuvieron sus reservas, puesto que si los estudiantes ya han trabajado el dominio solo en el contexto matemático, *abordar el dominio en el contexto económico puede generarles conflicto*. Sobre este particular queremos señalar lo siguiente: aun cuando el material incluye el estudio del dominio en un tema de derivada no implica que propongamos volver a estudiar el dominio; en todo caso nuestro planteamiento (así quedó establecido durante el seminario) sugiere este estudio en Matemáticas 1, espacio reservado para el dominio de una función.

C21 Para tres de los participantes, los problemas de la sesión S4 del seminario *son problemas inapropiados* para trabajarlos en el aula, los argumentos utilizados son: recargado en la formulación, el que la variable no aparezca de forma explícita o el contenido teórico.

C22 Para Manuel y Alexis *no supone más tiempo* la puesta en práctica del material; sin embargo, más adelante, como veremos en la tabla de la **Figura 5.3**, podemos observar que los datos de Alexis están entre comillas, esto se debe a que en un principio, el afirma que no supone más tiempo ni la preparación de la clase ni la puesta en práctica, pero después de las opiniones de sus compañeros de grupo sobre este particular, él termina aceptado que supone más tiempo, sobre todo porque no tiene argumentos contundentes para contradecir a sus compañeros.

C23 En cambio, para Kenya, Ramón y Elio *sí supone más tiempo* dentro y fuera del aula el trabajar con el material, sobre todo por el *contexto económico* y por la *metodología empleada*.

C24 En cuanto al rigor matemático, tres profesores sostienen que aun cuando nosotros apostamos en el material por una enseñanza de las matemáticas contextualizada en la economía, *no se pierde profundidad en el contenido matemático*; sin embargo Ramón, que es uno de los que apoya esta posición, como veremos más adelante, tiene sus dudas al respecto.

C25 Ahora bien, aun cuando todos consideran novedoso el estudio del dominio de una función y el de la regla de la cadena, tal como se muestra en el material, sólo dos profesores, Manuel y Ramón, *además de recomendar el estudio* de estos objetos matemáticos por esta vía, *advierten sobre las ventajas* que esto implica.

C26 Siguiendo con el dominio de una función, Alexis y Kenya sostienen que en los libros de texto que ellos utilizan *no se contempla el estudio* de este concepto con los detalles del material y que bien podría trabajarse en el aula.

C27 Por otra parte, y aun cuando Kenya, Alexis y Elio sugieren la puesta en práctica del material, ellos recomiendan que la misma tenga *apoyo institucional*, evitando así que se entienda como una posición personal de cada uno de los profesores.

C28 Alexis y Kenya consideran que el material, de aplicarse en el aula, *debe sufrir cambios en su redacción* para mejorarlo y así evitar conflictos en el estudiante.

C29 En otro orden de ideas, Ramón y Elio consideran que se debe incluir en el material *la formalización de los conceptos matemáticos* estudiados, en particular el de la derivada. Esto obedece a la visión que tienen de las matemáticas estos dos profesores, sobre todo el primero. Aquí Alexis es más preciso en su comentario como lo veremos en P26.

C30 En cuanto a cómo entienden nuestra propuesta, Elio y Kenya sostienen que es una *actividad constructivista*, refiriéndose al esquema que se sigue en la misma.

C31 Ramón y Kenya están de acuerdo en señalar que el material *exige más participación* de los estudiantes y una *atención directa o personalizada* a estos últimos.

C32 Entre los distintos conceptos que fueron discutidos durante las cuatro sesiones del seminario, dos de estos conceptos u objetos matemáticos despertaron inquietud entre los profesores participantes, estos son: el estudio del dominio en un contexto dual y la regla de la cadena a partir de un problema concreto en el área de la economía, en particular, por los alcances que en materia de aprendizaje se pueden lograr en el aula. De G20 tenemos que Manuel, Alexis y Elio afirman que *nuestra propuesta incidirá en posibles cambios*, de aquí en adelante, en el estudio del dominio y de la regla de la cadena. Los otros dos profesores no precisan sobre este particular.

Características particulares

P11 De G10 se desprenden dos comentarios de Elio, este profesor resalta *el lenguaje* y *la función de impuesto* empleados en EP1-2 como característica apropiadas para la enseñanza de la derivada en cursos de cálculo a estudiantes de ciencias económicas.

P12 Ramón observa que con nuestra propuesta *se promueve el estudio de modelos*, en particular, por los problemas discutidos en la última sesión del seminario.

P13 Por otro lado, Alexis sostiene que el material es ventajoso porque *el estudiante aprende dónde y cómo emplear la derivada* en problemas específicos del contexto económico. Aun así, este profesor deja claro que *su enseñanza no se aproxima a la sugerida por nosotros*.

P14 Elio por su parte sostiene que *las clases deberían enfocarse de esta manera*, refiriéndose a la estructura y contenido del material. Más aún, manifiesta que el material *responde a las necesidades del estudiante*.

P15 Kenya también observa cualidades metodológicas en nuestra propuesta en lo que respecta al tipo de enseñanza que sugerimos, pues ella subraya *el procedimiento por encima de los resultados*. A lo anterior añade que con nuestro planteamiento *se induce al estudiante a la toma de decisiones*, refiriéndose a la última sesión del seminario.

P16 Aun cuando Ramón apoya nuestra propuesta de forma enfática, en su condición de matemático por encima de la de docente expresa sus revervas con el trabajo contextualizado de las matemáticas en la economía; él sostiene que *se puede entender la derivada como un concepto propio de la economía* y, además, teme que *se descuide la esencia matemática* al implementar nuestra propuesta.

P17 En el plano metodológico, Kenya sostiene que *la estructura del material puede generar conflicto al principio*, pues la misma no es habitual en estos cursos, aunque sólo ella lo reconoce abiertamente.

P18 De G14 tenemos un detalle por parte de Kenya: esta profesora aun cuando considera que los objetivos quedarían mejor cubiertos en comparación a su forma actual de trabajo, sostiene que *tal vez habría que invertir más tiempo y esfuerzo*. Más adelante veremos que es la única persona que reconoce que la estructura de nuestra propuesta está enmarcada en una línea constructivista y más precisamente en la EBP.

P19 En cuanto a los objetivos del curso, Manuel considera que el alcance sería de forma similar, alegando que su estructura de trabajo es similar a la del material propuesto.

P20 Como ya lo explicamos en líneas anteriores, Kenya considera que el material *exige la formación en el contexto económico*, contenido disciplinar en el que ella reconoce que necesita formación.

P21 De igual manera, Elio también reconoce que la propuesta *es más exigente* para el docente tanto *en el contexto económico como metodológico*, pero además acepta que su formación en el en materia de economía es débil.

P22 Elio, por su parte, termina reconociendo que el material *obliga a la formación en economía* y, más aún, él vacila cuando habla de sus conocimiento en esta área.

P23 Manuel en repetidas oportunidades entiende o califica el material como una *guía de estudio* para el estudiante.

P24 Contrario a Manuel, Elio lo entiende, conjuntamente con el seminario, como una *herramienta para la formación profesional del docente*.

P25 De C30 tenemos además, en palabra de Kenya, que *el estudiante pasa a ser el protagonista* en este modelo de enseñanza

P26 Alexis manifiesta abiertamente que *no se trabaja el rigor matemático*. Esto nos aporta de algún modo su visión de las matemáticas aun para cursos como los que son objeto de este estudio.

P27 Ramón, por su parte, precisa que el material es una *herramienta para introducir el estudio de modelos*, algo que los libros de texto que él usa no abordan.

Para finalizar, en las siguientes tablas que se muestran en las **Figuras 5.3** y **5.4**, las cuales siguen el mismo esquema que presentamos en las dos secciones

¿Qué implica aplicar el material en el aula?	MANUEL	RAMÓN	ALEXIS	ELIO	KENYA
¿Genera ventajas/aprendizaje?	Valora más EP1.2 que EP1.1 Se relacionan las matemáticas y la economía Relaciona la derivada con otros conceptos matemáticos El estudio del dominio dual En la regla de la cadena El uso de la función exponencial para la regla de la cadena Destaca EP3.1 y EP3.3 La estructura del material Trabajar con el contexto económico Induce al estudiante a formular preguntas Se detalla más el contenido Introducir la regla de la cadena con aplicaciones, totalmente distinto a como lo trabaja Se motiva mucho al estudiante	Valora más EP1.2 que EP1.1 Se relacionan las matemáticas y la economía Matemáticas como herramienta No se pierde profundidad en el contenido matemático El estudio del dominio dual Monotonía (ejemplo adecuado) Refuerza conocimiento Se motiva al estudiante En la regla de la cadena El uso de la función exponencial para la regla de la cadena Los estudiantes se identifican con EP3.2 Se detalla más el contenido Promueve aprendizaje matemático Se prepara al estudiante para microeconomía Promueve el estudio de modelos Frente a problemas del contexto económico los estudiantes responden bien	Valora más EP1.2 que EP1.1 Se relacionan las matemáticas y la economía No se pierde profundidad en el contenido matemático Refuerza conocimiento Se motiva al estudiante El estudio del dominio dual En la regla de la cadena Destaca EP3.1 y EP3.3 Se detalla más el contenido Se induce al pensamiento Introducir la derivada con problemas contextualizados motiva al estudiante y aprendería más El estudiante aprende dónde y cómo utilizar la derivada en problemas concretos	Valora más EP1.2 que EP1.1 Lenguaje (EP1.2) La función es la ideal (EP1.2) Se relacionan las matemáticas y la economía Matemática como herramienta No se pierde profundidad al contenido matemático Es lo que requieren los estudiantes Está enmarcado en la realidad Responde a cuestionamientos del estudiante Refuerza conocimiento matemático El estudio del dominio dual Regla de la cadena (interpretación, qué mide) Se motiva al estudiante Las clases deberían enfocarse de esta manera Permite alcanzar un *aprendizaje significativo*	Valora más EP1.2 que EP1.1 La derivada surge de forma natural Se relacionan las matemáticas y la economía Matemáticas como herramienta Responde a los intereses de los estudiantes El estudio del dominio dual En la regla de la cadena Implica participación activa del estudiante Se motiva al estudiante Induce a la toma de decisiones Se induce al aprendizaje por medio del análisis y la reflexión Aquí importa el procedimiento que se sigue
¿Genera dificultad/aprendizaje?	Conflicto con la regla de la cadena si no maneja la composición de funciones	Se puede entender la derivada como concepto económico Trabajar el dominio con dos enfoques puede confundir EP4.1 está cargado en la formulación Teme que se descuide la esencia matemática	Conflicto con la regla de la cadena si no maneja la composición de funciones Trabajar el dominio con dos enfoques puede confundir Contenido teórico en EP4.1 EP4.2 incomoda al estudiante	El lenguaje en EP1.1 Pueden perder interés en EP1.2 por el exceso de cálculos EP4.1 y EP4.2 (la variable)	EP3.3 puede generar conflicto El tipo de estructura puede generar conflicto al principio
¿Se cubren los objetivos?	De forma similar a la actual forma de trabajo De igual manera que usando los libros de texto	Se pueden alcanzar mejor respecto a su trabajo actual Se alcanzan mejor respecto a los libros de texto	Se alcanzan los objetivos	Los objetivos quedan más que cubiertos Se motiva al estudiante al estudiante y se tocan intereses particulares de ellos Permite alcanzar un *aprendizaje significativo*	Se alcanzan los objetivos y es más significativo Se logran objetivos por encima de libros de texto Tal vez con más inversión de tiempo y esfuerzo
¿Exige más tiempo, trabajo, formación en el profesor?	No supone más tiempo en el aula Rompe parcialmente su esquema de trabajo por lo detallado del material	Supone más tiempo en el aula Representa más trabajo Esta estructura es más sencilla Rompe con el actual esquema de trabajo Factor tiempo puede ser inconveniente	No supone "más esfuerzo ni tiempo" fuera del aula Rompe con el actual esquema de trabajo Te obliga a estudiar conceptos de economía	Supone más tiempo implementarlo (puede ser inconveniente) Rompe con el actual esquema de trabajo El material es más exigente para el profesor	Supone más tiempo en el aula Exige formación en el contexto económico Implica más trabajo para el profesor y más tiempo Rompe con el actual esquema de trabajo
¿Está formado para implementar el material?	Se siente capacitado en matemáticas En economía no necesita mucha información Formación económica: 8 o 9	Se siente capacitado en matemáticas Manifiesta tener autoformación en macro y microeconomía y en los conceptos matemáticos asociados Formación económica: 8	Se siente capacitado en matemáticas Vacila sobre sus conocimientos en economía Vacila en cuanto a seguir el esquema del material Formación económica: 6 o 7	Se siente capacitado en matemáticas No se considera preparado para seguir el material Considera que le falta conocer más sobre economía Formación económica: 7 u 8	Se siente capacitada en matemáticas Se siente capacitada para trabajar el material Considera que necesita formación en economía Formación económica: 6 o 7

Figura 5.3: Currículo, primera parte

	MANUEL	RAMÓN	ALEXIS	ELIO	KENYA
¿Recomienda poner el material en práctica?	Sí, pero con ejemplos adicionales Sí, para el estudio del dominio Sí, para la regla de la cadena	Sugiere introducir la derivada como EP1.2 Sugiere el estudio del dominio Sugiere el estudio de la regla de la cadena	Es viable seguir el material Hay que vivir la experiencia desde el inicio de carrera Sugiere apoyo institucional	Bueno sería trabajarlo Sugiere apoyo institucional	Es pertinente hacerlo así, en general Es viable Pondría en práctica EP3.1 para motivar Sugiere apoyo institucional
¿Qué cambios sugiere en el material?	Cambio de contexto en EP1.1	Retomaría el concepto de límite Cambiaría el contexto de EP1.1 Hay que formalizar el concepto de derivada Añadiría un problema de costo No modificaría EP3.1 Sugiere más ejercicios de matemáticas sin contenido económico	Cambio de contexto en EP1.1 No se puede evitar el límite En EP1.2 se debe incorporar un intervalo Hay que definir ingreso Mejorar la redacción	Cambiaría el contexto en EP1.1 por ecuaciones de demanda y oferta Incorporar la informática Quitarle dificultad a EP3.2 Fusionar EP3.1 y EP3.3 Incluir problemas de optimización Quitaría el exceso de cálculo de EP1, eso genera rechazo o error Hay que incluir las definiciones formales	Construiría las tablas en clase Mejorar redacción Cambio de contexto en EP1.1 Utilizaría EP1.1 como complemento En EP3.2 cambiaría la notación por la de Leibnitz
¿Cómo entiende el material?	En EP4.1 se exige mayor nivel de manipulación algebraica Guía de estudio Es innovador para el dominio, la regla de la cadena y para valores extremos Problemas motivadores que conectan la economía y las matemáticas Se estimula el aprendizaje	Problemas motivadores Se requiere un trabajo directo con el estudiante En EP4.1 se exige más que en los anteriores Primera vez que trabaja una estructura como EP1.1 No es rutinario Es novedoso el estudio del dominio Se ilustra cuándo y cómo trabajar la regla de la cadena Se trabaja de forma inversa a los libros de texto Involucra más al estudiante La estructura es de *paso por paso* Herramienta para introducir modelos	EP1.1 es un problema para ingenieros Actividad de consolidación del conocimiento Es novedoso en la regla de la cadena Es novedoso para el dominio No se trabaja el rigor matemático	Como modelo constructivista Se trabaja de forma inversa a su esquema actual Herramienta de formación profesional Motivador y generador de conocimiento EP4.1 es más exigente y detallista que los anteriores EP4.1 es una actividad complementaria Es novedoso para: la regla de la cadena, el dominio, la monotonía Es novedoso introducir la regla de la cadena desde un problema	Actividad constructivista Se puede llegar al concepto de derivada obviando $\varepsilon-\delta$ Se llega a la derivada por tres caminos Exige participación activa del estudiante El estudiante es el protagonista Se inducen interacciones alumno-alumno y alumno-docente Está dirigido hacia la EBP Se explota la monotonía desde la economía No es rutinario Es novedoso en la regla de la cadena y en el dominio Se trabaja de forma diferente a la forma usual de trabajar en el aula
¿Qué libros texto recomienda/utiliza? El material respecto a los libros texto	Se detalla más que en los libros de texto Considera que el material no se puede comparar con los libros texto	Los libros no desarrollan el tema tan cuidadosamente Se detalla más que en los libros Ningún libro tiene un apartado sobre el estudio de modelos	En los libros de texto también se trabaja velocidad instantánea Recomienda: Arya & Lardner y Hoffman & Bradley En los libros de texto no trabajan el dominio económico El material es más didáctico que los libros	Los libros sugieren una idea similar sin tanto detalle Recomienda: Tam y Arya & Lardner	Recomienda: Haeussler & Paul Los libros no llenan sus expectativas Los libros no trabajan el dominio económico Se trabaja de forma inversa a los libros texto Se trabaja simultáneamente la contextualización y las nociones matemáticas
¿Induce al cambio en el profesor?	No, trabaja de forma similar Se detalla más el tema del dominio Abre caminos a nuevas formas de enseñanza y aprendizaje Para introducir la regla de la cadena, tratará de implementarlo	Reconoce que incidirá en su labor docente a futuro	Considera trabajar a futuro el dominio y la regla de la cadena como en el material	Cambios en el estudio del dominio económico Tomará ideas para la regla de la cadena Conservó los problemas de cara a ponerlos en práctica Te hace trabajar de forma distinta a los libros texto	EP4.2 debería formar parte del currículo oficial Reconoce que incidirá en su labor docente a futuro, aunque no en su totalidad porque hay factores que lo impiden Vale la pena intentar el cambio para mejorar el aprendizaje Al principio puede resultar tedioso

Figura 5.4: Currículo, segunda parte

previas, mostramos los datos relacionados con los puntos de nuestro interés y que sintetizan las reflexiones de los profesores.

A modo de conclusión y recapitulando sobre estas tres secciones, tenemos que señalar, como punto previo y relevante en esta parte del estudio del CDC, que los profesores al aportar sus opiniones y reflexiones sobre este particular tienen presente en todo momento los conocimientos sobre enseñanza y aprendizaje, analizados anteriormente, pero también toman en cuenta el conocimiento disciplinar que abordaremos en la próximo apartado. De esta manera se ponen de manifiesto dos situaciones bien concretas: (1) la fuerte interrelación entre las distintas componentes del CDC y (2) lo difícil, por no decir imposible, que resulta establecer fronteras claras y precisas sobre estas componentes.

Ahora bien, veamos qué aportan estos profesores en el campo de la didáctica de las matemáticas y más concretamente al área del conocimiento sobre el currículo en el momento que observan *ventajas*, *conflictos* o el posible *alcance de los objetivos* del curso mediante la puesta en práctica del material. En primer lugar, toda la argumentación que dan los profesores a la hora de valorar el material en función de los tres elementos antes señalados se centra con más peso en dos factores o aspectos propios del CDC, estos son, el conocimiento disciplinar y el conocimiento sobre el aprendizaje. Para todos, salvo Manuel en pocas ocasiones, valoran de forma positiva el hecho de que los problemas del material estén todos contextualizados en las ciencias económicas ya que los mismos muestran *la relación entre las matemáticas y la economía*. Vale destacar que esto último nos conecta con la EBP, puesto que en esta metodología de enseñanza se busca explotar la interrelación entre contenidos disciplinares afines.

En particular, los conceptos que más valoran como positivos para la implementación del material son el dominio y la regla de la cadena; ellos parten del hecho de la estructura sobre cómo se trabaja en nuestra propuesta pero también admiten que la contextualización de estos conceptos en problemas concretos de economía muestran las matemáticas como herramienta; más aún, Ramón señala que en los cursos de microeconomía se trabaja el dominio con los detalles del material, lo que significa que le abre camino a los estudiantes en este sentido, pero también muestra el conocimiento disciplinar de este profesor en materia económica.

Otro punto que vale la pena señalar asociado al conocimiento disciplinar, en esta oportunidad por parte de Kenya, Manuel y Alexis, es que estos profesores estiman que es más apropiado el uso de la notación de Leibnitz por encima de la de Newton. Sobre este particular no encontramos en la literatura cuál es la notación más apropiada en el campo de las ciencias económicas; no obstante, al revisar textos especializados en economía matemática como

Chiang y Wainwright (2006) y Escobar (2005), entre otros, podemos observar que la notación más usada en ambos libros es la de Leibnitz, sobre todo en problemas técnicos o propios de la economía. Aunque Kenya también argumenta que el uso de esta notación obedece a que a los estudiantes se les facilita trabajar con la misma.

En este mismo orden de ideas, Ramón y Manuel advierten que es ventajoso el uso de la función exponencial al trabajar la regla de la cadena; ellos resaltan dos cosas, la primera, la estructura del problema en sí podría incidir en un mejor aprendizaje, dados los errores que suponen para el estudiante el estudio de esta función; el otro punto está asociado a la economía, pues ellos reconocen la importancia de la exponencial en este campo, algo que señalamos en nuestro marco teórico al manifestar que los libros de texto reservan un capítulo exclusivamente a las funciones logaritmo y exponencial.

Pero, qué más aportan las reflexiones de los profesores al valorar el material. La fuerte presencia del estudiante en las opiniones de los profesores dejan claro que, al analizar y discutir una herramienta didáctica con el objetivo de ponerla en práctica, algún valor debe tener a la hora de tomar una decisión por parte del profesor en materia curricular. Un ejemplo de ello lo encontramos en la opinión de Elio: *el material responde a las necesidades del estudiante*, o la de Alexis donde señala que: *el estudiante aprende dónde y cómo emplear la derivada*. Así como estas podríamos citar muchas más; sin embargo lo que queremos resaltar de todo esto es que a la hora de analizar y discernir sobre un material cualquiera con el objeto de construir el currículo personal o institucional el estudiante debe pasar a jugar un papel fundamental.

Ahora bien, los mismos elementos que los profesores utilizan para determinar ventajas en nuestra propuesta son los mismos que toman en cuenta para concluir sobre los inconvenientes de la misma. Si bien es cierto que los profesores valoran positivamente la estructura del material, Kenya advierte que *al principio puede generar conflicto en el estudiante*, puesto que no está acostumbrado a este tipo de metodología. De igual manera Ramón y Alexis manifestaron su recelo respecto al tema del dominio, en todo caso sugieren que se estudie desde un principio como lo presenta el material y no cuando se estudie el tema de derivada, ya que el estudiante, si ha trabajado el dominio de una función sólo en el contexto matemático, podría incurrir en errores de tipo cognitivo.

Más adelante, Ramón precisa que la estructura del material puede confundir al estudiante ya que *la derivada se puede entender como un concepto propio de la economía* o lo que señalamos en C22, en este caso tres profesores objetan la sesión S4 del seminario por el contenido teórico y la formulación o estructura de los problemas. La posición de Ramón es entendible porque a lo largo de la aplicación de nuestro instrumento siempre manifestó la importancia del rigor matemático aun en estos cursos; de hecho, este profesor *teme que se descuide la esencia matemática*. En cuanto a los problemas de la sesión S4, vuelve a surgir el contenido disciplinar como base de la argumentación, aunque paralelo a este también aparece el conocimiento sobre el aprendizaje, ya que, según Alexis y Elio, los estudiantes presentan conflictos frente a problemas de corte teórico.

Pasando ahora a otro punto del análisis del conocimiento sobre el currículo y más concretamente, sobre el análisis de materiales publicados, abordamos la formación profesional del profesor en materia disciplinar y en materia metodológica. Nosotros sabemos, de los esquemas que aportaron los participantes en sus respuestas al cuestionario de la primera sesión S1, cuál es la estructura que siguen en la enseñanza de la derivada. Sobre este punto en específico, todos los profesores aceptan que el poner en práctica nuestra propuesta les hace romper con su esquema de trabajo, puesto que ellos trabajan de forma *teoría + "aplicaciones"*[8] y la propuesta apunta hacia la EBP como hemos señalado en repetidas oportunidades, lo que implica un trabajo que cabalga entre los contextos matemático y económico, pero además exige un mayor contacto con el estudiante con el objeto de propiciar la discusión con y entre ellos.

Por otra parte, todos los profesores sacan a colación el *factor tiempo* como elemento a considerar no sólo para la puesta en escena del material sino previo al ejercicio de la enseñanza. En esta oportunidad las opiniones están divididas; sin embargo, un punto significativo lo pone Alexis cuando en el seminario afirma en un principio que tanto para la docencia como antes de ésta el material no le supone más tiempo; no obstante, después de las opiniones de los otros dos compañeros de grupo y en la misma entrevista final, él termina aceptando que sí le implica más tiempo llevar el material a la práctica. Ahora bien, lo importante es llegar al por qué le supone más tiempo, cuestión que aceptan Ramón, Kenya y Elio; pues bien, el material demanda determinado conocimiento disciplinar económico y también conocimiento sobre la enseñanza, en otras palabras, la propuesta exige formación profesional del docente. Además, hay que recordar que estos profesores son producto de una autoformación en economía y sólo Kenya y Elio tienen formación en el área pedagógica.

En otro orden de ideas, el que los profesores determinen que tanto el contenido de los problemas como la estructura de los mismos tienen ciertas ventajas para el estudiante no implica que deben estar de acuerdo con la puesta en práctica del material. Más aún, suponiendo que estén de acuerdo con la implementación de la propuesta no implica tampoco que se acepte seguir al pie de la letra el material, en este caso el profesor debe saber modificar o amoldar un problema según las circunstancias o necesidades del momento

[8] Las comillas en este caso significan que no todos trabajan el tema de aplicaciones y si lo trabajan es de forma superficial, como por ejemplo Elio y Alexis.

o del estudiante, por ejemplo. Por otra parte y aun cuando el profesor de universidad, usualmente, goza de autonomía de cátedra, el apoyo institucional es importante puesto que el mismo le aporta validez al trabajo del profesor. Sobre esto último se refieren Kenya, Alexis y Elio. El profesor universitario no debe actuar de forma aislada al resto de colegas ni de espaldas a la institución, ya que ésta, por lo general, tiene líneas claramente definidas sobre el profesional que está formando.

Ahora bien, más allá de avalar la propuesta, nos interesa conocer los cambios que sugieren los profesores y sus implicaciones de cara a nuestro trabajo. Dado que tenemos en la mira determinar el perfil del profesor participante recurrimos a C29: ahí queda expresado que Ramón y Elio sugieren que se incluya *la formalización de los conceptos matemáticos*, lo que nos hace corroborar algo sostenido en líneas anteriores, es decir, el valor y la rigurosidad que le dan a las matemáticas *per se* aun en cursos de cálculo diferencial para futuros profesionales del área económica. Paralelo a esta situación, Alexis manifiesta que *no se trabaja el rigor matemático*, lo que también advierte sobre la visión de las matemáticas de este profesor. En resumen, los cambios que sugieren los profesores al material están en relación directa con la visión que ellos tienen de las matemáticas.

Otra vía de explorar el conocimiento del profesor en relación al análisis crítico de materiales publicados consiste en indagar la posición que tienen los participantes al comparar dos o más materiales; en nuestro caso, nos limitaremos a estudiar las diferencias o semejanzas entre nuestra propuesta y los libros de texto que ellos utilizan o, simplemente, cómo entienden el material desde el punto de vista didáctico. Por ejemplo, todos los profesores entienden que la actividad desarrollada en el material presenta *aspectos innovadores*, destacando una vez más la estructura que tienen los tres problemas donde se aborda la regla de la cadena. Sobre este hecho concreto, lo más relevante en materia de innovación es que aparece la derivada de la función interna como parte del enunciado del problema (EP3-1), el uso de la función exponencial para introducir la regla de la cadena (EP3-2) y la discusión sobre la interpretación de esta regla (EP3-3).

Al igual que la regla de la cadena, el estudio del dominio de una función en dos contextos de forma simultánea resultó innovador para todos los profesores, sobre todo porque en ningún libro de texto de los que ellos utilizan estudian el dominio de esta manera, aunque los únicos que reconocen abiertamente esta situación son Alexis, Elio y Kenya. Ramón, por su parte, destaca que en los cursos de microeconomía se estudia el dominio de la función en el campo de la economía y que se debería trabajar así en los cursos de cálculo para ciencias económicas.

En materia metodológica, las opiniones son diversas, Ramón y Manuel sostienen que en el material se detalla más el contenido que en la estructura de sus clases, lo que nos muestra de alguna manera que la parte práctica en sus clases es poco explotada. Por otra parte, Elio y Kenya entienden el material como una actividad constructivista por todo el esquema se sigue en el mismo. Conviene hacer una observación sobre esto último, puesto que estos dos profesores tienen formación en el campo pedagógico; ellos, a diferencia de los otros participantes, son licenciados en educación, mención matemáticas y Kenya, además, es doctora en ciencias pedagógicas. Por otra parte, Kenya y Ramón entienden que nuestra propuesta exige más participación del estudiante y una atención personalizada a éste. De alguna manera, las reflexiones comentadas en este párrafo apuntan hacia algunas características de la EBP, aunque la única que lo manifiesta de forma clara y precisa es Kenya.

En otro orden de ideas los profesores, en general, no sólo entienden el material como una herramienta para enseñar matemáticas, aunque Manuel lo entiende como una *guía de estudio* y no le da la relevancia de los otros. Durante el seminario, todos los profesores en algún momento señalaron que estaban aprendiendo algo nuevo en materia metodológica, sobre todo en las discusiones del dominio de una función y de la regla de la cadena, aun así, el único que mantuvo una posición firme sobre su conocimiento disciplinar económico fue Elio, quien reconoce nuestro material como herramienta para la formación profesional del docente, lo cual nos muestra un poco la valoración de seminario que lo estudiaremos más adelante.

Ahora bien, ya para cerrar esta parte del análisis, hablaremos de los cambios que podría generar toda esta actividad en los participantes. En primer lugar, entendemos que es muy apresurado hablar de posibles cambios en la práctica docente del profesor como consecuencia de este intercambio de ideas y opiniones. Sin embargo, algunos comentarios surgidos durante el seminario o las mismas respuestas expresadas en la entrevista final nos dejan ver que estos profesores son proclives al cambio, en particular, en lo que respecta al tema del dominio de una función y en el estudio de la regla de la cadena, siendo los más dados a estos cambios: Ramón, Elio y Kenya, ya que Manuel sólamente se pronuncia respecto al dominio y sostiene que en adelante lo hará con los *"detalles"* del material. No obstante, lo que podemos apreciar es que estos posibles cambios sólo apuntan hacia la estructura del contenido, pero en materia metodológica se muestran reticentes.

5.2. Análisis de conceptos matemáticos

Aunque en el apartado anterior discutimos y analizamos el perfil del profesor en materia de conocimiento sobre enseñanza, aprendizaje y currículo, nosotros abordamos de modo parcial algunos objetos matemáticos, ya que estos guardan estrecha relación con los elementos del CDC que señalamos arriba; aun así decidimos reservar un lugar especial para ahondar en estos objetos o conceptos matemáticos; entre otras cosas, porque buscamos explotar el conocimiento matemático desde el CDC. El análisis que presentamos a continuación se deriva de datos provenientes de distintas sesiones del seminario y los cuestionarios, a partir de los cuales buscamos relacionar, valiéndonos de las opiniones y reflexiones aportadas por los participantes en diferentes momentos sobre estos objetos como los son: a) dominio de una función, b) regla de la cadena y, finalmente, c) monotonía y valores extremos. Vale la pena señalar, que en el análisis no sólo tomamos en cuenta el contenido matemático sino que explotamos la relación de estos conceptos con el contenido económico, fortaleciendo en cierto modo nuestra investigación en el área de conceptos matemáticos enmarcados o contextualizados en entornos no-matemáticos.

Más aún, la plataforma o base que utilizaremos para el análisis de los conceptos antes mencionados es la didáctica en sí misma, esto quiere decir que nuestra visión y análisis del concepto la haremos posicionándonos en elementos de la didáctica como: (a) idoneidad del concepto discutido de cara al aprendizaje; (b) identificación de elementos innovadores en el material, (c) riqueza del material para favorecer el aprendizaje y generar nuevas estrategias de enseñanza y, (d) valoración crítica sobre el tratamiento y organización de los conceptos matemáticos discutidos. En otras palabras, procuraremos acercarnos al conocimiento profesional del profesor de manera indirecta mediante estos conceptos matemáticos elegidos. Un punto que debemos aclarar lo reservamos a la siguiente observación.

Observación: En ningún momento está planteado calificar el conocimiento matemático *per se* del profesor respecto a cada uno de estos conceptos. En todo caso, lo que perseguimos es estudiar la dinámica de estos conceptos matemáticos que maneja cada uno de los participantes, esto es, el *qué* y *cómo* enseñan el concepto, sus visiones de los mismos en comparación a lo expuesto en el material, entre otras. En otras palabras, nuestro objetivo en esta parte del trabajo consiste en profundizar en el CDC del profesor de matemáticas a partir de la discusión sobre un elemento matemático, bien sea por la contextualización dual que hemos planteado o por el enfoque que en materia de enseñanza y aprendizaje le hemos dado al concepto.

La dinámica que seguimos para el análisis consiste en lo siguiente: a partir de los comentarios y reflexiones aportados durante las sesiones del seminario, los cuestionarios y las entrevistas finales, hemos extraído algunas frases o secciones de los mismos que reflejan el conocimiento disciplinar del profesor relacionado con el concepto a estudiar.

5.2.1. Conocimiento sobre el Dominio

Partamos de que el dominio de una función es un concepto que se ha trabajado en cursos anteriores al tema de la derivada y que el mismo juega un papel importante a la hora de estudiar modelos matemáticos. A continuación mostraremos un ejemplo en el que se ilustra que dada una función matemática como $f(x) = x^2$, el dominio de la misma puede cambiar según el escenario donde se trabaje o, más precisamente, la situación modelada por esta función. En primer lugar, si entendemos esta función en el campo estrictamente matemático, no cabe duda que $Dom_f = \mathbb{R}$. Por otra parte y ahora entrando un poco más en un hecho concreto de la economía, si con esta función se modela el ingreso diario que registra un empresa durante los dos últimos años, el dominio de esta función es $Dom_f = [0, 720]$. Ahora bien, si la misma función modela el consumo de energía en función del número de casas construidas en un año, dado que la variable representa el número de casas fabricadas durante un año, $Dom_f = [0, n]$, donde n representa el número de casas fabricadas durante un año. De igual manera, se pueden construir más ejemplos en el que el dominio de la función puede cambiar según la situación que se modele.

Ahora bien, si nos fijamos en los dominios de los dos últimos ejemplos, podemos tomar, en el caso del primero, unos números racionales muy particulares puesto que, por lo general, las monedas están divididas en 100 céntimos; por lo tanto, el dominio para este ejemplo son los racionales con dos decimales en el intervalo $[0, 720]$; mientras que en el otro ejemplo, como n representa una cantidad de viviendas, esta variable pertenece al conjunto $\mathbb{N}$ de los números naturales.

En las sesiones S2 y S3 del seminario, específicamente, en los episodios EP2-1 y EP3-1, respectivamente, incluimos una discusión sobre el estudio del dominio de una función tanto en el contexto matemático como en el económico. Si ponemos atención a ambos episodios, observamos que en los mismos trabajamos con funciones polinómicas, lo que significa que en el contexto matemático el dominio es el conjunto, $\mathbb{R}$, de todos los números reales; sin embargo, en el contexto económico el dominio cambia sustancialmente en ambos casos, de acuerdo a la situación estudiada.

Un hecho curioso respecto al estudio del dominio en cursos de matemáticas para carreras de ciencias económicas es que aun cuando los programas oficiales sugieren el estudio del dominio de diversas funciones, los libros de texto, prácticamente, no abordan el tema. Uno de los aportes, que consideramos relevante en este trabajo, tiene que ver, justamente, con el estudio que realizamos sobre el dominio de una función y, más concretamente, al relacionarlo al entorno económico, puesto que en este contexto, por lo general, no hemos encontrado referencia alguna, tanto en la literatura castellana como anglosajona; sin embargo, destacamos que nuestro aporte va enfocado hacia el conocimiento profesional del profesor. Sólo encontramos, en nuestra exhaustiva revisión, un artículo de Bagni (2004) en el que se estudia de forma general el tema de funciones en la escuela secundaria italiana y reservan determinados espacios para discutir sobre el dominio de una función. El resto de la literatura aborda el tópico de funciones sin llegar a profundizar en el tema que nos ocupa, destinando a éste una importancia insignificante desde nuestro punto de vista.

Volviendo a los libros de texto, nos permitimos señalar lo siguiente: de los libros revisados por nosotros, tales como Sáenz (2007), Hoffmann y Bradley (2001), Lial y Hungerford (2000), Haeussler y Paul (1997), Arya y Lardner (1987), Whipkey *et al.*(1987) y Wonnacott (1983), sólo Hoffmann y Bradley (2001) hacen mención al *"dominio práctico"*, para referirse al dominio en el contexto económico; en todo caso, lo más significativo a destacar es lo siguiente: lo que aparece en este libro de texto es una breve observación a pie de página en referencia a un problema en particular, pero en ningún momento se toma en cuenta el tema del dominio en el contexto económico.

> En el ejemplo 1.4, se observa que la función $C(q) = q^3 - 30q^2 + 500q + 200$ está definida para todos los números reales q, pero el dominio "práctico" es $q \geq 0$ ya que no tiene sentido hablar de fabricación de un número negativo de unidades.
>
> (Hoffmann y Bradley, 2001, p. 5)

Nuestro interés en el estudio del dominio va más allá de lo que éste representa para la función en el contexto matemático, es decir, en lo que se refiere a la definición de la función en sí, recordemos que la expresión correcta para referirnos a este objeto matemático es *dominio de definición*; es por ello que el concepto de dominio hace clara referencia a un conjunto que permite definir una función o, dicho de otra manera, es *el conjunto formado por todos aquellos elementos a los que se les puede asociar una imagen a través de la función estudiada*. Sin embargo, este es un concepto que está profundamente relacionado al tema de inyectividad, sobreyectividad, continuidad, derivada, entre otros. Un ejemplo de ello es la función $f(x) = x^2$, cuyo dominio es el conjunto de todos los números reales, $\mathbb{R}$, esta función con este dominio no es inyectiva; sin embargo, si restringimos el dominio al conjunto $\mathbb{R}_0^+ = [0, +\infty)$ esta función pasa a ser inyectiva. De esta misma manera podemos hacer otras observaciones relacionadas con el dominio pero no es el tema de nuestro trabajo.

Pero además, el concepto de dominio también está fuertemente asociado al contexto en el que se enmarca una determinada función, siempre que ésta modele una situación no-matemática; en nuestro caso, nos referimos al contexto económico tal como lo refleja la cita anterior o los problemas de los episodios EP2-1 y EP3-1. En la página 163 de esta memoria, nosotros dejamos una pregunta en el aire que retomamos ahora, en esa oportunidad nos preguntamos, refiriéndonos a los profesores del grupo A, ¿por qué ambos profesores no trabajan el tema del dominio con las restricciones del caso en el contexto económico?

Ya en la **Sección 5.1.1**, cuando analizamos el tema de la enseñanza del dominio, quedó en evidencia que aun cuando Manuel y Ramón conocen y manejan algunas restricciones para el dominio de funciones en el contexto económico, distintas de la ya mencionada $\mathbb{R}_0^+ = [0, +\infty)$, estos profesores no consideran relevante ahondar en otras restricciones del dominio, entre otras cosas, por lo ajustado de sus esquemas de trabajo a los libros de texto, aun cuando Ramón manifestaba que en el curso de microeconomía se estudian restricciones en el dominio de una función.

El considerar el estudio del dominio de una función en el entorno económico es algo que suponemos, desde nuestra posición y dado que apostamos por la enseñanza de las matemáticas usando EBP como estrategia didáctica, permite enriquecer todo el desarrollo que se ha venido realizando dentro de las didácticas específicas, no sólo por la novedad del tema en el campo de la didáctica sino también por el significado que este tiene a la hora de estudiar o analizar una función en entornos no-matemáticos. Además de lo anterior, conocer el dominio de una función facilita cualquier manipulación algebraica o analítica con la función. En este sentido, el llevar a cabo una discusión del tema del dominio, sobre todo, como lo implementamos en este trabajo, suponía para nosotros ahondar en objetivos como: 1) indagar sobre el conocimiento disciplinar en materia de cálculo diferencial y temas afines, 2) detectar hasta dónde el profesor es consciente de las dificultades que supone para el estudiante discutir un concepto matemático asociado a un tema no-matemático, y 3) analizar el papel del profesor frente a propuestas metodológicas alternativas.

Sin embargo, un punto que nos obliga a ir con cuidado tiene que ver con lo siguiente: ¿por qué los libros de texto especializados no contemplan el estudio del dominio de una función en contextos particulares?[9], y sobre todo, las restricciones del dominio para determinados casos de la economía como el del EP2-1, cuya producción es $x \geq 0$ pero que seguramente, aunque no lo dice el problema, la fábrica tiene una capacidad tope de producción.

A fin de seguir la misma estructura del análisis que llevamos a cabo en el apartado anterior, seguiremos viendo los dos grupos de profesores como uno sólo. Para ello y antes de entrar propiamente en el tema del análisis del concepto en cuestión, recordemos que a lo largo de los datos que

[9]Este cuestionamiento surgió de forma natural durante una de las sesiones del seminario debido a una interacción entre Alexis y Kenya.

aportaron tanto el seminario como los cuestionarios y la misma entrevista final, pudimos observar que los profesores fundamentan su metodología de enseñanza basándose en los programas oficiales y en los libros de texto. En tal sentido, lo que perseguimos es ampliar nuestro estudio en lo que respecta al CDC y, en particular, en el conocimiento disciplinar matemático-económico.

Comenzaremos por destacar los comentarios de Ramón por encima de los de Manuel, puesto que este último únicamente advierte que en sus clases "habla" de ambos dominios (matemático y económico), sin llegar a precisar cómo aborda el dominio económico. En todo caso podemos inferir, de acuerdo a otros comentarios, que su trabajo en el aula de clases, al trabajar el tema del dominio económico, es similar al ejemplo que recién citamos de Hoffmann y Bradley (2001), donde sólo toma en cuenta el conjunto $\mathbb{R}_0^+ = [0, +\infty)$.

Por su parte Ramón, a diferencia de Manuel, sostiene opiniones más precisas en relación al conocimiento sobre el dominio. En primer lugar, este profesor reconoce abiertamente que *"fue con el tiempo que notó la diferencia entre ambos dominios"*, comentario que resulta de gran valor para nosotros porque se deja ver la necesidad de un espacio para la formación profesional enmarcada en la conexión matemáticas-economía. Por otra parte, también reconoce que trabaja el dominio con más inclinación hacia el contexto matemático, aunque admite que en cursos como el de microeconomía se trabaja el dominio tal como lo planteamos en este material.

En este sentido, podemos notar que ambos profesores, dado que siguen los programas oficiales y los libros de texto, no profundizan en el tema del dominio; lo que podemos entender como falta de formación del concepto estudiado en el contexto económico, puesto que ambos afirman que trabajan el dominio de forma similar al del material "*pero sin tanto detalle*" y Manuel, sobre este punto, además de considerar apropiado trabajar el dominio como lo presenta nuestro instrumento, sostiene que en adelante lo hará con los "*detalles*" del mismo.

Por otra parte, Alexis en algún momento del seminario deja ver que trabaja en sus clases el dominio en el contexto económico como lo abordan Hoffmann y Bradley (2001), aunque en la entrevista final afirma que no trabaja el dominio en el contexto económico. Esta situación, más allá de tener relevancia en materia disciplinar deja evidencia de lo que aporta el seminario como actividad colectiva respecto a la entrevista como actividad unipersonal. Aun así, inferimos que únicamente trabaja el dominio en el contexto matemático aunque muestra cierto conocimiento sobre las restricciones señaladas arriba. Por su lado, Elio entiende el dominio matemático como un *"objeto abstracto"* y sostiene que en el económico "*se restringen muchas cosas*", pero en ningún momento dice trabajar el dominio en el contexto económico. Recordemos que este último profesor, durante las sesiones del seminario como en los cuestionarios, siempre se decantó por una enseñanza tradicional con una fuerte inclinación hacia las matemáticas con *"pocas y sencillas aplicaciones"*. En este orden de ideas, nuestra observación apunta hacia la falta de formación inicial y la ausencia de un espacio de discusión que promueva el intercambio de ideas y opiniones entre los profesores y que a su vez incida en la formación profesional de los mismos.

En otro orden de ideas y como punto a destacar dentro de este espacio, resaltamos el intercambio de opiniones entre Kenya y Alexis al referir ambos que: "*los libros de texto no trabajan el domino como el material discutido*", lo que supone para nosotros un aporte en materia de formación profesional, puesto que ellos mismos reflexionan de forma natural sobre este hecho y valoran positivamente este enfoque del material.

Ya en la parte introductoria de esta sección comentamos los pocos trabajos existentes en el campo de la didáctica de las matemáticas en relación al dominio de una función y, más aún, la poca explotación del tema en los libros de texto. Desde nuestro punto de vista, el dominio de una función, por su conexión con otros conceptos matemáticos, es un objeto que permite trabajar las matemáticas desde distintos enfoques, sobre todo si la idea es promover la enseñanza de las matemáticas a través de la EBP, donde la interrelación de conceptos es esencial para poner en práctica esta metodología de enseñanza. Además, el estudio del dominio en distintos contextos no-matemáticos permite al estudiante profundizar en este concepto, ya que se puede ilustrar con precisión el concepto de este objeto matemático y cuán valioso es dentro de las matemáticas.

Ahora bien, el hecho de que los programas oficiales y los libros de texto no exploten el tema del dominio como lo hacemos en nuestra propuesta no nos permite tildarlo de negativo, en todo caso entendemos que tanto los programas oficiales como los libros de texto obedecen, por lo general, a estructuras tradicionales de enseñanza, mientras que nosotros apostamos por una metodología alternativa en la que el estudiante se puede involucrar más directamente, desde las matemáticas, en su futuro campo profesional.

Es por lo dicho en la última parte del párrafo anterior que también nos interesa indagar en las dificultades y/o ventajas que representa para el estudiante la discusión de un determinado concepto matemático. Sobre este punto en particular, recurrimos a lo expresado por Elio y Alexis, quienes consideran que trabajar el dominio bajo el esquema que proponemos puede generar conflictos en el estudiante; en el caso de Alexis, él sugiere que se trabaje con esta metodología desde el principio de carrera a fin de evitar "*cambios bruscos*" en el estudiante. Sin embargo, Ramón opina con cautela sobre este punto; por ejemplo, él advierte que llevar al aula de clases una discusión como la que proponemos es favorable para el estudiante puesto que al establecer la diferencia entre ambos dominios se prepara al estudiante para el curso de microeconomía, aunque al mismo tiempo reconoce que el material puede generar confusión en el estudiante, ya que en Matemática 1 se ha trabajado el dominio en el contexto económico únicamente.

Precisamente, un punto a tomar en cuenta a la hora de implementar la EBP como estrategia de enseñanza es el comenzar desde los primeros cursos de carrera aplicando esta metodología, siempre que se pueda, no sólo porque se fomenta desde un principio la investigación y la discusión entre pares, sino que además se involucra al estudiante en la interrelación de asignaturas propias de su carrera con otras que le servirán de herramientas para las primeras, tal es el caso de la microeconomía, la macroeconomía y otras propias de la teoría económica con las matemáticas.

Ya para finalizar, resumimos las características más destacadas en materia de conocimiento sobre el dominio de una función por parte de los profesores participantes, no obstante, advertimos que a diferencia de las características mostradas en el apartado anterior, las cuales fueron agrupadas según su categoría, aquí las presentamos en un único bloque pero diferenciándolas de acuerdo al número de profesores de dónde provienen:

G21 Todos los profesores entienden el dominio económico como el conjunto $\mathbb{R}_0^+ = [0, +\infty)$ no sólo en materia de enseñanza sino como conocimiento profesional.

P28 Ramón sostiene que en microeconomía se trabaja el dominio de una función con restricciones más detalladas que la señalada antes. Reconociendo además que "*fue con el tiempo que notó la diferencia entre ambos dominios*". Esto implica que además de tener cierto conocimiento en materia económica, se muestra la necesidad de un espacio de discusión y reflexión que conlleve a la formación profesional.

P29 Elio muestra un conocimiento sobre el dominio de una función muy particular, lo entiende como un "*objeto abstracto*" en el campo de las matemáticas, mientras que en el área económica "*se restringen muchas cosas*", aunque en lo segundo su opinión es de forma general.

5.2.2. Conocimiento sobre la Regla de la Cadena

La regla de la cadena es, como su nombre lo indica, una regla, entre otras, que sirven como herramienta dentro del tema de la derivada; ésta forma parte o está incluida en los currículos o programas oficiales de matemáticas en las carreras objeto de este estudio. Es bien conocido que la regla en cuestión es utilizada para derivar funciones compuestas. La utilidad de esta valiosa herramienta en el caso de las ciencias económicas está más que justificada, pues en el área de la economía se manejan diversas funciones que a su vez dependen de otras. Haeussler y Paul (1997) y Arya y Lardner (1987) la consideran como, tal vez, *la herramienta más importante o útil de la derivación*. Sin embargo, nuestro objetivo fundamental consiste, en este punto del trabajo, en el estudio del conocimiento disciplinar del profesor en relación a la regla de la cadena, pero siempre conectado a las ciencias económicas.

Con mucha frecuencia, en el campo de la economía, se estudian modelos representados por funciones compuestas, es decir, por funciones cuyas variables dependen de otra u otras variables. Un ejemplo clásico son las llamadas *tasas relacionadas* que exponemos a continuación:

> Sea $y = f(x)$ y supongamos que x varía como una función del tiempo t. Así, dado que y es una función de x, y también varía con el tiempo. Aplicando la regla de la cadena, es posible encontrar una expresión para la tasa en que y varía en términos de la tasa a la cual x varía. Debido a que
>
> $$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{dx}{dt}$$
>
> tenemos una relación directa entre las dos tasas dy/dt y dx/dt. Esta se denomina la ecuación de **tasas relacionadas**.
>
> (Arya y Lardner, 1987, p. 546)

Un ejemplo, aún más concreto sobre la utilidad de la regla de la cadena en el campo de la economía lo muestran Hoffmann y Bradley (2001),

> ... el costo de fabricación total en cierta fábrica es una función del número de unidades producidas, que a su vez es una función del número de horas que la fábrica ha estado funcionando. Si C, q y t denotan el costo, las unidades producidas y el tiempo, respectivamente, entonces
>
> $$\frac{dC}{dq} = \begin{bmatrix} \text{razón de cambio del costo} \\ \text{respecto a la producción} \end{bmatrix} (\text{dólares por unidad})$$
>
> y
>
> $$\frac{dq}{dt} = \begin{bmatrix} \text{razón de cambio de la producción} \\ \text{respecto al tiempo} \end{bmatrix} (\text{unidades por hora})$$
>
> El producto de estas dos razones es la razón de cambio del costo respecto al tiempo, es decir,
>
> $$\frac{dC}{dt} = \frac{dC}{dq}\frac{dq}{dt} \quad (\text{dólares por hora})$$
>
> (Hoffmann y Bradley, 2001, pp. 148-149)

De igual manera podemos ilustrar a través de otros ejemplos lo relevante que es esta herramienta dentro de las ciencias económicas, mostrándose con claridad que esta regla tiene una importancia que va más allá de la visión general que se tiene de la misma, esta es, derivar funciones compuestas. Esta regla nos permite llegar a interpretaciones precisas de situaciones económicas (ver episodio EP3-3) que difícilmente se podrían obtener por otras vías.

Por lo general, los libros de texto trabajan la regla de la cadena definiendo la regla en cuestión, realizan algunos ejemplos en el contexto matemático y finalmente hacen aplicaciones a la economía; un ejemplo de ello lo encontramos en: Hoffmann y Bradley (2001), Lial y Hungerford (2000), Arya y Lardner (1987), entre otros. En nuestro caso, ya lo explicamos en la **Sección 4.3** de este mismo capítulo, abordamos esta regla a partir de dos problemas discutidos y analizados en las **Subsecciones 4.3.1** y **4.3.2**, correspondientes a los episodios EP3-1 y EP3-2, reservando el tercer y último episodio, EP3-3, para aspectos concretos de la interpretación o significado de esta regla.

Ahora bien, revisando la literatura relacionada con la didáctica de las matemáticas y concretamente con el tema de la derivada, no hemos encontrado trabajos que estudien de forma específica la regla de la cadena asociada al conocimiento profesional del profesor, aunque sí existe en la literatura diversidad de estudios vinculados a esta regla pero ninguno próximo a nuestra línea de interés, como por ejemplo: Font (2000), Cottrill (1999), Clark *et al*. (1997), por citar algunos. Es por ello que nuestro análisis se fundamenta en lo empírico, es decir, la misma línea que seguimos en el estudio del dominio de una función y que realizaremos en la siguiente sección con el conocimiento sobre monotonía y valores extremos. En cierta medida, *esto es parte de nuestro aporte en el campo de la didáctica de las matemáticas y dentro de ésta en el área de las didácticas específicas*.

Lo que aportan los profesores de ambos grupos en lo que respecta a conocimiento disciplinar vinculado a la regla de la cadena, a lo largo de la tercera sesión del seminario, es muy similar entre ellos, ya que los cinco profesores en la discusión de los tres problemas destacan que *es la primera vez que trabajan un problema similar al del material*. Por otra parte, haciendo alusión al problema del EP3-2, Ramón y Manuel manifiestan estar de acuerdo con el uso de *la función exponencial* para introducir esta regla, ambos la consideran adecuada para el desarrollo del tema, y además, Manuel destaca *lo relevante de la exponencial* en el campo de las ciencias económicas, mientras que Kenya, por otro lado, resalta *la importancia de la estructura del material* en cuanto al manejo de las variables en el contexto económico.

Ya manifestamos en su momento que todos los profesores siguen una enseñanza basada en los programas oficiales y libros de texto, y este tipo de problema no es sugerido por los primeros, ni aparece en los libros de texto que ellos siguen como problema introductorio; esta podría ser la razón que nos lleve a inferir que no trabajen este tipo de problemas en sus clases y, en consecuencia, la visión que tienen de la regla de la cadena tenga un perfil eminentemente matemático; de hecho, Manuel le da más peso a que sus alumnos calculen derivadas que a la interpretación de las mismas.

Sin embargo, el punto que nos interesa subrayar en esta sección es la poca explotación que estos docentes ponen en práctica en materia de interpretación de la regla de la cadena en el campo de la economía y la utilidad, en general, de esta poderosa herramienta en las ciencias económicas. Más aún, si retornamos a las tablas de las **Figuras 5.1** y **5.2** podemos observar con más precisión lo señalado al inicio de este párrafo. Tanto es así que si pasamos luego a las tablas de las **Figuras 5.3** y **5.4** apreciamos que todos entienden el enfoque de la regla de la cadena que proponemos en el material como algo innovador en materia de enseñanza, destacando además que es ventajoso para el estudiante tal esquema de trabajo.

En resumen, presentamos algunas características relevantes en materia de conocimiento disciplinar, concretamente en el tema de la regla de la cadena:

G22 Hay que señalar como primera característica sobre la regla de la cadena que, para los cinco, *es la primera vez* que trabajan problemas como los discutidos en la tercera sesión del seminario. En particular, en lo que respecta a la introducción de esta regla, lo cual consideran como *un elemento innovador*.

C33 Tanto Ramón como Manuel consideran *apropiado el uso de la función exponencial* para introducir la regla de la cadena, entre otras cosas, porque *la misma representa un obstáculo en el aprendizaje* del estudiante y así, se refresca el trabajo con esta función.

P30 Manuel advierte de *la importancia de la función exponencial* en el campo de las ciencias económicas, aunque éste *le da más peso al cálculo* de derivada que a la interpretación de la misma.

P31 Kenya, por su parte, considera relevante *el manejo de las variables* para introducir la regla de la cadena.

5.2.3. Conocimiento sobre Monotonía y Valores Extremos

Cerramos esta parte del trabajo siguiendo el esquema natural de los programas oficiales y libros de texto, es decir, con el estudio de la monotonía y los valores extremos de una función. Al igual que los otros conceptos u objetos matemáticos antes estudiados, incluimos en esta sección del trabajo el análisis que se derivó de los episodios EP2-1, EP3-2, EP4-1 y EP4-2; esto quiere decir que la discusión sobre monotonía y valores extremos de una función estuvo siempre presente a lo largo del seminario.

Tal como lo comentábamos en la **Secciones 5.2.1** y **5.2.2** sobre la bibliografía específica relacionada al tema del dominio de una función y la regla de la cadena, respectivamente, sucede exactamente lo mismo para el caso de la monotonía y los valores extremos, razón por la cual nos hemos inclinado por realizar un análisis fundamentado en lo empírico y siguiendo los mismos elementos que estudiáramos en las dos secciones anteriores.

Otro punto que conviene resaltar es que los problemas aquí discutidos están en los libros de texto como *problemas de aplicaciones*; sin embargo nosotros hemos hecho las modificaciones pertinentes en estos problemas, o las preguntas que formulamos a los participantes, fueron planteadas con el objetivo, entre otros, de evitar que los mismos se entiendan como problemas de aplicaciones. Sobre este hecho en particular, siempre procuramos ser cuidadosos de reiterarle, de forma indirecta, a los profesores participantes que los problemas fuesen estudiados como *problemas contextualizados* y no como *problemas de aplicaciones*. Desde nuestro punto de vista, la diferencia radica en que los segundos se trabajan como consecuencia de haber desarrollado una teoría matemática que posteriormente se *aplica* en éstos, mientras que con los problemas contextualizados podemos introducir la teoría matemática y desarrollarla a través de los mismos; en consecuencia, estamos hablando de una diferencia didáctica entre estos tipos de problemas.

Por supuesto, la necesidad e importancia de estudiar estos conceptos matemáticos, monotonía (funciones creciente y decreciente) y valores extremos (máximos y mínimos de una función), en un contexto particular como el económico es bien conocido, pues no es ninguna novedad que un profesional de las ciencias económicas debe tener un conocimiento amplio sobre estos objetos matemáticos, puesto que cada vez hay una fuerte demanda en el análisis de situaciones económicas donde se busca optimizar modelos de esta área. En este sentido, el llevar a cabo una discusión en estos temas, sobre todo, de la forma como lo implementamos en este trabajo, significa para nosotros profundizar en objetivos como los indicados en la **Sección 5.2.1**.

Entrando en detalle, por qué nuestra idea de estudiar estos conceptos matemáticos. Pues bien, en primer lugar, estudiar el comportamiento gráfico de las ecuaciones es una parte básica de las matemáticas (Haeussler y Paul, 1997) y además, hay un sin número de situaciones en distintas ramas de la ciencia, en general, donde los modelos matemáticos que representan estas situaciones se hace necesario estudiar monotonía y valores extremos;

a este hecho no escapan las ciencias económicas. En segundo lugar, es claro que el estudio de estos conceptos se puede realizar con métodos analíticos rudimentarios; no obstante, el uso de la derivada permite facilitar el análisis de la monotonía así como el estudio de máximos y mínimos de funciones.

En la economía, concretamente en el área de mercado, frecuentemente se estudia el crecimiento de un sector de la población de cara al lanzamiento de un producto o la permanencia del mismo, la disminución de las ventas de un artículo por la existencia de uno nuevo en el mercado o, algo que está hoy en día sobre el tapete, como lo es el aumento o disminución de viajeros de acuerdo a la variación de precios de los carburantes. Todo esto exige tener un conocimiento sólido no solo en la estructura matemática en sí misma sino en la relación de la misma con el contexto económico.

En cuanto a los valores extremos, la situación es similar a la monotonía, con esto queremos decir que el estudio de los valores extremos en la economía es significativo. Veamos la siguiente cita:

> A mediados de la década de 1970, el economista Arthur Laffer explicaba su visión de los impuestos a un político -como cuenta la historia- era el aspirante a la presidencia Ronald Reagan,... Para ilustrar su argumento Laffer tomo una servilleta e hizo un bosquejo de la gráfica que ahora lleva su nombre: curva de Laffer[10].
>
> El argumento de Laffer no era para mostrar que la tasa óptima de impuestos fuese 50 %; lo que quería mostrar que bajo ciertas circunstancias, a saber, cuando la tasa de impuesto está a la derecha del máximo de la curva, es posible *aumentar el ingreso del gobierno bajando los impuestos*. Éste fue un argumento clave para la reducción de impuestos aprobados por el Congreso durante el primer periodo de la presidencia de Reagan.
>
> (Haeussler y Paul, 2003, p. 531)

Pero además,

> Muchas de la aplicaciones importantes de derivadas incluyen encontrar lo valores máximo y mínimo de una función particular. Por ejemplo, la utilidad que obtiene un fabricante depende del precio que cobra por el producto y el fabricante está interesado en conocer el precio que hace que su ganancia sea máxima. El precio **óptimo** (o **mejor** precio) se obtiene por medio de un proceso llamado **maximización** u **optimización** de la función de utilidad. De una manera similar, una compañía de bienes raíces puede estar interesada en generar el ingreso máximo por renta; una compañía ferroviaria puede necesitar conocer

[10]La curva de Laffer describe el ingreso total del gobierno debido a los impuestos como una función de la tasa de impuestos. Es obvio que si la tasa de impuesto es 0, el gobierno no obtiene ingresos. Pero si la tasa de impuestos es 100 %, el ingreso sería también igual a cero, ya que no hay incentivo para generar dinero si todo éste se esfuma.

> la velocidad promedio a la cual los trenes deben viajar a fin de minimizar el costo por milla de operación; o un economista puede desear conocer el nivel de impuestos en un país que promoverá la tasa máxima de crecimiento de la economía.
>
> (Arya y Lardner, 1987, p. 542)

En ambas citas queda expresamente de manifiesto que no sólo basta con conocer toda la teoría matemática asociada al estudio de máximos y mínimos, también es importante la interpretación de situaciones concretas en el campo económico.

Observación: Un punto a tomar en cuenta como dato previo al análisis es el poco aporte de los participantes referente al conocimiento disciplinar, puesto que, suponemos, ellos entienden los problemas discutidos como problemas de aplicaciones, aunque ya hemos explicado que procuramos que fuesen vistos como problemas contextualizados, a diferencia de cuando se discutió el tema del dominio de una función, ya que este tipo de problema no los sugieren los programas oficiales ni los libros de texto. Por otra parte hay que tomar en cuenta que para el momento en el que se trabaja tanto la monotonía como los valores extremos se está cerrando el tema de la derivada; es por ello que inferimos que los participantes se identifiquen más con los problemas a la hora de discutir los conceptos que nos ocupan. Más aún, tanto el tema de monotonía como el de valores extremos están incluidos en los libros de texto en el capítulo reservado a las aplicaciones de la derivada, como es el caso de Haeussler y Paul (2003) y Arya y Lardner (1987), entre otros.

Comenzaremos por hablar de las dificultades y/o ventajas que representan para el estudiante discutir problemas contextualizados en la economía. Sobre este particular, Manuel y Ramón coinciden en que el trabajar con problemas de esta naturaleza no solo es aceptado por el estudiante, en general, sino que además es exigido por éste. También advierten que los problemas fuera del contexto económico son rechazados por los alumnos o, de igual manera, problemas como el del EP4-1 que al estar "*recargados de letras*" podrían generar dificultad en el estudiante a la hora de trabajarlos, es decir, siguiendo la línea de los libros de texto.

Por otro lado, Kenya, Elio y Alexis sostienen que sus estudiantes rechazan problemas contextualizados en el área de economía; ya durante el análisis del conocimiento sobre el aprendizaje destacamos este punto, sin embargo lo traemos nuevamente a colación por el tipo de error que, dicen Kenya y Alexis, cometen los estudiantes en problemas de esta naturaleza, "*interpretación de los resultados*" y "*redacción de los mismos*".

Sin embargo, avanzamos un poco más en nuestro análisis y dejamos a un lado la contextualización para ahondar en aspectos como la estructura del problema en sí o el contenido del mismo; sobre esto último, Alexis afirma que trabaja con problemas similares, aunque entendemos que, por sus opiniones a lo largo del seminario y sus respuestas en los cuestionarios, este tipo de problemas los utiliza como elemento motivador, pero como problemas de aplicación es poco el trabajo en el salón de clases, con lo cual la estructura que presenta en el aula no es la misma que se ilustra en el material.

Ramón, por ejemplo, además de valorar positivamente el contexto y la estructura de los problemas sostiene que trabajar únicamente en el contenido económico puede propiciar a que el estudiante sólo entienda los conceptos matemáticos en discusión como propios de la economía, en tal sentido, él considera que se tienen que "*formalizar las matemáticas*", además, reconoce que su esquema de trabajo es "*definición + ejemplos*". Esto nos muestra una vez más, parte del perfil de este profesor sobre la enseñanza de las matemáticas, aun cuando estemos hablando de cursos de cálculo para futuros profesionales de las ciencias económicas; pero además, muestra también el escaso o nulo conocimiento del mismo sobre la EBP como metodología de enseñanza, puesto que sólamente entiende los problemas como elementos motivadores para la enseñanza o como problemas para reforzar el conocimiento del estudiante.

Por otro lado Manuel sostiene que su trabajo en el aula es similar al que mostramos en el material en cuanto a contenido pero existen elementos para suponer que no en su estructura (algo similar pasa con Alexis); aunque este profesor afirma que de implementarse el material en sus cursos los objetivos del mismo se lograrían de forma similar que en la actualidad. No obstante, al igual que Ramón, este profesor no concibe la estructura de los problemas como herramientas para enseñar algunos de los conceptos en discusión, sino que los mismos sirven como objetos de motivación o como actividad complementaria en el estudio de la monotonía o valores extremos.

Es claro que una de las aplicaciones de la derivada en las mismas matemáticas es el análisis de funciones, del cual forma parte el estudio de la monotonía y los valores extremos. Para llegar al estudio de estos conceptos se supone que se ha realizado un trabajo previo en el tema de la derivada; sin embargo, con el instrumento que hemos desarrollado se ha querido desmarcar esta visión clásica (teoría + aplicaciones) de la enseñanza de las matemáticas para cursos donde estas últimas juegan un papel instrumental significativo en la resolución de problemas.

Más aún, problemas como los de los episodios EP4-1 y EP4-2, con un contenido teórico o menos prácticos que los anteriores, Kenya, Elio y Alexis sostienen que no trabajan en clase ningún problema de este tipo o similares, ellos argumentan que es debido al rechazo de los mismos por parte de los estudiantes; pero nosotros reflexionando sobre esta situación nos preguntamos: ¿hasta dónde han procurado trabajar este tipo de problemas estos profesores?, ¿qué conocimiento del contenido económico manejan a fin de llevar al aula la discusión que exigen estos problemas?, sobre esto último, Elio y Kenya han reconocido abiertamente desde un principio y posteriormente Alexis su poca formación en esta materia y lo poco que manejan obedece a la autoformación por inclinación personal. No obstante, es Kenya la única que encuentra en el contenido del material y su estructura aspectos propios de la EBP como: "*protagonismo del estudiante*", "*exige mayor formación y compromiso por parte del profesor*", "*se explota el conocimiento intuitivo del estudiante*", "*no es una actividad rutinaria*", entre otros.

Ahora bien, ¿qué implica o qué relación tiene todo lo anterior con el conocimiento disciplinar? En primer lugar queremos decir que cuando se quiere llevar a la práctica una enseñanza contextualizada de las matemáticas se debe tener cierto dominio del contenido en el cual se pretende ambientar las matemáticas, en nuestro caso nos referimos a las ciencias económicas; en otras palabras, conocer las distintas interpretaciones de las matemáticas en estas ciencias. En segundo lugar, con un problema matemático contextualizado en la economía, además de motivar, se persiguen dos cosas fundamentales: (a) mostrar la necesidad de conocer una teoría matemática afín al problema y (b) conocer la utilidad de la misma para entender y resolver el problema con su interpretación correspondiente en el campo de la economía. En resumen, estos profesores siguen una *enseñanza lineal* de la derivada (teoría + aplicaciones), en la que algunos trabajan problemas de aplicaciones a la economía, pero sin explotar el potencial que significa la derivada a futuro; no obstante, vale la pena señalar que los programas oficiales tampoco sugieren que se haga tal explotación.

Es claro que en lo que concierne al conocimiento sobre monotonía y valores extremos lo que aportan los participantes es muy pobre en cuanto a cantidad, aun así mostramos algunas características significativas que contribuyen en esta materia:

C34 Poco podemos decir sobre Alexis, Elio y Kenya en cuanto a este conocimiento, ya que ellos argumentan que *sus estudiantes presentan conflictos* en los problemas contextualizados y, en consecuencia, es reducida la cantidad de problemas de este tipo trabajados en clase.

G23 En general, todos los profesores reconocen estos problemas como *elementos motivadores* más que como generadores de conocimiento.

G24 Ninguno explota *la necesidad de esta herramienta* en el campo de la economía de cara a futuras situaciones del área económica, lo que implica *falta de formación* en esta materia.

5.3. Análisis del seminario

Antes de dar inicio a esta última parte del análisis, hacemos énfasis en los tres puntos principales para los que fue utilizado el seminario y que los mismos sirvieron de referente para nuestro análisis, estos son: (**1**) el seminario como herramienta de recogida de datos, (**2**) como potente vía para acercarnos a los participantes, de forma directa, y obtener de ellos toda esa información relacionada con el CDC en los puntos que consideramos de nuestro interés y, (**3**) el seminario como una actividad de formación y desarrollo profesional, resaltando en este caso, la *discusión*, la *reflexión* sobre la propia actividad docente del participante y con implicaciones potenciales en su *formación profesional*, situación esta de la que ya hablamos en el **Apartado 3.6** del capítulo anterior. En tal sentido, nos proponemos analizar el seminario tomando en cuenta esos tres puntos recién mencionados, pero siempre enfocados hacia el tercero, ya que, entre otras cosas, dentro de los objetivos que nos propusimos alcanzar con el desarrollo de esta investigación, está el de valorar el seminario como actividad de formación profesional, situación ésta que fue reseñada en su momento en el capítulo anterior, específicamente en la página 108 de esta memoria.

Ahora bien, el análisis de esta parte del trabajo está focalizado a la *interacción entre participantes*; sin embargo, nuestro trabajo no se centrará en estas interacciones en sí mismas, sino en el contenido de éstas en cuanto al CDC, es decir, enfocaremos nuestro análisis en el contenido de las interacciones en relación a las distintas categorías que fueron analizadas de forma particular en las anteriores partes del análisis. En estas interacciones también buscamos estudiar la influencia de algún profesor en otro sobre las preguntas realizadas. Recordemos que nuestro interés en estudiar y analizar las distintas reflexiones de los participantes obedece fundamentalmente al intento de aproximarnos al conocimiento profesional y a las posibles implicaciones que pudieran tener éstas en cambios en el profesor universitario, en lo que respecta al CDC en general. Más aún, partiremos de las posiciones de Marín (2004) y Mellado (1995) quienes advierten sobre la necesidad de generar elementos, la primera, y espacios, el segundo, que lleven a esta actividad de forma sistemática entre los docentes.

La información o los datos para el análisis de este apartado lo constituyen dos fuentes de información: 5 segmentos extraídos del seminario y algunas preguntas de la entrevista. En los segmentos del seminario se destaca la interacción entre participantes[11], en el caso de las preguntas de la entrevista, las cuales fueron mencionadas en el capítulo anterior, elegimos aquellas donde

[11]Los tres primeros segmentos corresponden al grupo A mientras que los otros dos corresponden al grupo B.

se les pide a cada uno de los participantes su valoración del seminario y algunas reflexiones al respecto[12]. Estos segmentos los hemos sintetizado, descartando las frases o comentarios que, a nuestro juicio, no aportan algo relevante a esta parte del trabajo y, más aún, resaltamos en ***negrita y cursiva***, simultáneamente, las frases que queremos destacar como piezas claves para el análisis, dejando intactos los comentarios del moderador. Como dato adicional, estos extractos del seminario están escritos en una letra más pequeña y con un margen ligeramente mayor por ambos lados.

5.3.1. Segmento 1

Damos inicio a esta fracción del análisis con una parte del seminario que nos resulta obligado tomarla en consideración por dos razones fundamentales; en primer lugar, reconocer la participación de Pedro que, aunque sólo intervino en la primera sesión, su aporte mereció ser tomado en cuenta; por otra parte, la discusión surge en torno a la introducción de la derivada. El siguiente segmento es tomado de la primera sesión del seminario, concretamente del microepisodio **A.1.2**[13], en el que se discutieron dos problemas, *velocidad instantánea* e *impuesto marginal*, para introducir la derivada. En este caso las reflexiones se centran en la enseñanza y el aprendizaje a partir del contexto en el que se sitúan ambos problemas. Aquí buscamos *determinar a qué contexto*, económico o matemático, *le dan mayor peso* y *cuáles son las estructuras de enseñanza* de la derivada que ellos manejan.

[Moderador]: Algo que debo aclarar es, que los dos problemas o ejemplos se colocan para que ustedes me den su opinión y en ningún momento es porque nosotros consideremos que se deben trabajar esos dos ejemplos en particular.
[Pedro]: Para mi, y disculpen, ***no son los acertados***. Para mi, ***daría la función de costo e ingreso que son las funciones elementales que ya ellos deben dominar; ya el impuesto es más delicado, mucho más delicado***. Porque si tú tienes una empresa, ¿qué es lo que quiere una empresa?, ver el costo total, ver el costo promedio, ver el costo marginal, el costo adicional cuando tú produces una unidad adicional, porque tú quieres llegar a la derivada del costo, que es el costo marginal. Entonces, ***es una función que ellos la han visto en Introducción a la Economía***, mientras que de impuesto no han visto nada hasta el momento, como dice el colega[...]
[Moderador]: Es decir, con lo que no estás de acuerdo es con el modelo o mejor dicho, con el ejemplo. Una cosa es el enfoque que se le quiere dar a la enseñanza de la matemática partiendo de un problema contextualizado y otra cosa es la elección y adecuación del ejemplo o problema. Tal vez elegí mal el problema.

---

[12]Para simplificar nuestro análisis de esta parte del trabajo, nos referimos a cada una de las preguntas de la *entrevista final* como EF*n*, donde la *n* representa el número de la pregunta.
[13]Este segmento se encuentra en el **Apéndice A**, entre las páginas 372 y 374.

[Pedro]: No es que elegiste mal sino que para mi criterio ***yo elegiría el costo***.

[Moderador]: Me explico, una cosa es elegir la estructura que se le quiere dar a la enseñanza y otra, elegir el problema o modelo. Por ejemplo, podemos sustituir un problema de costo por el de impuesto.

[Pedro]: Yo te sugiero que lo hagas y ***en lugar de velocidad, ingreso***.

[Moderador]: Pero entonces, ¿tú descartarías de plano la situación no-económica?

[Pedro]: Como lo dice Manuel, ***en economía, los voy a distraer***. Para mi no tiene sentido el ejemplo físico. ***Ya lo he hecho y siento que he perdido mi tiempo***.

[Moderador]: O sea, ¿que tus ejemplos son todos económicos?

[Pedro]: ***Sí, son todos económicos***.

[Ramón]: No sé si puedo añadir algo.

[Moderador]: Claro, adelante.

[Ramón]: ***Yo seguiría insistiendo en que fueran de economía*** y, como dice Pedro, ***el primer modelo sería de costo-ingreso***, este modelo o ejemplo ***[el de impuesto] se puede tratar más adelante***,[...] realmente cuál es el objetivo de este curso y de este tema en particular, ***que el estudiante entienda el concepto desde el punto de vista matemático de lo que es la derivada***, de acuerdo. Entonces, ***se corre el riesgo de que ese objetivo no se vaya a alcanzar cuando los ejemplos sean solamente de una única área del conocimiento*** como es en este caso, de economía[...], yo aún tengo la sensación de que a pesar de la intención de proponer el modelo de la velocidad sea que la derivada no es algo plenamente de la economía, todavía...

[Pedro]: ¿***Te gusta el ejemplo de la velocidad...***?

[Ramón]: No, no, no. No me gusta en realidad, sino ***qué alternativa habría para que una vez que se trabaje con modelos económicos solamente, dar garantía de que realmente el estudiante sabe que hay un concepto que es abstracto que no se refiere a más nada***, que es el concepto de derivada. Ese es el temor, pero hasta el momento yo todavía...

[Pedro]: ***Yo pienso que ese temor tú lo puedes eliminar***, porque ellos van a trabajar con funciones aplicadas a la economía. Entonces, ***después que tú des esos ejemplos y caigas en la definición, que caigas en el análisis marginal, tú además de costo marginal e ingreso marginal, vas a hablar de beneficio marginal, impuesto marginal, vas a hablar de la productividad marginal***, ¿entiendes?, no así [refiriéndose al esquema planteado], sino ya con las derivadas. ***Esto es la derivada y qué significa***, ¿de acuerdo?; ***la producción en función del capital invertido***, bueno, ***el incremento de la producción si yo invierto en el capital en una unidad adicional***, así de sencillo.

[Ramón]: Ok, eso es una alternativa...

[Pedro]: Entonces ***estás trabajando y empleando cada vez más herramientas*** en el campo de ellos, ¿de acuerdo?

[Ramón]: Ok, ***eso sería una alternativa***, porque así se ve que ***el concepto de la derivada no está sólo asociado al costo o al ingreso***...

[Pedro]: Mira lo que me está pasando a mi ahorita, yo en el curso que estoy dando de nivelación del posgrado, allí tengo a 12 ingenieros, ellos están admirados. Y por qué están admirados les pregunto; bueno, porque ya entendemos para qué sirve la derivada en términos económicos, sin embargo les doy unos ejemplos de ingeniería también.

[Moderador]: Y tú, Manuel, qué opinas.
[Manuel]: Yo sigo insistiendo que, ***no estamos hablando de que se va a dar el concepto de manera abstracta***, sencillamente ***hay que darlo a través de ejemplos y resaltar esta diferencia que es muy importante***[...] Entonces, ***se puede establecer más adelante que también puede funcionar para otras cosas***. Si el estudiante ya sabe que la derivada es una herramienta del análisis marginal y no como algo interno del análisis [marginal], mientras tú establezcas estas diferencias es importante, ¿y cómo lo estableces?, con un ejemplo sencillo, si no quieres usar ejemplos físicos puedes buscar otros ejemplos, ***pero es clave que el estudiante sepa de esa pequeña diferencia***.
[Pedro]: Yo le agregaría, para complacer al amigo Manuel, ***después que veamos los ejemplos de costo e ingreso, se puede agregar el ejemplo de velocidad como un ejemplo que es ajeno a la carrera***.
[Ramón]: Yo insisto, no tiene por qué ser el ejemplo de velocidad porque el temor que queda..., qué es lo que se pretende, que el estudiante en algún momento llegue a comprender el concepto de derivada sin ninguna clase de muleta, por decirlo de algún modo, entonces ese es el temor que quedaría. Entonces, ***yo seguiría la línea de Manuel***, o sea, ***ver el de la derivada no solamente en el costo sino también en otras partes del análisis marginal y en otras áreas en general***.
[Pedro]: ***Yo respeto sus opiniones pero no estoy de acuerdo***...

Es claro que la visión que existe sobre el contenido de los problemas que se trabajan en clases de cálculo diferencial, para estudiantes de ciencias, económicas no está unificada en el caso de estos tres profesores; por un lado, Pedro, quien muestra un sólido conocimiento en contenido económico y una vasta experiencia en estos cursos, apuesta por una enseñanza de las matemáticas totalmente contextualizada en el área económica, entre otras cosas, porque además de motivar al estudiante también lo involucra directamente en su campo profesional, mientras que Ramón y Manuel presentan una posición contraria a Pedro, ellos son reticentes a trabajar únicamente problemas vinculados a la economía.

Sin embargo, en la discusión planteada queda reflejada cuáles son las estructuras de enseñanza que siguen en sus clases estos tres profesores. Pedro se muestra como un profesor totalmente práctico, es decir, el enfoque que éste hace de las matemáticas radica en la utilidad práctica de éstas en el campo económico. Manuel, por su parte, cuya participación en este microepisodio fue pobre, aun cuando entiende que el material busca introducir la derivada desde una situación problemática, él considera que hay que dejarle claro al estudiante que este objeto matemático no es un concepto económico.

Ramón, siguiendo a Manuel, muestra su inquietud sobre la posible visión que pueda tener el estudiante sobre la derivada, aunque este profesor va más allá y sostiene que el concepto no se debería asociar a problemas únicamente de ingreso y costo., posición ésta que la reitera en EF5, donde sugiere que además de estos problemas "*deberían hacerse otros ejercicios de matemáticas sin contenido económico*". Ahora bien, si profundizamos en Ramón, él se encuentra en medio de Pedro y Manuel, y puede inclinarse hacia Manuel o Pedro según el peso de los argumentos; en otras palabras, él podría, al menos por ahora, ser un posible profesor en transición y susceptible de aceptar otras propuestas si realmente le convencen de que sus estudiantes no pierden nada sustancial.

Aun así, lo más significativo de todo esto, es que surgiera un espacio en el que no solamente se fijara una posición sobre los dos problemas discutidos en la primera sesión del seminario para introducir la derivada, como es el caso de la velocidad instantánea y el impuesto marginal, sino que al mismo tiempo emergiera de manera natural lo inapropiado del impuesto marginal para introducir la derivada pues, según Pedro, el tema del impuesto aún no lo han trabajado para ese momento, lo que significa que este profesor también muestra conocimiento en materia de contenido curricular.

Otro punto a destacar dentro de esta parte del seminario, es la *aceptación* parcial que manifiesta Ramón después de los argumentos pormenorizados que ofrece Pedro, cuando este último enfatiza sobre su trabajo en el aula, únicamente con problemas del contexto económico. De no darse una discusión en un espacio como el seminario, posiblemente el punto de vista de Ramón permanecería limitado al trabajo de problemas con mayor inclinación hacia las matemáticas. Sin embargo, esto no nos puede llevar a concluir que en adelante surgirán cambios en este participante, pero sí podemos afirmar con toda propiedad que, por medio del seminario, Ramón conoció una alternativa más sobre la enseñanza de la derivada, situación reconocida por este profesor en EF1.

No obstante, lo más importante a destacar sobre este y el resto de profesores consiste en la participación de los mismos en una experiencia real, llevada a cabo por uno de sus colegas, lo cual puede incidir, no sólo para Ramón, en romper con el aislamiento que tienen los docentes, encerrados en sus aulas e ignorantes de otros procesos de enseñanza. Pero volviendo a Pedro, podríamos decir que efectivamente los argumentos de este profesor y su postura quedó evidenciada por el seminario y la discusión en el seno de éste.

5.3.2. Segmento 2

Aun cuando el contenido central del material es el cálculo diferencial, recordemos que nosotros abordamos también otros conceptos como el dominio de una función. El siguiente segmento es tomado de la segunda sesión del seminario, concretamente del microepisodio **A.2.1**[14] En este segmento retomamos

[14]Este segmento se encuentra en el **Apéndice A**, entre las páginas 391 y 392.

la discusión realizada sobre el estudio del dominio en un doble contexto, el matemático y el económico, resaltando de esta parte la necesidad de un espacio de formación para el profesor de matemáticas de universidad que trabaja en cursos relacionados con materias donde no ha tenido ningún tipo de formación a lo largo de su carrera. Aquí se estudia *cómo abordan el tema del dominio* y su *repercusión en el aprendizaje* de los estudiantes; por otra parte y dado su aspecto innovador, queremos ahondar sobre *cómo influye en el CDC de estos profesores* el estudio del dominio en un contexto dual.

[Moderador]: ¿Qué importancia supone para ustedes implementar este tipo de dualidades (económicas y matemáticas) en estos cursos o, por el contrario, supone más bien que el estudiante tiende a confundirse? ¿Por qué?
[Manuel]: [...] tú usaste el problema de impuesto, ***yo siempre comienzo por introducir las funciones de costo, ingreso y beneficio***; esos son los conceptos económicos que yo más utilizo, principalmente cuando doy Matemática 1. O sea, que ***ya ellos conocen muy bien a estas alturas estas funciones***. Ahora, obviamente, me parece muy importante que ellos vean esto y como con esto es con lo que van a trabajar, ***me parece clave***.
[Moderador]: Un momento, no nos desviemos, en este momento me refiero concretamente a la dualidad de contextos en el problema. Mira, es la misma función pero vista en un contexto matemático y en uno económico, fíjate en el dominio en un contexto y en otro. ¿Qué incidencias tiene implementar ese tipo de dualidad?
[Manuel]: Ah!, ok. Bueno, yo lo resalto digamos, esa situación. ***Yo les hablo del dominio matemático y del dominio real, el de las aplicaciones***, entonces siempre establezco la diferencia. Ahora, ***así como tú lo planteas está como más preciso*** y creo importante, ***yo no lo hago con tanto detalle***, particularmente yo creo que es muy bueno que se establezca esta diferencia. Es más, ***yo creo que a partir de ahora voy a hacerlo con estos detalles***, ya que eso resalta la importancia de las matemáticas en las carreras de economía, ***pienso que el estudiante puede entender mejor el concepto de domino de una función al realizar en detalle este tipo de problemas***. No sé qué piensa Ramón al respecto.
[Ramón]: Es importante y, de hecho, ***uno como profesor se da cuenta de estas distinción es con el tiempo***; por ejemplo, en Matemática 1, que es donde ellos ven funciones,[...] uno les habla de dominio de una función, pero como es la primera vez que ellos oyen de eso, entonces ***uno les habla del dominio matemático***, después cuando pasan a Matemática 2 donde toca graficar funciones, si tiene algo que ver con una aplicación como costo, ingreso..., ***así como está acá, los estudiantes podrían llegar a confundirse***. De hecho, en los otros cursos, me refiero al de microeconomía por ejemplo, ***el dominio que el profesor de microeconomía, al cual se refiere, es al dominio que tú mencionas aquí como dominio económico***; pero que yo siempre les había hablado, donde la función tiene sentido desde el punto de vista económico, ***siempre les había dicho sin mayor detalle pero fue posteriormente que me di cuenta de eso*** [de lo dicho antes sobre el profesor de microeconomía, de la diferencia entre dominios], ¿de acuerdo?... ***El dominio es este, pero el que es relevante o el que tiene sentido para este problema es este otro***. Entonces, me parece muy importante; ***lo que sí te puedo decir es que nunca había sido tan detallista como tú lo planteas***, yo

sólo restringía el dominio a los $\mathbb{R}^+$, pero nunca tan detallista como $\mathbb{Q}_0^+$, que realmente tiene sentido algo así porque lo que sí no tiene sentido es hablar en este caso de $\sqrt{2}$ dólares, por ejemplo. Yo creo que ***es importante que el estudiante conozca estos detalles*** porque se distingue la parte formal, la parte matemática y lo que se hace; por ejemplo, en los cursos de microeconomía en referencia al dominio, creo que con esto se prepara al estudiante para este curso [el de microeconomía] y seguro que para algún otro, pero que realmente no conozco con precisión y no quiero especular.

En esta oportunidad, al discutir sobre la doble contextualización del dominio de una función, ambos profesores advierten cómo trabajan el tema, su importancia para los estudiantes, entre otras. Aún así, lo que resulta más significativo para nosotros son la precisiones que ellos realizan sobre el contenido del material y la estructura del mismo para abordar el tema del dominio. Los dos participantes coinciden en que en el material se trabaja este tema con más detalles en comparación a su actual forma de trabajo en el aula, situación ésta que consideran clave en materia de enseñanza-aprendizaje.

Más aún, Ramón y Manuel, terminan reconociendo que en adelante llevarán este tipo de dualidades al aula y las trabajarán tomando en cuenta el material discutido, ya que, en palabras de Manuel, "*eso resalta la importancia de las matemáticas en carreras de economía*". En nuestro caso, podemos entender el material como una herramienta innovadora en materia de enseñanza y el seminario, como actividad de formación, esto último por los comentarios de Ramón, quien afirma que "*uno como profesor se da cuenta de esta distinción es con el tiempo*", refiriéndose al detalle de estudiar el dominio en el contexto económico y matemático. Manuel, por su parte, en EF10 reconoce abiertamente que *aprendió mucho* y además *vio enfoques diferentes a los suyos* sobre la enseñanza de las matemáticas. En tal sentido, la creación de un espacio de discusión como escenario para la formación inicial y permanente del profesorado universitario, se hace necesaria y probablemente debería ser obligatoria, algo que todos los participantes, salvo Manuel, manifiestan de forma explícita en EF9, con sus respectivos matices.

5.3.3. Segmento 3

En esta oportunidad el tema central de discusión es la regla de la cadena. Aquí se intenta indagar sobre la introducción a esta regla de derivación mediante un problema cuya derivada de la función interna forma parte del enunciado del problema. El segmento que aquí presentamos fue tomado de la tercera sesión del seminario, específicamente del microepisodio **A.3.1**[15]. En este segmento exploramos el CDC del participante, permitiendo que reflexione

[15]Este segmento se encuentra en el **Apéndice A**, entre las páginas 416 y 417.

sobre su *metodología de enseñanza* y sobre la *estructura del problema* en sí mismo. Como detalle curioso, destacamos que este problema se encuentra entre los problemas propuestos en uno de los libros de texto que recomienda el currículo oficial, con la particularidad que fue modificado de acuerdo a nuestros objetivos.

[Moderador]: En este ejemplo de la regla de la cadena, la derivada de la función interna es parte del enunciado. ¿Utilizan ustedes un problema similar para introducir la regla de la cadena?

1. $\boxed{\text{Sí}}$. ¿Por qué?
2. $\boxed{\text{No}}$. ¿Lo utilizarían ahora para introducir la regla de la cadena, lo modificarían (¿cómo?) o simplemente lo harían de otra manera (¿por qué?)?

[Manuel]: No, no, es más; ***primera vez que veo un problema de ese tipo***.
[Ramón]: ***Yo también***.
[Manuel]: Porque yo ***para la parte de regla de la cadena uso ya las formulaciones matemáticas***, las propiedades.
[Moderador]: O sea, ¿tú defines primero la regla de la cadena y luego abordas los problemas?
[Manuel]: En sí, ***no incluyo la regla de la cadena en el problema así como está acá***, sencillamente, para el cálculo de la derivada de una función queda implícita la regla de la cadena, no sé si me explico... De hecho, ***estoy aprendiendo algo nuevo con este problema***.
[Moderador]: Dame detalles...
[Manuel]: Mira, ***defino la regla de la cadena y hago ejemplos***, de allí en adelante el estudiante debe saber diferenciar si para calcular la derivada, se tiene que aplicar la regla de la cadena o no.
[Moderador]: Pero la pregunta es si utilizas un problema como este para introducir la regla de la cadena.
[Manuel]: No, ***ni siquiera conocía un problema como éste***; primera vez que lo veo, te soy sincero.
[Moderador]: ¿Y tú, Ramón?
[Ramón]: ***Primera vez que veo esta manera de introducir la regla de la cadena con aplicaciones de economía***.
[Moderador]: En atención a que la respuesta de ustedes es negativa, ¿intentarían ustedes introducir la regla de la cadena con un problema como éste o piensan que generaría conflictos en el estudiante?
[Ramón]: Al contrario, me parece que ***esta manera de introducir la regla de la cadena es más sencilla en comparación a como lo hago actualmente***.
[Moderador]: ¿Y qué le modificarías al problema?
[Ramón]: No, ***yo no le modificaría nada***, así como está expuesto me parece que ***tiene una buena estructura***.
[Moderador]: Y cuáles serían los beneficios didácticos, desde el punto de vista del aprendizaje, etc...

[Ramón]: Hacerlo así, al menos ***ellos entenderían cómo usar y en qué consiste la regla de la cadena***, porque la experiencia que yo tengo es que hay que identificar, les explico, hay que identificar la función interna, la función externa. Entonces, ***siempre he tenido la sensación de que ellos al final no comprenden en realidad qué significa la regla de la cadena***; es decir, cómo y cuándo usarla. Ni hablar de la interpretación. ***Mientras que con tu ejemplo quedan bien identificados los dos factores***.
[Moderador]: ¿Y tú, Manuel, implementarías o descartarías este problema, o lo modificarías?
[Manuel]: Sí ***me llama la atención y me atrae***, pero como te dije, ***es primera vez que lo veo y tendría que estudiarlo más a fondo***. Ahora, creo que sí se podría utilizar porque ***de esta manera se evita uno muchas formulaciones***, esa es una de las cosas que me atrae y que seguro le gustaría a los estudiantes. Cuando yo introduzco la regla de la cadena, ***les hablo mucho de composición de funciones, les hago diagramas, que a los estudiantes no les gusta***, muchas fórmulas y notaciones, usando el prima y usando la diferencial. Esto, sin embargo, me podría ayudar a separar una cosa de la otra, ***me parece muy buena idea*** pero vuelvo y te repito, ***tengo que madurar el ejemplo porque es primera vez que lo veo***.

En esta oportunidad, la discusión generada sobre la introducción de la regla de la cadena a partir de un problema que suponemos no tradicional, permite a los participantes pronunciarse sobre diversos aspectos asociados a esta regla. En primer lugar podemos observar que para ambos profesores es la primera vez que abordan este tipo de problema y, más todavía, ellos manifiestan que siguen una enseñanza tradicional en el caso de esta regla de derivación; situación ésta que se puede verificar en los esquemas presentados por estos profesores en sus respectivos cuestionarios correspondientes a la tercera sesión del seminario[16].

Ahora bien, no sólo nos conformamos con el hecho de que estos profesores manifiesten que es la primera vez que estudian un problema como este para introducir la regla de la cadena; Manuel, por ejemplo, sobre el contenido y la estructura del problema reconoce: "*estoy aprendiendo algo nuevo con este problema*", lo que vuelve a aflorar que el seminario sirvió como espacio para que los profesores reflexionaran sobre nuevas alternativas para la enseñanza de las matemáticas. Ramón por su parte, enfoca su reflexión de una forma, tal vez, esperada por nosotros en algún momento; esto es, comparando la estructura del material a su actual forma de trabajo. En particular, este profesor matiza que el material discutido podría tener mayor y mejor alcance en el aprendizaje del estudiante por los detalles y el esquema que presentamos en éste; añade además que los estudiantes "*entenderían cómo usar y en qué consiste la regla de la cadena*", pues "*siempre he tenido la sensación de que ellos al final no comprenden en realidad qué significa la regla de la cadena*". Todo esto nos hace inferir que existe cierta inclinación a un cambio en el esquema de enseñanza de este profesor.

[16]Estos detalles se pueden verificar en las páginas 434 y 440 de esta memoria

Una vez más queda de manifiesto que la existencia de un espacio de discusión, en el que se planteen distintos puntos de vista sobre cómo trabajar una serie de problemas de un tema específico, permite al grupo de discusión conocer y generar alternativas que vayan en pro del proceso de enseñanza-aprendizaje. Sin embargo, no aceptamos que lo único relevante en este conjunto de reflexiones sea el espacio en sí mismo, también el instrumento que genera tales reflexiones, el seminario de profesores, merece un poco de atención, puesto que sin la existencia del mismo no habría el debate producido entre los participantes.

Tanto es así que si nos ubicamos en EF2 de cada uno de los participantes, podemos apreciar que todos afirman que el material muestra alternativas distintas a las trabajadas en clases para enseñar matemáticas; en particular, el dominio de una función, la introducción a la derivada y la regla de la cadena, entre otras, lo cual nos hace inferir que existe cierta inclinación a un futuro cambio en sus correspondientes prácticas docentes, por supuesto, siempre que esta actividad se continúe.

5.3.4. Segmento 4

En este momento volvemos a la segunda sesión del seminario, solo que en este caso trabajamos con las opiniones del **Grupo B** y el concepto matemático es la monotonía y los valores extremos, aun cuando no queda reflejado en el texto extraído de la discusión. Al igual que en la **Sección 5.3.2**, aquí procuramos explorar sobre la contextualización de la economía en problemas matemáticos y sus consecuencias en el plano de la enseñanza y el aprendizaje. Este segmento es tomado, como ya lo manifestamos, de la segunda sesión del seminario, concretamente del microepisodio **B.2.1**[17] En este tramo del seminario indagamos el CDC de los profesores participantes, promoviendo la discusión sobre su *metodología de enseñanza* y sobre las posibles consecuencias en el aula al llevar una estructura como la que se muestra en el material.

[Moderador]: En una discusión reciente con otros profesores de matemáticas que trabajan en una facultad de economía, dos de ellos manifestaron que una actividad como ésta no es innovadora para sus estudiantes y sus argumentos fueron varios; pero además, surgieron comentarios encontrados en cuanto a aspectos metodológicos. ¿Consideran ustedes que esta es una actividad que conlleva a un mayor esfuerzo en el sentido metodológico (desarrollo de la clase)?
[Alexis]: Yo creo que no, de hecho, ***uno se sienta a preparar la clase tan igual como uno se sienta a preparar una clase de cálculo para ingeniería o ciencias***, y como ya hemos estado utilizando la parte de economía, entonces ***el tiempo que uno destina para la parte de las***

[17]Este segmento se encuentra en el **Apéndice B**, entre las páginas 511 y 513.

aplicaciones lo que haces es redistribuirlo para montar estos problemas..., yo creo que no, a mi particularmente me parece que no.
[Kenya]: Yo pienso que, ***tal vez, sí implique un poco más de tiempo, quizás, cuando se monte la primera vez***...
[Alexis]: ***Ah bueno***...
[Kenya]: ***No es lo mismo dar una clase tradicional*** donde tú hablas y hablas..., y ***definición, concepto, ejercicio, problema, a que tú lleves un proceso***...
[Alexis]: ***Por supuesto***...
[Kenya]: ***Donde lo imprevisto está ahí***..., tú puedes lanzar preguntas y ellos te pueden responder, pero ***también pueden decir cosas que tú no tenías previstas***...
[Alexis]: ***Por eso es que te estoy diciendo***...
[Kenya]: ***Puede llevarte algún tiempo adicional, de eso estoy segura***.
[Alexis]: Por eso es que te digo, se sienta uno..., ***asumiendo que nosotros manejamos un poco la parte de economía***. Si tú vas a preparar una clase de eso, en cualquiera de los cursos de cálculo para estas carreras, ya tú sabes que tienes que montar unos problemas, y por supuesto que tienes que resolverlos y ese es tiempo que, no es que uno lo pierda...
[Moderador]: No estoy hablando de que sea tiempo perdido, me refiero si supone para ustedes más o menos tiempo, o la misma cantidad de tiempo.
[Alexis]: Bueno, ***la primera vez que uno monta una clase de estas, claro que sí***, pero repito, como ya uno ha trabajado con las aplicaciones, ***no creo que el tiempo que uno se siente sea mucho más***. Tal vez ***lo que tome más tiempo es el problema del lenguaje de economía***, que ***como uno no es economista*** uno tenga que profundizar más en esto.
[Moderador]: Elio, ¿qué opinas tú?
[Elio]: Yo sí apostaría por eso, porque ***se necesite de mayor tiempo y tal vez más que la primera vez***...
[Alexis]: No, yo pienso que ***la primera vez te tienes que familiarizar con términos que no conoces***...
[Elio]: Pero un momento..., ***el problema es que con las clases tradicionales***, por llamarlas de alguna manera, ***como usualmente uno las está dando ya tienen un patrón***, ya vienen estructuradas, definición tal, teorema tal y diez ejercicios..., y así sucesivamente. Este es como el patrón que uno debe seguir, en cambio la construcción que queremos darle es: ***se le plantea al estudiante un problema y que hay que desglosarlo de alguna manera*** y que, seguramente, no tenemos idea de qué es lo que se va a hacer...
[Alexis]: Cuidado, cuidado, ***lo que dices es muy delicado***.
[Kenya]: Claro, ***hay que esperar que el alumno lo mire, lo analice***, uno no, por que uno lo lleva preparado. ***Uno espera determinado comportamiento de ellos***.
[Alexis]: Sí, pero cuidado, porque ***lo que dice Elio es muy delicado***, yo lo que entiendo es que aún cuando él está llevando el problema, está diciendo que no sabe cómo atacar el problema, ***eso sería muy grave para el estudiante***.
[Kenya]: Sí, sí, ***pero tú puedes llevar unos problemas preparados*** donde la participación de la clase..., mejor dicho, ***donde el protagonista seas tú***, ¿entiendes?, pero en ***un tipo de metodología como la que se está enfocando aquí es distinta***, porque se supone que ***tú vas a conducir un proceso donde el alumno va a ser el protagonista*** de ese proceso, es él quien

va a llegar a un concepto y ***llegar a un concepto no es tarea fácil***. Claro, entendemos que estamos tratando con adultos y que debe ser más fácil que con niños, tal vez con una o dos situaciones sobre el mismo tópico como lo está planteando Luis, ***Luis está planteando el mismo contenido pero trabajando con distintas funciones***, ¿no es verdad?

[Moderador]: Bueno, tú lo ves así, realmente no puedo opinar al respecto.

[Kenya]: Aproximándose al mismo concepto usando la función beneficio, ingreso, costo, etc., pero ***implica una participación activa del alumno***, eso ***te consume más tiempo*** de clase...

[Moderador]: ¿En la clase o en la preparación de la clase?

[Kenya]: De las dos, porque ***tú tienes que tomar en cuenta que debes adelantarte a lo que pueda ocurrir en el aula***, y eso no es fácil. Si yo me voy por este camino y planteo esto, ¿qué puede pasar aquí? ¿Cuáles son las posibles situaciones con las que me puedo enfrentar y cómo resolverlas? ¿Qué pasa si se me presenta una situación como esta y yo no estoy preparada para asumirla? A conciencia, ***eso implica una mayor preparación de la clase y una mayor preparación para el profesor***, sobre todo en un campo que no es de tu formación, de paso...

Aquí la preparación de la clase de matemáticas contextualizada en el área económica es el primer tema que aflora entre los participantes. Expresar su punto de vista sobre la planificación de la case y al mismo tiempo, escuchar la posición de los otros profesores, permite discernir y obtener una conclusión *a priori* sobre esta actividad. Por un lado resulta interesante para nosotros el cambio que experimenta Alexis en la discusión con Kenya; este profesor, al principio, afirma que llevar problemas matemáticos contextualizados en el área económica no le supone más tiempo ni trabajo, sin embargo Kenya lo va haciendo cambiar de idea hasta que Alexis termina aceptando la posición de Kenya. Sin embargo, Alexis, en EF2 afirma que "*el material obliga al docente a estudiar más*" y en su caso particular, este profesor reconoce que "*los problemas que trabaja en el aula son muy básicos*".

Otro punto a destacar tiene que ver con los argumentos pormenorizados de Kenya en materia de planificación; tomando como pieza principal el material, en primer lugar ella identifica el tipo de esquema de enseñanza que proponemos en el material, posteriormente conecta las implicaciones que conlleva trabajar la EBP en el aula, pues entiende que es "*un proceso donde el alumno va a ser el protagonista*", eso "*implica una participación más activa del alumno*" y "*que debes adelantarte a lo que puede ocurrir en el aula*". Finalmente concluye que "*eso implica una mayor preparación de la clase y una mayor preparación para el profesor*".

Por otra parte, también es importante destacar la descripción que hace Elio de su práctica docente, ya que la misma ha de ser tomada en cuenta como elemento identificativo de cara a cualquier cambio en la labor docente de este profesor. En su participación, él reconoce que trabaja bajo el esquema de "*clases* *tradicionales*", cuya estructura la identifica como: "*definición tal, teorema tal y diez ejercicios*".

5.3.5. Segmento 5

En este último segmento seleccionado surgen cosas interesantes que sirven para cerrar esta parte del análisis. Aquí abordamos el tema del dominio de una función e intentamos profundizar en el tema de la *contextualización económica*, algo que, ya hemos repetido en un sin número de ocasiones, es uno de los pilares del instrumento. En esta oportunidad recurrimos a la tercera sesión del seminario, concretamente del microepisodio **B.3.1**[18] En esta parte retomamos la discusión realizada sobre el estudio del dominio en un doble contexto, el matemático y el económico; esta vez predomina en la discusión el conocimiento del contenido. Sin embargo, aflora el tema de los libros de texto de manera natural en esta parte del seminario.

> **[Moderador]**: Precisamente es un punto curioso que me gustaría discutir con ustedes, ya que tal como está planteada la función, ésta es derivable, pero si atendemos al dominio económico la función deja de serlo. Recordemos que si la función tiene saltos o es discontinua en un punto entonces no es derivable. ¿Qué pueden decir ustedes al respecto?
> **[Elio]**: Yo pienso entonces que sobra..., sobra, ya que ***la simulación que se hace gráficamente está dando más de lo que se necesita*** en todo caso...
> **[Moderador]**: ¿Podrías darme más detalles...?, es que me perdí un poco con lo que dijiste.
> **[Elio]**: Lo que quiero decir es que ***como el dominio matemático es más grande que el económico, entonces la simulación gráfica..., matemática aporta más información de la realidad económica del problema***.
> **[Moderador]**: ¿Y cómo resolverías esa situación frente a tus estudiantes?
> **[Elio]**: ***Es algo bastante difícil, sobre todo por el conocimiento matemático que tienen a este nivel***. Esto requiere un poco de abstracción, digo yo. ***No se me ocurre algo en este momento***...
> **[Kenya]**: Bueno, yo estoy de acuerdo con Elio, yo creo que al alumno, a cualquier alumno en general..., ***cuando se trabaja con el tema de funciones siempre hay que enfatizarle el tema del dominio***, debe ser una habilidad que ellos deben adquirir, por lo tanto no está de más que se le insista en esa situación, y más aún cuando se trata de trabajar problemas muy específicos del área de conocimiento, del área de la profesión de ellos. Enfatizarle que ***no es lo mismo una función económica que una función matemática***, que lo que persigue la función matemática es modelizar una situación o acercar una situación real a través de un modelo matemático. Entonces, yo creo que ***es importante establecer las diferencias entre una situación y otra***, para no complicar la consolidación de los conceptos que se abordan.
> **[Alexis]**: Ahora, una cuestión que me parece muy curiosa... ***En los libros que yo tengo,***

[18]Este segmento se encuentra en el **Apéndice B**, entre las páginas 535 y 537.

que he leído sobre aplicaciones, que son tres o cuatro, no recuerdo ahora, ellos no hacen hincapié sobre eso...
[Kenya]: No lo hacen, ***con los que yo trabajo tampoco***...
[Alexis]: Ellos ***no toman en cuenta el dominio así como tú lo haces***, eso de hablar de dos dominios, que ***también podría traer sus inconvenientes con los estudiantes***. Ellos dicen: ″*tantas unidades producidas*´´, entonces uno sabe que la función está acotada superiormente, que tiene un tope, pero nunca detallan este hecho. Si uno se va al capítulo de funciones...
[Kenya]: ***No destacan ese hecho***...
[Alexis]: ***No hay esa sutileza de decir lo que se está diciendo aquí***...
[Kenya]: ***De destacar esa diferencia***...
[Moderador]: Entonces, este planteamiento que nosotros hacemos, eso de hacer énfasis en el dominio, ¿les parece conveniente, aún cuando los libros no lo consideren y los mismos programas oficiales tampoco lo contemplan?
[Alexis]: ***Claro que sí***, mira..., ***en las funciones polinómicas***, lo dice Elio, ***uno lo ve como una función matemática y el dominio es todo*** $\mathbb{R}$, ***en cambio en la parte de la aplicación ya tiene otro dominio***. ***Ahora es que caigo en cuenta y me pregunto: ¿por qué los libros no enfocan eso, no sé si tú tienes algún libro que trabaje eso?***
[Moderador]: No, al menos los libros que hemos revisado no consideran esta situación y es algo que, precisamente, nos llama la atención.
[Elio]: ***Lo que sí vi en algún libro***, no recuerdo el autor ahora, ***es el hecho de ver si es discreto o continuo el conjunto que se está considerando***...
[Moderador]: Muy bien, pasemos a la otra pregunta.

Comenzaremos por estudiar la reflexión que hace Elio sobre el dominio de una función y su relación con los contextos matemático y económico, el señalamiento que él hace sobre este concepto matemático tiende a ser ambiguo y, más aún, confuso, ya que no deja claro qué implicación tiene el estudio del dominio en el contexto económico o, en todo caso, no atiende a la pregunta formulada. De lo anterior podemos decir que el seminario también nos sirvió para determinar debilidades del profesor en materia del CDC y, en este caso particular, en lo que respecta al contenido disciplinar.

En otro orden de ideas, Kenya, a partir de los comentarios de Elio saca a colación la importancia del tema del dominio de una función como parte del aprendizaje que los estudiantes deben adquirir y entra en detalles como: lo relevante de estudiar funciones matemáticas que modelicen una situación económica. A lo anterior añade "*que es importante establecer la diferencia entre una situación y otra*", refiriéndose a los contextos matemático y económico que se estudian mediante una misma función. Esto muestra el conocimiento que esta profesora posee en aspectos tanto de enseñanza como de aprendizaje asociados al trabajo de problemas contextualizados en el aula.

Ya para finalizar el análisis de este segmento, nos remitimos al intercambio de opiniones entre Alexis y Kenya sobre el estudio del dominio de una función en el contexto económico ya que ambos advierten que en los libros de texto que ellos trabajan no toman en cuenta este aspecto del dominio; Alexis precisa: "*no hay esa sutileza de decir lo que se está diciendo aquí*" y termina cuestionando los libros: "*por qué los libros no enfocan eso*". Todo esto nos anima a entender el seminario como una actividad de reflexión sobre la práctica que implica una formación permanente, de modo que se pueda discutir sobre este tipo de detalles que surgiera entre Alexis y Kenya.

5.3.6. Recapitulando sobre los cinco segmentos

Haciendo un resumen en retrospectiva de los cinco segmentos analizados anteriormente y en el que incluimos parte de la entrevista final con cada uno de los participantes, podemos resaltar algunos aspectos que contribuyen ampliamente a nuestro trabajo, entre ellos destacamos:

(A) El seminario como actividad de formación profesional, lo entendemos como una clara necesidad, sobre todo en materia de contenido disciplinar económico y también matemático; y, sobre este último, en aquellos conceptos que guardan estrecha relación con el contenido económico como es el caso del dominio de una función, las distintas interpretaciones de la derivada y la regla de la cadena, entre otros. De hecho, quedó evidenciado en el análisis del Segmento 3 cuando Manuel sostiene "*estoy aprendiendo algo nuevo con este problema*", la importancia del seminario como modelo de formación y desarrollo profesional, lo cual resulta necesario para el docente. Ya lo dice Marín (2006, p. 184), "*no se puede negar la necesidad de actualizar, reconvertir y adquirir nuevos saberes*".

(B) El seminario como espacio de interacción entre profesionales de la enseñanza en el que se comparten ideas, metodologías, estrategias, concepciones, creencias sobre el complejo campo de la enseñanza de las matemáticas. Todo esto aunado a lo expresado en el ítem A de esta sección nos hace inferir que el seminario de discusión es un espacio inductor del "cambio" en materia de enseñanza de las matemáticas. Entendiendo este "cambio" como un proceso derivado de la reflexión y la innovación hacia metodologías que favorecen el aprendizaje o que se adecúan a carreras universitarias eminentemente prácticas.

(C) Si bien destacamos el seminario como espacio de formación y de discusión entre los participantes, no podemos dejar a un lado las reflexiones llevadas a cabo sobre su propia práctica docente, tomando como punto de partida el material discutido. Estas reflexiones mostraron los distintos puntos de vista de los profesores participantes en los distintos aspectos que conforman el CDC trabajados en este proyecto. Un punto relevante en este ítem es la falta de unificación de criterios en cuanto al contenido disciplinar que se lleva al aula o a la visión de la derivada como objeto matemático. Vale la pena destacar que García Fernández (2006) desarrolla todo un conjunto de elementos sobre todo lo que implica en la actividad docente el proceso de reflexión del profesorado universitario, y nosotros, hacemos especial énfasis en este tema por sus implicaciones en la formación del profesor.

(D) Hasta ahora hemos hablado de la importancia del seminario; no obstante, el instrumento diseñando para poner en práctica esta actividad y al que nos hemos referido como *el material* jugó un papel fundamental en el desarrollo de este trabajo; es por ello que la valoración del material resulta clave. En este sentido resaltamos:

(D.1) El esquema presentado para el estudio de la regla de la cadena resulta innovador y fue motivo de observaciones y reconocimiento a lo largo de la recolección de datos.

(D.2) Los problemas en los que estudiamos el dominio de una función resultaron factores claves de discusión por la relación entre el contenido disciplinar económico y el matemático.

(D.3) La estructura presentada en los problemas del material también mereció la observación de algunos de los participantes, en el caso de intentar poner en práctica el mismo, al opinar que podría causar algún tipo de inconveniente en el estudiante, ya que el esquema es contrario a la actual forma de trabajo de estos profesores.

(E) No podemos cerrar este resumen sin comentar el papel del moderador, quien realizaba este trabajo por primera vez. No solo la función de director de debate sino el poder mediar y controlar a unos profesores que también son compañeros de trabajo, facilitaba y, al mismo tiempo, dificultaba su cometido, pues muchas veces el participante se limitaba a decir frases como: *tú sabes a lo que me refiero* o, peor aún, guardaban silencio y, en consecuencia, el moderador tenía que imaginarse el resto del comentario. Por otro lado, buscar el equilibrio en la participación de cada uno de los profesores también resultó una tarea exigente, ya que puede darse el caso de que existan participantes más o menos extrovertidos, o introvertidos, que otros.

Capítulo 6

Conclusiones y Resultados Finales

Introducción

A continuación presentamos las conclusiones de este estudio como fruto del análisis de datos y de los resultados obtenidos en el mismo. Esta parte de la memoria está estructurada en tres bloques, los cuales están organizados de la siguiente manera:

- Conclusiones metodológicas
- Conclusiones didácticas
- Líneas abiertas de investigación

En este orden de ideas, estructuramos las conclusiones según se deriven de los objetivos didácticos propuestos y de los objetivos metodológicos enunciados en el **Capítulo 1**. Así mismo, dedicamos la última parte de este capítulo a reflexionar sobre el estudio en su conjunto en el que incluimos algunas ideas de cara a futuros trabajos afines a este proyecto; de igual manera, mencionamos algunas cuestiones o problemas que quedan abiertos y que proponemos para desarrollos futuros.

6.1. Conclusiones metodológicas

Las conclusiones que presentaremos en este apartado son aquellas que e-mergieron como resultado de la metodología empleada en este proyecto; en tal sentido, nos remitiremos a los instrumentos de recogida de datos (**OM1**: *"Evaluar la validez de los instrumentos de recogida de datos en investigaciones* *cualitativas sobre el conocimiento del profesor*”). Así, las conclusiones relacionadas con **OM1** se obtuvieron de los **Apartados 4.1**, **4.2**, **4.3**, **4.4**, **5.1** y **5.2**. Por otra parte y como un elemento particular del objetivo anterior, mostramos las conclusiones derivadas del espacio generado para la aplicación del instrumento (**OM2**: “*Evaluar el seminario, esta vez no como instrumento de recogida de datos, sino como espacio de trabajo y discusión por el valor formativo que pueda tener esta metodología de trabajo en aspectos como el desarrollo profesional del profesor de universidad*”); en este caso, las conclusiones provienen, en esencia, del **Apartado 5.3** aunque también, pero en menor profundidad, recurrimos a los apartados señalados antes.

Por último, cerramos este apartado con las conclusiones más relevantes que arrojaron el instrumento de análisis, cumpliendo de esta manera con los objetivos planteados en **OM3**, es decir, “*contribuir a la comunidad científica del área mediante el instrumento de análisis de datos y resaltar los elementos más importantes en materia de análisis*”. Aun cuando este último objetivo quedó expresamente cumplido en los **Capítulos 4** y **5**, expondremos al final de este apartado aspectos relevantes como la identificación, organización de los datos, así como aquellos elementos que resultaron significativos en el análisis del seminario como espacio de formación y discusión.

Observación: En este apartado habría que incluir también las conclusiones relacionadas con la EBP como estrategia de recogida de datos; sin embargo, como en el final del siguiente apartado hablaremos de las conclusiones de tipo didáctico vinculadas a la EBP, hemos decidido reservar este mismo espacio para mostrar las conclusiones de tipo metodológico que arrojaron la EBP en este trabajo.

Para comenzar damos un salto hacia atrás en esta memoria en donde hablamos de los aportes personales en materia metodológica; por una parte, señalamos la adecuación del seminario **como espacio para la recolección de datos y como entorno ideal para la formación permanente y desarrollo profesional del profesor de matemáticas de universidad**; estas dos facetas del seminario forman parte de las novedades de esta investigación. Por otro lado, señalamos también **el papel que jugó el instrumento diseñado, el cual quedó expresamente identificado como *propuesta didáctica teórica*, aunque algunas veces lo llamamos simplemente *el material***. La conjugación de estos dos elementos nos condujeron a las siguientes conclusiones.

6.1.1. Sobre el seminario

Recordemos que la característica principal que le quisimos dar al seminario fue la de espacio de discusión y reflexión; pero, no obstante, también este espacio lo procuramos destacar como medio de recogida de datos, en este sentido, presentamos algunas conclusiones relacionadas con ambos enfoques.

En una investigación de esta naturaleza se debe tomar en cuenta que un instrumento en sí mismo no tiene vida propia, por lo que el medio o la situación que se elige para aplicarlo le debe ser afín al instrumento. No diremos que el seminario de discusión es el mejor espacio para la aplicación de un instrumento, pero sí seremos enfáticos en afirmar que **es un espacio idóneo, el cual permite la flexibilidad y ajustarse a situaciones diversas** entre el moderador y los participantes. En el caso que nos ocupa, nuestro seminario se caracterizó por ser:

(i) Un **espacio interdisciplinario** que conecta las matemáticas y la economía.

(ii) Un **espacio de discusión entre pares**. Permitiéndonos además:

(iii) Obtener información de carácter individual y grupal sobre aspectos concretos del CDC.

(iv) Aproximarnos a una caracterización de los aspectos más relevantes de la actividad matemática que los profesores participantes llevan al aula de clases.

Tales hechos nos permitieron abordar, entre otros, dos de los aspectos fundamentales como objeto de estudio de esta investigación:

(A) La **EBP como metodología alternativa de enseñanza y de recogida de datos**.

(B) El **CDC del profesor de matemáticas de universidad** como objeto central de estudio.

Desarrollemos estos dos puntos. Con relación al punto **(A)** tenemos que señalar lo siguiente: en las **Subsecciones 6.2.2.1** y **6.2.2.2** que abordaremos más adelante hablaremos de forma detallada sobre la EBP; sin embargo, presentamos cuatro conclusiones que vinculan el seminario y la EBP, estas son:

S1 El seminario resultó un excelente medio para implementar **la EBP como metodología de recogida de datos**, el cual **nos ha proporcionado información imposible de obtener en otros contextos de trabajo**.

S2 Mediante esta dinámica de discusión salió a relucir el tema de **la evaluación**, aunque no es objeto de estudio en este trabajo. De manera concreta, **nuestra propuesta didáctica supone para los participantes un <u>cambio</u> en el modelo y forma de evaluación, lo que al mismo tiempo se revela como una limitación, dado que no sabrían, en general, como abordarla para que sea coherente con la propuesta de enseñanza**.

S3 Un elemento más que conecta el seminario y la EBP tiene que ver con **la modalidad de discusión de cada problema**. Aquí resaltamos:

S3.1 **La descomposición de cada uno de los problemas discutidos en forma de microepisodios**. Este hecho permitió la obtención de datos de forma detallada y precisa.

S3.2 El que **las preguntas fueran realizadas de forma indirecta** posibilitó un ambiente distendido entre los participantes, puesto que nunca se observó que se sintiesen evaluados o cuestionados.

En resumen, **entendemos el material como un conjunto de situaciones problemáticas ricas**, *interesantes en cuanto a su aplicabilidad* y **apoyadas por preguntas para la reflexión** (microepisodios), **capaces de guiar el proceso de discusión** durante el seminario.

Con relación al punto **(B)** resaltamos lo siguiente:

S4 El seminario favoreció la retroalimentación entre los participantes:

S4.1 Entre los mismos participantes se acordó **generar mesas de trabajo mixtas (profesores de matemáticas-profesores de economía)** con el objetivo de:

- **Identificar necesidades** formativas reales de los estudiantes.
- **Redefinir los objetivos** específicos de los cursos de cálculo para las carreras objeto de este estudio.

S4.2 Otro punto a destacar es que el seminario **sirvió para detectar aspectos concretos del CDC de los profesores de matemáticas de universidad**, quedando de manifiesto que desconocen:

- **Interpretaciones económicas de la derivada**.
- **Estrategias alternativas de enseñanza** que favorezcan la vinculación entre las matemáticas y la economía, como por ejemplo la EBP, desconocida por todos salvo Kenya.
- **Características y requerimientos del perfil del futuro profesional de la economía**.

Lo que les conduce a pedir/ser conscientes de **la necesidad de talleres de formación permanente y de desarrollo profesional para el profesorado de matemáticas**, no sólo por el contenido económico en particular, sino en materia de diseño y gestión del trabajo en el aula.

S5 Con la implementación del seminario, **destacamos dos elementos de carácter innovador en el campo de la investigación cualitativa en didáctica de las matemáticas** a nivel universitario:

S5.1 Este espacio permitió la participación colectiva, *in situ*, del profesor de matemáticas **para modificar o complementar el material discutido**, proporcionándonos datos relevantes relacionados con el conocimiento del contenido matemático-económico.

S5.2 Por otra parte, valoramos el seminario como **espacio propicio para que los participantes reconstruyeran y reflexionaran sobre su propio conocimiento** respecto a la labor que ellos desempeñan en el aula. Todo lo aquí expresado sobre el proceso de reflexión del profesor de universidad cobra vida con lo expresado por Marín (2004).

Finalizamos las conclusiones con algunas **debilidades que significó el seminario** como metodología de recogida de datos, entre las que podemos destacar las siguientes:

- El seminario **produjo una excesiva cantidad de información** que, en algunos momentos, resultó difícil de organizar y manipular; en determinados momentos, la extensa participación de algún profesor acababa por desviar el punto de discusión sobre el resto del grupo.

- En momentos puntuales la participación simultánea de dos o más profesores **dificultó la transcripción y posterior organización de los datos**; sin embargo, **la oportuna intervención del moderador permitió matizar y minimizar estás situaciones** al igual que la señalada en el ítem anterior.

6.1.2. Sobre los cuestionarios

En primer lugar tenemos que recordar que los cuestionarios se aplicaron al final de cada una de las sesiones del seminario. Estos cuestionarios estaban directamente relacionados con las sesiones, los profesores los respondían en sus casas y los entregaban al inicio de la siguiente sesión. Entre la conclusiones metodológicas como aportes de este instrumento destacamos las siguientes:

C1 Permitió **complementar la información del seminario ayudando así al proceso de triangulación** de la información en aspectos específicos del CDC como:

- **Introducción al concepto de derivada y de la regla de la cadena**, como parte del conocimiento sobre la enseñanza.
- **Actitud del estudiante frente a situaciones matemáticas concretas** como parte del conocimiento sobre el aprendizaje.

6.1.3. Sobre la entrevista

De la entrevista que le realizamos a cada uno de los profesores después de la última sesión del seminario y al igual que los cuestionarios, fueron:

E1 Un **excelente instrumento para ampliar** el conjunto de datos y así **contribuir al proceso de triangulación**.

E2 Un **instrumento extraordinario para que los participantes reflexionaran** sobre el seminario, sobre el material y sobre su propio conocimiento disciplinar.

6.1.4. Sobre el análisis

Los instrumentos de análisis aquí utilizados nos permitieron, en primer lugar, estructurar la gran cantidad de datos que arrojaron la aplicación de los distintos instrumentos de recogida de datos y, en segundo término, facilitar la manipulación de los mismos, evitando esquemas tediosos y que obligan a repetir la información.

Por otra parte, hay que tomar en cuenta que los datos provenientes, concretamente del seminario, se analizaron de dos maneras distintas atendiendo a objetivos diferentes; en el primero, se estudiaron el CDC y la EBP del profesor de matemáticas; en el otro caso, analizamos el seminario como espacio de discusión, reflexión y formación profesional. Así, presentamos las conclusiones más relevantes en cuanto al instrumento de análisis, aunque la conclusión general principal que debemos resaltar en esta materia quedó plasmada en los **Capítulos 4** y **5**, es decir, **lo valioso que resultó este instrumento para analizar el conjunto de datos y poder cubrir de forma amplia nuestros objetivos planteados**. Sin embargo, no podemos obviar las dificultades que supuso el análisis de datos de cara a poder articular y organizar la cantidad de información recogida y al modo de transformar la información en datos útiles para el análisis. Entre las dificultades destacamos:

1. Gran cantidad de datos del seminario, de los cuestionarios y de las entrevistas, lo cual complicó la organización de la información.

2. Desequilibrio y heterogeneidad de la información obtenida de cualquiera de los instrumentos, lo que justificó un análisis micro y macro de los datos.

3. Pérdida de información cuando algún profesor escondía o camuflaba sus opiniones con las de sus compañeros, aunque más bien entendemos que se trata de desconocimiento o pocas ganas de manifestarse.

Recordemos que nuestro análisis se caracterizó por:

- Enmarcarse en el **análisis documental de contenido**, específicamente en el **análisis relacional**.
- Basarse en un modelo **descriptivo**, **interpretativo** y **exploratorio**.
- La **recursividad** como metodología de análisis.

Más allá de la metodología empleada, hemos incorporado:

- Los **árboles** para facilitar la reducción y organización de la información.
- Las **tablas de doble entrada** para obtener los resultados una vez depurada y reducida toda la información.

Por otro lado, para el **análisis del seminario** como espacio de discusión, reflexión y formación profesional, utilizamos también el **análisis relacional de contenido**, pero en este caso **elegimos segmentos del seminario**, los cuales fueron complementados con datos provenientes de los otros dos instrumentos.

A1 Metodológicamente, los **árboles** tienen una gran importancia e interés en el análisis porque:

  - Favorecen **la interconexión** entre los distintos episodios y entre los participantes.
  - Favorecen el **proceso recursivo** de análisis, puesto que estos árboles contenían la información discriminada según nuestros intereses en el estudio.
  - Ayudan a la **síntesis los datos** suministrados por los participantes, **sin llegarse a perder la esencia del contenido original de los datos**.
  - Permiten **pasar con facilidad de las palabras del informante a las del investigador**.
  - Permitir **la identificación** de las diferentes componentes del CDC.

A2 Por su parte, **las tablas de doble entrada**, a parte de ser un instrumento de reducción de datos, nos permitieron:

  - **Representar los resultados** del análisis sobre el CDC.
  - **Ilustrar** de forma detallada el perfil de los participantes.
  - **Interconectar** cada una de las componentes del CDC.

A3 Finalmente, **los segmentos** de esta actividad acabó siendo la metodología más sencilla y precisa para profundizar en el seminario como espacio de discusión, reflexión y formación profesional.

6.2. Conclusiones didácticas

Las conclusiones que presentamos a continuación están directamente relacionadas con los objetivos del mismo nombre que presentamos en el **Capítulo 1** Estas conclusiones las hemos clasificado en dos tipos:

(1) Respecto al CDC del profesor de matemáticas de universidad, y

(2) Respecto a la EBP como metodología de enseñanza, aunque también incluimos en esta parte las conclusiones respecto a la EBP como estrategia metodológica de recogida de datos, a fin de reservar un único espacio para la EBP.

Sin embargo, conviene recordar los objetivos didácticos que originalmente nos planteamos en este proyecto.

En primer lugar, nosotros nos planteamos aproximarnos al perfil del profesor participante en el marco del CDC (**OD1**: "*Analizar el CDC de cada profesor a través de una propuesta curricular y a partir de este análisis, determinar el perfil de cada profesor e intentar determinar la existencia de un perfil común entre los participantes*"); también buscamos estudiar al estudiante desde la visión del profesor, esto es, (**OD2**: "*Detectar hasta qué punto el profesor es consciente de las dificultades específicas de los estudiantes para abordar un determinado tema matemático y la relación de éste con el contexto económico*"). Un tercer punto que nos planteamos en este estudio y que forma parte de la columna vertebral del mismo queda reflejado en **OD3**, el cual consiste en "*estudiar el conocimiento disciplinar de los profesores participantes sobre el cálculo diferencial en las ciencias económicas, así como las estrategias que siguen para la enseñanza del mismo*".

En otro orden de ideas, también nos propusimos estudiar y profundizar en la EBP mediante los objetivos **OD4** y **OD6**; por una parte, "*estudiar el papel del profesor frente a propuestas metodológicas alternativas para la enseñanza de las matemáticas*" y, por otra, "*intentar aportar caracterizaciones de la EBP y sus diferencias con la R-P, vista la primera como estrategia de enseñanza que busca estudiar una teoría a partir de problemas planteados en el aula*", respectivamente. De igual manera, con el CDC nos planteamos algo similar a lo indicado en el **OD6** con la EBP, en el caso del CDC nos planteamos alcanzar algunos aportes en el marco de la didáctica de las matemáticas para cursos de cálculo en carreras de ciencias económicas, es por ello que recordamos el objetivo **OD5**: "*estudiar y profundizar en el CDC y, a partir de éste, aportar caracterizaciones del CDC en materia de las didácticas específicas*".

Finalmente, los dos últimos objetivos didácticos que nos propusimos alcanzar mediante la realización de este proyecto están vinculados directamente al material discutido; por una parte, estudiar la incidencia del material en el profesor participante, es decir, "*determinar la permeabilidad o algún cambio en los participantes a lo largo del seminario*" (**OD7**) y, por otra, el estudio del material *per se* a través del **OD8**: "*validar el material discutido en el seminario de cara a su posible implementación en los cursos de cálculo diferencial de la Universidad de Los Andes, en las carreras de ciencias económicas*".

Observación: En esta parte de las conclusiones hacemos mención a diversos conceptos que son propios del área económica, en tal sentido y a fin de hacer resaltar los mismos, los hemos subrayados.

6.2.1. Conclusiones respecto al CDC

Con tal de ilustrar los resultados de manera más precisa hemos decidido exponer las conclusiones de acuerdo a las diferentes componentes que conforman el CDC:

- Enseñanza
- Aprendizaje
- Contenido curricular
- Contenido disciplinar

Aunque hay que recordar que en el capítulo anterior ya presentamos, de forma detallada, resultados amplios sobre el CDC de los profesores participantes.

6.2.1.1. Respecto a la enseñanza

Las conclusiones que a continuación mostramos son el resultado del análisis realizado en materia de conocimiento del profesor de matemáticas sobre la enseñanza, destacando los elementos que ellos toman en cuenta para abordar sus clases de matemáticas a estudiantes de ciencias económicas.

ENS1 Algunos profesores manejan un conocimiento muy rígido y clásico de la derivada, lo que hace que prefieran **la aproximación físico-matemática** (velocidad instantánea) **a la aproximación geométrica** (pendiente de la recta tangente a la curva), **evitando la economía como enfoque alternativo de enseñanza**. Sin embargo, muestran cierta inclinación hacia el cambio de contenido disciplinar para la enseñanza de las matemáticas. Esta situación también se observó en García (2004).

ENS2 El papel que juega el **rigor matemático en la enseñanza es dual**, y las opiniones se reparten entre el **formalismo** y el **instrumentalismo**, en ambos casos muy condicionado por la formación y el ámbito de investigación en el que desarrollan su actividad los participantes, en este sentido señalamos lo siguiente:

ENS2.1 Dos de los participantes asumen **una concepción formalista de las matemáticas, lo que les lleva a concederle mucha importancia en su práctica docente**.

ENS2.2 Tres profesores asumen **una visión más instrumentalista y/o aplicada de las matemáticas, lo que les hace ser más flexibles y menos exigentes en su práctica docente**.

ENS3 Respecto al uso de **problemas contextualizados en la economía**, concluimos lo siguiente:

- **Todos los profesores los entienden como problemas de aplicaciones** y por tanto los **reservan para la parte final del tema**.
- Para algunos también se convierten en un **elemento de motivación**.
- **Utilización limitada y restringida** de estos problemas **debido al deficiente conocimiento disciplinar**.
- **Clara desconexión con los resultados esperables de aprendizaje** en el futuro profesional de la economía debido a la **inexistencia de relación entre el conocimiento disciplinar y el conocimiento de la enseñanza**.

En general, la visión que tienen de este tipo de problemas obedece tanto a su **formación matemática como a la influencia de los libros de texto utilizados por los profesores**.

ENS4 La utilización de los **libros de texto como herramienta casi exclusiva para la planificación evidencia muchas limitaciones en el proceso de enseñanza** tanto en el basado en problemas, como en el que intenta desarrollar las competencias matemáticas. Así, no permitimos mostrar dos situaciones significativas que lo corroboran:

ENS4.1 **No tomar en cuenta las restricciones del dominio impide considerar casos particulares** de problemas específicos de las ciencias económicas (como los discutidos en los episodios **EP2-1** y **EP3-1**).

ENS4.2 **La enseñanza tradicional de la regla de la cadena impide trabajar con total profundidad las diversas interpretaciones de ésta en la economía**, desaprovechando dichas herramienta en el futuro campo profesional.

A modo de resumen sobre las tres últimas conclusiones y el conocimiento del profesor asociado a la implementación de problemas contextualizados en la enseñanza de las matemáticas, Lange (1996) justifica el uso de estos problemas, (que por cierto llama indistintamente "*problemas de aplicaciones*"), basándose principalmente en cuatro aspectos:

(i) Facilitan al estudiante el aprendizaje de las matemáticas.

(ii) Estimulan el desarrollo de las competencias en los estudiantes.

(iii) Permiten el desarrollo de las competencias y actitudes de los estudiantes vinculadas a la resolución de problemas.

(iv) Permiten a los estudiantes ver la utilidad de las matemáticas para resolver problemas tanto de la vida diaria como de otras áreas afines a las matemáticas.

Lo que quiere decir, es que **nuestros profesores aprovechan poco el potencial que significa la implementación de problemas contextualizados en clases de matemáticas para futuros economistas**.

6.2.1.2. Respecto al aprendizaje

En general, todos los profesores, aunque con sus ligeros matices, dan muestras de conocer a sus estudiantes sobre aspectos concretos como la *actitud*, las *dificultades* y los *conocimientos previos* necesarios para abordar un concepto matemático. Nosotros llegamos a algunas conclusiones sobre el conocimiento que tienen estos profesores respecto a sus estudiantes y cómo influye el mismo en el proceso de enseñanza-aprendizaje.

APR1 En atención a **la actitud de los estudiantes respecto a los problemas contextualizados en economía**, surgieron opiniones encontradas sobre este tipo de problemas:

- **Aceptación y exigencia** (Ramón y Manuel).
- **Rechazo** (Alexis, Kenya y Elio).

Aunque Alexis mantuvo firmemente que sus estudiantes **rechazan los problemas económicos**, más adelante, como producto de los análisis recurrente y relacional, pudimos apreciar que **este profesor trabaja pocos problemas del contexto económico en sus clases debido a su visión y posición respecto a las matemáticas**. Estos dos elementos él los conjuga para la planificación de sus clases o, por el contrario, acepta de entrada el rechazo del estudiante hacia el contexto económico debido a la visión purista de las matemáticas que manifiesta el profesor. **Aquí se plantean dos visiones diferentes de las matemáticas**:

- **Una aplicada**, ligada al trabajo con problemas y
- **Otra más clásica/purista**, en la que los problemas son meros ejemplos.

APR2 En lo que respecta al estudio de **la actitud del estudiante frente al contexto no-económico** (desde la visión del profesor); **todos reconocen que sus estudiantes rechazan este tipo de problemas**. Aun así, observamos que **tal rechazo no es tomado en cuenta por tres de los participantes**.

APR3 Las creencias del profesor sobre *la formación y el conocimiento del estudiante* para abordar determinados temas son contradictorias:

- Ramón y Manuel afirman que sus alumnos **tienen formación para trabajar con el material discutido,**
- Kenya, Alexis y Elio advierten que sus estudiante **no están preparados**.

En ninguno de los casos, **ambos grupos de docentes ajustan su planificación de acuerdo al conocimiento previo del estudiante y a la posición de éstos frente a determinado tipo de problemas**.

APR4 Todos los profesores muestran un profundo conocimiento sobre las *dificultades* y *actitudes* que presentan sus estudiantes en los cursos de cálculo diferencial; sin embargo, si nos centramos en Kenya, Alexis y Elio, podemos apreciar que estos elementos **son poco tomados en cuenta para estudiar estrategias metodológicas alternativas de enseñanza, a fin de involucrar al estudiante en problemas vinculados a su futura profesión**. Aquí se ponen de manifiesto lo siguiente: estos docentes, valiéndose de su condición de protagonistas del proceso de enseñanza-aprendizaje, donde siguen un estilo de clase unidireccional (Zabalza, 2003) **no procuran romper la barrera de la contextualización**, **elemento que resulta fundamental si queremos apostar por una enseñanza de las matemáticas basada en problemas**.

6.2.1.3. Respecto al currículo

Las conclusiones relacionadas con el conocimiento curricular son, precisamente, aquellas derivadas de las reflexiones realizadas sobre el material o, más concretamente, aquellas que surgieron como resultado del *análisis crítico* al instrumento discutido. Sin embargo, conviene recordar que nuestro material se caracterizó por tener una estructura eminentemente práctica y contextualizada en las ciencias económicas, esto exige al profesor tener un conocimiento disciplinar económico básico a la hora de analizar o hacer observaciones al material. He aquí las más relevantes de estas conclusiones:

CURR1 Las reflexiones sobre el contenido económico en relación al material están claramente diferenciadas entre nuestros participantes; ello refleja, de alguna manera, el conocimiento de estos profesores respecto al contenido en cuestión. Por una parte, tenemos un profesor que se adentró en el material, mientras que el resto se quedó en un análisis somero del material.

CURR1.1 Ramón[1] fue el único profesor que profundizó en el material sobre el contenido económico, de él destacamos lo siguiente:

- Observó que nuestra propuesta "*prepara al estudiante para el curso de **microeconomía***".
- En otras ocasiones señaló que **el material sirve para estudiar otros conceptos económicos distintos de los que usualmente aparecen en los libros de texto** que recomiendan los programas oficiales, en concreto, el **impuesto marginal**.
- Fue más allá de nuestra propuesta al discutir con Manuel sobre el **excedente del consumidor**, aunque aquí no se extendió.

CURR1.2 El resto de los participantes, en este sentido, manejan un análisis superficial del material o casi nulo, lo cual **evidencia la necesidad de un conocimiento profundo que va más allá del conocimiento matemático *per se*, además de una formación profesional permanente en el área matemático-económica**; por supuesto, **siempre y cuando se apueste por una enseñanza de las matemáticas contextualizada en el área de economía**.

CURR2 Hemos mencionado en repetidas oportunidades que una de las características de nuestra propuesta es el carácter innovador que procuramos incluir en la misma, en temas relacionados como la introducción a la derivada, el estudio del dominio de una función o la introducción a la regla de la cadena, entre otros. Si tomamos el dominio como objeto de discusión, **observamos que el análisis o las opiniones expresadas por los profesores resultan muy pobres en cuanto al plano didáctico se refiere**; al respecto destacamos lo siguiente:

- Sus reflexiones sobre **el alcance didáctico de trabajar el dominio en un contexto dual no es analizado en detalle**.
- **Reconocen ventajas didácticas para el estudiante** en el estudio de este concepto.

[1]El otro profesor que mostró un conocimiento disciplinar económico profundo fue Pedro. En la primera sesión del seminario este profesor se mostró crítico, sugirió modificaciones significativas y habló de distintos conceptos económicos no tan básicos como: *elasticidad de la demanda* o *propensión marginal al ahorro*. Sin embargo, recordemos que este profesor no continuó participando por problemas personales.

- **El conocimiento que ellos manejan sobre el dominio económico les limita una discusión profunda sobre posibles ventajas y desventajas para el estudiante**.

CURR3 El desconocimiento de conceptos propios de la economía y su relación con determinados conceptos matemáticos incide en que la discusión se torne superficial. Aquí, **todos los participantes, salvo Pedro**[2], **entienden la derivada del *costo* como el *costo marginal*[3], cuando que lo relevante o significativo para el estudiante es profundizar en la idea de que el costo marginal evaluado en una cantidad q_0 es el costo de producir el artículo** $q_0 + 1$ y **estudiar**, además, **lo que ocurre alrededor de** q_o.

La conclusión anterior está en franca concordancia con lo sostenido por Rico (1998): "*El profesor de matemáticas necesita conocimientos sólidos sobre los fundamentos teóricos del currículo y sobre los principios para el diseño, desarrollo y evaluación de unidades didácticas de matemáticas.* ***Cuando los profesores no tienen una formación teórica adecuada ven limitadas sus funciones a las de meros ejecutores de un campo de decisiones cuya coherencia y lógica no dominan y no entienden*** (el resaltado es nuestro)". Ante tal situación, poco sentido tiene hablar del *currículo interdisciplinar* al que se refieren Hargreaves *et al*. (2001).

CURR4 Ahora bien, no sólo el conocimiento disciplinar es el único elemento a ser tomado en cuenta para el análisis crítico de materiales didácticos. El conocimiento sobre la enseñanza y todo lo que ello conlleva también resulta un elemento fundamental para estudiar y reflexionar sobre un material de esta naturaleza y su posible implementación. Es por ello que consideramos oportuno recordar algunas de las características de nuestra propuesta:

1. El material **está pensado para ser aplicado mediante la EBP** como estrategia de enseñanza.
2. **Se construye un concepto matemático a partir** de un problema que involucre **un concepto económico**.
3. Se estudia un concepto matemático en **un escenario dual** con el área económica.
4. Se propone **el estudio de las dos notaciones clásicas de la derivada** a fin de discernir cuál es más apropiada en el campo de la economía.
5. **Estudiar las restricciones que impone la economía** en el estudio de modelos matemático-económicos.

[2]Insistimos que sólo participó en la primera sesión.
[3]Lo mismo vale para las funciones de *Ingreso*, *Beneficio*, entre otras.

Ahora bien, pasamos a comentar aquellas que fueron detectadas por los profesores y las que obviaron, manteniéndose una clara coherencia con los resultados de los otros componentes del CDC. En este sentido, destacamos:

A **Kenya fue la única en reconocer la estructura metodológica del material**; los otros participantes ni siquiera se aproximaron a ésta en sus diversas reflexiones. Aunque debemos recordar que esta profesora tiene formación en el área de pedagogía.

B Respecto a la capacidad del profesor de matemáticas de modificar o reestructurar el material estudiado, **el aporte de los participantes fue escaso, limitándose a sugerir modificaciones de forma más no de fondo**.

- Kenya y Ramón sugieren un **cambio en la notación de la derivada** en uno de los problemas de la regla de la cadena, ellos recomiendan trabajar con la notación de Newton porque se le facilita más al estudiante.
- Ninguno advierte **lo importante que pueda resultar una notación u otra** para el estudio de problemas económicos.

C Respecto al **cambio de contexto** en alguno de los problemas como parte del contenido curricular, concluimos que:

- Todos recomiendan **descartar el problema del episodio EP1-1** o trabajarlo en el contexto económico.
- Ninguno sugiere o propone trabajar un concepto económico concreto, a excepción de Ramón como ya lo señalamos en **CURR1.1**.

D Un hecho que queremos resaltar y que ya mencionamos en **CURR2**, tiene que ver con el estudio del dominio económico de la función de *Costo* en el episodio **EP2-1**. Recordemos que el **dominio matemático** de esta función es todo el conjunto de los números reales, $\mathbb{R}$, pero el **dominio económico** es el conjunto $\{x \in \mathbb{N}_0 : \frac{x}{1000}\}$ con $\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, 3, ...\}$. Podemos observar que en el dominio económico influyen dos aspectos: (**i**) el hecho de que la menor cantidad de artículos que puede producir la empresa es cero artículos y, (**ii**) que la variable independiente, x, está expresada en unidades de mil.

- **Para ninguno de los participantes esto resultó significativo y la discusión sólo se quedó en la novedad del problema**, "*primera vez que veo un problema así*" fue la frase común al respecto, evidenciándose una falta de conocimiento en materia curricular.
- **El punto anterior**, además de guardar estrecha relación con lo señalado en **CURR2**, **también es coherente con lo expresado en ENS4.1** en materia de conocimiento sobre la enseñanza.

6.2.1.4. Respecto al conocimiento disciplinar

A continuación presentamos las conclusiones más relevantes en materia de **conocimiento disciplinar**; es claro que en un trabajo de esta naturaleza, el cual está enmarcado en la didáctica de las matemáticas, se tienen que presentar resultados y conclusiones inmersos en esta área. Sin embargo, el trabajo nos obliga a presentar unas conclusiones sobre el conocimiento disciplinar matemático-económico, puesto que ambas áreas fueron tratadas de forma simultánea o mejor dicho, como lo identificamos a lo largo del trabajo, de **forma dual**, lo que además representa una particularidad de este proyecto.

DIS1 A la hora de discutir el material durante el seminario y tomando en cuenta las opiniones de la entrevista final de cada uno de los participantes, pudimos observar que el conocimiento disciplinar económico que manejan estos profesores no es precisamente el conocimiento disciplinar que señalamos en nuestro marco teórico, como conocimiento ideal del profesor de matemáticas para cursos de economía; en este sentido, mostramos dos puntos relevantes:

- **Los conceptos económicos que nuestros profesores dominan son: <u>ingreso</u>, <u>costo</u> y <u>utilidad</u> o <u>beneficio</u>**; sólo Ramón **se desmarca de forma singular en situaciones puntuales como ya lo señaláramos en ENS4.1**.
- Por su parte, Elio **manifiesta abiertamente a lo largo del seminario su poco o nulo conocimiento en economía y además demanda la creación de espacios de formación en este ámbito**. Algo de esto ya lo señalamos en la conclusión **ENS4** y lo recordamos acá por la relación entre los conocimientos disciplinar y sobre la enseñanza. Ahora bien, ¿en qué influye ésto? **Un conocimiento disciplinar económico[4] amplio y profundo permite una enseñanza contextualizada de mayor alcance para los estudiantes**. Además, un limitado conocimiento disciplinar económico no permite la adquisición de ideas de varias disciplinas simultáneamente como lo señalan Lee & Bae (2008).

DIS2 Sobre el conocimiento disciplinar de los conceptos económicos reflejado en el ítem anterior, vale la pena recordar que en nuestro marco teórico (pág. 51) señalamos algunos de los conceptos económicos más importantes que **el profesor de matemáticas debe conocer y tener presente, además de la relación entre éstos y sus interpretaciones relacionadas con las matemáticas** como es el caso de:

1. **Beneficio** o **Utilidad** (medio, total y marginal),
2. **Coste** o **Costo** (medio, total y marginal),

[4]Entendiendo que no es el de un economista o profesional del área económica.

3. **Demanda** (elástica, inelástica, marginal),
4. **Impuestos** (directos, indirectos y marginal),
5. **Ingreso** (medio, total y marginal),
6. **Oferta** y **Oferta marginal**,
7. **Producción marginal**,
8. **Propensión marginal** al ahorro y al consumo,
9. **Equilibrio de mercado**,
10. **Superávit** del consumidor y del productor, entre otros.

Ahora bien, **la falta de conocimiento disciplinar en materia de economía de nuestros participantes no debe sorprendernos**, puesto que **los principales referentes o puntos de apoyo para sus clases son los programas oficiales y el libro de texto tradicional (ver ENS3 y ENS4), donde los primeros son elaborados a partir de los segundos (Doyle, 1992), pero estos últimos no tratan con amplitud los conceptos ya referenciados**. En este sentido, la limitación del profesor de matemáticas, en cuanto a materia económica se refiere, incide directamente en:

i Una enseñanza contextualizada de las matemáticas **poco provechosa**, donde **el principal perjudicado es el futuro profesional de la economía**.

ii **La EBP**, como estrategia metodológica de enseñanza, **no puede ser explotada en su totalidad**, restringiéndose la enseñanza de las matemáticas al esquema tradicional: *teoría+aplicaciones*.

iii Se puede entender como una **especie de obstáculo para el estudiante, de cara a materias avanzadas del área económica como <u>microeconomía</u>, <u>macroeconomía</u> o <u>econometría</u>**, donde el análisis matemático-económico juega un papel relevante.

DIS3 Respecto al dominio de una función hablamos en **ENS4.1**, **CURR2** y la parte **D** de **CURR4**; con esto queremos decir que poco podemos añadir en esta materia, aunque reconocemos el claro manejo de este concepto por parte de los participantes en el contexto matemático. Sin embargo, para los cinco profesores, el único dominio económico que ellos admiten es el conjunto $\mathbb{R}_0^+ = [0, +\infty)$, lo que indica un **conocimiento insuficiente de este concepto si queremos apostar por una enseñanza de las matemáticas más próxima a los requerimientos del estudiante** y más aún cuando el mismo Ramón **reconoce que en el curso de <u>microeconomía</u> se trabajan restricciones más específicas del domino de una función que la antes señalada**.

En este sentido, **se hace necesario que el profesor de matemáticas estudie y explore diversas restricciones del dominio en materia de economía**. En las **Figuras 6.1 y 6.2** se puede observar la relevancia, desde el punto de vista didáctico, que implica el estudio del dominio en un **contexto dual**.

DIS4 En los distintos episodios donde se discutió el tema de la interpretación de la derivada, la situación resulta aún más curiosa respecto a lo observado en el dominio de una función. Aunque, en general, los profesores tratan problemas de aplicaciones a la economía:

- Ramón **es el único que deja ver un conocimiento incipiente sobre este particular**.
- Pedro, quien a pesar de haber participado en la primera sesión del seminario únicamente, **dejó clara evidencia de su amplio conocimiento relacionado con la interpretación de la derivada en el área económica**, tal como lo señalamos en **CURR3**.
- Siendo aún más específico respecto al punto anterior, pudimos observar que al discutir problemas donde estudiamos la regla de la cadena, **el conocimiento que muestran sobre la interpretación de la derivada en escenarios económicos es débil**. Ya de esto hablamos en **I4.2**, donde señalamos que nuestro instrumento, concretamente en el episodio **EP3-3**, sirvió para explorar el CDC del profesor, **mostrando una clara falta de conocimiento de conceptos económicos y, por ende, de las interpretaciones de la derivada en relación con algunos de estos conceptos, elemento éste que va en detrimento del estudiante si se apuesta por una enseñanza contextualizada de las matemáticas**.

Entendemos que esta situación poco beneficia al estudiante, ya que no se profundiza en la interpretación de la derivada en aspectos concretos de la economía. En las **Figuras 6.1 y 6.2** también mostramos, mediante ejemplos básicos, **la importancia de profundizar en la interpretación de la derivada en economía**.

6.2.2. Conclusiones respecto a la EBP

Recordemos que cada vez que nos referimos a la enseñanza basada en problemas a lo largo de este trabajo fuimos enfáticos en el doble papel que jugó esta metodología de enseñanza; por una parte, estudiamos **el conocimiento del profesor de matemáticas respecto a la EBP** y, por otro lado, estudiamos **cuán efectiva es la EBP, vista como estrategia de recogida de datos**.

Aun cuando el segundo rol, antes mencionado, que jugó la EBP en nuestro proyecto está estrictamente relacionado con la metodología empleada en la recogida de datos, reservamos las conclusiones sobre este particular para esta parte de la memoria con el fin de concentrar los resultados de la EBP en un sólo grupo. Es así como destacamos lo valioso que resultó la EBP en sus dos facetas: primero, porque como estrategia de enseñanza que es, la misma forma parte

Enunciado de la tarea	Objeto matemático	Enfoque dual: matemático-económico	
		Matemático	**Económico**
E 2.1. Una fábrica de lápices, después de realizar un estudio exhaustivo, concluye que el costo por semana de producir *x* artículos (*x* en unidades de mil) de uno de sus productos principales, el lápiz mágico, viene dado por la función C(*x*) = 2000+0,15*x* *um* y el ingreso obtenido por la venta de *x* lápices viene dado por R(*x*) = 1,5*x* - 0,0001x^2 *um*. La fábrica en cuestión produce 2 millones de lápices mágicos semanales y se está estudiando la idea de incrementar la producción a 2.650.000.	Dominio de una función	1. Estudio de la función afín: C(*x*)=2.000+0,15*x* *um*. 2. Análisis del dominio de la función afín: C(*x*)=2.000+0,15*x* *um*. **Dom_C = R**. 3. Estudio de la función cuadrática: R(*x*)=1,5*x*-0,0001x^2 4. Análisis del dominio de la función cuadrática: R(*x*)=1,5*x*-0,0001x^2. **Dom_R = R.**	1. Relacionar el concepto económico del Costo de un producto con el concepto de Función de Costo: C(*x*)=2.000+0,15*x* *um*. 2. Relacionar el concepto económico del Ingreso de un producto con el concepto de Función de Ingreso: R(*x*)=1,5*x*-0,0001x^2 *um*. 3. Relacionar el concepto económico del Beneficio de un producto con el concepto de Función de Beneficio: U(*x*)=R(*x*)-C(*x*). 4. El estudio del concepto de Función de Producción. 5. La manipulación algebraica a escala de una variable económica (*x* artículos expresados en unidades de 1.000). 6. Análisis del *dominio de definición* de la función C(*x*). **Dom_C**={*x*€N_o : *x*/1.000, donde N_0={0,1,2,..}}. 7. Análisis del *dominio de definición* de la función R(*x*). **Dom_R**={*x*€N_o : *x*/1.000 ≤ 15.000, donde N_0={0,1,2,..}}. 8. Análisis del *dominio de definición* de la función U(*x*). **Dom_U**={*x*€N : 1.695≤ *x*/1.000 ≤ 15.000}.
E 2.2. Determine el beneficio promedio, $\overline{U}(x)$ *um*, por millares de lápices producidos. Calcule $\overline{U}(2.100)$ y dé una interpretación económica de este resultado. Además, si queremos calcular la tasa de cambio promedio del beneficio en un intervalo particular [x_1, x_2], este beneficio lo denotamos por $\overline{U}(x_1,x_2)$ y se define como $\overline{U}(x_1,x_2)=\frac{U(x_2)-U(x_1)}{x_2-x_1}$. Calcular la tasa de cambio del beneficio promedio en [1.900, 2.200].	Tasa media de variación y tasa promedio	1. Estudio de la tasa media de variación (pendiente de la recta secante) en un intervalo concreto.	1. Relacionar el concepto económico de tasa promedio del Beneficio con la tasa media de variación. $\overline{U}(x_1,x_2)=\frac{U(x_2)-U(x_1)}{x_2-x_1}$ en un intervalo concreto [x_1, x_2]. Es decir, la tasa de cambio promedio del beneficio de producir y vender entre 1.900.000 y 2.200.000 es 0,94 *um*. 2. Relacionar el concepto económico de Beneficio promedio con la tasa promedio. $\overline{U}(x)=\frac{U(x)}{x}$ en un intervalo concreto [0, *x*]. Es decir, el beneficio promedio que resulta de fabricar y vender 2.100.000 lápices es de 0,1876 *um*.
E 2.3. Cuál es el Costo Marginal de producir 2.100.000 unidades. ¿Qué interpretación económica le puedes dar a este resultado?	Tasa instantánea de variación (derivada en un punto) y función derivada	1. Estudio de la tasa instantánea de variación (pendiente de la recta tangente) en un punto del dominio. 2. La función derivada.	1. Relacionar el concepto económico de Costo Marginal con la función derivada de la Función de Costo C(*x*). 2. Interpretación económica de la función derivada Costo Marginal, es decir, lo que cuesta producir una unidad adicional al fabricante. En este caso, C'(*x*)=0,15, lo que significa que las mil unidades adicionales a las 2100000 le costarán al fabricante 0,15 *um* o 15 céntimos de *um*

Figura 6.1: Análisis didáctico 1

del CDC (conocimiento sobre la enseñanza); pero tal vez el mayor valor de la EBP dentro de esta investigación es que fue **la herramienta que nos permitió llegar de forma indirecta al profesor de matemáticas para estudiar su CDC**.

Enunciado de la tarea	Objeto matemático	Enfoque dual: matemático-económico	
		Matemático	**Económico**
E 3.1. Una empresa tiene la función de costo C(x)=25+2x- $\frac{1}{20}x^2$ (en cientos de miles de dólares), en donde x es el nivel de producción de la empresa y éste depende del tiempo t. Si el nivel de producción es de x=5 (millones de artículos por año) y está creciendo a una tasa de 0,7 millones de artículos por año, tomando en cuenta que la capacidad de producción de la empresa no puede superar los 15 millones de artículos por año. Determine el dominio de la función de costo C(x) en un contexto matemático general y en el económico en particular. ¿Qué diferencia observa entre uno y otro?	Dominio de una función	1. Estudio de la función cuadrática: C(x)=25+2x- $\frac{1}{20}x^2$ 2. Análisis del dominio de la función cuadrática: C(x)=25+2x- $\frac{1}{20}x^2$. **Dom$_R$ = R.**	1. Relacionar el concepto económico del Costo de un producto con el concepto de Función de Costo: C(x)=25+2x- $\frac{1}{20}x^2$ 2. Análisis del *dominio de definición* de la función C(x). **Dom$_C$**={x€N$_o$: x/100.000≤ 150, donde N$_0$={0,1,2,..}}.
E.3.2. Calcule la tasa para la cual los costos de producción se están elevando en la actualidad. **Observación**: Antes de dar respuesta a esta pregunta conviene introducir la regla de la cadena. Para una función y que depende de u y ésta a su vez es una función que depende de x, con y derivable en u y u derivable en x, se tiene que la derivada de y respecto a x $(\frac{dy}{dx})$, se define como $\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}$ Así, estudiar la razón de cambio de y respecto a x consiste en multiplicar la razón de cambio de y respecto a u por la razón de cambio de u respecto a x.	Función compuesta, función derivada y regla de la cadena	1. Análisis de la función compuesta: C(x)=25+2x- $\frac{1}{20}x^2$, en donde x es el nivel de producción de la empresa y ésta depende de t. Por tanto, C(x(t))=25+2x(t)- $\frac{1}{20}(x\,(t))^2$ 2. Estudio de la función derivada a partir de la regla de la cadena $\frac{dC}{dt}=\frac{dC}{dx}\cdot\frac{dx}{dt}$	1. Estudiar la función de Costo C(x), como una función que depende del nivel de producción x, y éste a su vez depende del tiempo t. 2. Relacionar el concepto económico de Costo Marginal con la función derivada de la Función de Costo C(x). Teniendo en cuenta que su derivada interna está dada en el enunciado del problema, es decir, crece a una tasa de 0,7 millones de artículos por año. 3. Interpretación económica de la función derivada Costo Marginal en un punto dado. Es decir, lo que cuesta producir una unidad adicional al fabricante sabiendo que el Costo depende del nivel de producción que es de x=5 millones de artículos por año y está creciendo a una tasa de 0,7 millones de artículos por año. Por tanto: $\frac{dC}{dt}=\frac{dC}{dx}\cdot\frac{dx}{dt}=(2-\frac{x}{10})\cdot\frac{dx}{dt}=(2-\frac{5}{10})\cdot(0,7)$ =1,05. La interpretación económica de $\frac{dC}{dt}=1{,}05$ es que el Costo de producción se está incrementando a una tasa de 1,05 cientos de miles de dólares por año.

Figura 6.2: Análisis didáctico 2

6.2.2.1. Como estrategia de recogida de datos

En esta subsección mostramos aquellos resultados más significativos en materia de recolección de datos y donde la EBP jugó un papel relevante.

EBP-Met1 **La EBP resultó un elemento metodológico novedoso y**, al mismo tiempo, **una herramienta poderosa para aproximarnos de manera indirecta al profesor de matemáticas de universidad**, a fin de generar un espacio de discusión en el cual los profesores, aún cuando el moderador del seminario establecía un orden en las participaciones, los aportes y las opiniones de éstos se pueden entender como simultáneas. Tal situación obedeció a la estructura planteada en cada uno de los problemas. **Este escenario permitió que el profesor no se sintiera en ningún momento cuestionado o examinado**.

EBP-Met2 El uso de la EBP **impulsó a los profesores a debatir sobre aspectos específicos de cada problema y sobre la estrategia en sí**, propiciando entre ellos discusiones sobre el contenido disciplinar y metodológico de enseñanza.

EBP-Met3 **La aplicación del instrumento se hace tediosa y no queda garantizado el volumen de datos recogidos** porque:

- **Si hay implicación** del profesorado participante **los datos pueden ser excesivos e inmanejables**.
- **Si el profesorado no se implica y se cansan**, responden con meras afirmaciones o asumiendo las respuestas del resto, lo que **proporciona información pobre y escasa**.

6.2.2.2. Como estrategia alternativa de enseñanza

Antes de enunciar las conclusiones debemos acotar lo siguiente: en ningún momento se realizó alguna pregunta directa a los profesores donde se mencionara de forma explícita la EBP como estrategia metodológica de enseñanza, evitando incomodar a los participantes, puesto que ya era de nuestro conocimiento que ninguno de ellos aplica esta metodología de enseñanza en sus clases. En la **Figura 6.3** presentamos uno de los problemas discutidos en el seminario y se incluyen las características de la EBP que tiene el mismo.

EBP-Did1 **La EBP resultó una estrategia de enseñanza nueva para todos salvo para Kenya** (ya reflejado en **A** de **CURR4**), quien la identifica desde un primer momento como una estrategia "*constructivista*", pero en ningún momento se refiere de manera explícita como EBP; aun así, **reconoce que no emplea tal metodología en sus clases**.

EBP-Did2 Aunque todos valoran como significativa la estrategia discutida para el proceso de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas, **las opiniones están divididas de cara a su implementación en el aula de clases**:

- Alexis, Elio y Kenya (grupo B) consideran que **sus estudiantes no están preparados para una enseñanza de esta naturaleza, aunque Kenya apuesta por un ensayo**. Más aún, Elio y Alexis dejan ver a lo largo de la investigación que **sus estudiantes son pasivos y poco ganados a la tarea de fortalecer su propio conocimiento**, coincidiendo con lo expresado por Angeli (2002).

Enunciado de la tarea	Objeto matemático	Características EBP (según Sección 2.4.1)
E 3.1. Una empresa tiene la función de costo $C(x)=25+2x-\frac{1}{20}x^2$ (en cientos de miles de dólares), en donde x es el nivel de producción de la empresa y éste depende del tiempo t. Si el nivel de producción es de x=5 (millones de artículos por año) y está creciendo a una <u>tasa de 0,7</u> millones de artículos por año, tomando en cuenta que la capacidad de producción de la empresa no puede superar los 15 millones de artículos por año. **Determine el dominio de la función de costo C(x) en un contexto matemático general y en el económico en particular. ¿Qué diferencia observa entre uno y otro?** **E.3.2. Calcule la tasa para la cual los costos de producción se están elevando en la actualidad.** **Observación**: Antes de dar respuesta a esta pregunta conviene introducir la regla de la cadena. Para una función y que depende de u y ésta a su vez es una función que depende de x, con y derivable en u y u derivable en x, se tiene que la derivada de y respecto a x ($\frac{dy}{dx}$), se define como $\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}$ Así, estudiar la razón de cambio de y respecto a x consiste en multiplicar la razón de cambio de y respecto a u por la razón de cambio de u respecto a x.	Dominio de una función Función compuesta, función derivada y regla de la cadena	1. *El proceso de enseñanza-aprendizaje está basado en la formulación de un problema*. En este caso el problema contempla el estudio del **dominio de una función** y la introducción a la **regla de la cadena**. 2. *Los procesos de aprendizaje tienen que ser dirigidos por los participantes*. Se espera que los estudiantes sientan la necesidad de **discutir entre ellos** y abordar al profesor sobre **aspectos concretos del problema**. 3. *El proceso de enseñanza-aprendizaje se fundamenta en una actividad*. Aquí la actividad es el problema en sí mismo, con el cual **se procura inducir al estudiante hacia el estudio del dominio y de la regla de la cadena**. 4. *La interdisciplinariedad juega un papel fundamental*. Si prestamos atención, esta situación problemática **no sólo conecta las matemáticas y la economía**, sino también **conecta las matemáticas entre sí**, ya que un mismo problema aborda el estudio de **dos objetos matemáticos**. Por otra parte, **la naturaleza del objeto que se produce también es clave en este estudio, así como la cantidad tope de producción**. Más aún, aquí **se le plantea un dilema al estudiante desde la economía y desde las matemáticas**, donde **se conecta el dominio y la derivabilidad**; en tal sentido, **se promueve la toma de decisiones**. 5. *La ejemplaridad también juega un rol determinante dentro del contexto*. Aquí, **el estudio del dominio en dos contextos permite profundizar sobre el concepto en sí mismo**. Realmente, **qué significa el dominio de una función y cuál es su importancia en el contexto dual**. Mediante el ejemplo se ilustra que **una función no siempre se puede derivar con las reglas básicas**, por tanto **se induce al estudio de la regla de la cadena como alternativa**. 6. *Hay que tomar en cuenta la relación entre la teoría y la práctica*. Tal vez **el punto más significativo en este problema** es el estudio del **dominio dual** y su relación con la **derivabilidad de la función**, ya que si nos quedamos con el dominio económico, la función de costo C(x) no sería continua y en consecuencia no sería derivable. 7. *Se considera la opción del trabajo en grupo o equipo*. Sería **poco provechoso** que tal situación **no se plateara en un escenario colectivo**, en el que pequeños grupos de estudiantes, orientados por el docente, **se sentaran a discutir sobre toda la estructura del problema**.

Figura 6.3: Análisis didáctico 3

- Manuel y Ramón (grupo A) **sí ven a sus estudiantes con la formación suficiente para abordar la EBP en clases**. Desde nuestro punto de vista, esta posición tiene que ver con el actual trabajo desarrollado en el aula de clases por cada uno de ellos, recordemos que estos últimos trabajan más problemas de aplicaciones que los primeros y el conocimiento disciplinar no es tan pobre como los del grupo B.

EBP-Did3 Tendencia a considerar la EBP exclusivamente como elemento motivador, dejando de lado la vertiente metodológica generadora de conocimiento.

Valoración negativa de una cualidad, inicialmente positiva desde una perspectiva constructivista del aprendizaje, como es la de ser generadora de conflicto cognitivo (Morales y Landa, 2004). Así se valora la ansiedad, desconcierto, inseguridad y desmotivación del estudiante como pasos hacia atrás en el proceso de aprendizaje, frente a una enseñanza más clásica de procedimiento y de ejercicios.

EBP-Did4 **Todos reconocen en la EBP**, aunque con sus reservas, **una estrategia novedosa para el estudio de conceptos matemáticos como: la introducción de la derivada, el dominio de una función, la regla de la cadena y la monotonía**, entre otros.

Durante toda la discusión **quedó reflejada la incidencia de esta metodología en la futura labor docente de cada uno de los participantes**, en particular, en lo que se refiere al contenido matemático.

EBP-Did5 De lo anterior se desprende **la necesidad de un espacio de formación referente a la EBP como estrategia alternativa de enseñanza de las matemáticas**, ya que los participantes en mayor o menor medida se muestran afectos con esta metodología, pero como ya lo manifestáramos, **se observa en los profesores un claro desconocimiento de esta metodología de enseñanza**.

6.3. Del presente al futuro

Llegando a este punto de la memoria no queremos cerrar este trabajo obviando algunos aspectos o elementos que sirvan para futuros proyectos enmarcados en esta misma línea de investigación o en áreas afines. Aunque en el **Capítulo 1** señalamos algunos de los trabajos que son la base de esta investigación, en el desarrollo de la misma ésta fue cobrando vida propia; es por ello que no podemos considerarla como la continuación exacta de ninguna de estas investigaciones, pero sí entendemos este trabajo como un aporte a la investigación en didáctica de las matemáticas a nivel universitario y, en concreto, al estudio del CDC del profesor de matemáticas de universidad. De igual manera, conviene hacer una reflexión sobre algunas restricciones propias del proyecto y que, posiblemente, hubiesen contribuido a enriquecer la investigación. Es por ello que dividimos en dos grandes bloques este último apartado.

6.3.1. Limitaciones de la investigación

Conscientes de las limitaciones internas y externas que supone este tipo de investigación y considerando además que no hemos querido tomar en cuenta algunos aspectos del CDC que, quizás, la hubieran mejorado, decidimos limitar internamente este trabajo, con el fin de profundizar en aquellos temas de nuestro interés. El objetivo específico de traer a colación estas cuestiones radica en lo siguiente: (**a**) sugerimos que estos elementos deben ser tomados en cuenta para futuros trabajos y; por otro lado, (**b**) mostrar algunas de las limitaciones que suponen este tipo de investigación.

A) Como una limitación externa, destacamos la dificultad de encontrar profesores y la disponibilidad de éstos para destinar horas de su trabajo a una investigación como ésta que suponía mucho trabajo en formato seminario de reflexión.

B) En el marco teórico quedó reflejado que no abordaríamos algunos aspectos del CDC, entre los que destacamos: el *conocimiento curricular en extenso*, el *conocimiento sobre la evaluación*, el *conocimiento sobre errores* de los estudiantes o las *nuevas tecnologías*, entre otros. En su momento justificamos la razón por la cual descartamos las dos primeras componentes del CDC señaladas antes, aunque reconocemos que de haberlos estudiado a fondo nos hubiese permitido llegar a algunos resultados interesantes respecto al CDC del profesor de universidad. Sin embargo, de esta limitación extraemos algo positivo:

B.1) Aunque se pudiera pensar que un estudio más extenso del currículo mejoraría la caracterización del profesor, nuestra intención era profundizar en aspectos muy concretos de un tema específico, para, entre otras cosas, probar un instrumento de recogida y análisis de información y ser capaz de usar tales instrumentos para estudiar cualesquiera otros aspectos curriculares.

B.2) De igual manera, un estudio en profundidad de la evaluación podría haber sido objeto de otra investigación. Más aún si entendemos ésta como el elemento clave del diseño del proceso de enseñanza-aprendizaje.

C) Otra limitación en el diseño del instrumento de esta investigación es que no se contemplaba la observación de las clases. Sin embargo, la posibilidad de observar a cada uno de los profesores participantes, puede suponer una debilidad en la investigación. Aquí nos encontramos con dos problemas:

- Impedimento de grabar clases en el nivel universitario, lo que podría haber reducido aún más la muestra de profesores.
- Salvo que los propios profesores reconozcan una metodología muy diferente a la lección magistral y resolución de problemas en la pizarra, no creemos que pudiera aportar nada a nuestra investigación.

En cualquier caso, entendemos que se trataría de otro tipo de trabajo, también muy interesante pero que en nuestro caso no era el que pretendíamos. Recordemos que nuestro objetivo estaba muy orientado al trabajo de profesores en un contexto de seminario y pensando en la formación del profesor usando contextos similares al de la investigación.

D) Otro factor que no tomamos en cuenta y que pudo aportar elementos novedosos a este proyecto es el hecho de no haber triangulado la información del profesor con las notas de clase y material usado para la materia, ésto no nos ha permitido valorar la coherencia de las afirmaciones del profesor sobre lo que dice que hace en sus clases y lo que las notas de clase podrían mostrar.

E) La utilización del EBP como metodología de investigación la valoramos muy positivamente, sin embargo, no podemos dejar de lado, que tal metodología tiende a hacer sentir al profesor "evaluado" sobre su propio quehacer, lo que la hace depender mucho del papel que asuma el investigador y cómo logre finalmente conducir las sesiones de trabajo.

F) En el mismo orden de ideas que el punto anterior, el seminario lo entendemos como una excelente herramienta para aplicar un instrumento como el trabajado en esta investigación, aunque el papel del moderador es clave y se debe tener presente la constante toma de decisiones por parte de éste para llevar el control durante la actividad, de manera que la información que surja sea realmente valiosa y aprovechable al máximo.

6.3.2. Líneas abiertas

Desde nuestro punto de vista, algunos aspectos que quedan abiertos y son susceptibles de futuras investigaciones son:

1) Diseño de un instrumento que favorezca **la reflexión del profesor de matemáticas sobre su práctica docente**, que sea sencillo de utilización y pueda aplicarse a diferentes contenidos matemáticos. Tomando en cuenta que la reflexión del profesor incide en su desarrollo profesional (Marín, 2004; Climent, 2002).

2) **Profundizar en aspectos del conocimiento del profesor de matemáticas de universidad que sean más específicos de estudios que usan las matemáticas como herramienta (ciencias económicas, ingeniería, ciencias, etc.)**, aspectos tales como: enseñanza, aprendizaje, currículo y contenido y la relación de éstos entre sí. Entendemos que esto podría fortalecer esta línea de investigación en didáctica de las matemáticas. Entre los aspectos del CDC a destacar, señalamos:

   2.a) El conocimiento curricular del profesor como eje central del CDC y, a partir de éste, profundizar en las otras componentes del CDC como: el conocimiento disciplinar, conocimiento de las nuevas tecnologías en el proceso de enseñanza-aprendiza, entre otros. En otras palabras, **estudiar cómo influye el conocimiento curricular del profesor en los otros elementos que conforman el CDC**.

   2.b) De igual manera, **proponemos un estudio sobre el CDC y el papel de las competencias en el diseño de los planes de estudio de carreras como las de ciencias económicas, así como su influencia en el proceso de enseñanza y aprendizaje**.

3) El diseño de un instrumento que permita indagar en el conocimiento matemático necesario para apostar por una enseñanza contextualizada de las matemáticas y, así, fortalecer la investigación sobre las didácticas específicas. Por ejemplo:

   3.a) **El diseño de un instrumento dirigido a profesores de matemáticas y de economía por igual**, **donde se estudie cuán importante es para el profesor de matemáticas conocer y manejar conceptos económicos como**: *beneficio* o *utilidad*, bienes, capital, *costo*, *crecimiento económico*, *déficit* y *superávit del consumidor* y *del productor*, *demanda*, *economía*, *impuesto*, *ingreso*, *oferta*, *demanda elástica* e *inelástica*, entre otros. Para tal fin, **sugerimos seleccionar un conjunto de problemas que contengan los conceptos resaltados y reflexionar sobre los mismos en el marco de un seminario**.

   3.b) Dado que el álgebra lineal y, más específicamente, **el álgebra matricial también tiene una fuerte presencia en el campo de la economía**, **proponemos un estudio similar al sugerido en el punto anterior**. En este caso, los conceptos económicos que proponemos estudiar son: *incremento porcentual*, *modelo insumo-producto*, *equilibrio de mercado*, *análisis de costos* y *contabilidad de costos*, por citar algunos.

4) **La preparación de materiales de trabajo para la enseñanza del cálculo diferencial en el que se implemente la EBP como estrategia de enseñanza, con el propósito de motivar y generar conocimiento en el estudiante, promoviendo la discusión y la investigación en áreas afines a la economía**, es una actividad que proponemos como necesaria y casi obligatoria por dos razones:

i) Debido a **las exigencias que demanda el nuevo profesional de las ciencias económicas**, y

ii) Dado que actualmente **es un área totalmente novedosa pero que está cobrando interés por sus implicaciones en los nuevos programas de estudio en europa y otros países**, donde Venezuela no es la excepción.

5) De lo anterior se sigue que **se hace necesaria una revisión permanente de estos materiales de trabajo, de modo que siempre tengan vigencia y se adecúen al perfil profesional que demanda la sociedad**. Para ello hay que profundizar en el papel de los seminarios de investigación en su vertiente formativa, potenciando el trabajo de grupos interdisciplinares.

Bibliografía

[1] Albanese, M. y Mitchell, S. (1993). Problem-based learning: A review of the literature on its outcomes and implementation issues. *Academic Medicine*. 68(1). pp. 52-81.

[2] Almeida, M. (2002). *Desarrollo profesional docente en geometría: análisis de un proceso de formación a distancia*. Tesis Doctoral. Barcelona: Universidad de Barcelona.

[3] Alonso, J. (2001). Motivación y estrategias de aprendizaje. Principios para su mejora en alumnos universitarios. En García-Valcárcel (Coord.) *Didáctica universitaria*. Madrid: La Muralla, S. A. pp. 79-112.

[4] An, S.; Kulm, G. y Wu, Z. (2004). The pedagogical content knowledge of middle school, mathematics teachers in China and the U.S. *Journal of Mathematics Teacher Education*. 7. pp. 145-172.

[5] Angeli, C. (2002). Teachers' practical theories for the design and implementation of problem-based learning. *Science Education International*. 13(3). pp. 9-15.

[6] Archibald, G. y Lipsey, R. (1967). *An introduction to a mathematical treatment of economics*. London: Weidenfeld y Nicolson.

[7] Arnal, J.; Del Rincón, D. y Latorre, A. (1994). *Investigación educativa. Fundamentos y metodología*. 1^a reimpresión. Barcelona: Editorial Labor, S. A.

[8] Arrow, K. y Intriligator, M. (1981). Historical introduction. En Arrow, K. y Intriligator, M. (Eds.) *Handbook of mathematical economics*. Netherlands: Elsevier Science Publishers B. V. Vol 1. pp. 1-14.

[9] Artigue, M. (1991). Analysis. En Tall, D. (Ed.), *Advanced mathematical thinking*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers. pp. 167-198.

[10] Arya, J. y Lardner, R. (1987). *Matemáticas aplicadas a la administración y la economía*. 2^a ed. México: Prentice Hall.

[11] Aspy, D.; Aspy, C. y Quimby, P. (1993). What doctors can teach teachers about problem-based learning. *Educational Leadership*. 50(7). pp. 22-24.

[12] Azcárate, C. (1990). *La velocidad: introducción al concepto de derivada*. Tesis Doctoral. Barcelona: Universidad Autónoma de Barcelona.

[13] Bagni, G. (2004). Una experiencia didáctica sobre funciones, en la escuela secundaria. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa* (RELIME). 7(1). pp. 5-23.

[14] Badillo, E. (2003). *La derivada como objeto matemático y como objeto de enseñanza y aprendizaje en profesores de matemática de Colombia*. Tesis Doctoral. Barcelona: Universidad Autónoma de Barcelona.

[15] Balbás, A.; Gil, J. y Gutiérrez, S. (1989). *Análisis matemático para la Economía I. Cálculo diferencial*. Madrid: Editorial AC.

[16] Ballester, Ll. (2001). *Bases metodológicas de la investigación educativa*. Palma: Universidad de Las Islas Baleares.

[17] Bardin, L. (1986). *El análisis de contenido*. Madrid: Ediciones Akal.

[18] Barrows, H. (1985). *How to design a problem based curriculum for the preclinical years*. New York: Springer Publishing Co.

[19] Barrows, H. (1986). A taxonomy of problem based learnig methods. *Medical Education*. 20. pp. 481-486.

[20] Barrows, H. (1996). Problem-Based learning in medicine and beyond: A brief overview. En Wilkerson, L. y Gijselaers, W. (Eds.) *Bringing problem-based learning to higher education: theory and practice*. San Francisco: Jossey-Bass Publishers. pp. 3-12.

[21] Benito, A.; Bonson, M. e Icarán, E. (2005). Metodologías activas. En Benito, A. y Cruz, A. (Coords.) *Nuevas claves para la docencia universitaria en el espacio europeo de educación superior*. Madrid: Narcea. pp. 21-64.

[22] Biggs, J. (2005). *Calidad del aprendizaje universitario*. Madrid: Narcea.

[23] Blanco, L. J.; Mellado, V. y Ruiz, C. (1995). Conocimiento didáctico del contenido de ciencias y matemáticas y formación de profesores. *Revista de Educación* 307. pp. 427-449.

[24] Bodur, Y. (2003). *Preservice teachers' learning of multiculturalism in a teacher education program*. PhD Thesis. Florida: Florida State University.

[25] Bolívar, A. (2005). Conocimiento didáctico del contenido y didácticas específicas. *Revista de currículum y formación del profesorado*. 9(2). pp. 1-39. Recuperado el 02 de mayo de 2007 de `http://www.ugr.es/~recfpro/Rev92ART6.pdf`

[26] Boud, D. y Feletti, G. (Eds.) (1991). *The challenge of problem based learning*. New York: St. Martin Press.

[27] Bransford, J.; Brown, A. y Cocking, R. (2000). How people learn. Expanded Edition. National Research Council. En Kahan, J.; Cooper, D. y Bethea, K. (2003). *The role of mathematics teachers' content knowledge in their teaching: a framework for research applied to study of student teachers*. *Journal of Mathematics Teacher Education*. 6. pp. 223-252.

[28] Bridges, E. y Hallinger, P. (1992). *Problem based learning for administrator*. Oregon: ERIC Clearinghouse on Educational Management. University of Oregon.

[29] Bromme, R. (1988). Conocimiento profesional de los profesores. *Enseñanza de las Ciencias*. 6(1). pp. 19-29.

[30] Cámara, A. (2000). Aportaciones de la matemática a la metodología económica. *Psicothema*. 12(2). pp. 103-107. Recuperado el 02 de febrero de 2007 de `http://www.psicothema.com/pdf/526.pdf`

[31] Carrascosa, J. (2005). El problema de las concepciones alternativas en la actualidad (parte I). Análisis sobre las causas que la originan y/o mantienen. *Revista Eureka sobre Enseñanza y Divulgación de las Ciencias*. 2(2). pp. 183-208. Recuperado el 02 de agosto de 2007 de `http://www.apac-eureka.org/revista/Volumen2/Numero\_2\_2/\\Carrascosa\_2005A.pdf`

[32] Carrillo, J. (1996). *Modos de resolver problemas y concepciones sobre la matemática y su enseñanza de profesores de matemáticas de alumnos de más de 14 años. Aportaciones a la metodología de la investigación y estudio de posibles relaciones*. Tesis Doctoral. Huelva: Universidad de Huelva. Versión electrónica. Recuperado el 10 de junio de 2006 de `http://www.uhu.es/luis.contreras/tesis2/CAPS/CAP3.HTM`

[33] Carrillo, J.; Climent, N.; Contreras, L. y Múñoz-Catalán, M. (2007). Un modelo cognitivo para interpretar el desarrollo profesional de los profesores de matemáticas. Ejemplificación en un entorno colaborativo. *Enseñanza de las Ciencias*. 25(1). pp. 33-44.

[34] Chiang, A. y Wainwright, K. (2006). *Métodos fundamentales de economía matemática*. 4^a ed. México: McGraw Hill.

[35] Clark, J., Cordero, F. Cottrill, J., Czarnocha, B., DeVries, D., St. John, D., Tolias, G. y Vidakovié, D. (1997). Constructing a schema: The case of the chain rule? *Journal of Mathematical Behavior*. 16, pp. 345-364.

[36] Climent, N. (2002). *El desarrollo profesional del maestro de Primaria respecto de la enseñanza de la matemática. Un estudio de caso*. Tesis Doctoral. Huelva: Universidad de Huelva.

[37] Codina, A. y Riviera, A. (2001). Hacia una instrucción basada en la resolución de problemas: los términos problema, solución y resolución. En Gómez, P. y Rico, L. (Eds.). *Iniciación a la investigación en didáctica de la matemática. Homenaje al profesor Mauricio Castro*. Granada: Editorial Universidad de Granada. pp. 125-136.

[38] Cohen, L.; Manion, L. y Morrison, K. (2000). *Research methods in education*. 5^{th} ed. New York: Routledge Falmer.

[39] Colás, M. y Buendía, L. (1998). *Investigación educativa*. 3^{a} ed. Sevilla: Alfar.

[40] Contreras, L. (1998). *Resolución de problemas. Un análisis exploratorio de las concepciones de los profesores a cerca de su papel en el aula*. Tesis Doctoral. Huelva: Universidad de Huelva.

[41] Contreras, L. (1999). *Concepciones de los profesores sobre la resolución de problemas*. Huelva: Universidad de Huelva Publicaciones.

[42] Cooney, T. (1985). A beginning teacher's view of problem solving. *Journal for Research in Mathematics Education*. 16. pp. 324-336.

[43] Cottrill, J. (1999). *Students' understanding of the concept of chain rule in first year calculus and the relation to their understanding of composition of functions*. Doctoral Thesis. Purdue: Purdue University.

[44] De La Orden, . (1997). Formación, selección y evaluación del profesorado universitario. *Bordón*. 266. pp. 5-30.

[45] DeLoach, I. (2001). Using problem-based learning (pbl) to address the needs of teaching and learning mathematics for students in the non-dominant cultures of our society. En Rogerson, A. (Ed.) *The mathematics education into the 21^{st} century project. Proceedings of the international conference. New ideas in mathematics education*. Australia. pp. 103-108.

[46] Del Rincón, D.; Arnal, J.; Latorre, A. y Sans, A. (1995). *Técnicas de investigación en ciencias sociales*. Madrid: Dykinson. pp. 207-217.

[47] Deulofeu, J. (2002). Resolución de problemas. En Azcárate, C. y Deulofeu, J. (Eds.). *Guías Praxis para el profesorado de ESO. Matemáticas*. Barcelona: SIS Praxis. pp. 481-645.

[48] Díaz, D. (1999). La didáctica universitaria: Referencia imprescindible para una enseñanza de calidad. *Revista Electrónica Interuniversitaria de Formación del Profesorado*. 2(1). pp. 107-116.

[49] Doyle, W. (1992). Curriculum and pedagogy. En *Handbook of Research on Curriculum*. Philip W., Jackson (Ed.). New York: Macmillan. pp. 486-516.

[50] D.S.F. (1965). *Diccionario Soviético de Filosofía*. Montevideo: Ediciones Pueblos Unidos.

[51] Escobar, D. (2005). *Economía matemática*. 2^a ed. Bogotá: Alfaomega.

[52] Ferreres, V.; Gairín, J., Jiménez, B.; Martín, E.; Barrios, Ch.; Vives, M. y Benedito, V. (1997). *El desarrollo profesional del docente: Evaluación de los planes provinciales de formación*. Barcelona: Oikos-Tau, S. L.

[53] Finucane, P.; Johnson, S. y Prideaux, D. (1998). Problem based learning: Its rationale and efficacy. *Medical Journal of Australia*. 168. pp. 445-448.

[54] Flick, U. (2004). *Introducción a la investigación cualitativa*. Madrid: Morata.

[55] Flores, P. (1996). Creencias y concepciones de los futuros profesores sobre las matemáticas, su enseñanza y aprendizaje. Evolución durante las prácticas de enseñanza. *UNO*. pp. 103-111.

[56] Flores, P. (1998). *Concepciones y creencias de los futuros profesores sobre las matemáticas, su enseñanza y aprendizaje. 'Investigación durante las prácticas de enseñanza'*. Granada: Editorial Comares.

[57] Font, V. (2000). *Procediments per obtenir expressions simbòliques a partir de gràfiques. Aplicacions a les derivades*. Tesis Doctoral. Barcelona: Universidad de Barcelona.

[58] Forsythe, F. (2002). Problem based-learning. En Davies, P. (Ed.) *The Handbook of Economics Lecturers*. Recuperado el 22 de julio de 2006 de `http://www.economicsnetwork.ac.uk/handbook/pbl/`

[59] García, L. (2004). *Un estudio sobre profesores que enseñan cálculo diferencial a estudiantes de ciencias económicas. Creencias, concepciones y conocimiento profesional*. Tesis de Maestría. Barcelona: Universidad Autónoma de Barcelona.

[60] García, L.; Azcárate, C. y Moreno, M. (2006a). Creencias, concepciones y conocimiento profesional de profesores que enseñan cálculo diferencial a estudiantes de ciencias económicas. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa* (RELIME). 9(1). pp. 85-116.

[61] García, L.; Moreno, M. y Azcárate, C. (2006b). *Reflexiones sobre una propuesta didáctica para la enseñanza del cálculo en carreras de ciencias económicas y empresariales*. Memorias del 4° Congrés Internacional de Docència Universitària i Innovació (IV CIDUI). Barcelona: Universitat Politècnica de Catalunya.

[62] García, L.; Moreno, M. y Azcárate, C. (2006c). EBP como metodología activa para la enseñanza del cálculo diferencial. Discusión y reflexión sobre algunos problemas de cálculo en las ciencias económicas. *Revista RECTA*. Actas 14(1). Recuperado el 10 de noviembre de 2006 de `http://www.uv.es/asepuma/XIV/comunica/19NUEVO.pdf`

[63] García Fernández, M. (2006). Modelos de formación y perfil del profesorado universitario: Competencias y diferentes estilos (I). *Revista de educaçao do Instituto Superior de Ciências educativas*. 2(2). pp. 155-182.

[64] García-Valcárcel, A. (Coord.) (2001a) *Didáctica universitaria*. Madrid: La Muralla, S. A.

[65] García-Valcárcel, A. (2001b). La función docente del profesor universitario, su formación y desarrollo profesional. En García-Valcárcel, A. (Coord.) *Didáctica universitaria*. Madrid: La Muralla, S. A. pp. 9-44.

[66] Gijselaers, W. (1995). Perspectives on problem-based learning. En Gijselaers, W.; Tempelaar, D.; Keizer, P.; Blommaert, J.; Bernard, E. y Kasper, E. (Eds.) *Educational innovation in economics and business administration: the case of problem-based learning*. Netherlands: Kluwer Academic Publishers. pp. 39-52.

[67] Gijselaers, W.; Tempelaar, D.; Keizer, P.; Blommaert, J.; Bernard, E. y Kasper, E. (Eds.) (1995). *Educational innovation in economics and business administration : the case of problem-based learning*. Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

[68] Godino, J. (2003). Hacia una teoría de la instrucción matemática significativa. Recuperado el 10 de enero de 2007 de `http://www.ugr.es/$\sim$jgodino/funciones-semioticas/05\_InstruccionMS.pdf`

[69] Goetz, J. y LeCompte, M. (1988). *Etnografía y diseño cualitativo en investigación educativa*. Madrid: Ediciones Morata, S. A.

[70] González, C. y Gil, M. (2000). *El lenguaje de la ciencia económica*. *¿Por qué la economía no prescinde de las matemáticas*? Madrid: Ra-Ma Editorial.

[71] Haeussler, E. y Paul, R. (1997). *Matemáticas para administración, economía, ciencias sociales y de la vida*. 8^a ed. México: Prentice Hall Hispanoamericana, S. A.

[72] Hargreaves, A.; Earl, L.; Moore, S. y Manning, S. (2001). *Aprender a cambiar. La enseñanza más allá de las materias y los niveles*. Barcelona: Octaedro, S.L.

[73] Hatfield, L. (1978). Heuristical emphases in the instruction of mathematical problem solving: Rationales research. En Hatfield, L. y Bradbard, D. (Eds.) *Mathematical problem solving: Papers from research workshop*. Ohio: ERIC-SMEAC.

[74] Hernández, P. (1989). *Diseñar y enseñar. Teoría y técnicas de la programación y del proyecto docente*. Madrid: Narcea-ICE de la Universidad de la Laguna.

[75] Hoffmann, L. y Bradley, G. (2001). *Cálculo para administración, economía y ciencias sociales*. 7^a ed. Bogotá: McGraw Hill.

[76] Humphrey, J.; Coté, G.; Walton, J.; Meininger, G. y Laine, G. (2005). A new paradigm for graduate research and training in the biomedical sciences and engineering. *Advances in Physiology Education* 29. pp. 98-102. Recuperado el 02 de febrero de 2007 de `http://advan.physiology.org/cgi/reprint/29/2/98.pdf?ck=nck`

[77] Jiménez, R. y Wamba, A. (2004). ¿Podemos construir un modelo de profesor que sirva de referencia para la formación de profesores en didáctica de las ciencias experimentales? *Profesorado, revista de currículum y formación del profesorado*. 8(1). pp. 1-16.

[78] Kahan, J.; Cooper, D. y Bethea, K. (2003). The role of mathematics teachers' content knowledge in their teaching: a framework for research applied to study of student teachers. *Journal of Mathematics Teacher Education*. 6. pp. 223-252.

[79] Kilpatrick, J. (1985). A retrospective account of the past twenty-five years of research on teaching mathematical problem solving. En Silver, E. (Ed.) *Teaching and learning mathematical problem solving: Multiple research perspectives*. New Jersey: LEA Inc. pp. 1-16.

[80] Knight, P. (2006). *El profesorado de educación superior. Formación para la excelencia*. 2^a ed. Madrid: Narcea.

[81] Kolmos, A. (2004). Estrategias para desarrollar currículos basados en la formulación de problemas y organizados en base a proyectos. *Revista Educar*. 33. pp. 77-96.

[82] Krulik, S. y Rudnick, J. (1989). *Problem solving. A handbook for teachers*. 2^a ed. Boston: Ally y Bacon.

[83] Lange, J. de (1996). Using and Applying Mathematics in Education. In: Bishop, A.J., Clements, K., Keitel, C., Kilpatrick, J., y Laborde, C. (Eds.) *International Handbook of Mathematics Education*. pp. 49-98. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers

[84] Latorre, A.; Del Rincón, D. y Arnal, J. (1996). *Bases metodológicas de la investigación educativa*. Barcelona: Editorial GR92.

[85] Lee, H. y Bae, S. (2008). Issues in implementing a structured problem-based learning strategy in a volcano unit: a case study. *International Journal of Science and Mathematics Education*. 6(4). pp. 655-676.

[86] Lewis, S. (2003). *La enseñanza basada en tópicos o problemas en la educación en ciencias*. Versión HTML. Recuperado el 10 de abril de 2005 de `http://www.actionbioscience.org/esp/education/lewis.html\#Primer`

[87] Llinares, S. (1992). Aprender a enseñar matemáticas. Conocimiento de Contenido Pedagógico y entornos de aprendizaje. En Actas del Congreso: *Las didácticas específicas en la formación del profesorado*. Vol. I. Santiago de Compostela: Tórculo. pp. 377-407.

[88] Llinares, S. (1995). Del conocimiento sobre la enseñanza para el profesor al conocimiento del profesor sobre la enseñanza: Implicaciones en la formación de profesores de matemáticas. En L. Blanco y V. Mellado (Coord.) *La formación del profesorado de Ciencias y Matemáticas en España y Portugal*. Diputación Provincial de Badajoz - Departamento de Didáctica de las Matemáticas y las CCEE. Universidad de Extremadura. pp. 153-171.

[89] Llinares, S. (1998). Conocimiento profesional del profesor de matemáticas y procesos de formación. *UNO*. 17. pp. 51-63.

[90] Lial, M. y Hungerford, T. (2000). *Matemáticas para administración y economía*. 7^a ed. México: Pearson Educación.

[91] Marcelo, C. (1992). Cómo conocen los profesores la materia que enseñan. Algunas contribuciones de la investigación sobre conocimiento didáctico del contenido. En Actas del Congreso: *Las didácticas específicas en la formación del profesorado*. Vol. I. Santiago de Compostela: Tórculo. pp. 151-186.

[92] Marcelo, C. (1995). Desarrollo profesional e iniciación a la enseñanza. Barcelona: PPU.

[93] Marcelo, C. (1999). La Formación de los formadores como espacio de trabajo e investigación: dos ejemplos. *XXI Revista de Educación*. Nº 1. pp. 33-57.

[94] Marcelo, C. (2001). El Proyecto Docente: Una ocasión para aprender. En García-Valcárcel (Coord.) *Didáctica universitaria*. Madrid: La Muralla, S. A. pp. 45-78.

[95] Marcelo, C. (2002). La investigación sobre el conocimiento de los profesores y el proceso aprender a enseñar. Una revisión personal. En Perafán, G. y Adúriz-Bravo, A. (Comp.) *Pensamiento y conocimiento de los profesores. Debates y perspectivas internacionales*. Bogotá: Grupo Editorial Gaia. pp. 45-60.

[96] Marín, V. (2004). *Las creencias del profesorado universitario en el siglo XXI*. Córdoba: Servicio de publicaciones de la Universidad de Córdoba.

[97] Marín, V. (2006). Formación y convergencia: dos realidades de la vida del profesor universitario principiante. *Revista de educaçao do Instituto Superior de Ciências educativas*. 2ª Serie. N°2. pp. 183-190.

[98] Massot, I.; Dorio, I. y Sabariego, M. (2004). Estrategias de recogida y análisis de la información. En Bisquerra, R. (Coord.) *Metodología de la investigación cualitativa*. Capítulo 11. Madrid: Editorial La Muralla, S. A. pp. 329-366.

[99] McCarthy, M. (2005). Can problem-based learning address content and process? *Biochemistry and Molecular Biology Education*. 33 (5). pp. 363-368. Recuperado el 15 de abril de 2006 de `http://www.bambed.org/cgi/reprint/33/5/363.pdf`

[100] Medina, A. (2001). Los métodos en la enseñanza universitaria. En García-Valcárcel (Coord.) *Didáctica universitaria*. Madrid: La Muralla, S. A. pp. 155-198.

[101] Mellado, V. (1995). *Análisis del conocimiento didáctico del contenido, en profesores de ciencias de primaria y secundaria en formación inicial*. Cáceres: Servicio de Publicaciones de la Universidad de Extremadura.

[102] Mellado, V.; Blanco, L. J. y Ruiz, C. (1999). *Aprender a enseñar ciencias experimentales en la formación inicial del profesorado. Estudios de caso sobre la enseñanza de la energía*. Colección de Proyectos de Innovación Docente. Badajoz: ICE de la Universidad de Extremadura.

[103] Milter, R. y Stinson, J. (1995). Educating leaders for the new competitive environment. En Gijselaers, W.; Tempelaar, D.; Keizer, P.; Blommaert, J.; Bernard, E. y Kasper, E. (Eds.) *Educational innovation in economics and business administration : The case of problem-based learning*. Netherlands: Kluwer Academic Publishers. pp. 30-38.

[104] Morales, P. y Landa, V. (2004). Aprendizaje basado en problemas. *Theoria*. 13. pp. 145-157.

[105] Moreno, M. (2000). *El profesor universitario de matemáticas: Estudio de las concepciones y creencias acerca de la enseñanza de las ecuaciones diferenciales. Estudio de casos.* Tesis Doctoral. Barcelona: Universidad Autónoma de Barcelona.

[106] Moreno B., M. (2000). La enseñanza de la resolución de problemas matemáticos. El blanco y el negro de algunas estrategias didácticas. *Revista de Educación* (Nueva Época). Núm. 15. Recuperado el 16 de junio de 2005 de `http://educar.jalisco.gob.mx/15/15indice.html`

[107] Moreno, M. y Azcárate, C. (2003). Concepciones y creencias de los profesores universitarios de matemáticas acerca de las enseñanzas de las ecuaciones diferenciales. *Enseñanza de las Ciencias*. 21(2). pp. 265-280.

[108] Mowshowitz, D. (2006). Using advanced problem in introductory courses. Some sample problems and why they work. *Biochemistry and Molecular Biology Education*. 34(2). pp. 134-138. Recuperado el 10 de mayo de 2006 de `http://www.bambed.org/cgi/reprint/34/2/134.pdf`

[109] NCTM. (1991). Professional standards for teaching mathematics. Reston: NCTM.

[110] Pinto, M. y Gálvez, C. (1996). *Análisis documental de contenido: Procesamiento de la información*. Madrid: Editorial Síntesis.

[111] Piñuel, J. (2002). Epistemología, metodología y técnicas de análisis de contenido. *Estudios de Sociolingüística*. 3(1). pp. 1-42.

[112] Pólya, G. (1984). *Cómo plantear y resolver problemas*. México: Trillas.

[113] Porlán, R. y Rivero, A. (1998). *El conocimineto de los profesores*. Sevilla: Diada Editorial, S. L.

[114] Porlán, R.; Rivero, A. y Martín, R. (1998). Conocimiento profesional y epistemología de los profesores, II: Estudios empíricos y conclusiones. *Enseñanza de las Ciencias*. 16(2). pp. 271-288.

[115] Puig, L. (1996). *Elementos de resolución de problemas*. Granada: Comares. Col. Mathema.

[116] Reyes, F. y Gárritz, J. (2006). Conocimiento pedagógico del concepto de “reacción química” en profesores universitarios mexicanos. *Revista Mexicana de Investigación Educativa*. 11(31). pp. 1175-1205. Recuperado el 30 de julio de 2007 de `http://comie.amenesesm.com/documentos/rmie/v11/n31/pdf/rmiev11n31scB02n01es.pdf`

[117] Rico, L. (1998). Complejidad del currículo matemático como herramienta profesional. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*. 1(1). pp. 22-39.

[118] Roh, K. (2003). Problem-based learning in mathematics. *Digest of Educational Resources Information Center*. EDO-SE-03-07. Recuperado el 15 de febrero de 2006 de `http://www.eric.ed.gov/ERICDocs/data/ericdocs2sql/\\content\_storage\_01/0000019b/80/1b/94/16.pdf`

[119] Rosales, C. (2001). Comunicación didáctica en la universidad. En García-Valcárcel (Coord.) *Didáctica universitaria*. Madrid: La Muralla, S. A. pp. 113-152.

[120] Russ, J. (1999). *Léxico de filosofia: los conceptos y los filósofos en sus citas*. Madrid: Ediciones Akal, S. A.

[121] Salazar, S. (2005). El conocimiento pedagógico del contenido como categoría de estudio de la formación docente. *Revista Electrónica "Antualidades en Investigación Educativa"*. 5(2). pp. 1-18. Recuperado el 01 de agosto de 2007 de `http://redalyc.uaemex.mx/redalyc/pdf/447/44750211.pdf`

[122] Santos, M. (1993). La investigación, sendero y destino de la formación del profesorado universitario. En Lázaro, L. (Ed.). *Formación pedagógica del profesorado universitario y calidad de la educación*. Valencia: Servei de Formació Permanent. Universidad de Valencia y CIDE. pp. 177-191.

[123] Savery, J. y Duffy, T. (1995). Problem based learning: An instructional model and its constructivist framework. *Educational Technology*. 35. pp. 31-37.

[124] Savin-Baden, M. (2003). Disciplinary differences or modes of curriculum practice? Who promised to deliver what in problem-based learning? *Biochemistry and Molecular Biology Education*. 31(5). pp. 338-343. Recuperado el 15 de abril de 2006 de `http://www3.interscience.wiley.com/cgi-bin/fulltext/113449369/PDFSTART`

[125] Schoenfeld, A. (1985). *Mathematical Problem Solving*. London: Academic Press.

[126] Schommer-Aikins, M.; Duell, O. y Barker, S. (2003). Epistemological beliefs across domains using biglan's classification of academic disciplines. *Research in Higher Education*. 44(3) pp. 347-366.

[127] Shulman, L. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational Researcher*. 15(2). pp. 4-14.

[128] Shulman, L. (2005). Conocimiento y enseñanza: fundamentos de la nueva reforma (Knowledge and teaching: Foundations of the new reform). *Revista de currículum y formación del profesorado*. Traducción realizada por Alberto Ide y revisado por Antonio Bolívar. 9(2). pp. 1-30.

[129] Smith, C. (1995). Features Section: problem based-learning. *Biochemistry and Molecular Biology Education*. 23(3). pp. 149-152.

[130] Sonmez, D. y Lee, H. (2003). Problem-based learning in science. *Digest of Educational Resources Information Center*. EDO-SE-03-04. Recuperado el 04 de febrero de 2006 de `http://www.stemworks.org/digests/EDO-SE-03-04.pdf`

[131] Stake, R. E. (1999). *Investigación con estudio de casos*. 2ª ed. Madrid: Ediciones Morata.

[132] Talanquer, V. (2004). Formación docente: ¿Qué conocimiento distingue a los buenos maestros de química? *Educación Química*. 15(1). pp. 1-7. Recuperado el 25 de julio de 2007 de `http://www.chem.arizona.edu/tpp/edquim04.pdf`

[133] Tapia, J. (2001). Motivación y estrategias de aprendizaje. Principios para su mejora en alumnos universitarios. En García-Valcárcel, A. (Coord.) *Didáctica universitaria*. Madrid: La Muralla, S. A. pp. 79-111.

[134] Thompson, A. (1992). Teachers' beliefs and conceptions: a synthesis of the research. En D. A. Grouws (Ed.) *International handbook of research on mathematics teaching and learning*. New York: Macmillan Pub. Com. pp. 127-146.

[135] Veal, W. y MaKinster, J. (1999). Pedagogical content knowledge taxonomies. *Electronic Journal of Science Education*. 3(4). pp. 1-18. Recuperado el 25 de julio de 2007 de `http://ejse.southwestern.edu/original\%20site/manuscripts/v3n4/articles/art02\_veal/veal.html`

[136] Vila, A. y Callejo, M. (2004). *Matemáticas para aprender a pensar. El papel de las creencias en la resolución de problemas*. Madrid: Narcea, S. A.

[137] Visauta, B. (1989). *Técnicas de investigación social*. Barcelona: Promociones y Publicaciones Universitarias, S. A.

[138] Voet, J. (2001). Content and process in biochemistry. *Biochemistry and Molecular Biology Education*. 29(4). pp. 136.

[139] Whipkey, K.; Whipkey, M. y Conway, G. (1987). *El poder de las matemáticas, aplicaciones en administración y ciencias sociales*. 2ª ed. México: Limusa.

[140] White, H. (1993). Research literature as a source of problems, *Biochemestry Education*. 21. pp. 205–207.

[141] White, H. (2001). PBL curricula versus PBL courses. *Biochemistry and Molecular Biology Education*. 29. pp. 24-25. Recuperado el 27 de junio de 2006 de `http://www.bambed.org/cgi/reprint/29/24.pdf`

[142] White, H. (2004a). Problem-based learning and undergraduate research. *Biochemistry and Molecular Biology Education*. 32(1). p. 49. Recuperado el 15 de abril de 2006 de `http://www.bambed.org/cgi/reprint/32/1/49.pdf`

[143] White, H. (2004b). Constructivist pedagogy. *Biochemistry and Molecular Biology Education*. 32(2). p. 120. Recuperado el 15 de abril de 2006 de `http://www.bambed.org/cgi/reprint/32/2/120.pdf`

[144] White, H. (2004c). Math literacy. *Biochemistry and Molecular Biology Education*. 32(6). pp. 410-411. Recuperado el 15 de abril de 2006 de `http://www.bambed.org/cgi/reprint/32/6/410.pdf`

[145] White, H. (2005). Commentary: Problems without answers. *Biochemistry and Molecular Biology Education*. 33(6). pp. 431-432. Recuperado el 15 de abril de 2006 de `http://www3.interscience.wiley.com/cgi-bin/fulltext/113449095/PDFSTART`

[146] White, H. (2006). Commentary: Questioning for deeper understanding in problem-based learning. *Biochemistry and Molecular Biology Education*. 34(3). p. 227. Recuperado el 22 de junio de 2006 de `http://www3.interscience.wiley.com/cgi-bin/fulltext/113449024/PDFSTART`

[147] Wonnacott, T. (1983). *Aplicaciones del cálculo diferencial e integral*. 1^a ed. México: Limusa.

[148] Zabalza, M. (2001). Evaluación de los aprendizajes en la universidad. En García-Valcárcel (Coord.) *Didáctica universitaria*. Madrid: La Muralla, S. A. pp. 261-291.

[149] Zabalza, M. (2003). *Competencias docentes del profesorado universitario. Calidad y desarrollo profesional*. Madrid: Narcea.

Apéndices

Apéndice A

Sesiones del seminario (Grupo A)

A.1. Actividad 1

Mediante la siguiente actividad se pretende introducir el concepto de la derivada a través del desarrollo de dos problemas, el primero es un ejemplo clásico de la física y el segundo es un problema relacionado con el pago de impuestos, es decir, vinculado con las ciencias económicas. En este sentido, además de introducir el concepto de derivada, se intenta que el estudiante conozca o se aproxime a dos interpretaciones de la derivada. Hay que tener en cuenta el conocimiento y las herramientas matemáticas adquiridas por los estudiantes hasta este momento.

Tasas de Variación y Pendientes

Estudiamos a continuación la introducción de la derivada a través de la función cuadrática $f(x) = x^2$.

A.1.1. Velocidad Instantánea[1]

Suponga que la función de posición de un objeto que se mueve a lo largo de la recta real está dada por $s = f(t) = 8t^2 + 10$, donde t está en segundos y s en metros.

Preguntas: Las siguientes preguntas están relacionadas con los contenidos físico y matemático en general.

[1]Tomado de Haeussler y Paul (1997)

Pregunta 1: Calcular la posición del objeto cuando $t = 5{,}0$; $t = 5{,}001$; $t = 5{,}01$; $t = 5{,}1$; $t = 5{,}2$; $t = 5{,}3$; $t = 5{,}4$; $t = 5{,}5$; $t = 6{,}0$; $t = 9{,}0$; $t = 12{,}0$ y $t = 15{,}0$. A medida que avanza el tiempo, ¿qué puede decir de la posición del objeto?

Respuesta de P1: En la segunda fila de la **Tabla A.1** se pueden observar las distintas posiciones del objeto para distintos instantes de tiempo. Respecto a la segunda parte de la pregunta, a medida que avanza el tiempo la distancia recorrida es mayor, además la **Tabla A.1** *nos hace pensar que el objeto nunca se detiene*.

Discusión: Hasta ahora, el estudiante está familiarizado con el tema de funciones y en este sentido, no debería tener inconveniente para realizar esta tarea en la que se plantea un **estudio muy general de incrementos**.

Para este momento, en el que queremos introducir el concepto de derivada y una interpretación de la misma, ¿consideran ustedes que, desde el punto de vista metodológico, éste es un primer paso "acertado" para introducir el concepto de derivada, o por el contrario, resulta una tarea inapropiada y sin mayor valor cognitivo?

[Manuel]: Bueno, yo pienso que sí, yo pienso que se puede enfocar desde este punto de vista.

[Ramón]: ¿Ellos tienen previamente el concepto de límite?

[Moderador]: Sí.

[Ramón]: Se supone que lo tienen.

[Moderador]: Sí, se supone que si seguimos los programas oficiales ya está cubierto el concepto de límite.

[Ramón]: Bueno... bien, yo estaría de acuerdo, yo recalcaría la idea del concepto de límite. El estudiante vería nuevamente la idea de límite, lo comprendería en la idea de cociente incremental, pero hay una cosa que a mi siempre, tanto como estudiante como profesor, los libros no..., es buena idea partir de este concepto, pero siempre he tenido la sensación de que falta como un detallito de... este bueno; ok, tenemos el cociente incremental pero al final cuando uno toma toda esa serie de números y hace estas tablas, que es lo que tú acabas de preguntar; o sea, qué relación tiene ese resultado final con esa sucesión, que no sea precisamente a través del concepto de límite puramente matemático sino lo que tú en este caso pretendes... motivar a partir de un contexto de la economía. A mi siempre ese detallito me ha parecido que no está claramente expuesto en algún libro, no se si me estoy explicando bien...

[Moderador]: ¿Y cuál es tu opinión al respecto Pedro?

[Pedro]: Bueno, yo cuando he dado este tema arranco primero con definición de incremento, de cambios, primero con el cambio de una variable independiente, después hablo con el cambio de la variable dependiente y después;

tanto analíticamente como gráficamente, estoy diciendo mi experiencia, después les hablo de lo que es el cambio de $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, de acuerdo. Y después doy un ejemplo particular, como es aplicado a la economía, puedo hablarles de costo, ingreso y buscar la tasa de cambio promedio. Una vez que el estudiante sepa ya eso analíticamente y sepa interpretarlo en términos económicos, entonces sí introduzco el límite, el límite del cociente incremental cuando Δx tiende a 0, después le hago un ejemplo particular del costo promedio. Entonces, ahí les digo qué significa primero el costo promedio sin el límite, por ejemplo, costo promedio si se incrementa la producción de 20 a 120, luego lo hacemos con el límite y les doy la explicación tomando el límite; es decir, les hablo del costo promedio asociado al límite cuando el incremento del costo de la producción es muy pequeño. Bueno, así es como yo lo hago.

Bueno, aquí la observación que te quería hacer es la siguiente: aquí la velocidad instantánea no es la mejor idea, sobre todo porque tú dices que es para estudiantes de economía, sugiero que el ejemplo más adecuado lo podrías poner de costo, ingreso, producción, ¿de acuerdo?, porque ya ellos estarán familiarizados con conceptos económicos, ya que son estudiantes de economía, de lo contrario tendrás que recordarles qué es velocidad, qué es el espacio recorrido, ese tipo de cosas... Aunque yo estoy de acuerdo que el mejor ejemplo que hay para que el estudiante entienda es el de velocidad instantánea, la velocidad que uno ve en el velocímetro de un auto, pero en economía tú tienes que atacar esos conceptos [los de economía].

[Moderador]: ¿Y por qué consideras que la velocidad instantánea es el ejemplo ideal?

[Pedro]: Tal vez porque es el ejemplo que aparece de primero en todos los libros de cálculo, incluso en los de aplicaciones a la economía y porque todas las personas estamos familiarizadas con el concepto de velocidad.

[Ramón]: Yo tengo una pregunta, ¿este ejemplo es porque tú lo piensas introducir en una clase de economía o porque...?

[Moderador]: No, yo lo que pretendo es discutir con ustedes y escuchar sus opiniones al respecto.

[Ramón]: Porque la experiencia que yo he tenido en un par de ocasiones es que tú le empiezas a hablar de física y ellos manifiestan un rechazo total, en cambio cuando se hace como acaba de explicar Pedro, ellos se emocionan...

[Manuel]: Sin embargo, la mayoría de los libros de aplicaciones usan las dos motivaciones, tanto el ejemplo físico como el económico, entonces algo tiene que tomarse en cuenta eso, ya que si los libros lo utilizan debe ser por algo. No obstante, estoy de acuerdo con Ramón, cuando a estos muchachos se les comienza a hablar de física, de una vez se quejan y empiezan a mirar para los lados.

[Pedro]: Y más si es el primer día de clases, allí el rechazo es mayor.

Pregunta 2: ¿En cuánto varía la posición o cuánto se ha desplazado el objeto cuando el tiempo transcurre de 5.0 a 15.0 segundos; de 5.0 a 12.0 segundos; de 5.0 a 9.0 segundos; de 5.0 a 6.0 segundos; de 5.0 a 5.5 segundos, de 5.0 a 5.4 segundos, de 5.0 a 5.3 segundos, de 5.0 a 5.2 segundos, de 5.0 a 5.1 segundos, de 5.0 a 5.01 segundos y de 5.0 a 5.001? ¿Qué observa en cada uno de los desplazamientos estudiados?

Respuesta de P2: En la segunda columna de la **Tabla A.2** podemos ver cómo varía la posición del objeto cuando éste se ha desplazado en distintos intervalos de tiempos.

Discusión: En la tarea anterior se estudió la posición del objeto para distintos instantes de tiempo, ahora estudiamos variaciones de la posición para intervalos de tiempo particulares; es decir, qué *variaciones* experimenta la posición del objeto cuando el tiempo cambia en distintos intervalos.

En una experiencia con estudiantes con los que realicé esta actividad, ellos mostraron dificultades para visualizar las distintas variaciones, ¿consideran ustedes que esta tarea promueve, de alguna manera, el concepto de incrementos de una variable? ¿De qué manera? ¿Cómo?

[Manuel]: A mi me parece una buena tarea porque aquí se nota este..., cuando ellos ven los distintos cambios en el intervalo, ellos van a ver los distintos cambios que ocurren en la velocidad promedio, entonces esos cambios van a estar justificados por el proceso de derivada.

[Ramón]: Sí porque muchas veces uno explica el concepto y por falta de tiempo no desarrolla un ejemplo así como estos, esto ya es algo concreto y los obliga como a ver o a reforzar ese concepto, al menos a manipular ese concepto.

[Pedro]: Bueno..., yo estoy de acuerdo con una actividad como esta pero que sea con una función aplicada a la economía.

[Ramón]: Bueno, yo sigo en la misma línea que Pedro...

[Manuel]: Yo también, yo también.

[Ramón]: Porque ponerle un ejemplo de física a los estudiantes de economía, según mi experiencia, eso no ha funcionado.

Pregunta 3: Calcular la velocidad media en los intervalos de tiempo:
$[5{,}0; 15{,}0]$, $[5{,}0; 12{,}0]$, $[5{,}0; 9{,}0]$, $[5{,}0; 6{,}0]$, $[5{,}0; 5{,}5]$, $[5{,}0; 5{,}4]$, $[5{,}0; 5{,}3]$, $[5{,}0; 5{,}2]$, $[5{,}0; 5{,}1]$; $[5{,}0; 5{,}01]$; $[5{,}0; 5{,}001]$.

Respuesta de P3: En la última columna de la **Tabla A.2** se aprecian las distintas velocidades promedios para los intervalos de tiempos indicados.

Discusión: Tal como se muestra en la pregunta, lo que se busca en este caso, es que el estudiante observe y discuta sobre las distintas velocidades promedio y por supuesto, que el profesor discuta con ellos, de modo que surja una primera aproximación **empírica** y con **tratamiento numérico** del concepto de derivada. Algo que no se contempla en los programas oficiales de cálculo diferencial.

En algunas investigaciones sobre el tema, existen opiniones encontradas a la hora de introducir un concepto matemático; hay quienes se inclinan por dar la definición con todo el rigor matemático que ello supone y posteriormente realizar una explicación pormenorizada de ésta (la definición), mientras que hay profesores que apuestan por una construcción detallada del concepto.

¿Consideran adecuado partir de una situación como ésta para aproximarnos al concepto de derivada o conviene más; introducir, de entrada, el concepto de derivada de manera formal y tradicional; es decir, partiendo de la idea formal de límite? Se supone que el estudiante conoce los conceptos de función, límite y continuidad.

[Pedro]: Tiene que haber la motivación, por supuesto, para llegar a la definición, eso está bien, yo lo considero adecuado.

[Moderador]: Sí, pero digamos, aquí hay una motivación particularmente numérica, pero hay quienes se inclinan por una motivación geométrica, etc. Entonces, ¿ustedes se inclinan por una aproximación de esta naturaleza u otra?

[Pedro]: ¿Y por qué no se puede hacer las dos cosas...?

[Ramón]: Yo he probado con la motivación o aproximación, vamos a llamarla geométrica. Entiendo que es una curva, una cuerda... eso con los estudiantes de economía no termina de agradarle, lo intenté un par de veces y la impresión que me dio es que ellos como que no le ven mucho sentido. Ahora, como ellos cargan una calculadora para arriba y para abajo, ellos están más acostumbrados a realizar cálculos, me parece que esta aproximación es mejor, siempre y cuando al final de el estudio de esta motivación o aproximación, no sé cuál es el término adecuado..., siempre y cuando se llegue al concepto preciso y real y se contraste ese concepto con esa aproximación previa.

[Manuel]: En mi caso, te puedo decir que yo cuando trabajo la parte de límite es cuando más trabajo esta parte o este aspecto numérico, yo no les hablo ni siquiera de intervalos abiertos porque eso los distrae, más que todo le construyo tablas; es decir, elijo algunas funciones y le construyo las tablas. Ahora, como la derivada es un límite muy particular, entonces estaría un poco en concordancia con lo que yo he dado, pero yo lo usé y lo uso más que todo en la parte de límite; pero viéndolo bien, me parece que se puede implementar en el tema de la derivada, y me parece muy buena idea porque como tú dices [señalando al profesor Ramón] en la parte geométrica ellos presentan mucha dificultad. Claro, uno en algún momento terminará dándole la interpretación geométrica, pero una vez que hayan entendido el concepto de límite para que puedan asimilar la parte geométrica.

Pregunta 4: La velocidad media del objeto para un intervalo de tiempo $[t_0; t]$ y con $f(t_0) < f(t)$ viene dada por

$$\mathcal{V}(t) = \frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0} = \frac{\text{Desplazamiento desde } f(t_0) \text{ a } f(t)}{\text{Tiempo transcurrido desde } t_0 \text{ a } t}$$

Para el caso particular en el cual el objeto parte con $t_0 = 0$ y su posición es $s = 0$, la velocidad media del objeto se reduce a $\mathcal{V}(t) = \frac{f(t)}{t}$.

Pregunta 4.1: Construir una tabla y calcular $\mathcal{V}(t)$ para $t = 5{,}001$; $t = 5{,}01$; $t = 5{,}1$; $t = 5{,}2$; $t = 5{,}3$; $t = 5{,}4$; $t = 5{,}5$; $t = 6{,}0$; $t = 9{,}0$; $t = 12{,}0$ y $t = 15{,}0$, suponiendo que $t_0 = 5,0$.

Respuesta de P4.1: La tercera columna de la **Tabla A.2** coincide con $\mathcal{V}(t)$, sólo que en el orden inverso.

Pregunta 4.2: Obtener una fórmula para $\mathcal{V}(t)$ y verificarla con la respuesta de 1.

Respuesta de P4.2: En este caso la fórmula que se obtiene para la velocidad promedio es $\mathcal{V}(t) = \frac{8t^2-200}{t-5}$ y coincide con la respuesta del ítem anterior.

Discusión sobre P4.1 y P4.2: El objetivo que se persigue con estas dos tareas es que el estudiante al invertir los datos de la tabla, tenga una mejor visualización de las velocidades promedios para distintos intervalos y así tener mayor dominio y profundidad del problema.

Desde el punto de vista metodológico, ¿creen ustedes que esto ayuda al estudiante a darse una idea de velocidad instantánea y por ende, a llegar al concepto e interpretación de la derivada?

[Ramón]: La verdad es que es la primera vez que veo que primero se construye la tabla con incrementos, o sea aumentando, como está aquí arriba [refiriéndose a la tabla] y luego se colocan los mismos valores pero al revés, en forma decreciente. Siempre lo he visto de la segunda manera, pero se necesita la intervención del profesor cuando se pase de la primera tabla a la segunda, precisamente para destacar la idea de que lo que se está es disminuyendo los incrementos.

[Moderador]: Es que justamente Ramón, lo que se busca con esta idea es que el profesor sirva de mediador o mejor dicho, de director de debate, pero que sea el estudiante o los estudiantes, los que discutan y pregunten entre ellos sobre el problema que está en discusión. Alejándonos en todo caso de una clase tradicional o como la sugieren nuestros actuales programas.

[Ramón]: Bueno, yo he hecho una experiencia como te lo he dicho, lo que ha sucedido es que en ocasiones hay que hacerle una serie de preguntas para que se llegue, en este caso particular, se llegue a la visualización de que el incremento no es creciente sino decreciente. Entonces tratar como tú nos dices, tratar de que el profesor motive al estudiante a pensar sobre eso; pero si de alguna manera y después de cierto tiempo no surge ninguna inquietud por parte del estudiante, al profesor no le va a quedar más remedio que destacar que lo que se quiere es que el estudiante visualice los incrementos.

[Manuel]: ¿Cuál es esa tabla de la pregunta 4, disculpen?

[Moderador]: Es la tabla que está al final. Concretamente la tercera columna. Y tu opinión Pedro al respecto cuál es. ¿Crees tú que se gana algo a través de la visualización?

[Pedro]: Como no, pero yo me limitaría a la segunda tabla nada más porque estoy hablando del incremento de la variable independiente positiva y más adelante puedo hacer el incremento negativo; porque cuál es la idea, que ellos conozcan la definición de derivada y bueno, en el caso de economía... después le vamos a dar unas reglas porque no vamos a calcular todas la derivadas por definición. Entonces yo pienso que hay que hacer mucho hincapié sobre la definición o sobre la aproximación a la definición, yo pienso que es más interesante que de una forma tradicional; pienso yo ¡cuidado!, sobre lo que es costo marginal, todo lo que es análisis marginal. No sé si me estoy adelantando.

[Moderador]: Un poco, pero no hay problema.

[Ramón]: Yo hablo más bien en el sentido de que aprendan el concepto, yo insisto que me parece interesante porque se está procediendo por contraste ¡no!, ellos primero ven que se está incrementando y entonces ahora vamos a lo que realmente interesa del concepto que es el incremento. Entonces, desde el punto de vista económico de tiempo sería mejor, por supuesto que sería mejor la segunda tabla, pero si nos centramos en que el estudiante tiene que aprender, uno de los recursos que uno puede considerar es el contraste, por lo tanto me parece interesante una actividad como esta y que se debería intentar ponerla en práctica de forma exploratoria.

[Manuel]: Sí, yo también pienso que la parte... porque en realidad yo estoy viendo esto como una motivación al estudiante y se podría intentar con otro ejemplo o con otra motivación, claro que eso depende del profesor si utiliza ésta de la que tú nos hablas u otra o ambas.

Pregunta 4.3: Cómo es el comportamiento de la velocidad media, $\mathcal{V}(t)$, en cada uno de los instantes de tiempo respecto a la velocidad instantánea $\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \lim_{h \to 0} \frac{f(t_0+h)-f(t_0)}{h}$ para $t_0 = 5,0$?

Respuesta de P4.3: La velocidad media $\mathcal{V}(t)$ en cualquiera de los casos estudiados es siempre superior a

$$\begin{aligned}
\text{lím}_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta s}{\Delta t} &= \text{lím}_{h\to 0}\frac{f(5+h)-f(5)}{h}\\
&= \text{lím}_{h\to 0}\frac{8(5+h)^2+10-210}{h}\\
&= \text{lím}_{h\to 0}\frac{80h}{h}\\
&= 80,00
\end{aligned}$$

Discusión: *De esta situación, ¿qué discusión les parece a ustedes sugerente que se debe plantear a los estudiantes relacionada con esta tarea?*

[Ramón]: Esta pregunta tiene mucho que ver con lo que yo dije al principio, que es precisamente la... que los textos carecen de esa relación que existe..., de explicar bien esa relación que existe entre la velocidad media y la velocidad instantánea. Ahora bien, yo en lo particular no sabría qué responder.

[Moderador]: Pero la pregunta está más bien enfocada en lo siguiente: ¿conviene generar una discusión con los estudiantes para diferenciar las dos velocidades?

[Pedro]: Claro, bastante...

[Ramón]: Claro, pero repito, a mi siempre me ha quedado esa sensación de que en los textos realmente... Bueno, yo no le encuentro mucho sentido a discutir sobre el par de velocidades, de velocidad media y velocidad instantánea, si no se explica la relación que hay entre las dos. Pero volviendo a tu pregunta así como están las dos, yo creo que es pertinente.

[Manuel]: Además, para que surja el concepto de derivada tu tienes que establecer la diferencia porque allí es donde radica el problema; en mi opinión, de velocidad instantánea y velocidad promedio.

[Moderador]: ¿Qué ibas a decir tú, Pedro?

[Pedro]: Que estoy totalmente de acuerdo en eso de distinguir, por ejemplo, el costo promedio. Suponte si el incremento de producción pasa de 30 a 100 y distinguir en el costo promedio si el incremento de la producción es muy pequeño, eso es muy importante también.

Pregunta 4.4: Esbozar una gráfica aproximada de $f(t)$, para $t \in [4{,}0, 16{,}0]$, y trazar cada una de las rectas que pasan por $(5, f(5))$ y los puntos $(15, f(15))$, $(12, f(12))$, $(9, f(9))$, $(6, f(6))$, $(5{,}5, f(5{,}5))$, $(5{,}4, f(5{,}4))$,

$(5{,}3, f(5{,}3))$, $(5{,}2, f(5{,}2))$, $(5{,}1, f(5{,}1))$, $(5{,}01, f(5{,}01))$ y $(5{,}001, f(5{,}001))$, respectivamente. Discutir sobre la interpretación geométrica y física que sugiere esta tarea, donde $t_0 = 5$.

Respuesta de P4.4: Las gráficas que se muestran en las **Figuras A.1** y **A.2** ilustran lo que se pide en esta tarea y se aprecia geométricamente que la pendiente de la recta que pasa por los puntos $(5, f(5))$ y $(5{,}001, f(5{,}001))$, se aproximan a la velocidad instantánea, $\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t}$, de la tarea anterior y toca a la curva, aparentemente, en un solo punto (recta tangente), mientras que las otras rectas tocan a la curva en más de un punto (rectas secantes).

Discusión: Finalmente, con esta tarea, se muestran dos interpretaciones de la derivada de manera simultánea con un tratamiento numérico y dejando a un lado el rigor del límite. Esta forma de introducir la derivada resulta carente de todo rigor para muchos profesores y en distintos artículos relacionados con la didáctica se plantean discusiones sobre este hecho.

¿Cuál es la posición de ustedes sobre los enfoques (1) Analítico-Algebraico, (2) Geométrico y (3) Numérico para introducir el concepto de derivada, es decir, supone algún tipo de dificultad para el estudiante hablar de dos interpretaciones de un mismo hecho, cuál es su experiencia en este sentido?

[Manuel]: Yo muchas veces implemento esta parte de las pendientes, yo hablo más que todo de las pendientes, en lugar de rectas secantes hablo más bien de las pendientes de estas rectas que se van acercando a una pendiente muy particular, entonces sí muestro los gráficos con las distintas rectas secantes, con las distintas pendientes; bueno yo creo que es así, y hago cálculo. A mi me parece bien, no sé de dónde sacas tú que hay gente que no le parece bien o adecuado proceder de esta manera.

[Pedro]: Viendo esto, yo creo que es bueno que antes de hablar de una recta secante decir que la tasa promedio representa la tangente de la recta secante. Porque tú la introduces así, pienso yo. Ahora bien, yo pienso que hay que introducirlo como tú lo estás haciendo y gráficamente, entonces cuando tú hables de $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, entonces el cambio promedio es la pendiente de la recta secante. Ahora, aquí hay un punto que no sé si es que no lo entiendo o qué es lo que pasa: "*toca a la recta en un solo punto [recta tangente], mientras que las otras rectas tocan a la curva en más de un punto*", hay que tener mucho cuidado aquí ya que la recta tangente se define como una aproximación cuando el Δx se aproxima a 0 y no la definición de recta tangente que uno conoce y que el estudiante conoce para ese momento, que la recta toca a la curva en un solo punto. Entonces, insisto que se debe tener mucho cuidado, sobre todo si este material tiene fines didácticos, porque uno como matemático entiende a lo que tú te refieres, pero los estudiantes no tienen por qué entenderlo; es más, dudo que lo vean de entrada. Por supuesto que esto no es más que una observación o una curiosidad de mi parte.

[Ramón]: Bueno, yo tengo la misma inquietud que Manuel, a mi me parece este proceso muy bien, siempre y cuando se llegue al concepto formal de derivada e insistir, cuando ya se tiene ese grado de abstracción más alto, hacer las comparaciones pertinentes mediante este ejemplo numérico y los gráficos que están acá. En cuanto a si he hecho experiencias similares; sí pero en el sentido inverso a como tú lo mencionaste al principio, es decir, parto del concepto, tomo el cociente incremental, no le doy ningunos valores precisos sino que hago la gráfica de un modelo de una función muy simple, como está acá, ni siquiera tomo un valor preciso como está acá ($t_0 = 5$).

Estoy hablando de economía pero de una función en general, no me estoy refiriendo a velocidad o a cualquier otra variable económica. Así, fijo un t_0 arbitrario sobre la recta, eso sí, digo que $h > 0$ y sobre la misma gráfica voy estableciendo las comparaciones entre la parte algebraica y las gráficas pero sin darle valores precisos y viendo qué es lo que ocurre, qué es lo que yo veo que ocurre sobre la gráfica cuando voy tomando valores de h cada vez más pequeños, pero siempre sobre el dibujo. Ahora, yo no sé si puedo decir otras cosas más sobre lo que dijo Pedro. El problema cuando uno enseña es..., hay casos patológicos, si uno va a mostrar un ejemplo uno tiene que seguir un modelo simple, claro que lo puede tocar en un punto o lo puede tocar en una infinidad, pero el propósito; me parece a mi en este momento, no es tanto en la precisión o en el rigor sino, precisamente, un proceso para poder llegar a ese rigor. Una vez que uno ya logró pasar al estudiante por ese proceso y uno podría suponer que ya adquirió el concepto y lo puede manejar con cierta facilidad, si fuera un estudiante de matemáticas uno se pondría a trabajar con curvas donde la tangente puede tocar a la curva en una infinidad de puntos, pero yo siempre he creído que las matemáticas hay que enseñarlas según el escenario.

[Moderador]: ¿Esta situación permite alcanzar los objetivos del curso, por qué?

[Ramón]: Antes de responder, la pregunta mía sería la siguiente, porque la experiencia que yo conté hace poco me tocó como una hora, entre otras cosas, porque enseñar las cosas de esa manera requiere su tiempo y segundo hay que refrescarle al estudiante lo que es la abscisa, lo que es la ordenada. Entonces la pregunta mía es: ¿una sola vez, en una clase?, ¿no se le dejaría al estudiante ejemplos similares como para que ellos...?

[Moderador]: No, recuerda que aunque nosotros tardemos aquí una hora, el tiempo con el estudiante sería otro.

[Ramón]: Preciso mi pregunta. Independientemente del tiempo que esto me lleve, ¿la idea es trabajar esto una sola vez y listo?

[Moderador]: Les aclaro la pregunta, ¿contribuye esta actividad a alcanzar los objetivos?

[Ramón]: Por supuesto que sí. Aunque quedaría por ver la labor del estudiante en la actividad.

[Manuel]: También se debe aclarar cuáles son esos objetivos, si es sólo calcular derivada o entender el concepto y sus interpretaciones.

[Moderador]: Tomen en cuenta que hasta el momento yo no les he hablado de cálculo de derivada, solamente de introducción del concepto.

[Manuel]: Entonces sí contribuye.

[Pedro]: Claro que contribuye pero sería mejor plantearle ejemplos económicos.

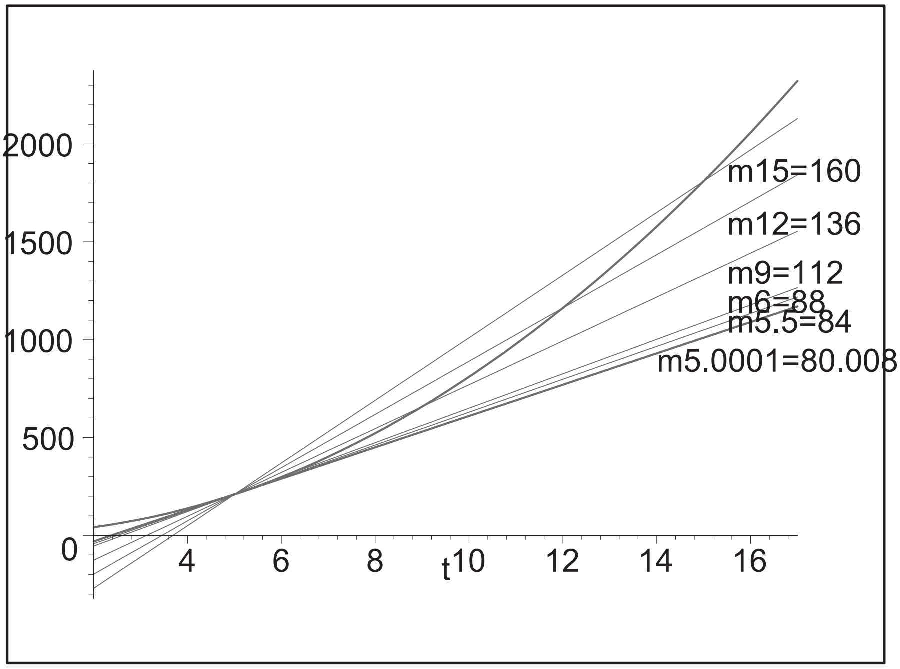


Figura A.1: Aproximación de la velocidad instantánea

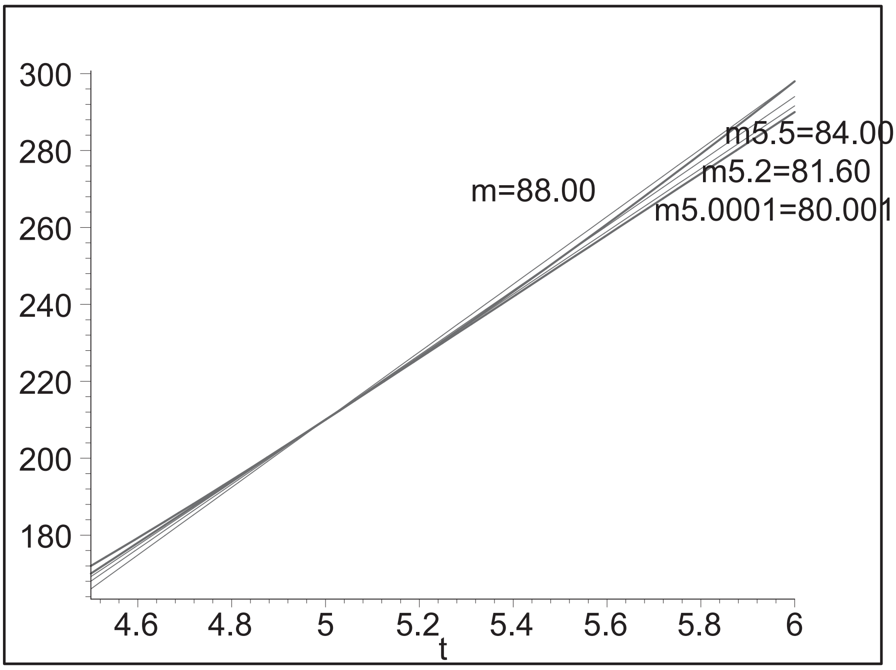


Figura A.2: Una aproximación más fina

Tiempo t	5.0	5.001	5.01	5.1	5.2	5.3	5.4	5.5	6.0	9.0	12.0	15.0
Pos $f(t)$	210	210.080008	210.08008	218.08	226.32	234.72	243.28	252	298	658	1162	1810

Cuadro A.1: Posición del objeto para un instante t

Intervalo de tiempo	Variación de la posición	Velocidad Promedio
$[5{,}0; 15{,}0]$	$f(15{,}0) - f(5{,}0) = 1600$	$\frac{f(15{,}0)-f(5{,}0)}{15{,}0-5{,}0} = 160$
$[5{,}0; 12{,}0]$	$f(12{,}0) - f(5{,}0) = 952$	$\frac{f(12{,}0)-f(5{,}0)}{12{,}0-5{,}0} = 136$
$[5{,}0; 9{,}0]$	$f(9{,}0) - f(5{,}0) = 448$	$\frac{f(9{,}0)-f(5{,}0)}{9{,}0-5{,}0} = 112$
$[5{,}0; 6{,}0]$	$f(6{,}0) - f(5{,}0) = 88$	$\frac{f(6{,}0)-f(5{,}0)}{6{,}0-5{,}0} = 88$
$[5{,}0; 5{,}5]$	$f(5{,}5) - f(5{,}0) = 42$	$\frac{f(5{,}5)-f(5{,}0)}{5{,}5-5{,}0} = 84$
$[5{,}0; 5{,}4]$	$f(5{,}4) - f(5{,}0) = 33{,}28$	$\frac{f(5{,}4)-f(5{,}0)}{5{,}4-5{,}0} = 83{,}2$
$[5{,}0; 5{,}3]$	$f(5{,}3) - f(5{,}0) = 24{,}72$	$\frac{f(5{,}3)-f(5{,}0)}{5{,}3-5{,}0} = 82{,}4$
$[5{,}0; 5{,}2]$	$f(5{,}2) - f(5{,}0) = 16{,}32$	$\frac{f(5{,}2)-f(5{,}0)}{5{,}2-5{,}0} = 81{,}6$
$[5{,}0; 5{,}1]$	$f(5{,}1) - f(5{,}0) = 8{,}08$	$\frac{f(5{,}1)-f(5{,}0)}{5{,}1-5{,}0} = 80{,}8$
$[5{,}0; 5{,}01]$	$f(5{,}01) - f(5{,}0) = 0{,}8008$	$\frac{f(5{,}01)-f(5{,}0)}{5{,}01-5{,}0} = 80{,}08$
$[5{,}0; 5{,}001]$	$f(5{,}001) - f(5{,}0) = 0{,}080008$	$\frac{f(5{,}001)-f(5{,}0)}{5{,}001-5{,}0} = 80{,}008$

Cuadro A.2: Variación de la posición y velocidad promedio en distintos intervalos

A.1.2. El Impuesto Marginal[2]

Supongamos que una persona gana \$6000 al año. Ésta tiene la opción de trabajar más horas, pero para ver si le convendría, primero quisiera determinar los **efectos del impuesto en los ingresos**. Para simplificar las cosas, supongamos que el impuesto que debe pagar viene dado por un polinomio de segundo grado, $y = f(x) = 0{,}04x^2$, donde

$x =$ ingresos gravables (expresado en unidades de \$1.000)
$y = f(x) =$ impuesto (expresado en unidades de \$1.000).

A partir de esta función se discutirán una serie de preguntas, pero antes se le solicita al alumno que calcule el impuesto para ingresos anuales de \$1.000 hasta unos \$12.000, por ejemplo. Recuerde que x está expresada en unidades de \$1.000.

Pregunta 1: En cuánto varía el impuesto que ha de pagar cuando el ingreso del trabajador cambia de \$6.000 a \$12.000; de \$6.000 a \$11.000; de \$6.000 a \$10.000; de \$6.000 a \$9.000; de \$6.000 a \$8.000 y de \$6.000 a \$7.000. ¿Qué observa en cada uno de los cambios de ingreso al año?

Respuesta de P1: En la segunda columna de la **Tabla A.3** podemos ver cómo varía el impuesto a pagar en función de los incrementos que sufra el sueldo del trabajador más allá de los \$6.000 que gana actualmente.

Discusión:Al inicio de esta actividad y antes de entrar a realizar las tareas correspondientes, se le pidió al estudiante que calculara el impuesto a pagar para distintos ingresos, ahora estudiamos variaciones del impuesto para intervalos de ingresos particulares; es decir, qué variaciones experimenta el impuesto del trabajador cuando obtiene ingresos superiores a los \$6.000 que actualmente gana.

¿Consideran ustedes que esta tarea promueve, de alguna manera, el concepto de incrementos de una variable? ¿De qué manera? ¿Cómo?

[Pedro]: Bueno, como te dije anteriormente con el ejemplo anterior, que tenía que ser aplicado a la economía, entonces con más razón. Hace rato te dije que sí, pero que tenía que ser aplicada. Entonces no contradigo lo que dije anteriormente.

[Manuel]: Yo pienso que este ejemplo, a diferencia del anterior, lo que hace es que estimula más al estudiante, porque éste está incluyendo temas de su interés, relacionados con su área de estudio. Además, como hecho curioso, aquí ya se habla de dinero y al estudiante éso le gusta.

[2]Tomado de Wonnacott (1983)

[Ramón]: Yo insisto en lo que dije al inicio, yo creo que se debe dejar de lado, al menos en los cursos de aquí de la Facultad de Economía.

[Pedro]: Exactamente, eso es correcto.

[Ramón]: Aunque yo estoy de acuerdo que esto contribuye a la formación y todos los argumentos que dan los profesores, me refiero al ejemplo anterior de velocidad instantánea, pero yo creo que para un curso de cálculo de acá, en la Facultad de Economía, se debería comenzar con este [con el de impuesto marginal].

[Manuel]: Y sobre el comentario anterior, yo sigo insistiendo, al estudiante le gusta hablar más de dinero que de tiempo, les atrae más el dinero.

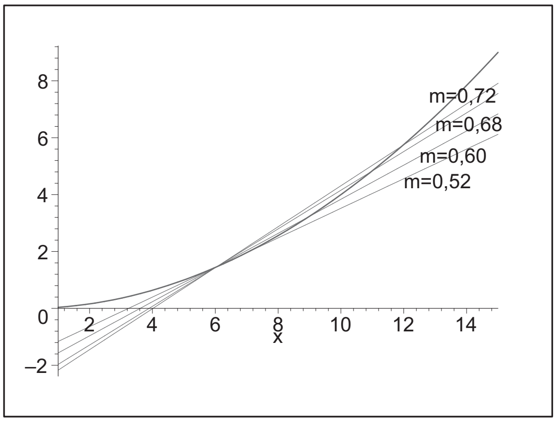


Figura A.3: Variación del impuesto en algunos intervalos

Pregunta 2: Si la persona **incrementa** sus ingresos en $1000, ¿**qué cantidad de este incremento** será para impuestos? ¿Qué porcentaje?

Antes de responder a esta pregunta, pasamos a discutir sobre el incremento de una variable.

Incremento de una variable

Si observamos la **Tabla A.3**, notamos que para cada ingreso x (columna 1), se da la correspondiente tajada del fisco (columna 3). Esta correspondencia es una función que definiremos más adelante, pero que de momento llamaremos *variación del impuesto* (**impuesto marginal**), o el incremento de y o $f(x)$. En general, se define como

$$\Delta y = \frac{f(x+1) - f(x)}{(x+1) - x}$$

En la **Tabla A.3** se observa que la *variación del impuesto* (**impuesto marginal**) presenta una cierta regularidad, por lo que parece conveniente intentar deducir una fórmula para dicho impuesto a partir de esta situación.

$$\begin{aligned}\Delta y &= 0{,}04(x+1)^2 - 0{,}04x^2\\ &= 0{,}04(x^2+2x+1) - 0{,}04x^2\\ &= 0{,}08x + 0{,}04\end{aligned}$$

A manera de comprobación, se observa que cuando se sustituye $x = 0, 1, 2, \ldots$ se genera la última columna de la tabla 1.

Respuesta de P2: Dado que sus ingresos, x, se miden en unidades de \$1000, su incremento podría expresarse simbólicamente como

$$\Delta x = 1, \textbf{ cada unidad representa \$1000}$$

¿En cuánto se incrementarán sus impuestos? Es decir, ¿cuál es el incremento correspondiente Δy?

$$\begin{aligned}\Delta y &= f(7) - f(6)\\ &= 1{,}96 - 1{,}44\\ &= 0{,}52\end{aligned}$$

Así, podemos decir que la tajada al fisco es de 52 % por los siguientes \$1000 que gane (a los \$6000 que ya gana). A esta *variación del impuesto*, (Δy), los economistas le llaman **impuesto marginal**.

Discusión: Con esta tarea buscamos que el estudiante se aproxime a la definición de derivada por medio del incremento de una variable respecto a otra (cociente incremental), pero además se llega al monto que el trabajador pagaría en impuestos por los \$1000 adicionales, que es el 52 % de esto \$1000. En otras palabras, la persona solo se quedará con \$480 de estos \$1000.

Un planteamiento como éste, en el que buscamos trabajar, de forma puntual, el tema de los incrementos, partiendo del contexto económico. ¿Les parece adecuado que la variable x se exprese en unidades de mil, o no supone mayor inconveniente y permite la discusión adecuada sobre incrementos?

[Manuel]: Yo lo que te puedo decir es que yo no veo ningún problema, sin embargo como uno es matemático, uno quiere evitarse hablar de eso de las unidades; incluso hay una guía de problemas de Matemática 21 donde se usa "um" (unidades monetarias) para evitarse si se está hablando en dólares, bolívares u otra moneda, pero no veo ningún problema en que se tome una moneda como referencia. Acuérdate que ellos toman otras materias y de alguna manera ellos van aprendiendo a establecer esa diferencia entre monedas o unidades. Igual que el porcentaje, ya a ese nivel ellos están familiarizados con el porcentaje por el trabajo en otras materias, acuérdate que Matemática 21 es una materia de segundo semestre.

[Pedro]: Bueno, concretando más, yo pienso que hay que hacerlo así, tú vas metiéndole al estudiante lo que es una unidad de mil. Por qué, porque si tú tienes una empresa, una empresa qué es lo que quiere ver, los costos marginales, los costos adicionales cuando tú produces una unidad adicional y la unidad adicional la puede fijar la empresa; 100 automóviles, 1000 automóviles. Una función de producción depende del capital invertido en la empresa y al capital invertido tú le fijas las unidades; unidades de mil, unidades de un millón, unidades de un millardo. El ingreso de una nación o de un país va a depender también de unidades, tantos millardos, cuánto es el incremento de la producción de un país cuando la inversión se incrementa en un millardo. A mi me parece que resulta interesante y acertado, hablar de porcentaje también; de hecho, yo pienso que en Matemática 1 se debe hablar de interés simple, interés compuesto para que se vaya familiarizando. ¿Por qué?, porque cuando en el análisis marginal le toque ver *elasticidad de la demanda*, que son cambios porcentuales de la demanda sobre cambios porcentuales en los precios, entonces te vas a evitar todos esos rollos y le vas enseñando la parte porcentual.

[Ramón]: Esta sesión de hoy yo la estoy centrando o enfocando desde el punto de vista del proceso de enseñanza-aprendizaje pero en relación al estudiante, al tipo de estudiante, al tipo de estudiante de una facultad de economía. Me pongo a pensar un poco no!, por qué tú propones primero el ejemplo de la velocidad y luego tratas este otro, no sé si estoy especulando y por eso es que te voy a hacer la siguiente pregunta: ¿con este proceso lo que se pretende es alcanzar el concepto de derivada, que el estudiante entienda el concepto de derivada desde el punto de vista matemático?

[Moderador]: Sí.

[Ramón]: Bueno si es así, repito no se si estoy especulando, entonces ya le veo el sentido de que tú introduzcas el ejemplo anterior, por lo que acabas de decir. Porque si solamente se motiva a entender el concepto de derivada desde el punto de vista de la matemática a través de este segundo ejemplo, entonces se puede caer, se puede correr el riesgo de que el estudiante realmente entienda la derivada desde un punto de vista solamente de la economía, pero tal vez no se logre alcanzar desde el punto de vista de la matemática. Entonces, yo no sé si tu intención al tratar este ejemplo [el primero]; fue, en parte, para evitar esto de las unidades y eso, se me ocurre eso.

[Manuel]: De hecho como te comenté, los libros introducen al principio, un ejemplo relacionado con la velocidad instantánea aún cuando el libro sea de aplicaciones a la economía, para que el estudiante no vea que la derivada es exclusivamente de la economía.

[Ramón]: Desde ese punto de vista sí me parece pertinente considerar ese ejemplo de la física.

[Manuel]: Lo que sí se debe tomar en cuenta es que el ejemplo a tomar en cuenta debe ser muy sencillo.

[Ramón]: Estoy de acuerdo con Manuel.

[Moderador]: Algo que debo aclarar es, que los dos problemas o ejemplos se colocan para que ustedes me den su opinión y en ningún momento es porque nosotros consideremos que se deben trabajar esos dos ejemplos en particular.

[Pedro]: Para mi, y disculpen, no son los acertados. Para mi, daría la función de costo e ingreso que son las funciones elementales que ya ellos deben dominar; ya el impuesto es más delicado, mucho más delicado. Porque si tú tienes una empresa, ¿qué es lo que quiere una empresa?, ver el costo total, ver el costo promedio, ver el costo marginal, el costo adicional cuando tú produces una unidad adicional, porque tú quieres llegar a la derivada del costo, que es el costo marginal. Entonces, es una función que ellos la han visto en Introducción a la Economía, mientras que de impuesto no han visto nada hasta el momento, como dice el colega, hay que ver las prelaciones. Por otra parte, el ingreso también lo han visto, si yo tengo una empresa, me interesa el ingreso marginal, el ingreso adicional cuando vendo una unidad adicional y el ingreso promedio. Estas son las funciones que ellos manejan más en el sentido...

[Moderador]: Es decir, con lo que no estás de acuerdo es con el modelo o mejor dicho, con el ejemplo. Una cosa es el enfoque que se le quiere dar a la enseñanza de la matemática partiendo de un problema contextualizado y otra cosa es la elección y adecuación del ejemplo o problema. Tal vez elegí mal el problema.

[Pedro]: No es que elegiste mal sino que para mi criterio yo elegiría el costo.

[Moderador]: Me explico, una cosa es elegir la estructura que se le quiere dar a la enseñanza y otra, elegir el problema o modelo. Por ejemplo, podemos sustituir un problema de costo por el de impuesto.

[Pedro]: Yo te sugiero que lo hagas y en lugar de velocidad, ingreso.

[Moderador]: Pero entonces, ¿tú descartarías de plano la situación no-económica?

[Pedro]: Como lo dice Manuel, en economía, los voy a distraer. Para mi no tiene sentido el ejemplo físico. Ya lo he hecho y siento que he perdido mi tiempo.

[Moderador]: O sea, ¿que tus ejemplos son todos económicos?

[Pedro]: Sí, son todos económicos.

[Ramón]: No sé si puedo añadir algo.

[Moderador]: Claro, adelante.

[Ramón]: Yo seguiría insistiendo en que fueran de economía y, como dice Pedro, el primer modelo sería de costo-ingreso, este modelo o ejemplo [el de impuesto] se puede tratar más adelante, pero todavía siento el temor, por decirlo de alguna manera, porque realmente cuál es el objetivo de este curso y de este tema en particular, que el estudiante entienda el concepto desde el punto de vista matemático de lo que es la derivada, de acuerdo. Entonces, se corre el riesgo de que ese objetivo no se vaya a alcanzar cuando los ejemplos sean solamente de una única área del conocimiento como es en este caso, de economía. Pero también queda la otra parte, yo aún tengo la sensación de que a pesar de la intención de proponer el modelo de la velocidad sea que la derivada no es algo plenamente de la economía, todavía...

[Pedro]: Te gusta el ejemplo de la velocidad...

[Ramón]: No, no, no. No me gusta en realidad, sino qué alternativa habría para que una vez que se trabaje con modelos económicos solamente, dar garantía de que realmente el estudiante sabe que hay un concepto que es abstracto que no se refiere a más nada, que es el concepto de derivada. Ese es el temor, pero hasta el momento yo todavía...

[Pedro]: Yo pienso que ese temor tú lo puedes eliminar, porque ellos van a trabajar con funciones aplicadas a la economía. Entonces, después que tú des esos ejemplos y caigas en la definición, que caigas en el análisis marginal, tu además de costo marginal e ingreso marginal, vas a hablar de beneficio marginal, impuesto marginal, vas a hablar de la productividad marginal, ¿entiendes?, no así [refiriéndose al esquema planteado], sino ya con las derivadas. Esto es la derivada y qué significa, ¿de acuerdo?; la producción en función del capital invertido, bueno, el incremento de la producción si yo invierto en el capital en una unidad adicional, así de sencillo.

[Ramón]: Ok, eso es una alternativa...

[Pedro]: Entonces estás trabajando y empleando cada vez más herramientas en el campo de ellos, ¿de acuerdo?

[Ramón]: Ok, eso sería una alternativa, porque así se ve que el concepto de la derivada no está sólo asociado al costo o al ingreso...

[Pedro]: Mira lo que me está pasando a mi ahorita, yo en el curso que estoy dando de nivelación del posgrado, allí tengo a 12 ingenieros, ellos están admirados. Y por qué están admirados les pregunto; bueno, porque ya entendemos para qué sirve la derivada en términos económicos, sin embargo les doy unos ejemplos de ingeniería también.

[Moderador]: Y tú, Manuel, qué opinas.

Ingresos Gravables x	Impuesto $f(x)$	Impuesto Promedio $A(x) = \frac{f(x)}{x}$	Variación del Imp. $\Delta y = \frac{f(x+1)-f(x)}{1}$
1	$f(1) = 0,04$	0,04	0,04
2	$f(2) = 0,16$	0.08	0.12
3	$f(3) = 0,36$	0.12	0.20
4	$f(4) = 0,64$	0.16	0.28
5	$f(5) = 1,00$	0.20	0.36
6	$f(6) = 1,44$	0.24	0.44
7	$f(7) = 1,96$	0.28	0.52
8	$f(8) = 2,56$	0.32	0.60
9	$f(9) = 3,24$	0.36	0.68
10	$f(10) = 4,00$	0.40	0.76
11	$f(11) = 4,84$	0.44	0.84
12	$f(12) = 5,76$	0.48	0.92

Cuadro A.3: Ingresos gravables e impuestos promedio y marginal

[Manuel]: Yo sigo insistiendo que, no estamos hablando de que se va a dar el concepto de manera abstracta, sencillamente hay que darlo a través de ejemplos y resaltar esta diferencia que es muy importante. Dejar claro que el concepto de derivada no solamente va a ser aplicado para el análisis marginal, no solamente para eso. Entonces, se puede establecer más adelante que también puede funcionar para otras cosas. Si el estudiante ya sabe que la derivada es una herramienta del análisis marginal y no como algo interno del análisis [marginal], mientras tú establezcas estas diferencias es importante, ¿y cómo lo estableces?, con un ejemplo sencillo, si no quieres usar ejemplos físicos puedes buscar otros ejemplos, pero es clave que el estudiante sepa de esa pequeña diferencia.

[Pedro]: Yo le agregaría, para complacer al amigo Manuel, después que veamos los ejemplos de costo e ingreso, se puede agregar el ejemplo de velocidad como un ejemplo que es ajeno a la carrera.

[Ramón]: Yo insisto, no tiene por qué ser el ejemplo de velocidad porque el temor que queda..., qué es lo que se pretende, que el estudiante en algún momento llegue a comprender el concepto de derivada sin ninguna clase de muleta, por decirlo de algún modo, entonces ese es el temor que quedaría. Entonces, yo seguiría la línea de Manuel, o sea, ver el uso de la derivada no solamente en el costo sino también en otras partes del análisis marginal y en otras áreas en general.

[Pedro]: Yo respeto sus opiniones pero no estoy de acuerdo...

Comentario (Pregunta 3): Hasta ahora no hemos hablado de *límite* ni de *cociente incremental*. Aún cuando la función de impuesto del ejemplo antes visto se expresó en unidades de mil dólares, cualquier unidad hubiera sido satisfactoria. Por ejemplo, suponga que se quiere estudiar el *impuesto marginal* de una persona que gana $6.000, para un incremento de $100, esto es,

$$\Delta x = 0,1.$$

Entonces el impuesto correspondiente es

$$\begin{aligned} \Delta y &= f(6,1) - f(6,0) \\ &= 1,4884 - 1,4400 \\ &= 0,0484. \end{aligned}$$

Por lo tanto, el incremento del impuesto en relación con el incremento de los ingresos es

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{0,0484}{0,1} = 0,484,$$

que los economistas denominan la tasa del impuesto marginal y los *matemáticos llaman el cociente incremental*.

Discusión: Ahora, cuando el incremento del ingreso es de $100 ($\Delta x = 0,1$), el incremento en Δy cambia respecto al caso anterior. Cuando el incremento en el ingreso era de $1.000, la tajada al fisco era del 52 %, pero cuando el incremento es de $100, la tajada es de 48,4 %. De esta manera y según la necesidad del caso a estudiar, nuestro incremento lo podemos hacer tan pequeño como sea.

¿Qué interés puede suponer para ustedes, desde el punto de vista metodológico, esta actividad en la que se busca dar un paso más hacia la definición de derivada?

[Manuel]: Aquí lo que estas haciendo es una justificación sobre cómo te vas a ir aproximando, digamos. En la primera parte tú modificabas números, ahora le estás dando algún sentido a esos números que estás tomando para la aproximación, yo pienso que está bien porque ahora le estás dando alguna justificación a eso, por qué se tiene que tomar la aproximación desde el punto de vista práctico, de la aplicación, a mi me parece acertado.

[Ramón]: Bueno, lo que acaba de decir Manuel me puso a pensar en relación con lo que dijo Pedro, que a pesar que este modelo [impuesto marginal] está bien, tal vez no sería el mejor para comenzar; pero la pregunta mía para Pedro es: ¿hay algo similar a esto [al impuesto marginal] pero en el caso del costo?

[Pedro]: ¿Cómo así?

[Ramón]: Porque lo que acaba de decir Manuel es interesante, comienza con mil, eso representa el 100 %, entiendo yo...

[Moderador]: No, te explico, lo que hice fue fijar una unidad, en este caso mil. La variable independiente x está expresada en unidades de mil, ahora digo que la x está expresada en unidades de 100, luego puedo bajar a 10, a 1 y así sucesivamente podemos afinar tanto como uno quiera o necesite.

[Pedro]: Es que tú puedes hacer muchas modificaciones, suponte, el costo en lugar de expresarlo en unidades de dólar lo puedes expresar en centavos de dólar.

[Moderador]: Por ejemplo...

[Pedro]: Por qué surge, y disculpa que me salga del tema, la elasticidad; para evitar todos esos rollos con las distintas unidades, porque la elasticidad te habla de forma porcentual.

[Moderador]: Sí, hablas en una sola unidad que es el porcentaje.

[Pedro]: Precisamente para evitar todos esos rollos.

[Ramón]: Bueno, en esos términos, me parece adecuado.

[Moderador]: Pero, ¿te parece adecuado así, a secas?, ¿nada más?, insisto que estamos hablando desde el punto de vista metodológico.

[Manuel]: Es que si no lo haces así, cómo explicas la parte de aproximación, no es que es acertado, es que lo tienes que hacer así...

[Moderador]: No, lo puedes hacer de otra manera, en el caso de la velocidad instantánea lo planteamos de una manera más numérica.

[Manuel]: No, me estoy refiriendo al ejemplo...

[Ramón]: Sí, no creo que lo mejor sea tomar una gráfica con una curva y hablar de la secante, si es a eso a lo que tú te refieres.

[Moderador]: Yo prefiero que salga de boca de ustedes, a fin de cuenta para eso los invité a participar.

Observación: El cociente $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ se podría calcular para cualquier otro valor de Δx. Estudiemos ahora qué ocurre para cualquier incremento Δx. En este caso, el incremento Δy es,

$$\begin{aligned}\Delta y &= f(6+\Delta x) - f(6)\\ &= 0,04[6+\Delta x]^2 - 0,04[6]^2\\ &= 0,04[36+12(\Delta x)+(\Delta x)^2] - 0,04[36]\\ &= 0,48(\Delta x) + 0,04(\Delta x)^2.\end{aligned}$$

De este modo, el cociente incremental se obtiene dividiendo entre Δx,

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = 0,48 + 0,04(\Delta x). \tag{A.1}$$

Paso al límite

Si en la expresión anterior (**A.1**), hacemos que Δx se aproxime a 0 tanto como uno quiera ($\Delta x \to 0$), se satisface que

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} \to 0{,}48$$

Este valor límite, los economistas, lo denominan *tasa del impuesto marginal infinitesimal* o *tasa de impuesto marginal*. Los matemáticos lo llaman *la derivada* y lo denotan por y' , es decir,

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} \to y'$$

Discusión: Finalmente hemos llegado a la definición de derivada de una manera que a muchos profesores no les gusta o mejor dicho, no están de acuerdo por toda la estructura que significa una construcción de esta naturaleza; además, consideran que el estudiante se distrae y se pierde en esencia el objetivo perseguido.

¿Qué opinión tienen ustedes sobre este hecho (el de introducir el concepto de derivada de esta manera), en relación con los objetivos que se buscan en el curso?

[Pedro]: Depende del objetivo y del tema que estés tratando.

[Moderador]: En este caso me refiero al tema derivada y en particular a la introducción de la derivada y el objetivo es llegar al concepto de derivada, solo llegar al concepto, a la definición de derivada.

[Pedro]: Pero yo digo, ¿no podemos hablar del tema en general?

[Moderador]: Es que no es la idea, porque para eso están las otras actividades que vienen más adelante.

[Pedro]: Con estos ejemplos es más que suficiente, siempre y cuando le des a los estudiantes sus ejercicios.

[Moderador]: De acuerdo, pero centrémonos en el tema de discusión.

[Pedro]: Yo considero que esto está bien, pero haciendo las correcciones que dije antes.

[Moderador]: Por qué?

[Pedro]: Claro, porque tú estás motivando a los estudiantes...

[Moderador]: Yo veo que ustedes han nombrado mucho la palabra motivación, pero esta actividad solo se quedaría en el plano de la motivación o ¿creen ustedes que sirve para generar aprendizaje en los estudiantes?

[Manuel]: Por supuesto que serviría para generar un aprendizaje...

[Moderador]: Fíjense que estamos tocando varias cosas, el tema principal es la derivada, pero hablamos de unidades cuando tocamos los incrementos. Entonces, ¿podemos hablar de aprendizaje más que de motivación?

[Pedro]: Yo pienso que sí, claro, no totalmente, estamos en la primera etapa.

[Manuel]: Es que yo pienso que hay que hablar primero de motivación porque aquí estamos, apenas, aproximándonos al concepto. Ahora, tal como tú lo dices, que hay profesores que comienzan hablando de definición... Yo nunca he hecho eso, imposible, no serviría para llegar y decirle a mis estudiantes, hoy vamos a tratar el tema de la derivada. La derivada es este límite y listo... Creo que es una enseñanza equivocada, yo apuesto por la motivación, yo pienso que hay que motivar mucho al estudiante porque es algo [el concepto de derivada] nuevo para él. De hecho, como es algo nuevo, la motivación es fundamental, porque el salto que se da del tema de función al tema de límite y luego al tema de derivada no es simple, las variaciones, los incrementos. Yo he trabajado con ejemplos, pero en este caso tu lo haces con más detalle, lo que puede resultar más provechoso para el muchacho [estudiante]. A mi me parece que se logran los objetivos, me parece bien.

[Ramón]: No sé si puedo hacer un comentario, tal vez circunstanciales o periféricos. Es que él [Manuel] se refiere..., te voy a contar un poco a qué se refiere con esto de la motivación. Hasta hace como dos o tres años atrás, el único que se refería a las aplicaciones en los cursos de matemáticas en la Facultad de Economía era el profesor Pedro.

[Pedro]: Bueno, yo llevo más de quince años...

[Ramón]: Yo sé que usted tiene muchísimos más, pero me refiero al Departamento. Entonces, un poco..., hubo una inquietud por parte del Departamento..., no sé si vale la pena contar un poco la historia para que te enteres del asunto...

[Moderador]: Adelante, sigue, sigue...

[Ramón]: Ok, estábamos los profesores que no dábamos aplicaciones, que los estudiantes pedían aplicaciones y no le atendíamos sus exigencias porque eso suponía una carga más; además, no estábamos motivados porque el rendimiento de los estudiantes era pésimo, estoy hablando de mi caso, no quiero generalizar tampoco. Yo comenzaba con la definición de derivada, colocaba algunos ejemplos, buscaba los incrementos, luego el cociente incremental y luego procedía a calcular el límite, eso era lo que hacía. Después, cuando se empezaron a introducir las aplicaciones, al menos en los cursos que yo he tenido, se vio un cambio sustancial en el rendimiento de los estudiantes. No se bajó el rigor del manejo del instrumental matemático, pero sí se notó el interés de los estudiantes por aprender y el rendimiento mejoró también. Ahora, en cuanto a tu pregunta concreta, yo lo entiendo así, tú a lo que te refieres es a la comprensión de los estudiantes con esta actividad o algo así. Bueno, ¿cómo se va a medir esta comprensión, estos objetivos? No lo sé, creo que lo mejor es experimentar con los estudiantes a través de una actividad piloto. Pero yo todavía sigo teniendo mi reparo en cuanto a que si se le enseña de esta manera, el estudiante de economía va a tener un concepto de derivada muy particular y no el concepto como lo mira un matemático, esa es simplemente mi observación, creo que otros ejemplos no económicos son también importantes y pertinentes. Yo no estoy cuestionando, que quede claro, que los economistas perciban el concepto de derivada de determinada manera, eso no es lo que estoy cuestionando. Si el objetivo es, que el estudiante de economía vea la derivada como la ve un matemático, yo todavía tengo mi temor. Pero sí estoy muy de acuerdo en que se introduzca de esta manera porque creo que se puede profundizar en el alcance de los objetivos; sin embargo, creo que sería bueno experimentar como dije antes.

A.1.3. Cuestionario relacionado con la actividad 1

De acuerdo a la actividad que acabamos de realizar y como producto de las opiniones y discusiones en la misma, nos interesa conocer tu opinión sobre algunos puntos que señalamos a continuación:

1. ¿Qué aspectos puedes destacar (positivos o negativos) entre ambos problemas?; es decir,
    a) ¿Cuál sería la actitud del estudiante frente a estos problemas (por separado)? ¿Por qué?
    b) ¿Cuál llevaría al estudiante a cometer errores? ¿Por qué?
    c) De acuerdo a la bibliografía que está al alcance de los estudiantes (bibliotecas y librerías), ¿cuál conviene utilizar? (1 o 2 referencias) ¿Por qué?
    d) Otro. ¿Por qué?
2. ¿Utilizas algún problema similar en tus clases para introducir el concepto?
    a) Sí ¿Por qué?, ¿qué persigues didácticamente con este tipo de problemas?
    b) No ¿Por qué?
3. En caso de haber respondido negativamente en la pregunta anterior y de seguir un esquema tradicional en tus clases. ¿Utilizarías el problema vinculado a la economía para introducir el concepto de la derivada descartando el otro, después de la experiencia de hoy o prefieres seguir la estructura que haces actualmente? ¿Por qué?
4. Realiza un esquema de la estructura que **sigues actualmente** para enseñar el tema de la derivada en la carreras de ciencias económicas.

Manuel

Cuestionario relacionado con la actividad 1

De acuerdo a la actividad que acabamos de realizar y como producto de las opiniones y discusiones en la misma, nos interesa conocer tu opinión sobre algunos puntos que señalamos a continuación:

1. ¿Qué aspectos puedes destacar (positivos o negativos) entre ambos problemas?; es decir,
   (a) ¿Cuál sería la actitud del estudiante frente a estos problemas (por separado)? ¿Por qué?
   (b) ¿Cuál llevaría al estudiante a cometer errores? ¿Por qué?
   (c) De acuerdo a la bibliografía que está al alcance de los estudiantes (bibliotecas y librerías), ¿cuál conviene utilizar? (1 o 2 referencias) ¿Por qué?
   (d) Otro. ¿Por qué?

(a) Pienso que, frente al problema de la derivada como velocidad instantánea, el estudiante no le tomará mucho interés pero creo necesario implementarlas para que el estudiante vea el concepto como una herramienta matemática.

b) Creo que omitir el problema de velocidad instantánea o introducir el concepto de derivada como un concepto económico, llevaría al estudiante a creer que la derivada es una herramienta netamente económica

c) Pienso que cualquier libro de matemática con aplicaciones en el área de la administración y la economía serviría para introducir el concepto.

2. ¿Utilizas algún problema similar en tus clases para introducir el concepto?

   (a) $\boxed{\text{Sí}}$ ¿Por qué?, ¿qué persigues didácticamente con este tipo de problemas?

   (b) $\boxed{\text{No}}$ ¿Por qué?

2(a) – Utilizo tablas de valores de la función para encontrar la idea intuitiva de límite

– Uso principalmente los conceptos de costos, ingresos y utilidad. Pienso que son más adecuados para introducir el concepto de derivada debido a que son los primeros que aprenden los estudiantes en su carrera

3. En caso de haber respondido negativamente en la pregunta anterior y de seguir un esquema tradicional en tus clases. ¿Utilizarías el problema vinculado a la economía para introducir el concepto de la derivada descartando el otro, después de la experiencia de hoy o prefieres seguir la estructura que haces actualmente? ¿Por qué?

4. Realiza un esquema de la estructura que sigues actualmente para enseñar el tema de la derivada en la carreras de ciencias económicas.

1.- Derivada como razón de cambio.
- análisis marginal
- velocidad instantánea
- Crecimiento de la población

2 Definición Matemática
- Fórmula
- Interpretación geométrica
- Propiedades

3.- Reglas de Derivación
- Regla de la potencia

Ramón

Cuestionario relacionado con la actividad 1

De acuerdo a la actividad que acabamos de realizar y como producto de las opiniones y discusiones en la misma, nos interesa conocer tu opinión sobre algunos puntos que señalamos a continuación:

1. ¿Qué aspectos puedes destacar (positivos o negativos) entre ambos problemas?; es decir,
   - *a*) ¿Cuál sería la actitud del estudiante frente a estos problemas (por separado)? ¿Por qué?
   - *b*) ¿Cuál llevaría al estudiante a cometer errores? ¿Por qué?
   - *c*) De acuerdo a la bibliografía que está al alcance de los estudiantes (bibliotecas y librerías), ¿cuál conviene utilizar? (1 o 2 referencias) ¿Por qué?
   - *d*) Otro. ¿Por qué?

(a) La actitud frente al problema físico sería de indiferencia y hasta de rechazo; en cambio, frente al problema de la Economía, prestaría gran atención a la clase: Esta respuesta se debe a experiencias similares hechas en clases.

(b) Los dos problemas podrían llevar al error de hacer creer al estudiante que el concepto de derivada, está relacionado a uno de los problemas en particular.

(c) Pienso que ninguno de los textos leidos por mi, "desarrollan" de manera tan cuidadosa y con pormenores la enseñanza del concepto de derivada como el material considerado en la actividad que se realizó: Además de ser muy "atractivo" este último.

2. ¿Utilizas algún problema similar en tus clases para introducir el concepto?

   a) Sí ¿Por qué?, ¿qué persigues didácticamente con este tipo de problemas?

   b) No ¿Por qué?

(a) He usado el problema que se refiere a la interpretación de la derivada, como la pendiente de la tangente de un punto de la gráfica de una función; a fin de que el concepto de derivada sea más claro al estudiante.

3. En caso de haber respondido negativamente en la pregunta anterior y de seguir un esquema tradicional en tus clases. ¿Utilizarías el problema vinculado a la economía para introducir el concepto de la derivada descartando el otro, después de la experiencia de hoy o prefieres seguir la estructura que haces actualmente? ¿Por qué?

4. Realiza un esquema de la estructura que **sigues actualmente** para enseñar el tema de la derivada en la carreras de ciencias económicas.

(a) Se escribe el concepto de derivada.

(b) Se explica el concepto mediante la interpretación de la pendiente de una recta.

(c) Se calculan las derivadas de varias funciones usando el concepto de derivada (límite del cociente de incrementos).

(d) Se calcula la derivada usando las propiedades de la suma, producto, cociente y la regla de la cadena.

(e) Aplicaciones de la derivada a la Economía.

A.2. Actividad 2

Después de varias jornadas de trabajo con los estudiantes, ya ellos calculan derivadas inmediatas, han trabajado con las propiedades de la suma, resta, producto y cociente de derivadas e interpretaciones varias de la derivada en la economía.

A.2.1. Incrementos, Tasas, Optimización, Razón de Cambio y Recta Tangente[3]

Una fábrica de lápices, después de realizar un estudio exhaustivo, concluye que el costo por semana de producir x artículos (x en unidades de mil) de uno de sus productos principales, el lápiz mágico, viene dado por la función $C(x) = 2000 + 0,15x$ um y el ingreso obtenido por la venta de x lápices viene dado por $R(x) = 1,5x - 0,0001x^2$ um. La fábrica en cuestión produce 2 millones de lápices mágicos semanales y se está estudiando la idea de incrementar la producción a 2.650.000.

Preguntas: Las siguientes preguntas están relacionadas con los contenidos matemático y económico en general.

Pregunta 1: Cuál es el dominio para cada una de las funciones $C(x), R(x)$ y $\boldsymbol{U(x)}$ (donde $\boldsymbol{U(x)}$ representa la **función de beneficio** o **utilidad**), vistas como funciones matemáticas en general y como funciones de la economía. **Discuta sobre esta situación**.

Respuesta de P1: En primer lugar, antes de hablar de los dominios de las funciones, debemos obtener la función de beneficio $\boldsymbol{U(x)}$, la cual se define como sigue:

$$\boldsymbol{U(x)} = R(x) - C(x) = -0,0001x^2 + 1,35x - 2000.$$

Por otra parte, en la **Tabla A.4** se muestran los dominios[4] de cada una de las funciones mencionadas en la pregunta.

Discusión: En las dos situaciones se observa que para la misma función el dominio no es el mismo, suponiendo una economía hipotética sencilla (**se trata de introducir e involucrar al estudiante y no de plantear situaciones económicas complejas por muy reales que éstas lo sean**).

No obstante, en una situación económica real, el dominio en cualquiera de las funciones estaría acotado también por la derecha, dependiendo en este caso

[3]Tomado de Arya y Lardner (1987)

[4]$\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, 3, ...\}$

	$C(x)$	$R(x)$	$U(x)$
Dominio Mat.	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$
Dominio Ec.	$\mathbb{R}_0^+$ $(\{x\in\mathbb{N}_0:\frac{x}{1000}\})$	$\mathbb{R}_0^+$ $(\{x\in\mathbb{N}_0:\frac{x}{1000}\leq 15000\})$	$[1695, 11805]$ $(\{x\in\mathbb{N}:1695\leq\frac{x}{1000}\leq 11805\})$

Cuadro A.4: Dominio de funciones en dos contextos

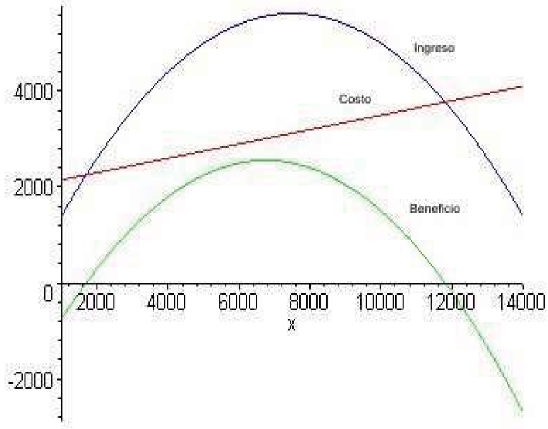


Figura A.4: Funciones R, C y U

de la capacidad de producción y venta del fabricante, por ejemplo. Más aún, si nos fijamos en detalle en el enunciado del problema, los objetos fabricados son lápices y la x está expresada en miles, con lo cual el dominio económico sería $\mathbb{Q}_0^+$ sin excederse en tres decimales (por lo de las unidades de x).

¿Qué importancia supone para ustedes implementar este tipo de dualidades (económicas y matemáticas) en estos cursos o, por el contrario, supone más bien que el estudiante tiende a confundirse? ¿Por qué?

[Manuel]: Mira, básicamente uno de los comentarios que te hice en el cuestionario relacionado con la primera sesión, es que en vez de usar... tú usaste el problema de impuesto, yo siempre comienzo por introducir las funciones de costo, ingreso y beneficio; esos son los conceptos económicos que yo más utilizo, principalmente cuando doy Matemática 1. O sea, que ya ellos conocen muy bien a estas alturas estas funciones. Ahora, obviamente, me parece muy importante que ellos vean esto y como con esto es con lo que van a trabajar, me parece clave.

[Moderador]: Un momento, no nos desviemos, en este momento me refiero concretamente a la dualidad de contextos en el problema. Mira, es la misma función pero vista en un contexto matemático y en uno económico, fíjate en el dominio en un contexto y en otro. ¿Qué incidencias tiene implementar ese tipo de dualidad?

[Manuel]: Ah!, ok. Bueno, yo lo resalto digamos, esa situación. Yo les hablo del dominio matemático y del dominio real, el de las aplicaciones, entonces siempre establezco la diferencia. Ahora, así como tú lo planteas está como más preciso y creo importante, yo no lo hago con tanto detalle, particularmente yo creo que es muy bueno que se establezca esta diferencia. Es más, yo creo que a partir de ahora voy a hacerlo con estos detalles, ya que eso resalta la importancia de las matemáticas en las carreras de economía, pienso que el estudiante puede entender mejor el concepto de domino de una función al realizar en detalle este tipo de problemas. No sé qué piensa Ramón al respecto.

[Ramón]: Es importante y, de hecho, uno como profesor se da cuenta de estas distinción es con el tiempo; por ejemplo, en Matemáticas 1, que es donde ellos ven funciones, allí tiene uno que señalarles un grupo de funciones importantes como las polinómicas, las exponenciales, logaritmos y uno les habla de dominio de una función, pero como es la primera vez que ellos oyen de eso, entonces uno les habla del dominio matemático, después cuando pasan a Matemática 2 donde toca graficar funciones, si tiene algo que ver con una aplicación como costo, ingreso..., así como está acá, los estudiantes podrían llegar a confundirse. De hecho, en los otros cursos, me refiero al de microeconomía por ejemplo, el dominio que el profesor de microeconomía; al cual se refiere, es al dominio que tú mencionas aquí como dominio económico; pero que yo siempre les había hablado, donde la función tiene sentido desde el punto de vista económico, siempre les había dicho sin mayor detalle pero fue posteriormente que me di cuenta de eso [de lo dicho antes sobre el profesor de microeconomía, de la diferencia entre dominios], ¿de acuerdo?... El dominio es este, pero el que es relevante o el que tiene sentido para este problema es este otro. Entonces, me parece muy importante; lo que sí te puedo decir es que nunca había sido tan detallista como tú lo planteas, yo sólo restringía el dominio a los $\mathbb{R}^+$, pero nunca tan detallista como $\mathbb{Q}_0^+$, que realmente tiene sentido algo así porque lo que sí no tiene sentido es hablar en este caso de $\sqrt{2}$ dólares, por ejemplo. Yo creo que es importante que el estudiante conozca estos detalles porque se distingue la parte formal, la parte matemática y lo que se hace; por ejemplo, en los cursos de microeconomía en referencia al dominio, creo que con esto se prepara al estudiante para este curso [el de microeconomía] y seguro que para algún otro, pero que realmente no conozco con precisión y no quiero especular.

Pregunta 2: Determine el **beneficio promedio**, $\overline{U}(x)$ *um*, por millares de lápices producidos. Calcule $\overline{U}(2100)$ y dé una interpretación económica de este resultado. Además, si queremos calcular la **tasa de cambio promedio del beneficio** en un intervalo particular $[x_1, x_2]$, este beneficio lo denotamos por $\overline{U}_{(x_1,x_2)}$ y se define como $\overline{U}_{(x_1,x_2)} = \frac{U(x_2)-U(x_1)}{x_2-x_1}$. Calcular la tasa de cambio del beneficio promedio en $[1900, 2200]$.

Respuesta de P2: El beneficio promedio denotado por $\overline{U}(x)$ viene dado por

$$\begin{aligned}\overline{U}(x) &= \frac{U(x)}{x}\\ &= -0,0001x + 1,35 - \frac{2000}{x}\end{aligned}$$

Así, $\overline{U}(2100) \approx 0,1876$ *um*; es decir, el beneficio promedio que resulta de fabricar y vender 2.100.000 lápices es de 0,1876 *um*.

Por otra parte, la tasa de cambio promedio del beneficio de producir y vender entre 1.900.000 y 2.200.000 es $\overline{U}_{(1,900,2,200)} = \frac{U(2,200)-U(1,900)}{2,200-1,900} = \frac{486-204}{300} = 0,94$ *um*.

Discusión: Está claro que hablar de la tasa promedio dentro del concepto de derivada, supone una aproximación o mejor dicho, nos permite acercar al estudiante al concepto de la derivada.

En el campo de la didáctica existen opiniones encontradas por los especialistas en el sentido siguiente: partir de la contextualización no matemática (en nuestro caso económica), supone para el estudiante una herramienta que promueve a consolidar el aprendizaje matemático de estos. ¿Para ustedes supone lo mismo? ¿Por qué? ¿En general, cuál es o sería la actitud del estudiante ante tal situación, (alguna experiencia)?

[Ramón]: Bueno... es que esto lo discutimos en la reunión anterior y todos estuvimos de acuerdo en que esto promueve al aprendizaje matemático, uno capta el interés del estudiante cuando se le habla en el contexto económico. Ellos entienden desde el principio que es algo que le va a ser de utilidad, entonces, cuando uno pasa de estos ejemplos al concepto propiamente matemático llevan esa motivación. Ahora, repito, yo insisto y, por cierto, lo escribí en las respuestas del cuestionario de la sesión anterior; sería conveniente que además del ejemplo del impuesto que se dio en la sesión anterior, éste me parece bien porque otra vez vuelve pero con otro ejemplo, con otro concepto de la economía, para que ellos se den cuenta que el concepto derivada no está ligado a un único concepto económico en particular sino que el concepto derivada es un concepto propio de la matemática.

[Moderador]: Y tú, Manuel, qué opinas al respecto.

[Manuel]: Bueno, yo comparto la opinión de Ramón, este... De lo que entiendo, la pregunta se refiere a cuál es mi opinión de comenzar con interpretaciones, aunque a Pedro no le gustó que le llamáramos interpretaciones desde el punto de vista económico para pasar a la parte matemática y después volver a lo económico; es decir, ir trabajando entre los dos tipos de interpretaciones. Pero repito, partir desde las interpretaciones económicas le permite al estudiante tener una visión más clara de la matemática en el mundo de la economía.

[Moderador]: ¿Y cuál es o sería la actitud del estudiante ante esta situación? ¿Creen ustedes que el estudiante rechazaría este enfoque?

[Manuel]: No, todo lo contrario, más bien se sentirían estimulados porque no verían una gran cantidad de fórmulas salidas de la nada, según ellos (los estudiantes), donde ellos te dicen que no estudian matemáticas o ingeniería. Pero cuando se les enseña las matemáticas y se les dan aplicaciones de su área, más bien se sienten estimulados y ven la relación que hay de la economía con la matemática y viceversa.

[Ramón]: Una última opinión en este sentido, quería referirme a lo que dije la vez pasada (primera sesión). La experiencia que tuvimos es que se introdujeron aplicaciones, pero lo que se estaba haciendo es que primero se daba todo el instrumental matemático y luego el uso de este instrumental, si se comienza así el estudiante se vería más motivado y la actitud del estudiante sería favorable porque, de hecho, ellos lo exigen.

Pregunta 3: Cuál es el **costo marginal** de producir 2.100.000 unidades. ¿Qué **interpretación económica** le puedes dar a este resultado?

Respuesta de P3: El costo marginal sabemos que es la derivada de la función costo, así, $C'(x) = 0,15$ (una función constante). Pero, ¿qué significado económico tiene este resultado? Esto significa que las **mil unidades adicionales** a las 2.100.000, le costarán al fabricante 0,15 *um* o 15 céntimos de *um*.

Discusión: Ahora bien, en esta pregunta se tocan dos puntos de manera simultánea como los son: la interpretación económica de la derivada en la función de costos y las unidades (en miles) en las que se trabaja el problema. Recordemos que x está expresada en *miles*, por lo tanto las 2.100.000 unidades se reducen a $x = 2{,}100$. Por otra parte, si $C(x)$ representa la función de costo, la interpretación de la derivada para esta función en un punto x_0 es $(C'(x_0))$ el costo de producir la unidad adicional $x_0 + 1$.

Se entiende que incluir dos puntos como estos en un problema puede conllevarle al estudiante a dificultades de razonamiento del problema e interpretación de los resultados o interés y madurez por el tema, ¿puedes especificar que dificultades (si crees que las hay) pueden surgir en el estudiante preguntas como estas o crees que en todo caso le ayudan a entender y madurar los conceptos involucrados? ¿Por qué?

[Manuel]: Primeramente, yo no establezco mucho la diferencia entre aproximación y valor real, esa interpretación yo la tomo al principio como un valor real. No profundizo mucho en esto de la aproximación, claro que después hay que hacer esa observación. Bueno, me estoy alejando de tu pregunta...

[Moderador]: Exacto, mi pregunta va concretamente, ¿puede surgir algún inconveniente, alguna dificultad en los estudiantes si les planteas un problema y al mismo tiempo trabajar con las unidades en la que está expresada la variable?

[Manuel]: Según mi experiencia, creo que no habría ningún problema...

[Moderador]: Tú crees que no habría problemas, pero, ¿le has propuesto a tus estudiantes problemas como éste en tus clases?

[Manuel]: Realmente no les planteo problemas tan detallados...

[Moderador]: ¿Y tú, Ramón, qué nos puedes decir?

[Ramón]: La experiencia que yo he tenido es que ellos no presentan ninguna dificultad, ningún inconveniente; ni en cuanto a la variable x pueda representar unidades de mil o de millón u otra, ni en cuanto a la interpretación, porque ellos se manejan así en los cursos de microeconomía. De hecho, ya ellos traen esa experiencia de estos cursos. Esa es mi experiencia cuando he dictado el curso de cálculo en FACES.

Pregunta 4: En qué intervalos las funciones de costo, ingreso y beneficio ($C(x)$, $R(x)$, $U(x)$), **aumentan** en función de la producción de lápices (o resulta **creciente**) o **disminuye** en función de la producción de lápices (o resulta **decreciente**). En otras palabras, ¿será cierto que mientras mayor sea la producción de lápices, se mantendrá el comportamiento de estas funciones?

Respuesta de P4: En este caso surge la necesidad de estudiar la monotonía de una función a lo largo de su dominio y entran en juego las definiciones de funciones creciente y decreciente en un intervalo.

Así, la función de costo, $C(x)$, es creciente siempre que $C'(x) = 0,15 > 0$ para todo x en su dominio. Por otra parte, la función de ingreso, $R(x)$, es creciente en $(0, 7500)$ y decreciente en $(7500, +\infty)$. Finalmente, la función de beneficio, $U(x)$, es creciente en $(0, 6750)$ y decreciente en $(6750, +\infty)$.

Discusión: El concepto de monotonía de una función es fundamental para el análisis tanto matemático como económico, ya que permite estudiar desde el punto de vista *analítico* el comportamiento de una función en determinados "momentos" de su dominio y de esta manera *interpretar* situaciones en ambos contextos. De hecho, es un tema que aparece en los libros y programas de cálculo diferencial en general.

¿Consideran que se pierde profundidad en el contenido matemático con un planteamiento de esta naturaleza: mucho, regular, nada? ¿Por qué?

[Ramón]: No, porque cuando tú usas este ejemplo, lo que estás usando es la noción que tú tienes de monotonía pero con un ejemplo en particular, o sea, si fuera al revés, que tú primero introduces el concepto formal de función creciente o decreciente, luego lo que uno hace es tomar un ejemplo y explicar ese concepto mediante ese ejemplo o a un caso en particular como aquí. A mi me parece que no (se pierde profundidad en el contenido matemático), siempre y cuando se haga lo mismo que con el concepto de derivada, comenzaste con un ejemplo y llegaste al concepto matemático.

[Moderador]: ¿Y tú lo planteas de esta manera?

[Ramón]: No, por eso es que hice referencia al final..., siempre lo he hecho al revés, es decir, primero la definición y luego un ejemplo...

[Moderador]: Ok.

[Ramón]: Pero realmente, este ejemplo me parece mejor porque yo siempre tomo una función en general que no es de costo, ni ingreso, que no tenga nada que ver con la economía y explico con ese ejemplo, generalmente un polinomio, algo sencillo.

[Moderador]: ¿Y cuál es tu opinión Manuel?

[Manuel]: De hecho, estos conceptos de costo, ingreso, me parecen muy acertados porque ellos están familiarizados de alguna manera. En el costo uno siempre habla de aumento, disminución, entonces ya eso encamina al estudiante a pensar, a estudiar qué tanto aumenta el ingreso o cuánto disminuye, y así se involucra en esto.

Los objetivos que ustedes persiguen se podrían alcanzar de igual forma con un planteamiento como éste? ¿Por qué?

[Manuel]: Yo pienso que sí.

[Moderador]: ¿Y podrías explicarme el por qué?

[Manuel]: Mira, el detalle es que yo pienso que no hay mucha diferencia entre tu propuesta y la forma como yo trabajo con mis estudiantes, de pronto lo que veo, es que tu trabajas más detalladamente y que no trabajo con tantos ejemplos. En este sentido, yo pienso que los objetivos se podrían alcanzar de igual forma.

[Ramón]: Yo pienso que se alcanzarían mejor (los objetivos) haciéndolo de esta manera respecto a como dice Manuel que lo hace. Yo honestamente no lo he hecho ni lo hago de esta manera, pero eso sí, la misma observación que cuando tratamos el tema de introducción a la derivada; ver varios, dos o tres ejemplos de la economía y luego paso a la formulación matemática.

[Manuel]: Ahora, si el objetivo es que aprendan la derivada como una herramienta netamente matemática, uno tiene que terminar con la definición formal.

[Moderador]: Hagamos un paréntesis para aclararles algo. Yo no pretendo descartar la definición formal, como tu la mencionas, en todo caso lo que quiero es discutir con ustedes y que me digan sus puntos de vista sobre estas actividades como generadoras de aprendizaje, entre otras cosas.

[Ramón]: Bueno... Un gran temor que yo tengo es que nos quedemos con una idea nebulosa de lo que es la derivada...

Pregunta 5: Para qué cantidad de lápices producidos y vendidos, el beneficio alcanza su nivel **máximo**.

Respuesta de P5: En este punto después de generar una discusión con los estudiantes para llegar a la definición de valores extremos (máximos y mínimos), se llega a la respuesta: en $x_0 = 6750$, el beneficio $U(x)$ **es máximo**.

Discusión: En diversas áreas del saber relacionadas con el cálculo, estudiar los extremos relativos tiene un significado importante por sus diversas aplicaciones en procesos de optimización; el caso de la ciencias económicas no es la excepción. Se supone que el profesional de la economía, en áreas específicas, constantemente está estudiando la manera de aminorar costos de producción de un determinado producto; por ejemplo, o al menos buscar aproximarse a ese punto ideal donde un determinado proceso sea óptimo. Generalmente los textos de cálculo diferencial, consideran este apartado como un tema de aplicaciones después de haber estudiado y aprendido una teoría que el estudiante debe manejar para abordar y resolver este tipo de problemas.

En una discusión reciente con otros profesores de matemáticas que trabajan en una facultad de economía, dos de ellos manifestaron que una actividad como ésta no es innovadora para sus estudiantes y sus argumentos fueron varios; pero además, surgieron comentarios encontrados en cuanto a aspectos metodológicos. ¿Consideran ustedes que esta es una actividad que conlleva a un mayor esfuerzo en el sentido metodológico (desarrollo de la clase)?

[Ramón]: Sí. Ahora, yo creo que con una clase no bastaría, pero el beneficio que yo considero es que el estudiante aprenda bien; propiamente, el concepto matemático, aparte de que les va a aclarar esas interpretaciones que tienen ese instrumental matemático, me parece que sería mucho mayor que si se hace al revés; lo que tu mencionaste, primero la parte matemática y luego la parte de aplicaciones. Es más esfuerzo para el profesor, para el estudiante no creo, ¿de acuerdo?, porque es una actividad que él (estudiante) va a desarrollar en una o dos clases. Repito, es más esfuerzo para el profesor pero sería más beneficioso para el estudiante. En otras palabras, consolidaría; como tú dices, su aprendizaje. Ahora, esta es mi opinión personal, pero que quede claro que yo nunca he llevado a cabo una actividad como ésta para decir que eso es lo que va a suceder, ¡ojo!

[Manuel]: O sea, lo que entiendo es, ¿plantearse el problema de optimización desde el punto de vista económico para luego llegar a la formulación matemática...?

[Moderador]: Permíteme explicarte, generalmente en los programas oficiales y en los libros de texto se sigue un esquema en el tema reservado a la derivada que consiste en dar unas motivaciones para dar la definición del concepto, luego se habla de derivadas de orden superior; primera, segunda deriva. Luego se habla de algunos conceptos del análisis matemático como función creciente, decreciente, máximo o mínimo relativos, puntos críticos o de inflexión, etc; para finalizar con aplicaciones de la derivada a la economía. Entonces, desde el punto de vista metodológico, ¿consideras tú que supone un mayor esfuerzo para ti, plantear una clase de esta manera, con la estructura que propongo? Cuando digo un mayor esfuerzo, remarco lo metodológico, me refiero a la preparación de la clase, al desarrollo de la misma, ya que tú vas a elegir y preparar una situación para trabajar con los estudiantes, donde se supone; no sé si tú lo haces así, que vas a generar un espacio de discusión con los estudiantes, donde el estudiante se vea obligado a participar, a opinar...

[Manuel]: Bueno, yo tomo ejemplos para comenzar a hablar de la parte de optimización, yo comienzo con ejemplos. Por qué tenemos que optimizar esta función, entonces puedo abrir con una función de costo o con una función de ingreso y explicarles... Por lo mismo que ellos saben que el ingreso aumenta, disminuye, sería bueno establecer cuál es ese cambio o dónde puede ocurrir ese cambio. Entonces basándonos en las dos situaciones, cuándo crece, cuándo decrece, entonces buscar ese punto óptimo y qué beneficio representaría para la empresa. Por ejemplo, minimizar una función de costo.

[Ramón]: Pero él se refiere más a la preparación de la clase, al desarrollo de la clase, todo el esfuerzo físico y mental que el profesor tiene que hacer para llevar a cabo una clase...

[Moderador]: Te explico con un ejemplo, uno da la definición de monotonía de una función y posteriormente aplicas esta definición en unos ejemplos o problemas particulares...

[Manuel]: Pero es que yo te estoy diciendo que yo hago lo contrario, doy el problema como una motivación y después es que doy las definiciones relacionadas al problema.

Por otra parte, consideran ustedes que es una actividad rutinaria que lejos de promover el aprendizaje, distrae al estudiante y lo conduce a errores (de qué tipos)? ¿Por qué?

[Ramón]: A mi no me parece rutinaria, pero insisto que el error al que se puede llegar por esta vía es que no se llegue al concepto formal de derivada y que quede ahí como una idea nebulosa, ¿de acuerdo? Yo no digo que sea malo, pero si el objetivo es tratar el concepto matemático, podría conducir a ese error;

es decir, que el concepto quede ligado a un único ejemplo y que el estudiante crea que eso de la derivada es algo muy particular de ese ejemplo, cuando en realidad no es así, es un concepto de las matemáticas que se puede establecer formalmente con el lenguaje matemático.

[Manuel]: Mira, un comentario, es distinto cuando yo doy un curso en la facultad de ciencias a cuando lo doy en economía, difieren mucho porque desde el punto de vista metodológico, en la facultad de ciencias yo entro con todo el rigor matemático; definiciones, teoremas, demostraciones y después es que hablo de diversas aplicaciones, no necesariamente de economía. Allá no, en la Facultad de Economía, casi siempre abro con un tipo de aplicación para motivar la parte matemática, para que el estudiante se motive a aprender. En este sentido, es que hablo de las diferencias entre un lugar y otro. Ahora bien, pienso yo que estas actividades no distraen ni confunden al estudiante, todo lo contrario, a ellos les gusta y piden que sea así.

[Ramón]: Bueno, tal vez aquí (en la Facultad de Ciencias) no sea tan necesario proceder como en economía porque como simultáneamente a las asignaturas de matemáticas tiene otras asignaturas donde constantemente están utilizando las matemáticas, entonces, pienso que no sea tan necesario hacerlo de esa forma aquí en Ciencias. En cambio allá (en la Facultad de Economía)..., ¿qué cursos ven ellos donde trabajen las matemáticas? Tal vez el de introducción a la economía, después está el de microeconomía, aunque eso depende del profesor. Hay cursos de microeconomía que los dan totalmente teóricos sin usar ningún instrumento matemático.

A.2.2. Incrementos, Tasas, Optimización[5]

El costo de producción de x unidades diarias de un artículo de consumo masivo es $C(x) = \frac{1}{8}x^2 + 3x + 98$ dólares y el precio para la venta por unidad es $p(x) = 25 - \frac{1}{3}x$ dólares

Preguntas: Las siguientes preguntas están relacionadas con los contenidos matemático y económico en general.

Pregunta 1: A partir de las funciones de costo, $C(x)$, y de precio, $p(x)$, calcular:

a : A partir de la función de costo marginal, calcular el costo de producir la unidad 10. ¿Cuál es el costo real de producir la unidad 10?
Respuesta de 1.a: Para la función de costo, $C(x)$, se tiene que el costo marginal es $C'(x) = \frac{1}{4}x + 3$ dólares, y el costo *aproximado* de producir la unidad 10 es $C'(9) = \frac{1}{4}(9) + 3 = \mathbf{5,25}$ dólares. El costo real de la décima unidad es $C(10) - C(9) = 140,5 - 135,125 =$ **5,375** dólares.

b : Calcule la **función de ingreso marginal**, $\boldsymbol{R'(x)}$, para la situación planteada. Luego, calcule el ingreso que resulta de la venta de la décima unidad. ¿Cuál es el ingreso real derivado de la venta de la unidad 10?
Respuesta de 1.b: En este caso, la **función de ingreso**, **R(x)**, se obtiene a partir del precio, $p(x)$, suministrado. Esto es,

$$\begin{aligned} R(x) &= x \cdot p(x) \\ &= 25x - \tfrac{1}{3}x^2 \end{aligned}$$

Así, el ingreso marginal es $R'(x) = 25 - \frac{2}{3}x$. El ingreso *aproximado* que se obtiene por la venta de la décima unidad es $R'(9) = 25 - \frac{2}{3}(9) = \mathbf{19}$ dólares. El ingreso real generado por la venta de la décima unidad es $R(10) - R(9) = 216,66 - 198 = \mathbf{18,66}$ dólares.

c : Halle el **beneficio** $\boldsymbol{U(x)}$ asociado con la producción de x unidades, calcule el beneficio marginal y determine con éste el beneficio del décimo artículo vendido. ¿Cuál es el beneficio real derivado de la venta del décimo artículo?
Respuesta de 1.c: La **función de beneficio**, $\boldsymbol{U(x) = R(x) - C(x)}$, en este caso es:

$$\begin{aligned} U(x) &= 25x - \tfrac{1}{3}x^2 - (\tfrac{1}{8}x^2 + 3x + 98) \\ &= -\tfrac{11}{24}x^2 + 22x - 98 \end{aligned}$$

En consecuencia, el beneficio marginal es $U'(x) = -\frac{11}{12}x + 22$ y el beneficio *aproximado* generado por la venta de la unidad 10 es $U'(9) = -\frac{11}{12}(9)$

[5]Tomado de Hoffmann y Bradley (2001)

$+\ 22 = \mathbf{13,75}$ dólares. Pero, el beneficio real generado por la venta de la décima unidad es $U(10) - U(9) = 76,16 - 62,875 = \mathbf{13,285}$ dólares.

Discusión: En esta única pregunta subdividida en tres partes, se contempla un aspecto relacionado con la derivada como lo es, la interpretación de la derivada como una "buena" aproximación a la función dada en un entorno; de allí el remarcado de los resultados obtenidos.

En este caso, se puede apreciar en las tres respuestas que los valores real y aproximado para cada una de las situaciones resultan cercanos en los dos primeros casos y no mucho en el tercero.

De acuerdo a tu experiencia, ¿qué conflictos de aprendizaje podrían surgir en el estudiante, el hecho de que una herramienta matemática como la derivada, que él espera sea exacta, difiera en algunos casos en varias décimas? ¿Cómo abordarían ustedes la solución a este conflicto? El $\boldsymbol{x_0 + 1}$ *es mucho. Incrementos (discreto) Vs. derivada (continuo).*

[Ramón]: Mira, la gran mayoría no tendría conflictos porque como te he dicho, de la microeconomía ya ellos saben que la derivada es una aproximación para cualquiera de los tres casos anteriores, por lo menos. El profesor (de microeconomía) les ha explicado que es muy fastidioso tomar la función y hacer todas estas cuentas para luego hacer las restas, ¿de acuerdo? Entonces para ir rápido, los mismos profesores de microeconomía, los que usan las matemáticas, les explican esto y ya muchos de ellos tienen esta parte clara. Es decir, que la derivada es para hacer los cálculos más sencillos, pero que es una buena aproximación para lo que ellos requieren.

[Manuel]: Y que es el comentario que yo te decía anteriormente, que yo no hago mucho hincapié en establecer la diferencia entre R' y la diferencia ésta, $(R(x_0 + 1) - R(x_0))$; es decir, que ellos tomen $R'(9)$ por ejemplo como la diferencia. El 19 con el 18,66 anterior que ellos lo puedan tomar de manera indistinta.

[Ramón]: No sé si pueda agregar algo...?

[Moderador]: Sí, claro.

[Ramón]: ¿Puedo mencionar el nombre de algún autor?

[Moderador]: Sí, por supuesto.

[Ramón]: En el (libro de texto de Louis) Leithold, él toma un ejemplo y hace lo mismo que acá, él deja claro eso. Que se usa la derivada, porque uno puede ir un poco más rápido al momento de hacer los cálculos y aparte de eso; yo me pregunté durante algún tiempo por qué los economistas insisten tanto en el concepto de diferencial y yo llegué a la conclusión que es por eso, simplemente le simplifica el problema. Inclusive, es bueno retomar la interpretación de la derivada como la pendiente (de la recta tangente a la curva en un punto), ya que allí uno deja claro por medio de un dibujo, la diferencia. No sé si recuerdan el dibujito de diferencial, el del triángulo rectángulo.

[Moderador]: Este... ¿Pero entonces tú dices que no estableces la diferencia entre la derivada como aproximación y el valor real de una función en un punto?

[Manuel]: Hago una pequeña observación pero no le doy la relevancia que tú le estás dando. Recuerda que ellos se basan mucho en estimaciones, ahí tienes como ejemplo la Elasticidad de la Demanda.

[Moderador]: Y por ejemplo, Ramón, ¿tú si haces esa observación, esa diferencia?

[Ramón]: Sí, yo sí la hago. Lo que nunca he hecho y que ahora me parece apropiado es hacer lo del dibujo del triángulo que mencioné anteriormente, ya que allí se ve claro...

[Moderador]: ¿Y cómo gestionas tú esta parte de tu clase?, cuéntame un poco qué haces en tu clase.

[Ramón]: Por eso mencioné el Leithold, hago lo mismo que está allí, veo cuál es el valor real y luego hago la derivada y les digo..., bueno..., la derivada no les va a..., lo que hace Manuel, es no es el valor real, pero para efecto prácticos les basta eso. Pero, ¿Y por qué usamos la derivada y no calculamos el valor real? Ah, porque es más rápido calcular una derivada que hacer todos estos cálculos precisos, luego la resta y..., ahora que se me ocurre ilustrar la situación con el toque geométrico del triángulo.

Por otro lado, se incluye la necesidad de obtener una función que represente el ingreso, $R(x)$ (pero en ningún momento se les dice que lo pueden hacer a partir del *precio*, de modo que ellos (los estudiantes) discurran sobre esta situación) para obtener el ingreso marginal a partir de ésta.

Ante esta situación, ¿cómo gestionarían ustedes una actividad de discusión y reflexión con los estudiantes, de manera que se logren los objetivos deseados, estos son: (a) obtener unos resultados a partir de unos datos que no son explícitos, y (b) llegar al concepto de un término económico (ingreso marginal) a partir de otro (precio) mediante una situación económica-matemática?

[Ramón]: La verdad es que nunca había pensado en una situación así...

[Manuel]: Disculpa que te interrumpa pero..., es que ya uno ha introducido esto cuando da el tema de función, en Matemáticas 11, ya uno habla de función de costo, función de ingreso y ya va creando funciones de su interés. Así, obtienes de forma explícita las funciones utilizando los argumentos respectivos para cada situación; por ejemplo, de que beneficio es igual a ingreso menos costo, que el ingreso es el precio por la cantidad de artículo vendidos...

[Moderador]: Disculpa Manuel, pero imagínate que estamos en el tema de funciones.

[Manuel]: Es que mira Luis, una situación como esta del ingreso ellos la manejan muy bien antes de llegar a los cursos de cálculo, incluso por sentido común...

[Ramón]: Este disculpa Manuel, pero por esa razón decía anteriormente que una situación como esta yo nunca me la había planteado. Además, ya ellos han trabajado este ejemplo en concreto en Introducción a la Economía, ya en este curso han trabajado con modelos lineales muy sencillos; es decir, si vendo un artículo, el precio por uno, si vendo dos artículos, el precio por dos y así sucesivamente.

[Manuel]: Y por eso es que uno usa estos conceptos, porque el estudiante ya está familiarizado con estos conceptos. De hecho, para la PINA (Prueba Interna de Admisión) han tenido que estudiar estas situaciones porque a ellos les preguntan cosas elementales pero vinculadas a la economía.

A.2.3. Cuestionario relacionado con la actividad 2

De acuerdo a la actividad que acabamos de realizar y como producto de las opiniones y discusiones en la misma, nos interesa conocer tu opinión sobre algunos puntos que señalamos a continuación:

1. El desarrollar una enseñanza como la que se propone, ¿supone para ti dedicarle más tiempo a los estudiantes y una atención, si se quiere, "personalizada" a estos? Justifica tu respuesta.
2. Tal como está propuesto y tomando en cuenta que la asignatura es de 7 horas (5T + 2P) semanales, ¿cuánto tiempo destinarías para abarcar los temas tratados? ¿por qué? y ¿cuántos problemas de este tipo? ¿por qué?
3. Al implementar actividades como ésta, ¿supone para ti cambios en el sistema de evaluación que actualmente sigues? **Observación**: Si la respuesta es afirmativa, te sugiero que aportes los detalles; si la respuesta es negativa, coméntame sobre tu evaluación actual.
4. ¿Por medio de estas actividades se pueden alcanzar los objetivos que persiguen los libros de texto que tú utilizas o difieren razonablemente? Una breve explicación.

Manuel

Cuestionario relacionado con la actividad 2

De acuerdo a la actividad que acabamos de realizar y como producto de las opiniones y discusiones en la misma, nos interesa conocer tu opinión sobre algunos puntos que señalamos a continuación:

1. El desarrollar una enseñanza como la que se propone, ¿supone para ti dedicarle más tiempo a los estudiantes y una atención, si se quiere, "personalizada" a éstos? Justifica tu respuesta.

No creo que se debe dedicar más tiempo de lo necesario tomando en cuenta que el estudiante ya ha trabajado previamente con los conceptos de costos, ingresos y beneficios.

2. Tal como está propuesto y tomando en cuenta que la asignatura es de 7 horas (5T + 2P) semanales, ¿cuánto tiempo destinarías para abarcar los temas tratados? ¿por qué? y ¿cuántos problemas de este tipo? ¿por qué?

Pienso que con 1 ~~hora~~ para la presentación y 2 horas para la formulación, junto con las 2 horas prácticas, se abarcaría estos temas. También creo que los problemas de este tipo no deben ser mas de 10 por ser problemas sencillos

3. Al implementar actividades como ésta, ¿supone para ti cambios en el sistema de evaluación que actualmente sigues? **Observación**: Si la respuesta es afirmativa, te sugiero que aportes los detalles; si la respuesta es negativa, coméntame sobre tu evaluación actual.

No me parece que debe haber cambios importantes en el sistema de evaluación, con solo añadirles preguntas de los Temas es suficiente.

4. ¿Por medio de estas actividades se pueden alcanzar los objetivos que persiguen los libros de texto que tú utilizas o difieren razonablemente? Una breve explicación.

Los objetivos se alcanzan completamente, sobre todo para los libros con muchas aplicaciones

Ramón

Cuestionario relacionado con la actividad 2

De acuerdo a la actividad que acabamos de realizar y como producto de las opiniones y discusiones en la misma, nos interesa conocer tu opinión sobre algunos puntos que señalamos a continuación:

1. El desarrollar una enseñanza como la que se propone, ¿supone para ti dedicarle más tiempo a los estudiantes y una atención, si se quiere, "personalizada" a éstos? Justifica tu respuesta.

Si, ya que entendemos que cada ejemplo o problema planteado está dividido en "pasos" o "etapas" que deben ser desarrolladas por cada uno de los estudiantes del curso: Cada estudiante puede tener una dificultad distinta en cada "etapa", la cual debe ser resuelta por el profesor. Además, el profesor debe cumplir el papel de "integrar" cada una de las etapas, ya que algunos estudiantes, a pesar de recorrer cada una de las etapas correctamente, podrían no captar hacia dónde conducen las mismas: Cuál es el objetivo del problema o ejemplo considerado.

2. Tal como está propuesto y tomando en cuenta que la asignatura es de 7 horas (5T + 2P) semanales, ¿cuánto tiempo destinarías para abarcar los temas tratados? ¿por qué? y ¿cuántos problemas de este tipo? ¿por qué?

Para un problema de este tipo, al menos 2 horas teóricas y 2 prácticas, para que sean los estudiantes los que resuelvan por cuenta propia, un problema similar. Este tiempo se debe a que la atención al estudiante sería más directa.

3. Al implementar actividades como ésta, ¿supone para ti cambios en el sistema de evaluación que actualmente sigues? **Observación:** Si la respuesta es afirmativa, te sugiero que aportes los detalles; si la respuesta es negativa, coméntame sobre tu evaluación actual.

Si; por ejemplo, en las horas prácticas, al proponer un problema similar al estudiante en las horas ~~prácticas~~ teóricas, se evaluaría mediante dicho problema si el mismo logró un objetivo específico dado.

4. ¿Por medio de estas actividades se pueden alcanzar los objetivos que persiguen los libros de texto que tú utilizas o difieren razonablemente? Una breve explicación.

Creo que los objetivos que persiguen los textos se pueden alcanzar mucho mejor mediante dichas actividades, ya que éstas están mejor "estructuradas" que en los mencionados textos.

A.3. Actividad 3

Hasta este punto del trabajo, hemos trabajado algunos conceptos matemáticos y económicos de manera simultánea. El estudiante calcula derivadas inmediatas, ha estudiado interpretaciones de la derivada, monotonía y extremos relativos.

Regla de la Cadena (Notación e interpretaciones varias)

A continuación se presentan unos problemas relacionados con la regla de la cadena.

A.3.1. Tasas Relacionadas[6]

Una empresa tiene la función de costo $C(x) = 25 + 2x - \frac{1}{20}x^2$ (en cientos de miles de dólares), en donde x es el nivel de producción de la empresa y éste depende del tiempo t. Si el nivel de producción es de $x = 5$ (millones de artículos por año) y está creciendo a una tasa de $0,7$ millones de artículos por año, tomando en cuenta que la capacidad de producción de la empresa no puede superar los 15 millones de artículos por año.

Preguntas: Las siguientes preguntas están relacionadas con los contenidos matemático y económico en general.

Pregunta 1: Determine el dominio de la función de costo $C(x)$ en un contexto matemático general y en el económico en particular. ¿Qué diferencia observa entre uno y otro?

Respuesta de P1: El dominio[7] es el señalado en la **Tabla A.5**.

	$C(x)$
Dominio Mat.	$\mathbb{R}$
Dominio Ec.	$[0, 150]$ $(\{x \in \mathbb{N}_0 : \frac{x}{100000} \leq 150\})$

Cuadro A.5: Dominio del costo, $C(x)$, en dos contextos

Discusión: Aún cuando el costo es una función polinómica cuyo dominio es el conjunto $\mathbb{R}$, en el contexto económico debemos tomar en cuenta que lo menos

[6]Tomado de Arya y Lardner (1987)
[7]$\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, 3, ...\}$

que puede producir la empresa es 0 artículos y el máximo de producción de ésta, tal como se señala en el enunciado, es de 15 millones de artículos por año; y como x está expresada en cientos de miles, el dominio es $[0, 150]$.

En una actividad anterior, una de las preguntas contenía una situación similar. ¿Consideran importante que se debe mantener o reforzar esta diferencia entre los dominios? ¿Por qué?

[Ramón]: Sí.

[Moderador]: Por qué razón, ¿podrías explicar?

[Ramón]: Precisamente porque se está usando la matemática como una herramienta para resolver un problema específico de la economía, entonces..., creo que hicimos el comentario la vez pasada. Cuando uno enseña el dominio de las funciones, generalmente, uno se refiere al dominio de la función en sí o a lo que tú llamas el dominio en el contexto matemático y como estamos insistiendo que se está usando como una herramienta, especificarle que como herramienta sólo tiene sentido en el intervalo ahí señalado que es de 0 a 150, para este problema en particular.

[Moderador]: ¿Y tú, Manuel?

[Manuel]: Que se tiene que estar recordando al estudiante constantemente todos los conceptos matemáticos, relacionar una situación con otra y, en particular, recordarle la diferencia entre estos dos dominios para que ellos no lo olviden y porque le ayuda reforzar los conocimientos, no sé qué más añadir.

Pregunta 2: Calcule la tasa para la cual los costos de producción se están elevando en la actualidad.

Observación: Antes de dar respuesta a esta pregunta conviene introducir la **regla de la cadena**. Para una función y que depende de u y ésta a su vez es una función que depende de x, con y derivable en u y u derivable en x, se tiene que la derivada de y respecto a x ($\frac{dy}{dx}$), se define como

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}}$$

Así, estudiar la razón de cambio de $\boldsymbol{y}$ respecto a $\boldsymbol{x}$ consiste en multiplicar la razón de cambio de $\boldsymbol{y}$ respecto a $\boldsymbol{u}$ por la razón de cambio de $\boldsymbol{u}$ respecto a $\boldsymbol{x}$.

Respuesta de P2: Del enunciado tenemos que $\frac{dx}{dt} = 0{,}7$ (cuando el tiempo se mide en años). El costo marginal está dado por

$$\frac{dC}{dx} = 2 - \frac{x}{10}.$$

Por consiguiente,

$$\begin{aligned}\frac{dC}{dt} &= \frac{dC}{dx}\cdot\frac{dx}{dt}\\ &= (2-\tfrac{x}{10})\cdot\frac{dx}{dt}\end{aligned}$$

Sustituyendo $x = 5$, el nivel de producción actual, obtenemos

$$\begin{aligned}\frac{dC}{dt} &= (2-\tfrac{5}{10})(0,7)\\ &= 1,05.\end{aligned}$$

Por lo tanto los costos de producción se están incrementando a una tasa de 1,05 (cientos de miles) de dólares por año o, dicho de otra manera, en 105000 dólares por año.

Discusión: *En este ejemplo de la regla de la cadena, la derivada de la función interna es parte del enunciado. ¿Utilizan ustedes un problema similar para introducir la regla de la cadena?*

1. $\boxed{\textit{Sí}}$. *¿Por qué?*

2. $\boxed{\textit{No}}$. *¿Lo utilizarían ahora para introducir la regla de la cadena, lo modificarían (¿cómo?) o simplemente lo harían de otra manera (¿por qué?)?*

[Manuel]: No, no, es más; primera vez que veo un problema de ese tipo.

[Ramón]: Yo también.

[Manuel]: Porque yo para la parte de regla de la cadena uso ya las formulaciones matemáticas, las propiedades.

[Moderador]: O sea, ¿tú defines primero la regla de la cadena y luego abordas los problemas?

[Manuel]: En sí, no incluyo la regla de la cadena en el problema así como está acá, sencillamente, para el cálculo de la derivada de una función queda implícita la regla de la cadena, no sé si me explico... De hecho, estoy aprendiendo algo nuevo con este problema.

[Moderador]: Dame detalles...

[Manuel]: Mira, defino la regla de la cadena y hago ejemplos, de allí en adelante el estudiante debe saber diferenciar si para calcular la derivada, se tiene que aplicar la regla de la cadena o no.

[Moderador]: Pero la pregunta es si utilizas un problema como este para introducir la regla de la cadena.

[Manuel]: No, ni siquiera conocía un problema como éste; primera vez que lo veo, te soy sincero.

[Moderador]: ¿Y tú, Ramón?

[Ramón]: Primera vez que veo esta manera de introducir la regla de la cadena con aplicaciones de economía.

[Moderador]: En atención a que la respuesta de ustedes es negativa, ¿intentarían ustedes introducir la regla de la cadena con un problema como éste o piensan que generaría conflictos en el estudiante?

[Ramón]: Al contrario, me parece que esta manera de introducir la regla de la cadena es más sencilla en comparación a como lo hago actualmente.

[Moderador]: ¿Y qué le modificarías al problema?

[Ramón]: No, yo no le modificaría nada, así como está expuesto me parece que tiene una buena estructura.

[Moderador]: Y cuáles serían los beneficios didácticos, desde el punto de vista del aprendizaje, etc...

[Ramón]: Hacerlo así, al menos ellos entenderían cómo usar y en qué consiste la regla de la cadena, porque la experiencia que yo tengo es que hay que identificar, les explico, hay que identificar la función interna, la función externa. Entonces, siempre he tenido la sensación de que ellos al final no comprenden en realidad qué significa la regla de la cadena; es decir, cómo y cuándo usarla. Ni hablar de la interpretación. Mientras que con tu ejemplo quedan bien identificados los dos factores.

[Moderador]: ¿Y tú, Manuel, implementarías o descartarías este problema, o lo modificarías?

[Manuel]: Sí me llama la atención y me atrae, pero como te dije, es primera vez que lo veo y tendría que estudiarlo más a fondo. Ahora, creo que sí se podría utilizar porque de esta manera se evita uno muchas formulaciones, esa es una de las cosas que me atrae y que seguro le gustaría a los estudiantes. Cuando yo introduzco la regla de la cadena, les hablo mucho de composición de funciones, les hago diagramas, que a los estudiantes no les gusta, muchas fórmulas y notaciones, usando el prima y usando la diferencial. Esto, sin embargo, me podría ayudar a separar una cosa de la otra, me parece muy buena idea pero vuelvo y te repito, tengo que madurar el ejemplo porque es primera vez que lo veo.

A.3.2. Utilidad y Publicidad[8]

Un determinado artículo puede fabricarse y venderse con una utilidad o beneficio de \$10 cada uno. Si el fabricante gasta x dólares en la publicidad del artículo, el número de artículos que pueden venderse será igual a $1000(1 - e^{-kx})$, en donde $k = 0,001$. Si U denota la utilidad neta por las ventas y tomando en cuenta que el fabricante no está dispuesto a gastar más de \$8500 en publicidad.

Preguntas: Las siguientes preguntas están relacionadas con los contenidos matemático y económico en general.

Pregunta 1: Calcule $U'(x)$ e **interprete esta derivada**.

Observación: Antes de dar respuesta a estas preguntas conviene introducir la **regla de la cadena**. Para una función f que depende de g y ésta a su vez es una función que depende de x, con f derivable en $g(x)$ y g derivable en x, se tiene que la derivada de f respecto a x ($f'(x)$), se define como

$$\boxed{f'(x) = f'[g(x)] \cdot g'(x)}.$$

Así, estudiar la derivada de ***f*** respecto a ***x*** consiste en multiplicar la derivada de ***f*** respecto a ***g(x)*** por la derivada de ***g*** respecto a ***x***.

Respuesta de P1: Puesto que cada artículo produce una utilidad de \$10, la utilidad bruta total originada por las ventas se obtiene multiplicando el número de ventas por \$10. La utilidad neta se obtiene entonces sustituyendo los costos de publicidad:

$$U(x) = 10{,}000(1 - e^{-kx}) - x.$$

Por lo tanto,

$$U'(x) = -10{,}000 \cdot (e^{-kx})' - 1$$

Y por la regla de la cadena,

$$\begin{aligned} U'(x) &= -10{,}000(-ke^{-kx}) - 1 \\ &= 10{,}000ke^{-kx} - 1 \end{aligned}$$

y como $k = 0,001$ se tiene que

$$U'(x) = 10e^{-0{,}001x} - 1$$

[8]Tomado de Arya y Lardner (1987)

La **interpretación** de esta derivada es que *mide la tasa de cambio de la utilidad neta con respecto a los gastos de publicidad*. En otras palabras, $U'(x)$ da el incremento en el número de dólares en la utilidad neta producida por un gasto adicional (en dólares) en publicidad.

Discusión: A través del problema buscamos que el estudiante descubra la necesidad e importancia de la herramienta (la regla de la cadena), puesto que la función e^{-kx} no tiene derivada inmediata. Una vez discutido con el estudiante y generando entre ellos un diálogo que conduzca a esta regla, el problema se puede atacar sin mayores problemas ¿o no?

Generalmente, la forma tradicional de llegar a la regla de la cadena consiste en definirla y de inmediato hacer ejemplos, en principio, matemáticos que permitan visualizar la regla para posteriormente realizar ejercicios o problemas de aplicación.

¿Consideran ustedes un ejemplo como éste, la manera apropiada para llegar a la regla de la cadena o harían alguna modificación para lograr los objetivos de este tema; como por ejemplo, realizar cambios en la función compuesta o modificarla?

[Ramón]: Sí, sí. La razón es la que tú acabas de explicar, allí aparece una composición. Ahora, abría que hacerle énfasis acá de por qué no se puede derivar usando las reglas que hasta el momento ellos conocen, la suma, el producto, etc. Explicarles por qué no se pueden aplicar estas reglas, es decir, no dejar de plantear esa discusión. Ahora, me parece que es importante aclarar que una función como ésta (la exponencial del problema) no se puede derivar con las reglas anteriores y ya, cuando el estudiante ha entendido que no se puede derivar con estas reglas, pasamos a explicar el esquema que tú planteas y no quedarse sólo con eso, sino que se deben discutir más problemas.

[Moderador]: Manuel, ¿cuál es tu opinión en este sentido?

[Manuel]: Bueno, a mi me parece que el ejemplo es adecuado, de hecho, la función exponencial es clave para la regla de la cadena y para los futuros economistas; en primer lugar, porque con la exponencial ellos cometen errores, entonces es el momento oportuno para aclarar cuál es la derivada y cómo se deriva la función exponencial; por otra parte, los economistas trabajan mucho con la exponencial y el logaritmo. Además, es una función un poco más complicada que los polinomios y como necesitamos trabajar con funciones compuestas, la exponencial y el logaritmo son funciones ideales para esto por sus aplicaciones en la economía; de hecho, en los libros de cálculo para economistas aparece mucho la función exponencial en el tema de regla de la cadena. Además, lo que veo es que sigue en la misma tónica de los ejemplos anteriores, donde motivas al estudiante con un ejemplo.

¿Cuáles son las dificultades que presentan sus estudiantes ante este tipo de problemas?

[Ramón]: A mi juicio, según la experiencia que yo he tenido es que ellos a estas alturas no han aprendido a identificar si una función es compuesta o no. Ahora, no sé si te refieres al enunciado o a este tipo de enunciados...

[Moderador]: También, también...

[Ramón]: Hay algunos que les cuesta asimilar este tipo de problemas y prefieren problemas de cálculo directo; es decir, problemas donde tú le colocas la función y le pides que deriven, pero la mayoría se identifica con este tipo de problemas. Ahora, volviendo a los errores anteriores, con un problema como éste ellos derivan la exponencial de este ejercicio tan igual como si apareciera solo e^x, para ellos es la misma función e^x y e^{-kx}, no ven diferencia, no se dan cuenta de que se trata de una función distinta y que en consecuencia merece un tratamiento distinto; es decir, no se dan cuenta que se trata de una composición de funciones. No sé cuál será la razón o la causa, pero cuando llegan a Matemáticas 21, la mayoría de ellos no logran identificar cuándo una función es composición de funciones, creo que no han desarrollado la habilidad suficiente para identificar ese tipo de funciones.

[Manuel]: Por eso es que, yo, este ejemplo lo veo muy adecuado porque, de alguna manera, se solventa ese inconveniente que ellos tienen, de ver una función como composición de otras. Con este ejemplo donde tú hablas de una variable dependiendo de otra me parece muy adecuado, yo la diferencia que veo; en general, hasta ahora con las discusiones que hemos tenido es que tú detallas mucho más que yo el planteamiento y desarrollo del problema.

[Moderador]: ¿Y tú ves los mismos errores que observa Ramón en sus estudiantes?

[Manuel]: Sí, la mayor dificultad se centra en que no saben diferenciar cuándo una variable depende de otra.

[Moderador]: Y por ejemplo, ¿qué estrategias siguen o seguirían ustedes para resolver esta problemática?

[Manuel]: Mira yo, fundamentalmente, me ayudo en esta parte hablando de variables más que de funciones, hablo de x, y, z en lugar de $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$. Que el equivalente aquí en el ejemplo que tú planteas, sería ayudarse con las cantidades; es decir, que la x que representa los niveles de producción dependen de la publicidad y la publicidad depende del tiempo, entonces uno podría ayudarse con eso.

[Moderador]: ¿Y tú, Ramón, cómo solventas o solventarías esa dificultad?

[Ramón]: ¿El de la composición o el de la regla de la cadena?

[Moderador]: El de la composición.

[Ramón]: Trabajar con las funciones de economía o al menos con las que aparecen en los libros de economía y hacer composiciones entre ellas y estar un tiempo con ellos para que practique y desarrollen esa habilidad de identificar la función interna y externa.

[Moderador]: Y tal como está presentado este problema, ¿creen ustedes que sería una buena idea para solventar estas dificultades?

[Ramón]: ¿Para lo de la composición o para la regla de la cadena?

[Moderador]: Para la composición.

[Ramón]: No, para la composición no, porque aquí estamos presuponiendo, al menos yo, que conocen bien la composición, que manejan bien la composición.

[Moderador]: Y en tu caso, ¿también lo descartas Manuel?

[Ramón]: Ojo, disculpa que interrumpa, yo no lo descarto, lo que estoy diciendo es que para trabajar la composición no es el adecuado, para trabajar la regla de la cadena sí.

[Manuel]: Mira, yo creo que se le puede sacar provecho, pero hay que estudiarlo y discutirlo con calma, ahora mismo no se me ocurre como modificarlo, si es necesario, para trabajar el tema de composición.

Pregunta 2: ¿Será cierto que mientras más se invierta en publicidad, mayor será la utilidad? Como respuesta parcial a esta pregunta, evalúe $U'(x)$ en $x = 1000$ y en $x = 3000$. **Interprete los resultados**.

Respuesta de P2: Conviene prestar atención a los dos casos que se estudian a continuación.

Cuando $x = 1000$,

$$U'(1000) = 10e^{-1} - 1 = 10(0,3679) - 1 = 2,679.$$

Para el caso en que $x = 3000$,

$$U'(3000) = 10e^{-3} - 1 = 10(0,0498) - 1 = -0,502.$$

Discusión: De modo que si se gastan $1000 en publicidad, **cada dólar adicional produce un incremento** de $2,68 en la utilidad neta. Mientras que si se gastan $3000 en publicidad, **cada dólar adicional produce una disminución** de $0,50 en la utilidad neta. En este caso es claro que el fabricante no debería hacer más publicidad (el costo de publicidad extra incrementaría en exceso el valor de las ventas adicionales que se generarían). De hecho, cuando $x = 3000$, **ya se está gastando de más en publicidad**.

¿Y si se invierten $2.000 en publicidad, o $2.100?

¿Consideran ustedes que este planteamiento tiene aspectos innovadores, en materia de enseñanza, que permite al estudiante la maduración y consolidación del concepto, así como la utilidad de esta herramienta en el campo de las ciencias económicas? ¿Por qué?

[Manuel]: Yo lo uso bastante porque se aproxima uno a los puntos críticos, a los máximos y mínimos, porque cuando voy a hablar...; es decir, hay distintos momentos, dependiendo de la cantidad de la producción que hace, hay distintos momentos del ingreso, entonces eso es lo importante de la derivada, que me va a dar esos numeritos, de cómo voy a ajustar esos niveles de producción. Fíjate, como tú dices, yo puedo hablar de 2000, puedo usar 1500, entonces se le da esa pregunta al alumno; bueno pero, cuál sería el valor más apropiado que tendría que usar, buscar el nivel óptimo. Entonces allí es donde aparece el problema de optimizar la función de ingreso o la que esté en discusión. Yo uso mucho este tipo de actividad.

[Moderador]: Y en tu caso Ramón, ¿qué nos puedes decir?

[Ramón]: En el mismo sentido de Manuel, pero un poco más general como lo he dicho desde la primera sesión. Siempre, lo que he visto en los estudiantes de la Facultad de Economía, ellos cuando se les muestra cómo se usan estas herramientas en economía, ellos se sienten mucho más motivados a estudiar las partes de las matemáticas o esa parte de las matemáticas que se está usando para esa aplicación. Tal vez el profesor podría usar los conceptos matemáticos en esa aplicación; por ejemplo, lo que mencionó Manuel, que en cada uno de los valores sucede algo particular; o sea, para distintos valores de la variable independiente notemos qué es lo que sucede con estas otras cantidades.

[Moderador]: ¿Podrías detallar un poco más?

[Ramón]: Mira..., en este problema tú planteas preguntas que pondrán a dudar al estudiante, ellos se harán preguntas y se motivarán a estudiar el tema de monotonía..., hay muchos estudiantes curiosos, al menos en mis cursos... Con este problema abres las puertas al tema de monotonía.

En un seminario similar, cuando pregunté si este tipo de preguntas conducen o promueven el estudio de monotonía de una función (crecimiento y decrecimiento) y más aún de extremos relativos (máximos y mínimos); uno de los participantes en el seminario mantuvo firme objeción a mi planteamiento y utilizó dos o tres argumentos, por el contrario, los otros participantes vieron con buenos ojos nuestra propuesta y uno dijo que intentaría ponerla en práctica y experimentar un poco *por eso de la motivación*.

Me gustaría conocer la opinión de ustedes al respecto; es decir, este hecho particular de evaluar la función de utilidad en dos puntos que nosotros sabemos que dan

interpretaciones contrarias, ¿promueven el estudio de monotonía de una función y el interés por los estudiantes?

[Moderador]: Incluso, quiero hacer un paréntesis referente al término "motivación", porque entiendo que tal como ustedes lo mencionan, consideran más estos problemas como motivadores que como generadores de aprendizaje en concreto...

[Manuel]: No, no, creo que estás interpretando mal el asunto...

[Ramón]: Motivación como nosotros la entendemos es, motivar para que ellos se pongan a estudiar eso y lo que nosotros hemos observado es que se ponen a estudiar y aprenden la herramienta matemática aparte de la interpretación económica. No sé si es la misma opinión de Manuel...

[Manuel]: Claro, claro...

[Ramón]: Ahora, volviendo a la monotonía [de la función], de repente sería conveniente, una vez que..., si es el profesor el encargado de hacer este par de cálculos que están acá, dejarle unos cuantos más a los estudiantes, tal vez eso podría promover la idea de monotonía...

[Manuel]: Yo estoy de acuerdo con dejarle muchos más. Incluso, ellos mismos se podrían preguntar, de estos distintos valores, cuál será el que mejor me conviene. Porque fíjate que estos son valores de la derivada y eso da respuesta es acerca de la función de utilidad que está en el ejemplo. Ahora, algo que me parece bueno de tu ejemplo es que das dos puntos, de los cuales tú sabes que uno tiene un resultado positivo y el otro negativo, de esta manera debe quedar la inquietud del estudiante, ¿habrá un punto que haga 0 a la función?, en este caso a la derivada, ¿qué ocurre matemáticamente aquí? Con esto se estaría introduciendo al estudiante en los puntos críticos. Aquí se estudia el cambio de signo de la derivada en los intervalos que da el problema y eso induce el estudio de puntos críticos y de función creciente y decreciente, de monotonía pues...

[Moderador]: Justamente lo que se busca es que el estudiante se haga este tipo de cuestionamiento, el detalle es que éste no está preparado o no lo hemos preparado para esta actividad.

[Ramón]: No te creas, mientras tú le hagas preguntas o los dejes en situaciones medio complicadas, siempre hay alguno que no se calla y pregunta, el detalle es que generalmente son siempre los mismos.

A.3.3. Análisis e Interpretación Econ-Mat[9]

Suponga que el costo total (en dólares) de fabricación C en cierta fábrica es una función que depende de las q unidades producidas, que a su vez es una función que depende del tiempo, t, que representa las horas durante las cuales ha estado funcionando la fábrica.

Preguntas: Las siguientes preguntas están relacionadas con los contenidos matemático y económico en general.

Pregunta 1: ¿Qué cantidad se representa mediante la derivada $\frac{dC}{dq}$? ¿En qué unidades se mide esta cantidad?

Observación: Antes de dar respuesta a estas preguntas conviene introducir la **regla de la cadena**. Para una función y que depende de u y ésta a su vez es una función que depende de x, con y derivable en u y u derivable en x, se tiene que la derivada de y respecto a x ($\frac{dy}{dx}$), se define como

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}}$$

Así, estudiar la razón de cambio de $\boldsymbol{y}$ respecto a $\boldsymbol{x}$ consiste en multiplicar la razón de cambio de $\boldsymbol{y}$ respecto a $\boldsymbol{u}$ multiplicada por la razón de cambio de $\boldsymbol{u}$ respecto a $\boldsymbol{x}$.

Respuesta de P1: La expresión $\frac{dC}{dq}$ representa la razón de cambio del costo C respecto al número de unidades producidas q. Esta cantidad se mide en dólares/unidades.

Pregunta 2: ¿Qué cantidad representa la expresión $\frac{dq}{dt}$? ¿En qué unidades se mide esta cantidad?

Respuesta de P2: La expresión $\frac{dq}{dt}$ representa la razón de cambio de las unidades producidas q respecto al tiempo t. Esta cantidad se mide en unidades/horas.

Pregunta 3:¿Qué cantidad representa la expresión $\frac{dC}{dt} = \frac{dC}{dq}\frac{dq}{dt}$? ¿En qué unidades se mide esta cantidad?

Respuesta de P3: La expresión $\frac{dC}{dt} = \frac{dC}{dq}\frac{dq}{dt}$ representa la razón de cambio del costo C respecto al tiempo t. Esta cantidad se mide en dólares/horas.

Discusión: Para finalizar el tema de la regla de la cadena, discutamos ahora sobre una pregunta como ésta, de corte teórico, donde las exigencias de análisis

[9]Hoffmann y Bradley (2001)

e interpretación, tanto económico como matemático, son mayores que aquellas de contenido numérico.

¿Conduce al estudiante a una actitud de rechazo este tipo de problemas?

[Ramón]: A qué te refieres con eso de "*corte teórico*" que dijiste antes.

[Moderador]: Bueno, problemas que centran su formulación en variables más que en números y donde la interpretación matemática o económica juega un papel fundamental, fíjate que en las tres preguntas relacionadas con este problema no hay números. Entonces, la pregunta es, cuando colocas un problema como este, ¿los estudiantes de ciencias económicas manifiestan algún tipo de rechazo o se indisponen?

[Ramón]: Te voy a hablar de mi experiencia particular. No, a ellos más bien le agrada este tipo de problemas, aunque te puedo decir que es de cierto tiempo para acá, hace unos diez años o más esto era impensable, tanto por el profesor como por los estudiantes, pero desde que dos profesores comenzaron a hablar de aplicaciones y rompieron con ese esquema del cálculo tradicional, los estudiantes y algunos profesores nos fuimos cambiando al tema de las aplicaciones.

[Moderador]: Y tú, Manuel, ¿opinas igual que Ramón o puedes agregar algo más?

[Manuel]: Mira, no... Los estudiantes no sienten rechazo por problemas como estos, pero te hago la siguiente observación, más bien relacionada con un error común en los estudiantes cuando le colocas la regla de la cadena como aparece en la tercera pregunta ($\frac{dC}{dt} = \frac{dC}{dq}\frac{dq}{dt}$). Generalmente, ellos cancelan el "dq", por eso yo trabajo más con la otra notación [con la de Newton], sobre todo para introducir la regla (de la cadena).

¿Un problema como éste, conduce a cubrir los objetivos que se plantean los libros de texto que ustedes utilizan?

[Ramón]: ¿Te refieres a los objetivos de los libros o a los de los programas de la materia?

[Moderador]: A los de los libros, recuerda que el libro tiene una estructura y el autor persigue unos objetivos; por ejemplo, explotar la parte visual, la parte numérica, las aplicaciones, etc...

[Ramón]: Mira, ahora el que me viene a la memoria es el libro de (Louis) Leithold, donde habla de los cocientes incrementales, pero en general y según mi opinión, los libros no desarrollan tanto o con tanto detalle el tema de la derivada o cualquier otro tema en general. Pienso que; en general, se cumplen los objetivos de los libros y un poco más...

[Manuel]: Pero recuerda que los libros de texto son eso, libros de texto, pienso más bien, que es tarea del profesor o del estudiante, profundizar en el tema que se estudie; además, pienso también que esto que tú nos presentas aquí es más bien como una guía de estudios, donde se va paso a paso desarrollando el tema. Ahora bien, conociendo (tú) bien la situación de la universidad, donde hay muchos alumnos por curso, pocos profesores, el tiempo, etc., ¿crees tú qué se puede desarrollar un curso de matemáticas de esta manera?

[Moderador]: Te respondo con una pregunta, ¿es que acaso el ser humano no experimenta cambios constantemente?, o más directo, ¿consideras tú que el estudiante no merece una mayor y mejor atención por parte de nosotros? Ramón dijo, hace un instante, que hace diez o más años, no recuerdo, las cosas eran distintas. Entonces, ¿por qué no seguir cambiando para mejor? Pero sigamos con el guión de la discusión.

¿Un problema como éste, sería ideal para preguntarlo en una evaluación del tema de derivadas?

[Ramón]: Sí.

[Moderador]: ¿Por qué, Ramón?

[Ramón]: Repito algo que hemos dicho varias veces, si tú le estás enseñando matemáticas a un estudiante de economía, lo mejor sería hacerlo de la manera como se ha puesto en estos problemas, ya que lleva de manera paralela la parte matemática y los conceptos económicos en los cuales se usa ese instrumental matemático...

[Manuel]: Preguntarle sobre la interpretación estoy de acuerdo. Ahora, preguntarle tal como está aquí, yo no lo preguntaría porque tú resaltas más la interpretación económica y lo de las unidades y yo no le veo mucha importancia a eso. Bueno, sí la tendrá, pero no para enseñar derivada, que es lo que uno quiere, que el estudiante aprenda a derivar...

[Moderador]: Disculpa que te interrumpa, dentro de los objetivos que tú planteas en tus cursos, a qué le das más peso o qué crees tú que es más importante, calcular derivada o hacer interpretaciones de la derivada.

[Manuel]: Calcular derivada y hacer interpretaciones, pero no interpretaciones de este tipo, donde hay unidades; por ejemplo, un problema como éste no lo utilizaría para un examen.

[Moderador]: Pero ¿a qué le das más peso, a que el estudiante sepa interpretar una derivada o que el estudiante sepa calcular una derivada?

[Manuel]: A calcularla..., yo soy matemático...

[Ramón]: Yo le daría igual peso a las dos... me parece apropiado. Inclusive...

[Manuel]: Bueno, tú me estás preguntando, ¿a eso o a lo otro?

[Moderador]: Pero tranquilo, yo respeto la opinión de cada uno de ustedes, mi intención aquí no es cuestionar la opinión o el punto de vista de ustedes sobre su labor profesional. Sino que mientras más opiniones tenga yo de ustedes mucho mejor para la investigación que estoy realizando. De hecho, agradezco la sinceridad y espontaneidad de ustedes en sus opiniones.

A.3.4. Cuestionario relacionado con la actividad 3

De acuerdo a la actividad que acabamos de realizar y como producto de las opiniones y discusiones en la misma, nos interesa conocer tu opinión sobre algunos puntos que señalamos a continuación:

1. Respecto a la forma actual que sigues en tus cursos de cálculo para enseñar la *regla de la cadena*, ¿podrías destacar algún aspecto relevante que incida en el aprendizaje del estudiante al implementar una actividad como ésta?
2. De los tres problemas presentados anteriormente, ¿cuál supone para ti de mayor relevancia didáctica?, es decir, ¿cuál de estos te permitiría lograr los objetivos propuestos para tus estudiantes? ¿por qué?
3. De las dos notaciones que se usaron para la derivada en los tres problemas anteriores, ¿cuál de las dos utilizas en tus clases? ¿Por qué?
4. Hay investigadores en didáctica que consideran que el relacionar una actividad que vincule contenidos matemáticos con otras áreas sólo tienen un valor **motivador**. ¿Tú concibes una actividad como ésta de igual forma o te parece sugerente como generadora de conocimiento en ambas direcciones? ¿Por qué?
5. ¿Este tipo de actividad, te obliga a romper con los esquemas que actualmente mantienes en tus clases? ¿Por que?
6. Para introducir y desarrollar la *regla de la cadena*, ¿cuál es esquema que sigues actualmente?

Manuel

Cuestionario relacionado con la actividad 3

De acuerdo a la actividad que acabamos de realizar y como producto de las opiniones y discusiones en la misma, nos interesa conocer tu opinión sobre algunos puntos que señalamos a continuación:

1. Respecto a la forma actual que sigues en tus cursos de cálculo para enseñar la *regla de la cadena*, ¿podrías destacar algún aspecto relevante que incida en el aprendizaje del estudiante al implementar una actividad como ésta?

Pienso que es muy importante que se haya destacado el significado práctico de la regla de la cadena. Es decir, estudiar la razón de cambio como producto de razones de cambio me parece muy innovador.

2. De los tres problemas presentados anteriormente, ¿cuál supone para ti de mayor relevancia didáctica?, es decir, ¿cuál de éstos te permitiría lograr los objetivos propuestos para tus estudiantes? ¿por qué?

Desde el punto de vista didáctivo, la tercera actividad engloba los objetivos propuesto porque resume los conceptos matemáticos y económicos.

3. De las dos notaciones que se usaron para la derivada en los tres problemas anteriores, ¿cuál de las dos utilizas en tus clases? ¿Por qué?

Siempre trato de utilizar las dos notaciones clásica de la derivada: y' y dy/dx porque son las más utilizadas en los libros y la que los estudiantes están acostumbrados en los cursos anteriores. Sin embargo, en los problemas aplicados considero importante utilizar la notación de la función involucrada. Esto es, si estamos hablando de función C el costo y C' o dC/dx para el costo marginal.

4. Hay investigadores en didáctica que consideran que el relacionar una actividad que vincule contenidos matemáticos con otras áreas sólo tienen un valor **motivador**. ¿Tu concibes una actividad como ésta de igual forma o te parece sugerente como generadora de conocimiento en ambas direcciones? ¿Por qué?

No estoy de acuerdo, considero que es necesario involucrar las aplicaciones en el aprendizaje de la matemática.

5. ¿Este tipo de actividad, te obliga a romper con los esquemas que actualmente mantienes en tus clases? ¿Por que?

No, pienso que mientras más aplicaciones se utilicen para el aprendizaje de la matemática mayor será el interés del estudiante por aprenderla.

6. Para introducir y desarrollar la *regla de la cadena*, ¿cuál es esquema que sigues actualmente?

Utilizo el esquema tradicional de la fórmula para derivar una función compuesta. Luego de desarrollar las propiedades es que realizo las aplicaciones.

Ramón

Cuestionario relacionado con la actividad 3

De acuerdo a la actividad que acabamos de realizar y como producto de las opiniones y discusiones en la misma, nos interesa conocer tu opinión sobre algunos puntos que señalamos a continuación:

1. Respecto a la forma actual que sigues en tus cursos de cálculo para enseñar la *regla de la cadena*, ¿podrías destacar algún aspecto relevante que incida en el aprendizaje del estudiante al implementar una actividad como ésta?

Creo que un aspecto relevante es la forma cómo se explica el uso de la regla de la cadena de la pregunta 2, ya que con ~~el~~ la mencionada pregunta, se explica de una manera sencilla y rápida el uso de la regla de la cadena.

2. De los tres problemas presentados anteriormente, ¿cuál supone para ti de mayor relevancia didáctica?, es decir, ¿cuál de éstos te permitiría lograr los objetivos propuestos para tus estudiantes? ¿por qué?

Cada uno de los problemas me parecen muy adecuados, en vista que:

(a) Explican en forma rápida y sencilla el uso de la regla de la cadena.

(b) Dicha explicación se hace a partir de la tasa de cambio, lo que tiene relevancia en Economía.

(c) Mediante alguno de dichos problemas se hace ver la necesidad de la regla de la cadena: Con las propiedades de la derivada vistas hasta el momento, no se puede derivar la composición de dos funciones.

3. De las dos notaciones que se usaron para la derivada en los tres problemas anteriores, ¿cuál de las dos utilizas en tus clases? ¿Por qué?

Usaría ambas notaciones, debido a que la notación $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$ hace referencia a la tasa de cambio (aplicación a la Economia) y la notación $f' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$ le explica al estudiante que la regla. de la cadena sirve para derivar composición de funciones.

4. Hay investigadores en didáctica que consideran que el relacionar una actividad que vincule contenidos matemáticos con otras áreas sólo tienen un valor **motivador**. ¿Tu concibes una actividad como ésta de igual forma o te parece sugerente como generadora de conocimiento en ambas direcciones? ¿Por qué?

Me parece sugerente como generado-
ra de conocimiento en ambas direcciones; pero
una vez que ha concluido la actividad que
vincula el contenido matemático con otra
~~actividad~~ área del conocimiento, el profe
sor debe explicar que parte de dicha ac-
tividad es propia de cada área: El estu-
diante debería ~~de~~ comprender que la
Matemática es un instrumento que es
necesario dominar, para que por medio
de ella pueda generar modelos en otras
áreas de estudio.

5. ¿Este tipo de actividad, te obliga a romper con los esquemas que actualmente mantienes en tus clases? ¿Por que?

Sí obliga a romper mi esquema
de exposición, porque lo que he hecho
siempre es que primero explico el
contenido matemático, sin hacer
referencia a la Economía, y luego
se tratan en clase alguno ejercicios
sencillos del uso del uso del instrumen-
tal matemático en la Economía.

6. Para introducir y desarrollar la *regla de la cadena*, ¿cuál es esquema que sigues actualmente?

a) Recuerdo qué es la composición de dos funciones.

b) Hago ejercicios para que los estudiantes traten de identificar la función interna y la externa de una composición.

c) Se explica mediante ejemplos, que <u>no</u> deben confundir la composición de funciones con el producto de funciones.

d) Se usa la regla de la cadena, haciendo énfasis en la identificación de la función externa e interna, en cada uno de los ejemplos considerados en clase.

A.4. Actividad 4

Mediante esta actividad se busca profundizar y consolidar conceptos matemáticos y económicos relacionados con el cálculo diferencial y otros conceptos básicos de las matemáticas o situaciones "rutinarias" como el despejar una ecuación no común o el trabajo con diversas unidades de medición, después de haber desarrollado durante varias semanas un trabajo con los estudiantes en el tema de la derivada.

A.4.1. Análisis e Interpretación Econ-Mat 1[10]

El valor de cierto cultivo de frutas (en dólares) es $\mathcal{V} = \mathcal{A}(1 - e^{-kI})$ donde $\mathcal{A}$, k son constantes positivas e I es el número de libras por hectárea de insecticida con que se fumiga el cultivo. Si el costo de fumigación está dado por $C = BI$, con B una constante (precio del insecticida).

Preguntas: Las siguientes preguntas están relacionadas con los contenidos matemático y económico en general.

Pregunta 1: Encuentre el valor de I que hace a $\mathcal{V} - C$ máxima.

Respuesta de P1: Como $\mathcal{V} = \mathcal{A}(1 - e^{-kI})$, se tiene que $\mathcal{V} - C = \mathcal{A}(1 - e^{-kI}) - BI$.

Así,

$$\frac{d}{dI}(\mathcal{V} - C) = \mathcal{A}k(e^{-kI}) - B$$

Por lo tanto, para $I = \frac{-1}{k}\ln(\frac{B}{\mathcal{A}k})$, $\mathcal{V} - C$ alcanza un máximo.

Discusión: El problema aquí planteado exige más conocimientos que los planteados hasta el momento, en este caso se obliga al estudiante a manejar herramientas de análisis matemático, trabajar con funciones exponenciales, entre otras. Aún cuando el contexto es económico, todo el planteamiento y resolución del mismo (hasta aquí) es matemático.

¿Qué aportes tiene este tipo de problemas en el aprendizaje de los estudiantes?

[Ramón]: Un momento, aclárame algo porque no sé si te interpreté bien, ¿ya se ha visto, previamente, en un contexto general cómo encontrar los máximos de una función y que la función esté asociada a alguna aplicación de la economía?

[Moderador]: Te explico, esta sesión es una continuación de las tres anteriores, con lo cual, ya hemos trabajado la introducción de la derivada, cálculo de

[10]Tomado de Arya y Lardner (1987)

derivada, estudios de valores extremos, puntos críticos, análisis marginal; pero además, debemos tomar en cuenta que las sesiones no necesariamente son una clase, sino que cada sesión puede tomar más de una clase sin olvidar que el profesor presenta una lista de problemas y ejercicios a sus estudiantes para reforzar lo discutido en clase. Por otra parte, el estudiante ha asistido a consultas con el profesor, etc. Entonces, para cerrar el tema de la derivada nosotros presentamos estos problemas con el fin de discutir su pertinencia en varios aspectos; en este caso, hablemos de los aportes que pueda tener este tipo de problemas en el aprendizaje de los estudiantes.

[Ramón]: Bueno, el hecho de cerrar un tema en la misma línea en la que se ha desarrollado todo el tema me parece que es ideal para reforzar sus conocimientos, aunque yo haría la siguiente observación: veo que el problema está muy recargado en la formulación; es decir, muchas letras y ningún número y eso no le agrada a muchos estudiantes. Sin embargo, al estar recargada la formulación ellos se verían en la obligación de prestar mayor atención al problema y de esta manera, tienen que identificar mejor cuáles son las variables y cuáles son las constantes. En general, es un problema con más exigencia que los anteriores que obliga al estudiante a pensar más y en consecuencia debe reforzar sus conocimientos.

[Moderador]: Y tú, Manuel, ¿qué opinas al respecto?

[Manuel]: En primer lugar, veo que con este problema se le exige al estudiante un mayor nivel de manipulación algebraica; por otra parte, este problema resume todo o engloba todo lo anteriormente visto, parte de aplicaciones, la parte matemática, las dos cosas al mismo tiempo, porque aquí el estudiante tiene que volver a las manipulaciones, igualar una ecuación a 0, en despejar una variable y cosas como estas reafirma más su conocimiento.

¿Qué dificultades supone este tipo de problemas para el estudiante?

[Manuel]: Por experiencia, ellos son muy malos despejando y este problema les hace despejar una variable que forma parte del argumento de una función exponencial. Allí, más de uno se frustraría, eso los vuelve loco a ellos. En este caso uno debe detenerse bastante a explicarles esto; de hecho, en los exámenes ellos se equivocan mucho despejando...

[Moderador]: ¿Y qué dificultades observas tú, Ramón?

[Ramón]: En general, son las mismas que mencionó Manuel, por eso mencionaba lo de recargado, a ellos les cuesta mucho identificar las variables, las constantes en una función así, entonces para el momento de despejar se pueden equivocar.

Pregunta 2: ¿Para las siguientes condiciones, $0 < \mathcal{A}k < B$ y $0 < B < \mathcal{A}k$, cuál de las dos le da sentido a la situación anterior? Justifique su respuesta.

Respuesta de P2: En el caso en que $0 < \mathcal{A}k < B$, se tiene que $0 < 1 < \frac{B}{\mathcal{A}k}$. Por lo tanto, $I < 0$. Aunque desde el punto de vista matemático, este resultado es válido; desde el punto de vista económico no lo es, puesto que I representa el número de libras por hectáreas.

En el caso en que $0 < B < \mathcal{A}k$, se satisface $0 < \frac{B}{\mathcal{A}k} < 1$. Por lo tanto, $I > 0$ y esto tiene sentido tanto matemático como económico.

Discusión: En esta tarea aparecen condiciones algebraicas para estudiar el comportamiento de la función y su sentido dentro de dos contextos, no obstante, me he encontrado con profesores de cálculo que no comparten mi opinión.

Relacionar tareas teóricas contextualizadas de derivada y manipulaciones algebraicas, ¿qué incidencias tienen en el aprendizaje matemático y económico en los estudiantes?

[Manuel]: Pero Luis, siempre en los cursos es lo que se ha hecho para todos los temas, tú tienes que hacer que el estudiante piense, entonces la cuestión no consiste en darle una fórmula para que sustituya unos valores en ella, para que el estudiante aprenda a razonar tú tienes que darle otras posibilidades...

[Moderador]: Pero entonces, ¿crees tú que este tipo de problema les obliga o les conduce a pensar, a analizar...?

[Manuel]: Claro, por supuesto, esto les obliga a entender mejor las fórmulas y ese tipo de cosas... A mi me parece muy adecuado estudiar esto... Y acuérdate que esto lo que está es relacionando la situación real de mi problema con la situación, vamos a decir, matemática. Se están destacando los dos casos...

[Moderador]: Los dos contextos, el matemático y el económico...

[Manuel]: Exacto, los dos contextos. Entonces me parece muy bien que se haga esta observación y usando... Otra vez volver a las manipulaciones algebraicas.

[Moderador]: Y, ¿cuál es tu opinión Ramón, estás de acuerdo con Manuel?

[Ramón]: Sí, porque hay que insistir en la matemática como un instrumento, ¿de acuerdo? Por ejemplo, muchos cursos de matemáticas y aquí en la Facultad de Economía en particular, en los primeros cursos, uno de los primeros temas es el de desigualdades, y aquí es donde se ve la utilidad de ese tema, es decir, el estudiante tiene una herramienta mediante la cual puede descubrir, cuál es el dominio, cuál es la parte de ese dominio donde tiene sentido este modelo o la función como un modelo.

A.4.2. Análisis e Interpretación Econ-Mat 2[11]

Sea Q la cantidad que minimiza el costo total T debido a la obtención y almacenamiento del material por cierto período. El material demandado es de 10.000 unidades por año; el precio al costo del material es de \$1 por unidad; el costo de volver a llenar la existencia de material por orden, sin importar el tamaño Q de la orden es del 12,5 % del valor promedio de las existencias($Q/2$).

Pregunta 1: Pruebe que $T = 10{,}000 + \frac{250{,}000}{Q} + \frac{Q}{16}$.

Respuesta de P1: En efecto,

$$\begin{aligned} 10{,}000 &= 10{,}000 \times 1 \\ \frac{250{,}000}{Q} &= \frac{25 \times 10{,}000}{Q} \\ \frac{Q}{16} &= \frac{12{,}5}{100} \times \frac{Q}{2} \end{aligned}$$

Discusión: Aún cuando en la tarea, se le pide al estudiante que demuestre, la actividad se centra en generar un modelo a partir de unos datos establecidos.

¿Cómo gestionas o gestionarías tus clases ante actividades como estas, en las que es frecuente que los estudiantes presenten dificultades para visualizar y llegar al modelo solicitado y en consecuencia, construir un conocimiento del contenido en ambos contextos (económico y matemático)?

[Ramón]: Yo creo que siguiendo la tradición y, cuál es la tradición, incluso desde que uno fue estudiante. Te plantean un problema, no sé si ustedes recuerdan el de parcelar un área con la mínima cantidad de alambre que implique el mínimo costo... eh... de una superficie rectangular. Entonces, tomar problemas similares a ese, claro, que su contexto sea económico, exponer varios de esos problemas, dos o tres problemas de esos bajo la esperanza de que ellos vean cuál es el mecanismo. Tal vez en la exposición uno destaque algunos pasos y después proponerle a ellos esos problemas y después dejarlos para ver qué es lo que hacen.

[Moderador]: Y tu opinión Manuel, ¿cómo...?

[Manuel]: Bueno, así como está planteado acá, donde deducen la función, me parece muy bien, yo no veo... Tu pregunta viene si yo lo haría de esta manera, si debo reafirmar esto o qué...

[Moderador]: No; te explico, cuando al estudiante se le pide construir un modelo económico a través de una expresión matemática o uno mismo cuando

[11] Tomado del Arya y Lardner (1987)

fue estudiante o incluso, hoy en día uno mismo haciendo una investigación, el crear un modelo no es una tarea sencilla, todo lo contrario, generalmente resulta difícil, eso tiene un grado de dificultad. Entonces, trabajar sobre la creación de modelos, sobre la formulación de modelos económicos a través de formulaciones matemáticas como éste, por ejemplo, salvando los detalles que faltan como decir que el costo total es igual al costo variable más el costo fijo; por eso los 10.000 más la otra parte, este... Trabajar con este tipo de modelos no es una tarea sencilla, incluso enseñar a modelizar no es una tarea sencilla...

[Manuel]: Claro, cada problema o modelo tiene un razonamiento particular...

[Moderador]: Entonces, volviendo a la pregunta, ¿cómo gestionarías tú, cómo darías una clase en la que trabajas la modelización?

[Manuel]: Bueno, se puede comenzar con un problema como éste, este es un problema tradicional dentro del campo de la economía, construir la función de costo fijo más costo variable que es lo que nosotros siempre hacemos...

[Moderador]: De acuerdo, entonces cuéntame un poco cómo manejas esta situación en clase.

[Manuel]: Bueno, planteo el problema, luego se deben hacer ciertos razonamientos según el problema, en un caso como este de la función de costo lo que hay que hacer es el razonamiento rutinario... ¿No sé si te respondí la pregunta?

[Moderador]: Mira, yo quiero enseñar modelización, entonces quiero que me cuentes con qué problema iniciarías tu clase, qué estrategias seguirías y por qué, etc...

[Manuel]: Yo baso mis estrategias en el razonamiento que se le debe hacer a cada problema, incluso en la lógica que lleva el mismo problema; ahora bien, de un problema en particular no me acuerdo en este momento...

Pregunta 2: Encuentre el tamaño del lote económico y el costo total T correspondiente a tal valor de Q.

Respuesta de P2: Dado que Q es la cantidad que minimiza a T, calculamos la derivada de T respecto a Q; es decir,

$$T' = -\frac{250{,}000}{Q^2} + \frac{1}{16}.$$

Así, $T' = 0 \Leftrightarrow Q = \pm 2{,}000$, pero nos quedamos con $Q > 0$ por estar hablando de un material como libros, herramientas, etc.

De lo anterior tenemos que el costo total, T, se minimiza en $Q = 2{,}000$ dólares y el valor de este costo es de $T = 10{,}250$ dólares.

Discusión: A estas alturas del tema de derivada, cuando ya se supone que los estudiantes han trabajado y discutido diversos problemas de este tema y en ambos contextos, generalmente los estudiantes tienden a cometer ciertos errores y en algunos casos (después de una discusión con profesores de otra universidad), la actitud de los estudiantes es de rechazo a este tipo de problemas.

En atención a la experiencia de ustedes, ¿cuál es su opinión en estas dos líneas (errores y actitud)?

[Ramón]: Mira, yo nunca he dado clase siguiendo este material, así que no me atrevo a decir qué tipo de errores se podrían presentar con un material como éste. Ahora bien, más que un error por parte de los estudiantes, mi temor, insisto, tiene que ver con el riesgo que se corre de ver ciertos conceptos matemáticos, que ciertas técnicas matemáticas son sólamente válidas para un determinado tipo de problema, cuando por ejemplo, en la clase de maximización se puede explicar esta teoría sin hacer referencia a ningún ejemplo en particular, ni en física, ni química, ni economía, ni nada de eso, que la parte puramente matemática se le escape...

[Moderador]: Miren pero yo me refiero no a este problema en particular sino a los errores que cometen los estudiantes cuando ustedes están cerrando el tema de derivada, que supongo lo cierran con el tema de aplicaciones.

[Manuel]: Bueno, te lo explico con el caso mío, nosotros siempre que le ponemos a los estudiantes de economía problemas de optimización, problemas de física, problemas como el que tú dijiste [refiriéndose a Ramón], de minimizar el cercado de una parcela, a ellos no les gusta; me imagino que son esos los errores a los que tú te refieres...

[Moderador]: Sí.

[Manuel]: A ellos no les gusta este tipo de problemas y sienten un rechazo a este tipo de problemas, incluso buscan hablar con el profesor para evitar este tipo de problemas. Entonces, los errores están condicionados al problema que tú les pongas. Si los problemas son de economía, los errores pueden ser de descuido con un signo, que no identifique de manera correcta la función con la que tienen que trabajar, pero siempre relacionados con la matemática, difícilmente cometen un error asociado a la parte económica. Ahora, si el problema de aplicación no es de economía, los errores vienen por el olvido de una fórmula de física, de la misma matemática, y además de los errores anteriores se pueden añadir otros de tipo conceptual.

[Moderador]: ¿Y tu opinión Ramón?

[Ramón]: La actitud siempre va a ser positiva siempre y cuando las aplicaciones sean de su área, de economía. En cuanto a los errores, por qué Manuel dice que los estudiantes piden de aplicaciones a la economía y por eso es que a mi me gusta el ejemplo con el que comenzamos hoy, porque generalmente en las aplicaciones de economía, las funciones son expresiones muy sencillas, en cambio cuando tú les colocas un problema donde se les pide maximizar o minimizar tal función que no es un modelo de ninguna situación económica, necesariamente tiene que ser un poco más complicada que las aplicaciones que traen los libros, entonces por eso prefieren de aplicaciones a la economía ya que la mayoría sabe cómo manipularla, mientras que si le pones una función fuera de su contexto viene el problema en despejar, de identificar la función, como dijo Manuel...

[Manuel]: Fíjate que también hay otros detalles como por ejemplo, cuando tú le hablas de área a ellos no les gusta, en cambio cuando tú le hablas de bolívares o de dólares ellos se sienten a gusto, se emocionan. Por eso es que yo evito hablar de unidades, para que no se me distraigan...

[Moderador]: Disculpa que te interrumpa, pero si volvemos al problema que nos citó Ramón, el de cercar una parcela o terreno; aún cuando este problema es fundamentalmente de geometría, allí están implicados conceptos como el área o el perímetro de un rectángulo, el problema es de optimización de costos. Si atendemos a las latas de refrescos o de cerveza, podemos observar que son medidas estándar, incluso a nivel mundial, pero eso no es de gratis que estas latas tengan estos tamaños. Estos son problemas de optimización de volumen, de área y de costos de material, aparte del problema que pueda surgir en la parte publicitaria. En resumen, son problemas de geometría con una fuerte relación al campo económico...

[Manuel]: Estoy de acuerdo contigo, pero para ellos eso..., lo distrae, yo uso el término distrae... Entonces ellos buscan sacarle el cuerpo a ese tipo de problemas (de cálculo de áreas, volúmenes o de cercar un terreno), la única forma es que tú insistas más en problemas de este tipo, que tú inviertas más tiempo en este tipo de problemas para que le pierdan miedo... Sí es verdad, tú estás optimizando costos pero primero tienen que hablar de metros o de otras unidades con las que ellos no se sienten cómodos y esa parte los distrae.

[Moderador]: Ramón, ¿puedes aportar algo adicional?

[Ramón]: Mira, yo sé que nos desviamos un poco del tema, pero volviendo al caso del área, yo creo que es una cuestión que hay que reconsiderar y no dejar de tocar esos temas porque al estudiante le parezca difícil, porque por ejemplo, en la construcción de una carretera, yo creo que si el trabajo de ingeniería es de envergadura, pues..., ahí tiene que trabajar con volúmenes, cómo el economista se va a deshacer de eso. Además, tiene que haber un estudio económico, un estudio de factibilidad. También en el problema de área, podemos mencionar el Superávit del Consumidor, también ahí el concepto de área es importante, no hay manera de soslayar eso..., me parece....

[Manuel]: Por eso es que el caso del Superávit no hablan de área por eso, le ponen el nombre de Superávit y listo...

[Ramón]: Elige casi cualquier libro de microeconomía que no se limite a la economía literalmente, todos los que yo he visto ponen su sistema de coordenadas, hablan de área y hacen su razonamiento ni siquiera haciendo cálculo sino sobre la figura...

[Manuel]: Pero no hablan de área, hablan de la interpretación de la integral...

[Ramón]: Sí hablan de área, insisto, si coges el Pindyck & Rubinfeld de microeconomía y puedes ver cómo hacen el estudio del Superávit del Productor y del Consumidor.

[Manuel]: Yo lo planteo como una fórmula, una integral y listo...

[Ramón]: Las conclusiones económicas que saca es a través del estudio de la figura de esa superficie interpretada como área, incluso, el estudio que hacen es muy parecido, aunque no me recuerdo muy bien, al estudio que se hace en termodinámica con las líneas estas relacionadas con el calor, creo que son las isobáricas o las isotérmicas, me recuerdan mucho eso.

Pregunta 3: Determine el costo total cuando cada orden es fijada en 2.500 unidades.

Respuesta de P3: En este caso, sólo basta con calcular la imagen de T para $Q = 2{,}500$; así, el costo total cuando cada orden es fijada en 2.500 unidades es de $T = 10{,}256, 25$.

Discusión: Si observamos con detalle, esta tarea posee un mínimo de dificultad respecto a las dos anteriores.

Ya en el cierre del tema de derivada, ¿consideran acertado realizar esta pregunta en una evaluación o creen que puede conducir al estudiante a un error; como por ejemplo, que éste calcule la derivada de la función y la evalúe en 2.500?

[Manuel]: Si tuviera que evaluar esta parte del tema no haría esta pregunta; ahora, si voy a evaluar todo el tema; por ejemplo, en un examen de todo el tema sí la pondría, pero es una pregunta que puede distraer al estudiante, ya que lo menos que se está esperando en un examen es una pregunta como ésta. Creo que la mayoría se confundiría, sobre todo por lo extenso del enunciado.

[Moderador]: ¿Y tú la colocarías en un examen, Ramón?

[Ramón]: Yo creo que sí, porque cuando uno hace la gráfica de una función, sin estar hablando de aplicaciones, cuando te mandan a graficar, tú en ese dibujo que haces colocas algunos valores más relevantes, dónde alcanza el mínimo, el máximo, los valores de inflexión, etc., y los colocas, los señalas en la gráfica. Sin embargo, esta pregunta puede condicionar al estudiante a pensar que uno le está colocando una trampa o como se dice acá una “concha de mango”, que estás procediendo de mala fe. En todo caso, lo que uno hace en situaciones como éstas, es advertirle que se quiere un estudio completo de la función.

A.4.3. Cuestionario relacionado con la actividad 4

De acuerdo a la actividad que acabamos de realizar y como producto de las opiniones y discusiones en la misma, nos interesa conocer tu opinión sobre algunos puntos que señalamos a continuación:

1. Dentro de tu planificación docente, ¿tú contemplas actividades como éstas ya para cerrar el tema de derivada?
   a) $\boxed{\text{Sí}}$ ¿Por qué?, ¿desde el punto de vista de la didáctica, qué persigues con este tipo de problemas?
   b) $\boxed{\text{No}}$ ¿Por qué?, ¿desde el punto de vista de la didáctica, qué inconvenientes observas en este tipo de problemas?
2. ¿Puede usted afirmar que con actividades como ésta, se **induce** u **obliga** al estudiante a pensar? Detalle su respuesta.
3. Consideras que los objetivos del curso se cubren con este tipo de actividad o en todo caso se desvirtúa la finalidad del curso?

Manuel

Cuestionario relacionado con la actividad 4

De acuerdo a la actividad que acabamos de realizar y como producto de las opiniones y discusiones en la misma, nos interesa conocer tu opinión sobre algunos puntos que señalamos a continuación:

1. Dentro de tu planificación docente, ¿tu contemplas actividades como éstas ya para cerrar el tema de derivadas?

   (a) $\boxed{\text{Sí}}$ ¿Por qué?, ¿desde el punto de vista de la didáctica, qué persigues con este tipo de problemas?

   (b) $\boxed{\text{No}}$ ¿Por qué?, ¿desde el punto de vista de la didáctica, qué inconvenientes observas en este tipo de problemas?

Sí, porque refuerza más los conocimientos matemáticos y su relación con los temas de aplicaciones relacionados con el concepto de derivada.

2. ¿Puede usted afirmar que con actividades como ésta, se **induce** u **obliga** al estudiante a pensar? Detalle su respuesta.

Pienso que el estudiante está obligado a pensar sólo relacionar el concepto de derivada con otras herramientas matemáticas vistas en cursos anteriores.

3. Consideras que los objetivos del curso se cubren con este tipo de actividad o en todo caso se desvirtúa la finalidad del curso?

No creo que se desvirtúe. Más bien
creo que esta estrategia abre caminos
a nuevas formas de enseñanzas
y aprendizaje.

Ramón

Cuestionario relacionado con la actividad 4

De acuerdo a la actividad que acabamos de realizar y como producto de las opiniones y discusiones en la misma, nos interesa conocer tu opinión sobre algunos puntos que señalamos a continuación:

1. Dentro de tu planificación docente, ¿tu contemplas actividades como éstas ya para cerrar el tema de derivadas?

   a) $\boxed{\text{Sí}}$ ¿Por qué?, ¿desde el punto de vista de la didáctica, qué persigues con este tipo de problemas?

   b) $\boxed{\text{No}}$ ¿Por qué?, ¿desde el punto de vista de la didáctica, qué inconvenientes observas en este tipo de problemas?

No, ya que nunca se me ocurrió efectuar este tipo de actividades en clases.

El único incoveniente podría ser no tener el tiempo suficiente dentro del número de horas estipuladas en el semestre para el dictado de la asignatura.

2. ¿Puede usted afirmar que con actividades como ésta, se **induce** u **obliga** al estudiante a pensar? Detalle su respuesta.

Sí, en vista de que se están integrando conocimientos tanto de la Matemática, como de la Economía: Se da una introducción a la elaboración de modelos y como sabemos, no hay reglas precisas para la elaboración de los mismos.

3. Consideras que los objetivos del curso se cubren con este tipo de actividad o en todo caso se desvirtúa la finalidad del curso?

Considero que, además de que se traten cada uno de los objetivos del curso, se agrega un objetivo más, el cual es una introducción a la investigación en Economía, mediante el diseño de modelos matemáticos sencillos, para explicar situaciones económicas.

Apéndice B

Sesiones del seminario (Grupo B)

B.1. Actividad 1

Mediante la siguiente actividad se pretende introducir el concepto de la derivada a través del desarrollo de dos problemas, el primero es un ejemplo clásico de la física y el segundo es un problema relacionado con el pago de impuestos, es decir, vinculado con las ciencias económicas. En este sentido, además de introducir el concepto de derivada, se intenta que el estudiante conozca o se aproxime a dos interpretaciones de la derivada. Hay que tener en cuenta el conocimiento y las herramientas matemáticas adquiridas por los estudiantes hasta este momento.

Tasas de Variación y Pendientes

Estudiamos a continuación la introducción de la derivada a través de la función cuadrática $f(x) = x^2$.

B.1.1. Velocidad Instantánea[1]

Suponga que la función de posición de un objeto que se mueve a lo largo de la recta real está dada por $s = f(t) = 8t^2 + 10$, donde t está en segundos y s en metros.

Preguntas: Las siguientes preguntas están relacionadas con los contenidos físico y matemático en general.

[1]Tomado de Haeussler y Paul (1997)

Pregunta 1: Calcular la posición del objeto cuando $t = 5{,}0$; $t = 5{,}001$; $t = 5{,}01$; $t = 5{,}1$; $t = 5{,}2$; $t = 5{,}3$; $t = 5{,}4$; $t = 5{,}5$; $t = 6{,}0$; $t = 9{,}0$; $t = 12{,}0$ y $t = 15{,}0$. A medida que avanza el tiempo, ¿qué puede decir de la posición del objeto?

Respuesta de P1: En la segunda fila de la **Tabla B.1** se pueden observar las distintas posiciones del objeto para distintos instantes de tiempo. Respecto a la segunda parte de la pregunta, a medida que avanza el tiempo la distancia recorrida es mayor, además la **Tabla B.1** *nos hace pensar que el objeto nunca se detiene*.

Discusión: Hasta ahora, el estudiante está familiarizado con el tema de funciones y en este sentido, no debería tener inconveniente para realizar esta tarea en la que se plantea un **estudio muy general de incrementos**.

Para este momento, en el que queremos introducir el concepto de derivada y una interpretación de la misma, ¿consideran ustedes que, desde el punto de vista metodológico, éste es un primer paso "acertado" para introducir el concepto de derivada, o por el contrario, resulta una tarea inapropiada y sin mayor valor cognitivo?

[Elio]: Yo estoy de acuerdo que esto se pudiera hacer porque si uno va a calcular el incremento de una función uno lo que hace es calcular la función en ciertos valores y entonces resolver este problema o esta pregunta les daría una especie de entrenamiento de lo que se va a hacer más adelante, lo cual consiste en evaluar la función en ciertos puntos, como en una especie de prácticas, pudiera ser... Ahora, una pregunta que yo quisiera hacer o más bien una observación, el mismo problema podría causar confusión, o a lo mejor estoy equivocado, porque dice: "se mueve a lo largo de la recta real" y la curva del problema es una parábola "$s = f(t) = 8t^2 + 10$", se pudiera crear confusión con un movimiento parabólico porque la curva que representa el movimiento es una parábola, de repente el estudiante se confunda con esa situación...

[Moderador]: Bueno, aquí hay dos cosas que debemos considerar, una es que aún cuando aparece una parábola en el enunciado, en el mismo se dice que $f(t)$ representa el movimiento del objeto; lo otro es, que el estudiante posee unos conocimientos tanto del bachillerato como del tema previo al de derivada; es decir, el tema de funciones. Pero es válida tu observación.

[Kenya]: Veámoslo como una sugerencia para mejorar la redacción del problema, de modo que clarifique y no cause dificultades adicionales al concepto que se está estudiando o se quiere estudiar que es la derivada. Elio, ¿ya tú terminaste con tu opinión?

[Elio]: Sí, simplemente el comentario a la pregunta y que sí estoy de acuerdo con introducir el tema por esta vía.

[Kenya]: Si la propuesta está dirigida a estudiantes de economía o ciencias económicas y administrativas debería cambiarse el problema por otro que esté más ajustado a los intereses profesionales de estos estudiantes, total..., se va a estudiar la misma idea pero a través de distinta perspectiva, un problema de costo, de impuesto, que sea de interés de los estudiantes sería como más conveniente para abordar el mismo asunto.

[Alexis]: Yo estoy de acuerdo con Kenya en utilizar problemas ajustados a la economía o a la contaduría pública o a la administración de empresas, pero siempre pensado en funciones de este tipo como $f(x) = x^2$...

[Kenya]: Exacto, asumir que esto representa una función propia de la economía y plantear esas preguntas que están allí. Me parece que resulta más interesante para el estudiante y creo que la situación es más familiar, suponiendo que ellos ya hayan visto en cursos previos algunas funciones de estas que puedan tomarse como modelos para estudiar el concepto de derivada...

[Alexis]: Porque a mi me parece que esto está más dado hacia la ingeniería...

[Kenya]: A la física...

[Elio]: Tal vez con una ecuación de oferta o demanda, ¿verdad?, sería más adecuada.

Pregunta 2: ¿En cuánto varía la posición o cuánto se ha desplazado el objeto cuando el tiempo transcurre de 5.0 a 15.0 segundos; de 5.0 a 12.0 segundos; de 5.0 a 9.0 segundos; de 5.0 a 6.0 segundos; de 5.0 a 5.5 segundos, de 5.0 a 5.4 segundos, de 5.0 a 5.3 segundos, de 5.0 a 5.2 segundos, de 5.0 a 5.1 segundos, de 5.0 a 5.01 segundos y de 5.0 a 5.001? ¿Qué observa en cada uno de los desplazamientos estudiados?

Respuesta de P2: En la segunda columna de la **Tabla B.2** podemos ver cómo varía la posición del objeto cuando éste se ha desplazado en distintos intervalos de tiempos.

Discusión: En la tarea anterior se estudió la posición del objeto para distintos instantes de tiempo, ahora estudiamos variaciones de la posición para intervalos de tiempo particulares; es decir, qué *variaciones* experimenta la posición del objeto cuando el tiempo cambia en distintos intervalos.

En una experiencia con estudiantes con los que realicé esta actividad, ellos mostraron dificultades para visualizar las distintas variaciones, ¿consideran ustedes que esta tarea promueve, de alguna manera, el concepto de incrementos de una variable? ¿De qué manera? ¿Cómo?

[Kenya]: ¿Variaciones tanto en el intervalo como en la posición?

[Moderador]: Sólo la variación, no la posición, ¿consideran ustedes que esta tarea promueve, de alguna manera, el concepto de incrementos de una variable?

[Alexis]: No se le puede sacar el cuerpo a esta tarea...

[Kenya]: Generalmente yo lo he hecho así, pero... no sé si hay otra manera de hacer el estudio de variaciones...

[Elio]: Lo que se puede perder con esto, digo yo, o lo que se podría perder, a mi modo de ver, es que para notar la variación como tal, se requiere de muchos cálculos y entonces hacerlo a mano, en el pizarrón, para que él lo vaya viendo, puede resultar muy cansón para el estudiante...

[Moderador]: Pero también lo puedes mostrar en una diapositiva...

[Elio]: Bueno, si lo haces así..., yo lo veo como un buen recurso...

[Moderador]: También la idea es que el estudiante trabaje.

[Alexis]: Pero si tú lo ves con saltos, por ejemplo, $x^2 + 1$ cuando $x \to 2$ que eso da 5, los valores muy cercanos tú ves rápidamente que va tendiendo a 5, no una función muy grande sino chiquita para que se visualice rápidamente la...

[Moderador]: De acuerdo...

[Alexis]: Pero no hay ninguna manera de saltarse el límite éste...

[Kenya]: No, pero..., este hay una cuestión, el efecto que produce en el estudiante, que tú le presentes este tipo de problemática mediante una tabla ya elaborada por ti no es el mismo que si él la hace, para mi no es lo mismo. Yo solamente he experimentado esto y creo que todos lo hacemos por cuestiones de tiempo, no nos podemos dar el lujo de construir esto con ellos a punta de calculadora porque "perdemos un tiempo sustancial de las clases" para ir al objetivo de formarles la idea de que las variaciones van disminuyendo, por eso se toman intervalos cada vez más pequeños. Pero yo te aseguro, lo digo haciéndome un examen a mi misma, cuando yo estaba estudiando este tema, era estudiante y yo misma construía las tablas, a mi me quedaba más...

[Moderador]: Consolidabas el concepto pues...

[Kenya]: Sí, lo iba haciendo, entonces yo miraba el resultado de arriba, el primero lo obtuve y no tenía con qué comparar, pero voy al segundo y ya tengo con qué compararlo, con el anterior, y esto me permitía tener un dominio de datos aquí en mi mente conforme iba desarrollando el proyecto; para mi el efecto tiene que ser distinto a que si tú le preguntas con la tabla ya elaborada. Con la tabla ya elaborada no te queda otra que hacerle..., vas haciéndole una observación directa, dirigida por el docente; observen aquí que conforme la amplitud de los intervalos se va haciendo cada vez más pequeña, el cambio producido en la función o la variación producida o el incremento se va haciendo tal cosa. Pero si le toca a él (estudiante) hacerlo o tiene la experiencia de hacerlo, yo creo que el efecto va a ser distinto, habría que ver esa parte, habría que verla y solamente he experimentado presentándoles una película; es decir, mostrándole los cálculo ya hechos por mi, pero no he hecho que ellos lo hagan en clase. Esto lo digo por mi experiencia, cuando me toco hacerlo, entonces sería como recomendable, colocarles a ellos una actividad para que realmente la hagan...

[Alexis]: Que saque las cuentas...

[Kenya]: Saque las cuentas, saque las cuentas...

[Elio]: Y tal vez ese tiempo que tú dices, entre comillas, que se pudiera perder, entonces, en realidad no, porque en realidad el estudiante estaría trabajando con conciencia, sabe lo que está haciendo, pudiera aprovecharlo más adelante y entender lo que es la derivada en su momento, entenderlo entre comillas.

Pregunta 3: Calcular la velocidad media en los intervalos de tiempo: $[5{,}0; 15{,}0]$, $[5{,}0; 12{,}0]$, $[5{,}0; 9{,}0]$, $[5{,}0; 6{,}0]$, $[5{,}0; 5{,}5]$, $[5{,}0; 5{,}4]$, $[5{,}0; 5{,}3]$, $[5{,}0; 5{,}2]$, $[5{,}0; 5{,}1]$; $[5{,}0; 5{,}01]$; $[5{,}0; 5{,}001]$.

Respuesta de P3: En la última columna de la **Tabla B.2** se aprecian las distintas velocidades promedios para los intervalos de tiempos indicados.

Discusión: Tal como se muestra en la pregunta, lo que se busca en este caso, es que el estudiante observe y discuta sobre las distintas velocidades promedio y por supuesto, que el profesor discuta con ellos, de modo que surja una primera aproximación **empírica** y con **tratamiento numérico** del concepto de derivada. Algo que no se contempla en los programas oficiales de cálculo diferencial.

[Kenya]: ¿No queda como un objetivo en forma explícita?

[Moderador]: Exacto.

En algunas investigaciones sobre el tema, existen opiniones encontradas a la hora de introducir un concepto matemático; hay quienes se inclinan por dar la definición con todo el rigor matemático que ello supone y posteriormente realizar una explicación pormenorizada de ésta (la definición), mientras que hay profesores que apuestan por una construcción detallada del concepto.

¿Consideran adecuado partir de una situación como ésta para aproximarnos al concepto de derivada o conviene más; introducir, de entrada, el concepto de derivada de manera formal y tradicional; es decir, partiendo de la idea formal de límite? Se supone que el estudiante conoce los conceptos de función, límite y continuidad.

[Kenya]: ¿Estamos partiendo del hecho de que el estudiante tiene como base el concepto de límite?

[Moderador]: Sí, el estudiante conoce los conceptos de función, límite y continuidad.

[Kenya]: Si tiene eso ya es ganancia para hacer una enseñanza de corte constructivista; es decir, partir de ejemplos de este tipo. Si él (estudiante) tiene ya formada la idea de límite yo creo que es claro para él lo que se busca con este procedimiento y aparte, cómo se dice..., él va a llegar a concluir que esto no es más que un límite cuando el tamaño del intervalo se va haciendo cada vez más pequeño. A mi me parece que sí puede llegar al concepto de derivada si tiene claridad en el concepto de límite, sobre todo, pienso yo, desde el punto de vista geométrico o intuitivo; no tanto desde la definición del para todo épsilon etc., etc., sino de un dominio geométrico o intuitivo de la noción de límite...

[Elio]: Y pareciera menos impositivo así, de repente el ir construyendo un problema como éste, o sea, que la definición de derivada, pero que es un límite, pudiera quedar como una necesidad de resumir esas cuentas, de alguna manera. Que surja como una necesidad, como decía ahora, que sea como necesario utilizar esto y no que se imponga para después aprenderme de memoria unas tablas de derivada o qué sé yo..., no, no, no... Que surja como una necesidad, construiste esto y ahora vamos a darle formalidad, esto se necesita para esto...

[Kenya]: La idea de la derivada saldría de modo natural porque en realidad no es más que un límite, un límite muy especial, el cociente incremental.

[Alexis]: Ahora..., debe haber una función en la parte económica que modele esto.

[Moderador]: Olvidémonos por un momento de la economía.

[Kenya]: De pronto, el contexto para mi no es el adecuado pero el proceso sí.

[Moderador]: Tal vez a lo que te refieres es al modelo, de pronto con lo que no estás de acuerdo es con el modelo...

[Kenya]: Ajá...

[Moderador]: Pero, quitando el modelo, vamos a seguir con la velocidad instantánea, la construcción como se hace, ¿estás de acuerdo o no?, ¿cómo lo haces tú, Alexis?

[Alexis]: La experiencia que yo he tenido..., yo introduzco la derivada, por ejemplo, usando la función x^2 y me voy acercando y después indudablemente que les digo que el límite no nos lo podemos quitar de encima...

[Kenya]: Claro...

[Alexis]: Y eso va a tener una posición límite y eso es lo que vamos a llamar la pendiente de la recta tangente que va a ser la derivada.

[Elio]: Si te pones a ver, la mayoría de los libros de cálculo tratan de hacer eso de alguna manera, ellos no empiezan con la definición de derivada como un límite aunque ya se ha tratado el tema de límite. De alguna manera, aunque sea poca, ellos tratan de verlo como el significado de la recta tangente...

[Kenya]: Pero se van más hacia el aspecto matemático...

[Elio]: Pero hacen una introducción de ese tipo (del de recta tangente), tratando de ser lo más constructivos que puedan, pero al final caen en la definición de la derivada como un límite; tal vez no hacen tanto detalle como esto (el material de discusión).

[Moderador]: Pero Elio, ¿tú has visto algún libro donde hagan una presentación del tema de la derivada de esta manera?, me refiero a la manera sobre cómo vamos construyendo el concepto.

[Elio]: Sí, sí lo he visto, sobre todo en libro aplicados a la economía, de hecho, hacen un capítulo completo sobre la ecuación de la oferta o la ecuación de la demanda y entonces después caen en la derivada en un capítulo posterior, atacan la derivada pero ya tienen este bagaje.

[Alexis]: Sin embargo también tocan la velocidad...

[Kenya]: Casi siempre el motivo es ese, un problema de velocidad instantánea...

[Elio]: Tal vez porque es lo más natural...

[Kenya]: Tal vez porque eso obedece a una cuestión histórica, pienso yo..., bueno aquí no soy especialista...

[Alexis]: Además esto está en todos los libros...

[Moderador]: Además la velocidad instantánea es lo que marca la aguja en el automóvil...

[Kenya]: Con respecto a este análisis, nosotros estamos mirando esta tabla, y yo creo que esto es importante para los estudiantes, en su sentido vertical y no en su sentido horizontal.

[Moderador]: Explícate.

[Kenya]: En el sentido horizontal es: ubicar al estudiante, por ejemplo, en el primer renglón e interprete qué significa el resultado de 1600 para la función de posición en función del tamaño del intervalo, ¿qué significa?, ¿qué interpretación le damos a eso? y también ¿qué interpretación le damos a la velocidad promedio?, después ubicarlos en el segundo renglón y hacerle la misma pregunta. Entonces yo creo que sería como más significativo para ellos ir analizando renglón por renglón pero a la vez el análisis vertical de la tabla, porque no es sólo llegar al concepto de derivada y decir qué estamos viendo aquí; porque le estaríamos dando aquí, aún cuando usáramos una función de la economía, le estaríamos dando más peso al aspecto matemático pero estaríamos dejando a un lado el aspecto de interpretación del problema desde el punto de vista...

[Elio]: Que es lo que en el fondo interesa...

[Kenya]: Que es lo que interesa, del campo profesional de estos estudiantes. O sea, que de una función de costo, qué quiere decir una variación en el incremento de los costos, que para ese intervalo, o para ese nivel de producción comprendido entre 5 y 15, por ejemplo, los costos aumentan en 1600. Y cuánto le cuesta cada artículo o cada nivel de producción..., bueno, en promedio 160. A mi me parece que hay que decir esos dos significados y después cuando interprete qué significa la función de costo a un nivel de producción de 15, la inversión que tiene que tener la empresa para tener ese nivel de producción. Eso le va dando significado y contexto al problema y en consecuencia, y a la vez abordas dos cosas, el interés de los estudiantes en cuanto a su campo profesional y el análisis matemático que es a lo que tu quieres llegar, que es el concepto de derivada.

[Elio]: Ese es un problema que se marca mucho, se nota mucho, es cierto lo que ella dice y estoy de acuerdo. Hay un problema muy particular, quizás es conveniente decirlo, pero yo me he dado cuenta que cuando uno les dice: calcular el costo de producir 51 artículos y después les preguntas, calcular el costo de producir el artículo 51 y empiezan ellos la vacilación ahí; entonces, no entienden qué fórmula, ellos lo ven así, qué fórmula van a utilizar para atacar cada problema, muchas veces piensan que es lo mismo. De hecho, las dos fórmulas vistas en general son muy parecidas, entonces se crea la confusión, por eso porque no traen..., son expertos en calcular, tal vez, pero no saben interpretar lo que están haciendo.

[Alexis]: Estoy de acuerdo con eso que dice Elio.

Pregunta 4: La velocidad media del objeto para un intervalo de tiempo $[t_0; t]$ y con $f(t_0) < f(t)$ viene dada por

$$\mathcal{V}(t) = \frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0} = \frac{\text{Desplazamiento desde } f(t_0) \text{ a } f(t)}{\text{Tiempo transcurrido desde } t_0 \text{ a } t}$$

Para el caso particular en el cual el objeto parte con $t_0 = 0$ y su posición es $s = 0$, la velocidad media del objeto se reduce a $\mathcal{V}(t) = \frac{f(t)}{t}$

Pregunta 4.1: Construir una tabla y calcular $\mathcal{V}(t)$ para $t = 5{,}001$; $t = 5{,}01$; $t = 5{,}1$; $t = 5{,}2$; $t = 5{,}3$; $t = 5{,}4$; $t = 5{,}5$; $t = 6{,}0$; $t = 9{,}0$; $t = 12{,}0$ y $t = 15{,}0$, suponiendo que $t_0 = 5, 0$.

Respuesta de P4.1: La tercera columna de la **Tabla B.2** coincide con $\mathcal{V}(t)$, sólo que en el orden inverso.

Pregunta 4.2: Obtener una fórmula para $\mathcal{V}(t)$ y verificarla con la respuesta de 1.

Respuesta de P4.2: En este caso la fórmula que se obtiene para la velocidad promedio es $\mathcal{V}(t) = \frac{8t^2-200}{t-5}$ y coincide con la respuesta del ítem anterior.

Discusión sobre P4.1 y P4.2: El objetivo que se persigue con estas dos tareas es que el estudiante al invertir los datos de la tabla, tenga una mejor visualización de las velocidades promedios para distintos intervalos y así tener mayor dominio y profundidad del problema.

Desde el punto de vista metodológico, ¿creen ustedes que esto ayuda al estudiante a darse una idea de velocidad instantánea y por ende, a llegar al concepto e interpretación de la derivada?

[Elio]: Bueno, eso es lo que decía Kenya, ahora le toca al estudiante construir la tabla y va a comparar los valores entre sí. Lo único que yo creo que podría ir en contra, de alguna manera, es atiborrar al estudiante de tanto cálculo si no tiene a la mano herramientas como una calculadora y que le pueda crear cansancio, de alguna manera, y le llegue a fastidiar. Cuando lleguemos al concepto de derivada, tal vez, él ya no quiera trabajar más para definir el concepto de derivada, eso es lo que yo creo, que pudiéramos... Sí como dice Alexis, buscar una situación donde el salto se note más rápido para evitar tanto cálculo, para que lo que se quiera mostrar se note pero con menor cantidad de cálculos.

[Alexis]: Yo me supongo que Luis, cuando manda a que el estudiante construya ahora la tabla, él (estudiante) debe darse cuenta que por debajo se va a ir pegando a un mismo número que cuando lo hizo por arriba, va a llegar un momento que va a tener casi el mismo número y entonces él debe preguntarse por qué ese número y es cuando uno interviene y les dice que esa es la posición límite que no es otra cosa que la derivada.

[Elio]: Quiero hacer una observación porque creo que faltan unas letras t y eso podría confundir al estudiante.

[Moderador]: Sí, fue un descuido de mi parte, disculpen.

[Kenya]: Un momento..., yo estoy un poco perdida aquí. ¿Antes se le pedía la tabla?

[Moderador]: No, antes se le daba la tabla ya elaborada y ahora se le pide que construya la tabla.

[Kenya]: Ah, ahora sí entiendo. Bueno, entonces esto empata con lo que yo he estado diciendo.

[Moderador]: Lo que pasa es que te adelantaste a la actividad con tus comentarios y no me atreví a cortarte.

[Elio]: Bueno, sobre lo que yo decía, el montón de cálculo que habría que hacer, quizás sea menos ahora porque vale 0 la función inicial entonces el cálculo, en realidad, no va a tener las restas, ya que la función en 0 vale 0. Es simplemente $\frac{f(t)}{t}$.

[Moderador]: Un momento, aquí estamos partiendo de $t_0 = 5$.

[Elio]: Ah, ok, ok.

[Kenya]: Va a llegar a la misma tabla, lo que pasa es que él (estudiante) la va a construir, no se la va a dar el profesor ya elaborada.

[Alexis]: Va a llegar un momento en que el número por arriba va a estar muy cerca o va a ser muy parecido a otro.

[Kenya]: Realmente, ellos no tienen que jugar con eso porque los cálculos van a ser tediosos, creo yo... que va a ser así. Pero yo creo que si se le dan problemas de contexto no van a ser tan...

[Elio]: Eso puede ser un arma de doble filo, porque yo he tenido alumnos que quieren calcular todos los límites y todas las derivadas dándole valores a x...

[Kenya]: Sí, hay que tener cuidado con eso. Muchas veces esa primera aproximación que uno les hace para llegar al concepto no es lo que uno quiere pero es lo que uno transmite sin querer...

¿Qué errores comete el estudiante, por lo general, en este tipo de tarea?

[Elio]: Errores de cálculo es lo que yo más noto, en particular he notado errores de cálculo, problemas con los signos, uno que otro despeje y cuando les toca evaluar un punto en una función que no les sea familiar.

[Kenya]: Tú dices, ¿los errores de cálculo que cometen en un problema como éste?

[Moderador]: Exacto, para este problema en particular.

[Alexis]: ¿Asumiendo que todos saben lo que es evaluar una función en un punto dado?

[Moderador]: Bueno... eso de que todos saben, mejor decir que todos han visto ese tema.

[Alexis]: Eso es verdad, porque muchas veces uno dice: ¿ustedes saben...? Sí, sí. ¿Cuánto vale esta función en este punto?, por muy fácil que sea, y entonces se me quedan viendo o se hacen los locos, entonces me doy cuenta que no saben lo que les estoy preguntando.

[Elio]: También cometen otro error, el error de no decir que no entienden o el error de aceptar lo que el profesor dice sin dudar en ningún momento, pero las dudas vienen después...

[Alexis]: En mi opinión, el error más frecuente, el que se repite más es el de evaluar un punto en una función, no quiero decir que no cometen errores sumando, restando o multiplicando..., o cuando quieren cancelar algún término con otro en un cociente. Estos son lo errores que más encuentro.

[Kenya]: No sé si este error que cometió un estudiante en una evaluación que traigo aquí, pero es del tema de aplicaciones de la derivada y tiene que ver con radicales. Ahora recuerdo, la dejé en la casa, pero la función era una raíz, no recuerdo si cuadrada o cúbica, y antes de evaluar la función, escriben la raíz en forma de potencia fraccionaria y cuando evalúan el punto en la función, el índice de la raíz lo pusieron a dividir. A mi me llamó tanto la atención ese error que lo tengo muy pendiente para decírselo al estudiante..., bueno también, como dicen ustedes, los problemas con los signos son frecuentes, tienen dificultades al trabajar con decimales o fracciones.

Pregunta 4.3: Cómo es el comportamiento de la velocidad media, $\mathcal{V}(t)$, en cada uno de los instantes de tiempo respecto a la velocidad instantánea $\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta s}{\Delta t} = \lim_{h\to 0}\frac{f(t_0+h)-f(t_0)}{h}$ para $t_0 = 5,0$?

Respuesta de P4.3: La velocidad media $\mathcal{V}(t)$ en cualquiera de los casos estudiados es siempre superior a

$$\begin{aligned}
\lim_{\Delta t\to 0}\tfrac{\Delta s}{\Delta t} &= \lim_{h\to 0}\tfrac{f(5+h)-f(5)}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}\tfrac{8(5+h)^2+10-210}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}\tfrac{80h}{h}\\
&= 80,00.
\end{aligned}$$

Discusión:*De esta situación, ¿qué discusión les parece a ustedes sugerente que se debe plantear a los estudiantes relacionada con esta tarea?*

[Kenya]: Supongo que aquí estamos partiendo de la base de que el estudiante ha tenido una experiencia en física y que conoce lo que quiere decir velocidad media.

[Moderador]: Sí porque en bachillerato se ve velocidad media.

[Kenya]: ¿A qué te refieres con esta tarea?

[Moderador]: Me refiero a cómo manejar o como conducir una clase de introducción a la derivada en la que hemos realizado un tratamiento analítico, hemos fabricado una tabla, podríamos usar incluso las dos gráficas de la pregunta siguiente. En otras palabras, ¿cómo conectarían ustedes, en una clase, todas estas situaciones que termino de mencionar?

[Kenya]: Tú primero vienes trabajando sobre la velocidad media para querer llegar a la velocidad instantánea...

[Moderador]: Y ahora digo que la velocidad instantánea es el límite.

[Kenya]: ¿Tú lo dices?

[Moderador]: Lo digo, de hecho aparece en la pregunta, fíjate...

[Kenya]: Ah..., estamos en una situación hipotética como si estuviéramos dando una clase y este es el material que vamos a ir diseñando en la pizarra, por ejemplo.

[Moderador]: Correcto. Recuerda que ya el estudiante tiene una tabla construida, tiene ahora esta parte del límite y puedes darle las gráficas. ¿Cómo jugarían ustedes con todo esto en una clase?

[Kenya]: Aquí estamos jugando con dos cosas, me parece, el aspecto... Partes de un problema físico para llegar a la velocidad instantánea que viene definida por él mismo y después quiero ver como puedo relacionar eso con las pendientes de las rectas tangentes que aparecen en la tabla.

[Moderador]: De las rectas secantes para llegar a la recta tangente.

[Kenya]: De las rectas secantes para llegar a la recta tangente, cómo hacerlo, imagínate. Son dos lenguajes distintos, uno viene de un proceso analítico el otro de un proceso geométrico. No es tan fácil, creo yo, que si tú vienes hablando de velocidad, de algo que viene de la física y de pronto saltas la...

[Alexis]: A la parte geométrica.

[Kenya]: A la parte geométrica y hablas de las pendientes de las rectas secantes que se transforman en tangente y que la pendiente de la recta tangente es lo mismo que la velocidad instantánea, el salto es muy grande, eso no lo va a comprender él (estudiante) porque necesita un nivel de abstracción y en este momento se está siendo muy concreto porque se está trabajando con un problema muy particular. Tal vez una manera de verlo, pero de todas maneras habría que hacer como una división en la pizarra, porque pareciera como que son dos asuntos..., es el mismo asunto pero de dos perspectivas diferentes. Tratar de ver que la fórmula que aparece en el límite, la de la velocidad media es la misma pendiente de la recta secante. Tratar de conectar estos dos aspectos. Noten ustedes que esto que está aquí en este contexto es lo mismo que está aquí pero desde el punto de vista geométrico... ¿Qué es lo que cabe esperar desde esta perspectiva geométrica de la recta secante cuando nos aproximamos a un determinado valor? Que vayan adoptando la posición de tangente en ese punto, pero no es tan fácil.

[Elio]: De alguna manera, él (estudiante) a este nivel debe tener la idea de que ya sabe ubicar puntos en el plano y tiene conocimiento de algunas curvas conocidas como x^2. Yo pienso que en lugar de ponerle toda la tabla en el pizarrón, primero porque puede distraerse con muchas rayas (refiriéndose a las gráficas de rectas secantes) y a simple vista pudiera no entender qué es lo que quiere decir. Bueno sería contar con un computador que nos pueda mostrar el movimiento o ir construyendo cada recta...

[Moderador]: Por supuesto, lo que pasa es que aquí ya están todas construidas, cómo las escribes en el papel una por una.

[Elio]: Y como la idea de un límite es como un movimiento, la variable se mueve, por eso lo de "tiende a", ver que de alguna manera ese movimiento genera movimiento en esa recta que van a ir tendiendo, que van a ir acercándose a lo que uno quiere. Entonces, lo que ella (Kenya) dice, comparar la pendiente de esa secante, puedes buscar los puntos de corte, y ver que esa pendiente calculada, porque deben saberla calcular, con ese cociente que está dado allí...

[Kenya]: Bueno, se me ocurre en estos momentos... Desde un comienzo, se plantea el problema desde el punto de vista analítico y manejar el aspecto gráfico. Que mientras vaya construyendo la tabla, vaya construyendo...

[Alexis]: La gráfica...

[Kenya]: La gráfica, que el estudiante sabe que es o debe saber que es una parábola, entonces ir manejando cómo aparece desde el punto de vista geométrico las cantidades o las fórmulas que figuran en el incremento, en el cociente incremental.

[Moderador]: Un momento, vamos otra vez a la discusión y a poner un poco de orden. De momento somos nosotros, los profesores, los que estamos haciendo la actividad, qué se les ocurre a ustedes para jugar con esos dos aspectos.

[Kenya]: Yo pienso que se puede manejar la cosa simultáneamente, se maneja primero lo de la tabla y después lo otro o se manejan las dos cosas de manera simultánea, habría que ver.

[Elio]: Para que no aparezca bruscamente...

[Kenya]: Para que vaya viendo que estas mismas cantidades... cómo se expresan desde el punto de vista geométrico. La otra alternativa sería, construir la tabla primero y después irnos al aspecto geométrico y ver cómo estas diferencias y este cociente incremental se refleja en el gráfico de la función. Entonces, desde el aspecto gráfico ver qué cosa es el incremento en la función y qué cosa es el cociente incremental para, finalmente, determinar qué cosa es la velocidad..., bueno, yo prefiero hablar de la razón de cambio..., para hacerlo más abstracto todavía porque la velocidad instantánea es un caso particular ¿no?, es una manera de aplicar el concepto de la derivada, entonces prefiero verla como la razón de cambio de esta cantidad con respecto a otra. En este caso, es la distancia con respecto al tiempo.

[Moderador]: Y en tu caso Elio, ¿cómo lo harías?

[Elio]: Yo creo que..., lo que estábamos diciendo, ir construyendo cada recta para ver cómo se va moviendo a medida que vayamos haciendo cada renglón de la tabla, cada renglón de la tabla te va a dar la pendiente de la respectiva recta secante, entonces ir construyendo e ir comparando cada número que arrojó la tabla con cada recta que nos vaya saliendo. Entonces, a medida que estos números que analíticamente, numéricamente se van acercando a cierto valor, esas rectas se van acercando a la que él (estudiante) espera, aunque a lo mejor él (estudiante) no espera nada, tal vez, pero se va a dar de esa manera. Y el comportamiento, el comportamiento... asintótico, tal vez, no sé como decirlo, el comportamiento de que se acerca en un punto aquí se refleja en un comportamiento geométrico similar, es decir, las rectas también se van acercando...

[Moderador]: Un comportamiento de convergencia o de aproximación.

[Kenya]: El problema que he visto yo, dentro de lo que considero..., de utilizar un proceso constructivo es que el estudiante se siente como perdido, no sabe hacia dónde lo va a conducir el profesor y de pronto puede establecer unas relaciones que no son, aún cuando pueda establecer unas relaciones interesantes...

[Elio]: Pero la construcción, creo yo, debe partir de un problema en particular, por ejemplo, no empezar a hablar de esos cocientes incrementales, sino qué es lo que uno está buscando. Qué pasa, un problema en particular, si la variación del precio del barril (de petróleo) entre enero y febrero fue de tanto, cómo afectó eso, no sé..., el precio de la gasolina, por decir algo. Y si de febrero a marzo el aumento fue mayor, cómo afecta eso el precio de la gasolina, cosas así, que él (estudiante) vea, cuando yo busqué, cuando yo moví la variable aquí vi cómo se comportó lo que quería estudiar, él (estudiante) no va estar tan perdido.

Pregunta 4.4: Esbozar una gráfica aproximada de $f(t)$, para $t \in [4{,}0, 16{,}0]$, y trazar cada una de las rectas que pasan por $(5, f(5))$ y los puntos $(15, f(15))$, $(12, f(12))$, $(9, f(9))$, $(6, f(6))$, $(5{,}5, f(5{,}5))$, $(5{,}4, f(5{,}4))$, $(5{,}3, f(5{,}3))$, $(5{,}2, f(5{,}2))$, $(5{,}1, f(5{,}1))$, $(5{,}01, f(5{,}01))$ y $(5{,}001, f(5{,}001))$, respectivamente. Discutir sobre la interpretación geométrica y física que sugiere esta tarea, donde $t_0 = 5$.

Respuesta de P4.4: Las gráficas que se muestran en las **Figuras B.1** y **B.2** ilustran lo que se pide en esta tarea y se aprecia geométricamente que la pendiente de la recta que pasa por los puntos $(5, f(5))$ y $(5{,}001, f(5{,}001))$, se aproximan a la velocidad instantánea, $\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t}$, de la tarea anterior y toca a la curva, aparentemente, en un solo punto (recta tangente), mientras que las otras rectas tocan a la curva en más de un punto (rectas secantes).

Discusión: Finalmente, con esta tarea, se muestran dos interpretaciones de la derivada de manera simultánea con un tratamiento numérico y dejando a un lado el rigor del límite. Esta forma de introducir la derivada resulta carente de todo rigor para muchos profesores y en distintos artículos relacionados con la didáctica se plantean discusiones sobre este hecho.

¿Cuál es la posición de ustedes sobre los enfoques (1) Analítico-Algebraico, (2) Geométrico y (3) Numérico para introducir el concepto de derivada, es decir, supone algún tipo de dificultad para el estudiante hablar de dos interpretaciones de un mismo hecho, cuál es su experiencia en este sentido?

[Kenya]: La experiencia mía..., yo he partido siempre de la parte geométrica porque tengo el prejuicio de que los estudiantes que nosotros atendemos traen muy mala base, me parece que una manera de ilustrarle a ellos los conceptos que estamos trabajando es teniendo un apoyo fuerte en lo geométrico. Me estoy refiriendo a estudiantes de economía porque otro tipo de estudiantes, de otras carreras tiene otra preparación, por ejemplo, los de ingeniería tiene más nivel, pienso yo. Entonces, casi siempre me voy por la parte geométrica, llego al concepto de derivada, antes les doy una motivación del concepto que vamos a estudiar, para qué sirve en el campo profesional de ellos, pero simplemente a manera de introducción del tema, inmediatamente después, paso a definirle la derivada como la pendiente de la recta tangente. Y después que damos las herramientas básicas del cálculo de derivadas entonces sí me meto con los problemas de aplicación y hago esto de las tablitas, pero sí les llevo una tabla elaborada, precisamente trabajo con la función cuadrática.

[Elio]: Es que uno podría trabajar con una función lineal, pero el problema es que las rectas van a coincidir y no va a mostrar lo que uno quiere, entonces lo más inmediato es la función cuadrática.

[Moderador]: ¿Y cuál es tu opinión Alexis?

[Alexis]: Bueno, cómo se hace la definición, jugando un poco con la función x^2, de cómo se van acercando las rectas secantes a la recta tangente sin descuidar la definición formal usando el límite, creo que eso no lo podemos saltar.

[Elio]: En particular, yo no me ocupo tanto de la parte geométrica, yo uso el gráfico como un apoyo y trato, más bien, de construir esos cocientes de la función evaluada en un punto, las diferencias incrementales, trato de hacer lo que está por aquí en las tablas pero no con tanto cálculo...

[Alexis]: No, pues claro, uno trata de buscar una función que le resulte rápido para llegar a la definición...

[Elio]: Y que la parte geométrica sea sólo un apoyo de la parte analítica, realmente utilizo las dos pero le doy más fuerza o más énfasis a la parte analítica...

[Kenya]: Yo no hago los cálculos, precisamente, porque, pienso que, si ya ellos tiene la noción de límite, se van a dar cuenta que lo que estamos haciendo es acercarnos a un punto, o sea, siendo que esa distancia se hace cada vez más pequeña qué pasa con la recta secante. Parece que de modo natural, eso me está conduciendo a la idea de un límite; de qué límite, de ese cociente que viene dado por el cociente de la recta secante. Por eso no me meto mucho con el cálculo a nivel de tablas, de construcción de tablas. Sí lo hago después, cuando empiezo con la secuencia aquella de las aplicaciones a la economía, empezar por el incremento en la variable independiente, incremento en los valores de la función, o sea, cambio real, después la razón de cambio promedio, después la razón de cambio instantánea que es la derivada, el diferencial y esos conceptos y las relaciones que hay y así voy construyendo las tablas..., no las construyo, se las llevo ya construidas con unos valores y supongamos que esta es una función de costos..., mirémoslo horizontalmente, mirémoslo verticalmente, comparemos esta columna con esta para que ellos vayan haciendo la relación entre la razón de cambio promedio y la razón de cambio instantánea, o entre el incremento de la función diferencial. Sin embargo debo confesar que los resultados no son nada halagadores, precisamente apliqué un examen sobre esos asuntos y la nota más alta fue de 12/20 y después de ella fue de 6/20, aprobó una sola persona. Por eso es que, de pronto, uno se reprime en pensar en hacer algo partiendo de una situación contextualizada porque si tú le estás poniendo un problema que es de costo...

[Elio]: Como metiéndose en su mundo...

[Kenya]: En su mundo... y ellos no...

[Alexis]: Creo que me voy a salir de la discusión o tal vez no, pero yo creo que ellos son alérgicos a que uno les hable de matemáticas en esa parte (economía), es que son alérgicos..., "no profesor, pónganos una derivada y listo".

[Elio]: Es que no es fácil, no es tan sencillo llevar un problema verbal a una ecuación, al modelo...

[Kenya]: Se confunden todos.

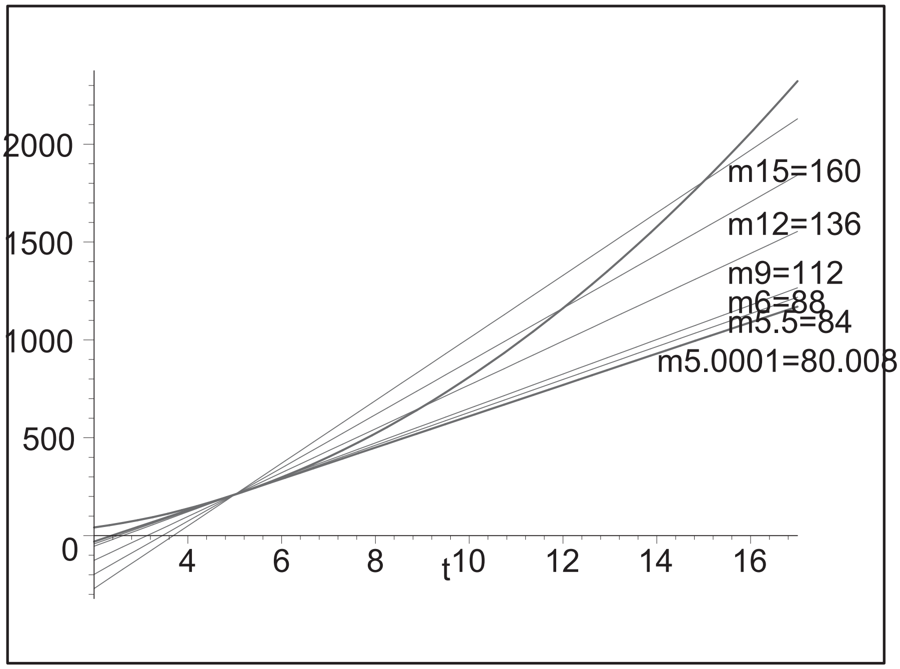


Figura B.1: Aproximación de la velocidad instantánea

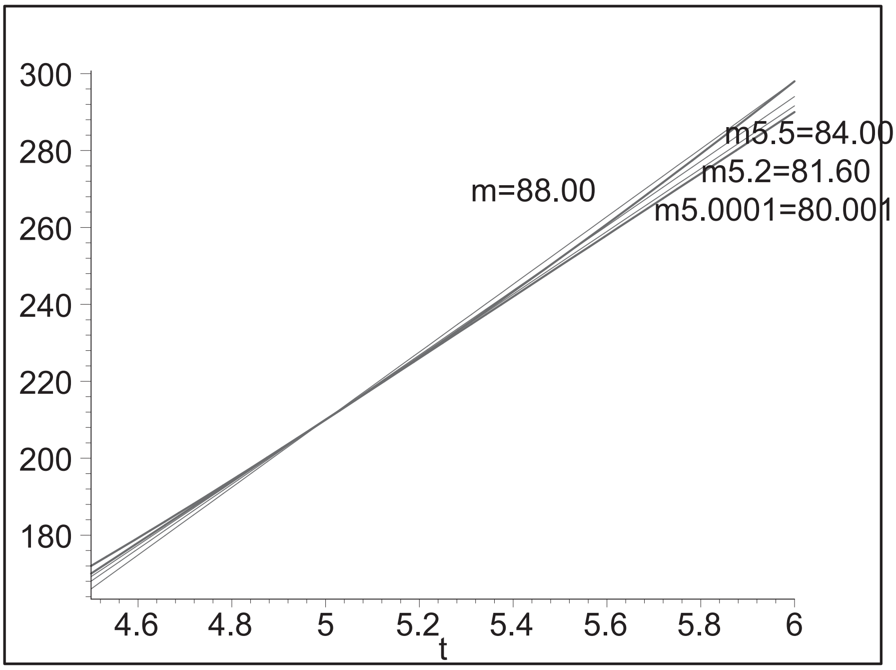


Figura B.2: Una aproximación más fina

Tiempo t	5.0	5.001	5.01	5.1	5.2	5.3	5.4	5.5	6.0	9.0	12.0	15.0
Pos $f(t)$	210	210.080008	210.08008	218.08	226.32	234.72	243.28	252	298	658	1162	1810

Cuadro B.1: Posición del objeto para un instante t

Intervalo de tiempo	Variación de la posición	Velocidad Promedio
$[5,0; 15,0]$	$f(15,0) - f(5,0) = 1600$	$\frac{f(15,0)-f(5,0)}{15,0-5,0} = 160$
$[5,0; 12,0]$	$f(12,0) - f(5,0) = 952$	$\frac{f(12,0)-f(5,0)}{12,0-5,0} = 136$
$[5,0; 9,0]$	$f(9,0) - f(5,0) = 448$	$\frac{f(9,0)-f(5,0)}{9,0-5,0} = 112$
$[5,0; 6,0]$	$f(6,0) - f(5,0) = 88$	$\frac{f(6,0)-f(5,0)}{6,0-5,0} = 88$
$[5,0; 5,5]$	$f(5,5) - f(5,0) = 42$	$\frac{f(5,5)-f(5,0)}{5,5-5,0} = 84$
$[5,0; 5,4]$	$f(5,4) - f(5,0) = 33,28$	$\frac{f(5,4)-f(5,0)}{5,4-5,0} = 83,2$
$[5,0; 5,3]$	$f(5,3) - f(5,0) = 24,72$	$\frac{f(5,3)-f(5,0)}{5,3-5,0} = 82,4$
$[5,0; 5,2]$	$f(5,2) - f(5,0) = 16,32$	$\frac{f(5,2)-f(5,0)}{5,2-5,0} = 81,6$
$[5,0; 5,1]$	$f(5,1) - f(5,0) = 8,08$	$\frac{f(5,1)-f(5,0)}{5,1-5,0} = 80,8$
$[5,0; 5,01]$	$f(5,01) - f(5,0) = 0,8008$	$\frac{f(5,01)-f(5,0)}{5,01-5,0} = 80,08$
$[5,0; 5,001]$	$f(5,001) - f(5,0) = 0,080008$	$\frac{f(5,001)-f(5,0)}{5,001-5,0} = 80,008$

Cuadro B.2: Variación de la posición y velocidad promedio en distintos intervalos

B.1.2. El Impuesto Marginal[2]

Supongamos que una persona gana \$6000 al año. Ésta tiene la opción de trabajar más horas, pero para ver si le convendría, primero quisiera determinar los **efectos del impuesto en los ingresos**. Para simplificar las cosas, supongamos que el impuesto que debe pagar viene dado por un polinomio de segundo grado, $y = f(x) = 0{,}04x^2$, donde

$x =$ ingresos gravables (expresado en unidades de \$1.000)
$y = f(x) =$ impuesto (expresado en unidades de \$1.000).

A partir de esta función se discutirán una serie de preguntas, pero antes se le solicita al alumno que calcule el impuesto para ingresos anuales de \$1.000 hasta unos \$12.000, por ejemplo. Recuerde que x está expresada en unidades de \$1.000.

Pregunta 1: En cuánto varía el impuesto que ha de pagar cuando el ingreso del trabajador cambia de \$6.000 a \$12.000; de \$6.000 a \$11.000; de \$6.000 a \$10.000; de \$6.000 a \$9.000; de \$6.000 a \$8.000 y de \$6.000 a \$7.000. ¿Qué observa en cada uno de los cambios de ingreso al año?

Respuesta de P1: En la segunda columna de la **Tabla B.3** podemos ver cómo varía el impuesto a pagar en función de los incrementos que sufra el sueldo del trabajador más allá de los \$6.000 que gana actualmente.

Discusión: Al inicio de esta actividad y antes de entrar a realizar las tareas correspondientes, se le pidió al estudiante que calculara el impuesto a pagar para distintos ingresos, ahora estudiamos variaciones del impuesto para intervalos de ingresos particulares; es decir, qué variaciones experimenta el impuesto del trabajador cuando obtiene ingresos superiores a los \$6.000 que actualmente gana.

¿Consideran ustedes que esta tarea promueve, de alguna manera, el concepto de incrementos de una variable? ¿De qué manera? ¿Cómo?

[Moderador]: Ahora me olvido de la velocidad instantánea y estamos estudiando incremento pero en un contexto económico.

[Elio]: Sí, es más o menos lo que Kenya estaba diciendo ahora... Esto está más enmarcado en lo que ellos requieren, un contexto de economía, ingresos..., se ve, ahora se puede ver lo que significa el incremento de una función, tú estás hablando ahora de cantidad de dólares, cantidad de dinero, ahí vas a ver el cambio cuando varían los ingresos. A medida que el ingreso cambie el impuesto es distinto, además se ven cosas como..., el que más gana que pague

[2] Tomado de Wonnacott (1983)

más impuestos, la cotidianeidad, el día a día, tiene un sentido común, una lógica común.

[Moderador]: O sea, ¿que el problema de velocidad instantánea no tiene estas características?

[Elio]: No he dicho eso, además tú dijiste que nos olvidemos de ese problema, pero lo que quiero decir es que este está más relacionado con el lenguaje que ellos manejan.

[Moderador]: De acuerdo, y tú, Alexis, ¿qué opinas al respecto?

[Alexis]: Al principio esta era la idea de la cuestión, tal como hemos discutido desde tus trabajos anteriores, de hecho me extrañó que llegaras con un problema de velocidad instantánea. Recuerda que siempre te he dicho que la idea es comenzar la parte de derivada pero con este tipo de problemas o motivar con este tipo de problemas...

[Elio]: Disculpa que interrumpa, esta función que aparece allí, el $0,004x^2$, está puesta allí..., pero uno como docente debe ser cuidadoso a la hora de que el modelo que uno quiere buscar para interpretar esto, no te vaya a generar algo contrario a lo que sugiere la intuición, porque entonces vas a crear un conflicto mental en el estudiante. En este ejemplo en particular, la idea que más o menos uno puede creer es que la persona paga...

[Kenya]: Más ingreso paga más impuestos...

[Elio]: Más impuestos porque ganó más dinero. Si le pones una función que le haga lo contrario, entonces el estudiante dirá: "¿qué pasó aquí?"

[Moderador]: Pero no entiendo, ¿te puedes explicar mejor a que viene este comentario?

[Elio]: La idea es pensar que quien tenga más ingreso pagará más impuestos, por lógica...

[Kenya]: Supongo que él se refiere a que el problema no sólo debe estar en el contexto sino que además los datos deben concordar con lo que realmente debe ocurrir de acuerdo al planteamiento del problema...

[Elio]: Me refiero, por ejemplo, a que si escojo algún tipo de función, decreciente por ejemplo, en cierto intervalo, que a medida que los ingresos aumentan el impuesto baja, entonces más de uno (de los estudiantes) dirá: "¿qué pasó aquí?".

[Kenya]: La lógica dice que a mayores ingresos mayores impuestos, si tú le pones una función que está representando los impuestos pero que es decreciente, entonces eso va a ir en contra de la lógica...

[Moderador]: Un momento, estas funciones están estudiadas y escogidas con mucho cuidado, la discusión no es esa, aunque reconozco la observación realizada por ustedes, pero se supone que esta función modela de una manera perfecta o casi perfecta el impuesto que debe pagar una persona por sus ingresos en un año. Por supuesto que hay que evitar caer en ambigüedades, sobre todo con un problema con el que se busca enseñar un concepto nuevo para el estudiante.

[Kenya]: Lo que entiendo que tú persigues aquí es una discusión de promover la idea de que una diferencia, un cambio en una variable genera cambios en la otra, que eso después en matemáticas se llama incrementos es otra cosa. Lo mismo que pasa con la derivada, es un límite y que a ese límite por tener ciertas características le vamos a llamar la derivada, pero con la palabra incremento en sí, es una palabra con la que hay que tener mucho cuidado con el estudiante, porque en el lenguaje cotidiano, para ellos y para cualquiera, el incremento es sinónimo de aumento, en cambio en matemáticas un incremento puede ser un aumento o una disminución, y esas cosas, de pronto, si tu te metes con un problema donde va dando datos negativos y tú le vas a hablar de incrementos y tienes datos positivos..., "no pero es que eso no es incremento porque tiene signo negativo". Parece que el término matemático utilizado no se ajusta mucho a lo que ellos traen del bachillerato. Pero sí promueve la idea, la idea de cambios en una variable generan cambios en otra variable. Que después esos cambios reciben un nombre muy específico, el incremento bien en la variable independiente o bien en la variable dependiente.

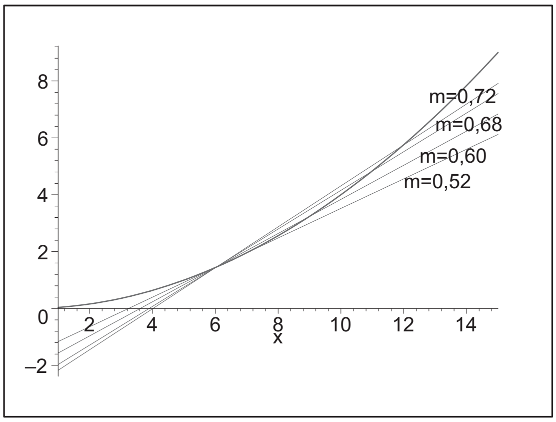


Figura B.3: Variación del impuesto en algunos intervalos

Pregunta 2: Si la persona **incrementa** sus ingresos en \$1000, ¿**qué cantidad de este incremento** será para impuestos? ¿Qué porcentaje?

Antes de responder a esta pregunta, pasamos a discutir sobre el incremento de una variable.

Incremento de una variable

Si observamos la **Tabla B.3**, notamos que para cada ingreso x (columna 1), se da la correspondiente tajada del fisco (columna 3). Esta correspondencia es una función que definiremos más adelante, pero que de momento llamaremos *variación del impuesto* (**impuesto marginal**), o el incremento de y o $f(x)$. En general, se define como

$$\Delta y = \frac{f(x+1) - f(x)}{(x+1) - x}$$

En la **Tabla B.3** se observa que la *variación del impuesto* (**impuesto marginal**) presenta una cierta regularidad, por lo que parece conveniente intentar deducir una fórmula para dicho impuesto a partir de esta situación.

$$\begin{aligned} \Delta y &= 0{,}04(x+1)^2 - 0{,}04x^2 \\ &= 0{,}04(x^2+2x+1) - 0{,}04x^2 \\ &= 0{,}08x + 0{,}04 \end{aligned}$$

A manera de comprobación, se observa que cuando se sustituye $x = 0, 1, 2, \ldots$ se genera la última columna de la tabla 1.

Respuesta de P2: Dado que sus ingresos, x, se miden en unidades de \$1000, su incremento podría expresarse simbólicamente como

$$\Delta x = 1, \ \textbf{cada unidad representa \$1000}$$

¿En cuánto se incrementarán sus impuestos? Es decir, ¿cuál es el incremento correspondiente Δy?

$$\begin{aligned} \Delta y &= f(7) - f(6) \\ &= 1{,}96 - 1{,}44 \\ &= 0{,}52 \end{aligned}$$

Así, podemos decir que la tajada al fisco es de 52 % por los siguientes \$1000 que gane (a los \$6000 que ya gana). A esta *variación del impuesto*, (Δy), los economistas le llaman **impuesto marginal**.

Discusión: Con esta tarea buscamos que el estudiante se aproxime a la definición de derivada por medio del incremento de una variable respecto a otra (cociente incremental), pero además se llega al monto que el trabajador pagaría en impuestos por los \$1000 adicionales, que es el 52 % de esto \$1000. En otras palabras, la persona solo se quedará con \$480 de estos \$1000.

Un planteamiento como éste, en el que buscamos trabajar, de forma puntual, el tema de los incrementos, partiendo del contexto económico. ¿Les parece adecuado que la variable x se exprese en unidades de mil, o no supone mayor inconveniente y permite la discusión adecuada sobre incrementos?

[Elio]: En el caso mío, este tipo de discusión genera conflictos serios en el estudiante porque..., no todos, pero parece que algo pasa; por ejemplo, en este caso lo resultados deberían ir multiplicados por mil. No sé qué pasa, pero como que no interpretan la variable que viene por unidades de mil sino que quieren trabajar siempre con el uno, entender que aquí el mil es uno, es la unidad, de eso me he dado cuenta en mis exámenes, con mis estudiantes, no con todos, con algunos, de que hay cierto ruido, algo pasa allí. Iba a decir algo pero se me fue...

[Moderador]: Kenya, ¿ibas a añadir algo?

[Kenya]: Yo pienso que a este nivel no debería causarle tanta dificultad, lo que pasa es que ellos no están habituados a trabajar en estos términos, en unidades de mil. Cinco son cinco mil..., no debería ocurrir porque se supone que en economía se manejan situaciones con cantidades bastante grandes, pero incluso en los medios de comunicación y en la prensa escrita en concreto se utiliza mucho este tipo de lenguaje y no se nombran esas cantidades por gusto, entonces es como contradictorio, eso significa que no leen la prensa.

[Elio]: La otra opción es ponerle una función que trabaje en unidades de dólares, pero no en miles ni cientos, pero entonces el problema va a quedar muy desactualizado, una persona que tenga que pagar 100 dólares o que gane 100 dólares mensuales o un dólar y eso pasa..., hay muchos libros que son viejos y entonces aparecen problemas como: "una persona requiere construir algo y el costo del material es de 5 bolívares..."

[Alexis]: Por cierto que los problemas que yo trabajo en clase los trabajo en bolívares...

[Kenya]: Pero tú lo has dicho, los que trabajas en clase, pero qué me dices de los problemas de los libros de texto...

[Moderador]: Nos estamos saliendo del tema de discusión, aún así, qué dirían ustedes si hablaran del ingreso que tiene el país por concepto de la renta petrolera, recuerden que estos montos son en millones de dólares, el precio del barril de petróleo es en dólares, la referencia es el dólar, nos guste o no. Pero si ustedes llevan estas cantidades de dólares a bolívares, entonces las unidades serían el millardo, como mínimo. De todas maneras, no estoy hablando de la unidad monetaria o concretamente de una moneda en particular, yo me refiero a partir la unidad o mejor dicho, qué ocurre cuando la unidad de nuestro problema es de mil, de un millón o más.

Ingresos Gravables x	Impuesto $f(x)$	Impuesto Promedio $A(x)=\frac{f(x)}{x}$	Variación del Imp. $\Delta y=\frac{f(x+1)-f(x)}{1}$
1	$f(1)=0,04$	0,04	0,04
2	$f(2)=0,16$	0.08	0.12
3	$f(3)=0,36$	0.12	0.20
4	$f(4)=0,64$	0.16	0.28
5	$f(5)=1,00$	0.20	0.36
6	$f(6)=1,44$	0.24	0.44
7	$f(7)=1,96$	0.28	0.52
8	$f(8)=2,56$	0.32	0.60
9	$f(9)=3,24$	0.36	0.68
10	$f(10)=4,00$	0.40	0.76
11	$f(11)=4,84$	0.44	0.84
12	$f(12)=5,76$	0.48	0.92

Cuadro B.3: Ingresos gravables e impuestos promedio y marginal

[Alexis]: Hay algunos que lo entienden y otros que no, pero la mayoría lo entendería. Pero hay que insistirle mucho...

[Kenya]: Yo creo que no sería muy problemático, tú te aseguras previamente que ellos entienden y si no lo entienden se le explica, si son 5 son 5000, si son 45 son 45000...

[Elio]: Perdón..., lo que yo comenté ahora es que él (estudiante) tiende a confundir y pareciera que le están haciendo calcular lo que él (trabajador) debe pagar por ganar ahora 7000 dólares, los impuestos que debería pagar, hacer énfasis en cuánto va a pagar por esos 1000 dólares adicionales a lo que está ganando ahora, eso es lo que pide el problema y que debemos ilustrarle muy bien al estudiante. Lo que sí he notado es eso, que confunden esa parte.

Comentario (Pregunta 3): Hasta ahora no hemos hablado de *límite* ni de *cociente incremental*. Aún cuando la función de impuesto del ejemplo antes visto se expresó en unidades de mil dólares, cualquier unidad hubiera sido satisfactoria. Por ejemplo, suponga que se quiere estudiar el *impuesto marginal* de una persona que gana \$6.000, para un incremento de \$100, esto es,

$$\Delta x = 0,1.$$

Entonces el impuesto correspondiente es

$$\begin{aligned}\Delta y &= f(6,1) - f(6,0)\\ &= 1,4884 - 1,4400\\ &= 0,0484.\end{aligned}$$

Por lo tanto, el incremento del impuesto en relación con el incremento de los ingresos es

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{0,0484}{0,1} = 0,484,$$

que los economistas denominan la tasa del impuesto marginal y los *matemáticos llaman el cociente incremental*.

Discusión: Ahora, cuando el incremento del ingreso es de \$100 ($\Delta x = 0,1$), el incremento en Δy cambia respecto al caso anterior. Cuando el incremento en el ingreso era de \$1.000, la tajada al fisco era del 52 %, pero cuando el incremento es de \$100, la tajada es de 48,4 %. De esta manera y según la necesidad del caso a estudiar, nuestro incremento lo podemos hacer tan pequeño como sea.

¿Qué interés puede suponer para ustedes, desde el punto de vista metodológico, esta actividad en la que se busca dar un paso más hacia la definición de derivada?

[Alexis]: En primer lugar, debería hablarse sobre un intervalo.

[Moderador]: Te explico, recuerda que te estás aproximando a 6...

[Alexis]: Ah, ok.

[Moderador]: Antes era 7000, después 6100, después 6010; entonces de manera implícita estás hablando de un intervalo.

[Alexis]: Entonces, allí debe despertar interés en el estudiante sobre cómo se va aproximando, cómo se van acercando ciertos valores de la función a algo...

[Elio]: Eso es lo que se quiere hacer, aproximar unos valores a uno establecido, eso es lo que se quiere hacer, lo que pasa es que el problema como tal podría hacerles perder interés por lo que está pasando, porque uno diría: "me preocupa, ahora estoy ganando 6000 y ahora voy a ganar 8000 mil, ahora sí me preocupa por el impuesto, pero si yo de 6000 voy a pasar a ganar 6010, eso no me preocuparía". El problema como tal, de pronto no demuestra interés en uno por el impuesto que ahora pagaría, me refiero al interés personal, no al matemático. De repente no le presto mucha atención porque sería muy poco lo que voy a pagar ahora en impuestos cuando pase de ganar 6000 a 6010, aunque eso me puede dar una idea intuitiva que el impuesto a pagar no debe ser muy grande; por ejemplo, puedo decir o concluir: "el impuesto con esta cantidad no va a ser muy grande". Sin embargo, se está mostrando de alguna manera que el incremento en el sueldo genera cambios en el impuesto, lo que pasa es que cuando yo hago un cambio pequeño en una variable debo esperar un movimiento pequeño, en este caso, en el impuesto. Entonces, yo había pensado que perdía importancia una situación como la planteada, pero ese mismo hecho de perder importancia, por qué le resto importancia, porque no estás esperando un cambio muy brusco y eso también puede favorecer...

[Moderador]: Vamos a parar aquí un momento, disculpen que los frene, pero vamos a meternos en el problema, en la discusión, veo que nos estamos alejando de la discusión y les pido que sean más concretos en sus opiniones, recuerden que lo que está en discusión es que queremos o pretendemos generar el concepto de derivada a partir de algunas situaciones particulares donde ustedes me dirán o pondrán su punto de vista sobre lo acertado de la situación, qué conflictos puede traer en el estudiante la situación, etc. Recuerden que lo que busco en este momento es la opinión de ustedes, desde el punto de vista metodológico, sobre el incremento, que en un principio fue de 1000, luego de 100, después podría ser de 10 y así sucesivamente. Es decir, ¿supone para ustedes algún interés eso de ir achicando el incremento del sueldo del trabajador?, quiero enfatizar lo del punto de vista metodológico, ¿es un buen o mal método, es una buena o mala estrategia didáctica para abordar el tema de derivada con estos estudiantes?

[Elio]: Sí, a mi me parece que sí, ya te dije, en un principio no le di la importancia que posteriormente le vi, después de leerlo con más calma...

[Kenya]: Entiendo que la idea es llegar a la definición de derivada por esta vía...

[Moderador]: Sí, pero quiero escuchar sus opiniones, el hecho de que yo o un grupo de personas apostemos por esto no significa que sea bueno o malo para el resto, por eso me interesa o nos interesa escucharlos.

[Kenya]: A mi me parece pertinente hacerlo así...

[Alexis]: Yo creo que como tú lo enfocas, por el lado de la economía o la contaduría, el estudiante debe darse cuenta más rápido que si lo enfocas por la vía de la velocidad instantánea...

[Kenya]: Además que un problema de su campo profesional debe ser más motivante para ellos...

[Alexis]: Debe llamarle más la atención...

[Kenya]: Y si de paso esa motivación se utiliza para introducir un concepto que les va a ser de mucha utilidad, entonces yo pienso que no hay lugar a dudas que, introducir el concepto de la derivada a partir de un problema de este tipo, de contexto para ellos, crea enormes beneficios. Entonces, ellos podrían estar más interesados en ver la derivada desde este punto de vista que en ver la derivada como la pendiente de la recta tangente, en la vida para qué me sirve eso..., yo no voy a calcular pendiente de la recta tangente en mi campo profesional, lo que sí me van a pedir es que haga un análisis marginal de esto o de aquello...

[Moderador]: Bien, pasemos al otro punto.

Observación: El cociente $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ se podría calcular para cualquier otro valor de Δx. Estudiemos ahora qué ocurre para cualquier incremento Δx. En este caso, el incremento Δy es,

$$\begin{aligned}\Delta y &= f(6+\Delta x) - f(6)\\ &= 0,04[6+\Delta x]^2 - 0,04[6]^2\\ &= 0,04[36+12(\Delta x)+(\Delta x)^2] - 0,04[36]\\ &= 0,48(\Delta x)+0,04(\Delta x)^2.\end{aligned}$$

De este modo, el cociente incremental se obtiene dividiendo entre Δx,

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = 0,48 + 0,04(\Delta x). \tag{B.1}$$

Paso al límite

Si en la expresión anterior (**B.1**), hacemos que Δx se aproxime a 0 tanto como uno quiera ($\Delta x \to 0$), se satisface que

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} \to 0,48$$

Este valor límite, los economistas, lo denominan *tasa del impuesto marginal infinitesimal* o *tasa de impuesto marginal*. Los matemáticos lo llaman *la derivada* y lo denotan por y' , es decir,

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} \to y'$$

Discusión: Finalmente hemos llegado a la definición de derivada de una manera que a muchos profesores no les gusta o mejor dicho, no están de acuerdo por toda la estructura que significa una construcción de esta naturaleza; además, consideran que el estudiante se distrae y se pierde en esencia el objetivo perseguido.

¿Qué opinión tienen ustedes sobre este hecho (el de introducir el concepto de derivada de esta manera), en relación con los objetivos que se buscan en el curso?

[Kenya]: Se entiende la posición de autores que opinan de esa manera porque se supone que estamos trabajando con adultos y que los adultos tienen cierto nivel de abstracción que no necesitan llegar a casos concretos, pero tú no le puedes pedir a una persona que haga algo que no haya sido de su experiencia, que no haya tenido experiencia en esa actividad, entonces, yo pienso que tendrán su razón por un lado, pero hay cosas que el alumno tiene que hacer independientemente de cuál se su edad o su nivel de maduración..., si no lo ven como experiencia propia entonces no lo van a entender nunca en su vida.

[Moderador]: Pero, ¿qué opinión tienen ustedes sobre el hecho de ir elaborando paso a paso toda una estructura para llegar a un concepto, en este caso, el concepto de derivada en relación con los objetivos que persigue el programa oficial de la materia?

[Kenya]: Algo que debemos tomar en cuenta es lo escueto de los programas en este sentido, generalmente hablan de unos objetivos muy generales, muy amplios...

[Alexis]: Bueno, a mi me parece que es mejor introducir la definición de derivada por esta vía, con problemas de aplicaciones..., como hemos venido haciendo en los últimos semestres que como se hacía anteriormente, yo recuerdo que cuando comencé con estos cursos, comenzaba con la definición de derivada y a hacer problemas de cálculo. En este sentido, yo creo que se cumplen los objetivos del programa y al mismo tiempo se motiva al estudiante, ya que estamos relacionando la parte económica con la parte matemática.

[Elio]: Me llamó la atención lo que dijiste hace rato, "que a muchos docentes no les gusta o mejor dicho, no están de acuerdo..., y que el estudiante tiende a distraerse..."

[Moderador]: Sí, me he encontrado casos...

[Elio]: Bueno, pero yo creo que en lugar de hablar de objetivos de los programas uno puede hablar de objetivos particulares o personales y nuestro objetivo debería ser, lograr utilizar esa herramienta, la derivada, para resolver problemas acordes a la situación que ellos están trabajando o que van a desarrollar en un futuro; de hecho, yo creo que los objetivos de los programas quedan más que cubiertos con estas actividades, ya que además de derivar, van aprendiendo una aplicación de la derivada en su campo o área. El único inconveniente que pueda surgir es el factor tiempo, no sé.

[Kenya]: Bueno, yo pienso que esta propuesta que hace Luis, que acabamos de discutir me parece bastante viable, me parece que es la que responde más a los intereses de los estudiantes que a la del profesor, porque eso de que a algunos profesores no les gusta o no están de acuerdo, habría que ver por qué no le gusta, puede ser que a lo mejor (el profesor) no está preparado, no conoce el contexto o, porque esto implica más trabajo por parte del profesor, eso es una realidad, el trabajo es mayor, tal vez a eso se refiere Elio con lo del tiempo. Aquí hay una realidad y es que esto implica tener que sentarse en la mesa y estudiar y conocer los problemas que mejor se adapten a la situación. A lo mejor no es que no queramos trabajar sino que el tiempo es clave en todo esto.

B.1.3. Cuestionario relacionado con la actividad 1

De acuerdo a la actividad que acabamos de realizar y como producto de las opiniones y discusiones en la misma, nos interesa conocer tu opinión sobre algunos puntos que señalamos a continuación:

1. ¿Qué aspectos puedes destacar (positivos o negativos) entre ambos problemas?; es decir,
   a) ¿Cuál sería la actitud del estudiante frente a estos problemas (por separado)? ¿Por qué?
   b) ¿Cuál llevaría al estudiante a cometer errores? ¿Por qué?
   c) De acuerdo a la bibliografía que está al alcance de los estudiantes (bibliotecas y librerías), ¿cuál conviene utilizar? (1 o 2 referencias) ¿Por qué?
   d) Otro. ¿Por qué?
2. ¿Utilizas algún problema similar en tus clases para introducir el concepto?
   a) $\boxed{\text{Sí}}$ ¿Por qué?, ¿qué persigues didácticamente con este tipo de problemas?
   b) $\boxed{\text{No}}$ ¿Por qué?
3. En caso de haber respondido negativamente en la pregunta anterior y de seguir un esquema tradicional en tus clases. ¿Utilizarías el problema vinculado a la economía para introducir el concepto de la derivada descartando el otro, después de la experiencia de hoy o prefieres seguir la estructura que haces actualmente? ¿Por qué?
4. Realiza un esquema de la estructura que **sigues actualmente** para enseñar el tema de la derivada en la carreras de ciencias económicas.

Alexis

Cuestionario relacionado con la actividad 1

De acuerdo a la actividad que acabamos de realizar y como producto de las opiniones y discusiones en la misma, nos interesa conocer tu opinión sobre algunos puntos que señalamos a continuación:

1. ¿Qué aspectos puedes destacar (positivos o negativos) entre ambos problemas?; es decir,

   (a) ¿Cuál sería la actitud del estudiante frente a estos problemas (por separado)? ¿Por qué?

   (b) ¿Cuál llevaría al estudiante a cometer errores? ¿Por qué?

   (c) De acuerdo a la bibliografía que está al alcance de los estudiantes (bibliotecas y librerías), ¿cuál conviene utilizar? (1 o 2 referencias) ¿Por qué?

   (d) Otro. ¿Por qué?

a) Para el caso de velocidad instantánea me parece que al estudiante se le hace más cuesta arriba digerir la definición por verla como un problema de ingeniería. y no como de Ciencias Económicas. En cambio, que para el impuesto marginal a pesar que se está haciendo lo mismo esté debe interesarme más por ser una definición de su interés, por su parte. el estudiante, ya debe haber escuchado hablar de estos temas, es decir, costo, ingreso, ganancia, etc.

b) El estudiante debe cometer errores en la introducción con velocidad instantánea por no tenerlo gusto respecto al hablar de función de posición, desplazamiento, tiempo, etc.

c) Bibliotecas con las limitaciones que tenemos aquí en [illegible]

1) Matemáticas Aplicadas a la Administración y a la Economía.
Jagdish C. Arya - Robin W. Lardner

2) Cálculo para Administración Economía y Ciencias Sociales
Laurence D. Hoffmann - Gerald L. Bradley

2. ¿Utilizas algún problema similar en tus clases para introducir el concepto?

   (a) $\boxed{\text{Sí}}$ ¿Por qué?, ¿qué persigues didácticamente con este tipo de problemas?

   (b) $\boxed{\text{No}}$ ¿Por qué?

En particular, motivo la definición mediante un ejemplo sencillo, e involucro el cociente incremental con una posición límite si está existe y el estudiante comprende más de lo que se está hablando que al motivarlo con velocidad instantánea y creo que se puede hacerlo usando funciones que corresponden al estudio de las Ciencias Económicas.

3. En caso de haber respondido negativamente en la pregunta anterior y de seguir un esquema tradicional en tus clases. ¿Utilizarías el problema vinculado a la economía para introducir el concepto de la derivada descartando el otro, después de la experiencia de hoy o prefieres seguir la estructura que haces actualmente? ¿Por qué?

4. Realiza un esquema de la estructura que **sigues actualmente** para enseñar el tema de la derivada en la carreras de ciencias económicas.

Después de esta experiencia, preferiría tratar de adoptar una estructura hasta aquí discutida.

Elio

Cuestionario relacionado con la actividad 1

De acuerdo a la actividad que acabamos de realizar y como producto de las opiniones y discusiones en la misma, nos interesa conocer tu opinión sobre algunos puntos que señalamos a continuación:

1. ¿Qué aspectos puedes destacar (positivos o negativos) entre ambos problemas?; es decir,

   (a) ¿Cuál sería la actitud del estudiante frente a estos problemas (por separado)? ¿Por qué?

   (b) ¿Cuál llevaría al estudiante a cometer errores? ¿Por qué?

   (c) De acuerdo a la bibliografía que está al alcance de los estudiantes (bibliotecas y librerías), ¿cuál conviene utilizar? (1 o 2 referencias) ¿Por qué?

   (d) Otro. ¿Por qué?

(a) Por alguna razon, creo que la actitud del estudiante es de rechazo, simplemente por ser un problema en el que se tiene que aplicar la matemática (claramente, no todos). Lo que se puede lograr es mermar esa apatía que se pudiera presentar, enfocando el problema de la segunda manera.

(b) Considero, segun lo que he notado, que los errores se pueden presentar en cualquiera de los dos casos; pues en ambos se requieren calculos numéricos e interpretaciones que son los aspectos en que más frecuente se presentan errores. Pero también considero que el hecho de enmarcar el problema dentro de una situacion que se adecúe más a sus intereses, como el segundo caso, puede influir a que los errores disminuyan.

(c) A mi juicio, creo que debemos utilizar textos en los cuales se presenten los conceptos en estudio, de una manera constructiva, es decir, que las ideas vayan surgiendo de los propios intereses hasta llegar a la "formalidad" del asunto y no imponiendo definiciones para obtener resultados (como Teoremas) y aplicarlos porque sí.

Considero que los siguientes pueden ser una buena referencia para ello:

*) Matematicas para Administracion y Economia. S.T. Tan.
*) Matemáticas aplicadas a la Administracion y a la Economía. Arya, Lardner.

2. ¿Utilizas algún problema similar en tus clases para introducir el concepto?

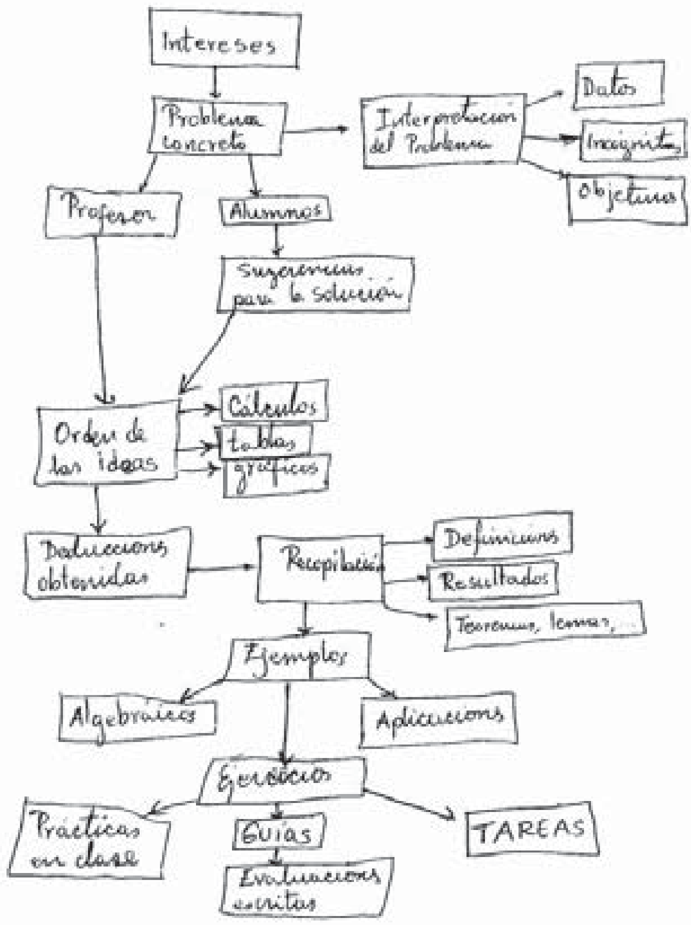
(a) Sí ¿Por qué?, ¿qué persigues didácticamente con este tipo de problemas?

(b) No ¿Por qué?

Sí, porque si lo que se quiere es que el
alumno conozca y aprenda sobre este tema, que
en principio puede ser abstracto y por tanto tedioso
y carente de interés, lo más conveniente debe ser
presentarle alguna situación en la cual se logre
establecer
concretar algún interés y por tanto se pueda
al menos un objetivo específico del asunto. Aprovechándome
de esto, en el buen sentido, creo que es más fácil
introducir este concepto, presentándolo como una necesidad
tal vez, para darle una estructura formal (si se quiere) al
problema y de allí poder palpar la poderosa herramienta
que nos ofrece la derivada en la solución de problemas de
este tipo (me refiero al segundo caso)

3. En caso de haber respondido negativamente en la pregunta anterior y de seguir un esquema tradicional en tus clases. ¿Utilizarías el problema vinculado a la economía para introducir el concepto de la derivada descartando el otro, después de la experiencia de hoy o prefieres seguir la estructura que haces actualmente? ¿Por qué?

4. Realiza un esquema de la estructura que **sigues actualmente** para enseñar el tema de la derivada en la carreras de ciencias económicas.



Kenya

Cuestionario relacionado con la actividad 1

De acuerdo a la actividad que acabamos de realizar y como producto de las opiniones y discusiones en la misma, nos interesa conocer tu opinión sobre algunos puntos que señalamos a continuación:

1. ¿Qué aspectos puedes destacar (positivos o negativos) entre ambos problemas?; es decir,

    a) ¿Cuál sería la actitud del estudiante frente a estos problemas (por separado)? ¿Por qué?

    b) ¿Cuál llevaría al estudiante a cometer errores? ¿Por qué?

    c) De acuerdo a la bibliografía que está al alcance de los estudiantes (bibliotecas y librerías), ¿cuál conviene utilizar? (1 o 2 referencias) ¿Por qué?

    d) Otro. ¿Por qué?

Vel. Instantánea	Impuesto Marginal
a). No me parece adecuado para estudiantes de Economía, por lo que su actitud pudiera ser más bien negativa contribuyendo a aumentar su aversión hacia la matemática. Aún así, y quizás más adelante cuando el concepto de derivada haya sido asumido a través de un problema ajustado a los estudiantes de Economía, (podría ser interesante (al menos como información) plantear problemas en otros contextos haciendo ver, de modo comprensivo, que las "formas se liberan de su contenido concreto"	a) Siendo adecuado para estudiantes de Economía, cabe esperar que muestren una actitud positiva hacia la noción que se pretende introducir.

b) Si hablamos de errores conceptuales, presentar sólo una perspectiva (por ejemplo, impuesto general o, más general, análisis marginal) podría hacer pensar al estudiante que la derivada es un concepto exclusivamente aplicable a su campo profesional, por lo que luce necesario plantear otras situaciones (al menos, a modo de cultura general, pero tal vez con no tanto detalle) que permitan apreciar la importancia que tiene la derivada en la solución de problemas.

Si nos referimos a errores de procedimiento, creo que ambos tipos de problemas, por representar el mismo concepto, pudieran llevar a dificultades en el cálculo con decimales, o con las unidades utilizadas, o a confundir entre sí las nociones que giran en torno a la derivada tales como Δy y dy, o a realizar cálculos no en x sino en $(x + \Delta x)$

De cualquier modo, no habría que olvidar que ambos tipos de errores están conectados entre sí.

c) Haeussler, E. y Paul, R.

Realmente, ninguno de los libros que conozco me satisface, pero creo que el citado es el que más se ajusta a las necesidades de los alumnos de Economía, en cuanto al programa de Matemáticas. Como material de apoyo, lo recomendaría.

2. ¿Utilizas algún problema similar en tus clases para introducir el concepto?

   a) $\boxed{\text{Sí}}$ ¿Por qué?, ¿qué persigues didácticamente con este tipo de problemas?

   b) $\boxed{\text{No}}$ ¿Por qué?

No utilizo problemas ni del tipo 1 ni del tipo 2.
Del tipo 1 (Vel. inst), porque no es apropiado
para los estudiantes de Cs. Económicas.

Del tipo 2 (Análisis Marginal), porque asumo (y
la experiencia así lo evidencia) que los alumnos
tienen deficiencias en el manejo de funciones
y vocabulario vinculado a su componente
profesional; no se dejan a un lado, las
dificultades que también presentan los alumnos
en el cálculo con decimales y el trabajo con
estimaciones, al cual no están habituados.

3. En caso de haber respondido negativamente en la pregunta anterior y de seguir un esquema tradicional en tus clases. ¿Utilizarías el problema vinculado a la economía para introducir el concepto de la derivada descartando el otro, después de la experiencia de hoy o prefieres seguir la estructura que haces actualmente? ¿Por qué?

Asumiendo que el esquema de clase que desarrollo
(presentado en la siguiente pregunta) es tradicional,
sí estaría dispuesto a utilizar problemas vinculados
a la economía con miras a introducir el concepto
de derivada, porque resulta más significativo
y motivante para los alumnos habida cuenta que
el proceso de enseñanza se sustenta en un
esquema basado en la resolución de problemas
en el contexto de una enseñanza cognitivo-
constructivista que busca que el alumno
aprenda de modo comprensivo y no memo-
rístico.

4. Realiza un esquema de la estructura que **sigues actualmente** para enseñar el tema de la derivada en la carreras de ciencias económicas.

1) Un breve discurso acerca de la importancia que tiene la derivada en la resolución de problemas asociados a las Cs. Económicas.

2) Se introduce la noción de derivada utilizando la interpretación geométrica, sobre la base del conocimiento que los alumnos tienen de la noción de límite.

3) Desarrollo de destrezas para el cálculo de derivadas utilizando las reglas y técnicas de derivación

4) Interpretación de la derivada como razón de cambio desde el punto de vista matemático a través del siguiente esquema y tomando como ejemplo la función real $y = x^2$:

4.1) Incremento en x
4.2) Incremento en y
4.3) Razón de cambio promedio
4.4) Razón de cambio
4.5) Diferencial de y
4.6) Relaciones entre (4.4 y 4.3) y (4.5 y 4.2)

Para todas estas nociones se presenta una tabla para diversas variaciones de x, se insiste en la interpretación, lenguaje (simbólico y verbal) y con un apoyo en el aspecto geométrico. Con respecto a esto último se establecen las conexiones entre la noción estudiada en 2 y 4.1 a 4.6

4.7) Repetir lo anterior utilizando funciones
asociadas a la economía (Costo, ingreso,
Beneficio, ecuación de demanda, Consumo,
Ahorro) con énfasis en las interpretaciones
y el lenguaje en sus diversas formas de
representación.

B.2. Actividad 2

Después de varias jornadas de trabajo con los estudiantes, ya ellos calculan derivadas inmediatas, han trabajado con las propiedades de la suma, resta, producto y cociente de derivadas e interpretaciones varias de la derivada en la economía.

B.2.1. Incrementos, Tasas, Optimización, Razón de Cambio y Recta Tangente[3]

Una fábrica de lápices, después de realizar un estudio exhaustivo, concluye que el costo por semana de producir x artículos (x en unidades de mil) de uno de sus productos principales, el lápiz mágico, viene dado por la función $C(x) = 2000 + 0,15x$ um y el ingreso obtenido por la venta de x lápices viene dado por $R(x) = 1,5x - 0,0001x^2$ um. La fábrica en cuestión produce 2 millones de lápices mágicos semanales y se está estudiando la idea de incrementar la producción a 2.650.000.

Preguntas: Las siguientes preguntas están relacionadas con los contenidos matemático y económico en general.

Pregunta 1: Cuál es el dominio para cada una de las funciones $C(x), R(x)$ y $\boldsymbol{U(x)}$ (donde $\boldsymbol{U(x)}$ representa la **función de beneficio** o **utilidad**), vistas como funciones matemáticas en general y como funciones de la economía. **Discuta sobre esta situación**.

Respuesta de P1: En primer lugar, antes de hablar de los dominios de las funciones, debemos obtener la función de beneficio $\boldsymbol{U(x)}$, la cual se define como sigue:

$$\boldsymbol{U(x)} = R(x) - C(x) = -0,0001x^2 + 1,35x - 2000.$$

Por otra parte, en la **Tabla B.4** se muestran los dominios[4] de cada una de las funciones mencionadas en la pregunta.

Discusión: En las dos situaciones se observa que para la misma función el dominio no es el mismo, suponiendo una economía hipotética sencilla, (**se trata de introducir e involucrar al estudiante y no de plantear situaciones económicas complejas por muy reales que éstas lo sean**).

No obstante, en una situación económica real, el dominio en cualquiera de las funciones estaría acotado también por la derecha, dependiendo en este caso

[3]Tomado de Arya y Lardner (1987)

[4]$\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, 3, ...\}$

	$C(x)$	$R(x)$	$U(x)$
Dominio Mat.	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$
Dominio Ec.	$\mathbb{R}_0^+$ $(\{x \in \mathbb{N}_0 : \frac{x}{1000}\})$	$\mathbb{R}_0^+$ $(\{x \in \mathbb{N}_0 : \frac{x}{1000} \leq 15000\})$	$[1695, 11805]$ $(\{x \in \mathbb{N} : 1695 \leq \frac{x}{1000} \leq 11805\})$

Cuadro B.4: Dominio de funciones en dos contextos

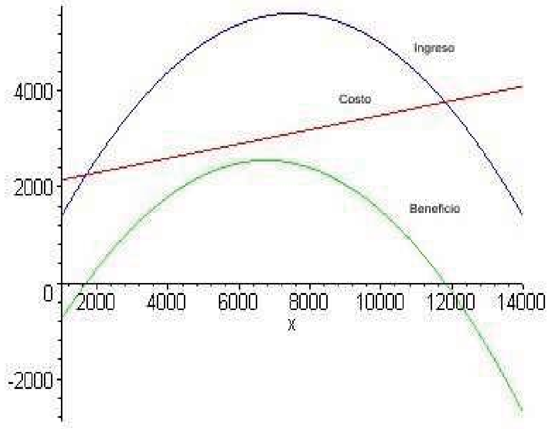


Figura B.4: Funciones R, C y U

de la capacidad de producción y venta del fabricante, por ejemplo. Más aún, si nos fijamos en detalle en el enunciado del problema, los objetos fabricados son lápices y la x está expresada en miles, con lo cual el dominio económico sería $\mathbb{Q}_0^+$ sin excederse en tres decimales (por lo de las unidades de x).

¿Qué importancia supone para ustedes implementar este tipo de dualidades (económicas y matemáticas) en estos cursos o, por el contrario, supone más bien que el estudiante tiende a confundirse? ¿Por qué?

[Kenya]: Digamos que es muy válida esa apreciación de que la matemática expresa más la forma que los contenidos, pero cuando ya empezamos a aplicar las matemáticas a una situación real, entonces el contexto cuenta y hay que hacer caso a las condiciones bajo las cuales, digamos, una determinada función puede realmente explicarle el fenómeno que se está estudiando...

[Elio]: Además, a estas alturas ya el estudiante a pasado por el estudio previo de funciones, cómo se calcula el dominio de una función, cómo se interpretan algunos datos característicos de la función, etc. Entonces, si estamos utilizando alguna función para modelar una situación, creo que no sería muy complicado, partiendo de ese hecho, de que el dominio matemático es una cosa como abstracta y ahora, cuando quiero estudiar el dominio bajo estas circunstancias se van a restringir muchas cosas, ya no tengo la libertad que tenía antes, algebraicamente. Tengo la libertad que me establecen las nuevas condiciones que vienen dadas por el mismo problema...

[Kenya]: Además, debe suponerse que en estudios previos ellos abordaron el tema de la restricción de una función.

[Alexis]: Asumiendo que desde un principio se ha hablado, desde un principio me refiero a Matemáticas 11, se ha colocado la parte de matemáticas aplicadas. Porque si no el cambio es muy brusco.

[Elio]: El cambio sería doble..., utilizar esta función para un problema en particular y aparte la cuestión del dominio...

[Alexis]: De hecho, cuando uno le habla a los estudiantes del dominio..., y cuando tiene que justificar que x tiene que ser mayor o igual que cero, porque cuál es la idea de producir nada, cuál es el costo de producir -20 artículos...

[Moderador]: No..., pero un momento, puede darse el caso de una función en economía con dominio negativo, puede darse el caso de un empresa que quiera competir con otra y para darse a conocer, o para ganar mercado, vende su producto por debajo del costo. Aún y cuando esta es una situación muy común en el mundo de la economía, no es la idea para lo que queremos trabajar...

[Alexis]: Entiendo que estás muy metido en el mundo de la economía porque tú estás trabajando con esto, en cambio nosotros tenemos otras líneas de investigación, tú has estudiado esto más que nosotros...

[Moderador]: A lo que me refiero es a lo siguiente, no tiene sentido poner un problema muy real cuando puedes generar conflictos en el estudiante, mi idea no es, ni pretende ser que se entienda que yo sé de economía, todo lo contrario. De momento podemos dejar estas situaciones más complejas a cursos propios de la carrera. El otro detalle que me gustaría discutir con ustedes sobre estos dominios, por ejemplo, el de los racionales, esta función no sería derivable ¿o sí?

[Alexis]: va a tener picos...

[Moderador]: Más que picos, va a tener saltos y se convierte en una función discreta. Recordemos que la derivada, al ser un límite, es un acercamiento infinitesimal. Vamos a dejarlo hasta aquí.

Pregunta 2: Determine el **beneficio promedio**, $\overline{\boldsymbol{U}}(x)$ *um*, por millares de lápices producidos. Calcule $\overline{U}(2100)$ y dé una interpretación económica de este resultado. Además, si queremos calcular la **tasa de cambio promedio del beneficio** en un intervalo particular $[x_1, x_2]$, este beneficio lo denotamos por $\overline{U}_{(x_1,x_2)}$ y se define como $\overline{U}_{(x_1,x_2)} = \frac{U(x_2)-U(x_1)}{x_2-x_1}$. Calcular la tasa de cambio del beneficio promedio en $[1900, 2200]$.

Respuesta de P2: El beneficio promedio denotado por $\overline{U}(x)$ viene dado por

$$\begin{aligned}\overline{U}(x) &= \frac{U(x)}{x} \\ &= -0,0001x + 1,35 - \frac{2000}{x}\end{aligned}$$

Así, $\overline{U}(2100) \approx 0,1876$ *um*; es decir, el beneficio promedio que resulta de fabricar y vender 2.100.000 lápices es de 0,1876 *um*.

Por otra parte, la tasa de cambio promedio del beneficio de producir y vender entre 1.900.000 y 2.200.000 es $\overline{U}_{(1,900,2,200)} = \frac{U(2,200)-U(1,900)}{2,200-1,900} = \frac{486-204}{300} = 0,94$ *um*.

Discusión: Está claro que hablar de la tasa promedio dentro del concepto de derivada supone una aproximación o; mejor dicho, nos permite acercar al estudiante al concepto de la derivada.

En el campo de la didáctica existen opiniones encontradas por los especialistas en el sentido siguiente: partir de la contextualización no matemática (en nuestro caso económica), supone para el estudiante una herramienta que promueve a consolidar el aprendizaje matemático de estos. ¿Para ustedes supone lo mismo? ¿Por qué? ¿En general, cuál es o sería la actitud del estudiante ante tal situación, (alguna experiencia)?

[Kenya]: Bueno, yo pienso que sí porque estamos trabajando sobre las mismas ideas pero con otra función y de lo que se trata es de que el alumno llegue al concepto de derivada, en este caso, utilizando la función beneficio de una manera comprensiva...

[Moderador]: Cuando dices "*comprensiva*" a qué te refieres.

[Kenya]: Que resulta significativo para el estudiante, interesante, motivante..., porque estás trabajando sobre un problema que con seguridad se le va a presentar en su trabajo como profesional y es de suponerse que, bajo esas condiciones, puede resultar interesante para el estudiante que se inmiscuyan problemas que tienen que ver con su campo profesional, sobre todo con la idea de llegar a un concepto que es matemático que le va a ser muy útil para el desarrollo de su labor.

[Moderador]: Y tú Alexis, ¿qué nos puedes decir al respecto?

[Alexis]: Yo estoy de acuerdo con Kenya, pero me gustaría volver a la parte de los dominios porque en esta nueva función del beneficio promedio, el 0 no está en el dominio de la función mientras que en la función beneficio sí lo está...

[Moderador]: Por supuesto, el profesor debe hacer ese tipo de observación para evitar cualquier inconveniente con el estudiante...

[Elio]: Reforzando el tema que mencionaba Kenya..., una de las cosas más comunes en el estudiante, y que tal vez sea más pertinente, es el "*para qué estoy haciendo esto*", "*para qué me sirve esto*". Entonces yo creo que con este tipo de problemas se puede dar cuenta (el estudiante) para qué le sirve el uso de la derivada. Otra cosa que tiene que ver más con la notación en sí, es que tú escribes $\overline{U}_{(x_1,x_2)}$ y eso puede hacerle pensar al estudiante que estás trabajando con una función de dos variables. Hay que tener cuidado con eso.

[Moderador]: Tienes razón, pero creo que queda bien claro lo que se dice allí, de todas maneras agradezco tus comentarios porque el estudiante se suele apoyar de estas cosas para decir que no entiende.

[Kenya]: Yo he notado que los libros no expresan una notación específica..., sencillamente lo ponen como el cociente de incrementos de dos cantidades, no hay algo más específico como para la derivada que se utiliza f'...

[Moderador]: Y en atención a la experiencia de cada uno de ustedes, ¿en general, cuál es o sería la actitud del estudiante ante tal situación, (alguna experiencia)?

[Alexis]: Los estudiantes le huyen, le tienen pavor a la parte de aplicación...

[Moderador]: ¿No será más bien a la parte de contextualización?, cuando le pones un problema contextualizado.

[Alexis]: Sí, pero también a la parte de aplicaciones, cuando ellos leen el problema y no están familiarizados con el lenguaje, con la terminología..., y creo que el problema viene de Matemáticas 11 o de mucho antes...

[Elio]: Pero es que resulta hasta paradójico, es muy común que los estudiantes se pregunten: "*para qué me sirve esto*", pero cuando aparece el para qué, entonces el estudiante, no sé por qué razón, el estudiante siente un rechazo a esta situación...

[Kenya]: Tal vez porque en su proceso de formación ellos no están habituados a aplicar las matemáticas sino a calcular y nada más.

[Elio]: Por ejemplo, si uno les coloca un sistema de tres ecuaciones lineales con tres incógnitas, ellos lo resuelven por el método que tú le exijas, pero si les colocas uno de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas con algún texto de por medio, no lo resuelven, son pocos los que se sientan a trabajar con estos problemas...

[Alexis]: Lo que quería comentarte también, no sé si sería útil, aquí tu no definiste lo que es ingreso. Te lo digo por si acaso lo necesitas para trabajar con ellos directamente.

[Kenya]: Volviendo al tema de la actitud, cabe esperar, en teoría, que la actitud debería ser como positiva y mira... Realmente lo veo en mis clases, que sería bueno que alguien fuera y observara, cuando se dan esos temas se ve que muestran algo de interés en el tema, pero no sé qué pasa, los resultados no son buenos, pero si muestran una actitud positiva, si no todos al menos la gran mayoría muestran interés por la materia.

[Elio]: Ese es otro problema, que uno debe partir del interés del estudiante, pero entonces ellos no muestran un interés fuerte, hay algo de indiferencia.

Pregunta 3: Cuál es el **costo marginal** de producir 2.100.000 unidades. ¿Qué **interpretación económica** le puedes dar a este resultado?

Respuesta de P3: El costo marginal sabemos que es la derivada de la función costo, así, $C'(x) = 0,15$ (una función constante). Pero, ¿qué significado económico tiene este resultado? Esto significa que las **mil unidades adicionales** a las 2.100.000, le costarán al fabricante 0,15 *um* o 15 céntimos de *um*.

Discusión: Ahora bien, en esta pregunta se tocan dos puntos de manera simultánea como los son: la interpretación económica de la derivada en la función de costos y las unidades (en miles) en las que se trabaja el problema. Recordemos que x está expresada en *miles*, por lo tanto las 2.100.000 unidades se reducen a $x = 2{,}100$. Por otra parte, si $C(x)$ representa la función de costo, la interpretación de la derivada para esta función en un punto x_0 es $(C'(x_0))$ el costo de producir la unidad adicional $x_0 + 1$.

Se entiende que incluir dos puntos como estos en un problema puede conllevarle al estudiante a dificultades de razonamiento del problema e interpretación de los resultados o interés y madurez por el tema, ¿puedes especificar que dificultades (si crees que las hay) pueden surgir en el estudiante preguntas como estas o crees que en todo caso le ayudan a entender y madurar los conceptos involucrados? ¿Por qué?

[Alexis]: Bueno..., si están claros con la definición anterior, de que están en unidades de mil, no deberían tener ningún problema...

[Moderador]: Disculpa que interrumpa, pero recuerden que estamos hablando del estudiante promedio.

[Elio]: Yo he notado en mis cursos que a ellos les cuesta mucho retener algo, normalmente te dicen: “*hay es que se me olvidó que estaba expresado en miles*”, o en unidades de millón, qué sé yo... Lo que yo pienso es que le prestan tan poca importancia que se les termina olvidando, entonces el error surge por ahí, porque se les olvida...

[Kenya]: Por omisión. Pienso al igual que Alexis, que si ellos tienen experiencia en trabajar con este tipo de unidades no debería causar mayor dificultad en el estudiante, de lo contrario habría que hacer un trabajo previo. Siempre la base que ellos posean es fundamental, es una condición necesaria para poder trabajar este tipo de problemas, las experiencias previas que ellos han tenido tanto para abordar estas cuestiones como en la firmeza que tienen en sus nociones, en sus conceptos matemáticos.

[Elio]: ¿Esta materia prela o está prelada por algunas materias de otros departamentos como el de ciencias administrativas?

[Kenya]: Debería, debería...

[Elio]: Porque seguro que hay materias de ese departamento donde se estudian este tipo de cosas, habría que ver qué materias son. Porque ya a este nivel de segundo semestre de la carrera, habría que ver qué han visto de su carrera y qué están por ver, no sólo con lo de las unidades sino más bien cosas específicas de las matemáticas.

[Moderador]: Y en caso de no tener inconvenientes, ya que ustedes condicionan su respuesta a diversos factores, ¿consideran ustedes que esto ayudaría a consolidar el conocimiento que han venido adquiriendo y a madurar conceptos relacionados?, por ejemplo, con el tema de funciones, sin tocar el tema de derivadas; digamos, ¿es una buena herramienta para consolidar el tema de funciones, el manejo de las variables, que no siempre están expresadas en la misma unidad, o el dominio de una función vista en el campo matemático posee un dominio pero cuando la misma función representa un modelo económico, el dominio no necesariamente es el mismo, etc.?

[Alexis]: Bueno..., yo pienso que ayudaría al estudiante a reforzar el conocimiento en algunos temas, pero bueno sería vivir la experiencia; por ejemplo, que prepararas un material más extenso y ver los resultados, porque con lo que dije antes, creo que puede ayudarlos o terminan rechazando aún más este tipo de problemas.

[Kenya]: Lo que observo en lo que dices, es que tu experiencia (refiriéndose a Alexis) es muy negativa con tus alumnos, mi experiencia por el contrario es muy variada, yo he tenido alumnos que de entrada rechazan las aplicaciones pero a medida que avanza el curso se interesan, otros siguen rechazando las aplicaciones; pero en general, ellos le encuentran sentido a las aplicaciones porque le estás hablando en su idioma por decirlo de alguna manera.

[Moderador]: Y tú Elio, ¿puedes añadir algo al respecto?

[Elio]: Mi vivencia es mixta, tengo de los dos casos; ahora bien, yo tampoco es que haga muchas aplicaciones, creo que uno debería recibir más información y formación en este sentido..., a la final, en mi carrera nunca vi un curso de aplicaciones a la economía.

[Moderador]: Bien, pasemos a la siguiente pregunta.

Pregunta 4: En qué intervalos las funciones de costo, ingreso y beneficio ($C(x)$, $R(x)$, $U(x)$), **aumentan** en función de la producción de lápices (o resulta **creciente**) o **disminuye** en función de la producción de lápices (o resulta **decreciente**). En otras palabras, ¿será cierto que mientras mayor sea la producción de lápices, se mantendrá el comportamiento de estas funciones?

Respuesta de P4: En este caso surge la necesidad de estudiar la monotonía de una función a lo largo de su dominio y entran en juego las definiciones de funciones creciente y decreciente en un intervalo.

Así, la función de costo, $C(x)$, es creciente siempre que $C'(x) = 0,15 > 0$ para todo x en su dominio. Por otra parte, la función de ingreso, $R(x)$, es creciente en $(0, 7500)$ y decreciente en $(7500, +\infty)$. Finalmente, la función de beneficio, $U(x)$, es creciente en $(0, 6750)$ y decreciente en $(6750, +\infty)$.

Discusión: El concepto de monotonía de una función es fundamental para el análisis tanto matemático como económico, ya que permite estudiar desde el punto de vista *analítico* el comportamiento de una función en determinados "momentos" de su dominio y de esta manera *interpretar* situaciones en ambos contextos. De hecho, es un tema que aparece en los libros y programas de cálculo diferencial en general.

¿Consideran que se pierde profundidad en el contenido matemático con un planteamiento de esta naturaleza: mucho, regular, nada? ¿Por qué?

[Moderador]: Me explico, ¿creen ustedes que hablar de "**aumenta**" y "**disminuye**" le resta profundidad al contenido matemático?

[Alexis]: Yo creo que no, yo creo que estamos diciendo lo mismo pero de una manera más sutil.

[Elio]: En lugar de restarle profundidad, yo creo que les abre las puertas...

[Kenya]: Empecemos por la historia de la matemática, la matemática tal como la conocemos ahora ha pasado por un proceso largo y constructivo y lo que nosotros hacemos con nuestros alumnos es presentarle la matemática ya construida. Entonces, yo pienso que no se le quita valor ni a uno ni a otro; o sea, ni a la economía ni a la matemática si nosotros usamos un lenguaje, digamos, intuitivo que es más accesible al vocabulario de los alumnos, que lo introducimos ya..., restándole vocabulario matemático.

[Moderador]: ¿Elio, ibas a decir algo?

[Elio]: Yo lo que digo es que en lugar de obstaculizar, lo que hace es como abrir las puertas, porque tu lo que quieres es restarle formalidad al lenguaje, utilizar un lenguaje más suave, al decir "aumenta", el estudiante atiende, tal vez, su lenguaje cotidiano..., la palabra aumentar le es familiar, yo creo que es mejor que decir "crece", aunque crece también es de su lenguaje cotidiano, pero hablar de una función creciente podría crear confusión en este caso.

[Alexis]: Ahora, yo creo que esta es una manera muy sutil de evitar decir que una función es creciente, pero además el término "aumenta", lo tiene ellos digerido de su propia carrera.

Los objetivos que ustedes persiguen se podrían alcanzar de igual forma con un planteamiento como éste? ¿Por qué?

[Moderador]: Es decir, los objetivos que ustedes se proponen alcanzar en el curso, ¿creen ustedes que se alcanzarían de igual manera, no sólo con lo del lenguaje sino con las actividades en general o creen más bien que se pierde en esencia el objetivo o los objetivos del curso? Por ejemplo, el caso concreto de monotonía de una función.

[Kenya]: No solo creo que se alcanzarían, sino que también resultarían ser más significativo para ellos.

[Moderador]: ¿Sí?

[Kenya]: A mi me parece que sí.

[Moderador]: ¿Y por qué?

[Kenya]: Precisamente..., porque estamos haciendo uso de un recurso que es lo..., el conocimiento intuitivo que ellos tienen de lo que es el crecimiento y decrecimiento, subir y bajar una pendiente o una cuesta, para después refinarlo y ajustarlo a lo que es el vocabulario matemático; a la final, por ese camino podemos llegar a lo que es el crecimiento y el decrecimiento de una función, pero siempre partiendo de la base de los conocimientos y del vocabulario que ellos tienen.

[Moderador]: Alexis, ¿y tú estás de acuerdo con Kenya u opinas de otra manera?

[Alexis]: De hecho, esta parte, yo siempre trato de hacerla con un problema y; geométricamente, decirle lo que está pasando y después, sí les doy la definición.

[Moderador]: ¿Y tú, Elio, qué nos puedes decir al respecto?

[Elio]: Sí, igual, me parece que no sólamente esas palabras de "*crecer*, *aumentar*, *decrecer*, *disminuir*", muchas palabras matemáticas, mucho lenguaje técnico que hay en la matemática se les pudiera buscar un sinónimo del lenguaje cotidiano.

[Moderador]: Ya para terminar con esta primera parte, veamos la siguiente pregunta.

Pregunta 5: Para qué cantidad de lápices producidos y vendidos, el beneficio alcanza su nivel **máximo**.

Respuesta de P5: En este punto después de generar una discusión con los estudiantes para llegar a la definición de valores extremos (máximos y mínimos), se llega a la respuesta: en $x_0 = 6750$, el beneficio $U(x)$ **es máximo**.

Discusión: En diversas áreas del saber relacionadas con el cálculo, estudiar los extremos relativos tiene un significado importante por sus diversas aplicaciones en procesos de optimización; el caso de la ciencias económicas no es la excepción. Se supone que el profesional de la economía, en áreas específicas, constantemente está estudiando la manera de aminorar costos de producción de un determinado producto; por ejemplo, o al menos buscar aproximarse a ese punto ideal donde un determinado proceso sea óptimo. Generalmente los textos de cálculo diferencial, consideran este apartado como un tema de aplicaciones después de haber estudiado y aprendido una teoría que el estudiante debe manejar para abordar y resolver este tipo de problemas.

En una discusión reciente con otros profesores de matemáticas que trabajan en una facultad de economía, dos de ellos manifestaron que una actividad como ésta no es innovadora para sus estudiantes y sus argumentos fueron varios; pero además, surgieron comentarios encontrados en cuanto a aspectos metodológicos. ¿Consideran ustedes que esta es una actividad que conlleva a un mayor esfuerzo en el sentido metodológico (desarrollo de la clase)?

[Alexis]: Yo creo que no, de hecho, uno se sienta a preparar la clase tan igual como uno se sienta a preparar una clase de cálculo para ingeniería o ciencias, y como ya hemos estado utilizando la parte de economía, entonces el tiempo que uno destina para la parte de las aplicaciones lo que haces es redistribuirlo para montar estos problemas..., yo creo que no, a mi particularmente me parece que no.

[Kenya]: Yo pienso que, tal vez, sí implique un poco más de tiempo, quizás, cuando se monte la primera vez...

[Alexis]: Ah bueno...

[Kenya]: No es lo mismo dar una clase tradicional donde tú hablas y hablas..., y definición, concepto, ejercicio, problema, a que tú lleves un proceso...

[Alexis]: Por supuesto...

[Kenya]: Donde lo imprevisto está ahí..., tú puedes lanzar preguntas y ellos te pueden responder, pero también pueden decir cosas que tú no tenías previstas...

[Alexis]: Por eso es que te estoy diciendo...

[Kenya]: Puede llevarte algún tiempo adicional, de eso estoy segura.

[Alexis]: Por eso es que te digo, se sienta uno..., asumiendo que nosotros manejamos un poco la parte de economía. Si tú vas a preparar una clase de eso, en cualquiera de los cursos de cálculo para estas carreras, ya tú sabes que tienes que montar unos problemas, y por supuesto que tienes que resolverlos y ese es tiempo que, no es que uno lo pierda...

[Moderador]: No estoy hablando de que sea tiempo perdido, me refiero si supone para ustedes más o menos tiempo, o la misma cantidad de tiempo.

[Alexis]: Bueno, la primera vez que uno monta una clase de estas, claro que sí, pero repito, como ya uno ha trabajado con las aplicaciones, no creo que el tiempo que uno se siente sea mucho más. Tal vez lo que tome más tiempo es el problema del lenguaje de economía, que como uno no es economista uno tenga que profundizar más en esto.

[Moderador]: Elio, ¿qué opinas tú?

[Elio]: Yo sí apostaría por eso, porque se necesite de mayor tiempo y tal vez más que la primera vez...

[Alexis]: No, yo pienso que la primera vez te tienes que familiarizar con términos que no conoces...

[Elio]: Pero un momento..., el problema es que con las clases tradicionales, por llamarlas de alguna manera, como usualmente uno las está dando ya tienen un patrón, ya vienen estructuradas, definición tal, teorema tal y diez ejercicios..., y así sucesivamente. Este es como el patrón que uno debe seguir, en cambio la construcción que queremos darle es: se le plantea al estudiante un problema y que hay que desglosarlo de alguna manera y que, seguramente, no tenemos idea de qué es lo que se va a hacer...

[Alexis]: Cuidado, cuidado, lo que dices es muy delicado.

[Kenya]: Claro, hay que esperar que el alumno lo mire, lo analice, uno no, por que uno lo lleva preparado. Uno espera determinado comportamiento de ellos.

[Alexis]: Sí, pero cuidado, porque lo que dice Elio es muy delicado, yo lo que entiendo es que aún cuando él está llevando el problema, está diciendo que no sabe cómo atacar el problema, eso sería muy grave para el estudiante.

[Kenya]: Sí, sí, pero tú puedes llevar unos problemas preparados donde la participación de la clase..., mejor dicho, donde el protagonista seas tú, ¿entiendes?, pero en un tipo de metodología como la que se está enfocando aquí es distinta, porque se supone que tú vas a conducir un proceso donde el alumno va a ser el protagonista de ese proceso, es él quien va a llegar a un concepto y llegar a un concepto no es tarea fácil. Claro, entendemos que estamos tratando con adultos y que debe ser más fácil que con niños, tal vez con una o dos situaciones sobre el mismo tópico como lo está planteando Luis, Luis está planteando el mismo contenido pero trabajando con distintas funciones, ¿no es verdad?

[Moderador]: Bueno, tú lo ves así, realmente no puedo opinar al respecto.

[Kenya]: Aproximándose al mismo concepto usando la función beneficio, ingreso, costo, etc., pero implica una participación activa del alumno, eso te consume más tiempo de clase...

[Moderador]: ¿En la clase o en la preparación de la clase?

[Kenya]: De las dos, porque tú tienes que tomar en cuenta que debes adelantarte a lo que pueda ocurrir en el aula, y eso no es fácil. Si yo me voy por este camino y planteo esto, ¿qué puede pasar aquí? ¿Cuáles son las posibles situaciones con las que me puedo enfrentar y cómo resolverlas? ¿Qué pasa si se me presenta una situación como esta y yo no estoy preparada para asumirla? A conciencia, eso implica una mayor preparación de la clase y una mayor preparación para el profesor, sobre todo en un campo que no es de tu formación, de paso...

[Moderador]: A ver Alexis, te propongo un juego, te planteo la siguiente situación: supongamos que tu extravías tu maletín personal, ese donde tienes todos tus apuntes para todo el semestre, algo así como el disco duro de todo el curso académico y te ves en la obligación de preparar tus clases nuevamente; es decir, tienes unos conocimientos ya establecidos de los que no dudamos ninguno de los presentes, pero el material, el soporte donde te apoyas para tus clases no lo tienes y además, resulta que te agradó esta propuesta en un poco más de un 50 %, algunas cosas te gustaron otras no. Entonces te pregunto, ¿el tiempo que invertiste en preparar tus clases será el mismo si te propones preparar tus clases con este esquema o esta estructura, por decirlo de alguna manera?

[Alexis]: Sería el mismo porque mis clases son más o menos así, son muy parecidas, tal vez el hecho de comenzar de cero me quite más tiempo porque buscaría nuevos problemas, de pronto me obliga a revisar otros libros...

Por otra parte, consideran ustedes que es una actividad rutinaria que lejos de promover el aprendizaje, distrae al estudiante y lo conduce a errores (de qué tipos)? ¿Por qué?

[Kenya]: Todo lo contrario, ya te lo dije antes pero con lo de los objetivos si mal no recuerdo, esta estructura debería estimular al estudiante y de alguna manera, que muestre más interés por las matemáticas. Ahora bien, rutinaria no es y sobre los errores en los que puedan caer ellos, ya dije que una clase montada de manera constructiva no es fácil para el estudiante, pero en este momento no se me ocurre qué errores presentaría el estudiante.

[Moderador]: Y tú, Elio, ¿qué opinas?

[Elio]: Bueno, yo creo que es una buena metodología la que propones, pero creo yo que lo mejor es preparar un material y trabajar con el estudiante. Algo que se me ocurre en el tema de errores, es la parte del lenguaje, tal vez buscar una redacción más adecuada, más sencilla para ellos...

[Moderador]: ¿Y qué dice Alexis, crees que es rutinario o distrae al estudiante y lo aleja de las matemáticas?

[Alexis]: Yo trabajo más o menos así, tal vez, no con tanto detalle y los resultados son más o menos satisfactorio, la cantidad de aprobados está por la media.

B.2.2. Incrementos, Tasas, Optimización[5]

El costo de producción de x unidades diarias de un artículo de consumo masivo es $C(x) = \frac{1}{8}x^2 + 3x + 98$ dólares y el precio para la venta por unidad es $p(x) = 25 - \frac{1}{3}x$ dólares

Preguntas: Las siguientes preguntas están relacionadas con los contenidos matemático y económico en general.

Pregunta 1: A partir de las funciones de costo, $C(x)$, y de precio, $p(x)$, calcular:

a : A partir de la función de costo marginal, calcular el costo de producir la unidad 10. ¿Cuál es el costo real de producir la unidad 10?
Respuesta de 1.a: Para la función de costo, $C(x)$, se tiene que el costo marginal es $C'(x) = \frac{1}{4}x + 3$ dólares, y el costo *aproximado* de producir la unidad 10 es $C'(9) = \frac{1}{4}(9) + 3 = \mathbf{5,25}$ dólares. El costo real de la décima unidad es $C(10) - C(9) = 140,5 - 135,125 =$ **5,375** dólares.

b : Calcule la **función de ingreso marginal**, $\boldsymbol{R'(x)}$, para la situación planteada. Luego, calcule el ingreso que resulta de la venta de la décima unidad. ¿Cuál es el ingreso real derivado de la venta de la unidad 10?
Respuesta de 1.b: En este caso, la **función de ingreso**, **R(x)**, se obtiene a partir del precio, $p(x)$, suministrado. Esto es,

$$\begin{aligned} R(x) &= x \cdot p(x) \\ &= 25x - \tfrac{1}{3}x^2 \end{aligned}$$

Así, el ingreso marginal es $R'(x) = 25 - \frac{2}{3}x$. El ingreso *aproximado* que se obtiene por la venta de la décima unidad es $R'(9) = 25 - \frac{2}{3}(9) = \mathbf{19}$ dólares. El ingreso real generado por la venta de la décima unidad es $R(10) - R(9) = 216,66 - 198 = \mathbf{18,66}$ dólares.

c : Halle el **beneficio** $\boldsymbol{U(x)}$ asociado con la producción de x unidades, calcule el beneficio marginal y determine con éste el beneficio del décimo artículo vendido. ¿Cuál es el beneficio real derivado de la venta del décimo artículo?
Respuesta de 1.c: La **función de beneficio**, $\boldsymbol{U(x) = R(x) - C(x)}$, en este caso es:

$$\begin{aligned} U(x) &= 25x - \tfrac{1}{3}x^2 - (\tfrac{1}{8}x^2 + 3x + 98) \\ &= -\tfrac{11}{24}x^2 + 22x - 98 \end{aligned}$$

En consecuencia, el beneficio marginal es $U'(x) = -\frac{11}{12}x + 22$ y el beneficio *aproximado* generado por la venta de la unidad 10 es $U'(9) = -\frac{11}{12}(9)$

[5]Tomado de Hoffmann y Bradley (2001)

$+ 22 = \mathbf{13,75}$ dólares. Pero, el beneficio real generado por la venta de la décima unidad es $U(10) - U(9) = 76,16 - 62,875 = \mathbf{13,285}$ dólares.

Discusión: En esta única pregunta subdividida en tres partes, se contempla un aspecto relacionado con la derivada como lo es, la interpretación de la derivada como una "buena" aproximación a la función dada en un entorno; de allí el remarcado de los resultados obtenidos.

En este caso, se puede apreciar en las tres respuestas que los valores real y aproximado para cada una de las situaciones resultan cercanos en los dos primeros casos y no mucho en el tercero.

De acuerdo a tu experiencia, ¿qué conflictos de aprendizaje podrían surgir en el estudiante, el hecho de que una herramienta matemática como la derivada, que él espera sea exacta, difiera en algunos casos en varias décimas? ¿Cómo abordarían ustedes la solución a este conflicto? El $\boldsymbol{x_0 + 1}$ *es mucho. Incrementos (discreto) Vs. derivada (continuo).*

[Elio]: La verdad es que el estudiante se ha internalizado tanto esa idea, de que la matemática es exacta y cuando se le presentan cosas como éstas, de aproximaciones, empieza la duda; sobre todo cuando cada uno de ellos hace una operación con la calculadora y van redondeando, entonces, entre ellos discuten..., lo importante es hacerle ver que esas aproximaciones están cerca de un valor real o específico. Entonces, ya con la actividad anterior, cuando discutimos sobre las tablas, el estudiante se iría empapando en el asunto de las aproximaciones, lo que importaba de esas aproximaciones era que todas se iban acercando a un valor determinado. Entonces, dejarle claro que aún cuando es una aproximación, ese número está cerca a uno valor específico y que también sirve para trabajar. Pero sí hay que tener cuidado...

[Kenya]: Realmente yo no me había planteado y no he observado hasta ahora conflictos, pero no es porque no existan sino porque no había tomado en cuenta ese detalle..., de que esto pudiera generar algún conflicto en ellos. Tal vez es porque yo trato de agrupar todo, es decir, el incremento en y, la razón de cambio promedio, la razón de cambio y el diferencial y estudiar esos conceptos de una manera relacionada. Casi que les digo que toda expresión matemática que tenga que ver con la derivada se trata de una estimación a un valor específico...

[Alexis]: De verdad que yo no me había parado en este detalle, por supuesto que uno sabe que, incluso, la derivada o el diferencial, mejor dicho, se utiliza para cálculos aproximados, pero ese tipo de problemas yo no los trabajo en estos cursos, más bien cuando trabajo con cursos de ingenieros sí lo hago, además los programas contemplan este tipo de problemas para los ingenieros.

[Moderador]: ¿Y cómo resolverían ustedes este conflicto? Por ejemplo, Alexis, yo soy tu alumno y te digo que no entiendo ese detalle de la derivada, por qué no es exacta?

[Alexis]: Bueno..., precisamente por el cociente, en este caso $C(10) - C(9)$ es un límite, pero un límite muy particular, porque la idea que uno tiene de límite es una aproximación infinitesimal y aquí no lo es.

[Moderador]: Y tú, Kenya, ¿cómo resolverías ese conflicto en el estudiante?

[Kenya]: El que el estudiante crea que la matemática es exacta, es porque ha sido parte de su proceso de formación, ahora, que yo haya contribuido a que eso sea así no lo creo. Además, en la derivada trabajamos con el límite y el límite ya es una aproximación de por sí; o sea, implica una idea de aproximación, en cambio aquí estamos calculando valores con exactitud, es calcular la función en un valor indicado, en cambio la derivada hace uso del límite.

[Elio]: La idea es hacerles saber desde un comienzo qué es lo que uno está haciendo... Lo que hicimos la vez anterior eran cálculos cada vez más próximos a un punto específico, de eso dependía el resultado, del acercamiento que iba teniendo la función. Entonces, cabe esperar que si yo estoy aproximando sin tomar números particulares acá voy a tener una aproximación allá, no venderles la idea de que la derivada me va a dar un resultado exacto del problema.

Por otro lado, se incluye la necesidad de obtener una función que represente el ingreso, $\boldsymbol{R(x)}$ (pero en ningún momento se les dice que lo pueden hacer a partir del *precio*, de modo que ellos (los estudiantes) discurran sobre esta situación) para obtener el ingreso marginal a partir de ésta.

Ante esta situación, ¿cómo gestionarían ustedes una actividad de discusión y reflexión con los estudiantes, de manera que se logren los objetivos deseados, estos son: (a) obtener unos resultados a partir de unos datos que no son explícitos, y (b) llegar al concepto de un término económico (ingreso marginal) a partir de otro (precio) mediante una situación económica-matemática?

[Alexis]: Yo particularmente, si tengo el precio, ese es el ingreso de qué cosa, si tenemos un artículo podemos calcular el ingreso de un artículo, ahí tendría la función del ingreso de un artículo...

[Elio]: ¿Y si le vendes dos? sería el ingreso de dos artículos...

[Alexis]: Eso es, el ingreso de dos artículos...

[Elio]: Que el estudiante se vaya dando cuenta..., si es posible hacer un simulacro, crear una situación e ir creando una tabla, con tres, con cuatro y así...

[Kenya]: Ah, es para llegar a la función de ingreso.

[Moderador]: Sí, la función de ingreso.

[Kenya]: No me ubicaba, pero es que me parece tan obvio que no me ubicaba, creo que es algo de sentido común más que de economía. Claro con una tabla a partir de un proceso inductivo. Por ejemplo, crear una situación de la venta de pantalones me parece que es adecuado.

B.2.3. Cuestionario relacionado con la actividad 2

De acuerdo a la actividad que acabamos de realizar y como producto de las opiniones y discusiones en la misma, nos interesa conocer tu opinión sobre algunos puntos que señalamos a continuación:

1. El desarrollar una enseñanza como la que se propone, ¿supone para ti dedicarle más tiempo a los estudiantes y una atención, si se quiere, "personalizada" a estos? Justifica tu respuesta.

2. Tal como está propuesto y tomando en cuenta que la asignatura es de 7 horas (5T + 2P) semanales, ¿cuánto tiempo destinarías para abarcar los temas tratados? ¿por qué? y ¿cuántos problemas de este tipo? ¿por qué?

3. Al implementar actividades como ésta, ¿supone para ti cambios en el sistema de evaluación que actualmente sigues? **Observación**: Si la respuesta es afirmativa, te sugiero que aportes los detalles; si la respuesta es negativa, coméntame sobre tu evaluación actual.

4. ¿Por medio de estas actividades se pueden alcanzar los objetivos que persiguen los libros de texto que tú utilizas o difieren razonablemente? Una breve explicación.

Alexis

Cuestionario relacionado con la actividad 2

De acuerdo a la actividad que acabamos de realizar y como producto de las opiniones y discusiones en la misma, nos interesa conocer tu opinión sobre algunos puntos que señalamos a continuación:

1. El desarrollar una enseñanza como la que se propone, ¿supone para ti dedicarle más tiempo a los estudiantes y una atención, si se quiere, "personalizada" a éstos? Justifica tu respuesta.

Personalizado no tanto, pero sí hay que trabajar más en solución de problemas y planteamientos de ellos para que el estudiante esté agusto con lo que se le enseña y él en un futuro pueda aplicar su aprendizaje

* Claro está que para el Profesor que no tenga la experiencia con las Ciencias Sociales y Económicas debe trabajar más duro.

2. Tal como está propuesto y tomando en cuenta que la asignatura es de 7 horas (5T + 2P) semanales, ¿cuánto tiempo destinarías para abarcar los temas tratados? ¿por qué? y ¿cuántos problemas de este tipo? ¿por qué?

Para abarcar el tema de derivada y sus aplicaciones es posible destinar de 5 a 6 semanas; para que el alumno aprenda bien lo que se le está enseñando y hacerle la mayor de cantidad de problemas posible, claro está sin dejar a un lado la participación de ellos; así fijan la teoría en la solución de estos.

3. Al implementar actividades como ésta, ¿supone para ti cambios en el sistema de evaluación que actualmente sigues? **Observación:** Si la respuesta es afirmativa, te sugiero que aportes los detalles; si la respuesta es negativa, coméntame sobre tu evaluación actual.

Las evaluaciones que hago son exámenes cortos y otros donde se recoge los temas de 15 días por supuestos que dentro los 15 días están los exámenes cortos, Así creo que el estudiante debe estar al día con el tema a evaluar.

4. ¿Por medio de estas actividades se pueden alcanzar los objetivos que persiguen los libros de texto que tú utilizas o difieren razonablemente? Una breve explicación.

Elio

Cuestionario relacionado con la actividad 2

De acuerdo a la actividad que acabamos de realizar y como producto de las opiniones y discusiones en la misma, nos interesa conocer tu opinión sobre algunos puntos que señalamos a continuación:

1. El desarrollar una enseñanza como la que se propone, ¿supone para ti dedicarle más tiempo a los estudiantes y una atención, si se quiere, "personalizada" a éstos? Justifica tu respuesta.

Sí, ya que problemas de este tipo generan mayor discusión personalizada porque están más ligada a intereses personales en cuanto a interpretaciones. Esto no es un punto en contra, ya que considero que las clases deben estar enmarcadas en este tipo de situaciones

2. Tal como está propuesto y tomando en cuenta que la asignatura es de 7 horas (5T + 2P) semanales, ¿cuánto tiempo destinarías para abarcar los temas tratados? ¿por qué? y ¿cuántos problemas de este tipo? ¿por qué?

En cuanto al tiempo, considero que se pueden presentar desventajas en este aspecto, ya que estas modalidades de abarcar un problema requiere mayor dedicación y eso implica tiempo. Establecer un tiempo específico tal vez no lo haga, lo que haría sería planificar algún par de problemas e invertir el tiempo que se requiera para ello, por supuesto tratando de no ser tan extenso.

3. Al implementar actividades como ésta, ¿supone para ti cambios en el sistema de evaluación que actualmente sigues? **Observación:** Si la respuesta es afirmativa, te sugiero que aportes los detalles; si la respuesta es negativa, coméntame sobre tu evaluación actual.

En realidad, no supone mayor cambio pues he tratado de que mis clases se enmarquen en estas ideas. Claro, he encontrado limitaciones en cuanto a tiempo, precisamente; además de que he tenido problemas en el sentido que "muchos cálculos" han generado cierto rechazo y apatía en el estudiante y por ende, la presencia significativa de errores, abandono de curso, entre otros aspectos.

4. ¿Por medio de estas actividades se pueden alcanzar los objetivos que persiguen los libros de texto que tú utilizas o difieren razonablemente? Una breve explicación.

Creo que los objetivos que persiguen los libro de texto sobre este tema, se logran en la medida en que quienes lo usamos de referencia, sepamos encaminar el desarrollo del tema por vías de acceso hacia los estudiantes, que deben ser nuestro primer interés. Considero que la manera de interpretar un problema es más adecuado si se hace de manera similar a como se hizo en esta actividad, tratando por supuesto, de salvar los detalles que estén en contra del desarrollo "adecuado" del tema.

Kenya

Cuestionario relacionado con la actividad 2

De acuerdo a la actividad que acabamos de realizar y como producto de las opiniones y discusiones en la misma, nos interesa conocer tu opinión sobre algunos puntos que señalamos a continuación:

1. El desarrollar una enseñanza como la que se propone, ¿supone para ti dedicarle más tiempo a los estudiantes y una atención, si se quiere, "personalizada" a éstos? Justifica tu respuesta.

Pienso que sí habría que dedicar más tiempo
a los estudiantes y posiblemente una atención
personalizada. En ese tipo de enseñanza que
propones, la actividad está centrada en el alumno,
es decir, es éste el que debe construir el o los
conceptos que son objeto de estudio bajo la
mediación - facilitación del docente y este proceso
lleva más tiempo que el requerido en la
"enseñanza tradicional". Piénsese, por ejemplo,
las discusiones que tendrían lugar, las interacciones
entre alumnos y alumnos - docente, realizar los
cálculos, sintetizar o llegar a las conclusiones;
son éstas, actividades que ameritan más tiempo
que el invertido con la simple presentación/
exposición del docente. De cualquier modo,
si se tiene en cuenta el aprendizaje obtenido
31
bajo un enfoque de la enseñanza basada en la
resolución de problemas, hemos de primar la
calidad de esos aprendizajes más que la cantidad
sobre todo en conceptos que son fundamentales para
el desempeño profesional de los futuros economistas.

2. Tal como está propuesto y tomando en cuenta que la asignatura es de 7 horas (5T + 2P) semanales, ¿cuánto tiempo destinarías para abarcar los temas tratados? ¿por qué? y ¿cuántos problemas de este tipo? ¿por qué?

Partiendo del hecho de que los alumnos están familiarizados con:

- Cálculo de dominios de una función
- Cálculo con derivadas (reglas y técnicas)
- Interpretaciones de la derivada a la Economía
- Cálculo de Imágenes
- Funciones asociadas a su profesión (Costo, Ingresos, etc.)

y que los temas tratado a que te refieres en el material (Actividad2) son el guiado en las entrevistas son, según se desprende de su contenido y el orden de su presentación:

1. Dominio (Matemático y económico)
2. Beneficio promedio (o más general función promedio)
3. Tasa promedio
4. Análisis marginal (Costo) Interpretación
5. Monotonía
6. Optimización
7. Análisis marginal e incremento (costo, Ingreso, beneficio)

estimo que el tiempo que destinaría para abarcar los temas tratados es el que se presenta en la tabla:

Tema	Horas (Teóricas)	Horas (Prácticas)
1	1	4
2-3	2	
4	1	
5	3	
6	2	
7	2	
Total	11	

Aprox: 2 Semanas.

¿Por qué? Porque alumnos y docente han de construir
el concepto a partir del problema planteado, sintetizarlo
en una definición, inferir la relación entre el concepto
y la derivada (Teorema) y aplicarlo a nuevas situaciones
de problema.

¿Cuántos problemas de este tipo? Pienso que para el tratamiento
teórico pudiera trabajarse con las funciones costo, ingreso
y beneficio, tal como está planteado en el material de la
actividad 2; quizás es conveniente considerar, además de
beneficio, costo e ingreso en los temas relativos a
beneficio promedio y tasa de cambio promedio.
Es decir, tres problemas con el cual abordan las
mismas nociones (tasas, incremento, optimización, etc.)
Este modo de proceder facilitaría el tránsito de lo
concreto (situación problema) hacia lo abstracto (con-
tenido matemático) a medida que se van consolidando
las nociones estudiadas
Para el tratamiento práctico (en clase), trabajar a
problemas donde se apliquen, si es posible, todas las
nociones, lo que permitiría afianzarlas o consolidarlas,
atender las dificultades, limitaciones o posibles
lagunas, la búsqueda de relaciones entre los
conceptos aplicados.

3. Al implementar actividades como ésta, ¿supone para ti cambios en el sistema de evaluación que actualmente sigues? **Observación**: Si la respuesta es afirmativa, te sugiero que aportes los detalles; si la respuesta es negativa, coméntame sobre tu evaluación actual.

Pienso que sí tendrían lugar cambios
en el sistema de evaluación. Sería relevante,
además de los tradicionales exámenes parciales
que por lo general miden rendimiento a
través de la calificación del contenido
conceptual, la consideración de otras
modalidades donde se asuman contenidos
procedimentales (manipulación, experimentación
relaciones, observación directa, utilización del
lenguaje matemático en sus diferentes formas de
representación, etc.) que lleven a los alumnos a la
activación de procesos de pensamiento de alto
nivel (interpretar, analizar, deducir, inferir,
integrar, trasladar, etc.); así como contenidos
relativos a actitudes que evidencian su interés
por la materia (motivación, confianza, etc.).
Se trata en suma de una evaluación de los
aprendizajes matemáticos que coloca el énfasis
33
en los procesos más que en los resultados
(evaluación formativa). Incluso, el sistema
de evaluación debería incluir, la evaluación
→

de la enseñanza de los profesores y de todos los entes que intervienen en el hecho educativo
Entre los métodos o técnicas para los alumnos podrían incorporarse:

- Exposición del trabajo del alumno o del equipo
- Informes escritos del alumno o del equipo

4. ¿Por medio de estas actividades se pueden alcanzar los objetivos que persiguen los libros de texto que tú utilizas o difieren razonablemente? Una breve explicación.

Creo que sí. Es más, no sólo se pueden
alcanzar los objetivos que persiguen los
libros de texto que utilizo, sino que los
aprendizajes resultan ser más significativos
al estar los contenidos vinculados con
problemas que se inscriben en el ámbito
profesional de los estudiantes de Economía

B.3. Actividad 3

Hasta este punto del trabajo, hemos trabajado algunos conceptos matemáticos y económicos de manera simultánea. El estudiante calcula derivadas inmediatas, ha estudiado interpretaciones de la derivada, monotonía y extremos relativos.

Regla de la Cadena (Notación e interpretaciones varias)

A continuación se presentan unos problemas relacionados con la regla de la cadena.

B.3.1. Tasas Relacionadas[6]

Una empresa tiene la función de costo $C(x) = 25 + 2x - \frac{1}{20}x^2$ (en cientos de miles de dólares), en donde x es el nivel de producción de la empresa y éste depende del tiempo t. Si el nivel de producción es de $x = 5$ (millones de artículos por año) y está creciendo a una tasa de $0,7$ millones de artículos por año, tomando en cuenta que la capacidad de producción de la empresa no puede superar los 15 millones de artículos por año.

Preguntas: Las siguientes preguntas están relacionadas con los contenidos matemático y económico en general.

Pregunta 1: Determine el dominio de la función de costo $C(x)$ en un contexto matemático general y en el económico en particular. ¿Qué diferencia observa entre uno y otro?

Respuesta de P1: El dominio[7] es el señalado en la **Tabla B.5**.

	$C(x)$
Dominio Mat.	$\mathbb{R}$
Dominio Ec.	$[0, 150]$ $(\{x \in \mathbb{N}_0 : \frac{x}{100000} \leq 150\})$

Cuadro B.5: Dominio del costo, $C(x)$, en dos contextos

Discusión: Aún cuando el costo es una función polinómica cuyo dominio es el conjunto $\mathbb{R}$, en el contexto económico debemos tomar en cuenta que lo menos

[6] Tomado de Arya y Lardner (1987)

[7] $\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, 3, ...\}$

que puede producir la empresa es 0 artículos y el máximo de producción de ésta, tal como se señala en el enunciado, es de 15 millones de artículos por año; y como x está expresada en cientos de miles, el dominio es $[0, 150]$.

En una actividad anterior, una de las preguntas contenía una situación similar. ¿Consideran importante que se debe mantener o reforzar esta diferencia entre los dominios? ¿Por qué?

[Elio]: Sí, yo creo que sí, porque haciendo énfasis en eso de utilizar la matemática como herramienta para resolver esos problemas, no apartarlos y dejarlos sólo con la parte abstracta del problema algebraico, matemático; sino llevarlo a la par de lo que significa matemáticamente y lo que significa en la realidad, que la realidad aquí sería la realidad económica. Otra cosa, eso creo que lo hablamos la otra vez, cuando uno dice dominio matemático que establece todo $\mathbb{R}$ y dominio económico...; más todavía, decir intervalo $[0, 150]$, si estamos hablando de unidades, de hecho, ni siquiera, no sería todo el intervalo porque serían los *naturales* de 0 a 150 en todo caso.

[Moderador]: Exactamente.

[Elio]: Hay que tener mucho cuidado con eso, hay que hacer énfasis en eso...

[Moderador]: En este caso, ni siquiera los naturales entre 0 y 150 porque como está expresado en cientos de miles, entonces son los racionales en este intervalo con cinco decimales, recuerda que el 150 representa 15 millones; es decir, no son todos los *reales* en el intervalo $[0, 150]$ sino unos racionales muy particulares en este intervalo.

[Alexis]: Ahora..., ¿ahí no va a haber problemas cuando grafique o se le haga todo el análisis a la función? Lo digo por lo de los saltos...

[Moderador]: Precisamente es un punto curioso que me gustaría discutir con ustedes, ya que tal como está planteada la función, ésta es derivable, pero si atendemos al dominio económico la función deja de serlo. Recordemos que si la función tiene saltos o es discontinua en un punto entonces no es derivable. ¿Qué pueden decir ustedes al respecto?

[Elio]: Yo pienso entonces que sobra..., sobra, ya que la simulación que se hace gráficamente está dando más de lo que se necesita en todo caso...

[Moderador]: ¿Podrías darme más detalles...?, es que me perdí un poco con lo que dijiste.

[Elio]: Lo que quiero decir es que como el dominio matemático es más grande que el económico, entonces la simulación gráfica..., matemática aporta más información de la realidad económica del problema.

[Moderador]: ¿Y cómo resolverías esa situación frente a tus estudiantes?

[Elio]: Es algo bastante difícil, sobre todo por el conocimiento matemático que tienen a este nivel. Esto requiere un poco de abstracción, digo yo. No se me ocurre algo en este momento...

[Kenya]: Bueno, yo estoy de acuerdo con Elio, yo creo que al alumno, a cualquier alumno en general..., cuando se trabaja con el tema de funciones siempre hay que enfatizarle el tema del dominio, debe ser una habilidad que ellos deben adquirir, por lo tanto no está de más que se le insista en esa situación, y más aún cuando se trata de trabajar problemas muy específicos del área de conocimiento, del área de la profesión de ellos. Enfatizarle que no es lo mismo una función económica que una función matemática, que lo que persigue la función matemática es modelizar una situación o acercar una situación real a través de un modelo matemático. Entonces, yo creo que es importante establecer las diferencias entre una situación y otra, para no complicar la consolidación de los conceptos que se abordan.

[Alexis]: Ahora, una cuestión que me parece muy curiosa... En los libros que yo tengo, que he leído sobre aplicaciones, que son tres o cuatro, no recuerdo ahora, ellos no hacen hincapié sobre eso...

[Kenya]: No lo hacen, con los que yo trabajo tampoco...

[Alexis]: Ellos no toman en cuenta el dominio así como tú lo haces, eso de hablar de dos dominios, que también podría traer sus inconvenientes con los estudiantes. Ellos dicen: *tantas unidades producidas*, entonces uno sabe que la función está acotada superiormente, que tiene un tope, pero nunca detallan este hecho. Si uno se va al capítulo de funciones...

[Kenya]: No destacan ese hecho...

[Alexis]: No hay esa sutileza de decir lo que se está diciendo aquí...

[Kenya]: De destacar esa diferencia...

[Moderador]: Entonces, este planteamiento que nosotros hacemos, eso de hacer énfasis en el dominio, ¿les parece conveniente, aún cuando los libros no lo consideren y los mismos programas oficiales tampoco lo contemplan?

[Alexis]: Claro que sí, mira..., en las funciones polinómicas, lo dice Elio, uno lo ve como una función matemática y el dominio es todo $\mathbb{R}$, en cambio en la parte de la aplicación ya tiene otro dominio. Ahora es que caigo en cuenta y me pregunto: ¿por qué los libros no enfocan eso, no sé si tú tienes algún libro que trabaje eso?

[Moderador]: No, al menos los libros que hemos revisado no consideran esta situación y es algo que, precisamente, nos llama la atención.

[Elio]: Lo que sí vi en algún libro, no recuerdo el autor ahora, es el hecho de ver si es discreto o continuo el conjunto que se está considerando...

[Moderador]: Muy bien, pasemos a la otra pregunta.

Pregunta 2: Calcule la tasa para la cual los costos de producción se están elevando en la actualidad.

Observación: Antes de dar respuesta a esta pregunta conviene introducir la **regla de la cadena**. Para una función y que depende de u y ésta a su vez es una función que depende de x, con y derivable en u y u derivable en x, se tiene que la derivada de y respecto a x ($\frac{dy}{dx}$), se define como

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}}$$

Así, estudiar la razón de cambio de $\boldsymbol{y}$ respecto a $\boldsymbol{x}$ consiste en multiplicar la razón de cambio de $\boldsymbol{y}$ respecto a $\boldsymbol{u}$ por la razón de cambio de $\boldsymbol{u}$ respecto a $\boldsymbol{x}$.

Respuesta de P2: Del enunciado tenemos que $\frac{dx}{dt} = 0,7$ (cuando el tiempo se mide en años). El costo marginal está dado por

$$\frac{dC}{dx} = 2 - \frac{x}{10}.$$

Por consiguiente,

$$\begin{aligned} \frac{dC}{dt} &= \frac{dC}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} \\ &= (2 - \frac{x}{10}) \cdot \frac{dx}{dt} \end{aligned}$$

Sustituyendo $x = 5$, el nivel de producción actual, obtenemos

$$\begin{aligned} \frac{dC}{dt} &= (2 - \frac{5}{10})(0,7) \\ &= 1,05. \end{aligned}$$

Por lo tanto los costos de producción se están incrementando a una tasa de $1,05$ (cientos de miles) de dólares por año o, dicho de otra manera, en 105000 dólares por año.

Discusión: *En este ejemplo de la regla de la cadena, la derivada de la función interna es parte del enunciado. ¿Utilizan ustedes un problema similar para introducir la regla de la cadena?*

1. *Sí*. *¿Por qué?*

2. *No*. *¿Lo utilizarían ahora para introducir la regla de la cadena, lo modificarían (¿cómo?) o simplemente lo harían de otra manera (¿por qué?)?*

[Moderador]: Les explico un poco, fíjense que la derivada de la función interna es una constante, recuerden también que la función de costos depende del nivel de producción de la empresa y éste a su vez depende del tiempo, por eso es clave la parte del enunciado que dice..., permítanme ir atrás..., "el nivel de producción está creciendo a una tasa de $0,7$ millones de artículos por año", repito, a una tasa de $0,7$; esto es, otra forma de mencionar la derivada. Entonces, ¿utilizan ustedes un problema similar para introducir la regla de la cadena?

[Alexis]: Bueno, te voy a decir que a mi no se me había ocurrido eso, la parte..., ¿cómo es...?, ofrecer o introducir la regla de la cadena con un problema económico...

[Kenya]: O sea, motivar el uso de la regla de la cadena con un problema de economía...

[Alexis]: Nunca, nunca se me había ocurrido. Siempre la he tratado de introducir jugando con funciones muy elementales..., pero me parece muy interesante eso, ojalá y uno...

[Kenya]: Casi siempre lo que uno hace; generalmente, cuando uno trabaja con la regla de la cadena, no sé si lo hacen ustedes, yo lo he hecho de esta manera, trabajo con la otra forma, es decir, f compuesta con g y...

[Alexis]: Sí, sí, ok...

[Kenya]: Esa es, generalmente, como uno la introduce. Más desde el punto de vista matemático, pero después cuando aparecen problemas de economía donde por ejemplo, el nivel de producción depende de los ingresos y éste a su vez depende de la mano de obra, entonces el nivel de producción está dependiendo de la mano de obra, entonces esto obliga a utilizar este tipo de expresión para la regla de la cadena; pero que en el problema se incorpore o esté incorporada, como dato, la derivada interna, no. Nunca he utilizado un problema como éste.

[Moderador]: Y tú Alexis, ¿utilizas un problema como éste para introducir la regla de la cadena, donde la derivada de la función interna aparece en el enunciado?

[Alexis]: No, y menos con un enunciado de economía.

[Moderador]: Y en tu caso Elio, ¿qué nos puedes decir?

[Elio]: Precisamente, este concepto de la regla de la cadena es uno de los que yo he notado que cuesta más para que el estudiante lo digiera..., no es fácil. Pero tal vez, como Kenya señalaba ahora, ver qué es lo que significa pueda conducirlo a un entendimiento mejor, ver que hay situaciones en la que una cosa depende de esta, pero a su vez esa depende de la otra..., y me a ayudado mucho el esquema...

[Moderador]: ¿Te refieres al diagrama?

[Elio]: Eso, el diagrama. Esto no lo logran digerir, muchas veces quieren cancelar dx con dy, verlo como un cociente; pero viéndolo como un esquema, como un diagrama, de árbol creo que lo llaman algunos, es que ellos se dan cuenta, aunque sea memorizando o de manera muy mecánica pero logran aprenderse y después lo digieren, pero yo sé que a ellos les cuesta esa parte. Y tampoco he trabajado colocando una derivada, no necesariamente constante, no necesariamente...

[Kenya]: No necesariamente, pero ya que aparezca como dato dentro del problema...

[Elio]: Pero no le veo, no le veo mayor dificultad...

[Kenya]: Yo creo que la dificultad de la regla de la cadena, sobre todo en su otra forma, estriba en que ellos no saben distinguir cuándo tienen una función compuesta, cuándo tienen una función suma; o sea, en la estructura de la función, dependiendo de la operación que se esté aplicando.

[Elio]: Y otra cosa es que..., cuando uno ya tiene el modelo matemático; es decir, ya uno tiene formada la ecuación, se tiende mucho, veo que tienden mucho a despejar la variable en una de las funciones y sustituirla en la otra y deriva de forma ordinaria sin utilizar la regla de la cadena. Yo creo que la ideas es, en este caso, mostrarle la importancia de la regla de la cadena, para qué utilizarla, cómo podemos ahorrar cálculos a la hora de aplicarla, porque ellos te pueden decir: "para qué utilizar la regla de la cadena si yo puedo despejar la variable de una de las ecuaciones y luego sustituir en la otra ecuación..."

[Moderador]: Sí, pero el detalle es que no siempre, es más, en la mayoría de los casos no se puede hacer eso que tú dices, tendríamos que trabajar con funciones extremadamente sencillas...

[Alexis]: Pero es que para evitar eso, yo les pido en el examen que deriven usando la regla de la cadena, justamente para evitar la trampa del estudiante.

[Elio]: Pero es que cuando él vaya a hacer eso en su realidad, pues él simplemente quiere resolver el problema, en ese caso él tiene la libertad de resolver el problema como él considere más adecuado o como él se lo sepa...

[Alexis]: De acuerdo, pero si uno quiere que el estudiante más o menos digiera este concepto, esta herramienta, al menos en los exámenes cortos es bueno exigirle que apliquen la regla de la cadena. Pero..., me parece interesante esto, este planteamiento, nunca lo había visto así y creo que puede ser provechoso para el estudiante.

[Moderador]: ¿Y utilizarían un problema como éste en sus clases, ahora que hemos discutido, que lo han leído y han expuesto su punto de vista?

[Alexis]: Yo lo haría, de hecho te he comentado que me gustaría trabajar contigo en la implementación de este material, creo que hay cosas novedosas y algunas muy curiosas como esta de la regla de la cadena o la del dominio.

[Moderador]: ¿Y tú, Elio?

[Elio]: Bueno, yo con lo del dominio sí que intentaré hacer algunas cosas similares, creo que la parte del dominio es clave para trabajar con funciones. Ahora, con lo de la regla de la cadena, tendría que sentarme a pensarlo, aun cuando es algo nuevo habría que ver sus ventajas y desventajas.

[Moderador]: ¿Kenya, puedes añadir algo a lo dicho aquí?. Hace un momento, cuando te referías a enseñar la regla de la cadena de la "otra forma", ¿te referías a la forma clásica o tradicional de enseñar la regla de la cadena?

[Kenya]: Sí, sí, me refería a la forma clásica, la que aparece en los libros de cálculo...

[Moderador]: ¿Y utilizarías este problema o uno similar para introducir la regla de la cadena?

[Kenya]: Bueno..., a mi el problema me gusta y creo que puedes lograr motivar al estudiante para introducir la regla de la cadena y al mismo tiempo que ellos vean la aplicación que tiene esta herramienta en problemas de su profesión...

[Moderador]: Pasemos al siguiente problema.

B.3.2. Utilidad y Publicidad[8]

Un determinado artículo puede fabricarse y venderse con una utilidad o beneficio de \$10 cada uno. Si el fabricante gasta x dólares en la publicidad del artículo, el número de artículos que pueden venderse será igual a $1000(1 - e^{-kx})$, en donde $k = 0{,}001$. Si U denota la utilidad neta por las ventas y tomando en cuenta que el fabricante no está dispuesto a gastar más de \$8500 en publicidad.

Preguntas: Las siguientes preguntas están relacionadas con los contenidos matemático y económico en general.

Pregunta 1: Calcule $U'(x)$ e **interprete esta derivada**.

Observación: Antes de dar respuesta a estas preguntas conviene introducir la **regla de la cadena**. Para una función f que depende de g y ésta a su vez es una función que depende de x, con f derivable en $g(x)$ y g derivable en x, se tiene que la derivada de f respecto a x ($f'(x)$), se define como

[8] Tomado de Arya y Lardner (1987)

$$\boxed{f'(x) = f'[g(x)] \cdot g'(x)}.$$

Así, estudiar la derivada de f respecto a x consiste en multiplicar la derivada de f respecto a $g(x)$ por la derivada de g respecto a x.

Respuesta de P1: Puesto que cada artículo produce una utilidad de \$10, la utilidad bruta total originada por las ventas se obtiene multiplicando el número de ventas por \$10. La utilidad neta se obtiene entonces sustituyendo los costos de publicidad:

$$U(x) = 10{,}000(1 - e^{-kx}) - x.$$

Por lo tanto,

$$U'(x) = -10{,}000 \cdot (e^{-kx})' - 1$$

Y por la regla de la cadena,

$$\begin{aligned} U'(x) &= -10{,}000(-ke^{-kx}) - 1 \\ &= 10{,}000ke^{-kx} - 1 \end{aligned}$$

y como $k = 0,001$ se tiene que

$$U'(x) = 10e^{-0{,}001x} - 1$$

La **interpretación** de esta derivada es que *mide la tasa de cambio de la utilidad neta con respecto a los gastos de publicidad*. En otras palabras, $U'(x)$ da el incremento en el número de dólares en la utilidad neta producida por un gasto adicional (en dólares) en publicidad.

Discusión: A través del problema buscamos que el estudiante descubra la necesidad e importancia de la "herramienta" (la regla de la cadena), puesto que la función e^{-kx} no tiene derivada inmediata. Una vez discutido con el estudiante y generando entre ellos un diálogo que conduzca a esta "regla", el problema se puede atacar sin mayores problemas ¿o no?

Generalmente, la forma tradicional de llegar a la regla de la cadena consiste en definirla y de inmediato hacer ejemplos (en principio) matemáticos que permitan visualizar la regla para posteriormente realizar ejercicios o problemas de aplicación.

¿Consideran ustedes un ejemplo como éste, la manera apropiada para llegar a la regla de la cadena o harían alguna modificación para lograr los objetivos de este tema; como por ejemplo, realizar cambios en la función compuesta o modificarla?

[Alexis]: Yo, particularmente, tendría que hacerlo en mi clase, vivir la experiencia con mis alumnos para ver si en realidad funciona, de lo contrario no te puedo decir nada ya que la exponencial es una función que a ellos les resulta más complicada.

[Moderador]: ¿Y Kenya qué nos puede decir?

[Kenya]: Bueno..., este..., pienso que la posibilidad de responder a esto, de que si es o no una buena manera, pienso que sí. Pero todo el material que has traído, las respuestas han sido hipotéticas; es decir, sin haberlas sometido a una experiencia con los estudiantes, y yo creo que es válido hacer el experimento con todo, yo creo que valdría la pena que solicitaras al Departamento la posibilidad de implementar este material, sobre todo para que tenga valor institucional y no personal, creo que eso le daría más peso a tu investigación, ¿no crees?

[Alexis]: Incluso..., disculpa que te interrumpa, en una de las preguntas de uno de los cuestionarios, hay una pregunta que dice: ¿usted lo haría así?, y yo te respondí: no sé. Tendría que ponerlo en práctica y me gustaría, sí que me gustaría tomar el material y ponerlo en práctica, aunque creo que habría que redactar mejor este material. Bueno, más que redactar, tendrías que diseñarlo mejor, porque uno como profesor lo entiende pero no estoy muy seguro que el estudiante lo entienda de una vez. Ahora, me parece y es bueno que uno aquí haga un grupo de trabajo con problemas de aplicaciones a la economía, así como hay profesores que se dedican a estudiar problemas de ingeniería uno puede hacer un grupo para hacer cosas de didáctica hacia la economía.

[Moderador]: Y la opinión de Elio..., ¿ibas a decir algo Kenya?

[Kenya]: Pienso que la idea es meter al estudiante, involucrar al estudiante en una situación donde aparezca una función compuesta y ver que por las reglas anteriores de derivación, independientemente de que se use la regla de la cadena de esta forma o de la otra, hacerles ver la necesidad de crear una estrategia para poder derivar este tipo de funciones, porque no encajan dentro de las reglas, y ver hasta que punto el estudiante puede darse cuenta de que la función que tiene ante sus ojos no puede ser derivada por ninguna de las reglas que hasta ese momento él conoce. Ahora, que él llegue a deducir que esa sea la regla que debe utilizar, que él llegue a descubrirla, no lo sé...

[Moderador]: No, no, no. La idea es que tú o el profesor lo lleve hasta la regla de la cadena, no pretendo que el estudiante la descubra, sino que el profesor, mediante un problema, le haga ver al estudiante que con las reglas que conoce hasta ese momento no puede resolver el problema, es en ese momento cuando el profesor tiene que intervenir para resolver el conflicto y en la medida de lo posible que se cree un espacio de discusión entre los estudiantes; pero en ningún momento yo busco que el estudiante descubra la regla de la cadena.

[Kenya]: O sea, que el propósito de esto es generar la necesidad en el estudiante de que ellos perciban que hay una necesidad de otra regla para poder derivar este tipo especial de función, o que al menos se den cuenta que con las reglas que manejan no se puede derivar esta función.

[Moderador]: Es más, ya con lo segundo se estaría logrando un gran paso, el hecho de que ellos se den cuenta que con los conocimientos que tienen no pueden resolver el problema les estaría llevando a la necesidad o al menos a la inquietud de una nueva regla.

[Kenya]: Bueno, yo creo que si es así, sería un buen procedimiento para generar esa necesidad.

[Moderador]: Y Elio, ¿qué opinas al respecto?

[Elio]: Estaba pensando en algo que dijiste hace un momento, "de que el estudiante cuando se dé cuenta que con las herramientas que tiene no lo va a poder resolver", eso es relativo, porque el estudiante quiere ser muy pícaro y entonces él dice: "vamos a resolverlo de alguna manera" y ahí es donde viene el error, y al caer en el error él va a ver la necesidad de un nuevo método, de una nueva regla. Y lo delicado, que veo yo, y es donde tenemos que entrar nosotros a jugar un papel clave, es que plantear un problema donde se vea la necesidad de aplicar la regla de la cadena es más complicado de lo que uno viene haciendo normalmente porque aquí hay como muchas cosas sueltas..., esto depende de aquello, aquello depende de esto otro, están los términos económicos de por medio, entonces, a la hora de llevarlo a un modelo matemático puede ser dificultoso.

[Kenya]: Hay otro detalle..., los alumnos estarán muy tentados, como es una función exponencial, a confundirla con una función de tipo potencia y probablemente se vayan por ese camino, de derivarla como una función potencia.

[Elio]: Bueno, a este nivel se supone que el estudiante tiene ciertos conocimientos, por lo menos ha hecho composición de funciones...

[Moderador]: Claro, esa es la idea, recuerda que el tema de funciones es del semestre anterior.

[Elio]: Pero aquí, cuando uno va a derivar utilizando la regla de la cadena, generalmente, necesitamos hacer al revés..., tenemos un modelo matemático o una función, cómo descomponerla en dos funciones que compuestas me dé la original, ese proceso puede crear cierto conflicto, eso les cuesta. Será que hay que esforzarse más en la preparación de composición de funciones en un sentido y en otro.

[Kenya]: Hay que hacerlo no solamente con la composición sino con las otras operaciones, cualquier función que tú le des que es generada a través de dos o más funciones..., generalmente el camino que tú sigues es: te dan las dos funciones y las operas, pero al revés no lo hacen, es raro cuando se plantean ejercicios donde se plantea una función y se les pide al estudiante que diga qué funciones están participando y qué operación está involucrada. Ese tipo de ejercicio, sobre todo en Matemáticas 11, porque aquí no le vas a enseñar composición de funciones, se supone que eso ya lo traen del semestre anterior, entre comillas... En Matemáticas 1 habría que hacer ese tipo de práctica con ellos.

¿Cuáles son las dificultades que presentan sus estudiantes ante este tipo de problemas?

[Kenya]: Yo creo que hemos hablado de eso...

[Moderador]: Yo me refiero a las dificultades respecto a un problema como éste.

[Kenya]: Bueno, les cuesta determinar que están frente a una composición, tienden a confundir la exponencial con la función tipo potencia como te dije antes...

[Elio]: Enfrentarse al lenguaje relacionado con el modelo matemático no es fácil para ellos, eso le crea incomodidad y muchas veces se ven unos con otros, como preguntándole al compañero: ¿tú entiendes?

[Alexis]: Yo estoy de acuerdo con Elio, creo que el lenguaje les genera mucha dificultad, y si además les pides que interpreten los resultados en términos económicos, peor aún.

[Moderador]: ¿Qué estrategias implementarían ustedes para solventar estas dificultades?

[Kenya]: Sobre la composición de funciones, creo que haciendo problemas como los que mencionábamos Elio y yo hace rato, esos de ir en sentido y en otro, aunque eso corresponde al curso de Matemáticas 1. Respecto a la exponencial, creo que dedicándole más tiempo a la función exponencial, algo que se me ocurre ahora es que trabajen con la calculadora esta función.

[Moderador]: Y ustedes, por ejemplo Alexis, ¿qué estrategias implementarías para solventar lo del lenguaje?

[Alexis]: Mira, realmente con lo del lenguaje no sé que hacer, los pocos problemas que utilizo, donde aparece el lenguaje de administración o economía, ellos asumen una actitud de rechazo que a uno se le quita las ganas de trabajar esos problemas. Hace tiempo escribí una especie de guía, donde escribía el problema y utilizaba muchos diagramas o dibujos y los resultados fueron catastróficos. Eran cinco páginas con tres problemas muy sencillos, si las encuentro te las doy para que las veas, realice los problemas con lujo de detalles y les repartí las fotocopias pero los resultados no fueron los esperados, a ellos no les gusta este tipo de problemas.

[Elio]: Yo creo que el trabajo tiene que hacerse desde abajo, desde Matemáticas 1, si uno comienza a trabajar con ellos desde Matemáticas 1 con problemas de esta naturaleza la historia sería otra. El Departamento debería fomentar unas charlas para estos estudiantes, pienso que es un problema de la universidad y no mío en particular, yo puedo intentar resolver el problema, pero si los otros profesores no hacen nada siento que mi trabajo se estaría perdiendo, igual que si otro trabajara y yo no, igual el trabajo del otro se perdería.

[Moderador]: De acuerdo, pasemos a la siguiente pregunta.

Pregunta 2: ¿Será cierto que mientras más se invierta en publicidad, mayor será la utilidad? Como respuesta parcial a esta pregunta, evalúe $U'(x)$ en $x = 1000$ y en $x = 3000$. **Interprete los resultados**.

Respuesta de P2: Conviene prestar atención a los dos casos que se estudian a continuación.

Cuando $x = 1000$,

$$U'(1000) = 10e^{-1} - 1 = 10(0,3679) - 1 = 2,679.$$

Para el caso en que $x = 3000$,

$$U'(3000) = 10e^{-3} - 1 = 10(0,0498) - 1 = -0,502.$$

Discusión: De modo que si se gastan $1000 en publicidad, **cada dólar adicional produce un incremento** de $2,68 en la utilidad neta. Mientras que si se gastan $3000 en publicidad, **cada dólar adicional produce una disminución** de $0,50 en la utilidad neta. En este caso es claro que el fabricante no debería hacer más publicidad (el costo de publicidad extra incrementaría en exceso el valor de las ventas adicionales que se generarían). De hecho, cuando $x = 3000$, **ya se está gastando de más en publicidad**.

¿Y si se invierten $2.000 en publicidad, o $2.100?

¿Consideran ustedes que este planteamiento tiene aspectos innovadores, en materia de enseñanza, que permite al estudiante la maduración y consolidación del concepto, así como la utilidad de esta herramienta en el campo de las ciencias económicas? ¿Por qué?

[Kenya]: Claro, por supuesto que sí...

[Moderador]: ¿Por qué, Kenya?

[Kenya]: Porque además de verlo en un ejemplo concreto, las situaciones estas permiten, muchas veces, poner en entredicho lo que piensa el común de la gente. Entonces, estamos usando una herramienta matemática para..., digamos, desechar algo que por lo general piensa la gente que es verdadera, de mientras más se invierte en publicidad más se gana...

[Alexis]: Ahora..., ¿si quedará...?

[Kenya]: Y permite la toma de decisiones.

[Alexis]: Ahora, una cuestión sobre la pregunta que tú hiciste, me hago la pregunta y..., si será capaz el estudiante de decir ¿y qué pasa con los 2000?, ¿será capaz de meterse en el problema y plantearse esta situación?

[Elio]: Yo sí creo que se pueda plantear la pregunta, ¿por qué no 5000?, ¿por qué no 2000?, ¿por qué no tanto...? Y al hacerse la pregunta cabe la posibilidad..., bueno, calcule entonces a ver qué pasa.

[Alexis]: ¿Entiendes lo que te quiero decir...?

[Moderador]: Claro que te entiendo, pero es que en una situación como esta, el profesor juega un papel fundamental, el profesor no puede esperar que el estudiante se plantee todas las preguntas, eso sería una situación ideal.

[Kenya]: O sea, que el estudiante no se conforme sólo con esos dos valores que tú colocas de entrada sino que además busque otros valores que le permitan obtener resultados que contrasten los dados en el enunciado. Se supone que eso forma parte del espíritu de curiosidad que pueda tener un estudiante, sobre todo cuando es de economía y le están planteando un problema de su profesión; debería, quizás, de forma natural plantearse ese tipo de situaciones y otras...

[Alexis]: Bueno, visto así como lo plantea Kenya, me parece bien...

[Elio]: Y además, yo creo que, si parte del problema es hacer que el estudiante se dé cuenta que puede haber situaciones que vayan en contra de la intuición, cosas como: mientras más invierta más gano, entonces yo pensaría en un ejemplo auxiliar sencillo para que él se dé cuenta que, en efecto, puede ser así. Por ejemplo, yo vendo cuadernos y hacerle publicidad, para que la gente se dé cuenta que yo vendo cuadernos; porque si la gente no se entera cómo me va a comprar, y resulta que yo le pago a una persona para que me promocione mis cuadernos, por cada diez cuadernos que me promocione yo tengo que pagarle una cantidad "x", entonces, mientras más cuadernos le dé para que me los promocione debo pagarle más, entonces ahí nos damos cuenta que mientras más promocione mis cuadernos más tendré que pagarle a esta persona, porque a la ganancia debo restarle lo que pago por publicidad. Tal vez, incluso, se puede buscar un ejemplo más sencillo pero que habría que prepararlo con tiempo, esto de los cuadernos se me ocurrió ahora, aunque se puede mejorar. Que él se dé cuenta que, en efecto, puede ser así; una situación que vaya en contra, muchas veces, de lo que la intuición nos señala. Y el tipo de pregunta me gusta, es decir, el enunciado: “¿será cierto?”, no solamente: *determinar*, *calcular*, *hacer*, sino que quede abierto; puede ser cierto, puede ser falso, pero que él se encargue de hacer la investigación...

[Kenya]: O sea, la pregunta genera la duda...

[Elio]: Exacto.

En un seminario similar, cuando pregunté si este tipo de preguntas conducen o promueven el estudio de monotonía de una función (crecimiento y decrecimiento) y más aún de extremos relativos (máximos y mínimos); uno de los participantes en el seminario se mantuvo firme objeción a mi planteamiento y utilizó dos o tres argumentos, por el contrario, los otros participantes vieron con buenos ojos mi propuesta y uno dijo que intentaría ponerla en práctica y experimentar un poco *por eso de la motivación*.

Me gustaría conocer la opinión de ustedes al respecto; es decir, este hecho particular de evaluar la función de utilidad en dos puntos que nosotros sabemos que dan interpretaciones contrarias, ¿promueven el estudio de monotonía de una función y el interés por los estudiantes?

[Elio]: Sí, yo creo que sí, de hecho es de lo que estamos hablando ahora. Más que darse cuenta el estudiante de que algo está pasando se da cuenta de que va en contra de lo que, generalmente, uno pueda estar pensando. Pensar que mientras más invierto más gano, mientras más invierto más ingresos tengo. Aquí, al evaluar en 1000 y al evaluar en 3000 hay una diferencia y eso genera, si sabemos interpretar lo que es la derivada en un punto, nos damos cuenta que hay un cambio, que algo esta pasando.

[Moderador]: ¿Y Kenya qué opina?

[Kenya]: Yo estoy totalmente de acuerdo, yo pienso que sí, que el estudiante podría preguntarse: “*y qué pasa en 2000 o un poco antes de 2000 o un poco más allá de 2000*”, y ver que hay un punto en el cual o que hay valores donde la utilidad va creciendo y después hay valores donde empieza a bajar y; obviamente, si el alumno toma en cuenta que está trabajando sobre una función que es continua, que no va a haber saltos y cosas raras en la función pues, podrá inferir que hay un máximo si se da esa secuencia, crece-decrece.

[Alexis]: Bueno, sabiendo con la derivada que para unos valores es positiva y que si luego uno se desplaza obtiene valores negativos el estudiante tiene que darse cuenta que hay un máximo o debe haber un máximo...

[Moderador]: Eso es ser muy ambicioso, yo lo que busco más que el estudiante se de cuenta de la existencia de un máximo es que surja la necesidad del concepto de máximo, de función creciente, de función decreciente, pero desde una discusión y no que el profesor llegue y de una definición de entrada, sino que la definición surja como una necesidad.

B.3.3. Análisis e Interpretación Econ-Mat[9]

Suponga que el costo total (en dólares) de fabricación C en cierta fábrica es una función que depende de las q unidades producidas, que a su vez es una función que depende del tiempo, t, que representa las horas durante las cuales ha estado funcionando la fábrica.

Preguntas: Las siguientes preguntas están relacionadas con los contenidos matemático y económico en general.

Pregunta 1: ¿Qué cantidad se representa mediante la derivada $\frac{dC}{dq}$? ¿En qué unidades se mide esta cantidad?

Observación: Antes de dar respuesta a estas preguntas conviene introducir la **regla de la cadena**. Para una función y que depende de u y ésta a su vez es una función que depende de x, con y derivable en u y u derivable en x, se tiene que la derivada de y respecto a x ($\frac{dy}{dx}$), se define como

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}}$$

Así, estudiar la razón de cambio de $\boldsymbol{y}$ respecto a $\boldsymbol{x}$ consiste en multiplicar la razón de cambio de $\boldsymbol{y}$ respecto a $\boldsymbol{u}$ multiplicada por la razón de cambio de $\boldsymbol{u}$ respecto a $\boldsymbol{x}$.

Respuesta de P1: La expresión $\frac{dC}{dq}$ representa la razón de cambio del costo C respecto al número de unidades producidas q. Esta cantidad se mide en dólares/unidades.

Pregunta 2: ¿Qué cantidad representa la expresión $\frac{dq}{dt}$? ¿En qué unidades se mide esta cantidad?

Respuesta de P2: La expresión $\frac{dq}{dt}$ representa la razón de cambio de las unidades producidas q respecto al tiempo t. Esta cantidad se mide en unidades/horas.

Pregunta 3:¿Qué cantidad representa la expresión $\frac{dC}{dt} = \frac{dC}{dq}\frac{dq}{dt}$? ¿En qué unidades se mide esta cantidad?

Respuesta de P3: La expresión $\frac{dC}{dt} = \frac{dC}{dq}\frac{dq}{dt}$ representa la razón de cambio del costo C respecto al tiempo t. Esta cantidad se mide en dólares/horas.

Discusión: Para finalizar el tema de la regla de la cadena, discutamos ahora sobre una pregunta como ésta, de corte teórico, donde las exigencias de análisis

[9]Hoffmann y Bradley (2001)

e interpretación, tanto económico como matemático, son mayores que aquellas de contenido numérico.

¿Conduce al estudiante a una actitud de rechazo este tipo de problemas?

[Kenya]: Si ya se han hecho problemas de contexto donde surge la necesidad de la regla de la cadena, yo pienso que cuando se plantea una pregunta de este tipo que lo que busca es generalizar, o sea, librar la forma de su contenido concreto, yo pienso que la actitud del estudiante no sería tan negativa, yo creo que más bien la generalización se llevaría a cabo de un modo positivo. Ahora, posiblemente, si se plantea este tipo de pregunta de entrada sin antes haber tenido una experiencia previa con problemas contextualizados puede ser que la actitud sea de rechazo.

[Moderador]: ¿Y tú, Elio, estás de acuerdo con Kenya?

[Elio]: Es que cuidado si él mismo no se encarga de plantear una situación en la que se extienda la cosa; es decir, que se aprecie la composición... En la situación anterior estábamos hablando de que el costo dependía de la cantidad de artículos que se producían y la cantidad de artículos, creo que, del tiempo, ¿algo así?... Aquí estamos hablando del costo de las unidades producidas y la unidades producidas dependen del tiempo. Prácticamente se habla en los mismos términos...

[Alexis]: Pero aquí, si te das cuenta, lo ves como más digerible que anteriormente.

[Elio]: De acuerdo, pero digo yo, cuidado si el estudiante mismo caiga en cuenta que una variable depende de otra y así sucesivamente, de manera que el pueda generalizar. Yo pienso que hay estudiantes capaces de ver esto.

[Moderador]: No, un momento, no me refiero a la capacidad de los estudiantes sino a la actitud de los estudiantes frente a problemas como estos.

[Elio]: Pero es que la actitud de rechazo o aceptación de un estudiante hacia un tema o problema generalmente se presenta porque no entiende algo de lo que se está tratando, la dificultad que puede encontrar en un problema, en una teoría. Cuando él ve que entiende lo que se le está planteando, el rechazo quizás sea menos.

[Kenya]: Y menos aún cuando el contexto es de su interés, porque este es el planteamiento de la regla de la cadena..., todavía está contextualizado en su área por muy teórico que parezca, porque le estás hablando de una función de costo, lo que pasa es que no se la estás dando de manera específica como en los otros problemas, lo mismo con la función q que va a depender del tiempo, entonces no le estás dando de forma explícita cuál es la función. Realmente este es un problema como los otros pero que está liberado de su contenido concreto, pero al mismo tiempo no deja de ser concreto porque le estás hablando de una función de costo, de una función de cantidad; que no es lo mismo que tú le digas: "sea c una función que depende de x y que a su vez x dependa de y", pero no dices quién es c, quién es x o y, eso sería un nivel mucho más abstracto y evidentemente en un contexto matemático solamente; aún así, esto está, en cierto modo, contextualizado en términos de economía porque estás trabajando con funciones que son de su campo.

[Elio]: Y lo importante de las preguntas es que te permiten tener claro que es lo que significan esas expresiones. Saber en qué unidades se mide el $\frac{dC}{dq}$, qué es eso, qué es lo que está midiendo. Yo pienso que si se viene trabajando con el estudiante con problemas como éste la actitud debe ser positiva. Ahora, insisto que esta es una labor que se debería hacer desde el primer semestre y por iniciativa del Departamento y no de uno en particular.

[Kenya]: Ya también pienso que sí, que debería ser positiva la actitud al abordar este tipo de problema si han tenido la experiencia previa de otros problemas contextualizados.

[Moderador]: ¿Y qué opinas, Alexis?

[Alexis]: Yo estoy de acuerdo con lo que dice Elio, pero recuerda que aquí hay profesores que terminan haciendo lo que les da la gana con eso de la autonomía de cátedra. Pienso que si se trabaja desde el primer semestre con problemas de esta naturaleza el estudiante no debería rechazar estos problemas, si además uno elabora guías con problemas resueltos el estudiante cambiaría..., es cuestión de probarlo.

¿Un problema como éste, conduce a cubrir los objetivos que se plantean los libros de texto que ustedes utilizan?

[Kenya]: A mi me llama la atención que tú te refieras a los objetivos de los libros de texto...

[Alexis]: Yo también te iba a decir lo mismo...

[Kenya]: Yo prefiero referirme a los objetivos del programa..., allí es donde me enredo cuando me toca responder, ya preguntaste lo mismo en uno de los cuestionarios y quedé en las nubes...

[Moderador]: Disculpa que los interrumpa, pero hay objetivos de los programas oficiales, objetivos de los libros de texto y los objetivos del profesor, estos pueden estar o no interrelacionados; me explico, el profesor puede plantearse sus objetivos tomados de los programas y de los libros, los objetivos de los programas pueden ser tomados de los libros de texto...

[Kenya]: Que casi siempre es así..., casi siempre los objetivos de los programas son tomados de los libros de texto, concretamente de los índices. Ahora bien, una buena pregunta es ¿cuáles son los objetivos de los libros de texto...?

[Moderador]: Fíjate, depende del libro o los libros con los que trabajas, cada libro tiene un enfoque y en consecuencia se plantea unos objetivos. En este orden de ideas, creo que el profesor debe y tiene que conocer los libros de texto para poder preparar una clase, para recomendarlo a sus estudiantes, etc.

[Kenya]: Es que la propuesta de los libros suelen, a veces, variar. Te pueden presentar el problema desde el punto de vista matemático; por ejemplo, la regla de la cadena la vamos a trabajar siguiendo esta definición o esta estructura y después caen en las aplicaciones o pueden partir de un problema que motive la regla de la cadena más o menos en estos términos en los que está planteado el último y entonces hacer ver que se trata de una función compuesta y que ahí se aplica esta técnica...

[Moderador]: Un momento, nos estamos desviando del tema y creo que tenemos el tiempo algo medido. La pregunta se refiere a lo siguiente: ¿un material como éste apunta hacia los objetivos de los libros de texto que ustedes utilizan?

[Alexis]: No.

[Moderador]: ¿Me puedes explicar un poco más?

[Alexis]: El material que tú planteas presenta las cosas más detalladas, los libros son más directos, claro se supone que uno tiene que traducirle el libro a los estudiantes.

[Kenya]: Es que el objetivo, por lo general, de todos los libros de texto es que el estudiante adquiera una habilidad, en este caso, de calcular la derivada de una función compuesta y después vienen los problemas de aplicación, son muy pocos los libros que pudieran introducir el concepto de la regla de la cadena..., para introducir la regla de la cadena a través de un problema contextualizado. En este caso, yo lo que podría destacar de tu material es que además de introducir la regla de la cadena trabajas al mismo tiempo con problemas de aplicaciones.

[Moderador]: ¿Y tú Elio, qué nos puedes decir?

[Elio]: El problema es que la mayoría de los libros no muestran cuáles son sus objetivos, yo lo que hago es adaptar los libros a los objetivos de los programas, yo lo que hago es sacarle provecho al libro y adaptarlo a los objetivos de los programas.

[Moderador]: ¿Y tú Alexis, qué nos puedes decir?

[Alexis]: Mira..., yo puedo utilizar un libro no por sus objetivos sino porque tiene buenos ejemplos o tal vez porque tiene una parte o un capítulo que me llama la atención, porque me gusta, pero nunca he trabajado con un libro pensando en sus objetivos, yo trabajo con un libro por su contenido o parte de su contenido.

¿Un problema como éste, sería ideal para preguntarlo en una evaluación del tema de derivadas?

[Alexis]: Si yo siento que el estudiante ha madurado, ha entendido la regla de la cadena me atrevería a ponerlo, de lo contrario no lo haría, realmente considero que este problema si no lo he discutido en clases los estudiantes no sabrían resolverlo, aunque es un problema relacionado con su carrera, ellos deberían resolverlo sin problemas, tal vez la parte que más le traería problemas es la segunda parte, la de las unidades. Aún así, creo que lo preguntaría.

[Moderador]: ¿Y Elio?

[Elio]: Yo no, yo le pondría un problema específico y después lo mandaría a interpretar...

[Moderador]: ¿A qué te refieres con específico?

[Elio]: A un problema numérico, no tan teórico como éste. Estoy seguro que no lo harían. Yo me inclino por una función de costo "$C =$ a tal cosa"; creo que, en el fondo, un problema específico tendría el mismo propósito que éste.

[Moderador]: ¿Y Kenya...?

[Kenya]: Yo, la verdad es que nunca me lo había planteado así, nunca me había planteado una pregunta de este tipo en una evaluación escrita, aunque en algún momento he planteado problemas similares para la regla de la cadena en funciones de varias variables, pero descontextualizado, pero no en una evaluación sino en el aula de clases, para ver si han comprendido la regla. Ahora, el que no me lo haya planteado no significa que no lo pregunte, puede ser que como no lo conocía esa sea la razón de no haberla preguntado; ahora que la conozco..., ahora que conozco el problema podría trabajarlo en clase y preguntarlo, a fin de cuenta es un problema de su campo profesional que permite evaluar el significado de la regla de la cadena, su interpretación, etc.

[Moderador]: ¿Pero lo consideras ideal para preguntarlo en una evaluación?

[Kenya]: Tanto como ideal..., no. Me gusta el problema para preguntarlo, aunque yo, al igual que Elio, no lo haría tan teórico..., me gusta la parte contextualizada pero definiría unas funciones, eso le daría más seguridad al estudiante.

[Moderador]: Bueno..., muchas gracias por su tiempo...

B.3.4. Cuestionario relacionado con la actividad 3

De acuerdo a la actividad que acabamos de realizar y como producto de las opiniones y discusiones en la misma, nos interesa conocer tu opinión sobre algunos puntos que señalamos a continuación:

1. Respecto a la forma actual que sigues en tus cursos de cálculo para enseñar la *regla de la cadena*, ¿podrías destacar algún aspecto relevante que incida en el aprendizaje del estudiante al implementar una actividad como ésta?

2. De los tres problemas presentados anteriormente, ¿cuál supone para ti de mayor relevancia didáctica?, es decir, ¿cuál de estos te permitiría lograr los objetivos propuestos para tus estudiantes? ¿por qué?

3. De las dos notaciones que se usaron para la derivada en los tres problemas anteriores, ¿cuál de las dos utilizas en tus clases? ¿Por qué?

4. Hay investigadores en didáctica que consideran que el relacionar una actividad que vincule contenidos matemáticos con otras áreas sólo tienen un valor **motivador**. ¿Tú concibes una actividad como ésta de igual forma o te parece sugerente como generadora de conocimiento en ambas direcciones? ¿Por qué?

5. ¿Este tipo de actividad, te obliga a romper con los esquemas que actualmente mantienes en tus clases? ¿Por qué?

6. Para introducir y desarrollar la *regla de la cadena*, ¿cuál es esquema que sigues actualmente?

Alexis

Cuestionario relacionado con la actividad 3

De acuerdo a la actividad que acabamos de realizar y como producto de las opiniones y discusiones en la misma, nos interesa conocer tu opinión sobre algunos puntos que señalamos a continuación:

1. Respecto a la forma actual que sigues en tus cursos de cálculo para enseñar la *regla de la cadena*, ¿podrías destacar algún aspecto relevante que incida en el aprendizaje del estudiante al implementar una actividad como ésta?

El aspecto relevante que puede incidir en el aprendizaje, es que el alumno no entienda el significado de la composición de funciones; si esto no es así, el alumno no debe tener problemas para el aprendizaje de tan útil herramienta para el cálculo diferencial.

2. De los tres problemas presentados anteriormente, ¿cuál supone para ti de mayor relevancia didáctica?, es decir, ¿cuál de éstos te permitiría lograr los objetivos propuestos para tus estudiantes? ¿por qué?

A pesar que el problema donde se trabaja con la función exponencial para el estudiante es bien conocida y su derivada se obtiene usando la regla de la cadena, yo usaría los problemas 1 y 3 que didácticamente el estudiante puede usar la notación $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$, por el planteamiento de los problemas ya que C está dado en función de x y x en función de t para el problema 1 y para el 3 C es función de q y q es función t. A pesar que $U(x) = 10.000(1 - e^{-.5x}) - x$ es más manejable para el estudiante, sabiendo que x es también función de otra. Claro la idea es que el estudiante aprenda a usar bien lo que es la regla de la cadena; es decir que sepa que se está trabajando con composición de funciones.

3. De las dos notaciones que se usaron para la derivada en los tres problemas anteriores, ¿cuál de las dos utilizas en tus clases? ¿Por qué?

Las dos son de gran utilidad para como están planteados los problemas usaría.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}.$$

Recordando que la idea es que el estudiante entienda que se está trabajando con composición de funciones, a pesar que el alumno prefiere trabajar con la notación de prima (?).

4. Hay investigadores en didáctica que consideran que el relacionar una actividad que vincule contenidos matemáticos con otras áreas sólo tienen un valor **motivador**. ¿Tu concibes una actividad como ésta de igual forma o te parece sugerente como generadora de conocimiento en ambas direcciones? ¿Por qué?

Genera conocimientos en ambas direcciones ayuda al estudiante a aprender matemática y estudiar el significado de está aplicación en su área, es decir análisis del costo, ingreso, Comercio, etc..

Particularmente algunos investigadores en didáctica si no saben matemática que van a enseñar, así que ellos ven está actividad que sólo tiene un valor motivador. Por lo tanto, hay que saber matemática y después hacer didáctica para tener que enseñar.

5. ¿Este tipo de actividad, te obliga a romper con los esquemas que actualmente mantienes en tus clases? ¿Por que?

No lo rompe totalmente por el trabajo que ya he hecho, pero si me gustaría implementarlo para ver que conclusiones se pueden tener de está actividad.

6. Para introducir y desarrollar la *regla de la cadena*, ¿cuál es esquema que sigues actualmente?

La regla de la cadena la introdusco con funciones lo más elemental que se pueda, como por ejemplo $y = (x^2+1)^{1/2}$ ó $y = (x^2+1)^3$ y luego hacemos $u = x^2+1$ para obtener

$$y = u^{1/2} \quad ó \quad y = u^3.$$

Así, $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dy}{du} \cdot \dfrac{du}{dx}$

Y en la parte de aplicaciones con problemas como por ejemplo el 1 ó 3. [illegible] en esta experiencia

Elio

Cuestionario relacionado con la actividad 3

De acuerdo a la actividad que acabamos de realizar y como producto de las opiniones y discusiones en la misma, nos interesa conocer tu opinión sobre algunos puntos que señalamos a continuación:

1. Respecto a la forma actual que sigues en tus cursos de cálculo para enseñar la *regla de la cadena*, ¿podrías destacar algún aspecto relevante que incida en el aprendizaje del estudiante al implementar una actividad como ésta?

Algo que he notado incide positivamente, es el hecho de representar esquemáticamente la dependencia entre las variables involucradas en un problema. Por ejemplo, si $y=f(x)$ y $x=h(t)$, entonces $y \to x \to t$. Esto les permite establecer con mayor facilidad la regla de la cadena y mucho más, si las funciones dependen de dos o más variables:

$$y=f(u,v) \quad y \quad u=g(r,t), \quad v=h(r,t)$$

$$y \begin{cases} u \begin{cases} r \\ t \end{cases} \\ v \begin{cases} r \\ t \end{cases} \end{cases}$$

He notado que aspectos como estos, les evita confusión en la relación de independencia entre las variables

2. De los tres problemas presentados anteriormente, ¿cuál supone para ti de mayor relevancia didáctica?, es decir, ¿cuál de éstos te permitiría lograr los objetivos propuestos para tus estudiantes? ¿por qué?

El que se refiere a Utilidad y Publicidad. Es un problema que me parece más concreto, desde el punto de vista de la realidad, que el 3.3 por ejemplo. Tal vez, agregando una situacion en la que se requiera hacer alguna optimizacion de costo o utilidad pueda crear mayor interés en el alumno (de hecho, lo he notado). Claro está, interpretando el contenido y los resultados del problema, como sugiere el 3.3, se genera un aprendizaje más significativo.

3. De las dos notaciones que se usaron para la derivada en los tres problemas anteriores, ¿cuál de las dos utilizas en tus clases? ¿Por qué?

Algunas veces uso ambas notaciones para mostrarles variedad, tomando en cuenta las diferencias que se presentan entre ellas.

Confieso que aunque los estudiantes se familiaricen más con la notación f' que con $\frac{df}{dx}$, esta forma de derivar una función compuesta les resulta más complicada y se presentan errores tales como:

Si $f(x) = e^{-kx}$, entonces definimos
$g(t) = e^t$ y $h(x) = -kx$, para hacer notar que $f(x) = (g \circ h)(x)$ y entonces para la derivada hacen cosas como esta:

$$f'(x) = (g \circ h)'(x) = f'(x) \circ g'(x)$$ (así, cambiando el nombre de la función)

o como esta:

$$f'(x) = g'(h(x)) = g'(x) \cdot h'(x).$$

La notación de Leibniz les permite aplicar la regla de la cadena con menor grado de error (usando el esquema)

4. Hay investigadores en didáctica que consideran que el relacionar una actividad que vincule contenidos matemáticos con otras áreas sólo tienen un valor **motivador**. ¿Tú concibes una actividad como ésta de igual forma o te parece sugerente como generadora de conocimiento en ambas direcciones? ¿Por qué?

Si tiene un valor motivador, no creo que sea un punto en contra; pues si no hay motivación puede carecer de interés para el alumno. Ahora, considero que no es sólo motivación, más bien creo que es una manera muy adecuada de generar conocimientos que verdaderamente tengan un significado real para el estudiante. Con esto se puede mostrar la utilidad de la matemática como herramienta para solucionar un problema que atañe un interés particular de la economía, que se supone es el área de estudio para el alumno. A mi modo de ver, esto es más que simple motivación.

5. ¿Este tipo de actividad, te obliga a romper con los esquemas que actualmente mantienes en tus clases? ¿Por qué?

Al contrario, siento que me permite enriquecer mis estrategias de clase, pues he tratado de enfocar, como lo he indicado en previas encuestas, mis clases en un sentido similar al realizado con esta actividad. Claro está, considero que me falta mucho por mejorar y aprender para hacerlo cada vez más adecuado. Por eso considero que actividades como estas fortalecen nuestra formación y profesionalismo.

6. Para introducir y desarrollar la *regla de la cadena*, ¿cuál es esquema que sigues actualmente?

Planteamos un problema en el cual se presente independencia entre las variables, de manera que se pueda aplicar la regla de la cadena (como 3.1 o más elemental, preferiblemente). Hacemos algunos ejercicios de manipulación sólo algebraica para ejercitarnos en el cálculo, usando definición de la derivada de la compuesta. Una vez esto, trabajamos el problema planteado y otros, cada vez de mayor exigencia.

Finalmente, hacemos énfasis en darle la interpretación adecuada a los resultados obtenidos; el significado que dentro del ambiente económico tiene la solución matemática del problema.

Kenya

Cuestionario relacionado con la actividad 3

De acuerdo a la actividad que acabamos de realizar y como producto de las opiniones y discusiones en la misma, nos interesa conocer tu opinión sobre algunos puntos que señalamos a continuación:

1. Respecto a la forma actual que sigues en tus cursos de cálculo para enseñar la *regla de la cadena*, ¿podrías destacar algún aspecto relevante que incida en el aprendizaje del estudiante al implementar una actividad como ésta?

· En primer lugar, no entro en consideraciones con respecto al dominio. Por lo que este sería un aspecto a destacar en tu propuesta

· En segundo lugar, destaco el hecho de introducir la regla de la cadena como herramienta de cálculo para la derivada de funciones compuestas a partir de su necesidad; es decir el alumno se percata del hecho de que las reglas de derivación disponibles hasta el momento no logran resolver el problema planteado, por lo que se plantea la necesidad de generar/utilizar otra regla

· Otro aspecto novedoso, está en plantear como dato en el problema sobre tasas relacionadas uno de los factores ($\frac{dx}{dt} = 0.7$) que conforman la regla de la cadena.

40

· Cabe también señalar, el énfasis que se hace en la interpretación de los resultados, junto al hecho de que la regla de la cadena se introduce en situaciones de problema de interés para los estudiantes de Economía (y similares) bien a través de situación muy específicos (problemas de "Tasas Relacionadas" y "Utilidad y Publicidad") o bien más generales pero sin distanciarse de los intereses del estudiante (Análisis e Interpretación Econ. Mat.)

2. De los tres problemas presentados anteriormente, ¿cuál supone para ti de mayor relevancia didáctica?, es decir, ¿cuál de éstos te permitiría lograr los objetivos propuestos para tus estudiantes? ¿por qué?

No es sencillo optar por uno de los tres problemas, dado que cada uno de ellos tiene su propio valor al enfatizar en aspectos diferentes (pero relacionados) del mismo objeto de estudio.

En el primero y en el tercero se introduce la regla de la cadena haciendo uso de la notación de Leibniz, y me parece que bajo esta notación se puede hacer más comprensible dicha regla, y más aún si el estudiante ha trabajado la composición de funciones usando variables intermedias.

Considero que, si he de elegir necesariamente uno de los tres problemas, optaría por el 2 pero incorporando la presentación de la Regla de la Cadena bajo la notación de Leibniz e incorporando o enfatizando en aspectos que destacan en los otros problemas (por ej., del problema 1, lo del dominio y el modo de enunciar la pregunta 2; del problema 3, incorporaría el tipo de planteamiento que están presentes en las preguntas P_1, P_2 y P_3

41

el 3 problema, una vez que los alumnos han internalizado la regla de la cadena, me parece adecuado como para sintetizar resultados a modo general

3. De las dos notaciones que se usaron para la derivada en los tres problemas anteriores, ¿cuál de las dos utilizas en tus clases? ¿Por qué?

Utilizo la notación del problema 2
porque estimo que los estudiantes están
más familiarizados con ella que con
la de Leibniz, en virtud de que en la
enseñanza, el trabajo con funciones
compuestas se hace usando dicha nota-
ción; también los libros de texto introducen
la composición de funciones de ese modo

4. Hay investigadores en didáctica que consideran que el relacionar una actividad que vincule contenidos matemáticos con otras áreas sólo tienen un valor **motivador**. ¿Tu concibes una actividad como ésta de igual forma o te parece sugerente como generadora de conocimiento en ambas direcciones? ¿Por qué?

No se pone en duda el alto nivel de motivación que generan dichas actividades. Pero tampoco se puede negar que son, a su vez, fuente de conocimientos, puesto que no habría que olvidar que históricamente la matemática ha sido objeto de construcción del ser humano a partir de presentar y resolver situaciones problemas. De modo que, ubicando al estudiante en dichas situaciones, los conceptos van surgiendo de su interacción con el objeto de conocimiento, sin que esto implique que el alumno tenga que construir el edificio matemático del que hoy disponemos. Se trata de revisar situaciones problemas de interés para el alumno, a partir de las cuales emergen las matemáticas como herramientas para el estudio de tales situaciones.

5. ¿Este tipo de actividad, te obliga a romper con los esquemas que actualmente mantienes en tus clases? ¿Por que?

Sí, ya que lo más frecuente en mis clases
es la presentación del contenido matemá-
tico, ejercitación y, luego, aplicación.

6. Para introducir y desarrollar la *regla de la cadena*, ¿cuál es esquema que sigues actualmente?

1. Hago un esquema sobre los diferentes tipos de funciones y su relación con las reglas y técnicas de derivación.

• Definidas Explícitamente
  - Funciones "Elementales" (Potencia, Racional, Exponencial, ⋮) Reglas de derivación
  - Álgebra de funciones (+, −, ×, ÷) Reglas de derivación
  - Funciones Compuestas Regla de derivación

• Definidas Implícitamente — Derivación implícita

2. Realizo ejercicios para identificar funciones centrando la atención en su estructura algebraica, lo que permite distinguir entre una función compuesta de "otra que no lo es". Se identifica "primera función o función externa" y "segunda función o función interna".

3. Una vez que el alumno sabe identificar una función compuesta e indicar las funciones y el orden de la composición, se introduce la regla de la cadena usando la notación

$$F'(x) = f'[g(x)] \cdot g'(x).$$

4. Se realizan ejercicios de cálculo
5. Se desarrollan problemas de la Economía que impliquen el uso de la regla de la cadena
6. Se presenta un problema con variable Intermedia para introducir la regla de la cadena bajo la notación de Leibniz.

B.4. Actividad 4

Mediante esta actividad se busca profundizar y consolidar conceptos matemáticos y económicos relacionados con el cálculo diferencial y otros conceptos básicos de las matemáticas o situaciones "rutinarias" como el despejar una ecuación no común o el trabajo con diversas unidades de medición, después de haber desarrollado durante varias semanas un trabajo con los estudiantes en el tema de la derivada.

B.4.1. Análisis e Interpretación Econ-Mat 1[10]

El valor de cierto cultivo de frutas (en dólares) es $\mathcal{V} = \mathcal{A}(1 - e^{-kI})$ donde $\mathcal{A}$, k son constantes positivas e I es el número de libras por hectárea de insecticida con que se fumiga el cultivo. Si el costo de fumigación está dado por $C = BI$, con B una constante (precio del insecticida).

Preguntas: Las siguientes preguntas están relacionadas con los contenidos matemático y económico en general.

Pregunta 1: Encuentre el valor de I que hace a $\mathcal{V} - C$ máxima.

Respuesta de P1: Como $\mathcal{V} = \mathcal{A}(1 - e^{-kI})$, se tiene que $\mathcal{V} - C = \mathcal{A}(1 - e^{-kI}) - BI$.

Así,

$$\frac{d}{dI}(\mathcal{V} - C) = \mathcal{A}k(e^{-kI}) - B$$

Por lo tanto, para $I = \frac{-1}{k}\ln(\frac{B}{\mathcal{A}k})$, $\mathcal{V} - C$ alcanza un máximo.

Discusión: El problema aquí planteado exige más conocimientos que los planteados hasta el momento, en este caso se obliga al estudiante a manejar herramientas de análisis matemático, trabajar con funciones exponenciales, entre otras. Aún cuando el contexto es económico, todo el planteamiento y resolución del mismo (hasta aquí) es matemático.

¿Qué aportes tiene este tipo de problemas en el aprendizaje de los estudiantes?

[Alexis]: Si ya se ha venido trabajando y estudiando la derivada de una función de costo, ganancia, ingreso con este tipo de problemas, y él sabiendo qué es el punto crítico, dónde se alcanza, dónde cambia de signo la derivada..., yo no creo que haya algún..., conociendo todas las herramientas..., no debe haber ningún problema en aceptar o entender un problema como éste...

[10]Tomado de Arya y Lardner (1987)

[Moderador]: Sí..., ¿pero qué aportes, si es que los tiene, o qué inconvenientes le puede traer al estudiante este problema?

[Alexis]: Inconvenientes creo que ninguno, en todo caso le ayudaría a digerir o profundizar en algunos conceptos ya estudiados. De pronto el problema podría surgir por el contenido teórico que tiene el problema, pero si ya se ha venido trabajando con problemas de este tipo, pienso que el estudiante no debería tener inconveniente, pienso yo...

[Moderador]: ¿Qué puedes decirnos al respecto Elio?

[Elio]: Yo creo que comparando este problema con los anteriores, yo lo que noto aquí, lo más relevante por decirlo de algún modo, es que los cálculos no son tan elementales como los anteriores, de dividir, multiplicar..., aquí hay que aplicar logaritmo y esas cosas, pero si eso se ha venido fortaleciendo con clases anteriores, yo creo que no se tenga mayor problema. Como decía Kenya en la última sesión: "lo importante de llevar a la par la parte matemática y la parte de la aplicación en sí...", que la destreza matemática no se pierda y este es un problema bien interesante en ese sentido porque "$\mathcal{A}$, I" son constantes que no tienen un valor específico, son constantes muy curiosas. Aquí lo que se presenta, fundamentalmente, es manipulación algebraica...

[Moderador]: Pero pregunto yo, ¿qué aportes para el estudiante tiene este tipo de problemas, hablando desde el punto de vista cognitivo?

[Elio]: Puede permitir un fortalecimiento matemático en cuanto a las operaciones se refiere y, por supuesto, más adelante en la interpretación es donde pueda tener mayor problema, mayor dificultad porque "$\mathcal{A}$, I" pueden ser desconocidos, aunque allí dice que son constantes, pueda que el estudiante no sepa cómo interpretarlas al final. Creo que fortalezca la parte matemática, la parte operacional, aunque yo probaría dándole, primero, valores específicos a estas dos constantes y después las dejaría como constantes.

[Moderador]: Pero es que al darle valores específicos a las constantes, el problema es o sería otro y en consecuencia, el objetivo del problema cambia. Yo me refiero a este problema tal como esta planteado, sin modificación alguna.

[Kenya]: Yo pienso que no debería haber problemas, en condiciones ideales, sobre todo si ellos han venido trabajando con problemas de este tipo y como actividad de consolidación, pues, siempre es bueno cuando se estudia cualquier concepto hacer una actividad de consolidación... Aunque aquí se hace bastante énfasis, veo yo hasta este momento, en el cálculo y no en la interpretación, pero me imagino que en el resto apuntarás hacia la interpretación; lo intuyo porque has hecho mucho énfasis en la interpretación de la derivada a lo largo de las otras sesiones; porque lo interesante para el estudiante, en este caso, es la interpretación de este resultado. Bueno..., cognitivamente, si separamos la parte de interpretación, el aprendizaje estaría centrado en la consolidación del trabajo algebraico, operacional...

[Moderador]: Aprovechando que tienes la palabra, la siguiente pregunta es para ti...

¿Qué dificultades supone este tipo de problemas para el estudiante?

[Kenya]: Bueno..., uno, sería trabajar la derivada de la función exponencial como la función potencia, siempre hay la tentación de hacer eso y confundir, a pesar de que uno les hace ver las diferencias, uno les dice: "miren la tabla, vean la diferencia, miren que esta es exponencial, esta es una potencia, esta es compuesta, etc..." Ellos al final, no todos, pero siempre se presentan casos de estudiantes que al confundir la función aplican una regla distinta, una regla equivocada...

[Alexis]: Otra cosa respecto a las funciones es que ellos siempre tienen en mente de que la variable es x...

[Kenya]: Ah..., esa es otra...

[Elio]: Y aquí no está del todo claro cuál es la variable, lo dice en palabra pero no lo especifica...

[Alexis]: Exacto, en este caso el estudiante puede dudar y decir: "cuál es la variable".

[Kenya]: A parte de que yo he notado que la notación de Leibnitz que es bastante cómoda para este tipo de problemas cuando hay que derivar implícitamente, a ellos no le gusta mucho su uso, prefieren la notación "prima" que el uso del diferencial para trabajar los problemas.

[Moderador]: ¿Y qué ibas a decir tú, Elio, sobre las variables?

[Elio]: Que me parece que podría crear confusión el hecho de que no se especifique la variable aun cuando la función está definida de forma explícita, pero me parece que deberías escribir $\mathcal{V}(I)$ en lugar de $\mathcal{V}$, eso ayudaría al estudiante y no cambiaría en mucho el problema. Ya que cuando él estuviera haciendo el cálculo podría perderse y que por alguna razón, cuando pasamos de las cuatro operaciones básicas de derivada, no sé qué pasa con la exponencial que la derivan como una potencia, como dice Kenya, o para despejar una exponencial le cuesta mucho aplicar logaritmo. A veces me dicen: "profesor, ahora multiplicamos por logaritmo...", pienso que es una función que les genera muchos conflictos.

[Moderador]: Pasemos ahora a la siguiente pregunta.

Pregunta 2: ¿Para las siguientes condiciones, $0 < \mathcal{A}k < B$ y $0 < B < \mathcal{A}k$, cuál de las dos le da sentido a la situación anterior? Justifique su respuesta.

Respuesta de P2: En el caso en que $0 < \mathcal{A}k < B$, se tiene que $0 < 1 < \frac{B}{\mathcal{A}k}$. Por lo tanto, $I < 0$. Aunque desde el punto de vista matemático, este resultado es válido; desde el punto de vista económico no lo es, puesto que I representa el número de libras por hectáreas.

En el caso en que $0 < B < \mathcal{A}k$, se satisface $0 < \frac{B}{\mathcal{A}k} < 1$. Por lo tanto, $I > 0$ y esto tiene sentido tanto matemático como económico.

Discusión: En esta tarea aparecen condiciones algebraicas para estudiar el comportamiento de la función y su sentido dentro de dos contextos, no obstante, me he encontrado con profesores de cálculo que no comparten mi opinión.

Relacionar tareas teóricas contextualizadas de derivada y manipulaciones algebraicas, ¿qué incidencias tienen en el aprendizaje matemático y económico en los estudiantes?

[Kenya]: Yo pienso que si estamos hablando de estudiantes de economía y no de estudiantes de matemáticas, además de ser importante la manipulación algebraica también lo es en el sentido que esos resultados adquieren dentro de un problema concreto, entonces él tiene que ajustar los resultados, que por la vía matemática obtiene, a las condiciones reales que le ofrece la situación del problema, yo pienso que sí es importante, sobre todo hacer ese énfasis cuando se trata de problemas que son contextualizados, porque realmente lo que queremos aquí no son matemáticos en sí mismo...; que tendríamos, en todo caso, que explicar o abordar la matemática desde su fundamento, aquí no, aquí es la matemática utilizada como herramienta para resolver problemas en el campo profesional de estos estudiantes.

[Moderador]: Lo que me planteaban estos profesores es que este problema, por ejemplo, puede generar conflictos en el estudiante...

[Kenya]: De acuerdo, pero ese conflicto es bueno porque desde el conflicto uno puede aprender, justamente hay un teoría psicológica que dice: "que si no se crea un conflicto no hay aprendizaje, un desequilibrio para volver al equilibrio, que si la acomodación, la asimilación, bueno..., Piaget". Pero yo creo que es muy importante, a pesar de que estos problemas son muy específicos, que hablan de situaciones concretas, que pueden ocurrir en la realidad, digamos entre comillas... Cuando se utiliza una función que trata de explicar el comportamiento que evidencia el problema, esa función desde el punto de vista matemático se comporta de un modo distinto a como se comportaría si la asumiésemos desde el punto de vista de la economía; empezando por el dominio, el dominio, realmente, no son todos los reales. Matemáticamente sí, no hay problema. Pero entonces, yo creo que allí hay más sustancia cuando se les hace ver, miren desde el punto de vista matemático, si el dominio son todos los reales o incluye una parte de los negativos para los cuales esto no tendría sentido, si hablamos del número de libras de insecticida, por ejemplo, si es negativo no tendría sentido, matemáticamente sí, eso hay que hacerlo, hacérselo ver a ellos, que ellos sientan esa diferencia...

[Alexis]: Esta parte..., no creo que haya tenido la oportunidad de hacer algún problema como éste, realmente no me acuerdo, donde involucre este tipo de situaciones, en ingeniería sí. En ingeniería hago muchos problemas donde condiciono el dominio o hago que se estudie el dominio para cosas particulares... Pero particularmente, yo pondría en práctica este tipo de problemas alguna vez cuando me toque nuevamente enseñar Matemáticas 21, de hecho, me gustaría implementar muchas de las cosas que se han discutido aquí, me parece muy interesante y novedoso hacer algunas de las cosas como tú las planteas...

[Kenya]: Yo creo que la idea tuya es, o la propuesta tuya es hacerle ver al estudiante la utilidad que tiene la matemática como herramienta para resolver problemas de su campo profesional, pero haciéndole ver la diferencia que hay entre una situación real y una situación que es modelizada por una función matemática..., y yo creo que eso es relevante y pertinente hacerlo.

[Moderador]: ¿Y Elio qué opina al respecto?

[Elio]: Este problema en particular, este..., negar que le va a hacer más difícil, creo que no es la idea, obviamente el problema es más exigente y mayor número de cosas con las que hay que tener cuidado, la función logarítmica, la exponencial, las constantes allí con las que se pudiera cometer algún error; a parte que en la pregunta el estudiante pudiese preguntarse: "¿si $\mathcal{A}$, k, I y B son constantes, por qué un caso lo voy a interpretar con esas condiciones $0 < \mathcal{A}k < B$ y $0 < B < \mathcal{A}k$?", hacerles ver lo que significan esas constantes, sus interpretaciones, que no son constantes en el sentido que normalmente uno maneja, sino que son constantes muy especiales y discutir eso con ellos y no dejar por un lado la parte matemática y por otro la parte de la aplicación, eso tiene que ir de la mano...

[Moderador]: Pero desde tu punto de vista, ¿qué tipo de incidencias podría traer este tipo de problemas en el aprendizaje de los estudiantes?

[Elio]: Esto vendría a complementar todo lo que se ha hecho, a fortalecer el aprendizaje, sobre todo la parte del cálculo, la manipulación de cálculo, la manipulación algebraica, este problema lo veo más que todo como manipulación de cálculo.

[Moderador]: Pasemos ahora al segundo y último problema de la tarde y con esto concluimos estas jornadas de discusión, este seminario que es como lo he bautizado.

B.4.2. Análisis e Interpretación Econ-Mat 2[11]

Sea Q la cantidad que minimiza el costo total T debido a la obtención y almacenamiento del material por cierto período. El material demandado es de 10.000 unidades por año; el precio al costo del material es de $1 por unidad; el costo de volver a llenar la existencia de material por orden, sin importar el tamaño Q de la orden es del 12,5 % del valor promedio de las existencias($Q/2$).

Pregunta 1: Pruebe que $T = 10{,}000 + \frac{250{,}000}{Q} + \frac{Q}{16}$.

Respuesta de P1: En efecto,

$$\begin{aligned} 10{,}000 &= 10{,}000 \times 1 \\ \tfrac{250{,}000}{Q} &= \tfrac{25 \times 10{,}000}{Q} \\ \tfrac{Q}{16} &= \tfrac{12{,}5}{100} \times \tfrac{Q}{2} \end{aligned}$$

Discusión: Aún cuando en la tarea, se le pide al estudiante que demuestre, la actividad se centra en generar un modelo a partir de unos datos establecidos.

¿Cómo gestionas o gestionarías tus clases ante actividades como estas, en las que es frecuente que los estudiantes presenten dificultades para visualizar y llegar al modelo solicitado y en consecuencia, construir un conocimiento del contenido en ambos contextos (económico y matemático)?

[Kenya]: Honestamente, yo no me he planteado este tipo de problemas en clase, cuando mucho, lo de beneficio a través de ingreso menos costo, o ingreso a partir de la función demanda, pero cuestiones muy pequeñas o más bien, muy sencillas; más guiadas por la intuición que pueda tener el estudiante por uno de esos conceptos, que realmente pensando que ellos tienen un conocimiento muy amplio de lo que es la teoría de..., una teoría sobre la función costo o sobre la función beneficio, etc., etc. O sea, supongo que ellos no tienen esos conocimientos, a lo mejor presupongo mal pero la experiencia me muestra que es muy difícil que esté equivocada...

[Elio]: En mi caso, yo he tratado de generar modelos en clase, sencillos en principio, como por ejemplo, la función de ingreso, creo que es muy fácil de entender. Una vez, como anécdota, estuve haciendo un problema del Arya (& Lardner), aquel problema clásico donde se quiere pasar un cable sobre un río, donde hay que utilizar el Teorema de Pitágoras para resolver el problema, en el que se debe generar todo un esquema para visualizar mejor el modelo que se va a obtener y la opinión de un estudiante es que: "por qué, mejor, no das la

[11]Tomado del Arya y Lardner (1987)

función ya planteada y que nosotros sólo tengamos que derivar, que por qué lo hacíamos así, que ahí teníamos que pensar mucho”.

[Kenya]: En problemas de optimización, también ahí se prestan los problemas para que ellos construyan las funciones, pero pienso también que son relativamente sencillas...

[Elio]: Y uno se da cuenta que eso causa interés en ellos, con el ejemplo que decía antes, si yo tengo un cable que quiero pasarlo al otro lado del río y hay un precio, cómo hago para minimizar los costos..., el objetivo ellos lo tienen claro, saben que tiene importancia porque eso le permite ubicarse en la realidad, en la realidad de sus estudios y de su futuro trabajo. Pero no sé qué es lo que pasa que cuando uno va a abordar el problema para crear el modelo hay deficiencia, tal vez de parte y parte...

[Alexis]: Es que la deficiencia es, porque vuelvo y repito, en Matemática 11 hay libros que trabajan y modelan funciones en ese aspecto, en ese contexto. En el tema de ecuaciones e inecuaciones, los libros tienen problemas de esta naturaleza, pero uno no los trabaja. Entonces, llegar a Matemática 21 y ponerle un problema de estos les causa incomodidad...

[Moderador]: Todo lo que han dicho resulta interesante pero nos estamos desviando del tema o del punto de discusión, les recuerdo que les pregunté sobre la gestión de la clase, cómo gestionarían o cómo gestionan ustedes un problema donde se genere un modelo.

[Kenya]: Bueno, como te dije antes, yo no hago este tipo de problemas, yo lo que hago en clases son problemas de aplicaciones con las funciones ya establecidas, no me he planteado un problema que conduzca a un modelo.

[Moderador]: ¿Y tú, Alexis?

[Alexis]: Realmente no les trabajo problemas de este tipo, sé por experiencia que estos problemas no les gusta a ellos, les incomoda; tal vez sea una actitud cómoda de mi parte, hace tiempo intenté hacer unos problemas sencillos y la experiencia fue muy mala.

[Moderador]: Pasemos a la siguiente pregunta.

Pregunta 2: Encuentre el tamaño del lote económico y el costo total T correspondiente a tal valor de Q.

Respuesta de P2: Dado que Q es la cantidad que minimiza a T, calculamos la derivada de T respecto a Q; es decir,

$$T' = -\frac{250{,}000}{Q^2} + \frac{1}{16}.$$

Así, $T' = 0 \Leftrightarrow Q = \pm 2{,}000$, pero nos quedamos con $Q > 0$ por estar hablando de un material como libros, herramientas, etc.

De lo anterior tenemos que el costo total, T, se minimiza en $Q = 2{,}000$ dólares y el valor de este costo es de $T = 10{,}250$ dólares.

Discusión: A estas alturas del tema de derivada, cuando ya se supone que los estudiantes han trabajado y discutido diversos problemas de este tema y en ambos contextos, generalmente los estudiantes tienden a cometer ciertos errores y en algunos casos (después de una discusión con profesores de otra universidad), la actitud de los estudiantes es de rechazo a este tipo de problemas.

En atención a la experiencia de ustedes, ¿cuál es su opinión en estas dos líneas (errores y actitud)?

[Kenya]: Yo pienso que, en cuanto a la actitud, yo creo que ellos sienten más temor hacia problemas de este tipo que hacia problemas de cálculo..., calcule la derivada de esta función o problemas de operaciones tradicionales, simplemente operativos. Ahora bien, aún cuando su actitud sea de rechazo, ellos se ven comprometidos a afrontar este tipo de problemas, siempre y cuando uno haya trabajado durante la clase..., le haya hecho énfasis en las aplicaciones; porque, claro, no sería honesto que tú en clase hables sólo de cálculo y venga el día del examen y le pongas problemas de aplicaciones. De entrada, la actitud puede ser de miedo y puede que eso genere rechazo, pero aún así ellos se deberían sentir comprometidos si tú en clase le hablas de estos problemas...

[Moderador]: ¿Y los errores?

[Kenya]: Tienen que ver con que ellos no relacionan la operación que están haciendo con el significado y de interpretación..., allí hay graves errores. Empezando por el cálculo de la imagen en una función costo, qué significa eso; ya ahí ellos tienen dificultad para redactar y para interpretar, incluso si ellos logran interpretar es difícil que ellos comuniquen sus ideas, lástima que uno no lleva un registro de los errores, una lista negra.

[Elio]: Por ejemplo, un error que cometen con mucha frecuencia en mis cursos, al menos yo lo veo frecuentemente, es que en los problemas de máximos y mínimos, en la misma línea donde derivan igualan a cero para los puntos críticos y luego se pierden en el problema, no hacen la pausa, no dicen que una vez obtenida la derivada pasaremos a calcular los puntos críticos, entonces se terminan perdiendo en el problema...

[Moderador]: ¿Y en cuanto a la actitud Elio?

[Elio]: En mi caso yo he notado actitud de rechazo ante problemas como éste. Una cosa que observé al leer este problema, dice: “Sea Q la cantidad que minimiza...", ellos pueden ver a Q como una constante aún cuando es la variable de la función, yo pienso que hay que ser muy cuidadoso con los problemas que le vayan a poner a los estudiantes...

[Moderador]: Para eso es este trabajo..., ¿qué nos puede decir Alexis?

[Alexis]: La actitud de ellos es de rechazo ante estos problemas, ellos prefieren una función ya elaborada a tener que elaborar un modelo, de hecho, difícilmente hagan un problema de estos en el examen, lo dejan de último...

[Moderador]: ¿Y sobre los errores?

[Alexis]: Los errores son de interpretación y como dijo Kenya, de redacción; a veces me doy cuenta que tienen la idea de la interpretación, pero redactar esa idea, escribir esa idea les cuesta mucho. De hecho, el peso que yo le doy a la interpretación en los exámenes es muy bajo.

[Moderador]: Pasemos a la siguiente pregunta.

Pregunta 3: Determine el costo total cuando cada orden es fijada en 2.500 unidades.

Respuesta de P3: En este caso, sólo basta con calcular la imagen de T para $Q = 2{,}500$; así, el costo total cuando cada orden es fijada en 2.500 unidades es de $T = 10{,}256, 25$.

Discusión: Si observamos con detalle, esta tarea posee un mínimo de dificultad respecto a las dos anteriores.

Ya en el cierre del tema de derivada, ¿consideran acertado realizar esta pregunta en una evaluación o creen que puede conducir al estudiante a un error; como por ejemplo, que éste calcule la derivada de la función y la evalúe en 2.500?

[Elio]: Ese error es muy común, ese error es muy común, pero yo creo que no está mal hacer esa pregunta, de alguna manera, permite reforzar lo que se ha estado haciendo desde el comienzo..., y ese error es común, me hizo acordar de ese error este problema...

[Kenya]: Yo creo que es muy pertinente hacerlo, es más, yo en mis clases..., en el contexto de la interpretación de la derivada desde el punto de vista económico yo nunca aíslo los problemas de este tipo de cuestiones; y no es nada, intentar también relacionar la interpretación de este valor con la que puede darse en la derivada. Es decir, yo nunca estudio la derivada o nunca abordo, con ellos, el concepto de la derivada aislado de otros contextos...

[Alexis]: Ahora, cuando uno estudia la parte esa de máximos y mínimos, siempre uno consigue un t que le hace la ganancia máxima, por ejemplo, eso lo encuentras con la derivada, pero también tienen que calcular cuánto vale para ese mismo t, la función ganancia y que vean la diferencia...

[Moderador]: Pero, ¿ustedes colocarían esta pregunta en un examen de derivada, al final del tema de derivada?, fíjense que en la pregunta no se le pide en ningún momento que derive.

[Alexis]: Si se está evaluando la parte final..., tú sabes que la parte final aquí es de aplicaciones y esa pregunta forma parte de las aplicaciones...

[Kenya]: ¿Cómo es eso de las aplicaciones al final?

[Alexis]: Me explico, tú sabes que el programa primero toca la parte de cálculo y después deja un tema aparte para las aplicaciones, entonces yo hago dos exámenes, uno de cálculo y otro de aplicaciones y cuando evalúo la parte de aplicaciones de la derivada, esta pregunta o una similar sale en algún momento, me parece adecuada...

[Moderador]: ¿Ibas a decir algo Kenya?

[Kenya]: Se me fue la idea... Pero bueno, pienso que también este tipo de problemas es equivalente cuando uno trabaja con el crecimiento, el decrecimiento, los máximos y mínimos, tiene el mismo sentido... Normalmente, ellos trabajan con la derivada y las conclusiones se la hacen a la función derivada; es decir, ellos calculan la derivada de la función, obtienen el máximo con la derivada y después dicen que la derivada tiene el máximo en "tanto". Una pregunta que yo acostumbro a ponerle en el examen o a discutir en clase es: "dónde es creciente el costo marginal". En este caso, no calculan la segunda derivada sino que trabajan directamente con el costo marginal. Entonces si comparamos este ejemplo que acabo de citar con el problema que tú planteas, el error será similar, ellos derivarán, casi seguro, para obtener el resultado esperado, aún así me parece adecuado ponerla en un examen.

[Moderador]: ¿Qué ibas a decir, Elio?

[Elio]: No, bueno..., este, que la pregunta me parece pertinente, aun cuando yo la he visto en los libros planteada de la siguiente manera: "calcule $T(2500)$ e interprete los resultados", yo prefiero este planteamiento (el de la discusión) porque obliga al estudiante a pensar más, a concentrarse en la variable de la función..., pero le pediría una interpretación del resultado...

[Kenya]: Justamente este tipo de problemas le permite al profesor apreciar si el estudiante sabe lo que está haciendo; es decir, si sabe diferenciar entre trabajar con la función dada o con la derivada de la función... Yo pienso que este tipo de problemas, este tipo de planteamiento debería ir y ser sugerido en los programas oficiales.

[Moderador]: Bueno, muchas gracias por la colaboración prestada, entiendo el esfuerzo que hicieron ustedes para estar presentes en estas sesiones, aún con todos los problemas que han acontecido últimamente en la ciudad, realmente reconozco el interés y la seriedad con la que participaron, nuevamente gracias.

B.4.3. Cuestionario relacionado con la actividad 4

De acuerdo a la actividad que acabamos de realizar y como producto de las opiniones y discusiones en la misma, nos interesa conocer tu opinión sobre algunos puntos que señalamos a continuación:

1. Dentro de tu planificación docente, ¿tu contemplas actividades como éstas ya para cerrar el tema de derivadas?
   a) $\boxed{\text{Sí}}$ ¿Por qué?, ¿desde el punto de vista de la didáctica, qué persigues con este tipo de problemas?
   b) $\boxed{\text{No}}$ ¿Por qué?, ¿desde el punto de vista de la didáctica, qué inconvenientes observas en este tipo de problemas?
2. ¿Puede usted afirmar que con actividades como ésta, se **induce** u **obliga** al estudiante a pensar? Detalle su respuesta.
3. Consideras que los objetivos del curso se cubren con este tipo de actividad o en todo caso se desvirtúa la finalidad del curso?

Alexis

Cuestionario relacionado con la actividad 4

De acuerdo a la actividad que acabamos de realizar y como producto de las opiniones y discusiones en la misma, nos interesa conocer tu opinión sobre algunos puntos que señalamos a continuación:

1. Dentro de tu planificación docente, ¿tu contemplas actividades como éstas ya para cerrar el tema de derivadas?

   (a) $\boxed{\text{Sí}}$ ¿Por qué?, ¿desde el punto de vista de la didáctica, qué persigues con este tipo de problemas?

   (b) $\boxed{\text{No}}$ ¿Por qué?, ¿desde el punto de vista de la didáctica, qué inconvenientes observas en este tipo de problemas?

a) Si porqué con problemas de este tipo el docente evalua al alumno el aprendizaje de la aplicación de la derivada en todo los sentidos (Crecimiento, decrecimiento etc).

2. ¿Puede usted afirmar que con actividades como ésta, se induce u obliga al estudiante a pensar? Detalle su respuesta.

Todos los problemas inducen al pensamiento unos con grado de dificultad mayor que otro, Además induce a la agilidad mental que tenga el estudiante.

3. Consideras que los objetivos del curso se cubren con este tipo de actividad o en todo caso se desvirtúa la finalidad del curso?

Depende de lo que quiera el Profesor; particularmente creo que no se desvirtúa la finalidad del curso en el caso de matemáticas 2 de economía, al contrario, el estudiante aprende la utilización de la derivada para los problemas afín de su carrera

Elio

Cuestionario relacionado con la actividad 4

De acuerdo a la actividad que acabamos de realizar y como producto de las opiniones y discusiones en la misma, nos interesa conocer tu opinión sobre algunos puntos que señalamos a continuación:

1. Dentro de tu planificación docente, ¿tu contemplas actividades como éstas ya para cerrar el tema de derivadas?
   (a) $\boxed{\text{Sí}}$ ¿Por qué?, ¿desde el punto de vista de la didáctica, qué persigues con este tipo de problemas?
   (b) $\boxed{\text{No}}$ ¿Por qué?, ¿desde el punto de vista de la didáctica, qué inconvenientes observas en este tipo de problemas?

Sí, porque considero que problemas de este tipo permiten reforzar no sólo el contenido que se refiere a la parte económica, sino también el contenido matemático, de manera simultanea. Considero que si un problema es generado por la situación que se presenta de un interés particular, en lugar de imponerlo explícitamente, se puede lograr una mayor coherencia en la interpretación y por ende, los conceptos pudieran ser aplicados con mayor facilidad y así la solución surge de manera natural como una consecuencia lógica del razonamiento que se ejecuta.

2. ¿Puede usted afirmar que con actividades como ésta, se induce u obliga al estudiante a pensar? Detalle su respuesta.

Tal y como estamos actualmente, la formacion de nuestros estudiantes, por alguna razón, nos da muestra de que para inducirlos a pensar pareciera necesario obligarlos. Obviamente, el obligarlos puede generar una actitud de rechazo y terminan resolviendo el problema (cuando lo hacen) muchas veces de manera mecánica, dejando muy de lado el razonamiento lógico, producto de un pensamiento sistemático; hecho por el cual la interpretación del análisis y los resultados se presenta de manera muy deficiente.

Creo que con actividades como esta, la obligacion puede pasar a un segundo plano, ya que al presentar el problema ligado a los intereses particulares, el pensamiento surge de manera natural, inducido por la situación planteada.

3. Consideras que los objetivos del curso se cubren con este tipo de actividad o en todo caso se desvirtúa la finalidad del curso?

Creo que los objetivos pueden ser logrados con actividades como esta, pero hay que tener presente que en ello influyen otros aspectos de vital importancia: el tiempo, preparación del docente, preparación y conocimiento previo del estudiante, entre otros.

Considero que para alcanzar los objetivos con actividades como éstas, no sólo debe haber generación de ideas por parte del docente que imparte la asignatura; tiene que haber un cambio hasta institucional si se quiere

Kenya

Cuestionario relacionado con la actividad 4

De acuerdo a la actividad que acabamos de realizar y como producto de las opiniones y discusiones en la misma, nos interesa conocer tu opinión sobre algunos puntos que señalamos a continuación:

1. Dentro de tu planificación docente, ¿tu contemplas actividades como éstas ya para cerrar el tema de derivadas?

   a) Sí ¿Por qué?, ¿desde el punto de vista de la didáctica, qué persigues con este tipo de problemas?

   b) No ¿Por qué?, ¿desde el punto de vista de la didáctica, qué inconvenientes observas en este tipo de problemas?

En cierta forma, sí utilizo actividades como esas, pero no del tipo planteado en la pregunta de la actividad 4,2, a menos que sea en el contexto de problemas de optimización en los que entran en juego funciones costo, ingreso, beneficio, precio, pero con un contenido que estimo resulta ser más sencillo. Se busca es consolidar los conocimientos adquiridos y apreciar posibles lagunas en el alumno, al menos en clase, por lo que evito en lo posible que el cálculo excesivo o complicado haga perder de vista la esencia del problema, y allí, el valor didáctico de la actividad.

Hay que señalar que, en muchas ocasiones, uno se encuentra en situaciones en las que el foco de atención se desvía hacia las deficiencias que tienen los estudiantes en los conocimientos básicos para abordar la derivada y conceptos relacionados. Por ejemplo, el alumno puede haber aprendido que para hallar los extremos de una función debe encontrar los valores críticos; pero el desconocimiento del dominio de la función junto con las dificultades que presenta al resolver la ecuación que resulta al trabajar con la primera derivada (incluso, a veces tan sencillas como ecuaciones polinómicas de grado 2 o 3) hacen que no se logre el objetivo deseado.

2. ¿Puede usted afirmar que con actividades como ésta, se induce u obliga al estudiante a pensar? Detalle su respuesta.

Pienso que sí, aunque prefiero hablar de inducir al estudiante a pensar más que obligarlo. Las preguntas que se plantean en los problemas requieren que los estudiantes analicen, reflexionen, relacionen, interpreten, transfieran conocimiento a diversas situaciones, comuniquen sus ideas (bien de modo oral o escrito), apliquen conceptos o sean capaces de apreciar las nociones matemáticas o económicas involucradas en los problemas. En suma, se activan procesos cognitivos de más alto nivel que los que ameritan la manipulación algebraica. Sin embargo, no habría que olvidar el aspecto motivacional, en particular, la motivación intrínseca, pues en definitiva, es el propio alumno quien activa su deseo de aprender, por lo que en el proceso de enseñanza lo que se puede hacer es animarlo y propiciar condiciones que desarrollen nuevos conocimientos a partir de los que ya posee y en esto puede ayudar el plantear objetivos realistas y trascendentes para el sujeto, a la par que perciban la utilidad de los nuevos conocimientos.

3. Consideras que los objetivos del curso se cubren con este tipo de actividad o en todo caso se desvirtúa la finalidad del curso?

Los objetivos del curso relacionados con la derivada para funciones de una variable se centran en:
- Conocer, interpretar y calcular derivadas
- Utilizar conocimientos teóricos y prácticos para resolver problemas de la economía

De modo que, después del estudio y discusión de las actividades propuestas en el material 4, puedo afirmar que los objetivos del curso no sólo logran cubrirse sino que, además, el proceso seguido favorece la adquisición del concepto (derivada) y nociones relacionadas de modo significativo, ya que la introducción de los mismos se realizó en contextos y situaciones de problemas vinculados con los intereses de los estudiantes, lo que pudiera estar favoreciendo una actitud positiva hacia las matemáticas, y a la vez, percibirlas como una herramienta útil para la resolución de problemas y toma de decisiones

Apéndice C

Entrevistas semi-estructuradas

C.1. Entrevista a Manuel

1.- **[Moderador]**: En el tiempo que tienes dentro del Departamento, ¿alguna vez has participado en una actividad como la realizada (por iniciativa del Departamento o de algún profesor en particular)?

1. Sí, ¿cómo fue la experiencia?, ¿qué se hizo?, compara respecto a esta, ¿consideras que realmente valió la pena este espacio de discusión?, ¿incidirá en tu labor docente?

2. No, ¿consideras que realmente valió la pena este espacio de discusión?, ¿incidirá en tu labor docente?

[Manuel]: Bueno, lo que yo te comenté..., como especie de seminarios que dictó Pedro, esa fue una actividad en la que nos reunimos un grupo de profesores y él, más o menos, nos orientó de cómo introducir las aplicaciones en los cursos de matemáticas para la facultad de economía, pero en otra actividad no he participado, no se ha hecho.

[Moderador]: ¿Y me puedes detallar un poco qué fue lo que hicieron en esa actividad?

[Manuel]: Ahí lo que se hizo fue: él explicó, nos habló más o menos de su experiencia..., este..., y de sus conversaciones con profesores de (la facultad de) economía que..., cómo se podían dar las matemáticas en esa facultad y entonces, él, lo que nos dio fue algunos ejemplos, hablar un poco de las funciones de costo, de ingreso, cómo se podían relacionar; más que todo dio, también, bastante bibliografía, él nos recomendó por qué libros nosotros podíamos documentarnos, porque como nosotros..., primera vez que veíamos eso, entonces él nos dijo: "empiecen con este libro que es bien básico y después pueden..." Entonces, más o menos, de eso se trató, de una orientación básicamente.

[Moderador]: ¿Y consideras que realmente valió la pena este espacio de discusión?

[Manuel]: Sí, claro.

[Moderador]: ¿En qué sentido?

[Manuel]: Bueno..., uno..., uno adquiere otra forma de ver las cosas. Por ejemplo, a mi me gustó esa actividad, que lo he destaco en las notas en las respuestas de uno de los cuestionarios (post-sesión)..., la manera de implementar la regla de la cadena ya con..., de una vez con las aplicaciones, entonces dije: "¡caramba!, me parece interesante hacerlo de esta manera". Entonces, ya aprendí otra cosa que además no había visto antes.

[Moderador]: Y a partir de eso, ¿incidirá en tu labor docente?

[Manuel]: Yo creo que sí, voy a tratar de implementarlo, sobre todo esa parte de la regla de la cadena.

2.- **[Moderador]**: De los problemas planteados y de la forma de estudiar el concepto matemático a partir de estos, ¿recuerdas alguno que te llamó la atención por: su rigor, innovación, presentación, el tema tratado, otro?

[Manuel]: Bueno..., ese de cómo enseñar la regla de la cadena, ese es el que más..., hay otros, pero ese es el que más me sorprendió en el momento de la actividad, el resto ya..., muchos problemas de estos, de una u otra manera, ya los había trabajado. Pero la presentación, la forma distinta del de la regla de la cadena me gustó, totalmente distinto a como yo lo trabajo.

3.- **[Moderador]**: Hoy por hoy, el futuro profesional requiere de unas competencias o de un "conocimiento ideal" para afrontar problemas en su campo laboral, de modo que le permita realizar un trabajo óptimo. ¿Consideras que una propuesta curricular como la discutida, permite generar esas "competencias" que el profesional de hoy necesita, en relación con la forma como actualmente sigues tus clases?

[Manuel]: Yo creo que sí...

[Moderador]: ¿Podrías explicarme un poco?

[Manuel]: Bueno, porque en esta actividad se..., se estimula mucho al estudiante, se motiva mucho al estudiante a aprender matemáticas en el área, sobre todo en el área en la que ellos trabajan o van a trabajar. Ellos se sienten muy desmotivados por las matemáticas, entonces cuando tú le das otra alternativa de cómo ver las matemáticas me imagino que... Me gusta, por eso a mi me gusta dar clase en esa facultad (FACES), porque a mi tampoco me gusta dar matemáticas puras, me gusta la parte de aplicaciones, siempre he tratado de dar la matemática con ejemplos, esa es mi forma de enseñar.

4.- **[Moderador]**: En relación con los libros que tú sigues para preparar tus clases, ¿puedes destacar uno o dos aspectos (positivos o negativos) en relación con lo tratado en las cuatro sesiones?

[Manuel]: Yo siempre utilizo para las clases libros de aplicaciones, aunque como yo te lo comenté alguna vez cuando estábamos en las actividades, ahora todos los libros incluyen más aplicaciones que antes, ahora todos los libros se basan en eso. Yo pienso que sí..., que sí, eso es lo positivo, que los libros de texto de ahora se desarrollan en eso, dar la teoría y, de una manera, preparan al estudiante para la práctica.

[Moderador]: De acuerdo, pero no me refiero a los libros, me refiero a las actividades que discutimos, al material.

[Manuel]: Pero es que es distinta la presentación de un libro a la presentación de una clase, el libro tiene una forma más generalizada, en cambio cuando tú das una clase te concentras en uno o dos puntos.

[Moderador]: Pero vuelvo y te repito, ¿podrías destacar dos aspectos, dos puntos que te gustaron o no, si tuvieses que compararlas con los libros?

[Manuel]: Pero es que me estás pidiendo que compare dos cosas que no son comparables.

[Moderador]: A ver, por ejemplo, en cuanto a la presentación de un tema, el libro tiene una presentación y este material también la tiene.

[Manuel]: Yo puedo destacar lo positivo de esta actividad, la presentación estuvo buena, incluyes gráficos, seleccionas buenos problemas, incluyes fórmulas, me parece que es una buena presentación pero no veo cómo compararlo con los libros.

[Moderador]: ¿y algo negativo de las actividades?

[Manuel]: Mira, no, no veo nada negativo.

5.- **[Moderador]**: En una discusión similar a la realizada con ustedes, algunos profesores consideraron que con una propuesta curricular como ésta, los objetivos que se esperan alcanzar en un curso de cálculo diferencial en ciencias económicas, en el mejor de los casos se alcanzarían de igual forma que con la manera tradicional como ellos presentan sus cursos e incluso, podrían no alcanzarse estos objetivos porque nuestra propuesta podría distraer a los estudiantes. ¿Cuál es tu opinión en este sentido?

[Manuel]: En absoluto, yo creo que no, yo creo que más bien..., este..., incluye o mete al estudiante dentro del problema. Ellos, más bien, esto los motiva, los induce a estudiar, a estudiar más matemática.

6.- **[Moderador]**: En la misma tónica que el punto anterior, hay profesores que consideran esta propuesta curricular como una actividad que puede hacer más dificultoso el aprendizaje en el estudiante. ¿Opinas tú lo mismo o crees que incide de manera positiva en el aprendizaje del estudiante?

[Manuel]: No yo no estoy de acuerdo con eso, yo pienso que es una buena estrategia, la podemos llamar así, de enseñanza o de aprendizaje para el estudiante.

[Moderador]: ¿Y eso por qué?

[Manuel]: Por lo mismo, a los estudiantes de esa carrera una de las cosas que no les llama la atención es la matemática, no sé por qué, pero esto de alguna manera los estimula a aprender la matemática.

7.- **[Moderador]**: ¿Consideras que el estudiante está preparado para asumir un aprendizaje enfocado desde este punto de vista, donde la participación del estudiante es fundamental?

[Manuel]: Sí, a mi me parece esto muy básico, a mi me parece que a este nivel el estudiante puede muy bien dominar todo lo que se trata aquí, pero yo creo que el trabajo del profesor es fundamental, el material puede ser bueno pero sin la ayuda del profesor, el estudiante no llegaría muy lejos. Imagínate un buen libro, si el profesor no orienta al estudiante, si no da la clase, el estudiante queda en el aire.

8.- **[Moderador]**: Siendo reflexivo y autocrítico, ¿consideras que estás preparado para afrontar una enseñanza partiendo de una propuesta curricular como esta? Estrategias (preparación, clase, evaluación), matemático, económico.

[Manuel]: Yo creo que sí, repito, ahí los conocimientos son muy básicos, la parte económica..., tampoco es que necesito mucha información y bueno..., con respecto a la parte matemática por supuesto que me siento preparado, es mi carrera y además son conceptos básicos de la matemática, en cuanto a las estrategias, a la forma de dar la clase..., mis alumnos no se quejan, pienso que lo hago bien.

[Moderador]: (Pregunta improvisada) Esta pregunta no estás obligado a responder. Si yo te pidiera que te hicieras una autoevaluación del 1 al 10, donde 1 es la menor nota y 10 la máxima, en cuanto a conocimiento del contenido económico para estos cursos, ¿cuánto te pondrías tú?

[Manuel]: No sé..., pero por poner un número: 8 o 9.

9.- **[Moderador]**: En cuanto al contenido económico, ¿consideras adecuado que el Departamento cree un espacio de discusión que te permita consolidar conocimientos en esta materia y discriminar las necesidades que tiene el estudiante en el contexto económico?

[Manuel]: Yo estaría de acuerdo, es más, lamenté que no se siguieron haciendo las reuniones de las que hablamos al principio. De hecho, a partir de esa actividad se crearon las comisiones de los cursos, siempre pensando en cómo mejorar la enseñanza, claro que eso por x motivo se ha ido desvirtuando, se comenzó a creer que las comisiones eran una forma de vigilar al profesor, pero en realidad los motivos de las comisiones eran otros. A mi en lo particular, me parece muy positivo, que se trate siempre de mejorar profesionalmente y que el estudiante salga favorecido.

10.- **[Moderador]**: ¿Puedes hacer un comentario libre sobre esta experiencia?

[Manuel]: A mi me gustó mucho..., a mi me gustó mucho, aprendí mucho con estas actividades, vi enfoques diferentes a los que yo trabajo para enseñar el tema de la derivada en general. Además, con estas actividades uno puede conocer el punto de vista de otros colegas, cómo piensa Ramón, cómo piensas tú y al mismo tiempo ustedes escuchan cómo pienso yo, creo que eso es importante, muy bueno.

[Moderador]: Muchas gracias por tu tiempo...

C.2. Entrevista a Ramón

1.- **[Moderador]**: En el tiempo que tienes dentro del Departamento, ¿alguna vez has participado en una actividad como la realizada (por iniciativa del Departamento o de algún profesor en particular)?

1. Sí, ¿cómo fue la experiencia?, ¿qué se hizo?, compara respecto a esta, ¿consideras que realmente valió la pena este espacio de discusión?, ¿incidirá en tu labor docente?
2. No, ¿consideras que realmente valió la pena este espacio de discusión?, ¿incidirá en tu labor docente?

[Ramón]: No, jamás, nunca.

[Moderador]: O sea, ¿que esa actividad que se realizó con Pedro, no está relacionada con ésta?

[Ramón]: En primer lugar, yo no participé y en segundo lugar, no tiene nada que ver con estas cuatro actividades que nosotros efectuamos.

[Moderador]: ¿Consideras que realmente valió la pena este espacio de discusión?

[Ramón]: Sí.

[Moderador]: ¿En qué sentido?

[Ramón]: Bueno, porque ofrece otras alternativas distintas a lo que se dio en estas reuniones de la cual hablas, que se dieron con Pedro, aunque lo que sé de esas reuniones es por comentarios con algunos profesores que participaron, pero en función de lo que me comentaron, esto no tiene nada que ver con aquello.

[Moderador]: ¿Y aparte de lo que se trabajó con Pedro?

[Ramón]: Aparte de eso, de lo que ofrecen los textos, es realmente al revés de lo que explican los textos, o sea, primero hacen la exposición matemática y luego tratan algunas aplicaciones.

[Moderador]: ¿Y eso tiene algún sentido?, ¿tú le conseguiste algún sentido?

[Ramón]: Me parece mucho mejor tu enfoque porque involucra más al estudiante, no solamente porque tiene que ver con su campo de trabajo, con lo que está estudiando, sino que como es una actividad donde se ha señalado, donde hay una estructura de paso por paso, el profesor tiene que estar pendiente que el estudiante haga el paso correctamente o ver la dificultad que tiene el estudiante, eso lo involucra más..., al estudiante.

[Moderador]: ¿Y piensas que incidirá, en tu labor docente, esta actividad de aquí en adelante?

[Ramón]: En la medida de lo posible sí, o sea, recuerda que aun cuando yo he trabajado con cursos de matemáticas para economistas, por el momento estaré desvinculado porque tengo labores administrativas que me tienen alejado de la docencia desde hace tres meses y me tendrán alejado por un año más.

2.- **[Moderador]**: De los problemas planteados y de la forma de estudiar el concepto matemático a partir de estos, ¿recuerdas alguno que te llamó la atención por: su rigor, innovación, presentación, el tema tratado, otro?

[Ramón]: Sí, en la última sesión, donde hablamos de hacer modelos sencillos, yo creo que esa es la parte que es realmente importante, o sea, que es importante; no es que la otra no lo sea, pero es importante porque a mi manera de ver las cosas..., eh..., está enseñando al que va a hacer economía que las matemáticas en realidad son un modelo y cómo..., en realidad es una especie de inicio de cómo hacer modelaje, este..., en economía usando la matemática.

3.- **[Moderador]**: Hoy por hoy, el futuro profesional requiere de unas competencias o de un "conocimiento ideal" para afrontar problemas en su campo laboral, de modo que le permita realizar un trabajo óptimo. ¿Consideras que una propuesta curricular como la discutida, permite generar esas "competencias" que el profesional de hoy necesita, en relación con la forma como actualmente sigues tus clases?

[Ramón]: Mira, yo creo que se llegaría más lejos con lo que tú propones porque como yo lo hacía tradicionalmente, que es primero dar la parte matemática y luego algunos ejercicios de economía donde se usará ese instrumental matemático, ahí simplemente me da la sensación de que solamente lo que se hace es ilustrar nada más el uso de estas herramientas, en cambio como tú lo propones, como dije antes, ya el estudiante se involucra más, sobre todo con esta última parte, que realmente es lo que viene siendo bastante útil en el sentido de esta pregunta, que es desarrollar sus competencias.

4.- **[Moderador]**: En relación con los libros que tú sigues para preparar tus clases, ¿puedes destacar uno o dos aspectos (positivos o negativos) en relación con lo tratado en las cuatro sesiones?

[Ramón]: Yo, honestamente, veo todo positivo, lo de la propuesta. Primero, ya lo mencioné, has hecho una propuesta bastante bien estructurada, paso por paso, cada uno de los problemas tratados. Y en la última sesión, algo que hasta ahora yo no he visto en ninguno de los libros, y es que da como un inicio al estudiante de cómo hacer modelos en economía usando el instrumental matemático.

5.- **[Moderador]**: En una discusión similar a la realizada con ustedes, algunos profesores consideraron que con una propuesta curricular como ésta, los objetivos que se esperan alcanzar en un curso de cálculo diferencial en ciencias económicas, en el mejor de los casos se alcanzarían de igual forma que con la manera tradicional como ellos presentan sus cursos e incluso, podrían no alcanzarse estos objetivos porque nuestra propuesta podría distraer a los estudiantes. ¿Cuál es tu opinión en este sentido?

[Ramón]: Sí, yo lo he manifestado varias veces, que al final de estos problemas deberían hacerse otros ejercicios, problemas de matemática sin ningún contenido de economía para que los estudiantes comprendan que ese instrumental matemático no tiene por qué estar asociado a ciertos problemas de la economía, es el temor que siempre he manifestado; esa es, tal vez, la única parte negativa que yo veo de esta propuesta.

[Moderador]: Pero, ¿tú crees que una propuesta como ésta podría distraer al estudiante?

[Ramón]: No, siempre y cuando se haga lo que te acabo de decir.

6.- **[Moderador]**: En la misma tónica que el punto anterior, hay profesores que consideran esta propuesta curricular como una actividad que puede hacer más dificultoso el aprendizaje en el estudiante. ¿Opinas tú lo mismo o crees que incide de manera positiva en el aprendizaje del estudiante?

[Ramón]: Por la experiencia que yo he tenido, incide de manera positiva, repito, la experiencia que he tenido cuando se le plantean problemas de economía, donde se usen las matemáticas, siempre los estudiantes han respondido bien y, hasta el momento, no he visto que hayan tenido grandes dificultades al manejar ese tipo de problemas donde se encuentra esa mezcla de la economía con la matemática.

7.- **[Moderador]**: ¿Consideras que el estudiante está preparado para asumir un aprendizaje enfocado desde este punto de vista, donde la participación del estudiante es fundamental?

[Ramón]: Por eso es que yo insisto en la forma como tú has estructurado cada uno de los problemas, me parece que han sido los pasos correctos y que cada paso lo puede dar el estudiante por su cuenta. En todo caso, tal vez necesitarían algunos estudiantes una pequeña aclaratoria, o tal vez una discusión de parte del profesor antes de dar cada uno de esos pasos de cada uno de estos problemas.

8.- **[Moderador]**: Siendo reflexivo y autocrítico, ¿consideras que estás preparado para afrontar una enseñanza partiendo de una propuesta curricular como ésta? Estrategias (preparación, clase, evaluación), matemático, económico.

[Ramón]: Sí, porque yo me he tomado el trabajo de averiguar cada uno de los conceptos matemáticos en estos dos últimos años, he leído libros de microeconomía y algunos de macroeconomía, o sea, que en conocimiento de economía, de la economía en sí creo que lo domino para lo que es la asignatura. Yo con esto no estoy diciendo que puedo ocupar el lugar de un economista sino, simplemente, para desarrollar bien las clases. Y en cuanto a esta propuesta, yo la he llevado a cabo pero no en cursos de economía, o sea, de que sea el estudiante el que participe con actividades de paso por paso, no sé cuál será el nombre que le podamos dar a esto.

[Moderador]: (Pregunta improvisada) Esta pregunta no estás obligado a responder. Si yo te pidiera que te hicieras una autoevaluación del 1 al 10, donde 1 es la menor nota y 10 la máxima, en cuanto a conocimiento del contenido económico para estos cursos, ¿cuánto te pondrías tú?

[Ramón]: 8.

9.- **[Moderador]**: En cuanto al contenido económico, ¿consideras adecuado que el Departamento cree un espacio de discusión que te permita consolidar conocimientos en esta materia y discriminar las necesidades que tiene el estudiante en el contexto económico?

[Ramón]: Por supuesto, y eso se intentó hacer hace dos años atrás, lo que pasa es que..., digamos, la persona que estaba ocupada de eso se jubiló y la otra persona perdió el interés, no se siguieron desarrollando estas actividades; de hecho, se está tratando de establecer un convenio con FACES donde uno de los artículos de ese convenio habla de esto en particular, de la pregunta que me acabas de hacer.

10.- **[Moderador]**: ¿Puedes hacer un comentario libre sobre esta experiencia?

[Ramón]: A mi tu propuesta me parece positiva y opino que las clases, no solo de economía sino cualquier curso donde la matemática se use, desarrollarlo de esa forma. Como te dije antes, en los cursos de aquí (facultad de ciencias) que no son tan numerosos, he hecho algo de eso.

[Moderador]: O sea, ¿que tú estarías dispuesto o te gustaría en todo caso participar en una experiencia piloto con una situación o con un material como este?

[Ramón]: ¿En FACES te refieres tú?

[Moderador]: Sí, en FACES porque esta actividad está relacionada con cursos de cálculo para economía.

[Ramón]: Lo que te comenté hace rato, mis planes personales creo que me van a impedir trabajar en un tiempo próximo en FACES.

[Moderador]: Pero, obviemos la parte personal..., ¿crees que valdría la pena apostar por una propuesta como esta?

[Ramón]: Sí valdría la pena, pero siempre y cuando tú estés como especie de director porque, o sea..., de repente..., a pesar de que yo entiendo lo que estás haciendo pueda que otra persona, otro profesor no capte lo que tú estás haciendo, no capte perfectamente cuál es el objetivo.

[Moderador]: Bueno, muchas gracias por tu participación...

C.3. Entrevista a Alexis

1.- **[Moderador]**: En el tiempo que tienes dentro del Departamento, ¿alguna vez has participado en una actividad como la realizada (por iniciativa del Departamento o de algún profesor en particular)?

1. Sí, ¿cómo fue la experiencia?, ¿qué se hizo?, compara respecto a esta, ¿consideras que realmente valió la pena este espacio de discusión?, ¿incidirá en tu labor docente?

2. No, ¿consideras que realmente valió la pena este espacio de discusión?, ¿incidirá en tu labor docente?

[Alexis]: No, sobre esta iniciativa o bueno, sobre lo que hemos estado haciendo estos días o sobre las cuatro reuniones que hemos hecho, no, pero sí estuve en una parte de didáctica, pero sobre técnicas de cómo dar clases, fueron unos talleres promovidos por la universidad donde se trató: cómo introducir una clase, cómo discutir con los estudiantes, cómo cerrar una clase, algunos *tips* sobre evaluación, pero con enseñanza de la matemática, propiamente, no.

[Moderador]: ¿Y consideras que realmente valió la pena este espacio de discusión?

[Alexis]: Particularmente, para mi, sí queda algo de..., a pesar de que no es mi área de investigación que es ecuaciones diferenciales, me parece que es interesante y queda algo en uno, porque discutimos sobre un punto con el que uno se enfrenta día a día, uno trabaja con esto y nunca discute más allá de una reunión de pasillo, pero de lo que más se habla es del rendimiento de los estudiantes.

[Moderador]: O sea, que de alguna manera ¿esto podría incidir en tu labor como docente?

[Alexis]: Sí, aquí se discutieron cosas interesantes, cosas que me gustaron, que nunca lo había visto así y de pronto..., uno no sabe si puede tomar esta línea de investigación y hacer algo sobre esto, yo te lo he dicho.

2.- **[Moderador]**: De los problemas planteados y de la forma de estudiar el concepto matemático a partir de éstos, ¿recuerdas alguno que te llamó la atención por: su rigor, innovación, presentación, el tema tratado, otro?

[Alexis]: Me llamó la atención la presentación de la derivada enfocada directamente con los problemas, las aplicaciones..., la parte de cómo llegar al estudiante..., cómo es..., la definición de derivada usando modelos económicos, yo creo que eso permite meter al estudiante en el asunto de una vez.

3.- **[Moderador]**: Hoy por hoy, el futuro profesional requiere de unas competencias o de un "conocimiento ideal" para afrontar problemas en su campo laboral, de modo que le permita realizar un trabajo óptimo. ¿Consideras que una propuesta curricular como la discutida, permite generar esas "competencias" que el profesional de hoy necesita, en relación con la forma como actualmente sigues tus clases?

[Alexis]: Yo creo que sí, indudablemente al estudiante le queda bastante, pienso que el estudiante aprendería más y me parece bastante innovador.

[Moderador]: Pero si te tocara comparar esta propuesta con la forma que tú sigues actualmente, ¿qué me dirías?

[Alexis]: Esta es la primera vez que yo tengo una discusión formal sobre la parte de didáctica de las matemáticas, sabes que nosotros estamos formado en la parte de matemática pura y siempre se tiene la idea de los problemas en abstracto y se deja a un lado la parte de didáctica; pero teniendo contacto con alguien que haga cuestiones de didáctica de las matemáticas pero aplicadas a la parte de educación universitaria, porque aquí hay profesores que investigan en esa línea pero en educación básica o muy básica, a nivel de primaria. Entonces, una discusión sobre temas con los que uno trabaja me parece interesante y en este caso, yo creo que con este material se puede lograr un buen trabajo con los estudiantes, es distinto a lo que yo normalmente hago, se puede aprovechar mucho.

[Moderador]: De acuerdo, pero vamos a centrarnos en la pregunta, ¿tú crees que con un material como éste se puede alcanzar el mismo conocimiento que con el material que tú sigues en clase y con la forma como tú das tus clases?

[Alexis]: Bueno, eso depende. Este material te obliga a estudiar, tienes que estudiar más conceptos de economía para poder enseñar con tu material, yo los problemas que hago son muy básicos, entonces creo que aquí hay más contenido de economía y el estudiante aprendería más, el problema es que yo no soy economista, tampoco tengo por qué saber todos los conceptos de economía; tú porque estás trabajando en esto.

4.- **[Moderador]**: En relación con los libros que tú sigues para preparar tus clases, ¿puedes destacar uno o dos aspectos (positivos o negativos) en relación con lo tratado en las cuatro sesiones?

[Alexis]: Mira, yo trabajo con el Hoffmann y con el Arya (& Lardner), uno lo refleja de una manera el otro lo refleja de otra, creo que el Arya es más didáctico, a pesar que trabaja la parte de matemática de una manera más formal, creo que es más didáctico que el Hoffmann, el Hoffmann es más fuerte en la parte matemática.

[Moderador]: Pero, supongamos que tienes que criticar este material, decir algo positivo o negativo respecto a los libros con los que trabajas, ¿qué dirías?

[Alexis]: A mi me parece que este material es más didáctico que como lo trabajan los libros, por la misma razón de que aquí no se está haciendo matemática..., bueno sí se está haciendo pero no con el rigor de algunos libros, tú lo que haces es más aplicado, se le ve más el sentido de lo que se está haciendo matemáticamente hacia la rama de la economía, los libros son más rigurosos.

[Moderador]: ¿Algún otro aspecto a destacar, bueno o malo?

[Alexis]: Lo que discutimos con el dominio, uno sabe lo que es matemáticamente el dominio de una función pero cuando habla en economía el dominio es otro, el dominio puede ser discreto, aunque yo, sinceramente, no hago esta diferencia en mis clases, los libros tampoco lo mencionan, ese enfoque no lo dicen los libros.

[Moderador]: ¿Y alguna crítica dura sobre esta propuesta, ves algo negativo?, quiero que seas lo más sincero posible, no te guardes cosas, para mi es muy valioso.

[Alexis]: No, no, te estoy hablando con sinceridad, a pesar de que al principio lo vi más como un compromiso contigo, después me sentí a gusto por los temas tratados, yo pensé que hablaríamos de otra cosa y me terminaron gustando las reuniones. A pesar que soy renuente a la parte didáctica, me parece que esto resultó interesante para mi.

5.- **[Moderador]**: En una discusión similar a la realizada con ustedes, algunos profesores consideraron que con una propuesta curricular como ésta, los objetivos que se esperan alcanzar en un curso de cálculo diferencial en ciencias económicas, en el mejor de los casos se alcanzarían de igual forma que con la manera tradicional como ellos presentan sus cursos e incluso, podrían no alcanzarse estos objetivos porque nuestra propuesta podría distraer a los estudiantes. ¿Cuál es tu opinión en este sentido?

[Alexis]: Yo no creo, yo creo que con esta propuesta, a pesar de que..., bueno..., lo enfocaba o lo enfoco con una matemática un poco más rigurosa que como la estás enfocando tú; sin embargo, me parece que metiendo al estudiante de una vez, introduciendo los conceptos de la economía, de la contaduría o de la administración formal, como tú lo estás haciendo, yo creo que debe quedarle más al estudiante que con las cuentas que uno hace en la derivada y después con las aplicaciones. Me parece que si uno va de una vez a los conceptos básicos de ganancia, ingreso, etc., resulta muy bien para estos estudiantes y es interesante a la vez porque el estudiante aprende dónde..., cómo utilizar la derivada en problemas concretos.

6.- **[Moderador]**: En la misma tónica que el punto anterior, hay profesores que consideran esta propuesta curricular como una actividad que puede hacer más dificultoso el aprendizaje en el estudiante. ¿Opinas tú lo mismo o crees que incide de manera positiva en el aprendizaje del estudiante?

[Alexis]: A mi me parece que actúa de manera positiva, si uno ve que el cambio es para bien, me parece que habría que ponerlo en práctica para poder emitir una opinión, sirve o no sirve.

7.- **[Moderador]**: ¿Consideras que el estudiante está preparado para asumir un aprendizaje enfocado desde este punto de vista, donde la participación del estudiante es fundamental?

[Alexis]: El estudiante no está preparado, pero como lo dije en una de las reuniones, si uno comienza desde Matemática 1 con problemas de este tipo y lo va llevando a este tipo de situaciones creo que él se va preparando para esto, pero si pretendes enseñarle el tema de la derivada sin una experiencia previa el estudiante se llevará un choque, un choque muy fuerte; un poco como lo que pasa aquí, que muchos profesores lo que hacen es dar un curso de cálculo tradicional, como si fuese de ingeniería, después cuando uno les habla a los estudiantes de algunas aplicaciones, quedan en el aire.

8.- **[Moderador]**: Siendo reflexivo y autocrítico, ¿consideras que estás preparado para afrontar una enseñanza partiendo de una propuesta curricular como ésta? Estrategias (preparación, clase, evaluación), matemático, económico.

[Alexis]: De estar preparado en un sentido amplio, te puedo decir..., este...

[Moderador]: Vamos a diferenciar, por ejemplo en el contenido matemático, ¿tu consideras que estás preparado matemáticamente?

[Alexis]: Sí estoy bien preparado, recuerda que yo estudié en una facultad de ciencias.

[Moderador]: De acuerdo, ¿y económicamente te consideras preparado?

[Alexis]: Ahora sí..., es decir, desde hace unos dos o tres años para acá que me puse a leer los libros de aplicaciones.

[Moderador]: O sea, ¿consideras que tienes conocimientos sólidos en economía?

[Alexis]: Sí, más o menos, pero al principio cuando comencé a trabajar con esto no sabía nada, no sabía qué era costo, ingreso, nada. Sin embargo, cuando yo me dediqué a dar las clases me tuve que poner a estudiar y sí le dediqué buena parte del tiempo a preparar las clases y a preparar problemas también, para poder discutirlos. Ahora sí creo que tengo un conocimiento amplio porque he trabajado.

[Moderador]: (Pregunta improvisada) De acuerdo, y por ejemplo, si yo te pidiera que te hicieras una autoevaluación del 1 al 10, donde 1 es la menor nota y 10 la máxima, en cuanto a conocimiento del contenido económico para estos cursos, ¿cuánto te pondrías tú?

[Alexis]: Yo creo que lo justo sería: 6 o 7.

[Moderador]: Y en cuanto a las estrategias a seguir para preparar una clase, para darla, para evaluar, ¿tú consideras que estás preparado para ello?

[Alexis]: Mira, si es para dar una clase con tu material creo que me siento preparado, en el peor de los casos, me pondría a estudiar a fondo el material.

9.- **[Moderador]**: En cuanto al contenido económico, ¿consideras adecuado que el Departamento cree un espacio de discusión que te permita consolidar conocimientos en esta materia y discriminar las necesidades que tiene el estudiante en el contexto económico?

[Alexis]: Mira, el Departamento necesita mucha ayuda de muchas cosas, sobre todo, aquí hay una apatía muy enorme, eso creo que lo sabes tú tanto como yo. Si uno hace un grupo de estudio sobre esto, yo creo que a uno le debe ir mejor en las clases, pero aquí es muy difícil reunir a la gente, aunque yo sé que hay gente interesada, pero bueno sería una propuesta del Departamento más que de uno mismo.

10.- **[Moderador]**: ¿Puedes hacer un comentario libre sobre esta experiencia?

[Alexis]: Me parece de bastante agrado lo que hicimos, a pesar de que a mi no me llama mucho la atención esto de la didáctica me pareció bastante agradable todas las discusiones y quedó demostrado que nos podemos reunir para discutir de estos temas, pero en general fue muy productiva.

[Moderador]: Bueno, muchas gracias por tu participación...

C.4. Entrevista a Elio

1.- **[Moderador]**: En el tiempo que tienes dentro del Departamento, ¿alguna vez has participado en una actividad como la realizada (por iniciativa del Departamento o de algún profesor en particular)?

1. Sí, ¿cómo fue la experiencia?, ¿qué se hizo?, compara respecto a esta, ¿consideras que realmente valió la pena este espacio de discusión?, ¿incidirá en tu labor docente?
2. No, ¿consideras que realmente valió la pena este espacio de discusión?, ¿incidirá en tu labor docente?

[Elio]: No, como profesor no, no recuerdo haber participado en algo así.

[Moderador]: ¿Y consideras que realmente valió la pena este espacio de discusión?

[Elio]: Por supuesto que sí, a mi, particularmente, me agradó mucho este tipo de reuniones, este tipo de cosas..., y ojalá que se pudieran seguir haciendo, porque yo soy de los que siempre he dicho que la matemática debería dirigirse en ese sentido, tal vez porque tenga mis raíces, yo no soy licenciado en matemáticas sino licenciado en educación, mención matemáticas. Entonces, quizás, me preocupa el enfoque que le estamos dando muchas veces a esos contenidos.

[Moderador]: ¿Tú crees que de aquí en adelante estas reuniones incidirán en tu labor como docente?

[Elio]: En la mía sí, particularmente yo la veo muy positiva, al menos yo voy a sacarle el mayor provecho, de hecho, ya guardé muchos de los problemas, los análisis los recolecté por allí..., con el permiso del autor, por supuesto.

[Moderador]: Tranquilo, para eso es, aunque de momento no hay autores para ese material, por el momento es un grupo de trabajo.

2.- **[Moderador]**: De los problemas planteados y de la forma de estudiar el concepto matemático a partir de éstos, ¿recuerdas alguno que te llamó la atención por: su rigor, innovación, presentación, el tema tratado, otro?

[Elio]: Me llamó la atención, bueno los primeros casi no los recuerdo, pero me llamó más la atención, tal vez porque lo tengo más fresco, porque era el tema más completo..., fue el que discutimos en la penúltima sesión, el de la regla de la cadena. Sí, porque yo pensaba que tal vez sería más complicado mostrar un problema de ese tipo para introducir la regla de la cadena..., bueno, yo no lo había enfocado directamente así en mis clases, eso de aplicar un problema o plantearlo y a partir de ese problema, introducir la regla de la cadena, quizás no lo veía muy fácil, no era difícil pero no lo había planteado así. Entonces, me llamó la atención ese y también el problema de ayer, que combinaba estrategias de aplicación pero también la parte matemática que estaba siendo reforzada con una función muy particular, incluía unas constantes muy curiosas.

3.- **[Moderador]**: Hoy por hoy, el futuro profesional requiere de unas competencias o de un "conocimiento ideal" para afrontar problemas en su campo laboral, de modo que le permita realizar un trabajo óptimo. ¿Consideras que una propuesta curricular como la discutida, permite generar esas "competencias" que el profesional de hoy necesita, en relación con la forma como actualmente sigues tus clases?

[Elio]: Mira, yo de alguna manera, he tratado de enfocar mis clases en ese sentido, lo que pasa es que, por cuestiones que hemos discutido en las propias reuniones, cuestiones como el tiempo, los cursos mismos, me refiero a lo extenso de los programas, conflictos de los estudiantes, manifestaciones estudiantiles, tantas cosas que se presentan que no le permiten a uno desarrollar el curso como uno quisiera, con la mayor normalidad posible. Entonces, si el tiempo lo permitiera y lo permitieran las otras cosas yo sí que encaminaría mis cursos más desde este punto de vista, de las aplicaciones y de las matemáticas enfocando las dos cosas al mismo tiempo.

[Moderador]: De acuerdo, pero volviendo a la pregunta, ¿crees que con el material discutido se puede lograr un conocimiento ideal en los estudiantes o crees que se descuidan algunas cosas?

[Elio]: Vuelvo y te repito, yo creo que las clases deberían enfocarse de esta manera, el problema es el tiempo y las otras cuestiones. A mi me parece que enfocar las matemáticas y las aplicaciones al mismo tiempo es muy apropiado para alcanzar ese conocimiento ideal del que tú hablas.

4.- **[Moderador]**: En relación con los libros que tú sigues para preparar tus clases, ¿puedes destacar uno o dos aspectos (positivos o negativos) en relación con lo tratado en las cuatro sesiones?

[Elio]: Los libros que yo normalmente utilizo para trabajar con esta gente, pues..., tienen un enfoque más hacia lo que es la matemática y cuando hacen aplicaciones, como decía Alexis en una de las reuniones, ellos se encargan de hacer primero todo el contenido matemático, tratando de crear destreza en el estudiante o en el lector para después llegar a las aplicaciones, pero no con el enfoque que nosotros hemos hecho; en estas reuniones lo que se trató fue de llevar a la par tanto el contenido matemático como el económico y llevar de la mano esas dos cosas no es fácil, creo yo, pero eso me gusta.

[Moderador]: Entonces, en resumen, ¿qué aspectos podrías destacar tú, positivos o negativos, del material?

[Elio]: Bueno, tal vez para lo que nosotros hicimos que fue matemáticas aplicadas a la administración y la economía, tal vez yo he visto algunos libros que dedican más a las demostraciones con la formalidad, con el rigor matemático, yo le restaría eso y me dedicaría más a problemas específicos, tratando de usar las herramientas, los teoremas sin necesidad de demostrarlos...

[Moderador]: Un momento Elio, no critiques el libro, en todo caso critica el material.

[Elio]: Como me dijiste aspectos positivos o negativos.

[Moderador]: Pero no de los libros.

[Elio]: Ok, en la primera reunión lo que no me pareció adecuado, mi sugerencia, es la parte mucho cálculo, mucho cálculo numérico podría crear rechazo o conducir a un error por parte del estudiante, sé que es necesario porque es la única manera que él tiene de ver a lo que se quiere llegar, cuál es el comportamiento de la función, pero será por la experiencia que he tenido con los estudiantes que el exceso de cálculo produce una especie de temor en ellos, de rechazo, no les gusta hacer mucho cálculo ni aún con las máquinas y es paradójico porque cuando los pones a pensar y no a calcular tampoco les gusta, no encuentro qué hacer con ellos.

[Moderador]: ¿Algo más que no veas bien o algo que te guste?

[Elio]: Algo que tampoco vi muy bien es que no aparecen las definiciones formales, yo pienso que uno no se puede saltar las definiciones formales, a fin de cuenta es un curso de cálculo. En ningún momento vi una definición formal aun cuando sí llegas a ellas, no las identificas como definición "tal", yo pienso que se deben resaltar las definiciones.

5.- **[Moderador]**: En una discusión similar a la realizada con ustedes, algunos profesores consideraron que con una propuesta curricular como ésta, los objetivos que se esperan alcanzar en un curso de cálculo diferencial en ciencias económicas, en el mejor de los casos se alcanzarían de igual forma que con la manera tradicional como ellos presentan sus cursos e incluso, podrían no alcanzarse estos objetivos porque nuestra propuesta podría distraer a los estudiantes. ¿Cuál es tu opinión en este sentido?

[Elio]: Al contrario, creo yo que en lugar de distraer a los estudiantes, creo que permitiría más bien adentrarlos con mayor propiedad a lo que es el asunto, están tocándose los intereses muy particulares de ellos, o sea, ellos están estudiando carreras como economía, administración y le están poniendo un problema muy particular sobre su área, yo creo que en lugar de distraerlo lo que puede hacer es, este..., involucrarlos mucho más. Tal vez donde se puedan distraer un poco es por el contenido matemático, el rigor matemático, la formalidad matemática, eso pudiera distorsionarlos un poco, pero aquí no se tratan las cosas con esa formalidad, ya te lo comenté en algún momento.

6.- **[Moderador]**: En la misma tónica que el punto anterior, hay profesores que consideran esta propuesta curricular como una actividad que puede hacer más dificultoso el aprendizaje en el estudiante. ¿Opinas tú lo mismo o crees que incide de manera positiva en el aprendizaje del estudiante?

[Elio]: Yo considero que tiene que ser positivo porque el aprendizaje tiene que ser, como dicen algunos expertos en la materia, un aprendizaje significativo. Yo estoy seguro, me atrevo a garantizar, que este tipo de problemas, analizándolos desde el punto de vista de los intereses personales del estudiante, tratando de llevarlos de la manera como se trabajaron en las sesiones anteriores, yo pienso que puede generar mayor aprendizaje significativo que es el que en realidad importa.

[Moderador]: ¿A qué te refieres con aprendizaje significativo?

[Elio]: Es un aprendizaje que no es para el momento, no es el de aprobar el examen y listo; es el que permanece en el estudiante y le va a permitir resolver problemas en un futuro, y ese aprendizaje se logra construyéndolo poco a poco; como trabajamos el concepto de derivada.

7.- **[Moderador]**: ¿Consideras que el estudiante está preparado para asumir un aprendizaje enfocado desde este punto de vista, donde la participación del estudiante es fundamental?

[Elio]: No creo que el estudiante esté preparado, no lo veo preparado, al estudiante le gusta que le des todo, yo creo que el estudiante debería tener una preparación desde que inicia la universidad, pero eso cuesta mucho trabajo, a ellos no le gusta participar, se salen con mucha frecuencia de clase y eso no les hace participativo, están los que dependen de los apuntes de otros. En lo que sí hay que estar claro es que si uno quiere implementar un material como este hay que hablar con el estudiante y, casi que, pedirle su colaboración.

8.- **[Moderador]**: Siendo reflexivo y autocrítico, ¿consideras que está preparado para afrontar una enseñanza partiendo de una propuesta curricular como ésta? Estrategias (preparación, clase, evaluación), matemático, económico.

[Elio]: Cuando uno habla de estrategias, uno podría decir que está preparado pero eso depende mucho del curso, eso va a depender del curso, como esté avanzando. De pronto tienes una clase montada con una estrategia y te surge algo inesperado y te cambian los planes y te encuentras que no hay estrategias para esa situación o mejor dicho, que uno no maneja una estrategia para ese caso. Pero, en general, no creo que esté totalmente preparado para seguir este material, por eso sería bueno seguir con este tipo de discusiones, escuchar a los que están más metido en esto.

[Moderador]: ¿Y en cuanto al contenido matemático?

[Elio]: Matemáticamente, yo creo que sí, es mi preparación, yo estudié matemática y aún cuando tenga algunas deficiencias matemáticas, a este nivel yo considero estar bien preparado, ahora si hablamos de topología, álgebra abstracta, análisis funcional, etc., creo que presento algunas fallas.

[Moderador]: ¿Y en cuanto al contenido económico?

[Elio]: La preparación que tengo en este sentido es porque he tenido que estudiarla por mi cuenta, cuando yo estudié no vi nada de eso y, tal vez, no era necesario para mi formación; pero una vez que he tenido que dictar estos cursos me he visto en la tarea de estudiar y cada vez que leo libros de aplicaciones, aparecen conceptos nuevos que no conozco o no conocía, entonces me parece que me falta, me falta conocer más sobre lo que es la economía.

[Moderador]: (Pregunta improvisada) Si yo te pidiera que te hicieras una autoevaluación del 1 al 10, donde 1 es la menor nota y 10 la máxima, en cuanto a conocimiento del contenido económico para estos cursos, ¿cuánto te pondrías tú?

[Elio]: Si me tocara ponerme una calificación en este momento, quizá me aplazaría porque no recuerdo algunos conceptos de la economía como elasticidad de la demanda, propensión al ahorro o al consumo; pero a la hora de preparar una clase yo me documentaría y solventaría todas esas dudas. Yo me pondría un 7, tal vez un 8.

9.- **[Moderador]**: En cuanto al contenido económico, ¿consideras adecuado que el Departamento cree un espacio de discusión que te permita consolidar conocimientos en esta materia y discriminar las necesidades que tiene el estudiante en el contexto económico?

[Elio]: Si eso se hiciera, pienso que un punto de partida, podría ser, tratar de coordinar mejor..., hacer una especie de coordinación entre el Departamento de Ciencias Económicas y nuestro Departamento, es decir, a parte de estar de acuerdo pienso que debería haber una conexión más estrecha con el Departamento de Economía, para qué, para que nos den esos conocimientos que nos falta a nosotros sobre los conceptos económicos, qué significa la elasticidad para quienes no lo dominan o no lo dominamos. De hecho, en ese Departamento se dictan unas materias donde se trabajan muchos problemas de este tipo pero con otros métodos o analizados de otra forma..., pero sí que estaría de acuerdo y tal vez no solamente en economía, en las otras áreas también.

10.- **[Moderador]**: ¿Puedes hacer un comentario libre sobre esta experiencia?

[Elio]: Pues para mi fue una experiencia bien agradable.

[Moderador]: Te pido la máxima honestidad, la mayor sinceridad.

[Elio]: Con toda honestidad, como te digo..., de repente porque mi formación ha sido en educación y a uno de alguna manera en esa formación que he tenido, he aprendido algunas cosas que son relevantes en el momento de..., no solamente con los contenidos matemáticos, sino de cómo evaluarlos, cómo enseñar, cómo aprender, entonces uno también aprende en ese sentido. Entonces a mi me pareció una experiencia bien agradable, claro con los detalles que hay que salvar, por supuesto, en las mismas reuniones establecemos algunas cosas que sugerimos que podían mejorarse o no y en mi caso, yo soy de los ya no tan nuevo, ya tengo cinco años en el Departamento, pero comparado con la experiencia de Kenya o de Alexis, reuniones como estas son interesantes, uno aprende cada vez más de otras personas. Además, el saber que hay personas que están trabajando en esto me motiva mucho más, yo realmente no sabía que estabas trabajando con esto tan a fondo, tus correos eran muy generales y el trabajo anterior no me llamó mucho la atención, eso de tú mandar un cuestionario y no verte la cara para discutir no le di mucho interés.

[Moderador]: Bueno, muchas gracias Elio por tu colaboración en este momento...

C.5. Entrevista a Kenya

1.- **[Moderador]**: En el tiempo que tienes dentro del Departamento, ¿alguna vez has participado en una actividad como la realizada (por iniciativa del Departamento o de algún profesor en particular)?

1. Sí, ¿cómo fue la experiencia?, ¿qué se hizo?, compara respecto a esta, ¿consideras que realmente valió la pena este espacio de discusión?, ¿incidirá en tu labor docente?

2. No, ¿consideras que realmente valió la pena este espacio de discusión?, ¿incidirá en tu labor docente?

[Kenya]: No, realmente es la primera vez, si acaso alguna reunión pero fue para programar exámenes con profesores que atendían el mismo curso, en este caso, de estudiantes de administración y economía de Matemáticas 2, se elaboró un programa único para que los profesores lo administraran durante ese semestre y llegamos a planificar sólo los exámenes parciales.

[Moderador]: ¿Y consideras que realmente valió la pena este espacio de discusión?

[Kenya]: Claro, claro, desde varios puntos de vista, por ejemplo, desde el punto de vista de tu trabajo creo que nosotros hemos aportado nuestro grano de arena y también, bueno..., en cuanto a mi formación, contribuyó a plantearme dudas interrogantes o cuestiones que realmente nunca me las había planteado y a reflexionar sobre algunas situaciones..., bueno que están allí latentes pero que a veces uno como que no las percibe.

[Moderador]: ¿Y podrías ser más específica?, por ejemplo, con eso de que antes no te habías planteado cosas y que a partir de las reuniones te las planteaste o te las plantearás, ¿cuáles serían en concreto, si es posible?

[Kenya]: Bueno..., este..., por ejemplo, recuerdo lo más reciente, la cuestión de la regla de la cadena, eso de tratar de plantearla a través de..., o mostrando su necesidad, lo de los dominios tampoco me lo había planteado; bueno..., la cuestión del dominio sí pero muy superficial, no hacía mayor énfasis en esas cuestiones... Se me escapan por el momento muchas cuestiones que discutimos aquí que realmente no me las había planteado antes, pero que de alguna manera están recogidas en el ciclo de entrevistas que realizamos.

[Moderador]: ¿Y esto significa que va a incidir en tu labor docente de ahora en adelante?

[Kenya]: Yo aspiro que sí, si no en su totalidad, no porque no esté de acuerdo con tu propuesta sino porque a veces hay factores que..., factores ajenos a nuestra propia voluntad que nos impiden, realmente, tratar de hacer una mejor labor docente y este..., pero el ánimo está en tratar de hacer cosas que vayan en beneficio de los estudiantes y de la misma satisfacción profesional.

2.- **[Moderador]**: De los problemas planteados y de la forma de estudiar el concepto matemático a partir de estos, ¿recuerdas alguno que te llamó la atención por: su rigor, innovación, presentación, el tema tratado, otro?

[Kenya]: Bueno..., realmente ya ha pasado como un mes desde que hicimos la primera sesión y lo más inmediato que tengo es la última sesión, a mi me parece que los problemas son bastante interesantes de tratar, yo creo que cada uno..., por ejemplo, en la última actividad que trabajaste sobre la regla de la cadena, cada uno aporta algo. Tú preguntabas en el cuestionario que nos mandaste a llenar, que por cuál optaría, realmente para mi fue muy difícil tomar una decisión porque me pareció que cada uno tenía algo bueno que aportar que no aportaba el otro...

[Moderador]: Eran como complementarios...

[Kenya]: Sí, eran como complementarios entonces yo pensé más bien en tomar algo del segundo problema y complementarlo con algunas actividades del primero porque, por ejemplo, en el primer problema trabajas el dominio y otras cosas, pero en el segundo ya no te dedicas al dominio y en el tercero haces más hincapié en la parte de..., en qué unidades de medida están dadas las cantidades que se piden. A mi me parece que conjuntar todo eso en un sólo problema también valdría la pena para enriquecerlo.

3.- **[Moderador]**: Hoy por hoy, el futuro profesional requiere de unas competencias o de un "conocimiento ideal" para afrontar problemas en su campo laboral, de modo que le permita realizar un trabajo óptimo. ¿Consideras que una propuesta curricular como la discutida, permite generar esas "competencias" que el profesional de hoy necesita, en relación con la forma como actualmente sigues tus clases?

[Kenya]: Yo pienso que la propuesta es bastante significativa y muy diferente de lo que usualmente nosotros hacemos en la universidad, este..., y pienso que sí prepara al estudiante para su formación porque, justamente, es una matemática orientada a su formación profesional. Además, más que un conocimiento académico lo que se persigue es una matemática como herramienta para utilizarla en su campo profesional, entonces yo creo que sí, que lo hace de modo significativo.

4.- **[Moderador]**: En relación con los libros que tú sigues para preparar tus clases, ¿puedes destacar uno o dos aspectos (positivos o negativos) en relación con lo tratado en las cuatro sesiones?

[Kenya]: Una de las cuestiones positivas es que estos libros están adaptados a los estudiantes de administración o de economía y en cierta forma tratan de concentrar problemas de ese tipo, eso es una ventaja que los hace distinguir de otros libros de cálculo.

[Moderador]: Pero yo me refiero a lo siguiente, si comparas este material con los libros que tú usas.

[Kenya]: Realmente tu propuesta es distinta, por lo general los libros, bueno..., estos que están adaptados a estos estudiantes, cuando mucho realizan una pequeña introducción motivando al estudiante en cuanto a la utilidad que va a tener esta matemática para su campo profesional pero inmediatamente caen ya al contexto matemático para después aplicarlo; yo veo que tu propuesta procede al revés, utilizas situaciones de problemas en el contexto de interés para ellos para después caer en el concepto matemático y esto me parece muy significativo.

[Moderador]: ¿Sólo destacas eso o hay otra cosa que, por ejemplo, no te haya gustado en los contextos matemático o económico o como estrategia didáctica?

[Kenya]: Bueno, la estrategia didáctica en ese sentido está dada porque estás planteando un enfoque de la enseñanza basada en la resolución de problemas, entonces se puede decir que allí abordas dos cuestiones, no sólamente contextualizas una situación, que se supone de interés para estos estudiantes sino que a la vez este estudio te permite introducir las nociones matemáticas, cuestión que por lo general no hacen los libros.

[Moderador]: ¿Y algo negativo respecto a la propuesta?

[Kenya]: Bueno, no sería negativo sino quizás sería por el esquema que uno tiene de enseñanza y de la forma que uno por lo general aborda este tema específico de la derivada junto con sus aplicaciones; tal vez en el orden como planteas las cuestiones ahí, pero yo creo que ya es cuestión de un hábito arraigado en mi y no como un defecto de la propuesta.

5.- **[Moderador]**: En una discusión similar a la realizada con ustedes, algunos profesores consideraron que con una propuesta curricular como ésta, los objetivos que se esperan alcanzar en un curso de cálculo diferencial en ciencias económicas, en el mejor de los casos se alcanzarían de igual forma que con la manera tradicional como ellos presentan sus cursos e incluso, podrían no alcanzarse estos objetivos porque nuestra propuesta podría distraer a los estudiantes. ¿Cuál es tu opinión en este sentido?

[Kenya]: Eso es muy relativo, yo pienso que..., yo siempre he partido que..., siempre he estado convencida que el estudiante aprende más haciendo, no importa la edad, no es escuchando u oyendo al profesor que..., no es que no vaya a aprender, pero hasta qué punto la calidad de su aprendizaje va a ser mejor. Así que con una propuesta donde el protagonista de la historia sea él a través de la facilitación del docente; yo estoy convencida de que el estudiante obtiene mejor aprendizaje si el mismo intenta hacer la construcción del objeto de estudio, en este caso, por ejemplo, la derivada que si tú se la das.

[Moderador]: ¿Y piensas que los objetivos se cubrirían de igual manera?

[Kenya]: Si vamos a hablar de que se van a cubrir de igual manera..., los objetivos se van a alcanzar bien por un procedimiento o por otro, el problema estriba en el proceso seguido para alcanzarlo porque, obviamente, desde un modelo de enseñanza tradicional hay un punto inicial y un punto final, pero lo que ocurre entre ese punto inicial y ese punto final, que serían los resultados, no es importante; si se alcanzó es importante pero el cómo no importa. Pero en cambio, en una propuesta como la tuya importan los procedimientos seguidos, o sea, yo pienso que aquí se habitúa, sobre todo cuando tenemos estudiantes que no están acostumbrados a pensar, que no están acostumbrados a abordar problemas, eso genera una dificultad..., el introducir una propuesta de este tipo, pero no por eso significa que nos vamos a cruzar de brazos y no hacer nada, se obliga al estudiante a pensar; no se obliga porque tampoco hay que hablar de obligar pero sí se induce más bien que él piense, analice, reflexione. Que no se trata, simplemente, de orientar la materia hacia el mero cálculo sino, sencillamente, de ver de dónde surgen los conceptos y cómo estos pueden ser utilizados para resolver problemas de interés para ellos, pienso que se alcanzan los objetivos, tal vez requiera un poco de inversión de tiempo y de esfuerzo, pero creo que se obtiene un mejor aprendizaje.

6.- **[Moderador]**: En la misma tónica que el punto anterior, hay profesores que consideran esta propuesta curricular como una actividad que puede hacer más dificultoso el aprendizaje en el estudiante. ¿Opinas tú lo mismo o crees que incide de manera positiva en el aprendizaje del estudiante?

[Kenya]: Yo creo que al principio sí pudiera tratar de crear algún conflicto, pero todo cambio genera conflicto. Nosotros como personas, cuando estamos acostumbrados a hacer alguna cosa de algún modo, pues..., generalmente somos propensos a rechazar el cambio o no nos es tan fácil aceptar el cambio y eso nos produce conflicto y eso también va a ocurrir en los estudiantes; pero bueno, esa es una etapa necesaria por la que uno tiene que pasar. Decía yo ayer, creo, que el conflicto es necesario porque bien encausado puede ser el motor del cambio, y si al principio puede causar dificultades tanto al profesor como al estudiante yo pienso que, progresivamente, mientras nos acostumbramos a ambos al desarrollo diario de una propuesta como esta, esas dificultades tienen que ir disminuyendo. A la final, lo que importa es la calidad de los aprendizajes que obtienen los estudiantes, yo creo que vale la pena hacer ese cambio a pesar de las dificultades. A mi me parece como una posición negativa de esas personas que piensan..., dificultades las hay, es más, todavía con la enseñanza tradicional el alumno presenta demasiadas dificultades y sin embargo no hacemos nada, entonces es como paradójico, entonces es como preferible; aún cuando se presenten dificultades, tratar de desarrollar una propuesta que realmente incida en aprendizajes de más alta calidad que los que se pueden obtener por otra vía.

7.- **[Moderador]**: ¿Consideras que el estudiante está preparado para asumir un aprendizaje enfocado desde este punto de vista, donde la participación del estudiante es fundamental?

[Kenya]: Yo pienso que, en principio, no, no está preparado, pero..., te repito lo mismo de ahora, hay que empezar. Entonces, poco a poco, el estudiante va como soltándose y va tomando la dinámica del curso y llegará el momento en el que, realmente, él sea el protagonista en la clase y se comprometa a tener que trabajar y participar y no a esperar, cuando entra a clases, que quien va a trabajar es el profesor. Al principio puede ser un poco tedioso, pero poco a poco, conforme se vayan dando las cosas, el alumno va a tener que asumir su compromiso, su responsabilidad, nos apoyamos mucho en el aspecto motivacional; por cierto, ese puede ser un aspecto positivo dentro de tu propuesta, que atiende esta parte motivacional. Si el alumno, realmente, está en disposición de aprender yo creo que puede asumir la responsabilidad que le corresponde como estudiante que sabe que se está preparando para una profesión y que sabe que en el mundo profesional no va a actuar con el papel que actualmente hace, ahí se produce un cambio de rol, de ser pasivo va a tener que ser activo. Bueno..., y por qué no lo hacemos activo de una vez en la universidad.

8.- **[Moderador]**: Siendo reflexiva y autocrítica, ¿consideras que estás preparada para afrontar una enseñanza partiendo de una propuesta curricular como esta? Estrategias (preparación, clase, evaluación), matemático, económico.

[Kenya]: Yo me atrevería, con lo que yo sé me atrevería a abordar un proyecto de esta naturaleza...

[Moderador]: Pero, ¿consideras que estás preparada?

[Kenya]: Sí, yo me considero preparada, aunque sí me gustaría algo así como discutir algunos puntos que contribuirían a mejorar mi formación en ese sentido.

[Moderador]: Por ejemplo, en el campo de la didáctica, de las estrategias..., ¿te sientes preparada?

[Kenya]: Yo pienso que sí, en el plano didáctico tú sabes que a mi siempre me a gustado y me he orientado hacia la didáctica y creo que tengo cualidades.

[Moderador]: Y si ahora nos mudamos al contenido matemático, ¿qué me puedes decir?

[Kenya]: En el contenido matemático pienso que estoy bien preparada, tal vez necesitaría algo más de formación de problemas en economía, tal vez estudiar un poco más el vocabulario que allí se maneja, porque realmente yo me limito a trabajar con funciones que yo domino, pero que yo domino porque yo misma me he dedicado a estudiarla, no porque las haya aprendido porque recibiera un curso formal o porque haya sido parte de mi formación de pregrado o de mi formación permanente, nada que ver..., ha sido un aprendizaje autónomo, yo misma me he puesto a prepararme, pero sí me gustaría como que salirme de esa rutina de esos mismos problemas y tratar de abordar otros; por ejemplo, el del impuesto a mi me encantó, yo nunca me lo había planteado, yo lo veía en los libros pero, a conciencia que no le prestaba atención y me parecían como difíciles y entonces lo desechaba, pero algo tenía que preparar. Yo creo que ahí sí me gustaría tener un poco más de formación y yo siempre he insistido en la necesidad de entablar un diálogo con el Departamento de Ciencias Económicas en ese sentido.

[Moderador]: (Pregunta improvisada) Esta pregunta no estás obligada a responder. Si yo te pidiera que te hicieras una autoevaluación del 1 al 10, donde 1 es la menor nota y 10 la máxima, en cuanto a conocimiento del contenido económico para estos cursos, ¿cuánto te pondrías tú?

[Kenya]: Yo me pondría como 6 o tal vez 7, no sé..., porque nula no estoy, me han ayudado mucho los libros que ya traen problemas resueltos, a partir de los cuales yo traslado ese conocimiento hacia los problemas que no están resueltos.

9.- **[Moderador]**: En cuanto al contenido económico, ¿consideras adecuado que el Departamento cree un espacio de discusión que te permita consolidar conocimientos en esta materia y discriminar las necesidades que tiene el estudiante en el contexto económico?

[Kenya]: Yo creo que ese punto no tiene discusión, no es que esté de acuerdo sino que es absolutamente necesario y más cuando una de las actividades fundamentales que nosotros tenemos dentro de la universidad es la docencia, lo que pasa es que muchas veces le damos más prioridad a la investigación y también a la extensión y se descuida un poco la docencia, entonces quienes terminan afectados..., los más afectado van a ser los alumnos. Entonces, si nosotros nos dedicamos a la docencia y también a la investigación y si dentro de la investigación hacemos grupos para discutir..., por qué no hacer lo mismo con la docencia. Yo pienso que la docencia tiene tanta importancia como la investigación y sin embargo no le damos la debida relevancia que ella tiene.

10.- **[Moderador]**: ¿Puedes hacer un comentario libre sobre esta experiencia?

[Kenya]: Yo quiero, en primer lugar, felicitarte por la iniciativa que has tenido porque yo sé que ha sido una preocupación tuya desde haca bastante tiempo y tal vez de otros profesores, pero realmente no nos hemos puesto con seriedad a estudiar esta problemática entonces, en este sentido, yo te felicito porque tú has tomado la iniciativa de comenzar un trabajo de investigación que puede ser o puede dar impulso a otros trabajos similares, incluso promover este tipo de discusiones dentro del Departamento, por lo menos con un grupo del Departamento o también a nivel interdepartamental; entonces, en ese sentido, la iniciativa hay que reconocerla y la apoyo totalmente y la felicito. Las discusiones que hemos tenido aquí han sido muy provechosas en todos los sentidos y espero que el trabajo no termine aquí, con esta entrevista, sino que en la medida de lo posible podamos seguir discutiendo y que ese trabajo sea reconocido también, por lo menos desde el punto de vista académico, o sea, que de ahí salga un material, un artículo, un trabajo que pueda ser promocionado; es más, debería ser reconocido por el Departamento y por la misma institución. Es que mira, yo lo comparo con la investigación que aquí se hace y es reconocida, pues de igual forma ésta es una investigación que a mi me parece muy meritoria y además busca mejorar la docencia, yo creo que nosotros tenemos un compromiso ético y moral o deberíamos estar comprometidos a trabajar en este sentido..., por los estudiantes.

[Moderador]: Bueno Kenya, muchas gracias, no tengo palabras para agradecer...

Universitat Autònoma de Barcelona

Departament de Didàctica de la Matemàtica i de les Ciències Experimentals

Un estudio sobre el Conocimiento Didáctico del Contenido (CDC) de profesores de matemáticas que enseñan cálculo diferencial a estudiantes de carreras de ciencias económicas

La Enseñanza Basada en Problemas (EBP) como estrategia metodológica y didáctica

Tesis Doctoral

Luis A. García Oropeza

Dirigida por las doctoras
Carmen Azcárate Giménez y M. Mar Moreno Moreno

Septiembre 2009

*Con especial afecto, a mis amadas mujeres:
Kenya y Manuela, pues ellas con sus palabras,
silencios y miradas supieron generar todo el
ambiente idóneo para culminar este proyecto...*

Agradecimiento

Definitivamente un proyecto de esta naturaleza difícilmente se puede hacer solo, ni siquiera proponiéndoselo uno, que además no es el caso. Por el contrario, la cantidad de personas que aportaron algo, en menor o mayor proporción, son tantas que la memoria termina pasándome factura y dejándome mal ante aquellas, cuyos nombres no aparecen, pero que puedo dar fe de que están en algún rincón de mi mente. Quiero además expresar que no sólo el aporte y apoyo académico son fundamentales para el desarrollo y culminación de un trabajo como el presente; también lo son, y en la misma medida, el apoyo y estímulo personales, bien sea en el contacto directo del día a día o desde la distancia.

Por otra parte, la consolidación de un trabajo como el que aquí se presenta no es fruto de un desarrollo lineal, aquí se esconden un cúmulo de tristezas, desesperaciones, fracasos, momentos de impotencia, entre otros; donde, precisamente, un sin número de personas me animaron a sortear estos obstáculos para convertirlos en alegrías, optimismo y ánimo para seguir adelante. En otras palabras, este grupo enorme de personas llegaron en el momento oportuno para decir o hacer lo indicado y permitirme salir de esos "bajones" que se convirtieron en un gran aprendizaje que hoy en día se ve cristalizado como parte de mi desarrollo personal y profesional.

Comenzaré por reconocer y agradecer a dos personas que han sido el pilar fundamental de este proyecto: Carmen Azcárate Giménez y Mar Moreno Moreno. Estas dos personas han sabido dirigir este trabajo, de tal manera que sus orientaciones y apoyo, tanto académico como personal, han servido para que en el día de hoy se vea cristalizada una obra que me llena de júbilo el haber compartido con ellas la elaboración de la misma. Sus opiniones y comentarios fueron siempre los más acertados. Mar, Carmen, con ustedes no sólo he aprendido a andar por el escabroso camino de la Didáctica de las Matemáticas sino que además he aprendido de otros temas, tal vez lejanos a esta área pero profundamente cercanos a lo humano. A ustedes, no menos que infinitas gracias.

Otra persona que no me puedo permitir dejar de mencionar y que contribuyó a enriquecer este trabajo, sobre todo a inyectarme mucha de esa energía y dinamismo que le caracterizan, me refiero a Edelmira Badillo. Un lujo de amiga, de investigadora, en muchas partes de este proyecto estará siempre tu nombre.

De igual manera, quiero agradecer la gentileza de cinco profesores que supieron escucharme y que en distintas fases del proyecto aportaron elementos que fortalecieron la calidad del mismo, ellos son: Joan Miralles, Lorenzo Blanco, Matías Camacho, Jordi Deulofeu y José Carrillo. A ustedes, muchas gracias por reservar un espacio de tiempo para mi.

A todos mis compañeros de doctorado debo agradecer y reconocerles su gran aporte, nunca podré olvidar todos aquellos gratos momentos vividos en "*La Saleta*". Sin embargo, quiero aprovechar la oportunidad para destacar el nombre de tres personas con las que compartí momentos especiales. Mi amiga Natasha Mayerhofer, siempre atenta y consecuente en el ámbito académico y también en el personal. También incluyo dos valiosas personas con las que discutí muchas veces la metodología de análisis y la estructura del marco teórico, debo destacar su particular forma de saber escuchar, son ellos: Patricia Toro y José Omar Zúñiga. Recuerdo los momentos del montón de papeles sobre la mesa, discutiendo sobre qué decisión tomar y los cafés en el bar de la facultad, la nostalgia me crece de forma exponencial.

A los profesores de mi Universidad de Los Andes que participaron e hicieron posible esta investigación, gracias por soportar todas mis exigencias y estar pendientes del buen desarrollo de la misma. Más que agradecer, quiero dejar plasmado que esta tesis es más de ustedes que mía.

A mis hermanos Juan Carlos y Yasmín, quiero agradecerles el apoyo moral y afectivo que siempre me transmitieron. Ustedes fueron y serán personas claves no sólo en la consecución de este proyecto sino también en mi vida.

Quiero finalizar estas líneas dándole las gracias a tres amigos especiales que han sido fundamentales no sólo en este trabajo sino a lo largo de mis estudios de doctorado: Lisset Salazar, Delfín Viera y Hánzel Lárez, son ese tipo de personas que poco abundan y que todos deseamos tener como amigos, a ustedes gracias por su apoyo y confianza.

Índice general

Introducción

Este trabajo es el resultado de un amplio estudio sobre el conocimiento profesional del profesor de matemáticas de universidad que enseña cálculo matemático a estudiantes de ciencias económicas, así como su desarrollo profesional y la enseñanza de las matemáticas basada en la resolución de problemas como estrategia metodológica alternativa de enseñanza. No obstante, antes de entrar en detalle sobre el contenido de esta memoria, no podemos obviar que la misma se inició con una inquietud personal, puesto que el autor, además de iniciarse en el campo de la investigación en la didáctica de las matemáticas, también es profesor universitario de matemáticas para carreras relacionadas con las ciencias económicas.

En este orden de ideas, lo que se persiguió en este estudio fue responder a preguntas aparentemente simples de plantear como: ¿cuál es el conocimiento didáctico del contenido (CDC) de los profesores de matemáticas para las carreras de ciencias económicas?, ¿qué contenido económico llevan al aula de clases y cómo lo presentan?, ¿conocen la enseñanza basada en problemas (EBP) como estrategia de enseñanza y la ponen en práctica en algún momento?; todos estos cuestionamientos y otros tantos orientaron e impulsaron nuestros primeros pasos en este estudio.

De todo lo anterior esperamos dejar claro que el foco principal de esta investigación es el profesor de matemáticas de universidad y, como objeto de estudio de este profesional, abordamos el conocimiento didáctico del contenido. Estudiar e indagar sobre el conocimiento del profesor resulta una tarea compleja en sí misma; además, su grado de complejidad se incrementa cuando la relación entre el investigador y los profesores participantes es estrecha, ya que todos trabajan en el mismo departamento de matemáticas y siempre surge la inquietud por parte del profesor participante de sentirse evaluado.

Aquí presentamos un estudio sobre aspectos muy concretos del CDC del profesor de matemáticas de universidad, el cual desarrollamos a partir de un seminario de discusión en torno a la enseñanza del objeto matemático "derivada de una función". También abordamos conceptos afines como el dominio de una función, la monotonía de una función y los valores extremos, todo esto con el fin de aproximarnos de forma heterogénea a los profesores participantes en este estudio. De esta manera buscamos contribuir al fortalecimiento de la investigación en esta línea de la didáctica de las matemáticas y, más concretamente de las didácticas específicas.

El elemento principal que utilizamos para generar las distintas discusiones y reflexiones sobre los diversos objetos matemáticos señalados anteriormente fue la EBP, ya que la misma sirvió para aproximarnos de manera indirecta a los profesores participantes y al mismo tiempo nos permitió indagar sobre el conocimiento del profesor respecto a esta estrategia metodológica de enseñanza; es decir, la EBP jugó un doble papel en este proyecto: (*i*) como estrategia metodológica de recogida de datos y, (*ii*) como elemento de discusión para el estudio del CDC del profesor de matemáticas de universidad.

Pero, ¿por qué la utilización de la EBP como pieza fundamental en este trabajo? Recordemos que ya hablamos de los objetos matemáticos que intervienen en este proyecto y que el mismo se enmarca en el CDC del profesor de matemáticas de universidad que enseña cálculo en carreras de ciencias económicas; pues bien, una de las características de la EBP, vista como estrategia metodológica de enseñanza, consiste en explotar la multidisciplinariedad o en vincular dos o más áreas de estudio en el proceso de enseñanza-aprendizaje. Es por ello que recurrimos a esta estrategia de enseñanza, ya que el vínculo existente entre el cálculo diferencial y otras áreas de las matemáticas tienen una estrecha relación con las ciencias económicas y que, cada día, se van ampliando estos lazos con áreas de las matemáticas como el álgebra lineal, los sistemas dinámicos, la teoría de la medida o el análisis convexo, por citar algunas.

Por otra parte, nos encontramos con la reducción y el análisis de los datos. En este proyecto se explota la dinámica trabajada entre los participantes durante las sesiones del seminario; pero además, se estudia también la interconexión entre sesiones o entre el seminario y el resto de los instrumentos. Es por ello que hicimos uso del análisis de contenido, prevaleciendo el análisis relacional, puesto que no sólo los contenidos disciplinares guardan una estrecha vinculación entre sí, sino también los componentes del CDC que fueron estudiados en este trabajo.

Respecto a la estructura del trabajo, lo hemos organizado en seis capítulos, correspondiendo el último a las conclusiones del mismo. En cada uno de ellos hacemos una pequeña introducción que permita al lector conocer de antemano los hechos más relevantes que se abordarán, discutirán y en definitiva, sobre los que se profundizarán, en el capítulo. A continuación hacemos una breve descripción de cada uno de ellos, lo que a su vez, nos dará una visión global de la tesis.

En el primer capítulo, tratamos el problema de investigación, los objetivos y los distintos contextos en los que se desarrolla el proyecto. Hablamos del punto de partida con el que dimos inicio a este trabajo y los antecedentes del mismo hasta llegar, de forma general, a los orígenes del CDC y de la EBP. Concluimos este capítulo con una justificación de índole personal, el motivo de nuestra investigación y la elaboración de un cuadro-resumen en el que se muestra un esquema de ésta.

El capítulo dos lo dedicamos al marco teórico, es decir, explicar todos los elementos que nos han servido para construir un modelo que nos permitiera explicar e interpretar la información disponible. Los elementos claves de nuestro marco teórico son: La enseñanza universitaria como objeto de investigación, dado la peculiaridad de la institución y del sistema académico. El conocimiento profesional del profesor de matemáticas, como gran pilar alrededor del cual se construye el modelo. Y finalmente, el CDC y la EBP. Todos estos elementos teóricos nos permiten construir un marco teórico a partir del cual desde la perspectiva del profesor, de su CDC y en base a la EBP, explique el modelo de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en un contexto como lo es el económico.

El capítulo tercero corresponde a la metodología, tanto de recogida de datos como de análisis. En él el lector profundizará en aspectos tales como: los instrumentos de recogida de datos, los participantes, las técnicas de análisis empleadas, etc.

En este punto, si me gustaría detenerme especialmente. Si bien los capítulos 4 y 5 corresponden al análisis de datos, en sí mismos, hay una gran diferencia entre ellos. Con la perspectiva de la investigación acabada, podemos decir que el capítulo 4 es un capítulo de análisis de datos menos elaborado, con una secuencia de análisis lineal, tal como nos marcaba la secuencia del instrumento principal y en el que no cruzábamos información. El capítulo 5 es mucho más elaborado. De hecho, un lector ajeno podría pensar que el 5 es el importante y el 4 no aporta nada, de hecho, podríamos haber prescindido del 4, no obstante hemos decidido incluirlo porque el 5 es el resultado del 4, y sin haber pasado previamente por el tipo de análisis que planteamos en el 4 habría sido imposible presentar los resultado que presentamos en el capítulo 5. Uno no tiene sentido sin el otro, aunque al lector le resultará mucho más rico e interesante el 5, dado que en éste, sí cruzamos información, analizamos la coherencia de las respuestas de los profesores. Observamos cómo se triangulan los datos, etc.

Finalmente, en el sexto y último capítulo exponemos las conclusiones. Hemos dividido las conclusiones en: metodológicas y didácticas, atendiendo a la misma división que en su momento hicimos de los objetivos. La última parte del capítulo la reservamos a hacer un análisis crítico de las limitaciones del estudio y en qué medida han condicionado los resultados y la investigación;

y por último, nos aventuramos a exponer algunas líneas abiertas de trabajo por donde podríamos continuar la investigación tan interesante que hemos iniciado en este campo de conocimiento.

Capítulo 1

El Problema, objetivos y contextos

Introducción

En el presente capítulo presentamos el problema objeto de estudio así como los objetivos de la investigación. El capítulo consta de seis apartados: (i) antecedentes, (ii) contexto espacio-temporal, (iii) las preguntas de la investigación, (iv) objetivos, (v) justificación personal y (vi) un esquema donde se resume este trabajo. En la primera parte mencionamos las motivaciones que sirvieron como punto de partida para involucrarnos en esta línea de trabajo y, de igual manera, el trabajo desarrollado por algunos autores de reconocido prestigio que dieron pie para la consolidación de este estudio, así mismo, incluimos un apartado que muestra el contexto dónde y cuándo se desarrolló la investigación. Posteriormente formulamos las preguntas que nos condujeron a la realización de este proyecto para continuar con un apartado destinado a hablar de los objetivos que nos planteamos cubrir por medio de este trabajo. No podíamos concluir este capítulo sin una reflexión personal sobre el valor de este trabajo de investigación y sus repercusiones tanto desde el punto de vista docente como de investigadores con el que deseamos contribuir al desarrollo de la didáctica de las matemáticas, ya que como docentes de matemáticas de universidad e investigadores en el campo de la didáctica de las matemáticas, nos vemos inclinados y con el deber de contribuir en el proceso de enseñanza-aprendizaje del cálculo a nivel superior. Finalmente, cerramos con un cuadro que, a modo de resumen, intenta mostrar de forma esquemática los distintos pasos que conforma este trabajo.

1.1. Antecedentes de la investigación

Comenzaremos por decir que el presente trabajo se sustenta a partir de dos pilares; uno es, el del conocimiento profesional del profesor y, de todas las distintas componentes que lo conforman, no obstante, sólo nos quedamos con el *conocimiento didáctico del contenido* de profesores de matemáticas de universidad, en adelante CDC; el otro pilar es el modelo de la enseñanza de las matemáticas basada en problemas, en adelante EBP a secas aun cuando en el proceso de enseñanza-aprendizaje de otras disciplinas o ciencias se utiliza la misma terminología. Sin embargo, en los momentos en los que consideremos que se debe diferenciar entre la didáctica de las matemáticas respecto a la de cualquier otra área, se lo indicaremos al lector al igual que en el caso del CDC. Conviene advertir al lector que nos apoyamos en la EBP en dos sentidos, por una parte, como *metodología de enseñanza activa* y, por otra, como *metodología para la recolección de datos*.

Más aún hay que resaltar, en primer lugar, lo difícil que resulta realizar investigaciones en el ámbito universitario o, más concretamente, en el económico, de lo cual hablaremos en su momento en el **Apartado 1.2**. Por otra parte; la mayoría de la literatura especializada, por no decir toda, cuando nos referimos a los pilares en los que se basa este trabajo, está centrada en profesores en formación inicial o a profesores en ejercicio, pero en ambos casos de enseñanza básica o a lo sumo preuniversitaria (primaria, secundaria o bachillerato) Carrillo *et al*. (2007), Climent (2002), Llinares (1998) y Carrillo (1996). También nos permitimos mencionar el trabajo desarrollado por Marín (2004) enmarcado en el profesor de universidad, pero en el que no se refiere en ningún momento al profesor de matemáticas. Toda esta situación nos obligó a ir con precaución puesto que no siempre es aceptable una "traducción" al escenario en el que nos encontramos. Con esto queremos resaltar que, a partir de los trabajos citados anteriormente, **hemos diseñado nuestro propio modelo teórico, destacando aún más que hemos realizado un esfuerzo de abstracción en el caso de investigaciones relacionadas con el profesor, pero de niveles y contextos educativos muy lejanos al universitario en el que está centrado el presente trabajo**.

De todos los trabajos que anteceden al presente, existe uno que de manera natural nos condujo y permitió abrir las puertas a esta investigación; éste es, nuestro *treball de recerca* que forma parte del programa de doctorado en didáctica de las matemáticas de la UAB, el cual fue codirigido por las Doctoras Carmen Azcárate y Mar Moreno.

1.1.1. La tesis de maestría o *treball de recerca*

El punto principal de partida de este trabajo es la tesis de maestría desarrollada bajo la codirección de las doctoras Carmen Azcárate (UAB) y Mar Moreno (UdL), titulado: "*Un estudio sobre profesores que enseñan cálculo diferencial a estudiantes de ciencias económicas. Creencias, Concepciones y Conocimiento Profesional*" y presentado en 2004 en la UAB.

Inicialmente, a través del trabajo antes citado, realizamos un estudio de carácter exploratorio cuyo objetivo principal fue el de indagar sobre las creencias, concepciones y conocimiento profesional por medio de un cuestionario abierto con el que se buscó, a partir de éste, analizar y caracterizar los tres pilares antes señalados, así como también, estudiar el conocimiento profesional del profesor de matemáticas en el sentido siguiente:

¿**Qué puede aportar el profesor al programa vigente en cuanto a contenido curricular y a nuevas estrategias para la enseñanza del cálculo diferencial**?

Ahora bien, más allá del modelo de análisis de García (2004), lo importante, es que el mismo se desarrolla en el ámbito universitario y, más concretamente, que el mismo se centra en el profesor, esto quiere decir, en la enseñanza. En este sentido, estamos apostando por la apertura de una línea de investigación de didáctica en el nivel de educación superior o universitario.

Más aún, nuestra tesis de maestría estuvo centrada en aspectos como: (i) la importancia concedida a la derivada en los programas oficiales de ciencias económicas (o afines) y a la relación de ésta con los conceptos específicos de las ciencias económicas, (ii) la influencia de formación profesional de los profesores en la enseñanza que imparten; y de igual modo, (iii) los aportes de los profesores, en materia de innovación, a la enseñanza de la derivada como muestra de su conocimiento profesional.

A partir de dicha investigación, nos dimos cuenta que si bien era imprescindible conocer las creencias y concepciones del profesor de matemáticas sobre situaciones muy particulares de su labor como docente, esto no era suficiente para dar respuesta a preguntas relacionadas con el conocimiento profesional, como la remarcada en el párrafo anterior u otras planteadas en ese mismo trabajo y que no fueron respondidas, como por ejemplo: "*¿se ha replanteado su metodología de enseñanza*?", "*¿sabe el profesor de matemáticas lo útil que es el cálculo diferencial en las ciencias económicas*?", "*¿sabe el profesor de matemáticas qué matemáticas enseñar a los estudiantes de ciencias económicas*?" (García, 2004), o el trabajo sobre una propuesta que quedó abierta en el trabajo antes citado relacionada con "*la implementación de la resolución de problemas para introducir el concepto de la derivada*".

La metodología que se siguió en el *treball de recerca* fue del tipo cualitativa, enmarcada en el estudio de casos; consistió, como dijimos anteriormente en el diseño de un instrumento (cuestionario abierto) que tratase en profundidad cada uno de los objetivos que nos planteamos. Una vez aplicado el instrumento y recogidos los datos, hicimos uso de las redes sistémicas con objeto de estructurar toda la información obtenida, para finalmente hacer un análisis de tipo inductivo, descriptivo e interpretativo de los datos.

Entre los resultados y conclusiones que se derivan de este trabajo podemos destacar las siguientes:

1. Los profesores, en general, le dan una fuerte peso a la manera como fue tratado el tema durante su propia formación, aun cuando son carreras completamente distintas.
2. Como consecuencia inmediata del punto anterior, en la enseñanza que imparten, valoran más el contenido matemático que el contenido económico.
3. El tema de aplicaciones de la derivada lo conciben y orientan más a resolver ejercicios de cálculo que a la resolución de problemas, como lo sostienen algunos profesores en sus respuestas.
4. El aporte que la mayoría de los profesores otorgan al contenido programático es muy pobre; en general se inclinan por seguir un contenido genérico, más propio de un curso general de cálculo.
5. Detectamos algunas carencias didácticas relacionadas con el ámbito profesional del estudiante, tales como: el escaso manejo de conceptos específicos de las ciencias económicas, la interpretación de la derivada en el contexto económico; lo que nos hace sugerir: la creación de un espacio que propicie el intercambio de experiencias didácticas entre los profesores.
6. Como consecuencia del punto anterior, se propone de algún tipo de actividad enmarcada en la formación profesional que permita abarcar las partes didáctica y conceptual relacionadas con el contenido económico.

Estos resultados sumados a la necesidad de querer dar respuesta y profundizar a partir de las preguntas anteriormente expuestas y que no alcanzaron a ser respondidas en García (2004), nos condujeron a diseñar este nuevo estudio en el que finalmente decidimos ahondar sobre:

i Cómo concibe el profesor de matemáticas el proceso de enseñanza-aprendizaje en los cursos de cálculo para estudiantes de ciencias económicas,

ii En qué contexto basa su enseñanza,

iii El conocimiento profesional a partir de un trabajo de autorreflexión,

iv Qué conocimiento de economía debe tener el profesor de matemáticas, entre otros.

Ya que, por una parte, los programas oficiales de las asignaturas contienen un tema reservado a las aplicaciones de la derivada a la economía y, por otra, porque "*...la universidad latinoamericana y en particular la venezolana; actualmente, apuestan por cambios fundamentalmente de tipo metodológicos que impliquen una dinámica más activa y participativa por parte del estudiante*" (García *et al.*, 2006b), razón por la cual apostamos por una enseñanza contextualizada de las matemáticas.

Pero la novedad del presente estudio es doble, por un lado, porque pretendemos continuar con una línea de investigación aún bastante reciente y poco desarrollada como es la de la enseñanza de las matemáticas en el ámbito universitario y; por otro, porque la propia metodología de enseñanza EBP se utiliza al mismo tiempo como metodología de investigación e instrumento de recogida de datos.

1.1.2. Otros trabajos

Al igual que el trabajo anterior, un referente que debemos mencionar es el desarrollado por Moreno (2000). Esta tesis doctoral está centrada en el profesor de matemáticas de universidad; aquí la autora se apoyó en los siguientes aspectos: cognitivos, del pensamiento y didácticos, todos del profesor de matemáticas de universidad, para indagar sobre las creencias y concepciones de los profesores acerca de la enseñanza de las ecuaciones diferenciales. De hecho, lo que perseguía Moreno era, en esencia, determinar las características más relevantes de la *enseñanza* de las ecuaciones diferenciales, explicar *la persistencia de métodos de enseñanza tradicionales* de las ecuaciones diferenciales; así como también, caracterizar a los profesores universitarios de matemáticas en función de sus creencias sobre el proceso de enseñanza-aprendizaje, y en particular sobre la materia que enseñan.

Por otro lado, Flores (1996) sitúa su investigación dentro del paradigma del pensamiento del profesor. El problema de investigación que se planteó Flores fue el estudio de la evolución de las creencias y concepciones de los futuros profesores sobre el *conocimiento matemático*, y sobre la *enseñanza y aprendizaje de las matemáticas*, teniendo como fuente de información los trabajos realizados en la asignatura de prácticas de enseñanza de matemáticas de *futuros maestros de primaria*.

Otro trabajo, este más próximo al nuestro, que sirve como punto de partida, tanto por estar enfocado hacia el conocimiento profesional del profesor, como por el concepto matemático en el que se centra el mismo y, por qué no, por su proximidad al contexto sociocultural en el que se desarrolla esta investigación, pues la misma se desenvuelve en Colombia y más concretamente dentro del sistema educativo colombiano a nivel de bachillerato; es el trabajo de Badillo (2003). En esta tesis doctoral, la autora estudia la relación entre el conocimiento del contenido matemático y el CDC, para ello eligió la *enseñanza de la derivada* como concepto matemático. En este sentido, describe la naturaleza y formas de conocer el concepto de la derivada en dos direcciones: por un lado como objeto matemático y por otro como objeto de enseñanza y aprendizaje. Para cumplir con algunos de los objetivos propuestos, Badillo (2003) centra su atención en la caracterización de las tareas que proponen los profesores para introducir y evaluar el concepto de la derivada.

Un estudio cercano al citado anteriormente y, en consecuencia, muy vinculado al nuestro es la tesis doctoral de la Dra. Carmen Azcárate, quien además es codirectora de la presente memoria. En Azcárate (1990) podemos notar un estudio sobre la comprensión del concepto de derivada, esto quiere decir, que el individuo tenga una visión consistente y coherente de este concepto, pasando por encima del mero ejercicio del cálculo sin llegar a profundizar en la interpretación del mismo. En esta tesis se estudia la derivada desde el punto de vista de la física, teniendo como punto de partida para entender el concepto de derivada hay que comprender en profundidad algunos conceptos previos como por ejemplo: velocidad media e instantánea, tasa media de variación y pendiente de una recta. Todo esto lo hemos sabido tomar en cuenta a la hora de elaborar nuestro instrumento, sólo que además del enfoque físico-matemático también hemos incorporado un enfoque económico.

Por otra parte, mencionamos algunos de los trabajos que se han desarrollado, de manera próxima a nuestra línea específica de interés, por algunos investigadores de reconocido prestigio en el área, como son: los trabajos realizados por Bolívar (2005), Deulofeu (2002), Marcelo (2001, 1999, 1992), Contreras (1999), Carrillo (1996), Llinares (1998, 1992), Puig (1996), Schoenfeld (1985), Pólya (1984), entre otros.

1.1.3. Los orígenes del CDC

Este apartado lo reservamos para hablar de manera breve sobre los orígenes del conocimiento didáctico del contenido (CDC), como línea de investigación. En este caso, Lee S. Shulman y colaboradores son los precursores de esta línea de investigación; específicamente Shulman (1986) desarrolló y dio a conocer una nueva estructura teórica en cuanto al conocimiento y formación de profesores, introduciendo el término: *Conocimiento del Contenido Pedagógico*, CCP o PCK por sus siglas en inglés de "*Pedagogical Content Knowledge*"; no obstante, utilizaremos el término "*Conocimiento Didáctico del Contenido*", en adelante CDC, justificado en Bolívar (2005), Marcelo (1992) y Doyle (1992); con Doyle (1992) justificamos la sustitución que hacemos de "pedagógico" por "didáctico". Shulman (1986) consideró que se debía conjugar durante la formación inicial de los profesores el conocimiento disciplinar y el conocimiento pedagógico, de manera que estos pudiesen contar con una formación más idónea.

Para este fin, en un proyecto sobre el estudio de profesores en formación[1], Lee S. Shulman (1986) conjuntamente con sus colaboradores desarrollaron el CCP; específicamente, estudiaron en los profesores en formación el contenido disciplinar que ellos adquirían y cómo repercutía ese conocimiento en la enseñanza de estos individuos a la hora de iniciarse como profesores.

Para entonces, el CDC fue definido como la interconexión de tres tipos de conocimiento: el conocimiento del **contenido disciplinar**, el conocimiento **didáctico** en sí y el conocimiento del **currículo**; hablaremos de ellos en el capítulo siguiente.

En el caso de España, dos referentes importantes, aun cuando hay varios otros, son Carlos Marcelo y Salvador Llinares, ya que ellos trabajaban en la línea del conocimiento profesional del profesor; pero es en 1992 cuando ambos coincidieron en el Congreso "Las didácticas específicas en la formación del profesorado", realizado en Santiago de Compostela. Carlos Marcelo presentó una ponencia titulada "*Cómo conocen los profesores la materia que enseñan. Algunas contribuciones de la investigación sobre conocimiento didáctico del contenido*", en esta oportunidad el autor realizó una amplia introducción sobre el CDC y trata aspectos muy concretos de esta área como por ejemplo: el tipo de conocimiento especial que supone el CDC en los profesores en formación, la metodología desarrollada en investigaciones sobre esta área y considera, además, el caso de las investigaciones enfocadas hacia las matemáticas y el CDC.

Por su parte, Salvador Llinares participó con la ponencia titulada "*Aprender a enseñar matemáticas. Conocimiento de Contenido Pedagógico y entornos de aprendizaje*"; en este estudio el autor realiza un trabajo más detallado del CDC en el área de la formación de profesores de matemáticas, motivado a la "Reforma Educativa" que vivía España para el momento. Aquí Llinares (1992) comienza por identificar de manera clara dos aspectos a tomar en cuenta sobre el conocimiento de un profesor de matemáticas en formación o en ejercicio.

[1]Knowledge Growth in Teaching Project

> En primer lugar, el conocimiento y destrezas que los profesores de Matemáticas deben poseer para enseñar Matemáticas de manera efectiva. En segundo lugar, la forma en que los estudiantes para profesor y los profesores en ejercicio acceden a este nuevo conocimiento y destrezas
>
> (Llinares, 1992, p. 378)

Otro punto a destacar en el documento citado de Salvador Llinares y que Climent (2002) también lo refleja, tiene que ver con el conocimiento del profesor de matemáticas en dos aspectos; a tomar en cuenta para ellos y que en nuestro marco teórico explicaremos el porqué nosotros no lo consideramos, estos son: el *conocimiento **de** las matemáticas* y el *conocimiento **sobre** las matemáticas*. En el primer caso, Climent (2002) lo define como: "*Conjuntos de conceptos y procedimientos matemáticos*", mientras que el conocimiento sobre las matemáticas para Llinares (1992) tiene que ver con "*el uso que el profesor hace de su conocimiento matemático para conseguir el aprendizaje de sus alumnos*". Finalmente, Salvador Llinares caracteriza el conocimiento de contenido pedagógico del profesor de matemáticas[2]

1.1.4. Los orígenes de la EBP

En este apartado hablaremos en forma general de algunos de los resultados obtenidos hasta ahora en investigaciones sobre EBP como estrategia didáctica, tanto en ciencias como en matemáticas, dejando para el marco teórico un desarrollo más amplio, no sólo como estrategia didáctica, sino también como metodología de recogida de datos. Antes de comenzar a hablar conviene dejar claro que diversos autores se refieren a esta estrategia como ABP (siglas de aprendizaje basado en problemas) o PBL (por las siglas del término en inglés, *problem based learning*), puesto que los trabajos que se han desarrollado en esta línea se han centrado más en el aprendizaje que en la enseñanza; aun así, estos nos han aportado ideas claves para el presente trabajo.

El mayor desarrollo sobre la EBP o ABP, tanto como estrategia didáctica como en investigación en didáctica propiamente, está enmarcado en el área de la salud[3] (medicina, enfermería o afines a éstas) y en el área de bioquímica, destacando en ambas áreas los aportes de Mowshowitz (2006), White (2006, 2005, 2004a, 2004b), McCarthy (2005), Voet (2001), Finucane *et al*. (1998), Barrows (1996, 1986, 1985), Savery y Duffy (1995), Smith (1995), Albanese y

[2]Aclaramos que este término nosotros lo llamamos conocimiento didáctico del contenido del profesor de matemáticas o CDC.

[3]La EBP como modelo general de enseñanza se desarrolló en el área de la medicina y la enfermería a mediados de la década de los años 50 del siglo pasado (Savery y Duffy, 1995), concretamente en los primeros años de carrera, en asignaturas como: anatomía, farmacología, fisiología, entre otras.

Mitchell (1993) y Boud y Feletti (1991). También podríamos destacar el aporte en otras áreas del conocimiento como el derecho, la arquitectura, la ingeniería (Savery y Duffy, 1995) pero no lo consideramos pertinente en esta oportunidad; no obstante, conviene mencionar el aporte en el área de ciencias económicas de Milter y Stinson (1995) y Bridges y Hallinger (1992), por ejemplo. Pero en el caso de la didáctica de las matemáticas, que es el tema de nuestro trabajo, también hay un extenso desarrollo del tema.

Aun así, haremos una pausa para aclararle al lector un punto relacionado con la didáctica de la matemática y la EBP. Generalmente, en la literatura relacionada con el campo de la didáctica de las matemáticas se encuentra con mayor frecuencia el término **resolución de problemas**, en adelante R-P, en lugar de EBP, donde la R-P abarca un amplio contenido relacionado con el término en sí, como por ejemplo: enseñanza de las matemáticas basada en la R-P (Deulofeu, 2002; Codina y Rivera, 2001; Carrillo, 1996), enseñanza de técnicas y estrategias para resolver problemas (Contreras, 1999; Puig, 1996; Schoenfeld, 1985; Pólya, 1984), la R-P como actividad que ayuda a consolidar un contenido matemático discutido en clase (Carrillo, 1996; Schoenfeld, 1985; Pólya, 1984).

1.1.4.1. En el área de la salud y afines

Tal como dijimos anteriormente, las investigaciones realizadas sobre EBP en el área de la salud son muy numerosas y aun cuando los inicios de esta estrategia didáctica data de los años 1950's, el desarrollo y consolidación como línea de investigación en didáctica ha cobrado fuerza en los últimos treinta años (Sonmez y Lee, 2003). Por ejemplo, Savery y Duffy (1995) consideran la EBP como un *modelo de enseñanza consistente de tipo constructivista*, que provee una clara conexión entre la teoría y la práctica, en el que se deben tomar en cuenta algunos aspectos claves, de los que hablaremos en el marco teórico, con el fin de poner en marcha esta metodología. Ellos desarrollan su trabajo haciendo referencia al proceso de enseñanza para una escuela de medicina y destacan cuatro aspectos generales sobre la EBP: (**a**) objetivos de aprendizaje, (**b**) generación o elección del problema, (**c**) presentación del problema y (**d**) papel del profesor o facilitador. Ya que nuestro tema de interés es el profesor de universidad, destacaremos lo que estos autores opinan al respecto en los puntos (**a**) y (**d**); y así, ir mostrando algunas características de la EBP relacionadas con el profesor.

> De (**a**):
> El facilitador asume un mayor rol en el modelo del pensamiento metacognitivo, asociado al proceso de resolución de problemas.
> De (**d**): [Del Modelo de Barrow]
> En una sesión [de EBP], el facilitador modela un orden superior de pensamiento por medio de la realización de preguntas que conducen al estudiante a

> profundizar su conocimiento. Para hacer esto, el facilitador constantemente pregunta "¿por qué?", "¿qué entiendes tú?", "¿cómo sabes tú que eso es verdad?"
>
> (Savery y Duffy, 1995, pp. 35-37, traducción realizada por el autor.)

Aunque la EBP surgió como una metodología práctica para formar médicos en contraposición con un sistema de enseñanza tradicional con contenidos definidos, de entrada, por el profesor, ésta no emergió como respuesta a una teoría del campo educativo, sino que surgió como una alternativa que permite la interconexión e integración de disciplinas para que ayudara al estudiante de medicina a emitir el diagnóstico de un paciente, basado en la necesidad de saber y aprender (White, 2001; 2004a).

No obstante, White (2001) deja ver que aun cuando la EBP es una metodología con ciertas bondades, de hecho es recomendada por el NRCP[4], los cambios curriculares han estado marcados por inconvenientes y generado controversias, pero con buena aceptación en determinadas ocasiones ganando cada vez más seguidores; tanto es así que en el año 2000 se reunieron en Alabama más de quinientos institutos y facultades de distintas universidades procedentes de ocho países para discutir y reflexionar sobre la EBP en el congreso titulado: "*PBL 2000 - Problems, Breakthroughs, and Lessons*[5]".

En este congreso destacamos la participación de Bárbara Duch, quien para ese momento era la directora asociada del *Mathematics and Science Education Resource Center at the University of Delaware* y quien cautivó a la audiencia con diversas actividades relacionadas con la EBP, poniendo de manifiesto la importancia de esta estrategia en el campo de las matemáticas, dejando por sentada su efectividad y los requerimientos necesarios que no se encuentran en otras estrategias didácticas habituales. Además, resaltó el rol que juega el profesor en relación con el estudiante, siendo estos últimos los que marcan la pauta en el proceso de enseñanza-aprendizaje (White, 2001).

Continuando con la efectividad de la EBP dentro de la *enseñanza universitaria*, White (2004a) se refiere al informe que la Comisión Boyer[6] realizó en 1998 sobre la investigación que hacen los estudiantes de universidad en niveles de pregrado y en el que manifiestan que se tiene que enfatizar más en la investigación en esta etapa de educación universitaria, en contraposición con algunos profesores universitarios que no ven con buen ojo que los estudiantes de pregrado se involucren cada vez más en actividades de laboratorio o actividades prácticas, puesto que no contemplan entre sus estrategias metodológicas la *enseñanza basada en la investigación*[7] (EBI) y nada mejor que la EBP para implementar la EBI. Esta última metodología, sugiere la Comisión Boyer, debería

[4]*National Resource Center for Paraprofessionals*
[5]Problemas, Avances, y Clases
[6]Comisión Boyer (1998)
[7]El término en inglés es Research-based learning.

implementarse como estándar en el proceso de enseñanza-aprendizaje. Más aún, sobre la EBP dicen:

> Es una excelente manera de estimular la actitud investigadora del estudiante y, tal vez, rescatar parte de la curiosidad de la niñez. Esto pone un valor añadido para plantear preguntas relevantes con el objetivo de buscar respuestas a éstas y así involucrar a los estudiantes en la literatura de investigación.
>
> (White, 2004a, p. 49, traducción realizada por el autor.)

Otra ventaja de la EBP en los estudiantes es que los conduce a un desarrollo del pensamiento crítico y analítico en su carrera, ya que, entre otras cosas, la EBP promueve la necesidad de resolver problemas que, por lo general, son de la vida real. Es por ello que, en las facultades de medicina, un tipo de problema frecuentemente implementado y que se ajusta a esta carrera universitaria es el *estudio de casos* (McCarthy, 2005). Con esta modalidad de EBP,

> [...] el alumno es llevado a un *escenario* para identificar, analizar, valorar, decidir, resolver... en definitiva, *posicionarse*, respecto a lo que en el *caso* se describe, teniendo en cuenta las distintas dimensiones que conforman esa realidad, generalmente compleja.
>
> (Benito *et al.*, 2005, p. 50)

McCarthy (2005) y Aspy *et al.* (1993) coinciden en que los estudiantes de medicina pueden aprender con la EBP diversas asignaturas de forma simultánea como por ejemplo: anatomía, psicología, genética, bioquímica, microbiología, patología y estudios del metabolismo, resaltando de Aspy *et al.* (1993) que estos estudiantes superan en conocimiento a los que siguen cursos de enseñanza tradicional y en el caso de los primeros, les desarrolla la capacidad de integrar asignaturas de ciencias básicas con asignaturas de la rama clínica.

Siguiendo esta línea comparativa de la EBP respecto a una enseñanza tradicional, entre los resultados de McCarthy (2005) nos permitimos destacar los siguientes puntos: (**a**) los estudiantes aprovechan mucho más un curso enmarcado en la EBP por el papel que juega en sí esta estrategia metodológica, (**b**) el grado de compromiso del profesor con los estudiantes es mayor; con lo cual, (**c**) los estudiantes pueden profundizar más sobre el proceso de investigación en ciencias; y finalmente, (**d**) la EBP aporta grandes ventajas en la toma de decisiones cuando el profesor se plantea qué es más importante en la enseñanza: la metodología para enseñar o el contenido que se enseña, ya que la EBP permite combinar ambos aspectos. Nosotros hacemos énfasis en el último punto por la relación directa que guarda con el conocimiento didáctico del contenido, constructo del que hablaremos más adelante puesto que forma, junto con la EBP, la columna vertebral de este trabajo.

Como ya hemos mencionado, Savery y Duffy (1995) destacan cuatro aspectos a la hora de implementar la EBP y en este momento hablaremos del segundo: *generación o elección del problema*. Mowshowitz (2006) presenta unos resultados sobre la elección de algunos problemas para un curso básico o introductorio de biología molecular y muestra una reflexión sobre la efectividad de los mismos en cuanto al incremento del aprendizaje por parte de los estudiantes. Los problemas utilizados en el estudio de Mowshowitz (2006), ella los cataloga de *problemas avanzados*. La investigadora deja claro que desde que comenzó a enseñar el curso de *células y biología molecular*, no encontró problemas adecuados en cuanto al grado de dificultad, lo que le llevó a escribir sus propios problemas.

Aun cuando existen diversos tipos de materiales especializados para llevar a cabo una EBP en diversas ramas de las matemáticas, en el caso particular sobre enseñanza de la derivada para cursos de ciencias económicas, los resultados no fueron los esperados cuando indagamos al respecto. Este hecho nos estimuló para el desarrollo de nuestro trabajo. La creación de un material adecuado para poner en práctica la EBP no es tarea fácil. En este sentido, vale la pena señalar los tres aspectos que Mowshowitz (2006) toma en cuenta para el desarrollo y elaboración de sus problemas y que tomamos como base para el diseño y elaboración de nuestro material, estos son:

(**a**) Origen y uso de los problemas: pone de manifiesto que muchos de los problemas surgieron de las preguntas de exámenes, las cuales fueron cuidadosamente revisadas y discutidas con otros colegas durante años.

(**b**) Naturaleza de los problemas: la investigadora afirma que el objetivo principal de los problemas consiste en desarrollar un amplio aprendizaje en los estudiantes.

(**c**) Objetivos de los problemas: generalmente los problemas están basados en situaciones experimentales reales o inventadas.

Cuando los problemas son extraídos de vivencias experimentales, bien sean reales o no, el estudiante desarrolla un aprendizaje que le involucra directamente en el campo de la investigación y además los sumerge en su área de formación (Mowshowitz, 2006; White, 1993).

Hasta ahora hemos hablado de los orígenes de la EBP enmarcada en el área de la salud y la biología, pero es hora de pasar al terreno en el que se centra parte de este trabajo como es la educación matemática.

1.1.4.2. En matemáticas

Hablar de los orígenes de la EBP en el campo de la enseñanza de las matemáticas, vista como estrategia didáctica y como línea de investigación, tal como se hizo en la sección anterior, no resulta tarea fácil. Entre otras cosas porque a lo largo de la historia tanto en las matemáticas como en la enseñanza de las matemáticas, el término ***resolución de problemas*** es ambigua y ha sido empleado para referirse a todo lo que implique (aunque suene redundante) resolver problemas matemáticos, o bien para realizar la actividad en sí misma o como estrategia didáctica para enseñar un concepto matemático o no matemático. De hecho, los matemáticos se han centrado en resolver problemas para el desarrollo permanente de las matemáticas en toda su extensión. Tanto es así que Contreras (1998) en su tesis doctoral advierte sobre las distintas acepciones o significados que tienen tanto el término "*problema*" como la "*R-P*".

En este orden de ideas conviene diferenciar entre EBP y R-P en este trabajo aun cuando ambas actividades puedan ser vistas en la literatura como estrategias metodológicas dentro de la enseñanza de las matemáticas. En nuestro caso entendemos, *grosso modo*, la R-P como una actividad que va de la teoría a la práctica, es decir, dada una teoría matemática se procede a resolver problemas relacionados con esta teoría de manera que estos problemas permitan profundizar en la comprensión de un concepto y al mismo tiempo estudiar las aplicaciones de esta teoría matemática en otras ciencias o en las propias matemáticas; otro aspecto importante de la R-P es el de adquirir y consolidar técnicas de resolución, destacando así la importancia de la R-P como actividad didáctica que permite afianzar conocimientos (Roanes, 1997).

Dicho de otra manera, la R-P es una metodología didáctica mediante la cual el estudiante debe enfrentar una situación (el problema) que no le es familiar, valiéndose de una teoría adquirida previamente que debe utilizar y aplicar para solventar esta situación (Krulik y Rudnick, 1989). Por ejemplo, Vila y Callejo (2004), para diferenciar una actividad de otra, las llaman de igual manera resolución de problemas, pero vistas según el interés o necesidad del profesor, bien *como objeto* (R-P), o bien, *como herramienta de aprendizaje* (EBP). En este orden de ideas, mostramos las diferencias en un sentido y en otro:

> Los problemas se pueden proponer a los alumnos persiguiendo diversos objetivos como desarrollar estrategias y procesos generales o específicos del pensamiento matemático, o motivar y hacer significativa la introducción de una noción. En el primer caso, la RP es objeto de aprendizaje y hablamos de "aprender a resolver problemas" o a "pensar matemáticamente". En el segundo caso, la RP es instrumento o herramienta de aprendizaje y hablamos de "aprender resolviendo problemas".
>
> (Vila y Callejo, 2004, p. 165)

En este sentido podemos afirmar que la EBP y la R-P no sólo tienen mucho en común en la literatura, sobre todo porque la segunda forma parte de la primera, sino que una actividad u otra va a estar marcada no precisamente por el nombre con que se etiquete a la misma; en todo caso será el enfoque que se le dé al problema y en qué momento del currículo aparece el mismo lo que nos permitirá decir si estamos hablando de EBP o R-P a secas. Según Vila y Callejo (2004) los problemas pueden tener varias connotaciones dentro del proceso de enseñanza-aprendizaje, una de ellas consiste en mostrar un *problema como instrumento de aprendizaje* o de enseñanza; en este caso, ellos opinan:

> Cuando el profesorado propone una situación problema pretende que el alumnado construya los conocimientos, modelos o procesos matemáticos necesarios para resolver el problema. O sea, aquí el problema se constituye en *instrumento* en tanto en cuanto es el motor para indagar en un nuevo campo de conocimiento o profundizar en uno ya conocido. No se busca tanto la funcionalidad como la construcción del saber.
>
> (Vila y Callejo, 2004, p. 157)

Ahora bien, así como dijimos lo que significa en este trabajo la R-P, de forma general, daremos una aproximación personal de la EBP, en este caso la entendemos como una estrategia didáctica para la enseñanza de las matemáticas, pero que a diferencia de la R-P en la que se imparte una teoría previamente, la EBP la entendemos como una actividad que permite la construcción de una teoría a partir de una serie de problemas cuidadosamente planteados (García *et al.*, 2006b). Por su parte, DeLoach (2001) considera que la enseñanza de las matemáticas basada en problemas aproxima al estudiante, tanto al trabajo colaborativo como al desarrollo cognitivo por medio de problemas reales y ambiciosos desde el punto de vista didáctico, llevando además al alumno a plantearse él mismo sus propias preguntas.

Pero como el tema que nos ocupa es el origen de la R-P dentro del campo de la educación matemática y más específicamente la EBP como estrategia didáctica para la enseñanza de las matemáticas en cursos de universidad, tomaremos como referencia el artículo de Kilpatrick (1985) en el que hace una revisión de los últimos veinticinco años sobre investigaciones realizadas referente a la enseñanza de las matemáticas y la R-P, con lo cual estaríamos hablando del final de los años 1950's. En este caso, coincidimos con el autor en comenzar citando a George Pólya, entre otras cosas, por lo harto conocido que significa Pólya en el mundo de la R-P en matemáticas y también porque es la época en la que Jeremy Kilpatrick enseñaba por primera vez un curso de matemáticas para bachillerato y, al mismo tiempo, atendía un curso de maestría en educación en la Universidad de California.

Es George Pólya con su obra *How To Solve It*, tal vez, el primer autor que escribió un libro de texto sobre R-P, y aunque el mismo data de 1945, es un libro que sigue siendo una buena referencia para esta actividad. El mismo Kilpatrick, en 1958, comenzó a interesarse en el tema debido a las dificultades pedagógicas que suponía para los estudiantes los problemas de palabras que se discutían en un curso básico de álgebra (Kilpatrick, 1985).

Otro autor que también destaca la obra de Pólya y que bien merece la pena sacar a colación por su indiscutible trayectoria dentro de la R-P es Alan Schoenfeld. Después de quedar cautivado con el libro de Pólya, *How To Solve It*, Schoenfeld se interesó en la R-P por dos razones fundamentales; la primera, porque quería dar respuesta a la pregunta: "*¿qué significa pensar matemáticamente?*", y en segundo lugar, *cómo se puede ayudar a los estudiantes a pensar matemáticamente* (Schoenfeld, 1985).

Sin embargo, lo dicho hasta ahora está directamente relacionado con la R-P en sí misma, no queriendo decir con esto que la R-P no sea una estrategia didáctica para la enseñanza de las matemáticas; sólo que reiteramos lo antes dicho, esto es, entendemos la R-P (a secas) como una estrategia para afianzar o reforzar una teoría que se está estudiando o ya estudiada. De hecho, respetando y tomando en cuenta todo el aporte que han dado los investigadores sobre R-P durante los años siguientes a las fechas antes citadas, damos un salto hasta 1989, año en el cual la *National Council Teachers of Mathematics* consideró que la R-P fuese tomada en cuenta entre los estándares para la enseñanza de las matemáticas (NCTM, 1991); sin embargo, en este documento se habla de manera indistinta cuando se refiere a la R-P; en el primer caso, como actividad posterior a una teoría adquirida y, en el segundo, como herramienta para generar aprendizaje de un contenido:

> ...como [la] aplicación de los conocimientos previamente adquiridos y de los métodos, los algoritmos o los procedimientos rutinarios propios de un dominio conceptual...
>
> ...para que los aprendizajes que se institucionalicen sean los que se pretenden enseñar...
>
> (NCTM, 1991, p. 11, traducción realizada por el autor.)

Otros autores destacados y que han realizado un aporte significativo dentro de la investigación sobre la R-P en el campo de las matemáticas son Luis Puig, José Carrillo y Luis Carlos Contreras entre otros. En Puig (1996), por ejemplo, el autor nos muestra algunos resultados sobre la experiencia vivida en un curso de R-P en el marco de la enseñanza universitaria para estudiantes de futuros profesores de matemáticas; en este caso la R-P es planteada como actividad cognitiva en sí misma, es decir, se busca que el futuro profesor de matemáticas aprenda a resolver problemas y todo lo que implica organizar y desarrollar un curso de R-P con sus estudiantes.

Por ejemplo, Puig (1996), siguiendo los estándares del NCTM (1991), destaca cuatro características sobre el papel de la R-P en el currículo y que mencionamos a continuación: como contenido prioritario, *como medio de aprendizaje y refuerzo de contenidos*, *como método más conveniente para aprender matemáticas* y como aplicación. Sin duda alguna ponemos nuestra lupa en el segundo y tercero, puesto que son dos características fundamentales de la EBP.

Más adelante Puig (1996) desarrolla su trabajo en un espacio muy próximo al nuestro, esto es, relacionado con cursos de matemáticas de universidad; y además, cómo se puede "jugar" con los problemas en la clase, hecho clave dentro de la EBP, puesto que la elección, modificación (según sea el caso), presentación y discusión del problema son elementos fundamentales que el docente debe tener siempre presente para el diseño curricular de un curso enmarcado en la EBP (Forsythe, 2002).

Por su parte Contreras (1998), en su tesis doctoral, realiza un estudio exhaustivo sobre la resolución de problemas; el cual lo divide en cuatro apartados y que nosotros haremos mención a los tres primeros: *¿qué es resolver problemas*?, *¿cuál es el papel de la resolución de problemas en el currículo*? y *¿cómo usan los profesores la resolución de problemas en el aula*?, siendo las dos últimas de particular interés para nosotros; ya que los currículos, en general, suelen hablar de manera superficial o genérica del término, dejando al profesor la libertad de aplicarlo de acuerdo a los intereses metodológicos de éste.

Cuando Carrillo (1996) estudia los tipos de problemas, advierte que existen "*muchísimos*" criterios para clasificar los problemas. No obstante, este autor habla de una clasificación de problemas muy general, una clasificación que guarda relación directa con las dos preguntas que resaltamos en el párrafo anterior, puesto que por un lado habla de la *intencionalidad* con la que están enunciados los problemas o, en el otro caso, según la *procedencia* de los problemas. Si nos centramos en el primer tipo, podemos observar que si un problema es incluido en un currículo es porque tiene un propósito didáctico justificado y el cómo debe ser implementado en el aula depende del profesor.

El mismo Contreras (1998), cuando estudia los distintos significados de la R-P en el aula, hace mención a Hatfield (1978) quien categoriza esta actividad dentro del aula desde tres perspectivas o tipos diferentes:

1. *Teaching for Problem Solving*.
2. *Teaching about Problem Solving*.

3. ***Teaching via Problem Solving***.

Según Contreras (1998), este tercer tipo (resaltado por nosotros) se puede interpretar como el uso de la R-P como herramienta evolutiva de enseñanza de las matemáticas por medio de la R-P. Característica de la R-P que está en sintonía directa con el esquema que le queremos dar en este trabajo y que se aproxima a lo que nosotros entendemos como EBP. También este *tipo* se identifica con lo dicho por Carrillo (1996) en las memorias de su tesis doctoral, desarrollada con profesores de matemáticas de secundaria.

> **LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS** no es sólo una necesidad surgida por el crecimiento del conocimiento, **ES TAMBIÉN UNA OPCIÓN METODOLÓGICA** [de enseñanza].
>
> (Carrillo, 1996, `http://www.uhu.es/luis.contreras/tesis2/CAPS/CAP3.HTM`)

En la cita anterior se habla de forma general de la R-P como *opción metodológica*, algo que no es de extrañar en la literatura en didácticas de las matemáticas, pero Codina y Rivera (2001) dejan ver que ya hay documentos que comienzan a mostrar la implementación, en los nuevos currículos, de una enseñanza basada en problemas.

> En los recientes cambios curriculares, se puede observar a nivel de documentos, cómo la instrucción basada en la resolución de problemas está siendo incorporada como eje que vertebra la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas.
>
> (Codina y Rivera, 2001, p. 125)

Otro aspecto que destaca Contreras (1998) es el papel que le otorgan los profesores, en el aula, a la R-P; en este apartado el autor saca a colación el papel de las creencias del profesor de matemáticas a la hora de implementar la R-P en el aula. Ya en trabajos como los de García (2004) y Moreno (2000) se estudiaron las creencias del profesor de matemáticas y el papel de éstas en el proceso de enseñanza, ya que las mismas juegan un rol importante a la hora de seguir una clase y todo lo que ello significa. Aun así, no es suficiente que el profesor tenga unas concepciones y creencias "apropiadas" (Cooney, 1985) para poner en funcionamiento un proceso de enseñanza enmarcado en la R-P; es necesario además, la posición del profesor respecto al nivel de protagonismo que estos otorgan a la R-P, el rol que juegan los alumnos para ellos y los objetivos que estos persiguen en un curso enmarcado en esta metodología, entre otros.

Ahora bien, sobre el papel que pueda otorgarle el currículo y, en particular, el profesor de matemáticas a la R-P en el aula, hacemos énfasis; ya que si bien resulta un "*procedimiento didáctico*" que permite un mejor rendimiento respecto a otras metodologías de enseñanza de las matemáticas, para que la R-P alcance un nivel de efectividad óptimo en lo que a materia de enseñanza se refiere, esta debe ser trabajada de forma exhaustiva en el aula. En otras palabras, el profesor de matemáticas, en ningún momento, puede entender la R-P como una actividad que consiste en proponer y corregir problemas al igual que lo hace cuando trabaja con ejercicios (Carrillo, 1996).

Hasta ahora no hemos dado una definición precisa de lo que es la EBP y en que se diferencia de la R-P, algo que dejaremos para el siguiente capítulo; sin embargo, no queremos cerrar esta parte del trabajo sin dejar de enfatizar que **un problema matemático que se lleva al aula y que está enmarcado en la EBP, tiene y debe jugar como principal papel el de servir como herramienta para generar una teoría matemática**; rol que no necesariamente juega un problema en la R-P vista de forma general.

1.1.4.3. En ciencias económicas

Consideramos justificado hablar de los orígenes de la EBP dentro de las carreras de ciencias económicas por dos razones fundamentales; en primer lugar, porque el tema central de nuestro trabajo es el conocimiento profesional del profesor que enseña matemáticas para carrera de ciencias económicas y el uso de la EBP como estrategia metodológica de enseñanza de las matemáticas. En segundo lugar, por el amplio desarrollo que ha tenido la EBP dentro de las carreras de economía y de administración de empresas en los últimos años.

Para muestra de nuestra afirmación haremos referencia a Gijselaers *et al*. (1995), ya que es un libro cuyo tema central es la EBP en el marco de la economía y la administración de empresas. Este libro es el resultado del gran auge que ha ganado la enseñanza de las ciencias económicas dentro de la educación superior y en consecuencia, la preocupación de los profesores por mejorar la calidad de la educación ajustada a la adquisición de conocimientos de acuerdo con las necesidades del profesional de hoy en día.

Por otra parte, mencionamos también la publicación electrónica *Handbook for Economics Lecturers*[8] el cual consta de cuatro secciones y haremos especial referencia a la primera sección ya que está relacionada con la enseñanza, y en particular con el trabajo de Forsythe (2002).

Para hablar con la mayor precisión sobre los inicios de la EBP en el campo de las ciencias económicas, citaremos a Win Gijselaers quien dice que:

> En los últimos diez años, el aprendizaje basado en problemas ha sido puesto en práctica, especialmente, en disciplinas que tradicionalmente han tenido una

[8] `http://www.economicsnetwork.ac.uk/handbook/`

> orientación hacia la profesión, como la medicina y el derecho. Durante este período, el aprendizaje basado en problemas ha adquirido una gran reputación en materia de innovación dentro de la educación superior[...] Más recientemente, el aprendizaje basado en problemas también ha sido visto como una alternativa de enseñanza atractiva para carreras que tienen una orientación académica natural (e.g. economía).
>
> (Gijselaers, 1995, p. 39, traducción realizada por el autor.)

Con lo cual podemos afirmar que la implementación de la EBP dentro las ciencias económicas a nivel universitario tiene poco más de quince años, algo si se quiere, relativamente nuevo; pero algo que se debe añadir a la cita anterior es que los profesores que trabajan en ciencias económicas y que utilizan la EBP como estrategia didáctica se manifiestan de manera favorable sobre esta metodología y ven respondidas las preguntas: ¿qué enseñar? y ¿cómo enseñar? (Gijselaers, 1995).

Tal vez, una de las razones que obligue a los profesores en economía y administración de empresas a sentirse a gusto con la EBP es la posibilidad que les ofrece ésta de darle el enfoque multidisciplinar que caracteriza a las ciencias económicas, un aspecto que cada vez es más frecuente dentro de los currículos de economía, dejando a un lado el enfoque lineal o monodisciplinar que tradicionalmente ha caracterizado la enseñanza en estas carreras (Milter y Stinson, 1995).

Por su parte, Forsythe (2002) dice que algunas universidades del Reino Unido que surgieron de la división ocurrida en 1992 en universidades e institutos politécnicos, han cambiado su modelo de enseñanza. Precisamente, en el campo de las ciencias económicas, se está enfocando la enseñanza hacia un conjunto o programas multidisciplinarios, donde la herramienta clave es la EBP. Si nos fijamos en las fechas a las que hacen referencia Forsythe (2002) y Gijselaers (1995), podemos observar que son bastante cercanas; con lo cual, esto nos permite tener una idea bastante próxima de la implementación de la EBP en carreras de economía y administración de empresas.

1.2. Contexto espacio-temporal

Tal como se indicó anteriormente, esta investigación tiene como protagonista al profesor universitario de matemáticas, concretamente al que enseña cálculo diferencial a estudiantes de las licenciaturas de ciencias económicas, administración de empresas y contaduría pública.

Como tema central, elegimos el objeto matemático derivada para el estudio del CDC del profesor de matemáticas en ejercicio. En cualquier caso no debemos olvidar que nuestro trabajo se centra en la enseñanza, de ahí el título del mismo. Dicho esto, es pertinente aclarar que los cursos de cálculo diferencial en los que enseñan estos profesores forman parte de las licenciaturas de Economía y Administración de Empresas y Contaduría Pública de la Universidad de Los Andes en Venezuela. En cualquiera de los casos, estas asignaturas se sitúan en el segundo semestre de los diez que conforman estas carreras.

Para desarrollar nuestra investigación hemos contado con cinco profesores de matemáticas (aunque originalmente fueron seis) con formaciones diferentes: tres licenciados en matemáticas (egresados de una facultad de ciencias) y dos en educación con mención en matemáticas (egresados de una facultad de educación); sin embargo daremos más detalles de los profesores participantes en el **Capítulo 3**.

1.3. Las preguntas de la investigación

El presente trabajo se deriva de una serie de inquietudes o preguntas que nos hemos planteado y que a continuación exponemos, dando origen a los objetivos que más adelante mostraremos.

1. En virtud de que los programas oficiales hablan de R-P, ¿hasta qué punto los profesores están preparados para asumir una enseñanza siguiendo esta metodología?

2. ¿El profesor de matemáticas imparte una enseñanza contextualizada?

    a) ¿El profesor posee un conocimiento disciplinar económico?

    b) ¿El profesor conoce el vínculo de los dos conocimientos disciplinares (matemático y económico)?

    c) ¿Qué conceptos económicos maneja?

3. ¿Es posible, a través de una propuesta didáctica enmarcada en la EBP, generar un espacio de discusión y reflexión con profesores de matemáticas de universidad? Como dato adicional, ¿la creación de este espacio nos podrá permitir hablar de formación profesional?

4. ¿Es posible, con el mismo material mencionado en el ítem anterior, estudiar de manera indirecta el CDC en general y, dentro de éste, la EBP en particular?

5. ¿Qué tipos de problemas plantea el profesor y qué persigue?

6. Qué aporta el seminario como:

    a) Metodología de recogida de datos.

    b) Actividad de reflexión sobre el conocimiento profesional del profesor participante.

1.4. Objetivos

Los objetivos del presente trabajo los hemos dividido en dos líneas bien definidas y diferenciadas; por una parte, partimos de una propuesta curricular cuyo material, después de su diseño y validación por expertos, fue discutido en un seminario con el fin de llegar a unos objetivos de carácter didáctico dentro de la enseñanza de las matemáticas y; por otro lado, utilizar el ya mencionado seminario para evaluar y valorar esta actividad como metodología de trabajo de formación de profesores de universidad, además de la evaluación de los instrumentos de recogida de datos.

1.4.1. Objetivos Metodológicos

A continuación señalamos los objetivos de tipo metodológico:

OM1 Evaluar la validez de los instrumentos de recogida de datos en investigaciones cualitativas sobre el conocimiento del profesor.

OM2 Evaluar el seminario, esta vez no como instrumento de recogida de datos, sino como espacio de trabajo y discusión por el valor formativo que pueda tener esta metodología de trabajo en aspectos como el desarrollo profesional del profesor de universidad.

OM3 Contribuir a la comunidad científica del área mediante el instrumento de análisis de datos y resaltar los elementos más importantes en materia de análisis.

1.4.2. Objetivos Didácticos

Entre los objetivos didácticos podemos destacar los siguientes:

OD1 Analizar el CDC de cada profesor a través de una propuesta curricular, la cual fue discutida en un seminario y complementada con cuestionarios y entrevistas. A partir de este análisis, determinar el perfil de cada profesor e intentar determinar la existencia de un perfil común entre los participantes.

OD2 Detectar hasta qué punto el profesor es consciente de las dificultades específicas de los estudiantes para abordar un determinado tema matemático y de las dificultades específicas de la enseñanza de los conceptos matemáticos relacionados con conceptos propios de otras áreas de conocimiento como la economía.

OD3 Indagar sobre el conocimiento disciplinar que poseen estos profesores sobre el cálculo diferencial en las ciencias económicas, así como las estrategias que siguen para la enseñanza del mismo.

OD4 Estudiar el papel del profesor frente a propuestas metodológicas alternativas para la enseñanza de las matemáticas, utilizando EBP.

OD5 Estudiar y profundizar en el CDC y, a partir de éste, aportar caracterizaciones del CDC en materia de las didácticas específicas.

OD6 Estudiar y profundizar en la EBP y, a partir de ésta, aportar caracterizaciones de la EBP y sus diferencias con la R-P, vista la primera como estrategia de enseñanza que busca estudiar una teoría a partir de problemas planteados en el aula.

OD7 Determinar la permeabilidad o algún cambio en los participantes a lo largo del seminario.

OD8 Validar el material discutido en el seminario de cara a su posible implementación en los cursos de cálculo diferencial de la Universidad de Los Andes, en las carreras de ciencias económicas.

1.5. Justificación personal de la investigación

Cada vez la investigación sobre la enseñanza universitaria centra más la atención de los investigadores y el caso de las matemáticas no es la excepción. En particular, estudiar el profesor de universidad, su conocimiento profesional, su planificación docente, las estrategias que sigue en el proceso de enseñanza-aprendizaje, es un tema clave que nos permite conocer con detalle la enseñanza que se imparte en nuestras universidades y cómo se imparte.

Por otra parte, nos hemos referido en líneas anteriores al proceso de cambio que se viene gestando dentro del sistema educativo universitario a nivel europeo y mundial, es por ello que no sólo consideramos esto como una justificación de nuestra investigación, sino que consideramos oportuno y conveniente el desarrollo de una investigación como ésta, que redunde no sólo en el campo científico sino también en el campo docente universitario como punto de reflexión para todos los profesores que formamos parte del sistema educativo de enseñanza superior.

1.6. A modo de resumen

De lo dicho hasta ahora se pueden resaltar aspectos o preguntas como ¿para y por qué esta investigación? A éstas respondemos en líneas generales que, en primer lugar, se busca contribuir al desarrollo de la comunidad científica relacionada con el área, así como el aporte que pueda significar este trabajo dentro del Departamento de Matemáticas de la Universidad de Los Andes. Por otra parte, a través del mismo, podemos conocer situaciones concretas de este Departamento en cuanto al proceso enseñanza-aprendizaje del cálculo diferencial en relación con las carreras objeto de este estudio.

Para tal fin, partimos de investigaciones previas relacionadas con este trabajo; como son el caso de Bolívar (2005), **García** (**2004**), Badillo (2003), Deulofeu (2002), Marcelo (2001, 1999, 1992), Moreno (2000), Carrillo (1996), Flores (1998), Llinares (1998, 1992), Puig (1996), Schoenfeld (1985), Pólya (1984), entre otros y de los cuales se habló en el **Apartado 1.1**. Ahora bien, tal como se dijo al inicio de este capítulo, el trabajo en cuestión fue desarrollado dentro del Departamento de Matemáticas de la Universidad de Los Andes por nuestra relación directa con el mismo y los temas elegidos tanto matemático (la derivada) como la enseñanza de la derivada en carreras de ciencias económicas, obedecen a la labor que ha destinado a ello por poco más de diez años el autor de esta memoria. Por tanto, queremos resaltar que el presente trabajo queda enfocado hacia el profesor de matemáticas de universidad, su conocimiento didáctico del contenido y la enseñanza de las matemáticas basada en problemas. En este sentido, el conocer, de alguna manera, a los participantes, los programas oficiales de la asignaturas y el trabajo desarrollado en García (2004), entre otros nos permitió dar pie al desarrollo de esta investigación.

En la página siguiente presentamos una visión esquemática (**Figura 1.1**) que resume el diseño y desarrollo de la investigación[9]. Tal como lo hemos señalado, el **antecedente principal** de nuestro proyecto es el trabajo de García (2004), ya que quedaron preguntas por responder y, al mismo tiempo, nos abrió

[9]Este cuadro está diseñado para ser leído de abajo hacia arriba, ya que consideramos que es la manera natural de presentar la evolución del presente trabajo. El color difuminado de las flechas gruesas indica que a medida que avanzamos se va aclarando el "panorama".

el camino hacia nuevos intereses más concretos. Estos aspectos hacia los que nos inclinamos, CDC y EBP, son precisamente la **base teórica** de este trabajo.

En este orden de ideas nos planteamos **el problema** a investigar y para intentar resolver el mismo, nos formulamos una serie de **preguntas** de las que resaltamos las más importantes. Esta serie de preguntas nos condujeron a plantearnos unos **objetivos** de carácter *didáctico*. Para atender a estos objetivos diseñamos un **instrumento** constituido por tres piezas: un *material didáctico* enmarcado en la EBP (aplicado en un seminario), una serie de *cuestionarios* y una *entrevista*. Por medio de este instrumento se abordaron, principalmente, aspectos propios de la enseñanza y el aprendizaje. Como consecuencia del diseño del instrumento, nos planteamos *a posteriori* unos objetivos de carácter **metodológicos**.

La investigación aquí desarrollada sigue una **metodología** del tipo *cualitativa*, atendiendo al estudio de casos (un grupo de profesores de matemáticas de la Universidad de Los Andes - Venezuela). Por otra parte y siguiendo el proceso explicativo sobre el desarrollo de este trabajo, diremos que el *análisis de los datos* es de naturaleza descriptiva, exploratoria e interpretativa. Un desarrollo exhaustivo de la metodología que se siguió en el desarrollo de este trabajo se expone en el **Capítulo 3**.

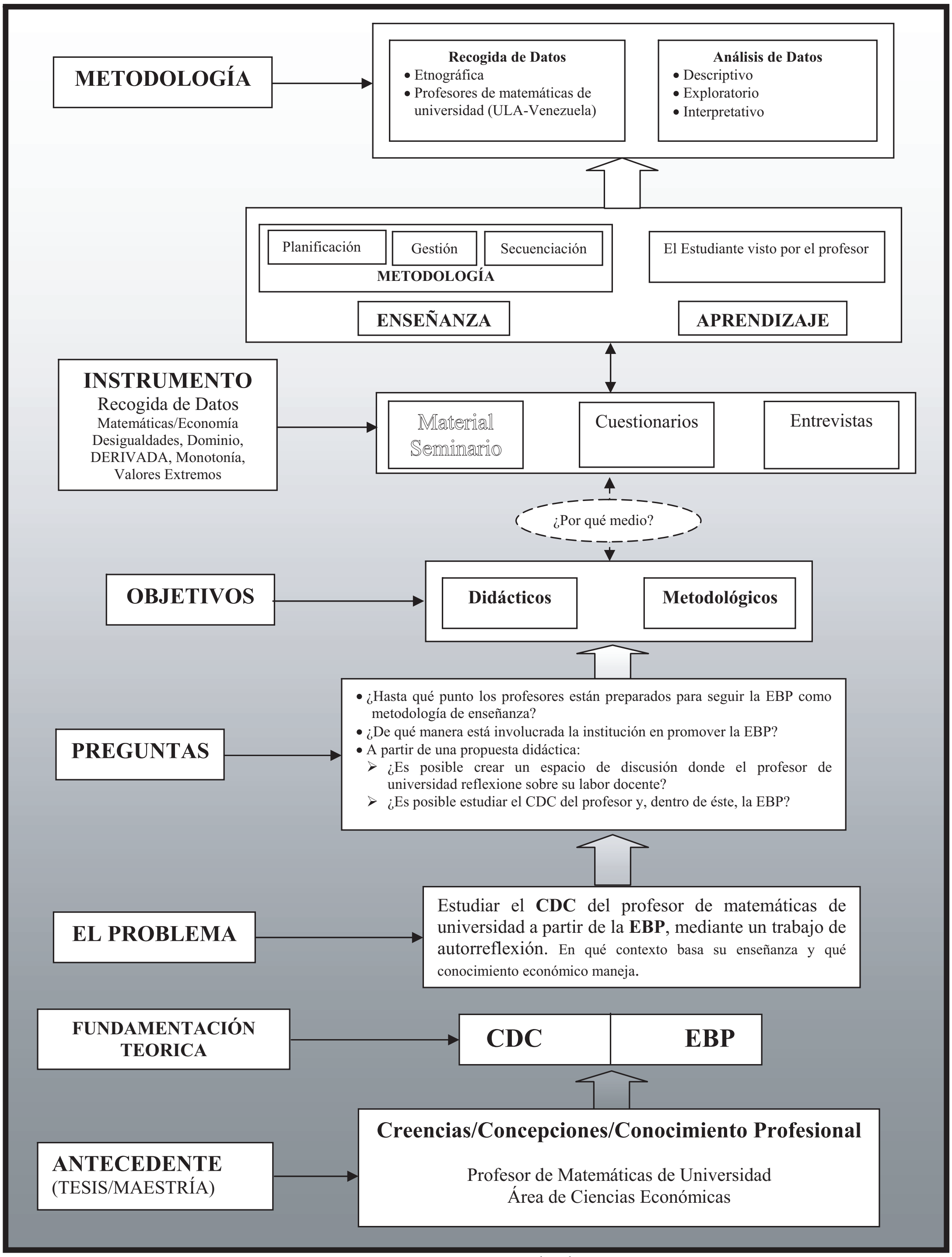


Figura 1.1: Diseño de la Investigación

Capítulo 2

Marco Teórico

Introducción

Comenzaremos por fundamentar nuestro marco teórico en aspectos generales del conocimiento profesional del profesor; en tal sentido, hablaremos de la formación de éste y del rol que juega dentro de la enseñanza universitaria. Por otra parte, hay que destacar el papel que juega el sistema de educación superior y, en particular, el profesor de universidad como objeto de investigación en la actualidad; de allí nuestro interés por estudiar al profesor de matemáticas de universidad y su Conocimiento Didáctico del Contenido (CDC) y lo que ello supone. Finalmente y dado que parte de nuestra investigación se centra en la enseñanza de la matemática basada en problemas (EBP) en cursos de cálculo para estudiantes de ciencias económicas y afines, concluimos este capítulo con algunos aspectos relacionados con esta línea dentro del área de la didáctica de las matemáticas a nivel superior.

2.1. La Enseñanza Universitaria como tema de investigación (EU)

No podemos dudar que la educación a nivel superior o universitario cada vez cobra más auge como tema de investigación tanto en didáctica como en sus distintas áreas que la conforman; aun así, aclaramos que sólo nos remitiremos al área de la enseñanza y lo relacionado con la didáctica de las matemáticas. Como muestra de la relevancia que viene cobrando esta línea de investigación, de la educación superior, remitimos los trabajos de: Knight (2006), relacionado con la formación del profesor; Zabalza (2003), que tiene que ver con las competencias del profesor; Biggs (2005), enmarcado en el aprendizaje o García-Valcárcel (2001a), quien trata, de forma general, la didáctica en la educación superior. Más aún, si atendemos a publicaciones como: la *Revista de la Educación Superior*[1], la cual es editada en México desde 1972, la *Revista Electrónica Interuniversitaria de Formación del Profesorado*[2], editada en España desde 1987 o la *Higher Education*[3], editada por la Springer-Verlag en Holanda desde 1972, podemos observar la evolución que ha tenido la educación universitaria como línea de investigación, así como las ramificaciones que se han derivado de la misma.

Sin embargo, nuestro interés por la enseñanza universitaria no obedece a que sea, precisamente, un tema de moda, en todo caso son otras las causas que nos inducen a explorar y trabajar en este campo; en primer lugar, el autor de esta memoria es profesor universitario de matemáticas y ha venido desarrollando de manera conjunta con sus directores un trabajo orientado en esta línea, más específicamente, en el profesor de universidad. Por otra parte, entendemos que hay una necesidad de atender y mejorar la educación superior y, en este sentido, Díaz (1999) justifica de manera contundente esta exigencia.

> La enseñanza en el nivel universitario es una práctica que requiere con urgencia ser asumida científicamente y con pertinencia social. Es decir, debe ser considerada como un «campo de estudio» que demanda mayores investigaciones, redefiniciones, validaciones y reconstrucciones teóricas para que como «práctica» pueda estar a tono con las exigencias de las transformaciones sociales, políticas, científicas y técnicas del nuevo siglo y, fundamentalmente, incidir en la calidad de profesionales y en la calidad de vida del tercer milenio.
>
> (Díaz, 1999, p. 108)

Como punto adicional que nos mueve a seguir esta línea de investigación, están los procesos de cambios que se vienen gestando dentro de la educación superior mundial y a los que no está exento el sistema universitario venezolano.

Ahora bien, para nosotros hablar de la *enseñanza* significa hablar del *profesor* como el "*especialista de alto nivel dedicado a la enseñanza y miembro de una comunidad académica*" (García-Valcárcel, 2001b), entre otros aspectos que lo caracterizan; sin embargo esto no deja de ser una visión, en exceso, general de lo que es un docente universitario. El profesor de universidad y, en particular, el profesor de matemáticas, usualmente no ha recibido una formación en didáctica[4], la cual; por lo general, es consecuencia de su experiencia personal, de lo visto en los libros de texto, del intercambio de opiniones con otros

[1]`http:www.anuies.mx/servicios/p\_anuies/publicaciones/revsup/index.html`

[2]`http:www3.uva.es/aufop/publica/revaufop.htm`

[3]`http:www.springerlink.com/content/102901/`

[4]En este caso nos referimos de manera concreta al profesor de universidad en Venezuela.

colegas o, como suele ocurrir en la mayoría de los casos, la docencia que éste imparte está influenciada por sus creencias y concepciones (Moreno, 2000), y sobre todo, por la manera como se le enseñó determinada asignatura (García, 2004). A lo anterior hay que añadir que su formación en otras áreas del saber depende fundamentalmente de su propio interés o necesidad; en el caso de las ciencias económicas, sus conocimientos se derivan de los libros de texto que en su momento han consultado para el tema de aplicaciones (García, 2004).

En este orden de ideas nos comenzamos a perfilar hacia el principal punto de interés como objeto de estudio del presente trabajo, es decir, el profesor de matemáticas que atiende cursos de cálculo diferencial en carreras de ciencias económicas. No obstante, no permitimos indicar que la línea de investigación que supone estudiar al docente universitario es muy amplia, ésta abarca aspectos como: desarrollo profesional y formación inicial y permanente (Knight, 2006; García-Valcárcel, 2001b), funciones del docente: administrativas, docentes, investigación y extensión (García, 2004), fundamentación disciplinar de la materia y estrategias metodológicas de enseñanza en sus distintos enfoques (Marcelo, 2001; Medina, 2001), evaluación de los aprendizajes (Biggs, 2005; Zabalza, 2001), entre otros.

Así, es el momento indicado para señalarle al lector el enfoque particular que hacemos sobre la universidad, aun cuando reconocemos que la universidad es un mundo más complejo de lo que a continuación indicamos. Para el caso que nos ocupa, entendemos la universidad como **una institución formadora de conocimiento y, a su vez, como generadora de recurso humano, de profesionales capacitados para desempeñar una función social y profesional, que tiene como uno de sus principales protagonistas al profesor universitario**.

Pero bien, como dijéramos en el capítulo precedente, nuestro trabajo se enmarca en la enseñanza de las matemáticas a nivel universitario. De manera más precisa, estudiamos el conocimiento profesional del profesor de matemáticas y dentro de ésta, el CDC y la EBP, recordando que la segunda juega un doble papel en este estudio; esto es, como metodología de enseñanza y como metodología de recogida de datos. En nuestro caso concreto, nos referimos a la formación profesional del profesor de matemáticas, y centraremos mucho más nuestra atención en el profesor de matemáticas para carreras como ciencias económicas, administración de empresas y/o contaduría pública, donde las matemáticas vienen a ser un **instrumento** imprescindible para el profesional de estas carreras. No obstante, la formación de éste y del profesor universitario en general es una "*actividad asistemática y con escaso rigor*" (García-Valcárcel, 2001b).

El motivo de resaltar la palabra instrumento en el párrafo anterior viene justificada en González y Gil (2000), quienes sostienen que para el profesional de las ciencias económicas *"el objetivo fundamental no consiste en emplear las matemáticas por sí mismas"* al igual que los físicos; por el contrario, éstas deben ser vistas como herramienta para *"estudiar y analizar una realidad concreta"*, razón por la cual las matemáticas y sus aplicaciones no deben ir por caminos disjuntos.

En este orden de ideas, ilustramos en la siguiente **Figura 2.1**, tomado de González y Gil (2000), la relación directa que guardan las matemáticas y las ciencias económicas.

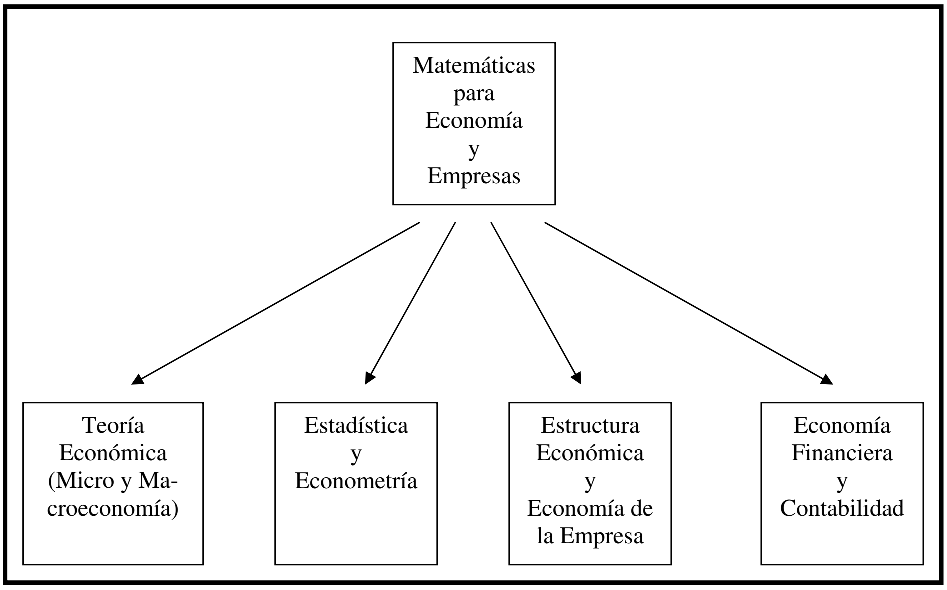


Figura 2.1: Matemáticas → Cc. Económicas

En este sentido, en las secciones subsiguientes desarrollaremos el CDC del profesor de universidad hasta caracterizar aspectos que le son más propios del profesor de matemáticas y, de igual manera, haremos un trabajo similar para la EBP.

2.2. Conocimiento Profesional del Profesor de Matemáticas

Antes de adentrarnos en uno de los temas centrales de esta memoria, nos detendremos brevemente a hablar del conocimiento del profesor de una manera general; caracterizando este conocimiento, para luego entrar de lleno en uno de los temas de nuestro interés, es decir, el CDC del profesor de matemáticas de universidad. Es así como, en primer lugar, comenzaremos por decir lo que es para nosotros, según el caso que nos ocupa, un profesor de universidad y, luego, hablaremos del *conocimiento* de éste.

Dado que pretendemos estudiar el CDC del profesor de matemáticas de universidad, veremos a éste, únicamente, en su plano docente, teniendo en cuenta que también es una persona dedicada a la investigación y, en algunos casos, a la gestión administrativa. Por lo tanto, para el caso de nuestro trabajo, seguimos a De La Orden (1987) en su visión del profesor visto como profesional de la docencia, quien manifiesta que "*el profesor universitario, en cuanto profesor, es una persona profesionalmente dedicada a la enseñanza, un profesional de la educación que necesariamente comparte con los profesores de otros niveles unas funciones básicas orientadas a que otras personas aprendan*". Para ello se vale de su *conocimiento*, el cual pone en práctica durante el proceso de enseñanza-aprendizaje.

Ahora bien, si entendemos el conocimiento desde el punto de vista filosófico, diremos que es el producto de una operación o actividad intelectual en la que el hombre adquiere saber, fundamentada en el razonamiento lógico. Más aún, con la adquisición de conocimiento se consigue entender las propiedades y funciones de las cosas, además de su valor objetivo para la práctica (Russ, 1999; DSF, 1965).

Pero demos un paso adelante y hablemos del profesor, es decir, del *conocimiento del profesor* y de su conocimiento como profesional de la enseñanza. Así y en otro sentido más acorde con nuestra investigación, mostramos la definición de *conocimiento del profesor* que ofrece Bodur (2003), aunque aclaramos al lector que no estamos conforme del todo por lo genérico del concepto, no obstante consideramos que es una buena aproximación de cara a nuestro interés.

> *Conocimiento.* El conocimiento se refiere al entendimiento que hemos convenido dentro de la comunidad escolar como una actividad que merece la pena y es válida. La definición operativa de "conocimiento" se refiere al conocimiento que se adquiere durante la formación de profesor respecto a una educación multicultural durante los cursos contemplados en el programa de educación básica.
>
> (Bodur, 2003, p. 8, traducción realizada por el autor.)

Si atendemos a esta visión del profesor, podemos darnos cuenta que Bodur se refiere al conocimiento del profesor de educación básica o primaria; el profesor de universidad, a diferencia del de bachillerato o niveles inferiores, por lo general no ha recibido formación alguna para la enseñanza, en este sentido podemos inferir que el profesor de universidad puede carecer de aspectos metodológicos de enseñanza, los cuales se fundamentan, principalmente, en sus creencias y concepciones sobre la docencia o en la forma como a ellos se les enseñó (García, 2004; Moreno y Azcárate, 2003).

Más aún, debemos hacer un inciso para recalcar que los profesores objeto de esta investigación proceden de dos carreras universitarias diferentes: unos son licenciados en matemáticas, formados en una facultad de ciencias y que, por ende, no recibieron formación alguna en didáctica; los otros son licenciados en educación, mención matemática, formados en una facultad de humanidades y educación y que, contrario a los primeros, sí han recibido formación en el campo de la enseñanza. En este orden de ideas y siguiendo a Bodur (2003), el conocimiento de este grupo de profesores no es ni podría ser el mismo, puesto que la formación de los mismos proviene de dos entornos o contextos bien diferenciados.

Pero bien, si la idea es definir y caracterizar el conocimiento profesional del profesor de matemáticas es cierto que debemos tomar en cuenta distintos elementos que conforman tal conocimiento. Algo en lo que queremos enfatizar en este trabajo es que queremos ver al profesor de universidad como un profesional de la docencia. Entonces, si nuestro trabajo se enmarca en el profesor de matemáticas de universidad es momento para aproximarnos al conocimiento de éste partiendo de las caracterizaciones hechas por Almeida (2002) y Moreno (2000) referidas al profesor de matemáticas de universidad como el profesional que es. De esta manera, Moreno (2000) caracteriza al profesor de matemáticas señalando que debe poseer o ser, según sea el caso:

> - Dedicación al estudio frente a la transmisión de información.
> - Profesional de la enseñanza por encima de todo.
> - Profesional reflexivo, crítico y competente en su disciplina.
>
> (Moreno, 2000, p. 35)

Por su parte, Almeida (2002) considera cuatro aspectos que deben ser considerados en la profesionalidad docente, los cuales deben formar parte del conocimiento del profesor de matemáticas de universidad, estos son:

- Actitud crítica.
- Contenido matemático.
- Contenido pedagógico-estratégico.
- Contenido didáctico.

En este sentido, podemos afirmar que los aspectos antes señalados y las características del profesor de matemáticas de universidad forman parte o están directamente relacionados con el conocimiento profesional de éste; tanto es así que Bromme (1988) identifica ocho categorías como componentes del conocimiento profesional del profesor de matemáticas, aunque no se refiere de manera específica a profesores de universidad:

- Conocimiento de matemáticas.
- Conocimientos curriculares, los cuales están descritos en los planes de estudio y codificados en los libros de texto y otras herramientas didácticas.
- Conocimiento sobre la clase. La materia explícitamente transmitida por el profesor.
- Conocimiento sobre lo que los alumnos aprenden.
- Metaconocimientos, los cuales definen el marco de orientación en el que se valoran los conocimientos y su relación con la propia profesión.
- Conocimientos sobre didáctica de la asignatura. La estructura lógico-matemática de la asignatura no permite por sí misma decisiones.
- Conocimientos pedagógicos. Nos referimos al campo de los conocimientos que son válidos con relativa independencia de la asignatura.

(Bromme, 1988, pp.25-26)

Por su parte, Rico (1998) refiriéndose al profesor de matemáticas de secundaria a través de su conocimiento profesional afirma que "*al ejercicio como profesor de matemáticas de secundaria se llega con una formación inicial descompensada*", si esta formación inicial sólo la entendemos desde el punto de vista didáctico es un aspecto que también es válido para el docente universitario como lo señalamos anteriormente, algo que no vale si hablamos desde el punto de vista del contenido o la disciplina a enseñar. Ya que el profesor de matemáticas de universidad al momento de ingresar como miembro del cuerpo profesoral realiza una oposición exhaustiva en la que el contenido matemático es el protagonista principal de esta prueba.

Por otro lado Porlán y Rivero (1998) en su trabajo sobre el conocimiento de los profesores, y que nosotros intentamos adaptarlo al profesor de matemáticas de universidad, sostienen que es un conocimiento que está en conexión directa con la práctica, el cual debe adaptarse a situaciones o áreas científicas determinadas. Así, nuestra definición de conocimiento profesional del profesor de matemáticas que seguiremos en este trabajo es el que mostramos a continuación; ya que, como lo señalamos en el capítulo anterior, nuestro interés en este trabajo se fundamenta en el estudio del conocimiento del profesor en relación con su labor docente y en la que destacamos: las dificultades que presentan sus estudiantes en el aula al abordar un tema matemático, sobre el contenido matemático en relación con otros contenidos disciplinares, así como el conocimiento sobre metodologías de enseñanza, entre otros.

***El conocimiento profesional del profesor de matemáticas*, al igual que otros profesionales como por ejemplo el de los médicos o los ingenieros, es un tipo de conocimiento *científico-práctico*, especializado y dirigido a la intervención en ámbitos sociales determinados o concretos (Porlán y Rivero, 1998). Éste debe agrupar todas las creencias, concepciones (García, 2004), saberes y experiencias que un profesor tiene y que pone en práctica durante**

su función como docente (Jiménez y Wamba, 2004) a partir de la reflexión constante de esta labor. Más aún, este conocimiento exige adaptarse a las condiciones del entorno, de los estudiantes, de contextos y áreas específicas de interés propias de las matemáticas o afines a éstas, según sea el caso (Porlán y Rivero, 1998).

Si a lo anterior le añadimos, basándonos en Blanco *et al*. (1995), que un profesor en ejercicio es un profesional que reflexiona constantemente, toma decisiones, posee creencias y concepciones, fija posiciones y entendemos que todo esto conforma una estructura que cambia según el escenario en el que se encuentre el profesor, bien sea por los estudiantes o los lineamientos que sugiere la institución; entonces, el profesor no debe ser visto como un técnico o conocedor de un oficio en el que se aplican un conjunto de recetas aprendidas y estandarizadas.

Entre el párrafo anterior y la definición que le precede nos permiten entender el conocimiento profesional como algo en constante cambio y que obliga a la toma de decisiones, el cual se desarrolla en el orden en que se generen nuevos espacios de discusión y reflexión en los que intervengan los alumnos (aula de clase), colegas del área (profesores de matemáticas con cursos comunes o afines), colegas de otras áreas (profesores de otras áreas no matemáticas pero con afinidad a éstas). No obstante, esta definición está en directa consonancia con lo que Porlán *et al*. (1998) definen como *conocimiento profesional deseable o ideal*.

> El conocimiento profesional deseable es un conocimiento «interesado», puesto que **contiene determinadas actitudes y valores encaminadas a la transformación del contexto escolar y profesional**.
>
> (Porlán *et al*., 1998, p.271, el resaltado es nuestro)

Tal como dijimos arriba, el profesor de universidad en su labor como docente se enfrenta a la toma de decisiones antes, durante y después de la clase, por lo tanto existe una importante conexión entre el *conocimiento profesional* y la *formación continua* o permanente del profesor (Porlán y Rivero, 1998). En consecuencia, este conocimiento debe estar estructurado por un conjunto de "*teorías prácticas*" que comprenden entre otras: los objetivos de la educación, el proceso de construcción del saber y el seguimiento de dicho conocimiento.

En resumen, caracterizamos el conocimiento profesional del profesor de matemáticas de universidad como una estructura que supone:

- Dominio del contenido matemático y su relación con conceptos.
  - De las mismas matemáticas.
  - De otros contenidos disciplinares (Biología, Física, Ingeniería, Economía, entre otras).
- Manejo robusto de la enseñanza y sus componentes.
  - Planificación docente y toma de decisiones.
  - Psicopedagogía.
  - Administración y gestión de la clase.
  - Conocimiento y manejo sobre el material de apoyo para enseñar (libros de texto y otros materiales didácticos).
- Conocimiento y capacidad de discernir sobre el aprendizaje de los alumnos.
  - Conocer características de los estudiantes (errores, actitudes, ventajas).
  - Alcance y profundidad de los conocimientos adquiridos.
  - Evaluación.
- Conocimiento del contenido curricular.
  - Conocimiento sobre qué enseñar.
  - Conocimiento tanto de los programas como de los libros de texto.
- **Conocimiento didáctico del contenido**.
- Conecta el conocimiento matemático propiamente y el conocimiento que el profesor imparte a sus alumnos.
- Conocimiento científico-práctico.
- Agrupa concepciones y creencias sobre las matemáticas y su enseñanza.
- Capacidad de reflexión sobre la actividad docente.
- Conocimiento del contexto.

Por supuesto que todas estas características no dejan de mostrar una visión muy general sobre el conocimiento profesional, algo que resulta excesivo e inmanejable si quisiéramos estudiar todos estos aspectos particulares del profesor. Es por ello que seguimos en la idea de ir moviendo nuestro zoom hacia el tema de nuestro proyecto; esto es, el conocimiento del profesor puesto en práctica mediante su labor docente, específicamente, en el contexto de las matemáticas económicas. Visto de otra manera, nos proponemos indagar sobre los *saberes* y *experiencias* que el profesor posee (conocimiento teórico) y cómo hace uso de ellos durante la docencia que imparte (experiencia práctica), cómo transforman ese conocimiento en una enseñanza provechosa para sus alumnos.

En este sentido, consideramos que el marco ideal para abordar lo inmediatamente expuesto es el conocimiento didáctico del contenido ya que en palabras de uno de sus precursores, lo define como "*una amalgama especial de contenido disciplinar y pedagogía*" (Shulman, 2005), concepto que concreta Marcelo (2002):

> Representa la combinación adecuada entre el conocimiento de la materia a enseñar y el conocimiento pedagógico y didáctico referido a cómo enseñarlo.
>
> (Marcelo, 2002, p. 53)

Pero qué es y qué contempla realmente el CDC y, más aún, qué aspectos de aquellos que componen este conocimiento tan particular estudiaremos nosotros en el profesor de matemáticas de universidad. A estas preguntas responderemos en el siguiente apartado.

2.3. Conocimiento Didáctico del Contenido (CDC)

En primer lugar diremos que como área de interés en el campo de la investigación educativa, el CDC simboliza "*la confluencia de esfuerzos de investigadores didácticos con investigadores de* ***materias específicas***[5] *preocupados por la formación de analogías y metáforas*" (Marcelo, 2002), ya que es posible que la enseñanza sufra cambios significativos según la materia que se enseñe. En tal sentido, lo que se busca estudiar mediante el CDC son las relaciones entre el conocimiento que posee el profesor de una disciplina específica con la manera de enseñarla, ya que guardan una estrecha relación (Climent, 2002).

Los trabajos recientes enmarcados en el CDC se han inclinado fundamentalmente por investigar la enseñanza de contenidos disciplinares específicos, entre los que destacan las matemáticas, la química, la física y la educación física, entre otras áreas[6]. En el caso de las matemáticas destacamos a Climent

[5]En el caso que nos ocupa trabajamos con profesores de matemáticas que enseñan en cursos de cálculo para estudiantes de ciencias económicas. En particular, estudiaremos algunos aspectos sobre la enseñanza de la derivada en un marco muy particular, como es la relación entre este concepto matemático y el campo de las ciencias económicas.

[6]Estos datos se pueden verificar tanto en la base de datos ERIC:
http://www.eric.ed.gov/) como en el Google Académico (http://scholar.google.es/

(2002), Contreras (1998), Badillo (2003), An *et al*. (2004), Kahan *et al*. (2003), Llinares (1998), Blanco *et al*. (1995), entre otros. Pero si atendemos a los trabajos de las distintas áreas del conocimiento, podemos notar que los mismos tocan temas particulares dentro de estos contenidos; los cuales, además, se ocupan en su mayoría de trabajar con profesores en formación y más aún, son contadas las investigaciones que estudian al profesor de universidad y en ninguno de los casos al profesor de matemáticas para cursos de cálculo a estudiantes de ciencias económicas, situación que viene a darle un significado muy particular a este trabajo en el área de la educación matemática.

Pero retomemos las preguntas formuladas al final del apartado anterior:

¿Qué es y qué contempla el CDC como constructo vinculado al profesor?

Comenzaremos por la definición de CDC de Veal y MaKinster (1999), quienes dicen que es una estructura con características particulares que le permite al profesor *transferir* a sus estudiantes el conocimiento que este tiene sobre un contenido disciplinar. Esta estructura contiene las diversas maneras de representar ideas, analogías, ejemplos adecuados, ilustraciones y explicaciones, tanto de forma verbal como escritas, de forma que la transferencia del conocimiento se haga comprensible a los estudiantes.

En este sentido, podemos entender el CDC como un conocimiento práctico con el que el profesor persigue, mediante estrategias metodológicas diversas, hacer que el estudiante capte y aprenda un contenido disciplinar. Todo esto visto como una sola pieza de la didáctica.

Por otra parte Reyes y Gárritz (2006) dan una definición de CDC enmarcada en profesores universitarios que trabajan el concepto de *Reacción Química*; ellas comienzan haciendo hincapié en que se debe distinguir el CDC del conocimiento pedagógico general, tomando en cuenta que en este último se incluyen los fundamentos genéricos de organización y dirección en el aula de clases, las teorías generales y métodos de la enseñanza. También destacan que un aspecto significativo a tomar en cuenta en el CDC es que el profesor conozca al máximo sobre el *conocimiento previo* (An *et al*., 2004) de sus estudiantes, en particular, sobre las "*concepciones alternativas de los estudiantes*[7]". Esto recalca que:

[7] A las respuestas contradictorias con los conocimientos científicos vigentes, ampliamente extendidas, que se suelen dar de manera rápida y segura (apenas se dejan contestaciones en blanco), que se repiten insistentemente y que se hallan relacionadas con determinadas interpretaciones de diversos conceptos científicos, se las denomina frecuentemente errores conceptuales y a las ideas que llevan a cometerlos **concepciones alternativas** (porque realmente responden a la existencia de ideas muy diferentes a las ideas científicas que queremos enseñar). Esas ideas alternativas son las que en las cuestiones anteriores llevan a contestar mayoritariamente de forma coherente con ellas y constituyen un serio obstáculo para el aprendizaje de las ciencias (Carrascosa, 2005, pp. 186-187. El resaltado es nuestro).

> [...] el conocimiento de una disciplina [por parte del profesor] se vuelve infructuoso si no se consideran los puntos de vista acerca del contenido que tienen los estudiantes.
>
> Diversos estudios han demostrado la necesidad de esta relación entre el conocimiento profundo de la disciplina y de las ideas previas de los estudiantes.
>
> (Salazar, 2005, p. 5)

Más aún, la manera de desarrollar el CDC de los profesores expertos de universidad es *transformar* el conocimiento del contenido disciplinar en esquemas o formas que sean más comprensibles a sus alumnos, adaptándolo al contexto del tema específico que se esté desarrollando. En este sentido, lo que se ha vuelto crucial en este tipo de investigación es *"la importancia de la relación entre lo que los profesores piensan y cómo lo enseñan"* (Reyes y Gárritz, 2006).

Si tratamos de enlazar lo que sostienen Veal y MaKinster (1999) con lo que afirman Reyes y Gárritz (2006) y Salazar (2005); pero, además, adaptado al contexto matemático, llegamos a que este conocimiento exige, entre otras cosas, que el profesor de matemáticas: tenga claro los conceptos, imágenes, estructuras y planteamientos básicos vinculados a un tema (en el caso de la derivada: el concepto de límite, las distintas interpretaciones de la derivada, los conceptos de monotonía y valores extremos, etc.); pero que además sepa identificar en sus estudiantes las dificultades y errores conceptuales que enfrentarán estos (problemas con las reglas de derivación, como por ejemplo las del producto, cociente o de la cadena), así como lo que esto signifique en su aprendizaje. Este conocimiento también reclama al profesor que, **mediante actividades o estrategias metodológicas**[8], el estudiante pueda identificar y discernir sobre sus ideas previas.

En otro orden de ideas, Talanquer (2004), en su trabajo con profesores de química, habla sobre distintas acepciones o puntos de vista sobre el CDC como por ejemplo:

1. Es el resultado de la aplicación del conocimiento didáctico y pedagógico de carácter general a la enseñanza de una disciplina en particular.
2. El desarrollo del CDC ocurre, principalmente, a través de la experiencia y la práctica en el aula.
3. En otro contexto, sostiene que el CDC debería ser el eje central en el diseño curricular en los programas de formación profesional, procurando el

[8]La idea de resaltar esta frase es por el hecho de estar plenamente en consonancia con la metodología aplicada en nuestro proyecto, ya que la implementación del seminario se identifica con las actividades mencionadas.

análisis y la reflexión en espacios integradores así como la discusión del contenido disciplinar desde el punto de vista didáctico-pedagógico.

Si este tipo de conocimiento tiene una clara influencia en la eficacia del docente en el aula, resulta interesante tratar de identificar de qué manera el CDC determina la forma de pensar del docente, las decisiones que toma, y las acciones que emprende en el salón de clases. Sin embargo, un punto en el que Talanquer (2004) enfatiza y coincide con Reyes y Gárritz (2006) y Salazar (2005) es sobre el conocimiento que el profesor debe tener en relación con sus estudiantes. Algo que queda explícito en estos párrafos anteriores es que el estudiante juega un papel fundamental en el CDC del profesor, tanto es así que los autores antes citados hacen especial hincapié en las concepciones alternativas y; en general, a todo el conocimiento con el que el estudiante llega al curso, además de la actitud de este último respecto a determinados conceptos o situaciones propias de la materia a estudiar.

En este orden de ideas nos permitimos afirmar que **conocer** al estudiante es un paso crucial para mejorar la enseñanza de las matemáticas o de cualquier disciplina, ya que el profesor puede planificar y tomar decisiones a partir de lo que éste conozca de sus alumnos.

Por lo tanto y con lo dicho hasta ahora caracterizamos el CDC del profesor en general.

- Conocimiento del contenido disciplinar.
    - Conocimiento y dominio de conceptos, imágenes y estructuras básicas.
    - Conocimiento con otros contenidos disciplinares.
- Conocimiento sobre la enseñanza (metodología para hacer y construir conocimiento).
- Vincula de manera significativa los dos anteriores.
- Posee estructura de transferencia de conocimiento mediante una diversa gama de acciones y esquemas.
- Conocimiento sobre el aprendizaje y los estudiantes (este conocimiento induce a mejorar la toma de decisiones).
    - Concepciones alternativas de los estudiantes.
    - Actitudes.
    - Errores.

Ahora bien, de acuerdo a las caracterizaciones mostradas del CDC y de lo dicho hasta ahora del mencionado conocimiento, coincidimos con Marcelo (1995) sobre la manera como se genera el mismo, éste afirma que:

> El CDC se construye a partir del conocimiento del contenido que el profesor posee, así como del conocimiento pedagógico general, y del conocimiento de los alumnos, y también es consecuencia de la propia biografía personal y profesional del profesor. Sin embargo no todos los autores están de acuerdo en aceptar que el *Conocimiento Didáctico del Contenido* existe diferenciado del conocimiento propio del contenido.
>
> (Marcelo, 1995, p. 6)

Desde nuestro punto de vista, la última parte de la cita cobra un fuerte valor cuando nos referimos al profesor de matemáticas de universidad y más aún, si estos atienden cursos para carreras en las que las matemáticas son vistas como una herramienta para, además de resolver problemas, entender teorías propias de estas carreras pero con un amplio contenido matemático. En este caso inferimos que el conocimiento disciplinar es la base fundamental del CDC. Además, fijamos posición respecto al conocimiento del contenido que debe poseer un profesor de matemáticas para carreras de ciencias económicas y afines, el cual se tiene que extender a conceptos y teorías básicas de economía, eso sí, sin la necesidad de llegar al nivel de un profesional de la economía.

Ahora bien, en el ánimo de seguir avanzando e ir esculpiendo nuestro marco teórico hacia la especificidad de nuestro proyecto, nos referiremos a algunos trabajos enmarcados en el CDC dentro de la didáctica de las matemáticas, los cuales no sólo destacamos por el contenido disciplinar sino por los objetos que se estudian, ya que en algunos de los casos hay cierta proximidad al nuestro. Sin embargo hacemos la observación siguiente: en cualquiera de los trabajos que citamos a continuación ninguno se desarrolla en un marco del profesor de universidad, hecho que nos hace ir con especial cuidado y nos conduce a procurar ofrecer un aporte a esta línea de investigación en el campo de la didáctica de las matemáticas.

Por ejemplo, además de los dicho hasta ahora sobre el CDC, Blanco *et al*. (1995) en su trabajo con profesores en formación o estudiantes para profesores (de educación secundaria y bachillerato) de ciencias y matemáticas destacan dos aspectos o componentes dentro del conocimiento profesional de profesores; que a saber son: *componente estática* y *componente dinámica*. En atención a la primera, ésta se refiere a aspectos de interés general que son independientes de un profesor en particular y del ambiente específico en el cual desenvuelve el trabajo docente. Esta componente tiene la particularidad de ser *impersonal* y puede ser adquirida a través de materiales y métodos diversos. Aun cuando en el presente trabajo intervienen licenciados en matemáticas y licenciados en educación matemática, lo que quiere decir que su formación es distinta, nuestro objetivo no consiste en estudiar esta componente del CDC con los profesores participantes en esta investigación.

Por otra parte, la componente dinámica, estos autores la definen como: "*la parte del conocimiento profesional que se genera y evoluciona a partir de los propios conocimientos* [disciplinares], *creencias y actitudes, que requiere una implicación personal, y que evoluciona mediante un proceso didáctico entre la teoría asimilada y la práctica desarrollada*", estructura que va en constante cambio si tomamos en cuenta el hecho de que, además de tener estudiantes distintos en cada período escolar, entendemos el profesor universitario de matemáticas como un profesional reflexivo que a partir de su actividad docente se plantea "*reconsiderar su conocimiento estático, modificando o reafirmando parte del mismo*" (Blanco *et al.*, 1995). Esta componente, sostienen los citados autores, permite distinguir a profesores de matemáticas expertos de los noveles. En esta investigación y aun cuando no hacemos un seguimiento amplio y exhaustivo a cada profesor, nuestro trabajo busca estudiar la componente dinámica de los participantes.

En otro orden de ideas destacamos el trabajo desarrollado por Nuria Climent (2002) en su tesis doctoral en la que trabajó el CDC de matemáticas con una maestra en ejercicio de educación primaria. Tres aspectos a resaltar en este trabajo en relación con el CDC es la diferenciación que sostiene la autora respecto al conocimiento disciplinar, es decir, el conocimiento "*de*" y "*sobre*" las matemáticas. Otro aporte significativo sobre el CDC son las categorías de *conocimiento didáctico del contenido respecto de la enseñanza* (CDC-E) y el *conocimiento didáctico del contenido respecto del aprendizaje* (CDC-A), hecho que consideramos relevante para profundizar con más detalle el CDC del profesor de matemáticas de universidad y, finalmente, la diferencia "*cuantitativa* " y "*cualitativamente*" entre los conocimientos disciplinar y de contenido (algo que para nosotros es lo mismo y que hemos puesto de manifiesto hasta ahora al no hacer observación alguna al respecto); para el caso del primero, incluye todo lo que abarca la disciplina en sí y cuando se refiere al contenido significa la parte de la disciplina que forma parte del currículo.

Respecto a esto último, partimos de una idea personal y nos desmarcamos de la posición de Climent (2002) cuando nos referimos al profesor de universidad, ya que éste, como lo hemos sostenido hasta ahora, es un profesional y especialista de las matemáticas y que por lo general desarrolla su labor docente relacionada con su área de investigación o en cursos básicos de matemáticas, siendo este último el caso que nos ocupa.

En cuanto a la diferencia entre *de* y *sobre* respecto al conocimiento matemático al que se refiere Climent (2002), nos permitimos decir que en nuestro trabajo entendemos el conocimiento disciplinar de las matemáticas como un único bloque, el cual abarca toda la estructura de la disciplina; pero este conocimiento también incluye las normas sintácticas, conocimiento de los algoritmos y procedimientos que conforman el saber hacer matemáticas y la resolución de problemas, el desarrollo histórico de la disciplina y su relación con otras áreas afines a las matemáticas. En otras palabras, la distinción de conocimiento *de* y *sobre* las matemáticas que sostiene Climent (2002) en su estudio con una maestra de primaria, asumimos que no cala del todo en el caso de estudios con profesores de universidad; ya que, como dijimos anteriormente, el profesor de universidad es un profesional que generalmente relaciona su labor docente con su área de investigación o próxima a ella.

Una de las componentes del CDC con las que contribuye Climent (2002) a ampliar los estudios en esta línea de trabajo están relacionadas directamente con el proceso de enseñanza-aprendizaje; estas son, el conocimiento didáctico del contenido respecto de la enseñanza y del aprendizaje; estas dos componentes cobran especial significado en nuestro trabajo ya que las mismas son estudiadas de manera indirecta durante las sesiones del seminario. Más aún, si este tipo de conocimiento tiene una clara influencia en la eficacia del docente en el aula, resulta interesante tratar de identificar de qué manera el CDC determina la forma de pensar del docente, las decisiones que toma, y las acciones que emprende en el salón de clases. (Talanquer, 2004).

Como un aporte personal al estudio del CDC del profesor de matemáticas de universidad, estudiar el CDC en este contexto supone, en nuestro caso y a diferencia de otros trabajos que estudian a maestros de primaria o profesores de secundaria, **estudiar también el conocimiento del contenido matemático y su relación con otras disciplinas del saber**, concretamente con las ciencias económicas, ya que en éste se destacan: (a) un fundamento profundo en el conocimiento de hecho, (b) un entendimiento de los hechos e ideas en el contexto de un marco contextual (la interrelación entre las matemáticas y las ciencias económicas), y (c) una organización del conocimiento en el sentido de facilitar la aplicación y el poder solventar algún inconveniente (Kahan *et al*. 2003). Esto nos permitirá analizar y entender muchos aspectos de los profesores en cuanto al proceso de enseñanza-aprendizaje se refiere; puesto que cuando se estudia al profesor de matemáticas y su CDC éste va más allá de un conocimiento simple de matemáticas que no necesariamente un matemático pueda poseer (Kahan *et al*., 2003).

Por todo lo anterior, basaremos nuestro estudio en la definición de CDC que aportan An *et al*. (2004) y que complementamos con los trabajos de Climent (2002), Reyes y Gárritz (2006), García (2004), Salazar (2005), Talanquer (2004), Kahan *et al*. (2003), Veal y MaKinster (1999), Blanco *et al*. (1995), Marcelo (1995); esto quiere decir *grosso modo*, que entendemos el CDC como el conocimiento para una enseñanza efectiva que incluye cuatro componentes o tipos de conocimiento: (a) **conocimiento del contenido matemático**, (b) **conocimiento del currículo**, (c) **conocimiento relacionado con la enseñanza** y

(d) **conocimiento relacionado con el aprendizaje**. El profesor debe ser capaz de conectar estas cuatro componentes de forma que las mismas interactúen entre ellas y se logre el aprendizaje deseado.

De manera más específica, definimos el CDC del profesor de matemáticas de universidad como: **la intersección entre el conocimiento del contenido matemático (la materia), el conocimiento de la estructura didáctica para llevar al aula de clases el contenido matemático (el conjunto de elementos que permiten construir un proceso efectivo de enseñanza-aprendizaje, es decir, desde la planificación hasta la evaluación) y el conocimiento del contenido curricular (programas oficiales de la materia, libros de texto, entre otros); todos estos elementos no son puntos aislados**.

En nuestro caso concreto, **el profesor debe manejar; por un lado, un conocimiento de contenido dual, es decir, de matemáticas y economía**[9], **tomando en cuenta las interrelaciones entre ambos contenidos, según el curso con el cual se esté trabajando. Por otra parte, el profesor tiene que conocer y manejar las distintas estrategias y metodologías de enseñanza, el contenido curricular de la materia a enseñar, el contexto en el que se va a desarrollar el proceso de enseñanza-aprendizaje, el estudiante con quien desarrollará su trabajo (concepciones alternativas, dificultades, ventajas y actitud frente a la materia), el material de apoyo didáctico (libros de texto, herramientas informáticas) y, finalmente, cómo será evaluado el contenido enseñado**.

Cuando el profesor en ejercicio pone en funcionamiento todo esta estructura, la misma pasa a formar parte de un ejercicio de retroalimentación personal que le permite al profesor activar la componente dinámica de su conocimiento, todo esto con el objeto de modificar y mejorar su CDC, situación que intentamos explorar mediante el instrumento que diseñamos para la recolección de datos.

2.3.1. Conocimiento del Contenido

Es hora de hablar de las componentes principales de lo que entendemos como el CDC de un profesor de matemáticas de universidad, en tal sentido comenzaremos por centrarnos en el conocimiento del contenido o conocimiento disciplinar, el cual es la componente principal del CDC (Kahan *et al*. 2003); es por ello que hablaremos obligatoriamente de dos contenidos, el matemático y el económico, tomando en cuenta que la justificación sobra a estas alturas. Sin embargo, dado que el trabajo se enmarca dentro de las didácticas específicas y

[9]Para casos en los cuales el profesor de matemáticas trabaje con estudiantes de otras áreas como la ingeniería, la física, la biología, etc., el conocimiento sobre la economía se sustituye por la disciplina respectiva.

en particular en un tema bien delimitado dentro de la didáctica de las matemáticas, como es el estudio del CDC en profesores universitarios de matemáticas que atienden cursos de cálculo diferencial para las carreras de ciencias económicas, consideramos pertinente qué tipo de conocimiento disciplinar debe poseer este profesional.

A lo anterior hay que añadir que aun cuando estudiamos al profesor de matemáticas, nuestro interés principal no consiste en estudiar el conocimiento del contenido matemático *per se*; puesto que entendemos, como ya lo expresamos anteriormente, que el profesor de universidad es un profesional y especialista de la disciplina que enseña, situación que no necesariamente ocurre con docentes de niveles inferiores al universitario. No obstante, un elemento clave en el conocimiento disciplinar de este profesor es el *saber matemático* que posee en relación con el contenido económico.

2.3.1.1. Conocimiento del Contenido Matemático

Para hablar de este tipo de conocimiento tomamos como punto de partida el trabajo desarrollado por Kahan *et al.* (2003), quienes realizan una investigación enmarcada en la relación entre el conocimiento del contenido matemático del profesor y su enseñanza. Ellos, antes de caracterizar el conocimiento del contenido matemático recurren a Bransford, Brown y Cocking (2000) para señalar que:

> [...] la competencia en un área requiere de tres componentes: (**a**) "una construcción profunda del conocimiento *efectivo* o *de hecho*", (**b**) entendimiento de las "ideas e información en referencia a un marco específico", y (**c**) organización del conocimiento "en el sentido de facilitar explicaciones y aplicaciones del contenido".
>
> (Bransford, Brown y Cocking (2000) citados en Kahan *et al.*, 2003, p. 225, traducción realizada por el autor.)

En este sentido, los autores antes citados ahondan en el conocimiento del contenido matemático del profesor y lo definen como la conformación de las tres componentes arriba mencionadas, esto significa que el conocimiento debe estar interiorizado en un entendimiento profundo de las matemáticas para ser enseñadas (esta parte explica el ítem (**a**) de la cita de arriba), además, el conocimiento en cuestión posee dos componentes: una "*procedimental*" y otra "*conceptual*", relacionadas directamente con el conocimiento "*de*" y "*sobre*" las matemáticas, respectivamente, de Climent (2002); teniendo la componente conceptual una estrecha relación con los ítem (**b**) y (**c**) de arriba.

Ahora bien, supongamos que estamos considerando únicamente a un profesor de matemáticas de universidad que atiende cursos básicos de cálculo diferencial e integral, en tal sentido hablemos del conocimiento del contenido de éste como base de la *componente dinámica* (Blanco *et al*., 1995) de este conocimiento. Entendemos que estos profesionales tienen un amplio conocimiento de la disciplina en sí misma y con la profundidad deseada para ser enseñada, pero nos interesa, en esencia, el segundo aspecto por encima del primero, tal como lo señalamos en líneas anteriores cuando nos referimos a los conocimientos "*de*" y "*sobre*" las matemáticas que hace Climent (2002).

En este sentido, desarrollamos a continuación un breve apartado relacionado con el conocimiento del contenido respecto al cálculo diferencial, como parte de la idea de seguir profundizando en el campo de las didácticas específicas, reiterándole al lector nuestro interés por destacar un conocimiento del contenido en relación con su enseñanza.

Conocimiento del Contenido respecto al Cálculo Diferencial

Puesto que el presente trabajo consiste en el estudio del CDC de profesores de matemáticas que enseñan cálculo diferencial en careras de economía, consideramos de especial importancia el pronunciarnos sobre el conocimiento disciplinar que estos profesores deben poseer y qué características debe tener el mismo, no sólo para darle solidez a nuestro marco teórico, sino para contribuir en esta línea de trabajo que cada vez cobra mayor fuerza e interés en el campo de la didáctica de las matemáticas.

El simple hecho de referirnos al tema del cálculo diferencial y de la derivada en particular, nos sumerge en el campo del Pensamiento Matemático Avanzado (PMA) y, por su puesto, en el análisis matemático, debido a que éstos abarcan temas que van desde los números reales y sus propiedades, pasando por el estudio de las funciones (de una y varias variables), límite y continuidad, derivación, integración, sucesiones y series, teoría de la medida, álgebra lineal, análisis funcional y análisis complejo, entre otros (Artigue, 1991). En este sentido, no sólo estamos en el PMA y en el análisis matemático como constructos de la didáctica de las matemáticas, sino por el contenido del mismo en el campo de las matemáticas (funciones, límite, continuidad, derivada, entre otros) en el caso del análisis matemático.

Ahora bien, cuál es el conocimiento del contenido respecto a esta área, de acuerdo a nuestro interés para este estudio. Retomando las ideas de Climent (2002) y Kahan *et al*. (2003), consideramos que el profesor de matemáticas debe poseer un **conocimiento profundo**[10] de toda la estructura que supone el cálculo diferencial; esto es, conocimiento sobre el desarrollo histórico del concepto, definición de derivada y los teoremas relacionados con el concepto, notaciones, reglas de derivación, interpretaciones diversas en distintos campos

[10]En el sentido que señala Kahan *et al*. (2003).

del conocimiento, aplicación de la derivada dentro de las matemáticas como en otras áreas. Pero conocer toda esta estructura implica, obviamente, tener un manejo del tema de funciones o conceptos relacionados como: dominio, monotonía, valores extremos, límite, continuidad, entre otros.

Pero como no se trata de conocer estos elementos de manera aislada, a todo lo anterior hay que añadirle el conocimiento de: las normas sintácticas que permiten combinar y relacionar estos elementos, los algoritmos y procedimientos que conforman el saber hacer matemáticas y abordar la resolución de problemas enmarcados tanto en un contexto matemático como en otras áreas afines a las matemáticas como; en nuestro caso, las ciencias económicas.

2.3.1.2. Conocimiento del Contenido Económico[11]

Antes de abordar esta subsección, hablemos en forma breve del papel de las matemáticas como instrumento en las ciencias económicas y cómo comienzan a ser usadas:

> Una de las tareas del economista teórico es la de razonar deductivamente a partir de unos postulados (supuestos sobre el comportamiento económico), para llegar a unas conclusiones. Hay modos más o menos eficientes de pasar de los postulados a las conclusiones al expresar la teoría económica. Un argumento puramente verbal es fácilmente inteligible para una audiencia mayor, pero, como reconoció Cournot, la exposición literaria tiene algunas limitaciones. Cuando se requiere un razonamiento elaborado, las exposiciones matemáticas y gráficas ofrecen una mayor precisión.
>
> Las matemáticas fueron utilizadas por autores neoclásicos como Jevons, para explicar teorías sencillas del comportamiento del consumidor, pero a medida que los economistas comenzaron a abordar problemas más complejos, se hicieron necesarios nuevos métodos de expresión y las matemáticas se convirtieron en un instrumento esencial del economista teórico.
>
> (Cámara, 2000, p. 105)

Pero bien, un punto importante a destacar en relación con este conocimiento es el hecho de que nos referimos a profesores de matemáticas, es decir, a profesionales formados, principalmente, en esta área del conocimiento, lo que significa que durante su formación universitaria no han tenido por qué tener contacto con materias relacionadas con las ciencias económicas. Otro punto a tomar en cuenta tiene que ver con el tipo de conocimiento económico que debe poseer el profesor de matemáticas, tomando en cuenta que éste no es un profesional de la economía.

[11] Esta parte del trabajo la entendemos como un aporte personal a las didácticas específicas.

En algunas reuniones sostenidas con dos especialistas de la Universidad Pompeu Fabra de Barcelona; además de los libros de texto consultados como Lial y Hungerford (2000), Haeussler y Paul (1997), Balbás *et al*. (1989), Arya y Lardner (1987), Whipkey *et al*. (1987), Wonnacott (1983) y el trabajo desarrollado por García *et al*. (2006c), el conocimiento de economía que un profesor de matemáticas debe poseer y manejar consiste de un contenido básico de conceptos, terminologías e interpretaciones que, en la mayoría de los casos, el profesor llega a este conjunto de elementos cognitivos de forma personal. A esto último surge la siguiente pregunta: ¿un profesor de matemáticas para carreras de ciencias económicas[12] está en capacidad de **llegar a ese contenido**[13] de manera personal o requiere de asesoramiento por parte de profesionales del área?

Partamos del hecho de que los licenciados en matemáticas o en educación matemática poseen un amplio conocimiento y una formación que les permite abordar los distintos conceptos económicos que se requieren para los cursos de nuestro interés y que, además, ellos están interesados en abordar y profundizar en estos conceptos; entonces, el contenido económico que debe poseer un profesor de matemáticas para estas carreras o los conceptos económicos que tienen que manejar son, en líneas generales, los siguientes: **Beneficio** o **utilidad** (medio, total y marginal), Bienes (complementarios y sustitutivos), Capital, Competencia (monopolista y perfecta), Consumo, **Coste** o **Costo** (medio, total y marginal), Crecimiento económico, Déficit del consumidor y del productor, **Demanda**, **Demanda** (elástica, inelástica, marginal), Depreciación o Devaluación, Economía, Equilibrio de mercado, **Impuestos** (directos, indirectos y marginal), **Ingreso** (medio, total y marginal), Oferta, **Oferta marginal**, **Producción marginal**, **Propensión marginal** al ahorro y al consumo, Superávit del consumidor y del productor, entre otros. Pero no sólo tener conocimiento de estos conceptos o términos económicos, sino también las relaciones entre sí y sus interpretaciones en las matemáticas.

Pero pongamos atención especial a los términos resaltados en el párrafo anterior, ya que los mismos están vinculados de manera directa al cálculo diferencial y que forman parte de lo que en las ciencias económicas se denomina análisis marginal, contenido que desarrollamos a continuación y que ya trabajamos en García (2004).

[12]Para el caso que nos ocupa nos referimos a licenciados en matemáticas o licenciados en educación matemáticas.

[13]En el sentido de manejar los conceptos económicos y sus interpretaciones en el campo de las matemáticas, ya que partimos de una enseñanza contextualizada de las matemáticas.

Conocimiento del Contenido respecto al Análisis Marginal

La intención de este apartado es presentar por una parte, la importancia de la derivada dentro de las ciencias económicas desde el punto de vista didáctico y, por otra, mostrar algunas consideraciones, de orden matemático-económico, que los programas oficiales, de la Universidad de Los Andes (Venezuela), de las asignaturas objeto de este estudio no toman en cuenta dentro de sus contenidos[14]. Además, queremos enfatizar que, el no considerar estos detalles relacionados con la economía, por muy obvios que parezcan, podrían ir en detrimento de la formación del estudiante como lo sostiene García (2004). En tal sentido, estos aspectos deben formar parte de la enseñanza de la derivada en la economía, siempre que se piense que esta enseñanza deba ser contextualizada.

Así, comencemos por atender lo expuesto en las primeras líneas del párrafo anterior, es decir, la importancia de la derivada en las ciencias económicas, para ello recurrimos a Cámara (2000), quien de forma clara y precisa sostiene:

> El instrumento matemático más útil para el economista es el cálculo diferencial. Trata esencialmente las tasas de variación y es el instrumento natural que emplea el economista en la construcción y discusión de teorías económicas.
>
> Los economistas están más interesados en las cantidades marginales que en las cantidades totales. Un ejemplo es la teoría de la maximización del beneficio de Cournot, en la que el ingreso marginal ha de ser igual al coste marginal.
>
> (Cámara, 2000, p. 105)

Pero, ¿qué es en esencia el *análisis marginal*? En el mundo de los negocios y en las ciencias económicas, se llama *análisis marginal* a la utilización de **la derivada** o **la diferencial** para estimar el cambio que experimenta una función que modele una situación relacionada con la economía (ingreso, costo, utilidad, producción, etc.) al incrementar en una unidad la variable independiente (Cámara, 2000; Lial y Hungerford, 2000). Si ahondamos un poco más en conceptos económicos en los que la derivada está presente, apreciaremos lo importante que resulta para un profesional de las ciencias económicas la derivada y sus múltiples aplicaciones. Una prueba de ello la apreciamos a continuación:

> Aproximadamente, el costo marginal en algún nivel de producción x es el costo de producir el artículo $(x + 1)$, [es decir, el costo de producir la unidad adicional].
>
> (Lial y Hungerford, 2000, p. 431)

[14]Advertimos al lector que en ningún momento pretendemos hacer un análisis sobre el contenido curricular de los programas oficiales de matemáticas para estas carreras.

Además de las funciones marginales de ingreso, costo, utilidad o producción; están otras como la elasticidad de la demanda, la propensión al ahorro o al consumo, en las que la derivada sirve como herramienta principal para el análisis de las mismas. Pero de dónde sale el término *análisis marginal*.

El término *marginal* obedece a que los economistas neoclásicos del *período marginalista* (1838-1947) (Arrow & Intriligator, 1981), le dieron a la economía un enfoque esencialmente matemático, focalizando sus aportaciones en el concepto de la marginalidad o última unidad; es decir, realizaron estudios de cómo una variable modifica sus valores en el *margen*, ante aumentos infinitesimales de otra variable. Los mismos Arrow & Intriligator (1981), se refieren a este período como el primer período de la economía matemática y en el que las ciencias económicas tomaron prestadas metodologías de las ciencias físicas vinculadas a las matemáticas para desarrollar una teoría formal basada, en buena parte, en el cálculo.

La herramienta matemática básica fue el cálculo; en particular, el uso de las *derivadas totales* y *parciales* y los *multiplicadores de lagrange* para caracterizar máximos. Vale la pena destacar que, en este período se desarrollaron los fundamentos matemáticos que sirvieron para que progresaran las teorías modernas del consumidor y el productor, oligopolio y equilibrio general. En esta etapa de desarrollo de la economía matemática destacaron economistas como Walras, Jevons, Marshall, Pareto, Ramsey, Hicks y Samuelson, entre otros.

A fin de ver la solidez e importancia que tienen las matemáticas en la economía y, en gran medida, justificar un conocimiento económico en profesores de matemáticas, nos situamos en una pregunta que aparece en Archibald & Lipsey (1967) que dice: *¿Qué es una aproximación matemática a la economía y por qué ésta debe ser estudiada?* En la respuesta que los autores dan a esta pregunta, ellos hablan de siete puntos o aspectos en los que están presente las matemáticas en la economía; sin embargo, para no perdernos en un contexto matemático general, extraemos lo concerniente al tema que nos ocupa, la derivada.

> **(v)** 'Maximización de la utilidad': esta suposición y toda la parafernalia asociada de costo marginal, ingreso marginal, etc., es obviamente una aplicación de la noción matemática de maximización, independientemente de la manera cómo se haga, en palabras, en diagramas o algebraicamente.
>
> **(vi)** 'Conceptos marginales'. Todos los conceptos marginales tales como costo marginal, ingreso, utilidad, producto, propensión al consumo, ahorro, importe, etc., etc., son de hecho primeras derivadas de las funciones respectivas bajo el mismo nombre, pero sin el término marginal.
>
> (Archibald & Lipsey, 1967, p. 3 traducción realizada por el autor.)

De estos dos puntos como de los otros de la lista se debe dejar claro el fuerte vínculo entre la economía y la matemática, de allí una de las razones que permiten que algunas situaciones, por no decir todas, pueden ser representadas adecuadamente por modelos matemáticos. Antes de continuar hablando del análisis marginal, es oportuno reservar unas líneas al tema de funciones dentro de la economía y así justificar la expresión "adecuadamente" usada arriba.

Cuando el profesor de matemáticas enseña cálculo contextualizado en la economía o, como generalmente le llaman, *aplicado a la economía*, además del análisis marginal, éste manipulará funciones con restricciones muy propias de la economía, tomando en cuenta que se manejarán cantidades relacionadas como precios, sueldos, tiempo, empleados, cantidades de un determinado artículo, entre otras; así por ejemplo, el dominio de una función estará, en la mayoría de los casos, restringido. Como una muestra de lo antes dicho, estudiaremos el dominio de una función de costo tomada de Haeussler y Paul (1997).

> Para un fabricante la función de costo total es
>
> $$C(q) = 0,02q^3 + 10,4,$$
>
> donde q representa tanto el número de unidades producidas como el de unidades vendidas.
>
> (Haeussler y Paul, 1997, p. 171)

Si una persona tiene que estudiar el dominio de esta función y no se le advierte que representa el costo de fabricar un determinado artículo, la respuesta será de forma tajante $Dom_C = \mathbb{R}$, pero en caso de que se le haga tal advertencia, su respuesta se restringirá en este caso $Dom_C = \mathbb{R}_0^+ = [0, +\infty)$; pues hablar de una cantidad negativa de unidades producidas no tiene sentido en economía y se generaría una inconsistencia; no obstante, hay otras restricciones de igual importancia como: la cantidad máxima de artículos que se pueden fabricar, supongamos K, con lo que el dominio sería $Dom_C = [0, K]$; o en el caso de que el fabricante produzca piezas como edificios o vehículos de carga, donde las unidades de producción son cantidades enteras o racionales muy particulares para aquellos casos en los que la producción viene expresada en miles, por ejemplo.

Tal y como hemos señalado hasta ahora, el conocimiento del contenido económico mostrado en las líneas anteriores no consiste en manejar conceptos en el área, sino que exige un conocimiento del contenido matemático y la relación entre ambos; esto lo definimos como *conocimiento* ***dual*** *del contenido*[15].

Ahora bien, transformar ese conocimiento dual del contenido, en el caso de un profesor universitario de matemáticas que, por lo general, no ha recibido formación para la enseñanza y que por otra parte sólo ha recibido una instrucción eminentemente matemática, es una tarea que requiere un mayor compromiso con el trabajo docente. Por supuesto, todo esto tiene sentido siempre que hablemos de una enseñanza contextualizada de las matemáticas en las carreras ya mencionadas o en otras donde las matemáticas tienen una fuerte presencia como los son las ingenierías, la biología, la física, entre otras. En resumen, mostramos a continuación algunas componentes del conocimiento del contenido económico y en particular el relacionado con el análisis marginal.

Características del conocimiento del contenido económico

En resumen, el profesor de matemáticas de universidad (tomando en cuenta que no es un profesional de la economía), concretamente, el profesor de cálculo diferencial para las carreras de ciencias económicas y administrativas debe tener dominio de un contenido económico básico pero profundo en lo que respecta a la relación matemáticas y economía, del cual destacamos lo siguiente:

- Conceptos básicos de economía como: beneficio o utilidad, bienes, capital, costo, crecimiento económico, déficit y superávit del consumidor y del productor, demanda, economía, equilibrio de mercado, impuesto, ingreso, oferta, entre otros.
- Historia y evolución del cálculo diferencial en las ciencias económicas y destacar algunos aspectos relevantes dentro de la didáctica de las matemáticas.
- Interpretación económica de la derivada, es decir, cómo se relacionan las matemáticas y la economía en el cálculo diferencial.

[15]Si el lector desea conocer otras aplicaciones de las matemáticas en las ciencias económicas lo remitimos a Cámara (2000), quien destaca entre otros constructos matemáticos: el cálculo integral (organización industrial, hacienda pública, excedente del consumidor), el álgebra (estimar las relaciones e interrelaciones en el equilibrio general walrasiano), el álgebra matricial (tratamiento de grandes cantidades de ecuaciones y variables). "*Algunos de los instrumentos matemáticos más complejos y elaborados se han aplicado a estos temas. Instrumentos como la teoría de juegos, la teoría de conjuntos y la teoría de la medida, que han introducido los teoremas del punto fijo y otras formas de matemática avanzada, han sido utilizados para analizar las cuestiones técnicas planteadas por la teoría del núcleo de Edgeworth* (p.106)".

- Restricciones del dominio de las funciones matemáticas en el campo de la economía y todas aquellas sutilezas que pudiesen generar conflictos en el estudiante a la hora de abordar un problema matemático en el contexto económico.

Sin embargo, un conocimiento profundo y exhaustivo del contenido no es suficiente para alcanzar una enseñanza efectiva (An *et al.*, 2004; Kahan *et al*. 2003), un profesor de matemáticas debe poseer también un conocimiento amplio y profundo en materia de enseñanza-aprendizaje y en el campo curricular, de manera que pueda hacerle llegar a los estudiantes el conocimiento disciplinar que maneja. Es por ello que pasamos a desarrollar los otros tipos de conocimientos que, para nosotros, conforman el CDC.

2.3.2. Conocimientos respecto a la Enseñanza y el Aprendizaje

Esto tipos de conocimientos vienen a ser el segundo y tercer pilar del CDC, los mismos reúnen toda la estructura metodológica que conecta al profesor y sus estudiantes. En el caso del profesor de matemáticas de universidad, estos conocimientos tienen un fuerte fundamento en las creencias, concepciones y en el proceso discente (García, 2004 y Llinares, 1995) o como lo engloba Knight (2006), "*conocimiento del yo*"; ya que, como hemos dicho en repetidas oportunidades, el profesor de universidad no ha pasado por un proceso formativo en el campo de la enseñanza, aparte de que esta actividad es infravalorada y descalificada a este nivel (Zabalza, 2003; García-Valcárcel, 2001b). Sin embargo, desde nuestro punto de vista, las cuatro componentes antes citadas juegan un papel clave como parte del conocimiento respecto al proceso de enseñanza-aprendizaje dentro de la educación superior en las carreras objeto de este estudio.

Ahora bien, aunque en la literatura se refieren con frecuencia al conocimiento respecto a la enseñanza-aprendizaje, para nosotros resulta apropiado hacer una separación del mencionado proceso por la razón de seguir apuntando hacia las didácticas específicas, aunque reconocemos que en determinados momentos no es fácil o, mejor dicho, nos resulta difícil apreciar con claridad la línea de separación; no obstante, para el caso que nos ocupa dividimos en enseñanza y aprendizaje y lo explicamos a continuación. En el caso de la primera, la enseñanza, la relacionamos directamente con el profesor propiamente y, en la otra, con el estudiante o más precisamente, con el conocimiento que el profesor posee sobre diversos aspectos de sus estudiantes; aspecto este que abordaremos en su momento.

Volviendo al tema de la docencia en la universidad y el poco valor que ésta recibe por algunos colegas, recurrimos a Zabalza (2003) quien aboga por esta actividad y exige darle el puesto que se merece, al respecto sostiene:

> Quisiera insistir en que la enseñanza, en tanto que actividad profesional, posee su propia lógica e impone sus condiciones. No todo vale en la enseñanza. Por eso, **saber enseñar implica poseer los conocimientos suficientes sobre lógica y las condiciones que afectan a su desarrollo**.
>
> (Zabalza, 2003, p. 65, el resaltado es nuestro.)

Pero bien, es hora de hablar por separado del conocimiento del profesor de matemáticas de universidad en relación tanto con la enseñanza como con el aprendizaje, algunas referencias claves son Climent (2002), Knight (2006), Zabalza (2003), García-Valcárcel (2001b), Blanco *et al*. (1995), entre otros. Para ello comenzaremos por el conocimiento relacionado con la enseñanza.

2.3.2.1. Conocimiento respecto a la Enseñanza

Comenzaremos por entender la enseñanza, siguiendo a Knight (2006), como una actividad reflexiva y de "*carácter intencional*" (García-Valcárcel, 2001b) que, en estos momentos, requiere de un esfuerzo significativo de "*desarrollo formativo del profesorado*". Sobre esto último, el autor antes citado sostiene y respalda la idea de que "*no se reduzcan ni se eliminen las unidades de desarrollo del profesorado*". Pero más allá de lo que entendemos por enseñanza, lo que mostramos a continuación es el tema que nos ocupa; el *conocimiento respecto a la enseñanza*.

En su tesis doctoral, Climent (2002) manifiesta que este conocimiento forma parte del CDC y lo define como:

> ...el conocimiento y uso de recursos y modelos, el conocimiento de distintos modos de representar el contenido y su potencialidad, destrezas para evaluar las tareas en función de los alumnos, *la habilidad para analizar críticamente materiales publicados* [y reflexionar sobre su propia práctica docente], el diseño y selección de actividades, la adecuación de éstas a las características de sus alumnos, **la gestión de la actividad matemática en el aula** (la capacidad para plantear situaciones que reten a los alumnos y se adecúen al transcurso de la acción, saber ofrecer ayudas adecuadas, la capacidad para mantener la actividad...) y **la evaluación del aprendizaje matemático**.
>
> (Climent, 2002, p. 91, el resaltado es nuestro)

Consideramos que la definición antes mostrada es amplia, profunda y recorre casi todo el conocimiento que en materia de enseñanza debe poseer un profesor de universidad, pero bien vale la pena incluir el **conocimiento sobre la planificación docente** que, conjuntamente con los dos aspectos resaltados en la cita anterior de Climent (2002), conforman lo que García-Valcárcel (2001b) identifica como las tres fases o actividades de la función docente y que también forman parte de los diez aspectos que, considera Zabalza (2003), se deben tomar en cuenta por el profesor cuando éste quiera abordar una docencia universitaria de calidad; estos son:

- **Planificación**
- Espacios [donde se desarrolla la actividad docente]
- Selección de contenidos
- Materiales de apoyo
- **Metodología**
- Nuevas tecnologías
- Apoyo a los estudiantes
- Coordinación con los colegas
- **Evaluación**
- Revisión del proceso

(Zabalza, 2003, pp. 210-214, el resaltado es nuestro)

Ahora bien, entendemos que estas tres componentes están fuertemente sujetas a la toma de decisiones, acción esta que relaciona este conocimiento con el resto de los que conforman el CDC. Pero es hora de dar el paso acostumbrado hacia las didácticas específicas, es por ello que coincidimos con Blanco *et al*. (1995), quienes incluyen dentro de este conocimiento las estrategias de enseñanza de tópicos concretos; en nuestro caso, la enseñanza del cálculo diferencial en la ciencias económicas, es decir, el análisis marginal, el conocimiento de un currículo específico (objetivos, contenido) y la capacidad de reflexionar sobre su actividad docente como parte de la componente dinámica. Sin embargo y aunque reconocemos que el conocimiento del currículo está fuertemente ligado al conocimiento en discusión, lo consideramos como el tercer pilar del CDC.

Planificación

Esta primera fase o "*fase preactiva*" (García-Valcárcel, 2001b) que forma parte de la enseñanza, la relaciona Hernández (1989) con la toma de decisiones que ejecuta el profesor de universidad antes de poner en marcha el currículo, en el que debe tomar en cuenta el escenario o "*espacio de instrucción*" dónde se desarrollará el mismo. La toma de decisiones implica, en este caso, una actividad de "*resolución de problemas*" por encima de "*una aplicación lineal* [y sistemática] *de ciertos principios y reglas*" (García-Valcárcel, 2001b). Dado el carácter intencional de la enseñanza, en la planificación de la misma el profesor se anticipa a la puesta en marcha del currículo, atendiendo de manera clara y flexible a dos principios: "*qué se quiere conseguir*" (generación de conocimiento) y "*cómo se quiere conseguir*" (estrategias metodológicas) (*ibid*), teniendo presente la relación entre objetivos y contenidos (Marcelo, 2001). Por su parte, Godino (2003) toma en cuenta dos referentes a la hora de desarrollar la planificación de la enseñanza: la institución y el tiempo del cual se dispone para ejecutar la enseñanza.

Esta componente además forma parte de los descriptores que conforman la lista de aspectos a estudiar en el profesor de matemáticas, en este sentido, lo que queremos indicar es que estudiaremos el *conocimiento relacionado con la planificación* a partir de los problemas y preguntas que conforman el instrumento de investigación, permitiendo así un ejercicio de reflexión sobre su labor como docente.

Metodología

Pasando a la segunda fase de la enseñanza o "*fase interactiva*" (García-Valcárcel, 2001b), sostenemos lo siguiente: hay que tener presente que la enseñanza, dentro del sistema de educación superior mundial, es aceptada como un proceso de transmisión de información; tanto es así que las aulas y los medios de enseñanza están diseñados para llevar a cabo una instrucción unidireccional (Rosales, 2001) donde el profesor es el centro del proceso de enseñanza-aprendizaje (Biggs, 2005). Esta transmisión de información, generalmente, se ejecuta mediante *la explicación*, la cual "*consiste en una exposición oral de un texto seguido de un comentario*" (Marcelo, 2001); también destacamos la "*enseñanza en grupo*" y el "*estudio de casos*", entre otros (*ibid*).

Pero, ¿qué entendemos por conocimiento de la metodología?, es aquel que posee el profesor sobre un conjunto de estrategias y actividades para la enseñanza (García-Valcárcel, 2001b) de las matemáticas en un escenario determinado, generalmente el salón de clases. Estas estrategias y actividades están fuertemente ligadas al contenido disciplinar y, sobre las mismas, se ha reflexionado y analizado en la fase anterior para ponerlas en práctica. En nuestro contexto, nos referiremos a dos dimensiones a tomar en cuenta en la enseñanza: el conocimiento sobre la ejecución de problemas matemáticos contextualizados en la economía, lo que definimos como el *conocimiento sobre la secuenciación del problema* y; el *conocimiento sobre la enseñanza basada en problemas* a partir de problemas matemático-económicos.

Lange (1996) realizó un trabajo minucioso sobre la enseñanza de las matemáticas puras Vs. aplicadas y la inclusión de estas últimas en el currículo escolar, justificando que el gran beneficiado es el estudiante. Si nosotros extrapolamos esta situación a la universidad y concretamente a carreras donde las matemáticas conforman una poderosa herramienta no sólo para resolver problemas sino para poder entender situaciones propias de estas carreras, no permitimos afirmar que tal justificación tiene mayor peso.

Evaluación[16]

El conocimiento sobre la *fase postactiva* de la enseñanza, como se refiere García-Valcárcel (2001b) a la evaluación, consiste en saber medir una serie de elementos que validan el proceso de enseñanza-aprendizaje; además, es una de las componentes claves de este proceso por lo que implica para el profesor; un ejercicio de "*retroacción*" sobre su labor docente (Marcelo, 2001). Esta cumple un doble rol, el de valorar el aprendizaje de los estudiantes y el de certificar el conocimiento alcanzado por estos (Zabalza, 2003). En cierta medida, la evaluación forma parte del currículo (*ibid*), pero también enlaza de manera directa con las dos fases anteriores, ya que ésta debe ser planificada y su ejecución debe estar sujeta a la enseñanza llevada al aula: **objetivos**, **contenidos**, **estrategias** (Marcelo, 2001).

Todo lo anterior nos encamina a definir el conocimiento del profesor respecto a esta componente para cursos de cálculo diferencial en carreras de ciencias económicas; situación que además permite abrir paso a desarrollar un trabajo de investigación en esta línea específica. Tomemos en cuenta que el trabajo se enmarca en un *contenido disciplinar dual* (matemáticas y economía), pero no debemos olvidar que, en esencia, es un curso de cálculo; en este sentido, hay que tener presente el peso que se le debe dar al contenido a evaluar, el cual debe guardar directa relación con el desarrollado en el aula. Otro aspecto a tomar en cuenta tiene que ver con lo siguiente: "*este proceso se inicia al principio de curso cuando profesor y alumno entran en contacto*" (Marcelo, 2001) y el primero discute los objetivos del curso, entre otros puntos a tomar en cuenta.

Por otra parte, está el conjunto de estrategias de enseñanza que se desarrollan en el aula. En este caso, tanto profesores como estudiantes, tradicionalmente, entienden un examen por sistema de evaluación, esto se debe a que por lo general, la metodología de enseñanza es *la explicación* como nos referimos en la segunda fase de la enseñanza. Ahora bien, si se opta por la enseñanza basada en problemas, es claro que esto implica un mayor compromiso con todo el proceso de enseñanza-aprendizaje[17] donde

[16]Aun cuando hacemos un breve desarrollo sobre esta componente del proceso de enseñanza-aprendizaje, queremos dejar claro que no está dentro nuestros objetivos estudiar el conocimiento que el profesor tiene sobre evaluación. Las pocas preguntas relacionadas con el tema que aparecen en el instrumento, fueron hechas de manera intencional como parte de la estrategia de recogida de datos.

[17]En el apartado correspondiente se puede apreciar un breve comentario sobre la evaluación en esta estrategia didáctica.

la evaluación no es la excepción y, en consecuencia, cobra mayor fuerza la anterior cita de Marcelo (2001).

Características del conocimiento respecto a la Enseñanza

Ahora mostramos algunas características puntuales de este conocimiento, las cuales nos permitirán generar las categorías de cara al análisis de datos:

- **Planificación**
  - Criterios para la toma de decisiones.
  - Conocimiento del currículo, en particular los objetivos del curso.
  - Conocer al estudiante.
  - Tener presente la disponibilidad del tiempo.
- **Metodología**
  - Involucrar las estrategias lícitas de enseñanza, entre ellas la resolución de problemas *como estrategia de enseñanza*.
  - Conocer al estudiante.
  - Conocer las herramientas informáticas y su aplicación como herramienta didáctica.
- **Evaluación**
  - Saber medir el alcance del proceso de enseñanza-aprendizaje teniendo presente los objetivos del curso.
  - tener presente que es un proceso que se inicia con el curso.

2.3.2.2. Conocimiento respecto al Aprendizaje

Previo al desarrollo de este conocimiento nos detendremos de forma sucinta para referirnos a lo que entendemos como aprendizaje; más allá de una forma global de adquisición de conocimientos, es algo más serio y complejo que Biggs (2005) lo ilustra de manera sencilla:

> ...el aprendizaje es una forma de interactuar con el mundo. A medida que aprendemos, cambian nuestras concepciones de los fenómenos y vemos el mundo de forma diferente. La adquisición de información en sí no conlleva ese cambio, pero nuestra forma de estructurar esa información y de pensar con ella sí lo hace.
>
> (Biggs, 2005, p. 31)

En este orden de ideas, entendemos el aprendizaje como una acción que genera cambios, favorables o no, en el estudiante; bien sea por la correspondencia que pueda tener con sus concepciones sobre el contenido que se estudia, por el esquema que organice y plantee el profesor durante la clase o los obstáculos de tipo cognitivo que el estudiante confronte en el desarrollo del curso, entre otros. Sobre todos estos aspectos y otros de los que hablaremos a continuación, el profesor está en la obligación de saber cómo interpretar esos cambios y hasta qué punto, estos generen transformaciones en el proceso de enseñanza.

Cuando nos referimos a este conocimiento lo relacionamos directamente con el estudiante, es decir, el conocimiento que el profesor tiene sobre el estudiante, sobre las *dificultades y obstáculos* para el aprendizaje de contenidos matemáticos (Climent, 2002), sobre la *actitud* de estos frente a determinados escenarios o situaciones matemáticas (problemas matemáticos o de aplicación, implementación de estrategias alternativas de enseñanza a las tradicionales, entre otras); de igual manera, se debe tomar en cuenta dentro de esta parte del CDC, el conocimiento sobre los diversos *errores* matemáticos en los que con frecuencia incurren los estudiantes frente a problemas matemáticos en particular.

Así como hablamos del conocimiento del profesor sobre las dificultades de los estudiantes, debe quedar implícito el conocimiento sobre las facilidades o ventajas que representan para los estudiantes la discusión de un determinado problema, todo esto implica desarrollar una habilidad para interpretar el aprendizaje de los estudiantes a partir de distintas expresiones en el aula de clase (participación en clase, prácticas dentro del aula, exámenes escritos u orales) o en las sesiones de consulta. Por otra parte, recordemos las "*concepciones alternativas*" de los estudiantes que señala Carrascosa (2005) y las "*ideas previas*" de los estudiantes (Salazar, 2005), estas dos componentes no sólo se refieren a las creencias y concepciones de los estudiantes para tratar un tema matemático específico, sino también la relación que estos puedan encontrar con áreas afines.

Todas estas componentes señaladas anteriormente vienen a conformar y estructurar lo que entendemos como conocimiento del contenido respecto o sobre el aprendizaje; de éstas, queremos destacar las tres que abordamos en nuestro trabajo y que en un principio consideramos en el instrumento, aunque merece la pena aclararle al lector que, de estas tres, la última la descartamos por la poca riqueza de los datos obtenidos a lo largo de la aplicación de los instrumentos. Nos referimos entonces, al conocimiento sobre: (**i**) las dificultades y/o facilidades, (**ii**) las actitudes y, (**iii**) los errores que muestran los estudiantes durante el proceso de enseñanza-aprendizaje.

Antes de pasar a desarrollar estas tres componentes haremos referencia a los trabajos de Knight (2006) y Biggs (2005), ambos enmarcados en la educación superior y el segundo en el tema del aprendizaje. Estos investigadores coinciden en que al momento de hablar de aprendizaje tratan el tema de la evaluación, lo que nos dice esto es la estrecha relación existente entre este conocimiento y el tratado en la subsección anterior (**2.3.2.1**). En este orden de ideas, entendemos la evaluación no sólo como el ejercicio de valorar el aprendizaje y certificar el conocimiento alcanzado por los estudiantes (Zabalza, 2003), sino también como el ejercicio de observación y reflexión que, sobre diversas actitudes, opiniones y expresiones, realizan los estudiantes a lo largo del curso.

Dificultades y/o facilidades

Lo entendemos como el conocimiento que muestra el profesor a partir de los problemas propuestos y discutidos en el material, tomando en cuenta las dificultades y/o facilidades (para el aprendizaje) que puedan tener los estudiantes cuando el profesor plantea uno de estos problemas en el aula. Con esto pretendemos profundizar en la orientación de los cursos de matemáticas que presenta el profesor o, en otro sentido, los cambios que éste tiene que enfrentar en algunos momentos y reorientar el curso. Situación, ésta, que incide en la mejora de nuestra propuesta didáctica.

Por otra parte, el conocimiento que el profesor pueda tener sobre sus estudiantes, no solo en cuanto a las dificultades o ventajas que pueda significar un problema o concepto matemático en particular, así como la actitud frente a determinado escenario en el aula, obliga al profesor a profundizar y reflexionar sobre la enseñanza que éste sigue en el salón de clases y; más aún, a revisar y discurrir sobre su conocimiento disciplinar.

Nosotros partimos de la idea de una enseñanza contextualizada de las matemáticas y, en consecuencia, buscamos estudiar el conocimiento que tiene el profesor a la hora de abordar problemas matemáticos enmarcados en las ciencias económicas. Entre otras cosas porque la enseñanza que siguen, en general, es del tipo tradicional, ciñéndose a lo que sugieren los programas oficiales o los libros de texto (García, 2004).

Actitud

En este caso nos referimos al conocimiento que tiene el profesor sobre sus estudiantes, específicamente respecto a la actitud que muestran estos últimos frente a un determinado tipo de problema. En otras palabras, tomamos en cuenta el dominio que tenga el profesor sobre determinadas acciones, gestos e impresiones de sus estudiantes ante determinadas situaciones planteadas en el aula, como los son: tareas, problemas, gestión de la enseñanza; entre otros, lo cual le permite a éste discernir sobre su actividad en el aula en relación con el contenido en sí y la forma como es presentado.

Ya mencionamos que el estudiante de universidad, en este caso concreto, está acostumbrado a seguir un proceso de enseñanza tradicional y unidireccional, donde el protagonista del proceso de enseñanza-aprendizaje es el profesor (Zabalza, 2003). Entonces, llevar a cabo una actividad como la que proponemos a futuro, pero que ya fue trabajada con los profesores participantes y en la que se abordan problemas contextualizados que promueven la participación del estudiante, supone o inferimos que debe generar inquietudes en estos últimos. Así, y dado que queremos poner en marcha, a futuro, una propuesta didáctica enmarcada en la EBP, nos resulta de vital importancia que el profesor contribuya a mejorar tal propuesta y lo hacemos a través de esta parte del conocimiento que tiene el profesor en relación con sus estudiantes.

Para nosotros, la actitud del estudiante frente a un tema matemático tratado en el aula está en línea directa no sólo con la motivación que éste tenga sino con el conocimiento que para ese momento posee el estudiante respecto al tema que se aborda y, también, por la forma como el profesor lo desarrolla.

> Los profesores sabemos que la motivación con que alumnos y alumnas afrontan las actividades académicas dentro y fuera del aula es uno de los determinantes más importantes del aprendizaje.
>
> (Tapia, 2001, p. 79)

La actitud y motivación del estudiante incide en gran medida en las estrategias metodológicas de enseñanza que el profesor ponga en marcha en el aula de clases y viceversa, pero para ello, el docente debe tener un conocimiento claro de cuán motivado está el estudiante, además de interpretar y valorar la actitud del alumno. Ya en García (2004), uno de los participantes habló sobre la actitud de los estudiantes tanto a la hora de abordar problemas de matemáticas aplicados a la economía como en las evaluaciones escritas, dejando muy claro que existe un rechazo hacia este tipo de problemas contextualizados; sin embargo, lo interesante a nuestro juicio, sería estudiar el por qué se rechazan estos problemas.

Ahora bien, conocer al estudiante de universidad no es una tarea que resulte fácil para el profesor, si bien es cierto que existen patrones generales sobre la conducta, actitud y el mismo conocimiento de los estudiantes para un determinado nivel dentro de la universidad, se debe tomar en cuenta aspectos como: *el nivel sociocultural*, *dónde cursó sus estudios de bachillerato*, por citar sólo dos.

Errores[18]

Aun cuando la literatura sobre el tema de errores de los estudiante es abundante, nosotros nos referimos a los *errores*, en esta parte del trabajo, como el conocimiento que tiene el profesor sobre esta componente del proceso de aprendizaje en los que, generalmente, incurren los estudiantes y sus causas, al discutir o estudiar un problema o un tema matemático específico. En el cálculo diferencial son diversos los errores que con relativa frecuencia, cometen los estudiantes, estos son: aplicación indebida de la regla de derivación, errores de interpretación de la derivada (geométrica, física y en algunos casos económicos), cálculo de valores extremos (García, 2004).

Características del conocimiento respecto al Aprendizaje

Tal como hemos venido haciendo con los tipos de conocimiento desarrollados en este trabajo, presentamos al lector características propias sobre el conocimiento respecto al aprendizaje:

- **Dificultades/Facilidades**
  - El profesor debe estar al tanto de las dificultades u obstáculos que presenta el estudiante frente a problemas particulares, así como el conocimiento de alternativas lícitas que permitan solventar los mismos
  - Capacidad para reorientar el curso en caso de dificultades manifestadas por el estudiante
- **Actitudes**
  - Saber discernir y valorar sobre gestos y/o acciones de los estudiantes en el aula
  - Detectar cuánto le motiva una actividad matemática determinada
- **Errores**
  - Conocer los errores para cada tema matemático y las alternativas que permitan aminorar o solventar estos errores
  - Determinar las causas de estos errores

[18]Al igual que lo hicimos con la Evaluación, esta componente la desarrollamos de forma breve puesto que no es de nuestro interés, en estos momentos, estudiar el conocimiento del profesor sobre los errores matemáticos del estudiante. El pequeño número de preguntas llevadas a discusión con los profesores participantes, fueron realizadas de manera intencional como parte de la estrategia de recogida de datos.

2.3.3. Conocimiento del Contenido Curricular

Dentro del campo de la docencia universitaria con poca frecuencia se habla del currículo, tema que además resulta un tanto tedioso para los docentes (Zabalza, 2003); en el proceso de enseñanza-aprendizaje como el caso que nos ocupa, donde el protagonista es el profesor, el currículo consiste en una "*lista de elementos de contenido que, una vez expuestos desde la tarima, están «cubiertos»*" (Biggs, 2005). En particular, el profesor no "*analiza de manera específica cómo los estudiantes reciben esos contenidos ni cuál debe ser la profundidad de su comprensión*" (*ibid*). Hay una realidad sobre el currículo en relación con el profesor de matemáticas de la que poco se habla y que mostramos a continuación:

> El profesor es un profesional que, por lo general, se ha iniciado en la práctica de la enseñanza mediante ensayo y error, que ha logrado un nivel de competencia y capacitación con escasa ayuda institucional. Es tarea del profesor ayudar a sus alumnos a introducirse en una comunidad de conocimientos y capacidades que otros ya poseen. **Su trabajo es una actividad social que lleva a cabo mediante el desarrollo y puesta en práctica del currículo de matemáticas**.
>
> (Rico, 1998, p. 25, el resaltado es nuestro)

Pero, qué entendemos por currículo. Según Zabalza (2003):

> El *currículo* es el proyecto formativo que se pretende llevar a cabo en una institución formativa, en este caso la Universidad. Una buena definición de currículo debería incluir, además, la idea de «unicidad» y «cohesión interna» característica que resulta esencial a la perspectiva curricular.
>
> (Zabalza, 2003, p. 21)

El autor antes citado va más allá e interpreta el currículo como un *proyecto formativo integrado*[19], del cual destacamos la palabra "*integrado*", ya que lo que se busca con el currículo es estructurar y darle continuidad a un conjunto de conocimientos que no pueden estar aislados, en nuestro caso además, destacamos el hecho de poder integrar dos contenidos disciplinares, el matemático y el económico; o, como lo identifican Hargreaves *et al*. (2001), "*currículo interdisciplinar*" . Aunque también señala, que la interpretación más frecuente sobre el currículo en la educación universitaria está compuesta por los "*planes de estudio*", programa oficial de la asignatura y el elaborado por el profesor. Este último, a su vez, elaborado a partir de libros de texto (Doyle, 1992).

En este sentido,

[19]Este autor hace un desarrollo pormenorizado del currículo, donde explica qué significan cada una de las tres palabras de la frase *proyecto formativo integrado*.

> **El profesor de matemáticas necesita conocimientos sólidos sobre los fundamentos teóricos del currículo** y sobre los principios para el diseño, desarrollo y evaluación de unidades didácticas de matemáticas. Cuando los profesores no tienen una formación teórica adecuada ven limitadas sus funciones a las de meros ejecutores de un campo de decisiones cuya coherencia y lógica no dominan y no entienden.
>
> (Rico, 1998, p. 25, el resaltado es nuestro)

Ahora bien, la cita anterior habla de "*conocimientos sólidos sobre los fundamentos teóricos del currículo*", estos fundamentos son, en esencia, cuatro: (**a**) contenido, (**b**) metodología, (**c**) evaluación, y (**d**) bibliografía recomendada (Rico, 1998). Si ponemos atención, observamos que las tres primeras ya han sido incluidas de forma explícita en apartados anteriores, lo que nos indica la interrelación entre las componentes del CDC. Esto significa que el profesor debe manejar ampliamente estas componentes y saber explotarlas en el aula.

Así, entendemos el conocimiento curricular partiendo de Zabalza (2003), Hargreaves *et al*. (2001) y Rico (1998), pero tomando en cuenta además a Climent (2002) y An *et al*. (2004), como **el conocimiento de libros de texto, programas oficiales, programas informáticos y materiales diversos que resulten legítimos para la enseñanza de las matemáticas**[20] **y el conjunto de estrategias que permiten el uso de estos materiales para ponerlos en práctica en el proceso de enseñanza-aprendizaje; pero no basta con saber que existen todos los elementos anteriores, el conocimiento curricular exige la capacidad de discernir y analizar tales elementos y ver de qué manera se pueden llevar al aula y sus posibles implicaciones**. Esto significa que el profesor al manejar, estructurar y poner en práctica todo lo dicho atrás lo convierte en un hacedor de currículo (Doyle, 1992).

Ahora bien, cuando en el párrafo anterior nos referimos al *conjunto de estrategias que permiten el uso de estos materiales*, entra en juego un aspecto tomado en cuenta por Climent (2002): "*la habilidad para analizar críticamente materiales publicados*"[21] y dado que todo el material discutido en el seminario se derivó de libros de texto y de los programas oficiales, nos interesamos en estudiar el conocimiento del profesor a la hora de analizar nuestro material. Más aún, sabemos que en la mayoría de los casos, el profesor toma como

[20] Aquí entendemos la enseñanza de las matemáticas en el sentido curricular de Hargreaves *et al*. (2001), es decir, las matemáticas integradas a otras ramas del saber.

[21] A esta componente le damos un trato especial por lo siguiente: como se verá más adelante, el diseño de recogida de datos se basó en un proceso de discusión y reflexión a partir de unos problemas seleccionados y organizados por nosotros para este fin. En cierta manera, pretendíamos que los profesores participantes validaran el material diseñado con fines de hacer una propuesta didáctica a futuro y de ahondar en otros tópicos como la enseñanza basada en problemas. Pero hay más, esta componente nos pareció sugerente considerarla como eje transversal de nuestro trabajo, a partir de los reiterados análisis de los datos.

base el programa oficial para la elaboración de su currículo y, en cuanto a los libros de texto, los profesores suelen orientar sus clases a partir de estos (Doyle, 1992), una práctica muy habitual en la enseñanza de las matemáticas en la universidad venezolana (García, 2004).

Análisis crítico de materiales publicados

El proceso de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas exige al profesor universitario, entre un conjunto diverso de acciones relacionadas con la labor docente, una revisión constante de los materiales didácticos (dossieres, libros de texto, guías de actividades, etc.) y de las nuevas tecnologías (software didácticos o especializados, uso de la internet, etc.), así como también la elaboración de estos materiales; todo esto, con el fin de desarrollar la componente dinámica del conocimiento y mejorar la calidad de la enseñanza (Zabalza, 2001).

Pero el ejercicio no puede quedar en una simple revisión, por el contrario, el profesor de universidad como profesional reflexivo que es, debe mostrar una capacidad de análisis que le permita discernir y conformar una estructura sólida del contenido que llevará al aula, es decir, tomando también en cuenta al estudiante; a esta capacidad de análisis se refiere Climent (2002) de la siguiente manera:

> La habilidad para analizar críticamente materiales publicados estará en gran medida en función de la riqueza del conocimiento de contenido del profesor (aunque no sólo), o el análisis de dificultades, obstáculos y preconcepciones de los alumnos en relación con los contenidos va parejo también a la profundización en el propio contenido (para su enseñanza).
>
> (Climent, 2002, p. 91)

Esta actividad de análisis está fuertemente ligada al conocimiento del contenido matemático que tiene el profesor (Climent, 2002) y, por supuesto, al económico. En otras palabras, se conjugan dos *disciplinas académicas*, una *pura* y otra *aplicada* (Schommer-Aikins *et al.*, 2003), de modo que el profesor pueda fusionar ambos contenidos hasta verlos como uno sólo siempre que se pueda. Más aún, este proceso le permite al profesor seleccionar problemas matemáticos y modificarlos, si fuese necesario, para llevarlos al aula. En este sentido, el análisis de los materiales publicados está en franca relación con la práctica diaria de la clase. Entonces, este ejercicio le va a permitir acceder al conocimiento metodológico que necesitará a la hora de desarrollar su docencia, o a mejorarlo.

Características del conocimiento del currículo

Cerramos el apartado correspondiente al CDC caracterizando el conocimiento del contenido curricular:

- Amplio conocimiento disciplinar dual (matemáticas y economía).
- Conocer el programa oficial y los libros de texto.
- Ser consciente del tiempo disponible.
- Claridad en los objetivos del curso.
- Plantearse estrategias de enseñanza adecuadas y viables.
- Conocimiento y criterios para evaluar.
- **Análisis de materiales**[22]
    - Capacidad para analizar materiales didácticos del contenido disciplinar.
    - Exige saber modificar y/o crear problemas en el contexto matemático-económico para su implementación en el aula.

Para cerrar este apartado, concluimos con algunos aportes personales en el marco del CDC, los mismos apuntan hacia una didáctica específica como es el caso del conocimiento profesional del profesor sobre la enseñanza del cálculo diferencial en carreras de ciencias económicas.

2.3.4. Aportes personales al CDC

Es claro que el CDC es un tema altamente desarrollado en al campo de la didáctica, sin embargo, si nos centramos en todo lo que supone el conocimiento del profesor de matemáticas y, en particular, en aquel que trabaja en niveles de educación superior, nos encontramos con el hecho que todavía resulta un tema incipiente. La razón de construir un marco teórico que delimite y considere aspectos concretos consiste en ir depurar e ir ajustando el *zoom* hacia un tema en particular. Sobre el CDC del profesor de ha desarrollado todo un marco teórico amplio y sólido pero que el mismo apunta hacia profesores de primaria y secundaria o bien, se refiere al profesor en general.

Es claro que mientras un docente de primaria o secundaria posee un conocimiento general de la materia que enseña; sobre todo el de primaria, el profesor

[22]El resaltado de esta característica obedece a que es tema de interés para este trabajo.

de universidad es un especialista de la materia que por lo general, además de enseñar tal disciplina, hace investigación en la misma. Aun cuando nuestro concepto de CDC se fundamenta principalmente en An *et al*. (2004) y el mencionado trabajo está relacionado con profesores de matemáticas, el mismo no resultó suficiente ya que ellos trabajaron con profesores de secundaria. esto nos obligó a ir con cuidado y repensar algunas ideas expuestas por ellos.

En este sentido nuestro aporte viene dado por el conocimiento del contenido económico que un profesor de matemáticas debe tener a la hora de atender cursos en carreras de ciencias económicas y cuyos cursos sean presentados en el marco de la contextualización matemático-económica. Es por ello que hablamos de un *conocimiento dual del contenido*, donde le damos mayor peso al contenido económico que al matemático, partiendo de la idea que al ser profesores de matemáticas no ponemos en duda su conocimiento en esta área.

Por otra parte, en la revisión bibliográfica realizada por nosotros, pudimos apreciar que los autores se refieren a los temas de enseñanza y aprendizaje como uno sólo; en nuestro caso los diferenciamos y tratamos por separado, pero siempre desde la óptica del profesor. Con ello intentamos separar la visión del profesor sobre estos dos aspectos del proceso educativo y al mismo tiempo profundizar en el análisis de datos.

En otro orden de ideas, hacemos mención al *análisis crítico de materiales publicados*, atendiendo a que el mismo lo enfocamos dentro del contexto del CDC como parte del conocimiento del profesor, ya que exige un *conocimiento dual del contenido*. Sin embargo, también lo planteamos como estrategia de recogida de datos, puesto que con el material discutido con los profesores en el seminario lo que se planteó y persiguió en todo momento era la reflexión a partir de situaciones concretas relacionadas con las matemáticas y la economía.

2.4. La Enseñanza Basada en Problemas (EBP)

En didáctica de las matemáticas, el término *resolución de problemas* es ambiguo y abarca distintos enfoques en materia de enseñanza (García *et al*., 2006b); los más usuales son: (**i**) afianzar y consolidar un concepto matemático mediante situaciones problemáticas, (**ii**) trabajar y fortalecer técnicas de resolución de problemas y, por último, (**iii**) llegar a un concepto matemático a partir de una estructura o escenario conformado por problemas debidamente pensados y diseñados para este fin, tal como lo explicáramos en **1.1.4.2**. En este orden de ideas, en nuestro trabajo se entiende la resolución de problemas mediante el tercer enfoque y nos referiremos a él como enseñanza basada en problemas o EBP.

La EBP, en sus distintas variantes, es una de las estrategias de enseñanza que ha ganado, y sigue ganando prestigio en la educación superior, como metodología alternativa a la clase magistral. Aun cuando la EBP, como modelo general de enseñanza, tiene sus orígenes en el campo de la salud ésta ha tenido gran aceptación en otras áreas. Entrando en detalle, enseñar matemáticas vía resolución de problemas, significa acercar al estudiante a una realidad social, marcada por la necesidad que muchas veces tiene el individuo de resolver problemas de su entorno a través de una herramienta matemática.

A medida que el individuo crece o avanza en su escolarización, crecen también los grados de dificultad y exigencia para atender situaciones, en el caso del profesional universitario, enmarcadas o relacionadas directamente con su profesión (García *et al.*, 2006b). Según Schoenfeld (1985), el conocimiento necesario para una adecuada caracterización sobre el desarrollo de la resolución de problemas matemáticos aborda cuatro categorías (recursos, heurística, control y sistemas de creencias), las cuales están directamente relacionadas con los tres pilares que conforman el conocimiento didáctico del contenido. Así, la interrelación entre un constructo y otro fortalece nuestra investigación.

Si partimos de la opinión de Contreras (1999): "*En educación matemática y en investigación en educación matemática la resolución de problemas ocupa un lugar destacado; por otro lado, los nuevos currículos apuestan por orientar la matemática escolar de la enseñanza obligatoria desde la perspectiva de la resolución de problemas*". No obstante, con los últimos procesos de cambio dentro del panorama de integración europea y lo que supone la declaración de Bolonia que apuesta por promover la convergencia entre los sistemas nacionales de educación superior, lo dicho anteriormente por Contreras vale también para la educación universitaria, ya que uno de los objetivos principales hacia donde apunta la citada declaración, tiene que ver con el desarrollo curricular de la educación superior. Por otra parte, los programas de algunas materias de las que son objeto esta investigación, sugieren como estrategia metodológica la enseñanza de las matemáticas vía resolución de problemas.

Asimismo, la declaración de Bolonia dirige especial atención a una mayor participación (que supone un mayor compromiso) del estudiante en el proceso enseñanza-aprendizaje, tal como se puede observar con el nuevo sistema de créditos ECTS[23]. Ahora bien, no sólo en las universidad europea se están gestando cambios en el proceso de enseñanza; en la universidad venezolana y, concretamente, en la Universidad de Los Andes se viene impulsando y promoviendo la participación del estudiante en el marco del proceso de enseñanza-aprendizaje. Es por ello que nos propusimos estudiar el CDC del profesor de matemáticas de universidad a partir de un modelo alternativo

[23]Por sus siglas en inglés, European Credit Transfer and Accumulation System.

de enseñanza como lo es la EBP, puesto que el mismo le ofrece al profesor dirigir una enseñanza hacia un aprendizaje por descubrimiento, entendido éste como una construcción propia del estudiante asistida por el profesor (Carrillo, 1998), y es aquí donde la EBP comienza a jugar un papel significativo en este proyecto.

Moreno B. (2000), señala cuatro aspectos que se deben considerar dentro de la resolución de problemas como estrategia didáctica para la enseñanza de las matemáticas, tomando en cuenta los aspectos positivos y negativos que puedan significar la enseñanza por medio de la resolución de problemas, ella destaca: (**a**) Enseñar a resolver "problemas tipo", (**b**) inducir la reformulación verbal del problema a resolver, (**c**) facilitar por medio de preguntas el análisis del enunciado del problema, (**d**) facilitar la explicitación de los razonamientos presentes durante el proceso de resolución del problema.

Es de hacer notar que estas cuatro estrategias didácticas asociadas a la resolución de problemas están relacionadas con el conocimiento profesional que el profesor debe tener, siempre que veamos a éste como el facilitador y administrador de la difícil tarea que supone la enseñanza de las matemáticas por esta vía.

Así, lo que pretendemos estudiar en este trabajo es: (**a**) el conocimiento del profesor sobre esta estrategia de enseñanza, (**b**)hasta qué punto la enseñanza que siguen estos profesores se aproximan a la EBP, sobre todo en la enseñanza del cálculo diferencial en las carreras de ciencias económicas, (**c**) cómo valoran esta metodología de enseñanza, tomando en cuenta que, en general, siguen un modelo de enseñanza tradicional (García, 2004), entre otros.

En resumen y partiendo de Lee & Bae (2008), Benito *et al*. (2005), Humphrey *et al*. (2005), Kolmos (2004), Morales y Landa (2004), Roh (2003), Lewis (2003), Sonmez & Lee (2003) y Barrows (1986), entendemos la EBP como **una estrategia metodológica activa, centrada en el estudiante y con el profesor como guía, que desafía a los primeros a generar un conocimiento a partir de la búsqueda de soluciones a través de problemas cuidadosamente planteados, los cuales están relacionados con su entorno profesional, académico o ambos, bien sea entre ellos o en grupos, en contraposición con la enseñanza centrada en lecturas y libros de texto; pero siempre orientados por el profesor o tutor**. Con la implementación de esta metodología, el proceso de enseñanza-aprendizaje se inicia con un problema matemático ha ser resuelto, de tal manera que se genere en los estudiantes un "*conflicto cognitivo*" (Morales y Landa, 2004) y estos requieran de un nuevo o nuevos conocimientos para resolver el problema en cuestión.

Más allá de llegar a la respuesta correcta, lo que se busca es que los estudiantes analicen e interpreten el problema, identifiquen el o los contenidos disciplinares que se requieren para la solución y, así, generar una discusión sobre las posibles soluciones y las formas de llegar a éstas, donde la heurística juega un papel clave. Más aún, Lee & Bae (2008) se refieren a esta estrategia metodológica como una "*manera eficaz de proporcionar a los estudiantes de ser expuestos a situaciones del mundo real*" (su campo profesional en este caso) y de poder "*adquirir nuevas ideas en varias disciplinas*" al mismo tiempo. Por lo tanto, la entendemos como una actividad multidisciplinar que permite la interacción, siempre que se pueda, con diversas materias o asignaturas que conforman el currículo.

No obstante, esta metodología no goza de la total aceptación de los especialistas, existen opiniones encontradas sobre la utilización de esta metodología. White (2004b) manifiesta que hay profesores de matemáticas que no están de acuerdo con el uso de esta metodología como estrategia didáctica para la enseñanza de las matemáticas. Ellos consideran que las matemáticas se logran dominar a través del esfuerzo individual y que el trabajo en grupo distrae al estudiante de la adquisición de los objetivos de enseñanza. Así mismo,"...*consideran las matemáticas como una abstracción hermosa que de algún modo es corrompida por las aplicaciones*..." (Ibid); ello justifica que algunos profesores de matemáticas mantengan fuertes reservas sobre la implementación de la EBP. Sin embargo, Jhon White, profesor de bioquímica, afirma que: "*viniendo de una disciplina donde las matemáticas se aplican con frecuencia, me resulta difícil pensar en las matemáticas sin asociarlas a problemas de la vida real*" (Ibid).

Por otra parte, Angeli (2002) sostiene que los profesores entienden al estudiante como un ser pasivo e incapaz de ser responsable de su propio aprendizaje, lo que significa que el control del aprendizaje de los estudiantes no puede recaer en éstos y sino que tiene que ser llevado por el profesor.

Para estudiar todo esto recurrimos a una estrategia metodológica que explicaremos en el capítulo siguiente; en este sentido, es pertinente caracterizar la EBP en la enseñanza de las matemáticas en la educación superior, justificar nuestra apuesta por este modelo alternativo de enseñanza, qué aspectos debe tomar en cuenta el profesor de matemáticas al implementar esta metodología respecto a la enseñanza tradicional, entre otros.

2.4.1. Algunas características de la EBP en matemáticas

Como hemos señalado anteriormente, en el capítulo **1**, la EBP es considerada una estrategia didáctica activa, donde el estudiante se ve involucrado desde un inicio o mejor dicho, donde el profesor debe saber involucrar al estudiante desde el mismo planteamiento del problema, ya que el segundo pasa a ser la pieza fundamental de su propio aprendizaje, de la construcción de su conocimiento (Benito *et al.*, 2005; Humphrey *et al.*, 2005; Kolmos, 2004 y Roh, 2003). Un aspecto especial a tomar en cuenta en la EBP tiene que ver con el espacio ideal en la que se utiliza como estrategia didáctica. Tal vez por razones históricas y por los contenidos curriculares, el principal escenario donde se trabaja con esta metodología es en la educación superior, recordemos que fue en una Escuela de Medicina donde se dan los primeros pasos para ser implementada, por otra parte y dado que se apuesta por la multidisciplinariedad, algunas carreras universitarias se prestan para tal fin, entre ellas: medicina, enfermería, biología, matemáticas, derecho, ciencias económicas, etc.

Por lo general, los cursos de matemáticas básicas en la universidad, como el cálculo diferencial e integral, son presentados por el profesor como una actividad cuyo protagonista principal es la asignatura en sí misma (García *et al.*, 2006a) y quien le sigue en ese rol protagónico es el mismo profesor; éste, generalmente, relega a los estudiantes a un papel secundario, lo que conduce a estos últimos a ver los cursos como algo rutinario, en este sentido, la R-P es vista como una tarea superficial, la cual se centra en el uso de fórmulas pero no como constructora de conocimiento.

Entonces, si nos acogemos a los orígenes y fundamentos de la EBP podemos destacar algunas características que resultan propias de esta actividad que, insistimos, tiene como objetivo principal la construcción del conocimiento a partir de problemas que involucren uno o varios conceptos interrelacionados; bien sean, como en nuestro caso, matemáticos (cálculo diferencial) o bien matemáticos y económicos (cálculo diferencial - análisis marginal). Así mismo, refiriéndonos a los orígenes, mientras hay autores como Roh (2003) y Savery y Duffy (1995), apoyándose en H. S. Barrows, quienes consideran la EBP como un buen ejemplo de metodología constructivista, otros como White (2004a) piensan que no hay conexión entre la teoría constructivista y la EBP.

En este sentido, la EBP también se caracteriza porque tiene especial incidencia en el estudiante, al ser una metodología activa de trabajo (Benito *et al.*, 2005) que permite el desarrollo de habilidades del pensamiento, desde el punto de vista crítico y analítico, que se consolidan y perduran en el tiempo y que se abren a otras disciplinas (McCarthy, 2005); algo que desde nuestro punto de vista consideramos muy interesante por la relación existente entre las matemáticas y las ciencias económicas, un buen referente para destacar esta relación es el libro de González y Gil (2000).

Ahora bien, caracterizar la EBP no resulta una tarea fácil, entre otras cosas por los fundamentos teóricos en los que se basa esta estrategia didáctica, tomemos en cuenta que la misma jamás ha sido desarrollada sobre la base de una teoría o varias teorías en particular, sino que, por el contrario, se ha desarrollado desde la práctica, donde el ensayo y el error han jugado un papel significativo (Kolmos, 2004).

En este orden de ideas, la autora antes citada sostiene que la EBP varía según el tema a tratar, la organización y políticas de la universidad, la cultura de los estudiantes y el profesor. No obstante, ella habla de ocho principios teóricos sobre el proceso de enseñanza-aprendizaje asistido por EBP que, en líneas generales, forman parte del currículo, estos son:

1. El proceso de enseñanza-aprendizaje está basado en la formulación de un problema.
2. Los procesos de aprendizaje tienen que ser dirigidos por los participantes.
3. Hay que tomar en cuenta que el aprendizaje se basa en la experiencia de los participantes.
4. El proceso de enseñanza-aprendizaje se fundamenta en una actividad.
5. La interdisciplinariedad juega un papel fundamental.
6. La ejemplaridad también juega un rol determinante dentro del contexto.
7. Hay que tomar en cuenta la relación entre la teoría y la práctica.
8. Se considera la opción del trabajo en grupo o equipo.

En resumen y centrándonos en nuestra área de interés, es decir, la didáctica de las matemáticas a nivel universitario, destacamos algunos aspectos o características en referencia a la EBP como estrategia didáctica:

a. Es una estrategia metodológica activa centrada en el estudiante (Kolmos, 2004; Roh, 2003; Barrows, 1986)

b. Es una metodología que permite un desarrollo integral y plural en los estudiantes (Lee & Bae, 2008; Lewis, 2003); además que les permite enlazar de manera particular la construcción del conocimiento matemático partiendo de la propia matemática o de otras áreas como el caso de las ciencias económicas.

c. De la anterior se desprende que la EBP facilita una enseñanza contextualizada de las matemáticas, puesto que la misma permite plantear una clase en un escenario multidisciplinar.

d. Si tomamos en cuenta que los problemas pueden ser extraídos de vivencias reales o experimentales, esto le permite al estudiante desarrollar un aprendizaje que lo involucre tanto en el campo de la investigación como en área de formación (Mowshowitz, 2006; White, 1993).

e. Los problemas forman el eje central de la organización y el estímulo para el proceso de aprendizaje (Barrows, 1996).

f. Los problemas, además de ser una herramienta para la construcción del conocimiento, son un vehículo para el desarrollo de habilidades de la resolución de problemas (Barrows, 1996).

g. Permite que predomine la adquisición y consolidación del conocimiento frente a la memorización (Morales y Landa, 2004).

Finalmente y en otra dirección, queremos recordar que uno de los objetivos de este trabajo consiste en validar si la EBP es una herramienta metodológica para la recogida de datos en un marco como el señalado en esta memoria. De igual manera, queremos ser enfáticos que no pretendemos estudiar la EBP de forma exhaustiva como estrategia de enseñanza, ya que la misma no es puesta en práctica por los participantes en estos momentos, pero sí nos proponemos realizar un diagnóstico de carácter exploratorio de cara a una futura puesta en marcha del material que se discutió durante el seminario de investigación y recogida de datos. No obstante, reservamos el siguiente capítulo para hablar en detalle de esta situación.

Ahora bien, en el ánimo de continuar desarrollando el tema relacionado con las características de la EBP, debemos hacer referencia a los tipos de EBP que se desarrollan en la actualidad en el campo de la didáctica; entre estos tipos de estrategias metodológicas de enseñanza enmarcadas dentro de la EBP Savin-Baden (2003) señala siete tipos distintos, aunque algunos muy próximos, de modelos de EBP, los cuales varían de acuerdo al curso o la materia en la que se desee implementar tal estrategia. Aún así, el estudio de casos, usado en el área de la salud, el derecho y las ciencias económicas, es uno de los que mayormente se aplica. Este consiste en plantear un caso real o hipotético del área respectiva; por ejemplo, un juicio en el caso del derecho o el estudio de un paciente para el caso de la salud y se forman pequeños grupos donde se promueve la discusión para la construcción del conocimiento.

Por lo pronto pasamos a explicar el por qué de nuestra apuesta por la EBP, lo cual tiene que ver con dos líneas claramente diferenciados y que ya hemos mencionado en distintos puntos de esta memoria.

2.4.2. Por qué apostamos por la EBP

El apostar por la EBP supone para nosotros apuntar en dos direcciones que a saber son las siguientes, una es, (**a**) como estrategia didáctica de enseñanza de las matemáticas y, la otra, (**b**) como estrategia metodológica de recolección de datos. Sobre la primera debemos manifestar lo siguiente: nosotros apuntamos hacia una enseñanza contextualizada de las matemáticas y en particular del cálculo diferencial en carreras de ciencias económicas, es por ello y después de lo dicho hasta ahora sobre esta metodología de enseñanza que vemos en la EBP unas características especiales si la comparamos con la clase tradicional de matemáticas.

Por otra parte sostenemos, siguiendo a Humphrey *et al.* (2005), que hay una necesidad crítica de un nuevo paradigma educativo que apunta hacia la nueva formación de profesionales competentes, en particular, de los futuros economistas, administradores y contadores públicos. La EBP como estrategia facilitadora de interacciones multidisciplinarias responde, desde nuestro punto de vista, a este nuevo paradigma. Por otra parte, consideramos que no podemos permitirnos el seguir formando estudiantes de forma aislada en cuanto a contenido se refiere, es decir, enmarcados en disciplinas vistas como un único elemento y donde el estudiante se forme con ideas disjuntas de las materias que conforman su plan de estudios.

Una justificación hacia el cambio que exige hoy en día el proceso de enseñanza-aprendizaje actual lo presentamos a continuación:

> En las últimas décadas hemos sido testigos de los grandes cambios producidos en casi todos los aspectos de nuestra vida: la manera como nos comunicamos, se dirigen los negocios, se accede a la información y se utiliza la tecnología, son ejemplos claros. Actualmente nuestros estudiantes deben prepararse para incorporarse a un entorno laboral muy diferente al que existía hace solo diez años atrás. Los problemas que estos futuros profesionales deberán enfrentar cruzan las fronteras de las disciplinas y demandan enfoques innovadores y habilidades para la resolución de problemas complejos.
>
> (Morales y Landa, 2004, p. 146)

En este orden de ideas, nos decantamos por la EBP, aun cuando tenemos presente que ello implica una transformación en el modelo que se sigue actualmente de enseñanza-aprendizaje, esto quiere decir, cambios en los profesores y estudiantes. Esto implica una necesidad de cambios fundamentales en lo que se refiere a ambos grupos. No obstante, recordemos que en el presente trabajo sólo abordamos el caso del profesor de universidad.

Sobre esta necesidad de cambios recurrimos nuevamente a los autores citados anteriormente, quienes retratan la situación actual del modelo de educación superior que se sigue en general:

> Muy pocos docentes en la educación superior tienen algún tipo de formación en pedagogía, simplemente enseñan como les enseñaron, es decir, a través de clases expositivas. Esta modalidad de enseñanza normalmente está focalizada hacia los contenidos, priorizando los conceptos abstractos sobre los ejemplos concretos y las aplicaciones. Las técnicas de evaluación se limitan a comprobar la

> memorización de información y de hechos, ocupándose muy rara vez de desafiar al estudiante a alcanzar niveles cognitivos más altos de comprensión.
>
> (Morales y Landa, 2004, p. 146, el resaltado es nuestro)

El otro punto por el que apostamos por la EBP tiene que ver, como dijimos arriba, con el uso ya no como estrategia de enseñanza sino de recogida de datos en una investigación de tipo cualitativa como la que estamos presentando. Claro está que toda la literatura revisada por nosotros entiende la EBP como lo señalado en el punto (**a**), pero nosotros nos hemos propuesto explotar el uso de la *EBP como una técnica para la recolección de datos*, ya que la misma está fuertemente vinculada con algunas componentes del CDC.

2.4.3. Aspectos a tomar en cuenta por el profesor en la EBP

Un aspecto a destacar en la EBP, vista como estrategia de enseñanza, es el papel que juega el profesor, en este sentido tomaremos en cuenta lo señalado por Lewis (2003) y Roh (2003), entre otros; quienes afirman que la EBP permite conjugar el aprendizaje de diferentes áreas del conocimiento, en nuestro caso, nos referimos al cálculo diferencial para estudiantes de ciencias económicas y las consideraciones que un profesor de matemáticas debe tener presente a la hora de tomar en cuenta la enseñanza de las matemáticas basada en problemas para carreras de economía o afines.

En líneas generales, los profesores que utilizan la EBP como estrategia metodológica de enseñanza en sus cursos o asignatura deben considerar algunos fundamentos dentro del CDC; en particular, destacamos aquellos relacionados directamente con el estudiante y con la asignatura en sí. En el caso del estudiante, porque éste se está convirtiendo en el protagonista del proceso de enseñanza-aprendizaje; en el caso de la asignatura o contenido de la misma, por la fuerte relación existente entre las matemáticas y las ciencias económicas.

Al respecto señalamos algunos puntos como referentes sobre el papel del profesor en la EBP, los cuales son tomados de los autores señalados arriba:

1. El uso de *la EBP obliga al profesor a ceder el rol protagónico*, que éste ocupa en la enseñanza tradicional, al estudiante, es decir, se invierte el proceso de enseñanza-aprendizaje. El profesor debe saber cuándo y cómo intervenir, para que el alumno conserve su actitud participativa y reflexiva y no adopte la actitud pasiva que supone la clase tradicional.

2. Lo anterior supone un *mayor compromiso y un nivel de profesionalismo más crítico* por parte del profesor.

3. El profesor debe poseer un conocimiento ajustado a las aplicaciones, lo que implica un *conocimiento más profundo del contenido*. Este conocimiento va en consonancia con el que identificamos como **conocimiento dual**. La falta de un conocimiento profundo de las matemáticas puede incidir en la planificación, selección y elaboración de los problemas a tratar.

4. El profesor al implementar la EBP se ve en la obligación de *aplicar una amplia gama de habilidades pedagógicas*.

5. El profesor debe ser consciente que no sólo tiene que producir un conocimiento matemático en sí, sino que *debe saber involucrar a los estudiantes en los procesos de resolución de problemas y aplicaciones del conocimiento matemático*.

6. El profesor *está obligado a tener conocimiento sobre el estudiantes* con los que trabajará y desarrollará un determinado tema. En el caso de las ciencias económicas, el docente tiene que estar al tanto del conocimiento tanto matemático como de contenido económico que posee el estudiante para ese momento.

7. Las ciencias económicas, por su estrecho vínculo con las matemáticas, permiten el uso de la EBP para la enseñanza de estas últimas. La elección del problema es clave en esta metodología y el profesor universitario de matemáticas debe tener presente, a la hora de elegir el problema que servirá de base para generar conocimiento en el estudiante, la distribución adecuada de contenidos matemático y económico.

2.4.4. Aportes personales a la EBP

Finalizamos el apartado relacionado con la EBP destacando algunos puntos que hemos discutido a lo largo del mismo y que consideramos son un aporte a la didácticas específicas. En primer lugar, mostramos un concepto de EBP que queda claramente diferenciado de la R-P en la didáctica de las matemáticas y de esta manera, le restamos ambigüedad al concepto de R-P, tal como se viene manejando en esta área.

Por otra parte, el hecho de reservar un apartado a la EBP cobra sentido si pensamos que el instrumento de investigación se elaboró sobre la base de esta metodología alternativa de enseñanza, fundamentalmente con la firme intención de aproximarnos al profesor de manera indirecta y generar inquietudes en ellos y, así, enriquecer la discusión y reflexión que los participantes pudieran hacer sobre la EBP y sobre aspectos concretos del CDC.

De igual manera, el haber caracterizado la EBP en el área de la enseñanza de las matemáticas permite acercar el *zoom* hacia situaciones concretas. En la literatura existente, generalmente se caracteriza la EBP en áreas como la salud, la química, bioquímica, entre otras; pero poco se encuentra sobre matemáticas. Esta caracterización permite ir depurando y consolidando un marco teórico que hasta ahora resulta flojo en cuanto a las matemáticas se refiere.

También es cierto que esta estrategia metodológica es muy extensa y abarca variados fundamentos dentro del campo de la didáctica, pero el hecho de que nuestro trabajo esté enmarcado en el estudio del CDC del profesor de matemáticas de universidad, nos impulsó a hablar del rol que juega éste en la implementación de esta estrategia y más aún, de ilustrar la relación existente entre la EBP y el CDC.

Por último y sabiendo que en el análisis de los datos se abordarán aspectos sobre el CDC y la EBP en un escenario muy concreto, estimamos que disponemos de los instrumentos suficientemente sólidos para llevar a cabo un estudio sobre el conocimiento didáctico del contenido del profesor de matemáticas de universidad y una aproximación al conocimiento de estos en relación con la enseñanza de las matemáticas basada en problemas; todo ello, para cubrir los objetivos que nos planteamos al inicio e intentar realizar un aporte en lo que se refiere al profesor de matemáticas de universidad como elemento de investigación en el campo de la didáctica.

Capítulo 3

Metodología

Introducción

A continuación presentamos la metodología utilizada en el presente trabajo, tanto para la recolección de datos como para el análisis de los mismos. Al mismo tiempo, reservamos un espacio para hablar sobre los profesores participantes. En primer lugar, comenzaremos hablando sobre la recolección de datos, la cual se hizo a través de un seminario de discusión y reflexión en el que se trabajó con un material diseñado por nosotros y validado por investigadores expertos en didáctica de las matemáticas que desarrollan su labor docente en una facultad de ciencias económicas de una reconocida universidad en Cataluña, España; pero además, externos a este trabajo. Las sesiones del seminario, cuatro en total, fueron grabadas en audio y posteriormente fueron transcritas, al final de cada sesión se le entregó a cada profesor un breve cuestionario abierto relacionado con la actividad del día, el cual debía ser entregado al inicio de la siguiente sesión. También diseñamos y aplicamos una entrevista con preguntas abiertas, esta entrevista la realizamos una vez acabado el seminario. Como siguiente punto, nos referimos al grupo de profesores de universidad que participaron en el presente estudio. En el tercer y último punto de este capítulo, hablaremos sobre la metodología empleada para el análisis de la información obtenida por parte de los participantes.

También es importante destacar que este trabajo se basa en un estudio de tipo cualitativo. Por medio de él, investigamos sobre el conocimiento didáctico del contenido (CDC) de un grupo de profesores de matemáticas de universidad; para finalmente, hacer nuestras reflexiones, interpretaciones y comentarios a partir de los datos obtenidos.

3.1. Metodología de la investigación

A continuación presentamos el marco metodológico en el cual está inmerso el presente trabajo, en otras palabras, partimos del hecho de explicarle al lector dónde se enmarca la investigación, así como el proceso que se siguió para la organización y el análisis de los datos obtenidos. En este sentido, ilustramos que en un primer paso *preparamos y abonamos* todo el terreno (diseño y elaboración del instrumento), para luego proceder a *cultivar* (recogida de datos) y, finalmente, *cosechar* (análisis de los datos, resultados y conclusiones).

En el presente trabajo se estudia el CDC del profesor de matemáticas de universidad a partir de la EBP, básicamente, mediante la discusión de un material en el que se induce un proceso de reflexión a partir de un seminario de discusión. Tanto el material como la forma de desarrollar el seminario se centran en la manera como el profesor dice que enseña el tema de la derivada, eso sí, tomando en cuenta la componente básica de la enseñanza; es decir, los estudiantes y sus referentes.

Es por ello que en las dos secciones que siguen nos referimos, de manera específica, al tipo de investigación con el que se identifica la presente memoria con su debida justificación, así como también las exigencias previas que nos propusimos cubrir con el objeto de que la investigación se sustente en sí misma, tal como lo requiere un trabajo de esta naturaleza.

3.1.1. Marco metodológico

Comenzaremos por decir que para el desarrollo de nuestro estudio la metodología que seguimos es del tipo *cualitativa* y de naturaleza *descriptiva*, *exploratoria* e *interpretativa*, ya que lo que buscamos estudiar son aquellos aspectos sobre el conocimiento profesional del profesor de matemáticas de universidad que fueron definidos en el **Capítulo 2** y su relación con las carreras de ciencias económicas; además, investigamos la enseñanza basada en problemas (EBP) como estrategia activa de enseñanza de las matemáticas en las carreras antes mencionadas y como herramienta para la recogida de datos.

El método de investigación que mejor se ajustó a nuestros intereses, tomando en cuenta el escenario en el que nos moveríamos, es el *estudio de casos*[1], el cual se adapta tanto a los objetivos que perseguimos como a la información que íbamos a recoger. La elección de esta metodología de investigación se hizo en atención a que quisimos abordar algunos aspectos del conocimiento del

[1]Aunque hay que aclarar, tal como lo explicaremos en la metodología de análisis, que lo que buscamos estudiar es la interrelación entre los participantes. En este sentido, cuando nos referimos al estudio de casos es porque en un principio vemos los participantes por separado.

profesor, con cierta intensidad y en un intervalo de tiempo relativamente corto. El verdadero potencial de este diseño radica en su capacidad para generar hipótesis y descubrimientos, en centrar su interés en un individuo o situación y en su flexibilidad y aplicabilidad a situaciones naturales (Latorre *et al.*, 1996) aunque luego, en el Capítulo 5 queda evidenciado que lo que hacemos es partir del estudio de casos para llegar al *análisis relacional*.

Compartimos los supuestos de Merriam (1988, citado en Arnal *et al.*, 1994), quien señala cuatro propiedades esenciales en el estudio de casos: *particular*, *descriptivo*, porque pretendemos realizar una descripción del fenómeno por estudiar lo más densa posible; *heurístico*, en la medida en que los resultados nos abran las puertas hacia la comprensión de los casos, llevándonos en lo posible a descubrir nuevas situaciones y significados; e *inductivo*, puesto que a partir de los resultados se puede llegar a algunas generalizaciones o al descubrimiento de nuevas relaciones y conceptos.

Otro aspecto que conviene destacar en esta investigación, es que el estudio de casos se aplica a varios individuos de manera simultánea o sucesivamente comparada, lo que implica una *inducción analítica* y el *método de la comparación constante* (Ballester, 2001). Este trabajo queda bien diferenciado dentro del estudio de casos y, al respecto, diremos que se corresponde con una *microetnografía* (Arnal *et al.*, 1994; Ballester, 2001), esta microetnografía se corresponde con un pequeño grupo de profesores de universidad que se ocupan de algo en común, enseñar matemáticas a estudiantes de ciencias económicas en la Universidad de Los Andes en Venezuela.

A todo lo anterior añadimos que en este trabajo realizamos un estudio de casos de una forma muy particular, puesto que los datos provienen de dos ambientes claramente diferenciados; por una parte están los datos que provienen de un espacio colectivo de discusión (el seminario), en el cual las opiniones emitidas por los participantes podrían estar sujetas a los comentarios o actitudes de los otros participantes y, por otro lado, los datos derivados de los cuestionarios y entrevistas que aplicamos de manera individual a cada uno de los profesores.

En el caso de los cuestionarios, estos fueron respondidos por los profesores de forma individual y en total privacidad, ya que los mismos se los llevaban a sus lugares de habitación y eran entregados con un margen de tiempo de una semana; en cambio, las entrevistas fueron realizadas al final de la última sesión del seminario. Toda esta situación tiene la propiedad de enriquecer el conjunto de datos pero al mismo tiempo exige ser más cuidadosos en el análisis de los mismos. Podemos decir que ambas situaciones corresponden a técnicas *directas* o *interactivas* de recogida de datos (Massot *et al.* 2004; Goetz y LeCompte, 1988) dentro de las investigación cualitativa.

3.1.2. Exigencias previas a la investigación

Al final del **Capítulo 1** mostramos la estructura del presente trabajo, en la cual se presentaron de manera esquemática los principales aspectos que se tocan en este estudio. Por otra parte, el presente capítulo lo hemos reservado para hablar de la metodología empleada y todo lo relacionado con situaciones propias de este tipo de investigación. Una vez ubicado el modelo de investigación en el que centramos nuestro trabajo, así como el paradigma y contexto en el que se enmarca toda la dinámica abordada hasta ahora, es conveniente hablar, según Ferreres *et al*. (1997), de las exigencias fundamentales que se deben seguir en una investigación cualitativa y que están relacionadas con la *representatividad*, *relevancia* y *plausibilidad*; así como las relacionadas con la *fundamentación teórica* de la investigación y, las que se derivan tanto de la *dinámica relacional* como de la *dimensión ético-social*. Todo esto, con el objetivo de guardar, a lo largo del desarrollo del estudio los patrones de rigor que merece el mismo.

Representatividad

A la hora de abordar la *representatividad* como exigencia previa en este tipo de estudio, destinamos este espacio para referirnos a situaciones propias derivadas del **análisis**, así como también a los **participantes** y al **objeto matemático elegido**, en este caso, la derivada. En este sentido y con el objetivo de poder extendernos y profundizar en el planteamiento de nuestro trabajo hemos ampliado, a través del análisis, las opiniones de los profesores participantes. Por otra parte, puntualizamos que al tratarse de un estudio de casos es probable que el conjunto de profesores que intervienen en este trabajo no represente al total de profesores que enseñan matemáticas en carreras de ciencias económicas en la Universidad de Los Andes, poniendo en evidencia una de las desventajas del estudio de casos (Stake, 1999), pero sin restarle importancia a los resultados de la investigación por lo señalado en la **Sección 3.1.1** y en el **Apartado 3.3**.

Finalmente, la elección de la derivada como objeto o concepto matemático no posee una característica propia y significativa a la hora de compararlo con algún otro concepto del cálculo como la integral, las sucesiones y series o cualquier otro concepto, por ejemplo, del álgebra matricial o de alguna otra área de las matemáticas; por el contrario, inferimos que al abordar alguno de estos conceptos por separado los resultados serían similares, con lo cual la representatividad que pueda tener la derivada como pilar de este trabajo debe ser vista como una vía que eligió el investigador para acercarse a los profesores y así indagar y profundizar en el CDC y la EBP. En otras palabras, la derivada, en este caso, resulta ser un vehículo que nos permite conectar con los participantes en este estudio.

Relevancia

Al igual que la representatividad, la *relevancia* como exigencia previa de este trabajo, está relacionada con el problema de investigación que aquí se trata y lo significativo que pueda ser para el grupo de profesores participantes el desarrollo del presente trabajo. Así, nos permitimos enfocar la relevancia con una visión en la que el investigador suele plantearse el problema como *tema de propio interés*; no obstante, la posición del investigador en este caso es mostrar lo significativo que podría resultar el conocer algunos aspectos fundamentales que nos orientan hacia futuros trabajos, que sigan esta línea, de cara a profundizar en cuestiones más específicas de la enseñanza del cálculo en carreras de ciencias económicas y, por qué no, en otras carreras universitarias como la ingeniería, entre otras.

Ya en la **Sección 1.1.2** mencionamos algunos de los trabajos que nos impulsaron y que fueron tomados en cuenta para el desarrollo de esta memoria; sin embargo, no podemos dejar de mencionar investigaciones como: An *et al*. (2004), Angeli (2002), Blanco *et al*. (1995), Bransford *et al*. (2000), Bridges y Hallinger (1992), Cámara (2000), Carrillo *et al*. (2007), Codina y Riviera (2001), DeLoach (2001), Forsythe (2002), García (2006b), Gijselaers (1995), Jiménez y Wamba (2004), Kahan *et al*. (2003), Milter y Stinson (1995) y Roh (2003), entre otros, las cuales nos permitieron definir claramente nuestra línea de investigación. Si atendemos a cada uno de estos trabajos, podemos apreciar que algunos hablan del CDC, otros la EBP, pero ninguno conjuga de forma explícita ambos tópicos y, mucho menos, enmarcado en el tema de la enseñanza de las matemáticas en carreras afines a las ciencias económicas.

En tal sentido, la relevancia de nuestro trabajo obedece a los pocos trabajos que hay en esta línea que reúne: el conocimiento del profesor de matemáticas de universidad, la enseñanza de las matemáticas vía resolución de problemas como estrategia didáctica y las matemáticas económicas. Es así como pretendemos rellenar ese hueco dentro de las didácticas específicas.

Plausibilidad

Cuando nos planteamos este trabajo y notamos lo relevante o significativo del mismo dentro del contexto espacial en el que está inmerso, se pudo observar con bastante claridad la justificación del mismo. En otras palabras, la relevancia de la investigación incidió en lo *plausible* de la misma. Así, desde nuestro punto de vista y por nuestro propio interés como investigadores, consideramos plenamente justificable el desarrollo de este estudio, ya que por medio del mismo podemos conocer, o al menos aproximarnos a, una realidad que hoy en día se muestra como una necesidad básica e ineludible para el perfeccionamiento del docente, así como el desarrollo y evolución de los programas curriculares que señalan Colás y Buendía (1998), por ejemplo.

Por otra parte, el trabajo aquí presentado ha ganado terreno dentro de la aplicabilidad del mismo por parte de uno de sus autores, puesto que uno de ellos se desempeña como investigador y docente universitario en el campo de las matemáticas económicas. Más aún, el trabajo en si mismo ha servido como herramienta motivadora y como elemento impulsor para otros colegas del departamento donde labora este autor. Recordemos además que uno de los objetivos de este trabajo consiste en poner en práctica el material discutido durante la recolección de datos.

Fundamentación teórica

Aun cuando partimos de algunos trabajos como piezas claves para el desarrollo de esta investigación, tal como se expuso en el **Capítulo 1**, la información obtenida a través de los instrumentos nos obligó a sostener un *feedback* entre los antecedentes de nuestra investigación y los datos recabados; obligándonos a buscar en otras fuentes teóricas pero sin descuidar ni restarle importancia a la valiosa información suministrada por los profesores participantes. En todo caso, queremos dejar claro que desde el inicio de este trabajo tomamos como norte, ser cuidadosos y objetivos a fin de no tergiversar o manipular la información de los profesores. Por otra parte, el ampliar la literatura nos ha permitido ser más cuidadosos de cara a futuros trabajos, con lo cual el enriquecimiento intelectual en los temas de la EBP y del CDC del profesor de matemáticas de universidad ha sido provechoso; de manera que esto ha repercutido de forma directa en el marco teórico dándole mayor solidez y obligándonos a profundizar en el mismo.

Dinámica relacional

Una de las grandes inquietudes que afloraron antes de iniciar este trabajo, fue el temor a la no receptividad y participación por parte de los profesores colaboradores en este proyecto, ya que casi todos habían participado en García (2004) y la distancia geográfica entre los investigadores y los participantes era significativa. Pero para satisfacción nuestra, la receptividad y atención prestada por medio de sus respuestas y opiniones a lo largo de toda la aplicación del instrumento (seminario, cuestionarios y entrevistas), muchas de ellas con gran detalle y precisión, nos impulsó y alentó a proseguir en el desarrollo y evolución de la investigación. Más aún, las sugerencias y el aporte de ideas de algunos participantes nos han motivado a continuar y, al mismo tiempo, a pensar en nuevos trabajos donde se relacionan las matemáticas y las ciencias económicas como es el caso del *álgebra matricial* y el estudio de *puntos de equilibrio de mercado*, el *modelo insumo-producto*, entre otras.

En este sentido, es conveniente sacar a colación algunas opiniones personales de los participantes, quienes coinciden en lo interesante y pertinente que resulta un estudio como este, así como la necesidad de que se consoliden trabajos de investigación como el que estamos mostrando o, al menos, la creación de espacios o actividades como la realizadas en el seminario de cara a la formación permanente del profesor:

(Alexis) *Ahora, me parece y es bueno que uno aquí haga un grupo de trabajo con problemas de aplicaciones a la economía.*

(Elio) *...me agradó mucho este tipo de reuniones, este tipo de cosas..., y ojalá que se pudieran seguir haciendo..., ...me preocupa el enfoque que le estamos dando muchas veces a esos contenidos.*

(Kenya) *...contribuyó a plantearme dudas interrogantes o cuestiones que realmente nunca me las había planteado y a reflexionar sobre algunas situaciones..., bueno que están allí latentes pero que a veces uno como que no las percibe.*

(Manuel) *...uno adquiere otra forma de ver las cosas. Por ejemplo, a mi me gustó esa actividad, la manera de implementar la regla de la cadena ya con..., de una vez con las aplicaciones, entonces dije: "¡caramba!, me parece interesante hacerlo de esta manera". Entonces, ya aprendí otra cosa que además no había visto antes.*

Dimensión ético-social

Para acercarnos a los profesores participantes tomamos en cuenta algunas consideraciones y exigencias vinculadas con este tipo de investigación, aunque debemos reiterar que ya cinco de los seis profesores que participaron en el presente trabajo ya lo habían hecho en García (2004). No obstante, los participantes fueron debidamente invitados a participar de forma voluntaria y, de igual modo que en *ibid*, se les informó sobre las pretensiones del trabajo. Por otra parte, quedó garantizado de manera seria y clara el anonimato de cada uno de ellos, resaltando así el compromiso ético y social que corresponde a este tipo de trabajo.

3.2. Recogida de datos

Para la recolección de datos hemos diseñado un material, el cual consiste en una propuesta didáctica teórica, enmarcada en la EBP como estrategia metodológica de enseñanza del cálculo diferencial en carreras de ciencias económicas; este material se discutió durante un seminario con los profesores participantes. En este sentido la EBP, tal como lo hemos venido señalando, jugó un doble papel en este trabajo: por una parte, como estrategia metodológica de recogida de datos, permitiéndonos llegar de manera indirecta al grupo de profesores, y en segundo lugar, dado que es una estrategia metodológica de enseñanza sugerida por los programas oficiales y que forma parte del CDC, para determinar el conocimiento que tiene este grupo de profesores sobre la mencionada metodología de enseñanza.

Aunado al material antes mencionado se diseñaron cuatro cuestionarios abiertos relacionados directamente con cada una de las sesiones programadas del seminario para que los profesores, de forma individual, complementaran la información emitida durante la respectiva sesión. Finalmente, después de la última sesión del seminario, se entrevistó a cada profesor por separado y en este caso, la entrevista se fundamentó en preguntas abiertas, de manera que cada uno de los participantes aportara más material sobre su CDC y al mismo tiempo sirviera para que valoraran la actividad realizada, vista toda como un conjunto. En resumen, podemos decir que la recogida de datos que realizamos es del tipo *interactiva* (Massot *et al.*, 2004; Goetz y LeCompte, 1988) y en la que el investigador está presente en todo momento.

La idea de diseñar un instrumento de recolección de datos conformado por tres partes viene a estar justificado por el hecho de buscar mayor profundidad en las opiniones de los participantes. Sobre este hecho en particular citamos a Massot *et al.* (2004)

> La utilización de distintas técnicas de recogida de información de forma complementaria o bien simultánea es necesaria para poder contrastar y enriquecer la información obtenida sobre la realidad, pues cada una de las técnicas utilizadas nos ofrece una visión particular de la misma.
>
> (Massot *et al.*, 2004, p. 332)

No es un secreto que las opiniones de una persona sobre determinado tema cambian de acuerdo con el escenario en el que se encuentre ésta, razón por la cual nos propusimos obtener información del profesor en tres escenarios distintos: (1) durante las sesiones del seminario, en un ambiente interactivo con la presencia de pares y del investigador, (2) en relación al cuestionario, los profesores lo contestaban cada uno por su cuenta y lo entregaban en la siguiente sesión de seminario y, (3) en la entrevista realizada después de la última sesión del seminario y de la entrega del cuestionario correspondiente a esta sesión, en este caso el participante estuvo frente al investigador. En las dos secciones que conforman este apartado describimos en detalle el instrumento así como el diseño y aplicación del mismo.

3.2.1. El instrumento de investigación

Como ya se dijo en líneas anteriores, diseñamos una propuesta didáctica teórica cuyo contenido matemático central es el concepto de derivada y temas relacionados con el mismo como: cálculo e interpretación física y económica de la derivada, regla de la cadena y análisis matemático y económico. Además, incluimos temas como el dominio de definición de una función tanto en el contexto matemático como económico, monotonía de una función, valores extremos de una función entre otros; teniendo siempre presente la *contextualización económica* en cada uno de los problemas que conforman el material de discusión.

La propuesta didáctica[2] se diseñó para ser desarrollada en cuatro partes, siguiendo la estructura de los programas oficiales que actualmente se implementan en la Universidad de Los Andes. Con esta estructura se buscó darle a la recogida de datos un *carácter continuo* (Massot *et al.*, 2004) a este proceso. Estas partes, discutidas en igual número de sesiones del seminario, estuvieron conformadas de la siguiente manera:

- Introducción al concepto de derivada de una manera no tradicional mediante una aproximación empírica o menos formal y con una interpretación económica de la derivada.
- Conceptos del análisis matemático asociados a la derivada o al tema de funciones en una variable real como: monotonía, puntos críticos, valores extremos, dominio de definición.
- Introducción de la regla de la cadena a través de interpretaciones económicas y matemáticas.
- Análisis de funciones en un contexto económico y matemático para la toma de decisiones.

Cada apartado de la propuesta didáctica estuvo formado por dos o tres problemas. En cada uno de los problemas se abordaron preguntas relacionadas con el CDC como los son; en nuestro caso, conocimiento disciplinar matemático-económico, conocimiento del aprendizaje, conocimiento de

[2]Para detalle en extenso de este material remitimos a los **Apéndices A** y **B**.

la enseñanza y conocimiento del currículo; dándole mayor peso a los puntos centrales de nuestro interés, tal como lo señaláramos en el marco teórico.

Observación 1: Se debe tener siempre presente que las opiniones y comentarios emitidos por los participantes se basan, en la mayoría de los casos, en su experiencia como docentes universitarios y, en ningún momento, son derivados de haber llevado a la práctica (al aula de clases) ninguna de las actividades contempladas en el seminario. En todo caso, y a fin de profundizar en esta línea de investigación, se tiene previsto darle continuidad a este trabajo mediante el desarrollo de una actividad con profesores y estudiantes. Sin embargo, para los efectos y objetivos que se persiguen por el momento, nos limitamos únicamente a trabajar con el profesor.

Observación 2: Por razones geográficas y de disponibilidad de tiempo de los participantes, los seis profesores fueron divididos en dos grupos, **A** y **B**, cada grupo de tres profesores. Sin embargo, uno de los profesores del grupo A, sólo participó en la primera sesión del seminario y tuvo que abandonar por razones ajenas a su voluntad. A lo anterior hay que añadir que durante las sesiones del seminario, cuando se realizaba una pregunta, procuramos darle rotación a los participantes, es decir, era el investigador quien decidía en la mayoría de los casos, quién comenzaría a responder; esto último, para evitar que sólo un participante tomara la iniciativa o liderara al resto del grupo y darle un carácter heterogéneo a la información.

3.2.2. Diseño y aplicación del instrumento

A continuación pasamos a describir la manera como se llevó a cabo la elaboración y aplicación de los instrumentos, reservando para el siguiente apartado lo que concierne a la validación de los mismos. Sin embargo, debemos comenzar por afirmar que la base del diseño y estructura de nuestro instrumento de recogida de información obedece tanto a los resultados obtenidos en García (2004) como a las diversas inquietudes o interrogantes que nos planteamos en el citado trabajo y, que por diversas razones no pudimos abordar en ese momento.

Ahora bien, si algo tuvimos siempre claro al inicio de esta investigación, fue y sigue siendo el tema principal a ser estudiado; es decir, el conocimiento didáctico del contenido (CDC), por otra parte, la herramienta o concepto matemático que nos sirviera de enlace para abordar el tema antes señalado (la derivada) y el área de conocimiento de las carreras universitarias en las que se trabaja con este concepto, esto es, las ciencias económicas.

De estos tres puntos, los dos últimos se repiten respecto a García (2004), pero cambiamos las concepciones y creencias del profesor de matemáticas de universidad por el CDC. Más adelante surgió la idea de implementar la enseñanza de las matemáticas basada en problemas (EBP) vista como estrategia metodológica de enseñanza. La idea original consistía en discutir una lista de problemas matemáticos, pero la colaboración de un revisor externo del instrumento inicial nos motivó a seguir por esta vía después de una discusión pormenorizada entre el investigador que presenta esta memoria y sus directoras.

A continuación pasamos a explicar en qué consiste el instrumento de recogida de datos elaborado para cumplir con los objetivos de este trabajo, así como las distintas formas o estrategias que utilizamos para implementar cada parte del instrumento.

3.2.2.1. El material

Para el desarrollo de todo este proyecto hemos diseñado un material, el cual lo entendemos, casi en el estricto sentido de la palabra, como la *columna vertebral* de la presente investigación, el cual consiste en una serie de problemas enmarcados en el tema de nuestro interés, es decir, el cálculo diferencial para carreras de ciencias económicas. Estos problemas los elegimos a *conveniencia* de libros de textos, los cuales aparecen sugeridos o recomendados en los programas oficiales de las carreras ya mencionadas en la Universidad de Los Andes, a fin de buscar la mayor familiarización por parte de los participantes con los problemas a ser discutidos. El contenido de todo este material se puede ver con todo detalle en los **Apéndices A** y **B** al final de este trabajo.

Los problemas que se eligieron, salvo los de la primera sesión, corresponden al tema de aplicaciones de los libros de texto que fueron consultados (Arya y Lardner, 1987; Haeussler y Paul, 1997; Lial y Hungerford, 2000; Whipkey *et al.*, 1987; Wonnacott, 1983), solo que para este trabajo, los problemas fueron modificados por nosotros con el objeto de plantearlos bajo el esquema de la EBP y, al mismo tiempo, que tales problemas nos permitieran acercarnos a los profesores y estudiar las partes del CDC de nuestro interés. En otras palabras, los problemas sirvieron como herramienta para obtener información específica a partir de un conjunto de preguntas vinculadas al CDC y relacionadas con el problema en discusión.

La forma de aplicar el mencionado material se realizó, fundamentalmente, mediante un seminario de discusión; de cada sesión del seminario se derivó un breve cuestionario y al cabo de la última sesión del seminario y del cuestionario correspondiente realizamos una entrevista a cada uno de los participantes. Pasamos a explicar todas estas estrategias de recogida de información en las siguientes subsecciones.

3.2.2.2. El seminario

Este tipo de técnica para recoger información se conoce también como *entrevista de grupo* (Flick, 2004) o *grupos de discusión* (Massot *et al.*, 2004); estos últimos se refieren a esta estrategia de la siguiente manera:

> ...es una técnica cualitativa que recurre a la entrevista realizada a todo un grupo de personas para recopilar información relevante sobre el problema de investigación. Por lo tanto, la primera característica que se evidencia en esta técnica es su carácter colectivo que se contrasta con la singularidad personal de la entrevista en profundidad.
>
> (Massot *et al.*, 2004, p. 343)

Por otra parte, sobre el alcance y la potencialidad de esta técnica nos acogemos a lo que sostiene Patton (1990) citado en Flick (2004), quien dice que es una:

> ...técnica de recogida de datos cualitativa sumamente eficiente [que proporciona] algunos controles de calidad sobre la recogida de datos, ya que los participantes tienden a proporcionarse controles y comprobaciones los unos a los otros que suprimen las opiniones falsas o extremas... y es bastante sencillo evaluar hasta qué punto hay una visión relativamente coherente compartida... entre los participantes.
>
> (Patton, 1990, pp. 335-336, citado en Flick (2004), p. 127)

Ahora bien, antes de pasar a explicar en qué consiste nuestra estrategia queremos dejar por sentado que las sesiones del seminario como tales, no fueron sesiones de resolución de problemas; los problemas allí discutidos se les entregaban a los participantes con sus respectivas soluciones al inicio de cada sesión, buscando en todo momento la reconstrucción lo más aproximada posible a las situaciones vividas en un aula de clase, evitando estudiar el CDC del profesor en un *aislamiento artificial* (Pollock, 1955) contrario a si lo hubiésemos hecho de forma individual. Todo esto se corresponde con la forma natural como se producen, manifiestan e intercambian las opiniones (Flick, 2004) en el escenario académico universitario. De esta manera "*el grupo se convierte en una herramienta para reconstruir las opiniones individuales más apropiadamente*" (*ibid*).

En otro orden de ideas y refiriéndonos al papel del investigador en esta modalidad de recogida de información, destacamos de este último que el mismo deja de ser un mero entrevistador para convertirse en un *conductor* y *moderador*, caracterizándose además por ser flexible, objetivo y empático con el grupo, además de controlar las intervenciones de los participantes

(Massot *et al.*, 2004). Conductor significa aquí que el investigador es director de la discusión y, cuando nos referimos a moderador lo hacemos en el sentido no de dirección sino como ente regulador del proceso de discusión. De igual manera, aquí entendemos la objetividad del investigador como elemento mediador entre los participantes, procurando en todo momento una participación homogénea del grupo a ser estudiado, de forma que el tema sea cubierto por todos (Flick, 2004).

En atención a lo antes dicho, el seminario se diseñó en consonancia con la estructura de la propuesta didáctica; esto es, para ser desarrollado en cuatro sesiones en las que se buscó la discusión y reflexión de los puntos señalados anteriormente. En cada sesión se buscó explorar al máximo los diversos componentes del CDC y que para más detalles remitimos al lector a la tabla de la **Figura 3.1** que mostramos en la siguiente página, en ésta se ilustra mediante (•), las veces que tocamos algún aspecto del CDC en cada uno de los problemas de las sesiones, en los cuestionarios posteriores a cada sesión del seminario y en la entrevista final.

La justificación principal por la que apostamos por el seminario fue y es porque uno de nuestros intereses u objetivos en este trabajo consistía, y lo sigue siendo, en hacerles un seguimiento a los profesores y determinar la permeabilidad o algún cambio que se generase a lo largo de la discusión del material. Por otra parte, consideramos de gran riqueza para la investigación el poder desarrollar un espacio de discusión entre profesionales de la enseñanza, ya que, generalmente, en la enseñanza universitaria pocas veces el profesor comparte sus opiniones y experiencias docentes con sus colegas. Como detalle particular de esta actividad, aclaramos que todas las sesiones del seminario fueron grabadas en audio para su posterior trascripción.

No obstante, siempre fuimos conscientes del riesgo que se corría al poner *cara a cara* a dos o más profesores de universidad, ya que en el caso de estos profesionales de la enseñanza, sus creencias y concepciones tienen un gran peso a la hora de impartir un curso (García *et al.*, 2006a; Moreno y Azcárate, 2003 y Thompson, 1992), hecho que se acentúa mucho más por la libertad de cátedra de la que gozan estos profesores en la Universidad de Los Andes (García, 2004).

Para cada sesión del seminario se diseñó un guión que explicamos a continuación: cada uno de los problemas, definidos como **episodios**, que conforman la sesión fueron divididos en tantas partes como consideráramos necesarias, entendidas estas partes como **microepisodios**; por lo general, cada una de estas partes era una pregunta del problema en discusión. Después de leer cuidadosamente cada pregunta, buscamos qué aspectos concretos del CDC y de nuestro interés se podían explotar; una vez sometido a la discusión de los validadores expertos (ver **Sección 3.2.3**), se terminaba de diseñar esta parte del instrumento. Un ejemplo de una sesión del seminario se ilustra en la tabla de la **Figura 3.2**.

as	Sesión 1			Sesión 2			Sesión 3				Sesión 4			Entrevista Final
	E1.1	E1.2	C1	E2.1	E2.2	C2	E3.1	E3.2	E3.3	C3	E4.1	E4.2	C4	
tico	•	•		•	•		•	•		•	•			•
ico		•		•	•		•	•		•	•			•
des ajas te	•	•		•				•		•	•	•	•	•
s del te / les			•	•					•	•	•	•	•	•
del te	•		•							•	•	•		•
ción	•		•	•		•	•	•		•		•	•	•
ogía de la	•	•	•	•	•		•	•		•		•		•
ón						•			•			•		
s de as	•	•		•			•	•		•	•		•	•
de texto			•	•		•			•					•
														•

Figura 3.1: Tabla de aplicación del instrumento

• Episodio 1 (Problema 1) ○ Microepisodio 1.1 ○ Microepisodio 1.2 ○ Microepisodio 1.3 ⋮ ○ Microepisodio 1.6
• Episodio 2 (Problema 2) ○ Microepisodio 2.1 ○ Microepisodio 2.2 ○ Microepisodio 2.3 ⋮ ○ Microepisodio 2.6
• Cuestionario (A entregar en la siguiente sesión del seminario)

Figura 3.2: Guión de una sesión

Así, cumplimos con lo sostenido por Massot *et al*. (2004) cuando se refieren a *las fases* y *exigencias metodológicas* de esta técnica, las cuales consisten en elaborar un guión de trabajo que abarque el contenido a discutir de forma estructurada, en el que se contemplen además los objetivos que se persiguen en la investigación.

En este orden de ideas, destacamos algunos aspectos que nos propusimos estudiar al aplicar esta parte del instrumento y que, en consecuencia, nos permitirían alcanzar parte de los objetivos de la investigación.

(a) Validar el material (propuesta didáctica teórica) de cara a su futura implementación en los cursos de cálculo diferencial para las carreras de ciencias económicas de la Universidad de Los Andes.

(b) Validar el seminario como herramienta metodológica de recogida de información en el campo de la didáctica.

3.2.2.3. Los cuestionarios

Otra pieza que conforma nuestra metodología de recogida de información es un conjunto de cuestionarios, cuatro en total, los cuales fueron diseñados para complementar la información obtenida durante el seminario, lo que quiere decir que esta herramienta se aplicó de forma paralela al seminario de discusión (ver en los **Apéndices A** y **B**, las últimas cuatro secciones correspondientes a las actividades desarrolladas durante cada una de las sesiones del seminario). De esta manera se busca establecer un proceso de *triangulación metodológica* y de *triangulación de datos* (Flick, 2004) a partir de la información obtenida entre el seminario y los cuestionarios. Es por ello que para el diseño y construcción de los cuestionarios seguimos tomando en cuenta nuestro tema objeto de estudio, pero sobre todo, buscamos la máxima relación entre las preguntas que nos planteamos en este instrumento respecto al material discutido en la sesión correspondiente al seminario, hecho que viene a justificar de manera directa esta parte del instrumento ya que, como señalan Del Rincón *et al*. (1995), uno de los objetivos de estos cuestionarios es *contrastar hipótesis u opiniones* de los entrevistados sobre un determinado tema.

En este sentido, nuestro instrumento sigue el objetivo antes mencionado, puesto que lo que pretendemos es, en esencia, contrastar las opiniones emitidas por los profesores participantes durante la sesión respectiva del seminario, entre otras cosas, porque, desde nuestro punto de vista, la opinión individual o personal de cada participante podría cobrar un matiz distinto respecto a la opinión colectiva emitida durante el seminario. Por esta razón nos decantamos por cuestionarios del tipo semiestructurado (Massot *et al*., 2004 y Cohen *et al*., 2000), ya que el guión determina de antemano cuál es la información relevante proviene del seminario (Massot *et al*., 2004)

Los cuestionarios fueron respondidos por cada participante de forma escrita, teniendo que entregarlo al inicio de la sesión siguiente del seminario (una semana aproximadamente), con ello permitimos que respondieran sin presión alguna o en todo caso, con la mínima presión posible.

Ahora bien, tal como hicimos con el instrumento anterior, presentamos a continuación determinados aspectos que perseguimos mediante la aplicación de los cuestionarios.

(a) Contrastar las opiniones de los participantes, emitidas durante las sesiones del seminario.

(b) Profundizar en algún conocimiento específico que forme parte del CDC, que fuese abordado durante el seminario de forma superficial.

3.2.2.4. La entrevista

La tercera pieza de nuestro instrumento consiste en una batería de preguntas abiertas que fueron aplicadas en forma de entrevista oral e individual, la cual se realizó después de la cuarta sesión del seminario (habiendo transcurrido por lo menos dos días después de la última sesión[3]) y que fue grabada

[3]Para la aplicación de la entrevista, el participante tenía que entregar el cuestionario correspondiente a la cuarta sesión, sobre todo para motivarle a responder el cuestionario y no correr el riesgo de que lo dejase a un lado.

en formato de audio digital para posteriormente ser transcritas como aparecen en el **Apéndice C** de este trabajo. Aun cuando en las preguntas de la entrevista se contemplaron aspectos del CDC, con este instrumento buscábamos una reflexión de los participantes sobre toda la actividad realizada (material+seminario+cuestionario+entrevista), en general.

En otras palabras, con este instrumento perseguimos la valoración por parte de los profesores que intervinieron en la actividad, sobre el seminario, el cuestionario y, por su puesto, sobre la propuesta didáctica teórica; entre otras cosas, porque de las respuestas obtenidas podríamos conseguir o no, una valoración externa de la actividad desarrollada. De igual manera caracterizamos este instrumento como una *entrevista final* (Massot *et al.*, 2004), *centrada en el problema* y *aplicada a expertos* (Flick, 2004).

La entrevista estuvo formada por diez preguntas abiertas en las que planteamos, tal como se dijo anteriormente, preguntas relacionadas con el CDC y otras de carácter reflexivo. En este sentido, uno de los objetivos principales de la entrevista, al igual que lo señalamos en el caso del cuestionario, era el de contrastar las opiniones obtenidas en la entrevista con las emitidas durante las sesiones del seminario y las respuestas de los cuestionarios.

Siguiendo el esquema de los instrumentos antes mencionados (seminario y cuestionarios), mostramos a continuación algunos aspectos relevantes que se persiguen con la entrevista.

(a) Validar toda la actividad llevada a cabo como espacio innovador de *discusión*, *reflexión* y *formación profesional*.

(b) Contrastar las opiniones emitidas durante las sesiones del seminario y los cuestionarios.

3.2.3. Validación de los instrumentos

Ahora bien, hasta este momento hemos hablado de los instrumentos y de la aplicación de estos, pero es claro (como en toda investigación de esta naturaleza) que los mismos son el resultado de una depuración y optimización de un conjunto de preguntas que surgieron a *priori* por nuestra parte y otras que aparecen en otras investigaciones ya citadas, como es el caso de Moreno (2000) y García (2004). En este sentido, el procedimiento que se empleó para validar los instrumentos, fue el juicio o validación por investigadores expertos. Aquí *validez* significa que el instrumento está en condiciones óptimas para ser aplicado, es decir, que el mismo reúne características de pulcritud, coherencia, comprensión, entre otros, en relación con el tema que se quiere investigar (Cohen *et al.*, 2004)

En este caso, fueron dos los profesores expertos en didáctica de las matemáticas y externos a la investigación que colaboraron para la validación de los instrumentos, resaltando además que estos profesores se desempeñan como docentes en una facultad de ciencias económicas. El proceso se desarrolló en tres etapas en las que se estudiaron aspectos como coherencia, claridad, profundidad, plausibilidad, limitaciones por parte del investigador para la aplicación de los mismos y que las actividades y preguntas garantizaran en la mayor manera posible el anonimato de los participantes. En la primera etapa, nos reunimos, por separado con cada uno de los validadores, previo suministro del conjunto de preguntas y los objetivos de este trabajo. De esta primera reunión, surgieron cambios radicales por la gran cantidad de preguntas y objetivos planteados al inicio del trabajo, con lo cual se acotaron los objetivos, se descartaron preguntas por no ser aplicables en la metodología de recogida de información que se tenían pensada para ese momento (el seminario de discusión). Más aún, de uno de los validadores surgió la idea de implementar la EBP como metodología de enseñanza, ya que la misma forma parte del CDC del profesor y algunos de los problemas que se discutieron se ajustaban a esta estrategia metodológica.

La segunda fase de la validación fue muy similar a la primera, con el detalle adicional que ya teníamos para ese momento una lista de problemas enmarcados en la EBP, la estructura de cómo serían desarrollado el seminario y los cuestionarios post-seminario. En esta etapa los validadores tuvieron el material con suficiente tiempo para leerlo y analizarlo, donde les aclaramos (1) las diferencias respecto al material discutido en la etapa inicial, (2) los objetivos que nos planteamos cubrir mediante la aplicación del instrumento y también, (3) se les hizo saber las limitaciones que teníamos para la aplicación del mismo. Esta segunda fase constó de dos reuniones con cada validador, puesto que lo extenso del material así lo requirió. Tomando en cuenta los tres puntos antes señalados, se eliminaron algunos problemas y modificamos determinadas preguntas que se adaptaban más para una entrevista individual que para un grupo de discusión.

Antes de llegar a la tercera y última etapa de validación, decidimos incluir una entrevista individual al final de la aplicación del instrumento hasta ahora diseñado (seminario+cuestionarios). Esta entrevista, tal como señalamos anteriormente, nos permitiría triangular información, validar la actividad desarrollada mediante la aplicación del instrumento y conocer opiniones personales e individuales de los participantes. En tal sentido, sometimos a la consideración de los revisores expertos las modificaciones sugeridas por ellos en la etapa anterior y, además, se les entregó una entrevista formada por diecisiete preguntas abiertas que fueron reducidas a diez. De esta manera quedó estructurado el instrumento que describimos anteriormente.

3.3. Participantes en el estudio

A fin de llevar a cabo el trabajo en cuestión se invitó a participar a los diez profesores de matemáticas de la Universidad de Los Andes que colaboraron en García (2004); de estos, sólo cinco aceptaron continuar participando más uno que de manera voluntaria, y por comentarios con otros profesores, decidió trabajar con nosotros. De los seis profesores, cuatro son licenciados en matemáticas y dos licenciados en educación-matemática (los primeros formados en una facultad de ciencias y los otros en una facultad de educación), cinco poseen título de maestría y, de estos cinco, uno posee el título de doctor en el área de pedagogía matemática. Como detalle adicional, destacamos que estos profesores y los demás miembros del Departamento de Matemáticas de la ULA se rotan por los distintos cursos que están adscritos al mismo. Sólo los cursos del ciclo profesional de la propia carrera de matemáticas como ecuaciones diferenciales, análisis funcional, topología, variable compleja, álgebra lineal o estructuras algebraicas; entre otros, son atendidos por los miembros de los grupos de investigación relacionados con estos cursos.

Criterios de selección de los participantes

Para el siguiente trabajo, primaron fundamentalmente dos aspectos para la selección de los participantes. Por una parte, uno de tipo afectivo, ya que son colegas de la universidad donde labora el investigador de esta memoria desde hace poco más de doce años y; por otra parte, la representatividad de este grupo de informantes, respecto a los profesores de matemáticas que atienden estos cursos es significativa.

Si tomamos en cuenta que el presente trabajo es una investigación de tipo cualitativa, podemos decir que nuestra "muestra"[4] se define de manera global como una *muestra intencional;* esto es, la muestra de un grupo particular en la que el investigador está en total conocimiento de que la muestra no representará a una población muy amplia, sino que ésta simplemente se representa a sí misma o a un grupo muy particular (Cohen *et al.*, 2000).

Ahora bien, dentro de los tipos de muestra intencional que señalan Cohen *et al.* (2000), en esta investigación empleamos el de *muestra por conveniencia*. El muestreo por conveniencia involucra la elección de los individuos más cercanos para que sirvan como entrevistados y que permitan continuar el proceso hasta que el tamaño de la muestra requerida se haya obtenido. El

[4]El término "*muestra*" usado aquí se refiere al grupo de participantes, dejando claro al lector que no se quiere dar la misma connotación que se usa en el caso de las investigaciones de tipo cuantitativa, sino por la traducción literal de la palabra inglesa *sampling*.

investigador escoge la muestra, simplemente, de aquellos individuos a quienes tiene fácil acceso. Como cualquier grupo no se representa de manera aislada, el investigador no busca generalizar sobre una población mucho más amplia. Una muestra por conveniencia puede ser la estrategia elegida para un estudio de caso o una serie de estudios de casos (*ibid*).

Por otra parte, el número de participantes en el estudio se adecúa a nuestros intereses y a las características de la metodología a seguir, tal como lo sostienen Massot *et al.* (2004), quienes sugieren que el grupo de discusión debe ser los suficientemente pequeño con el objeto de inducir en los participantes una buena reflexión y discernimiento sobre el tema.

3.4. Reducción y organización de los datos

La reducción y organización de los datos significa una pieza fundamental en todo este engranaje, sobre todo si tenemos presente que hay tres instrumentos interrelacionados que sirvieron para recabar toda la información para el presente trabajo. Bien es cierto que nuestro instrumento principal es el material diseñado en forma de propuesta didáctica y aplicado en forma de seminario; sin embargo, no son menos importantes los otros dos instrumentos, los cuales nos permitieron realizar el proceso de triangulación de la información que este tipo de investigación requiere según Flick (2004). En tal sentido, queremos señalar que desde la misma aplicación de los instrumentos comenzamos a articular el proceso de organización de los datos, de manera que pudiésemos llevar una secuencia del tema elegido, como es la derivada y, al mismo tiempo, plantearnos una estrategia de estudio en los posibles cambios que se pudieran suscitar en los participantes a lo largo del estudio.

En otras palabras, la finalidad de la aplicación de los instrumentos no era otra que obtener, de manera sistemática y ordenada, información sobre un determinado tema que; en nuestro caso ya hemos dicho, consisten en el estudio conjunto del CDC del profesor de matemáticas de universidad y la EBP como estrategia metodológica para la enseñanza del cálculo diferencial en carreras de ciencias económicas y, esto a su vez, sobre una determinada muestra (Visauta, 1989), la cual consiste en un grupo de profesores de matemáticas de la Universidad de Los Andes en Venezuela. En este orden de ideas nos permitimos recalcar que en el diseño para la aplicación del instrumento, tomamos en cuenta que el mismo nos facilitara el trabajo para la organización y estructuración de los datos. Aun así, esto no significa que la reducción de los datos no supuso un proceso de *selección*, *categorización*, *comparación* e *interpretación* de los datos obtenidos, a partir de múltiples manipulaciones del material como lo explican Massot *et al.* (2004).

Ahora bien, la estructura que utilizamos para organizar los datos va en línea directa con el tipo de metodología que pensamos utilizar para el análisis de los mismos. Esta metodología, de la cual hablaremos más adelante, es el *análisis de contenido*, y más concretamente el *análisis documental de contenido* (Pinto y Gálvez, 1996). Es así como a cada problema discutido en las sesiones del seminario lo hemos denominado **episodio** y cada pregunta de discusión asociada al problema la identificamos como **microepisodio**, como fue señalado en la **Subsección 3.2.2.2**. Los datos que aportaron cada uno de los microepisodios fueron reducidos y estructurados, en un principio, en tablas de doble entrada como se señala en la tabla de la **Figura 3.3**, sólo que para aprovechar la riqueza del material obtenido y lo que perseguíamos en el análisis, los datos se estructuraron por episodios, ya que en un primer intento de reducción, lo hicimos por microepisodios y se debilitaba el análisis de los datos; puesto que, en algunos casos, no todos los profesores participaban en determinados microepisodios o su participación era poca debido a la propia dinámica del seminario de discusión.

Para la organización de los datos se tomaron en cuenta las categorías y subcategorías establecidas por nosotros, en función de los objetivos del proyecto, y que surgieron de manera natural a partir de la elaboración del instrumento, estas categorías quedaron reflejadas en la tabla de la **Figura 3.1**; no obstante, tal como lo señaláramos en el **Capítulo 2**, sólo nos quedamos con una parte de los componentes del CDC debido a la escasez o debilidad del contenido de las respuestas relacionadas con componentes como la *evaluación*. Así, agrupamos la información en cuatro grupos principales: conocimiento disciplinar, conocimiento del proceso de enseñanza, conocimiento del proceso de aprendizaje y análisis crítico de materiales publicados, este último como parte del conocimiento curricular. Estos cuatro grupos obedecen a los datos obtenidos del seminario. Los datos obtenidos tanto de los cuestionarios como de la entrevista final se estudiaron por separado, ya que el objetivo principal de esta parte del instrumento es la de triangular información y en el caso concreto de la entrevista, la de validar el seminario como actividad de reflexión y de formación profesional.

Si observamos la tabla de la **Figura 3.1**, esta la podemos entender como una rejilla de doble entrada, *Categorías* Vs. *Instrumentos*, mientras que la tabla de la **Figura 3.3** representa la opinión de los *Participantes* Vs. *Categorías*, con el detalle adicional que cada una de estas tablas de este último tipo representa un *episodio* y sólo fueron utilizadas para la reducción de los datos transcritos; es decir, únicamente sirvieron como instrumento de reducción de datos para aproximarnos a nuestro análisis. En otras palabras, lo que pretendemos dejar

Análisis Crítico de Materiales	Aspectos Did.						
Enseñanza ía	Secuenciación						

Figura 3.3: Tabla modelo para la reducción de datos del seminario

por sentado es que desde el inicio quisimos aprovechar el diseño de la aplicación del instrumento para la estructuración y organización de los datos, mostrando de esta manera una secuencia lógica entre las metodologías de aplicación del instrumento y la del análisis de datos; hecho que vendría a validar en cierta manera el proceso de recogida de datos. Sin embargo, hubo una primera reducción de los datos provenientes del seminario, estos datos se redujeron a textos estrictamente relacionados con el interés del trabajo, descartando cualquier contenido aislado del tema de investigación.

A continuación algunas observaciones relacionadas con la reducción y estructuración de los datos, de modo que el lector se familiarice con la lectura de las tablas y el análisis de los datos que contienen éstas.

Observación 1: La tabla de la **Figura 3.3** sólo se muestra como referencia, pero en esta memoria no se incluyen las distintas tablas que arrojaron cada uno de los episodios, ya que lo consideramos innecesario por el volumen que las mismas ocupaban.

Observación 2: En el análisis se renuncia al "dice que:" y en algunos casos se va de la 3ª a la 1ª persona de manera indistinta. Una cosa es lo que dice el profesor y otra es lo que dice el profesor de forma reducida.

Observación 3: El contenido de estas tablas nos condujeron a realizar todo el desarrollo del capítulo siguiente.

A continuación pasamos a desarrollar el apartado donde se explica la metodología empleada para el análisis de los datos, los fundamentos teóricos de la misma y la justificación por la cual la elegimos en nuestro trabajo.

3.5. Metodología para el análisis

La metodología que se empleó para el análisis de datos en relación con el CDC es de tipo *inductiva* aun cuando las categorías estaban de alguna manera predefinidas, las subcategorías no lo estaban del todo y, en absoluto, de los patrones de interpretación de los datos se tenía una visión previa; las subcategorías se terminaron de consolidar de la información obtenida y los patrones de interpretación emergieron de los objetivos a cubrir una vez obtenida la reducción de los datos. Por otra parte, es preciso destacar que el análisis es de tipo *descriptivo*, *interpretativo* y *exploratorio*, acogiéndonos a las ideas de Latorre *et al*., (2003). Es descriptivo porque se exploran relaciones (entre los distintos constructos del CDC y la EBP) y se tratan de asociar grupos de datos (Arnal *et al*., 1994), describiendo hechos o posiciones de un grupo (en nuestro caso, profesores que enseñan cálculo a estudiantes de ciencias económicas). Por lo tanto, esta investigación forma parte de la llamada *etnografía educativa* (*ibid*). En este sentido, los autores antes citados sostienen:

> ... la etnografía tiene como fin el estudio sociocultural o estilo de vida de la sociedad, **describiendo las creencias y prácticas del grupo**, mostrando cómo las diversas partes de la comunidad contribuyen a crear la cultura como un todo unificado y consistente.
>
> (Arnal *et al.*, 1994, p. 200, el resaltado es nuestro)

En el caso de la etnografía educativa:

> El objeto de la etnografía educativa es aportar valiosos datos **descriptivos** de los contextos, actividades y **creencias de los participantes en los escenarios educativos**.
>
> (Goetz y LeCompte, 1988, p. 41, el resaltado es nuestro)

Pero bien, más que describir una escena, una situación concreta o el punto de vista de los participantes respecto a aspectos concretos planteados de manera intencional en los instrumentos; la idea es, también, desarrollar, ampliar e interrelacionar, en la medida de lo posible, las opiniones de los informantes tomando el marco teórico como referencia.

Por otra parte, el carácter exploratorio de la metodología empleada en nuestro trabajo se fundamenta en dos aspectos claramente diferenciados; por una parte, el interés que se tiene en indagar y explorar sobre el CDC y la EBP en el contexto espacial ya definido y; por otra, explorar y profundizar en el principal instrumento de esta investigación como lo es el seminario, visto como un espacio de discusión y de utilidad para la formación permanente del profesor universitario. Puede resultar repetitivo y hasta chocante para el lector el énfasis que hacemos sobre el término "explorar" en este párrafo, pero es totalmente intencionado, ya que el sentido que le damos no es otro que el de ahondar sobre "*lo no dicho*" (Piñuel, 2002), sobre "lo oculto" en el texto a ser analizado, en lugar de lo evidente. Esto nos induce a la inferencia y la extrapolación (Bardin, 1986); de esta situación hablaremos en su momento pertinente.

Finalmente, diremos que nuestra metodología es interpretativa puesto que aun cuando las categorías estaban predefinidas y de forma parcial las subcategorías, estas últimas se terminaron de consolidar con la interpretación de los datos suministrados, que en algunos casos pasaron por un proceso recursivo en el que se buscaba un análisis depurado y representativo de los hechos en palabras del investigador.

Pero concretemos, ya que hasta ahora hemos estado divagando y falta concreción en el modelo de análisis a seguir, pues sólo hemos dicho características del tipo de análisis a emplear. Por lo tanto, la metodología a seguir es del tipo cualitativa, inmersa dentro de la línea del *análisis de contenido* que plantean Piñuel (2002), Pinto y Gálvez (1996), Krippendorf (1990) y Bardin (1986), predominando la de los dos primeros. En este sentido, entendemos el análisis de contenido:

> ...al conjunto de **procedimientos interpretativos** de *productos comunicativos* (mensajes, textos, discursos) que proceden de **procesos singulares** de comunicación previamente registrados, y que, basados en técnicas de medida, [...], a veces ***cualitativas*** (lógicas basada en la combinación de categorías) tienen por objeto elaborar y procesar datos relevantes sobre las condiciones mismas en que se han producido aquellos textos, o sobre la condiciones que puedan darse **para su empleo posterior**.
>
> (Piñuel, 2002, p. 2, el resaltado es nuestro)

Centrándonos un poco más en el tipo de análisis que emplearemos en este trabajo, definimos el análisis documental de contenido:

> Concebimos el ADC [análisis documental de contenido] como un proceso doble de identificación y representación del contenido del texto/documento, proceso que trasciende las nociones convencionales del contenido como objeto de estudio, y está estrechamente ligado a concepciones más recientes sobre los fenómenos simbólicos...
>
> (Pinto y Gálvez, 1996, p. 31)

Los "*fenómenos simbólicos*" a los que se refieren las dos autoras antes citadas van en línea directa con "*lo no dicho*" o "*lo oculto*" (Piñuel, 2002) en el texto, pero que igual dan una estructura al contenido del documento. En nuestro caso, interpretaremos los discursos escritos generados durante el seminario, los cuestionarios y la entrevista; los cuales surgieron a partir de las categorías preestablecidas, todo esto, con el fin de estudiar el CDC y la EBP de los profesores participantes y buscar un perfil de estos atendiendo a los dos pilares antes señalados.

En otro orden de ideas, queremos dejar por sentado que de los datos obtenidos no nos interesa estudiar la *frecuencia* de lo que se dice sobre una determinada categoría dentro de los textos a analizar; sino que, por el contrario, nos interesa en alto grado sobre *qué* y *cuánto* (en extensión y no en repetición) se dice sobre una categoría o subcategoría, hecho que resulta tan valioso (o más) que la frecuencia de aparición. "*Entonces más que nunca hay que releer el material, alternar relectura e interpretaciones, desconfiar de la evidencia (¿no* *hay una evidencia contraria?), funcionando por aproximaciones sucesivas*". (Bardin, 1986). En este sentido, el análisis documental de contenido se entiende, según Pinto y Gálvez (1996), como un caso especial de "*resolución de problemas*", donde el analista se convierte en un procesador de información en activo, el cual emplea rutinas generales y específicas con ciertas limitaciones, como por ejemplo, el hecho de mantener el contenido analizado en la memoria en corto plazo.

Ahora bien, según Piñuel (2002), todo análisis de esta naturaleza debe incluir los siguientes pasos:

> **a)** selección de la comunicación que será estudiada;
>
> **b)** selección de las categorías que se utilizarán;
>
> **c)** selección de las unidades de análisis, y
>
> **d)** selección del sistema de recuento o de medida.
>
> (Piñuel, 2002, p. 7)

Así, respecto al primer literal, ya hemos dicho cuál es el material a ser analizado y que el mismo se fundamentará en la interpretación, la exploración y la descripción del texto. En cuanto a la selección de las categorías o subcategorías, las mismas se han derivado de las representaciones que permiten la mirada del objeto a ser analizado, es decir, el CDC y la EBP. Siguiendo el orden de selecciones, las unidades de análisis las conforman las distintas componentes del cálculo diferencial y otro temas matemáticos afines a éste, tal como van emergiendo en el instrumento de recogida de datos, donde se utiliza un "*diseño triangular*" como el explicado por Piñuel (2002). Finalmente, el sistema de medida de los datos es del tipo "*cualitativo*" y más específicamente, el "*análisis de contenido relacional*", puesto que el mismo permite en materiales como el obtenido a partir del seminario y el resto de instrumentos de recogida de datos, determinar: oposiciones, proximidades, secuencialidad (Piñuel, 2002) entre los participantes.

Un segundo cuerpo del análisis tiene que ver con el seminario, esta vez no lo vemos como instrumento de recogida de datos sino como espacio de discusión, reflexión y formación profesional. Para este caso extrajimos distintos segmentos o momentos de algunas de las sesiones, donde resaltaba la interacción en cada uno de los *grupos de discusión*. Recordemos que uno de nuestros objetivos consiste en valorar el seminario como actividad formadora del profesor, tomando en cuenta que nosotros apostamos por la EBP como estrategia metodológica alternativa de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en carreras afines a las ciencias económicas, lo que implica profundizar en el CDC del profesor de matemáticas de universidad de cara a una propuesta didáctica formal ante este grupo de profesores.

3.5.1. Justificación sobre la metodología

Es claro que si nos preguntamos *para qué* se analizan los datos de este trabajo, la respuesta, aunque obvia, ha quedado respondida en los objetivos que nos planteamos en este proyecto; esto quiere decir, *grosso modo*, para estudiar el CDC y la EBP en profesores de matemáticas de universidad. Este estudio lo quisimos hacer de forma sistemática y progresiva y para ello elegimos el concepto de derivada y algunos temas relacionados con el cálculo diferencial, los cuales desarrollamos en el mismo orden en el que aparecen en los programas oficiales. Más aún, la estructura del CDC lo mismo que los profesores participantes son ideales para un análisis de contenido de tipo *relacional*, la misma forma de cómo se obtuvieron los datos y las características de los mismos se ajustan a un análisis descriptivo (Piñuel, 2002).

3.5.2. Técnica para el análisis

Teniendo claro el *para qué* analizar, nos permite tener una visión sobre el *cómo* analizar (Bardin, 1986). Es por ello que elegimos el análisis documental de contenido, más aún, nos decantamos por el *análisis de relaciones* o *análisis relacional de contenido* como técnica de análisis, ya que toda la estructura del instrumento de recogida de datos y la obtención de la información se amoldan a este tipo de análisis y, por supuesto, entre los puntos que pretendemos explotar en esta investigación tenemos: la secuencialidad que muestren los participantes a lo largo de la recogida de datos (relación temporal o en el tiempo), la influencia de algún participante en las opiniones de los otros (relaciones interpersonales de los participantes), entre otros.

Veamos por un momento lo que dice un manual *online* de análisis de contenido de la Universidad Estatal de Colorado:

> El análisis relacional consiste, al igual que el análisis conceptual, en identificar estructuras conceptuales que aparecen en un determinado texto o conjunto de textos, pero que además de la presencia de estas estructuras, éste persigue la relación entre las estructuras conceptuales identificadas.
>
> (En `http://writing.colostate.edu/guides/research/content/`, traducción realizada por el autor.)

Para nuestro caso y tomando en cuenta los dos puntos que ilustramos anteriormente, las estructuras a las que hace mención la definición anterior pueden ser: o bien las componentes del CDC del profesor o los mismos profesores participantes.

Con el fin de estudiar no sólamente el CDC y la EBP en los profesores participantes sino que además buscamos estudiar, en la medida de lo posible, cambios en estos profesores, decidimos realizar el análisis de los datos de manera progresiva respecto a la aplicación del instrumento, situación que contribuye en el proceso de triangulación y que forma parte del análisis. En este orden de ideas, conviene recordar que por razones geográficas y de disponibilidad de tiempo fue necesario partir en dos grupos de tres profesores cada uno al conjunto de participantes; estos dos grupos los hemos identificados como A y B, donde por razones de fuerza mayor, un profesor del grupo A (Pedro) tuvo que abandonar su participación. No obstante, por lo relevante de sus opiniones y reflexiones hemos decidido dejarlo, aun cuando sólo estuvo en la primera sesión del seminario.

Para cerrar este cuerpo del trabajo, hemos analizado el seminario como actividad de reflexión y formación valiéndonos de las interacciones entre los participantes, pero sólo en aquellas donde se aprecie un intercambio de opiniones que muestren una *reflexión* sobre la actividad docente o sobre la *formación del profesor*, en otras palabras, analizamos la valoración del seminario por parte de los participantes. Si partimos de que el seminario de discusión lo entendemos como una *entrevista de grupo* (Flick, 2004) o *grupo de discusión* (Massot *et al*., 2004), cuyos miembros poseen algunas características similares (profesores de matemáticas, miembros de la misma universidad, atienden las mismas carreras, su formación profesional es similar, entre otras) que facilitan la discusión sobre temas específicos.

Por otra parte, hemos utilizando algunos datos provenientes de la entrevista final con el objeto de triangular la información obtenida del seminario y enriquecer el análisis, es así como aprovechamos las respuestas de las preguntas 1, 2, 3, 5, 6, 9 y 10 del último instrumento aplicado, la entrevista.

Observaciones previas al análisis

1 El conocimiento del contenido matemático no es tomado en cuenta en profundidad para el análisis, puesto que el contenido matemático es básico y, por otra parte, los profesores participantes poseen una experiencia mínima de seis años en la docencia universitaria. No obstante, no se descarta hacer alguna observación al respecto en caso de ser necesaria y que además sea relevante para la investigación.

2 Las componentes del CDC, vistas como categorías, y que tomaremos en cuenta para el análisis de los datos son los conocimientos: del *contenido económico*, sobre la *enseñanza*, sobre el *aprendizaje* y el *análisis crítico de materiales*; descartando los conocimientos referidos al currículo y a la evaluación. Paralelo al CDC se analizará la EBP como estrategia de enseñanza-aprendizaje.

3 Las vías que utilizamos para estudiar en los profesores participantes las categorías antes señaladas, son los conceptos matemáticos que aparecen de forma intencional en el instrumento de recogida de datos, los cuales están vinculados al cálculo diferencial y al análisis matemático; estos son: dominio de una función, interpretación de la derivada, monotonía y valores extremos (optimización), regla de la cadena, contextualización matemático-económica.

4 Aunque resulte redundante, no está demás decir que el estudio lo hacemos de forma sistemática sobre cada uno de los participantes, sin embargo, el análisis no se puede hacer de manera aislada entre episodios ni entre participantes, en el caso del primero, los distintos episodios tocan en más de una oportunidad algún concepto o situación matemática, como por ejemplo: el dominio o la contextualización matemático-económica; por otra parte, las opiniones de los participantes, en algunos casos, están sujetas a las opiniones de los otros participantes, lo cual es la idea principal del seminario.

3.6. Aportes metodológicos personales

Hemos reservado el final de este capítulo para exponerle al lector algunos hechos que consideramos, desde el punto de vista metodológico, contribuyen a esta línea de trabajo. Comenzaremos por reiterar que trabajar con profesores de universidad y que, además, forman parte del entorno profesional del investigador no resulta sencillo, con lo cual debimos andar con paso firme a la hora de interactuar con los participantes. Es por ello que, una estrategia que sostenemos como clave para acercarnos a este grupo de profesionales de la enseñanza es la aproximación indirecta; puesto que, desde el mismo inicio de las actividades de aplicación del instrumento no se presentaron ningún tipo de inconvenientes en cuanto a las opiniones, como por ejemplo: *para qué responder a algo que tú conoces* o, en todo caso, atender a las preguntas con respuestas escuetas donde se deja por sobreentendido al investigador que éste conoce los detalles de la respuesta.

El seminario

En el caso específico del seminario de discusión conjuntamente con los problemas abordados durante las cuatro sesiones, sirvieron para que los participantes, en general, reflexionaran sobre su propio CDC y aproximarnos, de alguna manera, al *conocimiento de la acción* partiendo del *conocimiento declarativo*, puesto que entre el instrumento y la aplicación del mismo se provocó, en cierta medida, la imagen de la acción de los profesores participantes, ya que sus opiniones estuvieron sustentadas en base al trabajo realizado por ellos en el aula.

En este caso, no podemos afirmar que estamos frente a un estudio totalmente centrado en el conocimiento de la acción, tomando en cuenta que no fuimos al aula, pero tampoco es un trabajo enmarcado únicamente en el conocimiento declarativo, sino que es una fusión de ambos conocimientos con sus consecuentes matices. Por esta razón no hacemos mención alguna en nuestro marco teórico sobre estos tipos de conocimientos.

No obstante, la estrategia de *grupo de discusión* como elemento de doble función en este trabajo fue fundamental para el desarrollo del mismo; es claro que tratar de mantener la consolidación de un grupo, en nuestro caso dos pequeños grupos, durante cuatro sesiones de discusión permitió fortalecer la calidad de los datos a partir de sus reflexiones. Por otro lado, el espacio en sí mismo como actividad generadora de conocimiento permitió conocer en profundidad la visión global de todos en conjunto sobre aspectos específicos del CDC del profesor de matemáticas de universidad.

Sobre esto último nos extenderemos un poco más al final del análisis del seminario en el **Apartado 5.3**, ya que las actividades metodológicas principales del seminario fueron las discusiones y las reflexiones de los participantes, dándole mayor peso a las segundas por guardar estrecha relación con el CDC del profesor universitario, tal como lo señala Marín (2004) en su trabajo sobre creencias del profesor universitario. Esta investigadora afirma que:

> La reflexión propicia en el docente universitario:
>
> **1°.** La capacidad necesaria para ver los problemas que se producen durante el acto educativo.
>
> **2°.** Proporciona y/o potencia la capacidad de cuestionar situaciones educativas, sus habilidades y estrategias cognitivas.
>
> **3°.** Permite analizar la situación para el desarrollo de habilidades comunicativas.
>
> **4°.** La capacidad de percibirse a si mismo y a los demás.
>
> **5°.** Aprender a vivir concierto grado de incertidumbre.
>
> (Marín, 2004, p. 43)

En este orden de ideas, entendemos el ejercicio de reflexión sobre la práctica docente como una pieza fundamental de cara al proceso de formación permanente del profesor universitario de matemáticas y en consecuencia, impera la necesidad de un espacio con los elementos necesarios para llevar a cabo los procesos reflexivos. Sin embargo, estos procesos no deben ser aislados o distantes entre sí, por el contrario, la reflexión debe ser un ejercicio permanente y sistemático en el profesor universitario, ya que por medio de ésta se profundiza en elementos como el aprendizaje de los estudiantes (Santos, 1993). Es por ello que apostamos por el seminario como espacio para la discusión y la reflexión permanente sobre el proceso de enseñanza y aprendizaje.

Sin embargo, conviene aclarar que, en un grupo de discusión uno de los puntos que más estudian los investigadores son las interacciones entre los participantes, no obstante, analizar las interacciones en sí mismas como elementos de las discusiones no es tema de nuestro interés; por el contrario, sí nos interesa el contenido de las mismas es aspectos específicos del CDC como metodología de enseñanza, conocimiento del contenido, conocimiento curricular, entre otros. Además de las implicaciones a futuro que suponen las diversas reflexiones en conjunto sobre el contenido del material.

La propuesta didáctica teórica y la EBP

En cuanto a la EBP como estrategia metodológica para aproximarnos de manera indirecta a los profesores, también creemos que aporta a esta línea de trabajo el hecho de acercarnos a la reflexión sobre su práctica docente y de forma parcial al conocimiento de la acción, ya que en la misma se plantean situaciones concretas y muy próximas a las actividades del aula, las cuales plantean un escenario similar al que vive el profesor en sus clases.

El haber diseñado un material que involucró la resolución de problemas como vía de enseñanza del cálculo diferencial, donde según palabras de algunos de los participantes, como veremos en su momento, fue valorado de manera significativa en materia de innovación; es decir, aun cuando el material debe modificarse y repensarse en algunas partes, ya con fines específicos de enseñanza, la estructura tanto de forma como de fondo fue vista con buen ojo por ellos como herramienta para la enseñanza de las matemáticas que podría involucrar al estudiante a reforzar su conocimiento. De igual manera, la propuesta discutida nos ha permitido acercarnos a los participantes para ir pensando en un material enfocado hacia la formación profesional del docente en ejercicio o en formación.

Capítulo 4

Reducción de los datos y Análisis I

Introducción

Ya señalamos en el capítulo anterior que nuestro análisis de datos se enmarca, fundamentalmente, en un análisis de tipo *descriptivo*, *interpretativo* y *exploratorio* en el que explotamos el ejercicio de la *inferencia*. Lo primero que hicimos, y es de lo que hablaremos al principio de este capítulo, fue cómo abordamos el análisis de los datos. Una vez establecidas las categorías: *conocimiento disciplinar matemático-económico*[1], *conocimiento sobre la enseñanza*, *conocimiento sobre el aprendizaje* y *conocimiento sobre el currículo*; de este último sólo estudiamos la parte definida en el **Capítulo 2** como *análisis crítico de materiales*, pasamos al primer bloque del análisis, el cual se realizó con los datos que aportaron cada una de las sesiones del seminario con sus correspondientes episodios y los cuestionarios correspondientes a cada sesión. En esta primera etapa que hemos llamado **Análisis I**, damos un primer paso hacia el estudio del CDC del profesor de matemáticas y nos centramos en las categorías de: enseñanza, aprendizaje y currículo, ya que lo correspondiente al contenido disciplinar lo analizamos en el siguiente capítulo. En otras palabras, este capítulo consiste en reducir y hacer un primer análisis provenientes de los instrumentos ya mencionados.

El *conocimiento sobre la EBP* no lo consideramos como una categoría disjunta de las otras ya que, por un lado, este forma parte del conocimiento sobre

[1]Ya dijimos en el capítulo anterior que el conocimiento disciplinar matemático, visto como un elemento puro o aislado, no lo tomaremos en cuenta para el análisis y argumentamos las razones; sin embargo, al ser un trabajo enmarcado en la didáctica de las matemáticas resulta contradictorio descartar las matemáticas, es por ello que el estudio que hacemos de éstas lo relacionamos en todo momento a las ciencias económicas. En otras palabras, **los conceptos matemáticos que analizamos como parte del conocimiento disciplinar matemático, los estudiamos dentro del contexto económico**.

la enseñanza (si vemos la EBP como estrategia metodológica de enseñanza) y, por otra parte, nosotros la estudiamos a lo largo y ancho del trabajo en virtud de que la misma la entendemos como un eje transversal del presente estudio. El análisis relacional de esta parte se fundamenta en la interacción de los participantes en cada uno de los episodios del seminario y las preguntas del cuestionario vinculadas a la respectiva sesión.

Con este primer análisis, donde estudiaremos el CDC del profesor de matemáticas, buscamos abrir las puertas al siguiente capítulo, en el cual realizaremos un análisis más preciso sobre el perfil del profesor. Para esta segunda parte utilizaremos los datos que arroja el análisis de este capítulo y los aportados por la entrevista final.

Observación: Vale la pena destacar que aun cuando la recogida de datos se realizó de forma muy similar en ambos grupos de profesores, decidimos mantener por separado el conjunto de datos y analizarlos por grupos en esta primera parte del análisis, de acuerdo al tipo de análisis y a los objetivos de este estudio.

En este sentido, el análisis que realizamos a continuación está organizado sistemáticamente, según el orden de aplicación de los instrumentos, es decir, *sesión por sesión*, tal como el lector verá más adelante, ya que uno de los objetivos consiste en observar y analizar algún tipo de **cambio** en el CDC de los participantes. Por lo tanto, y debido a la proximidad entre el contenido del instrumento y la afinidad de las preguntas de discusión a lo largo del seminario, hacemos uso del *análisis relacional*, el cual nos permite observar la regularidad o no de las opiniones de los profesores, así como la influencia que pueda causar un participante en la opinión de algún otro, permitiéndonos de esta manera destacar, si fuere el caso, el seminario como actividad de discusión y formación profesional. En otras palabras, en lo que se intenta profundizar en este capítulo es en la *interacción* que realizan los participantes en cada sesión para emitir sus opiniones.

Por otra parte, hacemos énfasis en señalar que una de las dificultades de llevar a cabo este análisis viene dado por la manera en que se obtuvieron los datos, tanto en el seminario como en los cuestionarios. Recordemos que el seminario de discusión se realizó en cuatro sesiones y los cuestionarios se aplicaron en igual número de oportunidades. De la segunda sesión del seminario en adelante, los participantes se refirieron a sesiones anteriores o a los cuestionarios post-seminario, de allí que apostamos por la *recursividad* en el análisis relacional. Aspecto este que viene a consolidar el seminario como actividad en la formación profesional del profesor de matemáticas de universidad.

Finalmente, cerramos esta introducción mostrando el esquema que seguiremos en el análisis de esta parte del trabajo, el cual se fundamenta en unos ejemplos que muestran Pinto y Gálvez (1996) y que adaptamos a nuestros objetivos e intereses.

EPISODIO N° / PARTICIPANTE

Cuadro 4.1: Árbol Genérico (adaptación de Pinto y Gálvez, 1996)

Esquema para el Análisis I

1) **Representaciones de las categorías**. En este primer paso del análisis presentamos las categorías que serán analizadas, las cuales se hacen por episodios (problemas discutidos). Para esta parte del análisis presentamos el problema que se discutió en el episodio correspondiente y las preguntas que generaron la discusión partir del mismo, a continuación mostramos las categorías y subcategorías que se estudiarán en dicho episodio. En otras palabras, lo que se busca es introducir al lector en el análisis, además de ilustrarle qué es lo que se va a analizar en concreto.

2) **Conceptualización, reducción del contenido y esquematización**[2]. Se reserva para esta parte del análisis la elaboración de una especie de mapa cognitivo de cada uno de los profesores respecto a las categorías que intervienen durante el episodio o en los cuestionarios post-seminario (en el **Cuadro 4.1** se muestran las categorías dentro de una elipse y las subcategorías correspondientes debajo de cada categoría dentro de un rectángulo).

3) **Redacción del resumen** del análisis. En este tercera y última parte de este análisis elaboramos un resumen *informativo* y *descriptivo* que traduce al lenguaje escrito lo representado en los puntos anteriores. Se trata de exponer en un nuevo texto de forma clara y precisa toda la información relevante de los datos originales. Esta última parte nos abrirá las puertas al análisis que desarrollaremos en el siguiente capítulo.

Estudio del CDC del profesor de matemáticas

4.1. Análisis de la Sesión 1

La sesión del seminario que analizaremos a continuación está relacionada con la **introducción al concepto de derivada**, para este fin escogimos dos problemas; el primero, un problema clásico de la física para la enseñanza de la derivada en cursos de cálculo en general, como lo es el estudio de la *velocidad instantánea*; la elección de este problema obedece a razones históricas y de tipo curricular[3]; el segundo, un problema donde se estudia el *impuesto marginal* relacionado con el ingreso anual de un trabajador tomado de Wonnacott (1983), en este problema se hace uso de la derivada para estudiar el pago del impuesto de un empleado.

Aprovechamos la oportunidad para hacer la siguiente observación: **esta es la única sesión donde se aborda un problema de contenido no económico**, esto quiere decir que el contexto económico está presente de manera *transversal* en el resto del instrumento. Además de la observación anterior resaltamos el hecho de que **el problema de física, al inicio del seminario, tiene la firme intención de brindarle a los participantes un clima de seguridad y tranquilidad**, permitiéndonos *romper el hielo* entre participantes e investigador. Recordemos que los profesores que colaboraron en este trabajo son licenciados en

[2]Para Pinto y Gálvez (1996), estos tres aspectos los consideran por separado; sin embargo, dadas las características como están estructurados nuestros datos y para no hacer del análisis una actividad repetitiva, los hemos englobado en uno sólo.

[3]En el programa oficial de las carreras de ciencias económicas (ULA), está contemplada la interpretación de la derivada como razón de cambio vía velocidad instantánea.

matemáticas o licenciados en educación matemática y en ningún caso especialistas en economía. Sin olvidar el detalle que algunos de ellos participaron en García (2004), donde mostraron fuertes inclinaciones hacia la física y las matemáticas no económicas, de igual manera recordamos al lector que estos profesores se rotan por los distintos cursos que atiende el Departamento de Matemáticas tal como lo advertimos en el **Apartado 3.3**.

Mediante el primer problema nos aproximamos a la discusión sobre el CDC, destacando, en particular, el *conocimiento del contenido disciplinar* matemático, el *conocimiento sobre la enseñanza* (planificación, gestión-secuencia de la clase), el *conocimiento sobre el aprendizaje* (dificultades-ventajas, actitud del estudiante) y el *conocimiento sobre el currículo* (análisis del material). En el segundo problema, aun cuando hay menos preguntas para la discusión y que, estructuralmente, es muy similar al primero, profundizamos más en las componentes del CDC, apareciendo en éste el contexto económico. De esta manera abrimos la puerta al tema que nos ocupará de aquí en adelante, es decir, la discusión sobre el CDC del profesor de matemáticas y para ello nos apoyamos en el cálculo diferencial y su enseñanza de forma contextualizada en las ciencias económicas. Sin embargo, el cuestionario asociado a esta sesión tiene su peso en los *conocimientos sobre enseñanza y aprendizaje*, esto quiere decir que con el cuestionario buscamos adentrarnos en aspectos más de nuestro interés. También se busca ahondar sobre el *análisis crítico de materiales* y para no ser repetitivos, esta categoría aparece de manera natural en el resto de las sesiones, ya que toda la discusión gira en torno al material diseñado para el seminario.

4.1.1. Episodio 1.1: Tasas de variaciones y pendientes. Velocidad instantánea, velocidad media, incrementos, introducción a la derivada

Pregunta 1: Calcular la posición del objeto cuando $t = 5{,}0$; $t = 5{,}001$; $t = 5{,}01$; $t = 5{,}1$; $t = 5{,}2$; $t = 5{,}3$; $t = 5{,}4$; $t = 5{,}5$; $t = 6{,}0$; $t = 9{,}0$; $t = 12{,}0$ y $t = 15{,}0$. A medida que avanza el tiempo, ¿qué puede decir de la posición del objeto?

Respuesta: En la segunda fila de la **Tabla A.1** se pueden observar las distintas posiciones del objeto para distintos instantes de tiempo. Respecto a la segunda parte de la pregunta, a medida que avanza el tiempo la distancia recorrida es mayor, además la **Tabla A.1** *nos hace pensar que el objeto nunca se detiene*.

Microepisodio 1.1.1: Hasta ahora, el estudiante está familiarizado con el tema de funciones y en este sentido, no debería tener inconveniente para realizar esta tarea en la que se plantea un **estudio muy general de incrementos**.

Para este momento, en el que queremos introducir el concepto de derivada y *una interpretación de la misma, ¿consideran ustedes que, desde el punto de vista metodológico, éste es un primer paso "acertado" para introducir el concepto de derivada, o por el contrario, resulta una tarea inapropiada y sin mayor valor cognitivo?*

Pregunta 2: ¿En cuánto varía la posición o cuánto se ha desplazado el objeto cuando el tiempo transcurre de 5.0 a 15.0 segundos; de 5.0 a 12.0 segundos; de 5.0 a 9.0 segundos; de 5.0 a 6.0 segundos; de 5.0 a 5.5 segundos, de 5.0 a 5.4 segundos, de 5.0 a 5.3 segundos, de 5.0 a 5.2 segundos, de 5.0 a 5.1 segundos, de 5.0 a 5.01 segundos y de 5.0 a 5.001? ¿Qué observa en cada uno de los desplazamientos estudiados?

Respuesta: En la segunda columna de la **Tabla A.2** podemos ver cómo varía la posición del objeto cuando éste se ha desplazado en distintos intervalos de tiempos.

Microepisodio 1.1.2: En la tarea anterior se estudió la posición del objeto para distintos instantes de tiempo, ahora estudiamos variaciones de la posición para intervalos de tiempo particulares; es decir, qué *variaciones* experimenta la posición del objeto cuando el tiempo cambia en distintos intervalos.

En una experiencia con estudiantes con los que realicé esta actividad, ellos mostraron dificultades para visualizar las distintas variaciones, ¿consideran ustedes que esta tarea promueve, de alguna manera, el concepto de incrementos de una variable? ¿De qué manera? ¿Cómo?

Pregunta 3: Calcular la velocidad media en los intervalos de tiempo:
$[5{,}0; 15{,}0]$, $[5{,}0; 12{,}0]$, $[5{,}0; 9{,}0]$, $[5{,}0; 6{,}0]$, $[5{,}0; 5{,}5]$, $[5{,}0; 5{,}4]$, $[5{,}0; 5{,}3]$, $[5{,}0; 5{,}2]$, $[5{,}0; 5{,}1]$; $[5{,}0; 5{,}01]$; $[5{,}0; 5{,}001]$.

Respuesta: En la última columna de la **Tabla A.2** se aprecian las distintas velocidades promedios para los intervalos de tiempos indicados.

Microepisodio 1.1.3: Tal como se muestra en la pregunta, lo que se busca en este caso, es que el estudiante observe y discuta sobre las distintas velocidades promedio y por supuesto, que el profesor discuta con ellos, de modo que surja una primera aproximación **empírica** y con **tratamiento numérico** del concepto de derivada. Algo que no se contempla en los programas oficiales de cálculo diferencial.

En algunas investigaciones sobre el tema, existen opiniones encontradas a la hora de introducir un concepto matemático; hay quienes se inclinan por dar la definición con todo el rigor matemático que ello supone y posteriormente realizar una explicación pormenorizada de ésta (la definición), mientras que hay profesores que apuestan por una construcción detallada del concepto.

¿Consideran adecuado partir de una situación como ésta para aproximarnos al concepto de derivada o conviene más; introducir, de entrada, el concepto de derivada de

manera formal y tradicional; es decir, partiendo de la idea formal de límite? Se supone que el estudiante conoce los conceptos de función, límite y continuidad.

Pregunta 4: La velocidad media del objeto para un intervalo de tiempo $[t_0; t]$ y con $f(t_0) < f(t)$ viene dada por

$$\mathcal{V}(t) = \frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0} = \frac{\text{Desplazamiento desde } f(t_0) \text{ a } f(t)}{\text{Tiempo transcurrido desde } t_0 \text{ a } t}$$

Para el caso particular en el cual el objeto parte con $t_0 = 0$ y su posición es $s = 0$, la velocidad media del objeto se reduce a $\mathcal{V}(t) = \frac{f(t)}{t}$.

Pregunta 4.1: Construir una tabla y calcular $\mathcal{V}(t)$ para $t = 5{,}001$; $t = 5{,}01$; $t = 5{,}1$; $t = 5{,}2$; $t = 5{,}3$; $t = 5{,}4$; $t = 5{,}5$; $t = 6{,}0$; $t = 9{,}0$; $t = 12{,}0$ y $t = 15{,}0$, suponiendo que $t_0 = 5,0$.

Respuesta: La tercera columna de la **Tabla A.2** coincide con $\mathcal{V}(t)$, sólo que en el orden inverso.

Pregunta 4.2: Obtener una fórmula para $\mathcal{V}(t)$ y verificarla con la respuesta de 1.

Respuesta: En este caso la fórmula que se obtiene para la velocidad promedio es $\mathcal{V}(t) = \frac{8t^2-200}{t-5}$ y coincide con la respuesta del ítem anterior.

Microepisodio 1.1.4: El objetivo que se persigue con estas dos tareas es que el estudiante al invertir los datos de la tabla, tenga una mejor visualización de las velocidades promedios para distintos intervalos y así tener mayor dominio y profundidad del problema.

Desde el punto de vista metodológico, ¿creen ustedes que esto ayuda al estudiante a darse una idea de velocidad instantánea y por ende, a llegar al concepto e interpretación de la derivada?

Pregunta 4.3: Cómo es el comportamiento de la velocidad media, $\mathcal{V}(t)$, en cada uno de los instantes de tiempo respecto a la velocidad instantánea $\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \lim_{h \to 0} \frac{f(t_0+h)-f(t_0)}{h}$ para $t_0 = 5,0$?

Respuesta: La velocidad media $\mathcal{V}(t)$ en cualquiera de los casos estudiados es siempre superior a

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} &= \lim_{h \to 0} \frac{80h}{h} \\ &= 80,00 \end{aligned}$$

Microepisodio 1.1.5: *De esta situación, ¿qué discusión les parece a ustedes sugerente que se debe plantear a los estudiantes relacionada con esta tarea?*

Pregunta 4.4: Esbozar una gráfica aproximada de $f(t)$, para $t \in [4{,}0, 16{,}0]$, y trazar cada una de las rectas que pasan por $(5, f(5))$ y los puntos $(15, f(15))$, $(12, f(12))$, $(9, f(9))$, $(6, f(6))$, $(5{,}5, f(5{,}5))$, $(5{,}4, f(5{,}4))$, $(5{,}3, f(5{,}3))$, $(5{,}2, f(5{,}2))$, $(5{,}1, f(5{,}1))$, $(5{,}01, f(5{,}01))$ y $(5{,}001, f(5{,}001))$, respectivamente. Discutir sobre la interpretación geométrica y física que sugiere esta tarea, donde $t_0 = 5$.

Respuesta: Las gráficas que se muestran en las **Figuras B.1** y **B.2** ilustran lo que se pide en esta tarea y se aprecia geométricamente que la pendiente de la recta que pasa por los puntos $(5, f(5))$ y $(5{,}001, f(5{,}001))$, se aproximan a la velocidad instantánea, $\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t}$, de la tarea anterior y toca a la curva, aparentemente, en un sólo punto (recta tangente), mientras que las otras rectas tocan a la curva en más de un punto (rectas secantes).

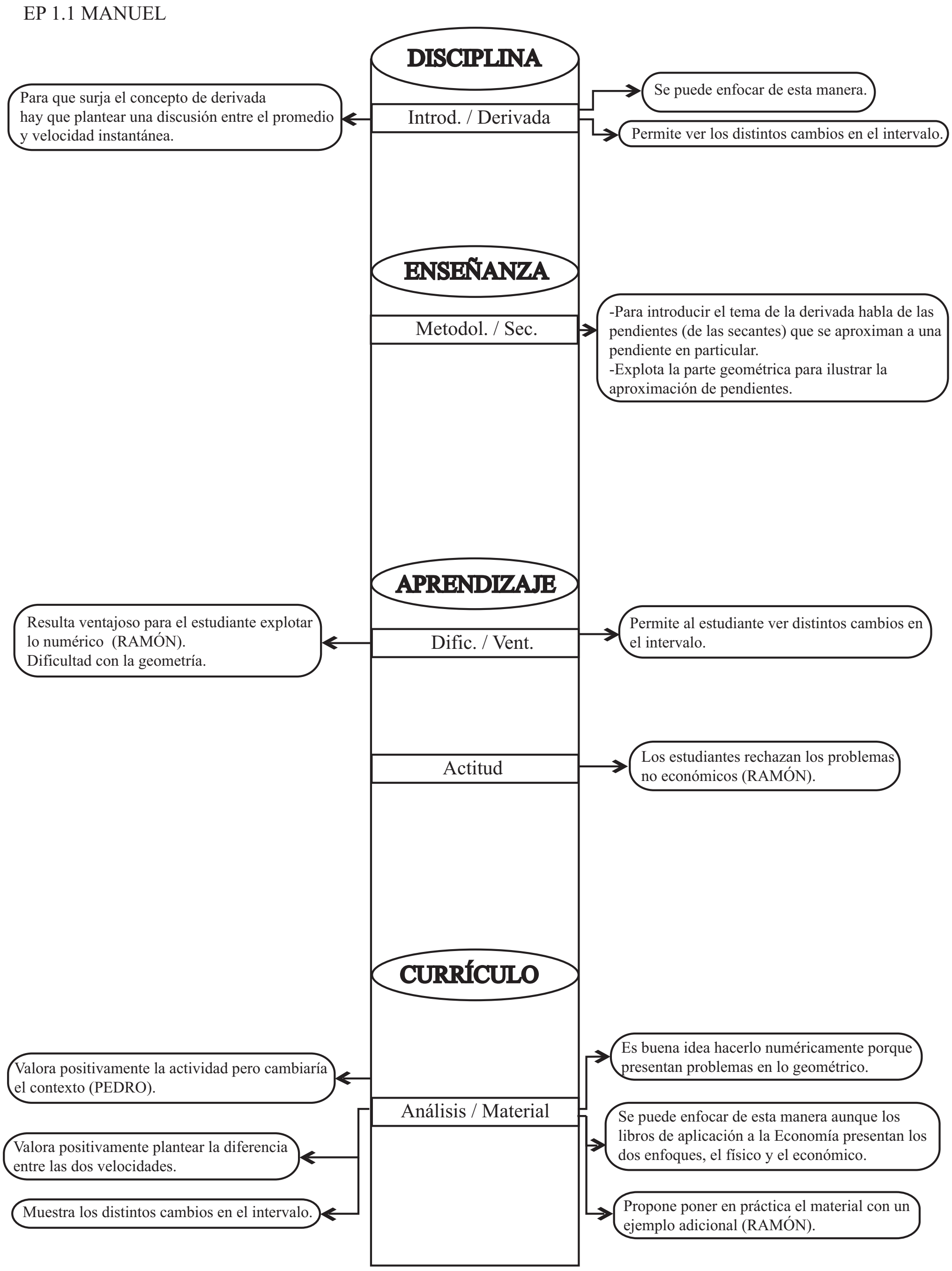
Microepisodio 1.1.6: Finalmente, con esta tarea, se muestran dos interpretaciones de la derivada de manera simultánea con un tratamiento numérico y dejando a un lado el rigor del límite. Esta forma de introducir la derivada resulta carente de todo rigor para muchos profesores y en distintos artículos relacionados con la didáctica se plantean discusiones sobre este hecho.

¿Cuál es la posición de ustedes sobre los enfoques (1) Analítico-Algebraico, (2) Geométrico y (3) Numérico para introducir el concepto de derivada, es decir, supone algún tipo de dificultad para el estudiante hablar de dos interpretaciones de un mismo hecho, cuál es su experiencia en este sentido?

Conceptualización, reducción y esquematización

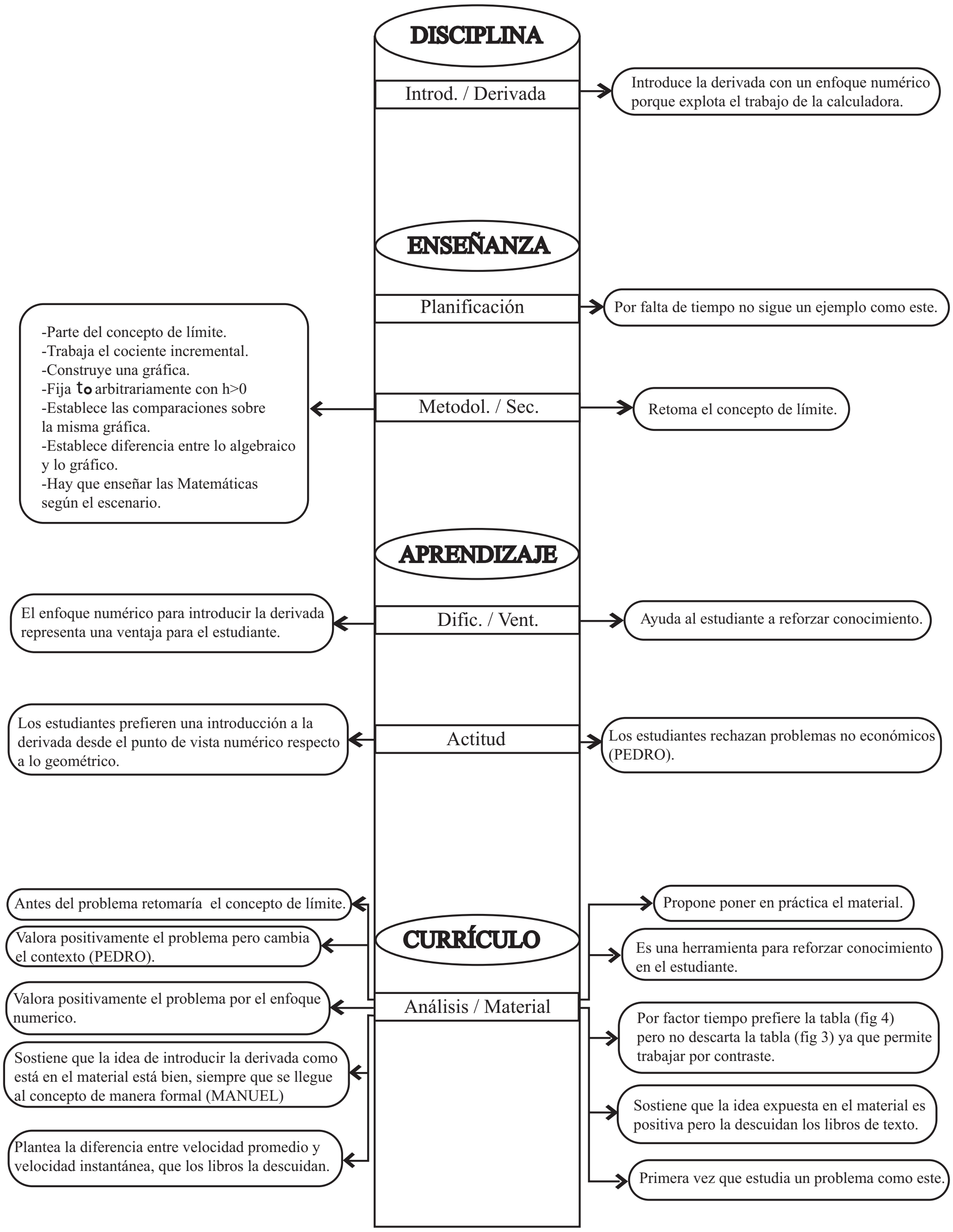
A continuación mostramos los diagramas correspondientes a este episodio en el que la discusión del mismo se centró en el estudio del conocimiento sobre la enseñanza, el aprendizaje y el currículo, todos estos de forma muy general por el contenido del problema discutido.

Grupo A



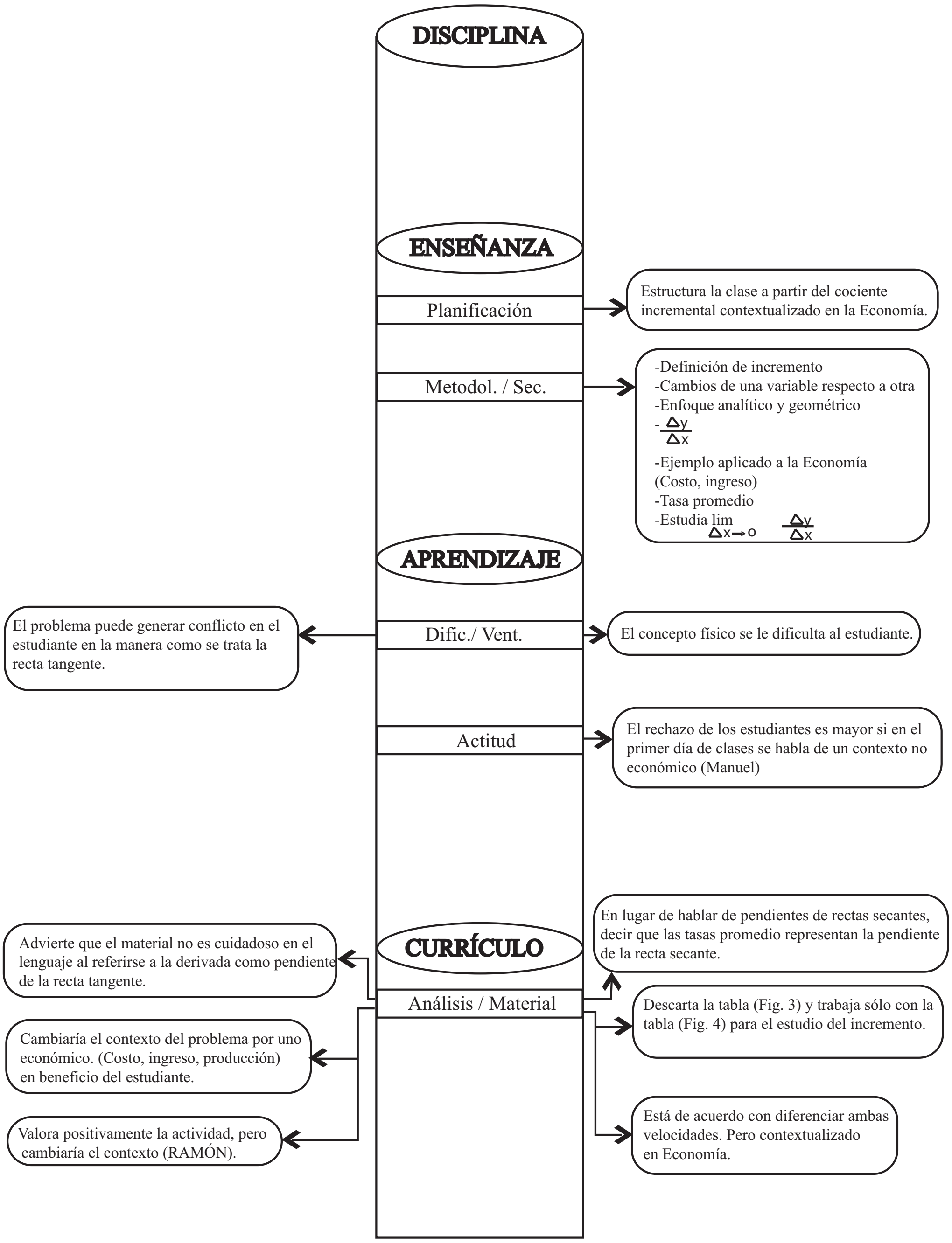
Cuadro 4.2: Episodio 1.1 - Manuel

EP 1.1 RAMÓN



Cuadro 4.2: Episodio 1.1 - Ramón

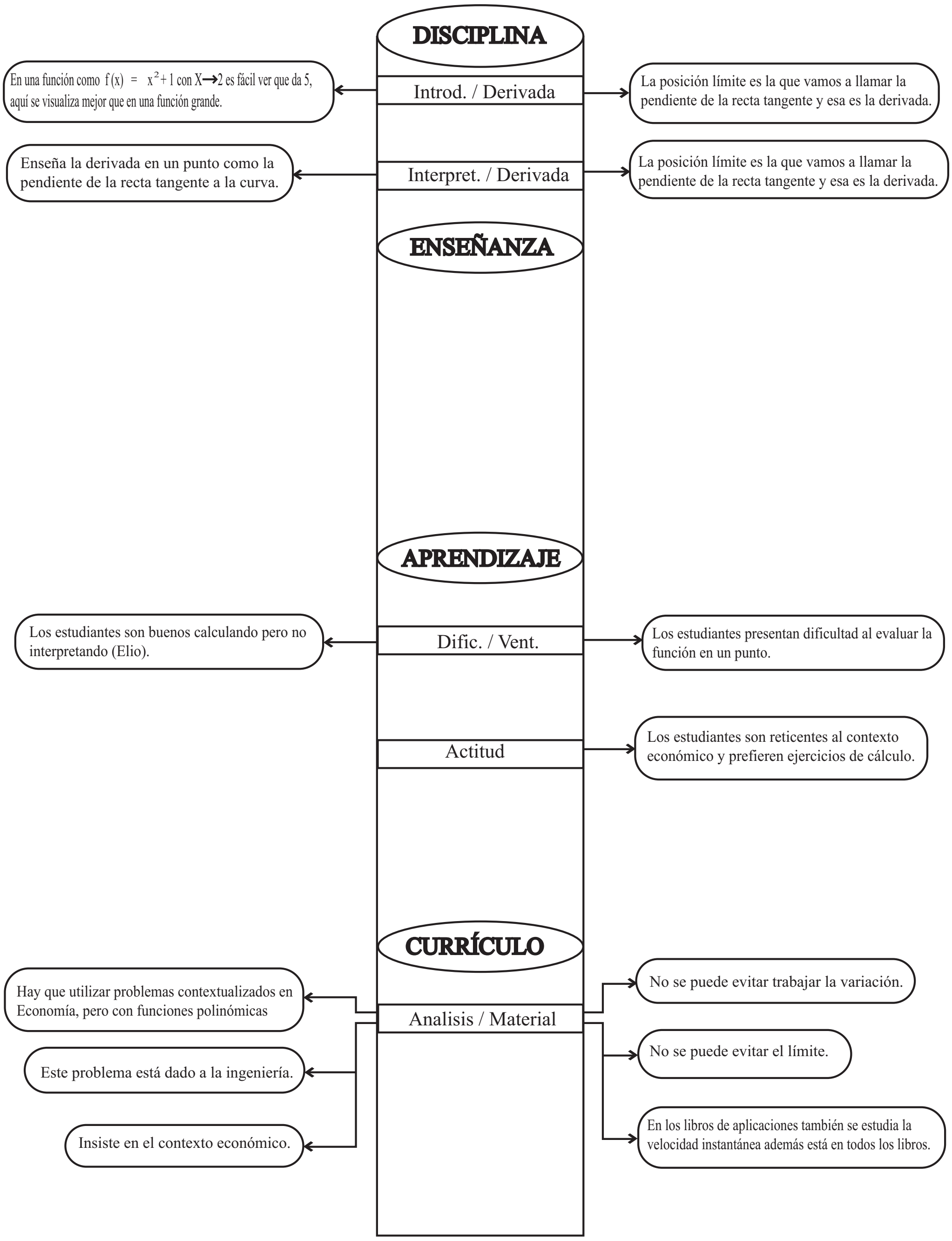
EP 1.1 PEDRO



Cuadro 4.2: Episodio 1.1 - Pedro

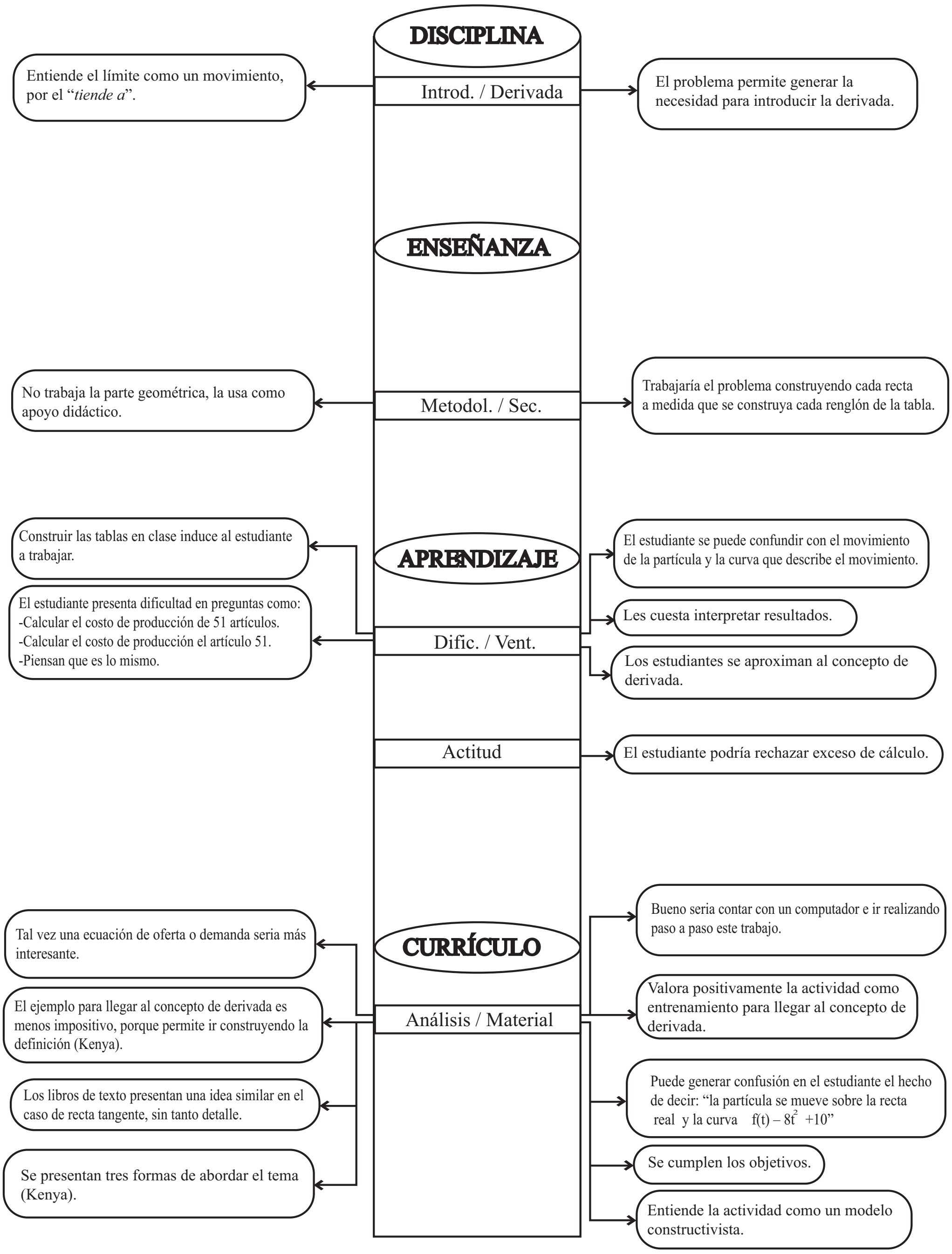
Grupo B

EP 1.1 ALEXIS



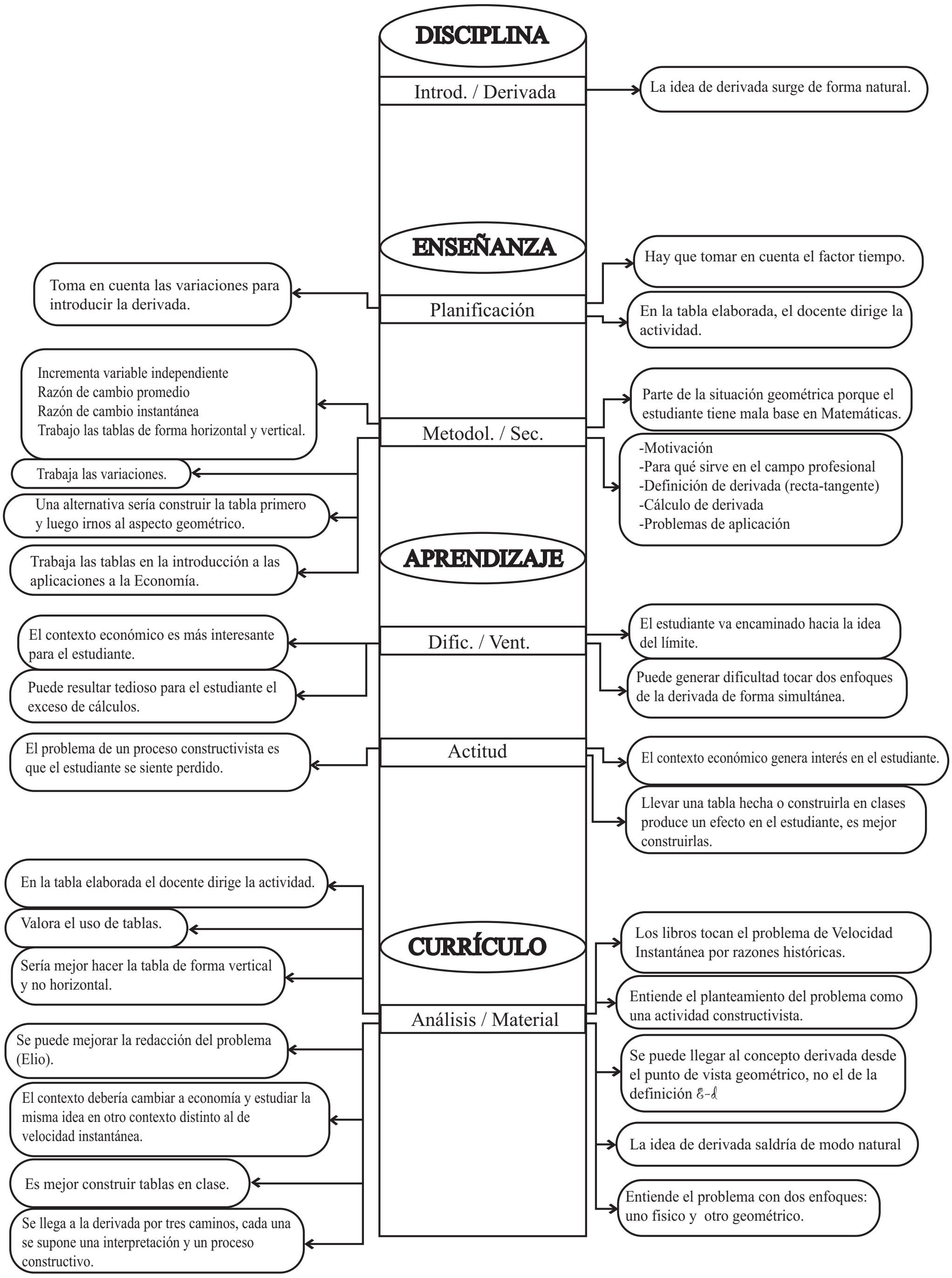
Cuadro 4.3: Episodio 1.1 - Alexis

EP 1.1 ELIO



Cuadro 4.3: Episodio 1.1 - Elio

EP 1.1 KENYA



Cuadro 4.3: Episodio 1.1 - Kenya

Resumen del análisis

Centramos nuestro análisis en la enseñanza, el aprendizaje y el currículo, descartando lo aportado sobre la disciplina matemática en sí misma, ya que dentro de nuestros objetivos no está el estudiar el conocimiento matemático *per se*, tal como lo manifestáramos en su momento.

Esta primera sesión y, en particular, este primer episodio tuvieron como función primordial *romper el hielo* con y entre los participantes; en tal sentido, se busca crear un ambiente distendido, procurando obtener una información lo menos sesgada y forzada posible, debido a la presencia de los otros colegas y del moderador del seminario, quien es el autor de esta memoria y, además, compañero de trabajo de los participantes. Por otra parte, era la primera vez que todos los profesores, de ambos grupos, participaban en una actividad como esta.

Mediante este problema se les presenta una situación hipotética a los participantes, en la que se supone que hay opiniones encontradas por especialistas en el campo de la didáctica a la hora de introducir el concepto de derivada. En este sentido, buscamos, de forma indirecta, que los participantes fijen su posición frente al escenario hipotético planteado a la hora de ir aproximándose al concepto de derivada de una manera contraria a la que, tradicionalmente, utilizan los profesores en una facultad de ciencias, por ejemplo. Por otra parte, se explota el uso de tablas y gráficos para la introducción del concepto de derivada.

Conocimiento sobre la Enseñanza (Grupo A)
Ante la situación planteada respecto a la enseñanza, los participantes prefieren hablar de sus experiencias en clase y no propiamente de lo que se aborda a lo largo del problema o, mejor dicho, terminan haciendo una comparación entre lo que dicen que hacen en relación con nuestro planteamiento.

Por una parte, consideran la velocidad instantánea como un ejemplo poco apropiado para los alumnos de ciencias económicas, puesto que éstos rechazan los problemas fuera de un contexto económico. No obstante, no descartan del todo el problema de velocidad instantánea, tanto por el hecho de ser un ejemplo con el que vivimos día a día como lo señala Pedro: *"...la velocidad que uno ve en el velocímetro del auto..."*, como por la presencia que ocupa en los libros de texto como lo indica Manuel: *"...la mayoría de los libros de aplicaciones [a la economía] usan las dos motivaciones, tanto el ejemplo físico como el económico, entonces algo tiene que tomarse en cuenta..."*. Ahora bien, si nos ubicamos en el comentario de Manuel, el mismo está en sintonía con Doyle (1992) quien señala que en la mayoría de los casos es frecuente que el profesor planifique y siga la secuencia de los libros de texto para sus clases.

En otro orden de ideas, las tablas de este episodio, correspondientes a cada uno de estos profesores, en particular, Pedro y Ramón, reflejan que la estructura de enseñanza que siguen como secuencia metodológica es la que sugieren los programas oficiales o los libros de texto, lo cual se traduce además en un aplicación lineal y sistemática (García-Valcárcel, 2001b) de estos dos elementos antes mencionados; destacándose un hecho característico entre estos dos profesores y que se puede apreciar con mayor detalle en las transcripciones de las sesiones respectivas del seminario (Ver **Apéndice A**).

Estas secuencias metodológicas, aunque estructuralmente parecen ser iguales, la contextualización no es la misma para ambas; por una parte Pedro señala que toda su secuencia la sigue en el contexto económico, mientras que Ramón deja ver que sigue todo el esquema tradicional para finalizar con aplicaciones de la derivada a la economía. Más aún, este último deja claros visos de la importancia del rigor matemático en materia de enseñanza. Por su parte Manuel, por su poca participación al respecto, nos hace inferir que sigue más la estructura de Ramón que la de Pedro.

Conocimiento sobre la Enseñanza (Grupo B)
En el caso de estos participantes, pareciera haber consenso en cuanto al ejemplo planteado, en lo que respecta al paso inicial hacia el concepto de derivada, pero Kenya, quien lidera desde un principio este grupo por la amplitud y precisión de sus opiniones, se mantiene firme sobre lo inadecuado de la contextualización, aspecto al que se van acogiendo los otros dos participantes. Por otra parte Kenya, al inicio, interpreta o nos da a entender que el material que estamos discutiendo sigue una línea de *enseñanza constructivista*, hecho clave para el desarrollo del seminario por la línea de la EBP que pretendemos estudiar.

Este grupo ve como un paso acertado que se inicie de esta manera la introducción al tema de la derivada, ya que como dice Elio: *"...resolver este problema o esta pregunta les daría una especie de entrenamiento de lo que se va a hacer más adelante..."*

En lo que respecta al uso de tablas como herramienta de apoyo para la enseñanza y, como hecho concreto, aquí la implementación de tablas busca ilustrar la aproximación de las velocidades promedios a una velocidad límite. En este sentido destacamos la discusión entre dos de los participantes sobre lo pertinente o no de mostrarle una tabla ya elaborada con los cálculos que exige la pregunta, donde el factor tiempo surge como inconveniente para el desarrollo de la actividad. Kenya advierte que llevar la tabla ya elaborada convierte al profesor en protagonista del proceso de enseñanza-aprendizaje, pero por otro lado, el construir las tablas en clase supone para Elio una motivación al trabajo para el estudiante.

Más adelante, estos dos participantes mantienen un diálogo relacionado con los enfoques numérico y geométrico; por su parte, Kenya sugiere dividir el pizarrón puesto que, *"...pareciera como que son dos asuntos..."*, lo que permitiría, desde su punto de vista, la discusión entre los estudiantes, pero Elio considera que colocar toda la tabla y realizar todas las gráficas puede resultar pesado para el estudiante y sugiere, *"...Bueno sería contar con un computador..."* y de esta manera explotar el poder visual que posee esta herramienta informática.

En resumen, las opiniones en materia de enseñanza resultan muy diversas y poco concretas, con lo que no podemos sacar una conclusión relevante en este tema. No obstante hay que destacar la escasa participación de Alexis y así queda reflejado en su correspondiente diagrama, quien en todo momento prefiere acogerse a las opiniones y comentarios de los otros dos.

Conocimiento sobre el Aprendizaje (Grupo A)
El presentar un problema contextualizado en la física y pretender ahondar en el conocimiento del profesor sobre aspectos concretos vinculados al estudiante de ciencias económicas tiene su razón de ser; en primer lugar, ver si el profesor utiliza un problema de este tipo o similar en sus cursos y su justificación. Por otra parte, aproximarnos al conocimiento del profesor sobre el aprendizaje y, en consecuencia, analizar la relación o influencia de este conocimiento con el analizado anteriormente.

En este orden de ideas, Pedro es tajante al sostener que no utiliza problemas de un contexto distinto al económico para estos cursos, mientras que Ramón y Manuel dejan ver que sí implementan problemas de esta naturaleza pero no como problema principal, aunque los tres afirman que los estudiantes rechazan problemas de contextualización no económica. Esto significa que la actitud del estudiante de economía ante problemas no económicos es negativa, situación que incide en el aprendizaje del estudiante pero también debería incidir en la planificación de la clase.

Ahora bien, más allá del contexto, Manuel y Ramón valoran positivamente el enfoque numérico del problema para introducir la derivada, puesto que está vía supone una ventaja para el aprendizaje del estudiante frente al enfoque geométrico. Pero algo en lo que coinciden los tres profesores del grupo es que el presentar la enseñanza de la matemática con un enfoque meramente matemático genera serias dificultades en el estudiante de económicas. En otras palabras, estos profesores son conscientes de la actitud del estudiante ante problemas específicos y, en consecuencia, sus clases dependen de esta situación en concreto.

Conocimiento sobre el Aprendizaje (Grupo B)
Este grupo se decanta por la función cuadrática ($f(x) = x^2$) para la enseñanza de la derivada; dos de estos profesores le dan peso a la parte geométrica y uno de ellos lo justifica por la formación de los alumnos para el momento en que llegan al curso de cálculo diferencial; Kenya sostiene que *"...yo he partido siempre de la parte geométrica porque tengo el prejuicio de que los estudiantes que nosotros atendemos traen muy mala base..."*, es decir, la elección de esta función radica en la experiencia de cursos anteriores y se ha conformado con mantener el ejemplo. Por otra parte, Elio sólo se apoya en el gráfico como complemento a la parte analítica y hace una observación sobre el material, *"...trato de hacer lo que está por aquí en las tablas pero no con tanto cálculo..."*.

Centrándonos ahora en el tema de las dificultades que generalmente presentan los estudiantes al abordar el tema de la derivada con un problema similar al de la discusión, Alexis dice que: *"Los estudiantes presentan dificultad al evaluar la función en un punto..."*, a esto le añade Elio que para los estudiantes *"...calcular el costo de producción de 51 artículos y calcular el costo de producción del artículo 51 es lo mismo..."*. Estos elementos vinculados al aprendizaje del estudiante resultan claves para la planificación y gestión de la clase, es decir, el hecho de que el profesor sea consciente de las dificultades del estudiante frente a situaciones matemáticas particulares le indican al docente cómo abordar las mismas en la práctica de la enseñanza.

Por su parte, la opinión de Kenya se centra en la estructura que presenta el problema y nos dice que: "...el problema de un proceso constructivista es que el estudiante se siente perdido..."; en primer lugar, advertimos que en ningún momento se dijo durante el seminario que una de las características del material es que se de corte constructivista, en todo caso así lo identifica esta profesora; por otra parte, Kenya muestra tener conocimiento de lo que significa una enseñanza de este tipo, donde el compromiso del estudiante es mayor en relación a la metodología de enseñanza tradicional. Finalmente, Elio se acoge a la opinión de Kenya sin mayor justificación. Pero volviendo a la frase de la profesora, ésta nos advierte que trabajar con un esquema como el que muestra el material debe suponer cambios en el estudiante; sin embargo, preferimos no adelantarnos y hacer conclusiones *a priori*.

Conocimiento sobre el Currículo (Grupo A)
Tal como lo indicamos en el conocimiento sobre la enseñanza, los tres profesores consideran el ejemplo de velocidad instantánea poco indicado para los alumnos de ciencias económicas por el rechazo que supone para ellos los problemas fuera del contexto económico, por lo que sugieren cambiar el contexto del problema, de la física a la economía. Aun así, dos de ellos no desechan del todo el problema en cuestión y su justificación ya se dijo cuando hablamos del conocimiento sobre la enseñanza. Estos dos profesores, Manuel y Ramón, están de acuerdo con el hecho de comparar las velocidades promedios e instantánea. Por su parte, la posición de Pedro se ciñe a la contextualización de la actividad; él, en lugar de hablar de velocidades hablaría de costo promedio y de estudiar el costo en pequeños incrementos, lo cual nos muestra su posición respecto a la enseñanza contextualizada en la economía.

Salvo la contextualización del problema, los participantes están de acuerdo con el material mostrado hasta el momento como herramienta didáctica; destacan la preferencia que tienen por hablar en sus clases de pendientes de rectas secantes en lugar de rectas secantes únicamente; aún así, uno de los profesores participantes hace una observación al material: puesto que en el mismo consideramos el límite como un valor específico y no como una aproximación, Pedro argumenta que *"...hay que tener mucho cuidado aquí ya* *que la recta tangente se define como una aproximación, el Δ_x se aproxima a 0 y no la definición de recta tangente que uno conoce y que el estudiante conoce para ese momento..."*. De esta manera se cumple lo que destacáramos de Climent (2002) en la **sección 2.3.3**, es decir, la capacidad de análisis del profesor sobre materiales va en función del conocimiento disciplinar que éste posee.

También, Ramón y Manuel destacan como aspecto didáctico positivo del material, el enfoque numérico presentado aquí por la facilidad que supone para el estudiante trabajar el tema de la derivada desde este punto de vista. En este mismo punto, Ramón señala que la relación que se plantea en el material entre velocidades promedio e instantánea es un punto de valor didáctico que los libros de texto descuidan. Finalmente, Ramón expresa que el material es una buena herramienta para introducir del concepto de derivada siempre que se llegue a la formalización del concepto. Estos tres puntos que hemos destacado están ligados a aspectos metodológicos de enseñanza, en particular con el *cómo* enseñar.

Conocimiento sobre el Currículo (Grupo B)
Estos profesores hacen observaciones sobre el material mostrado para la discusión; primero, la presentación del ejemplo podría conducir al estudiante a un conflicto conceptual, por otro lado, el contexto del problema lo ven poco adecuado para el universo de estudiantes al que se supone destinado el material, ellos proponen de forma unánime que se considere el contexto económico en lugar en lugar del físico, proponiendo ejemplos como la oferta o la demanda, aunque Alexis resalta que los libros de texto de aplicaciones a la economía trabajan también la velocidad instantánea, a esto argumenta Kenya que este hecho obedece a razones históricas, pero se inclina por modificar el contexto del problema al área de la economía.

Ahora bien, un cambio de contexto supone un conocimiento profundo del docente sobre el nuevo contexto, situación esta que dejaremos, de momento, en el aire para abordarla más adelante.

Otro aspecto que destacan Kenya y Elio tiene que ver con el contenido del material para introducir el concepto de derivada, ellos lo entienden como un material constructivista, en el que el concepto de derivada saldría de forma natural, evitándose la formulación tradicional, $\varepsilon - \delta$. En este sentido podemos apreciar que las opiniones de estos dos participantes se mueven más hacia aspectos metodológicos de enseñanza.

4.1.2. Episodio 1.2: El Impuesto Marginal, introducción a la derivada, incrementos, contextualización económica

Supongamos que una persona gana \$6000 al año. Ésta tiene la opción de trabajar más horas, pero para ver si le convendría, primero quisiera determinar los **efectos del impuesto en los ingresos**. Para simplificar las cosas, supongamos que el impuesto que debe pagar viene dado por un polinomio de segundo grado, $y = f(x) = 0{,}04x^2$, donde

$x =$ ingresos gravables (expresado en unidades de \$1.000)
$y = f(x) =$ impuesto (expresado en unidades de \$1.000).

A partir de esta función se discutirán una serie de preguntas, pero antes se le solicita al alumno que calcule el impuesto para ingresos anuales de \$1.000 hasta unos \$12.000, por ejemplo. Recuerde que x está expresada en unidades de \$1.000.

Pregunta 1: En cuánto varía el impuesto que ha de pagar cuando el ingreso del trabajador cambia de \$6.000 a \$12.000; de \$6.000 a \$11.000; de \$6.000 a \$10.000; de \$6.000 a \$9.000; de \$6.000 a \$8.000 y de \$6.000 a \$7.000. ¿Qué observa en cada uno de los cambios de ingreso al año?

Respuesta: En la segunda columna de la **Tabla B.3** podemos ver cómo varía el impuesto a pagar en función de los incrementos que sufra el sueldo del trabajador más allá de los \$6.000 que gana actualmente.

Microepisodio 1.2.1: Al inicio de esta actividad y antes de entrar a realizar las tareas correspondientes, se le pidió al estudiante que calculara el impuesto a pagar para distintos ingresos, ahora estudiamos variaciones del impuesto para intervalos de ingresos particulares; es decir, qué variaciones experimenta el impuesto del trabajador cuando obtiene ingresos superiores a los \$6.000 que actualmente gana.

¿Consideran ustedes que esta tarea promueve, de alguna manera, el concepto de incrementos de una variable? ¿De qué manera? ¿Cómo?

Pregunta 2: Si la persona **incrementa** sus ingresos en \$1000, ¿**qué cantidad de este incremento** será para impuestos? ¿Qué porcentaje?

Respuesta: Dado que sus ingresos, x, se miden en unidades de \$1000, su incremento podría expresarse simbólicamente como

$$\Delta x = 1, \ \textbf{cada unidad representa \$1000}$$

¿En cuánto se incrementarán sus impuestos? Es decir, ¿cuál es el incremento correspondiente Δy?

$$\begin{aligned} \Delta y &= f(7) - f(6) \\ &= 1{,}96 - 1{,}44 \\ &= 0{,}52 \end{aligned}$$

Así, podemos decir que la tajada al fisco es de 52 % por los siguientes \$1000 que gane (a los \$6000 que ya gana). A esta *variación del impuesto*, (Δy), los economistas le llaman **impuesto marginal**.

Microepisodio 1.2.2: Con esta tarea buscamos que el estudiante se aproxime a la definición de derivada por medio del incremento de una variable respecto a otra (cociente incremental), pero además se llega al monto que el trabajador pagaría en impuestos por los \$1000 adicionales, que es el 52 % de esto \$1000. En otras palabras, la persona solo se quedará con \$480 de estos \$1000.

Un planteamiento como éste, en el que buscamos trabajar, de forma puntual, el tema de los incrementos, partiendo del contexto económico. ¿Les parece adecuado que la variable x se exprese en unidades de mil, o no supone mayor inconveniente y permite la discusión adecuada sobre incrementos?

Pregunta 3: Hasta ahora no hemos hablado de *límite* ni de *cociente incremental*. Aún cuando la función de impuesto del ejemplo antes visto se expresó en unidades de mil dólares, cualquier unidad hubiera sido satisfactoria. Por ejemplo, suponga que se quiere estudiar el *impuesto marginal* de una persona que gana \$6.000, para un incremento de \$100, esto es,

$$\Delta x = 0,1.$$

Entonces el impuesto correspondiente es

$$\begin{aligned} \Delta y &= f(6,1) - f(6,0) \\ &= 1,4884 - 1,4400 \\ &= 0,0484. \end{aligned}$$

Por lo tanto, el incremento del impuesto en relación con el incremento de los ingresos es

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{0,0484}{0,1} = 0,484,$$

que los economistas denominan la tasa del impuesto marginal y los *matemáticos llaman el cociente incremental*.

Microepisodio 1.2.3: Ahora, cuando el incremento del ingreso es de \$100 ($\Delta x = 0,1$), el incremento en Δy cambia respecto al caso anterior. Cuando el incremento en el ingreso era de \$1.000, la tajada al fisco era del 52 %, pero cuando el incremento es de \$100, la tajada es de 48,4 %. De esta manera y según la necesidad del caso a estudiar, nuestro incremento lo podemos hacer tan pequeño como sea.

¿Qué interés puede suponer para ustedes, desde el punto de vista metodológico, esta actividad en la que se busca dar un paso más hacia la definición de derivada?

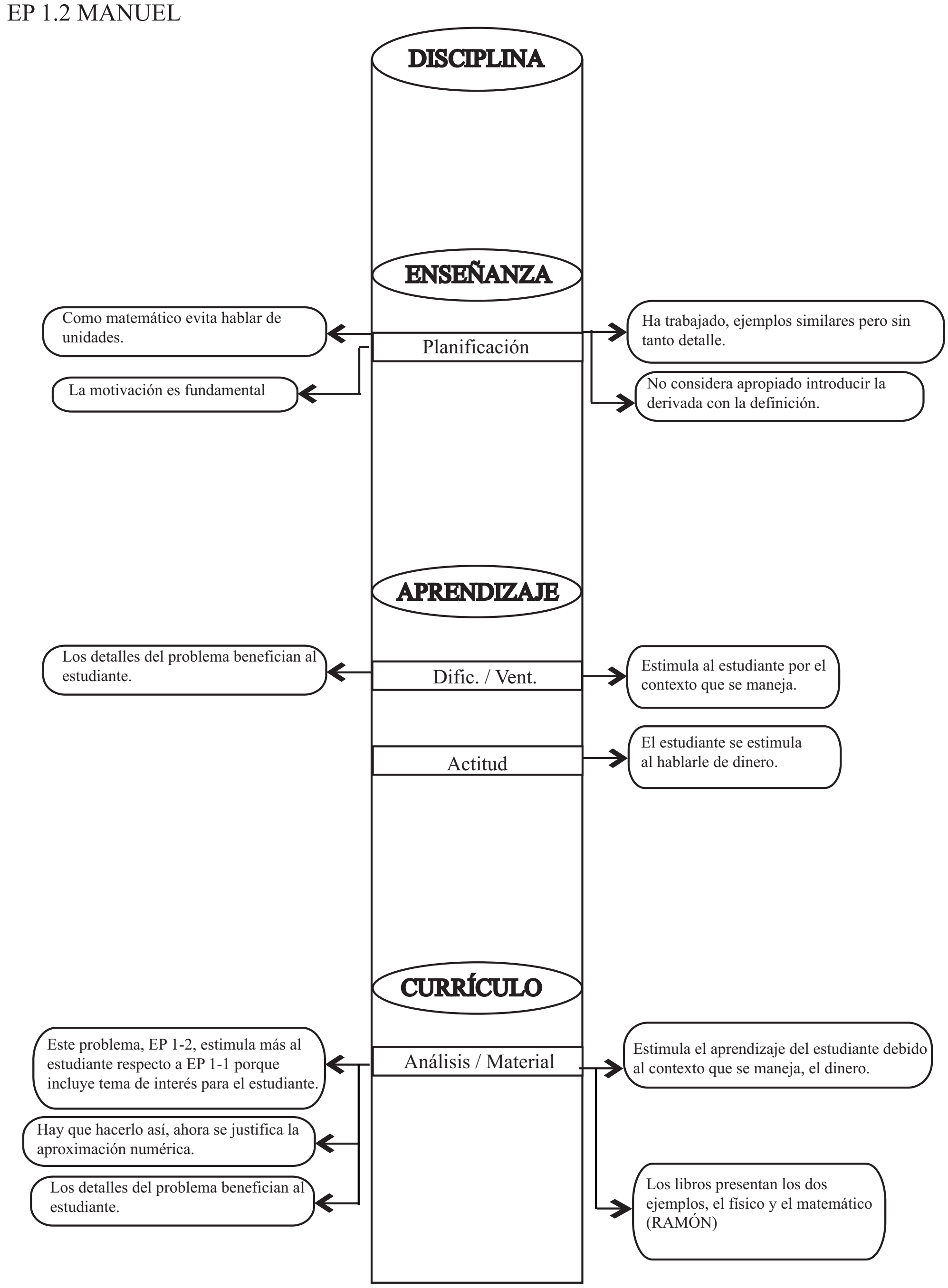
Microepisodio 1.2.4: Finalmente hemos llegado a la definición de derivada de una manera que a muchos profesores no les gusta o mejor dicho, no están de acuerdo por toda la estructura que significa una construcción de esta naturaleza; además, consideran que el estudiante se distrae y se pierde en esencia el objetivo perseguido.

¿Qué opinión tienen ustedes sobre este hecho (el de introducir el concepto de derivada de esta manera), en relación con los objetivos que se buscan en el curso?

Conceptualización, reducción y esquematización

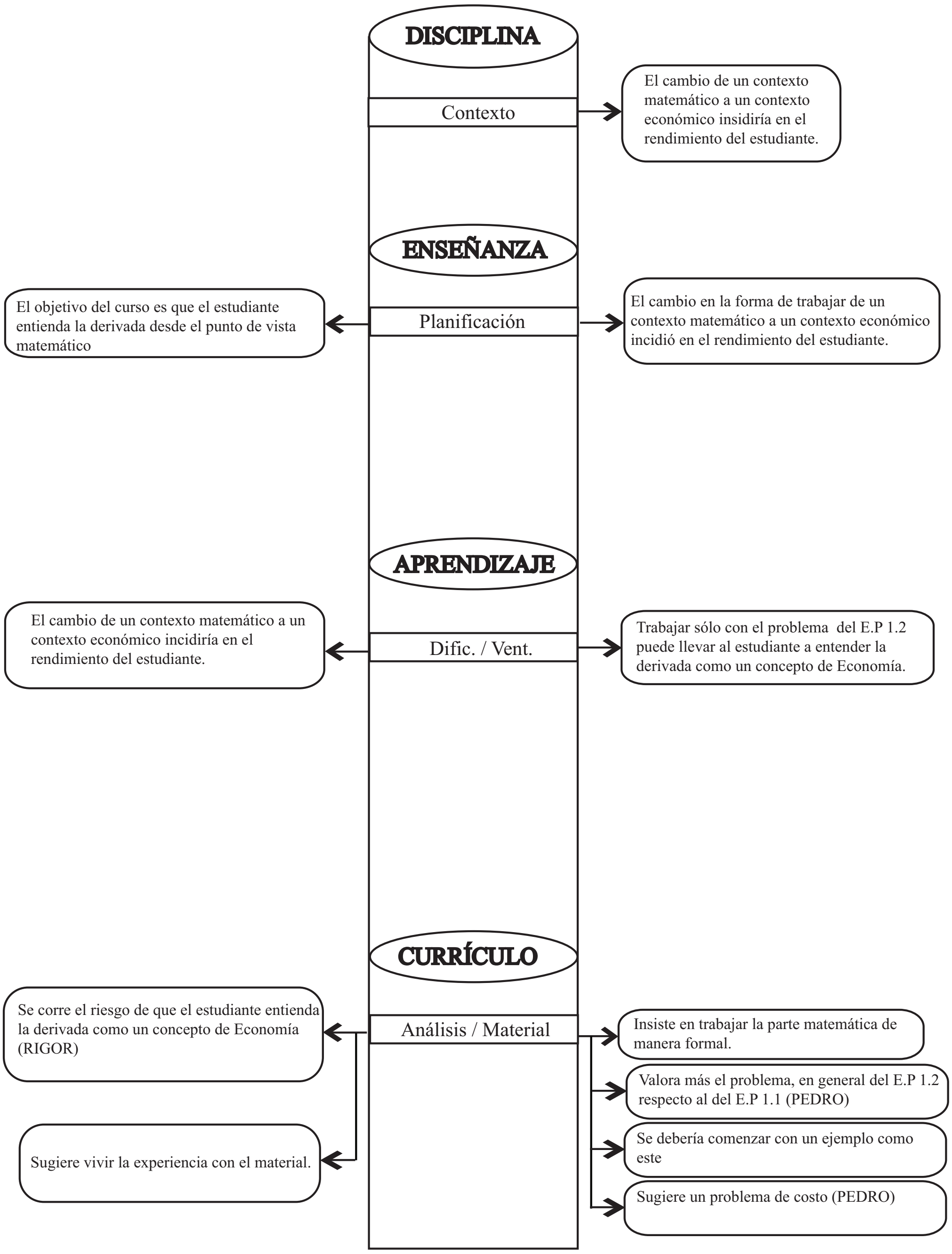
Los diagramas que mostramos a continuación corresponden al episodio EP1-2, en esta parte del seminario la discusión se centró en el estudio del conocimiento sobre la enseñanza, el aprendizaje y el currículo, pero contextualizados en el campo de la economía por el mismo contenido del problema, lo que significa que ya nos vamos adentrando en el estudio del conocimiento del contenido disciplinar.

Grupo A



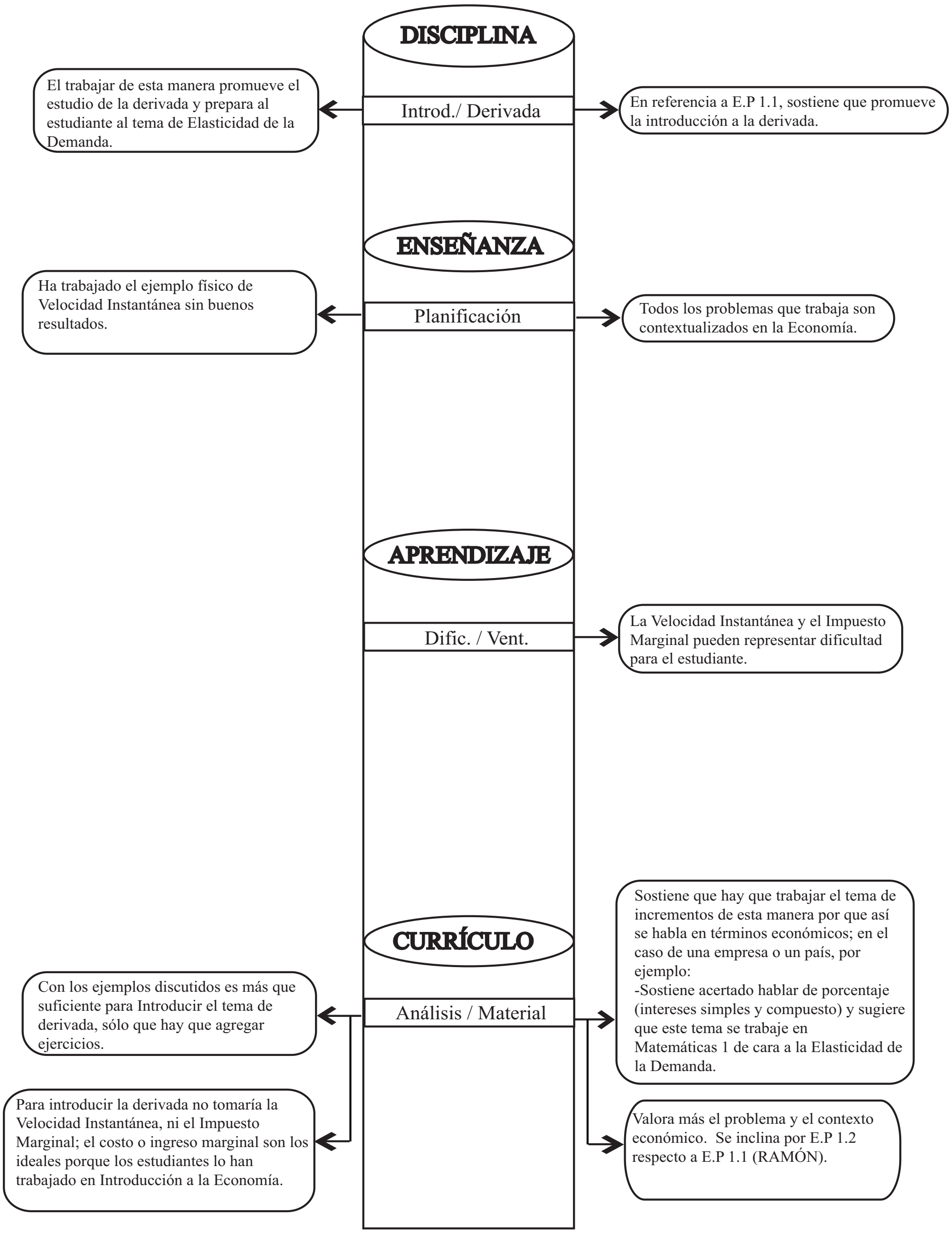
Cuadro 4.4: Episodio 1.2 - Manuel

EP 1.2 RAMÓN



Cuadro 4.4: Episodio 1.2 - Ramón

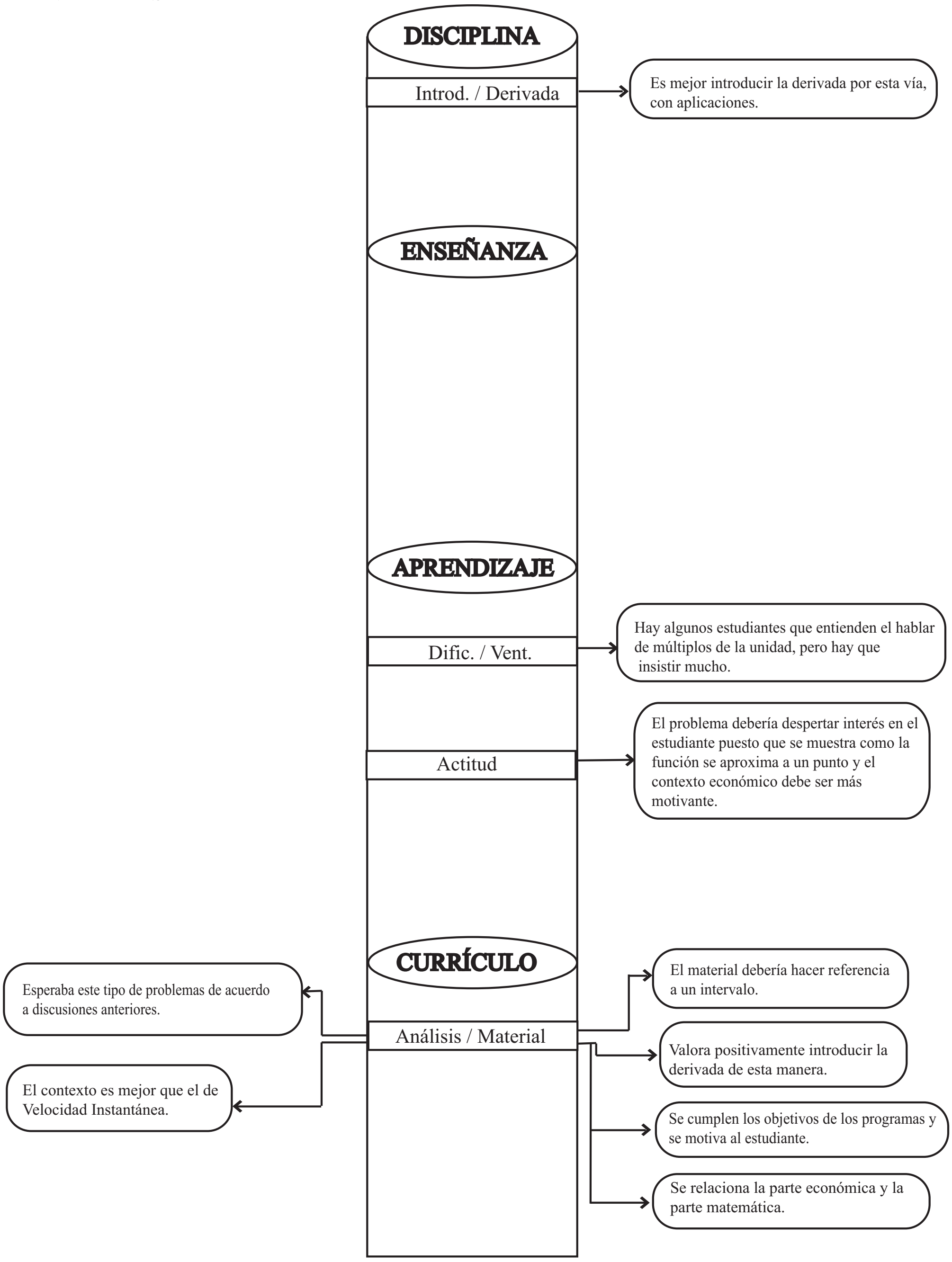
EP 1.2 PEDRO



Cuadro 4.4: Episodio 1.2 - Pedro

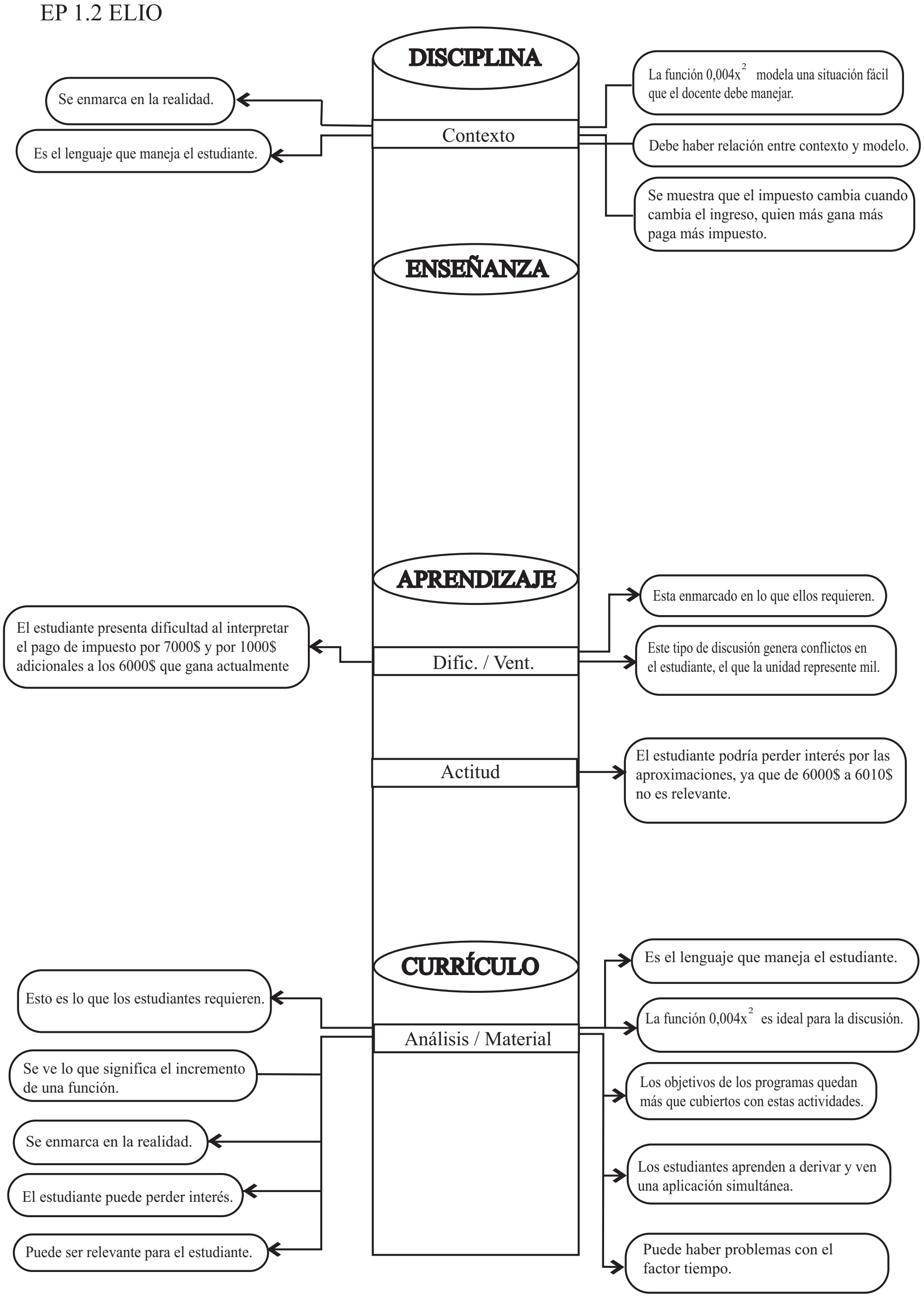
Grupo B

EP 1.2 ALEXIS

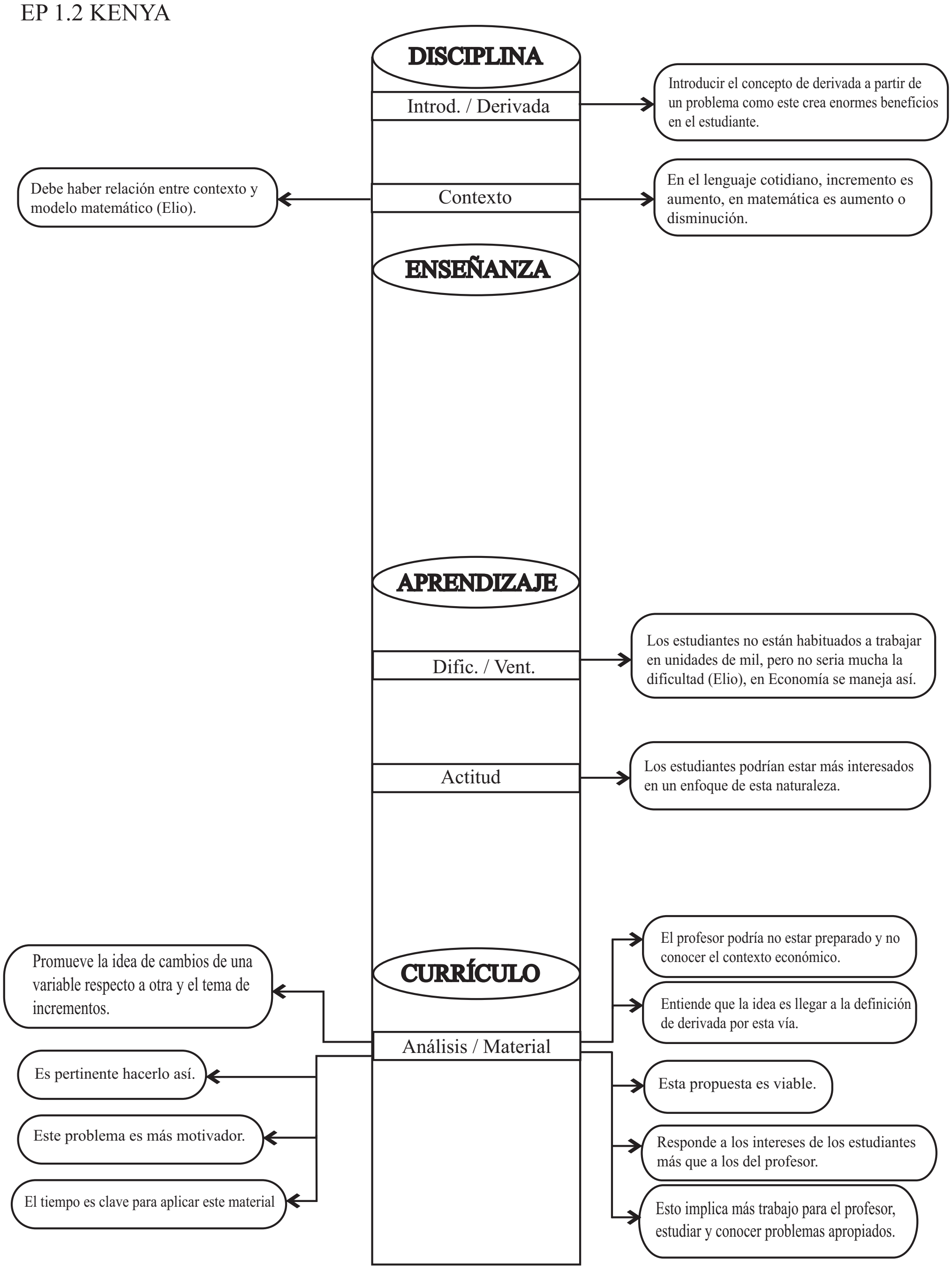


Cuadro 4.5: Episodio 1.2 - Alexis

EP 1.2 ELIO



Cuadro 4.5: Episodio 1.2 - Elio



Cuadro 4.5: Episodio 1.2 - Kenya

Resumen del análisis

En este caso orientamos nuestro análisis hacia los conocimientos de la enseñanza, el aprendizaje y el currículo, donde el contenido matemático-económico sirve como telón de fondo para generar cada una de las discusiones tratadas en esta sesión del seminario, pero además nos valemos de este problema para ir dando los primeros pasos hacia el estudio del conocimiento disciplinar.

Una vez terminado de discutir el primer problema y generado un ambiente de participación colectiva entre los participantes, pasamos a discutir un problema contextualizado en la economía, específicamente, trabajamos el *impuesto marginal*; problema este tomado del libro de texto de Wonnacott (1983).

Mediante este problema se les presenta una situación hipotética relacionada con el pago del impuesto de un trabajador en función de su ingreso anual. En esta parte buscamos estudiar tanto la actitud con las dificultades o beneficios que resultan para el estudiante, desde el punto de vista del profesor, el trabajar un problema de esta naturaleza; de igual manera, pretendemos estudiar los aspectos de la enseñanza que nos son de interés en este estudio y, por supuesto, estudiar las reflexiones que hacen los participantes sobre el material como parte del conocimiento del currículo.

Conocimiento sobre la Disciplina (Grupo A)

Al respecto, el único participante que se pronunció de manera concreta sobre el contenido disciplinar fue Pedro: *"...hay que trabajar el tema de incrementos de esta manera porque así se habla en términos económicos en el caso de una empresa o de un país..."*, donde sugiere, además, que se incluya en el programa oficial de Matemática 1 el tema de *"porcentajes"*. Aun cuando el problema tenía la firme intención de discutir acerca de la introducción de la derivada, sin embargo, este profesor, en función de su larga experiencia en la docencia de las matemáticas en el campo de las ciencias económicas, muestra un conocimiento sólido y consistente con el contenido disciplinar matemático-económico. En el **Apéndice A** se muestra en detalle todo lo que él expresa para justificar la enseñanza de incrementos de esta manera y la necesidad del tema del porcentaje de cara al estudio de la elasticidad de la demanda, concepto este que es propio de las ciencias económicas y que se expresa en términos porcentuales.

Conocimiento sobre la Disciplina (Grupo B)

Las opiniones de estos profesores, en materia de contenido disciplinar, son superficiales y sólo Kenya y Elio se pronuncian y sus comentarios están alineados; ellos se refieren al lenguaje económico del problema y a la función matemática utilizada en el modelo del impuesto, pero con frases como la de Elio: *"...es el lenguaje que maneja el estudiante..."* o la de Kenya: *"... en el lenguaje cotidiano, incremento es aumento, en matemática es aumento o disminución..."*, pero ninguno de los dos profundiza al respecto.

Conocimiento sobre la Enseñanza (Grupo A)

Las opiniones en cuanto al conocimiento de la enseñanza son muy variadas para estos profesores, donde dos de ellos dejan ver su formación matemática;

por un lado, Manuel evita hablar de unidades en los problemas que aborda en sus clases, pero advierte que no comienza el tema de derivada con la definición sino con una motivación económica; mientras que Ramón entiende que el objetivo del curso es que "...el estudiante entienda la derivada desde el punto de vista matemático..." y que un problema como este (EP1-2) lleve al estudiante a entender la derivada como un concepto propio del la economía, aunque reconoce que anteriormente sus cursos los planificaba en un contexto matemático y fue cambiando hacia el contexto económico por sugerencia de los propios estudiantes.

De Ramón inferimos que sigue una enseñanza del tipo *teoría+aplicaciones*, en la que hace hincapié en la teoría en un contexto matemático para luego hablar de las aplicaciones; en otras palabras, este profesor sigue el esquema del programa oficial y de los libros de texto, característica similar a la manifestada por Manuel en el EP1-1 y señalada por Doyle (1992).

Por su parte, Pedro, en referencia a los problemas EP1-1 y EP1-2 advierte que su enseñanza está enmarcada en el contexto económico y que su experiencia con problemas en el contexto físico arrojó malos resultados por parte de los estudiantes, razón por la cual se decantó por una enseñanza que apunta hacia el contexto económico. En este caso, el profesor al tener una experiencia negativa por un tema elegido, explora con otro tema en el que el estudiante se siente a gusto y en consecuencia planifica su curso en el nuevo contexto, aquí también señalamos el cambio de este profesor, en materia de enseñanza, del contexto matemático al económico debido a los propios estudiantes quienes, a diferencia de los de Ramón, obtenían un mal rendimiento.

Pero algo relevante para nuestro trabajo, y que podemos aprovechar del comentario de Ramón, es que nos da luces de su perfil como docente y, al mismo tiempo, nos permite estudiar su posición frente a una propuesta metodológica alternativa para la enseñanza de las matemáticas.

Volviendo al inicio del análisis de este apartado, cuando nos referíamos a Ramón, quien objeta que puede surgir un conflicto de conceptualización en el estudiante al utilizar un ejemplo de economía para la enseñanza de la derivada, este indica *"...sigo teniendo mi reparo en cuanto a que si se le enseña de esta manera, el estudiante de economía va a tener un concepto de derivada muy particular y no el concepto como lo mira un matemático..."*. Si atendemos a la teoría en la que se basa la EBP en el caso de las matemáticas, ésta no especifica que se debe enseñar las matemáticas desde las mismas matemáticas, por otra parte el futuro economista no tiene por qué ver la derivada como un matemático, en todo caso lo importante para el economista es conocer las interpretaciones económicas de la derivada (González y Gil, 2000). Además, tal como lo señaláramos en la **Sección 2.4.1** cuando nos referimos a las características de la EBP y sus orígenes, la interconexión entre disciplinas o conceptos es de gran provecho y es lo que se suele explotar en esta estrategia de enseñanza.

Finalmente, un punto a destacar en el seminario como actividad de discusión, tiene que ver cuando Pedro se refiere a la inclusión del porcentaje como contenido del programa oficial y los otros profesores, aunque opinan de forma superficial, terminan estando de acuerdo con él. Especulamos que en una entrevista con cada uno de los participantes, por separado, difícilmente se podría llegar a los mismos resultados.

Conocimiento sobre la Enseñanza (Grupo B)
En relación a la enseñanza, los participantes no dicen nada concreto y decidimos, en consecuencia, descartar el contenido relacionado con esta categoría.

Conocimiento sobre el Aprendizaje (Grupo A)
Pedro, haciendo uso de su experiencia docente y del conocimiento disciplinar matemático-económico, sostiene que tanto el ejemplo del EP1-1 como el del EP1-2 *"...pueden representar dificultades para el estudiante..."*, puesto que este último rechaza cualquier ejemplo físico y, además, para el momento del currículo de la carrera en el que se estudia la derivada, el estudiante no ha trabajado el tema del impuesto; en este último caso se estaría trabajando con un concepto económico que el estudiante desconoce. Situación que hay que destacar si pretendemos implementar la enseñanza de las matemáticas vía EBP, ya que al desconocer el estudiante un concepto económico incluido en el problema, podría generar conflictos de aprendizaje en este.

Lo que pretendemos resaltar de esta observación es lo siguiente: al plantear un problema dentro de la metodología de la EBP en determinado escenario, el profesor del curso debe tener presente que los estudiantes deben manejar algunos conceptos asociados al problema, de manera que estos últimos se involucren en la discusión esperada, situación ésta que sería difícil de lograr si ninguno o muy pocos estudiantes conocieras los conceptos involucrados.

Por su parte, Ramón en una posición *formalista* sostiene que trabajar sólo este ejemplo, EP1-2, para introducir la derivada podría conducir al estudiante a entender la derivada como un concepto propio de la economía; también afirma que el cambio del contexto matemático o físico al económico puede incidir favorablemente en el estudiante. Atendiendo a estos dos comentarios, mantenemos nuestra idea sobre la estructura de la clase que sigue este profesor, tal como lo señaláramos en el apartado de enseñanza de este mismo episodio.

De Manuel destacamos lo siguiente: *"...los detalles del problema benefician al estudiante..."*, donde además reconoce que él mismo ha *"...trabajado problemas similares pero sin tanto detalle..."*; también advierte que la actitud del estudiante, al trabajar con problemas en el que se habla de dinero, es positiva. Por lo tanto, este profesor conoce algunas de las características del estudiante que promueve su aprendizaje; como es el lenguaje del campo profesional del futuro economista o administrador de empresas. En este caso recordamos a Salazar (2005) y las *ideas previas de los estudiantes*.

Conocimiento sobre el Aprendizaje (Grupo B)
En cuanto al conocimiento del contenido del aprendizaje, estos tres profesores y de forma unánime, coinciden en que al decirle al estudiante que la variable está expresada en unidades de mil o que la unidad está particionada para luego introducir el concepto de derivada de forma intuitiva, puede generar conflictos en el estudiante; estos profesores dejan ver que ellos no trabajan un problema con características similares al discutido. Elio resulta ser preciso en sus comentarios y sostiene que *"...el estudiante presenta dificultad al interpretar el pago del impuesto por $ 7000 y por $ 1000 adicionales a los $6000 que gana actualmente el empleado..."*; en este sentido, Elio es coherente con lo expresado en EP1-1 sobre esta misma categoría, al manifestar que el estudiante confunde $f(51)$ y $f(51) - f(50)$.

Por otro lado hay opiniones encontradas sobre la actitud del estudiante respecto a este problema; mientras Kenya y Alexis consideran que el problema podría despertar interés en el estudiante, Elio piensa que el estudiante al estudiar la variación del impuesto para incrementos muy pequeños en el sueldo del empleado le causaría desmotivación y pérdida de interés, lo cual incide en el aprendizaje del estudiante de acuerdo con Tapia (2001).

Si pensamos por un momento en la EBP como estrategia de enseñanza, debemos destacar que este tipo de sutilezas, como las reflejadas por los profesores, hay que tomarlas en cuenta a la hora de la elaboración de un material enmarcado en esta metodología de enseñanza, cuestión que nos resulta de gran valor de cara a nuestra reflexión sobre el material de discusión.

Conocimiento sobre el Currículo (Grupo A)
Las opiniones sobre el material trabajado están divididas en dos; por una parte, Pedro es tajante al decir que para introducir la derivada, el ejemplo más apropiado es el de *costo* o *ingreso*, contrarios a los de velocidad instantánea e impuesto marginal. En el curso de *Introducción a la Economía*, en el primer semestre, el estudiante trabaja los conceptos de ingreso, costo, beneficio y los desarrolla en profundidad, de manera que estudiar la derivada a partir de estos conceptos podría incidir favorablemente en el estudiante. También se debe tomar en cuenta que si se quiere llevar a cabo una enseñanza basada en problemas, el profesor debe considerar el conocimiento previo que posee el estudiante para una enseñanza efectiva (Reyes y Gárritz, 2006; Salazar, 2005 y Talanquer, 2004).

Ramón, por su parte, objeta que con la aplicación del material el estudiante puede entender la derivada como un concepto económico, en otras palabras, su posición obedece más a su formación como matemático que como profesor de matemáticas para ciencias económicas; es decir, sus estudios universitarios inciden en su trabajo como docente, una característica del profesor de matemáticas de universidad que ya observamos en García (2004).

Entre las opiniones favorables al material, se mantienen dos líneas claramente diferenciadas; una tiene que ver con la estructura que presenta el material y la otra con el contexto, salvo el comentario de Pedro, que aunque está de acuerdo con el contexto económico, sugiere cambiar el concepto tratado, es decir, impuesto por ingreso o costo. Aun así, lo importante a destacar en este caso es que las opiniones de los profesores se fundamentan tomando en cuenta al estudiante. Un ejemplo de ello lo muestra, en palabras de Manuel, *"...este problema, EP1-2, estimula más al estudiante..."*, *"...se habla de dinero y eso le gusta al estudiante..."*, *"...los detalles del problema benefician al estudiante..."*; mientras que Pedro al fijar posición sobre el material, advierte que tal como se presenta el contenido es el indicado, pues ese es el lenguaje que se maneja en el campo de la economía.

En resumen, el análisis del material discutido lo hacen en función, tanto del conocimiento del contenido disciplinar económico como del conocimiento del contenido respecto del aprendizaje como lo señala Climent (2002), componentes claves a ser tomadas en cuenta para el manejo del currículo.

Conocimiento sobre el Currículo (Grupo B)
Las posiciones que adopta cada profesor respecto al material son diversas; en primer lugar sacan a relucir el contexto del problema, estando todos de acuerdo en lo beneficioso que resulta para el estudiante de ciencias económicas abordar problemas ligados a su futuro campo profesional, esto quiere decir que sigue prevaleciendo el que las opiniones de estos profesores se derivan del conocimiento que estos tienen sobre sus estudiantes. Elio, por ejemplo, afirma: *"...esto es lo que los estudiantes requieren..."*, *"...es el lenguaje que maneja el estudiante..."*; por su parte, Kenya señala: *"...promueve la idea de cambios de una variable respecto a otra..."*, refiriéndose al tema de incrementos en una variable, también expresa que *"...esta propuesta es viable..."* y *"...responde a los intereses de los estudiantes..."*. Alexis, siguiendo a los otros dos participantes, opina que *"...se cumplen los objetivos de los programas y se motiva al estudiante..."*.

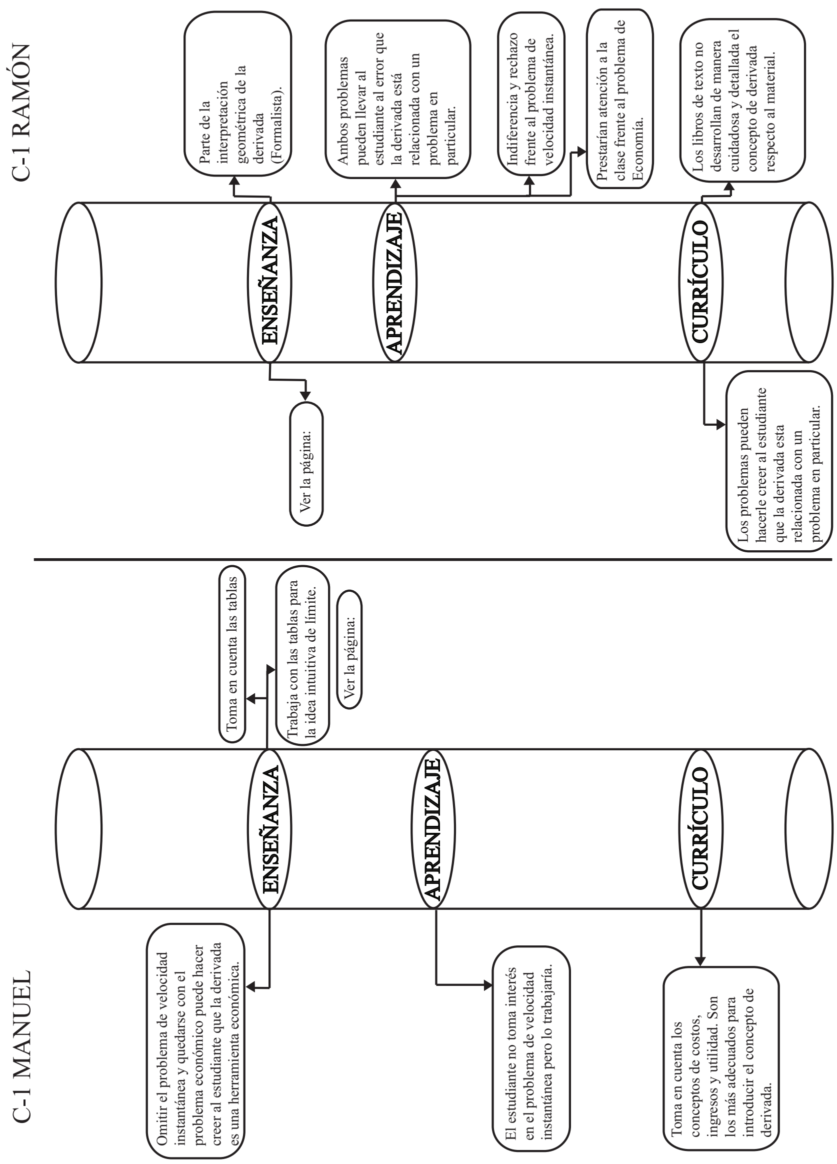
En resumen, tal como dijimos antes, el estudiante resulta ser el *leitmotiv* de las reflexiones de cada uno de los profesores. Sin embargo, si atendemos en detalle a cada una de estas opiniones, se puede apreciar que todos van más allá de la *motivación* a la que se refiere Tapia (2001). Estas críticas o reflexiones más bien obedecen a dos tipos de conocimientos, disciplinar y sobre la enseñanza, que tienen estos profesores y que responden a sus puntos de vista sobre el *qué* enseñar. Ahora bien, Kenya hace un comentario sobre el material que se deriva de la discusión del seminario y que se justifica con algo comentado por ella misma en el EP1-1, cuando dijo que la enseñanza que se pretende con el material es de corte constructivista. En este caso afirma que seguir una enseñanza como se ilustra en el material *"...implica más trabajo para el profesor, estudiar y conocer problemas apropiados..."*. Más aún, para esta profesora la implementación del material supone una formación profesional encaminada, al menos, hacia el contexto económico. Para ella, el hecho de que hayan profesores que rechazan una enseñanza contextualizada de las matemáticas, *"...puede ser que a lo mejor [el profesor] no está preparado, no conoce el contexto..."*.

Es claro que enseñar matemáticas desde un contexto no matemático requiere de un conocimiento de este otro campo (en nuestro caso, el económico); es por ello que el profesor que imparte o pretenda impartir una enseñanza de las matemáticas, en carreras de ciencias económicas, desde la EBP, tiene que involucrarse en el contexto económico, manejar no sólo conceptos básicos de economía, sino las interpretaciones que tiene, para el caso que nos ocupa, la derivada en la economía, apuntando en todo caso hacia Biggs (2005), quien sostiene que *"los conocimientos sólidos se basan en interconexiones"*.

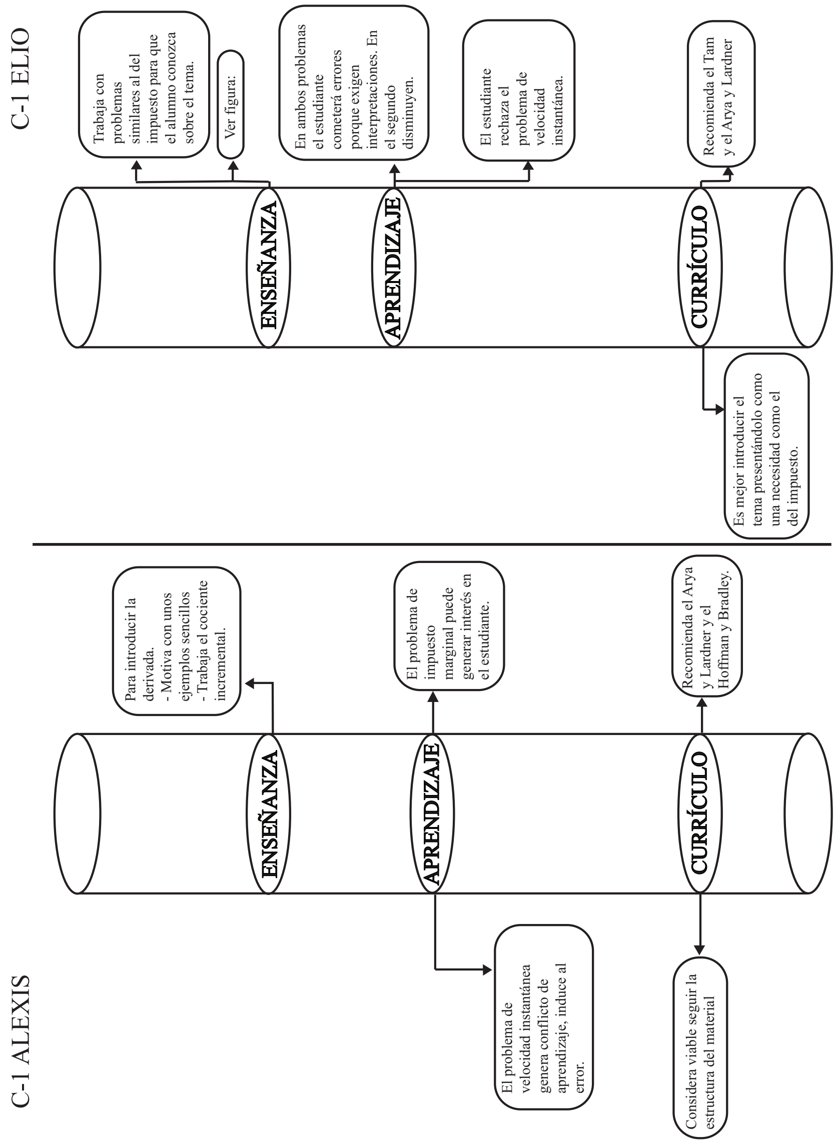
Un punto a resaltar de esta profesora es que ella tiene estudios doctorales en pedagogía y específicamente en educación matemática, lo cual le facilita identificar situaciones de orden metodológicas en cuanto a la enseñanza se refiere. Ella destaca el mayor compromiso que supone para el docente llevar una enseñanza basada en problemas, concretamente en la planificación de la clase.

4.1.3. Cuestionario 1

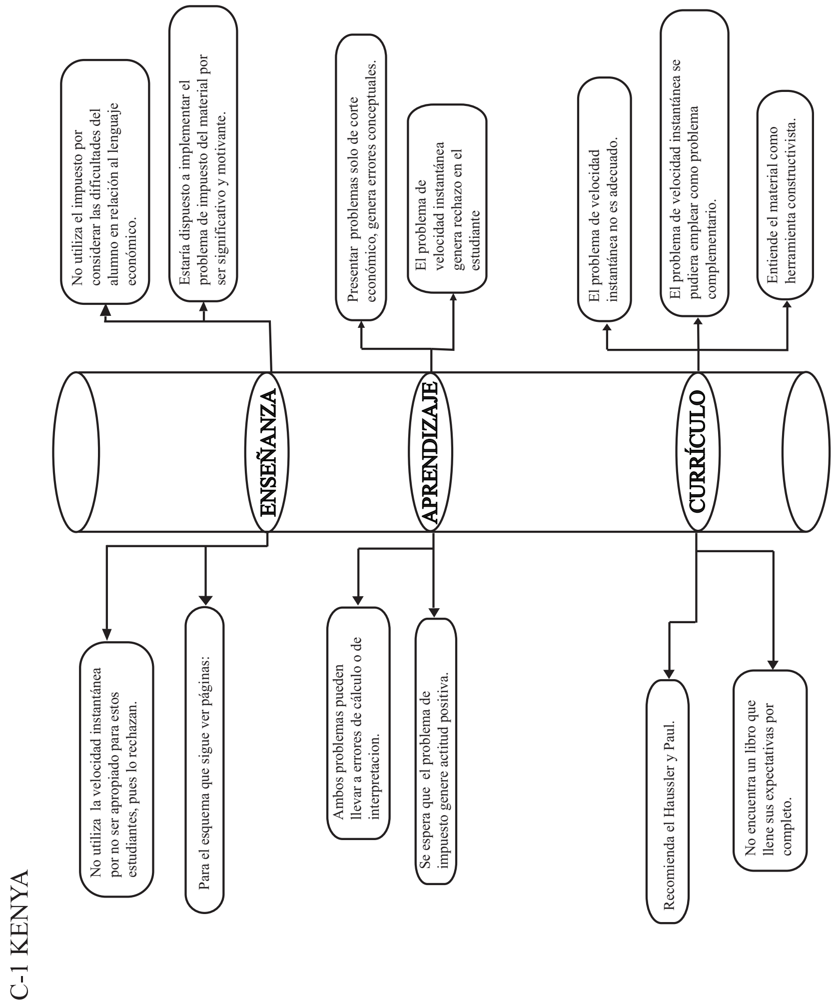
Ya para finalizar con esta parte del primer bloque del análisis, pasamos a estudiar las respuestas del primer cuestionario, en adelante C-1, las cuales nos permitieron, entre otras cosas, llevar a cabo un proceso de triangulación con las reflexiones aportadas por los participantes en la primera sesión del seminario.



Cuadro 4.6: Cuestionario 1 - Manuel y Ramón



Cuadro 4.6: Cuestionario 1 - Alexis y Elio



Cuadro 4.6: Cuestionario 1 - Kenya

C-1 (Grupo A)
A modo de información, le recordamos al lector que el profesor Pedro sólo participó en la primera sesión del seminario y ni siquiera respondió el C-1. Aun así, la información suministrada por este profesor la consideramos relevante y ya en su momento expondremos los motivos que nos llevaron a no retirarlo del trabajo.

Tanto Manuel como Ramón, en los esquemas presentados en las respuestas a la pregunta 4 del C-1, se puede verificar en las páginas 384 y 389 del **Apéndice A**, respectivamente, por una parte, lo que manifestó Ramón en la sesión del seminario y, por otra, lo que inferimos de Manuel en relación con la estructura que sigue en sus clases para la enseñanza de la derivada. Aunque este último presenta un esquema únicamente para la introducción a la derivada, dejando claro que utiliza tanto el problema de velocidad instantánea como algún otro del análisis marginal, es decir que sigue el programa oficial a rajatabla, una característica típica de algunos profesores de universidad (Zabalza, 2003); pero más aún, Ramón nos muestra que inicia el tema de la derivada a partir de la misma definición, mostrando así rigor y formalismo matemático en la enseñanza de este tema, aun cuando se trata de estudiantes de ciencias económicas.

Además, éste mantiene la idea de trabajar ambos problemas, EP1-1 (velocidad instantánea) y EP1-2 (impuesto marginal), para que el estudiante no asocie o identifique el concepto a un tema en particular; lo que implica, una vez más, una clara coherencia con lo dicho durante el seminario, lo que significa una posición formalista respecto a la enseñanza de las matemática en cursos de economía.

En resumen, destacamos la visión formalista de estos dos profesores sobre la enseñanza de las matemáticas, pero el pensar que al trabajar problemas contextualizados en una única área no-matemática pueda llevar al estudiante a un error de tipo conceptual, es algo que está lejos de nuestro planteamiento; en todo caso, nuestra propuesta apunta hacia una enseñanza de las matemáticas en consonancia con lo expuesto por Medina (2001):

> La docencia universitaria se ha de fundamentar en un sistema metodológico **coherente con los intereses y necesidades de los estudiantes y la disciplina que se enseña**, generando situaciones de aprendizaje formativas y transformadoras en las que los participantes sientan un compromiso con el estudio y adquieran actitudes adecuadas a los **nuevos retos de su futura profesión**.
>
> (Medina, 2001, p. 192, el resaltado es nuestro.)

Al respecto nos referimos a lo ya mencionado en el análisis del EP1-2, cuando señalamos el valor didáctico que tiene el interconectar dos áreas del conocimiento como estrategia de enseñanza dentro de la EBP. Es por ello que inferimos que para este par de profesores, el implementar la EBP como metodología de enseñanza de las matemáticas con problemas contextualizados en el campo de la economía, aun cuando ellos sostienen que los estudiantes rechazan problemas no económicos y, por el contrario, se sienten a gusto con problemas de su área de estudio, es un punto del que se encuentran distantes, dado el perfil que muestran por medio del seminario y el cuestionario.

C-1 (Grupo B)
En materia de enseñanza se puede apreciar que existe coherencia entre el seminario y el cuestionario, en lo dicho tanto por Elio como por Kenya, sobre todo, en cuanto a la estructura que siguen en sus clases a la hora de abordar el tema de la derivada; ambos esquemas (ver páginas 495, 500 y 501 en el **Apéndice B**) ilustran una enseñanza tradicional que nos permitimos resumir como: *definición+ejercicio+aplicaciones*.

Un punto a tomar en cuenta y en el que hay una relación estrecha entre el seminario y el cuestionario, son las respuestas de Alexis; durante el seminario mantuvo una actitud pasiva en la que, por lo general, prefirió acogerse a lo dicho por los otros profesores. De igual manera, sus respuestas en C-1 son breves y aportan poco a la investigación; sin embargo, este hecho nos permite iniciar una caracterización de este participante.

En otro orden de ideas, la estructura metodológica del material discutido durante el seminario supone para Kenya una estructura constructivista, lo cual también dejó ver durante el seminario, en el que además manifestó, y lo ratifica en C-1, que el problema de velocidad instantánea genera rechazo en el estudiante, así como también lo señalan Elio y Alexis. De igual modo, en el cuestionario existe consenso en que un problema del contexto económico, como el del impuesto marginal, podría generar más interés en el estudiante; aunque la profesora Kenya apunta que no emplea en sus clases problemas similares, ella sostiene que utilizar únicamente problemas del campo económico puede generar errores conceptuales en el estudiante.

En relación a lo antes dicho, acotamos que un curso estructurado en la EBP permite la flexibilidad de interconectar áreas y conceptos, pero el mayor provecho consiste en la participación del estudiante con los conocimientos previos que este posee (Salazar, 2005); entonces, un punto que es conveniente aclarar es que no todos los problemas que se trabajen tanto dentro como fuera del aula tienen que estar contextualizados en un área específica, lo que sí hay que subrayar es que el problema utilizado como generador del concepto a estudiar tiene que estar, preferiblemente, enmarcado en el campo profesional del estudiante, en este caso estamos hablando de las ciencias económicas, pero está claro que es totalmente válido emplear problemas afines o no a la carrera del estudiante como problemas complementarios, tal como sugiere Kenya que se trabaje el de velocidad instantánea.

Sobre esto último queremos aclarar y enfatizar que en ningún momento pretendemos ni proponemos que únicamente se utilicen problemas enmarcados en un área en particular, sino que el problema que se plantee al inicio para abordar el tema o concepto matemático, sea cual fuere y este lo permita, esté directamente vinculado al campo del futuro profesional, donde se le saque provecho a lo conocido por el estudiante y, en consecuencia, se logre un *"aprendizaje profundo"*, donde el nuevo conocimiento se engrane con el conocimiento previo (Biggs, 2005).

4.2. Análisis de la Sesión 2

En esta sesión que discutiremos y analizaremos a continuación intervienen conceptos del contenido matemático asociados al cálculos diferencial, pero también al análisis matemático en general. Entre estos temas resaltamos la interpretación de la derivada y el estudio de valores extremos y de la monotonía de una función, así como de su dominio. Todos estos temas los discutimos a través de dos problemas, cuyo eje transversal es el contenido económico, recordando lo dicho en líneas anteriores: nuestro instrumento intenta tratar de manera amplia la contextualización económica.

Es de hacer notar que, aunque nuestro trabajo se centra en el cálculo diferencial como objeto matemático de estudio, hacemos uso de conceptos como el dominio de definición de una función o el trabajo con unidades expresadas en fracciones o múltiplos de diez; consideramos que estos son temas asociados al cálculo diferencial, en general, o relacionados con las ciencias económicas, pero también nos interesan la amplitud y diversidad que estos conceptos pueden aportar al desarrollo de nuestro trabajo, en cuanto al CDC del profesor de matemáticas de universidad se refiere.

Con el primer problema intentamos que los participantes opinen sobre el planteamiento de un problema que estudia la dualidad de contenidos como estrategia didáctica; por otra parte, queremos saber la opinión de los profesores sobre la aproximación a un concepto matemático partiendo de un hecho no matemático (o que en principio se supone que no lo es) y su repercusión en el aprendizaje del estudiante.

A lo anterior, le sigue un punto de discusión respecto a la interpretación de la derivada y las unidades en las que viene expresado el problema, ya que en las ciencias económicas es un hecho bastante frecuente con el que el estudiante se enfrenta; en este orden de ideas, buscamos conocer qué piensan los participantes al respecto. Para finalizar, con este problema planteamos una discusión sobre monotonía y valores extremos de una función, en el que nos aproximamos a estos temas de forma no tradicional o distinta a la sugerida en los programas oficiales; estudiando, de esta manera, un concepto del análisis matemático que se puede estudiar a través de la derivada.

En el segundo problema planteamos una discusión sobre la derivada como aproximación a un valor real para ver de qué manera los profesores abordan un hecho como éste en el caso de que así lo hagan, los conflictos que se podrían presentar en el aula de clases y cómo gestionarían una clase ante una situación hipotética como la propuesta en el material.

Como podemos observar, los dos problemas tienen bastante relación no sólo con el tema del análisis matemático, sino que también contemplan una introducción al tema de optimización e interpretación de la derivada. Este planteamiento nos permiten estudiar más a fondo el conocimiento profesional del profesor en estos ámbitos.

4.2.1. Episodio 2.1: Dominio, interpretación de la derivada, monotonía, valores extremos, optimización, contextualización dual, tasas de cambio

Una fábrica de lápices, después de realizar un estudio exhaustivo, concluye que el costo por semana de producir x artículos (x en unidades de mil) de uno de sus productos principales, el lápiz mágico, viene dado por la función $C(x) = 2000 + 0,15x\ um$ y el ingreso obtenido por la venta de x lápices viene dado por $R(x) = 1,5x - 0,0001x^2\ um$. La fábrica en cuestión produce 2 millones de lápices mágicos semanales y se está estudiando la idea de incrementar la producción a 2.650.000.

Pregunta 1: Cuál es el dominio para cada una de las funciones $C(x), R(x)$ y $\boldsymbol{U(x)}$ (donde $\boldsymbol{U(x)}$ representa la **función de beneficio** o **utilidad**), vistas como funciones matemáticas en general y como funciones de la economía. **Discuta sobre esta situación**.

Respuesta: En primer lugar, antes de hablar de los dominios de las funciones, debemos obtener la función de beneficio $\boldsymbol{U(x)}$, la cual se define como sigue:

$$\boldsymbol{U(x)} = R(x) - C(x) = -0,0001x^2 + 1,35x - 2000.$$

Por otra parte, en el **Cuadro 4.7** se muestran los dominios de cada una de las funciones mencionadas en la pregunta.

	$C(x)$	$R(x)$	$U(x)$
Dominio Mat.	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$
Dominio Ec.	$\mathbb{R}_0^+$ ($\mathbb{Q}_0^+$)	$\mathbb{R}_0^+$ ($\mathbb{Q}_0^+$) <15000	$[1695; 11805]$

Cuadro 4.7: Dominio de funciones en dos contextos

Microepisodio 2.1.1: En las dos situaciones se observa que para la misma función el dominio no es el mismo, suponiendo una economía hipotética sencilla (**se trata de introducir e involucrar al estudiante y no de plantear situaciones económicas complejas por muy reales que éstas lo sean**).

No obstante, en una situación económica real, el dominio en cualquiera de las funciones estaría acotado también por la derecha, dependiendo en este caso de la capacidad de producción y venta del fabricante, por ejemplo. Más aún, si

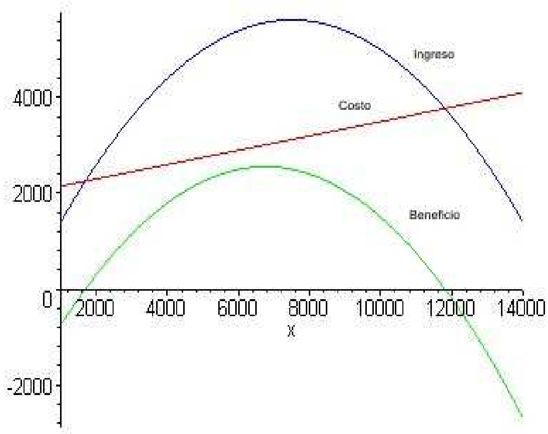


Figura 4.1: Funciones R, C y U

nos fijamos en detalle en el enunciado del problema, los objetos fabricados son lápices y la x está expresada en miles, con lo cual el dominio económico sería $\mathbb{Q}_0^+$ sin excederse en tres decimales (por lo de las unidades de x).

¿Que importancia supone para ustedes implementar este tipo de dualidades (económicas y matemáticas) en estos cursos o por el contrario; supone más bien que el estudiante tiende a confundirse? ¿Por qué?

Pregunta 2: Determine el **beneficio promedio**, $\overline{U}(x)$ *um*, por millares de lápices producidos. Calcule $\overline{U}(2100)$ y dé una interpretación económica de este resultado. Además, si queremos calcular la **tasa de cambio promedio del beneficio** en un intervalo particular $[x_1, x_2]$, este beneficio lo denotamos por $\overline{U}_{(x_1,x_2)}$ y se define como $\overline{U}_{(x_1,x_2)} = \frac{U(x_2)-U(x_1)}{x_2-x_1}$. Calcular la tasa de cambio del beneficio promedio en $[1900, 2200]$.

Respuesta: El beneficio promedio denotado por $\overline{U}(x)$ viene dado por

$$\begin{aligned}\overline{U}(x) &= \frac{U(x)}{x}\\ &= -0,0001x + 1,35 - \frac{2000}{x}\end{aligned}$$

Así, $\overline{U}(2100) \approx 0,1876$ *um*; es decir, el beneficio promedio que resulta de fabricar y vender 2.100.000 lápices es de 0,1876 *um*.

Por otra parte, la tasa de cambio promedio del beneficio de producir y vender entre 1.900.000 y 2.200.000 es $\overline{U}_{(1,900,2,200)} = \frac{U(2,200)-U(1,900)}{2,200-1,900} = \frac{486-204}{300} = 0,94$ *um*.

Microepisodio 2.1.2: Está claro que hablar de la tasa promedio dentro del concepto de derivada, supone una aproximación o mejor dicho, nos permite acercar al estudiante al concepto de la derivada.

En el campo de la didáctica existen opiniones encontradas por los especialistas en el sentido siguiente: partir de la contextualización no matemática (en nuestro caso económica), supone para el estudiante una herramienta que promueve a consolidar el aprendizaje matemático de éstos. ¿Para ustedes supone lo mismo? ¿Por qué? ¿En general, cuál es o sería la actitud del estudiante ante tal situación, (alguna experiencia)?

Pregunta 3: Cuál es el **costo marginal** de producir 2.100.000 unidades. ¿Qué **interpretación económica** le puedes dar a este resultado?

Respuesta: El costo marginal sabemos que es la derivada de la función costo, así, $C'(x) = 0,15$ (una función constante). Pero, ¿qué significado económico tiene este resultado? Esto significa que las **mil unidades adicionales** a las 2.100.000, le costarán al fabricante 0,15 *um* o 15 céntimos de *um*.

Microepisodio 2.1.3: Ahora bien, en esta pregunta se tocan dos puntos de manera simultánea como son: la interpretación económica de la derivada en la función de costos y las unidades (en miles) en las que se trabaja el problema. Recordemos que x está expresada en *miles*, por lo tanto las 2.100.000 unidades se reducen a $x = 2{,}100$. Por otra parte, si $C(x)$ representa la función de costo, la interpretación de la derivada para esta función en un punto x_0 es $(C'(x_0))$ el costo de producir la unidad adicional $x_0 + 1$.

Se entiende que incluir dos puntos como estos en un problema puede conllevarle al estudiante a dificultades de razonamiento del problema e interpretación de los resultados o interés y madurez por el tema, ¿puedes especificar qué dificultades (si crees que las hay) pueden surgir en el estudiante preguntas como estas o crees que en todo acaso le ayudan a entender y madurar los conceptos involucrados? ¿Por qué?

Pregunta 4: En qué intervalos las funciones de costo, ingreso y beneficio $(C(x), R(x), U(x))$, **aumentan** en función de la producción de lápices (o resulta **creciente**) o **disminuye** en función de la producción de lápices (o resulta **decreciente**). En otras palabras, ¿será cierto que mientras mayor sea la producción de lápices, se mantendrá el comportamiento de estas funciones?

Respuesta: En este caso surge la necesidad de estudiar la monotonía de una función a lo largo de su dominio y entran en juego las definiciones de funciones creciente y decreciente en un intervalo.

Así, la función de costo, $C(x)$, es creciente siempre que $C'(x) = 0,15 > 0$ para todo x en su dominio. Por otra parte, la función de ingreso, $R(x)$, es creciente en $(0, 7500)$ y decreciente en $(7500, +\infty)$. Finalmente, la función de beneficio, $U(x)$, es creciente en $(0, 6750)$ y decreciente en $(6750, +\infty)$.

Microepisodio 2.1.4: El concepto de monotonía de una función es fundamental para el análisis tanto matemático como económico, ya que permite estudiar desde el punto de vista *analítico* el comportamiento de una función en determinados "momentos" de su dominio y de esta manera *interpretar* situaciones en ambos contextos. De hecho, es un tema que aparece en los libros y programas de cálculo diferencial en general.

¿Consideran que se pierde profundidad en el contenido matemático con un planteamiento de esta naturaleza: mucho, regular, nada? ¿Por qué?

Microepisodio 2.1.5: *Los objetivos que ustedes persiguen se podrían alcanzar de igual forma con un planteamiento como éste? ¿Por qué?*

Pregunta 5: Para qué cantidad de lápices producidos y vendidos, el beneficio alcanza su nivel **máximo**.

Respuesta: En este punto después de generar una discusión con los estudiantes para llegar a la definición de valores extremos (máximos y mínimos), se llega a la respuesta: en $x_0 = 6750$, el beneficio $U(x)$ **es máximo**.

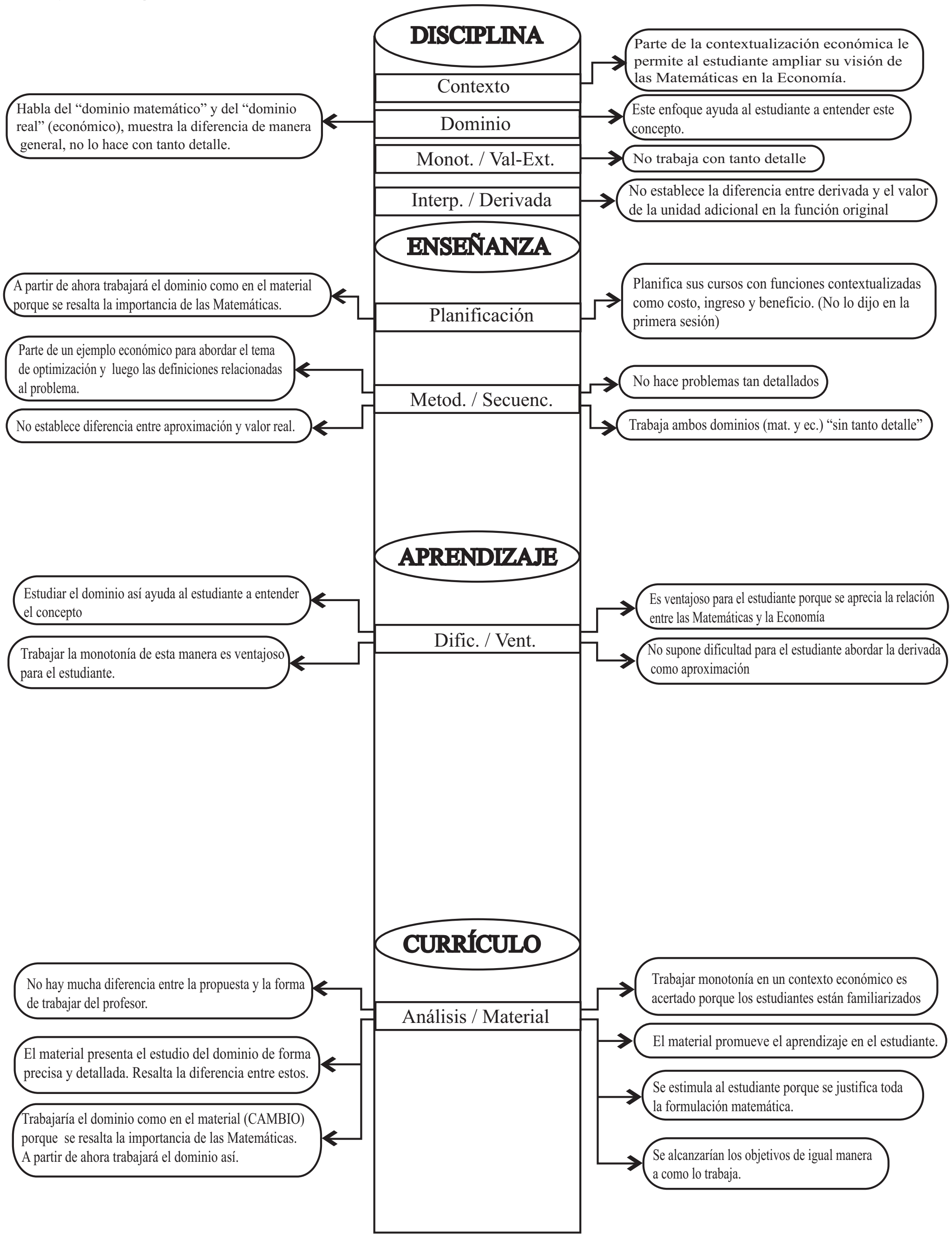
Microepisodio 2.1.6: En diversas áreas del saber relacionadas con el cálculo, estudiar los extremos relativos tiene un significado importante por sus diversas aplicaciones en procesos de optimización; el caso de la ciencias económicas no es la excepción. Se supone que el profesional de la economía, en áreas específicas, constantemente está estudiando la manera de aminorar costos de producción de un determinado producto, por ejemplo, o al menos buscar aproximarse a ese punto ideal donde un determinado proceso sea óptimo. Generalmente los textos de cálculo diferencial, consideran este apartado como un tema de aplicaciones después de haber estudiado y aprendido una teoría que el estudiante debe manejar para abordar y resolver este tipo de problemas.

En una discusión reciente con otros profesores de matemáticas que trabajan en una facultad de economía, dos de ellos manifestaron que una actividad como ésta no es innovadora para sus estudiantes y sus argumentos fueron varios; pero además, surgieron comentarios encontrados en cuanto a aspectos metodológicos. ¿Consideran ustedes que esta es una actividad que conlleva a un mayor esfuerzo en el sentido metodológico (desarrollo de la clase)?

Microepisodio 2.1.7: *Por otra parte, consideran ustedes que es una actividad rutinaria que lejos de promover el aprendizaje, distrae al estudiante y lo conduce a errores (de qué tipos)? ¿Por qué?*

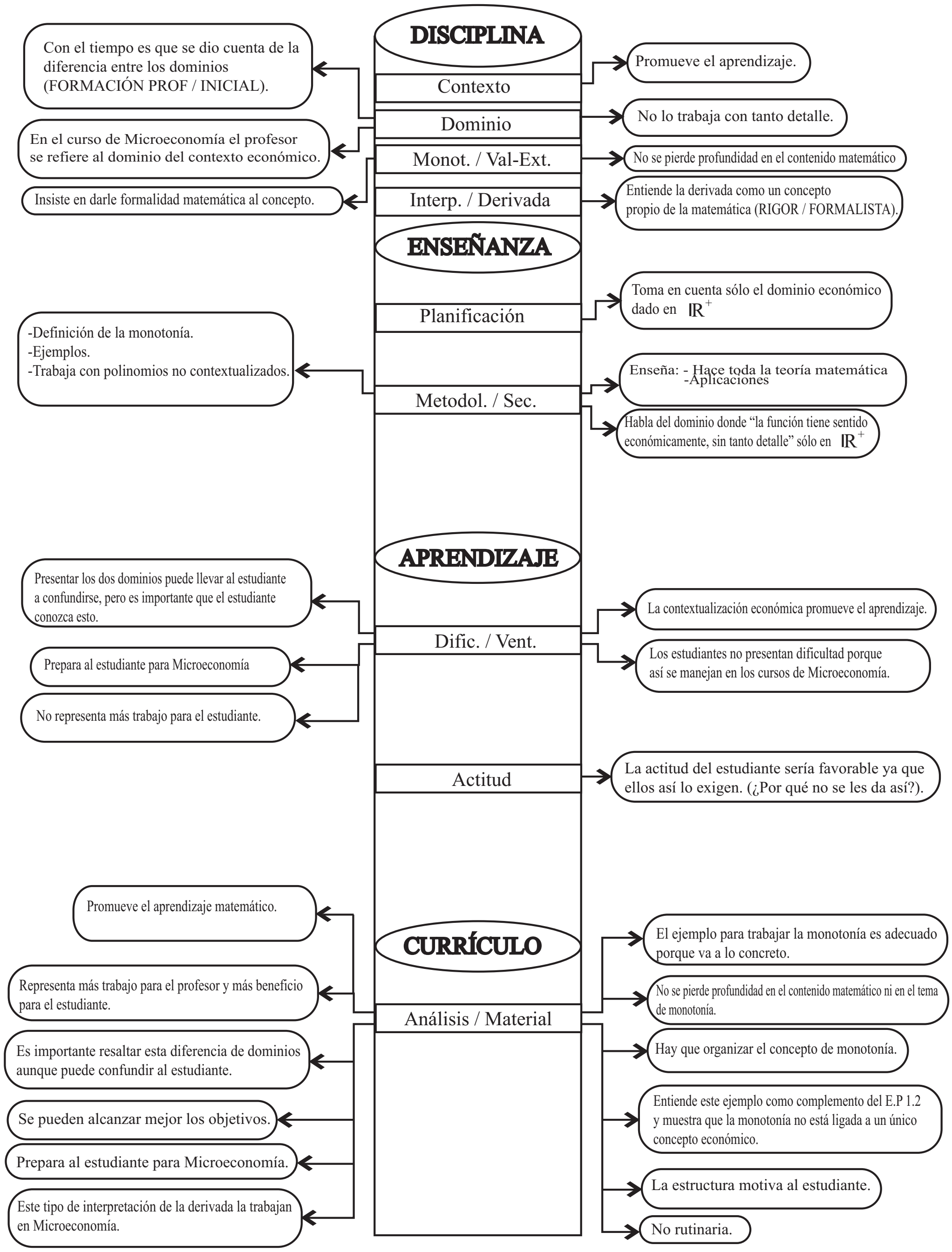
Grupo A

EP 2.1 MANUEL



Cuadro 4.8: Episodio 2.1 - Manuel

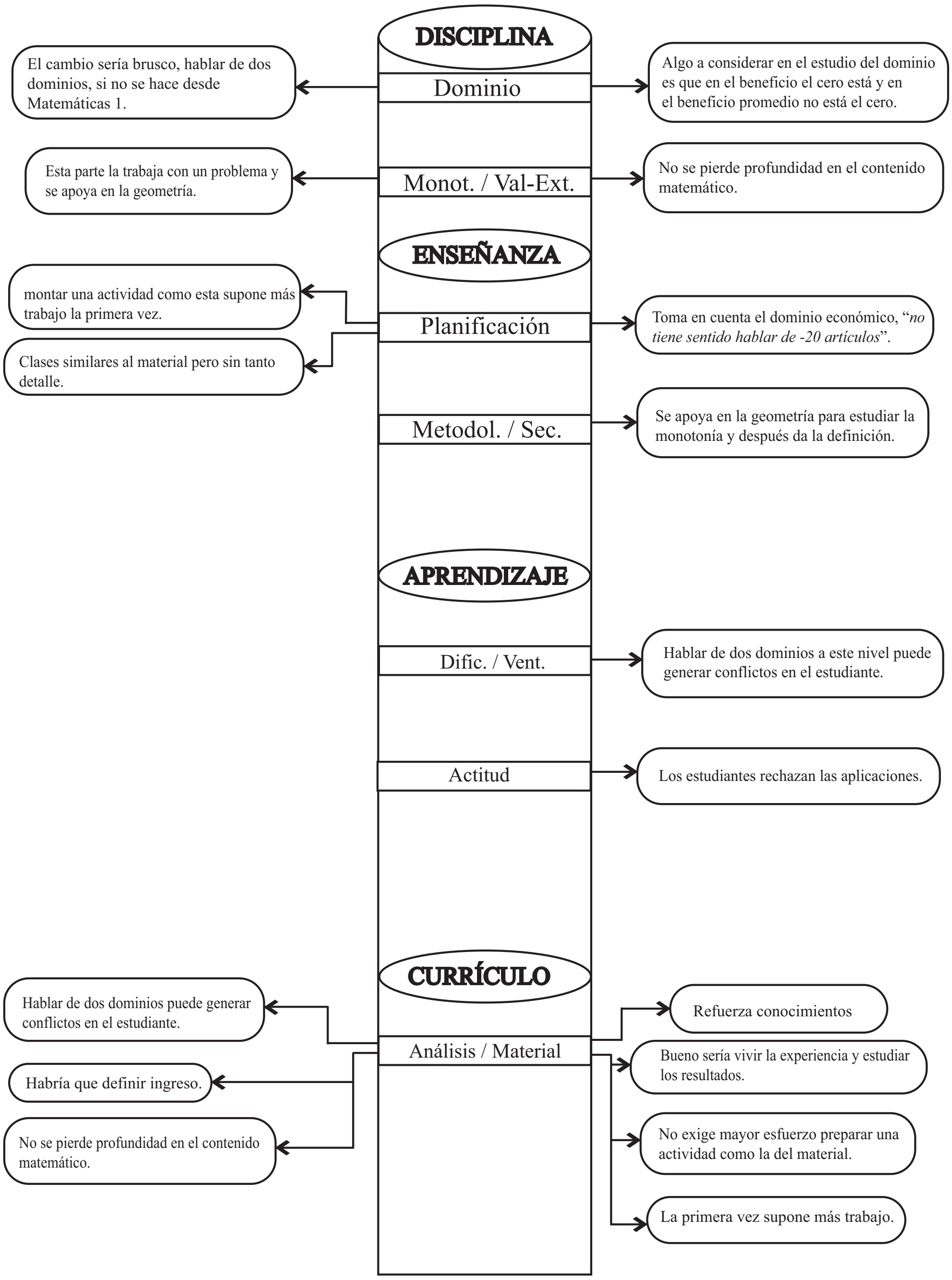
EP 2.1 RAMÓN



Cuadro 4.8: Episodio 2.1 - Ramón

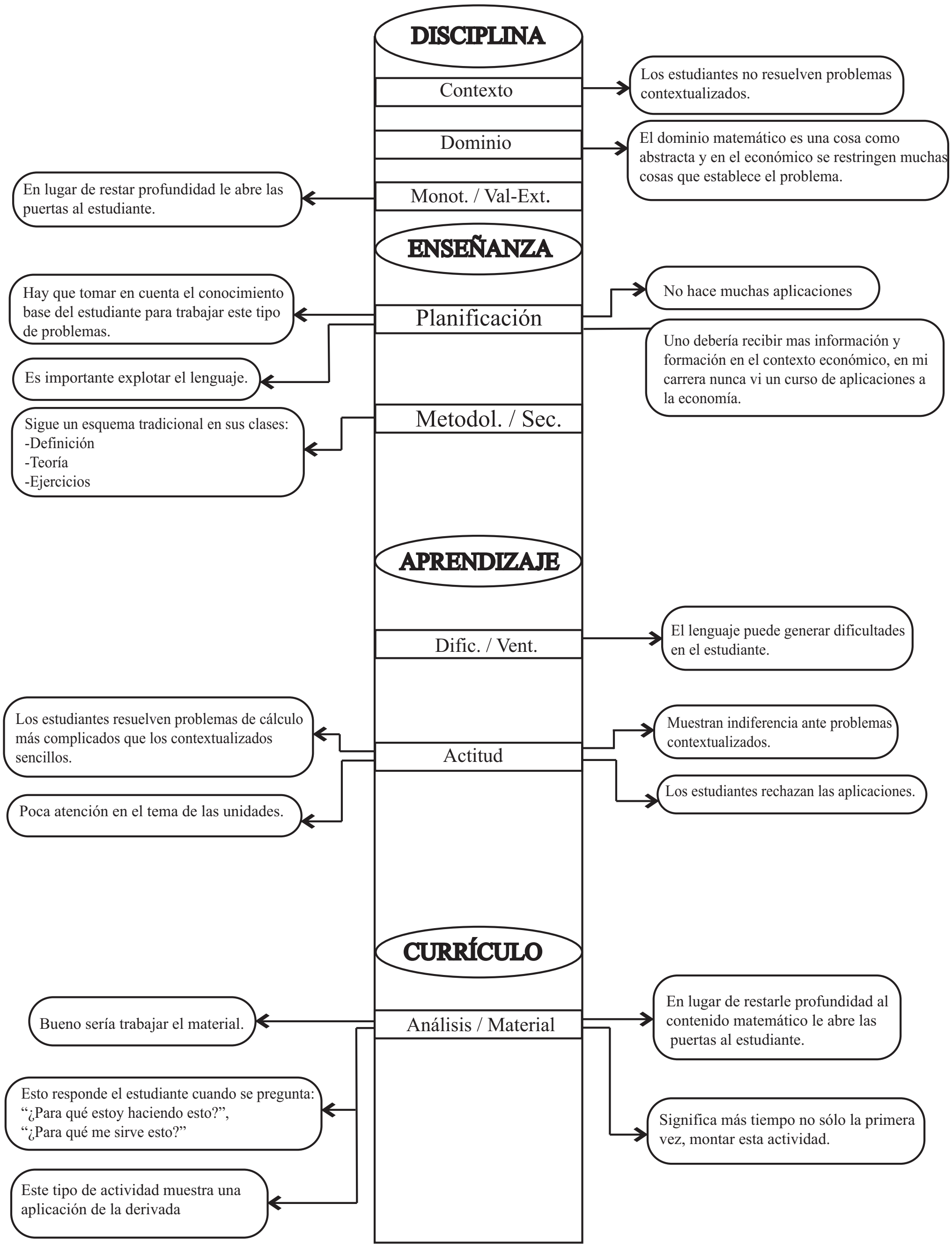
Grupo B

EP 2.1 ALEXIS

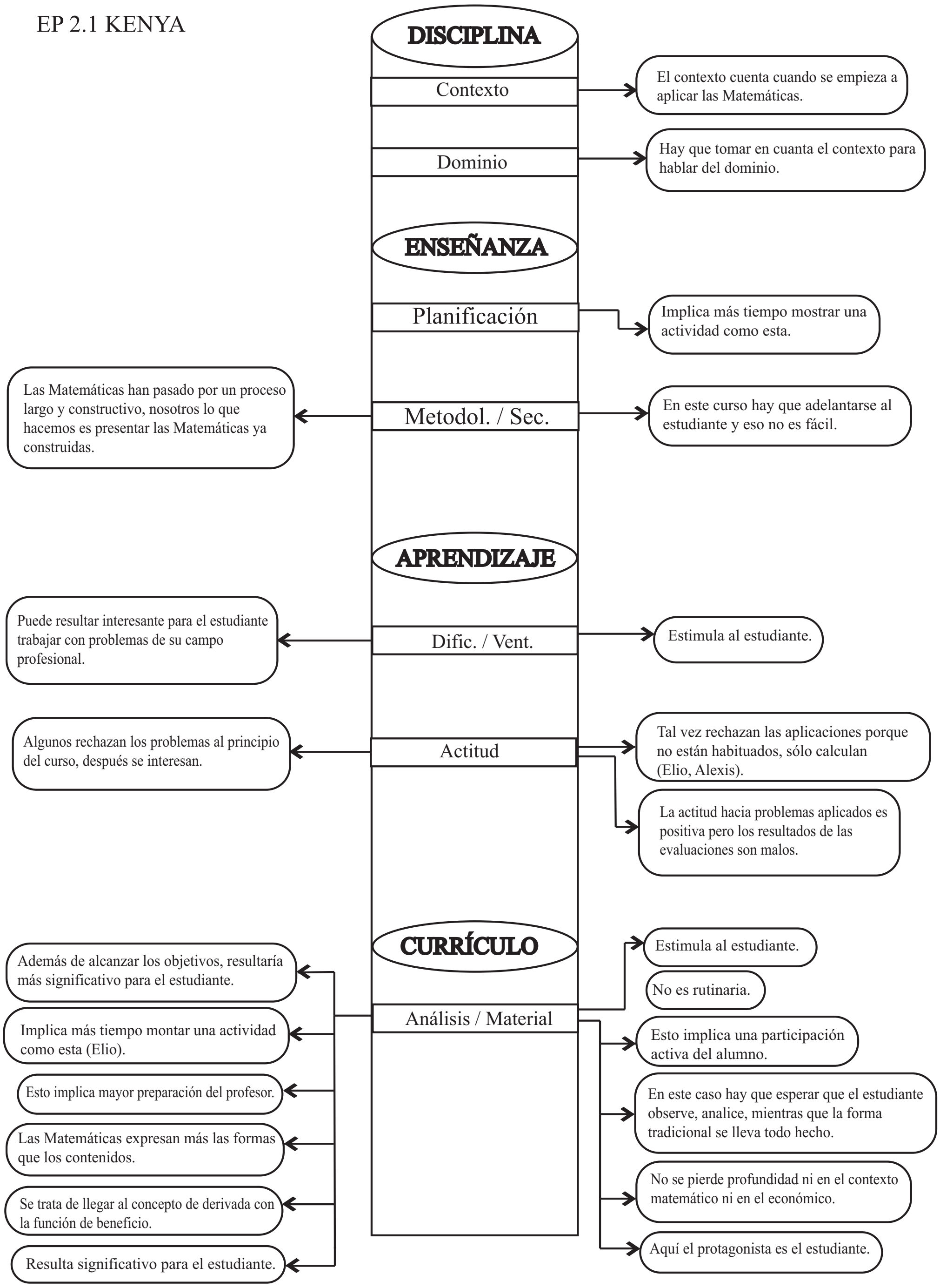


Cuadro 4.9: Episodio 2.1 - Alexis

EP 2.1 ELIO



Cuadro 4.9: Episodio 2.1 - Elio



Cuadro 4.9: Episodio 2.1 - Kenya

Resumen del análisis

Iniciamos nuestro resumen haciendo la siguiente observación: como pudimos observar, sólo hay dos diagramas correspondientes al grupo **A**; esto se debe al abandono involuntario de Pedro en este proyecto de investigación, tal como lo hemos señalado.

Ahora bien, entrando propiamente en materia del análisis, nos permitimos decir que es a partir de esta sesión del seminario que los participantes comienzan a sentirse más relajados y seguros en sus respuestas, al mismo tiempo se muestran menos evaluados, algo que resulta beneficioso para la investigación, puesto que lo que se busca en todo momento es generar un espacio de discusión en el que las opiniones de los participantes sean lo más próximo a la realidad.

En este episodio, EP2-1, abordamos conceptos matemáticos que tienen un alto valor instrumental en las ciencias económicas y se afrontan los mismos desde el campo del futuro profesional como son: el dominio de una función, la interpretación de la derivada y la monotonía y valores extremos, también consideramos la contextualización económica dentro del conocimiento disciplinar. De igual manera estudiamos aspectos propios tanto de la enseñanza como del aprendizaje, piezas estas que forman parte del CDC del profesor de matemáticas de universidad y finalizamos estudiando, también, la cuarta categoría involucrada en este estudio, es decir, el conocimiento sobre el currículo y más concretamente, el análisis que realizan los profesores respecto al material discutido en el seminario.

Pero, hablemos un poco sobre el dominio de una función, aunque es un tema que precisaremos en detalle en la sección **5.2.1**, cuando abordamos este concepto estamos estudiando un conjunto muy especial y bien identificado, desde nuestro punto de vista, esto es *grosso modo*, el conjunto cuyos elementos le dan sentido a la función, o dicho de otra manera, los elementos de este conjunto son los únicos que pueden ser evaluados en la función que se está estudiando.

En los programas oficiales de matemáticas para las carreras de ciencias económicas en la Universidad de Los Andes está contemplado el tema del dominio de una función en una variable real, específicamente en Matemáticas 1, pero no está incluido el hablar de las *restricciones del dominio* ni de las posibles aplicaciones de este concepto u objeto matemático en la economía; los mismos libros de texto que nosotros revisamos no lo tratan en profundidad, en todo caso se refieren de manera superficial a la situación planteada por nosotros.

Dos preguntas que surgen al respecto son las siguientes: ¿tiene sentido trabajar en estos cursos la restricción del dominio?, ¿por qué razón obvian trabajar el dominio de una función que modela una situación económica?

Nosotros hemos incluido el estudio del dominio de una función en nuestro material, dentro del conocimiento disciplinar, porque desde nuestro punto de vista este concepto permite que el estudiante, al abordar un problema contextualizado, pueda entender la amplitud o restricción del problema en estudio; por otra parte, el dominio de una función guarda estrecha relación con el estudio de otros conceptos matemáticos como: puntos críticos o la propia derivada, esto quiere decir, que desde el punto de vista didáctico puede ser utilizado en la EBP, por la interrelación que guarda este concepto con otros.

Conocimiento sobre la Disciplina (Grupo A)
Ahora bien, en el momento que discutimos sobre el dominio de las tres funciones: ingreso, costo y beneficio en los contextos matemático y económico, tanto Manuel como Ramón dejan claro que no trabajan en profundidad el tema del domino en el contexto económico, más aún, Ramón sostiene "*en el curso de microeconomía el profesor se refiere al dominio del contexto económico*" y Manuel, en la discusión sobre el dominio manifiesta que "*este enfoque ayuda al estudiante a entender este concepto*".

El hecho de que estos profesores reconozcan que el estudio del dominio en un contexto dual incide significativamente en el aprendizaje del estudiante, nos conduce a un cuestionamiento similar al de Moreno (2000) en su tesis doctoral, el cual tiene que ver con el "*qué y cómo se enseña, así como sobre los objetivos terminales que se desean alcanzar*". Entonces nosotros nos preguntamos: ¿por qué ambos profesores no trabajan el dominio con las restricciones del caso en el contexto económico? Esta pregunta la retomaremos en el **Apartado 5.2** en el que analizaremos algunos conceptos matemáticos.

Cuando entramos en la discusión sobre monotonía y valores extremos, Manuel mantiene una opinión repetitiva: "*no lo trabajo con tanto detalle*", así se expresó respecto al dominio y en la S-1 cuando se discutió sobre la introducción de la derivada. Recordemos que este profesor en el C-1, cuando escribió su esquema de trabajo, nos mostró una estructura tradicional para la enseñanza de la derivada, lo que nos hace inferir que la expresión "*sin tanto detalle*" obedece, en todo caso, a que trabaja problemas similares como parte de las aplicaciones y no en el sentido presentado en el material.

Por su parte, Ramón en una posición formalista pero contradictoria afirma: "*...no se pierde profundidad en el contenido matemático...*" al trabajar problemas de esta naturaleza, pero insiste en darle formalidad matemática al concepto de monotonía al igual que lo sugirió en la S-1 con la definición de derivada y de igual manera reitera que "*la derivada es un concepto propio de la matemática*". En ningún momento hemos dicho lo contrario, en todo caso nuestra discusión, por estar centrada en la EBP, la presentamos con los problemas contextualizados en la economía.

Conocimiento sobre la Disciplina (Grupo B)
Al discutir e intentar reflexionar sobre el dominio de una función, la visión que tienen estos profesores son las siguientes; por un lado, Elio lo entiende, en el sentido matemático, "*como algo abstracto*" y, en el campo de la economía, como un conjunto con las restricciones propias que exige el problema, pero no

profundiza sobre las necesidades o importancia que pueda tener el estudio del dominio de una función en estas carreras; aunque también reconoce no hacer muchas aplicaciones y la carencia de información y formación profesional en el área económica.

Es claro que al no manejar o tener poco conocimiento en un área o disciplina en particular, esto obliga al docente a no considerar aspectos de esa disciplina por diversas razones, entre otras, para no sentirse comprometido o incomodado con algún estudiante al momento de una discusión.

De esta situación particular con Elio surgen dos puntos a tomar en cuenta; en primer lugar, uno de los conceptos matemáticos considerados como concretos es el dominio, con lo que se deja ver la poca precisión en el manejo de este objeto matemático. En segundo lugar, cuando hablamos del dominio, este profesor sostiene que *"no hace muchas aplicaciones"*; esta situación nos lleva a inferir que la "cantidad de aplicaciones" que pueda trabajar este profesor en el aula obedece a la poca formación profesional en el campo económico que posee.

Alexis, por su parte, es enfático al decir que *"...el cambio sería brusco, hablar de dos dominios, si no se hace desde Matemática 1..."*, que es la asignatura en la que se trabaja el tema del dominio de una función. En este comentario queda explícito que no se trabaja, al menos él, el dominio en un contexto dual en el primer curso de la carrera; esta situación nos obliga a preguntarnos: ¿por qué este o algún otro profesor no trabaja el dominio en problemas contextualizados en la economía? Una respuesta inmediata la vinculamos a los programas oficiales y libros de texto. Lo otra es, qué conocimiento tiene el profesor, no sólo respecto a este objeto matemático asociado a las ciencias económicas, sino también las necesidades del futuro profesional en esta materia. Más aún, nos preguntamos cuál es el compromiso de la institución con el futuro profesional al no considerar aspectos que inciden en un aprendizaje de las matemáticas como instrumento de análisis y resolución de problemas en el campo económico.

A modo de conclusión inferimos que el profesor, en general, no trabaja objetos matemáticos contextualizados en las ciencias económicas por tres razones:

1. No posee una formación básica en materia económica.
2. Los programas oficiales no incluyen o no sugieren trabajar problemas de esta naturaleza.
3. Los libros de texto usados por los profesores no contienen problemas que incluyan estudiar el dominio de una función en un contexto dual.

Conocimiento sobre la Enseñanza (Grupo A)
En relación a la enseñanza de la monotonía y los valores extremos, las opiniones de los participantes son dispersas entre sí, mientras Manuel habla de planificación de sus cursos de derivada y, en particular, de este tema con funciones contextualizadas en el campo económico, una cuestión que pasó por alto en la primera sesión del seminario y que no se corresponde con las respuestas de C-1; Ramón, para sus clases, planifica este tema como se observa en el diagrama correspondiente EP2-1, esto es, *definición de monotonía + ejemplos + aplicaciones*, lo que viene a destacar su posición formalista respecto a las matemáticas y su enseñanza, lo cual refleja que este profesor sigue una enseñanza tradicional como lo reflejado hasta ahora.

Conocimiento sobre la Enseñanza (Grupo B)
Tomamos los tres puntos señalados al final del espacio reservado al conocimiento disciplinar de este episodio para analizar las reflexiones y opiniones, que en materia de enseñanza, aportan estos profesores y que asociamos a lo que supone planificar y seguir una enseñanza como la que sugerimos en el material.

La posición de Kenya es que *"implica más tiempo montar una actividad como esta"*, ella argumenta que con un curso como este *"hay que adelantarse al estudiante y eso no es fácil"*. Esta justificación obedece a que la profesora conoce, y así lo ha dejado saber, que lo que se plantea en el material consiste en seguir una enseñanza constructivista, razón por la cual el docente está obligado a conocer al estudiante y, más aún, tomarle la delantera ante cualquier eventualidad que pueda surgir en el aula. De sus comentarios también podemos apreciar que la profesora no sigue una enseñanza en la línea del material.

Alexis, en cambio, comienza afirmando que esta actividad no le supone más tiempo, debido a que la estructura de sus clases *"son similares a la del material"*; sin embargo, en claro debate con Kenya, ésta lo hace cambiar de opinión ligeramente y termina aceptando éste que *"planificar una actividad como esta supone más trabajo cuando se hace por primera vez"*.

Aquí vuelve a ponerse en evidencia que una actividad como el seminario de discusión sirvió para debatir y reflexionar sobre un tema en particular, de modo que se pudiera, a partir de las opiniones o posiciones de un participante, hacer cambiar de opinión a otro. Así, podemos dar testimonio que el seminario fue y es un espacio ideal para el intercambio de ideas, pero también es un escenario para la formación profesional del docente.

Por su parte Elio, manteniéndose al margen de la discusión, pero siguiendo a Kenya, manifiesta que planificar e implementar una actividad como la del material exige *"tomar en cuenta el conocimiento base del estudiante"*. Ya en el **Capítulo 2** mostramos que una de las características propias del CDC aborda el conocimiento que tiene el profesor sobre sus estudiantes de cara a la enseñanza y que desatacan Reyes y Gárritz (2006) y Salazar (2005).

Los comentarios de los tres profesores muestran que, en primer lugar, ellos no siguen una enseñanza de las matemáticas basada en problemas, lo cual no nos resulta nada novedoso, ya que así lo han manifestado desde la primera sesión del seminario, S-1, y en las respuestas de C-1; sin embargo, también podemos resaltar el conocimiento que muestran en el tema de la planificación Kenya y Elio, al considerar como pieza clave al estudiante en lo que respecta a esta materia.

Conocimiento sobre el Aprendizaje (Grupo A)
Al analizar los datos concernientes a esta categoría nos encontramos con unas reflexiones, sobre el contenido del material, por parte de estos dos profesores que terminan siendo algo contradictorias. No es secreto que el tener conocimiento profundo sobre el estudiante le permite al profesor llevar a cabo un proceso de enseñanza-aprendizaje de mejor calidad. Ambos profesores, como producto de la discusión, afirman que trabajar tanto la estructura como el contenido del material supone algunas ventajas para el estudiante; por ejemplo, Manuel apunta que *"estudiar el dominio así, ayuda al estudiante a entender el concepto"*, más adelante y en la misma dirección añade que *"trabajar la monotonía de esta manera es ventajoso para el estudiante..., porque se aprecia la relación entre las matemáticas y la economía"*.

Por su parte, Ramón sigue en este mismo orden de ideas y se pronuncia de lo general a lo específico, mostrando conocimiento intenso sobre el estudiante; comienza diciendo: *"la contextualización económica promueve el aprendizaje"*, para luego perfilarse hacia un punto más específico relacionado con la carrera, *"prepara al estudiante para microeconomía"* y el dominio se trabaja *"en los cursos de microeconomía"*, aunque *"presentar los dos dominios puede llevar al estudiante a conflictos, pero es importante que el estudiante conozca esto"*.

Sobre el último comentario de Ramón, inferimos que se basa en que los programas oficiales no consideran el estudio del dominio en el contexto económico, por lo que trabajar este punto en Matemática 2 habiéndolo trabajado en un contexto exclusivamente matemático puede llevar al estudiante a un conflicto o error conceptual.

Ahora bien, volvemos a cuestionar la posición de estos profesores, ya que si ellos muestran una percepción de los estudiantes respecto a un trabajo hipotético con el material, ¿por qué no trabajan objetos matemáticos como el dominio, la monotonía o los valores extremos con un perfil similar al discutido? Tal vez la falta de formación o compromiso con estos cursos por parte del profesor o la posición de la institución de no promover programas de formación y actualización profesional ante una realidad y necesidad que emerge día a día frente al futuro profesional, razón por la cual destacamos el valor formativo de la actividad realizada por nosotros en el marco de la formación del docente.

Conocimiento sobre el Aprendizaje (Grupo B)
En materia del conocimiento sobre el aprendizaje, nos centraremos, en este caso, en la actitud del estudiante frente a problemas contextualizados. Elio y Alexis coinciden en que los estudiantes rechazan *problemas de aplicaciones*, aunque no justifican el porqué de este rechazo. Por su parte, Kenya es más cuidadosa y advierte que *"algunos rechazan los problemas al principio del curso, después se interesan"*, su argumento sobre la actitud del estudiante en relación a este punto es que *"tal vez rechazan las aplicaciones porque no están habituados, sólo calculan"*.

Cuando lo profesores hacen mención a los problemas que rechazan los estudiantes, estos se refieren a *problemas de aplicaciones*, es decir, a problemas que tienen una ubicación específica en cuanto a la etapa en la que se trabaja, usualmente al final del tema de derivada, por ejemplo. Los programas oficiales y los libros de texto reservan para el final del tema de derivada el apartado de aplicaciones, si a esto le sumamos que los profesores siguen una enseñanza tradicional, el conocimiento disciplinar es escaso (por lo visto hasta ahora) y el factor tiempo juega siempre en contra, se entiende porqué el profesor de matemáticas trabaja poco lo problemas contextualizados o de *aplicaciones* y en consecuencia cobra valor lo expresado por Kenya, cuando se refiere a que los estudiantes *"... no están habituados, sólo calculan"*.

Conocimiento sobre el Currículo (Grupo A)
Al estudiar esta categoría nos ubicamos, claro está, en las opiniones e interpretaciones que de manera directa hacen estos profesores sobre el material, visto este como propuesta didáctica para la enseñanza. Los dos objetos matemáticos que destacamos en este episodio son el dominio y la monotonía, ya en el apartado de este grupo correspondiente al conocimiento sobre el aprendizaje se discutió y analizó la posición de estos profesores en relación a lo que supondría para el estudiante la implementación de este material. Es por ello que analizaremos otros aspectos relacionados con el material pero que no lo estén con el estudiante.

Manuel, refiriéndose al dominio en los dos contextos, opina que *"el material presenta el estudio del dominio de forma precisa y detallada, se resalta la diferencia entre estos"*; suponemos que esta actividad causa tan buena impresión en este profesor que más adelante sostiene: *"trabajaría el dominio como en el material porque se resalta la importancia de las matemáticas"*. Esto es un claro reflejo de un posible cambio en su enseñanza, en su planificación, con lo cual seguimos en la idea de valorar más que el material, el seminario como espacio de reflexión y, por qué no, de formación profesional. Pero retomando las dos opiniones de Manuel, deducimos que no se ha topado con esta situación en los libros de texto que él consulta y que nos permitimos catalogar como innovadora para nuestro participante.

Por otra parte, al opinar sobre el material, Manuel afirma que *"se alcanzarían los objetivos de igual manera a como yo lo trabajo"* ya que *"no hay mucha diferencia entre la propuesta y la forma de trabajar"* del profesor. Hacemos una breve pausa para retomar la idea de considerar como innovador el tratamiento del dominio en una contextualización dual, puesto que aun cuando reconoce que su forma de trabajar es similar a la del material.

Ramón, al referirse a los objetivos del curso, sostiene que *"se pueden alcanzar mejor los objetivos"* al trabajar con el material; destaca además que *"el ejemplo para trabajar la monotonía es adecuado porque va a lo concreto"*, también resalta que *"no se pierde profundidad ni en el contenido matemático ni en el contenido económico"*. Este profesor nos muestra que para sus comentarios, además de tener presente a los estudiantes, toma en cuenta las matemáticas; recordemos lo formalista de es este profesor en cuanto a las matemáticas como disciplina y a su enseñanza se refiere.

Conocimiento sobre el Currículo (Grupo B)
Un punto que sigue aflorando cuando el profesor analiza, opina y reflexiona sobre el material discutido en el seminario, de cara a una posible puesta en marcha del mismo, está directamente relacionado con el estudiante, su pensamiento y conocimiento sobre la disciplina o asignatura. Dado que es un escenario hipotético, Elio y Alexis consideran que *"...bueno sería vivir la experiencia con el material y estudiar los resultados"* ya que en materia de aprendizaje, para el primero, le abre las puertas al estudiante hacia el contenido matemático, mientras que para Alexis *"refuerza conocimientos"* en el estudiante.

Sin embargo, Alexis no apoya del todo el contenido del material y considera que *"hablar de dos dominios puede generar conflictos en el estudiante"*. Esto porque el tema del dominio se estudia en Matemática 1 y la derivada en Matemática 2; no obstante, ya explicamos en su momento la idea de incluir una discusión sobre el dominio de una función obedece, fundamentalmente, a la idea de darle diversidad matemática al instrumento y que, aunque el objeto matemático principal es la derivada, nosotros buscamos ampliar el instrumento a otros temas del análisis matemático.

Por otro lado Kenya, atendiendo a su condición de especialista y conocedora del área pedagógica, fundamenta sus opiniones en dos direcciones, una relacionada con el docente en sí, es decir, que la puesta en práctica del material supone *"...mayor preparación del profesor..."* que *"...implica más tiempo montar una actividad como esta..."*, en otras palabras, aquí salta a la vista el tema de la formación profesional del docente. Las otras apuntan hacia el estudiante como es de esperar, pues esta profesora al entender el material como una actividad constructivista, considera que *"...el protagonista es el estudiante..."*, donde al trabajar de esta manera *"hay que esperar que el estudiante observe, analice..."*, más aún, *"implica una participación activa del alumno"*.

En resumen, es obvio que esta profesora capta y entiende el enfoque que pretendemos con el material como propuesta didáctica, su estructura y contenido. También, como ella reconoce que su enseñanza es del tipo tradicional, muestra la diferencia entre la enseñanza que sigue y la de la propuesta, afirmando que con esta última *"...además de alcanzar los objetivos del curso, resultaría más significativo para el estudiante"*.

4.2.2. Episodio 2.2: Incrementos, tasas, optimización, interpretación de la derivada

El costo de producción de x unidades diarias de un artículo de consumo masivo es $C(x) = \frac{1}{8}x^2 + 3x + 98$ dólares y el precio para la venta por unidad es $p(x) = 25 - \frac{1}{3}x$ dólares

Pregunta 1: A partir de las funciones de costo, $C(x)$, y de precio, $p(x)$, calcular:

a: A partir de la función de costo marginal, calcular el costo de producir la unidad 10. ¿Cuál es el costo real de producir la unidad 10?

Respuesta: Para la función de costo, $C(x)$, se tiene que el costo marginal es $C'(x) = \frac{1}{4}x + 3$ dólares, y el costo *aproximado* de producir la unidad 10 es $C'(9) = \frac{1}{4}(9) + 3 = \mathbf{5,25}$ dólares. El costo real de la décima unidad es $C(10) - C(9) = 140,5 - 135,125 = \mathbf{5,375}$ dólares.

b: Calcule la **función de ingreso marginal**, $\boldsymbol{R'(x)}$, para la situación planteada. Luego, calcule el ingreso que resulta de la venta de la décima unidad. ¿Cuál es el ingreso real derivado de la venta de la unidad 10?

Respuesta: En este caso, la **función de ingreso**, $\boldsymbol{R(x)}$, se obtiene a partir del precio, $p(x)$, suministrado. Esto es,

$$\begin{aligned} R(x) &= x \cdot p(x) \\ &= 25x - \tfrac{1}{3}x^2 \end{aligned}$$

Así, el ingreso marginal es $R'(x) = 25 - \frac{2}{3}x$. El ingreso *aproximado* que se obtiene por la venta de la décima unidad es $R'(9) = 25 - \frac{2}{3}(9) = \mathbf{19}$ dólares. El ingreso real generado por la venta de la décima unidad es $R(10) - R(9) = 216,66 - 198 = \mathbf{18,66}$ dólares.

c: Halle el **beneficio** $\boldsymbol{U(x)}$ asociado con la producción de x unidades, calcule el beneficio marginal y determine con éste el beneficio del décimo artículo vendido. ¿Cuál es el beneficio real derivado de la venta del décimo artículo?

Respuesta: La **función de beneficio**, $\boldsymbol{U(x) = R(x) - C(x)}$, en este caso es:

$$\begin{aligned} U(x) &= 25x - \tfrac{1}{3}x^2 - (\tfrac{1}{8}x^2 + 3x + 98) \\ &= -\tfrac{11}{24}x^2 + 22x - 98 \end{aligned}$$

En consecuencia, el beneficio marginal es $U'(x) = -\frac{11}{12}x + 22$ y el beneficio *aproximado* generado por la venta de la unidad 10 es $U'(9) = -\frac{11}{12}(9) + 22 = \mathbf{13,75}$ dólares. Pero, el beneficio real generado por la venta de la décima unidad es $U(10) - U(9) = 76,16 - 62,875 = \mathbf{13,285}$ dólares.

Microepisodio 2.2.1: En esta única pregunta subdividida en tres partes, se contempla un aspecto relacionado con la derivada como lo es, la interpretación de la derivada como una "buena" aproximación a la función dada en un entorno; de allí el remarcado de los resultados obtenidos.

En este caso, se puede apreciar en las tres respuestas que los valores real y aproximado para cada una de las situaciones resultan cercanos en los dos primeros casos y no mucho en el tercero.

De acuerdo a tu experiencia, ¿qué conflictos de aprendizaje podrían surgir en el estudiante, el hecho de que una herramienta matemática como la derivada, que él espera sea exacta, difiera en algunos casos en varias décimas? ¿Cómo abordarían ustedes la solución a este conflicto? El $\boldsymbol{x_0 + 1}$ *es mucho. Incrementos (discreto) Vs. derivada (continuo).*

Microepisodio 2.2.2: ¿Cómo gestionan o gestionarían la clase en caso de conflictos?

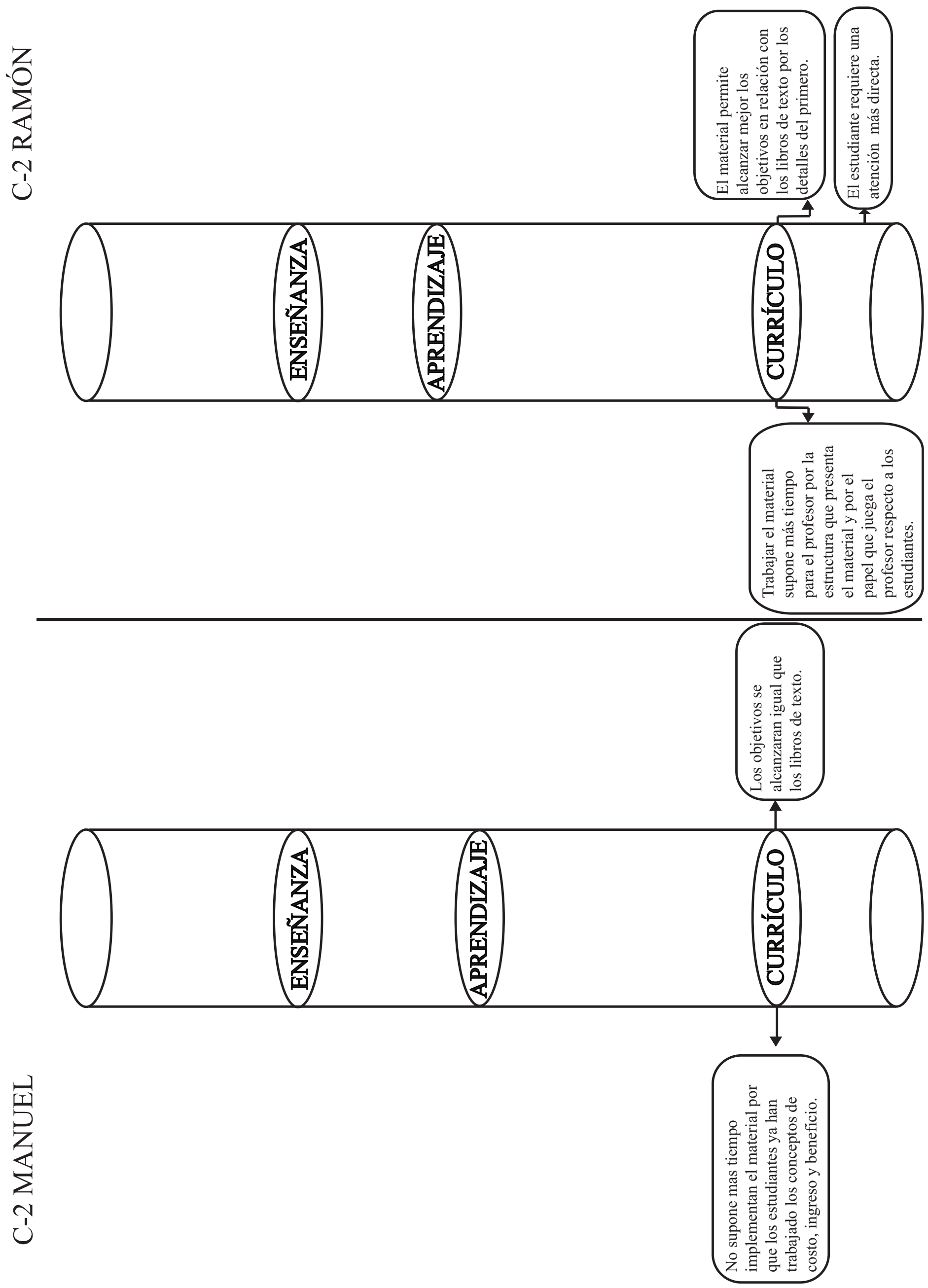
Microepisodio 2.2.3: Por otro lado, se incluye la necesidad de obtener una función que represente el ingreso, $\boldsymbol{R(x)}$ (pero en ningún momento se les dice que lo pueden hacer a partir del *precio*, de modo que ellos (los estudiantes) discurran sobre esta situación) para obtener el ingreso marginal a partir de ésta.

Ante esta situación, ¿cómo gestionarían ustedes una actividad de discusión y reflexión con los estudiantes, de manera que se logren los objetivos deseados, éstos son: (a) obtener unos resultados a partir de unos datos que no son explícitos, y (b) llegar al concepto de un término económico (ingreso marginal) a partir de otro (precio) mediante una situación económica-matemática?

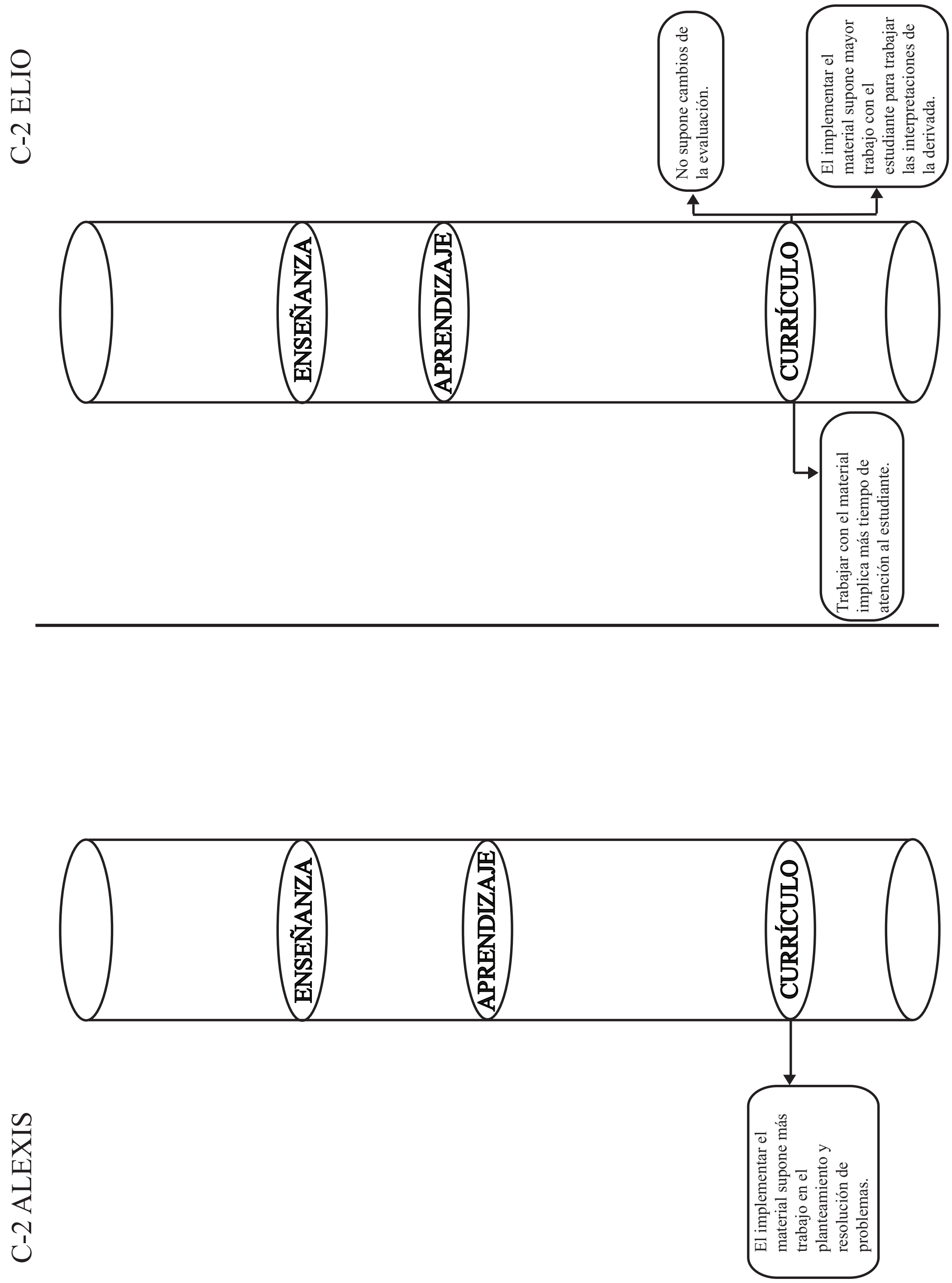
Resumen del análisis Lo aportado en el presente episodio EP2-2 por los participantes es poco lo que contribuye a la investigación, razón por la cual decidimos no analizarla.

4.2.3. Cuestionario 2

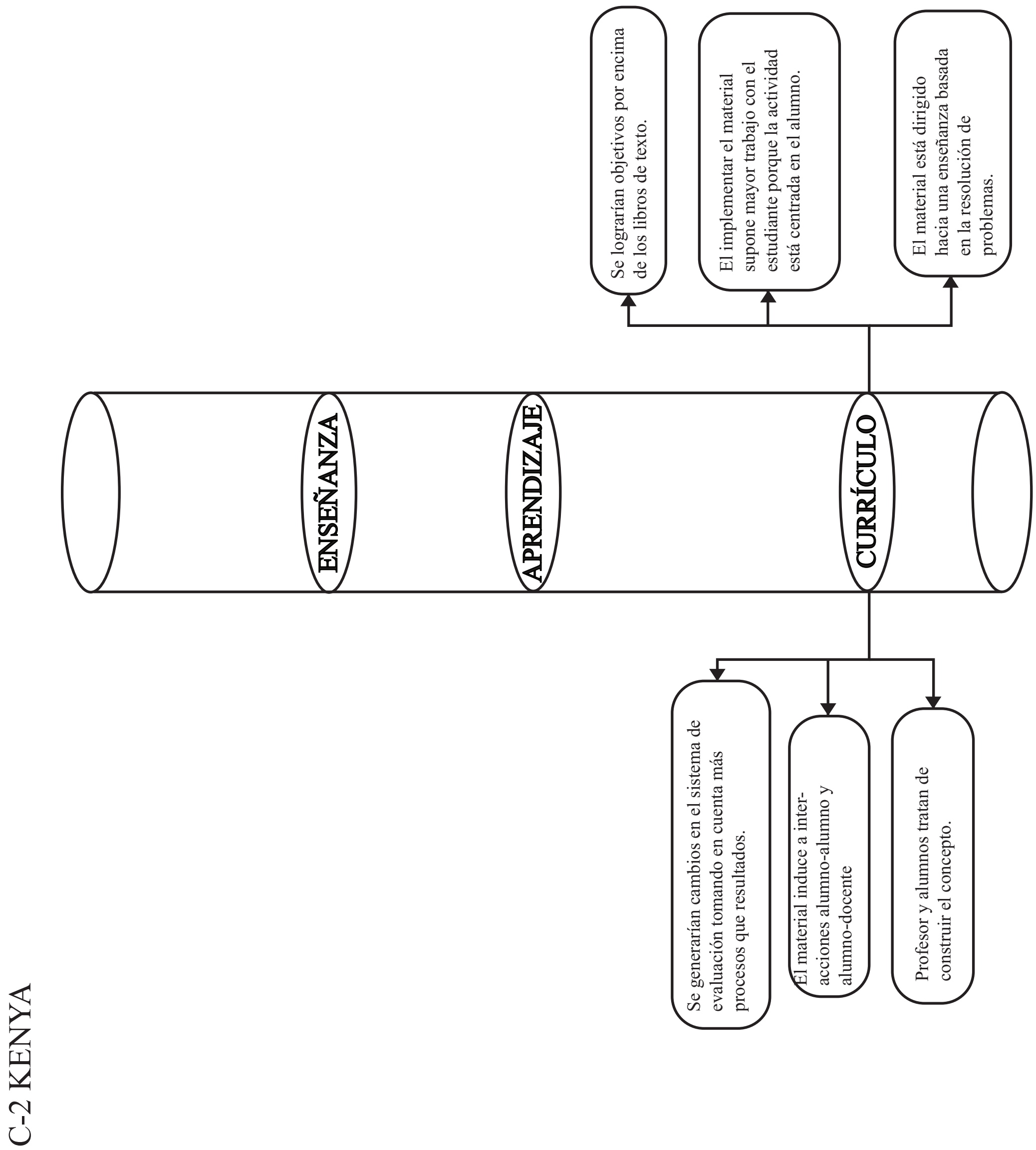
En este cuestionario, C-2, instrumento complementario a la segunda sesión del seminario, analizamos las opiniones de los profesores en relación a lo que supone implementar o desarrollar una enseñanza basada en la estructura y el contenido que presentamos en el material discutido en el seminario.



Cuadro 4.10: Cuestionario 2 - Manuel y Ramón



Cuadro 4.10: Cuestionario 2 - Alexis y Elio



Cuadro 4.10: Cuestionario 2 - Kenya

C-2 (Grupo A)

Las respuestas que obtuvimos de este grupo apuntan en dos direcciones, por su parte Manuel, no observa ventajas o diferencias favorables en el material en relación a los libros de texto, ya lo dijo durante la S-2, que *"los objetivos se alcanzan igual que con los libros de texto"*, recordemos además que en el seminario este profesor afirmó que *"no hay mucha diferencia entre el material y la forma de trabajar"*. La otra dirección a la que apuntan las respuestas tiene que ver con el *factor tiempo*, a este mismo profesor *"no le supone más tiempo implementar el material"* o una actividad similar en el aula, su justificación se fundamenta en el trabajo que han realizado los estudiantes en otros cursos vinculados al área de economía; esto nos dice que el tiempo invertido en la clase depende, en esencia, del conocimiento previo del estudiante.

Ahora bien, a modo de comentario, un punto a destacar en todo esto es que la inversión de tiempo no debe estar únicamente asociada al estudiante, puesto que la planificación, por ejemplo, también exige tiempo para reflexionar y tomar decisiones adecuadas a los objetivos que se persiguen.

Ramón, en cambio, cuando habla del tiempo que implica un trabajo con el material discutido, en clara referencia a la estructura de este último, afirma que supone más tiempo, más aún, implica una mayor inversión de tiempo *"por el papel que juega el profesor respecto a los estudiantes"*. Este profesor se apoya en la estructura y los detalles del contenido para sus reflexiones y deja ver, de manera implícita, su forma y esquema de enseñanza son distintos a lo discutido en nuestra propuesta. Un ejemplo de ello está en una de sus respuestas, *"el estudiante requiere una atención más directa"* que posiblemente no la tenga en la actualidad. También considera que *"el material permita alcanzar mejor los objetivos en relación con, los libros de texto por los detalles del primero"*. En el C-1 también se refirió a los "detalles" de la propuesta frente a los libros de texto.

Este conjunto de ideas aportadas por Ramón en el C-2 nos permite ir creando un perfil sobre su trabajo en el aula; de éste resaltamos, hasta ahora, lo siguiente: sigue una enseñanza tradicional, fundamentada en el programa oficial y los libros de texto, no termina de identificar el tipo de enseñanza-aprendizaje que, desde el punto de vista de la didáctica, sugiere nuestra propuesta en discusión, pero sí observa que el estudiante es el centro de esta actividad.

El caso de Manuel nos resulta más complejo, ya que con las respuestas de C-1 se perfila hacia una enseñanza de corte tradicional enmarcada en los programas oficiales y libros de texto, pero entre S-2 y C-2 nos afirma que su enseñanza es muy próxima a la discutida en el material, en este orden de ideas, no es posible emitir o aproximarnos a una conclusión parcial de este profesor, más allá de lo inconsistente de su discurso entre la primera y segunda sesión, incluyendo los cuestionarios correspondientes.

C-2 (Grupo B)
Los diagramas correspondientes a este cuestionario muestran el compromiso de participación por parte de los profesores en este proyecto, muy similar, en proporción a C-1. Aunque este no es el tema de nuestra investigación nos aporta datos sobre el perfil de los participantes. Ahora bien, posicionándonos sobre el tema que nos ocupa, estas son las respuestas en referencia al material.

Comenzaremos nuestro análisis con lo aportado por Alexis; durante la S-2 consideró que no le suponía más trabajo planificar una actividad como la del material, puesto que realiza *"clases similares al material pero sin tanto detalle"*, es decir, afirma fundamentar su respuesta en el hecho de que trabaja sus clases con aplicaciones a la economía. Cuando atiende el cuestionario C-2 sostiene que *"implementar el material supone más trabajo en el planteamiento y resolución de problemas"*, en otras palabras se apoya en el estudiante. Entendemos que el profesor tiene conocimiento sobre las dificultades específicas del estudiante, en este caso, sobre *planteamiento y resolución de problema*.

Por su parte, Elio, sostiene también que *"trabajar el material en el aula implica más tiempo de atención al estudiante, ...para trabajar la interpretación de la derivada"*; esta dificultad, a la que hace mención Elio, ya la sacó a colación en la S-1. De las respuestas de Elio y Alexis concluimos dos cosas, una ya mencionada, como lo es el conocimiento que ambos tienen sobre las dificultades del estudiante; la otra tiene que ver con el hecho de que la implementación del material como propuesta de enseñanza, para ellos significa más trabajo y mayor compromiso al desarrollo de una clase con el esquema de nuestra propuesta.

Por último, reservamos este espacio en el que incluimos el análisis de los datos aportados por Kenya y que a la hora de compararlos con sus opiniones durante S-2, guardan consistencia con su discurso. Desde el punto de vista de la enseñanza, ella afirma que *"el material está dirigido hacia una enseñanza basada en la resolución de problemas"* en el que se *"induce a interacciones alumno-alumno y alumno-docente"*; de esta manera la profesora deja en evidencia que conoce la metodología que se persigue al implementar el material. Por otra parte y derivado de lo anterior, en lo que concierne a la puesta en escena, *"el material supone mayor trabajo con el estudiante porque la actividad está centrada en el alumno"*; una característica de la EBP.

Otra característica de la EBP es el alcance que esta promueve en el aprendizaje; Kenya también identifica en el material este elemento al manifestar que en caso de llevar esta propuesta al aula de clase *"se lograrían objetivos por encima de los libros de texto"* con los que esta misma profesora trabaja.

4.3. Análisis de la Sesión 3

El material que vamos a discutir y analizar en la presente sesión está centrado, principalmente, en la *regla de la cadena*, así como la interpretación de la misma en problemas del contexto económico y las notaciones usadas en los libros de texto para este tema. Para esta parte del trabajo elegimos tres problemas, siendo el contenido económico el eje transversal, tal como lo hicimos en el episodio anterior. Los dos primeros problemas se presentan de una manera muy peculiar, ya que se induce o promueve la necesidad de una nueva regla de derivación, no conocida hasta ahora por el estudiante; es por ello que se impulsa una discusión para llegar a la regla en cuestión y de esta manera poder resolver los problemas, una característica de la EBP. Se vuelve a trabajar con el dominio de una función y la contextualización como estrategia de enseñanza.

En el primer problema se pretende estudiar la introducción de la regla de la cadena de una manera *no tradicional*, haciendo uso de las *tasas relacionales*, las cuales juegan un papel relevante en el campo de las ciencias económicas. En este problema, la derivada de la función interna aparece en el mismo enunciado del problema, algo atípico en un problema introductorio. Por otra parte se retoma el concepto de dominio y se estudia en un contexto dual, algo similar a lo ocurrido en el problema del **episodio 4.2.2**. Adicional a los temas antes señalados, trabajamos con la contextualización, la interpretación económica de la derivada y una de las notaciones sugeridas por los programas, la de Leibnitz. En cuanto a los contenidos de enseñanza y aprendizaje, se explora sobre la metodología de enseñanza y las dificultades que suponen la regla de la cadena, respectivamente.

En el segundo problema planteamos una discusión similar al problema anterior, pero además trabajamos aspectos como la metodología de enseñanza para esta regla, otra de las notaciones para el tema de derivada, la de Lagrange. En cuanto al conocimiento sobre el aprendizaje, buscamos estudiar las *dificultades* que afronta el estudiante en problemas como el propuesto y la actitud que muestran frente a problemas de este tipo.

En el último problema se plantea una situación donde la interpretación de la derivada y la notación de Leibnitz son la piezas claves de la discusión; pero también se plantea una reflexión en relación con la planificación docente que realiza el profesor para llevar al aula un problema de esta naturaleza y la actitud del estudiante frente a problemas de este tipo.

4.3.1. Episodio 3.1: Regla de la cadena, tasas relacionadas, dominio, contextualización dual, introducción a la regla de la cadena, notación

Una empresa tiene la función de costo $C(x) = 25 + 2x - \frac{1}{20}x^2$ (en cientos de miles de dólares), en donde x es el nivel de producción de la empresa y éste depende del tiempo t. Si el nivel de producción es de $x = 5$ (millones de artículos por año) y está creciendo a una <u>tasa de $0,7$</u> millones de artículos por año, tomando en cuenta que la capacidad de producción de la empresa no puede superar los 15 millones de artículos por año.

Pregunta 1: Determine el dominio de la función de costo $C(x)$ en un contexto matemático general y en el económico en particular. ¿Qué diferencia observa entre uno y otro?

Respuesta: El dominio es el señalado en el **Cuadro 4.11**.

	$C(x)$
Dominio Mat.	$\mathbb{R}$
Dominio Ec.	$[0, 150]$

Cuadro 4.11: Dominio del costo, $C(x)$, en dos contextos

Microepisodio 3.1.1: Aún cuando el costo es una función polinómica cuyo dominio es el conjunto $\mathbb{R}$, en el contexto económico debemos tomar en cuenta que lo menos que puede producir la empresa es 0 artículos y el máximo de producción de ésta, tal como se señala en el enunciado, es de 15 millones de artículos por año; y como x está expresada en cientos de miles, el dominio es $[0, 150]$.

En una actividad anterior, una de las preguntas contenía una situación similar. ¿Consideran importante que se debe mantener o reforzar esta diferencia entre los dominios? ¿Por qué?

Pregunta 2: Calcule la tasa para la cual los costos de producción se están elevando en la actualidad.

Observación: Antes de dar respuesta a esta pregunta conviene introducir la **regla de la cadena**. Para una función y que depende de u y siendo a su vez ésta una función que depende de x, con y derivable en u y u derivable en x, se tiene que la derivada de y respecto a x ($\frac{dy}{dx}$), se define como

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}}$$

Así, estudiar la razón de cambio de $\boldsymbol{y}$ respecto a $\boldsymbol{x}$ consiste en multiplicar la razón de cambio de $\boldsymbol{y}$ respecto a $\boldsymbol{u}$ por la razón de cambio de $\boldsymbol{u}$ respecto a $\boldsymbol{x}$.

Respuesta: Del enunciado tenemos que $\frac{dx}{dt} = 0,7$ (cuando el tiempo se mide en años). El costo marginal está dado por

$$\frac{dC}{dx} = 2 - \frac{x}{10}.$$

Por consiguiente,

$$\begin{aligned} \frac{dC}{dt} &= \frac{dC}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} \\ &= (2 - \frac{x}{10}) \cdot \frac{dx}{dt} \end{aligned}$$

Sustituyendo $x = 5$, el nivel de producción actual, obtenemos

$$\begin{aligned} \frac{dC}{dt} &= (2 - \tfrac{5}{10})(0,7) \\ &= 1,05. \end{aligned}$$

Por lo tanto los costos de producción se están incrementando a una tasa de 1,05 (cientos de miles) de dólares por año o, dicho de otra manera, en 105000 dólares por año.

Microepisodio 3.1.2: *En este ejemplo de la regla de la cadena, la derivada de la función interna es parte del enunciado. ¿Utilizan ustedes un problema similar para introducir la regla de la cadena?*

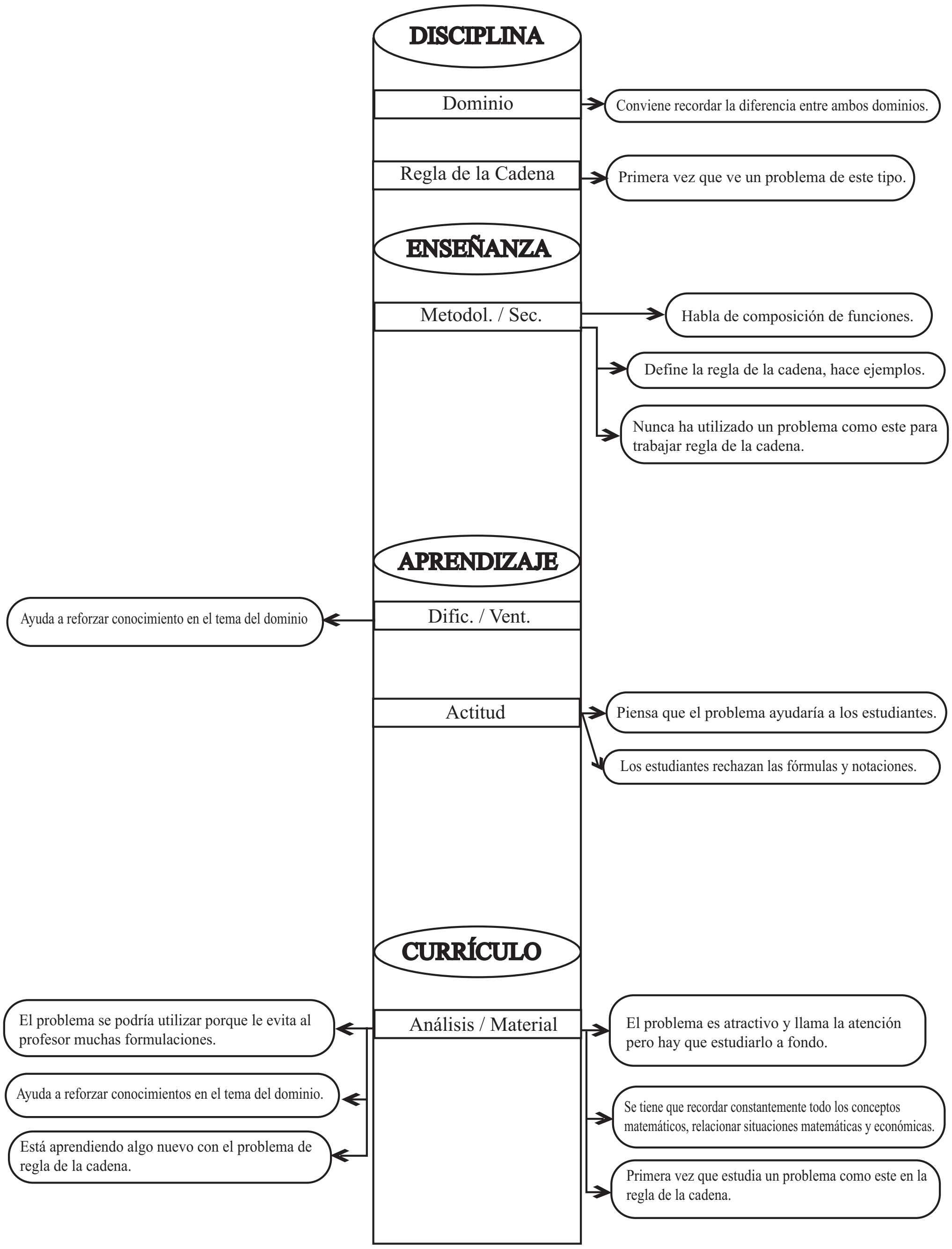
1. $\boxed{\textit{Sí}}$. *¿Por qué?*

2. $\boxed{\textit{No}}$. *¿Lo utilizarían ahora para introducir la regla de la cadena, lo modificarían (¿cómo?) o simplemente lo harían de otra manera (¿por qué?)?*

Microepisodio 3.1.3: En atención a que la respuesta de ustedes es negativa, ¿intentarían ustedes introducir la regla de la cadena con un problema como éste o piensan que generaría conflictos en el estudiante?

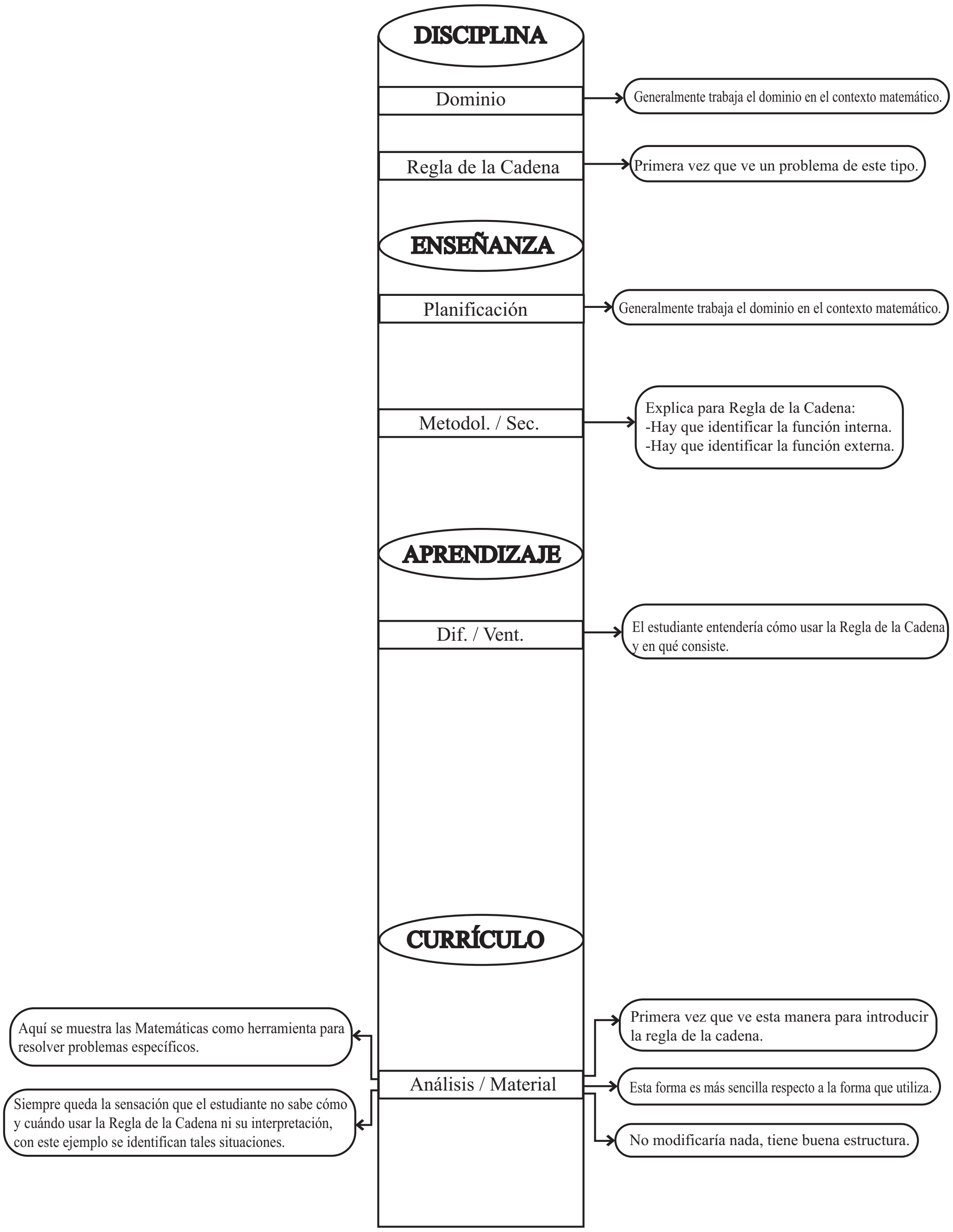
Grupo A

EP 3.1 MANUEL



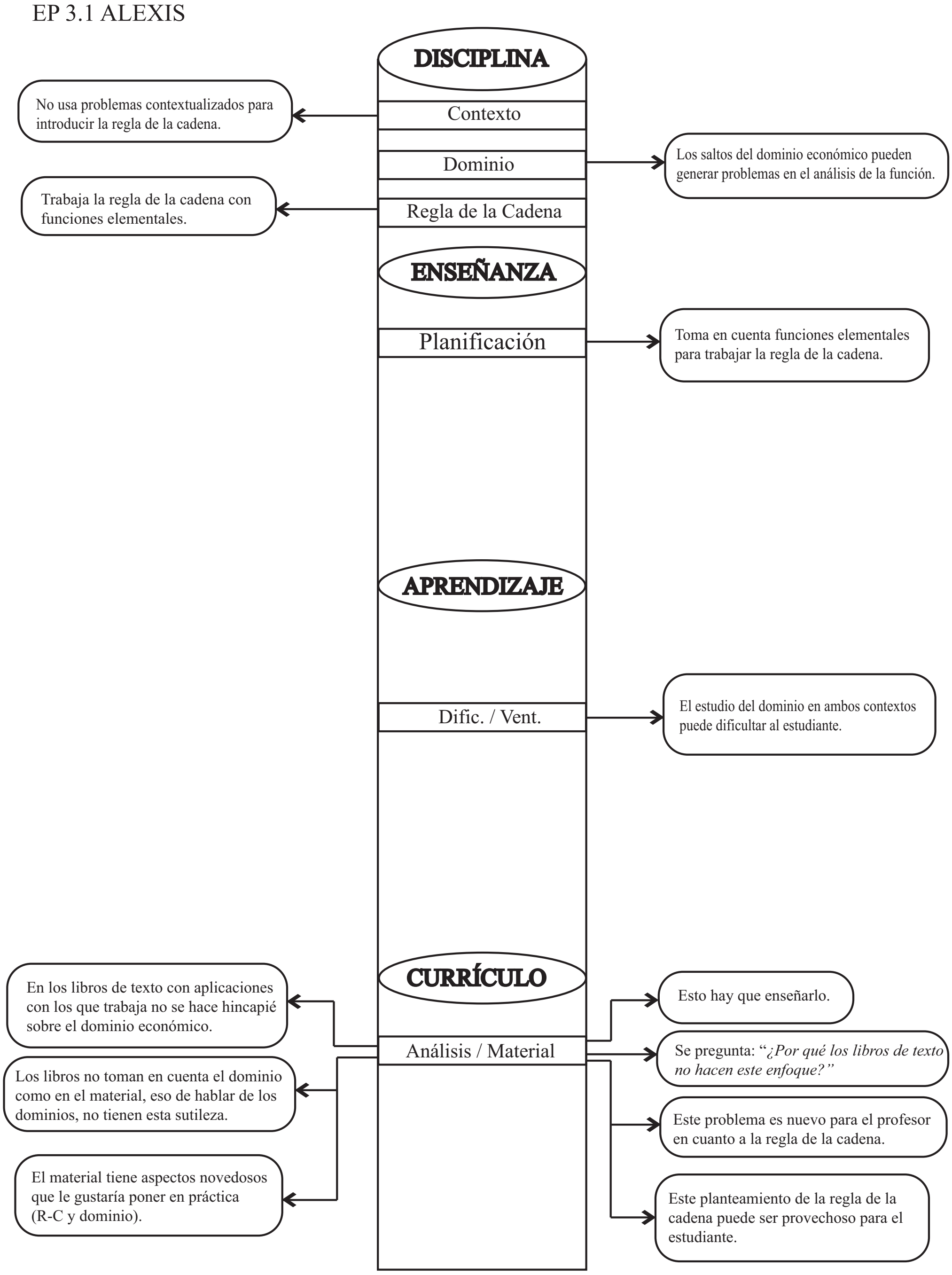
Cuadro 4.12: Episodio 3.1 - Manuel

EP 3.1 RAMÓN

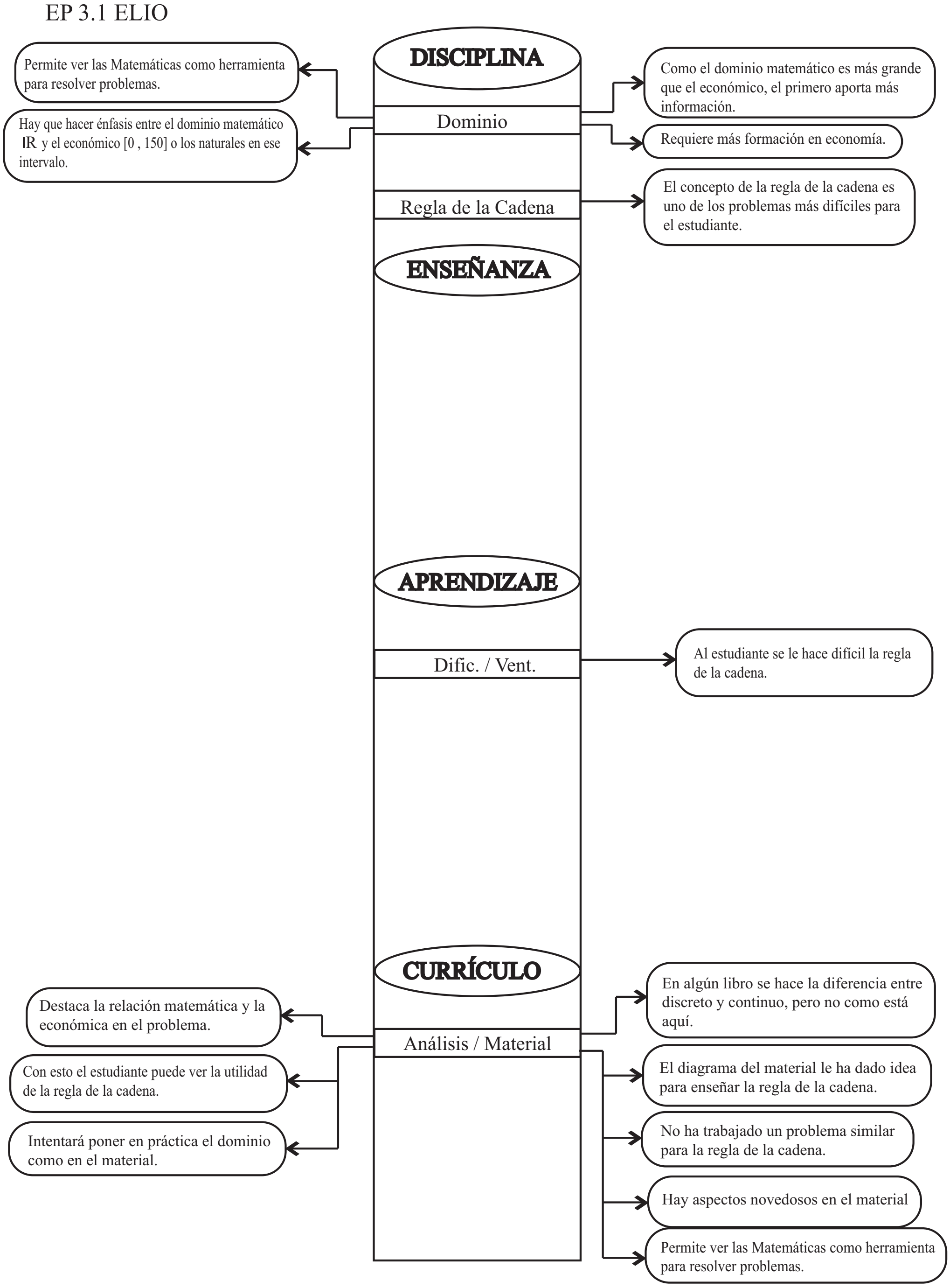


Cuadro 4.12: Episodio 3.1 - Ramón

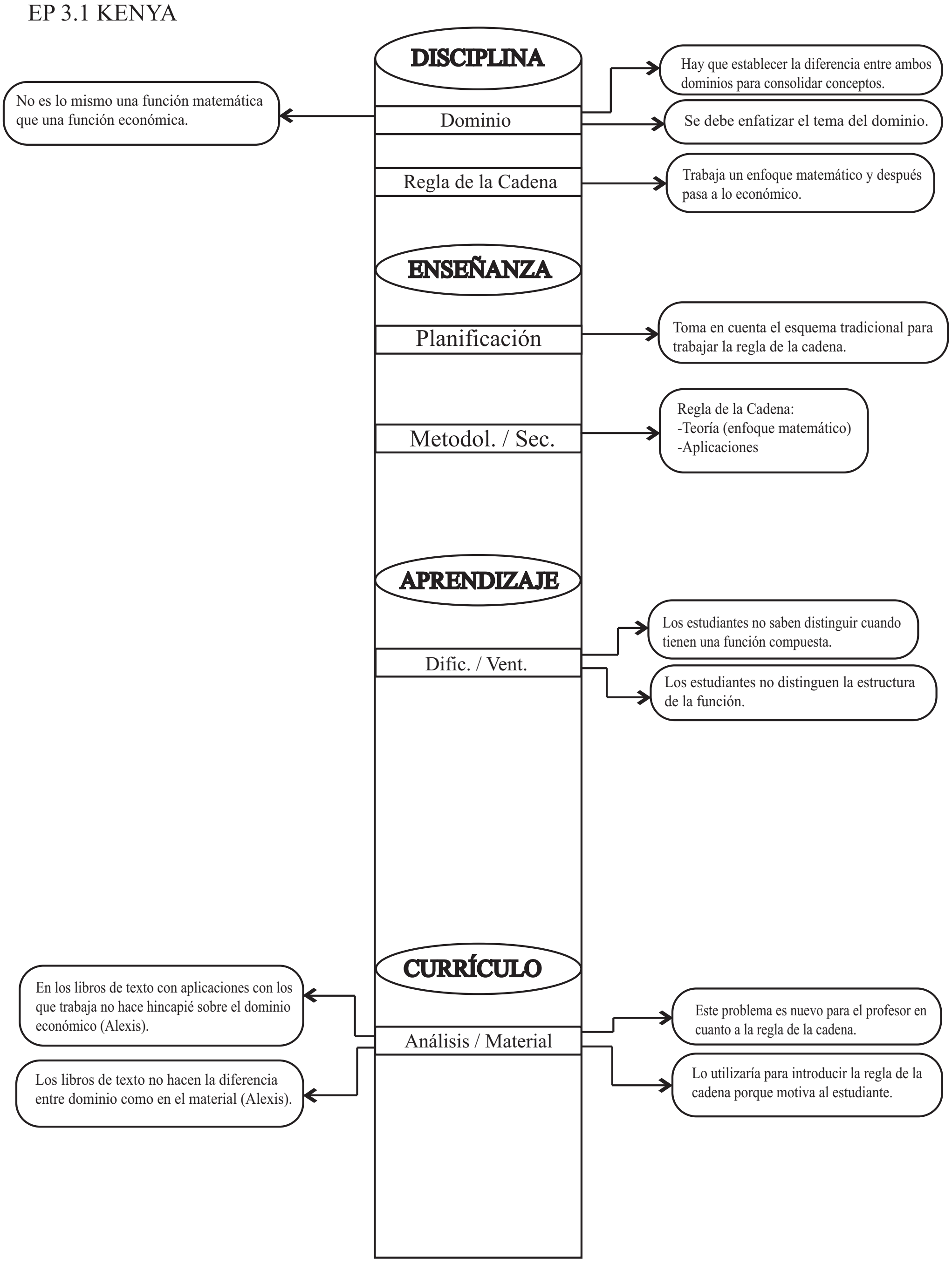
Grupo B



Cuadro 4.13: Episodio 3.1 - Alexis



Cuadro 4.13: Episodio 3.1 - Elio



Cuadro 4.13: Episodio 3.1 - Kenya

Resumen del análisis En el problema anteriormente discutido, tal como hemos podido observar, abordamos como tema matemático principal la regla de la cadena. Aun cuando se abordan distintos aspectos del CDC y de la EBP, llegamos a los mismos desde la regla de la cadena, entre otras cosas, porque seguimos haciendo uso de la derivada para estudiar el conocimiento del profesor. La dinámica que seguimos para el análisis de este episodio es similar al realizado en los episodios anteriores, esto quiere decir que no ahondamos en el aspecto disciplinar porque para ello reservamos el Bloque 2; pero donde sí nos concentramos, en este caso, es en el conocimiento del contenido curricular.

En este episodio retomamos el tema del dominio aun cuando este no es propio del contenido reservado en el estudio de la derivada; sin embargo lo incluimos por dos razones: por un lado, para relacionar lo aportado en el EP2-1 y en este, y por otra parte, porque hay que tener presente que en el análisis de una función se estudia el dominio de la misma y el de su derivada. Así mismo, apostamos por este problema para estudiar el CDC y ver si el profesor ha trabajado con un problema similar para introducir la regla de la cadena, en el cual la derivada interna está considerada dentro del mismo problema (tasa de crecimiento); o por el contrario, lo desconoce o no se ha propuesto trabajar con un problema de esta naturaleza y, por último, ver cuán relevante es el mismo desde el punto de vista didáctico.

Conocimiento sobre la Disciplina (Grupo A)
Sobre los dos objetos matemáticos que trabajamos en este problema, el dominio y la regla de la cadena, lo que aportan estos dos profesores no es muy relevante si únicamente nos centramos en el contexto matemático *per se*; pero si atendemos a las reflexiones que ellos hacen respecto al dominio y la regla de la cadena en relación con su práctica docente, el aporte a nuestro trabajo es significativo, dejando de forma explícita la interrelación con las otras categorías del CDC. Por ejemplo, Ramón sostiene que *"generalmente trabaja el dominio en el contexto matemático"*, lo cual nos dice que no trabaja problemas del dominio de una función en el contexto económico; pero además, si recurrimos a los episodios anteriores y sus respectivos cuestionarios, podemos apreciar la consistencia de este profesor en cuanto a su perfil como docente, **quien entiende la enseñanza de las matemáticas desde las propias matemáticas**.

Manuel, por su parte, indica que *"conviene recordar la diferencia entre ambos dominios"*, el matemático y el económico, puesto que *"ayuda a reforzar conocimientos en el tema del dominio"*; no obstante observamos un vacío entre su posición respecto al problema en discusión y su práctica docente, puesto que en la segunda el profesor no advierte que ponga en práctica ejemplos similares.

Ya manifestamos en su momento que ambos profesores siguen una enseñanza basada en los programas oficiales y libros de texto, y este tipo de problema no es sugerido por los primeros, ni aparece en los libros de texto que ellos siguen como problema introductorio; esta podría ser la razón que nos lleve a inferir que no trabajen este tipo de problemas en sus clases.

Por otro lado, lo observado por nosotros sobre la regla de la cadena es similar al caso del dominio: ambos profesores sostienen que es la primera vez que tratan un problema de esta naturaleza para introducir la regla de la cadena. Es claro que no es un problema tradicional, sobre todo para entrar en este tema, pero recordemos que la elección de los problemas del material tiene como objetivo generar inquietudes y reflexiones en el participante, de manera que este último se pronuncie sobre aspectos específicos del CDC. En este orden de ideas, a partir del problema discutido, los dos profesores manifiestan tener una posición tradicional sobre la regla de la cadena y, más aún, el conocimiento que reflejan en este tema es de corte eminentemente matemático.

Para finalizar esta parte del análisis haremos referencia a la EBP en dos aspectos que no debemos pasar por alto; uno es el conocimiento del profesor relacionado con el contexto o los contextos en los que se enseña o pretende enseñar, quedando en evidencia poca formación en el contexto económico por parte de estos profesores. Otro aspecto a destacar tiene que ver con la elección del problema, en el cual se deben considerar preguntas de tópicos que ya el estudiante conozca, de forma que no impacte en este último el planteamiento del problema. En este caso, el dominio además de ser útil en el análisis de una función, resulta ser un tema ya estudiado en el curso anterior (Matemáticas 1) al de cálculo diferencial.

Conocimiento sobre la Disciplina (Grupo B)
Comenzaremos por centrarnos en el dominio de una función como parte del contenido disciplinar; en este sentido, la reflexión de Elio sobre el dominio tal como se muestra en el material, es que se presenta *"la matemática como herramienta para resolver los problemas"* y luego precisa su interés en el dominio económico de esta función (recordemos al lector que el dominio económico de esta función son los números racionales con tres decimales en [0, 150]), puesto que es un conjunto muy particular y poco usual en los cursos de matemáticas para ciencias económicas, generalmente las restricciones en el dominio no se estudian y todo se limita al conjunto de los números reales ($\mathbb{R}$). En este caso, el participante muestra un amplio conocimiento de lo que significa la diferencia del dominio en ambos contextos, lo cual resulta clave al momento de emplear la EBP como estrategia didáctica, ya que en la misma se contempla la interdisciplinariedad.

Por su parte, la intervención de Alexis muestra su perfil de matemático al decir *"¿ahí no va a haber problemas cuando grafique o se le haga todo el análisis de la función? Lo digo por los saltos..."*, es claro que el participante tiene presente que estamos estudiando el tema de la derivada y que la función en el contexto económico no es continua, pues así lo muestra el dominio, con lo cual no es derivable en este contexto. En otras palabras, lo que nos advierte Alexis es que el llevar un problema como este al aula de clases puede generar dificultades en el estudiante, ya que lo que conoce este último es el estudio del dominio en el contexto matemático. Aquí queda reflejado el contenido que este profesor lleva al aula.

Más adelante, el mismo Alexis respaldado por Kenya, refiriéndose al dominio, sostiene que *"En los libros que yo tengo..., ellos no hacen hincapié sobre eso..."*, *"no hay esa sutileza de decir lo que se está diciendo aquí..."*. Lo que podemos inferir de las palabras de Alexis y Kenya es que es la primera vez que estudian un problema de esta naturaleza para el tema del dominio y, en consecuencia, no lo han trabajado en clase; recordemos que estos profesores siguen una enseñanza tradicional. Sin embargo, más allá del perfil de estos profesores, lo que es importante resaltar de todo esto es la interacción sostenida por estos dos participantes, como se puede apreciar en el **Apéndice B**, lo cual nos muestra el valor del seminario como actividad de reflexión sobre un tema en particular y como espacio de formación profesional.

Observación: En relación al tema de la regla de la cadena como contenido disciplinar no aportan nada relevante.

Conocimiento sobre la Enseñanza (Grupo A)
En la categoría del conocimiento sobre la enseñanza nos ocuparemos principalmente de lo concerniente a la metodología y secuenciación de la clase, puesto que al discutir el material; los profesores, además de reconocer que es la primera vez que ven un problema de este tipo para introducir la regla de la cadena, como lo señaláramos en el conocimiento disciplinar, sin embargo, también dejan ver que siguen una estructura clásica (programas oficiales + libros de texto) en la enseñanza que imparten, como es el caso de Manuel (definición de la regla de la cadena + ejemplos + aplicaciones).

Por otra parte podemos destacar la función del seminario como elemento de formación profesional, puesto que en palabras de Manuel se resalta lo siguiente: *"...De hecho, estoy aprendiendo algo nuevo con este problema..."*, o la reflexión de Ramón: *"...Primera vez que veo esta manera de introducir la regla de la cadena con aplicaciones de economía..."*. Con esto no pretendemos concluir que hay poco conocimiento del contenido disciplinar por parte de los profesores o sobre la enseñanza, que es el tema que nos ocupa, sino que queremos destacar la necesidad de una actividad como el seminario, de modo que un espacio como este sirva para intercambiar ideas entre los profesores, conocer y compartir otras alternativas de enseñanza y que sea el estudiante el principal favorecido de toda esta actividad. Recordemos que la EBP apuesta por una revisión y discusión constante de los problemas que se utilizan para la enseñanza. En todo caso destacamos la actitud positiva de ambos profesores frente a esta propuesta metodológica alternativa.

Conocimiento sobre la Enseñanza (Grupo B)
Debido a la poca información aportada por los participantes respecto a esta categoría, hemos decidido no hacer el análisis de la misma.

Conocimiento sobre el Aprendizaje (Grupo A)
Debido a la poca información aportada por los participantes respecto a esta

categoría, hemos decidido no hacer el análisis de la misma.

Conocimiento sobre el Aprendizaje (Grupo B)
Debido a la poca información aportada por los participantes respecto a esta categoría, hemos decidido no hacer el análisis de la misma.

Conocimiento sobre el Currículo (Grupo A)
Las reflexiones a ser tomadas en cuenta en esta categoría están relacionadas con la regla de la cadena en cuanto al objeto matemático se refiere y a las posiciones que asumen frente al material como herramienta didáctica. Comenzaremos con el aporte de Ramón, quien se pronuncia de forma favorable en correspondencia con el problema, algo que no había hecho en los episodios anteriores, en los que dejaba ver un *sí pero*. Este profesor comienza por reconocer que es la *"primera vez que veo esta manera de introducir la regla de la cadena con aplicaciones de economía"*, luego prosigue, *"me parece que esta manera de introducir la regla de la cadena es más sencilla en comparación a como lo hago actualmente"*, añadiendo además, *"yo no le modificaría nada, así como está expuesto me parece que tiene una buena estructura"*.

Visto así, nos da la sensación de no ser demasiado relevantes las opiniones de Ramón, pero haciendo un zoom sobre estas frases destacamos de la primera la *novedad* del problema. Si no hubiesen más opiniones tendría poco o ningún valor didáctico, pero ya con las siguientes surge el tema: *metodología de enseñanza*, relacionando la segunda con su labor docente. Sin embargo hay una reflexión que no podemos obviar ya que está en consonancia con el aprendizaje, *"...con tu ejemplo quedan bien identificados los dos factores [el uso y la interpretación de la regla de la cadena]"*. Todas estas opiniones están fuertemente ligadas al conocimiento del contenido matemático que tiene el profesor (Climent, 2002), en particular, con la regla de la cadena.

El otro participante, Manuel, también comienza reconociendo: *"...primera vez que veo un problema de ese tipo"*, *"...estoy aprendiendo algo nuevo con este problema"*. Sin embargo, sobre la posible implementación del problema en su curso se mantiene cauto y señala lo siguiente: *"...es primera vez que lo veo y tendría que estudiarlo más a fondo..., ...se evita uno muchas formulaciones..."*. En el caso de este profesor, sus dos primeras opiniones nos ubican en dos términos, *novedad* y *formación profesional*, de la cual nos centramos en lo segundo, destacando el seminario como actividad formativa del profesor.

Finalizamos exponiendo algunos puntos que destacamos como positivos y que el grupo en cuestión manifiesta respecto al problema discutido:

1. La sencillez como se llega a la regla de la cadena respecto a la forma actual.

2. Presenta una estructura adecuada, con lo cual no se requiere de cambios en el problema.

3. Facilitaría el aprendizaje sobre el uso y aplicación de la regla de la cadena.
4. A través de este problema quedan identificadas de manera clara las funciones interna y externa; factor clave en el aprendizaje de la regla de la cadena, ya que es una de las dificultades que más presenta el estudiante.
5. Es atractivo para el profesor.
6. Evitaría trabajar con las formulaciones habituales utilizadas en la enseñanza tradicional.

Conocimiento sobre el Currículo (Grupo B)
Las opiniones que consideramos para el análisis en esta categoría se refieren tanto al dominio como a la regla de la cadena; estos profesores se pronuncian respecto al material en distintas líneas que conviene ordenar de acuerdo con nuestros objetivos. Comenzaremos con el dominio de una función como objeto matemático de discusión; como lo señalamos en la categoría del conocimiento disciplinar, Elio se pronuncia sobre el estudio de este tema en ambos contextos y destaca la relación matemática y económica que explota el problema, además que este último *"permite ver las matemáticas como herramienta para resolver problemas"*.

Alexis, durante la discusión en el seminario hace algunas observaciones sobre el dominio de una función, respecto a la forma de cómo se trabaja el problema en el material, y finaliza preguntando: *"¿por qué los libros de texto no hacen este enfoque?"*. Kenya, de igual manera, opina que los libros de texto con los que ella trabaja tampoco plantean esta diferencia o restricciones del dominio. Es claro que Alexis y Kenya, puesto que planifican y organizan sus clases de matemáticas a partir de los libros de texto, entienden este problema como una actividad innovadora, al igual que la estructura como se estudia la regla de la cadena; manifiestan abiertamente la disposición de poner en práctica el material, en lo que coinciden con Elio.

Por otro lado y ya entrando en materia relacionada con la regla de la cadena, sacamos a colación lo dicho por Kenya, quien señala que es la primera vez que estudia un problema como este para introducir la regla de la cadena, pero también sostiene que lo podría implementar para introducir el tema en cuestión *"porque motiva al estudiante"*; con esto inferimos que lo que Kenya quiere decir es que entiende el problema como un elemento novedoso, atractivo para el estudiante y con características didácticas.

Hacia una dirección similar se dirige Elio, quien se refiere al diagrama que se muestra en el problema y que discutimos en el seminario, como un elemento para la enseñanza de la regla de la cadena y al mismo tiempo, ya pensando en el estudiante, afirma que mediante la discusión de este problema en el aula de clases, *"el estudiante puede ver la utilidad de la regla de la cadena"*. Por medio de las opiniones de Elio, nos ubicamos en las categorías de enseñanza y aprendizaje, dicho de otro modo, sus reflexiones se basan en la enseñanza que sigue actualmente y en la experiencia vivida con sus estudiantes. Para Alexis también resulta novedoso el enfoque del problema para introducir el tema en discusión y está dispuesto a llevarlo al aula de forma exploratoria, ya que *"...puede ser provechoso para el estudiante..."*.

Ahora bien, resulta natural preguntarnos: ¿por qué un problema como el del presente episodio resulta nuevo para estos tres profesores, como elemento para introducir la regla de la cadena? La respuesta a esta pregunta obedece a cuatro razones fundamentales que son producto de su práctica docente y que exponemos a continuación:

1. Ellos siguen una enseñanza tradicional ajustada a los programas oficiales y libros de texto, por lo tanto,
2. No realizan una enseñanza de las matemáticas contextualizada en las ciencias económicas.
3. Un problema como este es reservado en los libros de texto al apartado o capítulo de aplicaciones de la derivada, y
4. La falta de un espacio de discusión con profesores especialistas tanto en didáctica de las matemáticas como del área de economía limita la posibilidad de abordar distintas estrategias de enseñanza a las que siguen actualmente.

4.3.2. Episodio 3.2: Utilidad y publicidad, introducción a la regla de la cadena, interpretación de la derivada, valores extremos, optimización

Un determinado artículo puede fabricarse y venderse con una utilidad o beneficio de \$10 cada uno. Si el fabricante gasta x dólares en la publicidad del artículo, el número de artículos que pueden venderse será igual a $1000(1 - e^{-kx})$, en donde $k = 0,001$. Si U denota la utilidad neta por las ventas y tomando en cuenta que el fabricante no está dispuesto a gastar más de \$8500 en publicidad.

Pregunta 1: Calcule $U'(x)$ e **interprete esta derivada**.

Observación: Antes de dar respuesta a estas preguntas conviene introducir la **regla de la cadena**. Para una función f que depende de g y ésta a su vez es una función que depende de x, con f derivable en $g(x)$ y g derivable en x, se tiene que la derivada de f respecto a x ($f'(x)$), se define como

$$\boxed{f'(x) = f'[g(x)] \cdot g'(x)}.$$

Así, estudiar la derivada de ***f*** respecto a ***x*** consiste en multiplicar la derivada de ***f*** respecto a ***g(x)*** por la derivada de ***g*** respecto a ***x***.

Respuesta: Puesto que cada artículo produce una utilidad de \$10, la utilidad bruta total originada por las ventas se obtiene multiplicando el número de ventas por \$10. La utilidad neta se obtiene entonces sustituyendo los costos de publicidad:

$$U(x) = 10{,}000(1 - e^{-kx}) - x.$$

Por lo tanto,

$$U'(x) = -10{,}000 \cdot (e^{-kx})' - 1$$

Y por la regla de la cadena,

$$\begin{aligned} U'(x) &= -10{,}000(-ke^{-kx}) - 1 \\ &= 10{,}000ke^{-kx} - 1 \end{aligned}$$

y como $k = 0,001$ se tiene que

$$U'(x) = 10e^{-0{,}001x} - 1$$

La **interpretación** de esta derivada es que *mide la tasa de cambio de la utilidad neta con respecto a los gastos de publicidad*. En otras palabras, $U'(x)$ da el incremento en el número de dólares en la utilidad neta producida por un gasto adicional (en dólares) en publicidad.

Microepisodio 3.2.1: A través del problema buscamos que el estudiante descubra la necesidad e importancia de la herramienta (la regla de la cadena), puesto que la función e^{-kx} no tiene derivada inmediata. Una vez discutido con el estudiante y generando entre ellos un diálogo que conduzca a esta regla, el problema se puede atacar sin mayores problemas ¿o no?

Generalmente, la forma tradicional de llegar a la regla de la cadena consiste en definirla y de inmediato hacer ejemplos,en principio, matemáticos que permitan visualizar la regla para posteriormente realizar ejercicios o problemas de aplicación.

¿Consideran ustedes un ejemplo como éste, la manera apropiada para llegar a la regla de la cadena o harían alguna modificación para lograr los objetivos de este tema; como por ejemplo, realizar cambios en la función compuesta o modificarla?

Microepisodio 3.2.2: *¿Cuáles son las dificultades que presentan sus estudiantes ante este tipo de problemas?*

Microepisodio 3.2.3: Y por ejemplo, ¿qué estrategias siguen o seguirían ustedes para resolver esta problemática?

Pregunta 2: ¿Será cierto que mientras más se invierta en publicidad, mayor será la utilidad? Como respuesta parcial a esta pregunta, evalúe $U'(x)$ en $x = 1000$ y en $x = 3000$. **Interprete los resultados**.

Respuesta:Conviene prestar atención a los dos casos que se estudian a continuación.

Cuando $x = 1000$,

$$U'(1000) = 10e^{-1} - 1 = 10(0,3679) - 1 = 2,679.$$

Para el caso en que $x = 3000$,

$$U'(3000) = 10e^{-3} - 1 = 10(0,0498) - 1 = -0,502.$$

Microepisodio 3.2.4: De modo que si se gastan \$1000 en publicidad, **cada dólar adicional produce un incremento** de \$2,68 en la utilidad neta. Mientras que si se gastan \$3000 en publicidad, **cada dólar adicional produce una disminución** de \$0,50 en la utilidad neta. En este caso es claro que el fabricante no debería hacer más publicidad (el costo de publicidad extra incrementaría en exceso el valor de las ventas adicionales que se generarían). De hecho, cuando $x = 3000$, **ya se está gastando de más en publicidad**.

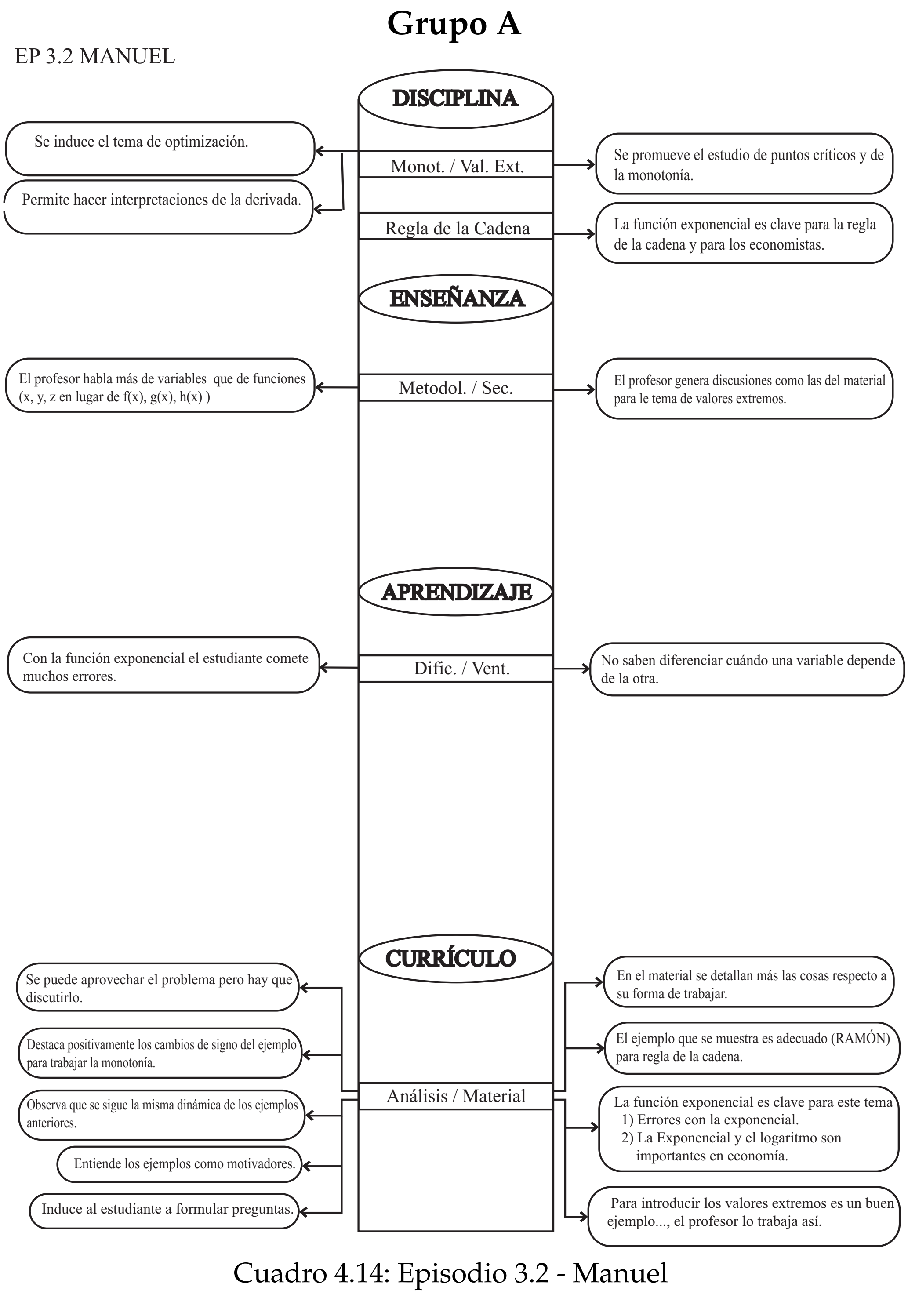
¿Y si se invierten \$2.000 en publicidad, o \$2.100?

¿Consideran ustedes que este planteamiento tiene aspectos innovadores, en materia de enseñanza, que permite al estudiante la maduración y consolidación del concepto, así como la utilidad de esta herramienta en el campo de las ciencias económicas? ¿Por qué?

Microepisodio 3.2.5: En un seminario similar, cuando pregunté si este tipo de preguntas conducen o promueven el estudio de monotonía de una función (crecimiento y decrecimiento) y más aún de extremos relativos (máximos y mínimos); uno de los participantes en el seminario mantuvo firme objeción a nuestro planteamiento y utilizó dos o tres argumentos, como por ejemplo: hay que invertir mucho tiempo, el estudiante no está preparado para un planteamiento como este, entre otros. Por el contrario, los otros participantes vieron con buenos ojos nuestra propuesta y uno dijo que intentaría ponerla en práctica y experimentar un poco *por eso de la motivación*.

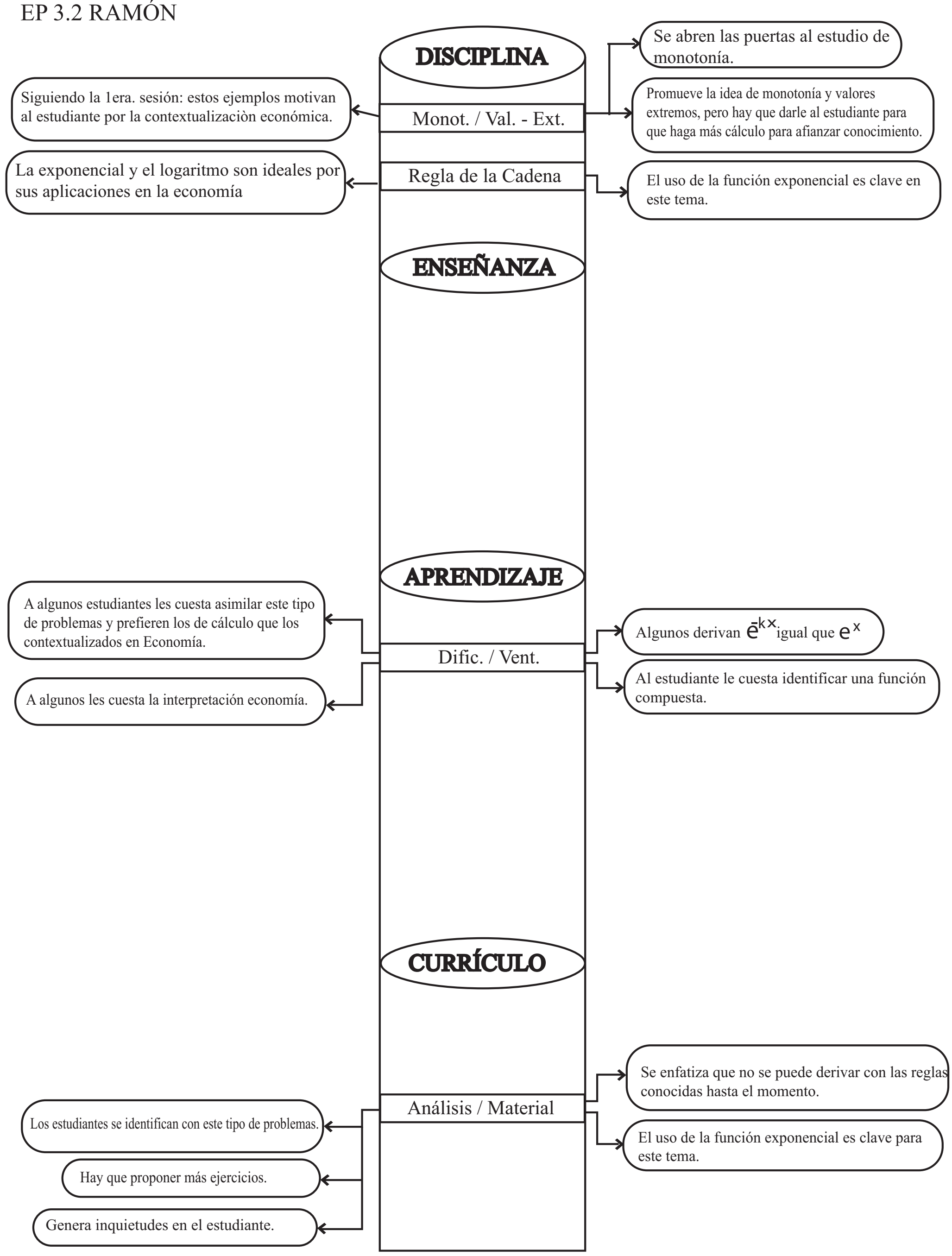
Me gustaría conocer la opinión de ustedes al respecto; es decir, este hecho particular de evaluar la función de utilidad en dos puntos que nosotros sabemos que dan

interpretaciones contrarias, ¿promueven el estudio de monotonía de una función en los estudiantes?



Cuadro 4.14: Episodio 3.2 - Manuel

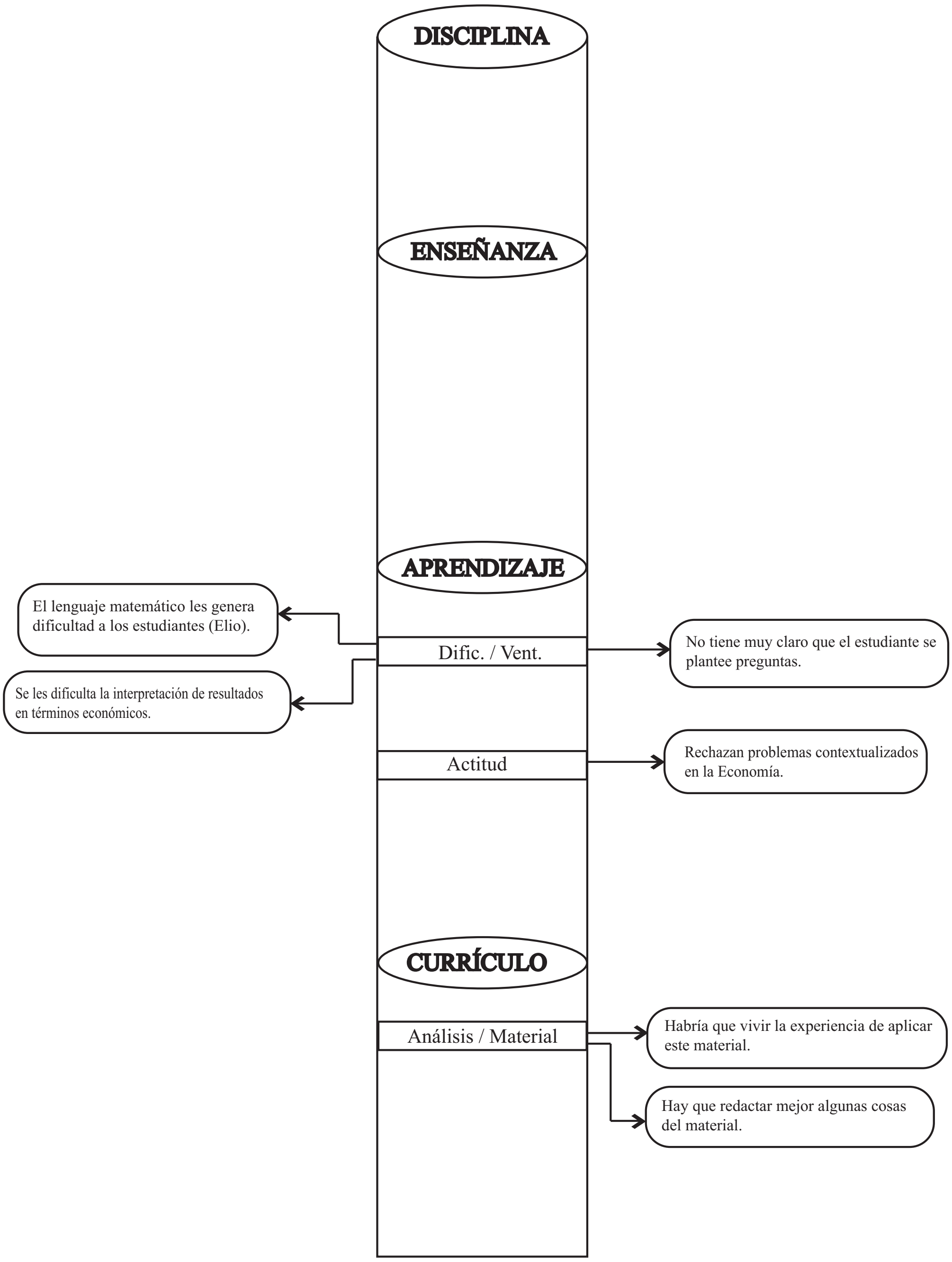
EP 3.2 RAMÓN



Cuadro 4.14: Episodio 3.2 - Ramón

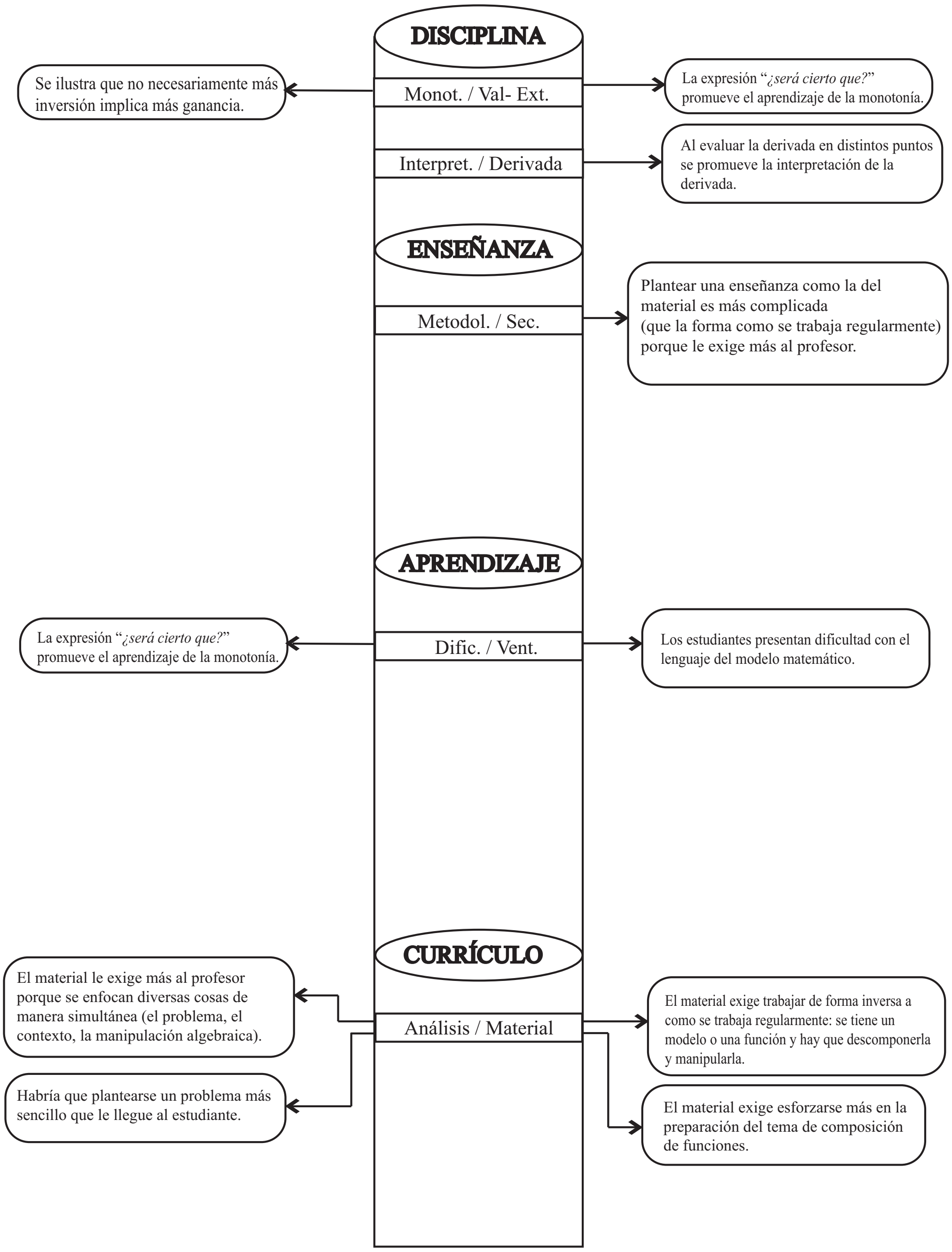
Grupo B

EP 3.2 ALEXIS

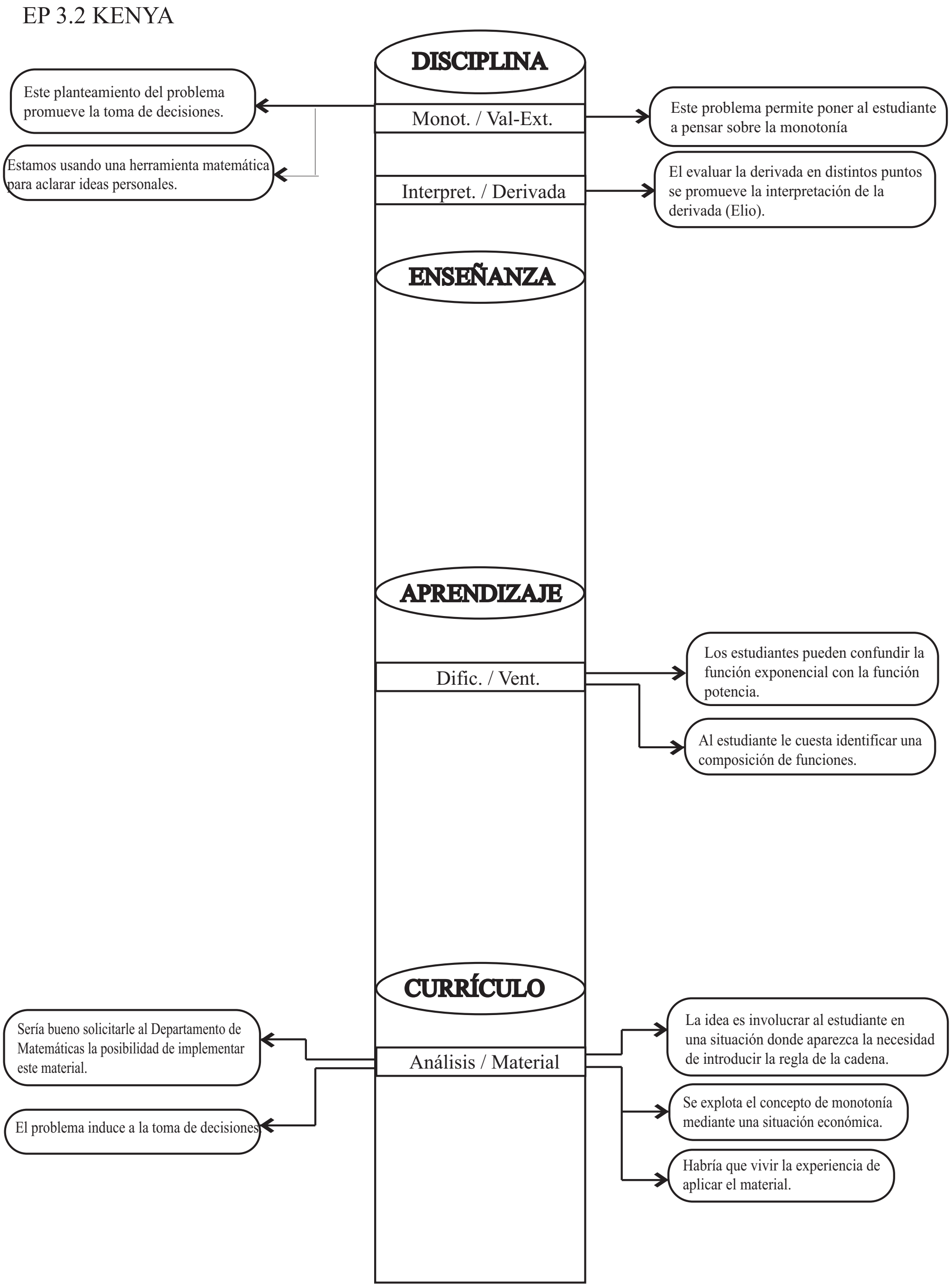


Cuadro 4.15: Episodio 3.2 - Alexis

EP 3.2 ELIO



Cuadro 4.15: Episodio 3.2 - Elio



Cuadro 4.15: Episodio 3.2 - Kenya

Resumen del análisis Aun cuando en este episodio continuamos con la regla de la cadena, ya que es el tema principal de esta tercera sesión del seminario, hemos incluido el tema de monotonía y valores extremos. A diferencia del problema anterior en el que las reflexiones estuvieron basadas sobre una función polinómica, en el actual se discute a partir de una función exponencial. Las categorías del CDC que tomaremos en cuenta para el análisis son las vinculadas al conocimiento disciplinar y al conocimiento del currículo, involucrando las otras dos, enseñanza y aprendizaje, en la del currículo; esto en el caso del grupo A, mientras que del grupo B sí hablaremos, aunque de forma sucinta, sobre la categoría reservada al aprendizaje. La razón de esta decisión viene dada por la poca información obtenida debido, entre otras cosas, al propio diseño del instrumento.

Conocimiento sobre la Disciplina (Grupo A)
En las dos situaciones matemáticas claramente diferenciadas, la regla de la cadena y la monotonía, los participantes, en el caso de la función exponencial, manifiestan *"que es una función clave tanto para estudiar la regla de la cadena como por la utilidad de la misma en el campo de la economía"*. Pero Manuel va más allá y sostiene que además de la exponencial, la función logarítmica se debe trabajar por los errores que usualmente cometen los estudiantes con estas funciones y al mismo tiempo señala su importancia en el área económica, haciendo alusión al hecho de que los libros de texto con aplicaciones a la economía reservan un capítulo únicamente para estas dos funciones.

En efecto, libros de texto como el de Arya y Lardner (1987) y Haeussler y Paul (1997), entre otros, dedican un capítulo a estas dos funciones por lo que significan las mismas para las ciencias económicas como el *estudio a largo plazo de la inversión de capital*, *el crecimiento del producto nacional bruto* o la *toma de decisión sobre ventas de bienes inmuebles*. Aun cuando nuestro objetivo no es estudiar la función exponencial en sí misma sino la regla de la cadena, la misma genera opiniones como la de Ramón: *"algunos [estudiantes] derivan e^{-kx} igual que e^{x}"*. Desde nuestro punto de vista, lo relevante de esta frase es que el conocimiento disciplinar de este profesor traspasa el contenido matemático-económico y se adentra en lo que entendemos como conocimiento sobre el aprendizaje, en otras palabras, la opinión que este profesor aporta sobre la enseñanza de las matemáticas la fundamenta desde su experiencia con los estudiantes.

Aquí lo que pretendemos reflejar es que las componentes que conforman el CDC no son elementos disjuntos, pero además, la frontera o línea de separación entre una categoría y otra no están claramente demarcadas.

Nosotros planteamos una situación muy particular en la que a partir de la contextualización económica se supone que al invertir más en publicidad los beneficios serán mayores. Un enfoque como este atiende a la metodología de la EBP, en el que se entiende que el estudiante aún no ha trabajado el tema de la monotonía.

Ante este escenario, tanto Manuel como Ramón advierten que ellos introducen el tema de la monotonía de una forma similar a la del material por su carácter motivador. Ramón añade además que las preguntas del problema generan inquietud en el estudiante y lo involucran en el tema en cuestión. Por su parte, Manuel considera que *"...se induce al tema de optimización..., se promueve el estudio de puntos críticos y de monotonía"*, pero destaca, entre otras cosas, el hecho de explotar el cambio de signo en la derivada de forma intencionada. En efecto, estudiar la monotonía de una función consiste en estudiar el cambio de signo de la derivada de la función a lo largo del dominio. En este sentido, estos participantes entienden que mediante esta actividad es viable llegar al concepto de monotonía basando sus reflexiones en las respectivas experiencias con sus estudiantes.

Conocimiento sobre la Disciplina (Grupo B)
Comenzaremos por acotar que las opiniones obtenidas en esta categoría provienen únicamente de los profesores Kenya y Elio, ya que la participación de Alexis, tal como se muestra en el diagrama correspondiente, es escasa, característica de este profesor a lo largo del seminario. También hay que tomar en cuenta que las propias características del problema en discusión dejan mucha libertad a los participantes para referirse al contenido disciplinar en sí; sin embargo, destacamos que tanto las opiniones de Kenya como de Elio van en la misma dirección y el mismo concepto matemático, la monotonía. Este hecho no es gratuito y obedece fundamentalmente al esquema del seminario como actividad de discusión e intercambio de ideas u opiniones. Kenya, por ejemplo, sostiene que mediante la estructura del problema se está *"usando una herramienta matemática para aclarar ideas personales"*, aunque Elio entra más en detalle y advierte que *"se ilustra que no necesariamente más inversión implica más ganancia"*. Estas *"ideas personales"* a las que se refiere Kenya las identificamos, aunque no del todo, con las *"concepciones alternativas del estudiante"* que define Carrascosa (2005).

Estas opiniones nos conducen directamente a hablar de la EBP, ya que el profesor identifica las preguntas con la introducción al objeto matemático en discusión; tomemos en cuenta que implementar la EBP implica partir de un escenario problemático para llegar a un concepto o conjunto de estos. Tengamos presente que en ningún momento en el problema se plantea de forma explícita el estudio de la monotonía de una función, en todo caso lo que se muestra de forma directa es la interpretación de la derivada. No obstante, estos profesores se identifican con las preguntas del problema como *"herramientas"* para aproximarnos al concepto ya mencionado.

En otro orden de ideas, Kenya da un paso adelante al observar que *"el planteamiento del problema promueve la <u>toma de decisiones</u>"*; la razón de subrayar esto último obedece a que el profesional de carreras como Economía, Administración de Empresas o Contaduría Pública, entre otras, está sujeto a constantes situaciones que le obligan a la toma de decisiones en el campo laboral, con lo cual esta profesora no sólo entiende el problema como una actividad para el estudio de la monotonía sino que, además, lo ve como estrategia para inducir la toma de decisiones, es decir, explota la multidisciplinariedad en el problema, característica particular de la EBP.

Conocimiento sobre el Aprendizaje (Grupo B)
En materia de aprendizaje, Elio sostiene *"que los estudiantes presentan dificultad con el lenguaje del modelo matemático"*; Kenya manifiesta que al *"...estudiante le cuesta identificar composición de funciones"* y Alexis, en la misma tónica, indica que los estudiantes *"rechazan problemas contextualizados en la economía"*. Sin ánimo de especular, pero recurriendo a las opiniones de los episodios anteriores, nos atrevemos a afirmar, entre otras cosas, que estos profesores trabajan poco o ningún problema contextualizado en la economía en el marco de su actividad docente, lo que nos hace inferir que ante problemas como estos es el profesor quien comienza por rechazarlos (tal vez de forma involuntaria), debido a la supuesta actitud o propio rendimiento del estudiante frente a actividades similares, en caso de haberlas vivido.

De todo lo anterior no nos queda duda que estos profesores dan visos de conocer a sus estudiantes y la realidad de ellos en el aula; en eso se apoyan para sus reflexiones, pero de alguna manera, los participantes de este grupo, dejan ver cierta actitud de indiferencia ante el comportamiento del estudiante, bien sea porque intentaron alguna innovación en pasadas ocasiones sin obtener lo esperado por parte de sus estudiantes o porque su insuficiente formación en el campo de las ciencias económicas no les permite plantearse problemas alternativos a los utilizados en su momento. Todo esto nos hace apuntar a una falta de formación profesional tanto en el ámbito económico como el metodológico, en particular, en metodologías alternativas de enseñanza que se ajusten en la medida de lo posible tanto al conocimiento como a la actitud del estudiante.

Conocimiento sobre el Currículo (Grupo A)
El objetivo principal de esta estrategia como se llevó a cabo la aplicación del instrumento es, precisamente, la de generar opiniones a favor o en contra del material discutido, pero partiendo o basándose siempre en la experiencia docente de los participantes. El primer punto a destacar del material es que ambos profesores lo entienden como un *instrumento motivador* para el estudio de la regla de la cadena y monotonía de una función; también Manuel lo entiende como un elemento *"adecuado porque de alguna manera, se solventa ese inconveniente que ellos tienen, de ver una función como una como composición de otras"*.

En este caso, Manuel saca a colación las dificultades que tiene el estudiante respecto a un concepto matemático como la composición de funciones; es decir, su opinión obedece a la experiencia vivida durante el ejercicio de la docencia. Respecto a este hecho haremos una observación al final del análisis de esta categoría.

Por su parte Ramón, en el marco de la regla de la cadena, sostiene que *"algunos se identifican con este tipo de problemas, aunque muchos tienen problemas en identificar la composición"*; más adelante indica, sobre la monotonía, que el problema genera inquietudes en el estudiante, situación ratificada por Manuel cuando se discute sobre los dos valores dados de forma intencional en el material y que la derivada en estos puntos tienen signos contrarios; Manuel considera que el estudiante se podría preguntar *"¿qué ocurre matemáticamente aquí?"*, aunque ellos consideran que se debería tomar en cuenta más puntos para que el estudiante los trabaje y reflexione sobre los resultados. En este sentido es pertinente mencionar la EBP como estrategia de enseñanza, puesto que con esta metodología lo que se busca es la reflexión de los estudiantes, que discutan entre ellos para que se aproximen de la mejor manera posible a un determinado concepto.

Conocimiento sobre el Currículo (Grupo B)
Al trabajar esta categoría con el grupo A comenzamos por recordar los objetivos que se persiguen en la forma de aplicar este instrumento; en este sentido, el grupo B es muy cuidadoso sobre esta parte discutida del material y los tres indican que prefieren *"vivir la experiencia"*, pero con distintos matices, como por ejemplo Alexis, quien sugiere hacerle modificaciones al material o Kenya que habla de *"solicitarle al Departamento de Matemática la posibilidad de implementar el material"* con el objeto de darle validez institucional por encima de la personal. Cabe destacar que se tiene previsto, como parte complementaria del presente trabajo, la puesta en práctica de este material de forma exploratoria, ya que es uno de nuestros objetivos a futuro pero que no está contemplado dentro de este proyecto.

En otro orden de ideas y centrándonos más hacia la EBP, Kenya considera apropiado el problema, puesto que permitiría involucrar al estudiante en la necesidad de aprender una nueva regla de derivación a partir de una situación económica, aunque Elio se mantiene reticente ante el problema en discusión, porque al involucrar la composición de funciones con el lenguaje económico puede traer dificultades en el proceso de enseñanza-aprendizaje. En este momento le mostramos al lector dos posiciones encontradas sobre la posible aplicación del material, destacando por parte nuestra el valor del seminario como actividad de discusión, pero también la necesidad de la misma como espacio de formación profesional; recordemos que en un comentario anterior, Elio reconocía su poca formación en el área de las ciencias económicas y, en consecuencia, la necesidad de una formación profesional en esta área. Pero además, este último participante nos sigue mostrando el carácter formal como concibe él sus clases.

También Kenya observa que el problema en discusión es una herramienta innovadora para la enseñanza de las matemáticas como lo señaláramos en el conocimiento disciplinar, ya que permite, a través de un ejemplo, visualizar de manera analítica una creencia muy generalizada, *"...mientras más se invierte en publicidad más se gana..."* Además, el trabajar con la interpretación de la derivada en este ejemplo *"...permite la toma de decisiones..."*, comentario que ya analizamos en el contenido disciplinar.

Ya por último, cerramos esta parte del análisis con la observación que indicáramos líneas arriba, donde hablamos de la opinión del profesor tomando como referencia su experiencia vivida en el ejercicio de la docencia. Sobre este hecho en particular, si el lector vuelve a la **Sección 2.3.3** puede apreciar que cuando desarrollamos el conocimiento del contenido curricular y, en particular, el análisis crítico de materiales publicados, no hicimos mención a qué parte de esta actividad depende de la experiencia vivida con los estudiantes, situación esta que se ha venido acentuando en las reflexiones y opiniones que los profesores de ambos grupos hacen cuando se refieren al material.

4.3.3. Episodio 3.3: Análisis e interpretación Eco-Mat, interpretación de la derivada, regla de la cadena

Suponga que el costo total (en dólares) de fabricación C en cierta fábrica es una función que depende de las q unidades producidas, que a su vez es una función que depende del tiempo, t, que representa las horas durante las cuales ha estado funcionando la fábrica.

Preguntas: Las siguientes preguntas están relacionadas con los contenidos matemático y económico en general.

Pregunta 1: ¿Qué cantidad se representa mediante la derivada $\frac{dC}{dq}$? ¿En qué unidades se mide esta cantidad?

Respuesta: La expresión $\frac{dC}{dq}$ representa la razón de cambio del costo C respecto al número de unidades producidas q. Esta cantidad se mide en dólares/unidades.

Pregunta 2: ¿Qué cantidad representa la expresión $\frac{dq}{dt}$? ¿En qué unidades se mide esta cantidad?

Respuesta: La expresión $\frac{dq}{dt}$ representa la razón de cambio de las unidades producidas q respecto al tiempo t. Esta cantidad se mide en unidades/horas.

Pregunta 3:¿Qué cantidad representa la expresión $\frac{dC}{dt} = \frac{dC}{dq}\frac{dq}{dt}$? ¿En qué unidades se mide esta cantidad?

Respuesta: La expresión $\frac{dC}{dt} = \frac{dC}{dq}\frac{dq}{dt}$ representa la razón de cambio del costo C respecto al tiempo t. Esta cantidad se mide en dólares/horas.

Microepisodio 3.3.1: Para finalizar el tema de la regla de la cadena, discutamos ahora sobre una pregunta como esta, de corte teórico, donde las exigencias de análisis e interpretación, tanto económico como matemático, son mayores que aquellas de contenido numérico.

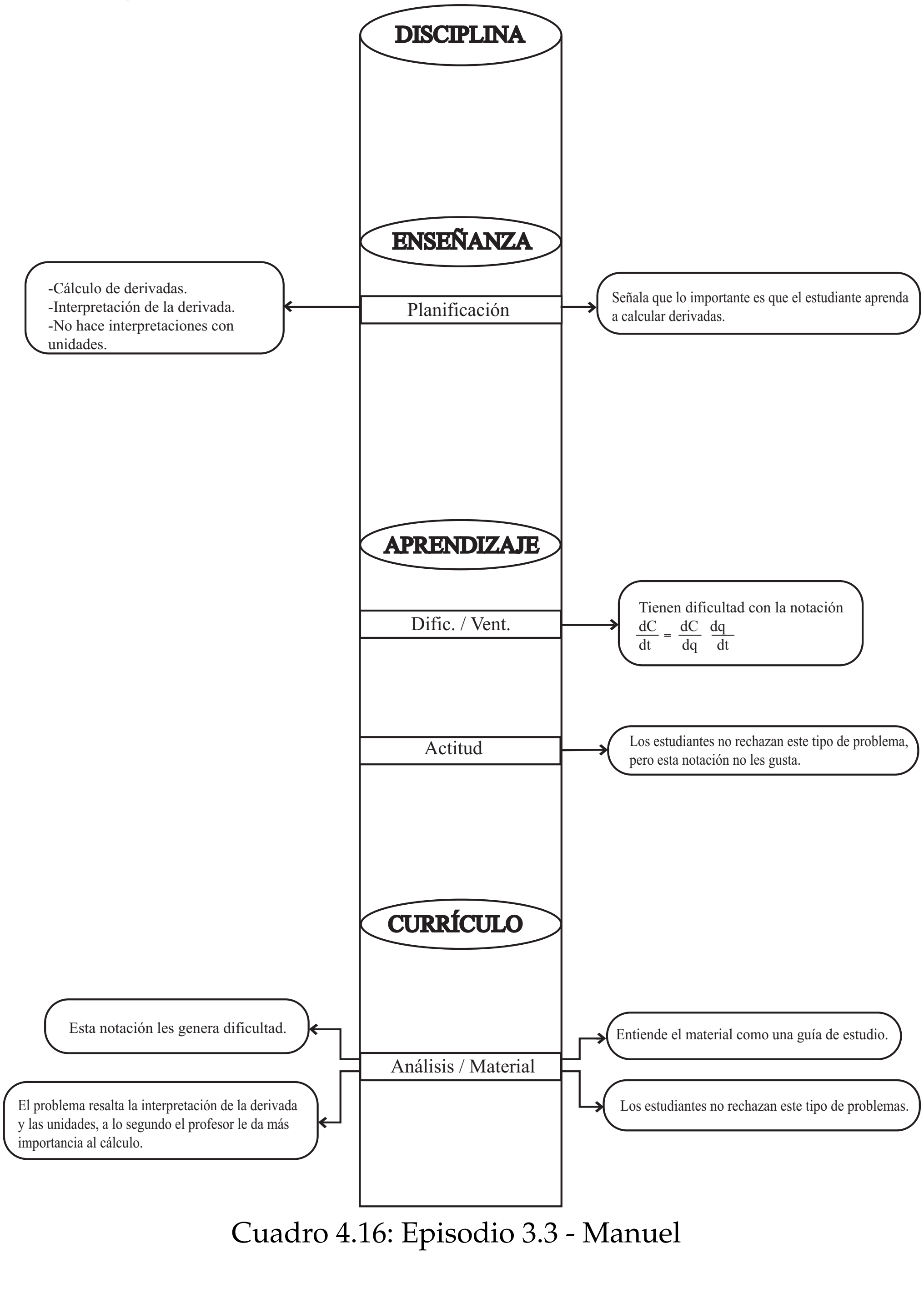
¿Conduce al estudiante a una actitud de rechazo este tipo de problemas?

Microepisodio 3.3.2: *¿Un problema como este, conduce a cubrir los objetivos que se plantean los libros de texto que ustedes utilizan?*

Microepisodio 3.3.3: *¿Un problema como éste, sería ideal para preguntarlo en una evaluación del tema de derivadas?*

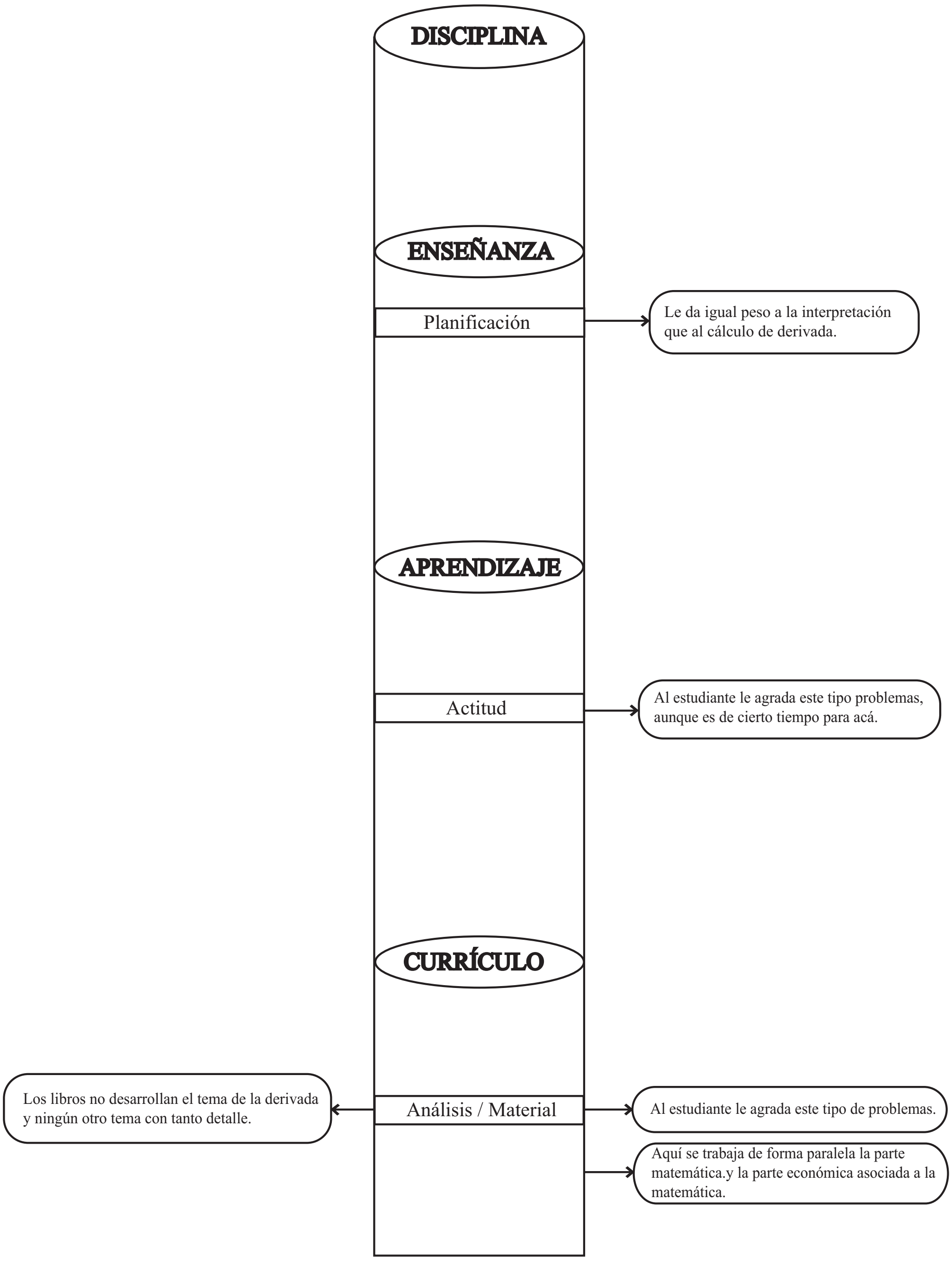
Grupo A

EP 3.3 MANUEL



Cuadro 4.16: Episodio 3.3 - Manuel

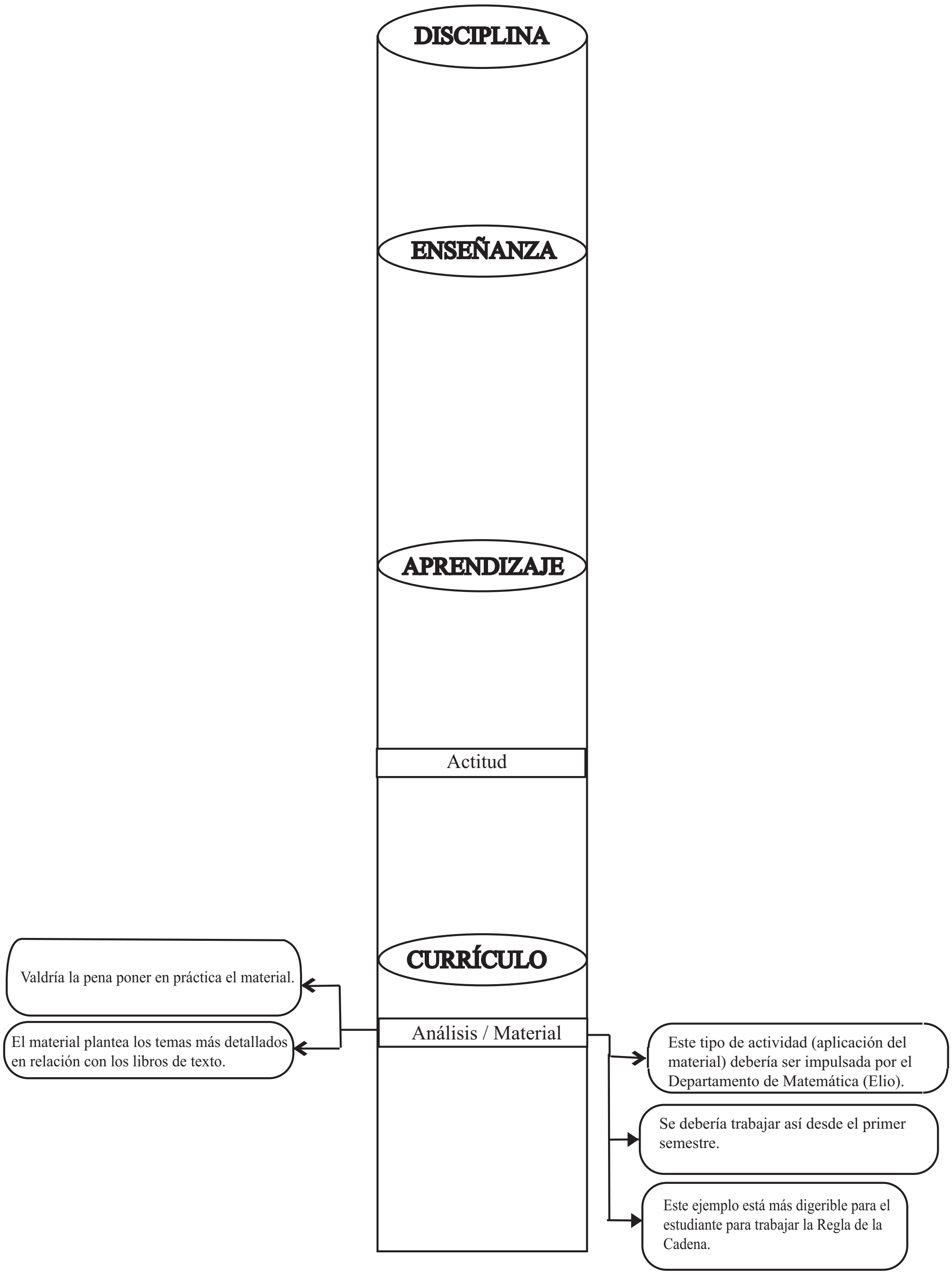
EP 3.3 RAMÓN



Cuadro 4.16: Episodio 3.3 - Ramón

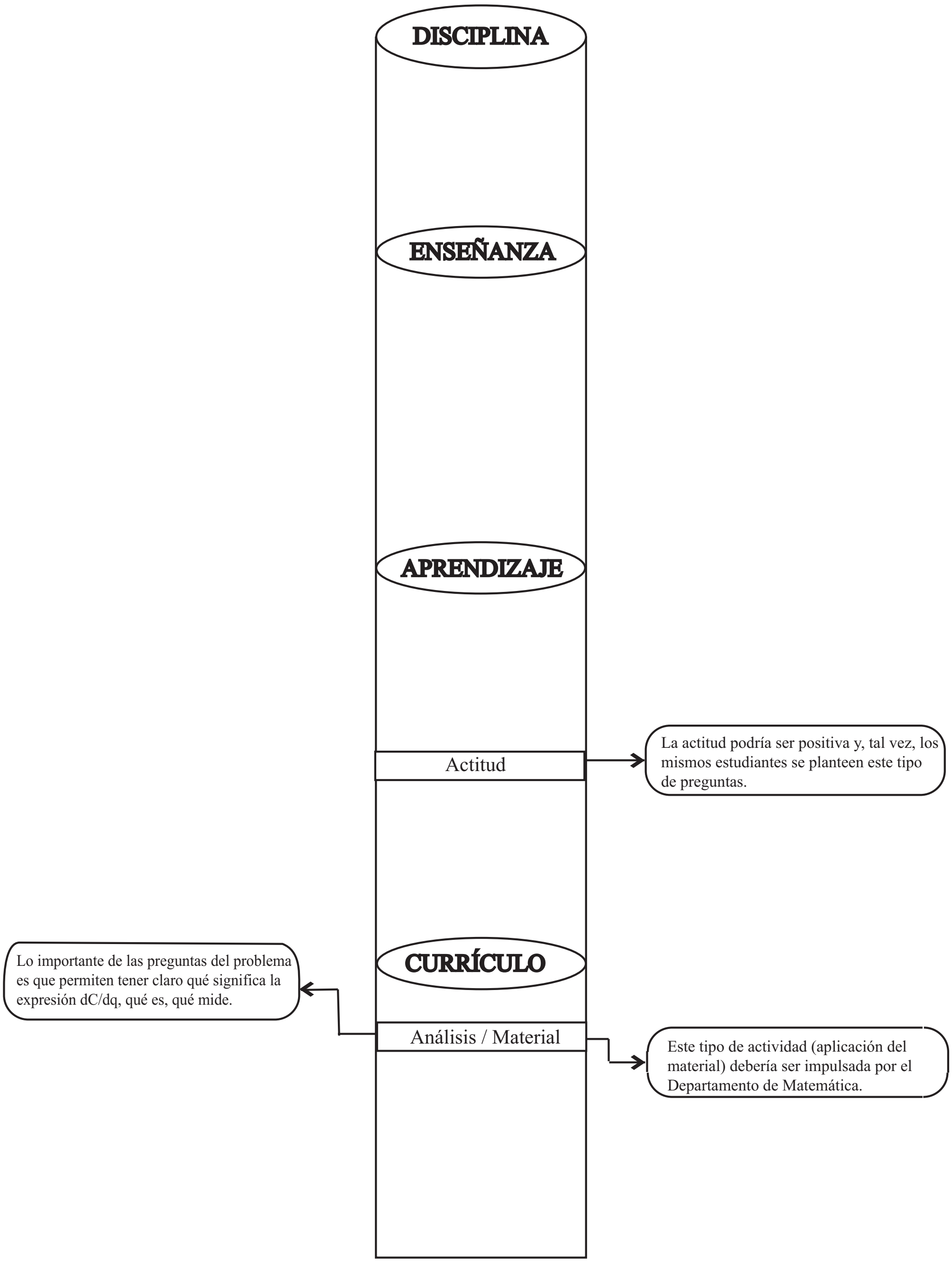
Grupo B

EP 3.3 ALEXIS



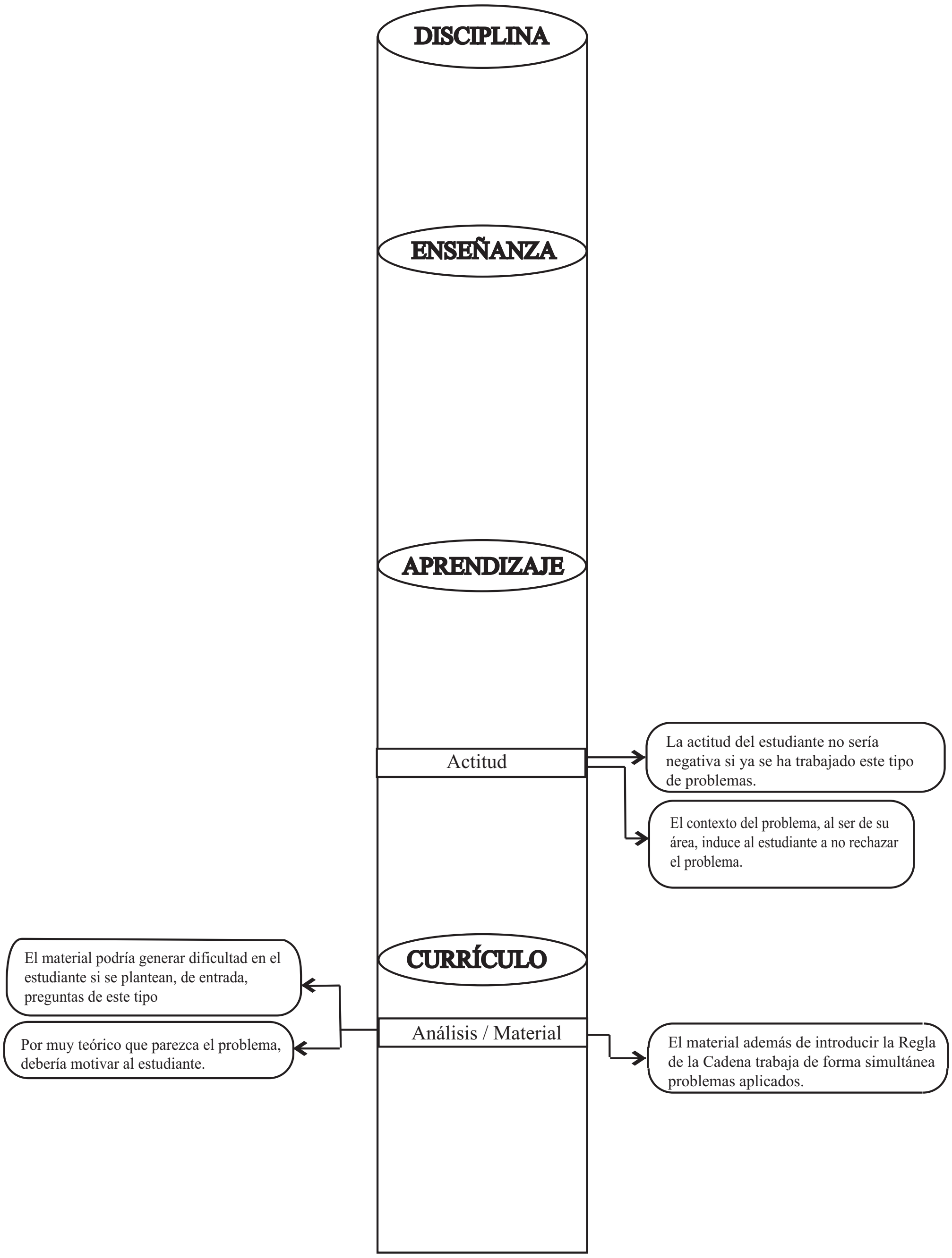
Cuadro 4.17: Episodio 3.3 - Alexis

EP 3.3 ELIO



Cuadro 4.17: Episodio 3.3 - Elio

EP 3.3 KENYA



Cuadro 4.17: Episodio 3.3 - Kenya

Resumen del análisis

Este episodio tiene unas características muy particulares en relación con los otros que ya hemos tratado; lo primero en destacar es lo corto del mismo, solamente tres preguntas se formulan durante la discusión del problema; por otra parte, el contenido del problema en sí obedece, fundamentalmente, a la interpretación de la derivada con un planteamiento eminentemente teórico, lo cual tiene como objetivo, en primer lugar, romper con la rutina que se ha seguido hasta ahora en el seminario; en general, todos los problemas han presentado las mismas características, además, que problemas como éste, en el que se insiste en la interpretación económica de la derivada, requieren de *conocimiento del contenido económico* por parte del profesor, para poder llevarlo al aula y discutirlo con los estudiantes.

En los programas oficiales de cálculo diferencial para las carreras de ciencias económicas se reserva un tema en el que se contemplan las aplicaciones de la derivada a la economía; interpretar la derivada en términos económicos y reconocer en qué unidades viene expresada la derivada, es la aplicación más inmediata que debe conocer el estudiante y, por supuesto, el profesor.

En tal sentido, el análisis de este episodio, en ambos grupos, lo enmarcamos en la categoría relacionada con el conocimiento curricular, aun cuando se realizan comentarios asociados a otras categorías como lo señalan los diagramas anteriores.

Conocimiento sobre el Currículo (Grupo A)
Las opiniones que los dos profesores expresan en este episodio apuntan hacia el estudiante, la notación empleada en el problema y sobre el material en sí. Al discutir sobre el problema, los profesores sostienen que la actitud del estudiante es de *"agrado"*, comenta Ramón, mientras que Manuel advierte que *"no rechazan este tipo de problema"*. Conocer al estudiante es un punto fundamental en la actividad docente, pero lo es más cuando hablamos de la EBP, ya que al llevar un problema al aula para ser discutido, y que el mismo sea aceptado por los estudiantes, permite generar un ambiente propicio de cara al debate que exige esta metodología de enseñanza; cuestión que no sería posible o, en todo caso, supondría un mayor esfuerzo si el estudiante rechaza de entrada el problema.

Ahora bien, pasemos a hablar del material en sí; Manuel, por ejemplo, entiende *"el material como una guía de estudio"* más que como un material para facilitar la enseñanza, mientras que Ramón, al comparar el material con los libros de texto, afirma que los segundos *"no desarrollan el tema de la derivada y ningún otro tema con tanto detalle"*. Estas reflexiones, aunque en cierta medida resultan contrarias, permiten validar el material e inducirnos a una revisión del mismo de cara a mejorarlo, puesto que nuestra propósito a futuro es el de producir un material con característica superiores a la de una "guía de estudio" y más aún, el de realizar una nueva revisión de los objetivos tanto de los libros de texto como de los programas oficiales, pero teniendo siempre presente las necesidades del futuro profesional. Por supuesto que todo esto forma parte de una segunda etapa que no está contemplada para ser desarrollada en este proyecto.

Conocimiento sobre el Currículo (Grupo B)
Las reflexiones de los participantes que se derivan de este episodio se centran en el material discutido, aunque la base de los argumentos es siempre el estudiante. Alexis, en el marco de la discusión, insiste en *"poner en práctica el material"*, *"se debería trabajar así desde el primer semestre"*. Por otro lado, destacamos de dos reflexiones de Kenya que guardan estrecha relación con la última frase citada de Alexis; ella advierte que *"la actitud del estudiante no sería negativa si ya se ha trabajado este tipo de problema"* (le recordamos al lector que el tema de la derivada corresponde al segundo semestre de las carreras objeto de estudio) y *"el material podría generar dificultad en el estudiante si se plantean, de entrada, preguntas de este tipo"*.

Es claro que intentar implementar una estrategia de enseñanza distinta a la tradicional y, además, trabajar con ésta a partir de un segundo semestre, y con un tema en particular, puede ir en detrimento del estudiante; es por ello que aclaramos una vez más que el tema de la derivada no es más que un medio para acercarnos a los participantes y, de esta forma, procurar validar el material como herramienta didáctica. En tal sentido, nos identificamos con ambos profesores cuando advierten sobre la conveniencia de trabajar de esta manera desde el inicio de carrera.

Recordemos un momento uno de nuestros objetivos, el cual consiste en *estudiar el papel del profesor frente a propuestas metodológicas alternativa para la enseñanza de las matemáticas*. Desde nuestro punto de vista y recurriendo al desarrollo de todos los episodios trabajados hasta el momento entendemos que estos tres profesores, aunque en menor medida Elio, apoyan la idea de poner en práctica este material; sin embargo, nuestro objetivo no consiste en que el profesor apoye o no esta herramienta, sino en los argumentos que utilicen en sus comentarios o reflexiones, permitiéndonos así ahondar en el CDC del profesor.

En este orden de ideas recurrimos nuevamente a posiciones de los participantes que entendemos como justificaciones para llevar el material al aula. Alexis sostiene que *"este ejemplo está más digerible para el estudiante para trabajar la regla de la cadena"*, además que *"el material plantea los temas más detallados en relación con los libros de texto"*; a esto agregamos la visión que tiene Kenya sobre el material discutido y, en particular, sobre el problema de este episodio: *"...además de introducir la regla de la cadena [se] trabaja de forma simultánea problemas aplicados [a la economía]"*. Finalmente, cerramos con la reflexión de Elio, quien argumenta *"lo importante de las preguntas del problema es que permiten tener claro qué significa* $\frac{dC}{dq}$*, qué es, qué mide..."*.

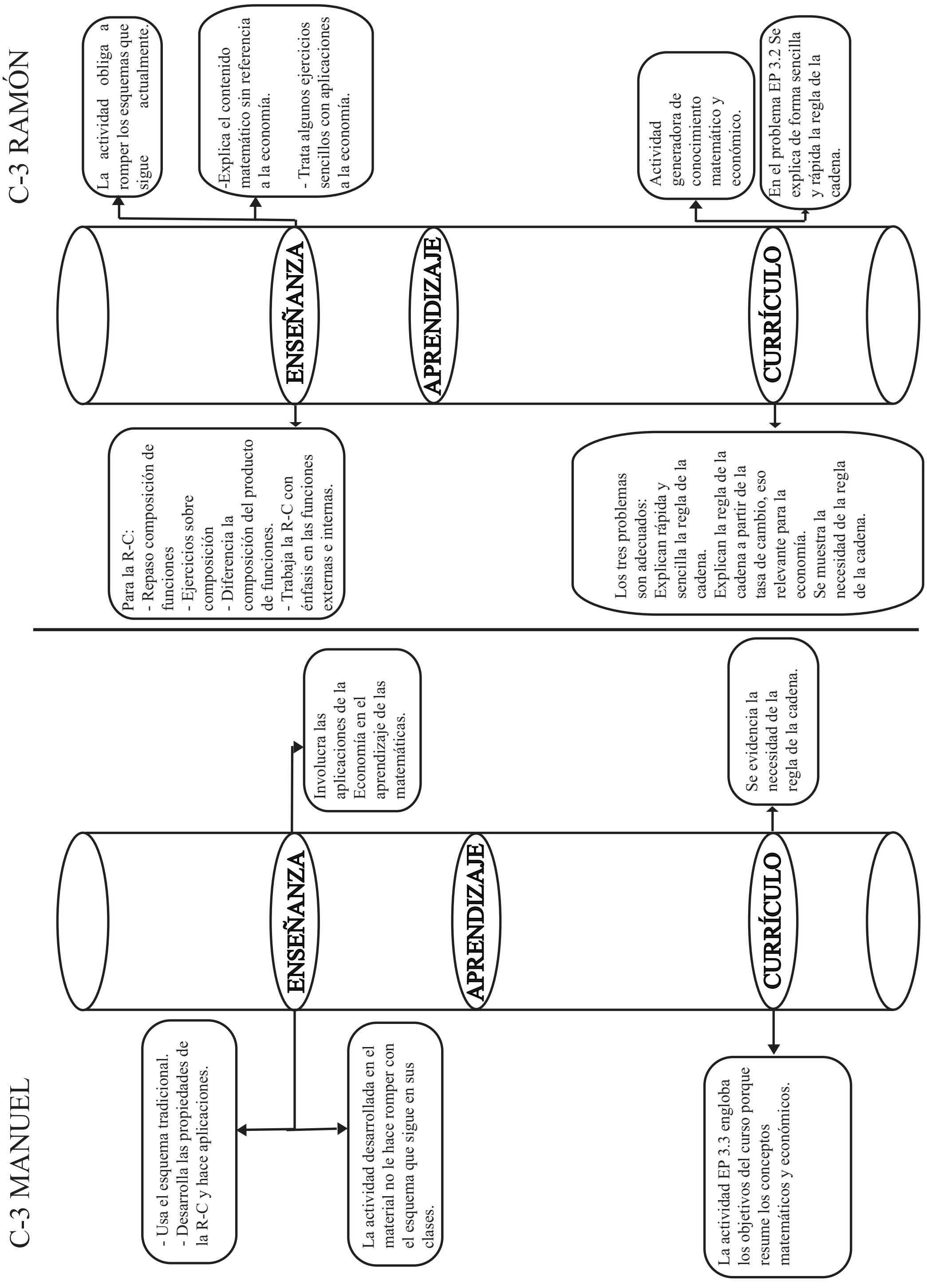
En el párrafo anterior se deja evidencia del CDC, por parte de estos profesores, en componentes como el conocimiento disciplinar y el curricular, los cuales, además de formar parte de nuestros objetivos, muestran características personales de cada participante.

Ya para cerrar esta parte del análisis invocamos a Elio, quien manifiesta que *"este tipo de actividad debería ser impulsado por el Departamento de Matemática"*, refiriéndose al seminario de discusión, propuesta que apoya abiertamente Alexis. En este caso destacamos el seminario como ambiente para el intercambio de ideas y opiniones en el que, sin lugar a duda, no hubiese sido posible obtener toda la riqueza de esta información en caso de haber trabajado con cada profesor por separado.

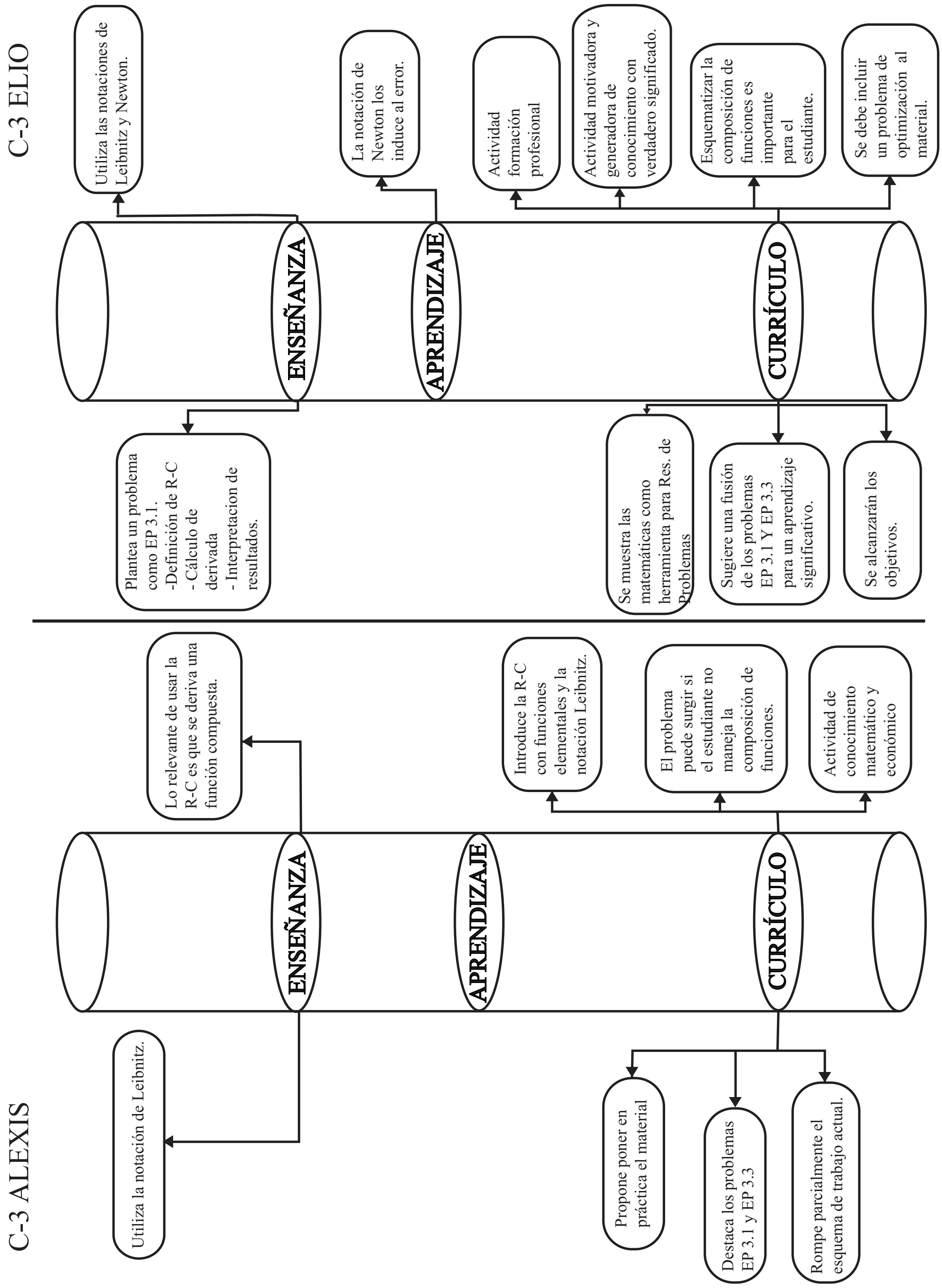
4.3.4. Cuestionario 3

En esta parte complementaria de la tercera sesión del seminario, el cuestionario C-3, analizamos las opiniones de los profesores en relación con lo que supone implementar o desarrollar una enseñanza basada en la estructura y el contenido que presentamos en el material discutido en el seminario. Sin embargo, de las seis preguntas que contiene este cuestionario, pondremos especial atención en tres de ellas (2a, 5a y 6a), ya que las mismas nos permitirán caracterizar a los participantes.

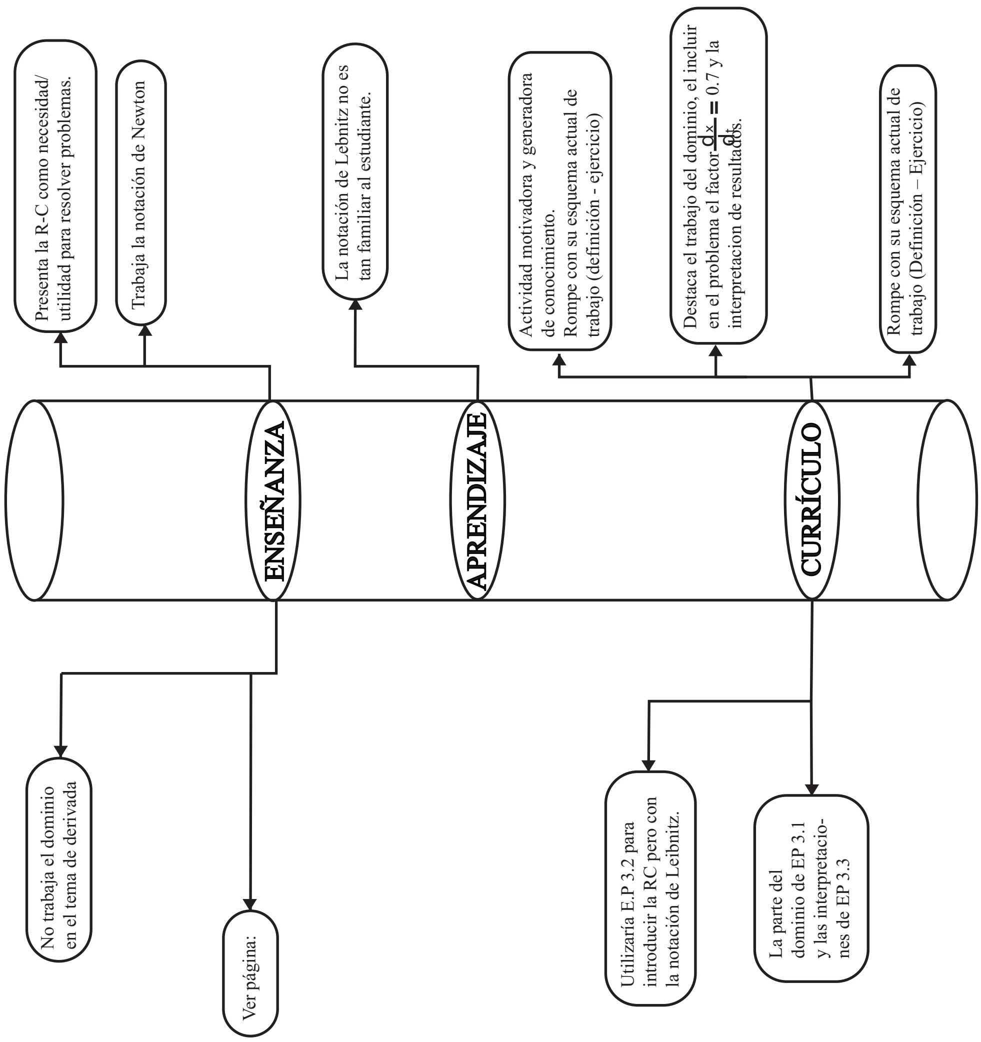
Como se pudo apreciar en los tres problemas discutidos en esta sesión del seminario que denotamos por S-3, el tema central es la regla de la cadena y es en este objeto matemático en el que basamos el análisis de este cuestionario. Es conveniente recordar que en el EP3-1 trabajamos con una función polinómica y la notación de Leibnitz, en el EP3-2 la función empleada fue la exponencial y la notación de Newton; finalmente, en el EB3-3 se trabajó un problema teórico donde la interpretación de la derivada es la pieza principal a estudiar y nuevamente se hace uso de la notación de Leibnitz.



Cuadro 4.18: Cuestionario 3 - Manuel y Ramón



Cuadro 4.18: Cuestionario 3 - Alexis y Elio



C-3 KENYA

Cuadro 4.18: Cuestionario 3 - Kenya

C-3 (Grupo A)

Al indagar sobre el problema de mayor relevancia didáctica, de los tres discutidos, Manuel sostiene que es el EP3-3, ya que el mismo *"resume los conceptos matemáticos y económicos"* mientras que Ramón detalla más su respuesta y afirma que *"los tres son adecuados"* y sus argumentos se pueden apreciar en su correspondiente diagrama. Ahora bien, en el caso de Manuel no debe resultar extraño que vea en este problema mayor relevancia didáctica para abordar el tema de la regla de la cadena, ya que este profesor nos ha dejado ver a lo largo de la aplicación del instrumento su condición de matemático, en lo que respecta a la enseñanza de las matemáticas, aun para estos cursos.

Ya en García (2004) se abordó el tema de las creencias y concepciones del profesor de matemáticas en esta misma área y la influencia que ejercen en el docente los profesores que ellos mismos tuvieron durante sus estudios de formación. A esto hay que agregar el hecho de no haber recibido una formación mínima en el área de economía y la falta de voluntad, por parte del profesor, al cambio en el campo de la práctica docente. Esto último lo sacamos a colación porque, aun cuando Ramón tiene una formación similar a la de Manuel, el primero ha reconocido que los mismos estudiantes lo han inducido a cambiar su modelo de enseñanza.

Ahora bien, los datos aportados por las dos preguntas que faltan por analizar guardan estrecha relación y por eso los tratamos en un sólo grupo; por otra parte, las preguntas están relacionadas con la enseñanza y el currículo. Ramón, por ejemplo, se muestra consistente en sus respuestas, ya que reconoce que sigue un esquema tradicional para la enseñanza de la derivada y la regla de la cadena en particular.

Cuando indagamos sobre el esquema que siguen para introducir y desarrollar la regla de la cadena nos encaminamos a profundizar sobre el perfil del profesor. Al respecto, Manuel reconoce abiertamente que sigue *"el esquema tradicional"* donde *"desarrolla las propiedades de la regla de la cadena y hace aplicaciones"*, es decir, lo que hemos venido señalando como teoría+aplicaciones. Esto corrobora, una vez más, que el libro de texto y el programa oficial son la base para la planificación de sus clases.

En ningún momento pretendemos decir que tal estructura no sea conveniente para la enseñanza; en todo caso, lo que sí queremos dejar claro es la contradicción de Manuel, cuando en el seminario afirma que sigue una enseñanza similar a la que plantea el material en discusión y en el cuestionario afirma algo distinto. Más aun, en el mismo cuestionario también se contradice cuando afirma que este tipo de actividad, como la reflejada en el material, *"no"* le obliga a romper con su actual esquema de enseñanza. En todo caso, nos permitimos sospechar, en cierta medida, que esta posición que mantiene Manuel podría ser generada o propiciada por el seminario, en virtud de la presencia de otro colega de su propio departamento.

La situación de Ramón es totalmente distinta, puesto que reconoce que sigue una enseñanza tradicional, como lo refleja el diagrama correspondiente y que, además, lo ratifica en el momento de reconocer que este tipo de actividad *"sí obliga a romper mi esquema de exposición, porque lo que he hecho siempre es que explico primero el contenido matemático, sin hacer referencia alguna a la Economía"*. No obstante, lo relevante aquí no es la consistencia que muestra este profesor a lo largo de su discurso en el desarrollo de esta actividad, sino que el mismo se muestra ganado al cambio. Recordemos que él mismo dice que ha cambiado su modelo de enseñanza por sugerencia de los mismos estudiantes. Situación esta que no suele ser habitual en un profesor.

Una pregunta natural que puede surgir es ¿qué relación tiene todo esto con el CDC, por ejemplo? Para dar respuesta a esta interrogante recurrimos a las tres preguntas que resaltamos en esta parte del cuestionario y en las que se muestra evidente relación con el conocimiento sobre la enseñanza y el contenido curricular, en particular, con el "qué" y "cómo" enseña y su posición frente al material.

C-3 (Grupo B)
Los profesores de este grupo, cuando atienden al cuestionario en relación a la relevancia didáctica de los tres problemas discutidos, consideran que los problemas de los episodios EP3-1 y EP3-3 poseen características idóneas para trabajar la regla de la cadena y cubrir los objetivos propuestos para el curso; entre otras cosas, destacan la notación de Leibnitz como relevancia principal. Tan significativa resulta esta notación que Kenya *"optaría por el [EP3-2] pero incorporando la presentación de la regla de la cadena bajo la notación de Leibnitz..."*, ya que le parece adecuado para trabajar problemas económicos, no obstante, esta misma profesora advierte que trabaja la notación de Newton *"porque los estudiantes están más familiarizados con esta notación´´*.

El punto a destacar en este caso es la notación por la que se inclinan para desarrollar el tema de la regla de la cadena; los tres justifican esta notación tomando en cuenta a sus estudiantes, situación esta que viene siendo sistemática en las opiniones de los participantes en la mayoría de los casos; Elio, por ejemplo, sostiene que *"la notación de Newton les induce [a los estudiantes] al error"*. Es claro que si el marco referencial es el estudiante, podemos inferir la proximidad de los profesores con el estudiante, en otras palabras, estamos hablando de conocimiento del contenido sobre el aprendizaje.

Dejamos atrás la relevancia didáctica de los tres problemas discutidos y pasamos a estudiar el esquema utilizado por los participantes para introducir y desarrollar la regla de la cadena en el aula de clases. En este punto debemos subrayar la variedad con la que atienden los profesores esta parte del cuestionario y que es, en general, una característica sistemática en este grupo. Cuando nos referimos a variedad lo hacemos en el sentido de diversidad de puntos de vista y profundidad como abordan el tema los participantes.

Ya dijimos que Alexis, por ejemplo, atiende de forma escueta a las preguntas del cuestionario; por su parte Elio, atiende a estas preguntas con más interés y desarrolla sus respuestas, permitiéndonos ahondar en el tema objeto de estudio. Kenya, mientras tanto, es aún más cuidadosa en sus respuestas y sus reflexiones en el tema tratado suelen ser extensas y pormenorizadas, contribuyendo de esta manera a un estudio más profundo de sus comentarios. Curiosamente, esta característica de los tres participantes es similar al participar en el seminario.

Comenzaremos por comentar el esquema que sigue Alexis, que dicho sea de paso no presenta un esquema como tal, sino que inferimos de su respuesta que introduce la regla de la cadena de forma tradicional, utilizando la notación de Leibnitz y luego pasa al tema de aplicaciones. Sin embargo sostiene que este tipo de actividad no le obliga a *"romper del todo"* el esquema que sigue actualmente. Más allá de la contradicción en la que cae Alexis, lo relevante a destacar es el perfil que como matemático nos muestra este profesor en su labor docente. Ahora bien, cuando este participante advierte que trabaja las aplicaciones como los ejemplos EP3-1 y EP3-3, pero sin entrar en mayor detalle y tomando en cuenta los comentarios de episodios y cuestionarios anteriores, nos atrevemos a afirmar que este profesor posee poco dominio del contenido económico y es por ello que sus respuestas en esta materia las aborda de forma superficial.

Elio nos presenta un esquema formalista para el desarrollo de la regla de la cadena en el que enfatiza en la interpretación de *"los resultados obtenidos"*; es decir, un perfil formalista como docente. Pero lo interesante para nosotros, en este caso, no es únicamente el perfil de Elio en su labor como docente, sino también la visión que él tiene sobre el material como estrategia de enseñanza, puesto que considera que seguir una metodología como la que sugerimos no le obliga a romper con el esquema que actualmente pone en práctica en el aula de clases. Elio sostiene que enfoca sus clases de forma similar al material, aunque el esquema que sigue, tanto para la regla de la cadena como para el desarrollo del tema de la derivada, en general, es de corte tradicional y formalista, lo que refleja un grado alto de inconsistencia en sus respuestas.

Finalmente cerramos con Kenya, quien muestra un esquema pormenorizado sobre cómo desarrolla la regla de la cadena y que podemos ver en las **páginas 572** y **573**, en el que además se aprecia la estructura tradicional para la enseñanza de esta regla de derivación. Sin embargo, lo interesante a destacar de Kenya es el reconocer que al implementar en el aula de clases un material como el discutido, le obliga a romper con su esquema de enseñanza actual, cuestión esta que no fue reconocida por los otros dos miembros de este grupo. Conviene además recordar que de estos tres profesores, la única que ha mostrado conocimiento sobre la EBP es Kenya.

4.4. Análisis de la sesión 4

En la presente sesión se discuten y analizan dos problemas enmarcados en el análisis y la interpretación económico-matemática de la derivada, en tal sentido, son problemas un poco más exigentes que los discutidos en las sesiones anteriores. En estos problemas la contextualización económica juega un papel fundamental, ya que le da un peso significativo a las matemáticas como herramienta para entender y resolver problemas económicos.

En líneas generales, en ambos problemas se estudian las mismas componentes del CDC y sus respectivas subcategorías. Cerramos con estos problemas con el propósito de hacer un recorrido por lo discutido hasta ahora en las distintas sesiones.

4.4.1. Episodio 4.1: Análisis e interpretación Eco-Mat 1, contextualización, valores extremos, optimización

El valor de cierto cultivo de frutas (en dólares) es $\mathcal{V} = \mathcal{A}(1 - e^{-kI})$ donde $\mathcal{A}$, k son constantes positivas e I es el número de libras por hectárea de insecticida con que se fumiga el cultivo. Si el costo de fumigación está dado por $C = BI$, con B una constante (precio del insecticida).

Pregunta 1: Encuentre el valor de I que hace a $\mathcal{V} - C$ máxima.

Respuesta: Como $\mathcal{V} = \mathcal{A}(1 - e^{-kI})$, se tiene que $\mathcal{V} - C = \mathcal{A}(1 - e^{-kI}) - BI$.

Así,

$$\frac{d}{dI}(\mathcal{V} - C) = \mathcal{A}k(e^{-kI}) - B$$

Por lo tanto, para $I = \frac{-1}{k}\ln(\frac{B}{\mathcal{A}k})$, $\mathcal{V} - C$ alcanza un máximo.

Microepisodio 4.1.1: El problema aquí planteado exige más conocimientos que los planteados hasta el momento, en este caso se obliga al estudiante a manejar herramientas de análisis matemático, trabajar con funciones exponenciales, entre otras. Aún cuando el contexto es económico, todo el planteamiento y resolución del mismo (hasta aquí) es matemático.

¿Qué aportes tiene este tipo de problemas en el aprendizaje de los estudiantes?

Microepisodio 4.1.2: *¿Qué dificultades supone este tipo de problemas para el estudiante?*

Pregunta 2: ¿Para las siguientes condiciones, $0 < \mathcal{A}k < B$ y $0 < B < \mathcal{A}k$, cuál de las dos le da sentido a la situación anterior? Justifique su respuesta.

Respuesta: En el caso en que $0 < \mathcal{A}k < B$, se tiene que $0 < 1 < \frac{B}{\mathcal{A}k}$. Por lo tanto, $I < 0$. Aunque desde el punto de vista matemático, este resultado es válido; desde el punto de vista económico no lo es, puesto que I representa el número de libras por hectáreas.

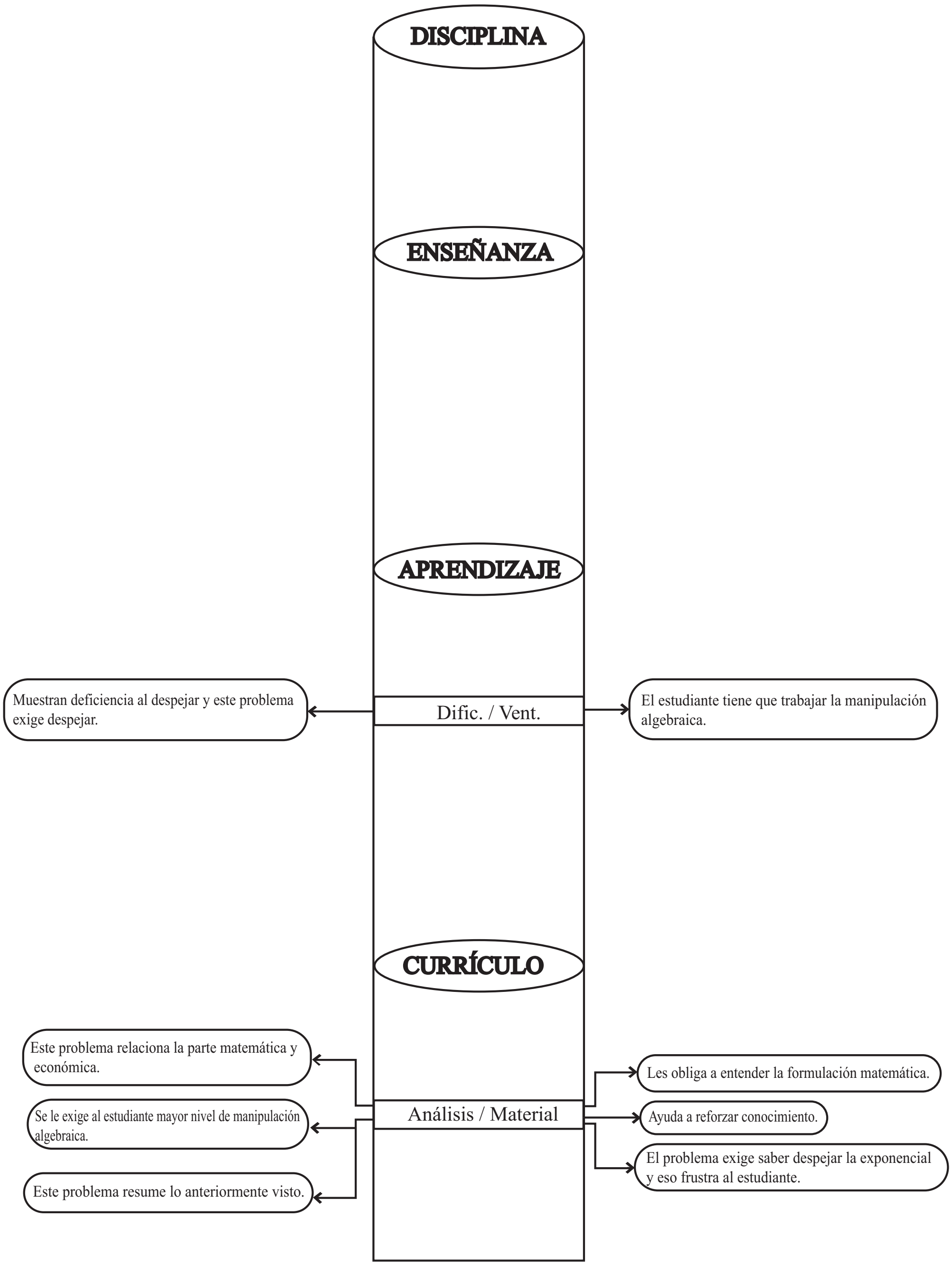
En el caso en que $0 < B < \mathcal{A}k$, se satisface $0 < \frac{B}{\mathcal{A}k} < 1$. Por lo tanto, $I > 0$ y esto tiene sentido tanto matemático como económico.

Microepisodio 4.1.3: En esta tarea aparecen condiciones algebraicas para estudiar el comportamiento de la función y su sentido dentro de dos contextos, no obstante, me he encontrado con profesores de cálculo que no comparten nuestra opinión, , en el sentido de relacionar ambos contextos para promover y consolidar el aprendizaje en los estudiantes.

Relacionar tareas teóricas contextualizadas de derivada y manipulaciones algebraicas, ¿qué incidencias tienen en el aprendizaje matemático y económico en los estudiantes?

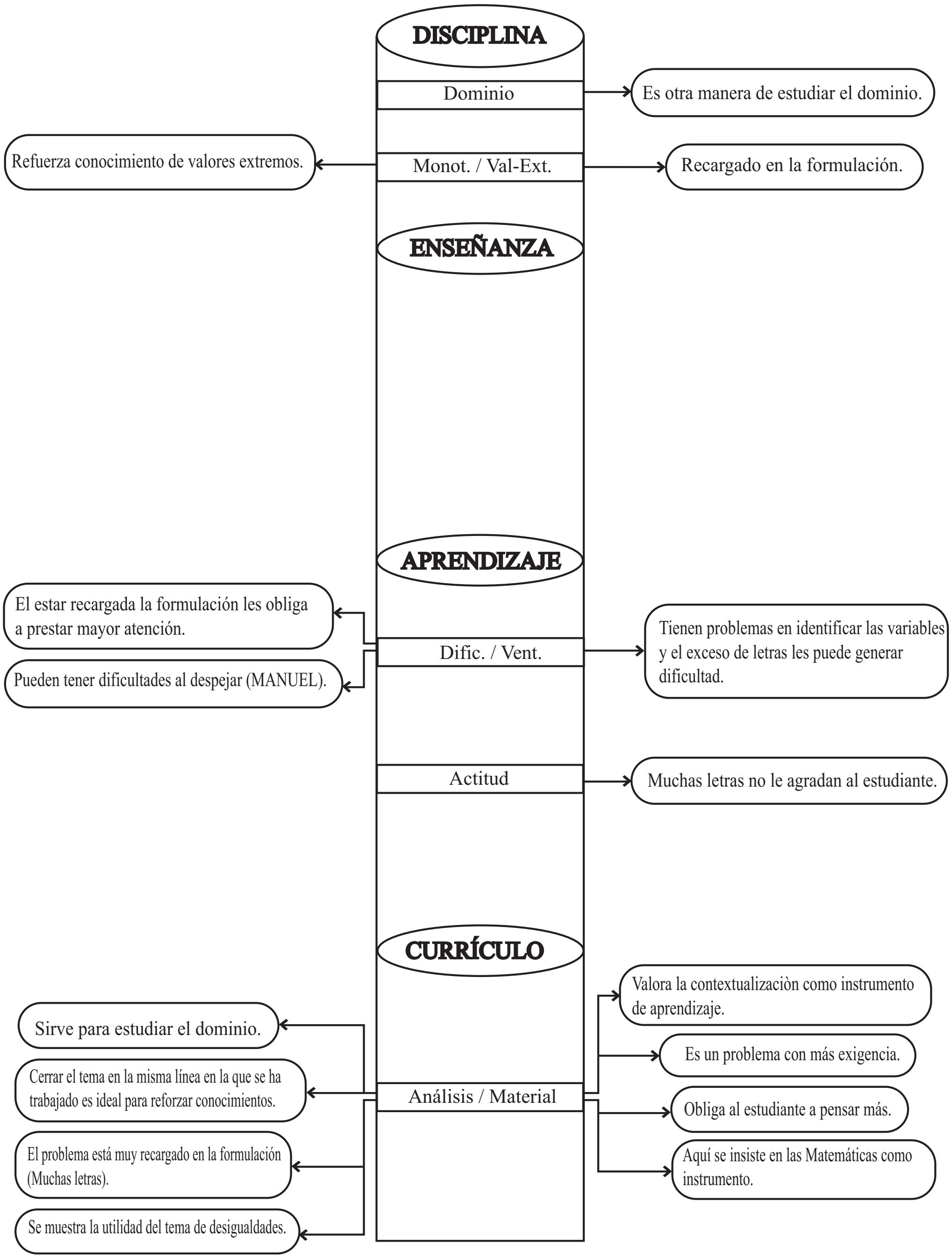
Grupo A

EP 4.1 MANUEL



Cuadro 4.19: Episodio 4.1 - Manuel

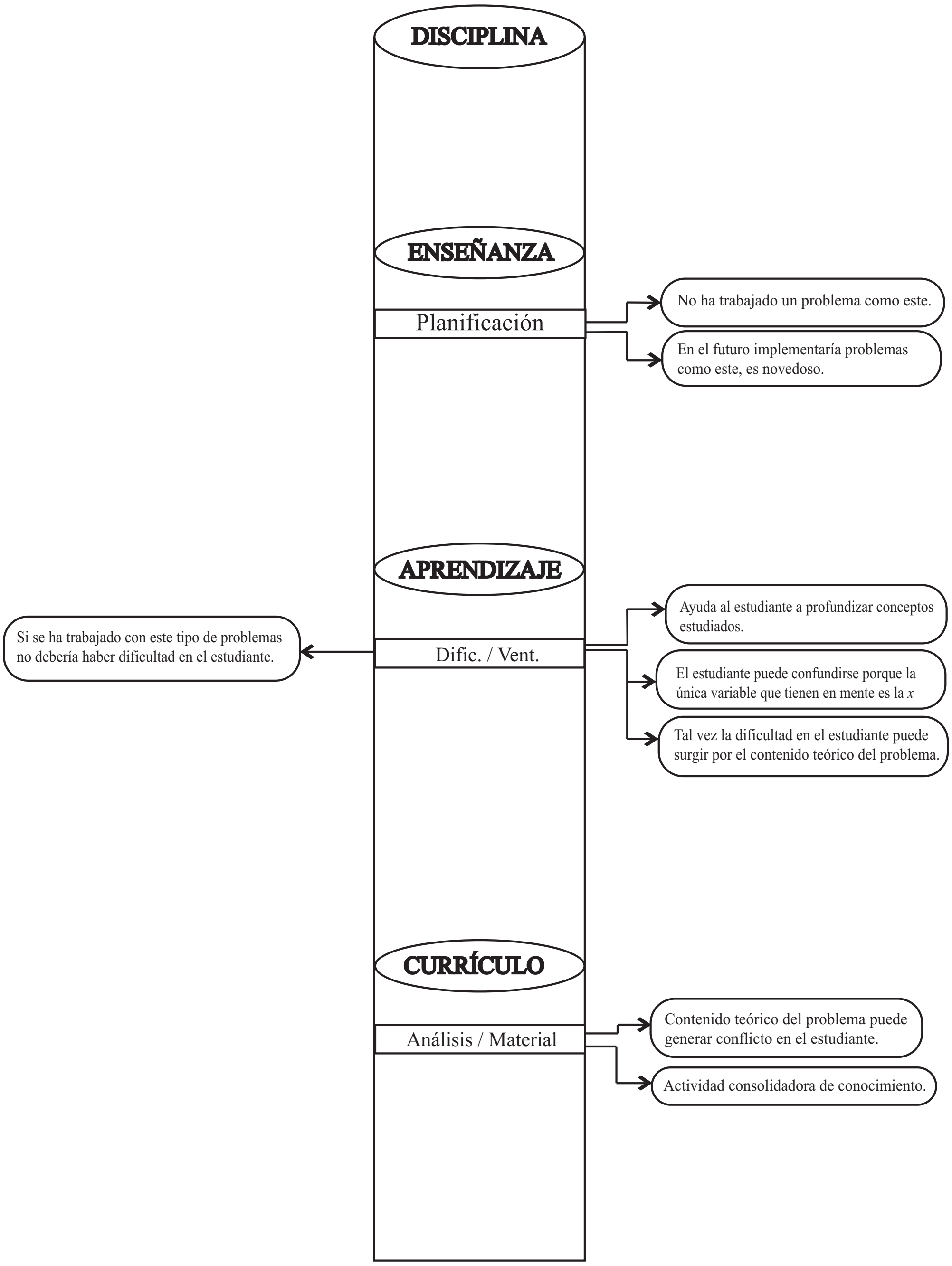
EP 4.1 RAMÓN



Cuadro 4.19: Episodio 4.1 - Ramón

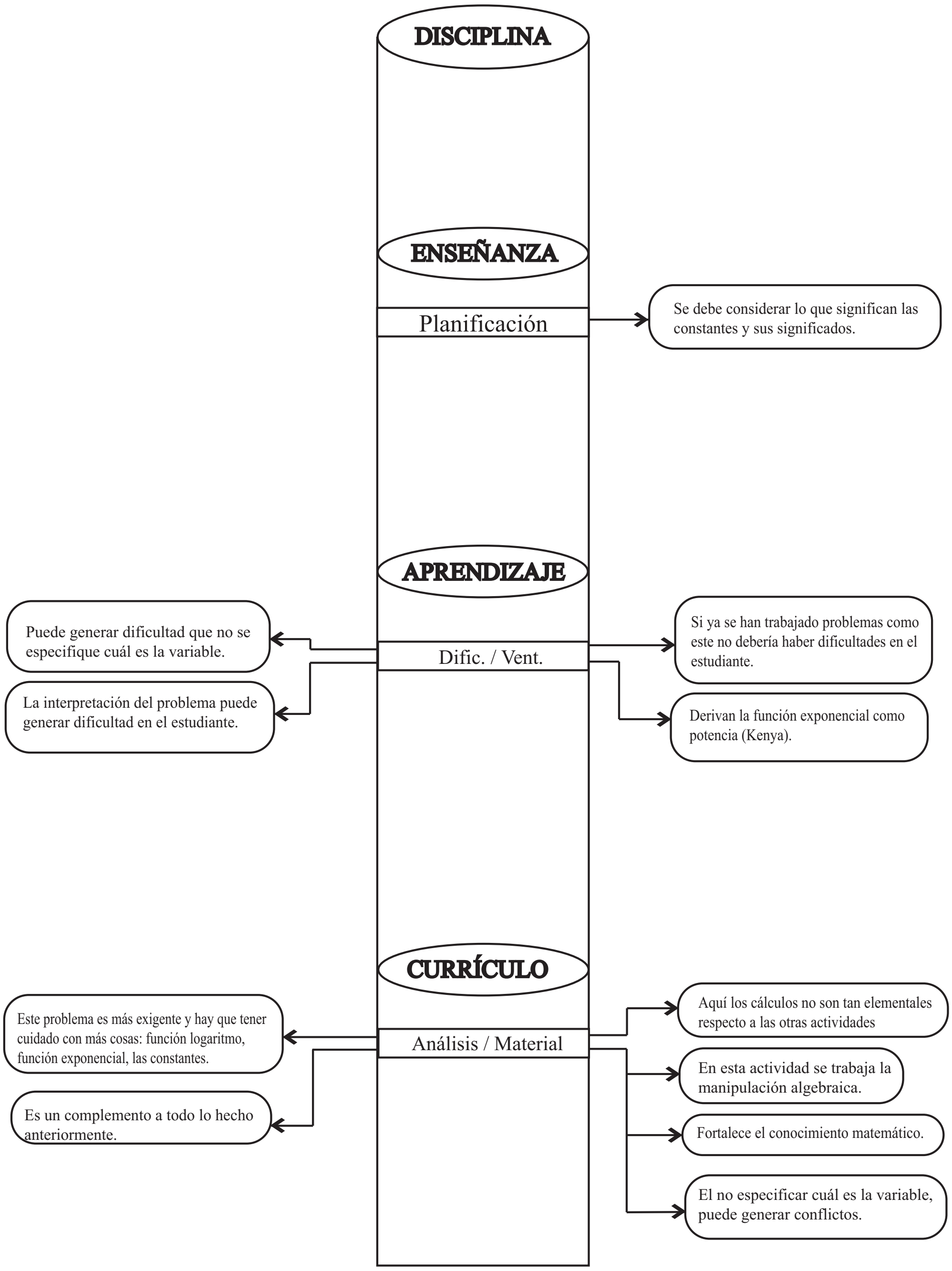
Grupo B

EP 4.1 ALEXIS



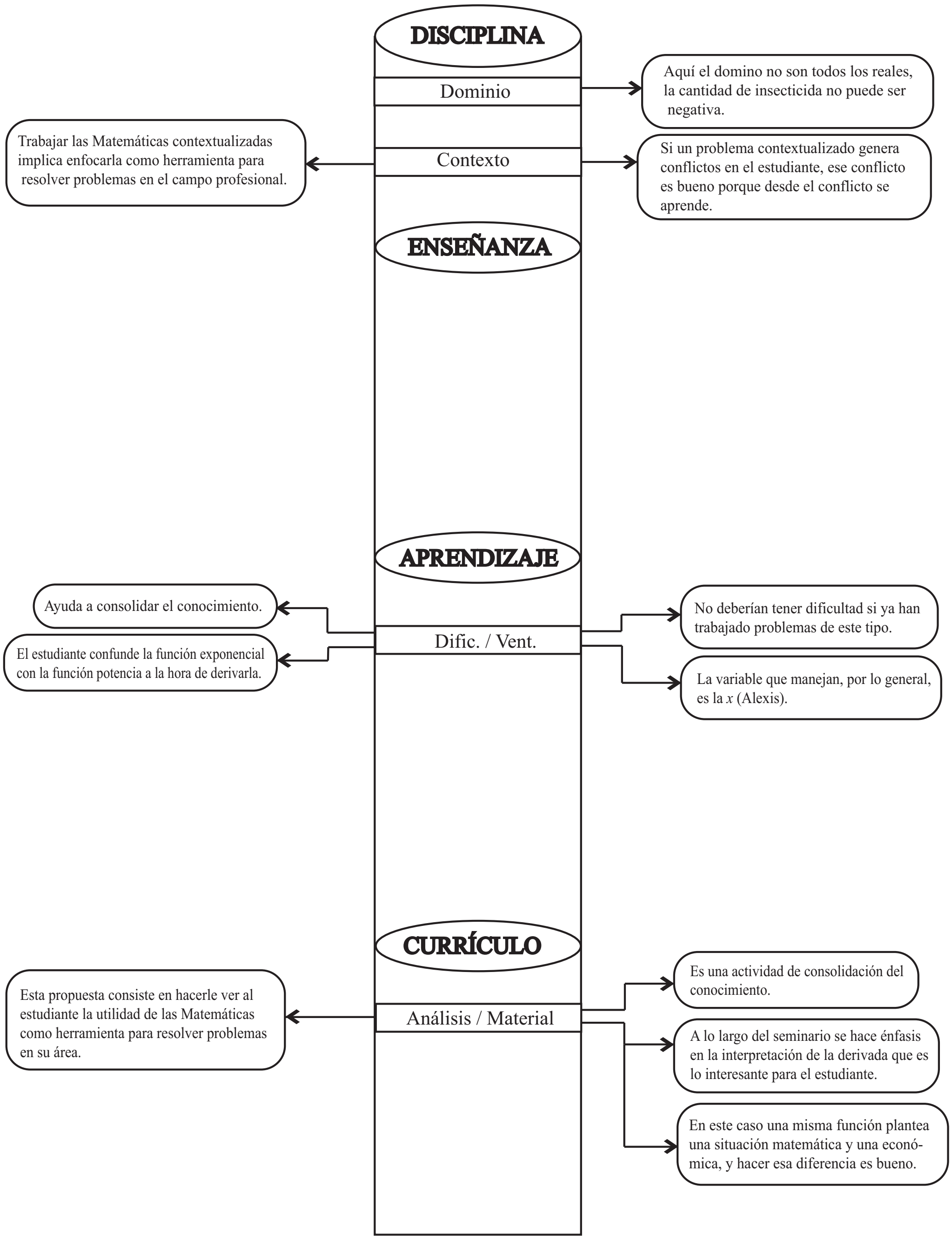
Cuadro 4.20: Episodio 4.1 - Alexis

EP 4.1 ELIO



Cuadro 4.20: Episodio 4.1 - Elio

EP 4.1 KENYA



Cuadro 4.20: Episodio 4.1 - Kenya

Resumen del análisis

Antes de pasar al análisis de este episodio comenzaremos por hacer una observación: como se puede apreciar, en las preguntas formuladas para la discusión en el seminario, las tres están enmarcadas en el estudiante o, mejor dicho, en el aprendizaje; por tal razón, el análisis va dirigido hacia el conocimiento sobre el aprendizaje y, por supuesto, hacia el conocimiento curricular, en particular, en lo que respecta al material objeto de la discusión.

En este sentido, recordamos que uno de nuestros objetivos consiste en *detectar hasta qué punto el profesor es consciente de las dificultades específicas de los estudiantes para un determinado tema matemático*; en este caso el problema en discusión requiere o exige para su estudio, tal como lo señaláramos en la parte introductoria del mismo, de un grado mayor de conocimiento respecto a los anteriores problemas discutidos.

Conocimiento sobre el Aprendizaje (Grupo A)
En atención a los comentarios surgidos durante la sesión, ambos profesores están de acuerdo en que este problema es más exigente que cualquiera de los anteriores, tanto por la formulación matemática como por el contenido económico. Ramón, en un principio, objeta el enfoque teórico del problema ya que al estar recargado de texto genera una actitud negativa en el estudiante, pero más adelante afirma que *"el estar recargada la formulación, les obliga a prestar mayor atención"* y, finalmente, concluye que *"cerrar el tema [de la derivada] en la misma línea en la que se ha trabajado es ideal para reforzar conocimientos"*.

Manuel, por su parte, observa que el problema exige al estudiante *"trabajar la manipulación algebraica"*; en particular, se refiere al caso concreto en el que se tiene que *"despejar el argumento de la función exponencial"*; en relación a este punto, el profesor en cuestión afirma que esto *"les frustraría"*, ya que los estudiantes *"muestran deficiencia al despejar"*, punto en el que también coincide Ramón.

Aquí hay dos subcategorías que se conjugan en las reflexiones de ambos profesores, estas son, dificultades/ventajas y actitud del estudiante frente a un problema tipo. En tal sentido, conviene recurrir a opiniones de ambos profesores derivadas del seminario y los cuestionarios, ya que han dejado ver que el esquema de trabajo que llevan al aula de clases dista de forma significativa del esquema y el contenido del material de discusión. Ya mencionamos en el marco teórico, pág. 64, que el estudiante de universidad está acostumbrado a seguir una enseñanza tradicional (Zabalza, 2003), situación que es totalmente aplicable en el contexto en el que se desarrolla este trabajo, lo que significa que un problema de esta naturaleza y, sobre todo, con el tratamiento que nosotros le damos, al parecer, estos profesores no lo llevan al aula de clases, aun cuando son problemas tomados de los libros de texto sugeridos en los programas oficiales o, en todo caso, en algún momento los trabajaron y ahora da la impresión que no lo hacen.

Lo anterior lo sacamos a colación puesto que nosotros entendemos el proceso de aprendizaje, de la siguiente manera, *"...el aprendizaje ocurre a través de procesos activos en un contexto y con una actividad..."* (Climent, 2002, p. 94), en nuestro caso estaríamos hablando del contexto matemático-económico y de la EBP como *"actividad"* o estrategia metodológica de enseñanza. En otras palabras, nosotros apostamos por una enseñanza dinámica, en la que el estudiante juegue un rol protagonista y que se sumerja directamente en la contextualización matemático-económica.

En resumen, lo que pretendemos destacar de todo esto es que el aprendizaje que se puede generar en los estudiantes depende tanto de la actitud como de las dificultades que puedan generar un problema en particular. Está claro que los profesores tienen conocimiento sobre sus estudiantes, aun si consideramos que tanto la actitud como las dificultades que puedan generar problemas con características y enfoque particulares obedece, en todo caso, al momento en el que se trabajan los mismos; es decir, si desde el inicio de la carrera se abordasen problemas de esta naturaleza, probablemente la posición del estudiante sería otra. En tal sentido, esto nos conduce a hablar de la formación del profesor.

Esta formación debe ir en las dos direcciones de la cita reciente de Climent (2002), es decir, *contexto* y *actividad*; en cuanto a lo primero, apostamos por una formación básica en materia de economía, que permita al profesor de matemáticas de universidad manejar los fundamentos económicos desde el punto de vista de las matemáticas. De igual manera apostamos por una formación del docente en materia de estrategias didácticas que involucren al estudiante en una labor dinámica, donde el aprendizaje de las matemáticas esté fuertemente asociado al campo de la economía.

En otro orden de ideas, tanto Manuel como Ramón destacan la importancia de la *manipulación algebraica* y las *desigualdades* cuando abordamos el tema del aprendizaje matemático-económico; sin embargo, es Ramón quien entiende el trabajo con las desigualdades como una *"herramienta"* matemática para estudiar, por ejemplo, el dominio de una función desde el punto de vista económico. Sin embargo, ambos profesores poco aportan con sus respuestas y simplemente entienden esta tarea como actividad de consolidación del aprendizaje, pero no hablan de las incidencias (positivas o negativas) en el aprendizaje mediante la discusión de un problema como este cuando se estudian cada una de las desigualdades. En todo caso, sólo se limitan a estar de acuerdo con la actividad del material. De acuerdo con estos comentarios, nos permitimos deducir que estos dos profesores no trabajan un problema como el de la discusión o similar a éste; sin embargo, ambos docentes han manifestado que trabajan problemas de aplicaciones a la economía en el aula de clases, pero de los discutidos hasta ahora, ninguno de ellos ha expresado que trabaje con alguno de estos problemas o similares.

Lo relevante a destacar de todo este último comentario tiene que ver con la actitud de estos profesores frente a cada uno de los problemas discutidos, tanto por su contenido como por la estructura metodológica seguida en cada uno de ellos. La aprobación del material por parte de cada uno de estos profesionales no sólo nos estimula a continuar con el desarrollo del mismo, sino que, además, demuestra que están abiertos a un proceso de cambios en lo que respecta al ejercicio de su labor docente.

Conocimiento sobre el Aprendizaje (Grupo B)
Si atendemos a los tres diagramas de cada uno de los profesores, sus opiniones se centran en las dificultades que implica trabajar con un problema como el que está en discusión, sin embargo hay que resaltar que también se les pregunta sobre los aportes o incidencia de un problema como este en el aprendizaje de los estudiantes; aun así, únicamente lo entienden como actividad consolidadora del conocimiento.

Dentro de las dificultades específicas que supone para el estudiante trabajar un problema como el del EP4-1, enumeramos las siguientes, en las que coinciden al menos dos profesores en cada una de éstas:

1. El que no aparezca de forma explícita la variable independiente de la función, por lo general es la *"x"* con la que trabajan.

2. El estudiante confunde la función exponencial con la función potencia a la hora de derivar.

3. El contenido teórico del problema.

Esto nos revela cuánto conocen los profesores a sus estudiantes, lo cual forma parte de lo que hemos llamado conocimiento sobre el aprendizaje; pero profundicemos un poco más en las opiniones de los participantes, en especial, en lo dicho por Alexis, quien reconoce abiertamente no haber trabajado problemas de esta naturaleza en cursos de cálculo para economía, aunque sí para estudiantes de ingeniería; él fundamenta sus argumentos sobre supuestos y en ningún momento se derivan de la práctica docente. Los otros dos profesores aun cuando no dicen que no trabajan este tipo de situaciones problemáticas en sus clases, sospechamos que, en virtud de los episodios y cuestionarios anteriores, no las implementan, hemos visto que ellos siguen una enseñanza clásica (teoría+aplicaciones) y en el caso de Elio, ya este profesor manifestó francamente que su formación en el área económica es poca.

Si volvemos nuevamente al primer y tercer punto, donde se hace mención al tema de la variable y el contenido teórico del problema, respectivamente, podemos aproximarnos al *"qué"* enseñan estos profesores a sus estudiantes, ya que de acuerdo con opiniones como las de Alexis (y que comparte Kenya): *"...la única variable que tienen en mente [los estudiantes] es la x..."*, esto nos lleva a suponer que esto ocurre porque es la <u>única</u> letra utilizada por estos profesores o, más aún, es la única que han trabajado los estudiantes desde el primer curso. En este caso, volvemos a hablar del aprendizaje en el sentido de Climent (2002), es decir, contexto y actividad. Si nos referimos a lo primero, no queda duda que el hecho de que el estudiante maneje una única letra como variable muestra lo reducido del contexto en el que se trabaja; cuestión esta que incide en lo segundo, puesto que al trabajar en un contexto reducido, suponemos que la actividad desarrollada en el aula de clases para lograr un aprendizaje efectivo también lo es.

Conocimiento sobre el Currículo (Grupo A)
Aun cuando los comentarios relacionados con el material son todos favorables, hay una opinión de Ramón que nos da a entender que un problema como el EP4-1 no lo trabaja en clase; él afirma que *"el problema está muy recargado en su formulación"*, refiriéndose a que tiene *"muchas letras"* y eso genera una actitud negativa en el estudiante. Sobre este punto volvemos a señalar que nuestra propuesta va dirigida al trabajo con este tipo de problemas desde el inicio de carrera. Sin embargo, lo que hay que destacar de este profesor es que conoce la posición del estudiante frente a situaciones problemáticas como la discutida; aun así no lo descarta del todo, de lo que podemos inferir que no está cerrado a un enfoque como el propuesto por nosotros, algo característico en este profesor a lo largo de la aplicación del instrumento.

Ahora bien, pasando a los aspectos didácticos que los participantes destacan positivamente del material, señalamos lo siguiente: ambos observan que este problema exige más, desde el punto de vista cognitivo, en relación con los anteriores a la hora de abordarlo; en consecuencia, Ramón afirma: *"...obliga al estudiante a pensar más..."*, *"...se insiste en las Matemáticas como instrumento..."*, pero al mismo tiempo, Manuel sostiene que *"...ayuda a reforzar el conocimiento..."*, *"se le exige al estudiante mayor nivel de manipulación algebraica..."*.

Cuando un profesor toma la decisión de incluir un problema dentro de su planificación docente, es porque éste ve características de distinta índole en todo lo que significa el proceso de enseñanza-aprendizaje. En particular, nosotros consideramos que el profesor de matemáticas de universidad para carreras como Economía o Administración de Empresas, siempre que considere la contextualización como herramienta didáctica, tiene que tener presente la interdisciplinariedad. En el caso de Ramón y Manuel, ambos se limitan a resaltar el contenido matemático y lo que ello supone para el estudiante, dejando a un lado el tema económico.

Si ponemos la lupa en estas opiniones o en cualquier otra de las que aparecen en los diagramas respectivos, se puede apreciar que casi todas están asociadas al estudiante, este tipo de argumentación viene siendo recurrente a lo largo de la discusión del material. Resulta relevante para nosotros el hecho de que los comentarios se fundamentan en el estudiante, ya que de manera indirecta muestran el conocimiento que tienen ambos profesores sobre sus alumnos. Hecho relevante dentro del CDC y en particular, a la hora de la planificación de la clase, por ejemplo. Zabalza (2003) señala que los profesores toman en cuenta para la planificación de sus clases, entre otras cosas, las conjeturas que estos se hacen en torno a sus estudiantes y, en general, sobre la información que dispone el docente sobre sus estudiantes.

Conocimiento sobre el Currículo (Grupo B)
Tal como lo reflejan los diagramas de estos tres profesores, el principal aporte de este problema y en eso coincide el grupo en pleno, tiene que ver con el aprendizaje del estudiante; por ejemplo, Kenya lo entiende como *"...actividad de consolidación del conocimiento"*. Sin embargo, Alexis y Elio, aun cuando se inclinan a favor de esta profesora, ellos ponen reparo en cuanto al contenido teórico del problema, aunque el primero dice que si se ha trabajado a lo largo del tema con esta metodología, el estudiante no debería presentar mayores dificultades. Por su parte, Elio, para evitar algún tipo de conflicto en el estudiante, matizaría el problema cambiando algunas de las constantes por valores numéricos y luego, en una discusión posterior, lo dejaría tal como está, entendiendo que el cambio de constantes arbitrarias a números específicos le ofrecería más seguridad al estudiante en una primera discusión.

El atender a las sugerencias de Elio nos lleva a una revisión profunda del material, ya que uno de nuestros propósitos, como es sabido, consiste en llevar al aula el presente material. Él también añade que el estudiante puede presentar problemas con la variable utilizada, *"...aquí no está del todo claro cuál es la variable, lo dice en palabras pero no lo especifica..., ...pero me parece que deberías escribir $\mathcal{V}(I)$ en lugar de $\mathcal{V}$, eso ayudaría al estudiante y no cambiaría en mucho el problema"*.

En resumen, podemos apreciar que este profesor va de lo global a lo local, de lo general a lo específico y con su aporte, nos permitimos afirmar que al tener un conocimiento profundo y pormenorizado del estudiante, ello nos permite replantearnos todo lo que conforma la estructura y desarrollo del esquema de enseñanza que nos proponemos llevar a la práctica en el aula mediante el material.

En este mismo orden de ideas y refiriéndose a la idea del material en discusión, Kenya afirma que el mismo muestra la *"...utilidad que tiene la matemática como herramienta para resolver problemas de su campo profesional, pero haciéndole ver la diferencia que hay entre una situación real y una situación que es modelizada por una función matemática..."*; lo reflejado aquí por Kenya realza las características didácticas del material en el escenario hacia el cual nosotros apuntamos, es decir, la enseñanza de las matemáticas en el contexto económico. Por lo tanto, queda en evidencia el conocimiento del currículo por parte de esta profesora.

4.4.2. Episodio 4.2: Análisis e interpretación Eco-Mat 2, contextualización, valores extremos, optimización

Sea Q la cantidad que minimiza el costo total T debido a la obtención y almacenamiento del material por cierto período. El material demandado es de 10.000 unidades por año; el precio al costo del material es de \$1 por unidad; el costo de volver a llenar la existencia de material por orden, sin importar el tamaño Q de la orden es del 12,5 % del valor promedio de las existencias($Q/2$).

Pregunta 1: Pruebe que $T = 10{,}000 + \frac{250{,}000}{Q} + \frac{Q}{16}$.

Respuesta: En efecto,

$$\begin{aligned} 10{,}000 &= 10{,}000 \times 1 \\ \tfrac{250{,}000}{Q} &= \tfrac{25 \times 10{,}000}{Q} \\ \tfrac{Q}{16} &= \tfrac{12{,}5}{100} \times \tfrac{Q}{2} \end{aligned}$$

Microepisodio 4.2.1: Aún cuando en la tarea, se le pide al estudiante una demostración, la actividad se centra en generar un modelo a partir de unos datos establecidos.

¿Cómo gestionas o gestionarías tus clases ante actividades como estas, en las que es frecuente que los estudiantes presenten dificultades para visualizar y llegar al modelo solicitado y en consecuencia, construir un conocimiento del contenido en ambos contextos (económico y matemático)?

Pregunta 2: Encuentre el tamaño del lote económico y el costo total T correspondiente a tal valor de Q.

Respuesta: Dado que Q es la cantidad que minimiza a T, calculamos la derivada de T respecto a Q; es decir,

$$T' = -\frac{250{,}000}{Q^2} + \frac{1}{16}.$$

Así, $T' = 0 \Leftrightarrow Q = \pm 2{,}000$, pero nos quedamos con $Q > 0$ por estar hablando de un material como libros, herramientas, etc.

De lo anterior tenemos que el costo total, T, se minimiza en $Q = 2{,}000$ dólares y el valor de este costo es de $T = 10{,}250$ dólares.

Microepisodio 4.2.2: A estas alturas del tema de derivada, cuando ya se supone que los estudiantes han trabajado y discutido diversos problemas de este tema y en ambos contextos, generalmente los estudiantes tienden a cometer ciertos errores y en algunos casos (después de una discusión con profesores de otra universidad), la actitud de los estudiantes es de rechazo a este tipo de problemas.

En atención a la experiencia de ustedes, ¿cuál es su opinión en estas dos líneas (errores y actitud)?

Pregunta 3: Determine el costo total cuando cada orden es fijada en 2.500 unidades.

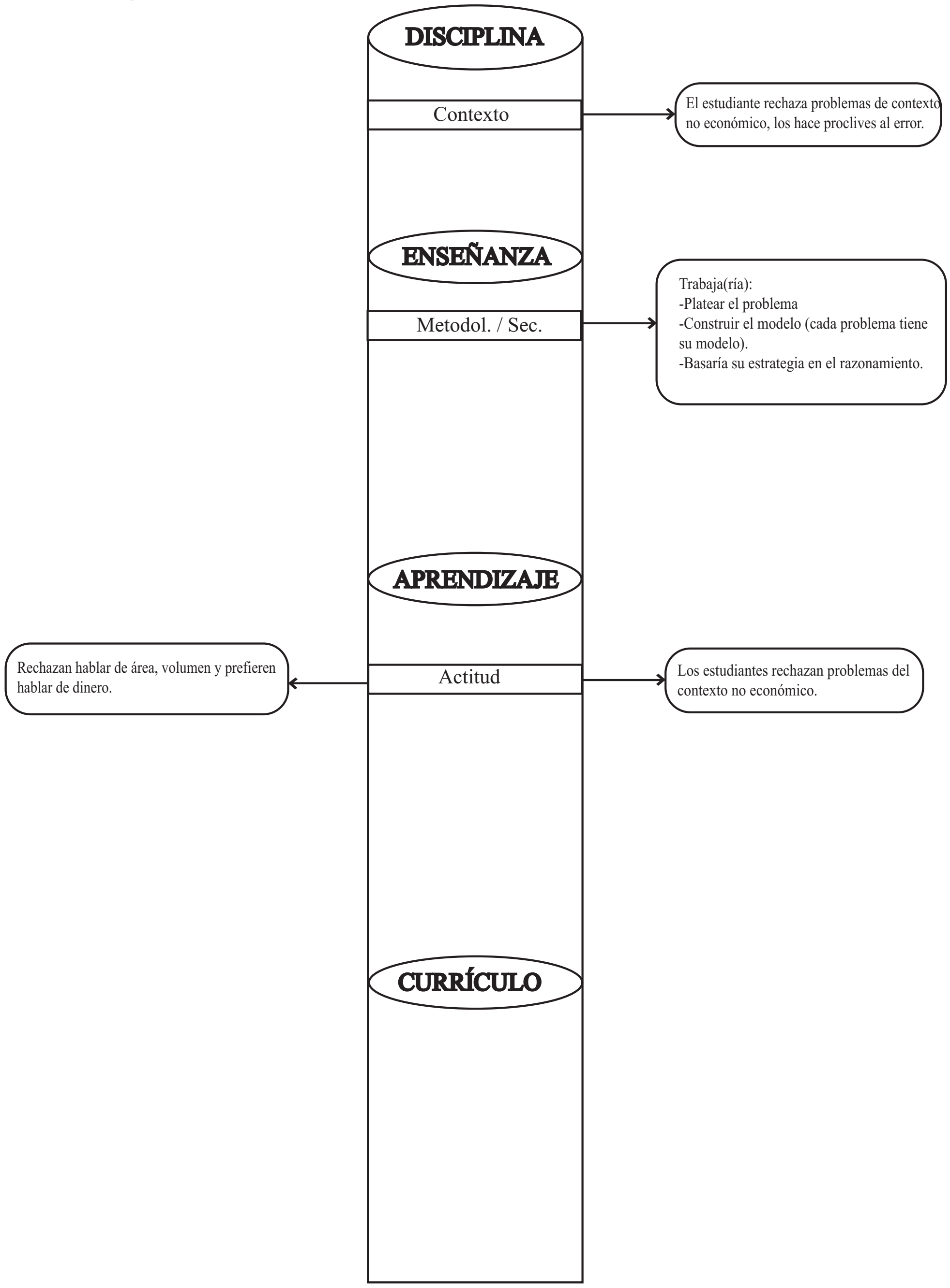
Respuesta: En este caso, sólo basta con calcular la imagen de T para $Q = 2{,}500$; así, el costo total cuando cada orden es fijada en 2.500 unidades es de $T = 10{,}256, 25$.

Microepisodio 4.2.3: Si observamos con detalle, esta tarea posee un mínimo de dificultad respecto a las dos anteriores.

Ya en el cierre del tema de derivada, ¿consideran acertado realizar esta pregunta en una evaluación o creen que puede conducir al estudiante a un error; como por ejemplo, que éste calcule la derivada de la función y la evalúe en 2.500?

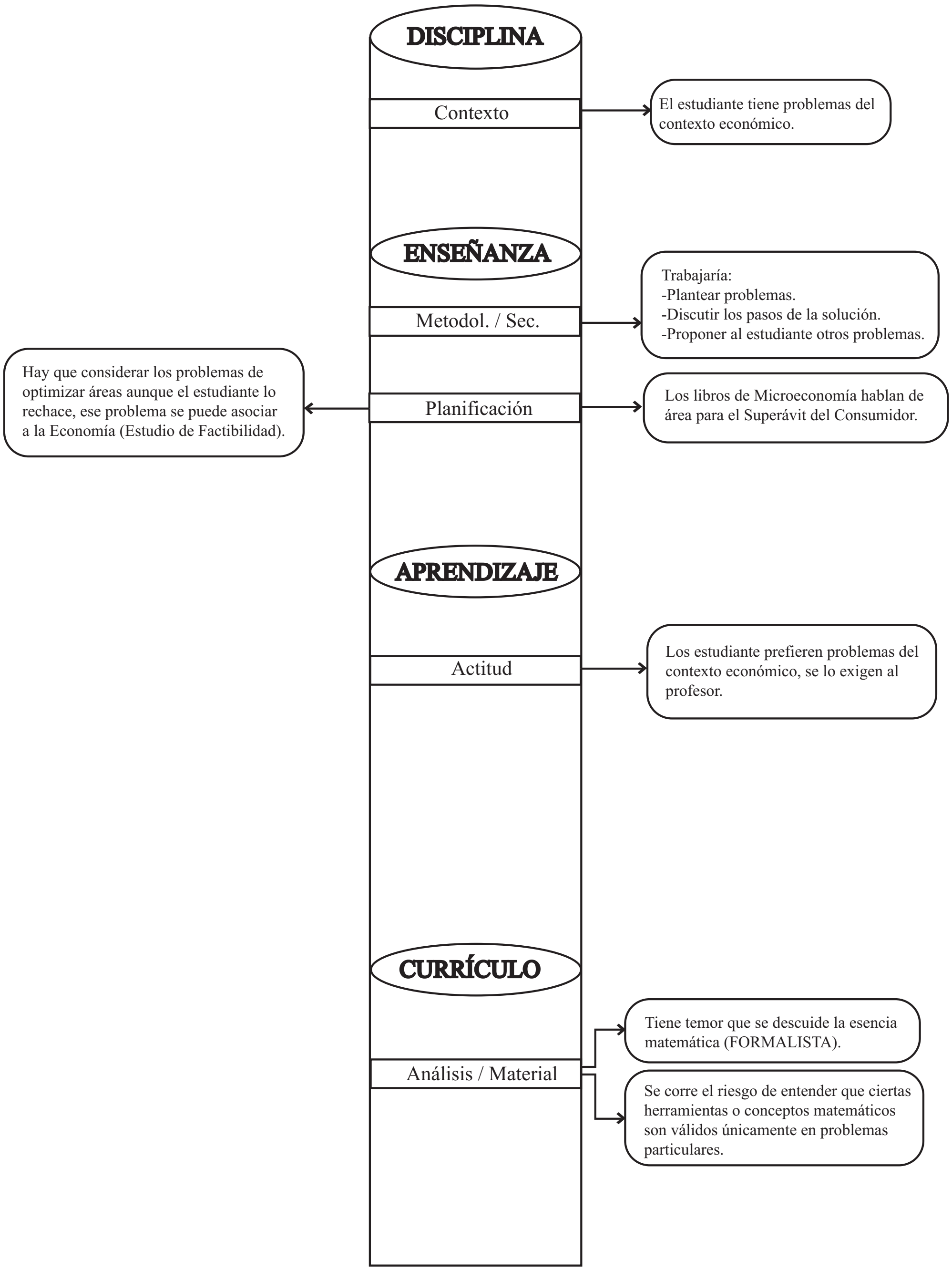
Grupo A

EP 4.2 MANUEL



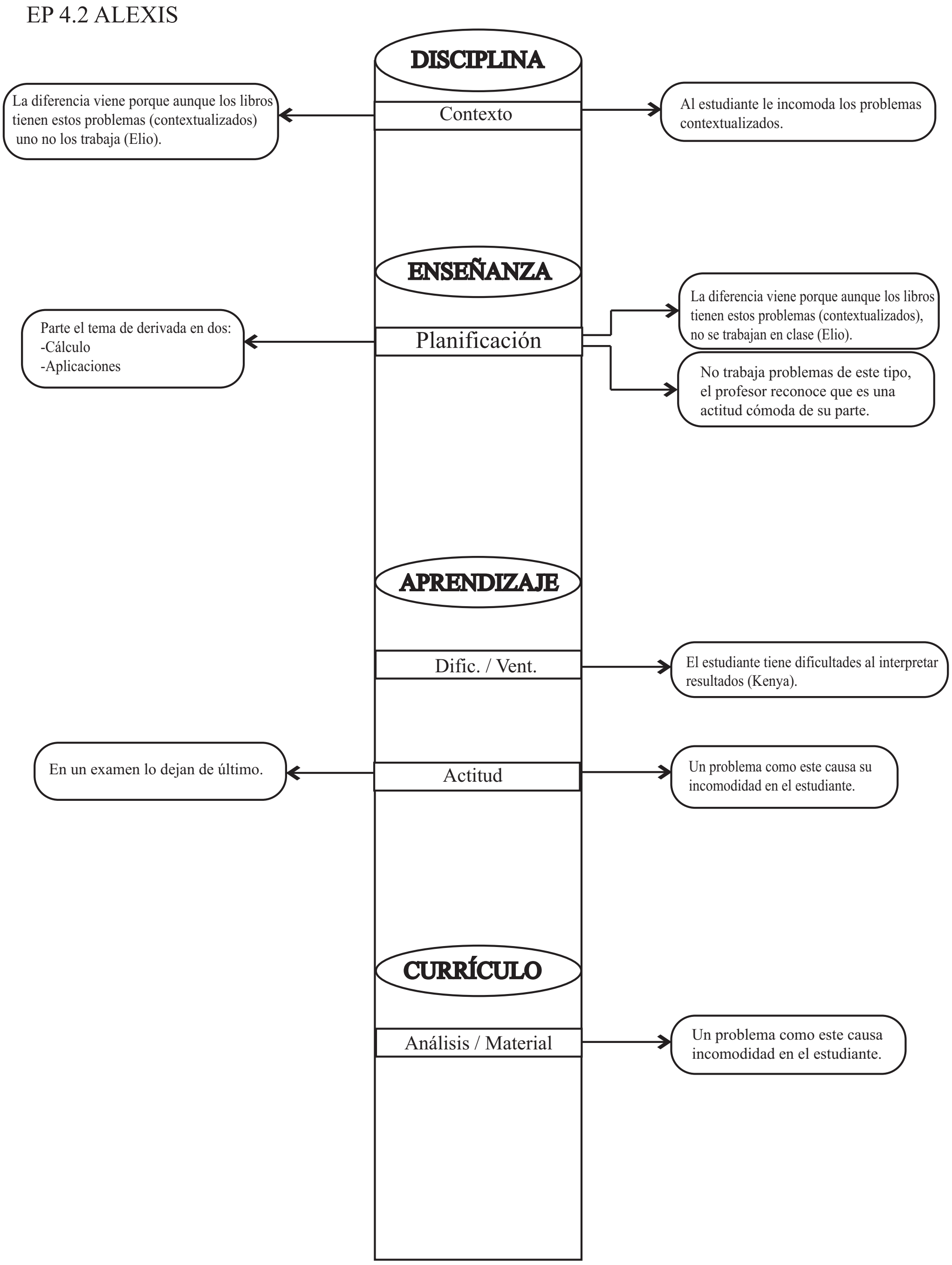
Cuadro 4.21: Episodio 4.2 - Manuel

EP 4.2 RAMÓN



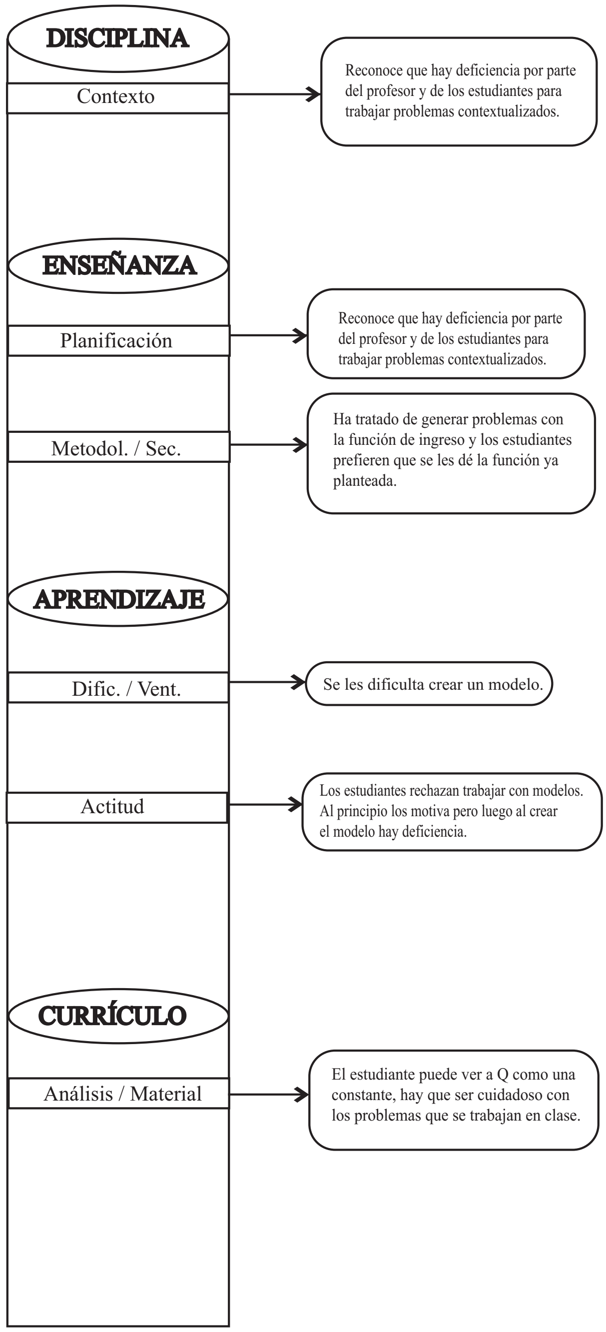
Cuadro 4.21: Episodio 4.2 - Ramón

Grupo B



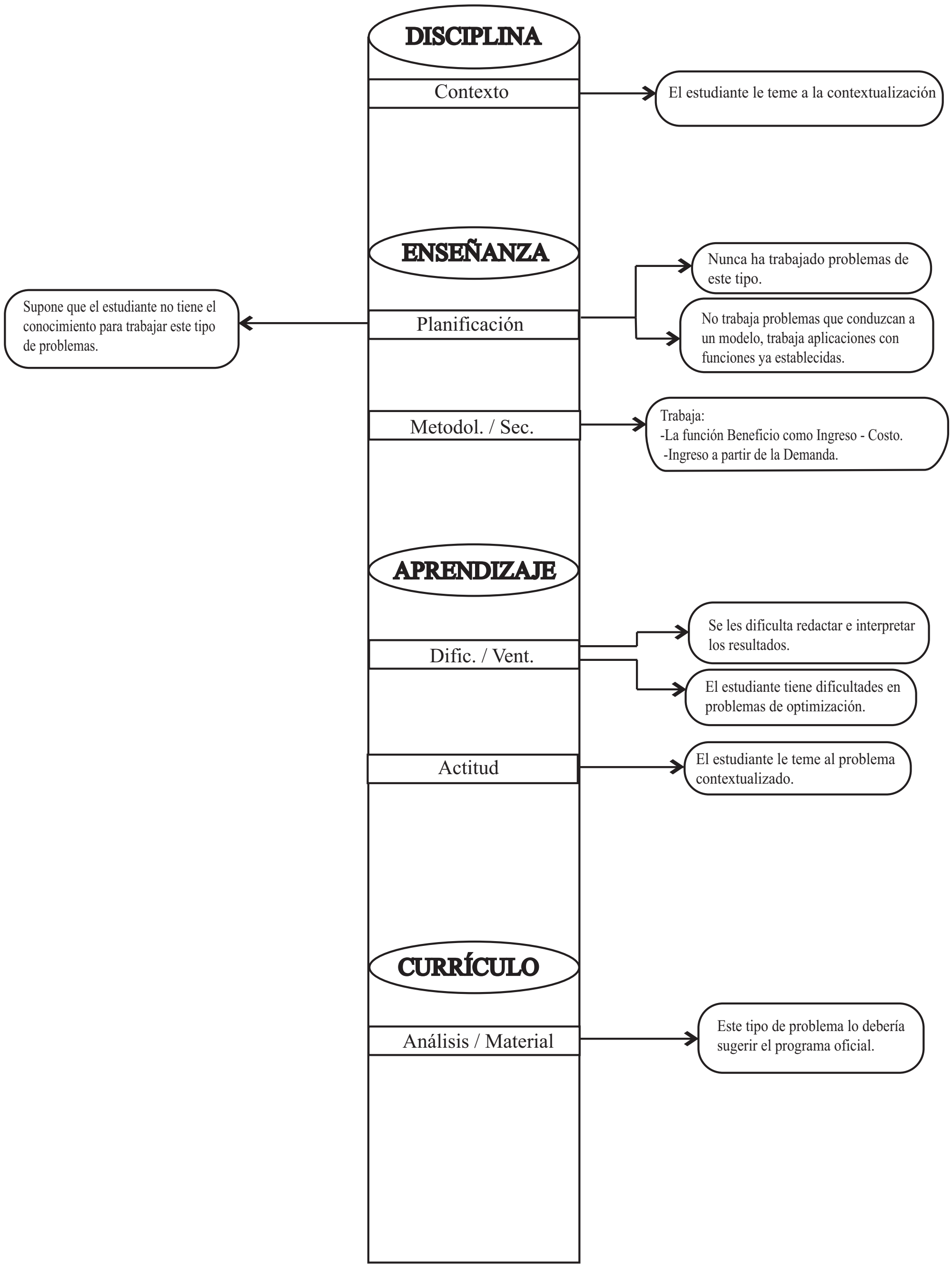
Cuadro 4.22: Episodio 4.2 - Alexis

EP 4.2 ELIO



Cuadro 4.22: Episodio 4.2 - Elio

EP 4.2 KENYA



Cuadro 4.22: Episodio 4.2 - Kenya

Resumen del análisis En este último problema (EP4-2) se abordan dos componentes del CDC de forma directa, estas son: enseñanza y aprendizaje; de manera indirecta se contempla el conocimiento sobre aspectos de orden curricular. En el caso de la enseñanza, ahondamos en lo que respecta a la gestión de la clase ante un escenario particular; mientras que en el tema del aprendizaje nos proponemos indagar en un aspecto ya discutido en sesiones anteriores, es decir, el conocimiento del profesor relacionado con la actitud del estudiante ante un problema matemático, pero contextualizado en el ámbito económico. En todo caso, partimos del hecho siguiente: existen modelos matemáticos que aparecen en los libros de cálculo diferencial para ciencias económicas como $C_T = C_V + C_F$ (Costo total = Costo variable + Costo fijo), $U = I - C$ (Utilidad = Ingreso - Costo), etc., estos modelos además de ser básicos, aparecen de manera frecuente en todo el ámbito económico. Es por ello que consideramos como significativo que el profesor tome en cuenta este tipo de situaciones para llevarlas al aula y, de esta manera, generar una discusión con sus estudiantes, buscando fortalecer su conocimiento en el área de su formación.

El abordar el tema de la gestión de la clase y en particular, la gestión para la enseñanza de un modelo matemático que represente una situación económica, nos permite indagar en el conocimiento que tiene el profesor en esta materia, sobre todo si tomamos en cuenta que hemos venido hablando de una enseñanza de las matemáticas contextualizada en la economía.

Conocimiento sobre la Enseñanza (Grupo A)
Si el lector atiende a los diagramas respectivos de cada uno de los participantes y observa la categoría de *enseñanza* y dentro de ésta, lo relacionado con *metodología/secuenciación*, puede observar en el encabezado del resumen de Ramón aparece la palabra: *trabajaría*, mientras que en el de Manuel dice: *trabaja(ría)*, puesto que no nos queda claro si realmente lo trabaja. Comenzamos nuestro análisis con esta introducción ya que en ningún momento el profesor Ramón dice que este tipo de situación la *trabaja* de una manera particular; mientras que en el caso de Manuel sostiene que es un problema básico de economía, pero no recuerda alguno en particular. Sin embargo, lo relevante en este caso no es precisamente el hecho de que lo trabajen o no, sino cómo abordarían en el aula de clases una situación como la de la discusión.

En líneas generales, ambos esquemas tienen similitud, pero lo que queremos resaltar de todo esto son dos puntos relacionados con el conocimiento sobre libros de texto, aun cuando no sea tema específico de este trabajo, y el de vincular la gestión de un problema eminentemente matemático al contexto económico. Ramón fundamentaría su gestión siguiendo el problema clásico de *"...parcelar un área con la máxima cantidad de alambre que implique el mínimo costo..."*, *"...exponer varios de esos problemas, dos o tres problemas de esos bajo, la esperanza de que ellos vean cuál es el mecanismo..."*, aunque hace la observación de que los problemas deben ser contextualizados en el área económica. La justificación de trabajar en el aula el problema de *optimizar áreas* lo asocia en el campo económico con el *"estudio de factibilidad"*. En este caso, no sólo destacamos el conocimiento del profesor en conceptos vinculados al área económica, sino que además nos muestra una conexión entre dos conceptos que pueden ser estudiados mediante un problema con características similares.

No obstante, no es lo único que puede resaltarse de este profesor, puesto que el poseer un conocimiento *dual*, como lo hemos llamado en el marco teórico, permite apuntar hacia la EBP como estrategia metodológica de enseñanza de las matemáticas en carreras de ciencias económicas, ya que es una característica fundamental a la hora de implementar esta herramienta didáctica.

En otro orden de ideas, sacamos a colación una discusión que surge entre estos dos profesores, motivada por la importancia que le da Ramón al estudio del área de una figura geométrica en el caso de cursos para estudiantes de ciencias económicas, mientras que Manuel sostiene que el estudio de ese tema en estos cursos *"distrae"* al estudiante. La argumentación de Ramón es más sólida y consistente puesto que sostiene que el estudio del *Superávit del Productor* y del *Consumidor* son interpretaciones de la integral definida, es decir, del área bajo la curva. Más aún, este último profesor, cita un libro texto de microeconomía (Pindyck & Rubinfeld[4]), en el que de manera explícita se habla de este caso. Así, queda demostrado el conocimiento de este profesor en el área económica, sobre libros de texto (curricular) y en materia de conocimiento dual; características todas ellas que conforman el CDC del profesor de matemáticas en las carreras objeto de estudio.

Conocimiento sobre la Enseñanza (Grupo B)

De estos tres profesores, sólo Kenya y Elio reconocen trabajar problemas parcialmente similares al planteado, aunque Kenya advierte que no trabaja problemas que conduzcan a un modelo, ella adopta la modalidad de trabajar con problemas de aplicación a la economía donde las funciones ya vienen formuladas en el problema; por ejemplo, ella hace uso de modelos como "$B = I - C$" y trabaja con el *"Ingreso a partir de la Demanda"*. Por su parte, Alexis manifiesta abiertamente que no trabaja este tipo de problemas, reconociendo además que es *"una actitud cómoda"* de su parte.

Aun así, lo que verdaderamente nos llama la atención son los argumentos o, en todo caso, la justificación de estos profesores para no abordar este tipo de problemas en el aula de clases. En el párrafo anterior mostramos la posición de Alexis en relación con la no utilización de estos problemas, aun cuando él mismo señala que los libros de texto incluyen problemas de esta naturaleza. Kenya por su parte, considera que *"el estudiante no tiene el conocimiento para trabajar este tipo de problemas"* y descarta de entrada la posibilidad de incluir estos problemas. Finalmente cerramos con el argumento de Elio puesto que

[4]El libro texto de Pindyck, R. y Rubinfeld, D. de Microeconomía es el principal libro de texto recomendado en el curso de Microeconomía para las carreras de Economía, Administración de Empresas y Contaduría Pública en la ULA.

consideramos que los comentarios de los dos anteriores se perfilan hacia lo sostenido por éste, cuando reconoce que hay deficiencia por su parte y de los estudiantes para trabajar problemas contextualizados.

Haremos una pausa para recurrir a episodios anteriores donde el mismo Elio manifiesta su poca formación en el área económica, también Alexis y Kenya han dejado ver su poca formación en economía, pero con menos firmeza. Por otra parte, cuando estos profesores nos han mostrado sus esquemas de trabajo para la enseñanza de la derivada, no han sido precisos a la hora de hablar de aplicaciones. Ahora bien, ya hemos señalado que el no tener formación en economía no se puede ver como un punto en contra siempre que se lleve una enseñanza de las matemáticas de forma tradicional; sin embargo, si el planteamiento de la enseñanza se enmarca en la EBP, la interdisciplinariedad cobra un papel fundamental y, en consecuencia, se dificultaría el planteamiento de problemas matemáticos contextualizados en la economía con fines didácticos.

A lo anterior conviene añadir que una nueva dimensión a ser tomada en cuenta de cara a mejorar la enseñanza universitaria y considerarla dentro de la *planificación* del curso, es la *"contextualización del proyecto"*, en el sentido de enfocarlo según el *"perfil profesional"*, *"el plan de estudios"*, entre otros (Zabalza, 2003).

Antes de pasar al análisis relacionado con el conocimiento sobre el aprendizaje, nos permitimos hacer una introducción al mismo por las características del problema. El conocer la *actitud* del estudiante frente a un tema en particular, definitivamente permite marcar la diferencia a la hora de llevar al aula el contenido del mismo con todo lo que ello implique, es decir, metodología didáctica, contenido de la materia, material de apoyo, entre otros. En parte la actitud va en línea directa con la motivación que pueda tener el estudiante, Alonso (2001, p.79) sostiene que *"la ausencia de una motivación adecuada constituye, por ello, un problema en todos los niveles escolares, incluido el universitario"*. Para nosotros, ambos términos, actitud y motivación, están fuertemente relacionados, sobre todo en la dirección: *motivación* $\rightarrow$ *actitud*. Esto quiere decir, que si el profesor conoce al estudiante puede generar una actitud favorable en este último, por medio de la motivación.

Conocimiento sobre el Aprendizaje (Grupo A)

En referencia a la actitud de los estudiantes frente a este tipo de problemas, ambos profesores manifiestan que al trabajar con "problemas de aplicaciones", los estudiantes rechazan los que **no** están relacionados con las ciencias económicas. Ramón manifiesta que *"la actitud siempre va a ser positiva, siempre y cuando las aplicaciones sean de su área, de economía..."*, mientras que si se trabaja con problemas que no son de economía, Manuel afirma que los estudiantes *"...buscan hablar con el profesor para evitar este tipo de problemas..."*. Tal actitud se pone de manifiesto en el aprendizaje, un ejemplo de ello son lo errores que suelen cometer los estudiantes ante situaciones problemáticas. Sobre este tema, Manuel afirma que en caso de que el problema sea de economía, los errores suelen ser mínimos, es decir, *"...descuido en un signo..."*, identificación incorrecta de una función, *"...pero siempre relacionado con la matemática..."*; por otra parte, este profesor concluye que generalmente no cometen errores relacionados con la parte económica.

De todo esto nos permitimos inferir que el estudiante tiene una fuerte incidencia en todo lo que conforma el desarrollo de la clase, tanto en la planificación de ésta como en el desarrollo y gestión de la misma. El estudiante es tomado en cuenta en todo momento para la toma de decisiones del profesor en materia de enseñanza.

Conocimiento sobre el Aprendizaje (Grupo B)
Respecto a la actitud de los estudiantes, Kenya afirma que los estudiantes *"...sienten más temor hacia problemas de este tipo que hacia problemas de cálculo..."*, de igual manera, Elio y Alexis también advierten que este tipo de problemas, contextualizados, son rechazados por los estudiantes. Este último manifiesta, además, que en caso de que una evaluación contenga un problema como el que está en discusión, el estudiante *"...lo deja de último..."* y *"...por lo general no lo hace"*.

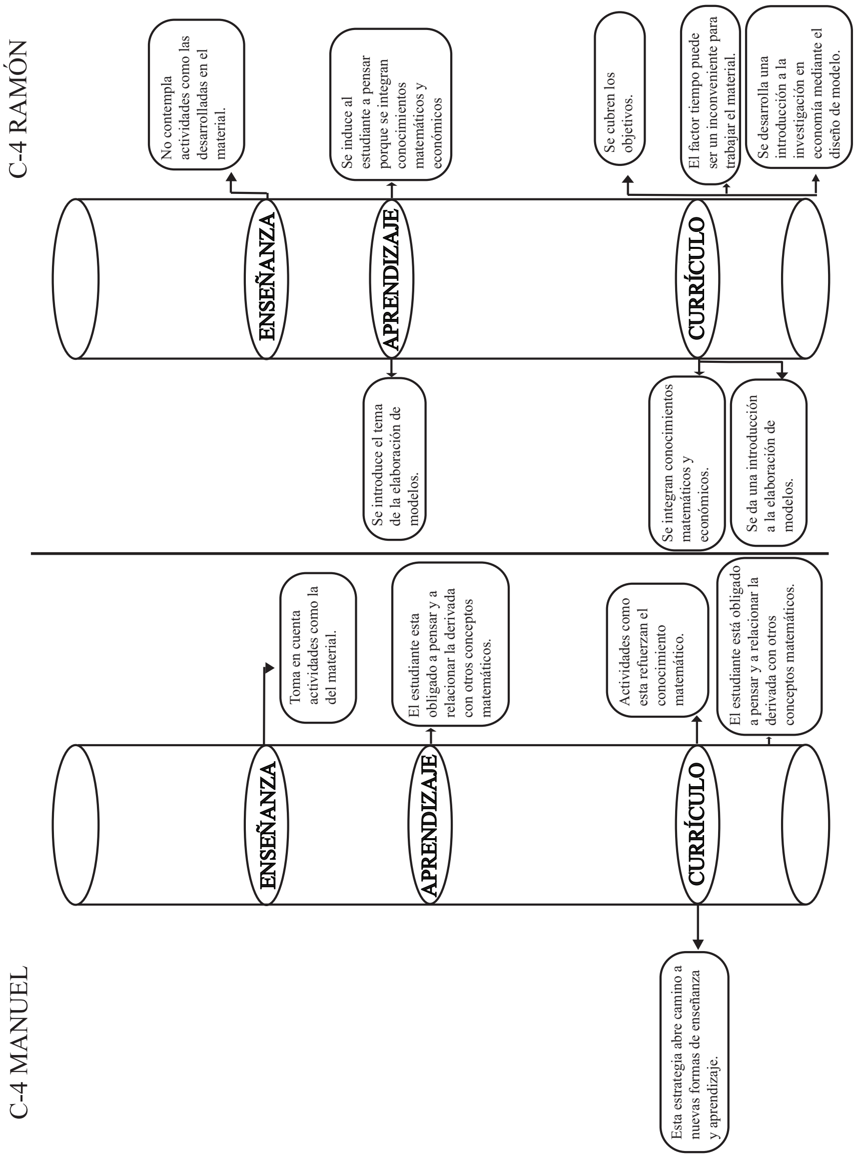
Aprovechamos para hacer una pausa y preguntarnos ¿por qué el rechazo de los estudiantes a este tipo de problemas?, ¿cómo han sido trabajado estos problemas en el aula? Ya en oportunidades anteriores y más recientemente en el análisis de la categoría anterior, hemos observado que estos dos profesores han manifestado su poca formación en el área de las ciencias económicas, hecho que podría repercutir en esta actitud de rechazo por parte de los estudiantes. Ahora bien, la profesora Kenya aun cuando afirma que los estudiantes rechazan este tipo de problemas, destaca el compromiso que tienen los estudiantes en enfrentar estos problemas siempre que se trabajen en el aula de clases. En este caso entra en juego la implicación a la que hiciéramos mención en la parte introductoria a esta parte del análisis, *motivación* $\rightarrow$ *actitud*.

En cuanto a los errores que cometen los estudiantes con mayor frecuencia ante problemas de esta naturaleza, estos profesores los tienen bien identificados: presentan dificultades a la hora de interpretar los resultados obtenidos o incluso en interpretar la imagen de una función que representa un modelo de economía,

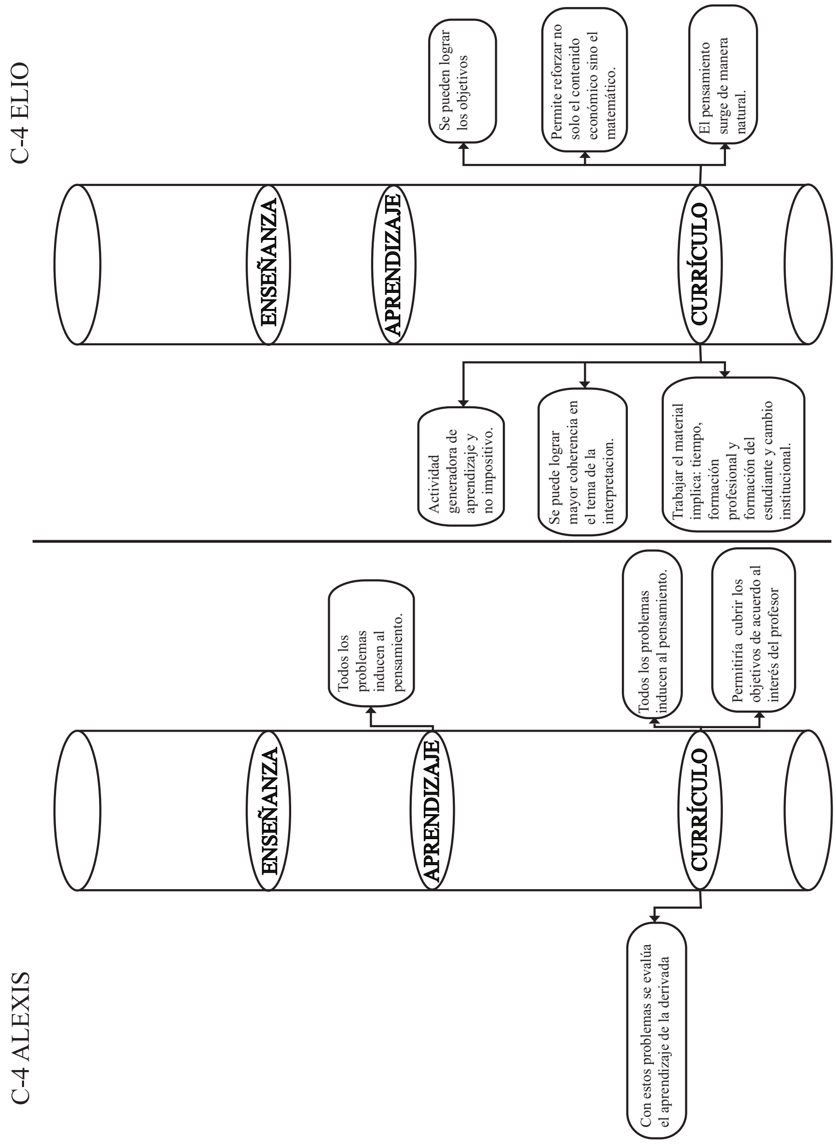
4.4.3. Cuestionario 4

Estamos en presencia de lo que significa el final de la aplicación del instrumento, esto quiere decir que no sólo estamos abordando el cuestionario final de esta investigación, sino que con la aplicación del mismo damos por terminado todo lo que significa el tema de recogida de datos. Con la aplicación de este cuestionario, C-4, buscamos indagar en las opiniones de los profesores aspectos puntuales sobre la gestión de su clase y al mismo tiempo analizar lo que significa llevar al aula problemas como los discutidos en la sesión S-4 del seminario.

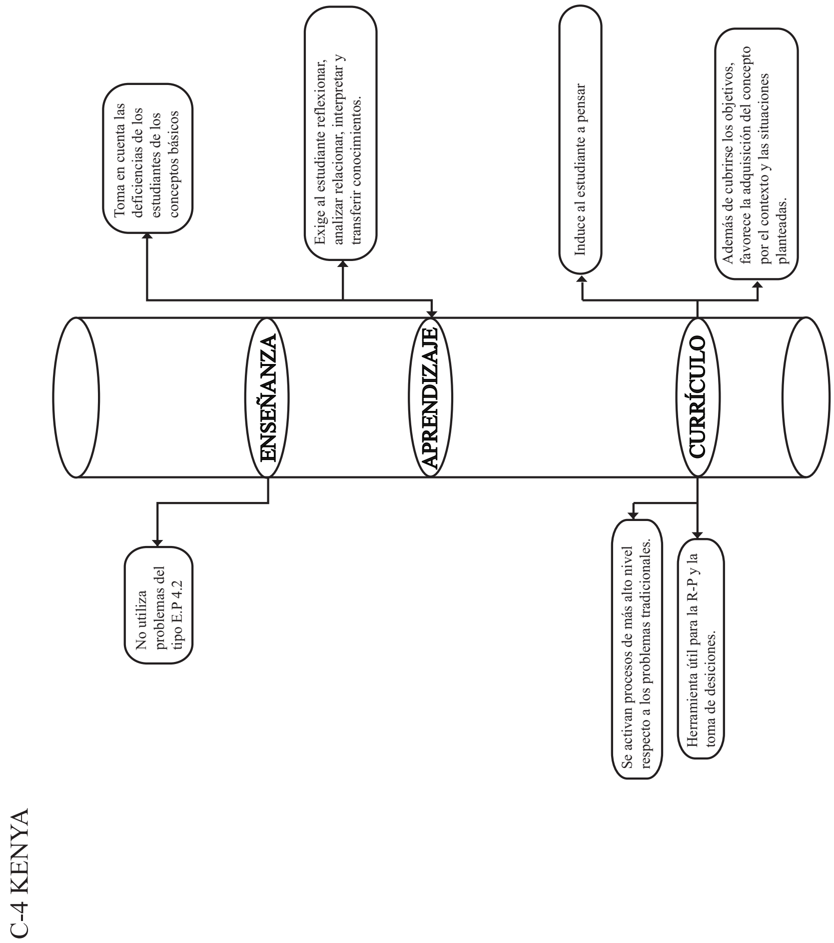
Si volvemos por un momento a los dos problemas discutidos en S-4, podemos observar que hay una diferencia entre estos problemas y los discutidos en sesiones anteriores. En este caso los problemas, vistos en conjunto, requieren mayor manipulación algebraica, la creación de un modelo que permita el análisis de la situación económica planteada y, en consecuencia, una mayor participación del profesor en lo que respecta al contenido económico. En este orden de ideas, las preguntas formuladas en el cuestionario no se refieren a un problema en particular como lo hicimos en el C-3, en esta oportunidad las preguntas hacen referencia a toda la actividad de forma global.



Cuadro 4.23: Cuestionario 4 - Manuel y Ramón



Cuadro 4.23: Cuestionario 4 - Alexis y Elio



Cuadro 4.23: Cuestionario 4 - Kenya

C-4 (Grupo A)
Al observar los diagramas de estos dos profesores podemos apreciar que existen opiniones encontradas respecto al material discutido en la S-4; mientras Manuel afirma que toma en cuenta actividades como esta en su planificación docente, ya que permite *"reforzar el conocimiento matemático"* en el estudiante, Ramón sostiene que *"nunca"* se le ocurrió un trabajo en clases con problemas similares a los discutidos y la única objeción que tiene ante este tipo de trabajo, en caso de ser implementado, es la falta de *"tiempo suficiente"* de acuerdo a las horas estipuladas en el curso. Frente a estas dos posiciones, podemos destacar algunos puntos que nos llaman la atención; por una parte y aunque no es tema de estudio en este trabajo, observamos que no hay unicidad a la hora de enseñar una materia, esto lo permite la *autonomía de cátedra*, lo cual trae como consecuencia una diferencia significativa en los cursos.

Observación: Le recordamos al lector que todos los problemas discutidos en las distintas sesiones son tomados de los libros de texto sugeridos en los programas oficiales; en todo caso, lo que sí reconocemos haber hecho es modificar la estructura de presentación y discusión de los mismos a fin de presentarlos con un esquema próximo a la EBP. Decimos esto a modo de aclaratoria para dejar por sentado que los problemas no fueron sacados de libros desconocidos.

Volviendo al análisis, destacamos la actitud de Ramón en relación al material, visto este como propuesta metodológica alternativa de enseñanza, ya que en todo momento este profesor ha manifestado la aceptación del material, siendo esto es poco significativo frente a las característica que él encuentra a lo largo de la discusión.

En general, ambos profesores consideran que el material *induce* u *obliga* al estudiante a pensar, ya que se integran los contenidos matemático y económico; pero más aún, Ramón destaca del material que *"se da una introducción a la elaboración de modelos y, como sabemos, no hay reglas precisas para la elaboración de los mismos"*, a lo anterior este mismo profesor añade, cuando se le pregunta si los objetivos del curso quedan cubiertos, que *"se cumple un objetivo más a los contemplados en el curso"*, puesto que se promueve al estudiante a la *"investigación en economía"*. Esta observación de Ramón nos permite validar el material y al mismo tiempo, sacamos a colación que en ningún momento nos planteamos con la actividad introducir la elaboración de modelos; en todo caso, vemos esto como parte de la EBP, entendida ésta como estrategia de enseñanza que es donde se enmarca nuestro instrumento.

Por su parte, Manuel es más cauto: él considera que se cubren los objetivos del curso y resalta del material la estructura del mismo, pues considera que *"esta estrategia abre caminos a **nuevas**[5] formas de enseñanza y aprendizaje"*. A nuestro modo de ver y aun cuando este participante ha manifestado en anteriores oportunidades, tanto en el seminario como en los cuestionarios, que su trabajo es muy próximo al instrumento discutido, con esta última reflexión recién citada nos permitimos inferir que la proximidad no es tal. En este caso vuelve a surgir el *"qué"* y *"cómo"* enseña este profesor, pues nos queda el reto, ante esta inconsistencia manifiesta por parte de Manuel, de definir el perfil de este profesor.

C-4 (Grupo B)

Antes de iniciar el análisis correspondiente al cuestionario del grupo B, vale la pena hacer la siguiente observación: los profesores Elio y Alexis cuando responden a la primera pregunta, da la impresión que interpretan mal la misma, es decir, que donde dice *"contemplas"* ellos entienden *"contemplarías"*. Por otra parte, Alexis nos proporciona unas respuestas poco provechosas.

[5]El resaltado es voluntario del autor, ya que lo identificamos con el tema de innovación educativa.

Cuando se les pregunta si contemplan actividades como la de la S-4 para cerrar el tema de derivada, Kenya afirma que *"en cierta forma, sí..."*, aunque sostienes que no realiza preguntas como la primera del EP4-2, en la que se pide demostrar que el modelo que se plantea en el problema es $T = 10{,}000 + \frac{250{,}000}{Q} + \frac{Q}{16}$. Ella afirma que utiliza este tipo de problemas cuando trabaja problemas de **optimización** y las funciones que toma en cuenta son: *"**costo**, ingreso, beneficio, precio, pero con un contenido más sencillo"*. La razón de resaltar en negrita estas dos palabras es que, si vamos al enunciado del problema, podemos observar que el problema es de optimización (minimizar la función T) y la función T representa el costo total. En todo caso, inferimos que cuando esta profesora se refiere a *"un contenido más sencillo"*, lo hace con planteamientos menos exigentes a la hora de plantear un problema, cuya justificación analizaremos en el siguiente párrafo.

Sin embargo, un asunto que resaltamos en las reflexiones de Kenya, tiene que ver con lo que ella persigue con un problema como los de la S-4 al cerrar el tema de derivada y que citamos a continuación: 1) *"consolidar conocimientos adquiridos"*, 2) *"apreciar posibles lagunas´´*, en el que se debe evitar *"el cálculo excesivo o complicado"* para no *"perder de vista la esencia del problema"*. Esta profesora sugiere que el docente debe tener claro cuál es el objetivo del problema, qué se persigue con este y, sobre todo, tomar en cuenta el lugar específico que ocupa dentro de la planificación. Nos deja ver que hay diferencias didácticas en el uso de un problema según el momento que ocupa en el currículo. En resumen, queda manifiesto el conocimiento sobre la enseñanza que tiene Kenya, en particular, en lo que respecta a la planificación de la clase.

En lo que respecta a Elio y Alexis, ellos persiguen con estos problemas, *"reforzar"* conocimientos en los contenidos económico y matemático, el caso del primero, y *"evaluar´´* el aprendizaje del alumno en el tema de aplicaciones de la derivada, en el caso de Alexis. No obstante apreciamos inconsistencia en sus respuestas y es por ello que conviene retomar la observación con la que iniciamos este análisis, ya que si recurrimos a las respuestas aportadas a lo largo de la aplicación del instrumento, podemos observar que este tipo de problemas no lo trabajan estos participantes. Elio por ejemplo, ha manifestado en repetidas oportunidades su falta de formación en el área económica, además de reconocer que no trabaja este tipo de problemas. Alexis, de igual manera, también ha admitido su poca formación económica y su trabajo con problemas contextualizados son del tipo $U = I - C$ o similares, puesto que él mismo reconoce que los estudiantes tienen poca formación para trabajar estos problemas y manifiestan actitud de rechazo. En otras palabras, ellos observan características didácticas en estos problemas pero no entran en sus respectivas planificaciones.

En otro orden de ideas, tanto Kenya como Elio consideran que actividades como las de la S-4 inducen al estudiante a pensar; Elio, por ejemplo, afirma que *"...el presentar un problema ligado a los intereses particulares, el pensamiento surge de manera natural, inducido por la situación planteada"*; esta es una de las características de la EBP, lo cual no sólo nos impulsa hacia la futura implementación del material discutido, sino que además, ratificamos la afinidad que muestra este participante en relación a nuestra propuesta metodológica alternativa. Kenya resalta aún más las bondades del material ya que concluye que *"...se activan procesos cognitivos de más alto nivel que los que ameritan la manipulación algebraica"*, es decir, se profundiza en materia del pensamiento del estudiante, lo cual incide en su aprendizaje. En ambos casos, vuelve a ser el estudiante el motivo de las respuestas. Por lo tanto estamos ante reflexiones ligadas al conocimiento sobre el aprendizaje y sobre el conocimiento curricular.

Para finalizar, estudiamos las posiciones de Elio y Kenya en materia de *logro de los objetivos del tema de derivada*, en caso de implementar este material. Ambos profesores consideran que los objetivos se pueden cubrir, pero Kenya va un poco más allá, ya que considera que todo *"...el **proceso seguido** favorece la adquisición del concepto y nociones relacionadas de modo significativo"*; debido a esto se plantea ***en contextos y situaciones de problemas*** relacionados con el área de los estudiantes. Si atendemos a lo resaltado en las citas, podemos entender que tanto la estructura como el contenido del material tienen un importante significado didáctico para esta profesora. Tomemos en cuenta que desde un principio Kenya se sintió identificada con el material y al mismo tiempo lo relacionó con una enseñanza de las matemáticas basada en la resolución de problemas.

Sobre este mismo punto, Elio saca a colación tres aspectos que se deben tomar en cuenta a la hora intentar poner en funcionamiento el material, estos son: 1) *"tiempo"*, 2) *"preparación del docente"* y 3) *"preparación y conocimientos previos del estudiante"*, los cuales nos permitimos identificar con la planificación, conocimiento profesional y conocimiento sobre el estudiante, respectivamente. Es decir, tres aspectos fundamentales que forman parte del CDC. Ahora bien, este profesor no sólo ha manifestado cómo es su metodología de enseñanza sino que también nos ha dejado entrever la de algunos otros colegas; en este orden de ideas, el expresa que para alcanzar los objetivos mediante este material hace falta un cambio en dos direcciones: *docente* e *institucional*; pero es que, precisamente, la EBP exige estos cambios.

Capítulo 5

Análisis II

Introducción

Este capítulo consta de tres partes claramente diferenciadas; la primera, arroja los resultados del capítulo anterior en lo que respecta a tres elementos del CDC, enseñanza, aprendizaje y currículo. La segunda parte la conforman tres de los conceptos matemáticos que se discutieron a lo largo del seminario: *dominio de una función*, *regla de la cadena* y *monotonía y valores extremos*; para esta parte tomamos en cuenta todos los episodios o microepisodios donde se hace mención de tales conceptos y, en este apartado, el *análisis relacional* se explota en función del tiempo y de la situación matemática planteada. La tercera y última parte está destinada a la *validación del seminario* como actividad de discusión, reflexión y formación profesional; para este bloque final, hacemos uso de las entrevistas que se realizaron al final de la última sesión del seminario más algunas opiniones que surgieron durante las sesiones del seminario por parte de los participantes.

5.1. Análisis del CDC

Atendiendo a los objetivos que nos planteamos al inicio de este trabajo pasamos a hacer un resumen del análisis realizado en el capítulo anterior, todo esto, con el fin de caracterizar algunos aspectos del CDC de los profesores participantes. Si bien es cierto que en el capítulo precedente analizamos cada uno de los episodios y cuestionarios por grupos de profesores, este análisis previo nos ayudó a plantearnos un esquema de cada uno de estos profesionales en cuanto a cuestiones específicas del CDC, cuestión esta que contribuye a enriquecer nuestro análisis global de este proyecto. De esta manera pudimos apreciar algunas coincidencias entre los participantes que nos permitirán crear un perfil sobre el CDC de los mismos; no obstante, existen algunos matices que marcan sutiles diferencias entre ellos; en este orden de ideas podemos hablar de características generales, compartidas y particulares. Con todo esto entramos en un análisis más profundo y detallado, de modo que podamos caracterizar a cada profesor en determinados aspectos del CDC.

Con el fin de llegar a estos tres tipos de caracterizaciones hemos elaborado tres tablas al final de cada una de las secciones siguientes (la última dividida en dos partes por su tamaño) a partir del desarrollo del **Capítulo 4**, en éstas queda resumido el análisis de este apartado. En la primera tabla ilustramos diversos aspectos del conocimiento sobre la enseñanza, en la segunda tabla destacamos situaciones concretas en materia de aprendizaje y, finalmente, la tercera y última tabla la hemos reservado para mostrarle al lector algunos aspectos relacionados con el conocimiento del currículo, todos ellos derivados de las opiniones y comentarios que hicieron los profesores respecto al material discutido. Sin embargo, conviene aclarar que los datos que aparecen en estas tablas sobre fondo gris provienen de la entrevista final que realizamos a cada profesor de forma individual; todo esto con el firme propósito de indicar la procedencia de los datos en cuestión y darle transparencia al trabajo. Ya para cerrar esta parte introductoria, hacemos la siguiente observación: los cuadros que aparecen en blanco en cada una de las tablas obedecen a que los profesores no aportaron algún dato significativo correspondiente al punto en estudio.

A fin de categorizar los resultados, es decir, la proximidad o distanciamiento entre el CDC de los profesores, identificaremos con las letras G, C y P (general, compartido y particular, respectivamente) cuando coincidan cuatro o cinco profesores, en el primer caso, dos o tres, en el segundo y, haremos uso de la última letra cuando sólo uno de los participantes tenga una posición distinta de los otros cuatro; cada una de estas letras irá acompañada de un número a fin de establecer un orden en las secciones siguientes, ya que en éstas también emplearemos la misma codificación.

5.1.1. Conocimiento sobre la enseñanza

Los esquemas de trabajo que actualmente siguen los profesores para enseñar el tema de la derivada son, en líneas generales, muy próximos unos de otros. Una muestra de ello la podemos apreciar en las distintas oportunidades en las que se pronunciaron al respecto a lo largo del seminario y, también, en sus respuestas a los cuestionarios de las sesiones 1 y 3 (ver **Apéndices A** y **B**, **Secciones A.1.3**, **B.1.3**, **A.3.4** y **B.3.4**). Todos los profesores siguen el esquema de *teoría + aplicaciones*, aunque en el desarrollo teórico del tema hay matices como el de Manuel, quien basa su enseñanza en la *razón de cambio*;

Alexis, aunque no realiza un esquema concreto sobre la estructura que sigue, también utiliza la *razón de cambio* para introducir la derivada, pues así lo deja ver en la primera sesión del seminario. Por su parte, Ramón, Elio y Kenya introducen el tema vía *interpretación geométrica*. Un punto a resaltar en materia de enseñanza es que sólo Kenya y Elio aceptan o reconocen que no trabajan problemas como los del material para llegar al concepto de derivada, justificando ambos que el *factor tiempo* les impide seguir un esquema más próximo al del material. En otro orden de ideas y aun cuando la enseñanza que siguen es de corte tradicional, los cinco participantes le dan a las matemáticas, en estos cursos, un carácter instrumental, aunque los que más lo manifiestan son Manuel y Ramón, quienes además mostraron, a lo largo de seminario, estar más familiarizados con el contexto económico que se maneja en estos cursos.

Con relación al tipo de problemas de aplicaciones que cada profesor emplea en sus cursos correspondientes, las respuestas de los profesores acaban siendo bastante generales, ya que todos los profesores hablan del análisis marginal y de forma alternante, mencionan problemas de ingreso, costo o utilidad, pero sin referirse de forma específica a un problema en particular en el que se destaque alguna característica didáctica. En todo caso, hacemos alusión a las opiniones de Elio, quien se desmarca de los otros profesores, puesto que en reiteradas oportunidades acepta su poca formación en el área económica y es por esta razón que reconoce su escaso trabajo con problemas contextualizados en la economía. Otro punto a destacar sobre problemas contextualizados en el área económica, es que los únicos que reconocen abiertamente que motivan al estudiante con problemas de esta naturaleza son Kenya y Manuel; ellos consideran pertinente mostrar la necesidad de estudiar la derivada como herramienta para resolver problemas del campo profesional del estudiante.

Respecto a la notación que utilizan, en particular, en la regla de la cadena, tres profesores trabajan de forma simultánea las notaciones de Leibnitz y Newton, mientras que los otros dos, Alexis y Kenya, prefieren trabajar con las notaciones de Leibnitz y Newton respectivamente; ahora bien, Kenya, Ramón, Manuel y Elio justifican el uso de la notación de Newton porque al estudiante le resulta más difícil la de Leibnitz, aunque los dos primeros reconocen que es mejor para el campo de la economía trabajar con la de Leibnitz.

Al respecto vale la pena señalar que nuestro interés por conocer la notación que utilizan los profesores en la enseñanza de la derivada obedece a lo siguiente: aun cuando los libros de texto trabajan las notaciones de Newton y Leibnitz, generalmente se inclinan por la segunda, sobre todo cuando estudian la interpretación de la derivada. Haeussler y Paul (1997) y Arya y Lardner (1987), por ejemplo, dejan ver que la notación de Leibnitz se ajusta mejor cuando hay que interpretar la derivada en términos económicos, es decir, la derivada vista como razón de cambio. Sin embargo, ningún libro de texto de los consultados muestra una preferencia explícita por alguna de las notaciones, aunque hay conceptos económicos asociados a la derivada que son presentados en cualquiera de los libros de texto con la notación de Leibnitz, como es el caso de las *propensiones marginales al consumo o al ahorro*[1] o la *elasticidad de la demanda*[2].

Por otra parte y aun cuando el dominio no entra en el tema de la derivada, lo incluimos aquí para darle más amplitud matemática a nuestro estudio. Sobre este particular, cuatro profesores conocen la restricción económica más común del dominio de una función ($\mathbb{R}_0^+ = [0, +\infty)$) y cuál es la estructura que manejan del mismo a la hora de llevarlo al aula de clases. Esta estructura del dominio en el contexto económico no nos debe extrañar, ya que es la usual en los pocos libros de texto con aplicaciones a la economía que trabajan o incluyen este concepto y, como recordaremos, ya hemos dicho que estos profesores fundamentan su enseñanza en los libros de texto y los programas oficiales.

Sin embargo, vale la pena hacer la siguiente observación: los profesores Kenya y Elio aun cuando manifiestan conocer estas restricciones del dominio en el campo económico, no hacen hincapié o simplemente no toman en cuenta la misma en sus respectivas clases; más aún, Kenya sostiene que ya en el tema de derivada *"no vuelve a estudiar el dominio"* en los problemas de aplicaciones a la economía. Elio, por su parte, admite que no trabaja el tema del dominio económico en sus clases e incluso, este profesor admite que es por *"falta de formación en el contenido económico"*.

Ahora toca el momento de analizar la regla de la cadena desde el punto de vista de la enseñanza, aunque vale la pena señalar que más adelante, en la **Sección 5.2.2**, hacemos un análisis de esta regla vista como un objeto matemático relacionado al campo económico. En este sentido, expondremos el conocimiento de los profesores sobre esta regla aunque también en los **Apéndices A** y **B** (páginas 434, 440, 559, 565, 572, 573) se puede apreciar en detalle cuál es el esquema que siguen los profesores en la enseñanza de la regla de la cadena. Todos los profesores siguen los libros de texto para la enseñanza de esta regla; sin embargo, en las entrevistas finales, tanto Kenya como Elio admiten que no se han planteado la enseñanza de esta herramienta matemática generando la necesidad de la misma en el campo de la economía. Más aún, todos los profesores manifiestan que es la primera vez que ven un planteamiento como el del material para enseñar la regla de la cadena.

[1]La *propensión marginal al consumo* se define como la razón de cambio del consumo con respecto al ingreso $\frac{dC}{dI}$. Por otra parte, definimos $\frac{dS}{dI} = 1 - \frac{dC}{dI}$ como la *propensión marginal al ahorro* (Haeussler y Paul, 1997).

[2]La *elasticidad de la demanda* es un medio por el cual los economistas miden cómo un cambio en el precio de un producto afecta la cantidad demandada. En términos generales, la elasticidad de la demanda es la razón de cambio porcentual en la cantidad demandada que resulta de un cambio porcentual dado en el precio. Ésta se define como $\eta = \frac{\frac{p}{q}}{\frac{dp}{dq}}$ (Haeussler y Paul, 1997).

Finalmente cerramos esta parte del análisis con la enseñanza de la monotonía y valores extremos de una función, aun cuando en el instrumento no hay preguntas concretas sobre la enseñanza que siguen para estos conceptos, lo que quiere decir que los datos obtenidos al respecto son el producto de discusiones en la que abordamos tales contenidos de forma indirecta. En este caso, durante el seminario se puede apreciar que la metodología empleada por los profesores participantes, a la hora de trabajar en el aula estos dos conceptos, es similar a la que siguen en la regla de la cadena y que se ajusta al esquema tradicional de enseñar el tema de la derivada. Aquí también coinciden todos en motivar con un ejemplo para luego definir monotonía y valores extremos. Sin embargo, lo más importante a destacar acá, al igual que en la regla de la cadena, es que la interpretación de la derivada posiblemente pasa a un segundo plano, prevaleciendo el cálculo como actividad principal.

Estos tres tópicos (dominio, regla de la cadena y monotonía y valores extremos), estudiados desde el punto de vista de la enseñanza, nos permitirán aproximarnos a lo que queremos estudiar en el **Apartado 5.2**, solo que en este caso estudiaremos el conocimiento de estos objetos matemáticos en el contexto económico.

Características generales

G1 Todos los profesores *siguen el mismo esquema de trabajo* para la enseñanza de la derivada, *un esquema tradicional*.

G2 Como consecuencia de lo anterior, el conocimiento que reflejan estos profesores respecto a los problemas matemáticos contextualizados en la economía es que: *entienden éstos como problemas de aplicaciones*.

G3 En cuanto a la *regla de la cadena*, todos los profesores *siguen los libros de cálculo* para enseñar esta regla.

G4 De manera consistente a los tres puntos anteriores, todos los participantes *siguen una estructura clásica* para estudiar la monotonía y los valores extremos: motivan con un ejemplo para luego entrar en la definición correspondiente.

G5 Manuel, Ramón, Alexis y Kenya consideran más apropiado el uso de la *notación de Leibnitz* en problemas contextualizados en el campo económico, aunque ninguno de ellos lo justifica.

Características compartidas

C1 De G1 tenemos que Ramón y Alexis consideran que *en sus clases hay más rigor matemático* respecto al material.

C2 Por su parte, Elio y Kenya justifican su actual esquema de trabajo debido al *factor tiempo*; para ellos, implementar el material en el aula supone invertir más tiempo en ésta.

C3 De G2 se deriva que Manuel y Kenya *motivan el concepto* de derivada *empleando problemas contextualizados*.

C4 El enfoque que le dan a la derivada para introducirla, Manuel y Alexis es vía *razón de cambio*.

C5 Kenya, Ramón y Elio trabajan la *interpretación geométrica* para introducir la derivada.

C6 Manuel y Ramón son los *únicos* que trabajan el dominio de una función en el *contexto económico*, aunque sólo de la forma $\mathbb{R}_0^+ = [0, +\infty)$.

C7 Por su parte, Alexis y Kenya no trabajan o *no hacen ningún tipo de restricciones económicas* en el estudio del dominio de las funciones, aun cuando conocen la restricción más usada, $\mathbb{R}_0^+ = [0, +\infty)$.

C8 De G3 se desprende un detalle adicional de parte de Kenya y Elio: ellos afirman que *no se han propuesto enseñar* la regla de la cadena *a partir del planteamiento de un problema*.

C9 En cuanto a la notación que utilizan para enseñar la derivada no resulta fácil caracterizar este hecho; por ejemplo, aun cuando Manuel, Ramón y Elio *emplean las notaciones de Leibnitz y Newton* de forma simultánea, sin embargo, Manuel y Elio sostienen que *prefieren la de Newton* porque a los estudiantes se les dificulta la de Leibnitz, posición que también es compartida por Kenya.

Características particulares

P1 La única característica a destacar sobre la enseñanza tiene que ver con el dominio, Elio no sólo *reconoce que no trabaja el dominio económico en el aula*, sino que además nos deja ver que *no conoce las restricciones del dominio en el campo económico*.

Todo lo anterior pone en evidencia la formación profesional del profesor y más precisamente el CDC en materia de enseñanza; en consecuencia, la visión que este tiene de las matemáticas respecto a los cursos de las carreras de ciencias económicas. Dos cosas quedan bien claras en lo que respecta al conocimiento sobre la enseñanza: la primera, la fuerte presencia de los libros de texto y los programas oficiales para la estructura de sus clases y, la otra, la influencia, no solo para la estructura de sus clases sino también para gestión de las mismas, de los cursos que recibieron durante su formación en la carrera universitaria; ya esta última situación fue verificada en García (2004). En otras palabras, después de analizar el actual esquema de trabajo, cómo enseñan algunos conceptos matemáticos y cómo trabajan los problemas contextualizados en el área económica, tenemos una visión clara y precisa de la planificación que siguen estos profesores en sus cursos de cálculo.

Es claro que la *toma de decisiones* de la que hablábamos en nuestro marco teórico (ver pág. 58) y que realizan estos profesores para su planificación no es precisamente esa *resolución de problemas* a la que nos referimos en ese momento, sino más bien a la *"aplicación lineal y sistemática de principios y reglas"* (García-Valcárcel, 2001b) ya estandarizados en los libros de texto y programas oficiales. Sólo Elio y Kenya justifican la estructura o esquema que siguen en sus clases en el *factor tiempo*, referente éste que Godino (2003) sostiene, se debe tener presente a la hora de llevar a cabo la planificación de la enseñanza. Algo adicional a destacar de estos dos profesores y que pone de manifiesto el fuerte apego a los libros de texto es el hecho de reconocer que no se han planteado una enseñanza como la del material.

Por otra parte, es indiscutible que no existe uniformidad de criterios sobre la enseñanza de las matemáticas en los cursos de cálculo diferencial para las carreras en cuestión, en todo caso, los criterios utilizados se derivan de los documentos con los que planifican sus clases más el tipo de enseñanza que recibieron durante su formación. El primer punto a destacar sobre la metodología que siguen estos profesores, es que ponen en práctica una *enseñanza unidireccional* (Rosales, 2001) con mucha proximidad al esquema que citamos de Marcelo (2001), es decir, *"una exposición oral de un texto"*.

Al ver la metodología que siguen para la enseñanza del dominio, monotonía, valores extremos, regla de la cadena y las reflexiones de estos respecto a lo planteado por nosotros en el material, podemos apreciar la estrecha relación entre la metodología aplicada y el contenido que enseñan, lo que queremos decir con esto es que debido al peso que le confieren al contenido matemático, muy por encima del económico, la naturaleza de las estrategias puestas en práctica son las que siguen los libros tradicionales de cálculo. En C1, por ejemplo, Ramón y Alexis sostienen que en sus clases *hay más rigor matemático que el que se muestra en el material*. Aunque en otros casos, como el de Elio, por ejemplo, el conocimiento disciplinar tiene incidencia en la enseñanza, pues él se inclina mayoritariamente por una estructura netamente matemática, ya que reconoce abiertamente su poca o nula formación en el área económica.

	MANUEL	RAMÓN	ALEXIS	ELIO	KENYA
Actual esquema de trabajo	Tradicional (libros con aplicaciones y programas oficiales)	Tradicional (libros con aplicaciones y programas oficiales) Más rigor matemático que el material	Tradicional (libros con aplicaciones) Más rigor matemático que el material Trabaja problemas muy básicos	Tradicional (libros varios y programas oficiales), por el tiempo	Tradicional (libros con aplicaciones y programas oficiales) por el tiempo
¿Motiva con problemas de economía?	Sí	No	No	No	Sí
¿Cómo enseña el dominio en el aula?	$R_0^+ = [0,+\infty)$	$R_0^+ = [0,+\infty)$	(*) $R_0^+ = [0,+\infty)$, pero no lo trabaja en el aula	No trabaja el dominio económico en el aula	(*) $R_0^+ = [0,+\infty)$, pero no lo trabaja en el aula
¿Cómo enseña la regla de la cadena en el aula?	De forma distinta al material, sigue los libros de cálculo	Sigue los libros de cálculo	Sigue los libros de cálculo	No se ha planteado la regla de la cadena generando la necesidad, sigue los libros de cálculo	No trabaja la regla de la cadena generando la necesidad, sigue los libros de cálculo
¿Cómo enseña monotonía y valores extremos en el aula?	Motiva con un ejemplo y continúa con la definición	Motiva con un ejemplo y continúa con la definición	Motiva con un ejemplo y continúa con la definición	Motiva con un ejemplo y continúa con la definición	Motiva con un ejemplo y continúa con la definición
¿Trabaja problemas contextualizados como aplicaciones?	Sí	Sí	Sí Pocos problemas y sencillos	Sí Pocos problemas y sencillos	Sí Problemas sencillos
¿Qué notación utiliza?	Leibnitz y Newton	Leibnitz y Newton	Leibnitz	Leibnitz y Newton	Newton

Figura 5.1: Enseñanza

Por medio de la tabla que presentamos en la **Figura 5.1** podemos observar, a manera de resumen, la "*distancia*" que existe entre los profesores participantes en materia de enseñanza. En este caso, destacamos como puntos relevantes: el esquema actual que siguen en sus clases, qué uso le dan a los problemas contextualizados en la economía, cómo enseñan el dominio económico, la regla de la cadena, la monotonía y los valores extremos y qué notación emplean en la enseñanza de la derivada. Tal como se puede apreciar en esta tabla, las coincidencias en cuanto al esquema actual que siguen en sus clases para la enseñanza de la derivada no debe resultar sorprendente, ya que en reiteradas ocasiones hemos señalado que los dos pilares fundamentales donde estos profesores basan su enseñanza son los libros de texto y los programas oficiales. Además, como veremos más adelante, ya que es tema de esta parte del trabajo, en varias oportunidades los profesores manifestaron que era la primera vez que trabajaban un problema como el del material.

5.1.2. Conocimiento sobre el aprendizaje

En todo el desarrollo del análisis previo que hicimos en el **Capítulo 4**, los descriptores o subcategorías que utilizamos para estudiar el conocimiento sobre el aprendizaje fueron: la *actitud* que, generalmente, manifiestan los estudiantes en el aula frente al estudio de conceptos, situaciones o escenarios matemáticos; por otra parte, nos interesó estudiar las *dificultades* y/o *ventajas* que presentan los estudiantes a la hora de abordar determinados problemas matemáticos. Este análisis, visto así, podría resultar poco significativo en un trabajo como este, no obstante, el mismo nos permitió llegar a aspectos muy concretos dentro del conocimiento sobre el aprendizaje y, en consecuencia, poder determinar un perfil del profesor de matemáticas vinculado a estas subcategorías; ya que el conocimiento que el profesor tiene sobre sus estudiantes está en conexión directa con el modelo de enseñanza que el primero lleva al aula; ya de esto hablamos en el **Capítulo 2** (ver pág. 43), pero también obliga a reflexionar y revisar su propio conocimiento disciplinar.

Ahora mostraremos la "*distancia*" de los profesores en materia de conocimiento sobre el aprendizaje partiendo del análisis previo realizado en el capítulo anterior. Aunque en repetidas oportunidades hemos mencionado que los libros de texto y los programas oficiales son la columna vertebral de la estructura que siguen estos profesores para la enseñanza que desarrollan en el aula, el estudiante, o mejor dicho, el conocimiento sobre el estudiante es también un punto de referencia para el esquema de enseñanza y así, del CDC del profesor de matemáticas de universidad. En este sentido, estudiar el conocimiento que tiene el profesor sobre sus estudiantes se hace vital para nuestro trabajo. En este caso, las opiniones de los participantes son variopintas y aportan perfiles con matices interesantes.

Un punto que conviene aclarar, aun cuando ya lo mencionamos en oportunidades anteriores, es el hecho de que algunas de estas respuestas son hipotéticas, puesto que el material discutido en ningún momento fue puesto en práctica en el aula e incluso, muchos de los problemas, por no decir todos, son "nuevos"[3] para los profesores. No obstante, la propia característica de este material nos permitió profundizar en asuntos concretos sobre el conocimiento del profesor en materia de aprendizaje y cuánto conoce el profesor a sus estudiantes.

En primer lugar comenzaremos por hablar sobre la actitud del estudiante frente a problemas contextualizados en el área económica y no-económica. De esta manera podremos indagar sobre puntos concretos como el trabajo con modelos, el dominio de conceptos básicos de economía y matemáticas, así como la interpretación de las matemáticas en el contexto económico.

Otro punto a considerar dentro del conocimiento sobre el aprendizaje consiste en estudiar la implicación que tiene en el estudiante trabajar conceptos como el dominio, la monotonía, los valores extremos y la regla de la cadena, de acuerdo al esquema presentado en el material. Tomamos en cuenta estos conceptos u objetos matemáticos por ser los que más se discuten en el seminario. Aun cuando las opiniones de cada profesor resultan próximas en estos conceptos, hemos decidido estudiarlos por separado a fin de determinar matices en cada concepto.

Nuestra propuesta de trabajar el dominio de una función en un doble contexto de forma simultánea obedece, principalmente, a explotar la EBP como estrategia de enseñanza; por otra parte, consideramos de carácter innovador estudiar el dominio de esta manera ya que ninguno de los textos consultados así lo hace, y de esta manera también estaríamos explotando la interdisciplinariedad (Hargreaves *et al.*, 2001). Tanto es así que Alexis y Kenya lo reconocen abiertamente y al mismo tiempo surge la reflexión sobre el por qué los libros de texto no plantean este tipo de estudio. Por ejemplo, Kenya y Elio se mantienen al margen y sostienen que no se han planteado trabajar el dominio de esta manera, mientras que Alexis, lo reconoce en la entrevista final como veremos más adelante cuando caractericemos las opiniones de los profesores. Manuel y Ramón además de dar su opinión sobre la implicación que tiene trabajar el dominio de esta manera, manifiestan que trabajan el dominio económico como se vio en la tabla de la **Figura 5.1**; ahora bien, Alexis y Ramón matizan sus comentarios, pues ellos consideran que trabajar el dominio en un *contexto dual* puede generar conflicto en el estudiante, aunque Ramón en su reflexión argumenta que: *"es importante hacerlo así"* y que además

[3]Aun cuando los problemas que conforman el instrumento son tomados de los libros de texto que, usualmente, utilizan los profesores participantes, la estructura de los mismos fueron modificados por dos razones fundamentales: la primera, darle características de problemas tipo EBP y, la segunda, poder generar discusiones de interés en nuestra investigación.

se *"prepara al estudiante para el curso de microeconomía"*, dejando evidencia de su conocimiento disciplinar en economía.

Por su parte, las ventajas que observa Manuel en el estudio del dominio, de acuerdo a como lo planteamos en el material, son de carácter cognitivo, por un lado, tal planteamiento permite al estudiante entender el concepto en cuestión y, por otro, ayuda a visualizar la interconexión entre las matemáticas y la economía. Aun así, este profesor opina con cautela y es de la idea de que se debería poner en práctica el material antes de dar una conclusión definitiva.

En cuanto a monotonía y valores extremos, comenzaremos por señalar que el aporte de Alexis en esta materia no es significativo. Aquí los otros profesores tienen una posición que nosotros catalogamos de general, puesto que la comparten los cuatro restantes, aunque sus frases no son las mismas; ellos consideran que estudiar la monotonía y los valores extremos mediante esta estructura *"promueve el aprendizaje de estos conceptos"* y se motiva al estudiante en la interpretación de la derivada; no obstante, el apoyo de Ramón no es del cien por ciento, él sugiere que se trabajen otros ejemplos de manera que el estudiante no entienda que estos conceptos de monotonía y valores extremos sean propios de la economía. Este profesor ha manifestado inquietudes similares en otras discusiones, donde muestra recelo en cuanto a la presentación de conceptos matemáticos enfocados desde el punto de vista económico.

Iniciamos nuestro resumen de la regla de la cadena indicándole al lector que, para todos los participantes, era la primera vez que veían y discutían cualquiera de los problemas de este tema, de allí que se observe el carácter hipotético de sus respuestas. Sin embargo, para nosotros, resulta interesante estudiar lo que representa para los estudiantes el estudio de la regla de la cadena con problemas contextualizados en el área económica. De este punto resaltamos que los cinco profesores destacan las bondades de los problemas para estudiar la regla de la cadena, aunque nosotros subrayamos las opiniones de Manuel y Ramón sobre el uso de la función exponencial al estudiar la regla de la cadena por la importancia de la misma en el contexto económico. Una vez más queda al descubierto el conocimiento disciplinar económico de estos dos profesores.

Pasamos ahora a estudiar el conocimiento que tienen los profesores sobre las *dificultades* que presentan sus estudiantes en lo que respecta al cálculo diferencial y conceptos afines, puesto que el conocer las dificultades de los estudiantes permite, entre otras cosas, una mejor planificación y selección de problemas para ser discutidos en clase y, en consecuencia, una clase que le llegue más al estudiante. Aquí los profesores muestran un conocimiento profundo y muy variado; tal vez quien aporta más detalles de todos es Elio, contrario a Manuel y Alexis, quien por lo general se ciñe a las opiniones de los otros de su grupo.

Los conceptos o temas en los que presentan dificultad los estudiantes y que más destacan los profesores son: la regla de la cadena, la derivada de la función exponencial (Manuel, Ramón, Elio y Kenya), la interpretación de la derivada (Ramón, Alexis, Elio y Kenya) y la notación de Leibnitz (Manuel, Elio y Kenya). Hay otras dificultades que, cuando mucho, son compartidas por dos profesores como: el despejar una ecuación (Manuel y Ramón) o el lenguaje matemático (Alexis y Elio). Sin embargo, aquí lo que resulta interesante no es el amplio conocimiento del profesor en esta materia, sino la *aceptación* de estas dificultades sin el planteamiento de alguna estrategia específica para paliar la situación en cualquiera de los temas que ellos mencionan.

Ya para finalizar esta parte del conocimiento sobre el aprendizaje, nos centramos en el conocimiento que tiene el profesor sobre la formación del estudiante respecto a estrategias o métodos de enseñanza como el que se muestra en el material discutido. Ya que este punto complementa el conocimiento que pueda tener el profesor sobre las dificultades del estudiante, pues no basta con conocer los obstáculos o dificultades sobre un determinado concepto, también el profesor debe tener presente qué estrategia permite al estudiante un mejor aprendizaje.

En este sentido las opiniones están divididas en cuanto a la formación del estudiante, pues dos profesores consideran que sus estudiantes tienen la capacidad de abordar la estructura que sigue nuestro material, mientras que tres no consideran que sus estudiantes estén formados para seguir nuestra propuesta en el aula de clases; pero además, surgen matices significativos para nuestro trabajo y que mostraremos dentro de las características que siguen a continuación en materia del conocimiento del aprendizaje.

En resumen, el conocimiento sobre el aprendizaje que manejan estos profesores muestra una gran amplitud y profundidad, el cual caracterizamos a continuación:

Características generales

G6 Todos coinciden en que los estudiantes *rechazan* problemas del contexto no-económico.

G7 Aun cuando no hay un acuerdo mayoritario sobre la actitud del estudiante frente a problemas contextualizados en la economía, cuatro profesores consideran estos problemas sirven como *elementos motivadores* para el aprendizaje; en particular, aquellos donde está contemplado el estudio de la monotonía y valores extremo, lo cual representa para nosotros cierta contradicción, ya que dos de estos profesores, Elio y Kenya, opinan que sus estudiantes rechazan problemas del contexto económico.

G8 Hay tres puntos en el que hay una coincidencia generalizada por cuatro profesores respecto a las dificultades que presentan los estudiantes en problemas relacionados al cálculo diferencial y temas afines, estos son:

- La *interpretación de la derivada* (Ramón, Alexis, Elio y Kenya).
- La *regla de la cadena* (Manuel, Ramón, Elio y Kenya).
- *Derivar la función exponencial* (Manuel, Ramón, Elio y Kenya).

Características compartidas

C6 La actitud de los estudiantes frente a problemas contextualizados en el área económica está dividida, esta división está asociada a los dos grupos de profesores que participaron en nuestro trabajo[4], ya que Manuel y Ramón no solo manifiestan que sus estudiantes aceptan este tipo de problemas sino que además *"los exigen"* frente a problemas de cálculo o del contexto no-económico; más aún, Manuel advierte que este tipo de problemas motiva al estudiante, mientras que Ramón afirma que las respuestas de sus estudiantes frente a estos problemas son correctas, por lo general.

C7 Kenya, Alexis y Elio advierten que sus estudiantes *rechazan* los problemas de contexto económico, entre otras cosas, porque sus estudiantes presentan *dificultad al trabajar modelos* de esta área y con la *interpretación de la derivada*.

C8 Otro tema a considerar y que les podría causar dificultad a los estudiantes es el *estudio del dominio* de una función en un contexto dual; Ramón y Alexis advierten que esto les puede *generar conflicto*.

C9 Otra de las dificultades que presentan los estudiantes y que lo manifiestan tres de los participantes es el emplear la *notación de Leibnitz*.

C10 Manuel y Ramón consideran importante el problema de *la regla de la cadena* que incluye la exponencial (EP3-2), entre otras cosas, por la *importancia de esta función en el campo de la economía*.

[4]Recordemos que aunque son profesores que pertenecen a la misma universidad e imparten clases a las mismas carreras, los campus en los que trabajan quedan en ciudades distintas, están adscritos a departamentos distintos y la población estudiantil muestra diferencias socioculturales diferentes, sin embargo, esto último no lo tomamos en cuenta por no ser de interés en el presente trabajo.

C11 Sobre monotonía y valores extremos, Manuel, Elio y Kenya consideran que trabajar estos conceptos de acuerdo al enfoque presentado en el material *promueve el aprendizaje* de estos conceptos.

C12 En cuanto a la formación del estudiante para abordar el material, las opiniones vuelve a estar divididas al igual que en C6: Manuel y Ramón consideran que sus estudiantes tienen la formación necesaria para seguir el material.

C13 En posición contraria a C12, Alexis, Elio y Kenya consideran que sus estudiantes *no están preparados* para seguir una enseñanza con la estructura que sigue el material nuestro. Sin embargo, estos tres profesores *sugieren poner en práctica el material* de cara a mejorar el aprendizaje de los estudiantes

Características particulares

P6 De C7 se sigue lo siguiente: Kenya es la única en reconocer que sus estudiantes *"no están habituados a trabajar problemas del contexto económico"*.

P7 De C8 surge el siguiente matiz por parte de Ramón debido al conocimiento disciplinar en economía que éste maneja, él considera que es importante *trabajar el dominio* de esta manera *"ya que prepara al estudiante para microeconomía"*.

P8 Manuel, por su parte, no considera que el *estudio del dominio* en un doble contexto signifique dificultad alguna para el estudiante, en todo caso, *"permite visualizar la relación entre las matemáticas y la economía"*.

P9 De C12 resaltamos la posición de Manuel, quien sostiene que *"el papel del profesor es clave"*.

P10 Mientras que Ramón advierte que además de estar formado el estudiante, éste se involucra más en la clase.

En conclusión, podemos señalar distintos aspectos en cuanto al conocimiento sobre el aprendizaje que contribuyen a generar el perfil del profesor de matemáticas de universidad y la relación que guardan estos con las otras componentes del CDC. Es por ello que aunque haremos una síntesis del conocimiento respecto al aprendizaje aprovecharemos, siempre que sea posible, para buscar conexión con el conocimiento respecto a la enseñanza, el cual fue analizado antes. En este orden de ideas, veamos qué nos dice el conocimiento respecto a las dificultades y las actitudes de los estudiantes.

Como hemos repetido en oportunidades anteriores, el material discutido durante el seminario tiene la estructura de la EBP; en tal sentido intentamos conocer la actitud del estudiante frente a problemas del contexto económico, pero no visto estos como problemas de aplicaciones. Ya vimos que hay opiniones divididas respecto a estos problemas y la posición del estudiante al trabajarlos. Tres profesores coinciden en el rechazo por parte de los estudiantes al intentar llevar al aula problemas contextualizados en el área económica debido a la dificultad que supone para el estudiante la interpretación de la derivada en general; pero también el trabajo con modelos matemáticos supone un obstáculo para el estudiante.

Ahora bien, si entendemos el curso de cálculo diferencial en estas carreras como un conjunto de herramientas que permitirían la resolución de problemas en economía, resulta contradictorio lo expresado por Kenya, quien es uno de estos tres profesores citados arriba: ella sostiene que sus *"estudiantes no están habituados a trabajar este tipo de problemas"*. Sin embargo, consideramos que esto es responsabilidad directa del docente el que se trabaje en el aula, o no, determinado concepto o tema y que además forma parte del currículo oficial. Esta situación nos conecta con el conocimiento disciplinar, es decir, puede darse el caso que el profesor no aborde este tipo de problemas contextualizados en el campo de la economía por no tener el conocimiento suficiente para abordarlos en el aula de clases. Sobre esto último, Elio ha mantenido una posición consecuente a lo largo del seminario, reconociendo abiertamente su falta de formación en materia económica.

Por otra parte, los otros dos profesores expresan que sus estudiantes exigen problemas contextualizados en el área de la economía, pero además ellos reconocen trabajar en clase este tipo de problemas. Es claro, y lo veremos más adelante, que el conocimiento disciplinar económico que estos dos participantes manejan es acorde a la exigencia de los cursos y más todavía, su conocimiento disciplinar y su esquema de enseñanza obedecen a la disposición de los estudiantes a trabajar problemas matemáticos con *aplicaciones a la economía*.

Pasemos ahora a hablar de las dificultades del estudiante como parte del conocimiento sobre el aprendizaje, esto quiere decir, los obstáculos que supone para el estudiante trabajar un concepto matemático, un problema tipo o esquema del mismo. Sobre este particular, cada uno de los participantes deja reflejado lo conscientes que son de sus estudiantes y las dificultades que estos manifiestan. Desde aspectos generales como la *interpretación de la derivada*, la *regla de la cadena* o la *derivada de la función exponencial*, hasta detalles más precisos como la *notación de Leibnitz* o el enfrentarse a un *estudio del dominio como la estructura que presentamos en el material*, en la que se sugiere el estudio del dominio en un doble contexto matemático-económico y con un enfoque tipo EBP.

Pero, ¿qué significa para nosotros o cuán relevante es para nuestro trabajo este tipo de conocimiento?, pues bien, visto esto como simples características de los estudiantes conocidas por sus profesores no representa mayor relevancia desde el punto de vista didáctico; pero si consideramos que el docente toma en cuenta todos estos detalles que conoce del estudiante de cara a su planificación docente y estrategias de enseñanza, entonces, todo este conjunto de elementos asociados al aprendizaje del estudiante pasan a tener un valor didáctico incuestionable en el proceso de enseñanza-aprendizaje; por supuesto, sin dejar a un lado las *ideas previas* (Salazar, 2005) que puedan tener los alumnos sobre un tema específico.

Ahora bien, así como consideramos importante conocer las dificultades u obstáculos que manifiestan los estudiantes respecto a conceptos o problemas matemáticos, también lo es el conocer las ventajas o facilidades que supone trabajar un problema o la estrategia para abordar el mismo. Cuando discutimos sobre las implicaciones que significa trabajar objetos matemáticos como el dominio, la monotonía o la misma regla de la cadena con la estructura presentada en el material, estos profesores se manifestaron favorables al material, pues con ello se podría lograr: entender la relación matemáticas-economía, la preparación del estudiante al curso de microeconomía, estimular la toma de decisiones, entre otros. En otras palabras, estarían apoyando la EBP como estrategia de enseñanza de cara a mejorar el aprendizaje.

Ya para cerrar esta parte del análisis sobre el aprendizaje, haremos una breve parada en un aspecto que surgió de forma espontánea en la entrevista final y que no está reseñado en el marco teórico de forma explícita, éste tiene que ver con la *formación del estudiante* respecto a la implementación del material o más precisamente, su formación respecto a la EBP[5]. En nuestro marco teórico hablamos de *concepciones alternativas* (Carrascosa, 2005), *ideas previas* (Salazar, 2005) y de *conocimiento previo del estudiante* (An *et al.*, 2001). Estos tres conceptos están fuertemente ligados a lo que entendemos como formación del estudiante.

En este caso, las opiniones están divididas en el mismo sentido en que se caracterizan los profesores en cuanto al trabajo con problemas de aplicaciones que estos siguen en clase. Aquellos profesores que consideran a sus estudiantes formados para llevar a cabo una enseñanza basada en problemas son los mismos que más explotan los problemas de aplicaciones, mientras que los que no lo hacen no creen que sus estudiantes tengan formación para abordar el material. Más aún, y así lo veremos más adelante en el **Apartado 5.2**, los participantes que reconocen que sus estudiantes poseen preparación para abordar una enseñanza con el material discutido son aquellos que tienen un mayor conocimiento disciplinar económico.

[5] Aquí asumimos de entrada que la estrategia de enseñanza que siguen estos profesores no es la EBP, de acuerdo al trabajo previo realizado en García (2004).

	MANUEL	**RAMÓN**	**ALEXIS**	**ELIO**	**KENYA**
Actitud del estudiante frente al contexto económico	Aceptación Así lo exigen Motivación	Aceptación Así lo exigen Motivación Responden bien a estos problemas	Rechazo Prefieren ejercicios de cálculo Rechazan problemas de aplicaciones	Indiferencia Rechazo Prefieren problemas de cálculo Motivación	Motivación Rechazo al principio, después se interesan No están habituados a estos problemas Prefieren problemas de cálculo
Actitud del estudiante frente al contexto no-económico	Rechazo	Rechazo	Rechazo	Rechazo Rechazan problemas con exceso de cálculo	Rechazo Temor
Formación del estudiante respecto al material	Sí está formado, pero el papel del profesor es clave	Sí está formado para seguir cada paso del material (**por la estructura del mismo**) El estudiante se involucra más	No están preparados, habría que seguir esta estructura desde el inicio de carrera	No están preparados, habría que seguir esta estructura desde el inicio de carrera Estos problemas pueden generar mayor aprendizaje	No están preparados, pero hay que probar Al principio puede generar conflicto por el cambio de estructura
Dominio (¿qué implica trabajarlo así?)	Ayuda a entender el concepto de dominio Ayuda a entender la relación matemáticas-economía Refuerza conocimiento	Puede confundir pero es importante hacerlo así Prepara al estudiante para microeconomía	Podría generar conflicto No se lo ha planteado	No se lo ha planteado	No se lo ha planteado
Monotonía y valores extremos (¿qué implica trabajarlo así?)	Ayuda a entender el concepto de monotonía y valores extremos Ayuda a entender la relación matemáticas-economía	Puede confundir al estudiante si no se hace otro tipo de problema		Se promueve el aprendizaje de monotonía e interpretación de la derivada	Estimula el pensamiento y la toma de decisiones Motiva la interpretación de la derivada
Regla de la cadena (¿qué implica trabajarlo así?)	El problema de la exponencial es clave	Ayuda a entender cómo usarla y en qué consiste El problema de la exponencial es clave	Puede ser provechoso	Se ve la utilidad de esta regla Se muestran las matemáticas como herramienta Se aclara qué significa dC/dq	Motiva al estudiante
En general, tienen dificultad con:	Regla de la cadena Notación de Leibnitz Derivada de la exponencial Despejar	Interpretación de la derivada Derivada de la exponencial Identificar la función compuesta Regla de la cadena Problemas no-económicos Despejar	Interpretación de la derivada Lenguaje matemático	Interpretación de la derivada Problemas contextualizados El lenguaje matemático Regla de la cadena Notación de Leibnitz Derivada de la exponencial Creación de modelos	Identificar funciones compuestas Derivada de la exponencial Regla de la cadena Notación de Leibnitz Interpretación de resultados Problemas de optimización

Figura 5.2: Aprendizaje

Esto nos lleva a inferir que la planificación que realiza en profesor va en línea directa con la formación de los estudiantes; incidiendo, en consecuencia, en una mejor preparación de estos últimos en materia económica. Deducimos también que tal situación podría influir en la formación de algún profesor en materia económica, puesto que éste se conformaría con su actual conocimiento considerando que sus estudiantes no le van a hacer mayores exigencias.

La tabla de doble entrada que se muestra en la **Figura 5.2**, al igual que lo hicimos en la sección anterior, es el resultado del trabajo realizado en el **Capítulo 4** y expresa a modo de resumen el análisis desarrollado en esta sección de esta memoria. Aquí resaltamos: la actitud del estudiante frente a problemas en contextos económicos y no-económicos, las implicaciones cognitivas que tiene para el estudiante trabajar el dominio, la monotonía, los valores extremos y la regla de la cadena y, finalmente, las dificultades que muestran los estudiantes en el curso de cálculo diferencial.

5.1.3. Conocimiento sobre el currículo

Así como lo indicamos en las dos secciones previas, los puntos o aspectos de interés vinculados a la enseñanza y el aprendizaje, respectivamente, de igual manera comenzamos esta parte del trabajo señalando que el punto a tratar es el conocimiento respecto al *análisis crítico de materiales publicados* (Climent, 2002), cuyo material ha ser tomado en cuenta para esta actividad es el desarrollado por nosotros para las discusiones en el seminario. Dentro de este amplio y robusto tema como lo es el análisis crítico de materiales, tomamos en cuenta: posibles ventajas y/o desventajas que supone para el aprendizaje del estudiante la implementación del material o el alcance de los objetivos[6]; por otra parte, ¿qué exigencias supone para el profesor la aplicación del mismo?, ¿qué tipos de modificaciones sugiere el profesor en el material?, ¿cómo entiende o concibe el material discutido?, la valoración respecto a los libros de texto[7], entre otros. Ahora bien, si volvemos por un momento al **Capítulo 4**, podemos observar que sólo hablamos de *análisis del material*; sin embargo, es aquí donde entramos en detalle por medio de componentes que sugerimos a fin de descomponer lo amplio que puede resultar el análisis crítico de materiales.

Conviene señalar que uno de los puntos más importantes de este trabajo es el análisis relacionado al conocimiento del currículo, ya que el mismo tiene una fuerte relación con los dos conocimientos analizados anteriormente, pero

[6]Análisis tomando en cuenta como referencia al estudiante. En la **Sección 5.1.2** mencionamos que el conocimiento sobre el estudiante es también un punto de referencia para el esquema de enseñanza, lo que implica su relación con el conocimiento sobre el currículo.

[7]Análisis tomando en cuenta los conocimientos en didáctica y disciplinar del profesor.

además, y tal vez de mayor importancia aún, es que en esta parte de nuestra investigación, validamos implícitamente y de forma transversal, el material discutido en el seminario. Por otro lado y al igual que lo señaláramos en la sección anterior, las respuestas y opiniones sobre este conocimiento son también hipotéticas.

Pero, ¿qué buscamos con esta parte del análisis?, es decir, ¿de qué nos sirve indagar sobre el conocimiento curricular del profesor de matemáticas de universidad y sus implicaciones en su labor docente? Para responder a estas dos interrogantes comenzaremos por decir que hoy por hoy existe una fuerte tendencia, al menos en carreras eminentemente prácticas como las ciencias económicas, a plantearse un *currículo interdisciplinar* como lo identifican Hargreaves *et al*. (2001), donde se busca fusionar más de una materia que sean afines y estudiar las mismas de forma interconectada. Por otra parte nos interesa conocer las opiniones y reflexiones de los participantes respecto a nuestra propuesta didáctica con el objeto de validar la misma e intentar ponerla en práctica a futuro. Como punto adicional a lo anterior, tenemos también que, mediante el punto de vista que fije el profesor respecto al material, éste manifestará parte de su conocimiento disciplinar respecto al aprendizaje y la enseñanza (Climent, 2002); lo que significa que emerge una interrelación entre las distintas componentes del CDC.

Sin embargo, un punto significativo para el análisis de esta sección proviene de la discusión que surgió de nuestra propuesta, vista como un material vulnerable y susceptible a cambios, característica esta que resalta Zabalza (2003) en los materiales utilizados para la enseñanza en ambientes universitarios. Aún así, una característica propia de esta investigación consiste en lo particular de sus resultados, es decir, si otros hubiesen sido los participantes, serían otros los resultados derivados de estas discusiones.

Ahora mostraremos la "*distancia*" de los profesores en materia de conocimiento sobre el currículo, más concretamente sobre análisis crítico de materiales partiendo de lo analizado en el capítulo anterior. Para ello, el orden que desarrollaremos para el análisis es el siguiente: comenzaremos por estudiar las ventajas y/o inconvenientes que conllevan la puesta en práctica de nuestra propuesta didáctica de cara al aprendizaje, así como el alcance del material respecto a los objetivos del curso. Esto quiere decir que estudiaremos el conocimiento curricular del profesor desde el punto de vista del estudiante o, mejor dicho, exploraremos hasta dónde el profesor toma en cuenta a los estudiantes en sus reflexiones sobre un determinado material y cómo influiría en los segundos. De esta primera parte destacamos la fuerte participación de los profesores en cuanto a las *ventajas* que éstos observan en nuestra propuesta y, de igual manera, las escasas *desventajas* que supone para cada uno de los participantes.

Pero, ¿qué situaciones concretas estamos interesados en indagar en este primer escalón del conocimiento sobre el currículo?, pues aquí lo que despierta inquietud es analizar las ventajas, obstáculos y el alcance del material en relación con los objetivos del curso desde el punto de vista cognitivo por encima de cualquier otro enfoque, como podría ser el institucional, emocional, entre otros. En esta oportunidad advertimos que aun cuando hay coincidencias generales entre los participantes, como es el caso del problema EP1-2, que lo consideran más apropiado que EP1-1 para introducir el tema de la derivada; o también, lo significativo que resulta el material porque *se relacionan las matemáticas y la economía*, surgen otras opiniones particulares en la que se desmarcan entre sí, como el caso de Ramón, quien observa características en nuestra propuesta aduciendo que prepara al estudiante para cursos de la rama económica como la microeconomía.

Por otra parte, y aunque la problemática o inconvenientes observados son escasos, es poca o nula la coincidencia entre los participantes; por ejemplo, Ramón y Alexis consideran que estudiar el dominio en un doble contexto puede generar conflictos en el estudiante, aun cuando el primero también lo ve como una ventaja, posición entendible en el caso de este profesor, ya que manifestó en varias oportunidades su posición sobre el rigor matemático inclusive para estos cursos; en concreto, este participante considera que si se introduce la derivada con el ejemplo EP1-2 *"se corre el riesgo de entender la derivada como un concepto propio de la economía"*. Sobre la regla de la cadena también hay una clara advertencia por parte de dos profesores quienes sostienen que el material puede traer problemas en el estudio de esta regla si no se maneja la composición de funciones; no obstante, entendemos que cualquiera que sea el material, el estudiante tendrá problemas con la regla de la cadena si tiene problemas con la composición de funciones, es decir, que tal como nosotros lo vemos no es un punto en contra de nuestra propuesta sino un obstáculo que se puede dar en el estudiante.

En cuanto a los objetivos y el cubrimiento de los mismos, el panorama es similar a lo expuesto en el párrafo anterior en cuanto a la participación de los profesores; todos menos Manuel coinciden en que los objetivos *se alcanzan mejor respecto a su actual forma de trabajo* e incluso, dos de ellos opina que los objetivos *se alcanzan por encima de los libros de texto*. Estas dos posiciones le dan un fuerte impulso a nuestra propuesta didáctica.

Pasando a lo que sería nuestro segundo peldaño en esta parte del análisis, nos detuvimos a indagar sobre las exigencias que suponen para el profesor llevar al aula el material discutido, lo cual implica profundizar en aspectos como: el factor tiempo, formación profesional o trabajo dentro y fuera del aula. Nos centraremos en estos tres aspectos como piezas fundamentales a ser tomados en cuenta a la hora de intentar poner en práctica cualquier material distinto al que trabaja en la actualidad, pues nosotros entendemos que del análisis que realiza un profesor sobre un documento o material didáctico surge como consecuencia una *toma de decisión* en la que se deben considerar ciertas implicaciones; por ejemplo, si el docente decide llevar un problema al aula, éste debe tener suficiente *conocimiento disciplinar* para abordarlo, pero también tiene que tomar en cuenta el factor tiempo y determinar si es viable, desde este punto de vista, la discusión del problema.

Otro punto a tomar en cuenta en el análisis del material es el trabajo que implique dentro y fuera del aula la puesta en escena del material, pues de alguna manera, esto está relacionado con el factor tiempo y el aprendizaje del estudiante. Sobre esta parte del análisis resaltamos lo importante que resultó la entrevista final, ya que en ella hicimos preguntas concretas relacionadas con la formación del profesor para la implementación del material. Aquí las opiniones están divididas pero destacamos dos situaciones que resultaron sistemáticas a lo largo de la aplicación del instrumento; la primera, Kenya fue la única en reconocer que la estructura del material es de corte constructivista y más aún, enmarcado en la EBP. Lo otro tiene que ver con la consistencia de Elio, quien reconoció abiertamente su escasa preparación para poner en práctica el material, principalmente, por su falta de conocimiento económico.

Posteriormente continuamos nuestro trabajo atendiendo a la posible aceptación de la puesta en práctica en el aula de nuestro material y sus eventuales modificaciones. Lo primero guarda estrecha relación con el final del párrafo anterior; sin embargo acá tomamos en cuenta las justificaciones que dan los participantes de cara a la aceptación o rechazo de llevar el material al aula de clases. Por otra parte, entendemos que nuestra propuesta reúne las características que considera Zabalza (2003): debe tener un currículo o parte de éste; esto es, que el mismo sea proclive al cambio y modificable de acuerdo con las necesidades o exigencias que amerita el curso. En este particular, Elio y Kenya, más allá de un apoyo personal al material, son de la idea de buscar un apoyo institucional, propuesta que también sigue Alexis. Sin embargo, lo relevante en este caso son las sugerencias que aportan de cara a los cambios en el material, eso sí, sin justificación alguna o con escasa argumentación.

Finalmente, cerramos esta parte del análisis estudiando cómo entienden el material, su comparación respecto a los libros de texto en materia de estructura y contenido y, por último, explorar si nuestra propuesta induce al cambio en el profesor en cuanto a su práctica docente. Recordemos que el material que forma parte de nuestro instrumento fue diseñado con dos propósitos fundamentales; uno, el recoger unos datos para estudiar el CDC del profesor de matemáticas de universidad, el otro, validar el mismo de cara a una futura puesta en escena tomando como metodología de enseñanza la EBP. Es por ello que nos interesa saber cómo entiende el profesor nuestra propuesta didáctica. El otro punto que nos interesa estudiar y que repercute en el anterior consiste en la relación que pueden ver los participantes en relación a los libros de texto que actualmente utilizan. Ya para concluir esta parte del análisis buscaremos explorar los posibles cambios que genera en el profesor el material discutido durante el seminario. Aquí nos encontramos con diversas opiniones que dan pie a la valoración del material.

A continuación pasamos a caracterizar aquellos aspectos más relevantes que, en materia de conocimiento sobre el currículo manifiestan los participantes, aunque aprovechamos para advertir que aun cuando el aporte en esta materia resultó significativo tanto por la cantidad de información aportada como por lo relevante de la misma, solo nos quedamos con aquella que marca la diferencia por su representatividad o relevancia.

Características generales

G9 La característica de más atributo para el material en la que todos los participantes coinciden es que con el mismo *se motiva al estudiante* tanto por su estructura detallada del contenido como por el contexto económico incluido en el mismo.

G10 Ahora bien, ya entrando en detalle en el documento discutido, los profesores, cuando se realizó la primera sesión, consideraron de forma unánime que el problema del *EP1-2 resulta más apropiado para introducir la derivada* que el del EP1-1, sobre todo por el contexto económico que se maneja en el citado de primero.

G11 Otro aspecto que consideran todos los participantes como ventajoso en nuestra propuesta es *la relación entre las matemáticas y la economía* que se mantiene a los largo de todo el material; pero más adelante, en las características compartidas y personales veremos detalles asociados a esta característica.

G12 De la característica anterior se puntualiza lo siguiente: todos los profesores consideran ventajoso para el estudiante que se trabaje *el dominio en los dos contextos*, el matemático y el económico, pues esto incide en el fortalecimiento del aprendizaje.

G13 Nuestra propuesta de enseñanza para la regla de la cadena corre la misma suerte que el estudio del dominio en doble contexto; aquí también todos los profesores *se inclinan por la estructura* que ofrecemos para el estudio de la regla de la cadena, aunque hay matices compartidos o particulares al respecto.

G14 Aunque en líneas generales todos los participantes manifiestan un fuerte apoyo al material, todos menos Manuel consideran que, de ponerse en práctica nuestra propuesta, *los objetivos quedarían cubiertos de mejor manera* respecto a su actual esquema de trabajo. En el caso de Manuel, éste manifestó a lo largo del seminario que su esquema de enseñanza es muy próximo al del material, salvo que en este último se detalla más el contenido.

G15 Para los cinco profesores, poner el material en práctica rompe con su actual esquema de trabajo (teoría + aplicaciones); no obstante, Manuel sostiene que se rompe parcialmente, puesto que él afirma que su metodología de enseñanza es similar a la del material. Aun así, de aquí se desprenden particularidades da cada uno de los profesores que mencionamos entre P20 y P22.

G16 Desde el punto de vista matemático, *todos se sienten capacitados* para seguir el material; sin embargo, en el contexto económico, *se autocalifican entre 6 y 9*, como se muestra en la **Figura 5.3**, en una escala de 1 a 10.

G17 Pudimos observar, y así queda reflejado en la **Figura 5.4**, que *todos los participantes recomiendan poner en práctica el material*, aunque con ligeras particularidades, principalmente de tipo metodológicos.

G18 Por ejemplo, todos los profesores consideran que *hay que cambiar el contexto del problema EP1-1* y enmarcarlo en el campo de las ciencias económicas.

G19 Pasando ahora al tema sobre cómo entienden nuestra propuesta, las opiniones son muy variadas, pero entre ellas señalamos que *los cinco profesores observan aspectos de carácter innovador*. Más aún, en el caso concreto de la regla de la cadena, todos los participantes aprecian características didácticas en los tres problemas donde se aborda esta regla. Algo similar ocurre con el estudio del dominio de una función, pues todos admiten que en esta materia nuestra propuesta también tiene carácter novedoso y de incidencia en el estudiante.

G20 Es claro que al discutir nuestro instrumento todos los participantes, de forma directa o indirecta, *se han mostrado dispuestos* en mayor o menor medida a tomar en cuenta nuestro material para sus futuras labores docentes. En otras palabras, consideramos que todo este proceso de discusión y reflexión ha generado inquietudes entre los participantes que inducen o promueven un cambio dentro de su actual modelo de enseñanza en lo que se refiere al contenido matemático.

Características compartidas

C14 De G11 obtenemos que Ramón, Elio y Kenya consideran que en el material *se muestran las matemáticas como herramienta* y entienden esto como una ventaja didáctica.

C15 De G13 se sigue, por ejemplo, que Manuel y Alexis *se inclinan por los problemas de los episodios EP3-1 y EP3-3*; esto lo justifican en virtud de *la notación* empleada en los mismos.

C16 Por su parte, Kenya y Ramón se inclinan por el problema EP3-2, aunque Kenya emplearía la notación de Leibnitz en este problema, pues ella considera que la de Newton genera dificultad en el estudiante.

C17 Ramón y Manuel valoran positivamente el empleo de la función exponencial en el estudio de la regla de la cadena, entre otras cosas, porque el estudio de esta función es de importancia en el campo de la economía.

C18 Como ventaja metodológica, Alexis, Manuel y Ramón destacan que *el contenido del material es más detallado* en comparación con su actual forma de trabajo y respecto a los libros de texto.

C19 Pasando ahora a los inconvenientes que pueden surgir al implementar el material, Manuel y Alexis consideran que si los estudiantes no dominan la composición de funciones *se les puede dificultar la regla de la cadena*. Sin embargo, ya fijamos nuestra posición al respecto, puesto que consideramos que esto es una problemática del estudiante y no del material.

C20 Aun cuando todos apoyaron el estudio del dominio en un contexto dual, Ramón y Alexis tuvieron sus reservas, puesto que si los estudiantes ya han trabajado el dominio solo en el contexto matemático, *abordar el dominio en el contexto económico puede generarles conflicto*. Sobre este particular queremos señalar lo siguiente: aun cuando el material incluye el estudio del dominio en un tema de derivada no implica que propongamos volver a estudiar el dominio; en todo caso nuestro planteamiento (así quedó establecido durante el seminario) sugiere este estudio en Matemáticas 1, espacio reservado para el dominio de una función.

C21 Para tres de los participantes, los problemas de la sesión S4 del seminario *son problemas inapropiados* para trabajarlos en el aula, los argumentos utilizados son: recargado en la formulación, el que la variable no aparezca de forma explícita o el contenido teórico.

C22 Para Manuel y Alexis *no supone más tiempo* la puesta en práctica del material; sin embargo, más adelante, como veremos en la tabla de la **Figura 5.3**, podemos observar que los datos de Alexis están entre comillas, esto se debe a que en un principio, el afirma que no supone más tiempo ni la preparación de la clase ni la puesta en práctica, pero después de las opiniones de sus compañeros de grupo sobre este particular, él termina aceptado que supone más tiempo, sobre todo porque no tiene argumentos contundentes para contradecir a sus compañeros.

C23 En cambio, para Kenya, Ramón y Elio *sí supone más tiempo* dentro y fuera del aula el trabajar con el material, sobre todo por el *contexto económico* y por la *metodología empleada*.

C24 En cuanto al rigor matemático, tres profesores sostienen que aun cuando nosotros apostamos en el material por una enseñanza de las matemáticas contextualizada en la economía, *no se pierde profundidad en el contenido matemático*; sin embargo Ramón, que es uno de los que apoya esta posición, como veremos más adelante, tiene sus dudas al respecto.

C25 Ahora bien, aun cuando todos consideran novedoso el estudio del dominio de una función y el de la regla de la cadena, tal como se muestra en el material, sólo dos profesores, Manuel y Ramón, *además de recomendar el estudio* de estos objetos matemáticos por esta vía, *advierten sobre las ventajas* que esto implica.

C26 Siguiendo con el dominio de una función, Alexis y Kenya sostienen que en los libros de texto que ellos utilizan *no se contempla el estudio* de este concepto con los detalles del material y que bien podría trabajarse en el aula.

C27 Por otra parte, y aun cuando Kenya, Alexis y Elio sugieren la puesta en práctica del material, ellos recomiendan que la misma tenga *apoyo institucional*, evitando así que se entienda como una posición personal de cada uno de los profesores.

C28 Alexis y Kenya consideran que el material, de aplicarse en el aula, *debe sufrir cambios en su redacción* para mejorarlo y así evitar conflictos en el estudiante.

C29 En otro orden de ideas, Ramón y Elio consideran que se debe incluir en el material *la formalización de los conceptos matemáticos* estudiados, en particular el de la derivada. Esto obedece a la visión que tienen de las matemáticas estos dos profesores, sobre todo el primero. Aquí Alexis es más preciso en su comentario como lo veremos en P26.

C30 En cuanto a cómo entienden nuestra propuesta, Elio y Kenya sostienen que es una *actividad constructivista*, refiriéndose al esquema que se sigue en la misma.

C31 Ramón y Kenya están de acuerdo en señalar que el material *exige más participación* de los estudiantes y una *atención directa o personalizada* a estos últimos.

C32 Entre los distintos conceptos que fueron discutidos durante las cuatro sesiones del seminario, dos de estos conceptos u objetos matemáticos despertaron inquietud entre los profesores participantes, estos son: el estudio del dominio en un contexto dual y la regla de la cadena a partir de un problema concreto en el área de la economía, en particular, por los alcances que en materia de aprendizaje se pueden lograr en el aula. De G20 tenemos que Manuel, Alexis y Elio afirman que *nuestra propuesta incidirá en posibles cambios*, de aquí en adelante, en el estudio del dominio y de la regla de la cadena. Los otros dos profesores no precisan sobre este particular.

Características particulares

P11 De G10 se desprenden dos comentarios de Elio, este profesor resalta *el lenguaje* y *la función de impuesto* empleados en EP1-2 como característica apropiadas para la enseñanza de la derivada en cursos de cálculo a estudiantes de ciencias económicas.

P12 Ramón observa que con nuestra propuesta *se promueve el estudio de modelos*, en particular, por los problemas discutidos en la última sesión del seminario.

P13 Por otro lado, Alexis sostiene que el material es ventajoso porque *el estudiante aprende dónde y cómo emplear la derivada* en problemas específicos del contexto económico. Aun así, este profesor deja claro que *su enseñanza no se aproxima a la sugerida por nosotros*.

P14 Elio por su parte sostiene que *las clases deberían enfocarse de esta manera*, refiriéndose a la estructura y contenido del material. Más aún, manifiesta que el material *responde a las necesidades del estudiante*.

P15 Kenya también observa cualidades metodológicas en nuestra propuesta en lo que respecta al tipo de enseñanza que sugerimos, pues ella subraya *el procedimiento por encima de los resultados*. A lo anterior añade que con nuestro planteamiento *se induce al estudiante a la toma de decisiones*, refiriéndose a la última sesión del seminario.

P16 Aun cuando Ramón apoya nuestra propuesta de forma enfática, en su condición de matemático por encima de la de docente expresa sus revervas con el trabajo contextualizado de las matemáticas en la economía; él sostiene que *se puede entender la derivada como un concepto propio de la economía* y, además, teme que *se descuide la esencia matemática* al implementar nuestra propuesta.

P17 En el plano metodológico, Kenya sostiene que *la estructura del material puede generar conflicto al principio*, pues la misma no es habitual en estos cursos, aunque sólo ella lo reconoce abiertamente.

P18 De G14 tenemos un detalle por parte de Kenya: esta profesora aun cuando considera que los objetivos quedarían mejor cubiertos en comparación a su forma actual de trabajo, sostiene que *tal vez habría que invertir más tiempo y esfuerzo*. Más adelante veremos que es la única persona que reconoce que la estructura de nuestra propuesta está enmarcada en una línea constructivista y más precisamente en la EBP.

P19 En cuanto a los objetivos del curso, Manuel considera que el alcance sería de forma similar, alegando que su estructura de trabajo es similar a la del material propuesto.

P20 Como ya lo explicamos en líneas anteriores, Kenya considera que el material *exige la formación en el contexto económico*, contenido disciplinar en el que ella reconoce que necesita formación.

P21 De igual manera, Elio también reconoce que la propuesta *es más exigente* para el docente tanto *en el contexto económico como metodológico*, pero además acepta que su formación en el en materia de economía es débil.

P22 Elio, por su parte, termina reconociendo que el material *obliga a la formación en economía* y, más aún, él vacila cuando habla de sus conocimiento en esta área.

P23 Manuel en repetidas oportunidades entiende o califica el material como una *guía de estudio* para el estudiante.

P24 Contrario a Manuel, Elio lo entiende, conjuntamente con el seminario, como una *herramienta para la formación profesional del docente*.

P25 De C30 tenemos además, en palabra de Kenya, que *el estudiante pasa a ser el protagonista* en este modelo de enseñanza

P26 Alexis manifiesta abiertamente que *no se trabaja el rigor matemático*. Esto nos aporta de algún modo su visión de las matemáticas aun para cursos como los que son objeto de este estudio.

P27 Ramón, por su parte, precisa que el material es una *herramienta para introducir el estudio de modelos*, algo que los libros de texto que él usa no abordan.

Para finalizar, en las siguientes tablas que se muestran en las **Figuras 5.3** y **5.4**, las cuales siguen el mismo esquema que presentamos en las dos secciones

¿Qué implica aplicar el material en el aula?	MANUEL	RAMÓN	ALEXIS	ELIO	KENYA
¿Genera ventajas/aprendizaje?	Valora más EP1.2 que EP1.1 Se relacionan las matemáticas y la economía Relaciona la derivada con otros conceptos matemáticos El estudio del dominio dual En la regla de la cadena El uso de la función exponencial para la regla de la cadena Destaca EP3.1 y EP3.3 La estructura del material Trabajar con el contexto económico Induce al estudiante a formular preguntas Se detalla más el contenido Introducir la regla de la cadena con aplicaciones, totalmente distinto a como lo trabaja Se motiva mucho al estudiante	Valora más EP1.2 que EP1.1 Se relacionan las matemáticas y la economía Matemáticas como herramienta No se pierde profundidad en el contenido matemático El estudio del dominio dual Monotonía (ejemplo adecuado) Refuerza conocimiento Se motiva al estudiante En la regla de la cadena El uso de la función exponencial para la regla de la cadena Los estudiantes se identifican con EP3.2 Se detalla más el contenido Promueve aprendizaje matemático Se prepara al estudiante para microeconomía Promueve el estudio de modelos Frente a problemas del contexto económico los estudiantes responden bien	Valora más EP1.2 que EP1.1 Se relacionan las matemáticas y la economía No se pierde profundidad en el contenido matemático Refuerza conocimiento Se motiva al estudiante El estudio del dominio dual En la regla de la cadena Destaca EP3.1 y EP3.3 Se detalla más el contenido Se induce al pensamiento Introducir la derivada con problemas contextualizados motiva al estudiante y aprendería más El estudiante aprende dónde y cómo utilizar la derivada en problemas concretos	Valora más EP1.2 que EP1.1 Lenguaje (EP1.2) La función es la ideal (EP1.2) Se relacionan las matemáticas y la economía Matemática como herramienta No se pierde profundidad al contenido matemático Es lo que requieren los estudiantes Está enmarcado en la realidad Responde a cuestionamientos del estudiante Refuerza conocimiento matemático El estudio del dominio dual Regla de la cadena (interpretación, qué mide) Se motiva al estudiante Las clases deberían enfocarse de esta manera Permite alcanzar un *aprendizaje significativo*	Valora más EP1.2 que EP1.1 La derivada surge de forma natural Se relacionan las matemáticas y la economía Matemáticas como herramienta Responde a los intereses de los estudiantes El estudio del dominio dual En la regla de la cadena Implica participación activa del estudiante Se motiva al estudiante Induce a la toma de decisiones Se induce al aprendizaje por medio del análisis y la reflexión Aquí importa el procedimiento que se sigue
¿Genera dificultad/aprendizaje?	Conflicto con la regla de la cadena si no maneja la composición de funciones	Se puede entender la derivada como concepto económico Trabajar el dominio con dos enfoques puede confundir EP4.1 está cargado en la formulación Teme que se descuide la esencia matemática	Conflicto con la regla de la cadena si no maneja la composición de funciones Trabajar el dominio con dos enfoques puede confundir Contenido teórico en EP4.1 EP4.2 incomoda al estudiante	El lenguaje en EP1.1 Pueden perder interés en EP1.2 por el exceso de cálculos EP4.1 y EP4.2 (la variable)	EP3.3 puede generar conflicto El tipo de estructura puede generar conflicto al principio
¿Se cubren los objetivos?	De forma similar a la actual forma de trabajo De igual manera que usando los libros de texto	Se pueden alcanzar mejor respecto a su trabajo actual Se alcanzan mejor respecto a los libros de texto	Se alcanzan los objetivos	Los objetivos quedan más que cubiertos Se motiva al estudiante al estudiante y se tocan intereses particulares de ellos Permite alcanzar un *aprendizaje significativo*	Se alcanzan los objetivos y es más significativo Se logran objetivos por encima de libros de texto Tal vez con más inversión de tiempo y esfuerzo
¿Exige más tiempo, trabajo, formación en el profesor?	No supone más tiempo en el aula Rompe parcialmente su esquema de trabajo por lo detallado del material	Supone más tiempo en el aula Representa más trabajo Esta estructura es más sencilla Rompe con el actual esquema de trabajo Factor tiempo puede ser inconveniente	No supone "más esfuerzo ni tiempo" fuera del aula Rompe con el actual esquema de trabajo Te obliga a estudiar conceptos de economía	Supone más tiempo implementarlo (puede ser inconveniente) Rompe con el actual esquema de trabajo El material es más exigente para el profesor	Supone más tiempo en el aula Exige formación en el contexto económico Implica más trabajo para el profesor y más tiempo Rompe con el actual esquema de trabajo
¿Está formado para implementar el material?	Se siente capacitado en matemáticas En economía no necesita mucha información Formación económica: 8 o 9	Se siente capacitado en matemáticas Manifiesta tener autoformación en macro y microeconomía y en los conceptos matemáticos asociados Formación económica: 8	Se siente capacitado en matemáticas Vacila sobre sus conocimientos en economía Vacila en cuanto a seguir el esquema del material Formación económica: 6 o 7	Se siente capacitado en matemáticas No se considera preparado para seguir el material Considera que le falta conocer más sobre economía Formación económica: 7 u 8	Se siente capacitada en matemáticas Se siente capacitada para trabajar el material Considera que necesita formación en economía Formación económica: 6 o 7

Figura 5.3: Currículo, primera parte

	MANUEL	RAMÓN	ALEXIS	ELIO	KENYA
¿Recomienda poner el material en práctica?	Sí, pero con ejemplos adicionales Sí, para el estudio del dominio Sí, para la regla de la cadena	Sugiere introducir la derivada como EP1.2 Sugiere el estudio del dominio Sugiere el estudio de la regla de la cadena	Es viable seguir el material Hay que vivir la experiencia desde el inicio de carrera Sugiere apoyo institucional	Bueno sería trabajarlo Sugiere apoyo institucional	Es pertinente hacerlo así, en general Es viable Pondría en práctica EP3.1 para motivar Sugiere apoyo institucional
¿Qué cambios sugiere en el material?	Cambio de contexto en EP1.1	Retomaría el concepto de límite Cambiaría el contexto de EP1.1 Hay que formalizar el concepto de derivada Añadiría un problema de costo No modificaría EP3.1 Sugiere más ejercicios de matemáticas sin contenido económico	Cambio de contexto en EP1.1 No se puede evitar el límite En EP1.2 se debe incorporar un intervalo Hay que definir ingreso Mejorar la redacción	Cambiaría el contexto en EP1.1 por ecuaciones de demanda y oferta Incorporar la informática Quitarle dificultad a EP3.2 Fusionar EP3.1 y EP3.3 Incluir problemas de optimización Quitaría el exceso de cálculo de EP1, eso genera rechazo o error Hay que incluir las definiciones formales	Construiría las tablas en clase Mejorar redacción Cambio de contexto en EP1.1 Utilizaría EP1.1 como complemento En EP3.2 cambiaría la notación por la de Leibnitz
¿Cómo entiende el material?	En EP4.1 se exige mayor nivel de manipulación algebraica Guía de estudio Es innovador para el dominio, la regla de la cadena y para valores extremos Problemas motivadores que conectan la economía y las matemáticas Se estimula el aprendizaje	Problemas motivadores Se requiere un trabajo directo con el estudiante En EP4.1 se exige más que en los anteriores Primera vez que trabaja una estructura como EP1.1 No es rutinario Es novedoso el estudio del dominio Se ilustra cuándo y cómo trabajar la regla de la cadena Se trabaja de forma inversa a los libros de texto Involucra más al estudiante La estructura es de *paso por paso* Herramienta para introducir modelos	EP1.1 es un problema para ingenieros Actividad de consolidación del conocimiento Es novedoso en la regla de la cadena Es novedoso para el dominio No se trabaja el rigor matemático	Como modelo constructivista Se trabaja de forma inversa a su esquema actual Herramienta de formación profesional Motivador y generador de conocimiento EP4.1 es más exigente y detallista que los anteriores EP4.1 es una actividad complementaria Es novedoso para: la regla de la cadena, el dominio, la monotonía Es novedoso introducir la regla de la cadena desde un problema	Actividad constructivista Se puede llegar al concepto de derivada obviando $\varepsilon-\delta$ Se llega a la derivada por tres caminos Exige participación activa del estudiante El estudiante es el protagonista Se inducen interacciones alumno-alumno y alumno-docente Está dirigido hacia la EBP Se explota la monotonía desde la economía No es rutinario Es novedoso en la regla de la cadena y en el dominio Se trabaja de forma diferente a la forma usual de trabajar en el aula
¿Qué libros texto recomienda/utiliza? El material respecto a los libros texto	Se detalla más que en los libros de texto Considera que el material no se puede comparar con los libros texto	Los libros no desarrollan el tema tan cuidadosamente Se detalla más que en los libros Ningún libro tiene un apartado sobre el estudio de modelos	En los libros de texto también se trabaja velocidad instantánea Recomienda: Arya & Lardner y Hoffman & Bradley En los libros de texto no trabajan el dominio económico El material es más didáctico que los libros	Los libros sugieren una idea similar sin tanto detalle Recomienda: Tam y Arya & Lardner	Recomienda: Haeussler & Paul Los libros no llenan sus expectativas Los libros no trabajan el dominio económico Se trabaja de forma inversa a los libros texto Se trabaja simultáneamente la contextualización y las nociones matemáticas
¿Induce al cambio en el profesor?	No, trabaja de forma similar Se detalla más el tema del dominio Abre caminos a nuevas formas de enseñanza y aprendizaje Para introducir la regla de la cadena, tratará de implementarlo	Reconoce que incidirá en su labor docente a futuro	Considera trabajar a futuro el dominio y la regla de la cadena como en el material	Cambios en el estudio del dominio económico Tomará ideas para la regla de la cadena Conservó los problemas de cara a ponerlos en práctica Te hace trabajar de forma distinta a los libros texto	EP4.2 debería formar parte del currículo oficial Reconoce que incidirá en su labor docente a futuro, aunque no en su totalidad porque hay factores que lo impiden Vale la pena intentar el cambio para mejorar el aprendizaje Al principio puede resultar tedioso

Figura 5.4: Currículo, segunda parte

previas, mostramos los datos relacionados con los puntos de nuestro interés y que sintetizan las reflexiones de los profesores.

A modo de conclusión y recapitulando sobre estas tres secciones, tenemos que señalar, como punto previo y relevante en esta parte del estudio del CDC, que los profesores al aportar sus opiniones y reflexiones sobre este particular tienen presente en todo momento los conocimientos sobre enseñanza y aprendizaje, analizados anteriormente, pero también toman en cuenta el conocimiento disciplinar que abordaremos en la próximo apartado. De esta manera se ponen de manifiesto dos situaciones bien concretas: (1) la fuerte interrelación entre las distintas componentes del CDC y (2) lo difícil, por no decir imposible, que resulta establecer fronteras claras y precisas sobre estas componentes.

Ahora bien, veamos qué aportan estos profesores en el campo de la didáctica de las matemáticas y más concretamente al área del conocimiento sobre el currículo en el momento que observan *ventajas*, *conflictos* o el posible *alcance de los objetivos* del curso mediante la puesta en práctica del material. En primer lugar, toda la argumentación que dan los profesores a la hora de valorar el material en función de los tres elementos antes señalados se centra con más peso en dos factores o aspectos propios del CDC, estos son, el conocimiento disciplinar y el conocimiento sobre el aprendizaje. Para todos, salvo Manuel en pocas ocasiones, valoran de forma positiva el hecho de que los problemas del material estén todos contextualizados en las ciencias económicas ya que los mismos muestran *la relación entre las matemáticas y la economía*. Vale destacar que esto último nos conecta con la EBP, puesto que en esta metodología de enseñanza se busca explotar la interrelación entre contenidos disciplinares afines.

En particular, los conceptos que más valoran como positivos para la implementación del material son el dominio y la regla de la cadena; ellos parten del hecho de la estructura sobre cómo se trabaja en nuestra propuesta pero también admiten que la contextualización de estos conceptos en problemas concretos de economía muestran las matemáticas como herramienta; más aún, Ramón señala que en los cursos de microeconomía se trabaja el dominio con los detalles del material, lo que significa que le abre camino a los estudiantes en este sentido, pero también muestra el conocimiento disciplinar de este profesor en materia económica.

Otro punto que vale la pena señalar asociado al conocimiento disciplinar, en esta oportunidad por parte de Kenya, Manuel y Alexis, es que estos profesores estiman que es más apropiado el uso de la notación de Leibnitz por encima de la de Newton. Sobre este particular no encontramos en la literatura cuál es la notación más apropiada en el campo de las ciencias económicas; no obstante, al revisar textos especializados en economía matemática como

Chiang y Wainwright (2006) y Escobar (2005), entre otros, podemos observar que la notación más usada en ambos libros es la de Leibnitz, sobre todo en problemas técnicos o propios de la economía. Aunque Kenya también argumenta que el uso de esta notación obedece a que a los estudiantes se les facilita trabajar con la misma.

En este mismo orden de ideas, Ramón y Manuel advierten que es ventajoso el uso de la función exponencial al trabajar la regla de la cadena; ellos resaltan dos cosas, la primera, la estructura del problema en sí podría incidir en un mejor aprendizaje, dados los errores que suponen para el estudiante el estudio de esta función; el otro punto está asociado a la economía, pues ellos reconocen la importancia de la exponencial en este campo, algo que señalamos en nuestro marco teórico al manifestar que los libros de texto reservan un capítulo exclusivamente a las funciones logaritmo y exponencial.

Pero, qué más aportan las reflexiones de los profesores al valorar el material. La fuerte presencia del estudiante en las opiniones de los profesores dejan claro que, al analizar y discutir una herramienta didáctica con el objetivo de ponerla en práctica, algún valor debe tener a la hora de tomar una decisión por parte del profesor en materia curricular. Un ejemplo de ello lo encontramos en la opinión de Elio: *el material responde a las necesidades del estudiante*, o la de Alexis donde señala que: *el estudiante aprende dónde y cómo emplear la derivada*. Así como estas podríamos citar muchas más; sin embargo lo que queremos resaltar de todo esto es que a la hora de analizar y discernir sobre un material cualquiera con el objeto de construir el currículo personal o institucional el estudiante debe pasar a jugar un papel fundamental.

Ahora bien, los mismos elementos que los profesores utilizan para determinar ventajas en nuestra propuesta son los mismos que toman en cuenta para concluir sobre los inconvenientes de la misma. Si bien es cierto que los profesores valoran positivamente la estructura del material, Kenya advierte que *al principio puede generar conflicto en el estudiante*, puesto que no está acostumbrado a este tipo de metodología. De igual manera Ramón y Alexis manifestaron su recelo respecto al tema del dominio, en todo caso sugieren que se estudie desde un principio como lo presenta el material y no cuando se estudie el tema de derivada, ya que el estudiante, si ha trabajado el dominio de una función sólo en el contexto matemático, podría incurrir en errores de tipo cognitivo.

Más adelante, Ramón precisa que la estructura del material puede confundir al estudiante ya que *la derivada se puede entender como un concepto propio de la economía* o lo que señalamos en C22, en este caso tres profesores objetan la sesión S4 del seminario por el contenido teórico y la formulación o estructura de los problemas. La posición de Ramón es entendible porque a lo largo de la aplicación de nuestro instrumento siempre manifestó la importancia del rigor matemático aun en estos cursos; de hecho, este profesor *teme que se descuide la esencia matemática*. En cuanto a los problemas de la sesión S4, vuelve a surgir el contenido disciplinar como base de la argumentación, aunque paralelo a este también aparece el conocimiento sobre el aprendizaje, ya que, según Alexis y Elio, los estudiantes presentan conflictos frente a problemas de corte teórico.

Pasando ahora a otro punto del análisis del conocimiento sobre el currículo y más concretamente, sobre el análisis de materiales publicados, abordamos la formación profesional del profesor en materia disciplinar y en materia metodológica. Nosotros sabemos, de los esquemas que aportaron los participantes en sus respuestas al cuestionario de la primera sesión S1, cuál es la estructura que siguen en la enseñanza de la derivada. Sobre este punto en específico, todos los profesores aceptan que el poner en práctica nuestra propuesta les hace romper con su esquema de trabajo, puesto que ellos trabajan de forma *teoría + "aplicaciones"*[8] y la propuesta apunta hacia la EBP como hemos señalado en repetidas oportunidades, lo que implica un trabajo que cabalga entre los contextos matemático y económico, pero además exige un mayor contacto con el estudiante con el objeto de propiciar la discusión con y entre ellos.

Por otra parte, todos los profesores sacan a colación el *factor tiempo* como elemento a considerar no sólo para la puesta en escena del material sino previo al ejercicio de la enseñanza. En esta oportunidad las opiniones están divididas; sin embargo, un punto significativo lo pone Alexis cuando en el seminario afirma en un principio que tanto para la docencia como antes de ésta el material no le supone más tiempo; no obstante, después de las opiniones de los otros dos compañeros de grupo y en la misma entrevista final, él termina aceptando que sí le implica más tiempo llevar el material a la práctica. Ahora bien, lo importante es llegar al por qué le supone más tiempo, cuestión que aceptan Ramón, Kenya y Elio; pues bien, el material demanda determinado conocimiento disciplinar económico y también conocimiento sobre la enseñanza, en otras palabras, la propuesta exige formación profesional del docente. Además, hay que recordar que estos profesores son producto de una autoformación en economía y sólo Kenya y Elio tienen formación en el área pedagógica.

En otro orden de ideas, el que los profesores determinen que tanto el contenido de los problemas como la estructura de los mismos tienen ciertas ventajas para el estudiante no implica que deben estar de acuerdo con la puesta en práctica del material. Más aún, suponiendo que estén de acuerdo con la implementación de la propuesta no implica tampoco que se acepte seguir al pie de la letra el material, en este caso el profesor debe saber modificar o amoldar un problema según las circunstancias o necesidades del momento

[8] Las comillas en este caso significan que no todos trabajan el tema de aplicaciones y si lo trabajan es de forma superficial, como por ejemplo Elio y Alexis.

o del estudiante, por ejemplo. Por otra parte y aun cuando el profesor de universidad, usualmente, goza de autonomía de cátedra, el apoyo institucional es importante puesto que el mismo le aporta validez al trabajo del profesor. Sobre esto último se refieren Kenya, Alexis y Elio. El profesor universitario no debe actuar de forma aislada al resto de colegas ni de espaldas a la institución, ya que ésta, por lo general, tiene líneas claramente definidas sobre el profesional que está formando.

Ahora bien, más allá de avalar la propuesta, nos interesa conocer los cambios que sugieren los profesores y sus implicaciones de cara a nuestro trabajo. Dado que tenemos en la mira determinar el perfil del profesor participante recurrimos a C29: ahí queda expresado que Ramón y Elio sugieren que se incluya *la formalización de los conceptos matemáticos*, lo que nos hace corroborar algo sostenido en líneas anteriores, es decir, el valor y la rigurosidad que le dan a las matemáticas *per se* aun en cursos de cálculo diferencial para futuros profesionales del área económica. Paralelo a esta situación, Alexis manifiesta que *no se trabaja el rigor matemático*, lo que también advierte sobre la visión de las matemáticas de este profesor. En resumen, los cambios que sugieren los profesores al material están en relación directa con la visión que ellos tienen de las matemáticas.

Otra vía de explorar el conocimiento del profesor en relación al análisis crítico de materiales publicados consiste en indagar la posición que tienen los participantes al comparar dos o más materiales; en nuestro caso, nos limitaremos a estudiar las diferencias o semejanzas entre nuestra propuesta y los libros de texto que ellos utilizan o, simplemente, cómo entienden el material desde el punto de vista didáctico. Por ejemplo, todos los profesores entienden que la actividad desarrollada en el material presenta *aspectos innovadores*, destacando una vez más la estructura que tienen los tres problemas donde se aborda la regla de la cadena. Sobre este hecho concreto, lo más relevante en materia de innovación es que aparece la derivada de la función interna como parte del enunciado del problema (EP3-1), el uso de la función exponencial para introducir la regla de la cadena (EP3-2) y la discusión sobre la interpretación de esta regla (EP3-3).

Al igual que la regla de la cadena, el estudio del dominio de una función en dos contextos de forma simultánea resultó innovador para todos los profesores, sobre todo porque en ningún libro de texto de los que ellos utilizan estudian el dominio de esta manera, aunque los únicos que reconocen abiertamente esta situación son Alexis, Elio y Kenya. Ramón, por su parte, destaca que en los cursos de microeconomía se estudia el dominio de la función en el campo de la economía y que se debería trabajar así en los cursos de cálculo para ciencias económicas.

En materia metodológica, las opiniones son diversas, Ramón y Manuel sostienen que en el material se detalla más el contenido que en la estructura de sus clases, lo que nos muestra de alguna manera que la parte práctica en sus clases es poco explotada. Por otra parte, Elio y Kenya entienden el material como una actividad constructivista por todo el esquema se sigue en el mismo. Conviene hacer una observación sobre esto último, puesto que estos dos profesores tienen formación en el campo pedagógico; ellos, a diferencia de los otros participantes, son licenciados en educación, mención matemáticas y Kenya, además, es doctora en ciencias pedagógicas. Por otra parte, Kenya y Ramón entienden que nuestra propuesta exige más participación del estudiante y una atención personalizada a éste. De alguna manera, las reflexiones comentadas en este párrafo apuntan hacia algunas características de la EBP, aunque la única que lo manifiesta de forma clara y precisa es Kenya.

En otro orden de ideas los profesores, en general, no sólo entienden el material como una herramienta para enseñar matemáticas, aunque Manuel lo entiende como una *guía de estudio* y no le da la relevancia de los otros. Durante el seminario, todos los profesores en algún momento señalaron que estaban aprendiendo algo nuevo en materia metodológica, sobre todo en las discusiones del dominio de una función y de la regla de la cadena, aun así, el único que mantuvo una posición firme sobre su conocimiento disciplinar económico fue Elio, quien reconoce nuestro material como herramienta para la formación profesional del docente, lo cual nos muestra un poco la valoración de seminario que lo estudiaremos más adelante.

Ahora bien, ya para cerrar esta parte del análisis, hablaremos de los cambios que podría generar toda esta actividad en los participantes. En primer lugar, entendemos que es muy apresurado hablar de posibles cambios en la práctica docente del profesor como consecuencia de este intercambio de ideas y opiniones. Sin embargo, algunos comentarios surgidos durante el seminario o las mismas respuestas expresadas en la entrevista final nos dejan ver que estos profesores son proclives al cambio, en particular, en lo que respecta al tema del dominio de una función y en el estudio de la regla de la cadena, siendo los más dados a estos cambios: Ramón, Elio y Kenya, ya que Manuel sólamente se pronuncia respecto al dominio y sostiene que en adelante lo hará con los *"detalles"* del material. No obstante, lo que podemos apreciar es que estos posibles cambios sólo apuntan hacia la estructura del contenido, pero en materia metodológica se muestran reticentes.

5.2. Análisis de conceptos matemáticos

Aunque en el apartado anterior discutimos y analizamos el perfil del profesor en materia de conocimiento sobre enseñanza, aprendizaje y currículo, nosotros abordamos de modo parcial algunos objetos matemáticos, ya que estos guardan estrecha relación con los elementos del CDC que señalamos arriba; aun así decidimos reservar un lugar especial para ahondar en estos objetos o conceptos matemáticos; entre otras cosas, porque buscamos explotar el conocimiento matemático desde el CDC. El análisis que presentamos a continuación se deriva de datos provenientes de distintas sesiones del seminario y los cuestionarios, a partir de los cuales buscamos relacionar, valiéndonos de las opiniones y reflexiones aportadas por los participantes en diferentes momentos sobre estos objetos como los son: a) dominio de una función, b) regla de la cadena y, finalmente, c) monotonía y valores extremos. Vale la pena señalar, que en el análisis no sólo tomamos en cuenta el contenido matemático sino que explotamos la relación de estos conceptos con el contenido económico, fortaleciendo en cierto modo nuestra investigación en el área de conceptos matemáticos enmarcados o contextualizados en entornos no-matemáticos.

Más aún, la plataforma o base que utilizaremos para el análisis de los conceptos antes mencionados es la didáctica en sí misma, esto quiere decir que nuestra visión y análisis del concepto la haremos posicionándonos en elementos de la didáctica como: (a) idoneidad del concepto discutido de cara al aprendizaje; (b) identificación de elementos innovadores en el material, (c) riqueza del material para favorecer el aprendizaje y generar nuevas estrategias de enseñanza y, (d) valoración crítica sobre el tratamiento y organización de los conceptos matemáticos discutidos. En otras palabras, procuraremos acercarnos al conocimiento profesional del profesor de manera indirecta mediante estos conceptos matemáticos elegidos. Un punto que debemos aclarar lo reservamos a la siguiente observación.

Observación: En ningún momento está planteado calificar el conocimiento matemático *per se* del profesor respecto a cada uno de estos conceptos. En todo caso, lo que perseguimos es estudiar la dinámica de estos conceptos matemáticos que maneja cada uno de los participantes, esto es, el *qué* y *cómo* enseñan el concepto, sus visiones de los mismos en comparación a lo expuesto en el material, entre otras. En otras palabras, nuestro objetivo en esta parte del trabajo consiste en profundizar en el CDC del profesor de matemáticas a partir de la discusión sobre un elemento matemático, bien sea por la contextualización dual que hemos planteado o por el enfoque que en materia de enseñanza y aprendizaje le hemos dado al concepto.

La dinámica que seguimos para el análisis consiste en lo siguiente: a partir de los comentarios y reflexiones aportados durante las sesiones del seminario, los cuestionarios y las entrevistas finales, hemos extraído algunas frases o secciones de los mismos que reflejan el conocimiento disciplinar del profesor relacionado con el concepto a estudiar.

5.2.1. Conocimiento sobre el Dominio

Partamos de que el dominio de una función es un concepto que se ha trabajado en cursos anteriores al tema de la derivada y que el mismo juega un papel importante a la hora de estudiar modelos matemáticos. A continuación mostraremos un ejemplo en el que se ilustra que dada una función matemática como $f(x) = x^2$, el dominio de la misma puede cambiar según el escenario donde se trabaje o, más precisamente, la situación modelada por esta función. En primer lugar, si entendemos esta función en el campo estrictamente matemático, no cabe duda que $Dom_f = \mathbb{R}$. Por otra parte y ahora entrando un poco más en un hecho concreto de la economía, si con esta función se modela el ingreso diario que registra un empresa durante los dos últimos años, el dominio de esta función es $Dom_f = [0, 720]$. Ahora bien, si la misma función modela el consumo de energía en función del número de casas construidas en un año, dado que la variable representa el número de casas fabricadas durante un año, $Dom_f = [0, n]$, donde n representa el número de casas fabricadas durante un año. De igual manera, se pueden construir más ejemplos en el que el dominio de la función puede cambiar según la situación que se modele.

Ahora bien, si nos fijamos en los dominios de los dos últimos ejemplos, podemos tomar, en el caso del primero, unos números racionales muy particulares puesto que, por lo general, las monedas están divididas en 100 céntimos; por lo tanto, el dominio para este ejemplo son los racionales con dos decimales en el intervalo $[0, 720]$; mientras que en el otro ejemplo, como n representa una cantidad de viviendas, esta variable pertenece al conjunto $\mathbb{N}$ de los números naturales.

En las sesiones S2 y S3 del seminario, específicamente, en los episodios EP2-1 y EP3-1, respectivamente, incluimos una discusión sobre el estudio del dominio de una función tanto en el contexto matemático como en el económico. Si ponemos atención a ambos episodios, observamos que en los mismos trabajamos con funciones polinómicas, lo que significa que en el contexto matemático el dominio es el conjunto, $\mathbb{R}$, de todos los números reales; sin embargo, en el contexto económico el dominio cambia sustancialmente en ambos casos, de acuerdo a la situación estudiada.

Un hecho curioso respecto al estudio del dominio en cursos de matemáticas para carreras de ciencias económicas es que aun cuando los programas oficiales sugieren el estudio del dominio de diversas funciones, los libros de texto, prácticamente, no abordan el tema. Uno de los aportes, que consideramos relevante en este trabajo, tiene que ver, justamente, con el estudio que realizamos sobre el dominio de una función y, más concretamente, al relacionarlo al entorno económico, puesto que en este contexto, por lo general, no hemos encontrado referencia alguna, tanto en la literatura castellana como anglosajona; sin embargo, destacamos que nuestro aporte va enfocado hacia el conocimiento profesional del profesor. Sólo encontramos, en nuestra exhaustiva revisión, un artículo de Bagni (2004) en el que se estudia de forma general el tema de funciones en la escuela secundaria italiana y reservan determinados espacios para discutir sobre el dominio de una función. El resto de la literatura aborda el tópico de funciones sin llegar a profundizar en el tema que nos ocupa, destinando a éste una importancia insignificante desde nuestro punto de vista.

Volviendo a los libros de texto, nos permitimos señalar lo siguiente: de los libros revisados por nosotros, tales como Sáenz (2007), Hoffmann y Bradley (2001), Lial y Hungerford (2000), Haeussler y Paul (1997), Arya y Lardner (1987), Whipkey *et al.*(1987) y Wonnacott (1983), sólo Hoffmann y Bradley (2001) hacen mención al *"dominio práctico"*, para referirse al dominio en el contexto económico; en todo caso, lo más significativo a destacar es lo siguiente: lo que aparece en este libro de texto es una breve observación a pie de página en referencia a un problema en particular, pero en ningún momento se toma en cuenta el tema del dominio en el contexto económico.

> En el ejemplo 1.4, se observa que la función $C(q) = q^3 - 30q^2 + 500q + 200$ está definida para todos los números reales q, pero el dominio "práctico" es $q \geq 0$ ya que no tiene sentido hablar de fabricación de un número negativo de unidades.
>
> (Hoffmann y Bradley, 2001, p. 5)

Nuestro interés en el estudio del dominio va más allá de lo que éste representa para la función en el contexto matemático, es decir, en lo que se refiere a la definición de la función en sí, recordemos que la expresión correcta para referirnos a este objeto matemático es *dominio de definición*; es por ello que el concepto de dominio hace clara referencia a un conjunto que permite definir una función o, dicho de otra manera, es *el conjunto formado por todos aquellos elementos a los que se les puede asociar una imagen a través de la función estudiada*. Sin embargo, este es un concepto que está profundamente relacionado al tema de inyectividad, sobreyectividad, continuidad, derivada, entre otros. Un ejemplo de ello es la función $f(x) = x^2$, cuyo dominio es el conjunto de todos los números reales, $\mathbb{R}$, esta función con este dominio no es inyectiva; sin embargo, si restringimos el dominio al conjunto $\mathbb{R}_0^+ = [0, +\infty)$ esta función pasa a ser inyectiva. De esta misma manera podemos hacer otras observaciones relacionadas con el dominio pero no es el tema de nuestro trabajo.

Pero además, el concepto de dominio también está fuertemente asociado al contexto en el que se enmarca una determinada función, siempre que ésta modele una situación no-matemática; en nuestro caso, nos referimos al contexto económico tal como lo refleja la cita anterior o los problemas de los episodios EP2-1 y EP3-1. En la página 163 de esta memoria, nosotros dejamos una pregunta en el aire que retomamos ahora, en esa oportunidad nos preguntamos, refiriéndonos a los profesores del grupo A, ¿por qué ambos profesores no trabajan el tema del dominio con las restricciones del caso en el contexto económico?

Ya en la **Sección 5.1.1**, cuando analizamos el tema de la enseñanza del dominio, quedó en evidencia que aun cuando Manuel y Ramón conocen y manejan algunas restricciones para el dominio de funciones en el contexto económico, distintas de la ya mencionada $\mathbb{R}_0^+ = [0, +\infty)$, estos profesores no consideran relevante ahondar en otras restricciones del dominio, entre otras cosas, por lo ajustado de sus esquemas de trabajo a los libros de texto, aun cuando Ramón manifestaba que en el curso de microeconomía se estudian restricciones en el dominio de una función.

El considerar el estudio del dominio de una función en el entorno económico es algo que suponemos, desde nuestra posición y dado que apostamos por la enseñanza de las matemáticas usando EBP como estrategia didáctica, permite enriquecer todo el desarrollo que se ha venido realizando dentro de las didácticas específicas, no sólo por la novedad del tema en el campo de la didáctica sino también por el significado que este tiene a la hora de estudiar o analizar una función en entornos no-matemáticos. Además de lo anterior, conocer el dominio de una función facilita cualquier manipulación algebraica o analítica con la función. En este sentido, el llevar a cabo una discusión del tema del dominio, sobre todo, como lo implementamos en este trabajo, suponía para nosotros ahondar en objetivos como: 1) indagar sobre el conocimiento disciplinar en materia de cálculo diferencial y temas afines, 2) detectar hasta dónde el profesor es consciente de las dificultades que supone para el estudiante discutir un concepto matemático asociado a un tema no-matemático, y 3) analizar el papel del profesor frente a propuestas metodológicas alternativas.

Sin embargo, un punto que nos obliga a ir con cuidado tiene que ver con lo siguiente: ¿por qué los libros de texto especializados no contemplan el estudio del dominio de una función en contextos particulares?[9], y sobre todo, las restricciones del dominio para determinados casos de la economía como el del EP2-1, cuya producción es $x \geq 0$ pero que seguramente, aunque no lo dice el problema, la fábrica tiene una capacidad tope de producción.

A fin de seguir la misma estructura del análisis que llevamos a cabo en el apartado anterior, seguiremos viendo los dos grupos de profesores como uno sólo. Para ello y antes de entrar propiamente en el tema del análisis del concepto en cuestión, recordemos que a lo largo de los datos que

[9]Este cuestionamiento surgió de forma natural durante una de las sesiones del seminario debido a una interacción entre Alexis y Kenya.

aportaron tanto el seminario como los cuestionarios y la misma entrevista final, pudimos observar que los profesores fundamentan su metodología de enseñanza basándose en los programas oficiales y en los libros de texto. En tal sentido, lo que perseguimos es ampliar nuestro estudio en lo que respecta al CDC y, en particular, en el conocimiento disciplinar matemático-económico.

Comenzaremos por destacar los comentarios de Ramón por encima de los de Manuel, puesto que este último únicamente advierte que en sus clases "habla" de ambos dominios (matemático y económico), sin llegar a precisar cómo aborda el dominio económico. En todo caso podemos inferir, de acuerdo a otros comentarios, que su trabajo en el aula de clases, al trabajar el tema del dominio económico, es similar al ejemplo que recién citamos de Hoffmann y Bradley (2001), donde sólo toma en cuenta el conjunto $\mathbb{R}_0^+ = [0, +\infty)$.

Por su parte Ramón, a diferencia de Manuel, sostiene opiniones más precisas en relación al conocimiento sobre el dominio. En primer lugar, este profesor reconoce abiertamente que *"fue con el tiempo que notó la diferencia entre ambos dominios"*, comentario que resulta de gran valor para nosotros porque se deja ver la necesidad de un espacio para la formación profesional enmarcada en la conexión matemáticas-economía. Por otra parte, también reconoce que trabaja el dominio con más inclinación hacia el contexto matemático, aunque admite que en cursos como el de microeconomía se trabaja el dominio tal como lo planteamos en este material.

En este sentido, podemos notar que ambos profesores, dado que siguen los programas oficiales y los libros de texto, no profundizan en el tema del dominio; lo que podemos entender como falta de formación del concepto estudiado en el contexto económico, puesto que ambos afirman que trabajan el dominio de forma similar al del material "*pero sin tanto detalle*" y Manuel, sobre este punto, además de considerar apropiado trabajar el dominio como lo presenta nuestro instrumento, sostiene que en adelante lo hará con los "*detalles*" del mismo.

Por otra parte, Alexis en algún momento del seminario deja ver que trabaja en sus clases el dominio en el contexto económico como lo abordan Hoffmann y Bradley (2001), aunque en la entrevista final afirma que no trabaja el dominio en el contexto económico. Esta situación, más allá de tener relevancia en materia disciplinar deja evidencia de lo que aporta el seminario como actividad colectiva respecto a la entrevista como actividad unipersonal. Aun así, inferimos que únicamente trabaja el dominio en el contexto matemático aunque muestra cierto conocimiento sobre las restricciones señaladas arriba. Por su lado, Elio entiende el dominio matemático como un *"objeto abstracto"* y sostiene que en el económico "*se restringen muchas cosas*", pero en ningún momento dice trabajar el dominio en el contexto económico. Recordemos que este último profesor, durante las sesiones del seminario como en los cuestionarios, siempre se decantó por una enseñanza tradicional con una fuerte inclinación hacia las matemáticas con *"pocas y sencillas aplicaciones"*. En este orden de ideas, nuestra observación apunta hacia la falta de formación inicial y la ausencia de un espacio de discusión que promueva el intercambio de ideas y opiniones entre los profesores y que a su vez incida en la formación profesional de los mismos.

En otro orden de ideas y como punto a destacar dentro de este espacio, resaltamos el intercambio de opiniones entre Kenya y Alexis al referir ambos que: *"los libros de texto no trabajan el domino como el material discutido"*, lo que supone para nosotros un aporte en materia de formación profesional, puesto que ellos mismos reflexionan de forma natural sobre este hecho y valoran positivamente este enfoque del material.

Ya en la parte introductoria de esta sección comentamos los pocos trabajos existentes en el campo de la didáctica de las matemáticas en relación al dominio de una función y, más aún, la poca explotación del tema en los libros de texto. Desde nuestro punto de vista, el dominio de una función, por su conexión con otros conceptos matemáticos, es un objeto que permite trabajar las matemáticas desde distintos enfoques, sobre todo si la idea es promover la enseñanza de las matemáticas a través de la EBP, donde la interrelación de conceptos es esencial para poner en práctica esta metodología de enseñanza. Además, el estudio del dominio en distintos contextos no-matemáticos permite al estudiante profundizar en este concepto, ya que se puede ilustrar con precisión el concepto de este objeto matemático y cuán valioso es dentro de las matemáticas.

Ahora bien, el hecho de que los programas oficiales y los libros de texto no exploten el tema del dominio como lo hacemos en nuestra propuesta no nos permite tildarlo de negativo, en todo caso entendemos que tanto los programas oficiales como los libros de texto obedecen, por lo general, a estructuras tradicionales de enseñanza, mientras que nosotros apostamos por una metodología alternativa en la que el estudiante se puede involucrar más directamente, desde las matemáticas, en su futuro campo profesional.

Es por lo dicho en la última parte del párrafo anterior que también nos interesa indagar en las dificultades y/o ventajas que representa para el estudiante la discusión de un determinado concepto matemático. Sobre este punto en particular, recurrimos a lo expresado por Elio y Alexis, quienes consideran que trabajar el dominio bajo el esquema que proponemos puede generar conflictos en el estudiante; en el caso de Alexis, él sugiere que se trabaje con esta metodología desde el principio de carrera a fin de evitar *"cambios bruscos"* en el estudiante. Sin embargo, Ramón opina con cautela sobre este punto; por ejemplo, él advierte que llevar al aula de clases una discusión como la que proponemos es favorable para el estudiante puesto que al establecer la diferencia entre ambos dominios se prepara al estudiante para el curso de microeconomía, aunque al mismo tiempo reconoce que el material puede generar confusión en el estudiante, ya que en Matemática 1 se ha trabajado el dominio en el contexto económico únicamente.

Precisamente, un punto a tomar en cuenta a la hora de implementar la EBP como estrategia de enseñanza es el comenzar desde los primeros cursos de carrera aplicando esta metodología, siempre que se pueda, no sólo porque se fomenta desde un principio la investigación y la discusión entre pares, sino que además se involucra al estudiante en la interrelación de asignaturas propias de su carrera con otras que le servirán de herramientas para las primeras, tal es el caso de la microeconomía, la macroeconomía y otras propias de la teoría económica con las matemáticas.

Ya para finalizar, resumimos las características más destacadas en materia de conocimiento sobre el dominio de una función por parte de los profesores participantes, no obstante, advertimos que a diferencia de las características mostradas en el apartado anterior, las cuales fueron agrupadas según su categoría, aquí las presentamos en un único bloque pero diferenciándolas de acuerdo al número de profesores de dónde provienen:

G21 Todos los profesores entienden el dominio económico como el conjunto $\mathbb{R}_0^+ = [0, +\infty)$ no sólo en materia de enseñanza sino como conocimiento profesional.

P28 Ramón sostiene que en microeconomía se trabaja el dominio de una función con restricciones más detalladas que la señalada antes. Reconociendo además que *"fue con el tiempo que notó la diferencia entre ambos dominios"*. Esto implica que además de tener cierto conocimiento en materia económica, se muestra la necesidad de un espacio de discusión y reflexión que conlleve a la formación profesional.

P29 Elio muestra un conocimiento sobre el dominio de una función muy particular, lo entiende como un *"objeto abstracto"* en el campo de las matemáticas, mientras que en el área económica *"se restringen muchas cosas"*, aunque en lo segundo su opinión es de forma general.

5.2.2. Conocimiento sobre la Regla de la Cadena

La regla de la cadena es, como su nombre lo indica, una regla, entre otras, que sirven como herramienta dentro del tema de la derivada; ésta forma parte o está incluida en los currículos o programas oficiales de matemáticas en las carreras objeto de este estudio. Es bien conocido que la regla en cuestión es utilizada para derivar funciones compuestas. La utilidad de esta valiosa herramienta en el caso de las ciencias económicas está más que justificada, pues en el área de la economía se manejan diversas funciones que a su vez dependen de otras. Haeussler y Paul (1997) y Arya y Lardner (1987) la consideran como, tal vez, *la herramienta más importante o útil de la derivación*. Sin embargo, nuestro objetivo fundamental consiste, en este punto del trabajo, en el estudio del conocimiento disciplinar del profesor en relación a la regla de la cadena, pero siempre conectado a las ciencias económicas.

Con mucha frecuencia, en el campo de la economía, se estudian modelos representados por funciones compuestas, es decir, por funciones cuyas variables dependen de otra u otras variables. Un ejemplo clásico son las llamadas *tasas relacionadas* que exponemos a continuación:

> Sea $y = f(x)$ y supongamos que x varía como una función del tiempo t. Así, dado que y es una función de x, y también varía con el tiempo. Aplicando la regla de la cadena, es posible encontrar una expresión para la tasa en que y varía en términos de la tasa a la cual x varía. Debido a que
>
> $$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{dx}{dt}$$
>
> tenemos una relación directa entre las dos tasas dy/dt y dx/dt. Esta se denomina la ecuación de **tasas relacionadas**.
>
> (Arya y Lardner, 1987, p. 546)

Un ejemplo, aún más concreto sobre la utilidad de la regla de la cadena en el campo de la economía lo muestran Hoffmann y Bradley (2001),

> ... el costo de fabricación total en cierta fábrica es una función del número de unidades producidas, que a su vez es una función del número de horas que la fábrica ha estado funcionando. Si C, q y t denotan el costo, las unidades producidas y el tiempo, respectivamente, entonces
>
> $$\frac{dC}{dq} = \begin{bmatrix} \text{razón de cambio del costo} \\ \text{respecto a la producción} \end{bmatrix} \text{(dólares por unidad)}$$
>
> y
>
> $$\frac{dq}{dt} = \begin{bmatrix} \text{razón de cambio de la producción} \\ \text{respecto al tiempo} \end{bmatrix} \text{(unidades por hora)}$$
>
> El producto de estas dos razones es la razón de cambio del costo respecto al tiempo, es decir,
>
> $$\frac{dC}{dt} = \frac{dC}{dq}\frac{dq}{dt} \quad \text{(dólares por hora)}$$
>
> (Hoffmann y Bradley, 2001, pp. 148-149)

De igual manera podemos ilustrar a través de otros ejemplos lo relevante que es esta herramienta dentro de las ciencias económicas, mostrándose con claridad que esta regla tiene una importancia que va más allá de la visión general que se tiene de la misma, esta es, derivar funciones compuestas. Esta regla nos permite llegar a interpretaciones precisas de situaciones económicas (ver episodio EP3-3) que difícilmente se podrían obtener por otras vías.

Por lo general, los libros de texto trabajan la regla de la cadena definiendo la regla en cuestión, realizan algunos ejemplos en el contexto matemático y finalmente hacen aplicaciones a la economía; un ejemplo de ello lo encontramos en: Hoffmann y Bradley (2001), Lial y Hungerford (2000), Arya y Lardner (1987), entre otros. En nuestro caso, ya lo explicamos en la **Sección 4.3** de este mismo capítulo, abordamos esta regla a partir de dos problemas discutidos y analizados en las **Subsecciones 4.3.1** y **4.3.2**, correspondientes a los episodios EP3-1 y EP3-2, reservando el tercer y último episodio, EP3-3, para aspectos concretos de la interpretación o significado de esta regla.

Ahora bien, revisando la literatura relacionada con la didáctica de las matemáticas y concretamente con el tema de la derivada, no hemos encontrado trabajos que estudien de forma específica la regla de la cadena asociada al conocimiento profesional del profesor, aunque sí existe en la literatura diversidad de estudios vinculados a esta regla pero ninguno próximo a nuestra línea de interés, como por ejemplo: Font (2000), Cottrill (1999), Clark *et al.* (1997), por citar algunos. Es por ello que nuestro análisis se fundamenta en lo empírico, es decir, la misma línea que seguimos en el estudio del dominio de una función y que realizaremos en la siguiente sección con el conocimiento sobre monotonía y valores extremos. En cierta medida, *esto es parte de nuestro aporte en el campo de la didáctica de las matemáticas y dentro de ésta en el área de las didácticas específicas*.

Lo que aportan los profesores de ambos grupos en lo que respecta a conocimiento disciplinar vinculado a la regla de la cadena, a lo largo de la tercera sesión del seminario, es muy similar entre ellos, ya que los cinco profesores en la discusión de los tres problemas destacan que *es la primera vez que trabajan un problema similar al del material*. Por otra parte, haciendo alusión al problema del EP3-2, Ramón y Manuel manifiestan estar de acuerdo con el uso de *la función exponencial* para introducir esta regla, ambos la consideran adecuada para el desarrollo del tema, y además, Manuel destaca *lo relevante de la exponencial* en el campo de las ciencias económicas, mientras que Kenya, por otro lado, resalta *la importancia de la estructura del material* en cuanto al manejo de las variables en el contexto económico.

Ya manifestamos en su momento que todos los profesores siguen una enseñanza basada en los programas oficiales y libros de texto, y este tipo de problema no es sugerido por los primeros, ni aparece en los libros de texto que ellos siguen como problema introductorio; esta podría ser la razón que nos lleve a inferir que no trabajen este tipo de problemas en sus clases y, en consecuencia, la visión que tienen de la regla de la cadena tenga un perfil eminentemente matemático; de hecho, Manuel le da más peso a que sus alumnos calculen derivadas que a la interpretación de las mismas.

Sin embargo, el punto que nos interesa subrayar en esta sección es la poca explotación que estos docentes ponen en práctica en materia de interpretación de la regla de la cadena en el campo de la economía y la utilidad, en general, de esta poderosa herramienta en las ciencias económicas. Más aún, si retornamos a las tablas de las **Figuras 5.1** y **5.2** podemos observar con más precisión lo señalado al inicio de este párrafo. Tanto es así que si pasamos luego a las tablas de las **Figuras 5.3** y **5.4** apreciamos que todos entienden el enfoque de la regla de la cadena que proponemos en el material como algo innovador en materia de enseñanza, destacando además que es ventajoso para el estudiante tal esquema de trabajo.

En resumen, presentamos algunas características relevantes en materia de conocimiento disciplinar, concretamente en el tema de la regla de la cadena:

G22 Hay que señalar como primera característica sobre la regla de la cadena que, para los cinco, *es la primera vez* que trabajan problemas como los discutidos en la tercera sesión del seminario. En particular, en lo que respecta a la introducción de esta regla, lo cual consideran como *un elemento innovador*.

C33 Tanto Ramón como Manuel consideran *apropiado el uso de la función exponencial* para introducir la regla de la cadena, entre otras cosas, porque *la misma representa un obstáculo en el aprendizaje* del estudiante y así, se refresca el trabajo con esta función.

P30 Manuel advierte de *la importancia de la función exponencial* en el campo de las ciencias económicas, aunque éste *le da más peso al cálculo* de derivada que a la interpretación de la misma.

P31 Kenya, por su parte, considera relevante *el manejo de las variables* para introducir la regla de la cadena.

5.2.3. Conocimiento sobre Monotonía y Valores Extremos

Cerramos esta parte del trabajo siguiendo el esquema natural de los programas oficiales y libros de texto, es decir, con el estudio de la monotonía y los valores extremos de una función. Al igual que los otros conceptos u objetos matemáticos antes estudiados, incluimos en esta sección del trabajo el análisis que se derivó de los episodios EP2-1, EP3-2, EP4-1 y EP4-2; esto quiere decir que la discusión sobre monotonía y valores extremos de una función estuvo siempre presente a lo largo del seminario.

Tal como lo comentábamos en la **Secciones 5.2.1** y **5.2.2** sobre la bibliografía específica relacionada al tema del dominio de una función y la regla de la cadena, respectivamente, sucede exactamente lo mismo para el caso de la monotonía y los valores extremos, razón por la cual nos hemos inclinado por realizar un análisis fundamentado en lo empírico y siguiendo los mismos elementos que estudiáramos en las dos secciones anteriores.

Otro punto que conviene resaltar es que los problemas aquí discutidos están en los libros de texto como *problemas de aplicaciones*; sin embargo nosotros hemos hecho las modificaciones pertinentes en estos problemas, o las preguntas que formulamos a los participantes, fueron planteadas con el objetivo, entre otros, de evitar que los mismos se entiendan como problemas de aplicaciones. Sobre este hecho en particular, siempre procuramos ser cuidadosos de reiterarle, de forma indirecta, a los profesores participantes que los problemas fuesen estudiados como *problemas contextualizados* y no como *problemas de aplicaciones*. Desde nuestro punto de vista, la diferencia radica en que los segundos se trabajan como consecuencia de haber desarrollado una teoría matemática que posteriormente se *aplica* en éstos, mientras que con los problemas contextualizados podemos introducir la teoría matemática y desarrollarla a través de los mismos; en consecuencia, estamos hablando de una diferencia didáctica entre estos tipos de problemas.

Por supuesto, la necesidad e importancia de estudiar estos conceptos matemáticos, monotonía (funciones creciente y decreciente) y valores extremos (máximos y mínimos de una función), en un contexto particular como el económico es bien conocido, pues no es ninguna novedad que un profesional de las ciencias económicas debe tener un conocimiento amplio sobre estos objetos matemáticos, puesto que cada vez hay una fuerte demanda en el análisis de situaciones económicas donde se busca optimizar modelos de esta área. En este sentido, el llevar a cabo una discusión en estos temas, sobre todo, de la forma como lo implementamos en este trabajo, significa para nosotros profundizar en objetivos como los indicados en la **Sección 5.2.1**.

Entrando en detalle, por qué nuestra idea de estudiar estos conceptos matemáticos. Pues bien, en primer lugar, estudiar el comportamiento gráfico de las ecuaciones es una parte básica de las matemáticas (Haeussler y Paul, 1997) y además, hay un sin número de situaciones en distintas ramas de la ciencia, en general, donde los modelos matemáticos que representan estas situaciones se hace necesario estudiar monotonía y valores extremos;

a este hecho no escapan las ciencias económicas. En segundo lugar, es claro que el estudio de estos conceptos se puede realizar con métodos analíticos rudimentarios; no obstante, el uso de la derivada permite facilitar el análisis de la monotonía así como el estudio de máximos y mínimos de funciones.

En la economía, concretamente en el área de mercado, frecuentemente se estudia el crecimiento de un sector de la población de cara al lanzamiento de un producto o la permanencia del mismo, la disminución de las ventas de un artículo por la existencia de uno nuevo en el mercado o, algo que está hoy en día sobre el tapete, como lo es el aumento o disminución de viajeros de acuerdo a la variación de precios de los carburantes. Todo esto exige tener un conocimiento sólido no solo en la estructura matemática en sí misma sino en la relación de la misma con el contexto económico.

En cuanto a los valores extremos, la situación es similar a la monotonía, con esto queremos decir que el estudio de los valores extremos en la economía es significativo. Veamos la siguiente cita:

> A mediados de la década de 1970, el economista Arthur Laffer explicaba su visión de los impuestos a un político -como cuenta la historia- era el aspirante a la presidencia Ronald Reagan,... Para ilustrar su argumento Laffer tomo una servilleta e hizo un bosquejo de la gráfica que ahora lleva su nombre: curva de Laffer[10].
>
> El argumento de Laffer no era para mostrar que la tasa óptima de impuestos fuese 50 %; lo que quería mostrar que bajo ciertas circunstancias, a saber, cuando la tasa de impuesto está a la derecha del máximo de la curva, es posible *aumentar el ingreso del gobierno bajando los impuestos*. Éste fue un argumento clave para la reducción de impuestos aprobados por el Congreso durante el primer periodo de la presidencia de Reagan.
>
> (Haeussler y Paul, 2003, p. 531)

Pero además,

> Muchas de la aplicaciones importantes de derivadas incluyen encontrar lo valores máximo y mínimo de una función particular. Por ejemplo, la utilidad que obtiene un fabricante depende del precio que cobra por el producto y el fabricante está interesado en conocer el precio que hace que su ganancia sea máxima. El precio **óptimo** (o **mejor** precio) se obtiene por medio de un proceso llamado **maximización** u **optimización** de la función de utilidad. De una manera similar, una compañía de bienes raíces puede estar interesada en generar el ingreso máximo por renta; una compañía ferroviaria puede necesitar conocer

[10] La curva de Laffer describe el ingreso total del gobierno debido a los impuestos como una función de la tasa de impuestos. Es obvio que si la tasa de impuesto es 0, el gobierno no obtiene ingresos. Pero si la tasa de impuestos es 100 %, el ingreso sería también igual a cero, ya que no hay incentivo para generar dinero si todo éste se esfuma.

> la velocidad promedio a la cual los trenes deben viajar a fin de minimizar el costo por milla de operación; o un economista puede desear conocer el nivel de impuestos en un país que promoverá la tasa máxima de crecimiento de la economía.
>
> (Arya y Lardner, 1987, p. 542)

En ambas citas queda expresamente de manifiesto que no sólo basta con conocer toda la teoría matemática asociada al estudio de máximos y mínimos, también es importante la interpretación de situaciones concretas en el campo económico.

Observación: Un punto a tomar en cuenta como dato previo al análisis es el poco aporte de los participantes referente al conocimiento disciplinar, puesto que, suponemos, ellos entienden los problemas discutidos como problemas de aplicaciones, aunque ya hemos explicado que procuramos que fuesen vistos como problemas contextualizados, a diferencia de cuando se discutió el tema del dominio de una función, ya que este tipo de problema no los sugieren los programas oficiales ni los libros de texto. Por otra parte hay que tomar en cuenta que para el momento en el que se trabaja tanto la monotonía como los valores extremos se está cerrando el tema de la derivada; es por ello que inferimos que los participantes se identifiquen más con los problemas a la hora de discutir los conceptos que nos ocupan. Más aún, tanto el tema de monotonía como el de valores extremos están incluidos en los libros de texto en el capítulo reservado a las aplicaciones de la derivada, como es el caso de Haeussler y Paul (2003) y Arya y Lardner (1987), entre otros.

Comenzaremos por hablar de las dificultades y/o ventajas que representan para el estudiante discutir problemas contextualizados en la economía. Sobre este particular, Manuel y Ramón coinciden en que el trabajar con problemas de esta naturaleza no solo es aceptado por el estudiante, en general, sino que además es exigido por éste. También advierten que los problemas fuera del contexto económico son rechazados por los alumnos o, de igual manera, problemas como el del EP4-1 que al estar "*recargados de letras*" podrían generar dificultad en el estudiante a la hora de trabajarlos, es decir, siguiendo la línea de los libros de texto.

Por otro lado, Kenya, Elio y Alexis sostienen que sus estudiantes rechazan problemas contextualizados en el área de economía; ya durante el análisis del conocimiento sobre el aprendizaje destacamos este punto, sin embargo lo traemos nuevamente a colación por el tipo de error que, dicen Kenya y Alexis, cometen los estudiantes en problemas de esta naturaleza, "*interpretación de los resultados*" y "*redacción de los mismos*".

Sin embargo, avanzamos un poco más en nuestro análisis y dejamos a un lado la contextualización para ahondar en aspectos como la estructura del problema en sí o el contenido del mismo; sobre esto último, Alexis afirma que trabaja con problemas similares, aunque entendemos que, por sus opiniones a lo largo del seminario y sus respuestas en los cuestionarios, este tipo de problemas los utiliza como elemento motivador, pero como problemas de aplicación es poco el trabajo en el salón de clases, con lo cual la estructura que presenta en el aula no es la misma que se ilustra en el material.

Ramón, por ejemplo, además de valorar positivamente el contexto y la estructura de los problemas sostiene que trabajar únicamente en el contenido económico puede propiciar a que el estudiante sólo entienda los conceptos matemáticos en discusión como propios de la economía, en tal sentido, él considera que se tienen que "*formalizar las matemáticas*", además, reconoce que su esquema de trabajo es "*definición + ejemplos*". Esto nos muestra una vez más, parte del perfil de este profesor sobre la enseñanza de las matemáticas, aun cuando estemos hablando de cursos de cálculo para futuros profesionales de las ciencias económicas; pero además, muestra también el escaso o nulo conocimiento del mismo sobre la EBP como metodología de enseñanza, puesto que sólamente entiende los problemas como elementos motivadores para la enseñanza o como problemas para reforzar el conocimiento del estudiante.

Por otro lado Manuel sostiene que su trabajo en el aula es similar al que mostramos en el material en cuanto a contenido pero existen elementos para suponer que no en su estructura (algo similar pasa con Alexis); aunque este profesor afirma que de implementarse el material en sus cursos los objetivos del mismo se lograrían de forma similar que en la actualidad. No obstante, al igual que Ramón, este profesor no concibe la estructura de los problemas como herramientas para enseñar algunos de los conceptos en discusión, sino que los mismos sirven como objetos de motivación o como actividad complementaria en el estudio de la monotonía o valores extremos.

Es claro que una de las aplicaciones de la derivada en las mismas matemáticas es el análisis de funciones, del cual forma parte el estudio de la monotonía y los valores extremos. Para llegar al estudio de estos conceptos se supone que se ha realizado un trabajo previo en el tema de la derivada; sin embargo, con el instrumento que hemos desarrollado se ha querido desmarcar esta visión clásica (teoría + aplicaciones) de la enseñanza de las matemáticas para cursos donde estas últimas juegan un papel instrumental significativo en la resolución de problemas.

Más aún, problemas como los de los episodios EP4-1 y EP4-2, con un contenido teórico o menos prácticos que los anteriores, Kenya, Elio y Alexis sostienen que no trabajan en clase ningún problema de este tipo o similares, ellos argumentan que es debido al rechazo de los mismos por parte de los estudiantes; pero nosotros reflexionando sobre esta situación nos preguntamos: ¿hasta dónde han procurado trabajar este tipo de problemas estos profesores?, ¿qué conocimiento del contenido económico manejan a fin de llevar al aula la discusión que exigen estos problemas?, sobre esto último, Elio y Kenya han reconocido abiertamente desde un principio y posteriormente Alexis su poca formación en esta materia y lo poco que manejan obedece a la autoformación por inclinación personal. No obstante, es Kenya la única que encuentra en el contenido del material y su estructura aspectos propios de la EBP como: "*protagonismo del estudiante*", "*exige mayor formación y compromiso por parte del profesor*", "*se explota el conocimiento intuitivo del estudiante*", "*no es una actividad rutinaria*", entre otros.

Ahora bien, ¿qué implica o qué relación tiene todo lo anterior con el conocimiento disciplinar? En primer lugar queremos decir que cuando se quiere llevar a la práctica una enseñanza contextualizada de las matemáticas se debe tener cierto dominio del contenido en el cual se pretende ambientar las matemáticas, en nuestro caso nos referimos a las ciencias económicas; en otras palabras, conocer las distintas interpretaciones de las matemáticas en estas ciencias. En segundo lugar, con un problema matemático contextualizado en la economía, además de motivar, se persiguen dos cosas fundamentales: (a) mostrar la necesidad de conocer una teoría matemática afín al problema y (b) conocer la utilidad de la misma para entender y resolver el problema con su interpretación correspondiente en el campo de la economía. En resumen, estos profesores siguen una *enseñanza lineal* de la derivada (teoría + aplicaciones), en la que algunos trabajan problemas de aplicaciones a la economía, pero sin explotar el potencial que significa la derivada a futuro; no obstante, vale la pena señalar que los programas oficiales tampoco sugieren que se haga tal explotación.

Es claro que en lo que concierne al conocimiento sobre monotonía y valores extremos lo que aportan los participantes es muy pobre en cuanto a cantidad, aun así mostramos algunas características significativas que contribuyen en esta materia:

C34 Poco podemos decir sobre Alexis, Elio y Kenya en cuanto a este conocimiento, ya que ellos argumentan que *sus estudiantes presentan conflictos* en los problemas contextualizados y, en consecuencia, es reducida la cantidad de problemas de este tipo trabajados en clase.

G23 En general, todos los profesores reconocen estos problemas como *elementos motivadores* más que como generadores de conocimiento.

G24 Ninguno explota *la necesidad de esta herramienta* en el campo de la economía de cara a futuras situaciones del área económica, lo que implica *falta de formación* en esta materia.

5.3. Análisis del seminario

Antes de dar inicio a esta última parte del análisis, hacemos énfasis en los tres puntos principales para los que fue utilizado el seminario y que los mismos sirvieron de referente para nuestro análisis, estos son: (**1**) el seminario como herramienta de recogida de datos, (**2**) como potente vía para acercarnos a los participantes, de forma directa, y obtener de ellos toda esa información relacionada con el CDC en los puntos que consideramos de nuestro interés y, (**3**) el seminario como una actividad de formación y desarrollo profesional, resaltando en este caso, la *discusión*, la *reflexión* sobre la propia actividad docente del participante y con implicaciones potenciales en su *formación profesional*, situación esta de la que ya hablamos en el **Apartado 3.6** del capítulo anterior. En tal sentido, nos proponemos analizar el seminario tomando en cuenta esos tres puntos recién mencionados, pero siempre enfocados hacia el tercero, ya que, entre otras cosas, dentro de los objetivos que nos propusimos alcanzar con el desarrollo de esta investigación, está el de valorar el seminario como actividad de formación profesional, situación ésta que fue reseñada en su momento en el capítulo anterior, específicamente en la página 108 de esta memoria.

Ahora bien, el análisis de esta parte del trabajo está focalizado a la *interacción entre participantes*; sin embargo, nuestro trabajo no se centrará en estas interacciones en sí mismas, sino en el contenido de éstas en cuanto al CDC, es decir, enfocaremos nuestro análisis en el contenido de las interacciones en relación a las distintas categorías que fueron analizadas de forma particular en las anteriores partes del análisis. En estas interacciones también buscamos estudiar la influencia de algún profesor en otro sobre las preguntas realizadas. Recordemos que nuestro interés en estudiar y analizar las distintas reflexiones de los participantes obedece fundamentalmente al intento de aproximarnos al conocimiento profesional y a las posibles implicaciones que pudieran tener éstas en cambios en el profesor universitario, en lo que respecta al CDC en general. Más aún, partiremos de las posiciones de Marín (2004) y Mellado (1995) quienes advierten sobre la necesidad de generar elementos, la primera, y espacios, el segundo, que lleven a esta actividad de forma sistemática entre los docentes.

La información o los datos para el análisis de este apartado lo constituyen dos fuentes de información: 5 segmentos extraídos del seminario y algunas preguntas de la entrevista. En los segmentos del seminario se destaca la interacción entre participantes[11], en el caso de las preguntas de la entrevista, las cuales fueron mencionadas en el capítulo anterior, elegimos aquellas donde

[11]Los tres primeros segmentos corresponden al grupo A mientras que los otros dos corresponden al grupo B.

se les pide a cada uno de los participantes su valoración del seminario y algunas reflexiones al respecto[12]. Estos segmentos los hemos sintetizado, descartando las frases o comentarios que, a nuestro juicio, no aportan algo relevante a esta parte del trabajo y, más aún, resaltamos en ***negrita y cursiva***, simultáneamente, las frases que queremos destacar como piezas claves para el análisis, dejando intactos los comentarios del moderador. Como dato adicional, estos extractos del seminario están escritos en una letra más pequeña y con un margen ligeramente mayor por ambos lados.

5.3.1. Segmento 1

Damos inicio a esta fracción del análisis con una parte del seminario que nos resulta obligado tomarla en consideración por dos razones fundamentales; en primer lugar, reconocer la participación de Pedro que, aunque sólo intervino en la primera sesión, su aporte mereció ser tomado en cuenta; por otra parte, la discusión surge en torno a la introducción de la derivada. El siguiente segmento es tomado de la primera sesión del seminario, concretamente del microepisodio **A.1.2**[13], en el que se discutieron dos problemas, *velocidad instantánea* e *impuesto marginal*, para introducir la derivada. En este caso las reflexiones se centran en la enseñanza y el aprendizaje a partir del contexto en el que se sitúan ambos problemas. Aquí buscamos *determinar a qué contexto*, económico o matemático, *le dan mayor peso* y *cuáles son las estructuras de enseñanza* de la derivada que ellos manejan.

> **[Moderador]**: Algo que debo aclarar es, que los dos problemas o ejemplos se colocan para que ustedes me den su opinión y en ningún momento es porque nosotros consideremos que se deben trabajar esos dos ejemplos en particular.
> **[Pedro]**: Para mi, y disculpen, ***no son los acertados***. Para mi, ***daría la función de costo e ingreso que son las funciones elementales que ya ellos deben dominar; ya el impuesto es más delicado, mucho más delicado***. Porque si tú tienes una empresa, ¿qué es lo que quiere una empresa?, ver el costo total, ver el costo promedio, ver el costo marginal, el costo adicional cuando tú produces una unidad adicional, porque tú quieres llegar a la derivada del costo, que es el costo marginal. Entonces, ***es una función que ellos la han visto en Introducción a la Economía***, mientras que de impuesto no han visto nada hasta el momento, como dice el colega[...]
> **[Moderador]**: Es decir, con lo que no estás de acuerdo es con el modelo o mejor dicho, con el ejemplo. Una cosa es el enfoque que se le quiere dar a la enseñanza de la matemática partiendo de un problema contextualizado y otra cosa es la elección y adecuación del ejemplo o problema. Tal vez elegí mal el problema.

[12]Para simplificar nuestro análisis de esta parte del trabajo, nos referimos a cada una de las preguntas de la *entrevista final* como EF*n*, donde la *n* representa el número de la pregunta.
[13]Este segmento se encuentra en el **Apéndice A**, entre las páginas 372 y 374.

[Pedro]: No es que elegiste mal sino que para mi criterio ***yo elegiría el costo***.
[Moderador]: Me explico, una cosa es elegir la estructura que se le quiere dar a la enseñanza y otra, elegir el problema o modelo. Por ejemplo, podemos sustituir un problema de costo por el de impuesto.
[Pedro]: Yo te sugiero que lo hagas y ***en lugar de velocidad, ingreso***.
[Moderador]: Pero entonces, ¿tú descartarías de plano la situación no-económica?
[Pedro]: Como lo dice Manuel, ***en economía, los voy a distraer***. Para mi no tiene sentido el ejemplo físico. ***Ya lo he hecho y siento que he perdido mi tiempo***.
[Moderador]: O sea, ¿que tus ejemplos son todos económicos?
[Pedro]: ***Sí, son todos económicos***.
[Ramón]: No sé si puedo añadir algo.
[Moderador]: Claro, adelante.
[Ramón]: ***Yo seguiría insistiendo en que fueran de economía*** y, como dice Pedro, ***el primer modelo sería de costo-ingreso***, este modelo o ejemplo ***[el de impuesto] se puede tratar más adelante***,[...] realmente cuál es el objetivo de este curso y de este tema en particular, ***que el estudiante entienda el concepto desde el punto de vista matemático de lo que es la derivada***, de acuerdo. Entonces, ***se corre el riesgo de que ese objetivo no se vaya a alcanzar cuando los ejemplos sean solamente de una única área del conocimiento*** como es en este caso, de economía[...], yo aún tengo la sensación de que a pesar de la intención de proponer el modelo de la velocidad sea que la derivada no es algo plenamente de la economía, todavía...
[Pedro]: ¿***Te gusta el ejemplo de la velocidad...***?
[Ramón]: No, no, no. No me gusta en realidad, sino ***qué alternativa habría para que una vez que se trabaje con modelos económicos solamente, dar garantía de que realmente el estudiante sabe que hay un concepto que es abstracto que no se refiere a más nada***, que es el concepto de derivada. Ese es el temor, pero hasta el momento yo todavía...
[Pedro]: ***Yo pienso que ese temor tú lo puedes eliminar***, porque ellos van a trabajar con funciones aplicadas a la economía. Entonces, ***después que tú des esos ejemplos y caigas en la definición, que caigas en el análisis marginal, tú además de costo marginal e ingreso marginal, vas a hablar de beneficio marginal, impuesto marginal, vas a hablar de la productividad marginal***, ¿entiendes?, no así [refiriéndose al esquema planteado], sino ya con las derivadas. ***Esto es la derivada y qué significa***, ¿de acuerdo?; ***la producción en función del capital invertido***, bueno, ***el incremento de la producción si yo invierto en el capital en una unidad adicional***, así de sencillo.
[Ramón]: Ok, eso es una alternativa...
[Pedro]: Entonces ***estás trabajando y empleando cada vez más herramientas*** en el campo de ellos, ¿de acuerdo?
[Ramón]: Ok, ***eso sería una alternativa***, porque así se ve que ***el concepto de la derivada no está sólo asociado al costo o al ingreso***...
[Pedro]: Mira lo que me está pasando a mi ahorita, yo en el curso que estoy dando de nivelación del posgrado, allí tengo a 12 ingenieros, ellos están admirados. Y por qué están admirados les pregunto; bueno, porque ya entendemos para qué sirve la derivada en términos económicos, sin embargo les doy unos ejemplos de ingeniería también.

[Moderador]: Y tú, Manuel, qué opinas.
[Manuel]: Yo sigo insistiendo que, ***no estamos hablando de que se va a dar el concepto de manera abstracta***, sencillamente ***hay que darlo a través de ejemplos y resaltar esta diferencia que es muy importante***[...] Entonces, ***se puede establecer más adelante que también puede funcionar para otras cosas***. Si el estudiante ya sabe que la derivada es una herramienta del análisis marginal y no como algo interno del análisis [marginal], mientras tú establezcas estas diferencias es importante, ¿y cómo lo estableces?, con un ejemplo sencillo, si no quieres usar ejemplos físicos puedes buscar otros ejemplos, ***pero es clave que el estudiante sepa de esa pequeña diferencia***.
[Pedro]: Yo le agregaría, para complacer al amigo Manuel, ***después que veamos los ejemplos de costo e ingreso, se puede agregar el ejemplo de velocidad como un ejemplo que es ajeno a la carrera***.
[Ramón]: Yo insisto, no tiene por qué ser el ejemplo de velocidad porque el temor que queda..., qué es lo que se pretende, que el estudiante en algún momento llegue a comprender el concepto de derivada sin ninguna clase de muleta, por decirlo de algún modo, entonces ese es el temor que quedaría. Entonces, ***yo seguiría la línea de Manuel***, o sea, ***ver el de la derivada no solamente en el costo sino también en otras partes del análisis marginal y en otras áreas en general***.
[Pedro]: ***Yo respeto sus opiniones pero no estoy de acuerdo***...

Es claro que la visión que existe sobre el contenido de los problemas que se trabajan en clases de cálculo diferencial, para estudiantes de ciencias, económicas no está unificada en el caso de estos tres profesores; por un lado, Pedro, quien muestra un sólido conocimiento en contenido económico y una vasta experiencia en estos cursos, apuesta por una enseñanza de las matemáticas totalmente contextualizada en el área económica, entre otras cosas, porque además de motivar al estudiante también lo involucra directamente en su campo profesional, mientras que Ramón y Manuel presentan una posición contraria a Pedro, ellos son reticentes a trabajar únicamente problemas vinculados a la economía.

Sin embargo, en la discusión planteada queda reflejada cuáles son las estructuras de enseñanza que siguen en sus clases estos tres profesores. Pedro se muestra como un profesor totalmente práctico, es decir, el enfoque que éste hace de las matemáticas radica en la utilidad práctica de éstas en el campo económico. Manuel, por su parte, cuya participación en este microepisodio fue pobre, aun cuando entiende que el material busca introducir la derivada desde una situación problemática, él considera que hay que dejarle claro al estudiante que este objeto matemático no es un concepto económico.

Ramón, siguiendo a Manuel, muestra su inquietud sobre la posible visión que pueda tener el estudiante sobre la derivada, aunque este profesor va más allá y sostiene que el concepto no se debería asociar a problemas únicamente de ingreso y costo., posición ésta que la reitera en EF5, donde sugiere que además de estos problemas "*deberían hacerse otros ejercicios de matemáticas sin contenido económico*". Ahora bien, si profundizamos en Ramón, él se encuentra en medio de Pedro y Manuel, y puede inclinarse hacia Manuel o Pedro según el peso de los argumentos; en otras palabras, él podría, al menos por ahora, ser un posible profesor en transición y susceptible de aceptar otras propuestas si realmente le convencen de que sus estudiantes no pierden nada sustancial.

Aun así, lo más significativo de todo esto, es que surgiera un espacio en el que no solamente se fijara una posición sobre los dos problemas discutidos en la primera sesión del seminario para introducir la derivada, como es el caso de la velocidad instantánea y el impuesto marginal, sino que al mismo tiempo emergiera de manera natural lo inapropiado del impuesto marginal para introducir la derivada pues, según Pedro, el tema del impuesto aún no lo han trabajado para ese momento, lo que significa que este profesor también muestra conocimiento en materia de contenido curricular.

Otro punto a destacar dentro de esta parte del seminario, es la *aceptación* parcial que manifiesta Ramón después de los argumentos pormenorizados que ofrece Pedro, cuando este último enfatiza sobre su trabajo en el aula, únicamente con problemas del contexto económico. De no darse una discusión en un espacio como el seminario, posiblemente el punto de vista de Ramón permanecería limitado al trabajo de problemas con mayor inclinación hacia las matemáticas. Sin embargo, esto no nos puede llevar a concluir que en adelante surgirán cambios en este participante, pero sí podemos afirmar con toda propiedad que, por medio del seminario, Ramón conoció una alternativa más sobre la enseñanza de la derivada, situación reconocida por este profesor en EF1.

No obstante, lo más importante a destacar sobre este y el resto de profesores consiste en la participación de los mismos en una experiencia real, llevada a cabo por uno de sus colegas, lo cual puede incidir, no sólo para Ramón, en romper con el aislamiento que tienen los docentes, encerrados en sus aulas e ignorantes de otros procesos de enseñanza. Pero volviendo a Pedro, podríamos decir que efectivamente los argumentos de este profesor y su postura quedó evidenciada por el seminario y la discusión en el seno de éste.

5.3.2. Segmento 2

Aun cuando el contenido central del material es el cálculo diferencial, recordemos que nosotros abordamos también otros conceptos como el dominio de una función. El siguiente segmento es tomado de la segunda sesión del seminario, concretamente del microepisodio **A.2.1**[14] En este segmento retomamos

[14]Este segmento se encuentra en el **Apéndice A**, entre las páginas 391 y 392.

la discusión realizada sobre el estudio del dominio en un doble contexto, el matemático y el económico, resaltando de esta parte la necesidad de un espacio de formación para el profesor de matemáticas de universidad que trabaja en cursos relacionados con materias donde no ha tenido ningún tipo de formación a lo largo de su carrera. Aquí se estudia *cómo abordan el tema del dominio* y su *repercusión en el aprendizaje* de los estudiantes; por otra parte y dado su aspecto innovador, queremos ahondar sobre *cómo influye en el CDC de estos profesores* el estudio del dominio en un contexto dual.

[Moderador]: ¿Qué importancia supone para ustedes implementar este tipo de dualidades (económicas y matemáticas) en estos cursos o, por el contrario, supone más bien que el estudiante tiende a confundirse? ¿Por qué?
[Manuel]: [...] tú usaste el problema de impuesto, ***yo siempre comienzo por introducir las funciones de costo, ingreso y beneficio***; esos son los conceptos económicos que yo más utilizo, principalmente cuando doy Matemática 1. O sea, que ***ya ellos conocen muy bien a estas alturas estas funciones***. Ahora, obviamente, me parece muy importante que ellos vean esto y como con esto es con lo que van a trabajar, ***me parece clave***.
[Moderador]: Un momento, no nos desviemos, en este momento me refiero concretamente a la dualidad de contextos en el problema. Mira, es la misma función pero vista en un contexto matemático y en uno económico, fíjate en el dominio en un contexto y en otro. ¿Qué incidencias tiene implementar ese tipo de dualidad?
[Manuel]: Ah!, ok. Bueno, yo lo resalto digamos, esa situación. ***Yo les hablo del dominio matemático y del dominio real, el de las aplicaciones***, entonces siempre establezco la diferencia. Ahora, ***así como tú lo planteas está como más preciso*** y creo importante, ***yo no lo hago con tanto detalle***, particularmente yo creo que es muy bueno que se establezca esta diferencia. Es más, ***yo creo que a partir de ahora voy a hacerlo con estos detalles***, ya que eso resalta la importancia de las matemáticas en las carreras de economía, ***pienso que el estudiante puede entender mejor el concepto de domino de una función al realizar en detalle este tipo de problemas***. No sé qué piensa Ramón al respecto.
[Ramón]: Es importante y, de hecho, ***uno como profesor se da cuenta de estas distinción es con el tiempo***; por ejemplo, en Matemática 1, que es donde ellos ven funciones,[...] uno les habla de dominio de una función, pero como es la primera vez que ellos oyen de eso, entonces ***uno les habla del dominio matemático***, después cuando pasan a Matemática 2 donde toca graficar funciones, si tiene algo que ver con una aplicación como costo, ingreso..., ***así como está acá, los estudiantes podrían llegar a confundirse***. De hecho, en los otros cursos, me refiero al de microeconomía por ejemplo, ***el dominio que el profesor de microeconomía, al cual se refiere, es al dominio que tú mencionas aquí como dominio económico***; pero que yo siempre les había hablado, donde la función tiene sentido desde el punto de vista económico, ***siempre les había dicho sin mayor detalle pero fue posteriormente que me di cuenta de eso*** [de lo dicho antes sobre el profesor de microeconomía, de la diferencia entre dominios], ¿de acuerdo?... ***El dominio es este, pero el que es relevante o el que tiene sentido para este problema es este otro***. Entonces, me parece muy importante; ***lo que sí te puedo decir es que nunca había sido tan detallista como tú lo planteas***, yo

sólo restringía el dominio a los $\mathbb{R}^+$, pero nunca tan detallista como $\mathbb{Q}_0^+$, que realmente tiene sentido algo así porque lo que sí no tiene sentido es hablar en este caso de $\sqrt{2}$ dólares, por ejemplo. Yo creo que ***es importante que el estudiante conozca estos detalles*** porque se distingue la parte formal, la parte matemática y lo que se hace; por ejemplo, en los cursos de microeconomía en referencia al dominio, creo que con esto se prepara al estudiante para este curso [el de microeconomía] y seguro que para algún otro, pero que realmente no conozco con precisión y no quiero especular.

En esta oportunidad, al discutir sobre la doble contextualización del dominio de una función, ambos profesores advierten cómo trabajan el tema, su importancia para los estudiantes, entre otras. Aún así, lo que resulta más significativo para nosotros son la precisiones que ellos realizan sobre el contenido del material y la estructura del mismo para abordar el tema del dominio. Los dos participantes coinciden en que en el material se trabaja este tema con más detalles en comparación a su actual forma de trabajo en el aula, situación ésta que consideran clave en materia de enseñanza-aprendizaje.

Más aún, Ramón y Manuel, terminan reconociendo que en adelante llevarán este tipo de dualidades al aula y las trabajarán tomando en cuenta el material discutido, ya que, en palabras de Manuel, "*eso resalta la importancia de las matemáticas en carreras de economía*". En nuestro caso, podemos entender el material como una herramienta innovadora en materia de enseñanza y el seminario, como actividad de formación, esto último por los comentarios de Ramón, quien afirma que "*uno como profesor se da cuenta de esta distinción es con el tiempo*", refiriéndose al detalle de estudiar el dominio en el contexto económico y matemático. Manuel, por su parte, en EF10 reconoce abiertamente que *aprendió mucho* y además *vio enfoques diferentes a los suyos* sobre la enseñanza de las matemáticas. En tal sentido, la creación de un espacio de discusión como escenario para la formación inicial y permanente del profesorado universitario, se hace necesaria y probablemente debería ser obligatoria, algo que todos los participantes, salvo Manuel, manifiestan de forma explícita en EF9, con sus respectivos matices.

5.3.3. Segmento 3

En esta oportunidad el tema central de discusión es la regla de la cadena. Aquí se intenta indagar sobre la introducción a esta regla de derivación mediante un problema cuya derivada de la función interna forma parte del enunciado del problema. El segmento que aquí presentamos fue tomado de la tercera sesión del seminario, específicamente del microepisodio **A.3.1**[15]. En este segmento exploramos el CDC del participante, permitiendo que reflexione

[15]Este segmento se encuentra en el **Apéndice A**, entre las páginas 416 y 417.

sobre su *metodología de enseñanza* y sobre la *estructura del problema* en sí mismo. Como detalle curioso, destacamos que este problema se encuentra entre los problemas propuestos en uno de los libros de texto que recomienda el currículo oficial, con la particularidad que fue modificado de acuerdo a nuestros objetivos.

[Moderador]: En este ejemplo de la regla de la cadena, la derivada de la función interna es parte del enunciado. ¿Utilizan ustedes un problema similar para introducir la regla de la cadena?

1. $\boxed{\text{Sí}}$. ¿Por qué?
2. $\boxed{\text{No}}$. ¿Lo utilizarían ahora para introducir la regla de la cadena, lo modificarían (¿cómo?) o simplemente lo harían de otra manera (¿por qué?)?

[Manuel]: No, no, es más; ***primera vez que veo un problema de ese tipo***.
[Ramón]: ***Yo también***.
[Manuel]: Porque yo ***para la parte de regla de la cadena uso ya las formulaciones matemáticas***, las propiedades.
[Moderador]: O sea, ¿tú defines primero la regla de la cadena y luego abordas los problemas?
[Manuel]: En sí, ***no incluyo la regla de la cadena en el problema así como está acá***, sencillamente, para el cálculo de la derivada de una función queda implícita la regla de la cadena, no sé si me explico... De hecho, ***estoy aprendiendo algo nuevo con este problema***.
[Moderador]: Dame detalles...
[Manuel]: Mira, ***defino la regla de la cadena y hago ejemplos***, de allí en adelante el estudiante debe saber diferenciar si para calcular la derivada, se tiene que aplicar la regla de la cadena o no.
[Moderador]: Pero la pregunta es si utilizas un problema como este para introducir la regla de la cadena.
[Manuel]: No, ***ni siquiera conocía un problema como éste***; primera vez que lo veo, te soy sincero.
[Moderador]: ¿Y tú, Ramón?
[Ramón]: ***Primera vez que veo esta manera de introducir la regla de la cadena con aplicaciones de economía***.
[Moderador]: En atención a que la respuesta de ustedes es negativa, ¿intentarían ustedes introducir la regla de la cadena con un problema como éste o piensan que generaría conflictos en el estudiante?
[Ramón]: Al contrario, me parece que ***esta manera de introducir la regla de la cadena es más sencilla en comparación a como lo hago actualmente***.
[Moderador]: ¿Y qué le modificarías al problema?
[Ramón]: No, ***yo no le modificaría nada***, así como está expuesto me parece que ***tiene una buena estructura***.
[Moderador]: Y cuáles serían los beneficios didácticos, desde el punto de vista del aprendizaje, etc...

[Ramón]: Hacerlo así, al menos ***ellos entenderían cómo usar y en qué consiste la regla de la cadena***, porque la experiencia que yo tengo es que hay que identificar, les explico, hay que identificar la función interna, la función externa. Entonces, ***siempre he tenido la sensación de que ellos al final no comprenden en realidad qué significa la regla de la cadena***; es decir, cómo y cuándo usarla. Ni hablar de la interpretación. ***Mientras que con tu ejemplo quedan bien identificados los dos factores***.
[Moderador]: ¿Y tú, Manuel, implementarías o descartarías este problema, o lo modificarías?
[Manuel]: Sí ***me llama la atención y me atrae***, pero como te dije, ***es primera vez que lo veo y tendría que estudiarlo más a fondo***. Ahora, creo que sí se podría utilizar porque ***de esta manera se evita uno muchas formulaciones***, esa es una de las cosas que me atrae y que seguro le gustaría a los estudiantes. Cuando yo introduzco la regla de la cadena, ***les hablo mucho de composición de funciones, les hago diagramas, que a los estudiantes no les gusta***, muchas fórmulas y notaciones, usando el prima y usando la diferencial. Esto, sin embargo, me podría ayudar a separar una cosa de la otra, ***me parece muy buena idea*** pero vuelvo y te repito, ***tengo que madurar el ejemplo porque es primera vez que lo veo***.

En esta oportunidad, la discusión generada sobre la introducción de la regla de la cadena a partir de un problema que suponemos no tradicional, permite a los participantes pronunciarse sobre diversos aspectos asociados a esta regla. En primer lugar podemos observar que para ambos profesores es la primera vez que abordan este tipo de problema y, más todavía, ellos manifiestan que siguen una enseñanza tradicional en el caso de esta regla de derivación; situación ésta que se puede verificar en los esquemas presentados por estos profesores en sus respectivos cuestionarios correspondientes a la tercera sesión del seminario[16].

Ahora bien, no sólo nos conformamos con el hecho de que estos profesores manifiesten que es la primera vez que estudian un problema como este para introducir la regla de la cadena; Manuel, por ejemplo, sobre el contenido y la estructura del problema reconoce: "*estoy aprendiendo algo nuevo con este problema*", lo que vuelve a aflorar que el seminario sirvió como espacio para que los profesores reflexionaran sobre nuevas alternativas para la enseñanza de las matemáticas. Ramón por su parte, enfoca su reflexión de una forma, tal vez, esperada por nosotros en algún momento; esto es, comparando la estructura del material a su actual forma de trabajo. En particular, este profesor matiza que el material discutido podría tener mayor y mejor alcance en el aprendizaje del estudiante por los detalles y el esquema que presentamos en éste; añade además que los estudiantes "*entenderían cómo usar y en qué consiste la regla de la cadena*", pues "*siempre he tenido la sensación de que ellos al final no comprenden en realidad qué significa la regla de la cadena*". Todo esto nos hace inferir que existe cierta inclinación a un cambio en el esquema de enseñanza de este profesor.

[16]Estos detalles se pueden verificar en las páginas 434 y 440 de esta memoria

Una vez más queda de manifiesto que la existencia de un espacio de discusión, en el que se planteen distintos puntos de vista sobre cómo trabajar una serie de problemas de un tema específico, permite al grupo de discusión conocer y generar alternativas que vayan en pro del proceso de enseñanza-aprendizaje. Sin embargo, no aceptamos que lo único relevante en este conjunto de reflexiones sea el espacio en sí mismo, también el instrumento que genera tales reflexiones, el seminario de profesores, merece un poco de atención, puesto que sin la existencia del mismo no habría el debate producido entre los participantes.

Tanto es así que si nos ubicamos en EF2 de cada uno de los participantes, podemos apreciar que todos afirman que el material muestra alternativas distintas a las trabajadas en clases para enseñar matemáticas; en particular, el dominio de una función, la introducción a la derivada y la regla de la cadena, entre otras, lo cual nos hace inferir que existe cierta inclinación a un futuro cambio en sus correspondientes prácticas docentes, por supuesto, siempre que esta actividad se continúe.

5.3.4. Segmento 4

En este momento volvemos a la segunda sesión del seminario, solo que en este caso trabajamos con las opiniones del **Grupo B** y el concepto matemático es la monotonía y los valores extremos, aun cuando no queda reflejado en el texto extraído de la discusión. Al igual que en la **Sección 5.3.2**, aquí procuramos explorar sobre la contextualización de la economía en problemas matemáticos y sus consecuencias en el plano de la enseñanza y el aprendizaje. Este segmento es tomado, como ya lo manifestamos, de la segunda sesión del seminario, concretamente del microepisodio **B.2.1**[17] En este tramo del seminario indagamos el CDC de los profesores participantes, promoviendo la discusión sobre su *metodología de enseñanza* y sobre las posibles consecuencias en el aula al llevar una estructura como la que se muestra en el material.

[Moderador]: En una discusión reciente con otros profesores de matemáticas que trabajan en una facultad de economía, dos de ellos manifestaron que una actividad como ésta no es innovadora para sus estudiantes y sus argumentos fueron varios; pero además, surgieron comentarios encontrados en cuanto a aspectos metodológicos. ¿Consideran ustedes que esta es una actividad que conlleva a un mayor esfuerzo en el sentido metodológico (desarrollo de la clase)?
[Alexis]: Yo creo que no, de hecho, ***uno se sienta a preparar la clase tan igual como uno se sienta a preparar una clase de cálculo para ingeniería o ciencias***, y como ya hemos estado utilizando la parte de economía, entonces ***el tiempo que uno destina para la parte de las***

[17]Este segmento se encuentra en el **Apéndice B**, entre las páginas 511 y 513.

aplicaciones lo que haces es redistribuirlo para montar estos problemas..., yo creo que no, a mi particularmente me parece que no.
[Kenya]: Yo pienso que, ***tal vez, sí implique un poco más de tiempo, quizás, cuando se monte la primera vez***...
[Alexis]: ***Ah bueno***...
[Kenya]: ***No es lo mismo dar una clase tradicional*** donde tú hablas y hablas..., y ***definición, concepto, ejercicio, problema, a que tú lleves un proceso***...
[Alexis]: ***Por supuesto***...
[Kenya]: ***Donde lo imprevisto está ahí***..., tú puedes lanzar preguntas y ellos te pueden responder, pero ***también pueden decir cosas que tú no tenías previstas***...
[Alexis]: ***Por eso es que te estoy diciendo***...
[Kenya]: ***Puede llevarte algún tiempo adicional, de eso estoy segura***.
[Alexis]: Por eso es que te digo, se sienta uno..., ***asumiendo que nosotros manejamos un poco la parte de economía***. Si tú vas a preparar una clase de eso, en cualquiera de los cursos de cálculo para estas carreras, ya tú sabes que tienes que montar unos problemas, y por supuesto que tienes que resolverlos y ese es tiempo que, no es que uno lo pierda...
[Moderador]: No estoy hablando de que sea tiempo perdido, me refiero si supone para ustedes más o menos tiempo, o la misma cantidad de tiempo.
[Alexis]: Bueno, ***la primera vez que uno monta una clase de estas, claro que sí***, pero repito, como ya uno ha trabajado con las aplicaciones, ***no creo que el tiempo que uno se siente sea mucho más***. Tal vez ***lo que tome más tiempo es el problema del lenguaje de economía***, que ***como uno no es economista*** uno tenga que profundizar más en esto.
[Moderador]: Elio, ¿qué opinas tú?
[Elio]: Yo sí apostaría por eso, porque ***se necesite de mayor tiempo y tal vez más que la primera vez***...
[Alexis]: No, yo pienso que ***la primera vez te tienes que familiarizar con términos que no conoces***...
[Elio]: Pero un momento..., ***el problema es que con las clases tradicionales***, por llamarlas de alguna manera, ***como usualmente uno las está dando ya tienen un patrón***, ya vienen estructuradas, definición tal, teorema tal y diez ejercicios..., y así sucesivamente. Este es como el patrón que uno debe seguir, en cambio la construcción que queremos darle es: ***se le plantea al estudiante un problema y que hay que desglosarlo de alguna manera*** y que, seguramente, no tenemos idea de qué es lo que se va a hacer...
[Alexis]: Cuidado, cuidado, ***lo que dices es muy delicado***.
[Kenya]: Claro, ***hay que esperar que el alumno lo mire, lo analice***, uno no, por que uno lo lleva preparado. ***Uno espera determinado comportamiento de ellos***.
[Alexis]: Sí, pero cuidado, porque ***lo que dice Elio es muy delicado***, yo lo que entiendo es que aún cuando él está llevando el problema, está diciendo que no sabe cómo atacar el problema, ***eso sería muy grave para el estudiante***.
[Kenya]: Sí, sí, ***pero tú puedes llevar unos problemas preparados*** donde la participación de la clase..., mejor dicho, ***donde el protagonista seas tú***, ¿entiendes?, pero en ***un tipo de metodología como la que se está enfocando aquí es distinta***, porque se supone que ***tú vas a conducir un proceso donde el alumno va a ser el protagonista*** de ese proceso, es él quien

va a llegar a un concepto y ***llegar a un concepto no es tarea fácil***. Claro, entendemos que estamos tratando con adultos y que debe ser más fácil que con niños, tal vez con una o dos situaciones sobre el mismo tópico como lo está planteando Luis, ***Luis está planteando el mismo contenido pero trabajando con distintas funciones***, ¿no es verdad?
[Moderador]: Bueno, tú lo ves así, realmente no puedo opinar al respecto.
[Kenya]: Aproximándose al mismo concepto usando la función beneficio, ingreso, costo, etc., pero ***implica una participación activa del alumno***, eso ***te consume más tiempo*** de clase...
[Moderador]: ¿En la clase o en la preparación de la clase?
[Kenya]: De las dos, porque ***tú tienes que tomar en cuenta que debes adelantarte a lo que pueda ocurrir en el aula***, y eso no es fácil. Si yo me voy por este camino y planteo esto, ¿qué puede pasar aquí? ¿Cuáles son las posibles situaciones con las que me puedo enfrentar y cómo resolverlas? ¿Qué pasa si se me presenta una situación como esta y yo no estoy preparada para asumirla? A conciencia, ***eso implica una mayor preparación de la clase y una mayor preparación para el profesor***, sobre todo en un campo que no es de tu formación, de paso...

Aquí la preparación de la clase de matemáticas contextualizada en el área económica es el primer tema que aflora entre los participantes. Expresar su punto de vista sobre la planificación de la case y al mismo tiempo, escuchar la posición de los otros profesores, permite discernir y obtener una conclusión *a priori* sobre esta actividad. Por un lado resulta interesante para nosotros el cambio que experimenta Alexis en la discusión con Kenya; este profesor, al principio, afirma que llevar problemas matemáticos contextualizados en el área económica no le supone más tiempo ni trabajo, sin embargo Kenya lo va haciendo cambiar de idea hasta que Alexis termina aceptando la posición de Kenya. Sin embargo, Alexis, en EF2 afirma que "*el material obliga al docente a estudiar más*" y en su caso particular, este profesor reconoce que "*los problemas que trabaja en el aula son muy básicos*".

Otro punto a destacar tiene que ver con los argumentos pormenorizados de Kenya en materia de planificación; tomando como pieza principal el material, en primer lugar ella identifica el tipo de esquema de enseñanza que proponemos en el material, posteriormente conecta las implicaciones que conlleva trabajar la EBP en el aula, pues entiende que es "*un proceso donde el alumno va a ser el protagonista*", eso "*implica una participación más activa del alumno*" y "*que debes adelantarte a lo que puede ocurrir en el aula*". Finalmente concluye que "*eso implica una mayor preparación de la clase y una mayor preparación para el profesor*".

Por otra parte, también es importante destacar la descripción que hace Elio de su práctica docente, ya que la misma ha de ser tomada en cuenta como elemento identificativo de cara a cualquier cambio en la labor docente de este profesor. En su participación, él reconoce que trabaja bajo el esquema de "*clases* *tradicionales"*, cuya estructura la identifica como: *"definición tal, teorema tal y diez ejercicios"*.

5.3.5. Segmento 5

En este último segmento seleccionado surgen cosas interesantes que sirven para cerrar esta parte del análisis. Aquí abordamos el tema del dominio de una función e intentamos profundizar en el tema de la *contextualización económica*, algo que, ya hemos repetido en un sin número de ocasiones, es uno de los pilares del instrumento. En esta oportunidad recurrimos a la tercera sesión del seminario, concretamente del microepisodio **B.3.1**[18] En esta parte retomamos la discusión realizada sobre el estudio del dominio en un doble contexto, el matemático y el económico; esta vez predomina en la discusión el conocimiento del contenido. Sin embargo, aflora el tema de los libros de texto de manera natural en esta parte del seminario.

> **[Moderador]**: Precisamente es un punto curioso que me gustaría discutir con ustedes, ya que tal como está planteada la función, ésta es derivable, pero si atendemos al dominio económico la función deja de serlo. Recordemos que si la función tiene saltos o es discontinua en un punto entonces no es derivable. ¿Qué pueden decir ustedes al respecto?
> **[Elio]**: Yo pienso entonces que sobra..., sobra, ya que ***la simulación que se hace gráficamente está dando más de lo que se necesita*** en todo caso...
> **[Moderador]**: ¿Podrías darme más detalles...?, es que me perdí un poco con lo que dijiste.
> **[Elio]**: Lo que quiero decir es que ***como el dominio matemático es más grande que el económico, entonces la simulación gráfica..., matemática aporta más información de la realidad económica del problema***.
> **[Moderador]**: ¿Y cómo resolverías esa situación frente a tus estudiantes?
> **[Elio]**: ***Es algo bastante difícil, sobre todo por el conocimiento matemático que tienen a este nivel***. Esto requiere un poco de abstracción, digo yo. ***No se me ocurre algo en este momento***...
> **[Kenya]**: Bueno, yo estoy de acuerdo con Elio, yo creo que al alumno, a cualquier alumno en general..., ***cuando se trabaja con el tema de funciones siempre hay que enfatizarle el tema del dominio***, debe ser una habilidad que ellos deben adquirir, por lo tanto no está de más que se le insista en esa situación, y más aún cuando se trata de trabajar problemas muy específicos del área de conocimiento, del área de la profesión de ellos. Enfatizarle que ***no es lo mismo una función económica que una función matemática***, que lo que persigue la función matemática es modelizar una situación o acercar una situación real a través de un modelo matemático. Entonces, yo creo que ***es importante establecer las diferencias entre una situación y otra***, para no complicar la consolidación de los conceptos que se abordan.
> **[Alexis]**: Ahora, una cuestión que me parece muy curiosa... ***En los libros que yo tengo,***

[18] Este segmento se encuentra en el **Apéndice B**, entre las páginas 535 y 537.

que he leído sobre aplicaciones, que son tres o cuatro, no recuerdo ahora, ellos no hacen hincapié sobre eso...
[Kenya]: No lo hacen, ***con los que yo trabajo tampoco***...
[Alexis]: Ellos ***no toman en cuenta el dominio así como tú lo haces***, eso de hablar de dos dominios, que ***también podría traer sus inconvenientes con los estudiantes***. Ellos dicen: *"tantas unidades producidas´´*, entonces uno sabe que la función está acotada superiormente, que tiene un tope, pero nunca detallan este hecho. Si uno se va al capítulo de funciones...
[Kenya]: ***No destacan ese hecho***...
[Alexis]: ***No hay esa sutileza de decir lo que se está diciendo aquí***...
[Kenya]: ***De destacar esa diferencia***...
[Moderador]: Entonces, este planteamiento que nosotros hacemos, eso de hacer énfasis en el dominio, ¿les parece conveniente, aún cuando los libros no lo consideren y los mismos programas oficiales tampoco lo contemplan?
[Alexis]: ***Claro que sí***, mira..., ***en las funciones polinómicas***, lo dice Elio, ***uno lo ve como una función matemática y el dominio es todo $\mathbb{R}$, en cambio en la parte de la aplicación ya tiene otro dominio***. ***Ahora es que caigo en cuenta y me pregunto: ¿por qué los libros no enfocan eso, no sé si tú tienes algún libro que trabaje eso?***
[Moderador]: No, al menos los libros que hemos revisado no consideran esta situación y es algo que, precisamente, nos llama la atención.
[Elio]: ***Lo que sí vi en algún libro***, no recuerdo el autor ahora, ***es el hecho de ver si es discreto o continuo el conjunto que se está considerando***...
[Moderador]: Muy bien, pasemos a la otra pregunta.

Comenzaremos por estudiar la reflexión que hace Elio sobre el dominio de una función y su relación con los contextos matemático y económico, el señalamiento que él hace sobre este concepto matemático tiende a ser ambiguo y, más aún, confuso, ya que no deja claro qué implicación tiene el estudio del dominio en el contexto económico o, en todo caso, no atiende a la pregunta formulada. De lo anterior podemos decir que el seminario también nos sirvió para determinar debilidades del profesor en materia del CDC y, en este caso particular, en lo que respecta al contenido disciplinar.

En otro orden de ideas, Kenya, a partir de los comentarios de Elio saca a colación la importancia del tema del dominio de una función como parte del aprendizaje que los estudiantes deben adquirir y entra en detalles como: lo relevante de estudiar funciones matemáticas que modelicen una situación económica. A lo anterior añade "*que es importante establecer la diferencia entre una situación y otra*", refiriéndose a los contextos matemático y económico que se estudian mediante una misma función. Esto muestra el conocimiento que esta profesora posee en aspectos tanto de enseñanza como de aprendizaje asociados al trabajo de problemas contextualizados en el aula.

Ya para finalizar el análisis de este segmento, nos remitimos al intercambio de opiniones entre Alexis y Kenya sobre el estudio del dominio de una función en el contexto económico ya que ambos advierten que en los libros de texto que ellos trabajan no toman en cuenta este aspecto del dominio; Alexis precisa: "*no hay esa sutileza de decir lo que se está diciendo aquí*" y termina cuestionando los libros: "*por qué los libros no enfocan eso*". Todo esto nos anima a entender el seminario como una actividad de reflexión sobre la práctica que implica una formación permanente, de modo que se pueda discutir sobre este tipo de detalles que surgiera entre Alexis y Kenya.

5.3.6. Recapitulando sobre los cinco segmentos

Haciendo un resumen en retrospectiva de los cinco segmentos analizados anteriormente y en el que incluimos parte de la entrevista final con cada uno de los participantes, podemos resaltar algunos aspectos que contribuyen ampliamente a nuestro trabajo, entre ellos destacamos:

(A) El seminario como actividad de formación profesional, lo entendemos como una clara necesidad, sobre todo en materia de contenido disciplinar económico y también matemático; y, sobre este último, en aquellos conceptos que guardan estrecha relación con el contenido económico como es el caso del dominio de una función, las distintas interpretaciones de la derivada y la regla de la cadena, entre otros. De hecho, quedó evidenciado en el análisis del Segmento 3 cuando Manuel sostiene "*estoy aprendiendo algo nuevo con este problema*", la importancia del seminario como modelo de formación y desarrollo profesional, lo cual resulta necesario para el docente. Ya lo dice Marín (2006, p. 184), "*no se puede negar la necesidad de actualizar, reconvertir y adquirir nuevos saberes*".

(B) El seminario como espacio de interacción entre profesionales de la enseñanza en el que se comparten ideas, metodologías, estrategias, concepciones, creencias sobre el complejo campo de la enseñanza de las matemáticas. Todo esto aunado a lo expresado en el ítem A de esta sección nos hace inferir que el seminario de discusión es un espacio inductor del "cambio" en materia de enseñanza de las matemáticas. Entendiendo este "cambio" como un proceso derivado de la reflexión y la innovación hacia metodologías que favorecen el aprendizaje o que se adecúan a carreras universitarias eminentemente prácticas.

(C) Si bien destacamos el seminario como espacio de formación y de discusión entre los participantes, no podemos dejar a un lado las reflexiones llevadas a cabo sobre su propia práctica docente, tomando como punto de partida el material discutido. Estas reflexiones mostraron los distintos puntos de vista de los profesores participantes en los distintos aspectos que conforman el CDC trabajados en este proyecto. Un punto relevante en este ítem es la falta de unificación de criterios en cuanto al contenido disciplinar que se lleva al aula o a la visión de la derivada como objeto matemático. Vale la pena destacar que García Fernández (2006) desarrolla todo un conjunto de elementos sobre todo lo que implica en la actividad docente el proceso de reflexión del profesorado universitario, y nosotros, hacemos especial énfasis en este tema por sus implicaciones en la formación del profesor.

(D) Hasta ahora hemos hablado de la importancia del seminario; no obstante, el instrumento diseñando para poner en práctica esta actividad y al que nos hemos referido como *el material* jugó un papel fundamental en el desarrollo de este trabajo; es por ello que la valoración del material resulta clave. En este sentido resaltamos:

(D.1) El esquema presentado para el estudio de la regla de la cadena resulta innovador y fue motivo de observaciones y reconocimiento a lo largo de la recolección de datos.

(D.2) Los problemas en los que estudiamos el dominio de una función resultaron factores claves de discusión por la relación entre el contenido disciplinar económico y el matemático.

(D.3) La estructura presentada en los problemas del material también mereció la observación de algunos de los participantes, en el caso de intentar poner en práctica el mismo, al opinar que podría causar algún tipo de inconveniente en el estudiante, ya que el esquema es contrario a la actual forma de trabajo de estos profesores.

(E) No podemos cerrar este resumen sin comentar el papel del moderador, quien realizaba este trabajo por primera vez. No solo la función de director de debate sino el poder mediar y controlar a unos profesores que también son compañeros de trabajo, facilitaba y, al mismo tiempo, dificultaba su cometido, pues muchas veces el participante se limitaba a decir frases como: *tú sabes a lo que me refiero* o, peor aún, guardaban silencio y, en consecuencia, el moderador tenía que imaginarse el resto del comentario. Por otro lado, buscar el equilibrio en la participación de cada uno de los profesores también resultó una tarea exigente, ya que puede darse el caso de que existan participantes más o menos extrovertidos, o introvertidos, que otros.

Capítulo 6

Conclusiones y Resultados Finales

Introducción

A continuación presentamos las conclusiones de este estudio como fruto del análisis de datos y de los resultados obtenidos en el mismo. Esta parte de la memoria está estructurada en tres bloques, los cuales están organizados de la siguiente manera:

- Conclusiones metodológicas
- Conclusiones didácticas
- Líneas abiertas de investigación

En este orden de ideas, estructuramos las conclusiones según se deriven de los objetivos didácticos propuestos y de los objetivos metodológicos enunciados en el **Capítulo 1**. Así mismo, dedicamos la última parte de este capítulo a reflexionar sobre el estudio en su conjunto en el que incluimos algunas ideas de cara a futuros trabajos afines a este proyecto; de igual manera, mencionamos algunas cuestiones o problemas que quedan abiertos y que proponemos para desarrollos futuros.

6.1. Conclusiones metodológicas

Las conclusiones que presentaremos en este apartado son aquellas que emergieron como resultado de la metodología empleada en este proyecto; en tal sentido, nos remitiremos a los instrumentos de recogida de datos (**OM1**: *"Evaluar la validez de los instrumentos de recogida de datos en investigaciones* *cualitativas sobre el conocimiento del profesor*"). Así, las conclusiones relacionadas con **OM1** se obtuvieron de los **Apartados 4.1**, **4.2**, **4.3**, **4.4**, **5.1** y **5.2**. Por otra parte y como un elemento particular del objetivo anterior, mostramos las conclusiones derivadas del espacio generado para la aplicación del instrumento (**OM2**: "*Evaluar el seminario, esta vez no como instrumento de recogida de datos, sino como espacio de trabajo y discusión por el valor formativo que pueda tener esta metodología de trabajo en aspectos como el desarrollo profesional del profesor de universidad*"); en este caso, las conclusiones provienen, en esencia, del **Apartado 5.3** aunque también, pero en menor profundidad, recurrimos a los apartados señalados antes.

Por último, cerramos este apartado con las conclusiones más relevantes que arrojaron el instrumento de análisis, cumpliendo de esta manera con los objetivos planteados en **OM3**, es decir, "*contribuir a la comunidad científica del área mediante el instrumento de análisis de datos y resaltar los elementos más importantes en materia de análisis*". Aun cuando este último objetivo quedó expresamente cumplido en los **Capítulos 4** y **5**, expondremos al final de este apartado aspectos relevantes como la identificación, organización de los datos, así como aquellos elementos que resultaron significativos en el análisis del seminario como espacio de formación y discusión.

Observación: En este apartado habría que incluir también las conclusiones relacionadas con la EBP como estrategia de recogida de datos; sin embargo, como en el final del siguiente apartado hablaremos de las conclusiones de tipo didáctico vinculadas a la EBP, hemos decidido reservar este mismo espacio para mostrar las conclusiones de tipo metodológico que arrojaron la EBP en este trabajo.

Para comenzar damos un salto hacia atrás en esta memoria en donde hablamos de los aportes personales en materia metodológica; por una parte, señalamos la adecuación del seminario **como espacio para la recolección de datos y como entorno ideal para la formación permanente y desarrollo profesional del profesor de matemáticas de universidad**; estas dos facetas del seminario forman parte de las novedades de esta investigación. Por otro lado, señalamos también **el papel que jugó el instrumento diseñado, el cual quedó expresamente identificado como *propuesta didáctica teórica*, aunque algunas veces lo llamamos simplemente *el material***. La conjugación de estos dos elementos nos condujeron a las siguientes conclusiones.

6.1.1. Sobre el seminario

Recordemos que la característica principal que le quisimos dar al seminario fue la de espacio de discusión y reflexión; pero, no obstante, también este espacio lo procuramos destacar como medio de recogida de datos, en este sentido, presentamos algunas conclusiones relacionadas con ambos enfoques.

En una investigación de esta naturaleza se debe tomar en cuenta que un instrumento en sí mismo no tiene vida propia, por lo que el medio o la situación que se elige para aplicarlo le debe ser afín al instrumento. No diremos que el seminario de discusión es el mejor espacio para la aplicación de un instrumento, pero sí seremos enfáticos en afirmar que **es un espacio idóneo, el cual permite la flexibilidad y ajustarse a situaciones diversas** entre el moderador y los participantes. En el caso que nos ocupa, nuestro seminario se caracterizó por ser:

(i) Un **espacio interdisciplinario** que conecta las matemáticas y la economía.

(ii) Un **espacio de discusión entre pares**. Permitiéndonos además:

(iii) Obtener información de carácter individual y grupal sobre aspectos concretos del CDC.

(iv) Aproximarnos a una caracterización de los aspectos más relevantes de la actividad matemática que los profesores participantes llevan al aula de clases.

Tales hechos nos permitieron abordar, entre otros, dos de los aspectos fundamentales como objeto de estudio de esta investigación:

(A) La **EBP como metodología alternativa de enseñanza y de recogida de datos**.

(B) El **CDC del profesor de matemáticas de universidad** como objeto central de estudio.

Desarrollemos estos dos puntos. Con relación al punto **(A)** tenemos que señalar lo siguiente: en las **Subsecciones 6.2.2.1** y **6.2.2.2** que abordaremos más adelante hablaremos de forma detallada sobre la EBP; sin embargo, presentamos cuatro conclusiones que vinculan el seminario y la EBP, estas son:

S1 El seminario resultó un excelente medio para implementar **la EBP como metodología de recogida de datos**, el cual **nos ha proporcionado información imposible de obtener en otros contextos de trabajo**.

S2 Mediante esta dinámica de discusión salió a relucir el tema de **la evaluación**, aunque no es objeto de estudio en este trabajo. De manera concreta, **nuestra propuesta didáctica supone para los participantes un <u>cambio</u> en el modelo y forma de evaluación, lo que al mismo tiempo se revela como una limitación, dado que no sabrían, en general, como abordarla para que sea coherente con la propuesta de enseñanza**.

S3 Un elemento más que conecta el seminario y la EBP tiene que ver con **la modalidad de discusión de cada problema**. Aquí resaltamos:

S3.1 **La descomposición de cada uno de los problemas discutidos en forma de microepisodios**. Este hecho permitió la obtención de datos de forma detallada y precisa.

S3.2 El que **las preguntas fueran realizadas de forma indirecta** posibilitó un ambiente distendido entre los participantes, puesto que nunca se observó que se sintiesen evaluados o cuestionados.

En resumen, **entendemos el material como un conjunto de situaciones problemáticas ricas**, *interesantes en cuanto a su aplicabilidad* y **apoyadas por preguntas para la reflexión** (microepisodios), **capaces de guiar el proceso de discusión** durante el seminario.

Con relación al punto **(B)** resaltamos lo siguiente:

S4 El seminario favoreció la retroalimentación entre los participantes:

S4.1 Entre los mismos participantes se acordó **generar mesas de trabajo mixtas (profesores de matemáticas-profesores de economía)** con el objetivo de:

- **Identificar necesidades** formativas reales de los estudiantes.
- **Redefinir los objetivos** específicos de los cursos de cálculo para las carreras objeto de este estudio.

S4.2 Otro punto a destacar es que el seminario **sirvió para detectar aspectos concretos del CDC de los profesores de matemáticas de universidad**, quedando de manifiesto que desconocen:

- **Interpretaciones económicas de la derivada**.
- **Estrategias alternativas de enseñanza** que favorezcan la vinculación entre las matemáticas y la economía, como por ejemplo la EBP, desconocida por todos salvo Kenya.
- **Características y requerimientos del perfil del futuro profesional de la economía**.

Lo que les conduce a pedir/ser conscientes de **la necesidad de talleres de formación permanente y de desarrollo profesional para el profesorado de matemáticas**, no sólo por el contenido económico en particular, sino en materia de diseño y gestión del trabajo en el aula.

S5 Con la implementación del seminario, **destacamos dos elementos de carácter innovador en el campo de la investigación cualitativa en didáctica de las matemáticas** a nivel universitario:

S5.1 Este espacio permitió la participación colectiva, *in situ*, del profesor de matemáticas **para modificar o complementar el material discutido**, proporcionándonos datos relevantes relacionados con el conocimiento del contenido matemático-económico.

S5.2 Por otra parte, valoramos el seminario como **espacio propicio para que los participantes reconstruyeran y reflexionaran sobre su propio conocimiento** respecto a la labor que ellos desempeñan en el aula. Todo lo aquí expresado sobre el proceso de reflexión del profesor de universidad cobra vida con lo expresado por Marín (2004).

Finalizamos las conclusiones con algunas **debilidades que significó el seminario** como metodología de recogida de datos, entre las que podemos destacar las siguientes:

- El seminario **produjo una excesiva cantidad de información** que, en algunos momentos, resultó difícil de organizar y manipular; en determinados momentos, la extensa participación de algún profesor acababa por desviar el punto de discusión sobre el resto del grupo.

- En momentos puntuales la participación simultánea de dos o más profesores **dificultó la transcripción y posterior organización de los datos**; sin embargo, **la oportuna intervención del moderador permitió matizar y minimizar estás situaciones** al igual que la señalada en el ítem anterior.

6.1.2. Sobre los cuestionarios

En primer lugar tenemos que recordar que los cuestionarios se aplicaron al final de cada una de las sesiones del seminario. Estos cuestionarios estaban directamente relacionados con las sesiones, los profesores los respondían en sus casas y los entregaban al inicio de la siguiente sesión. Entre la conclusiones metodológicas como aportes de este instrumento destacamos las siguientes:

C1 Permitió **complementar la información del seminario ayudando así al proceso de triangulación** de la información en aspectos específicos del CDC como:

- **Introducción al concepto de derivada y de la regla de la cadena**, como parte del conocimiento sobre la enseñanza.
- **Actitud del estudiante frente a situaciones matemáticas concretas** como parte del conocimiento sobre el aprendizaje.

6.1.3. Sobre la entrevista

De la entrevista que le realizamos a cada uno de los profesores después de la última sesión del seminario y al igual que los cuestionarios, fueron:

E1 Un **excelente instrumento para ampliar** el conjunto de datos y así **contribuir al proceso de triangulación**.

E2 Un **instrumento extraordinario para que los participantes reflexionaran** sobre el seminario, sobre el material y sobre su propio conocimiento disciplinar.

6.1.4. Sobre el análisis

Los instrumentos de análisis aquí utilizados nos permitieron, en primer lugar, estructurar la gran cantidad de datos que arrojaron la aplicación de los distintos instrumentos de recogida de datos y, en segundo término, facilitar la manipulación de los mismos, evitando esquemas tediosos y que obligan a repetir la información.

Por otra parte, hay que tomar en cuenta que los datos provenientes, concretamente del seminario, se analizaron de dos maneras distintas atendiendo a objetivos diferentes; en el primero, se estudiaron el CDC y la EBP del profesor de matemáticas; en el otro caso, analizamos el seminario como espacio de discusión, reflexión y formación profesional. Así, presentamos las conclusiones más relevantes en cuanto al instrumento de análisis, aunque la conclusión general principal que debemos resaltar en esta materia quedó plasmada en los **Capítulos 4** y **5**, es decir, **lo valioso que resultó este instrumento para analizar el conjunto de datos y poder cubrir de forma amplia nuestros objetivos planteados**. Sin embargo, no podemos obviar las dificultades que supuso el análisis de datos de cara a poder articular y organizar la cantidad de información recogida y al modo de transformar la información en datos útiles para el análisis. Entre las dificultades destacamos:

1. Gran cantidad de datos del seminario, de los cuestionarios y de las entrevistas, lo cual complicó la organización de la información.

2. Desequilibrio y heterogeneidad de la información obtenida de cualquiera de los instrumentos, lo que justificó un análisis micro y macro de los datos.

3. Pérdida de información cuando algún profesor escondía o camuflaba sus opiniones con las de sus compañeros, aunque más bien entendemos que se trata de desconocimiento o pocas ganas de manifestarse.

Recordemos que nuestro análisis se caracterizó por:

- Enmarcarse en el **análisis documental de contenido**, específicamente en el **análisis relacional**.
- Basarse en un modelo **descriptivo**, **interpretativo** y **exploratorio**.
- La **recursividad** como metodología de análisis.

Más allá de la metodología empleada, hemos incorporado:

- Los **árboles** para facilitar la reducción y organización de la información.
- Las **tablas de doble entrada** para obtener los resultados una vez depurada y reducida toda la información.

Por otro lado, para el **análisis del seminario** como espacio de discusión, reflexión y formación profesional, utilizamos también el **análisis relacional de contenido**, pero en este caso **elegimos segmentos del seminario**, los cuales fueron complementados con datos provenientes de los otros dos instrumentos.

A1 Metodológicamente, los **árboles** tienen una gran importancia e interés en el análisis porque:

  - Favorecen **la interconexión** entre los distintos episodios y entre los participantes.
  - Favorecen el **proceso recursivo** de análisis, puesto que estos árboles contenían la información discriminada según nuestros intereses en el estudio.
  - Ayudan a la **síntesis los datos** suministrados por los participantes, **sin llegarse a perder la esencia del contenido original de los datos**.
  - Permiten **pasar con facilidad de las palabras del informante a las del investigador**.
  - Permitir **la identificación** de las diferentes componentes del CDC.

A2 Por su parte, **las tablas de doble entrada**, a parte de ser un instrumento de reducción de datos, nos permitieron:

  - **Representar los resultados** del análisis sobre el CDC.
  - **Ilustrar** de forma detallada el perfil de los participantes.
  - **Interconectar** cada una de las componentes del CDC.

A3 Finalmente, **los segmentos** de esta actividad acabó siendo la metodología más sencilla y precisa para profundizar en el seminario como espacio de discusión, reflexión y formación profesional.

6.2. Conclusiones didácticas

Las conclusiones que presentamos a continuación están directamente relacionadas con los objetivos del mismo nombre que presentamos en el **Capítulo 1** Estas conclusiones las hemos clasificado en dos tipos:

(1) Respecto al CDC del profesor de matemáticas de universidad, y

(2) Respecto a la EBP como metodología de enseñanza, aunque también incluimos en esta parte las conclusiones respecto a la EBP como estrategia metodológica de recogida de datos, a fin de reservar un único espacio para la EBP.

Sin embargo, conviene recordar los objetivos didácticos que originalmente nos planteamos en este proyecto.

En primer lugar, nosotros nos planteamos aproximarnos al perfil del profesor participante en el marco del CDC (**OD1**: "*Analizar el CDC de cada profesor a través de una propuesta curricular y a partir de este análisis, determinar el perfil de cada profesor e intentar determinar la existencia de un perfil común entre los participantes*"); también buscamos estudiar al estudiante desde la visión del profesor, esto es, (**OD2**: "*Detectar hasta qué punto el profesor es consciente de las dificultades específicas de los estudiantes para abordar un determinado tema matemático y la relación de éste con el contexto económico*"). Un tercer punto que nos planteamos en este estudio y que forma parte de la columna vertebral del mismo queda reflejado en **OD3**, el cual consiste en "*estudiar el conocimiento disciplinar de los profesores participantes sobre el cálculo diferencial en las ciencias económicas, así como las estrategias que siguen para la enseñanza del mismo*".

En otro orden de ideas, también nos propusimos estudiar y profundizar en la EBP mediante los objetivos **OD4** y **OD6**; por una parte, "*estudiar el papel del profesor frente a propuestas metodológicas alternativas para la enseñanza de las matemáticas*" y, por otra, "*intentar aportar caracterizaciones de la EBP y sus diferencias con la R-P, vista la primera como estrategia de enseñanza que busca estudiar una teoría a partir de problemas planteados en el aula*", respectivamente. De igual manera, con el CDC nos planteamos algo similar a lo indicado en el **OD6** con la EBP, en el caso del CDC nos planteamos alcanzar algunos aportes en el marco de la didáctica de las matemáticas para cursos de cálculo en carreras de ciencias económicas, es por ello que recordamos el objetivo **OD5**: "*estudiar y profundizar en el CDC y, a partir de éste, aportar caracterizaciones del CDC en materia de las didácticas específicas*".

Finalmente, los dos últimos objetivos didácticos que nos propusimos alcanzar mediante la realización de este proyecto están vinculados directamente al material discutido; por una parte, estudiar la incidencia del material en el profesor participante, es decir, "*determinar la permeabilidad o algún cambio en los participantes a lo largo del seminario*" (**OD7**) y, por otra, el estudio del material *per se* a través del **OD8**: "*validar el material discutido en el seminario de cara a su posible implementación en los cursos de cálculo diferencial de la Universidad de Los Andes, en las carreras de ciencias económicas*".

Observación: En esta parte de las conclusiones hacemos mención a diversos conceptos que son propios del área económica, en tal sentido y a fin de hacer resaltar los mismos, los hemos subrayados.

6.2.1. Conclusiones respecto al CDC

Con tal de ilustrar los resultados de manera más precisa hemos decidido exponer las conclusiones de acuerdo a las diferentes componentes que conforman el CDC:

- Enseñanza
- Aprendizaje
- Contenido curricular
- Contenido disciplinar

Aunque hay que recordar que en el capítulo anterior ya presentamos, de forma detallada, resultados amplios sobre el CDC de los profesores participantes.

6.2.1.1. Respecto a la enseñanza

Las conclusiones que a continuación mostramos son el resultado del análisis realizado en materia de conocimiento del profesor de matemáticas sobre la enseñanza, destacando los elementos que ellos toman en cuenta para abordar sus clases de matemáticas a estudiantes de ciencias económicas.

ENS1 Algunos profesores manejan un conocimiento muy rígido y clásico de la derivada, lo que hace que prefieran **la aproximación físico-matemática** (velocidad instantánea) **a la aproximación geométrica** (pendiente de la recta tangente a la curva), **evitando la economía como enfoque alternativo de enseñanza**. Sin embargo, muestran cierta inclinación hacia el cambio de contenido disciplinar para la enseñanza de las matemáticas. Esta situación también se observó en García (2004).

ENS2 El papel que juega el **rigor matemático en la enseñanza es dual**, y las opiniones se reparten entre el **formalismo** y el **instrumentalismo**, en ambos casos muy condicionado por la formación y el ámbito de investigación en el que desarrollan su actividad los participantes, en este sentido señalamos lo siguiente:

ENS2.1 Dos de los participantes asumen **una concepción formalista de las matemáticas, lo que les lleva a concederle mucha importancia en su práctica docente**.

ENS2.2 Tres profesores asumen **una visión más instrumentalista y/o aplicada de las matemáticas, lo que les hace ser más flexibles y menos exigentes en su práctica docente**.

ENS3 Respecto al uso de **problemas contextualizados en la economía**, concluimos lo siguiente:

- **Todos los profesores los entienden como problemas de aplicaciones** y por tanto los **reservan para la parte final del tema**.
- Para algunos también se convierten en un **elemento de motivación**.
- **Utilización limitada y restringida** de estos problemas **debido al deficiente conocimiento disciplinar**.
- **Clara desconexión con los resultados esperables de aprendizaje** en el futuro profesional de la economía debido a la **inexistencia de relación entre el conocimiento disciplinar y el conocimiento de la enseñanza**.

En general, la visión que tienen de este tipo de problemas obedece tanto a su **formación matemática como a la influencia de los libros de texto utilizados por los profesores**.

ENS4 La utilización de los **libros de texto como herramienta casi exclusiva para la planificación evidencia muchas limitaciones en el proceso de enseñanza** tanto en el basado en problemas, como en el que intenta desarrollar las competencias matemáticas. Así, no permitimos mostrar dos situaciones significativas que lo corroboran:

ENS4.1 **No tomar en cuenta las restricciones del dominio impide considerar casos particulares** de problemas específicos de las ciencias económicas (como los discutidos en los episodios **EP2-1** y **EP3-1**).

ENS4.2 **La enseñanza tradicional de la regla de la cadena impide trabajar con total profundidad las diversas interpretaciones de ésta en la economía**, desaprovechando dichas herramienta en el futuro campo profesional.

A modo de resumen sobre las tres últimas conclusiones y el conocimiento del profesor asociado a la implementación de problemas contextualizados en la enseñanza de las matemáticas, Lange (1996) justifica el uso de estos problemas, (que por cierto llama indistintamente "*problemas de aplicaciones*"), basándose principalmente en cuatro aspectos:

(i) Facilitan al estudiante el aprendizaje de las matemáticas.

(ii) Estimulan el desarrollo de las competencias en los estudiantes.

(iii) Permiten el desarrollo de las competencias y actitudes de los estudiantes vinculadas a la resolución de problemas.

(iv) Permiten a los estudiantes ver la utilidad de las matemáticas para resolver problemas tanto de la vida diaria como de otras áreas afines a las matemáticas.

Lo que quiere decir, es que **nuestros profesores aprovechan poco el potencial que significa la implementación de problemas contextualizados en clases de matemáticas para futuros economistas**.

6.2.1.2. Respecto al aprendizaje

En general, todos los profesores, aunque con sus ligeros matices, dan muestras de conocer a sus estudiantes sobre aspectos concretos como la *actitud*, las *dificultades* y los *conocimientos previos* necesarios para abordar un concepto matemático. Nosotros llegamos a algunas conclusiones sobre el conocimiento que tienen estos profesores respecto a sus estudiantes y cómo influye el mismo en el proceso de enseñanza-aprendizaje.

APR1 En atención a **la actitud de los estudiantes respecto a los problemas contextualizados en economía**, surgieron opiniones encontradas sobre este tipo de problemas:

- **Aceptación y exigencia** (Ramón y Manuel).
- **Rechazo** (Alexis, Kenya y Elio).

Aunque Alexis mantuvo firmemente que sus estudiantes **rechazan los problemas económicos**, más adelante, como producto de los análisis recurrente y relacional, pudimos apreciar que **este profesor trabaja pocos problemas del contexto económico en sus clases debido a su visión y posición respecto a las matemáticas**. Estos dos elementos él los conjuga para la planificación de sus clases o, por el contrario, acepta de entrada el rechazo del estudiante hacia el contexto económico debido a la visión purista de las matemáticas que manifiesta el profesor. **Aquí se plantean dos visiones diferentes de las matemáticas**:

- **Una aplicada**, ligada al trabajo con problemas y
- **Otra más clásica/purista**, en la que los problemas son meros ejemplos.

APR2 En lo que respecta al estudio de **la actitud del estudiante frente al contexto no-económico** (desde la visión del profesor); **todos reconocen que sus estudiantes rechazan este tipo de problemas**. Aun así, observamos que **tal rechazo no es tomado en cuenta por tres de los participantes**.

APR3 Las creencias del profesor sobre *la formación y el conocimiento del estudiante* para abordar determinados temas son contradictorias:

- Ramón y Manuel afirman que sus alumnos **tienen formación para trabajar con el material discutido**,
- Kenya, Alexis y Elio advierten que sus estudiante **no están preparados**.

En ninguno de los casos, **ambos grupos de docentes ajustan su planificación de acuerdo al conocimiento previo del estudiante y a la posición de éstos frente a determinado tipo de problemas**.

APR4 Todos los profesores muestran un profundo conocimiento sobre las *dificultades* y *actitudes* que presentan sus estudiantes en los cursos de cálculo diferencial; sin embargo, si nos centramos en Kenya, Alexis y Elio, podemos apreciar que estos elementos **son poco tomados en cuenta para estudiar estrategias metodológicas alternativas de enseñanza, a fin de involucrar al estudiante en problemas vinculados a su futura profesión**. Aquí se ponen de manifiesto lo siguiente: estos docentes, valiéndose de su condición de protagonistas del proceso de enseñanza-aprendizaje, donde siguen un estilo de clase unidireccional (Zabalza, 2003) **no procuran romper la barrera de la contextualización**, **elemento que resulta fundamental si queremos apostar por una enseñanza de las matemáticas basada en problemas**.

6.2.1.3. Respecto al currículo

Las conclusiones relacionadas con el conocimiento curricular son, precisamente, aquellas derivadas de las reflexiones realizadas sobre el material o, más concretamente, aquellas que surgieron como resultado del *análisis crítico* al instrumento discutido. Sin embargo, conviene recordar que nuestro material se caracterizó por tener una estructura eminentemente práctica y contextualizada en las ciencias económicas, esto exige al profesor tener un conocimiento disciplinar económico básico a la hora de analizar o hacer observaciones al material. He aquí las más relevantes de estas conclusiones:

CURR1 Las reflexiones sobre el contenido económico en relación al material están claramente diferenciadas entre nuestros participantes; ello refleja, de alguna manera, el conocimiento de estos profesores respecto al contenido en cuestión. Por una parte, tenemos un profesor que se adentró en el material, mientras que el resto se quedó en un análisis somero del material.

CURR1.1 Ramón[1] fue el único profesor que profundizó en el material sobre el contenido económico, de él destacamos lo siguiente:

- Observó que nuestra propuesta "*prepara al estudiante para el curso de* ***microeconomía***".
- En otras ocasiones señaló que **el material sirve para estudiar otros conceptos económicos distintos de los que usualmente aparecen en los libros de texto** que recomiendan los programas oficiales, en concreto, el **impuesto marginal**.
- Fue más allá de nuestra propuesta al discutir con Manuel sobre el **excedente del consumidor**, aunque aquí no se extendió.

CURR1.2 El resto de los participantes, en este sentido, manejan un análisis superficial del material o casi nulo, lo cual **evidencia la necesidad de un conocimiento profundo que va más allá del conocimiento matemático *per se*, además de una formación profesional permanente en el área matemático-económica**; por supuesto, **siempre y cuando se apueste por una enseñanza de las matemáticas contextualizada en el área de economía**.

CURR2 Hemos mencionado en repetidas oportunidades que una de las características de nuestra propuesta es el carácter innovador que procuramos incluir en la misma, en temas relacionados como la introducción a la derivada, el estudio del dominio de una función o la introducción a la regla de la cadena, entre otros. Si tomamos el dominio como objeto de discusión, **observamos que el análisis o las opiniones expresadas por los profesores resultan muy pobres en cuanto al plano didáctico se refiere**; al respecto destacamos lo siguiente:

- Sus reflexiones sobre **el alcance didáctico de trabajar el dominio en un contexto dual no es analizado en detalle**.
- **Reconocen ventajas didácticas para el estudiante** en el estudio de este concepto.

[1]El otro profesor que mostró un conocimiento disciplinar económico profundo fue Pedro. En la primera sesión del seminario este profesor se mostró crítico, sugirió modificaciones significativas y habló de distintos conceptos económicos no tan básicos como: *elasticidad de la demanda* o *propensión marginal al ahorro*. Sin embargo, recordemos que este profesor no continuó participando por problemas personales.

- **El conocimiento que ellos manejan sobre el dominio económico les limita una discusión profunda sobre posibles ventajas y desventajas para el estudiante**.

CURR3 El desconocimiento de conceptos propios de la economía y su relación con determinados conceptos matemáticos incide en que la discusión se torne superficial. Aquí, **todos los participantes, salvo Pedro**[2], **entienden la derivada del *costo* como el *costo marginal*[3], cuando que lo relevante o significativo para el estudiante es profundizar en la idea de que el costo marginal evaluado en una cantidad q_0 es el costo de producir el artículo $q_0 + 1$** y **estudiar**, además, **lo que ocurre alrededor de q_o**.

La conclusión anterior está en franca concordancia con lo sostenido por Rico (1998): "*El profesor de matemáticas necesita conocimientos sólidos sobre los fundamentos teóricos del currículo y sobre los principios para el diseño, desarrollo y evaluación de unidades didácticas de matemáticas.* ***Cuando los profesores no tienen una formación teórica adecuada ven limitadas sus funciones a las de meros ejecutores de un campo de decisiones cuya coherencia y lógica no dominan y no entienden*** (el resaltado es nuestro)". Ante tal situación, poco sentido tiene hablar del *currículo interdisciplinar* al que se refieren Hargreaves *et al.* (2001).

CURR4 Ahora bien, no sólo el conocimiento disciplinar es el único elemento a ser tomado en cuenta para el análisis crítico de materiales didácticos. El conocimiento sobre la enseñanza y todo lo que ello conlleva también resulta un elemento fundamental para estudiar y reflexionar sobre un material de esta naturaleza y su posible implementación. Es por ello que consideramos oportuno recordar algunas de las características de nuestra propuesta:

1. El material **está pensado para ser aplicado mediante la EBP** como estrategia de enseñanza.
2. **Se construye un concepto matemático a partir** de un problema que involucre **un concepto económico**.
3. Se estudia un concepto matemático en **un escenario dual** con el área económica.
4. Se propone **el estudio de las dos notaciones clásicas de la derivada** a fin de discernir cuál es más apropiada en el campo de la economía.
5. **Estudiar las restricciones que impone la economía** en el estudio de modelos matemático-económicos.

[2]Insistimos que sólo participó en la primera sesión.
[3]Lo mismo vale para las funciones de *Ingreso*, *Beneficio*, entre otras.

Ahora bien, pasamos a comentar aquellas que fueron detectadas por los profesores y las que obviaron, manteniéndose una clara coherencia con los resultados de los otros componentes del CDC. En este sentido, destacamos:

A **Kenya fue la única en reconocer la estructura metodológica del material**; los otros participantes ni siquiera se aproximaron a ésta en sus diversas reflexiones. Aunque debemos recordar que esta profesora tiene formación en el área de pedagogía.

B Respecto a la capacidad del profesor de matemáticas de modificar o reestructurar el material estudiado, **el aporte de los participantes fue escaso, limitándose a sugerir modificaciones de forma más no de fondo**.

- Kenya y Ramón sugieren un **cambio en la notación de la derivada** en uno de los problemas de la regla de la cadena, ellos recomiendan trabajar con la notación de Newton porque se le facilita más al estudiante.
- Ninguno advierte **lo importante que pueda resultar una notación u otra** para el estudio de problemas económicos.

C Respecto al **cambio de contexto** en alguno de los problemas como parte del contenido curricular, concluimos que:

- Todos recomiendan **descartar el problema del episodio EP1-1** o trabajarlo en el contexto económico.
- Ninguno sugiere o propone trabajar un concepto económico concreto, a excepción de Ramón como ya lo señalamos en **CURR1.1**.

D Un hecho que queremos resaltar y que ya mencionamos en **CURR2**, tiene que ver con el estudio del dominio económico de la función de *Costo* en el episodio **EP2-1**. Recordemos que el **dominio matemático** de esta función es todo el conjunto de los números reales, $\mathbb{R}$, pero el **dominio económico** es el conjunto $\{x \in \mathbb{N}_0 : \frac{x}{1000}\}$ con $\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, 3, ...\}$. Podemos observar que en el dominio económico influyen dos aspectos: (**i**) el hecho de que la menor cantidad de artículos que puede producir la empresa es cero artículos y, (**ii**) que la variable independiente, x, está expresada en unidades de mil.

- **Para ninguno de los participantes esto resultó significativo y la discusión sólo se quedó en la novedad del problema**, "*primera vez que veo un problema así*" fue la frase común al respecto, evidenciándose una falta de conocimiento en materia curricular.
- **El punto anterior**, además de guardar estrecha relación con lo señalado en **CURR2**, **también es coherente con lo expresado en ENS4.1** en materia de conocimiento sobre la enseñanza.

6.2.1.4. Respecto al conocimiento disciplinar

A continuación presentamos las conclusiones más relevantes en materia de **conocimiento disciplinar**; es claro que en un trabajo de esta naturaleza, el cual está enmarcado en la didáctica de las matemáticas, se tienen que presentar resultados y conclusiones inmersos en esta área. Sin embargo, el trabajo nos obliga a presentar unas conclusiones sobre el conocimiento disciplinar matemático-económico, puesto que ambas áreas fueron tratadas de forma simultánea o mejor dicho, como lo identificamos a lo largo del trabajo, de **forma dual**, lo que además representa una particularidad de este proyecto.

DIS1 A la hora de discutir el material durante el seminario y tomando en cuenta las opiniones de la entrevista final de cada uno de los participantes, pudimos observar que el conocimiento disciplinar económico que manejan estos profesores no es precisamente el conocimiento disciplinar que señalamos en nuestro marco teórico, como conocimiento ideal del profesor de matemáticas para cursos de economía; en este sentido, mostramos dos puntos relevantes:

- **Los conceptos económicos que nuestros profesores dominan son: ingreso, costo y utilidad o beneficio**; sólo Ramón **se desmarca de forma singular en situaciones puntuales como ya lo señaláramos en ENS4.1**.
- Por su parte, Elio **manifiesta abiertamente a lo largo del seminario su poco o nulo conocimiento en economía y además demanda la creación de espacios de formación en este ámbito**. Algo de esto ya lo señalamos en la conclusión **ENS4** y lo recordamos acá por la relación entre los conocimientos disciplinar y sobre la enseñanza. Ahora bien, ¿en qué influye ésto? **Un conocimiento disciplinar económico[4] amplio y profundo permite una enseñanza contextualizada de mayor alcance para los estudiantes**. Además, un limitado conocimiento disciplinar económico no permite la adquisición de ideas de varias disciplinas simultáneamente como lo señalan Lee & Bae (2008).

DIS2 Sobre el conocimiento disciplinar de los conceptos económicos reflejado en el ítem anterior, vale la pena recordar que en nuestro marco teórico (pág. 51) señalamos algunos de los conceptos económicos más importantes que **el profesor de matemáticas debe conocer y tener presente, además de la relación entre éstos y sus interpretaciones relacionadas con las matemáticas** como es el caso de:

1. **Beneficio** o **Utilidad** (medio, total y marginal),
2. **Coste** o **Costo** (medio, total y marginal),

[4]Entendiendo que no es el de un economista o profesional del área económica.

3. **Demanda** (elástica, inelástica, marginal),
4. **Impuestos** (directos, indirectos y marginal),
5. **Ingreso** (medio, total y marginal),
6. **Oferta** y **Oferta marginal**,
7. **Producción marginal**,
8. **Propensión marginal** al ahorro y al consumo,
9. **Equilibrio de mercado**,
10. **Superávit** del consumidor y del productor, entre otros.

Ahora bien, **la falta de conocimiento disciplinar en materia de economía de nuestros participantes no debe sorprendernos**, puesto que **los principales referentes o puntos de apoyo para sus clases son los programas oficiales y el libro de texto tradicional (ver ENS3 y ENS4), donde los primeros son elaborados a partir de los segundos (Doyle, 1992), pero estos últimos no tratan con amplitud los conceptos ya referenciados**. En este sentido, la limitación del profesor de matemáticas, en cuanto a materia económica se refiere, incide directamente en:

i Una enseñanza contextualizada de las matemáticas **poco provechosa**, donde **el principal perjudicado es el futuro profesional de la economía**.

ii **La EBP**, como estrategia metodológica de enseñanza, **no puede ser explotada en su totalidad**, restringiéndose la enseñanza de las matemáticas al esquema tradicional: *teoría+aplicaciones*.

iii Se puede entender como una **especie de obstáculo para el estudiante, de cara a materias avanzadas del área económica como <u>microeconomía</u>, <u>macroeconomía</u> o <u>econometría</u>**, donde el análisis matemático-económico juega un papel relevante.

DIS3 Respecto al dominio de una función hablamos en **ENS4.1**, **CURR2** y la parte **D** de **CURR4**; con esto queremos decir que poco podemos añadir en esta materia, aunque reconocemos el claro manejo de este concepto por parte de los participantes en el contexto matemático. Sin embargo, para los cinco profesores, el único dominio económico que ellos admiten es el conjunto $\mathbb{R}_0^+ = [0, +\infty)$, lo que indica un **conocimiento insuficiente de este concepto si queremos apostar por una enseñanza de las matemáticas más próxima a los requerimientos del estudiante** y más aún cuando el mismo Ramón **reconoce que en el curso de <u>microeconomía</u> se trabajan restricciones más específicas del domino de una función que la antes señalada**.

En este sentido, **se hace necesario que el profesor de matemáticas estudie y explore diversas restricciones del dominio en materia de economía**. En las **Figuras 6.1 y 6.2** se puede observar la relevancia, desde el punto de vista didáctico, que implica el estudio del dominio en un **contexto dual**.

DIS4 En los distintos episodios donde se discutió el tema de la interpretación de la derivada, la situación resulta aún más curiosa respecto a lo observado en el dominio de una función. Aunque, en general, los profesores tratan problemas de aplicaciones a la economía:

- Ramón **es el único que deja ver un conocimiento incipiente sobre este particular**.
- Pedro, quien a pesar de haber participado en la primera sesión del seminario únicamente, **dejó clara evidencia de su amplio conocimiento relacionado con la interpretación de la derivada en el área económica**, tal como lo señalamos en **CURR3**.
- Siendo aún más específico respecto al punto anterior, pudimos observar que al discutir problemas donde estudiamos la regla de la cadena, **el conocimiento que muestran sobre la interpretación de la derivada en escenarios económicos es débil**. Ya de esto hablamos en **I4.2**, donde señalamos que nuestro instrumento, concretamente en el episodio **EP3-3**, sirvió para explorar el CDC del profesor, **mostrando una clara falta de conocimiento de conceptos económicos y, por ende, de las interpretaciones de la derivada en relación con algunos de estos conceptos, elemento éste que va en detrimento del estudiante si se apuesta por una enseñanza contextualizada de las matemáticas**.

Entendemos que esta situación poco beneficia al estudiante, ya que no se profundiza en la interpretación de la derivada en aspectos concretos de la economía. En las **Figuras 6.1 y 6.2** también mostramos, mediante ejemplos básicos, **la importancia de profundizar en la interpretación de la derivada en economía**.

6.2.2. Conclusiones respecto a la EBP

Recordemos que cada vez que nos referimos a la enseñanza basada en problemas a lo largo de este trabajo fuimos enfáticos en el doble papel que jugó esta metodología de enseñanza; por una parte, estudiamos **el conocimiento del profesor de matemáticas respecto a la EBP** y, por otro lado, estudiamos **cuán efectiva es la EBP, vista como estrategia de recogida de datos**.

Aun cuando el segundo rol, antes mencionado, que jugó la EBP en nuestro proyecto está estrictamente relacionado con la metodología empleada en la recogida de datos, reservamos las conclusiones sobre este particular para esta parte de la memoria con el fin de concentrar los resultados de la EBP en un sólo grupo. Es así como destacamos lo valioso que resultó la EBP en sus dos facetas: primero, porque como estrategia de enseñanza que es, la misma forma parte

Enunciado de la tarea	Objeto matemático	Enfoque dual: matemático-económico	
		Matemático	**Económico**
E 2.1. Una fábrica de lápices, después de realizar un estudio exhaustivo, concluye que el costo por semana de producir x artículos (x en unidades de mil) de uno de sus productos principales, el lápiz mágico, viene dado por la función C(x) = 2000+0,15x *um* y el ingreso obtenido por la venta de x lápices viene dado por R(x) = 1,5x - 0,0001x^2 *um*. La fábrica en cuestión produce 2 millones de lápices mágicos semanales y se está estudiando la idea de incrementar la producción a 2.650.000.	Dominio de una función	1. Estudio de la función afín: C(x)=2.000+0,15x *um*. 2. Análisis del dominio de la función afín: C(x)=2.000+0,15x *um*. $\mathbf{Dom_C = R}$. 3. Estudio de la función cuadrática: R(x)=1,5x-0,0001x^2 4. Análisis del dominio de la función cuadrática: R(x)=1,5x-0,0001x^2. $\mathbf{Dom_R = R}$.	1. Relacionar el concepto económico del Costo de un producto con el concepto de Función de Costo: C(x)=2.000+0,15x *um*. 2. Relacionar el concepto económico del Ingreso de un producto con el concepto de Función de Ingreso: R(x)=1,5x-0,0001x^2 *um*. 3. Relacionar el concepto económico del Beneficio de un producto con el concepto de Función de Beneficio: U(x)=R(x)-C(x). 4. El estudio del concepto de Función de Producción. 5. La manipulación algebraica a escala de una variable económica (x artículos expresados en unidades de 1.000). 6. Análisis del *dominio de definición* de la función C(x). $\mathbf{Dom_C}=\{x€N_o: x/1.000$, donde $N_0=\{0,1,2,..\}\}$. 7. Análisis del *dominio de definición* de la función R(x). $\mathbf{Dom_R}=\{x€N_o: x/1.000 \leq 15.000$, donde $N_0=\{0,1,2,..\}\}$. 8. Análisis del *dominio de definición* de la función U(x). $\mathbf{Dom_U}=\{x€N: 1.695\leq x/1.000 \leq 15.000\}$.
E 2.2. Determine el beneficio promedio, $\overline{U}(x)$ *um*, por millares de lápices producidos. Calcule $\overline{U}(2.100)$ y dé una interpretación económica de este resultado. Además, si queremos calcular la tasa de cambio promedio del beneficio en un intervalo particular [x_1, x_2], este beneficio lo denotamos por $\overline{U}(x_1,x_2)$ y se define como $\overline{U}(x_1,x_2)=\frac{U(x_2)-U(x_1)}{x_2-x_1}$. Calcular la tasa de cambio del beneficio promedio en [1.900, 2.200].	Tasa media de variación y tasa promedio	1. Estudio de la tasa media de variación (pendiente de la recta secante) en un intervalo concreto.	1. Relacionar el concepto económico de tasa promedio del Beneficio con la tasa media de variación. $\overline{U}(x_1,x_2)=\frac{U(x_2)-U(x_1)}{x_2-x_1}$ en un intervalo concreto [x_1, x_2]. Es decir, la tasa de cambio promedio del beneficio de producir y vender entre 1.900.000 y 2.200.000 es 0,94 *um*. 2. Relacionar el concepto económico de Beneficio promedio con la tasa promedio. $\overline{U}(x)=\frac{U(x)}{x}$ en un intervalo concreto [0, x]. Es decir, el beneficio promedio que resulta de fabricar y vender 2.100.000 lápices es de 0,1876 *um*.
E 2.3. Cuál es el Costo Marginal de producir 2.100.000 unidades. ¿Qué interpretación económica le puedes dar a este resultado?	Tasa instantánea de variación (derivada en un punto) y función derivada	1. Estudio de la tasa instantánea de variación (pendiente de la recta tangente) en un punto del dominio. 2. La función derivada.	1. Relacionar el concepto económico de Costo Marginal con la función derivada de la Función de Costo C(x). 2. Interpretación económica de la función derivada Costo Marginal, es decir, lo que cuesta producir una unidad adicional al fabricante. En este caso, C'(x)=0,15, lo que significa que las mil unidades adicionales a las 2100000 le costarán al fabricante 0,15 *um* o 15 céntimos de *um*

Figura 6.1: Análisis didáctico 1

del CDC (conocimiento sobre la enseñanza); pero tal vez el mayor valor de la EBP dentro de esta investigación es que fue **la herramienta que nos permitió llegar de forma indirecta al profesor de matemáticas para estudiar su CDC**.

Enunciado de la tarea	Objeto matemático	Enfoque dual: matemático-económico	
		Matemático	**Económico**
E 3.1. Una empresa tiene la función de costo $C(x)=25+2x-\frac{1}{20}x^2$ (en cientos de miles de dólares), en donde x es el nivel de producción de la empresa y éste depende del tiempo t. Si el nivel de producción es de x=5 (millones de artículos por año) y está creciendo a una tasa de 0,7 millones de artículos por año, tomando en cuenta que la capacidad de producción de la empresa no puede superar los 15 millones de artículos por año. Determine el dominio de la función de costo $C(x)$ en un contexto matemático general y en el económico en particular. ¿Qué diferencia observa entre uno y otro?	Dominio de una función	1. Estudio de la función cuadrática: $C(x)=25+2x-\frac{1}{20}x^2$ 2. Análisis del dominio de la función cuadrática: $C(x)=25+2x-\frac{1}{20}x^2$. $\mathbf{Dom_R = R}$.	1. Relacionar el concepto económico del Costo de un producto con el concepto de Función de Costo: $C(x)=25+2x-\frac{1}{20}x^2$ 2. Análisis del *dominio de definición* de la función $C(x)$. $\mathbf{Dom_C}=\{x \in N_o : x/100.000 \leq 150$, donde $N_0=\{0,1,2,..\}\}$.
E.3.2. Calcule la tasa para la cual los costos de producción se están elevando en la actualidad. **Observación**: Antes de dar respuesta a esta pregunta conviene introducir la regla de la cadena. Para una función y que depende de u y ésta a su vez es una función que depende de x, con y derivable en u y u derivable en x, se tiene que la derivada de y respecto a x $(\frac{dy}{dx})$, se define como $\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}$ Así, estudiar la razón de cambio de y respecto a x consiste en multiplicar la razón de cambio de y respecto a u por la razón de cambio de u respecto a x.	Función compuesta, función derivada y regla de la cadena	1. Análisis de la función compuesta: $C(x)=25+2x-\frac{1}{20}x^2$, en donde x es el nivel de producción de la empresa y ésta depende de t. Por tanto, $C(x(t))=25+2x(t)-\frac{1}{20}(x(t))^2$ 2. Estudio de la función derivada a partir de la regla de la cadena $\frac{dC}{dt}=\frac{dC}{dx}\cdot\frac{dx}{dt}$	1. Estudiar la función de Costo $C(x)$, como una función que depende del nivel de producción x, y éste a su vez depende del tiempo t. 2. Relacionar el concepto económico de Costo Marginal con la función derivada de la Función de Costo $C(x)$. Teniendo en cuenta que su derivada interna está dada en el enunciado del problema, es decir, crece a una tasa de 0,7 millones de artículos por año. 3. Interpretación económica de la función derivada Costo Marginal en un punto dado. Es decir, lo que cuesta producir una unidad adicional al fabricante sabiendo que el Costo depende del nivel de producción que es de x=5 millones de artículos por año y está creciendo a una tasa de 0,7 millones de artículos por año. Por tanto: $\frac{dC}{dt}=\frac{dC}{dx}\cdot\frac{dx}{dt}=(2-\frac{x}{10})\cdot\frac{dx}{dt}=(2-\frac{5}{10})\cdot(0,7)=1,05$. La interpretación económica de $\frac{dC}{dt}=1,05$ es que el Costo de producción se está incrementando a una tasa de 1,05 cientos de miles de dólares por año.

Figura 6.2: Análisis didáctico 2

6.2.2.1. Como estrategia de recogida de datos

En esta subsección mostramos aquellos resultados más significativos en materia de recolección de datos y donde la EBP jugó un papel relevante.

EBP-Met1 **La EBP resultó un elemento metodológico novedoso y**, al mismo tiempo, **una herramienta poderosa para aproximarnos de manera indirecta al profesor de matemáticas de universidad**, a fin de generar un espacio de discusión en el cual los profesores, aún cuando el moderador del seminario establecía un orden en las participaciones, los aportes y las opiniones de éstos se pueden entender como simultáneas. Tal situación obedeció a la estructura planteada en cada uno de los problemas. **Este escenario permitió que el profesor no se sintiera en ningún momento cuestionado o examinado**.

EBP-Met2 El uso de la EBP **impulsó a los profesores a debatir sobre aspectos específicos de cada problema y sobre la estrategia en sí**, propiciando entre ellos discusiones sobre el contenido disciplinar y metodológico de enseñanza.

EBP-Met3 **La aplicación del instrumento se hace tediosa y no queda garantizado el volumen de datos recogidos** porque:

- **Si hay implicación** del profesorado participante **los datos pueden ser excesivos e inmanejables**.
- **Si el profesorado no se implica y se cansan**, responden con meras afirmaciones o asumiendo las respuestas del resto, lo que **proporciona información pobre y escasa**.

6.2.2.2. Como estrategia alternativa de enseñanza

Antes de enunciar las conclusiones debemos acotar lo siguiente: en ningún momento se realizó alguna pregunta directa a los profesores donde se mencionara de forma explícita la EBP como estrategia metodológica de enseñanza, evitando incomodar a los participantes, puesto que ya era de nuestro conocimiento que ninguno de ellos aplica esta metodología de enseñanza en sus clases. En la **Figura 6.3** presentamos uno de los problemas discutidos en el seminario y se incluyen las características de la EBP que tiene el mismo.

EBP-Did1 **La EBP resultó una estrategia de enseñanza nueva para todos salvo para Kenya** (ya reflejado en **A** de **CURR4**), quien la identifica desde un primer momento como una estrategia *"constructivista"*, pero en ningún momento se refiere de manera explícita como EBP; aun así, **reconoce que no emplea tal metodología en sus clases**.

EBP-Did2 Aunque todos valoran como significativa la estrategia discutida para el proceso de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas, **las opiniones están divididas de cara a su implementación en el aula de clases**:

- Alexis, Elio y Kenya (grupo B) consideran que **sus estudiantes no están preparados para una enseñanza de esta naturaleza, aunque Kenya apuesta por un ensayo**. Más aún, Elio y Alexis dejan ver a lo largo de la investigación que **sus estudiantes son pasivos y poco ganados a la tarea de fortalecer su propio conocimiento**, coincidiendo con lo expresado por Angeli (2002).

Enunciado de la tarea	Objeto matemático	Características EBP (según Sección 2.4.1)
E 3.1. Una empresa tiene la función de costo $C(x)=25+2x-\frac{1}{20}x^2$ (en cientos de miles de dólares), en donde x es el nivel de producción de la empresa y éste depende del tiempo t. Si el nivel de producción es de x=5 (millones de artículos por año) y está creciendo a una tasa de 0,7 millones de artículos por año, tomando en cuenta que la capacidad de producción de la empresa no puede superar los 15 millones de artículos por año. **Determine el dominio de la función de costo C(x) en un contexto matemático general y en el económico en particular. ¿Qué diferencia observa entre uno y otro?** **E.3.2. Calcule la tasa para la cual los costos de producción se están elevando en la actualidad.** **Observación**: Antes de dar respuesta a esta pregunta conviene introducir la regla de la cadena. Para una función y que depende de u y ésta a su vez es una función que depende de x, con y derivable en u y u derivable en x, se tiene que la derivada de y respecto a x ($\frac{dy}{dx}$), se define como $\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}$ Así, estudiar la razón de cambio de y respecto a x consiste en multiplicar la razón de cambio de y respecto a u por la razón de cambio de u respecto a x.	Dominio de una función Función compuesta, función derivada y regla de la cadena	1. *El proceso de enseñanza-aprendizaje está basado en la formulación de un problema*. En este caso el problema contempla el estudio del **dominio de una función** y la introducción a la **regla de la cadena**. 2. *Los procesos de aprendizaje tienen que ser dirigidos por los participantes*. Se espera que los estudiantes sientan la necesidad de **discutir entre ellos** y abordar al profesor sobre **aspectos concretos del problema**. 3. *El proceso de enseñanza-aprendizaje se fundamenta en una actividad*. Aquí la actividad es el problema en sí mismo, con el cual **se procura inducir al estudiante hacia el estudio del dominio y de la regla de la cadena**. 4. *La interdisciplinariedad juega un papel fundamental*. Si prestamos atención, esta situación problemática **no sólo conecta las matemáticas y la economía**, sino también **conecta las matemáticas entre sí**, ya que un mismo problema aborda el estudio de **dos objetos matemáticos**. Por otra parte, **la naturaleza del objeto que se produce también es clave en este estudio, así como la cantidad tope de producción**. Más aún, aquí **se le plantea un dilema al estudiante desde la economía y desde las matemáticas**, donde **se conecta el dominio y la derivabilidad**; en tal sentido, **se promueve la toma de decisiones**. 5. *La ejemplaridad también juega un rol determinante dentro del contexto*. Aquí, **el estudio del dominio en dos contextos permite profundizar sobre el concepto en sí mismo**. Realmente, **qué significa el dominio de una función y cuál es su importancia en el contexto dual**. Mediante el ejemplo se ilustra que **una función no siempre se puede derivar con las reglas básicas**, por tanto **se induce al estudio de la regla de la cadena como alternativa**. 6. *Hay que tomar en cuenta la relación entre la teoría y la práctica*. Tal vez **el punto más significativo en este problema** es el estudio del **dominio dual** y su relación con la **derivabilidad de la función**, ya que si nos quedamos con el dominio económico, la función de costo C(x) no sería continua y en consecuencia no sería derivable. 7. *Se considera la opción del trabajo en grupo o equipo*. Sería **poco provechoso** que tal situación **no se plateara en un escenario colectivo**, en el que pequeños grupos de estudiantes, orientados por el docente, **se sentaran a discutir sobre toda la estructura del problema**.

Figura 6.3: Análisis didáctico 3

- Manuel y Ramón (grupo A) **sí ven a sus estudiantes con la formación suficiente para abordar la EBP en clases**. Desde nuestro punto de vista, esta posición tiene que ver con el actual trabajo desarrollado en el aula de clases por cada uno de ellos, recordemos que estos últimos trabajan más problemas de aplicaciones que los primeros y el conocimiento disciplinar no es tan pobre como los del grupo B.

EBP-Did3 Tendencia a considerar la EBP exclusivamente como elemento motivador, dejando de lado la vertiente metodológica generadora de conocimiento.

Valoración negativa de una cualidad, inicialmente positiva desde una perspectiva constructivista del aprendizaje, como es la de ser generadora de conflicto cognitivo (Morales y Landa, 2004). Así se valora la ansiedad, desconcierto, inseguridad y desmotivación del estudiante como pasos hacia atrás en el proceso de aprendizaje, frente a una enseñanza más clásica de procedimiento y de ejercicios.

EBP-Did4 **Todos reconocen en la EBP**, aunque con sus reservas, **una estrategia novedosa para el estudio de conceptos matemáticos como: la introducción de la derivada, el dominio de una función, la regla de la cadena y la monotonía**, entre otros.

Durante toda la discusión **quedó reflejada la incidencia de esta metodología en la futura labor docente de cada uno de los participantes**, en particular, en lo que se refiere al contenido matemático.

EBP-Did5 De lo anterior se desprende **la necesidad de un espacio de formación referente a la EBP como estrategia alternativa de enseñanza de las matemáticas**, ya que los participantes en mayor o menor medida se muestran afectos con esta metodología, pero como ya lo manifestáramos, **se observa en los profesores un claro desconocimiento de esta metodología de enseñanza**.

6.3. Del presente al futuro

Llegando a este punto de la memoria no queremos cerrar este trabajo obviando algunos aspectos o elementos que sirvan para futuros proyectos enmarcados en esta misma línea de investigación o en áreas afines. Aunque en el **Capítulo 1** señalamos algunos de los trabajos que son la base de esta investigación, en el desarrollo de la misma ésta fue cobrando vida propia; es por ello que no podemos considerarla como la continuación exacta de ninguna de estas investigaciones, pero sí entendemos este trabajo como un aporte a la investigación en didáctica de las matemáticas a nivel universitario y, en concreto, al estudio del CDC del profesor de matemáticas de universidad. De igual manera, conviene hacer una reflexión sobre algunas restricciones propias del proyecto y que, posiblemente, hubiesen contribuido a enriquecer la investigación. Es por ello que dividimos en dos grandes bloques este último apartado.

6.3.1. Limitaciones de la investigación

Conscientes de las limitaciones internas y externas que supone este tipo de investigación y considerando además que no hemos querido tomar en cuenta algunos aspectos del CDC que, quizás, la hubieran mejorado, decidimos limitar internamente este trabajo, con el fin de profundizar en aquellos temas de nuestro interés. El objetivo específico de traer a colación estas cuestiones radica en lo siguiente: (**a**) sugerimos que estos elementos deben ser tomados en cuenta para futuros trabajos y; por otro lado, (**b**) mostrar algunas de las limitaciones que suponen este tipo de investigación.

A) Como una limitación externa, destacamos la dificultad de encontrar profesores y la disponibilidad de éstos para destinar horas de su trabajo a una investigación como ésta que suponía mucho trabajo en formato seminario de reflexión.

B) En el marco teórico quedó reflejado que no abordaríamos algunos aspectos del CDC, entre los que destacamos: el *conocimiento curricular en extenso*, el *conocimiento sobre la evaluación*, el *conocimiento sobre errores* de los estudiantes o las *nuevas tecnologías*, entre otros. En su momento justificamos la razón por la cual descartamos las dos primeras componentes del CDC señaladas antes, aunque reconocemos que de haberlos estudiado a fondo nos hubiese permitido llegar a algunos resultados interesantes respecto al CDC del profesor de universidad. Sin embargo, de esta limitación extraemos algo positivo:

B.1) Aunque se pudiera pensar que un estudio más extenso del currículo mejoraría la caracterización del profesor, nuestra intención era profundizar en aspectos muy concretos de un tema específico, para, entre otras cosas, probar un instrumento de recogida y análisis de información y ser capaz de usar tales instrumentos para estudiar cualesquiera otros aspectos curriculares.

B.2) De igual manera, un estudio en profundidad de la evaluación podría haber sido objeto de otra investigación. Más aún si entendemos ésta como el elemento clave del diseño del proceso de enseñanza-aprendizaje.

C) Otra limitación en el diseño del instrumento de esta investigación es que no se contemplaba la observación de las clases. Sin embargo, la posibilidad de observar a cada uno de los profesores participantes, puede suponer una debilidad en la investigación. Aquí nos encontramos con dos problemas:

- Impedimento de grabar clases en el nivel universitario, lo que podría haber reducido aún más la muestra de profesores.
- Salvo que los propios profesores reconozcan una metodología muy diferente a la lección magistral y resolución de problemas en la pizarra, no creemos que pudiera aportar nada a nuestra investigación.

En cualquier caso, entendemos que se trataría de otro tipo de trabajo, también muy interesante pero que en nuestro caso no era el que pretendíamos. Recordemos que nuestro objetivo estaba muy orientado al trabajo de profesores en un contexto de seminario y pensando en la formación del profesor usando contextos similares al de la investigación.

D) Otro factor que no tomamos en cuenta y que pudo aportar elementos novedosos a este proyecto es el hecho de no haber triangulado la información del profesor con las notas de clase y material usado para la materia, ésto no nos ha permitido valorar la coherencia de las afirmaciones del profesor sobre lo que dice que hace en sus clases y lo que las notas de clase podrían mostrar.

E) La utilización del EBP como metodología de investigación la valoramos muy positivamente, sin embargo, no podemos dejar de lado, que tal metodología tiende a hacer sentir al profesor "evaluado" sobre su propio quehacer, lo que la hace depender mucho del papel que asuma el investigador y cómo logre finalmente conducir las sesiones de trabajo.

F) En el mismo orden de ideas que el punto anterior, el seminario lo entendemos como una excelente herramienta para aplicar un instrumento como el trabajado en esta investigación, aunque el papel del moderador es clave y se debe tener presente la constante toma de decisiones por parte de éste para llevar el control durante la actividad, de manera que la información que surja sea realmente valiosa y aprovechable al máximo.

6.3.2. Líneas abiertas

Desde nuestro punto de vista, algunos aspectos que quedan abiertos y son susceptibles de futuras investigaciones son:

1) Diseño de un instrumento que favorezca **la reflexión del profesor de matemáticas sobre su práctica docente**, que sea sencillo de utilización y pueda aplicarse a diferentes contenidos matemáticos. Tomando en cuenta que la reflexión del profesor incide en su desarrollo profesional (Marín, 2004; Climent, 2002).

2) **Profundizar en aspectos del conocimiento del profesor de matemáticas de universidad que sean más específicos de estudios que usan las matemáticas como herramienta (ciencias económicas, ingeniería, ciencias, etc.)**, aspectos tales como: enseñanza, aprendizaje, currículo y contenido y la relación de éstos entre sí. Entendemos que esto podría fortalecer esta línea de investigación en didáctica de las matemáticas. Entre los aspectos del CDC a destacar, señalamos:

   2.a) El conocimiento curricular del profesor como eje central del CDC y, a partir de éste, profundizar en las otras componentes del CDC como: el conocimiento disciplinar, conocimiento de las nuevas tecnologías en el proceso de enseñanza-aprendiza, entre otros. En otras palabras, **estudiar cómo influye el conocimiento curricular del profesor en los otros elementos que conforman el CDC**.

   2.b) De igual manera, **proponemos un estudio sobre el CDC y el papel de las competencias en el diseño de los planes de estudio de carreras como las de ciencias económicas, así como su influencia en el proceso de enseñanza y aprendizaje**.

3) El diseño de un instrumento que permita indagar en el conocimiento matemático necesario para apostar por una enseñanza contextualizada de las matemáticas y, así, fortalecer la investigación sobre las didácticas específicas. Por ejemplo:

   3.a) El diseño de un instrumento dirigido a profesores de matemáticas y de economía por igual, **donde se estudie cuán importante es para el profesor de matemáticas conocer y manejar conceptos económicos como**: *beneficio* o *utilidad*, bienes, capital, *costo*, *crecimiento económico*, *déficit* y *superávit del consumidor* y *del productor*, *demanda*, *economía*, *impuesto*, *ingreso*, *oferta*, *demanda elástica* e *inelástica*, entre otros. Para tal fin, **sugerimos seleccionar un conjunto de problemas que contengan los conceptos resaltados y reflexionar sobre los mismos en el marco de un seminario**.

   3.b) Dado que el álgebra lineal y, más específicamente, **el álgebra matricial también tiene una fuerte presencia en el campo de la economía**, **proponemos un estudio similar al sugerido en el punto anterior**. En este caso, los conceptos económicos que proponemos estudiar son: *incremento porcentual*, *modelo insumo-producto*, *equilibrio de mercado*, *análisis de costos* y *contabilidad de costos*, por citar algunos.

4) **La preparación de materiales de trabajo para la enseñanza del cálculo diferencial en el que se implemente la EBP como estrategia de enseñanza, con el propósito de motivar y generar conocimiento en el estudiante, promoviendo la discusión y la investigación en áreas afines a la economía**, es una actividad que proponemos como necesaria y casi obligatoria por dos razones:

i) Debido a **las exigencias que demanda el nuevo profesional de las ciencias económicas**, y

ii) Dado que actualmente **es un área totalmente novedosa pero que está cobrando interés por sus implicaciones en los nuevos programas de estudio en europa y otros países**, donde Venezuela no es la excepción.

5) De lo anterior se sigue que **se hace necesaria una revisión permanente de estos materiales de trabajo, de modo que siempre tengan vigencia y se adecúen al perfil profesional que demanda la sociedad**. Para ello hay que profundizar en el papel de los seminarios de investigación en su vertiente formativa, potenciando el trabajo de grupos interdisciplinares.

Bibliografía

[1] Albanese, M. y Mitchell, S. (1993). Problem-based learning: A review of the literature on its outcomes and implementation issues. *Academic Medicine*. 68(1). pp. 52-81.

[2] Almeida, M. (2002). *Desarrollo profesional docente en geometría: análisis de un proceso de formación a distancia*. Tesis Doctoral. Barcelona: Universidad de Barcelona.

[3] Alonso, J. (2001). Motivación y estrategias de aprendizaje. Principios para su mejora en alumnos universitarios. En García-Valcárcel (Coord.) *Didáctica universitaria*. Madrid: La Muralla, S. A. pp. 79-112.

[4] An, S.; Kulm, G. y Wu, Z. (2004). The pedagogical content knowledge of middle school, mathematics teachers in China and the U.S. *Journal of Mathematics Teacher Education*. 7. pp. 145-172.

[5] Angeli, C. (2002). Teachers' practical theories for the design and implementation of problem-based learning. *Science Education International*. 13(3). pp. 9-15.

[6] Archibald, G. y Lipsey, R. (1967). *An introduction to a mathematical treatment of economics*. London: Weidenfeld y Nicolson.

[7] Arnal, J.; Del Rincón, D. y Latorre, A. (1994). *Investigación educativa. Fundamentos y metodología*. 1^a reimpresión. Barcelona: Editorial Labor, S. A.

[8] Arrow, K. y Intriligator, M. (1981). Historical introduction. En Arrow, K. y Intriligator, M. (Eds.) *Handbook of mathematical economics*. Netherlands: Elsevier Science Publishers B. V. Vol 1. pp. 1-14.

[9] Artigue, M. (1991). Analysis. En Tall, D. (Ed.), *Advanced mathematical thinking*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers. pp. 167-198.

[10] Arya, J. y Lardner, R. (1987). *Matemáticas aplicadas a la administración y la economía*. 2^a ed. México: Prentice Hall.

[11] Aspy, D.; Aspy, C. y Quimby, P. (1993). What doctors can teach teachers about problem-based learning. *Educational Leadership*. 50(7). pp. 22-24.

[12] Azcárate, C. (1990). *La velocidad: introducción al concepto de derivada*. Tesis Doctoral. Barcelona: Universidad Autónoma de Barcelona.

[13] Bagni, G. (2004). Una experiencia didáctica sobre funciones, en la escuela secundaria. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa* (RELIME). 7(1). pp. 5-23.

[14] Badillo, E. (2003). *La derivada como objeto matemático y como objeto de enseñanza y aprendizaje en profesores de matemática de Colombia*. Tesis Doctoral. Barcelona: Universidad Autónoma de Barcelona.

[15] Balbás, A.; Gil, J. y Gutiérrez, S. (1989). *Análisis matemático para la Economía I. Cálculo diferencial*. Madrid: Editorial AC.

[16] Ballester, Ll. (2001). *Bases metodológicas de la investigación educativa*. Palma: Universidad de Las Islas Baleares.

[17] Bardin, L. (1986). *El análisis de contenido*. Madrid: Ediciones Akal.

[18] Barrows, H. (1985). *How to design a problem based curriculum for the preclinical years*. New York: Springer Publishing Co.

[19] Barrows, H. (1986). A taxonomy of problem based learnig methods. *Medical Education*. 20. pp. 481-486.

[20] Barrows, H. (1996). Problem-Based learning in medicine and beyond: A brief overview. En Wilkerson, L. y Gijselaers, W. (Eds.) *Bringing problem-based learning to higher education: theory and practice*. San Francisco: Jossey-Bass Publishers. pp. 3-12.

[21] Benito, A.; Bonson, M. e Icarán, E. (2005). Metodologías activas. En Benito, A. y Cruz, A. (Coords.) *Nuevas claves para la docencia universitaria en el espacio europeo de educación superior*. Madrid: Narcea. pp. 21-64.

[22] Biggs, J. (2005). *Calidad del aprendizaje universitario*. Madrid: Narcea.

[23] Blanco, L. J.; Mellado, V. y Ruiz, C. (1995). Conocimiento didáctico del contenido de ciencias y matemáticas y formación de profesores. *Revista de Educación* 307. pp. 427-449.

[24] Bodur, Y. (2003). *Preservice teachers' learning of multiculturalism in a teacher education program*. PhD Thesis. Florida: Florida State University.

[25] Bolívar, A. (2005). Conocimiento didáctico del contenido y didácticas específicas. *Revista de currículum y formación del profesorado*. 9(2). pp. 1-39. Recuperado el 02 de mayo de 2007 de `http://www.ugr.es/~recfpro/Rev92ART6.pdf`

[26] Boud, D. y Feletti, G. (Eds.) (1991). *The challenge of problem based learning*. New York: St. Martin Press.

[27] Bransford, J.; Brown, A. y Cocking, R. (2000). How people learn. Expanded Edition. National Research Council. En Kahan, J.; Cooper, D. y Bethea, K. (2003). *The role of mathematics teachers' content knowledge in their teaching: a framework for research applied to study of student teachers*. *Journal of Mathematics Teacher Education*. 6. pp. 223-252.

[28] Bridges, E. y Hallinger, P. (1992). *Problem based learning for administrator*. Oregon: ERIC Clearinghouse on Educational Management. University of Oregon.

[29] Bromme, R. (1988). Conocimiento profesional de los profesores. *Enseñanza de las Ciencias*. 6(1). pp. 19-29.

[30] Cámara, A. (2000). Aportaciones de la matemática a la metodología económica. *Psicothema*. 12(2). pp. 103-107. Recuperado el 02 de febrero de 2007 de `http://www.psicothema.com/pdf/526.pdf`

[31] Carrascosa, J. (2005). El problema de las concepciones alternativas en la actualidad (parte I). Análisis sobre las causas que la originan y/o mantienen. *Revista Eureka sobre Enseñanza y Divulgación de las Ciencias*. 2(2). pp. 183-208. Recuperado el 02 de agosto de 2007 de `http://www.apac-eureka.org/revista/Volumen2/Numero\_2\_2/\\Carrascosa\_2005A.pdf`

[32] Carrillo, J. (1996). *Modos de resolver problemas y concepciones sobre la matemática y su enseñanza de profesores de matemáticas de alumnos de más de 14 años. Aportaciones a la metodología de la investigación y estudio de posibles relaciones*. Tesis Doctoral. Huelva: Universidad de Huelva. Versión electrónica. Recuperado el 10 de junio de 2006 de `http://www.uhu.es/luis.contreras/tesis2/CAPS/CAP3.HTM`

[33] Carrillo, J.; Climent, N.; Contreras, L. y Múñoz-Catalán, M. (2007). Un modelo cognitivo para interpretar el desarrollo profesional de los profesores de matemáticas. Ejemplificación en un entorno colaborativo. *Enseñanza de las Ciencias*. 25(1). pp. 33-44.

[34] Chiang, A. y Wainwright, K. (2006). *Métodos fundamentales de economía matemática*. 4^a ed. México: McGraw Hill.

[35] Clark, J., Cordero, F. Cottrill, J., Czarnocha, B., DeVries, D., St. John, D., Tolias, G. y Vidakovié, D. (1997). Constructing a schema: The case of the chain rule? *Journal of Mathematical Behavior*. 16, pp. 345-364.

[36] Climent, N. (2002). *El desarrollo profesional del maestro de Primaria respecto de la enseñanza de la matemática. Un estudio de caso*. Tesis Doctoral. Huelva: Universidad de Huelva.

[37] Codina, A. y Riviera, A. (2001). Hacia una instrucción basada en la resolución de problemas: los términos problema, solución y resolución. En Gómez, P. y Rico, L. (Eds.). *Iniciación a la investigación en didáctica de la matemática. Homenaje al profesor Mauricio Castro*. Granada: Editorial Universidad de Granada. pp. 125-136.

[38] Cohen, L.; Manion, L. y Morrison, K. (2000). *Research methods in education*. 5^{th} ed. New York: Routledge Falmer.

[39] Colás, M. y Buendía, L. (1998). *Investigación educativa*. 3^{a} ed. Sevilla: Alfar.

[40] Contreras, L. (1998). *Resolución de problemas. Un análisis exploratorio de las concepciones de los profesores a cerca de su papel en el aula*. Tesis Doctoral. Huelva: Universidad de Huelva.

[41] Contreras, L. (1999). *Concepciones de los profesores sobre la resolución de problemas*. Huelva: Universidad de Huelva Publicaciones.

[42] Cooney, T. (1985). A beginning teacher's view of problem solving. *Journal for Research in Mathematics Education*. 16. pp. 324-336.

[43] Cottrill, J. (1999). *Students' understanding of the concept of chain rule in first year calculus and the relation to their understanding of composition of functions*. Doctoral Thesis. Purdue: Purdue University.

[44] De La Orden, . (1997). Formación, selección y evaluación del profesorado universitario. *Bordón*. 266. pp. 5-30.

[45] DeLoach, I. (2001). Using problem-based learning (pbl) to address the needs of teaching and learning mathematics for students in the non-dominant cultures of our society. En Rogerson, A. (Ed.) *The mathematics education into the 21^{st} century project. Proceedings of the international conference. New ideas in mathematics education*. Australia. pp. 103-108.

[46] Del Rincón, D.; Arnal, J.; Latorre, A. y Sans, A. (1995). *Técnicas de investigación en ciencias sociales*. Madrid: Dykinson. pp. 207-217.

[47] Deulofeu, J. (2002). Resolución de problemas. En Azcárate, C. y Deulofeu, J. (Eds.). *Guías Praxis para el profesorado de ESO. Matemáticas*. Barcelona: SIS Praxis. pp. 481-645.

[48] Díaz, D. (1999). La didáctica universitaria: Referencia imprescindible para una enseñanza de calidad. *Revista Electrónica Interuniversitaria de Formación del Profesorado*. 2(1). pp. 107-116.

[49] Doyle, W. (1992). Curriculum and pedagogy. En *Handbook of Research on Curriculum*. Philip W., Jackson (Ed.). New York: Macmillan. pp. 486-516.

[50] D.S.F. (1965). *Diccionario Soviético de Filosofía*. Montevideo: Ediciones Pueblos Unidos.

[51] Escobar, D. (2005). *Economía matemática*. 2^a ed. Bogotá: Alfaomega.

[52] Ferreres, V.; Gairín, J., Jiménez, B.; Martín, E.; Barrios, Ch.; Vives, M. y Benedito, V. (1997). *El desarrollo profesional del docente: Evaluación de los planes provinciales de formación*. Barcelona: Oikos-Tau, S. L.

[53] Finucane, P.; Johnson, S. y Prideaux, D. (1998). Problem based learning: Its rationale and efficacy. *Medical Journal of Australia*. 168. pp. 445-448.

[54] Flick, U. (2004). *Introducción a la investigación cualitativa*. Madrid: Morata.

[55] Flores, P. (1996). Creencias y concepciones de los futuros profesores sobre las matemáticas, su enseñanza y aprendizaje. Evolución durante las prácticas de enseñanza. *UNO*. pp. 103-111.

[56] Flores, P. (1998). *Concepciones y creencias de los futuros profesores sobre las matemáticas, su enseñanza y aprendizaje. 'Investigación durante las prácticas de enseñanza'*. Granada: Editorial Comares.

[57] Font, V. (2000). *Procediments per obtenir expressions simbòliques a partir de gràfiques. Aplicacions a les derivades*. Tesis Doctoral. Barcelona: Universidad de Barcelona.

[58] Forsythe, F. (2002). Problem based-learning. En Davies, P. (Ed.) *The Handbook of Economics Lecturers*. Recuperado el 22 de julio de 2006 de `http://www.economicsnetwork.ac.uk/handbook/pbl/`

[59] García, L. (2004). *Un estudio sobre profesores que enseñan cálculo diferencial a estudiantes de ciencias económicas. Creencias, concepciones y conocimiento profesional*. Tesis de Maestría. Barcelona: Universidad Autónoma de Barcelona.

[60] García, L.; Azcárate, C. y Moreno, M. (2006a). Creencias, concepciones y conocimiento profesional de profesores que enseñan cálculo diferencial a estudiantes de ciencias económicas. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa* (RELIME). 9(1). pp. 85-116.

[61] García, L.; Moreno, M. y Azcárate, C. (2006b). *Reflexiones sobre una propuesta didáctica para la enseñanza del cálculo en carreras de ciencias económicas y empresariales*. Memorias del 4° Congrés Internacional de Docència Universitària i Innovació (IV CIDUI). Barcelona: Universitat Politècnica de Catalunya.

[62] García, L.; Moreno, M. y Azcárate, C. (2006c). EBP como metodología activa para la enseñanza del cálculo diferencial. Discusión y reflexión sobre algunos problemas de cálculo en las ciencias económicas. *Revista RECTA*. Actas 14(1). Recuperado el 10 de noviembre de 2006 de `http://www.uv.es/asepuma/XIV/comunica/19NUEVO.pdf`

[63] García Fernández, M. (2006). Modelos de formación y perfil del profesorado universitario: Competencias y diferentes estilos (I). *Revista de educaçao do Instituto Superior de Ciências educativas*. 2(2). pp. 155-182.

[64] García-Valcárcel, A. (Coord.) (2001a) *Didáctica universitaria*. Madrid: La Muralla, S. A.

[65] García-Valcárcel, A. (2001b). La función docente del profesor universitario, su formación y desarrollo profesional. En García-Valcárcel, A. (Coord.) *Didáctica universitaria*. Madrid: La Muralla, S. A. pp. 9-44.

[66] Gijselaers, W. (1995). Perspectives on problem-based learning. En Gijselaers, W.; Tempelaar, D.; Keizer, P.; Blommaert, J.; Bernard, E. y Kasper, E. (Eds.) *Educational innovation in economics and business administration: the case of problem-based learning*. Netherlands: Kluwer Academic Publishers. pp. 39-52.

[67] Gijselaers, W.; Tempelaar, D.; Keizer, P.; Blommaert, J.; Bernard, E. y Kasper, E. (Eds.) (1995). *Educational innovation in economics and business administration : the case of problem-based learning*. Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

[68] Godino, J. (2003). Hacia una teoría de la instrucción matemática significativa. Recuperado el 10 de enero de 2007 de `http://www.ugr.es/$\sim$jgodino/funciones-semioticas/05\_InstruccionMS.pdf`

[69] Goetz, J. y LeCompte, M. (1988). *Etnografía y diseño cualitativo en investigación educativa*. Madrid: Ediciones Morata, S. A.

[70] González, C. y Gil, M. (2000). *El lenguaje de la ciencia económica. ¿Por qué la economía no prescinde de las matemáticas*? Madrid: Ra-Ma Editorial.

[71] Haeussler, E. y Paul, R. (1997). *Matemáticas para administración, economía, ciencias sociales y de la vida*. 8ª ed. México: Prentice Hall Hispanoamericana, S. A.

[72] Hargreaves, A.; Earl, L.; Moore, S. y Manning, S. (2001). *Aprender a cambiar. La enseñanza más allá de las materias y los niveles*. Barcelona: Octaedro, S.L.

[73] Hatfield, L. (1978). Heuristical emphases in the instruction of mathematical problem solving: Rationales research. En Hatfield, L. y Bradbard, D. (Eds.) *Mathematical problem solving: Papers from research workshop*. Ohio: ERIC-SMEAC.

[74] Hernández, P. (1989). *Diseñar y enseñar. Teoría y técnicas de la programación y del proyecto docente*. Madrid: Narcea-ICE de la Universidad de la Laguna.

[75] Hoffmann, L. y Bradley, G. (2001). *Cálculo para administración, economía y ciencias sociales*. 7^a ed. Bogotá: McGraw Hill.

[76] Humphrey, J.; Coté, G.; Walton, J.; Meininger, G. y Laine, G. (2005). A new paradigm for graduate research and training in the biomedical sciences and engineering. *Advances in Physiology Education* 29. pp. 98-102. Recuperado el 02 de febrero de 2007 de `http://advan.physiology.org/cgi/reprint/29/2/98.pdf?ck=nck`

[77] Jiménez, R. y Wamba, A. (2004). ¿Podemos construir un modelo de profesor que sirva de referencia para la formación de profesores en didáctica de las ciencias experimentales? *Profesorado, revista de currículum y formación del profesorado*. 8(1). pp. 1-16.

[78] Kahan, J.; Cooper, D. y Bethea, K. (2003). The role of mathematics teachers' content knowledge in their teaching: a framework for research applied to study of student teachers. *Journal of Mathematics Teacher Education*. 6. pp. 223-252.

[79] Kilpatrick, J. (1985). A retrospective account of the past twenty-five years of research on teaching mathematical problem solving. En Silver, E. (Ed.) *Teaching and learning mathematical problem solving: Multiple research perspectives*. New Jersey: LEA Inc. pp. 1-16.

[80] Knight, P. (2006). *El profesorado de educación superior. Formación para la excelencia*. 2^a ed. Madrid: Narcea.

[81] Kolmos, A. (2004). Estrategias para desarrollar currículos basados en la formulación de problemas y organizados en base a proyectos. *Revista Educar*. 33. pp. 77-96.

[82] Krulik, S. y Rudnick, J. (1989). *Problem solving. A handbook for teachers*. 2^a ed. Boston: Ally y Bacon.

[83] Lange, J. de (1996). Using and Applying Mathematics in Education. In: Bishop, A.J., Clements, K., Keitel, C., Kilpatrick, J., y Laborde, C. (Eds.) *International Handbook of Mathematics Education*. pp. 49-98. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers

[84] Latorre, A.; Del Rincón, D. y Arnal, J. (1996). *Bases metodológicas de la investigación educativa*. Barcelona: Editorial GR92.

[85] Lee, H. y Bae, S. (2008). Issues in implementing a structured problem-based learning strategy in a volcano unit: a case study. *International Journal of Science and Mathematics Education*. 6(4). pp. 655-676.

[86] Lewis, S. (2003). *La enseñanza basada en tópicos o problemas en la educación en ciencias*. Versión HTML. Recuperado el 10 de abril de 2005 de `http://www.actionbioscience.org/esp/education/lewis.html\#Primer`

[87] Llinares, S. (1992). Aprender a enseñar matemáticas. Conocimiento de Contenido Pedagógico y entornos de aprendizaje. En Actas del Congreso: *Las didácticas específicas en la formación del profesorado*. Vol. I. Santiago de Compostela: Tórculo. pp. 377-407.

[88] Llinares, S. (1995). Del conocimiento sobre la enseñanza para el profesor al conocimiento del profesor sobre la enseñanza: Implicaciones en la formación de profesores de matemáticas. En L. Blanco y V. Mellado (Coord.) *La formación del profesorado de Ciencias y Matemáticas en España y Portugal*. Diputación Provincial de Badajoz - Departamento de Didáctica de las Matemáticas y las CCEE. Universidad de Extremadura. pp. 153-171.

[89] Llinares, S. (1998). Conocimiento profesional del profesor de matemáticas y procesos de formación. *UNO*. 17. pp. 51-63.

[90] Lial, M. y Hungerford, T. (2000). *Matemáticas para administración y economía*. 7^a ed. México: Pearson Educación.

[91] Marcelo, C. (1992). Cómo conocen los profesores la materia que enseñan. Algunas contribuciones de la investigación sobre conocimiento didáctico del contenido. En Actas del Congreso: *Las didácticas específicas en la formación del profesorado*. Vol. I. Santiago de Compostela: Tórculo. pp. 151-186.

[92] Marcelo, C. (1995). Desarrollo profesional e iniciación a la enseñanza. Barcelona: PPU.

[93] Marcelo, C. (1999). La Formación de los formadores como espacio de trabajo e investigación: dos ejemplos. *XXI Revista de Educación*. Nº 1. pp. 33-57.

[94] Marcelo, C. (2001). El Proyecto Docente: Una ocasión para aprender. En García-Valcárcel (Coord.) *Didáctica universitaria*. Madrid: La Muralla, S. A. pp. 45-78.

[95] Marcelo, C. (2002). La investigación sobre el conocimiento de los profesores y el proceso aprender a enseñar. Una revisión personal. En Perafán, G. y Adúriz-Bravo, A. (Comp.) *Pensamiento y conocimiento de los profesores. Debates y perspectivas internacionales*. Bogotá: Grupo Editorial Gaia. pp. 45-60.

[96] Marín, V. (2004). *Las creencias del profesorado universitario en el siglo XXI*. Córdoba: Servicio de publicaciones de la Universidad de Córdoba.

[97] Marín, V. (2006). Formación y convergencia: dos realidades de la vida del profesor universitario principiante. *Revista de educaçao do Instituto Superior de Ciências educativas*. 2^{a} Serie. N°2. pp. 183-190.

[98] Massot, I.; Dorio, I. y Sabariego, M. (2004). Estrategias de recogida y análisis de la información. En Bisquerra, R. (Coord.) *Metodología de la investigación cualitativa*. Capítulo 11. Madrid: Editorial La Muralla, S. A. pp. 329-366.

[99] McCarthy, M. (2005). Can problem-based learning address content and process? *Biochemistry and Molecular Biology Education*. 33 (5). pp. 363-368. Recuperado el 15 de abril de 2006 de `http://www.bambed.org/cgi/reprint/33/5/363.pdf`

[100] Medina, A. (2001). Los métodos en la enseñanza universitaria. En García-Valcárcel (Coord.) *Didáctica universitaria*. Madrid: La Muralla, S. A. pp. 155-198.

[101] Mellado, V. (1995). *Análisis del conocimiento didáctico del contenido, en profesores de ciencias de primaria y secundaria en formación inicial*. Cáceres: Servicio de Publicaciones de la Universidad de Extremadura.

[102] Mellado, V.; Blanco, L. J. y Ruiz, C. (1999). *Aprender a enseñar ciencias experimentales en la formación inicial del profesorado. Estudios de caso sobre la enseñanza de la energía*. Colección de Proyectos de Innovación Docente. Badajoz: ICE de la Universidad de Extremadura.

[103] Milter, R. y Stinson, J. (1995). Educating leaders for the new competitive environment. En Gijselaers, W.; Tempelaar, D.; Keizer, P.; Blommaert, J.; Bernard, E. y Kasper, E. (Eds.) *Educational innovation in economics and business administration : The case of problem-based learning*. Netherlands: Kluwer Academic Publishers. pp. 30-38.

[104] Morales, P. y Landa, V. (2004). Aprendizaje basado en problemas. *Theoria*. 13. pp. 145-157.

[105] Moreno, M. (2000). *El profesor universitario de matemáticas: Estudio de las concepciones y creencias acerca de la enseñanza de las ecuaciones diferenciales. Estudio de casos.* Tesis Doctoral. Barcelona: Universidad Autónoma de Barcelona.

[106] Moreno B., M. (2000). La enseñanza de la resolución de problemas matemáticos. El blanco y el negro de algunas estrategias didácticas. *Revista de Educación* (Nueva Época). Núm. 15. Recuperado el 16 de junio de 2005 de `http://educar.jalisco.gob.mx/15/15indice.html`

[107] Moreno, M. y Azcárate, C. (2003). Concepciones y creencias de los profesores universitarios de matemáticas acerca de las enseñanzas de las ecuaciones diferenciales. *Enseñanza de las Ciencias*. 21(2). pp. 265-280.

[108] Mowshowitz, D. (2006). Using advanced problem in introductory courses. Some sample problems and why they work. *Biochemistry and Molecular Biology Education*. 34(2). pp. 134-138. Recuperado el 10 de mayo de 2006 de `http://www.bambed.org/cgi/reprint/34/2/134.pdf`

[109] NCTM. (1991). Professional standards for teaching mathematics. Reston: NCTM.

[110] Pinto, M. y Gálvez, C. (1996). *Análisis documental de contenido: Procesamiento de la información*. Madrid: Editorial Síntesis.

[111] Piñuel, J. (2002). Epistemología, metodología y técnicas de análisis de contenido. *Estudios de Sociolingüística*. 3(1). pp. 1-42.

[112] Pólya, G. (1984). *Cómo plantear y resolver problemas*. México: Trillas.

[113] Porlán, R. y Rivero, A. (1998). *El conocimineto de los profesores*. Sevilla: Diada Editorial, S. L.

[114] Porlán, R.; Rivero, A. y Martín, R. (1998). Conocimiento profesional y epistemología de los profesores, II: Estudios empíricos y conclusiones. *Enseñanza de las Ciencias*. 16(2). pp. 271-288.

[115] Puig, L. (1996). *Elementos de resolución de problemas*. Granada: Comares. Col. Mathema.

[116] Reyes, F. y Gárritz, J. (2006). Conocimiento pedagógico del concepto de “reacción química” en profesores universitarios mexicanos. *Revista Mexicana de Investigación Educativa*. 11(31). pp. 1175-1205. Recuperado el 30 de julio de 2007 de `http://comie.amenesesm.com/documentos/rmie/v11/n31/pdf/rmiev11n31scB02n01es.pdf`

[117] Rico, L. (1998). Complejidad del currículo matemático como herramienta profesional. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*. 1(1). pp. 22-39.

[118] Roh, K. (2003). Problem-based learning in mathematics. *Digest of Educational Resources Information Center*. EDO-SE-03-07. Recuperado el 15 de febrero de 2006 de `http://www.eric.ed.gov/ERICDocs/data/ericdocs2sql/\\content\_storage\_01/0000019b/80/1b/94/16.pdf`

[119] Rosales, C. (2001). Comunicación didáctica en la universidad. En García-Valcárcel (Coord.) *Didáctica universitaria*. Madrid: La Muralla, S. A. pp. 113-152.

[120] Russ, J. (1999). *Léxico de filosofia: los conceptos y los filósofos en sus citas*. Madrid: Ediciones Akal, S. A.

[121] Salazar, S. (2005). El conocimiento pedagógico del contenido como categoría de estudio de la formación docente. *Revista Electrónica "Antualidades en Investigación Educativa"*. 5(2). pp. 1-18. Recuperado el 01 de agosto de 2007 de `http://redalyc.uaemex.mx/redalyc/pdf/447/44750211.pdf`

[122] Santos, M. (1993). La investigación, sendero y destino de la formación del profesorado universitario. En Lázaro, L. (Ed.). *Formación pedagógica del profesorado universitario y calidad de la educación*. Valencia: Servei de Formació Permanent. Universidad de Valencia y CIDE. pp. 177-191.

[123] Savery, J. y Duffy, T. (1995). Problem based learning: An instructional model and its constructivist framework. *Educational Technology*. 35. pp. 31-37.

[124] Savin-Baden, M. (2003). Disciplinary differences or modes of curriculum practice? Who promised to deliver what in problem-based learning? *Biochemistry and Molecular Biology Education*. 31(5). pp. 338-343. Recuperado el 15 de abril de 2006 de `http://www3.interscience.wiley.com/cgi-bin/fulltext/113449369/PDFSTART`

[125] Schoenfeld, A. (1985). *Mathematical Problem Solving*. London: Academic Press.

[126] Schommer-Aikins, M.; Duell, O. y Barker, S. (2003). Epistemological beliefs across domains using biglan's classification of academic disciplines. *Research in Higher Education*. 44(3) pp. 347-366.

[127] Shulman, L. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational Researcher*. 15(2). pp. 4-14.

[128] Shulman, L. (2005). Conocimiento y enseñanza: fundamentos de la nueva reforma (Knowledge and teaching: Foundations of the new reform). *Revista de currículum y formación del profesorado*. Traducción realizada por Alberto Ide y revisado por Antonio Bolívar. 9(2). pp. 1-30.

[129] Smith, C. (1995). Features Section: problem based-learning. *Biochemistry and Molecular Biology Education*. 23(3). pp. 149-152.

[130] Sonmez, D. y Lee, H. (2003). Problem-based learning in science. *Digest of Educational Resources Information Center*. EDO-SE-03-04. Recuperado el 04 de febrero de 2006 de `http://www.stemworks.org/digests/EDO-SE-03-04.pdf`

[131] Stake, R. E. (1999). *Investigación con estudio de casos*. 2ª ed. Madrid: Ediciones Morata.

[132] Talanquer, V. (2004). Formación docente: ¿Qué conocimiento distingue a los buenos maestros de química? *Educación Química*. 15(1). pp. 1-7. Recuperado el 25 de julio de 2007 de `http://www.chem.arizona.edu/tpp/edquim04.pdf`

[133] Tapia, J. (2001). Motivación y estrategias de aprendizaje. Principios para su mejora en alumnos universitarios. En García-Valcárcel, A. (Coord.) *Didáctica universitaria*. Madrid: La Muralla, S. A. pp. 79-111.

[134] Thompson, A. (1992). Teachers' beliefs and conceptions: a synthesis of the research. En D. A. Grouws (Ed.) *International handbook of research on mathematics teaching and learning*. New York: Macmillan Pub. Com. pp. 127-146.

[135] Veal, W. y MaKinster, J. (1999). Pedagogical content knowledge taxonomies. *Electronic Journal of Science Education*. 3(4). pp. 1-18. Recuperado el 25 de julio de 2007 de `http://ejse.southwestern.edu/original\%20site/manuscripts/v3n4/articles/art02\_veal/veal.html`

[136] Vila, A. y Callejo, M. (2004). *Matemáticas para aprender a pensar. El papel de las creencias en la resolución de problemas*. Madrid: Narcea, S. A.

[137] Visauta, B. (1989). *Técnicas de investigación social*. Barcelona: Promociones y Publicaciones Universitarias, S. A.

[138] Voet, J. (2001). Content and process in biochemistry. *Biochemistry and Molecular Biology Education*. 29(4). pp. 136.

[139] Whipkey, K.; Whipkey, M. y Conway, G. (1987). *El poder de las matemáticas, aplicaciones en administración y ciencias sociales*. 2ª ed. México: Limusa.

[140] White, H. (1993). Research literature as a source of problems, *Biochemestry Education*. 21. pp. 205–207.

[141] White, H. (2001). PBL curricula versus PBL courses. *Biochemistry and Molecular Biology Education*. 29. pp. 24-25. Recuperado el 27 de junio de 2006 de `http://www.bambed.org/cgi/reprint/29/24.pdf`

[142] White, H. (2004a). Problem-based learning and undergraduate research. *Biochemistry and Molecular Biology Education*. 32(1). p. 49. Recuperado el 15 de abril de 2006 de `http://www.bambed.org/cgi/reprint/32/1/49.pdf`

[143] White, H. (2004b). Constructivist pedagogy. *Biochemistry and Molecular Biology Education*. 32(2). p. 120. Recuperado el 15 de abril de 2006 de `http://www.bambed.org/cgi/reprint/32/2/120.pdf`

[144] White, H. (2004c). Math literacy. *Biochemistry and Molecular Biology Education*. 32(6). pp. 410-411. Recuperado el 15 de abril de 2006 de `http://www.bambed.org/cgi/reprint/32/6/410.pdf`

[145] White, H. (2005). Commentary: Problems without answers. *Biochemistry and Molecular Biology Education*. 33(6). pp. 431-432. Recuperado el 15 de abril de 2006 de `http://www3.interscience.wiley.com/cgi-bin/fulltext/113449095/PDFSTART`

[146] White, H. (2006). Commentary: Questioning for deeper understanding in problem-based learning. *Biochemistry and Molecular Biology Education*. 34(3). p. 227. Recuperado el 22 de junio de 2006 de `http://www3.interscience.wiley.com/cgi-bin/fulltext/113449024/PDFSTART`

[147] Wonnacott, T. (1983). *Aplicaciones del cálculo diferencial e integral*. 1^a ed. México: Limusa.

[148] Zabalza, M. (2001). Evaluación de los aprendizajes en la universidad. En García-Valcárcel (Coord.) *Didáctica universitaria*. Madrid: La Muralla, S. A. pp. 261-291.

[149] Zabalza, M. (2003). *Competencias docentes del profesorado universitario. Calidad y desarrollo profesional*. Madrid: Narcea.

Apéndices

Apéndice A

Sesiones del seminario (Grupo A)

A.1. Actividad 1

Mediante la siguiente actividad se pretende introducir el concepto de la derivada a través del desarrollo de dos problemas, el primero es un ejemplo clásico de la física y el segundo es un problema relacionado con el pago de impuestos, es decir, vinculado con las ciencias económicas. En este sentido, además de introducir el concepto de derivada, se intenta que el estudiante conozca o se aproxime a dos interpretaciones de la derivada. Hay que tener en cuenta el conocimiento y las herramientas matemáticas adquiridas por los estudiantes hasta este momento.

Tasas de Variación y Pendientes

Estudiamos a continuación la introducción de la derivada a través de la función cuadrática $f(x) = x^2$.

A.1.1. Velocidad Instantánea[1]

Suponga que la función de posición de un objeto que se mueve a lo largo de la recta real está dada por $s = f(t) = 8t^2 + 10$, donde t está en segundos y s en metros.

Preguntas: Las siguientes preguntas están relacionadas con los contenidos físico y matemático en general.

[1] Tomado de Haeussler y Paul (1997)

Pregunta 1: Calcular la posición del objeto cuando $t = 5{,}0$; $t = 5{,}001$; $t = 5{,}01$; $t = 5{,}1$; $t = 5{,}2$; $t = 5{,}3$; $t = 5{,}4$; $t = 5{,}5$; $t = 6{,}0$; $t = 9{,}0$; $t = 12{,}0$ y $t = 15{,}0$. A medida que avanza el tiempo, ¿qué puede decir de la posición del objeto?

Respuesta de P1: En la segunda fila de la **Tabla A.1** se pueden observar las distintas posiciones del objeto para distintos instantes de tiempo. Respecto a la segunda parte de la pregunta, a medida que avanza el tiempo la distancia recorrida es mayor, además la **Tabla A.1** *nos hace pensar que el objeto nunca se detiene*.

Discusión: Hasta ahora, el estudiante está familiarizado con el tema de funciones y en este sentido, no debería tener inconveniente para realizar esta tarea en la que se plantea un **estudio muy general de incrementos**.

Para este momento, en el que queremos introducir el concepto de derivada y una interpretación de la misma, ¿consideran ustedes que, desde el punto de vista metodológico, éste es un primer paso "acertado" para introducir el concepto de derivada, o por el contrario, resulta una tarea inapropiada y sin mayor valor cognitivo?

[Manuel]: Bueno, yo pienso que sí, yo pienso que se puede enfocar desde este punto de vista.

[Ramón]: ¿Ellos tienen previamente el concepto de límite?

[Moderador]: Sí.

[Ramón]: Se supone que lo tienen.

[Moderador]: Sí, se supone que si seguimos los programas oficiales ya está cubierto el concepto de límite.

[Ramón]: Bueno... bien, yo estaría de acuerdo, yo recalcaría la idea del concepto de límite. El estudiante vería nuevamente la idea de límite, lo comprendería en la idea de cociente incremental, pero hay una cosa que a mi siempre, tanto como estudiante como profesor, los libros no..., es buena idea partir de este concepto, pero siempre he tenido la sensación de que falta como un detallito de... este bueno; ok, tenemos el cociente incremental pero al final cuando uno toma toda esa serie de números y hace estas tablas, que es lo que tú acabas de preguntar; o sea, qué relación tiene ese resultado final con esa sucesión, que no sea precisamente a través del concepto de límite puramente matemático sino lo que tú en este caso pretendes... motivar a partir de un contexto de la economía. A mi siempre ese detallito me ha parecido que no está claramente expuesto en algún libro, no se si me estoy explicando bien...

[Moderador]: ¿Y cuál es tu opinión al respecto Pedro?

[Pedro]: Bueno, yo cuando he dado este tema arranco primero con definición de incremento, de cambios, primero con el cambio de una variable independiente, después hablo con el cambio de la variable dependiente y después;

tanto analíticamente como gráficamente, estoy diciendo mi experiencia, después les hablo de lo que es el cambio de $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, de acuerdo. Y después doy un ejemplo particular, como es aplicado a la economía, puedo hablarles de costo, ingreso y buscar la tasa de cambio promedio. Una vez que el estudiante sepa ya eso analíticamente y sepa interpretarlo en términos económicos, entonces sí introduzco el límite, el límite del cociente incremental cuando Δx tiende a 0, después le hago un ejemplo particular del costo promedio. Entonces, ahí les digo qué significa primero el costo promedio sin el límite, por ejemplo, costo promedio si se incrementa la producción de 20 a 120, luego lo hacemos con el límite y les doy la explicación tomando el límite; es decir, les hablo del costo promedio asociado al límite cuando el incremento del costo de la producción es muy pequeño. Bueno, así es como yo lo hago.

Bueno, aquí la observación que te quería hacer es la siguiente: aquí la velocidad instantánea no es la mejor idea, sobre todo porque tú dices que es para estudiantes de economía, sugiero que el ejemplo más adecuado lo podrías poner de costo, ingreso, producción, ¿de acuerdo?, porque ya ellos estarán familiarizados con conceptos económicos, ya que son estudiantes de economía, de lo contrario tendrás que recordarles qué es velocidad, qué es el espacio recorrido, ese tipo de cosas... Aunque yo estoy de acuerdo que el mejor ejemplo que hay para que el estudiante entienda es el de velocidad instantánea, la velocidad que uno ve en el velocímetro de un auto, pero en economía tú tienes que atacar esos conceptos [los de economía].

[Moderador]: ¿Y por qué consideras que la velocidad instantánea es el ejemplo ideal?

[Pedro]: Tal vez porque es el ejemplo que aparece de primero en todos los libros de cálculo, incluso en los de aplicaciones a la economía y porque todas las personas estamos familiarizadas con el concepto de velocidad.

[Ramón]: Yo tengo una pregunta, ¿este ejemplo es porque tú lo piensas introducir en una clase de economía o porque...?

[Moderador]: No, yo lo que pretendo es discutir con ustedes y escuchar sus opiniones al respecto.

[Ramón]: Porque la experiencia que yo he tenido en un par de ocasiones es que tú le empiezas a hablar de física y ellos manifiestan un rechazo total, en cambio cuando se hace como acaba de explicar Pedro, ellos se emocionan...

[Manuel]: Sin embargo, la mayoría de los libros de aplicaciones usan las dos motivaciones, tanto el ejemplo físico como el económico, entonces algo tiene que tomarse en cuenta eso, ya que si los libros lo utilizan debe ser por algo. No obstante, estoy de acuerdo con Ramón, cuando a estos muchachos se les comienza a hablar de física, de una vez se quejan y empiezan a mirar para los lados.

[Pedro]: Y más si es el primer día de clases, allí el rechazo es mayor.

Pregunta 2: ¿En cuánto varía la posición o cuánto se ha desplazado el objeto cuando el tiempo transcurre de 5.0 a 15.0 segundos; de 5.0 a 12.0 segundos; de 5.0 a 9.0 segundos; de 5.0 a 6.0 segundos; de 5.0 a 5.5 segundos, de 5.0 a 5.4 segundos, de 5.0 a 5.3 segundos, de 5.0 a 5.2 segundos, de 5.0 a 5.1 segundos, de 5.0 a 5.01 segundos y de 5.0 a 5.001? ¿Qué observa en cada uno de los desplazamientos estudiados?

Respuesta de P2: En la segunda columna de la **Tabla A.2** podemos ver cómo varía la posición del objeto cuando éste se ha desplazado en distintos intervalos de tiempos.

Discusión: En la tarea anterior se estudió la posición del objeto para distintos instantes de tiempo, ahora estudiamos variaciones de la posición para intervalos de tiempo particulares; es decir, qué *variaciones* experimenta la posición del objeto cuando el tiempo cambia en distintos intervalos.

En una experiencia con estudiantes con los que realicé esta actividad, ellos mostraron dificultades para visualizar las distintas variaciones, ¿consideran ustedes que esta tarea promueve, de alguna manera, el concepto de incrementos de una variable? ¿De qué manera? ¿Cómo?

[Manuel]: A mi me parece una buena tarea porque aquí se nota este..., cuando ellos ven los distintos cambios en el intervalo, ellos van a ver los distintos cambios que ocurren en la velocidad promedio, entonces esos cambios van a estar justificados por el proceso de derivada.

[Ramón]: Sí porque muchas veces uno explica el concepto y por falta de tiempo no desarrolla un ejemplo así como estos, esto ya es algo concreto y los obliga como a ver o a reforzar ese concepto, al menos a manipular ese concepto.

[Pedro]: Bueno..., yo estoy de acuerdo con una actividad como esta pero que sea con una función aplicada a la economía.

[Ramón]: Bueno, yo sigo en la misma línea que Pedro...

[Manuel]: Yo también, yo también.

[Ramón]: Porque ponerle un ejemplo de física a los estudiantes de economía, según mi experiencia, eso no ha funcionado.

Pregunta 3: Calcular la velocidad media en los intervalos de tiempo:
$[5{,}0; 15{,}0]$, $[5{,}0; 12{,}0]$, $[5{,}0; 9{,}0]$, $[5{,}0; 6{,}0]$, $[5{,}0; 5{,}5]$, $[5{,}0; 5{,}4]$, $[5{,}0; 5{,}3]$, $[5{,}0; 5{,}2]$, $[5{,}0; 5{,}1]$; $[5{,}0; 5{,}01]$; $[5{,}0; 5{,}001]$.

Respuesta de P3: En la última columna de la **Tabla A.2** se aprecian las distintas velocidades promedios para los intervalos de tiempos indicados.

Discusión: Tal como se muestra en la pregunta, lo que se busca en este caso, es que el estudiante observe y discuta sobre las distintas velocidades promedio y por supuesto, que el profesor discuta con ellos, de modo que surja una primera aproximación **empírica** y con **tratamiento numérico** del concepto de derivada. Algo que no se contempla en los programas oficiales de cálculo diferencial.

En algunas investigaciones sobre el tema, existen opiniones encontradas a la hora de introducir un concepto matemático; hay quienes se inclinan por dar la definición con todo el rigor matemático que ello supone y posteriormente realizar una explicación pormenorizada de ésta (la definición), mientras que hay profesores que apuestan por una construcción detallada del concepto.

¿Consideran adecuado partir de una situación como ésta para aproximarnos al concepto de derivada o conviene más; introducir, de entrada, el concepto de derivada de manera formal y tradicional; es decir, partiendo de la idea formal de límite? Se supone que el estudiante conoce los conceptos de función, límite y continuidad.

[Pedro]: Tiene que haber la motivación, por supuesto, para llegar a la definición, eso está bien, yo lo considero adecuado.

[Moderador]: Sí, pero digamos, aquí hay una motivación particularmente numérica, pero hay quienes se inclinan por una motivación geométrica, etc. Entonces, ¿ustedes se inclinan por una aproximación de esta naturaleza u otra?

[Pedro]: ¿Y por qué no se puede hacer las dos cosas...?

[Ramón]: Yo he probado con la motivación o aproximación, vamos a llamarla geométrica. Entiendo que es una curva, una cuerda... eso con los estudiantes de economía no termina de agradarle, lo intenté un par de veces y la impresión que me dio es que ellos como que no le ven mucho sentido. Ahora, como ellos cargan una calculadora para arriba y para abajo, ellos están más acostumbrados a realizar cálculos, me parece que esta aproximación es mejor, siempre y cuando al final de el estudio de esta motivación o aproximación, no sé cuál es el término adecuado..., siempre y cuando se llegue al concepto preciso y real y se contraste ese concepto con esa aproximación previa.

[Manuel]: En mi caso, te puedo decir que yo cuando trabajo la parte de límite es cuando más trabajo esta parte o este aspecto numérico, yo no les hablo ni siquiera de intervalos abiertos porque eso los distrae, más que todo le construyo tablas; es decir, elijo algunas funciones y le construyo las tablas. Ahora, como la derivada es un límite muy particular, entonces estaría un poco en concordancia con lo que yo he dado, pero yo lo usé y lo uso más que todo en la parte de límite; pero viéndolo bien, me parece que se puede implementar en el tema de la derivada, y me parece muy buena idea porque como tú dices [señalando al profesor Ramón] en la parte geométrica ellos presentan mucha dificultad. Claro, uno en algún momento terminará dándole la interpretación geométrica, pero una vez que hayan entendido el concepto de límite para que puedan asimilar la parte geométrica.

Pregunta 4: La velocidad media del objeto para un intervalo de tiempo $[t_0; t]$ y con $f(t_0) < f(t)$ viene dada por

$$\mathcal{V}(t) = \frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0} = \frac{\text{Desplazamiento desde } f(t_0) \text{ a } f(t)}{\text{Tiempo transcurrido desde } t_0 \text{ a } t}$$

Para el caso particular en el cual el objeto parte con $t_0 = 0$ y su posición es $s = 0$, la velocidad media del objeto se reduce a $\mathcal{V}(t) = \frac{f(t)}{t}$.

Pregunta 4.1: Construir una tabla y calcular $\mathcal{V}(t)$ para $t = 5{,}001$; $t = 5{,}01$; $t = 5{,}1$; $t = 5{,}2$; $t = 5{,}3$; $t = 5{,}4$; $t = 5{,}5$; $t = 6{,}0$; $t = 9{,}0$; $t = 12{,}0$ y $t = 15{,}0$, suponiendo que $t_0 = 5,0$.

Respuesta de P4.1: La tercera columna de la **Tabla A.2** coincide con $\mathcal{V}(t)$, sólo que en el orden inverso.

Pregunta 4.2: Obtener una fórmula para $\mathcal{V}(t)$ y verificarla con la respuesta de 1.

Respuesta de P4.2: En este caso la fórmula que se obtiene para la velocidad promedio es $\mathcal{V}(t) = \frac{8t^2-200}{t-5}$ y coincide con la respuesta del ítem anterior.

Discusión sobre P4.1 y P4.2: El objetivo que se persigue con estas dos tareas es que el estudiante al invertir los datos de la tabla, tenga una mejor visualización de las velocidades promedios para distintos intervalos y así tener mayor dominio y profundidad del problema.

Desde el punto de vista metodológico, ¿creen ustedes que esto ayuda al estudiante a darse una idea de velocidad instantánea y por ende, a llegar al concepto e interpretación de la derivada?

[Ramón]: La verdad es que es la primera vez que veo que primero se construye la tabla con incrementos, o sea aumentando, como está aquí arriba [refiriéndose a la tabla] y luego se colocan los mismos valores pero al revés, en forma decreciente. Siempre lo he visto de la segunda manera, pero se necesita la intervención del profesor cuando se pase de la primera tabla a la segunda, precisamente para destacar la idea de que lo que se está es disminuyendo los incrementos.

[Moderador]: Es que justamente Ramón, lo que se busca con esta idea es que el profesor sirva de mediador o mejor dicho, de director de debate, pero que sea el estudiante o los estudiantes, los que discutan y pregunten entre ellos sobre el problema que está en discusión. Alejándonos en todo caso de una clase tradicional o como la sugieren nuestros actuales programas.

[Ramón]: Bueno, yo he hecho una experiencia como te lo he dicho, lo que ha sucedido es que en ocasiones hay que hacerle una serie de preguntas para que se llegue, en este caso particular, se llegue a la visualización de que el incremento no es creciente sino decreciente. Entonces tratar como tú nos dices, tratar de que el profesor motive al estudiante a pensar sobre eso; pero si de alguna manera y después de cierto tiempo no surge ninguna inquietud por parte del estudiante, al profesor no le va a quedar más remedio que destacar que lo que se quiere es que el estudiante visualice los incrementos.

[Manuel]: ¿Cuál es esa tabla de la pregunta 4, disculpen?

[Moderador]: Es la tabla que está al final. Concretamente la tercera columna. Y tu opinión Pedro al respecto cuál es. ¿Crees tú que se gana algo a través de la visualización?

[Pedro]: Como no, pero yo me limitaría a la segunda tabla nada más porque estoy hablando del incremento de la variable independiente positiva y más adelante puedo hacer el incremento negativo; porque cuál es la idea, que ellos conozcan la definición de derivada y bueno, en el caso de economía... después le vamos a dar unas reglas porque no vamos a calcular todas la derivadas por definición. Entonces yo pienso que hay que hacer mucho hincapié sobre la definición o sobre la aproximación a la definición, yo pienso que es más interesante que de una forma tradicional; pienso yo ¡cuidado!, sobre lo que es costo marginal, todo lo que es análisis marginal. No sé si me estoy adelantando.

[Moderador]: Un poco, pero no hay problema.

[Ramón]: Yo hablo más bien en el sentido de que aprendan el concepto, yo insisto que me parece interesante porque se está procediendo por contraste ¡no!, ellos primero ven que se está incrementando y entonces ahora vamos a lo que realmente interesa del concepto que es el incremento. Entonces, desde el punto de vista económico de tiempo sería mejor, por supuesto que sería mejor la segunda tabla, pero si nos centramos en que el estudiante tiene que aprender, uno de los recursos que uno puede considerar es el contraste, por lo tanto me parece interesante una actividad como esta y que se debería intentar ponerla en práctica de forma exploratoria.

[Manuel]: Sí, yo también pienso que la parte... porque en realidad yo estoy viendo esto como una motivación al estudiante y se podría intentar con otro ejemplo o con otra motivación, claro que eso depende del profesor si utiliza ésta de la que tú nos hablas u otra o ambas.

Pregunta 4.3: Cómo es el comportamiento de la velocidad media, $\mathcal{V}(t)$, en cada uno de los instantes de tiempo respecto a la velocidad instantánea $\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \lim_{h \to 0} \frac{f(t_0+h)-f(t_0)}{h}$ para $t_0 = 5,0$?

Respuesta de P4.3: La velocidad media $\mathcal{V}(t)$ en cualquiera de los casos estudiados es siempre superior a

$$\begin{aligned}
\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} &= \lim_{h\to 0} \frac{f(5+h)-f(5)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{8(5+h)^2+10-210}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{80h}{h} \\
&= 80,00
\end{aligned}$$

Discusión: *De esta situación, ¿qué discusión les parece a ustedes sugerente que se debe plantear a los estudiantes relacionada con esta tarea?*

[Ramón]: Esta pregunta tiene mucho que ver con lo que yo dije al principio, que es precisamente la... que los textos carecen de esa relación que existe..., de explicar bien esa relación que existe entre la velocidad media y la velocidad instantánea. Ahora bien, yo en lo particular no sabría qué responder.

[Moderador]: Pero la pregunta está más bien enfocada en lo siguiente: ¿conviene generar una discusión con los estudiantes para diferenciar las dos velocidades?

[Pedro]: Claro, bastante...

[Ramón]: Claro, pero repito, a mi siempre me ha quedado esa sensación de que en los textos realmente... Bueno, yo no le encuentro mucho sentido a discutir sobre el par de velocidades, de velocidad media y velocidad instantánea, si no se explica la relación que hay entre las dos. Pero volviendo a tu pregunta así como están las dos, yo creo que es pertinente.

[Manuel]: Además, para que surja el concepto de derivada tu tienes que establecer la diferencia porque allí es donde radica el problema; en mi opinión, de velocidad instantánea y velocidad promedio.

[Moderador]: ¿Qué ibas a decir tú, Pedro?

[Pedro]: Que estoy totalmente de acuerdo en eso de distinguir, por ejemplo, el costo promedio. Suponte si el incremento de producción pasa de 30 a 100 y distinguir en el costo promedio si el incremento de la producción es muy pequeño, eso es muy importante también.

Pregunta 4.4: Esbozar una gráfica aproximada de $f(t)$, para $t \in [4{,}0, 16{,}0]$, y trazar cada una de las rectas que pasan por $(5, f(5))$ y los puntos $(15, f(15))$, $(12, f(12))$, $(9, f(9))$, $(6, f(6))$, $(5{,}5, f(5{,}5))$, $(5{,}4, f(5{,}4))$,

$(5{,}3, f(5{,}3))$, $(5{,}2, f(5{,}2))$, $(5{,}1, f(5{,}1))$, $(5{,}01, f(5{,}01))$ y $(5{,}001, f(5{,}001))$, respectivamente. Discutir sobre la interpretación geométrica y física que sugiere esta tarea, donde $t_0 = 5$.

Respuesta de P4.4: Las gráficas que se muestran en las **Figuras A.1** y **A.2** ilustran lo que se pide en esta tarea y se aprecia geométricamente que la pendiente de la recta que pasa por los puntos $(5, f(5))$ y $(5{,}001, f(5{,}001))$, se aproximan a la velocidad instantánea, $\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t}$, de la tarea anterior y toca a la curva, aparentemente, en un solo punto (recta tangente), mientras que las otras rectas tocan a la curva en más de un punto (rectas secantes).

Discusión: Finalmente, con esta tarea, se muestran dos interpretaciones de la derivada de manera simultánea con un tratamiento numérico y dejando a un lado el rigor del límite. Esta forma de introducir la derivada resulta carente de todo rigor para muchos profesores y en distintos artículos relacionados con la didáctica se plantean discusiones sobre este hecho.

¿Cuál es la posición de ustedes sobre los enfoques (1) Analítico-Algebraico, (2) Geométrico y (3) Numérico para introducir el concepto de derivada, es decir, supone algún tipo de dificultad para el estudiante hablar de dos interpretaciones de un mismo hecho, cuál es su experiencia en este sentido?

[Manuel]: Yo muchas veces implemento esta parte de las pendientes, yo hablo más que todo de las pendientes, en lugar de rectas secantes hablo más bien de las pendientes de estas rectas que se van acercando a una pendiente muy particular, entonces sí muestro los gráficos con las distintas rectas secantes, con las distintas pendientes; bueno yo creo que es así, y hago cálculo. A mi me parece bien, no sé de dónde sacas tú que hay gente que no le parece bien o adecuado proceder de esta manera.

[Pedro]: Viendo esto, yo creo que es bueno que antes de hablar de una recta secante decir que la tasa promedio representa la tangente de la recta secante. Porque tú la introduces así, pienso yo. Ahora bien, yo pienso que hay que introducirlo como tú lo estás haciendo y gráficamente, entonces cuando tú hables de $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, entonces el cambio promedio es la pendiente de la recta secante. Ahora, aquí hay un punto que no sé si es que no lo entiendo o qué es lo que pasa: "*toca a la recta en un solo punto [recta tangente], mientras que las otras rectas tocan a la curva en más de un punto*", hay que tener mucho cuidado aquí ya que la recta tangente se define como una aproximación cuando el Δx se aproxima a 0 y no la definición de recta tangente que uno conoce y que el estudiante conoce para ese momento, que la recta toca a la curva en un solo punto. Entonces, insisto que se debe tener mucho cuidado, sobre todo si este material tiene fines didácticos, porque uno como matemático entiende a lo que tú te refieres, pero los estudiantes no tienen por qué entenderlo; es más, dudo que lo vean de entrada. Por supuesto que esto no es más que una observación o una curiosidad de mi parte.

[Ramón]: Bueno, yo tengo la misma inquietud que Manuel, a mi me parece este proceso muy bien, siempre y cuando se llegue al concepto formal de derivada e insistir, cuando ya se tiene ese grado de abstracción más alto, hacer las comparaciones pertinentes mediante este ejemplo numérico y los gráficos que están acá. En cuanto a si he hecho experiencias similares; sí pero en el sentido inverso a como tú lo mencionaste al principio, es decir, parto del concepto, tomo el cociente incremental, no le doy ningunos valores precisos sino que hago la gráfica de un modelo de una función muy simple, como está acá, ni siquiera tomo un valor preciso como está acá ($t_0 = 5$).

Estoy hablando de economía pero de una función en general, no me estoy refiriendo a velocidad o a cualquier otra variable económica. Así, fijo un t_0 arbitrario sobre la recta, eso sí, digo que $h > 0$ y sobre la misma gráfica voy estableciendo las comparaciones entre la parte algebraica y las gráficas pero sin darle valores precisos y viendo qué es lo que ocurre, qué es lo que yo veo que ocurre sobre la gráfica cuando voy tomando valores de h cada vez más pequeños, pero siempre sobre el dibujo. Ahora, yo no sé si puedo decir otras cosas más sobre lo que dijo Pedro. El problema cuando uno enseña es..., hay casos patológicos, si uno va a mostrar un ejemplo uno tiene que seguir un modelo simple, claro que lo puede tocar en un punto o lo puede tocar en una infinidad, pero el propósito; me parece a mi en este momento, no es tanto en la precisión o en el rigor sino, precisamente, un proceso para poder llegar a ese rigor. Una vez que uno ya logró pasar al estudiante por ese proceso y uno podría suponer que ya adquirió el concepto y lo puede manejar con cierta facilidad, si fuera un estudiante de matemáticas uno se pondría a trabajar con curvas donde la tangente puede tocar a la curva en una infinidad de puntos, pero yo siempre he creído que las matemáticas hay que enseñarlas según el escenario.

[Moderador]: ¿Esta situación permite alcanzar los objetivos del curso, por qué?

[Ramón]: Antes de responder, la pregunta mía sería la siguiente, porque la experiencia que yo conté hace poco me tocó como una hora, entre otras cosas, porque enseñar las cosas de esa manera requiere su tiempo y segundo hay que refrescarle al estudiante lo que es la abscisa, lo que es la ordenada. Entonces la pregunta mía es: ¿una sola vez, en una clase?, ¿no se le dejaría al estudiante ejemplos similares como para que ellos...?

[Moderador]: No, recuerda que aunque nosotros tardemos aquí una hora, el tiempo con el estudiante sería otro.

[Ramón]: Preciso mi pregunta. Independientemente del tiempo que esto me lleve, ¿la idea es trabajar esto una sola vez y listo?

[Moderador]: Les aclaro la pregunta, ¿contribuye esta actividad a alcanzar los objetivos?

[Ramón]: Por supuesto que sí. Aunque quedaría por ver la labor del estudiante en la actividad.

[Manuel]: También se debe aclarar cuáles son esos objetivos, si es sólo calcular derivada o entender el concepto y sus interpretaciones.

[Moderador]: Tomen en cuenta que hasta el momento yo no les he hablado de cálculo de derivada, solamente de introducción del concepto.

[Manuel]: Entonces sí contribuye.

[Pedro]: Claro que contribuye pero sería mejor plantearle ejemplos económicos.

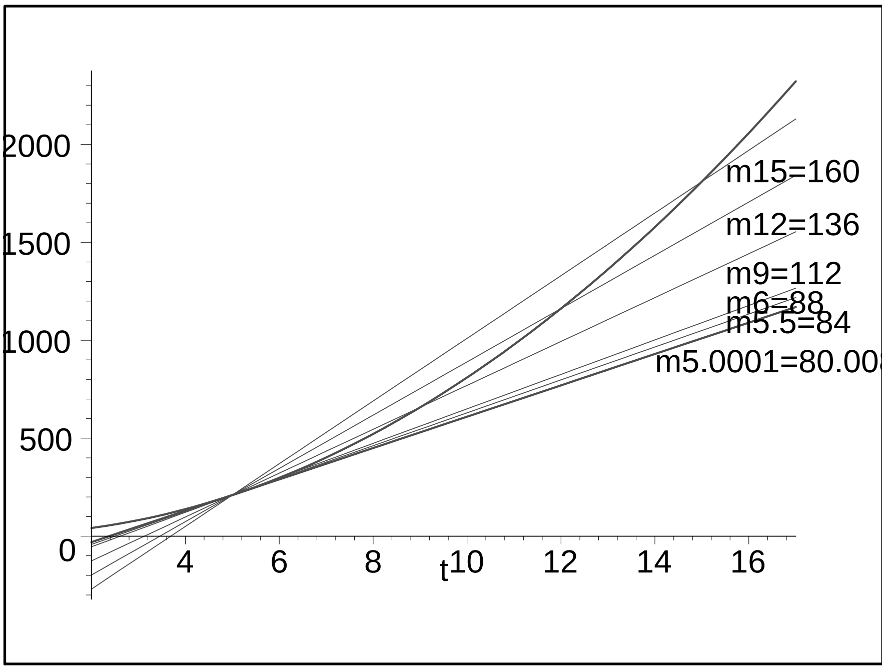


Figura A.1: Aproximación de la velocidad instantánea

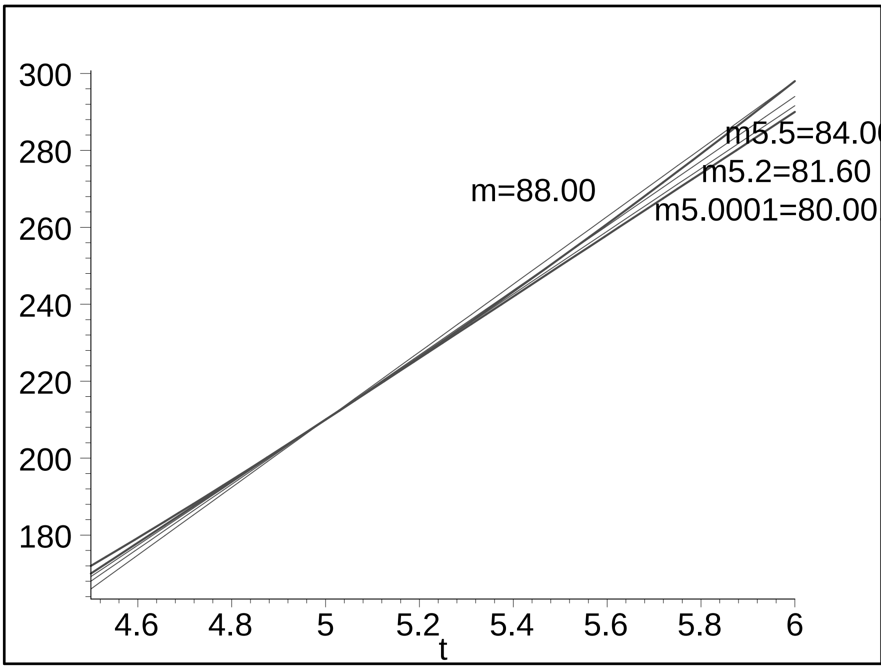


Figura A.2: Una aproximación más fina

Tiempo t	5.0	5.001	5.01	5.1	5.2	5.3	5.4	5.5	6.0	9.0	12.0	15.0
Pos $f(t)$	210	210.080008	210.08008	218.08	226.32	234.72	243.28	252	298	658	1162	1810

Cuadro A.1: Posición del objeto para un instante t

Intervalo de tiempo	Variación de la posición	Velocidad Promedio
[5,0; 15,0]	$f(15{,}0) - f(5{,}0) = 1600$	$\frac{f(15{,}0)-f(5{,}0)}{15{,}0-5{,}0} = 160$
[5,0; 12,0]	$f(12{,}0) - f(5{,}0) = 952$	$\frac{f(12{,}0)-f(5{,}0)}{12{,}0-5{,}0} = 136$
[5,0; 9,0]	$f(9{,}0) - f(5{,}0) = 448$	$\frac{f(9{,}0)-f(5{,}0)}{9{,}0-5{,}0} = 112$
[5,0; 6,0]	$f(6{,}0) - f(5{,}0) = 88$	$\frac{f(6{,}0)-f(5{,}0)}{6{,}0-5{,}0} = 88$
[5,0; 5,5]	$f(5{,}5) - f(5{,}0) = 42$	$\frac{f(5{,}5)-f(5{,}0)}{5{,}5-5{,}0} = 84$
[5,0; 5,4]	$f(5{,}4) - f(5{,}0) = 33{,}28$	$\frac{f(5{,}4)-f(5{,}0)}{5{,}4-5{,}0} = 83{,}2$
[5,0; 5,3]	$f(5{,}3) - f(5{,}0) = 24{,}72$	$\frac{f(5{,}3)-f(5{,}0)}{5{,}3-5{,}0} = 82{,}4$
[5,0; 5,2]	$f(5{,}2) - f(5{,}0) = 16{,}32$	$\frac{f(5{,}2)-f(5{,}0)}{5{,}2-5{,}0} = 81{,}6$
[5,0; 5,1]	$f(5{,}1) - f(5{,}0) = 8{,}08$	$\frac{f(5{,}1)-f(5{,}0)}{5{,}1-5{,}0} = 80{,}8$
[5,0; 5,01]	$f(5{,}01) - f(5{,}0) = 0{,}8008$	$\frac{f(5{,}01)-f(5{,}0)}{5{,}01-5{,}0} = 80{,}08$
[5,0; 5,001]	$f(5{,}001) - f(5{,}0) = 0{,}080008$	$\frac{f(5{,}001)-f(5{,}0)}{5{,}001-5{,}0} = 80{,}008$

Cuadro A.2: Variación de la posición y velocidad promedio en distintos intervalos

A.1.2. El Impuesto Marginal[2]

Supongamos que una persona gana \$6000 al año. Ésta tiene la opción de trabajar más horas, pero para ver si le convendría, primero quisiera determinar los **efectos del impuesto en los ingresos**. Para simplificar las cosas, supongamos que el impuesto que debe pagar viene dado por un polinomio de segundo grado, $y = f(x) = 0{,}04x^2$, donde

$x =$ ingresos gravables (expresado en unidades de \$1.000)
$y = f(x) =$ impuesto (expresado en unidades de \$1.000).

A partir de esta función se discutirán una serie de preguntas, pero antes se le solicita al alumno que calcule el impuesto para ingresos anuales de \$1.000 hasta unos \$12.000, por ejemplo. Recuerde que x está expresada en unidades de \$1.000.

Pregunta 1: En cuánto varía el impuesto que ha de pagar cuando el ingreso del trabajador cambia de \$6.000 a \$12.000; de \$6.000 a \$11.000; de \$6.000 a \$10.000; de \$6.000 a \$9.000; de \$6.000 a \$8.000 y de \$6.000 a \$7.000. ¿Qué observa en cada uno de los cambios de ingreso al año?

Respuesta de P1: En la segunda columna de la **Tabla A.3** podemos ver cómo varía el impuesto a pagar en función de los incrementos que sufra el sueldo del trabajador más allá de los \$6.000 que gana actualmente.

Discusión:Al inicio de esta actividad y antes de entrar a realizar las tareas correspondientes, se le pidió al estudiante que calculara el impuesto a pagar para distintos ingresos, ahora estudiamos variaciones del impuesto para intervalos de ingresos particulares; es decir, qué variaciones experimenta el impuesto del trabajador cuando obtiene ingresos superiores a los \$6.000 que actualmente gana.

¿Consideran ustedes que esta tarea promueve, de alguna manera, el concepto de incrementos de una variable? ¿De qué manera? ¿Cómo?

[Pedro]: Bueno, como te dije anteriormente con el ejemplo anterior, que tenía que ser aplicado a la economía, entonces con más razón. Hace rato te dije que sí, pero que tenía que ser aplicada. Entonces no contradigo lo que dije anteriormente.

[Manuel]: Yo pienso que este ejemplo, a diferencia del anterior, lo que hace es que estimula más al estudiante, porque éste está incluyendo temas de su interés, relacionados con su área de estudio. Además, como hecho curioso, aquí ya se habla de dinero y al estudiante éso le gusta.

[2]Tomado de Wonnacott (1983)

[Ramón]: Yo insisto en lo que dije al inicio, yo creo que se debe dejar de lado, al menos en los cursos de aquí de la Facultad de Economía.

[Pedro]: Exactamente, eso es correcto.

[Ramón]: Aunque yo estoy de acuerdo que esto contribuye a la formación y todos los argumentos que dan los profesores, me refiero al ejemplo anterior de velocidad instantánea, pero yo creo que para un curso de cálculo de acá, en la Facultad de Economía, se debería comenzar con este [con el de impuesto marginal].

[Manuel]: Y sobre el comentario anterior, yo sigo insistiendo, al estudiante le gusta hablar más de dinero que de tiempo, les atrae más el dinero.

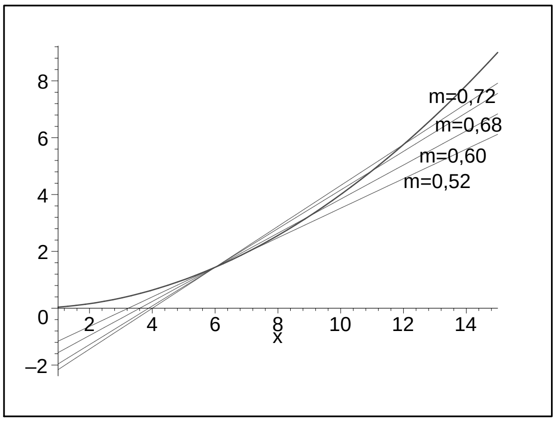


Figura A.3: Variación del impuesto en algunos intervalos

Pregunta 2: Si la persona **incrementa** sus ingresos en \$1000, ¿**qué cantidad de este incremento** será para impuestos? ¿Qué porcentaje?

Antes de responder a esta pregunta, pasamos a discutir sobre el incremento de una variable.

Incremento de una variable

Si observamos la **Tabla A.3**, notamos que para cada ingreso x (columna 1), se da la correspondiente tajada del fisco (columna 3). Esta correspondencia es una función que definiremos más adelante, pero que de momento llamaremos *variación del impuesto* (**impuesto marginal**), o el incremento de y o $f(x)$. En general, se define como

$$\Delta y = \frac{f(x+1) - f(x)}{(x+1) - x}$$

En la **Tabla A.3** se observa que la *variación del impuesto* (**impuesto marginal**) presenta una cierta regularidad, por lo que parece conveniente intentar deducir una fórmula para dicho impuesto a partir de esta situación.

$$\begin{aligned}
\Delta y &= 0{,}04(x+1)^2 - 0{,}04x^2 \\
&= 0{,}04(x^2+2x+1) - 0{,}04x^2 \\
&= 0{,}08x + 0{,}04
\end{aligned}$$

A manera de comprobación, se observa que cuando se sustituye $x = 0, 1, 2, \ldots$ se genera la última columna de la tabla 1.

Respuesta de P2: Dado que sus ingresos, x, se miden en unidades de \$1000, su incremento podría expresarse simbólicamente como

$$\Delta x = 1, \ \textbf{cada unidad representa \$1000}$$

¿En cuánto se incrementarán sus impuestos? Es decir, ¿cuál es el incremento correspondiente Δy?

$$\begin{aligned}
\Delta y &= f(7) - f(6) \\
&= 1{,}96 - 1{,}44 \\
&= 0{,}52
\end{aligned}$$

Así, podemos decir que la tajada al fisco es de 52 % por los siguientes \$1000 que gane (a los \$6000 que ya gana). A esta *variación del impuesto*, (Δy), los economistas le llaman **impuesto marginal**.

Discusión: Con esta tarea buscamos que el estudiante se aproxime a la definición de derivada por medio del incremento de una variable respecto a otra (cociente incremental), pero además se llega al monto que el trabajador pagaría en impuestos por los \$1000 adicionales, que es el 52 % de esto \$1000. En otras palabras, la persona solo se quedará con \$480 de estos \$1000.

Un planteamiento como éste, en el que buscamos trabajar, de forma puntual, el tema de los incrementos, partiendo del contexto económico. ¿Les parece adecuado que la variable x se exprese en unidades de mil, o no supone mayor inconveniente y permite la discusión adecuada sobre incrementos?

[Manuel]: Yo lo que te puedo decir es que yo no veo ningún problema, sin embargo como uno es matemático, uno quiere evitarse hablar de eso de las unidades; incluso hay una guía de problemas de Matemática 21 donde se usa “um” (unidades monetarias) para evitarse si se está hablando en dólares, bolívares u otra moneda, pero no veo ningún problema en que se tome una moneda como referencia. Acuérdate que ellos toman otras materias y de alguna manera ellos van aprendiendo a establecer esa diferencia entre monedas o unidades. Igual que el porcentaje, ya a ese nivel ellos están familiarizados con el porcentaje por el trabajo en otras materias, acuérdate que Matemática 21 es una materia de segundo semestre.

[Pedro]: Bueno, concretando más, yo pienso que hay que hacerlo así, tú vas metiéndole al estudiante lo que es una unidad de mil. Por qué, porque si tú tienes una empresa, una empresa qué es lo que quiere ver, los costos marginales, los costos adicionales cuando tú produces una unidad adicional y la unidad adicional la puede fijar la empresa; 100 automóviles, 1000 automóviles. Una función de producción depende del capital invertido en la empresa y al capital invertido tú le fijas las unidades; unidades de mil, unidades de un millón, unidades de un millardo. El ingreso de una nación o de un país va a depender también de unidades, tantos millardos, cuánto es el incremento de la producción de un país cuando la inversión se incrementa en un millardo. A mi me parece que resulta interesante y acertado, hablar de porcentaje también; de hecho, yo pienso que en Matemática 1 se debe hablar de interés simple, interés compuesto para que se vaya familiarizando. ¿Por qué?, porque cuando en el análisis marginal le toque ver *elasticidad de la demanda*, que son cambios porcentuales de la demanda sobre cambios porcentuales en los precios, entonces te vas a evitar todos esos rollos y le vas enseñando la parte porcentual.

[Ramón]: Esta sesión de hoy yo la estoy centrando o enfocando desde el punto de vista del proceso de enseñanza-aprendizaje pero en relación al estudiante, al tipo de estudiante, al tipo de estudiante de una facultad de economía. Me pongo a pensar un poco no!, por qué tú propones primero el ejemplo de la velocidad y luego tratas este otro, no sé si estoy especulando y por eso es que te voy a hacer la siguiente pregunta: ¿con este proceso lo que se pretende es alcanzar el concepto de derivada, que el estudiante entienda el concepto de derivada desde el punto de vista matemático?

[Moderador]: Sí.

[Ramón]: Bueno si es así, repito no se si estoy especulando, entonces ya le veo el sentido de que tú introduzcas el ejemplo anterior, por lo que acabas de decir. Porque si solamente se motiva a entender el concepto de derivada desde el punto de vista de la matemática a través de este segundo ejemplo, entonces se puede caer, se puede correr el riesgo de que el estudiante realmente entienda la derivada desde un punto de vista solamente de la economía, pero tal vez no se logre alcanzar desde el punto de vista de la matemática. Entonces, yo no sé si tu intención al tratar este ejemplo [el primero]; fue, en parte, para evitar esto de las unidades y eso, se me ocurre eso.

[Manuel]: De hecho como te comenté, los libros introducen al principio, un ejemplo relacionado con la velocidad instantánea aún cuando el libro sea de aplicaciones a la economía, para que el estudiante no vea que la derivada es exclusivamente de la economía.

[Ramón]: Desde ese punto de vista sí me parece pertinente considerar ese ejemplo de la física.

[Manuel]: Lo que sí se debe tomar en cuenta es que el ejemplo a tomar en cuenta debe ser muy sencillo.

[Ramón]: Estoy de acuerdo con Manuel.

[Moderador]: Algo que debo aclarar es, que los dos problemas o ejemplos se colocan para que ustedes me den su opinión y en ningún momento es porque nosotros consideremos que se deben trabajar esos dos ejemplos en particular.

[Pedro]: Para mi, y disculpen, no son los acertados. Para mi, daría la función de costo e ingreso que son las funciones elementales que ya ellos deben dominar; ya el impuesto es más delicado, mucho más delicado. Porque si tú tienes una empresa, ¿qué es lo que quiere una empresa?, ver el costo total, ver el costo promedio, ver el costo marginal, el costo adicional cuando tú produces una unidad adicional, porque tú quieres llegar a la derivada del costo, que es el costo marginal. Entonces, es una función que ellos la han visto en Introducción a la Economía, mientras que de impuesto no han visto nada hasta el momento, como dice el colega, hay que ver las prelaciones. Por otra parte, el ingreso también lo han visto, si yo tengo una empresa, me interesa el ingreso marginal, el ingreso adicional cuando vendo una unidad adicional y el ingreso promedio. Estas son las funciones que ellos manejan más en el sentido...

[Moderador]: Es decir, con lo que no estás de acuerdo es con el modelo o mejor dicho, con el ejemplo. Una cosa es el enfoque que se le quiere dar a la enseñanza de la matemática partiendo de un problema contextualizado y otra cosa es la elección y adecuación del ejemplo o problema. Tal vez elegí mal el problema.

[Pedro]: No es que elegiste mal sino que para mi criterio yo elegiría el costo.

[Moderador]: Me explico, una cosa es elegir la estructura que se le quiere dar a la enseñanza y otra, elegir el problema o modelo. Por ejemplo, podemos sustituir un problema de costo por el de impuesto.

[Pedro]: Yo te sugiero que lo hagas y en lugar de velocidad, ingreso.

[Moderador]: Pero entonces, ¿tú descartarías de plano la situación no-económica?

[Pedro]: Como lo dice Manuel, en economía, los voy a distraer. Para mi no tiene sentido el ejemplo físico. Ya lo he hecho y siento que he perdido mi tiempo.

[Moderador]: O sea, ¿que tus ejemplos son todos económicos?

[Pedro]: Sí, son todos económicos.

[Ramón]: No sé si puedo añadir algo.

[Moderador]: Claro, adelante.

[Ramón]: Yo seguiría insistiendo en que fueran de economía y, como dice Pedro, el primer modelo sería de costo-ingreso, este modelo o ejemplo [el de impuesto] se puede tratar más adelante, pero todavía siento el temor, por decirlo de alguna manera, porque realmente cuál es el objetivo de este curso y de este tema en particular, que el estudiante entienda el concepto desde el punto de vista matemático de lo que es la derivada, de acuerdo. Entonces, se corre el riesgo de que ese objetivo no se vaya a alcanzar cuando los ejemplos sean solamente de una única área del conocimiento como es en este caso, de economía. Pero también queda la otra parte, yo aún tengo la sensación de que a pesar de la intención de proponer el modelo de la velocidad sea que la derivada no es algo plenamente de la economía, todavía...

[Pedro]: Te gusta el ejemplo de la velocidad...

[Ramón]: No, no, no. No me gusta en realidad, sino qué alternativa habría para que una vez que se trabaje con modelos económicos solamente, dar garantía de que realmente el estudiante sabe que hay un concepto que es abstracto que no se refiere a más nada, que es el concepto de derivada. Ese es el temor, pero hasta el momento yo todavía...

[Pedro]: Yo pienso que ese temor tú lo puedes eliminar, porque ellos van a trabajar con funciones aplicadas a la economía. Entonces, después que tú des esos ejemplos y caigas en la definición, que caigas en el análisis marginal, tu además de costo marginal e ingreso marginal, vas a hablar de beneficio marginal, impuesto marginal, vas a hablar de la productividad marginal, ¿entiendes?, no así [refiriéndose al esquema planteado], sino ya con las derivadas. Esto es la derivada y qué significa, ¿de acuerdo?; la producción en función del capital invertido, bueno, el incremento de la producción si yo invierto en el capital en una unidad adicional, así de sencillo.

[Ramón]: Ok, eso es una alternativa...

[Pedro]: Entonces estás trabajando y empleando cada vez más herramientas en el campo de ellos, ¿de acuerdo?

[Ramón]: Ok, eso sería una alternativa, porque así se ve que el concepto de la derivada no está sólo asociado al costo o al ingreso...

[Pedro]: Mira lo que me está pasando a mi ahorita, yo en el curso que estoy dando de nivelación del posgrado, allí tengo a 12 ingenieros, ellos están admirados. Y por qué están admirados les pregunto; bueno, porque ya entendemos para qué sirve la derivada en términos económicos, sin embargo les doy unos ejemplos de ingeniería también.

[Moderador]: Y tú, Manuel, qué opinas.

Ingresos Gravables x	Impuesto $f(x)$	Impuesto Promedio $A(x) = \frac{f(x)}{x}$	Variación del Imp. $\Delta y = \frac{f(x+1)-f(x)}{1}$
1	$f(1) = 0,04$	0,04	0,04
2	$f(2) = 0,16$	0.08	0.12
3	$f(3) = 0,36$	0.12	0.20
4	$f(4) = 0,64$	0.16	0.28
5	$f(5) = 1,00$	0.20	0.36
6	$f(6) = 1,44$	0.24	0.44
7	$f(7) = 1,96$	0.28	0.52
8	$f(8) = 2,56$	0.32	0.60
9	$f(9) = 3,24$	0.36	0.68
10	$f(10) = 4,00$	0.40	0.76
11	$f(11) = 4,84$	0.44	0.84
12	$f(12) = 5,76$	0.48	0.92

Cuadro A.3: Ingresos gravables e impuestos promedio y marginal

[Manuel]: Yo sigo insistiendo que, no estamos hablando de que se va a dar el concepto de manera abstracta, sencillamente hay que darlo a través de ejemplos y resaltar esta diferencia que es muy importante. Dejar claro que el concepto de derivada no solamente va a ser aplicado para el análisis marginal, no solamente para eso. Entonces, se puede establecer más adelante que también puede funcionar para otras cosas. Si el estudiante ya sabe que la derivada es una herramienta del análisis marginal y no como algo interno del análisis [marginal], mientras tú establezcas estas diferencias es importante, ¿y cómo lo estableces?, con un ejemplo sencillo, si no quieres usar ejemplos físicos puedes buscar otros ejemplos, pero es clave que el estudiante sepa de esa pequeña diferencia.

[Pedro]: Yo le agregaría, para complacer al amigo Manuel, después que veamos los ejemplos de costo e ingreso, se puede agregar el ejemplo de velocidad como un ejemplo que es ajeno a la carrera.

[Ramón]: Yo insisto, no tiene por qué ser el ejemplo de velocidad porque el temor que queda..., qué es lo que se pretende, que el estudiante en algún momento llegue a comprender el concepto de derivada sin ninguna clase de muleta, por decirlo de algún modo, entonces ese es el temor que quedaría. Entonces, yo seguiría la línea de Manuel, o sea, ver el uso de la derivada no solamente en el costo sino también en otras partes del análisis marginal y en otras áreas en general.

[Pedro]: Yo respeto sus opiniones pero no estoy de acuerdo...

Comentario (Pregunta 3): Hasta ahora no hemos hablado de *límite* ni de *cociente incremental*. Aún cuando la función de impuesto del ejemplo antes visto se expresó en unidades de mil dólares, cualquier unidad hubiera sido satisfactoria. Por ejemplo, suponga que se quiere estudiar el *impuesto marginal* de una persona que gana \$6.000, para un incremento de \$100, esto es,

$$\Delta x = 0,1.$$

Entonces el impuesto correspondiente es

$$\begin{aligned} \Delta y &= f(6,1) - f(6,0) \\ &= 1,4884 - 1,4400 \\ &= 0,0484. \end{aligned}$$

Por lo tanto, el incremento del impuesto en relación con el incremento de los ingresos es

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{0,0484}{0,1} = 0,484,$$

que los economistas denominan la tasa del impuesto marginal y los *matemáticos llaman el cociente incremental*.

Discusión: Ahora, cuando el incremento del ingreso es de \$100 ($\Delta x = 0,1$), el incremento en Δy cambia respecto al caso anterior. Cuando el incremento en el ingreso era de \$1.000, la tajada al fisco era del 52 %, pero cuando el incremento es de \$100, la tajada es de 48,4 %. De esta manera y según la necesidad del caso a estudiar, nuestro incremento lo podemos hacer tan pequeño como sea.

¿Qué interés puede suponer para ustedes, desde el punto de vista metodológico, esta actividad en la que se busca dar un paso más hacia la definición de derivada?

[Manuel]: Aquí lo que estas haciendo es una justificación sobre cómo te vas a ir aproximando, digamos. En la primera parte tú modificabas números, ahora le estás dando algún sentido a esos números que estás tomando para la aproximación, yo pienso que está bien porque ahora le estás dando alguna justificación a eso, por qué se tiene que tomar la aproximación desde el punto de vista práctico, de la aplicación, a mi me parece acertado.

[Ramón]: Bueno, lo que acaba de decir Manuel me puso a pensar en relación con lo que dijo Pedro, que a pesar que este modelo [impuesto marginal] está bien, tal vez no sería el mejor para comenzar; pero la pregunta mía para Pedro es: ¿hay algo similar a esto [al impuesto marginal] pero en el caso del costo?

[Pedro]: ¿Cómo así?

[Ramón]: Porque lo que acaba de decir Manuel es interesante, comienza con mil, eso representa el 100 %, entiendo yo...

[Moderador]: No, te explico, lo que hice fue fijar una unidad, en este caso mil. La variable independiente x está expresada en unidades de mil, ahora digo que la x está expresada en unidades de 100, luego puedo bajar a 10, a 1 y así sucesivamente podemos afinar tanto como uno quiera o necesite.

[Pedro]: Es que tú puedes hacer muchas modificaciones, suponte, el costo en lugar de expresarlo en unidades de dólar lo puedes expresar en centavos de dólar.

[Moderador]: Por ejemplo...

[Pedro]: Por qué surge, y disculpa que me salga del tema, la elasticidad; para evitar todos esos rollos con las distintas unidades, porque la elasticidad te habla de forma porcentual.

[Moderador]: Sí, hablas en una sola unidad que es el porcentaje.

[Pedro]: Precisamente para evitar todos esos rollos.

[Ramón]: Bueno, en esos términos, me parece adecuado.

[Moderador]: Pero, ¿te parece adecuado así, a secas?, ¿nada más?, insisto que estamos hablando desde el punto de vista metodológico.

[Manuel]: Es que si no lo haces así, cómo explicas la parte de aproximación, no es que es acertado, es que lo tienes que hacer así...

[Moderador]: No, lo puedes hacer de otra manera, en el caso de la velocidad instantánea lo planteamos de una manera más numérica.

[Manuel]: No, me estoy refiriendo al ejemplo...

[Ramón]: Sí, no creo que lo mejor sea tomar una gráfica con una curva y hablar de la secante, si es a eso a lo que tú te refieres.

[Moderador]: Yo prefiero que salga de boca de ustedes, a fin de cuenta para eso los invité a participar.

Observación: El cociente $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ se podría calcular para cualquier otro valor de Δx. Estudiemos ahora qué ocurre para cualquier incremento Δx. En este caso, el incremento Δy es,

$$\begin{aligned}
\Delta y &= f(6+\Delta x) - f(6) \\
&= 0,04[6+\Delta x]^2 - 0,04[6]^2 \\
&= 0,04[36+12(\Delta x)+(\Delta x)^2] - 0,04[36] \\
&= 0,48(\Delta x) + 0,04(\Delta x)^2.
\end{aligned}$$

De este modo, el cociente incremental se obtiene dividiendo entre Δx,

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = 0,48 + 0,04(\Delta x). \tag{A.1}$$

Paso al límite

Si en la expresión anterior (**A.1**), hacemos que Δx se aproxime a 0 tanto como uno quiera ($\Delta x \longrightarrow 0$), se satisface que

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} \longrightarrow 0{,}48$$

Este valor límite, los economistas, lo denominan *tasa del impuesto marginal infinitesimal* o *tasa de impuesto marginal*. Los matemáticos lo llaman *la derivada* y lo denotan por y' , es decir,

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} \longrightarrow y'$$

Discusión: Finalmente hemos llegado a la definición de derivada de una manera que a muchos profesores no les gusta o mejor dicho, no están de acuerdo por toda la estructura que significa una construcción de esta naturaleza; además, consideran que el estudiante se distrae y se pierde en esencia el objetivo perseguido.

¿Qué opinión tienen ustedes sobre este hecho (el de introducir el concepto de derivada de esta manera), en relación con los objetivos que se buscan en el curso?

[Pedro]: Depende del objetivo y del tema que estés tratando.

[Moderador]: En este caso me refiero al tema derivada y en particular a la introducción de la derivada y el objetivo es llegar al concepto de derivada, solo llegar al concepto, a la definición de derivada.

[Pedro]: Pero yo digo, ¿no podemos hablar del tema en general?

[Moderador]: Es que no es la idea, porque para eso están las otras actividades que vienen más adelante.

[Pedro]: Con estos ejemplos es más que suficiente, siempre y cuando le des a los estudiantes sus ejercicios.

[Moderador]: De acuerdo, pero centrémonos en el tema de discusión.

[Pedro]: Yo considero que esto está bien, pero haciendo las correcciones que dije antes.

[Moderador]: Por qué?

[Pedro]: Claro, porque tú estás motivando a los estudiantes...

[Moderador]: Yo veo que ustedes han nombrado mucho la palabra motivación, pero esta actividad solo se quedaría en el plano de la motivación o ¿creen ustedes que sirve para generar aprendizaje en los estudiantes?

[Manuel]: Por supuesto que serviría para generar un aprendizaje...

[Moderador]: Fíjense que estamos tocando varias cosas, el tema principal es la derivada, pero hablamos de unidades cuando tocamos los incrementos. Entonces, ¿podemos hablar de aprendizaje más que de motivación?

[Pedro]: Yo pienso que sí, claro, no totalmente, estamos en la primera etapa.

[Manuel]: Es que yo pienso que hay que hablar primero de motivación porque aquí estamos, apenas, aproximándonos al concepto. Ahora, tal como tú lo dices, que hay profesores que comienzan hablando de definición... Yo nunca he hecho eso, imposible, no serviría para llegar y decirle a mis estudiantes, hoy vamos a tratar el tema de la derivada. La derivada es este límite y listo... Creo que es una enseñanza equivocada, yo apuesto por la motivación, yo pienso que hay que motivar mucho al estudiante porque es algo [el concepto de derivada] nuevo para él. De hecho, como es algo nuevo, la motivación es fundamental, porque el salto que se da del tema de función al tema de límite y luego al tema de derivada no es simple, las variaciones, los incrementos. Yo he trabajado con ejemplos, pero en este caso tu lo haces con más detalle, lo que puede resultar más provechoso para el muchacho [estudiante]. A mi me parece que se logran los objetivos, me parece bien.

[Ramón]: No sé si puedo hacer un comentario, tal vez circunstanciales o periféricos. Es que él [Manuel] se refiere..., te voy a contar un poco a qué se refiere con esto de la motivación. Hasta hace como dos o tres años atrás, el único que se refería a las aplicaciones en los cursos de matemáticas en la Facultad de Economía era el profesor Pedro.

[Pedro]: Bueno, yo llevo más de quince años...

[Ramón]: Yo sé que usted tiene muchísimos más, pero me refiero al Departamento. Entonces, un poco..., hubo una inquietud por parte del Departamento..., no sé si vale la pena contar un poco la historia para que te enteres del asunto...

[Moderador]: Adelante, sigue, sigue...

[Ramón]: Ok, estábamos los profesores que no dábamos aplicaciones, que los estudiantes pedían aplicaciones y no le atendíamos sus exigencias porque eso suponía una carga más; además, no estábamos motivados porque el rendimiento de los estudiantes era pésimo, estoy hablando de mi caso, no quiero generalizar tampoco. Yo comenzaba con la definición de derivada, colocaba algunos ejemplos, buscaba los incrementos, luego el cociente incremental y luego procedía a calcular el límite, eso era lo que hacía. Después, cuando se empezaron a introducir las aplicaciones, al menos en los cursos que yo he tenido, se vio un cambio sustancial en el rendimiento de los estudiantes. No se bajó el rigor del manejo del instrumental matemático, pero sí se notó el interés de los estudiantes por aprender y el rendimiento mejoró también. Ahora, en cuanto a tu pregunta concreta, yo lo entiendo así, tú a lo que te refieres es a la comprensión de los estudiantes con esta actividad o algo así. Bueno, ¿cómo se va a medir esta comprensión, estos objetivos? No lo sé, creo que lo mejor es experimentar con los estudiantes a través de una actividad piloto. Pero yo todavía sigo teniendo mi reparo en cuanto a que si se le enseña de esta manera, el estudiante de economía va a tener un concepto de derivada muy particular y no el concepto como lo mira un matemático, esa es simplemente mi observación, creo que otros ejemplos no económicos son también importantes y pertinentes. Yo no estoy cuestionando, que quede claro, que los economistas perciban el concepto de derivada de determinada manera, eso no es lo que estoy cuestionando. Si el objetivo es, que el estudiante de economía vea la derivada como la ve un matemático, yo todavía tengo mi temor. Pero sí estoy muy de acuerdo en que se introduzca de esta manera porque creo que se puede profundizar en el alcance de los objetivos; sin embargo, creo que sería bueno experimentar como dije antes.

A.1.3. Cuestionario relacionado con la actividad 1

De acuerdo a la actividad que acabamos de realizar y como producto de las opiniones y discusiones en la misma, nos interesa conocer tu opinión sobre algunos puntos que señalamos a continuación:

1. ¿Qué aspectos puedes destacar (positivos o negativos) entre ambos problemas?; es decir,
   a) ¿Cuál sería la actitud del estudiante frente a estos problemas (por separado)? ¿Por qué?
   b) ¿Cuál llevaría al estudiante a cometer errores? ¿Por qué?
   c) De acuerdo a la bibliografía que está al alcance de los estudiantes (bibliotecas y librerías), ¿cuál conviene utilizar? (1 o 2 referencias) ¿Por qué?
   d) Otro. ¿Por qué?
2. ¿Utilizas algún problema similar en tus clases para introducir el concepto?
   a) $\boxed{\text{Sí}}$ ¿Por qué?, ¿qué persigues didácticamente con este tipo de problemas?
   b) $\boxed{\text{No}}$ ¿Por qué?
3. En caso de haber respondido negativamente en la pregunta anterior y de seguir un esquema tradicional en tus clases. ¿Utilizarías el problema vinculado a la economía para introducir el concepto de la derivada descartando el otro, después de la experiencia de hoy o prefieres seguir la estructura que haces actualmente? ¿Por qué?
4. Realiza un esquema de la estructura que **sigues actualmente** para enseñar el tema de la derivada en la carreras de ciencias económicas.

Manuel

Cuestionario relacionado con la actividad 1

De acuerdo a la actividad que acabamos de realizar y como producto de las opiniones y discusiones en la misma, nos interesa conocer tu opinión sobre algunos puntos que señalamos a continuación.

1. ¿Qué aspectos puedes destacar (positivos o negativos) entre ambos problemas?, es decir,

   (a) ¿Cuál sería la actitud del estudiante frente a estos problemas (por separado)? ¿Por qué?

   (b) ¿Cuál llevaría al estudiante a cometer errores? ¿Por qué?

   (c) De acuerdo a la bibliografía que está al alcance de los estudiantes (bibliotecas e Internet), ¿cuál conviene utilizar? (1 o 2 referencias) ¿Por qué?

   (d) Otro. ¿Por qué?

a) [illegible]

b) [illegible]

c) [illegible]

2. ¿Utilizas algún problema similar en tus clases para introducir el concepto?

   (a) Sí ¿Por qué?, ¿qué persigues didácticamente con este tipo de problemas?

   (b) No ¿Por qué?

2(a) Alg. tabla de valores de la función para acercarnos al cálculo del límite

— Son fundamentales los conceptos de orden, [illegible] y actividad. Pienso que son muy adecuados para introducir el concepto de [illegible] o que son los [illegible] que aprenden los estudiantes en [illegible]

3. En caso de haber respondido negativamente en la pregunta anterior y de seguir un esquema tradicional en tus clases, ¿Utilizarías el problema vinculado a la economía para introducir el concepto de la derivada descartando el otro, después de la experiencia de hoy o prefieres seguir la estructura que haces actualmente? ¿Por qué?

4. Realiza un esquema de la estructura que sigues actualmente para enseñar el tema de la derivada en la carrera de ciencias económicas

1. Derivada como razón de cambio.
   - [illegible] marginal
   - [illegible]
   - [illegible] de la población.
2. Definición [illegible]
   - Ejemplo
   - Interpretación geométrica
   - Propiedades
3. Reglas de Derivación
   - [illegible] la práctica

Ramón

Cuestionario relacionado con la actividad 1

De acuerdo a la actividad que acabamos de realizar y como producto de las opiniones y discusiones en la misma, nos interesa conocer tu opinión sobre algunos puntos que señalamos a continuación:

1. ¿Qué aspectos puedes destacar (positivos o negativos) entre ambos problemas?; es decir,

   a) ¿Cuál sería la actitud del estudiante frente a estos problemas (por separado)? ¿Por qué?

   b) ¿Cuál llevaría al estudiante a cometer errores? ¿Por qué?

   c) De acuerdo a la bibliografía que está al alcance de los estudiantes (bibliotecas y librerías), ¿cuál conviene utilizar? (1 o 2 referencias) ¿Por qué?

   d) Otro. ¿Por qué?

(a) La actitud frente al problema físico sería de indiferencia y hasta de rechazo; en cambio, frente al problema de la Economía, prestaría gran atención a la clase: Esta respuesta se debe a experiencias similares hechas en clases.

(b) Los dos problemas podrían llevar al error de hacer creer al estudiante que el concepto de derivada, está relacionado a uno de los problemas en particular.

(c) Pienso que ninguno de los textos leidos por mi, "desarrollan" de menera tan cuidadosa y con pormenores la enseñanza del concepto de derivada, como el material considerado en la actividad que se realizó: Además de ser muy "atracti-vo" este último.

2. ¿Utilizas algún problema similar en tus clases para introducir el concepto?

   a) $\boxed{\text{Sí}}$ ¿Por qué?, ¿qué persigues didácticamente con este tipo de problemas?

   b) $\boxed{\text{No}}$ ¿Por qué?

(a) He usado el problema que se refiere a la interpretación de la derivada, como la pendiente de la tangente de un punto de la gráfica de una función; a fin de que el concepto de derivada sea más claro al estudiante.

3. En caso de haber respondido negativamente en la pregunta anterior y de seguir un esquema tradicional en tus clases. ¿Utilizarías el problema vinculado a la economía para introducir el concepto de la derivada descartando el otro, después de la experiencia de hoy o prefieres seguir la estructura que haces actualmente? ¿Por qué?

4. Realiza un esquema de la estructura que **sigues actualmente** para enseñar el tema de la derivada en la carreras de ciencias económicas.

(a) Se escribe el concepto de derivada.

(b) Se explica el concepto mediante la interpretación de la pendiente de una recta.

(c) Se calculan las derivadas de varias funciones usando el concepto de derivada (límite del cociente de incrementos).

(d) Se calcula la derivada usando las propiedades de la suma, producto, cociente y la regla de la cadena.

(e) Aplicaciones de la derivada a la Economía.

A.2. Actividad 2

Después de varias jornadas de trabajo con los estudiantes, ya ellos calculan derivadas inmediatas, han trabajado con las propiedades de la suma, resta, producto y cociente de derivadas e interpretaciones varias de la derivada en la economía.

A.2.1. Incrementos, Tasas, Optimización, Razón de Cambio y Recta Tangente[3]

Una fábrica de lápices, después de realizar un estudio exhaustivo, concluye que el costo por semana de producir x artículos (x en unidades de mil) de uno de sus productos principales, el lápiz mágico, viene dado por la función $C(x) = 2000 + 0,15x$ um y el ingreso obtenido por la venta de x lápices viene dado por $R(x) = 1,5x - 0,0001x^2$ um. La fábrica en cuestión produce 2 millones de lápices mágicos semanales y se está estudiando la idea de incrementar la producción a 2.650.000.

Preguntas: Las siguientes preguntas están relacionadas con los contenidos matemático y económico en general.

Pregunta 1: Cuál es el dominio para cada una de las funciones $C(x), R(x)$ y $\boldsymbol{U(x)}$ (donde $\boldsymbol{U(x)}$ representa la **función de beneficio** o **utilidad**), vistas como funciones matemáticas en general y como funciones de la economía. **Discuta sobre esta situación**.

Respuesta de P1: En primer lugar, antes de hablar de los dominios de las funciones, debemos obtener la función de beneficio $\boldsymbol{U(x)}$, la cual se define como sigue:

$$\boldsymbol{U(x)} = R(x) - C(x) = -0,0001x^2 + 1,35x - 2000.$$

Por otra parte, en la **Tabla A.4** se muestran los dominios[4] de cada una de las funciones mencionadas en la pregunta.

Discusión: En las dos situaciones se observa que para la misma función el dominio no es el mismo, suponiendo una economía hipotética sencilla (**se trata de introducir e involucrar al estudiante y no de plantear situaciones económicas complejas por muy reales que éstas lo sean**).

No obstante, en una situación económica real, el dominio en cualquiera de las funciones estaría acotado también por la derecha, dependiendo en este caso

[3]Tomado de Arya y Lardner (1987)

[4]$\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, 3, ...\}$

	$C(x)$	$R(x)$	$U(x)$
Dominio Mat.	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$
Dominio Ec.	$\mathbb{R}_0^+$ $(\{x \in \mathbb{N}_0 : \frac{x}{1000}\})$	$\mathbb{R}_0^+$ $(\{x \in \mathbb{N}_0 : \frac{x}{1000} \leq 15000\})$	$[1695, 11805]$ $(\{x \in \mathbb{N} : 1695 \leq \frac{x}{1000} \leq 11805\})$

Cuadro A.4: Dominio de funciones en dos contextos

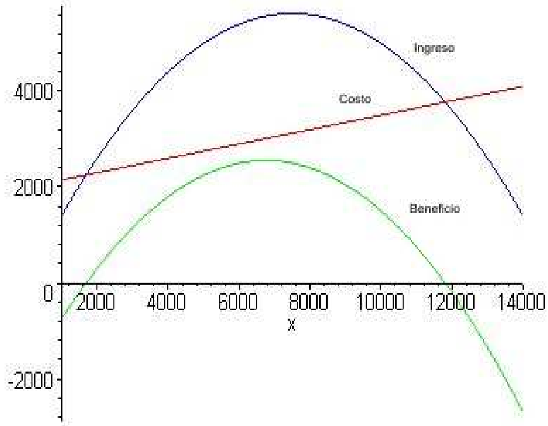


Figura A.4: Funciones R, C y U

de la capacidad de producción y venta del fabricante, por ejemplo. Más aún, si nos fijamos en detalle en el enunciado del problema, los objetos fabricados son lápices y la x está expresada en miles, con lo cual el dominio económico sería $\mathbb{Q}_0^+$ sin excederse en tres decimales (por lo de las unidades de x).

¿Qué importancia supone para ustedes implementar este tipo de dualidades (económicas y matemáticas) en estos cursos o, por el contrario, supone más bien que el estudiante tiende a confundirse? ¿Por qué?

[Manuel]: Mira, básicamente uno de los comentarios que te hice en el cuestionario relacionado con la primera sesión, es que en vez de usar... tú usaste el problema de impuesto, yo siempre comienzo por introducir las funciones de costo, ingreso y beneficio; esos son los conceptos económicos que yo más utilizo, principalmente cuando doy Matemática 1. O sea, que ya ellos conocen muy bien a estas alturas estas funciones. Ahora, obviamente, me parece muy importante que ellos vean esto y como con esto es con lo que van a trabajar, me parece clave.

[Moderador]: Un momento, no nos desviemos, en este momento me refiero concretamente a la dualidad de contextos en el problema. Mira, es la misma función pero vista en un contexto matemático y en uno económico, fíjate en el dominio en un contexto y en otro. ¿Qué incidencias tiene implementar ese tipo de dualidad?

[Manuel]: Ah!, ok. Bueno, yo lo resalto digamos, esa situación. Yo les hablo del dominio matemático y del dominio real, el de las aplicaciones, entonces siempre establezco la diferencia. Ahora, así como tú lo planteas está como más preciso y creo importante, yo no lo hago con tanto detalle, particularmente yo creo que es muy bueno que se establezca esta diferencia. Es más, yo creo que a partir de ahora voy a hacerlo con estos detalles, ya que eso resalta la importancia de las matemáticas en las carreras de economía, pienso que el estudiante puede entender mejor el concepto de domino de una función al realizar en detalle este tipo de problemas. No sé qué piensa Ramón al respecto.

[Ramón]: Es importante y, de hecho, uno como profesor se da cuenta de estas distinción es con el tiempo; por ejemplo, en Matemáticas 1, que es donde ellos ven funciones, allí tiene uno que señalarles un grupo de funciones importantes como las polinómicas, las exponenciales, logaritmos y uno les habla de dominio de una función, pero como es la primera vez que ellos oyen de eso, entonces uno les habla del dominio matemático, después cuando pasan a Matemática 2 donde toca graficar funciones, si tiene algo que ver con una aplicación como costo, ingreso..., así como está acá, los estudiantes podrían llegar a confundirse. De hecho, en los otros cursos, me refiero al de microeconomía por ejemplo, el dominio que el profesor de microeconomía; al cual se refiere, es al dominio que tú mencionas aquí como dominio económico; pero que yo siempre les había hablado, donde la función tiene sentido desde el punto de vista económico, siempre les había dicho sin mayor detalle pero fue posteriormente que me di cuenta de eso [de lo dicho antes sobre el profesor de microeconomía, de la diferencia entre dominios], ¿de acuerdo?... El dominio es este, pero el que es relevante o el que tiene sentido para este problema es este otro. Entonces, me parece muy importante; lo que sí te puedo decir es que nunca había sido tan detallista como tú lo planteas, yo sólo restringía el dominio a los $\mathbb{R}^+$, pero nunca tan detallista como $\mathbb{Q}_0^+$, que realmente tiene sentido algo así porque lo que sí no tiene sentido es hablar en este caso de $\sqrt{2}$ dólares, por ejemplo. Yo creo que es importante que el estudiante conozca estos detalles porque se distingue la parte formal, la parte matemática y lo que se hace; por ejemplo, en los cursos de microeconomía en referencia al dominio, creo que con esto se prepara al estudiante para este curso [el de microeconomía] y seguro que para algún otro, pero que realmente no conozco con precisión y no quiero especular.

Pregunta 2: Determine el **beneficio promedio**, $\overline{U}(x)$ *um*, por millares de lápices producidos. Calcule $\overline{U}(2100)$ y dé una interpretación económica de este resultado. Además, si queremos calcular la **tasa de cambio promedio del beneficio** en un intervalo particular $[x_1, x_2]$, este beneficio lo denotamos por $\overline{U}_{(x_1,x_2)}$ y se define como $\overline{U}_{(x_1,x_2)} = \frac{U(x_2)-U(x_1)}{x_2-x_1}$. Calcular la tasa de cambio del beneficio promedio en $[1900, 2200]$.

Respuesta de P2: El beneficio promedio denotado por $\overline{U}(x)$ viene dado por

$$\begin{aligned}\overline{U}(x) &= \frac{U(x)}{x} \\ &= -0,0001x + 1,35 - \frac{2000}{x}\end{aligned}$$

Así, $\overline{U}(2100) \approx 0,1876$ *um*; es decir, el beneficio promedio que resulta de fabricar y vender 2.100.000 lápices es de 0,1876 *um*.

Por otra parte, la tasa de cambio promedio del beneficio de producir y vender entre 1.900.000 y 2.200.000 es $\overline{U}_{(1,900,2,200)} = \frac{U(2,200)-U(1,900)}{2,200-1,900} = \frac{486-204}{300} = 0,94$ *um*.

Discusión: Está claro que hablar de la tasa promedio dentro del concepto de derivada, supone una aproximación o mejor dicho, nos permite acercar al estudiante al concepto de la derivada.

En el campo de la didáctica existen opiniones encontradas por los especialistas en el sentido siguiente: partir de la contextualización no matemática (en nuestro caso económica), supone para el estudiante una herramienta que promueve a consolidar el aprendizaje matemático de estos. ¿Para ustedes supone lo mismo? ¿Por qué? ¿En general, cuál es o sería la actitud del estudiante ante tal situación, (alguna experiencia)?

[Ramón]: Bueno... es que esto lo discutimos en la reunión anterior y todos estuvimos de acuerdo en que esto promueve al aprendizaje matemático, uno capta el interés del estudiante cuando se le habla en el contexto económico. Ellos entienden desde el principio que es algo que le va a ser de utilidad, entonces, cuando uno pasa de estos ejemplos al concepto propiamente matemático llevan esa motivación. Ahora, repito, yo insisto y, por cierto, lo escribí en las respuestas del cuestionario de la sesión anterior; sería conveniente que además del ejemplo del impuesto que se dio en la sesión anterior, éste me parece bien porque otra vez vuelve pero con otro ejemplo, con otro concepto de la economía, para que ellos se den cuenta que el concepto derivada no está ligado a un único concepto económico en particular sino que el concepto derivada es un concepto propio de la matemática.

[Moderador]: Y tú, Manuel, qué opinas al respecto.

[Manuel]: Bueno, yo comparto la opinión de Ramón, este... De lo que entiendo, la pregunta se refiere a cuál es mi opinión de comenzar con interpretaciones, aunque a Pedro no le gustó que le llamáramos interpretaciones desde el punto de vista económico para pasar a la parte matemática y después volver a lo económico; es decir, ir trabajando entre los dos tipos de interpretaciones. Pero repito, partir desde las interpretaciones económicas le permite al estudiante tener una visión más clara de la matemática en el mundo de la economía.

[Moderador]: ¿Y cuál es o sería la actitud del estudiante ante esta situación? ¿Creen ustedes que el estudiante rechazaría este enfoque?

[Manuel]: No, todo lo contrario, más bien se sentirían estimulados porque no verían una gran cantidad de fórmulas salidas de la nada, según ellos (los estudiantes), donde ellos te dicen que no estudian matemáticas o ingeniería. Pero cuando se les enseña las matemáticas y se les dan aplicaciones de su área, más bien se sienten estimulados y ven la relación que hay de la economía con la matemática y viceversa.

[Ramón]: Una última opinión en este sentido, quería referirme a lo que dije la vez pasada (primera sesión). La experiencia que tuvimos es que se introdujeron aplicaciones, pero lo que se estaba haciendo es que primero se daba todo el instrumental matemático y luego el uso de este instrumental, si se comienza así el estudiante se vería más motivado y la actitud del estudiante sería favorable porque, de hecho, ellos lo exigen.

Pregunta 3: Cuál es el **costo marginal** de producir 2.100.000 unidades. ¿Qué **interpretación económica** le puedes dar a este resultado?

Respuesta de P3: El costo marginal sabemos que es la derivada de la función costo, así, $C'(x) = 0,15$ (una función constante). Pero, ¿qué significado económico tiene este resultado? Esto significa que las **mil unidades adicionales** a las 2.100.000, le costarán al fabricante 0,15 *um* o 15 céntimos de *um*.

Discusión: Ahora bien, en esta pregunta se tocan dos puntos de manera simultánea como los son: la interpretación económica de la derivada en la función de costos y las unidades (en miles) en las que se trabaja el problema. Recordemos que x está expresada en *miles*, por lo tanto las 2.100.000 unidades se reducen a $x = 2{,}100$. Por otra parte, si $C(x)$ representa la función de costo, la interpretación de la derivada para esta función en un punto x_0 es $(C'(x_0))$ el costo de producir la unidad adicional $x_0 + 1$.

Se entiende que incluir dos puntos como estos en un problema puede conllevarle al estudiante a dificultades de razonamiento del problema e interpretación de los resultados o interés y madurez por el tema, ¿puedes especificar que dificultades (si crees que las hay) pueden surgir en el estudiante preguntas como estas o crees que en todo caso le ayudan a entender y madurar los conceptos involucrados? ¿Por qué?

[Manuel]: Primeramente, yo no establezco mucho la diferencia entre aproximación y valor real, esa interpretación yo la tomo al principio como un valor real. No profundizo mucho en esto de la aproximación, claro que después hay que hacer esa observación. Bueno, me estoy alejando de tu pregunta...

[Moderador]: Exacto, mi pregunta va concretamente, ¿puede surgir algún inconveniente, alguna dificultad en los estudiantes si les planteas un problema y al mismo tiempo trabajar con las unidades en la que está expresada la variable?

[Manuel]: Según mi experiencia, creo que no habría ningún problema...

[Moderador]: Tú crees que no habría problemas, pero, ¿le has propuesto a tus estudiantes problemas como éste en tus clases?

[Manuel]: Realmente no les planteo problemas tan detallados...

[Moderador]: ¿Y tú, Ramón, qué nos puedes decir?

[Ramón]: La experiencia que yo he tenido es que ellos no presentan ninguna dificultad, ningún inconveniente; ni en cuanto a la variable x pueda representar unidades de mil o de millón u otra, ni en cuanto a la interpretación, porque ellos se manejan así en los cursos de microeconomía. De hecho, ya ellos traen esa experiencia de estos cursos. Esa es mi experiencia cuando he dictado el curso de cálculo en FACES.

Pregunta 4: En qué intervalos las funciones de costo, ingreso y beneficio ($C(x)$, $R(x)$, $U(x)$), **aumentan** en función de la producción de lápices (o resulta **creciente**) o **disminuye** en función de la producción de lápices (o resulta **decreciente**). En otras palabras, ¿será cierto que mientras mayor sea la producción de lápices, se mantendrá el comportamiento de estas funciones?

Respuesta de P4: En este caso surge la necesidad de estudiar la monotonía de una función a lo largo de su dominio y entran en juego las definiciones de funciones creciente y decreciente en un intervalo.

Así, la función de costo, $C(x)$, es creciente siempre que $C'(x) = 0,15 > 0$ para todo x en su dominio. Por otra parte, la función de ingreso, $R(x)$, es creciente en $(0, 7500)$ y decreciente en $(7500, +\infty)$. Finalmente, la función de beneficio, $U(x)$, es creciente en $(0, 6750)$ y decreciente en $(6750, +\infty)$.

Discusión: El concepto de monotonía de una función es fundamental para el análisis tanto matemático como económico, ya que permite estudiar desde el punto de vista *analítico* el comportamiento de una función en determinados "momentos" de su dominio y de esta manera *interpretar* situaciones en ambos contextos. De hecho, es un tema que aparece en los libros y programas de cálculo diferencial en general.

¿Consideran que se pierde profundidad en el contenido matemático con un planteamiento de esta naturaleza: mucho, regular, nada? ¿Por qué?

[Ramón]: No, porque cuando tú usas este ejemplo, lo que estás usando es la noción que tú tienes de monotonía pero con un ejemplo en particular, o sea, si fuera al revés, que tú primero introduces el concepto formal de función creciente o decreciente, luego lo que uno hace es tomar un ejemplo y explicar ese concepto mediante ese ejemplo o a un caso en particular como aquí. A mi me parece que no (se pierde profundidad en el contenido matemático), siempre y cuando se haga lo mismo que con el concepto de derivada, comenzaste con un ejemplo y llegaste al concepto matemático.

[Moderador]: ¿Y tú lo planteas de esta manera?

[Ramón]: No, por eso es que hice referencia al final..., siempre lo he hecho al revés, es decir, primero la definición y luego un ejemplo...

[Moderador]: Ok.

[Ramón]: Pero realmente, este ejemplo me parece mejor porque yo siempre tomo una función en general que no es de costo, ni ingreso, que no tenga nada que ver con la economía y explico con ese ejemplo, generalmente un polinomio, algo sencillo.

[Moderador]: ¿Y cuál es tu opinión Manuel?

[Manuel]: De hecho, estos conceptos de costo, ingreso, me parecen muy acertados porque ellos están familiarizados de alguna manera. En el costo uno siempre habla de aumento, disminución, entonces ya eso encamina al estudiante a pensar, a estudiar qué tanto aumenta el ingreso o cuánto disminuye, y así se involucra en esto.

Los objetivos que ustedes persiguen se podrían alcanzar de igual forma con un planteamiento como éste? ¿Por qué?

[Manuel]: Yo pienso que sí.

[Moderador]: ¿Y podrías explicarme el por qué?

[Manuel]: Mira, el detalle es que yo pienso que no hay mucha diferencia entre tu propuesta y la forma como yo trabajo con mis estudiantes, de pronto lo que veo, es que tu trabajas más detalladamente y que no trabajo con tantos ejemplos. En este sentido, yo pienso que los objetivos se podrían alcanzar de igual forma.

[Ramón]: Yo pienso que se alcanzarían mejor (los objetivos) haciéndolo de esta manera respecto a como dice Manuel que lo hace. Yo honestamente no lo he hecho ni lo hago de esta manera, pero eso sí, la misma observación que cuando tratamos el tema de introducción a la derivada; ver varios, dos o tres ejemplos de la economía y luego paso a la formulación matemática.

[Manuel]: Ahora, si el objetivo es que aprendan la derivada como una herramienta netamente matemática, uno tiene que terminar con la definición formal.

[Moderador]: Hagamos un paréntesis para aclararles algo. Yo no pretendo descartar la definición formal, como tu la mencionas, en todo caso lo que quiero es discutir con ustedes y que me digan sus puntos de vista sobre estas actividades como generadoras de aprendizaje, entre otras cosas.

[Ramón]: Bueno... Un gran temor que yo tengo es que nos quedemos con una idea nebulosa de lo que es la derivada...

Pregunta 5: Para qué cantidad de lápices producidos y vendidos, el beneficio alcanza su nivel **máximo**.

Respuesta de P5: En este punto después de generar una discusión con los estudiantes para llegar a la definición de valores extremos (máximos y mínimos), se llega a la respuesta: en $x_0 = 6750$, el beneficio $U(x)$ **es máximo**.

Discusión: En diversas áreas del saber relacionadas con el cálculo, estudiar los extremos relativos tiene un significado importante por sus diversas aplicaciones en procesos de optimización; el caso de la ciencias económicas no es la excepción. Se supone que el profesional de la economía, en áreas específicas, constantemente está estudiando la manera de aminorar costos de producción de un determinado producto; por ejemplo, o al menos buscar aproximarse a ese punto ideal donde un determinado proceso sea óptimo. Generalmente los textos de cálculo diferencial, consideran este apartado como un tema de aplicaciones después de haber estudiado y aprendido una teoría que el estudiante debe manejar para abordar y resolver este tipo de problemas.

En una discusión reciente con otros profesores de matemáticas que trabajan en una facultad de economía, dos de ellos manifestaron que una actividad como ésta no es innovadora para sus estudiantes y sus argumentos fueron varios; pero además, surgieron comentarios encontrados en cuanto a aspectos metodológicos. ¿Consideran ustedes que esta es una actividad que conlleva a un mayor esfuerzo en el sentido metodológico (desarrollo de la clase)?

[Ramón]: Sí. Ahora, yo creo que con una clase no bastaría, pero el beneficio que yo considero es que el estudiante aprenda bien; propiamente, el concepto matemático, aparte de que les va a aclarar esas interpretaciones que tienen ese instrumental matemático, me parece que sería mucho mayor que si se hace al revés; lo que tu mencionaste, primero la parte matemática y luego la parte de aplicaciones. Es más esfuerzo para el profesor, para el estudiante no creo, ¿de acuerdo?, porque es una actividad que él (estudiante) va a desarrollar en una o dos clases. Repito, es más esfuerzo para el profesor pero sería más beneficioso para el estudiante. En otras palabras, consolidaría; como tú dices, su aprendizaje. Ahora, esta es mi opinión personal, pero que quede claro que yo nunca he llevado a cabo una actividad como ésta para decir que eso es lo que va a suceder, ¡ojo!

[Manuel]: O sea, lo que entiendo es, ¿plantearse el problema de optimización desde el punto de vista económico para luego llegar a la formulación matemática...?

[Moderador]: Permíteme explicarte, generalmente en los programas oficiales y en los libros de texto se sigue un esquema en el tema reservado a la derivada que consiste en dar unas motivaciones para dar la definición del concepto, luego se habla de derivadas de orden superior; primera, segunda deriva. Luego se habla de algunos conceptos del análisis matemático como función creciente, decreciente, máximo o mínimo relativos, puntos críticos o de inflexión, etc; para finalizar con aplicaciones de la derivada a la economía. Entonces, desde el punto de vista metodológico, ¿consideras tú que supone un mayor esfuerzo para ti, plantear una clase de esta manera, con la estructura que propongo? Cuando digo un mayor esfuerzo, remarco lo metodológico, me refiero a la preparación de la clase, al desarrollo de la misma, ya que tú vas a elegir y preparar una situación para trabajar con los estudiantes, donde se supone; no sé si tú lo haces así, que vas a generar un espacio de discusión con los estudiantes, donde el estudiante se vea obligado a participar, a opinar...

[Manuel]: Bueno, yo tomo ejemplos para comenzar a hablar de la parte de optimización, yo comienzo con ejemplos. Por qué tenemos que optimizar esta función, entonces puedo abrir con una función de costo o con una función de ingreso y explicarles... Por lo mismo que ellos saben que el ingreso aumenta, disminuye, sería bueno establecer cuál es ese cambio o dónde puede ocurrir ese cambio. Entonces basándonos en las dos situaciones, cuándo crece, cuándo decrece, entonces buscar ese punto óptimo y qué beneficio representaría para la empresa. Por ejemplo, minimizar una función de costo.

[Ramón]: Pero él se refiere más a la preparación de la clase, al desarrollo de la clase, todo el esfuerzo físico y mental que el profesor tiene que hacer para llevar a cabo una clase...

[Moderador]: Te explico con un ejemplo, uno da la definición de monotonía de una función y posteriormente aplicas esta definición en unos ejemplos o problemas particulares...

[Manuel]: Pero es que yo te estoy diciendo que yo hago lo contrario, doy el problema como una motivación y después es que doy las definiciones relacionadas al problema.

Por otra parte, consideran ustedes que es una actividad rutinaria que lejos de promover el aprendizaje, distrae al estudiante y lo conduce a errores (de qué tipos)? ¿Por qué?

[Ramón]: A mi no me parece rutinaria, pero insisto que el error al que se puede llegar por esta vía es que no se llegue al concepto formal de derivada y que quede ahí como una idea nebulosa, ¿de acuerdo? Yo no digo que sea malo, pero si el objetivo es tratar el concepto matemático, podría conducir a ese error;

es decir, que el concepto quede ligado a un único ejemplo y que el estudiante crea que eso de la derivada es algo muy particular de ese ejemplo, cuando en realidad no es así, es un concepto de las matemáticas que se puede establecer formalmente con el lenguaje matemático.

[Manuel]: Mira, un comentario, es distinto cuando yo doy un curso en la facultad de ciencias a cuando lo doy en economía, difieren mucho porque desde el punto de vista metodológico, en la facultad de ciencias yo entro con todo el rigor matemático; definiciones, teoremas, demostraciones y después es que hablo de diversas aplicaciones, no necesariamente de economía. Allá no, en la Facultad de Economía, casi siempre abro con un tipo de aplicación para motivar la parte matemática, para que el estudiante se motive a aprender. En este sentido, es que hablo de las diferencias entre un lugar y otro. Ahora bien, pienso yo que estas actividades no distraen ni confunden al estudiante, todo lo contrario, a ellos les gusta y piden que sea así.

[Ramón]: Bueno, tal vez aquí (en la Facultad de Ciencias) no sea tan necesario proceder como en economía porque como simultáneamente a las asignaturas de matemáticas tiene otras asignaturas donde constantemente están utilizando las matemáticas, entonces, pienso que no sea tan necesario hacerlo de esa forma aquí en Ciencias. En cambio allá (en la Facultad de Economía)..., ¿qué cursos ven ellos donde trabajen las matemáticas? Tal vez el de introducción a la economía, después está el de microeconomía, aunque eso depende del profesor. Hay cursos de microeconomía que los dan totalmente teóricos sin usar ningún instrumento matemático.

A.2.2. Incrementos, Tasas, Optimización[5]

El costo de producción de x unidades diarias de un artículo de consumo masivo es $C(x) = \frac{1}{8}x^2 + 3x + 98$ dólares y el precio para la venta por unidad es $p(x) = 25 - \frac{1}{3}x$ dólares

Preguntas: Las siguientes preguntas están relacionadas con los contenidos matemático y económico en general.

Pregunta 1: A partir de las funciones de costo, $C(x)$, y de precio, $p(x)$, calcular:

a : A partir de la función de costo marginal, calcular el costo de producir la unidad 10. ¿Cuál es el costo real de producir la unidad 10?
Respuesta de 1.a: Para la función de costo, $C(x)$, se tiene que el costo marginal es $C'(x) = \frac{1}{4}x + 3$ dólares, y el costo *aproximado* de producir la unidad 10 es $C'(9) = \frac{1}{4}(9) + 3 = \mathbf{5,25}$ dólares. El costo real de la décima unidad es $C(10) - C(9) = 140,5 - 135,125 =$ **5,375** dólares.

b : Calcule la **función de ingreso marginal**, $\boldsymbol{R'(x)}$, para la situación planteada. Luego, calcule el ingreso que resulta de la venta de la décima unidad. ¿Cuál es el ingreso real derivado de la venta de la unidad 10?
Respuesta de 1.b: En este caso, la **función de ingreso**, **R(x)**, se obtiene a partir del precio, $p(x)$, suministrado. Esto es,

$$\begin{aligned} R(x) &= x \cdot p(x) \\ &= 25x - \tfrac{1}{3}x^2 \end{aligned}$$

Así, el ingreso marginal es $R'(x) = 25 - \frac{2}{3}x$. El ingreso *aproximado* que se obtiene por la venta de la décima unidad es $R'(9) = 25 - \frac{2}{3}(9) = \mathbf{19}$ dólares. El ingreso real generado por la venta de la décima unidad es $R(10) - R(9) = 216,66 - 198 = \mathbf{18,66}$ dólares.

c : Halle el **beneficio** $\boldsymbol{U(x)}$ asociado con la producción de x unidades, calcule el beneficio marginal y determine con éste el beneficio del décimo artículo vendido. ¿Cuál es el beneficio real derivado de la venta del décimo artículo?
Respuesta de 1.c: La **función de beneficio**, $\boldsymbol{U(x) = R(x) - C(x)}$, en este caso es:

$$\begin{aligned} U(x) &= 25x - \tfrac{1}{3}x^2 - (\tfrac{1}{8}x^2 + 3x + 98) \\ &= -\tfrac{11}{24}x^2 + 22x - 98 \end{aligned}$$

En consecuencia, el beneficio marginal es $U'(x) = -\frac{11}{12}x + 22$ y el beneficio *aproximado* generado por la venta de la unidad 10 es $U'(9) = -\frac{11}{12}(9)$

[5]Tomado de Hoffmann y Bradley (2001)

$+\ 22\ =\ \mathbf{13,75}$ dólares. Pero, el beneficio real generado por la venta de la décima unidad es $U(10) - U(9) = 76,16 - 62,875 = \mathbf{13,285}$ dólares.

Discusión: En esta única pregunta subdividida en tres partes, se contempla un aspecto relacionado con la derivada como lo es, la interpretación de la derivada como una "buena" aproximación a la función dada en un entorno; de allí el remarcado de los resultados obtenidos.

En este caso, se puede apreciar en las tres respuestas que los valores real y aproximado para cada una de las situaciones resultan cercanos en los dos primeros casos y no mucho en el tercero.

De acuerdo a tu experiencia, ¿qué conflictos de aprendizaje podrían surgir en el estudiante, el hecho de que una herramienta matemática como la derivada, que él espera sea exacta, difiera en algunos casos en varias décimas? ¿Cómo abordarían ustedes la solución a este conflicto? El $\boldsymbol{x_0 + 1}$ *es mucho. Incrementos (discreto) Vs. derivada (continuo).*

[Ramón]: Mira, la gran mayoría no tendría conflictos porque como te he dicho, de la microeconomía ya ellos saben que la derivada es una aproximación para cualquiera de los tres casos anteriores, por lo menos. El profesor (de microeconomía) les ha explicado que es muy fastidioso tomar la función y hacer todas estas cuentas para luego hacer las restas, ¿de acuerdo? Entonces para ir rápido, los mismos profesores de microeconomía, los que usan las matemáticas, les explican esto y ya muchos de ellos tienen esta parte clara. Es decir, que la derivada es para hacer los cálculos más sencillos, pero que es una buena aproximación para lo que ellos requieren.

[Manuel]: Y que es el comentario que yo te decía anteriormente, que yo no hago mucho hincapié en establecer la diferencia entre R' y la diferencia ésta, $(R(x_0 + 1) - R(x_0))$; es decir, que ellos tomen $R'(9)$ por ejemplo como la diferencia. El 19 con el 18,66 anterior que ellos lo puedan tomar de manera indistinta.

[Ramón]: No sé si pueda agregar algo...?

[Moderador]: Sí, claro.

[Ramón]: ¿Puedo mencionar el nombre de algún autor?

[Moderador]: Sí, por supuesto.

[Ramón]: En el (libro de texto de Louis) Leithold, él toma un ejemplo y hace lo mismo que acá, él deja claro eso. Que se usa la derivada, porque uno puede ir un poco más rápido al momento de hacer los cálculos y aparte de eso; yo me pregunté durante algún tiempo por qué los economistas insisten tanto en el concepto de diferencial y yo llegué a la conclusión que es por eso, simplemente le simplifica el problema. Inclusive, es bueno retomar la interpretación de la derivada como la pendiente (de la recta tangente a la curva en un punto), ya que allí uno deja claro por medio de un dibujo, la diferencia. No sé si recuerdan el dibujito de diferencial, el del triángulo rectángulo.

[Moderador]: Este... ¿Pero entonces tú dices que no estableces la diferencia entre la derivada como aproximación y el valor real de una función en un punto?

[Manuel]: Hago una pequeña observación pero no le doy la relevancia que tú le estás dando. Recuerda que ellos se basan mucho en estimaciones, ahí tienes como ejemplo la Elasticidad de la Demanda.

[Moderador]: Y por ejemplo, Ramón, ¿tú si haces esa observación, esa diferencia?

[Ramón]: Sí, yo sí la hago. Lo que nunca he hecho y que ahora me parece apropiado es hacer lo del dibujo del triángulo que mencioné anteriormente, ya que allí se ve claro...

[Moderador]: ¿Y cómo gestionas tú esta parte de tu clase?, cuéntame un poco qué haces en tu clase.

[Ramón]: Por eso mencioné el Leithold, hago lo mismo que está allí, veo cuál es el valor real y luego hago la derivada y les digo..., bueno..., la derivada no les va a..., lo que hace Manuel, es no es el valor real, pero para efecto prácticos les basta eso. Pero, ¿Y por qué usamos la derivada y no calculamos el valor real? Ah, porque es más rápido calcular una derivada que hacer todos estos cálculos precisos, luego la resta y..., ahora que se me ocurre ilustrar la situación con el toque geométrico del triángulo.

Por otro lado, se incluye la necesidad de obtener una función que represente el ingreso, $\boldsymbol{R}(\boldsymbol{x})$ (pero en ningún momento se les dice que lo pueden hacer a partir del *precio*, de modo que ellos (los estudiantes) discurran sobre esta situación) para obtener el ingreso marginal a partir de ésta.

Ante esta situación, ¿cómo gestionarían ustedes una actividad de discusión y reflexión con los estudiantes, de manera que se logren los objetivos deseados, estos son: (a) obtener unos resultados a partir de unos datos que no son explícitos, y (b) llegar al concepto de un término económico (ingreso marginal) a partir de otro (precio) mediante una situación económica-matemática?

[Ramón]: La verdad es que nunca había pensado en una situación así...

[Manuel]: Disculpa que te interrumpa pero..., es que ya uno ha introducido esto cuando da el tema de función, en Matemáticas 11, ya uno habla de función de costo, función de ingreso y ya va creando funciones de su interés. Así, obtienes de forma explícita las funciones utilizando los argumentos respectivos para cada situación; por ejemplo, de que beneficio es igual a ingreso menos costo, que el ingreso es el precio por la cantidad de artículo vendidos...

[Moderador]: Disculpa Manuel, pero imagínate que estamos en el tema de funciones.

[Manuel]: Es que mira Luis, una situación como esta del ingreso ellos la manejan muy bien antes de llegar a los cursos de cálculo, incluso por sentido común...

[Ramón]: Este disculpa Manuel, pero por esa razón decía anteriormente que una situación como esta yo nunca me la había planteado. Además, ya ellos han trabajado este ejemplo en concreto en Introducción a la Economía, ya en este curso han trabajado con modelos lineales muy sencillos; es decir, si vendo un artículo, el precio por uno, si vendo dos artículos, el precio por dos y así sucesivamente.

[Manuel]: Y por eso es que uno usa estos conceptos, porque el estudiante ya está familiarizado con estos conceptos. De hecho, para la PINA (Prueba Interna de Admisión) han tenido que estudiar estas situaciones porque a ellos les preguntan cosas elementales pero vinculadas a la economía.

A.2.3. Cuestionario relacionado con la actividad 2

De acuerdo a la actividad que acabamos de realizar y como producto de las opiniones y discusiones en la misma, nos interesa conocer tu opinión sobre algunos puntos que señalamos a continuación:

1. El desarrollar una enseñanza como la que se propone, ¿supone para ti dedicarle más tiempo a los estudiantes y una atención, si se quiere, "personalizada" a estos? Justifica tu respuesta.

2. Tal como está propuesto y tomando en cuenta que la asignatura es de 7 horas (5T + 2P) semanales, ¿cuánto tiempo destinarías para abarcar los temas tratados? ¿por qué? y ¿cuántos problemas de este tipo? ¿por qué?

3. Al implementar actividades como ésta, ¿supone para ti cambios en el sistema de evaluación que actualmente sigues? **Observación**: Si la respuesta es afirmativa, te sugiero que aportes los detalles; si la respuesta es negativa, coméntame sobre tu evaluación actual.

4. ¿Por medio de estas actividades se pueden alcanzar los objetivos que persiguen los libros de texto que tú utilizas o difieren razonablemente? Una breve explicación.

Manuel

Cuestionario relacionado con la actividad 2

De acuerdo a la actividad que acabamos de realizar y como producto de las opiniones y discusiones en la misma, nos interesa conocer tu opinión sobre algunos puntos que señalamos a continuación.

1. El desarrollar una enseñanza como la que se propone, ¿supone para ti dedicarle más tiempo a los estudiantes y una atención, si se quiere, "personalizada" a éstos? Justifica tu respuesta.

Es cierto que se debe dedicar más tiempo de lo necesario. Tomando en cuenta que el estudiante ya ha trabajado previamente con los conceptos de cálculo, ángulos y beneficios.

2. Tal como está propuesto y tomando en cuenta que la asignatura es de 7 horas (5T + 2P) semanales ¿cuánto tiempo destinarías para abarcar los temas tratados? ¿por qué? y ¿cuántos problemas de este tipo? ¿por qué?

Pienso que con 1 hora para la
generalización y 2 horas para
la formalización, junto con horas,
2 horas prácticas, se abarcaría
estos temas. También creo que
los problemas de este tipo que deben
ser unos de 10 que son problemas
sencillos

3. Al implementar actividades como ésta, ¿supone para ti cambios en el sistema de evaluación que actualmente sigues? **Observación**: Si la respuesta es afirmativa, te sugiere que aportes los detalles; si la respuesta es negativa, coméntanos sobre tu evaluación actual.

Sí, me parece que debe haber cambios importantes en el sistema de evaluación, no solo cuidando preguntas de los temas lo siguiente.

4 ¿Por medio de estas actividades se pueden alcanzar los objetivos que persiguen los libros de texto que tú analizas o [illegible] [illegible] [illegible]

Los objetivos se alcanzan completamente, sobre todo para los libros con muchas explicaciones

Ramón

Cuestionario relacionado con la actividad 2

De acuerdo a la actividad que acabamos de realizar y como producto de las opiniones y discusiones en la misma, nos interesa conocer tu opinión sobre algunos puntos que señalamos a continuación:

1. El desarrollar una enseñanza como la que se propone, ¿supone para ti dedicarle más tiempo a los estudiantes y una atención, si se quiere, "personalizada" a éstos? Justifica tu respuesta.

Si, ya que entendemos que cada ejemplo o problema planteado está dividido en "pasos" o "etapas" que deben ser desarrolladas por cada uno de los estudiantes del curso: Cada estudiante puede tener una dificultad distinta en cada "etapa", la cual debe ser resuelta por el profesor. Además, el profesor debe cumplir el papel de "integrar" cada una de las etapas, ya que algunos estudiantes, a pesar de recorrer cada una de las etapas correctamente, podrían no captar hacia dónde conducen las mismas: Cuál es el objetivo del problema o ejemplo considerado.

2. Tal como está propuesto y tomando en cuenta que la asignatura es de 7 horas (5T + 2P) semanales, ¿cuánto tiempo destinarías para abarcar los temas tratados? ¿por qué? y ¿cuántos problemas de este tipo? ¿por qué?

Para un problema de este tipo, al menos 2 horas teóricas y 2 prácticas, para que sean los estudiantes los que resuelvan por cuenta propia, un problema similar. Este tiempo se debe a que la atención al estudiante sería más directa.

3. Al implementar actividades como ésta, ¿supone para ti cambios en el sistema de evaluación que actualmente sigues? **Observación**: Si la respuesta es afirmativa, te sugiero que aportes los detalles; si la respuesta es negativa, coméntame sobre tu evaluación actual.

Si; por ejemplo, en las horas prácticas, al proponer un problema similar al estudiante en las horas ~~prácticas~~ teóricas, se evaluaría mediante dicho problema si el mismo logró un objetivo específico dado.

4. ¿Por medio de estas actividades se pueden alcanzar los objetivos que persiguen los libros de texto que tú utilizas o difieren razonablemente? Una breve explicación.

Creo que los objetivos que persiguen los textos se pueden alcanzar mucho mejor mediante dichas actividades, ya que éstas están mejor "estructuradas" que en los mencionados textos.

A.3. Actividad 3

Hasta este punto del trabajo, hemos trabajado algunos conceptos matemáticos y económicos de manera simultánea. El estudiante calcula derivadas inmediatas, ha estudiado interpretaciones de la derivada, monotonía y extremos relativos.

Regla de la Cadena (Notación e interpretaciones varias)

A continuación se presentan unos problemas relacionados con la regla de la cadena.

A.3.1. Tasas Relacionadas[6]

Una empresa tiene la función de costo $C(x) = 25 + 2x - \frac{1}{20}x^2$ (en cientos de miles de dólares), en donde x es el nivel de producción de la empresa y éste depende del tiempo t. Si el nivel de producción es de $x = 5$ (millones de artículos por año) y está creciendo a una tasa de $0,7$ millones de artículos por año, tomando en cuenta que la capacidad de producción de la empresa no puede superar los 15 millones de artículos por año.

Preguntas: Las siguientes preguntas están relacionadas con los contenidos matemático y económico en general.

Pregunta 1: Determine el dominio de la función de costo $C(x)$ en un contexto matemático general y en el económico en particular. ¿Qué diferencia observa entre uno y otro?

Respuesta de P1: El dominio[7] es el señalado en la **Tabla A.5**.

	$C(x)$
Dominio Mat.	$\mathbb{R}$
Dominio Ec.	$[0, 150]$ $(\{x \in \mathbb{N}_0 : \frac{x}{100000} \leq 150\})$

Cuadro A.5: Dominio del costo, $C(x)$, en dos contextos

Discusión: Aún cuando el costo es una función polinómica cuyo dominio es el conjunto $\mathbb{R}$, en el contexto económico debemos tomar en cuenta que lo menos

[6]Tomado de Arya y Lardner (1987)

[7]$\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, 3, ...\}$

que puede producir la empresa es 0 artículos y el máximo de producción de ésta, tal como se señala en el enunciado, es de 15 millones de artículos por año; y como x está expresada en cientos de miles, el dominio es $[0, 150]$.

En una actividad anterior, una de las preguntas contenía una situación similar. ¿Consideran importante que se debe mantener o reforzar esta diferencia entre los dominios? ¿Por qué?

[Ramón]: Sí.

[Moderador]: Por qué razón, ¿podrías explicar?

[Ramón]: Precisamente porque se está usando la matemática como una herramienta para resolver un problema específico de la economía, entonces..., creo que hicimos el comentario la vez pasada. Cuando uno enseña el dominio de las funciones, generalmente, uno se refiere al dominio de la función en sí o a lo que tú llamas el dominio en el contexto matemático y como estamos insistiendo que se está usando como una herramienta, especificarle que como herramienta sólo tiene sentido en el intervalo ahí señalado que es de 0 a 150, para este problema en particular.

[Moderador]: ¿Y tú, Manuel?

[Manuel]: Que se tiene que estar recordando al estudiante constantemente todos los conceptos matemáticos, relacionar una situación con otra y, en particular, recordarle la diferencia entre estos dos dominios para que ellos no lo olviden y porque le ayuda reforzar los conocimientos, no sé qué más añadir.

Pregunta 2: Calcule la tasa para la cual los costos de producción se están elevando en la actualidad.

Observación: Antes de dar respuesta a esta pregunta conviene introducir la **regla de la cadena**. Para una función y que depende de u y ésta a su vez es una función que depende de x, con y derivable en u y u derivable en x, se tiene que la derivada de y respecto a x ($\frac{dy}{dx}$), se define como

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}}$$

Así, estudiar la razón de cambio de $\boldsymbol{y}$ respecto a $\boldsymbol{x}$ consiste en multiplicar la razón de cambio de $\boldsymbol{y}$ respecto a $\boldsymbol{u}$ por la razón de cambio de $\boldsymbol{u}$ respecto a $\boldsymbol{x}$.

Respuesta de P2: Del enunciado tenemos que $\frac{dx}{dt} = 0,7$ (cuando el tiempo se mide en años). El costo marginal está dado por

$$\frac{dC}{dx} = 2 - \frac{x}{10}.$$

Por consiguiente,

$$\begin{aligned} \frac{dC}{dt} &= \frac{dC}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} \\ &= (2 - \tfrac{x}{10}) \cdot \frac{dx}{dt} \end{aligned}$$

Sustituyendo $x = 5$, el nivel de producción actual, obtenemos

$$\begin{aligned} \frac{dC}{dt} &= (2 - \tfrac{5}{10})(0,7) \\ &= 1,05. \end{aligned}$$

Por lo tanto los costos de producción se están incrementando a una tasa de 1,05 (cientos de miles) de dólares por año o, dicho de otra manera, en 105000 dólares por año.

Discusión: *En este ejemplo de la regla de la cadena, la derivada de la función interna es parte del enunciado. ¿Utilizan ustedes un problema similar para introducir la regla de la cadena?*

1. *Sí*. *¿Por qué?*

2. *No*. *¿Lo utilizarían ahora para introducir la regla de la cadena, lo modificarían (¿cómo?) o simplemente lo harían de otra manera (¿por qué?)?*

[Manuel]: No, no, es más; primera vez que veo un problema de ese tipo.

[Ramón]: Yo también.

[Manuel]: Porque yo para la parte de regla de la cadena uso ya las formulaciones matemáticas, las propiedades.

[Moderador]: O sea, ¿tú defines primero la regla de la cadena y luego abordas los problemas?

[Manuel]: En sí, no incluyo la regla de la cadena en el problema así como está acá, sencillamente, para el cálculo de la derivada de una función queda implícita la regla de la cadena, no sé si me explico... De hecho, estoy aprendiendo algo nuevo con este problema.

[Moderador]: Dame detalles...

[Manuel]: Mira, defino la regla de la cadena y hago ejemplos, de allí en adelante el estudiante debe saber diferenciar si para calcular la derivada, se tiene que aplicar la regla de la cadena o no.

[Moderador]: Pero la pregunta es si utilizas un problema como este para introducir la regla de la cadena.

[Manuel]: No, ni siquiera conocía un problema como éste; primera vez que lo veo, te soy sincero.

[Moderador]: ¿Y tú, Ramón?

[Ramón]: Primera vez que veo esta manera de introducir la regla de la cadena con aplicaciones de economía.

[Moderador]: En atención a que la respuesta de ustedes es negativa, ¿intentarían ustedes introducir la regla de la cadena con un problema como éste o piensan que generaría conflictos en el estudiante?

[Ramón]: Al contrario, me parece que esta manera de introducir la regla de la cadena es más sencilla en comparación a como lo hago actualmente.

[Moderador]: ¿Y qué le modificarías al problema?

[Ramón]: No, yo no le modificaría nada, así como está expuesto me parece que tiene una buena estructura.

[Moderador]: Y cuáles serían los beneficios didácticos, desde el punto de vista del aprendizaje, etc...

[Ramón]: Hacerlo así, al menos ellos entenderían cómo usar y en qué consiste la regla de la cadena, porque la experiencia que yo tengo es que hay que identificar, les explico, hay que identificar la función interna, la función externa. Entonces, siempre he tenido la sensación de que ellos al final no comprenden en realidad qué significa la regla de la cadena; es decir, cómo y cuándo usarla. Ni hablar de la interpretación. Mientras que con tu ejemplo quedan bien identificados los dos factores.

[Moderador]: ¿Y tú, Manuel, implementarías o descartarías este problema, o lo modificarías?

[Manuel]: Sí me llama la atención y me atrae, pero como te dije, es primera vez que lo veo y tendría que estudiarlo más a fondo. Ahora, creo que sí se podría utilizar porque de esta manera se evita uno muchas formulaciones, esa es una de las cosas que me atrae y que seguro le gustaría a los estudiantes. Cuando yo introduzco la regla de la cadena, les hablo mucho de composición de funciones, les hago diagramas, que a los estudiantes no les gusta, muchas fórmulas y notaciones, usando el prima y usando la diferencial. Esto, sin embargo, me podría ayudar a separar una cosa de la otra, me parece muy buena idea pero vuelvo y te repito, tengo que madurar el ejemplo porque es primera vez que lo veo.

A.3.2. Utilidad y Publicidad[8]

Un determinado artículo puede fabricarse y venderse con una utilidad o beneficio de \$10 cada uno. Si el fabricante gasta x dólares en la publicidad del artículo, el número de artículos que pueden venderse será igual a $1000(1 - e^{-kx})$, en donde $k = 0,001$. Si U denota la utilidad neta por las ventas y tomando en cuenta que el fabricante no está dispuesto a gastar más de \$8500 en publicidad.

Preguntas: Las siguientes preguntas están relacionadas con los contenidos matemático y económico en general.

Pregunta 1: Calcule $U'(x)$ e **interprete esta derivada**.

Observación: Antes de dar respuesta a estas preguntas conviene introducir la **regla de la cadena**. Para una función f que depende de g y ésta a su vez es una función que depende de x, con f derivable en $g(x)$ y g derivable en x, se tiene que la derivada de f respecto a x ($f'(x)$), se define como

$$\boxed{f'(x) = f'[g(x)] \cdot g'(x)}.$$

Así, estudiar la derivada de ***f*** respecto a ***x*** consiste en multiplicar la derivada de ***f*** respecto a ***g(x)*** por la derivada de ***g*** respecto a ***x***.

Respuesta de P1: Puesto que cada artículo produce una utilidad de \$10, la utilidad bruta total originada por las ventas se obtiene multiplicando el número de ventas por \$10. La utilidad neta se obtiene entonces sustituyendo los costos de publicidad:

$$U(x) = 10{,}000(1 - e^{-kx}) - x.$$

Por lo tanto,

$$U'(x) = -10{,}000 \cdot (e^{-kx})' - 1$$

Y por la regla de la cadena,

$$\begin{aligned} U'(x) &= -10{,}000(-ke^{-kx}) - 1 \\ &= 10{,}000ke^{-kx} - 1 \end{aligned}$$

y como $k = 0,001$ se tiene que

$$U'(x) = 10e^{-0{,}001x} - 1$$

[8]Tomado de Arya y Lardner (1987)

La **interpretación** de esta derivada es que *mide la tasa de cambio de la utilidad neta con respecto a los gastos de publicidad*. En otras palabras, $U'(x)$ da el incremento en el número de dólares en la utilidad neta producida por un gasto adicional (en dólares) en publicidad.

Discusión: A través del problema buscamos que el estudiante descubra la necesidad e importancia de la herramienta (la regla de la cadena), puesto que la función e^{-kx} no tiene derivada inmediata. Una vez discutido con el estudiante y generando entre ellos un diálogo que conduzca a esta regla, el problema se puede atacar sin mayores problemas ¿o no?

Generalmente, la forma tradicional de llegar a la regla de la cadena consiste en definirla y de inmediato hacer ejemplos, en principio, matemáticos que permitan visualizar la regla para posteriormente realizar ejercicios o problemas de aplicación.

¿Consideran ustedes un ejemplo como éste, la manera apropiada para llegar a la regla de la cadena o harían alguna modificación para lograr los objetivos de este tema; como por ejemplo, realizar cambios en la función compuesta o modificarla?

[Ramón]: Sí, sí. La razón es la que tú acabas de explicar, allí aparece una composición. Ahora, abría que hacerle énfasis acá de por qué no se puede derivar usando las reglas que hasta el momento ellos conocen, la suma, el producto, etc. Explicarles por qué no se pueden aplicar estas reglas, es decir, no dejar de plantear esa discusión. Ahora, me parece que es importante aclarar que una función como ésta (la exponencial del problema) no se puede derivar con las reglas anteriores y ya, cuando el estudiante ha entendido que no se puede derivar con estas reglas, pasamos a explicar el esquema que tú planteas y no quedarse sólo con eso, sino que se deben discutir más problemas.

[Moderador]: Manuel, ¿cuál es tu opinión en este sentido?

[Manuel]: Bueno, a mi me parece que el ejemplo es adecuado, de hecho, la función exponencial es clave para la regla de la cadena y para los futuros economistas; en primer lugar, porque con la exponencial ellos cometen errores, entonces es el momento oportuno para aclarar cuál es la derivada y cómo se deriva la función exponencial; por otra parte, los economistas trabajan mucho con la exponencial y el logaritmo. Además, es una función un poco más complicada que los polinomios y como necesitamos trabajar con funciones compuestas, la exponencial y el logaritmo son funciones ideales para esto por sus aplicaciones en la economía; de hecho, en los libros de cálculo para economistas aparece mucho la función exponencial en el tema de regla de la cadena. Además, lo que veo es que sigue en la misma tónica de los ejemplos anteriores, donde motivas al estudiante con un ejemplo.

¿Cuáles son las dificultades que presentan sus estudiantes ante este tipo de problemas?

[Ramón]: A mi juicio, según la experiencia que yo he tenido es que ellos a estas alturas no han aprendido a identificar si una función es compuesta o no. Ahora, no sé si te refieres al enunciado o a este tipo de enunciados...

[Moderador]: También, también...

[Ramón]: Hay algunos que les cuesta asimilar este tipo de problemas y prefieren problemas de cálculo directo; es decir, problemas donde tú le colocas la función y le pides que deriven, pero la mayoría se identifica con este tipo de problemas. Ahora, volviendo a los errores anteriores, con un problema como éste ellos derivan la exponencial de este ejercicio tan igual como si apareciera solo e^x, para ellos es la misma función e^x y e^{-kx}, no ven diferencia, no se dan cuenta de que se trata de una función distinta y que en consecuencia merece un tratamiento distinto; es decir, no se dan cuenta que se trata de una composición de funciones. No sé cuál será la razón o la causa, pero cuando llegan a Matemáticas 21, la mayoría de ellos no logran identificar cuándo una función es composición de funciones, creo que no han desarrollado la habilidad suficiente para identificar ese tipo de funciones.

[Manuel]: Por eso es que, yo, este ejemplo lo veo muy adecuado porque, de alguna manera, se solventa ese inconveniente que ellos tienen, de ver una función como composición de otras. Con este ejemplo donde tú hablas de una variable dependiendo de otra me parece muy adecuado, yo la diferencia que veo; en general, hasta ahora con las discusiones que hemos tenido es que tú detallas mucho más que yo el planteamiento y desarrollo del problema.

[Moderador]: ¿Y tú ves los mismos errores que observa Ramón en sus estudiantes?

[Manuel]: Sí, la mayor dificultad se centra en que no saben diferenciar cuándo una variable depende de otra.

[Moderador]: Y por ejemplo, ¿qué estrategias siguen o seguirían ustedes para resolver esta problemática?

[Manuel]: Mira yo, fundamentalmente, me ayudo en esta parte hablando de variables más que de funciones, hablo de x, y, z en lugar de $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$. Que el equivalente aquí en el ejemplo que tú planteas, sería ayudarse con las cantidades; es decir, que la x que representa los niveles de producción dependen de la publicidad y la publicidad depende del tiempo, entonces uno podría ayudarse con eso.

[Moderador]: ¿Y tú, Ramón, cómo solventas o solventarías esa dificultad?

[Ramón]: ¿El de la composición o el de la regla de la cadena?

[Moderador]: El de la composición.

[Ramón]: Trabajar con las funciones de economía o al menos con las que aparecen en los libros de economía y hacer composiciones entre ellas y estar un tiempo con ellos para que practique y desarrollen esa habilidad de identificar la función interna y externa.

[Moderador]: Y tal como está presentado este problema, ¿creen ustedes que sería una buena idea para solventar estas dificultades?

[Ramón]: ¿Para lo de la composición o para la regla de la cadena?

[Moderador]: Para la composición.

[Ramón]: No, para la composición no, porque aquí estamos presuponiendo, al menos yo, que conocen bien la composición, que manejan bien la composición.

[Moderador]: Y en tu caso, ¿también lo descartas Manuel?

[Ramón]: Ojo, disculpa que interrumpa, yo no lo descarto, lo que estoy diciendo es que para trabajar la composición no es el adecuado, para trabajar la regla de la cadena sí.

[Manuel]: Mira, yo creo que se le puede sacar provecho, pero hay que estudiarlo y discutirlo con calma, ahora mismo no se me ocurre como modificarlo, si es necesario, para trabajar el tema de composición.

Pregunta 2: ¿Será cierto que mientras más se invierta en publicidad, mayor será la utilidad? Como respuesta parcial a esta pregunta, evalúe $U'(x)$ en $x = 1000$ y en $x = 3000$. **Interprete los resultados**.

Respuesta de P2: Conviene prestar atención a los dos casos que se estudian a continuación.

Cuando $x = 1000$,

$$U'(1000) = 10e^{-1} - 1 = 10(0,3679) - 1 = 2,679.$$

Para el caso en que $x = 3000$,

$$U'(3000) = 10e^{-3} - 1 = 10(0,0498) - 1 = -0,502.$$

Discusión: De modo que si se gastan \$1000 en publicidad, **cada dólar adicional produce un incremento** de \$2,68 en la utilidad neta. Mientras que si se gastan \$3000 en publicidad, **cada dólar adicional produce una disminución** de \$0,50 en la utilidad neta. En este caso es claro que el fabricante no debería hacer más publicidad (el costo de publicidad extra incrementaría en exceso el valor de las ventas adicionales que se generarían). De hecho, cuando $x = 3000$, **ya se está gastando de más en publicidad**.

¿Y si se invierten $2.000 en publicidad, o $2.100?

¿Consideran ustedes que este planteamiento tiene aspectos innovadores, en materia de enseñanza, que permite al estudiante la maduración y consolidación del concepto, así como la utilidad de esta herramienta en el campo de las ciencias económicas? ¿Por qué?

[Manuel]: Yo lo uso bastante porque se aproxima uno a los puntos críticos, a los máximos y mínimos, porque cuando voy a hablar...; es decir, hay distintos momentos, dependiendo de la cantidad de la producción que hace, hay distintos momentos del ingreso, entonces eso es lo importante de la derivada, que me va a dar esos numeritos, de cómo voy a ajustar esos niveles de producción. Fíjate, como tú dices, yo puedo hablar de 2000, puedo usar 1500, entonces se le da esa pregunta al alumno; bueno pero, cuál sería el valor más apropiado que tendría que usar, buscar el nivel óptimo. Entonces allí es donde aparece el problema de optimizar la función de ingreso o la que esté en discusión. Yo uso mucho este tipo de actividad.

[Moderador]: Y en tu caso Ramón, ¿qué nos puedes decir?

[Ramón]: En el mismo sentido de Manuel, pero un poco más general como lo he dicho desde la primera sesión. Siempre, lo que he visto en los estudiantes de la Facultad de Economía, ellos cuando se les muestra cómo se usan estas herramientas en economía, ellos se sienten mucho más motivados a estudiar las partes de las matemáticas o esa parte de las matemáticas que se está usando para esa aplicación. Tal vez el profesor podría usar los conceptos matemáticos en esa aplicación; por ejemplo, lo que mencionó Manuel, que en cada uno de los valores sucede algo particular; o sea, para distintos valores de la variable independiente notemos qué es lo que sucede con estas otras cantidades.

[Moderador]: ¿Podrías detallar un poco más?

[Ramón]: Mira..., en este problema tú planteas preguntas que pondrán a dudar al estudiante, ellos se harán preguntas y se motivarán a estudiar el tema de monotonía..., hay muchos estudiantes curiosos, al menos en mis cursos... Con este problema abres las puertas al tema de monotonía.

En un seminario similar, cuando pregunté si este tipo de preguntas conducen o promueven el estudio de monotonía de una función (crecimiento y decrecimiento) y más aún de extremos relativos (máximos y mínimos); uno de los participantes en el seminario mantuvo firme objeción a mi planteamiento y utilizó dos o tres argumentos, por el contrario, los otros participantes vieron con buenos ojos nuestra propuesta y uno dijo que intentaría ponerla en práctica y experimentar un poco *por eso de la motivación*.

Me gustaría conocer la opinión de ustedes al respecto; es decir, este hecho particular de evaluar la función de utilidad en dos puntos que nosotros sabemos que dan

interpretaciones contrarias, ¿promueven el estudio de monotonía de una función y el interés por los estudiantes?

[Moderador]: Incluso, quiero hacer un paréntesis referente al término "motivación", porque entiendo que tal como ustedes lo mencionan, consideran más estos problemas como motivadores que como generadores de aprendizaje en concreto...

[Manuel]: No, no, creo que estás interpretando mal el asunto...

[Ramón]: Motivación como nosotros la entendemos es, motivar para que ellos se pongan a estudiar eso y lo que nosotros hemos observado es que se ponen a estudiar y aprenden la herramienta matemática aparte de la interpretación económica. No sé si es la misma opinión de Manuel...

[Manuel]: Claro, claro...

[Ramón]: Ahora, volviendo a la monotonía [de la función], de repente sería conveniente, una vez que..., si es el profesor el encargado de hacer este par de cálculos que están acá, dejarle unos cuantos más a los estudiantes, tal vez eso podría promover la idea de monotonía...

[Manuel]: Yo estoy de acuerdo con dejarle muchos más. Incluso, ellos mismos se podrían preguntar, de estos distintos valores, cuál será el que mejor me conviene. Porque fíjate que estos son valores de la derivada y eso da respuesta es acerca de la función de utilidad que está en el ejemplo. Ahora, algo que me parece bueno de tu ejemplo es que das dos puntos, de los cuales tú sabes que uno tiene un resultado positivo y el otro negativo, de esta manera debe quedar la inquietud del estudiante, ¿habrá un punto que haga 0 a la función?, en este caso a la derivada, ¿qué ocurre matemáticamente aquí? Con esto se estaría introduciendo al estudiante en los puntos críticos. Aquí se estudia el cambio de signo de la derivada en los intervalos que da el problema y eso induce el estudio de puntos críticos y de función creciente y decreciente, de monotonía pues...

[Moderador]: Justamente lo que se busca es que el estudiante se haga este tipo de cuestionamiento, el detalle es que éste no está preparado o no lo hemos preparado para esta actividad.

[Ramón]: No te creas, mientras tú le hagas preguntas o los dejes en situaciones medio complicadas, siempre hay alguno que no se calla y pregunta, el detalle es que generalmente son siempre los mismos.

A.3.3. Análisis e Interpretación Econ-Mat[9]

Suponga que el costo total (en dólares) de fabricación C en cierta fábrica es una función que depende de las q unidades producidas, que a su vez es una función que depende del tiempo, t, que representa las horas durante las cuales ha estado funcionando la fábrica.

Preguntas: Las siguientes preguntas están relacionadas con los contenidos matemático y económico en general.

Pregunta 1: ¿Qué cantidad se representa mediante la derivada $\frac{dC}{dq}$? ¿En qué unidades se mide esta cantidad?

Observación: Antes de dar respuesta a estas preguntas conviene introducir la **regla de la cadena**. Para una función y que depende de u y ésta a su vez es una función que depende de x, con y derivable en u y u derivable en x, se tiene que la derivada de y respecto a x ($\frac{dy}{dx}$), se define como

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}}$$

Así, estudiar la razón de cambio de $\boldsymbol{y}$ respecto a $\boldsymbol{x}$ consiste en multiplicar la razón de cambio de $\boldsymbol{y}$ respecto a $\boldsymbol{u}$ multiplicada por la razón de cambio de $\boldsymbol{u}$ respecto a $\boldsymbol{x}$.

Respuesta de P1: La expresión $\frac{dC}{dq}$ representa la razón de cambio del costo C respecto al número de unidades producidas q. Esta cantidad se mide en dólares/unidades.

Pregunta 2: ¿Qué cantidad representa la expresión $\frac{dq}{dt}$? ¿En qué unidades se mide esta cantidad?

Respuesta de P2: La expresión $\frac{dq}{dt}$ representa la razón de cambio de las unidades producidas q respecto al tiempo t. Esta cantidad se mide en unidades/horas.

Pregunta 3:¿Qué cantidad representa la expresión $\frac{dC}{dt} = \frac{dC}{dq}\frac{dq}{dt}$? ¿En qué unidades se mide esta cantidad?

Respuesta de P3: La expresión $\frac{dC}{dt} = \frac{dC}{dq}\frac{dq}{dt}$ representa la razón de cambio del costo C respecto al tiempo t. Esta cantidad se mide en dólares/horas.

Discusión: Para finalizar el tema de la regla de la cadena, discutamos ahora sobre una pregunta como ésta, de corte teórico, donde las exigencias de análisis

[9]Hoffmann y Bradley (2001)

e interpretación, tanto económico como matemático, son mayores que aquellas de contenido numérico.

¿Conduce al estudiante a una actitud de rechazo este tipo de problemas?

[Ramón]: A qué te refieres con eso de "*corte teórico*" que dijiste antes.

[Moderador]: Bueno, problemas que centran su formulación en variables más que en números y donde la interpretación matemática o económica juega un papel fundamental, fíjate que en las tres preguntas relacionadas con este problema no hay números. Entonces, la pregunta es, cuando colocas un problema como este, ¿los estudiantes de ciencias económicas manifiestan algún tipo de rechazo o se indisponen?

[Ramón]: Te voy a hablar de mi experiencia particular. No, a ellos más bien le agrada este tipo de problemas, aunque te puedo decir que es de cierto tiempo para acá, hace unos diez años o más esto era impensable, tanto por el profesor como por los estudiantes, pero desde que dos profesores comenzaron a hablar de aplicaciones y rompieron con ese esquema del cálculo tradicional, los estudiantes y algunos profesores nos fuimos cambiando al tema de las aplicaciones.

[Moderador]: Y tú, Manuel, ¿opinas igual que Ramón o puedes agregar algo más?

[Manuel]: Mira, no... Los estudiantes no sienten rechazo por problemas como estos, pero te hago la siguiente observación, más bien relacionada con un error común en los estudiantes cuando le colocas la regla de la cadena como aparece en la tercera pregunta ($\frac{dC}{dt} = \frac{dC}{dq}\frac{dq}{dt}$). Generalmente, ellos cancelan el "dq", por eso yo trabajo más con la otra notación [con la de Newton], sobre todo para introducir la regla (de la cadena).

¿Un problema como éste, conduce a cubrir los objetivos que se plantean los libros de texto que ustedes utilizan?

[Ramón]: ¿Te refieres a los objetivos de los libros o a los de los programas de la materia?

[Moderador]: A los de los libros, recuerda que el libro tiene una estructura y el autor persigue unos objetivos; por ejemplo, explotar la parte visual, la parte numérica, las aplicaciones, etc...

[Ramón]: Mira, ahora el que me viene a la memoria es el libro de (Louis) Leithold, donde habla de los cocientes incrementales, pero en general y según mi opinión, los libros no desarrollan tanto o con tanto detalle el tema de la derivada o cualquier otro tema en general. Pienso que; en general, se cumplen los objetivos de los libros y un poco más...

[Manuel]: Pero recuerda que los libros de texto son eso, libros de texto, pienso más bien, que es tarea del profesor o del estudiante, profundizar en el tema que se estudie; además, pienso también que esto que tú nos presentas aquí es más bien como una guía de estudios, donde se va paso a paso desarrollando el tema. Ahora bien, conociendo (tú) bien la situación de la universidad, donde hay muchos alumnos por curso, pocos profesores, el tiempo, etc., ¿crees tú qué se puede desarrollar un curso de matemáticas de esta manera?

[Moderador]: Te respondo con una pregunta, ¿es que acaso el ser humano no experimenta cambios constantemente?, o más directo, ¿consideras tú que el estudiante no merece una mayor y mejor atención por parte de nosotros? Ramón dijo, hace un instante, que hace diez o más años, no recuerdo, las cosas eran distintas. Entonces, ¿por qué no seguir cambiando para mejor? Pero sigamos con el guión de la discusión.

¿Un problema como éste, sería ideal para preguntarlo en una evaluación del tema de derivadas?

[Ramón]: Sí.

[Moderador]: ¿Por qué, Ramón?

[Ramón]: Repito algo que hemos dicho varias veces, si tú le estás enseñando matemáticas a un estudiante de economía, lo mejor sería hacerlo de la manera como se ha puesto en estos problemas, ya que lleva de manera paralela la parte matemática y los conceptos económicos en los cuales se usa ese instrumental matemático...

[Manuel]: Preguntarle sobre la interpretación estoy de acuerdo. Ahora, preguntarle tal como está aquí, yo no lo preguntaría porque tú resaltas más la interpretación económica y lo de las unidades y yo no le veo mucha importancia a eso. Bueno, sí la tendrá, pero no para enseñar derivada, que es lo que uno quiere, que el estudiante aprenda a derivar...

[Moderador]: Disculpa que te interrumpa, dentro de los objetivos que tú planteas en tus cursos, a qué le das más peso o qué crees tú que es más importante, calcular derivada o hacer interpretaciones de la derivada.

[Manuel]: Calcular derivada y hacer interpretaciones, pero no interpretaciones de este tipo, donde hay unidades; por ejemplo, un problema como éste no lo utilizaría para un examen.

[Moderador]: Pero ¿a qué le das más peso, a que el estudiante sepa interpretar una derivada o que el estudiante sepa calcular una derivada?

[Manuel]: A calcularla..., yo soy matemático...

[Ramón]: Yo le daría igual peso a las dos... me parece apropiado. Inclusive...

[Manuel]: Bueno, tú me estás preguntando, ¿a eso o a lo otro?

[Moderador]: Pero tranquilo, yo respeto la opinión de cada uno de ustedes, mi intención aquí no es cuestionar la opinión o el punto de vista de ustedes sobre su labor profesional. Sino que mientras más opiniones tenga yo de ustedes mucho mejor para la investigación que estoy realizando. De hecho, agradezco la sinceridad y espontaneidad de ustedes en sus opiniones.

A.3.4. Cuestionario relacionado con la actividad 3

De acuerdo a la actividad que acabamos de realizar y como producto de las opiniones y discusiones en la misma, nos interesa conocer tu opinión sobre algunos puntos que señalamos a continuación:

1. Respecto a la forma actual que sigues en tus cursos de cálculo para enseñar la *regla de la cadena*, ¿podrías destacar algún aspecto relevante que incida en el aprendizaje del estudiante al implementar una actividad como ésta?
2. De los tres problemas presentados anteriormente, ¿cuál supone para ti de mayor relevancia didáctica?, es decir, ¿cuál de estos te permitiría lograr los objetivos propuestos para tus estudiantes? ¿por qué?
3. De las dos notaciones que se usaron para la derivada en los tres problemas anteriores, ¿cuál de las dos utilizas en tus clases? ¿Por qué?
4. Hay investigadores en didáctica que consideran que el relacionar una actividad que vincule contenidos matemáticos con otras áreas sólo tienen un valor **motivador**. ¿Tú concibes una actividad como ésta de igual forma o te parece sugerente como generadora de conocimiento en ambas direcciones? ¿Por qué?
5. ¿Este tipo de actividad, te obliga a romper con los esquemas que actualmente mantienes en tus clases? ¿Por que?
6. Para introducir y desarrollar la *regla de la cadena*, ¿cuál es esquema que sigues actualmente?

Manuel

Cuestionario relacionado con la actividad 3

[illegible]

1. [illegible]

[illegible]

2. [illegible] problemas [illegible] lograr [illegible] estudiantes [illegible] ¿por qué?

[illegible]

[illegible] ¿Por qué?

[illegible]

1. Hay investigaciones en didáctica que [illegible] matemáticas [illegible] motivador [illegible]

[illegible]

5. Este tipo de actividad, te obliga a [illegible] ¿Por qué?

Sí, porque por medio de estos ejercicios se obtiene para el aprendizaje de la matemática mejor con el [illegible] por aprenderla

5. [illegible]

[illegible]

Ramón

Cuestionario relacionado con la actividad 3

De acuerdo a la actividad que acabamos de realizar y como producto de las opiniones y discusiones en la misma, nos interesa conocer tu opinión sobre algunos puntos que señalamos a continuación:

1. Respecto a la forma actual que sigues en tus cursos de cálculo para enseñar la *regla de la cadena*, ¿podrías destacar algún aspecto relevante que incida en el aprendizaje del estudiante al implementar una actividad como ésta?

Creo que un aspecto relevante es la forma cómo se explica el uso de la regla de la cadena de la pregunta 2, ya que con ~~el~~ la mencionada pregunta, se explica de una manera sencilla y rápida el uso de la regla de la cadena.

2. De los tres problemas presentados anteriormente, ¿cuál supone para ti de mayor relevancia didáctica?, es decir, ¿cuál de éstos te permitiría lograr los objetivos propuestos para tus estudiantes? ¿por qué?

Cada uno de los problemas me parecen muy adecuados, en vista que:

(a) Explican en forma rápida y sencilla el uso de la regla de la cadena.

(b) Dicha explicación se hace a partir de la tasa de cambio, lo que tiene relevancia en Economía.

(c) Mediante alguno de dichos problemas se hace ver la necesidad de la regla de la cadena: Con las propiedades de la derivada vistas hasta el momento, no se puede derivar la composición de dos funciones.

3. De las dos notaciones que se usaron para la derivada en los tres problemas anteriores, ¿cuál de las dos utilizas en tus clases? ¿Por qué?

Usaría ambas notaciones, debido a que la notación $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$ hace referencia a la tasa de cambio (aplicación a la Economía) y la notación $f' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$ le explica al estudiante que la regla de la cadena sirve para derivar composición de funciones.

4. Hay investigadores en didáctica que consideran que el relacionar una actividad que vincule contenidos matemáticos con otras áreas sólo tienen un valor **motivador**. ¿Tu concibes una actividad como ésta de igual forma o te parece sugerente como generadora de conocimiento en ambas direcciones? ¿Por qué?

Me parece sugerente como generadora de conocimiento en ambas direcciones; pero una vez que ha concluido la actividad que vincula el contenido matemático con otra ~~actividad~~ área del conocimiento, el profesor debe explicar que parte de dicha actividad es propia de cada área: El estudiante debería ~~de~~ comprender que la Matemática es un instrumento que es necesario dominar, para que por medio de ella pueda generar modelos en otras áreas de estudio.

5. ¿Este tipo de actividad, te obliga a romper con los esquemas que actualmente mantienes en tus clases? ¿Por que?

Sí obliga a romper mi esquema de exposición, porque lo que he hecho siempre es que primero explico el contenido matemático, sin hacer referencia a la Economía, y luego se tratan en clase alguno ejercicios sencillos del uso del uso del instrumental matemático en la Economía.

6. Para introducir y desarrollar la *regla de la cadena*, ¿cuál es esquema que sigues actualmente?

a) Recuerdo qué es la composición de dos funciones.

b) Hago ejercicios para que los estudiantes traten de identificar la función interna y la externa de una composición.

c) Se explica mediante ejemplos que no deben confundir la composición de funciones con el producto de funciones.

d) Se usa la regla de la cadena, haciendo énfasis en la identificación de la función externa e interna, en cada uno de los ejemplos considerados en clase.

A.4. Actividad 4

Mediante esta actividad se busca profundizar y consolidar conceptos matemáticos y económicos relacionados con el cálculo diferencial y otros conceptos básicos de las matemáticas o situaciones "rutinarias" como el despejar una ecuación no común o el trabajo con diversas unidades de medición, después de haber desarrollado durante varias semanas un trabajo con los estudiantes en el tema de la derivada.

A.4.1. Análisis e Interpretación Econ-Mat 1[10]

El valor de cierto cultivo de frutas (en dólares) es $\mathcal{V} = \mathcal{A}(1 - e^{-kI})$ donde $\mathcal{A}$, k son constantes positivas e I es el número de libras por hectárea de insecticida con que se fumiga el cultivo. Si el costo de fumigación está dado por $C = BI$, con B una constante (precio del insecticida).

Preguntas: Las siguientes preguntas están relacionadas con los contenidos matemático y económico en general.

Pregunta 1: Encuentre el valor de I que hace a $\mathcal{V} - C$ máxima.

Respuesta de P1: Como $\mathcal{V} = \mathcal{A}(1 - e^{-kI})$, se tiene que $\mathcal{V} - C = \mathcal{A}(1 - e^{-kI}) - BI$.

Así,

$$\frac{d}{dI}(\mathcal{V} - C) = \mathcal{A}k(e^{-kI}) - B$$

Por lo tanto, para $I = \frac{-1}{k}\ln(\frac{B}{\mathcal{A}k})$, $\mathcal{V} - C$ alcanza un máximo.

Discusión: El problema aquí planteado exige más conocimientos que los planteados hasta el momento, en este caso se obliga al estudiante a manejar herramientas de análisis matemático, trabajar con funciones exponenciales, entre otras. Aún cuando el contexto es económico, todo el planteamiento y resolución del mismo (hasta aquí) es matemático.

¿Qué aportes tiene este tipo de problemas en el aprendizaje de los estudiantes?

[Ramón]: Un momento, aclárame algo porque no sé si te interpreté bien, ¿ya se ha visto, previamente, en un contexto general cómo encontrar los máximos de una función y que la función esté asociada a alguna aplicación de la economía?

[Moderador]: Te explico, esta sesión es una continuación de las tres anteriores, con lo cual, ya hemos trabajado la introducción de la derivada, cálculo de

[10]Tomado de Arya y Lardner (1987)

derivada, estudios de valores extremos, puntos críticos, análisis marginal; pero además, debemos tomar en cuenta que las sesiones no necesariamente son una clase, sino que cada sesión puede tomar más de una clase sin olvidar que el profesor presenta una lista de problemas y ejercicios a sus estudiantes para reforzar lo discutido en clase. Por otra parte, el estudiante ha asistido a consultas con el profesor, etc. Entonces, para cerrar el tema de la derivada nosotros presentamos estos problemas con el fin de discutir su pertinencia en varios aspectos; en este caso, hablemos de los aportes que pueda tener este tipo de problemas en el aprendizaje de los estudiantes.

[Ramón]: Bueno, el hecho de cerrar un tema en la misma línea en la que se ha desarrollado todo el tema me parece que es ideal para reforzar sus conocimientos, aunque yo haría la siguiente observación: veo que el problema está muy recargado en la formulación; es decir, muchas letras y ningún número y eso no le agrada a muchos estudiantes. Sin embargo, al estar recargada la formulación ellos se verían en la obligación de prestar mayor atención al problema y de esta manera, tienen que identificar mejor cuáles son las variables y cuáles son las constantes. En general, es un problema con más exigencia que los anteriores que obliga al estudiante a pensar más y en consecuencia debe reforzar sus conocimientos.

[Moderador]: Y tú, Manuel, ¿qué opinas al respecto?

[Manuel]: En primer lugar, veo que con este problema se le exige al estudiante un mayor nivel de manipulación algebraica; por otra parte, este problema resume todo o engloba todo lo anteriormente visto, parte de aplicaciones, la parte matemática, las dos cosas al mismo tiempo, porque aquí el estudiante tiene que volver a las manipulaciones, igualar una ecuación a 0, en despejar una variable y cosas como estas reafirma más su conocimiento.

¿Qué dificultades supone este tipo de problemas para el estudiante?

[Manuel]: Por experiencia, ellos son muy malos despejando y este problema les hace despejar una variable que forma parte del argumento de una función exponencial. Allí, más de uno se frustraría, eso los vuelve loco a ellos. En este caso uno debe detenerse bastante a explicarles esto; de hecho, en los exámenes ellos se equivocan mucho despejando...

[Moderador]: ¿Y qué dificultades observas tú, Ramón?

[Ramón]: En general, son las mismas que mencionó Manuel, por eso mencionaba lo de recargado, a ellos les cuesta mucho identificar las variables, las constantes en una función así, entonces para el momento de despejar se pueden equivocar.

Pregunta 2: ¿Para las siguientes condiciones, $0 < \mathcal{A}k < B$ y $0 < B < \mathcal{A}k$, cuál de las dos le da sentido a la situación anterior? Justifique su respuesta.

Respuesta de P2: En el caso en que $0 < \mathcal{A}k < B$, se tiene que $0 < 1 < \frac{B}{\mathcal{A}k}$. Por lo tanto, $I < 0$. Aunque desde el punto de vista matemático, este resultado es válido; desde el punto de vista económico no lo es, puesto que I representa el número de libras por hectáreas.

En el caso en que $0 < B < \mathcal{A}k$, se satisface $0 < \frac{B}{\mathcal{A}k} < 1$. Por lo tanto, $I > 0$ y esto tiene sentido tanto matemático como económico.

Discusión: En esta tarea aparecen condiciones algebraicas para estudiar el comportamiento de la función y su sentido dentro de dos contextos, no obstante, me he encontrado con profesores de cálculo que no comparten mi opinión.

Relacionar tareas teóricas contextualizadas de derivada y manipulaciones algebraicas, ¿qué incidencias tienen en el aprendizaje matemático y económico en los estudiantes?

[Manuel]: Pero Luis, siempre en los cursos es lo que se ha hecho para todos los temas, tú tienes que hacer que el estudiante piense, entonces la cuestión no consiste en darle una fórmula para que sustituya unos valores en ella, para que el estudiante aprenda a razonar tú tienes que darle otras posibilidades...

[Moderador]: Pero entonces, ¿crees tú que este tipo de problema les obliga o les conduce a pensar, a analizar...?

[Manuel]: Claro, por supuesto, esto les obliga a entender mejor las fórmulas y ese tipo de cosas... A mi me parece muy adecuado estudiar esto... Y acuérdate que esto lo que está es relacionando la situación real de mi problema con la situación, vamos a decir, matemática. Se están destacando los dos casos...

[Moderador]: Los dos contextos, el matemático y el económico...

[Manuel]: Exacto, los dos contextos. Entonces me parece muy bien que se haga esta observación y usando... Otra vez volver a las manipulaciones algebraicas.

[Moderador]: Y, ¿cuál es tu opinión Ramón, estás de acuerdo con Manuel?

[Ramón]: Sí, porque hay que insistir en la matemática como un instrumento, ¿de acuerdo? Por ejemplo, muchos cursos de matemáticas y aquí en la Facultad de Economía en particular, en los primeros cursos, uno de los primeros temas es el de desigualdades, y aquí es donde se ve la utilidad de ese tema, es decir, el estudiante tiene una herramienta mediante la cual puede descubrir, cuál es el dominio, cuál es la parte de ese dominio donde tiene sentido este modelo o la función como un modelo.

A.4.2. Análisis e Interpretación Econ-Mat 2[11]

Sea Q la cantidad que minimiza el costo total T debido a la obtención y almacenamiento del material por cierto período. El material demandado es de 10.000 unidades por año; el precio al costo del material es de \$1 por unidad; el costo de volver a llenar la existencia de material por orden, sin importar el tamaño Q de la orden es del 12,5 % del valor promedio de las existencias($Q/2$).

Pregunta 1: Pruebe que $T = 10{,}000 + \frac{250{,}000}{Q} + \frac{Q}{16}$.

Respuesta de P1: En efecto,

$$\begin{aligned} 10{,}000 &= 10{,}000 \times 1 \\ \frac{250{,}000}{Q} &= \frac{25 \times 10{,}000}{Q} \\ \frac{Q}{16} &= \frac{12{,}5}{100} \times \frac{Q}{2} \end{aligned}$$

Discusión: Aún cuando en la tarea, se le pide al estudiante que demuestre, la actividad se centra en generar un modelo a partir de unos datos establecidos.

¿Cómo gestionas o gestionarías tus clases ante actividades como estas, en las que es frecuente que los estudiantes presenten dificultades para visualizar y llegar al modelo solicitado y en consecuencia, construir un conocimiento del contenido en ambos contextos (económico y matemático)?

[Ramón]: Yo creo que siguiendo la tradición y, cuál es la tradición, incluso desde que uno fue estudiante. Te plantean un problema, no sé si ustedes recuerdan el de parcelar un área con la mínima cantidad de alambre que implique el mínimo costo... eh... de una superficie rectangular. Entonces, tomar problemas similares a ese, claro, que su contexto sea económico, exponer varios de esos problemas, dos o tres problemas de esos bajo la esperanza de que ellos vean cuál es el mecanismo. Tal vez en la exposición uno destaque algunos pasos y después proponerle a ellos esos problemas y después dejarlos para ver qué es lo que hacen.

[Moderador]: Y tu opinión Manuel, ¿cómo...?

[Manuel]: Bueno, así como está planteado acá, donde deducen la función, me parece muy bien, yo no veo... Tu pregunta viene si yo lo haría de esta manera, si debo reafirmar esto o qué...

[Moderador]: No; te explico, cuando al estudiante se le pide construir un modelo económico a través de una expresión matemática o uno mismo cuando

[11] Tomado del Arya y Lardner (1987)

fue estudiante o incluso, hoy en día uno mismo haciendo una investigación, el crear un modelo no es una tarea sencilla, todo lo contrario, generalmente resulta difícil, eso tiene un grado de dificultad. Entonces, trabajar sobre la creación de modelos, sobre la formulación de modelos económicos a través de formulaciones matemáticas como éste, por ejemplo, salvando los detalles que faltan como decir que el costo total es igual al costo variable más el costo fijo; por eso los 10.000 más la otra parte, este... Trabajar con este tipo de modelos no es una tarea sencilla, incluso enseñar a modelizar no es una tarea sencilla...

[Manuel]: Claro, cada problema o modelo tiene un razonamiento particular...

[Moderador]: Entonces, volviendo a la pregunta, ¿cómo gestionarías tú, cómo darías una clase en la que trabajas la modelización?

[Manuel]: Bueno, se puede comenzar con un problema como éste, este es un problema tradicional dentro del campo de la economía, construir la función de costo fijo más costo variable que es lo que nosotros siempre hacemos...

[Moderador]: De acuerdo, entonces cuéntame un poco cómo manejas esta situación en clase.

[Manuel]: Bueno, planteo el problema, luego se deben hacer ciertos razonamientos según el problema, en un caso como este de la función de costo lo que hay que hacer es el razonamiento rutinario... ¿No sé si te respondí la pregunta?

[Moderador]: Mira, yo quiero enseñar modelización, entonces quiero que me cuentes con qué problema iniciarías tu clase, qué estrategias seguirías y por qué, etc...

[Manuel]: Yo baso mis estrategias en el razonamiento que se le debe hacer a cada problema, incluso en la lógica que lleva el mismo problema; ahora bien, de un problema en particular no me acuerdo en este momento...

Pregunta 2: Encuentre el tamaño del lote económico y el costo total T correspondiente a tal valor de Q.

Respuesta de P2: Dado que Q es la cantidad que minimiza a T, calculamos la derivada de T respecto a Q; es decir,

$$T' = -\frac{250{,}000}{Q^2} + \frac{1}{16}.$$

Así, $T' = 0 \Leftrightarrow Q = \pm 2{,}000$, pero nos quedamos con $Q > 0$ por estar hablando de un material como libros, herramientas, etc.

De lo anterior tenemos que el costo total, T, se minimiza en $Q = 2{,}000$ dólares y el valor de este costo es de $T = 10{,}250$ dólares.

Discusión: A estas alturas del tema de derivada, cuando ya se supone que los estudiantes han trabajado y discutido diversos problemas de este tema y en ambos contextos, generalmente los estudiantes tienden a cometer ciertos errores y en algunos casos (después de una discusión con profesores de otra universidad), la actitud de los estudiantes es de rechazo a este tipo de problemas.

En atención a la experiencia de ustedes, ¿cuál es su opinión en estas dos líneas (errores y actitud)?

[Ramón]: Mira, yo nunca he dado clase siguiendo este material, así que no me atrevo a decir qué tipo de errores se podrían presentar con un material como éste. Ahora bien, más que un error por parte de los estudiantes, mi temor, insisto, tiene que ver con el riesgo que se corre de ver ciertos conceptos matemáticos, que ciertas técnicas matemáticas son sólamente válidas para un determinado tipo de problema, cuando por ejemplo, en la clase de maximización se puede explicar esta teoría sin hacer referencia a ningún ejemplo en particular, ni en física, ni química, ni economía, ni nada de eso, que la parte puramente matemática se le escape...

[Moderador]: Miren pero yo me refiero no a este problema en particular sino a los errores que cometen los estudiantes cuando ustedes están cerrando el tema de derivada, que supongo lo cierran con el tema de aplicaciones.

[Manuel]: Bueno, te lo explico con el caso mío, nosotros siempre que le ponemos a los estudiantes de economía problemas de optimización, problemas de física, problemas como el que tú dijiste [refiriéndose a Ramón], de minimizar el cercado de una parcela, a ellos no les gusta; me imagino que son esos los errores a los que tú te refieres...

[Moderador]: Sí.

[Manuel]: A ellos no les gusta este tipo de problemas y sienten un rechazo a este tipo de problemas, incluso buscan hablar con el profesor para evitar este tipo de problemas. Entonces, los errores están condicionados al problema que tú les pongas. Si los problemas son de economía, los errores pueden ser de descuido con un signo, que no identifique de manera correcta la función con la que tienen que trabajar, pero siempre relacionados con la matemática, difícilmente cometen un error asociado a la parte económica. Ahora, si el problema de aplicación no es de economía, los errores vienen por el olvido de una fórmula de física, de la misma matemática, y además de los errores anteriores se pueden añadir otros de tipo conceptual.

[Moderador]: ¿Y tu opinión Ramón?

[Ramón]: La actitud siempre va a ser positiva siempre y cuando las aplicaciones sean de su área, de economía. En cuanto a los errores, por qué Manuel dice que los estudiantes piden de aplicaciones a la economía y por eso es que a mi me gusta el ejemplo con el que comenzamos hoy, porque generalmente en las aplicaciones de economía, las funciones son expresiones muy sencillas, en cambio cuando tú les colocas un problema donde se les pide maximizar o minimizar tal función que no es un modelo de ninguna situación económica, necesariamente tiene que ser un poco más complicada que las aplicaciones que traen los libros, entonces por eso prefieren de aplicaciones a la economía ya que la mayoría sabe cómo manipularla, mientras que si le pones una función fuera de su contexto viene el problema en despejar, de identificar la función, como dijo Manuel...

[Manuel]: Fíjate que también hay otros detalles como por ejemplo, cuando tú le hablas de área a ellos no les gusta, en cambio cuando tú le hablas de bolívares o de dólares ellos se sienten a gusto, se emocionan. Por eso es que yo evito hablar de unidades, para que no se me distraigan...

[Moderador]: Disculpa que te interrumpa, pero si volvemos al problema que nos citó Ramón, el de cercar una parcela o terreno; aún cuando este problema es fundamentalmente de geometría, allí están implicados conceptos como el área o el perímetro de un rectángulo, el problema es de optimización de costos. Si atendemos a las latas de refrescos o de cerveza, podemos observar que son medidas estándar, incluso a nivel mundial, pero eso no es de gratis que estas latas tengan estos tamaños. Estos son problemas de optimización de volumen, de área y de costos de material, aparte del problema que pueda surgir en la parte publicitaria. En resumen, son problemas de geometría con una fuerte relación al campo económico...

[Manuel]: Estoy de acuerdo contigo, pero para ellos eso..., lo distrae, yo uso el término distrae... Entonces ellos buscan sacarle el cuerpo a ese tipo de problemas (de cálculo de áreas, volúmenes o de cercar un terreno), la única forma es que tú insistas más en problemas de este tipo, que tú inviertas más tiempo en este tipo de problemas para que le pierdan miedo... Sí es verdad, tú estás optimizando costos pero primero tienen que hablar de metros o de otras unidades con las que ellos no se sienten cómodos y esa parte los distrae.

[Moderador]: Ramón, ¿puedes aportar algo adicional?

[Ramón]: Mira, yo sé que nos desviamos un poco del tema, pero volviendo al caso del área, yo creo que es una cuestión que hay que reconsiderar y no dejar de tocar esos temas porque al estudiante le parezca difícil, porque por ejemplo, en la construcción de una carretera, yo creo que si el trabajo de ingeniería es de envergadura, pues..., ahí tiene que trabajar con volúmenes, cómo el economista se va a deshacer de eso. Además, tiene que haber un estudio económico, un estudio de factibilidad. También en el problema de área, podemos mencionar el Superávit del Consumidor, también ahí el concepto de área es importante, no hay manera de soslayar eso..., me parece....

[Manuel]: Por eso es que el caso del Superávit no hablan de área por eso, le ponen el nombre de Superávit y listo...

[Ramón]: Elige casi cualquier libro de microeconomía que no se limite a la economía literalmente, todos los que yo he visto ponen su sistema de coordenadas, hablan de área y hacen su razonamiento ni siquiera haciendo cálculo sino sobre la figura...

[Manuel]: Pero no hablan de área, hablan de la interpretación de la integral...

[Ramón]: Sí hablan de área, insisto, si coges el Pindyck & Rubinfeld de microeconomía y puedes ver cómo hacen el estudio del Superávit del Productor y del Consumidor.

[Manuel]: Yo lo planteo como una fórmula, una integral y listo...

[Ramón]: Las conclusiones económicas que saca es a través del estudio de la figura de esa superficie interpretada como área, incluso, el estudio que hacen es muy parecido, aunque no me recuerdo muy bien, al estudio que se hace en termodinámica con las líneas estas relacionadas con el calor, creo que son las isobáricas o las isotérmicas, me recuerdan mucho eso.

Pregunta 3: Determine el costo total cuando cada orden es fijada en 2.500 unidades.

Respuesta de P3: En este caso, sólo basta con calcular la imagen de T para $Q = 2{,}500$; así, el costo total cuando cada orden es fijada en 2.500 unidades es de $T = 10{,}256, 25$.

Discusión: Si observamos con detalle, esta tarea posee un mínimo de dificultad respecto a las dos anteriores.

Ya en el cierre del tema de derivada, ¿consideran acertado realizar esta pregunta en una evaluación o creen que puede conducir al estudiante a un error; como por ejemplo, que éste calcule la derivada de la función y la evalúe en 2.500?

[Manuel]: Si tuviera que evaluar esta parte del tema no haría esta pregunta; ahora, si voy a evaluar todo el tema; por ejemplo, en un examen de todo el tema sí la pondría, pero es una pregunta que puede distraer al estudiante, ya que lo menos que se está esperando en un examen es una pregunta como ésta. Creo que la mayoría se confundiría, sobre todo por lo extenso del enunciado.

[Moderador]: ¿Y tú la colocarías en un examen, Ramón?

[Ramón]: Yo creo que sí, porque cuando uno hace la gráfica de una función, sin estar hablando de aplicaciones, cuando te mandan a graficar, tú en ese dibujo que haces colocas algunos valores más relevantes, dónde alcanza el mínimo, el máximo, los valores de inflexión, etc., y los colocas, los señalas en la gráfica. Sin embargo, esta pregunta puede condicionar al estudiante a pensar que uno le está colocando una trampa o como se dice acá una "concha de mango", que estás procediendo de mala fe. En todo caso, lo que uno hace en situaciones como éstas, es advertirle que se quiere un estudio completo de la función.

A.4.3. Cuestionario relacionado con la actividad 4

De acuerdo a la actividad que acabamos de realizar y como producto de las opiniones y discusiones en la misma, nos interesa conocer tu opinión sobre algunos puntos que señalamos a continuación:

1. Dentro de tu planificación docente, ¿tú contemplas actividades como éstas ya para cerrar el tema de derivada?
    a) $\boxed{\text{Sí}}$ ¿Por qué?, ¿desde el punto de vista de la didáctica, qué persigues con este tipo de problemas?
    b) $\boxed{\text{No}}$ ¿Por qué?, ¿desde el punto de vista de la didáctica, qué inconvenientes observas en este tipo de problemas?
2. ¿Puede usted afirmar que con actividades como ésta, se **induce** u **obliga** al estudiante a pensar? Detalle su respuesta.
3. Consideras que los objetivos del curso se cubren con este tipo de actividad o en todo caso se desvirtúa la finalidad del curso?

Manuel

Cuestionario relacionado con la actividad 4

De acuerdo a la actividad [illegible] conteste [illegible] los puntos que se señalan a continuación.

1. [illegible]

   a) [Sí] ¿Por qué? [illegible] problemas.

   b) [No] ¿Por qué? [illegible]

Sí, porque refuerza los conocimientos matemáticos y su relación con los temas de ingeniería relacionados con el triángulo de [illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

Ramón

Cuestionario relacionado con la actividad 4

De acuerdo a la actividad que acabamos de realizar y como producto de las opiniones y discusiones en la misma, nos interesa conocer tu opinión sobre algunos puntos que señalamos a continuación:

1. Dentro de tu planificación docente, ¿tu contemplas actividades como éstas ya para cerrar el tema de derivadas?

   a) $\boxed{\text{Sí}}$ ¿Por qué?, ¿desde el punto de vista de la didáctica, qué persigues con este tipo de problemas?

   b) $\boxed{\text{No}}$ ¿Por qué?, ¿desde el punto de vista de la didáctica, qué inconvenientes observas en este tipo de problemas?

No, ya que <u>nunca</u> se me ocurrió efectuar este tipo de actividades en clases.

El único incoveniente podría ser no tener el tiempo suficiente dentro del número de horas estipuladas en el semestre para el dictado de la asignatura.

2. ¿Puede usted afirmar que con actividades como ésta, se **induce** u **obliga** al estudiante a pensar? Detalle su respuesta.

Sí, en vista de que se están integrando conocimientos tanto de la Matemática, como de la Economía: Se da una introducción a la elaboración de modelos y como sabemos, no hay reglas precisas para la elaboración de los mismos.

3. Consideras que los objetivos del curso se cubren con este tipo de actividad o en todo caso se desvirtúa la finalidad del curso?

Considero que, además de que se traten cada uno de los objetivos del curso, se agrega un objetivo más, el cual es una introducción a la investigación en Economía, mediante el diseño de modelos matemáticos sencillos, para explicar situaciones económicas.

Apéndice B

Sesiones del seminario (Grupo B)

B.1. Actividad 1

Mediante la siguiente actividad se pretende introducir el concepto de la derivada a través del desarrollo de dos problemas, el primero es un ejemplo clásico de la física y el segundo es un problema relacionado con el pago de impuestos, es decir, vinculado con las ciencias económicas. En este sentido, además de introducir el concepto de derivada, se intenta que el estudiante conozca o se aproxime a dos interpretaciones de la derivada. Hay que tener en cuenta el conocimiento y las herramientas matemáticas adquiridas por los estudiantes hasta este momento.

Tasas de Variación y Pendientes

Estudiamos a continuación la introducción de la derivada a través de la función cuadrática $f(x) = x^2$.

B.1.1. Velocidad Instantánea[1]

Suponga que la función de posición de un objeto que se mueve a lo largo de la recta real está dada por $s = f(t) = 8t^2 + 10$, donde t está en segundos y s en metros.

Preguntas: Las siguientes preguntas están relacionadas con los contenidos físico y matemático en general.

[1]Tomado de Haeussler y Paul (1997)

Pregunta 1: Calcular la posición del objeto cuando $t = 5{,}0$; $t = 5{,}001$; $t = 5{,}01$; $t = 5{,}1$; $t = 5{,}2$; $t = 5{,}3$; $t = 5{,}4$; $t = 5{,}5$; $t = 6{,}0$; $t = 9{,}0$; $t = 12{,}0$ y $t = 15{,}0$. A medida que avanza el tiempo, ¿qué puede decir de la posición del objeto?

Respuesta de P1: En la segunda fila de la **Tabla B.1** se pueden observar las distintas posiciones del objeto para distintos instantes de tiempo. Respecto a la segunda parte de la pregunta, a medida que avanza el tiempo la distancia recorrida es mayor, además la **Tabla B.1** *nos hace pensar que el objeto nunca se detiene.*

Discusión: Hasta ahora, el estudiante está familiarizado con el tema de funciones y en este sentido, no debería tener inconveniente para realizar esta tarea en la que se plantea un **estudio muy general de incrementos**.

Para este momento, en el que queremos introducir el concepto de derivada y una interpretación de la misma, ¿consideran ustedes que, desde el punto de vista metodológico, éste es un primer paso "acertado" para introducir el concepto de derivada, o por el contrario, resulta una tarea inapropiada y sin mayor valor cognitivo?

[Elio]: Yo estoy de acuerdo que esto se pudiera hacer porque si uno va a calcular el incremento de una función uno lo que hace es calcular la función en ciertos valores y entonces resolver este problema o esta pregunta les daría una especie de entrenamiento de lo que se va a hacer más adelante, lo cual consiste en evaluar la función en ciertos puntos, como en una especie de prácticas, pudiera ser... Ahora, una pregunta que yo quisiera hacer o más bien una observación, el mismo problema podría causar confusión, o a lo mejor estoy equivocado, porque dice: "se mueve a lo largo de la recta real" y la curva del problema es una parábola "$s = f(t) = 8t^2 + 10$", se pudiera crear confusión con un movimiento parabólico porque la curva que representa el movimiento es una parábola, de repente el estudiante se confunda con esa situación...

[Moderador]: Bueno, aquí hay dos cosas que debemos considerar, una es que aún cuando aparece una parábola en el enunciado, en el mismo se dice que $f(t)$ representa el movimiento del objeto; lo otro es, que el estudiante posee unos conocimientos tanto del bachillerato como del tema previo al de derivada; es decir, el tema de funciones. Pero es válida tu observación.

[Kenya]: Veámoslo como una sugerencia para mejorar la redacción del problema, de modo que clarifique y no cause dificultades adicionales al concepto que se está estudiando o se quiere estudiar que es la derivada. Elio, ¿ya tú terminaste con tu opinión?

[Elio]: Sí, simplemente el comentario a la pregunta y que sí estoy de acuerdo con introducir el tema por esta vía.

[Kenya]: Si la propuesta está dirigida a estudiantes de economía o ciencias económicas y administrativas debería cambiarse el problema por otro que esté más ajustado a los intereses profesionales de estos estudiantes, total..., se va a estudiar la misma idea pero a través de distinta perspectiva, un problema de costo, de impuesto, que sea de interés de los estudiantes sería como más conveniente para abordar el mismo asunto.

[Alexis]: Yo estoy de acuerdo con Kenya en utilizar problemas ajustados a la economía o a la contaduría pública o a la administración de empresas, pero siempre pensado en funciones de este tipo como $f(x) = x^2$...

[Kenya]: Exacto, asumir que esto representa una función propia de la economía y plantear esas preguntas que están allí. Me parece que resulta más interesante para el estudiante y creo que la situación es más familiar, suponiendo que ellos ya hayan visto en cursos previos algunas funciones de estas que puedan tomarse como modelos para estudiar el concepto de derivada...

[Alexis]: Porque a mi me parece que esto está más dado hacia la ingeniería...

[Kenya]: A la física...

[Elio]: Tal vez con una ecuación de oferta o demanda, ¿verdad?, sería más adecuada.

Pregunta 2: ¿En cuánto varía la posición o cuánto se ha desplazado el objeto cuando el tiempo transcurre de 5.0 a 15.0 segundos; de 5.0 a 12.0 segundos; de 5.0 a 9.0 segundos; de 5.0 a 6.0 segundos; de 5.0 a 5.5 segundos, de 5.0 a 5.4 segundos, de 5.0 a 5.3 segundos, de 5.0 a 5.2 segundos, de 5.0 a 5.1 segundos, de 5.0 a 5.01 segundos y de 5.0 a 5.001? ¿Qué observa en cada uno de los desplazamientos estudiados?

Respuesta de P2: En la segunda columna de la **Tabla B.2** podemos ver cómo varía la posición del objeto cuando éste se ha desplazado en distintos intervalos de tiempos.

Discusión: En la tarea anterior se estudió la posición del objeto para distintos instantes de tiempo, ahora estudiamos variaciones de la posición para intervalos de tiempo particulares; es decir, qué *variaciones* experimenta la posición del objeto cuando el tiempo cambia en distintos intervalos.

En una experiencia con estudiantes con los que realicé esta actividad, ellos mostraron dificultades para visualizar las distintas variaciones, ¿consideran ustedes que esta tarea promueve, de alguna manera, el concepto de incrementos de una variable? ¿De qué manera? ¿Cómo?

[Kenya]: ¿Variaciones tanto en el intervalo como en la posición?

[Moderador]: Sólo la variación, no la posición, ¿consideran ustedes que esta tarea promueve, de alguna manera, el concepto de incrementos de una variable?

[Alexis]: No se le puede sacar el cuerpo a esta tarea...

[Kenya]: Generalmente yo lo he hecho así, pero... no sé si hay otra manera de hacer el estudio de variaciones...

[Elio]: Lo que se puede perder con esto, digo yo, o lo que se podría perder, a mi modo de ver, es que para notar la variación como tal, se requiere de muchos cálculos y entonces hacerlo a mano, en el pizarrón, para que él lo vaya viendo, puede resultar muy cansón para el estudiante...

[Moderador]: Pero también lo puedes mostrar en una diapositiva...

[Elio]: Bueno, si lo haces así..., yo lo veo como un buen recurso...

[Moderador]: También la idea es que el estudiante trabaje.

[Alexis]: Pero si tú lo ves con saltos, por ejemplo, $x^2 + 1$ cuando $x \to 2$ que eso da 5, los valores muy cercanos tú ves rápidamente que va tendiendo a 5, no una función muy grande sino chiquita para que se visualice rápidamente la...

[Moderador]: De acuerdo...

[Alexis]: Pero no hay ninguna manera de saltarse el límite éste...

[Kenya]: No, pero..., este hay una cuestión, el efecto que produce en el estudiante, que tú le presentes este tipo de problemática mediante una tabla ya elaborada por ti no es el mismo que si él la hace, para mi no es lo mismo. Yo solamente he experimentado esto y creo que todos lo hacemos por cuestiones de tiempo, no nos podemos dar el lujo de construir esto con ellos a punta de calculadora porque "perdemos un tiempo sustancial de las clases" para ir al objetivo de formarles la idea de que las variaciones van disminuyendo, por eso se toman intervalos cada vez más pequeños. Pero yo te aseguro, lo digo haciéndome un examen a mi misma, cuando yo estaba estudiando este tema, era estudiante y yo misma construía las tablas, a mi me quedaba más...

[Moderador]: Consolidabas el concepto pues...

[Kenya]: Sí, lo iba haciendo, entonces yo miraba el resultado de arriba, el primero lo obtuve y no tenía con qué comparar, pero voy al segundo y ya tengo con qué compararlo, con el anterior, y esto me permitía tener un dominio de datos aquí en mi mente conforme iba desarrollando el proyecto; para mi el efecto tiene que ser distinto a que si tú le preguntas con la tabla ya elaborada. Con la tabla ya elaborada no te queda otra que hacerle..., vas haciéndole una observación directa, dirigida por el docente; observen aquí que conforme la amplitud de los intervalos se va haciendo cada vez más pequeña, el cambio producido en la función o la variación producida o el incremento se va haciendo tal cosa. Pero si le toca a él (estudiante) hacerlo o tiene la experiencia de hacerlo, yo creo que el efecto va a ser distinto, habría que ver esa parte, habría que verla y solamente he experimentado presentándoles una película; es decir, mostrándole los cálculo ya hechos por mi, pero no he hecho que ellos lo hagan en clase. Esto lo digo por mi experiencia, cuando me toco hacerlo, entonces sería como recomendable, colocarles a ellos una actividad para que realmente la hagan...

[Alexis]: Que saque las cuentas...

[Kenya]: Saque las cuentas, saque las cuentas...

[Elio]: Y tal vez ese tiempo que tú dices, entre comillas, que se pudiera perder, entonces, en realidad no, porque en realidad el estudiante estaría trabajando con conciencia, sabe lo que está haciendo, pudiera aprovecharlo más adelante y entender lo que es la derivada en su momento, entenderlo entre comillas.

Pregunta 3: Calcular la velocidad media en los intervalos de tiempo: $[5{,}0; 15{,}0]$, $[5{,}0; 12{,}0]$, $[5{,}0; 9{,}0]$, $[5{,}0; 6{,}0]$, $[5{,}0; 5{,}5]$, $[5{,}0; 5{,}4]$, $[5{,}0; 5{,}3]$, $[5{,}0; 5{,}2]$, $[5{,}0; 5{,}1]$; $[5{,}0; 5{,}01]$; $[5{,}0; 5{,}001]$.

Respuesta de P3: En la última columna de la **Tabla B.2** se aprecian las distintas velocidades promedios para los intervalos de tiempos indicados.

Discusión: Tal como se muestra en la pregunta, lo que se busca en este caso, es que el estudiante observe y discuta sobre las distintas velocidades promedio y por supuesto, que el profesor discuta con ellos, de modo que surja una primera aproximación **empírica** y con **tratamiento numérico** del concepto de derivada. Algo que no se contempla en los programas oficiales de cálculo diferencial.

[Kenya]: ¿No queda como un objetivo en forma explícita?

[Moderador]: Exacto.

En algunas investigaciones sobre el tema, existen opiniones encontradas a la hora de introducir un concepto matemático; hay quienes se inclinan por dar la definición con todo el rigor matemático que ello supone y posteriormente realizar una explicación pormenorizada de ésta (la definición), mientras que hay profesores que apuestan por una construcción detallada del concepto.

¿Consideran adecuado partir de una situación como ésta para aproximarnos al concepto de derivada o conviene más; introducir, de entrada, el concepto de derivada de manera formal y tradicional; es decir, partiendo de la idea formal de límite? Se supone que el estudiante conoce los conceptos de función, límite y continuidad.

[Kenya]: ¿Estamos partiendo del hecho de que el estudiante tiene como base el concepto de límite?

[Moderador]: Sí, el estudiante conoce los conceptos de función, límite y continuidad.

[Kenya]: Si tiene eso ya es ganancia para hacer una enseñanza de corte constructivista; es decir, partir de ejemplos de este tipo. Si él (estudiante) tiene ya formada la idea de límite yo creo que es claro para él lo que se busca con este procedimiento y aparte, cómo se dice..., él va a llegar a concluir que esto no es más que un límite cuando el tamaño del intervalo se va haciendo cada vez más pequeño. A mi me parece que sí puede llegar al concepto de derivada si tiene claridad en el concepto de límite, sobre todo, pienso yo, desde el punto de vista geométrico o intuitivo; no tanto desde la definición del para todo épsilon etc., etc., sino de un dominio geométrico o intuitivo de la noción de límite...

[Elio]: Y pareciera menos impositivo así, de repente el ir construyendo un problema como éste, o sea, que la definición de derivada, pero que es un límite, pudiera quedar como una necesidad de resumir esas cuentas, de alguna manera. Que surja como una necesidad, como decía ahora, que sea como necesario utilizar esto y no que se imponga para después aprenderme de memoria unas tablas de derivada o qué sé yo..., no, no, no... Que surja como una necesidad, construiste esto y ahora vamos a darle formalidad, esto se necesita para esto...

[Kenya]: La idea de la derivada saldría de modo natural porque en realidad no es más que un límite, un límite muy especial, el cociente incremental.

[Alexis]: Ahora..., debe haber una función en la parte económica que modele esto.

[Moderador]: Olvidémonos por un momento de la economía.

[Kenya]: De pronto, el contexto para mi no es el adecuado pero el proceso sí.

[Moderador]: Tal vez a lo que te refieres es al modelo, de pronto con lo que no estás de acuerdo es con el modelo...

[Kenya]: Ajá...

[Moderador]: Pero, quitando el modelo, vamos a seguir con la velocidad instantánea, la construcción como se hace, ¿estás de acuerdo o no?, ¿cómo lo haces tú, Alexis?

[Alexis]: La experiencia que yo he tenido..., yo introduzco la derivada, por ejemplo, usando la función x^2 y me voy acercando y después indudablemente que les digo que el límite no nos lo podemos quitar de encima...

[Kenya]: Claro...

[Alexis]: Y eso va a tener una posición límite y eso es lo que vamos a llamar la pendiente de la recta tangente que va a ser la derivada.

[Elio]: Si te pones a ver, la mayoría de los libros de cálculo tratan de hacer eso de alguna manera, ellos no empiezan con la definición de derivada como un límite aunque ya se ha tratado el tema de límite. De alguna manera, aunque sea poca, ellos tratan de verlo como el significado de la recta tangente...

[Kenya]: Pero se van más hacia el aspecto matemático...

[Elio]: Pero hacen una introducción de ese tipo (del de recta tangente), tratando de ser lo más constructivos que puedan, pero al final caen en la definición de la derivada como un límite; tal vez no hacen tanto detalle como esto (el material de discusión).

[Moderador]: Pero Elio, ¿tú has visto algún libro donde hagan una presentación del tema de la derivada de esta manera?, me refiero a la manera sobre cómo vamos construyendo el concepto.

[Elio]: Sí, sí lo he visto, sobre todo en libro aplicados a la economía, de hecho, hacen un capítulo completo sobre la ecuación de la oferta o la ecuación de la demanda y entonces después caen en la derivada en un capítulo posterior, atacan la derivada pero ya tienen este bagaje.

[Alexis]: Sin embargo también tocan la velocidad...

[Kenya]: Casi siempre el motivo es ese, un problema de velocidad instantánea...

[Elio]: Tal vez porque es lo más natural...

[Kenya]: Tal vez porque eso obedece a una cuestión histórica, pienso yo..., bueno aquí no soy especialista...

[Alexis]: Además esto está en todos los libros...

[Moderador]: Además la velocidad instantánea es lo que marca la aguja en el automóvil...

[Kenya]: Con respecto a este análisis, nosotros estamos mirando esta tabla, y yo creo que esto es importante para los estudiantes, en su sentido vertical y no en su sentido horizontal.

[Moderador]: Explícate.

[Kenya]: En el sentido horizontal es: ubicar al estudiante, por ejemplo, en el primer renglón e interprete qué significa el resultado de 1600 para la función de posición en función del tamaño del intervalo, ¿qué significa?, ¿qué interpretación le damos a eso? y también ¿qué interpretación le damos a la velocidad promedio?, después ubicarlos en el segundo renglón y hacerle la misma pregunta. Entonces yo creo que sería como más significativo para ellos ir analizando renglón por renglón pero a la vez el análisis vertical de la tabla, porque no es sólo llegar al concepto de derivada y decir qué estamos viendo aquí; porque le estaríamos dando aquí, aún cuando usáramos una función de la economía, le estaríamos dando más peso al aspecto matemático pero estaríamos dejando a un lado el aspecto de interpretación del problema desde el punto de vista...

[Elio]: Que es lo que en el fondo interesa...

[Kenya]: Que es lo que interesa, del campo profesional de estos estudiantes. O sea, que de una función de costo, qué quiere decir una variación en el incremento de los costos, que para ese intervalo, o para ese nivel de producción comprendido entre 5 y 15, por ejemplo, los costos aumentan en 1600. Y cuánto le cuesta cada artículo o cada nivel de producción..., bueno, en promedio 160. A mi me parece que hay que decir esos dos significados y después cuando interprete qué significa la función de costo a un nivel de producción de 15, la inversión que tiene que tener la empresa para tener ese nivel de producción. Eso le va dando significado y contexto al problema y en consecuencia, y a la vez abordas dos cosas, el interés de los estudiantes en cuanto a su campo profesional y el análisis matemático que es a lo que tu quieres llegar, que es el concepto de derivada.

[Elio]: Ese es un problema que se marca mucho, se nota mucho, es cierto lo que ella dice y estoy de acuerdo. Hay un problema muy particular, quizás es conveniente decirlo, pero yo me he dado cuenta que cuando uno les dice: calcular el costo de producir 51 artículos y después les preguntas, calcular el costo de producir el artículo 51 y empiezan ellos la vacilación ahí; entonces, no entienden qué fórmula, ellos lo ven así, qué fórmula van a utilizar para atacar cada problema, muchas veces piensan que es lo mismo. De hecho, las dos fórmulas vistas en general son muy parecidas, entonces se crea la confusión, por eso porque no traen..., son expertos en calcular, tal vez, pero no saben interpretar lo que están haciendo.

[Alexis]: Estoy de acuerdo con eso que dice Elio.

Pregunta 4: La velocidad media del objeto para un intervalo de tiempo $[t_0; t]$ y con $f(t_0) < f(t)$ viene dada por

$$\mathcal{V}(t) = \frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0} = \frac{\text{Desplazamiento desde } f(t_0) \text{ a } f(t)}{\text{Tiempo transcurrido desde } t_0 \text{ a } t}$$

Para el caso particular en el cual el objeto parte con $t_0 = 0$ y su posición es $s = 0$, la velocidad media del objeto se reduce a $\mathcal{V}(t) = \frac{f(t)}{t}$

Pregunta 4.1: Construir una tabla y calcular $\mathcal{V}(t)$ para $t = 5{,}001$; $t = 5{,}01$; $t = 5{,}1$; $t = 5{,}2$; $t = 5{,}3$; $t = 5{,}4$; $t = 5{,}5$; $t = 6{,}0$; $t = 9{,}0$; $t = 12{,}0$ y $t = 15{,}0$, suponiendo que $t_0 = 5, 0$.

Respuesta de P4.1: La tercera columna de la **Tabla B.2** coincide con $\mathcal{V}(t)$, sólo que en el orden inverso.

Pregunta 4.2: Obtener una fórmula para $\mathcal{V}(t)$ y verificarla con la respuesta de 1.

Respuesta de P4.2: En este caso la fórmula que se obtiene para la velocidad promedio es $\mathcal{V}(t) = \frac{8t^2-200}{t-5}$ y coincide con la respuesta del ítem anterior.

Discusión sobre P4.1 y P4.2: El objetivo que se persigue con estas dos tareas es que el estudiante al invertir los datos de la tabla, tenga una mejor visualización de las velocidades promedios para distintos intervalos y así tener mayor dominio y profundidad del problema.

Desde el punto de vista metodológico, ¿creen ustedes que esto ayuda al estudiante a darse una idea de velocidad instantánea y por ende, a llegar al concepto e interpretación de la derivada?

[Elio]: Bueno, eso es lo que decía Kenya, ahora le toca al estudiante construir la tabla y va a comparar los valores entre sí. Lo único que yo creo que podría ir en contra, de alguna manera, es atiborrar al estudiante de tanto cálculo si no tiene a la mano herramientas como una calculadora y que le pueda crear cansancio, de alguna manera, y le llegue a fastidiar. Cuando lleguemos al concepto de derivada, tal vez, él ya no quiera trabajar más para definir el concepto de derivada, eso es lo que yo creo, que pudiéramos... Sí como dice Alexis, buscar una situación donde el salto se note más rápido para evitar tanto cálculo, para que lo que se quiera mostrar se note pero con menor cantidad de cálculos.

[Alexis]: Yo me supongo que Luis, cuando manda a que el estudiante construya ahora la tabla, él (estudiante) debe darse cuenta que por debajo se va a ir pegando a un mismo número que cuando lo hizo por arriba, va a llegar un momento que va a tener casi el mismo número y entonces él debe preguntarse por qué ese número y es cuando uno interviene y les dice que esa es la posición límite que no es otra cosa que la derivada.

[Elio]: Quiero hacer una observación porque creo que faltan unas letras t y eso podría confundir al estudiante.

[Moderador]: Sí, fue un descuido de mi parte, disculpen.

[Kenya]: Un momento..., yo estoy un poco perdida aquí. ¿Antes se le pedía la tabla?

[Moderador]: No, antes se le daba la tabla ya elaborada y ahora se le pide que construya la tabla.

[Kenya]: Ah, ahora sí entiendo. Bueno, entonces esto empata con lo que yo he estado diciendo.

[Moderador]: Lo que pasa es que te adelantaste a la actividad con tus comentarios y no me atreví a cortarte.

[Elio]: Bueno, sobre lo que yo decía, el montón de cálculo que habría que hacer, quizás sea menos ahora porque vale 0 la función inicial entonces el cálculo, en realidad, no va a tener las restas, ya que la función en 0 vale 0. Es simplemente $\frac{f(t)}{t}$.

[Moderador]: Un momento, aquí estamos partiendo de $t_0 = 5$.

[Elio]: Ah, ok, ok.

[Kenya]: Va a llegar a la misma tabla, lo que pasa es que él (estudiante) la va a construir, no se la va a dar el profesor ya elaborada.

[Alexis]: Va a llegar un momento en que el número por arriba va a estar muy cerca o va a ser muy parecido a otro.

[Kenya]: Realmente, ellos no tienen que jugar con eso porque los cálculos van a ser tediosos, creo yo... que va a ser así. Pero yo creo que si se le dan problemas de contexto no van a ser tan...

[Elio]: Eso puede ser un arma de doble filo, porque yo he tenido alumnos que quieren calcular todos los límites y todas las derivadas dándole valores a x...

[Kenya]: Sí, hay que tener cuidado con eso. Muchas veces esa primera aproximación que uno les hace para llegar al concepto no es lo que uno quiere pero es lo que uno transmite sin querer...

¿Qué errores comete el estudiante, por lo general, en este tipo de tarea?

[Elio]: Errores de cálculo es lo que yo más noto, en particular he notado errores de cálculo, problemas con los signos, uno que otro despeje y cuando les toca evaluar un punto en una función que no les sea familiar.

[Kenya]: Tú dices, ¿los errores de cálculo que cometen en un problema como éste?

[Moderador]: Exacto, para este problema en particular.

[Alexis]: ¿Asumiendo que todos saben lo que es evaluar una función en un punto dado?

[Moderador]: Bueno... eso de que todos saben, mejor decir que todos han visto ese tema.

[Alexis]: Eso es verdad, porque muchas veces uno dice: ¿ustedes saben...? Sí, sí. ¿Cuánto vale esta función en este punto?, por muy fácil que sea, y entonces se me quedan viendo o se hacen los locos, entonces me doy cuenta que no saben lo que les estoy preguntando.

[Elio]: También cometen otro error, el error de no decir que no entienden o el error de aceptar lo que el profesor dice sin dudar en ningún momento, pero las dudas vienen después...

[Alexis]: En mi opinión, el error más frecuente, el que se repite más es el de evaluar un punto en una función, no quiero decir que no cometen errores sumando, restando o multiplicando..., o cuando quieren cancelar algún término con otro en un cociente. Estos son lo errores que más encuentro.

[Kenya]: No sé si este error que cometió un estudiante en una evaluación que traigo aquí, pero es del tema de aplicaciones de la derivada y tiene que ver con radicales. Ahora recuerdo, la dejé en la casa, pero la función era una raíz, no recuerdo si cuadrada o cúbica, y antes de evaluar la función, escriben la raíz en forma de potencia fraccionaria y cuando evalúan el punto en la función, el índice de la raíz lo pusieron a dividir. A mi me llamó tanto la atención ese error que lo tengo muy pendiente para decírselo al estudiante..., bueno también, como dicen ustedes, los problemas con los signos son frecuentes, tienen dificultades al trabajar con decimales o fracciones.

Pregunta 4.3: Cómo es el comportamiento de la velocidad media, $\mathcal{V}(t)$, en cada uno de los instantes de tiempo respecto a la velocidad instantánea $\text{lím}_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \text{lím}_{h \to 0} \frac{f(t_0+h)-f(t_0)}{h}$ para $t_0 = 5,0$?

Respuesta de P4.3: La velocidad media $\mathcal{V}(t)$ en cualquiera de los casos estudiados es siempre superior a

$$\begin{aligned} \text{lím}_{\Delta t \to 0} \tfrac{\Delta s}{\Delta t} &= \text{lím}_{h \to 0} \tfrac{f(5+h)-f(5)}{h} \\ &= \text{lím}_{h \to 0} \tfrac{8(5+h)^2+10-210}{h} \\ &= \text{lím}_{h \to 0} \tfrac{80h}{h} \\ &= 80,00. \end{aligned}$$

Discusión:*De esta situación, ¿qué discusión les parece a ustedes sugerente que se debe plantear a los estudiantes relacionada con esta tarea?*

[Kenya]: Supongo que aquí estamos partiendo de la base de que el estudiante ha tenido una experiencia en física y que conoce lo que quiere decir velocidad media.

[Moderador]: Sí porque en bachillerato se ve velocidad media.

[Kenya]: ¿A qué te refieres con esta tarea?

[Moderador]: Me refiero a cómo manejar o como conducir una clase de introducción a la derivada en la que hemos realizado un tratamiento analítico, hemos fabricado una tabla, podríamos usar incluso las dos gráficas de la pregunta siguiente. En otras palabras, ¿cómo conectarían ustedes, en una clase, todas estas situaciones que termino de mencionar?

[Kenya]: Tú primero vienes trabajando sobre la velocidad media para querer llegar a la velocidad instantánea...

[Moderador]: Y ahora digo que la velocidad instantánea es el límite.

[Kenya]: ¿Tú lo dices?

[Moderador]: Lo digo, de hecho aparece en la pregunta, fíjate...

[Kenya]: Ah..., estamos en una situación hipotética como si estuviéramos dando una clase y este es el material que vamos a ir diseñando en la pizarra, por ejemplo.

[Moderador]: Correcto. Recuerda que ya el estudiante tiene una tabla construida, tiene ahora esta parte del límite y puedes darle las gráficas. ¿Cómo jugarían ustedes con todo esto en una clase?

[Kenya]: Aquí estamos jugando con dos cosas, me parece, el aspecto... Partes de un problema físico para llegar a la velocidad instantánea que viene definida por él mismo y después quiero ver como puedo relacionar eso con las pendientes de las rectas tangentes que aparecen en la tabla.

[Moderador]: De las rectas secantes para llegar a la recta tangente.

[Kenya]: De las rectas secantes para llegar a la recta tangente, cómo hacerlo, imagínate. Son dos lenguajes distintos, uno viene de un proceso analítico el otro de un proceso geométrico. No es tan fácil, creo yo, que si tú vienes hablando de velocidad, de algo que viene de la física y de pronto saltas la...

[Alexis]: A la parte geométrica.

[Kenya]: A la parte geométrica y hablas de las pendientes de las rectas secantes que se transforman en tangente y que la pendiente de la recta tangente es lo mismo que la velocidad instantánea, el salto es muy grande, eso no lo va a comprender él (estudiante) porque necesita un nivel de abstracción y en este momento se está siendo muy concreto porque se está trabajando con un problema muy particular. Tal vez una manera de verlo, pero de todas maneras habría que hacer como una división en la pizarra, porque pareciera como que son dos asuntos..., es el mismo asunto pero de dos perspectivas diferentes. Tratar de ver que la fórmula que aparece en el límite, la de la velocidad media es la misma pendiente de la recta secante. Tratar de conectar estos dos aspectos. Noten ustedes que esto que está aquí en este contexto es lo mismo que está aquí pero desde el punto de vista geométrico... ¿Qué es lo que cabe esperar desde esta perspectiva geométrica de la recta secante cuando nos aproximamos a un determinado valor? Que vayan adoptando la posición de tangente en ese punto, pero no es tan fácil.

[Elio]: De alguna manera, él (estudiante) a este nivel debe tener la idea de que ya sabe ubicar puntos en el plano y tiene conocimiento de algunas curvas conocidas como x^2. Yo pienso que en lugar de ponerle toda la tabla en el pizarrón, primero porque puede distraerse con muchas rayas (refiriéndose a las gráficas de rectas secantes) y a simple vista pudiera no entender qué es lo que quiere decir. Bueno sería contar con un computador que nos pueda mostrar el movimiento o ir construyendo cada recta...

[Moderador]: Por supuesto, lo que pasa es que aquí ya están todas construidas, cómo las escribes en el papel una por una.

[Elio]: Y como la idea de un límite es como un movimiento, la variable se mueve, por eso lo de "tiende a", ver que de alguna manera ese movimiento genera movimiento en esa recta que van a ir tendiendo, que van a ir acercándose a lo que uno quiere. Entonces, lo que ella (Kenya) dice, comparar la pendiente de esa secante, puedes buscar los puntos de corte, y ver que esa pendiente calculada, porque deben saberla calcular, con ese cociente que está dado allí...

[Kenya]: Bueno, se me ocurre en estos momentos... Desde un comienzo, se plantea el problema desde el punto de vista analítico y manejar el aspecto gráfico. Que mientras vaya construyendo la tabla, vaya construyendo...

[Alexis]: La gráfica...

[Kenya]: La gráfica, que el estudiante sabe que es o debe saber que es una parábola, entonces ir manejando cómo aparece desde el punto de vista geométrico las cantidades o las fórmulas que figuran en el incremento, en el cociente incremental.

[Moderador]: Un momento, vamos otra vez a la discusión y a poner un poco de orden. De momento somos nosotros, los profesores, los que estamos haciendo la actividad, qué se les ocurre a ustedes para jugar con esos dos aspectos.

[Kenya]: Yo pienso que se puede manejar la cosa simultáneamente, se maneja primero lo de la tabla y después lo otro o se manejan las dos cosas de manera simultánea, habría que ver.

[Elio]: Para que no aparezca bruscamente...

[Kenya]: Para que vaya viendo que estas mismas cantidades... cómo se expresan desde el punto de vista geométrico. La otra alternativa sería, construir la tabla primero y después irnos al aspecto geométrico y ver cómo estas diferencias y este cociente incremental se refleja en el gráfico de la función. Entonces, desde el aspecto gráfico ver qué cosa es el incremento en la función y qué cosa es el cociente incremental para, finalmente, determinar qué cosa es la velocidad..., bueno, yo prefiero hablar de la razón de cambio..., para hacerlo más abstracto todavía porque la velocidad instantánea es un caso particular ¿no?, es una manera de aplicar el concepto de la derivada, entonces prefiero verla como la razón de cambio de esta cantidad con respecto a otra. En este caso, es la distancia con respecto al tiempo.

[Moderador]: Y en tu caso Elio, ¿cómo lo harías?

[Elio]: Yo creo que..., lo que estábamos diciendo, ir construyendo cada recta para ver cómo se va moviendo a medida que vayamos haciendo cada renglón de la tabla, cada renglón de la tabla te va a dar la pendiente de la respectiva recta secante, entonces ir construyendo e ir comparando cada número que arrojó la tabla con cada recta que nos vaya saliendo. Entonces, a medida que estos números que analíticamente, numéricamente se van acercando a cierto valor, esas rectas se van acercando a la que él (estudiante) espera, aunque a lo mejor él (estudiante) no espera nada, tal vez, pero se va a dar de esa manera. Y el comportamiento, el comportamiento... asintótico, tal vez, no sé como decirlo, el comportamiento de que se acerca en un punto aquí se refleja en un comportamiento geométrico similar, es decir, las rectas también se van acercando...

[Moderador]: Un comportamiento de convergencia o de aproximación.

[Kenya]: El problema que he visto yo, dentro de lo que considero..., de utilizar un proceso constructivo es que el estudiante se siente como perdido, no sabe hacia dónde lo va a conducir el profesor y de pronto puede establecer unas relaciones que no son, aún cuando pueda establecer unas relaciones interesantes...

[Elio]: Pero la construcción, creo yo, debe partir de un problema en particular, por ejemplo, no empezar a hablar de esos cocientes incrementales, sino qué es lo que uno está buscando. Qué pasa, un problema en particular, si la variación del precio del barril (de petróleo) entre enero y febrero fue de tanto, cómo afectó eso, no sé..., el precio de la gasolina, por decir algo. Y si de febrero a marzo el aumento fue mayor, cómo afecta eso el precio de la gasolina, cosas así, que él (estudiante) vea, cuando yo busqué, cuando yo moví la variable aquí vi cómo se comportó lo que quería estudiar, él (estudiante) no va estar tan perdido.

Pregunta 4.4: Esbozar una gráfica aproximada de $f(t)$, para $t \in [4{,}0, 16{,}0]$, y trazar cada una de las rectas que pasan por $(5, f(5))$ y los puntos $(15, f(15))$, $(12, f(12))$, $(9, f(9))$, $(6, f(6))$, $(5{,}5, f(5{,}5))$, $(5{,}4, f(5{,}4))$, $(5{,}3, f(5{,}3))$, $(5{,}2, f(5{,}2))$, $(5{,}1, f(5{,}1))$, $(5{,}01, f(5{,}01))$ y $(5{,}001, f(5{,}001))$, respectivamente. Discutir sobre la interpretación geométrica y física que sugiere esta tarea, donde $t_0 = 5$.

Respuesta de P4.4: Las gráficas que se muestran en las **Figuras B.1** y **B.2** ilustran lo que se pide en esta tarea y se aprecia geométricamente que la pendiente de la recta que pasa por los puntos $(5, f(5))$ y $(5{,}001, f(5{,}001))$, se aproximan a la velocidad instantánea, $\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t}$, de la tarea anterior y toca a la curva, aparentemente, en un solo punto (recta tangente), mientras que las otras rectas tocan a la curva en más de un punto (rectas secantes).

Discusión: Finalmente, con esta tarea, se muestran dos interpretaciones de la derivada de manera simultánea con un tratamiento numérico y dejando a un lado el rigor del límite. Esta forma de introducir la derivada resulta carente de todo rigor para muchos profesores y en distintos artículos relacionados con la didáctica se plantean discusiones sobre este hecho.

¿Cuál es la posición de ustedes sobre los enfoques (1) Analítico-Algebraico, (2) Geométrico y (3) Numérico para introducir el concepto de derivada, es decir, supone algún tipo de dificultad para el estudiante hablar de dos interpretaciones de un mismo hecho, cuál es su experiencia en este sentido?

[Kenya]: La experiencia mía..., yo he partido siempre de la parte geométrica porque tengo el prejuicio de que los estudiantes que nosotros atendemos traen muy mala base, me parece que una manera de ilustrarle a ellos los conceptos que estamos trabajando es teniendo un apoyo fuerte en lo geométrico. Me estoy refiriendo a estudiantes de economía porque otro tipo de estudiantes, de otras carreras tiene otra preparación, por ejemplo, los de ingeniería tiene más nivel, pienso yo. Entonces, casi siempre me voy por la parte geométrica, llego al concepto de derivada, antes les doy una motivación del concepto que vamos a estudiar, para qué sirve en el campo profesional de ellos, pero simplemente a manera de introducción del tema, inmediatamente después, paso a definirle la derivada como la pendiente de la recta tangente. Y después que damos las herramientas básicas del cálculo de derivadas entonces sí me meto con los problemas de aplicación y hago esto de las tablitas, pero sí les llevo una tabla elaborada, precisamente trabajo con la función cuadrática.

[Elio]: Es que uno podría trabajar con una función lineal, pero el problema es que las rectas van a coincidir y no va a mostrar lo que uno quiere, entonces lo más inmediato es la función cuadrática.

[Moderador]: ¿Y cuál es tu opinión Alexis?

[Alexis]: Bueno, cómo se hace la definición, jugando un poco con la función x^2, de cómo se van acercando las rectas secantes a la recta tangente sin descuidar la definición formal usando el límite, creo que eso no lo podemos saltar.

[Elio]: En particular, yo no me ocupo tanto de la parte geométrica, yo uso el gráfico como un apoyo y trato, más bien, de construir esos cocientes de la función evaluada en un punto, las diferencias incrementales, trato de hacer lo que está por aquí en las tablas pero no con tanto cálculo...

[Alexis]: No, pues claro, uno trata de buscar una función que le resulte rápido para llegar a la definición...

[Elio]: Y que la parte geométrica sea sólo un apoyo de la parte analítica, realmente utilizo las dos pero le doy más fuerza o más énfasis a la parte analítica...

[Kenya]: Yo no hago los cálculos, precisamente, porque, pienso que, si ya ellos tiene la noción de límite, se van a dar cuenta que lo que estamos haciendo es acercarnos a un punto, o sea, siendo que esa distancia se hace cada vez más pequeña qué pasa con la recta secante. Parece que de modo natural, eso me está conduciendo a la idea de un límite; de qué límite, de ese cociente que viene dado por el cociente de la recta secante. Por eso no me meto mucho con el cálculo a nivel de tablas, de construcción de tablas. Sí lo hago después, cuando empiezo con la secuencia aquella de las aplicaciones a la economía, empezar por el incremento en la variable independiente, incremento en los valores de la función, o sea, cambio real, después la razón de cambio promedio, después la razón de cambio instantánea que es la derivada, el diferencial y esos conceptos y las relaciones que hay y así voy construyendo las tablas..., no las construyo, se las llevo ya construidas con unos valores y supongamos que esta es una función de costos..., mirémoslo horizontalmente, mirémoslo verticalmente, comparemos esta columna con esta para que ellos vayan haciendo la relación entre la razón de cambio promedio y la razón de cambio instantánea, o entre el incremento de la función diferencial. Sin embargo debo confesar que los resultados no son nada halagadores, precisamente apliqué un examen sobre esos asuntos y la nota más alta fue de 12/20 y después de ella fue de 6/20, aprobó una sola persona. Por eso es que, de pronto, uno se reprime en pensar en hacer algo partiendo de una situación contextualizada porque si tú le estás poniendo un problema que es de costo...

[Elio]: Como metiéndose en su mundo...

[Kenya]: En su mundo... y ellos no...

[Alexis]: Creo que me voy a salir de la discusión o tal vez no, pero yo creo que ellos son alérgicos a que uno les hable de matemáticas en esa parte (economía), es que son alérgicos..., "no profesor, pónganos una derivada y listo".

[Elio]: Es que no es fácil, no es tan sencillo llevar un problema verbal a una ecuación, al modelo...

[Kenya]: Se confunden todos.

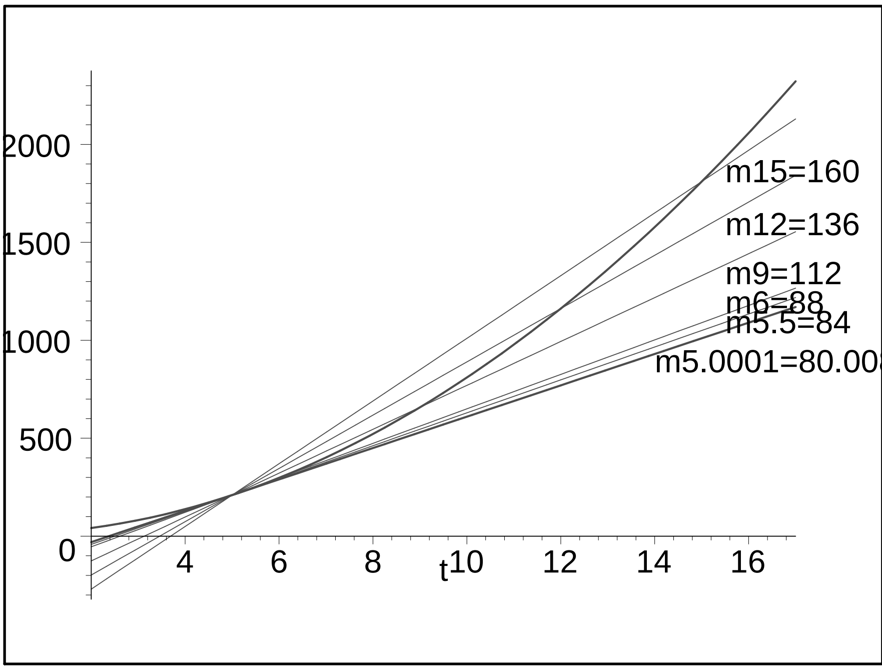


Figura B.1: Aproximación de la velocidad instantánea

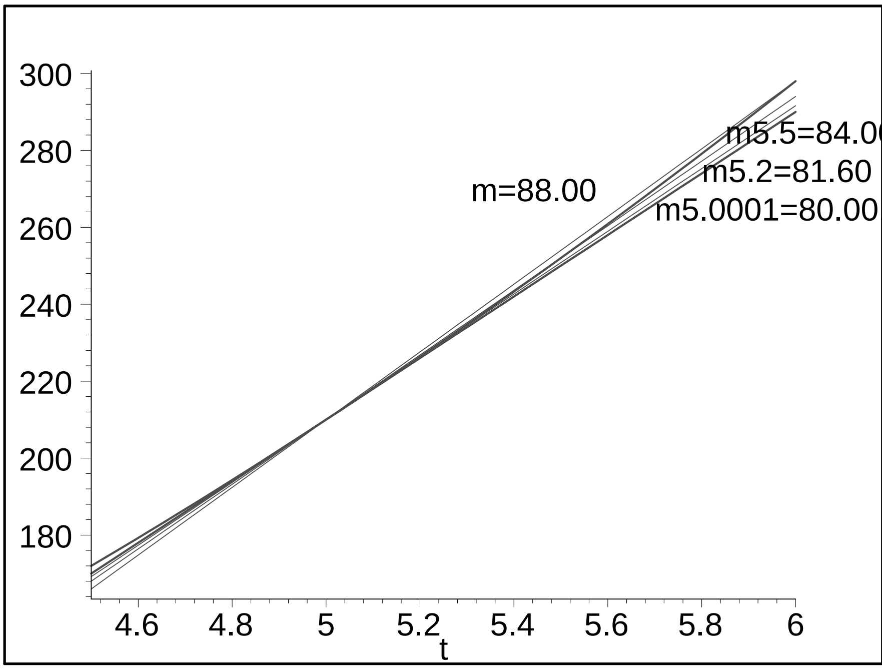


Figura B.2: Una aproximación más fina

Tiempo t	5.0	5.001	5.01	5.1	5.2	5.3	5.4	5.5	6.0	9.0	12.0	15.0
Pos $f(t)$	210	210.080008	210.08008	218.08	226.32	234.72	243.28	252	298	658	1162	1810

Cuadro B.1: Posición del objeto para un instante t

Intervalo de tiempo	Variación de la posición	Velocidad Promedio
$[5{,}0; 15{,}0]$	$f(15{,}0) - f(5{,}0) = 1600$	$\frac{f(15{,}0)-f(5{,}0)}{15{,}0-5{,}0} = 160$
$[5{,}0; 12{,}0]$	$f(12{,}0) - f(5{,}0) = 952$	$\frac{f(12{,}0)-f(5{,}0)}{12{,}0-5{,}0} = 136$
$[5{,}0; 9{,}0]$	$f(9{,}0) - f(5{,}0) = 448$	$\frac{f(9{,}0)-f(5{,}0)}{9{,}0-5{,}0} = 112$
$[5{,}0; 6{,}0]$	$f(6{,}0) - f(5{,}0) = 88$	$\frac{f(6{,}0)-f(5{,}0)}{6{,}0-5{,}0} = 88$
$[5{,}0; 5{,}5]$	$f(5{,}5) - f(5{,}0) = 42$	$\frac{f(5{,}5)-f(5{,}0)}{5{,}5-5{,}0} = 84$
$[5{,}0; 5{,}4]$	$f(5{,}4) - f(5{,}0) = 33{,}28$	$\frac{f(5{,}4)-f(5{,}0)}{5{,}4-5{,}0} = 83{,}2$
$[5{,}0; 5{,}3]$	$f(5{,}3) - f(5{,}0) = 24{,}72$	$\frac{f(5{,}3)-f(5{,}0)}{5{,}3-5{,}0} = 82{,}4$
$[5{,}0; 5{,}2]$	$f(5{,}2) - f(5{,}0) = 16{,}32$	$\frac{f(5{,}2)-f(5{,}0)}{5{,}2-5{,}0} = 81{,}6$
$[5{,}0; 5{,}1]$	$f(5{,}1) - f(5{,}0) = 8{,}08$	$\frac{f(5{,}1)-f(5{,}0)}{5{,}1-5{,}0} = 80{,}8$
$[5{,}0; 5{,}01]$	$f(5{,}01) - f(5{,}0) = 0{,}8008$	$\frac{f(5{,}01)-f(5{,}0)}{5{,}01-5{,}0} = 80{,}08$
$[5{,}0; 5{,}001]$	$f(5{,}001) - f(5{,}0) = 0{,}080008$	$\frac{f(5{,}001)-f(5{,}0)}{5{,}001-5{,}0} = 80{,}008$

Cuadro B.2: Variación de la posición y velocidad promedio en distintos intervalos

B.1.2. El Impuesto Marginal[2]

Supongamos que una persona gana \$6000 al año. Ésta tiene la opción de trabajar más horas, pero para ver si le convendría, primero quisiera determinar los **efectos del impuesto en los ingresos**. Para simplificar las cosas, supongamos que el impuesto que debe pagar viene dado por un polinomio de segundo grado, $y = f(x) = 0{,}04x^2$, donde

$$
\begin{aligned}
x &= \text{ingresos gravables (expresado en unidades de \$1.000)}\\
y = f(x) &= \text{impuesto (expresado en unidades de \$1.000).}
\end{aligned}
$$

A partir de esta función se discutirán una serie de preguntas, pero antes se le solicita al alumno que calcule el impuesto para ingresos anuales de \$1.000 hasta unos \$12.000, por ejemplo. Recuerde que x está expresada en unidades de \$1.000.

Pregunta 1: En cuánto varía el impuesto que ha de pagar cuando el ingreso del trabajador cambia de \$6.000 a \$12.000; de \$6.000 a \$11.000; de \$6.000 a \$10.000; de \$6.000 a \$9.000; de \$6.000 a \$8.000 y de \$6.000 a \$7.000. ¿Qué observa en cada uno de los cambios de ingreso al año?

Respuesta de P1: En la segunda columna de la **Tabla B.3** podemos ver cómo varía el impuesto a pagar en función de los incrementos que sufra el sueldo del trabajador más allá de los \$6.000 que gana actualmente.

Discusión: Al inicio de esta actividad y antes de entrar a realizar las tareas correspondientes, se le pidió al estudiante que calculara el impuesto a pagar para distintos ingresos, ahora estudiamos variaciones del impuesto para intervalos de ingresos particulares; es decir, qué variaciones experimenta el impuesto del trabajador cuando obtiene ingresos superiores a los \$6.000 que actualmente gana.

¿Consideran ustedes que esta tarea promueve, de alguna manera, el concepto de incrementos de una variable? ¿De qué manera? ¿Cómo?

[Moderador]: Ahora me olvido de la velocidad instantánea y estamos estudiando incremento pero en un contexto económico.

[Elio]: Sí, es más o menos lo que Kenya estaba diciendo ahora... Esto está más enmarcado en lo que ellos requieren, un contexto de economía, ingresos..., se ve, ahora se puede ver lo que significa el incremento de una función, tú estás hablando ahora de cantidad de dólares, cantidad de dinero, ahí vas a ver el cambio cuando varían los ingresos. A medida que el ingreso cambie el impuesto es distinto, además se ven cosas como..., el que más gana que pague

[2] Tomado de Wonnacott (1983)

más impuestos, la cotidianeidad, el día a día, tiene un sentido común, una lógica común.

[Moderador]: O sea, ¿que el problema de velocidad instantánea no tiene estas características?

[Elio]: No he dicho eso, además tú dijiste que nos olvidemos de ese problema, pero lo que quiero decir es que este está más relacionado con el lenguaje que ellos manejan.

[Moderador]: De acuerdo, y tú, Alexis, ¿qué opinas al respecto?

[Alexis]: Al principio esta era la idea de la cuestión, tal como hemos discutido desde tus trabajos anteriores, de hecho me extrañó que llegaras con un problema de velocidad instantánea. Recuerda que siempre te he dicho que la idea es comenzar la parte de derivada pero con este tipo de problemas o motivar con este tipo de problemas...

[Elio]: Disculpa que interrumpa, esta función que aparece allí, el $0,004x^2$, está puesta allí..., pero uno como docente debe ser cuidadoso a la hora de que el modelo que uno quiere buscar para interpretar esto, no te vaya a generar algo contrario a lo que sugiere la intuición, porque entonces vas a crear un conflicto mental en el estudiante. En este ejemplo en particular, la idea que más o menos uno puede creer es que la persona paga...

[Kenya]: Más ingreso paga más impuestos...

[Elio]: Más impuestos porque ganó más dinero. Si le pones una función que le haga lo contrario, entonces el estudiante dirá: "¿qué pasó aquí?"

[Moderador]: Pero no entiendo, ¿te puedes explicar mejor a que viene este comentario?

[Elio]: La idea es pensar que quien tenga más ingreso pagará más impuestos, por lógica...

[Kenya]: Supongo que él se refiere a que el problema no sólo debe estar en el contexto sino que además los datos deben concordar con lo que realmente debe ocurrir de acuerdo al planteamiento del problema...

[Elio]: Me refiero, por ejemplo, a que si escojo algún tipo de función, decreciente por ejemplo, en cierto intervalo, que a medida que los ingresos aumentan el impuesto baja, entonces más de uno (de los estudiantes) dirá: "¿qué pasó aquí?".

[Kenya]: La lógica dice que a mayores ingresos mayores impuestos, si tú le pones una función que está representando los impuestos pero que es decreciente, entonces eso va a ir en contra de la lógica...

[Moderador]: Un momento, estas funciones están estudiadas y escogidas con mucho cuidado, la discusión no es esa, aunque reconozco la observación realizada por ustedes, pero se supone que esta función modela de una manera perfecta o casi perfecta el impuesto que debe pagar una persona por sus ingresos en un año. Por supuesto que hay que evitar caer en ambigüedades, sobre todo con un problema con el que se busca enseñar un concepto nuevo para el estudiante.

[Kenya]: Lo que entiendo que tú persigues aquí es una discusión de promover la idea de que una diferencia, un cambio en una variable genera cambios en la otra, que eso después en matemáticas se llama incrementos es otra cosa. Lo mismo que pasa con la derivada, es un límite y que a ese límite por tener ciertas características le vamos a llamar la derivada, pero con la palabra incremento en sí, es una palabra con la que hay que tener mucho cuidado con el estudiante, porque en el lenguaje cotidiano, para ellos y para cualquiera, el incremento es sinónimo de aumento, en cambio en matemáticas un incremento puede ser un aumento o una disminución, y esas cosas, de pronto, si tu te metes con un problema donde va dando datos negativos y tú le vas a hablar de incrementos y tienes datos positivos..., "no pero es que eso no es incremento porque tiene signo negativo". Parece que el término matemático utilizado no se ajusta mucho a lo que ellos traen del bachillerato. Pero sí promueve la idea, la idea de cambios en una variable generan cambios en otra variable. Que después esos cambios reciben un nombre muy específico, el incremento bien en la variable independiente o bien en la variable dependiente.

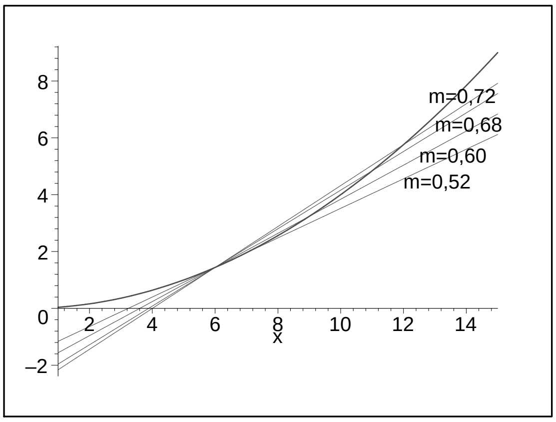


Figura B.3: Variación del impuesto en algunos intervalos

Pregunta 2: Si la persona **incrementa** sus ingresos en $1000, ¿**qué cantidad de este incremento** será para impuestos? ¿Qué porcentaje?

Antes de responder a esta pregunta, pasamos a discutir sobre el incremento de una variable.

Incremento de una variable

Si observamos la **Tabla B.3**, notamos que para cada ingreso x (columna 1), se da la correspondiente tajada del fisco (columna 3). Esta correspondencia es una función que definiremos más adelante, pero que de momento llamaremos *variación del impuesto* (**impuesto marginal**), o el incremento de y o $f(x)$. En general, se define como

$$\Delta y = \frac{f(x+1) - f(x)}{(x+1) - x}$$

En la **Tabla B.3** se observa que la *variación del impuesto* (**impuesto marginal**) presenta una cierta regularidad, por lo que parece conveniente intentar deducir una fórmula para dicho impuesto a partir de esta situación.

$$\begin{aligned} \Delta y &= 0{,}04(x+1)^2 - 0{,}04x^2 \\ &= 0{,}04(x^2+2x+1) - 0{,}04x^2 \\ &= 0{,}08x + 0{,}04 \end{aligned}$$

A manera de comprobación, se observa que cuando se sustituye $x = 0, 1, 2, \ldots$ se genera la última columna de la tabla 1.

Respuesta de P2: Dado que sus ingresos, x, se miden en unidades de \$1000, su incremento podría expresarse simbólicamente como

$$\Delta x = 1, \ \textbf{cada unidad representa \$1000}$$

¿En cuánto se incrementarán sus impuestos? Es decir, ¿cuál es el incremento correspondiente Δy?

$$\begin{aligned} \Delta y &= f(7) - f(6) \\ &= 1{,}96 - 1{,}44 \\ &= 0{,}52 \end{aligned}$$

Así, podemos decir que la tajada al fisco es de 52 % por los siguientes \$1000 que gane (a los \$6000 que ya gana). A esta *variación del impuesto*, (Δy), los economistas le llaman **impuesto marginal**.

Discusión: Con esta tarea buscamos que el estudiante se aproxime a la definición de derivada por medio del incremento de una variable respecto a otra (cociente incremental), pero además se llega al monto que el trabajador pagaría en impuestos por los \$1000 adicionales, que es el 52 % de esto \$1000. En otras palabras, la persona solo se quedará con \$480 de estos \$1000.

Un planteamiento como éste, en el que buscamos trabajar, de forma puntual, el tema de los incrementos, partiendo del contexto económico. ¿Les parece adecuado que la variable x se exprese en unidades de mil, o no supone mayor inconveniente y permite la discusión adecuada sobre incrementos?

[Elio]: En el caso mío, este tipo de discusión genera conflictos serios en el estudiante porque..., no todos, pero parece que algo pasa; por ejemplo, en este caso lo resultados deberían ir multiplicados por mil. No sé qué pasa, pero como que no interpretan la variable que viene por unidades de mil sino que quieren trabajar siempre con el uno, entender que aquí el mil es uno, es la unidad, de eso me he dado cuenta en mis exámenes, con mis estudiantes, no con todos, con algunos, de que hay cierto ruido, algo pasa allí. Iba a decir algo pero se me fue...

[Moderador]: Kenya, ¿ibas a añadir algo?

[Kenya]: Yo pienso que a este nivel no debería causarle tanta dificultad, lo que pasa es que ellos no están habituados a trabajar en estos términos, en unidades de mil. Cinco son cinco mil..., no debería ocurrir porque se supone que en economía se manejan situaciones con cantidades bastante grandes, pero incluso en los medios de comunicación y en la prensa escrita en concreto se utiliza mucho este tipo de lenguaje y no se nombran esas cantidades por gusto, entonces es como contradictorio, eso significa que no leen la prensa.

[Elio]: La otra opción es ponerle una función que trabaje en unidades de dólares, pero no en miles ni cientos, pero entonces el problema va a quedar muy desactualizado, una persona que tenga que pagar 100 dólares o que gane 100 dólares mensuales o un dólar y eso pasa..., hay muchos libros que son viejos y entonces aparecen problemas como: "una persona requiere construir algo y el costo del material es de 5 bolívares..."

[Alexis]: Por cierto que los problemas que yo trabajo en clase los trabajo en bolívares...

[Kenya]: Pero tú lo has dicho, los que trabajas en clase, pero qué me dices de los problemas de los libros de texto...

[Moderador]: Nos estamos saliendo del tema de discusión, aún así, qué dirían ustedes si hablaran del ingreso que tiene el país por concepto de la renta petrolera, recuerden que estos montos son en millones de dólares, el precio del barril de petróleo es en dólares, la referencia es el dólar, nos guste o no. Pero si ustedes llevan estas cantidades de dólares a bolívares, entonces las unidades serían el millardo, como mínimo. De todas maneras, no estoy hablando de la unidad monetaria o concretamente de una moneda en particular, yo me refiero a partir la unidad o mejor dicho, qué ocurre cuando la unidad de nuestro problema es de mil, de un millón o más.

Ingresos Gravables x	Impuesto $f(x)$	Impuesto Promedio $A(x) = \frac{f(x)}{x}$	Variación del Imp. $\Delta y = \frac{f(x+1)-f(x)}{1}$
1	$f(1) = 0,04$	0,04	0,04
2	$f(2) = 0,16$	0.08	0.12
3	$f(3) = 0,36$	0.12	0.20
4	$f(4) = 0,64$	0.16	0.28
5	$f(5) = 1,00$	0.20	0.36
6	$f(6) = 1,44$	0.24	0.44
7	$f(7) = 1,96$	0.28	0.52
8	$f(8) = 2,56$	0.32	0.60
9	$f(9) = 3,24$	0.36	0.68
10	$f(10) = 4,00$	0.40	0.76
11	$f(11) = 4,84$	0.44	0.84
12	$f(12) = 5,76$	0.48	0.92

Cuadro B.3: Ingresos gravables e impuestos promedio y marginal

[Alexis]: Hay algunos que lo entienden y otros que no, pero la mayoría lo entendería. Pero hay que insistirle mucho...

[Kenya]: Yo creo que no sería muy problemático, tú te aseguras previamente que ellos entienden y si no lo entienden se le explica, si son 5 son 5000, si son 45 son 45000...

[Elio]: Perdón..., lo que yo comenté ahora es que él (estudiante) tiende a confundir y pareciera que le están haciendo calcular lo que él (trabajador) debe pagar por ganar ahora 7000 dólares, los impuestos que debería pagar, hacer énfasis en cuánto va a pagar por esos 1000 dólares adicionales a lo que está ganando ahora, eso es lo que pide el problema y que debemos ilustrarle muy bien al estudiante. Lo que sí he notado es eso, que confunden esa parte.

Comentario (Pregunta 3): Hasta ahora no hemos hablado de *límite* ni de *cociente incremental*. Aún cuando la función de impuesto del ejemplo antes visto se expresó en unidades de mil dólares, cualquier unidad hubiera sido satisfactoria. Por ejemplo, suponga que se quiere estudiar el *impuesto marginal* de una persona que gana \$6.000, para un incremento de \$100, esto es,

$$\Delta x = 0,1.$$

Entonces el impuesto correspondiente es

$$\begin{aligned}\Delta y &= f(6,1) - f(6,0)\\ &= 1,4884 - 1,4400\\ &= 0,0484.\end{aligned}$$

Por lo tanto, el incremento del impuesto en relación con el incremento de los ingresos es

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{0,0484}{0,1} = 0,484,$$

que los economistas denominan la tasa del impuesto marginal y los *matemáticos llaman el cociente incremental*.

Discusión: Ahora, cuando el incremento del ingreso es de \$100 ($\Delta x = 0,1$), el incremento en Δy cambia respecto al caso anterior. Cuando el incremento en el ingreso era de \$1.000, la tajada al fisco era del 52 %, pero cuando el incremento es de \$100, la tajada es de 48,4 %. De esta manera y según la necesidad del caso a estudiar, nuestro incremento lo podemos hacer tan pequeño como sea.

¿Qué interés puede suponer para ustedes, desde el punto de vista metodológico, esta actividad en la que se busca dar un paso más hacia la definición de derivada?

[Alexis]: En primer lugar, debería hablarse sobre un intervalo.

[Moderador]: Te explico, recuerda que te estás aproximando a 6...

[Alexis]: Ah, ok.

[Moderador]: Antes era 7000, después 6100, después 6010; entonces de manera implícita estás hablando de un intervalo.

[Alexis]: Entonces, allí debe despertar interés en el estudiante sobre cómo se va aproximando, cómo se van acercando ciertos valores de la función a algo...

[Elio]: Eso es lo que se quiere hacer, aproximar unos valores a uno establecido, eso es lo que se quiere hacer, lo que pasa es que el problema como tal podría hacerles perder interés por lo que está pasando, porque uno diría: “me preocupa, ahora estoy ganando 6000 y ahora voy a ganar 8000 mil, ahora sí me preocupa por el impuesto, pero si yo de 6000 voy a pasar a ganar 6010, eso no me preocuparía”. El problema como tal, de pronto no demuestra interés en uno por el impuesto que ahora pagaría, me refiero al interés personal, no al matemático. De repente no le presto mucha atención porque sería muy poco lo que voy a pagar ahora en impuestos cuando pase de ganar 6000 a 6010, aunque eso me puede dar una idea intuitiva que el impuesto a pagar no debe ser muy grande; por ejemplo, puedo decir o concluir: “el impuesto con esta cantidad no va a ser muy grande". Sin embargo, se está mostrando de alguna manera que el incremento en el sueldo genera cambios en el impuesto, lo que pasa es que cuando yo hago un cambio pequeño en una variable debo esperar un movimiento pequeño, en este caso, en el impuesto. Entonces, yo había pensado que perdía importancia una situación como la planteada, pero ese mismo hecho de perder importancia, por qué le resto importancia, porque no estás esperando un cambio muy brusco y eso también puede favorecer...

[Moderador]: Vamos a parar aquí un momento, disculpen que los frene, pero vamos a meternos en el problema, en la discusión, veo que nos estamos alejando de la discusión y les pido que sean más concretos en sus opiniones, recuerden que lo que está en discusión es que queremos o pretendemos generar el concepto de derivada a partir de algunas situaciones particulares donde ustedes me dirán o pondrán su punto de vista sobre lo acertado de la situación, qué conflictos puede traer en el estudiante la situación, etc. Recuerden que lo que busco en este momento es la opinión de ustedes, desde el punto de vista metodológico, sobre el incremento, que en un principio fue de 1000, luego de 100, después podría ser de 10 y así sucesivamente. Es decir, ¿supone para ustedes algún interés eso de ir achicando el incremento del sueldo del trabajador?, quiero enfatizar lo del punto de vista metodológico, ¿es un buen o mal método, es una buena o mala estrategia didáctica para abordar el tema de derivada con estos estudiantes?

[Elio]: Sí, a mi me parece que sí, ya te dije, en un principio no le di la importancia que posteriormente le vi, después de leerlo con más calma...

[Kenya]: Entiendo que la idea es llegar a la definición de derivada por esta vía...

[Moderador]: Sí, pero quiero escuchar sus opiniones, el hecho de que yo o un grupo de personas apostemos por esto no significa que sea bueno o malo para el resto, por eso me interesa o nos interesa escucharlos.

[Kenya]: A mi me parece pertinente hacerlo así...

[Alexis]: Yo creo que como tú lo enfocas, por el lado de la economía o la contaduría, el estudiante debe darse cuenta más rápido que si lo enfocas por la vía de la velocidad instantánea...

[Kenya]: Además que un problema de su campo profesional debe ser más motivante para ellos...

[Alexis]: Debe llamarle más la atención...

[Kenya]: Y si de paso esa motivación se utiliza para introducir un concepto que les va a ser de mucha utilidad, entonces yo pienso que no hay lugar a dudas que, introducir el concepto de la derivada a partir de un problema de este tipo, de contexto para ellos, crea enormes beneficios. Entonces, ellos podrían estar más interesados en ver la derivada desde este punto de vista que en ver la derivada como la pendiente de la recta tangente, en la vida para qué me sirve eso..., yo no voy a calcular pendiente de la recta tangente en mi campo profesional, lo que sí me van a pedir es que haga un análisis marginal de esto o de aquello...

[Moderador]: Bien, pasemos al otro punto.

Observación: El cociente $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ se podría calcular para cualquier otro valor de Δx. Estudiemos ahora qué ocurre para cualquier incremento Δx. En este caso, el incremento Δy es,

$$\begin{aligned}\Delta y &= f(6+\Delta x) - f(6)\\ &= 0,04[6+\Delta x]^2 - 0,04[6]^2\\ &= 0,04[36+12(\Delta x)+(\Delta x)^2] - 0,04[36]\\ &= 0,48(\Delta x) + 0,04(\Delta x)^2.\end{aligned}$$

De este modo, el cociente incremental se obtiene dividiendo entre Δx,

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = 0,48 + 0,04(\Delta x). \tag{B.1}$$

<u>**Paso al límite**</u>

Si en la expresión anterior (**B.1**), hacemos que Δx se aproxime a 0 tanto como uno quiera ($\Delta x \to 0$), se satisface que

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} \to 0,48$$

Este valor límite, los economistas, lo denominan *tasa del impuesto marginal infinitesimal* o *tasa de impuesto marginal*. Los matemáticos lo llaman *la derivada* y lo denotan por y' , es decir,

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} \to y'$$

Discusión: Finalmente hemos llegado a la definición de derivada de una manera que a muchos profesores no les gusta o mejor dicho, no están de acuerdo por toda la estructura que significa una construcción de esta naturaleza; además, consideran que el estudiante se distrae y se pierde en esencia el objetivo perseguido.

¿Qué opinión tienen ustedes sobre este hecho (el de introducir el concepto de derivada de esta manera), en relación con los objetivos que se buscan en el curso?

[Kenya]: Se entiende la posición de autores que opinan de esa manera porque se supone que estamos trabajando con adultos y que los adultos tienen cierto nivel de abstracción que no necesitan llegar a casos concretos, pero tú no le puedes pedir a una persona que haga algo que no haya sido de su experiencia, que no haya tenido experiencia en esa actividad, entonces, yo pienso que tendrán su razón por un lado, pero hay cosas que el alumno tiene que hacer independientemente de cuál se su edad o su nivel de maduración..., si no lo ven como experiencia propia entonces no lo van a entender nunca en su vida.

[Moderador]: Pero, ¿qué opinión tienen ustedes sobre el hecho de ir elaborando paso a paso toda una estructura para llegar a un concepto, en este caso, el concepto de derivada en relación con los objetivos que persigue el programa oficial de la materia?

[Kenya]: Algo que debemos tomar en cuenta es lo escueto de los programas en este sentido, generalmente hablan de unos objetivos muy generales, muy amplios...

[Alexis]: Bueno, a mi me parece que es mejor introducir la definición de derivada por esta vía, con problemas de aplicaciones..., como hemos venido haciendo en los últimos semestres que como se hacía anteriormente, yo recuerdo que cuando comencé con estos cursos, comenzaba con la definición de derivada y a hacer problemas de cálculo. En este sentido, yo creo que se cumplen los objetivos del programa y al mismo tiempo se motiva al estudiante, ya que estamos relacionando la parte económica con la parte matemática.

[Elio]: Me llamó la atención lo que dijiste hace rato, "que a muchos docentes no les gusta o mejor dicho, no están de acuerdo..., y que el estudiante tiende a distraerse..."

[Moderador]: Sí, me he encontrado casos...

[Elio]: Bueno, pero yo creo que en lugar de hablar de objetivos de los programas uno puede hablar de objetivos particulares o personales y nuestro objetivo debería ser, lograr utilizar esa herramienta, la derivada, para resolver problemas acordes a la situación que ellos están trabajando o que van a desarrollar en un futuro; de hecho, yo creo que los objetivos de los programas quedan más que cubiertos con estas actividades, ya que además de derivar, van aprendiendo una aplicación de la derivada en su campo o área. El único inconveniente que pueda surgir es el factor tiempo, no sé.

[Kenya]: Bueno, yo pienso que esta propuesta que hace Luis, que acabamos de discutir me parece bastante viable, me parece que es la que responde más a los intereses de los estudiantes que a la del profesor, porque eso de que a algunos profesores no les gusta o no están de acuerdo, habría que ver por qué no le gusta, puede ser que a lo mejor (el profesor) no está preparado, no conoce el contexto o, porque esto implica más trabajo por parte del profesor, eso es una realidad, el trabajo es mayor, tal vez a eso se refiere Elio con lo del tiempo. Aquí hay una realidad y es que esto implica tener que sentarse en la mesa y estudiar y conocer los problemas que mejor se adapten a la situación. A lo mejor no es que no queramos trabajar sino que el tiempo es clave en todo esto.

B.1.3. Cuestionario relacionado con la actividad 1

De acuerdo a la actividad que acabamos de realizar y como producto de las opiniones y discusiones en la misma, nos interesa conocer tu opinión sobre algunos puntos que señalamos a continuación:

1. ¿Qué aspectos puedes destacar (positivos o negativos) entre ambos problemas?; es decir,
   a) ¿Cuál sería la actitud del estudiante frente a estos problemas (por separado)? ¿Por qué?
   b) ¿Cuál llevaría al estudiante a cometer errores? ¿Por qué?
   c) De acuerdo a la bibliografía que está al alcance de los estudiantes (bibliotecas y librerías), ¿cuál conviene utilizar? (1 o 2 referencias) ¿Por qué?
   d) Otro. ¿Por qué?
2. ¿Utilizas algún problema similar en tus clases para introducir el concepto?
   a) $\boxed{\text{Sí}}$ ¿Por qué?, ¿qué persigues didácticamente con este tipo de problemas?
   b) $\boxed{\text{No}}$ ¿Por qué?
3. En caso de haber respondido negativamente en la pregunta anterior y de seguir un esquema tradicional en tus clases. ¿Utilizarías el problema vinculado a la economía para introducir el concepto de la derivada descartando el otro, después de la experiencia de hoy o prefieres seguir la estructura que haces actualmente? ¿Por qué?
4. Realiza un esquema de la estructura que **sigues actualmente** para enseñar el tema de la derivada en la carreras de ciencias económicas.

Alexis

Cuestionario relacionado con la actividad 1

De acuerdo a la actividad que [illegible] de realizar y como producto de las opiniones y discusiones en la misma, nos interesa conocer tu opinión [illegible]

1. ¿Qué aspectos puedes destacar (positivos o negativos) [illegible] problemas?, es decir,

   (a) ¿[illegible] la actividad de velocidad [illegible]? ¿Por qué?

   (b) ¿[illegible] a los estudiantes a cometer errores? ¿Por qué?

   (c) [illegible] ¿Por qué?

   (d) [illegible] ¿Por qué?

a) Para el caso de velocidad instantánea me parece que al estudiante se le hace más [illegible] entender la definición por verla como un problema de ingeniería y no como de Ciencias Económicas. En cambio, que para el impuesto marginal a pesar que se está haciendo lo mismo está debe interesarle más por ser una definición de su carrera, por su parte, el estudiante, ya debe haber escuchado hablar de estos temas, es decir, costo, ingreso, demanda, etc.

(b) El estudiante debe cometer errores en la introducción con velocidad instantánea por no entender [illegible] respecto al tabla de función de posición, desplazamiento, tiempo, etc.

(c) Bibliotecas con las limitaciones que tenemos aquí en [illegible]

(d) Matemáticas Aplicadas a la Administración y a la Economía

Jagdish C. Arya – Robin W. Lardner

(e) Cálculo para Administración, Economía y Ciencias Sociales,

Laurence D. Hoffmann – Gerald L. Bradley

4. ¿Utiliza algún problema similar en sus clases para introducir el concepto?

(a) Sí ¿Por qué? ¿Le [illegible] buenos resultados con este tipo de problemas?

(b) No ¿Por qué?

En particular, motivo la definición mediante un ejemplo sencillo, e involucro el cociente incremental con una cuestión límite si está escrito y el estudiante comprende más de lo que se está hablando que al indicarlo con velocidad instantánea y creo que se puede hacerlo usando funciones que correspondan al estudio de las Ciencias Económicas.

5. En caso de haber respondido negativamente a la pregunta anterior ¿Desearías un esquema tradicional en tus clases? ¿Utilizarías el problema orientado a la economía para introducir el concepto de la derivada descartando el caso después de la experiencia de hoy o preferirías seguir la estructura que tienes actualmente? ¿Por qué?

1 Realiza un esquema de la estructura que sigues actualmente para enseñar el tema [illegible] en la carrera de Ciencias Económicas.

Después de esta experiencia prefiero tratar de adoptar una estructura hasta aquí analizada.

Elio

Cuestionario relacionado con la actividad 1

[illegible]

(a) Por alguna razón, creo que la actitud del estudiante es de rechazo, simplemente por ser un problema en el que se tiene que aplicar la matemática (claramente, no toda). Lo que se puede lograr es sumar esa apatía que se pudiera presentar, enfocando el problema de la segunda manera.

(b) Considero, según lo que he notado, que los errores se pueden presentar en cualquiera de los dos casos, pues en ambos se requieren cálculos numéricos e interpretaciones que son los aspectos en que más frecuentemente se presentan errores. Pero también considero que el hecho de enmarcar el problema dentro de una situación que se adecúe más a sus intereses, como el segundo caso, puede influir a que los errores disminuyan.

(c) A mi juicio, creo que debemos utilizar textos en los cuales se presenten los conceptos e ideas, de una manera constructiva, es decir que las ideas vayan surgiendo de lo propio intuitivo hasta llegar a la formalidad del asunto y no imponiendo definiciones para obtener resultados (como teoremas) y aplicarlas porque sí.

Concluía que los siguientes pueden ser una buena referencia para ello

*) Matemáticas para Administración y Economía S.T. Tan
*) Matemáticas aplicadas a la Administración y a la Economía. Arya, Lardner

2. ¿Utilizarías algún problema similar en tus clases para introducir el concepto?

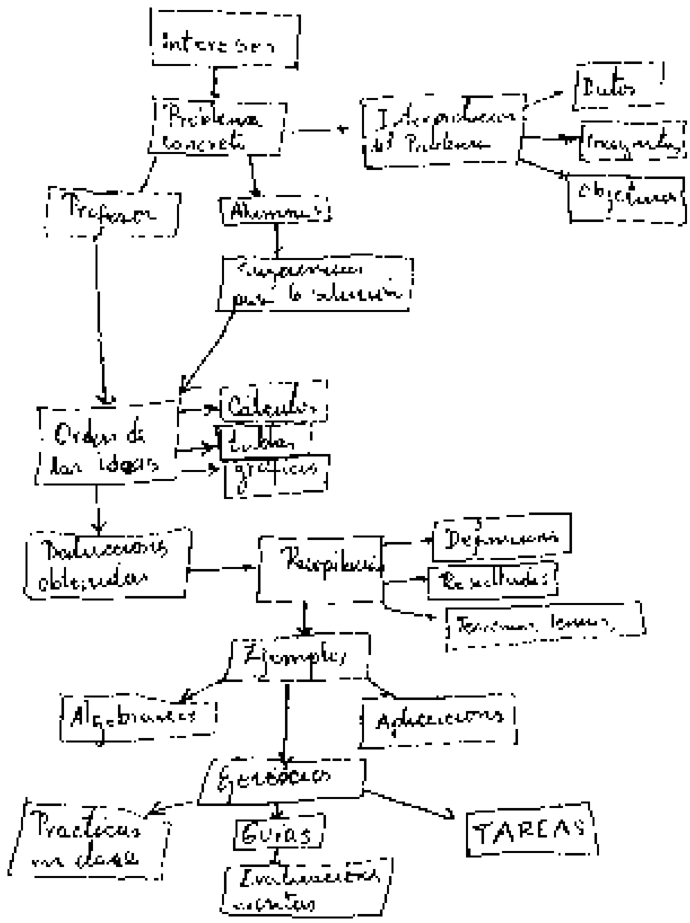
(a) Sí. ¿Por qué? ¿[illegible] este tipo de problemas?

(b) No. ¿Por qué?

Sí, porque si lo que se quiere es que el alumno conozca y aprenda sobre este tema, que en principio puede ser abstracto y por tanto tedioso y carente de interés, lo más conveniente sería presentarle alguna situación en la cual se logre concretar algún interés y por tanto se pueda establecer al menos un objetivo específico del asunto. Aprovechándonos de esto, en el buen sentido, creo que es más fácil introducir este concepto, presentándolo como una necesidad tal vez, para darle una estructura formal (si se quiere) al problema y de allí poder palpar la poderosa herramienta que nos ofrece la derivada en la solución de problemas de este tipo (me refiero al segundo caso)

5. En caso de haber respondido negativamente en la pregunta anterior y de seguir el esquema tradicional en tus clases, ¿utilizarías el problema vinculado a la escalera para introducir el concepto de la derivada descartando el otro, después de la experiencia de hoy, o prefieres seguir la estructura que tienes actualmente? ¿Por qué?

4. Realiza un esquema de la estructura que sigues actualmente para enseñar el tema de la derivación en carreras de ciencias económicas.



Kenya

Cuestionario relacionado con la actividad 1

De acuerdo a la actividad que acabamos de realizar y como producto de las opiniones y discusiones en la misma, nos interesa conocer tu opinión sobre algunos puntos que señalamos a continuación:

1. ¿Qué aspectos puedes destacar (positivos o negativos) entre ambos problemas?; es decir,

   a) ¿Cuál sería la actitud del estudiante frente a estos problemas (por separado)? ¿Por qué?

   b) ¿Cuál llevaría al estudiante a cometer errores? ¿Por qué?

   c) De acuerdo a la bibliografía que está al alcance de los estudiantes (bibliotecas y librerías), ¿cuál conviene utilizar? (1 o 2 referencias) ¿Por qué?

   d) Otro. ¿Por qué?

Vel. Instantánea	Impuesto Marginal
a). No me parece adecuado para estudiantes de Economía, por lo que su actitud pudiera ser más bien negativa contribuyendo a aumentar su aversión hacia la matemática. Aún así, y quizás más adelante cuando el concepto de derivada haya sido asumido a través de un problema ajustado a los estudiantes de Economía, podría ser interesante (al menos como información) plantear problemas en otros contextos haciendo ver, de modo comprensivo, que las "formas se liberan de su contenido concreto"	a) Siendo adecuado para estudiantes de Economía, cabe esperar que muestren una actitud positiva hacia la noción que se pretende introducir.

21

b) Si hablamos de errores conceptuales, presentar sólo una perspectiva (por ejemplo, impuesto general o, más general, análisis marginal) podría hacer pensar al estudiante que la derivada es un concepto exclusivamente aplicable a su campo profesional, por lo que here necesario plantear otras situaciones (al menos, a modo de cultura general, pero tal vez con no tanto detalle) que permitan apreciar la importancia que tiene la derivada en la solución de problemas.
Si nos referimos a errores de procedimiento, creo que ambos tipos de problemas, por representar el mismo concepto, pudieran llevar a dificultades en el cálculo con decimales, o con las unidades utilizadas, o a confundir entre sí las nociones que giran en torno a la derivada tales como Δy y dy, o a realizar cálculos no en x sino en $(x + \Delta x)$
De cualquier modo, no habría que olvidar que ambos tipos de errores están conectados entre sí.

c) Haeussler, E. y Paul, R.
Realmente, ninguno de los libros que conozco me satisface, pero creo que el citado es el que más se ajusta a las necesidades de los alumnos de Economía, en cuanto al programa de Matemáticas. Como material de apoyo, lo recomendaría.

2. ¿Utilizas algún problema similar en tus clases para introducir el concepto?

   a) $\boxed{\text{Sí}}$ ¿Por qué?, ¿qué persigues didácticamente con este tipo de problemas?

   b) $\boxed{\text{No}}$ ¿Por qué?

No utilizo problemas ni del tipo 1 ni del tipo 2.
Del tipo 1 (Vel. inst), porque no es apropiado
para los estudiantes de Cs. Económicas.

Del tipo 2 (Análisis Marginal), porque asumo (y
la experiencia así lo evidencia) que los alumnos
tienen deficiencias en el manejo de funciones
y vocabulario vinculado a su componente
profesional; no se dejan a un lado, las
dificultades que también presentan los alumnos
en el cálculo con decimales y el trabajo con
estimaciones, al cual no están habituados.

3. En caso de haber respondido negativamente en la pregunta anterior y de seguir un esquema tradicional en tus clases. ¿Utilizarías el problema vinculado a la economía para introducir el concepto de la derivada descartando el otro, después de la experiencia de hoy o prefieres seguir la estructura que haces actualmente? ¿Por qué?

Asumiendo que el esquema de clase que desarrollo (presentado en la siguiente pregunta) es tradicional, si estaría dispuesto a utilizar problemas vinculados a la economía con miras a introducir el concepto de derivada, porque resulta más significativo y motivante para los alumnos habida cuenta que el proceso de enseñanza se sustenta en un esquema basado en la resolución de problemas en el contexto de una enseñanza cognitivo-constructivista que busca que el alumno aprenda de modo comprensivo y no memorístico.

4. Realiza un esquema de la estructura que **sigues actualmente** para enseñar el tema de la derivada en la carreras de ciencias económicas.

1) Un breve discurso acerca de la importancia que tiene la derivada en la resolución de problemas asociados a las Cs. Económicas.

2) Se introduce la noción de derivada utilizando la interpretación geométrica, sobre la base del conocimiento que los alumnos tienen de la noción de límite.

3) Desarrollo de destrezas para el cálculo de derivadas utilizando las reglas y técnicas de derivación

4) Interpretación de la derivada como razón de cambio desde el punto de vista matemático a través del siguiente esquema y tomando como ejemplo la función real $y = x^2$:

4.1) Incremento en x

4.2) Incremento en Y

4.3) Razón de cambio promedio

4.4) Razón de cambio

4.5) Diferencial de Y

4.6) Relaciones entre (4.4 y 4.3) y (4.5 y 4.2)

Para todas estas nociones se presenta una tabla para diversas variaciones de x, se insiste en la interpretación, lenguaje (simbólico y verbal) y con un apoyo[24] en el aspecto geométrico. Con respecto a esto último se establecen las conexiones entre la noción estudiada en 2 y 4.1 a 4.6

4.7) Repetir lo anterior utilizando funciones asociadas a la economía (costo, ingreso, beneficio, ecuación de demanda, consumo, ahorro) con énfasis en las interpretaciones y el lenguaje en sus diversas formas de representación.

B.2. Actividad 2

Después de varias jornadas de trabajo con los estudiantes, ya ellos calculan derivadas inmediatas, han trabajado con las propiedades de la suma, resta, producto y cociente de derivadas e interpretaciones varias de la derivada en la economía.

B.2.1. Incrementos, Tasas, Optimización, Razón de Cambio y Recta Tangente[3]

Una fábrica de lápices, después de realizar un estudio exhaustivo, concluye que el costo por semana de producir x artículos (x en unidades de mil) de uno de sus productos principales, el lápiz mágico, viene dado por la función $C(x) = 2000 + 0,15x$ *um* y el ingreso obtenido por la venta de x lápices viene dado por $R(x) = 1,5x - 0,0001x^2$ *um*. La fábrica en cuestión produce 2 millones de lápices mágicos semanales y se está estudiando la idea de incrementar la producción a 2.650.000.

Preguntas: Las siguientes preguntas están relacionadas con los contenidos matemático y económico en general.

Pregunta 1: Cuál es el dominio para cada una de las funciones $C(x), R(x)$ y $\boldsymbol{U(x)}$ (donde $\boldsymbol{U(x)}$ representa la **función de beneficio** o **utilidad**), vistas como funciones matemáticas en general y como funciones de la economía. **Discuta sobre esta situación**.

Respuesta de P1: En primer lugar, antes de hablar de los dominios de las funciones, debemos obtener la función de beneficio $\boldsymbol{U(x)}$, la cual se define como sigue:

$$\boldsymbol{U(x)} = R(x) - C(x) = -0,0001x^2 + 1,35x - 2000.$$

Por otra parte, en la **Tabla B.4** se muestran los dominios[4] de cada una de las funciones mencionadas en la pregunta.

Discusión: En las dos situaciones se observa que para la misma función el dominio no es el mismo, suponiendo una economía hipotética sencilla, (**se trata de introducir e involucrar al estudiante y no de plantear situaciones económicas complejas por muy reales que éstas lo sean**).

No obstante, en una situación económica real, el dominio en cualquiera de las funciones estaría acotado también por la derecha, dependiendo en este caso

[3] Tomado de Arya y Lardner (1987)

[4] $\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, 3, ...\}$

	$C(x)$	$R(x)$	$U(x)$
Dominio Mat.	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$
Dominio Ec.	$\mathbb{R}_0^+$ $\left(\{x \in \mathbb{N}_0 : \frac{x}{1000}\}\right)$	$\mathbb{R}_0^+$ $\left(\{x \in \mathbb{N}_0 : \frac{x}{1000} \leq 15000\}\right)$	$[1695, 11805]$ $\left(\{x \in \mathbb{N} : 1695 \leq \frac{x}{1000} \leq 11805\}\right)$

Cuadro B.4: Dominio de funciones en dos contextos

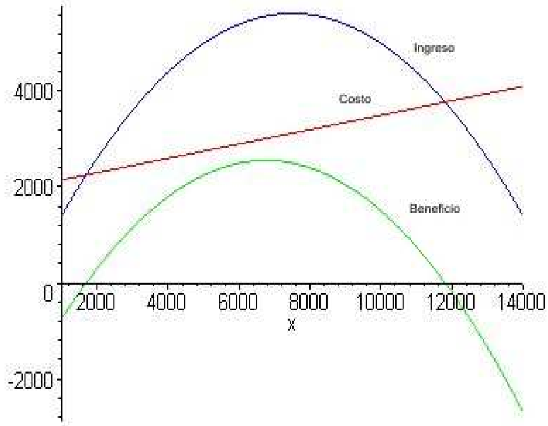


Figura B.4: Funciones R, C y U

de la capacidad de producción y venta del fabricante, por ejemplo. Más aún, si nos fijamos en detalle en el enunciado del problema, los objetos fabricados son lápices y la x está expresada en miles, con lo cual el dominio económico sería $\mathbb{Q}_0^+$ sin excederse en tres decimales (por lo de las unidades de x).

¿Qué importancia supone para ustedes implementar este tipo de dualidades (económicas y matemáticas) en estos cursos o, por el contrario, supone más bien que el estudiante tiende a confundirse? ¿Por qué?

[Kenya]: Digamos que es muy válida esa apreciación de que la matemática expresa más la forma que los contenidos, pero cuando ya empezamos a aplicar las matemáticas a una situación real, entonces el contexto cuenta y hay que hacer caso a las condiciones bajo las cuales, digamos, una determinada función puede realmente explicarle el fenómeno que se está estudiando...

[Elio]: Además, a estas alturas ya el estudiante a pasado por el estudio previo de funciones, cómo se calcula el dominio de una función, cómo se interpretan algunos datos característicos de la función, etc. Entonces, si estamos utilizando alguna función para modelar una situación, creo que no sería muy complicado, partiendo de ese hecho, de que el dominio matemático es una cosa como abstracta y ahora, cuando quiero estudiar el dominio bajo estas circunstancias se van a restringir muchas cosas, ya no tengo la libertad que tenía antes, algebraicamente. Tengo la libertad que me establecen las nuevas condiciones que vienen dadas por el mismo problema...

[Kenya]: Además, debe suponerse que en estudios previos ellos abordaron el tema de la restricción de una función.

[Alexis]: Asumiendo que desde un principio se ha hablado, desde un principio me refiero a Matemáticas 11, se ha colocado la parte de matemáticas aplicadas. Porque si no el cambio es muy brusco.

[Elio]: El cambio sería doble..., utilizar esta función para un problema en particular y aparte la cuestión del dominio...

[Alexis]: De hecho, cuando uno le habla a los estudiantes del dominio..., y cuando tiene que justificar que x tiene que ser mayor o igual que cero, porque cuál es la idea de producir nada, cuál es el costo de producir -20 artículos...

[Moderador]: No..., pero un momento, puede darse el caso de una función en economía con dominio negativo, puede darse el caso de un empresa que quiera competir con otra y para darse a conocer, o para ganar mercado, vende su producto por debajo del costo. Aún y cuando esta es una situación muy común en el mundo de la economía, no es la idea para lo que queremos trabajar...

[Alexis]: Entiendo que estás muy metido en el mundo de la economía porque tú estás trabajando con esto, en cambio nosotros tenemos otras líneas de investigación, tú has estudiado esto más que nosotros...

[Moderador]: A lo que me refiero es a lo siguiente, no tiene sentido poner un problema muy real cuando puedes generar conflictos en el estudiante, mi idea no es, ni pretende ser que se entienda que yo sé de economía, todo lo contrario. De momento podemos dejar estas situaciones más complejas a cursos propios de la carrera. El otro detalle que me gustaría discutir con ustedes sobre estos dominios, por ejemplo, el de los racionales, esta función no sería derivable ¿o sí?

[Alexis]: va a tener picos...

[Moderador]: Más que picos, va a tener saltos y se convierte en una función discreta. Recordemos que la derivada, al ser un límite, es un acercamiento infinitesimal. Vamos a dejarlo hasta aquí.

Pregunta 2: Determine el **beneficio promedio**, $\overline{\boldsymbol{U}}(x)$ *um*, por millares de lápices producidos. Calcule $\overline{U}(2100)$ y dé una interpretación económica de este resultado. Además, si queremos calcular la **tasa de cambio promedio del beneficio** en un intervalo particular $[x_1, x_2]$, este beneficio lo denotamos por $\overline{U}_{(x_1,x_2)}$ y se define como $\overline{U}_{(x_1,x_2)} = \frac{U(x_2)-U(x_1)}{x_2-x_1}$. Calcular la tasa de cambio del beneficio promedio en $[1900, 2200]$.

Respuesta de P2: El beneficio promedio denotado por $\overline{U}(x)$ viene dado por

$$\begin{aligned}\overline{U}(x) &= \tfrac{U(x)}{x} \\ &= -0,0001x + 1,35 - \tfrac{2000}{x}\end{aligned}$$

Así, $\overline{U}(2100) \approx 0,1876$ *um*; es decir, el beneficio promedio que resulta de fabricar y vender 2.100.000 lápices es de 0,1876 *um*.

Por otra parte, la tasa de cambio promedio del beneficio de producir y vender entre 1.900.000 y 2.200.000 es $\overline{U}_{(1,900,2,200)} = \frac{U(2,200)-U(1,900)}{2,200-1,900} = \frac{486-204}{300} = 0,94$ *um*.

Discusión: Está claro que hablar de la tasa promedio dentro del concepto de derivada supone una aproximación o; mejor dicho, nos permite acercar al estudiante al concepto de la derivada.

En el campo de la didáctica existen opiniones encontradas por los especialistas en el sentido siguiente: partir de la contextualización no matemática (en nuestro caso económica), supone para el estudiante una herramienta que promueve a consolidar el aprendizaje matemático de estos. ¿Para ustedes supone lo mismo? ¿Por qué? ¿En general, cuál es o sería la actitud del estudiante ante tal situación, (alguna experiencia)?

[Kenya]: Bueno, yo pienso que sí porque estamos trabajando sobre las mismas ideas pero con otra función y de lo que se trata es de que el alumno llegue al concepto de derivada, en este caso, utilizando la función beneficio de una manera comprensiva...

[Moderador]: Cuando dices "*comprensiva*" a qué te refieres.

[Kenya]: Que resulta significativo para el estudiante, interesante, motivante..., porque estás trabajando sobre un problema que con seguridad se le va a presentar en su trabajo como profesional y es de suponerse que, bajo esas condiciones, puede resultar interesante para el estudiante que se inmiscuyan problemas que tienen que ver con su campo profesional, sobre todo con la idea de llegar a un concepto que es matemático que le va a ser muy útil para el desarrollo de su labor.

[Moderador]: Y tú Alexis, ¿qué nos puedes decir al respecto?

[Alexis]: Yo estoy de acuerdo con Kenya, pero me gustaría volver a la parte de los dominios porque en esta nueva función del beneficio promedio, el 0 no está en el dominio de la función mientras que en la función beneficio sí lo está...

[Moderador]: Por supuesto, el profesor debe hacer ese tipo de observación para evitar cualquier inconveniente con el estudiante...

[Elio]: Reforzando el tema que mencionaba Kenya..., una de las cosas más comunes en el estudiante, y que tal vez sea más pertinente, es el "*para qué estoy haciendo esto*", "*para qué me sirve esto*". Entonces yo creo que con este tipo de problemas se puede dar cuenta (el estudiante) para qué le sirve el uso de la derivada. Otra cosa que tiene que ver más con la notación en sí, es que tú escribes $\overline{U}_{(x_1,x_2)}$ y eso puede hacerle pensar al estudiante que estás trabajando con una función de dos variables. Hay que tener cuidado con eso.

[Moderador]: Tienes razón, pero creo que queda bien claro lo que se dice allí, de todas maneras agradezco tus comentarios porque el estudiante se suele apoyar de estas cosas para decir que no entiende.

[Kenya]: Yo he notado que los libros no expresan una notación específica..., sencillamente lo ponen como el cociente de incrementos de dos cantidades, no hay algo más específico como para la derivada que se utiliza f'...

[Moderador]: Y en atención a la experiencia de cada uno de ustedes, ¿en general, cuál es o sería la actitud del estudiante ante tal situación, (alguna experiencia)?

[Alexis]: Los estudiantes le huyen, le tienen pavor a la parte de aplicación...

[Moderador]: ¿No será más bien a la parte de contextualización?, cuando le pones un problema contextualizado.

[Alexis]: Sí, pero también a la parte de aplicaciones, cuando ellos leen el problema y no están familiarizados con el lenguaje, con la terminología..., y creo que el problema viene de Matemáticas 11 o de mucho antes...

[Elio]: Pero es que resulta hasta paradójico, es muy común que los estudiantes se pregunten: "*para qué me sirve esto*", pero cuando aparece el para qué, entonces el estudiante, no sé por qué razón, el estudiante siente un rechazo a esta situación...

[Kenya]: Tal vez porque en su proceso de formación ellos no están habituados a aplicar las matemáticas sino a calcular y nada más.

[Elio]: Por ejemplo, si uno les coloca un sistema de tres ecuaciones lineales con tres incógnitas, ellos lo resuelven por el método que tú le exijas, pero si les colocas uno de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas con algún texto de por medio, no lo resuelven, son pocos los que se sientan a trabajar con estos problemas...

[Alexis]: Lo que quería comentarte también, no sé si sería útil, aquí tu no definiste lo que es ingreso. Te lo digo por si acaso lo necesitas para trabajar con ellos directamente.

[Kenya]: Volviendo al tema de la actitud, cabe esperar, en teoría, que la actitud debería ser como positiva y mira... Realmente lo veo en mis clases, que sería bueno que alguien fuera y observara, cuando se dan esos temas se ve que muestran algo de interés en el tema, pero no sé qué pasa, los resultados no son buenos, pero si muestran una actitud positiva, si no todos al menos la gran mayoría muestran interés por la materia.

[Elio]: Ese es otro problema, que uno debe partir del interés del estudiante, pero entonces ellos no muestran un interés fuerte, hay algo de indiferencia.

Pregunta 3: Cuál es el **costo marginal** de producir 2.100.000 unidades. ¿Qué **interpretación económica** le puedes dar a este resultado?

Respuesta de P3: El costo marginal sabemos que es la derivada de la función costo, así, $C'(x) = 0,15$ (una función constante). Pero, ¿qué significado económico tiene este resultado? Esto significa que las **mil unidades adicionales** a las 2.100.000, le costarán al fabricante 0,15 *um* o 15 céntimos de *um*.

Discusión: Ahora bien, en esta pregunta se tocan dos puntos de manera simultánea como los son: la interpretación económica de la derivada en la función de costos y las unidades (en miles) en las que se trabaja el problema. Recordemos que x está expresada en *miles*, por lo tanto las 2.100.000 unidades se reducen a $x = 2{,}100$. Por otra parte, si $C(x)$ representa la función de costo, la interpretación de la derivada para esta función en un punto x_0 es $(C'(x_0))$ el costo de producir la unidad adicional $x_0 + 1$.

Se entiende que incluir dos puntos como estos en un problema puede conllevarle al estudiante a dificultades de razonamiento del problema e interpretación de los resultados o interés y madurez por el tema, ¿puedes especificar que dificultades (si crees que las hay) pueden surgir en el estudiante preguntas como estas o crees que en todo caso le ayudan a entender y madurar los conceptos involucrados? ¿Por qué?

[Alexis]: Bueno..., si están claros con la definición anterior, de que están en unidades de mil, no deberían tener ningún problema...

[Moderador]: Disculpa que interrumpa, pero recuerden que estamos hablando del estudiante promedio.

[Elio]: Yo he notado en mis cursos que a ellos les cuesta mucho retener algo, normalmente te dicen: "*hay es que se me olvidó que estaba expresado en miles*", o en unidades de millón, qué sé yo... Lo que yo pienso es que le prestan tan poca importancia que se les termina olvidando, entonces el error surge por ahí, porque se les olvida...

[Kenya]: Por omisión. Pienso al igual que Alexis, que si ellos tienen experiencia en trabajar con este tipo de unidades no debería causar mayor dificultad en el estudiante, de lo contrario habría que hacer un trabajo previo. Siempre la base que ellos posean es fundamental, es una condición necesaria para poder trabajar este tipo de problemas, las experiencias previas que ellos han tenido tanto para abordar estas cuestiones como en la firmeza que tienen en sus nociones, en sus conceptos matemáticos.

[Elio]: ¿Esta materia prela o está prelada por algunas materias de otros departamentos como el de ciencias administrativas?

[Kenya]: Debería, debería...

[Elio]: Porque seguro que hay materias de ese departamento donde se estudian este tipo de cosas, habría que ver qué materias son. Porque ya a este nivel de segundo semestre de la carrera, habría que ver qué han visto de su carrera y qué están por ver, no sólo con lo de las unidades sino más bien cosas específicas de las matemáticas.

[Moderador]: Y en caso de no tener inconvenientes, ya que ustedes condicionan su respuesta a diversos factores, ¿consideran ustedes que esto ayudaría a consolidar el conocimiento que han venido adquiriendo y a madurar conceptos relacionados?, por ejemplo, con el tema de funciones, sin tocar el tema de derivadas; digamos, ¿es una buena herramienta para consolidar el tema de funciones, el manejo de las variables, que no siempre están expresadas en la misma unidad, o el dominio de una función vista en el campo matemático posee un dominio pero cuando la misma función representa un modelo económico, el dominio no necesariamente es el mismo, etc.?

[Alexis]: Bueno..., yo pienso que ayudaría al estudiante a reforzar el conocimiento en algunos temas, pero bueno sería vivir la experiencia; por ejemplo, que prepararas un material más extenso y ver los resultados, porque con lo que dije antes, creo que puede ayudarlos o terminan rechazando aún más este tipo de problemas.

[Kenya]: Lo que observo en lo que dices, es que tu experiencia (refiriéndose a Alexis) es muy negativa con tus alumnos, mi experiencia por el contrario es muy variada, yo he tenido alumnos que de entrada rechazan las aplicaciones pero a medida que avanza el curso se interesan, otros siguen rechazando las aplicaciones; pero en general, ellos le encuentran sentido a las aplicaciones porque le estás hablando en su idioma por decirlo de alguna manera.

[Moderador]: Y tú Elio, ¿puedes añadir algo al respecto?

[Elio]: Mi vivencia es mixta, tengo de los dos casos; ahora bien, yo tampoco es que haga muchas aplicaciones, creo que uno debería recibir más información y formación en este sentido..., a la final, en mi carrera nunca vi un curso de aplicaciones a la economía.

[Moderador]: Bien, pasemos a la siguiente pregunta.

Pregunta 4: En qué intervalos las funciones de costo, ingreso y beneficio ($C(x)$, $R(x)$, $U(x)$), **aumentan** en función de la producción de lápices (o resulta **creciente**) o **disminuye** en función de la producción de lápices (o resulta **decreciente**). En otras palabras, ¿será cierto que mientras mayor sea la producción de lápices, se mantendrá el comportamiento de estas funciones?

Respuesta de P4: En este caso surge la necesidad de estudiar la monotonía de una función a lo largo de su dominio y entran en juego las definiciones de funciones creciente y decreciente en un intervalo.

Así, la función de costo, $C(x)$, es creciente siempre que $C'(x) = 0,15 > 0$ para todo x en su dominio. Por otra parte, la función de ingreso, $R(x)$, es creciente en $(0, 7500)$ y decreciente en $(7500, +\infty)$. Finalmente, la función de beneficio, $U(x)$, es creciente en $(0, 6750)$ y decreciente en $(6750, +\infty)$.

Discusión: El concepto de monotonía de una función es fundamental para el análisis tanto matemático como económico, ya que permite estudiar desde el punto de vista *analítico* el comportamiento de una función en determinados "momentos" de su dominio y de esta manera *interpretar* situaciones en ambos contextos. De hecho, es un tema que aparece en los libros y programas de cálculo diferencial en general.

¿Consideran que se pierde profundidad en el contenido matemático con un planteamiento de esta naturaleza: mucho, regular, nada? ¿Por qué?

[Moderador]: Me explico, ¿creen ustedes que hablar de "**aumenta**" y "**disminuye**" le resta profundidad al contenido matemático?

[Alexis]: Yo creo que no, yo creo que estamos diciendo lo mismo pero de una manera más sutil.

[Elio]: En lugar de restarle profundidad, yo creo que les abre las puertas...

[Kenya]: Empecemos por la historia de la matemática, la matemática tal como la conocemos ahora ha pasado por un proceso largo y constructivo y lo que nosotros hacemos con nuestros alumnos es presentarle la matemática ya construida. Entonces, yo pienso que no se le quita valor ni a uno ni a otro; o sea, ni a la economía ni a la matemática si nosotros usamos un lenguaje, digamos, intuitivo que es más accesible al vocabulario de los alumnos, que lo introducimos ya..., restándole vocabulario matemático.

[Moderador]: ¿Elio, ibas a decir algo?

[Elio]: Yo lo que digo es que en lugar de obstaculizar, lo que hace es como abrir las puertas, porque tu lo que quieres es restarle formalidad al lenguaje, utilizar un lenguaje más suave, al decir "aumenta", el estudiante atiende, tal vez, su lenguaje cotidiano..., la palabra aumentar le es familiar, yo creo que es mejor que decir "crece", aunque crece también es de su lenguaje cotidiano, pero hablar de una función creciente podría crear confusión en este caso.

[Alexis]: Ahora, yo creo que esta es una manera muy sutil de evitar decir que una función es creciente, pero además el término "aumenta", lo tiene ellos digerido de su propia carrera.

Los objetivos que ustedes persiguen se podrían alcanzar de igual forma con un planteamiento como éste? ¿Por qué?

[Moderador]: Es decir, los objetivos que ustedes se proponen alcanzar en el curso, ¿creen ustedes que se alcanzarían de igual manera, no sólo con lo del lenguaje sino con las actividades en general o creen más bien que se pierde en esencia el objetivo o los objetivos del curso? Por ejemplo, el caso concreto de monotonía de una función.

[Kenya]: No solo creo que se alcanzarían, sino que también resultarían ser más significativo para ellos.

[Moderador]: ¿Sí?

[Kenya]: A mi me parece que sí.

[Moderador]: ¿Y por qué?

[Kenya]: Precisamente..., porque estamos haciendo uso de un recurso que es lo..., el conocimiento intuitivo que ellos tienen de lo que es el crecimiento y decrecimiento, subir y bajar una pendiente o una cuesta, para después refinarlo y ajustarlo a lo que es el vocabulario matemático; a la final, por ese camino podemos llegar a lo que es el crecimiento y el decrecimiento de una función, pero siempre partiendo de la base de los conocimientos y del vocabulario que ellos tienen.

[Moderador]: Alexis, ¿y tú estás de acuerdo con Kenya u opinas de otra manera?

[Alexis]: De hecho, esta parte, yo siempre trato de hacerla con un problema y; geométricamente, decirle lo que está pasando y después, sí les doy la definición.

[Moderador]: ¿Y tú, Elio, qué nos puedes decir al respecto?

[Elio]: Sí, igual, me parece que no sólamente esas palabras de "*crecer*, *aumentar*, *decrecer*, *disminuir*", muchas palabras matemáticas, mucho lenguaje técnico que hay en la matemática se les pudiera buscar un sinónimo del lenguaje cotidiano.

[Moderador]: Ya para terminar con esta primera parte, veamos la siguiente pregunta.

Pregunta 5: Para qué cantidad de lápices producidos y vendidos, el beneficio alcanza su nivel **máximo**.

Respuesta de P5: En este punto después de generar una discusión con los estudiantes para llegar a la definición de valores extremos (máximos y mínimos), se llega a la respuesta: en $x_0 = 6750$, el beneficio $U(x)$ **es máximo**.

Discusión: En diversas áreas del saber relacionadas con el cálculo, estudiar los extremos relativos tiene un significado importante por sus diversas aplicaciones en procesos de optimización; el caso de la ciencias económicas no es la excepción. Se supone que el profesional de la economía, en áreas específicas, constantemente está estudiando la manera de aminorar costos de producción de un determinado producto; por ejemplo, o al menos buscar aproximarse a ese punto ideal donde un determinado proceso sea óptimo. Generalmente los textos de cálculo diferencial, consideran este apartado como un tema de aplicaciones después de haber estudiado y aprendido una teoría que el estudiante debe manejar para abordar y resolver este tipo de problemas.

En una discusión reciente con otros profesores de matemáticas que trabajan en una facultad de economía, dos de ellos manifestaron que una actividad como ésta no es innovadora para sus estudiantes y sus argumentos fueron varios; pero además, surgieron comentarios encontrados en cuanto a aspectos metodológicos. ¿Consideran ustedes que esta es una actividad que conlleva a un mayor esfuerzo en el sentido metodológico (desarrollo de la clase)?

[Alexis]: Yo creo que no, de hecho, uno se sienta a preparar la clase tan igual como uno se sienta a preparar una clase de cálculo para ingeniería o ciencias, y como ya hemos estado utilizando la parte de economía, entonces el tiempo que uno destina para la parte de las aplicaciones lo que haces es redistribuirlo para montar estos problemas..., yo creo que no, a mi particularmente me parece que no.

[Kenya]: Yo pienso que, tal vez, sí implique un poco más de tiempo, quizás, cuando se monte la primera vez...

[Alexis]: Ah bueno...

[Kenya]: No es lo mismo dar una clase tradicional donde tú hablas y hablas..., y definición, concepto, ejercicio, problema, a que tú lleves un proceso...

[Alexis]: Por supuesto...

[Kenya]: Donde lo imprevisto está ahí..., tú puedes lanzar preguntas y ellos te pueden responder, pero también pueden decir cosas que tú no tenías previstas...

[Alexis]: Por eso es que te estoy diciendo...

[Kenya]: Puede llevarte algún tiempo adicional, de eso estoy segura.

[Alexis]: Por eso es que te digo, se sienta uno..., asumiendo que nosotros manejamos un poco la parte de economía. Si tú vas a preparar una clase de eso, en cualquiera de los cursos de cálculo para estas carreras, ya tú sabes que tienes que montar unos problemas, y por supuesto que tienes que resolverlos y ese es tiempo que, no es que uno lo pierda...

[Moderador]: No estoy hablando de que sea tiempo perdido, me refiero si supone para ustedes más o menos tiempo, o la misma cantidad de tiempo.

[Alexis]: Bueno, la primera vez que uno monta una clase de estas, claro que sí, pero repito, como ya uno ha trabajado con las aplicaciones, no creo que el tiempo que uno se siente sea mucho más. Tal vez lo que tome más tiempo es el problema del lenguaje de economía, que como uno no es economista uno tenga que profundizar más en esto.

[Moderador]: Elio, ¿qué opinas tú?

[Elio]: Yo sí apostaría por eso, porque se necesite de mayor tiempo y tal vez más que la primera vez...

[Alexis]: No, yo pienso que la primera vez te tienes que familiarizar con términos que no conoces...

[Elio]: Pero un momento..., el problema es que con las clases tradicionales, por llamarlas de alguna manera, como usualmente uno las está dando ya tienen un patrón, ya vienen estructuradas, definición tal, teorema tal y diez ejercicios..., y así sucesivamente. Este es como el patrón que uno debe seguir, en cambio la construcción que queremos darle es: se le plantea al estudiante un problema y que hay que desglosarlo de alguna manera y que, seguramente, no tenemos idea de qué es lo que se va a hacer...

[Alexis]: Cuidado, cuidado, lo que dices es muy delicado.

[Kenya]: Claro, hay que esperar que el alumno lo mire, lo analice, uno no, por que uno lo lleva preparado. Uno espera determinado comportamiento de ellos.

[Alexis]: Sí, pero cuidado, porque lo que dice Elio es muy delicado, yo lo que entiendo es que aún cuando él está llevando el problema, está diciendo que no sabe cómo atacar el problema, eso sería muy grave para el estudiante.

[Kenya]: Sí, sí, pero tú puedes llevar unos problemas preparados donde la participación de la clase..., mejor dicho, donde el protagonista seas tú, ¿entiendes?, pero en un tipo de metodología como la que se está enfocando aquí es distinta, porque se supone que tú vas a conducir un proceso donde el alumno va a ser el protagonista de ese proceso, es él quien va a llegar a un concepto y llegar a un concepto no es tarea fácil. Claro, entendemos que estamos tratando con adultos y que debe ser más fácil que con niños, tal vez con una o dos situaciones sobre el mismo tópico como lo está planteando Luis, Luis está planteando el mismo contenido pero trabajando con distintas funciones, ¿no es verdad?

[Moderador]: Bueno, tú lo ves así, realmente no puedo opinar al respecto.

[Kenya]: Aproximándose al mismo concepto usando la función beneficio, ingreso, costo, etc., pero implica una participación activa del alumno, eso te consume más tiempo de clase...

[Moderador]: ¿En la clase o en la preparación de la clase?

[Kenya]: De las dos, porque tú tienes que tomar en cuenta que debes adelantarte a lo que pueda ocurrir en el aula, y eso no es fácil. Si yo me voy por este camino y planteo esto, ¿qué puede pasar aquí? ¿Cuáles son las posibles situaciones con las que me puedo enfrentar y cómo resolverlas? ¿Qué pasa si se me presenta una situación como esta y yo no estoy preparada para asumirla? A conciencia, eso implica una mayor preparación de la clase y una mayor preparación para el profesor, sobre todo en un campo que no es de tu formación, de paso...

[Moderador]: A ver Alexis, te propongo un juego, te planteo la siguiente situación: supongamos que tu extravías tu maletín personal, ese donde tienes todos tus apuntes para todo el semestre, algo así como el disco duro de todo el curso académico y te ves en la obligación de preparar tus clases nuevamente; es decir, tienes unos conocimientos ya establecidos de los que no dudamos ninguno de los presentes, pero el material, el soporte donde te apoyas para tus clases no lo tienes y además, resulta que te agradó esta propuesta en un poco más de un 50 %, algunas cosas te gustaron otras no. Entonces te pregunto, ¿el tiempo que invertiste en preparar tus clases será el mismo si te propones preparar tus clases con este esquema o esta estructura, por decirlo de alguna manera?

[Alexis]: Sería el mismo porque mis clases son más o menos así, son muy parecidas, tal vez el hecho de comenzar de cero me quite más tiempo porque buscaría nuevos problemas, de pronto me obliga a revisar otros libros...

Por otra parte, consideran ustedes que es una actividad rutinaria que lejos de promover el aprendizaje, distrae al estudiante y lo conduce a errores (de qué tipos)? ¿Por qué?

[Kenya]: Todo lo contrario, ya te lo dije antes pero con lo de los objetivos si mal no recuerdo, esta estructura debería estimular al estudiante y de alguna manera, que muestre más interés por las matemáticas. Ahora bien, rutinaria no es y sobre los errores en los que puedan caer ellos, ya dije que una clase montada de manera constructiva no es fácil para el estudiante, pero en este momento no se me ocurre qué errores presentaría el estudiante.

[Moderador]: Y tú, Elio, ¿qué opinas?

[Elio]: Bueno, yo creo que es una buena metodología la que propones, pero creo yo que lo mejor es preparar un material y trabajar con el estudiante. Algo que se me ocurre en el tema de errores, es la parte del lenguaje, tal vez buscar una redacción más adecuada, más sencilla para ellos...

[Moderador]: ¿Y qué dice Alexis, crees que es rutinario o distrae al estudiante y lo aleja de las matemáticas?

[Alexis]: Yo trabajo más o menos así, tal vez, no con tanto detalle y los resultados son más o menos satisfactorio, la cantidad de aprobados está por la media.

B.2.2. Incrementos, Tasas, Optimización[5]

El costo de producción de x unidades diarias de un artículo de consumo masivo es $C(x) = \frac{1}{8}x^2 + 3x + 98$ dólares y el precio para la venta por unidad es $p(x) = 25 - \frac{1}{3}x$ dólares

Preguntas: Las siguientes preguntas están relacionadas con los contenidos matemático y económico en general.

Pregunta 1: A partir de las funciones de costo, $C(x)$, y de precio, $p(x)$, calcular:

a : A partir de la función de costo marginal, calcular el costo de producir la unidad 10. ¿Cuál es el costo real de producir la unidad 10?
Respuesta de 1.a: Para la función de costo, $C(x)$, se tiene que el costo marginal es $C'(x) = \frac{1}{4}x + 3$ dólares, y el costo *aproximado* de producir la unidad 10 es $C'(9) = \frac{1}{4}(9) + 3 = \mathbf{5,25}$ dólares. El costo real de la décima unidad es $C(10) - C(9) = 140,5 - 135,125 =$ **5,375** dólares.

b : Calcule la **función de ingreso marginal**, $\boldsymbol{R'(x)}$, para la situación planteada. Luego, calcule el ingreso que resulta de la venta de la décima unidad. ¿Cuál es el ingreso real derivado de la venta de la unidad 10?
Respuesta de 1.b: En este caso, la **función de ingreso**, **R(x)**, se obtiene a partir del precio, $p(x)$, suministrado. Esto es,

$$\begin{aligned} R(x) &= x \cdot p(x) \\ &= 25x - \tfrac{1}{3}x^2 \end{aligned}$$

Así, el ingreso marginal es $R'(x) = 25 - \frac{2}{3}x$. El ingreso *aproximado* que se obtiene por la venta de la décima unidad es $R'(9) = 25 - \frac{2}{3}(9) = \mathbf{19}$ dólares. El ingreso real generado por la venta de la décima unidad es $R(10) - R(9) = 216,66 - 198 = \mathbf{18,66}$ dólares.

c : Halle el **beneficio** $\boldsymbol{U(x)}$ asociado con la producción de x unidades, calcule el beneficio marginal y determine con éste el beneficio del décimo artículo vendido. ¿Cuál es el beneficio real derivado de la venta del décimo artículo?
Respuesta de 1.c: La **función de beneficio**, $\boldsymbol{U(x) = R(x) - C(x)}$, en este caso es:

$$\begin{aligned} U(x) &= 25x - \tfrac{1}{3}x^2 - (\tfrac{1}{8}x^2 + 3x + 98) \\ &= -\tfrac{11}{24}x^2 + 22x - 98 \end{aligned}$$

En consecuencia, el beneficio marginal es $U'(x) = -\frac{11}{12}x + 22$ y el beneficio *aproximado* generado por la venta de la unidad 10 es $U'(9) = -\frac{11}{12}(9)$

[5]Tomado de Hoffmann y Bradley (2001)

$+ 22 = \mathbf{13,75}$ dólares. Pero, el beneficio real generado por la venta de la décima unidad es $U(10) - U(9) = 76,16 - 62,875 = \mathbf{13,285}$ dólares.

Discusión: En esta única pregunta subdividida en tres partes, se contempla un aspecto relacionado con la derivada como lo es, la interpretación de la derivada como una "buena" aproximación a la función dada en un entorno; de allí el remarcado de los resultados obtenidos.

En este caso, se puede apreciar en las tres respuestas que los valores real y aproximado para cada una de las situaciones resultan cercanos en los dos primeros casos y no mucho en el tercero.

De acuerdo a tu experiencia, ¿qué conflictos de aprendizaje podrían surgir en el estudiante, el hecho de que una herramienta matemática como la derivada, que él espera sea exacta, difiera en algunos casos en varias décimas? ¿Cómo abordarían ustedes la solución a este conflicto? El $\mathbf{x_0 + 1}$ *es mucho. Incrementos (discreto) Vs. derivada (continuo).*

[Elio]: La verdad es que el estudiante se ha internalizado tanto esa idea, de que la matemática es exacta y cuando se le presentan cosas como éstas, de aproximaciones, empieza la duda; sobre todo cuando cada uno de ellos hace una operación con la calculadora y van redondeando, entonces, entre ellos discuten..., lo importante es hacerle ver que esas aproximaciones están cerca de un valor real o específico. Entonces, ya con la actividad anterior, cuando discutimos sobre las tablas, el estudiante se iría empapando en el asunto de las aproximaciones, lo que importaba de esas aproximaciones era que todas se iban acercando a un valor determinado. Entonces, dejarle claro que aún cuando es una aproximación, ese número está cerca a uno valor específico y que también sirve para trabajar. Pero sí hay que tener cuidado...

[Kenya]: Realmente yo no me había planteado y no he observado hasta ahora conflictos, pero no es porque no existan sino porque no había tomado en cuenta ese detalle..., de que esto pudiera generar algún conflicto en ellos. Tal vez es porque yo trato de agrupar todo, es decir, el incremento en y, la razón de cambio promedio, la razón de cambio y el diferencial y estudiar esos conceptos de una manera relacionada. Casi que les digo que toda expresión matemática que tenga que ver con la derivada se trata de una estimación a un valor específico...

[Alexis]: De verdad que yo no me había parado en este detalle, por supuesto que uno sabe que, incluso, la derivada o el diferencial, mejor dicho, se utiliza para cálculos aproximados, pero ese tipo de problemas yo no los trabajo en estos cursos, más bien cuando trabajo con cursos de ingenieros sí lo hago, además los programas contemplan este tipo de problemas para los ingenieros.

[Moderador]: ¿Y cómo resolverían ustedes este conflicto? Por ejemplo, Alexis, yo soy tu alumno y te digo que no entiendo ese detalle de la derivada, por qué no es exacta?

[Alexis]: Bueno..., precisamente por el cociente, en este caso $C(10) - C(9)$ es un límite, pero un límite muy particular, porque la idea que uno tiene de límite es una aproximación infinitesimal y aquí no lo es.

[Moderador]: Y tú, Kenya, ¿cómo resolverías ese conflicto en el estudiante?

[Kenya]: El que el estudiante crea que la matemática es exacta, es porque ha sido parte de su proceso de formación, ahora, que yo haya contribuido a que eso sea así no lo creo. Además, en la derivada trabajamos con el límite y el límite ya es una aproximación de por sí; o sea, implica una idea de aproximación, en cambio aquí estamos calculando valores con exactitud, es calcular la función en un valor indicado, en cambio la derivada hace uso del límite.

[Elio]: La idea es hacerles saber desde un comienzo qué es lo que uno está haciendo... Lo que hicimos la vez anterior eran cálculos cada vez más próximos a un punto específico, de eso dependía el resultado, del acercamiento que iba teniendo la función. Entonces, cabe esperar que si yo estoy aproximando sin tomar números particulares acá voy a tener una aproximación allá, no venderles la idea de que la derivada me va a dar un resultado exacto del problema.

Por otro lado, se incluye la necesidad de obtener una función que represente el ingreso, $\boldsymbol{R}(\boldsymbol{x})$ (pero en ningún momento se les dice que lo pueden hacer a partir del *precio*, de modo que ellos (los estudiantes) discurran sobre esta situación) para obtener el ingreso marginal a partir de ésta.

Ante esta situación, ¿cómo gestionarían ustedes una actividad de discusión y reflexión con los estudiantes, de manera que se logren los objetivos deseados, estos son: (a) obtener unos resultados a partir de unos datos que no son explícitos, y (b) llegar al concepto de un término económico (ingreso marginal) a partir de otro (precio) mediante una situación económica-matemática?

[Alexis]: Yo particularmente, si tengo el precio, ese es el ingreso de qué cosa, si tenemos un artículo podemos calcular el ingreso de un artículo, ahí tendría la función del ingreso de un artículo...

[Elio]: ¿Y si le vendes dos? sería el ingreso de dos artículos...

[Alexis]: Eso es, el ingreso de dos artículos...

[Elio]: Que el estudiante se vaya dando cuenta..., si es posible hacer un simulacro, crear una situación e ir creando una tabla, con tres, con cuatro y así...

[Kenya]: Ah, es para llegar a la función de ingreso.

[Moderador]: Sí, la función de ingreso.

[Kenya]: No me ubicaba, pero es que me parece tan obvio que no me ubicaba, creo que es algo de sentido común más que de economía. Claro con una tabla a partir de un proceso inductivo. Por ejemplo, crear una situación de la venta de pantalones me parece que es adecuado.

B.2.3. Cuestionario relacionado con la actividad 2

De acuerdo a la actividad que acabamos de realizar y como producto de las opiniones y discusiones en la misma, nos interesa conocer tu opinión sobre algunos puntos que señalamos a continuación:

1. El desarrollar una enseñanza como la que se propone, ¿supone para ti dedicarle más tiempo a los estudiantes y una atención, si se quiere, "personalizada" a estos? Justifica tu respuesta.

2. Tal como está propuesto y tomando en cuenta que la asignatura es de 7 horas (5T + 2P) semanales, ¿cuánto tiempo destinarías para abarcar los temas tratados? ¿por qué? y ¿cuántos problemas de este tipo? ¿por qué?

3. Al implementar actividades como ésta, ¿supone para ti cambios en el sistema de evaluación que actualmente sigues? **Observación**: Si la respuesta es afirmativa, te sugiero que aportes los detalles; si la respuesta es negativa, coméntame sobre tu evaluación actual.

4. ¿Por medio de estas actividades se pueden alcanzar los objetivos que persiguen los libros de texto que tú utilizas o difieren razonablemente? Una breve explicación.

Alexis

Cuestionario relacionado con la actividad 2

De acuerdo a la actividad que acabamos de realizar y como producto de las opiniones y discusiones en la misma, nos interesa conocer tu opinión sobre algunos puntos que señalamos a continuación.

1. ¿Si desarrollas una enseñanza como la que se propone, ¿supones que [illegible] más tiempo a los estudiantes [illegible] "Demostración" [illegible]? Justifica tu respuesta.

Personalizando mi tarea, pienso que hay que trabajar más en solución de problemas y planteamientos de ellos para que el estudiante esté ajustado con lo que se le enseña y el en un futuro pueda aplicar su aprendizaje

- Claro está que para el Profesor que no tenga la experiencia con las Ciencias Sociales y Económicas debe trabajar más duro

2 Tal como está propuesta y tomando en cuenta que la asignatura es de 7 horas (5T – 2P) semanales ¿cuánto tiempo destinarías para abarcar los temas tratados?, ¿por qué? y ¿cuántos problemas de este tipo?, ¿por qué?

Para abarcar el tema de derivada y su aplicaciones es posible destinar de 5 a 6 semanas, para que el alumno aprenda bien lo que se le está enseñando y mostrarle la mayor de cantidad de problemas posible, claro está sin dejar a un lado la participación de ellos; así fijan la teoría en la solución de estos.

3. Al implementar actividades como ésta, ¿qué propones para tu cambio en el sistema de evaluación que actualmente sigues? **Observación**: Si la respuesta es afirmativa, te sugiero que aportes sus detalles; si la respuesta es negativa, coméntanos sobre tu evaluación actual.

Las evaluaciones que hago son exámenes cortos y otros tantos en rango de tiempo de 15 días por supuesto que dentro de los 15 días están los exámenes cortos, así como que el estudiante debe estar al día con el tema en cuestión.

5. ¿Por medio de estas actividades se pueden alcanzar los objetivos que persiguen los libros de texto que tu utilizas o difieren razonablemente? Una breve explicación.

Elio

Cuestionario relacionado con la actividad 2

De acuerdo a la actividad que acabamos de realizar y como producto de las opiniones y discusiones en la misma, nos interesa conocer tu opinión sobre algunos puntos que señalamos a continuación:

1. El desarrollar una enseñanza como la que se propone, ¿supone para ti dedicarle más tiempo a los estudiantes y una atención, si se quiere "personalizada" a estos? Justifica tu respuesta.

Sí, ya que problemas de este tipo generan mayor discusión personalizada porque están más ligados a intereses personales en cuanto a interpretaciones. Esto no es un punto en contra, ya que considero que las clases deben estar enmarcadas en este tipo de situaciones.

2. Tal como está propuesta y tomando en cuenta que la asignatura es de 7 horas (5 T ... 2 P) semanales, ¿cuánto tiempo destinarías para abarcar [illegible], ¿por qué? Y ¿cuántos problemas de este tipo?, ¿por qué?

En cuanto al tiempo, considero que se pueden presentar desventajas en este aspecto, ya que estas modalidades de abarcar un problema requiere mayor dedicación y eso implica tiempo. Establecer un tiempo específico tal vez no lo haya. Lo que haría sería planificar algún par de problemas e invertir el tiempo que se requiera para ello, por supuesto tratando de no ser tan extenso.

9. Al implementar actividades como ésta, ¿supone para ti cambios en el sistema de evaluación que actualmente sigues? **Observación**: Si la respuesta es afirmativa, te sugiero que aportes los detalles; si la respuesta es negativa, coméntanos sobre tu evaluación actual.

En realidad, no supone mayor cambio pues he tratado de que mis clases se enmarquen en estas ideas. Claro, he encontrado limitaciones en cuanto a tiempo, precisamente; además de que he tenido problemas en el sentido que "muchos cálculos" han generado cierto rechazo y apatía en el estudiante, y por ende, la presencia significativa de errores, abandono de curso, entre otros aspectos

4. ¿Por medio de estas actividades se pueden alcanzar los objetivos que persiguen los libros de texto que tú utilizas o deberían considerarse [illegible]? [illegible] explícalo:

Creo que los objetivos que persiguen los libros de texto sobre este tema, se logran en la medida en que quienes lo usamos de referencia, sepamos encaminar el desarrollo del tema por vías de acceso hacia los estudiantes, que deben ser nuestro primer interés. Considero que la manera de interpretar un problema es más adecuado si se hace de manera similar a como se hizo en esta actividad, tratando por supuesto, de evitar los detalles que estén en contra del desarrollo adecuado del tema.

Kenya

Cuestionario relacionado con la actividad 2

De acuerdo a la actividad que acabamos de realizar y como producto de las opiniones y discusiones en la misma, nos interesa conocer tu opinión sobre algunos puntos que señalamos a continuación:

1. El desarrollar una enseñanza como la que se propone, ¿supone para ti dedicarle más tiempo a los estudiantes y una atención, si se quiere, "personalizada" a éstos? Justifica tu respuesta.

Pienso que sí habría que dedicar más tiempo
a los estudiantes y posiblemente una atención
personalizada. En ese tipo de enseñanza que
propones, la actividad está centrada en el alumno,
es decir, es éste el que debe construir el o los
conceptos que son objeto de estudio bajo la
mediación - facilitación del docente y este proceso
lleva más tiempo que el requerido en la
"enseñanza tradicional". Piénsese, por ejemplo,
las discusiones que tendrían lugar, las interacciones
entre alumnos y alumnos - docente, realizar los
cálculos, sintetizar o llegar a las conclusiones;
son éstas, actividades que ameritan más tiempo
que el invertido con la simple presentación/
exposición del docente. De cualquier modo,
si se tiene en cuenta el aprendizaje obtenido
bajo un enfoque de la enseñanza basado en la
resolución de problemas, hemos de primar la
calidad de esos aprendizajes más que la cantidad
sobre todo en conceptos que son fundamentales para
el desempeño profesional de los futuros economistas.

2. Tal como está propuesto y tomando en cuenta que la asignatura es de 7 horas (5T + 2P) semanales, ¿cuánto tiempo destinarías para abarcar los temas tratados? ¿por qué? y ¿cuántos problemas de este tipo? ¿por qué?

Partiendo del hecho de que los alumnos están familiarizados con:

- Cálculo de Dominios de una función
- Cálculo con derivadas (reglas y técnicas)
- Interpretaciones de la derivada a la Economía
- Cálculo de Imágenes
- Funciones asociadas a su profesión (Costo, Ingresos, etc.)

y que los temas tratado a que te refieres en el material (Actividad2) consignado en las entrevistas son, según se desprende de su contenido y el orden de su presentación:

1. Dominio (Matemático y económico)
2. Beneficio promedio (o más general función promedio)
3. Tasa promedio
4. Análisis marginal (Costo) Interpretación
5. Monotonía
6. Optimización
7. Análisis marginal a incremento (costo, Ingreso, beneficio)

estimo que el tiempo que destinaría para abarcar los temas tratados es el que se presenta en la tabla:

Tema	Horas (Teóricas)	Horas (Prácticas)
1	1	4
2-3	2	
4	1	
5	3	
6	2	
7	2	
Total	11	

Aprox. 2 Semanas

¿Por qué? Porque alumnos y docente han de construir el concepto a partir del problema planteado, sintetizarlo en una definición, inferir la relación entre el concepto y la derivada (Teorema) y aplicarlo a nuevas situaciones de problema.

¿Cuántos problemas de este tipo? Pienso que para el tratamiento teórico pudiera trabajarse con las funciones costo, ingreso y beneficio, tal como está planteado en el material de la actividad 2; quizás es conveniente considerar, además de beneficio, costo e ingreso en los temas relativos a beneficio promedio y tasa de cambio promedio.
Es decir, tres problemas con el cual abordan las mismas nociones (tasas, incremento, optimización, etc.)
Este modo de proceder facilitaría el tránsito de lo concreto (situación problema) hacia lo abstracto (contenido matemático) a medida que se van consolidando las nociones estudiadas
Para el tratamiento práctico (en clase), trabajar 2 problemas donde se apliquen, si es posible, todas las nociones, lo que permitiría afianzarlas o consolidarlas, atender las dificultades, limitaciones o posibles lagunas, la búsqueda de relaciones entre los conceptos aplicados.

3. Al implementar actividades como ésta, ¿supone para ti cambios en el sistema de evaluación que actualmente sigues? **Observación**: Si la respuesta es afirmativa, te sugiero que aportes los detalles; si la respuesta es negativa, coméntame sobre tu evaluación actual.

Pienso que si tendrían lugar cambios en el sistema de evaluación. Sería relevante, además de los tradicionales exámenes parciales que por lo general miden rendimiento a través de la calificación del contenido conceptual, la consideración de otras cualidades donde se asuman contenidos procedimentales (manipulación, experimentación, relaciones, observación directa, utilización del lenguaje matemático en sus diferentes formas de representación, etc) que lleven a los alumnos a la activación de procesos de pensamiento de alto nivel (interpretar, analizar, deducir, inferir, integrar, trasladar, etc.); así como contenidos relativos a actitudes que evidencian su interés por la materia (motivación, confianza, etc). Se trata en suma de una evaluación de los aprendizajes matemáticos que coloca el énfasis en los procesos más que en los resultados (evaluación formativa). Incluso, el sistema de evaluación debería incluir, la evaluación →

de la enseñanza de los profesores y de todos
los entes que intervienen en el hecho educativo
Entre los métodos o técnicas para los alumnos
podrían incorporarse:
- Exposición del trabajo del alumno o del equipo
- Informes escritos del alumno o del equipo

4. ¿Por medio de estas actividades se pueden alcanzar los objetivos que persiguen los libros de texto que tú utilizas o difieren razonablemente? Una breve explicación.

Creo que sí. Es más, no sólo se pueden
alcanzar los objetivos que persiguen los
libros de texto que utilizo, sino que los
aprendizajes resultan ser más significativos
al estar los contenidos vinculados con
problemas que se inscriben en el ámbito
profesional de los estudiantes de Economía

B.3. Actividad 3

Hasta este punto del trabajo, hemos trabajado algunos conceptos matemáticos y económicos de manera simultánea. El estudiante calcula derivadas inmediatas, ha estudiado interpretaciones de la derivada, monotonía y extremos relativos.

Regla de la Cadena **(Notación e interpretaciones varias)**

A continuación se presentan unos problemas relacionados con la regla de la cadena.

B.3.1. Tasas Relacionadas[6]

Una empresa tiene la función de costo $C(x) = 25 + 2x - \frac{1}{20}x^2$ (en cientos de miles de dólares), en donde x es el nivel de producción de la empresa y éste depende del tiempo t. Si el nivel de producción es de $x = 5$ (millones de artículos por año) y está creciendo a una tasa de $0,7$ millones de artículos por año, tomando en cuenta que la capacidad de producción de la empresa no puede superar los 15 millones de artículos por año.

Preguntas: Las siguientes preguntas están relacionadas con los contenidos matemático y económico en general.

Pregunta 1: Determine el dominio de la función de costo $C(x)$ en un contexto matemático general y en el económico en particular. ¿Qué diferencia observa entre uno y otro?

Respuesta de P1: El dominio[7] es el señalado en la **Tabla B.5**.

	$C(x)$
Dominio Mat.	$\mathbb{R}$
Dominio Ec.	$[0,150]$ $(\{x \in \mathbb{N}_0 : \frac{x}{100000} \leq 150\})$

Cuadro B.5: Dominio del costo, $C(x)$, en dos contextos

Discusión: Aún cuando el costo es una función polinómica cuyo dominio es el conjunto $\mathbb{R}$, en el contexto económico debemos tomar en cuenta que lo menos

[6]Tomado de Arya y Lardner (1987)

[7]$\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, 3, ...\}$

que puede producir la empresa es 0 artículos y el máximo de producción de ésta, tal como se señala en el enunciado, es de 15 millones de artículos por año; y como x está expresada en cientos de miles, el dominio es $[0, 150]$.

En una actividad anterior, una de las preguntas contenía una situación similar. ¿Consideran importante que se debe mantener o reforzar esta diferencia entre los dominios? ¿Por qué?

[Elio]: Sí, yo creo que sí, porque haciendo énfasis en eso de utilizar la matemática como herramienta para resolver esos problemas, no apartarlos y dejarlos sólo con la parte abstracta del problema algebraico, matemático; sino llevarlo a la par de lo que significa matemáticamente y lo que significa en la realidad, que la realidad aquí sería la realidad económica. Otra cosa, eso creo que lo hablamos la otra vez, cuando uno dice dominio matemático que establece todo $\mathbb{R}$ y dominio económico...; más todavía, decir intervalo $[0, 150]$, si estamos hablando de unidades, de hecho, ni siquiera, no sería todo el intervalo porque serían los *naturales* de 0 a 150 en todo caso.

[Moderador]: Exactamente.

[Elio]: Hay que tener mucho cuidado con eso, hay que hacer énfasis en eso...

[Moderador]: En este caso, ni siquiera los naturales entre 0 y 150 porque como está expresado en cientos de miles, entonces son los racionales en este intervalo con cinco decimales, recuerda que el 150 representa 15 millones; es decir, no son todos los *reales* en el intervalo $[0, 150]$ sino unos racionales muy particulares en este intervalo.

[Alexis]: Ahora..., ¿ahí no va a haber problemas cuando grafique o se le haga todo el análisis a la función? Lo digo por lo de los saltos...

[Moderador]: Precisamente es un punto curioso que me gustaría discutir con ustedes, ya que tal como está planteada la función, ésta es derivable, pero si atendemos al dominio económico la función deja de serlo. Recordemos que si la función tiene saltos o es discontinua en un punto entonces no es derivable. ¿Qué pueden decir ustedes al respecto?

[Elio]: Yo pienso entonces que sobra..., sobra, ya que la simulación que se hace gráficamente está dando más de lo que se necesita en todo caso...

[Moderador]: ¿Podrías darme más detalles...?, es que me perdí un poco con lo que dijiste.

[Elio]: Lo que quiero decir es que como el dominio matemático es más grande que el económico, entonces la simulación gráfica..., matemática aporta más información de la realidad económica del problema.

[Moderador]: ¿Y cómo resolverías esa situación frente a tus estudiantes?

[Elio]: Es algo bastante difícil, sobre todo por el conocimiento matemático que tienen a este nivel. Esto requiere un poco de abstracción, digo yo. No se me ocurre algo en este momento...

[Kenya]: Bueno, yo estoy de acuerdo con Elio, yo creo que al alumno, a cualquier alumno en general..., cuando se trabaja con el tema de funciones siempre hay que enfatizarle el tema del dominio, debe ser una habilidad que ellos deben adquirir, por lo tanto no está de más que se le insista en esa situación, y más aún cuando se trata de trabajar problemas muy específicos del área de conocimiento, del área de la profesión de ellos. Enfatizarle que no es lo mismo una función económica que una función matemática, que lo que persigue la función matemática es modelizar una situación o acercar una situación real a través de un modelo matemático. Entonces, yo creo que es importante establecer las diferencias entre una situación y otra, para no complicar la consolidación de los conceptos que se abordan.

[Alexis]: Ahora, una cuestión que me parece muy curiosa... En los libros que yo tengo, que he leído sobre aplicaciones, que son tres o cuatro, no recuerdo ahora, ellos no hacen hincapié sobre eso...

[Kenya]: No lo hacen, con los que yo trabajo tampoco...

[Alexis]: Ellos no toman en cuenta el dominio así como tú lo haces, eso de hablar de dos dominios, que también podría traer sus inconvenientes con los estudiantes. Ellos dicen: *tantas unidades producidas*, entonces uno sabe que la función está acotada superiormente, que tiene un tope, pero nunca detallan este hecho. Si uno se va al capítulo de funciones...

[Kenya]: No destacan ese hecho...

[Alexis]: No hay esa sutileza de decir lo que se está diciendo aquí...

[Kenya]: De destacar esa diferencia...

[Moderador]: Entonces, este planteamiento que nosotros hacemos, eso de hacer énfasis en el dominio, ¿les parece conveniente, aún cuando los libros no lo consideren y los mismos programas oficiales tampoco lo contemplan?

[Alexis]: Claro que sí, mira..., en las funciones polinómicas, lo dice Elio, uno lo ve como una función matemática y el dominio es todo $\mathbb{R}$, en cambio en la parte de la aplicación ya tiene otro dominio. Ahora es que caigo en cuenta y me pregunto: ¿por qué los libros no enfocan eso, no sé si tú tienes algún libro que trabaje eso?

[Moderador]: No, al menos los libros que hemos revisado no consideran esta situación y es algo que, precisamente, nos llama la atención.

[Elio]: Lo que sí vi en algún libro, no recuerdo el autor ahora, es el hecho de ver si es discreto o continuo el conjunto que se está considerando...

[Moderador]: Muy bien, pasemos a la otra pregunta.

Pregunta 2: Calcule la tasa para la cual los costos de producción se están elevando en la actualidad.

Observación: Antes de dar respuesta a esta pregunta conviene introducir la **regla de la cadena**. Para una función y que depende de u y ésta a su vez es una función que depende de x, con y derivable en u y u derivable en x, se tiene que la derivada de y respecto a x ($\frac{dy}{dx}$), se define como

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}}$$

Así, estudiar la razón de cambio de $\boldsymbol{y}$ respecto a $\boldsymbol{x}$ consiste en multiplicar la razón de cambio de $\boldsymbol{y}$ respecto a $\boldsymbol{u}$ por la razón de cambio de $\boldsymbol{u}$ respecto a $\boldsymbol{x}$.

Respuesta de P2: Del enunciado tenemos que $\frac{dx}{dt} = 0,7$ (cuando el tiempo se mide en años). El costo marginal está dado por

$$\frac{dC}{dx} = 2 - \frac{x}{10}.$$

Por consiguiente,

$$\begin{aligned} \frac{dC}{dt} &= \frac{dC}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} \\ &= (2 - \frac{x}{10}) \cdot \frac{dx}{dt} \end{aligned}$$

Sustituyendo $x = 5$, el nivel de producción actual, obtenemos

$$\begin{aligned} \frac{dC}{dt} &= (2 - \frac{5}{10})(0,7) \\ &= 1,05. \end{aligned}$$

Por lo tanto los costos de producción se están incrementando a una tasa de 1,05 (cientos de miles) de dólares por año o, dicho de otra manera, en 105000 dólares por año.

Discusión: *En este ejemplo de la regla de la cadena, la derivada de la función interna es parte del enunciado. ¿Utilizan ustedes un problema similar para introducir la regla de la cadena?*

1. *Sí*. *¿Por qué?*

2. *No*. *¿Lo utilizarían ahora para introducir la regla de la cadena, lo modificarían (¿cómo?) o simplemente lo harían de otra manera (¿por qué?)?*

[Moderador]: Les explico un poco, fíjense que la derivada de la función interna es una constante, recuerden también que la función de costos depende del nivel de producción de la empresa y éste a su vez depende del tiempo, por eso es clave la parte del enunciado que dice..., permítanme ir atrás..., "el nivel de producción está creciendo a una tasa de $0,7$ millones de artículos por año", repito, a una tasa de $0,7$; esto es, otra forma de mencionar la derivada. Entonces, ¿utilizan ustedes un problema similar para introducir la regla de la cadena?

[Alexis]: Bueno, te voy a decir que a mi no se me había ocurrido eso, la parte..., ¿cómo es...?, ofrecer o introducir la regla de la cadena con un problema económico...

[Kenya]: O sea, motivar el uso de la regla de la cadena con un problema de economía...

[Alexis]: Nunca, nunca se me había ocurrido. Siempre la he tratado de introducir jugando con funciones muy elementales..., pero me parece muy interesante eso, ojalá y uno...

[Kenya]: Casi siempre lo que uno hace; generalmente, cuando uno trabaja con la regla de la cadena, no sé si lo hacen ustedes, yo lo he hecho de esta manera, trabajo con la otra forma, es decir, f compuesta con g y...

[Alexis]: Sí, sí, ok...

[Kenya]: Esa es, generalmente, como uno la introduce. Más desde el punto de vista matemático, pero después cuando aparecen problemas de economía donde por ejemplo, el nivel de producción depende de los ingresos y éste a su vez depende de la mano de obra, entonces el nivel de producción está dependiendo de la mano de obra, entonces esto obliga a utilizar este tipo de expresión para la regla de la cadena; pero que en el problema se incorpore o esté incorporada, como dato, la derivada interna, no. Nunca he utilizado un problema como éste.

[Moderador]: Y tú Alexis, ¿utilizas un problema como éste para introducir la regla de la cadena, donde la derivada de la función interna aparece en el enunciado?

[Alexis]: No, y menos con un enunciado de economía.

[Moderador]: Y en tu caso Elio, ¿qué nos puedes decir?

[Elio]: Precisamente, este concepto de la regla de la cadena es uno de los que yo he notado que cuesta más para que el estudiante lo digiera..., no es fácil. Pero tal vez, como Kenya señalaba ahora, ver qué es lo que significa pueda conducirlo a un entendimiento mejor, ver que hay situaciones en la que una cosa depende de esta, pero a su vez esa depende de la otra..., y me a ayudado mucho el esquema...

[Moderador]: ¿Te refieres al diagrama?

[Elio]: Eso, el diagrama. Esto no lo logran digerir, muchas veces quieren cancelar dx con dy, verlo como un cociente; pero viéndolo como un esquema, como un diagrama, de árbol creo que lo llaman algunos, es que ellos se dan cuenta, aunque sea memorizando o de manera muy mecánica pero logran aprenderse y después lo digieren, pero yo sé que a ellos les cuesta esa parte. Y tampoco he trabajado colocando una derivada, no necesariamente constante, no necesariamente...

[Kenya]: No necesariamente, pero ya que aparezca como dato dentro del problema...

[Elio]: Pero no le veo, no le veo mayor dificultad...

[Kenya]: Yo creo que la dificultad de la regla de la cadena, sobre todo en su otra forma, estriba en que ellos no saben distinguir cuándo tienen una función compuesta, cuándo tienen una función suma; o sea, en la estructura de la función, dependiendo de la operación que se esté aplicando.

[Elio]: Y otra cosa es que..., cuando uno ya tiene el modelo matemático; es decir, ya uno tiene formada la ecuación, se tiende mucho, veo que tienden mucho a despejar la variable en una de las funciones y sustituirla en la otra y deriva de forma ordinaria sin utilizar la regla de la cadena. Yo creo que la ideas es, en este caso, mostrarle la importancia de la regla de la cadena, para qué utilizarla, cómo podemos ahorrar cálculos a la hora de aplicarla, porque ellos te pueden decir: "para qué utilizar la regla de la cadena si yo puedo despejar la variable de una de las ecuaciones y luego sustituir en la otra ecuación..."

[Moderador]: Sí, pero el detalle es que no siempre, es más, en la mayoría de los casos no se puede hacer eso que tú dices, tendríamos que trabajar con funciones extremadamente sencillas...

[Alexis]: Pero es que para evitar eso, yo les pido en el examen que deriven usando la regla de la cadena, justamente para evitar la trampa del estudiante.

[Elio]: Pero es que cuando él vaya a hacer eso en su realidad, pues él simplemente quiere resolver el problema, en ese caso él tiene la libertad de resolver el problema como él considere más adecuado o como él se lo sepa...

[Alexis]: De acuerdo, pero si uno quiere que el estudiante más o menos digiera este concepto, esta herramienta, al menos en los exámenes cortos es bueno exigirle que apliquen la regla de la cadena. Pero..., me parece interesante esto, este planteamiento, nunca lo había visto así y creo que puede ser provechoso para el estudiante.

[Moderador]: ¿Y utilizarían un problema como éste en sus clases, ahora que hemos discutido, que lo han leído y han expuesto su punto de vista?

[Alexis]: Yo lo haría, de hecho te he comentado que me gustaría trabajar contigo en la implementación de este material, creo que hay cosas novedosas y algunas muy curiosas como esta de la regla de la cadena o la del dominio.

[Moderador]: ¿Y tú, Elio?

[Elio]: Bueno, yo con lo del dominio sí que intentaré hacer algunas cosas similares, creo que la parte del dominio es clave para trabajar con funciones. Ahora, con lo de la regla de la cadena, tendría que sentarme a pensarlo, aun cuando es algo nuevo habría que ver sus ventajas y desventajas.

[Moderador]: ¿Kenya, puedes añadir algo a lo dicho aquí?. Hace un momento, cuando te referías a enseñar la regla de la cadena de la "otra forma", ¿te referías a la forma clásica o tradicional de enseñar la regla de la cadena?

[Kenya]: Sí, sí, me refería a la forma clásica, la que aparece en los libros de cálculo...

[Moderador]: ¿Y utilizarías este problema o uno similar para introducir la regla de la cadena?

[Kenya]: Bueno..., a mi el problema me gusta y creo que puedes lograr motivar al estudiante para introducir la regla de la cadena y al mismo tiempo que ellos vean la aplicación que tiene esta herramienta en problemas de su profesión...

[Moderador]: Pasemos al siguiente problema.

B.3.2. Utilidad y Publicidad[8]

Un determinado artículo puede fabricarse y venderse con una utilidad o beneficio de \$10 cada uno. Si el fabricante gasta x dólares en la publicidad del artículo, el número de artículos que pueden venderse será igual a $1000(1 - e^{-kx})$, en donde $k = 0,001$. Si U denota la utilidad neta por las ventas y tomando en cuenta que el fabricante no está dispuesto a gastar más de \$8500 en publicidad.

Preguntas: Las siguientes preguntas están relacionadas con los contenidos matemático y económico en general.

Pregunta 1: Calcule $U'(x)$ e **interprete esta derivada**.

Observación: Antes de dar respuesta a estas preguntas conviene introducir la **regla de la cadena**. Para una función f que depende de g y ésta a su vez es una función que depende de x, con f derivable en $g(x)$ y g derivable en x, se tiene que la derivada de f respecto a x ($f'(x)$), se define como

[8]Tomado de Arya y Lardner (1987)

$$\boxed{f'(x) = f'[g(x)] \cdot g'(x)}.$$

Así, estudiar la derivada de f respecto a x consiste en multiplicar la derivada de f respecto a $g(x)$ por la derivada de g respecto a x.

Respuesta de P1: Puesto que cada artículo produce una utilidad de \$10, la utilidad bruta total originada por las ventas se obtiene multiplicando el número de ventas por \$10. La utilidad neta se obtiene entonces sustituyendo los costos de publicidad:

$$U(x) = 10{,}000(1 - e^{-kx}) - x.$$

Por lo tanto,

$$U'(x) = -10{,}000 \cdot (e^{-kx})' - 1$$

Y por la regla de la cadena,

$$\begin{aligned} U'(x) &= -10{,}000(-ke^{-kx}) - 1 \\ &= 10{,}000ke^{-kx} - 1 \end{aligned}$$

y como $k = 0,001$ se tiene que

$$U'(x) = 10e^{-0{,}001x} - 1$$

La **interpretación** de esta derivada es que *mide la tasa de cambio de la utilidad neta con respecto a los gastos de publicidad*. En otras palabras, $U'(x)$ da el incremento en el número de dólares en la utilidad neta producida por un gasto adicional (en dólares) en publicidad.

Discusión: A través del problema buscamos que el estudiante descubra la necesidad e importancia de la "herramienta" (la regla de la cadena), puesto que la función e^{-kx} no tiene derivada inmediata. Una vez discutido con el estudiante y generando entre ellos un diálogo que conduzca a esta "regla", el problema se puede atacar sin mayores problemas ¿o no?

Generalmente, la forma tradicional de llegar a la regla de la cadena consiste en definirla y de inmediato hacer ejemplos (en principio) matemáticos que permitan visualizar la regla para posteriormente realizar ejercicios o problemas de aplicación.

¿Consideran ustedes un ejemplo como éste, la manera apropiada para llegar a la regla de la cadena o harían alguna modificación para lograr los objetivos de este tema; como por ejemplo, realizar cambios en la función compuesta o modificarla?

[Alexis]: Yo, particularmente, tendría que hacerlo en mi clase, vivir la experiencia con mis alumnos para ver si en realidad funciona, de lo contrario no te puedo decir nada ya que la exponencial es una función que a ellos les resulta más complicada.

[Moderador]: ¿Y Kenya qué nos puede decir?

[Kenya]: Bueno..., este..., pienso que la posibilidad de responder a esto, de que si es o no una buena manera, pienso que sí. Pero todo el material que has traído, las respuestas han sido hipotéticas; es decir, sin haberlas sometido a una experiencia con los estudiantes, y yo creo que es válido hacer el experimento con todo, yo creo que valdría la pena que solicitaras al Departamento la posibilidad de implementar este material, sobre todo para que tenga valor institucional y no personal, creo que eso le daría más peso a tu investigación, ¿no crees?

[Alexis]: Incluso..., disculpa que te interrumpa, en una de las preguntas de uno de los cuestionarios, hay una pregunta que dice: ¿usted lo haría así?, y yo te respondí: no sé. Tendría que ponerlo en práctica y me gustaría, sí que me gustaría tomar el material y ponerlo en práctica, aunque creo que habría que redactar mejor este material. Bueno, más que redactar, tendrías que diseñarlo mejor, porque uno como profesor lo entiende pero no estoy muy seguro que el estudiante lo entienda de una vez. Ahora, me parece y es bueno que uno aquí haga un grupo de trabajo con problemas de aplicaciones a la economía, así como hay profesores que se dedican a estudiar problemas de ingeniería uno puede hacer un grupo para hacer cosas de didáctica hacia la economía.

[Moderador]: Y la opinión de Elio..., ¿ibas a decir algo Kenya?

[Kenya]: Pienso que la idea es meter al estudiante, involucrar al estudiante en una situación donde aparezca una función compuesta y ver que por las reglas anteriores de derivación, independientemente de que se use la regla de la cadena de esta forma o de la otra, hacerles ver la necesidad de crear una estrategia para poder derivar este tipo de funciones, porque no encajan dentro de las reglas, y ver hasta que punto el estudiante puede darse cuenta de que la función que tiene ante sus ojos no puede ser derivada por ninguna de las reglas que hasta ese momento él conoce. Ahora, que él llegue a deducir que esa sea la regla que debe utilizar, que él llegue a descubrirla, no lo sé...

[Moderador]: No, no, no. La idea es que tú o el profesor lo lleve hasta la regla de la cadena, no pretendo que el estudiante la descubra, sino que el profesor, mediante un problema, le haga ver al estudiante que con las reglas que conoce hasta ese momento no puede resolver el problema, es en ese momento cuando el profesor tiene que intervenir para resolver el conflicto y en la medida de lo posible que se cree un espacio de discusión entre los estudiantes; pero en ningún momento yo busco que el estudiante descubra la regla de la cadena.

[Kenya]: O sea, que el propósito de esto es generar la necesidad en el estudiante de que ellos perciban que hay una necesidad de otra regla para poder derivar este tipo especial de función, o que al menos se den cuenta que con las reglas que manejan no se puede derivar esta función.

[Moderador]: Es más, ya con lo segundo se estaría logrando un gran paso, el hecho de que ellos se den cuenta que con los conocimientos que tienen no pueden resolver el problema les estaría llevando a la necesidad o al menos a la inquietud de una nueva regla.

[Kenya]: Bueno, yo creo que si es así, sería un buen procedimiento para generar esa necesidad.

[Moderador]: Y Elio, ¿qué opinas al respecto?

[Elio]: Estaba pensando en algo que dijiste hace un momento, "de que el estudiante cuando se dé cuenta que con las herramientas que tiene no lo va a poder resolver", eso es relativo, porque el estudiante quiere ser muy pícaro y entonces él dice: "vamos a resolverlo de alguna manera" y ahí es donde viene el error, y al caer en el error él va a ver la necesidad de un nuevo método, de una nueva regla. Y lo delicado, que veo yo, y es donde tenemos que entrar nosotros a jugar un papel clave, es que plantear un problema donde se vea la necesidad de aplicar la regla de la cadena es más complicado de lo que uno viene haciendo normalmente porque aquí hay como muchas cosas sueltas..., esto depende de aquello, aquello depende de esto otro, están los términos económicos de por medio, entonces, a la hora de llevarlo a un modelo matemático puede ser dificultoso.

[Kenya]: Hay otro detalle..., los alumnos estarán muy tentados, como es una función exponencial, a confundirla con una función de tipo potencia y probablemente se vayan por ese camino, de derivarla como una función potencia.

[Elio]: Bueno, a este nivel se supone que el estudiante tiene ciertos conocimientos, por lo menos ha hecho composición de funciones...

[Moderador]: Claro, esa es la idea, recuerda que el tema de funciones es del semestre anterior.

[Elio]: Pero aquí, cuando uno va a derivar utilizando la regla de la cadena, generalmente, necesitamos hacer al revés..., tenemos un modelo matemático o una función, cómo descomponerla en dos funciones que compuestas me dé la original, ese proceso puede crear cierto conflicto, eso les cuesta. Será que hay que esforzarse más en la preparación de composición de funciones en un sentido y en otro.

[Kenya]: Hay que hacerlo no solamente con la composición sino con las otras operaciones, cualquier función que tú le des que es generada a través de dos o más funciones..., generalmente el camino que tú sigues es: te dan las dos funciones y las operas, pero al revés no lo hacen, es raro cuando se plantean ejercicios donde se plantea una función y se les pide al estudiante que diga qué funciones están participando y qué operación está involucrada. Ese tipo de ejercicio, sobre todo en Matemáticas 11, porque aquí no le vas a enseñar composición de funciones, se supone que eso ya lo traen del semestre anterior, entre comillas... En Matemáticas 1 habría que hacer ese tipo de práctica con ellos.

¿Cuáles son las dificultades que presentan sus estudiantes ante este tipo de problemas?

[Kenya]: Yo creo que hemos hablado de eso...

[Moderador]: Yo me refiero a las dificultades respecto a un problema como éste.

[Kenya]: Bueno, les cuesta determinar que están frente a una composición, tienden a confundir la exponencial con la función tipo potencia como te dije antes...

[Elio]: Enfrentarse al lenguaje relacionado con el modelo matemático no es fácil para ellos, eso le crea incomodidad y muchas veces se ven unos con otros, como preguntándole al compañero: ¿tú entiendes?

[Alexis]: Yo estoy de acuerdo con Elio, creo que el lenguaje les genera mucha dificultad, y si además les pides que interpreten los resultados en términos económicos, peor aún.

[Moderador]: ¿Qué estrategias implementarían ustedes para solventar estas dificultades?

[Kenya]: Sobre la composición de funciones, creo que haciendo problemas como los que mencionábamos Elio y yo hace rato, esos de ir en sentido y en otro, aunque eso corresponde al curso de Matemáticas 1. Respecto a la exponencial, creo que dedicándole más tiempo a la función exponencial, algo que se me ocurre ahora es que trabajen con la calculadora esta función.

[Moderador]: Y ustedes, por ejemplo Alexis, ¿qué estrategias implementarías para solventar lo del lenguaje?

[Alexis]: Mira, realmente con lo del lenguaje no sé que hacer, los pocos problemas que utilizo, donde aparece el lenguaje de administración o economía, ellos asumen una actitud de rechazo que a uno se le quita las ganas de trabajar esos problemas. Hace tiempo escribí una especie de guía, donde escribía el problema y utilizaba muchos diagramas o dibujos y los resultados fueron catastróficos. Eran cinco páginas con tres problemas muy sencillos, si las encuentro te las doy para que las veas, realice los problemas con lujo de detalles y les repartí las fotocopias pero los resultados no fueron los esperados, a ellos no les gusta este tipo de problemas.

[Elio]: Yo creo que el trabajo tiene que hacerse desde abajo, desde Matemáticas 1, si uno comienza a trabajar con ellos desde Matemáticas 1 con problemas de esta naturaleza la historia sería otra. El Departamento debería fomentar unas charlas para estos estudiantes, pienso que es un problema de la universidad y no mío en particular, yo puedo intentar resolver el problema, pero si los otros profesores no hacen nada siento que mi trabajo se estaría perdiendo, igual que si otro trabajara y yo no, igual el trabajo del otro se perdería.

[Moderador]: De acuerdo, pasemos a la siguiente pregunta.

Pregunta 2: ¿Será cierto que mientras más se invierta en publicidad, mayor será la utilidad? Como respuesta parcial a esta pregunta, evalúe $U'(x)$ en $x = 1000$ y en $x = 3000$. **Interprete los resultados**.

Respuesta de P2: Conviene prestar atención a los dos casos que se estudian a continuación.

Cuando $x = 1000$,

$$U'(1000) = 10e^{-1} - 1 = 10(0,3679) - 1 = 2,679.$$

Para el caso en que $x = 3000$,

$$U'(3000) = 10e^{-3} - 1 = 10(0,0498) - 1 = -0,502.$$

Discusión: De modo que si se gastan \$1000 en publicidad, **cada dólar adicional produce un incremento** de \$2,68 en la utilidad neta. Mientras que si se gastan \$3000 en publicidad, **cada dólar adicional produce una disminución** de \$0,50 en la utilidad neta. En este caso es claro que el fabricante no debería hacer más publicidad (el costo de publicidad extra incrementaría en exceso el valor de las ventas adicionales que se generarían). De hecho, cuando $x = 3000$, **ya se está gastando de más en publicidad**.

¿Y si se invierten \$2.000 en publicidad, o \$2.100?

¿Consideran ustedes que este planteamiento tiene aspectos innovadores, en materia de enseñanza, que permite al estudiante la maduración y consolidación del concepto, así como la utilidad de esta herramienta en el campo de las ciencias económicas? ¿Por qué?

[Kenya]: Claro, por supuesto que sí...

[Moderador]: ¿Por qué, Kenya?

[Kenya]: Porque además de verlo en un ejemplo concreto, las situaciones estas permiten, muchas veces, poner en entredicho lo que piensa el común de la gente. Entonces, estamos usando una herramienta matemática para..., digamos, desechar algo que por lo general piensa la gente que es verdadera, de mientras más se invierte en publicidad más se gana...

[Alexis]: Ahora..., ¿si quedará...?

[Kenya]: Y permite la toma de decisiones.

[Alexis]: Ahora, una cuestión sobre la pregunta que tú hiciste, me hago la pregunta y..., si será capaz el estudiante de decir ¿y qué pasa con los 2000?, ¿será capaz de meterse en el problema y plantearse esta situación?

[Elio]: Yo sí creo que se pueda plantear la pregunta, ¿por qué no 5000?, ¿por qué no 2000?, ¿por qué no tanto...? Y al hacerse la pregunta cabe la posibilidad..., bueno, calcule entonces a ver qué pasa.

[Alexis]: ¿Entiendes lo que te quiero decir...?

[Moderador]: Claro que te entiendo, pero es que en una situación como esta, el profesor juega un papel fundamental, el profesor no puede esperar que el estudiante se plantee todas las preguntas, eso sería una situación ideal.

[Kenya]: O sea, que el estudiante no se conforme sólo con esos dos valores que tú colocas de entrada sino que además busque otros valores que le permitan obtener resultados que contrasten los dados en el enunciado. Se supone que eso forma parte del espíritu de curiosidad que pueda tener un estudiante, sobre todo cuando es de economía y le están planteando un problema de su profesión; debería, quizás, de forma natural plantearse ese tipo de situaciones y otras...

[Alexis]: Bueno, visto así como lo plantea Kenya, me parece bien...

[Elio]: Y además, yo creo que, si parte del problema es hacer que el estudiante se dé cuenta que puede haber situaciones que vayan en contra de la intuición, cosas como: mientras más invierta más gano, entonces yo pensaría en un ejemplo auxiliar sencillo para que él se dé cuenta que, en efecto, puede ser así. Por ejemplo, yo vendo cuadernos y hacerle publicidad, para que la gente se dé cuenta que yo vendo cuadernos; porque si la gente no se entera cómo me va a comprar, y resulta que yo le pago a una persona para que me promocione mis cuadernos, por cada diez cuadernos que me promocione yo tengo que pagarle una cantidad "x", entonces, mientras más cuadernos le dé para que me los promocione debo pagarle más, entonces ahí nos damos cuenta que mientras más promocione mis cuadernos más tendré que pagarle a esta persona, porque a la ganancia debo restarle lo que pago por publicidad. Tal vez, incluso, se puede buscar un ejemplo más sencillo pero que habría que prepararlo con tiempo, esto de los cuadernos se me ocurrió ahora, aunque se puede mejorar. Que él se dé cuenta que, en efecto, puede ser así; una situación que vaya en contra, muchas veces, de lo que la intuición nos señala. Y el tipo de pregunta me gusta, es decir, el enunciado: "¿será cierto?", no solamente: *determinar*, *calcular*, *hacer*, sino que quede abierto; puede ser cierto, puede ser falso, pero que él se encargue de hacer la investigación...

[Kenya]: O sea, la pregunta genera la duda...

[Elio]: Exacto.

En un seminario similar, cuando pregunté si este tipo de preguntas conducen o promueven el estudio de monotonía de una función (crecimiento y decrecimiento) y más aún de extremos relativos (máximos y mínimos); uno de los participantes en el seminario se mantuvo firme objeción a mi planteamiento y utilizó dos o tres argumentos, por el contrario, los otros participantes vieron con buenos ojos mi propuesta y uno dijo que intentaría ponerla en práctica y experimentar un poco *por eso de la motivación*.

Me gustaría conocer la opinión de ustedes al respecto; es decir, este hecho particular de evaluar la función de utilidad en dos puntos que nosotros sabemos que dan interpretaciones contrarias, ¿promueven el estudio de monotonía de una función y el interés por los estudiantes?

[Elio]: Sí, yo creo que sí, de hecho es de lo que estamos hablando ahora. Más que darse cuenta el estudiante de que algo está pasando se da cuenta de que va en contra de lo que, generalmente, uno pueda estar pensando. Pensar que mientras más invierto más gano, mientras más invierto más ingresos tengo. Aquí, al evaluar en 1000 y al evaluar en 3000 hay una diferencia y eso genera, si sabemos interpretar lo que es la derivada en un punto, nos damos cuenta que hay un cambio, que algo esta pasando.

[Moderador]: ¿Y Kenya qué opina?

[Kenya]: Yo estoy totalmente de acuerdo, yo pienso que sí, que el estudiante podría preguntarse: "*y qué pasa en 2000 o un poco antes de 2000 o un poco más allá de 2000*", y ver que hay un punto en el cual o que hay valores donde la utilidad va creciendo y después hay valores donde empieza a bajar y; obviamente, si el alumno toma en cuenta que está trabajando sobre una función que es continua, que no va a haber saltos y cosas raras en la función pues, podrá inferir que hay un máximo si se da esa secuencia, crece-decrece.

[Alexis]: Bueno, sabiendo con la derivada que para unos valores es positiva y que si luego uno se desplaza obtiene valores negativos el estudiante tiene que darse cuenta que hay un máximo o debe haber un máximo...

[Moderador]: Eso es ser muy ambicioso, yo lo que busco más que el estudiante se de cuenta de la existencia de un máximo es que surja la necesidad del concepto de máximo, de función creciente, de función decreciente, pero desde una discusión y no que el profesor llegue y de una definición de entrada, sino que la definición surja como una necesidad.

B.3.3. Análisis e Interpretación Econ-Mat[9]

Suponga que el costo total (en dólares) de fabricación C en cierta fábrica es una función que depende de las q unidades producidas, que a su vez es una función que depende del tiempo, t, que representa las horas durante las cuales ha estado funcionando la fábrica.

Preguntas: Las siguientes preguntas están relacionadas con los contenidos matemático y económico en general.

Pregunta 1: ¿Qué cantidad se representa mediante la derivada $\frac{dC}{dq}$? ¿En qué unidades se mide esta cantidad?

Observación: Antes de dar respuesta a estas preguntas conviene introducir la **regla de la cadena**. Para una función y que depende de u y ésta a su vez es una función que depende de x, con y derivable en u y u derivable en x, se tiene que la derivada de y respecto a x ($\frac{dy}{dx}$), se define como

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}}$$

Así, estudiar la razón de cambio de $\boldsymbol{y}$ respecto a $\boldsymbol{x}$ consiste en multiplicar la razón de cambio de $\boldsymbol{y}$ respecto a $\boldsymbol{u}$ multiplicada por la razón de cambio de $\boldsymbol{u}$ respecto a $\boldsymbol{x}$.

Respuesta de P1: La expresión $\frac{dC}{dq}$ representa la razón de cambio del costo C respecto al número de unidades producidas q. Esta cantidad se mide en dólares/unidades.

Pregunta 2: ¿Qué cantidad representa la expresión $\frac{dq}{dt}$? ¿En qué unidades se mide esta cantidad?

Respuesta de P2: La expresión $\frac{dq}{dt}$ representa la razón de cambio de las unidades producidas q respecto al tiempo t. Esta cantidad se mide en unidades/horas.

Pregunta 3:¿Qué cantidad representa la expresión $\frac{dC}{dt} = \frac{dC}{dq}\frac{dq}{dt}$? ¿En qué unidades se mide esta cantidad?

Respuesta de P3: La expresión $\frac{dC}{dt} = \frac{dC}{dq}\frac{dq}{dt}$ representa la razón de cambio del costo C respecto al tiempo t. Esta cantidad se mide en dólares/horas.

Discusión: Para finalizar el tema de la regla de la cadena, discutamos ahora sobre una pregunta como ésta, de corte teórico, donde las exigencias de análisis

[9]Hoffmann y Bradley (2001)

e interpretación, tanto económico como matemático, son mayores que aquellas de contenido numérico.

¿Conduce al estudiante a una actitud de rechazo este tipo de problemas?

[Kenya]: Si ya se han hecho problemas de contexto donde surge la necesidad de la regla de la cadena, yo pienso que cuando se plantea una pregunta de este tipo que lo que busca es generalizar, o sea, librar la forma de su contenido concreto, yo pienso que la actitud del estudiante no sería tan negativa, yo creo que más bien la generalización se llevaría a cabo de un modo positivo. Ahora, posiblemente, si se plantea este tipo de pregunta de entrada sin antes haber tenido una experiencia previa con problemas contextualizados puede ser que la actitud sea de rechazo.

[Moderador]: ¿Y tú, Elio, estás de acuerdo con Kenya?

[Elio]: Es que cuidado si él mismo no se encarga de plantear una situación en la que se extienda la cosa; es decir, que se aprecie la composición... En la situación anterior estábamos hablando de que el costo dependía de la cantidad de artículos que se producían y la cantidad de artículos, creo que, del tiempo, ¿algo así?... Aquí estamos hablando del costo de las unidades producidas y la unidades producidas dependen del tiempo. Prácticamente se habla en los mismos términos...

[Alexis]: Pero aquí, si te das cuenta, lo ves como más digerible que anteriormente.

[Elio]: De acuerdo, pero digo yo, cuidado si el estudiante mismo caiga en cuenta que una variable depende de otra y así sucesivamente, de manera que el pueda generalizar. Yo pienso que hay estudiantes capaces de ver esto.

[Moderador]: No, un momento, no me refiero a la capacidad de los estudiantes sino a la actitud de los estudiantes frente a problemas como estos.

[Elio]: Pero es que la actitud de rechazo o aceptación de un estudiante hacia un tema o problema generalmente se presenta porque no entiende algo de lo que se está tratando, la dificultad que puede encontrar en un problema, en una teoría. Cuando él ve que entiende lo que se le está planteando, el rechazo quizás sea menos.

[Kenya]: Y menos aún cuando el contexto es de su interés, porque este es el planteamiento de la regla de la cadena..., todavía está contextualizado en su área por muy teórico que parezca, porque le estás hablando de una función de costo, lo que pasa es que no se la estás dando de manera específica como en los otros problemas, lo mismo con la función q que va a depender del tiempo, entonces no le estás dando de forma explícita cuál es la función. Realmente este es un problema como los otros pero que está liberado de su contenido concreto, pero al mismo tiempo no deja de ser concreto porque le estás hablando de una función de costo, de una función de cantidad; que no es lo mismo que tú le digas: "sea c una función que depende de x y que a su vez x dependa de y", pero no dices quién es c, quién es x o y, eso sería un nivel mucho más abstracto y evidentemente en un contexto matemático solamente; aún así, esto está, en cierto modo, contextualizado en términos de economía porque estás trabajando con funciones que son de su campo.

[Elio]: Y lo importante de las preguntas es que te permiten tener claro que es lo que significan esas expresiones. Saber en qué unidades se mide el $\frac{dC}{dq}$, qué es eso, qué es lo que está midiendo. Yo pienso que si se viene trabajando con el estudiante con problemas como éste la actitud debe ser positiva. Ahora, insisto que esta es una labor que se debería hacer desde el primer semestre y por iniciativa del Departamento y no de uno en particular.

[Kenya]: Ya también pienso que sí, que debería ser positiva la actitud al abordar este tipo de problema si han tenido la experiencia previa de otros problemas contextualizados.

[Moderador]: ¿Y qué opinas, Alexis?

[Alexis]: Yo estoy de acuerdo con lo que dice Elio, pero recuerda que aquí hay profesores que terminan haciendo lo que les da la gana con eso de la autonomía de cátedra. Pienso que si se trabaja desde el primer semestre con problemas de esta naturaleza el estudiante no debería rechazar estos problemas, si además uno elabora guías con problemas resueltos el estudiante cambiaría..., es cuestión de probarlo.

¿Un problema como éste, conduce a cubrir los objetivos que se plantean los libros de texto que ustedes utilizan?

[Kenya]: A mi me llama la atención que tú te refieras a los objetivos de los libros de texto...

[Alexis]: Yo también te iba a decir lo mismo...

[Kenya]: Yo prefiero referirme a los objetivos del programa..., allí es donde me enredo cuando me toca responder, ya preguntaste lo mismo en uno de los cuestionarios y quedé en las nubes...

[Moderador]: Disculpa que los interrumpa, pero hay objetivos de los programas oficiales, objetivos de los libros de texto y los objetivos del profesor, estos pueden estar o no interrelacionados; me explico, el profesor puede plantearse sus objetivos tomados de los programas y de los libros, los objetivos de los programas pueden ser tomados de los libros de texto...

[Kenya]: Que casi siempre es así..., casi siempre los objetivos de los programas son tomados de los libros de texto, concretamente de los índices. Ahora bien, una buena pregunta es ¿cuáles son los objetivos de los libros de texto...?

[Moderador]: Fíjate, depende del libro o los libros con los que trabajas, cada libro tiene un enfoque y en consecuencia se plantea unos objetivos. En este orden de ideas, creo que el profesor debe y tiene que conocer los libros de texto para poder preparar una clase, para recomendarlo a sus estudiantes, etc.

[Kenya]: Es que la propuesta de los libros suelen, a veces, variar. Te pueden presentar el problema desde el punto de vista matemático; por ejemplo, la regla de la cadena la vamos a trabajar siguiendo esta definición o esta estructura y después caen en las aplicaciones o pueden partir de un problema que motive la regla de la cadena más o menos en estos términos en los que está planteado el último y entonces hacer ver que se trata de una función compuesta y que ahí se aplica esta técnica...

[Moderador]: Un momento, nos estamos desviando del tema y creo que tenemos el tiempo algo medido. La pregunta se refiere a lo siguiente: ¿un material como éste apunta hacia los objetivos de los libros de texto que ustedes utilizan?

[Alexis]: No.

[Moderador]: ¿Me puedes explicar un poco más?

[Alexis]: El material que tú planteas presenta las cosas más detalladas, los libros son más directos, claro se supone que uno tiene que traducirle el libro a los estudiantes.

[Kenya]: Es que el objetivo, por lo general, de todos los libros de texto es que el estudiante adquiera una habilidad, en este caso, de calcular la derivada de una función compuesta y después vienen los problemas de aplicación, son muy pocos los libros que pudieran introducir el concepto de la regla de la cadena..., para introducir la regla de la cadena a través de un problema contextualizado. En este caso, yo lo que podría destacar de tu material es que además de introducir la regla de la cadena trabajas al mismo tiempo con problemas de aplicaciones.

[Moderador]: ¿Y tú Elio, qué nos puedes decir?

[Elio]: El problema es que la mayoría de los libros no muestran cuáles son sus objetivos, yo lo que hago es adaptar los libros a los objetivos de los programas, yo lo que hago es sacarle provecho al libro y adaptarlo a los objetivos de los programas.

[Moderador]: ¿Y tú Alexis, qué nos puedes decir?

[Alexis]: Mira..., yo puedo utilizar un libro no por sus objetivos sino porque tiene buenos ejemplos o tal vez porque tiene una parte o un capítulo que me llama la atención, porque me gusta, pero nunca he trabajado con un libro pensando en sus objetivos, yo trabajo con un libro por su contenido o parte de su contenido.

¿Un problema como éste, sería ideal para preguntarlo en una evaluación del tema de derivadas?

[Alexis]: Si yo siento que el estudiante ha madurado, ha entendido la regla de la cadena me atrevería a ponerlo, de lo contrario no lo haría, realmente considero que este problema si no lo he discutido en clases los estudiantes no sabrían resolverlo, aunque es un problema relacionado con su carrera, ellos deberían resolverlo sin problemas, tal vez la parte que más le traería problemas es la segunda parte, la de las unidades. Aún así, creo que lo preguntaría.

[Moderador]: ¿Y Elio?

[Elio]: Yo no, yo le pondría un problema específico y después lo mandaría a interpretar...

[Moderador]: ¿A qué te refieres con específico?

[Elio]: A un problema numérico, no tan teórico como éste. Estoy seguro que no lo harían. Yo me inclino por una función de costo "$C =$ a tal cosa"; creo que, en el fondo, un problema específico tendría el mismo propósito que éste.

[Moderador]: ¿Y Kenya...?

[Kenya]: Yo, la verdad es que nunca me lo había planteado así, nunca me había planteado una pregunta de este tipo en una evaluación escrita, aunque en algún momento he planteado problemas similares para la regla de la cadena en funciones de varias variables, pero descontextualizado, pero no en una evaluación sino en el aula de clases, para ver si han comprendido la regla. Ahora, el que no me lo haya planteado no significa que no lo pregunte, puede ser que como no lo conocía esa sea la razón de no haberla preguntado; ahora que la conozco..., ahora que conozco el problema podría trabajarlo en clase y preguntarlo, a fin de cuenta es un problema de su campo profesional que permite evaluar el significado de la regla de la cadena, su interpretación, etc.

[Moderador]: ¿Pero lo consideras ideal para preguntarlo en una evaluación?

[Kenya]: Tanto como ideal..., no. Me gusta el problema para preguntarlo, aunque yo, al igual que Elio, no lo haría tan teórico..., me gusta la parte contextualizada pero definiría unas funciones, eso le daría más seguridad al estudiante.

[Moderador]: Bueno..., muchas gracias por su tiempo...

B.3.4. Cuestionario relacionado con la actividad 3

De acuerdo a la actividad que acabamos de realizar y como producto de las opiniones y discusiones en la misma, nos interesa conocer tu opinión sobre algunos puntos que señalamos a continuación:

1. Respecto a la forma actual que sigues en tus cursos de cálculo para enseñar la *regla de la cadena*, ¿podrías destacar algún aspecto relevante que incida en el aprendizaje del estudiante al implementar una actividad como ésta?
2. De los tres problemas presentados anteriormente, ¿cuál supone para ti de mayor relevancia didáctica?, es decir, ¿cuál de estos te permitiría lograr los objetivos propuestos para tus estudiantes? ¿por qué?
3. De las dos notaciones que se usaron para la derivada en los tres problemas anteriores, ¿cuál de las dos utilizas en tus clases? ¿Por qué?
4. Hay investigadores en didáctica que consideran que el relacionar una actividad que vincule contenidos matemáticos con otras áreas sólo tienen un valor **motivador**. ¿Tú concibes una actividad como ésta de igual forma o te parece sugerente como generadora de conocimiento en ambas direcciones? ¿Por qué?
5. ¿Este tipo de actividad, te obliga a romper con los esquemas que actualmente mantienes en tus clases? ¿Por qué?
6. Para introducir y desarrollar la *regla de la cadena*, ¿cuál es esquema que sigues actualmente?

Alexis

Cuestionario relacionado con la actividad 3

[illegible]

1. [illegible]

El aspecto relevante que puede incidir en el aprendizaje, es que el alumno no entienda el significado de la composición de funciones; si esto no es así, el alumno no debe tener problemas para el aprendizaje de tan útil herramienta para el cálculo diferencial.

[illegible]

A pesar que el problema donde se trabaja con la función exponencial para el estudiante es bien conocida y su derivada se obtiene usando la regla de la cadena, ya vimos los problemas ① y ③ que didácticamente el estudiante puede usar la notación $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx}$, por el planteamiento de los problemas ya que C está dada en función de x y x en función de t para el problema 1 y para el ③ C es función de q y q en función t. A pesar que $U(x) = 10000(1 - e^{-x}) - x$ es más manejable para el estudiante, sabiendo que x es también función de otra. Claro la idea es que el estudiante aprenda a usar bien lo que es la regla de la cadena; es decir que sepa que se está trabajando con composición de funciones.

1. De las [illegible] ¿Por qué?

Las dos son de gran utilidad para como están planteados los problemas usuales.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\,\frac{du}{dx}.$$

Importante que la idea es que el estudiante entienda que se está trabajando con composición de funciones, a pesar que el alumno prefiera trabajar con la notación de prima (?)

¿Hay [illegible] ... motivador ... [illegible]

Tener conocimientos en ambos discursos ayuda al estudiante a aprender matemáticas y estudiar el significado de esta aplicación en su área, es decir análisis del costo, ingreso, ganancia, etc.

Particularmente algunos investigadores en didáctica [illegible] su saber matemático que van a enseñar, así que ellos ven esta actividad que sólo tiene un valor motivador. Por lo tanto, hay que saber matemáticas y después hacer didáctica para tener que enseñar.

[illegible]

No lo rompe totalmente por el trabajo que ya se venía, pero sí me gustaría implementarlo para ver qué conclusiones se pueden tomar de esta actividad.

6. Para introducir a [illegible] la regla de la cadena [illegible]
[illegible]

La regla de la cadena la introduzco con funciones lo más elemental por su facilidad, como por ejemplo

$y=(x^2+1)^{1/2}$ ó $y=(x^2+1)^3$ y luego hacemos $u=x^2+1$

para obtener

$$y=u^{1/2} \quad ó \quad y=u^3.$$

Así, $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{dy}{du}\,\dfrac{du}{dx}$

Y en la parte de aplicaciones con problemas como por ejemplo el 1 ó 5, obteniendo en esto información

Elio

Cuestionario relacionado con la actividad 3

[illegible]

- [illegible]

Algo que he notado incide positivamente, es el hecho de representar esquemáticamente la dependencia entre las variables involucradas en un problema. Por ejemplo, si $y = f(x)$ y $x = h(t)$, entonces $y \to x \to t$. Esto les permite establecer con mayor facilidad la regla de la cadena y mucho más, si las funciones dependen de dos o más variables.

$$y = f(u,v) \quad \text{y} \quad u = g(r,t)\,,\ v = h(r,t)$$

$$\begin{tikzcd}[row sep=small]
 & u \arrow[r] \arrow[dr] & r \\
y \arrow[ur] \arrow[dr] & & t \\
 & v \arrow[ur] \arrow[r] & r
\end{tikzcd}$$

He notado que aspectos como estos, les crean confusión en la relación de independencia entre las variables

[illegible]

El que se refiere a Utilidad y Publicidad. Es un problema que me parece más concreto desde el punto de vista de la realidad, que el 3.3 por ejemplo. Tal vez, agregando una situación en la que se requiera hacer alguna optimización de costo o utilidad pueda crear mayor interés en el alumno (de hecho, lo he notado). Claro está, interpretando el contenido y los resultados del problema, como sugiere el 3.5, se genera un aprendizaje más significativo

[illegible]

Algunas veces uso ambas notaciones para resultados variados, tomando en cuenta las diferencias que se presentan entre ellas

Confieso que aunque los estudiantes se familiaricen más con la notación f' que con $\frac{df}{dx}$, esta forma de derivar una función compuesta les resulta más complicada y se presentan errores tales como

si $f(x) = e^{-kx}$, entonces definimos

$g(t) = e^t$ y $h(x) = -kx$, para hacer notar que $f(x) = (g \circ h)(x)$ y entonces, para la derivada hacen cosas como esta:

$$f'(x) = (g \circ h)'(x) = f'(x) \circ g'(x)$$ (así, cambiando el nombre de la función)

o como esta

$$f'(x) = g'(h(x)) = g'(x) \cdot h'(x).$$

La notación de Leibniz les permite aplicar la regla de la cadena con menor grado de error (usando el esquema)

1. [illegible]

Si tiene un valor motivador, no creo que sea un punto en contra; pues si no hay motivación puede carecer de interés para el alumno. Ahora, considero que no es solo motivación, más bien creo que es una manera muy adecuada de generar conocimientos que verdaderamente tengan un significado real para el estudiante. Con esto se puede mostrar la utilidad de la matemática como herramienta para solucionar un problema que ataña un interés particular de la economía, que se supone es el área de estudio para el alumno. A mi modo de ver, esto es más que simple motivación

[illegible]

Al contrario, siento que me permite enriquecer mis estrategias de clase, pues he tratado de enfocar como lo he indicado en previas encuestas, mis clases en un sentido similar al realizado con esta actividad. Claro está, considero que me falta mucho por mejorar y aprender para hacerlo cada vez más adecuado. Por eso considero que actividades como estas fortalecen nuestra formación y profesionalismo

6. [illegible]

Planteamos un problema en el cual se presente independencia entre las variables, de manera que se pueda aplicar la regla de la cadena (Como 3.1 o más elemental, preferiblemente). Hacemos algunos ejercicios de manipulación sólo algebraica para ejercitarnos en el cálculo, usando definición de la derivada de las compuestas. Una vez esto, trabajamos el problema planteado y otros, cada vez de mayor exigencia.

Finalmente, hacemos énfasis en darle la interpretación adecuada a los resultados obtenidos, el significado que dentro del ambiente económico tiene la solución matemática del problema.

Kenya

Cuestionario relacionado con la actividad 3

De acuerdo a la actividad que acabamos de realizar y como producto de las opiniones y discusiones en la misma, nos interesa conocer tu opinión sobre algunos puntos que señalamos a continuación:

1. Respecto a la forma actual que sigues en tus cursos de cálculo para enseñar la *regla de la cadena*, ¿podrías destacar algún aspecto relevante que incida en el aprendizaje del estudiante al implementar una actividad como ésta?

- En primer lugar, no entro en consideraciones
con respecto al dominio. Por lo que este sería
un aspecto a destacar en tu propuesta
- En segundo lugar, destaco el hecho de introducir
la regla de la cadena como herramienta de
cálculo para la derivada de funciones compuestas
a partir de su necesidad; es decir el alumno se
percata del hecho de que las reglas de derivación
disponibles hasta el momento no logran resolver
el problema planteado, por lo que se plantea
la necesidad de generar/utilizar otra regla
- Otro aspecto novedoso, está en plantear como
dato en el problema sobre tasas relacionadas uno
de los factores $\left(\frac{dx}{dt} = 0,7\right)$ que conforman la regla
de la cadena.

40

- Cabe también señalar, el énfasis que se hace
en la interpretación de los resultados, junto al
hecho de que la regla de la cadena se introduce en

situaciones de problema de interés para los estudiantes de Economía (y similares) bien a través de situación muy específicos (problemas de "Tasas Relacionadas" y "Utilidad y Publicidad) o bien más generales pero sin distanciarse de los intereses del estudiante (Análisis e Interpretación Econ. - Mat.)

2. De los tres problemas presentados anteriormente, ¿cuál supone para ti de mayor relevancia didáctica?, es decir, ¿cuál de éstos te permitiría lograr los objetivos propuestos para tus estudiantes? ¿por qué?

No es sencillo optar por uno de los tres problemas, dado que cada uno de ellos tiene su propio valor al enfatizar en aspectos diferentes (pero relacionados) del mismo objeto de estudio.
En el primero y en el tercero se introduce la regla de la cadena haciendo uso de la notación de Leibniz, y me parece que bajo esta notación se puede hacer más comprensible dicha regla, y más aún si el estudiante ha trabajado la composición de funciones usando variables intermedias
Considero que, si he de elegir necesariamente uno de los tres problemas, optaría por el 2 pero incorporando la presentación de la Regla de la Cadena bajo la notación de Leibniz e incorporando o enfatizando en aspectos que destacan en los otros problemas (por ej., del problema 1, lo del dominio y el modo de enunciar la pregunta 2; del problema 3, incorporaría el tipo de planteamiento que están presentes en las preguntas P_1, P_2 y P_3

el 3 problema, una vez que los alumnos han internalizado la regla de la cadena, me parece adecuado como para sintetizar resultados a modo general

3. De las dos notaciones que se usaron para la derivada en los tres problemas anteriores, ¿cuál de las dos utilizas en tus clases? ¿Por qué?

Utilizo la notación del problema (2)
porque estimo que los estudiantes están
más familiarizados con ella que con
la de Leibniz, en virtud de que en la
enseñanza, el trabajo con funciones
compuestas se hace usando dicha nota-
ción; también los libros de texto introducen
la composición de funciones de ese modo

4. Hay investigadores en didáctica que consideran que el relacionar una actividad que vincule contenidos matemáticos con otras áreas sólo tienen un valor **motivador**. ¿Tu concibes una actividad como ésta de igual forma o te parece sugerente como generadora de conocimiento en ambas direcciones? ¿Por qué?

No se pone en duda el alto nivel de motivación
que generan dichas actividades.
Pero tampoco se puede negar que son, a su vez,
fuente de conocimientos, puesto que no habría que
olvidar que históricamente la matemática ha
sido objeto de construcción del ser humano a
partir de presentar y resolver situaciones de
problemas. De modo que, ubicando al estu-
diante en dichas situaciones, los conceptos van
surgiendo de su interacción con el objeto de
conocimiento, sin que esto implique que el
alumno tenga que construir el edificio matemá-
tico del que hoy disponemos. Se trata de rescatar
situaciones problemas de interés para el alumno,
a partir de los cuales emergen las matemáticas
como herramientas para el estudio de tales
situaciones.

5. ¿Este tipo de actividad, te obliga a romper con los esquemas que actualmente mantienes en tus clases? ¿Por que?

Si, ya que lo más frecuente en mis clases es la presentación del contenido matemático, ejercitación y, luego, aplicación.

6. Para introducir y desarrollar la *regla de la cadena*, ¿cuál es esquema que sigues actualmente?

1. Hago un esquema sobre los diferentes tipos de funciones y su relación con las reglas y técnicas de derivación.

- Definidas Explícitamente
  - Funciones Elementales (Polinomio, Racional, Exponencial, ⋮) — Reglas de derivación
  - Álgebra de funciones $\left(\begin{array}{c} \pm \\ \times \\ \div \end{array} \right)$ — Reglas de derivación
  - Funciones Compuestas — Regla de derivación
- Definidas Implícitamente —— Derivación implícita

2. Realizo ejercicios para identificar funciones centrando la atención en su estructura algebraica, lo que permite distinguir entre una función compuesta de "otra que no lo es". Se identifica "primera función o función externa" y "segunda función o función interna"

3. Una vez que el alumno sabe identificar una función compuesta e indicar las funciones y el orden de la composición, se introduce la regla de la cadena usando la notación

$$F'(x) = f'[g(x)] \cdot g'(x).$$

4. Se realizan ejercicios de cálculo
5. Se desarrollan problemas de la economía que impliquen el uso de la regla de la cadena
6. Se presenta un problema con variable intermedia para introducir la regla de la cadena bajo la notación de Leibniz.

B.4. Actividad 4

Mediante esta actividad se busca profundizar y consolidar conceptos matemáticos y económicos relacionados con el cálculo diferencial y otros conceptos básicos de las matemáticas o situaciones "rutinarias" como el despejar una ecuación no común o el trabajo con diversas unidades de medición, después de haber desarrollado durante varias semanas un trabajo con los estudiantes en el tema de la derivada.

B.4.1. Análisis e Interpretación Econ-Mat 1[10]

El valor de cierto cultivo de frutas (en dólares) es $\mathcal{V} = \mathcal{A}(1 - e^{-kI})$ donde $\mathcal{A}$, k son constantes positivas e I es el número de libras por hectárea de insecticida con que se fumiga el cultivo. Si el costo de fumigación está dado por $C = BI$, con B una constante (precio del insecticida).

Preguntas: Las siguientes preguntas están relacionadas con los contenidos matemático y económico en general.

Pregunta 1: Encuentre el valor de I que hace a $\mathcal{V} - C$ máxima.

Respuesta de P1: Como $\mathcal{V} = \mathcal{A}(1 - e^{-kI})$, se tiene que $\mathcal{V} - C = \mathcal{A}(1 - e^{-kI}) - BI$.

Así,

$$\frac{d}{dI}(\mathcal{V} - C) = \mathcal{A}k(e^{-kI}) - B$$

Por lo tanto, para $I = \frac{-1}{k}\ln(\frac{B}{\mathcal{A}k})$, $\mathcal{V} - C$ alcanza un máximo.

Discusión: El problema aquí planteado exige más conocimientos que los planteados hasta el momento, en este caso se obliga al estudiante a manejar herramientas de análisis matemático, trabajar con funciones exponenciales, entre otras. Aún cuando el contexto es económico, todo el planteamiento y resolución del mismo (hasta aquí) es matemático.

¿Qué aportes tiene este tipo de problemas en el aprendizaje de los estudiantes?

[Alexis]: Si ya se ha venido trabajando y estudiando la derivada de una función de costo, ganancia, ingreso con este tipo de problemas, y él sabiendo qué es el punto crítico, dónde se alcanza, dónde cambia de signo la derivada..., yo no creo que haya algún..., conociendo todas las herramientas..., no debe haber ningún problema en aceptar o entender un problema como éste...

[10] Tomado de Arya y Lardner (1987)

[Moderador]: Sí..., ¿pero qué aportes, si es que los tiene, o qué inconvenientes le puede traer al estudiante este problema?

[Alexis]: Inconvenientes creo que ninguno, en todo caso le ayudaría a digerir o profundizar en algunos conceptos ya estudiados. De pronto el problema podría surgir por el contenido teórico que tiene el problema, pero si ya se ha venido trabajando con problemas de este tipo, pienso que el estudiante no debería tener inconveniente, pienso yo...

[Moderador]: ¿Qué puedes decirnos al respecto Elio?

[Elio]: Yo creo que comparando este problema con los anteriores, yo lo que noto aquí, lo más relevante por decirlo de algún modo, es que los cálculos no son tan elementales como los anteriores, de dividir, multiplicar..., aquí hay que aplicar logaritmo y esas cosas, pero si eso se ha venido fortaleciendo con clases anteriores, yo creo que no se tenga mayor problema. Como decía Kenya en la última sesión: "lo importante de llevar a la par la parte matemática y la parte de la aplicación en sí...", que la destreza matemática no se pierda y este es un problema bien interesante en ese sentido porque "$\mathcal{A}$, I" son constantes que no tienen un valor específico, son constantes muy curiosas. Aquí lo que se presenta, fundamentalmente, es manipulación algebraica...

[Moderador]: Pero pregunto yo, ¿qué aportes para el estudiante tiene este tipo de problemas, hablando desde el punto de vista cognitivo?

[Elio]: Puede permitir un fortalecimiento matemático en cuanto a las operaciones se refiere y, por supuesto, más adelante en la interpretación es donde pueda tener mayor problema, mayor dificultad porque "$\mathcal{A}$, I" pueden ser desconocidos, aunque allí dice que son constantes, pueda que el estudiante no sepa cómo interpretarlas al final. Creo que fortalezca la parte matemática, la parte operacional, aunque yo probaría dándole, primero, valores específicos a estas dos constantes y después las dejaría como constantes.

[Moderador]: Pero es que al darle valores específicos a las constantes, el problema es o sería otro y en consecuencia, el objetivo del problema cambia. Yo me refiero a este problema tal como esta planteado, sin modificación alguna.

[Kenya]: Yo pienso que no debería haber problemas, en condiciones ideales, sobre todo si ellos han venido trabajando con problemas de este tipo y como actividad de consolidación, pues, siempre es bueno cuando se estudia cualquier concepto hacer una actividad de consolidación... Aunque aquí se hace bastante énfasis, veo yo hasta este momento, en el cálculo y no en la interpretación, pero me imagino que en el resto apuntarás hacia la interpretación; lo intuyo porque has hecho mucho énfasis en la interpretación de la derivada a lo largo de las otras sesiones; porque lo interesante para el estudiante, en este caso, es la interpretación de este resultado. Bueno..., cognitivamente, si separamos la parte de interpretación, el aprendizaje estaría centrado en la consolidación del trabajo algebraico, operacional...

[Moderador]: Aprovechando que tienes la palabra, la siguiente pregunta es para ti...

¿Qué dificultades supone este tipo de problemas para el estudiante?

[Kenya]: Bueno..., uno, sería trabajar la derivada de la función exponencial como la función potencia, siempre hay la tentación de hacer eso y confundir, a pesar de que uno les hace ver las diferencias, uno les dice: "miren la tabla, vean la diferencia, miren que esta es exponencial, esta es una potencia, esta es compuesta, etc..." Ellos al final, no todos, pero siempre se presentan casos de estudiantes que al confundir la función aplican una regla distinta, una regla equivocada...

[Alexis]: Otra cosa respecto a las funciones es que ellos siempre tienen en mente de que la variable es x...

[Kenya]: Ah..., esa es otra...

[Elio]: Y aquí no está del todo claro cuál es la variable, lo dice en palabra pero no lo especifica...

[Alexis]: Exacto, en este caso el estudiante puede dudar y decir: "cuál es la variable".

[Kenya]: A parte de que yo he notado que la notación de Leibnitz que es bastante cómoda para este tipo de problemas cuando hay que derivar implícitamente, a ellos no le gusta mucho su uso, prefieren la notación "prima" que el uso del diferencial para trabajar los problemas.

[Moderador]: ¿Y qué ibas a decir tú, Elio, sobre las variables?

[Elio]: Que me parece que podría crear confusión el hecho de que no se especifique la variable aun cuando la función está definida de forma explícita, pero me parece que deberías escribir $\mathcal{V}(I)$ en lugar de $\mathcal{V}$, eso ayudaría al estudiante y no cambiaría en mucho el problema. Ya que cuando él estuviera haciendo el cálculo podría perderse y que por alguna razón, cuando pasamos de las cuatro operaciones básicas de derivada, no sé qué pasa con la exponencial que la derivan como una potencia, como dice Kenya, o para despejar una exponencial le cuesta mucho aplicar logaritmo. A veces me dicen: "profesor, ahora multiplicamos por logaritmo...", pienso que es una función que les genera muchos conflictos.

[Moderador]: Pasemos ahora a la siguiente pregunta.

Pregunta 2: ¿Para las siguientes condiciones, $0 < \mathcal{A}k < B$ y $0 < B < \mathcal{A}k$, cuál de las dos le da sentido a la situación anterior? Justifique su respuesta.

Respuesta de P2: En el caso en que $0 < \mathcal{A}k < B$, se tiene que $0 < 1 < \frac{B}{\mathcal{A}k}$. Por lo tanto, $I < 0$. Aunque desde el punto de vista matemático, este resultado es válido; desde el punto de vista económico no lo es, puesto que I representa el número de libras por hectáreas.

En el caso en que $0 < B < \mathcal{A}k$, se satisface $0 < \frac{B}{\mathcal{A}k} < 1$. Por lo tanto, $I > 0$ y esto tiene sentido tanto matemático como económico.

Discusión: En esta tarea aparecen condiciones algebraicas para estudiar el comportamiento de la función y su sentido dentro de dos contextos, no obstante, me he encontrado con profesores de cálculo que no comparten mi opinión.

Relacionar tareas teóricas contextualizadas de derivada y manipulaciones algebraicas, ¿qué incidencias tienen en el aprendizaje matemático y económico en los estudiantes?

[Kenya]: Yo pienso que si estamos hablando de estudiantes de economía y no de estudiantes de matemáticas, además de ser importante la manipulación algebraica también lo es en el sentido que esos resultados adquieren dentro de un problema concreto, entonces él tiene que ajustar los resultados, que por la vía matemática obtiene, a las condiciones reales que le ofrece la situación del problema, yo pienso que sí es importante, sobre todo hacer ese énfasis cuando se trata de problemas que son contextualizados, porque realmente lo que queremos aquí no son matemáticos en sí mismo...; que tendríamos, en todo caso, que explicar o abordar la matemática desde su fundamento, aquí no, aquí es la matemática utilizada como herramienta para resolver problemas en el campo profesional de estos estudiantes.

[Moderador]: Lo que me planteaban estos profesores es que este problema, por ejemplo, puede generar conflictos en el estudiante...

[Kenya]: De acuerdo, pero ese conflicto es bueno porque desde el conflicto uno puede aprender, justamente hay un teoría psicológica que dice: "que si no se crea un conflicto no hay aprendizaje, un desequilibrio para volver al equilibrio, que si la acomodación, la asimilación, bueno..., Piaget". Pero yo creo que es muy importante, a pesar de que estos problemas son muy específicos, que hablan de situaciones concretas, que pueden ocurrir en la realidad, digamos entre comillas... Cuando se utiliza una función que trata de explicar el comportamiento que evidencia el problema, esa función desde el punto de vista matemático se comporta de un modo distinto a como se comportaría si la asumiésemos desde el punto de vista de la economía; empezando por el dominio, el dominio, realmente, no son todos los reales. Matemáticamente sí, no hay problema. Pero entonces, yo creo que allí hay más sustancia cuando se les hace ver, miren desde el punto de vista matemático, si el dominio son todos los reales o incluye una parte de los negativos para los cuales esto no tendría sentido, si hablamos del número de libras de insecticida, por ejemplo, si es negativo no tendría sentido, matemáticamente sí, eso hay que hacerlo, hacérselo ver a ellos, que ellos sientan esa diferencia...

[Alexis]: Esta parte..., no creo que haya tenido la oportunidad de hacer algún problema como éste, realmente no me acuerdo, donde involucre este tipo de situaciones, en ingeniería sí. En ingeniería hago muchos problemas donde condiciono el dominio o hago que se estudie el dominio para cosas particulares... Pero particularmente, yo pondría en práctica este tipo de problemas alguna vez cuando me toque nuevamente enseñar Matemáticas 21, de hecho, me gustaría implementar muchas de las cosas que se han discutido aquí, me parece muy interesante y novedoso hacer algunas de las cosas como tú las planteas...

[Kenya]: Yo creo que la idea tuya es, o la propuesta tuya es hacerle ver al estudiante la utilidad que tiene la matemática como herramienta para resolver problemas de su campo profesional, pero haciéndole ver la diferencia que hay entre una situación real y una situación que es modelizada por una función matemática..., y yo creo que eso es relevante y pertinente hacerlo.

[Moderador]: ¿Y Elio qué opina al respecto?

[Elio]: Este problema en particular, este..., negar que le va a hacer más difícil, creo que no es la idea, obviamente el problema es más exigente y mayor número de cosas con las que hay que tener cuidado, la función logarítmica, la exponencial, las constantes allí con las que se pudiera cometer algún error; a parte que en la pregunta el estudiante pudiese preguntarse: "¿si $\mathcal{A}$, k, I y B son constantes, por qué un caso lo voy a interpretar con esas condiciones $0 < \mathcal{A}k < B$ y $0 < B < \mathcal{A}k$?", hacerles ver lo que significan esas constantes, sus interpretaciones, que no son constantes en el sentido que normalmente uno maneja, sino que son constantes muy especiales y discutir eso con ellos y no dejar por un lado la parte matemática y por otro la parte de la aplicación, eso tiene que ir de la mano...

[Moderador]: Pero desde tu punto de vista, ¿qué tipo de incidencias podría traer este tipo de problemas en el aprendizaje de los estudiantes?

[Elio]: Esto vendría a complementar todo lo que se ha hecho, a fortalecer el aprendizaje, sobre todo la parte del cálculo, la manipulación de cálculo, la manipulación algebraica, este problema lo veo más que todo como manipulación de cálculo.

[Moderador]: Pasemos ahora al segundo y último problema de la tarde y con esto concluimos estas jornadas de discusión, este seminario que es como lo he bautizado.

B.4.2. Análisis e Interpretación Econ-Mat 2[11]

Sea Q la cantidad que minimiza el costo total T debido a la obtención y almacenamiento del material por cierto período. El material demandado es de 10.000 unidades por año; el precio al costo del material es de \$1 por unidad; el costo de volver a llenar la existencia de material por orden, sin importar el tamaño Q de la orden es del 12,5 % del valor promedio de las existencias($Q/2$).

Pregunta 1: Pruebe que $T = 10{,}000 + \frac{250{,}000}{Q} + \frac{Q}{16}$.

Respuesta de P1: En efecto,

$$
\begin{aligned}
10{,}000 &= 10{,}000 \times 1 \\
\tfrac{250{,}000}{Q} &= \tfrac{25 \times 10{,}000}{Q} \\
\tfrac{Q}{16} &= \tfrac{12{,}5}{100} \times \tfrac{Q}{2}
\end{aligned}
$$

Discusión: Aún cuando en la tarea, se le pide al estudiante que demuestre, la actividad se centra en generar un modelo a partir de unos datos establecidos.

¿Cómo gestionas o gestionarías tus clases ante actividades como estas, en las que es frecuente que los estudiantes presenten dificultades para visualizar y llegar al modelo solicitado y en consecuencia, construir un conocimiento del contenido en ambos contextos (económico y matemático)?

[Kenya]: Honestamente, yo no me he planteado este tipo de problemas en clase, cuando mucho, lo de beneficio a través de ingreso menos costo, o ingreso a partir de la función demanda, pero cuestiones muy pequeñas o más bien, muy sencillas; más guiadas por la intuición que pueda tener el estudiante por uno de esos conceptos, que realmente pensando que ellos tienen un conocimiento muy amplio de lo que es la teoría de..., una teoría sobre la función costo o sobre la función beneficio, etc., etc. O sea, supongo que ellos no tienen esos conocimientos, a lo mejor presupongo mal pero la experiencia me muestra que es muy difícil que esté equivocada...

[Elio]: En mi caso, yo he tratado de generar modelos en clase, sencillos en principio, como por ejemplo, la función de ingreso, creo que es muy fácil de entender. Una vez, como anécdota, estuve haciendo un problema del Arya (& Lardner), aquel problema clásico donde se quiere pasar un cable sobre un río, donde hay que utilizar el Teorema de Pitágoras para resolver el problema, en el que se debe generar todo un esquema para visualizar mejor el modelo que se va a obtener y la opinión de un estudiante es que: "por qué, mejor, no das la

[11] Tomado del Arya y Lardner (1987)

función ya planteada y que nosotros sólo tengamos que derivar, que por qué lo hacíamos así, que ahí teníamos que pensar mucho".

[Kenya]: En problemas de optimización, también ahí se prestan los problemas para que ellos construyan las funciones, pero pienso también que son relativamente sencillas...

[Elio]: Y uno se da cuenta que eso causa interés en ellos, con el ejemplo que decía antes, si yo tengo un cable que quiero pasarlo al otro lado del río y hay un precio, cómo hago para minimizar los costos..., el objetivo ellos lo tienen claro, saben que tiene importancia porque eso le permite ubicarse en la realidad, en la realidad de sus estudios y de su futuro trabajo. Pero no sé qué es lo que pasa que cuando uno va a abordar el problema para crear el modelo hay deficiencia, tal vez de parte y parte...

[Alexis]: Es que la deficiencia es, porque vuelvo y repito, en Matemática 11 hay libros que trabajan y modelan funciones en ese aspecto, en ese contexto. En el tema de ecuaciones e inecuaciones, los libros tienen problemas de esta naturaleza, pero uno no los trabaja. Entonces, llegar a Matemática 21 y ponerle un problema de estos les causa incomodidad...

[Moderador]: Todo lo que han dicho resulta interesante pero nos estamos desviando del tema o del punto de discusión, les recuerdo que les pregunté sobre la gestión de la clase, cómo gestionarían o cómo gestionan ustedes un problema donde se genere un modelo.

[Kenya]: Bueno, como te dije antes, yo no hago este tipo de problemas, yo lo que hago en clases son problemas de aplicaciones con las funciones ya establecidas, no me he planteado un problema que conduzca a un modelo.

[Moderador]: ¿Y tú, Alexis?

[Alexis]: Realmente no les trabajo problemas de este tipo, sé por experiencia que estos problemas no les gusta a ellos, les incomoda; tal vez sea una actitud cómoda de mi parte, hace tiempo intenté hacer unos problemas sencillos y la experiencia fue muy mala.

[Moderador]: Pasemos a la siguiente pregunta.

Pregunta 2: Encuentre el tamaño del lote económico y el costo total T correspondiente a tal valor de Q.

Respuesta de P2: Dado que Q es la cantidad que minimiza a T, calculamos la derivada de T respecto a Q; es decir,

$$T' = -\frac{250{,}000}{Q^2} + \frac{1}{16}.$$

Así, $T' = 0 \Leftrightarrow Q = \pm 2{,}000$, pero nos quedamos con $Q > 0$ por estar hablando de un material como libros, herramientas, etc.

De lo anterior tenemos que el costo total, T, se minimiza en $Q = 2{,}000$ dólares y el valor de este costo es de $T = 10{,}250$ dólares.

Discusión: A estas alturas del tema de derivada, cuando ya se supone que los estudiantes han trabajado y discutido diversos problemas de este tema y en ambos contextos, generalmente los estudiantes tienden a cometer ciertos errores y en algunos casos (después de una discusión con profesores de otra universidad), la actitud de los estudiantes es de rechazo a este tipo de problemas.

En atención a la experiencia de ustedes, ¿cuál es su opinión en estas dos líneas (errores y actitud)?

[Kenya]: Yo pienso que, en cuanto a la actitud, yo creo que ellos sienten más temor hacia problemas de este tipo que hacia problemas de cálculo..., calcule la derivada de esta función o problemas de operaciones tradicionales, simplemente operativos. Ahora bien, aún cuando su actitud sea de rechazo, ellos se ven comprometidos a afrontar este tipo de problemas, siempre y cuando uno haya trabajado durante la clase..., le haya hecho énfasis en las aplicaciones; porque, claro, no sería honesto que tú en clase hables sólo de cálculo y venga el día del examen y le pongas problemas de aplicaciones. De entrada, la actitud puede ser de miedo y puede que eso genere rechazo, pero aún así ellos se deberían sentir comprometidos si tú en clase le hablas de estos problemas...

[Moderador]: ¿Y los errores?

[Kenya]: Tienen que ver con que ellos no relacionan la operación que están haciendo con el significado y de interpretación..., allí hay graves errores. Empezando por el cálculo de la imagen en una función costo, qué significa eso; ya ahí ellos tienen dificultad para redactar y para interpretar, incluso si ellos logran interpretar es difícil que ellos comuniquen sus ideas, lástima que uno no lleva un registro de los errores, una lista negra.

[Elio]: Por ejemplo, un error que cometen con mucha frecuencia en mis cursos, al menos yo lo veo frecuentemente, es que en los problemas de máximos y mínimos, en la misma línea donde derivan igualan a cero para los puntos críticos y luego se pierden en el problema, no hacen la pausa, no dicen que una vez obtenida la derivada pasaremos a calcular los puntos críticos, entonces se terminan perdiendo en el problema...

[Moderador]: ¿Y en cuanto a la actitud Elio?

[Elio]: En mi caso yo he notado actitud de rechazo ante problemas como éste. Una cosa que observé al leer este problema, dice: “Sea Q la cantidad que minimiza...", ellos pueden ver a Q como una constante aún cuando es la variable de la función, yo pienso que hay que ser muy cuidadoso con los problemas que le vayan a poner a los estudiantes...

[Moderador]: Para eso es este trabajo..., ¿qué nos puede decir Alexis?

[Alexis]: La actitud de ellos es de rechazo ante estos problemas, ellos prefieren una función ya elaborada a tener que elaborar un modelo, de hecho, difícilmente hagan un problema de estos en el examen, lo dejan de último...

[Moderador]: ¿Y sobre los errores?

[Alexis]: Los errores son de interpretación y como dijo Kenya, de redacción; a veces me doy cuenta que tienen la idea de la interpretación, pero redactar esa idea, escribir esa idea les cuesta mucho. De hecho, el peso que yo le doy a la interpretación en los exámenes es muy bajo.

[Moderador]: Pasemos a la siguiente pregunta.

Pregunta 3: Determine el costo total cuando cada orden es fijada en 2.500 unidades.

Respuesta de P3: En este caso, sólo basta con calcular la imagen de T para $Q = 2{,}500$; así, el costo total cuando cada orden es fijada en 2.500 unidades es de $T = 10{,}256, 25$.

Discusión: Si observamos con detalle, esta tarea posee un mínimo de dificultad respecto a las dos anteriores.

Ya en el cierre del tema de derivada, ¿consideran acertado realizar esta pregunta en una evaluación o creen que puede conducir al estudiante a un error; como por ejemplo, que éste calcule la derivada de la función y la evalúe en 2.500?

[Elio]: Ese error es muy común, ese error es muy común, pero yo creo que no está mal hacer esa pregunta, de alguna manera, permite reforzar lo que se ha estado haciendo desde el comienzo..., y ese error es común, me hizo acordar de ese error este problema...

[Kenya]: Yo creo que es muy pertinente hacerlo, es más, yo en mis clases..., en el contexto de la interpretación de la derivada desde el punto de vista económico yo nunca aíslo los problemas de este tipo de cuestiones; y no es nada, intentar también relacionar la interpretación de este valor con la que puede darse en la derivada. Es decir, yo nunca estudio la derivada o nunca abordo, con ellos, el concepto de la derivada aislado de otros contextos...

[Alexis]: Ahora, cuando uno estudia la parte esa de máximos y mínimos, siempre uno consigue un t que le hace la ganancia máxima, por ejemplo, eso lo encuentras con la derivada, pero también tienen que calcular cuánto vale para ese mismo t, la función ganancia y que vean la diferencia...

[Moderador]: Pero, ¿ustedes colocarían esta pregunta en un examen de derivada, al final del tema de derivada?, fíjense que en la pregunta no se le pide en ningún momento que derive.

[Alexis]: Si se está evaluando la parte final..., tú sabes que la parte final aquí es de aplicaciones y esa pregunta forma parte de las aplicaciones...

[Kenya]: ¿Cómo es eso de las aplicaciones al final?

[Alexis]: Me explico, tú sabes que el programa primero toca la parte de cálculo y después deja un tema aparte para las aplicaciones, entonces yo hago dos exámenes, uno de cálculo y otro de aplicaciones y cuando evalúo la parte de aplicaciones de la derivada, esta pregunta o una similar sale en algún momento, me parece adecuada...

[Moderador]: ¿Ibas a decir algo Kenya?

[Kenya]: Se me fue la idea... Pero bueno, pienso que también este tipo de problemas es equivalente cuando uno trabaja con el crecimiento, el decrecimiento, los máximos y mínimos, tiene el mismo sentido... Normalmente, ellos trabajan con la derivada y las conclusiones se la hacen a la función derivada; es decir, ellos calculan la derivada de la función, obtienen el máximo con la derivada y después dicen que la derivada tiene el máximo en "tanto". Una pregunta que yo acostumbro a ponerle en el examen o a discutir en clase es: "dónde es creciente el costo marginal". En este caso, no calculan la segunda derivada sino que trabajan directamente con el costo marginal. Entonces si comparamos este ejemplo que acabo de citar con el problema que tú planteas, el error será similar, ellos derivarán, casi seguro, para obtener el resultado esperado, aún así me parece adecuado ponerla en un examen.

[Moderador]: ¿Qué ibas a decir, Elio?

[Elio]: No, bueno..., este, que la pregunta me parece pertinente, aun cuando yo la he visto en los libros planteada de la siguiente manera: "calcule $T(2500)$ e interprete los resultados", yo prefiero este planteamiento (el de la discusión) porque obliga al estudiante a pensar más, a concentrarse en la variable de la función..., pero le pediría una interpretación del resultado...

[Kenya]: Justamente este tipo de problemas le permite al profesor apreciar si el estudiante sabe lo que está haciendo; es decir, si sabe diferenciar entre trabajar con la función dada o con la derivada de la función... Yo pienso que este tipo de problemas, este tipo de planteamiento debería ir y ser sugerido en los programas oficiales.

[Moderador]: Bueno, muchas gracias por la colaboración prestada, entiendo el esfuerzo que hicieron ustedes para estar presentes en estas sesiones, aún con todos los problemas que han acontecido últimamente en la ciudad, realmente reconozco el interés y la seriedad con la que participaron, nuevamente gracias.

B.4.3. Cuestionario relacionado con la actividad 4

De acuerdo a la actividad que acabamos de realizar y como producto de las opiniones y discusiones en la misma, nos interesa conocer tu opinión sobre algunos puntos que señalamos a continuación:

1. Dentro de tu planificación docente, ¿tu contemplas actividades como éstas ya para cerrar el tema de derivadas?

    a) $\boxed{\text{Sí}}$ ¿Por qué?, ¿desde el punto de vista de la didáctica, qué persigues con este tipo de problemas?

    b) $\boxed{\text{No}}$ ¿Por qué?, ¿desde el punto de vista de la didáctica, qué inconvenientes observas en este tipo de problemas?

2. ¿Puede usted afirmar que con actividades como ésta, se **induce** u **obliga** al estudiante a pensar? Detalle su respuesta.

3. Consideras que los objetivos del curso se cubren con este tipo de actividad o en todo caso se desvirtúa la finalidad del curso?

Alexis

Cuestionario relacionado con la actividad [illegible]

[illegible]

1. [illegible]

   (a) [Sí] ¿Por qué [illegible] qué [illegible] con este tipo de problemas?

   (b) [No] ¿Por qué [illegible] en este tipo de problemas?

a) Si porque con problemas de este tipo el docente conduce al alumno al aprendizaje de la aplicación de la derivada en todos los sentidos (crecimiento, decrecimiento, etc)

[illegible]

Todos los problemas inducen el pensamiento unos con grado de dificultad mayor que otros, Además induce a la aptitud mental que tenga el estudiante.

Depende de lo que quiera el Profesor; particularmente creo que no se describe la finalidad del curso en el caso de matemáticas 2 de economía, al contrario, el estudiante aprende la utilización de la derivada para los problemas a fin de su carrera.

Elio

Cuestionario relacionado con la actividad 4

[illegible]

2. [illegible]

a) [Sí] ¿Por qué?, desde el punto de vista de la didáctica, [illegible]

b) [No] ¿Por qué?, desde el punto de vista de la didáctica, [illegible] en este tipo de problemas?

Sí, porque considero que problemas de este tipo permiten reforzar no solo el contenido que se refiere a la parte económica, sino también el contenido matemático, de manera simultánea. Considero que si un problema es generado por la situación que se presenta de un interés particular, en lugar de imponerlo explícitamente, se puede lograr una mayor coherencia en la interpretación y por ende, los conceptos pudieran ser aplicados con mayor facilidad y así la solución surge de manera natural como una consecuencia lógica del razonamiento que se ejecuta.

[illegible]

Tal y como estamos actualmente, la formación de nuestros estudiantes, por alguna razón, nos da muestra de que para inducirlos a pensar pareciera necesario obligarlos. Obviamente, el obligarlos puede generar una actitud de rechazo y terminan resolviendo el problema (cuando lo hacen) muchas veces de manera mecánica, dejando muy de lado el razonamiento lógico, producto de un pensamiento sistemático; hecho por el cual la interpretación del análisis y los resultados se presenta de manera muy deficiente.

Creo que con actividades como esta, la obligación puede pasar a un segundo plano, ya que al presentar el problema ligado a los intereses particulares, el pensamiento surge de manera natural, inducido por la situación planteada.

[illegible]

Creo que los objetivos pueden ser logrados con actividades como esta, pero hay que tener presente que en ello influyen otros aspectos de vital importancia: el tiempo, preparación del docente, preparación y conocimientos previos del estudiante, entre otros.

Considero que para alcanzar los objetivos con actividades como estas, no solo debe haber generación de ideas por parte del docente que imparte la asignatura, tiene que haber un cambio hasta institucional si se quiere

Kenya

Cuestionario relacionado con la actividad 4

De acuerdo a la actividad que acabamos de realizar y como producto de las opiniones y discusiones en la misma, nos interesa conocer tu opinión sobre algunos puntos que señalamos a continuación:

1. Dentro de tu planificación docente, ¿tu contemplas actividades como éstas ya para cerrar el tema de derivadas?

    a) Sí ¿Por qué?, ¿desde el punto de vista de la didáctica, qué persigues con este tipo de problemas?

    b) No ¿Por qué?, ¿desde el punto de vista de la didáctica, qué inconvenientes observas en este tipo de problemas?

En cierta forma, si utilizo actividades como esas, pero no del tipo planteado en la pregunta de la actividad 4,2, a menos que sea en el contexto de problemas de optimización en los que entran en juego funciones costo, ingreso, beneficio, precio, pero con un contenido que estimo resulta ser más sencillo. Se busca es consolidar los conocimientos adquiridos y apreciar posibles lagunas en el alumno, al menos en clase, por lo que evito en lo posible que el cálculo excesivo o complicado haga perder de vista la esencia del problema, de allí, el valor didáctico de la actividad.

Hay que señalar que, en muchas ocasiones, uno se encuentra en situaciones en las que el foco de atención se desvía hacia las deficiencias que tienen los estudiantes en los conocimientos básicos para abordar la derivada y conceptos relacionados.
Por ejemplo, el alumno puede haber aprendido que

para hallar los extremos de una función debe encontrar los valores críticos; pero el desconocimiento del dominio de la función junto con las dificultades que presenta al resolver la ecuación que resulta al trabajar con la primera derivada (incluso, a veces tan sencillas como ecuaciones polinómicas de grado 2 o 3) hacen que no se logre el objetivo deseado.

2. ¿Puede usted afirmar que con actividades como ésta, se **induce** u **obliga** al estudiante a pensar? Detalle su respuesta.

Pienso que sí, aunque prefiero hablar de inducir al estudiante a pensar más que obligarlo. Las preguntas que se plantean en los problemas requieren que los estudiantes analicen, reflexionen, relacionen, interpreten, transfieran conocimiento a diversas situaciones, comuniquen sus ideas (bien de modo oral o escrito), apliquen conceptos o sean capaces de apreciar las nociones matemáticas o económicas involucradas en los problemas. En suma, se activan procesos cognitivos de más alto nivel que los que ameritan la manipulación algebraica. Sin embargo, no habría que olvidar el aspecto motivacional, en particular, la motivación intrínseca, pues en definitiva, es el propio alumno quien activa su deseo de aprender, por lo que en el proceso de enseñanza lo que se puede hacer es animarlo y propiciar condiciones que desarrollen nuevos conocimientos a partir de los que ya posee y en esto puede ayudar el plantear objetivos realistas y trascendentes para el sujeto, a la vez que perciban la utilidad de los nuevos conocimientos.

3. Consideras que los objetivos del curso se cubren con este tipo de actividad o en todo caso se desvirtúa la finalidad del curso?

Los objetivos del curso relacionados con la derivada para funciones de una variable se centran en:
- Conocer, interpretar y calcular derivadas
- Utilizar conocimientos teóricos y prácticos para resolver problemas de la economía

De modo que, después del estudio y discusión de las actividades propuestas en el material (4), puedo afirmar que los objetivos del curso no sólo logran cubrirse sino que, además, el proceso seguido favorece la adquisición del concepto (derivada) y nociones relacionadas de modo significativo, ya que la introducción de los mismos se realiza en contextos y situaciones de problemas vinculados con los intereses de los estudiantes, lo que pudiera estar favoreciendo una actitud positiva hacia las matemáticas, y a la vez, percibirlas como una herramienta útil para la resolución de problemas y toma de decisiones

52

Apéndice C

Entrevistas semi-estructuradas

C.1. Entrevista a Manuel

1.- **[Moderador]**: En el tiempo que tienes dentro del Departamento, ¿alguna vez has participado en una actividad como la realizada (por iniciativa del Departamento o de algún profesor en particular)?

1. Sí, ¿cómo fue la experiencia?, ¿qué se hizo?, compara respecto a esta, ¿consideras que realmente valió la pena este espacio de discusión?, ¿incidirá en tu labor docente?

2. No, ¿consideras que realmente valió la pena este espacio de discusión?, ¿incidirá en tu labor docente?

[Manuel]: Bueno, lo que yo te comenté..., como especie de seminarios que dictó Pedro, esa fue una actividad en la que nos reunimos un grupo de profesores y él, más o menos, nos orientó de cómo introducir las aplicaciones en los cursos de matemáticas para la facultad de economía, pero en otra actividad no he participado, no se ha hecho.

[Moderador]: ¿Y me puedes detallar un poco qué fue lo que hicieron en esa actividad?

[Manuel]: Ahí lo que se hizo fue: él explicó, nos habló más o menos de su experiencia..., este..., y de sus conversaciones con profesores de (la facultad de) economía que..., cómo se podían dar las matemáticas en esa facultad y entonces, él, lo que nos dio fue algunos ejemplos, hablar un poco de las funciones de costo, de ingreso, cómo se podían relacionar; más que todo dio, también, bastante bibliografía, él nos recomendó por qué libros nosotros podíamos documentarnos, porque como nosotros..., primera vez que veíamos eso, entonces él nos dijo: "empiecen con este libro que es bien básico y después pueden..." Entonces, más o menos, de eso se trató, de una orientación básicamente.

[Moderador]: ¿Y consideras que realmente valió la pena este espacio de discusión?

[Manuel]: Sí, claro.

[Moderador]: ¿En qué sentido?

[Manuel]: Bueno..., uno..., uno adquiere otra forma de ver las cosas. Por ejemplo, a mi me gustó esa actividad, que lo he destaco en las notas en las respuestas de uno de los cuestionarios (post-sesión)..., la manera de implementar la regla de la cadena ya con..., de una vez con las aplicaciones, entonces dije: "¡caramba!, me parece interesante hacerlo de esta manera". Entonces, ya aprendí otra cosa que además no había visto antes.

[Moderador]: Y a partir de eso, ¿incidirá en tu labor docente?

[Manuel]: Yo creo que sí, voy a tratar de implementarlo, sobre todo esa parte de la regla de la cadena.

2.- **[Moderador]**: De los problemas planteados y de la forma de estudiar el concepto matemático a partir de estos, ¿recuerdas alguno que te llamó la atención por: su rigor, innovación, presentación, el tema tratado, otro?

[Manuel]: Bueno..., ese de cómo enseñar la regla de la cadena, ese es el que más..., hay otros, pero ese es el que más me sorprendió en el momento de la actividad, el resto ya..., muchos problemas de estos, de una u otra manera, ya los había trabajado. Pero la presentación, la forma distinta del de la regla de la cadena me gustó, totalmente distinto a como yo lo trabajo.

3.- **[Moderador]**: Hoy por hoy, el futuro profesional requiere de unas competencias o de un "conocimiento ideal" para afrontar problemas en su campo laboral, de modo que le permita realizar un trabajo óptimo. ¿Consideras que una propuesta curricular como la discutida, permite generar esas "competencias" que el profesional de hoy necesita, en relación con la forma como actualmente sigues tus clases?

[Manuel]: Yo creo que sí...

[Moderador]: ¿Podrías explicarme un poco?

[Manuel]: Bueno, porque en esta actividad se..., se estimula mucho al estudiante, se motiva mucho al estudiante a aprender matemáticas en el área, sobre todo en el área en la que ellos trabajan o van a trabajar. Ellos se sienten muy desmotivados por las matemáticas, entonces cuando tú le das otra alternativa de cómo ver las matemáticas me imagino que... Me gusta, por eso a mi me gusta dar clase en esa facultad (FACES), porque a mi tampoco me gusta dar matemáticas puras, me gusta la parte de aplicaciones, siempre he tratado de dar la matemática con ejemplos, esa es mi forma de enseñar.

4.- **[Moderador]**: En relación con los libros que tú sigues para preparar tus clases, ¿puedes destacar uno o dos aspectos (positivos o negativos) en relación con lo tratado en las cuatro sesiones?

[Manuel]: Yo siempre utilizo para las clases libros de aplicaciones, aunque como yo te lo comenté alguna vez cuando estábamos en las actividades, ahora todos los libros incluyen más aplicaciones que antes, ahora todos los libros se basan en eso. Yo pienso que sí..., que sí, eso es lo positivo, que los libros de texto de ahora se desarrollan en eso, dar la teoría y, de una manera, preparan al estudiante para la práctica.

[Moderador]: De acuerdo, pero no me refiero a los libros, me refiero a las actividades que discutimos, al material.

[Manuel]: Pero es que es distinta la presentación de un libro a la presentación de una clase, el libro tiene una forma más generalizada, en cambio cuando tú das una clase te concentras en uno o dos puntos.

[Moderador]: Pero vuelvo y te repito, ¿podrías destacar dos aspectos, dos puntos que te gustaron o no, si tuvieses que compararlas con los libros?

[Manuel]: Pero es que me estás pidiendo que compare dos cosas que no son comparables.

[Moderador]: A ver, por ejemplo, en cuanto a la presentación de un tema, el libro tiene una presentación y este material también la tiene.

[Manuel]: Yo puedo destacar lo positivo de esta actividad, la presentación estuvo buena, incluyes gráficos, seleccionas buenos problemas, incluyes fórmulas, me parece que es una buena presentación pero no veo cómo compararlo con los libros.

[Moderador]: ¿y algo negativo de las actividades?

[Manuel]: Mira, no, no veo nada negativo.

5.- **[Moderador]**: En una discusión similar a la realizada con ustedes, algunos profesores consideraron que con una propuesta curricular como ésta, los objetivos que se esperan alcanzar en un curso de cálculo diferencial en ciencias económicas, en el mejor de los casos se alcanzarían de igual forma que con la manera tradicional como ellos presentan sus cursos e incluso, podrían no alcanzarse estos objetivos porque nuestra propuesta podría distraer a los estudiantes. ¿Cuál es tu opinión en este sentido?

[Manuel]: En absoluto, yo creo que no, yo creo que más bien..., este..., incluye o mete al estudiante dentro del problema. Ellos, más bien, esto los motiva, los induce a estudiar, a estudiar más matemática.

6.- **[Moderador]**: En la misma tónica que el punto anterior, hay profesores que consideran esta propuesta curricular como una actividad que puede hacer más dificultoso el aprendizaje en el estudiante. ¿Opinas tú lo mismo o crees que incide de manera positiva en el aprendizaje del estudiante?

[Manuel]: No yo no estoy de acuerdo con eso, yo pienso que es una buena estrategia, la podemos llamar así, de enseñanza o de aprendizaje para el estudiante.

[Moderador]: ¿Y eso por qué?

[Manuel]: Por lo mismo, a los estudiantes de esa carrera una de las cosas que no les llama la atención es la matemática, no sé por qué, pero esto de alguna manera los estimula a aprender la matemática.

7.- **[Moderador]**: ¿Consideras que el estudiante está preparado para asumir un aprendizaje enfocado desde este punto de vista, donde la participación del estudiante es fundamental?

[Manuel]: Sí, a mi me parece esto muy básico, a mi me parece que a este nivel el estudiante puede muy bien dominar todo lo que se trata aquí, pero yo creo que el trabajo del profesor es fundamental, el material puede ser bueno pero sin la ayuda del profesor, el estudiante no llegaría muy lejos. Imagínate un buen libro, si el profesor no orienta al estudiante, si no da la clase, el estudiante queda en el aire.

8.- **[Moderador]**: Siendo reflexivo y autocrítico, ¿consideras que estás preparado para afrontar una enseñanza partiendo de una propuesta curricular como esta? Estrategias (preparación, clase, evaluación), matemático, económico.

[Manuel]: Yo creo que sí, repito, ahí los conocimientos son muy básicos, la parte económica..., tampoco es que necesito mucha información y bueno..., con respecto a la parte matemática por supuesto que me siento preparado, es mi carrera y además son conceptos básicos de la matemática, en cuanto a las estrategias, a la forma de dar la clase..., mis alumnos no se quejan, pienso que lo hago bien.

[Moderador]: (Pregunta improvisada) Esta pregunta no estás obligado a responder. Si yo te pidiera que te hicieras una autoevaluación del 1 al 10, donde 1 es la menor nota y 10 la máxima, en cuanto a conocimiento del contenido económico para estos cursos, ¿cuánto te pondrías tú?

[Manuel]: No sé..., pero por poner un número: 8 o 9.

9.- **[Moderador]**: En cuanto al contenido económico, ¿consideras adecuado que el Departamento cree un espacio de discusión que te permita consolidar conocimientos en esta materia y discriminar las necesidades que tiene el estudiante en el contexto económico?

[Manuel]: Yo estaría de acuerdo, es más, lamenté que no se siguieron haciendo las reuniones de las que hablamos al principio. De hecho, a partir de esa actividad se crearon las comisiones de los cursos, siempre pensando en cómo mejorar la enseñanza, claro que eso por x motivo se ha ido desvirtuando, se comenzó a creer que las comisiones eran una forma de vigilar al profesor, pero en realidad los motivos de las comisiones eran otros. A mi en lo particular, me parece muy positivo, que se trate siempre de mejorar profesionalmente y que el estudiante salga favorecido.

10.- **[Moderador]**: ¿Puedes hacer un comentario libre sobre esta experiencia?

[Manuel]: A mi me gustó mucho..., a mi me gustó mucho, aprendí mucho con estas actividades, vi enfoques diferentes a los que yo trabajo para enseñar el tema de la derivada en general. Además, con estas actividades uno puede conocer el punto de vista de otros colegas, cómo piensa Ramón, cómo piensas tú y al mismo tiempo ustedes escuchan cómo pienso yo, creo que eso es importante, muy bueno.

[Moderador]: Muchas gracias por tu tiempo...

C.2. Entrevista a Ramón

1.- **[Moderador]**: En el tiempo que tienes dentro del Departamento, ¿alguna vez has participado en una actividad como la realizada (por iniciativa del Departamento o de algún profesor en particular)?

1. Sí, ¿cómo fue la experiencia?, ¿qué se hizo?, compara respecto a esta, ¿consideras que realmente valió la pena este espacio de discusión?, ¿incidirá en tu labor docente?
2. No, ¿consideras que realmente valió la pena este espacio de discusión?, ¿incidirá en tu labor docente?

[Ramón]: No, jamás, nunca.

[Moderador]: O sea, ¿que esa actividad que se realizó con Pedro, no está relacionada con ésta?

[Ramón]: En primer lugar, yo no participé y en segundo lugar, no tiene nada que ver con estas cuatro actividades que nosotros efectuamos.

[Moderador]: ¿Consideras que realmente valió la pena este espacio de discusión?

[Ramón]: Sí.

[Moderador]: ¿En qué sentido?

[Ramón]: Bueno, porque ofrece otras alternativas distintas a lo que se dio en estas reuniones de la cual hablas, que se dieron con Pedro, aunque lo que sé de esas reuniones es por comentarios con algunos profesores que participaron, pero en función de lo que me comentaron, esto no tiene nada que ver con aquello.

[Moderador]: ¿Y aparte de lo que se trabajó con Pedro?

[Ramón]: Aparte de eso, de lo que ofrecen los textos, es realmente al revés de lo que explican los textos, o sea, primero hacen la exposición matemática y luego tratan algunas aplicaciones.

[Moderador]: ¿Y eso tiene algún sentido?, ¿tú le conseguiste algún sentido?

[Ramón]: Me parece mucho mejor tu enfoque porque involucra más al estudiante, no solamente porque tiene que ver con su campo de trabajo, con lo que está estudiando, sino que como es una actividad donde se ha señalado, donde hay una estructura de paso por paso, el profesor tiene que estar pendiente que el estudiante haga el paso correctamente o ver la dificultad que tiene el estudiante, eso lo involucra más..., al estudiante.

[Moderador]: ¿Y piensas que incidirá, en tu labor docente, esta actividad de aquí en adelante?

[Ramón]: En la medida de lo posible sí, o sea, recuerda que aun cuando yo he trabajado con cursos de matemáticas para economistas, por el momento estaré desvinculado porque tengo labores administrativas que me tienen alejado de la docencia desde hace tres meses y me tendrán alejado por un año más.

2.- **[Moderador]**: De los problemas planteados y de la forma de estudiar el concepto matemático a partir de estos, ¿recuerdas alguno que te llamó la atención por: su rigor, innovación, presentación, el tema tratado, otro?

[Ramón]: Sí, en la última sesión, donde hablamos de hacer modelos sencillos, yo creo que esa es la parte que es realmente importante, o sea, que es importante; no es que la otra no lo sea, pero es importante porque a mi manera de ver las cosas..., eh..., está enseñando al que va a hacer economía que las matemáticas en realidad son un modelo y cómo..., en realidad es una especie de inicio de cómo hacer modelaje, este..., en economía usando la matemática.

3.- **[Moderador]**: Hoy por hoy, el futuro profesional requiere de unas competencias o de un "conocimiento ideal" para afrontar problemas en su campo laboral, de modo que le permita realizar un trabajo óptimo. ¿Consideras que una propuesta curricular como la discutida, permite generar esas "competencias" que el profesional de hoy necesita, en relación con la forma como actualmente sigues tus clases?

[Ramón]: Mira, yo creo que se llegaría más lejos con lo que tú propones porque como yo lo hacía tradicionalmente, que es primero dar la parte matemática y luego algunos ejercicios de economía donde se usará ese instrumental matemático, ahí simplemente me da la sensación de que solamente lo que se hace es ilustrar nada más el uso de estas herramientas, en cambio como tú lo propones, como dije antes, ya el estudiante se involucra más, sobre todo con esta última parte, que realmente es lo que viene siendo bastante útil en el sentido de esta pregunta, que es desarrollar sus competencias.

4.- **[Moderador]**: En relación con los libros que tú sigues para preparar tus clases, ¿puedes destacar uno o dos aspectos (positivos o negativos) en relación con lo tratado en las cuatro sesiones?

[Ramón]: Yo, honestamente, veo todo positivo, lo de la propuesta. Primero, ya lo mencioné, has hecho una propuesta bastante bien estructurada, paso por paso, cada uno de los problemas tratados. Y en la última sesión, algo que hasta ahora yo no he visto en ninguno de los libros, y es que da como un inicio al estudiante de cómo hacer modelos en economía usando el instrumental matemático.

5.- **[Moderador]**: En una discusión similar a la realizada con ustedes, algunos profesores consideraron que con una propuesta curricular como ésta, los objetivos que se esperan alcanzar en un curso de cálculo diferencial en ciencias económicas, en el mejor de los casos se alcanzarían de igual forma que con la manera tradicional como ellos presentan sus cursos e incluso, podrían no alcanzarse estos objetivos porque nuestra propuesta podría distraer a los estudiantes. ¿Cuál es tu opinión en este sentido?

[Ramón]: Sí, yo lo he manifestado varias veces, que al final de estos problemas deberían hacerse otros ejercicios, problemas de matemática sin ningún contenido de economía para que los estudiantes comprendan que ese instrumental matemático no tiene por qué estar asociado a ciertos problemas de la economía, es el temor que siempre he manifestado; esa es, tal vez, la única parte negativa que yo veo de esta propuesta.

[Moderador]: Pero, ¿tú crees que una propuesta como ésta podría distraer al estudiante?

[Ramón]: No, siempre y cuando se haga lo que te acabo de decir.

6.- **[Moderador]**: En la misma tónica que el punto anterior, hay profesores que consideran esta propuesta curricular como una actividad que puede hacer más dificultoso el aprendizaje en el estudiante. ¿Opinas tú lo mismo o crees que incide de manera positiva en el aprendizaje del estudiante?

[Ramón]: Por la experiencia que yo he tenido, incide de manera positiva, repito, la experiencia que he tenido cuando se le plantean problemas de economía, donde se usen las matemáticas, siempre los estudiantes han respondido bien y, hasta el momento, no he visto que hayan tenido grandes dificultades al manejar ese tipo de problemas donde se encuentra esa mezcla de la economía con la matemática.

7.- **[Moderador]**: ¿Consideras que el estudiante está preparado para asumir un aprendizaje enfocado desde este punto de vista, donde la participación del estudiante es fundamental?

[Ramón]: Por eso es que yo insisto en la forma como tú has estructurado cada uno de los problemas, me parece que han sido los pasos correctos y que cada paso lo puede dar el estudiante por su cuenta. En todo caso, tal vez necesitarían algunos estudiantes una pequeña aclaratoria, o tal vez una discusión de parte del profesor antes de dar cada uno de esos pasos de cada uno de estos problemas.

8.- **[Moderador]**: Siendo reflexivo y autocrítico, ¿consideras que estás preparado para afrontar una enseñanza partiendo de una propuesta curricular como ésta? Estrategias (preparación, clase, evaluación), matemático, económico.

[Ramón]: Sí, porque yo me he tomado el trabajo de averiguar cada uno de los conceptos matemáticos en estos dos últimos años, he leído libros de microeconomía y algunos de macroeconomía, o sea, que en conocimiento de economía, de la economía en sí creo que lo domino para lo que es la asignatura. Yo con esto no estoy diciendo que puedo ocupar el lugar de un economista sino, simplemente, para desarrollar bien las clases. Y en cuanto a esta propuesta, yo la he llevado a cabo pero no en cursos de economía, o sea, de que sea el estudiante el que participe con actividades de paso por paso, no sé cuál será el nombre que le podamos dar a esto.

[Moderador]: (Pregunta improvisada) Esta pregunta no estás obligado a responder. Si yo te pidiera que te hicieras una autoevaluación del 1 al 10, donde 1 es la menor nota y 10 la máxima, en cuanto a conocimiento del contenido económico para estos cursos, ¿cuánto te pondrías tú?

[Ramón]: 8.

9.- **[Moderador]**: En cuanto al contenido económico, ¿consideras adecuado que el Departamento cree un espacio de discusión que te permita consolidar conocimientos en esta materia y discriminar las necesidades que tiene el estudiante en el contexto económico?

[Ramón]: Por supuesto, y eso se intentó hacer hace dos años atrás, lo que pasa es que..., digamos, la persona que estaba ocupada de eso se jubiló y la otra persona perdió el interés, no se siguieron desarrollando estas actividades; de hecho, se está tratando de establecer un convenio con FACES donde uno de los artículos de ese convenio habla de esto en particular, de la pregunta que me acabas de hacer.

10.- **[Moderador]**: ¿Puedes hacer un comentario libre sobre esta experiencia?

[Ramón]: A mi tu propuesta me parece positiva y opino que las clases, no solo de economía sino cualquier curso donde la matemática se use, desarrollarlo de esa forma. Como te dije antes, en los cursos de aquí (facultad de ciencias) que no son tan numerosos, he hecho algo de eso.

[Moderador]: O sea, ¿que tú estarías dispuesto o te gustaría en todo caso participar en una experiencia piloto con una situación o con un material como este?

[Ramón]: ¿En FACES te refieres tú?

[Moderador]: Sí, en FACES porque esta actividad está relacionada con cursos de cálculo para economía.

[Ramón]: Lo que te comenté hace rato, mis planes personales creo que me van a impedir trabajar en un tiempo próximo en FACES.

[Moderador]: Pero, obviemos la parte personal..., ¿crees que valdría la pena apostar por una propuesta como esta?

[Ramón]: Sí valdría la pena, pero siempre y cuando tú estés como especie de director porque, o sea..., de repente..., a pesar de que yo entiendo lo que estás haciendo pueda que otra persona, otro profesor no capte lo que tú estás haciendo, no capte perfectamente cuál es el objetivo.

[Moderador]: Bueno, muchas gracias por tu participación...

C.3. Entrevista a Alexis

1.- **[Moderador]**: En el tiempo que tienes dentro del Departamento, ¿alguna vez has participado en una actividad como la realizada (por iniciativa del Departamento o de algún profesor en particular)?

1. Sí, ¿cómo fue la experiencia?, ¿qué se hizo?, compara respecto a esta, ¿consideras que realmente valió la pena este espacio de discusión?, ¿incidirá en tu labor docente?

2. No, ¿consideras que realmente valió la pena este espacio de discusión?, ¿incidirá en tu labor docente?

[Alexis]: No, sobre esta iniciativa o bueno, sobre lo que hemos estado haciendo estos días o sobre las cuatro reuniones que hemos hecho, no, pero sí estuve en una parte de didáctica, pero sobre técnicas de cómo dar clases, fueron unos talleres promovidos por la universidad donde se trató: cómo introducir una clase, cómo discutir con los estudiantes, cómo cerrar una clase, algunos *tips* sobre evaluación, pero con enseñanza de la matemática, propiamente, no.

[Moderador]: ¿Y consideras que realmente valió la pena este espacio de discusión?

[Alexis]: Particularmente, para mi, sí queda algo de..., a pesar de que no es mi área de investigación que es ecuaciones diferenciales, me parece que es interesante y queda algo en uno, porque discutimos sobre un punto con el que uno se enfrenta día a día, uno trabaja con esto y nunca discute más allá de una reunión de pasillo, pero de lo que más se habla es del rendimiento de los estudiantes.

[Moderador]: O sea, que de alguna manera ¿esto podría incidir en tu labor como docente?

[Alexis]: Sí, aquí se discutieron cosas interesantes, cosas que me gustaron, que nunca lo había visto así y de pronto..., uno no sabe si puede tomar esta línea de investigación y hacer algo sobre esto, yo te lo he dicho.

2.- **[Moderador]**: De los problemas planteados y de la forma de estudiar el concepto matemático a partir de éstos, ¿recuerdas alguno que te llamó la atención por: su rigor, innovación, presentación, el tema tratado, otro?

[Alexis]: Me llamó la atención la presentación de la derivada enfocada directamente con los problemas, las aplicaciones..., la parte de cómo llegar al estudiante..., cómo es..., la definición de derivada usando modelos económicos, yo creo que eso permite meter al estudiante en el asunto de una vez.

3.- **[Moderador]**: Hoy por hoy, el futuro profesional requiere de unas competencias o de un “conocimiento ideal” para afrontar problemas en su campo laboral, de modo que le permita realizar un trabajo óptimo. ¿Consideras que una propuesta curricular como la discutida, permite generar esas “competencias” que el profesional de hoy necesita, en relación con la forma como actualmente sigues tus clases?

[Alexis]: Yo creo que sí, indudablemente al estudiante le queda bastante, pienso que el estudiante aprendería más y me parece bastante innovador.

[Moderador]: Pero si te tocara comparar esta propuesta con la forma que tú sigues actualmente, ¿qué me dirías?

[Alexis]: Esta es la primera vez que yo tengo una discusión formal sobre la parte de didáctica de las matemáticas, sabes que nosotros estamos formado en la parte de matemática pura y siempre se tiene la idea de los problemas en abstracto y se deja a un lado la parte de didáctica; pero teniendo contacto con alguien que haga cuestiones de didáctica de las matemáticas pero aplicadas a la parte de educación universitaria, porque aquí hay profesores que investigan en esa línea pero en educación básica o muy básica, a nivel de primaria. Entonces, una discusión sobre temas con los que uno trabaja me parece interesante y en este caso, yo creo que con este material se puede lograr un buen trabajo con los estudiantes, es distinto a lo que yo normalmente hago, se puede aprovechar mucho.

[Moderador]: De acuerdo, pero vamos a centrarnos en la pregunta, ¿tú crees que con un material como éste se puede alcanzar el mismo conocimiento que con el material que tú sigues en clase y con la forma como tú das tus clases?

[Alexis]: Bueno, eso depende. Este material te obliga a estudiar, tienes que estudiar más conceptos de economía para poder enseñar con tu material, yo los problemas que hago son muy básicos, entonces creo que aquí hay más contenido de economía y el estudiante aprendería más, el problema es que yo no soy economista, tampoco tengo por qué saber todos los conceptos de economía; tú porque estás trabajando en esto.

4.- **[Moderador]**: En relación con los libros que tú sigues para preparar tus clases, ¿puedes destacar uno o dos aspectos (positivos o negativos) en relación con lo tratado en las cuatro sesiones?

[Alexis]: Mira, yo trabajo con el Hoffmann y con el Arya (& Lardner), uno lo refleja de una manera el otro lo refleja de otra, creo que el Arya es más didáctico, a pesar que trabaja la parte de matemática de una manera más formal, creo que es más didáctico que el Hoffmann, el Hoffmann es más fuerte en la parte matemática.

[Moderador]: Pero, supongamos que tienes que criticar este material, decir algo positivo o negativo respecto a los libros con los que trabajas, ¿qué dirías?

[Alexis]: A mi me parece que este material es más didáctico que como lo trabajan los libros, por la misma razón de que aquí no se está haciendo matemática..., bueno sí se está haciendo pero no con el rigor de algunos libros, tú lo que haces es más aplicado, se le ve más el sentido de lo que se está haciendo matemáticamente hacia la rama de la economía, los libros son más rigurosos.

[Moderador]: ¿Algún otro aspecto a destacar, bueno o malo?

[Alexis]: Lo que discutimos con el dominio, uno sabe lo que es matemáticamente el dominio de una función pero cuando habla en economía el dominio es otro, el dominio puede ser discreto, aunque yo, sinceramente, no hago esta diferencia en mis clases, los libros tampoco lo mencionan, ese enfoque no lo dicen los libros.

[Moderador]: ¿Y alguna crítica dura sobre esta propuesta, ves algo negativo?, quiero que seas lo más sincero posible, no te guardes cosas, para mi es muy valioso.

[Alexis]: No, no, te estoy hablando con sinceridad, a pesar de que al principio lo vi más como un compromiso contigo, después me sentí a gusto por los temas tratados, yo pensé que hablaríamos de otra cosa y me terminaron gustando las reuniones. A pesar que soy renuente a la parte didáctica, me parece que esto resultó interesante para mi.

5.- **[Moderador]**: En una discusión similar a la realizada con ustedes, algunos profesores consideraron que con una propuesta curricular como ésta, los objetivos que se esperan alcanzar en un curso de cálculo diferencial en ciencias económicas, en el mejor de los casos se alcanzarían de igual forma que con la manera tradicional como ellos presentan sus cursos e incluso, podrían no alcanzarse estos objetivos porque nuestra propuesta podría distraer a los estudiantes. ¿Cuál es tu opinión en este sentido?

[Alexis]: Yo no creo, yo creo que con esta propuesta, a pesar de que..., bueno..., lo enfocaba o lo enfoco con una matemática un poco más rigurosa que como la estás enfocando tú; sin embargo, me parece que metiendo al estudiante de una vez, introduciendo los conceptos de la economía, de la contaduría o de la administración formal, como tú lo estás haciendo, yo creo que debe quedarle más al estudiante que con las cuentas que uno hace en la derivada y después con las aplicaciones. Me parece que si uno va de una vez a los conceptos básicos de ganancia, ingreso, etc., resulta muy bien para estos estudiantes y es interesante a la vez porque el estudiante aprende dónde..., cómo utilizar la derivada en problemas concretos.

6.- **[Moderador]**: En la misma tónica que el punto anterior, hay profesores que consideran esta propuesta curricular como una actividad que puede hacer más dificultoso el aprendizaje en el estudiante. ¿Opinas tú lo mismo o crees que incide de manera positiva en el aprendizaje del estudiante?

[Alexis]: A mi me parece que actúa de manera positiva, si uno ve que el cambio es para bien, me parece que habría que ponerlo en práctica para poder emitir una opinión, sirve o no sirve.

7.- **[Moderador]**: ¿Consideras que el estudiante está preparado para asumir un aprendizaje enfocado desde este punto de vista, donde la participación del estudiante es fundamental?

[Alexis]: El estudiante no está preparado, pero como lo dije en una de las reuniones, si uno comienza desde Matemática 1 con problemas de este tipo y lo va llevando a este tipo de situaciones creo que él se va preparando para esto, pero si pretendes enseñarle el tema de la derivada sin una experiencia previa el estudiante se llevará un choque, un choque muy fuerte; un poco como lo que pasa aquí, que muchos profesores lo que hacen es dar un curso de cálculo tradicional, como si fuese de ingeniería, después cuando uno les habla a los estudiantes de algunas aplicaciones, quedan en el aire.

8.- **[Moderador]**: Siendo reflexivo y autocrítico, ¿consideras que estás preparado para afrontar una enseñanza partiendo de una propuesta curricular como ésta? Estrategias (preparación, clase, evaluación), matemático, económico.

[Alexis]: De estar preparado en un sentido amplio, te puedo decir..., este...

[Moderador]: Vamos a diferenciar, por ejemplo en el contenido matemático, ¿tu consideras que estás preparado matemáticamente?

[Alexis]: Sí estoy bien preparado, recuerda que yo estudié en una facultad de ciencias.

[Moderador]: De acuerdo, ¿y económicamente te consideras preparado?

[Alexis]: Ahora sí..., es decir, desde hace unos dos o tres años para acá que me puse a leer los libros de aplicaciones.

[Moderador]: O sea, ¿consideras que tienes conocimientos sólidos en economía?

[Alexis]: Sí, más o menos, pero al principio cuando comencé a trabajar con esto no sabía nada, no sabía qué era costo, ingreso, nada. Sin embargo, cuando yo me dediqué a dar las clases me tuve que poner a estudiar y sí le dediqué buena parte del tiempo a preparar las clases y a preparar problemas también, para poder discutirlos. Ahora sí creo que tengo un conocimiento amplio porque he trabajado.

[Moderador]: (Pregunta improvisada) De acuerdo, y por ejemplo, si yo te pidiera que te hicieras una autoevaluación del 1 al 10, donde 1 es la menor nota y 10 la máxima, en cuanto a conocimiento del contenido económico para estos cursos, ¿cuánto te pondrías tú?

[Alexis]: Yo creo que lo justo sería: 6 o 7.

[Moderador]: Y en cuanto a las estrategias a seguir para preparar una clase, para darla, para evaluar, ¿tú consideras que estás preparado para ello?

[Alexis]: Mira, si es para dar una clase con tu material creo que me siento preparado, en el peor de los casos, me pondría a estudiar a fondo el material.

9.- **[Moderador]**: En cuanto al contenido económico, ¿consideras adecuado que el Departamento cree un espacio de discusión que te permita consolidar conocimientos en esta materia y discriminar las necesidades que tiene el estudiante en el contexto económico?

[Alexis]: Mira, el Departamento necesita mucha ayuda de muchas cosas, sobre todo, aquí hay una apatía muy enorme, eso creo que lo sabes tú tanto como yo. Si uno hace un grupo de estudio sobre esto, yo creo que a uno le debe ir mejor en las clases, pero aquí es muy difícil reunir a la gente, aunque yo sé que hay gente interesada, pero bueno sería una propuesta del Departamento más que de uno mismo.

10.- **[Moderador]**: ¿Puedes hacer un comentario libre sobre esta experiencia?

[Alexis]: Me parece de bastante agrado lo que hicimos, a pesar de que a mi no me llama mucho la atención esto de la didáctica me pareció bastante agradable todas las discusiones y quedó demostrado que nos podemos reunir para discutir de estos temas, pero en general fue muy productiva.

[Moderador]: Bueno, muchas gracias por tu participación...

C.4. Entrevista a Elio

1.- **[Moderador]**: En el tiempo que tienes dentro del Departamento, ¿alguna vez has participado en una actividad como la realizada (por iniciativa del Departamento o de algún profesor en particular)?

1. Sí, ¿cómo fue la experiencia?, ¿qué se hizo?, compara respecto a esta, ¿consideras que realmente valió la pena este espacio de discusión?, ¿incidirá en tu labor docente?
2. No, ¿consideras que realmente valió la pena este espacio de discusión?, ¿incidirá en tu labor docente?

[Elio]: No, como profesor no, no recuerdo haber participado en algo así.

[Moderador]: ¿Y consideras que realmente valió la pena este espacio de discusión?

[Elio]: Por supuesto que sí, a mi, particularmente, me agradó mucho este tipo de reuniones, este tipo de cosas..., y ojalá que se pudieran seguir haciendo, porque yo soy de los que siempre he dicho que la matemática debería dirigirse en ese sentido, tal vez porque tenga mis raíces, yo no soy licenciado en matemáticas sino licenciado en educación, mención matemáticas. Entonces, quizás, me preocupa el enfoque que le estamos dando muchas veces a esos contenidos.

[Moderador]: ¿Tú crees que de aquí en adelante estas reuniones incidirán en tu labor como docente?

[Elio]: En la mía sí, particularmente yo la veo muy positiva, al menos yo voy a sacarle el mayor provecho, de hecho, ya guardé muchos de los problemas, los análisis los recolecté por allí..., con el permiso del autor, por supuesto.

[Moderador]: Tranquilo, para eso es, aunque de momento no hay autores para ese material, por el momento es un grupo de trabajo.

2.- **[Moderador]**: De los problemas planteados y de la forma de estudiar el concepto matemático a partir de éstos, ¿recuerdas alguno que te llamó la atención por: su rigor, innovación, presentación, el tema tratado, otro?

[Elio]: Me llamó la atención, bueno los primeros casi no los recuerdo, pero me llamó más la atención, tal vez porque lo tengo más fresco, porque era el tema más completo..., fue el que discutimos en la penúltima sesión, el de la regla de la cadena. Sí, porque yo pensaba que tal vez sería más complicado mostrar un problema de ese tipo para introducir la regla de la cadena..., bueno, yo no lo había enfocado directamente así en mis clases, eso de aplicar un problema o plantearlo y a partir de ese problema, introducir la regla de la cadena, quizás no lo veía muy fácil, no era difícil pero no lo había planteado así. Entonces, me llamó la atención ese y también el problema de ayer, que combinaba estrategias de aplicación pero también la parte matemática que estaba siendo reforzada con una función muy particular, incluía unas constantes muy curiosas.

3.- **[Moderador]**: Hoy por hoy, el futuro profesional requiere de unas competencias o de un "conocimiento ideal" para afrontar problemas en su campo laboral, de modo que le permita realizar un trabajo óptimo. ¿Consideras que una propuesta curricular como la discutida, permite generar esas "competencias" que el profesional de hoy necesita, en relación con la forma como actualmente sigues tus clases?

[Elio]: Mira, yo de alguna manera, he tratado de enfocar mis clases en ese sentido, lo que pasa es que, por cuestiones que hemos discutido en las propias reuniones, cuestiones como el tiempo, los cursos mismos, me refiero a lo extenso de los programas, conflictos de los estudiantes, manifestaciones estudiantiles, tantas cosas que se presentan que no le permiten a uno desarrollar el curso como uno quisiera, con la mayor normalidad posible. Entonces, si el tiempo lo permitiera y lo permitieran las otras cosas yo sí que encaminaría mis cursos más desde este punto de vista, de las aplicaciones y de las matemáticas enfocando las dos cosas al mismo tiempo.

[Moderador]: De acuerdo, pero volviendo a la pregunta, ¿crees que con el material discutido se puede lograr un conocimiento ideal en los estudiantes o crees que se descuidan algunas cosas?

[Elio]: Vuelvo y te repito, yo creo que las clases deberían enfocarse de esta manera, el problema es el tiempo y las otras cuestiones. A mi me parece que enfocar las matemáticas y las aplicaciones al mismo tiempo es muy apropiado para alcanzar ese conocimiento ideal del que tú hablas.

4.- **[Moderador]**: En relación con los libros que tú sigues para preparar tus clases, ¿puedes destacar uno o dos aspectos (positivos o negativos) en relación con lo tratado en las cuatro sesiones?

[Elio]: Los libros que yo normalmente utilizo para trabajar con esta gente, pues..., tienen un enfoque más hacia lo que es la matemática y cuando hacen aplicaciones, como decía Alexis en una de las reuniones, ellos se encargan de hacer primero todo el contenido matemático, tratando de crear destreza en el estudiante o en el lector para después llegar a las aplicaciones, pero no con el enfoque que nosotros hemos hecho; en estas reuniones lo que se trató fue de llevar a la par tanto el contenido matemático como el económico y llevar de la mano esas dos cosas no es fácil, creo yo, pero eso me gusta.

[Moderador]: Entonces, en resumen, ¿qué aspectos podrías destacar tú, positivos o negativos, del material?

[Elio]: Bueno, tal vez para lo que nosotros hicimos que fue matemáticas aplicadas a la administración y la economía, tal vez yo he visto algunos libros que dedican más a las demostraciones con la formalidad, con el rigor matemático, yo le restaría eso y me dedicaría más a problemas específicos, tratando de usar las herramientas, los teoremas sin necesidad de demostrarlos...

[Moderador]: Un momento Elio, no critiques el libro, en todo caso critica el material.

[Elio]: Como me dijiste aspectos positivos o negativos.

[Moderador]: Pero no de los libros.

[Elio]: Ok, en la primera reunión lo que no me pareció adecuado, mi sugerencia, es la parte mucho cálculo, mucho cálculo numérico podría crear rechazo o conducir a un error por parte del estudiante, sé que es necesario porque es la única manera que él tiene de ver a lo que se quiere llegar, cuál es el comportamiento de la función, pero será por la experiencia que he tenido con los estudiantes que el exceso de cálculo produce una especie de temor en ellos, de rechazo, no les gusta hacer mucho cálculo ni aún con las máquinas y es paradójico porque cuando los pones a pensar y no a calcular tampoco les gusta, no encuentro qué hacer con ellos.

[Moderador]: ¿Algo más que no veas bien o algo que te guste?

[Elio]: Algo que tampoco vi muy bien es que no aparecen las definiciones formales, yo pienso que uno no se puede saltar las definiciones formales, a fin de cuenta es un curso de cálculo. En ningún momento vi una definición formal aun cuando sí llegas a ellas, no las identificas como definición "tal", yo pienso que se deben resaltar las definiciones.

5.- **[Moderador]**: En una discusión similar a la realizada con ustedes, algunos profesores consideraron que con una propuesta curricular como ésta, los objetivos que se esperan alcanzar en un curso de cálculo diferencial en ciencias económicas, en el mejor de los casos se alcanzarían de igual forma que con la manera tradicional como ellos presentan sus cursos e incluso, podrían no alcanzarse estos objetivos porque nuestra propuesta podría distraer a los estudiantes. ¿Cuál es tu opinión en este sentido?

[Elio]: Al contrario, creo yo que en lugar de distraer a los estudiantes, creo que permitiría más bien adentrarlos con mayor propiedad a lo que es el asunto, están tocándose los intereses muy particulares de ellos, o sea, ellos están estudiando carreras como economía, administración y le están poniendo un problema muy particular sobre su área, yo creo que en lugar de distraerlo lo que puede hacer es, este..., involucrarlos mucho más. Tal vez donde se puedan distraer un poco es por el contenido matemático, el rigor matemático, la formalidad matemática, eso pudiera distorsionarlos un poco, pero aquí no se tratan las cosas con esa formalidad, ya te lo comenté en algún momento.

6.- **[Moderador]**: En la misma tónica que el punto anterior, hay profesores que consideran esta propuesta curricular como una actividad que puede hacer más dificultoso el aprendizaje en el estudiante. ¿Opinas tú lo mismo o crees que incide de manera positiva en el aprendizaje del estudiante?

[Elio]: Yo considero que tiene que ser positivo porque el aprendizaje tiene que ser, como dicen algunos expertos en la materia, un aprendizaje significativo. Yo estoy seguro, me atrevo a garantizar, que este tipo de problemas, analizándolos desde el punto de vista de los intereses personales del estudiante, tratando de llevarlos de la manera como se trabajaron en las sesiones anteriores, yo pienso que puede generar mayor aprendizaje significativo que es el que en realidad importa.

[Moderador]: ¿A qué te refieres con aprendizaje significativo?

[Elio]: Es un aprendizaje que no es para el momento, no es el de aprobar el examen y listo; es el que permanece en el estudiante y le va a permitir resolver problemas en un futuro, y ese aprendizaje se logra construyéndolo poco a poco; como trabajamos el concepto de derivada.

7.- **[Moderador]**: ¿Consideras que el estudiante está preparado para asumir un aprendizaje enfocado desde este punto de vista, donde la participación del estudiante es fundamental?

[Elio]: No creo que el estudiante esté preparado, no lo veo preparado, al estudiante le gusta que le des todo, yo creo que el estudiante debería tener una preparación desde que inicia la universidad, pero eso cuesta mucho trabajo, a ellos no le gusta participar, se salen con mucha frecuencia de clase y eso no les hace participativo, están los que dependen de los apuntes de otros. En lo que sí hay que estar claro es que si uno quiere implementar un material como este hay que hablar con el estudiante y, casi que, pedirle su colaboración.

8.- **[Moderador]**: Siendo reflexivo y autocrítico, ¿consideras que está preparado para afrontar una enseñanza partiendo de una propuesta curricular como ésta? Estrategias (preparación, clase, evaluación), matemático, económico.

[Elio]: Cuando uno habla de estrategias, uno podría decir que está preparado pero eso depende mucho del curso, eso va a depender del curso, como esté avanzando. De pronto tienes una clase montada con una estrategia y te surge algo inesperado y te cambian los planes y te encuentras que no hay estrategias para esa situación o mejor dicho, que uno no maneja una estrategia para ese caso. Pero, en general, no creo que esté totalmente preparado para seguir este material, por eso sería bueno seguir con este tipo de discusiones, escuchar a los que están más metido en esto.

[Moderador]: ¿Y en cuanto al contenido matemático?

[Elio]: Matemáticamente, yo creo que sí, es mi preparación, yo estudié matemática y aún cuando tenga algunas deficiencias matemáticas, a este nivel yo considero estar bien preparado, ahora si hablamos de topología, álgebra abstracta, análisis funcional, etc., creo que presento algunas fallas.

[Moderador]: ¿Y en cuanto al contenido económico?

[Elio]: La preparación que tengo en este sentido es porque he tenido que estudiarla por mi cuenta, cuando yo estudié no vi nada de eso y, tal vez, no era necesario para mi formación; pero una vez que he tenido que dictar estos cursos me he visto en la tarea de estudiar y cada vez que leo libros de aplicaciones, aparecen conceptos nuevos que no conozco o no conocía, entonces me parece que me falta, me falta conocer más sobre lo que es la economía.

[Moderador]: (Pregunta improvisada) Si yo te pidiera que te hicieras una autoevaluación del 1 al 10, donde 1 es la menor nota y 10 la máxima, en cuanto a conocimiento del contenido económico para estos cursos, ¿cuánto te pondrías tú?

[Elio]: Si me tocara ponerme una calificación en este momento, quizá me aplazaría porque no recuerdo algunos conceptos de la economía como elasticidad de la demanda, propensión al ahorro o al consumo; pero a la hora de preparar una clase yo me documentaría y solventaría todas esas dudas. Yo me pondría un 7, tal vez un 8.

9.- **[Moderador]**: En cuanto al contenido económico, ¿consideras adecuado que el Departamento cree un espacio de discusión que te permita consolidar conocimientos en esta materia y discriminar las necesidades que tiene el estudiante en el contexto económico?

[Elio]: Si eso se hiciera, pienso que un punto de partida, podría ser, tratar de coordinar mejor..., hacer una especie de coordinación entre el Departamento de Ciencias Económicas y nuestro Departamento, es decir, a parte de estar de acuerdo pienso que debería haber una conexión más estrecha con el Departamento de Economía, para qué, para que nos den esos conocimientos que nos falta a nosotros sobre los conceptos económicos, qué significa la elasticidad para quienes no lo dominan o no lo dominamos. De hecho, en ese Departamento se dictan unas materias donde se trabajan muchos problemas de este tipo pero con otros métodos o analizados de otra forma..., pero sí que estaría de acuerdo y tal vez no solamente en economía, en las otras áreas también.

10.- **[Moderador]**: ¿Puedes hacer un comentario libre sobre esta experiencia?

[Elio]: Pues para mi fue una experiencia bien agradable.

[Moderador]: Te pido la máxima honestidad, la mayor sinceridad.

[Elio]: Con toda honestidad, como te digo..., de repente porque mi formación ha sido en educación y a uno de alguna manera en esa formación que he tenido, he aprendido algunas cosas que son relevantes en el momento de..., no solamente con los contenidos matemáticos, sino de cómo evaluarlos, cómo enseñar, cómo aprender, entonces uno también aprende en ese sentido. Entonces a mi me pareció una experiencia bien agradable, claro con los detalles que hay que salvar, por supuesto, en las mismas reuniones establecemos algunas cosas que sugerimos que podían mejorarse o no y en mi caso, yo soy de los ya no tan nuevo, ya tengo cinco años en el Departamento, pero comparado con la experiencia de Kenya o de Alexis, reuniones como estas son interesantes, uno aprende cada vez más de otras personas. Además, el saber que hay personas que están trabajando en esto me motiva mucho más, yo realmente no sabía que estabas trabajando con esto tan a fondo, tus correos eran muy generales y el trabajo anterior no me llamó mucho la atención, eso de tú mandar un cuestionario y no verte la cara para discutir no le di mucho interés.

[Moderador]: Bueno, muchas gracias Elio por tu colaboración en este momento...

C.5. Entrevista a Kenya

1.- **[Moderador]**: En el tiempo que tienes dentro del Departamento, ¿alguna vez has participado en una actividad como la realizada (por iniciativa del Departamento o de algún profesor en particular)?

1. Sí, ¿cómo fue la experiencia?, ¿qué se hizo?, compara respecto a esta, ¿consideras que realmente valió la pena este espacio de discusión?, ¿incidirá en tu labor docente?

2. No, ¿consideras que realmente valió la pena este espacio de discusión?, ¿incidirá en tu labor docente?

[Kenya]: No, realmente es la primera vez, si acaso alguna reunión pero fue para programar exámenes con profesores que atendían el mismo curso, en este caso, de estudiantes de administración y economía de Matemáticas 2, se elaboró un programa único para que los profesores lo administraran durante ese semestre y llegamos a planificar sólo los exámenes parciales.

[Moderador]: ¿Y consideras que realmente valió la pena este espacio de discusión?

[Kenya]: Claro, claro, desde varios puntos de vista, por ejemplo, desde el punto de vista de tu trabajo creo que nosotros hemos aportado nuestro grano de arena y también, bueno..., en cuanto a mi formación, contribuyó a plantearme dudas interrogantes o cuestiones que realmente nunca me las había planteado y a reflexionar sobre algunas situaciones..., bueno que están allí latentes pero que a veces uno como que no las percibe.

[Moderador]: ¿Y podrías ser más específica?, por ejemplo, con eso de que antes no te habías planteado cosas y que a partir de las reuniones te las planteaste o te las plantearás, ¿cuáles serían en concreto, si es posible?

[Kenya]: Bueno..., este..., por ejemplo, recuerdo lo más reciente, la cuestión de la regla de la cadena, eso de tratar de plantearla a través de..., o mostrando su necesidad, lo de los dominios tampoco me lo había planteado; bueno..., la cuestión del dominio sí pero muy superficial, no hacía mayor énfasis en esas cuestiones... Se me escapan por el momento muchas cuestiones que discutimos aquí que realmente no me las había planteado antes, pero que de alguna manera están recogidas en el ciclo de entrevistas que realizamos.

[Moderador]: ¿Y esto significa que va a incidir en tu labor docente de ahora en adelante?

[Kenya]: Yo aspiro que sí, si no en su totalidad, no porque no esté de acuerdo con tu propuesta sino porque a veces hay factores que..., factores ajenos a nuestra propia voluntad que nos impiden, realmente, tratar de hacer una mejor labor docente y este..., pero el ánimo está en tratar de hacer cosas que vayan en beneficio de los estudiantes y de la misma satisfacción profesional.

2.- **[Moderador]**: De los problemas planteados y de la forma de estudiar el concepto matemático a partir de estos, ¿recuerdas alguno que te llamó la atención por: su rigor, innovación, presentación, el tema tratado, otro?

[Kenya]: Bueno..., realmente ya ha pasado como un mes desde que hicimos la primera sesión y lo más inmediato que tengo es la última sesión, a mi me parece que los problemas son bastante interesantes de tratar, yo creo que cada uno..., por ejemplo, en la última actividad que trabajaste sobre la regla de la cadena, cada uno aporta algo. Tú preguntabas en el cuestionario que nos mandaste a llenar, que por cuál optaría, realmente para mi fue muy difícil tomar una decisión porque me pareció que cada uno tenía algo bueno que aportar que no aportaba el otro...

[Moderador]: Eran como complementarios...

[Kenya]: Sí, eran como complementarios entonces yo pensé más bien en tomar algo del segundo problema y complementarlo con algunas actividades del primero porque, por ejemplo, en el primer problema trabajas el dominio y otras cosas, pero en el segundo ya no te dedicas al dominio y en el tercero haces más hincapié en la parte de..., en qué unidades de medida están dadas las cantidades que se piden. A mi me parece que conjuntar todo eso en un sólo problema también valdría la pena para enriquecerlo.

3.- **[Moderador]**: Hoy por hoy, el futuro profesional requiere de unas competencias o de un "conocimiento ideal" para afrontar problemas en su campo laboral, de modo que le permita realizar un trabajo óptimo. ¿Consideras que una propuesta curricular como la discutida, permite generar esas "competencias" que el profesional de hoy necesita, en relación con la forma como actualmente sigues tus clases?

[Kenya]: Yo pienso que la propuesta es bastante significativa y muy diferente de lo que usualmente nosotros hacemos en la universidad, este..., y pienso que sí prepara al estudiante para su formación porque, justamente, es una matemática orientada a su formación profesional. Además, más que un conocimiento académico lo que se persigue es una matemática como herramienta para utilizarla en su campo profesional, entonces yo creo que sí, que lo hace de modo significativo.

4.- **[Moderador]**: En relación con los libros que tú sigues para preparar tus clases, ¿puedes destacar uno o dos aspectos (positivos o negativos) en relación con lo tratado en las cuatro sesiones?

[Kenya]: Una de las cuestiones positivas es que estos libros están adaptados a los estudiantes de administración o de economía y en cierta forma tratan de concentrar problemas de ese tipo, eso es una ventaja que los hace distinguir de otros libros de cálculo.

[Moderador]: Pero yo me refiero a lo siguiente, si comparas este material con los libros que tú usas.

[Kenya]: Realmente tu propuesta es distinta, por lo general los libros, bueno..., estos que están adaptados a estos estudiantes, cuando mucho realizan una pequeña introducción motivando al estudiante en cuanto a la utilidad que va a tener esta matemática para su campo profesional pero inmediatamente caen ya al contexto matemático para después aplicarlo; yo veo que tu propuesta procede al revés, utilizas situaciones de problemas en el contexto de interés para ellos para después caer en el concepto matemático y esto me parece muy significativo.

[Moderador]: ¿Sólo destacas eso o hay otra cosa que, por ejemplo, no te haya gustado en los contextos matemático o económico o como estrategia didáctica?

[Kenya]: Bueno, la estrategia didáctica en ese sentido está dada porque estás planteando un enfoque de la enseñanza basada en la resolución de problemas, entonces se puede decir que allí abordas dos cuestiones, no sólamente contextualizas una situación, que se supone de interés para estos estudiantes sino que a la vez este estudio te permite introducir las nociones matemáticas, cuestión que por lo general no hacen los libros.

[Moderador]: ¿Y algo negativo respecto a la propuesta?

[Kenya]: Bueno, no sería negativo sino quizás sería por el esquema que uno tiene de enseñanza y de la forma que uno por lo general aborda este tema específico de la derivada junto con sus aplicaciones; tal vez en el orden como planteas las cuestiones ahí, pero yo creo que ya es cuestión de un hábito arraigado en mi y no como un defecto de la propuesta.

5.- **[Moderador]**: En una discusión similar a la realizada con ustedes, algunos profesores consideraron que con una propuesta curricular como ésta, los objetivos que se esperan alcanzar en un curso de cálculo diferencial en ciencias económicas, en el mejor de los casos se alcanzarían de igual forma que con la manera tradicional como ellos presentan sus cursos e incluso, podrían no alcanzarse estos objetivos porque nuestra propuesta podría distraer a los estudiantes. ¿Cuál es tu opinión en este sentido?

[Kenya]: Eso es muy relativo, yo pienso que..., yo siempre he partido que..., siempre he estado convencida que el estudiante aprende más haciendo, no importa la edad, no es escuchando u oyendo al profesor que..., no es que no vaya a aprender, pero hasta qué punto la calidad de su aprendizaje va a ser mejor. Así que con una propuesta donde el protagonista de la historia sea él a través de la facilitación del docente; yo estoy convencida de que el estudiante obtiene mejor aprendizaje si el mismo intenta hacer la construcción del objeto de estudio, en este caso, por ejemplo, la derivada que si tú se la das.

[Moderador]: ¿Y piensas que los objetivos se cubrirían de igual manera?

[Kenya]: Si vamos a hablar de que se van a cubrir de igual manera..., los objetivos se van a alcanzar bien por un procedimiento o por otro, el problema estriba en el proceso seguido para alcanzarlo porque, obviamente, desde un modelo de enseñanza tradicional hay un punto inicial y un punto final, pero lo que ocurre entre ese punto inicial y ese punto final, que serían los resultados, no es importante; si se alcanzó es importante pero el cómo no importa. Pero en cambio, en una propuesta como la tuya importan los procedimientos seguidos, o sea, yo pienso que aquí se habitúa, sobre todo cuando tenemos estudiantes que no están acostumbrados a pensar, que no están acostumbrados a abordar problemas, eso genera una dificultad..., el introducir una propuesta de este tipo, pero no por eso significa que nos vamos a cruzar de brazos y no hacer nada, se obliga al estudiante a pensar; no se obliga porque tampoco hay que hablar de obligar pero sí se induce más bien que él piense, analice, reflexione. Que no se trata, simplemente, de orientar la materia hacia el mero cálculo sino, sencillamente, de ver de dónde surgen los conceptos y cómo estos pueden ser utilizados para resolver problemas de interés para ellos, pienso que se alcanzan los objetivos, tal vez requiera un poco de inversión de tiempo y de esfuerzo, pero creo que se obtiene un mejor aprendizaje.

6.- **[Moderador]**: En la misma tónica que el punto anterior, hay profesores que consideran esta propuesta curricular como una actividad que puede hacer más dificultoso el aprendizaje en el estudiante. ¿Opinas tú lo mismo o crees que incide de manera positiva en el aprendizaje del estudiante?

[Kenya]: Yo creo que al principio sí pudiera tratar de crear algún conflicto, pero todo cambio genera conflicto. Nosotros como personas, cuando estamos acostumbrados a hacer alguna cosa de algún modo, pues..., generalmente somos propensos a rechazar el cambio o no nos es tan fácil aceptar el cambio y eso nos produce conflicto y eso también va a ocurrir en los estudiantes; pero bueno, esa es una etapa necesaria por la que uno tiene que pasar. Decía yo ayer, creo, que el conflicto es necesario porque bien encausado puede ser el motor del cambio, y si al principio puede causar dificultades tanto al profesor como al estudiante yo pienso que, progresivamente, mientras nos acostumbramos a ambos al desarrollo diario de una propuesta como esta, esas dificultades tienen que ir disminuyendo. A la final, lo que importa es la calidad de los aprendizajes que obtienen los estudiantes, yo creo que vale la pena hacer ese cambio a pesar de las dificultades. A mi me parece como una posición negativa de esas personas que piensan..., dificultades las hay, es más, todavía con la enseñanza tradicional el alumno presenta demasiadas dificultades y sin embargo no hacemos nada, entonces es como paradójico, entonces es como preferible; aún cuando se presenten dificultades, tratar de desarrollar una propuesta que realmente incida en aprendizajes de más alta calidad que los que se pueden obtener por otra vía.

7.- **[Moderador]**: ¿Consideras que el estudiante está preparado para asumir un aprendizaje enfocado desde este punto de vista, donde la participación del estudiante es fundamental?

[Kenya]: Yo pienso que, en principio, no, no está preparado, pero..., te repito lo mismo de ahora, hay que empezar. Entonces, poco a poco, el estudiante va como soltándose y va tomando la dinámica del curso y llegará el momento en el que, realmente, él sea el protagonista en la clase y se comprometa a tener que trabajar y participar y no a esperar, cuando entra a clases, que quien va a trabajar es el profesor. Al principio puede ser un poco tedioso, pero poco a poco, conforme se vayan dando las cosas, el alumno va a tener que asumir su compromiso, su responsabilidad, nos apoyamos mucho en el aspecto motivacional; por cierto, ese puede ser un aspecto positivo dentro de tu propuesta, que atiende esta parte motivacional. Si el alumno, realmente, está en disposición de aprender yo creo que puede asumir la responsabilidad que le corresponde como estudiante que sabe que se está preparando para una profesión y que sabe que en el mundo profesional no va a actuar con el papel que actualmente hace, ahí se produce un cambio de rol, de ser pasivo va a tener que ser activo. Bueno..., y por qué no lo hacemos activo de una vez en la universidad.

8.- **[Moderador]**: Siendo reflexiva y autocrítica, ¿consideras que estás preparada para afrontar una enseñanza partiendo de una propuesta curricular como esta? Estrategias (preparación, clase, evaluación), matemático, económico.

[Kenya]: Yo me atrevería, con lo que yo sé me atrevería a abordar un proyecto de esta naturaleza...

[Moderador]: Pero, ¿consideras que estás preparada?

[Kenya]: Sí, yo me considero preparada, aunque sí me gustaría algo así como discutir algunos puntos que contribuirían a mejorar mi formación en ese sentido.

[Moderador]: Por ejemplo, en el campo de la didáctica, de las estrategias..., ¿te sientes preparada?

[Kenya]: Yo pienso que sí, en el plano didáctico tú sabes que a mi siempre me a gustado y me he orientado hacia la didáctica y creo que tengo cualidades.

[Moderador]: Y si ahora nos mudamos al contenido matemático, ¿qué me puedes decir?

[Kenya]: En el contenido matemático pienso que estoy bien preparada, tal vez necesitaría algo más de formación de problemas en economía, tal vez estudiar un poco más el vocabulario que allí se maneja, porque realmente yo me limito a trabajar con funciones que yo domino, pero que yo domino porque yo misma me he dedicado a estudiarla, no porque las haya aprendido porque recibiera un curso formal o porque haya sido parte de mi formación de pregrado o de mi formación permanente, nada que ver..., ha sido un aprendizaje autónomo, yo misma me he puesto a prepararme, pero sí me gustaría como que salirme de esa rutina de esos mismos problemas y tratar de abordar otros; por ejemplo, el del impuesto a mi me encantó, yo nunca me lo había planteado, yo lo veía en los libros pero, a conciencia que no le prestaba atención y me parecían como difíciles y entonces lo desechaba, pero algo tenía que preparar. Yo creo que ahí sí me gustaría tener un poco más de formación y yo siempre he insistido en la necesidad de entablar un diálogo con el Departamento de Ciencias Económicas en ese sentido.

[Moderador]: (Pregunta improvisada) Esta pregunta no estás obligada a responder. Si yo te pidiera que te hicieras una autoevaluación del 1 al 10, donde 1 es la menor nota y 10 la máxima, en cuanto a conocimiento del contenido económico para estos cursos, ¿cuánto te pondrías tú?

[Kenya]: Yo me pondría como 6 o tal vez 7, no sé..., porque nula no estoy, me han ayudado mucho los libros que ya traen problemas resueltos, a partir de los cuales yo traslado ese conocimiento hacia los problemas que no están resueltos.

9.- **[Moderador]**: En cuanto al contenido económico, ¿consideras adecuado que el Departamento cree un espacio de discusión que te permita consolidar conocimientos en esta materia y discriminar las necesidades que tiene el estudiante en el contexto económico?

[Kenya]: Yo creo que ese punto no tiene discusión, no es que esté de acuerdo sino que es absolutamente necesario y más cuando una de las actividades fundamentales que nosotros tenemos dentro de la universidad es la docencia, lo que pasa es que muchas veces le damos más prioridad a la investigación y también a la extensión y se descuida un poco la docencia, entonces quienes terminan afectados..., los más afectado van a ser los alumnos. Entonces, si nosotros nos dedicamos a la docencia y también a la investigación y si dentro de la investigación hacemos grupos para discutir..., por qué no hacer lo mismo con la docencia. Yo pienso que la docencia tiene tanta importancia como la investigación y sin embargo no le damos la debida relevancia que ella tiene.

10.- **[Moderador]**: ¿Puedes hacer un comentario libre sobre esta experiencia?

[Kenya]: Yo quiero, en primer lugar, felicitarte por la iniciativa que has tenido porque yo sé que ha sido una preocupación tuya desde haca bastante tiempo y tal vez de otros profesores, pero realmente no nos hemos puesto con seriedad a estudiar esta problemática entonces, en este sentido, yo te felicito porque tú has tomado la iniciativa de comenzar un trabajo de investigación que puede ser o puede dar impulso a otros trabajos similares, incluso promover este tipo de discusiones dentro del Departamento, por lo menos con un grupo del Departamento o también a nivel interdepartamental; entonces, en ese sentido, la iniciativa hay que reconocerla y la apoyo totalmente y la felicito. Las discusiones que hemos tenido aquí han sido muy provechosas en todos los sentidos y espero que el trabajo no termine aquí, con esta entrevista, sino que en la medida de lo posible podamos seguir discutiendo y que ese trabajo sea reconocido también, por lo menos desde el punto de vista académico, o sea, que de ahí salga un material, un artículo, un trabajo que pueda ser promocionado; es más, debería ser reconocido por el Departamento y por la misma institución. Es que mira, yo lo comparo con la investigación que aquí se hace y es reconocida, pues de igual forma ésta es una investigación que a mi me parece muy meritoria y además busca mejorar la docencia, yo creo que nosotros tenemos un compromiso ético y moral o deberíamos estar comprometidos a trabajar en este sentido..., por los estudiantes.

[Moderador]: Bueno Kenya, muchas gracias, no tengo palabras para agradecer...