UNIVERSITAT AUTÒNOMA DE BARCELONA

DEPARTAMENT DE DIDÀCTICA DE LES MATEMÀTIQUES
I DE LES CIÈNCIES EXPERIMENTALS

TESI DOCTORAL

UNA RECONSIDERACIÓ DELS NOMBRES ENTERS PER A L'ENSENYAMENT POSTOBLIGATORI

PONT DIDÀCTIC ENTRE LA PRESENTACIÓ EMPÍRICA DE LA MATEMÀTICA ESCOLAR I EL MÈTODE CONSTRUCTIU DE L'ENSENYAMENT SUPERIOR

PRESENTADA PER: ROMÀ PUJOL PUJOL
DIRECTORS: LLUÍS BIBILONI MATOS I JORDI DEULOFEU PIQUET

BELLATERRA - 2008

For one who is preparing to teach any particular branch, and who hopes for success, the most important question is this: Why is the subject taught? More important than all methods, more important than all devices or questions of text-books, or advice of the masters, is this far-reaching inquiry.

*(*SMITH*, 1900, p. 1)*

Es indudable que el alumno no puede entender bien esto al oírlo por primera vez, pero llega a creerlo, y si, como ocurre muchas veces, al explicárselo nuevamente en los grados superiores de la enseñanza, no se le da el complemento necesario para una total comprensión, no es raro que llegue a adquirir el convencimiento de que algo místico e incomprensible debe de ser todo aquello.

*(*KLEIN*, 1927-1931, Vol. 1, p. 38)*

Agraïments

Vull deixar constància del meu agraïment a Lluís Bibiloni i Jordi Deulofeu; amics, companys i directors de la present tesi doctoral. Han llegit amb paciència diversos esborranys, corregit errors i suggerit destacades millores, però, per davant de tot això, han facilitat un permanent estat de diàleg i reflexió que ha incidit en el més profund d'aquesta recerca. Sense ells res de tot això no hauria estat possible.

El primer contacte amb el nombre negatiu esdevé, com a molt tard, en la matemàtica escolar. Allà van néixer les meves primeres reflexions i reticències sobre aquest contingut curricular; amb elles el diàleg amb mestres i companys. La Facultat de Matemàtiques va esdevenir un punt d'inflexió sobre les esmentades reflexions; amb elles el diàleg amb companys, ara ja professors; i professors, molts d'ells ja jubilats. La tasca docent a l'ensenyament secundari va conduir a un profund conflicte educatiu; fruit de la realitat copsada dels alumnes, de les opinions dels companys i de les propostes dels llibres de text. El Doctorat en Didàctica de la Matemàtica, realitzat a la Universitat Autònoma de Barcelona, va permetre reprendre anys d'experiències prèvies no contrastades i d'opinions a vegades infundades tot generant, des de l'òptica de la construcció de coneixement matemàtic a través de la resolució de problemes, la llavor de la present investigació. No seria just desatendre en aquests agraïments les persones que al llarg d'anys van fer trontollar i, en algunes ocasions van refermar, diferents tractaments relatius a l'ensenyament del nombre negatiu.

Vull agrair el suport constant i incondicional de la meva família i de les persones per mi més estimades, així com les opinions i suggerències que he rebut de professors, alumnes i d'altres persones alienes a la didàctica de la matemàtica. Les diferències que he tingut amb algunes d'elles també les agraeixo perquè dub-

tar de l'après i l'ensenyat ha facilitat punts de mira dissemblants que, al cap i la fi, marquen el punt de partida de la investigació que presentem. A vegades no hi ha posicions equivocades, el que succeeix és que cadascú divisa la realitat des de miradors diferents. L'únic error, quasi sempre, és creure que el mirador en el que estem és l'únic des del qual es divisa la veritat. Tal com diu Jorge Bucay, el sord sempre pensa que els que ballen estan bojos.

Les persones a qui dirigeixo aquests agraïments no són en cap cas responsables de les errades ni de cap altre aspecte millorable que hi pugui haver en aquesta memòria. Els equívocs i les posicions desafortunades que s'hi puguin trobar de ben segur que provenen de la meva desobediència ja que, tossut i agosarat com sóc, no sempre faig cas dels que en saben més que jo.

Índex general

Introducció

La didàctica del nombre negatiu ha estat atesa des de fa temps amb finalitats i punts de vista ben diferents. La seva concreció a les aules ha derivat en propostes d'ensenyament que han anat variant al llarg dels anys, com si una certa moda hi hagués darrera de cadascuna d'elles. També hi ha investigacions sobre l'epistemologia del nombre negatiu que focalitzen l'atenció en un o altre moment històric. Recerques sobre els errors que fan els estudiants així com les seves dificultats d'aprenentatge també hi són presents. Propostes d'ensenyament, epistemologia del nombre negatiu i dificultats d'aprenentatge sovint són tractades per separat, deixant en un segon lloc les relacions existents entre elles. En els diferents estudis es poden trobar reflexions sense base empírica, experiències a l'aula sense contrast amb d'altres estudis, o recerques en les que els marcs teòrics atesos tenen en ocasions referents ben diferents. L'exposat és el ressò d'una dispersió documental que, sota la voluntat de facilitar la comunicació amb el lector, ens condueix a dividir la introducció en dues seccions: motivació que té per finalitat situar el lector en la problemàtica que abordem i l'estructura de la memòria que es limita a presentar la documentació, justificar la distribució i orientar la seva lectura.

La motivació té per finalitat situar el lector dins d'un mar de reflexions i interrogants sense respostes immediates. Combinem reflexions sobre diferents propostes d'ensenyament, epistemologia del nombre negatiu i dificultats d'aprenentatge generant una amplitud d'interrogants intractable per cap recerca que no estigui encapçalada per un equip experimentat sense limitació de temps ni de pressupost; situació ben allunyada de la nostra realitat. La grandària facilitarà una visió global que permetrà acotar la recerca sabent què volem fer i què deixem de fer.

L'estructura de la memòria mostra el que es pot trobar en aquest document i té per finalitat explicar i justificar quin ordre hem seguit en la presentació de la informació. En primer lloc fem un passeig perifèric pel que es pot trobar en la present memòria. Tot seguit centrem l'atenció en les parts del document que s'entrellacen per tal d'explicar les interseccions, facilitar la lectura i optimitzar la comunicació.

Motivació

Hom que llegeixi aquesta memòria amb tota seguretat ha viscut l'aprenentatge del nombre enter en la matemàtica escolar. Els que ens proposem conèixer o aprofundir en la seva didàctica probablement ens vam familiaritzar amb aquest contingut curricular, des del punt de vista d'aprenent, de manera potser ben diferent a com proposem que s'ensenyi.

En el nostre dia a dia, fora de l'aula de matemàtiques, trobem expressions escrites que hom anomena nombres negatius. És factible, per exemple, pujar a un ascensor i veure els pisos que estan per sota de la planta baixa denotats per -1, -2, -3 ...; també és possible trobar-hi $S1$, $S2$, $S3$, ..., o, $1r$ soterrani, $2n$ soterrani, $3r$ soterrani, ..., entre d'altres possibilitats. Hi ha nòmines i d'altres documents mercantils en els que les retencions venen expressades amb nombres negatius; també és possible que cada concepte vingui donat per nombres positius i que el resultat provingui de fer la diferència entre ingressos (guanys) i despeses (pèrdues), o a l'inrevés. Tot termòmetre d'ús corrent denota les temperatures inferiors a $0°C$ a través de nombres negatius; però *Fahrenheit* va voler abolir les temperatures negatives. Va fixar l'origen en la temperatura del seu propi cos a $96°F$, que després va ser lleugerament modificada, aconseguint que el punt de congelació de l'aigua fos de $32°F$ i el d'ebullició $212°F$. L'any 1848 William Thomson, qui més tard fou Lord *Kelvin*, va establir la temperatura mínima en $273,15°C$ sota zero, el zero absolut, aconseguint que totes les temperatures fossin positives.

La història del nombre negatiu mostra notables episodis de rebuig des dels primers tractaments fins la seva acceptació per part del col·lectiu matemàtic. Acceptació i rebuig han conviscut en un procés tortuós en el que defensors i detractors van donar vida i mort al nombre negatiu al llarg de molts segles. El nombre natural i el racional positiu van ser utilitzats i acceptats des dels orígens de la matemàtica però el nombre negatiu, així com el complex, va haver d'esperar fins el segle XIX per ser acceptat pel col·lectiu matemàtic.

Un apunt sobre l'ensenyament del nombre enter en el darrer mig segle

La didàctica del nombre enter i del nombre negatiu ha viscut tendències que han conduït a unes o altres propostes didàctiques amb pretensions ben diferents. Sense ànim d'entrar-hi en detalls en aquestes primeres pàgines, vegem tot seguit dues posicions clarament diferenciades que han estat o estan presents a les aules, en virtut de les propostes bibliogràfiques que tot seguit referenciem: la primera correspon al curs acadèmic 1981/1982, la segona al 2006/2007. Amb elles mirem de comunicar dues propostes implementades a les aules a aquells lectors que no les coneguin de primera mà.

Fa vint-i-cinc anys un alumne/a de setè curs d'Educació General Bàsica, equivalent segons l'edat dels estudiants a l'actual segon curs d'Educació Secundària Obligatòria, es familiaritzava ja des del primer trimestre amb el nombre enter. Un esquema senzill d'aquell ensenyament és[1]: identificació entre parells ordenats i nombres enters, la suma com una operació interna, propietats de la suma de nombres enters, el grup $(\mathbb{Z}, +)$, isomorfisme entre $\mathbb{N}$ i $\mathbb{Z}^+$, instrucció de les regles dels signes pel producte de nombres enters, propietats del producte de nombres enters, l'anell $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$, relació d'ordre en $\mathbb{Z}$ i propietats, entre d'altres detalls que obviem. L'esmentada proposta didàctica va brollar en una etapa viscuda en la matemàtica escolar, sovint anomenada «Matemàtica Moderna», que a grans trets pren les arrels a principi del segle XX:

> Lo esencial matemático ya no se busca en lo metafísico, sino en lo pragmático; la ley ha desplazado a la génesis. «Nous posons des règles de jeu et nous jouons» («Ponemos reglas de juego y jugamos»),

[1] Per ser honestos ens hem basat en el llibre de text, treballat com alumne per un servidor, per al setè curs d'EGB de Pons (1973). Amb el fet de citar dues referències bibliogràfiques, la que acabem de descriure i la que el lector trobarà tot seguit, només pretenem destacar i exemplificar, de manera objectiva i sense interpretacions pròpies, dues tendències clarament diferenciades de dos períodes educatius que tot just disten entre ells un quart de segle.

> replicaba un matemático de la moderna escuela a un filósofo que le objetaba.
>
> (Puig Adam, 1960, p. 115)

La incidència de l'etapa anomenada «Matemàtica Moderna» en la concreció escolar va induir a proposar la introducció axiomàtica del nombre enter. El darrer desenllaç epistemològic del nombre negatiu es va proposar com a punt de partida del seu ensenyament. La fita aconseguida després de segles de conflictes i rebuig es va prendre com la drecera a seguir. El conjunt de classes d'un producte cartesià mòdul una relació d'equivalència es dota d'una estructura algebraica d'anell establint un punt de partida amb unes regles de joc perfectament delimitades. Amb aquesta introducció segles de rebuig del nombre negatiu s'amagaven darrera d'un punt de partida matemàticament inqüestionable. Si acceptéssim un ensenyament de la matemàtica que focalitza l'atenció exclusivament en l'exposició de les fites aconseguides i el treball curricular a partir d'elles, aleshores l'esmentat ensenyament estaria justificat. Ara bé, els alumnes veuen en els nombres, principalment en edats tendres, representacions de coses reals.

> El alumno está acostumbrado a ver en los números, primero, y más tarde en las letras con que opera, representaciones de cosas reales y concretas, y en las operaciones con números o letras las correspondientes operaciones con las cosas, y se encuentra ahora con algo de naturaleza muy diferente, con los números negativos que no tienen nada que ver con la imagen sensible que se ha forjado del número, y, sin embargo, ha de operar con ellos, aunque las operaciones han perdido aquella significación clara e intuitiva que antes tenían. *Se presenta, pues, aquí por primera vez, el paso de la matemática práctica a la formal, para cuya completa comprensión es precisa en alto grado la capacidad de abstracción*[2].
>
> (Klein, 1927-1931, Vol. 1, pp. 32-33)

[2] La cursiva és nostra.

El fracàs de la «Matemàtica Moderna» va deixar pas a l'intent de generar entorns de qualitat en l'ensenyament i l'aprenentatge de la matemàtica. La teoria de conjunts i les estructures algebraiques van perdre força, i progressivament van anar desapareixen de la matemàtica escolar, en favor de nous moviments renovadors. La proposta d'introducció del nombre negatiu va anar derivant progressivament en un treball més experimental i intuïtiu de l'estudiant. Si requerim un ensenyament de la matemàtica que pren la seva força de l'evidència empírica de la realitat immediata del discent i en el seu sentit comú aleshores les noves propostes didàctiques estan justificades.

En l'actualitat hom pot trobar propostes d'activitats vinculades amb l'entorn proper de l'estudiant amb la finalitat d'introduir els nombres enters[3]. Tinc 4 € al meu compte i m'arriba una factura de 10 €, quin és el meu nou saldo? Dues línies més avall podem trobar la solució proposada: $4 - 10 = -6$. L'esmentada referència bibliogràfica suggereix com cal sumar i restar els nombres enters, enuncia la regla dels signes pel producte i tot seguit exemplifica i proposa diverses activitats de càlcul que permetran a l'estudiant operar correctament amb nombres enters. Com a punt de partida ens trobem amb una activitat que té un curt reflex sobre la realitat quotidiana de l'alumne. Aconseguir que l'esmentada situació condueixi l'alumne cap a una activitat generadora del coneixement matemàtic curricular que pretenem construir és una pretensió que de ben segur compartim amb el lector. Però no n'hi ha prou de generar una didàctica activa, cal que a més faciliti a l'alumne la possibilitat de que elabori per sí mateix el contingut matemàtic que ens proposem.

> Se siente, en resumen, la necesidad imperiosa de una didàctica no sólo activa, sino eurística, en el sentido de procurar que el alumno elabore por sí mismo los conceptos y conocimientos que haya de adquirir, mediante el acicate de situaciones hábilmente creadas ante él por el maestro, con objeto de que el interés funcional y directo por ellas despertado sea suficiente para fomentar la actividad generadora. Sólo el espíritu de investigación y de conquista puede ser capaz de asegurar la firmeza de lo adquirido. Y obsérvese que con ello no se

[3] Hem usat el llibre de text per al segon curs d'ESO de COLERA *et al.* (2003).

> persigue una didáctica facilona y blandengue, sino, por el contrario, una seguridad de conocimientos basada en el esfuerzo, estimulando éste convenientemente, al tiempo que se gradúa y dosifica. No se trata de eludir dicho esfuerzo, sino de lograr que sea deseado.
>
> (Puig Adam, 1956, pp. 6-7)

Veurem que ambdues posicions no són les úniques i que es poden establir «ponts didàctics» a través d'ensenyaments híbrids entre les diferents propostes estandarditzades que, en atenció a la finalitat que pretenguem aconseguir, aprofitin els avantatges de cadascun d'ells.

Alguns interrogants relatius a la didàctica del nombre negatiu

És fàcil trobar en el món que ens envolta situacions que es resolen amb el coneixement que hom aprèn en la matemàtica escolar: compres, vendes, dies que falten fins una determinada data, etc. Per efectuar els càlculs necessaris davant d'una compra domèstica es requereixen uns determinats coneixements matemàtics i, sense cap interès addicional, seria grotesc cercar, en situacions com aquesta, estructures abstractes que formalitzessin els continguts curriculars corresponents. Per altra banda, hi ha problemes que brollen de necessitats internes a la disciplina i que troben, o potser no, justificació en l'activitat quotidiana. Per posar un exemple, no neix de cap necessitat externa a la matemàtica la voluntat d'argumentar que tot nombre parell major que quatre sempre es pugui escriure com la suma de dos nombres primers senars. Aquestes situacions formen part de la disciplina que anomenem matemàtica però les esmentades a l'inici del paràgraf emanen d'una necessitat externa a ella, la darrera d'una interna.

En l'actualitat hom accepta plenament la convinença que el nombre negatiu sigui tractat en la matemàtica escolar. Tanmateix, diverses preguntes brollen de la reflexió a l'entorn d'aquest centre d'interès; considerem-ne dues.

1. Per què s'ensenya el nombre negatiu?, és a dir, quines són les finalitats educatives que es persegueixen assolir amb aquest contingut curricular?

2. Com es pot oferir un ensenyament del nombre negatiu que, de manera gradual, aconsegueixi establir un pont didàctic que connecti una primera introducció a l'ensenyament obligatori amb la presentació constructiva o axiomàtica que és habitual en els estudis superiors?

GONZÁLEZ *et al.* (1990, p. 81) accepten la posició de FISCHBEIN (1987): «no hi ha necessitat pràctica per inventar els nombres negatius». Tanmateix, creuen que en situacions concretes sí que són necessaris. Diverses possibilitats suggerides pel col·lectiu d'investigadors en didàctica de la matemàtica permeten respondre al primer interrogant plantejat: proximitat a la realitat quotidiana de l'alumne, rapidesa i seguretat en l'execució de càlculs aritmètics, obtenció de patrons, regularitats i regles a partir de l'experimentació amb el nombre negatiu, suggerir un ensenyament que condueixi al conjunt dels nombres enters de manera que si els naturals són consistents aleshores quedi argumentat que els enters també ho han de ser, és a dir, conduir l'alumne cap a una prova de consistència relativa. Cadascuna de les esmentades possibilitats té els seus avantatges i també els seus inconvenients.

És desitjable poder assolir les finalitats sintetitzades a través d'un ensenyament cíclic que permeti graduar adequadament els plans d'abstracció en cada moment educatiu. Proposar activitats properes a la realitat quotidiana de l'estudiant que fomentin el seu pensament crític és un bon punt de partida. Facilitar que el coneixement adquirit en l'ensenyament primari tingui continuïtat en el secundari sense salts conceptuals ni noves interpretacions no justificades de terminologies prèviament emprades és aconsellable. Justificar de manera senzilla i entenedora les regles que faciliten la realització d'operacions aritmètiques entre nombres negatius per, tot seguit, utilitzar-les en la resolució de problemes que tenen un curt reflex en la realitat propera a l'estudiant és el pas següent que hom pretén assolir. Ara bé, el nombre negatiu és un contingut ben particular; l'iniciem en edats tendres i, en canvi, cal un llarg procés per consolidar-lo. Les preguntes que ens trobem a mig camí sovint no tenen resposta amb les estratègies d'ensenyament pròpies d'una primera introducció; si en tenen, sovint són tan forçades que cal, en el millor dels casos, buscar un substitut. Així doncs, com es poden establir ponts didàctics que suavitzin i no interrompin aquest llarg camí? Aquesta qüestió serà atesa al llarg de la present investigació.

> Es indudable que el alumno no puede entender bien esto al oírlo por primera vez, pero llega a creerlo, y si, como ocurre muchas veces, al explicárselo nuevamente en los grados superiores de la enseñanza, no se le da el complemento necesario para una total comprensión, no es raro que llegue a adquirir el convencimiento de que algo místico e incomprensible debe de ser todo aquello.
>
> (KLEIN, 1927-1931, Vol. 1, p. 38)

Un apunt de la història de la matemàtica com a eix del seu ensenyament

L'acceptació dels nombres negatius per part de la comunitat matemàtica ha patit segles de rebuig i negació. L'anàlisi dels elements que van dificultar l'acceptació del nombre negatiu potser ens pot orientar sobre els camins més adequats per al seu l'ensenyament. Les dificultats que ha calgut superar per arribar al coneixement que avui tenim potser ens poden ajudar a orientar les preguntes i activitats que podem suggerir als estudiants, les negociacions que cal provocar i les dificultats que, sota la guia del docent, l'alumne ha de superar.

Pot un alumne arribar a descobrir el nombre negatiu a través d'activitats que pot resoldre sense utilitzar-lo? Pot l'alumne resoldre una dificultat que viu dins de la matemàtica dedicant-se a activitats que provenen del seu entorn immediat? Tal com diu PLA CARRERA (1983, p. 71), Diofant va enunciar de manera retòrica una mena de regla dels signes (p. 127) del producte de nombres negatius quan ell mateix els negava. Podem esperar que els nostres alumnes ho descobreixin?

> *The genius, the expert, and the beginner.* The genius acts according to the rules without knowing that there are rules. The expert acts according to the rules without thinking of the rules, but, if needed, he could quote the rule applicable to the case in question. The beginner, trying to act according to the rule, may learn its veritable meaning from success and failure.
>
> (PÓLYA, 1981, Vol. 2, p. 97)

Aquesta reflexió de PÓLYA (1981) ens recorda que els entorns d'aprenentatge que dissenyem han d'anar dirigits a estudiants i cal, per tant, facilitar-los el camí. L'ordre històric no té perquè coincidir necessàriament amb l'ordre didàctic. Una bona prova és que la regla dels signes enunciada per Diofant era retòrica i que la primera utilització d'un signe negatiu (p. 129) se situa l'any 1484, una bona colla de segles després.

Tot i així, ens podem beneficiar de la visió històrica. Prendre el punt d'arribada del nombre negatiu, aconseguit en el segle XIX, com a punt de partida de l'ensenyament ja es va posar en pràctica a la matemàtica moderna. Podem situar en els anys vuitanta del segle XX el punt d'inflexió que va suposar l'abandonament d'aquesta tendència. L'experimentació com a pas previ en la resolució de problemes, la cerca de patrons i regularitats amb el cultiu de la intuïció, la formulació de conjectures, el seu contrast i, si es poden refutar, el seu rebuig, esdevé segons la proposta vigent el punt de partida del quefer actual de l'ensenyament de la matemàtica.

Ara bé, si acceptem la importància de la història de la matemàtica com a eix del seu ensenyament aleshores hem de tenim en compte que el naixement del nombre negatiu es va produir a partir de la resolució d'equacions. En l'actualitat aquestes s'introdueixen amb posterioritat al nombre negatiu evitant, per tant, que l'alumne pugui copsar la necessitat d'incorporar nous nombres per donar resposta a determinades equacions.

Quin aprenentatge volem? Quin ensenyament oferim?

Cada proposta didàctica comportarà unes dificultats per l'alumne i tindrà un efecte sobre el *coneixement matemàtic*[4] dels nombres negatius o enters que assimili l'estudiant. I per aconseguir un o altre efecte el docent posa en pràctica un *coneixement didàctic matemàtic*[5] que ho fa possible. Quan un docent implementa un determinat *coneixement didàctic matemàtic* (ensenyament) aconsegueix en l'alumne un cert *coneixement matemàtic* (aprenentatge). Cada enfocament serà, per

[4]Entenem per *coneixement matemàtic* aquell que tot estudiant ha d'adquirir com a conseqüència de la planificació, desenvolupament i avaluació de la situació d'ensenyament que se li proposa.

[5]Entenem per *coneixement didàctic matemàtic* relatiu als nombres negatius i enters, aquell que tot docent ha de posseir, amb l'objectiu de planificar, desenvolupar i avaluar el coneixement matemàtic en situacions d'aprenentatge escolar.

tant, més o menys encertat en funció de l'aprenentatge que pretenguem aconseguir i de les dificultats que l'alumne pugui superar.

Sovint es pot llegir la terminologia *didàctica dels nombres enters*. Aquesta fa referència als processos d'ensenyament i aprenentatge. Al llarg d'aquesta recerca mirarem de distingir, tant com sigui possible, ambdues vessants: l'ensenyament que proposa el docent i l'aprenentatge que assoleix l'alumne.

Aquesta recerca estudia la incidència de l'execució a l'aula d'un determinat coneixement didàctic matemàtic en l'aprenentatge de l'estudiant. Aportem un granet de sorra a la didàctica del nombre enter i del nombre negatiu partint d'una vista general i d'una reflexió profunda que no pot desatendre el «per què ensenyem el nombre enter o negatiu?».

La present investigació va néixer en gran mesura de la visió retrospectiva en la resolució d'un problema; *esbrinar quins nombres es poden escriure com una suma de nombres consecutius*. Experimentar per conjecturar resultats i cercar arguments que els consolidin constitueix una activitat que força el pensament independent del resolutor. Preguntar-se per la suma de nombres consecutius o voler conèixer quantes descomposicions pot tenir un nombre donat són preguntes que brollen d'ell. Plantejar el problema en els nombres naturals condueix a una introducció del nombre enter que proposem en el marc metodològic de la recerca i que realitzem en la fase empírica de la investigació.

Fenòmens empírics i problemes matemàtics

La cerca d'un coneixement sobre les situacions externes és natural que derivi en una imitació entre accions empíriques i operacions matemàtiques. Emprem nombres naturals per representar la quantitat d'objectes d'un conjunt i, per exemple, afegir els objectes de dos conjunts dicta el comportament de com cal sumar nombres naturals. D'aquesta manera els nombres naturals i els racionals positius prenen sentit a partir de situacions externes, així com les seves operacions.

Ara bé, la matemàtica creix per sí mateixa i un bon exemple és el nombre complex. Miraríem d'introduir-lo a partir de fenòmens empírics? Fàcilment ens posarem d'acord en oposar-nos a aquesta proposta. Però això no treu que amb posterioritat a la seva introducció el nombre complex no pugui modelar fenòmens reals per donar-los explicació. La matemàtica pot, per tant, oferir un cert domini sobre la naturalesa modelant fenòmens reals, tot i que els instruments que utilitzi hagin nascut per la necessitat de donar resposta a problemes interns a la matemàtica.

En resum, el nombre natural i el racional positiu hom els ensenya a través de fenòmens reals, físics o empírics. El nombre complex hom l'introdueix amb la voluntat de donar solució a determinades equacions algebraiques, és a dir, per donar resposta a un problema intern a la matemàtica. Doncs bé, l'ensenyament del nombre enter permet diferents tractaments educatius que a grans trets i de manera molt simplificada se situen més a prop d'una o altra posició.

La matemàtica era (p. 233), amb anterioritat al punt de vista modern iniciat a finals del segle XIX, una ciència relacionada amb l'estudi de la quantitat. De fet, això va dificultar l'acceptació dels nombres negatius durant segles i, probablement, també ho faci amb l'aprenentatge dels nostres estudiants. Va ser la necessitat de donar validesa als mètodes de resolució d'equacions el que va requerir la utilització dels nombres negatius. Ateses les esmentades reflexions, com podem abordar una primera introducció del nombre enter? I, molt més rellevant per la nostra recerca, com es pot reprendre el nombre enter a l'ensenyament postobligatori de manera que puguem establir un pont didàctic entre la presentació empírica pròpia de la matemàtica escolar i l'axiomàtica o constructiva de l'ensenyament superior?

Estructura de la memòria

La memòria es presenta sota una estructura que pren la seva màxima justificació quan es pensa en una lectura seqüencial. Cada capítol conté una unitat de coneixement que facilita que pugui ser llegit amb independència dels altres. En ocasions diversos capítols tenen un eix comú que ha conduït a que els agrupem dins d'una mateixa part. La memòria està formada per un capítol inicial i tres parts: marc teòric (p. 53), marc metodològic (p. 191) i anàlisi de les dades, resultats, conclusions, prospectiva i implicacions didàctiques (p. 273). Finalment presentem els annexos (p. 565) i la bibliografia general (p. 617).

Cada capítol l'hem dissenyat i redactat a partir d'una unitat de coneixement que esdevé la seva columna vertebral. En les línies que se segueixen destaquem l'essència de cadascun d'ells per, tot seguit, apuntar els diferents continguts que els completen. La priorització de l'esmentada essència no defuig que, en algunes ocasions, fem referència a d'altres apartats de la memòria per, fins i tot, apuntar lleument el seu contingut. D'aquesta manera aconseguim claredat expositiva sense trencar l'esquelet que sosté cada unitat de coneixement. Els capítols en ocasions s'entrellacen amb la finalitat d'incidir i ampliar els apartats que són més destacats per a la present investigació. Amb la finalitat d'orientar la lectura exposem sintèticament en aquest apartat que anomenem «estructura de la memòria» el que fem en cada part i en cada capítol, tot justificant les esmentades vinculacions i orientant la seva interpretació.

Primer capítol: El problema d'investigació

El primer capítol (p. 19) és previ a la primera part (p. 53) i mostra el procés pel qual, des del centre d'interès que ens ocupa, arribem a establir el problema de la investigació. Fem a mans del lector les reflexions i els interessos que condueixen a l'establiment dels objectius de la recerca. La lectura d'aquest primer capítol és inexcusable per hom que vulgui conèixer com hem arribat a establir els objectius de la present investigació. Ara bé, el lector que no estigui interessat en conèixer aquest procés pot prendre'ls com a punt de partida (pp. 47, 193).

Prioritzar la pregunta «què ens proposem fer en aquesta investigació?» és l'interrogant que permet situar aquest capítol com a primer de la memòria i, alhora, dicta la seva estructura interna. Ara bé, organitzar el capítol al voltant de l'esmentada pregunta és una opció que té un preu. Per arribar a l'establiment del problema i dels objectius de la investigació és imprescindible atendre alguns aspectes relatius als fonaments teòrics. En conseqüència presentem una molt lleu pinzellada al marc teòric de la recerca que reprenem amb més detall tot just finalitzat el primer capítol, és a dir, en la primera part de la memòria.

De l'experiència i l'interès personal brolla el centre d'interès. La revisió bibliogràfica i la consulta amb companys i experts fan palès que l'ensenyament del nombre negatiu és un problema didàctic no resolt. La concreció del que entenem per qualitat d'educació i la finalitat que perseguim assolir amb l'ensenyament del nombre enter permeten acotar l'estil d'ensenyament en el que ens centrarem. Així, interessos propis, experiència personal, revisió bibliogràfica, reflexions amb companys i experts del que es persegueix amb l'ensenyament del nombre negatiu, concreció sobre què entenem per qualitat d'educació i acotació de l'estil d'ensenyament en el que ens centrarem, permeten plantejar el problema de la recerca. L'estudi de les característiques del problema, la reflexió sobre la construcció gradual de coneixement a través de l'ensenyament cíclic (també anomenat helicoidal o en espiral), la llavor que esdevé el mètode deductiu per a un ensenyament formal, la posició epistemològica sobre el problema de la recerca i el desig de participar en la millora de la praxis educativa condueixen a l'establiment de la hipòtesi de la recerca i a la concreció dels seus objectius.

Primera part: Marc teòric

La primera part de la memòria està dirigida al marc teòric de la recerca (p. 53). Conté quatre capítols consecutius que s'entrellacen entre ells: capítol 2 (p. 53), 3 (p. 87), 4 (p. 121) i 5 (p. 153). El lector que estigui familiaritzat amb els diferents estils d'ensenyament del nombre enter, amb el principi de permanència de les lleis formals, les concepcions del nombre i els fonaments de la resolució de problemes pot eludir la lectura d'aquesta part i emprar-la, si s'escau, com a material de consulta. Al llarg de la memòria hi haurà múltiples referències a diferents apartats del marc teòric.

La revisió bibliogràfica realitzada ens condueix a l'establiment d'una classificació d'estils d'ensenyament del nombre enter que prenem com a esquelet del capítol 2 (p. 53): constructiu, deductiu, inductiu, instructiu i models concrets. El que s'exposa esdevé una unitat de coneixement per sí sola, però la introducció deductiva trepitja el següent capítol en el qual entrem en detall amb el principi de permanència de les lleis formals; l'ànima de l'ensenyament deductiu. Aquesta introducció és la llavor de la presentació constructiva i, en conseqüència, atenem l'interès didàctic que pot tenir aquest tractament educatiu del nombre enter.

El capítol 3 (p. 87) és una continuació d'una part del segon ja que es focalitza en l'ensenyament deductiu i, concretament, en el fonament d'aquest estil d'ensenyament, això és, el principi de permanència de les lleis formals. Ensenyar el nombre negatiu amb una pretensió menys empírica que la que s'esdevé a la matemàtica escolar és atès tot seguit. Les reflexions que es fan sobre el nombre natural i el racional positiu permeten mostrar les particularitats d'un contingut curricular, el nombre negatiu, que pot connectar la matemàtica escolar amb la superior.

El llarg recorregut que té el nombre negatiu des d'un primer tractament en edats tendres fins la seva formalització a l'ensenyament superior pot produir una evolució en la concepció de nombre dels estudiants que atenem en el capítol 4 (p. 121). Centrem l'atenció en les concepcions de nombre des de dos eixos principals. Un d'ells és l'atenció als referents epistemològics relatius a la utilització de nombres negatius i la seva acceptació. L'altre prové de reflexions relatives a l'ensenyament previ a la introducció del nombre negatiu que viu l'estudiant.

En el capítol 5 (p. 153) i darrer d'aquesta primera part presentem els aspectes més rellevants de la resolució de problemes. Amb ells pretenem fer palesa la metodologia educativa de la fase d'intervenció, que pren com a instrument metodològic la resolució d'un problema, així com donar els elements necessaris que permetin contrastar els resultats de la fase empírica de la recerca amb la finalitat que esdevinguin conclusions.

Segona part: Marc metodològic

La segona part de la memòria està dirigida al marc metodològic de la recerca (p. 191) i està formada per dos capítols consecutius: capítol 6 (p. 191) i 7 (p. 241). La lectura del capítol 6 és indispensable pel lector que vulgui conèixer com s'ha organitzat la recerca. L'execució de la intervenció a les aules passa per la resolució del problema dels nombres consecutius que és atesa en el capítol 7. Sota el nostre punt de vista, la millor manera de clissar la riquesa del problema passa per mirar de resoldre'l per un mateix. Aprofitem l'ocasió per convidar el lector a tancar la memòria o la finestra que mostra el document electrònic i mirar de resoldre el problema: quins són els nombres que es poden escriure com a suma de consecutius?

El capítol 6 (p. 191) està dirigit a exposar el disseny i la metodologia de la recerca. A partir dels objectius, que són el punt d'arribada del capítol 1 i punt de partida del capítol 6, fem a mans del lector els referents que ens condueixen a la concreció organitzativa i, més concretament, al desglossament de les fases de la recerca: diagnosi, intervenció i valoració. Per tal de facilitar la comunicació amb el lector emprem diagrames que permeten visualitzar com dels objectius de la recerca brolla la concreció dels objectius de cada fase.

Respecte de la fase de diagnosi fem palesa la concreció d'objectius que ens proposem assolir per alimentar el primer objectiu de la investigació. Mostrem com l'esmentada concreció determina tres parts en la fase de diagnosi que operen amb els seus propis objectius. Prioritzar la comunicació amb el lector ens condueix novament a sintetitzar la relació que hi ha entre els objectius de la recerca i els de cadascuna de les tres parts de la fase de diagnosi. Estructurada aquesta fase, mostrem els trets que caracteritzen la metodologia d'investigació.

Pel que fa a la fase d'intervenció procedim, com en el cas anterior, per arribar a concretar els objectius que ens proposem assolir per alimentar els segon i tercer objectius de la recerca. Justifiquem com la concreció condueix a l'establiment de sis parts per a la fase d'intervenció que operen amb els seus propis objectius. Afavorir la comunicació amb el lector ens condueix novament a sintetitzar la relació que hi ha entre els objectius de la recerca i els de cadascuna de les sis parts de la fase d'intervenció. Estructurada aquesta fase, mostrem els trets que caracteritzen la metodologia d'investigació.

En relació a la valoració fem a mans del lector els motius pels quals és necessària la implementació d'aquesta fase. Es mostra com no es deriva dels objectius de la recerca sinó de la voluntat de mesurar la dificultat amb la que viu l'alumne la fase d'intervenció. Al final del capítol es fa referència als instruments de recollida de dades. Després de l'anàlisi de les dades corresponent a la fase d'intervenció és atesa l'anàlisi de les dades de la fase de valoració.

Presentades les tres fases de la recerca educativa empírica detallem les característiques i els compromisos de la investigació. En atenció als objectius de la recerca, el disseny, les característiques i la metodologia de cadascuna de les fases presentem el disseny dels instruments de recollida de dades i referenciem la seva ubicació en els annexos.

El capítol 7 (p. 241) està dirigit a exposar el problema que actua com a objecte metodològic per a la fase empírica de la recerca. En primer lloc es presenta el tractament que més podem esperar per part dels alumnes, que es limita al treball amb nombres naturals. En segon lloc mostrem com l'esmentat problema condueix a una introducció deductiva del nombre negatiu. Analitzem i exposem les reflexions i preguntes que permeten abordar la recerca amb coneixement del que els alumnes es poden trobar en el procés de resolució. Finalment reprenem el problema dels nombres consecutius per ser resolt amb nombres enters, tot mostrant com un punt de vista més general pot permetre una resolució més senzilla.

Tercera part: anàlisi de les dades, resultats, conclusions, prospectiva i implicacions didàctiques

La tercera part de la memòria està dirigida a l'anàlisi de les dades, resultats, conclusions, prospectiva i implicacions didàctiques (p. 273). L'anàlisi de les dades i la presentació de resultats està formada per tres capítols consecutius: capítol 8 (p. 273), 9 (p. 339) i 10 (p. 401). El capítol 11 (p. 463) està dedicat a les conclusions i el 12 (p. 521) a la prospectiva i les implicacions didàctiques. Tota lectura comprensiva d'aquesta part requereix que hom estigui familiaritzat, almenys, amb els objectius de la recerca, el marc teòric, el disseny i els instruments emprats per a la recollida d'informació.

El capítol 8 (p. 273) se centra en l'anàlisi de les dades i la presentació de resultats de la fase de diagnosi. Els capítols 9 (p. 339) i 10 (p. 401) atenen l'anàlisi de les dades i la presentació de resultats de la fase d'intervenció. Aquests dos capítols contenen les sis parts en què s'estructura la fase d'intervenció. Es presenten separats per evitar un capítol excessivament extens que dificultaria la comunicació amb el lector. Al final del capítol 10 (p. 401) es dedica un espai a la presentació de resultats corresponents a la fase de valoració.

En el capítol 6, dedicat a la metodologia de la investigació, hem concretat cadascuna de les fases de la recerca. Prenem aquest punt de partida per a cadascuna de les tres parts de la fase de diagnosi (cap. 8, p. 273) i de les sis parts de la fase d'intervenció (caps. 9, 10, pp. 339, 401). De la finalitat general considerem la concreció d'objectius i els instruments de recollida de dades. Els aspectes que tenim en compte en l'anàlisi de dades els descrivim en l'apartat que anomenem paràmetres atesos. Mostrem tot seguit les categories de resposta que recullen les dades obtingudes a partir de la implementació dels instruments. Presentem els resultats globals, per grup i per gènere; tot destacant en un primer moment els motius pels quals atenem aquest desglossament. Finalment destaquem alguns tractaments particulars.

El capítol 11 (p. 463) està dirigit a les conclusions de la investigació. En ell reprenem els resultats presentats en els tres capítols anteriors i el marc teòric atès i sintetitzat en la primera part de la memòria. Prenent com a eix principal els objectius de la recerca, contrastem els resultats obtinguts amb el marc teòric atès, en el context en el que s'ha desenvolupat la fase experimental de la investigació.

Finalment, en el capítol 12 (p. 521) tractem la prospectiva i les implicacions didàctiques. En la primera d'aquestes dues parts mostrem aquelles preguntes d'investigació que brollen de la present recerca i que són susceptibles d'un nou estudi. En les implicacions didàctiques mostrem aquells aspectes que, tot i que no es deriven de les dades recollides en la present investigació, són fruit de reflexions realitzades.

Capítol 1

El problema d'investigació

Índex

Realitzar activitats intel·lectuals i experimentals de manera sistemàtica amb el propòsit d'augmentar els coneixements sobre una determinada materia és la definició que hom pot trobar en un diccionari si consulta el significat del terme investigar[1]. Apreciem en l'esmentada definició una primera aproximació a l'activitat que ens proposem realitzar però que, tanmateix, completem en virtut de les consideracions d'autors que focalitzen la seva activitat en la recerca. Investigar és aplicar el mètode científic a situacions i problemes concrets de la realitat social per obtenir respostes i nou coneixement, segons SIERRA (1994, p. 27); persistir en conèixer el món en el que vivim, per ARNAL *et al.* (1992, p. 21); formular preguntes i recopilar informació per contestar-les, segons FERMAN i LEVIN (1979, p. 1).

Persistir, atendre una realitat que copsem de la nostra realitat propera, formular preguntes i intentar contestar-les, deixant en segon lloc les opinions personals, tot mantenint una posició científica en el sentit d'atendre el que les dades ens dictin són les característiques generals amb les que enfoquem la present investigació.

1.1 Selecció del problema de la investigació

Per seleccionar el problema que es vol investigar, la manera més directa és formular preguntes. Tanmateix, quan aquestes són massa àmplies cal delimitar-les com esdevé fàcilment amb tota problemàtica que pren el centre d'interès en el nombre negatiu. Si són imprecises cal aclarir-les tal com mostrem tot seguit. Com diu ACKOFF (1953), citat per FERMAN i LEVIN (1979, p. 5), un problema ben plantejat està mig resolt.

1.1.1 Criteris per a la selecció del problema

Molts són els problemes no resolts susceptibles de ser investigats. Ara bé, una elecció que tingui un cert interès per la comunitat educativa requereix, entre d'altres aspectes, que es tracti d'un problema didàctic vigent i no resolt. Per a la selecció del problema considerem diversos aspectes que mostrem tot seguit:

[1] Extret del Diccionario de la Lengua Española (vigésima segunda edición). Disponible a `http://www.rae.es/rae.html` i consultat el dia 27 de maig de 2008.

1. L'experiència personal i els propis interessos.

2. La revisió bibliogràfica que permet conèixer l'estat de la qüestió i alhora proporciona informació relativa a la facilitat o dificultat que tindrem per manipular el problema.

3. L'anàlisi del problema amb companys i experts que permet copsar punts de vista diversos.

4. L'aclariment de la terminologia emprada tant la general (problema, investigar, problema d'investigació, etc.) com l'específica (mètode constructiu, mètode deductiu, etc.).

La incardinació de tots aquests aspectes amb el centre d'interès que ens ocupa, la didàctica del nombre negatiu, són les fonts que han conduït a la concreció del problema de la present investigació.

Figura 1.1: Aspectes generals atesos en el plantejament del problema de la investigació.

1.1.2 Participació de la recerca bibliogràfica en la concreció del problema

En el moment d'iniciar la investigació vam prendre consciència que la didàctica del nombre negatiu ha estat àmpliament treballada i, per tant, requeria un examen detallat de les experiències i recerques realitzades així com d'altres aportacions bibliogràfiques actuals i del passat. La finalitat principal de la recerca bibliogràfica és conèixer l'estat de la qüestió en aquest moment per tal de plantejar una recerca que focalitzi l'atenció en un problema didàctic no resolt. L'examen de la bibliografia mostra una forta dispersió entre els documents atesos: experiències que s'han portat a l'aula sense el rigor d'una recerca, propostes que sí que s'han portat a les aules com fases experimentals d'una recerca però que no s'han aplicat de manera generalitzada, d'altres propostes que no han tingut una fase experimental però que fan una anàlisi teòrica d'algun aspecte del centre d'interès que ens ocupa, etc. La concreció del problema de la present investigació requereix, per tant, una revisió bibliogràfica i aquesta, alhora, reclama alguna classificació que permeti ser abordada de manera organitzada.

Iniciem el present capítol sintetitzant les cinc categories en què recollim les diferents propostes d'ensenyament del nombre enter i del nombre negatiu; informació que presentem més detalladament en el capítol 2 (p. 53). La reflexió sobre cadascuna d'elles, l'experiència personal i l'anàlisi del problema amb companys i experts ens condueix a identificar el problema d'aquesta investigació. L'anàlisi reflexiva sobre les cinc categories de propostes d'ensenyament ens porta a destacar els trets més rellevants que permeten caracteritzar el problema. Conèixer sintèticament l'estat de la qüestió esdevé fonamental, en virtut de l'àmpliament tractada que ha estat la didàctica del nombre negatiu, per a la concreció i formulació precisa del problema.

1.1.3 Classificació de tipologies d'ensenyament

Des del punt de vista de la matemàtica els nombres negatius van estar situats molt temps en una frontera variable entre el que es podia acceptar i el que no, el que era cert i el que era fals, el que era raonable d'acceptar i el que podia ser útil. La definició axiomàtica del conjunt dels nombres enters i la seva estructura de domini d'integritat va permetre donar en el segle XIX aquest històric problema per tancat des del punt de vista de la matemàtica.

Des del vessant de la didàctica de la matemàtica el nombre enter ha patit metamorfosis importants en el darrer mig segle. Hem passat d'un ensenyament profundament formal a un de concret i proper a la realitat de l'estudiant. Tanmateix ni l'un ni l'altre han donat ni donen resultats satisfactoris per motius diametralment oposats, tal com es detalla en els capítols dedicats als fonaments teòrics de la present memòria.

En aquesta secció apuntem les característiques principals que permeten recollir i classificar el coneixement didàctic matemàtic que es desprèn de la bibliografia consultada. Sense ser exhaustiva sí que ha admès recobrir les diferents tendències i, en conseqüència, localitzar el problema que ens proposem abordar.

- La introducció constructiva o axiomàtica[2] del nombre enter[3] (p. 76) actualment no és l'estil d'ensenyament que s'implementa en la matemàtica escolar. Probablement el tret més destacat que ho justifica és el fet que l'apropament axiomàtic que proposa s'allunya del tot del sentit comú de l'alumne i de la seva realitat quotidiana. La introducció axiomàtica o constructiva va ser l'estil d'ensenyament que es va proposar en la matemàtica escolar en el període anomenat «Matemàtica Moderna». El tractament corresponent esdevé fonamental quan es vol provar la consistència del conjunt dels nombres enters si s'admet la del conjunt dels nombres naturals.

- La introducció inductiva del nombre enter[4] (p. 68) tampoc és un estil d'ensenyament que es proposi actualment en la matemàtica escolar. La cerca de patrons i regularitats s'allunya de la realitat quotidiana de l'alumne i alhora no té ànim de rigor ni de formalització.

[2]ARCAVI i BRUCKHEIMER (1981, pp. 31-33) utilitza la terminologia *axiomàtica* i CID (2003, p. 2) *constructiva*.

[3]La introducció constructiva del nombre enter és la que acostuma en l'actualitat a aparèixer en els texts universitaris. En les dècades del seixanta i del setanta del segle XX va tenir un paper protagonista en la matemàtica escolar. Entre d'altres COLTHARP (1966) i FLETCHER (1976) van proposar aquesta introducció.

[4]Entre els que comenten la introducció inductiva, PETERSON (1972); SICKLICK (1975), cal destacar la posició de FREUDENTHAL (1983). Per ell una introducció inductiva facilita el posterior tractament deductiu.

- La introducció del nombre enter a través de models concrets[5] (p. 56) pren la seva força en l'experiència i el sentit comú de l'aprenent. Les propostes i estudis relatius a aquesta introducció, que atenem i sintetitzem en els fonaments teòrics d'aquesta recerca, permeten delimitar les seves possibilitats didàctiques. Aquesta és la introducció més habitualment proposada en l'actualitat.

- La introducció instructiva, anomenada sovint instrucció, rau en donar regles de càlcul amb la finalitat que l'alumne les apliqui per resoldre exercicis[6]. L'ensinistrament o instrucció ha estat, i no podem negar que encara ho sigui, una pràctica gens esporàdica en la matemàtica escolar. La revisió d'alguns llibres de text mostra que després i durant la introducció del nombre enter a través de models concrets es fa instrucció; breu, clara i directa. Cal tenir en compte, per tant, que també és practicada en l'actualitat, encara que no es formuli de manera explícita. No té interès per aquesta recerca però la tindrem present en l'anàlisi de les dades que recollim; més concretament en el contrast dels resultats amb el marc teòric per obtenir les conclusions.

- La introducció deductiva[7] (p. 70, p. 87) del nombre enter evidencia les necessitats internes a la matemàtica que cal resoldre. Admetre nous nombres per resoldre allò que amb els que tenim no podem aconseguir i definir les operacions per extensió de les que operen en el conjunt de nombres prèviament conegut són els trets fonamentals del mètode deductiu.

---

[5] La bibliografia relativa a la introducció del nombre enter a través de models concrets és molt àmplia. Per una consulta més detallada suggerim que llegiu la síntesi mostrada en els fonaments teòrics d'aquesta recerca i per aconseguir més profunditat la bibliografia que se cita.

[6] En la pàgina 166 exposem les diferències entre el que entenem per exercicis i problemes.

[7] La introducció deductiva es recolza en el *principi de permanència de les lleis formals* (p. 87). Ha estat defensada per diferents autors: Klein (1927-1931); Snell (1970); Phillips (1971*b*); Milazzo i Vacirca (1983). A més, Freudenthal (1983) destaca amb el naixement del nombre negatiu a partir de la resolució d'equacions la seva rellevància des de la geometria analítica. Això dóna un nou enfocament deductiu que es concreta en el principi de permanència de les lleis geomètriques-algebraiques.

TERMINOLOGIA EMPRADA PER A CADA PROPOSTA

	(ARCAVI i BRUCKHEIMER, 1981, pp. 31-33)	(CID, 2003, p. 2)
Models concrets	Models	Models
Inductiu	Inductiu	Inductiu
Instructiu	Instructiu	
Deductiu	Deductiu	Deductiu
Constructiu	Axiomàtica	Constructiva

SOBRE EL FONAMENT DE CADA PROPOSTA

- MODELS. Sentit comú i l'evidència empírica.
- INDUCTIU. Cerca de patrons i regularitats.
- INSTRUCTIU. Imposició.
- DEDUCTIU. Permanència de les lleis formals.
- CONSTRUCTIU. Definició de $\mathbb{Z}$ a partir de $\mathbb{N}$.

Aquesta classificació fa referència als diferents estils d'ensenyament que s'han emprat o que, si no és així, són susceptibles de ser implementats a les aules d'un o altre nivell educatiu per a l'ensenyament del nombre negatiu. La introducció constructiva va ser proposada al llarg del període anomenat «Matemàtica Moderna». La introducció del nombre enter a través de models és la que en l'actualitat, i en virtut dels currículums vigents, es proposa com a primer contacte dels alumnes amb el nombre negatiu. Els mètodes instructiu, inductiu i deductiu han estat proposats i estudiats però no generalitzats a les aules dels centres. Hem aconseguit amb aquesta petita pinzellada sintetitzar l'estat de la qüestió respecte de l'ensenyament del nombre enter; en el capítol 2 detallarem les particularitats de cadascun d'ells (p. 53).

1.1.4 Qualitat de l'educació, finalitat i mètode

Per aconseguir una millora en la qualitat de l'educació cal aclarir en primer lloc què entenem per aquest terme.

1. Què entenem per qualitat d'educació?

> La qüestió de la qualitat s'ha de contemplar atenent la manera com les diferents societats defineixen la finalitat de l'educació. En la majoria d'elles es plantegen dos objectius principals: el primer rau en garantir el desenvolupament cognitiu dels alumnes; el segon en incidir en el fet que l'educació estimuli el desenvolupament creatiu i afectiu per tal que puguin adquirir valors i actituds que els permetin ser ciutadans responsables.
>
> (UNESCO, 2005, p. 5)

Aquesta és la concepció de qualitat d'educació que adoptem. Dóna resposta a l'interrogant de per què ensenyem matemàtiques i orienta les concrecions posteriors ja que l'assoliment de les esmentades finalitats requerirà optar pel mètode o estil d'ensenyament que més ho faciliti.

1. Per què ensenyem matemàtiques?

> For one who is preparing to teach any particular branch, and who hopes for success, the most important question is this: Why is the subject taught? More important than all methods, more important than all devices or questions of text-books, or advice of the masters, is this far-reaching inquiry.
>
> (SMITH, 1900, p. 1)

Endinsem-nos més encara en el centre d'interès que ens ocupa i preguntem-nos per què ensenyem el nombre negatiu. Les respostes que adoptem a aquesta pregunta regularan i guiaran les concrecions posteriors.

- Per què ensenyem el nombre negatiu?

  1. Perquè és un instrument útil per al nostre dia a dia.
  2. Perquè és un contingut curricular que cal instruir.
  3. Perquè és necessari per al creixement de la matemàtica.

  1. La primera resposta a aquesta pregunta suggereix un ensenyament en la matemàtica escolar que faciliti un aprenentatge útil per a tothom i està, per tant, relacionada amb la segona finalitat que es desprèn de la concepció de qualitat exposada.
  2. La segona resposta no està relacionada amb cap de les dues finalitats que s'estableixen en la concepció de qualitat.
  3. La tercera resposta suggereix un ensenyament que faciliti un desenvolupament cognitiu de l'estudiant i, per tant, està relacionada amb la primera finalitat que es desprèn de la concepció de qualitat.

L'elecció del mètode, que es concreta en un o altre estil d'ensenyament, depèn òbviament de la finalitat o les finalitats que pretenem assolir, però no només d'això. L'edat dels alumnes, la seva capacitat, els seus interessos i les seves possibilitats, entre d'altres aspectes, també s'han de tenir en compte.

El primer objectiu destacat en l'exposada concepció de qualitat (UNESCO, 2005, p. 5) rau en garantir el desenvolupament cognitiu dels alumnes. El currículum de batxillerat vigent (142/2008, 2008), per donar resposta a la primera finalitat de la concepció de qualitat, proposa una construcció gradual i progressiva de coneixements que s'ha de produir sota un ensenyament que faciliti entorns d'aprenentatge que connectin la matemàtica escolar amb la dels estudis superiors.

> Acceptar els nombres naturals, les seves operacions i les seves propietats permet dissenyar entorns d'aprenentatge que facilitin la construcció dels nombres enters, racionals, reals i complexos. No es tracta de presentar aquestes construccions fetes sinó de facilitar que, a través de la resolució de problemes, l'alumne/a comprengui amb claredat que les propietats i les operacions en els diferents conjunts

> de nombres són una conseqüència natural de l'extensió de les operacions acceptades pel conjunt de nombres que, en cada cas, acceptem com a punt de partença.
>
> (142/2008, 2008, p. 59280)

El segon objectiu al qual fa referència l'esmentada concepció (UNESCO, 2005, p. 5) demana incidir en que l'educació estimuli el seu desenvolupament creatiu i afectiu dels estudiants per tal que puguin adquirir valors i actituds que els permetin ser ciutadans responsables. El currículum de batxillerat ho concreta demanant un participació en la formació integral de tots els alumnes i necessària en el batxillerat en tant que etapa terminal per a una part de l'alumnat (142/2008, 2008, p. 59174, p. 59275).

1.1.5 Sobre l'elecció de l'estil d'ensenyament

Donat que disposem com a punt de partida de diferents estils d'ensenyament per a la introducció i també per al desenvolupament posterior a una primera introducció del nombre negatiu, sembla raonable optar, almenys en un primer moment, per aquell que pugui ser més fàcil per a l'alumne o, almenys, aquell que ens pugui semblar a nosaltres que és més senzill per l'aprenent.

> If there are two approaches to the same problem which appear equally advantageous in other respects, but one of which seems easier than the other, it is natural to try the easier approach first.
>
> (Pólya, 1981, Vol. 2, p. 93)

En atenció a aquest referent que compartim sembla raonable que la introducció del nombre negatiu prengui la seva força inicialment en la realitat empírica i en el sentit comú de l'alumne. Tanmateix, l'esmentada introducció ja es realitza en els centres educatius i diverses investigacions mostren mancances en els aprenentatges que són del nostre interès.

> La enseñanza del número entero no admite enteramente ser tratada, de forma creíble, en el plano concreto, aunque algunos autores, se esfuercen en buscar situaciones concretas para justificar todas la propiedades de los enteros; pero por otro lado, el situarlos de entrada en el plano formal, también tiene el peligro de reducirlos a un formalismo vacío, presto a ser olvidado y a causar errores y confusiones. Es decir, se trata de un tema en el que no cabe aplicar la vía que caracteriza a la enseñanza de la matemática elemental, ni tampoco la que caracteriza a la enseñanza superior, pues ninguna de las dos es, en este caso, satisfactoria: la primera porque impide el acceso a lo abstracto, la segunda porque la imposicion de la abstracción es estéril.
>
> (Iriarte *et al.*, 1991, p. 13)

La didàctica del nombre enter és un tòpic clau en l'ensenyament secundari obligatori. De l'ensenyament formal emprat en l'etapa anomenada «Matemàtica Moderna» al concret emprat en l'actualitat, no hi ha hagut una didàctica del nombre enter, aplicada de manera generalitzada a les aules, que hagi atès i corregit les mancances d'un i altre estils d'ensenyament.

> Queda mucho por averiguar sobre la enseñanza de los números negativos. Desde nuestro punto de vista, son necesarias nuevas investigaciones para determinar formas más eficaces de enseñanza que permitan a los alumnos modelizar situaciones simples mediante el uso de números negativos; es decir, que los alumnos trasladen situaciones contextualitzadas y gráficas a la dimensión abstracta y operen correctamente en ella.
>
> (Bruno, 2001, p. 425)

Una gran proporció de propostes i recerques relatives al tema que ens ocupa centren l'atenció en la introducció del nombre enter a través de models concrets. Molt poques però ho fan en el període intermedi entre la introducció i la formalització, és a dir, entre l'ensenyament secundari obligatori i l'ensenyament superior.

> Por último, pocas investigaciones se han referido a los números negativos en la etapa posterior a la introducción, es decir, una vez que las operaciones simples están asimiladas o cuando aparecen en otros campos de las matemáticas.
>
> (Bruno, 2001, p. 425)

L'exposat fins aquest moment permet identificar mancances que participen de la concreció del problema de la present investigació. Estem interessats en el punt de partida de l'aprenentatge de l'estudiant en un ensenyament postobligatori i alhora en la incidència que pugui tenir en el seu aprenentatge un ensenyament del nombre negatiu que vagi més enllà dels models concrets.

Ara que tenim identificat el problema ens proposem, en el següent apartat, aprofundir en les seves característiques amb la finalitat de plantejar-lo detalladament.

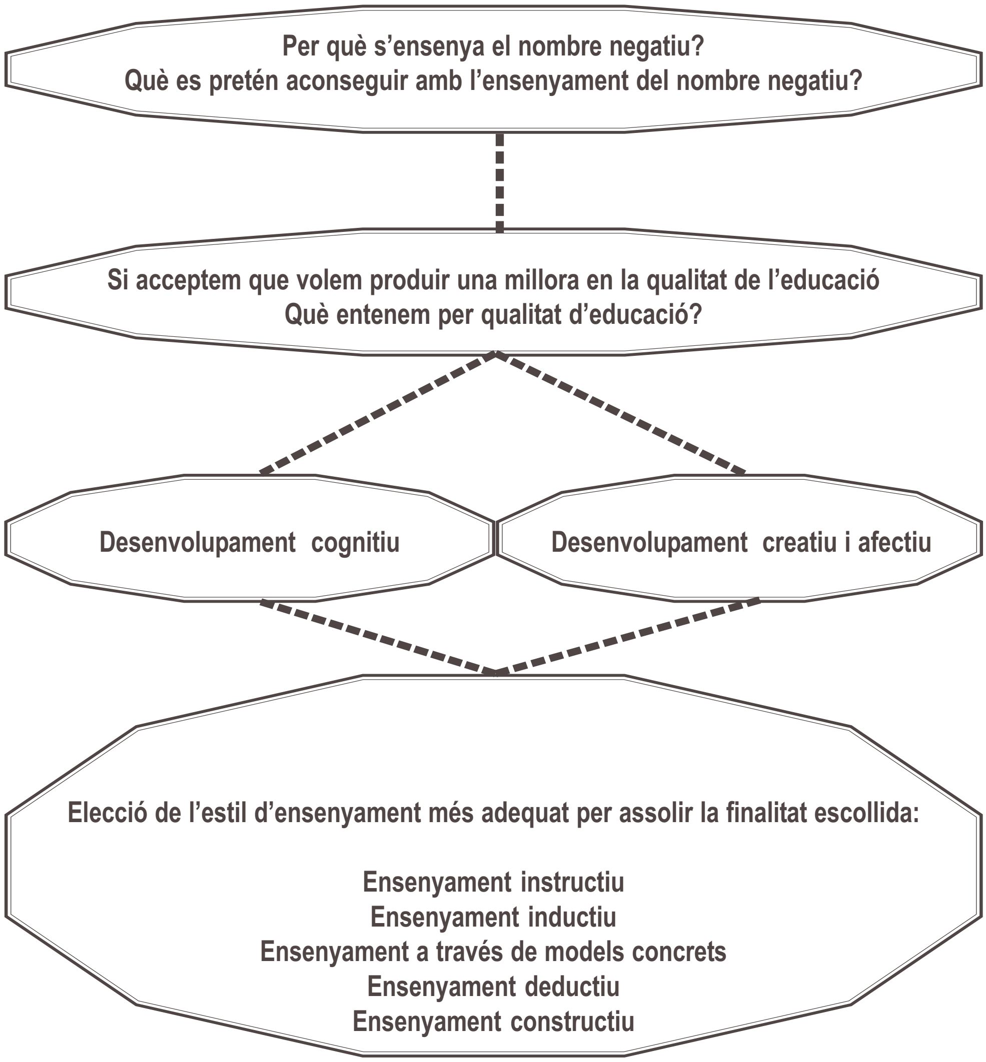


Figura 1.2: La reflexió sobre la pregunta formulada per SMITH (1900, p. 1) i la concepció sobre qualitat d'educació formulada per UNESCO (2005, p. 5) ens permeten situar el problema de la investigació. L'elecció d'un estil d'ensenyament serà encertat si aconsegueix assolir les finalitats que es pretenen aconseguir que depenen, amb diferents graus d'atenció, dels dos grans eixos sobre qualitat d'educació exposats.

1.2 Característiques del problema

La revisió de la bibliografia relativa al nombre negatiu, així com les propostes d'ensenyament presents en llibres de text, la realitat viscuda en el dia a dia a les aules i la reflexió amb docents i experts han permès en un primer moment identificar el problema de la present investigació. Ens proposem tot seguit fer palesos els trets més rellevants que permeten acotar i precisar aquest problema.

1.2.1 Sobre l'acotació del problema en funció dels estils d'ensenyament considerats

Per iniciar una primera acotació del problema optem per mostrar els trets més rellevants de cada categoria d'estils d'ensenyament per, alhora, destacar-ne alguns:

1. La introducció constructiva ja es va portar a les aules en l'etapa anomenada «Matemàtica Moderna» i va fer palesa l'esterilitat de la imposició d'un ensenyament formal en edats tendres de la matemàtica escolar.

2. La introducció inductiva pot tenir un paper adequat com estil d'ensenyament que col·labori amb altres. Que s'allunyi de la realitat empírica i concreta de l'alumne té un paper positiu en la descontextualització del coneixement construït. Ara bé, el fet que no participi del procés de formalització fa que no la prioritzem en un ensenyament postobligatori. Segons FREUDENTHAL (1983) una introducció inductiva facilita el posterior tractament deductiu.

3. L'ensenyament a través de models concrets pren la seva força en el sentit comú de l'alumne i la vinculació amb la realitat propera a ell. Aquesta posició dificulta el procés de formalització del nombre enter però és la manera més senzilla d'apropar-se a l'estudiant. És insuficient si tot l'aprenentatge de l'estudiant es restringeix a aquest estil.

4. L'ensenyament deductiu facilita la formalització del nombre enter o negatiu inicialment introduït a través de models concrets. No ha gaudit d'un paper protagonista en la matemàtica escolar. Les propostes de BOREL i DRACH (1895), KLEIN (1927-1931), SNELL (1970), PHILLIPS (1971*b*), MILAZZO

i VACIRCA (1983) i FREUDENTHAL (1983) no s'han concretat en entorns d'aprenentatge que s'hagin fet realitat a les aules de manera generalitzada i, en conseqüència, podem admetre que l'avaluació del seu interès didàctic roman pendent.

5. La instrucció de regles de càlcul és una realitat a les aules. No ens basem en cap recerca per fer aquesta afirmació, però sí en la realitat copsada al llarg de quinze anys de docència a l'ensenyament secundari. No l'atendrem en les propostes que brollin d'aquest estudi però sí en l'anàlisi de les dades recollides.

6. Actualment, les propostes dels llibres de text en el nostre territori permeten introduir de manera raonable l'estructura additiva a través de models concrets, però això requereix aclariments. De manera molt més forçada proposen l'estructura multiplicativa i de manera generalitzada imposen la utilització i interpretació dels signes « $+$ » i « $-$ » segons convingui en cada model.

7. Els alumnes inicien l'ensenyament postobligatori amb tècniques de càlcul sobre l'operativa entre nombres enters prou interioritzades. Tanmateix, l'ensenyament del nombre enter a través de models concrets potser, tal com es desprèn de la nostra experiència a les aules de secundària, ha deixat en els alumnes una concepció de nombre que es manté vinculada a les accions de comptar o mesurar[8].

1.2.2 Aspectes relatius al nombre negatiu observats i documentats

La bibliografia referent a la didàctica i l'epistemologia del nombre negatiu, l'observació i recapitulació del procés d'ensenyament viscut, l'anàlisi d'alguns llibres de text tant actuals com més antics i converses informals amb docents, amics i

[8]En el model de la recta numèrica es diu que $+2$, -3 o un altre nombre indiquen una determinada posició de la recta numèrica (un estat emprant la terminologia del GRUP ZERO (1980*a*)) o que fan referència a desplaçaments en un o altre sentit. En el model de guanys i pèrdues indiquen la possessió o deute (estat) d'una determinada quantitat de diners, per altra banda, també poden indicar guanys o pèrdues, segons el signe, de quantitats indicades pel corresponent valor absolut.

experts sobre l'ensenyament del nombre enter ens han permès copsar algunes particularitats del problema que ens ocupa. Destaquem tot seguit una vintena de consideracions de les quals no podem afirmar la seva veracitat a partir de recerques realitzades però que facultaran l'acotació i precisió del problema de la present investigació. Des del nostre punt de vista els pensaments que s'hi relacionen són altament importants. D'ells es desprenen les nostres inquietuds, l'acotació del problema i la llavor d'altres recerques futuribles.

1. Per a una majoria de l'alumnat el nombre és el resultat de comptar o mesurar. Aquesta possibilitat viu dins d'un entorn més general en el qual s'identifica la matemàtica amb l'estudi de les quantitats. L'esmentada posició va requerir una evolució que considerem que també és necessària en un ensenyament postobligatori. Aquesta concepció de nombre i de matemàtica provoca dificultats a l'hora d'introduir el nombre negatiu.

2. L'ensenyament de l'aritmètica elemental en la matemàtica escolar introdueix el nombre natural i el racional positiu amb la finalitat de donar resposta a fenòmens reals i empírics i, a més, aquests fenòmens dicten les operacions entre ells. La introducció del nombre enter a l'Educació Secundària Obligatòria prima donar continuïtat a l'esmentat ensenyament previ.

3. Es fa una instrucció, amb una freqüència que desconeixem, dels signes aritmètics que representen les operacions. L'esmentada instrucció podria conduir a una pèrdua de significat del que s'està fent en cada moment.

4. En algun cas es pot donar la situació extrema que els alumnes confonen les accions empíriques (afegir, treure, etc) amb les operacions matemàtiques (sumar, restar) fins el punt que sumen objectes o afegeixen nombres.

5. L'estudiant copsa la matemàtica com una «disciplina estàtica». Aquesta consideració podria fer que l'alumne entengués que el nombre enter és el que ha après a través dels models concrets. Aquesta posició dificultaria la introducció del nombre complex i de la matemàtica superior.

6. Es pretén, sense que sigui explícit, un aprenentatge acumulatiu més que no pas evolutiu. Des d'aquest punt de vista qüestionar els fonaments de

l'aprenentatge previ podria esdevenir un obstacle que caldria superar.

7. Molts professors actuen com mitjancers entre el llibre de text i l'alumne. Aquest aspecte trepitja l'activitat docent. No és un interès directament relacionat amb la present recerca però no podem evitar destacar la seva rellevància.

8. Els docents que cerquen alguna cosa més que una simple instrucció, respecte de l'ensenyament del nombre enter, centren els seus esforços en la cerca d'un model vinculat a la realitat a partir del qual es pugui obtenir tot el coneixement que es pretén que l'alumne adquireixi.

9. Es proposa una pràctica repetitiva de tècniques de càlcul amb la intenció d'automatitzar rutines. El deslligam amb el context es copsa en ocasions fins i tot quan el nombre enter s'ha introduït a través de models concrets. Així, la principal finalitat dels models concrets estaria desvirtuada en un ensenyament que prioritza la vinculació amb la realitat quotidiana i el sentit comú de l'alumne.

10. S'introdueix el nombre enter a partir del natural i, un cop introduït, l'extensió als racionals i reals és sovint immediata, com si no requerissin massa explicació. Això mostra en un primer moment les dificultats que comporta la introducció del nombre negatiu. Tanmateix, sembla que hom consideri que la primera introducció del nombre enter a partir del natural sigui suficient ja que no es reprèn posteriorment l'estudi del nombre negatiu.

11. En el moment en què es vol introduir el nombre enter, l'estructura additiva, l'ordre i l'estructura multiplicativa s'ensenyen de cop, sovint en la mateixa unitat didàctica del mateix curs acadèmic. En particular, l'estructura multiplicativa no és necessària per resoldre problemes de l'aritmètica elemental però s'introdueix tot seguit de l'estructura additiva.

12. El nivell de satisfacció de l'alumne respecte de l'ensenyament del nombre enter a través de models concrets pot arribar a ser acceptable quan s'introdueix l'estructura additiva però no amb la multiplicativa.

13. La instrucció de les operacions entre nombres enters s'accepta com un apartat del currículum àrid que cal complir. Això permetria explicar que l'activitat docent no qüestionés les mancances de l'ensenyament a través de models concrets.

14. La introducció del nombre enter a 1r curs d'Educació Secundària Obligatòria és tant forçada que el mateix alumne demana instrucció del que el docent desitja que faci. Podria ser aquest un dels primers moments en els que alguns estudiants accepten el que se'ls ensenya tot facilitant una pèrdua de pensament crític.

15. La interpretació dels signes « $+$ » i « $-$ », en l'ensenyament a través de models concrets, com operacions binàries, símbols predicatius i operacions unàries s'utilitza tal com convé en cada cas. Si l'alumne no les distingeix ni les relaciona amb el significat previ del signe « $-$ » estem davant d'una polisèmia injustificada que pot provocar greus problemes d'aprenentatge i motivació.

16. El que en la història de la matemàtica no es va aconseguir fins el segle XVII, és a dir l'acceptació i utilització del nombre negatiu per resoldre problemes vinculats al món quotidià, és el punt de partida de l'ensenyament del nombre negatiu en l'actualitat.

17. El que en la història de la matemàtica no es va aconseguir fins fa aproximadament un segle, és a dir la presentació axiomàtica dels nombres enters, és el següent pas després del tractament empíric donat en la matemàtica escolar.

18. La introducció del nombre negatiu a partir del racional positiu mai l'hem trobat plantejada en cap proposta docent; tampoc a partir del real positiu.

19. No trobem propostes educatives intermitges entre la matemàtica escolar (models concrets) i l'ensenyament superior (constructiu o axiomàtic) que facilitin un pont didàctic que permeti graduar adequadament els plans d'abstracció, tal com destaca PUIG ADAM (1960, pp. 157, 159).

1.3 Plantejament del problema

En els apartats anteriors hem sintetitzat i referenciat diferents dificultats i particularitats que, des de diferents focus d'atenció, presenta la introducció del nombre enter. Concretament i de manera més destacada hem incidit en les relatives a l'ensenyament a través de models concrets i la introducció constructiva pel fet que ara, o fa unes dècades, són, o van estar una realitat educativa a les aules del nostre territori.

Ens proposem investigar la incidència que té l'ensenyament deductiu del nombre enter a través de la resolució de problemes en l'aprenentatge de l'alumne que inicia estudis postobligatoris, més concretament els que en el nostre territori anomenem batxillerat. En particular ens interessa indagar les concepcions que té l'alumnat sobre els nombres negatius així com les dificultats i la incidència d'un ensenyament deductiu del nombre enter que delimitem en el marc metodològic d'aquesta memòria (p. 241).

Volem mostrar les fites assolides i les dificultats viscudes tot destacant l'interès didàctic de la proposta i les implicacions que puguin ser rellevants per altres introduccions del nombre enter o del nombre negatiu.

1.3.1 Una llavor per a l'ensenyament formal

L'encert de l'ensenyament deductiu del nombre enter a través de la resolució de problemes que proposem depèn, en gran mesura, de la finalitat que es pretengui aconseguir, tal com apunten les reflexions d'SMITH (1900, p. 1). La proposta deductiva del nombre enter a través de la resolució de problemes, que es concreta a través d'un instrument metodològic que portem a les aules en la fase empírica de la present recerca (p. 241), situa l'alumne davant d'una problemàtica que per ser resolta en tots els casos requereix la introducció de nous nombres. De fet, la llavor que va conduir a pensar en la didàctica del nombre negatiu va ser la resolució del problema dels nombres consecutius i algunes de les consideracions que mostrem en la present memòria.

La terminologia emprada per fer referència als nous nombres, que es fan necessaris per resoldre el problema dels nombres consecutius en tots els casos, es recolza en el que es desprèn de la resolució del problema proposat. D'aquesta manera evitem imposar cap nomenclatura i permetem que sigui l'alumne qui descobreixi els objectes que li fan falta en cada moment i proposi noms per «batejar-los». Establim d'aquesta manera una negociació amb els estudiants que facilita un aprenentatge progressiu. Evitem, per tant, definir els nombres enters en un primer moment. De fet, fem una aproximació al coneixement del concepte de nombre enter. Ens trobem davant d'un exemple que mostra com la definició i el concepte poden anar deslligats.

> [...] el conocimiento de la definición no garantiza el conocimiento del concepto y el conocimiento del concepto no pasa, necesariamente, por poseer una definición adecuada del mismo.
>
> (Sotos, 2004, p. 96)

La fidelitat entre l'entorn d'aprenentatge que generem i la proposta d'ensenyament on s'emmarca la recerca recau en l'instrument metodològic (p. 241). Facilitar un apropament a l'aprenentatge formal del nombre enter és possible, en virtut de la classificació admesa en aquesta recerca i sintetitzada en aquest capítol, des de dues posicions: deductiva (p. 70) i constructiva o axiomàtica (p. 76). Focalitzem l'atenció en la introducció deductiva ja que prèviament a la definició formal que presenta la introducció constructiva hi ha tota una colla de dificultats, errors, descobriments i decisions que pretenem que visqui l'alumne; no només com un espectador.

La revisió bibliogràfica suggerí diverses possibilitats, l'experiència docent confirmà el seu interès concretament al batxillerat i l'intercanvi amb experts va refermar la necessitat d'atendre un problema didàctic no resolt. A l'hora de precisar el camp d'acció de la present investigació van tenir rellevància l'interès personal, la importància de la recerca i la facilitat per treballar el problema.

La formulació de preguntes generals sobre la didàctica del nombre enter és necessària però clarament insuficient quan ens proposem acotar i precisar el problema. En canvi, van ser unes poques preguntes, tal com hem detallat en les pàgines anteriors, les que van permetre focalitzar l'atenció en una petita part de l'amplitud que comporta el centre d'interès que ens ocupa. Presentem tot seguit un problema digne de ser investigat: important, manejable i, des del nostre punt de vista, interessant.

1.3.2 El problema d'investigació

En paraules d'Ackoff (1953, p. 14), que hem obtingut de Ferman i Levin (1979, p. 6): «Es evidente que a medida que el problema se formula con más exactitud, hay más posibilidades de obtener una solución satisfactoria». Dir que tot problema ben formulat està mig resolt reflecteix satisfactòriament el punt d'arribada del seu plantejament. En aquest primer capítol hem volgut sintetitzar la informació mínima que situa el lector en la posició adequada per comprendre l'interès que tenim per la següent qüestió:

Problema de la recerca 1.3.1 *Quina incidència té en l'aprenentatge de l'estudiant que inicia els estudis de batxillerat un ensenyament deductiu del nombre enter a través de la resolució de problemes que condueixi cap a la introducció constructiva?*

L'esmentada incidència està relacionada amb l'aprenentatge de l'estudiant. Tanmateix, la qüestió està alhora vinculada, entre d'altres factors, amb el coneixement de partida de l'estudiant. En conseqüència estem també interessats en l'esmentat coneixement previ de l'alumne de primer de batxillerat respecte del nombre negatiu.

La didàctica del nombre negatiu és un problema no resolt, en virtut de les referències ateses en el present capítol les quals detallem en el marc teòric de la present memòria, i la recerca sobre la incidència en l'aprenentatge de l'estudiant al batxillerat d'un ensenyament deductiu és minima. El problema plantejat té, per tant, interès ja que pot suposar un avançament respecte del que se sap sobre el coneixement matemàtic de l'alumne de batxillerat respecte del nombre negatiu, de la concepció de nombre i en darrer lloc, de la concepció de l'alumne sobre el què és la matemàtica.

1.3.3 Factors que considerem en el plantejament del problema

Els factors que més han incidit en l'elecció d'aquest problema són eixos que participen de la seva delimitació. En concret: un dubte que persisteix amb els anys, una troballa que sorgí a partir de la resolució d'un problema i diverses consideracions epistemològiques.

- El dubte rau en designar, sense justificació, els nombres negatius amb el mateix símbol que en els anys previs ha utilitzat l'alumne per restar; costa de creure que els diversos usos d'un mateix símbol no generin estupor en l'estudiant. Els alumnes comprenen sense excessives dificultats que hi ha paraules que tenen diversos significats, anomenades polisèmiques. Emprar la paraula «banc» per fer referència a una determinada entitat financera o a un objecte que serveix per seure pot ser fàcilment entès per tot estudiant de secundària amb una competència lingüística suficient. Utilitzar la mateixa paraula per fer referència a entitat financera i objecte per seure sense distingir-los amb absoluta transparència té, amb tota seguretat, un fracàs educatiu assegurat. De manera semblant emprar la paraula «ploma» per fer referència a cadascuna de les excrescències còrnies de la pell dels ocells o a un instrument d'escriptura pot ser fàcilment acceptat per tot estudiant de secundària amb una competència lingüística suficient. Tanmateix hi ha una arrel comuna que des d'un punt de vista etimològic pot ser analitzada i que es pot apuntar als estudiants. Novament trobem un cas en el que utilitzar la mateixa paraula per fer referència a excrescències còrnies i instrument d'escriptura sense distingir-los amb absoluta transparència té, com en el cas anterior, un aprenentatge deficient. El símbol « $-$ » l'utilitza l'alumne per denotar l'operació restar en l'educació primària; operació que es correspon amb l'acció treure. Després d'introduir el nombre enter, el símbol « $-$ » s'utilitza per denotar uns nous nombres que hom anomena negatius: « -1 », « -2 », « -3 », ... Estem davant d'una polisèmia del símbol « $-$ »; clarament entesa pels estudiants?

- La troballa és una introducció híbrida del nombre enter, que facilita una connexió entre la introducció deductiva i la constructiva, a partir de la resolució del problema dels nombres consecutius (p. 241).

- La revisió epistemològica mostra que el naixement del nombre negatiu es va produir a partir de la resolució d'equacions. En l'actualitat les equacions s'introdueixen amb posterioritat al nombre negatiu evitant, per tant, que l'alumne pugui copsar el conflicte epistemològic que va conduir al rebuig del nombre negatiu així com a l'evolució que va concloure en la seva acceptació.

1.3.4 Posició epistemològica en el tractament del problema d'investigació

La didàctica del nombre enter i del nombre negatiu ha estat atesa per diferents autors, d'altres destaquen llacunes per atendre. Unes de les principals aportacions ateses són les de Felix Klein i Hans Freudenthal. També d'altres més recents, com les d'Alícia Bruno i Eva Cid, són exponents de les propostes, estudis i recerques que participen dels fonaments teòrics de la present investigació. Com a síntesi de la revisió documental realitzada podem justificadament acceptar que pretenem atendre un problema didàctic no resolt.

La revisió epistemològica reforça que l'ensenyament del nombre enter i del nombre negatiu no té una proposta convincent: quan prioritzem un aprenentatge que emfasitza l'extensió del coneixement previ, potser la introducció deductiva és més adient; quan volem reforçar l'habilitat de l'estudiant en l'execució de rutines de càlcul, potser s'adiu més un ensenyament instructiu; quan desitgem que l'alumne vinculi el nombre negatiu amb la seva realitat immediata i faci ús del seu sentit comú, potser la introducció del nombre negatiu a través de models concrets és més satisfactòria. Tanmateix, des de Diofant fins el segle XIX negació i acceptació dels nombres negatius evidencien dificultats que rarament es puguin resoldre des d'un únic punt de mira, és a dir, a través d'un únic estil d'ensenyament.

Que l'ensenyament del nombre negatiu sigui un problema didàctic no resolt té molt a veure amb què les esmentades consideracions sobre l'ensenyament no tinguin sobre l'aprenentatge que pretenem aconseguir la incidència desitjada. El punt de vista epistemològic ens facilita explicacions de les dificultats que viuen els estudiants. Els diferents tractaments del nombre negatiu que es van succeir al llarg d'anys i de segles poden germinar en propostes d'ensenyament del nombre negatiu; la seva negació i els diferents tractaments que se li van donar es tradueixen en dificultats que brollen a l'aula i que cal investigar. Que el mot «negatiu» provingui de la negació de valors que s'obtenien com arrels d'una equació, tal com mostra GONZÁLEZ *et al.* (1990, p. 28), evidencia la impossibilitat d'obviar la història en l'estudi que se segueix. La present investigació no focalitza l'atenció sobre l'epistemologia del nombre negatiu però, tot i així, considerem que les dificultats viscudes per a l'acceptació del nombre negatiu tenen un paper inexcusable a l'hora de proposar l'ensenyament d'aquest contingut curricular. Les diferents posicions epistemològiques viscudes fins l'acceptació del nombre negatiu orienten, per tant, la nostra proposta.

1.3.5 Punt de partida i d'arribada de l'ensenyament del nombre negatiu

La varietat de propostes, dificultats, incoherències i inversions epistemològiques fan palesa la impossibilitat d'ambicionar altra cosa que no sigui fer una petita i modesta comprensió d'una proposta didàctica per una edat, inicialment i provisionalment, determinada. Davant de l'estat de la recerca relativa a la didàctica del nombre negatiu i del nombre enter no podem fer una enumeració exhaustiva de les hipòtesis que podrien ser investigades. Tanmateix, l'interès de les que podem enunciar serà major o menor en funció del que pretenem aconseguir:

- La presentació axiomàtica o constructiva del nombre enter presenta un objecte matemàtic sòlid des del punt de vista de la disciplina, però complex des de la perspectiva de l'aprenentatge. És el punt d'arribada de l'aprenentatge del nombre enter. La principal mancança d'aquesta introducció probablement sigui que si volem que l'alumne descobreixi aquell coneixement que pretenem que aprengui, aleshores cal una construcció prèvia i gradual del nombre enter, en conseqüència, no pot ser el punt de partida. Calen recerques per veure quines dificultats presenta i quin interès té com a punt d'arribada en l'ensenyament secundari postobligatori.

- La introducció del nombre enter a través de models concrets, que constitueix la proposta curricular regulada en el nostre territori, és una introducció en un context aritmètic que dificulta la comprensió de l'estructura multiplicativa i, si es manté absoluta fidelitat a les propostes actuals, fins i tot de l'additiva. La principal virtut d'aquest ensenyament probablement sigui que manté proximitat amb la realitat quotidiana de l'estudiant. Entre les principals mancances hi trobem que presenta dificultats a l'hora d'introduir els nous nombres i de justificar les operacions elementals que tan clarament es mostren en el treball previ amb nombres naturals.

Aquestes dues posicions, diametralment oposades, suggereixen un ensenyament que començant pels models concrets condueixi cap a la presentació constructiva o axiomàtica; aquest és el llarg camí a recórrer on el mètode cíclic esdevé fonamental.

1.3.6 Sobre la necessitat d'atendre el problema

El nombre enter és necessari per primera vegada quan volem resoldre equacions. La revisió del currículum de l'Educació Secundària Obligatòria mostra que molts continguts no requereixen nombres negatius i, en canvi, s'ofereixen a l'estudiant just després d'haver introduït el nombre negatiu. Tanmateix, una introducció que conduís a la resolució d'equacions respectaria l'epistemologia del nombre negatiu. Però, ¿és possible un ensenyament que s'iniciï en els models concrets i, potser a través de la resolució d'equacions, es pugui connectar amb la introducció deductiva del nombre enter?

En primer lloc, l'ensenyament del nombre enter es realitza actualment a través de models concrets (p. 56) a l'inici de l'ensenyament secundari obligatori. La matemàtica superior defineix axiomàticament els nombres enters tal com proposa la introducció constructiva (p. 76). En conseqüència, el salt que es produeix entre una i altra introducció desatén el mètode cíclic (p. 177) i genera problema d'aprenentatge.

En segon lloc, la introducció del nombre enter a través de models concrets pot connectar, per mitjà de la resolució de problemes adequadament escollits, amb l'ensenyament deductiu, que alhora és la llavor del mètode constructiu o axiomàtic. El coneixement de la repercussió que té aquest ensenyament en els alumnes de primer curs de batxillerat (16-17 anys) pot facilitar un ensenyament cíclic del nombre enter establint un pont didàctic entre la matemàtica escolar i la matemàtica superior.

En tercer lloc, la majoria de les aportacions bibliogràfiques centren l'atenció en la introducció del nombre enter a partir del nombre natural. Hi ha però altres seqüències d'ensenyament que condueixen a la introducció del nombre negatiu, tal com es pot consultar en la pàgina 105.

1.3.7 Participació en la millora de la praxis educativa

Admetem que a l'inici de l'ensenyament obligatori (12-13 anys) les úniques introduccions possibles són les que no presenten ni s'apropen a un tractament formal: la introducció a través de models concrets (p. 56) i la introducció inductiva (p. 68). El motiu principal de l'esmentada acceptació rau en evitar que en edats tendres els alumnes s'hagin de trobar amb cap tractament simbòlic. NCTM (1989) proposà una introducció més prematura del nombre negatiu, tal com destaca Hativa i Cohen (1995, pp. 427-429); no compartim aquest avançament entre les hipòtesis inicials.

Tanmateix, les limitacions esmentades sobre aquestes introduccions es poden compensar presentant en un primer moment un tractament parcial dels continguts, com l'estructura additiva, tot deixant-ne per més endavant d'altres, com l'estructura multiplicativa. Les propostes didàctiques a través de models concrets poden produir petites immersions en la resolució d'equacions que esmenin les seves limitacions. Fraccionar aquest ensenyament i introduir petites immersions en la resolució d'equacions pot facilitar un respecte a l'aprenentatge clar i transparent que, a través de models concrets, ja ha viscut l'alumne prèviament en la introducció del nombre natural i del nombre racional positiu.

Compartim la visió epistemològica que destaca les dificultats de conceptualització del nombre negatiu que provenen d'una interpretació concreta dels nombres. En paraules de Cid (2000, p. 7): «A juicio de Schubring, uno de los hechos que obstaculizó el proceso de conceptualización del número negativo fue la tardía diferenciación entre número, cantidad y magnitud».

Posteriorment, a l'ensenyament secundari postobligatori, les introduccions deductives del nombre enter i del nombre negatiu poden afavorir una evolució intel·lectual de l'estudiant que permeti sembrar la llavor de la introducció constructiva o axiomàtica.

1.4 Hipòtesi i objectius de la recerca

Ens proposem recollir informació i abordar el problema des de la realitat que copsem a les aules. Prioritzem, per tant, la realitat que es desprèn de les dades recollides, deixant en un segon lloc les nostres opinions o suposicions. En definitiva, preferim utilitzar les dades per obtenir resultats que posteriorment constrastarem amb el marc teòric. Aquesta posició condueix a no partir d'unes hipòtesis perfectament elaborades, seguint a RUIZ (1999).

Tanmateix, si admetem que qualsevol proposició que estigui subjecta a una prova empírica rep el nom d'hipòtesi, en virtut de les paraules de PHILLIPS (1971*a*) extretes de FERMAN i LEVIN (1979, p. 26), aleshores la hipòtesi que presentem es pot entendre com una probable solució al problema plantejat i cal que sigui investigada. Així doncs, tot seguit formulem una hipòtesi de treball que és fruit de la nostra opinió i a la que no ens hi agafarem si els resultats es distancien d'ella.

Sembla adient una introducció deductiva del nombre enter i del nombre negatiu al batxillerat, si es vol facilitar èxit en l'ensenyament superior i no es vol limitar l'aprenentatge del nombre negatiu a l'ofert pels models concrets en l'ensenyament obligatori. Tanmateix, la didàctica del nombre negatiu al batxillerat ha estat poc atesa i no és fàcil en un primer moment preveure els possibles resultats que obtindrem.

1.4.1 Hipòtesi de la recerca

De l'ensenyament concret del nombre enter que s'ofereix a l'inici de l'Educació Secundària Obligatòria fins a l'axiomàtic (constructiu) que s'ofereix a l'ensenyament superior sembla inexcusable, en virtut del mètode cíclic, un pont didàctic en una etapa intermèdia. Presentem una hipòtesi que és fruit de les nostres reflexions a partir de l'experiència i de la recerca bibliogràfica. El fet que el nombre enter no sigui un contingut atès al batxillerat fa que tinguem reticències a mostrar la hipòtesi de la recerca. Tanmateix, optem per mostrar-la per explicitar la nostra posició però, alhora, ens proposem des d'un primer moment generar coneixement a partir de les dades recollides i dels resultats obtinguts, és a dir, a partir de la informació recollida en la realitat copsada a les aules.

Hipòtesi 1.4.1 *La incidència en l'aprenentatge de l'estudiant, que inicia els estudis de batxillerat, d'un ensenyament deductiu del nombre enter a través de la resolució de problemes pot ser la llavor que germini en un pont didàctic entre el tractament concret i empíric propi de la matemàtica escolar a l'ensenyament obligatori i el punt de partida constructiu o axiomàtic de l'ensenyament superior.*

1.4.2 Objectius de la recerca

Com a objectiu general ens proposem conèixer la incidència que té en l'aprenentatge de l'estudiant, que inicia els estudis de batxillerat, l'ensenyament deductiu del nombre enter. L'amplitud d'aquesta finalitat és inabordable i, concretem, a partir d'aquest objectiu general, els tres objectius següents, l'assoliment dels quals prenem com a fita de la investigació. Ens ocupem d'un petit aspecte i en la prospectiva plantejarem diferents preguntes d'investigació que possibilitaran l'ampliació de coneixement a partir de la línia d'investigació que prenem.

Atès el problema d'aquesta recerca, les limitacions, l'anàlisi bibliogràfica, la desatenció de la didàctica del nombre enter i negatiu al batxillerat, la realitat viscuda a les aules de secundària i les inclinacions i preferències de l'investigador, prenem com a objectius de la present recerca:

Enunciat dels objectius

1. Diagnosticar el coneixement matemàtic relatiu al nombre enter de l'alumne que inicia els estudis de batxillerat.

2. Conèixer la incidència en l'aprenentatge de l'alumne d'un ensenyament *deductiu* del nombre enter.

3. Explicar les dificultats que tenen els alumnes davant d'un ensenyament *deductiu* del nombre enter a través de la resolució de problemes.

Referències

ACKOFF, R.L. (1953): *The Design of Social Research*. Chicago: University of Chicago.

ARCAVI, A.; BRUCKHEIMER, M. (1981): «How shall we teach the multiplication of negative numbers?» *Mathematics in School, 10*(5), 31-33.

ARNAL, J.; RINCÓN, D.; LATORRE, A. (1992): *Investigación educativa. Fundamentos y metodología*. Barcelona: Labor.

BOREL, E.; DRACH, J. (1895): *Introduction a l'étude de la Théorie des Nombres et de l'Algèbre Supérieure*. París: Librairie Nony.

BRUNO, A. (2001): «La enseñanza de los números negativos: formalismo y significado». *La Gaceta de la Real Sociedad Matemática Española, 4*(2), 415-427.

CID, E. (2000): «Obstáculos epistemológicos en la enseñanza de los números negativos». *Actas del XV Jornadas del Seminario Interuniversitario de Investigación en Didáctica de las Matemáticas, Boletín del SI-IDM, 10. Celebrado en Cangas do Morrazo (Pontevedra), los días 7, 8 y 9 de Abril de 2000. Disponible en* http://www.ugr.es/ jgodino/siidm/boletin10.htm.

— (2003): *La investigación didáctica sobre los números negativos: estado de la cuestión*. Universidad de Zaragoza. Pre-publicaciones del seminario matemático "García de Galdeano".

COLTHARP, F.L. (1966): «Introducing the integers as ordered pairs». *School Science and Mathematics, 66*(5), 277-282.

DECRET 142/2008 (2008): «Ordenació dels ensenyaments de batxillerat». Diari Oficial de la Generalitat de Catalunya 5183 de 29.7.2008.

FERMAN, G.S.; LEVIN, J. (1979): *Investigación en Ciencias Sociales*. México: Limusa.

FLETCHER, T.J. (1976): «Talking of directed numbers». *Mathematical Education for Teaching, 2*(3), 3-13.

FREUDENTHAL, H. (1983): *Didactical phenomenology of mathematical structures*. Dordrecht, Holanda: D. Reidel Publishing Company.

GONZÁLEZ, J.L.; *et al.* (1990): *Números enteros*. Madrid: Síntesis.

HATIVA, N.; COHEN, D. (1995): «Self learning of negative number concepts by lower division elementary students through solving computer-provided numerical problems». *Educational Studies in Mathematics, 28*(4), 401-431.

IRIARTE, M.; JIMENO, M.; VARGAS-MACHUCA, I. (1991): «Obstáculos en el aprendizaje de los números enteros». *SUMA, 7*, 13-18.

KLEIN, F. (1927-1931): *Matemática elemental desde un punto de vista superior*. Madrid: [s.n.].

MILAZZO, F.; VACIRCA, V. (1983): «La struttura moltiplicativa dei numeri relativi: osservazioni storico-didattiche». *Archimede, 35*(1/2), 78-83.

NCTM (1989): *Curriculum and evaluation standards for school mathematics*. The Council, Reston, VA. National Council of Teachers of Mathematics.

PETERSON, J.C. (1972): «Fourteen different strategies for multiplication of integers or why (-1)x(-1)=(+1)». *The Arithmetic Teacher*. 19(5), 396-403.

PHILLIPS, B.S. (1971*a*): *Social Research: Strategy and Tacits*. New York: McMillan.

PHILLIPS, E.R. (1971*b*): «Negative number x negative number gives positive number: An understandable proof for high school students». *School Science and Mathematics, 71*(9), 797-800.

PÓLYA, G. (1981): *Mathematical discovery: on understanding, learning, and teaching problem solving*. New York: Wiley.

PUIG ADAM, P. (1960): *La Matemática y su enseñanza actual*. Madrid: Ministerio de Educación Nacional.

RUIZ, J.I. (1999): *Metodología de la investigación cualitativa*. Bilbao: Universidad de Deusto.

SCHUBRING, G. (1988): «Discussions épistémologiques sur le statut des nombres négatifs et leur répresentation dans les manuels allemands et français de mathématiques entre 1795 et 1845. Actes du premier colloque franco-allemand de didactique des mathématiques et de l'informatique». *Grenoble: La Pensée Sauvage Editions*, 137-145.

SICKLICK, F.P. (1975): «Patterns in integers». *The Mathematics Teacher, 68*(4), 290-292.

SIERRA, R. (1994): *Técnicas de investigación social : teoría y ejercicios*. Madrid: Paraninfo.

SMITH, D. (1900): *The teaching of elementary mathematics*. New York: The Macmillan Company.

SNELL, K.S (1970): «Integers. Introduction of directed numbers». *The Mathematical Gazette, 54*(388), 105-109.

SOTOS, M. (2004): «¿En qué piensa el alumnado cuando decimos número?» *UNO, 37*, 93-104.

UNESCO (2005): *Educación para Todos. El imperativo de la calidad*. París: UNESCO. Informe de Seguimiento de la EPT en el Mundo 2005.

ZERO, Grup (1980): *Els nombres enters*. Barcelona: ICE de la UAB.

Part I

Marc teòric

Capítol 2

Propostes d'ensenyament del nombre enter

Índex

En aquest capítol presentem una succinta revisió de les aportacions que descriuen el que se sap i el que s'ha investigat sobre les propostes d'ensenyament del nombre enter.

La bibliografia relativa al nombre negatiu o enter prové d'autors que sovint disten en l'espai i en el temps. Recerques realitzades i/o coordinades per investigadors, experiències docents i propostes sense fase experimental proporcionen una munió de resultats, opinions i plantejaments que cal destriar per evitar la dispersió. La recerca documental no exhaustiva que estableix els fonaments teòrics d'aquesta investigació s'ha realitzat sobre llibres, revistes especialitzades i tesis. La classificació de les diferents introduccions del nombre enter ha estat fonamental per precisar el problema de la present recerca i és per aquí, en conseqüència, per on iniciem el camí. La varietat de fonts bibliogràfiques sobre el nombre negatiu ha estat classificada per CID (2003, p. 1) en tres grans àrees:

1. Propostes d'ensenyament.
2. Dificultats d'aprenentatge i errors en els alumnes.
3. Implicacions didàctiques de l'epistemologia del nombre negatiu.

La majoria de treballs centren l'atenció en alguna d'aquestes àrees, essent menor la quantitat d'estudis que centren l'atenció en la vinculació entre elles; en aquesta recerca ens fixem en la primera.

A partir de la classificació de les diferents propostes d'introducció del producte de nombres enters d'ARCAVI i BRUCKHEIMER (1981, pp. 31-33), CID (2003, p. 2) la fa extensiva a l'estructura additiva per classificar la bibliografia relativa a les propostes d'ensenyament dels nombres enters. Cid anomena constructiva el que Arcavi anomena axiomàtica; Cid obvia en la classificació la constructiva, que sí que considera Arcavi. Modifiquem l'ordre d'exposició emprat per aquesta autora i considerem les següents categories bibliogràfiques:

1. Introducció per mitjà de models
2. Introducció inductiva
3. Introducció deductiva

4. Introducció constructiva
5. Introducció instructiva

2.1 Ensenyament per mitjà de models

L'ensenyament del nombre enter, que es fonamenta en la identificació entre nombres i objectes propers a la realitat concreta de l'alumne, s'anomena introducció per mitjà de models, models concrets, models físics o models intuïtius.

La naturalesa dels objectes emprats en l'esmentada identificació conduirà a diferents introduccions però, en qualsevol cas, la similitud amb objectes propers a la realitat quotidiana de l'aprenent és on pren força aquesta introducció. Aquests tipus d'introduccions pretenen aprofitar l'experiència prèvia de l'estudiant per tal d'identificar determinats objectes amb els nombres enters. Les operacions entre nombres enters es traduiran a interacció entre els esmentats objectes i l'observació del comportament d'aquests suggerirà propietats que consoliden el coneixement previ amb nombres naturals i que insinuen les regles de funcionament en el conjunt dels nombres enters.

La introducció del nombre enter per mitjà de models permet que l'alumne lligui les regles de funcionament amb la seva experiència prèvia; cal però analitzar cada model per veure fins a quin punt i com ho pot aconseguir. En ocasions es presenten a través de jocs que faciliten la motivació i la reflexió. Per altra banda aquests models no han permès per sí sols la construcció del nombre enter.

Els noms que s'han emprat per fer referència a aquests models han estat diversos: models físics, intuïtius o concrets. En aquesta recerca els anomenarem models concrets. La gran quantitat d'aportacions va conduir a JANVIER (1983) a classificar els models en tres tipus: equilibri, recta numèrica i híbrid. Aquesta classificació ha estat parcialment modificada per CID (2002) amb les següents consideracions que atenem i acceptem en la present recerca:

- Prefereix parlar de models de neutralització per referir-se als models d'equilibri definits per Janvier, perquè entén que aquest nom reflecteix millor la presència d'objectes oposats que es neutralitzen entre sí.

- Empra la terminologia models de desplaçament en lloc de model de la recta numèrica perquè considera que aquest darrer n'és un cas particular.

- No considera el model híbrid ja que els exemples existents es poden incloure en alguna de les dues categories anteriors.

Previ a la publicació d'aquestes dues classificacions el Grup Zero va utilitzar-ne una altra, no explicitada com a tal, que es correspon amb la que vint-i-dos anys després va proposar Cid. La taula comparativa següent mostra un resum de les associacions entre elles.

GRUP ZERO (1980*a*)	JANVIER (1983)	CID (2002)
expressió d'un estat expressió d'una variació	models d'equilibri model de la recta numèrica models híbrids	models de neutralització models de desplaçament

Entre les diferents propostes d'ensenyament algunes condueixen només a la introducció de l'estructura additiva dels nombres enters, altres només a l'estructura multiplicativa i la majoria no fan referència a l'ordre en els nombres enters. Nogensmenys, les destaquem perquè, més enllà de l'interès que comporten per sí mateixes, engloben les que han conduït els alumnes participants en la fase experimental d'aquesta recerca a l'aprenentatge dels nombres enters.

En les línies següents mostrem les diferents interpretacions dels símbols « $+$ » i « $-$ ». Tot seguit prestem atenció als models concrets de neutralització i de desplaçament així com a la seva concreció a les aules. Finalment presentem diferents reflexions sobre els avantatges i els inconvenients que diferents autors exposen respecte de la utilització de models concrets en l'ensenyament del nombre enter o negatiu: des dels que creuen que no s'haurien d'emprar models concrets fins els que en critiquen algun de determinat.

2.1.1 Sobre la utilització dels signes « $+$ » i « $-$ »

La introducció dels nombres enters a través de models concrets requereix l'acceptació que els signes « $+$ » i « $-$ » tenen les tres interpretacions següents:

1. Operadors binaris.

    Els alumnes han utilitzat al llarg de l'ensenyament primari els símbols « $+$ » i « $-$ » com operacions entre nombres naturals. Pel discent « $+$ » és un símbol que anomena suma i que té un significat perfectament delimitat, «afegir». Per altra banda « $-$ » l'anomena resta i també té un significat perfectament delimitat, «treure». De les tres interpretacions, que en la introducció del nombre enter a través de models concrets, poden tenir els símbols « $+$ » i « $-$ », aquesta és l'única que l'alumne reconeix del treball previ amb nombres naturals. En el moment d'introduir el nombre negatiu l'alumne identificarà aquests símbols amb les operacions de suma i resta que associarà amb les accions d'afegir o treure.

2. Signes predicatius.

    Els alumnes no han utilitzat els signes « $+$ » i « $-$ » com signes predicatius en els estudis previs a la introducció del nombre negatiu.

    - Com a signes predicatius fem referència en els models de neutralització a mesures de quantitats de magnitud que es cancel·len entre sí, com apunta Cid (2003, p. 5).
    - En els models de desplaçament s'interpreten com posicions, a una banda o l'altra de l'origen en la recta numèrica, o desplaçaments en un sentit o un altra segons el signe, com apunta Cid (2003, p. 6). Aquesta doble interpretació del signe predicatiu en els models concrets de desplaçament permet interpretar: la suma d'un estat amb una variació que té per resultat un estat i, també, la suma de dues variacions que té per resultat una variació. L'ensenyament de la matemàtica a través de models concrets pren la seva força en la intuïció i el sentit comú dels estudiants. Per això interpretem els signes de manera que puguem donar resposta als fenòmens empírics que en cada moment volem estudiar.

3. Operadors unaris.

Els alumnes no han utilitzat els signes « + » i « − » com signes unaris en els estudis previs a la introducció del nombre enter.

- Com operadors unaris, en els models de neutralització fem referència a la permanència o el canvi d'estat i en aquest sentit considerem més adequada la terminologia *estat* emprada pel GRUP ZERO (1980*a*).
- En els models de desplaçament els signes fan referència al manteniment o canvi del sentit de desplaçament.

La incorporació dels símbols « + » i « − » com símbols predicatius o operadors unaris requereix una necessària negociació amb els alumnes[1]. Els símbols « + » i « − » tenen un significat pels alumnes que fa que no es puguin utilitzar amb altres significats si no queda clarament justificat. La manca d'aquesta negociació condueix inevitablement a una instrucció que fa sumís l'alumne poc crític i rebel el que sí que ho és. El tractament a través d'exemples concrets podrà convèncer l'estudiant, se li podrà fer veure que acceptant determinades regles les coses van bé, mai però amb el mateix nivell de transparència que es pot aconseguir amb els nombres naturals. Tot i aquesta limitació, el currículum corresponent a l'ensenyament obligatori demana proximitat a situacions reals o simulades de la vida quotidiana, al coneixement i maneig dels elements matemàtics bàsics (com els diferents tipus de nombres) en situacions reals o simulades de la vida quotidiana.

2.1.2 Models concrets de neutralització

Els models concrets de neutralització són els que interpreten els signes predicatius « + » i « − » com sentits oposats de mesures de magnituds que es neutralitzen entre sí. Com a operacions binàries els signes « + » i « − » fan referència a les accions que dins del model es corresponen amb afegir i treure. Com a signes unaris el signe « + » indica permanència i el signe « − » indica canvi d'estat.

[1]En diverses experiències s'ha constatat que com a punt de partida els alumnes tenen la idea que la suma i la resta són operacions diferents. Per l'alumne sumar és «afegir» i restar és «treure» tal com mostren BRUNO i MARTINON (1994*b*, p. 40).

Són molts els models d'ensenyament dels nombres enters que es poden encabir en aquesta categoria que anomenem models concrets de neutralització. En la bibliografia es poden trobar moltes propostes: guanys i pèrdues, persones que pugen o baixen pisos o que entren i surten d'un recinte, classificacions amb puntuacions positives o negatives, fitxes o blocs de dos colors, boles que es posen en dues varetes, exèrcits que s'enfronten, càrregues elèctriques, accions d'afegir i treure, glaçons que escalfen o refreden un líquid, globus d'heli i sacs de sorra que fan pujar o baixar un globus, neutralització entre els punts de les fitxes de dòmino...

Cada proposta didàctica té algunes particularitats que la fan més o menys destacada. STREEFLAND (1996, pp. 60-61) considera que el producte d'un enter positiu per un negatiu es pot justificar a través dels models concrets. Destaca que $5 \cdot (-2) = -10$ ja que tenir cinc vegades un deute de dos florins holandesos es correspon amb tenir un deute de deu florins holandesos. En canvi per justificar que $(-3) \cdot 4 = -12$ accepta que amb el fenomen empíric no n'hi ha prou i es recolza en el punt de vista de FISCHBEIN (1987), és a dir, tracta el problema des d'un punt de vista intern a la matemàtica i fa ús de la propietat commutativa. Per justificar que el producte de dos nombres negatius és un nombre positiu recorre a la propietat distributiva. La proposta de STREEFLAND (1996) s'adiu amb les creences que exposem en aquesta recerca. Els models concrets no poden donar resposta a tots els interrogants que ens podem plantejar sobre els nombres enters. Són, per tant, un bon punt de partida però insuficients per recobrir tot el contingut curricular que ens ocupa.

2.1.3 Models concrets de desplaçament

Els models concrets de desplaçament interpreten els signes predicatius « $+$ » i « $-$ » com posicions a una banda o a l'altra respecte de l'origen en la recta numèrica o desplaçaments en un sentit o un altre. Com a operadors binaris indiquen desplaçaments d'una posició a una altra o la composició d'aquests. Com a signes unaris indiquen canvi o permanència del sentit de desplaçament.

Són molts els models d'ensenyament dels nombres enters que es poden classificar en aquesta categoria que anomenem models concrets de desplaçament: termòmetres o escales de diverses magnituds, persones o objectes que avancen o retrocedeixen per un determinat camí, altituds per sobre o per sota del nivell del mar, ascensors o escales mecàniques que pugen o baixen, anys abans o després de Crist, graons que pugen o baixen, cintes de vídeo que es tiren endavant o endarrera, variacions en el nivell de l'aigua d'un dipòsit, desplaçaments sobre la recta numèrica, ...

Força propostes mostren la seva inclinació pel model de les temperatures, com és el cas de SEMADENI (1984).

> The best motivation for the concept of a negative number is provided by temperatures (in countries with metric system, in the moderate climate zone).
>
> (SEMADENI, 1984, p. 389)

El model de les temperatures no es limita però als enters, i cal forçar-lo per tal de considerar només temperatures enteres. Si el termòmetre, que hom el visualitza en una posició vertical, el considerem horitzontal, connectem el model de les temperatures amb el de la recta numèrica.

Sovint el treball amb els models anteriors condueix al de la recta numèrica i els desplaçaments sobre ella. Alguns autors justifiquen el producte de nombres enters, com és el cas de SNELL (1970, p. 107), fent ús de cotxes que avancen o retrocedeixen abans o després d'un determinat moment. Altres autors interpreten l'àrea d'un rectangle amb un vèrtex en l'origen de coordenades i de costats paral·lels als eixos. CASTELNUOVO (1973, pp. 160-163) posa colors diferents a ambdues cares d'un rectangle i en girar aquest entorn dels eixos el producte de signes és « $+$ » o « $-$ » segons el color que mostra la cara superior del rectangle[2].

L'aproximació als nombres enters a partir d'una escala ja va ser treballada en la dècada dels anys vuitanta i exposada per GONZÁLEZ *et al.* (1989). Tot i la proposta d'aquest model els autors l'abandonen a l'hora d'introduir l'estructura

[2]La proposta de CASTELNUOVO (1973, pp. 160-163) pot servir per recordar les regles dels signes però no per justificar-les. El procediment que adopta funciona perquè sap on vol arribar. També podríem dir que quan el rectangle està per sobre de l'eix d'abscisses el signe és positiu i quan està per sota negatiu adoptant així un criteri que no condueix al resultat desitjat.

multiplicativa. Actualment encara hi ha llibres de text que utilitzen aquesta proposta inclús per l'estructura multiplicativa (p. 62), tal com hem comprovat en una de les propostes editorials que hem revisat i que es distribueix actualment en els centres educatius.

En l'anomenat «model dels ascensors» els signes predicatius « + » i « − » indiquen la posició de l'ascensor per sobre o per sota de la planta baixa. Les operacions binàries indiquen el desplaçament d'una posició a una altra. Els signes unaris mantenen o canvien el sentit de desplaçament. Tres significats diferents per uns mateixos símbols.

2.1.4 Sobre les propostes a les aules

Les tres propostes editorials que hem consultat[3] proposen el treball experimental a partir de models concrets de desplaçament per introduir l'estructura additiva i multiplicativa dels nombres enters; una d'elles instrueix les regles per operar els nombres enters. En totes elles s'imposa la utilització dels signes sense justificació. No observem que es marqui clarament la diferència entre el coneixement del concepte matemàtic de nombre enter i el coneixement del model concret emprat per al seu ensenyament. Coincidim, per tant, amb la reflexió que fa Cid:

> Además, hay que puntualizar que son muy pocos los autores que, una vez introducida la noción de número entero a través de uno o varios modelos concretos, se plantean la necesidad de un proceso de formalización, de descontextualización de la noción inicialmente aprendida.
>
> (Cid, 2003, p. 8)

La justificació de l'ordre en els nombres enters quan utilitzem models concrets de neutralització, exigeix l'establiment de valoracions particulars per a cadascun

[3] La proposta editorial T introdueix el nombre enter en la darrera unitat de primer curs d'ESO i inicia el segon curs amb aquest contingut. La terminologia s'imposa i els models concrets de desplaçament s'empren per obtenir les regles amb què s'operen els nombres enters. La proposta editorial C introdueix el nombre enter en la segona unitat del primer curs. Imposa la terminologia a emprar i també les regles per operar. La proposta editorial B imposa la terminologia, empra el model concret de l'escala (desplaçament) per introduir l'estructura additiva i la multiplicativa.

d'aquests models: és millor obtenir guanys que pèrdues, posseir punts positius que negatius, tenir càrregues elèctriques positives que negatives, ... Quan emprem models concrets de desplaçament interpretem cada nombre enter com una determinada posició considerant que un nombre enter és menor que un altre si, utilitzant el sentit de recorregut definit com a positiu, la posició que representa el primer nombre és anterior a la que correspon al segon.

Segons GONZÁLEZ MARÍ (1995) el treball a l'escola amb models concrets no condueix l'alumne a veure els nombres enters com un conjunt totalment ordenat. Segons ell, el treball a l'escola amb situacions additives de comparació condueix l'alumne al que anomena «nombre natural relatiu»; resta el procés que li permeti veure l'ordre total del conjunt dels nombres enters.

2.1.5 Els models concrets a través de jocs

Els jocs de matemàtiques, entesos com un material didàctic auxiliar, participen en l'increment de l'atenció i de la participació de l'alumne. Amb això s'aconsegueix, com a principal aportació, un ensenyament que incrementa la motivació de l'alumne. Per posar un exemple, amb l'objectiu de trencar amb la disposició negativa de l'alumne cap a l'aprenentatge de la matemàtica, BOSCO (1994) presenta diverses introduccions per treballar amb nombres. La utilització de jocs matemàtics pretén de manera prioritària motivar l'alumne.

La proposta de WHITMAN (1992) introdueix el producte de nombres enters a través d'una metodologia educativa que consisteix en aprendre jugant. Els alumnes construeixen unes fitxes amb dues informacions: el sentit de desplaçament i el nombre de salts que cal fer a partir de la posició que s'ocupa en cada moment. Les regles del joc introdueixen els símbols « $+$ » i « $-$ » amb un significat definit dins del joc. La cerca de l'interès de l'alumne connecta amb un model concret de desplaçament.

No pretenem aprofundir en aquest punt ja que no es correspon amb els objectius d'aquesta recerca. Tot i així sí que volem referenciar una altra proposta que fa palesa la potència del joc i la connexió d'aquest amb els models concrets que permeten introduir el nombre enter. RIBEIRO (1996) presenta tres jocs per resoldre, en acció, quatre problemes didàctics:

1. Com restar el major del menor?, per exemple, $3 - 5 = \ldots$
2. Com restar un negatiu?, per exemple, $2 - (-3) = \ldots$
3. Per què menys per menys dóna més?, per exemple, $(-2)(-3) = 6$
4. Què significa menys vegades?, per exemple, $(-2)x \ldots$

Una virtut que apreciem en aquesta proposta és que dóna l'oportunitat a l'estudiant de que descobreixi unes determinades propietats per sí mateix.

> What is teaching?
>
> In my opinion teaching is giving opportunity to the students to discover things by themselves. Not the teacher should tell the things to the students, if they wish to learn really they have to discover.
>
> (PÓLYA, 1966*b*, 2'20")

A través del *joc de les papallones* condueix l'estudiant cap al descobriment del comportament de la suma de nombres enters. El *joc de guanys i pèrdues* dicta les regles que permeten restar nombres enters. Finalment, el *joc del cargol* condueix l'estudiant a veure com ha d'actuar el producte de nombres enters.

> A nuestro modo de ver, cuando un alumno llega a formular la célebre pregunta: *¿Por qué menos por menos da más?*, ya es tarde, el mal ya está hecho, pues la solución se ha enseñado antes de que él tuviese el problema. Será preciso esperar que él se desenvuelva hasta que la demostración formal le satisfaga. Proponemos que estos juegos sean usados mucho antes de que esta pregunta surja. Con ellos, nuestro objetivo es que más adelante, en la situación escolar, los papeles se inviertan. El profesor será quien preguntará al alumno: *¿Por qué menos por menos da más?* Y se espera que le contesten un: *Está claro, porque el..., es decir, se espera que el alumno proporcione su propia explicación a un hecho que para él ya resulta obvio.*
>
> (RIBEIRO, 1996, p. 39)

El joc pot ser emprat com una activitat recreativa però també pot ser emprat com una activitat didàctica amb uns objectius perfectament delimitats; la primera familiaritza l'estudiant amb el joc, la segona facilita la construcció d'un determinat coneixement matemàtic[4].

En la versió recreativa els signes es substitueixen per colors. La utilització dels signes en la versió escolar s'adiu amb el predicatiu i unari propis de l'ensenyament del nombre enter a través de models concrets.

2.1.6 Limitacions i alternatives

Actualment hi ha una destacada quantitat de propostes d'introducció dels nombres enters a través de models concrets. FREUDENTHAL (1983) però ja va manifestar els seus dubtes sobre aquest tipus d'introducció. Encara que considera adequada la utilització d'aquests models en els inicis de l'ensenyament dels conceptes numèrics, destaca que aquest tipus d'ensenyament no es pot perllongar indefinidament.

Aquesta posició de Freudenthal, escrita l'any 1983, havia estat argumentada anteriorment per KLEIN (1927-1931). Segons ell el nombre negatiu és el *primer concepte pròpiament matemàtic* que l'alumne es troba a l'escola que, per a la seva comprensió completa, requereix un alt grau d'abstracció.

> [...] A pesar de todos estos ejemplos y muchos más que pudieran ponerse para aclarar el concepto de número negativo, no puede desconocerse la gran dificultad de su introducción en la escuela. El alumno está acostumbrado a ver en los números, primero, y más tarde en las letras con que opera, representaciones de cosas reales y concretas, y en las operaciones con números o letras las correspondientes operaciones con las cosas, y se encuentra ahora con algo de naturaleza muy diferente, con los números negativos que no tienen nada que ver con la imagen sensible que se ha forjado del número, y, sin embargo, ha de operar con ellos, aunque las operaciones han perdido aquella sig-

[4] Entenem que tota introducció del nombre negatiu a través de jocs ha de tenir per objectiu principal l'aprenentatge del nombre negatiu i no, tal com proposa SÁNCHEZ (1991), únicament la familiarització amb els jocs.

> nificación clara e intuitiva que antes tenían. *Se presenta, pues, aquí por primera vez, el paso de la matemática práctica a la formal, para cuya completa comprensión es precisa en alto grado la capacidad de abstracción*[5].
>
> (KLEIN, 1927-1931, Vol. 1, pp. 32-33)

Si acceptem la teoria genètica[6] de SPENCER (1874-1875) aleshores la introducció dels nombres negatius en la matemàtica escolar difícilment pugui evitar un primer contacte amb la matemàtica formal. Efraim FISCHBEIN (1987, p. 121) no se n'està de destacar la probable precipitació en la utilització de models concrets que ell anomena intuïtius.

> A good model has to be an autonomous entity but at the same time a trusty mediator between the original situation and the solver's intellectual activity. Consequently, most of our tacit, intuitive models are imperfect mediators, leading often to incorrect or incomplete interpretations.
>
> (FISCHBEIN, 1987, p. 126)

Tal com afirma CID (2002, p. 530) en el món de l'ensenyament no modelitzem fenòmens reals a través de models matemàtics, sinó que comencem per modelitzar els conceptes matemàtics a través de l'observació de fenòmens empírics. Aquests estan formats per objectes reals que els estudiants poden visualitzar i manipular. Ara bé, fa falta que els fenòmens reals donin informació relativa al concepte matemàtic del qual pretenem obtenir informació.

> La mayor dificultad para la enseñanza de los números enteros es la no existencia de un modelo concreto que explique todas las propiedades de $\mathbb{Z}$. El intento de utilizar un modelo de este tipo que cubra

[5] La cursiva és nostra.

[6] La teoria genètica es basa en la hipòtesi que els problemes que s'han hagut de resoldre, i les dificultats que ha calgut superar, per obtenir el coneixement que avui tenim, estan relacionats amb els problemes que ha de resoldre l'estudiant i les dificultats que ha de superar. Va ser exposada per Herbert Spencer l'any 1860. Aquesta teoria va prendre la seva màxima força a partir de la teoria de l'evolució de Charles Darwin que havia publicat la part central dels seus treballs entre els anys 1842 i 1854.

> totalmente el estudio de los enteros es contraproducente por dos motivos:
>
> a) Obstaculiza el aprendizaje al impedir la ruptura con lo real; necesaria para la construcción de $\mathbb{Z}$.
>
> b) Convence al alumnado de la inutilidad de los negativos, ya que los ejemplos propuestos para justificar ciertas propiedades de los enteros se resuelven mejor en el marco de la lógica natural.
>
> (IRIARTE *et al.*, 1991, pp. 17-18)

I, si aconseguim que un model concret ens aporti informació relativa a part del coneixement que pretenem obtenir, cal que aquest finalment esdevingui coneixement matemàtic.

> Incluso algunos no parecen distinguir entre el conocimiento del modelo y el conocimiento de la noción matemática y aseguran, por ejemplo, que un alumno «ha aprendido» la suma y la resta de números enteros, simplemente, por haber desarrollado cierta habilidad en el manejo de fichas de dos colores que se neutralizan entre ellas.
>
> (CID, 2003, p. 8)

Molts són els autors que defensen la introducció dels nombres enters a través de models concrets, SEMADENI (1984); ZERO (1980*a*); BELL (1986); GARDNER (1977), entre d'altres. Aquesta és en l'actualitat la pràctica generalitzada en la matemàtica escolar, que es recolza en la proximitat que ofereix a la realitat quotidiana de l'estudiant. Aquest tipus de treball limita la concepció de nombre a la que s'exposa en l'apartat 4.3.1 (p. 137).

Altres autors (KLEIN, 1927-1931; FREUDENTHAL, 1983), basant-se en les limitacions d'aquest ensenyament, mostren reticència respecte de centrar la introducció del nombre enter exclusivament en la utilització de models concrets o, fins i tot, per la seva utilització combinada amb altres estils d'ensenyament.

2.2 Introducció inductiva

Es caracteritza per donar l'oportunitat a l'estudiant de descobrir regularitats. En la introducció inductiva els alumnes no prenen com a referència cap model concret. En essència el que es proposa és experimentar amb nombres positius, observar els resultats de les operacions. Amb la finalitat de mantenir les regularitats advertides es facilita que l'alumne indueixi els resultats.

$6-3=3$	$6-3=3$	$6\cdot 3=18$
$6-4=2$	$6-2=4$	$6\cdot 2=12$
$6-5=1$	$6-1=5$	$6\cdot 1=6$
$6-6=0$	$6-0=6$	$6\cdot 0=0$
$6-7=-1$	$6-(-1)=7$	$6\cdot(-1)=-6$
$6-8=-2$	$6-(-2)=8$	$6\cdot(-2)=-12$
$6-9=-3$	$6-(-3)=9$	$6\cdot(-3)=-18$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

A la transparència amb què l'alumne accepta les operacions amb nombres naturals s'hi suma la conservació de les regularitats descobertes; aquests són els dos pilars bàsics de la introducció inductiva.

L'acceptació de les regles que permeten operar nombres enters es basa en admetre els patrons obtinguts per inducció. Cal, per tant, dissenyar entorns d'aprenentatge que evitin que l'alumne vegi inqüestionable aquest procés de construcció de coneixement. PÓLYA (1966*a*) destaca la següent cita de Leonard Euler:

> Debemos distinguir cuidadosamente de la verdad el conocimiento que sólo se apoya en observaciones y no ha sido aún probado; se trata de conocimiento obtenido por inducción, como usualmente decimos. Y, puesto que nosotros hemos visto casos en que la mera inducción conduce al error, debemos tener sumo cuidado en no aceptar como verdaderas las propiedades de los números que han sido descubiertas

> por observación y que se apoyan sólo sobre la inducción. En realidad, nosotros usaremos tales descubrimientos como una oportunidad para investigar más detenidamente las propiedades descubiertas y probarlas o refutarlas; en cualquiera de ambos casos aprenderemos algo útil.
>
> (PÓLYA, 1966*a*, p. 25)

Els nombres naturals, les operacions amb ells i les seves propietats les acceptem. Afegim nous nombres i volem estendre les operacions conegudes a tots ells de manera que es respectin les propietats que ja coneixíem per naturals. En conseqüència, el mètode inductiu és una forma del *principi de permanència de les lleis formals* (p. 87). Ara bé, el mètode inductiu no s'ocupa de que les propietats de les operacions es mantinguin; només mira de mantenir regularitats numèriques.

Per altra banda, en el mètode intuïtiu el que es manté es un patró desvinculat de la realitat d'un model concret. FREUDENTHAL (1973) escriu que la introducció intuïtiva i el treball amb models concrets es poden combinar. SEMADENI (1984) afirma que així hauria de ser[7].

> For many years I have propagated the inductive-extrapolatory method. [...]. It is an inductive extrapolation beyond 0. The method can be combined with the intuitive method; it is an active complement of the passive contemplation of the number line, since it is checked by computations and inferences. Even, if the intuitive approach is preserved, it is a valuable complement, and if the number line is not used at all, it is the most natural approach. Moreover, because of the implicit, *though not yet formalized induction it prepares for genuine mathematics. It produces what happens to the counting number in the counting process, and it forshadows what on a higher level becomes a rigorous proof.*
>
> (FREUDENTHAL, 1973, p. 282)

[7] FREUDENTHAL (1973) anomena «inductive-extrapolatory method» el que Cid en diu «introducció inductiva». Freudenthal anomena «inductive method» el que CID (2003) en diu «introducció per mitjà de models». La terminologia que emprem en aquesta recerca és la de Cid, qui alhora la pren d'ARCAVI i BRUCKHEIMER (1981).

2.3 Introducció deductiva

Quan la introducció del nombre enter es contextualitza en entorns quotidians i propers a l'alumne es genera proximitat entre el nombre i les seves aplicacions a fenòmens empírics. Les operacions entre nombres naturals es corresponen amb accions concretes amb una transparència i immediatesa que, si es vol imitar amb els nombres enters, produeix importants dificultats d'aprenentatge ja que la traducció entre operacions amb enters i accions empíriques no és en absolut tan immediata. Entre les diverses operacions probablement la que més conflicte genera i ha generat és el producte de nombres negatius.

> [...] «menos por menos da más», es frecuentemente «piedra de escándalo» para muchos.
>
> (KLEIN, 1927-1931, Vol. 1, p. 33)

El mètode inductiu cerca regularitats en el comportament dels nombres naturals i les accepta per als enters. En canvi, el mètode deductiu examina les propietats dels nombres naturals i les accepta i estén als enters. Aquesta és l'essència del *principi de permanència de les lleis formals* (p. 87), enunciat per HANKEL (1867). Aquest matemàtic diu que en generalitzar un concepte a un domini més ampli cal conservar el major nombre de propietats i al nou concepte li ha de correspondre com a cas particular l'anterior.

> La importancia de las reglas de cálculo [2-5] a [2-19][8] radica en que al generalizar el concepto de número mediante definiciones por abstracción del nuevo concepto, pasaremos del natural al entero, de éste al racional, luego al real, y de aquí al complejo, de manera que

[8]Fa referència a regles de càlcul en els nombres naturals. Aquestes les acceptem sense qüestionar-les i es poden consultar en REY PASTOR *et al.* (1969, pp. 20-22). Diuen: tot nombre té un següent, tot nombre més el següent d'un altre coincideix amb el següent de la suma d'ambdós, associativa de la suma, commutativa de la suma, llei cancel·lativa de la suma, el producte de tot nombre per 1 és el mateix nombre, el producte d'un nombre pel següent d'un altre coincideix amb el producte d'ambdós nombres més el primer nombre, distributiva del producte respecte de la suma, associativa del producte, commutativa del producte i llei cancel·lativa del producte.

> puedan definirse operaciones de adición y multiplicación entre los nuevos entes que cumplan (con las pequeñas modificaciones que se verán) dichas reglas de cálculo antes establecidas[9].
>
> (Rey Pastor *et al.*, 1969, p. 23)

La introducció deductiva pren la seva força en el *principi de permanència de les lleis formals* (p. 87). L'alumne familiaritzat amb els models concrets s'inicia en el *principi de permanència de les lleis formals* (p. 87) a través de la introducció inductiva. La introducció deductiva abandona la realitat quotidiana de l'alumne i afavoreix l'evolució del concepte de nombre (p. 121).

La introducció del nombre negatiu pot ser atesa també a través de la resolució d'equacions i de la geometria analítica. Tal com defensa Lagrange (1898, p. 24) l'aritmètica i la geometria són dues branques fonamentals de la matemàtica, no només per elles mateixes sinó també per la interacció entre elles. Aquesta posició la reprèn Hans Freudenthal i l'exposem tot seguit per la claredat de les seves paraules:

> *The need for general validity of algebraic solution methods to which the negative numbers owed their existence*[10], is reinforced from the 17th century onward by the need for general validity of descriptions of geometric relations.
>
> The second need, more content directed than the formal algebraic one, is the most natural and compelling. It is properly responsible for the success story of negative (and also of complex) numbers.
>
> (Freudenthal, 1983, p. 433)

El tractament algebraic i geomètric fa que l'ensenyament dels nombres negatius, a través del model deductiu, no només es basi en el *principi de permanència de les lleis formals* (p. 87) sinó també en un principi de permanència algebraic i geomètric que permet que una sola expressió algebraica representi tota una corba, independentment del quadrant on es representi.

[9] En la pàgina 90 reprenem el principi de permanència de les lleis formals i ampliem aquesta referència.

[10] La cursiva és nostra.

2.3.1 Tractaments geomètrics

Prenem quatre nombres naturals $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$ i $d > 0$ tals que $a > b$ i $c > d$. En conseqüència $a - b$ i $c - d$ també són nombres naturals i, per tant, podem considerar el seu producte $(a - b) \cdot (c - d)$. Considerem el rectangle de costats a i c partit en quatre rectangles tal com es pot veure en la figura 2.1 (p. 72). La suma, com l'acció d'afegir, i la resta, com l'acció de treure, sense necessitat de cap operació algebraica, condueixen a la següent relació:

$$(a - b)(c - d) = ac - ad - bc + bd \tag{2.1}$$

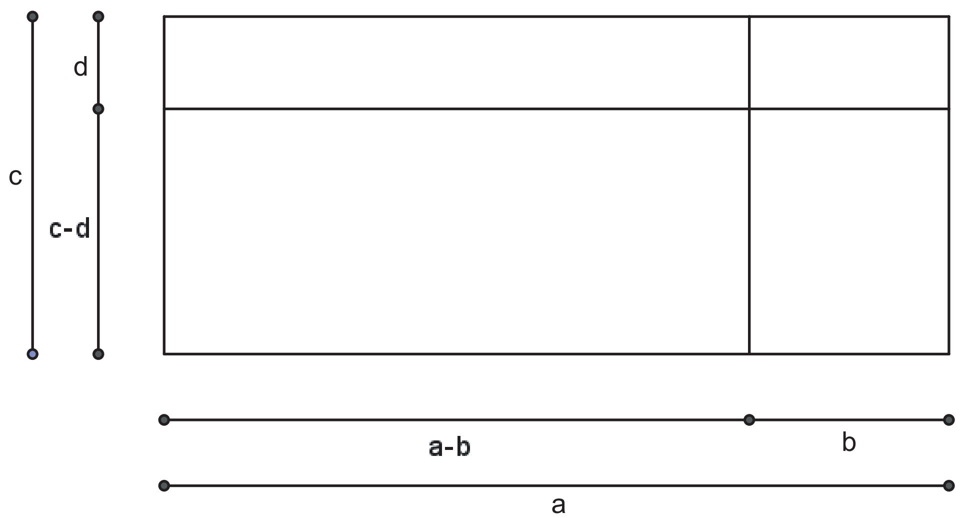


Figura 2.1: L'àrea del rectangle gran és la suma de les àrees dels rectangles en que queda dividit. Amb un raonament semblant es pot obtenir la relació (2.1). KLEIN (1927-1931, Vol. 1, p. 36) destaca que la relació es pot obtenir imposant adequadament que l'àrea del rectangle és igual a la suma de les seves parts.

La relació 2.1 (p. 72) pren significat per un alumne familiaritzat prèviament amb el nombre natural ja que enllaça amb el seu coneixement previ. Tot i així, aquest tractament força una evolució del concepte de nombre (p. 137). El nombre natural que s'introdueix progressivament per comptar, ara l'estem emprant per mesurar. La introducció del nombre negatiu requereix un trencament amb les concepcions prèvies.

> El conocimiento del número entero exige pues, la ruptura con algunas ideas que están muy ligadas al conocimiento que se posee de la aritmética práctica.
>
> (IRIARTE *et al.*, 1991, p. 13)

A més, si en la relació 2.1 (p. 72) prescindim de les limitacions imposades als quatre nombres i fem $a = c = 0$, obtenim $(-c)(-d) = +bd$, és a dir, la regla dels signes del producte de nombres negatius[11].

> [...] con la introducción de los números negativos se manifiesta claramente la facultad de generalización de que está dotada la mente humana, por virtud de la cual, sin darnos cuenta de ello, nos sentimos inclinados a extender y aplicar a cuestiones más generales conceptos y reglas deducidos y válidos para casos particulares. Esta tendencia, aplicada a la Aritmética, cristaliza en el llamado Principio de permanencia de las leyes formales, explícitamente enunciado, por primera vez, por Hermann Hankel en su interesantísima y muy recomendable obra Theorie der komplexen Zahlsysteme.
>
> (KLEIN, 1927-1931, Vol. 1, p. 36)

2.3.2 Conviccions i convenis

La introducció deductiva del nombre enter es pot proposar després que l'alumne estigui familiaritzat amb diferents models concrets i amb el mètode inductiu. El *principi de permanència de les lleis formals* (p. 87) permet adoptar un nou punt de vista a partir dels objectes i de les propietats amb que l'estudiant prèviament s'ha familiaritzat. Això no vol dir que compartim en la seva totalitat la introducció del nombre enter a través de models concrets. Aquell coneixement matemàtic que no es pot obtenir per observació de fenòmens empírics amb claredat no s'hauria de forçar des de l'ensenyament a través de models concrets, tal com mostren STREEFLAND (1996) i FISCHBEIN (1987).

[11] Quan en la relació 2.1 (p. 72) fem $a = c = 0$ tirem per terra tota la claredat que havíem aconseguit.

> Contrariamente a esta práctica se impone, a mi modo de ver, la necesidad de no intentar demostraciones imposibles; sino, antes bien, convencer al discípulo por medio de ejemplos sencillos correspondientes a la realidad de las cosas, y aun, si es posible, hacerle descubrir por sí mismo que precisamente todos los convenios y definiciones que se apoyan en el principio de permanencia de las leyes formales, son apropiados para llegar a un algoritmo uniforme y cómodo; en tanto, que cualesquiera otros convenios quitarían generalidad a todas las reglas, obligando a considerar, dentro de cada una, numerosos casos diferentes.
>
> (KLEIN, 1927-1931, Vol. 1, p. 39)

En l'exemple que hem mostrat en aquest apartat (p. 72) hem vist que quatre nombres naturals $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$ i $d > 0$ tals que $a > b$ i $c > d$ compleixen la relació 2.1 (p. 72). Aquesta és acceptable per tot alumne amb la concepció de nombre que hom pretén aconseguir en els primers anys d'escolarització (def. 4.3.1, p. 137). Ara bé, suposar que $a = c = 0$ per tal d'obtenir la regla dels signes pel producte de nombres negatius constitueix l'abandonament de la claredat que obté l'alumne a partir de l'observació directa de la realitat, és a dir, del que per l'alumne pot ser transparent i plausible de ser acceptat. La relació 2.1 (p. 72) que s'obté de seccionar l'àrea d'un rectangle en quatre parts, deixa de poder ser una convicció profunda quan considerem els costats nuls.

> Lo que realmente se hace es escamotear la demostra- ción, sustituyendo el motivo psicológico, que, en virtud del principio de permanencia, nos permite establecer la citada regla, por un motivo demostrable lógicamente. Es indudable que el alumno no puede entender bien esto al oírlo por primera vez, pero llega a creerlo, y si, como ocurre muchas veces, al explicárselo nuevamente en los grados superiores de la enseñanza, no se le da el complemento necesario para una total comprensión, no es raro que llegue a adquirir el convencimiento de que algo místico e incomprensible debe de ser todo aquello.
>
> (KLEIN, 1927-1931, Vol. 1, p. 38)

2.3.3 Models concrets i operacions formals

SEMADENI (1984) suggereix un apropament alternatiu al nombre enter amb la finalitat d'introduir les operacions formals a partir de models concrets. El treball inicial amb models concrets, dins del conjunt de nombres conegut per l'estudiant, el familiaritza amb les operacions que pretenem estendre. Tot seguit proposa el que anomena «principi de permanència de la concreció» que estableix que si tenim una operació o una combinació d'operacions en un determinat domini, la mateixa es pot estendre al domini més ampli. En la seva proposta organitza un entorn d'aprenentatge que permet:

1. Il·lustrar les operacions en el domini familiar, els nombres naturals en el nostre cas.
2. Estendre-les al domini en el que no estan definides, els nombres enters.

Per aconseguir-ho proposa la següent actuació:

1. El professor proposa una activitat relacionada amb el concepte.

   Proposem, per exemple, una activitat que provoqui el treball amb la diferència (concepte) de nombres naturals (esquema) i emprant un cert enunciat (exemple concret). La intenció és estendre l'operació als nombres enters, però encara no la proposem ni la comentem als estudiants.

2. Els estudiants experimenten l'activitat amb nombres del domini familiar.

   Permetem que els estudiants experimentin amb nombres naturals.

3. El professor suggereix incloure nombres del domini més ampli.

   Proposem als estudiants que experimentin amb nombres enters.

4. Els estudiants exploren la nova situació i contesten algunes preguntes expressades en llenguatge col·loquial. En aquest procés els alumnes es troben

amb nombres que seran interpretats posteriorment com valors de l'operació estesa[12].

> L'experimentació conduirà l'estudiant a resultats que probablement el sorprendran. La resposta a les preguntes adequades, recolzant-se en la realitat representada per l'esquema (els objectes d'una col·lecció, etc.), conduirà l'estudiant a obtenir resultats amb significat en el nou domini. Per analogia acceptem el mateix nom per les operacions en ambdós dominis.

Proposa que el nom de les operacions sigui el mateix tant pel domini de partida, els nombres naturals, com pel domini més ampli, els nombres enters. SEMADENI (1984) empra activitats relacionades amb el món real i les trasllada a la matemàtica.

> Hankel and his predecessors brought about a change of the prevailing point of view from concrete-based to formal, from discovering new types of numbers and their construction in the mind. And this is exactly why the permanence principle (and any of its modern disguises) is not the right motivation for definition in school arithmetic or for educating elementary school teachers.
>
> (SEMADENI, 1984, p. 380)

SEMADENI (1984) defensa que expressions com -5 les pot veure l'alumne en programes de televisió i no cal, per tant, explicitar la necessitat de donar significat al símbol « $-$ » emprat. No compartim l'esmentada posició tal com detallem en el present estudi.

2.4 Introducció constructiva

Parlem d'introducció constructiva del nombre enter per fer referència a la presentació axiomàtica[13]. Per aconseguir-ho es comença per definir la relació $\mathcal{R}$ sobre

[12] Es poden considerar no només operacions sinó també relacions, per exemple desigualtats.

[13] La terminologia «introducció constructiva» la prenem de CID (2003, p. 3). L'esmentada investigadora es basa en la classificació que fan ARCAVI i BRUCKHEIMER (1981) de les diferents

$\mathbb{N} \times \mathbb{N}$.

Donats $(a, b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ i $(c, d) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, definim la relació $\mathcal{R}$ per:

$$(a, b)\mathcal{R}(c, d) \Longleftrightarrow a + d = b + c$$

La relació $\mathcal{R}$ és una relació d'equivalència i estableix en $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ una partició en classes d'equivalència, cadascuna de les quals és un nombre enter. Definim el conjunt dels nombres enters $\mathbb{Z}$ com el conjunt quocient $\mathbb{N} \times \mathbb{N}/\mathcal{R}$ format per les classes d'equivalència de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ mòdul la relació d'equivalència $\mathcal{R}$. Cada classe d'equivalència és un nombre enter.

La introducció constructiva o axiomàtica és el punt d'arribada de l'aprenentatge del coneixement matemàtic que ens ocupa. En l'ensenyament constructiu del nombre enter es defineix la suma i el producte tot demostrant la independència del representant escollit. Les propietats[14] es demostren a partir de la definició. Aquest estil d'ensenyament es va proposar en la matemàtica escolar en el període anomenat «Matemàtica Moderna»[15]. Una presentació sintètica es pot consultar en el segon apèndix de la proposta d'ALSINA *et al.* (1980, pp. 129-136).

> La dificultad de desarrollar en el hombre su facultad de abstracción (que con la facultad de razonamiento constituye uno de los principales objetivos formativos en la enseñanza de la Matemática) lo prueba la historia del cero y del número negativo. La palabra cero (de origen árabe: sifr = vacío) fue introducida hacia fines del siglo XV por Leonardo de Pisa (también llamado Fibonacci); éste lo tomó de la escuela arábiga española, cuyo representante más prominente

propostes per a la introducció de la multiplicació dels nombres enters a l'escola. Val a dir però que ARCAVI i BRUCKHEIMER (1981, p. 33) anomenen «axiomàtica» el que CID (2003) denomina constructiva. Considerem que la terminologia emprada per la investigadora podria donar lloc a confusions en diversos contextos educatius donat que es tracta d'una presentació per definició i sense justificació, tractament allunyat dels principis del constructivisme. Tanmateix en aquesta recerca emprem ambdues nomenclatures indistintament ja que l'esmentada introducció el que fa es construir el conjunt dels nombres enters a partir del conjunt dels nombres naturals.

[14] Clausura, associatives respecte de l'addició i del producte, commutatives respecte del producte i de l'addició, distributiva, existència d'elements neutres i d'element oposat o simètric respecte de l'addició, propietats cancel·latives respecte de l'addició i del producte, propietats d'ordre (reflexiva, anti-simètrica i transitiva) i la compatibilitat de l'ordre amb l'addició i amb el producte.

[15] Veure peu de pàgina 16 (p. 78).

> era Juan de Sevilla. Los hindúes, en su célebre numeración decimal, usaban el cero como hueco, lo que ya representa el avance formidable de representar la nada (o ausencia de unidades) por un símbolo; es oportuno señalar que a esto llegaron también los mayas en su notable sistema de representación vigesimal.
>
> Y hasta el siglo XVII no fueron aceptados sin discusión los números negativos; los griegos nunca consideraron como solución de un problema una cantidad negativa o irracional.
>
> Aun las mismas «fracciones» no eran números para los matemáticos griegos, sino «razones de números». Sin embargo el logístico = hábil calculador entre los griegos, o escriba entre los egipcios, persistía en «calcular» profesionalmente con las «fracciones» como si fuesen «números» sin preocuparse de justificar lógicamente sus reglas de cálculo e indiferente a las críticas irónicas de Platón.
>
> Por otra parte, muchas discusiones modernas sobre la fundamentación matemática tienen el mismo origen; toda abstracción es en sí misma una fuente de contradicciones: su depuración es larga y difícil, pues las ideas tardan siempre en madurar. Muchas definiciones que se han dado de conceptos ahora perfectamente claros, son las mismas que hoy día nos hacen estremecer cuando las escuchamos de algún alumno.
>
> (REY PASTOR *et al.*, 1969, p. 38)

La introducció constructiva és de tipus axiomàtic i actualment es limita la seva presentació als estudis superiors. Va ser especialment atesa en les dècades del seixanta i del setanta del segle XX dins el moviment anomenat Matemàtica Moderna[16].

[16] La «Matemàtica Moderna» va incidir en les estructures abstractes, rigor lògic (lluny d'aspectes manipulatius), teoria de conjunts i geometria analítica (abandonant la sintètica). La «Matemàtica Moderna» es va produir en mig del corrent clarament formalista dels bourbakistes entre els quals en formava part Jean Dieudonné. En la primera meitat del segle XX hi va haver una forta preocupació pels fonaments de la matemàtica. Va arribar a l'educació matemàtica el que preocupava als matemàtics d'aquell moment.

> Desde que el gran matemático alemán David Hilbert extendió la concepción axiomática de la Geometría al campo de la Aritmética, en los umbrales del siglo XX, la Matemática toda ha evolucionado en un sentido formalista, guiada por el concepto de estructura. Lo esencial matemático ya no se busca en lo metafísico, sino en lo pragmático; la ley ha desplazado a la génesis. «Nous posons des règles de jeu et nous jouons» («Ponemos reglas de juego y jugamos»), replicaba un matemático de la moderna escuela a un filósofo que le objetaba. Y esta sencilla metáfora, pronunciada durante una memorable polémica que presencié en el Congreso de Filosofía de la Ciencia, en París (1949), ilustra mejor que cualquier definición la clase de estructuras que los matemáticos de hoy consideran como los cimientos de nuestra ciencia.
>
> (Puig Adam, 1960, p. 115)

La introducció constructiva sintetitza el coneixement matemàtic que podem assolir amb el mètode deductiu; és el punt d'arribada de la construcció de coneixement matemàtic que ens ocupa que s'estableix com a punt de partida. Actualment podem acceptar, potser fora excepcions, que ha desaparegut de les aules de secundària. Tanmateix, diverses preguntes brollen quan examinem aquesta introducció:

1. Quin és l'objectiu de la introducció constructiva o axiomàtica?
2. Quin interès didàctic pot tenir el model constructiu o axiomàtic?

2.4.1 La finalitat de la introducció constructiva o axiomàtica

Ens proposem en aquest apartat donar resposta a la primera pregunta de les dues que acabem de formular. Quin és l'objectiu o què pretenem aconseguir amb la introducció constructiva o axiomàtica del nombre enter? Examinem les següents paraules de David Hilbert:

> El objetivo que nos hemos propuesto es entonces el de dar un fundamento seguro a las matemáticas. Nuestra intención es devolver a

> nuestra disciplina el antiguo prestigio de consistir de verdades indiscutibles, del que las paradojas de la teoría de conjuntos parecieron despojar. Tenemos la firme convicción de que esto es realizable y que no significa ningún tipo de renuncia a sus partes constitutivas. El método adecuado para la realización de estos fines es, por supuesto, el método axiomático.
>
> (HILBERT, 1993, p. 41)

La resposta de David Hilbert es produeix en un context que cal conèixer per comprendre la posició que defensa. Per facilitar la comunicació amb el màxim de públic possible mostrem tot seguit una síntesi històrica que, tot i que breu, permet situar el tema que ens ocupa.

2.4.2 L'abandonament de l'evidència intuïtiva en favor de la consistència

És almenys en la matemàtica de la Grècia Clàssica, més concretament en Euclides, on trobem per primera vegada el que anomenem mètode axiomàtic. La pretensió d'aquest rau en argumentar que tota propietat és conseqüència d'altres prèviament conegudes. Ara bé, segons el mètode axiomàtic aquestes també han de ser argumentades per veure que són conseqüència d'altres prèviament conegudes. El procés no tindria final si no fos perquè en algun moment hem d'acceptar com a certes algunes propietats, que anomenem axiomes o postulats.

L'elecció dels postulats és en una certa mesura arbitrària. D'entrada sembla raonable triar-ne pocs, senzills i de manera que intuïtivament siguin inqüestionables.

Ara bé, en primer lloc volem que dels postulats que triem no se'n puguin obtenir dues propietats contradictòries. Hom enuncia aquest fet dient que els postulats han de ser *compatibles* o, el que és el mateix, que el sistema format pels postulats ha de ser *consistent*.

En segon lloc volem que totes aquelles propietats que ja coneixem es puguin obtenir a partir dels postulats. Hom enuncia aquest fet dient que els postulats han de ser *suficients* o, el que és el mateix, que els sistema format pels postulats ha de ser *complet*.

En tercer lloc volem que cap dels postulats es pugui obtenir a partir dels altres (postulats). Hom enuncia aquest fet dient que els postulats han de ser *independents* o, el que és el mateix, que el sistema format pels postulats ha de ser *independent*.

D'entrada sembla impensable que algú consideri com a punt de partida un postulat que no sigui intuïtivament inqüestionable. Aquest és l'aspecte que abordem tot seguit.

Euclides va considerar cinc postulats per, a partir d'ells, obtenir tots els enunciats de la geometria. Un dels cinc axiomes és el que diu que si una secant talla a dues rectes formant a un costat angles interiors la suma dels quals és menor que dos angles rectes aleshores les dues rectes, suficientment allargades, es tallen en el mateix costat. Sovint aquest postulat és conegut per postulat de les paral·leles i s'enuncia per l'equivalent que diu que per un punt exterior a una recta es pot dibuixar una recta paral·lela a la donada i només una.

No podem dir que aquest axioma generés dubtes respecte de la seva certesa. Tanmateix el que sí que en va generar va ser l'interrogant relatiu a si es podia considerar procedent acceptar-lo com un postulat, és a dir, si era independent dels altres. No seria possible demostrar aquest postulat a partir dels altres? No semblava tant intuïtiu com els altres quatre i els matemàtics van intentar deduir-lo a partir dels altres postulats (l'axioma de les paral·leles a partir dels altres quatre).

Tal com es pot consultar en el segon capítol de SMOGORZHEVSKI (1978, pp. 12-23), Lobachevski va intentar demostrar el cinquè postulat d'Euclides a partir dels altres quatre. Per aconseguir-ho va negar el cinquè postulat d'Euclides suposant que per un punt exterior a una recta donada es poden dibuixar almenys dues rectes paral·leles a ella; alhora va admetre els altres quatre postulats d'Euclides. L'essència del raonament de Nicolái Ivánovich Lobachevski es basava en el fet que si el postulat de les paral·leles es pot obtenir a partir dels altres quatre postulats, aleshores, negar-lo conduiria en algun moment a obtenir una contradicció; però no en va obtenir cap. János Bolyai i Karl Friedrich Gauss van arribar a la mateixa conclusió que Lobachevski, és a dir, que el cinquè postulat d'Euclides és independent dels altres quatre.

La pretensió de Lobachevski de demostrar que el cinquè postulat d'Euclides es pot obtenir a partir dels altres quatre no va tenir èxit. Ara bé, el que va obtenir mostra que acceptar els primers quatre postulats d'Euclides i la negació esmentada del cinquè no condueix a cap contradicció, és a dir, els quatre primers postulats d'Euclides i la negació del cinquè són compatibles o, el que és el mateix, el sistema és consistent.

La qüestió de la compatibilitat ha estat objecte de molta controvèrsia; tanmateix, no la tractarem en aquest document. Tot i així, de l'exposat es desprèn el perquè es va abandonar l'evidència intuïtiva en favor de la consistència, almenys per una part del col·lectiu matemàtic.

2.4.3 Les proves de consistència relativa

La situació sintetitzada anteriorment va provocar diferents posicions per atacar l'esmentat problema. Per exemple, Frege defensà que els axiomes havien de seguir essent veritats certes i evidents. En canvi Hilbert va promoure la concepció axiomàtica que posava la condició de consistència com a requisit indispensable per a l'acceptació dels axiomes. Ja no es demanava que els postulats fossin inqüestionables segons la nostra intuïció i el pes requeia sobre la consistència. Què és un sistema axiomàtic consistent?

> Un sistema axiomático es consistente si en él no podemos nunca obtener como fórmulas demostrables
>
> $$a = b \qquad \text{y} \qquad a \neq b$$
>
> (HILBERT, 1993, p. 54)

Els axiomes que acceptem han de ser, per tant, consistents o no contradictoris. Dels axiomes no es pot deduir una proposició i la seva negació. Ara bé, donat un sistema d'axiomes, com es pot establir la seva consistència? Per més teoremes que haguem provat sense arribar a contradicció mai podrem tenir la seguretat de topar amb alguna (contradicció) més endavant.

Una manera de provar la consistència d'un determinat sistema axiomàtic rau en reduir-la a la consistència d'un altre sistema axiomàtic del qual es pugui obtenir. Si $\mathbb{N}$ és consistent i definim $\mathbb{Z}$ a partir de $\mathbb{N}$ (p. 76) tenim que $\mathbb{Z}$ és consistent. És a dir, si $\mathbb{N}$ és consistent aleshores $\mathbb{Z}$ també ho ha de ser.

2.4.4 Exemplificació de la introducció deductiva i de la constructiva

En l'annex que es pot consultar a partir de la pàgina 599 fem una exemplificació de la introducció deductiva i de la constructiva. A través de dos exemples triats amb la finalitat que siguin el més senzills possible mostrem l'esmentada exemplificació. Deductiu i constructiu potser han donat confusions que voldríem evitar i, una manera d'arribar al màxim de públic, és exemplificar-ho de la manera més senzilla possible. El que es pot consultar en l'annex esmentat no pretén ser un materia d'aula, això requeriria una adaptació. Tanmateix, deductiu i constructiu o axiomàtic són mots amb significats ben diferents que voldríem aclarir.

Referències

ALSINA, C.; *et al.* (1980): *Didàctica dels nombres enters a l'EGB*. Barcelona: Rosa Sensat.

ARCAVI, A.; BRUCKHEIMER, M. (1981): «How shall we teach the multiplication of negative numbers?» *Mathematics in School, 10*(5), 31-33.

BELL, A. (1986): «Enseñanza por diagnóstico. algunos problemas sobre números enteros». *Enseñanza de las Ciencias*. 4(3), 199-208.

BOSCO, J. (1994): «Jugando en la clase con números». *UNO, 1*, 95-99.

BRUNO, A.; MARTINON, A. (1994): «La recta en el aprendizaje de los números negativos». *SUMA, 18*, 39-48.

CASTELNUOVO, E. (1973): *Didáctica de la matemática moderna*. México: Trillas.

CID, E. (2002): «Los modelos concretos en la enseñanza de los números negativos». *Zaragoza: Actas de las X Jornadas para el Aprendizaje y Enseñanza de las Matemáticas, 2*, 529-542.

— (2003): *La investigación didáctica sobre los números negativos: estado de la cuestión*. Universidad de Zaragoza. Pre-publicaciones del seminario matemático "García de Galdeano".

FISCHBEIN, E. (1987): *Intuition in science and mathematics: an educational approach*. Dordrecht, Holland: D. Reidel Publishing Company.

FREUDENTHAL, H. (1973): *Mathematics as an educational task*. Dordrecht, Holanda: D. Reidel Publishing Company.

— (1983): *Didactical phenomenology of mathematical structures*. Dordrecht, Holanda: D. Reidel Publishing Company.

GARDNER, M. (1977): «Juegos matemáticos. La noción de número negativo y lo arduo que resulta entenderla». *Investigación y Ciencia, 11*, 102-106.

GONZÁLEZ, J.; JIMÉNEZ, M.; BRIALES, F. (1989): «Aproximación a los números enteros a partir de una escalera». *SUMA, 2*, 29-33.

GONZÁLEZ MARÍ, J. (1995): *El campo conceptual de los números naturales relativos*. Tesi Doctoral, Universidad de Granada.

HANKEL, H. (1867): *Theorie der Komplexen Zahlsysteme*. Leipzig.

HILBERT, D. (1993): *Fundamentos de las matemáticas*. México: Servicios Editoriales de la Facultad de Ciencias de la Universidad Nacional Autónoma de México. Selección e introducción de Carlos Álvarez y Luis Felipe Segura; traducción directa del alemán y notas de Luis Felipe Segura.

IRIARTE, M.; JIMENO, M.; VARGAS-MACHUCA, I. (1991): «Obstáculos en el aprendizaje de los números enteros». *SUMA, 7*, 13-18.

JANVIER, C. (1983): «The understanding of directed numbers». *Montreal: Proceedings of the 15th Annual Conference of the North American Chapter of PME*. 295-300.

KLEIN, F. (1927-1931): *Matemática elemental desde un punto de vista superior*. Madrid: [s.n.].

LAGRANGE, J.L. (1898): *Lectures on Elementary Mathematics*. Chicago: The Open Court Publishing Company. Translated by Thomas J. McCormack.

PÓLYA, G. (1966*a*): *Matemáticas y razonamiento plausible*. Madrid: Tecnos.

— (1966*b*): «Teaching us a lesson». The Mathematical Association of America: MAA Video Classics.

PUIG ADAM, P. (1960): *La Matemática y su enseñanza actual*. Madrid: Ministerio de Educación Nacional.

REY PASTOR, J.; PI CALLEJA, P.; TREJO, A. (1969): *Análisis matemático. Volumen I: Análisis algebraico, teoría de ecuaciones y cálculo infinitesimal de una variable*. Buenos Aires: Kapelusz.

RIBEIRO, R. (1996): «Las cuatro operaciones con enteros a través de los juegos». *UNO, 7*, 37-59.

SÁNCHEZ, E. (1991): «Introducción al número negativo a través del análisis de juego de problemas creativos y de fenómenos de azar». *Epsilon, 19*, 55-58.

SEMADENI, Z. (1984): «A principle of concretazation permanence for the formation of arithmetical concepts». *Educational Studies in Mathematics, 15*, 379-395.

SMOGORZHEVSKI, A.S. (1978): *Acerca de la geometría de Lobachevski*. Moscú: MIR.

SNELL, K.S (1970): «Integers. Introduction of directed numbers». *The Mathematical Gazette, 54*(388), 105-109.

SPENCER, H. (1874-1875): *Principes de psychologie*. París: Germer Baillière.

STREEFLAND, L. (1996): «Negative numbers: Reflections of a learning researcher». *The Journal of Mathematical Behavior, 15*(1), 57-77.

WHITMAN, N. (1992): «Multiplying integers». *The Mathematics Teacher, 85*(1), 34-51.

ZERO, Grup (1980): *Els nombres enters*. Barcelona: ICE de la UAB.

Capítol 3

El principi de permanència de les lleis formals

Índex

El coneixement matemàtic escolar neix de l'observació del nostre entorn. En canvi, la presentació dels resultats que ha aconseguit la matemàtica al llarg d'anys o de segles és sovint abstracte pel fet que sintetitza molta informació. Amb aquesta síntesi l'estudiant pot adquirir en molt menys temps coneixements que van requerir segles d'esforç per a desenvolupar-se. Tanmateix, l'esmentada síntesi exposa l'estudiant a un risc particular: el pot fer depenent en gran mesura del seu professorat, si no aconsegueix descobrir els camins que condueixen als resultats, tot minvant el seu pensament crític i la seva capacitat autònoma. L'ensenyament del nombre negatiu pot patir els inconvenients exposats ja que la seva acceptació i formalització va haver d'esperar molts segles. L'alumne pot viure el seu aprenentatge amb incerteses anàlogues a les que van conduir a rebutjar els nombres negatius.

> Los negativos han sufrido un largo y complejo proceso de aceptación hasta ser considerados como números en la misma forma que lo eran los naturales y los racionales no negativos. De hecho, su incorporación a los sistemas numéricos se retrasó hasta el siglo XIX, cuando Hankel los introdujo de manera formal.
>
> (BRUNO, 2001, p. 415)

3.1 El principi de permanència de les lleis formals

PEACOCK (1830) va publicar l'any 1830 «A Treatise on Algebra». Anys després la mateixa publicació es va editar en dos volums; el primer l'any 1842 i el segon l'any 1845.

El primer el va dedicar al que ell anomena àlgebra aritmètica. En ell els símbols representen números (podem pensar en nombres naturals) i les operacions son les mateixes que en l'aritmètica elemental. Els signes « $+$ » i « $-$ » fan referència a les operacions sumar i restar i estan associades a les accions afegir i treure. Tota operació expressada simbòlicament de la forma $a - b$ només es pot realitzar si a és més gran o igual a b; en cas contrari no existeix.

El segon volum el va dirigir al que ell anomena àlgebra simbòlica. En aquesta les lletres deixen de tenir la restricció de representar els nombres coneguts. L'àlgebra aritmètica és, per tant, un cas particular de l'àlgebra simbòlica. A més, l'àlgebra aritmètica és un pas intermedi que facilita el salt cap a l'àlgebra simbòlica. El salt de l'àlgebra aritmètica a l'àlgebra simbòlica el realitza a través del que, segons GARCÍA (2002*b*), anomena *principi de permanència de les formes equivalents*. Per a l'enunciat de l'esmentat principi ens basem en la traducció de GONZÁLEZ *et al.* (1990, p. 48): «Todos los resultados del álgebra aritmética que se deducen por aplicación de sus reglas, y que son generales en su forma aunque particulares en su valor, son igualmente resultados del álgebra simbólica, donde son generales tanto en su valor como en su forma».

Així doncs, l'àlgebra simbòlica neix d'una estreta relació amb l'àlgebra aritmètica. Alhora, l'àlgebra aritmètica neix d'una estreta relació amb l'aritmètica. En conseqüència, l'àlgebra simbòlica tal com la va interpretar George Peacock no va trencar amb l'aritmètica. Anys després esdevindria el pas definitiu format per símbols i lleis que regulaven la manipulació d'aquests símbols. No podem menystenir l'interès didàctic de la posició de Peacock per a la introducció dels inicis de l'àlgebra i també del nombre negatiu.

La versió final de l'obra de George Peacock la trobem en el *principi de permanència de les lleis formals* (p. 87), enunciat per HANKEL (1867). Aquest matemàtic diu que en generalitzar un concepte a un domini més ampli cal conservar el major nombre de propietats i al nou concepte li ha de correspondre com a cas particular l'anterior.

> La importancia de las reglas de cálculo [2-5] a [2-19][1] radica en que al generalizar el concepto de número mediante definiciones por abstracción del nuevo concepto, pasaremos del natural al entero, de éste al racional, luego al real, y de aquí al complejo, de manera que puedan definirse operaciones de adición y multiplicación entre los nuevos entes que cumplan (con las pequeñas modificaciones que se verán) dichas reglas de cálculo antes establecidas. Éste es el llamado *método genético*[2], y en él se debe tomar como norma el *principio de*

[1](REY PASTOR *et al.*, 1969, pp. 20-22) fan referència a regles de càlcul en els nombres naturals; aquestes les acceptem sense qüestionar-les.

[2]REY PASTOR *et al.* (1969) anomenen *método genético* el que en l'actualitat anomenem mètode deductiu. HILBERT (1993, p. 18) també va emprar aquesta terminologia: «A pesar del gran

> *permanencia de las leyes formales*, enunciado así por Hankel: «Al generalizar un concepto se debe tratar de conservar el mayor número de propiedades, y al nuevo concepto debe corresponder como caso particular el anterior». Aún más: dichas leyes formales enunciadas como proposiciones primeras o axiomas, son las que toma Hilbert para caracterizar de una vez por todas lo que debemos entender por la palabra «número»; éste es el que por antonomasia se llama en Aritmética *método axiomático*.
>
> (Rey Pastor *et al.*, 1969, p. 23)

3.2 Dificultats d'aprenentatge i errors

Una part de la bibliografia relativa als nombres enters, negatius o la negativitat centra el seu interès en l'estudi de les dificultats d'aprenentatge i els errors que cometen els alumnes (sec. 2, p. 55). En atenció als objectius d'aquesta recerca, atenem la bibliografia relativa als nombres enters i negatius que centra el seu interès en els següents dos apartats, desglossats per Iriarte *et al.* (1991, p. 13):

> i) Lo real como obstáculo: el apego a la evidencia inmediata, a la intuición primaria de número como cantidad, obstaculiza de múltiples formas la construcción de $\mathbb{Z}$.
>
> ii) La imposición de lo formal como obstáculo: la construcción del conocimiento formal es un logro que requiere la ruptura de concepciones previas. Si no es así, lo formal queda vacío de significado, y se convierte en mera apariencia que no tarda en desvanecerse.

L'alumne no familiaritzat amb l'estudi del nombre negatiu o del nombre enter associa al símbol « $-$ » l'acció «treure», és a dir, eliminar d'una col·lecció d'objectes una part d'ells. Aquest significat, que en les edats tendres l'alumne dóna a

valor pedagógico y eurístico que el método genético pueda tener, el método axiomático resulta claramente preferible para una exposición definitiva y lógicamente segura de los contenidos de nuestro conocimiento».

aquest símbol, fa que l'alumne s'aferri a una evidència immediata, tal com mostren IRIARTE *et al.* (1991, p. 13). En la introducció del nombre negatiu cal tenir molta cura en emprar el símbol « − » amb un significat que no es correspongui amb la intuïció primària del nombre com a quantitat i de la resta com l'operació que es correspon amb l'acció «treure» objectes d'una col·lecció donada.

> Para que esta identificación de las operaciones de suma y resta aparezca ante los estudiantes llena de significado, es preciso integrar las antiguas ideas de suma y resta en un concepto común de adición. Posiblemente sea ésta la principal dificultad conceptual que lleve consigo el aprendizaje de los números negativos, al constituirse en obstáculo el significado opuesto que tienen la suma y la resta con los números positivos.
>
> (BRUNO i MARTINON, 1996*a*, p. 124)

En el model concret de guanys i pèrdues el símbol « − » s'utilitza per indicar canvi d'estat, és a dir, per indicar el canvi de tenir per deure o de deure per tenir. En el model de les temperatures s'empra per indicar canvi de variació; pujar per baixar o a l'inrevés. En el model temporal « − » s'empra per indicar un canvi en la comparació, és a dir, per indicar el canvi de «abans de» per «després de» o «després de» per «abans de». El símbol « − » té però abans d'iniciar la introducció dels nombres negatius o enters un significat que ha d'evolucionar tot evitant trencaments amb el coneixement previ de l'alumne. Emprar un mateix símbol per fer referència a accions diferents pot tenir, si no es justifica, un efecte sobre l'aprenentatge de l'estudiant que l'aparti de tot pensament crític.

3.3 La introducció del nombre natural i del nombre racional positiu

El principi de permanència de les lleis naturals diu que els fenòmens naturals no succeeixen de manera arbitrària o aleatòria, sinó que responen a lleis immutables o permanents, independentment de que siguin conegudes o no per la intel·ligència humana. Si aquest principi no es complís seria impossible adoptar cap tipus de prevenció, ja que si d'un moment a un altre canviés el comportament de la nostra naturalesa, el que avui produeix un efecte demà en podria provocar un altre d'inesperat.

Entenem per *modelar* el procés pel qual interpretem matemàticament[3] un determinat fenomen real amb la finalitat d'obtenir informació sobre ell. D'acord amb aquesta definició modelar és un procés que cerca informació sobre un fenomen real, la tradueix a termes matemàtics, cerca relacions, patrons i propietats dins de la matemàtica i finalment, trasllada els resultats obtinguts al fenomen amb la finalitat d'obtenir més informació sobre el mateix.

3.3.1 Comptar, una necessitat externa a la matemàtica

Problema 3.3.1 *En Joan té vuit cabres, en compra sis i en ven dues. Quantes cabres té?*

Traduïm l'enunciat a termes matemàtics. Quan compra cabres s'afegeixen a les que té i quan en ven se'n treuen. Afegir i treure sobre el fenomen real es tradueix en sumar i restar en termes matemàtics. La suma de nombres naturals neix per donar resposta a una necessitat externa a la matemàtica, afegir. La resta de nombres naturals neix d'una necessitat externa a la matemàtica, treure. D'una col·lecció d'objectes no se'n poden treure més dels que hi ha. Això és un fet clar i transparent.

Multiplicar nombres naturals és una operació que també neix d'una necessitat externa, afegir repetides vegades una mateixa quantitat d'objectes. La necessitat externa de repartir es modelitza en l'operació matemàtica que anomenem dividir. Quan repartir en parts iguals no és possible en el fenomen real, tampoc és possible fer la divisió exacta de nombres naturals que modelitza la situació. Suma, resta, multiplicació i divisió de nombres naturals neixen i creixen en la matemàtica escolar per imitació de fenòmens reals; cadascuna d'aquestes operacions matemàtiques es correspon amb una acció del fenomen.

[3] L'equació de la forma $a_2 + x = a_1$ és la representació abstracte del model concret. a_2 indica el pis on estem, $+x$ la quantitat de pisos que pugem i a_1 el pis on arribem. Quan treballem amb nombres naturals l'equació permet interpretar el fenomen. Tal com diu d'Alembert: «El álgebra es generosa, a menudo da más de lo que se le pide», citat per GONZÁLEZ *et al.* (1990, p. 27).

L'ensenyament dels nombres enters a través de models concrets es basa en considerar determinats fenòmens reals, experimentar amb ells i traduir-los a nombres enters. El comportament que s'observa en el fenomen dicta les regles amb les que se sumen, resten, multipliquen o divideixen els nombres naturals. L'ensenyament del nombre enter a través de models concrets pretén introduir-lo de manera anàloga a com prèviament s'ha introduït el nombre natural. Els nombres enters no neixen però de cap fenomen extern a la matemàtica i cal triar bé els exemples si no es vol arribar a interpretacions contraproduents que suggereixin instruir els resultats que pretenem aconseguir. Tot docent vol que l'alumne comprengui els nombres enters amb la mateixa transparència amb la que és possible que ho faci amb els nombres naturals però si per aconseguir-ho emprem models concrets, la matemàtica pot esdevenir un allunyament del sentit comú de l'estudiant.

> Por ejemplo, un alumno podría pensar que $(+70)-(-10) = +70$ porque «si tengo 70 pesetas y me perdonan una deuda de 10 pesetas sigo teniendo 70 pesetas». Naturalmente, el profesor utiliza otro razonamiento dentro de ese mismo modelo, pero hay que reconocer que el primero es perfectamente válido desde el punto de vista del «sentido común», que es a lo que se apela cuando se trabaja con modelos familiares a los niños. De la misma manera, podríamos deducir que $(-6)-(-2) = +4$, diciendo que «entre 6 grados bajo cero y 2 grados bajo cero hay 4 grados de diferencia y 4 es lo mismo que +4»
>
> (Cid, 2002, p. 534)

3.3.2 Mesurar, una necessitat externa a la matemàtica

Problema 3.3.2 *En Joan i la Maria queden per dinar junts. En Joan porta un quilogram de costelles i la Maria en porta dos. A l'hora de dinar mengen la mateixa quantitat i s'ho acaben tot. Quina quantitat ha menjat cadascun?*

El fenomen exposat en l'enunciat el traduïm a termes matemàtics. El quilo de costelles que ha portat en Joan s'afegeix als dos quilos que ha portat la Maria; en termes matemàtics l'acció empírica d'afegir es tradueix en l'operació matemàtica de sumar. Suposant que ambdós mengen per igual, cadascú menja la meitat de tres quilos de costelles. Repartir-ho en dues parts iguals és una acció que viu dins del fenomen real i es tradueix dins la matemàtica en l'operació dividir. Una necessitat externa a la matemàtica condueix a definir les operacions entre fraccions per imitació del que esdevé a la realitat amb les accions d'afegir, treure, ... Es pot, per tant, facilitar un ensenyament del nombre racional positiu que condueixi a un aprenentatge vinculat amb el món real de l'estudiant. Les regles amb les que s'operen les fraccions poden i, des del nostre punt de vista, han de ser en la matemàtica escolar clares i transparents per imitació del que esdevé en els fenòmens reals; més endavant les fraccions seran la llavor del nombre racional.

3.4 Modelització i permanència de les lleis formals

En els primers anys de vida el nen empra nombres per simbolitzar quantitats d'objectes, posteriorment aprèn a sumar. L'acció real d'afegir és la que es tradueix dins de la matemàtica en l'operació que anomenem suma. La presentació de situacions que fomenten aquest tipus d'activitat facilita dos procediments consecutius:

1. L'alumne suma tal com l'acció d'afegir li indica que ho ha de fer. Així aprèn a sumar.

2. L'alumne suma per saber el resultat final d'afegir una col·lecció d'objectes a una altra. En aquest cas l'alumne tradueix el fenomen real a termes matemàtics, dins de la matemàtica resol el problema i tradueix el resultat de nou a la situació real per tal de donar resposta al fenomen empíric.

El comportament de fenòmens reals dicta les regles de les operacions aritmètiques. Quan el docent considera que l'alumne s'ha familiaritzat suficientment amb el contingut que és objecte d'estudi inverteix la situació i suggereix a l'alumne problemes que modelitza i resol emprant el contingut après.

Els nombres naturals neixen com representacions d'objectes reals. Tant és així que en els primers anys de vida la matemàtica no existeix i, en l'aprenentatge del nen, la matemàtica comença a «existir» a mesura que es va familiaritzant amb el nombre natural. Les regles amb que s'operen els nombres naturals provenen

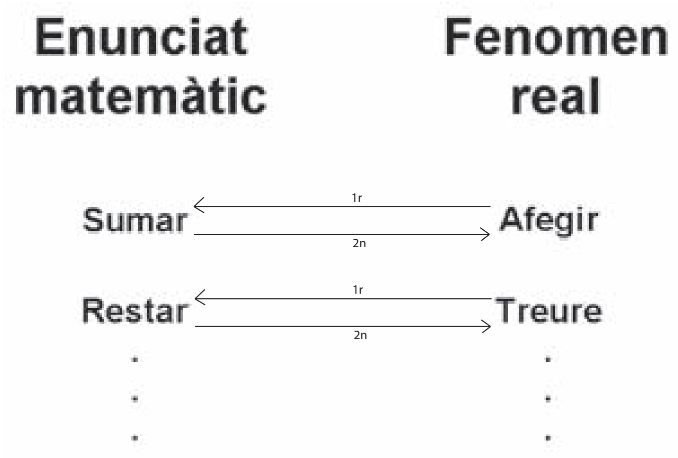


Figura 3.1: El comportament de fenòmens reals dicta les regles de les operacions entre nombres naturals. Posteriorment l'alumne modelitza problemes, els resol amb les tècniques apreses i tradueix els resultats al problema inicial per donar resposta al fenomen empíric.

d'accions empíriques: l'activitat d'afegir dicta com cal sumar, l'activitat de treure dicta com cal restar, l'activitat d'afegir repetides vegades un mateix objecte dicta com cal multiplicar i repartir és l'activitat que indica com cal dividir. Anys després es produeix un aprenentatge anàleg amb les fraccions. El comportament de les situacions reals dicta les operacions entre elles. La llavor dels nombres racionals positius neix novament d'una necessitat externa a la matemàtica: mesurar. Comptar condueix l'alumne al nombre natural i, per tant, la concepció de nombre s'associa en un infant a aquesta realitat concreta i propera a ell. Mesurar condueix l'alumne al nombre racional positiu.

3.4.1 La introducció del nombre enter en l'aritmètica elemental

L'ensenyament del nombre enter a través de models concrets és un intent de donar continuïtat a l'ensenyament que del nombre natural i del racional positiu ha rebut l'estudiant. La introducció del nombre enter a través de models concrets cerca situacions reals que facin paleses necessitats externes a la matemàtica tot justificant la seva utilització. Es situen en realitats properes a l'alumne que condueixen a la suma, resta o producte de nombres enters amb la finalitat d'operar-los sota regles que provenen de la traducció a la matemàtica del comportament de determinades accions que esdevenen en contextos externs a ella. Però aquestes realitats concretes es poden resoldre sense l'ús de nombres negatius. Es força la utilització dels nombres enters per justificar la seva operatòria.

> Ni un niño ni un pastor analfabeto tienen dificultad para restar seis vacas a diez vacas. Una "vaca negativa", sin embargo, es más difícil de imaginar que una vaca fantasma. Una vaca fantasma tiene al menos alguna clase de realidad, pero una vaca negativa es menos real que una vaca nula. Al quitar un vaca a un «rebaño» de una vaca no queda nada; pero sumar una vaca negativa con una vaca positiva -lo que haría que ambas se esfumasen como una partícula subatómica que chocase con su antipartícula- es tan ridículo como el viejo chiste sobre un individuo cuya personalidad era tan negativa que, cuando asistía a una fiesta, los invitados, mirando perplejos en torno a sí, preguntaban: "¿Quién se ha ido?".
>
> (GARDNER, 1977, p. 102)

Problema 3.4.1 *En Joan té vuit cabres, en compra sis i en ven vint. Quantes cabres té?*

En Joan té vuit cabres i quan en compra sis passa a tenir-ne un total de catorze, per tant, no en pot vendre vint perquè no les té.

Problema 3.4.2 *En Joan té 100 € al banc i li passen un rebut de telèfon de 200 €, quina és la situació econòmica d'en Joan?*

Probablement el banc no pagui. En aquest cas en Joan segueix tenint 100€ en el banc i li deu 200€ a la companyia de telèfon. Si el banc paga, aleshores en Joan no li deu res a la companyia de telèfon però li deu 100€ al banc.

Forçar la utilització de nombres negatius en aquests tipus de problemes pot fer que la transparència amb la que l'alumne ha entès la matemàtica en els primers anys d'escolarització, relativa al nombre natural i al nombre racional positiu, esdevingui opacitat.

> [...] todos los problemas de la aritmética elemental pueden resolverse utilizando números positivos y sin que el uso de números negativos aporte técnicas de resolución más económicas ni más potentes.
>
> Entendemos, por tanto, que la aritmética elemental[4] no es un ámbito adecuado para la introducción de los números negativos porque ni los necesita ni los justifica.
>
> (Cid, 2002, p. 537)

L'alumne en els seus estudis primaris associa el símbol « – » amb l'acció «treure». La introducció del nombre enter a través de models concrets fa que s'utilitzi aquest mateix símbol amb altres significats (p. 57) i, o no es justifiquen o, si es fa, és una activitat que s'allunya de la transparència amb la que l'alumne ha après anteriorment el nombre natural i el nombre racional positiu. Actualment, en l'àrea de matemàtiques a l'Educació Secundària Obligatòria, es proposa generar entorns d'aprenentatge propers a la realitat quotidiana dels estudiants.

> És a dir, la competència matemàtica implica el coneixement i maneig dels elements matemàtics bàsics (distints tipus de números, mesures, símbols, elements geomètrics, etc.) en situacions reals o simulades de la vida quotidiana.
>
> (143/2007, 2007, p. 21880)

Després de molts anys i molts models proposats, no n'hi ha cap que aconsegueixi una introducció del nombre enter que justifiqui la seva existència i les seves operacions per una necessitat externa a la matemàtica.. Com més models concrets examinem, millor podem seleccionar els que més s'adeqüen a aquest intent però, alhora, més palesa queda aquesta impossibilitat.

[4] L'expressió aritmètica elemental emprada per l'autora entenem que fa referència al nombre natural, les seves operacions elementals (suma, resta, multiplicació i divisió) i la modelació de situacions del món sensible que no requereixin més que les operacions i els nombres esmentats.

> [...] la aritmètica elemental no permite poner de manifiesto la utilidad de los números negativos, o de los números enteros en particular, porque todos los problemas que se plantean en ese ámbito pueden resolverse perfectamente en términos de números positivos.
>
> (CID, 2002, p. 537)

Cercar un model concret que justifiqui els nombres enters i les seves operacions requereix establir una necessitat externa a la matemàtica que no es pugui resoldre amb nombres naturals.

3.4.2 La introducció del nombre enter a partir del principi de permanència de les lleis formals

El nombre negatiu apareix històricament per la necessitat de resoldre equacions; una necessitat interna de la matemàtica. En virtut del mètode genètic[5] la manera natural d'abordar aquest ensenyament és, per tant, provocar entorns d'aprenentatge que condueixin directament o indirecta cap a la resolució d'equacions. La introducció del nombre enter que presentem en aquest apartat suggereix activitats que neixen dins de la matemàtica i que condueixen l'alumne cap al descobriment de nous objectes que donen resposta a la situació problemàtica plantejada.

> [...] lo que el estudio de la epistemología de los números negativos pone de manifiesto es que la génesis de dichos números se produjo en el seno del álgebra y que su aceptación estuvo dificultada por la exigencia de la matemática clásica de interpretar los objetos algebraicos como objetos de la aritmética elemental. De acuerdo con esto, diversos autores BROUSSEAU (1983); CID (2000); GLAESER (1981); SCHUBRING (1988) llegan a proponer que la aritmética elemental y, en particular, el hecho de que los números sólo pudieran tener sentido

[5]La teoria genètica es basa en la hipòtesi que els problemes que s'han hagut de resoldre, i les dificultats que ha calgut superar, per obtenir el coneixement que avui tenim, estan relacionats amb els problemes que ha de resoldre l'estudiant i les dificultats que ha de superar. Va ser exposada per Herbert Spencer l'any 1860. Aquesta teoria va prendre la seva màxima força a partir de la teoria de l'evolució de Charles Darwin que havia publicat la part central dels seus treballs entre els anys 1842 i 1854.

> como medidas de cantidades de magnitud, constituyeron un obstáculo epistemológico al reconocimiento matemático de los números negativos. Si esto se confirmara, nos encontraríamos con que la enseñanza habitual de los números enteros por medio de modelos concretos estaría fomentando dicho obstáculo, en vez de ayudar a superarlo.
>
> (CID, 2002, pp. 538-539)

Proposar la introducció deductiva del nombre enter (p. 70) és una empresa que requereix encertar en el plantejament didàctic. Aquest encert depèn de diversos factors però, des del nostre punt de vista, a l'ensenyament secundari depèn en gran mesura de no imposar simbologies ni propietats, de generar entorns que condueixin a un problema intern a la matemàtica equivalent a la resolució d'equacions i de no voler de manera prioritària arribar a connectar amb el mètode constructiu, tal com es mostra en la part final del capítol dedicat a les propostes d'ensenyament del nombre enter (p. 70).

La resolució d'un problema (cap. 7, p. 241), plantejat en els nombres naturals, ens va conduir a introduir el nombre enter amb la finalitat de donar resposta a tots els interrogants que sorgeixen d'ell. Aquest problema viu dins de la matemàtica i permet de manera natural acceptar i emprar el principi de permanència de las lleis formals per definir les operacions amb enters per extensió de les que operen en els naturals.

Aquest principi estableix que un sistema de regles d'un determinat tipus de nombres, els naturals per exemple, continuaran essent vàlides quan s'estenguin a altres col·leccions de nombres que englobin els primers, fins i tot en el cas que no es pugui fer una interpretació concreta dels resultats.

Una altra possibilitat consisteix en introduir els nombres negatius a partir de l'àlgebra. Aquesta aportació teòrica es basa en les propostes de FREUDENTHAL (1973, 1983). Justificar les operacions i les seves lleis es fa per simplificar la descripció algebraica de les figures geomètriques. L'extensió de les relacions geomètriques del primer als altres quadrants permet determinar el comportament de les operacions de manera convincent, tal com mostra el primer autor[6]. Aquesta

[6]En la bibliografia hem pogut trobar propostes que amb l'intent de justificar el producte de nombres enters imposen inicialment un criteri que els ho permet. Tot i així no és massa difícil

extensió dels objectes geomètrics condueix a relacions algebraiques.

> The origin of negative numbers is of course the algebra of equations, such as they are symbolically written. Methods of solving such equations were developed and gradually automatised. As the automatisation progressed, one wanted to extend their domain of validity.
>
> (FREUDENTHAL, 1983, p. 432)

En la línia de l'exposat per FREUDENTHAL (1983) pren en la present investigació una forta rellevància, tal com mostrarem en les pàgines següents, la presentació de BOREL i DRACH (1895, pp. 128-135).

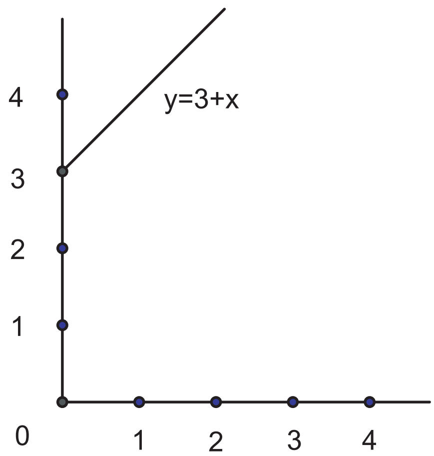
3.4.3 La introducció del nombre negatiu a partir del principi de permanència de les lleis geomètriques-algebraiques

FREUDENTHAL (1983, pp. 450-456) proposa una introducció deductiva del nombre negatiu que es basa en una variant del *principi de permanència de les lleis formals* (p. 87); el que anomena principi de permanència de les lleis geomètriques-algebraiques.

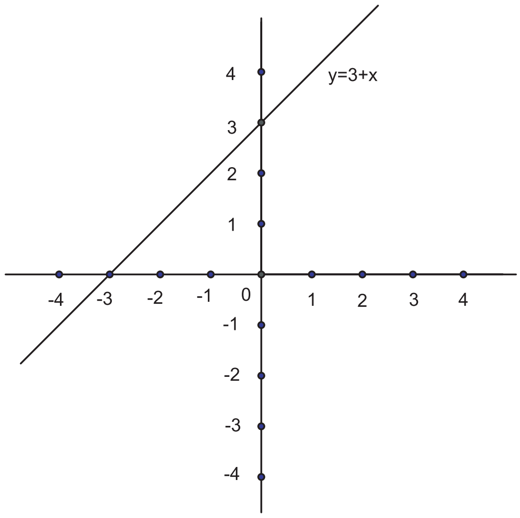
La transformació que a tot nombre li fa correspondre un altre tres unitats superior té una representació gràfica sobre uns eixos de coordenades, amb una unitat fixada, com la que es pot veure en la figura 3.2 (p. 102).

L'extensió de la semirrecta de la figura 3.2 (p. 102) a la recta ens condueix a formular preguntes i ens suggereix respostes. Quin ha de ser el nombre a tal que $2 = 3 + a$? L'equació de la recta dicta una pregunta, el seu gràfic suggereix la resposta. Ha de ser un nombre tal que sumat a 3 doni 2, és a dir, un nombre que es comporta com si restéssim 1; fet que suggereix la terminologia -1. Estendre el gràfic de la semirrecta a tota la recta requereix acceptar aquests nous nombres.

adoptar altres criteris que no van bé. Aquest és el cas de CASTELNUOVO (1973, pp. 159-163) que proposa el treball amb una cartolina en forma de rectangle amb cares de diferents colors. A una cara li atribueix el signe « $+$ » i a l'altra el signe « $-$ ». Situa el rectangle en el primer quadrant per la cara positiva. Fent un gir respecte de l'eix OY el rectangle queda en el segon quadrant i per la cara negativa. Fent de nou un gir respecte de l'eix OX el rectangle queda en el tercer quadrant i per la cara positiva. Finalment i amb un darrer gir el rectangle queda per la cara negativa en el quart quadrant. Es tracta d'una bona estratègia per recordar la regla dels signes, però no ho justifica.



(a) Només per valors positius



(b) Extensió a tot el pla

Figura 3.2: Estendre el gràfic de la semirrecta requereix acceptar aquests nous nombres.

La introducció proposada per FREUDENTHAL (1983, pp. 450-456) permet introduir justificadament el símbol « $-$ » per fer referència a uns nous nombres. A més, l'autor introdueix l'estructura additiva dels nombres negatius a partir de la representació de les funcions de la forma $y = x + k$ per valors positius de k[7]. El treball anàleg amb funcions de la forma $y = k \cdot x$ per valors positius de k condueix a acceptar que $a \cdot (-b) = -a \cdot b$. Estendre la commutativitat dels nombres naturals als enters, o dels nombres racionals positius als nombres racionals, condueix a veure que $(-a) \cdot b = b \cdot (-a) = -b \cdot a = -a \cdot b$. Aprofitar aquests resultats per representar hipèrboles de la forma $x \cdot y = k$, per valors de k inicialment negatius i posteriorment positius, s'obté per simetria la regla dels signes pel producte de dos nombres negatius. En definitiva, FREUDENTHAL (1983) pren un model geomètric que li dicta el comportament de l'àlgebra.

> Briefly said: algebra is valid because it functions in geometry.
>
> (FREUDENTHAL, 1983, p. 450)

En la resolució de problemes que es poden construir fent ús exclusiu de circumferències i línies rectes, Descartes introdueix l'addició, la substracció, el pro-

[7] FREUDENTHAL (1983, pp. 450-456) no explicita de quins nombres es tracta però entenem que com a punt de partida podem considerar els racionals per atendre el cas commensurable.

ducte i la divisió, tot mostrant com el càlcul aritmètic està relacionat amb les operacions geomètriques.

> O bé, disposant d'una línia que anomenaré la unitat per tal de relacionar-la de la millor forma possible amb els nombres, i que normalment pot agafar-se a discreció, i de dues línies més, trobar-ne una quarta que sigui a una d'elles com l'altra és a la unitat; això equival a multiplicar. O bé, trobar una quarta línia que sigui a una de les altres dues com la unitat és a l'altra; això equival a dividir.
>
> (DESCARTES, 1999, p. 13)

L'elecció d'una unitat i el teorema de Thales[8] permeten a Descartes interpretar el producte de dos segments com un altre segment. Aquest és un salt importantíssim dins del món de la matemàtica i de gran rellevància en la didàctica del nombre enter[9]. L'elecció de segments commensurables amb la unitat escollida permet establir el producte de dos d'ells, tal com mostra DESCARTES (1999, p. 14) en el primer llibre de *La Géométrie*. L'esmentada commensurabilitat ens permet expressar la mesura dels esmentats segments emprant nombres racionals.

COFMAN (1981) mostra com es poden dividir dos segments tot estenent el tractament de Descartes al pla cartesià. La proposta de Judita Cofman aprofita la introducció geomètrica de DESCARTES (1999) i l'extensió a tot el pla coordenat de les semirrectes que són representació gràfica de determinades funcions, proposat per FREUDENTHAL (1983). Aquest plantejament requereix haver introduït prèviament el nombre negatiu, haver justificat la corresponent nomenclatura i proposar-se establir el quocient de nombres negatius. Tot i que COFMAN (1981)

[8] El tractament del nombre negatiu al que fem referència requereix que l'estudiant estigui familiaritzat amb la semblança de triangles i el teorema de Thales pel cas commensurable (p. 550). Les propostes de PESCADOR (1997, 2002, 2003) són un exemple de treballs previs a la introducció del nombre negatiu des de la proposta geomètrica-algebraica que presentem en aquest apartat.

[9] DESCARTES (1999) interpreta els producte de dos segments com un altre segment. Aconsegueix amb això que el producte de dues magnituds tingui com a resultat la mateixa magnitud, amb una altra mesura si s'escau. La introducció del nombre enter a través de models concrets hauria d'aconseguir que el producte de dues quantitats d'euros, per exemple, tingués com a resultat una altra quantitat d'euros. Però això no és així, quan es multipliquen nombres enters en els models concrets s'interpreta com una quantitat de vegades una determinada quantitat d'euros. No s'introdueix una operació interna.

limita l'exposició a nombres enters, entenem que és perfectament vàlida per nombres racionals. Les figures 3.3 (p. 104), 3.4 (p. 104) i 3.5 (p. 105) parlen per sí soles a tot lector familiaritzat amb el teorema de Thales.

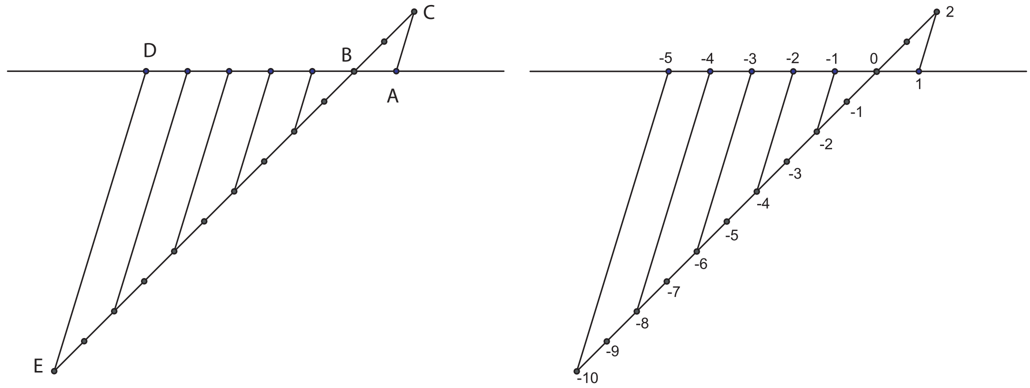


Figura 3.3: En la figura de l'esquerra i pel teorema de Thales tenim que $\frac{BE}{BD} = \frac{BC}{BA}$. En la figura de la dreta això es tradueix per $\frac{-10}{-5} = \frac{2}{1}$.

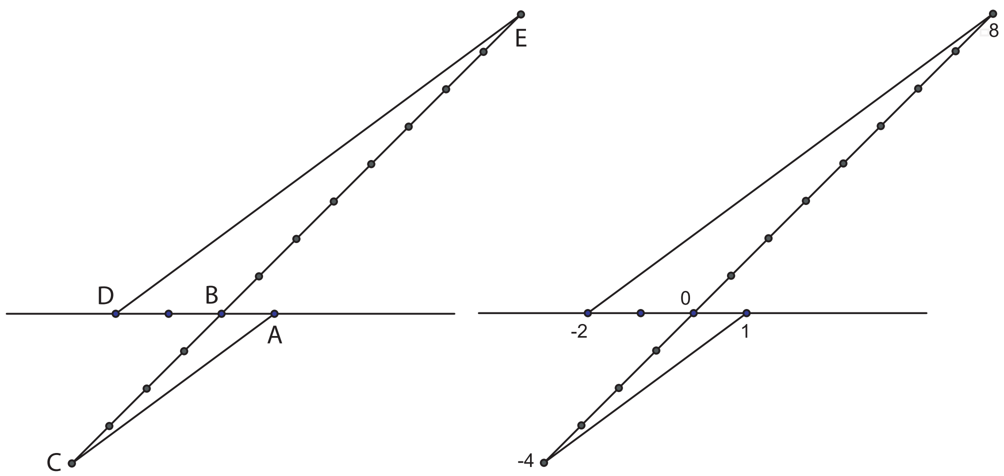


Figura 3.4: En la figura de l'esquerra i pel teorema de Thales tenim que $\frac{BE}{BD} = \frac{BC}{BA}$. En la figura de la dreta això es tradueix per $\frac{8}{-2} = \frac{-4}{1}$.

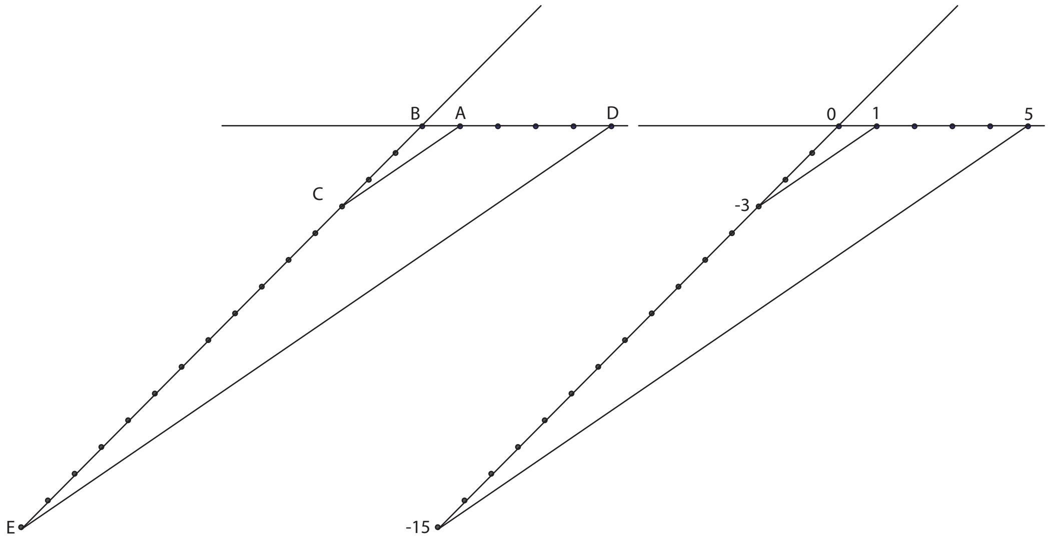


Figura 3.5: En la figura de l'esquerra i pel teorema de Thales tenim que $\frac{BE}{BD} = \frac{BC}{BA}$. En la figura de la dreta això es tradueix per $\frac{-15}{5} = \frac{-3}{1}$.

3.5 Seqüències d'extensions numèriques

A Catalunya ja fa anys que s'introdueix el nombre natural, el nombre racional positiu i, a continuació, el nombre enter. Des de la implantació de la LOGSE s'ha fet a través de models concrets que donen continuïtat a l'aprenentatge aritmètic previ. Bruno (2001, pp. 417-420) fa un estudi de les diferents introduccions dels conjunts numèrics i destaca que la seqüència escollida influirà d'una manera o altra en l'aprenentatge dels estudiants. Mostrem seguidament algunes reflexions sobre la introducció del nombre negatiu que responen a algun camí del següent diagrama:

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{Z}_+ & \longrightarrow & \mathbb{Q}_+ & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \mathbb{Z} & \longrightarrow & \mathbb{Q} & \longrightarrow & \mathbb{R} \end{array}$$

3.5.1 La introducció del nombre enter a partir del natural

Els alumnes a l'ensenyament primari es familiaritzen inicialment amb els nombres naturals a través de models concrets. Posteriorment ho fan amb els nombres racionals també inspirant-se en situacions que viuen en el món real. Compartim l'encert didàctic d'ambdues introduccions per proposar un ensenyament de la matemàtica vinculat amb la proximitat que pot trobar l'estudiant amb el seu entorn[10].

$$(1) \quad \mathbb{Z}_+ \quad \longrightarrow \quad \mathbb{Q}_+$$

A partir d'aquest moment l'alumne aprèn el nombre enter i les seves operacions per imitació de com ho ha fet amb el nombre natural; es deixa de banda el nombre racional positiu. La introducció del nombre enter permet en aquest cas diversos tractaments tal com ja hem exposat en la pàgina 55. Entre les propostes d'ensenyament del nombre enter (models concrets, inductiu, deductiu o constructiu), l'ensenyament a través de models concrets és l'opció didàctica més estesa segons la bibliografia consultada.

$$(2) \quad \mathbb{Z}_+ \quad \longrightarrow \quad \mathbb{Z}$$

S'origina una discontinuïtat en l'ensenyament dels nombres. Tot i que l'alumne està familiaritzat amb els nombres racionals positius, aquests no s'atenen. Aquesta és una característica comuna als quatre tipus d'introducció del nombre enter esmentades.

3.5.2 Altres introduccions del nombre negatiu

Un cop estudiats els nombres enters es retorna a l'estudi dels racionals. Les propietats dels nombres negatius apreses per als nombres enters s'accepten com a vàlides per nombres racionals; la seqüència (3a) prima per sobre de la (3b) sense que sovint es faci explícit aquest fet.

$$\begin{array}{llll} (3a) & \mathbb{Z} & \longrightarrow & \mathbb{Q} \\ (3b) & \mathbb{Q}_+ & \longrightarrow & \mathbb{Q} \end{array}$$

Un cop treballat el nombre racional s'introdueix el nombre real. La complexitat d'aquesta introducció requereix una recerca per sí sola que no és objectiu de la que exposem en aquest memòria.

[10]En les seccions 4.3.1 (p. 136) i 4.4.2 (p. 139) entrem amb més detall en l'esmentada vinculació.

$$(4) \quad \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{R}$$

Bruno (2001, p. 417) considera que les seqüències d'ensenyament dels nombres haurien d'avançar i no retrocedir. Actualment no respectem aquesta premissa quan ensenyem el nombre enter després d'haver tractat el racional positiu. D'entre les possibles extensions que mostra aquest autor estem particularment interessats en la segona que detallem a continuació:

$$\begin{array}{lccccccc}
(1) & \mathbb{Z}_+ & \longrightarrow & \mathbb{Z} & \longrightarrow & \mathbb{Q} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\
(2) & \mathbb{Z}_+ & \longrightarrow & \mathbb{Q}_+ & \longrightarrow & \mathbb{Q} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\
(3) & \mathbb{Z}_+ & \longrightarrow & \mathbb{Q}_+ & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ & \longrightarrow & \mathbb{R}
\end{array}$$

La seqüència (2) permet introduir el nombre negatiu donant continuïtat a l'estudi del nombre natural i racional positiu. A més, aquesta seqüència respecta el principi genètic; els nombres enters van néixer per donar resposta a equacions algebraiques i aquest tractament és possible des d'aquesta seqüència. Respecta també una evolució natural de la concepció de nombre que té l'alumne ja que, si el nombre natural li serveix per comptar i el racional per mesurar, el nombre negatiu respon a determinades equacions algebraiques i a problemes relacionats amb les mateixes. La resolució de les esmentades equacions es pot enfocar des d'un punt de vista geomètric[11]. D'aquesta manera l'aprenentatge del nombre negatiu no es restringeix a una determinada part del currículum, en el cas que la concreció del departament de matemàtiques del centre educatiu estigui compartimentada en blocs temàtics, i pot ser atès també en un altre moment educatiu i des d'una altra òptica. Amb aquesta seqüència pot endarrerir-se l'ensenyament del nombre negatiu, permetent que el primer contacte amb la matemàtica formal esdevingui en una edat més madura.

Un dels aspectes més rellevants d'aquest tipus d'introducció és que s'aconsegueix mantenir l'honestedat amb l'alumne; el nombre negatiu no va néixer per una necessitat externa a la matemàtica, tal com es pretén mostrar des del seu ensenyament a través de models concrets, sinó per una necessitat interna i, més concretament, de la resolució d'equacions algebraiques.

[11] Cofman (1981) mostra una introducció del nombre negatiu a partir de problemes geomètrics. Tot i així són poques les introduccions que adopten aquest enfocament.

No ens ha resultat fàcil trobar propostes d'introducció del nombre negatiu que comencin amb els racionals positius o amb els reals positius. COFMAN (1981) presenta un model que es basa en la projecció dels rajos de sol que passen a través de tres finestres. La semblança dels triangles que representen la situació real condueix a una proporcionalitat entre els costats homòlegs. D'aquí s'obtenen les regles dels signes del producte i del quocient.

Els quatre estils d'ensenyament exposats (p. 55) introdueixen el nombre negatiu a partir del nombre natural, és a dir, centren l'atenció en el nombre enter. Tots ells desatenen, per tant, les característiques que acabem d'esmentar respecte de la seqüència (2).

3.6 Dels models concrets al mètode deductiu

L'alumne pot treballar amb nombres naturals i racionals a partir de problemes contextualitzats en el seu entorn. Amb la finalitat de «graduar cuidadosamente los planos de abstracción» (PUIG ADAM, 1960, p. 157) seria convenient establir vincles entre l'ensenyament a través de models concrets i l'ensenyament deductiu.

Si acceptem que els nombres enters no neixen d'una necessitat externa a la matemàtica podem intentar conduir un model concret cap a un problema que visqui dins de la matemàtica. En el fons es tracta d'un parany que permet abandonar la cerca d'una necessitat externa a la matemàtica i traduir l'essència del model a una necessitat interna de la disciplina que ens ocupa[12].

> Definición de número entero. Su introducción se hace necesaria, para poder dar solución en todos los casos a la ecuación
>
> $$a_2 + x = a_1$$
>
> Esta ecuación tiene solución en el campo de los números naturales, sólo si $a_1 > a_2$, y entonces se designa por $a_1 - a_2$; en cambio, no

[12]Entre els autors que defensen l'ensenyament deductiu n'hi ha que consideren necessari començar proposant models concrets o seqüències inductives com a pas previ a l'ensenyament deductiu, com és el cas d'SNELL (1970).

> tendrá solución si $a_2 > a_1$ por la ley de tricotomía[13][14].
>
> (REY PASTOR *et al.*, 1969, p. 30)

GALBRAITH (1974, pp. 84-85) mostra les importants reticències que presenten els alumnes de l'escola primària en la cerca d'un nombre que sumat a 5 doni 3. Efectivament, previ a la introducció del nombre negatiu cap nombre pot donar resposta a aquesta situació.

L'ensenyament del nombre enter a través de models concrets centra tota la seva potència en obtenir les regles a partir de l'experiència amb situacions reals. El mètode deductiu pren la seva força en el *principi de permanència de les lleis formals* (p. 87). Poden connectar-se ambdós estils d'ensenyament?

3.6.1 Introducció de nous nombres a partir d'un model concret

Considerem un bloc de 20 pisos i 10 soterranis. L'alumne familiaritzat amb els nombres naturals simbolitzarà fàcilment la planta baixa amb el nombre 0, la primera planta amb el nombre 1, la segona planta amb el nombre 2, etc. En canvi, en un primer moment no podem demanar a l'alumne que utilitzi un nombre per fer referència al primer soterrani, segon soterrani, etc. De fet, forçar aquesta situació pot conduir amb facilitat a que l'alumne ho denoti per soterrani 1, soterrani 2, etc.

Suposem que estem en el primer pis, representat pel nombre natural 1. A aquest nombre li sumem 2 i obtenim 3. Sumar 2 té l'efecte de pujar 2 pisos. Suposem ara que estem en el cinquè pis, representat pel nombre natural 5. A aquest nombre li restem 1 i obtenim 4. Restar 1 té l'efecte de baixar 1 pis. L'experimentació amb aquests casos familiaritza l'alumne amb el model concret i li permet veure que sumar un nombre natural té l'efecte de pujar tants pisos com indica el nombre que sumem; restar un nombre natural té l'efecte de baixar tants pisos com indica el nombre natural que restem.

[13] La llei de tricotomia diu que per cada parell de nombres naturals a i b val una i només una de les relacions $a < b$, $a = b$, $a > b$.

[14] Aquesta proposta de REY PASTOR *et al.* (1969) té una intenció educativa. Tanmateix, des del punt de vista epistemològic va ser la necessitat de validesa general dels mètodes de resolució d'equacions a la que deuen la seva existència els nombres negatius, tal com apunta FREUDENTHAL (1983, p. 433).

Situem-nos en el primer soterrani; no tenim inicialment cap nombre que el representi. Ara bé, si acceptem inventar un nou nombre que el representi, aquest serà tal que en sumar-li 2 obtenim el nombre que representa el primer pis, és a dir, la suma ha de ser 1, ja que sumar 2 té l'efecte dins del model de pujar dos pisos. Per tant, el nombre que ha de representar el primer soterrani[15] té la propietat de que en sumar-li 2 obtenim 1. Com que en els nombres naturals és vàlida la propietat commutativa l'acceptem també pels nous nombres, és a dir, fem ús del *principi de permanència de les lleis formals* (p. 87). En conseqüència, és un nombre que en sumar-lo a 2 es comporta com si restéssim 1. Per aquest motiu és raonable que el representem per -1.

El símbol « $-$ » emprat no és una resta i no vol dir treure. -1 és un nou nombre que no és natural. El motiu que ha conduït a acceptar aquesta terminologia ha estat estendre el comportament de la suma de nombres naturals a d'altres nombres que no tenien representació. Hem fet novament ús del *principi de permanència de les lleis formals* (p. 87) i, a més, observem que aquesta introducció dóna la possibilitat de negociar amb els alumnes la terminologia emprada per denotar els nombres enters. és Es necessari que es generi l'esmentada negociació ja que, en cas contrari, no hi ha cap motiu per emprar el símbol « $-$ » per denotar els nous negatius.

> The fact that the symbol « $-$ » has two distinct roles in mathematics -denoting a negative number and indicating the operation of substraction- sometimes causes confusion. Historically, the minus sign has not always been used in this dual role. Other notations were used to indicate negative numbers, but they were not universally adopted. One such designation was given by the Arab Al-Khwsarizmi (ARNDT, 1983, p. 825), who placed a small circle or dot either over or beside a number to indicate «negative». For example, -4 might have been written

[15] Si x és un nombre que denota el primer soterrani tenim que $x+2 = 1$. Si acceptem la propietat commutativa aquesta igualtat és equivalent a $2 + x = 1$. x és un nombre que en sumar-lo a 2 té com a resultat 1,és a dir, x és un nombre que es comporta com si retéssim 1. Aquesta justificació de la terminologia emprada estén la suma i la propietat commutativa dels nombres naturals als nous nombres introduïts. Aquest coneixement matemàtic detallat potser no hauria de ser conegut per l'alumne però sí que hauria de formar part del coneixement didàctic matemàtic.

$\overset{o}{4}$

> Another notation was used by the early Hindus; they denoted a negative number by enclosing it in a circle.
>
> (CROWLEY i DUNN, 1985, p. 253)

Per altra banda, aquest raonament retòric es correspon amb la resolució de l'equació $x + 2 = 1$ (p. 108). x és el nou nombre que emprem per representar el primer soterrani, sumar 2 és correspon amb l'acció de pujar dos pisos en virtut d'estendre el comportament copsat amb els nombres naturals que representen els pisos superiors, 1 representa el primer pis. L'equació $x + 2 = 1$ la podem escriure com $2 + x = 1$ si estenem la propietat commutativa, acceptada en els naturals, als nous nombres. Interpretar que sumar x es comporta en l'equació com si restéssim 1 suggereix la terminologia -1.

La introducció del nombre enter a través de models concrets condueix a situacions que s'eliminen o es compensen. Per exemple, pujar dues escales i baixar-ne dues, la temperatura puja tres graus centígrads i en baixa tres, ingressem cinc euros al banc i en retirem cinc, etc. Els models concrets no suggereixen cap terminologia pels nous nombres. El reconeixement de l'equació associada al model sí que ho fa. En conseqüència, mantenir l'ensenyament del nombre enter permanentment lligat als models concrets impossibilita una justificació de la terminologia emprada.

3.6.2 L'estructura additiva

Un cop els nous nombres ja tenen justificadament símbols que els representen, els sumem estenent el comportament de la suma dels nombres naturals. Així:

- $3 + 2 = 5$. Si estem en el tercer pis i en pugem dos arribem al cinquè.
- $3 - 2 = 1$. Si estem en el tercer pis i en baixem dos arribem al primer.
- $3 + (-1) = 3 - 1 = 2$. Sumar -1 té el mateix efecte que restar 1.
- $-3 + 2 = -1$. En virtut d'estendre als nombres enters el comportament que té en els nombres naturals l'operació sumar dos.

- $-3-2=-5$. En virtut d'estendre als nombres enters el comportament que té en els nombres naturals l'operació restar dos.
- $-3+(-1)=-3-1=-4$. Sumar -1 té el mateix efecte que restar 1. Restar 1 té en el model l'efecte de baixar una planta, que és el que ens dicta com hem de fer aquesta operació amb nombres enters.

Malgrat l'exposat hi ha situacions que no obtenen resposta a partir del model[16]. Per exemple, $3-(-1)$ no té una interpretació que puguem obtenir a partir del model. L'essència rau en l'equació $3-(-1)=x$. En virtut de l'extensió als nous nombres de la segona noció comuna del primer llibre dels *Elements* d'Euclides[17][18] aquesta equació és equivalent a $3-(-1)+(-1)=x+(-1)$. Alhora, en virtut de l'extensió als nous nombres que afegir i treure una mateixa quantitat deixa invariant la quantitat inicial, tenim que $3=x-1$, que té $x=4$ per solució. En conseqüència $-(-1)$ té en l'equació el mateix efecte que sumar 1, fet que ens suggereix denotar $-(-1)$ per $+1$. Limitar l'ensenyament del nombre enter a la introducció a través de models concrets evita que l'alumne afronti aquest aprenentatge i, en conseqüència, facilita que es pugui interpretar, erròniament, que $-a$ sempre és negatiu.

> How do your algebra students read the symbol $-x$? Common responses are «negative x,» «minus x,» «the opposite of x» or «the additive inverse of x». The most common response is «negative x.» But are all response meaningful? Definitely not! In fact, the first two responses are very misleading, if not incorrect. In many classrooms, teachers are quite careful to name a real number less than zero (or to the left of zero on the real-number line) a *negative number*. Students

[16] L'ensenyament del nombre enter a través de models concrets resol aquesta situació donant al símbol « $-$ » un nou significat; interpreta el signe « $-$ » com un canvi d'estat, és a dir, un canvi de signe (sec. 2.1.2, p. 59). Aquesta imposició aconsegueix resoldre la problemàtica però infringeix la concepció que tenim del que és ensenyar (p. 64).

[17] *Elements* d'Euclides. Nocions comunes. Llibre I. Noció comuna 2. Si a coses iguals s´afegeixen coses iguals, els totals són iguals. Informació consultada a http://www.euclides.org.

[18] *Elements* d'Euclides. Nocions comunes. Llibre I. Noció comuna 3. Si a coses iguals es treuen coses iguals, les diferències són iguals. Informació consultada a http://www.euclides.org.

> quite easily grasp the meaning of the phrase *negative number*. But suddenly we bring out the expression $-x$ and read it «negative x»! Trouble begins. Students immediately assume that this symbol stands for a number less than zero simply because its verbal name contains the word *negative*.
>
> (JOHNSON, 1986, p. 507)

Si evitem en la seva totalitat la utilització del *principi de permanència de les lleis formals* (p. 87) no podem donar justificadament la terminologia -1, -2, etc, als nombres enters. Tampoc podem estendre la suma de nombres naturals als enters[19]. Fent-ne ús, es pot connectar el model concret amb el mètode deductiu per a l'estructura additiva.

> La problemática de los distintos significados del signo « $-$ » se recoge en el trabajo de CARRAHER (1990). Distingue tres significados para este signo: como operación, como signo de un número y como indicación de que se debe invertir la operación $2-(+4)$. Presentó problemas aditivos en el contexto de las deudas a estudiantes y adultos que no habían recibido instrucción previa, observó que tanto unos como otros podían resolver los problemas de forma oral, y sin embargo, tenían grandes confusiones al tratar de escribir las operaciones formalmente. Por lo tanto, plantea la necesidad de distinguir entre una representación semántica para los números negativos y una representación matemática a través de los signos.
>
> (BRUNO i MARTINON, 1996*b*, p. 100)

[19]La identificació de la suma i la resta per tal d'obtenir l'operació que anomenem addició ha estat estudiada per BRUNO (1997). En les seves paraules: «En la investigación realizada con los alumnos se trató de conocer de qué forma lograban la identificación de las dos operaciones en la dimensión contextual. Comprobamos que es complejo que los alumnos identifiquen las dos operaciones en la dimensión contextual, y no tanto en la dimensión abstracta» (BRUNO, 1997, p. 11).

3.6.3 L'estructura multiplicativa

Considerem un bloc de 20 pisos i 10 soterranis. L'alumne familiaritzat amb els nombres naturals identificarà fàcilment la planta baixa amb el nombre 0, la primera planta amb el nombre 1, la segona planta amb el nombre 2, etc. Després del treball descrit en l'apartat anterior, l'alumne farà referència al primer soterrani emprant el nombre representat per -1, el segon soterrani pel nombre representat per -2, etc. En aquest model tenim:

a. $4 \cdot 2 = 4 + 4 = 8$, és a dir, estem en la quarta planta i pugem quatre plantes més.

b. $(-4) \cdot 2 = -4 - 4 = -8$, és a dir, estem en el quart soterrani i baixem quatre plantes més fins arribar a la planta -8.

c. $4 \cdot (-2) = -2 - 2 - 2 - 2 = -8$, és a dir, estenem la propietat commutativa de la suma de nombres naturals als nombres enters (extensió de les lleis formals). Si estem en el segon soterrani baixem dues plantes tres vegades arribant al soterrani vuitè.

d. $(-4) \cdot (-2)$ és un càlcul que ens proposem per donar resposta al producte de dos nombres enters en tots els casos possibles. L'operació neix per una necessitat interna a la matemàtica i també viu dins la matemàtica. Cercar una traducció en un model concret és lícit però s'allunya del sentit comú de l'alumne i, per tant, no compleix amb la finalitat de l'ensenyament del nombre enter a través de models concrets. Aquesta operació no prové de cap pregunta que neixi en el model concret. No és en el model concret on cal buscar la solució i fer un esforç per justificar la resposta només és possible si prèviament ja la coneixem. Després de molts anys d'intents no s'ha trobat un model concret que resolgui aquesta problemàtica de manera satisfactòria, és a dir, no s'ha aconseguit traduir el producte de dos nombres enters negatius a una acció que visqui, de manera clara i transparent, en la realitat propera a l'alumne. CID (2002, p. 534) mostra un exemple de com es pot donar una resposta errònia, i amb sentit comú, si ens limitem al model (p. 94). Hem de recórrer a l'equació vinculada al model (p. 527), al *principi de permanència de les lleis formals* (p. 87) i, en conseqüència, a l'ensenyament deductiu. La multiplicació de nombres enters serà necessària en la resolució d'equacions, l'àlgebra elemental i la geometria analítica; abans no és possible ni necessari.

> The clear advantage of such a model is that the same meaning can be used for the integers both within and across the operations of addition and substraction, and it seems likely that this would enhance children's understanding of substraction in particular. However, the hopes places in such a model should not be exaggerated. It remains to be seen whether the likely improvement in children's understanding of substraction would be substantial since the coordinations involved would still be more complex than those required for addition. Also the model is as inappropriate for multiplication as the number line, but it is difficult to see a genuine way round this limitation without using an entirely abstract approach which, it has already been argued, is likely to leave most children with no understanding of integers at all.
>
> (KÜCHEMANN, 1981, p. 87)

Les regles dels signes

Després de l'estructura multiplicativa considerem que hem de mostrar la nostra posició respecte de com es pot introduir la regla dels signes de la manera que, des del nostre punt de vista, resulta més senzilla o més entenedora.

> Fue necesario mucho tiempo para que los matemáticos comprendieran que la «regla de los signos», junto con todas las demás definiciones que se refieren a los enteros negativos y a las fracciones, no podían ser «demostradas». Todas eran creaciones hechas con el objeto de alcanzar libertad en las operaciones, conservando siempre las leyes fundamentales de la aritmética.
>
> (COURANT i ROBBINS, 1979, p. 63)

Considerem el model concret dels ascensors i ens familiaritzem amb ell. Denotem la planta baixa amb el nombre 0, la primera planta amb el número 1, la segona planta amb el número 2 i així successivament. L'acció pujar 1 es correspon amb l'operació sumar 1, l'acció pujar dos pisos es correspon amb l'operació sumar 2 i així successivament.

Situem-nos en el primer soterrani i pugem un pis. L'alumne que només està familiaritzat amb el nombre natural no en té cap (de nombre) per fer referència al primer soterrani i, en el cas que hagi vist en el seu dia a dia el primer soterrani denotat per un nombre no en tindrà de ben segur una explicació.

Així, com que no tenim un nombre que faci referència al primer soterrani l'anomenem x. Sabem que si estem en el primer soterrani i pugem un pis anem a la planta baixa, fet que representem per $x + 1 = 0$.

Ara ens allunyem del fenomen empíric. Ens preguntem, quin nombre hi ha que quan li sumem 1 doni 0?, és a dir, quina solució té l'equació $x + 1 = 0$. O, de manera semblant ens preguntem, quin nombre hi ha que quan el sumem a 1 doni 0?, és a dir, quina solució té l'equació $1 + x = 0$? La propietat commutativa coneguda i acceptada en els nombres naturals l'hem admès també sobre el nombre x.

La voluntat de voler donar solució a aquesta equació ens condueix a acceptar un nou nombre que quan el sumem es comporta com si restéssim 1. Aquest comportament ens suggereix anomenar-lo -1. Per tant, $x = -1$.

Ara ens formulem la següent pregunta; clarament allunyada del fenomen empíric. Quin és el valor de $x \cdot (x + 1)$. Sabem que és zero ja que es tracta del producte de x per zero i, si en els naturals multiplicar un nombre per zero donava zero, ara també ho acceptem. Per altra banda podem aplicar la propietat distributiva que coneixíem pels nombres naturals i que acceptem també pel nou nombre. Així tenim: $0 = x \cdot (x + 1) = x \cdot x + x \cdot 1 = x \cdot x + x$.

Sabem que $x \cdot x + x = 0$ i que $1 + x = 0$. Per la llei cancel·lativa de l'addició tenim que $x \cdot x = 1$. Com que inicialment hem justificat denotar x per -1, tenim que $(-1) \cdot (-1) = 1$.

Referències

ARCAVI, A. (1999): «... y en matemáticas, los que instruimos ¿qué construimos?» *Números, 38*, 39-56.

ARNDT, A. B. (1983): «A-lkhwarizmi». *Mathematics Teacher, 76*(9), 668-670.

BOREL, E.; DRACH, J. (1895): *Introduction a l'étude de la Théorie des Nombres et de l'Algèbre Supérieure*. París: Librairie Nony.

BROUSSEAU, G. (1983): «Les obstacles épistémologiques et les problèmes en mathématiques». *Recherches en Didactique des Mathématiques, 4*(2), 165-198.

BRUNO, A. (1997): «La enseñanza de los números negativos: aportaciones de una investigación». *Números, 29*, 5-18.

— (2001): «La enseñanza de los números negativos: formalismo y significado». *La Gaceta de la Real Sociedad Matemática Española, 4*(2), 415-427.

BRUNO, A.; MARTINON, A. (1996*a*): «Números negativos: sumar = restar». *UNO*. 10, 123-133.

— (1996*b*): «Números negativos: una revisión de investigaciones». *UNO*. 9, 98-108.

CARRAHER, T.N. (1990): «Negative numbers without the minus sign». *México: Proceedings XIV PME*. 223-229.

CASTELNUOVO, E. (1973): *Didáctica de la matemática moderna*. México: Trillas.

CID, E. (2000): «Obstáculos epistemológicos en la enseñanza de los números negativos». *Actas del XV Jornadas del Seminario Interuniversitario de Investigación en Didáctica de las Matemáticas, Boletín del SI-IDM, 10. Celebrado en Cangas do Morrazo (Pontevedra), los días 7, 8 y 9 de Abril de 2000. Disponible en* http://www.ugr.es/ jgodino/siidm/boletin10.htm.

— (2002): «Los modelos concretos en la enseñanza de los números negativos». *Zaragoza: Actas de las X Jornadas para el Aprendizaje y Enseñanza de las Matemáticas, 2*, 529-542.

COFMAN, J. (1981): «Operations with negative numbers». *The Mathematics Teacher, 94*, 18-20.

COURANT, R.; ROBBINS, H. (1979): *¿Qué es la matemática?* Madrid: Aguilar.

CROWLEY, M.L.; DUNN, K.A. (1985): «On multiplying negative numbers». *Mathematics Teacher, 78*(4), 252-256.

DECRET 143/2007 (2007): «Ordenació dels ensenyaments de l'educació secundària obligatòria». Diari Oficial de la Generalitat de Catalunya 4915 de 29.6.2007.

DESCARTES, R. (1999): *La Geometria*. Barcelona: Institut d'Estudis Catalans. Traducció de Josep Pla i Pelegrí Viader.

FREUDENTHAL, H. (1973): *Mathematics as an educational task*. Dordrecht, Holanda: D. Reidel Publishing Company.

— (1983): *Didactical phenomenology of mathematical structures*. Dordrecht, Holanda: D. Reidel Publishing Company.

GALBRAITH, M.J. (1974): «Negative numbers». *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 5*, 83-90.

GARCÍA, F.C. (2002*b*): «El álgebra de la lógica». *Apuntes de historia de las matemáticas*, *1*(2), 47-54.

GARDNER, M. (1977): «Juegos matemáticos. La noción de número negativo y lo arduo que resulta entenderla». *Investigación y Ciencia, 11*, 102-106.

GLAESER, G. (1981): «Epistémologie des nombres relatifs». *Recherches en Didactique des Mathématiques, 2*(3), 303-346.

GONZÁLEZ, J.L.; *et al.* (1990): *Números enteros*. Madrid: Síntesis.

HANKEL, H. (1867): *Theorie der Komplexen Zahlsysteme*. Leipzig.

HILBERT, D. (1993): *Fundamentos de las matemáticas*. México: Servicios Editoriales de la Facultad de Ciencias de la Universidad Nacional Autónoma de México. Selección e introducción de Carlos Álvarez y Luis Felipe Segura; traducción directa del alemán y notas de Luis Felipe Segura.

IRIARTE, M.; JIMENO, M.; VARGAS-MACHUCA, I. (1991): «Obstáculos en el aprendizaje de los números enteros». *SUMA, 7*, 13-18.

JOHNSON, D.R. (1986): «Making -x meaningfull». *Mathematics teacher, 79*(7), 507-510.

KÜCHEMANN, D. (1981): «Positive and negative numbers». Hart, K. M. (ed). *Children's Understanding of Mathematics 11-16. London: John Murray*. 82-87.

PEACOCK, G. (1830): *A treatise on algebra*. London.

PESCADOR, P. (1997): «Demostración del teorema de Tales, por métodos elementales». *Boletín (Sociedad Puig Adam de Profesores de Matemáticas), 47*, 22-29.

— (2002): «Una demostración breve del teorema de Tales». *Boletín (Sociedad Puig Adam de Profesores de Matemáticas), 60*, 55-57.

— (2003): «Otra demostración del teorema de Tales». *Boletín (Sociedad Puig Adam de Profesores de Matemáticas), 64*, 84-86.

PUIG ADAM, P. (1960): *La Matemática y su enseñanza actual*. Madrid: Ministerio de Educación Nacional.

REY PASTOR, J.; PI CALLEJA, P.; TREJO, A. (1969): *Análisis matemático. Volumen I: Análisis algebraico, teoría de ecuaciones y cálculo infinitesimal de una variable*. Buenos Aires: Kapelusz.

SCHUBRING, G. (1988): «Discussions épistémologiques sur le statut des nombres négatifs et leur répresentation dans les manuels allemands et français de mathématiques entre 1795 et 1845. Actes du premier colloque franco-allemand de didactique des mathématiques et de l'informatique». *Grenoble: La Pensée Sauvage Editions*, 137-145.

SNELL, K.S (1970): «Integers. Introduction of directed numbers». *The Mathematical Gazette, 54*(388), 105-109.

Capítol 4

Concepcions del nombre enter

Índex

Els infants en els seus primers anys de vida dediquen gran part del temps a menjar, dormir i jugar; diverses manifestacions es deriven d'aquestes com riure o plorar. Entre les diferents activitats que realitzen relacionades amb jugar es pot trobar l'etiquetació d'objectes amb diferents símbols com 1, 2, 3 o d'altres. Els adults també realitzem accions anàlogues. Per facilitar la localització de les cases o els edificis d'una població emprem una etiqueta diferent per a cada ubicació d'un mateix carrer. Els símbols 1, 2, 3 i d'altres s'utilitzen sovint com etiquetes que actuen amb l'esmentada funció. Philip L. Davis fa una exposició relativa a aquest punt de partida que presentem amb les seves paraules[1]:

> Los números constituyen una herramienta indispensable de la civilización, sirviendo para someter sus actividades a una especie de orden. En su aplicación más primitiva sirven como etiquetas de identificación: número de teléfono, matrícula del coche, número postal. A este nivel comparamos meramente un número con otro. Tales números no están sometidos a operaciones aritméticas. (Nunca esperaríamos llegar a ninguna información de importancia añadiendo el número de teléfono de Leonard Bernstein al de Elizabeth Taylor.) A un nivel un poco más elevado hacemos uso del orden natural de los enteros positivos, por ejemplo, al tomar un número de turno sobre el mostrador del carnicero, o bien al escribir una lista de orden de llegada de una carretera. Aun aquí no hay ninguna necesidad todavía de operar con estos números. Lo que nos interesa es solamente saber si un número es mayor que otro. La aritmética, en sentido propio, no parece importante hasta la etapa en que nos preguntamos la cuestión: ¿Cuántos? Es entonces cuando debemos enfrentarnos con las complejidades de la adición, sustracción, multiplicación, división, raíces cuadradas y otras operaciones más complicadas con los números.
>
> (Davis, 1974, p. 101)

[1] L'article de Philip L. Davis té per títol *El número* i va sortir en el número de setembre de 1964 a Scientific American. Posteriorment aquesta revista va publicar una recopilació d'articles amb el títol Mathematic in the Modern World. La primera edició espanyola d'aquest llibre va sortir l'any 1974 amb el títol Matemáticas en el Mundo Moderno editada per Miguel de Guzmán.

En els primers anys d'escola l'infant utilitza nombres, que anomenem naturals, per fer referència a quantitats d'objectes (cardinal) i a la posició que ocupen dins del conjunt (ordinal). Aquest valuós treball experimental dels primers anys d'escola condueix al doble significat d'aquests nombres: el cardinal i l'ordinal. Cardinal en quant a que representa la quantitat d'objectes d'un determinat conjunt. Ordinal en quant a que representa la posició d'un objecte dins d'un determinat conjunt; neix així el primer contacte amb l'ordre.

Els nombres naturals, sovint anomenats números en la nostra llengua, són objectes que denotem amb signes verbals (diferents segons la llengua emprada) o escrits (també diferents segons el moment històric i la civilització).

El sistema de regles i convenis amb que es representen els nombres naturals en l'actualitat és decimal (deu símbols) i posicional (varia el valor segons la posició d'aquests). Nogensmenys, els signes verbals o escrits són representacions emprades per comunicar o registrar realitats del món extern que esdevenen en la nostra ment. Quan diem «quatre cigrons» o escrivim «4 cigrons» imaginem una realitat que és la mateixa si ho diem en una o altra llengua, si ho escrivim fent ús d'un o altre sistema numèric, si ho comuniquem amb uns o altres gests corporals.

L'exposat respon a l'essència de la matemàtica escolar i al punt de partida que trobem en els estudiants que inicien l'ensenyament secundari obligatori. Leopold Kronecker edifica la matemàtica a partir del nombre natural i realitzant a partir d'ell construccions en nombre finit: «Déu ha creat els nombres naturals, la resta és fruit del treball de l'home»[2].

Atenent a les definicions del Diccionari de la llengua catalana, nombre és el

[2]Aquesta coneguda cita l'hem extret del llibre «Men of Mathematics» de Eric Temple BELL (1965, p. 477). Leopold Kronecker (1823-1893) va defensar la construcció de la matemàtica a partir dels nombres naturals. La crisi de fonaments de la matemàtica de finals del segle XIX i la posterior reformulació axiomàtica de principis del segle XX neixen d'un propòsit diametralment oposat als objectius de les matemàtiques escolars. Els alumnes a qui dirigim aquesta recerca estan en una posició en la que manquen ingredients que convidin a plantejar la crisi dels fonaments de la matemàtica i no hi ha la intenció de fer-ho, en conseqüència, acceptem els nombres naturals i aquelles propietats d'ells que són inqüestionables per tot alumne. «El repertori d'enunciats admesos a secundària mai no s'hauria de limitar a una quantitat ni a una col·lecció preestablerta, ni tan sols tenen perquè ser sempre els mateixos. Tanmateix, aquests han de penetrar amb absoluta transparència en l'estructura cognitiva de l'alumne, en cas contrari es tracta d'un resultat que, a través de la resolució de problemes, ha de ser prèviament construït i consolidat tot recolzant-se en propietats que sí que siguin cristal·lines per a ell. És imprescindible, per tant, negociar i consensuar amb els alumnes aquells resultats que admetem sense argument» (PUJOL *et al.*, 2007, p. 74).

«resultat de comptar les coses que formen un agregat (dos, tres, quatre, etc, i també un, o sia, la unitat) o qualsevol dels ens abstractes que resulten de generalitzar aquest concepte» (1994, p. 527). Número és el «nombre amb què una cosa és designada dins una sèrie o col·lecció» (1994, p. 531). D'ambdues definicions es desprèn que número fa referència a l'ordinal mentre que nombre al cardinal deixant la porta oberta a generalitzacions d'aquest concepte.

L'experiència prèvia amb alumnes de secundària revela sovint una forta confusió entre les concepcions de nombre, unitat, quantitat, magnitud i mesura, que potser incideix en les dificultats d'aprenentatge quan es vol evolucionar el concepte de nombre. Aquest capítol neix de la necessitat d'atendre els fonaments teòrics que permetin contrastar els resultats d'aquesta investigació que condueixin a conflictes i particularitats entre les esmentades concepcions.

> El inicio de la enseñanza de los números negativos con alumnos de 12 o 13 años (edad en la que suele realizarse) supone la modificación de ideas fuertemente arraigadas y construidas a lo largo de toda la enseñanza primaria e, incluso, antes.
>
> (Bruno, 2001, p. 415)

4.1 Referents epistemològics

El concepte de nombre és un coneixement matemàtic al qual l'estudiant s'hi familiaritza gradualment. Hom accepta per concepció el coneixement del concepte que té un determinat individu. L'ensenyament de la matemàtica, en particular el del nombre enter, pot incidir en la concepció del concepte de nombre que tenen els alumnes, facilitant o evitant que es limiti a ser la traducció a la matemàtica de les accions empíriques d'etiquetar, comptar, situar o mesurar. En aquest apartat presentem un breu passeig per les concepcions del concepte de nombre que han esdevingut al llarg del temps. Aquest no és un estudi ni una recerca històrica, però seria poc honest desatendre les indicacions epistemològiques que hi estan relacionades.

4.1.1 Aritmètica i geometria a la Grècia Clàssica

La posició pitagòrica[3] admet un paral·lelisme entre objectes i nombres. Les línies són la juxtaposició de punts i cada punt s'identifica amb un nombre. La posició aristotèlica admet una unitat indivisible i distingeix dos tipus de quantitats: pluralitats i magnituds. El punt de vista adoptat per la comunitat matemàtica d'aquell moment i recollit per Euclides, condueix a admetre els nombres per agregació d'unitats.

> Una unitat és allò en virtut de la qual cosa cadascuna de les coses que hi ha, s'anomena una.
>
> (EUCLIDES, 2003-2008, Def. 1, Llibre VII)

> Un número és una pluralitat composada d'unitats.
>
> (EUCLIDES, 2003-2008, Def. 2, Llibre VII)

La concepció d'unitat s'enfrontarà amb les fraccions enteses com parts de la unitat conduint a una unitat absoluta i una altra divisible. Les pluralitats es relacionen amb l'estudi de l'aritmètica i les magnituds amb l'estudi de la geometria. Les magnituds commensurables amb la unitat les tractaven com raons numèriques i en aquest punt connectava l'aritmètica amb la geometria. Pels matemàtics grecs els únics nombres eren els nombres naturals i, més en general, els nombres racionals positius.

Com a conseqüència de representar els nombres a través de disposicions d'objectes en l'espai, en l'aritmètica grega es van obtenir importants resultats sobre nombres triangulars, quadrats, pentagonals, ... A banda d'aquests treballs els grecs eren principalment geòmetres. El nombre negatiu no va sortir en cap moment. Aquest fet recolza, des d'un punt de vista epistemològic, que l'aritmètica elemental i la geometria clàssica no requereixin nombres negatius per al seu estudi.

[3]En aquesta memòria mostrem una síntesi de la posició adoptada per la matemàtica grega. És molta la bibliografia que pot facilitar aprofundir-hi però, per fixar-ne alguna, considerem que l'article de PLA CARRERA (1998*a*) en fa una breu i clara síntesi.

4.1.2 Diofant i les equacions

El primer punt d'inflexió rellevant respecte del nombre negatiu el trobem en l'aritmètica de D'ALEXANDRIA (1974), obra publicada aproximadament l'any 200 després de Crist. Aquest és el primer llibre dedicat exclusivament a l'aritmètica. Claude Gaspar Bachet de Méziriac (1588-1638) va ser el primer en traduir l'Aritmètica de Diofant[4] al llatí. En els problemes d'aquesta obra s'anomena nombre a la incògnita d'equacions que modelitzen situacions reals proposades en els enunciats. La notació emprada en aquell moment difereix molt de l'actual. Tal com mostra GÓMEZ (2001, p. 291), Diofant no admet els negatius com a nombres (BOYER, 1986; GLAESER, 1981; SCHUBRING, 1988; GONZÁLEZ *et al.*, 1990; CROWLEY i DUNN, 1985). Tanmateix cal donar a Diofant el mèrit d'haver enunciat per primera vegada la regla dels signes del producte de nombres negatius. Mostrem a continuació una traducció de Josep Pla:

> El producto de lo deficiente por lo deficiente es positivo; el de lo positivo por lo deficiente es deficiente y la marca de lo deficiente es una $\uparrow$ ...
>
> (PLA CARRERA, 1983, p. 71)

L'aritmètica de Diofant es distancia de la tradició grega i la regla dels signes apareix per primera vegada en afrontar l'intent de resoldre equacions. Els nombres negatius no eren considerats nombres en la Grècia Clàssica per no respondre a les experiències de comptar pluralitats o mesurar magnituds, és a dir, per no tenir un referent material. Tanmateix, l'esmentada aportació es produeix en un moment en el que el rebuig dels nombres negatius fa difícil interpretar la posició de Diofant.

> I have still to remark in connexion with the work of Diophantus that he enunciated the principle that $+$ and $-$ give $-$ in multiplication, and $-$ and $-$, $+$, in the form of a definition. But I am of opinion that

[4] Pierre de Fermat (1661-1665) va escriure al marge de la traducció de Bachet de l'Aritmètica de Diofant el conegut darrer Teorema de Fermat: «Cubum autem in duos cubos, aut quadratoquadratum in duos quadratoquadratos, et generaliter nullam in infinitum ultra quadratum potestatem in duos ejusdem nominis fas est dividere: cujus rei demonstrationem mirabilem sane detexi. Hanc marginis exiguitas non caperet».

> this is an error of the copyists, since he is more likely to have considered it as an axiom, as did Euclid some of the principles of geometry. However that may be, it will be seen that Diophantus regarded the rule of the signs as a self-evident principle not in need of demonstration.
>
> (Lagrange, 1898, p. 57)

Com pot ser que algú, amb el context que envoltava a Diofant, pogués arribar a enunciar l'esmentada regla dels signes? Només trobem una explicació que exposa George Pólya amb tota claredat:

> *The genius, the expert, and the beginner*. The genius acts according to the rules without knowing that there are rules. The expert acts according to the rules without thinking of the rules, but, if needed, he could quote the rule applicable to the case in question. The beginner, trying to act according to the rule, may learn its veritable meaning from success and failure.
>
> (Pólya, 1981, Vol. 2, p. 97)

Segonos Pla Carrera (1983) amb la mort de Diofant cal esperar fins el segle IX amb la publicació de *Al-Jabr W'al-Muqabalah* per part de Abuabdala Mohamed al Khuwarizmi, per retornar a la ciència de les equacions. D'ell diu Josep Pla:

> [...] su obra es un texto destinado a resolver ecuaciones, utilizando de forma adecuada y reiterada las operaciones de «trasposición» y «cancelación» de términos. En esta obra -que recuerda en su plateamiento y en sus propósitos, el planteamiento y los propósitos de la Aritmética de Diofanto- se da un paso de gigante en la resolución de la ecuación de segundo grado, siendo la fórmula general, según parece, del hindú Bhaskara (siglo XII), recopilándose además en ella todos los conocimientos que los árabes poseían en aquel momento, relativos al álgebra.
>
> (Pla Carrera, 1983, pp. 77-78)

4.1.3 L'entrada a la cultura occidental

L'entrada de les equacions en la cultura occidental es va produir amb la publicació l'any 1202 de l'obra *Liber Abaci* de FIBONACCI (2002). Els traductors de *La Géométrie* de Descartes, Josep Pla i Pelegrí Viader, fan les següents consideracions relatives a l'acceptació i el rebuig de les arrels negatives de les equacions:

> Aquestes rels han pres noms diversos en diferents autors, i la seva acceptació és també diversa. Fibonacci no les admet. A l'*Ars Magna*, CARDANO les accepta i les anomena *astimationes falsa o ficta*. No els concedeix, però, cap significat especial. Stifel les anomena, com Rudolf, *numeri absurdi*. Joseph-Louis Lagrange, a LAGRANGE[1795], diu: «És pròpiament *La Géométrie* la que dóna a conèixer les quantitats negatives i això és un dels avantatges més grans que resulta del fet d'aplicar l'Àlgebra a la Geometria, i el devem a Descartes».
>
> (DESCARTES, 1999, pp. 102-103)

El desenvolupament de l'àlgebra en el Renaixement va conduir a la utilització progressiva de rels negatives de les equacions, que alhora es consideraven falses. La terminologia «negatiu» probablement apareix en aquesta etapa històrica pel motiu que eren els valors negats de les arrels d'equacions.

> Con el desarrollo del álgebra, los negativos aparecen de nuevo en escena, provocando entre los algebristas reacciones diversas que van del rechazo a la tolerancia, pasando por el espanto que hace que se les califique de falsos, ficticios o absurdos. Pero este rechazo es ya un síntoma de que los matemáticos se han detenido en ellos y una forma de reconocer su existencia aunque sea a través de negársela. Quizás el término «negativo» provenga de esta época, ya que eran los valores negados cuando se obtenían como raíces de una ecuación. Se puede decir que durante el Renacimiento se abre una nueva etapa para los negativos. Ya no son ignorados como en la época anterior; se les reconoce, aunque dándoles el papel de «cenicientos», rechazados por todos pero utilizados también.

> Parece ser que la primera vez que en el Renacimiento aparece un número negativo aislado en una ecuación algebraica es en la obra del matemático francés Nicolás Chuquet[5] (1445-1500). Se trata de «Triparty» escrita en 1484. Aquí aparece lo que hoy escribiríamos $4x = -2$ (entonces no existían los símbolos algebraicos «x», «=» y «$-$»).
>
> (González *et al.*, 1990, p. 28)

$$\cdot 4 \cdot {}^{1} \cdot \text{eglaux a } \bar{m} \cdot 2 \cdot {}^{0} \qquad (4x = -2)$$

Figura 4.1: Chuquet expressa per primera vegada un nombre negatiu en una equació algebraica. Imatge extreta de l'article «El naixement del nombres complexos» de Molas i Pérez (1990, p. 39).

En la resolució geomètrica de l'equació de segon grau Descartes (1999, p. 21) ignora una rel per ser «falsa», és a dir, negativa. Poca acceptació van tenir en els segles XVI i XVII els nombres negatius. A *L'Invention nouvelle en l'algèbre* (1629), Albert Girard (1595-1632) considerà les dues arrels d'una equació, fins i tot quan ambdues eren negatives.

L'exposat fins aquí mostra que el nombre negatiu apareix a partir de la resolució d'equacions. Les primeres interpretacions dels nombres negatius com retrocessos i els positius com avenços no apareixen fins els segle XVII.

> Aunque los negativos surgieron de una necesidad algebraica, lo que hizo que adquiriesen mayor consistencia fue una necesidad algebraico-geométrica que se inició en el siglo XVII.
>
> Girard, fue el primero que apreció el carácter algebraico-geométrico del negativo. No sólo tuvo en cuenta su validez algebraica sino que

[5] L'any 1484 apareix a França el Tryparty, de Nicolàs Chuquet, que tal com el seu nom indica consta de tres parts: la primera dedicada a operacions aritmètiques racionals, la segona a càlculs amb arrels de nombres i la tercera a la regla de les incògnites o àlgebra tal com diríem nosaltres. Chuquet aporta una notació exponencial i expressa per primera vegada un nombre negatiu en una equació algebraica (Molas i Pérez, 1990, p. 39).

> lo interpretó geométricamente: «Lo negativo en geometría indica un retroceso mientras que lo positivo es un avance». Incluso utilizó un problema geométrico para dar contenido a la raíz negativa. Con ello, Girard se anticipó a las ideas que sobre el negativo prevalecieron en el siglo XVIII.
>
> (González *et al.*, 1990, p. 33)

Aquestes interpretacions són la llavor del que posteriorment esdevindrà l'ensenyament del nombre enter a través de models concrets. Durant els segles XVI i XVII la manca de rigor va facilitar la utilització dels nombres negatius en diversos contextos. En la geometria algebraica els nombres negatius van trobar interpretació com abscisses de punts. En els segles XVIII i XIX, l'admissió formal dels nombres negatius xocava amb la pretensió de donar-los un significat real, és a dir, amb la creença imperant que la matemàtica ha de descriure la realitat física.

> Fué la necesidad de una mayor libertad en el cálculo formal lo que llevó a la utilitzación de los números racionales negativos, y sólo al final de la Edad Media empezaron los matemáticos a perder el temor de usar estos conceptos que no tenían el mismo carácter concreto e intuitivo de los números naturales. Hasta la mitad del siglo XIX los matemáticos no percibieron de una forma completamente clara que la base esencial lógico-filosófica de las operaciones en un conjunto numérico ampliado es formalista, y que las ampliaciones han de hacerse mediante definiciones que, como tales, son libres, pero resultan inútiles si no son hechas de manera que las leyes y propiedades válidas en el campo numérico original se conserven al ampliar éste. El hecho de que estas ampliaciones puedan estar a veces relacionadas con objetos «reales», y que de esta forma procuren una herramienta para nuevas aplicaciones, es de la mayor importancia, si bien esto no es sólo una justificación, pero no constituye una prueba lógica de la validez de la ampliación.
>
> (Courant i Robbins, 1979, p. 98)

4.1.4 La consolidació dels fonaments

La cerca de rigor va focalitzar l'atenció dels matemàtics dels segle XIX. L'any 1899 David Hilbert, amb la publicació de *Grundlagen der Geometrie*, va basar reduir consistència del sistema d'axiomes que va presentar a la consistència de l'aritmètica. Això és el que anomenem aritmetització de la geometria.

En el segle XVII Newton i Leibnitz van desenvolupar el càlcul. El concepte de límit evitava els infinitèssims tot fent que el tractament geomètric fos substituït pel numèric. Cap a l'any 1870 els treballs de Weierstrass van aconseguir construir els nombres reals a partir dels nombres racionals. Aquest procés hom l'anomena l'aritmetització de l'anàlisi.

Axiomatitzar els nombres naturals consisteix en establir un mínim de proposicions evidents anomenades axiomes i en derivar a partir d'elles les altres proposicions en qualitat de teoremes. Els axiomes constitueixen els fonaments del sistema i els teoremes l'estructura de la teoria. Després de diferents propostes com les de DEDEKIND, el sistema axiomàtic dels nombres naturals acceptat va ser el proposat per Giuseppe PEANO l'any 1889. La voluntat de reduir els nombres naturals o uns principis més elementals va trobar en la teoria de conjunts el lloc on fonamentar els nombres naturals.

En el darrer quart del segle XIX es van produir les principals aportacions relacionades amb la fonamentació de l'aritmètica. La definició intuïtiva de conjunt va trontollar amb la paradoxa de Russel; la inconsistència de la teoria de conjunts van deixar el sentit comú en un segon lloc. La teoria axiomàtica de Zermelo (1908) i els refinaments de Fraenkel (1922), entre d'altres, van constituir la primera formulació axiomàtica de la teoria de conjunts.

Avui dia, els nombres complexos es poden construir a partir dels nombres reals, el nombres reals a partir dels nombres racionals, els nombres racionals a partir dels nombres enters, els nombres enters a partir dels naturals i, aquests darrers, a partir de la teoria de conjunts; segons la doctrina hegemònica ja que amb aquest darrer pas els intuïcionistes no hi estarien pas d'acord.

Les presentacions formals amb l'intent de consolidar els nombres i les presentacions prèvies amb l'intent de lligar els nombres negatius amb el món real, no treuen que els nombres negatius nasquessin de la resolució d'equacions. Tal com mostra GALLARDO (2002) l'ensenyament del nombre negatiu atenent la resolució d'equacions esdevé necessari per la construcció del coneixement relatiu al llenguatge algebraic:

> In this article I used historical-critical analysis as a methodological component of research in elementary algebra education. This historical analysis showed the need to consider mutual interrelationships between the algebraic and the methods of solving word problems and linear equations for the understanding of the evolution of the negative number concept.
>
> (GALLARDO, 2002, p. 188)

4.2 El nombre en l'estadi concret

El TermCat[6] defineix «concepte» com «la representació mental d'una classe d'objectes que es construeix per abstracció a partir de les propietats comunes dels objectes individuals que la integren».

Un concepte és un objecte purament mental -inaudible i invisible-, en paraules de SKEMP (1980, p. 74). Per resoldre la invisibilitat escrivim, per comunicar-nos verbalment pronunciem; en ambdós casos no tenim només una possibilitat. Els símbols que emprem ens aproximen a una idea del concepte que pot ser més o menys encertada segons la comunicació aconseguida.

El concepte de nombre està, per tant, relacionat amb la representació mental que resulta de comptar les coses que formen un agregat en un primer moment. Estem interessats en el desenvolupament conceptual que esdevé al llarg del procés d'aprenentatge a secundària. Volem conèixer el significat de partida del concepte de nombre i la seva evolució pels alumnes participants en l'experimentació que provoquem a l'aula. El *Diccionari de la Llengua Catalana* defineix «significat» com «significació, allò que vol dir o significa un mot, un signe, un gest». El que

[6] El TERMCAT, Centre de Terminologia, fou creat l'any 1985 per un acord entre la Direcció General de Política Lingüística del Departament de Cultura de la Generalitat de Catalunya i l'Institut d'Estudis Catalans amb la finalitat de promoure, coordinar i desenvolupar les activitats terminològiques en llengua catalana: `http://www.termcat.cat`.

significa «nombre» per un alumne al llarg dels primers anys de la seva vida pot estar molt allunyat del significat que li donarà en etapes posteriors[7].

> Cuando una persona se enfrenta al nombre de un concepto, lo que se estimula en la memoria no suele ser la definición del concepto, sino un conjunto de representaciones (visuales, experiencias, impresiones) que es lo que denomina *imagen* del concepto. Esta imagen del concepto, en la que se incluyen los atributos mentales de dicho concepto, es fruto de la serie de experiencias personales que se prolongan durante toda la vida del sujeto.
>
> (SOTOS, 2004, p. 95)

Atesa l'exposició prèvia, estem interessats en l'evolució de significats que dóna l'alumne al concepte de nombre, des d'abans fins després de l'experimentació d'aquesta recerca. Considerem la següent classificació dels usos dels nombres que realitza GÓMEZ (1998, pp. 18-20):

- Para contar: Tanto para responder a la pregunta ¿cuántos? (cardinal), como a la pregunta ¿cuál? (ordinal).

[7]Un nombre és el concepte que sorgeix del resultat de comptar les coses que formen un agregat, o una generalització d'aquest concepte. Aquesta és la definició que hi dóna el diccionari de l'Institut d'Estudis Catalans. En aquesta definició hi queden clarament inclosos tots els tipus de nombres de que tracten les matemàtiques perquè tots són generalitzacions del concepte dels nombres que es fan servir per a comptar (els nombres naturals). No tots els idiomes donen exactament el mateix significat a la traducció de la paraula catalana nombre. En espanyol, segons el diccionari de la Real Academia de la Lengua Española, la paraula «número» significa l'expressió de la quantitat computada en relació a una unitat. Aquesta definició fa difícil d'incloure dins el seu significat tipus de nombres com els nombres complexos. A més, en espanyol «número» significa també el signe o conjunt de signes que representen el nombre. En anglès, segons el diccionari Oxford, «number» és una idea, un símbol o una paraula que indiquen una quantitat d'unitats. El nombres es fan servir per a comptar i per a mesurar. Dels signes que serveixen per a representar els nombres en un sistema de numeració se li'n diuen xifres, però habitualment la paraula nombre es fa servir tant per a designar el concepte com el signe. En matemàtiques el concepte de nombre s'ha anat generalitzant i abasta nombres tals com el 0, els nombres negatius, els nombres racionals, els nombres irracionals i els nombres complexos. D'una regla que permet obtenir un nombre d'un conjunt, a partir d'un parell de nombres del mateix conjunt, se'n diu operació. Exemples d'operacions són la suma, la resta, la multiplicació, la divisió i la potenciació. La ciència que estudia els nombres és l'aritmètica. Els nombres van sorgir a la prehistòria, per la necessitat de comptar, sobretot per motius econòmics, els objectes i pertinences. Això no obstant, hi ha cultures que no han desenvolupat un sistema de numeració, i que tenen únicament els conceptes d'un, dos (o plural) i molts.

- Para numerar: Los números se asignan a objetos con una función utilitaria (identificar, diferenciar, nombrar, codificar, etc.).
- Para medir: Cuantificando cualquier magnitud (tiempo, longitud, área, volumen, precio, etc.).
- Para operar: Realizando operaciones aritméticas (agregar, separar, repetir y repartir).

Considerem que la terminologia «numerar» emprada per Gómez (1998) queda més ben expressada per «etiquetar» ja que numerar es pot associar a l'ordinal. Què és un nombre per un nen des de la seva infància fins abans d'introduir el nombre negatiu? Mostrem tot seguit els significats dels símbols que emprem per designar els nombres, que no són excloents, i que conviuen en l'estructura cognitiva de l'alumne:

- Una etiqueta que serveix per identificar, diferenciar, anomenar o codificar objectes.
- Una representació útil per comptar objectes (cardinal) i per enumerar-ne (ordinal). Les operacions es corresponen amb accions empíriques: sumar-afegir, restar-treure, afegir repetidament una mateixa quantitat-multiplicar, repartir-dividir.
- Una representació útil per denotar la mesura de magnituds. Sumar-afegir i restar-treure són operacions-accions sobre nombres-magnituds. Hom accepta i defineix el producte d'una magnitud per un nombre per donar resposta a necessitats externes a la matemàtica.

L'alumne modifica i evoluciona el concepte de nombre des de la infància ja que aquest no només serveix per comptar. La definició (p. 133) donada pel diccionari de la Enciclopèdia Catalana no recull l'esmentada evolució.

Una posició estàtica d'aquest concepte mantindria l'alumne dins d'un ensenyament de la matemàtica que viu permanentment vinculat amb el món real. Ara bé, la introducció del nombre enter constitueix «el primer paso de la matemática práctica a la formal» Klein (1927-1931, Vol. 1, p. 33) i l'esmentada vinculació esdevindria una dificultat.

> Actualmente, los matemáticos aplican la palabra «número» a centenares de engendros abstractos muy distantes de la operación de contar.
>
> (Gardner, 1977, p. 102)

4.3 Sobre la introducció dels nombres naturals

La introducció del nombre natural es pot inspirar, i així es fa en l'actualitat en el nostre territori, en observacions empíriques del món real. Un conjunt d'objectes condueix a emprar nombres naturals per indicar-ne la quantitat (cardinal) i per identificar-los (ordinal). Agregar els objectes de diferents conjunts es tradueix a la matemàtica per sumar els nombres naturals que representen la quantitat que hi ha en cadascun d'ells, treure objectes d'un conjunt es tradueix per restar, etc. El nombre natural i les seves operacions es poden estudiar però amb pretensions diametralment oposades:

1. A partir de la modelització de fenòmens reals.
2. A partir de la teoria de conjunts en l'intent de simplificar els objectes de partida.

4.3.1 Introducció del nombre natural a partir de la modelització de fenòmens reals

L'ensenyament primari opta per ensenyar mantenint la màxima proximitat a la realitat quotidiana de l'alumne, posició que compartim ja que el nombre natural va néixer d'una necessitat externa a la matemàtica.

Tot nombre natural (cardinal) indica la quantitat d'objectes d'un conjunt. La suma de nombres naturals es correspon amb l'acció d'agregar en un mateix conjunt els objectes dels conjunts representats per cada nombre que volem sumar. Treure, afegir repetides vegades i repartir són les accions empíriques que dicten les regles de restar, multiplicar i dividir nombres naturals.

Per un alumne en els primers anys d'escola, previs a la introducció del nombre negatiu, un nombre és un conjunt d'objectes. Acceptem que aquests són els trets bàsics que caracteritzen la concepció de nombre que té tot ésser humà en els primers anys de vida.

Concepció 4.3.1 *En aquesta recerca admetem que, previ a la introducció del nombre enter, per un alumne que prové de l'ensenyament primari, un nombre és una realitat mental, amb una simbolització acceptada per hom, que representa un conjunt d'objectes (nous, pomes, etc.) i que serveix per comptar.*

4.3.2 A partir de la teoria de conjunts

La construcció dels nombres naturals a partir de la teoria de conjunts pren la seva força en l'intent de simplificar els objectes de partida. L'esmentada introducció no aportarà però més claredat a la comprensió de l'aritmètica elemental en la matemàtica escolar i no és, per tant, objectiu atès en aquesta recerca. Tampoc aconseguirem més claredat en els joves prenent com a punt de partida els axiomes de Peano o d'altres equivalents.

> El maestro, debe ser, por así decirlo, algo *diplomático*; ha de conocer la psicología de los niños para poder captar su interés, y sólo podrá lograrlo si acierta a presentar las cosas bajo una forma intuitiva fácilmente asimilable. Dentro de la Escuela, sólo en las clases superiores se puede revestir la doctrina de forma abstracta. Pongamos un ejemplo: al niño le es imposible comprender cuando se le explican los números axiomáticamente, como cosas sin significación, con las cuales se puede operar según reglas y principios compatibles entre sí; antes bien, asocia a los números conceptos absolutamente reales; los números son para él conjuntos de cosas, como nueces, manzanas, etc., y sólo bajo esta forma concreta se le puede presentar al principio, y así, en efecto, se le enseña.
>
> (KLEIN, 1927-1931, Vol. 1, p. 5)

4.4 Sobre els nombres racionals positius

Els problemes que condueixen a introduir el nombre racional positiu es poden classificar en dues categories: interns o externs a la matemàtica. Per una banda brolla la necessitat d'inserir la llavor del nombre racional positiu a partir de la voluntat de donar solució a la divisió en tots els casos, que amb nombres naturals no sempre és possible. La segona rau en voler representar quantitats de magnitud per nombres[8].

4.4.1 A partir de la divisió exacta

És possible donar una introducció del nombre racional positiu independent de tota connexió amb el món real, independent de tota experiència o intuïció. La divisió entre dos nombres naturals D i d es correspon amb la cerca de nombres naturals q i r que satisfacin l'equació $D = dq + r$ amb $r < d$. Es tracta, per tant, d'un problema diofàntic (una equació algebraica plantejada amb vàries incògnites i resolta amb nombres naturals). La voluntat de resoldre el problema de la divisió exacta en tots els casos condueix a la introducció d'uns nous nombres que solucionen l'equació esmentada. Un cop introduïts els nombres racionals positius i identificats, quan s'escau, amb els nombres naturals, establim les operacions per extensió de les prèviament conegudes i emprades amb nombres naturals, és a dir, fem ús del *principi de permanència de les lleis formals* (p. 87). Però això no és necessari en una primera introducció i des del punt de vista didàctic només pren rellevància a posteriori.

> La palabra *número* tiene, pues, en cada una de las sucesivas fases de la Aritmética significado cada vez más amplio, y en cada una de ellas será preciso definir de nuevo las dos operaciones fundamentales: adición y multiplicación. Mas no lo haremos arbitrariamente, sino, de tal modo, que las anteriores definiciones en el sistema menos amplio queden incluidas en las nuevas definiciones como caso par-

[8] Tal com mostra Puig Adam (1956, pp. 24-35), les fraccions es poden interpretar com operadors. En aquest cas actuen sobre nombres que denoten quantitats de magnitud. Si aquest fet no s'explicita és perquè l'esmentada quantitat de magnitud es pren com a unitat.

> ticular; pues si estas nuevas definiciones diesen resultados distintos que las antiguas, la Aritmética construida sería contradictoria consigo misma.
>
> (REY PASTOR, 1976, p. 85)

En concret les operacions en el nou conjunt de nombres han de satisfer:

1. Les lleis (uniformitat, commutativa, associativa i distributiva) que es complien per les operacions amb nombres naturals s'han de seguir complint en les operacions definides amb nombres racionals positius[9].

2. Pels nombres racionals positius que es corresponen amb nombres naturals, les noves operacions definides han de donar resultats iguals que els que obtenim operant amb els corresponents nombres naturals.

4.4.2 A partir de la mesura de quantitats de magnitud

Considerem els segments que estan en una mateixa semirrecta i que tenen un extrem en l'origen d'aquesta. Dos d'ells qualssevol són comparables per la relació "ser més llarg que". Fixem-ne un i comparem els altres amb aquest. Els segments són els objectes de treball que ens ocupen, la longitud és la magnitud que permet comparar-ne dos qualssevol, la quantitat és un estat concret i la mesura d'un segment és el valor de la seva longitud en relació amb el segment fixat, que anomenem unitat. L'elecció del segment unitat és arbitrària. En qualsevol cas, fixat el segment unitat un altre serà la meitat d'aquest, el doble, la sisena part, ...

La mesura del segment unitat la representem pel nombre 1. Un segment format per la unió de a segments unitat el simbolitzem pel nombre natural a; afegir els a segments unitat es correspon amb sumar a vegades el nombre natural 1. Si dividim el segment unitat en m parts iguals, el segment format per n d'aquestes parts el simbolitzem per la fracció $\frac{n}{m}$. Així doncs, la llavor del nombre racional es pot obtenir a partir d'aquesta necessitat externa a la matemàtica, la mesura de

[9] Demanar que el nou conjunt numèric conservi aquestes propietats a vegades s'expressa dient que es demana que tingui el mateix comportament.

la longitud de segments[10]. Més endavant i fent un salt de gran abstracció identifiquem les fraccions que fan referència a un mateix segment i determinen, per tant, un mateix nombre racional.

DESCARTES (1999) descriu com la geometria dicta el comportament de l'aritmètica. La transparència que mostra fa immillorable el tractament didàctic.

> I, atès que la totalitat de l'aritmètica solament es compon de quatre o cinc operacions que són l'addició, la substracció, la multiplicació, la divisió i l'extracció de rels, que podem considerar una mena de divisió, així també l'únic que cal fer en geometria en relació amb les línies que busquem, quan elaborem per tal que ens siguin conegudes, és sumar-ne o restar-ne unes altres. O bé, disposant d'una línia que anomenaré la unitat per tal de relacionar-la de la millor forma possible amb els nombres, i que normalment pot agafar-se a discreció, i de dues línies més, trobar-ne una quarta que sigui a una d'elles com l'altra és a la unitat; això equival a multiplicar. O bé, trobar una quarta línia que sigui a una de les altres dues com la unitat és a l'altra; això equival a dividir. O, finalment, trobar una, dues o diverses mitjanes proporcionals entre la unitat i alguna altra línia, un fet que equival a determinar la rel quadrada o cúbica, etc.
>
> (DESCARTES, 1999, p. 14)

4.5 Sobre els nombres enters

L'ensenyament del nombre enter es produeix en un moment en què l'alumne ha copsat un aprenentatge de la matemàtica a partir de l'observació de fenòmens que viuen en el món real. És d'aquesta manera com l'estudiant dóna una explicació convincent de tot coneixement matemàtic après. Ara bé, «la interpretació de les operacions sumar nombres enters no és afegir o restar no és treure, paraules

[10]Considerar un segment com a unitat i comparar-ne qualsevol altre amb ell és un problema que condueix a veure que no tot segment és commensurable amb una unitat prefixada i, en conseqüència, condueix a la necessitat d'ampliar el conjunt dels nombres racionals.

sinònimes pels alumnes», tal com diu el GRUP ZERO (1980*b*, p. 15). L'estructura additiva introduïda a través de models concrets té unes particularitats que la distingeixen de l'ensenyament previ al nombre negatiu. Més conflictiva és la introducció de l'estructura multiplicativa si es vol mantenir la coherència en la ment de l'estudiant.

> En los manuales escolares la suma de los números con signo se suele justificar con la ayuda de deudas y ganancias, cargos y abonos, (SM, 2º curso, 1998, p. 39), etc. Cuando se aborda la multiplicación, este modelo no funciona. El producto de pérdidas no puede ser una ganancia. En este momento el modelo debe ser abandonado y bien, se propone una alternativa o, se guarda silencio para siempre.
>
> Si se opta por guardar silencio se irá contra la imagen de racionalidad de las matemáticas y esto dejará insatisfechos a profesores y estudiantes, mientras que si se opta por proponer una alternativa habrá que buscarla, y una vez elegida habrá que fundamentar la propuesta de tal modo que sea suficientemente convincente y satisfactoria desde el punto de vista de la lógica matemática y de los requerimientos de los niveles educativos escolares.
>
> (GÓMEZ, 2001, p. 290)

Suggerir un ensenyament que mantingui la vinculació de l'estudiant amb el món real i pretendre introduir els nombres negatius per necessitats externes a la matemàtica té en l'actualitat, a grans trets, dues evolucions prèvies. L'alumne es familiaritza inicialment amb els nombres naturals per comptar i després empra nombres racionals positius per mesurar. A Catalunya, i moltes altres comunitats, posteriorment es retorna als nombres naturals i a partir d'ells, a través de models concrets, s'introdueix el nombre enter. Aquesta introducció abandona la construcció gradual de l'ensenyament rebut (sec. 3.5, p. 105). Hi ha però d'altres introduccions possibles que destaquem en la secció 3.5.2 (p. 107).

4.5.1 Sobre la no existència d'una necessitat externa a la matemàtica que condueixi a la introducció del nombre enter

La introducció del nombre natural a l'escola primària a través de situacions contextualitzades en l'entorn quotidià facilita una determinada concepció de nombre. Per l'alumne és un objecte mental que serveix per comptar (cardinal) i per enumerar (ordinal). Les operacions aritmètiques estan vinculades a accions reals: sumar-afegir, restar-treure, multiplicar-afegir repetides vegades, dividir-repartir (def. 4.3.1, p. 137).

Posteriorment i també dins de l'escola primària s'introdueix la llavor del nombre racional positiu amb la mateixa pretensió: cercar proximitat amb el món real. L'alumne pren mesures i ho denota a través d'uns nous nombres que expressa en forma de decimals o de fraccions. El treball amb diferents quantitats de magnitud (sec. 4.4.2, p. 139) familiaritza l'alumne amb els nous nombres que li serveixen per mesurar. L'alumne descobreix que hi ha conjunts els elements dels quals són comparables respecte d'una determinada relació i altres no; una paella i una cassola són comparables respecte del pes, un pare i una taula no són comparables respecte de la relació de «ser cosins». L'alumne es familiaritza amb diferents magnituds: longitud, àrea, volum, pes i d'altres. La voluntat de comparar diferents quantitats de magnitud condueix a l'establiment d'una unitat. Tot això participa d'una nova evolució del concepte de nombre. En qualsevol cas, l'alumne segueix emprant la matemàtica per donar resposta a situacions que se li presenten en el seu entorn quotidià. Les circumstàncies que viu neixen de necessitats externes a la matemàtica.

> Se dio un modesto primer paso de ampliación del concepto de «número» al incluir entre ellos las fracciones. Si bien muchos objetos del mundo observable -como ríos, estrellas, vacas, etc.- no se perciben, al menos corrientemente, en forma fraccionaria, es fácil comprender el significado de media manzana o de la tercera parte de 12 ovejas.
>
> (GARDNER, 1977, p. 102)

Comptar objectes és una acció externa a la matemàtica que condueix al nombre natural. Mesurar quantitats de magnitud és també una acció externa a la matemàtica que condueix al nombre racional positiu. Quina acció externa a la matemàtica condueix a l'objecte matemàtic que anomenem nombre enter?

4.5.2 Per resoldre equacions

El nombre enter neix[11] de la resolució d'equacions. Des del punt de vista didàctic una simplificació pot ser mirar de donar solució a totes les equacions amb coeficients naturals del tipus $a_2 + x = a_1$ (sec. 3.6, p. 108).

L'alumne treballa amb nombres naturals i racionals positius a partir de problemes contextualitzats en el seu entorn. Amb la finalitat de «graduar cuidadosamente los planos de abstracción» (Puig Adam, 1960, p. 157) convindria establir lligams entre l'ensenyament del nombre enter a través de models concrets i l'ensenyament deductiu, tal com s'explicita en la secció 3.6 (p. 108).

Així com els nombres naturals i els racionals positius neixen de la necessitat de comptar, enumerar, repartir, mesurar, etc., no trobem per als nombres enters accions empíriques que condueixin irrefutablement a la seva acceptació[12].

Skemp (1980, pp. 188-190) mostra tres dominis de pensament que permeten emmarcar aquesta exposició. En el primer domini considera objectes físics i accions entre ells (per exemple, una colla de llibres que volem portar en un viatge en avió), en la segona qualitats físiques i combinacions entre elles (per exemple, el pes dels llibres que volem transportar) i en la tercera idees matemàtiques i operacions entre elles (la suma dels pesos de cada llibre). El pensament dels tres dominis es relaciona: cada llibre té un pes que en el domini de les idees matemàtiques es correspon amb un nombre. Afegir més llibres (domini 1) es correspon amb afegir més pes (domini 2) i això es tradueix en sumar els pesos dels llibres que afegim (domini de les operacions matemàtiques). Quan podem descobrir quina combinació d'operacions matemàtiques pot predir algun resultat físic diem que hem descobert un model matemàtic. La matemàtica pot créixer sense preocupar-

[11] Aquesta afirmació queda justificada des del punt de vista epistemològic tal com es pot consultar en la secció 4.1 (p. 125).

[12] Peñas (2003, p. 114) mostra com en la descripció d'una estratègia d'autoformació el docent contempla la possibilitat de la inexistència d'un model «convincent» per a les regles dels signes.

se de modelitzar situacions reals, de fet és així. El treball en el primer i segon domini està limitat si es vol prescindir de la traducció al tercer domini exposat, és a dir, si es vol prescindir de la modelització matemàtica.

En la matemàtica escolar l'alumne compta els objectes d'una col·lecció donada i després ho tradueix al tercer domini, les idees matemàtiques. N'afegeix i en treu per després traduir aquestes accions al tercer domini, és a dir, a les operacions matemàtiques; així aprèn a comptar, a sumar, restar, etc. Posteriorment inverteix el procés i utilitza la matemàtica per modelitzar situacions reals que es poden resoldre amb els coneixements matemàtics (domini 3) que prèviament ha après. De manera semblant es familiaritza amb alguns objectes, algunes magnituds d'ells i la mesura de quantitats de magnitud traduint aquest coneixement al tercer domini familiaritzant-se així amb el nombre racional positiu. Quins objectes físics i accions amb ells podem considerar (domini 1), tals que en atendre qualitats físiques i accions amb ells (domini 2), tinguin com a traducció en el tercer domini de les idees matemàtiques el nombre enter?[13]

La renúncia progressiva de l'ensenyament del nombre enter a través de models concrets en favor del *principi de permanència de les lleis formals* (p. 87), condueix l'activitat que neix d'una realitat concreta i que viu en el món real cap a un problema que viu dins la matemàtica. En el fons és una trampa[14] que permet abandonar la cerca d'una necessitat externa a la matemàtica per traduir l'essència del model en una necessitat interna de la disciplina que ens ocupa. L'ensenyament del nombre enter a través de models concrets centra la seva potència en l'obtenció de regles de càlcul a partir de l'experiència amb situacions reals. El mètode deductiu pren la seva força en el *principi de permanència de les lleis formals* (p. 87). La connexió entre ambdós estils d'ensenyament passa per l'abandonament gradual de la primera opció en favor de la segona.

[13]En aquesta recerca considerem que no hi ha objectes físics i situacions reals que en ser traduïts al tercer domini d'Skemp (1980) requereixin inevitablement nombres enters. El procés és l'invers. Els nombres enters neixen dins de la matemàtica, és a dir, dins del tercer domini. Després són útils per modelitzar situacions reals.

[14]El nombre enter neix d'una necessitat interna de la matemàtica i estrictament no té sentit partir d'una realitat externa a ella. Ara bé, l'alumne mai ha viscut aquest tractament intern i la trampa esmentada consisteix en partir d'una situació externa a la matemàtica. Pretenem «graduar cuidadosamente los planos de abstracción» (Puig Adam, 1960, p. 157), iniciar l'estudi a través de models concrets i, atès que no poden donar resposta satisfactòria a la introducció del nombre enter, continuar amb un ensenyament que s'endinsi en la matemàtica.

> El gran obstáculo para la aceptación y reconocimiento del número negativo fue la creencia, profundamente enraizada en la experiencia de cada cual, que identifica número con cantidad y que no se vio favorecida por la concepción que de las matemáticas predominó hasta el siglo XIX; las matemàticas describen y demuestran verdades acerca del mundo real.
>
> (IRIARTE *et al.*, 1991, p. 13)

4.5.3 La necessària evolució del concepte de nombre

Pretendre justificar la regla dels signes des dels models concrets comporta voler explicar a través de fenòmens empírics un aspecte que és intrínsec a la matemàtica. El nombre que l'alumne concep fins un determinat moment com una eina útil per comptar (def. 4.3.1, p. 137), ha d'evolucionar si volem generar un pont didàctic entre la matemàtica escolar i l'ensenyament superior. El treball en el sí de cada model concret vincula els nombres amb la realitat propera de l'alumne però les justificacions internes a cada model trenquen amb la concepció que l'alumne té de nombre, que si no és explícita destorba la localització de la dificultat. Aquestes dificultats no s'allunyen de les que històricament ha viscut la humanitat.

> Ciertamente, no satisfacía por completo a los antiguos matemáticos este modo de concebir los números, y su descontento se traslucía en los nombres de números imaginarios, números falsos, etc., con que, a veces, todavía se califican hoy los números negativos. Pero a pesar de todos estos reparos, en los siglos XVI y XVII encuentran estos números cada vez mayor aplicación y llegan a obtener una aceptación cada vez más general, contribuyendo mucho a ello, sin duda, el desarrollo de la Geometría Analítica. Verdad es que seguían subsistiendo las preocupaciones y los prejuicios contra estos números, pero así tenía que suceder mientras se intentara interpretarlos como números representativos de colecciones o pluralidades y no se pusiese en claro el papel que desempeñaban las leyes formales en relación con los nuevos conceptos; y así se explican los muy repetidos intentos de demostración de la regla de los signos.

> La cuestión sólo quedó aclarada, cuando, ya en el siglo XIX se observó que no se trataba de una necesidad lógica de los nuevos conceptos ni, por consiguiente, de demostrar la regla de los signos, sino simplemente, de reconocer que tales nuevos conceptos son lógicamente admisibles, aunque sean arbitrarios, y, lo mismo que el principio de permanencia, obedecen a una simple razón de comodidad.
>
> (KLEIN, 1927-1931, Vol. 1, p. 37)

L'ensenyament dels nombres enters, negatius o la negativitat a través de models concrets, que vinculen aquest coneixement amb la realitat, no facilita una evolució del concepte de nombre.

> Históricamente el conocimiento que se poseía de los números como expresiones de cantidad, obstaculizó durante siglos la aceptación de los negativos y la construcción de $\mathbb{Z}$.
>
> (IRIARTE *et al.*, 1991, p. 17)

La pretensió d'establir un pont didàctic entre la matemàtica escolar i l'ensenyament superior passa necessàriament per les consideracions relatives a una primera introducció, però també per atendre el punt d'arribada.

> La idea de Hankel de concebir un número negativo como diferencia de dos naturales, con minuendo menor que sustraendo, junto con el paso dado por Hamilton de considerar los números complejos como pares ordenados de números reales, fueron cuestiones decisivas para que surgiera esa teoría de los enteros.
>
> La primera versión fue dada por Hankel (1867). Posteriormente fue desarrollada por O. Stolz (1885) y por Tannery (1886) y finalmente, R. Dedekind (1831-1916), amigo de Cantor y uno de los matemáticos más creativos del siglo XIX.
>
> (GONZÁLEZ *et al.*, 1990, pp. 50-51)

4.6 La recta numèrica

Cada sistema de representació aproxima l'estudiant a un determinat significat de l'objecte d'estudi. L'atenció a aquest apartat queda justificada pel fet que la utilització del símbol « $-$ » davant d'un símbol numèric s'empra en l'actualitat i, en canvi, té un significat que no sempre es correspon amb treure.

La representació dels nombres naturals sobre la recta numèrica facilita l'aproximació a aquest coneixement des d'un altre punt de vista. Tant l'escriptura dels nombres com la seva representació en la recta numèrica són representacions, registres semiòtics segons DUVAL (1999), d'un mateix concepte; el treball amb aquestes diferents imatges familiaritzen l'estudiant amb el concepte representat. La traducció entre les diferents representacions força la seva connexió i incrementa la comprensió del concepte. Segons Duval quan l'ensenyament prioritza un determinat registre semiòtic respecte d'altres, els coneixements apresos queden limitats al registre emprat i no es facilita la utilització del concepte en un context diferent.

El nombre enter que en l'actualitat denotem per -4, s'ha representat en altres llocs i en altres moments per «$\overset{o}{4}$» o d'altres maneres (p. 110). Entre les diferents representacions emprades, tal com mostra BRUNO i MARTINON (1994*b*), el paper de la recta numèrica en l'aprenentatge del nombre ha tingut diverses utilitats. ERNEST (1985) en destaca tres: una ajuda per ordenar nombres, per representar les operacions bàsiques i com un contingut curricular per ser atès més enllà de les ajudes que pugui aportar.

En l'actualitat la utilització de la recta numèrica ha esdevingut un punt de partida en l'ensenyament de l'aritmètica escolar que no es qüestiona. Establir el treball amb nombres enters centrat en l'entorn de la recta numèrica i, a partir d'aquí, considerar idees relacionades amb la posició i el desplaçament és acceptat per tothom. Moltes són les referències bibliogràfiques que podem donar sobre aquesta consideració però si el lector en vol consultar alguna pot veure l'apartat dedicat als nombre enters que CODINA *et al.* (1992) dirigeixen als educadors.

Tanmateix i tal com destaca BRUNO i MARTINON (1994*b*, p. 39) la conclusió principal de l'estudi realitzat per CARR i KATTERNS (1984) és que els alumnes no comprenen el principi en el que es recolza el model de la recta davant de les operacions sumar i restar. De fet, les operacions entre els nombres positius i negatius s'han de definir de manera que se satisfacin les propietats bàsiques que són certes per a les operacions entre nombres naturals, és a dir, requereix l'acceptació i extensió del conjunt numèric pel *principi de permanència de les lleis formals* (p. 87). Donades les dificultats de prosperar en els nivells més elementals, la introducció del producte i de la divisió de nombres enters abandona la transparència amb la que els alumnes poden haver après els continguts relacionats amb el nombre natural i el racional positiu. A través de models concrets, en el millor dels casos podrem aconseguir una il·lustració dels resultats que es pretén assolir. El seu abandonament a partir d'una primera introducció ja ha estat suggerit, fins i tot el de la recta numèrica.

> A commonly used model is that of shifts along the number line. This is very effective for addition (where each of the integers can be regarded as a shift, and where the result can be derived in a naturally ordered sequence); however for substraction the sequence is less direct (from the second number to the first) and some of the integers are now regarded as locations rather than shifts. This change in meaning is bound to lead to confusion, which suggests that the model should be abandoned.
>
> (KÜCHEMANN, 1980, p. 32)

La bibliografia que hem consultat comença per acceptar dues interpretacions per als signes « + » i « − ». En particular aquest punt de partida l'adopta HAVENHILL (1969) tal com destaca PETERSON (1972, p. 396). En concret els signes s'interpreten com posicions, estats segons el GRUP ZERO (1980*a*), a la dreta o a l'esquerra de la recta numèrica i desplaçaments cap a la dreta o cap a l'esquerra. Però què tenen a veure aquestes interpretacions dels signes « + » i « − », que s'empren per denotar els nombres enters, amb les accions afegir i treure, que es corresponen amb les operacions sumar i restar nombres naturals? Mantenir la transparència amb la que els alumnes poden haver après els continguts relacionats amb el nombre natural i el racional positiu requereix donar una resposta honesta a aquesta pregunta.

Referències

BELL, E. (1965): *Men of Mathematics*. New York: Simon and Schuster.

BOYER, C.B. (1986): *Historia de la matemática*. Madrid: Alianza, D.L.

BRUNO, A. (2001): «La enseñanza de los números negativos: formalismo y significado». *La Gaceta de la Real Sociedad Matemática Española, 4*(2), 415-427.

BRUNO, A.; MARTINON, A. (1994): «La recta en el aprendizaje de los números negativos». *SUMA, 18*, 39-48.

CARDANO, G. (1968): *The Great art: the rules of algebra*. Massachusetts: The MIT Press.

CARR, K.; KATTERNS, B. (1984): «Does the number line help?» *Mathematics in School, 13*(4), 30-34.

CODINA, R.; *et al.* (1992): *Fer matemàtiques*. Barcelona-Vic: Publicacions de la Universitat de Barcelona, Publicacions de la Universitat Autònoma de Barcelona, EUMO Editorial.

COURANT, R.; ROBBINS, H. (1979): *¿Qué es la matemática?* Madrid: Aguilar.

CROWLEY, M.L.; DUNN, K.A. (1985): «On multiplying negative numbers». *Mathematics Teacher, 78*(4), 252-256.

D'ALEXANDRIA, Diofant (1974): *Aritmètica*. Stutgardiae: B.G. Teubneri.

DAVIS, P. (1974): *Matemáticas en el mundo moderno: El número*. Madrid: Blume. Seleccions de Scientific American. Títol original: Mathematic in the modern world.

DEDEKIND, R. (1998): *¿Qué son y para qué sirven los números? y otros escritos sobre los fundamentos de la matemática*. Madrid: Alianza Editorial, Ediciones de la Universidad Autónoma de Madrid.

DESCARTES, R. (1999): *La Geometria*. Barcelona: Institut d'Estudis Catalans. Traducció de Josep Pla i Pelegrí Viader.

DUVAL, R. (1999): *Semiosis y pensamiento humano. Registros semióticos y aprendizajes intelectuales*. Cali. Colombia: Universidad del Valle y Peter Lang S.A.

ERNEST, P. (1985): «The number line as a teaching aid». *Educational Studies in Mathematics, 16*, 411-424.

EUCLIDES (2003-2008): «Los elementos de Euclides, 300 aC.». Blog *www.euclides.org*.

FIBONACCI, L. (2002): *Fibonacci's Liber abaci*. New York: Springer. A translation into modern English of Leonardo Pisano's Book of calculation by Laurence Sigler.

GALLARDO, A. (2002): «The extension of the natural-number domain to the integers in the transition from arithmetic to algebra». *Educational Studies in Mathematics, 49*(2), 171-192.

GARDNER, M. (1977): «Juegos matemáticos. La noción de número negativo y lo arduo que resulta entenderla». *Investigación y Ciencia, 11*, 102-106.

GLAESER, G. (1981): «Epistémologie des nombres relatifs». *Recherches en Didactique des Mathématiques, 2*(3), 303-346.

GÓMEZ, B. (1998): *Numeración y cálculo*. Madrid: Síntesis.

— (2001): *La justificación de la regla de los signos en los libros de texto: ¿Por qué menos por menos es más?*, capítulo 18. Granada: Universidad de Granada. 257-275.

GONZÁLEZ, J.L.; *et al.* (1990): *Números enteros*. Madrid: Síntesis.

HAVENHILL, W.P. (1969): «Though this be madness...» *Arithmetic Teacher, 16*, 606-608.

IRIARTE, M.; JIMENO, M.; VARGAS-MACHUCA, I. (1991): «Obstáculos en el aprendizaje de los números enteros». *SUMA, 7*, 13-18.

KÜCHEMANN, D. (1980): «Children's understanding of integers». *Mathematics in School, 9*, 31-32.

KLEIN, F. (1927-1931): *Matemática elemental desde un punto de vista superior*. Madrid: [s.n.].

LAGRANGE, J.L. (1898): *Lectures on Elementary Mathematics*. Chicago: The Open Court Publishing Company. Translated by Thomas J. McCormack.

— (1974): *Oeuvres*. New York: Readex Microprint.

MOLAS, C.; PÉREZ, J. (1990): «El naixement dels nombres complexos». *Barcelona: Butlletí de la Societat Catalana de Matemàtiques, 5*, 37-66.

PASCUAL, E.; *et al.* (1994): *Diccionari de la llengua catalana*. Barcelona: Enciclopèdia Catalana.

PEANO, G. (1979): *Los Principios de la aritmética*. Oviedo: Pentalfa.

PEÑAS, M. (2003): «Los números enteros y la calculadora: una experiencia de reflexión sobre la práctica». *UNO, 32*, 109-118.

PETERSON, J.C. (1972): «Fourteen different strategies for multiplication of integers or why (-1)x(-1)=(+1)». *The Arithmetic Teacher, 19*(5), 396-403.

PLA CARRERA, J. (1983): *Las Matemáticas: una historia de sus conceptos*. Barcelona: Montesinos, DL.

— (1998*a*): «Arquimedes i Descartes; el mètode com un canvi de llenguatge». *Barcelona: Butlletí de la Societat Catalana de Matemàtiques, 13*(2), 35-84.

PÓLYA, G. (1981): *Mathematical discovery: on understanding, learning, and teaching problem solving*. New York: Wiley.

PUIG ADAM, P. (1956): *Didáctica matemática eurística: 30 lecciones activas sobre temas de enseñanza media*. Madrid: Instituto de Formación del Profesorado de Enseñanza Laboral.

— (1960): *La Matemática y su enseñanza actual*. Madrid: Ministerio de Educación Nacional.

PUJOL, R.; BIBILONI, Ll.; DEULOFEU, J. (2007): «Del treball conjectural al rigor: la resolució de problemes als ulls de l'alumne». *Biaix, 26*, 66-80.

REY PASTOR, J. (1976): *Elementos de análisis algebraico*. Madrid: Biblioteca Matemática.

SCHUBRING, G. (1988): «Discussions épistémologiques sur le statut des nombres négatifs et leur répresentation dans les manuels allemands et français de mathématiques entre 1795 et 1845. Actes du premier colloque franco-allemand de didactique des mathématiques et de l'informatique». *Grenoble: La Pensée Sauvage Editions*, 137-145.

SKEMP, R. (1980): *Psicología del aprendizaje de las matemáticas*. Madrid: Morata.

SOTOS, M. (2004): «¿En qué piensa el alumnado cuando decimos número?» *UNO, 37*, 93-104.

ZERO, Grup (1980*a*): *Els nombres enters*. Barcelona: ICE de la UAB.

— (1980*b*): «Los números enteros en 7º de EGB». *Cuadernos de Pedagogía, 64*, 14-17.

Capítol 5

L'ensenyament de la matemàtica a través de la resolució de problemes

Índex

L'ensenyament de la matemàtica a través de la resolució de problemes fa brollar les dificultats d'aprenentatge, permet viure la construcció de coneixement matemàtic, tot facilitant que el resolutor descobreixi tot o part d'allò que es pretén que aprengui, arribant a destacar en l'alumne les actituds que cal corregir: inflexibilitat a l'hora de considerar alternatives, rigidesa en l'execució de procediments, manca de previsió de les conseqüències d'una certa acció, efecte *túnel* (manca d'avaluació del que s'està fent), etc. Citem tot seguit les paraules de Henri Poincaré que reflecteix les vivències que involucra la resolució d'un problema[1].

> A menudo, cuando se trabaja en un problema difícil, no se consigue nada la primera vez que se comienza la tarea. Luego se toma un descanso más o menos largo y uno se sienta de nuevo ante la mesa. Durante la primera media hora se continua sin encontrar nada. Después, de repente, la idea decisiva se presenta ante la mente...
>
> Hay que hacer otra observación a propósito de las condiciones de este trabajo inconsciente. Se trata de que tal trabajo no es posible, y en todo caso no es fecundo si no está, por una parte, precedido y, por otra, seguido de un período de trabajo consciente. Estas inspiraciones súbitas no se presentan (y los ejemplos que les he citado lo prueban ya de modo suficiente) más que tras algunos días de esfuerzos voluntarios, aparentemente estériles, en los que uno ha creído no hacer nada interesante, y piensa haber tomado un camino falso totalmente. Estos esfuerzos no fueron, por tanto, tan estériles como se pensaba. Pusieron en movimiento la máquina inconsciente y sin ellos ésta no habría funcionado ni hubiera producido nada...
>
> (POINCARÉ, 1974, p. 16)

[1] L'article que té per títol *La creación matemática* va ser escrit per Henri Poincaré i es va publicar el mes d'agost de 1948 a Scientific American. Posteriorment, la mateixa revista va fer una recopilació d'articles amb el títol *Mathematic in the Modern World* i hi va incloure l'esmentat article amb una adaptació de James R. Newman. La primera edició espanyola d'aquesta recopilació es va publicar l'any 1974 amb el títol *Matemáticas en el Mundo Moderno* que va ser editada per Miguel de Guzmán.

5.1 Característiques i contribució de la resolució de problemes

L'ensenyament de la matemàtica a través de la resolució de problemes emfasitza, per sobre dels continguts, un treball que genera en l'alumne un hàbit d'autoaprenentatge, anàlisi, decisió, descobriment i creació útil més enllà de l'àmbit de l'acció disciplinar. El docent actua com a guia per tal que l'estudiant sigui cada vegada més independent, crític, autocrític i responsable de la construcció del seu propi coneixement.

Per produir aquest efecte l'alumne viu l'aprenentatge de la matemàtica, regulat pel docent, com si l'estès descobrint ell mateix. I perquè això sigui possible, des dels grans resultats de la matemàtica fins la resolució de les activitats més properes a l'alumne, «un contacte real amb el contingut de la matemàtica viva és necessari» (Courant i Robbins, 1979, p. 9). El camí d'oportunitats que es troba l'alumne li permet descobrir propietats, entre les quals n'hi ha de clares i transparents, algunes de les quals es podran refutar i d'altres no. D'entre les que no es poden refutar algunes es podran «provar» i probablement d'altres no. D'aquesta manera es permet que l'alumne copsi la necessitat de consolidar els resultats descoberts, plausibles de ser certs i que no es poden refutar[2].

Per facilitar l'exposició triem la definició que accepta Tomás (1990, p. 122) d'Orton (1990) sobre el que és la resolució de problemes: «La resolución de problemas se entiende como generadora de un proceso a través del cual el que aprende combina elementos de conocimiento, reglas, técnicas, habilidades y conocimientos prèviamente adquiridos para dar solución a una situación nueva». Per altra banda observem la definició que es fixa en el 143/2007 (2007) sobre competència: «S'entén per competència la capacitat d'utilitzar els coneixements i habilitats, de manera transversal i interactiva, en contextos i situacions que requereixen la intervenció de coneixements vinculats a diferents sabers, cosa que implica la comprensió, la reflexió i el discerniment tenint en compte la dimensió social de cada situació». La reflexió sobre ambdues conduirà fàcilment al lector a veure la

[2]El raonament i la prova s'ha introduït en el currículum de l'Educació Secundària Obligatòria, concretament està regulat en el 143/2007 (2007, p. 21928).

forta relació que tenen.

Finalment, la construcció de coneixement matemàtic pot i ha de traslladar la transparència d'allò que per l'alumne és indubtable cap els resultats finals que hagi descobert i que són plausibles de ser certs, tot evitant el que es podria considerar des del seu punt de vista, maniobres artificials desvinculades del sentit comú. Les esmentades maniobres poden conduir a una col·lecció de solucions i respostes a problemes que, des del punt de vista de l'alumne, mai han estat plantejats. Si no es porta a terme aquesta construcció aleshores no hi ha comprensió amb significat. Si l'ensenyament es reitera en la falta d'aquesta comprensió aleshores arriba a l'alumne com una col·lecció de lleis, normes o manaments que el converteixen en un ésser obedient sense independència intel·lectual.

5.1.1 La reflexió didàctica sobre la resolució de problemes

Tot i que el primer dels llibres relatius a la didàctica de la matemàtica de George Pólya va ser publicat l'any 1944, el segon l'any 1954 i el tercer l'any 1962, entre els anys seixanta i setanta del segle XX l'educació matemàtica va optar per la «Matemàtica Moderna»[3], un estil d'ensenyament allunyat de la proposta de Pólya. L'anomenada «Matemàtica Moderna» va insistir en les estructures abstractes (principalment en l'àlgebra), rigor lògic (lluny d'aspectes manipulatius i experimentals), teoria de conjunts, geometria analítica (deixant de banda la geometria sintètica), ...

La «Matemàtica Moderna» esdevingué simultàniament al corrent clarament formalista dels bourbakistes entre els quals en formava part Jean Dieudonné, membre destacat d'aquest corrent. La majoria dels docents d'avui en dia hem estat formats en la segona meitat del segle XX i ens proposem exercir l'acció educativa amb alumnes de principis del segle XXI. Malauradament l'exclusiva presència de la «Matemàtica Moderna» en molts de nosaltres ha estat incisiva i cal no menystenir la influència que ha tingut. Si volem oferir un ensenyament que respongui a les necessitats actuals, haurem de vetllar per saber on anem, és a dir,

[3]Una aproximació a les propostes d'ensenyament d'aquesta etapa passa per la revisió dels llibres de text. NCTM (1972) publicà l'any 1964 un llibre dirigit als docents de la primera etapa obligatoria per orientar l'ensenyament de l'aritmètica elemental. L'ordre, les propietats de l'addició i de la multiplicació, la propietat distributiva i les operacions inverses inunden el text.

conèixer la nostra feina, i saber d'on venim, és a dir, ser conscients de com hem après. L'estat de la qüestió és particularment delicat en la matemàtica, ja que la forta presència del deductivisme a les facultats no es pot traslladar a les aules de secundària sense una profunda reflexió prèvia.

Des de la perspectiva actual és molt raonable preguntar-se perquè va néixer la «Matemàtica Moderna». En primer lloc cal destacar que en la primera meitat del segle XX hi va haver una forta preocupació pels fonaments de la matemàtica. No podem menystenir la incidència d'aquesta preocupació en la matemàtica escolar. Va incidir en l'educació matemàtica el que preocupava als matemàtics d'aquell moment. Tot i així, si la matemàtica és una ciència que té un caràcter empíric en el seu procés de gestació i pretenem fomentar la creativitat, cal que l'experimentació amb els objectes matemàtics sigui palesa en el dia a dia de l'ensenyament d'aquesta. Majoritàriament hom està d'acord en deixar la formalització per etapes posteriors a la secundària obligatòria, però també ha de ser atesa de manera gradual.

Els problemes no han de jugar un paper subsidiari que els limiti a ser l'instrument per aplicar els mètodes de resolució que genera la teoria prèviament exposada. L'investigador matemàtic primer conjectura on vol arribar, després raona fins a consolidar resultats. L'aprenentatge de la matemàtica no s'ha d'apartar en excés del seu procés de creació i, per tant, cal facilitar que sigui l'alumne qui vagi requerint les eines teòriques necessàries. La nostra convicció és que la millor manera d'aconseguir això és a través de la resolució de problemes. Educar requestant el raonament dels nostres alumnes ha de subrogar l'erudició de resultats segellats. El pensament viu que acompanya la matemàtica no pot ser transmès a través de resultats tancats i acabats que donen resposta a problemes no plantejats.

El clima de l'aula dirigit pel professor, provocant i fins i tot forçant la participació de l'alumne, fomenta el descobriment d'aquest i el posa en una situació anàloga a la que els grans matemàtics van viure en el seu moment. L'activitat, la creació, la motivació, la participació, les conjectures, les correccions i errors, l'exposició per escrit i oral dels raonaments i dels resultats, la crítica i autocrítica raonada i adequadament exposada, són components que cal mirar de fomentar entre les pràctiques habituals dels nostres alumnes.

Una creença implícita en tota aquesta recerca és que l'aprenentatge del raonament matemàtic pren la seva màxima eficiència quan s'empra la resolució de problemes. Entenem que la transmissió de receptes i algorismes ha de deixar pas al tractament de les estratègies que les han creat. No creiem que sigui necessària cap justificació d'aquesta posició si es pretén aconseguir una aprenentatge sòlid i educatiu. Tanmateix conegut és el proverbi xinès que hem extret d'una reflexió de PÓLYA (2002*b*, p. 43): «I hear and I forget. I see and I remember. I do and I understand».

Hi ha un acord majoritari respecte que les TIC (Tecnologies de la Informació i de la Comunicació) han de tenir un paper prioritari a l'ensenyament, en particular, de la matemàtica. Cal incidir però en la comprensió dels processos matemàtics més que no pas en l'execució de rutines que amb tanta facilitat poden inundar el temps dels nostres alumnes. I la millor manera d'evitar-ho és fer-ne ús tot ensenyant, des de l'experimentació, amb les aplicacions que ens ofereixen les TIC. L'alumne farà servir calculadores, ordinadors i altres productes tecnològics tant si volem com si no volem, per tant, per tal que en faci una correcta utilització cal que en la pràctica habitual les empri amb la guia i orientació del docent. Malgrat tot, les noves tecnologies poden integrar-se en l'ensenyament de la matemàtica amb finalitats diametralment oposades. Així, el software que permet efectuar càlculs numèrics o simbòlics pot conduir a incrementar l'exposició de resultats tancats ja que les seves aplicacions poden ser exemples reals que, tot i que rutinaris, requereixin gran potència de càlcul. L'ordinador pot ser una eina que s'empri en la resolució de problemes per experimentar, observar, cercar invariants, proposar conjectures i contrastar-les, en definitiva, una eina al servei de la creativitat. No perdem de vista que l'alumne té gran tendència en l'ús de les noves tecnologies i, en conseqüència, hem d'orientar la seva utilització per tal que estiguin al servei de l'alumne i no aquest a disposició d'elles.

L'actitud del docent per tal que la resolució de problemes a l'aula esdevingui una eina que faciliti la creativitat és fonamental. Molts són els factors que poden influir en aquesta actitud del docent però sens dubte el primer i fonamental és l'interès i el gust que aquest mostri per la matèria. La força amb la que es retenen els coneixements conquerits es contraposa amb la inestabilitat amb la que es recorden els coneixements transmesos. Dit d'una altra manera, res s'aprèn millor que allò que un aprèn per sí mateix i, per tant, el paper del docent com a guia curricular de l'alumne ha de tenir cada vegada un paper més destacat. L'acció del docent com a guia fa que sigui el propi alumne qui vagi descobrint els diferents continguts per sí mateix; de fet, així la humanitat ha arribat fins els nostres dies. I, si la humanitat ha comès errors, que han estat molts, més raons tenim encara per formar els nostres estudiants sota un estil d'ensenyament, la resolució de problemes, que interpreta els errors com una font d'aprenentatge.

> Como observa agudamente Rey Pastor, no es la *posesión* de bienes, en este caso intelectuales, sino su *adquisición*, lo que depara al hombre las mayores satisfacciones.
>
> (PUIG ADAM, 1960, p. 104)

El diàleg a l'aula permet copsar els interessos i dificultats dels nostres alumnes i, per tant, guiar-los cap a maneres de pensar, treballar i actuar que els permetin descobrir per sí mateixos. Les estratègies algorísmiques que tanta força han pres en l'ensenyament de la matemàtica donen garantia i seguretat en la resolució d'un exercici on siguin aplicables, però les TIC mai haurien d'anar només en aquest sentit. Al llarg de la vida l'alumne es trobarà en moltes situacions que no es resolen de manera algorísmica i la resolució de problemes situa l'estudiant en una posició, sovint incòmoda per ell, que força la seva capacitat autònoma. Les estratègies heurístiques no garanteixen efectivitat de resolució però permeten afrontar cada problema tot forçant el pensament crític i creatiu. La necessitat de donar rigor als raonaments matemàtics sorgirà, en particular, quan l'alumne arribi a conjectures errònies. Deixem que descobreixi aquesta necessitat i fem de l'error una eina fonamental per l'aprenentatge, vist així, «problems are the heart of mathematics» (HALMOS, 1980, p. 524).

5.1.2 La contribució de l'ensenyament de la matemàtica a la formació integral de l'alumne

Hom accepta que l'ensenyament de la matemàtica és indispensable per a la formació d'un alumne. Quan es demana una justificació d'aquesta afirmació, sovint sentim a dir que les matemàtiques *ensenyen a pensar*. Pretenem tot seguit anar una mica més enllà per tal de concretar el que es vol dir.

Hi ha tota una sèrie de motius que justifiquen l’ensenyament de la matemàtica. En aquest apartat estem particularment interessats en tots aquells que són rellevants més enllà de l’àmbit d’acció disciplinar de la matemàtica i del seu ensenyament.

El que de manera generalitzada es pot veure escrit, destaca la importància del caràcter *instrumental*[4] de la matemàtica. Els adults i no tan adults requereixen d’un coneixement de la matemàtica que els permeti actuar en la vida quotidiana. Així, és fonamental que l’alumne es familiaritzi amb els percentatges, proporcions, càlcul aritmètic, etc, així com amb tots els continguts de primària. Aquest component participa de l’alfabetització necessària per a tot persona de la nostra societat. Tanmateix, hi ha tota una altra colla de continguts que van més enllà de l’alfabetització i participen de l’educació dels estudiants. Sovint aquests darrers continguts, per sí sols, poden semblar de dubtosa utilitat pràctica per la major part de l’alumnat. Com pot participar l’ensenyament de la matemàtica d’un aprenentatge útil per ells?

- *Si la ciència és important la matemàtica és essencial.* Com a punt de partida no perdem de vista «el indudable benefició que el progreso de la Ciencia recibe de los progresos en su enseñanza» (Puig Adam, 1960, p. 93). El nostre món és complex i la ciència crea models matemàtics per tal d’interpretar-lo. Així, la comprensió del món real està lligada, en gran mesura, al coneixement de la matemàtica. S’entén gràcies a aquestes i a models matemàtics de la ciència que fan ús d’elles. En els primers anys d’aprenentatge és molt més factible que el nen aprengui d’un problema matemàtic simplificat que no pas d’un problema tret d’una situació real; la complexitat d’aquest de ben segur que el desborda. La matemàtica facilita la creació de models simplificats del món real que permeten una interpretació acotada d’aquest i alhora generen problemes adequats al moment educatiu de l’alumne tot facilitant el seu esperit crític i despertant la seva creativitat; també en la didàctica del nombre negatiu succeeix el mateix.

[4]La vessant instrumental de la matemàtica per a altres àrees de coneixement es destaca en el darrer currículum de l’ensenyament obligatori, regulat en el Decret 143/2007 (2007, p. 21928). En el currículum anterior de la mateixa etapa educativa encara s’emfasitzava més aquesta posició. Tal com es pot consultar en el Decret 179/2002 (2002): «A l’educació secundària obligatòria s’ha de valorar d’una manera especial el caràcter instrumental de la matemàtica».

- *La matemàtica ensenya a prendre decisions.* Prendre decisions és un fet que tots hem après, no es pot eludir al llarg de la vida. Aprendre a prendre decisions va una mica més enllà i està relacionat amb l'esperit crític i la visió global. Si un problema no es pot resoldre, potser variant les condicions inicials o emprant més recursos sí que serà resoluble. Facilitem així que la presa de decisions per part de l'alumne no es limiti a les condicions i recursos estrictes de cada moment.

- *L'error és una font d'aprenentatge.* En matemàtiques és ben factible, i difícilment es pugui facilitar més en cap altre disciplina, proposar problemes que encaminin l'estudiant cap a l'establiment de conjectures, els seus contrastos, detecció, anàlisi i gestió d'errors, etc., fins arribar a construir coneixement matemàtic que pot ser aplicat de manera generalitzada en posteriors problemes de la disciplina que ens ocupa o en d'altres.

- *Defensa d'arguments orals i per escrit.* Els problemes condueixen a l'establiment de conjectures[5]. Ara bé, és molt diferent defensar, oralment o per escrit, un resultat que s'obté per aplicació d'una fórmula o d'un algorisme que no pas defensar una conjectura. Aquesta darrera porta l'alumne a exposar els arguments que l'han conduït a establir-la però sabent que no té la seguretat que sigui certa. Aquesta incertesa és molt més propera a allò que succeeix a la vida real, que no pas la seguretat a la que es pot arribar amb l'aplicació de resultats ferms.

- *La importància d'haver après a discernir entre el que és essencial i el que és prescindible.* Aplicar resultats tancats no permet treballar la facultat d'intuir ja que l'alumne no ha de decidir, ni descobrir, ni crear sinó que ha de mimetitzar l'aplicació de propietats prèviament establertes així com acceptar notacions i terminologies; l'alumne ha d'acceptar i aplicar. La resolució de problemes força l'alumne a decidir, a preveure les conseqüències de les seves decisions, a avaluar el que està fent i a defensar les seves conclusions sense poder-se recolzar en un resultat prèviament exposat. L'error com a

[5]Entenem per conjectura aquell resultat que, sota el judici de qui la fa, és plausible de ser cert però que s'ha establert per indicis i presumpcions d'observacions experimentals, és a dir, per inducció.

font d'aprenentatge condueix l'alumne a centrar-se en el que és essencial i a analitzar críticament les seves intuïcions, per tal d'evitar les conseqüències negatives d'una certa acció.

> Para tomar decisiones en la vida no basta saber hacer un minucioso análisis de las circunstancias que puedan influir en la situación que pretendemos superar; es preciso tener la intuición clara de aquellas de mayor peso [...]
>
> (PUIG ADAM, 1960, p. 102)

- *La importància de l'ensenyament creatiu a l'aula (llarg termini).* Si l'alumne no crea aleshores no genera coneixement. En aquest cas pot ser que hi hagi assimilació de continguts però no necessàriament evolució intel·lectual. En matemàtiques és més que possible, amb l'estil d'ensenyament-aprenentatge adequat, generar coneixement en l'alumne des d'edats tendres. De fet PÓLYA (2002*a*,*b*) defensa aquest estil d'ensenyament des de l'educació primària.

- *La importància de l'ensenyament creatiu a l'aula (curt-mig termini).* L'ensenyament de la matemàtica a través de la resolució de problemes serà més o menys convenient en funció del que ens proposem aconseguir. Entenent que es pretén formar persones autònomes i crítiques que sàpiguen acceptar els propis errors, i alhora les virtuts de les altres persones, l'ensenyament de la matemàtica pot contribuir a facilitar que això sigui possible. A través de la resolució de problemes, la matemàtica ensenya a saber actuar quan ens equivoquem, per tal de no mantenir una postura inflexible a causa de no voler assumir l'error comès.

- *La importància de dedicar temps amb continuïtat a l'ensenyament de la matemàtica.* Ensenyar una fórmula o un algorisme i resoldre exercicis que són aplicació immediata d'aquests, potser hauria de requerir poc temps. Ara bé, experimentar, plantejar problemes, comprendre'ls, establir plans de treball, observar, cercar invariants, conjecturar, equivocar-se, corregir, tornar a errar per experimentar i conjecturar de nou per obtenir resultats plausibles de ser certs, proposar solucions, redactar les conclusions i exposar-les en públic requereix temps; a l'aula i fora d'ella.

- *De la matemàtica instrumental (primària) a l'educativa (secundària); dos cicles previs a la professionalització (universitària).* Des del caràcter instrumental que predomina en l'ensenyament de la matemàtica a primària fins al professional de la universitària, hi ha un cicle on ha de predominar el caràcter educatiu. Aquest no té perquè coincidir exactament amb l'etapa secundària, però de ben segur que al llarg d'aquestes edats (12-18 anys) és on aquest cicle esdevé. L'ensenyament secundari agafa el relleu de l'etapa anterior i, començant pel caràcter instrumental d'aquesta, que prioritza l'aprenentatge d'uns certs continguts fonamentals per la vida en la nostra societat, continua amb l'aprenentatge d'uns continguts propis d'una formació que, superada la part instrumental, prioritza la formació humana i creativa dels alumnes així com el seu pensament crític. Julio Rey Pastor ho assenyala en una clara i sintètica exposició en què el que ell anomena batxillerat es correspon amb l'actual període educatiu comprès entre els dotze i els divuit anys.

> Esta divisoria en tres períodos, instrumental, educativo y profesional no excluye la preocupación educativa en todos ellos: pero mientras en el primero la educación es un medio para llegar a los conocimientos, en el segundo son los conocimientos el medio necesario para llegar a la educación mental. He aquí, pues, una distinción de esencia, que no es puramente cuantitativa, entre la enseñanza primaria y la secundaria. Mientras un maestro de escuela debe considerarse completamente fracasado si sus alumnos salen a la vida sin los pertrechos indispensables, que significa saber leer, escribir y calcular correctamente; en cambio un bachillerato que no haya dejado en la memoria de los alumnos indeleblemente grabada para siempre ninguna declinación latina, ninguna fórmula trigonométrica, ninguna especie botánica, podrá ser, sin embargo, un bachillerato eficaz si ha logrado despertar en el alumno la afición a la lectura de obras literarias, el hábito de razonamiento cuidadoso, el amor a la naturaleza y el sentido de observación, porque, en fin de cuentas, ese imponde-

> rable que se llama cultura general no es sinó aquello que queda en el espíritu después de haber olvidado todo lo aprendido en el periodo escolar.
>
> (REY PASTOR i PUIG ADAM, 1933, p. 3)

5.1.3 Característiques de l'ensenyament proposat

En el llibre *Mathematical Discovery* trobem la següent definició: «[...] to have a problem means: *to search consciously for some action appropriate to attain a clearly conceived, but not immediately attainable, aim.*» (PÓLYA, 1981, Vol. 2, p. 117). Tal com mostra GARCÍA (2002*a*): «Un problema es una situación, cuantitativa o de otra clase, a la que se enfrenta un individuo o un grupo, que requiere solución, y para la cuál no se vislumbra un medio o camino aparente y obvio que conduzca a la misma» (KRULIK i RUDNICK, 1989). ALONSO (2003) recopila diferents definicions, a més de la ja exposada, i enunciada per George Pólya. Tot seguit en mostrem algunes d'elles:

- Es una pregunta a la que es imposible dar respuesta. Esta pregunta determina toda la actividad posterior del sujeto dándole un carácter selectivo (LURIA i TSVETKOVA, 1981).
- Una tarea difícil para el individuo que está tratando de resolverla (SCHOENFELD, 1985).
- Toda situación en la que hay un planteamiento inicial y una exigencia que obliga a transformarlo (CAMPISTROUS, 1998).
- Una situación desde la que se quiere llegar a otra y no se conoce el camino que puede llevar de una a otra (DE GUZMÁN, 1994).

De les definicions de PÓLYA (1981) i (KRULIK i RUDNICK, 1989), GARCÍA (2002*a*)[6] infereix que un problema ha de satisfer els tres requisits següents:

[6] L'esmentada publicació es pot consultar en l'espai web http://nti.educa.rcanaria.es/rtee/rtee.htm

1. Acceptació

   L'individu o grup ha d'acceptar el problema, ha d'haver un compromís formal, que es pot deure a motivacions tant externes com internes.

2. Bloqueig

   Els intents inicials no donen fruit, les tècniques habituals per tractar el problema no funcionen.

3. Exploració

   El compromís personal o del grup força l'exploració de nous mètodes per atacar el problema.

Per nosaltres un problema és una activitat clarament entesa per qui l'ha de resoldre però que per aconseguir-ho, el resolutor no disposa d'una rutina que condueixi directament a la solució

Exercicis i problemes

Un problema té les fases exposades anteriorment, però un exercici, no. Un exercici no té una fase de bloqueig i no requereix l'exploració de nous mètodes. Per resoldre un exercici, s'aplica un procediment rutinari i conegut pel resolutor que condueix a la resposta. Així, el que per a alguns és un problema, per falta de coneixements específics, per als que sí que els tenen pot ser un exercici. Fer exercicis té la seva importància en l'aprenentatge de la matemàtica, ja que ens ajuda a consolidar conceptes, propietats, procediments... els quals podrem aplicar quan vulguem resoldre problemes. Resoldre un problema requereix reflexió i pot portar a l'execució d'accions originals i creatives que l'alumne no havia aplicat abans. Cal ser prudent, però, i aclarir, tal com hem dit, que aquesta distinció no és absoluta; depèn en gran mesura del bagatge intel·lectual de la persona que pretén resoldre l'exercici o problema. Entenem que la distinció atesa en aquest apartat és una important apreciació. El treball a l'aula ha de facilitar el desenvolupament cognitiu de l'estudiant però alhora ha d'estimular i afavorir el desenvolupament creatiu i afectiu. La justificació de l'ensenyament de la matemàtica a través de la resolució de problemes dóna resposta a una enfocament de la qualitat de l'educació que ja ha estat atesa per l'UNESCO (p. 27).

Sobre el comportament del resolutor

El procés de resolució d’un problema no permet que es pugui desenvolupar pas a pas segons unes regles establertes, això normalment passa en la resolució d’exercicis. L’establiment de passos en la resolució d’un problema, tal com mostra PÓLYA (1987) i també d’altres autors com MASON *et al.* (1988) o DE GUZMÁN (1991*b*) no és un procés lineal.

Les heurístiques[7] permeten indagar o descobrir la solució d’un problema a través de mètodes no habituals. N’hi ha un ampli ventall que facilita diferents maneres d’abordar un problema i que faciliten la construcció de coneixement matemàtic[8].

Buscar un problema relacionat, considerar un cas particular, dividir el problema en parts, resoldre un problema similar més senzill, buscar regularitats, variar les condicions del problema..., són heurístiques que poden tenir un paper protagonista en l’ensenyament secundari. Totes elles condueixen a l’acció:

> To understand means to be able to do mathematics.
>
> (PÓLYA, 2002*a*, p. 7)

L’estil d’ensenyament que exposem permet facilitar estratègies i suggerir reflexions que no permetin al resolutor cedir fàcilment davant del fracàs inicial en la resolució d’un problema: *Què estic fent?*, *Per què ho faig?*, *Amb quina finalitat ho faig?*, *Si ho aconsegueixo, com ho faré servir després?*, etc.

Però, on rau la dificultat de resoldre problemes de matemàtiques? L’anàlisi del comportament de qui resol problemes es pot classificar, segons SCHOENFELD (1985) en els següents components, atenent els següents trets diferencials de cada resolutor:

1. Recursos cognitius.

   Els recursos es refereixen al coneixement matemàtic, fets i procediments, que el resolutor pot implementar en la resolució d’un problema.

[7] L’heurística té per objecte d’estudi les regles i mètodes de descobriment, indagació i invenció. La popularització del concepte es deu a George Pólya, amb el seu llibre *How to solve it*.

[8] «Tal como observa agudamente Rey Pastor, no es la *posesión* de los bienes, en este caso culturales, sino su *adquisición*, lo que depara al hombre las mayores satisfacciones.» (PUIG ADAM, 1960, p. 104).

2. Heurístics.

   Les estratègies heurístiques són plantejaments generals que permeten abordar un problema en situacions de dificultat, és a dir, quan no se sap què fer.

3. Control.

   La manera com el resolutor utilitza els recursos cognitius i heurístics per resoldre un problema és el que Schoenfeld anomena control. El control involucra conductes d'interès com la planificació, la selecció de fites parcials i el que anomena monitoreig, és a dir, el control de les accions durant el procés de resolució. De fet el control es basa en estratègies metacognitives que faciliten prendre consciència dels propis passos i avaluar el procés en el que el resolutor es troba involucrat a l'establir i desenvolupar un pla per resoldre el problema.

4. Sistema de creences.

   El sistema de creences és un aspecte transversal en la resolució de problemes i es basa en el conjunt d'idees que el resolutor té sobre la matemàtica i el seu ensenyament. Per fer referència al sistema de creences també emprem la terminologia perspectiva, fent referència a la posició que adopta el resolutor respecte de la matemàtica i de com cal afrontar-la.

El domini i facilitat en cadascun dels components permet establir la dificultat de qui resol un problema. El resolutor pot tenir els recursos cognitius adequats i fins i tot coneixements heurístics adequats, però una manca de control no li permet saber com fer-ne ús. Una anàlisi profunda d'aquests components és necessària si volem situar els problemes en el punt de desenvolupament cognitiu adequat de l'alumne, i també si volem entendre les seves dificultats i errors tal com els viuen els alumnes.

Sobre la instrucció de fórmules i algorismes

Per què no hauria de ser convenient ensenyar a partir de fórmules i algorismes? Aquesta pregunta no es pot eludir ja que l'exposició i aplicació de fórmules i algorismes és rutinària i ràpida.

Generar comprensió i sentit del que s'aprèn no és el que s'aconsegueix si el nombre enter s'introdueix per definició. La instrucció de fórmules, algorismes, definicions i en general de regles i resultats tancats no mostra el procés de creació i no facilita que l'estudiant generi comprensió i sentit del que s'aprèn. Així, l'alumne no es pot sentir protagonista del coneixement que es desitja que aprengui.

> La ciencia crece por procesos mixtos de análisis y síntesis de inducción y de deducción. Se acumulan experiencias y observaciones, se registran hechos, se examinan analogías, se abstraen conceptos, se inducen leyes y se tejen deductivamente sistemas. La presentación sistemática de tales urdimbres da una indudable solidez al conjunto presentado; pero no enseña precisamente a urdir, que es lo educativo.
>
> (PUIG ADAM, 1960, p. 95)

I, com hauria de veure la matemàtica un docent? Com l'hauria de fer veure als seus alumnes?

> Hauria de ser capaç de veure les matemàtiques amb els ulls de la intuïció i, molt més difícil encara, de transmetre aquesta manera de mirar.
>
> (PLA CARRERA, 1998*b*, p. 206)

Les visions més crítiques poden entendre que l'aplicació de fórmules i algorismes té resultats inqüestionables i irrefutables mentre que el treball conjectural conviu amb els errors. Efectivament el treball conjectural condueix sovint a cometre errors, però són errors dels quals ens proposem aprendre per novament conjecturar.

> Un juicio general y conjetural adquiere más crédito si es verificado en un nuevo caso particular.
>
> (PÓLYA, 1966*a*, p. 30)

Una bona colla de propostes les exposa PUIG ADAM (1956, pp. 40-66) atenent aspectes del currículum aplicables a diferents etapes educatives. Els seus punts de partida no estan relacionats amb donar o no donar rigor als resultats però, en canvi, tenen molt a veure amb crear en els estudiants la inquietud necessària per un aprenentatge creatiu.

> La història de la matemàtica és molt pròdiga en errors comesos per matemàtics de primera fila en intentar demostrar teoremes importants. Però és notable que en alguns casos ha calgut esperar un temps perquè es descobrissin i molt més perquè es resolguessin.
>
> (HERNÁNDEZ, 1991, p. 52)

Així, tot i que el criteri de demarcació de la matemàtica es delimita pel que es pot demostrar, l'activitat en educació matemàtica té un ventall molt més ampli, tal com exposa LAKATOS (1979). Prioritzar a l'educació secundària obligatòria tot allò que va més enllà d'aquest criteri de demarcació és fonamental. Els alumnes han d'aprendre a intuir, i per a això fa falta el raonament plausible que utilitzem en la nostra vida quotidiana.

> Un profesor de matemáticas tiene una gran oportunidad. Si dedica su tiempo a ejercitar sus alumnos en operaciones rutinarias, matará en ellos el interés, impedirá su desarrollo intelectual y acabará desaprovechando su oportunidad. Pero si, por el contrario, pone a prueba la curiosidad de sus alumnos planteándoles problemas adecuados a sus conocimientos, y les ayuda a resolverlos por medio de preguntas estimulantes, podrá despertarles el gusto por el pensamiento independiente y proporcionarles ciertos recursos para ello.
>
> (PÓLYA, 1987, p. 5)

5.2 Resolució de problemes i raonament plausible

Si es pretén atendre la diversitat de l'alumnat sembla raonable conduir la classe per camins que facilitin la negociació dels convenis i terminologies que es desitgen acceptar. A més, la possibilitat que alguns dels nostres alumnes descobreixin per ells mateixos solucions als problemes i estableixin resultats conjecturals és més que desitjable si pretenem fomentar el pensament crític.

Un article[9] publicat per KRULIK i RUDNICK (1994, pp. 334-338) examina detalladament l'etapa final del pla de treball de Pólya, la visió retrospectiva. Els autors focalitzen l'atenció en aquesta darrera etapa sota el convenciment que té una important incidència en la millora del que ells anomenen habilitats avançades de pensament.

Exposen que per molta gent aquesta darrera etapa consisteix en examinar la resposta, determinar si és matemàticament correcta, veure si té sentit i comprovar si s'adequa a la pregunta. De fet insisteixen en que tots aquests aspectes són necessaris, però no suficients. Cal dedicar temps a aquesta fase, al desenvolupament del pensament crític i creatiu de l'alumne i a la millora de la seva autoavaluació. Estableixen tres etapes sobre la visió retrospectiva de Pólya:

1. *Comprovar que la resposta és possible i raonable.*

   Realitzada la revisió matemàtica del procés cal veure que els resultats prenen sentit en el context on s'ha plantejat el problema.

2. *Escriure un resum sobre el problema i la seva solució.*

   El resum força els alumnes a examinar els seus raonaments des del començament del procés i clarifica les idees. Temps després els alumnes podran revisar com van atacar el problema. El resum permet al professor examinar els processos de pensament de l'alumne i, per tant, aquesta informació ha de formar part del procés d'avaluació. Mentre que hi ha professors que recomanen que els alumnes vagin escrivint les seves idees mentre resolen els problemes, en aquest estudi els autors opten per fer un resum final ja que no es talla el procés creatiu de l'alumne al llarg del problema i al final se'l fa considerar la totalitat del mateix.

3. *Cercar vies alternatives.*

[9] Aquest article està publicat en la revista «Arithmetic Teacher» que actualment es diu «Teaching Children Mathematics». És una font de recursos materials que permeten aproximar pares, alumnes i professors des de l'òptica de l'ensenyament.

En aquest tercer apartat els autors defensen que per aconseguir pensament creatiu, cal demanar als alumnes que hagin resolt un problema que ho intentin de manera totalment diferent, sense canviar les condicions del problema. Però, què s'aconsegueix generant diferents maneres de resoldre un mateix problema? (en lloc de resoldre d'una sola manera diferents problemes) Treballar l'anàlisi i la comprensió tot potenciant el pensament creatiu dels alumnes. Caldria també el temps suficient per tal que compartissin a l'aula les seves experiències amb els seus companys, tot afavorint la millora de les competències comunicatives.

5.2.1 Sobre la finalitat de l'ensenyament

David Eugene Smith va destacar que tot docent hauria de tenir clar el que pretén aconseguir amb el seu ensenyament, tal com es pot consultar en la pàgina iii. Considera que aquesta pregunta és més important que els mètodes d'ensenyament, que els recursos a utilitzar, que els llibres de text, que els consells dels mestres, és a dir, que es tracta d'una pregunta trascendental. I la cerca de resposta a aquesta pregunta condueix cap a una presa de decisions sense les quals és borrosa l'elecció del que està bé o malament, del que és encertat o desfavorable.

> We cannot judge the teacher's performance if we do not know the teacher's aim. We cannot meaningfully discuss teaching, if we do not agree to some extent about the aim of teaching.
>
> (PÓLYA, 1981, Vol. 2, p. 100)

Tanmateix, (PÓLYA, 2002*a*, p. 7) també destaca aquesta finalitat per a l'ensenyament primari; descriu el que haurà de saber fer tot alumne, i no inclou la competència amb nombres negatius.

Pólya se centra però principalment en l'ensenyament de les matemàtiques de secundària i entén que la principal finalitat ha de ser, en paraules seves, «[...] it should teach those young people to THINK» (PÓLYA, 1981, Vol. 2, p. 100).

George Pólya va publicar el seu primer llibre a la meitat del segle XX però la seva visió sobre l'ensenyament de la matemàtica distava molt del pensament dominant d'aquell moment. Destacarem algunes de les seves idees més significatives i veurem com dóna resposta a aquesta pregunta, resposta que ens fem nostra en aquesta recerca.

Així, tota aquesta exposició pren sentit si estem d'acord en aquest darrer objectiu de l'ensenyament de la matemàtica, en concret a l'etapa secundària obligatòria i postobligatòria.

> «Teaching to think» means that the mathematics teacher should not merely impart information, but should try also to develop the ability of the students to use the information imparted: he should stress know-how, useful attitudes, desirable habits of mind.
>
> (Pólya, 1981, Vol. 2, p. 100)

El currículum vigent així ho defensa: «Aprendre amb significat és fonamental per capacitar l'alumnat en l'ús de tot el que aprèn i per capacitar-lo a continuar aprenent, de forma autònoma, al llarg de tota la vida. Per això, cal proporcionar en totes les classes de matemàtiques oportunitats per tal que l'alumnat aprengui a raonar, proposant activitats d'aprenentatge on la resolució de problemes, entesa en un sentit ampli, esdevingui el nucli de l'ensenyament»[10].

El currículum immediatament anterior també ho exposava: «... dels continguts de caire procedimental no es fa cap referència a la resolució de problemes. Aquesta, tanmateix, ha d'amarar tot el currículum, i ha de permetre la introducció de noves idees, conceptes i mètodes que s'aplicaran després en cada un dels àmbits mencionats. Així, la resolució de problemes, reals i oberts, no pas simples exercicis d'aplicació del què hem fet, és indispensable per assolir bona part dels objectius generals proposats»[11].

[10]DECRET 143/2007, de 26 de juny, pel qual s'estableix l'ordenació dels ensenyaments de l'educació secundària obligatòria (DOGC núm. 4915 - 29/06/2007).

[11]Decret 179/2002, de 25 de juny, pel qual modifiquen el Decret 75/1992, de 9 de març, pel qual s'estableix l'ordenació general dels ensenyaments de l'educació infantil, l'educació primària i l'educació secundària obligatòria a Catalunya, el Decret 96/1992, 28 d'abril, pel qual s'estableix l'ordenació dels ensenyaments d'educació secundària obligatòria i el Decret 75/1996, de 5 de març, pel qual s'estableix l'ordenació dels crèdits variables de l'educació secundària obligatòria (DOGC núm. 3670, de 4.7.2002).

> [...] mathematical thinking is not purely «formal»; it is not concerned only with axioms, definitions, and strict proofs, but many other things belong to it: generalizing from observed cases, inductive arguments, arguments from analogy, recognizing a mathematical concept in, or extracting it from, a concrete situation. The mathematics teacher has an excellent opportunity to acquaint his students with these highly important «informal» thought processes, and I mean that he should use this opportunity better, and much better, than he does today. Stated incompletely but concisely: Let us teach proving by all means, but let us also teach guessing.
>
> (PÓLYA, 1981, Vol. 2, pp. 100-101)

Hi ha aspectes que per molts anys que hagin passat segueixen requerint una millora. Si l'alumne està construint el seu coneixement aleshores ha d'estar familiaritzat amb procediments que el condueixen a conjecturar; però potser està més familiaritzat amb la utilització rutinària de fórmules i algorismes? Una recerca[12] que vam realitzar el curs acadèmic 2005/2006 constata que efectivament així és. Aquestes conclusions ens han de fer rumiar en com s'està realitzant el procés d'ensenyament i aprenentatge de la matemàtica.

5.2.2 El raonament plausible

Els nostres alumnes es troben a la seva vida moltíssimes informacions que han de seleccionar per tal d'optar per aquelles que poden considerar acceptables deixant de banda les que poden ser falsedats, estafes, etc. En la nostra situació tots ens trobem envoltats de molta informació certa, però també de falsa, amb molts nivells de gradació.

Per una altra banda els alumnes es troben dins la classe de matemàtiques aprenent uns continguts que, probablement en algunes ocasions s'allunyin molt dels seus interessos, potser segons les possibilitats de negociació i decisió cedides a l'alumne. Però hi ha un punt en comú a destacar entre l'aprenentatge de la matemàtica i el que ells es troben en el seu dia a dia: el raonament. Els alumnes

[12] Disponible a http://www.xtec.cat/~rpujol1/Recerques/Llicencia/LLICENCIA.pdf

en ocasions han de suposar que en una determinada situació una hipòtesi pot ser certa; si ma germana no m'ha trucat deu ser que està enfadada... En el fons està fent una conjectura ja que inicialment no en té cap prova. Cal discernir entre aquelles que són factibles de ser admeses de les que poden ser descartades. Aquest ha de ser un objectiu fonamental a la classe de matemàtiques ja que sovint l'alumne haurà de prendre decisions on hi ha diferència d'opinions, fins i tot diferència de resultats. El descobriment de conjectures errònies, com es mostra per exemple en PUJOL *et al.* (1999, p. 97), pren importància en l'ensenyament secundari quan es vol emfasitzar el rigor i la prova.

El coneixement matemàtic l'assegurem a través del raonament demostratiu però primer cal que neixi en l'alumne la seva necessitat.

> [...] la evidencia intuïtiva del físico, la evidencia circunstancial del abogado, la evidencia documental del historiador y la evidencia estadística del economista pertenecen al razonamiento plausible.
>
> (PÓLYA, 1966*a*, p. 13)

El treball intuïtiu és tan important per fer inferències en el món de la matemàtica, com per al desenvolupament personal en la vida quotidiana. Tot i que ensenyar a intuir és una tasca que dificulta que l'alumne tingui èxits permanents, no ho és tant proposar activitats que afavoreixin el treball intuïtiu de l'alumne. La vinculació entre el treball intuïtiu i el científic és una realitat: «El procedimiento del científico para tratar con la experiencia se suele llamar *inducción*» (PÓLYA, 1966*a*, p. 26)

La generalització, és a dir, el «paso de la consideración de una serie determinada de objetos a la de una serie mayor que contiene a la primera» (PÓLYA, 1966*a*, p. 37), afavoreix el treball intuïtiu. Generalitzar una propietat d'un triangle a una d'un polígon qualsevol, d'un triangle rectangle a qualsevol triangle, d'una propietat vàlida per un angle agut a una propietat per qualsevol angle, ...

L'especialització o particularització, és a dir, «pasar de la consideración de una serie determinada de objetos a la de una serie más pequeña contenida en la primera» (PÓLYA, 1966*a*, p. 38), també l'afavoreix. Així, si una propietat és vàlida per un polígon qualsevol i la considerem només per triangles, estem particularitzant. També ho estem fent quan una propietat vàlida per un conjunt de nombres la comprovem per algun de concret d'aquest conjunt.

L'analogia és més difícil de definir. Ens hi podem aproximar acceptant que «dos *sistemas* son análogos si *concuerdan en relaciones claramente definibles de sus partes respectivas*» (PÓLYA, 1966*a*, p. 39).

A vegades l'observació d'una sèrie de resultats o de dades ens porten a induir una certa propietat. Cal estar disposat a refutar aquest tipus de resultats, però per refutar-los primer cal obtenir-los.

La generalització, particularització, analogia i inducció donen molt de joc en la resolució de problemes admeten el pas d'un problema a un altre quan la via de resolució que s'obre permet obtenir resultats útils per l'enunciat inicial.

Descoberts una sèrie de comportaments o propietats en els nombres naturals, l'acceptació pels enters és una forma de generalització. Comprovar que les operacions en els enters es comporten de la manera esperada en els naturals és una forma de especialització o particularització. La cerca de patrons o de regularitats és una forma d'inducció. L'analogia que pren un ràpid sentit en el treball geomètric presenta més dificultats en l'aritmètica. Tanmateix, el principi de permanència de les lleis geomètriques i algebraiques (p. 101) permet relacionar-les.

5.3 De l'experimentació a la fase d'abstracció

Entenem per mètode d'ensenyament el camí a seguir per assolir un determinat objectiu. Podem trobar l'analític, sintètic, inductiu, deductiu, intuïtiu, etc. Entenem per mode d'ensenyar el com s'assoleixen els objectius. Tenim l'actiu, passiu, individual, col·lectiu, etc. En paraules de Puig Adam:

> La transmisión de conocimientos crea problemas de programa, de método y de modo en cuanto los conocimientos acumulados rebasan las posibilidades del educando durante su vida escolar.
>
> (PUIG ADAM, 1960, p. 94)

Hom està d'acord en l'actualitat que l'observació i l'experimentació són necessàries en l'ensenyament de la matemàtica. «Contar, medir y construir fueron las primeras operaciones matemáticas de la Humanidad» (Puig Adam, 1960, p. 111).

En el currículum vigent de l'Educació Secundària obligatòria (143/2007, 2007)[13] es defensa la introducció del raonament i la prova[14]. En l'anterior (179/2002, 2002)[15] s'explicita que la introducció a l'ensenyament secundari obligatori del raonament logicodeductiu no és una prioritat[16]. El curriculum anterior podria conduir a entendre que l'ensenyament secundari obligatori se centra en el treball experimental i intuïtiu de l'alumne, tot deixant el treball deductiu desvinculat del primer. Tanmateix, en aquest estudi prioritzem la vinculació d'ambdós, el mètode cíclic [17], tal com s'exposa en el currículum vigent.

> [...] antes de iniciar el método lógico ha de haberse acumulado en la mente del alumno un rico caudal concreto de observaciones, de experiencias y de intuiciones efectuadas desde los primeros años de la escuela y que, sedimentadas en lo inconsciente del niño, sean el germen de los conceptos abstractos.
>
> (Puig Adam, 1960, p. 100)

Així, l'experimentació no és una manera diferent de fer matemàtiques sinó que és la fase prèvia a l'abstracció; «La facultad de abstracción no se desarrolla razonando *in abstracto* sino empezando por lo concreto» (Puig Adam, 1960,

[13] DECRET 143/2007, de 26 de juny (DOGC núm. 4915, de 29/06/2007)

[14] El raonament i la prova, com a formes de desenvolupar coneixements, fer-se preguntes i tractar de respondre-les, formular conjectures i argumentar la seva validesa o refutar-la, donar raons a les respostes, i reconèixer l'existència de diferents camins per arribar a un resultat determinat. *Decret 143/2007, de 26 de juny (DOGC núm. 4915 - 29/06/2007)*

[15] Decret 179/2002, de 25 de juny (DOGC núm. 3670, de 4.7.2002)

[16] A l'educació secundària obligatòria s'ha de valorar d'una manera especial el caràcter instrumental de la matemàtica, per sobre d'altres trets que també la caracteritzen, com són el potencial logicodeductiu i la capacitat d'abstracció formal. *Decret 179/2002, de 25 de juny (DOGC núm. 3670, de 4.7.2002).*

[17] Entenem per mètode cíclic el que consisteix en una construcció gradual i progressiva dels coneixements. Uns mateixos conceptes s'introdueixen en un cert moment i es retorna al seu estudi anys després, a partir dels problemes i motivacions generats prèviament. Aquest mètode ja va ser exposat i defensat, entre d'altres, per Puig Adam (1960).

p. 100). En tot cas els entorns d'aprenentatge no poden deixar de «comunicar un xic d'emoció dels diferents descobriments», tal com destaca VALLS (1990, p. 94)

> No olvidemos que el niño tiene constantes ganas de hacer cosas, de realizar por su cuenta hallazgos y descubrimientos, y sólo nos escuchará de buena gana si estimulamos y favorecemos con nuestra explicación sus apetencias creadoras.
>
> (PUIG ADAM, 1960, p. 119)

5.4 Sobre el bloqueig i l'autocontrol

Per tal de contrastar els resultats relatius al bloqueig dels alumnes en la resolució de problemes adoptem la postura de MASON *et al.* (1988). El seu mètode mira d'atendre el que ells en diuen els sentiments del resolutor i està destinat a servir de guia per l'alumne tot partint de l'experiència. La filosofia de fons que amara l'obra *Pensar matemáticamente* de MASON *et al.* (1988) té, des del nostre punt de vista, trets comuns i alhora particularitats que complementen les aportacions de George Pólya, tot i que els autors eviten tota comparació:

> Este libro va dirigido a los estudiants, y su objetivo es servir de manual para desarrollar la capacidad de razonamiento matemático. En él se presenta un único enfoque del tema, y no se compara este planteamiento con las ideas de otros autores anteriores, como Pólya por ejemplo. Al final se incluye una bibliografía, para que el lector interesado pueda consultar personalmente las obras que más han influido en nosotros.
>
> (MASON *et al.*, 1988, p. 11)

En el llibre *Pensar matemáticamente* de MASON *et al.* (1988) els autors proposen aspectes relacionats amb la resolució de problemes que sintetitzem en aquest apartat.

> Pensar matemàticament no és una finalitat per sí mateixa; és un procés a través del qual podem incrementar les nostres possibilitats d'elecció. I per ser una manera de procedir, té unes aplicacions molt àmplies, no només per enfrontar-se a problemes matemàtics o científics, sinó molt més generals.
>
> (MASON *et al.*, 1988, p. 163)

Probablement una de les lliçons més importants que ens aporten Mason, Burton i Stacey és la seva interpretació d'una situació de bloqueig:

> [...] estar atascado o bloqueado en un problema es una situación muy digna, que constituye, además, una parte esencial del proceso de mejora del razonamiento.
>
> (MASON *et al.*, 1988, p. 10)

Que l'alumne es quedi mirant el paper en blanc, bloquejat tot cercant un raonament, o frustrat perquè no li funciona res, pot portar-lo a abandonar; quants deuen haver abandonat per aquest motiu?... Diverses actuacions ens poden ajudar: resumir el que saps i el que vols, representar el problema d'alguna manera concreta, aprofitar les particularitzacions que siguin possibles, rellegir buscant possibles interpretacions alternatives, ... En qualsevol cas cal en primer lloc reconèixer que estàs encallat i en segon, voler sortir-ne.

Diversos autors expressen que en les seves experimentacions els alumnes, per exemple, tal com mostra VILA (2001, pp. 616-617): «La tendència predominant en el Grup és a centrar en dos aspectes estretament relacionats les claus de la millora en l'èxit en la resolució de problemes: l'aprenentatge de tècniques matemàtiques (com a garantia d'èxit) i la mecanització d'uns mètodes tipus».

> Antes nunca me había dado cuenta de que podía pensar en un problema y arreglármelas para hacerlo; siempre había pensado que si cuando lo miras ves que no lo sabes hacer inmediatamente, entonces ya no había nada que hacer.
>
> (BELL, 1986, p. 208)

Probablement la manca de motivació sigui una de les dificultats més destacades. Val a dir però que els procediments de resolució d'un problema són molt més importants que la seva solució i així ho hauria de veure l'alumne. Segons MASON *et al.* (1988, p. 11) el plantejament que fan es recolza en cinc idees bàsiques:

1. Tu mateix pots pensar matemàticament.
2. El raonament matemàtic pot millorar-se amb la pràctica unida a la reflexió.
3. El raonament matemàtic ve motivat per una situació en la que es barregen contradicció, tensió i sorpresa.
4. El raonament matemàtic es mou en una atmosfera on els ingredients principals són pregunta, repte i reflexió.
5. El raonament de tipus matemàtic t'ajudarà a entendre't millor a tu mateix i al món que t'envolta.

5.4.1 Particularització versus generalització

Per obtenir resultats generals cal començar per resoldre casos concrets. La particularització pren un paper rellevant sota el punt de vista dels autors, el qual compartim en la seva totalitat. «Particularizar significa escoger ejemplos» (MASON *et al.*, 1988, p. 35)

- Aleatòriament, per fer-se una idea del significat del problema.
- Sistemàticament, per preparar el terreny a la generalització.
- Hàbilment, és a dir, amb astúcia, per comprovar una generalització.

Els resultats típicament matemàtics són però generals en algun sentit. El procés de generalització comença quan s'intueix un cert esquema general, però, perquè aquesta intuïció aparegui cal que es puguin observar molts casos concrets. Així doncs, l'experimentació i l'observació ens fan intuir resultats generals que anomenem conjectures. Ser molt agosarat a l'hora de fer conjectures és tant perillós com ser massa prudent. Tot i així, si el treball conjectural no és una pràctica habitual a les aules, tal com mostrem a Pujol (2006), difícilment seran massa atrevits en fer conjectures els nostres alumnes, almenys en un començament. Els autors recomanen que els alumnes prenguin notes de les seves idees quan resolen un problema, del que estan intentant fer, de la seva opinió i de les seves reflexions.

> Las generalizaciones constituyen el verdadero nervio de la matemática.
>
> (Mason *et al.*, 1988, p. 21)

Així, quan ens proposem que els alumnes aprenguin a partir de l'experimentació no podem caure en l'error de deixar que es quedin en aquesta fase de l'aprenentatge. Mason *et al.* (1988, p. 35) defensen que generalitzar significa descobrir alguna llei que ens indiqui:

- Què sembla cert (una conjectura)
- Per què sembla cert (una justificació)
- On sembla cert, és a dir, un plantejament més general del problema (un altre problema!).

5.4.2 Del treball conjectural al raonament demostratiu

Donat un problema del qual no tenim una via directa cap a la seva solució comencem per experimentar. D'aquesta manera tindrem tota una colla de resultats obtinguts per particularització. A l'observació dels casos particulars ha d'unir-s'hi la confiança i la valentia del resolutor. «De todos modos, es evidente que la confianza no se adquiere diciéndote a ti mismo ¡tengo que tener confianza!» (Mason *et al.*, 1988, p. 86). Cal fer-se preguntes: podria ser que...? però per què...? vaig a intentar a veure si... La realització de conjectures, per tant, condueix a l'alumne a fer-se preguntes per poder de reconèixer una llei general.

> Formular, comprobar y modificar conjeturas son procesos que constituyen la espina dorsal de la resolución de un problema.
>
> (Mason *et al.*, 1988, p. 92)

El treball amb conjectures i generalitzacions condueix a la construcció del coneixement matemàtic. Aquesta construcció és imprescindible per l'investigador matemàtic que vol crear nous resultats i també ho és per la construcció del coneixement dels alumnes. Arribat aquest punt també l'alumne ha de saber que les conjectures són sospitoses, tal com mostrem a PUJOL *et al.* (1999, p. 97):

L'observació de diversos casos particulars és el punt de partida que ens porta a conjecturar resultats. Tal com hem exposat anteriorment les conjectures s'han de comprovar experimentalment i, potser, refutar-les. Cal preguntar-se el *per què* i cercar una raó que justifiqui la veracitat de la conjectura.

Quan fem una conjectura falsa, hem perdut el temps? «Es importante darse cuenta de que la mayoría de las conjeturas resultan ser falsas, y en muchos casos las falsas son las más valiosas» (MASON *et al.*, 1988, p. 104) i «la historia de la matemática está llena de razonamientos falsos» (MASON *et al.*, 1988, p. 105). Aquests errors són el punt de partida des del qual podem generar noves conjectures.

Fer creure una conjectura a un mateix, pot ser fàcil; aconseguir-ho en un amic ja és més difícil. Convèncer a algú que qüestiona tot el que afirmes és un objectiu a assolir. Aprendre a jugar aquest paper constitueix una habilitat extremadament important. Provocar i forçar l'alumne a exposar els seus arguments l'apropa a una activitat que viurà de ben segur en la nostra societat, dins i fora de la matemàtica. I és absolutament necessari que aquest treball es realitzi a l'ensenyament obligatori, en cas contrari, seríem culpables de que els alumnes no dubtessin d'afirmacions conjecturals (esotèriques i altres) que, si esdevenen certes en alguns casos particulars, potser a vegades pretenen establir certeses generals. «[...] el razonamiento matemático es una actitud, una postura ante el mundo» (MASON *et al.*, 1988, p. 141).

Els autors incideixen en els sentiments del resolutor tot proposant el que en diuen un «enemic interior» que qüestioni els nostres raonaments. MASON *et al.* (1988, p. 108) suggereixen tres hàbits útils que potencien l'escepticisme positiu del resolutor.

1. Pren el costum de tractar les afirmacions com a conjectures. Això canviarà la teva perspectiva de la matemàtica com alguna cosa en la que tot és

cert o fals, a una matemàtica com una disciplina en la que tot consisteix a modificar i verificar fins que s'hagi trobat una justificació convincent.

2. Pren el costum de comprovar les conjectures mirant de refutar-les, almenys tant com cercar una justificació.

3. Pren el costum d'analitzar críticament i positiva els raonaments d'una altra persona. Això reforçarà la teva consciència sobre la necessitat de comprovar, perquè és molt fàcil passar per alt els errors en una argumentació, especialment si és la teva pròpia.

5.4.3 Respecte del plantejament de problemes

Plantejar problemes és una activitat que no es pot deslligar de la seva resolució. Finalitzada aquesta ens trobem en un moment molt adequat per fer extensions generant nous problemes més amplis.

> Sólo cuando un resultado encaja en un contexto más amplio empiezas realmente a ver su significado.
>
> (MASON *et al.*, 1988, p. 144)

El plantejament de problemes brolla de l'observació i de fer-se preguntes. Això requereix per tant una disposició del resolutor a no abandonar un problema quan ja està resolt. Cal fomentar la confiança perquè sovint és la que frena l'alumne que es proposa afrontar un problema o plantejar-ne d'altres.

> La confianza viene con los éxitos obtenidos y del saber QUÉ hacer, incluso cuando no se tiene ni idea de lo que está pasando realmente o cómo va a desarrollarse el problema. Estas dos fuentes de confianza se apoyan en una actitud dinámica frente al mundo que está subyacente y que tiene mucho en común con las actitudes que generan los problemas.
>
> (MASON *et al.*, 1988, p. 151)

Reflexionar, mantenir una actitud activa, dosificar la quantitat d'activitat, acceptar i gestionar els moments de bloqueig, prendre la tasca amb compromís, resoldre tot allò que puguis i deixar madurar allò que es resisteix són entre altres, actituds molt saludables des d'una postura equilibrada. I des d'aquest punt de vista fer-se preguntes i formular problemes és una bona conseqüència.

5.4.4 Sobre el raonament matemàtic

Particularitzar i generalitzar per conjecturar són processos que faciliten descobriments i noves preguntes, però poden ser difícils pels principiants. Les qüestions que el resolutor es pot fer són una bona pràctica per sortir de les fases de bloqueig: què és el que sé? què és el que vull? com ho puc comprovar? A més, la pràctica i la reflexió són també elements que han de formar part del dia a dia de l'estudiant així com saber reconèixer quan un està encallat. Davant d'una fase de bloqueig cal acceptar el fet i alhora interpretar i controlar les emocions per tal de no abandonar.

Fa falta temps per comprendre, reflexionar, experimentar, observar, conjecturar i refutar. A vegades cal parar i escriure tot el que has fet per tornar-hi en un altre moment. La resolució de problemes comporta fases de bloqueig que també necessiten temps per ser assimilades i gestionades, molt més en els primers anys d'aprenentatge. I quan un problema està resolt cal temps per reflexionar sobre el que s'ha fet i per formular preguntes i plantejar nous problemes. Els problemes que fomenten el raonament matemàtic sovint són aquells que generen curiositat i sorpresa.

5.4.5 Sobre l'autocontrol i l'atmosfera de treball

La resolució d'un problema genera una tensió que cal que sigui ben orientada per tal que tingui una interpretació positiva. Aquesta s'ha de distingir de la que es genera quan cal fer el problema per aprovar o aconseguir bona nota, per exemple. L'aprenentatge en la resolució de problemes requereix que es retorni a un mateix problema força vegades al llarg del temps. Arribar a la solució i abandonar no és suficient per desenvolupar el raonament matemàtic. El plantejament de noves preguntes al final de la resolució d'un problema pot conduir a nous enunciats més generals o a casos particulars interessants i sorprenents.

> Cada persona es diferente y tú debes aprender a reconocer y controlar las consecuencias de tu propia tensión, y respetar el proceso de aquéllas con las que tú trabajes o enseñes.
>
> (MASON *et al.*, 1988, p. 161)

Per treballar el raonament matemàtic cal escollir els problemes adequats al moment educatiu de l'alumne. A partir d'aquí és fonamental generar la confiança suficient que permeti a l'estudiant interrogar, desafiar i reflexionar. El desenvolupament de l'alumne requereix que no se li doni tot fet. Formular conjectures i trobar dificultats per refutar-les o justificar-les és quelcom que participa en un aprenentatge valuós.

Referències

ALONSO, I. (2003): «El problema matemático y su proceso de resolución. Una perspectiva desde la teoría del procesamiento de la información». *II Conferencia Internacional "Problemas Pedagógicos de la Educación Superior"*. Universidad Central "Marta Abreu"de Las Villas. Cuba.

BELL, A. (1986): «Enseñanza por diagnóstico. Algunos problemas sobre números enteros». *Enseñanza de las Ciencias, 4*(3), 199-208.

CAMPISTROUS, L. y Rizo, C. (1998): *Aprende a resolver problemas aritméticos*. Ciudad de la Habana (Cuba): Pueblo y Educación.

COURANT, R.; ROBBINS, H. (1979): *¿Qué es la matemática?* Madrid: Aguilar.

DECRET 179/2002 (2002): «Ordenació dels ensenyaments de l'educació secundària obligatòria». Diari Oficial de la Generalitat de Catalunya 3670 de 4.7.2002.

DECRET 143/2007 (2007): «Ordenació dels ensenyaments de l'educació secundària obligatòria». Diari Oficial de la Generalitat de Catalunya 4915 de 29.6.2007.

GARCÍA, J.A. (2002*a*): «La didáctica de las matemáticas: una visión general». *Red Telemática Educativa Europea*.

GUZMÁN, M. DE (1991): *Para pensar mejor*. Barcelona: Labor.

— (1994): «El papel del matemático en la educación matemática». *Actas del VIII Congreso Internacional de Educación Matemática*.

HALMOS, P. (1980): «The heart of the mathematics». *Washington: American Mathematical Monthly, 87*, 519-524.

HERNÁNDEZ, J. (1991): «L'ofici de matemàtic i l'ensenyament de les matemàtiques». *Barcelona: Butlletí de la Societat Catalana de Matemàtiques, 6*, 42-53.

KRULIK, S.; RUDNICK, J. (1989): *Problem solving: a handbook for teachers*. Boston: Allyn and Bacon.

— (1994): «La reflexión: estrategias para razonar y resolver problemas». *Reston (USA): Arithmetic Teacher, 41*(6), 334-338.

LAKATOS, I. (1979): *Proofs and refutations: the logic of mathematical discovery*. Cambridge: Cambridge University Press.

LURIA, A.R.; TSVETKOVA, LS. (1981): *La resolución de problemas y sus transtornos*. Barcelona: Fontanella.

MASON, J.; BURTON, L.; STACEY, K. (1988): *Pensar matemáticamente*. Barcelona: Labor.

NCTM (1972): *Números enteros*. México: Trillas. National Council of Teachers of Mathematics.

ORTON, A. (1990): *Didáctica de las Matemáticas*. Madrid: Morata, S.A. i M.E.C.

PLA CARRERA, J. (1998): *Damunt les espatlles dels gegants*. Barcelona: Edicions la Magrana.

PÓLYA, G. (1966): *Matemáticas y razonamiento plausible*. Madrid: Tecnos.

— (1981): *Mathematical discovery: on understanding, learning, and teaching problem solving*. New York: Wiley.

— (1987): *Cómo plantear y resolver problemas*. México: Trillas.

— (2002*a*): «The goals of mathematical education: part one». *Mathematics Teaching, 181*, 6-7.

— (2002*b*): «The goals of mathematical education: part two». *Mathematics Teaching, 181*, 42-44.

POINCARÉ, H. (1974): *Matemáticas en el mundo moderno: La creación matemática*. Madrid: Blume. Seleccions de Scientific American. Títol original: Mathematic in the modern world.

PUIG ADAM, P. (1956): *Didáctica matemática eurística: 30 lecciones activas sobre temas de enseñanza media*. Madrid: Instituto de Formación del Profesorado de Enseñanza Laboral.

— (1960): *La Matemática y su enseñanza actual*. Madrid: Ministerio de Educación Nacional.

PUJOL, R. (2006): «La matemàtica a través de la resolució de problemes. Una invitació a la participació i a la creativitat a l'aula». Report tècnic, llicència d'estudis concedida pel Departament d'Ensenyament.

PUJOL, R.; ARIAS, J. María; MAZA, I. (1999): *Estadística*. Barcelona: Casals.

REY PASTOR, J.; PUIG ADAM, P. (1933): *Metodología y didáctica de la matemática elemental*. Madrid: A. Marzo.

SCHOENFELD, A. (1985): *Mathematical problem solving*. Orlando: Academic Press.

TOMÁS, M. (1990): «Los problemas aritméticos de la enseñanza primaria. Estudio de dificultades y propuesta didáctica». *Educar, 17*, 119-140.

VALLS, X. (1990): «Algunes consideracions sobre la resolució d'un problema». *Educar, 17*, 93-103.

VILA, A. (2001): *Resolució de problemes de matemàtiques: identificació, origen i formació dels sistemes de creences en l'alumnat. Alguns efectes sobre l'abordatge dels problemes*. Tesi Doctoral, Universitat Autònoma de Barcelona. Bellaterra.

Part II

Marc metodològic

Capítol 6

Disseny i metodologia de la investigació

Índex

En aquesta part de la memòria detallem el disseny i la metodologia de la recerca. En el primer capítol hem identificat, plantejat i delimitat el problema de la investigació (p. 40). Fer a mans del lector les nostres intencions i apuntar una pinzellada al marc teòric ens ha permès descomposar el problema en components susceptibles de verificació empírica, fita necessària per precisar els objectius de la recerca.

En el present capítol reprenem el problema i els objectius de la recerca (p. 19) per, tot seguit, establir les fases de la investigació, organitzar les tasques que constituiran cadascuna d'elles, presentar les característiques de la recerca i, seleccionar i dissenyar les tècniques i procediments que emprarem amb la finalitat de recollir la informació que ens permeti assolir els objectius.

L'elecció del tipus d'investigació que realitzem determina en gran mesura els passos que seguim en l'estudi, les tècniques i els mètodes que emprem. En general l'esmentada elecció incideix en la recerca i més concretament en els diferents elements que la composen, en particular en els instruments i les estratègies de recollida de dades, i en l'anàlisi d'aquestes. Tanmateix, el tipus d'investigació ha de facilitar l'assoliment dels objectius i, en conseqüència, aquests estableixen el punt de partida per al disseny i la metodologia de la present investigació.

6.1 Dels objectius de la recerca al disseny

Tal com hem mostrat en el primer capítol de la present memòria (p. 19), atès el problema d'aquesta recerca, les limitacions (materials, econòmiques i pròpies de l'investigador), l'anàlisi bibliogràfica, la realitat que ocupa la didàctica del nombre enter i del nombre negatiu al batxillerat, l'interès copsat per la realitat viscuda a les aules i les inclinacions i preferències de l'investigador, fixem els següents objectius:

Enunciat dels objectius

1. Diagnosticar el coneixement matemàtic relatiu al nombre enter de l'alumne que inicia els estudis de batxillerat.

2. Conèixer la incidència en l'aprenentatge de l'alumne d'un ensenyament *deductiu* del nombre enter.

3. Explicar les dificultats que tenen els alumnes davant d'un ensenyament *deductiu* del nombre enter a través de la resolució de problemes.

Tota recerca empírica constitueix un procés d'investigació que persegueix l'assoliment d'un determinat coneixement, precisat en els objectius, que es desprèn d'unes dades obtingudes a partir de l'execució d'unes determinades tècniques i procediments que es concreten en els instruments i les estratègies de recollida de dades que hem emprat. Tal com mostrarem en les pàgines següents, volem en un primer moment determinar el punt de partida de l'estudiant respecte d'un coneixement concret. Inicialment recollirem, per tant, dades sense intervenir en l'aprenentatge de l'alumne. Posteriorment provoquem un estil d'ensenyament a l'aula amb la pretensió d'incidir en l'aprenentatge de l'estudiant. Finalment volem fer una valoració del punt de vista de l'estudiant respecte de l'entorn d'aprenentatge implementat. Aquests són els tres eixos que facilitaran la concreció de la investigació.

També són els objectius de la investigació els que ens dicten la tipologia dels participants en la fase experimental de la recerca. Seran alumnes de primer curs de batxillerat (16-17 anys), en virtut de les pretensions establertes. Tal com detallem en el present capítol considerarem dos grups d'alumnes que provenen d'una etapa comuna però que, en canvi, realitzen un primer curs de batxillerat amb unes matemàtiques diferenciades. Els dos grups rebran tractaments idèntics, fet que permetrà obtenir resultats categoritzats per grup i gènere.

6.1.1 Dels objectius a la concreció de les fases de la recerca

Del primer objectiu es desprèn que cal una recerca inicial que permeti disposar del coneixement matemàtic de l'alumne que inicia els estudis de batxillerat relatiu al nombre enter. Aquest primer objectiu marca doncs la necessitat que la recerca tingui una part experimental en la qual no s'intervingui en el coneixement de l'alumne i que diagnostiqui el punt de partida. Aquesta primera fase l'anomenarem FASE DE DIAGNOSI i la detallem en la secció 6.2 (p. 198).

El segon i tercer objectius cerquen conèixer i explicar l'efecte d'un determinat estil d'ensenyament sobre les dificultats i l'aprenentatge de l'alumne. Tenim, per tant, una segona fase que reclama una intervenció que situï l'alumne en un entorn d'aprenentatge que permeti recollir dades per assolir els dos darrers objectius de la recerca. Aquesta segona fase l'anomenarem FASE D'INTERVENCIÓ i la detallem en la secció 6.4 (p. 204).

El tercer objectiu es fixa concretament en les dificultats que tenen els participants en la fase empírica de la recerca davant d'un determinat estil d'ensenyament per a un contingut concret. Entenem que cal recollir, per tant, el punt de vista de l'estudiant quan s'hagi realitzat la fase d'implementació. Aquesta tercera fase l'anomenarem FASE DE VALORACIÓ i la detallem en la secció 6.6 (p. 219).

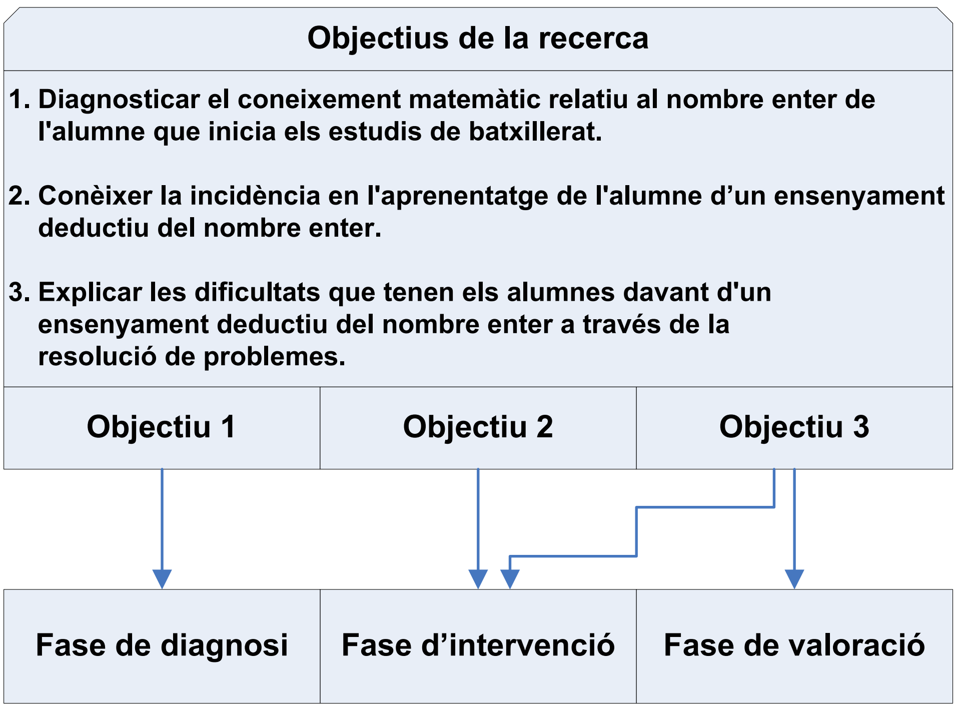


Figura 6.1: Dels objectius generals a les fases de la recerca.

Sovint farem referència a la fase empírica de la recerca. Aquesta manera de parlar al·ludeix a qualsevol de les tres fases esmentades anteriorment. En ocasions parlarem de la fase de diagnosi i entenem, en aquest cas, que fem referència a la primera fase de la part empírica de la recerca. Procedirem anàlogament amb les fases d'intervenció i de valoració.

Des del coneixement i les concepcions prèvies de l'alumne, continuant pel procés viscut en el període de construcció de coneixement matemàtic a través de la resolució de problemes i fins l'assoliment d'objectius didàctics les dades són múltiples i l'anàlisi cal que atengui el moment en què aquestes es generen. Per aquest motiu considerem tres etapes o fases consecutives però diferenciades del procés: fase de diagnosi, fase d'intervenció i fase de valoració. La figura 6.1 (p. 195) recull les esmentades fases que tot seguit apuntem lleument per a continuació aprofundir-hi.

- FASE DE DIAGNOSI. Cerquem informació relativa al punt de partida de cada alumne respecte d'uns indicadors delimitats.

- FASE D'INTERVENCIÓ. La intervenció didàctica a l'aula, sota unes orientacions pautades però no restrictives, facilita el treball amb unes activitats que condueixen cap a l'assoliment d'un determinat coneixement. Cerquem informació relativa a les dificultats i a l'aprenentatge de l'alumne que esdevé de la intervenció a l'aula.

- FASE DE VALORACIÓ. La valoració del procés per part de l'estudiant esdevé cabdal per mesurar l'impacte que ha tingut la proposta en l'estudiant i la disposició del participant davant de l'estil d'ensenyament implementat.

6.1.2 Referents atesos en la concreció organitzativa

L'organització de la recerca té la finalitat d'assolir els objectius. Per dissenyar-la i organitzar-la hem atès tota una sèrie d'elements que sintèticament són els següents:

- REFERENT PRINCIPAL
  - Els objectius.
- REFERENTS GENERALS
  - Les característiques del context en el que es realitza la fase empírica.

- Les característiques dels participants en la fase empírica.
- L'experiència i les creences de l'investigador.
- El marc teòric que inclou l'estat actual del centre d'interès que ens ocupa i també les diferents posicions que no s'han practicat a les aules o que, si ha estat així, ara no hi participen.
- La bibliografia relativa a la didàctica del nombre enter i del nombre negatiu, més concretament la relativa a la introducció deductiva del nombre enter i del nombre negatiu a través de la resolució de problemes.
- Les propostes que es poden consultar en alguns llibres de text, en particular, les que han permès als participants de la fase empírica de la recerca introduir el nombre enter a l'ensenyament obligatori.

• FASE DE DIAGNOSI

- Marc teòric, principalment el relacionat amb l'ensenyament de la matemàtica a través de models concrets.
- Els llibres de text emprats pels participants.
- El coneixement relatiu al nombre enter i negatiu d'alumnes de promocions prèvies.

• FASE D'INTERVENCIÓ

- Marc teòric relatiu als diferents estils d'ensenyament del nombre enter i negatiu.
- El disseny d'entorns d'aprenentatge que es puguin implementar.
- L'orientació didàctica dels esmentats entorns d'aprenentatge.
- Mancances diagnosticades sobre l'aprenentatge del nombre negatiu.

• FASE DE VALORACIÓ

- Experiència prèvia sobre la dificultat amb la que viu l'alumne l'aprenentatge del nombre negatiu.
- Dificultats viscudes per l'alumne en la fase d'intervenció.

6.2 Fase de diagnosi

El necessari diàleg entre l'ensenyament i l'aprenentatge exigeix una diagnosi del coneixement inicial dels participants en la fase empírica de la recerca respecte d'unes finalitats lligades a la utilització dels nombres negatius i del seu tractament real o formal. La recerca bibliogràfica a partir de les propostes dels llibres de text, principalment els que han emprat els alumnes en els seus estudis previs, fa referència a l'ensenyament rebut. Tot i així, en tot procés de comunicació hi ha pèrdues d'informació i estem interessats en l'aprenentatge rebut pel discent, principalment el relatiu a una sèrie d'indicadors relacionats amb la didàctica del nombre enter.

L'organització i el disseny de la fase de diagnosi ens condueix a considerar tres eixos, tal com es pot consultar en la figura 6.2 (p. 199), que tot seguit expliquem.

Per focalitzar la diagnosi atenem en primer lloc que la dirigim a estudiants de primer curs de batxillerat. En aquesta primera etapa postobligatòria hom accepta que l'estudiant està familiaritzat amb la utilització de nombres enters. Tanmateix, estem interessants en copsar informació relativa al coneixement esmentat. Atenem el caràcter instrumental del nombre enter a través d'una subfase de la diagnosi inicial, tal com es pot consultar en la figura 6.3 (p. 200).

Els llibres de text utilitzats pels estudiants i el currículum que va regular la seva edició apunten el següent centre de diagnosi. L'ensenyament del nombre enter a través de models concrets pot haver suscitat en l'estudiant un aprenentatge d'aquest contingut profundament vinculat al món empíric. Tanmateix, les possibilitats descrites en el marc teòric generen dubtes que són del nostre interès. Alhora, l'estudiant ha utilitzat els esmentats nombres al llarg de l'Educació Secundària Obligatòria i, en conseqüència, pot haver deslligat el coneixement après del pla real fins un punt que també és del nostre interès. Atenem el tractament real i formal del nombre enter a través d'una subfase de la diagnosi inicial, tal com es pot consultar en la figura 6.4 (p. 201).

Entre els diferents apartats que constitueixen el coneixement que hom engloba dins del nombre enter hi ha l'estructura additiva. El coneixement d'aquesta és fonamental per a la consecució de la fase d'implementació i, en conseqüència, forma part del tercer eix de la diagnosi inicial. Dirigim la recerca a l'estructura

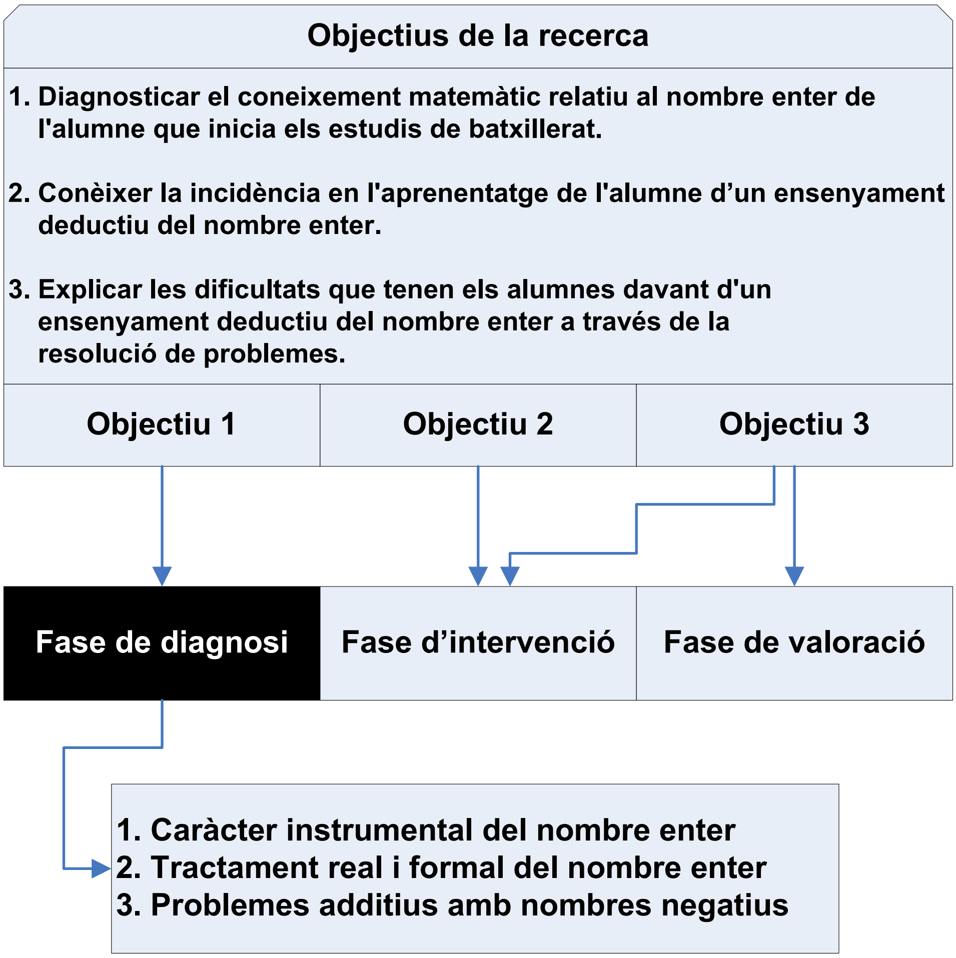


Figura 6.2: Disseny de la fase de diagnosi.

additiva del nombre enter a través d'una subfase de la diagnosi inicial, tal com es pot consultar en la figura 6.5 (p. 202).

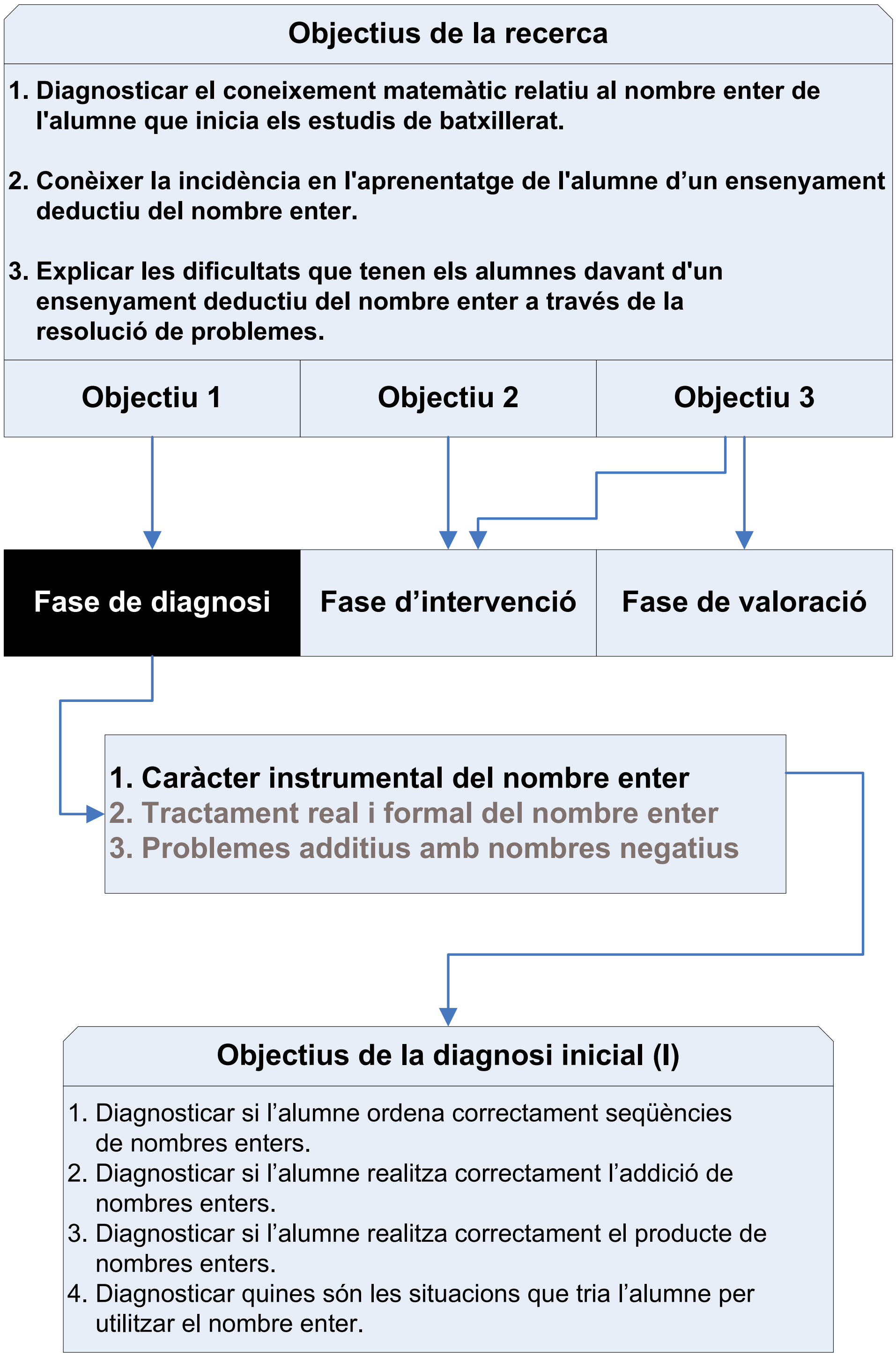


Figura 6.3: Primera subfase de la fase de diagnosi.

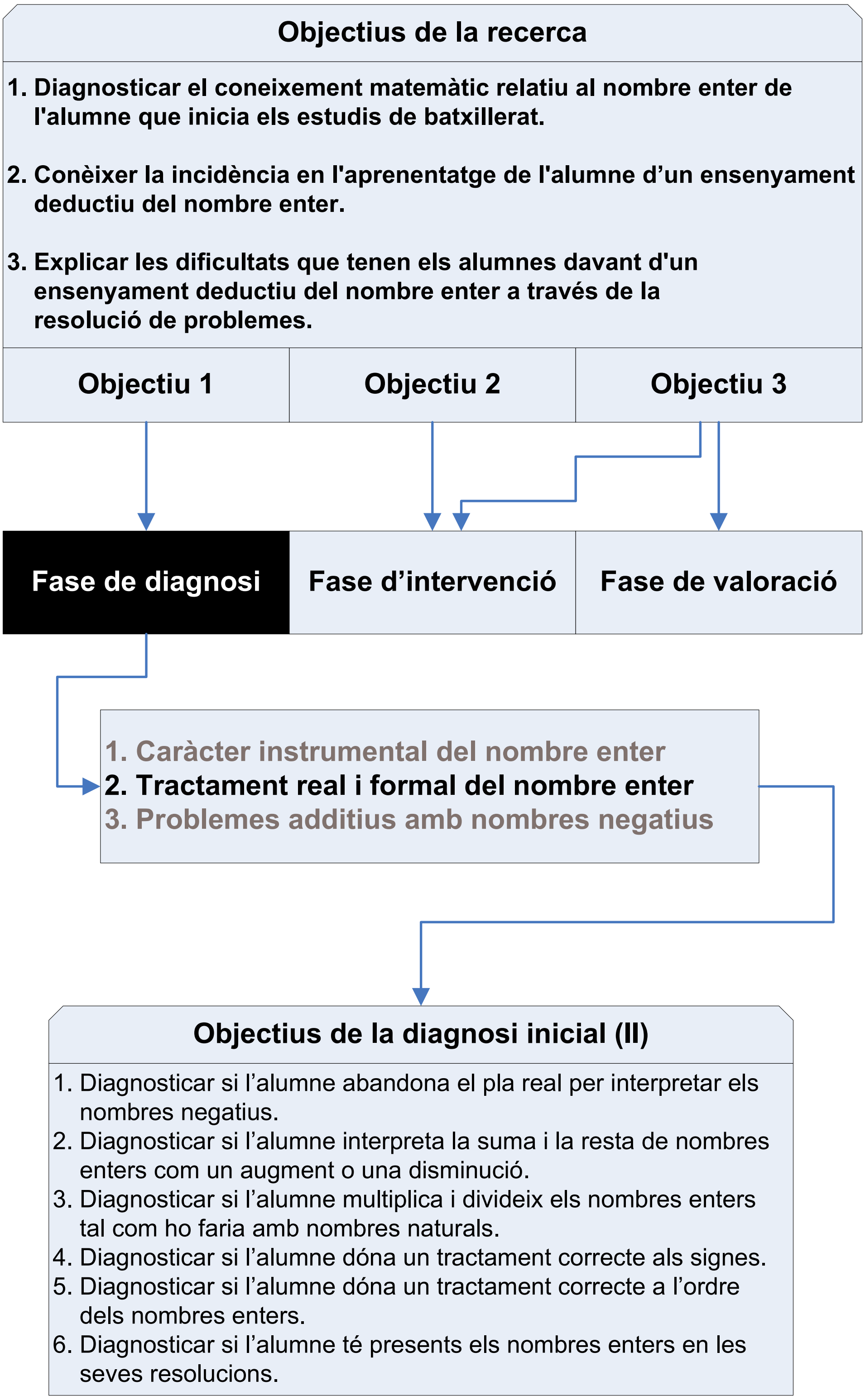


Figura 6.4: Segona subfase de la fase de diagnosi.

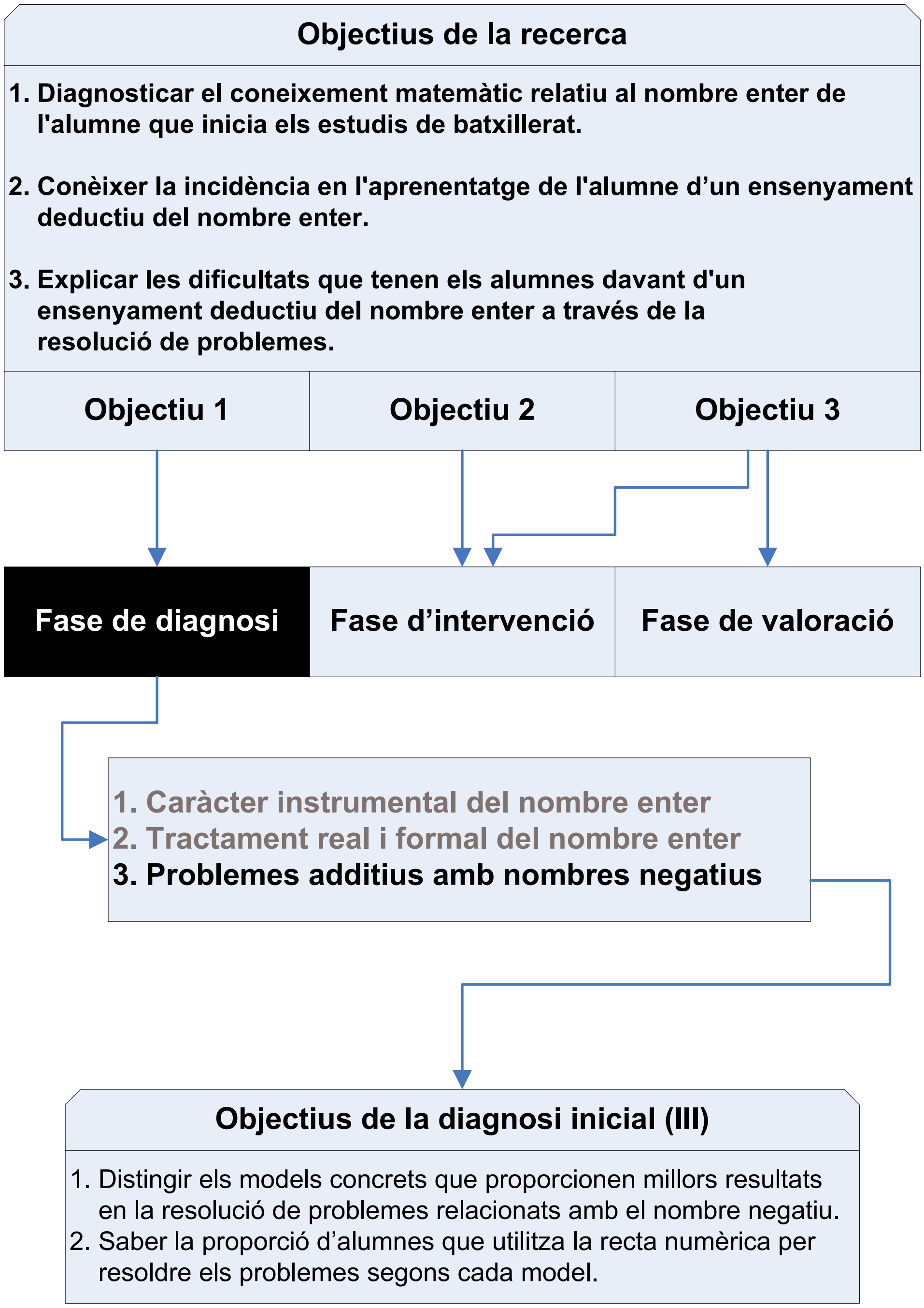


Figura 6.5: Tercera subfase de la fase de diagnosi.

6.3 Enfocament metodològic de la fase de diagnosi

Els alumnes arriben a primer curs de batxillerat després d'haver après el nombre enter a través de models concrets a l'Ensenyament Secundari Obligatori. Ens proposem descriure el coneixement relatiu al nombre enter dels participants en la investigació relativa al nombre enter. El primer objectiu de la present investigació té aquesta pretensió i, amb el seu assoliment, ens proposem conèixer els components principals que permetin establir el punt de partida. Concretament ens proposem caracteritzar ambdós grups de participants de primer curs de batxillerat respecte d'uns determinats indicadors.

HERNÁNDEZ *et al.* (2003, p. 114) estableixen quatre tipus d'investigació en virtut del disseny, les dades que es recullen, la manera d'obtenir-les i altres components del procés de recerca. En concret classifiquen els estudis en exploratoris, descriptius, correlacionals i explicatius. Aquesta primera part es correspon amb una investigació descriptiva, en virtut del referent considerat, ja que no proposa cap intervenció a l'aula que modifiqui el coneixement previ dels estudiants, i les qüestions ateses tenen la finalitat de conèixer el punt de partida del coneixement matemàtic de l'alumne relatiu al nombre enter. En paraules de HERNÁNDEZ *et al.* (2003, p. 118): «En un estudio descriptivo se selecciona una serie de cuestiones y se mide o recolecta información sobre cada una de ellas, para así (válgase la redundancia) describir lo que se investiga».

El coneixement el volem obtenir directament dels alumnes participants, és a dir, ens proposem obtenir dades primàries. Ens ocuparem d'aspectes individuals; no estem interessats en aspectes institucionals. A més, dirigim la recollida de dades a tots els subjectes sense limitar-nos a una part d'ells que es podria establir per un o altre criteris. El concepte de diagnosi ha evolucionat en els darrers anys i pot abordar gran quantitat de variables. En el nostre cas ens ocupem d'uns indicadors delimitats, tal com hem mostrat en l'apartat anterior dedicat a l'organització de la fase de diagnosi. El motiu d'aquesta opció rau en el fet que la descripció inicial continuarà amb una intervenció a l'aula que pretén incidir en la praxis educativa.

Els diagnòstic pedagògic en l'actualitat no es limita a la consideració de variables cognitives sinó que considera relacions interpersonals, motivació i valors. En el nostre cas ens ocupem d'uns indicadors relacionats amb els objectius de la present recerca i rellevants per a l’establiment del punt de partida de la nostra investigació.

L’objecte d’estudi se centra en l’alumne i més concretament en aquell coneixement que se suposa que té adquirit a l’inici del primer curs de batxillerat. Una investigació centrada exclusivament en una diagnosi podria estendre l’objecte d’estudi a referències més amplies que les estrictament escolars. Tanmateix, acotem la diagnosi inicial a uns determinats coneixements i deixem per futurs aprofundiments altres factors que intervenen en la comunitat educativa però que no es focalitzen en l’alumne.

La diagnosi dels indicadors atesos permet centrar l’atenció en la correcció o recuperació d’alguns aspectes educatius i, alhora, potenciar o desenvolupar-ne d’altres. Reduïm la present diagnosi a una activitat descriptiva sense intervenció.

El procés metodològic corresponent l’entenem com una activitat diagnòstica que segueix un procés rigorós i sistemàtic que s’adiu en gran mesura amb una investigació de caràcter pràctic. Com a objectiu consisteix en l’aplicació immediata dels resultats en el disseny i la concreció de la intervenció a l’aula de la següent fase de la recerca.

6.4 Fase d’intervenció

Per tal d’explicar els fenòmens educatius que s’esdevenen a l’aula ens basem en l’evidència empírica, allò que es desprèn de les dades i, en la mesura que sigui possible de la seva la quantificació. Tanmateix, la complexitat de la realitat educativa que en ocasions s’esdevé a l’aula fa insuficient la seva explicació si ens limitem a l’esmentat tractament estrictament quantitatiu. El procés cíclic i interactiu que s’esdevé a l’aula en l’experimentació, en el nostre cas a través de la resolució d’un problema, facilita informació relativa a la motivació, intencions, accions i significats que són difícilment observables i quantificables però que participen de l’esmentada dificultat. La intervenció didàctica a l’aula que proposem facilita el treball d’unes activitats que condueixen l’estudiant cap a l’assoliment d’un determinat coneixement. Cerquem informació relativa a les dificultats i a l’aprenentatge de l’alumne que brolla de la intervenció a l’aula.

Quan ens proposem conèixer la incidència en l’aprenentatge de l’alumne d’un ensenyament deductiu del nombre enter cal fer èmfasi en la terminologia emprada. Deductiu té en aquesta recerca un significat clarament delimitat; l'acceptació del *principi de permanència de les lleis formals* (p. 87). L'entorn d'aprenentatge que volem generar és, per tant, fonamental per a la present investigació. Per aquest motiu l'instrument metodològic l'exposem detalladament en el proper capítol (p. 241). L'activitat és un problema en el sentit que podem preveure que serà clarament entesa per tots els participants però que, en canvi, difícilment cap d'ells trobi un accés directe a la solució.

El treball de la visió retrospectiva en la resolució del problema dels nombres consecutius (p. 243) condueix, tal com es pot consultar en el capítol següent (p. 241), a una introducció híbrida entre la deductiva i la constructiva del nombre enter. Com a punt de partida suggereix la negociació amb els alumnes de la terminologia (p. 250) amb la qual denotar els nous nombres que són necessaris per resoldre el problema en tots els casos possibles. A més, el problema suggereix acceptar el *principi de permanència de les lleis formals* (p. 87) per tal d'estendre aquelles operacions conegudes pels alumnes en els nombres naturals als nous nombres. Parlem d'introducció híbrida perquè el punt d'arribada de d'aquest procés és el punt de partida de la introducció constructiva. En tot aquest procés hi ha dos grans aspectes a investigar: incidència en l'aprenentatge i dificultats que té l'alumne. El primer està recollit en el segon objectiu general de la recerca i el segon aspecte en el tercer objectiu general.

Per tal de concretar el disseny i l'organització de la fase d'intervenció ens fixem en els sis eixos que es poden consultar en la figura 6.6 (p. 209).

Inicialment ens proposem facilitar l'enunciat del problema dels nombres consecutius (p. 241) i deixar que els alumnes treballin el problema al llarg de la sessió. En l'apartat dedicat als instruments de recollida de dades precisarem la informació que ens conduirà als resultats necessaris per assolir els objectius de la present investigació. Cal avançar però que els alumnes lliuraran les seves resolucions ja que estem interessats en com reacciona l'estudiant davant del primer contacte amb el problema. Atenem la precipitació que pugui tenir l'estudiant en el tractament que se li demana així com en les experimentacions que faci, tal com es pot consultar en la figura 6.7 (p. 210).

Posteriorment ens proposem deixar una setmana per tal que els estudiants treballin per ells mateixos. Cal destacar que el problema és un instrument metodològic útil per generar una introducció deductiva del nombre enter. Per tant, una vegada recollida la informació de la sessió inicial volem facilitar un diàleg entre els participants que generi la màxima familiaritat d'ells amb el problema dels nombres consecutius. Atenem la quantitat de descomposicions d'un nombre quan el volem escriure com a suma de nombres consecutius, la relació que troben els estudiants entre la quantitat de sumands d'una descomposició amb els divisors d'un nombre, la possible relació entre la quantitat de descomposicions i els divisors del nombre que pretenem descomposar i, sense que en cap moment ho esmentem, si l'alumne utilitza nombres negatius en les seves descomposicions, tal com es pot consultar en la figura 6.8 (p. 211).

Després d'aquests tractaments inicials ens proposem mirar de resoldre el problema amb nombres naturals per, tot seguit, mostrar la necessitat d'incorporar nous nombres per tal de proposar possibles descomposicions. Això pren sentit quan un resolutor vol trobar totes les possibles descomposicions d'un nombre com a suma de nombres consecutius. Aquesta pretensió genera un avançament que condueix a entendre que resoldre un problema és trobar totes les seves solucions atenent que, totes poden ser cap[1]. Tanmateix, l'èxit de la sessió requereix que els estudiants estiguin familiaritzats amb el procediment que permet obtenir una descomposició d'un nombre com a suma de consecutius, a partir de la seva descomposició en producte de dos factors on un d'ells és senar. Per tant, atenem en primer lloc el nivell de familiarització de l'estudiant amb el procediment que li permet obtenir la suma de nombres consecutius a partir de la descomposició factorial del nombre que es pretén descomposar. Tot seguit estem interessats en examinar les notacions que proposen els estudiants per denotar els nous nombres que cal acceptar per tal de resoldre el problema en tots els casos possibles. Els nombres enters són coneguts pels participants en la fase empírica de la recerca. Tot i així, a partir del problema dels nombres consecutius, volem que els estudiants proposin notacions que brollin de l'experiència que han viscut en el procés de resolució de la manera que els sigui més clara i entenedora. L'aglutinació de

[1]Resoldre un problema és trobar totes les seves solucions atenent que, totes poden ser cap. Aquesta és la definició del que és resoldre un problema que repetides vegades pronunciava el Dr. Josep Vaquer a les seves classes a la Facultat de Matemàtiques de la Universitat de Barcelona, de les quals en som testimonis.

les propostes dels estudiants en una terminologia que, d'una manera o altra, serà equivalent a un parell ordenat, produirà unes dificultats que són del nostre interès. Aquestes són les consideracions que permeten organitzar la tercera part de la fase d'intervenció, com es pot consultar en la figura 6.9 (p. 212).

Tal com es desprèn dels referents teòrics sintetitzats en aquesta memòria, el nombre negatiu va trigar molt a ser acceptat. Entre diversos aspectes, la vinculació entre nombre i quantitat va ser un dels forts impediments. Magnitud, mesura, quantitat i nombre són termes que poden ser confosos entre els estudiants. L'esmentada confusió pot fer que els alumnes es trobin en situacions equivalents a les viscudes fa pocs segles per rebutjar els nombres negatius. Per tant, les concepcions de nombre són del nostre interès i esdevenen fonamentals en la fase d'intervenció. Estem interessats més concretament en les definicions espontànies de nombre que donen els estudiants, les utilitats que associen amb els nombres, saber si tenen algun pensament sobre com es construeixen els nombres i mesurar si discerneixen entre ordinal i cardinal. Aquestes són les consideracions que permeten organitzar la quarta part de la fase d'intervenció, tal com es pot consultar en la figura 6.10 (p. 213).

Després d'un temps d'haver tractat el problema dels nombres consecutius i d'haver acceptat una terminologia pels nous nombres, ens proposem introduir l'estructura additiva. El problema ha conduït els estudiants a proposar i posteriorment a negociar una terminologia pels nombres. Estem interessats en saber si en reprendre el problema els estudiants proposen diferents parells per fer referència a un mateix nombre. Donat que els participants ja saben sumar nombres naturals i també saben denotar els nombres naturals en forma de parells, ens interessa saber quines dificultats tenen per establir la suma entre dos parells. De fet aquest apartat es redueix a un cert tractament algebraic on cal que l'estudiant descobreixi com cal operar els parells per tal que la suma de nombres naturals sigui la que ell ja coneixia. Posteriorment els demanarem que sumin nombres enters. Volem saber quines dificultats tenen per sumar els nombres enters tal com ho feien amb nombres naturals. La introducció de l'estructura additiva permet connectar la notació en forma de parells treballada amb la que ells ja utilitzaven. Estem, per tant, interessats en conèixer fins a quin punt els alumnes accepten la notació coneguda pels nombres enters a partir de l'addició. Aquestes són les consideracions que permeten organitzar la cinquena part de la fase d'intervenció, tal com es pot consultar en la figura 6.11 (p. 214).

Donada la importància que els participants tradueixin nombres donats en forma de parells a la seva notació simplificada, i prèviament coneguda, ens proposem incidir de nou en aquest punt. El problema dels nombres consecutius (p. 241) ha estat el detonant de tot aquest entorn d'aprenentatge i, per tant, ens proposem reprendre'l i insistir en la quantitat de descomposicions possibles. Cal destacar que la cerca de totes les descomposicions possibles ha estat la flama que ens ha conduït a una introducció no forçada de la notació en forma de parells. Donat que els participants ja saben multiplicar nombres naturals i també saben denotar els nombres naturals en forma de parells, estem interessats en saber quines dificultats tenen per establir el producte entre dos nombres naturals quan aquests venen donats per parells representants. De fet aquest apartat es redueix a un cert tractament algebraic on cal que l'estudiant descobreixi com cal operar els parells per tal que el producte de nombres naturals sigui el que ja coneixia i que espera obtenir. Posteriorment els demanarem que multipliquin nombres enters. Volem saber quines dificultats tenen per multiplicar enters tal com ho feien amb naturals. Aquestes són les consideracions que permeten organitzar la sisena part de la fase d'intervenció, tal com es pot veure en la figura 6.12 (p. 215).

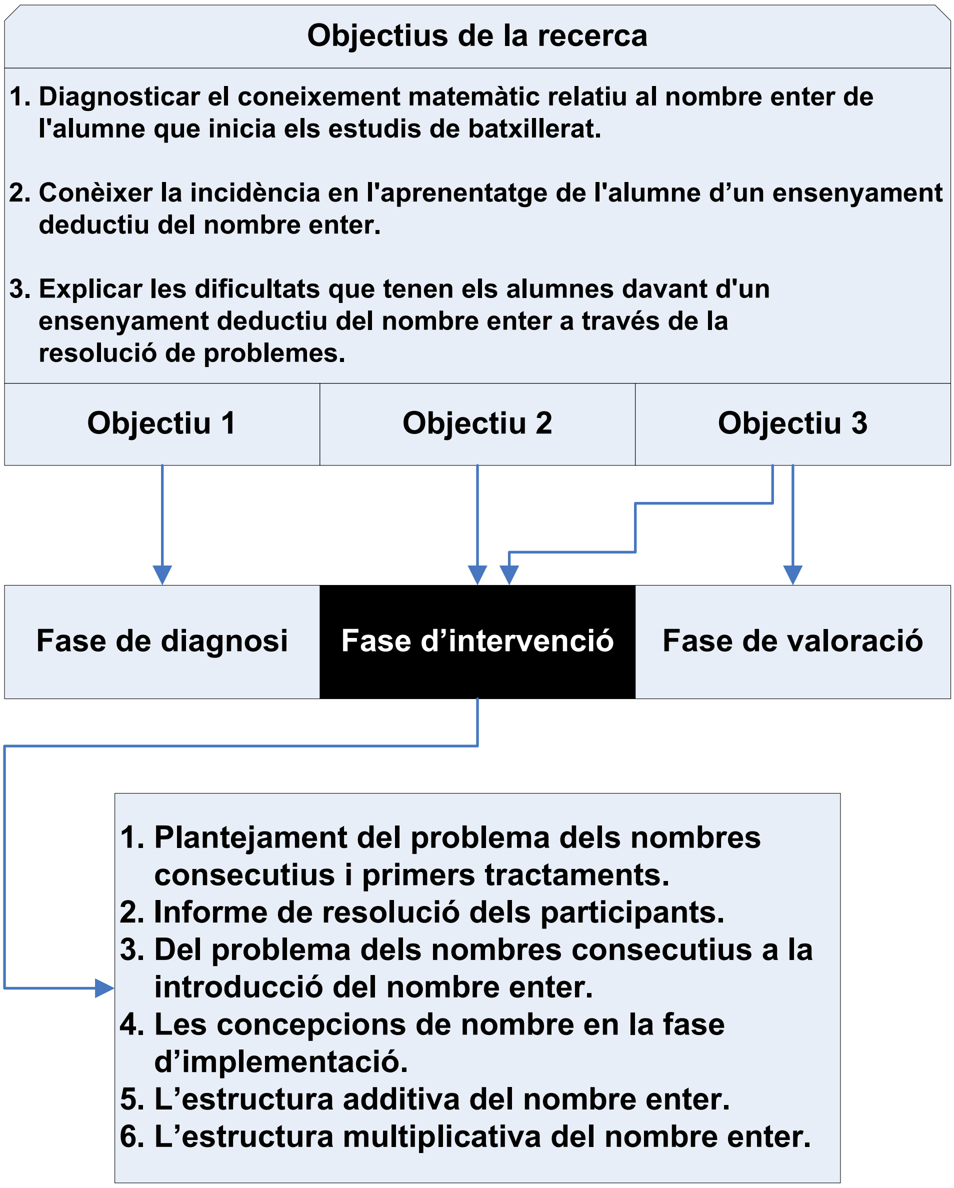


Figura 6.6: Disseny de la fase d'intervenció.

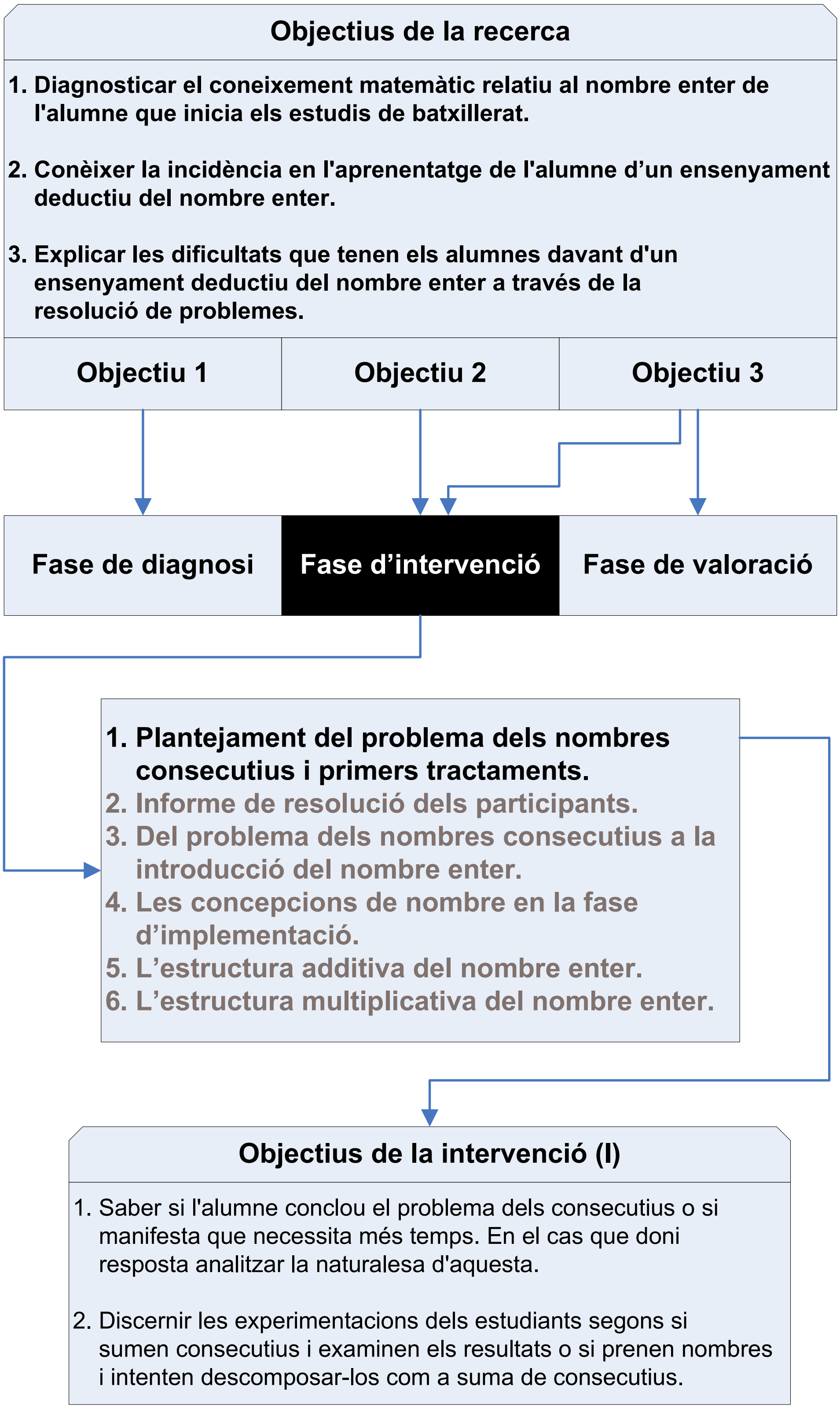


Figura 6.7: Primera subfase de la fase d'intervenció.

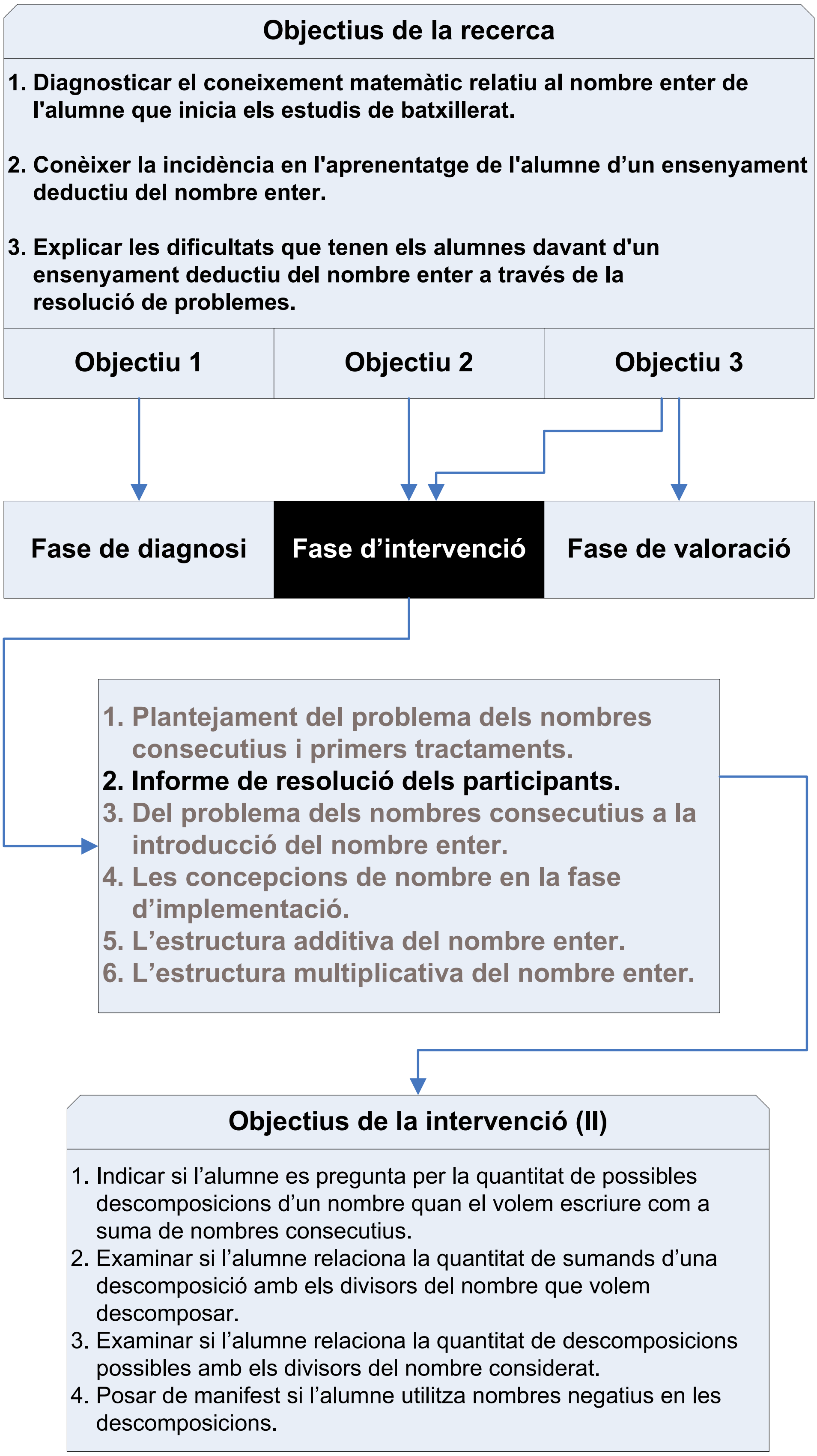


Figura 6.8: Segona subfase de la fase d'intervenció.

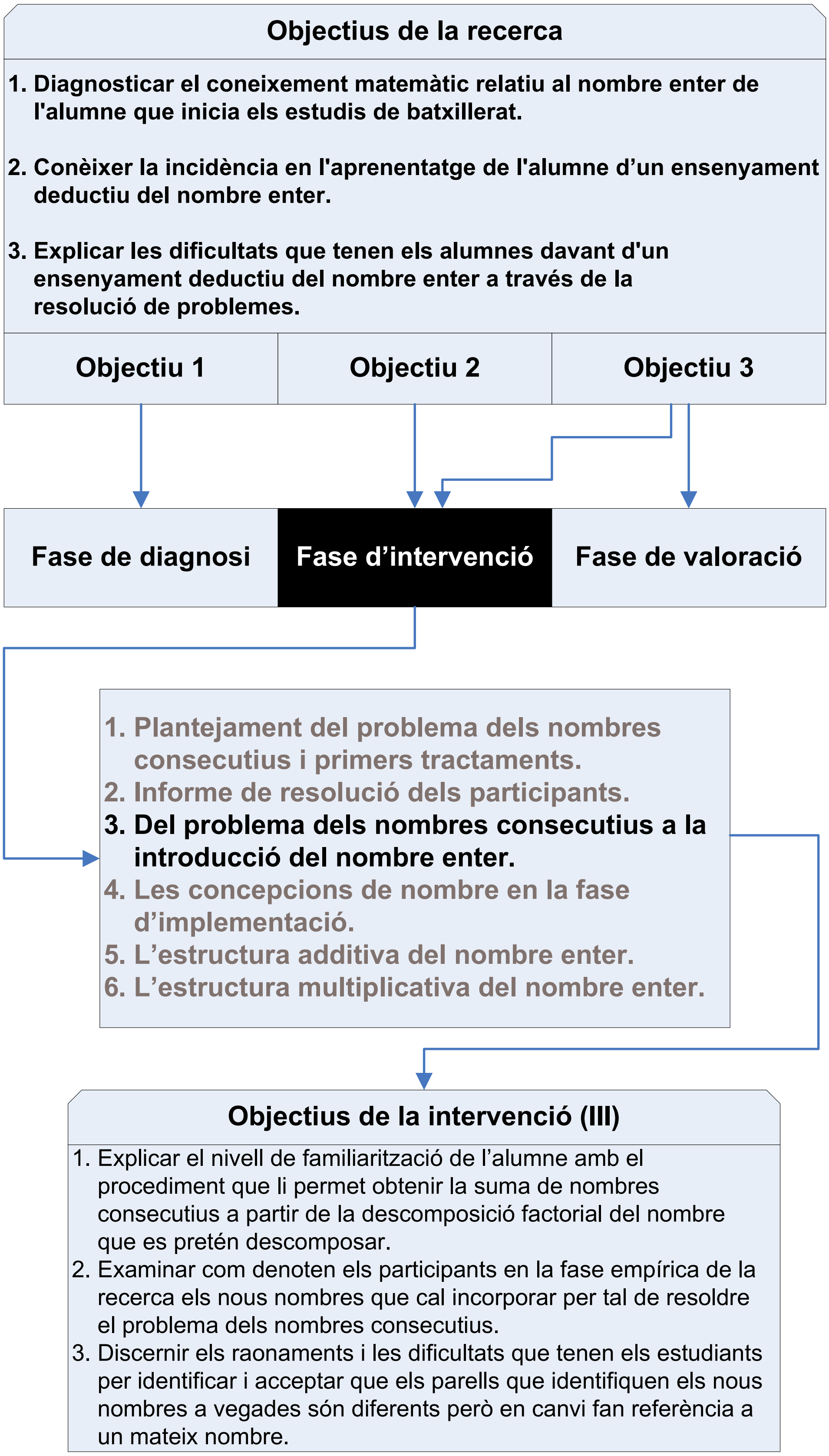


Figura 6.9: Tercera subfase de la fase d’intervenció.

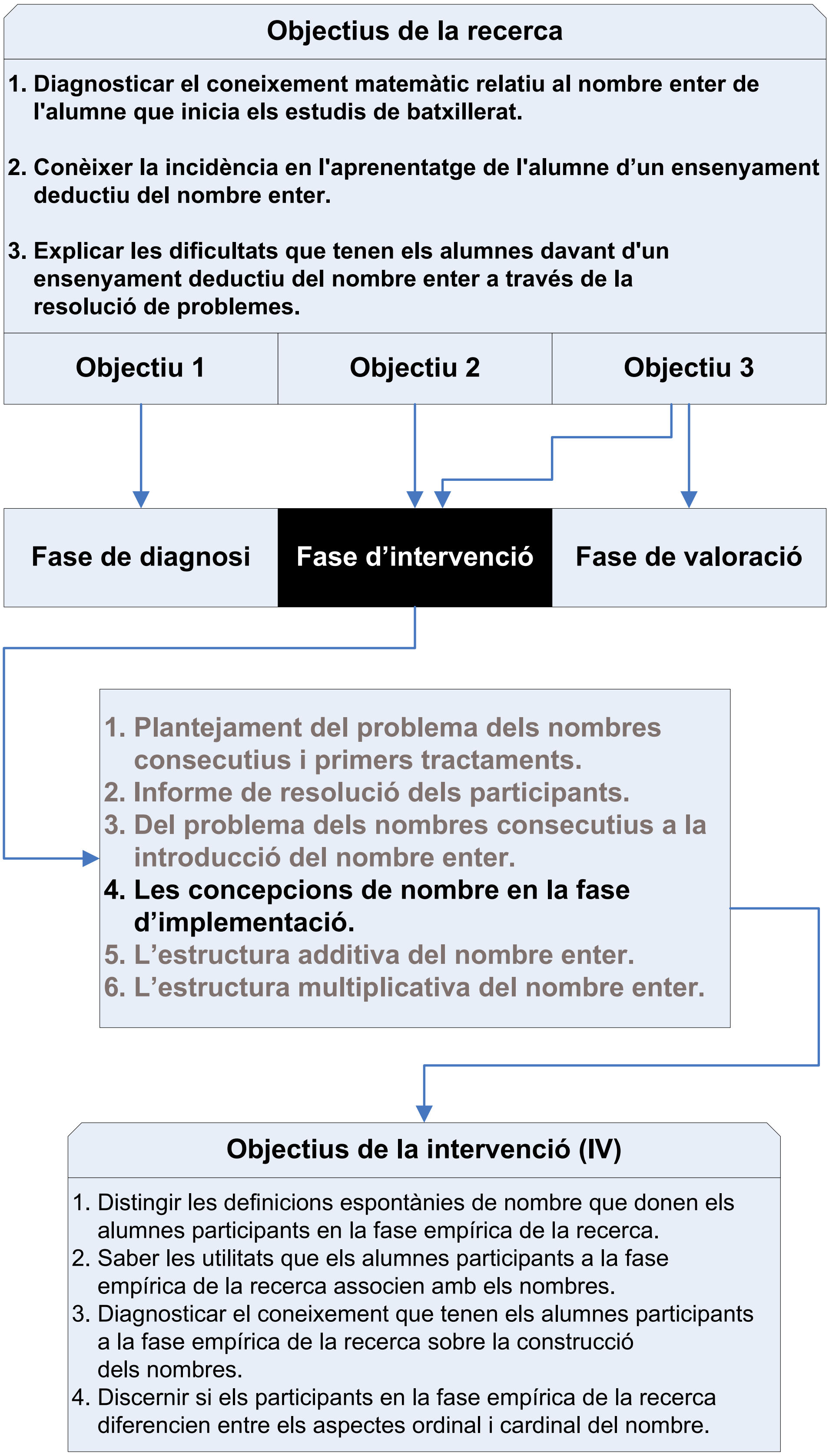


Figura 6.10: Quarta subfase de la fase d'intervenció.

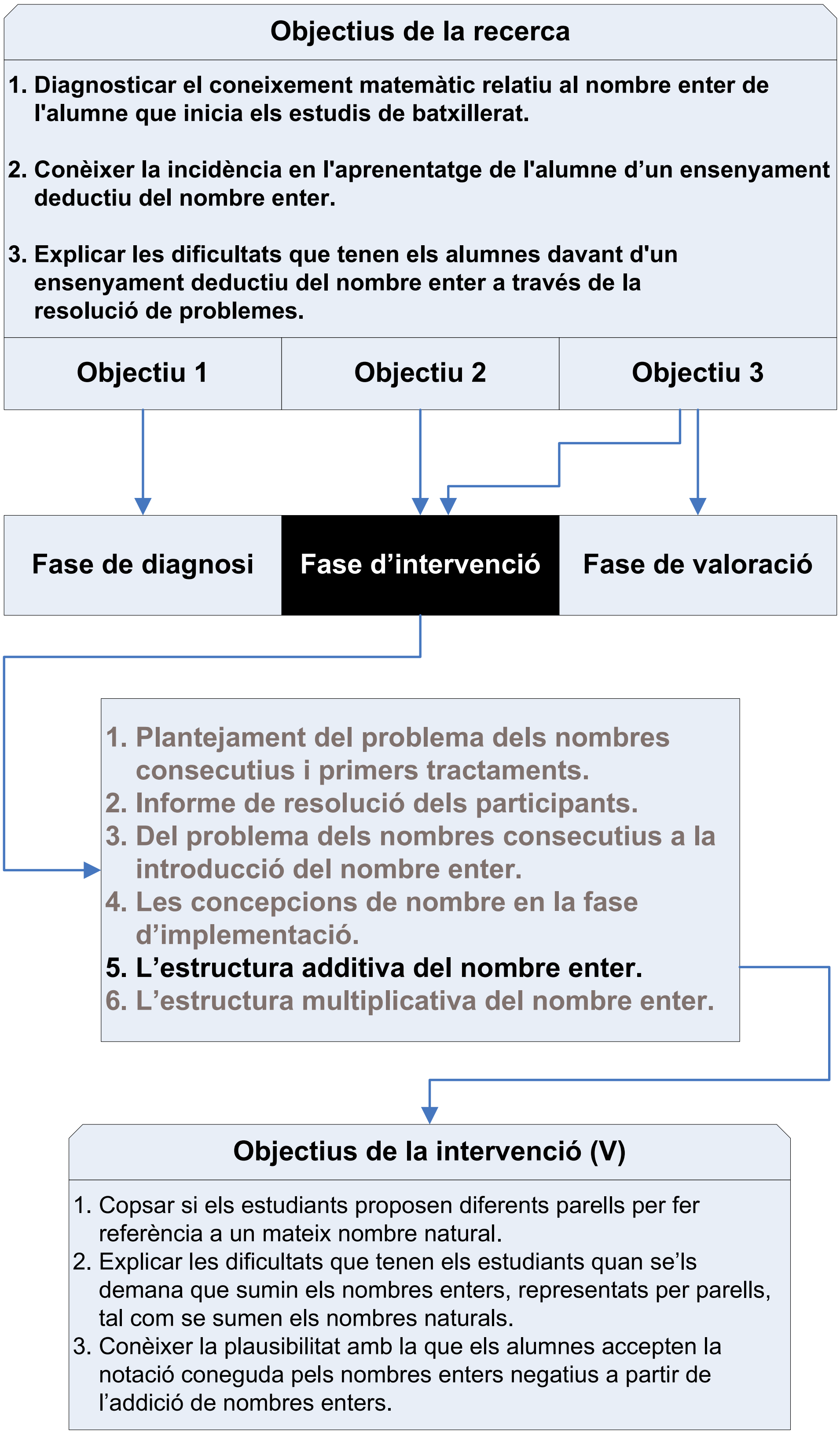


Figura 6.11: Cinquena subfase de la fase d'intervenció.

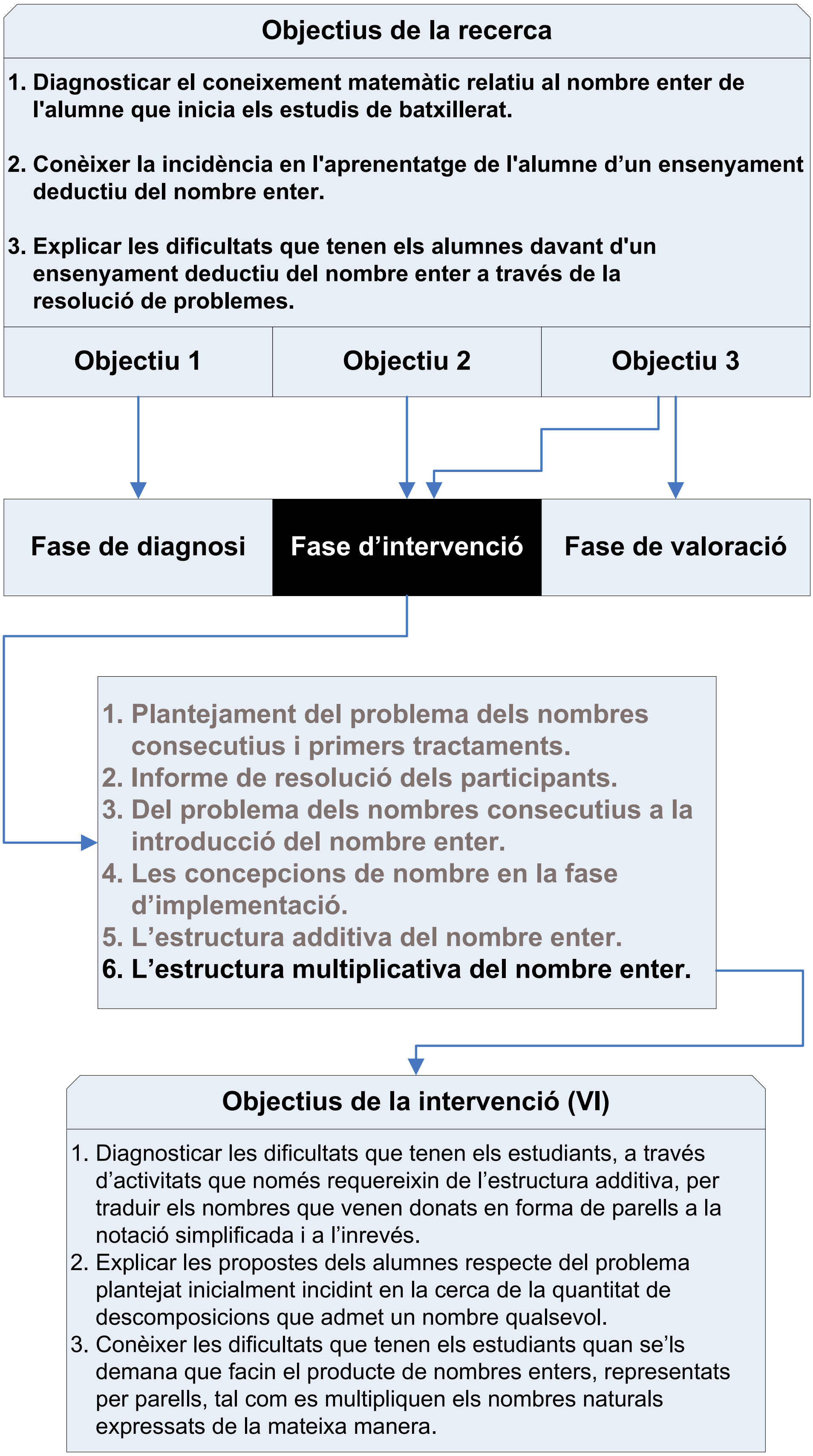


Figura 6.12: Sisena subfase de la fase d'intervenció.

6.5 Enfocament metodològic de la fase d'intervenció

L'estudi reflexiu de les diferents propostes relatives a la introducció del nombre negatiu ens ha permès copsar un panorama general de la didàctica del nombre enter. Alhora, la reflexió sobre les que s'han anat articulant al llarg dels diferents currículums ens facilita un coneixement poc precís però orientador dels ensenyaments implementats.

La riquesa del marc teòric existent contrasta amb el fet que les opcions triades entre els estils d'ensenyament coneguts són molt poques, i segurament van d'un extrem a l'altra. D'un ensenyament constructiu a un basat en models hi ha altres possibilitats que són del nostre interès (fig. 6.13, p. 216). En conseqüència, la connexió entre els fonaments teòrics i la realitat educativa és necessària, tant des del punt de vista de la recerca com de la innovació educativa, si volem alimentar entorns d'aprenentatge que tinguin repercussió en la didàctica del nombre negatiu i en la millora de la praxis educativa.

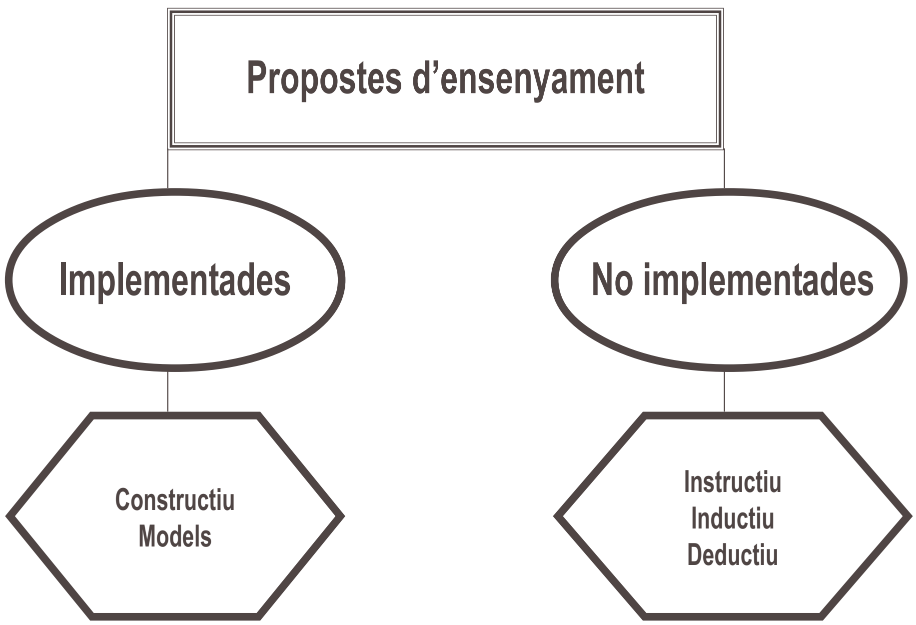


Figura 6.13: Estils d'ensenyament del nombre enter implementats i no implementats de manera generalitzada a les aules de secundària.

Atendre els diferents agents que intervenen en l'aula és una tasca honesta si entenem que actuen com elements que permeten concretar i orientar un currículum prescrit a un alumnat que presenta unes característiques determinades i que té unes necessitats i unes mancances específiques pel què fa a l'aprenentatge del nombre negatiu.

L'exposat fa palès que la intervenció a l'aula és imprescindible. Sense el contacte diari amb l'alumnat seria impossible que aquesta investigació pogués arribar a conclusions properes a la realitat educativa. Per aquest motiu considerem bàsic dur a terme la recerca simultània a la tasca docent.

Mantenim un vessant crític, en el sentit que no acceptem d'entrada posicions estàtiques absolutes: ni les que provenen d'una definició formal del nombre enter (resultat final de la matemàtica que en ocasions s'ha proposat com a punt de partida de l'ensenyament), ni les que es deriven de la reflexió sobre l'ensenyament del nombre negatiu a través de models concrets, que porten una trentena d'anys d'evolució i que es concreten a l'aula de manera generalitzada.

Un cop realitzada la descripció inicial proposem un plantejament d'acció a partir de l'observació i la reflexió d'una realitat prèviament diagnosticada, intentant millorar així la pràctica educativa existent en un determinat context escolar. L'acció es concreta en una intervenció a l'aula exposada amb detall en el capítol 7 (p. 241).

En virtut dels objectius de la present recerca ens ocupem d'un estil d'ensenyament híbrid entre el deductiu i el constructiu per a alumnes de batxillerat. Donat que aquest estudi ha estat poc realitzat estem identificant una problemàtica o, si es vol, recollint una informació que pot ser útil com a punt de partida d'altres recerques. En altres paraules, estem explorant l'efecte d'un estil d'ensenyament que en el primer curs de batxillerat esdevé una novetat.

Considerem que estem davant d'un apropament al problema que ens ofereix dubtes sobre la incidència que tindrà en l'aprenentatge de l'alumne. La nostra previsió inicial ens indica que l'estudi permetrà familiaritzar-nos amb un fenomen relativament desconegut. En paraules de HERNÁNDEZ *et al.* (2003, p. 116) estem identificant conceptes o variables, fet que permetrà suggerir futures investigacions.

La metodologia d'aquesta investigació ha de ser, per tant, més flexible en comparació amb altres tipus d'estudis, en particular, més flexible que l'emprada en la diagnosi inicial. En virtut dels objectius que volem assolir copsem, específicament, la necessitat d'una metodologia d'investigació qualitativa que concretem en les línies següents.

El descrit ens condueix a proposar un mètode de caràcter inductiu. Les dades i els resultats que es desprenguin dels participants en la fase empírica de la recerca seran la font de conclusions de caire general. Considerem l'observació i l'experimentació el tret general de les activitats que permetran arribar a generalitzar fets que es repeteixen en els alumnes participants.

Respecte de la perspectiva d'investigació analitzem una realitat que volem canviar i per això intervenim en l'aula amb un procés revisable que no té com a punt de partida cap hipòtesi perfectament delimitada sobre la realitat que ens trobarem a partir de la intervenció. Les característiques esmentades confirmen un paradigma qualitatiu.

La trajectòria prèvia com a estudiant de matemàtiques és fàcil que hagi incidit, des dels primers dies en què ens vam començar a plantejar el centre d'interès que ens ocupa, i sense haver aprofundit sobre els diferents paradigmes que existien, en un paradigma bastant positivista (hipòtesi, grup control i grup experimental, recollida de resultats i anàlisi quantitativa). Tanmateix, entre les diverses preguntes que ens formulàvem, una d'elles va modificar la nostra posició: Com podíem recollir dades quantitatives si l'assoliment dels objectius de la nostra recerca requereix informació relativa a la incidència d'un estil d'ensenyament que no és present a les aules?

La investigació qualitativa ens ofereix l'oportunitat de millorar, completar i resoldre llacunes que té la metodologia quantitativa quan volem atendre els objectius de la present investigació. Així doncs, no hem passat d'una a l'altra, sinó que ambdues són complementàries i necessàries segons la fase del procés.

En primer lloc orientem un procés de recerca sobre una realitat humana amb rigor científic. En segon lloc, la intervenció a les aules condueix al canvi, sense que calgui esperar al final de la recerca per arribar a l'acció ja que tot el que va succeint en el procés és acció que va incidint en la realitat educativa. En tercer lloc, la recerca requereix la participació d'una part de la comunitat educativa. La investigació la realitzem dins de l'entorn que volem estudiar, és a dir, dins de les aules i involucrant els alumnes participants en la recerca.

6.6 Fase de valoració

Finalitzada la implementació de la fase empírica de la recerca iniciem la fase de valoració. Els alumnes resolen el problema, el discuteixen i alhora el valoren. La pregunta fonamental no és si ho han sabut fer, sinó, si per ells mateixos ho haurien pogut descobrir. Tanmateix, són molts els aspectes que es poden tenir en compte però el fonamental que volem recollir en aquesta fase de valoració és la dificultat que copsen els participants en cadascuna de les minúscules porcions de la intervenció.

Després de moltes reflexions que hem tingut en compte, principalment els objectius, el marc teòric, la realitat educativa dels participants i el coneixement que ens ocupa, hem arribat a fixar uns indicadors d'aquesta fase. Ens proposem, per tant, mesurar la dificultat amb la que ha viscut l'alumne en la fase d'intervenció diversos aspectes que brollen de la resolució del problema, de l'acceptació de terminologies per als nous nombres i de l'extensió als nous nombres de les operacions conegudes pels nombres naturals.

La concreció de la fase de valoració finalitza amb el disseny dels instruments de recollida de dades. Ens proposem recollir l'opinió dels participants i, per tant, optem per emprar instruments on puguin lliurament graduar la dificultat viscuda des del seu punt de vista.

6.7 Característiques de la recerca

La creació matemàtica i el seu ensenyament poden distanciar-se més o menys segons com s'aparti aquest darrer del seu procés de gènesi. Ara bé, la trontollada gènesi del nombre negatiu suggereix que no hi haurà un estil d'ensenyament senzill i, per tant, el reflex epistemològic a les aules requereix importants reflexions prèvies. El vincle entre el procés de creació matemàtica i el seu ensenyament fa que en la recerca calgui tenir present tant l'ensenyament de la matemàtica com la pròpia disciplina. Tot seguit mostrem tota una colla d'aspectes que faciliten informació concreta de la present recerca i alhora la situen dins del ampli ventall de possibilitats que contempla la investigació en l'actualitat.

6.7.1 Immersió de la investigació en la docència

La pràctica educativa a l'ensenyament secundari permet conèixer de primera mà la realitat a les aules. Això facilita la utilització d'un llenguatge proper i comprensible pels alumnes de secundària en la fase experimental. Per altra banda la proximitat amb el dia a dia de l'ensenyament pot portar a no veure, des d'un punt de vista més general, certes dificultats que es poden englobar dins d'un altre problema més ampli. És per aquest motiu que mantenim present la realitat educativa però alhora sustentem la distància necessària que impedeixi que «els arbres no ens deixin veure el bosc».

En conseqüència, en aquesta recerca intentem aprofitar els aspectes positius que aporta l'experiència docent però també mirem de minimitzar aquelles influències que, fruit del pensament espontani, poden esbiaixar la interpretació dels resultats (p. 339, 401) que es deriven de les dades recollides: conclusions (p. 463), prospectiva (p. 523) i implicacions didàctiques (p. 525).

6.7.2 Descripció de la població de l'estudi

Dirigim la fase experimental a una cinquantena d'alumnes de dos grups de primer curs de batxillerat de l'IES de l'Arboç. En un d'ells s'imparteix la matèria «Matemàtiques» i en l'altre «Matemàtiques Aplicades a les Ciències Socials». A l'inici del curs acadèmic 2007/2008 el grup B de primer de batxillerat estava format per 27 alumnes; quinze nois i dotze noies. En el mateix moment el grup A estava format per vint-i-tres alumnes; deu nois i tretze noies. Tots els alumnes esmentats del grup A cursen la matèria Matemàtiques Aplicades a les Ciències Socials. Alhora, tots els alumnes del grup B cursen la matèria Matemàtiques.

	Grup A	Grup B	Total
Gènere masculí	10	15	25
Gènere femení	13	12	25
Total	23	27	50

El centre educatiu compleix el desenvolupament curricular normatiu, es pronuncia com no confessional, té com a llengua vehicular el català i la seva línia pedagògica es caracteritza per voler desenvolupar l'esperit crític, admetre la diversitat de ritmes evolutius, donar importància tant a les accions educatives com a l'adquisició de coneixements i fomentar la recerca; tal com es pot consultar en el projecte educatiu del centre[2].

L'estratègia educativa d'aquest centre potencia el compromís amb el conjunt dels valors democràtics, el respecte als drets humans, el rebuig a qualsevol tipus de dogmatisme i la defensa de la llibertat dels membres de la comunitat escolar per manifestar lliurement llurs opinions. L'ensenyament que es proporciona és el mateix per als nois i les noies i es desenvolupa en un marc de coeducació, entenent aquesta com un intent d'educar per a la igualtat sense cap mena de discriminació per raó de sexe, raça, llengua o creença. La relació amb les escoles de primària de la zona i el contacte amb les famílies forma part de les accions sistemàtiques que es realitzen.

6.7.3 Paradigma i tipologia de la recerca

Per tal d'abordar la present recerca ens proposem explicitar el punt de vista des del qual atenem la investigació. Tanmateix, cap de les perspectives que puguem adoptar aportarà per sí mateixa respostes a totes les preguntes que es puguin formular en el context educatiu (ARNAL *et al.*, 1992, p. 83), però unes s'adeqüen més que d'altres a cada problema de recerca. Els objectius atesos per cadascuna d'elles han estat decisius a l'hora de fer l'elecció. En concret, la perspectiva *empírico-analítica* es proposa constatar relacions causals, la *humanístico-interpretativa* pretén descriure i interpretar fenòmens educatius i la perspectiva anomenada *decisió i canvi* es proposa proporcionar informació sobre problemes pràctics per tal de prendre decisions.

El volum de processos que esdevenen a l'aula de forma simultània és una realitat que ens condueix a preveure l'enfocament adequat a la recerca empírica per tal que les dades donin resposta als objectius que hem fixat.

La recerca quantitativa se centra en mesurar i quantificar fenòmens delimitats.

[2] http://www.xtec.cat/centres/e3007580

És del nostre interès per establir el punt de partida i per mesurar determinades variables rellevants en virtut dels objectius de la recerca. Tanmateix, la recerca qualitativa permet comprendre i interpretar fenòmens que incideixen en els participants; ambdós punts de vista són del nostre interès.

Les eines qualitatives són d'una gran importància, possiblement imprescindibles per a l'abordatge de múltiples aspectes del terreny educatiu, però no són les úniques. Mirarem de quantificar els resultats i per aconseguir-ho fixem uns paràmetres per a l'anàlisi de les dades. Examinarem les respostes dels alumnes segons els paràmetres fixats. D'aquesta manera aconseguirem alimentar els objectius de la present recerca. Tanmateix, l'elecció d'uns paràmetres per a l'anàlisi comporta una pèrdua d'informació que assumim.

Farem referència de forma detallada a la intervenció a l'aula i al procés de recollida de dades que a partir d'aquesta s'esdevé. El cert és que si aquest estudi s'enfoqués exclusivament des de la visió de l'abordatge metodològic positivista i quantitatiu, segurament aquestes línies serien innecessàries. Pretenem, també, defensar la validesa de les metodologies qualitatives, utilitzades des del rigor, com a eines per a la comprensió de la realitat. En resum, la nostra posició, en el terreny metodològic d'aquesta tesi, correspondria a allò que alguns autors denominen la tercera cultura (BELTRÁN, 1988), és a dir, la utilització combinada de metodologies qualitatives i quantitatives en tant que millorin la nostra capacitat d'anàlisi i de comprensió dels fenòmens a estudiar.

La fase experimental de la recerca educativa empírica que presentem es mourà essencialment dins de la tradició dels estudis quantitatius en la fase de diagnosi inicial i també en la fase de valoració. En canvi, en la fase d'intervenció la recollida de dades requerirà informes de resolució per part dels estudiants que tindran una anàlisi qualitativa en virtut dels paràmetres que seran detalladament escollits i fixats.

Tipologia de la recerca

La naturalesa de la recerca que proposem està vinculada amb la realitat concreta de les aules i se situa en l'entorn de l'aprenentatge sota un determinat ensenyament. Fàcilment confirma o refuta la posició d'altres autors per tractar-se d'un centre d'interès atès al llarg de molts anys. Tanmateix, l'alumnat a qui es dirigeix i la tipologia d'ensenyament que es vol implementar donen a la present recerca particularitats que la distancien de les ja realitzades. Per tal d'atorgar claredat expositiva i de precisar els trets de la nostra investigació mostrem, tot seguit, les principals característiques de la recerca atenent els indicadors proposats per SIERRA (1994).

- FINALITAT

  La finalitat d'aquesta recerca (p. 47) és aplicada en el sentit que cerca participar en la millora de la didàctica del nombre negatiu. Les dificultats que viu l'alumne i la incidència que té en el seu aprenentatge l'ensenyament deductiu del nombre enter són interrogants del nostre interès però poc atesos en l'ensenyament secundari postobligatori.

- EXTENSIÓ TEMPORAL

  Dissenyem la recerca per tal que sigui realitzada al llarg del curs acadèmic 2007/08. Establim tres etapes diferenciades i consecutives. En primer lloc, la diagnosi que pretén establir el punt de partida de l'estudiant respecte d'uns delimitats indicadors. En segon lloc, la recerca relativa a la didàctica del nombre enter per un híbrid que permet incidir en el mètode deductiu per sembrar la llavor del mètode constructiu. En tercer i darrer lloc, la valoració de les dificultats viscudes pels estudiants. Des d'aquest punt de vista es tracta d'una recerca sincrònica ja que estudiem l'evolució d'una determinada proposta d'ensenyament al llarg d'un període de temps delimitat que alguns autors anomenen transversal com és el cas de HERNÁNDEZ *et al.* (2003).

- PROFUNDITAT

  El coneixement de la incidència que té en l'aprenentatge de l'alumne l'ensenyament deductiu del nombre enter i les dificultats que viu l'estudiant són del nostre interès. El paper que juga la resolució de problemes, tant respecte de les dificultats viscudes per l'alumne com en l'aprenentatge assolit per aquest, és la font de l'entorn d'aprenentatge que generem. La proposta esdevé una novetat i ens proposem descriure la seva implementació. Ateses aquestes consideracions, la recerca que proposem farà una descripció del fenomen estudiat.

- AMPLITUD

La descripció es realitzarà a partir de la implementació de l'entorn d'aprenentatge en dos grups d'alumnes. Aquesta recerca no es proposa donar respostes que brollin de dades que provenen d'un col·lectiu molt ampli. L'amplitud de la recerca és reduïda i pretenem aprofundir en la informació que obtindrem de petits grups d'alumnes. Des d'aquest punt de vista podem caracteritzar aquesta recerca, per tant, com una recerca micro-sociològica.

- FONTS

Les dades de la recerca educativa empírica que presentem són de primera mà. Des del plantejament proposem instruments amb la finalitat d'assolir els objectius de la recerca sense necessitat d'incorporar dades externes. Tanmateix, aquestes mateixes dades poden ser d'utilitat en recerques posteriors i poden, per tant, esdevenir dades secundàries per altres investigacions. En qualsevol cas, en aquesta recerca totes les dades analitzades i emprades emprades per establir els resultats són primàries.

- NATURALESA

La present investigació centra la recollida de dades a partir de diverses intervencions a l'aula. Des del punt de vista de SIERRA (1994, p. 35) no és una recerca documental, en el sentit que les dades primàries no neixen de fonts documentals; tanmateix, la recerca bibliogràfica ha estat fonamental per establir l'estat de la qüestió. S'allunya totalment de ser una recerca doctrinal ni filosòfica ja que no ens ocupem de qüestions purament teòriques. La investigació centra l'atenció en interrogants clarament aplicats. Sí que és una recerca d'enquestes des del moment que les dades emprades provenen de les manifestacions escrites dels subjectes participants. I, principalment és una recerca experimental ja que les dades provenen de fenòmens provocats en situacions reals.

- OBJECTE DEL QUAL S'OCUPA

Per la disciplina que ens ocupa estem davant d'una recerca educativa. La dirigim a un sector social rural, amb uns hàbits i manifestacions fortament lligats a la cultura catalana i amb una problemàtica interna controlada. Els dos grups classe als quals dirigim la recerca estan integrats tot i la diferent procedència dels membres que la composen.

- MARC ON TENEN LLOC

La fase experimental té lloc en el propi grup classe on cursen els alumnes el primer curs de batxillerat. En aquest sentit és una recerca de camp ja que l'estudi del fenomen que ens ocupa respecta l'ambient natural. Els objectius de la present investigació condueixen clarament a fer l'estudi on el fenomen esdevé de manera natural.

- CARÀCTER

La investigació quantitativa posa l'èmfasi en l'explicació dels fets, la verificació de teories, la mesura i la quantificació de fenòmens; utilitza com a instruments preferentment l'enquesta, els qüestionaris, les proves objectives, l'observació sistemàtica, ... i per al tractament de les dades, les tècniques estadístiques; investiga amb mostres de població amb la intenció de generalitzar resultats. D'altra banda, la investigació qualitativa incideix en la comprensió i la interpretació dels fets des del punt de vista dels propis implicats, genera hipòtesis i teories explicatives, treballa amb dades qualitatives, utilitza preferentment estratègies de recollida de dades com són els diaris de camp, les entrevistes o els qüestionaris oberts. La posició que adoptem en aquesta recerca ve establerta per les següents consideracions:

> Ninguna metodologia aportarà por sí sola respuestas a todas las preguntas que pueden hacerse en el contexto educativo.
>
> [...]
>
> De hecho debemos hablar de un continuo metodológico y no de polaridades opuestas.
>
> (ARNAL *et al.*, 1992, pp 83-84)

La recerca manté un punt de vista quantitatiu en el seu punt de partida: l'assoliment del coneixement inicial de l'estudiant respecte del nombre negatiu. Posteriorment, descobrir la incidència que té en l'alumne un determinat estil d'ensenyament del nombre negatiu requereix un enfocament qualitatiu que ens permetrà penetrar i comprendre els aspectes més interns del fenomen que ens ocupa.

- VALIDESA DE LA RECERCA

  Respecte de la validesa de la recerca ens podem preguntar fins a quin punt les relacions que obtinguem han estat correctament establertes. De fet un gran pes recau en fins a quin punt l'investigador ha estat capaç d'accedir als punts de vista dels participants i ha pogut reflectir els seus aprenentatges, les seves opinions i la seva motivació o rebuig. Els elements que participen de la validesa de la investigació que presentem tenen a veure amb la persistència en l'observació a l'aula, el judici dels experts, la recollida sistemàtica de dades, la seva anàlisi i la interpretació amb atenció als diferents moments en què han estat recollides. Tot estudi amb un subjecte únic seria totalment qualitatiu i els seus resultats no es podrien emprar per generalitzar la informació. Tanmateix, el mètode inductiu que proposem analitza una cinquantena de participants, els resultats dels quals ens conduiran a extreure conclusions de caràcter general.

- PARTICIPACIÓ EN ALTRES RECERQUES

La investigació que presentem incideix en un estil d'ensenyament que, amb les particularitats que hem atès i que mostrem en aquesta memòria, no s'havia portat a la pràctica. Es pot entendre que els resultats i conclusions que presentem són previs a recerques més àmplies que puguin perfeccionar l'estil d'ensenyament presentat i portat a l'aula. La possibilitat d'ampliar la recerca a sectors més extensos amb la pretensió d'obtenir informació que confirmi o refuti els resultats d'aquesta recerca permet interpretar que, de fet, tota aquesta recerca es pot entendre com un estudi pilot.

En resum, la present recerca té les següents característiques: aplicada, sincrònica, explicativa, limitada, diagnòstica en la primera fase, experimental a partir de la provocació d'un fenomen que permet obtenir dades primàries, educativa, de camp, qualitativa en la segona fase i quantitativa en la primera i darrera i, a partir dels seus resultats, pilot d'altres recerques.

6.7.4 Els compromisos de la recerca

Acceptem en la present investigació que la resolució de problemes és una eina fonamental en la construcció de coneixement, rellevant des dels primers cursos de primària fins a la universitat passant per altres formacions reglades i no reglades.

La precisió amb la que mirem de detallar el marc metodològic esdevé necessària quan probablement el professorat entén la resolució de problemes de maneres ben diferents. «[...] quizá haya tantos constructivismos como constructivistas declarados» (Arcavi, 1999, p. 40). La represa del nombre enter i negatiu al batxillerat constitueix una innovació educativa que ens proposem precisar.

La present recerca estableix un compromís amb la comunitat educativa en el sentit que participa en una millora de la qualitat de l'ensenyament, en virtut de la concepció de qualitat acceptada en la present investigació (p. 27). La política educativa actual promou i recolza la resolució de problemes i, alhora, proposa reprendre l'estudi dels nombres en aquesta primera etapa postobligatòria. En concret, la introducció deductiva del nombre enter i del nombre negatiu no és un estil d'ensenyament proposat a l'Ensenyament Secundari Obligatori però, en canvi, sí que el currículum de batxillerat deixa les portes obertes al seu tractament.

Més precisament, la present recerca compleix també amb un compromís amb la comunitat docent, ja que els objectius que ens proposem assolir estan directament relacionats amb la pràctica educativa. La formació inicial proporciona als docents una sòlida formació curricular que té una tendència natural cap als aspectes formals que, davant la impossibilitat d'aplicació immediata a l'aula, probablement deriva cap a la instrucció de continguts. Es pot entendre que l'exposat és previsible ja que el professorat novell, habituat al raonament lògicodeductiu de les facultats, accedeix a l'ensenyament secundari amb una minsa experiència en altres estils d'ensenyament i aprenentatge[3]. Si la construcció del coneixement matemàtic a través de la resolució de problemes no és la pràctica habitual a l'ensenyament universitari, i la formació post-universitària prèvia al treball docent és minsa fins aquest moment, podem esperar que l'assaig-error sigui habitual i que l'experiència i la formació permanent siguin l'únic camí a seguir per donar-hi solució. Per tant, probablement els docents requereixin d'exemples i models, des del seu plantejament inicial fins a l'avaluació, per portar a l'aula l'ensenyament de la matemàtica a través de la resolució de problemes, en particular per potenciar l'ensenyament deductiu del nombre enter al batxillerat.

La present recerca manté un compromís amb la societat. Quan l'activitat creativa, participativa i dialogada perd força tenim una tasca a resoldre. Si els alumnes, anys després que hagin finalitzat els seus estudis, recorden la matemàtica com una disciplina *imposada* per sobre de *negociada* el problema s'alimenta. L'ensenyament exclusiu del nombre enter a través de models concrets pot tenir un efecte contraproduent que ens proposem atendre. El pensament crític és una necessitat en la nostra societat i entenem que l'ensenyament de la matemàtica és una disciplina que, amb molta més facilitat que altres, pot fer-lo arribar als estudiants.

La present recerca manté un compromís amb la comunitat científica i educativa en el sentit que vol contribuir aportant resultats i propostes que poden ser d'interès per la comunitat educativa així com per la comunitat d'experts. Aquesta darrera entendrà que entre el tractament donat al nombre enter en l'ensenyament superior i el punt d'arribada que s'aconsegueix en l'ensenyament obligatori hi ha

[3]Escrivim aquestes línies en un moment en què la implantació dels programes de postgrau dirigits a la formació de professorat és una realitat que encara s'ha de fer extensiva a tot el col·lectiu de professors novells.

un abisme. En quin moment es pot abandonar el pla concret, propi de la matemàtica escolar, per apuntar gradualment el pla formal? No sabem si és al batxillerat, però hom entendrà que en algun moment s'hauria de facilitar que l'alumne tingués l'oportunitat de viure aquest pont didàctic.

6.8 Instruments de recollida de dades

En aquesta secció ens ocupem de l'operació que consisteix en triar o elaborar els instruments de recollida de dades més capaços de facilitar l'assoliment dels objectius de la recerca. Entre la gran varietat d'instruments i estratègies de recollida d'informació els més adients són aquells que més s'adeqüen als objectius de la recerca. Per altra banda el disseny de la present investigació està desglossat en tres fases o etapes que requeriran un tractament diferenciat.

Per a que l'instrument de recollida de dades pugui generar tota la informació que cal ha de que contenir preguntes o elements molt precisos referits a tots els indicadors prèviament establerts. Per altra banda és sempre convenient de realitzar una prova pilot dels instruments per tal de comprovar que la comunicació amb els participants en la recerca és l'adequada.

En aquest apartat mostrem el pla general o estructura fonamental que ens permetrà obtenir respostes als interrogants que ens hem plantejat. A partir de l'esmentada estructura desglossem les estratègies i instruments de recollida de dades que, en cada fase de la recerca, generaran dades que alimentin els objectius de la present investigació.

Sobre el disseny dels qüestionaris

En la fase de diagnosi de la investigació hem utilitzat qüestionaris com instrument de recollida de dades, tal com hem justificat en les línies anteriors. Per aquest motiu la reflexió sobre les preguntes que s'han concretat en cadascun d'ells pren rellevància per tal que la informació recollida doni resposta fiable a les pretensions de la present investigació.

Per a GRAWITZ (1975, p. 246), citada per SIERRA (1994, p. 311), una pregunta ben formulada és aquella que no exerceix cap influència en el sentit de la resposta i que no incita a donar una resposta inexacta, que no correspon a la informació buscada. Aquestes són les condicions bàsiques que adoptem com a punt de partida en el disseny de les qüestions. Ens fixem a més en tota una colla de consideracions a l'hora de redactar cadascuna de les preguntes: és necessària la pregunta?; té el participant la informació indispensable per contestar-la?; pot l'alumne recordar la informació que se li demana?; contestar la pregunta suposa un gran esforç pel participant?; qui no ens respon, és per què no vol o bé per què no és capaç d'expressar-se?

Un altre element previ a la redacció de les preguntes és la decisió del tipus de resposta que busquem; sintèticament parlem de respostes obertes i de respostes tancades. Els avantatges i desavantatges de cadascuna d'elles té rellevància per a la nostra recerca. Les preguntes amb resposta oberta ens són especialment útils per conèixer aspectes del fenomen que volem estudiar i que nosaltres podem desconèixer. Aquesta fórmula és indicada quan les informacions que volem recollir poden ser complexes tal com contemplem que pot esdevenir en la present investigació. Les preguntes amb resposta oberta permeten afegir observacions i comentaris, amb la qual cosa la informació desaprofitada és menor. Evitem que de les preguntes es puguin induir unes o altres respostes. Emprem una redacció senzilla, fet que facilita trencar el gel a l'inici dels qüestionaris.

Els problemes principals de les preguntes obertes rauen en l'exploració de les respostes. Poden ser extremadament difícils de codificar i el maneig necessari per fer-ho s'assembla força al de les metodologies qualitatives, amb totes les potencialitats i els problemes que comporten, entre les quals hi ha la subjectivitat de qui analitza els qüestionaris. La codificació pot ser complexa: es tracta de convertir una eina força qualitativa en quantitativa. És un procés lent que requereix més temps i més esforç que el tractament de les preguntes tancades. D'alguna manera, les preguntes obertes prenen més sentit quan es dirigeixen a persones amb un grau suficient d'educació, que es pot traduir en una millor expressió que no pas en una persona de nivell cultural inferior. Per les característiques dels participants en la fase empírica de la present investigació les preguntes obertes són necessàries i, a més, el nivell cultural per respondre-les és suficient.

En la present investigació fem poc ús de preguntes que condueixen a respostes tancades, tot i així, les emprem tal com detallem tot seguit. El gran avantatge de les enquestes de respostes tancades és la seva facilitat per codificar i explotar els resultats, ja que s'obté una millor precisió i uniformitat en la recollida de dades i això facilita la comparació de respostes. La seva principal utilitat és la classificació dels individus respecte de la pregunta realitzada, ja que no aporta més informació que la que estrictament demana el qüestionari. Les fem servir en un primer moment per establir una primera classificació sobre el coneixement de l'alumne relatiu al nombre enter; també al final del treball de camp les emprem de nou en la valoració. La limitació en les respostes fa que hi hagi una pèrdua d'informació i no és del tot útil per a una informació complexa. En les preguntes de resposta tancada, anomenades sovint preguntes tancades, els participants en la investigació no poden aportar matisos més enllà dels que es proposin. Ens cal conèixer la totalitat de respostes possibles per formular el major nombre de respostes tancades. No ens aporta nou coneixement ja que obtenim estrictament resposta del que preguntem.

És freqüent en la present investigació utilitzar en un mateix qüestionari preguntes obertes i tancades. En aquest cas, hem optat per barrejar-les mirant que les tancades permetin precisar informacions aportades per les obertes; en tots els casos hem primat l'ús d'un llenguatge senzill i clar. En la redacció dels enunciats hem mirat de no provocar l'aflorament directe de prejudicis. Dirigir qüestions sobre el nombre enter a alumnes de primer curs de batxillerat podria ferir, en alguns casos, l'orgull de l'alumne i per això intentem extreure informació evitant, en la mesura que sigui possible, reincidir en el que ja s'ha preguntat.

6.8.1 Fase de diagnosi

El coneixement que pretenem obtenir pot dependre en gran mesura de les concepcions i aprenentatges previs dels alumnes participants, fet que justifica la necessitat d'establir el punt de partida del coneixement dels participants. De fet, el primer objectiu de la nostra investigació proposa diagnosticar el coneixement matemàtic relatiu al nombre enter de l'alumne que inicia els estudis de batxillerat. Estem davant d'un objectiu desitjable per a la fase següent però, alhora, difícil d'assolir si no disposem de més precisió. En conseqüència, a l'inici del present capítol hem detallat uns indicadors mesurables, desglossats en tres modalitats, directament relacionats amb l'objectiu esmentat. Ens proposem tot seguit seleccionar els instruments de recollida d'informació que han de facilitar les dades que permetran obtenir resultats que facultin l'assoliment dels objectius.

En el primer grup d'indicadors ens plantegem copsar el coneixement instrumental de l'alumne participant en la recerca. En el segon pretenem tenir coneixement relatiu a les dificultats que provenen del tractament real i formal que dóna l'estudiant al nombre negatiu. En el darrer ens ocupem de conèixer, fent ús de l'estructura additiva, el model concret que resulta més familiar per l'estudiant i, alhora, quin ús fa de la recta numèrica en les seves resolucions. L'esmentada informació participa d'un coneixement sobre el punt de partida de l'estudiant que considerem necessari per concretar i interpretar el posterior tractament que proposarem en la intervenció a l'aula. El propòsit és marcadament diagnòstic i no pretenem modificar la realitat de partida de l'estudiant. Per aquest motiu ens proposem realitzar el tractament tant bon punt l'estudiant iniciï el curs acadèmic 2007/2008.

Pretenem aproximar-nos a l'estudiant de primer curs de batxillerat (16-17 anys) per conèixer, entre d'altres, les dificultats, errors i encerts respecte del contingut que ens ocupa. La voluntat de conèixer una realitat determinada ens condueix a voler mesurar-la, per tant, considerar un qüestionari com l'instrument de recollida de dades sembla, en virtut de les pretensions d'aquesta fase, el més adequat. Segons SIERRA (1994, p. 306) el qüestionari facilita, entre d'altres categories de dades, l'accés a mesurar nivells de coneixement de diversos temes estudiats. La taula següent mostra les dates en les que es van implementar a les aules els esmentats instruments de la fase de diagnosi:

INSTRUMENTS	DATA D'IMPLEMENTACIÓ
Qüestionari diagnòstic 1	Dilluns 17/09/2007
Qüestionari diagnòstic 2	Dilluns 24/09/2007
Qüestionari diagnòstic 3	Dilluns 01/10/2007

Primera part de la fase de diagnosi. Sobre el caràcter instrumental del nombre enter

Els alumnes participants en la fase empírica de la recerca s'han familiaritzat amb el nombre negatiu, a l'Educació Secundària Obligatòria, a través d'un ensenyament basat en models concrets. D'aquí es desprèn l'interès inicial per obtenir coneixement relatiu a les dificultats, errors i encerts que es deriven d'un aferrament a la interpretació del nombre com expressió de quantitat. La utilització del nombre negatiu en diferents àmbits del saber l'estabilitza com una eina útil que és tractada de manera habitual. L'esmentada utilització potser podria haver desvinculat el coneixement construït del seu sentit comú i haver esdevingut un formalisme buit de significat.

En primer lloc ens proposem diagnosticar l'ús aritmètic del nombre enter, concretat en la mesura d'encerts i errors que realitzen els alumnes davant d'algunes tasques rutinàries. Alhora volem copsar en aquest primer moment quin model concret és el que l'alumne escull quan se li demana que plantegi una activitat que involucri nombres enters. En atenció a les consideracions esmentades hem realitzat el primer document que permetrà atendre el primer grup d'indicadors. En la pàgina 565 es pot consultar el detall de les activitats proposades. Alhora, a partir de la pàgina 273 es pot consultar l'anàlisi de les dades recollides i la presentació dels resultats corresponents.

Segona part de la fase de diagnosi. Sobre el tractament real i formal del nombre enter

En virtut del vessant epistemològic, la identificació de nombre amb magnitud va ser un obstacle que va impedir durant segles l'acceptació dels esmentats nombres (GONZÁLEZ *et al.*, 1990, p. 26). Tal com destaca GÓMEZ (1999, p. 95) la matemàtica era, amb anterioritat al punt de vista modern iniciat a finals del segle XIX, una ciència relacionada amb l'estudi de la quantitat. La idea de nombre estava lligada a la mesura de magnituds i els prejudicis vers els negatius es mantenien mentre s'intentava interpretar-los com quantitats. L'acceptació dels nombres negatius neix amb el trencament de la interpretació de la matemàtica com la ciència de la quantitat. Tanmateix, la interpretació dels nombres negatius com objectes desvinculats de tota interpretació sensible pot haver conduït a generar un coneixement matemàtic buit de contingut.

Els vessants educatiu i epistemològic exposats faciliten l'establiment de les dues finalitats inicials: l'anàlisi de les dificultats dels alumnes que provenen d'un tractament vinculat a la seva realitat quotidiana i les que provenen d'un tractament formal. Tot seguit mostrem les dues finalitats generals que es desprenen de l'exposat. L'anàlisi de les dades d'aquesta segona diagnosi es realitzarà a partir d'uns objectius que brollaran de les dues finalitats que mostrem tot seguit, tal com es pot consultar en la pàgina 292.

A) Diagnosticar l'aferrament a l'evidència immediata dels alumnes de primer curs de batxillerat en el treball amb nombres negatius.

B) Diagnosticar els errors i les dificultats dels alumnes en la utilització formal dels nombres enters.

En la pàgina 566 es mostra l'instrument de recollida de dades seleccionat. La similitud de les nostres pretensions inicials amb el tractament donat per IRIARTE *et al.* (1991) en l'article que té per títol «Obstáculos en el aprendizaje de los números enteros», ha facilitat que emprem un qüestionari inspirat amb aquest referent. A partir de la pàgina 292 es pot consultar l'anàlisi de les dades recollides així com la presentació dels resultats que brollen d'elles.

Tercera part de la fase de diagnosi. Sobre els problemes additius amb nombres negatius

En la tercera part de la diagnosi inicial ens proposem conèixer quin model concret proporciona millors resultats en la resolució de problemes relacionats amb el nombre negatiu i, alhora, estudiar la proporció d'alumnes que utilitza la recta numèrica per resoldre problemes segons el model que es tracti.

En la pàgina 574 s'exposa l'instrument de recollida de dades seleccionat, que està inspirat en les aportacions de BRUNO i MARTINON (1994*a*). Centrem l'atenció en l'ensenyament del nombre enter a través de models concrets tot proposant activitats relacionades amb els models tenir-deure, nivell del mar, temperatura, temps i carreteres. La interpretació dels nombres enters com estats o com variacions serà viscuda de diferent manera per cadascun dels alumnes participants segons el model que es tracti. A partir de la pàgina 318 es pot consultar l'anàlisi de les dades i la presentació dels resultats d'aquesta tercera part de la fase de diagnosi.

6.8.2 Fase d'implementació

La consulta dels resultats de les diagnosis inicials permet disposar d'informació relativa al coneixement de l'alumne participant en la fase empírica de la recerca respecte del nombre enter a l'inici de batxillerat. La proposta de canvi es mou en el terreny de l'ensenyament i consisteix en la resolució d'un problema que, plantejat sobre els nombres naturals, condueix a la necessitat d'introduir més nombres per a la seva resolució.

Un problema constitueix l'instrument d'intervenció fonamental per a la fase experimental de la present recerca que es concretarà en dues aules de primer curs de batxillerat (16-17 anys) de l'IES de l'Arboç. Dediquem un capítol a descriure l'esmentat instrument metodològic tal com es pot consultar a partir de la pàgina 241. El coneixement de les característiques i les particularitats del problema dels nombres consecutius facilita el disseny d'instruments de recollida de dades que permeten obtenir informació per assolir els objectius de la recerca.

Primera intervenció. Presa de contacte

Presentem l'enunciat als alumnes per primera vegada el dilluns 8 d'octubre de 2007. Es tracta del primer dilluns lectiu després que els alumnes participants en la fase empírica de la recerca ja hagin realitzat les diagnosis prèvies. El mateix dia que vam proposar l'activitat vam deixar temps per tal que els estudiants poguessin experimentar i redactar les seves primeres impressions. L'informe de resolució presentat pels estudiants esdevé l'instrument útil d'aquesta primera sessió.

La concreció dels objectius de la sessió brollen de la finalitat general que és explicar les dificultats que tenen els estudiants davant de la resolució del problema dels nombres consecutius. L'instrument de recollida de dades serà el que per excel·lència és més adequat a la resolució de problemes, és a dir, el full de resolució lliurat per l'alumne. Els paràmetres atesos en l'anàlisi de les dades concretaran les primeres reflexions davant de la resolució del problema. Els detalls de l'anàlisi es poden consultar a partir de la pàgina 342. A partir dels objectius, instruments i paràmetres atesos concretem les categories de resposta i presentem els resultats.

Segona intervenció. Lliurament de l'informe de resolució

Finalitzada l'esmentada sessió del dilluns dia 8 d'octubre de 2007 vam proposar als estudiants que treballessin el problema a casa seva i que lliuressin el següent dilluns 15 d'octubre de 2007 un informe de la resolució que inclogués els seus raonaments i descobriments. Aquest és l'informe que ha estat analitzat i que constitueix la font de les dades de la segona intervenció.

La concreció dels objectius de la sessió brollen de la finalitat general que és examinar els principals descobriments dels alumnes en el procés de resolució del problema. L'instrument de recollida de dades és l'informe de resolució presentat pels participants. Els paràmetres atesos en l'anàlisi de les dades tenen per finalitat focalitzar l'atenció de l'examen de les respostes en els descobriments dels alumnes relacionats amb els objectius. Els detalls de l'anàlisi es poden consultar a partir de la pàgina 357. Després del procediment de recerca exposat atenem les categories de resposta i la presentació de resultats.

Tercera intervenció. Introducció deductiva del nombre enter

En la sessió del dilluns 22 d'octubre de 2007 ens proposàrem començar per esbrinar si l'estudiant té assolit el procediment pel qual la descomposició d'un nombre com a producte de dos factors on un d'ells és senar condueix a una descomposició d'ell com a suma de nombres consecutius. L'esmentat descobriment pot tenir diferents nivells d'assimilació però, en virtut del contingut que pretenem introduir, només la relació entre la descomposició en producte de factors i com a suma de consecutius esdevé fonamental per a continuar el tractament del problema.

La concreció dels objectius de la sessió es deriva de la finalitat general. Aquesta és conèixer la incidència en l'aprenentatge de l'alumne d'un ensenyament deductiu del nombre enter que neix del problema dels nombres consecutius. Vam emprar els instruments de recollida de dades disponibles a les pàgines 578, 579 i 580.

El dissenys d'aquests instruments es va fer prioritzant l'assoliment dels objectius concrets que es poden consultar en la pàgina 376. De les dades recollides es poden obtenir diferents informacions. Tanmateix, hem focalitzat l'atenció en l'assoliment dels objectius per aconseguir-ho. Hem fixat uns paràmetres per a l'anàlisi tal com es pot consultar en la pàgina 378. L'anàlisi de les dades que brollen de la implementació dels primers instruments han permès apuntar unes categories de resposta que han conduït a l'establiment de resultats. Els detalls es poden consultar a partir de la pàgina 375.

Quarta intervenció. Concepcions de nombre

El dilluns 29 d'octubre de 2007 vam fer un petit parèntesi a la introducció del nombre enter iniciada una setmana abans. La presència de respostes que mostren una clara vinculació entre nombre i quantitat ho justifiquen. Ens proposàrem conèixer les definicions espontànies de nombre que donen els alumnes participants en la recerca. També ens plantejàrem analitzar els usos que els estudiants associen amb el nombre. En tercer lloc vam apuntar quin grau de coneixement tenien sobre com es construeixen els nombres i finalment vam copsar si distingien ordinal de cardinal.

Les esmentades pretensions brollen de la finalitat principal de conèixer les concepcions que tenien de nombre els participants en aquest moment de la fase empírica de la recerca. L'instrument emprat es pot consultar a la pàgina 408. L'anàlisi de les dades que deriven de la implementació de l'esmentat instrument l'efectuem sota uns delimitats paràmetres. Els details de l'anàlisi es poden consultar a partir de la pàgina 405.

Cinquena intervenció. Introducció deductiva de l'estructura additiva

Com a continuació de la fase empírica de la recerca ens proposàrem introduir l'estructura additiva dels nombres enters. Aquesta és la finalitat de la sessió realitzada el dilluns dia 5 de novembre de 2007. Vam emprar els instruments de recollida d'informació que són disponibles a les pàgines 581, 582 i 583. Les dades recollides les vam analitzar sota la mirada filtrada per uns paràmetres que es poden consultar a partir de la pàgina 421. La novetat que suposa pels participants la implementació de la proposta fa que surtin dades amb interessos ben diferents. És imprescindible, per tant, fixar uns paràmetres que permetin recollir la informació que és d'interès per a la present recerca. Els detalls de l'anàlisi es poden consultar a partir de la pàgina 418.

Sisena intervenció. Introducció deductiva de l'estructura multiplicativa

La reflexió sobre els nous nombres i l'extensió de l'estructura additiva a ells ens ha suggerit la terminologia coneguda per hom per fer referència als nombres enters. Aquest és el punt de connexió entre l'inici de l'experimentació i els nombres coneguts pels estudiants. Ens proposem no abandonar la terminologia emprada a partir del problema amb la pretensió de continuar la recerca provocant una introducció híbrida entre la deductiva i la constructiva. Aquest és el punt de partida de la sessió del dia 12 de novembre, que té continuïtat en la sessió del dilluns 19 de novembre de 2007.

La finalitat general d'ambdues sessions és generar un entorn d'aprenentatge que faciliti la incorporació de l'estructura multiplicativa des d'un punt de vista deductiu per, tot seguit, recollir dades que permetin alimentar els objectius de la present investigació. Els instruments de recollida de dades emprats són els que es poden consultar en les pàgines 584, 585, 586 i 587. Els esmentats instruments han estat dissenyats per tal que la seva implementació faciliti dades que permetin assolir els objectius que hem mostrat. L'anàlisi de les dades que brollen de la implementació dels esmentats instruments es realitzarà en atenció als paràmetres que es poden consultar a partir de la pàgina 436.

6.8.3 Fase de valoració

Després de la implementació de la fase empírica de la recerca vam realitzar una fase de valoració. Aquesta té per finalitat recollir el punt de vista dels participants respecte de cadascun dels aspectes tractats en la implementació. La recollida de dades la vam realitzar al llarg del dies 26 de novembre i 3, 10 i 17 de desembre de 2007, tal com es recull en la taula disponible a la pàgina 460.

6.8.4 Síntesi dels instruments de recollida de dades

Donat que tota l'activitat prové d'un problema requerim un instrument que faciliti la reflexió dels participants i que, alhora, possibiliti que puguem tenir accés a la informació. El full de resolució lliurat per l'alumne és l'instrument escollit per recollir la informació d'aquesta fase d'intervenció. La taula següent mostra els instruments emprats així com les dates d'execució:

Instruments	Data d'implementació
Qüestionari diagnòstic 1 (p. 565)	17/09/2007
Qüestionari diagnòstic 2 (p. 566)	24/09/2007
Qüestionari diagnòstic 3 (p. 574)	1/10/2007
Intervenció 1 Enunciat problema - Resolució	08/10/2007
Intervenció 2 Lliurament 2 Enunciat problema - Resolució	15/10/2007
Intervenció 3 (p. 578, 579 i 580)	22/10/2007
Intervenció 4 (p. 408)	29/10/2007
Intervenció 5 (p. 581, 582 i 583)	5/11/2007
Intervenció 6 (p. 584, 585, 586 i 587)	12 i 19/11/2007
Qüestionaris de valoració. Veure pàgina 460	Fins 17/12/2007

Referències

ARCAVI, A. (1999): «...y en matemáticas, los que instruimos ¿qué construimos?» *Números*. 38, 39-56.

ARNAL, J.; RINCÓN, D.; LATORRE, A. (1992): *Investigación educativa. Fundamentos y metodología*. Barcelona: Labor.

BELTRÁN, M. (1988): *Ciencia y sociología*. Madrid: Centro de Investigaciones Sociológicas.

BRUNO, A.; MARTINON, A. (1994*a*): «Contextos y estructuras en el aprendizaje de los números negativos». *SUMA, 16*, 9-18.

GÓMEZ, B. (1999): «Cambios en las nociones de número, unidad, cantidad y magnitud». *Lugo: IX Jornadas para el Aprendizaje y Enseñanza de las Matemáticas,* 91-95.

GONZÁLEZ, J.L.; *et al.* (1990): *Números enteros*. Madrid: Síntesis.

GRAWITZ, M. (1975): *Métodos y técnicas en las ciencias sociales*. Barcelona: Hispano Europea.

HERNÁNDEZ, R.; FERNÁNDEZ, C.; BAPTISTA, P. (2003): *Metodología de la investigación*. México, D.F.: McGraw-Hill.

IRIARTE, M.; JIMENO, M.; VARGAS-MACHUCA, I. (1991): «Obstáculos en el aprendizaje de los números enteros». *SUMA, 7*, 13-18.

SIERRA, R. (1994): *Técnicas de investigación social : teoría y ejercicios*. Madrid: Paraninfo.

Capítol 7

Una introducció deductiva a través de la resolució de problemes

Índex

En aquest capítol es mostra el procés de resolució d'un problema que esdevé l'instrument d'intervenció de la present recerca en dues aules de primer curs de batxillerat (16-17 anys) de l'IES de l'Arboç. Destaquem en l'exposició els moments que amb més facilitat poden generar un impacte en l'estudiant i aprofundim en la visió retrospectiva. El detall facilita el disseny d'instruments de recollida de dades que permeten obtenir informació per respondre als objectius de la recerca.

7.1 El problema dels nombres consecutius I

Tot i que els alumnes de primer curs de batxillerat (16-17 anys) estan familiaritzats amb els nombres enters, l'enunciat del problema no precisa el conjunt numèric que s'utilitzarà en la seva resolució. Posteriorment, precisar la resolució del problema en els nombres naturals conduirà a la necessitat d'introduir nous nombres per tal de descomposar en suma de consecutius qualsevol nombre natural. La intenció de fons radica en l'acceptació dels nombres naturals, les seves operacions i les seves propietats per, a continuació, estendre-les als nous nombres que es requereixin en la resolució del problema.

Problema 7.1.1 *Quins són els nombres naturals que es poden escriure com a suma de nombres*[1] *consecutius?*

Considerar casos particulars i experimentar amb ells sembla l'opció més raonable per part de tot resolutor no familiaritzat amb aquest problema.

3=1+2	8=?	13=6+7
4=?	9=4+5	14=2+3+4+5
5=2+3	10=1+2+3+4	15=4+5+6
6=1+2+3	11=5+6	16=?
7=3+4	12=3+4+5	...

[1]En el plantejament d'aquest problema s'evita precisar «nombres naturals» ja que tot i que en un començament només s'empraran aquests, la resolució del problema conduirà a la introducció d'un nou conjunt de nombres, els nombres enters.

> Contar, medir y construir fueron las primeras operaciones matemáticas de la Humanidad.
>
> (PUIG ADAM, 1960, p. 111)

Observar les descomposicions per a cadascun dels casos particulars suggereix nous tractaments experimentals. Si el 4 i el 8 no es poden escriure com a suma de nombres naturals consecutius, pot sorgir l'interrogant relatiu a si esdevé el mateix amb el 16, 32, 64, ... Si cal, l'experimentació amb més casos particulars conduirà a la següent conjectura:

Conjectura 7.1.1 *Les potències de 2 són els únics nombres naturals que no es poden escriure com a suma de nombres consecutius.*

L'observació de casos particulars facilita l'establiment de resultats conjecturals. Les conjectures s'han de contrastar i, potser, refutar. Quan no es poden refutar cal preguntar-se el *perquè* de la seva certesa, és a dir cercar una raó de fons que justifiqui la seva veracitat.

> Un juicio general y conjetural adquiere más crédito si es verificado en un nuevo caso particular.
>
> (PÓLYA, 1966*a*, p. 30)

Però a l'hora de posar a prova aquesta conjectura amb més casos particulars ens trobem que no és fàcil poder-la refutar, tot i així:

> [...] las conjeturas son siempre sospechosas.
>
> (MASON *et al.*, 1988, p. 93)

Tot seguit mostrem un tractament algebraic que permet aprofundir en la suma de nombres naturals consecutius. No és imprescindible provocar-lo per guiar l'alumne cap a la construcció dels nombres enters ni per aconseguir la fita immediata d'aquest raonament, tal com veurem. La seva consecució permet un progrés en la resolució i una justificació de la utilitat de les progressions que cal no menystenir.

Els alumnes de primer curs de batxillerat que estan familiaritzats amb les progressions aritmètiques[2] poden caracteritzar la suma de nombres consecutius. Tot acceptant tractaments particulars previs, en general tenim que la suma dels nombres naturals des de n fins a $n+k$ és:

$$n + (n+1) + \ldots + (n+k) = \tfrac{(2n+k)(k+1)}{2}$$

- Si k és parell aleshores $\frac{2n+k}{2}$ és natural i $k+1$ és un factor senar, per tant, la suma no és una potència de 2.
- Si k és senar aleshores $\frac{k+1}{2}$ és natural i $2n+k$ és un factor senar, per tant, la suma no és una potència de 2.

Aquest tractament algèbric es pot, però, evitar. Si la quantitat de sumands és parell escrivim la suma ordenada. D'aquesta manera és factible descobrir que la suma del primer més el darrer coincideix amb la suma del segon més el penúltim i així successivament. La suma es pot escriure, per tant, com la semisuma d'un dels parells esmentats pel producte de la meitat del total de sumands. Un tractament general d'aquesta observació es concreta en:

$$n + (n+1) + \ldots + (n+k) = \tfrac{n+n+k}{2} \cdot \tfrac{n+k-n+1}{2} = \tfrac{(2n+k)(k+1)}{2}$$

Veurem en la secció 7.5 (p. 264) que es pot emprar un argument molt més elemental si acceptem els nous nombres que ens suggerirà el problema quan ens proposem resoldre'l en tots els casos possibles.

> Sólo cuando un resultado encaja en un contexto más amplio empiezas realmente a ver su significado.
>
> (Mason *et al.*, 1988, p. 144)

Lema 7.1.1 *La suma de nombres naturals consecutius mai és una potència de* 2.

[2]En el currículum comú de l'Educació Secundària Obligatòria no es proposa aquest contingut. Nogensmenys, en el currículum variable de la darrera etapa obligatòria pot ser un objectiu a assolir per una part de l'alumnat.

Pregunta 7.1.1 *Els nombres naturals que no són potències de* 2*, sempre es poden escriure com a suma de nombres naturals consecutius?*

Mirarem en la recerca de mesurar fins a quin punt els alumnes es formulen a ells mateixos aquesta i d'altres preguntes. Facilitem que sigui l'alumne qui descobreixi propietats que li permetin escriure els nombres naturals com a suma de nombres consecutius. L'experimentació amb nombres naturals senars mostra que aquests sempre es poden escriure com a suma de dos nombres consecutius.

Conjectura 7.1.2 *Tot nombre natural senar més gran que* 1 *es pot escriure com la suma de dos nombres naturals consecutius.*

3=1+2	11=5+6	19=9+10
5=2+3	13=6+7	21=10+11
7=3+4	15=7+8	23=11+12
9=4+5	17=8+9	...

Cercar un argument que justifiqui la veracitat d'aquesta conjectura condueix a veure que la suma dels dos nombres naturals, l'anterior i el posterior a la meitat (mai exacta) de tot nombre natural senar, és el nombre considerat. En llenguatge algebraic tenim que si n és senar aleshores $n = \frac{n-1}{2} + \frac{n+1}{2}$. Un altre possible argumentació passa per considerar tot nombre senar escrit de la forma $2n + 1$ i, per tant, $2n + 1 = n + (n + 1)$.

L'experimentació amb nombres naturals que no són potències de 2 permet veure que aquests sempre es poden escriure com una suma amb una quantitat senar de nombres consecutius. Que els alumnes participants en la recerca relacionin la quantitat de sumands amb els divisors dels nombres és del nostre interès. Tanmateix, aquest descobriment no treu la possibilitat que alguns nombres es puguin escriure com una suma amb una quantitat parell de nombres consecutius. A més, hi ha casos en què es pot descomposar un nombre amb diverses sumes de nombres consecutius, algunes amb una quantitat senar de sumands i d'altres amb una quantitat parell.

$$6 = 1 + 2 + 3$$
$$10 = 1 + 2 + 3 + 4 = 0 + 1 + 2 + 3 + 4$$
$$12 = 3 + 4 + 5$$

$$30 = 9 + 10 + 11$$
$$30 = 4 + 5 + 6 + 7 + 8$$
$$30 = 6 + 7 + 8 + 9$$

Conjectura 7.1.3 *Tot nombre natural no nul que no és una potència de dos es pot escriure com la suma d'una quantitat senar de nombres naturals consecutius.*

La raó que justifica aquesta conjectura és que la descomposició factorial de tot nombre natural que no és una potència de 2 té sempre un factor senar. Aquest descobriment esdevé fonamental en la resolució del problema i s'inclou en la fase experimental de la present investigació.

$$6 = 2 \cdot 3 = 2 + 2 + 2$$
$$10 = 2 \cdot 5 = 2 + 2 + 2 + 2 + 2$$
$$12 = 3 \cdot 4 = 4 + 4 + 4$$

L'increment i disminució adequat sobre els sumands permet expressar cadascun d'aquests nombres com a suma de consecutius tal com s'observa en la figura 7.1 (p. 247).

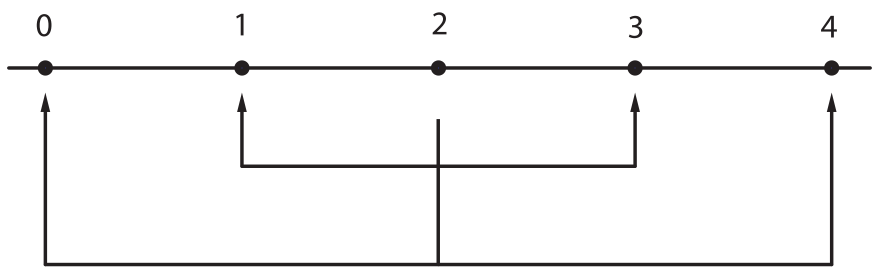


Figura 7.1: El número 10 es pot escriure com a suma de cinc dosos. El gràfic mostra com es pot convertir aquesta suma en una de nombres consecutius.

$$6 = 2 \cdot 3$$
$$6 = 2 + 2 + 2$$
$$6 = 1 + 2 + 3$$

$$10 = 2 \cdot 5$$
$$10 = 2 + 2 + 2 + 2 + 2$$
$$10 = 0 + 1 + 2 + 3 + 4$$

$$12 = 4 \cdot 3$$
$$12 = 4 + 4 + 4$$
$$12 = 3 + 4 + 5$$

Aquest procediment no es pot aplicar a aquells nombres, la descomposició factorial dels quals no té cap factor senar, és a dir, les potències de 2. El treball experimental pot conduir a la següent pregunta:

Pregunta 7.1.2 *De quantes maneres es pot descomposar un nombre natural com a suma de nombres consecutius?*

> Dado que el conjeturar trae consigo el acto creativo de generalizar, no basta con acumular sistemáticamente y esperar que una ley salte a la vista. Se requiere estar totalmente metido en el problema. Las particularizaciones tendrán que ser reorganizadas y habrá que explorar las analogías que se vean.
>
> (MASON *et al.*, 1988, p. 92)

El treball experimental amb els nombres 14, 22 o 26, entre d'altres, mostra que tot i no tractar-se de potències de 2, no poden ser escrits com una suma de nombres naturals consecutius utilitzant el mateix mètode. El coneixement que hem emprat en la resolució del problema no ens faculta resoldre tots els casos que l'activitat experimental ens mostra. Caldrà considerar nous mètodes, nous tractaments o nous nombres per poder atendre tots els casos.

Més concretament, la resolució d'aquest problema condueix a afegir nous nombres si volem donar resposta a tots els casos. A més, hem vist en la conjectura 7.1.2 (p. 246) que tot nombre senar es pot escriure com a suma de dos nombres consecutius. També hem vist en la conjectura 7.1.3 (p. 247) que tot nombre no nul que no sigui una potència de 2, en particular tot nombre natural senar, es pot escriure com la suma d'una quantitat senar de nombres naturals consecutius. No hem aconseguit però un coneixement global que ens permeti entendre el problema d'un cop d'ull, particularitat que acostuma a mostrar que no el podem donar per acabat.

La resolució del problema dels nombres consecutius emprant nombres naturals ens condueix a una resolució parcial de l'activitat. Ara bé, tal com diuen MASON *et al.* (1988, p. 92), l'acte creatiu de generalitzar suggereix mirar d'aconseguir totes les descomposicions possibles per cada nombre. L'assoliment d'una visió global del problema requereix però que aquelles descomposicions que fins ara no tenien solució en puguin tenir.

7.2 Introducció del nombre enter a partir del problema

El problema dels nombres consecutius tractat en la secció anterior s'ha plantejat i resolt parcialment pel fet que ens hem limitat a emprar nombres naturals. En aquesta secció veurem com la voluntat de completar la resolució d'aquest problema permet, sota la fonamental orientació del professor, fer que el problema esdevingui un instrument per a la introducció d'uns nous nombres que neixen dels naturals constituint el que anomenem conjunt dels nombres enters.

7.2.1 Analogia amb un problema històric

En la primera edició del llibre *Artis magnae*, publicat l'any 1570 per Girolamo Cardano, aquest emprà nombres complexos en la resolució d'un problema geomètric[3]. Rafael Bombelli, qui havia llegit l'*Artis magnae* de Cardano, va escriure un tractat recopilatori de l'àlgebra coneguda en la seva època titulat *L'Algebra* (1966). En aquesta obra s'utilitzen per primera vegada els nombres complexos en la resolució de l'equació cúbica que té les seves tres arrels reals. La idea de fons rau en emprar el que avui anomenem nombres complexos conjugats, encara que no fossin nombres acceptats en aquell moment, per arribar a les arrels reals de l'equació.

Bombelli va resoldre per radicals l'equació cúbica passant pels nombres complexos i retornant a una resolució real de l'equació inicial. La resolució d'un problema va conduir a ampliar el conjunt de nombres en el que s'havia plantejat. El problema que proposem en aquesta experimentació facilita que l'alumne visqui, en un entorn molt més elemental, l'ampliació dels nombres naturals per tal de donar resposta al problema proposat; de fet es tracta d'un cas anàleg. L'esmentada ampliació permet introduir un nou conjunt de nombres, els enters, que neixen de manera natural del procés de resolució del problema proposat. Els nombres enters emanen dels nombres naturals per donar resposta a la resolució d'un problema, i respecten totes aquelles lleis que acceptàvem pel conjunt de nombres de partida.

[3] El llibre *The Great art: the rules of algebra* és una traducció de l'obra *Artis magnae* de CARDANO (1968) que va ser editada per T. Richard Witmer.

Les operacions en els nombres enters les definim per extensió d'aquelles que operen sobre els nombres naturals. En definitiva, el problema condueix al *principi de permanència de les lleis formals* (p. 87) de Hankel, sense necessitat de forçar-ho.

7.2.2 Insuficiència dels nombres naturals

Emprant l'estratègia mostrada i exemplificada en l'apartat 7.1 intentem escriure el 14 com a suma de nombres consecutius. En virtut de l'exposat (p. 247), tenim que $14 = 2 \cdot 7$ i, en conseqüència, $14 = 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2$.

D'aquests set sumands en prenem un i el deixem estàtic en el centre de la suma; és possible ja que hi ha una quantitat senar de sumands, i no seria possible amb una quantitat parell. A continuació prenem dos sumands més i, mentre un d'ells l'incrementem en una unitat, l'altre el disminuïm en una; la suma no varia, $2 + 2 = 1 + 3$. Sobre un altre parell de sumands incrementem un d'ells en dues unitats i l'altre el disminuïm també en dues; la suma no varia, $2+2 = 0+4$. Amb el darrer parell de sumands incrementem un dels nombres en tres unitats i l'altra el disminuïm també en tres. El 2 que incrementem en tres unitats esdevé un 5, mentre que no podem disminuir en tres unitats l'altra 2. La representació sobre la recta numèrica permet visualitzar la impossibilitat d'aquesta descomposició amb nombres naturals (fig. 7.2.2, p. 251)[45].

Per simbolitzar el nou objecte emprem la terminologia $(2, 3)$. La primera coordenada d'aquest parell indica el nombre natural de partida i la segona coordenada

[4]En algunes branques de la matemàtica i algunes vegades, per exemple en teoria de nombres, no es reconeix el zero com un nombre natural, mentre que en unes altres, especialment en teoria de conjunts, lògica i informàtica, es manté la postura oposada. En aquest treball, el zero és considerat un nombre natural.

[5]L'ús del zero com a número en matemàtiques és relativament tardà. Al segle IX a l'Índia utilitzaven un codi de nou nombres o cada un d'ells se simbolitzava per un cert nombre d'angles. Així, l'1 tenia un angle, el 2 tenia dos angles, ... Per representar el buit es va optar per un símbol sense angles. D'aquí va néixer la figura arrodonida que avui dia encara utilitzem. El sistema de numeració hindú va arribar a Occident a través dels àrabs. A Occident, el zero va permetre el desenvolupament dels sistemes numerals basats en la posició. Els sistemes posicionals, en contraposició als sistemes numerals additius (com els nombres romans), tenien l'avantatge de facilitar molt les operacions. Però per simbolitzar una posició buida no havien d'utilitzar un espai buit, i això produïa dificultats de lectura i malentesos. Aquest problema es va resoldre quan el 0 va substituir a l'espai buit. Ara, el numeral o dígit zero s'utilitza en la majoria de sistemes numerals. Informació extreta de `http://ca.wikipedia.org/wiki/Zero` i adaptada.

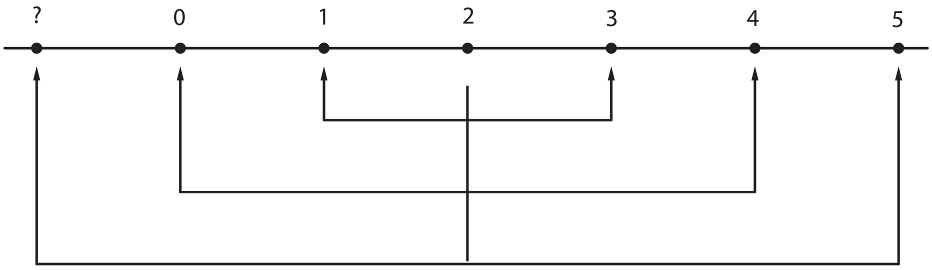


Figura 7.2: Catorze es pot escriure com a suma de set dosos. El gràfic mostra com es pot convertir aquesta suma en una de nombres consecutius, però un dels sumands no és un nombre natural.

indica la quantitat de posicions (unitats) que el desplacem cap a l'esquerra[6].

$(0,1)$, $(1,2)$, $(2,3)$, $(3,4)$, $(4,5)$, $(5,6)$, $\ldots$ són parells de nombres naturals que es corresponen amb una mateixa posició i que fan referència a un mateix nombre (fig. 7.2.2, p. 252). Aquest nou nombre no és natural i l'afegim als que ja teníem pel fet que ens permet completar la resposta al problema proposat, és a dir, ens permet descomposar el 14 com a suma de nombres consecutius. Si volem que 14 tingui descomposició com a suma de nombres consecutius cal afegir-ne de nous. Si ens limitem els nombres emprats als naturals aleshores 14 no té descomposició com a suma de nombres consecutius.

Tots els parells esmentats a l'inici d'aquest paràgraf fan referència a una mateixa posició i, per tant, podem convenir que representen un mateix nombre, que no és natural.

7.2.3 El conjunt dels nombres enters

El conjunt format per tots aquests nombres utilitzant el mètode prèviament descobert, que acceptem per tal de resoldre el problema en tots els casos que sigui possible, convenim a anomenar-lo conjunt dels nombres enters i el representem per $\mathbb{Z}$. Cada un d'ells té tants representants com vulguem (fig. 7.2.3, p. 253).

[6]En la introducció del nombre enter cal tenir cura a l'hora d'emprar el símbol « $-$ ». Aquest té un significat per a l'alumne que l'associa amb l'operació concreta «treure». Com exemple que reforça aquesta posició vegem com REY PASTOR *et al.* (1969, p. 31) prenen la cura esmentada: «Más precisamente, definamos por abstracción el número entero mediante pares ordenados de números naturales cualesquiera, que indicaremos $[a_1 - a_2]$ (aquí, provisionalmente, $-$ significa un guión)».

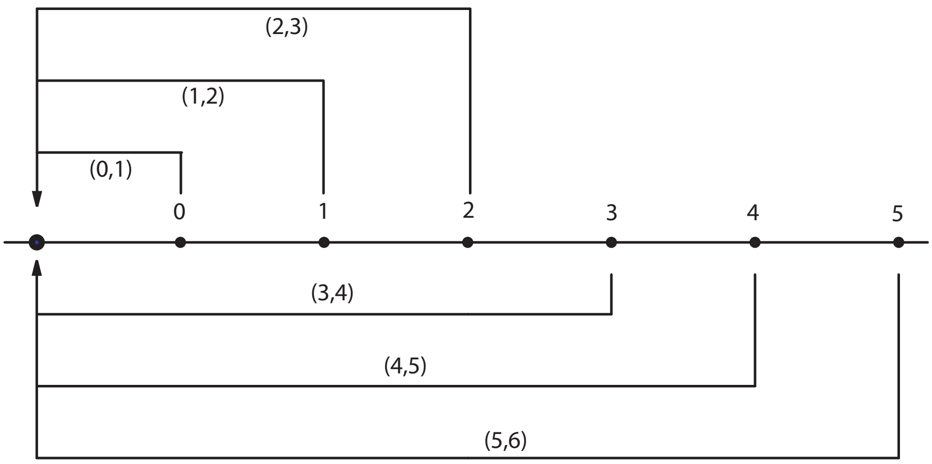


Figura 7.3: $(0,1)$, $(1,2)$, $(2,3)$, $(3,4)$, $(4,5)$, $(5,6)$, $\ldots$ fan referència a un mateix nombre.

Aquesta introducció dels nombres enters permet atendre el mètode cíclic ja que facilita a l'alumne de batxillerat vincular la seva experiència prèvia, pròpia de l'aprenentatge a través de models concrets, amb la posterior definició formal (mètode constructiu) del conjunt dels nombres enters, tal com veurem en les pàgines següents.

L'experiència prèvia amb nombres enters d'un alumne que inicia primer de batxillerat consisteix en relacionar aquests nombres amb situacions quotidianes (identificació de les plantes d'un edifici, quantitat de diners en un compte d'estalvis, temperatures expressades amb nombres enters, ...), conseqüència de l'ensenyament a través de models concrets. Aquest tipus d'experiència està però molt lluny de la definició formal (mètode constructiu) del conjunt dels nombres enters.

Hom entendrà que des del treball amb models concrets, amb el que l'alumne s'ha pogut familiaritzar en l'ensenyament obligatori, fins la definició formal pròpia de l'ensenyament constructiu que, quan s'escau, és el punt de partida en els estudis superiors, el batxillerat ha de permetre que l'alumne pugui vincular ambdues introduccions. Veurem com podem fer possible aquesta vinculació per, posteriorment, centrar la recerca educativa empírica en l'efecte que té el mètode deductiu en l'aprenentatge de l'alumne.

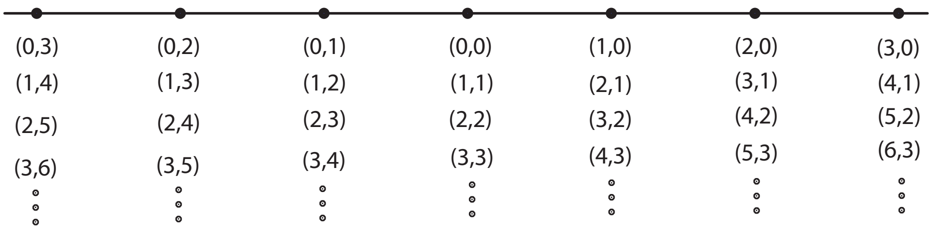


Figura 7.4: El problema condueix a la construcció d'uns nous nombres.

7.2.4 Injecció de $\mathbb{N}$ en $\mathbb{Z}$

A cada nombre natural a li correspon l'enter representat pel parell $(a, 0)$. Tal com hem vist el nombre enter $(a, 0)$ té tants representants com vulguem: $(a, 0)$, $(a + 1, 1)$, $(a + 2, 2)$, ..., $(a + k, k)$, ...

Tot nombre enter representat pel parell (a, b) on $a \geq b$, també està representat pel parell $(a - b, 0)$ i prové del nombre natural $a - b$. En canvi, un representant del nombre enter (a, b) on $a < b$, és el parell $(0, b - a)$, que no prové de cap nombre natural.

Podem, per tant, identificar cada nombre natural amb un nombre enter i, en conseqüència, tot nombre natural es correspon amb un nombre enter[7]. Farem referència a aquest fet dient que els nombres naturals s'injecten en els enters. A més, les operacions amb nombres enters les acceptarem per extensió de les que operen sobre els nombres naturals. Per fer referència a aquesta extensió del conjunt i de les operacions direm que el conjunt dels nombres naturals està injectat en el conjunt dels nombres enters (fig. 7.2.4, p. 253).

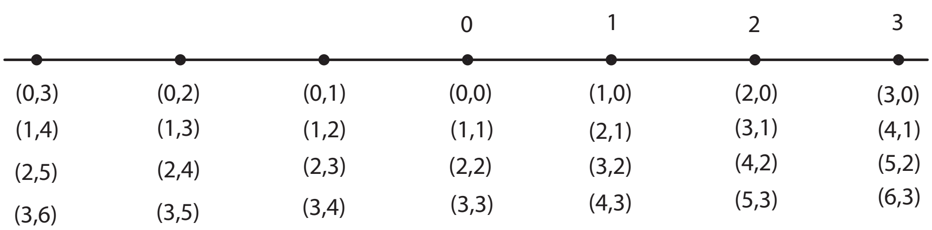


Figura 7.5: El problema condueix a la construcció d'un nou conjunt de nombres.

[7] Que a cada nombre natural li puguem fer correspondre un nombre enter sovint s'expressa establint una bijecció entre els nombres naturals i els nombres enters positius.

L'estudi d'aquesta correspondència entre els nombres naturals i una part dels nombres enters és la llavor de l'isomorfisme que es pot establir entre ambdós conjunts numèrics. La suma, el producte i la desigualtat en els nombres naturals s'estén als nombres enters positius i d'aquí a tots els enters. Això és aplicar el *principi de permanència de les lleis formals* (p. 87) de HANKEL (1867).

7.2.5 Igualtat de nombres enters

Tot nombre natural a es correspon amb el nombre enter representat pels parells $(a, 0)$, $(a+1, 1)$, $(a+2, 2)$, ..., $(a+k, k)$, ... Prendrem en general com a representant el parell $(a, 0)$ i l'anomenarem representant canònic del nombre enter. Hom accepta per conveni triar l'expressió «a» o «$+a$» per fer referència al nombre enter representat pel parell $(a, 0)$. La nomenclatura utilitzada per fer referència a un nombre natural s'empra també per fer referència al nombre enter que prové de la seva injecció en els enters.

Tot nombre enter representat pel parell $(0, a)$ també ho és pels parells $(1, a+1)$, $(2, a+2)$, $(3, a+3)$, ..., $(k, a+k)$, ... Per motius de simplicitat mirarem de prendre, en la mesura que sigui possible, el parell $(0, a)$ com a representant. Veiem que quan a un d'aquests parells li sumem un mateix nombre natural a tots dos components, el parell que obtenim representa el mateix nombre enter. En general perquè els parells (a, b) i (c, d) representin un mateix nombre enter cal que $a+d = b+c$[8].

7.3 Sobre l'addició de nombres enters

Tot alumne de primer curs de batxillerat sap sumar nombres naturals. A continuació sumem dos nombres enters positius tal com se sumen els nombres naturals que es corresponen amb ells per l'isomorfisme canònic.

[8]Si prenem el model concret de les fitxes de dos colors que es neutralitzen tenim una situació anàloga que viu en un context proper a l'alumne. Dos parells indiquen un mateix estat si la quantitat de fitxes vermelles del primer parell més les blaves del segon coincideix amb la quantitat que resulta de sumar les blaves del primer amb les vermelles del segon parell.

7.3.1 Suma de nombres enters

Com que tot nombre natural a es correspon amb el nombre enter representat pel parell $(a, 0)$, definim $(a, 0) + (b, 0) = (a + b, 0)$.

Considerem els nombres enters representats pels parells (a, b) i (c, d), amb $a \geq b$ i $c \geq d$. Per sumar-los prenem representants que tenen la segona coordenada nul·la, que anomenem representants canònics, i apliquem la definició anterior:

$$(a, b) + (c, d) = (a - b, 0) + (c - d, 0) = (a - b + c - d, 0) = (a + c, b + d)$$

Quan sumem dos nombres enters que provenen de la injecció de dos naturals, aquesta es comporta com la suma de nombres naturals, en virtut del procés emprat per definir-la. Quan els dos nombres enters que vulguem sumar no provinguin, ambdós o un d'ells, de nombres naturals, acceptem la mateixa definició. D'aquesta manera estenem, en virtut del *principi de permanència de les lleis formals* (p. 87) de HANKEL (1867), les propietats de la suma de nombres naturals a la suma de nombres enters[9] [10].

Definició 7.3.1 *La suma de dos nombres enters representats pels parells* (a, b) *i* (c, d) *és el nombre enter representat pel parell* $(a + c, b + d)$.

Suma ben definida

Per tal que puguem acceptar aquesta definició cal que l'operació definida no depengui del representant escollit per a cada sumand. La definició ha de complir la llei uniforme, emprant la terminologia de REY PASTOR *et al.* (1969, p. 32), és a dir, el resultat que obtinguem en sumar enters amb aquesta definició ha de ser

[9] La suma de nombres enters amb models concrets es basa en estendre l'acció d'afegir i, en conseqüència, estén la suma de nombres enters positius a la suma de qualssevol enters.

[10] En el model concret de les fitxes de dos colors, que es neutralitzen, el parell $(5, 2)$ representa una situació real (5 fitxes blaves i 2 vermelles) i el parell $(2, 1)$ una altra. Per defensar la suma de nombres enters estenem la suma de nombres naturals, és a dir, afegim els dos conjunts de fitxes: $(5, 2)+(2, 1) = (7, 3)$. El mètode deductiu estén la suma però es desvincul·la de la realitat propera a l'alumne. Això que pot ser una mancança quan l'operació matemàtica es pot identificar amb una situació real transparent, esdevé una virtut quan la situació real condueix a una justificació de difícil interpretació.

independent dels parells escollits. D'aquesta manera l'operació està definida entre nombres enters i no entre parells aïllats[11].

(a, b) i (a', b') representen un mateix nombre enter si $a + b' = a' + b$. Anàlogament, (c, d) i (c', d') representen un mateix nombre enter si $c + d' = c' + d$.

$$(a, b) + (c, d) \underbrace{=}_{Def.\ 7.3.1} (a + c, b + d)$$
$$(a', b') + (c', d') \underbrace{=}_{Def.\ 7.3.1} (a' + c', b' + d')$$

Per veure que els dos parells resultants representen el mateix nombre enter cal que $(a + c) + (b' + d') = (b + d) + (a' + c')$. Reordenant les sumes obtenim $(a+b')+(c+d') = (a'+b)+(c'+d))$ i aquesta igualtat és certa en virtut d'haver suposat que (a, b) i (a', b') són dos representants d'un mateix nombre enter, és a dir $a + b' = a' + b$, i que (c, d) i (c', d') ho són d'un altre, és a dir $c + d' = c' + d$.

Una altra manera d'atendre la independència dels representants escollits rau en considerar $(a, b) \sim (a + k, b + k)$ i $(a', b') \sim (a' + t, b' + t)$. Aquesta manera d'escriure els representats simplifica els càlculs realitzats anteriorment. Tanmateix, som conscients de la dificultat que poden aportar les consideracions ateses en aquest apartat.

Sobre el comportament de la suma de dos nombres enters

Facilitar a l'alumne la possibilitat que descobreixi el comportament de la suma de dos nombres enters es factible permetent-li que ho experimenti amb operacions particulars. Aquí presentem sintèticament, partint de representants canònics, el que a l'aula es pot desenvolupar a través d'activitats amb nombres concrets que fomenten el descobriment del coneixement que pretenem que l'alumne adquireixi.

- $(a, 0) + (b, 0) = (a + b, 0)$. Tant els sumands com el resultat són nombres enters que provenen de la injecció de nombres naturals. La suma de nombres enters l'hem definit per imitació de la suma de nombres naturals. Fins i tot confonem l'escriptura tot escrivint $a + b$ per fer referència a la suma de nombres enters.

[11] La no dependència del representant escollit no es planteja en els models concrets perquè forma part d'una necessitat interna a la matemàtica.

- $(a, 0) + (0, b) = (a, b)$.

  - Si $a \geq b$ aleshores $(a, b) = (a - b, 0)$. Sumar al nombre enter representat pel parell $(a, 0)$ l'enter representat per $(0, b)$ té un efecte sobre el resultat que és equivalent a restar el nombre natural b del nombre natural a; en aquest cas «restar» es pot interpretar com treure. Aquest fet ens condueix a acceptar la terminologia $-b$ per denotar el nombre enter $(0, b)$. Emprant la notació esmentada podem dir que sumar l'enter $-b$ és equivalent a restar l'enter denotat per b. Aquest signe « $-$ » apareix, per tant, com a conseqüència de la definició de suma de nombres enters. La similitud entre sumar l'enter $-b$ i el comportament de la resta de nombres naturals pren en els nombres enters un significat que no es correspon amb el de «treure» en tots els casos que ens puguem trobar[12].
  - Si $a < b$ aleshores $(a, b) = (0, b - a)$. El resultat és un enter que no es correspon amb cap nombre natural. L'enter representat pel parell (a, b) es localitza en un punt de la recta numèrica que s'obté sortint del punt corresponent al nombre natural a i anant b unitats cap a l'esquerra. La notació suggerida per l'ítem anterior ens condueix a denotar l'enter $(a, b) = (0, b - a)$ per $-(b - a)$. La representació sobre la recta permet visualitzar els nombres enters $b - a$ i $-(b - a)$ oposats respecte de l'origen, fet que suggereix l'acceptació de la nomenclatura *nombres enters oposats*. La suma de dos nombres enters oposats és zero ja que $-a + a = (0, a) + (a, 0) = (a, a) = 0$. Els nombres enters de la forma $(a, 0)$ hom els anomena «nombres enters positius» i es denoten, de manera simplificada i habitual, per a o $+a$. Els nombres enters de la forma $(0, a)$ hom els anomena «nombres enters negatius» i es denoten,

[12] Considerem el model concret de les fitxes de dos colors que es neutralitzen. El parell $(0, 2)$ denota que no tenim cap fitxa blava i que en tenim dues de vermelles. El parell $(0, 1)$ denota que no tenim cap fitxa blava i que en tenim una de vermella. Afegir ambdues col·leccions ens condueix a no tenir cap fitxa blava i tenir-ne tres de vermelles. En notació simplificada $(-2) + (-1) = (-3)$. L'ensenyament a través de models concrets proposa l'ús d'aquesta terminologia i empra el símbol « $-$ » sense que en cap moment s'hagi fet referència a l'acció empírica «treure». Així, l'ensenyament del nombre enter a través de models concrets es vincula amb les experiències empíriques però les terminologies emprades es desprenen de l'esmentada vinculació.

de manera simplificada i també habitual, per $-a$.

- $(0, a) + (0, b) = (0, a + b)$. En aquest cas ambdós sumands són nombres enters que no es corresponen amb cap nombre natural. El resultat també és un nombre enter que tampoc es correspon amb cap nombre natural. Emprant la notació proposada i justificada anteriorment tenim que $(-a) + (-b) = -(a + b)$.

7.3.2 Les regles de l'addició de nombres enters

A continuació mostrem tota una colla de propietats que es deriven de la definició de suma de nombres enters. D'elles es desprèn que la suma i la resta de nombres enters s'integren en una mateixa operació que hom anomena addició. El treball amb aquestes propietats, que és possible amb exemples concrets en un primer moment, permet connectar amb els inicis de l'àlgebra elemental.

- Sumar a un nombre enter positiu a un altre nombre enter positiu b té un comportament equivalent[13] a sumar dos nombres naturals.

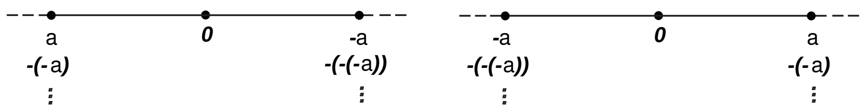
- -3 és un nombre que hem denotat així perquè quan el sumem a 3 obtenim 0. Si acceptem que $-(-3))$ és un nombre aleshores, pel mateix motiu que acabem d'emprar, és un nombre que quan el sumem a (-3) té per resultat 0. Però 3 també és un nombre que quan el sumem a -3 té per resultat 0. Ara bé, per la llei de cancel·lació[14], si hi ha un nombre que sumat a -3 dóna zero aleshores aquest és únic. En conseqüència, $-(-3)) = 3$.

- $-a$ denota un nombre que quan el sumem a a obtenim 0. Si acceptem que $-(-a)$ és un nombre aleshores, pel mateix motiu que acabem d'emprar, és un nombre que quan el sumem a $(-a)$ té per resultat 0. Però a també és un nombre que quan el sumem a $-a$ té per resultat 0. Ara bé, per la llei de cancel·lació, si hi ha un nombre que sumat a $-a$ dóna zero aleshores aquest és únic. En conseqüència, $-(-a) = a$.

[13] L'expressió «comportament equivalent» l'emprem per indicar que les regles amb què s'operen els nombres són les mateixes entre nombres naturals que amb els corresponents nombres enters positius per l'isomorfisme canònic.

[14] La llei cancel·lativa de l'addició en $\mathbb{N}$ diu que si a, b i c pertanyen a $\mathbb{N}$ i sabem que $a+b = a+c$ aleshores $b = c$ tal com mostren, entre d'altres, Rey Pastor *et al.* (1969, p. 21).

- Anomenem oposat del nombre enter $a = (a, 0)$ al nombre enter que visualitzem oposat a ell respecte de l'origen en la representació en la recta numèrica, és a dir, al nombre $(0, a) = -a$; tal com hem exposat anteriorment. La suma d'ambdós és zero; $a + (-a) = (a, 0) + (0, a) = (a, a) = (0, 0)$. A més, l'oposat del nombre enter $-a = (0, a)$ és un altre nombre enter de manera que ambdós són simètrics respecte de l'origen i que sumen zero, és a dir, l'oposat del nombre enter $-a = (0, a)$ és l'enter $(a, 0)$. Emprant la notació simplificada i ja acceptada tenim que $-(-a) = a$ (fig.7.6, p. 259).



(a) Si $a < 0$ (b) Si $a > 0$

Figura 7.6: L'alumne situa sobre la recta numèrica els nombres enters representats pels parells $(a, 0)$ i $(0, a)$, sintèticament expressats per a i $-a$ respectivament, visualitza la seva posició i els anomena nombres enters oposats. Es facilita amb aquest procés que l'alumne descobreixi que fer l'oposat és una operació involutiva.

- Sumar a un nombre enter positiu[15] a un altre nombre enter negatiu $-b$ té un comportament equivalent a la resta de dos nombres naturals si $a \geq b \geq 0$; en aquest cas $a + (-b) = a - b$. Si $0 \leq a < b$ aleshores $a + (-b) = (a, 0) + (0, b) = (a, b) = (0, b - a) = -(b - a)$.

- Restar a un nombre enter positiu a un altre nombre enter positiu b té un comportament equivalent a la resta de nombres naturals si $a \geq b \geq 0$. Ara bé si $0 \leq a < b$, com que restar un nombre enter té el mateix comportament que sumar el seu oposat (p. 259) tenim que $a - b = a + (-b) = (a, 0) + (0, b) = (a, b) = (0, b - a) = -(b - a)$.

- Suma de dos nombres enters negatius:

Si $a \geq 0$ i $b \geq 0$ tenim $(-a)+(-b) = (0, a)+(0, b) = (0, a+b) = -(a+b)$

[15] a denota un nombre enter positiu quan té el parell $(a, 0)$ per representant. $(-b)$ denota un nombre enter negatiu quan té el parell $(0, b)$ per representant.

- Restar a un nombre enter negatiu $-a$ un altre nombre enter positiu b té el següent efecte: $(-a) - b = -a + (-b) = (0, a) + (0, b) = (0, a + b) = -(a + b)$

- Restar a un nombre enter negatiu $-a$ un altre nombre enter negatiu $-b$ permet el següent tractament. Si $a \geq b \geq 0$ aleshores $-a - (-b) = -a + b = (0, a) + (b, 0) = (b, a) = (0, a - b) = -(a - b)$. Si $0 \leq a < b$ aleshores $-a - (-b) = -a + b = (0, a) + (b, 0) = (b, a) = (b - a, 0) = b - a$.

Les propietats que es deriven de la definició de la suma de nombres enters permeten integrar la suma i la resta de nombres enters com una mateixa operació que anomenem addició. Podem veure que l'ensenyament deductiu del nombre enter permet connectar l'aritmètica amb l'àlgebra elemental.

La introducció deductiva dels nombres enters ens ha permès definir la suma d'aquests per extensió de la suma de nombres naturals. Ara que ja tenim els resultats, si introduïm el concepte de valor absolut[16] el redactat de les regles de la suma de nombres enters es pot presentar sintèticament tal com s'exposa a continuació.

- **Regla 7.3.1** *La suma de dos nombres enters positius és la suma dels seus valors absoluts.*

- **Regla 7.3.2** *La suma de dos nombres enters negatius és l'oposat de la suma dels seus valors absoluts.*

- **Regla 7.3.3** *Per sumar un enter positiu i un enter negatiu considerem els seus valors absoluts, restem al major el menor i posem al resultat el signe de l'enter que té major valor absolut.*

Fent ús de la terminologia sintètica acceptada, per dos nombres enters a i b qualssevol tenim:

- $a + b$
- $(-a) + b = -(a - b)$
- $a + (-b) = a - b$
- $(-a) + (-b) = -(a + b)$

[16] El valor absoluto de α, indicado por $|\alpha|$, se define como el número positivo entre los dos $+\alpha$ y $-\alpha$ si $\alpha \neq 0$, poniendo además $|0| = 0$ (Rey Pastor *et al.*, 1969, p. 35).

- $\cdots$
- $a - b$
- $a - (-b) = a + b$
- $(-a) - b = -(a + b)$
- $(-a) - (-b) = -(a - b)$
- $\cdots$

> Son precisamente las leyes formales del cálculo las que permiten construir las tablas de sumar y multiplicar aprendidas en la escuela primaria, así como las usuales reglas operatorias de cálculo numérico, demostrables basándose en dichas leyes formales; aun más, éstas permiten mecanizar el cálculo numérico, mediante máquinas de calcular (los pseudo cerebros de acero de la propaganda), según ya previeron los genios profundos de Pascal y de Leibnitz; así pues, "hacer números", es decir aplicar rutinariamente las reglas de cálculo numérico, no es más que hacer funcionar un mecanismo (ciertamente aburrido y árido), cuya creación y fundamento es lo científicamente importante; un calculista no creador no es un hombre de ciencia: sólo posee una técnica más o menos útil.
>
> (REY PASTOR *et al.*, 1969, p. 23)

7.4 Sobre el producte de nombres enters

Tot alumne de primer curs de batxillerat sap multiplicar nombres naturals. A continuació veurem com es multipliquen nombres enters positius quan estenem a ells el producte de nombres naturals. L'acceptació d'aquest procediment per a tots els enters es constituirà com a definició del producte de nombres enters.

7.4.1 Producte de nombres enters

Com que tot nombre natural a es correspon amb el nombre enter representat pel parell $(a, 0)$, definim $(a, 0) \cdot (b, 0) = (a \cdot b, 0)$ per extensió del producte de nombres naturals.

Considerem els nombres enters positius representats pels parells (a,b) i (c,d), $a \geq b$ i $c \geq d$. Per multiplicar-los prenem per representants els que tenen la segona coordenada nul·la i apliquem la definició anterior:

$(a,b) \cdot (c,d) = (a-b,0) \cdot (c-d,0) = ((a-b) \cdot (c-d),0) =$
$(ac+bd-ad-bc,0)$[17] $= (ac+bd, ad+bc)$

Per definir el producte de nombres enters ho fem de manera que, quan els dos nombres enters que volem multiplicar es corresponen amb dos nombres naturals per la injecció canònica, el producte de nombres naturals quedi inclòs en la nova definició com un cas particular. Per aquest motiu acceptem:

Definició 7.4.1 *El producte de dos nombres enters representats pels parells* (a,b) *i* (c,d) *és el nombre enter representat pel parell* $(ac+bd, ad+bc)$.

Producte ben definit

Per tal que puguem acceptar aquesta definició cal que el producte no depengui del representant escollit per a cada factor. La definició ha de complir la llei uniforme, emprant la terminologia proposada per REY PASTOR *et al.* (1969, p. 32), és a dir, el resultat que obtenim en sumar enters amb aquesta definició ha de ser independent dels parells escollits. D'aquesta manera l'operació està definida entre nombres enters i no entre parells aïllats.

Després de comprovar amb casos concrets que el producte és el mateix escollint diversos representants per a cada factor, podem tendir a un argument més general. Considerem un nombre enter representat pel parell (a,b) i també els parells de la forma $(a+k, b+k)$ que són representants del mateix nombre enter. Prenem un altre nombre enter representat pel parell (c,d) i també els parells de la forma $(c+t, d+t)$ que també són representants del mateix, aleshores:

$(a+k, b+k) \cdot (c+t, d+t) \underbrace{=}_{Def.\ 7.4.1} ((a+k) \cdot (c+t) + (b+k) \cdot (d+t), (a+k) \cdot$
$(d+t) + (b+k) \cdot (c+t)) = ((ac+bd) + ((a+b)t + (c+d)k + 2kt), (ad+$
$bc) + ((a+b)t + (c+d)k + 2kt)) = (ac+bd, ad+bc)$

[17] En desenvolupar el producte $(a-b)(c-d)$ quan $a \geq b$ i $c \geq d$ obtenim $(a-b)(c-d) = ac+bd-ad-bc$. Això ho podem acceptar en virtut de l'exposat a la secció 2.3.1 (p. 72). Per tant, tot i que en veure aquesta expressió cal suposar per part de l'alumne un domini suficient de les lleis de l'àlgebra, el resultat es desprèn d'un argument geomètric.

Aquesta comprovació ens permet afirmar que el producte de nombres enters no depèn dels representants escollits. Una petita modificació en el tractament anterior permet recórrer tots els representants. Considerem per cada enter el parell que el representa i que té una coordenada nul·la[18]. La inclusió dels paràmetres t i k amb el mateix paper que l'exposat faculta que els parells parametritzats recobreixin tots els representants.

No pretenem en el tractament didàctic del primer curs de batxillerat aconseguir que l'alumne vegi la independència dels parells representants amb rigor tal com hem mostrat en el darrer paràgraf. En canvi sí que aspirem a familiaritzar-lo amb aquesta necessitat i copsar les seves dificultats en les aproximacions prèvies mostrades.

7.4.2 Obtenció de les regles del producte de nombres enters

Obtenir regles per multiplicar nombres enters facilita una tècnica ràpida per accedir als resultats. Les presentarem en el llenguatge habitual. Així, escriurem a per fer referència al nombre enter positiu representat pel parell $(a, 0)$ i $-a$ per fer referència al nombre enter negatiu representat pel parell $(0, a)$.

- Producte de dos nombres enters positius.

$$a \cdot c = (a, 0) \cdot (c, 0) = (a \cdot c + 0 \cdot 0, a \cdot 0 + 0 \cdot c) = (a \cdot c, 0) = a \cdot c$$

Regla 7.4.1 *Per multiplicar dos nombres enters positius fem el producte dels nombres naturals corresponents i mantenim el signe positiu.*

- Producte de dos nombres enters negatius.

$$(-a) \cdot (-b) = (0, a) \cdot (0, b) = (0 \cdot 0 + a \cdot b, 0 \cdot b + a \cdot 0) = (a \cdot b, 0) = a \cdot b$$

Regla 7.4.2 *Per multiplicar dos nombres enters negatius fem el producte dels seus oposats.*

- Producte d'un nombre enter positiu per un nombre enter negatiu.

[18] Si l'enter representat pel parell (a, b) és positiu aleshores considerem $(a - b, 0)$, si és negatiu considerem el parell $(0, b - a)$, si és nul $(0, 0)$.

$$a\cdot(-b) = (a,0)\cdot(0,b) = (a\cdot 0+0\cdot b, a\cdot b+0\cdot 0) = (0, a\cdot b) = -a(\cdot b) = -ab$$
$$(-a)\cdot b = (0,a)\cdot(b,0) = (0\cdot b+a\cdot 0, 0\cdot 0+a\cdot b) = (0, a\cdot b) = -a(\cdot b) = -ab$$

Regla 7.4.3 *Per multiplicar un nombre enter positiu per un nombre enter negatiu multipliquem els seus valors absoluts i fem l'oposat del nombre obtingut.*

7.5 El problema dels nombres consecutius II

En aquest darrer apartat del capítol reprenem el problema dels nombres consecutius. Inicialment l'hem resolt emprant nombres naturals, fet que ens ha conduït a introduir uns nous nombres; els nombres enters. Apuntem tot seguit els aspectes més destacats de la resolució del problema dels nombres consecutius però permetent ara emprar nombres enters en les descomposicions. Més precisament l'enunciat és el següent:

Problema 7.5.1 *Quins són els nombres enters que es poden escriure com a suma de nombres enters consecutius?*

La reformulació de l'enunciat inicial no treu la possibilitat d'adaptar els raonaments emprats en la resolució exposada en el primer apartat d'aquest capítol. Així, cada descomposició d'un nombre enter com a producte de dos factors on un d'ells és senar i positiu ens condueix a una suma de nombres consecutius.

- $12 = 4 \cdot 3 = 4 + 4 + 4 = 3 + 4 + 5$
- $14 = 2\cdot 7 = 2+2+2+2+2+2+2 = (-1)+0+1+2+3+4+5 = 2+3+4+5$
- $-15 = (-5) \cdot 3 = (-5) + (-5) + (-5) = (-6) + (-5) + (-4)$

Considerem un nombre enter positiu i el descomponem, de totes les maneres possibles, com el producte de dos nombres on un d'ells sigui senar i positiu. Cada descomposició ens condueix a una suma de nombres enters consecutius amb tants sumands com indica el factor senar. Vegem el següent exemple:

- $30 = 30 \cdot 1 = 30$

- $30 = 10 \cdot 3 = 10 + 10 + 10 = 9 + 10 + 11$
- $30 = 6 \cdot 5 = 6 + 6 + 6 + 6 + 6 = 4 + 5 + 6 + 7 + 8$
- $30 = 2 \cdot 15 = 2+2+2+2+2+2+2+2+2+2+2+2+2+2+2+ = (-5)+(-4)+(-3)+(-2)+(-1)+0+1+2+3+4+5+6+7+8+9 = 6+7+8+9$

Teorema 7.5.1 *Tot nombre enter que té un divisor senar i positiu es pot escriure com una suma de nombres enters consecutius.*

L'argument que consolida aquest resultat està donat. La redacció en llenguatge matemàtic és rutinària i, pel lector poc familiaritzat amb ell, un obstacle que cal evitar en la mesura que sigui possible.

> La millor notació és l'absència de notació; sempre que pugueu evitar usar un complicat aparell alfabètic, eviteu-ho.
>
> (Halmos, 2006, p. 72)

En la resolució del problema amb nombres naturals hem mostrat un raonament que ens ha permès veure que tota suma de nombres naturals consecutius (p. 244) no és una potència de 2, és a dir, és un nombre que té almenys un factor senar. L'esmentat raonament ha requerit un treball literal que limita el volum d'alumnes a qui es pot dirigir. A continuació mostrem com es pot obtenir el mateix resultat amb un raonament que utilitza tècniques elementals.

Tota suma d'una quantitat senar de nombres enters consecutius és un nombre que té un divisor senar i positiu, per què? Considerem la suma ordenada, fixem el sumand que ocupa la posició central i augmentem/disminuim els nombres fent que, sense variar el resultat de la suma considerada, coincideixin amb el nombre central. La suma inicial s'ha transformat en la suma d'una quantitat senar de sumands iguals i és, per tant, el resultat de multiplicar el nombre central per la quantitat senar i positiva de sumands. Vegem alguns exemples:

- $3 + 4 + 5 = 4 + 4 + 4 = 4 \cdot 3 = 12$
- $(-2) + (-1) + 0 + 1 + 2 + 3 + 4 = 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 = 1 \cdot 7 = 7$

Lema 7.5.1 *Tota suma d'una quantitat senar de nombres enters consecutius és un nombre que té un divisor senar i positiu.*

A més, tota suma d'una quantitat parell de nombres enters consecutius es pot convertir en una suma d'una quantitat senar de nombres enters consecutius.

- $3 + 4 = (-2) + (-1) + 0 + 1 + 2 + 3 + 4$

Si la quantitat parell de nombres consecutius està formada per sumands positius podem afegir més sumands que incloguin el zero obtenint una quantitat senar de sumands consecutius que tenen la mateixa suma. Vegem alguns exemples:

- $2 + 3 + 4 + 5 = (-1) + 0 + 1 + 2 + 3 + 4 + 5$
- $1 + 2 = 0 + 1 + 2$

Si la quantitat parell de nombres consecutius està formada per sumands negatius podem afegir més sumands que incloguin el zero obtenint una quantitat senar de sumands consecutius que té la mateixa suma. Vegem alguns exemples:

- $(-3) + (-2) = (-3) + (-2) + (-1) + 0 + 1$
- $(-4) + (-3) + (-2) + (-1) = (-4) + (-3) + (-2) + (-1) + 0$

Si la quantitat parell de nombres consecutius està formada per sumands positius i negatius es poden cancel·lar de manera que tots siguin positius o que tots siguin negatius. Emprant els raonaments anteriors, també en aquest cas la suma d'una quantitat parell de nombres enters consecutius es pot convertir en una suma d'una quantitat senar de nombres enters consecutius. Vegem alguns exemples:

- $(-2) + (-1) + 0 + 1 + 2 + 3 = 3$
- $(-5) + (-4) + (-3) + (-2) + (-1) + 0 + 1 + 2 = (-5) + (-4) + (-3)$

Lema 7.5.2 *Tota suma de nombres enters consecutius amb una quantitat parell de sumands es pot convertir en una suma de nombres enters consecutius amb una quantitat senar de sumands.*[19]

[19] $(-3) + (-2) + (-1) + 0 + 1 + 2 + 3 + 4 = 4$. Els vuit sumands es converteixen en la suma d'un sumand. Per ser precisos, cal dir que les potències de 2 no es poden escriure com a sumes pròpies de nombres consecutius, entenent que un sol sumand o la suma equivalent no és pròpia. Aquesta descomposició que anomenem impròpia, i que és única, l'acceptem ja que considerar-la ens permetrà donar uniformitat al resultat final que presentem en les línies següents.

En virtut dels lemes 7.5.1 (p. 266) i 7.5.2 (p. 266) tenim el següent:

Teorema 7.5.2 *Tota suma de nombres enters consecutius té un divisor senar i positiu*[20].

En virtut dels teoremes 7.5.1 (p. 265) i 7.5.2 (p. 267) tot nombre enter té tantes descomposicions com a suma de nombres enters consecutius com divisors senars positius té. Per tant, quants divisors positius senars té un nombre enter positiu n?[21] [22]

Considerem la descomposició factorial $n = 2^{\alpha_0} \cdot {p_1}^{\alpha_1} \cdot {p_2}^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot {p_k}^{\alpha_k}$, on p_1, p_2, …, p_k són nombres primers diferents. La quantitat de divisors positius i senars de n ve donada per $(\alpha_1 + 1) \cdot (\alpha_2 + 1) \cdot \ldots \cdot (\alpha_k + 1)$.

Teorema 7.5.3 *Sigui n un nombre enter positiu i $n = 2^{\alpha_0} \cdot {p_1}^{\alpha_1} \cdot {p_2}^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot {p_k}^{\alpha_k}$ la seva descomposició factorial. La quantitat de descomposicions de n com a suma de nombres enters consecutius ve donada per l'expressió $(\alpha_1 + 1) \cdot (\alpha_2 + 1) \cdot \ldots \cdot (\alpha_k + 1)$.*

La resolució del problema dels nombres consecutius obté en els nombres enters la màxima generalitat que tot seguit exemplifiquem. Mirem de descomposar el nombre 15 com a suma de nombres consecutius i, per aconseguir-ho, considerem els seus divisors i apliquem el procediment ara ja conegut. $D(15) = \{1, -1, 3, -3, 5, -5, 15, -15\}$. Per cada divisor senar i positiu considerem la corresponent descomposició com a suma de consecutius i després afegim l'equivalent; tindrem, per tant, vuit descomposicions.

[20] Tota suma de nombres enters consecutius té una altra descomposició equivalent que prové d'afegir o treure nombres positius i negatius que es compensin. Així, per exemple, són equivalents les descomposicions següents que expressem a dreta i esquerra del símbol igual: $2+3 = (-1)+0+1+2+3$, $1+2 = 0+1+2$, $(-3)+(-2) = (-3)+(-2)+(-1)+0+1$, $(-2)+(-1) = (-2)+(-1)+0$. Si una suma de nombres consecutius té una quantitat senar de sumands aleshores la seva equivalent en té una quantitat parell; i a l'inrevés. Així, tota suma de nombres enters consecutius es pot escriure com una suma de nombres enters consecutius amb una quantitat senar de sumands i, en virtut del lema 7.5.1 (p. 266), el resultat és un nombre senar.

[21] Determinar quants divisors té un nombre natural és un problema que té interès per sí mateix i que es pot treballar a l'Educació Secundària Obligatòria, quan l'alumne està familiaritzat amb la descomposició factorial.

[22] Per motius de síntesi en l'escriptura fem ús d'un llenguatge formal que es pot evitar a l'aula si així es facilita l'aprenentatge de l'estudiant.

- Factor 1
  - $15 = 15 \cdot 1 = 15$
  - Descomposició equivalent de 15: $(-14) + (-13) + (-12) + (-11) + (-10) + (-9) + (-8) + (-7) + (-6) + (-5) + (-4) + (-3) + (-2) + (-1) + 0 + 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 + 11 + 12 + 13 + 14 + 15$.
- Factor 3
  - $15 = 5 \cdot 3 = 5 + 5 + 5 = 4 + 5 + 6$
  - Descomposició equivalent de $4 + 5 + 6$: $(-3) + (-2) + (-1) + 0 + 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6$.
- Factor 5
  - $15 = 3 \cdot 5 = 3 + 3 + 3 + 3 + 3 = 1 + 2 + 3 + 4 + 5$.
  - Descomposició equivalent de $1+2+3+4+5$: $0+1+2+3+4+5$.
- Factor 15
  - $15 = 1 \cdot 15 = 1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1 = (-6)+(-5)+(-4)+(-3)+(-2)+(-1)+0+1+2+3+4+5+6+7+8$.
  - Descomposició equivalent de $(-6) + (-5) + (-4) + (-3) + (-2) + (-1) + 0 + 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8$: $7 + 8$.

És molt probable que el resolutor que inicia el treball experimental vegi la descomposició $15 = 7+8$. Quan descobreixi el procediment que permet expressar tot nombre que té un factor senar com a suma de nombres consecutius, no identificarà aquesta descomposició si limita els nombres considerats als naturals.

> Sólo cuando un resultado encaja en un contexto más amplio empiezas realmente a ver su significado.
>
> (Mason *et al.*, 1988, p. 144)

La màxima generalitat que hem aconseguit ens permet veure, entre tants casos particulars com vulguem, que amb nombres enters una potència de 2 té dos divisors senars i, per tant, dues descomposicions com a suma de nombres consecutius.

- $D(2) = \{1, -1\}$ i, en conseqüència, també dues descomposicions com a suma de nombres consecutius: 2 i l'equivalent $(-1) + 0 + 1 + 2$.
- $D(4) = \{1, -1\}$ i, en conseqüència, també dues descomposicions com a suma de nombres consecutius: 4 i l'equivalent $(-3) + (-2) + (-1) + 0 + 1 + 2 + 3 + 4$.
- $\ldots$

Referències

BOMBELLI, R. (1966): *L'Algebra*. Milano: Feltrinelli.

CARDANO, G. (1968): *The Great art: the rules of algebra*. Massachusetts: The MIT Press.

HALMOS, P. (2006): «Com cal escriure en matemàtiques». *Barcelona: Butlletí de la Societat Catalana de Matemàtiques*, *21*(1), 53-79.

HANKEL, H. (1867): *Theorie der Komplexen Zahlsysteme*. Leipzig.

MASON, J.; BURTON, L.; STACEY, K. (1988): *Pensar matemáticamente*. Barcelona: Labor.

PÓLYA, G. (1966): *Matemáticas y razonamiento plausible*. Madrid: Tecnos.

PUIG ADAM, P. (1960): *La Matemática y su enseñanza actual*. Madrid: Ministerio de Educación Nacional.

REY PASTOR, J.; PI CALLEJA, P.; TREJO, A. (1969): *Análisis matemático. Volumen I: Análisis algebraico, teoría de ecuaciones y cálculo infinitesimal de una variable*. Buenos Aires: Kapelusz.

Part III

Anàlisi de les dades, resultats, conclusions, prospectiva i implicacions didàctiques

Capítol 8

Anàlisi de les dades i presentació de resultats. Fase de diagnosi

Índex

En aquest capítol mostrem l'anàlisi de les dades i els resultats corresponents a la fase de diagnosi. En el capítol 1 (p. 19) hem identificat, plantejat i delimitat el problema de la investigació. L'atenció al marc teòric ha permès descomposar el problema en components susceptibles de verificació empírica conduint a l'establiment dels objectius. En el capítol 6 (p. 191) hem establert les fases de la recerca i hem organitzat les tasques que constituiran cadascuna d'elles. La metodologia d'investigació que emprem en cada fase i l'estudi de les característiques de la recerca ha permès apuntar els instruments de recollida d'informació.

A continuació organitzem i presentem la informació recollida amb la finalitat de descriure, analitzar i interpretar les dades tot arribant a la presentació de resultats. Segons les particularitats i les pretensions de cada moment de la recerca emprem uns o altres instruments o estratègies de recollida d'informació que ens proporcionen dades de naturalesa ben diferent. El seu tractament requereix una anàlisi quantitativa, qualitativa o potser ambdues segons la naturalesa de les dades recollides en cada moment de la fase empírica de la recerca.

El necessari diàleg entre l'ensenyament i l'aprenentatge exigeix una diagnosi del punt de partida dels participants en la fase empírica de la recerca respecte d'unes finalitats lligades a la utilització dels nombres negatius, el tractament real o formal del nombre negatiu i la concepció de nombre.

La recerca bibliogràfica a partir de les propostes dels llibres de text, principalment els que han emprat els alumnes en els seus estudis previs, fa referència a l'ensenyament rebut. Tot i així, en tot procés de comunicació hi ha pèrdues d'informació i estem interessats en l'aprenentatge rebut pel discent, principalment el relatiu a una sèrie d'indicadors relacionats amb la didàctica del nombre enter i del nombre negatiu.

Per tal d'explicar els fenòmens educatius que s'esdevenen a l'aula ens basem en l'evidència empírica, allò que es desprèn de les dades, i la quantificació, en la mesura que sigui possible. Tanmateix, la complexitat de la realitat educativa que s'esdevé a l'aula fa insuficient la seva explicació si ens limitem a l'esmentat tractament quantitatiu. El procés cíclic i interactiu que s'esdevé a l'aula en l'experimentació, a través de la resolució d'un problema, facilita informació relativa a la motivació, intencions, accions i significats que són difícilment quantificables.

Tota anàlisi del procés de resolució d'un problema pren com a font de dades principal el registre deixat pel resolutor, el full de resolució. Tanmateix, entre alguns informes que reflecteixen clarament el procés seguit n'hi ha d'altres que generen més indecisions alhora de categoritzar la informació que se'n recull. Els indicis i inferències, més o menys plausibles d'allò que cal pensar que ha fet o deixat de fer el resolutor, són en ocasions inevitables.

El tipus d'anàlisi que realitzem té la finalitat de respondre a les qüestions de la present investigació. Mostrar amb claredat una anàlisi apropiada a les finalitats no treu que les dades poden suggerir més informació que deixarem de banda si no alimenta, en tot o en part, els nostres objectius. La tècnica d'anàlisi de dades que emprem en cada cas depèn de la naturalesa del problema d'investigació i del disseny escollit per realitzar la recerca però, alhora i en darrer lloc, de la naturalesa de les dades recollides.

Respecte dels resultats de la fase de diagnosi, però també en les fases d'intervenció i de valoració, hem optat per presentar-los desglossats per grup i també per gènere. L'estudi per grup està justificat perquè cursen matèries diferents. El alumnes del grup A cursen Matemàtiques Aplicades a les Ciències Socials mentre que els del grup B cursen Matemàtiques. Desglossar els resultats per gènere ha estat una decisió que hem realitzat per poder donar respostes, relatives a les preguntes de la present investigació, a interrogants que en ocasions es plantegen respecte del rendiment dels nois i les noies. Tot i així, la presentació de resultat per grup i gènere tindrà una utilitat limitada en la presentació de les conclusions, és a dir, en el contrast amb el marc teòric, ja que no hem trobat resultats d'altres autors que facin aquest desglossament. Prioritzem, per tant, la presentació dels resultats globals de la fase empírica de la recerca.

Des del coneixement i les concepcions prèvies de l'alumne, continuant pel procés viscut en el període de construcció de coneixement matemàtic a través de la resolució de problemes i fins l'assoliment d'objectius didàctics les dades són múltiples i l'anàlisi cal que atengui el moment en què aquestes es generen. Per aquest motiu considerem tres etapes o fases consecutives però diferenciades del procés: fase de diagnosi, fase d'intervenció i fase de valoració.

Etapes ateses en la fase empírica de la recerca

La taula següent resumeix les etapes de la fase empírica de la recerca.

- FASE DE DIAGNOSI. Cerquem informació relativa al punt de partida de cada alumne respecte d'uns indicadors.

- FASE D'INTERVENCIÓ. La intervenció didàctica a l'aula, sota unes orientacions pautades però no restrictives, facilita el treball amb unes activitats que condueixen cap a l'assoliment d'un determinat coneixement. Cerquem informació relativa a l'aprenentatge de l'alumne que esdevé de l'execució de la innovació a l'aula.

- FASE DE VALORACIÓ. Finalment la valoració del procés per part de l'estudiant esdevé cabdal ja que incideix en la disposició d'aquest davant de l'estil d'ensenyament prèviament presentat, de l'impacte que ha tingut la proposta en l'estudiant i l'eficàcia de l'ensenyament presentat en el seu aprenentatge.

Tanmateix, en el procés d'anàlisi considerem en un principi la possibilitat de practicar anàlisis de dades addicionals segons ho justifiqui la situació que ens trobem. En aquest capítol centrem l'atenció en l'anàlisi de les dades i els resultats corresponents a la fase de diagnosi.

8.1 (I) Sobre el caràcter instrumental del nombre enter

Els diferents llibres de text que hem consultat emfasitzen d'una manera o una altra el caràcter instrumental del nombre enter, independentment del tractament didàctic donat al tema; aquesta observació també la fa palesa GONZÁLEZ *et al.* (1990, p. 124). En aquest moment previ a la intervenció pretenem diagnosticar la utilització que fa l'alumne del nombre enter respecte de l'ordre, l'addició i el producte per a finalment examinar quins models concrets escull l'alumne quan se li demana una activitat que impliqui el treball amb nombres negatius. Acceptem, per tant, que la finalitat general d'aquesta primera diagnosi és conèixer el grau de familiaritat que té l'alumne amb el treball aritmètic del nombre enter, l'ordre i la vinculació que li dóna amb el seu entorn proper.

8.1.1 De la finalitat general a la concreció d'objectius

Els càlculs aritmètics entre nombres enters, l'ordenació d'una seqüència de nombres i la vinculació del nombre negatiu amb el seu entorn proper són del nostre interès en aquesta primera part de la fase empírica recerca. Per tal d'afavorir l'accés a aquest coneixement desitjat fixem els objectius que presentem tot seguit:

1. Diagnosticar si l'alumne ordena correctament seqüències de nombres enters.
2. Diagnosticar si l'alumne realitza correctament l'addició de nombres enters.
3. Diagnosticar si l'alumne realitza correctament el producte de nombres enters.
4. Diagnosticar quines són les situacions que tria l'alumne per utilitzar el nombre enter.

Aquests objectius s'estableixen amb la prioritat d'alimentar els objectius generals de la present investigació. La vinculació entre els objectius generals i aquests concrets que acabem d'exposar es pot consultar en la figura 8.1 (p. 279).

8.1.2 Sobre l'instrument de recollida de dades

El nostre interès rau en realitzar aquesta primera diagnosi sense intervenir en el coneixement ni en la posició dels participants en la investigació. Els alumnes als qui ens dirigim cursen primer de batxillerat i, en conseqüència, tenen una competència lingüística suficient per comprendre i respondre preguntes escrites. El fet de no voler intervenir en el coneixement previ de l'estudiant i l'esmentada competència ens condueix a proposar un instrument que requereix una certa competència lingüística relacionada amb l'expressió escrita dels participants. Tanmateix, no volem reduir la recollida de dades a opinions o valoracions dels estudiants sinó que volem recollir allò que realitzen efectivament a la pràctica. Evitem, per tant,

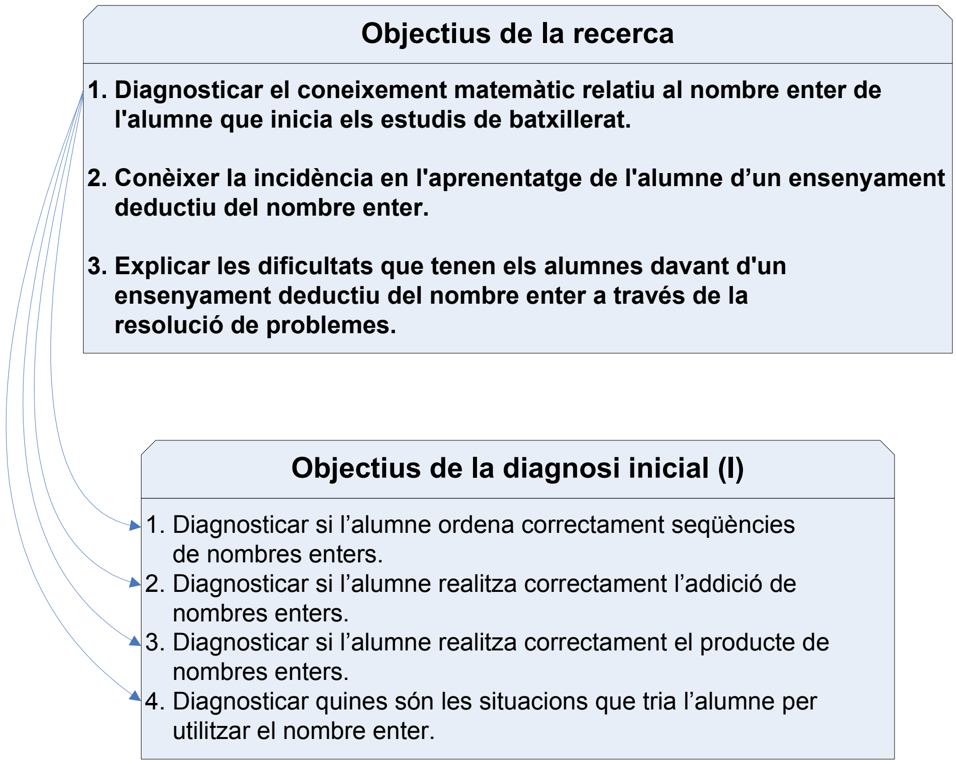


Figura 8.1: Dels objectius generals de la investigació a la seva concreció. Diagnosi I.

la utilització d'un test i ens decantem per un qüestionari obert (p. 565). Aquest proposarà directament preguntes relacionades amb els objectius que pretenem assolir.

Indicadors atesos pel qüestionari

En el qüestionari plantegem activitats que atenen de manera directa cadascuna de les finalitats que volem assolir. Amb això volem evitar problemes de comunicació que puguin distreure l'alumne del focus principal d'atenció que volem generar. El qüestionari concreta unes preguntes que de manera sintètica permeten obtenir informació relativa a:

A1. L'ordre dels nombres enters.

A2. La suma de nombres enters.

A3. El producte de nombres enters.

B4. L'elecció de problemes relacionats amb el nombre enter.

8.1.3 Lligams entre els objectius i les preguntes del qüestionari

Les preguntes del qüestionari estan relacionades amb els objectius de la present diagnosi tal com es mostra en el quadre següent:

OBJECTIUS	QÜESTIONS
Objectiu 1	A1
Objectiu 2	A2
Objectiu 3	A3
Objectiu 4	B4

8.1.4 Categories de resposta i anàlisi de dades

Els paràmetres utilitzats per a l'anàlisi de les dades corresponents a aquest primer qüestionari han estat els següents: l'ordenació correcta de seqüències de nombres enters, l'execució de sumes indicades de nombres enters, la realització de productes de nombres enters i, en concret, la utilització de les regles dels signes. La darrera qüestió obre el ventall de possibilitats i ens condueix a acceptar els següents paràmetres per a la seva anàlisi: la concreció d'una situació en la que té rellevància el nombre enter, la caracterització del tipus d'activitat proposada per l'alumne en virtut del marc teòric atès en la recerca i l'ús de coneixements previs incidint en la seva utilització argumentada o instruïda.

Presentem sintèticament els resultats que hem obtingut tot mostrant les respostes d'alguns alumnes que, per un motiu o altre, són rellevants. Des dels primers qüestionaris analitzats hem confirmat que les preguntes s'entenien, tot i que les respostes han fet ampliar la previsió inicial de les categories de resposta. Tot i així, aquests increments no han conduït a la necessitat de modificar els qüestionaris. En la presentació de resultats s'ha fet servir una codificació bàsica, tal com es pot consultar en els arxius en format EXCEL[1] on estan recollides les dades sintetitzades per categories de resposta que tot seguit comuniquem.

[1] http://www.xtec.cat/~rpujol1/Recerques/Tesi/Dades0.rar

Més concretament i focalitzant l'atenció des del plantejament inicial, en el procés d'elecció de l'instrument de recollida de dades, l'estudi detallat del qüestionari ens ha conduït a l'establiment d'unes categories de resposta inicials. S'han creat atenent a les sospites que brollen de la nostra experiència docent. En el procés d'anàlisi s'han vist lleugerament incrementades tot arribant a establir-se com a categories definitives. Les dades recollides han encaixat en les categories de resposta sense generar-ne de noves. El fet que les dades trobin una categoria on col·locar-se ha conduït a establir-les com a definitives. La informació aportada per aquestes és rellevant per a l'estudi i tenen significat per elles mateixes ja que es poden interpretar sense informació afegida.

Les categories que presentem tot seguit es corresponen amb els objectius que pretenem assolir, són exhaustives ja que les dades s'han pogut col·locar en elles i mútuament excloents ja que les esmentades dades no poden pertànyer a dues categories diferents. Hem posat noms que les fan entenedores i atenen l'essència de cadascun dels objectius. Sense un esforç d'abstracció hi podria haver gran quantitat de categories, però és aquest esforç el que permet que cadascuna d'elles ens aporti una unitat d'informació rellevant. Donat que el volum de dades és nombrós s'ha constatat des d'un primer moment que seria convenient fer ús de suport informàtic per gestionar-les. Aquesta mecanització és important per prosseguir l'anàlisi de dades i alhora per facilitar la il·lustració dels resultats.

Diagnosi inicial

A1) L'ordre dels nombres enters

Ordena els següents nombres de major a menor:

a) $+2, -3, -8, +3, 0, -2.$

b) $-5, -2, 9, -10, -21, +22.$

L'anàlisi de les respostes a aquesta pregunta informa sobre el coneixement que té l'alumne respecte de l'ordre dels nombres enters. Amb aquesta qüestió no aconseguim aprofundir en els obstacles i dificultats que poden conduir l'alumne a ordenar incorrectament els nombres enters.

Tanmateix, sí que podrem aconseguir conèixer si hi ha dificultats pràctiques per realitzar correctament les ordenacions demanades. Posteriorment la recerca podrà aprofundir en els aspectes més rellevants a partir de l'anàlisi de les dades que es puguin desprendre d'aquestes activitats.

1. Realitza correctament les ordenacions.
2. Es produeixen incorreccions en una de les dues ordenacions demanades.
3. Es produeixen incorreccions en les dues ordenacions demanades.

A2) La suma de nombres enters

Calcula:

a) $(+5) + (-8) =$
b) $(-7) + (-2) =$
c) $(-5) + (+7) =$
d) $(+4) + (-7) =$
e) $(+7) + (-3) =$
f) $(-11) + (+7) =$
g) $(-3) + (-3) =$
h) $(-7) + (+7) =$
i) $(-17) + 12 =$
j) $(-57) + 68 =$

L'anàlisi de les respostes a aquesta pregunta informa sobre el coneixement i l'habilitat que té l'alumne respecte de la suma de nombres enters. Amb aquesta qüestió tampoc aconseguim aprofundir en els obstacles i dificultats que poden conduir l'alumne, en aquest cas a operar correctament davant de sumes de nombres enters. Tanmateix, podrem aconseguir conèixer si hi ha dificultats pràctiques per realitzar amb correcció els càlculs demanats.

1. Realitza correctament les sumes indicades.
2. S'observen errors en un o dos dels deu apartats demanats.
3. S'observen errors en més de dos dels deu apartats demanats.

A3) El producte de nombres enters

Calcula:

a) $(-4) \cdot (+10) =$

b) $(-2) \cdot (+5) =$

c) $(+10) \cdot (-4) =$

d) $(+2) \cdot (-5) =$

e) $(+4) \cdot (-10) =$

f) $(+3) \cdot (+6) =$

L'anàlisi de les respostes a aquesta pregunta informa sobre el coneixement i habilitat que té l'alumne respecte del producte de nombres enters. Amb aquesta qüestió no aconseguim aprofundir en els obstacles i dificultats que viu l'alumne, per operar correctament davant de productes de nombres enters. Tanmateix, podrem aconseguir conèixer si hi ha dificultats pràctiques per realitzar correctament els càlculs demanats. Cal destacar que a l'hora de decidir cadascun dels apartats hem obviat el producte de dos nombres negatius tot reservant així la recollida d'aquesta informació per instruments posteriors.

1. Realitza correctament els productes indicats.
2. S'observen errors en un o dos dels sis apartats demanats.
3. S'observen errors en més de dos dels sis apartats demanats.

B4) Sobre les activitats vinculades als nombres negatius

Escriu l'enunciat d'un problema sobre nombres negatius.

L'anàlisi de les respostes a aquesta pregunta informa sobre les activitats que l'alumne considera vinculades al nombre negatiu. L'enunciat es planteja de manera que l'estudiant fa la tria i decideix la proposta que ell considera més adient. Amb aquesta qüestió aconseguim una primera pinzellada sobre el coneixement que té l'estudiant participant en la recerca del nombre negatiu. La formulació de la pregunta li permet optar per algun model concret, sobre propostes que tot i que l'alumne considera de nombres negatius estan vinculades a les accions d'afegir o treure, potser sobre representacions en la recta numèrica o potser sobre operacions formals.

1. Models concrets.
   a) Ascensor.

   b) Guanys i pèrdues.
   c) Temperatures.
2. Enunciat sobre nombres naturals on apareix l'acció treure.
3. Recta numèrica.
4. No respon.
5. Ordre dels nombres enters.

8.1.5 Presentació de resultats

En la figura 8.2 (p. 284) es poden consultar els resultats globals. Per a cada indicador es mostra el total absolut i relatiu de participants que es corresponen amb cada categoria de resposta.

RESULTATS GLOBALS	A1	A2	A3	B4	B4A	B4B	B4C
TOTAL DE 1	49	26	42	35	4	28	3
TOTAL DE 2	0	17	3	1	0	0	0
TOTAL DE 3	0	6	4	3	0	0	0
TOTAL DE 4	0	0	0	5	0	0	0
TOTAL DE 5	0	0	0	1	0	0	0
TOTAL DE RESPOSTES	49	49	49	49	4	28	3
TOTAL DE 1	100,0%	53,1%	85,7%	71,4%	11,4%	80,0%	8,6%
TOTAL DE 2	0,0%	34,7%	6,1%	2,0%	0,0%	0,0%	0,0%
TOTAL DE 3	0,0%	12,2%	8,2%	6,1%	0,0%	0,0%	0,0%
TOTAL DE 4	0,0%	0,0%	0,0%	10,2%	0,0%	0,0%	0,0%
TOTAL DE 5	0,0%	0,0%	0,0%	2,0%	0,0%	0,0%	0,0%
TOTAL DE RESPOSTES	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	11,4%	80,0%	8,6%

Figura 8.2: Resultats globals del primer qüestionari diagnòstic.

Respecte del primer objectiu

«Diagnosticar si l'alumne ordena correctament seqüències de nombres enters» és el primer objectiu de la present part de la fase de diagnosi de la recerca. Per tal d'esbrinar el seu nivell d'assoliment hem proposat una activitat amb la que cerquem el coneixement de l'alumne relatiu a l'ordre dels nombres enters.

La totalitat dels alumnes participants han realitzat correctament les ordenacions demanades. Entenem, per tant, que el resultat final de l'aprenentatge previ dels estudiants i relatiu a l'ordre dels nombres enters és satisfactori, tal com es pot consultar en les figures 8.2 (p. 284), 8.3 (p. 285), 8.4 (p. 286) i 8.5 (p. 287).

RESULTATS PER GRUP	A1	A2	A3	B4	B4A	B4B	B4C
TOTAL 1 DE A	23	8	19	17	2	15	0
TOTAL 2 DE A	0	11	1	0	0	0	0
TOTAL 3 DE A	0	4	3	1	0	0	0
TOTAL 4 DE A	0	0	0	1	0	0	0
TOTAL 5 DE A	0	0	0	0	0	0	0
TOTAL DE A	23	23	23	19	2	15	0
TOTAL 1 DE B	26	18	23	18	2	13	3
TOTAL 2 DE B	0	6	2	1	0	0	0
TOTAL 3 DE B	0	2	1	2	0	0	0
TOTAL 4 DE B	0	0	0	4	0	0	0
TOTAL 5 DE B	0	0	0	1	0	0	0
TOTAL DE B	26	26	26	26	2	13	3
TOTAL 1 DE A	100,0%	34,8%	82,6%	89,5%	11,8%	88,2%	0,0%
TOTAL 2 DE A	0,0%	47,8%	4,3%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%
TOTAL 3 DE A	0,0%	17,4%	13,0%	5,3%	0,0%	0,0%	0,0%
TOTAL 4 DE A	0,0%	0,0%	0,0%	5,3%	0,0%	0,0%	0,0%
TOTAL 5 DE A	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%
TOTAL DE A	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	11,8%	88,2%	0,0%
TOTAL 1 DE B	100,0%	69,2%	88,5%	69,2%	11,1%	72,2%	16,7%
TOTAL 2 DE B	0,0%	23,1%	7,7%	3,8%	0,0%	0,0%	0,0%
TOTAL 3 DE B	0,0%	7,7%	3,8%	7,7%	0,0%	0,0%	0,0%
TOTAL 4 DE B	0,0%	0,0%	0,0%	15,4%	0,0%	0,0%	0,0%
TOTAL 5 DE B	0,0%	0,0%	0,0%	3,8%	0,0%	0,0%	0,0%
TOTAL DE B	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	11,1%	72,2%	16,7%

Figura 8.3: Resultats per grups del primer qüestionari diagnòstic.

Resultat 8.1.1 *A partir de les dades recollides es desprén que els alumnes ordenen correctament nombres enters.*

Respecte del segon objectiu

«Diagnosticar si l'alumne realitza correctament l'addició de nombres enters» és el segon objectiu de la present part de la fase de diagnosi de la recerca. Per tal d'esbrinar el seu nivell d'assoliment hem proposat deu activitats amb les que cerquem el coneixement de l'alumne relatiu a l'addició dels nombres enters.

Més de la meitat dels alumnes, un 53,1%, realitza correctament les activitats proposades. Tot i així, quasi el 35% dels participants comet errors en una o dues de les deu activitats proposades i un 12,2% en tres o més d'elles (fig. 8.2, p. 284).

Del 53,1% d'alumnes que realitza correctament totes les activitats, un 45,8% es correspon amb el sexe masculí mentre que les noies constitueixen un 60%. Considerant el pol oposat, del 12,2% d'alumnes que realitza tres o més activitats amb errors de les deu proposades, un 16,7% són nois i les noies redueixen la proporció fins el 8% (fig. 8.4, p. 286).

Respecte dels càlculs aritmètics proposats per assolir el present segon objec-

RESULTATS PER GÈNERE	A1	A2	A3	B4	B4A	B4B	B4C
TOTAL 1 DE H	24	11	20	19	1	16	2
TOTAL 2 DE H	0	9	1	0	0	0	0
TOTAL 3 DE H	0	4	3	0	0	0	0
TOTAL 4 DE H	0	0	0	2	0	0	0
TOTAL 5 DE H	0	0	0	1	0	0	0
TOTAL DE H	24	24	24	22	1	16	2
TOTAL 1 DE D	25	15	22	16	3	12	1
TOTAL 2 DE D	0	8	2	1	0	0	0
TOTAL 3 DE D	0	2	1	3	0	0	0
TOTAL 4 DE D	0	0	0	3	0	0	0
TOTAL 5 DE D	0	0	0	0	0	0	0
TOTAL DE D	25	25	25	23	3	12	1
TOTAL 1 DE H	100,0%	45,8%	83,3%	86,4%	5,3%	84,2%	10,5%
TOTAL 2 DE H	0,0%	37,5%	4,2%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%
TOTAL 3 DE H	0,0%	16,7%	12,5%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%
TOTAL 4 DE H	0,0%	0,0%	0,0%	9,1%	0,0%	0,0%	0,0%
TOTAL 5 DE H	0,0%	0,0%	0,0%	4,5%	0,0%	0,0%	0,0%
TOTAL DE H	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	5,3%	84,2%	10,5%
TOTAL 1 DE D	100,0%	60,0%	88,0%	69,6%	18,8%	75,0%	6,3%
TOTAL 2 DE D	0,0%	32,0%	8,0%	4,3%	0,0%	0,0%	0,0%
TOTAL 3 DE D	0,0%	8,0%	4,0%	13,0%	0,0%	0,0%	0,0%
TOTAL 4 DE D	0,0%	0,0%	0,0%	13,0%	0,0%	0,0%	0,0%
TOTAL 5 DE D	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%
TOTAL DE D	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	18,8%	75,0%	6,3%

Figura 8.4: Resultats per gènere del primer qüestionari diagnòstic.

tiu, del 53,1% d'alumnes que realitza les activitats correctament, un 34,8% són alumnes del grup A, és a dir, alumnes que cursen Matemàtiques Aplicades a les Ciències Socials. Un 69,2% és la proporció d'alumnes del grup B que realitza correctament totes les activitats, és a dir, alumnes que cursen la matèria de Matemàtiques (fig. 8.3, p. 285).

L'estudi per grups i gènere ens facilita informació encara més detallada. En els pols oposats trobem els nois del grup A que responen correctament totes les activitats en una proporció del 20% mentre que les noies del grup B ho fan en una proporció del 75% (fig. 8.5, p. 287).

Resultat 8.1.2 *A partir de les dades recollides es desprèn que en l'èxit respecte de l'addició de nombres enters el trobem en poc més de la meitat dels alumnes. Les noies obtenen millors resultats que els nois i, els alumnes que cursen Matemàtiques es troben per sobre dels que cursen Matemàtiques Aplicades a les Ciències Socials.*

RESULTATS PER GRUP I GÈNERE	A1	A2	A3	B4	B4A	B4B	B4C
TOTAL 1 DE HA	10	2	7	8	1	7	0
TOTAL 2 DE HA	0	5	0	0	0	0	0
TOTAL 3 DE HA	0	3	3	0	0	0	0
TOTAL 4 DE HA	0	0	0	0	0	0	0
TOTAL 5 DE HA	0	0	0	0	0	0	0
TOTAL DE HA	10	10	10	8	1	7	0
TOTAL 1 DE HB	14	9	13	11	0	9	2
TOTAL 2 DE HB	0	4	1	0	0	0	0
TOTAL 3 DE HB	0	1	0	0	0	0	0
TOTAL 4 DE HB	0	0	0	2	0	0	0
TOTAL 5 DE HB	0	0	0	1	0	0	0
TOTAL DE HB	14	14	14	14	0	9	2
TOTAL 1 DE DA	13	6	12	9	1	8	0
TOTAL 2 DE DA	0	6	1	0	0	0	0
TOTAL 3 DE DA	0	1	0	1	0	0	0
TOTAL 4 DE DA	0	0	0	1	0	0	0
TOTAL 5 DE DA	0	0	0	0	0	0	0
TOTAL DE DA	13	13	13	11	1	8	0
TOTAL 1 DE DB	12	9	10	7	2	4	1
TOTAL 2 DE DB	0	2	1	1	0	0	0
TOTAL 3 DE DB	0	1	1	2	0	0	0
TOTAL 4 DE DB	0	0	0	2	0	0	0
TOTAL 5 DE DB	0	0	0	0	0	0	0
TOTAL DE DB	12	12	12	12	2	4	1
TOTAL 1 DE HA	100,0%	20,0%	70,0%	100,0%	12,5%	87,5%	0,0%
TOTAL 2 DE HA	0,0%	50,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%
TOTAL 3 DE HA	0,0%	30,0%	30,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%
TOTAL 4 DE HA	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%
TOTAL 5 DE HA	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%
TOTAL DE HA	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	12,5%	87,5%	0,0%
TOTAL 1 DE HB	100,0%	64,3%	92,9%	78,6%	0,0%	81,8%	18,2%
TOTAL 2 DE HB	0,0%	28,6%	7,1%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%
TOTAL 3 DE HB	0,0%	7,1%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%
TOTAL 4 DE HB	0,0%	0,0%	0,0%	14,3%	0,0%	0,0%	0,0%
TOTAL 5 DE HB	0,0%	0,0%	0,0%	7,1%	0,0%	0,0%	0,0%
TOTAL DE HB	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	0,0%	81,8%	18,2%
TOTAL 1 DE DA	100,0%	46,2%	92,3%	81,8%	11,1%	88,9%	0,0%
TOTAL 2 DE DA	0,0%	46,2%	7,7%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%
TOTAL 3 DE DA	0,0%	7,7%	0,0%	9,1%	0,0%	0,0%	0,0%
TOTAL 4 DE DA	0,0%	0,0%	0,0%	9,1%	0,0%	0,0%	0,0%
TOTAL 5 DE DA	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%
TOTAL DE DA	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	11,1%	88,9%	0,0%
TOTAL 1 DE DB	100,0%	75,0%	83,3%	58,3%	28,6%	57,1%	14,3%
TOTAL 2 DE DB	0,0%	16,7%	8,3%	8,3%	0,0%	0,0%	0,0%
TOTAL 3 DE DB	0,0%	8,3%	8,3%	16,7%	0,0%	0,0%	0,0%
TOTAL 4 DE DB	0,0%	0,0%	0,0%	16,7%	0,0%	0,0%	0,0%
TOTAL 5 DE DB	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%
TOTAL DE DB	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	28,6%	57,1%	14,3%

Figura 8.5: Resultats per grups i gènere del primer qüestionari diagnòstic.

Respecte del tercer objectiu

«Diagnosticar si l'alumne realitza correctament el producte de nombres enters» és el tercer objectiu de la present part de la fase de diagnosi de la recerca. Per tal d'esbrinar el seu nivell d'assoliment hem proposat sis activitats amb les que cerquem el coneixement de l'alumne relatiu al producte dels nombres enters.

Un 85,7% dels alumnes realitza correctament les activitats proposades. No arriba, per tant, al 15% la proporció d'alumnat que comet alguns errors (fig. 8.2, p. 284).

Del 85,7% d'alumnes que realitza correctament totes les activitats, un 83,3% es correspon a amb el sexe masculí mentre que les noies constitueixen un 88%. Considerant el pol oposat, del 8,2% d'alumnes que realitza tres o més activitats de les deu proposades amb errors, un 12,5% són nois i les noies redueixen la proporció fins el 4% (fig. 8.4, p. 286).

Respecte dels càlculs aritmètics proposats per assolir el present tercer objectiu, del 85,7% d'alumnes que realitza les activitats correctament, un 82,6% són alumnes del grup A, és a dir, alumnes que cursen Matemàtiques Aplicades a les Ciències Socials. Un 88,5% és la proporció d'alumnes del grup B que realitza correctament totes les activitats, és a dir, alumnes que cursen la matèria de Matemàtiques (fig. 8.3, p. 285).

L'estudi per grups i gènere no ens facilita informació que permeti reforçar més encara la posició exposada. Tanmateix, respecte del producte els resultats són molt més satisfactoris que els relatius a l'addició de nombres enters (fig. 8.5, p. 287).

Resultat 8.1.3 *A partir de les dades recollides es desprèn que l'èxit respecte del producte de nombres enters el trobem en més de quatre cinquenes parts dels alumnes de primer curs de batxillerat. Amb lleus diferències, les noies obtenen millors resultats que els nois i els alumnes que cursen Matemàtiques també millors que els que cursen Matemàtiques Aplicades a les Ciències Socials.*

Respecte del quart objectiu

«Diagnosticar quines són les situacions que tria l'alumne per utilitzar el nombre enter» és el quart i darrer objectiu de la present part de la fase de diagnosi de la recerca. Per tal d'esbrinar el seu nivell d'assoliment hem proposat una activitat oberta en el sentit de deixar que sigui l'alumne participant qui decideixi un enunciat relacionat amb el nombre negatiu.

El 71,4% dels alumnes participants escull un enunciat que es correspon amb un model concret. Per quasi les tres quartes parts dels alumnes, l'ensenyament del nombre negatiu a partir de models concrets que van rebre es concreta en un aprenentatge que fa que suggereixin exemples relacionats amb la seva vida quotidiana. Tanmateix la proporció quan examinem els resultats en funció del sexe dels

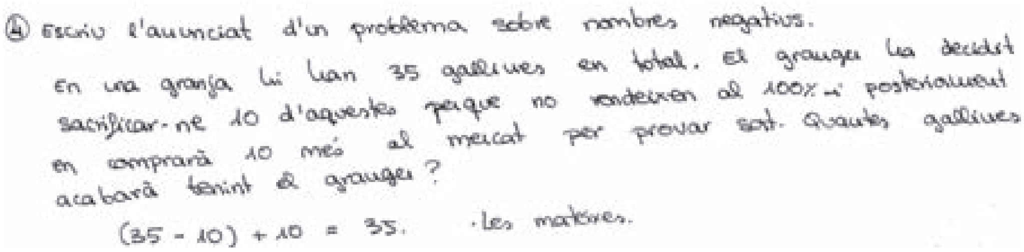


Figura 8.6: Enunciat d'un problema proposat per l'alumna amb número de registre 7 (grup A) relacionat amb el nombre negatiu.

participants pateix una petita variació. Mentre que un 86,4% dels nois es decanta per aquesta opció, és un 69,6% la proporció de noies que ho fa. Respecte dels grups és un 89,5% dels alumnes del grup A (que cursen la matèria Matemàtiques Aplicades a les Ciències Socials) qui opta per l'esmentada elecció, proporció que es redueix fins el 69,2% dels alumnes del grup B (que cursen la matèria de Matemàtiques). L'estudi per grup i gènere mostra com a pols oposats que mentre que la totalitat dels nois del grup A es decanta per un model concret, només el 58,3% de les noies del grup B ho fa. Recomanem la consulta dels detalls en les figures 8.2 (p. 284), 8.3 (p. 285), 8.4 (p. 286) i 8.5 (p. 287).

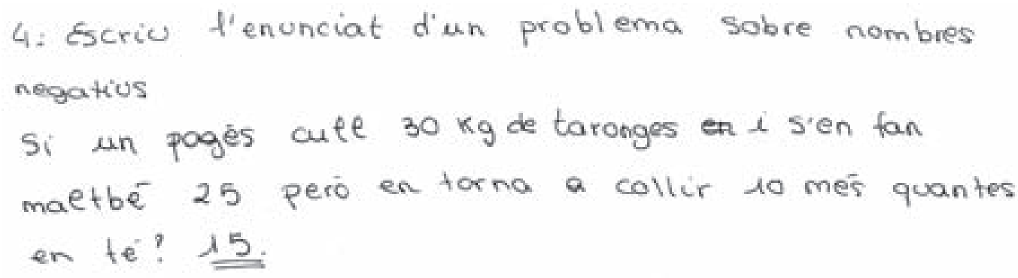


Figura 8.7: Enunciat d'un problema proposat per l'alumna amb número de registre 17 (grup A) relacionat amb el nombre negatiu.

Entre els diferents models concrets als quals fan referència els alumnes, destaquen els relacionats amb guanys i pèrdues (80%). Es decanta pel model del ascensor el 11,4% dels alumnes i pel model de les temperatures el 8,6%. Apreciem en els resultats petites diferències segons el sexe dels alumnes participants (86,4% - 69,6%) i més rellevant és encara l'estudi respecte dels grups. Cap alumne del grup A, és a dir que cursi Matemàtiques Aplicades a les Ciències Socials, opta pel model de les temperatures mentre que entre els alumnes del grup B ho fa quasi un 17% dels alumnes.

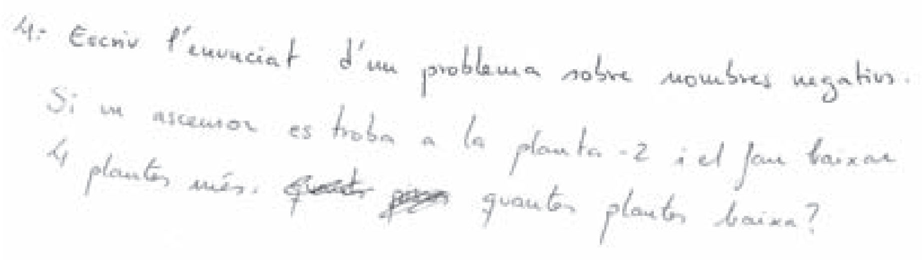


Figura 8.8: Enunciat d'un problema proposat per l'alumna amb número de registre 9 (grup A) relacionat amb el nombre negatiu.

Els resultats ens condueixen a conjecturar que els nois busquen més que les noies justificacions a partir de models concrets (86,4%). En canvi, les noies cerquen també explicacions que s'allunyen més del models (69,6%).

En l'estudi per grups són els alumnes que cursen Matemàtiques Aplicades a les Ciències Socials (grup A) els qui cerquen més explicacions basades en models concrets (89,5%). En canvi els alumnes que cursen Matemàtiques (grup B) busquen altres explicacions reduint la proporció que opta per algun model fins al 69,2%.

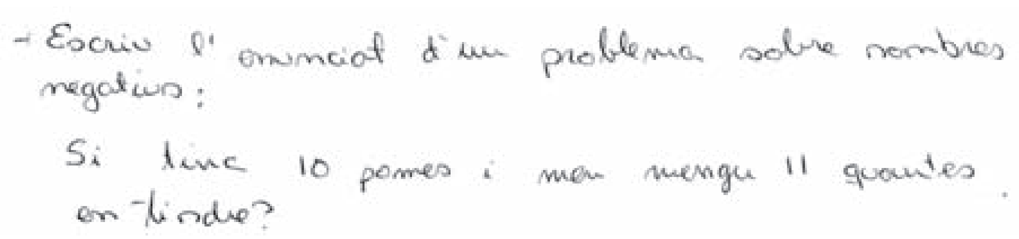


Figura 8.9: Proposta de problema relacionat amb el nombre negatiu de l'alumne amb número de registre 28 (grup B).

L'estudi per grups i gènere aporta un resultat que considerem que cal no menystenir. Així com una gran proporció d'alumnes exposa propostes que es corresponen amb el model concret de guanys i pèrdues, aquest resultat minva força en el cas de les noies del grup B, baixant del 80% de mitjana fins al 58,3%.

Molts són els detalls que es desprenen de les dades i optem per deixar-les a la vista.

L'alumna amb número de registre 7 és una noia del grup A, és a dir, que cursa Matemàtiques Aplicades a les Ciències Socials. En la figura 8.6 (p. 289) podem veure que l'alumna proposa una activitat que es pot resoldre amb nombres naturals. La interpretació correcta de les accions afegir i treure així com la seva equivalència amb les operacions sumar i restar són suficients per resoldre l'activitat proposada per l'estudiant. En la mateixa línia trobem la proposta de l'alumna amb número de registre 17, que es pot consultar en la figura 8.7 (p. 289).

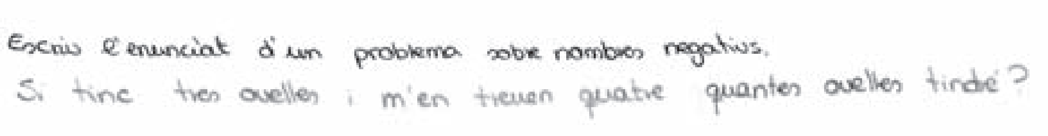


Figura 8.10: Proposta de problema relacionat amb el nombre negatiu de l'alumne amb número de registre 35 (grup B).

La participant en la fase empírica de la present recerca amb número de registre 9 és una noia del grup A, és a dir, que cursa també Matemàtiques Aplicades a les Ciències Socials. En la figura 8.8 (p. 290) podem veure que l'alumna proposa una activitat en que la resposta es pot trobar en la mateixa pregunta.

La vinculació del nombre negatiu amb la realitat quotidiana de l'estudiant ha quedat palesa en les dades mostrades. Una proporció molt elevada d'estudiants opta per presentar un problema relacionat amb el seu entorn proper i que pot resoldre fent ús del seu sentit comú. Tanmateix, la pèrdua de sentit comú que hem observat en algunes ocasions resulta preocupant des de la perspectiva docent i justifica la present recerca des del punt de vista de l'investigador. L'alumne amb número de registre 28 intenta proposar un exemple proper a la seva realitat immediata. Es tracta d'un alumne del grup B, és a dir, que cursa la matèria de Matemàtiques a primer curs de batxillerat. En la figura 8.9 (p. 290) es pot veure que l'estudiant planteja una situació impossible. L'interès per conèixer les connexions entre l'aprenentatge real i formal del nombre negatiu pren el seu interès a la vista de l'esmentada resposta. De manera anàloga l'alumna amb número de registre 35 proposa una altra situació impossible tal com es pot consultar en la figura 8.10

(p. 291).

8.2 (II) Sobre el tractament real i formal del nombre enter

Els nombres negatius i els complexos es contraposen als naturals i als fraccionaris positius tant per la forma com van sorgir com per la seva data d'aparició històrica. En el cas dels nombres negatius, el període que va des de la seva aparició fins la seva acceptació va durar més d'un mil·leni.

> Los naturales y fraccionarios tienen sus raíces en la experimentación con magnitudes, ya sean discretas o contínuas. Constituyen un logro social históricamente muy temprano y ligado a las necesidades cotidianas de cuantificación. De hecho, durante mucho tiempo, se ha identificado número con magnitud. Por el contrario, los negativos, los irracionales y los complejos tienen su origen en la práctica matemática y más concretamente, en las manipulaciones algebraicas.
>
> (GONZÁLEZ *et al.*, 1990, p. 21)

Ens proposem traduir la realitat inicial que copsem a les aules a dades que puguem condensar i manipular per extreure resultats inicials de la recerca. Proposem un examen de certs components de l'aprenentatge de l'estudiant amb una finalitat diagnòstica.

Requerim un primer estudi en el que es diagnostiqui l'aprenentatge copsat per l'alumne al llarg de l'ensenyament obligatori respecte dels lligams que dóna l'estudiant respecte del tractament real i formal del nombre enter, tal com apuntàvem en el disseny i la metodologia de la recerca (p. 234). Les anàlisis inicials permeten obtenir informació relativa a una sèrie d'indicadors que són rellevants per sí mateixos.

El disseny dels instruments de recollida de dades el vam realitzar al llarg de l'estiu de l'any 2007. En particular estem interessants en conèixer el tractament real i formal que dóna l'alumne al nombre negatiu. El qüestionari realitzat per

IRIARTE *et al.* (1991) va ser decisiu en el disseny de l'instrument. L'execució de la recerca diagnòstica la vam realitzar a l'inici del curs acadèmic 2007/2008. En aquest apartat exposem els detalls del procés per finalitzar amb l'exposició dels resultats obtinguts.

8.2.1 De la finalitat general a la concreció d'objectius

En la part que ens ocupa ens proposem com a finalitat general conèixer la utilització que fa l'alumne respecte dels nombres enters així com les dificultats i errors que provenen d'un tractament real o formal. Per tal d'afavorir l'accés a aquest coneixement fixem els objectius que presentem tot seguit:

1. Diagnosticar si l'alumne abandona el pla real per interpretar els nombres negatius.

2. Diagnosticar si l'alumne interpreta la suma i la resta de nombres enters com un augment o una disminució.

3. Diagnosticar si l'alumne multiplica i divideix els nombres enters tal com ho faria amb nombres naturals.

4. Diagnosticar si l'alumne dóna un tractament correcte als signes.

5. Diagnosticar si l'alumne dóna un tractament correcte a l'ordre dels nombres enters.

6. Diagnosticar si l'alumne té presents els nombres enters en les seves resolucions.

Aquests objectius s'estableixen amb la prioritat d'alimentar els objectius generals de la present investigació. La vinculació entre els objectius generals i els relatius a l'activitat formativa que acabem d'exposar es pot consultar en la figura 8.11 (p. 294).

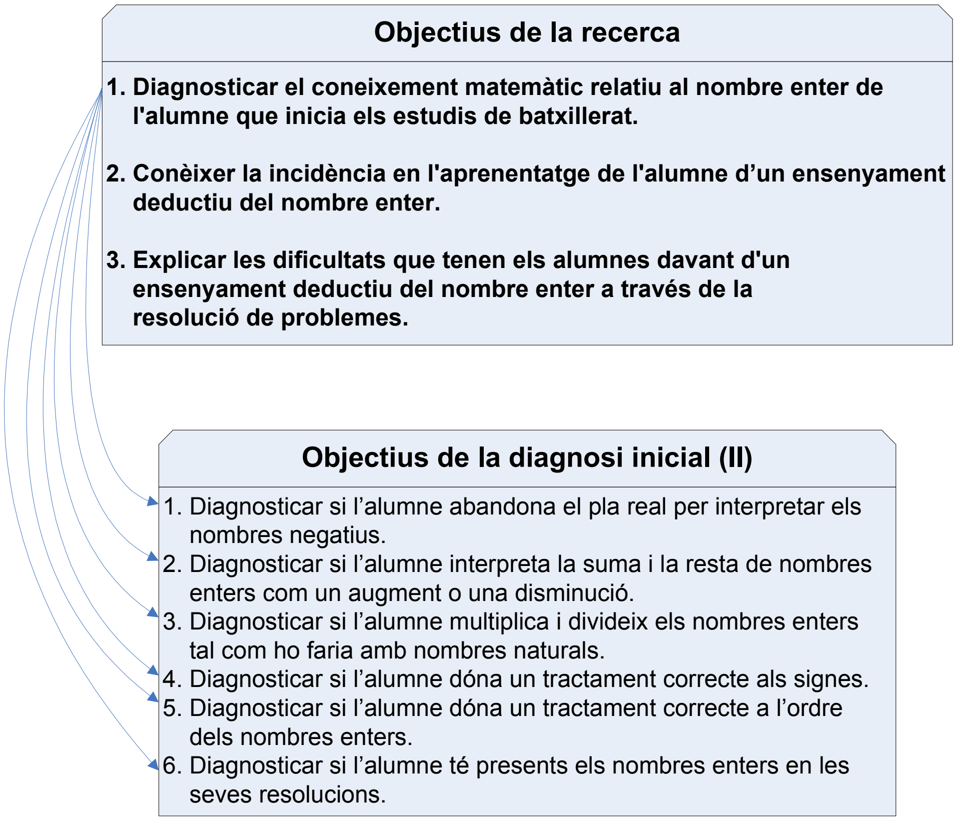


Figura 8.11: Dels objectius generals de la investigació a la seva concreció. Diagnosi II.

8.2.2 Sobre l'instrument de recollida de dades

Abundants són els materials que s'han dissenyat amb el propòsit de diagnosticar les dificultats i errors en el tractament del nombre enter i negatiu quan l'ensenyament es realitza a través de models concrets. Tanmateix, el nostre interès rau en no limitar la diagnosi inicial a aquest estil d'ensenyament tal com es concreta en els objectius presentats en l'apartat anterior. Ens proposem un estudi del tractament real i del formal; des d'aquest punt de vista l'elecció de l'instrument de recollida d'informació no és una tasca fàcil.

La revisió bibliogràfica ens ha conduït a examinar amb detall la investigació realitzada per IRIARTE *et al.* (1991) dirigida a fer palesos els errors i els oblits que dificulten l'aprenentatge del nombre enter. L'agrupament que fan els autors entre les dificultats que provenen d'un tractament real i d'un tractament formal és del nostre interès. L'exposat ens condueix a l'elecció del qüestionari diagnòstic disponible en l'annex (p. 566) i proposat a partir de les reflexions metodològiques del disseny de la recerca (p. 233) amb la finalitat d'obtenir informació que permeti mesurar l'assoliment dels objectius de la present part de la fase diagnòstica.

Els participants en la recerca que presenten els esmentats autors van ser alumnes de vuitè curs d'Educació General Bàsica i també estudiants de l'Escola Universitària de Magisteri. Aquest fet reforça l'elecció de l'instrument de recollida de dades pels alumnes participants en la present investigació, que són de primer curs de batxillerat.

Indicadors atesos pel qüestionari

El qüestionari[2] que és disponible a partir de la pàgina 566 concreta unes preguntes que de manera sintètica permeten obtenir informació relativa a:

A1. L'abandonament del real.

A2. La suma com un augment.

A3. La multiplicació de nombres enters com en els naturals.

A4. La resta com una disminució.

A5. La divisió de nombres enters com en els naturals.

A6. L'ordre en els nombres enters com en els nombres naturals.

A7. El tractament del signe.

A8. Identificació dels símbols literals amb nombres positius.

B11. Sobre la reversibilitat de l'ordre.

B12. Errors en les seqüències temporals.

[2] La facilitat o dificultat del format del qüestionari ens sembla un fet essencial que pot influir en la fluïdesa amb la que els alumnes responen a les preguntes i també en la motivació dels participants incidint per tant en la validesa de l'instrument. Per evitar aquesta possibilitat el qüestionari escollit atén el fet que les preguntes es plantegen de manera directa i s'eviten consideracions particulars que puguin distreure l'alumne del focus principal d'atenció que volem prioritzar.

B13. Identificació d'una relació amb la seva recíproca.

B3. Ponderació de l'oblit dels nombres enters.

8.2.3 Lligams entre els objectius i les preguntes del qüestionari

Les preguntes del qüestionari estan relacionades amb els objectius de la present diagnosi tal com es destaca en el quadre següent:

OBJECTIUS	QÜESTIONS
Objectiu 1	A1
Objectiu 2	A2, A4
Objectiu 3	A3, A5
Objectiu 4	A7, A8
Objectiu 5	A6, B11, B12, B13
Objectiu 6	B3

Algunes qüestions atenen les dificultats que provenen d'un tractament real del nombre enter i d'altres les que provenen d'un tractament formal. En la figura 8.12 (p. 296) es destaquen les relacions que deriven d'aquesta classificació.

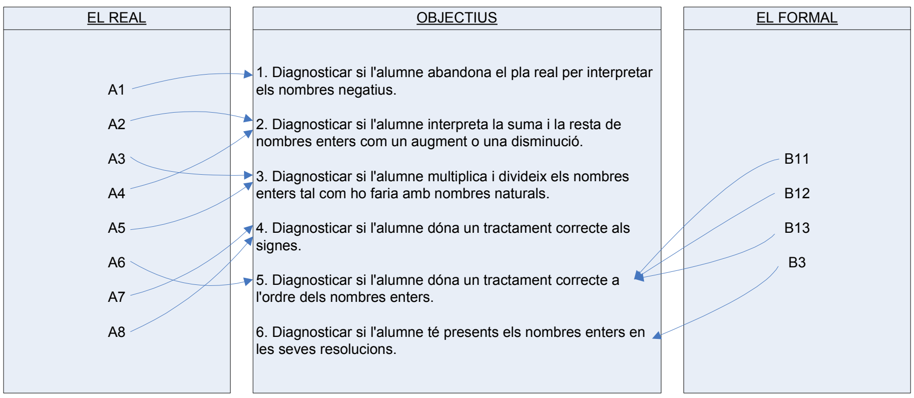


Figura 8.12: Vinculació entre els objectius de la diagnosi i els indicadors de l'instrument de recollida de dades segons la classificació real versus formal.

8.2.4 Categories de resposta i anàlisi de dades

L'anàlisi de les dades que realitzem és valuosa ja que la mesura que establim sobre l'assoliment de cada indicador tindrà rellevància per la pròpia recerca i per contrastar el tractament que posteriorment realitzarà l'alumne en la intervenció. La finalitat és aconseguir una recerca compacta de manera que els resultats de les diagnosis prèvies, la que ara ens ocupa n'és una, estiguin lligats amb els resultats de la fase d'intervenció i amb les valoracions finals.

Els paràmetres utilitzats per a l'anàlisi d'aquestes activitats han estat els següents: la comprensió de la situació i del propòsit plantejats, la interpretació de la informació de cada situació marcant la rellevància de si l'alumne es mou en el pla real o en el pla formal, l'estratègia desenvolupada per l'alumne i relativa a la representació que fa del problema plantejat en cada situació, l'aplicació de coneixements previs en cada circumstància tot marcant el tret distintiu en si els aplica de manera argumentada o instruïda i, finalment, la comunicació de la solució.

En algunes ocasions ens hem trobat alumnes que mostren una adequada comprensió de la situació plantejada i una correcta interpretació de la informació. En aquests casos les anotacions lliurades ens permeten observar l'estratègia emprada. Tanmateix, una tipologia de solucions molt freqüent a classe és quan l'alumne dóna únicament un resultat o la resposta estricta a la pregunta formulada. En aquests casos l'absència gairebé total d'anotacions, d'explicacions i fins i tot de comunicació de la solució no permet analitzar la correcció de la resolució. Hem parat atenció a aquestes respostes ja que d'una banda podria donar-se el cas que degut a la no excessiva dificultat del problema, es tractés d'una resolució ben desenvolupada mentalment, amb una correcta comprensió de l'enunciat i interpretació de la informació però amb una deficient comunicació de la solució. D'altra banda es podria tractar d'un exemple de molt mala comprensió del propòsit de la situació plantejada. En aquest darrer cas, s'hauria d'associar a aquests processos de resolució possiblement una creença relativament freqüent entre l'alumnat, en relació a que una «pregunta» que no «inclou estrictament referències a càlculs» no s'associa a una activitat de matemàtiques i per tant es pot respondre ràpidament basant-se en els referents que sí que poden estar inclosos en l'enunciat.

En la present memòria exposem sintèticament els resultats però alhora mostrem el detall de les dades que poden ser útils per recerques posteriors. Tanmateix, la pèrdua d'informació que suposa tota presentació sintètica la completem amb les respostes detallades d'alguns alumnes que, per un motiu o altre, són rellevants. Des dels primers qüestionaris analitzats hem confirmat que les preguntes s'entenien, tot i que les contestacions han fet ampliar la previsió inicial de les categories de resposta. Tot i així, aquests increments no han conduït a la necessitat de modificar els qüestionaris. S'ha fet servir una codificació bàsica, tal com es pot consultar en els arxius en format EXCEL[3] on estan recollides les dades sintetitzades per categories de resposta que tot seguit comuniquem.

Les categories que presentem tot seguit es corresponen amb els objectius que pretenem assolir, són exhaustives ja que les dades s'han pogut col·locar en elles i mútuament excloents ja que les dades no poden pertànyer a dues categories diferents. Hem posat noms que les fan entenedores i atenen l'essència de cadascun dels objectius. Sense un esforç d'abstracció hi podria haver gran quantitat de categories, però és aquest esforç el que permet que cadascuna d'elles ens aporti una unitat d'informació rellevant. Donat que el volum de dades és nombrós s'ha constatat des d'un primer moment que seria convenient fer ús de suport informàtic per a gestionar-les. Aquesta mecanització és important per prosseguir l'anàlisi de dades i alhora per facilitar la il·lustració dels resultats.

El real com obstacle

A1) El nombre com expressió de quantitat

Pots trobar una situació real en la que tingui sentit $-(-3)$?

L'anàlisi de les respostes d'aquesta pregunta informa sobre les dificultats que té l'alumne per donar significat a l'expressió de l'enunciat. Es busca copsar que mentre no s'abandoni el pla real és difícil concebre els negatius perquè no són necessaris. Les categories que s'han establert a partir de l'anàlisi de les respostes són les següents:

1. Diu que mai s'ho havia plantejat.
2. No en troba cap.

[3] http://www.xtec.cat/~rpujol1/Recerques/Tesi/Dades1.rar

3. Tractament algebraic desvinculat de tot fenomen real.
4. Sí, dóna un exemple.
5. Diu que en la realitat no existeixen els nombres negatius.

A2) La suma com augment
Pots trobar un nombre que sumat a 5 doni 2?

La pregunta condueix a informar sobre la vinculació que dóna l'alumne entre l'operació suma i l'augment d'una determinada mesura. En aquesta qüestió es busca copsar que mentre no s'abandoni el pla real és difícil concebre la suma entre nombres negatius si l'estudiant manté la vinculació entre sumar i augmentar. Les categories que s'han establert a partir de l'anàlisi de les respostes són les següents:

1. Troben solució. El real no és un obstacle. Realitza l'operació matemàtica desvinculada de la realitat.
2. Interpreta la suma com un augment.
3. Realitza càlculs erronis.

A3) La multiplicació com multiplicació natural
És possible trobar un múltiple de 5 menor que 3 i diferent de zero?

La multiplicació entre nombres naturals té una vinculació clara amb l'acció d'afegir repetides vegades. Entre nombres negatius la multiplicació abandona aquesta transparència i arriba als estudiants de diferents maneres tal com es recull en les següents categories de resposta:

1. Sí, és possible. L'alumne respon correctament.
2. Sí, és possible. L'alumne respon incorrectament.
3. No és possible.
4. L'alumne diu que no ho sap.

A4) La substracció com disminució
És possible trobar un nombre que restat de 7 doni 10?

La pregunta condueix a informar sobre la vinculació que dóna l'alumne entre l'operació resta i la disminució d'una determinada mesura. En aquesta qüestió es busca constatar que és difícil concebre la resta entre nombres enters o negatius si l'estudiant manté la vinculació entre restar i disminuir. Les categories que s'han establert a partir de l'anàlisi de les respostes són les següents:

1. Troben solució. El real no és un obstacle. Realitza l'operació matemàtica desvinculada de la realitat.
2. Interpreta la resta com una disminució.
3. Ho calcula erròniament.

A5) *La divisió com divisió natural*
És correcta la següent divisió?
Dividend$=3$, divisor$=4$, quocient$=1$ i residu$=-1$.

La pregunta condueix a informar sobre la vinculació que dóna l'alumne entre l'operació dividir i l'acció repartir. En aquesta qüestió es busca copsar fins a quin punt el nombre enter i negatiu ha produït una evolució en la concepció de la divisió que fa que la interpreti més enllà d'un repartiment. Les categories que s'han establert a partir de l'anàlisi de les respostes són les següents:

1. Sí, és correcta.
2. No, perquè el dividend ha de ser major que el divisor.
3. No, perquè el residu ha de ser nul o positiu.
4. No, no dóna cap motiu.

A6) *L'ordre entre els negatius és el mateix que l'ordre natural*

A61) Quin és el nombre major en una unitat a -3?

A62) En la llista dels 40 principals, el disc preferit d'en Joan estava 3 llocs més avall del que havia estat la setmana anterior. L'antiga posició era la 3, quina és la nova?

Les dues preguntes corresponents a l'indicador *A6)* cerquen examinar si l'alumne trasllada als nombres enters l'ordre dels nombres naturals. Les categories que s'han establert a partir de l'anàlisi de les respostes són les següents:

1. Utilitza correctament l'ordre en els nombres enters.
2. Comet errors que poden provenir de traslladar als enters l'ordre dels nombres naturals.

A7) *Ignorar el signe*
-7 graus a Moscú, -3 a Budapest. Si algú hagués viatjat de Moscú a Budapest, hauria notat una pujada o una baixada de temperatura?

La utilització i la interpretació dels nombres amb signe participen de les competències en el treball amb nombres negatius que són desitjables en els alumnes de primer curs de batxillerat. Les categories que s'han establert a partir de l'anàlisi de les respostes són les següents:

1. És competent en el treball de nombres amb signe.
2. Mira d'interpretar els nombres amb signe però comet errors.
3. Ignora el signe.

A8) *Identificació dels símbols literals amb nombres positius*
Si a és positiu i b és negatiu, $a - b$ és un nombre positiu.

La identificació de símbols literals amb nombres positius és una dificultat atesa, entre d'altres, per Johnson (1986, p. 507). Les categories que s'han establert a partir de l'anàlisi de les respostes són les següents:

1. El símbol literal pot fer referència a un nombre positiu o negatiu.
2. El símbol literal fa referència a un nombre positiu.
3. Presenta confusions diverses.

La imposició del formal com obstacle

B1) *En el maneig de l'ordre lineal*

B11) Fracàs en la inversió d'una relació d'ordre

B111) En Pere té 5 bales més que en Joan i en Joan té 3 bales més que l'Enric. Sabent que en Pere té 26 bales, quantes bales té l'Enric?

B112) L'ordinador de l'Eva va costar 120 euros més que el de l'Alexandre. El de l'Eva va costar 520 euros, quant va costar el de l'Alexandre?

Les dues preguntes corresponents a l'indicador *B11)* completen l'indicador *A6)* i cerquen diagnosticar les dificultats que té l'alumne en el tractament de la reversibilitat de l'ordre. Les categories que s'han establert a partir de l'anàlisi de les respostes són les següents:

1. Tracta correctament la reversibilitat de l'ordre.
2. Presenta dificultats en la reversibilitat de l'ordre.

B12) La seqüència temporal com una font d'errors

B121) La Sara va gastar ahir en llaminadures 8 euros més que avui. Ahir va gastar 35 euros. Quants n'ha gastat avui?

B122) El senyor Ruiz té 56 anys i el seu fill 29. Quan l'edat del pare és el doble de la del fill?

Les dues preguntes corresponents a l'indicador *B11)* completen l'indicador *A6)* i cerquen diagnosticar les dificultats que té l'alumne en el tractament de la reversibilitat de l'ordre. Les categories que s'han establert a partir de l'anàlisi de les respostes són les següents:

1. Els alumnes cometen errors en el tractament temporal amb nombres negatius.
2. Els alumnes utilitzen correctament els nombres negatius en el tractament temporal.

B13) Identificació d'una relació amb la seva recíproca

Quin nombre precedeix en 7 unitats a -3?

En aquesta pregunta es mira de recollir informació relativa a la identificació i utilització correcta de l'ordre entre nombres enters. El plantejament de la pregunta fa que la imatge de la recta numèrica esdevingui útil per a l'encert de la resposta. Els resultats donaran, per tant, informació vàlida per a la posterior experimentació. Les categories que s'han establert a partir de l'anàlisi de les respostes són les següents:

1. Encerta la resposta.
2. Presenta errors.
3. No comprèn la pregunta.

B2) Les regles de càlcul com un formalisme buit

B3) Els enters estudiats i oblidats

B31) Quin nombre sumat a 5 dóna 3?

B32) Pots trobar un múltiple de 5 menor que 3 i diferent de zero?

B33) Quin nombre restat de 7 dóna 10?

L'aprenentatge dels nombres enters ha de facilitar, en particular, habilitat i coneixement que faculti els estudiants operar correctament amb nombres enters. Les tres preguntes formulades permeten mesurar el nivell d'assoliment de l'esmentada habilitat i coneixement. Les categories que s'han establert a partir de l'anàlisi de les respostes són les següents:

1. Ús adequat del càlcul aritmètic entre nombres enters.
2. Presenta errors en una de les tres qüestions.
3. Presenta errors en dues de les tres qüestions.
4. Presenta errors en les tres qüestions.

8.2.5 Presentació de resultats

En la figura 8.13 (p. 304) es poden consultar els resultats globals. Per a cada indicador es mostra el total absolut i relatiu de participants que es corresponen amb cada categoria de resposta.

RESULTATS GLOBALS	A1	A2	A3	A4	A5	A6	A7	A8	B11	B12	B13	B3
TOTAL DE 1	10	45	9	22	6	48	47	19	45	13	15	5
TOTAL DE 2	7	1	13	4	10	2	1	18	5	37	30	19
TOTAL DE 3	9	4	25	23	24	0	2	12	0	0	2	19
TOTAL DE 4	15	0	3	0	10	0	0	0	0	0	0	6
TOTAL DE 5	9	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
TOTAL DE RESPOSTES	50	50	50	49	50	50	50	49	50	50	47	49
TOTAL DE 1	20,0%	90,0%	18,0%	44,9%	12,0%	96,0%	94,0%	38,8%	90,0%	26,0%	31,9%	10,2%
TOTAL DE 2	14,0%	2,0%	26,0%	8,2%	20,0%	4,0%	2,0%	36,7%	10,0%	74,0%	63,8%	38,8%
TOTAL DE 3	18,0%	8,0%	50,0%	46,9%	48,0%	0,0%	4,0%	24,5%	0,0%	0,0%	4,3%	38,8%
TOTAL DE 4	30,0%	0,0%	6,0%	0,0%	20,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	12,2%
TOTAL DE 5	18,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%
TOTAL DE RESPOSTES	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%

Figura 8.13: Resultats globals del segon qüestionari diagnòstic.

Respecte del primer objectiu

«Diagnosticar si l'alumne abandona el pla real per interpretar els nombres negatius» és el primer objectiu de la present part de la fase de diagnosi de la recerca. Per tal d'esbrinar el seu nivell d'assoliment hem proposat una qüestió. Amb ella cerquem si l'alumne abandona el pla real per interpretar un doble canvi de signe entre nombres enters.

El 30% dels alumnes participants dóna una resposta que es correspon amb la quarta categoria, és a dir, l'esmentada proporció dels participants aporta un exemple proper a la seva realitat quotidiana per justificar el que se li demana. L'estudi per grups no mostra importants diferències. En canvi l'estudi per gènere mostra però que un 36% dels nois opta per aquesta tipologia de resposta mentre que només ho fa el 24% de les noies. Els resultats presentats per grup i gènere permeten precisar que entre els nois, els que més cerquen aquesta explicació real són els que cursen Matemàtiques Aplicades a les Ciències Socials (grup B), concretament un 40%, en front del 33% dels nois que cursa Matemàtiques (grup B).

Només un 18% dels participants manifesta que l'expressió plantejada no es pot justificar amb exemples reals; d'una manera o altra diuen que a la realitat no existeixen els nombres negatius. L'estudi per grups marca importants diferències entre ells. La cinquena categoria de resposta es correspon amb només un 8,7% dels alumnes del grup A, és a dir, dels alumnes que cursen Matemàtiques Aplicades a les Ciències Socials. En canvi aquest resultat esdevé quasi un 26% en els alumnes del grup B, els que cursen la matèria de Matemàtiques. L'estudi per gènere també presenta diferències importants. Només un 8% dels nois s'adiu amb la cinquena categoria de resposta mentre que en les noies aquesta proporció puja

RESULTATS PER GRUP	A1	A2	A3	A4	A5	A6	A7	A8	B11	B12	B13	B3
TOTAL 1 DE A	8	20	2	6	1	21	21	9	20	6	8	1
TOTAL 2 DE A	4	1	7	3	3	2	1	6	3	17	12	6
TOTAL 3 DE A	2	2	12	13	12	0	1	8	0	0	2	12
TOTAL 4 DE A	7	0	2	0	7	0	0	0	0	0	0	4
TOTAL 5 DE A	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
TOTAL DE A	23	23	23	22	23	23	23	23	23	23	22	23
TOTAL 1 DE B	2	25	7	16	5	27	26	10	25	7	7	4
TOTAL 2 DE B	3	0	6	1	7	0	0	12	2	20	18	13
TOTAL 3 DE B	7	2	13	10	12	0	1	4	0	0	0	7
TOTAL 4 DE B	8	0	1	0	3	0	0	0	0	0	0	2
TOTAL 5 DE B	7	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
TOTAL DE B	27	27	27	27	27	27	27	26	27	27	25	26
TOTAL 1 DE A	34,8%	87,0%	8,7%	27,3%	4,3%	91,3%	91,3%	39,1%	87,0%	26,1%	36,4%	4,3%
TOTAL 2 DE A	17,4%	4,3%	30,4%	13,6%	13,0%	8,7%	4,3%	26,1%	13,0%	73,9%	54,5%	26,1%
TOTAL 3 DE A	8,7%	8,7%	52,2%	59,1%	52,2%	0,0%	4,3%	34,8%	0,0%	0,0%	9,1%	52,2%
TOTAL 4 DE A	30,4%	0,0%	8,7%	0,0%	30,4%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	17,4%
TOTAL 5 DE A	8,7%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%
TOTAL DE A	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%
TOTAL 1 DE B	7,4%	92,6%	25,9%	59,3%	18,5%	100,0%	96,3%	38,5%	92,6%	25,9%	28,0%	15,4%
TOTAL 2 DE B	11,1%	0,0%	22,2%	3,7%	25,9%	0,0%	0,0%	46,2%	7,4%	74,1%	72,0%	50,0%
TOTAL 3 DE B	25,9%	7,4%	48,1%	37,0%	44,4%	0,0%	3,7%	15,4%	0,0%	0,0%	0,0%	26,9%
TOTAL 4 DE B	29,6%	0,0%	3,7%	0,0%	11,1%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	7,7%
TOTAL 5 DE B	25,9%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%
TOTAL DE B	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%

Figura 8.14: Resultats per grups del segon qüestionari diagnòstic.

fins un 28%.

RESULTATS PER GÈNERE	A1	A2	A3	A4	A5	A6	A7	A8	B11	B12	B13	B3
TOTAL 1 DE H	4	25	6	12	4	24	24	7	24	4	8	4
TOTAL 2 DE H	6	0	6	2	5	1	0	11	1	21	14	11
TOTAL 3 DE H	4	0	11	11	12	0	1	6	0	0	0	9
TOTAL 4 DE H	9	0	2	0	4	0	0	0	0	0	0	1
TOTAL 5 DE H	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
TOTAL DE H	25	25	25	25	25	25	25	24	25	25	22	25
TOTAL 1 DE D	6	20	3	10	2	24	23	12	21	9	7	1
TOTAL 2 DE D	1	1	7	2	5	1	1	7	4	16	16	8
TOTAL 3 DE D	5	4	14	12	12	0	1	6	0	0	2	10
TOTAL 4 DE D	6	0	1	0	6	0	0	0	0	0	0	5
TOTAL 5 DE D	7	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
TOTAL DE D	25	25	25	24	25	25	25	25	25	25	25	24
TOTAL 1 DE H	16,0%	100,0%	24,0%	48,0%	16,0%	96,0%	96,0%	29,2%	96,0%	16,0%	36,4%	16,0%
TOTAL 2 DE H	24,0%	0,0%	24,0%	8,0%	20,0%	4,0%	0,0%	45,8%	4,0%	84,0%	63,6%	44,0%
TOTAL 3 DE H	16,0%	0,0%	44,0%	44,0%	48,0%	0,0%	4,0%	25,0%	0,0%	0,0%	0,0%	36,0%
TOTAL 4 DE H	36,0%	0,0%	8,0%	0,0%	16,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	4,0%
TOTAL 5 DE H	8,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%
TOTAL DE H	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%
TOTAL 1 DE D	24,0%	80,0%	12,0%	41,7%	8,0%	96,0%	92,0%	48,0%	84,0%	36,0%	28,0%	4,2%
TOTAL 2 DE D	4,0%	4,0%	28,0%	8,3%	20,0%	4,0%	4,0%	28,0%	16,0%	64,0%	64,0%	33,3%
TOTAL 3 DE D	20,0%	16,0%	56,0%	50,0%	48,0%	0,0%	4,0%	24,0%	0,0%	0,0%	8,0%	41,7%
TOTAL 4 DE D	24,0%	0,0%	4,0%	0,0%	24,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	20,8%
TOTAL 5 DE D	28,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%
TOTAL DE D	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%

Figura 8.15: Resultats per gènere del segon qüestionari diagnòstic.

Resultat 8.2.1 *Aquestes diferències ens condueixen a conjecturar que els nois busquen més que les noies justificacions a partir de la realitat quotidiana. En canvi, les noies cerquen en aquestes expressions pre-algebraiques explicacions que viuen dins de la matemàtica.*

Aquestes diferències també les constatem en l'estudi per grups. En aquest cas són els alumnes que cursen Matemàtiques Aplicades a les Ciències Socials (grup A) els qui cerquen més explicacions basades en la immediatesa del món real. En canvi els alumnes que cursen Matemàtiques (grup B) busquen més explicacions dins de la matemàtica.

L'estudi per grup i gènere permet arribar a aquest resultat. Quasi un 42% de les noies del grup B diu que en la realitat no existeixen els nombres negatius i cerquen explicació dins de la matemàtica. En el pol oposat s'hi troben els homes del grup A en que cap d'ells es posiciona en aquesta opció.

RESULTATS PER GRUP I GÈNERE	A1	A2	A3	A4	A5	A6	A7	A8	B11	B12	B13	B3
TOTAL 1 DE HA	2	10	1	4	1	9	9	3	10	1	4	1
TOTAL 2 DE HA	3	0	3	1	2	1	0	3	0	9	5	4
TOTAL 3 DE HA	1	0	5	5	4	0	1	4	0	0	0	4
TOTAL 4 DE HA	4	0	1	0	3	0	0	0	0	0	0	1
TOTAL 5 DE HA	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
TOTAL DE HA	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	9	10
TOTAL 1 DE HB	2	15	5	8	3	15	15	4	14	3	4	3
TOTAL 2 DE HB	3	0	3	1	3	0	0	8	1	12	9	7
TOTAL 3 DE HB	3	0	6	6	8	0	0	2	0	0	0	5
TOTAL 4 DE HB	5	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0
TOTAL 5 DE HB	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
TOTAL DE HB	15	15	15	15	15	15	15	14	15	15	13	15
TOTAL 1 DE DA	6	10	1	2	0	12	12	6	10	5	4	0
TOTAL 2 DE DA	1	1	4	2	1	1	1	3	3	8	7	2
TOTAL 3 DE DA	1	2	7	8	8	0	0	4	0	0	2	8
TOTAL 4 DE DA	3	0	1	0	4	0	0	0	0	0	0	3
TOTAL 5 DE DA	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
TOTAL DE DA	13	13	13	12	13	13	13	13	13	13	13	13
TOTAL 1 DE DB	0	10	2	8	2	12	11	6	11	4	3	1
TOTAL 2 DE DB	0	0	3	0	4	0	0	4	1	8	9	6
TOTAL 3 DE DB	4	2	7	4	4	0	1	2	0	0	0	2
TOTAL 4 DE DB	3	0	0	0	2	0	0	0	0	0	0	2
TOTAL 5 DE DB	5	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
TOTAL DE DB	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12	11
TOTAL 1 DE HA	20,0%	100,0%	10,0%	40,0%	10,0%	90,0%	90,0%	30,0%	100,0%	10,0%	44,4%	10,0%
TOTAL 2 DE HA	30,0%	0,0%	30,0%	10,0%	20,0%	10,0%	0,0%	30,0%	0,0%	90,0%	55,6%	40,0%
TOTAL 3 DE HA	10,0%	0,0%	50,0%	50,0%	40,0%	0,0%	10,0%	40,0%	0,0%	0,0%	0,0%	40,0%
TOTAL 4 DE HA	40,0%	0,0%	10,0%	0,0%	30,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	10,0%
TOTAL 5 DE HA	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%
TOTAL DE HA	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%
TOTAL 1 DE HB	13,3%	100,0%	33,3%	53,3%	20,0%	100,0%	100,0%	28,6%	93,3%	20,0%	30,8%	20,0%
TOTAL 2 DE HB	20,0%	0,0%	20,0%	6,7%	20,0%	0,0%	0,0%	57,1%	6,7%	80,0%	69,2%	46,7%
TOTAL 3 DE HB	20,0%	0,0%	40,0%	40,0%	53,3%	0,0%	0,0%	14,3%	0,0%	0,0%	0,0%	33,3%
TOTAL 4 DE HB	33,3%	0,0%	6,7%	0,0%	6,7%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%
TOTAL 5 DE HB	13,3%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%
TOTAL DE HB	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%
TOTAL 1 DE DA	46,2%	76,9%	7,7%	16,7%	0,0%	92,3%	92,3%	46,2%	76,9%	38,5%	30,8%	0,0%
TOTAL 2 DE DA	7,7%	7,7%	30,8%	16,7%	7,7%	7,7%	7,7%	23,1%	23,1%	61,5%	53,8%	15,4%
TOTAL 3 DE DA	7,7%	15,4%	53,8%	66,7%	61,5%	0,0%	0,0%	30,8%	0,0%	0,0%	15,4%	61,5%
TOTAL 4 DE DA	23,1%	0,0%	7,7%	0,0%	30,8%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	23,1%
TOTAL 5 DE DA	15,4%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%
TOTAL DE DA	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%
TOTAL 1 DE DB	0,0%	83,3%	16,7%	66,7%	16,7%	100,0%	91,7%	50,0%	91,7%	33,3%	25,0%	9,1%
TOTAL 2 DE DB	0,0%	0,0%	25,0%	0,0%	33,3%	0,0%	0,0%	33,3%	8,3%	66,7%	75,0%	54,5%
TOTAL 3 DE DB	33,3%	16,7%	58,3%	33,3%	33,3%	0,0%	8,3%	16,7%	0,0%	0,0%	0,0%	18,2%
TOTAL 4 DE DB	25,0%	0,0%	0,0%	0,0%	16,7%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	18,2%
TOTAL 5 DE DB	41,7%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%
TOTAL DE DB	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%

Figura 8.16: Resultats per grups i gènere del segon qüestionari diagnòstic.

L'alumne amb número de registre 14 és un noi del grup A, és a dir, que cursa

Matemàtiques Aplicades a les Ciències Socials. En la figura 8.17 (p. 307) podem veure que l'alumne utilitza el signe « − » amb dos significats diferents. En primer lloc per fer referències a despeses en sentit oposat al signe « + » que utilitza per denotar beneficis. Posteriorment utilitza de nou el símbol « − » però en aquesta ocasió té la funció de cancel·lar l'expressió que li segueix; en les seves paraules «i ho tatxem». Deure i cancel·lar (o tatxar) són significats que dóna l'alumne a la utilització del signe « − ».

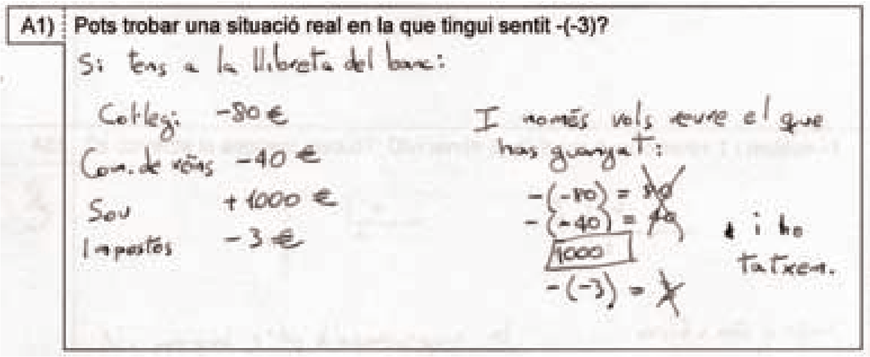
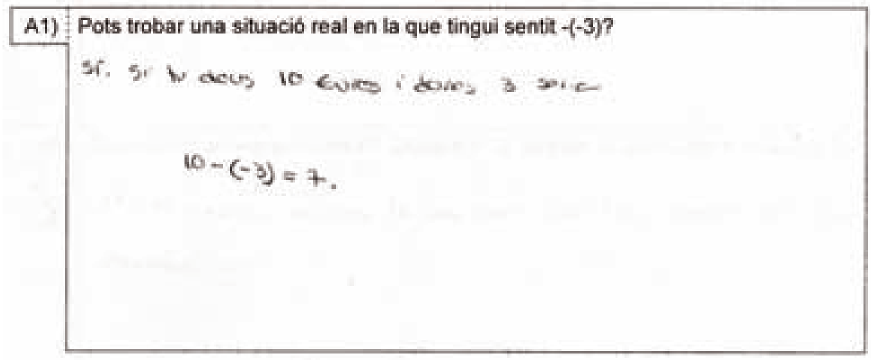


Figura 8.17: Resposta de l'alumne amb número de registre 14 (grup A) a la primera pregunta del qüestionari real versus formal.

En la mateixa línia trobem altres respostes amb errades que preocupen des del punt de vista docent i justifiquen la present recerca des del punt de vista de l'investigador. L'alumna amb número de registre 48 intenta donar un exemple real per justificar el que se li demana. Es tracta d'una alumna del grup B, és a dir, que cursa la matèria de Matemàtiques a primer curs de batxillerat. En la figura 8.18 (p. 308) es pot veure una desvinculació entre el plantejament d'una situació real i la corresponent modelització matemàtica. A més, l'execució aritmètica de l'expressió obtinguda la realitza erròniament.

Un 18% dels alumnes manifesta que en la realitat no existeixen els nombres negatius. L'alumna amb número de registre 21 és una alumna del grup A que cursa la matèria de Matemàtiques Aplicades a les Ciències Socials i dóna la resposta que es pot consultar en la figura 8.19 (p. 308). Tanmateix en el moment de presentar una explicació fa ús clar d'una instrucció prèviament rebuda. La lectura detallada de l'escrit de l'alumna sembla que denoti que allò que viu en el món real pugui

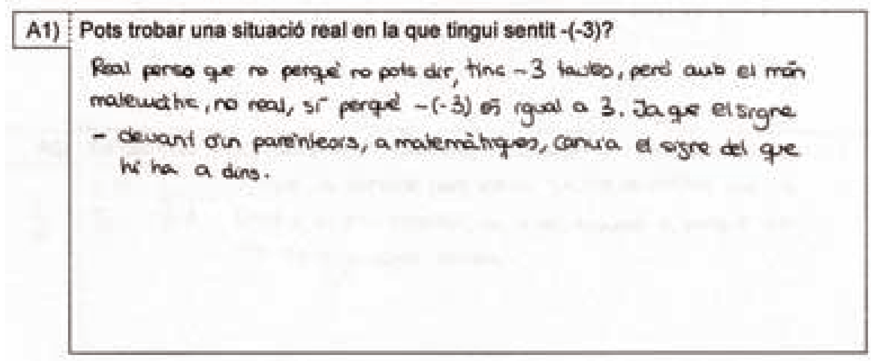

A1) Pots trobar una situació real en la que tingui sentit -(-3)?

Sí. Si li deus 10 euros i dones 3 ...

10 − (−3) = 7.

Figura 8.18: Resposta de l'alumne amb número de registre 48 (grup B) a la primera pregunta del qüestionari real versus formal.

ser justificat però el que viu dins la matemàtica s'accepta pel sol fet de formar part d'aquesta disciplina.


A1) Pots trobar una situació real en la que tingui sentit -(-3)?

Real penso que no perquè no pots dir, tinc −3 taules, però amb el món matemàtic, no real, sí perquè −(−3) és igual a 3. Ja que el signe − davant d'un parèntesis, a matemàtiques, canvia el signe del que hi ha a dins.

Figura 8.19: Resposta de l'alumne amb número de registre 21 (grup A) a la primera pregunta del qüestionari real versus formal.

Respecte del segon objectiu de la present diagnosi inicial

«Diagnosticar si l'alumne interpreta la suma i la resta de nombres enters com un augment o una disminució» és el segon objectiu de la present part de la fase de diagnosi de la recerca. Per tal d'esbrinar el seu nivell d'assoliment hem proposat dues qüestions.

La qüestió A2 condueix a informar sobre la vinculació que dóna l'alumne entre l'operació suma i l'augment d'una determinada mesura. Per altra banda la qüestió A4 condueix a informar sobre la vinculació que fa l'alumne entre l'operació resta i la disminució d'una determinada mesura. Es busca copsar si l'alumne abandona el pla real per concebre la suma entre nombres negatius o si manté la vinculació entre sumar i augmentar. De la mateixa manera es busca amb la qüestió A4 esbrinar si l'estudiant abandona el pla real per concebre la resta entre nombres negatius o si manté la vinculació entre restar i disminuir.

El 90% dels alumnes troba solució en el cas de la suma. El real no és un obstacle i realitza l'operació matemàtica desvinculada de la realitat. Aquesta proporció baixa bruscament fins poc menys d'un 45% en el cas de la resta. En aquest cas quasi un 47% dels alumnes participants calcula erròniament. Mentre que poc més d'un 59% dels alumnes que cursa Matemàtiques (grup B) ho resol correctament, només poc més d'un 27% dels alumnes que cursa Matemàtiques Aplicades a les Ciències Socials (grup A) ho aconsegueix. Poc més d'un 59% dels alumnes d'aquest darrer grup resol incorrectament el cas de la resta.

L'estudi per grup i gènere permet veure que quasi un 67% de les noies que cursa Matemàtiques (grup B) resol correctament el cas de la resta. En el pol oposat trobem les noies que cursen Matemàtiques Aplicades a les Ciències Socials i també els nois que cursen aquesta mateixa matèria (grup B).

Resultat 8.2.2 *A partir de les dades recollides no podem concloure que els alumnes participants vinculin la suma de nombres enters a un augment. Tanmateix, de les dades sí que s'aprecia en poc més de la meitat dels alumnes de primer curs de batxillerat l'esmentada vinculació entre la diferència i l'acció treure.*

Les dades ens condueixen a conjecturar que els alumnes que cursen Matemàtiques Aplicades a les Ciències Socials (grup A) són els que més vinculen la resta a una disminució.

L'estudi per grup i gènere mostra que les dues terceres parts de les alumnes que cursen Matemàtiques no mantenen l'esmentada vinculació i efectuen correctament la diferència de nombres enters, essent menor aquest resultat en els nois i en les noies del grup A.

L'alumna amb número de registre 6 és una noia del grup A, és a dir, que cursa Matemàtiques Aplicades a les Ciències Socials. En la figura 8.20 (p. 310) podem veure que l'alumna opera correctament; no es desprèn de l'execució que l'alumna vinculi la suma de nombres enters a l'acció afegir.

Tanmateix, la mateixa alumna no troba un nombre que restat de 7 doni 10. En la figura 8.21 (p. 311) podem veure que afirma «... set és menor que deu i si li restes diferents nombres el resultat serà menor a 7». D'aquí sí que es desprèn que l'alumna vincula la diferència de nombres enters amb l'acció de treure. De l'anàlisi de les operacions que realitza l'esmentada alumna es deriven les dues particularitats següents:

- No contempla en els exemples restar un nombre enter negatiu.
- Sí que admet que la diferència de dos nombres enters pot ser un nombre negatiu.

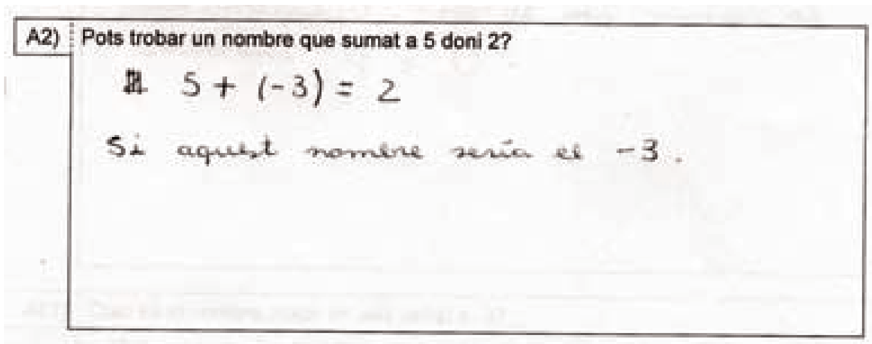
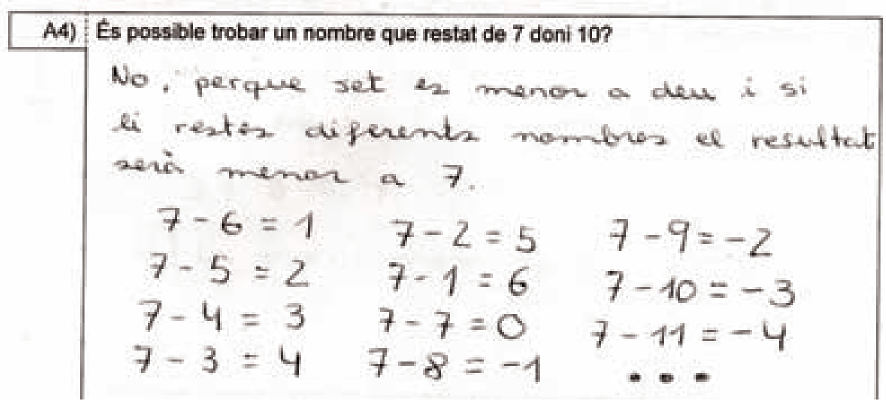


Figura 8.20: Resposta de l'alumna amb número de registre 6 (grup A) a la segona pregunta del qüestionari real versus formal.

L'alumne amb número de registre 4 és un noi del grup A, és a dir, que cursa Matemàtiques Aplicades a les Ciències Socials. En la figura 8.22 (p. 312) i davant de la pregunta de si és possible trobar un nombre que restat de 7 doni 10 hi trobem una resposta molt clara: «No, perquè el número 10 és més gran que 7».

Novament es desprèn de la resposta que l'alumne vincula la diferència de nombres enters amb l'acció treure. La correspondència entre la resta de nombres naturals i l'acció de treure la trasllada als nombres enters. En aquest cas copsem amb claredat que l'alumne manté una vinculació entre la diferència de nombres enters i una acció en el món real que estén a partir del seu coneixement previ.


A4) És possible trobar un nombre que restat de 7 doni 10?

No, perque set es menor a deu i si li restes diferents nombres el resultat serà menor a 7.

7 - 6 = 1	7 - 2 = 5	7 - 9 = -2
7 - 5 = 2	7 - 1 = 6	7 - 10 = -3
7 - 4 = 3	7 - 7 = 0	7 - 11 = -4
7 - 3 = 4	7 - 8 = -1	...

Figura 8.21: Resposta de l'alumna amb número de registre 6 (grup A) a la quarta pregunta del qüestionari real versus formal.

L'alumne amb número de registre 37 és un noi del grup B, és a dir, que cursa Matemàtiques en el primer curs de batxillerat. En la figura 8.23 (p. 312) veiem que dóna un tractament algebraic tant al cas de la suma com al cas de la resta. En aquesta circumstància els coneixements algebraics dels alumnes de primer curs de batxillerat poden emmascarar la concepció relativa a la diferència de nombres enters que té l'estudiant; tanmateix opera correctament.

Respecte del tercer objectiu de la present diagnosi inicial

«Diagnosticar si l'alumne multiplica i divideix els nombres enters tal com ho faria amb nombres naturals» és el tercer objectiu de la present part de la fase de diagnosi de la recerca. Per tal d'esbrinar el seu nivell d'assoliment hem proposat dues qüestions.

En els primers anys de vida hom aprèn la multiplicació entre nombres naturals com una operació que dóna resposta a l'acció afegir repetides vegades una mateixa quantitat. En el treball amb nombres enters la multiplicació abandona aquesta transparència i arriba als estudiants de diferents maneres tal com es pretén recollir a través de la qüestió A3.

Per altra banda la divisió neix en l'infant com una operació que es correspon amb el repartiment d'un determinat conjunt d'objectes en subconjunts que en contenen una mateixa quantitat. En la qüestió A5 es busca copsar fins a quin

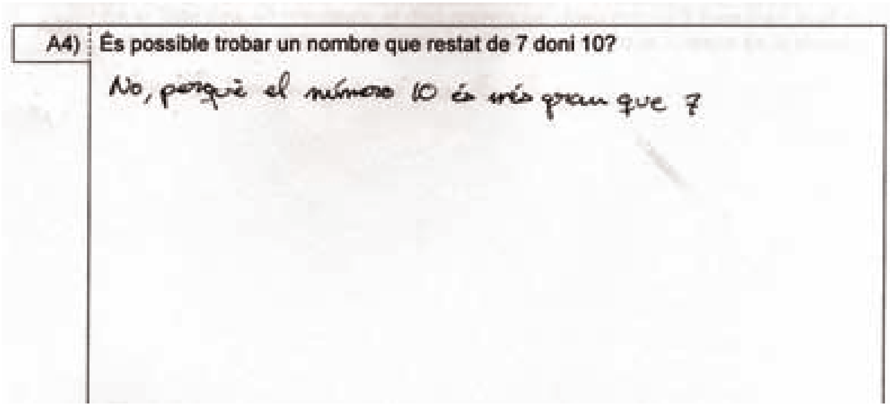
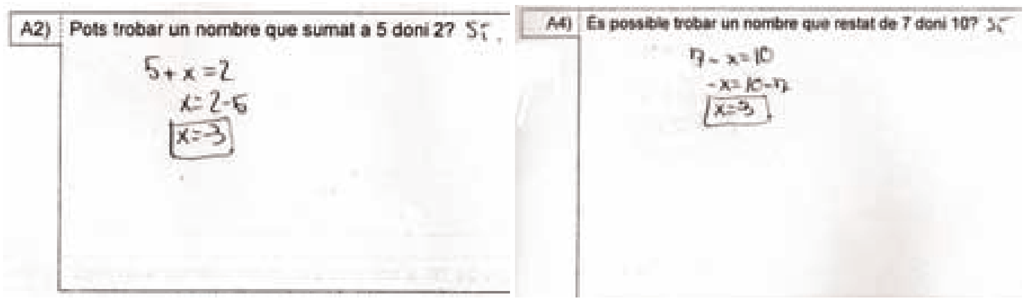

A4) És possible trobar un nombre que restat de 7 doni 10?
No, perquè el número 10 és més gran que 7

Figura 8.22: Resposta de l'alumne amb número de registre 4 (grup A) a la quarta pregunta del qüestionari real versus formal.


A2) Pots trobar un nombre que sumat a 5 doni 2? Sí
$5+x=2$
$x=2-5$
$\boxed{x=-3}$

A4) És possible trobar un nombre que restat de 7 doni 10? Sí
$7-x=10$
$-x=10-7$
$\boxed{x=-3}$

(a) Qüestió A2 (b) Qüestió A4

Figura 8.23: L'alumne amb número de registre 37 (grup B) dóna un tractament algebraic tant a la qüestió A2 com a la qüestió A4.

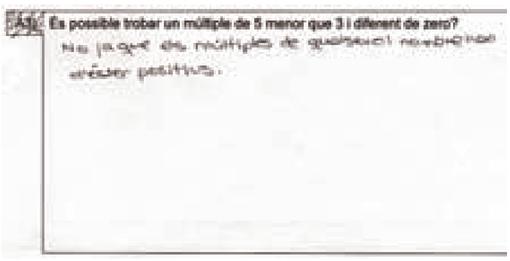
punt l'aprenentatge del nombre enter ha produït una evolució en la concepció de la divisió que fa que la interpreti més enllà d'un repartiment.

En ambdues qüestions es busca copsar si l'alumne ha abandonat el pla real per concebre la multiplicació i la divisió entre nombres negatius més enllà de les accions que hi són associades en el treball amb nombres naturals.

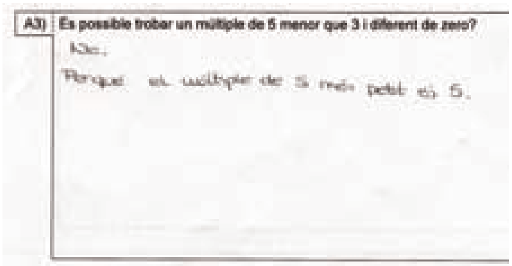
Un 50% dels alumnes diu que no és possible trobar un múltiple de 5 menor que 3 i diferent de zero, corresponent a la tercera categoria de resposta de la pregunta A3. Respecte de la divisió un 48% dels participants diu que la divisió proposada no és correcta perquè el residu ha de ser nul o positiu, corresponent a la tercera categoria de resposta de la pregunta A5. Apreciem una forta vinculació entre el producte i la divisió de nombres enters i les accions que s'hi corresponen en el treball amb nombres naturals. En aquest cas no observem grans diferències entre l'estudi parcial per grups o per gènere respecte dels resultats totals.

Resultat 8.2.3 *A partir de les dades recollides es desprèn que en la meitat dels alumnes de primer curs de batxillerat s'hi aprecia una vinculació entre la multiplicació i la divisió de nombres enters i les corresponents accions que van justificar la introducció d'aquestes mateixes operacions entre nombres naturals.*

L'alumne amb número de registre 15 és un noi del grup A, és a dir, que cursa Matemàtiques Aplicades a les Ciències Socials. En la figura 8.24(a) (p. 313) podem veure que l'alumne considera que els múltiples de qualsevol nombre han d'ésser positius. De manera semblant l'alumna del mateix grup i amb número de registre 22 afirma que el múltiple de 5 més petit és 5, tal com es pot consultar en la figura 8.24(b) (p. 313).



(a) Registre 15 - Qüestió A3



(b) Registre 22 - Qüestió A3

Figura 8.24: L'alumne amb número de registre 15 (grup A) considera que els múltiples d'un nombre han d'ésser positius. L'alumna amb registre 22 és del mateix grup i afirma que 5 és el menor múltiple de 5.

Nogensmenys hi ha alumnes que sí que consideren possible trobar un múltiple de 5 menor que 3 i diferent de zero. L'alumna amb número de registre 23 és una noia del grup A, és a dir, que cursa Matemàtiques Aplicades a les Ciències Socials en el primer curs de batxillerat. Tal com es pot veure en la figura 8.25 (p. 314) l'alumna fa ús de la recta numèrica, situada en posició vertical, per recolzar la seva afirmació.

Respecte de la divisió cal no menystenir l'existència d'alumnes en el primer curs de batxillerat que associen dividir nombres enters amb repartir una determinada quantitat d'objectes en parts iguals. L'alumna amb número de registre 16 és una noia del grup A, és a dir, que cursa Matemàtiques Aplicades a les Ciències

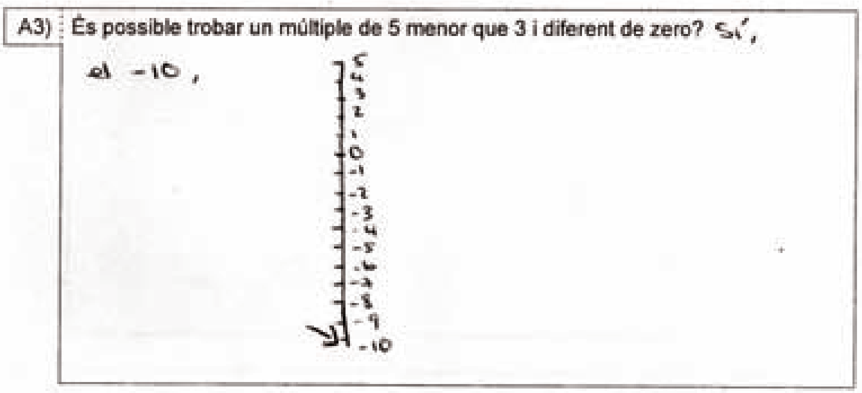


Figura 8.25: L'alumna amb número de registre 23 (grup A) utilitza la recta real per donar un múltiple de 5 menor que 3.

Socials. En la figura 8.26 (p. 314) podem veure que l'estudiant no considera possible efectuar la divisió en virtut que el divisor no pot ser més gran que el dividend. L'alumna il·lustra aquesta afirmació amb la divisió amb residu negatiu, fet que ens fa pensar que no contemplava la possibilitat de considerar expressions decimals. De la resposta de l'alumna sembla que es pugui desprendre que si el repartiment no és possible la divisió tampoc; posteriors recollides de dades permetran aclarir aquesta possibilitat.

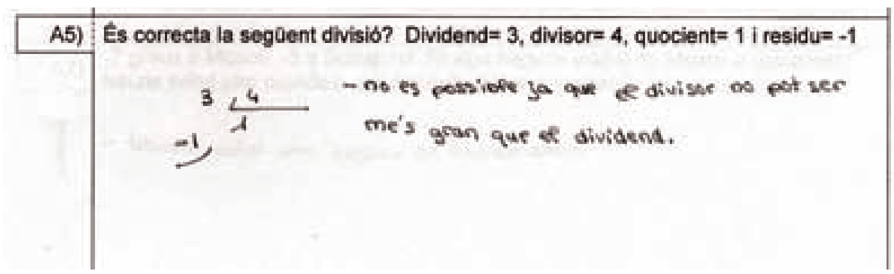


Figura 8.26: L'alumna amb número de registre 16 (grup A) afirma que en la divisió el divisor no pot ser major que el dividend.

Respecte del quart objectiu de la present diagnosi inicial

«Diagnosticar si l'alumne dóna un tractament correcte als signes» és el quart objectiu de la present part de la fase de diagnosi de la recerca. Per tal d'esbrinar el seu nivell d'assoliment hem proposat dues qüestions.

Davant de la pregunta A7 relativa al model concret de les temperatures un 94% dels alumnes resol correctament el que se'ls demana. No apreciem diferències significatives en els resultats parcials per gènere ni per grup.

La qüestió A8 pretén aprofundir en la identificació que fan els alumnes dels símbols literals amb nombres positius.

L'esmentada identificació és una dificultat atesa, entre d'altres, per JOHNSON (1986, p. 507). Poc menys d'un 39% dels alumnes participants resol correctament aquesta dificultat. Així com no apreciem diferències destacades en l'estudi parcial per grups, sí que es fan paleses en el corresponent per gènere. El 48% de les noies participants supera correctament l'esmentada dificultat essent només un 29,2% dels nois la proporció que ho supera.

Resultat 8.2.4 *A partir de les dades recollides es desprèn que la utilització del nombre enter davant de situacions vinculades amb el món real (model de les temperatures) és correcta en els alumnes de primer curs de batxillerat.*

Tanmateix, la utilització de símbols literals que fan referència a nombres positius o negatius presenta dificultats en més de la meitat dels estudiants i, entre aquests, principalment en els nois.

L'alumne amb número de registre 15 és una noi del grup A, és a dir, que cursa Matemàtiques Aplicades a les Ciències Socials. En la figura 8.27 (p. 316) apreciem una confusió destacada respecte del treball literal. Sembla que el fet que l'alumne vegi en l'enunciat que b és negatiu el condueixi a canviar l'expressió $a - b$ per $a - (-b)$. Aquest canvi ens fa pensar que l'alumne entén que b ha de ser sempre positiu. Posteriorment distingeix el cas en que b sigui més gran que a del cas en que sigui menor. El treball literal combinat amb els signes presenta, per tant, dificultats paleses en el primer curs de batxillerat.

En alguns casos ens trobem treballs literals que condueixen a una difícil interpretació. L'alumne amb número de registre 39 és un noi del grup B, és a dir, que cursa Matemàtiques el primer curs de batxillerat. Tal com es pot veure en la figura 8.28 (p. 317) l'alumne exposa i considera les regles dels signes per convertir l'expressió $a - (-b)$ en $+ab$.

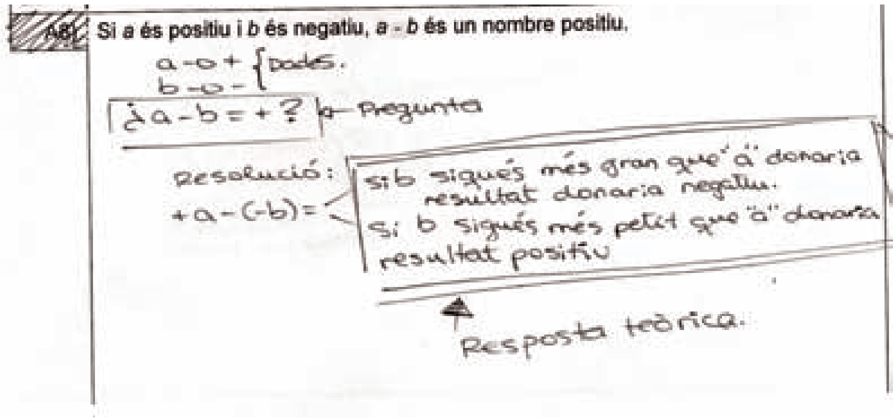


Figura 8.27: Resposta donada per l'alumne amb número de registre 15 (grup A) a la qüestió A8.

Ens trobem davant de l'absència de cap raonament, l'absurd del resultat, la «resposta ràpida» sense buscar cap mena de raonament plausible ni demostratiu, la pretensió d'aplicar un resultat conegut, una fórmula, un algorisme, un accés directe a la solució... Es tracta d'un exemple de resposta que sembla que cal emmarcar en una anàlisi des de la perspectiva actitudinal o de creences. L'anàlisi de la resposta ens condueix a admetre que per l'estudiant el coneixement relatiu al nombre negatiu és, totalment o parcial, una col·lecció de regles que cal utilitzar de manera adequada. En aquest cas no ha aplicat la rutina encertada en el lloc adient.

Respecte del cinquè objectiu de la present diagnosi inicial

«Diagnosticar si l'alumne dóna un tractament correcte a l'ordre dels nombres enters» és el cinquè objectiu de la present part de la fase de diagnosi de la recerca. Per tal d'esbrinar el seu nivell d'assoliment hem proposat quatre qüestions.

En la qüestió A6 pretenem esbrinar si l'alumne tracta correctament l'ordre en els nombres enters incidint en si per és el mateix que l'ordre natural. La qüestió A61 examina si l'alumne incrementa correctament en una unitat un nombre enter negatiu. La qüestió A62 examina l'ordre des d'un punt de vista intuïtiu prenent com a exemple la llista dels quaranta principals. Les dues preguntes corresponents a l'indicador A6 cerquen examinar si l'alumne trasllada als nombres enters l'ordre dels nombres naturals.

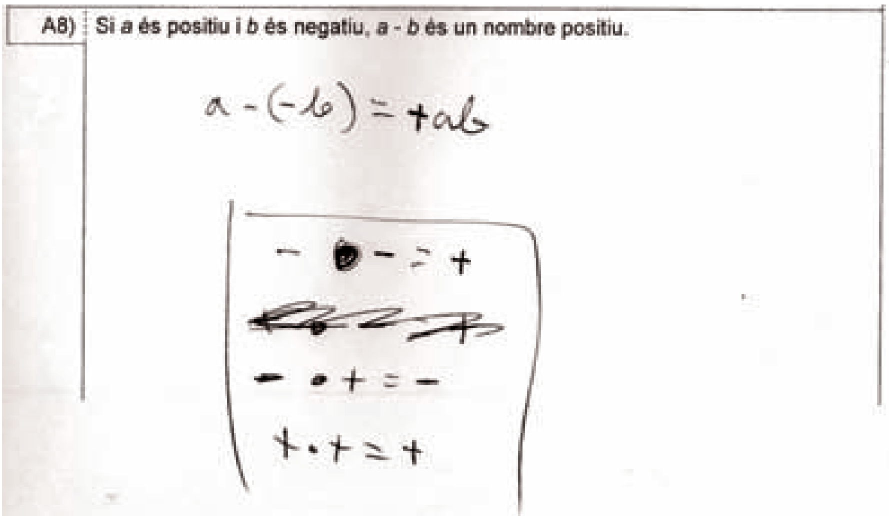


Figura 8.28: Resposta donada per l'alumne amb número de registre 39 (grup B) a la qüestió A8.

De les respostes es desprèn que quasi la totalitat de l'alumnat participant, concretament un 96%, té un coneixement afermat respecte de l'ordre dels nombres enters. En l'estudi dels grups, supera el 90% l'alumnat que cursa Matemàtiques Aplicades a les Ciències Socials (grup A), essent d'un 100% en els alumnes del grup B. En relació al gènere dels alumnes participants no apreciem diferències que es desprenguin de les dades recollides.

La qüestió B11 mira d'examinar els errors que es produeixen en la reversibilitat de l'ordre. Les dues preguntes relatives a l'indicador B11 completen l'indicador A6 i cerquen diagnosticar les dificultats que té l'alumne en el tractament de la reversibilitat de l'ordre. El 90% dels alumnes tracta correctament la reversibilitat de l'ordre. En l'estudi per grups aquesta proporció esdevé favorable als estudiants que cursen Matemàtiques (grup B) amb un 93% essent un 87% els alumnes de Matemàtiques Aplicades a les Ciències Socials (grup A) que proporciona resultats favorables.

La qüestió B12 complementa la informació anterior i concreta l'estudi en els errors que provenen del treball amb seqüències temporals. En aquest cas els resultats també són manifestament positius amb un 74% d'encerts. L'estudi per grups no presenta diferències, en canvi, en l'estudi per gènere observem que els nois obtenen resultats exitosos en un 84% dels casos mentre que les noies redueixen aquesta proporció fins un 64%.

La qüestió B13 es proposa amb la finalitat de recollir informació relativa a la identificació i utilització correctes de l'ordre entre nombres enters. Concretament demanem quin nombre precedeix en set unitats a -3. El plantejament de la pregunta fa que la imatge de la recta numèrica esdevingui útil. L'encert es presenta en un 32% dels alumnes sense que puguem discernir grans diferències en l'estudi parcial per grups o per gènere. Així com la utilització de la recta numèrica participa de manera eficaç en la interpretació i resolució de les qüestions, la seva omissió condueix en la majoria dels casos a una resolució incorrecta.

Resultat 8.2.5 *A partir de les dades recollides es desprèn que l'ordre en els nombres enters està correctament après per la àmplia majoria dels alumnes.*

Respecte del sisè objectiu de la present diagnosi inicial

«Diagnosticar si l'alumne té presents els nombres enters en les seves resolucions» és el sisè i darrer objectiu de la present part de la fase de diagnosi de la recerca. Per tal d'esbrinar el seu nivell d'assoliment hem proposat tres qüestions. Amb elles pretenem mesurar l'habilitat i el coneixement que permet als estudiants operar correctament amb nombres enters.

Més de la meitat dels alumnes no té en compte els nombres enters en algun dels càlculs demanats. En aquesta diagnosi inicial hem apreciat el cansament dels alumnes en l'etapa final del qüestionari i, per tant, no considerem que sigui rellevant la informació aportada per aquest darrer objectiu de la present etapa diagnòstica.

8.3 (III) Sobre els problemes additius amb nombres negatius

En la diagnosi realitzada a l'inici de l'experimentació (p. 277) hem obtingut coneixement relatiu al treball aritmètic que desenvolupa l'alumne respecte del nombre enter. Hem vist que els resultats obtinguts en relació amb l'addició de nombres enters són inferiors que els obtinguts respecte del producte. En l'estudi relatiu al quart objectiu del primer qüestionari (p. 288) hem observat que els estudiants a l'hora d'escollir un problema relacionat amb els nombres enters opten en una gran majoria per triar-ne un relacionat amb algun model concret. Per altra banda, sorprèn que la utilització de la recta numèrica no ha estat massa destacada en la primera diagnosi.

En aquesta tercera part de la fase de diagnosi de la recerca educativa empírica ens proposem incidir en l'ús que fa l'alumne de la recta numèrica en la resolució de problemes en diferents contexts.

8.3.1 De la finalitat general a la concreció d'objectius

En la part que ens ocupa de la recerca ens proposem conèixer la utilització que fa l'alumne de la recta numèrica en la resolució de problemes plantejats en diversos contexts així com el tractament de l'estructura additiva del nombre enter. Per tal d'afavorir l'accés a aquest coneixement fixem els objectius que presentem tot seguit:

1. Distingir els models concrets que proporcionen millors resultats en la resolució de problemes relacionats amb el nombre negatiu.

2. Saber la proporció d'alumnes que utilitza la recta numèrica per resoldre els problemes segons cada model.

Aquests objectius s'estableixen amb la prioritat d'alimentar els objectius generals de la present investigació. La vinculació entre els objectius generals i aquests concrets que acabem d'exposar es pot consultar en la figura 8.29 (p. 320).

8.3.2 Sobre l'instrument de recollida de dades

Abundants són els materials que s'han dissenyat amb el propòsit d'estudiar les dificultats, errors i obstacles que es produeixen en l'aprenentatge del nombre negatiu a través d'un ensenyament basat en models concrets. Bruno i Martinon (1994*a*) realitzen una fase experimental en la qual ens hem inspirat per a la concreció del qüestionari que emprem com instrument de recollida de dades. Els autors proposen activitats relacionades amb els models tenir-deure, nivell del mar,

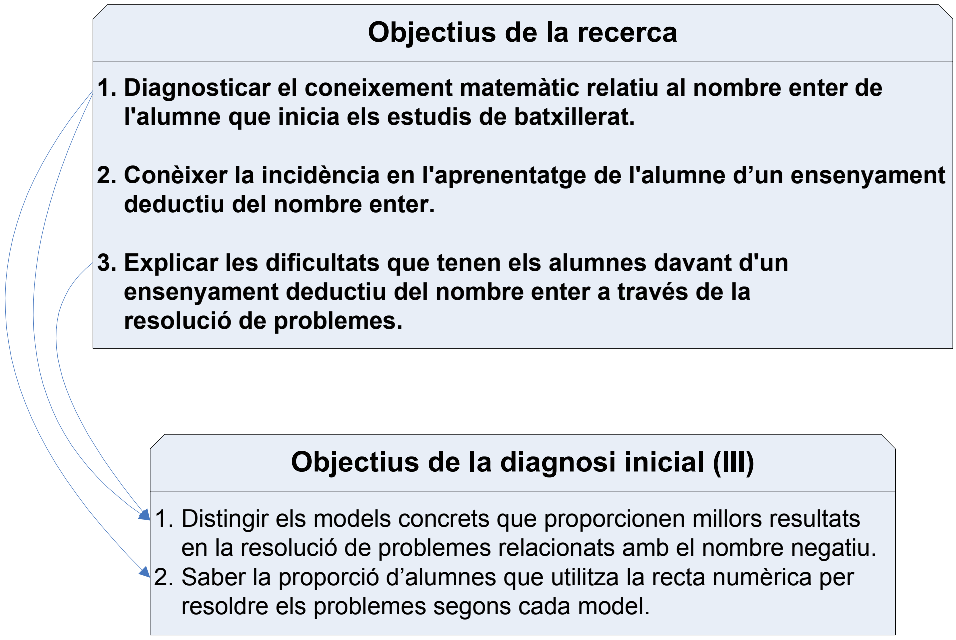


Figura 8.29: Dels objectius generals de la investigació a la seva concreció. Diagnosi III.

temperatura, temps i carreteres. Els problemes que prenem en aquesta fase de la recerca (p. 574), condueixen a interpretar els nombres com estats o com variacions i provoquen la combinació d'ambdós: suma de dos estats per obtenir un estat, suma d'un estat i una variació per obtenir un estat, suma de dues variacions per obtenir una variació, diferència de dos estats per obtenir una variació i diferència de dos estats per obtenir una comparació. De manera sintètica simbolitzem estat i variació fent ús de la primera lletra de cadascun d'aquests dos mots. Les activitats proposades tenen generalitat en el sentit que hi ha models concrets com el dels ascensors que queden atesos pel model del nivell del mar que prenem en aquesta fase de la investigació. Els fonaments de l'ensenyament del nombre negatiu basat en models concrets es pot consultar en la síntesi exposada en el marc teòric de la present recerca (p. 56).

Els participants de la recerca dissenyada per BRUNO i MARTINON (1994*a*) van ser alumnes amb edats compreses entre dotze i catorze anys de l'Educació General Bàsica. En aquest pla d'estudis els nombres enters estaven proposats pel setè curs de l'escolarització obligatòria. Aquest fet reforça l'elecció de l'instrument de recollida de dades pels alumnes participants en la present investigació que són de primer curs de batxillerat. Es tracta, per tant, d'una proposta de problemes que com a punt de partida estan superats pels nostres alumnes participants però que, tanmateix, ens aportarà informació que ajudarà a explicar la posterior experimentació.

Indicadors atesos pel qüestionari

El qüestionari, disponible a la pàgina 574, concreta unes preguntes que de manera sintètica permeten obtenir informació relativa a:

A1. Interpretació correcta d'un model (temperatures) que condueix a la comparació de dos estats.

B1. Utilització de la recta numèrica com a suport en la resolució d'un model (temperatures) que condueix a la comparació de dos estats.

A2. Interpretació correcta d'un model (temperatures) que condueix a la suma de dues variacions i que té per resultat la variació total.

B2. Utilització de la recta numèrica com a suport en la resolució d'un model (temperatures) que condueix a la suma de dues variacions i que té per resultat la variació total.

A3. Interpretació correcta d'un model (guanys i pèrdues) que condueix a la suma de dos estats i que té per resultat l'estat total.

B3. Utilització de la recta numèrica com a suport en la resolució d'un model (guanys i pèrdues) que condueix a la suma de dos estats i que té per resultat l'estat total.

A4. Interpretació correcta d'un model (nivell del mar) que condueix a la suma d'un estat inicial i una variació i que té per resultat l'estat final.

B4. Utilització de la recta numèrica com a suport en la resolució d'un model (nivell del mar) que condueix a la suma d'un estat inicial i una variació que té per resultat l'estat final.

A5. Interpretació correcta d'un model (temps) que condueix a la diferència de dos estats i que té per resultat una variació.

B5. Utilització de la recta numèrica com a suport en la resolució d'un model (temps) que condueix a la diferència de dos estats que té per resultat una variació.

A6. Interpretació correcta d'un model (carretera) que condueix a la suma d'un estat inicial i una variació que té per resultat l'estat final.

B6. Utilització de la recta numèrica com a suport en la resolució d'un model (carretera) que condueix a la suma d'un estat inicial i una variació que té per resultat l'estat final.

8.3.3 Lligams entre els objectius i les preguntes del qüestionari

Les preguntes del qüestionari estan relacionades amb els objectius de la present diagnosi tal com es destaca en el quadre següent:

OBJECTIUS	QÜESTIONS
Objectiu 1	A1, A2, A3, A4, A5 i A6
Objectiu 2	B1, B2, B3, B4, B5 i B6

8.3.4 Categories de resposta i anàlisi de dades

Els paràmetres utilitzats per a l'anàlisi d'aquestes activitats han estat els següents: la comprensió de la situació i del propòsit plantejats, la interpretació de cada activitat segons el model que es desprèn en cada cas i l'estratègia desenvolupada per l'alumne relativa a la possible representació que fa del problema emprant la recta numèrica.

Hem trobat alumnes amb una clara comprensió de la situació plantejada i una correcta interpretació de la informació. En aquests casos les resolucions lliurades i els esquemes emprats ens permeten observar l'estratègia utilitzada. En altres casos ens hem trobat amb algun alumne que dóna únicament un resultat o la resposta estricta a la pregunta formulada. En aquests casos l'absència d'explicacions i fins i tot de comunicació de la solució no permet analitzar la correcció de la resolució.

Analitzem les respostes dels alumnes amb la pretensió de respondre els objectius que hem fixat. Aquesta tasca se simplifica quan mirem d'atendre els indicadors que alimenten els esmentats objectius. Tanmateix, la pèrdua d'informació que suposa tota anàlisi des d'un punt de vista perfectament delimitat la completem amb les respostes detallades d'alguns alumnes que, per un motiu o altre, prenen rellevància en aquesta fase de la recerca. Des dels primers qüestionaris analitzats hem confirmat que les preguntes s'entenien i no ha calgut ampliar la previsió inicial de les categories de resposta. Hem fet servir una codificació bàsica, tal com es pot consultar en els arxius en format EXCEL[4] on estan recollides les dades sintetitzades per categories de resposta que tot seguit comuniquem.

Més concretament i focalitzant l'atenció des del plantejament inicial, en el procés d'elecció de l'instrument de recollida de dades, l'estudi detallat del qüestionari ens ha conduït a l'establiment d'unes categories de resposta inicials. Aquestes s'han creat atenent a les sospites que brollen de la nostra experiència docent. No s'han vist modificades en el procés d'anàlisi tot arribant a establir-se les categories definitives. Les dades recollides han encaixat en les categories de resposta sense generar-ne de noves. El fet que les dades trobin una categoria on col·locar-se ha conduït a establir-les com a definitives.

Les categories que presentem tot seguit es corresponen amb els objectius que pretenem assolir; són exhaustives ja que les dades s'han pogut col·locar en elles i mútuament excloents ja que les dades no poden pertànyer a dues categories diferents. Hem posat noms que les fan entenedores i atenen l'essència de cadascun dels objectius. Sense un esforç d'abstracció hi podria haver gran quantitat de categories, però és aquest esforç el que permet que cadascuna d'elles ens aporti una unitat d'informació rellevant. Donat que el volum de dades és nombrós s'ha constatat des d'un primer moment que seria convenient fer ús de suport informàtic per gestionar-les. Aquesta mecanització és important per prosseguir l'anàlisi de dades i alhora per facilitar la il·lustració dels resultats.

[4] http://www.xtec.cat/~rpujol1/Recerques/Tesi/Dades2.rar

Concreció de les categories de resposta

A1-B1) Model concret de les temperatures. Comparació de dos estats.

La temperatura a Valle de Guerra és de 14 graus sobre zero i a Izaña la temperatura és de 3 graus sota zero. Què té que passar a Izaña per tal que la temperatura sigui igual a la de Valle de Guerra?

L'anàlisi de les respostes dels alumnes informa sobre les dificultats que tenen per abordar aquest model concret. Es busca copsar les dificultats que té l'alumne respecte de l'estructura additiva del nombre enter. Més concretament es pretén localitzar si hi ha dificultats en la interpretació correcta del model de les temperatures i, més concretament encara, en la comparació de dos estats. Alhora, l'indicador *B1)* permet recollir la utilització de la recta numèrica com a suport en la resolució d'aquest model concret de les temperatures que condueix a la comparació de dos estats.

(a) *Indicador A1*

1. Interpreta i resol correctament el model concret de les temperatures que condueix a la comparació de dos estats.
2. No interpreta i no resol correctament el model concret de les temperatures que condueix a la comparació de dos estats.

(b) *Indicador B1*

1. Utilitza la recta numèrica com a suport en la resolució d'un problema basat en el model concret de les temperatures que condueix a la comparació de dos estats.
2. No utilitza la recta numèrica com a suport en la resolució d'un problema basat en el model concret de les temperatures que condueix a la comparació de dos estats.

A2-B2) Model concret de les temperatures. Suma de dues variacions.

A Valle de Guerra la temperatura va pujar 4 graus pel matí i va baixar 9 graus per la tarda. Quina ha estat la variació de temperatura al llarg del dia?

Amb aquesta activitat ens proposem abordar el mateix model concret però amb un enunciat que condueix a la suma de variacions. L'anàlisi de les respostes dels alumnes informa sobre les dificultats que tenen per abordar aquesta nova situació. Concretament cerquem localitzar si hi ha dificultats en la interpretació correcta del model de les temperatures i, més concretament, en la suma de dues variacions. Alhora, l'indicador *B2)* permet recollir la utilització de la recta numèrica com a suport en la resolució de l'activitat.

(a) *Indicador A2*

1. Interpreta i resol correctament el model concret de les temperatures que condueix a la suma de dues variacions.
2. No interpreta i no resol correctament el model concret de les temperatures que condueix a la suma de dues variacions.

(b) *Indicador B2*

1. Utilitza la recta numèrica com a suport en la resolució d'una activitat basada en el model concret de les temperatures que condueix a la suma de dues variacions.
2. No utilitza la recta numèrica com a suport en la resolució d'una activitat basada en el model concret de les temperatures que condueix a la suma de dues variacions.

A3-B3) Model concret de guanys i pèrdues. Suma de dos estats que tenen per resultat un estat.
La Sònia té 200 € al banc i deu a una amiga 260 €. Quina és la seva situació econòmica?

En aquesta ocasió ens proposem abordar el model de guanys i pèrdues amb un enunciat que condueix a la suma de dos estats i que té per resultat un estat. L'anàlisi de les respostes dels alumnes informa sobre les dificultats que té l'alumne per abordar aquesta nova situació. Concretament cerquem localitzar si hi ha dificultats en la interpretació correcta d'un model concret de guanys i pèrdues i, més concretament, en la suma de dos estats. Alhora, l'indicador *B3)* permet recollir la utilització de la recta numèrica com a suport en la resolució de l'activitat.

(a) *Indicador A3*

1. Interpreta i resol correctament el model concret de guanys i pèrdues que condueix a la suma de dos estats que té per resultat un estat.
2. No interpreta i no resol correctament el model concret de guanys i pèrdues que condueix a la suma de dos estats que té per resultat un estat.

(b) *Indicador B3*

1. Utilitza la recta numèrica com a suport en la resolució d'una activitat basada en un model concret de guanys i pèrdues que condueix a la suma de dos estats i que té per resultat un estat.
2. No utilitza la recta numèrica com a suport en la resolució d'una activitat basada en un model concret de guanys i pèrdues que condueix a la suma de dos estats i que té per resultat un estat.

A4-B4) Model concret basat en el nivell del mar. Suma d'un estat inicial amb una variació que té per resultat un estat final.
Un submarinista està 5 metres per sota del nivell del mar i baixa 6 metres. Quina és la seva posició després d'aquest descens?

En aquesta ocasió ens proposem abordar un model concret basat en el nivell del mar. L'enunciat condueix a la suma d'un estat amb una variació que té per resultat un estat. L'anàlisi de les respostes dels alumnes informa sobre les dificultats que tenen per abordar aquesta situació. Concretament cerquem localitzar si hi ha dificultats en la interpretació correcta d'un model concret basat en el nivell del mar, més concretament, en la suma d'un estat amb una variació. Alhora, l'indicador *B4)* facilita la recollida d'informació relativa a la utilització de la recta numèrica com a suport en la resolució de l'activitat.

(a) *Indicador A4*

1. Interpreta i resol correctament el model concret proposat i basat en el nivell del mar que condueix a la suma d'un estat amb una variació.
2. No interpreta i no resol correctament el model concret proposat i basat en el nivell del mar que condueix a la suma d'un estat amb una variació.

(b) *Indicador B4*

1. Utilitza la recta numèrica com a suport en la resolució d'una activitat basada en un model concret relacionat amb el nivell del mar que condueix a la suma d'un estat amb una variació i que té per resultat un estat.
2. No utilitza la recta numèrica com a suport en la resolució d'una activitat basada en un model concret relacionat amb el nivell del mar que condueix a la suma d'un estat amb una variació i que té per resultat un estat.

A5-B5) Model concret basat en el pas del temps. Diferència de dos estats que té per resultat una variació.
Si un home va néixer l'any 56 abans de Crist i va morir l'any 17 abans de Crist. Quants anys va viure?

En aquesta ocasió ens proposem abordar una activitat basada en el model concret relacionat amb el pas del temps. L'enunciat condueix a la diferència de dos estats que té per resultat una variació. L'anàlisi de les respostes dels alumnes informa sobre les dificultats que té l'estudiant per abordar aquesta situació. Concretament cerquem localitzar si hi ha dificultats en la interpretació correcta d'un model concret basat en el temps, més concretament, en la diferència de dos estats. Alhora, l'indicador *B5)* facilita la recollida d'informació relativa a la utilització de la recta numèrica com a suport en la resolució de l'activitat.

(a) *Indicador A5*

1. Interpreta i resol correctament el model concret proposat i basat en el pas del temps que condueix a la diferència de dos estats i que té per resultat una variació.
2. No interpreta i no resol correctament el model concret proposat i basat en el pas del temps que condueix a la diferència de dos estats i que té per resultat una variació.

(b) *Indicador B5*

1. Utilitza la recta numèrica com a suport en la resolució d'una activitat basada en un model concret relacionat amb el pas del temps que condueix a la diferència de dos estats i que té per resultat una variació.
2. No utilitza la recta numèrica com a suport en la resolució d'una activitat basada en un model concret relacionat amb el pas del temps que condueix a la diferència de dos estats i que té per resultat una variació.

A6-B6) Model concret basat en els recorreguts per una carretera. Suma d'un estat inicial amb una variació que té per resultat un estat final.

Un cotxe es troba en el quilòmetre 6 d'una carretera i es mou 5 quilòmetres cap a l'esquerra. En quin quilòmetre es troba el cotxe després d'aquest moviment?

En aquesta ocasió ens proposem abordar una activitat basada en els recorreguts en una carretera. L'enunciat condueix a la suma d'un estat amb una variació que té per resultat un estat. L'objectiu d'aquesta pregunta és similar al de la quarta. Tanmateix, la representació que faci l'alumne pot ser diferent en el sentit que parlant del nivell del mar podria ser que s'ajudés d'una representació vertical mentre que, en fer referència a una carretera, podria ser que l'alumne optés per una representació horitzontal. L'anàlisi de les respostes dels alumnes informa sobre les dificultats que té l'estudiant per abordar aquesta situació. Concretament cerquem localitzar si hi ha dificultats en la interpretació correcta d'un model concret basat en els recorreguts en una carretera i, més concretament, en la suma d'un estat amb una variació. L'indicador *B6)* facilita la recollida d'informació relativa a la utilització de la recta numèrica com a suport en la resolució de l'activitat.

(a) *Indicador A6*

1. Interpreta i resol correctament el model concret proposat i basat en els recorreguts en una carretera que condueix a la suma d'un estat amb una variació que té per resultat un estat.
2. No interpreta i no resol correctament el model concret proposat i basat en els recorreguts en una carretera que condueix a la suma d'un estat amb una variació que té per resultat un estat.

(b) *Indicador B6*

1. Utilitza la recta numèrica com a suport en la resolució d'una activitat basada en un model concret relacionat amb els desplaçaments en una carretera que condueix a la suma d'un estat amb una variació que té per resultat un estat.
2. No utilitza la recta numèrica com a suport en la resolució d'una activitat basada en un model concret relacionat amb els desplaçaments en una carretera que condueix a la suma d'un estat amb una variació que té per resultat un estat.

8.3.5 Presentació de resultats

En la figura 8.30 (p. 330) es poden consultar els resultats globals. Per a cada indicador es mostra el total absolut i relatiu de participants que es corresponen amb cada categoria de resposta.

Respecte del primer objectiu

«Conèixer quin model concret proporciona millors resultats en la resolució de problemes relacionats amb el nombre negatiu» és el primer objectiu de la present part de la fase de diagnosi de la recerca. Per tal d'esbrinar el seu nivell d'assoliment

RESULTATS GLOBALS	A1	B1	A2	B2	A3	B3	A4	B4	A5	B5	A6	B6
TOTAL DE 1	37	11	29	8	41	0	46	20	40	12	4	19
TOTAL DE 2	10	36	18	39	6	47	1	27	7	35	43	28
TOTAL DE 3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
TOTAL DE 4	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
TOTAL DE 5	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
TOTAL DE RESPOSTES	47	47	47	47	47	47	47	47	47	47	47	47
TOTAL DE 1	78,7%	23,4%	61,7%	17,0%	87,2%	0,0%	97,9%	42,6%	85,1%	25,5%	8,5%	40,4%
TOTAL DE 2	21,3%	76,6%	38,3%	83,0%	12,8%	100,0%	2,1%	57,4%	14,9%	74,5%	91,5%	59,6%
TOTAL DE 3	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%
TOTAL DE 4	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%
TOTAL DE 5	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%
TOTAL DE RESPOSTES	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%

Figura 8.30: Resultats globals del tercer qüestionari diagnòstic.

hem proposat sis activitats. Cadascuna d'elles va dirigida a un tipus de model concret per a l'ensenyament del nombre enter.

El model concret que més èxit ha tingut és el relacionat amb el nivell del mar. El 97,9% dels alumnes participants dóna una resposta que es correspon amb la primera categoria, és a dir, que interpreta, planteja i resol correctament l'activitat. L'estudi per grups mostra èxit en el 95,8% dels alumnes del grup B i la totalitat dels del grup A. L'estudi per gènere mostra èxit en el 96% dels nois i en la totalitat de les noies. L'estudi per grup i gènere mostra que el 93,3% dels nois del grup B resol amb èxit la situació plantejada mentre que també ho aconsegueix la totalitat de la resta de participants.

RESULTATS PER GRUP	A1	B1	A2	B2	A3	B3	A4	B4	A5	B5	A6	B6
TOTAL 1 DE A	17	8	12	6	18	0	23	12	17	5	4	12
TOTAL 2 DE A	6	15	11	17	5	23	0	11	6	18	19	11
TOTAL 3 DE A	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
TOTAL 4 DE A	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
TOTAL 5 DE A	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
TOTAL DE A	23	23	23	23	23	23	23	23	23	23	23	23
TOTAL 1 DE B	20	3	17	2	23	0	23	8	23	7	0	7
TOTAL 2 DE B	4	21	7	22	1	24	1	16	1	17	24	17
TOTAL 3 DE B	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
TOTAL 4 DE B	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
TOTAL 5 DE B	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
TOTAL DE B	24	24	24	24	24	24	24	24	24	24	24	24
TOTAL 1 DE A	73,9%	34,8%	52,2%	26,1%	78,3%	0,0%	100,0%	52,2%	73,9%	21,7%	17,4%	52,2%
TOTAL 2 DE A	26,1%	65,2%	47,8%	73,9%	21,7%	100,0%	0,0%	47,8%	26,1%	78,3%	82,6%	47,8%
TOTAL 3 DE A	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%
TOTAL 4 DE A	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%
TOTAL 5 DE A	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%
TOTAL DE A	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%
TOTAL 1 DE B	83,3%	12,5%	70,8%	8,3%	95,8%	0,0%	95,8%	33,3%	95,8%	29,2%	0,0%	29,2%
TOTAL 2 DE B	16,7%	87,5%	29,2%	91,7%	4,2%	100,0%	4,2%	66,7%	4,2%	70,8%	100,0%	70,8%
TOTAL 3 DE B	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%
TOTAL 4 DE B	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%
TOTAL 5 DE B	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%
TOTAL DE B	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%

Figura 8.31: Resultats per grups del tercer qüestionari diagnòstic.

El model concret de la carretera es va plantejar amb la mateixa intenció i propòsit que el nivell del mar. Tot i així, la proposta condueix a dues situacions possibles que depenen d'on es situï l'origen. Aquesta consideració ha fet que els resultats siguin molt inferiors. La doble interpretació que es desprèn de l'activitat és considerada per una minoria de l'alumnat. Tanmateix, i obviant aquesta particularitat, el model presenta resultats exitosos com l'equivalent del nivell del mar.

RESULTATS PER GÈNERE	A1	B1	A2	B2	A3	B3	A4	B4	A5	B5	A6	B6
TOTAL 1 DE H	22	6	16	2	20	0	24	8	23	2	2	11
TOTAL 2 DE H	3	19	9	23	5	25	1	17	2	23	23	14
TOTAL 3 DE H	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
TOTAL 4 DE H	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
TOTAL 5 DE H	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
TOTAL DE H	25	25	25	25	25	25	25	25	25	25	25	25
TOTAL 1 DE D	15	5	13	6	21	0	22	12	17	10	2	8
TOTAL 2 DE D	7	17	9	16	1	22	0	10	5	12	20	14
TOTAL 3 DE D	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
TOTAL 4 DE D	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
TOTAL 5 DE D	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
TOTAL DE D	22	22	22	22	22	22	22	22	22	22	22	22
TOTAL 1 DE H	88,0%	24,0%	64,0%	8,0%	80,0%	0,0%	96,0%	32,0%	92,0%	8,0%	8,0%	44,0%
TOTAL 2 DE H	12,0%	76,0%	36,0%	92,0%	20,0%	100,0%	4,0%	68,0%	8,0%	92,0%	92,0%	56,0%
TOTAL 3 DE H	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%
TOTAL 4 DE H	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%
TOTAL 5 DE H	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%
TOTAL DE H	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%
TOTAL 1 DE D	68,2%	22,7%	59,1%	27,3%	95,5%	0,0%	100,0%	54,5%	77,3%	45,5%	9,1%	36,4%
TOTAL 2 DE D	31,8%	77,3%	40,9%	72,7%	4,5%	100,0%	0,0%	45,5%	22,7%	54,5%	90,9%	63,6%
TOTAL 3 DE D	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%
TOTAL 4 DE D	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%
TOTAL 5 DE D	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%
TOTAL DE D	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%

Figura 8.32: Resultats per gènere del tercer qüestionari diagnòstic.

Tot i que les dues primeres activitats estan inspirades en el model concret de les temperatures, els resultats són lleugerament diferents. Així com la comparació de dos estats condueix a bon resultat al 78,7% de l'alumnat, només el 61,7% dels alumnes participants encerta la suma de variacions. Aquest desnivell també el trobem en l'estudi per grups. En aquest s'observa que els alumnes del grup B, és a dir, els que cursen la matèria de Matemàtiques, tenen millors resultats que els que cursen Matemàtiques Aplicades a les Ciències Socials. L'estudi per gènere també manté la proporció esmentada però en aquest cas veiem que els nois obtenen millors resultats que les noies. L'estudi per grup i gènere confirma aquests resultats tot consolidant el resultat global però sense que es desprenguin més hipòtesis.

Entre els models considerats, el segon que té millors resultats és el corresponent als guanys i pèrdues. El 87,2% dels alumnes participants interpreta i desen-

RESULTATS PER GRUP I GÈNERE	A1	B1	A2	B2	A3	B3	A4	B4	A5	B5	A6	B6
TOTAL 1 DE HA	9	3	7	1	6	0	10	4	9	0	2	5
TOTAL 2 DE HA	1	7	3	9	4	10	0	6	1	10	8	5
TOTAL 3 DE HA	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
TOTAL 4 DE HA	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
TOTAL 5 DE HA	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
TOTAL DE HA	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10
TOTAL 1 DE HB	13	3	9	1	14	0	14	4	14	2	0	6
TOTAL 2 DE HB	2	12	6	14	1	15	1	11	1	13	15	9
TOTAL 3 DE HB	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
TOTAL 4 DE HB	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
TOTAL 5 DE HB	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
TOTAL DE HB	15	15	15	15	15	15	15	15	15	15	15	15
TOTAL 1 DE DA	8	5	5	5	12	0	13	8	8	5	2	7
TOTAL 2 DE DA	5	8	8	8	1	13	0	5	5	8	11	6
TOTAL 3 DE DA	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
TOTAL 4 DE DA	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
TOTAL 5 DE DA	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
TOTAL DE DA	13	13	13	13	13	13	13	13	13	13	13	13
TOTAL 1 DE DB	7	0	8	1	9	0	9	4	9	5	0	1
TOTAL 2 DE DB	2	9	1	8	0	9	0	5	0	4	9	8
TOTAL 3 DE DB	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
TOTAL 4 DE DB	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
TOTAL 5 DE DB	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
TOTAL DE DB	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9
TOTAL 1 DE HA	90,0%	30,0%	70,0%	10,0%	60,0%	0,0%	100,0%	40,0%	90,0%	0,0%	20,0%	50,0%
TOTAL 2 DE HA	10,0%	70,0%	30,0%	90,0%	40,0%	100,0%	0,0%	60,0%	10,0%	100,0%	80,0%	50,0%
TOTAL 3 DE HA	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%
TOTAL 4 DE HA	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%
TOTAL 5 DE HA	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%
TOTAL DE HA	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%
TOTAL 1 DE HB	86,7%	20,0%	60,0%	6,7%	93,3%	0,0%	93,3%	26,7%	93,3%	13,3%	0,0%	40,0%
TOTAL 2 DE HB	13,3%	80,0%	40,0%	93,3%	6,7%	100,0%	6,7%	73,3%	6,7%	86,7%	100,0%	60,0%
TOTAL 3 DE HB	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%
TOTAL 4 DE HB	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%
TOTAL 5 DE HB	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%
TOTAL DE HB	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%
TOTAL 1 DE DA	61,5%	38,5%	38,5%	38,5%	92,3%	0,0%	100,0%	61,5%	61,5%	38,5%	15,4%	53,8%
TOTAL 2 DE DA	38,5%	61,5%	61,5%	61,5%	7,7%	100,0%	0,0%	38,5%	38,5%	61,5%	84,6%	46,2%
TOTAL 3 DE DA	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%
TOTAL 4 DE DA	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%
TOTAL 5 DE DA	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%
TOTAL DE DA	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%
TOTAL 1 DE DB	77,8%	0,0%	88,9%	11,1%	100,0%	0,0%	100,0%	44,4%	100,0%	55,6%	0,0%	11,1%
TOTAL 2 DE DB	22,2%	100,0%	11,1%	88,9%	0,0%	100,0%	0,0%	55,6%	0,0%	44,4%	100,0%	88,9%
TOTAL 3 DE DB	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%
TOTAL 4 DE DB	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%
TOTAL 5 DE DB	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%
TOTAL DE DB	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%

Figura 8.33: Resultats per grups i gènere del tercer qüestionari diagnòstic.

volupa correctament l'activitat proposada a través de l'enunciat corresponent a aquest model. L'estudi per gènere mostra que la proporció esmentada es correspon amb un 78,3% d'èxits en els alumnes del grup A i un 95,8% dels alumnes del grup B. L'estudi per gènere mostra que un 80% dels nois encerta el tractament donat mentre que ho aconsegueix el 95,5% de les noies. L'estudi per grup i gènere indica que en els pols oposats hi trobem els nois del grup A amb un 60% d'èxits i les noies del grup B amb un 100%.

L'alumna amb número de registre 23 és una noia del grup A, és a dir, que cursa Matemàtiques Aplicades a les Ciències Socials. En la figura 8.34 (p. 333) apreciem que la participant en la recerca no empra una representació del problema

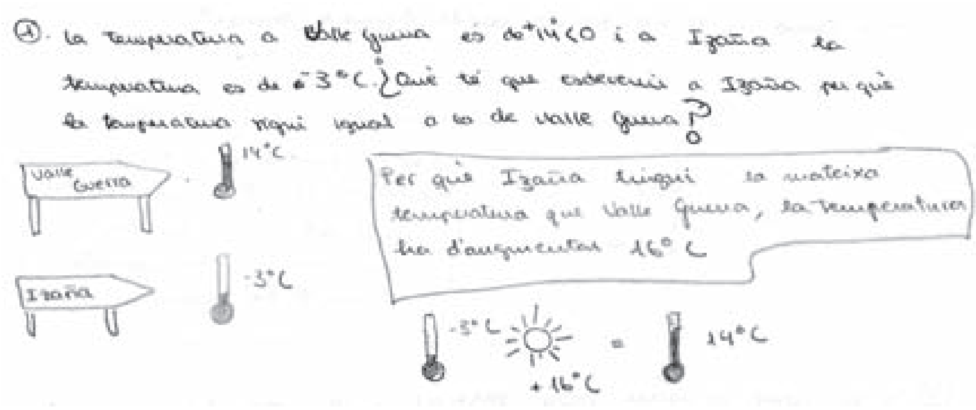


Figura 8.34: Resposta donada per l'alumna amb número de registre 23 (grup A) a la primera qüestió.

que li faciliti la resolució. En gran mesura empra una representació icònica en el sentit que dibuixa la situació amb proximitat a la realitat que pot imaginar però sense que l'afavoreixi per recollir les dades del problema amb la finalitat que constitueixi una ajuda per a la resolució. Tampoc indica cap operació aritmètica ni planteja el problema des d'un punt de vista algebraic. En conseqüència el possible èxit en la resolució pren la seva força en el càlcul mental i s'equivoca en la realització.

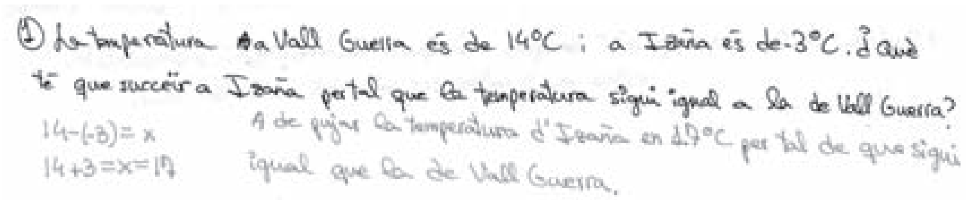


Figura 8.35: Resposta donada per l'alumne amb número de registre 37 (grup A) a la primera qüestió.

L'alumne amb número de registre 37 és una noi del grup B, és a dir, que cursa la matèria Matemàtiques en el primer curs de batxillerat. En la figura 8.35 (p. 333) apreciem que l'estudiant no s'ajuda de cap esquema gràfic però sí que realitza un plantejament algebraic. De fet en el primer curs de batxillerat ens trobem tractaments encertats i erronis i des de punts de vista ben diferents: utilització o no de la recta numèrica, simbolització icònica o fins i tot resolucions sense cap simbolització, tractament algebraic o aritmètic, etc.

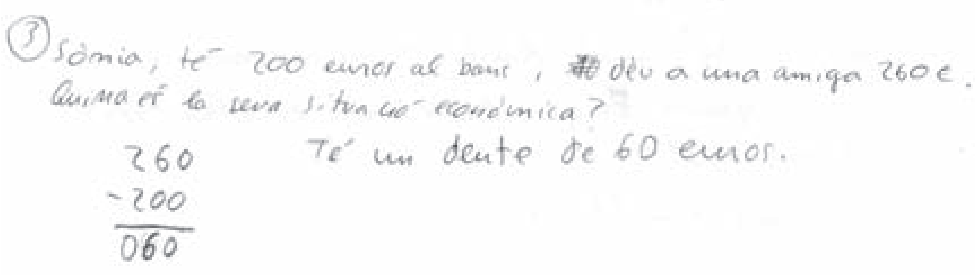


Figura 8.36: Resposta donada per l'alumne amb número de registre 2 (grup A) a la tercera qüestió.

La tercera activitat provoca una situació relativa al model concret de guanys i pèrdues. Aquesta concreció de l'estil d'ensenyament del nombre enter mira de justificar l'ús del nombre negatiu per resoldre les activitats que es suggereixen. L'alumne amb número de registre 2 és una noi del grup A, és a dir, que cursa Matemàtiques Aplicades a les Ciències Socials. En la figura 8.36 (p. 334) apreciem que l'alumne no empra nombres negatius per resoldre l'activitat proposada; tanmateix la resolució és breu i encertada. Per altra banda, l'alumna amb número de registre 16 dóna una resposta adient a la realitat que es desprèn de l'enunciat. En la figura 8.37 (p. 334) apreciem que l'alumna no empra nombres negatius per resoldre l'activitat proposada i en canvi contempla diverses situacions que permeten atendre diferents possibilitats que es desprenen de la proposta suggerida.

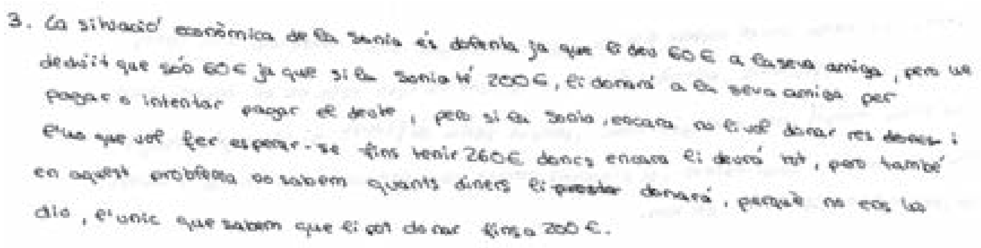


Figura 8.37: Resposta donada per l'alumna amb número de registre 16 (grup A) a la tercera qüestió.

La sisena i darrera activitat proposa la resolució d'un situació que s'adiu a un model concret basat en desplaçaments a la carretera. Tanmateix no es fixa en l'enunciat una orientació de manera que la resolució permet dues possibilitats. L'alumne amb número de registre 14 és una noia del grup A, és a dir, que cursa Matemàtiques Aplicades a les Ciències Socials. En la figura 8.38 (p. 335) apreciem que l'alumne participant en la recerca considera les dues possibilitats i representa el problema a través d'uns esquemes gràfics que s'aproximen a ser rectes numèriques. Aquest tipus de resolució ha estat molt escassa i els alumnes han considerat d'entrada una orientació predeterminada sense explicitar-ho.

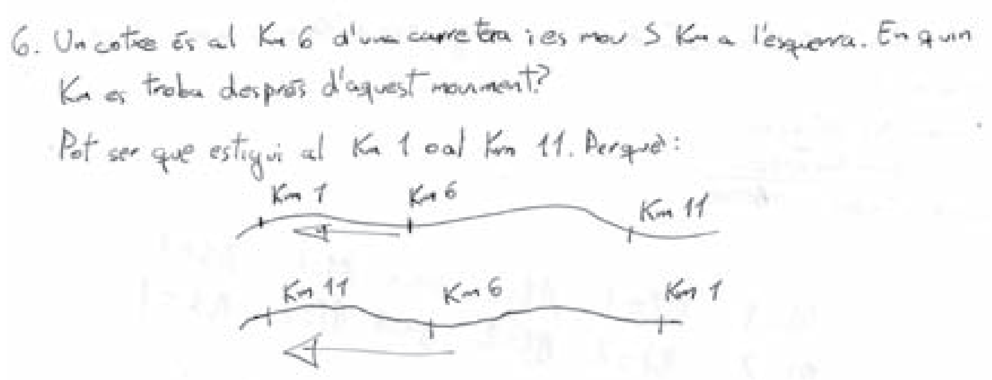


Figura 8.38: Resposta donada per l'alumne amb número de registre 14 (grup A) a la sisena qüestió.

Resultat 8.3.1 *El model concret que més bon resultat dóna entre els alumnes participants és el del nivell del mar. Aquest es caracteritza per provocar una situació que condueix a la suma d'una variació a un estat que té per resultat un estat. El segon model concret que més bons resultats dóna en virtut de les dades recollides és el model de guanys i pèrdues.*

Respecte del segon objectiu

«Estudiar la proporció d'alumnes que utilitza la recta numèrica per resoldre els problemes segons cada model» és el segon objectiu de la present part de la fase diagnòstica de la recerca. L'ús de la recta numèrica com a suport en la resolució de les situacions proposades és utilitzat amb proporcions ben diferents segons el model considerat. Així, mentre que les activitats que es corresponen amb el model del nivell del mar i el model de la carretera condueixen a emprar la recta numèrica a prop de la meitat de l'alumnat, en la proposta corresponent al model de guanys i pèrdues no la utilitza cap alumne.

Més concretament, un 42,6% dels alumnes utilitza la recta numèrica en la resolució de l'activitat corresponent al model del nivell del mar. L'estudi per grups mostra que aquesta proporció es correspon amb el 52,2% dels alumnes del grup A i el 33,3% dels alumnes del grup B. L'estudi per gènere indica que l'esmentada utilització es produeix en el 32% dels nois i el 54,5% de les noies. L'estudi per grup i gènere ens permet veure que el resultat més alt el trobem en les noies del grup A amb un 61,5% i el més baix en els nois del grup B amb un 26,7%.

El 40,4% dels alumnes també utilitza la recta numèrica en la proposta referent al model de la carretera. En aquest cas l'estudi per grups mostra que també el 52,2% es troba en els alumnes del grup A mentre que la proporció d'alumnes del grup B es redueix fins un 29,2%. L'estudi per gènere mostra la utilització de la recta numèrica per part del 44% dels nois i del 36,4% de les noies. L'estudi per grup i gènere indica que el 55,6% de les noies del grup B utilitza aquest recurs mentre que no ho fa cap noi del grup A. En canvi, en l'activitat corresponent al model concret de guanys i pèrdues la recta numèrica no ha estat utilitzada per cap alumne.

Resultat 8.3.2 *La recta numèrica com a recurs per a la resolució de les activitats proposades ha estat utilitzada de manera ben diferent segons el model que considerem. Mentre que en el model concret de guanys i pèrdues no ha estat emprada per cap alumne, en els models concrets de desplaçament de la forma* $e_i + v = e_f$ *ha estat utilitzada per una proporció d'alumnat propera a la meitat.*

Dels resultats obtinguts es desprèn que els models de desplaçament que provoquen la situació $e_i + v = e_f$ són la millor elecció com a punt de partida de les activitats que ens proposem. A més, la recta numèrica esdevé un recurs útil per a quasi la meitat de l'alumnat participant en la present recerca. Són diverses les situacions quotidianes que es poden adaptar al model sense trencar amb el sentit comú de l'alumne i que tindrem en compte en les fases posteriors de la recerca: ascensors que pugen i baixen, escales mecàniques en moviment, etc.

Referències

BRUNO, A.; MARTINON, A. (1994*a*): «Contextos y estructuras en el aprendizaje de los números negativos». *SUMA, 16*, 9-18.

GONZÁLEZ, J.L.; *et al.* (1990): *Números enteros*. Madrid: Síntesis.

IRIARTE, M.; JIMENO, M.; VARGAS-MACHUCA, I. (1991): «Obstáculos en el aprendizaje de los números enteros». *SUMA, 7*, 13-18.

JOHNSON, D.R. (1986): «Making -x meaningfull». *Mathematics teacher, 79*(7), 507-510.

Capítol 9

Anàlisi de les dades i presentació de resultats. Fase d'intervenció I

Índex

Tota investigació constitueix un procés d'indagació en el qual, a través d'unes tècniques concretes es persegueix assolir un determinat coneixement. Tanmateix, l'adquisició d'un coneixement concret guarda una estreta relació amb la metodologia emprada. Les diagnosis inicials que hem sintetitzat en el capítol anterior han permès obtenir un coneixement del punt de partida. Ara ens proposem implementar a l'aula la proposta metodològica exposada (p. 241) i emprar els instruments i les estratègies de recollida de dades que ens permetin respondre a les qüestions d'investigació recollides en els objectius segon i tercer.

En la figura 9.1 (p. 341) es recullen les activitats formatives que s'han implementat, les dates de la implementació i l'instrument de recollida de dades emprat. Per tal de facilitar la comunicació amb el lector organitzem la memòria en dos capítols tal com es pot consultar en la figura.

	Activitat formativa	Tipus activitat	Data implementació	Instrument
Capítol 9 Fase d'intervenció I	I	Intervenció I	8-10-2007	Fulls resolució
	II	Lliurament	15-10-2007	Informe resolució
	III	Intervenció II	22-10-2007	Annex II Instruments 1.1, 1.2, 1.3
Capítol 10 Fase d'intervenció II	IV	Qüestionari obert	29-10-2007	Capítol 10 Qüestionari obert
	V	Intervenció 3	5-11-2007	Annex II Instruments 2.1, 2.2, 2.3
	VI	Intervenció 4	12-11-2007 19-11-2007	Annex II Instruments 3.1, 3.2 (1a sessió) 4.1, 4.2 (2a sessió)

Figura 9.1: Quadre resum de la fase d'intervenció.

Ens proposem avaluar l'interès didàctic d'una particular introducció del nombre enter que, basada en la resolució d'un problema, permet connectar una introducció deductiva (p. 70) amb la constructiva (p. 76). Moltes de les recerques que apunten centres d'interès similars al que aquí abordem també empren problemes en les seves experimentacions. Tanmateix, nosaltres proposem una intervenció a través d'un únic problema. La seva execució tindrà una incidència en l'aprenentatge de l'alumne la qual pretenem conèixer.

De bon començament hem optat per recollir informació a través de fonts primàries, tal com fem explícit en la pàgina 224. No podíem partir d'unes hipòtesis perfectament elaborades (p. 46) i precises ja que per a nosaltres el significatiu és abordar el problema des de la realitat escolar, mirant de deixar en segon lloc el que pensem que és susceptible de succeir a les aules. Aquesta opció pren rellevància en virtut que reprendre l'ensenyament del nombre enter al batxillerat no és una pràctica que sovintegi i, en conseqüència, no en tenim una informació que faciliti predir el que ens podem trobar.

La recollida d'informació de la fase que ens ocupa és bàsicament qualitativa. La presència de l'investigador a l'aula ha tingut diversos efectes que considerem que són interessants de relatar. Cada estudiant va iniciar la fase experimental amb unes idees, experiències i coneixements que ja ens hem ocupat de diagnosticar. Al llarg de la fase empírica de la recerca les respostes dels estudiants no sempre han estat les que esperàvem. La investigació, acció i participació en la mateixa aula ens ha facilitat informació sobre com aprenen els estudiants i com veuen la matemàtica. En el capítol anterior hem centrat l'atenció en l'anàlisi de les dades i els resultats corresponents a la fase de diagnosi. En l'actual ens centrem en l'inici de la fase d'intervenció.

9.1 Anàlisi i resultats de la primera intervenció

En les sessions realitzades el dilluns dia 8 d'octubre de 2007 vam proposar als alumnes participants en la fase experimental de la recerca el problema dels nombres consecutius (p. 241).

9.1.1 De la finalitat general a la concreció d'objectius

Presentem l'enunciat als alumnes per primera vegada el dilluns 8 d'octubre de 2007. Es tracta del primer dilluns lectiu després que els alumnes participants en la fase empírica de la recerca ja hagin realitzat les diagnosis prèvies. El mateix dia que vam proposar l'activitat vam deixar temps per tal que els estudiants poguessin experimentar i redactar les seves primeres impressions. Entenem que una hora de temps és insuficient per al tractament d'aquest problema. Tanmateix estem interessats en els raonaments dels estudiants en aquesta fase de diagnosi. Tal com hem mostrat detalladament en la part dedicada al marc metodològic (p. 243) l'enunciat és el següent:

Problema 9.1.1 *Quins són els nombres naturals que es poden escriure com a suma de nombres*[1] *consecutius?*

Els alumnes participants no estan familiaritzats, en virtut dels estudis cursats prèviament, amb les progressions aritmètiques. Aquesta dada és rellevant per entendre els tractaments que els estudiants donen al problema. Com a objectiu general ens proposem explicar les dificultats que tenen els alumnes davant de la resolució del problema. Més concretament els objectius que atendrem són els que mostrem tot seguit.

9.1.2 Concreció d'objectius

1. Saber si l'alumne conclou el problema dels consecutius o si manifesta que necessita més temps. En el cas que doni resposta analitzar la naturalesa d'aquesta.

2. Discernir les experimentacions dels estudiants segons si sumen consecutius i examinen els resultats o si prenen nombres i intenten descomposar-los com a suma de consecutius.

Aquests objectius s'estableixen amb la prioritat d'alimentar els objectius generals de la present investigació. La vinculació entre els objectius generals i aquests concrets que acabem d'exposar es pot consultar en la figura 9.2 (p. 344).

9.1.3 Instruments de recollida de dades

El problema dels nombres consecutius actua com a instrument metodològic. No emprem en aquest cas cap altra instrument de recollida de dades que no sigui el

[1]En el plantejament d'aquest problema s'evita precisar «nombres naturals» ja que tot i que en un començament només s'empraran aquests, la resolució del problema conduirà a la introducció d'un nou conjunt de nombres, els nombres enters.

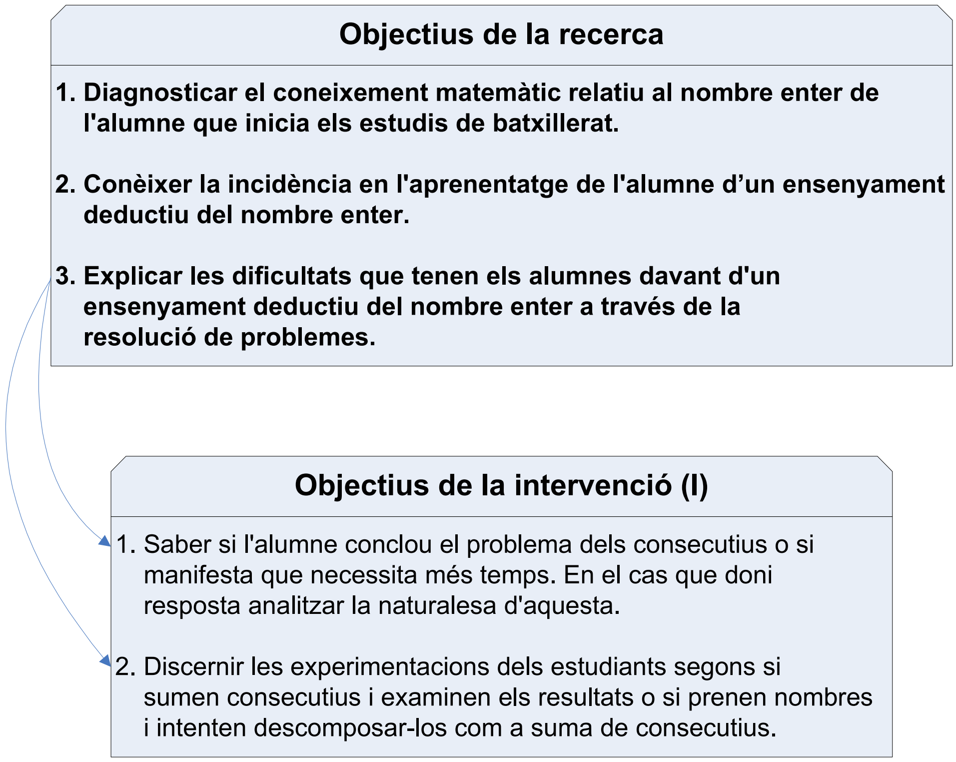


Figura 9.2: Dels objectius generals de la investigació a la seva concreció. Intervenció I.

full de resolució que lliura l'alumne al final de la sessió. De fet, acceptem que en tota anàlisi d'un procés de resolució d'un problema el document base és el registre deixat pel resolutor, el full de resolució. Inevitablement l'anàlisi se centra en alguns bons exemples de full de resolució, però en molts altres es basa en indicis, en inferències més o menys plausibles d'allò que cal pensar que ha fet o deixat de fer el resolutor.

La riquesa de les dades recollides és necessària per donar resposta als objectius de la nostra recerca. L'anàlisi d'aquestes podria però focalitzar l'atenció en uns aspectes o uns altres. Estem interessats en uns de ben determinats i és per això que abans d'examinar les dades presentem els esmentats aspectes en els quals focalitzem l'atenció; els recollim i presentem en l'apartat que té per títol paràmetres atesos. Aquesta concreció en l'anàlisi i focalització en el que ens interessa fa que hi hagi característiques de les dades que es perden perquè no ens interessen en virtut dels objectius de la nostra recerca. D'aquí es desprèn el fet que una anàlisi que prioritzi uns altres paràmetres podrà alimentar uns altres objectius, si s'escau.

9.1.4 Paràmetres atesos

Els paràmetres atesos per a l'anàlisi de les respostes neixen de la reflexió sobre la resolució de problemes: precipitació, descobriments realitzats per l'estudiant i, més concretament, manera d'abordar el problema: sumar nombres consecutius o considerar nombres i descomposar-los en suma de nombres consecutius.

9.1.5 Categories de resposta

En el procés de disseny de la recerca i més concretament en el de la sessió que ens ocupa s'han establert unes categories de resposta inicials. Aquestes s'han creat atenent a les sospites brollen de la nostra experiència prèvia. No s'han vist modificades en el procés d'anàlisi tot arribant a establir-se com a categories definitives. A partir de l'anàlisi dels primers casos les dades han encaixat en les categories sense generar-ne de noves. El fet que les dades trobin una categoria on col·locar-se condueix a establir-les com a definitives. La informació aportada per aquestes és rellevant per a l'estudi i tenen significat per elles mateixes ja que es poden interpretar sense informació afegida. Tot seguit mostrem les esmentades categories de resposta:

P1) Sessió 1. Tractament inicial del problema realitzat el dilluns 8 d'octubre de 2007

L'anàlisi de les respostes permet copsar en un primer moment si l'alumne busca una solució ràpida o percep la dificultat del problema i ho manifesta justificadament. En el cas que doni resposta estem interessats en conèixer els resultats conjecturals que presenta. Les categories que s'han establert a partir de l'anàlisi de les respostes són les següents:

P1-01. Respecte del tractament inicial:

1. L'alumne no respon a la pregunta.

2. L'alumne conjectura que tots els nombres naturals es poden escriure com a suma de nombres consecutius excepte les potències de 2.
3. L'alumne conjectura que tots els nombres naturals es poden escriure com a suma de nombres consecutius. Tanmateix, l'alumne no té en compte descomposicions emprant nombres negatius i tampoc considera que tot nombre natural és suma d'un sumand.
4. L'alumne diu que tots els nombres naturals es poden escriure com a suma de nombres consecutius excepte una quantitat finita de potències de 2. Alguns diuen que tots excepte el 2, d'altres diuen que tots excepte el 2 i el 4, d'altres que tots excepte el 2, el 4 i el 8, etc.
5. L'alumne diu que es poden escriure com a suma de nombres consecutius aquells nombres naturals que són senars, múltiples de 3, etc. En aquesta categoria de resposta es recullen aquells participants que exposen part dels nombres que es poden descomposar en suma de consecutius.

P1-02. Sobre la suma de dos nombres consecutius:

1. L'alumne conjectura que la suma de dos nombres consecutius és un nombre senar.

. Els alumnes que no descobreixen la conjectura exposada tenen l'ítem d'aquest indicador en blanc.

P1-03. Sobre la suma de quatre nombres consecutius:

1. L'alumne conjectura que la suma de quatre nombres consecutius és un nombre parell. També s'inclouen dins d'aquesta categoria de resposta aquells alumnes que diuen que la suma d'una quantitat parell de nombres consecutius és un nombre parell.

. Els alumnes que no fan el tractament exposat tenen l'ítem d'aquest indicador en blanc.

P1-04. Sobre la suma de tres nombres consecutius:

1. L'alumne conjectura que la suma de tres nombres consecutius és un múltiple de 3.

. Els alumnes que no descobreixen la conjectura exposada tenen l'ítem d'aquest indicador en blanc.

P1-05. Sobre la suma de cinc nombres consecutius:

1. L'alumne conjectura que la suma de cinc nombres consecutius és un múltiple de 5.

. Els alumnes que no descobreixen la conjectura exposada tenen l'ítem d'aquest indicador en blanc.

P1-06. Sobre les experimentacions realitzades pels participants:

1. L'alumne suma nombres consecutius i examina els resultats.
2. L'alumne considera nombres naturals i intenta descomposar-los en suma de nombres consecutius.
3. L'alumne té en compte els dos procediments anteriors.
4. L'alumne no experimenta.
5. L'alumne experimenta sobre la recta numèrica.

9.1.6 Lligams entre els objectius i els indicadors

Els indicadors estan lligats amb els objectius de la present part de la intervenció tal com es mostra en el quadre següent:

OBJECTIUS	INDICADORS
Objectiu 1	P1-01, P1-02, P1-03, P1-04 i P1-05
Objectiu 2	P1-06

9.1.7 Anàlisi de les dades de la primera sessió, discussió i presentació de resultats

En la figura 9.3 (p. 348) es poden consultar els resultats globals. Per a cada indicador es mostra el total absolut i relatiu de participants que es correspon amb cada categoria de resposta. S'ha fet servir una codificació bàsica, tal com es pot consultar en els arxius en format EXCEL[2] on estan recollides les dades sintetitzades per categories de resposta que tot seguit comuniquem.

RESULTATS GLOBALS	P1-01	P1-02	P1-03	P1-04	P1-05	P1-06
Respostes en blanc	1	24	36	30	40	1
TOTAL DE 1	20	26	14	20	10	38
TOTAL DE 2	5	0	0	0	0	0
TOTAL DE 3	10	0	0	0	0	0
TOTAL DE 4	9	0	0	0	0	10
TOTAL DE 5	5	0	0	0	0	1
TOTAL DE RESPOSTES	49	26	14	20	10	49
TOTAL DE 1	40,8%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	77,6%
TOTAL DE 2	10,2%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%
TOTAL DE 3	20,4%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%
TOTAL DE 4	18,4%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	20,4%
TOTAL DE 5	10,2%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	2,0%
TOTAL DE RESPOSTES	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%

Figura 9.3: Resultats globals de la primera sessió.

Resultats globals

Conèixer si l'alumne respon al que se li demana o si manifesta que necessita més temps és una informació rellevant ja que el problema és l'instrument que ha de conduir a la construcció de coneixement (p. 241). La precipitació en les respostes és un aspecte que caldrà, si s'escau, millorar. Alhora, la inactivitat o manca d'iniciativa constitueix un altra aspecte que viu en el pol diametralment oposat a l'anterior.

Tal com es pot veure en la taula 9.3 (p. 348), quasi un 41% dels alumnes no respon al problema plantejat. Les experimentacions que realitzen els condueixen a diferents descobriments que no permeten concloure cap resultat satisfactori. Tanmateix, és més de la meitat l'alumnat que intenta respondre i ho fa.

[2] http://www.xtec.cat/~rpujol1/Recerques/Tesi/Implemental.rar

Dels 49 alumnes participants en la sessió, 26 descobreixen que la suma de dos nombres consecutius és un nombre senar, tal com es pot consultar en la columna P1-02. Els altres no aprecien aquesta propietat i no s'hi manifesten ni a favor ni en contra. Un total de 14 alumnes, tal com es pot consultar en la columna P1-03, descobreix que la suma de quatre nombres consecutius és un nombre parell. No apreciem en les respostes d'aquesta sessió cap alumne que argumenti ni qüestioni els resultats conjecturals obtinguts. Són 20 els que conjecturen que la suma de tres nombres naturals consecutius és un múltiple de 3, tal com es pot consultar en la columna P1-04. Aquesta quantitat de participants es redueix a la meitat davant del resultat conjectural que diu que la suma de cinc nombres consecutius és un múltiple de 5.

Són 38 els alumnes que aborden el problema sumant nombres consecutius i examinant els resultats. Considerar nombres naturals i mirar de descomposar-los com sumes de nombres consecutius no és una pràctica habitual en aquesta primera sessió. Hi ha 10 alumnes que no experimenten i a més aporten respostes que en principi costa de veure d'on provenen.

Resultats categoritzats per grup i gènere

En la taula 9.4 (p. 350) copsem que els alumnes del grup B, és a dir els que cursen la matèria de Matemàtiques, intenten respondre al problema en un 61,5% mentre que només ho fa un 17,4% dels alumnes del grup A. En canvi aquesta cerca d'una resposta no ve acompanyada d'una conjectura encertada. Mentre que un 21,7% dels alumnes del grup A, és a dir dels alumnes que cursen Matemàtiques Aplicades a les Ciències Socials, conjectura que tots els nombres naturals es poden escriure com a suma de nombres consecutius excepte les potències de dos, no ho fa cap alumne del grup B. Per contra i respecte de les conjectures parcials recollides en les columnes P1-02, P1-03, P1-04 i P1-05 els alumnes del grup B tenen un èxit superior als del grup A. Tots els del grup B realitzen un treball experimental i, els que no ho fan, formen part del grup A.

No s'aprecien diferències significatives en l'estudi categoritzat per gènere respecte de la proporció d'alumnes que respon al problema proposat, tal com es pot consultar en la taula 9.5 (p. 351). Tanmateix, els resultats conjecturals parcials

RESULTATS PER GRUPS	P1-01	P1-02	P1-03	P1-04	P1-05	P1-06
TOTAL 1 DE A	4	9	1	2	0	12
TOTAL 2 DE A	5	0	0	0	0	0
TOTAL 3 DE A	6	0	0	0	0	0
TOTAL 4 DE A	4	0	0	0	0	10
TOTAL 5 DE A	4	0	0	0	0	1
TOTAL DE A	23	9	1	2	0	23
TOTAL 1 DE B	16	17	13	18	10	26
TOTAL 2 DE B	0	0	0	0	0	0
TOTAL 3 DE B	4	0	0	0	0	0
TOTAL 4 DE B	5	0	0	0	0	0
TOTAL 5 DE B	1	0	0	0	0	0
TOTAL DE B	26	17	13	18	10	26
TOTAL 1 DE A	17,4%	100,0%	100,0%	100,0%	0,0%	52,2%
TOTAL 2 DE A	21,7%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%
TOTAL 3 DE A	26,1%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%
TOTAL 4 DE A	17,4%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	43,5%
TOTAL 5 DE A	17,4%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	4,3%
TOTAL DE A	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	0,0%	100,0%
TOTAL 1 DE B	61,5%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%
TOTAL 2 DE B	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%
TOTAL 3 DE B	15,4%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%
TOTAL 4 DE B	19,2%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%
TOTAL 5 DE B	3,8%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%
TOTAL DE B	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%

Figura 9.4: Resultats per grups del tractament de la primera sessió.

són superiors en les noies. L'estudi per grup i gènere, que es pot consultar en la taula 9.6 (p. 353) ens permet veure la poca influència que té el gènere davant dels indicadors atesos i confirma la forta influència del grup.

Tractaments particulars

L'alumne amb número de registre 37 és un noi del grup B, és a dir, que cursa Matemàtiques. En la figura 9.7 (p. 354) podem veure que experimenta amb la suma de dos nombres consecutius per concloure que el resultat és un nombre senar. De manera anàloga efectua la suma de tres nombres consecutius per concloure que el resultat és un múltiple de 3. Continua l'experimentació amb la suma de quatre, cinc, sis i set nombres consecutius.

Emprant les seves paraules: «S'ha de sumar tant com nombres consecutius tinguis al resultat de la suma anterior». L'expressió escrita de l'estudiant cal ser interpretada per arribar a veure què vol dir. Quan sumem k nombres consecutius i ordenem els resultats, on k indica una quantitat finita de sumands, aquests segueixen una progressió aritmètica de diferència k. Finalment l'alumne mira de donar resposta a la pregunta formulada, fet que ens permet copsar que potser l'estudiant

RESULTATS PER GÈNERE	P1-01	P1-02	P1-03	P1-04	P1-05	P1-06
TOTAL 1 DE H	11	9	4	7	4	19
TOTAL 2 DE H	3	0	0	0	0	0
TOTAL 3 DE H	4	0	0	0	0	0
TOTAL 4 DE H	4	0	0	0	0	5
TOTAL 5 DE H	2	0	0	0	0	0
TOTAL DE H	24	9	4	7	4	24
TOTAL 1 DE D	9	17	10	13	6	19
TOTAL 2 DE D	2	0	0	0	0	0
TOTAL 3 DE D	6	0	0	0	0	0
TOTAL 4 DE D	5	0	0	0	0	5
TOTAL 5 DE D	3	0	0	0	0	1
TOTAL DE D	25	17	10	13	6	25
TOTAL 1 DE H	45,8%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	79,2%
TOTAL 2 DE H	12,5%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%
TOTAL 3 DE H	16,7%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%
TOTAL 4 DE H	16,7%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	20,8%
TOTAL 5 DE H	8,3%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%
TOTAL DE H	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%
TOTAL 1 DE D	36,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	76,0%
TOTAL 2 DE D	8,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%
TOTAL 3 DE D	24,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%
TOTAL 4 DE D	20,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	20,0%
TOTAL 5 DE D	12,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	4,0%
TOTAL DE D	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%

Figura 9.5: Resultats per gènere del tractament de la primera sessió.

ha resolt, habitualment i emprant poc temps a classe, els problemes que se li han plantejat. La resposta que dóna és: «Tots menys 2, 4, 8 i 16». Hom podria pensar que a partir del que ha obtingut aquest alumne qualsevol estudiant arriba a conjecturar que el resultat demanat són les potències naturals de 2. Però això no és així i una part dels estudiants té dificultats per copsar patrons generals.

L'alumna amb número de registre 6 és una noia del grup A, és a dir, que cursa Matemàtiques Aplicades a les Ciències Socials. En la figura 9.8 (p. 355) podem veure que experimenta amb la suma de dos i tres nombres consecutius. Els resultats que obté li permeten mostrar una col·lecció de nombres que no són suma de consecutius, en atenció als casos experimentats per ella. L'alumna considera el 4 i el 8 de la llista i, en canvi, no atén el 16 que apareix a la mateixa llista. Aquest tractament parcial sembla raonable com a punt de partida però de sobte conclou que tots els nombres es poden escriure com a suma de consecutius. Es copsa la precipitació que probablement brolli de voler donar un resultat.

L'alumne amb número de registre 5 és una noi del grup A, és a dir, que cursa Matemàtiques Aplicades a les Ciències Socials. En la figura 9.9 (p. 356) podem veure que experimenta amb la suma de dos i tres nombres consecutius. De sobte sembla que se n'adona que tot nombre natural es pot escriure com la suma de nombres consecutius fent ús de nombres negatius. Amb les seves paraules: «Són tots els nombres naturals del 0 al infinit». Aquest és l'únic participant en la recerca que en la primera sessió fa ús de nombres negatius per resoldre el problema. I això ho fa sense considerar que tot nombre sigui suma d'un consecutiu, és a dir, el mateix nombre.

Resultat 9.1.1 *L'experimentació i la cerca d'una solució facilita l'assoliment de conjectures parcials però, a la vista de les dades recollides, no facilita un resultat conjectural global del problema proposat. Els alumnes del grup B, és a dir els que cursen la matèria de Matemàtiques, experimenten més que els del grup A i això els facilita més resultats parcials però, en canvi, els dificulta el descobriment de resultats generals.*

La dificultat que imprimeix en l'alumne el problema proposat ens apropa a una concepció de problema que denota conflictivitat. La inexistència d'un procediment que condueixi directament cap a una solució satisfactòria permet interpretar l'activitat com un treball d'investigació que inval·lida les rutines i reclama un toc de creativitat. Respecte de l'enunciat els alumnes troben a faltar dades que facilitin una execució ràpida. Copsem també que la facilitat amb la que l'alumne s'inicia fa entendre l'activitat com motivadora i que requereix d'un procés lògic que pot exigir alguns coneixements previs però que principalment necessita algun descobriment. De manera imprecisa tenim de bon començament que la inexistència d'un mecanisme conegut es fa palesa i, tot i que l'enunciat sembla clarament entès per hom, ningú accedeix ràpidament a la solució.

RESULTATS PER GRUP I GÈNERE	P1-01	P1-02	P1-03	P1-04	P1-05	P1-06
TOTAL 1 DE HA	1	2	0	0	0	5
TOTAL 2 DE HA	3	0	0	0	0	0
TOTAL 3 DE HA	3	0	0	0	0	0
TOTAL 4 DE HA	1	0	0	0	0	5
TOTAL 5 DE HA	2	0	0	0	0	0
TOTAL DE HA	10	2	0	0	0	10
TOTAL 1 DE HB	10	7	4	7	4	14
TOTAL 2 DE HB	0	0	0	0	0	0
TOTAL 3 DE HB	1	0	0	0	0	0
TOTAL 4 DE HB	3	0	0	0	0	0
TOTAL 5 DE HB	0	0	0	0	0	0
TOTAL DE HB	14	7	4	7	4	14
TOTAL 1 DE DA	3	7	1	2	0	7
TOTAL 2 DE DA	2	0	0	0	0	0
TOTAL 3 DE DA	3	0	0	0	0	0
TOTAL 4 DE DA	3	0	0	0	0	5
TOTAL 5 DE DA	2	0	0	0	0	1
TOTAL DE DA	13	7	1	2	0	13
TOTAL 1 DE DB	6	10	9	11	6	12
TOTAL 2 DE DB	0	0	0	0	0	0
TOTAL 3 DE DB	3	0	0	0	0	0
TOTAL 4 DE DB	2	0	0	0	0	0
TOTAL 5 DE DB	1	0	0	0	0	0
TOTAL DE DB	12	10	9	11	6	12
TOTAL 1 DE HA	10,0%	100,0%	0,0%	0,0%	0,0%	50,0%
TOTAL 2 DE HA	30,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%
TOTAL 3 DE HA	30,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%
TOTAL 4 DE HA	10,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	50,0%
TOTAL 5 DE HA	20,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%
TOTAL DE HA	100,0%	100,0%	0,0%	0,0%	0,0%	100,0%
TOTAL 1 DE HB	71,4%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%
TOTAL 2 DE HB	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%
TOTAL 3 DE HB	7,1%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%
TOTAL 4 DE HB	21,4%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%
TOTAL 5 DE HB	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%
TOTAL DE HB	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%
TOTAL 1 DE DA	23,1%	100,0%	100,0%	100,0%	0,0%	53,8%
TOTAL 2 DE DA	15,4%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%
TOTAL 3 DE DA	23,1%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%
TOTAL 4 DE DA	23,1%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	38,5%
TOTAL 5 DE DA	15,4%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	7,7%
TOTAL DE DA	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	0,0%	100,0%
TOTAL 1 DE DB	50,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%
TOTAL 2 DE DB	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%
TOTAL 3 DE DB	25,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%
TOTAL 4 DE DB	16,7%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%
TOTAL 5 DE DB	8,3%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%
TOTAL DE DB	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%

Figura 9.6: Resultats per grup i gènere del tractament de la primera sessió.

Quins són els nombres que es poden escriure amb la suma de 2 nombres consecutius.

0+1=1
1+2=3
2+3=5
3+4=7
4+5=9

R: la suma de 2 nombres consecutius és imparell.

0+1+2 = 3
1+2+3 = 6
2+3+4 = 9
3+4+5 = 12

R: la suma de 3 nombres consecutius dóna múltiple de 3.

0+1+2+3 = 6
1+2+3+4 = 10
2+3+4+5 = 14
3+4+5+6 = 18

R: cada cop se li sumen 4 al resultat de la suma anterior.

0+1+2+3+4 = 10
1+2+3+4+5 = 15
2+3+4+5+6 = 20
3+4+5+6+7 = 25

R: la suma de 5 nombres consecutius són múltiples de 5 a partir del 10.

0+1+2+3+4+5 = 15
1+2+3+4+5+6 = 21
2+3+4+5+6+7 = 27
3+4+5+6+7+8 = 33

R: la suma de 6 nombres consecutius cada cop, a partir de 15, se li suma 6 al resultat de la suma anterior.

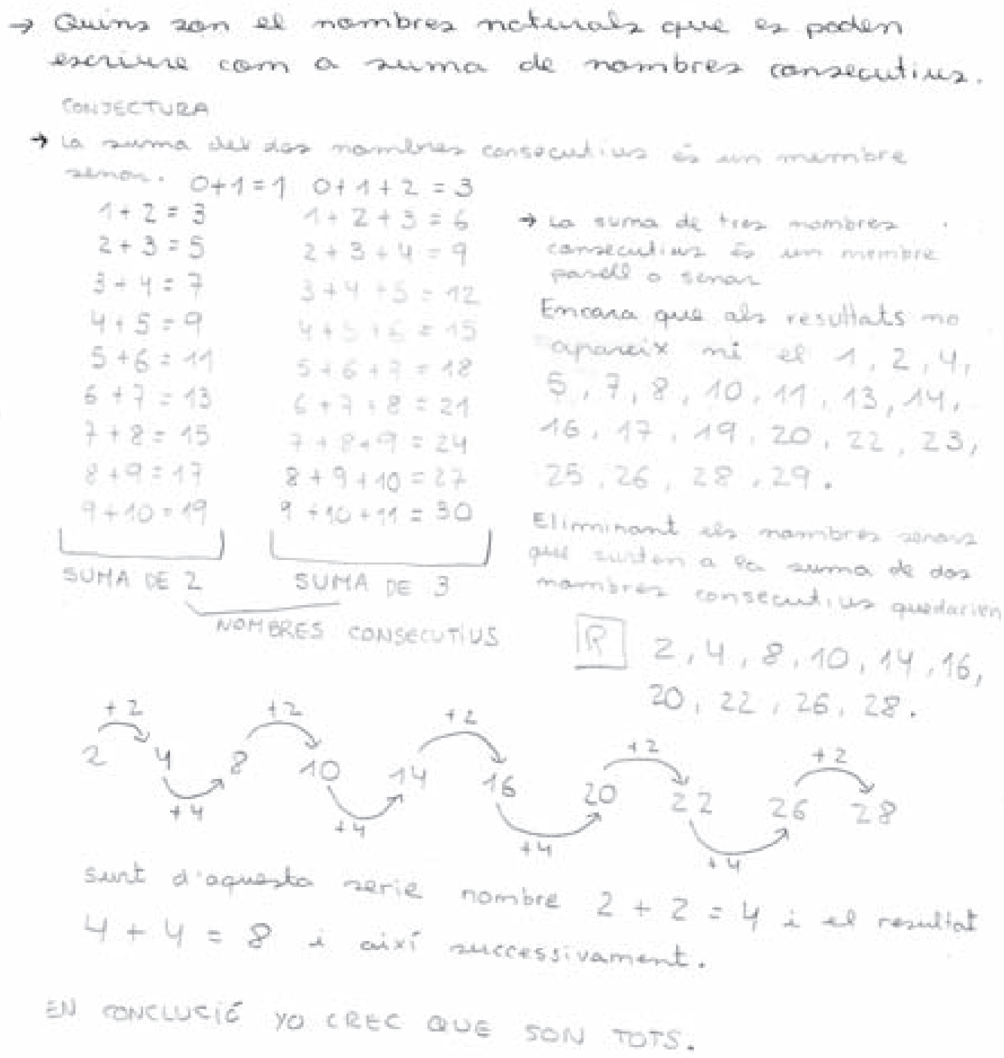
0+1+2+3+4+5+6 = 21
1+2+3+4+5+6+7 = 28
2+3+4+5+6+7+8 = 35
3+4+5+6+7+8+9 = 42

R: ... +7.

S'ha de sumar tant com nombres consecutius tinguis al resultat de la suma anterior

Tots menys 2, 4, 8 i 16

Figura 9.7: Tractament de l'alumne amb número de registre 37 (grup B) al problema dels nombres consecutius en la primera sessió.



→ Quins son el nombres naturals que es poden escriure com a suma de nombres consecutius.

CONJECTURA

→ La suma del dos nombres consecutius és un nombre senar.

0+1=1	0+1+2=3
1+2=3	1+2+3=6
2+3=5	2+3+4=9
3+4=7	3+4+5=12
4+5=9	4+5+6=15
5+6=11	5+6+7=18
6+7=13	6+7+8=21
7+8=15	7+8+9=24
8+9=17	8+9+10=27
9+10=19	9+10+11=30
SUMA DE 2	SUMA DE 3

NOMBRES CONSECUTIUS

→ La suma de tres nombres consecutius és un nombre parell o senar

Encara que als resultats no apareix ni el 1, 2, 4, 5, 7, 8, 10, 11, 13, 14, 16, 17, 19, 20, 22, 23, 25, 26, 28, 29.

Eliminant els nombres senars que surten a la suma de dos nombres consecutius quedarien

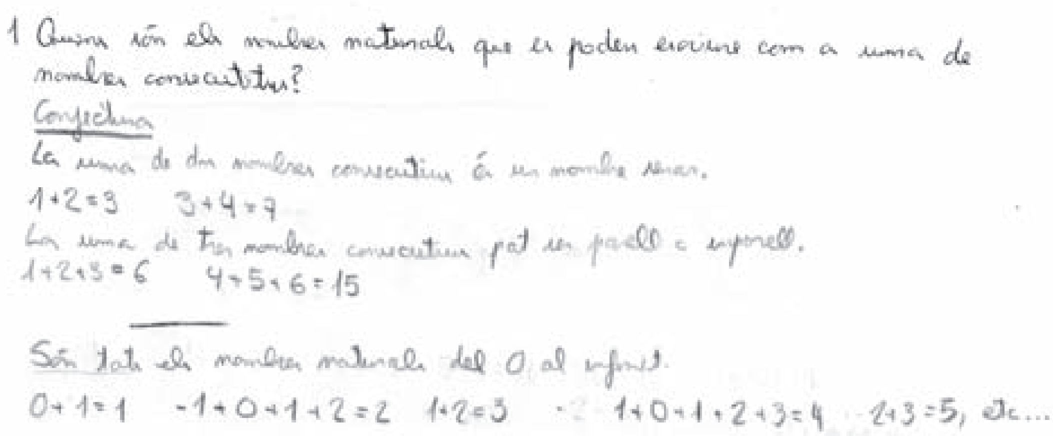
R 2, 4, 8, 10, 14, 16, 20, 22, 26, 28.

$2 \xrightarrow{+2} 4 \xrightarrow{+4} 8 \xrightarrow{+2} 10 \xrightarrow{+4} 14 \xrightarrow{+2} 16 \xrightarrow{+4} 20 \xrightarrow{+2} 22 \xrightarrow{+4} 26 \xrightarrow{+2} 28$

Surt d'aquesta serie nombre 2 + 2 = 4 i el resultat 4 + 4 = 8 i així successivament.

EN CONCLUCIÓ YO CREC QUE SON TOTS.

Figura 9.8: Tractament de l'alumne amb número de registre 6 (grup A) al problema dels nombres consecutius en la primera sessió.



1 Quins són els nombres naturals que es poden escriure com a suma de nombres consecutius?

Conjectura

La suma de dos nombres consecutius és un nombre senar.

1+2=3   3+4=7

La suma de tres nombres consecutius pot ser parell o imparell.

1+2+3=6   4+5+6=15

Són tots els nombres naturals del 0 al infinit.

0+1=1   -1+0+1+2=2   1+2=3   -2 1+0+1+2+3=4   2+3=5, etc...

Figura 9.9: Tractament de l'alumne amb número de registre 5 (grup A) al problema dels nombres consecutius en la primera sessió.

9.2 Anàlisi i resultats dels informes dels estudiants

En la sessió del dilluns dia 8 d'octubre de 2007 vam familiaritzar els alumnes participants en la fase experimental de la recerca amb el problema dels nombres consecutius (p. 241). Finalitzada l'esmentada sessió vam proposar als estudiants que treballessin el problema a casa seva i que lliuressin el següent dilluns 15 d'octubre de 2007 un informe de la resolució que inclogués els seus raonaments i descobriments.

9.2.1 De la finalitat general a la concreció d'objectius

Deixar que els alumnes pensessin el problema a casa seva els va donar l'oportunitat de poder madurar els seus raonaments. Aquesta opció neix del fet que entenem que una hora és un temps insuficient en virtut de les possibilitats que ofereix el problema proposat. Recollides les dades corresponents a les respostes inicials dels estudiants vam optar per deixar-los una setmana més. En aquest segon tractament no estem només interessats en les respostes espontànies o inicials sinó també en les reflexions de l'estudiant.

Els alumnes participants no estan familiaritzats amb les progressions aritmètiques, tal com prevèiem, i tal com hem pogut confirmar en virtut de les dades recollides en la primera sessió. Com a objectiu general, i com a continuació de la primera sessió, ens proposem examinar els principals descobriments dels alumnes en el procés de resolució del problema. Més concretament els objectius que atendrem són els que mostrem tot seguit.

9.2.2 Concreció d'objectius

1. Indicar si l'alumne es pregunta per la quantitat de possibles descomposicions d'un nombre quan el volem escriure com a suma de nombres consecutius.

2. Examinar si l'alumne relaciona la quantitat de sumands d'una descomposició amb els divisors del nombre que volem descomposar.

3. Examinar si l'alumne relaciona la quantitat de descomposicions possibles amb els divisors del nombre considerat.

4. Posar de manifest si l'alumne utilitza nombres negatius en les descomposicions.

Aquests objectius s'estableixen amb la prioritat d'alimentar els objectius generals de la present investigació. La vinculació entre els objectius generals i aquests concrets que acabem d'exposar es pot consultar en la figura 9.10 (p. 358).

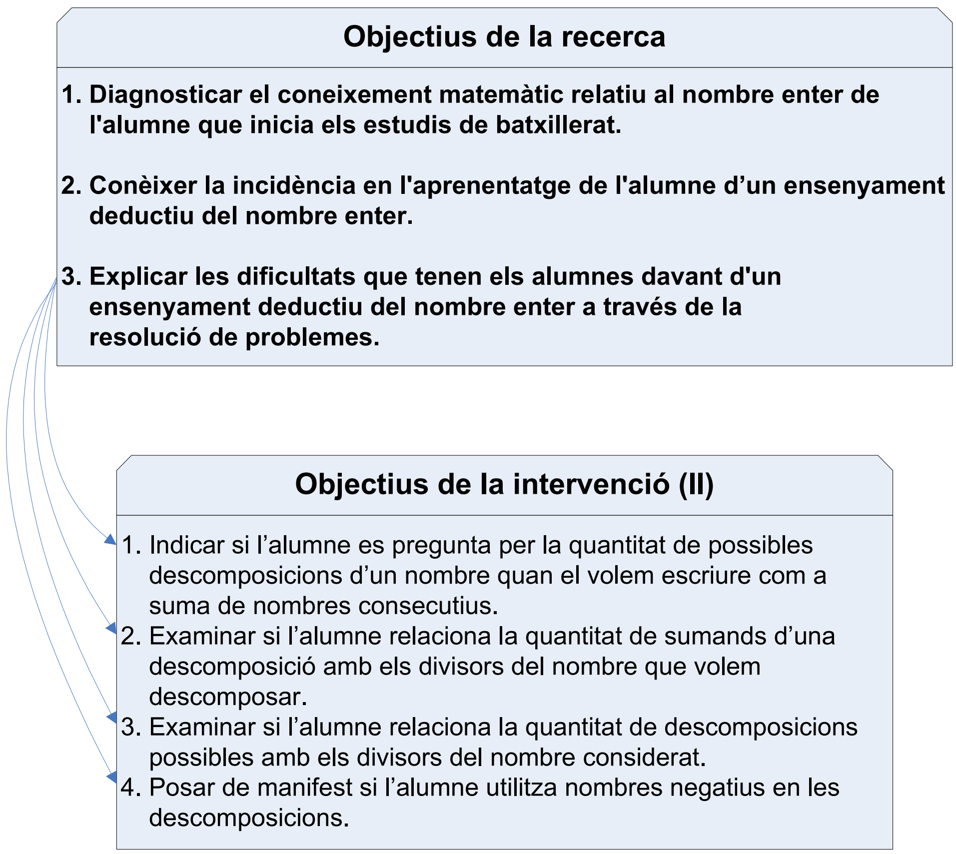


Figura 9.10: Dels objectius generals de la investigació a la seva concreció. Intervenció II.

9.2.3 Instruments de recollida de dades

El problema dels nombres consecutius ha estat l'instrument metodològic de la sessió anterior i també ho és d'aquest. Novament no emprem cap altra instrument de recollida de dades que no sigui el full de resolució que lliura l'alumne. Acceptar que en tota anàlisi d'un procés de resolució d'un problema el document base és el registre deixat pel resolutor és una premissa bàsica de la present investigació.

9.2.4 Paràmetres atesos

Els paràmetres atesos per a l'anàlisi de les respostes es concreten en: saber si l'alumne es pregunta per la quantitat de possibles descomposicions d'un nombre quan el volem escriure com a suma de nombres consecutius, les relacions que estableix el participant en la fase empírica de la recerca entre la quantitat de sumands i els divisors del nombre, també les relacions que estableix el resolutor entre la quantitat de descomposicions i els divisors del nombre. També atendrem la possible utilització per part de l'alumne de nombres negatius en les descomposicions. Els esmentats paràmetres estan directament relacionats amb heurístiques la resolució de problemes concretes pel cas que ens ocupa. Són rellevants a més per les fases següents de la investigació i d'aquí bé que els prioritzem per sobre d'altres i que focalitzen la nostra atenció.

9.2.5 Categories de resposta

Per a l'anàlisi dels informes de resolució dels alumnes hem establert unes categories de resposta inicials a partir del que consideràvem que era més raonable d'obtenir. En el procés d'anàlisi no s'han vist modificades i, a partir de l'anàlisi dels primers informes de resolució, les dades han anat encaixant en les categories conduint a establir-les com a definitives. Tot seguit mostrem les esmentades categories de resposta:

P2) Informe de resolució lliurat el dilluns 15 d'octubre de 2007

L'anàlisi de les respostes dels estudiants esdevé cabdal per mesurar el nivell d'assoliment d'aquelles particularitats del problema que són necessàries per abordar la posterior introducció deductiva del nombre enter. Les categories que s'han establert a partir de l'anàlisi de les respostes i en virtut dels paràmetres que volem atendre són les següents:

P2-01. Sobre les descomposicions dels nombres primers:

1. L'alumne conjectura que els nombres primers senars tenen una única descomposició com a suma de nombres consecutius.

. Els alumnes que no descobreixen la conjectura exposada tenen l'ítem d'aquest indicador en blanc.

P2-02. Sobre la quantitat de descomposicions:

1. L'alumne descobreix que hi ha nombres que tenen més d'una descomposició com a suma de nombres consecutius.
2. L'alumne no descobreix la conjectura exposada.

P2-03. Sobre el tractament experimental considerat:

1. L'alumne suma nombres consecutius i examina els resultats.
2. L'alumne considera nombres naturals i intenta descomposar-los en suma de nombres consecutius.
3. L'alumne té en compte els dos procediments anteriors.
4. L'alumne no experimenta.

P2-04. Sobre la relació entre la quantitat de sumands de les descomposicions d'un nombre i els seus divisors:

1. L'alumne observa que a vegades hi ha tants sumands en la descomposició com algun divisor del nombre considerat.
2. L'alumne no descobreix aquesta regularitat.

P2-05. Sobre la relació entre la quantitat de descomposicions d'un nombre i els seus divisors:

1. L'alumne relaciona la quantitat de descomposicions d'un nombre amb els seus divisors.

. L'alumne no descobreix l'esmentada relació.

P2-06. Sobre la utilització de nombres negatius en les descomposicions:

1. L'alumne considera nombres negatius en la descomposició d'un nombre com a suma de nombres consecutius.

. Els alumnes que no consideren nombres negatius tenen l'ítem d'aquest indicador en blanc.

9.2.6 Lligams entre els objectius i els indicadors

Els indicadors estan lligats amb els objectius de la present part de la intervenció tal com es mostra en el quadre següent:

OBJECTIUS	INDICADORS
Objectiu 1	P2-01, P2-02 i P2-03
Objectiu 2	P2-04
Objectiu 3	P2-05
Objectiu 4	P2-06

9.2.7 Anàlisi de les dades dels informes de resolució, discussió i presentació de resultats

En la figura 9.11 (p. 362) es poden consultar els resultats globals obtinguts en l'anàlisi dels informes. Per a cada indicador es mostra el total absolut i relatiu de les respostes dels participants segons cada categoria de resposta. Els indicadors atesos tenen a veure amb descobriments de l'alumne, excepte el $P2-03$ que està relacionat amb un procediment. La presència d'una determinada categoria de resposta en blanc indica la manca del descobriment corresponent. De la mateixa manera que en la presentació de resultats corresponent a la primera sessió s'ha fet servir una codificació bàsica, tal com es pot consultar en els arxius en format EXCEL[3] on estan recollides les dades sintetitzades per categories de resposta que

[3] http://www.xtec.cat/~rpujol1/Recerques/Tesi/Implementa2.rar

tot seguit comuniquem.

RESULTATS GLOBALS	P2-01	P2-02	P2-03	P2-04	P2-05	P2-06
TOTAL DE 1	2	22	16	11	2	1
TOTAL DE 2	0	27	28	0	0	0
TOTAL DE 3	0	0	2	0	0	0
TOTAL DE 4	0	0	1	0	0	0
TOTAL DE 5	0	0	0	0	0	0
TOTAL DE RESPOSTES	2	49	47	11	2	1
TOTAL DE 1	100,0%	44,9%	34,0%	100,0%	100,0%	100,0%
TOTAL DE 2	0,0%	55,1%	59,6%	0,0%	0,0%	0,0%
TOTAL DE 3	0,0%	0,0%	4,3%	0,0%	0,0%	0,0%
TOTAL DE 4	0,0%	0,0%	2,1%	0,0%	0,0%	0,0%
TOTAL DE 5	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%
TOTAL DE RESPOSTES	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%

Figura 9.11: Resultats globals de l'informe lliurat el dilluns 15 d'octubre de 2007.

Resultats globals

Tal com es pot consultar en la taula 9.11 (p. 362), només dos alumnes diuen que els nombres primers senars es poden escriure d'una única manera com a suma de nombres consecutius. Hom pot entendre que els nombres primers senars estan inclosos en els nombres senars i que, per tant, el corresponent descobriment pels senars és vàlid pels primers senars. Tanmateix, mostrem interès pels nombres primers per veure si l'alumne reflexiona sobre la descomposició factorial del nombre que pretén descomposar.

Quasi el 45% dels alumnes descobreix que hi ha nombres que tenen més d'una descomposició com a suma de nombres consecutius. Per altra banda és poc més del 55% de l'alumnat la proporció que no ho descobreix. Copsar experimentalment que la unicitat de descomposició no és sempre una realitat facilita que l'estudiant es formuli preguntes que són del nostre interès.

Només són onze els estudiants que observen que a vegades hi ha tants sumands en la descomposició com algun dels divisors del nombre considerat. Val a dir que l'esmentat descobriment presenta la dificultat afegida que un primer tractament del problema permet veure que a vegades sembla errònia l'esmentada propietat.

El fet de relacionar la quantitat de descomposicions d'un nombre amb els seus divisors només la trobem amb dos dels alumnes participants. A més, el fet de considerar nombres negatius en la descomposició d'un nombre com a suma de nombres consecutius només ho trobem en un dels alumnes participants.

Respecte dels procediments emprats pels alumnes participants i que brollen dels informes presentats, un 34% suma nombres consecutius i examina els resultats mentre que quasi un 60% considera nombres naturals i mira de descomposar-los en suma de nombres consecutius. Només són dos els estudiants que ataquen el problema des d'ambdós punts de vista i només un alumne participant en la fase empírica de la recerca no fa cap experimentació.

Resultats categoritzats per grup i gènere

RESULTATS PER GRUPS	P2-01	P2-02	P2-03	P2-04	P2-05	P2-06
TOTAL 1 DE A	1	11	3	5	2	0
TOTAL 2 DE A	0	11	15	0	0	0
TOTAL 3 DE A	0	0	1	0	0	0
TOTAL 4 DE A	0	0	1	0	0	0
TOTAL 5 DE A	0	0	0	0	0	0
TOTAL DE A	1	22	20	5	2	0
TOTAL 1 DE B	1	11	13	6	0	1
TOTAL 2 DE B	0	16	13	0	0	0
TOTAL 3 DE B	0	0	1	0	0	0
TOTAL 4 DE B	0	0	0	0	0	0
TOTAL 5 DE B	0	0	0	0	0	0
TOTAL DE B	1	27	27	6	0	1
TOTAL 1 DE A	100,0%	50,0%	15,0%	100,0%	100,0%	
TOTAL 2 DE A	0,0%	50,0%	75,0%	0,0%	0,0%	
TOTAL 3 DE A	0,0%	0,0%	5,0%	0,0%	0,0%	
TOTAL 4 DE A	0,0%	0,0%	5,0%	0,0%	0,0%	
TOTAL 5 DE A	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	
TOTAL DE A	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	
TOTAL 1 DE B	100,0%	40,7%	48,1%	100,0%		100,0%
TOTAL 2 DE B	0,0%	59,3%	48,1%	0,0%		0,0%
TOTAL 3 DE B	0,0%	0,0%	3,7%	0,0%		0,0%
TOTAL 4 DE B	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%		0,0%
TOTAL 5 DE B	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%		0,0%
TOTAL DE B	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%		100,0%

Figura 9.12: Resultats per grups de l'informe lliurat el dilluns 15 d'octubre de 2007.

En la taula 9.12 (p. 363) copsem que tres quarts dels alumnes del grup A, és a dir els que cursen la matèria de Matemàtiques Aplicades a les Ciències Socials, consideren nombres naturals i miren de descomposar-los com a suma de nombres consecutius. S'aprecia, per tant, una diferència significativa en els procediments emprats pels alumnes d'ambdós grups. Respecte dels descobriments assolits pels estudiants no apreciem significatives diferències entre ambdós grups.

No s'observen salts significatius en l'estudi categoritzat per gènere. Tanmateix, les lleus diferències apunten que les noies (52%) descobreixen amb més facilitat que els nois (37,5%) que hi ha nombres que tenen més d'una descomposició

RESULTATS PER GÈNERE	P2-01	P2-02	P2-03	P2-04	P2-05	P2-06
TOTAL 1 DE H	2	9	8	4	2	1
TOTAL 2 DE H	0	15	14	0	0	0
TOTAL 3 DE H	0	0	2	0	0	0
TOTAL 4 DE H	0	0	0	0	0	0
TOTAL 5 DE H	0	0	0	0	0	0
TOTAL DE H	2	24	24	4	2	1
TOTAL 1 DE D	0	13	8	7	0	0
TOTAL 2 DE D	0	12	14	0	0	0
TOTAL 3 DE D	0	0	0	0	0	0
TOTAL 4 DE D	0	0	1	0	0	0
TOTAL 5 DE D	0	0	0	0	0	0
TOTAL DE D	0	25	23	7	0	0
TOTAL 1 DE H	100,0%	37,5%	33,3%	100,0%	100,0%	100,0%
TOTAL 2 DE H	0,0%	62,5%	58,3%	0,0%	0,0%	0,0%
TOTAL 3 DE H	0,0%	0,0%	8,3%	0,0%	0,0%	0,0%
TOTAL 4 DE H	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%
TOTAL 5 DE H	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%
TOTAL DE H	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%
TOTAL 1 DE D		52,0%	34,8%	100,0%		
TOTAL 2 DE D		48,0%	60,9%	0,0%		
TOTAL 3 DE D		0,0%	0,0%	0,0%		
TOTAL 4 DE D		0,0%	4,3%	0,0%		
TOTAL 5 DE D		0,0%	0,0%	0,0%		
TOTAL DE D		100,0%	100,0%	100,0%		

Figura 9.13: Resultats per gènere de l'informe lliurat el dilluns 15 d'octubre de 2007.

com a suma de nombres consecutius. Respecte del treball procedimental emprat i recollit en l'indicador P2-03 de la taula 9.13 (p. 364) les dades no reflecteixen diferències per raó de gènere.

L'estudi per grup i gènere, que es pot consultar en la taula 9.14 (p. 368), confirma la baixa influència del gènere davant dels indicadors atesos i ratifica la major incidència del grup.

Tractaments particulars

L'alumna amb número de registre 3 és un noia del grup A, és a dir, que cursa Matemàtiques Aplicades a les Ciències Socials. En la figura 9.15 (p. 369) podem veure que l'estudiant inicia l'informe de resolució amb una afirmació sense justificar i incorrecta. No és clara l'explicació de l'error: pot haver estat degut a una interpretació incorrecta de l'enunciat, malgrat que el procés seguit a continuació està prou ben orientat; però també pot ser degut a la cerca d'una resposta ràpida.

Copsem en la resposta de l'alumna una tipologia de solucions que apareix en ocasions a classe. Ens trobem davant d'una resposta ràpida a la pregunta formulada que en algunes ocasions és correcta. Caracteritza la presentació emprada per l'estudiant l'escassa presència d'anotacions, d'explicacions i de raonaments que justifiquin les seves afirmacions. Podria donar-se el cas que l'alumna interpretés que el problema es pot resoldre en pocs minuts degut a la no excessiva dificultat que presenta. Aquesta possibilitat podria anar acompanyada d'una resolució ben desenvolupada mentalment, amb una correcta comprensió de l'enunciat i interpretació de la informació. Sembla però que es podria tractar d'una manca de competència comunicativa acompanyada d'una precipitació que condueix l'estudiant a treure conclusions en una fase inicial del problema. Per altra banda podria tractar-se d'un exemple de mala comprensió del propòsit de la situació plantejada, havent donat com a resposta el que es desprèn de l'experimentació prèviament realitzada. Aquest punt de vista respon al fet que l'estudiant dóna una regularitat o un patró observat per cert sense posar-lo en dubte. Es fa inevitable destacar la importància que els estudiants convisquin amb descobriments que els condueixin a resultats conjecturals que ells mateixos puguin refutar. D'aquesta manera els patrons i regularitats són posats a judici pel mateix discent. En aquest cas sembla que es tracta d'un problema de competència comunicativa ja que, per exemple, quan inclou el zero en la cadena de nombres consecutius no justifica el motiu, però el que aconsegueix revela la utilitat d'afegir-lo.

En el desenvolupament de l'activitat l'estudiant se n'adona que algunes descomposicions d'un nombre com a suma de nombres consecutius tenen tants sumands com algun dels divisors del nombre. Concretament l'estudiant mostra dues descomposicions del 42, una amb tres sumands i l'altra amb set. Tot i així el que es desprèn de la resolució de l'estudiant sembla fruit de l'experimentació realitzada sense que puguem copsar que ha trobat un procediment que permeti obtenir descomposicions. Posteriorment mostra més exemples i cap d'ells obté les descomposicions per cap procediment que hagi descobert. Tot i així sí que s'aprecia clarament que compara la quantitat de sumands de les descomposicions amb els divisors del nombre. Això ho observem amb més claredat en el cas del 21. Per aquest nombre l'alumna expressa $21 = 6 + 7 + 8$ i posteriorment també $21 = 0 + 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6$. El fet que l'alumna inclogui el zero mostra que se n'adona que 7 és un divisor i busca una descomposició amb set sumands. Tot i així, en aquest exemple seguim veient que l'alumne no té un procediment que condueixi a l'obtenció de descomposicions.

En la següent cara del full, tal com es pot observar en la figura 9.16 (p. 370), l'alumna mostra un nou exemple. Tria el 735 per ser un múltiple de 3, 5 i 7. Descomposa el 735 com a suma de tres, cinc i set nombres consecutius però novament no diu com obté les esmentades descomposicions. Tenim present que la manca de comunicació per part de l'estudiant pot ser la causa que la condueixi a no expressar amb claredat els seus raonaments.

L'alumna amb número de registre 6 és un noia del grup A, és a dir, que cursa Matemàtiques Aplicades a les Ciències Socials. En la figura 9.17 (p. 370) podem veure que l'alumna fa explícit que el 6 admet una descomposició com a suma de tres nombres consecutius i, alhora, el nombre 3 és un divisor del nombre que pretenem descomposar. De manera semblant l'alumna mostra que el 9 es pot escriure com a suma de tres consecutius essent el tres un divisor del nou. Tanmateix, també escriu el nou com a suma de dos nombres consecutius sense que mostri cap explicació. La manca de comprensió completa queda palesa quan intenta descomposar el 15. L'expressa com a suma de cinc i tres nombres consecutius tot subrallant-los però, alhora, l'expressa com a suma de dos nombres consecutius. L'alumna descobreix que hi ha una relació entre els divisors d'un nombre i la quantitat de sumands de les descomposicions com a suma de nombres consecutius però també apreciem que hi troba excepcions que no sap afrontar.

Les esmentades excepcions que es desprenen de l'informe de l'alumna que es pot consultar en la figura 9.17 (p. 370) es repeteixen en diversos casos. L'alumna amb número de registre 21 és un noia del grup A, és a dir, que també cursa Matemàtiques Aplicades a les Ciències Socials i viu una situació semblant però que comunica amb més claredat. En la figura 9.20 (p. 373) podem veure que descomposa el número 21 com una suma de sis sumands consecutius, com una suma de tres sumands consecutius i també com una suma de dos. En aquest cas fa palès el fet que el producte de la quantitat de sumands no coincideix amb el nombre donat. Per altra banda considera el nombre 15 i dues descomposicions d'aquest com a suma de cinc i tres sumands consecutius. En aquest cas sí que el producte de la quantitat de sumands coincideix amb el nombre considerat. Tanmateix, l'alumna fa explícit el fet que el resultat conjectural que neix de l'experimentació amb el 15 queda refutat per les descomposicions del 21. L'alumna no dóna una resposta ferma però, tanmateix, la pregunta ha nascut en ella amb claredat: quina relació hi ha entre els divisors d'un nombre i la quantitat de sumands de les descomposicions del mateix nombre com a suma de nombres consecutius?

L'alumna amb número de registre 19 és un noia del grup A, és a dir, que cursa Matemàtiques Aplicades a les Ciències Socials. En la figura 9.18 (p. 371) així com en la 9.19 (p. 372), podem veure que l'estudiant fa un tractament experimental extens sense que d'aquesta pràctica se n'obtinguin resultats que suposin un avançament respecte de l'obtingut en la primera sessió.

L'alumne amb número de registre 45 és un noi del grup B, és a dir, que cursa la matèria de Matemàtiques en el primer curs de batxillerat. En la figura 9.21 (p. 374) podem veure que l'estudiant mostra inicialment un treball experimental que el condueix a dos resultats conjecturals. Tot seguit exposa la conjectura que va obtenir el dia anterior, que el 2, el 4 i el 8 no es poden escriure com a suma de nombres consecutius. Però aquest estudiant afegeix una novetat que esdevé un punt d'inflexió d'aquesta investigació; empra nombres negatius. Amb ells fa palès el fet que aquests nombres així com qualsevol altre sempre es pot escriure com a suma de nombres consecutius. Aquesta afirmació la recalca al final de l'informe. Posteriorment presenta tres descomposicions del 15, una amb dos sumands, una amb tres i la darrera amb cinc. De la presentació que fa l'alumne es desprèn que se n'adona que el tres i el cinc tenen alguna particularitat, però no la fa explícita.

RESULTATS PER GRUP I GÈNERE	P2-01	P2-02	P2-03	P2-04	P2-05	P2-06
TOTAL 1 DE HA	1	3	2	1	2	0
TOTAL 2 DE HA	0	6	6	0	0	0
TOTAL 3 DE HA	0	0	1	0	0	0
TOTAL 4 DE HA	0	0	0	0	0	0
TOTAL 5 DE HA	0	0	0	0	0	0
TOTAL DE HA	1	9	9	1	2	0
TOTAL 1 DE HB	1	6	6	3	0	1
TOTAL 2 DE HB	0	9	8	0	0	0
TOTAL 3 DE HB	0	0	1	0	0	0
TOTAL 4 DE HB	0	0	0	0	0	0
TOTAL 5 DE HB	0	0	0	0	0	0
TOTAL DE HB	1	15	15	3	0	1
TOTAL 1 DE DA	0	8	1	4	0	0
TOTAL 2 DE DA	0	5	9	0	0	0
TOTAL 3 DE DA	0	0	0	0	0	0
TOTAL 4 DE DA	0	0	1	0	0	0
TOTAL 5 DE DA	0	0	0	0	0	0
TOTAL DE DA	0	13	11	4	0	0
TOTAL 1 DE DB	0	5	7	3	0	0
TOTAL 2 DE DB	0	7	5	0	0	0
TOTAL 3 DE DB	0	0	0	0	0	0
TOTAL 4 DE DB	0	0	0	0	0	0
TOTAL 5 DE DB	0	0	0	0	0	0
TOTAL DE DB	0	12	12	3	0	0
TOTAL 1 DE HA	100,0%	33,3%	22,2%	100,0%	100,0%	
TOTAL 2 DE HA	0,0%	66,7%	66,7%	0,0%	0,0%	
TOTAL 3 DE HA	0,0%	0,0%	11,1%	0,0%	0,0%	
TOTAL 4 DE HA	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	
TOTAL 5 DE HA	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	
TOTAL DE HA	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	
TOTAL 1 DE HB	100,0%	40,0%	40,0%	100,0%		100,0%
TOTAL 2 DE HB	0,0%	60,0%	53,3%	0,0%		0,0%
TOTAL 3 DE HB	0,0%	0,0%	6,7%	0,0%		0,0%
TOTAL 4 DE HB	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%		0,0%
TOTAL 5 DE HB	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%		0,0%
TOTAL DE HB	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%		100,0%
TOTAL 1 DE DA		61,5%	9,1%	100,0%		
TOTAL 2 DE DA		38,5%	81,8%	0,0%		
TOTAL 3 DE DA		0,0%	0,0%	0,0%		
TOTAL 4 DE DA		0,0%	9,1%	0,0%		
TOTAL 5 DE DA		0,0%	0,0%	0,0%		
TOTAL DE DA		100,0%	100,0%	100,0%		
TOTAL 1 DE DB		41,7%	58,3%	100,0%		
TOTAL 2 DE DB		58,3%	41,7%	0,0%		
TOTAL 3 DE DB		0,0%	0,0%	0,0%		
TOTAL 4 DE DB		0,0%	0,0%	0,0%		
TOTAL 5 DE DB		0,0%	0,0%	0,0%		
TOTAL DE DB		100,0%	100,0%	100,0%		

Figura 9.14: Resultats per grup i gènere de l'informe lliurat el dilluns 15 d'octubre de 2007.

1. Els nombres naturals que es poden escriure com a suma de consecutius són els múltiples de 3, 5, 7, 9.
2. Es podran fer tantes sumes de nombres consecutius com múltiples de 3, 5, 7, 9 tingui aquell nombre.
3. Per descobrir els nombres que s'han de sumar, es divideix aquell nombre per 3, 5, 7, 9 i el lloc que ocuparà és:
- múltiple de 3 el nombre número 2 de la cadena
- múltiple de 5 el nombre número 3 de la cadena
- múltiple de 7 el nombre número 4 de la cadena
- múltiple de 9 el nombre número 5 de la cadena.

Comprovació:

42 — múltiple 3 → 13 + 14 + 15 → nº 2 de la cadena

múltiple 7 → 3+4+5+6+7+8+9 → nº 4 de la cadena

m. 3	m. 5	m. 7	m. 9
765=254+255+256			765=81+82+83+84+85+86+87+88+89
205=40+41+42	205=39+40+41+42+43		
210=69+70+71	210=40+41+42+43+44		
42=13+14+15		42=3+4+5+6+7+8+9	
21=6+7+8		21=0*+1+2+3+4+5+6	

*Es considera el nombre 0 com un nombre més dintre de la cadena de nombres consecutius

Figura 9.15: Informe de resolució de l'alumna amb número de registre 3 (grup A) al problema dels nombres consecutius.

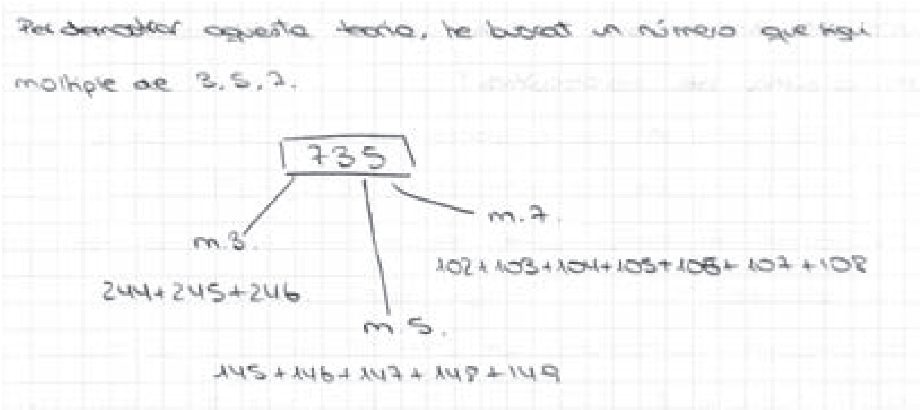


Figura 9.16: Continuació de l'informe de resolució de l'alumna amb número de registre 3 (grup A) al problema dels nombres consecutius.

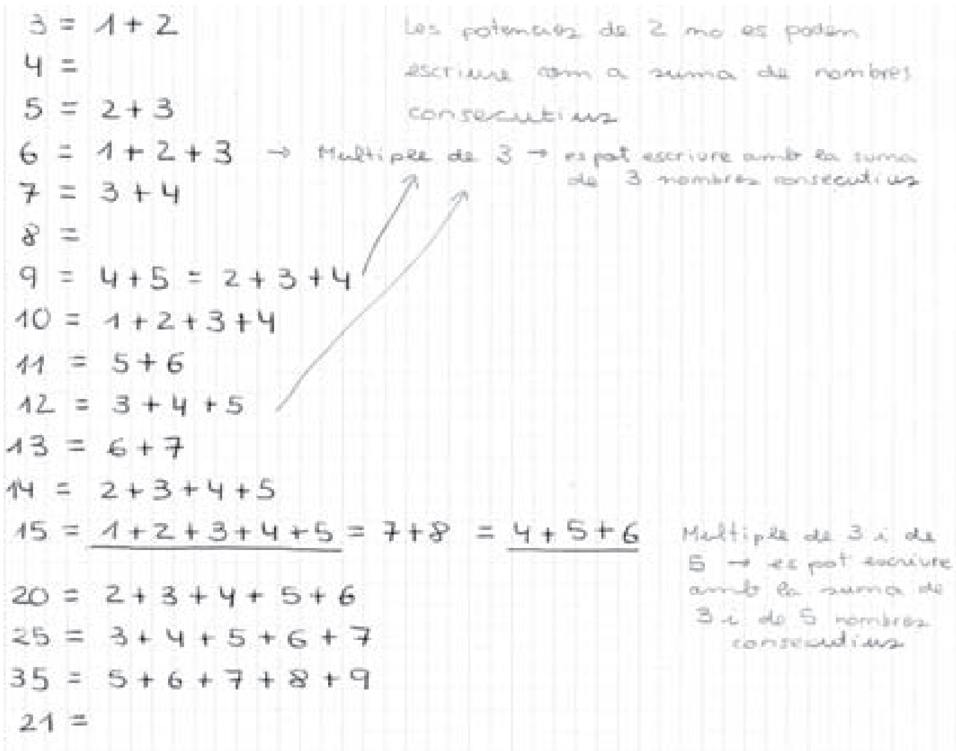


Figura 9.17: Tractament realitzat per l'alumna amb número de registre 6 (grup A) al problema dels nombres consecutius.

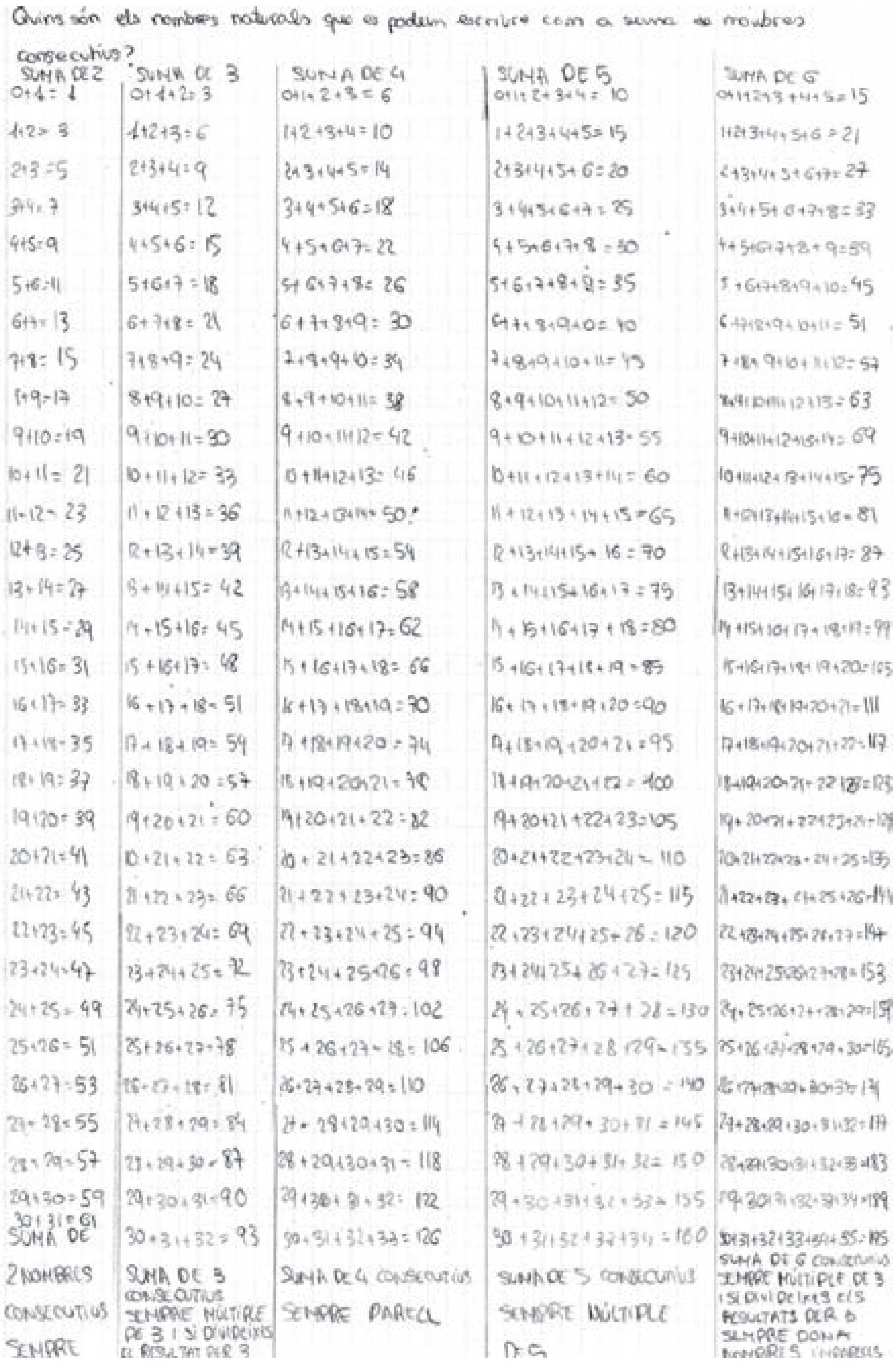
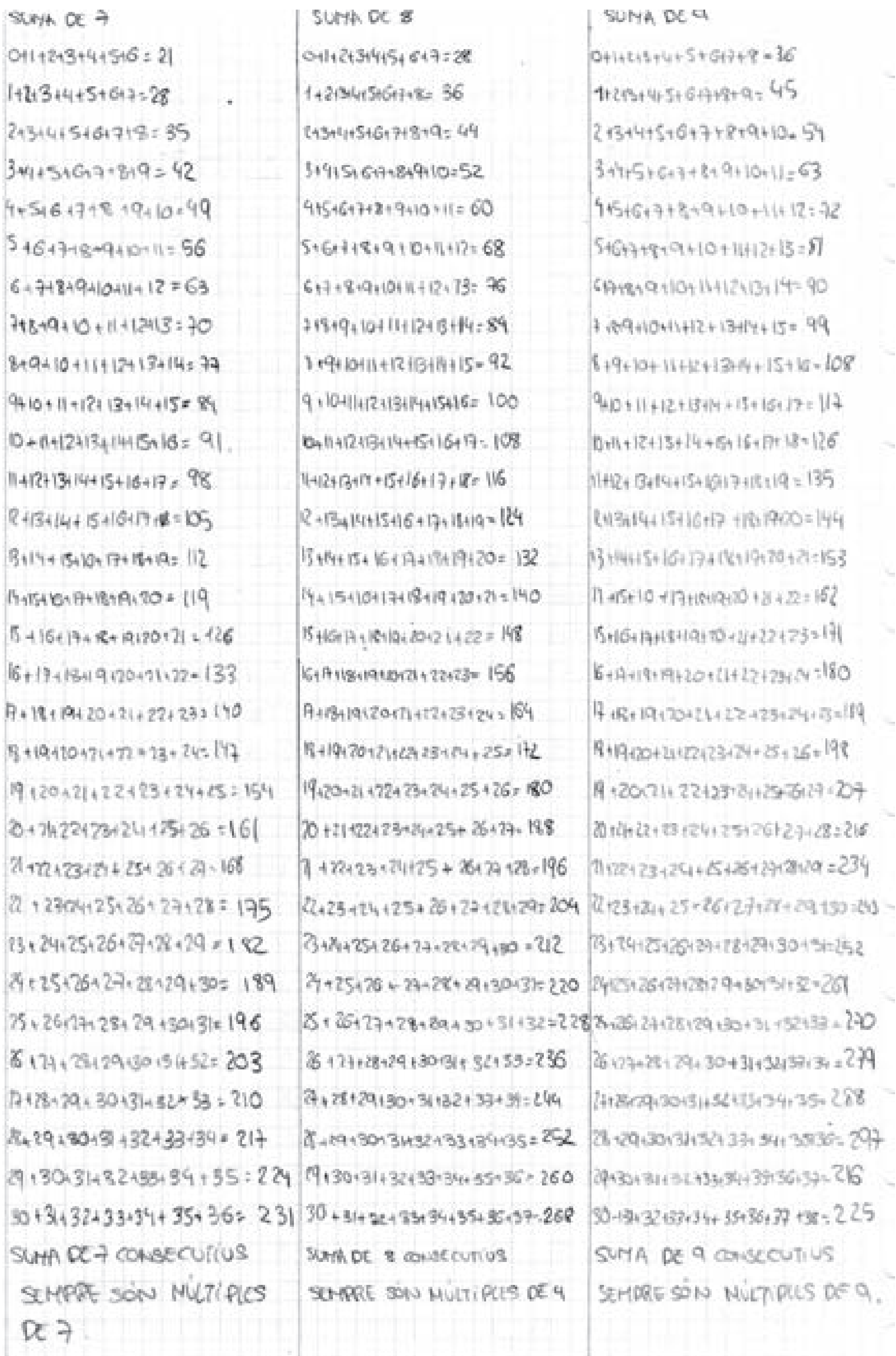


Figura 9.18: L'alumna amb número de registre 19 (grup A) dóna al problema dels nombres consecutius un tractament experimental extens. Primera cara del full de resolució.


SUMA DE 7

SUMA DE 8

SUMA DE 9

SUMA DE 7 CONSECUTIUS SEMPRE SÓN MÚLTIPLES DE 7

SUMA DE 8 CONSECUTIUS SEMPRE SÓN MÚLTIPLES DE 4

SUMA DE 9 CONSECUTIUS SEMPRE SÓN MÚLTIPLES DE 9.

Figura 9.19: L'alumna amb número de registre 19 (grup A) dóna al problema dels nombres consecutius un tractament experimental extens. Segona cara del full de resolució.

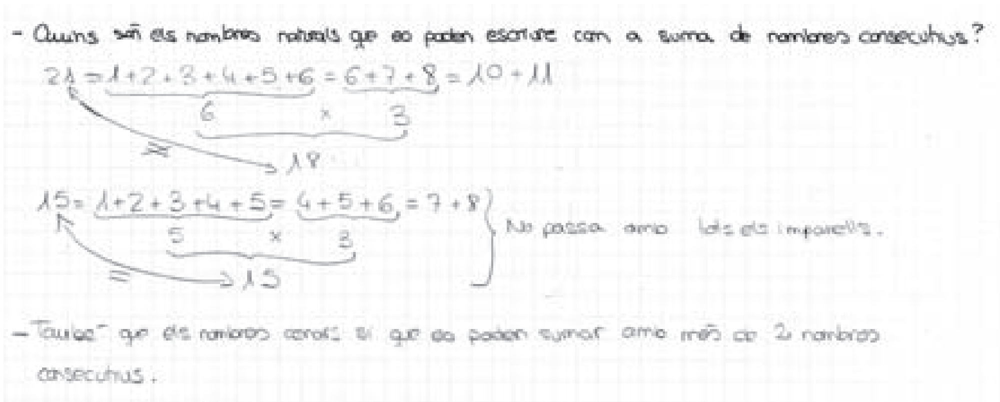


Figura 9.20: L’alumna amb número de registre 21 (grup A) descobreix i refuta una propietat que brolla de l’experimentació i que relaciona la quantitat de sumands de les descomposicions d’un nombre com a suma de nombres consecutius amb els seus divisors. El tractament que dóna l’alumna no condueix a cap resultat ferm però sí que apunta el camí cap a la cerca de la relació entre els divisors d’un nombre i la quantitat de sumands de les descomposicions en suma de nombres consecutius.

Quins són els nombres naturals que es poden escriure com a suma de nombres consecutius?

3+4+5+6=18
4+5+6+7=22
10+11+12+13=46
19+20+21+22=82
30+31+32+33=126

Conjectura
Quan es sumen quatre nombres el resultat és un múltiple de 2.

3+4+5=12
4+5+6=15
5+6+7=18
6+7+8=21
7+8+9=24
8+9+10=27
9+10+11=30

Conjectura
Si es sumen 3 nombres el resultat és igual a multiplicar 3 pel segon nombre que es suma.

2=-1+0+1+2
4=(-3)+(-2)+(-1)+0+1+2+3+4
8=(-7)+(-6)+(-5)+(-4)+(-3)+(-2)+(-1)+0+1+2+3+4+5+6+7+8

Conjectura
Els nombres 2, 4 i 8 no es poden obtenir només sumant nombres naturals (s'ha de recórrer als negatius per obtenir-los)

9=4+5=2+3+4

$15=7+8=\underbrace{4+5+6}_{3}=\underbrace{1+2+3+4+5}_{5}$

Un nombre es pot escriure com la suma de diferents sèries de nombres.

-1+0+1=0

El 0 també es pot obtenir, però s'han de sumar nombres negatius.

Resultat: Tots els nombres del 0 a l'∞ es poden obtenir com a suma de nombres consecutius, en alguns casos s'han de sumar nombres negatius.

Figura 9.21: L'alumne amb número de registre 45 (grup B) utilitza nombres negatius en les descomposicions per concloure que tot nombre es pot escriure com la suma de nombres consecutius. Destaca que en algunes ocasions les descomposicions requereixen la utilització de nombres negatius.

9.3 Anàlisi i resultats de la introducció del nombre enter (I)

En la sessió realitzada el dilluns dia 8 d'octubre de 2007 vam familiaritzar els alumnes participants en la fase experimental de la recerca amb el problema dels nombres consecutius (p. 241); l'anàlisi i la presentació de resultats corresponent es pot consultar en l'apartat 9.1 (p. 342) d'aquest mateix capítol. Finalitzada l'esmentada sessió vam proposar als estudiants que treballessin el problema a casa seva i que lliuressin el següent dilluns 15 d'octubre de 2007 un informe de la resolució que inclogués els seus raonaments i descobriments; ; l'anàlisi i la presentació de resultats corresponent es pot consultar en l'apartat 9.2 (p. 357) d'aquest mateix capítol. Dels esmentats resultats brollen diferents preguntes que constitueixen l'eix a partir del qual escollim els paràmetres per a l'anàlisi de la següent intervenció realitzada el dilluns 22 d'octubre de 2007 i que mostrem tot seguit.

9.3.1 De la finalitat general a la concreció d'objectius

El treball realitzat pels estudiants amb el problema dels nombres consecutius els faculta a tenir un nivell de familiaritat amb ell necessari per a la posterior intervenció. En els apartats anteriors hem copsat el nivell que han assolit, les dificultats que s'han trobat i les mancances que són paleses. Prendre l'esmentat problema com a instrument que recolzi la introducció del nombre enter esdevé una diferència significativa respecte dels tractaments curriculars atesos prèviament per l'estudiant. L'activitat actua com a pont didàctic que facilita que l'estudiant abandoni les situacions reals i empíriques en favor d'un tractament intramatemàtic, emprant la terminologia de FISCHBEIN (1987) (p. 66, p. 526).

En la sessió del dilluns 22 d'octubre de 2007 ens proposàrem començar per esbrinar si l'estudiant té assolit el procediment pel qual la descomposició d'un nombre com a producte de dos factors on un d'ells és senar condueix a una descomposició d'ell com a suma de nombres consecutius. L'esmentat descobriment pot tenir diferents nivells d'assimilació però, en virtut del contingut que pretenem introduir, només la relació entre la descomposició en producte de factors i com a suma de consecutius esdevé fonamental per a continuar el tractament del problema.

Com a segona part de la mateixa sessió estem interessats en situar l'estudiant davant d'un cas concret que requereixi nous nombres. Proposar el joc de resoldre el problema amb nombres naturals situa l'estudiant en la tessitura d'haver d'acceptar nous nombres en les descomposicions i triar la seva notació. L'exemple que hem emprat és el 14. La seva descomposició factorial condueix a l'expressió de set sumands que quan es volen convertir, segons el procediment exposat en l'apartat 7.2.2 (p. 250) i prèviament descobert per l'estudiant, en una suma de nombres consecutius, no és possible només amb els nombres naturals. Demanar als participants de la recerca que expressin la nova posició de la manera que per ells sigui més còmoda és del nostre interès.

L'acceptació d'una terminologia comuna és fruit dels resultats obtinguts prèviament. El treball experimental amb el problema dels nombres consecutius condueix a veure que hi ha diferents parells que fan referència a una mateixa posició i, demanar als alumnes que caracteritzin els esmentats parells, és del nostre interès. Tanmateix, també estem interessats en desglossar quins alumnes fan una correcta caracterització a través d'exemples concrets i quins, a més, ho poden descriure en un cas general.

Com a objectiu general ens proposem iniciar la part de la fase experimental que permeti conèixer la incidència en l'aprenentatge de l'alumne de l'ensenyament deductiu del nombre enter. Per establir el punt de partida de la sessió novament ens ocupem d'explicar el nivell de familiarització dels participants amb un ensenyament deductiu del nombre enter, fent incidència en un primer moment en les particularitats que es deriven de la resolució del problema dels nombres consecutius. Més concretament els objectius que atendrem són els que mostrem tot seguit.

9.3.2 Concreció d'objectius

1. Explicar el nivell de familiarització de l'alumne amb el procediment que li permet obtenir la suma de nombres consecutius a partir de la descomposició factorial del nombre que es pretén descomposar.

2. Examinar com denoten els participants en la fase empírica de la recerca

els nous nombres que cal incorporar per tal de resoldre el problema dels nombres consecutius.

3. Discernir els raonaments i les dificultats que tenen els estudiants per identificar i acceptar que els parells que identifiquen els nous nombres a vegades són diferents però en canvi fan referència a un mateix nombre.

Aquests objectius s'estableixen amb la prioritat d'alimentar els objectius generals de la present investigació. La vinculació entre els objectius generals i aquests concrets que acabem d'exposar es pot consultar en la figura 9.22 (p. 377).

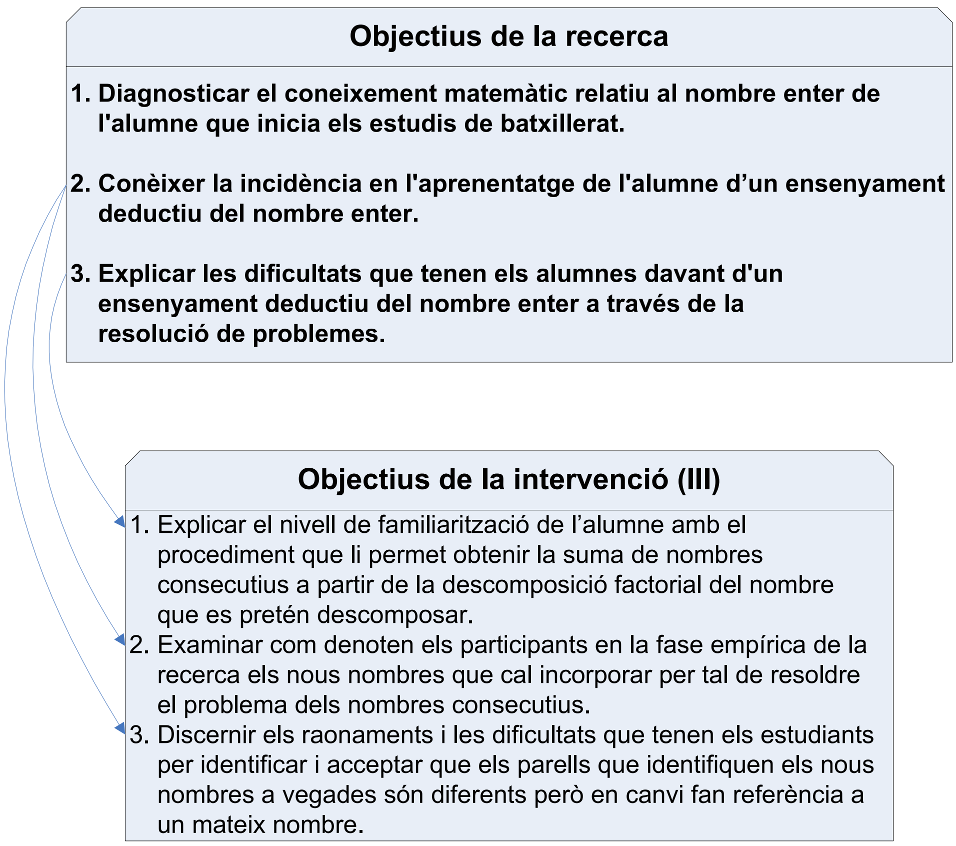


Figura 9.22: Dels objectius generals de la investigació a la seva concreció. Intervenció III.

9.3.3 Instruments de recollida de dades

Els instruments de recollida de dades descrits en el capítol 6 (p. 191) es poden consultar en l'annex corresponent (p. 577). Respecte de la sessió del dilluns 22 d'octubre de 2007 que ens ocupa, els instruments de recollida de dades emprats són els que es poden consultar en les pàgines 578, 579 i 580. Els esmentats instruments han estat dissenyats per tal que la seva implementació faciliti dades que permetin assolir els objectius que hem mostrat.

9.3.4 Paràmetres atesos

Els paràmetres emprats per a l'anàlisi de les dades es corresponen amb les tres fases en que està desglossada la sessió que, alhora, estan relacionats amb els objectius.

Fixarem l'atenció en saber el coneixement que té l'alumne sobre el procediment que li permet obtenir la suma de nombres consecutius a partir de la descomposició factorial del nombre que es pretén descomposar. L'esmentat procediment esdevé cabdal per al correcte desenvolupament de la recerca i hi fixem l'atenció. En segon lloc fixarem l'atenció en la terminologia que se li demana als participants en la fase empírica de la recerca. El fet d'acceptar nous nombres que cal incorporar per tal de resoldre en tots els casos el problema dels nombres consecutius condueix ràpidament a posar-los nom. Deixem en mans de l'alumne que esculli el nom que per ell sigui més fàcil i fixarem com un paràmetre de l'anàlisi l'estudi de les esmentades propostes. L'elecció d'una terminologia per als nombres incorporats condueix a saber-la emprar. El fet que sigui nova pot produir bloquejos i dificultats que són del nostre interès. Aquest és el darrer paràmetre i, tant a través d'exemples concrets com en situació general, cercarem caracteritzar els parells que representin un mateix nombre.

9.3.5 Categories de resposta

En el procés de disseny de la recerca i més concretament en el de la sessió que ens ocupa s'han establert unes categories de resposta inicials. Les característiques dels instruments emprats fan que el nombre de categories pogués ser molt elevat.

L'atenció als paràmetres pels quals estem interessats i un esforç d'abstracció són els elements que han permès establir una quantitat que permetés que la informació aportada cadascuna d'elles sigui rellevant per a l'estudi i tinguin significat per sí mateixes. Tot seguit mostrem les esmentades categories de resposta:

P3) Implementació dels instruments de recollida de dades realitzada el dilluns 22 d'octubre de 2007

Les respostes dels estudiants formen part d'una fase que es proposa amb posterioritat al procés inicial de familiarització de l'estudiant amb el problema. Copsar el procediment bàsic per la consecució de la present fase esdevé l'objectiu fonamental. L'acceptació de nous nombres per a la resolució del problema condueix a alguna necessària notació que volem esbrinar des del punt de vista de l'alumne. Finalment, el fet que cada nombre vingui representat per més d'un parell condueix a un conflicte que suscita el nostre interès. L'anàlisi de les respostes dels estudiants esdevé cabdal, per tant, per mesurar el nivell d'assoliment d'aquelles particularitats del problema necessàries per abordar la introducció del nombre enter. Les categories que s'han establert a partir de l'anàlisi de les respostes i en virtut dels paràmetres que volem atendre són les que es mostren tot seguit. Els indicadors P3-01, P3-02 i P3-03 permeten recollir les dades que brollen de la implementació de l'instrument de recollida de dades que es pot trobar a la pàgina 578. L'indicador P3-04 està dissenyat per recollir les dades que es desprenen de la implementació de l'instrument de recollida de dades que es pot trobar a la pàgina 579. Els indicadors P3-05 i P3-06 tenen la mateixa funció que els anteriors i són relatius a l'instrument de recollida de dades que es pot trobar a la pàgina 580.

P3-01. Sobre la utilització del procediment de descomposició:

1. L'alumne empra el procediment d'expressar un nombre com a producte de dos factors on un d'ells és senar per aconseguir escriure'l com a suma de nombres consecutius.

2 L'alumne no empra l'esmentat procediment.

P3-02. Les potències de dos a través del procediment:

1. L'alumne empra el procediment expressat en l'ítem anterior i l'aprofita per argumentar que les potències de 2 no es poden escriure com a suma de nombres consecutius.
2. L'alumne no ho argumenta.

P3-03. Utilització de nombres negatius en el procediment de descomposició:

1. L'alumne utilitza nombres negatius en les descomposicions.
2. L'alumne no utilitza nombres negatius en les descomposicions.

P3-04. Terminologia emprada per denotar els nous nombres:

1. Utilitza la notació amb nombres negatius que ja coneix.
2. Utilitza una notació pròpia, és a dir, proposada pel participant.
3. No utilitza cap notació.

P3-05. Identificació de parells representants equivalents a través d'exemples:

1. L'alumne identifica a través d'exemples els parells que fan referència a un mateix nombre.
2. L'alumne no els identifica.

P3-06. Expressió general entre parells equivalents:

1. L'alumne identifica una expressió general entre els parells que fan referència a un mateix nombre.
2. L'alumne no la identifica.

9.3.6 Lligams entre els objectius i els indicadors

Els indicadors estan lligats amb els objectius de la present part de la intervenció tal com es mostra en el quadre següent:

OBJECTIUS	INDICADORS
Objectiu 1	P3-01, P3-02 i P3-03
Objectiu 2	P3-04
Objectiu 3	P3-05 i P3-06

9.3.7 Anàlisi de les dades de la introducció deductiva del nombre enter, discussió i presentació de resultats

En la figura 9.23 (p. 381) es poden consultar els resultats globals obtinguts en l'anàlisi de les dades que provenen de la implementació dels tres instruments de recollida de dades disponibles a les pàgines 578, 579 i 580. Per a cada indicador es mostra el total absolut i relatiu de les respostes dels participants segons cada categoria de resposta. De la mateixa manera que en la presentació de resultats corresponent a les sessions anteriors s'ha fet servir una codificació bàsica, tal com es pot consultar en els arxius en format EXCEL[4] on estan recollides les dades sintetitzades per categories de resposta que tot seguit comuniquem.

RESULTATS GLOBALS	P3-01	P3-02	P3-03	P3-04	P3-05	P3-06
TOTAL DE 1	49	11	2	25	48	8
TOTAL DE 2	1	39	48	22	2	42
TOTAL DE 3	0	0	0	3	0	0
TOTAL DE 4	0	0	0	0	0	0
TOTAL DE 5	0	0	0	0	0	0
TOTAL DE RESPOSTES	50	50	50	50	50	50
TOTAL DE 1	98,0%	22,0%	4,0%	50,0%	96,0%	16,0%
TOTAL DE 2	2,0%	78,0%	96,0%	44,0%	4,0%	84,0%
TOTAL DE 3	0,0%	0,0%	0,0%	6,0%	0,0%	0,0%
TOTAL DE 4	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%
TOTAL DE 5	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%
TOTAL DE RESPOSTES	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%

Figura 9.23: Resultats globals de les dades recollides per la implementació dels instruments de recollida de dades disponibles en les pàgines 578, 579 i 580.

[4] http://www.xtec.cat/~rpujol1/Recerques/Tesi/Implementa3.rar

Resultats globals

Tal com es pot consultar en la taula 9.23 (p. 381), i més concretament en els indicadors P3-01, P3-02 i P3-03 d'ella, quasi la tota totalitat de l'alumnat (98%) empra correctament el procediment descrit a partir de la pàgina 247. Aquest permet expressar un nombre com una suma de nombres consecutius a partir de la seva expressió com a producte de dos factors on un d'ells és senar. Molt menor és, en canvi, la proporció d'alumnes (22%) que aprofita l'esmentat procediment per donar un argument relatiu a la impossibilitat d'expressar les potències de 2 com una suma de nombres consecutius. La utilització de nombres negatius en les descomposicions apareix en aquesta fase de la recerca de manera esporàdica (4%).

La implementació de l'instrument de recollida de dades, que es pot trobar a la pàgina 579, alimenta l'indicador P3-04 de l'esmentada taula de resultats, i pretén copsar de quina manera els alumnes participants en la fase empírica de la recerca representen els nous nombres que són útils per a la resolució del problema. Els nombres enters són coneguts pels estudiants de batxillerat, ja que han estat introduïts en l'etapa educativa anterior. Tanmateix, el problema dels nombres consecutius situa l'estudiant en una posició que pot fer brollar terminologies que són del nostre interès. En la part dedicada als tractaments particulars entrarem en alguns detalls de les esmentades notacions.

L'instrument de recollida de dades que es pot consultar en la pàgina 580 proposa com a punt de partida una unificació de les terminologies emprades tot seguint la línia que brolla del problema dels nombres consecutius (p. 241). L'anàlisi de les respostes dels alumnes amb atenció als paràmetres P3-05 i P0-06 revela que quasi la totalitat (96%) dels alumnes participants en la recerca identifiquen com són els parells que fan referència a un mateix nombre. En canvi, quan se'ls demana que presentin una expressió general entre els parells que fan referència a un mateix nombre la proporció disminueix notablement (16%). Cal destacar que aquesta és la realitat copsada quan les dades les recollim el mateix dia de la proposta. Cap esperar un cert domini de les lleis de l'àlgebra, alhora necessari per al tractament que volem donar però, en canvi, una proporció considerable de l'alumnat no té una habilitat que li permeti traslladar amb immediatesa al cas general tot allò que observa amb claredat pel cas experimental.

Resultats categoritzats per grup i gènere

RESULTATS PER GRUP	P3-01	P3-02	P3-03	P3-04	P3-05	P3-06
TOTAL 1 DE A	23	6	1	16	22	4
TOTAL 2 DE A	0	17	22	6	1	19
TOTAL 3 DE A	0	0	0	1	0	0
TOTAL 4 DE A	0	0	0	0	0	0
TOTAL 5 DE A	0	0	0	0	0	0
TOTAL DE A	23	23	23	23	23	23
TOTAL 1 DE B	26	5	1	9	26	4
TOTAL 2 DE B	1	22	26	16	1	23
TOTAL 3 DE B	0	0	0	2	0	0
TOTAL 4 DE B	0	0	0	0	0	0
TOTAL 5 DE B	0	0	0	0	0	0
TOTAL DE B	27	27	27	27	27	27
TOTAL 1 DE A	100,0%	26,1%	4,3%	69,6%	95,7%	17,4%
TOTAL 2 DE A	0,0%	73,9%	95,7%	26,1%	4,3%	82,6%
TOTAL 3 DE A	0,0%	0,0%	0,0%	4,3%	0,0%	0,0%
TOTAL 4 DE A	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%
TOTAL 5 DE A	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%
TOTAL DE A	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%
TOTAL 1 DE B	96,3%	18,5%	3,7%	33,3%	96,3%	14,8%
TOTAL 2 DE B	3,7%	81,5%	96,3%	59,3%	3,7%	85,2%
TOTAL 3 DE B	0,0%	0,0%	0,0%	7,4%	0,0%	0,0%
TOTAL 4 DE B	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%
TOTAL 5 DE B	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%
TOTAL DE B	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%

Figura 9.24: Resultats per grups de les dades recollides a partir de la implementació dels instruments de recollida de dades disponibles en les pàgines 578, 579 i 580.

En la taula 9.24 (p. 383) podem consultar els resultats per grups. Tanmateix, no apreciem diferències destacades entre ells tret que els alumnes del grup A, és a dir els que cursen la matèria de Matemàtiques Aplicades a les Ciències Socials, empren amb més freqüència (69,6%) la notació coneguda pels nombres enters. En canvi, els alumnes del grup B, és a dir el que cursen la matèria de Matemàtiques, empren amb més freqüència (59,3º%) notacions inventades per ells i que es desprenen del problema dels nombres consecutius. La proporció d'estudiants que empren la notació prèviament coneguda és redueix al 33,3% en el grup B.

En la taula 9.25 (p. 384) podem consultar els resultats per gènere. No apreciem diferències significatives que puguin fer brollar alguna hipòtesi respecte dels resultats obtinguts en virtut del gènere. Les petites diferències no són destacables però, tot i així, cal no menystenir que el 50% dels alumnes participants empren la notació prèviament coneguda. Ara bé, l'estudi per gènere mostra que aquesta

RESULTATS PER GÈNERE	P3-01	P3-02	P3-03	P3-04	P3-05	P3-06
TOTAL 1 DE H	25	6	0	11	23	5
TOTAL 2 DE H	0	19	25	11	2	20
TOTAL 3 DE H	0	0	0	3	0	0
TOTAL 4 DE H	0	0	0	0	0	0
TOTAL 5 DE H	0	0	0	0	0	0
TOTAL DE H	25	25	25	25	25	25
TOTAL 1 DE D	24	5	2	14	25	3
TOTAL 2 DE D	1	20	23	11	0	22
TOTAL 3 DE D	0	0	0	0	0	0
TOTAL 4 DE D	0	0	0	0	0	0
TOTAL 5 DE D	0	0	0	0	0	0
TOTAL DE D	25	25	25	25	25	25
TOTAL 1 DE H	100,0%	24,0%	0,0%	44,0%	92,0%	20,0%
TOTAL 2 DE H	0,0%	76,0%	100,0%	44,0%	8,0%	80,0%
TOTAL 3 DE H	0,0%	0,0%	0,0%	12,0%	0,0%	0,0%
TOTAL 4 DE H	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%
TOTAL 5 DE H	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%
TOTAL DE H	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%
TOTAL 1 DE D	96,0%	20,0%	8,0%	56,0%	100,0%	12,0%
TOTAL 2 DE D	4,0%	80,0%	92,0%	44,0%	0,0%	88,0%
TOTAL 3 DE D	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%
TOTAL 4 DE D	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%
TOTAL 5 DE D	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%
TOTAL DE D	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%

Figura 9.25: Resultats per gènere de les dades recollides a partir de la implementació dels instruments de recollida de dades disponibles en les pàgines 578, 579 i 580.

proporció es correspon amb el 44% dels nois i el 56% de les noies.

L'estudi per grup i gènere, que es pot consultar en la taula 9.26 (p. 390), confirma la baixa influència del gènere davant dels indicadors atesos i corrobora la major incidència del grup. L'estudi per grup i gènere no aporta més informació de la que ja disposàvem.

Tractaments particulars

L'alumna amb número de registre 8 és un noia del grup A, és a dir, que cursa Matemàtiques Aplicades a les Ciències Socials. En la figura 9.27 (p. 391) podem veure que l'estudiant empra correctament el procediment que li permet expressar un nombre com a suma de nombres consecutius a partir de la seva descomposició en producte de dos factors on un d'ells és senar.

L'alumna se n'adona i ho exemplifica en tres ocasions. Clarament descompon el nombre en producte de dos factors on un d'ells és senar. A continuació converteix el producte en una suma amb una quantitat senar de sumands. L'increment i decrement progressiu d'una unitat per cada parell de sumands facilita que l'esmentada suma mantingui constant el resultat i, en canvi, esdevingui la suma de nombres consecutius.

El raonament que permetria a l'estudiant aplicar-lo a qualsevol nombre que tingui un factor senar és inexistent. L'alumna, tal com es pot veure en la figura 9.27 (p. 391), considera que hauria d'experimentar-ho amb tots els nombres. Amb les seves paraules: «Per saber-ho certament, hauria de provar-ho amb tots els nombres existents, però són infinits i no acabaríem mai». Tot i que aquest aspecte es pot considerar transversal a la present investigació estimem rellevant destacar-lo en virtut de la prospectiva que atendrem posteriorment (p. 463). La posició que detectem en l'estudiant és propera al fet que el coneixement està limitat a allò que podem experimentar directament. La trobem també en l'estudiant amb número de registre 1 (fig. 9.28, p. 392), que diu: «Jo crec que no es pot arribar a saber si tots els nombres que no són potència de base 2 es poden escriure com a suma de nombres consecutius...»

L'alumna amb número de registre 23 és un noia del grup A, és a dir, que cursa Matemàtiques Aplicades a les Ciències Socials. En la figura 9.29 (p. 392) podem veure que l'estudiant empra correctament el procediment que li permet expressar un nombre com a suma de nombres consecutius a partir de la seva descomposició en producte de dos factors on un d'ells és senar. A més, copsem la mateixa dificultat que expressen els alumnes anteriors però amb un detall afegit. Per una banda l'estudiant insisteix en el fet que no pot fer la prova amb tots els nombres. Entenem que l'estudiant quan diu fer la prova vol dir experimentar el que se li demana[5]. De fet l'explicació següent destaca el fet que ha experimentat amb dos casos que confirmen que sí que es pot fer la suma. Però tot seguit destaca que els nombres són infinits, fet que ens fa pensar que no té un argument que consolidi el seu resultat conjectural. L'estudiant afirma que hi ha d'haver una fórmula o una teoria, tot mostrant una clara intenció de buscar un camí reial cap a la solució; el que Euclides va negar.

El treball amb nombres naturals i la utilització del procediment esmentat con-

[5]Les dificultats d'expressió oral i escrites han estat diagnosticades per diferents avaluacions tal com es pot consultar en l'espai web del Consell Superior d'Avaluació del Sistema Educatiu. En la visita del professor Abraham Arcavi a la Universitat Autònoma de Barcelona corroborà aquest fet tot destacant que es tracta d'un problema mundial. En l'anàlisi de les dades hem estat, per tant, prudents per tal d'interpretar correctament allò que vol dir l'alumne en cada moment.

dueix a escriure els nombres que tenen algun factor senar com a suma de nombres consecutius. Les sumes que aconseguim amb l'esmentat procediment tenen una quantitat senar de sumands.

L'alumna amb número de registre 17 és un noia del grup A, és a dir, que cursa Matemàtiques Aplicades a les Ciències Socials. En la figura 9.30 (p. 393) podem veure que l'estudiant se n'adona que hi ha nombres que es poden escriure com a suma d'una quantitat parell de nombres consecutius. Així doncs, segons la seva opinió, el procediment emprat no permet aconseguir les esmentades sumes. L'interrogant que formula la participant número 17 de la fase empírica de la recerca és rellevant. La incorporació de nous nombres i l'extensió als nombres enters facilitarà que el procediment condueixi a descomposicions que tinguin una quantitat parell de sumands.

L'alumne amb número de registre 15 és un noi del grup A, és a dir, que cursa Matemàtiques Aplicades a les Ciències Socials. En la figura 9.31 (p. 394) podem veure que l'estudiant se n'adona que hi ha nombres que admeten més d'una descomposició com a suma de nombres consecutius. Concretament empra el procediment per escriure el 15 com a suma de nombres consecutius de dues maneres diferents.

L'alumna amb número de registre 27 és una noia del grup B, és a dir, que cursa Matemàtiques. En la figura 9.32 (p. 394) podem veure que l'estudiant afirma que hi ha nombres que tot i no ser potències de 2 no es poden escriure com a suma de nombres consecutius. L'argument que fa servir l'estudiant és que hi ha nombres que només es poden multiplicar per 1. Entenem que fa referència als nombres primers tot i que empra un exemple erroni. Sembla que té la intenció de descomposar el 111 en producte de factors i en no aconseguir-ho afirma que hi ha nombres que només es poden multiplicar per 1. És important aquesta aportació de l'estudiant ja que la llavor que permetrà que el procediment faciliti descomposicions amb una quantitat parell de sumands ha nascut.

La vinculació entre nombre i quantitat és present en les respostes dels alumnes participants en la fase empírica de la recerca. L'aferrament a les situacions reals que tantes dificultats va donar des del punt de vista històric per a l'acceptació dels nombres negatius és present en els estudiants de primer curs de batxillerat (pp. 91, 136, 126, 138, 139). L'alumne amb número de registre 12 és un noi del grup A, és a dir, que cursa Matemàtiques Aplicades a les Ciències Socials. En la figura 9.33 (p. 394) podem veure que l'estudiant anomena «inexistent» el nombre que es demana que simbolitzi d'alguna manera. L'argument que dóna l'estudiant és que «si tens dues pomes no te'n poden treure tres». La vinculació entre nombre i quantitat és palesa i, alhora, un obstacle que cal superar en els estudis de batxillerat que, en virtut del currículum vigent (142/2008, 2008, p. 59374)[6], contemplen l'aprenentatge del nombre complex.

El grup d'estudiants familiaritzat amb el nombre enter es troba amb una pregunta que l'incomoda. Emprar alguna terminologia, el més senzilla possible, per fer referència al nombre que es correspon amb la posició simbolitzada per «?» en la figura 7.2.2 (p. 251), i reflectida en l'instrument de recollida de dades que es pot consultar en la pàgina 579, es viu com una situació gens habitual a l'ensenyament.

L'alumna amb número de registre 22 és una noia del grup A, és a dir, que cursa Matemàtiques Aplicades a les Ciències Socials. En la figura 9.34 (p. 395) podem veure com manifesta que la notació que si sembla més fàcil és «$2 - 3$».

També l'alumna amb número de registre 33 considera aquesta notació la forma més lògica, a través de les seves paraules, d'escriure el nombre que es correspon amb la posició demanada; tal com es pot consultar en la figura 9.35 (p. 395). En la mateixa línia trobem la resposta de l'alumna amb número de registre 18. L'esmentada participant és del grup A, és a dir, que cursa Matemàtiques Aplicades a les Ciències Socials. En la figura 9.36 (p. 395) podem veure que l'esmentada alumna denota els nous nombres de la forma «0-1» i «0-2». Clarament la terminologia brolla del problema dels nombres consecutius i l'alumna novament manifesta que la tria perquè és més fàcil. D'altres alumnes com la participant amb número de registre 21 expliquen correctament, tal com es pot veure en la figura 9.37 (p. 396), com caracteritzar el punt de la recta i el nombre que s'hi correspon, però no trien

[6]En el currículum de batxillerat LOE corresponent a les matèries de Matemàtiques i Matemàtiques aplicades a les ciències socials es diu el següent: «Un bon coneixement del nombres no es limita només a fer que l'alumne/a sàpiga calcular correctament o aproximar. També cal que identifiqui la seva utilització segons cada situació concreta. Acceptar els nombres naturals, les seves operacions i les seves propietats permet dissenyar entorns d'aprenentatge que facilitin la construcció dels enters, racionals, reals i complexos. No es tracta de presentar aquestes construccions fetes, sinó facilitar que, a través de la resolució de problemes, l'alumne comprengui amb claredat que les propietats i les operacions en els diferents conjunts de nombres són una conseqüència natural de l'extensió de les operacions acceptades pel conjunt de nombres que, en cada cas, acceptem com a punt de partença».

cap notació.

Les propostes per triar una terminologia per al nombre que es correspon amb el punt de la recta que hem denotat per «?» no es troben a faltar. L'alumne amb número de registre 43 és una noi del grup B, és a dir, que cursa Matemàtiques. La notació que sí que sembla més fàcil és la que es pot consultar en la figura 9.38 (p. 396). També se n'adona que feta l'elecció, un mateix nombre es pot expressar de diferents maneres. La terminologia proposa considerar un punt de partida i també la quantitat de unitats que ens desplacem cap a l'esquerra en la recta numèrica. El parell ordenat serà una evolució de la proposta de l'alumne.

L'estudiant amb número de registre 25 fixa el punt de partida a partir del qual pretén obtenir els diferents nombres. D'aquesta manera només li cal atendre una variable per tal d'arribar a la posició desitjada. En la figura 9.39 (p. 397) es pot veure com surt del zero, que és el punt de partida escollit per l'estudiant, tot indicant la quantitat de posicions que cal desplaçar-se cap a l'esquerra. Per denotar l'esmentat desplaçament empra la part superior dreta del zero. La notació triada per l'estudiant és més simplificada que altres casos però, en canvi, té l'inconvenient que no es pot estendre per tal que pugui fer referència als nombres naturals. L'exemple esdevé fonamental per tal que quedi justificat que optem per la terminologia més simplificada i clara que sigui possible.

A partir de l'instrument de recollida de dades que es pot consultar en la pàgina 580 ens proposàrem investigar la claredat amb la que rep l'alumne la notació en forma de parells ordenats. Aquesta és una evolució d'algunes notacions proposades pels estudiants i, en alguns casos, és coincident. Tanmateix, esdevé complicada per aquells estudiants que s'han distanciat del problema dels nombres consecutius i que han optat per la terminologia pròpia dels nombres enters coneguda prèviament per ells.

L'alumne amb número de registre 14 és un noi del grup A, és a dir, que cursa Matemàtiques Aplicades a les Ciències Socials. En la figura 9.41 (p. 399) podem veure que explica de manera retòrica amb claredat quines condicions han de complir dos parells per tal que representin un mateix nombre. A més, l'estudiant fa referència a la situació general que explica també correctament i de manera retòrica. Tanmateix, l'alumne no conclou cap expressió general de caràcter simbòlic.

L'alumne amb número de registre 13 també és una noi del grup A. En la figura

9.40 (p. 398) podem veure que també veu amb claredat les condicions que han de complir dos parells per denotar el mateix nombre. De manera semblant al cas anterior acompanya les seves explicacions d'exemples que no conclouen en cap expressió simbòlica de caire general. En aquest cas però l'estudiant és limita més encara als exemples concrets tractats per ell mateix.

L'alumne amb número de registre 32 és un noi del grup B, és a dir, que cursa Matemàtiques en el primer curs de batxillerat. En la figura 9.42 (p. 400) podem veure que després d'un tractament experimental aborda el cas general per finalitzar amb una expressió general vàlida.

Referències

DECRET 142/2008 (2008): «Ordenació dels ensenyaments de batxillerat». Diari Oficial de la Generalitat de Catalunya 5183 de 29.7.2008.

FISCHBEIN, E. (1987): *Intuition in science and mathematics: an educational approach*. Dordrecht, Holland: D. Reidel Publishing Company.

RESULTATS PER GRUP I GÈNERE	P3-01	P3-02	P3-03	P3-04	P3-05	P3-06
TOTAL 1 DE HA	10	4	0	7	9	2
TOTAL 2 DE HA	0	6	10	2	1	8
TOTAL 3 DE HA	0	0	0	1	0	0
TOTAL 4 DE HA	0	0	0	0	0	0
TOTAL 5 DE HA	0	0	0	0	0	0
TOTAL DE HA	10	10	10	10	10	10
TOTAL 1 DE HB	15	2	0	4	14	3
TOTAL 2 DE HB	0	13	15	9	1	12
TOTAL 3 DE HB	0	0	0	2	0	0
TOTAL 4 DE HB	0	0	0	0	0	0
TOTAL 5 DE HB	0	0	0	0	0	0
TOTAL DE HB	15	15	15	15	15	15
TOTAL 1 DE DA	13	2	1	9	13	2
TOTAL 2 DE DA	0	11	12	4	0	11
TOTAL 3 DE DA	0	0	0	0	0	0
TOTAL 4 DE DA	0	0	0	0	0	0
TOTAL 5 DE DA	0	0	0	0	0	0
TOTAL DE DA	13	13	13	13	13	13
TOTAL 1 DE DB	11	3	1	5	12	1
TOTAL 2 DE DB	1	9	11	7	0	11
TOTAL 3 DE DB	0	0	0	0	0	0
TOTAL 4 DE DB	0	0	0	0	0	0
TOTAL 5 DE DB	0	0	0	0	0	0
TOTAL DE DB	12	12	12	12	12	12
TOTAL 1 DE HA	100,0%	40,0%	0,0%	70,0%	90,0%	20,0%
TOTAL 2 DE HA	0,0%	60,0%	100,0%	20,0%	10,0%	80,0%
TOTAL 3 DE HA	0,0%	0,0%	0,0%	10,0%	0,0%	0,0%
TOTAL 4 DE HA	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%
TOTAL 5 DE HA	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%
TOTAL DE HA	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%
TOTAL 1 DE HB	100,0%	13,3%	0,0%	26,7%	93,3%	20,0%
TOTAL 2 DE HB	0,0%	86,7%	100,0%	60,0%	6,7%	80,0%
TOTAL 3 DE HB	0,0%	0,0%	0,0%	13,3%	0,0%	0,0%
TOTAL 4 DE HB	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%
TOTAL 5 DE HB	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%
TOTAL DE HB	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%
TOTAL 1 DE DA	100,0%	15,4%	7,7%	69,2%	100,0%	15,4%
TOTAL 2 DE DA	0,0%	84,6%	92,3%	30,8%	0,0%	84,6%
TOTAL 3 DE DA	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%
TOTAL 4 DE DA	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%
TOTAL 5 DE DA	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%
TOTAL DE DA	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%
TOTAL 1 DE DB	91,7%	25,0%	8,3%	41,7%	100,0%	8,3%
TOTAL 2 DE DB	8,3%	75,0%	91,7%	58,3%	0,0%	91,7%
TOTAL 3 DE DB	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%
TOTAL 4 DE DB	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%
TOTAL 5 DE DB	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%
TOTAL DE DB	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%

Figura 9.26: Resultats per grup i gènere de les dades recollides a partir de la implementació dels instruments de recollida de dades disponibles en les pàgines 578, 579 i 580.

Heu conjecturat que la suma de nombres naturals consecutius mai és una potència de 2. Considerem ara els nombres naturals que no són potències de 2, sempre es poden escriure com a suma de nombres naturals consecutius? Raona la resposta.

No estic del tot segura de que els nombres naturals que no són potències de 2 sempre es puguin escriure com a suma de nombres naturals consecutius.
Per saber-ho certament, hauria de probar-ho amb tots els nombres existents, però són infinits i no acabariem mai.
A part d'això jo crec que els nombres que no són potència de 2 sí que es poden escriure com a suma de consecutius.

Exemple:

$36 = 12 \times 3 = 12 + 12 + 12$
$\qquad\qquad\quad 11 + 12 + 13$

$30 = 6 \times 5 = 6 + 6 + 6 + 6 + 6$
$\qquad\qquad\quad 4 + 5 + 6 + 7 + 8$

$45 = 9 \times 5 = 9 + 9 + 9 + 9 + 9$
$\qquad\qquad\quad 7 + 8 + 9 + 10 + 11$

De moment segueixen la meva teoria, però s'hauria de fer amb tots els nombres per saber-ho exactament.

Figura 9.27: Resposta de l'alumna amb número de registre 8 (grup A) relativa a si els nombres que no són potències de 2 es poden escriure com a suma de nombres consecutius.

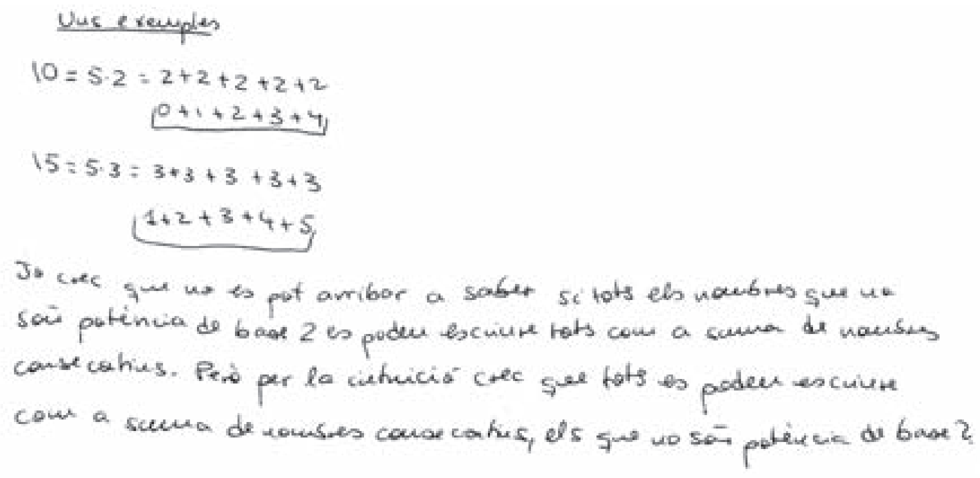

Uns exemples
10 = 5·2 = 2+2+2+2+2
0+1+2+3+4
15 = 5·3 = 3+3+3+3+3
1+2+3+4+5
Jo crec que no es pot arribar a saber si tots els nombres que no són potència de base 2 es poden escriure tots com a suma de nombres consecutius. Però per la intuïció crec que tots es poden escriure com a suma de nombres consecutius, els que no són potència de base 2.

Figura 9.28: Resposta de l'alumne amb número de registre 1 (grup A) relativa a si els nombres que no són potències de 2 es poden escriure com a suma de nombres consecutius.

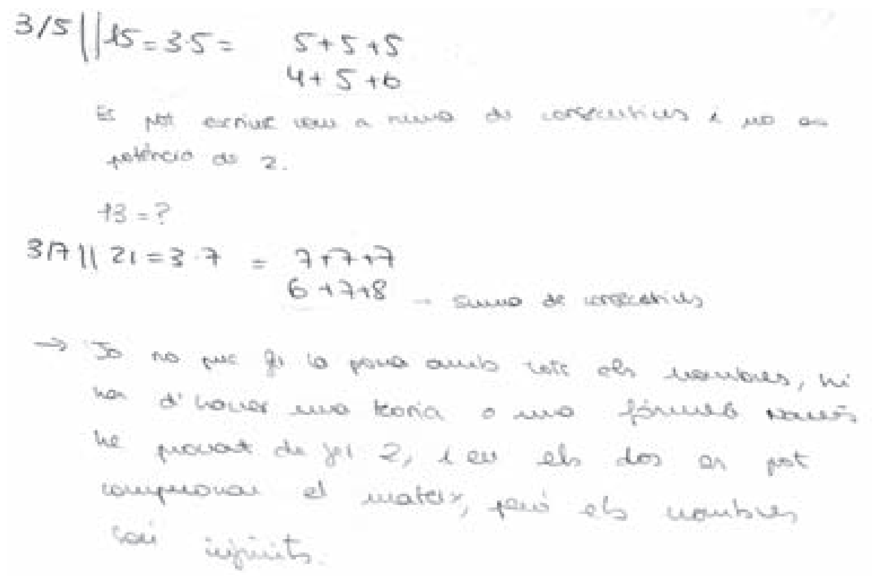
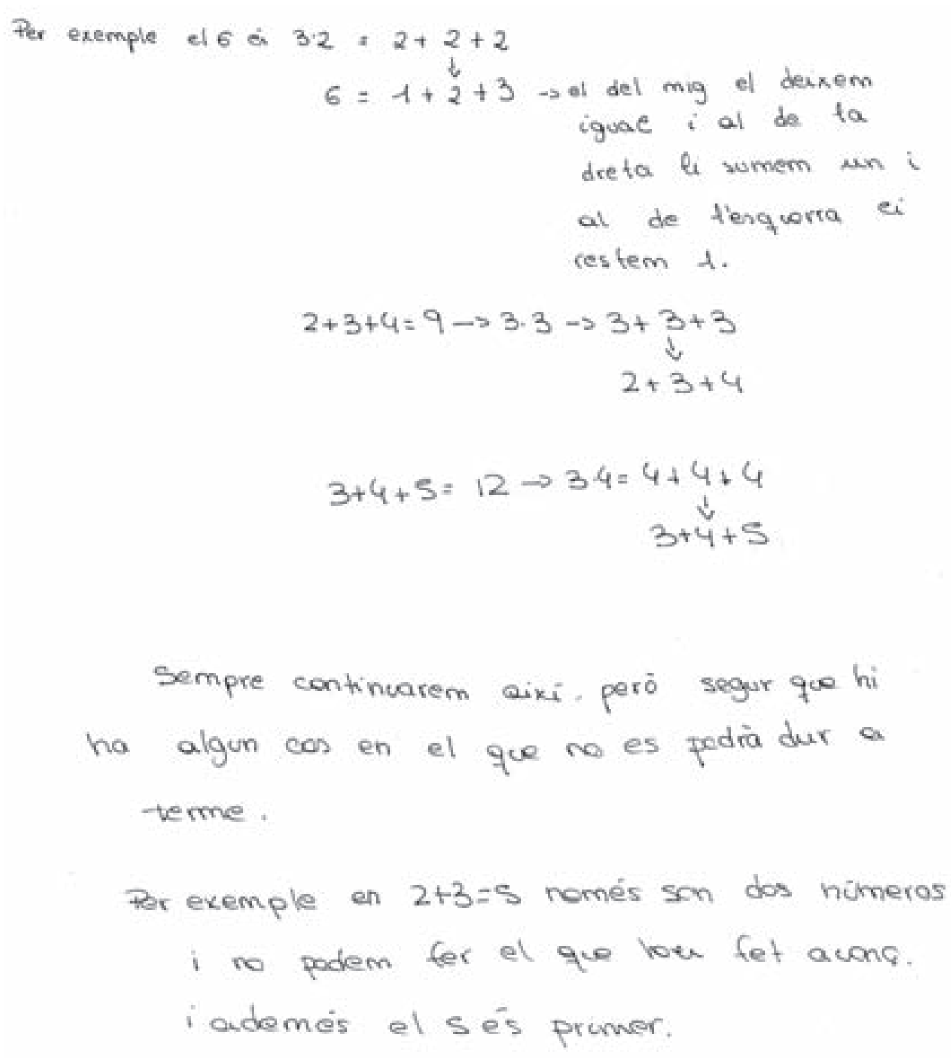

3/5 || 15 = 3·5 = 5+5+5
4+5+6
Es pot escriure com a suma de consecutius i no es potència de 2.
13 = ?
3/7 || 21 = 3·7 = 7+7+7
6+7+8 → suma de consecutius
→ Jo no puc fer la prova amb tots els nombres, hi ha d'haver una teoria o una fórmula, només he provat de fer 2, i en els dos es pot comprovar el mateix, però els nombres són infinits.

Figura 9.29: Resposta de l'alumna amb número de registre 23 (grup A) relativa a les descomposicions en suma de nombres consecutius.



Per exemple el 6 és 3·2 = 2+2+2

6 = 1+2+3 -> el del mig el deixem igual i al de la dreta li sumem un i al de l'esquerra li restem 1.

2+3+4=9 -> 3·3 -> 3+3+3

2+3+4

3+4+5= 12 -> 3·4= 4+4+4

3+4+5

Sempre continuarem així, però segur que hi ha algun cas en el que no es podrà dur a terme.

Per exemple en 2+3=5 només són dos números i no podem fer el que hem fet aconç.
i ademés el 5 és primer.

Figura 9.30: Resposta de l'alumna amb número de registre 17 (grup A) relativa a si els nombres que no són potències de 2 es poden escriure com a suma de nombres consecutius.

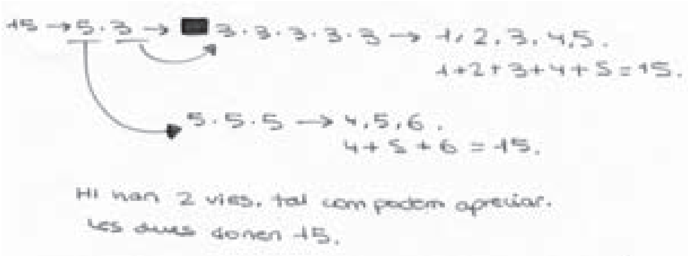


Figura 9.31: Resposta de l'alumna amb número de registre 15 (grup A) relativa a si els nombres que no són potències de 2 es poden escriure com a suma de nombres consecutius.

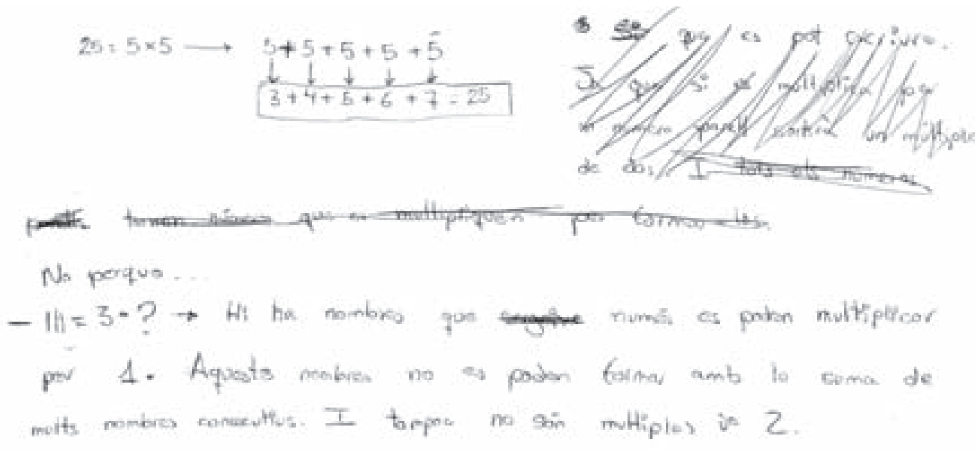


Figura 9.32: Resposta de l'alumna amb número de registre 27 (grup B) relativa a si els nombres que no són potències de 2 es poden escriure com a suma de nombres consecutius.

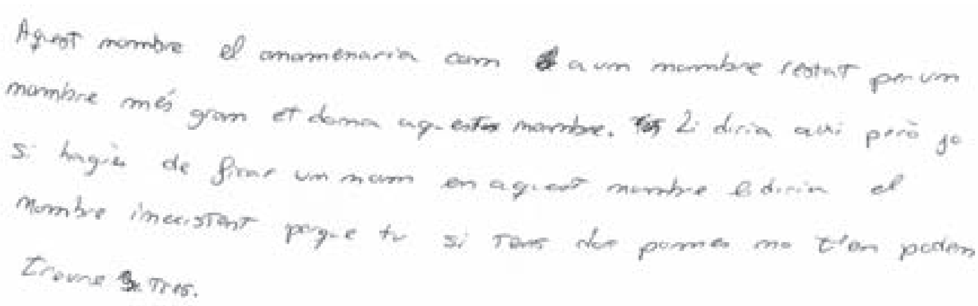
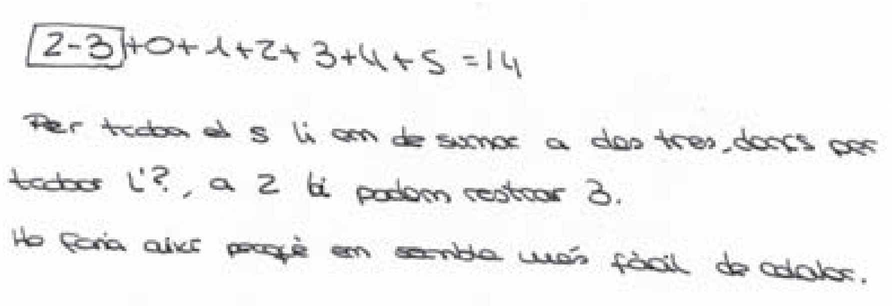


Figura 9.33: Resposta de l'alumne amb número de registre 12 (grup A) relativa a la simbolització del punt de la recta denotat per «?» en la figura 7.2.2 (p. 251).



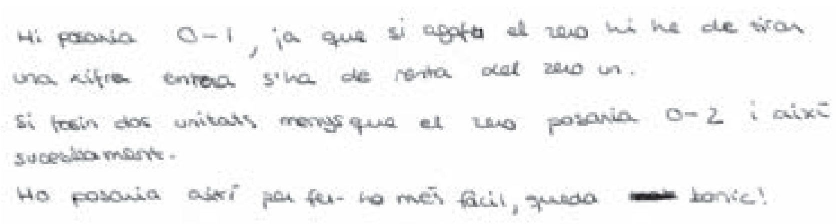
$\boxed{2-3}+0+1+2+3+4+5=14$

Per trobar el 5 li em de sumar a dos tres, doncs per trobar l'?, a 2 li podem restar 3.
Ho faria així perquè em sembla més fàcil de calcular.

Figura 9.34: Resposta de l'alumna amb número de registre 22 (grup A) relativa a la simbolització del punt de la recta denotat per «?» en la figura 7.2.2 (p. 251).

El primer que a mi em surt és 2-3, és el mateix nombre que diu l'enunciat, però com que només coneixem els nombres naturals deixem aquesta resta de nombres positius escrita d'aquesta manera i així és la forma més lògica que veig, jo, d'anomenar al número, si probem amb altres nombres, comprobem que continua sent així, ja que si agafem el 4 i volem anar dues vegades a l'esquerra serà 4-2 i si comprovem 4-2=2.

Figura 9.35: Resposta de l'alumna amb número de registre 33 (grup B) relativa a la simbolització del punt de la recta denotat per «?» en la figura 7.2.2 (p. 251).



Hi posaria 0-1, ja que si agafo el zero hi he de treure una xifra entera s'ha de restar del zero un.
Si fossin dos unitats menys que el zero posaria 0-2 i així succesivament.
Ho posaria així per fer-ho més fàcil, queda bonic!

Figura 9.36: Resposta de l'alumna amb número de registre 18 (grup A) relativa a la simbolització del punt de la recta denotat per «?» en la figura 7.2.2 (p. 251).

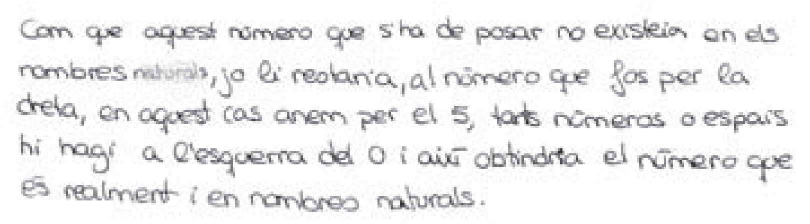

Com que aquest número que s'ha de posar no existeix en els nombres naturals, jo li restaria, al número que fos per la dreta, en aquest cas anem per el 5, tants números o espais hi hagi a l'esquerra del 0 i així obtindria el número que és realment i en nombres naturals.

Figura 9.37: Resposta de l'alumna amb número de registre 21 (grup A) relativa a la simbolització del punt de la recta denotat per «?» en la figura 7.2.2 (p. 251).

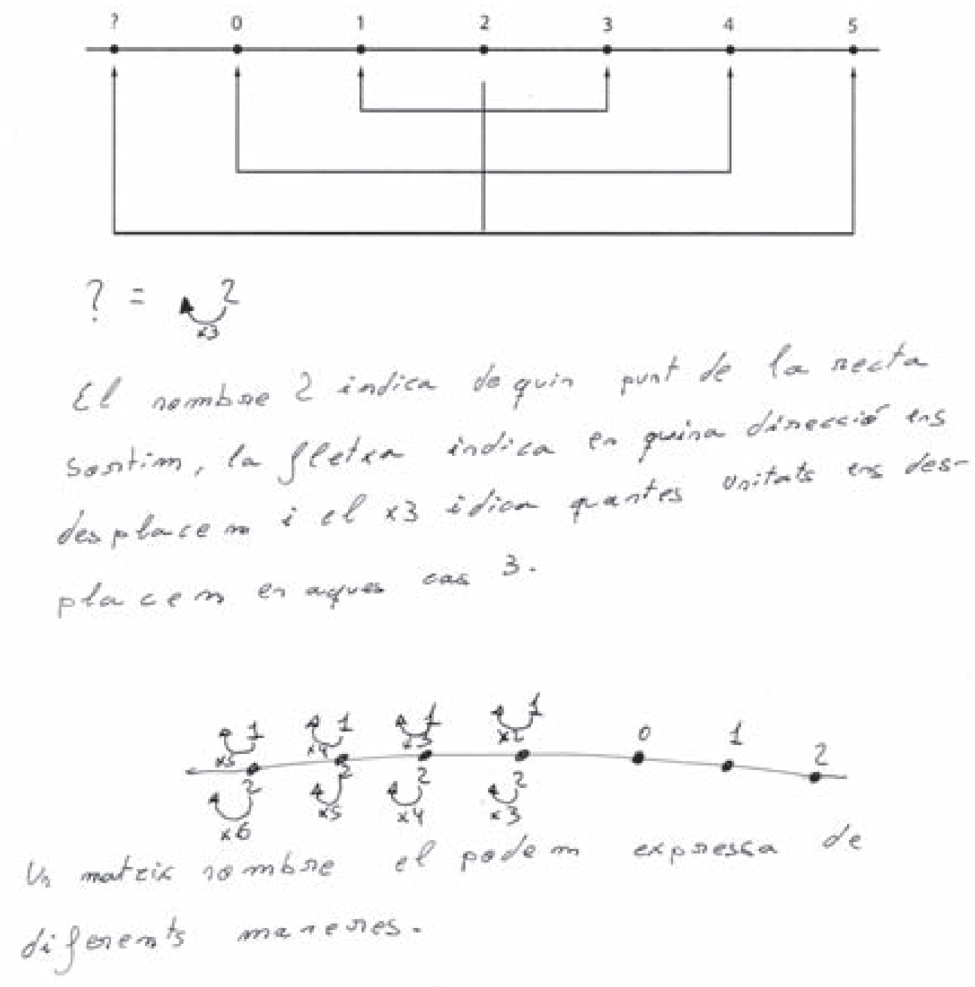


Figura 9.38: Resposta de l'alumne amb número de registre 43 (grup B) relativa a la simbolització del punt de la recta denotat per «?» en la figura 7.2.2 (p. 251).

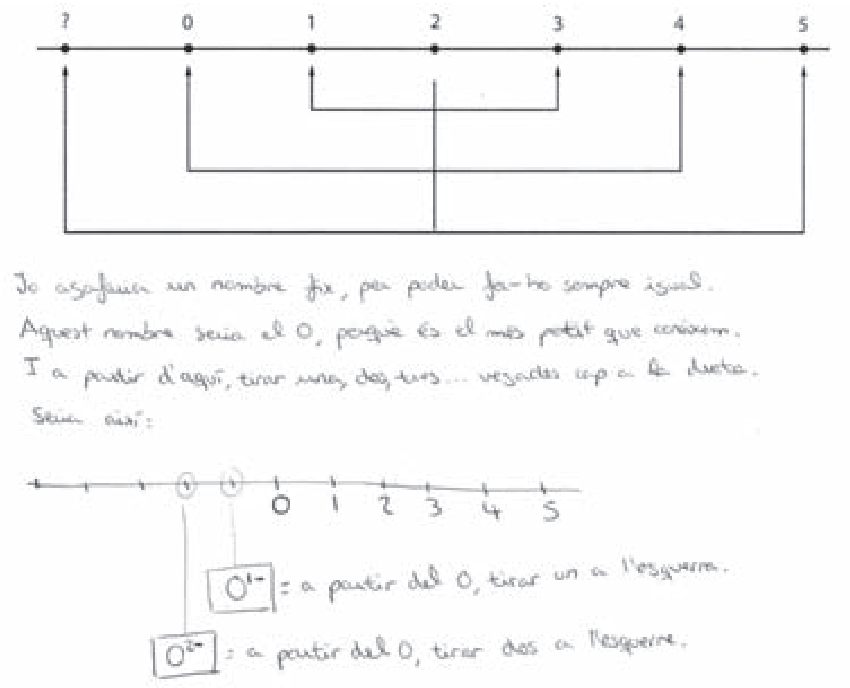
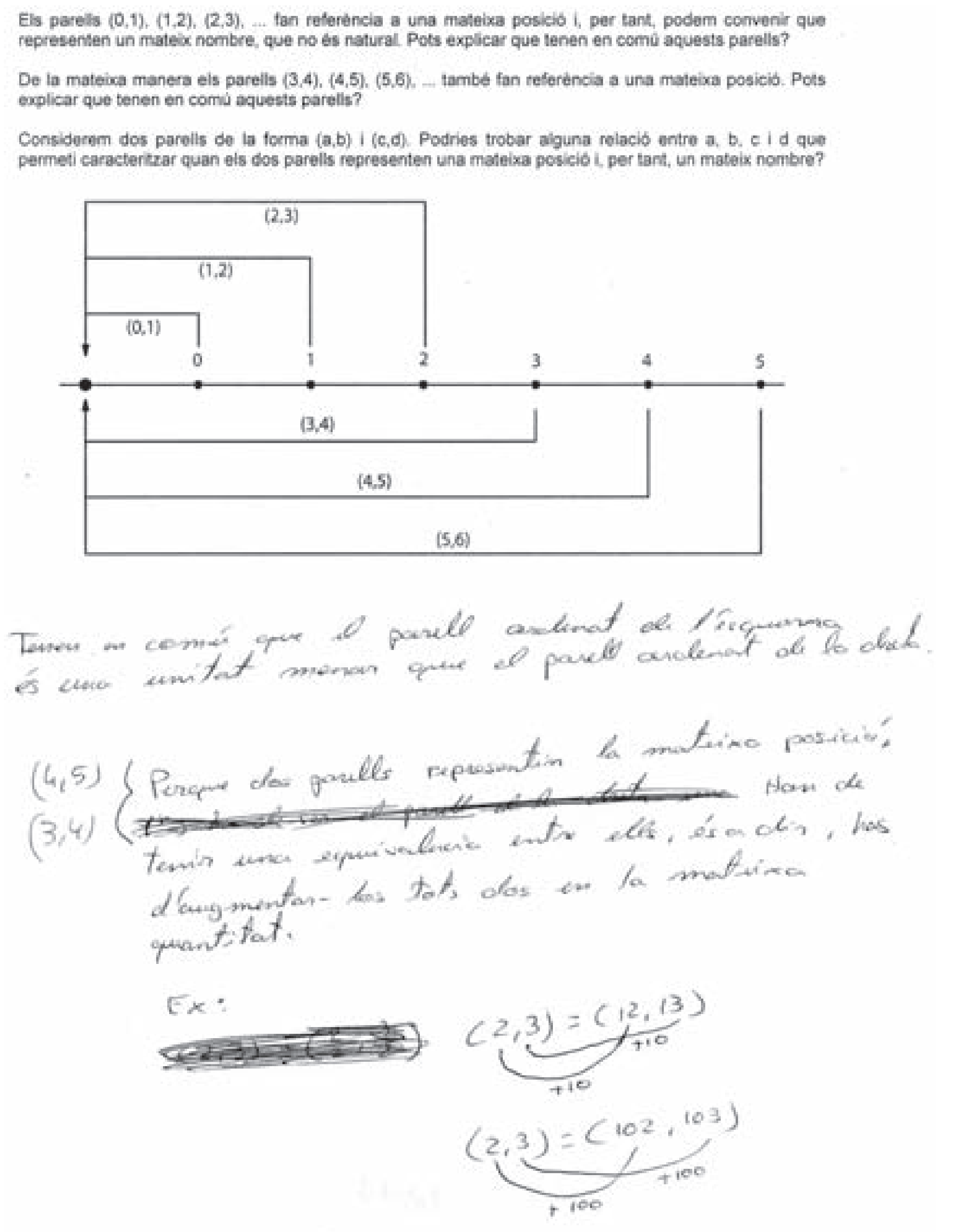


Figura 9.39: Resposta de l'alumna amb número de registre 25 (grup B) relativa a la simbolització del punt de la recta denotat per «?» en la figura 7.2.2 (p. 251).


Els parells (0,1), (1,2), (2,3), ... fan referència a una mateixa posició i, per tant, podem convenir que representen un mateix nombre, que no és natural. Pots explicar que tenen en comú aquests parells?

De la mateixa manera els parells (3,4), (4,5), (5,6), ... també fan referència a una mateixa posició. Pots explicar que tenen en comú aquests parells?

Considerem dos parells de la forma (a,b) i (c,d). Podries trobar alguna relació entre a, b, c i d que permeti caracteritzar quan els dos parells representen una mateixa posició i, per tant, un mateix nombre?

Tenen en comú que el parell ordenat de l'esquerra és una unitat menor que el parell ordenat de la dreta.

(4,5)
(3,4) Perquè dos parells representin la mateixa posició, han de tenir una equivalència entre ells, és a dir, has d'augmentar-los tots dos en la mateixa quantitat.

Ex:

$(2,3) = (12,13)$ +10 +10

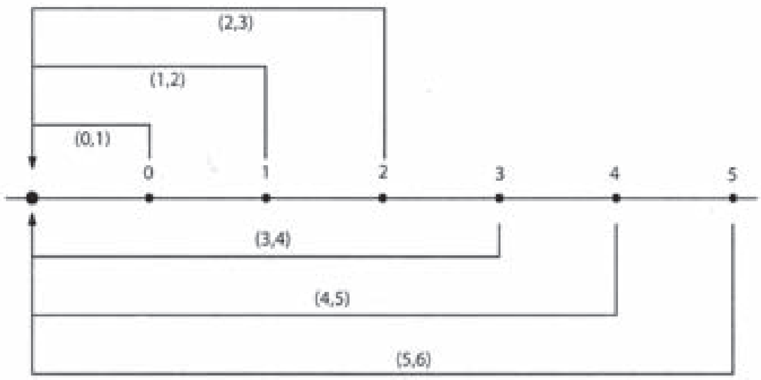
$(2,3) = (102,103)$ +100 +100

Figura 9.40: Resposta de l'alumne amb número de registre 13 (grup A) relativa a la caracterització dels parells que representen un mateix nombre.

Els parells (0,1), (1,2), (2,3), ... fan referència a una mateixa posició i, per tant, podem convenir que representen un mateix nombre, que no és natural. Pots explicar que tenen en comú aquests parells?

De la mateixa manera els parells (3,4), (4,5), (5,6), ... també fan referència a una mateixa posició. Pots explicar que tenen en comú aquests parells?

Considerem dos parells de la forma (a,b) i (c,d). Podries trobar alguna relació entre a, b, c i d que permeti caracteritzar quan els dos parells representen una mateixa posició i, per tant, un mateix nombre?



Tenen en comú que el segon nombre del parell és superior en 1 unitat al primer.

Si tenim (a,b) i (c,d) el que necessitem per fer que siguin parells que representen la mateixa posició, només fa falta que a i c siguin qualsevol nombre, però la diferència amb l'altre nombre del parell ha de ser igual.

Ex:

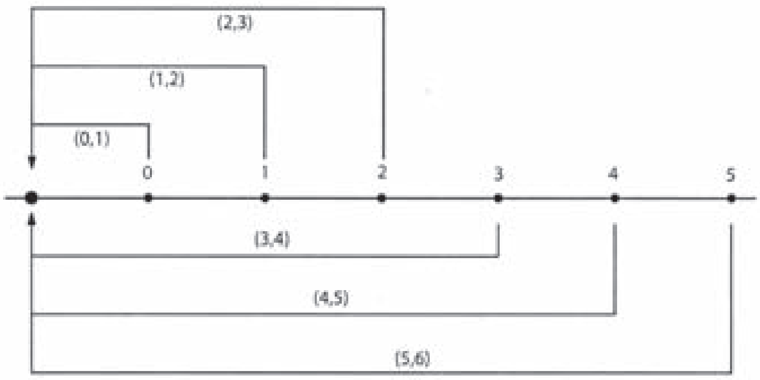
És el mateix (5,6) que (1000,1001). Si féssim la gràfica es veuria claríssim.

Figura 9.41: Resposta de l'alumne amb número de registre 14 (grup A) relativa a la caracterització dels parells que representen un mateix nombre.

Els parells (0,1), (1,2), (2,3), ... fan referència a una mateixa posició i, per tant, podem convenir que representen un mateix nombre, que no és natural. Pots explicar que tenen en comú aquests parells?

De la mateixa manera els parells (3,4), (4,5), (5,6), ... també fan referència a una mateixa posició. Pots explicar que tenen en comú aquests parells?

Considerem dos parells de la forma (a,b) i (c,d). Podries trobar alguna relació entre a, b, c i d que permeti caracteritzar quan els dos parells representen una mateixa posició i, per tant, un mateix nombre?



(3,4) (4,5) (5,6)   els ~~transforma~~ en absoluts.

4-3=1   5-4=1   6-5=1

(0,1)   (0,1)   (0,1)

Si la resta dels nombres d'un parell invertits: (a,b) ⇔ b-a = c

és igual els absoluts són iguals, sent un abolut: (0,c)

(a,b)   (c,d)

b-a = d-c

$\boxed{b+c = d+a}$

Figura 9.42: Resposta de l'alumne amb número de registre 32 (grup B) relativa a la caracterització dels parells que representen un mateix nombre.

Capítol 10

Anàlisi de les dades i presentació de resultats. Fase d'intervenció II

Índex

En els diccionaris podem trobar que un concepte és una idea que forma l'enteniment d'un objecte o pensament concret o abstracte[1]. En el terreny educatiu és difícil sinó impossible parlar de conceptes estàtics en relació als assoliments dels estudiants. Per aquest motiu sovint hom parla més de desenvolupament conceptual que no pas de conceptes. De fet el mateix diccionari consultat destaca l'accepció «formar concepto» en la mateixa consulta. Respecte del mot concepció el diccionari fa referència als conceptes que es formen a partir d'accions i efectes. Es desprèn de les esmentades consultes que ja d'un diccionari podem extreure una posició més aviat estàtica dels conceptes en front d'una posició dinàmica de les concepcions.

El nombre va prenent diferents concepcions en l'estructura cognitiva de l'alumne des dels primers anys de vida. L'ensenyament pot i ha de facilitar entorns d'aprenentatge que permetin establir ponts didàctics que facilitin l'evolució d'una concepció a una altra. Tal com mostra SOTOS (2004, p. 93) fent referència a ALCALÁ (2002, p. 38) els conceptes més rellevants que es troba l'alumne en la matemàtica escolar no són conceptes ja d'entrada estàtics, acabats, immutables, sinó que van essent configurats progressivament per qui els aprèn. Per altra banda, aquestes grans nocions escolars com la idea de nombre, de fracció, d'angle, etc. són polifacètiques, és a dir, van adquirint diferents significacions a mesura que el coneixement de l'aprenent es va ampliant.

Quan ens preguntem què és un nombre els punts de vista que podem adoptar poden ser diversos, però, depèn de a qui dirigim la pregunta el ventall de possibilitats pot ser més o menys ampli. Probablement per un carter, amb tot el marge d'error que això pot suposar i que el lector ha de comprendre, el símbol que emprem per fer referència a un nombre pot estar en gran mesura relacionat amb una etiqueta; aquella que li indica on ha de deixar una o altra carta. Per un nen que aprèn a comptar, un nombre és un objecte directament relacionat amb la quantitat d'objectes que té; però un aprenentatge deficient podria fer que veiés un símbol despullat de significat. Per un fuster, probablement, estigui relacionat amb la me-

[1]Extret del Diccionario de la Lengua Española (vigésima segunda edición). Disponible a `http://www.rae.es/rae.html` i consultat el dia 22 de juliol de 2008. «Concepto: 2. m. Idea que concibe o forma el entendimiento». «Formar concepto: 1. loc. verb. Determinar algo en la mente después de examinadas las circunstancias». «Concepción: 1. f. Acción y efecto de concebir». «4. intr. Formar idea, hacer concepto de algo».

sura de longituds o altres quantitats de magnitud. Per una persona que vol resoldre una determinada equació, un nombre esdevé un objecte que compleix la relació proposada però potser està desvinculat de tota realitat empírica, segons si l'esmentada equació modelitza algun fenomen real o si, en canvi, la seva resolució és un repte per sí mateix.

Si ens preguntem per a què serveixen els nombres, la relació amb la pregunta anterior és inevitable. De ben segur que la utilitat que tinguin els nombres per cadascú tingui molt a veure amb la concepció que té de nombre l'esmentada persona.

Els símbols que emprem per denotar els nombres poden servir per etiquetar objectes: números de cases, de telèfons, de vols, de trens, d'oficines bancàries, codis de centres educatius, número de passaport, o d'altres; hom empra la paraula nombre o número per fer referència a codis o etiquetes que podrien ser lletres o d'altres símbols. Tanmateix, la paraula nombre és utilitzada en aquests contextos i té un significat social acceptat per hom. Possiblement l'ús d'etiquetes sigui una de les primeres accions que viu l'infant en els primers anys de vida que li permet veure aquells símbols que posteriorment emprarà per denotar els nombres. Tanmateix i tal com hem apuntat aquesta utilització la realitzem al llarg de tota la vida; qui no s'ha preocupat de donar el número de compte bancari a l'empresa on treballa tot vigilant que el dígits estiguin correctament escrits!

En els primers anys de vida la matemàtica escolar familiaritza els infants amb el recompte d'objectes; el cardinal. També ho fa amb l'ordenació d'objectes; l'ordinal. Així, la concepció que l'infant tenia del que era un nombre, almenys del que volien dir aquells símbols que anomenem nombres o números, té una clara evolució. Els alumnes compten i ordenen en els inicis de l'escola primària fins que descobreixen les magnituds que es poden mesurar. Portar un entrepà més gros potser és un mèrit entre els alumnes de l'escola primària, abans sí que ho era, però potser portar un mòbil més petit tingui més mèrit encara. Brollen tants exemples com vulguem quan ens proposem oferir magnituds que es poden mesurar. La voluntat de mesurar-les condueix a uns nous nombres que neixen novament de situacions empíriques amb una directa relació amb la vida quotidiana dels estudiants.

L'alumne es troba al llarg de l'Educació Secundària Obligatòria amb noves situacions que no es poden resoldre amb els nombres naturals i els racionals positius que tant han treballat a l'escola primària, no necessàriament emprant aquesta terminologia. La introducció del nombre negatiu probablement sigui el primer gran xoc amb uns nous objectes que anomenem nombres i que no tenen una vinculació tant directa amb el seu entorn proper. Al batxillerat l'alumne es trobarà amb el nombre complex i ningú, així ho pensem sense basar-nos en cap recerca, pretén introduir-lo a partir de situacions empíriques properes a la realitat dels estudiants. La recerca educativa empírica que ens ocupa s'ha realitzat a primer de batxillerat i abans d'introduir el nombre complex. Quina concepció té l'estudiant del nombre?

10.1 Anàlisi de les dades i resultats sobre les concepcions de nombre

El dilluns 22 d'octubre de 2007 vam dedicar la sessió a conèixer el nivell de familiarització de l'alumne amb el procediment que li permet obtenir la suma de nombres consecutius a partir de la descomposició factorial del nombre que es pretén descomposar, a examinar com denoten els participants en la fase empírica de la recerca els nous nombres que cal incorporar per tal de resoldre el problema dels nombres consecutius en tots els casos, i finalment, a estudiar els raonaments i les dificultats que tenen els estudiants per reconèixer i acceptar que els parells que identifiquen els nous nombres a vegades, tot i ser aparentment diferents, fan referència a un mateix nombre.

En virtut dels resultats obtinguts, el dilluns 29 d'octubre de 2007 vam fer un petit parèntesi a la introducció del nombre enter iniciada una setmana abans. La presència de respostes que mostren una clara vinculació entre nombre i quantitat ho justifiquen. Les dificultats que des d'un punt de vista històric van impedir l'acceptació dels nombres negatius eren presents a les aules. Tal com es pot consultar en la figura 9.33 (p. 394) l'estudiant anomena «inexistent» el nombre que es demana que simbolitzi de la manera que li resulti més fàcil i entenedora. L'argument que utilitza és, emprant les seves paraules, que «si tens dues pomes no te'n poden treure tres». Per a la correcta consecució de la recerca requerim conèixer la concepció de nombre que tenen els participants en la fase empírica de la recerca.

Prioritàriament focalitzem l'atenció sobre els nombres naturals i els nombres enters ja que el problema dels nombres consecutius molt probablement hagi inclinat els estudiants cap a ells. Tanmateix, la formulació de les preguntes no té la intenció inicial de tancar les respostes dels estudiants i, per tant, contemplem que potser hi hagi alguna resposta que vagi més enllà del que s'esdevé de contestar contemplant nombres naturals i enters. Aquesta és la finalitat de la sessió realitzada el dilluns dia 29 d'octubre de 2007 i que presentem en les pàgines següents.

10.1.1 De la finalitat general a la concreció d'objectius

Conèixer la concepció que tenen els participants en la fase empírica de la recerca de nombre és la finalitat que perseguim i que sintetitzem en el present apartat. La importància brolla del fet que l'aprenentatge del nombre enter requereix el trencament amb algunes idees que estan lligades al coneixement que s'adquireix a partir de l'aritmètica pràctica (p. 72). La concepció de nombre que es deriva dels fenòmens empírics requereix una evolució que faciliti la que permet assolir relacions abstractes. Tanmateix, voler aprofundir en la finalitat esmentada esdevé una recerca àmplia que acotem en virtut dels objectius generals de la present investigació. Tot seguit concretem, per tant, els objectius que ens proposem relatius a la concepció del nombre que tenen els alumnes participants en la fase empírica de la recerca.

10.1.2 Concreció d'objectius

L'evolució de significats que dóna l'estudiant al concepte de nombre està lligat de ben segur amb la seva experiència prèvia. En conseqüència és rellevant l'ús que en fa l'estudiant i, en concret, atenem les consideracions que es poden consultar a partir de la pàgina 134. La utilització de símbols que s'empren per comptar, numerar, mesurar i operar no es limita a aquestes accions; també s'utilitzen per etiquetar cases, caixes o d'altres objectes. El nombre té durant la fase inicial de la nostra vida, i al llarg de tota ella, diferents representacions socials i l'escola ha d'utilitzar diferents contextos per no oferir una visió limitada de comptar. Les quatre grans formes de coneixement en les que es produeix l'accés al concepte de nombre que mostra FREUDENTHAL (1973, pp. 170-171)[2] estableixen el marc necessari per assolir l'objectiu fonamental de la sessió que ens ocupa.

Ens proposem conèixer les definicions espontànies de nombre que donen els alumnes participants en la recerca. També ens proposem analitzar els usos que associen amb el nombre. En tercer lloc volem apuntar quin grau de coneixement tenen sobre com es construeixen els nombres i finalment copsar si distingeixen ordinal de cardinal.

1. Distingir les definicions espontànies de nombre que donen els alumnes participants en la fase empírica de la recerca.

2. Saber les utilitats que els alumnes participants a la fase empírica de la recerca associen amb els nombres.

3. Diagnosticar el coneixement que tenen els alumnes participants a la fase empírica de la recerca sobre la construcció dels nombres.

4. Discernir si els participants en la fase empírica de la recerca diferencien els aspectes ordinal i cardinal del nombre.

Aquests objectius s'estableixen amb la prioritat d'alimentar els objectius generals de la present investigació. La vinculació entre els objectius generals i aquests concrets que acabem d'exposar es pot consultar en la figura 10.1 (p. 408).

[2] Les quatre fases que s'esdevenen per a l'accés al concepte de nombre són segons FREUDENTHAL (1973) les que descrivim tot seguit. *Nombre per comptar*. L'aprenentatge dels nombres naturals és una tasca difícil així com ho és aprendre les lletres o els colors. El nombre per comptar es converteix en l'objecte insubstituïble per l'activitat de calcular. El nombre per comptar, anomenat matemàticament el nombre ordinal, es formalitza en la inducció completa i en els axiomes de Peano. La seva apoteosi són els ordinals transfinits. *Nombre de la numerositat*. Potser el nombre de la numerositat sigui anterior des d'un punt de vista genètic al nombre de comptar. El nen, tot i així, aprèn a comptar des de tan aviat que inicialment no se n'adona de que comptar pot servir per determinar la numerositat d'un conjunt. El nombre de la numerositat es formalitza a través de la potència o la cardinalitat dels conjunts. La seva apoteosi són els cardinals transfinits. *Nombre per mesurar*. Si es mesura una longitud aquesta s'acaba, o s'intenta acabar, a través de còpies de la unitat, de la mateixa manera que un recipient ple de líquid es pot buidar amb una cullereta. El procés de mesurar es formalitza en el cos dels nombres racionals a partir del qual s'obtenen els nombres reals mitjançant processos de caràcter infinit. *Nombre de calcular*. Aquest és l'aspecte algorísmic. El nombre es concep des d'un punt de vista operacional, gràcies a les regles segons les quals l'usuari juga amb ell. Es formalitza en l'enfocament axiomàtic. Els nombres apareixen com elements d'anells o cossos que es fixen axiomàticament.

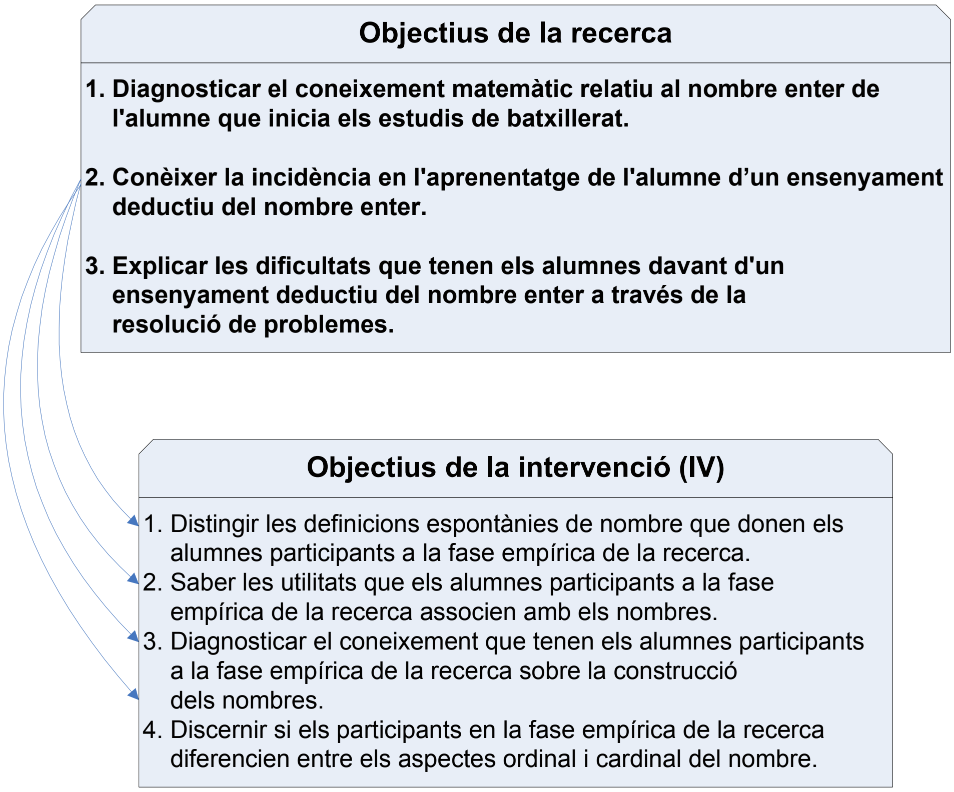


Figura 10.1: Dels objectius generals de la investigació a la seva concreció. Intervenció IV.

10.1.3 Instruments de recollida de dades

En virtut d'aquestes consideracions, que responen a una concreció de la voluntat de conèixer la concepció de nombre que tenen els participants en la fase empírica de la recerca, emprem l'instrument de recollida d'informació que mostrem tot seguit. Donada la coincidència d'objectius amb la investigació realitzada per Sotos (2004) emprem un qüestionari ja utilitzat en la recerca esmentada i que es limita als quatre interrogants següents:

1. Què és un nombre?
2. Per a què serveixen els nombres?
3. Com es formen els nombres?

4. És el mateix 1 que primer[3]?

10.1.4 Paràmetres atesos

Els paràmetres atesos per a l'anàlisi de les respostes neixen de la reflexió sobre les diferents concepcions de nombre. Donat que volem copsar les concepcions espontànies dels alumnes participants en la fase empírica de la recerca prioritzarem l'anàlisi en virtut de la classificació en les categories que brollen de les reflexions de FREUDENTHAL (1973, pp. 170-171).

Els alumnes han emprat els nombres al llarg dels seus anys de vida amb diferents finalitats. Estem interessats en les utilitats que de manera poc reflexiva expressen els estudiants. Per aquest motiu prenem com a paràmetre per ser atès en l'anàlisi de les dades la selecció del component principal relatiu a la utilitat que li dóna al nombre el participant en la recerca educativa empírica.

Respecte de la construcció dels nombres els estudiants poden tenir diferents percepcions o cap. En aquest punt fixem l'atenció en si els estudiants accepten els naturals i a partir d'ells es plantegen possibles construccions. Els aspectes ordinal i cardinal del nombre seran atesos principalment per copsar una possible confusió o no delimitació entre ells.

10.1.5 Categories de resposta

L'elecció del qüestionari ens condueix a unes categories de resposta inicials que són les proposades pels investigadors que el van dissenyar. A més, la proposta neix de les profundes reflexions de FREUDENTHAL (1973, pp. 170-171) que recorren les diferents possibilitats que ens podem trobar. Efectivament les categories no s'han vist modificades en el procés d'anàlisi tot arribant a establir-se com a categories definitives. A partir de l'anàlisi dels primers casos les dades han encaixat en les categories sense generar-ne de noves. El fet que les dades trobin una categoria on col·locar-se condueix a establir-les com a definitives. Tot seguit mostrem les esmentades categories de resposta:

[3]El mot primer fa referència a l'ordinal. Tanmateix, contemplem fer l'aclariment en la sessió si s'escau.

P4) Implementació dels instruments de recollida de dades realitzada el dilluns 29 d'octubre de 2007

Els indicadors P4-01, P4-02, P4-03, P4-04 i P4-05 permeten recollir les definicions espontànies de nombre que donen alumnes participants en la fase empírica de la recerca i categoritzar-les tal com es mostra tot seguit. Un 1 en la taula que recull les dades indica l'assoliment de la concepció corresponent i un 2 la no presència d'aquest.

P4-01. *Quantitat.* Aquesta categoria de resposta esdevé afirmativa quan el participant en la fase empírica de la recerca expressa la idea de nombre com a quantitat. En aquest cas l'alumne pensa el nombre com el cardinal d'un conjunt; identifica nombre amb nombre natural amb una utilitat associada a comptar. Tanmateix, si algun alumne associa el nombre amb l'ordinal també l'incloem en aquesta categoria de resposta[4]. En aquest darrer cas podríem trobar estudiants que identifiquessin el nombre amb la posició que ocupa un determinat objecte dins d'un conjunt ordenat.

P4-02. *Símbol.* Aquesta categoria de resposta esdevé afirmativa quan el participant en la fase empírica de la recerca expressa la idea de nombre com a grafia simbòlica, però sense esmentar la idea de quantitat. En aquest cas l'alumne confon el nombre amb el símbol que el representa.

P4-03. *Codi o etiqueta.* Aquesta categoria de resposta esdevé afirmativa quan el participant en la fase empírica de la recerca expressa la idea de nombre com un signe amb una funció utilitària, però no quantitativa. Correspon a aquesta categoria de resposta el cas en què l'alumne interpreti el nombre amb funcions com el número d'una casa, número de telèfon, ...

P4-04. *Mesura.* Aquesta categoria de resposta esdevé afirmativa quan el participant en la fase empírica de la recerca expressa la idea de

[4]La diferència entre ordinal i cardinal s'estudia en el quart objectiu de la present part de la recerca. Per aquest motiu en aquest primer objectiu estem interessats en englobar cardinal i ordinal dins de la mateixa categoria de resposta.

nombre com la mesura de quantitats de magnitud. En aquest cas l'alumne pensa el nombre com un nombre racional positiu que li serveix per mesurar.

P4-05. Altres.

Els indicadors P4-06, P4-07, P4-08, P4-09 i P4-10 permeten analitzar les utilitats que els alumnes participants a la fase empírica de la recerca donen als nombres. Els esmentats indicadors faculten l'establiment de la categorització que es mostra tot seguit. Un 1 en la taula que recull les dades indica l'assoliment de la concepció corresponent i un 2 la no presència d'aquest.

P4-06. *Comptar.* Aquesta categoria de resposta esdevé afirmativa quan el participant en la fase empírica de la recerca expressa la seva funció quantitativa, tant en l'aspecte ordinal com cardinal.

P4-07. *Codificar o etiquetar.* Aquesta categoria de resposta esdevé afirmativa quan el participant en la fase empírica de la recerca expressa la funció simbòlica que permet distingir objectes però sense contingut matemàtic. Corresponen a aquest cas la funció pròpia dels números de telèfon, DNI, codis de barres, etc.

P4-08. *Mesurar.* Aquesta categoria de resposta esdevé afirmativa quan el participant en la fase empírica de la recerca expressa la funció de quantificar magnituds mesurables.

P4-09. *Operar.* Aquesta categoria de resposta esdevé afirmativa quan el participant en la fase empírica de la recerca expressa la funció aritmètica que permet operar nombres sense que estigui vinculada a comptar, ni codificar, ni tampoc a mesurar, és a dir, quan l'alumne expressa la funció aritmètica dels nombres.

P4-10. *Altres.*

P4-11. L'indicador P4-11 permet saber quin coneixement tenen els participants en la fase empírica de la recerca sobre la construcció dels nombres. Estem interessats en conèixer principalment si l'alumne entén que els nombres es construeixen per "addicions de la unitat"o si brollen com a representacions de situacions empíriques en tots els casos. En aquesta pregunta queden les portes obertes a altres propostes dels alumnes que tenim en consideració. Tanmateix, aquestes propostes inicials les hem considerat a partir de la proposta de SOTOS (2004) però l'anàlisi de dades ha mostrat resultats que ens han fet canviar la direcció inicial. Així com en les categories de resposta inicials contemplàrem aquestes possibilitats, en les definitives hem optat per agrupar els resultats en dues categories de resposta tal com es pot consultar a continuació.

1. Sí. Aquesta categoria indica que el participant en la fase empírica de la recerca expressa algun coneixement relatiu a la construcció dels nombres.
2. No. Aquesta categoria indica que el participant en la fase empírica de la recerca no expressa cap coneixement relatiu a la construcció dels nombres.

P4-12. L'indicador P4-12 permet conèixer el nivell de comprensió que tenen els participants en la fase empírica de la recerca de la diferència entre els aspectes ordinal i cardinal del nombre.

1. Sí. Aquesta categoria indica que el participant en la fase empírica de la recerca distingeix els aspectes ordinal i cardinal d'un nombre.
2. No. Aquesta categoria de resposta indica que el participant en la fase empírica de la recerca no distingeix els aspectes ordinal i cardinal d'un nombre.

10.1.6 Lligams entre els objectius i les preguntes del qüestionari

Les preguntes del qüestionari estan relacionades amb els objectius de la present diagnosi tal com es destaca en el quadre següent:

OBJECTIUS	QÜESTIONS
Objectiu 1	Qüestió 1
Objectiu 2	Qüestió 2
Objectiu 3	Qüestió 3
Objectiu 4	Qüestió 4

Les preguntes del qüestionari podrien, en una primera anàlisi, donar respostes obertes difícils d'examinar. Tot i així, les reflexions de FREUDENTHAL (1973, pp. 170-171) faciliten una concreció de paràmetres atesos per a l'anàlisi i de categories de resposta que ho fan possible. De ben segur que aquesta fase de la recerca pot aprofundir en les concepcions de l'estudiant però amb el que proposem assolim una pinzellada a l'esmentat coneixement que permet interpretar els resultats i orientar les conclusions de la present investigació.

10.1.7 Anàlisi de les dades sobre les concepcions del nombre, discussió i presentació de resultats

En la figura 10.2 (p. 413) es poden consultar els resultats globals. Per a cada indicador es mostra el total absolut i relatiu de participants que es correspon amb cada categoria de resposta. S'ha fet servir una codificació bàsica, tal com es pot consultar en els arxius en format EXCEL[5] on estan recollides les dades sintetitzades per categories de resposta que tot seguit comuniquem.

RESULTATS GLOBALS	P4-01	P4-02	P4-03	P4-04	P4-05	P4-06	P4-07	P4-08	P4-09	P4-10	P4-11	P4-12
TOTAL DE 1	33	49	1	3	1	33	10	9	27	2	12	39
TOTAL DE 2	17	1	49	47	49	17	40	41	23	48	38	11
TOTAL DE 3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
TOTAL DE 4	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
TOTAL DE 5	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
TOTAL DE RESPOSTES	50	50	50	50	50	50	50	50	50	50	50	50
TOTAL DE 1	66,0%	98,0%	2,0%	6,0%	2,0%	66,0%	20,0%	18,0%	54,0%	4,0%	24,0%	78,0%
TOTAL DE 2	34,0%	2,0%	98,0%	94,0%	98,0%	34,0%	80,0%	82,0%	46,0%	96,0%	76,0%	22,0%
TOTAL DE 3	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%
TOTAL DE 4	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%
TOTAL DE 5	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%
TOTAL DE RESPOSTES	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%

Figura 10.2: Resultats globals de la sessió dedicada a l'estudi de les concepcions de nombre.

[5] http://www.xtec.cat/~rpujol1/Recerques/Tesi/Implementa4.rar

Resultats globals

Tal com es pot veure en la taula 10.2 (p. 413) les dues terceres parts de l'alumnat associa el nombre amb el cardinal o l'ordinal d'un nombre, quasi la totalitat l'identifica amb el símbol, quasi ningú amb una etiqueta i un minúscul 6% amb la mesura de magnituds. Cal destacar que les esmentades categories de resposta no s'exclouen les unes a les altres.

Respecte de la utilitat que donen als nombres, les dues terceres parts dels alumnes participants en la fase experimental de la recerca els empren per comptar mentre que un 54% els utilitza per operar. La cinquena part utilitza els nombres per etiquetar i un 18% per mesurar. Aquest resultat pot estar influït fortament pel problema dels nombres consecutius ja que en ell els nombres no s'empren en cap cas per mesurar.

Els alumnes poden pensar que els nombres es construeixen per l'addició de la unitat, per donar resposta a situacions empíriques, per resoldre problemes matemàtics més o menys allunyats de la realitat. Hem agrupat els resultats en dues categories de resposta tal com es pot consultar a continuació ja que les nostres pretensions inicials s'han resumit en les prèviament exposades. Quan demanem com es formen els nombres només contesta una quarta part de l'alumnat, l'altre no diu res, diu que no ho sap o que mai no s'ho ha plantejat.

Les dades ens informen que el 78% de l'alumnat coneix la diferència entre cardinal i ordinal. No apreciem diferències significatives quan fixem l'estudi segons el grup ni quan el fixem segons el gènere.

Resultats categoritzats per grup i gènere

En la taula 10.3 (p. 415) veiem que les dues terceres parts de l'alumnat que associa els nombres a les quantitats és una proporció que té un increment en els alumnes que cursen Matemàtiques per sobre dels que cursen Matemàtiques Aplicades a les Ciències Socials. La identificació del nombre amb el símbol que es representa és present en pràcticament tots els alumnes, independentment del grup d'aquests. La interpretació del nombre com una etiqueta no és dona en pràcticament cap cas i tampoc apreciem a partir de les dades una influència del grup. Un minúscul 6% de l'alumnat relaciona el nombre amb la mesura de magnituds però, en canvi,

RESULTATS PER GRUP	P4-01	P4-02	P4-03	P4-04	P4-05	P4-06	P4-07	P4-08	P4-09	P4-10	P4-11	P4-12
TOTAL 1 DE A	13	22	0	0	1	12	8	4	13	2	4	18
TOTAL 2 DE A	10	1	23	23	22	11	15	19	10	21	19	5
TOTAL 3 DE A	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
TOTAL 4 DE A	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
TOTAL 5 DE A	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
TOTAL DE A	23	23	23	23	23	23	23	23	23	23	23	23
TOTAL 1 DE B	20	27	1	3	0	21	2	5	14	0	8	21
TOTAL 2 DE B	7	0	26	24	27	6	25	22	13	27	19	6
TOTAL 3 DE B	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
TOTAL 4 DE B	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
TOTAL 5 DE B	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
TOTAL DE B	27	27	27	27	27	27	27	27	27	27	27	27
TOTAL 1 DE A	56,5%	95,7%	0,0%	0,0%	4,3%	52,2%	34,8%	17,4%	56,5%	8,7%	17,4%	78,3%
TOTAL 2 DE A	43,5%	4,3%	100,0%	100,0%	95,7%	47,8%	65,2%	82,6%	43,5%	91,3%	82,6%	21,7%
TOTAL 3 DE A	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%
TOTAL 4 DE A	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%
TOTAL 5 DE A	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%
TOTAL DE A	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%
TOTAL 1 DE B	74,1%	100,0%	3,7%	11,1%	0,0%	77,8%	7,4%	18,5%	51,9%	0,0%	29,6%	77,8%
TOTAL 2 DE B	25,9%	0,0%	96,3%	88,9%	100,0%	22,2%	92,6%	81,5%	48,1%	100,0%	70,4%	22,2%
TOTAL 3 DE B	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%
TOTAL 4 DE B	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%
TOTAL 5 DE B	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%
TOTAL DE B	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%

Figura 10.3: Resultats per grups de la sessió dedicada a l'estudi de les concepcions de nombre.

aquesta proporció prové d'un 11,1% del grup B, és a dir, d'alumnes que cursen Matemàtiques Aplicades a les Ciències Socials.

L'estudi per grups mostra que així com les dues terceres parts del total utilitza els nombres per comptar, aquesta proporció és més elevada en el grup B amb un 77,8% per sobre del grup A que redueix la proporció a un 52,2%. Respecte del total una proporció del 54% dels alumnes participants empra els nombres per operar i aquesta proporció no té importants diferències respecte del grup atès. La cinquena part del total utilitza els nombres per etiquetar però aquesta proporció té importants diferències segons el grup. Així com poc més del 7% dels alumnes del grup B destaca la funció d'etiquetar, aquesta proporció és quasi d'un 35% en els alumnes del grup A. Un 18% del total d'alumnes fa palesa la funció que tenen els nombres relativa a la mesura i no apreciem diferències en funció del grup atès.

En l'estudi per gènere les dades mostren que les dues terceres parts de l'alumnat que associa els nombres a les quantitats és una proporció que té un increment del nois (72%) respecte de les noies (60%), tal com es pot consultar en la taula 10.4 (p. 416). La identificació del nombre amb el símbol que el representa és present en pràcticament tots els alumnes, independentment del gènere d'aquests. La interpretació del nombre com una etiqueta no és dona en pràcticament cap cas i tampoc apreciem a partir de les dades una influència del gènere. Un minúscul

RESULTATS PER GÈNERE	P4-01	P4-02	P4-03	P4-04	P4-05	P4-06	P4-07	P4-08	P4-09	P4-10	P4-11	P4-12
TOTAL 1 DE H	18	25	0	0	1	20	3	2	11	2	7	21
TOTAL 2 DE H	7	0	25	25	24	5	22	23	14	23	18	4
TOTAL 3 DE H	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
TOTAL 4 DE H	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
TOTAL 5 DE H	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
TOTAL DE H	25	25	25	25	25	25	25	25	25	25	25	25
TOTAL 1 DE D	15	24	1	3	0	13	7	7	16	0	5	18
TOTAL 2 DE D	10	1	24	22	25	12	18	18	9	25	20	7
TOTAL 3 DE D	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
TOTAL 4 DE D	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
TOTAL 5 DE D	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
TOTAL DE D	25	25	25	25	25	25	25	25	25	25	25	25
TOTAL 1 DE H	72,0%	100,0%	0,0%	0,0%	4,0%	80,0%	12,0%	8,0%	44,0%	8,0%	28,0%	84,0%
TOTAL 2 DE H	28,0%	0,0%	100,0%	100,0%	96,0%	20,0%	88,0%	92,0%	56,0%	92,0%	72,0%	16,0%
TOTAL 3 DE H	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%
TOTAL 4 DE H	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%
TOTAL 5 DE H	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%
TOTAL DE H	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%
TOTAL 1 DE D	60,0%	96,0%	4,0%	12,0%	0,0%	52,0%	28,0%	28,0%	64,0%	0,0%	20,0%	72,0%
TOTAL 2 DE D	40,0%	4,0%	96,0%	88,0%	100,0%	48,0%	72,0%	72,0%	36,0%	100,0%	80,0%	28,0%
TOTAL 3 DE D	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%
TOTAL 4 DE D	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%
TOTAL 5 DE D	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%
TOTAL DE D	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%

Figura 10.4: Resultats per gènere de la sessió dedicada a l'estudi de les concepcions de nombre.

6% de l'alumnat relaciona el nombre amb la mesura de magnituds però, en canvi, aquesta proporció prové d'un 12% de les noies participants en la fase empírica de la recerca.

L'estudi per grup i gènere fa palès que el minúscul 6% de l'alumnat que relaciona el nombre amb la mesura de magnituds prové d'un 25% de les noies del grup B, tal com es pot consultar en la taula 10.5 (p. 417).

L'estudi per gènere mostra que així com les dues terceres parts del total empra els nombres per comptar, aquesta proporció esdevé més elevada entre els nois (80%) que entre les noies (52%). Respecte del total, una proporció del 54% dels alumnes participants empra els nombres per operar i aquesta proporció és major entre les noies (64%) que entre els nois (44%). La cinquena part del total utilitza els nombres per etiquetar però aquesta proporció és superior entre les noies (28%) que entre els nois (12%). Un 18% del total d'alumnes fa palesa la funció que tenen els nombres relativa a la mesura i aquesta proporció és clarament superior entre les noies (28%) que entre els nois (8%).

Quan demanem com es formen els nombres només contesta una quarta part de l'alumnat, l'altre no diu res, diu que no ho sap o que mai no s'ho ha plantejat. Ara bé, aquesta proporció és superior entre els alumnes del grup B (29,6%) que entre els alumnes del grup A (17,4%). Alhora, l'esmentada proporció és superior

RESULTATS PER GRUP I GÈNERE	P4-01	P4-02	P4-03	P4-04	P4-05	P4-06	P4-07	P4-08	P4-09	P4-10	P4-11	P4-12
TOTAL 1 DE HA	7	10	0	0	1	7	3	0	3	2	1	9
TOTAL 2 DE HA	3	0	10	10	9	3	7	10	7	8	9	1
TOTAL 3 DE HA	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
TOTAL 4 DE HA	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
TOTAL 5 DE HA	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
TOTAL DE HA	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10
TOTAL 1 DE HB	11	15	0	0	0	13	0	2	8	0	6	12
TOTAL 2 DE HB	4	0	15	15	15	2	15	13	7	15	9	3
TOTAL 3 DE HB	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
TOTAL 4 DE HB	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
TOTAL 5 DE HB	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
TOTAL DE HB	15	15	15	15	15	15	15	15	15	15	15	15
TOTAL 1 DE DA	6	12	0	0	0	5	5	4	10	0	3	9
TOTAL 2 DE DA	7	1	13	13	13	8	8	9	3	13	10	4
TOTAL 3 DE DA	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
TOTAL 4 DE DA	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
TOTAL 5 DE DA	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
TOTAL DE DA	13	13	13	13	13	13	13	13	13	13	13	13
TOTAL 1 DE DB	9	12	1	3	0	8	2	3	6	0	2	9
TOTAL 2 DE DB	3	0	11	9	12	4	10	9	6	12	10	3
TOTAL 3 DE DB	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
TOTAL 4 DE DB	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
TOTAL 5 DE DB	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
TOTAL DE DB	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12
TOTAL 1 DE HA	70,0%	100,0%	0,0%	0,0%	10,0%	70,0%	30,0%	0,0%	30,0%	20,0%	10,0%	90,0%
TOTAL 2 DE HA	30,0%	0,0%	100,0%	100,0%	90,0%	30,0%	70,0%	100,0%	70,0%	80,0%	90,0%	10,0%
TOTAL 3 DE HA	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%
TOTAL 4 DE HA	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%
TOTAL 5 DE HA	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%
TOTAL DE HA	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%
TOTAL 1 DE HB	73,3%	100,0%	0,0%	0,0%	0,0%	86,7%	0,0%	13,3%	53,3%	0,0%	40,0%	80,0%
TOTAL 2 DE HB	26,7%	0,0%	100,0%	100,0%	100,0%	13,3%	100,0%	86,7%	46,7%	100,0%	60,0%	20,0%
TOTAL 3 DE HB	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%
TOTAL 4 DE HB	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%
TOTAL 5 DE HB	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%
TOTAL DE HB	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%
TOTAL 1 DE DA	46,2%	92,3%	0,0%	0,0%	0,0%	38,5%	38,5%	30,8%	76,9%	0,0%	23,1%	69,2%
TOTAL 2 DE DA	53,8%	7,7%	100,0%	100,0%	100,0%	61,5%	61,5%	69,2%	23,1%	100,0%	76,9%	30,8%
TOTAL 3 DE DA	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%
TOTAL 4 DE DA	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%
TOTAL 5 DE DA	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%
TOTAL DE DA	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%
TOTAL 1 DE DB	75,0%	100,0%	8,3%	25,0%	0,0%	66,7%	16,7%	25,0%	50,0%	0,0%	16,7%	75,0%
TOTAL 2 DE DB	25,0%	0,0%	91,7%	75,0%	100,0%	33,3%	83,3%	75,0%	50,0%	100,0%	83,3%	25,0%
TOTAL 3 DE DB	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%
TOTAL 4 DE DB	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%
TOTAL 5 DE DB	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%
TOTAL DE DB	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%

Figura 10.5: Resultats per grup i gènere de la sessió dedicada a l'estudi de les concepcions de nombre.

entre els nois (28%) que entre les noies (20%). L'estudi per grup i gènere mostra un 40% de nois del grup B que d'una o altra manera manifesta com es formen els nombres.

Només són 12 els alumnes que contesten d'alguna manera com es formen els nombres, que es correspon amb quasi una quarta part del total d'alumnes participants en la fase empírica de la recerca. D'aquests dos diuen que es formen per fer operacions, sis ho justifiquen dient que es formen per resoldre problemes de la vida quotidiana i quatre afirmen que es formen a partir d'altres nombres. Tanmateix, el resultat total indica que aquesta és una pregunta que sorprèn els estudiants. Volem finalitzar aquest capítol dedicat a les concepcions de nombre tot destacant la resposta d’un d’aquests quatre alumnes. Concretament es tracta de l’alumna amb número de registre 19. És una alumna del grup A i afirma el següent, tal com es pot consultar en la figura 10.6 (p. 418): «Com es formen els nombres? N’hi ha que ja han estat formats, per algun lloc s’ha de començar. És com en pintura que hi ha els colors primaris i a partir d’ells es formen tots els altres colors. Amb els nombres passa el mateix: els sumes, els restes, ...». Apreciem en aquesta alumna una manera ingènua d’emprar el *principi de permanència de les lleis formals* (p. 87) per estendre els conjunts numèrics.

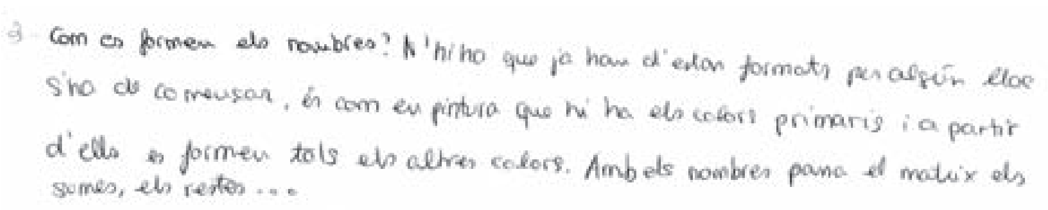


Figura 10.6: Resposta de l’alumna amb número de registre 19 (grup A) a la pregunta: «Com es formen els nombres?».

10.2 Anàlisi de les dades i resultats. L’estructura additiva

El dilluns 29 d’octubre de 2007 vam fer un petit parèntesi a la introducció del nombre enter iniciada una setmana abans. La presència de respostes que mostren una clara vinculació entre nombre i quantitat ho justifiquen. Les dificultats que des d’un punt de vista històric van impedir l’acceptació dels nombres negatius eren presents a les aules. Tal com es pot consultar en la figura 9.33 (p. 394) l’estudiant anomena «inexistent» el nombre que es demana que simbolitzi de la manera que li resulti més fàcil i entenedora. L’argument que utilitza, emprant les seves paraules, és: «si tens dues pomes no te’n poden treure tres». El dilluns dia 29 d’octubre de 2007 ens vam proposar conèixer les concepcions de nombre que tenen els participants en la fase empírica de la recerca.

Els alumnes estan en aquest moment habituats a uns nous nombres i a una terminologia que hem negociat amb ells, la qual brolla del problema dels nombres consecutius. Com a continuació de la fase empírica de la recerca ens proposem introduir l'estructura additiva dels nombres enters. Aquesta és la finalitat de la sessió realitzada el dilluns dia 5 de novembre de 2007 i que presentem en les pàgines següents.

10.2.1 De la finalitat general a la concreció d'objectius

El problema dels nombres consecutius ens ha conduït a la introducció d'uns nous nombres necessaris per resoldre el problema dels nombres consecutius en tots els casos. De fet els participants en la fase empírica de la recerca ja coneixen els nombres que fan falta. Tanmateix, els proposem el joc d'introduir-los a partir de les suggerències que brollen del problema.

Continuant amb les tasques iniciades anteriorment, el dilluns 5 de novembre de 2007 vam organitzar la sessió en tres parts que esdevenien una continuació de les anteriors. En primer lloc ens vam proposar esbrinar si l'alumne podia identificar diferents representants d'un nombre natural en un cas concret però també en un tractament simbòlic. Aquesta primera part és una continuació de la realitzada el dia 22 d'octubre de 2007 i serveix per establir el punt de partida d'allò que en aquest moment ens ocupa. En segon lloc vam proposar als alumnes que trobessin una regla per sumar nombres naturals expressats en forma de parells. A partir dels resultats obtinguts els vam demanar com ho farien per sumar nombres qualssevol, és a dir, tant els nombres naturals, com els nous que hem acceptat per resoldre el problema dels nombres consecutius, com la combinació d'ambdós. Finalment els vam proposar la suma de dos nombres que tenia per resultat zero i els vam demanar que manifestessin la seva opinió respecte de la utilització de la notació que prèviament ells ja coneixien. L'exposat constitueix la finalitat de la sessió del dia 5 de novembre de 2007, és a dir, una introducció deductiva a l'estructura additiva del nombre enter el tractament de la qual exposem a continuació.

10.2.2 Concreció d'objectius

Els nombres naturals i la seva estructura additiva els hem donat, en aquesta recerca, per coneguts per part dels alumnes participants. No volem dir amb això que considerem que els estudiants estiguin en condicions de posar nom a les estructures que es desprenen de considerar els nombres enters amb la suma i el producte; tampoc que hagin de sistematitzar les propietats que compleixen les esmentades estructures. El que volem destacar és que els estudiants sí que estan fortament familiaritzats amb la utilització del nombre natural, tant per resoldre problemes aritmètics com per modelar fenòmens empírics fent ús d'ells.

En les sessions prèvies hem introduït uns nous nombres que estan, en aquest moment de la fase experimental de la recerca, desproveïts de cap operació entre ells. Sembla raonable que el punt de partida sigui mirar d'introduir l'estructura additiva. Volem donar l'oportunitat als estudiants que descobreixin com es poden sumar els nous nombres que hem afegit als que ja teníem. En aquesta part de la recerca no els volem dir com a punt de partida el que cal fer. Insistim en el fet que volem deixar que ells mateixos hi pensin i volem recollir les seves propostes. Aquestes reflexions abans de fixar els objectius de la sessió condicionen, ja com a punt de partida, els instruments de recollida de dades que emprem.

Sota les consideracions esmentades i amb la finalitat general d'introduir l'estructura additiva ens proposem assolir els objectius següents.

1. Copsar si els estudiants proposen diferents parells per fer referència a un mateix nombre natural.

2. Explicar les dificultats que tenen els estudiants quan se'ls demana que sumin els nombres enters, representats per parells, tal com se sumen els nombres naturals.

3. Conèixer la plausibilitat amb la que els alumnes accepten la notació coneguda pels nombres enters negatius a partir de l'addició de nombres enters.

Aquests objectius s'estableixen amb la prioritat d'alimentar els objectius generals de la present investigació. La vinculació entre els objectius generals i aquests concrets que acabem d'exposar es pot consultar en la figura 10.7 (p. 421).

10.2.3 Instruments de recollida de dades

A partir de les consideracions prèviament exposades emprem els instruments de recollida de dades descrits en el capítol 6 (p. 191) i que es poden consultar en

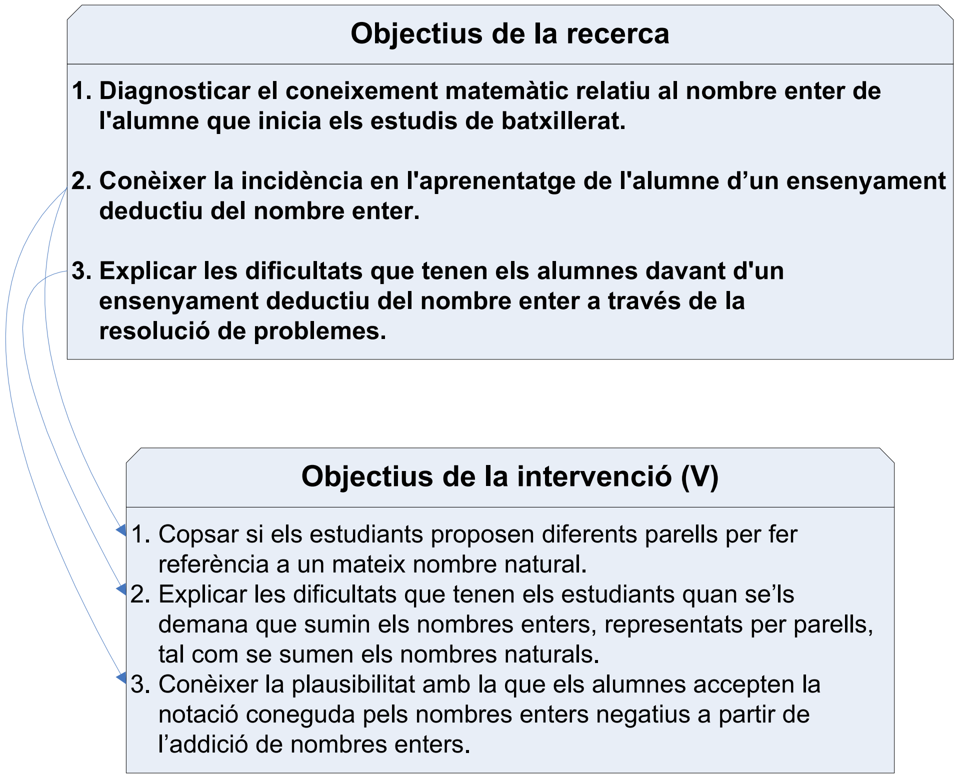


Figura 10.7: Dels objectius generals de la investigació a la seva concreció. Intervenció V.

l'annex corresponent (p. 577). Respecte de la sessió del dilluns 5 de novembre de 2007 que ens ocupa, els instruments de recollida de dades emprats són els que es poden consultar en les pàgines 581, 582 i 583. Els esmentats instruments han estat dissenyats per tal que la seva implementació faciliti dades que permetin assolir els objectius que hem mostrat.

10.2.4 Paràmetres atesos

Els paràmetres emprats per a l'anàlisi de les dades els fixem amb la finalitat de facilitar l'assoliment dels objectius de la present investigació. Així, la identificació i ús de la terminologia negociada i acordada en la sessió del dia 22 d'octubre de 2007, el treball literal amb significat i la plausibilitat amb la que accepten una terminologia que fa anys que empren són les bases de la concreció dels esmentats paràmetres.

Respecte del primer instrument de recollida de dades, que es pot consultar en la pàgina 581, fixarem l'atenció en dos aspectes. En primer lloc, en veure si l'alumne proposa diferents parells representants per al nombre natural 9. En segon lloc, pretenem obtenir informació relativa sobre si l'estudiant sap expressar la mateixa petició quan li demanem que ho faci per un nombre natural n qualsevol. En el cas que algun alumne no proposi cap parell representant per cap dels dos casos esmentats atendrem la informació aportada per la segona activitat de l'instrument disponible a la pàgina 583. D'aquesta manera els paràmetres atesos per a l'anàlisi del primer objectiu de la present sessió són: identificació entre els parells representants d'un nombre i la seva notació simplificada, elecció de diferents parells representants de nombres i elecció de diferents representants per nombres donats en forma literal. Aquesta informació es recull en l'indicador P5-01 tal com es pot veure en la taula que recull les categories de resposta i que mostrem tot seguit.

Respecte del segon instrument de recollida de dades, que es pot consultar en la pàgina 582, atendrem tres aspectes relacionats. En primer lloc investiguem els èxits i les dificultats que té l'estudiant per realitzar la suma de dos nombres naturals quan aquests venen donats pels seus representants canònics, és a dir, els parells que tenen per segona component zero; aquesta informació es recull en l'indicador P5-02.

En segon lloc atendrem la mateixa qüestió però quan els representants són qualssevol, és a dir, quan els parells no són necessàriament els representants canònics; aquesta informació es recull en l'indicador P5-03.

Els tractaments previs no ofereixen dificultats conceptuals en el sentit que es demana als alumnes que sumin nombres naturals expressats d'una determinada manera. Ara bé, estendre la suma que ja coneixem, i que prèviament han après els estudiants a realitzar amb parells representants, té una profunditat i una incidència en l'aprenentatge de l'estudiant que volem recollir. Per tant, en aquest cas no els donem la suma feta sinó que els preguntem com ho farien per efectuar-la. Així, en tercer lloc atendrem les consideracions que fan els estudiants quan els proposem sumar nombres enters qualssevol donats per parells que els representen; aquesta informació es recull en l'indicador P5-04.

Donat que emprem parells representants aprofitem per demanar-los si creuen que la suma pot dependre del representant escollit; aquesta informació es recull en l'indicador P5-05. Aquest fet tant transparent per les persones familiaritzades amb la introducció constructiva del nombre enter és del nostre interès en el cas que ens ocupa.

Respecte del tercer instrument de recollida de dades, que es pot consultar a la pàgina 583, estem interessats en les opinions dels alumnes respecte de la terminologia proposada. Vam valorar la possibilitat de deixar que fossin ells qui descobrissin l'esmentada terminologia. Tanmateix, l'escassa presència d'aquest tractament en la bibliografia ens va fer pensar, en primer lloc, que es tractava d'una novetat per als estudiants que difícilment podrien obtenir per sí mateixos. Per altra banda, el fet que els alumnes ja estiguin avesats als nombres enters dificulta que cerquin una terminologia quan ja els coneixen. Una posició diferent podríem adoptar si la recerca l'haguéssim dirigit a estudiants no familiaritzats amb el nombre enter ni amb el nombre negatiu, però això en aquest moment no és objecte del nostre estudi. Així, quan els demanem el seu punt de vista estem particularment interessats en la plausibilitat que donen a la terminologia emprada; aquesta informació es recull en l'indicador P5-06. En el mateix instrument de recollida de dades proposem una activitat que està relacionada amb el primer objectiu de la sessió. Els demanem que escriguin emprant notació simplificada els nombres enters als quals fem referència amb els parells que els proposem. El fet de finalitzar la sessió amb aquesta proposta està relacionat amb la consecució de la següent fase de la recerca educativa empírica que ha de fer-se efectiva al llarg dels dies següents. Llavors serà d'interès la identificació que els proposem i la petició ens informa sobre el punt de partida de les sessions properes.

10.2.5 Categories de resposta

En el procés de disseny de la recerca i més concretament en el de la sessió que ens ocupa s'han establert unes categories de resposta inicials. Les característiques dels instruments emprats fan que el nombre de categories pogués ser molt elevat. Tanmateix, la tercera petició que formulem en el segon instrument de recollida de dades que es pot consultar a la pàgina 582, així com la primera petició que formulem en l'instrument disponible a la pàgina 583, ha fet que les categories que presentem en aquest apartat no s'hagin pogut concretar fins ben avançada l'anàlisi.

L'atenció als paràmetres en els quals estem interessats i un esforç d'abstracció són els elements que han permès establir una quantitat de categories que permetés que la informació aportada per cadascuna d'elles sigui rellevant per a l'estudi i tinguin significat per sí mateixes. Tot seguit mostrem les esmentades categories de resposta:

P5) Implementació dels instruments de recollida de dades realitzada el dilluns 5 de novembre de 2007

Les categories que s'han establert a partir de l'anàlisi de les respostes i en virtut dels paràmetres que volem atendre són les que es mostren tot seguit.

P5-01. Identificació entre parells representants i notació simplificada.

L'indicador P5-01 recull i categoritza la informació que es desprèn de l'anàlisi de les dades que brollen de l'instrument disponible en la pàgina 581 així com de la segona activitat de l'instrument disponible en la pàgina 583.

1. L'alumne proposa diferents parells representants per un mateix nombre natural tant quan se li demana per un nombre natural concret com quan se li demana per un nombre natural qualsevol expressat de forma literal.
2. L'alumne proposa diferents parells representants per un mateix nombre natural. Tanmateix, l'alumne ho fa quan se li demana per un nombre concret però no quan se li demana per un nombre qualsevol expressat de forma literal.

3 L'alumne no proposa cap parell representant en cap dels dos casos demanats però sí que identifica els parells amb la seva notació simplificada.

4 L'alumne no proposa cap parell representant en cap dels dos casos demanats i tampoc identifica els parells amb la seva notació simplificada.

P5-02. Suma de nombres donats pels seus representants canònics.

L'indicador P5-02 recull i categoritza la informació que es desprèn de l'anàlisi de les dades que brollen de la primera activitat de l'instrument de recollida de dades i que és disponible a la pàgina 582.

1. L'alumne suma correctament nombres naturals expressats en forma de parells ordenats donats en la seva forma canònica.
2. L'alumne no els suma correctament.

P5-03. Suma de nombres donats per representants que no són necessàriament els canònics.

L'indicador P5-03 recull i categoritza la informació que es desprèn de l'anàlisi de les dades que brollen de la segona activitat de l'instrument de recollida de dades i que és disponible a la pàgina 582.

1. L'alumne suma correctament nombres naturals expressats en forma de parells ordenats donats no necessàriament en la seva forma canònica.
2. L'alumne no els suma correctament.

P5-04. Extensió de la suma de nombres naturals a la suma de nombres enters.

L'indicador P5-04 recull i categoritza la informació que es desprèn de l'anàlisi de les dades que brollen de la tercera activitat de l'instrument de recollida de dades i que és disponible a la pàgina 582.

1. L'alumne proposa la suma de nombres enters a partir de la seva expressió amb parells ordenats per extensió de la suma de nombres naturals prèviament realitzada.
2. L'alumne no proposa estendre la suma dels naturals i no proposa cap altra alternativa.

P5-05. Dependència de la suma del representant escollit.

L'indicador P5-05 recull i categoritza la informació que es desprèn de l'anàlisi de les dades que brollen de la tercera activitat de l'instrument de recollida de dades que és disponible a la pàgina 582.

1. L'alumne considera que el resultat sí que depèn dels representants escollits.
2. L'alumne considera que el resultat no depèn dels representants escollits.
3. Diu que no ho sap.

P5-06. Nivell d'acceptació que donen els alumnes a la terminologia emprada.

L'indicador P5-06 recull i categoritza la informació que es desprèn de l'anàlisi de les dades que brollen de la primera activitat de l'instrument de recollida de dades que és disponible a la pàgina 583.

1. L'alumne considera que la notació simplificada pels nombres enters queda plenament justificada a partir de l'addició.
2. L'alumne accepta la notació perquè ja la coneixia però no veu cap motiu que la justifiqui i que provingui de l'exposat en l'enunciat.
3. L'alumne no comprèn la notació emprada o no l'accepta.

10.2.6 Lligams entre els objectius i els indicadors

Els indicadors estan lligats amb els objectius de la present part de la intervenció tal com es mostra en el quadre següent:

OBJECTIUS	INDICADORS
Objectiu 1	P5-01
Objectiu 2	P5-02, P5-03, P5-04 i P5-05
Objectiu 3	P5-06

10.2.7 Anàlisi de les dades sobre l'estructura additiva, discussió i presentació de resultats

En la figura 10.8 (p. 427) es poden consultar els resultats globals. Per a cada indicador es mostra el total absolut i relatiu de participants que es correspon amb cada categoria de resposta. S'ha fet servir una codificació bàsica, tal com es pot consultar en els arxius en format EXCEL[6] on estan recollides les dades sintetitzades per categories de resposta que tot seguit comuniquem.

RESULTATS GLOBALS	P5-01	P5-02	P5-03	P5-04	P5-05	P5-06
TOTAL DE 1	25	39	27	47	10	37
TOTAL DE 2	25	11	23	3	23	10
TOTAL DE 3	0	0	0	0	17	3
TOTAL DE 4	0	0	0	0	0	0
TOTAL DE 5	0	0	0	0	0	0
TOTAL DE RESPOSTES	50	50	50	50	50	50
TOTAL DE 1	50,0%	78,0%	54,0%	94,0%	20,0%	74,0%
TOTAL DE 2	50,0%	22,0%	46,0%	6,0%	46,0%	20,0%
TOTAL DE 3	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	34,0%	6,0%
TOTAL DE 4	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%
TOTAL DE 5	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%
TOTAL DE RESPOSTES	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%

Figura 10.8: Resultats globals de la sessió dedicada a l'estructura additiva.

Resultats globals

Tal com es pot consultar en la taula 10.8 (p. 427), i més concretament observant les dades corresponents a l'indicador P5-01, la meitat de l'alumnat proposa diferents parells representants per un mateix nombre natural tant quan se li demana per un nombre natural concret com quan se li demana per un nombre natural qualsevol expressat de forma literal. L'altra meitat de l'alumnat també proposa diferents parells representants per un mateix nombre natural, però no ho fa quan se li demana per un nombre expressat en forma literal.

La consulta dels resultats relatius a l'indicador P05-02 revela que més de tres quartes parts de l'alumnat suma correctament nombres naturals expressats en forma canònica. En canvi, quan els facilitem nombres naturals representats per parells que no venen donats en la seva forma canònica la proporció es redueix a un

[6] http://www.xtec.cat/~rpujol1/Recerques/Tesi/Implementa5.rar

RESULTATS PER GRUP	P5-01	P5-02	P5-03	P5-04	P5-05	P5-06
TOTAL 1 DE A	8	16	6	21	8	16
TOTAL 2 DE A	15	7	17	2	10	5
TOTAL 3 DE A	0	0	0	0	5	2
TOTAL 4 DE A	0	0	0	0	0	0
TOTAL 5 DE A	0	0	0	0	0	0
TOTAL DE A	23	23	23	23	23	23
TOTAL 1 DE B	17	23	21	26	2	21
TOTAL 2 DE B	10	4	6	1	13	5
TOTAL 3 DE B	0	0	0	0	12	1
TOTAL 4 DE B	0	0	0	0	0	0
TOTAL 5 DE B	0	0	0	0	0	0
TOTAL DE B	27	27	27	27	27	27
TOTAL 1 DE A	34,8%	69,6%	26,1%	91,3%	34,8%	69,6%
TOTAL 2 DE A	65,2%	30,4%	73,9%	8,7%	43,5%	21,7%
TOTAL 3 DE A	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	21,7%	8,7%
TOTAL 4 DE A	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%
TOTAL 5 DE A	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%
TOTAL DE A	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%
TOTAL 1 DE B	63,0%	85,2%	77,8%	96,3%	7,4%	77,8%
TOTAL 2 DE B	37,0%	14,8%	22,2%	3,7%	48,1%	18,5%
TOTAL 3 DE B	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	44,4%	3,7%
TOTAL 4 DE B	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%
TOTAL 5 DE B	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%
TOTAL DE B	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%

Figura 10.9: Resultats per grups de la sessió dedicada a l'estructura additiva.

54%. En línies generals podem afirmar que els alumnes comprenen que estan realitzant la suma de nombres naturals i que l'única cosa que ha canviat és la forma de fer referència als esmentats nombres. Així, les dificultats provenen més aviat del treball literal.

Tal com es pot consultar en l'indicador P05-04, quan l'alumne té definida la suma de nombres naturals que venen donats per parells, l'extensió d'aquesta operació a tots els nombres que representen, tant els que són naturals com els que no, és proposada pel 94% dels estudiants. Abans d'iniciar l'experimentació els alumnes coneixien els nombres naturals. El problema dels nombres consecutius ha forçat l'acceptació de nous nombres per tal de donar-hi solució en tots els casos possibles. Aquests nous nombres s'han obtingut per extensió dels naturals sota l'orientació del problema. Des del punt de vista de l'alumne no genera cap conflicte estendre també la suma dels nombres naturals als nous nombres.

En canvi, ens ha sobtat el resultat que es recull en l'indicador P5-05. No arriba a la meitat la proporció d'alumnes que considera que el resultat no depèn dels representants escollits. Allò que en l'ensenyament superior directament es demostra, pels alumnes de batxillerat encara és un fet que cal descobrir. Una cin-

RESULTATS PER GÈNERE	P5-01	P5-02	P5-03	P5-04	P5-05	P5-06
TOTAL 1 DE H	13	19	12	24	3	19
TOTAL 2 DE H	12	6	13	1	15	4
TOTAL 3 DE H	0	0	0	0	7	2
TOTAL 4 DE H	0	0	0	0	0	0
TOTAL 5 DE H	0	0	0	0	0	0
TOTAL DE H	25	25	25	25	25	25
TOTAL 1 DE D	12	20	15	23	7	18
TOTAL 2 DE D	13	5	10	2	8	6
TOTAL 3 DE D	0	0	0	0	10	1
TOTAL 4 DE D	0	0	0	0	0	0
TOTAL 5 DE D	0	0	0	0	0	0
TOTAL DE D	25	25	25	25	25	25
TOTAL 1 DE H	52,0%	76,0%	48,0%	96,0%	12,0%	76,0%
TOTAL 2 DE H	48,0%	24,0%	52,0%	4,0%	60,0%	16,0%
TOTAL 3 DE H	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	28,0%	8,0%
TOTAL 4 DE H	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%
TOTAL 5 DE H	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%
TOTAL DE H	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%
TOTAL 1 DE D	48,0%	80,0%	60,0%	92,0%	28,0%	72,0%
TOTAL 2 DE D	52,0%	20,0%	40,0%	8,0%	32,0%	24,0%
TOTAL 3 DE D	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	40,0%	4,0%
TOTAL 4 DE D	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%
TOTAL 5 DE D	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%
TOTAL DE D	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%

Figura 10.10: Resultats per gènere de la sessió dedicada a l'estructura additiva.

quena part de l'alumnat considera que el resultat sí que depèn dels representants escollits; un 34% diu que no ho sap i no es manifesta.

Hem proposat a l'alumne que reflexionés sobre la terminologia emprada pels nombres negatius. La suma de nombres representats per parells ha conduït a veure que hi ha casos en que la suma és nul·la. Aquest fet porta a pensar que un d'ells, quan el sumem, es comporta com si restéssim l'altra. D'aquesta manera acordem denotar el nombre enter representat pel parell $(0, a)$ per $-a$; perquè quan el sumem a $(a, 0)$, que és el representant del nombre que en els naturals denotàvem per a, es comporta com si restéssim a. Un 74% dels alumnes considera que la notació simplificada, fent referència a la notació que no ve donada per parells, queda plenament justificada a partir de l'addició esmentada. Una cinquena part de l'alumnat accepta la notació perquè ja la coneixia però no veu cap motiu que la justifiqui. Només un 6% dels alumnes participants en la fase empírica de la recerca no comprèn la notació emprada o no l'accepta.

Resultats categoritzats per grup i gènere

La meitat de l’alumnat proposa diferents parells representants per un mateix nombre natural, tant quan se li demana per un nombre natural concret com quan se li demana per un nombre natural qualsevol expressat de forma literal. Aquesta proporció és superior en el grup B (63%) que en el grup A (34,8%), tal com podem consultar en l’indicador P5-01 de la taula 10.9 (p. 428) on es presenten els resultats per grups. Aquesta dada és significativa ja que la proposta que volem implementar a l’aula requereix un mínim assoliment del contingut avaluat. L’altra meitat del total de l’alumnat també proposa diferents parells representants per un mateix nombre natural, però no ho fa quan se li demana per un nombre expressat en forma literal. Aquesta limitació en el treball literal la pateix un 65,2% dels alumnes del grup A mentre que es redueix fins un 37% dels alumnes del grup B.

Respecte de l’indicador P05-02 tenim que més de tres quartes parts de l’alumnat suma correctament nombres naturals expressats en forma canònica. Aquest èxit també és major en el grup B (85,2%) que en el grup A (69,6%).

Quan facilitem als participants nombres naturals representats per parells que no venen donats en la seva forma canònica la proporció es redueix fins un 54% del total. Ara bé, aquesta proporció prové d’un 26,1% dels alumnes del grup A en front d’un 77,8% del grup B. Aquest és el primer moment de la recerca en què copsem diferències tant marcades en funció del grup.

Afirmàvem en els resultats globals que els alumnes comprenen que estan realitzant la suma de nombres naturals i que l’única cosa que ha canviat és la manera de fer referència als nombres naturals. Atenent als resultats globals les dificultats provenen més aviat del treball literal. Ara bé, la consulta dels resultats per grup revela que les esmentades dificultats es localitzen clarament entre els alumnes que cursen Matemàtiques Aplicades a les Ciències Socials.

Hem vist anteriorment que quan l’alumne té definida la suma de nombres naturals que venen donats per parells, l’extensió d’aquesta operació a tots els nombres, tant els que són naturals com els que no, és proposada pel 94% dels estudiants. Tal com es pot consultar en l’indicador P05-04 aquesta proporció és molt alta en tots dos grups tot i que novament superior en el grup B.

No arriba a la meitat la proporció d’alumnes que considera que el resultat no depèn dels representants escollits. Una cinquena part del total d'alumnes participants pensa que el resultat sí que depèn dels representants escollits. Ara bé, aquesta proporció d'alumnes es concreta en un 7,4% del grup B i un 34,8% del grup A.

Respecte de les reflexions proposades i relatives a la terminologia emprada un 74% del total d'alumnes considera que la notació simplificada queda plenament justificada a partir de l'addició. Aquest resultat global no presenta diferències significatives quan fem l'estudi en virtut del grup atès.

La proporció d'alumnat que proposa diferents parells representants per un mateix nombre natural, tant quan se li demana per un nombre natural concret com quan se li demana per un nombre natural qualsevol expressat de forma literal, és la meitat del total. En l'estudi per gènere no hi ha pràcticament cap diferència segons el grup atès, tal com es pot consultar en la taula 10.10 (p. 429). L'altra meitat del total de l'alumnat, sense que apreciem tampoc diferències per grup, també proposa diferents parells representants per un mateix nombre natural, però no ho fa quan se li demana per un nombre expressat en forma literal.

No arriba a la meitat la proporció del total d'alumnes que opina que el resultat no depèn dels representants escollits. Tanmateix, aquest resultat presenta un diferència en l'estudi per gènere que ens informa que el 60% dels nois considera que el resultat no depèn dels representants escollits i, en canvi, només un 32% de les noies ho pensa. No apreciem més diferències en la resta d'indicadors atesos. L'estudi per grup i gènere confirma la forta influència del grup en els resultats i, en canvi, una palesa independència del gènere, tal com es pot consultar en la taula 10.11 (p. 433).

Tractaments particulars

L'alumna amb número de registre 18 és un noia del grup A, és a dir, que cursa Matemàtiques Aplicades a les Ciències Socials. En la figura 10.12 (p. 395) podem veure que l'estudiant suma els nombres naturals 1 i 3, considera un parell que representa l'1 i un parell que representa el 3 i comprova que la suma de parells coincideix amb la suma dels nombres. S'aprecia que l'alumna veu que el procediment de posar com a primera component del parell la suma de les dues primeres components, i posar com a segona component la suma de les dues segones components, funciona. Tanmateix, sembla que se n'adona de la necessitat de trobar un argument ja que la comprovació verifica que el procediment funciona, però no el justifica. L'alumna afegeix «Perquè sí!», tal com es pot veure en la figura 10.12 (p. 395).

Són diversos els estudiants participants en la fase empírica de la recerca que fan el tractament esperat. Tot seguit en mostrem un que no és una excepció. L'alumne amb número de registre 42 és un noi del grup B, és a dir, que cursa Matemàtiques. En la figura 10.13 (p. 434) podem veure que l'estudiant considera els representants canònics dels nombres donats pels parells (a, b) i (c, d) per, posteriorment, sumar-los fent ús del vist en l'activitat anterior. Tal com es pot comprovar el resultat no el dóna en la forma que hom esperar trobar-lo. De fet, si els parells inicials representen nombres naturals, l'expressió donada per l'estudiant és totalment vàlida.

L'alumne amb número de registre 12 és un noi del grup A, és a dir, que cursa Matemàtiques Aplicades a les Ciències Socials. En la figura 10.14 (p. 434) veiem que no comparteix el motiu exposat. L'argument que dóna és que «a la pràctica si tens una poma i te'n treuen vuit aleshores deus set pomes i això és denota per -7», tal com es pot consultar en la figura indicada.

Tanmateix, aquest mateix alumne és el que en una sessió anterior afirmava «si tens dues pomes no te'n poden treure tres», tal com es pot consultar en la figura 9.33 (p. 394). La concepció de nombre lligada a quantitat la trobem novament palesa en aquest participant de la fase empírica de la recerca. El conflicte que des d'un punt de vista epistemològic va frenar l'acceptació dels nombres negatius és, en conseqüència, present a les aules de batxillerat.

Respecte de l'elecció de la terminologia que anomenem simplificada trobem estudiants que manifesten la transparència amb la que ho veuen i accepten. L'alumna amb número de registre 19 és una noia del grup A, és a dir, que cursa Matemàtiques Aplicades a les Ciències Socials. En la figura 10.15 (p. 435) veiem que l'alumne veu amb transparència la justificació presentada. S'ajuda d'una comparació mostrant que ho veu clar com ho veia en activitats que va viure a l'Educació Secundària Obligatòria on el vincle entre l'operació sumar i l'acció afegir era immediat.

RESULTATS PER GRUP I GÈNERE	P5-01	P5-02	P5-03	P5-04	P5-05	P5-06
TOTAL 1 DE HA	4	7	2	10	2	7
TOTAL 2 DE HA	6	3	8	0	7	1
TOTAL 3 DE HA	0	0	0	0	1	2
TOTAL 4 DE HA	0	0	0	0	0	0
TOTAL 5 DE HA	0	0	0	0	0	0
TOTAL DE HA	10	10	10	10	10	10
TOTAL 1 DE HB	9	12	10	14	1	12
TOTAL 2 DE HB	6	3	5	1	8	3
TOTAL 3 DE HB	0	0	0	0	6	0
TOTAL 4 DE HB	0	0	0	0	0	0
TOTAL 5 DE HB	0	0	0	0	0	0
TOTAL DE HB	15	15	15	15	15	15
TOTAL 1 DE DA	4	9	4	11	6	9
TOTAL 2 DE DA	9	4	9	2	3	4
TOTAL 3 DE DA	0	0	0	0	4	0
TOTAL 4 DE DA	0	0	0	0	0	0
TOTAL 5 DE DA	0	0	0	0	0	0
TOTAL DE DA	13	13	13	13	13	13
TOTAL 1 DE DB	8	11	11	12	1	9
TOTAL 2 DE DB	4	1	1	0	5	2
TOTAL 3 DE DB	0	0	0	0	6	1
TOTAL 4 DE DB	0	0	0	0	0	0
TOTAL 5 DE DB	0	0	0	0	0	0
TOTAL DE DB	12	12	12	12	12	12
TOTAL 1 DE HA	40,0%	70,0%	20,0%	100,0%	20,0%	70,0%
TOTAL 2 DE HA	60,0%	30,0%	80,0%	0,0%	70,0%	10,0%
TOTAL 3 DE HA	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	10,0%	20,0%
TOTAL 4 DE HA	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%
TOTAL 5 DE HA	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%
TOTAL DE HA	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%
TOTAL 1 DE HB	60,0%	80,0%	66,7%	93,3%	6,7%	80,0%
TOTAL 2 DE HB	40,0%	20,0%	33,3%	6,7%	53,3%	20,0%
TOTAL 3 DE HB	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	40,0%	0,0%
TOTAL 4 DE HB	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%
TOTAL 5 DE HB	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%
TOTAL DE HB	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%
TOTAL 1 DE DA	30,8%	69,2%	30,8%	84,6%	46,2%	69,2%
TOTAL 2 DE DA	69,2%	30,8%	69,2%	15,4%	23,1%	30,8%
TOTAL 3 DE DA	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	30,8%	0,0%
TOTAL 4 DE DA	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%
TOTAL 5 DE DA	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%
TOTAL DE DA	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%
TOTAL 1 DE DB	66,7%	91,7%	91,7%	100,0%	8,3%	75,0%
TOTAL 2 DE DB	33,3%	8,3%	8,3%	0,0%	41,7%	16,7%
TOTAL 3 DE DB	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	50,0%	8,3%
TOTAL 4 DE DB	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%
TOTAL 5 DE DB	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%
TOTAL DE DB	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%

Figura 10.11: Resultats per grup i gènere de la sessió dedicada a l'estructura additiva.

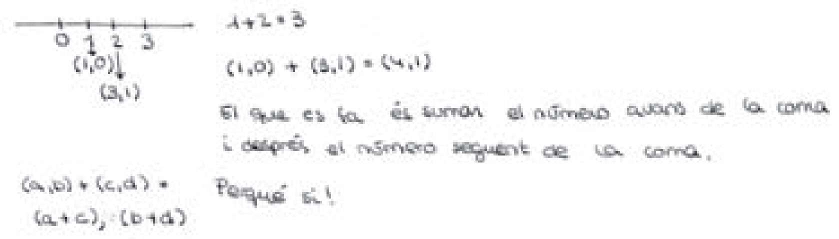


Figura 10.12: Resposta de l'alumna amb número de registre 18 (grup A) relativa a la suma de nombres naturals donats per parells que els representen.

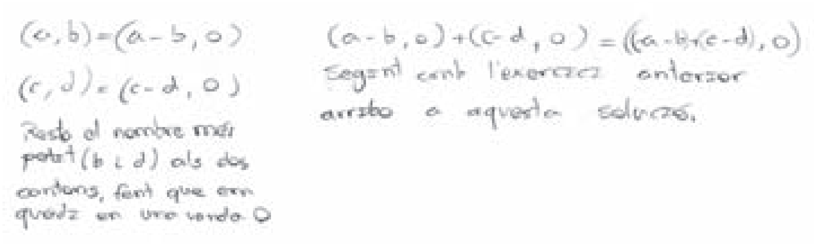


Figura 10.13: Resposta de l'alumne amb número de registre 42 (grup B) relativa a la suma de nombres naturals donats per parells que els representen.

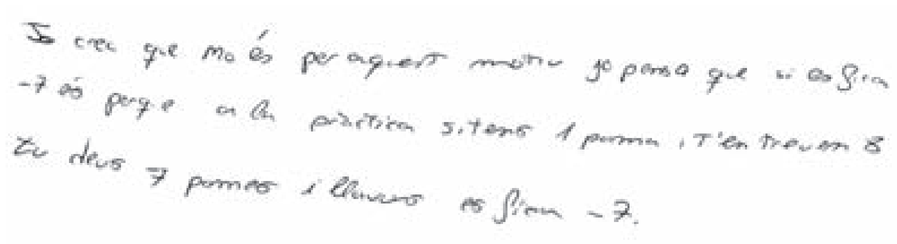


Figura 10.14: Resposta de l'alumne amb número de registre 12 (grup A) relativa a l'elecció de la notació simplificada per als nombres representats per parells i que no són nombres naturals.

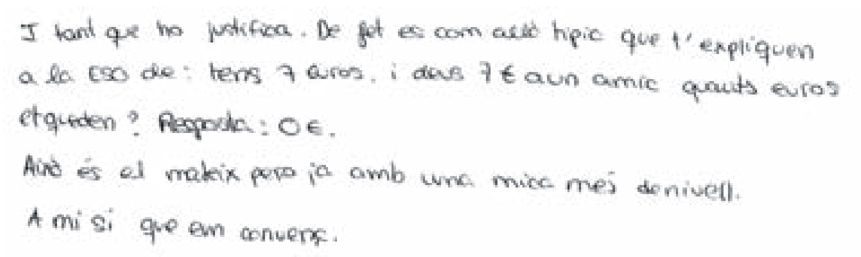

I tant que ho justifica. De fet es com allò típic que t'expliquen a la ESO de: tens 7 euros. i dous 7€ aun amic quants euros etqueden? Resposta: 0€.
Això és el mateix però ja amb una mica més de nivell.
A mi sí que em convenç.

Figura 10.15: Resposta de l'alumne amb número de registre 19 (grup A) relativa a l'elecció de la notació simplificada per als nombres representats per parells i que no són nombres naturals.

10.3 Anàlisi de les dades i resultats. L'estructura multiplicativa

El dilluns 5 de novembre vam abordar la introducció de l'estructura additiva. El problema dels nombres consecutius ens ha conduït a la necessitat d'incorporar nous nombres per tal de poder donar solució al problema en tots els casos possibles. La reflexió sobre els nous nombres i l'extensió de l'estructura additiva a ells ens ha suggerit la terminologia coneguda per hom per fer referència als nombres enters. Aquest és el punt de connexió entre l'inici de l'experimentació i els nombres coneguts pels estudiants. Tanmateix, ens proposem no abandonar la terminologia emprada a partir del problema amb la pretensió de continuar la recerca provocant una introducció híbrida entre la deductiva i la constructiva. Aquest és el punt de partida de la sessió del dia 12 de novembre, que té continuïtat en la sessió del dilluns 19 de novembre de 2007. La finalitat general d'ambdues sessions és generar un entorn d'aprenentatge que faciliti la incorporació de l'estructura multiplicativa des d'un punt de vista deductiu per, tot seguit, recollir dades amb la finalitat d'assolir els objectius que tot seguit presentem.

10.3.1 De la finalitat general a la concreció d'objectius

Els participants en la fase empírica de la recerca ja coneixen els nombres enters en el moment d'implementar l'experimentació. A partir de l'estructura additiva, hem vist que la terminologia emprada en forma de parells suggereix i connecta amb l'emprada pels estudiants des dels primers anys a l'Ensenyament Secundari Obligatori.

Ens proposem tot seguit com objectiu general conèixer quina incidència té en l'aprenentatge de l'estudiant la introducció de l'estructura multiplicativa des del punt de vista deductiu amb la pretensió d'assolir el constructiu, així com explicar les dificultats que suposa per l'alumne. Som conscients que abordem una investigació sobre un tipus d'ensenyament, el deductiu, que condueix cap a una introducció, la constructiva, que està en desús. Considerem que l'esmentat estil d'ensenyament suposa una novetat en els entorns d'aprenentatge emprats en l'actualitat de la qual poden brollar particularitats interessants.

10.3.2 Concreció d'objectius

Els nombres naturals i la seva estructura multiplicativa els donem per coneguts per part dels alumnes participants. No volem dir amb això que considerem que els estudiants hagin de posar nom a les estructures que es desprenen de considerar els nombres enters amb la suma i el producte; tampoc que hagin de sistematitzar les propietats que compleixen. Els estudiants estan habituats a la utilització del nombre natural, tant per resoldre problemes aritmètics com per modelar fenòmens empírics. Empren la suma, el producte i aquelles propietats que, potser sense tenir encara nom, es poden justificar sense cap tractament algebraic.

El dilluns 12 de novembre de 2007 vam organitzar la sessió en dues parts que esdevenen una continuació de les anteriors. En primer lloc vam suggerir activitats que només implicaven l'addició de nombres naturals però que provocaven que els nombres es denotessin emprant la notació simplificada i també l'expressió en forma de parells. Aquest tractament inicial és una continuació del realitzat el dia 5 de novembre de 2007 i facilita un punt de partida per a la present sessió que és del nostre interès.

En segon lloc ens vam proposar reprendre el problema dels nombres consecutius amb la finalitat d'examinar si els estudiants descomponen nombres com a suma de consecutius emprant nombres negatius. El procediment utilitzat pels alumnes i la concreció d'un resultat final que faciliti la quantitat de descomposicions com a suma de consecutius poden esdevenir complets i transparents emprant nombres enters, parcials i confosos amb naturals.

Posteriorment, més concretament en la sessió del dia 19 de novembre de 2007, ens vam proposar relacionar les dificultats que tenen els estudiants per establir el producte de nombres naturals a partir de la seva expressió com a parells. La intervenció realitzada requereix que en algun moment l'alumne descobreixi una expressió o una regla que permeti multiplicar nombres naturals quan aquests venen donats en forma de parells. Posteriorment, acceptar aquest producte per tots els nombres enters consisteix en acceptar el *principi de permanència de les lleis formals* (p. 87). Ara bé, si l'alumne no té un mínim d'habilitat en el càlcul algebraic i no pot obtenir l'expressió esmentada per multiplicar nombres naturals, difícilment podrà admetre amb seguretat l'extensió del producte obtingut pels nombres naturals als nombres enters. Així doncs, la finalitat d'aquesta sessió esdevé cabdal per la recerca i per a que la llavor de l'ensenyament constructiu pugui ser sembrada al batxillerat, almenys en el primer curs de batxillerat, que és el nivell al qual dirigim la fase empírica de la recerca.

En les sessions prèvies hem introduït uns nous nombres que estan, en aquest moment de la fase experimental de la recerca, desproveïts d'un producte i ens proposem introduir-lo. Ens proposem guiar i orientar els estudiants evitant dir-los el que cal fer i facilitant que siguin ells els qui identifiquin les terminologies que denoten uns mateixos nombres i que descobreixin les regles que permeten operar-los. Sota les consideracions esmentades i amb la finalitat general d'introduir l'estructura multiplicativa ens proposem assolir els objectius següents:

1. Diagnosticar les dificultats que tenen els estudiants, a través d'activitats que només requereixin de l'estructura additiva, per traduir els nombres que venen donats en forma de parells a la notació simplificada i a l'inrevés.

2. Explicar les propostes dels alumnes respecte del problema plantejat inicialment incidint en la cerca de la quantitat de descomposicions que admet un nombre qualsevol.

3. Conèixer les dificultats que tenen els estudiants quan se'ls demana que facin el producte de nombres enters, representats per parells, tal com es multipliquen els nombres naturals expressats de la mateixa manera.

Aquests objectius s'estableixen amb la prioritat d'alimentar els objectius generals de la present investigació. La vinculació entre els objectius generals i aquests concrets que acabem d'exposar es pot consultar en la figura 10.16 (p. 439).

10.3.3 Instruments de recollida de dades

A partir de les consideracions prèviament exposades emprem els instruments de recollida de dades descrits en el capítol 6 (p. 191) i que es poden consultar en l'annex corresponent (p. 577). Respecte de les sessions del dilluns 12 i 19 de novembre de 2007 que ens ocupen, els instruments de recollida de dades emprats són els que es poden consultar en les pàgines 584, 585, 586 i 587. Els esmentats

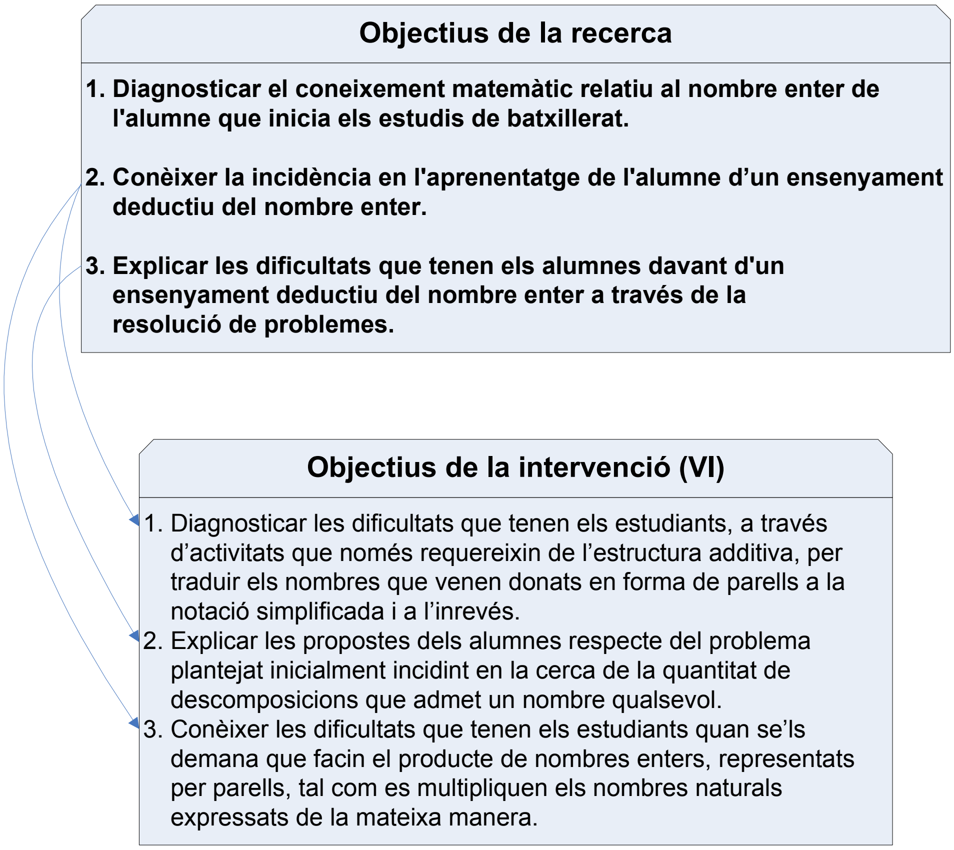


Figura 10.16: Dels objectius generals de la investigació a la seva concreció. Intervenció VI.

instruments han estat dissenyats per tal que la seva implementació faciliti dades que permetin assolir els objectius que hem mostrat. L’anàlisi de les dades que brollen de la implementació dels esmentats instruments es realitzarà en atenció als paràmetres que mostrem tot seguit.

10.3.4 Paràmetres atesos

Els paràmetres emprats per a l’anàlisi de les dades els fixem amb la finalitat de facilitar l’assoliment dels objectius de la present investigació. La identificació de la terminologia negociada i acordada en la sessió del dia 22 d’octubre de 2007 és atesa des d’un tractament literal. La introducció híbrida que condueix un plantejament deductiu, és a dir l’acceptació del *principi de permanència de les lleis* *formals* (p. 87), cap a un de constructiu, requereix un tractament literal que és objecte d'estudi i, en conseqüència, els paràmetres hi fixaran l'atenció per a l'anàlisi que se segueix.

Per assolir el primer objectiu que hem detallat anteriorment utilitzem l'instruments de recollida de dades que es pot consultar en la pàgina 584. La primera i segona activitats ens informen sobre les dificultats que tenen els estudiants en el treball literal. Cal recordar que la proporció d'estudiants que identificava la terminologia en casos concrets era molt elevada, tal com es pot consultar en la presentació de resultats corresponent, disponible a partir de la pàgina 427. Pretenem saber si l'esmentada identificació és familiar per a l'estudiant ja que la suma de nombres expressats en forma de parells és el focus de l'activitat. Tot i que es demanen diferents activitats relacionades amb l'addició de nombres enters, el paràmetre que atendrem és la identificació que fa l'alumne entre parells i notació simplificada quan ambdues terminologies fan referència a un mateix nombre.

Respecte del segon objectiu emprem l'instrument de recollida de dades que es pot consultar en la pàgina 585. Ens proposem examinar les propostes dels alumnes respecte del problema incidint en la quantitat de descomposicions que admet un nombre qualsevol. Aquesta pretensió és molt més factible de ser tractada i assolida des dels nombres enters que no pas des dels naturals. Cerquem les primeres impressions dels estudiants ja que abasta més temps la pretesa resolució completa. Posteriorment donarem l'oportunitat als estudiants de lliurar les seves pròpies disquisicions en un treball on disposaran de força més temps.

Respecte del tercer objectiu emprem els instruments de recollida de dades que es poden consultar en les pàgines 586 i 587 i atendrem tres aspectes que detallem tot seguit. En primer lloc investiguem els èxits i les dificultats que té l'estudiant per realitzar el producte de dos nombres naturals quan aquests venen donats pels seus representants canònics, és a dir, els parells que tenen per segona component zero. En segon lloc atendrem la mateixa qüestió però quan els representants són qualssevol, és a dir, quan els parells no són necessàriament els representants canònics. Els tractaments previs no ofereixen dificultats conceptuals en el sentit que es demana als alumnes que multipliquin nombres naturals expressats d'una determinada manera. Ara bé, estendre el producte que ja coneixem, i que prèviament han après a realitzar amb parells representants, té una profunditat i una incidència en l'aprenentatge que volem recollir. Donat que emprem representants aprofitem per demanar-los si creuen que la suma pot dependre d'ells.

10.3.5 Categories de resposta

Les categories de resposta necessàries per aglutinar les dades podrien ser moltes. Tanmateix, un excés d'aquestes podria produir una dispersió de la informació que mirem d'evitar. Per aconseguir-ho ha calgut un esforç d'abstracció i una atenció minuciosa als paràmetres atesos. En tota anàlisi de dades hi ha una pèrdua d'informació en el sentit que focalitzem l'atenció en aquells aspectes que són del nostre interès i que queden reflectits pels paràmetres. Mostrem a continuació les categories de resposta definitives tot destacant que no s'han pogut aconseguir fins avançat l'anàlisi. A partir d'aproximadament l'anàlisi de la meitat dels alumnes les dades han encaixat en les categories no generant-ne de noves. Això és el que ha mostrat l'estabilitat necessària per establir-les com a definitives.

P6) Implementació dels instruments de recollida de dades realitzada els dies 12 i 19 de novembre de 2007

Les categories que s'han establert a partir de l'anàlisi de les respostes i en virtut dels paràmetres que volem atendre són les que es mostren tot seguit.

P6-01. Conversió de parells a forma simplificada a través d'activitats que impliquen l'estructura additiva.

L'indicador P6-01 recull i categoritza la informació que es desprèn de l'anàlisi de les dades que brollen de l'instrument disponible a la pàgina 584.

1. L'alumne suma els nombres representats per parells expressant tant els sumands com el resultat emprant la notació simplificada correctament.
2. L'alumne suma els nombres representats per parells expressant els sumands i el resultat amb algun error.

3. L'alumne suma els nombres representats per parells expressant tant els sumands com el resultat incorrectament en forma simplificada.

P6-02. Sobre la quantitat de descomposicions com a suma de nombres consecutius que admet un nombre.

L'indicador P6-02 recull i categoritza la informació que es desprèn de l'anàlisi de les dades que brollen de la implementació de l'instrument de recollida de dades que és disponible a la pàgina 585.

1. L'alumne determina correctament la quantitat de descomposicions que té un nombre natural donat. A més, l'alumne apunta una estratègia que facilita un apropament significatiu cap a la determinació de la quantitat demanada pel cas general.
2. L'alumne determina correctament la quantitat de descomposicions que té un nombre natural donat. Tanmateix, l'alumne no aborda el cas general o ho fa sense cap pla.
3. L'alumne comet múltiples errors en el tractament dels casos particulars.

P6-03. Producte de nombres donats pels seus representants canònics.

L'indicador P6-03 recull i categoritza la informació que es desprèn de l'anàlisi de les dades que brollen de la implementació de l'instrument de recollida de dades que és disponible a la pàgina 586 i, més concretament, de la primera activitat.

1. L'alumne multiplica correctament nombres naturals expressats en forma de parells donats en la seva forma canònica.
2. L'alumne no els multiplica correctament.

P6-04. Producte de nombres donats per representants que no són necessàriament els canònics.

L'indicador P6-04 recull i categoritza la informació que es desprèn de l'anàlisi de les dades que brollen de la implementació de l'instrument de recollida de dades que és disponible a la pàgina 586 i, més concretament, de la segona activitat.

1. L'alumne multiplica correctament nombres naturals expressats en forma de parells quan aquests no venen donats en la seva forma canònica.
2. L'alumne no els multiplica correctament.

P6-05. Extensió del producte de nombres naturals al de nombres enters.

L'indicador P6-05 recull i categoritza la informació que es desprèn de l'anàlisi de les dades que brollen de la implementació de l'instrument de recollida de dades que és disponible a la pàgina 586 i, més concretament, de la primera part de la tercera activitat.

1. L'alumne proposa el producte de nombres enters a partir de la seva expressió amb parells per extensió del producte de nombres naturals prèviament realitzat.
2. L'alumne no proposa estendre el producte de nombres naturals i no proposa cap altra alternativa.

P6-06. Dependència del producte del representant escollit.

L'indicador P6-06 recull i categoritza la informació que es desprèn de l'anàlisi de les dades que brollen de la implementació de l'instrument de recollida de dades que és disponible a la pàgina 586 i, més concretament, de la segona part de la primera activitat.

1. L'alumne considera que el resultat sí que depèn dels representants escollits.
2. L'alumne considera que el resultat no depèn dels representants escollits.
3. Diu que no ho sap.

P6-07. Conversió de parells a forma simplificada a través d'activitats que impliquen l'estructura multiplicativa.

L'indicador P6-07 recull i categoritza la informació que es desprèn de l'anàlisi de les dades que brollen de l'instrument disponible a la pàgina 587.

1. L'alumne multiplica els nombres representats per parells expressant tant els factors com el resultat emprant la notació simplificada correctament.
2. L'alumne multiplica els nombres representats per parells expressant els factors i el resultat amb algun error.
3. L'alumne multiplica els parells ordenats expressant tant els factors com el resultat incorrectament en forma simplificada.

10.3.6 Lligams entre els objectius i els indicadors

Els indicadors estan lligats amb els objectius de la present part de la intervenció tal com es mostra en el quadre següent:

OBJECTIUS	INDICADORS
Objectiu 1	P6-01
Objectiu 2	P6-02
Objectiu 3	P6-03, P6-04, P6-05, P6-06 i P6-07

10.3.7 Anàlisi de les dades sobre l'estructura multiplicativa, discussió i presentació de resultats

En la figura 10.17 (p. 445) es poden consultar els resultats globals. Per a cada indicador es mostra el total absolut i relatiu de participants que es correspon amb cada categoria de resposta. S'ha fet servir una codificació bàsica, tal com es pot consultar en els arxius en format EXCEL[7] on estan recollides les dades sintetitzades per categories de resposta que tot seguit comuniquem.

[7] http://www.xtec.cat/~rpujol1/Recerques/Tesi/Implementa6.rar

RESULTATS GLOBALS	P6-01	P6-02	P6-03	P6-04	P6-05	P6-06	P6-07
TOTAL DE 1	27	1	49	7	35	25	25
TOTAL DE 2	19	49	1	43	15	5	21
TOTAL DE 3	4	0	0	0	0	20	4
TOTAL DE 4	0	0	0	0	0	0	0
TOTAL DE 5	0	0	0	0	0	0	0
TOTAL DE RESPOSTES	50	50	50	50	50	50	50
TOTAL DE 1	54,0%	2,0%	98,0%	14,0%	70,0%	50,0%	50,0%
TOTAL DE 2	38,0%	98,0%	2,0%	86,0%	30,0%	10,0%	42,0%
TOTAL DE 3	8,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	40,0%	8,0%
TOTAL DE 4	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%
TOTAL DE 5	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%
TOTAL DE RESPOSTES	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%

Figura 10.17: Resultats globals de la sessió dedicada a l'estructura multiplicativa.

Resultats globals

Tal com es pot consultar en la taula 10.17 (p. 445), i més concretament observant les dades corresponents a l'indicador P6-01, poc més de la meitat de l'alumnat (54%) suma els nombres representats per parells expressant tant els sumands com el resultat correctament en la notació simplificada; un 38% de l'alumnat participant efectua algun error en el procés. Apreciem una familiarització dels estudiants amb la notació simplificada però, alhora, copsem que el treball literal que proposem a través de l'instrument de recollida de dades, disponible a la pàgina 584, condueix a una seqüència d'errors en una proporció destacada d'alumnat.

Els resultats relatius a l'indicador P6-02 revelen que la pràctica totalitat de l'alumnat (98%) determina correctament la quantitat de descomposicions que té un nombre natural donat. Tanmateix, quan l'estudiant aborda el cas general és difícil trobar participants que facin un apropament significatiu cap a la determinació de la quantitat de descomposicions pel cas general.

Les dades recollides per l'indicador P6-03 ens informen que els estudiants multipliquen correctament nombres naturals quan aquests venen donats per parells en la seva forma canònica. Ara bé, tal com queda recollit en l'indicador P6-04, quan es demana als estudiants que facin la mateixa operació amb nombres que no venen donats per parells en la seva forma canònica els èxits disminueixen fins un 14%.

L'indicador P6-05 recull i categoritza la informació relativa a l'extensió del producte de nombres naturals als enters. La proporció d'alumnes que proposen estendre el producte dels nombres naturals als enters és d'un 70%. Tanmateix,

RESULTATS PER GRUP	P6-01	P6-02	P6-03	P6-04	P6-05	P6-06	P6-07
TOTAL 1 DE A	11	0	22	2	15	16	8
TOTAL 2 DE A	9	23	1	21	8	2	12
TOTAL 3 DE A	3	0	0	0	0	5	3
TOTAL 4 DE A	0	0	0	0	0	0	0
TOTAL 5 DE A	0	0	0	0	0	0	0
TOTAL DE A	23	23	23	23	23	23	23
TOTAL 1 DE B	16	1	27	5	20	9	17
TOTAL 2 DE B	10	26	0	22	7	3	9
TOTAL 3 DE B	1	0	0	0	0	15	1
TOTAL 4 DE B	0	0	0	0	0	0	0
TOTAL 5 DE B	0	0	0	0	0	0	0
TOTAL DE B	27	27	27	27	27	27	27
TOTAL 1 DE A	47,8%	0,0%	95,7%	8,7%	65,2%	69,6%	34,8%
TOTAL 2 DE A	39,1%	100,0%	4,3%	91,3%	34,8%	8,7%	52,2%
TOTAL 3 DE A	13,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	21,7%	13,0%
TOTAL 4 DE A	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%
TOTAL 5 DE A	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%
TOTAL DE A	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%
TOTAL 1 DE B	59,3%	3,7%	100,0%	18,5%	74,1%	33,3%	63,0%
TOTAL 2 DE B	37,0%	96,3%	0,0%	81,5%	25,9%	11,1%	33,3%
TOTAL 3 DE B	3,7%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	55,6%	3,7%
TOTAL 4 DE B	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%
TOTAL 5 DE B	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%
TOTAL DE B	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%

Figura 10.18: Resultats per grups de la sessió dedicada a l'estructura multiplicativa.

tal com queda recollit en l'indicador anterior, un gran volum d'alumnes tenen importants dificultats per arribar a obtenir per ells mateixos una regla que permeti multiplicar nombres enters. Aquesta dificultat es transmet tot seguit a la qüestió de la dependència del representant escollit. La meitat dels estudiants considera que el producte sí que depèn dels representants escollits. Entre els que ho afirmen no trobem cap reflexió relativa a que si aquesta dependència fos ferma el producte no es podria definir. Val a dir que un 40% dels alumnes no es manifesta davant d'aquest punt.

Tal com es recull en l'indicador P6-07 la meitat dels estudiants multiplica els nombres representats per parells expressant tant els factors com el resultat correctament en la forma simplificada. Una part molt destacada (42%) comet errors de diferents tipus en el procés.

Des d'un punt de vista general copsem que la meitat aproximada dels estudiants pot descobrir per sí mateix el que hem proposat però, en canvi, hi ha una altra meitat que presenta importants dificultats. L'estudi per grup i gènere és, en aquest cas més que en cap dels anteriors, fonamental per focalitzar les dificultats.

RESULTATS PER GÈNERE	P6-01	P6-02	P6-03	P6-04	P6-05	P6-06	P6-07
TOTAL 1 DE H	13	1	25	5	15	16	14
TOTAL 2 DE H	10	24	0	20	10	3	9
TOTAL 3 DE H	2	0	0	0	0	6	2
TOTAL 4 DE H	0	0	0	0	0	0	0
TOTAL 5 DE H	0	0	0	0	0	0	0
TOTAL DE H	25	25	25	25	25	25	25
TOTAL 1 DE D	14	0	24	2	20	9	11
TOTAL 2 DE D	9	25	1	23	5	2	12
TOTAL 3 DE D	2	0	0	0	0	14	2
TOTAL 4 DE D	0	0	0	0	0	0	0
TOTAL 5 DE D	0	0	0	0	0	0	0
TOTAL DE D	25	25	25	25	25	25	25
TOTAL 1 DE H	52,0%	4,0%	100,0%	20,0%	60,0%	64,0%	56,0%
TOTAL 2 DE H	40,0%	96,0%	0,0%	80,0%	40,0%	12,0%	36,0%
TOTAL 3 DE H	8,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	24,0%	8,0%
TOTAL 4 DE H	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%
TOTAL 5 DE H	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%
TOTAL DE H	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%
TOTAL 1 DE D	56,0%	0,0%	96,0%	8,0%	80,0%	36,0%	44,0%
TOTAL 2 DE D	36,0%	100,0%	4,0%	92,0%	20,0%	8,0%	48,0%
TOTAL 3 DE D	8,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	56,0%	8,0%
TOTAL 4 DE D	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%
TOTAL 5 DE D	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%
TOTAL DE D	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%

Figura 10.19: Resultats per gènere de la sessió dedicada a l'estructura multiplicativa.

Resultats categoritzats per grup i gènere

En la presentació dels resultats globals (fig. 10.17, p. 445) hem vist que poc més de la meitat de l'alumnat (54%) suma els nombres representats per parells expressant tant els sumands com el resultat correctament en la notació simplificada; un 38% de l'alumnat participant efectua algun error en el procés. La proporció d'èxits exposada prové d'un 47,8% d'alumnes del grup A i d'un 59,3% del grup B (fig. 10.18, p. 446). L'estudi per gènere mostra que el 52% dels nois aconsegueixen el que se'ls demana mentre que la proporció de noies puja fins un 56%(fig. 10.19, p. 447). Respecte d'aquest primer indicador, relatiu a la suma de nombres enters en forma de parells i la seva traducció a la notació simplificada, les noies presenten un èxit superior als nois i, més destacat encara, els alumnes del grup B millor que els del grup A. Tal com es pot veure en la figura 10.20 (p. 454), les dues terceres parts de les noies del grup B sumen correctament nombres enters donats en forma de parells i tradueixen correctament sumands i resultat a la forma simplificada.

Quasi la totalitat de l'alumnat (98%) determina correctament la quantitat de descomposicions que té un nombre natural donat, tal com es pot consultar en l'indicador P6-02 de la figura 10.17 (p. 445). Tanmateix, quan l'estudiant aborda el cas general és difícil trobar participants que facin un apropament significatiu cap al demanat. Les dades recollides per grups (fig. 10.18, p. 446), gènere (fig. 10.19, p. 447) i per grup i gènere (fig. 10.20, p. 454) no mostren importants diferències amb els resultats globals (fig. 10.17, p. 445).

Les dades recollides per l'indicador P6-03 ens informen que pràcticament tots els estudiants multipliquen correctament nombres naturals quan aquests venen donats per parells en la seva forma canònica. Ara bé, tal com queda recollit en l'indicador P6-04, quan es demana als estudiants que facin la mateixa operació amb nombres que no venen donats per parells en la seva forma canònica els èxits disminueixen fins un 14%. L'estudi per grup mostra que la totalitat dels estudiants del grup B multipliquen correctament nombres naturals quan aquests venen donats per parells en la seva forma canònica (fig. 10.18, p. 446). A més, tal com queda recollit en l'indicador P6-04, quan es demana als estudiants que facin la mateixa operació amb nombres que no venen donats per parells en la seva forma canònica, la proporció d'èxit entre els estudiants d'aquest mateix grup puja fins un 18,5%. En canvi, els alumnes del grup A els redueixen fins un 95,7% i un 8,7% respecte dels mateixos indicadors P6-03 i P6-04. L'estudi per gènere mostra en aquest cas un major èxit per part del nois. L'estudi per gènere manifesta que la totalitat dels nois multiplica correctament nombres naturals quan aquests venen donats per parells en la seva forma canònica (fig. 10.19, p. 447). A més, tal com queda recollit en l'indicador P6-04, quan es demana als estudiants que facin la mateixa operació amb nombres que no venen donats per parells en la seva forma canònica els èxits dels nois és d'un 20% mentre que les noies n'obtenen un 8%. L'estudi per grup i gènere (fig. 10.20, p. 454) mostra que tots els errors relatius a l'indicador P6-04 es localitzen en les noies del grup A; les esmentades alumnes no presenten cap encert respecte de l'indicador P6-04. Per altra banda, la cinquena part dels nois de cadascun dels dos grups multiplica correctament nombres naturals a partir de la seva expressió en forma de parells quan aquests no venen donats en forma canònica; quan venen donats en l'esmentada forma tots els nois encerten.

L'indicador P6-05 recull i categoritza la informació relativa a l'extensió del producte de nombres naturals als enters. La proporció d'alumnes que proposa estendre el producte dels nombres naturals als enters és d'un 70% (fig. 10.17,

p. 445). Aquesta proporció d'alumnes és lleugerament superior en el grup B (74,1%) que en el grup A (65,2%), tal com es pot consultar en l'indicador P6-05 de la taula 10.18 (p. 446). L'estudi per gènere mostra una acceptació superior per part de les noies (80%) que dels nois(60%), tal com es pot consultar en la taula 10.19 (p. 447). L'estudi per grup i gènere fa palès que les noies del grup B són les que de manera més destacada proposen multiplicar els nombres enters tal com multiplicàvem els naturals, tal com es pot consultar en la taula 10.20 (p. 454).

La meitat dels estudiants considera que el producte sí que depèn dels representants escollits i un 40% no es manifesta. D'aquesta meitat que afirma que el producte sí que depèn del resultat escollit, dues terceres parts corresponen al grup A i l'altra tercera part al grup B, tal com es pot consultar en l'indicador P6-06 de la taula 10.18 (p. 446). En l'estudi per gènere, quasi les dues terceres parts que afirmen que el producte sí que depèn del representat escollit són nois i és poc més d'una tercera part la proporció de noies que ho afirma, tal com es pot veure en l'indicador P6-06 de la taula 10.19 (p. 447). Aquests resultats queden corroborats en la consulta de l'indicador esmentat en la taula 10.20 (p. 454). Aquest estudi per grup i gènere mostra, com a pols oposats, que mentre que un 90% dels nois del grup A afirma que el producte sí que depèn del resultat escollit, només ho afirma un 17,7% de les noies del grup B.

En l'apartat dedicat als resultats globals (fig. 10.17, p. 445) hem vist que la meitat dels estudiants multiplica nombres representats per parells expressant tant els factors com el resultat correctament en forma simplificada. Tal com es recull en l'indicador P6-07 de la taula 10.18 (p. 446), la proporció d'èxits és superior entre els alumnes del grup B (63%) que entre els del grup A (34,8%). Respecte de l'estudi per gènere les diferències no són massa significatives (fig. 10.19, p. 447). L'estudi desglossat per grup i gènere mostra, com a casos extrems, que la realització correcta del producte de nombres donats per parells, així com la seva traducció i la del resultat a la forma simplificada, només l'encerten un 15,4% de les noies del grup A, en front del 75% de les noies del grup B, tal com es pot consultar en l'indicador P6-07 de la taula 10.20 (p. 454).

Tractaments particulars

L'alumna amb número de registre 6 és un noia del grup A, és a dir, que cursa Matemàtiques Aplicades a les Ciències Socials. En les figures 10.21 (p. 455) i 10.22 (p. 455) podem veure que per sumar nombres donats per parells representants empra exemples. D'aquest cas es desprèn que almenys una part dels estudiants de primer de batxillerat s'ajuden d'exemples per afrontar els tractaments literals.

Tot i que els primers passos pel càlcul algèbric es donen a l'inici de l'Educació Secundària Obligatòria, més concretament en el segon curs d'acord amb el currículum actual, la seva assimilació requereix un temps més ampli. L'exemple es correspon amb una estudiant que va tenir un èxit notable en els seus estudis de primer curs de batxillerat en l'any acadèmic que es va realitzar la present experimentació. Tanmateix, per interpretar el càlcul literal no només pensa en exemples concrets sinó que, en aquest cas, també ho escriu.

L'alumna amb número de registre 19 és un noia del grup A, és a dir, que cursa Matemàtiques Aplicades a les Ciències Socials. En la figura 10.23 (p. 455) podem veure que l'estudiant associa el producte de dos naturals amb la suma d'un d'ells tantes vegades com indica l'altre.

La participant en la fase empírica de la recerca pensa el producte com una operació externa. Aquesta fase inicial de la introducció del nombre natural pròpia de la matemàtica escolar a l'ensenyament primari, encara és palesa al batxillerat. Hem dissenyat un entorn d'aprenentatge que amb facilitat pot conduir l'estudiant a operar els parells de manera que el resultat sigui el que ja sap que ha d'obtenir. Però l'alumna, tot i no ser un cas generalitzat, s'entreté en detallar que $a \cdot c$ és «c vegades el nombre a», tot tractant c com un escalar. Si la matemàtica superior pretén introduir l'estructura d'anell en els nombres enters, cal que gradualment l'operació externa evolucioni fins a ser admesa com una operació interna pels estudiants. L'esmentada evolució té un camí lent a seguir que amb l'entorn generat hem volgut accelerar però que, en canvi, no es pot aconseguir amb facilitat.

L'alumne amb número de registre 41 és un noi del grup B, és a dir, que cursa Matemàtiques. En les figures 10.24 (p. 456) i 10.25 (p. 456) podem veure en la cerca de la quantitat de descomposicions com a suma de nombres consecutius per un nombre n qualsevol, no obté una fórmula compacta però, tanmateix, sembra la llavor de l'èxit.

L'estudiant considera el cas que algun dels dos factors sigui imparell tot destacant que, si no és així, aleshores estem davant d'una potència de dos que no té cap descomposició. L'alumne finalitza afirmant: «Un nombre natural n té tantes sumes de nombres consecutius com combinacions de multiplicacions que el resultat doni n i que hi hagi un nombre en aquesta multiplicació que sigui imparell», l'alumne diu també, «almenys, n'hi poden haver més». Del tractament que dóna al problema i de la seva exposició es desprèn que l'estudiant copsa que per cada descomposició del nombre n com a producte d'un senar per un altre nombre tindrà una descomposició. Ara bé, aquest «almenys, n'hi poden haver més», pot venir del fet que en l'experimentació prèvia l'alumne se n'ha adonat que hi ha descomposicions que no tenen una quantitat senar de sumands. Estem davant d'un problema que és molt més senzill de finalitzar en els nombres enters que en els naturals.

L'alumne amb número de registre 42 és un noi del grup B, és a dir, que cursa Matemàtiques. En la figura 10.26 (p. 456) veiem que tria com a producte dels nombres representats pels parells $(a, 0)$ i $(c, 0)$ el nombre representat pel parell $(ac, 0)$. Ho argumenta fent ús d'un exemple, és a dir, el parell resultant ha de representar el producte que ja coneix. En la segona activitat, tal com es pot consultar en la figura 10.27 (p. 457), per obtenir el producte a partir de representants no canònics, comença per obtenir els parells que representen els mateixos nombres i que sí que són canònics, és a dir, que tenen segona component nul·la. Posteriorment aplica el procediment obtingut en l'activitat anterior. En aquest cas l'alumne expressa el producte dels nombres representats pels parells (a, b) i (c, d) de la forma $(ac + bd, ad + bc)$. Respecte de si el producte pot dependre dels representants escollits l'alumne fa un tractament parcialment correcte. Tal com es pot consultar en la figura 10.28 (p. 457) l'estudiant exposa que uns altres representants portarien al mateix resultat ja que $(a - b, 0) \cdot (c - d, 0) = ((a - b) \cdot (c - d), 0)$. L'alumne atén el cas en què els nombres enters provinguin de la injecció de naturals, però no contempla el cas general. Tanmateix, en aquest cas copsem que l'estudiant veu la necessitat de justificar la independència dels representants escollits i, tot i que en un cas particular, en fa una prova.

Considerem un nombre natural a, que es correspon amb l'enter representat pel parell $(a, 0)$ i el natural c que es correspon amb l'enter representat pel parell $(c, 0)$. Per definir el producte dels dos parells no tenim altra mecanisme que mirar que el resultat sigui un parell que representi el nombre enter que es correspon amb el nombre natural ac. Veiem que els alumnes en aquesta primera etapa post-obligatòria empren sovint exemples per recolzar el seu treball algebraic. L'alumne amb número de registre 43 és un noi del grup B, és a dir, que cursa Matemàtiques. En la figura 10.29 (p. 457) veiem que treballa amb dues columnes. En la de l'esquerra desenvolupa un cas particular i a la seva dreta el cas general. En la segona activitat efectua el producte dels dos nombres donats per representants no canònics reduint els parells a canònics. Tanmateix, expressa el resultat de la forma $((a-b)\cdot(c-d), 0)$. De fet d'aquesta manera sempre obtindrà com a resultat el representant canònic, quan els dos enters que multiplica provenen de la injecció de dos nombres naturals, tal com es pot consultar en la figura 10.30 (p. 458). Finalment, tal com es pot consultar en la figura 10.31 (p. 458), justifica la independència del representant escollit fent veure que tots els representants tenen la mateixa forma canònica. Des del nostre punt de vista, l'evolució de l'estudiant des d'un tractament de nombre associat a la mesura de quantitats de magnitud fins el tractament formal que mostra en la resolució hi ha un salt que ja forma part del pont didàctic que preteníem generar.

L'alumna amb número de registre 30 és una noia del grup B, és a dir, que cursa Matemàtiques. En la figura 10.32 (p. 458) veiem que tria, tot recolzant-se en un exemple, com a producte dels nombres representats pels parells $(a, 0)$ i $(c, 0)$ el nombre representat pel parell $(ac, 0)$. En la segona activitat, tal com es pot consultar en la figura 10.33 (p. 459), per obtenir el producte a partir de representats no canònics fa dos tractaments diametralment oposats. En primer lloc diu que el nombre enter que representa el producte dels dos nombres representats pels parells $(a, 0)$ i $(c, 0)$ és el parell que té com a primera component el producte de les primeres components i com a segona component el producte de les segones components. Tot i així, just a sota obté els parells que representen els mateixos nombres i que sí que són canònics, és a dir, que tenen segona component nul·la. Posteriorment aplica el procediment obtingut en l'activitat anterior. En la resolució s'aprecia que el primer tractament emprat per l'alumna és el rutinari, però no triga gens a corregir. Val a dir que dies després li vam demanar a la participant que justifiqués per quin motiu afirmava que $(a-b)\cdot(c-d) = (ac-ad-bc+bd, 0)$; no va tenir resposta. Aquest tractament també va ser realitzat pel participant número 42, tal com es pot consultar en la figura 10.27 (p. 457). Dies més endavant deia que ho havia après anys abans però que mai li havien justificat; trobem a faltar un argument clar i transparent com el que es pot consultar a partir de la pàgina 72.

RESULTATS PER GRUP I GÈNERE	P6-01	P6-02	P6-03	P6-04	P6-05	P6-06	P6-07
TOTAL 1 DE HA	5	0	10	2	6	9	6
TOTAL 2 DE HA	3	10	0	8	4	0	3
TOTAL 3 DE HA	2	0	0	0	0	1	1
TOTAL 4 DE HA	0	0	0	0	0	0	0
TOTAL 5 DE HA	0	0	0	0	0	0	0
TOTAL DE HA	10	10	10	10	10	10	10
TOTAL 1 DE HB	8	1	15	3	9	7	8
TOTAL 2 DE HB	7	14	0	12	6	3	6
TOTAL 3 DE HB	0	0	0	0	0	5	1
TOTAL 4 DE HB	0	0	0	0	0	0	0
TOTAL 5 DE HB	0	0	0	0	0	0	0
TOTAL DE HB	15	15	15	15	15	15	15
TOTAL 1 DE DA	6	0	12	0	9	7	2
TOTAL 2 DE DA	6	13	1	13	4	2	9
TOTAL 3 DE DA	1	0	0	0	0	4	2
TOTAL 4 DE DA	0	0	0	0	0	0	0
TOTAL 5 DE DA	0	0	0	0	0	0	0
TOTAL DE DA	13	13	13	13	13	13	13
TOTAL 1 DE DB	8	0	12	2	11	2	9
TOTAL 2 DE DB	3	12	0	10	1	0	3
TOTAL 3 DE DB	1	0	0	0	0	10	0
TOTAL 4 DE DB	0	0	0	0	0	0	0
TOTAL 5 DE DB	0	0	0	0	0	0	0
TOTAL DE DB	12	12	12	12	12	12	12
TOTAL 1 DE HA	50,0%	0,0%	100,0%	20,0%	60,0%	90,0%	60,0%
TOTAL 2 DE HA	30,0%	100,0%	0,0%	80,0%	40,0%	0,0%	30,0%
TOTAL 3 DE HA	20,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	10,0%	10,0%
TOTAL 4 DE HA	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%
TOTAL 5 DE HA	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%
TOTAL DE HA	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%
TOTAL 1 DE HB	53,3%	6,7%	100,0%	20,0%	60,0%	46,7%	53,3%
TOTAL 2 DE HB	46,7%	93,3%	0,0%	80,0%	40,0%	20,0%	40,0%
TOTAL 3 DE HB	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	33,3%	6,7%
TOTAL 4 DE HB	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%
TOTAL 5 DE HB	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%
TOTAL DE HB	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%
TOTAL 1 DE DA	46,2%	0,0%	92,3%	0,0%	69,2%	53,8%	15,4%
TOTAL 2 DE DA	46,2%	100,0%	7,7%	100,0%	30,8%	15,4%	69,2%
TOTAL 3 DE DA	7,7%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	30,8%	15,4%
TOTAL 4 DE DA	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%
TOTAL 5 DE DA	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%
TOTAL DE DA	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%
TOTAL 1 DE DB	66,7%	0,0%	100,0%	16,7%	91,7%	16,7%	75,0%
TOTAL 2 DE DB	25,0%	100,0%	0,0%	83,3%	8,3%	0,0%	25,0%
TOTAL 3 DE DB	8,3%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	83,3%	0,0%
TOTAL 4 DE DB	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%
TOTAL 5 DE DB	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%
TOTAL DE DB	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%

Figura 10.20: Resultats per grup i gènere de la sessió dedicada a l'estructura multiplicativa.

$(a,0)+(b,0)= (a+b\ ,\ 0+0) = (4+2\ ,\ 0) = (6,0)$

$(0,a)+(0,b)= (0+0\ ,\ a+b) = (0\ ,\ 4+2) = (0,6)$

$(a,0)+(0,b)= (a+0\ ,\ 0+b) = (4+0\ ,\ 0+2) = (4,2)$

Figura 10.21: Resposta de l'alumna amb número de registre 6 (grup A) a la primera activitat relativa a l'addició de nombres enters donats en forma de parells.

$(a,0)+(b,0)= (a+b\ ,\ 0) = (4+2\ ,\ 0) = 6$

$(0,a)+(0,b)= (0\ ,\ a+b) = (0\ ,\ 4+2) = -6$

Si $a \geq b$: $(a,0)+(0,b)= (a+0\ ,\ 0+b) = (4\ ,\ 2) = 2$

Si $a < b$: $(a,0)+(0,b)= (a+0\ ,\ 0+b) = (2\ ,\ 4) = -2$

Figura 10.22: Resposta de l'alumna amb número de registre 6 (grup A) a la segona activitat relativa a l'addició de nombres enters donats en forma de parells.

(a.0) = a
(c,0) = c
Per tant com que (a,0) equival al nombre a i (c,0) és c. Sabem que per multiplicar-los podem fer:

a·c = el nombre a c vegades
c·a = el nombre c a vegades.
Exemple:
(4,0) = 4   4·3 = 4+4+4 = 12
(3,0) = 3   3·4 = 3+3+3+3 = 12

Figura 10.23: Resposta de l'alumna amb número de registre 19 (grup A) relativa a l'addició de nombres enters entesa com una operació externa.

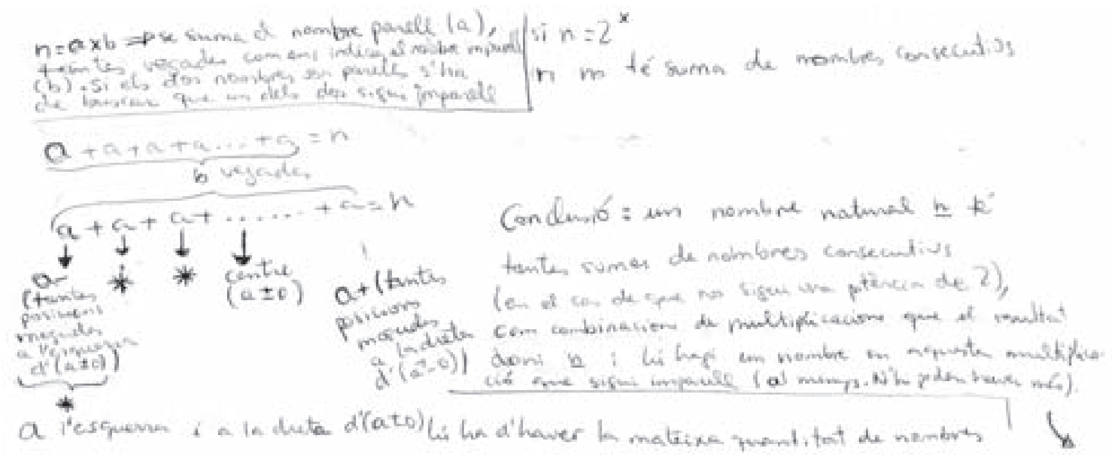


Figura 10.24: Resposta de l'alumne amb número de registre 41 (grup B) sobre la quantitat de descomposicions com a suma de nombres consecutius que admet un nombre natural n qualsevol. Primera part.

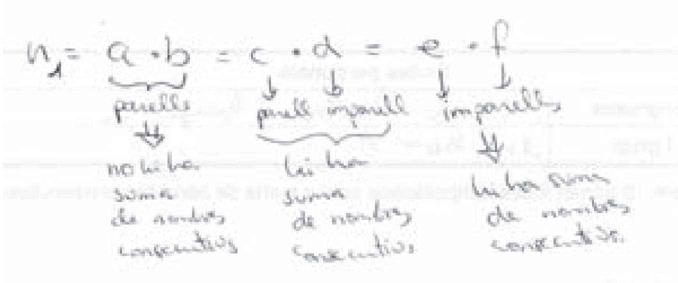


Figura 10.25: Resposta de l'alumne amb número de registre 41 (grup B) sobre la quantitat de descomposicions com a suma de nombres consecutius que admet un nombre natural n qualsevol. Segona part.

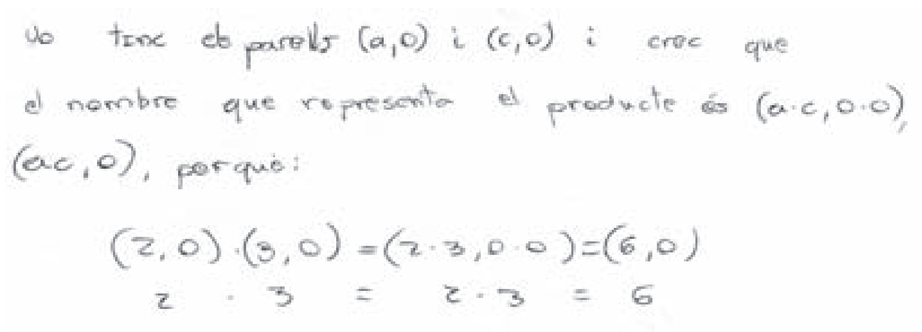


Figura 10.26: Resposta de l'alumne amb número de registre 42 (grup B) sobre el producte de dos nombres enters donats pels seus representants canònics en forma de parells.

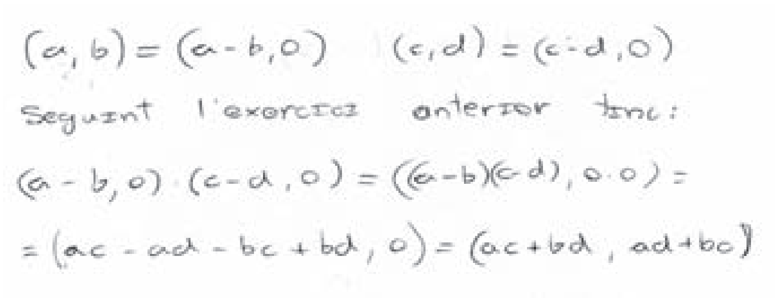


Figura 10.27: Resposta de l'alumne amb número de registre 42 (grup B) sobre el producte de dos nombres enters donats per parells representants no canònics.

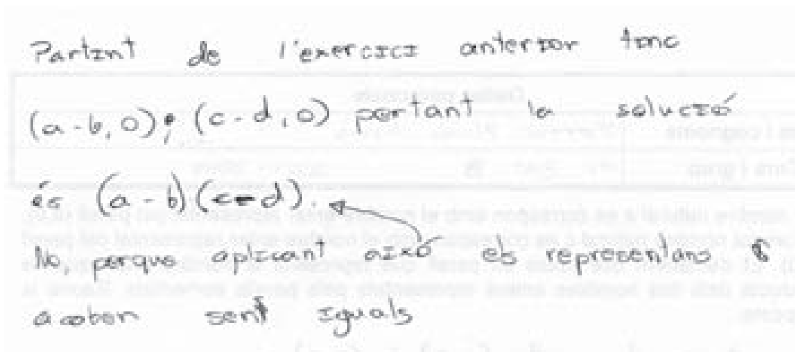


Figura 10.28: Tractament realitzat per l'alumne amb número de registre 42 (grup B) sobre la independència dels representants escollits.

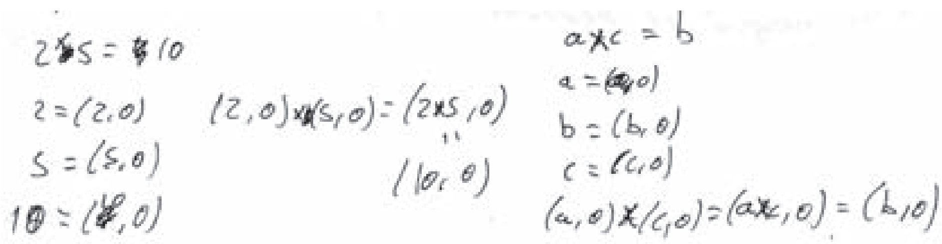


Figura 10.29: Resposta de l'alumne amb número de registre 43 (grup B) sobre el producte de dos nombres enters donats pels seus representants canònics en forma de parells.

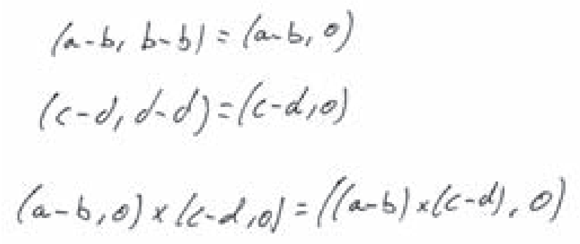


Figura 10.30: Resposta de l'alumne amb número de registre 43 (grup B) sobre el producte de dos nombres enters donats per parells representants no canònics.

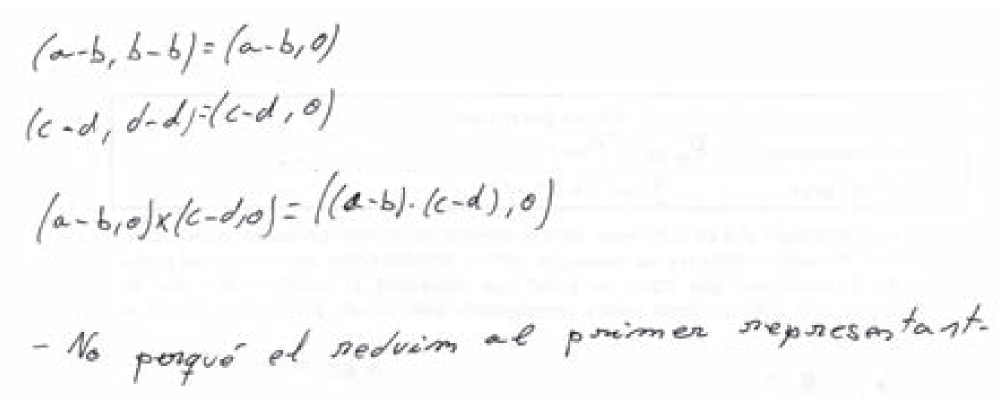


Figura 10.31: Tractament realitzat per l'alumne amb número de registre 43 (grup B) sobre la independència dels representants escollits.

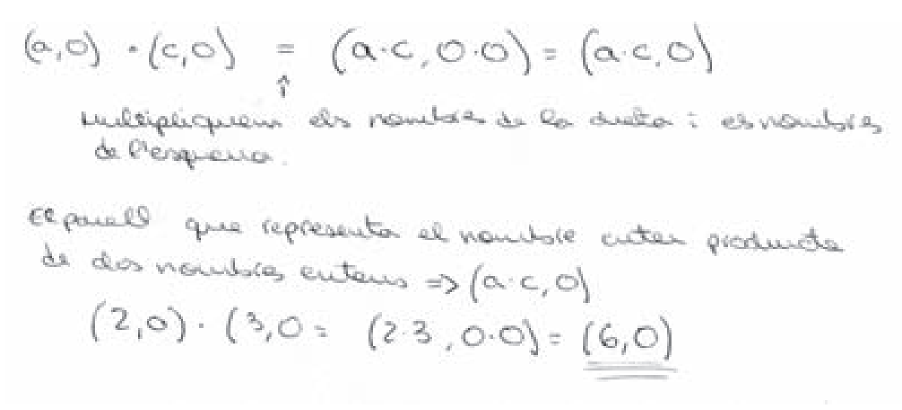
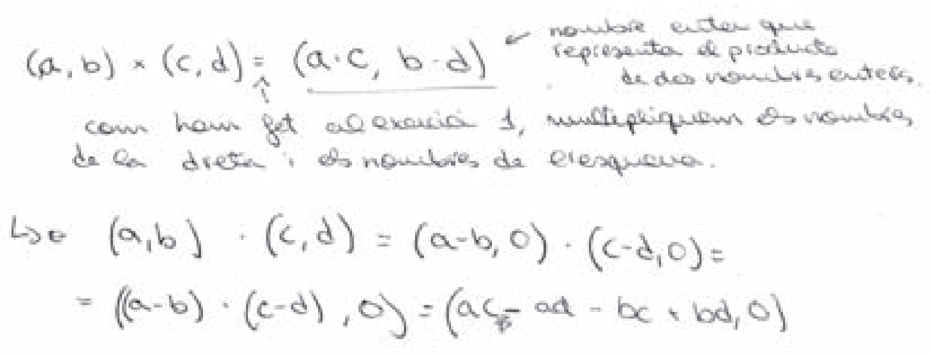


Figura 10.32: Resposta de l'alumna amb número de registre 30 (grup B) sobre el producte de dos nombres enters donats pels seus representants canònics en forma de parells.


$(a, b) \times (c, d) = (a \cdot c, b \cdot d)$ ← nombre enter que representa el producte de dos nombres enters.

com hem fet al exercici 1, multipliquem els nombres de la dreta i els nombres de l'esquerra.

$\hookrightarrow (a, b) \cdot (c, d) = (a-b, 0) \cdot (c-d, 0) =$

$= ((a-b) \cdot (c-d), 0) = (ac - ad - bc + bd, 0)$

Figura 10.33: Resposta de l'alumne amb número de registre 30 (grup B) sobre el producte de dos nombres enters donats per parells representants no canònics.

10.4 Valoració per part dels estudiants

Després de la implementació de la fase empírica de la recerca vam realitzar una fase de valoració. Aquesta té per finalitat recollir el punt de vista dels participants respecte de cadascun dels aspectes tractats en la fase d'intervenció. La recollida de dades la vam realitzar al llarg de quatre dies tal com es recull en la taula següent:

Data	Resultats globals	Resultats per grups	Resultats per gènere	Resultats per grup i gènere
26/11/2007	Figura 6 (p. 605)	Figura 7 (p. 605)	Figura 8 (p. 606)	Figura 9 (p. 607)
03/12/2007	Figura 10 (p. 607)	Figura 11 (p. 608)	Figura 12 (p. 608)	Figura 13 (p. 609)
10/12/2007	Figura 14 (p. 609)	Figura 15 (p. 610)	Figura 16 (p. 610)	Figura 17 (p. 611)
17/12/2007	Figura 18 (p. 611)	Figura 19 (p. 612)	Figura 20 (p. 612)	Figura 21 (p. 613)

Per què cal una fase de valoració?

Prové principalment de dues consideracions que volem fer a mans del lector: les característiques de la proposta educativa de la fase d'intervenció i algunes reflexions sobre l'ensenyament de la matemàtica implementat al llarg del darrer mig segle.

La concepció axiomàtica de la matemàtica va néixer a principis del segle XX per resoldre el problema de la consistència. Com a conseqüència va produir una evolució formalista d'aquesta disciplina. Va incidir també en l'educació matemàtica generant unes particularitats en l'ensenyament que hom engloba sota la terminologia «Matemàtica Moderna».

La cerca de rigor estava més que justificada davant de paradoxes, com la coneguda de Russel, que portaven a contradiccions que calia evitar. La didàctica de la matemàtica va ser permeable i l'esmentada cerca de rigor va arribar també a les escoles a través de l'anomenada «Matemàtica Moderna». Aquesta va incidir en les estructures abstractes (principalment en l'àlgebra), rigor lògic (lluny d'aspectes manipulatius i experimentals), teoria de conjunts, geometria analítica, entre d'altres. En el cas del nombre enter la introducció constructiva, en ocasions combinada amb la instructiva, començava per una presentació del grup additiu dels nombres enters per finalitzar amb l'estructura d'anell; així ho vam viure en la matemàtica escolar.

El fracàs de la «Matemàtica Moderna» en els anys setanta va donar pas a l'intent de generar nous entorns d'aprenentatge. Aquests van situar l'ensenyament del nombre enter en el pol oposat. La introducció a través de models concrets, també combinats amb la introducció instructiva, és una realitat a les aules en una primera introducció.

Quan proposem el mètode deductiu volem evitar que una part del públic l'associï amb el mètode axiomàtic o constructiu. En aquesta memòria hem aclarit les importants diferències entre les cinc categories en les que podem situar les diferents introduccions del nombre enter. La introducció deductiva permet establir un pont didàctic entre una primera introducció empírica i concreta i la presentació constructiva o axiomàtica. A més, el mètode deductiu pot fer petites immersions en l'ensenyament a través de models concrets.

Dit tot això, aclarim el nostre interès. Si els alumnes han de viure l'ensenyament deductiu del nombre enter amb una apatia i desmotivació com la que es podia haver viscut fa unes quantes dècades amb el mètode constructiu aleshores, des del nostre punt de vista, la proposta no es pot acceptar. Atesa aquesta darrera consideració considerem que la fase de valoració és el complement necessari per situar els resultats obtinguts en la realitat actual que hi ha a les aules de batxillerat.

Sobre la implementació de la fase de valoració

No pretenem fer una comparativa amb cap altre estil d'ensenyament. Tampoc volem fer una valoració en la que pugui influir la nostra opinió. No volem que les dades, atesa la situació exposada anteriorment, siguin analitzades des de cap punt de vista que pugui fer variar els resultats. Ens conformem amb conèixer el nivell d'acceptació i satisfacció dels participants per a cadascun dels punts que puguin tenir una certa rellevància de la fase d'intervenció. Les pretensions exposades ens decanten per emprar diversos tests que es poden consultar en l'annex III, disponible a partir de la pàgina 589.

Sobre els resultats obtinguts

Respecte dels resultats obtinguts en la fase de valoració volem destacar dos aspectes. En primer lloc, la consulta dels resultats és ràpida i senzilla de realitzar consultant les figures que les recullen i que estan referenciades en la taula que hi ha a l'inici del present apartat. En segon lloc, no volem entrar en valoracions personals ja que considerem que, en aquest cas, és molt millor deixar que les dades parlin per sí soles. Fem una petita pinzellada als resultats sense cap valoració personal i amb l'ànim d'encoratjar el lector a fer-ne una lectura més detallada.

Els alumnes tenen més dificultats en un primer moment en la utilització d'un tractament algebraic per veure que la suma de nombres consecutius mai és una potència de 2. Un 52% ho troba difícil i un 42% ho troba fàcil. Respecte de les descomposicions de nombres com a suma de nombres consecutius (indicadors Q12, Q13, Q14 i Q15 del primer qüestionari de valoració) els alumes troben fàcil les descomposicions demanades amb les proporcions respectives 54%, 68%, 60% i 64%. En relació amb la representació dels nombres a través de parells, que brolla del problema dels nombres consecutius i el treball amb ells, la proporció d'alumnes que ho troben fàcil o molt fàcil és, en tots els casos, superior o molt superior a la meitat de l'alumnat. Respecte de la introducció de l'estructura additiva, més de la meitat de l'alumnat considera fàcil el que se li demana. Com es reflexa en l'indicador Q6 del tercer qüestionari de valoració, el 68% de l'alumnat considera fàcil d'acceptar la notació habitualment emprada per denotar els nombres enters. La consulta dels resultats obtinguts és disponible en l'annex III (p. 589).

Referències

ALCALÁ, M. (2002): *La construcción del lenguaje matemático*. Barcelona: Editorial Graó.

FREUDENTHAL, H. (1973): *Mathematics as an educational task*. Dordrecht, Holanda: D. Reidel Publishing Company.

SOTOS, M. (2004): «¿En qué piensa el alumnado cuando decimos número?» *UNO, 37*, 93-104.

Capítol 11

Conclusions

Índex

En aquest capítol i el següent exposem el darrer pas de la investigació desglossat en tres parts: conclusions, prospectiva i implicacions didàctiques.

En el present mostrem les conclusions (p. 463). Contrastem els resultats obtinguts en els capítols 8 (p. 273), 9 (p. 339) i 10 (p. 401) amb els que es desprenen de recerques i experiències així com també amb les propostes d'estudis d'altres investigadors. Establim per tant, les conclusions contrastant els resultats obtinguts amb el marc teòric atès.

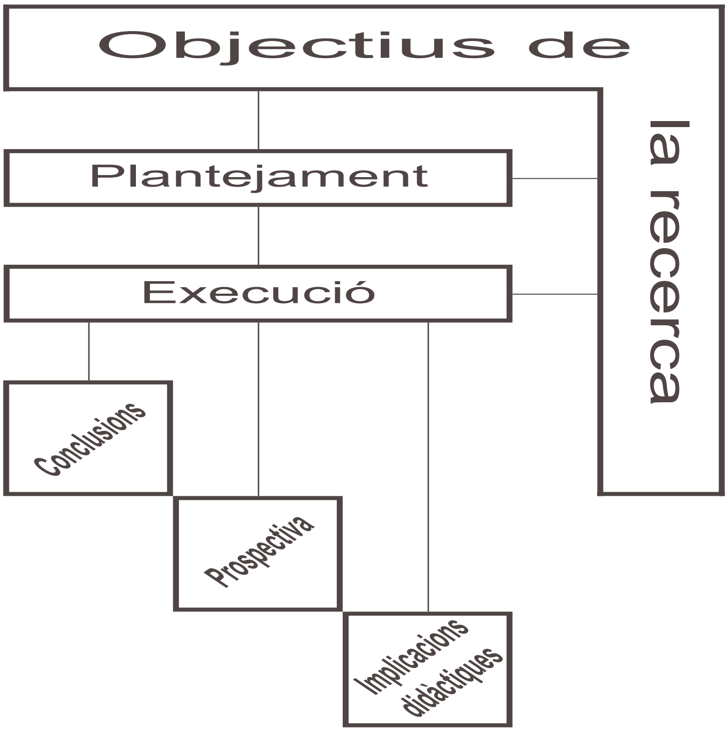


Figura 11.1: Darrer pas de la investigació: conclusions, prospectiva i implicacions didàctiques.

Entre les diferents accepcions que es poden consultar en un diccionari[1] sobre el mot «conclusions» n'hi trobem una relacionada amb la finalització d'alguna cosa així com l'acció i l'efecte de concloure. Per «concloure» hi trobem acabar o finalitzar alguna cosa, determinar i resoldre el que s'ha tractat, rematar minuciosament una obra i d'altres. També hi trobem inferir o deduir una veritat d'altres que

[1]Consulta realitzada el dia 24 d'agost de 2008 en el Diccionario de la Lengua Española (vigésima segunda edición). Disponible a http://www.rae.es/rae.html.

s'admeten, demostren o pressuposen. L'esmentada consulta fa palesa la necessitat d'aclarir el que farem en aquest apartat dedicat a les conclusions i, per tant, de mostrar el que entenem nosaltres per exposar les conclusions de la investigació.

L'enfocament metodològic de cada fase de la recerca condiciona la naturalesa de les conclusions. Hem diagnosticat la realitat dels alumnes participants respecte d'un determinat contingut. Aquest posicionament ens permet identificar l'estat de la qüestió en l'entorn de la fase experimental. Posteriorment ens ocupem de conèixer la incidència en l'aprenentatge i d'explicar les dificultats dels estudiants respecte d'un determinat ensenyament. Les conclusions provenen del contrast entre els resultats i els fonaments teòrics que, en gran mesura, tenen a veure amb la realitat educativa que hom espera trobar en un primer curs de batxillerat. El context és, per tant, fonamental ja que dirigir la fase experimental de la recerca a un primer curs postobligatori no és habitual en un estudi relacionat amb el nombre negatiu. El context que ens ocupa en ha conduït a entendre el problema investigat d'una determinada manera. Per aquest motiu, el contrast entre resultats i fonaments teòrics el realitzarem amb atenció constant a l'entorn educatiu en el que s'ha desenvolupat la recerca, tot remarcant les possibles diferències entre les edats dels participants en la present investigació i en altres estudis realitzats i considerats.

Recuperem els resultats obtinguts i els confrontem amb el marc teòric arribant, a través de l'esmentat contrast, a ampliar i consolidar diversos aspectes relatius al problema de la present investigació. Les conclusions les organitzem al voltant dels objectius. Les hem obtingut a partir de les dades recollides i més concretament dels resultats que es desprenen d'elles els quals exposem en els capítols 8 (p. 273), 9 (p. 339) i 10 (p. 401). Els esmentats resultats s'han contrastat amb el marc teòric atès i sintetitzat en els capítols 2 (p. 53), 3 (p. 87), 4 (p. 121) i 5 (p. 153). D'aquesta manera donem resposta als objectius (p. 47, p. 193) de la investigació.

11.1 Respecte de l'assoliment del primer objectiu

Per alimentar el primer objectiu hem planificat i dissenyat tres recollides de dades tal com es pot consultar en el capítol dedicat al disseny i la metodologia de la recerca (p. 191). L'anàlisi de les dades recollides ens ha permès obtenir uns resultats que es poden consultar en el capítol 8 (p. 273). Més concretament cadascun dels tres extractes de resultats amb les corresponents anàlisis estan disponibles a partir de les pàgines 277, 292 i 318.

En la figura 11.2 (p. 468) es recullen els objectius de cadascuna de les parts de la diagnosi l'assoliment dels quals alimenta el primer objectiu de la recerca. En el següent apartat recollirem la informació que es desprèn de cadascun dels objectius particulars en què es desgrana la diagnosi amb la finalitat d'alimentar el primer objectiu.

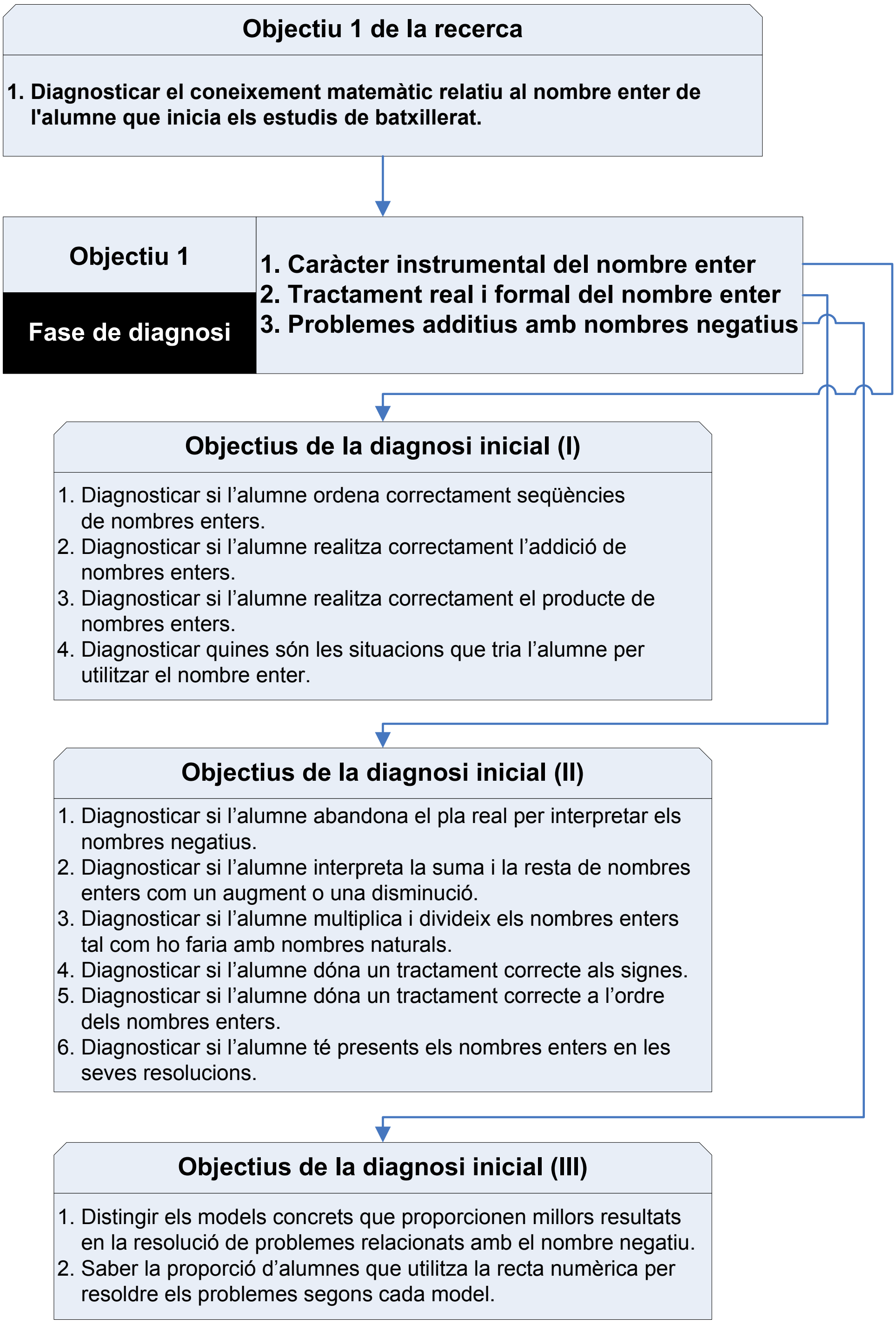


Figura 11.2: Vinculació del primer objectiu amb els objectius particulars de cadascuna de les parts de la fase empírica de la recerca.

11.2 Operacions elementals entre nombres enters

Els resultats obtinguts en la primera part de la primera diagnosi sobre el caràcter instrumental del nombre enter mostra que la totalitat dels estudiants ordena correctament nombres enters (p. 277). Diagnosticar si l'alumne ordena seqüències de nombres enters (p. 284) té un resultat positiu per part de la totalitat de l'alumnat participant en la fase empírica de la recerca.

Respecte de si l'alumne realitza correctament l'addició de nombres enters, més de tres quartes parts de l'alumnat opera correctament l'estructura multiplicativa (p. 287) mentre que poc més de la meitat ho aconsegueix amb l'estructura additiva (p. 285). La focalització de la diagnosi en examinar si l'alumne realitza correctament operacions que impliquin el treball amb productes fa paleses dificultats que són superiors en l'estructura additiva. En el quadre següent es poden observar aquests resultats percentuals globals, per grups i per gènere.

	Global	Grup A	Grup B	Gènere masculí	Gènere femení
Ordre	100%	100%	100%	100%	100%
Addició	53%	35%	69%	46%	60%
Producte	86%	83%	89%	83%	88%

Una part de les aportacions referents al nombre negatiu és la relativa als estudis estadístics o clínics que incideixen en la competència dels alumnes per realitzar tasques en les que intervenen nombres negatius; no és però gens fàcil relacionar les conclusions que obtenen els diferents autors. Els diversos criteris amb els que es dissenyen les preguntes dels qüestionaris, la manca de disponibilitat de les preguntes efectuades i la diferent elecció d'indicadors que recullen la informació es combinen amb distintes anàlisis que prioritzen un o altre aspecte del nombre negatiu. A més, el context que ens ocupa és fonamental ja que les recerques realitzades focalitzen gairebé sempre l'atenció en una primera introducció i no en una etapa intermèdia entre la matemàtica escolar i la superior, que és el cas que ens ocupa. Tot i així contrastem tot seguit els resultats que hem obtingut amb d'altres, tot remarcant les diferències entre els resultats, si s'escau.

Respecte de la realització d'operacions formals, KÜCHEMANN (1981, 1980)[2]

[2]La consulta d'aquests articles fa palès que en el món saxó els nombres enters s'acostumen

proposà a 302 alumnes de 14 anys un qüestionari sobre sumes, restes i productes de nombres enters. La major proporció d'èxits esdevé en sumes i productes; les restes són les operacions que produeixen més errors. KÜCHEMANN (1981, p. 84) obté una proporció d'èxits propera al 80% emprant productes similars als que nosaltres hem proposat; en el nostre cas la proporció d'èxits és d'un 86%.

Murray realitzà un ampli estudi dirigit a 993 alumnes de vuitè grau i a 1331 alumnes de novè grau[3]. La metodologia de la investigació consistí en instruir durant 20 minuts els estudiants de vuitè grau per posteriorment passar el qüestionari. Els alumnes de novè grau havien ja rebut un ensenyament del nombre enter durant el curs acadèmic. La proporció d'estudiants de novè grau que resolia correctament productes com $(-7) \cdot 5$ o $6 \cdot (-4)$ era d'un 84%. En canvi, quan se'ls demanà realitzar sumes entre nombres enters la proporció d'èxits no arribà al 80%, tal com es pot consultar en la figura 11.3 (p. 471). Dels resultats d'aquest autor es desprèn, a més, que així com l'aprenentatge del producte té un avançament important després d'un any d'ensenyament del nombre enter, molt menor és aquesta millora en el cas de la suma.

Els alumnes participants en la nostra recerca obtenen més encerts en els productes (86%) que en les sumes (53%). Aquesta particularitat s'adiu amb els resultats obtinguts per MURRAY (1985). Per explicar aquest fet de ben segur que calen investigacions que prenguin l'esmentada particularitat per objectiu general. Són diverses les possibilitats que permeten donar-hi explicació. LÉONARD i SACKUR (1990), per exemple, destaquen que la proporció d'èxits dels alumnes en la realització de sumes i restes d'enters minva quan s'ensenya el producte de nombres enters. Segons ells és aleshores quan els alumnes apliquen la regla del producte dels signes a les sumes o les restes donant lloc a errors que en un principi no es produïen. D'altres autors com IRIARTE *et al.* (1991) també destaquen aquest fet.

---

a introduir a través d'una notació que diferencia els signes predicatius dels binaris. L'operació binària la utilitzen de la mateixa manera que utilitzen els estudiants el símbol que hom empra per restar. En canvi, per fer referència als signes predicatius els escriuen en forma d'exponents situats a l'esquerra del nombre.

[3]MURRAY (1985) no detalla en l'article les edats a les que es corresponen el vuitè i novè grau que cursen els estudiants a qui dirigeix la fase empírica de la recerca. Tanmateix, les 34 escoles on estudiaven els esmentats alumnes estaven situades a Cape Town (South Africa) i l'any 1985 els esmentats nivells educatius es corresponien en l'esmentada situació geogràfica amb les edats 14-15 anys i 15-16 anys.

Computation	Success Rate(%) Eighth grade (993)	Success Rate(%) Ninth grade (1331)
${}^{-}3 \times {}^{-}4$	33	85
${}^{-}7 \times 5$	45	84
$6 \times {}^{-}4$	54	84
${}^{-}8 + 3$	52	78
${}^{-}4 + 7$	48	77
$10 + {}^{-}3$	51	75
${}^{-}7 + {}^{-}5$	61	74
$3 - 8$	48	69
${}^{-}12 - {}^{-}3$	57	63
${}^{-}5 - {}^{-}12$	34	55
${}^{-}7 - 4$	21	50
$8 - {}^{-}3$	17	46

Table 1

High school students' responses to certain computations involving directed numbers, before and after instruction.

Figura 11.3: Proporció d'alumnes que responen correctament als càlculs demanats de vuitè i novè grau, abans i després de rebre un ensenyament del nombre enter. Dades extretes de MURRAY (1985, p. 147).

11.3 Sobre l'elecció d'un model concret

Els resultats obtinguts i corresponents al quart i darrer objectiu de la primera part de la primera diagnosi sobre el caràcter instrumental del nombre enter mostren que quasi les tres quartes parts de l'alumnat participant opta per algun model concret quan se li demana una activitat relacionada amb nombres negatius (p. 288). Tanmateix, l'estudi per grup i gènere presenta diferències destacades. Com a casos extrems podem veure que tots els nois del grup A trien una activitat relacionada amb algun model concret mentre que només el 58,3% de les noies del grup B ho fa. El detall dels resultats es pot consultar en les figures 8.2 (p. 284), 8.3 (p. 285), 8.4 (p. 286) i 8.5 (p. 287). En els esmentats resultats també podem consultar que entre els alumnes que escullen una activitat relacionada amb models concrets, un 80% es decanta pel model de guanys i pèrdues, un 11,4% pel model dels ascensors i un 8,6% pel model de les temperatures.

El resultat obtingut s'adiu amb el fet que el model de guanys i pèrdues és dels més emprats en els llibres de text actuals a l'Educació Secundària Obligatòria, tal com mostra CID (2003, p. 69). Que hi hagi alumnes que optin per altres models, tot i que en una proporció força inferior, pot provenir del fet que els llibres de text sovint no se centren en un únic model per introduir els nombres enters, sinó que presenten diversos models, alguns de neutralització i d'altres de desplaçament tot fent servir el que en cada moment considerin més adequat.

En els llibres de text emprats pels estudiants copsem que efectivament s'utilitzen diversos models concrets per a la introducció del nombre enter. El model de les temperatures s'empra per introduir l'estructura additiva acompanyat també d'exemples sobre el model dels ascensors i de guanys i pèrdues. En finalitzar la introducció de l'estructura additiva també s'afegeix un apartat dedicat a mostrar regles pràctiques per sumar enters. En canvi, el producte de nombres enters s'introdueix a través d'una escala i és immediatament a continuació on es mostra la regla dels signes. Així, la introducció a través de models concrets es complementa i se segueix amb la instrucció de les regles de càlcul. Podem concloure d'aquest petit examen que la proposta actual d'introduir els nombres enters a través de models concrets es complementa amb la instrucció.

11.4 Tractament real i formal del nombre enter

11.4.1 L'abandonament del pla real per interpretar els nombres negatius

Les dades ens diuen que la cinquena part de l'alumnat manifesta que mai s'havia plantejat una situació real en la que tingués sentit $-(-3)$. El 18% dóna un tractament algebraic desvinculat de tot fenomen real i el 30% un exemple quotidià, tal com es pot consultar en l'indicador A1 de la figura 8.13 (p. 304). La presentació de resultats per grup i gènere es pot consultar en les figures 8.14 (p. 305), 8.15 (p. 305) i 8.16 (p. 306). L'abandonament del pla real per part del discent per interpretar els nombres negatius és esporàdic entre els participants. És una tercera part de l'alumnat que mira de donar una explicació interna a la matemàtica. Tanmateix, la diversitat de respostes des del punt de vista dels models concrets es limita a menys d'una tercera part de l'alumnat. La proporció d'alumnes que diuen que mai s'ho havien plantejat, més la dels que no troben cap exemple, més la dels que no en volen trobar, supera la meitat de l'alumnat. Reduïm les categories de resposta dels resultats que es poden consultar en la figura 8.13 (p. 304) i els presentem en el quadre següent:

	No respon	Tract. algebraic	Exemple real
Global	52%	18%	30%
Grup A	60,9%	8,7%	30,4%
Grup B	44,5%	25,9%	29,6%
Gènere masculí	48%	16%	36%
Gènere femení	56%	20%	24%

IRIARTE *et al.* (1991, p. 13) destaquen el cas d'un alumne de magisteri que va respondre que no podia trobar una situació real en la que tingués sentit $-(-3)$ perquè: «no es posible quitar una cosa que no existe». Aquest aport teòric data de l'any 1991. En l'actualitat l'ensenyament del nombre enter a través de models concrets és generalitzat a totes les aules. La figura 8.17 (p. 307) mostra que la utilització de nombres negatius davant d'activitats pròpies del dia a dia, en algunes ocasions són contraproduents.

> La aritmètica elemental no permite poner de manifiesto la utilidad de los números negativos, o de los números enteros en particular, porque todos los problemas que se plantean en ese ámbito pueden resolverse perfectamente en términos de números positivos.
>
> (CID, 2002, p. 537)

> Mientras no se abandone el plano de lo real es difícil concebir los números negativos, porque simplemente, no son necesarios.
>
> (IRIARTE *et al.*, 1991, p. 13)

La figura 8.18 (p. 308) mostra un intent d'utilitzar el model de guanys i pèrdues per part de l'alumne amb la intenció de justificar el valor de $-(-3)$. L'exemple que empra l'estudiant cerca el valor de $-(-3)$ però hi apreciem dues particularitats. En primer lloc l'alumne conclou que $-(-3) = -3$. En segon lloc, l'alumne mira d'interpretar amb dificultats i errors el valor de $-(-3)$ a partir del seu entorn proper. Aquest procés és raonable en una primera introducció però finalitzada l'escolarització obligatòria el procés s'hauria d'haver invertit. L'alumne hauria de poder emprar eines matemàtiques, els nombres negatius en particular, per tal d'interpretar i valorar informacions de l'entorn.

> La competència matemàtica és necessària en la vida personal, escolar i social, ja que sovint cal analitzar, interpretar i valorar informacions de l'entorn i l'ús de les eines matemàtiques pot ser un instrument eficaç. Aquesta competència adquireix realitat i sentit en la mesura que els elements i raonaments matemàtics són utilitzats per enfrontar-se a aquelles situacions quotidianes.
>
> (143/2007, 2007, p. 21880)

Els resultats que obtenim estan d'acord amb la posició de BRUNO (2001). L'ensenyament del nombre enter a través de models concrets esdevé en l'alumne una continuació de l'aprenentatge previ, però:

> El inicio de la enseñanza de los números negativos con alumnos de 12 o 13 años (edad en la que suele realizarse) supone la modificación de ideas fuertemente arraigadas y construidas a lo largo de toda la enseñanza primaria e, incluso, antes.
>
> (BRUNO, 2001, p. 415)

De l'anàlisi de les estratègies emprades pels estudiants per efectuar les operacions entre nombres enters que realitza BELL (1982) es desprenen dues posicions. Per una part els que interpreten quantitats inferiors a zero i per l'altra els que empren raonaments basats en la recta numèrica. En el cas de la suma sovint els estudiants opten per considerar el primer sumand com un punt de la recta i, a partir d'allà, compten tantes unitats com indica el segon sumand a la dreta o a l'esquerra, segons que aquest sigui positiu o negatiu. Segons l'esmentat autor els alumnes empren un procediment similar en el cas de la resta i això fa que davant d'operacions com $7-(-2)$ diguin que el resultat és 5 perquè «restar és anar cap a l'esquerra», tal com destaca CID (2003, p. 14).

Per finalitzar, el contrast entre els resultats que hem obtingut respecte de l'indicador A1, dedicat al nombre com expressió de quantitat, i els fonaments teòrics volem destacar un aspecte puntual i qualitatiu que considerem molt rellevant. En la figura 8.19 (p. 308) l'alumne diu que no podem trobar una situació real en la que tingui sentit $-(-3)$. L'alumne afirma tot seguit: «[...] però en el món matemàtic, no real, sí perquè $-(-3)$ és igual a 3. Ja que el signe « $-$ » davant d'un parèntesi, a matemàtiques, canvia el signe del que hi ha a dins». Apreciem en la resposta de l'alumne un aprenentatge que sembla que es derivi d'una introducció instructiva (p. 25) del nombre enter. Potser, tal com mostra ARCAVI (1999, p. 41) això facilita que els estudiants siguin tècnicament hàbils, però no que estiguin acostumats a generar explícitament comprensió i sentit del que s'aprèn.

11.4.2 Interpretació de la suma i la resta de nombres enters

L'interrogant A2 de l'instrument de recollida de dades dirigit a l'estudi del tractament que fa l'alumne amb el nombre enter, disponible a l'annex II (p. 577), condueix a informar sobre la vinculació que dóna l'alumne entre la suma de nombres enters i l'augment d'una determinada mesura. L'A4 informa sobre la vinculació entre resta i disminució d'una quantitat. Ens preguntem si l'alumne abandona el pla real per concebre la suma entre nombres negatius o si manté la vinculació entre sumar nombres enters i augmentar mesures de quantitat de magnitud. L'A4 permet a més esbrinar si l'estudiant abandona el pla real per concebre la resta entre nombres negatius o si manté la vinculació entre restar nombres enters i disminuir mesures de quantitats de magnitud.

Quan demanem als estudiants que trobin un nombre que sumat a 5 doni 2 apreciem que el 90% dels participants realitza l'operació desvinculada de la realitat. En canvi, quan els demanem si és possible trobar un nombre que restat de 7 doni 10 només realitza correctament l'activitat quasi un 45% de l'alumnat, tal com es pot consultar en els indicadors A2 i A4 de la figura 8.2 (p. 284). La presentació de resultats per grup i gènere està disponible en les figures 8.3 (p. 285), 8.4 (p. 286) i 8.5 (p. 287).

Les figures 8.20 (p. 310) i 8.21 (p. 311) mostren com un mateix participant que tracta correctament el cas de la suma no ho fa amb la resta. Apreciem una vinculació entre resta i disminució que no sembla superada per l'estudiant. Citem les paraules dels discent quan respon a la pregunta de si és possible trobar un nombre que restat de 7 doni 10: «No, perquè set és menor a deu i si li restes diferents nombres el resultat serà menor a 7». Tot seguit l'estudiant fa un tractament inductiu (p. 68), tal com es pot consultar en la figura 8.21 (p. 311). Aquesta vinculació també l'apreciem en el cas il·lustrat en la figura 8.22 (p. 312). En aquest cas la resposta de l'alumne és clara i contundent: «No, perquè el número 10 és més gran que 7». Aquesta interpretació pròpia de l'aritmètica elemental (p. 99) és una dificultat per a l'aprenentatge del nombre negatiu, tal com ho va ser des del punt de vista epistemològic la seva acceptació. CID (2002, pp. 538-539) destaca que l'estudi de l'epistemologia del nombre negatiu posa de manifest que la gènesi d'aquests nombres es va produir en el sí de l'àlgebra i que la seva acceptació va estar dificultada per l'exigència de la matemàtica clàssica d'interpretar els objectes algebraics com objectes de l'aritmètica elemental. Segons la mateixa autora, BROUSSEAU (1983); CID (2000); GLAESER (1981); SCHUBRING (1988) proposen que l'aritmètica elemental i, en particular, el fet que els nombres només poguessin prendre sentit com a mesures de quantitats de magnitud, va constituir un obstacle epistemològic al reconeixement matemàtic dels nombres negatius. Si això es confirmés, i els resultats que obtenim en la present investigació ho fan, ens trobaríem que l'ensenyament habitual dels nombres enters per mitjà de models concrets estaria fomentant aquest obstacle en lloc d'ajudar a superar-lo, tal com apuntem a partir de la pàgina 99 on parlem dels fonaments teòrics.

La vinculació entre resta i disminució és present entre els estudiants de primer curs de batxillerat participants en la recerca. No només és present sinó que, a més, no arriba a la meitat la proporció d'alumnat per al qual el real no és un obstacle i que, per tant, realitza correctament les operacions demanades, com es recull en la taula 8.2 (p. 284) de resultats globals.

MURRAY (1985) examina alumnes de secundària que han rebut ensenyament sobre nombres enters i obté major proporció d'èxit en el producte de nombres enters (85%) que en les sumes (75%). Molt destacat és el fet que en les restes de nombres enters obté resultats que varien entre el 46% (en restes de la forma $8-(-3)$) i el 69% (en restes de la forma $3-8$). CID (2003) destaca que BELL (1982) en entrevistes realitzades a alumnes de 15 anys d'edat comprova que així com el 80% suma correctament dos nombres enters, només el 40% és capaç de restar sense errors. En la nostra investigació, com hem comentat en les línies anteriors, l'èxit en el cas de la suma es produeix en un 90% dels casos en els quals apreciem que la vinculació de la suma amb augment no és un obstacle per a la majoria dels alumnes. En el cas de la resta l'èxit es redueix a un 45% i la vinculació d'aquesta operació amb disminució és clarament un obstacle diagnosticat.

Copsem en els participants una resta lligada amb el pla real fins el punt que una important proporció d'alumnat identifica restar amb treure i amb disminuir. Iriarte, Jimeno i Vargas-Machuca aprofiten aquesta mateixa conclusió per destacar una cita de Blaise Pascal que obre una reflexió que no volem eludir: «He conocido algunos que no podían entender que al restar cuatro de cero quede cero», extret de IRIARTE *et al.* (1991, p. 14). La transparència amb la que els estudiants aprenen la matemàtica escolar prèvia al nombre negatiu trontolla amb aquest nou contingut. Efectivament, si restar és treure, aleshores restar quatre de zero no pot tenir per resultat altra cosa que zero.

BELL (1982) analitza les estratègies emprades pels alumnes per efectuar les operacions entre nombres enters. Dels seus resultats es desprèn que tant en la suma con en la resta els alumnes empren raonaments basats en la recta numèrica. Segons Bell els errors que fan els alumnes es deuen a que no interpreten la resta com una comparació sinó de posar en pràctica l'acció de treure, tal com copsem en aquesta recerca. És el mateix punt d'arribada el de GALLARDO (1996) quan parla de la triple naturalesa de la diferència.

Tal com assenyala KLEIN (1927-1931, Vol. 1, pp. 32-33), l'alumne està acostumat a veure en els nombres representacions de coses reals i concretes i en les operacions vinculació amb el món real. Però l'alumne es troba amb els nombres negatius que no tenen el sentit de nombre conegut per l'estudiant i, en canvi, ha d'operar amb ells quan han perdut el significat clar i intuïtiu que abans tenien. Amb el nombre negatiu és inevitable el salt de la matemàtica pràctica a la formal (p. 65).

Per altra banda apreciem èxits en els tractaments que impliquen una desvinculació amb tota situació empírica i que opten per un tractament algebraic, tal com es pot consultar en les subfigures (a) i (b) de la figura 8.23 (p. 312).

11.4.3 Interpretació del producte i del quocient de nombres enters

L'interrogant A3 de l'instrument de recollida de dades sobre l'ús del nombre enter, disponible a l'annex II (p. 577), condueix a informar sobre el tractament que dóna l'alumne al producte de nombres enters. La multiplicació de nombres naturals es correspon amb afegir repetides vegades una mateixa quantitat. Amb nombres enters el producte abandona aquesta transparència i arriba a l'alumne de diferents maneres que recollim en l'indicador A3. L'indicador A5 informa sobre el tractament que atorga l'estudiant a la divisió de nombres enters. El quocient neix en l'infant com una operació que es correspon amb el repartiment d'una determinada quantitat d'objectes en subconjunts amb el mateix cardinal. L'indicador A5 recull el punt d'arribada dels estudiants respecte de la divisió dels nombres enters per copsar si la interpreten més enllà d'un repartiment. En ambdós casos cerquem si l'alumne ha abandonat el pla real i concep la multiplicació i la divisió de nombres enters més enllà de les accions que els són associades en el treball amb nombres naturals.

Quan demanem un múltiple de 5 menor que 3 i diferent de zero la meitat de l'alumnat diu que no és possible, tal com es pot consultar en l'indicador A3 dels resultats globals disponible a la figura 8.2 (p. 284). Respecte de la divisió un 48% de l'alumnat diu que la divisió proposada no és correcta perquè el residu ha de ser nul o positiu, tal com es pot veure en l'indicador A5, disponible en les figures 8.3 (p. 285), 8.4 (p. 286) i 8.5 (p. 287).

En les subfigures (a) i (b) de la figura 8.24 (p. 313) podem observar com dos participants de primer curs de batxillerat limiten les seves respostes al treball amb nombres naturals. Probablement els continguts relatius al nombre enter constitueixin uns coneixements apresos pels estudiants, però de les dades no es desprèn que sigui una competència adquirida.

Els alumnes que responen correctament a les preguntes que ara ens ocupen no limiten els seus raonaments a entorns aritmètics elementals. En la figura 8.25 (p. 314) veiem que una alumna fa ús de la recta numèrica, situada en posició vertical, per recolzar la seva afirmació. BELL (1982) analitza les estratègies emprades pels alumnes per efectuar les operacions entre nombres enters. Dels seus resultats es desprèn que tant en la suma com en la resta els alumnes empren raonaments basats en la recta numèrica, fet que s'adiu amb el que hem copsat en la present investigació.

Apreciem en els resultats obtinguts que la introducció del nombre enter a través de models concrets requereix un procés de descontextualització de les nocions apreses (p. 62), com mostra CID (2003, p. 8), ja que de les dades recollides es desprèn que no s'ha aconseguit de manera exhaustiva entre els alumnes participants que cursen primer curs de batxillerat.

La vinculació entre les operacions amb nombres enters i fenòmens reals obstaculitza l'aprenentatge i la construcció dels nombres enters pel fet que interromp el trencament amb el real (p. 67), tal com presenten IRIARTE *et al.* (1991, pp. 17-18).

La utilització des d'edats tendres d'etiquetes per identificar números de telèfon o matrícules de cotxes no requereix cap operació aritmètica. També hom empra nombres per indicar, per exemple, el número de torn en una tenda; però tampoc cal cap operació aritmètica. En un cert moment de la matemàtica escolar hom es pregunta per la quantitat d'objectes d'un conjunt; la quantitat de pomes que hi ha en un cistell, per exemple. Les accions afegir, treure, afegir repetides vegades i repartir (p. 123) dicten el comportament de les operacions aritmètiques elementals entre nombres naturals, tal com indica DAVIS (1974, p. 101). Aquesta vinculació entre nombres i expressions de quantitat és palesa en les respostes dels alumnes i, alhora, això va obstaculitzar durant segles (p. 146) l'acceptació dels nombres negatius, com destaquen IRIARTE *et al.* (1991, p. 17).

11.4.4 Els signes « + », « − » i els nombres enters

L'indicador A7 de l'instrument de recollida de dades dirigit a l'estudi del tractament que fa l'alumne del nombre enter, disponible a l'annex II (p. 577), ens permet copsar la utilització i la interpretació dels nombres amb signe que fan els estudiants. L'esmentada utilització participa de les competències en el treball amb nombres negatius. L'indicador A8 informa sobre la identificació que fa l'estudiant entre símbols literals i nombres positius.

Demanem als estudiants si hi ha hagut una pujada o una baixada de temperatura en anar de Moscú a Budapest tot facilitant-los la temperatura d'ambdues ciutats. Un 94% dels estudiants resol correctament el que se'ls demana, tal com es pot consultar en l'indicador A7 de la figura 8.2 (p. 284). Posteriorment mirem d'aprofundir en la identificació que fan els estudiants entre símbols literals i nombres positius. La proposta d'esbrinar si $a - b$ és positiu sabent que a és positiu i b és negatiu és atesa correctament per poc menys d'un 39% dels participants; 48% de noies i 29,2% de nois. La presentació de resultats per grup i gènere es pot consultar en les figures 8.3 (p. 285), 8.4 (p. 286) i 8.5 (p. 287).

Segons JOHNSON (1986, p. 507) el problema rau en la lectura del símbol $-x$. Respostes com «x negatiu», «menys x» o «l'oposat d'x» no tenen significat per l'estudiant. L'esmentat autor destaca les dificultats que provenen d'emprar la nomenclatura *nombre negatiu*. L'expressió $-x$ hom la llegeix com *menys* x i aquí comença el problema ja que els estudiants associen a l'esmentada expressió un nombre menor que zero (p. 112).

Confirmem a partir de les dades recollides l'observació de JOHNSON (1986). En la figura 8.27 (p. 316) apreciem que l'alumne veu que l'enunciat diu que b és negatiu. Tot seguit com que en l'enunciat es demana el valor de $a - b$, l'estudiant inicia la resolució escrivint $a - (-b)$. És a dir, el participant en la recerca canvia b per $-b$ pel fet que l'enunciat diu que b és negatiu! En conseqüència per a l'estudiant una expressió de la forma b o x sempre és positiva. Això ho hem apreciat a primer curs de batxillerat. Tot i que no és generalitzada aquesta confusió sí que obre una pregunta d'investigació ja que probablement en l'ensenyament obligatori aquesta confusió pot donar-se en una proporció més àmplia d'alumnat.

KIERAN (1985) realitzà un estudi sobre resolució d'equacions dirigit a dues categories d'estudiants. Deu d'ells tenien edats compreses entre 12 i 13 anys i no havien estudiat àlgebra amb anterioritat. Uns altres nou estudiants havien rebut almenys un curs acadèmic amb continguts d'àlgebra; sis de 14 a 15 anys, un de 15 a 16 anys, un de 16 a 17 anys i un altre de 17 a 18 anys. En l'estudi, l'autor presenta els errors que són comuns a ambdós grups d'alumnes i els que es donen exclusivament en cadascun d'ells. KIERAN (1985, p. 144) observa que els estudiants que han rebut ensenyament previ d'àlgebra deixen un signe negatiu davant de la incògnita quan presenten una solució negativa; l'autor posa l'exemple $-x = -17$. El fet d'obtenir una solució negativa condueix els estudiants a posar $-x$ en lloc d'x. El tractament donat per l'estudiant, que es pot consultar en la figura 8.27 (p. 316), s'adiu també amb el resultat obtingut per KIERAN (1985).

La consulta en un diccionari del mot «negatiu» revela un problema de comunicació. En l'accepció referida a la matemàtica que es pot trobar en la consulta del diccionari[4] tenim: «Que tiene valor menor que cero o está precedido por el signo $(-)$». En virtut d'aquesta definició $-x$ és negatiu, sigui quin sigui el valor que pugui prendre x. En conseqüència, la confusió que trobem en els alumnes, també referenciada per JOHNSON (1986, p. 507), queda reforçada davant de la consulta del diccionari.

La terminologia *negatiu* apareix entre els algebristes amb un rebuig que va fer que se'ls qualifiqués de falsos, ficticis o absurds. Segons GONZÁLEZ *et al.* (1990, p. 28) la terminologia *negatiu* probablement va aparèixer en aquella època pel fet que eren els valors negats quan s'obtenien com arrels d'una equació (p. 129). I davant d'aquesta reflexió epistemològica ens preguntem, per què no donem l'oportunitat als estudiants que puguin negar l'existència de solucions d'equacions com, per exemple, $2+x=1$. D'aquesta manera quan li volguéssim donar solució requeriríem acceptar nous nombres que podríem anomenar *negatius*, ja que durant un temps hauríem negat la seva existència[5].

En la figura 8.27 (p. 316) veiem com l'estudiant tracta b com un nombre positiu i el canvia per $-b$ per indicar que és negatiu. L'ensenyament a través de models concrets distingeix tres significats (p. 113) pel signe « $-$ »: operació binària, signe d'un nombre (anomenat símbol predicatiu) i indicació que cal invertir el signe posterior (anomenat símbol unari), tal com mostren entre d'altres BRUNO i MARTINON (1996*b*, p. 100). CARRAHER (1990) va presentar problemes additius de guanys i pèrdues a estudiants i adults que no havien rebut un ensenyament previ sobre nombres enters ni negatius. Tant els uns com els altres podien resoldre correctament les activitats proposades oralment però, en canvi, les confusions es produïen en el moment d'escriure les operacions formalment. Segons aquest autor la necessitat rau en distingir la representació semàntica dels nombres negatius i la seva representació matemàtica.

[4]Extret del Diccionario de la Lengua Española (vigésima segunda edición). Disponible a `http://www.rae.es/rae.html` i consultat el dia 26 d'agost de 2008.

[5]La proposta curricular actual dóna l'oportunitat d'atendre problemes i equacions que es poden resoldre segons el conjunt numèric atès. Els nombres complexos apareixen com a solucions d'equacions quadràtiques que no tenen arrels reals (142/2008, 2008, p. 59282).

Les esmentades confusions arriben a produir a primer curs de batxillerat errades com les que es poden consultar en la figura 8.28 (p. 317). Copsem que l'estudiant escriu en el full de resolució les regles dels signes pel producte, sembla que amb la intenció de tenir-les presents, i les aplica a l'activitat proposada. L'alumne no reconeix el símbol unari de l'expressió $-(-b)$, tot i haver rebut un ensenyament del nombre enter a través de models concrets; sí que recorda la instrucció rebuda. Apreciem una separació entre el pensament natural i el pensament acadèmic. La flexibilitat de pensament que hom mostra en situacions alienes a l'escola esdevé inflexibilitat davant d'un exercici escolar, tal com conclouen IRIARTE *et al.* (1991, p. 17). L'ensenyament de la matemàtica té l'oportunitat d'arribar als estudiants com una ciència que prenent l'experimentació com a punt de partida fa paleses les necessitats de donar rigor a les nostres observacions i descobriments.

> La construcció del coneixement hauria de traslladar la transparència del que per l'alumne és indubtable als resultats finals, tot evitant el que podria considerar, des del seu punt de vista, maniobres matemàtiques desvinculades del seu sentit comú. Si no esdevé aquesta construcció aleshores no hi ha comprensió efectiva. Si l'ensenyament es reitera en la falta d'aquesta comprensió aleshores arriba a l'alumne com una col·lecció de lleis, normes o manaments que el converteixen en un ser obedient sense independència intel·lectual, cada vegada més com més avança el seu procés d'aprenentatge.
>
> (PUJOL, 2006, p. X)

L'ensenyament de la matemàtica a través de models concrets, complementada amb la instrucció, tal com es pot consultar en els llibres de text emprats pels estudiants en l'ensenyament obligatori, facilita la resolució d'activitats quotidianes com la que alimenta l'indicador A7, però no dóna significat al treball simbòlic (veure A8) i, per tant, no facilita un pont didàctic entre l'ensenyament del nombre negatiu i l'àlgebra elemental.

11.4.5 Sobre l'ordre dels nombres enters

Respecte del tractament que fan els alumnes de l'ordre dels nombres enters hem copsat bons resultats. L'indicador A6 mira d'esbrinar si l'estudiant comet errors que poden provenir de traslladar als enters l'ordre dels naturals; el 96% de l'alumnat dóna un tractament correcte a les activitats que els hem proposat. L'indicador B11 recull els errors que provenen d'un tractament incorrecte en la reversibilitat de l'ordre; el 90% de l'alumnat resol correctament les activitats proposades. L'indicador B12 recull els errors que provenen d'activitats que requereixen el treball amb seqüències temporals. En aquest cas l'èxit es redueix a un 74% dels casos. L'indicador B13 recull informació relativa a la identificació de nombres per comparació amb d'altres. En aquest cas l'èxit es produeix en un 32% dels casos. Tot i així, copsem una manca de comprensió del que es demana en l'anàlisi de les respostes i el resultat està, per tant, fortament influenciat per la competència lingüística dels participants.

La justificació de l'ordre en els nombres enters exigeix, quan la introducció es fa a través de models concrets, una valoració moral que estableixi que el sentit positiu és millor que el negatiu. Per exemple, és millor tenir fitxes vermelles que blaves, és millor tenir guanys que pèrdues, és millor tenir punts positius que negatius, ..., tal com destaca CID (2003, p. 5). Tot i així, no copsem aquest fet en les respostes dels alumnes i, en canvi, l'èxit està fortament lligat amb la utilització de la recta numèrica mentre que els errors provenen, en gran mesura, d'una manca de comprensió del propòsit que es demana.

11.4.6 Sobre la competència en els nombres enters

Entenem per competència la capacitat d'utilitzar els coneixements i habilitats, de manera transversal i interactiva, en contextos i situacions que requereixen la intervenció de coneixements vinculats a diferents sabers (143/2007, 2007, p. 21872). Així, per a que l'estudiant sigui competent no n'hi ha prou amb que tingui uns determinats coneixements relatius al nombre enter, contingut que ens ocupa en la present investigació. També cal que els utilitzi en contextos i situacions on siguin necessaris per tal de resoldre les activitats que s'hi plantegin.

Com a darrer objectiu d'aquesta segona part de la diagnosi ens hem proposat examinar si els alumnes tenen presents els nombres enters en les seves resolucions. Tot i així, més de la meitat de l'alumnat no té en compte els nombres enters en algun dels casos proposats. Podem entendre que el nombre enter és un coneixement après però que no és emprat per l'estudiant de manera generalitzada en les seves resolucions.

Segons PIAGET (1975), citat per IRIARTE *et al.* (1991, p. 17), els enters apareixen no com a resultat d'una acció sinó com la presa de consciència dels mecanismes que regeixen la pròpia acció, i d'aquí que la seva aparició fos més tardana. Els models concrets faciliten una interacció ràpida entre accions i operacions entre nombres enters però els mecanismes que regeixen aquestes accions viuen dins la matemàtica.

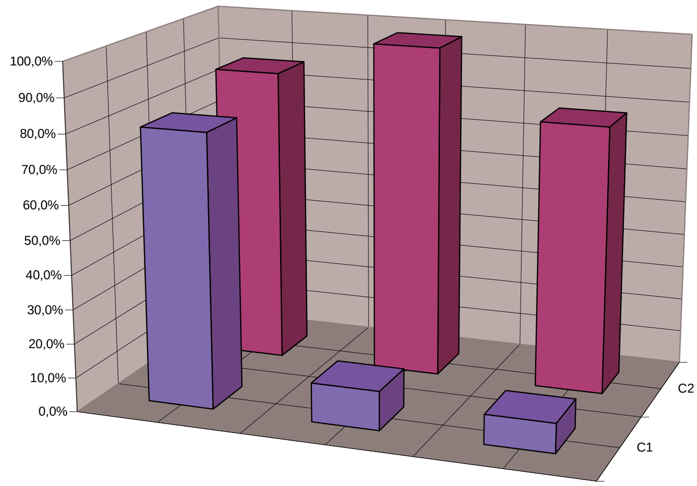
11.5 Problemes additius amb nombres enters

11.5.1 Models concrets que proporcionen millors resultats

Ens proposem en aquest apartat mostrar les conclusions relatives a la distinció dels models concrets que proporcionen millors resultats en la resolució de problemes relacionats amb el nombre negatiu.

Els resultats obtinguts de les dades recollides es poden consultar en la figura 8.30 (p. 330). D'elles es desprèn que el model concret de les temperatures, que condueix a la comparació de dos estats, produeix èxits en el 78,8% de l'alumnat. En canvi, el model concret de les temperatures que condueix a la suma de dues variacions i que té per resultat una variació té un èxit inferior (61,7%). El model concret de guanys i pèrdues, que es correspon amb la suma de dos estats que té per resultat un estat, produeix un 87,2% d'èxits. La proposta relacionada amb el model del nivell del mar, equivalent al model dels ascensors, té un efecte molt positiu en l'alumnat i produeix èxits en el 97,9% dels casos. El treball amb el model temporal que condueix a la diferència de dos estats que té per resultat una variació produeix èxit en el 85,1% dels casos. Finalment, el model de la carretera que condueix a la suma d'un estat inicial i una variació que té per resultat l'estat final produeix èxit en el 8,5% dels casos. Aquesta proporció prové en gran mesura del fet que el problema donava una doble resolució que només ha estat atesa per una petita part dels participants. La presentació de resultats per grup i gènere es pot consultar en les figures 8.31 (p. 330), 8.32 (p. 331) i 8.33 (p. 332).

Els resultats mostren que el model concret que més èxit ha tingut és el relacionat amb el nivell del mar. Aquest model de desplaçament és equivalent al de les temperatures ($e_i + v = e_f$) i, en conseqüència, els resultats reforcen la proposta de SEMADENI (1984, p. 389), entre d'altres, tal com es pot consultar en la pàgina 61. El model de guanys i pèrdues és el segon que obté millors resultats tot i que, tal com hem vist en la pàgina 471, quan demanem als estudiants que escullin una activitat que per ser resolta requereixi nombres negatius, el 80% es decanta pel model de guanys i pèrdues. Així, el model que els alumnes escullen no és el que resolen amb més èxit. La figura 11.4 (p. 485) recull en la sèrie 1 (C1) la proporció d'estudiants que escull cadascun dels tres models atesos. La proporció del total d'alumnes que, per a cadascun dels tres models esmentats, resol correctament les activitats està recollida en la sèrie 2 (C2).



	Guanys i pèrdues	Ascensors	Temperatures
Sèrie1	80,0%	11,4%	8,6%
Sèrie2	87,2%	97,9%	78,7%

Figura 11.4: Models concrets més escollits pels participants i proporció d'èxit de cadascun.

En la figura 8.34 (p. 333) veiem una participant que per obtenir la diferència entre les temperatures de les dues ubicacions proposades no efectua cap diferència de nombres enters. La il·lustració d'uns termòmetres són el pas previ que condueix a l'estudiant a afirmar, erròniament, que la temperatura ha d'augmentar setze graus centígrads. En canvi, un petit treball algebraic arriba a bon port, tal com es pot consultar en la figura 8.35 (p. 333). No sembla que el suport gràfic ajudi, en el cas que ens ocupa, a obtenir el resultat correcte. Alhora, la resolució algebraica no afavoreix la contextualització del problema per a l'alumne que ho requereix, però condueix a bon port al discent que comprèn el que se li demana.

En la figura 8.36 (p. 334) observem que l'activitat corresponent al model de guanys i pèrdues és resolta per l'alumna sense emprar nombres negatius. Aquest és un exemple minúscul que mostra que els estudiants eviten els nombres negatius quan els és possible. Per resoldre l'activitat demanada l'alumne no necessita els nombres negatius i, tal com diuen IRIARTE *et al.* (1991, p. 13), es difícil que l'alumne concebi els nombres negatius mentre es mantingui en el pla real.

En l'activitat que es pot consultar en la figura 8.38 (p. 335) l'estudiant destria dos casos no donant per fixat el sentit positiu; és un cas aïllat el que podem consultar en aquesta resolució. Una de les conseqüències negatives de la utilització de la recta numèrica és que condueix a una àmplia part de l'alumnat a fixar un sentit positiu que, en ocasions, no està determinat en els enunciats.

En la figura 8.37 (p. 334) podem consultar la resolució prou detallada d'una alumna. Sembla que evita els nombres negatius tot fent diverses consideracions que es podrien interpretar com una falta de claredat en el procés de resolució. Tanmateix, l'anàlisi detallada mostra que senzillament l'alumna no necessita nombres negatius per resoldre l'activitat proposada.

Els alumnes resolen les activitats plantejades sense emprar sovint nombres negatius. Aquest resultat recolza la posició de IRIARTE *et al.* (1991, pp. 17-18) que destaquen que l'intent d'utilitzar un model concret que recobreixi l'estudi dels nombres negatius és contraproduent. Amb això el que s'aconsegueix és convèncer l'alumnat de la inutilitat dels nombres negatius ja que, segons els autors, els exemples que a vegades es proposen per justificar certes propietats dels nombres enters es resolen millor en el marc de la lògica natural. En el cas que ens ocupa els estudiants resolen sovint correctament les activitats que se'ls demana sense emprar nombres negatius.

11.5.2 Sobre la utilització de la recta numèrica

Ens proposem en aquest apartat mostrar les conclusions relatives a la utilització que fan els alumnes de la recta numèrica segons el model concret considerat.

Hi ha dos models concrets que condueixen en major mesura a emprar la recta numèrica. En primer lloc, un 42,6% dels alumnes la utilitza en la resolució de l'activitat corresponent al nivell del mar. El 40,4% també empra la recta numèrica pel model de la carretera. Els altres models tenen resultats molt inferiors tal com es pot consultar en la figura 8.30 (p. 330).

Quan ens preguntem el motiu pel qual s'esdevé aquesta diferència de proporcions, el primer que observem és que ambdós models són de desplaçament. En segon lloc, veiem que ambdós models es corresponen amb un estat inicial que sumat a una variació té per resultat un estat final. En aquest moment hem de distingir dos camins per mantenir el rigor de la recerca. En el terreny de les implicacions didàctiques apreciem que l'equació vinculada al model té unes particularitats que poden donar una explicació a aquest fet, tal com es pot consultar a partir de la pàgina 521. En aquest capítol ens mantindrem però exclusivament en el terreny de les conclusions.

Com mostràvem en la pàgina 147, de les tres utilitats de la recta numèrica que destaca ERNEST (1985), la segona és la més rellevant per contrastar els resultats que hem obtingut en l'experimentació realitzada a primer curs de batxillerat. Una ajuda per ordenar nombres no és rellevant en el moment educatiu que ens ocupa ja que els alumnes ho realitzen correctament, tal com ja hem diagnosticat. Ara bé, la representació en la recta numèrica de la suma i de la resta de nombres enters pels models concrets de desplaçament d'estructura $e_i + v = e_f$, és a dir els que sumen una variació a un estat inicial per obtenir un estat final, és de gran ajuda per als estudiants. Aquesta conclusió de la diagnosi inicial és rellevant per a la present investigació ja que l'instrument metodològic que emprem en la fase d'intervenció (p. 241) també s'adiu amb l'estructura d'aquests models.

Les dificultats que mostren CARR i KATTERNS (1984) respecte de la no comprensió del principi en el que es recolza el model de la recta numèrica davant de les operacions sumar i restar no les hem apreciat en la present investigació. En el nostre cas hem copsat que quan els estudiants empren la recta numèrica els resultats acostumen a ser més favorables que quan no l'empren. Segons Küchemann (1980, p. 32) en l'ús de la recta numèrica els enters es veuen com posicions i també com desplaçaments i aquest canvi de significat pot produir confusions en els estudiants. Tot i les reticències d'alguns autors, les dades recollides en aquesta investigació mostren que la recta numèrica ha estat una ajuda pels alumnes.

11.6 Respecte de l'assoliment del segon i tercer objectius de la recerca

Per alimentar el segon i tercer objectius hem planificat sis activitats formatives tal com es pot consultar en el capítol dedicat al disseny i la metodologia (p. 191). L'anàlisi de les dades recollides ens ha permès obtenir uns resultats que es poden consultar en els capítols 9 (p. 339) i 10 (p. 401). Més concretament cadascuna de les sis activitats formatives amb les corresponents anàlisis estan disponibles a partir de les pàgines 342, 357, 375, 405, 418 i 436.

En la figura 11.5 (p. 489) es recullen els objectius de cadascuna de les activitats formatives l'assoliment de les quals permet alimentar el segon i tercer objectius.

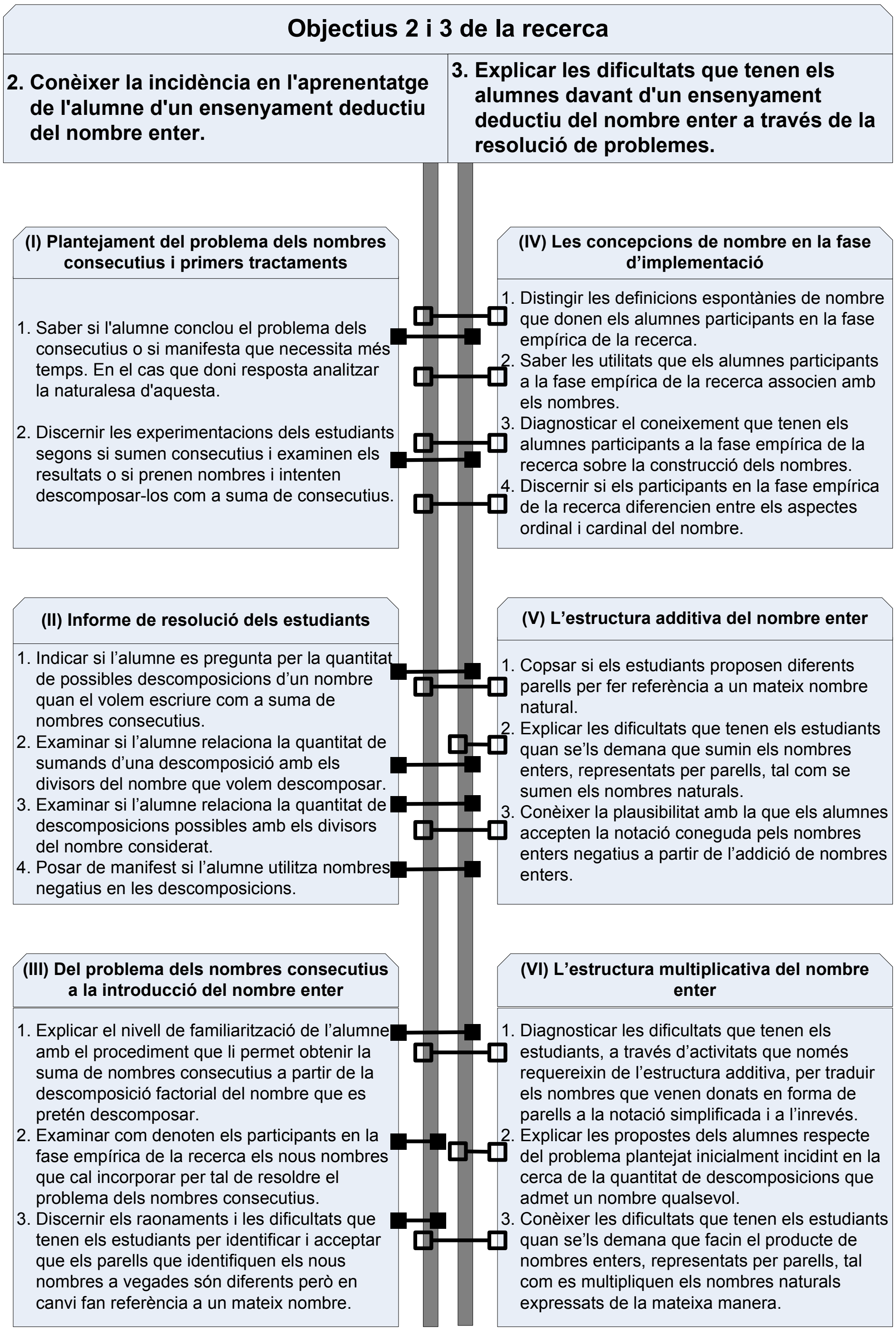


Figura 11.5: Vinculació del segon i tercer objectius de la recerca amb els objectius particulars de cadascuna de les activitats formatives de la fase d'intervenció.

11.7 Plantejament del problema dels nombres consecutius

El primer dia que vam proposar el problema dels nombres consecutius als estudiants, el dilluns 8 d'octubre de 2007, no esperàvem que en fessin una resolució completa, ni molt menys. Tot i així, conèixer les dificultats que tenen davant d'un ensenyament basat en la resolució de problemes és del nostre interès en virtut del tercer objectiu de la recerca (pp. 47, 193). Més concretament estem interessats en conèixer diversos aspectes relatius al comportament de l'estudiant davant de la resolució de l'esmentat problema. Saber si miren de concloure l'activitat el mateix dia que se'ls proposa, veure si manifesten la necessitat de disposar de més temps i discernir el tipus d'experimentació pel qual opten en la fase empírica de la recerca és el nostre focus d'atenció.

L'anàlisi de les dades que brollen de la implementació dels instruments de recollida de dades en aquesta primera sessió, la discussió de resultats i la seva presentació es pot consultar a partir de la pàgina 342. El detall dels resultats es pot veure en les figures 9.3 (p. 348), 9.4 (p. 350), 9.5 (p. 351) i 9.6 (p. 353).

El problema dels nombres consecutius va produir efectes ben diferents en els alumnes en la presa de contacte amb l'activitat. Més de la meitat dels estudiants mira de respondre al problema i ho fa en la primera sessió que ens ocupa; un 41% no respon. Trobem a faltar la cerca de la concepció d'un pla, en la línia del mètode de quatre passos de PÓLYA (1987, p. 19). Copsem una manca d'heurístiques que permeti als estudiants actuar quan no saben què fer davant de l'activitat proposada. Apreciem el descobriment de BELL (1986, p. 208) quan diu que davant d'un problema mai havia pensat que se les podia arreglar sol, ja que creia que si quan el mires per primera vegada no el saps fer, aleshores ja no hi ha res a fer (p. 179). En atenció a les creences de l'alumnat SCHOENFELD (1985, p. 43) diu que els problemes de matemàtiques són sempre resolts en menys de 10 minuts, si és que es resolen; en paraules de VILA (2001, p. 85), «si els estudiants no poden resoldre un problema en 10 minuts, abandonen». De les resolucions d'aquesta quasi meitat dels estudiants sembla que hi hagi una excessiva prudència per evitar equívocs i errors; com si l'alumne pensés que darrera dels errors hi ha un càstig o, potser, té una sensació de ridiculesa a la que dóna massa importància. Un apropament cultural de la matemàtica als alumnes passa per conèixer una mica d'història d'aquesta disciplina, ja que, tal com diu HERNÁNDEZ (1991, p. 52), la història de la matemàtica és molt pròdiga en errors comesos per matemàtics de primera fila (p. 170).

Admetem que en els primers intents el resolutor no trobi res; aquest fet confirma que estem davant d'un problema (activitat clarament entesa per qui la vol resoldre però que no té un camí que porti directament a la solució). Hem volgut, i també aconseguit, provocar un període de treball constant que s'allargués el temps necessari per connectar el problema amb la introducció deductiva del nombre enter; que és molt inferior al que cal per donar una resolució completa. Els esforços estèrils dels primers moments no ho són més endavant, tal com veurem. Aquesta dinàmica en la que conviu la dificultat, la persistència, l'esforç i el plaer del descobriment és lluïdament exposada per POINCARÉ (1974, p. 16), citat en la pàgina 155. Lectures com l'esmentada són necessàries per facilitar que els estudiants vegin que estar encallat o bloquejat en un problema és una situació molt digna que constitueix una part essencial del procés de millora del raonament (p. 179), tal com exposen MASON *et al.* (1988, p. 10).

Respecte del desenvolupament de la classe apreciem en l'alumnat una certa incomoditat davant de l'activitat proposada. Sembla, tal com diu VILA (1997, sec. II.2, p. 6), que l'alumne pretén arribar a trobar un «mètode» per resoldre problemes. Que l'alumne demani instrucció d'allò que després se li exigirà en l'examen és una realitat que no podem menystenir. Però l'ensenyament de la matemàtica a través de la resolució de problemes comporta fàcilment que l'alumne no vegi on vol arribar el professor. La concepció d'ensenyament que adoptem està fortament lligada amb el descobriment (p. 64), tal com mostra PÓLYA (1966*b*, 2'20"). El desenvolupament al llarg de la sessió del problema dels nombres consecutius situa la proposta clarament dins d'un període educatiu (p. 164), en virtut dels tres que consideren REY PASTOR i PUIG ADAM (1933, p. 3): instrumental, educatiu i professional.

Com a segon objectiu ens vam proposar discernir les experimentacions dels estudiants segons si sumen consecutius i examinen els resultats o si prenen nombres i intenten descomposar-los com a suma de consecutius. Vint-i-sis alumnes descobreixen que la suma de dos nombres consecutius és senar, catorze que la suma de quatre consecutius és parell, vint que la suma de tres consecutius és un múltiple de tres i deu diuen que la suma de cinc consecutius és un múltiple de cinc. No apreciem en aquesta primera sessió cap estudiant que argumenti els resultats conjecturals obtinguts, ni que els qüestioni. No podem menystenir l'esforç fet pels alumnes per donar més crèdit als resultats conjecturals que obtenen en verificar-los a través de nous casos particulars (p. 169), tal com diu PÓLYA (1966*a*, p. 30). Tot i així, com diu el mateix autor (1966*a*, p. 25), és necessari distingir el coneixement que es recolza en observacions i que no ha estat argumentat. Cal tenir cura en no acceptar com a veritables les propietats que s'han obtingut per observació i que es recolzen només en la intuïció; no apreciem en aquesta primera sessió que els alumnes dubtin dels seus resultats conjecturals. Copsem en les seves respostes la conveniència de que convisquin en la matemàtica escolar amb la formulació de conjectures errònies. Refutar-les conduirà a modificar-les i plantejar-ne de noves. La necessitat de donar rigor quedarà justificada quan l'alumne conjecturi propietats que ell ha descobert, que ell ha defensat i que ell mateix ha refutat. Si tots els resultats que descobreix l'alumne són certs mai veurà el sentit de consolidar els seus resultats conjecturals, tal com destaquen PUJOL *et al.* (2007, p. 72).

L'experimentació que realitzem al llarg de la sessió condueix els participants a resultats sovint incomplets o erronis però que respiren èxit. En la figura 9.7 (p. 354) veiem com l'estudiant conclou que es poden escriure com a suma de nombres consecutius tots els nombres excepte el 2, 4, 9 i 16. En canvi la resolució de l'estudiant que es mostra en la figura 9.8 (p. 355) apunta un camí semblant a l'anterior però creu que amb tots els nombres es pot aconseguir. Els estudiants es troben, per tant, davant d'un treball que fomenta la seva evidència intuïtiva que (p. 175), com manifesta PÓLYA (1966*a*, p. 13), pertany al raonament plausible. Aquests inicis són difícils pels estudiants ja que han d'aprendre a controlar les conseqüències de la seva pròpia tensió (p. 185), com diuen MASON *et al.* (1988, p. 161).

En aquesta primera sessió un alumne fa un descobriment destacable. En la figura 9.9 (p. 356) podem veure com resol el problema emprant nombres enters i conclou que tots els nombres es poden escriure com a suma de nombres consecutius. Aquest enfocament genera una autoconfiança en l'estudiant que alimenta la necessària motivació dels discents (p. 160), com destaca PUIG ADAM (1960, p. 104). El descobriment consisteix en examinar el problema des d'un context més ampli (p. 183), fet que facilita una comprensió més profunda de l'activitat, com mostren MASON *et al.* (1988, p. 144).

Ens hem interessat també per discernir si els alumnes sumen consecutius o si, en canvi, intenten descomposar nombres com a suma de consecutius. Són trenta-vuit els estudiants que sumen nombres consecutius i examinen els resultats. Cap d'ells intenta descomposar nombres com a suma de consecutius i, per tant, no és una pràctica utilitzada pels estudiants en aquesta primera sessió. La resta d'alumnes no experimenta, fent palesa que la resolució de problemes és un estil d'ensenyament que està en procés d'implementació en el nostre sistema educatiu, com descaquen PUJOL *et al.* (2007, pp. 66-67).

11.8 Informe de resolució del problema dels nombres consecutius

La setmana següent del plantejament del problema dels nombres consecutius, el dilluns 15 d'octubre de 2007, vam recollir l'informe de resolució realitzat per cadascun dels participants en la fase empírica de la recerca. L'anàlisi de les dades que brollen dels informes, la discussió de resultats i la seva presentació es pot consultar a partir de la pàgina 357. El detall dels resultats apareix en les figures 9.11 (p. 362), 9.12 (p. 363), 9.13 (p. 364) i 9.14 (p. 368).

A partir de l'esmentat informe ens proposàrem saber si s'interroguen per la quantitat de possibles descomposicions que pot tenir un nombre com a suma de consecutius. Només dos alumnes afirmen que els nombres primers tenen una descomposició i només una; no apreciem però cap argument que consolidi l'esmentat resultat conjectural. Quasi la meitat de l'alumnat (44,9%) se n'adona que hi ha nombres que tenen més d'una descomposició. Més de la meitat dels participants (59,6%) considera nombres naturals i mira de descomposar-los en suma de consecutius.

Hem aconseguit que salti la pregunta relativa a la quantitat de descomposicions en quasi la meitat de l'alumnat, que resolguin alguns casos particulars i que enfoquin el treball experimental des de dos punts de vista: sumar consecutius i analitzar els resultats i, també, descomposar nombres com a suma de consecutius.

Onze estudiants se n'adonen que a vegades hi ha tants sumands en alguna descomposició com algun divisor del nombre considerat; també veuen que a vegades no és així, sense que puguin trobar-ne cap explicació. Dos estudiants relacionen la quantitat de descomposicions d'un nombre amb els seus divisors. Només un considera nombres negatius en les descomposicions.

Els alumnes tenen ganes de fer coses, experimenten, fan proves i a vegades descobreixen. L'actitud positiva davant de l'activitat els condueix a realitzar troballes que ens permeten concloure que ha nascut la llavor del descobriment (p. 178), seguint les paraules de PUIG ADAM (1960, p. 119). Copsem amb claredat que l'enunciat està clarament entès, però no hi ha un camí directe a la solució; això és el que entenem per un problema.

En les figures 9.15 (p. 369) i 9.16 (p. 370) veiem el cas d'una alumna que connecta el treball experimental amb la troballa d'un procediment que li permeti obtenir descomposicions en suma de consecutius a partir de la descomposició factorial del nombre considerat. La tendència predominant que mostra VILA (2001, pp. 616-617), relativa a que els alumnes busquen tècniques i mètodes, s'aprecia en la resolució de l'alumna. Dels diferents camins que pot considerar, sembla que el procediment de descomposició actuï com un imant que atrau el procés cap a ella (p. 250).

Les resolucions de les figures 9.17 (p. 370) i 9.20 (p. 373) mostren que els alumnes conjecturen i refuten resultats de manera quasi continuada en les seves experimentacions. Ambdues aprecien que 15 es pot escriure com a suma de tres nombres consecutius i també de cinc; alhora veuen que 3 i 5 són divisors de 15. Però, tot seguit, expressen que també es pot escriure com a suma de dos nombres consecutius. Es copsa que els estudiants no se n'adonen en aquest moment que el mateix descobriment que han fet per tres i cinc sumands és també valid pel cas de dos sumands; però perquè això sigui possible cal mirar el problema des d'un punt de vista més general, més concretament, cal resoldre el problema en els enters. Tanmateix, l'intent de passar dels casos particulars a un resultat que els englobi, és a dir la generalització, ha esdevingut. I, les generalitzacions constitueixen el veritable nervi de la matemàtica (p. 181), com manifesten MASON *et al.* (1988,

p. 21).

En les figures 9.18 (p. 371) i 9.19 (p. 372) veiem un tractament experimental extens que condueix a diverses conjectures parcials. L'alumna no només examina els resultats de les sumes que obté sinó que també observa en alguns casos els resultats dividits per certs nombres. Apreciem el valor positiu que prové de formular, comprovar i modificar conjectures (p. 181), com assenyalen MASON *et al.* (1988, p. 92). L'extensió de l'experimentació de l'alumna no és en va i recorda que un resultat general i conjectural obté més crèdit si es verifica en un nou cas particular (p. 244), destacat per PÓLYA (1966*a*, p. 30). Quan (PÓLYA, 1981, Vol. 2, pp. 100-101) suggereix: «[...] let us teach proving by all means, but let us also teach guessing», de ben segur que en aquest cas diria, almenys això pensem, ensenyem conjecturant naturalment, però ensenyem també demostrant.

En la figura 9.21 (p. 374) trobem un participant que empra nombres negatius en les descomposicions. D'aquesta manera escriu 2, 4 i 8 com a suma de nombres consecutius. Tanmateix, no explota la potència que tenen els nombres enters en la resolució del problema. Des d'una perspectiva educativa seria molt aconsellable, si ens proposem resoldre el problema des d'un punt de vista més ampli, provocar aquesta reflexió en els estudiants. És a dir, podríem intentar resoldre el problema en un domini numèric més ampli? Aquesta reflexió i proposta segueix els pensaments de MASON *et al.* (1988, p. 35) en la línia de promoure la generalització. Tanmateix, com que ens proposem introduir el nombre enter hem optat per no intervenir en aquest punt i no provocar l'esmentada reflexió.

De fet, aquesta part del problema és molt més senzilla de resoldre en els nombres enters que en els naturals. El resultat final és d'una inqüestionable solidesa però evitem la seva presentació ja que aquesta no ensenya a «burxar», que és el realment educatiu (p. 169), tal com mostra molt eloqüentment PUIG ADAM (1960, p. 95). L'intent de generalització dels casos observats forma part de tot un important conjunt de processos de pensament «informal» (p. 174), com destaca PÓLYA (1981, Vol. 2, pp. 100-101). A més, s'està gestant un procediment fonamental per suggerir una introducció híbrida del nombre enter; que connectarà el mètode deductiu amb el constructiu. Amb PUIG ADAM (1960, p. 100) estem sembrant observacions, experiències i intuïcions que seran la llavor dels conceptes abstractes. En altres paraules del mateix autor, estem facilitant que la facultat d'abstracció no es desenvolupi raonant *in abstracto* sinó començant pel concret (p. 177).

Amb aquest problema hem intentat que els alumnes veiessin la matemàtica amb els ulls de la intuïció (p. 169), tal com emfasitza Pla Carrera (1998*b*, p. 206). Hem posat a prova la curiositat dels estudiants a través del problema dels nombres consecutius, mirant de despertar el gust pel pensament independent (p. 170), emprant paraules de Pólya (1987, p. 5). Alhora hem aconseguit un procediment fonamental per implementar una introducció deductiva del nombre enter que condueixi cap a la constructiva, així com per a la consecució dels objectius de la recerca. Ens han quedat aspectes del problema per atendre però això no impedeix que la implementació de la intervenció didàctica pugui continuar sense mancances.

11.9 Introducció del nombre enter

En la sessió realitzada el dilluns 22 d'octubre de 2007 ens vam proposar implementar la introducció deductiva del nombre enter (p. 241). L'anàlisi de les dades, la discussió de resultats i la seva presentació es pot consultar a partir de la pàgina 375. El detall dels resultats es pot consultar en les figures 9.23 (p. 381), 9.24 (p. 383), 9.25 (p. 384) i 9.26 (p. 390).

El primer objectiu de la sessió que ens proposem assolir és explicar el nivell de familiarització de l'alumne amb el procediment que li permet obtenir la suma de nombres consecutius a partir de la descomposició factorial del nombre que es pretén descomposar. El seu assoliment alimenta el tercer objectiu general de la recerca, tal com es pot consultar en la concreció dels objectius de la sessió (p. 376) així com en la figura resum 11.5 (p. 489). D'aquesta manera reprenem el treball previ relatiu al problema dels nombres consecutius tot emfasitzant el procediment necessari per implementar el que se segueix.

Com a primera conclusió volem destacar que del problema brolla el procediment que permet iniciar la introducció del nombre enter. Així, la no resolució completa del problema no impedeix la consecució de l'ensenyament que ens proposem. Entenem que aquesta particularitat participa d'un ensenyament cíclic ja que el problema segueix viu i pot ser reprès amb posterioritat, sense que això impedeixi que del problema brolli la construcció de coneixement que ens proposem.

El 98% dels alumnes participants estan familiaritzats amb el procediment que permet obtenir la suma de nombres consecutius a partir de la descomposició factorial del nombre que es pretén descomposar. Només un 2% dels participants miren d'emprar el procediment per argumentar que les potències de dos no es poden escriure com a suma de nombres consecutius. La utilització de nombres negatius en les descomposicions segueix essent esporàdica i és limita a dos dels participants.

La cerca d'un argument per resoldre el problema a través del procediment potencia un escepticisme positiu o un enemic interior (p. 182). El raonament que cal per argumentar que les potències de dos no tenen cap descomposició com a suma de nombres consecutius (exceptuant el mateix nombre i la descomposició equivalent que prové d'afegir o treure nombres positius i negatius que es compensin) és molt senzill si treballem amb nombres enters. Que l'alumne no miri de resoldre el problema emprant nombres enters no impedeix el correcte desenvolupament de la construcció de coneixement que proposem i, en canvi, estem donant l'oportunitat a l'estudiant de que descobreixi com un problema plantejat en els nombres naturals és molt més senzill de resoldre en els enters. La cerca d'un plantejament més general (p. 181), tal com mostren MASON *et al.* (1988, p. 35), és una forma de generalització a la que convida l'activitat proposada.

En la figura 9.27 (p. 391) apreciem que la cerca d'un argument per a la impossibilitat d'escriure una potència de dos com a suma de nombres consecutius ofereix una dificultat destacada. L'alumna considera que per estar segurs de que tots els nombres naturals que no són potències de dos es poden escriure com a suma de nombres consecutius caldria fer l'experimentació amb tots els nombres. Entenem que el raonament i la prova regulats en el darrer currículum de l'Educació Secundària Obligatòria (143/2007, 2007) no és un contingut assolit per l'estudiant.

De manera semblant en la figura 9.28 (p. 392) un alumne, tot i executar correctament el procediment, considera que no es pot arribar a saber si tots els nombres que no són potències de dos es poden escriure com a suma de nombres consecutius ja que, segons ell, «els nombres són infinits». L'estudiant considera que caldria fer la comprovació amb tots els nombres! També esdevé el mateix en altres alumnes com per exemple el referenciat en la figura 9.29 (p. 392).

El procediment de descomposició d'un nombre com a suma de consecutius està clarament entès per part d'una àmplia majoria d'estudiants. Alguns exemples de la seva utilització es poden consultar en les figures 9.30 (p. 393), 9.31 (p. 394) i 9.32 (p. 394). Tot i així, els alumnes no veuen el problema d'un cop d'ull, tal com suggereix PÓLYA (1987, p. 19).

El segon objectiu de la sessió que ens proposem assolir és examinar com denoten els participants en la fase empírica de la recerca els nous nombres que cal incorporar per tal de resoldre en tots els casos el problema dels nombres consecutius. Aquest objectiu de la sessió alimenta el segon objectiu general de la recerca, com es pot veure en la concreció dels objectius de la sessió (p. 376), així com en la figura resum 11.5 (p. 489).

Respecte de la manera com denoten els participants els nous nombres incorporats per donar resposta al problema trobem dues posicions diferenciades. Mentre que la meitat de l'alumnat opta per emprar la notació que ja coneixia, un 44% proposa una nova notació. Negociar amb l'alumnat la terminologia no és una pràctica habitual que puguem contrastar amb facilitat però, en canvi, sí que poden afirmar que els alumnes s'aferren a la notació que ja coneixien.

L'elecció d'una terminologia per denotar el nou nombre que hem representat per «?» és ben diversa (p. 251). En la figura 9.34 (p. 395) la participant denota el nou nombre per «$2-3$». El motiu pel qual l'alumna tria aquesta opció és, tal com ella diu, perquè li resulta més fàcil. Tanmateix, el que per l'alumna és una resta, en el procés d'abstracció que condueix REY PASTOR *et al.* (1969) a construir els nombres enters a partir dels naturals és un guió. De manera semblant i amb una exposició més detallada trobem la mateixa posició en el participant de la figura 9.35 (p. 395). En la figura 9.36 (p. 395) veiem que el participant opta per una expressió semblant però, sense que ho faci explícit, treballa amb el que serà el representant canònic; també ho fa el participant de la figura 9.39 (p. 397).

D'altres estudiants expliquen la notació que emprarien, tal com es pot consultar en la figura 9.37 (p. 396). Aquest alumne no fixa ni proposa cap terminologia però sí que manifesta que l'essència de l'esmentada elecció rau en emprar nombres naturals per, a partir d'ells, obtenir punts de la recta numèrica (estats) a través de nous nombres que s'obtenen de sumar variacions (desplaçaments) a estats (punts). En la figura 9.38 (p. 396) trobem un estudiant que tria una notació ben particular per fer referència als nous nombres; estem davant d'una concreció terminològica del que exposa el participant anterior.

Apreciem que els participants no se n'estan de fer propostes per denotar els nous nombres. El problema convida a obtenir-los sumant un desplaçament a un estat per aconseguir un estat i això és el que trobem en les diferents propostes d'alguns estudiants. El salt que queda cap a una terminologia unificada requereix una negociació que té ja en aquest moment molts punts en comú.

Tal com mostrem en la pàgina 108, REY PASTOR *et al.* (1969, p. 30) introdueixen els nombres enters a través de les equacions designant els nombres de la forma « $a_1 - a_2$ », que és una expressió similar a l'emprada per diferents alumnes. De fet el problema dels nombres consecutius és equivalent a l'equació $n = \sum_{i=0}^{k}(a_1 + i)$, en el sentit que tenen les mateixes solucions. Si acceptem que resoldre una equació és trobar totes les seves solucions atenent que totes poden ser cap (p. 206), aleshores el plantejament d'aquesta equació en els naturals requereix la incorporació de nous nombres per a la seva resolució. El problema dels nombres consecutius també requereix la incorporació de nous nombres per a la seva completa resolució.

El tercer objectiu de la sessió que ens proposem assolir és discernir els raonaments i les dificultats que tenen els estudiants per identificar i acceptar que els parells que identifiquen els nous nombres a vegades són diferents però en canvi fan referència a un mateix nombre, tal com es pot consultar en la pàgina 376. Aquest objectiu alimenta el segon objectiu general de la recerca, com es pot veure en la concreció dels objectius de la sessió (p. 376) així com en la figura resum 11.5 (p. 489).

El 96% de l'alumnat identifica, a través d'exemples, parells que fan referència a un mateix nombre. En canvi aquesta proporció es redueix a un 16% quan els demanem un tractament general. Les dificultats en el tractament simbòlic es fan paleses. Apreciem uns obstacles paral·lels destacats per diversos autors i que recull ROJANO (2002, p. 147) respecte de l'existència de salts conceptuals entre l'aritmètica i l'àlgebra. Segons l'esmentada autora una de les discussions entre diversos autors rau en els entrebancs que tenen els estudiants per tractar valors desconeguts.

La unificació de les diferents terminologies per denotar els nous nombres no és una tasca difícil però cal adoptar un criteri. La finalitat d'establir un pont didàctic entre la matemàtica escolar i la introducció constructiva del nombre enter suggereix la terminologia en forma de parells[6]. La proximitat entre aquesta terminologia i l'emprada per una bona part dels estudiants es reflexa en què el 96% d'ells identifica parells que fan referència a una mateix nombre. Quan se'ls demana una expressió general s'aprecien dificultats en el càlcul literal que redueixen l'èxit fins el 16%. Les respostes que es poden consultar en les figures 9.40 (p. 398) i 9.41 (p. 399) exemplifiquen la facilitat que tenen els estudiants en el tractament d'exemples concrets. En canvi, la resolució que es pot consultar en la figura 9.42 (p. 400) forma part d'un dels pocs alumnes que tracta correctament el cas general.

La meitat dels alumnes han emprat la notació que ja coneixem. Podem entendre que els estudiants no es troben per primera vegada amb el nombre enter en el tractament que estem realitzant. Tanmateix, atenent els tres dominis de pensament de SKEMP (1980, pp. 188-190), ja no estem en el domini que opera sobre objectes físics sinó que estem en el domini de les idees matemàtiques (p. 143).

11.10 Concepcions del nombre

En la sessió realitzada el dilluns 29 d'octubre de 2007 ens vam proposar conèixer les concepcions de nombre que tenen els participants en la fase empírica de la recerca. Aquest estudi té unes consideracions particulars que es tracten en el capítol 10 (p. 401). L'anàlisi de les dades, la discussió de resultats i la seva presentació es pot consultar a partir de la pàgina 405. El detall dels resultats es presenta en les figures 10.2 (p. 413), 10.3 (p. 415), 10.4 (p. 416) i 10.5 (p. 417).

El primer objectiu que ens proposem assolir és distingir les definicions espontànies de nombre que donen els alumnes participants en la fase empírica de la recerca. Aquest alimenta el segon objectiu general de la recerca, tal com es pot veure en la concreció dels objectius de la sessió (p. 406) així com en la figura resum 11.5 (p. 489).

Com diu SOTOS (2004, p. 96) el coneixement de la definició no garanteix el

[6]En aquesta recerca ens hem proposat connectar l'ensenyament deductiu del nombre enter amb el constructiu. Per aquest connectem l'ensenyament deductiu amb la terminologia en forma de parells. Tanmateix, la introducció deductiva es pot desenvolupar sense necessitat d'emprar la terminologia en forma de parells i, en prescindir d'aquest punt, simplificant el tractament simbòlic emprat.

coneixement del concepte i el coneixement del concepte no passa, necessàriament, per disposar d'una definició adequada del mateix. En altres paraules ho destaquen també ARMENDÁRIZ *et al.* (1993):

> El esquema del estudiante es el resultado de su experiencia de ejemplos y contraejemplos del concepto. Por tanto, el conjunto de objetos matemáticos que el estudiante considera ejemplos del concepto no es necesariamente el mismo que el conjunto de objetos matemáticos determinados por la definición [formal].
>
> (ARMENDÁRIZ *et al.*, 1993, p. 92)

Tanmateix, els nombres no són altra cosa que exemples del concepte i una aproximació als usos que en fan els estudiants podrà servir per apropar-nos a les corresponents concepcions. Encara que en un primer moment o en tot el procés no disposin d'una definició precisa de nombre, les definicions que en donin, els usos que en facin i el que pensin respecte de la seva construcció ens aporta informació útil per aproximar-nos a les concepcions dels estudiants relatives a la noció que ens ocupa.

Hem emprat, en virtut de les respostes dels estudiants, quatre categories de resposta, tal com detallem en l'establiment de les categories corresponents (p. 409). *Quantitat* (66%): comprèn els estudiants que expressen la idea de nombre com a quantitat d'alguna cosa; *símbol* (98%): inclou l'alumnat que fa referència al nombre com el símbol emprat per representar-lo; *codi o etiqueta* (2%): comprèn els estudiants que associen el nombre amb una funció utilitària però no quantitativa; *mesura* (6%): inclou l'alumnat que associa el nombre amb la mesura de quantitats de magnitud.

Dues terceres parts dels participants vinculen el nombre amb les pluralitats composades d'unitats, és a dir, s'adiu amb la segona definició del setè llibre[7] d'EUCLIDES (1996). Ara bé, el gran obstacle per a l'acceptació i el reconeixement del nombre negatiu va ser la identificació entre nombre i quantitat (p. 145), tal com mostren IRIARTE *et al.* (1991, p. 13). Esperàvem obtenir una proporció

[7]LLibre VII dels *Elements* d'Euclides. Definició 2. Un número és una pluralitat composada d'unitats.

més elevada d'aquesta categoria de resposta. Entre els diversos motius que poden participar del resultat obtingut pot estar la incidència en l'aprenentatge de l'estudiant del problema dels nombres consecutius en el qual el nombre no és tractat com un instrument útil per expressar pluralitats.

Només un 6% dels estudiants vincula explícitament el nombre amb la mesura de quantitats de magnitud. Tanmateix, els estudiants estan fortament habituats amb el treball amb el nombre natural, i també amb el racional positiu. Des d'un punt de vista epistemològic cap dels dos va patir un conflicte que s'allargués en el temps; situació ben diferent a la viscuda pel nombre negatiu, així com pel complex. Potser aquesta minsa proporció d'estudiants que vincula nombre amb mesura també provingui d'un efecte de la intervenció efectuada ja que en el problema dels nombres consecutius el nombre no s'utilitza per donar la mesura de quantitats de magnitud.

La concepció de nombre lligada amb una funció utilitària allunyada de tota quantificació es correspon amb les accions d'etiquetar o codificar (p. 134), numerar en paraules de GÓMEZ (1998, pp. 18-20), i es redueix a un minúscul 2% dels participants. L'esmentada funció utilitària, que apareix en els primers anys de vida i que es manté al llarg d'ella, és quasi ignorada pels participants.

Pràcticament tots els estudiants relacionen en un moment o altra de la seva exposició el nombre amb el símbol que el representa. D'una manera o altra veuen en el mot nombre, tal com destaca GARDNER (1977, p. 102), una diversitat de concepcions distants de l'operació de comptar (p. 136). La imatge del concepte que tenen els alumnes (representacions visuals, experiències i impressions) és fruït d'experiències personals que es perllonguen al llarg de la vida (p. 134), tal com mostra SOTOS (2004, p. 95).

A través de la intervenció amb el problema dels nombres consecutius hem fomentat el conflicte en la concepció de nombre dels participants. Entre d'altres aspectes, el tractament donat facilita el trencament amb algunes idees molt lligades al coneixement que tenen els estudiants de l'aritmètica pràctica. Segons IRIARTE *et al.* (1991, p. 13) aquest trencament és necessari per a l'aprenentatge del nombre enter (p. 72).

Que el problema dels nombres consecutius creï un distanciament entre la concepció de nombre que tenen els estudiants i l'expressió de quantitat, aproxima l'ensenyament que oferim i, en conseqüència, l'aprenentatge de l'alumne cap a la situació històrica que va facilitar l'acceptació dels nombres negatius. La negació a acceptar els negatius com a nombres es va produir perquè no encaixaven en la concepció de nombre que tenien en aquell moment, que entenia el nombre com a expressió de quantitat, tal com apunten GONZÁLEZ *et al.* (1990, p. 32).

El segon objectiu que ens proposem assolir és saber les utilitats que els alumnes participants a la fase empírica de la recerca associen amb els nombres. Aquest alimenta el segon objectiu general, tal com es pot consultar en la concreció dels objectius de la sessió (p. 406) així com en la figura resum 11.5 (p. 489).

Respecte de les utilitats que donen els estudiants als nombres obtenim, en virtut de les seves respostes, quatre categories de resposta, tal com detallem en l'establiment de les categories corresponents (p. 409). *Comptar* (66%); comprèn els estudiants que donen al nombre la utilitat de comptar pluralitats. És una categoria de resposta estable en el sentit que els alumnes que es recullen en ella són els mateixos que en l'estudi de les concepcions del nombre fet anteriorment, es corresponien amb la concepció de nombre com a eina per a quantificar pluralitats.

La proporció d'estudiants que donen als nombres la funció d'*etiquetar* és d'un 20%. En la recollida de dades prèvia només un 2% concebia el nombre com una etiqueta. També la concepció de nombre com un objecte útil per a *mesurar* quantitats de magnitud ara s'ha vist incrementada. Un 18% dels participants dóna al nombre la funció de mesurar. És un 54% la proporció dels estudiants que associa als nombres la funció d'*operar*. Aquesta és una funció molt més abstracta que les anteriors, que impedeix l'aferrament a la evidència immediata. L'esmentat aferrament a l'evidència immediata, a la intuïció primària de nombre com a quantitat, és un obstacle per a la construcció dels enters (p. 91), tal com destaquen IRIARTE *et al.* (1991, p. 13).

La paraula nombre té cada vegada un significat més ampli i tota ampliació a partir dels nombres naturals requereix definir les dues operacions fonamentals: la suma i el producte. Però la suma i el producte coneguts pels alumnes en els naturals han quedat inclosos com a casos particulars en els enters (p. 138), tal com assenyala REY PASTOR (1976, p. 85). Podríem imaginar que la suma i el producte de nombres enters conduís a resultats diferents quan féssim les mateixes operacions sobre uns determinats nombres naturals i sobre els enters que es corresponen amb ells?

El 54% d'alumnat que dóna als nombres la funció d'operar està en la línia de concebre els nombres negatius com objectes conceptuals i no com objectes materials. La pugna entre aquestes dues concepcions va perdurar durant el segle XVIII i es va mantenir en el XIX. Augustus de Morgan (1806-1871) va publicar la seva obra «Sobre l'estudi i les dificultats en matemàtiques» l'any 1831 i aquesta exposa que tant els negatius com els imaginaris són inconcebibles en quant a significació real i, si apareixen com a solució d'un problema és símptoma d'alguna inconsistència, tal com destaquen GONZÁLEZ *et al.* (1990, p. 38).

El tercer objectiu que ens proposem assolir és diagnosticar el coneixement que tenen els alumnes participants a la fase empírica de la recerca sobre la construcció dels nombres. Aquest alimenta el segon objectiu general de la recerca, com es pot observar en la concreció dels objectius de la sessió (p. 406) així com en la figura resum 11.5 (p. 489).

L'anàlisi qualitativa de les respostes mostra que hi ha alumnes com la participant de la figura 10.6 (p. 418) que entenen que algun punt de partida hi ha d'haver. L'estudiant exposa una comparativa amb els colors: «Com es formen els nombres? N'hi ha que ja han d'estar formats, per algun lloc s'ha de començar. És com en pintura que hi ha els colors primaris i a partir d'ells es formen tots els altres colors. Amb els nombres passa el mateix, els sumes, els restes, ...». L'anàlisi qualitativa de les respostes permet veure que l'estudiant admet els nombres naturals de la mateixa manera que admet els colors primaris. Aquesta posició es correspon amb la de Leopold Kronecker (1823-1893) que va defensar la construcció de la matemàtica a partir dels nombres naturals (p. 124). Una part considerable de l'alumnat no ha fet la reflexió necessària per poder posicionar-se respecte de la pregunta efectuada; en una altra copsem una reflexió sobre el punt de partida (p. 28) que és atesa en el nou currículum de batxillerat tal com es pot consultar en el DECRET 142/2008 (2008, p. 59280).

El quart objectiu que ens proposem assolir és discernir si els participants en la fase empírica de la recerca diferencien els aspectes ordinal i cardinal del nombre. Aquest alimenta el segon objectiu general de la recerca, com es pot consultar en la concreció dels objectius de la sessió (p. 406) així com en la figura resum 11.5 (p. 489). Més de les tres quarts parts de l'alumnat diferencia l'ordinal del cardinal.

Amb la finalitat de graduar adequadament els plans d'abstracció (p. 37), com diu PUIG ADAM (1960, pp. 157, 159), la concepció del nombre rep al llarg de la vida de les persones diferents salts que en poden precipitar en el buit, fet que volem i creiem que es pot evitar. A partir del nombre natural es va donar un modest pas cap a l'ampliació de nombre en incloure les fraccions (p. 142), com mostra GARDNER (1977, p. 102). La introducció del nombre negatiu pot seguir, a partir d'aquest moment, diferents camins tal com exposa BRUNO (2001, pp. 417-420) i que reprenem en la pàgina 105. Si en atenció a la referència que acabem d'atendre optem per introduir el nombre negatiu a partir del nombre natural podem seguir novament diferents camins (p. 55), com mostren ARCAVI i BRUCKHEIMER (1981, pp. 31-33) i CID (2003, p. 2). Els resultats de la recerca s'adiuen amb una concepció del nombre que és conseqüència clara d'una introducció a través de models concrets, amb un fort lligam del concepte de nombre amb la mesura de quantitats de magnitud.

11.11 L'estructura additiva

En la sessió realitzada el dilluns 5 de novembre de 2007 ens vam proposar conèixer les dificultats i la incidència en l'aprenentatge d'una introducció de l'estructura additiva del nombre enter per extensió de la suma, coneguda i admesa en els nombres naturals.

En la sessió realitzada el dilluns 22 d'octubre de 2007 vam donar l'oportunitat als estudiants de que denotessin els nous nombres que vam incorporar amb la finalitat de donar resposta al problema dels nombres consecutius. La unificació de les terminologies emprades pels estudiants permet obtenir-ne una de comuna pels nombres incorporats i pels nombres naturals. La finalitat d'aquesta sessió és descobrir com es pot trobar un parell que representi el nombre que és suma de dos nombres donats també en forma de parells. Quan això es fa sobre dos nombres naturals no estem davant de cap dificultat conceptual. Aquesta esdevé quan demanem als estudiants si els sembla raonable admetre que la determinació del parell que representa la suma de dos nombres donats sigui el mateix quan treballem sobre nombres incorporats que quan ho fem sobre nombres naturals.

L'anàlisi de les dades que brollen de la implementació dels instruments de recollida de dades en aquesta sessió, la discussió de resultat i la seva presentació es pot consultar a partir de la pàgina 418. El detall apareix a les figures 10.8 (p. 427), 10.9 (p. 428), 10.10 (p. 429) i 10.11 (p. 433).

El primer objectiu que ens ocupa és copsar si els estudiants proposen diferents parells per fer referència a un mateix nombre natural. Aquest objectiu alimenta el segon objectiu general de la recerca, tal com es pot consultar en la concreció dels objectius de la sessió (p. 418) així com en la figura resum 11.5 (p. 489).

La meitat de l'alumnat proposa diferents parells representants per un mateix nombre natural, tant quan se li demana per un nombre natural concret com quan se li demana per un nombre natural qualsevol expressat en forma literal. L'altra meitat de l'alumnat focalitza les seves mancances en el treball literal. Cal destacar que aquestes dificultats provenen de fer referència a nombres naturals amb una altra notació.

De les terminologies emprades pels estudiants l'expressió d'un nombre natural en forma de parell sembla la més propera. La interpretació conceptual, i no material, que suggereix aquest tractament és equivalent a d'altres emprats i, en canvi, és factible en edats molt més tendres. Com mostren GONZÁLEZ *et al.* (1990, p. 51), Leopold Kronecker (1823-1893) interpretà el càlcul d'enters com el càlcul de congruències mòdul $x + 1$ en l'anell de polinomis en una indeterminada i amb coeficients naturals, tractament equivalent al que prové del treball amb parells. Entenem, per tant, que les dificultats que provenen d'un treball literal difícilment es puguin reduir si ens mantenim en la mateixa edat educativa.

El segon objectiu que ens proposem assolir és explicar les dificultats que tenen els estudiants quan se'ls demana que sumin els nombres enters, representats per parells, tal com se sumen els nombres naturals. Aquest objectiu alimenta el tercer objectiu general de la recerca, com es pot observar en la concreció dels objectius de la sessió (p. 419) del capítol dedicat a l'anàlisi de les dades i a la presentació de resultats de la part de la recerca dirigida a l'estructura additiva (p. 418), així com en la figura resum 11.5 (p. 489).

Quan ens proposem sumar nombres naturals a partir dels seus representants canònics, més de tres quartes parts de l'alumnat ho fa correctament. En canvi, quan la suma es fa a partir de representants qualssevol els encerts disminueixen fins el 54%. Conegut el procediment entre parells representants que permet obtenir la suma de dos nombres naturals, la suma de dos nombres enters és proposada per quasi tots els estudiants (94%) per extensió de la suma de nombres naturals. El pas del nombre natural al nombre enter de manera que la suma i el producte entre els nous nombres compleixin les regles del càlcul anteriorment conegudes és el que REY PASTOR *et al.* (1969, p. 23) anomenen *mètode genètic* (p. 70).

El 94% dels estudiants proposa sumar els nombres enters de manera que en aplicar aquesta suma als nombres naturals el comportament sigui el mateix que ja coneixien amb anterioritat. Aquesta és precisament la posició de REY PASTOR *et al.* (1969) que acabem d'esmentar. Amb anterioritat HILBERT (1993, p. 17) ja va introduir la terminologia *mètode genètic*. HILBERT (1993, p. 18) no menyspreа el gran valor pedagògic i heurístic que el mètode genètic pugui tenir: «A pesar del gran valor pedagógico y eurístico que el método genético pueda tener, el método axiomático resulta claramente preferible para una exposición definitiva y lógicamente segura de los contenidos de nuestro conocimiento». Cal recalcar que HILBERT (1993) defensa el mètode axiomàtic (constructiu) per a una exposició definitiva dels continguts però també el mètode que anomena genètic (que s'adiu amb el mètode que nosaltres anomenem deductiu) pel seu valor pedagògic i heurístic.

Els alumnes entenen que per dictar la suma entre nombres enters cal que es conservi com a cas particular la suma entre nombres naturals. En el fons s'està aconseguint d'aquesta manera que l'aritmètica no sigui contradictòria amb sí mateixa (p. 138), com destaca tant clarament REY PASTOR (1976, p. 85). Però el que ens condueix realment a la introducció dels nombres negatius és la facultat de generalització de que està dotada la ment humana (p. 73), segons KLEIN (1927-1931, Vol. 1, p. 36).

La segona versió del tractat d'àlgebra de PEACOCK (1842) està formada per dos volums, el primer dedicat a l'àlgebra aritmètica i el segon a l'àlgebra simbòlica; en la primera versió PEACOCK (1830) no feia aquesta distinció. En l'àlgebra aritmètica de George Peacock les lletres representen nombres naturals i els símbols « $+$ » i « $-$ » tenen el significat ordinari, és a dir, afegir i treure. En l'àlgebra simbòlica les lletres deixen de denotar nombres naturals i, per tant, inclou l'àlgebra aritmètica com a cas particular que suggereix les lleis de l'àlgebra simbòlica. La connexió entre ambdues la realitza a través del que anomena principi de permanència[8] que diu, tal com hem consultat en GONZÁLEZ *et al.* (1990, p. 48): «Todos los resultados del álgebra aritmética que se deducen por aplicación de sus reglas, y que son generales en su forma aunque particulares en su valor, son igualmente resultados del álgebra simbólica, donde son generales tanto en su valor como en su forma». Apreciem que la nostra experimentació condueix els estudiants a fer el salt de l'àlgebra aritmètica a la simbòlica, emprant la terminologia de Peacock. Tanmateix, podem concloure des del punt de vista de Peacock que les dificultats es localitzen en l'àlgebra aritmètica. Després, no presenten tantes dificultats en acceptar per l'àlgebra simbòlica els resultats obtinguts per l'àlgebra aritmètica.

Pot ser una introducció de l'àlgebra a l'estil de l'àlgebra aritmètica de Peacock un pas intermedi que permeti donar significat a l'àlgebra simbòlica. Aquest punt el reprendrem en l'apartat de les implicacions didàctiques.

El tercer objectiu que ens proposem assolir és conèixer la plausibilitat amb la que els alumnes accepten la notació coneguda pels nombres enters negatius a partir de l'addició de nombres enters. Aquest objectiu alimenta el segon objectiu general de la recerca, tal com es pot consultar en la concreció dels objectius de la sessió (p. 419) del capítol dedicat a l'anàlisi de les dades i a la presentació de resultats de la part de la recerca dirigida a l'estructura additiva (p. 418), així com en la figura resum 11.5 (p. 489).

El 74% dels alumnes participants considera que la notació simplificada per als nombres enters, és a dir, la que van aprendre a l'inici de l'Educació Secundària Obligatòria i que des d'aleshores empren, queda justificada a partir de l'addició. Com que la suma dels nombres representats pels parells $(1, 0)$ i $(0, 1)$ és nul·la aleshores $(0, 1)$ és un nombre que quan el sumem es comporta com si restéssim 1. Pel 74% de l'alumnat això justifica clarament que denotem per -1 el nombre representat per $(0, 1)$. Un 20% accepta la notació perquè ja la coneixia però no veu cap motiu en el treball realitzat que la justifiqui. Un 6% no comprèn la notació simplificada o no l'accepta.

Hem considerat el parell representant $(a, 0)$ del nombre natural a. Hem vist que $(a, 0) + (0, a) = (a, a)$. El comportament del parell (a, a), a partir del descobert en el problema dels nombres consecutius, mostra que és un parell represen-

[8] Hankel va reprendre la iniciativa de Peacock i formulà el *principi de permanència de les lleis formals* (p. 87).

tant del nombre zero. Per tant, el nombre que és representat pel parell $(0, a)$ és un nombre que quan el sumem es comporta com si restéssim a. D'aquí brolla la suggerència de denotar per «$-a$» el nombre representat pel parell $(0, a)$. Aquest és un petit apunt deductiu que permet introduir nous nombres tot justificant la terminologia que emprem[9].

La primera vegada que apareix un nombre negatiu aïllat en una equació algebraica és en el Renaixement i més concretament en una obra de Nicolás Chuquet (p. 129), citat per GONZÁLEZ *et al.* (1990, p. 28). Al-Khwsarizmi (ARNDT, 1983, p. 825) posava un cercle a sobre del nombre per denotar que era negatiu, els hindús el rodejaven amb un cercle (p. 110), segons CROWLEY i DUNN (1985, p. 253).

Amb els conflictes educatius que suposa la polisèmia del signe « $-$ », tal com hem observat en la diagnosi de la recerca i com mostren diversos autors, en particular i de manera clara i directa JOHNSON (1986, p. 507), sembla raonable donar l'oportunitat a l'estudiant de que pugui conèixer per què emprem, per denotar els nombres negatius, el mateix símbol que hom empra per restar. No donar aquesta justificació fa que la terminologia que emprem per denotar els nombres negatius estigui igual de justificada que qualsevol altra que poguéssim acordar.

11.12 L'estructura multiplicativa

En les sessions realitzades els dilluns 12 i 19 de novembre de 2007 ens vam proposar conèixer les dificultats i la incidència en l'aprenentatge d'una introducció de l'estructura multiplicativa del nombre enter per extensió de la suma coneguda i admesa en els nombres naturals.

L'anàlisi de les dades que brollen de la implementació dels instruments de recollida de dades en aquesta sessió, la discussió de resultats i la seva presentació es pot consultar a partir de la pàgina 436. El detall es pot veure en les figures 10.17 (p. 445), 10.18 (p. 446), 10.19 (p. 447) i 10.20 (p. 454).

El primer objectiu que ens proposem assolir és diagnosticar les dificultats que

[9]En aquest capítol estem en el terreny de les conclusions i limitem l'exposició al contrast de resultats obtinguts de l'experimentació a primer curs de batxillerat amb el marc teòric, en el context que ens ocupa. Tanmateix, en el capítol dedicat a les implicacions didàctiques de la recerca (p. 521) reprenem l'exposat tot mostrant com es pot complementar la introducció del nombre enter a través de models concrets.

tenen els estudiants, a través d'activitats que només requereixin de l'estructura additiva, per traduir els nombres que venen donats en forma de parells a la notació simplificada i a l'inrevés. Aquest objectiu alimenta el segon objectiu general de la recerca, tal com es pot consultar en la concreció dels objectius de la sessió (p. 437) així com en la figura resum 11.5 (p. 489).

Respecte de la conversió de parells representants a la seva forma simplificada, a través d'activitats que impliquen la utilització de l'estructura additiva, quasi la meitat de l'alumnat participant ho realitza sense dificultats. Tanmateix, hi ha un 39% de l'alumnat que en el procés comet algun error no conceptual. Apreciem una clara manca de comprensió en un 13% de l'alumnat.

En la sessió realitzada el dilluns 22 d'octubre de 2007 ens vam proposar implementar la introducció deductiva del nombre enter. El tercer objectiu de l'esmentada sessió és discernir els raonaments i les dificultats que tenen els estudiants per identificar i acceptar que els parells que identifiquen els nous nombres a vegades són diferents però en canvi fan referència a un mateix nombre. En aquell moment el 96% de l'alumnat identificà a través d'exemples, parells que fan referència a un mateix nombre. En canvi aquesta proporció es reduí a un 16% quan els demanàrem un tractament general.

Dels resultats es desprèn que el tractament general i simbòlic és una de les dificultats que obstaculitza arribar a una part àmplia de l'alumnat. Probablement aquesta sigui una conclusió que juga a favor de l'ensenyament del nombre enter a través de models concrets ja que, en aquest cas, el tractament simbòlic és mínim.

Willam Rowan Hamilton emprà l'any 1833 parells ordenats de la forma (a, b) per fer referència a nombres complexos, tal com diu GUTIÉRREZ (2005, p. 97). La utilització de parells de nombres naturals per fer referència a nombres enters és posterior i s'inspira en l'esmentada utilització de Hamilton. Si acceptem la importància de la història de la matemàtica com a eix vertebrador del seu ensenyament aleshores la utilització de parells ha d'oferir dificultats com en va oferir el seu descobriment històric.

El segon objectiu que ens proposem assolir és explicar les propostes dels alumnes respecte del problema plantejat inicialment incidint en la cerca de la quantitat de descomposicions que admet un nombre qualsevol. Aquest objectiu alimenta el tercer objectiu general de la recerca, com es pot consultar en la concreció dels objectius de la sessió (p. 437) així com en la figura resum 11.5 (p. 489).

En la represa del problema dels nombres consecutius apreciem que la totalitat de l'alumnat determina correctament la quantitat de descomposicions que té un nombre natural donat. Tanmateix, no apreciem en cap cas que l'alumne apunti una estratègia que faciliti un apropament significatiu cap a la determinació de la quantitat de descomposicions pel cas general.

Després d'esforços inicials en la resolució d'un problema, «la idea decisiva se presenta ante la mente» (p. 155), tal com esmenta POINCARÉ (1974, p. 16). Tanmateix, la implementació de la resolució de problemes a les aules té l'inconvenient que una part de l'alumnat no aconsegueix, en ocasions, ni la resolució que probablement esperem ni cap altre que brolli per iniciativa de l'estudiant. En el nostre cas, que l'estudiant no hagi aconseguit cap estratègia que faciliti un apropament significatiu cap a la determinació de la quantitat de descomposicions per un nombre qualsevol, no és un impediment per a la consecució dels objectius que ens proposem.

Podem concloure, per tant, que la implementació de la resolució del problema a les aules requereix de resolucions parcials que condueixin a la construcció de coneixement matemàtic. D'aquesta manera estem oferint una atenció a la diversitat que entenem és de qualitat ja que, finalitzada la sessió i fins i tot el curs acadèmic, l'estudiant disposarà de problemes que ha treballat amb profunditat, que no estan totalment resolts i que han estat la llavor del coneixement adquirit.

El tercer objectiu que ens proposem assolir és conèixer les dificultats que tenen els estudiants quan se'ls demana que facin el producte de nombres enters, representats per parells, tal com es multipliquen els nombres naturals expressats de la mateixa manera. Aquest objectiu alimenta el tercer objectiu general de la recerca, com es pot consultar en la concreció dels objectius de la sessió (p. 437) així com en la figura resum 11.5 (p. 489).

Quan proposem multiplicar nombres naturals expressant en forma de parells donats en la seva forma canònica pràcticament la totalitat de l'alumnat ho realitza correctament i no hi apreciem dificultats.

En canvi, quan els demanem el producte però els parells representants no venen donats en la seva forma canònica apreciem importants dificultats en el treball literal que redueixen l'èxit a una proporció inferior al 10%. Cal destacar que l'esmentada proposta es limita al producte de nombres naturals expressats en una forma no habitual pels estudiants. En conseqüència, les dificultats no es deuen a aspectes conceptuals sinó més aviat a un aprenentatge del llenguatge algebraic en ocasions buit de significat.

Els resultats recollits en l'indicador A5 (p. 380) mostren que un 96% dels alumnes ja identificava amb anterioritat a la present sessió i sense dificultats destacades diferents parells que fan referència a un mateix nombre. En conclusió, entenem que el tractament algebraic que es desprèn de la proposta presenta dificultats que requereixen un temps de maduració superior al dedicat. Els alumnes tenen dificultats per descobrir per sí mateixos el producte de dos nombres naturals donats per parells representants no canònics. Tot i així, quan se'ls guia i se'ls recorda que poden treballar amb altres parells representants com els canònics, la reacció és immediata i el camí que segueixen l'esperat.

Quan els demanem que proposin el resultat del producte de dos nombres enters a partir de la seva representació en forma de parells, un 65,2% dels participants estén el producte de nombres naturals a través de l'algorisme prèviament realitzat. L'extensió en el cas del producte té una proporció d'èxits inferior al cas de l'addició, tal com es pot comparar amb l'indicador P5-04 (p. 427). La meitat de l'alumnat considera que el resultat sí que dependrà dels representants escollits. Apreciem en aquests resultats que el canvi de punt de vista del concret al formal produeix importants dificultats en els estudiants (p. 76), tal com destaca SEMADENI (1984, p. 380). La dificultat de desenvolupar en l'home la facultat d'abstracció ho ha provat, en particular, la història del nombre negatiu (p. 77), com ho mostren REY PASTOR *et al.* (1969, p. 38) i alhora com copsem en els resultats dels estudiants.

Finalment, la conversió dels parells representants a la seva forma simplificada a través d'activitats que requereixen de l'estructura multiplicativa del nombre enter és realitzada amb èxit per la meitat de l'alumnat, tal com es pot consultar en l'indicador P6-07 (p. 445). Per aquesta meitat de l'alumnat les regles del producte de nombres enters deixen de ser ««piedra de escándalo» (p. 70), tal com diu KLEIN (1927-1931, Vol. 1, p. 33). Les regles del producte de nombres negatius són conseqüència del *principi de permanència de les lleis formals* (p. 87) i, per tant, de la generalització de que està dotada la ment humana, tal com remarca el mateix autor.

La regla dels signes va ser enunciada per Diofant tot i rebutjar els nombres negatius (p. 127), com mostra PLA CARRERA (1983, p. 71). Com pot ser que tot i rebutjar els nombres negatius donés un enunciat que el podem assimilar a les regles que actualment anomenem dels signes? Difícilment es pugui esclarir aquesta qüestió però, tot i així, PÓLYA (1981, Vol. 2, p. 97) fa una reflexió entre genis, experts i principiants que probablement pugui suggerir una explicació a l'enunciat de Diofant (p. 8).

11.13 Enunciats de les conclusions de la recerca

En virtut dels resultats obtinguts i del marc teòric atès, amb atenció al context que ens ocupa, podem concloure que:

1. Els alumnes inicien batxillerat (16-17 anys) amb una forta vinculació entre nombres i quantitats, operacions i accions empíriques. Tenen una forta tendència a emprar el model concret de guanys i pèrdues (neutralització), tot i que obtenen millors resultats en el treball amb el model dels ascensors (desplaçament).

2. Una resolució parcial del problema dels nombres consecutius facilita una introducció deductiva del nombre enter que connecta amb la constructiva i fomenta l'ensenyament cíclic en permetre ser reprès posteriorment.

3. La connexió amb la introducció constructiva és apresa correctament per la meitat de l'alumnat, però, el seu assoliment facilita una prova de consistència relativa que no dóna resposta a cap problema que tingui prèviament plantejat un alumne de secundària.

4. Una part considerable de l'alumnat considera que només pot tenir certesa d'una propietat dels nombres si fa la comprovació amb tots ells.

5. La resolució del problema dels nombres consecutius és equivalent a la resolució d'una equació. La incorporació de nombres negatius per resoldre'l

en tots els casos respecta el procés epistemològic al qual deuen la seva existència els nombres negatius, és a dir, la necessitat de validesa general dels mètodes de resolució d'equacions.

6. La concepció de nombre està fortament lligada a l'expressió de quantitats i això dificulta, des d'un punt de vista epistemològic, l'acceptació del nombre negatiu. La implementació del problema dels nombres consecutius facilita una palesa però lleu evolució en l'esmentada concepció.

7. L'alumnat es divideix en dos grans blocs: els que conceben els nombres negatius com objectes conceptuals i els que els conceben com objectes materials. Apreciem un paral·lelisme amb la situació viscuda al llarg dels segles XVIII i part del XIX quan encara convivien l'acceptació i rebuig dels nombres negatius.

8. Els alumnes que es posicionen respecte de la construcció dels nombres adopten l'enfocament de Kronecker, és a dir, accepten els nombres naturals per, a partir d'ells, construir els altres. Tanmateix, per una àmplia part de l'alumnat la reflexió demanada mai se l'havien plantejat i no saben què respondre.

9. Els alumnes presenten més dificultats pel treball simbòlic amb nombres naturals, equivalent a la posició de l'àlgebra aritmètica de Peacock, que per la incorporació de nous nombres i l'extensió de les operacions al nou conjunt numèric, equivalent a l'aplicació del principi de permanència a l'àlgebra simbòlica de Peacock.

10. Els alumnes inicien batxillerat (16-17 anys) amb força confusions en la interpretació del símbol « $-$ ». Tres quartes parts troben justificada la notació emprada per denotar els nombres enters a partir de l'extensió als «nous» nombres de la suma i de la resta mentre que, a l'inici de l'experimentació, no podien explicar la polisèmia en la que recau l'ús del símbol « $-$ ».

Referències

ARCAVI, A. (1999): «... y en matemáticas, los que instruimos ¿qué construimos?» *Números, 38*, 39-56.

ARCAVI, A.; BRUCKHEIMER, M. (1981): «How shall we teach the multiplication of negative numbers?» *Mathematics in School, 10*(5), 31-33.

ARMENDÁRIZ, M.; AZCÁRATE, C.; DEULOFEU, J. (1993): «Didáctica de las matemáticas y psicología». *Infancia y aprendizaje, 92-93*, 77-100.

ARNDT, A. B. (1983): «A-lkhwarizmi». *Mathematics Teacher, 76*(9), 668-670.

BELL, A. (1982): «Looking at children and directed numbers». *Mathematics teaching, 100*, 66-72.

— (1986): «Enseñanza por diagnóstico. Algunos problemas sobre números enteros». *Enseñanza de las Ciencias, 4*(3), 199-208.

BROUSSEAU, G. (1983): «Les obstacles épistémologiques et les problèmes en mathématiques». *Recherches en Didactique des Mathématiques, 4*(2), 165-198.

BRUNO, A. (2001): «La enseñanza de los números negativos: formalismo y significado». *La Gaceta de la Real Sociedad Matemática Española, 4*(2), 415-427.

BRUNO, A.; MARTINON, A. (1996): «Números negativos: una revisión de investigaciones». *UNO, 9*, 98-108.

CARR, K.; KATTERNS, B. (1984): «Does the number line help?» *Mathematics in School, 13*(4), 30-34.

CARRAHER, T.N. (1990): «Negative numbers without the minus sign». *México: Proceedings XIV PME*. 223-229.

CID, E. (2000): «Obstáculos epistemológicos en la enseñanza de los números negativos». *Actas del XV Jornadas del Seminario Interuniversitario de Investigación en Didáctica de las Matemáticas, Boletín del SI-IDM, 10. Celebrado en*

Cangas do Morrazo (Pontevedra), los días 7, 8 y 9 de Abril de 2000. Disponible en http://www.ugr.es/ jgodino/siidm/boletin10.htm.

— (2002): «Los modelos concretos en la enseñanza de los números negativos». *Zaragoza: Actas de las X Jornadas para el Aprendizaje y Enseñanza de las Matemáticas, 2*, 529-542.

— (2003): *La investigación didáctica sobre los números negativos: estado de la cuestión*. Universidad de Zaragoza. Pre-publicaciones del seminario matemático "García de Galdeano".

CROWLEY, M.L.; DUNN, K.A. (1985): «On multiplying negative numbers». *Mathematics Teacher, 78*(4), 252-256.

DAVIS, P. (1974): *Matemáticas en el mundo moderno: El número*. Madrid: Blume. Seleccions de Scientific American. Títol original: Mathematic in the modern world.

DECRET 143/2007 (2007): «Ordenació dels ensenyaments de l'educació secundària obligatòria». Diari Oficial de la Generalitat de Catalunya 4915 de 29.6.2007.

DECRET 142/2008 (2008): «Ordenació dels ensenyaments de batxillerat». Diari Oficial de la Generalitat de Catalunya 5183 de 29.7.2008.

ERNEST, P. (1985): «The number line as a teaching aid». *Educational Studies in Mathematics, 16*, 411-424.

EUCLIDES (1996): *Elementos*. Madrid: Gredos.

GALLARDO, A. (1996): «Qualitative analysis in the study of negative numbers». *Valencia: Proceedings of the 20th International Conference of PME*, *2*, 377-384.

GARDNER, M. (1977): «Juegos matemáticos. La noción de número negativo y lo arduo que resulta entenderla». *Investigación y Ciencia, 11*, 102-106.

GLAESER, G. (1981): «Epistémologie des nombres relatifs». *Recherches en Didactique des Mathématiques, 2*(3), 303-346.

GÓMEZ, B. (1998): *Numeración y cálculo*. Madrid: Síntesis.

GONZÁLEZ, J.L.; *et al.* (1990): *Números enteros*. Madrid: Síntesis.

GUTIÉRREZ, S. (2005): «Hamilton: La liberación del álgebra». *SUMA*, *49*, 95-99.

HERNÁNDEZ, J. (1991): «L'ofici de matemàtic i l'ensenyament de les matemàtiques». *Barcelona: Butlletí de la Societat Catalana de Matemàtiques, 6*, 42-53.

HILBERT, D. (1993): *Fundamentos de las matemáticas*. México: Servicios Editoriales de la Facultad de Ciencias de la Universidad Nacional Autónoma de México. Selección e introducción de Carlos Álvarez y Luis Felipe Segura; traducción directa del alemán y notas de Luis Felipe Segura.

IRIARTE, M.; JIMENO, M.; VARGAS-MACHUCA, I. (1991): «Obstáculos en el aprendizaje de los números enteros». *SUMA, 7*, 13-18.

JOHNSON, D.R. (1986): «Making -x meaningfull». *Mathematics teacher, 79*(7), 507-510.

KÜCHEMANN, D. (1980): «Children's understanding of integers». *Mathematics in School, 9*, 31-32.

— (1981): «Positive and negative numbers». Hart, K. M. (ed). *Children's Understanding of Mathematics 11-16. London: John Murray*. 82-87.

KIERAN, C. (1985): «The equation-solving errors of novice and intermediate algebra students». *Utrecht: Proceedings of the 9th International Conference of PME*, *1*, 141-146.

KLEIN, F. (1927-1931): *Matemática elemental desde un punto de vista superior*. Madrid: [s.n.].

LÉONARD, F.; SACKUR, C. (1990): «Connaissances locales et triple approche, une méthodologie de recherche». *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *10*(2-3), 205-240.

MASON, J.; BURTON, L.; STACEY, K. (1988): *Pensar matemáticamente*. Barcelona: Labor.

MURRAY, J.C. (1985): «Children's informal conceptions of integer arithmetic». *Utrecht: Proceedings of the 9th International Conference of PME*, *1*, 147-153.

PEACOCK, G. (1830): *A treatise on algebra*. London.

— (1842): *A treatise on algebra*. London. Reimpressió. New York: Scripta Matemática (1940).

PIAGET, J. (1975): *Introducción a la epistemología genética*. Buenos Aires: Paidós.

PLA CARRERA, J. (1983): *Las Matemáticas: una historia de sus conceptos*. Barcelona: Montesinos, DL.

— (1998): *Damunt les espatlles dels gegants*. Barcelona: Edicions la Magrana.

PÓLYA, G. (1966*a*): *Matemáticas y razonamiento plausible*. Madrid: Tecnos.

— (1966*b*): «Teaching us a lesson». The Mathematical Association of America: MAA Video Classics.

— (1981): *Mathematical discovery: on understanding, learning, and teaching problem solving*. New York: Wiley.

— (1987): *Cómo plantear y resolver problemas*. México: Trillas.

POINCARÉ, H. (1974): *Matemáticas en el mundo moderno: La creación matemática*. Madrid: Blume. Seleccions de Scientific American. Títol original: Mathematic in the modern world.

PUIG ADAM, P. (1960): *La Matemática y su enseñanza actual*. Madrid: Ministerio de Educación Nacional.

PUJOL, R. (2006): «La matemàtica a través de la resolució de problemes. Una invitació a la participació i a la creativitat a l'aula». Report tècnic, llicència d'estudis concedida pel Departament d'Ensenyament.

PUJOL, R.; BIBILONI, Ll.; DEULOFEU, J. (2007): «Del treball conjectural al rigor: la resolució de problemes als ulls de l'alumne». *Biaix, 26*, 66-80.

REY PASTOR, J. (1976): *Elementos de análisis algebraico*. Madrid: Biblioteca Matemática.

REY PASTOR, J.; PI CALLEJA, P.; TREJO, A. (1969): *Análisis matemático. Volumen I: Análisis algebraico, teoría de ecuaciones y cálculo infinitesimal de una variable*. Buenos Aires: Kapelusz.

REY PASTOR, J.; PUIG ADAM, P. (1933): *Metodología y didáctica de la matemática elemental*. Madrid: A. Marzo.

ROJANO, T. (2002): «Mathematics learning in the junior secondary school: Students' access to significant mathematical ideas». *Handbook of International Research in Mathematics Education*, *1*, 143-163.

SCHOENFELD, A. (1985): *Mathematical problem solving*. Orlando: Academic Press.

SCHUBRING, G. (1988): «Discussions épistémologiques sur le statut des nombres négatifs et leur répresentation dans les manuels allemands et français de mathématiques entre 1795 et 1845. Actes du premier colloque franco-allemand de didactique des mathématiques et de l'informatique». *Grenoble: La Pensée Sauvage Editions*, 137-145.

SEMADENI, Z. (1984): «A principle of concretazation permanence for the formation of arithmetical concepts». *Educational Studies in Mathematics, 15*, 379-395.

SKEMP, R. (1980): *Psicología del aprendizaje de las matemáticas*. Madrid: Morata.

SOTOS, M. (2004): «¿En qué piensa el alumnado cuando decimos número?» *UNO, 37*, 93-104.

VILA, A. (1997): «La resolució de problemes de matemàtiques a l'educació secundària obligatòria: Elaboració d'un material transversal, gestió de la classe i avaluació». Report tècnic, llicència d'estudis concedida pel Departament d'Ensenyament.

— (2001): *Resolució de problemes de matemàtiques: identificació, origen i formació dels sistemes de creences en l'alumnat. Alguns efectes sobre l'abordatge dels problemes*. Tesi Doctoral, Universitat Autònoma de Barcelona. Bellaterra.

Capítol 12

Prospectiva. Implicacions i reflexions didàctiques

Índex

En aquest capítol tractem dos aspectes de la recerca: la prospectiva i les implicacions didàctiques. Respecte de la prospectiva presentem suggerències per a noves investigacions que brollen de la present. Deixem oberts nous interrogants, problemes i perspectives que permeten ampliar el treball realitzat. En segon lloc apuntem noves possibilitats didàctiques que es desprenen de la investigació. Una part de les esmentades implicacions prenen cos per sí mateixes i això ha conduït a que dediquéssim una àmplia part del present capítol a la seva exposició detallada.

12.1 Prospectiva

En el procés de recerca s'han obert tota una sèrie de qüestions que suggereixen diferents recerques que apuntem tot seguit.

1. Quin és l'interès didàctic que pot tenir una introducció del nombre enter, a l'inici de l'ensenyament secundari, que incorpori la justificació de la utilització del signe « − » des d'un primer moment?

2. Quin és l'interès didàctic que pot tenir una introducció de l'àlgebra aritmètica, a l'estil de PEACOCK (1830, 1842), prèvia a la introducció del nombre negatiu a través de models concrets (potser només de l'estructura additiva)?

3. Suposant que s'hagi implementat una introducció de de l'àlgebra aritmètica, a l'estil de PEACOCK (1830, 1842), i també una introducció del nombre negatiu a través de models concrets, quin és l'interès didàctic de la introducció de l'àlgebra simbòlica per extensió de l'aritmètica a través del *principi de permanència de les lleis formals* (p. 87)?

4. Quin és l'interès didàctic que pot tenir una introducció del nombre negatiu a partir del racional positiu (p. 105), tal com suggereix BRUNO (2001, pp. 417-420)?

5. Tot i que la proposta actual és introduir el nombre enter a través de models concrets, quina és la seva presència efectiva a les aules així com la dels altres estils d'ensenyament, principalment l'instructiu?

6. Quan en l'ensenyament superior ja està formulat el problema de la consistència, és realment la presentació constructiva una eina que s'empri per donar una prova de consistència relativa del conjunt dels nombres enters? Quin és aleshores l'interès didàctic i matemàtic de la presentació constructiva o axiomàtica?

7. Quina és l'edat adequada per introduir el nombre negatiu si es vol fer una petita immersió (no simbòlica, és a dir, sense representar nombres per lletres) deductiva? Suposant que l'edat per a l'esmentada introducció sigui posterior a l'actual, hi ha continguts previs a l'esmentada introducció que requereixin nombres negatius?

8. Quin és l'interès didàctic d'introduir la semirrecta numèrica per representar nombres naturals o racionals positius i, posteriorment, introduir els nombres negatius (enters o racionals) tot estenent la seva representació a la recta numèrica?

9. Quin és l'interès didàctic d'introduir el semiplà positiu (primer quadrant) i representar punts, semirrectes o segments, modelant situacions empíriques amb nombres racionals positius si s'escau, per introduir el nombre negatiu a partir de l'extensió d'aquests objectes; a l'estil del principi de permanència de les lleis geomètrico-algebraiques de FREUDENTHAL (1983, pp. 450-456)?

És inqüestionable la importància del coneixement didàctic matemàtic del docent, en particular el relatiu al contingut curricular que ens ocupa. Per a l'obtenció del Certificat d'Aptitud Pedagògica (CAP) la Universitat Autònoma de Barcelona va organitzar durant el curs acadèmic 2007/2008 diferents sessions. En una d'elles vam mirar d'extreure els aspectes més rellevants del coneixement didàctic relatiu al nombre enter dels futurs professors.

Quan els demanàrem quins són els motius que justifiquen la introducció del nombre enter a l'inici de l'educació secundària la posició era quasi unànime. Una àmplia part dels futurs professors expressen que els nombres negatius són necessaris en la vida quotidiana. Recolzen aquesta afirmació a través de models concrets, prioritàriament el model del termòmetre i el de guanys i pèrdues. Són molt pocs els que incideixen en la importància dels nombres negatius per donar resposta a la resolució d'equacions.

Donat que aquesta recerca no focalitza l'atenció en el professor, no presentem una anàlisi minuciosa dels resultats obtinguts. Tanmateix, volem destacar la importància de recerques amb aquest centre d'interès ja que la formació del professorat esdevé clau per facilitar el pont didàctic defensat en el present treball.

12.2 Implicacions didàctiques

A partir d'aquí, apuntem noves possibilitats didàctiques que es desprenen de la investigació. Cal aclarir i remarcar que són «possibilitats» i que roman pendent l'avaluació del seu interès didàctic. La implicacions didàctiques no són fruit de les dades de la recerca però brollen de les reflexions que hem fet al llarg de la investigació. Donat que estem en l'àmbit de l'educació, considerem interessant fer paleses noves possibilitats didàctiques. Així, mostrem una col·lecció d'idees que, essent possibilitats, podrien enriquir la introducció del nombre negatiu a través de models concrets, probablement en una primera introducció.

Entre un ensenyament purament formal (axiomàtic) i un de proper a l'alumne (models concrets) hi ha, tal com hem mostrat, altres possibilitats. Tanmateix, a l'hora de concretar propostes d'ensenyament del nombre negatiu es ben diferent abordar la introducció que reprendre aquest contingut mesos o anys després. La present recerca no focalitza l'atenció en el primer tractament del nombre negatiu que viu l'alumne a l'ensenyament obligatori. Tot i així i donat que cap de les aproximacions del nombre negatiu és del tot avantatjosa sembla raonable començar per la que sigui més fàcil.

> If there are two approaches to the same problem which appear equally advantageous in other respects, but one of which seems easier then the other, it is natural to try the easier approach first.
>
> (PÓLYA, 1981, Vol. 2, p. 93)

Tot seguit, i des del punt de vista exposat, començarem per establir i valorar l'interès didàctic de la vinculació existent entre models concrets i equacions. La distinció entre models de neutralització i de desplaçament es pot fer des del punt de vista de les equacions i, tal com veurem, això permet analitzar l'ensenyament des de cadascuna d'aquestes categories de models. A continuació mostrem la importància que tenen les equacions quan volem justificar la terminologia emprada per denotar els nombres negatius. Veurem quin pot ser el paper del *principi de permanència de les lleis formals* (p. 87), és a dir de l'ensenyament deductiu, si volem complementar la introducció del nombre enter a través de models concrets en tot allò que aquests no hi donen resposta. Finalment apuntem com una petita immersió deductiva en un ensenyament a través de models concrets pot complementar l'actual estil a través de models.

12.2.1 Models i equacions per a la introducció del nombre enter

La proposta d'introducció del nombre negatiu que presentem tot seguit dóna resposta a la petició formulada, entre d'altres, per BRUNO (2001).

> Queda mucho por averiguar sobre la enseñanza de los números negativos. Desde nuestro punto de vista, son necesarias nuevas investigaciones para determinar formas más eficaces de enseñanza que permitan a los alumnos modelizar situaciones simples mediante el uso de números negativos; es decir, que los alumnes trasladen situaciones contextualitzadas y gráficas a la dimensión abstracta y operen correctamente en ella.
>
> (BRUNO, 2001, p. 425)

Prenem els models concrets com a punt de partida. Tanmateix, a través de la seva equació vinculada, traslladem les preguntes que neixen del model a qüestions internes a la matemàtica. Compartim la posició de FISCHBEIN (1987) i la concretem:

> FISCHBEIN (1987) argued against using the existing models for negative numbers. He said they lack 'comprehensiveness', are basd

> on artificial conventions and so do not address the cognitive obstacles confronting the students. The purpose of a model is to add 'obviousness' and 'correctness' to mathematical concepts and operations on them, but this purpose is not achieved by them. He therefore concludes that the topic of negative number should be taught only when the students are ready to cope with intramathematical justifications.
>
> (LINCHEVSKI i WILLIAMS, 1999, p. 134)

12.2.2 Models, equacions i terminologia

Respondre al problema dels ascensors, plantejat a la secció 3.6 (p. 108), es correspon amb l'intent de resoldre l'equació $a_2 + x = a_1$, on a_2 fa referència a la planta on estem, $+x$ a la quantitat de pisos que pugem i a_1 a la planta on arribem. Per tant, el plantejament del problema és la traducció d'aquesta equació a una situació real. Per altra banda, la resolució es basa en la traducció de la situació real a l'equació que la modelitza. Tanmateix, el problema dels ascensors neix d'una situació real i l'equació associada és un problema intern a la matemàtica.

> Se presenta, pues, aquí por primera vez, el paso de la matemática práctica a la formal, para cuya completa comprensión es precisa en alto grado la capacidad de abstracción.
>
> (KLEIN, 1927-1931, Vol. 1, pp. 32-33)

Quan $a_2 = 3$ i $a_1 = 2$ tenim l'equació $3 + x = 2$. En el model concret ens preguntem quantes plantes hem de pujar si estem en la tercera planta i volem anar a la segona. Aquest plantejament s'allunya de la matemàtica clara i transparent oferida a l'alumne amb anterioritat a la introducció del nombre enter. Tota resposta honesta no pot menystenir que per molts pisos que pugem, si estem en el tercer, mai arribarem al segon.

Mirem ara l'equació del model, és a dir, $3 + x = 2$. Quant cal sumar a 3 per obtenir 2? No hi ha cap nombre natural que sumat a 3 tingui per resultat 2.

Cal afegir nous nombres als ja coneguts i acceptats, és a dir als naturals, si volem resoldre l'equació[1].

El que cal sumar a 3 per obtenir 2 ha de ser un nou nombre que es comporta, en virtut del que coneixem dels nombres naturals, com si restéssim 1. Ara hem de decidir:

1. Acceptem i afegim aquest nou nombre als que ja tenim (naturals)?
2. Quin nom li posem?

> Es preciso distinguir entre la resta y los números negativos.
>
> (GARDNER, 1977, p. 102)

L'acceptació es produeix per la voluntat de resoldre l'equació; un problema intern a la matemàtica. Posar nom a aquest nou nombre podria ser una decisió arbitrària. Ara bé, el fet que quan el sumem es comporti com si restéssim 1 suggereix anomenar-lo -1[2]. Tenim, per tant, dues possibilitats: Imposar la terminologia, que és el que sovint es pot trobar, o negociar-la a partir del comportament que hem descrit. L'esmentada negociació permet justificar la polisèmia del « $-$ ».

Cal destacar que fet això no hi ha cap motiu per anomenar «negatius» a aquests nombres. Només un apunt històric pot permetre als estudiants que coneguin la procedència del mot i, per tant, la seva justificació. Des del punt de vista històric es creu que van ser nombres negats o no acceptats, fet que va conduir que se'ls anomenés «negatius» (p. 129), tal com apunten GONZÁLEZ *et al.* (1990, p. 28). Negar, rebutjar i evitar aquests nombres que ara hom anomena negatius ha estat una realitat al llarg de segles.

> Para D'Alembert, en el contexto del cálculo, la aparición de una raíz negativa significa que hay que modificar el enunciado, lo que manifiesta el deseo de D'Alembert de evitarlos como raíces.

[1]Des del punt de vista epistemològic, tal com mostra MOLAS i PÉREZ (1990, p. 38), el desig dels algebristes de poder resoldre les equacions polinòmiques crearà la necessitat de disposar d'un nou sistema de nombres.

[2]La reflexió sobre la notació que emprem per denotar els nous nombres només l'hem trobat en GONZÁLEZ *et al.* (1990, p. 92). Els nombres negatius apareixen per primera vegada en la història al resoldre equacions i just és de les equacions d'on brolla la reflexió sobre l'acceptació i la notació dels nous nombres.

> [...]
>
> El signo « − » que se encuentra ante una cantidad sirve para corregir y para enderezar un error cometido en la hipótesis, como el ejemplo anterior hacer ver claramente. De esta forma D'Alembert evita el negativo llevando el problema a un terreno conocido, el de la sustracción natural.
>
> (GARDNER, 1977, p. 102)

Potser els estudiants haurien de tenir també l'oportunitat de negar aquests nombres? És a dir, s'haurien de trobar (abans d'iniciar el tema que ens ocupa) amb equacions de la forma $a_2 + x = a_1$, que no tenen solució natural, i haurien de poder negar tota solució, almenys durant un cert temps? Aquesta possibilitat s'adiu amb la posició de PEACOCK (1830, 1842), precursor del *principi de permanència de les lleis formals* (p. 87) de Hankel. Esdevé una possibilitat didàctica que té en consideració la posició epistemològica.

12.2.3 Integració de la suma i la resta de nombres enters: l'addició

La resolució de l'equació $a_2 + x = a_1$ amb coeficients naturals, quan $a_2 \leq a_1$, permet conèixer el comportament de la suma de nombres naturals quan fem la traducció als models vinculats amb l'esmentada equació. En particular, en el model dels ascensors la suma de nombres naturals es tradueix en pujar pisos. Per exemple, sumar 2 es correspon amb pujar dos pisos.

La resolució de l'equació $a_2 - x = a_1$ amb coeficients naturals, quan $a_2 \geq a_1$, permet conèixer el comportament de la resta de nombres naturals quan fem la traducció als models vinculats amb l'esmentada equació. En particular, en el model dels ascensors la resta de nombres naturals es tradueix en baixar pisos. Per exemple, restar 2 es correspon amb baixar dos pisos.

L'ensenyament del nombre enter a través de models concrets imposa el *principi de permanència de les lleis formals* (p. 87), sense explicitar-ho, quan fa extensiva la suma a tots els enters; després d'imposar la terminologia -1, -2, -3,

... Aquest ensenyament no facilita la negociació amb l'alumnat ja que la terminologia dels nous nombres s'imposa i el comportament de la suma i de la resta en cada model també.

En canvi, atenent a l'equació vinculada al model, podem justificar la terminologia emprada a partir del comportament dels nombres introduïts. Restar -2 és un càlcul matemàtic que no es correspon inicialment amb cap pregunta que sorgeixi del model concret. Es poden forçar plantejaments de manera que condueixin a restar -2, però sovint es poden evitar emprant només nombres positius. Cal distingir entre la necessitat d'incorporar nombres negatius i la voluntat de fer-ho.

12.2.4 Permanència de les nocions comunes i oposat d'un nombre enter

Introduïts els nous nombres -1, -2, -3, etc., esteses les operacions conegudes pels nombres naturals als nombres enters i negociada i acceptada la terminologia emprada per denotar-los, ens ocupem ara de la seva representació en la recta numèrica. L'esmentada representació es fa per extensió del comportament de la suma i la resta de nombres naturals als enters. Si sumar -1 és una operació que es comporta com si restéssim 1 i, a més, restar naturals produeix desplaçaments en la recta numèrica de tantes posicions com indica el nombre, aleshores, -1 ocuparà en la recta numèrica la primera posició a l'esquerra del zero; de manera semblant amb els altres nombres enters. Efectuada l'esmentada representació, respecte de l'origen -1 està oposat (simètric) a 1, -2 està oposat a 2, etc. Tanmateix, tal com hem apuntat anteriorment, el model concret no condueix a veure, entre d'altres aspectes, el valor de $-(-1)$.

Examinem l'equació $3-(-1) = x$. Cal forçar molt la interpretació en els models concrets per tal que alguna pregunta que brolli d'ells permeti ser modelitzada fins arribar a aquesta equació. Suposant que un model concret arribi a ella són diversos els autors, PETERSON (1972) per exemple, que han exemplificat a través de models concrets com es pot fer plausible que $(-1)\cdot(-1) = +1$. Tanmateix, les dificultats d'aprenentatge que es deriven d'aquests enfocaments didàctics recollides per CID (2003, 2002, 2000) i BRUNO (2001, 1997) i les reflexions i propostes de KLEIN (1927-1931), FISCHBEIN (1987) i FREUDENTHAL (1983) se sumen als episodis epistemològics, alguns dels quals hem apuntat en aquest document, per proposar una reflexió, que fem tot seguit, a partir de les nocions més comunes.

En virtut de la segona noció comuna del primer llibre dels *Elements* d'Euclides tenim que si a coses iguals s'afegeixen coses iguals els totals seran iguals[3] (peu 17, p. 112).

En virtut de l'acceptació del *principi de permanència de les lleis formals* (p. 87), en virtut del qual estenem aquesta noció comuna dels nombres naturals als nombres, tenim que aquesta equació és equivalent a la que s'obté si sumem (-1) a ambdós membres de la igualtat, obtenint $3-(-1)+(-1)=x+(-1)$.

-1 és un nombre que hem denotat així perquè quan el sumem a 1 obtenim 0. Si acceptem que $-(-1)$ és un nombre aleshores, pel mateix motiu que acabem d'emprar, és un nombre que quan el sumem a (-1) té per resultat 0. Però 1 també és un nombre que quan el sumem a -1 té per resultat 0. Ara bé, per la llei de cancel·lació[4], si hi ha un nombre que sumat a -1 dóna zero aleshores aquest és únic. En conseqüència, $-(-1)=+1$.

Per tant, també amb nombres enters afegir i treure una mateixa quantitat deixa invariant la quantitat inicial. D'aquí tenim l'equació equivalent $3=x+(-1)$. Donat que -1 és un nombre que quan el sumem es comporta com si restéssim 1, tenim l'equació equivalent $3=x-1$, que té $x=4$ per solució.

Restar -1 té el mateix efecte que sumar 1, fet que denotem per $-(-1)=+1$. La integració de la suma i de la resta en l'operació addició, objectiu proposat en BRUNO i MARTINON (1996*a*, p. 124) tal com es mostra en la pàgina 92, és possible a partir de les nocions comunes dels *Elements* d'Euclides i de la seva extensió pel *principi de permanència de les lleis formals* (p. 87).

Limitar la introducció del nombre enter als models i mantenir-se en ells limita el coneixement matemàtic que volem construir, amb el risc que sigui imposat. En canvi, el treball a partir de l'equació associada a un model permet descobrir les regles que permeten operar els nombres enters, permet negociar la terminologia

[3]Potser no cal explicitar aquesta informació als alumnes ja que de ben segur que l'acceptaran. Noció comuna 2: Si a coses iguals s´afegeixen coses iguals, els totals seran iguals. Informació obtinguda de `http://www.euclides.org/`. Tanmateix, la noció s'enuncia pels nombres que en l'actualitat anomenem naturals.

[4]La llei cancel·lativa de l'addició en $\mathbb{N}$ diu que si a, b i c pertanyen a $\mathbb{N}$ i sabem que $a+b=a+c$ aleshores $b=c$ tal com mostren, entre d'altres, REY PASTOR *et al.* (1969, p. 21).

dels nous nombres i, posteriorment, aplicar el coneixement construït i après a la resolució de situacions quotidianes, és a dir, als mateixos problemes que s'empren en la introducció a través de models.

En particular, la regla que diu que el signe « − » davant d'un nombre enter té l'efecte de transformar-lo en el seu oposat es pot introduir de diferents maneres. En els models concrets el símbol « − » ja no és una resta, tal com l'alumne ha après en l'ensenyament primari, associada a l'acció treure. Cada model pren una interpretació diferent. Així, en els models de neutralització té l'efecte de produir un canvi d'estat: tenir per deure, pujar per baixar, etc. En els models de desplaçament produeix un canvi de sentit que en cada cas particular té una interpretació diferent. Tanmateix, els models no estableixen un pont didàctic que permeti vincular el signe « − » utilitzat pels alumnes en l'ensenyament primari amb el que es desitja que interpreti a l'ensenyament secundari.

L'equació associada al model és un instrument a través del qual podem veure que l'oposat de l'oposat d'un nombre enter és el mateix nombre enter; en poques paraules, que fer l'oposat és una operació involutiva[5]. Evitar l'equació associada al model facilita que aquestes propietats siguin imposades o justificades de manera no prou satisfactòria quan la introducció del nombre enter es limita exclusivament als models concrets.

Descontextualització del coneixement construït

Entenem per «descontextualitzar» el procés a través del qual aquell coneixement matemàtic que hem obtingut a través d'un model concret passa a tenir sentit per sí mateix, més enllà del model que l'ha motivat. L'equació vinculada a un model és, per tant, un instrument que facilita descontextualitzar el coneixement que es desprèn de la situació empírica. D'aquesta manera el coneixement matemàtic que obtenim esdevé útil per altres models i, per tant, facilita la obtenció de respostes a d'altres qüestions que es puguin presentar.

[5]Una operació és involutiva si en aplicar-la dues vegades el resultat és el mateix que si no l'haguéssim aplicat cap vegada.

Els nombres negatius i l'àlgebra elemental

La introducció del nombre enter quan atenem a l'equació del model condueix a considerar uns nous nombres que, de manera justificada i negociada, denotem fent ús del símbol « $-$ ». Tanmateix, en un primer moment es pot evitar parlar de nombres negatius ja que de fet apareixen als ulls de l'alumne com uns nous nombres les propietats dels quals estan per descobrir. En aquest sentit compartim la posició de Johnson (1986):

> How do your algebra students read the symbol $-x$? Common responses are «negative x,» «minus x,» «the opposite of x» or «the additive inverse of x». The most common response is «negative x.» But are all response meaningful? Definitely not! In fact, the first two responses are very misleading, if not incorrect. In many classrooms, teachers are quite careful to name a real number less than zero (or to the left of zero on the real-number line) a *negative number*. Students quite easily grasp the meaning of the phrase *negative number*. But suddenly we bring out the expression $-x$ and read it «negative x»! Trouble begins. Students immediately assume that this symbol stands for a number less than zero simply because its verbal name contains the word *negative*.
>
> (Johnson, 1986, p. 507)

Hi ha hagut estudis que s'han centrat en la dificultat que tenen els alumnes a l'hora d'integrar la suma i la resta de nombres enters en una única operació: l'addició. Tal com hem mostrat anteriorment l'atenció a l'equació del model facilita l'esmentada integració. Per altra banda, el treball realitzat amb models mostra les dificultats per aconseguir-ho. La introducció exposada permet justificar i no imposar que l'operació «fer l'oposat» és involutiva, propietat necessària per donar significat a l'expressió $-x$.

Booth (1984) destaca tres àmbits de dificultat en l'aprenentatge de l'àlgebra elemental: la inadequada interpretació de les lletres, la no formalització del coneixement matemàtic que s'ha après vinculat al context i la incorrecta interpretació de la notació. En paraules de Booth (1984, pp. 87-92) citades per Gascon

(1993, p. 307): «Se considera así que los errores en álgebra surgen esencialmente como consecuencia de generalizaciones erróneas de nociones establecidas en aritmética y, a la vez, como consecuencia de no disponer de una formalización adecuada de los métodos aritméticos desde los cuales sea posible generalizar según las necesidades del álgebra».

La proposta que plantegem suggereix un ensenyament del nombre negatiu simultani o consecutiu a la introducció de l'àlgebra elemental. Calen més investigacions centrades en els primers anys de l'Educació Secundària Obligatòria per tal d'avaluar l'interès didàctic de la proposta que apuntem.

12.2.5 Desplaçaments sobre la recta numèrica: el símbol predicatiu « − »

En l'apartat 2.1.3 (p. 60) hem vist que sota la posició dels models concrets de desplaçament per a la introducció del nombre enter, els signes predicatius « + » i « − » s'interpreten com posicions a una banda o a l'altra respecte de l'origen en la recta numèrica o desplaçaments en un sentit o un altre, com es pot consultar a partir de la pàgina 57. L'ensenyament del nombre enter a través de models concrets té com a punt de partida aquest comportament. El que per l'alumne volia dir treure i que denotava amb el símbol « − », amb l'ensenyament del nombre enter a través de models concrets passa a indicar una posició en la recta numèrica o un desplaçament, però per què? Veurem tot seguit com el fet de considerar l'equació associada al model permet justificar aquestes regles.

Models, equacions i desplaçaments

Estar en un determinat pis, pujar-ne o baixar-ne una determinada quantitat, i preguntar-se pel pis d'arribada són accions reals que es tradueixen dins la matemàtica per la cerca de solucions de l'equació $a_2 + x = a_1$ amb nombres enters, però que en un primer moment podem abordar amb naturals, seguint la línia d'actuació proposada per PEACOCK (1830, 1842)

Equacions i desplaçaments

Si estem en el primer pis, és a dir $a_2 = 1$, i volem anar al segon, és a dir $a_1 = 2$, quants pisos haurem de pujar per aconseguir-ho? Mantenir-se dins del model porta a respondre que hem de pujar un pis. L'equació vinculada al model permet traduir la pregunta a la cerca de solucions de l'equació $1+x = 2$ que té per solució $x = 1$. La interpretació de la solució de l'equació permet veure que l'operació sumar 1 té un comportament en la situació empírica que es correspon amb pujar un pis.

Si estem en el segon pis, és a dir $a_2 = 2$, i volem anar al primer, és a dir $a_1 = 1$, quants pisos haurem de pujar per aconseguir-ho? Mantenir-se dins del model porta inevitablement a respondre que per molts pisos que pugem mai podrem arribar al primer si partim del segon. Dir que hem de baixar un pis és clar i transparent, però denotar aquesta acció per l'operació sumar -1 és una imposició que, en canvi, pot ser negociada i justificada.

L'equació permet cercar solucions que posteriorment es poden traduir al model. $2 + x = 1$ té per solució -1 ja que aquest és un nombre (no natural) que hem denotat d'aquesta manera perquè en sumar-lo es comporta com si restéssim 1. La traducció al model concret permet veure que sumar -1 té un comportament que es correspon amb baixar un pis.

Terminologia per denotar els soterranis en el model dels ascensors

Si estem en el segon soterrani, que denotem per a_2, i volem anar al cinquè pis que ja denotàvem per $a_1 = 5$, haurem de pujar set pisos tal com ens informa el nostre sentit comú. L'equació vinculada al model, és a dir $a_2 + x = a_1$, ens diu en el cas concret que ens ocupa que $a_2 + 7 = 5$; aquesta equació és equivalent a $a_2 + 2 = 0$. Té per solució un nombre que quan el sumem es comporta com si restéssim 2. Aquest nombre no és natural i hem convingut a denotar-lo per -2 en virtut del seu comportament. La traducció del fenomen empíric a l'equació vinculada ens permet denotar el segon soterrani per -2. Si la introducció del nombre enter a través de models concrets prescindeix de l'equació vinculada al model aleshores cal imposar aquesta terminologia. Tal com hem vist pot ser justificada si atenem els models conjuntament amb les seves equacions.

Addició i desplaçaments

Considerem ara que estem en el segon soterrani, és a dir $a_2 = -2$, i volem anar al cinquè pis, és a dir $a_1 = 5$, haurem de pujar una quantitat de pisos que volem determinar. L'equació vinculada al model ens diu que la quantitat de pisos que hem de pujar ve donada per les solucions de l'equació $-2 + x = 5$.

En virtut de la segona noció comuna del primer llibre dels *Elements* d'Euclides tenim que si a coses iguals s'afegeixen coses iguals els totals seran iguals. L'acceptació del *principi de permanència de les lleis formals* (p. 87), en virtut del qual estenem aquesta noció comuna als nombres enters, ens diu que aquesta equació és equivalent si sumem 2 a ambdós membres de la igualtat, obtenint $-2 + x + 2 = 5 + 2$. Si acceptem pels nous nombres que l'ordre dels sumands no altera la suma, tal com passava amb els nombres naturals, aleshores obtenim que $x = 7$. La traducció de la solució d'aquesta equació al model concret ens permet veure que sumar 7 es correspon amb pujar set pisos.

Si estem en el segon soterrani, és a dir $a_2 = -2$, i volem anar al cinquè soterrani, és a dir $a_1 = -5$, haurem de pujar una quantitat de pisos que volem determinar. L'equació vinculada al model ens diu que la quantitat de pisos que hem de pujar ve donada per les solucions de l'equació $-2 + x = -5$. Novament, en virtut de la segona noció comuna dels *Elements* d'Euclides i del *principi de permanència de les lleis formals* (p. 87), segons el qual estenem aquesta noció comuna als nombres enters, tenim que aquesta equació és equivalent a $-2 + x + 5 = -5 + 5$. Si acceptem pels nous nombres que l'ordre dels sumands no altera la suma, és a dir la propietat commutativa de la suma que acceptem en els nombres naturals, aleshores tenim l'equació equivalent $5-2+x = 5-5$, és a dir, $3+x = 0$. Aquesta equació té per solució el nombre no natural -3, que tal com hem vist, en sumar-lo té un comportament equivalent a restar 3. La traducció de la solució d'aquesta equació al model concret ens permet veure que sumar -3 es correspon amb baixar tres pisos.

La traducció entre els models i les equacions vinculades facilita que l'alumne pugui descobrir que, en el model dels ascensors, sumar es correspon amb l'acció pujar pisos si el nombre enter és positiu, és a dir si s'identifica amb un natural per la injecció canònica, i es correspon amb l'acció baixar pisos si no és així.

L'estructura additiva

En conseqüència, acceptar l'equació vinculada al model permet justificar i no imposar el significat del « $-$ ». En l'ensenyament del nombre enter a través de models concrets s'imposa que « $+$ » i « $-$ » són uns símbols que ja no volen dir afegir i treure respectivament. L'atenció a l'equació del model permet establir un pont didàctic entre el significat que dóna l'alumne a « $+$ » i « $-$ », és a dir afegir i treure, i els nous significats que es pretén que l'alumne assoleixi per a cada model.

El lector apreciarà que l'exposat fins aquest moment permet introduir l'estructura additiva. Hem requerit nous nombres per resoldre equacions i hem justificat la terminologia per denotar-los. Hem vist com sumar aquests nous nombres es reflecteix en el model concret dels ascensors per les accions pujar o baixar facilitant així la integració de la suma i de la resta en una mateixa operació, l'addició.

12.2.6 Elecció d'un model: neutralització versus desplaçament

El model concret dels ascensors proposa el tractament d'una situació equivalent a la resolució de l'equació $a_2 + x = a_1$ on a_2 és el pis de partida, $+x$ la quantitat de pisos que pugem i a_1 el pis d'arribada. En casos concrets com $3+x = 2$ l'equació convidarà a introduir un nou nombre que en ser sumat a 3 té per resultat 2. Aquest fet suggereix la seva acceptació i l'ús de la terminologia habitualment emprada pels nombres enters.

El model concret de les fitxes de dos colors que es neutralitzen proposa el tractament d'una situació equivalent a la resolució de l'equació $a_2 - a_1 = x$ on a_2 denota la quantitat de fitxes d'un color, a_1 la quantitat de fitxes de l'altra color i x la diferència d'ambdues. En l'equació x és el resultat d'una diferència i això no facilita la introducció de la terminologia emprada pels nombres enters negatius. El motiu rau en el fet que quan la diferència de nombres naturals $a_2 - a_1$ no es pugui fer, caldrà imposar la terminologia aprofitant que sabem el que volem obtenir.

Els models concrets de desplaçament es corresponen amb equacions de la forma $a_2 + x = a_1$. Això és així ja que $+x$ és el desplaçament, a_2 el punt de partida i a_1 el punt d'arribada. Els models concrets de neutralització es corresponen amb equacions de la forma $a_2 - a_1 = x$. Això és així ja que a_2 i a_1 indiquen la quantitat d'objectes de cada tipus que es neutralitzen i x el que queda després de la neutralització.

La introducció de la terminologia pels nous nombres és, per tant, més factible de negociar amb els alumnes des dels models concrets de desplaçament[6]. No farem en aquesta investigació un estudi a fons de cada model però sí que considerem que la reflexió, estudi i treball sobre cadascun d'ells, des del punt de vista exposat, pot facilitar diferents propostes d'ensenyament que poden ser més o menys adequades per a cada grup d'alumnes, segons el model concret de partida escollit.

12.2.7 Dels models concrets de neutralització al mètode deductiu

Hem destacat en les línies anteriors l'interès dels models concrets de desplaçament per introduir la terminologia dels nombres negatius. Tot seguit veurem una virtut que tenen els models de neutralització, però que també és possible gaudir-la amb els de desplaçament (p. 241).

Hem manifestat que l'ensenyament del nombre negatiu a través del mètode deductiu pot participar en la superació de les dificultats que es troben els alumnes quan el seu aprenentatge es realitza a través de models concrets (sec. 2.1, p. 56). Que el nombre negatiu neixi d'una necessitat interna de la matemàtica i que sigui un nou objecte que no apareix per comptar o mesurar, força una evolució del concepte de nombre.

> Para muchos alumnos hay problemas aditivos especialmente difíciles, y no consiguen encontrar una operación adecuada con números negativos que resuelva el problema. Se hace necesario, por lo tanto, buscar métodos de enseñanza que ayuden a establecer relaciones entre el conocimiento abstracto y las situaciones contextualizadas.
>
> (Bruno, 2001, p. 425)

El problema dels nombres consecutius ha permès connectar un problema plantejat en els nombres naturals amb la introducció deductiva del nombre enter. Els models concrets que s'empren en l'ensenyament obligatori per a introduir els

[6]La traducció d'un model concret de neutralització a la seva equació associada pot conduir al mateix resultat. Tanmateix, l'equació associada haurà de ser modificada per aconseguir el que amb els models concrets de desplaçament obtenim sense necessitat de modificar l'equació.

nombres enters neixen de situacions concretes i contextualitzades. Anem a veure com es poden traslladar al pla formal i, per tant, com es pot connectar la introducció del nombre enter a través de models concrets de neutralització amb la introducció deductiva. Centrarem l'atenció en el cas particular del model concret de les fitxes de dos colors.

El model concret de les fitxes de dos colors

Considerem el model concret de neutralització que consisteix en la manipulació de fitxes de dos colors en el supòsit que cada fitxa d'un color neutralitza una de l'altra color. La suma s'interpreta com l'acció d'afegir fitxes i la resta com l'acció de treure'n. Aquest model concret il·lustra força bé el comportament de l'addició de nombres enters; amb les limitacions òbvies que provenen de mantenir estàtica la concepció de nombre que té l'alumne i presentar els nombres enters com la resposta a una necessitat externa a la matemàtica.

Simbolitzar la possessió d'a fitxes d'un color i b fitxes d'un altre color per (a, b) permet representar-les per parells de nombres de manera no forçada. Sumar els parells (a, b) i (c, d) es correspon amb l'acció d'afegir totes les fitxes obtenint $(a + c, b + d)$. Com que les fitxes del mateix color es neutralitzen tenim que (a, b)=$(a + c, b + c)$, establint d'aquesta manera tota una col·lecció de parells que representen la mateixa situació.

A més, $(a, b) - (c, d) = (a - c, b - d)$ si $a \geq c$ i $b \geq d$; si alguna desigualtat no es compleix podem transformar el parell (a, b) per la propietat anterior de manera que $(a, b) = (a + c, b + c)$ sí que compleixi les desigualtats esmentades. D'aquesta manera la resta d'aquests parells és possible, mantenint la proximitat amb la realitat, és a dir, mostrant que restar és treure d'una col·lecció d'objectes una quantitat igual o menor a la que hi ha. Aquest exemple mostra amb claredat que l'ensenyament del nombre enter a través del model concret esmentat facilita una concepció estàtica del que és un nombre; el nombre enter segueix servint per comptar, sumar es correspon amb l'acció d'afegir i restar amb la de treure.

Com que cada fitxa d'un color neutralitza una de l'altra color podem iterar aquest procés fins que no quedi cap fitxa d'algun dels colors. D'aquesta manera tot parell (a, b) quedarà representat per $(a - b, 0)$ si $a \geq b$ o bé $(0, b - a)$ si $b \geq a$;

quan es dóna la igualtat entre les fitxes de diferents colors totes es neutralitzen i no en queda cap, situació simbolitzada per $(a, a) = (0, 0) = 0$. Aquest comportament descrit pel model concret de les fitxes de dos colors és aplicable als diferents models concrets de neutralització que es poden consultar en la literatura relativa al centre d'interès que ens ocupa; a tal efecte considerem recomanable consultar la relació mostrada per CID (2003, pp. 5-6). Tal com mostra aquesta mateixa autora en les *Actas de las X Jornadas para el Aprendizaje y Enseñanza de las Matemáticas* (2002, p. 532), l'ordre requereix la introducció d'una valoració moral que estableixi que tenir fitxes d'un color té un valor «positiu» mentre que tenir les de l'altre color té un valor «negatiu».

Les consideracions esmentades en aquest apartat i les apreciacions de BRUNO (2001, p. 421), relatives al fet que el model de la recta pot ser utilitzat en situacions quotidianes en les que s'empren nombres negatius i que, a més, facilita connectar posteriorment amb els nombres racionals i reals, ens condueix a emprar la recta numèrica per traduir el model concret de neutralització de les fitxes a la recta numèrica amb la finalitat de continuar l'ensenyament amb el mètode deductiu per a l'estructura multiplicativa.

La vinculació del model de les fitxes de dos colors està fortament lligat a un fenomen empíric. Tota justificació que vulguem aconseguir de l'estructura multiplicativa arriba a l'acció que es correspon amb multiplicar fitxes. Topem novament amb les dificultats que provenen del lligam que hi ha en l'ensenyament a través de models concrets entre nombre i quantitat.

La introducció justificada del símbol « $-$ »

Veurem a continuació com es pot introduir el símbol predicatiu « $-$ » a partir de la suma que hem definit. Considerem bones les fitxes blaves i dolentes les vermelles perquè unes porten guanys i les altres pèrdues, fixant així una valoració, i plantegem la situació següent:

Tenim quatre fitxes blaves i en traiem una. Utilitzant parells de nombres per fer referència a nombres enters tenim $(4, 0) - (1, 0) = (3, 0)$, és a dir, ens queden tres fitxes blaves[7]. Hom faria una resta de nombres naturals per donar resposta a

[7] La terminologia $4 - 1 = 3$ s'empra tant per fer referència a la diferència de nombres natu-

aquesta situació; aquest és un exemple propi dels primers anys de la matemàtica escolar.

Tenim quatre fitxes blaves i n'afegim una de vermella. Com que es neutralitzen tenim $(4, 0) + (0, 1) = (4, 1) = (3, 0)$, és a dir, tres fitxes blaves.

Sumar $(0, 1)$, és a dir, afegir una fitxa vermella té el mateix efecte que restar $(1, 0)$, és a dir, treure una fitxa blava. Denotem per a a tot parell de la forma $(a, 0)$. Com que sumar el parell $(0, a)$ té el mateix efecte que restar $a = (a, 0)$, acceptem la terminologia $-a$ per fer referència al parell $(0, a)$.

Sobre l'addició

Tal com hem exposat anteriorment (sec. 12.2.7, p. 539), la suma dels parells de nombres queda justificadament[8] definida per $(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$. Posteriorment, en el moment de voler vincular aquest ensenyament amb el mètode deductiu, hom pot actuar com es mostra a continuació.

Considerem només fitxes blaves, de vermelles també n'hi ha, però en aquesta ocasió les apartem. Considerem els dos parells de nombres (a, b) i (c, d) que representen dues col·leccions de fitxes blaves, ja que per neutralització les vermelles desapareixen. En aquest cas la reunió d'ambdós parells ve donada per la seva suma i, per tant, $(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$. La introducció del símbol predicatiu « $-$ » i la definició de la suma de parells ens permeten continuar tal com hem fet en el mètode deductiu (sec. 7.3.1, p. 255).

Conduir la suma de nombres enters al mètode deductiu prepara el terreny per la posterior definició del producte, que serà on els models concrets no facilitaran una definició intuïtiva i clara. A més, el coneixement que l'alumne ha adquirit des del model concret, és a dir, des d'una realitat externa a la matemàtica, esdevé un coneixement intern de la matemàtica que creix dins d'aquesta.

rals com d'enters. Els models concrets que pretenen introduir el nombre enter no emfasitzen la diferència entre ambdós.

[8] La suma de nombres enters en la introducció a través de models concrets es vincula a l'acció «afegir».

Sobre el producte

Considerem el model concret de les fitxes de dos colors que es neutralitzen. El producte de dos nombres enters es justifica dins del model dient per exemple que:

- $a \cdot b$ significa que afegim a vegades b fitxes blaves.
- $(-a) \cdot (-b)$ significa que traiem a vegades b fitxes vermelles.
- $(-a) \cdot b$ significa que traiem a vegades b fitxes blaves.
- $a \cdot (-b)$ significa que afegim a vegades b fitxes vermelles.

El producte que s'introdueix a través d'aquest model concret no és una operació interna en el conjunts dels nombres enters. En l'exposició que acabem de mostrar no es multipliquen fitxes per fitxes sinó que es suma una determinada quantitat de vegades una determinada quantitat de fitxes.

> Y avanzando un poco más, podríamos llegar a decir que el origen del problema lo podemos encontrar en la pretensión de justificar el comportamiento de los números enteros en entornos aritméticos elementales, pues en ellos no hay más remedio que identificar el número entero con medidas de cantidades de magnitud, desplazamientos o posiciones, lo que desemboca, inevitablemente en estructuras cercanas al espacio vectorial y al espacio afín que desvirtúan la estructura de anillo totalmente ordenado que es, en cambio, lo que nos interesa resaltar.
>
> (CID, 2002, p. 536)

12.2.8 Correspondència entre models i equacions

Els models concrets de desplaçament que es poden consultar a la bibliografia presenten situacions molt properes a la realitat quotidiana de l'alumne. Això pot fer que alguns models no suggereixin respostes que esdevenen possibles si es cerquen en les seves equacions. Aquest fet suggereix que els nombres enters no neixen d'una necessitat externa a la matemàtica i que és l'equació de cada model la que pot oferir solucions que posteriorment cal interpretar en cada situació real.

Les equacions són un instrument que facilita la descontextualització del coneixement matemàtic construït a través del model concret emprat. A més, l'equació pot estar plantejada en els nombres naturals o en els racionals positius, segons el model escollit, fet que permet la introducció dels nombres enters o els nombres racionals.

Models i equacions per introduir els nombres enters

L'equació del model concret de desplaçament dels ascensors es planteja en $\mathbb{N}$ i es resol en $\mathbb{Z}$. Si a_2 indica el pis on estem, $+x$ la quantitat de pisos que pugem i a_1 el pis d'arribada aleshores l'equació $a_2 + x = a_1$ es correspon amb el model, es planteja en els nombres naturals i es resol en tots els casos en els nombres enters.

L'equació del model concret de neutralització de les fitxes de dos colors que es neutralitzen es planteja en $\mathbb{N}$ i es resol en $\mathbb{Z}$. Si a_1 i a_2 indiquen la quantitat de fitxes de cada color aleshores l'equació $a_2 - a_1 = x$ es correspon amb el model, es planteja en els nombres naturals i es resol en els nombres enters. Dins del model es podrà experimentar però les dificultats es produiran quan es vulgui desvincular el coneixement matemàtic adquirit del model concret. Donat que x és el resultat d'una operació caldrà imposar, d'una o altra manera, el resultat que es pretén aconseguir.

El problema dels nombres consecutius (p. 241) es correspon, per cada valor de n, amb la resolució de l'equació $n = a_1 + (a_1 + 1) + (a_1 + 2) + \ldots + (a_1 + k)$, o de manera equivalent, $n = \sum_{i=0}^{k}(a_1 + i)$. El plantejament inicial en els nombres naturals condueix a la introducció de nous nombres, els enters. Per altra banda, el problema també es pot plantejar i resoldre en els nombres enters. Aquesta equació es correspon amb una forma generalitzada de l'equació més elemental d'un model de desplaçament i, plantejada en els nombres naturals, facilita la introducció dels nombres enters quan ens proposem cercar totes les seves solucions.

> [...] con la introducción de los números negativos se manifiesta claramente la facultad de generalización de que está dotada la mente humana, por virtud de la cual, sin darnos cuenta de ello, nos sentimos

> inclinados a extender y aplicar a cuestiones más generales conceptos y reglas deducidos y válidos para casos particulares. Esta tendencia, aplicada a la Aritmética, cristaliza en el llamado Principio de permanencia de las leyes formales, explícitamente enunciado, por primera vez, por Hermann Hankel en su interesantísima y muy recomendable obra Theorie der komplexen Zahlsysteme.
>
> (KLEIN, 1927-1931, Vol. 1, p. 36)

Models i equacions per introduir els nombres racionals

Posem un exemple. Un dipòsit conté inicialment a_2 litres d'aigua i volem afegir-ne una determinada quantitat fins que hi hagi a_1 litres. L'equació del model és $a_2 + x = a_1$. Si el dipòsit conté 2 litres d'aigua i ens preguntem quina quantitat hem d'afegir per tal que hi hagi un litre, la resposta és que cal treure un litre. Aquest raonament no facilita la introducció del símbol « $-$ » per fer referència als nombres que volem afegir. En canvi, l'equació del cas que ens ocupa, $2 + x = 1$, suggereix la introducció d'un nou nombre que sumat a 2 dóna 1, és a dir, un nou nombre que en sumar-lo a 2 es comporta com si restéssim 1. La interpretació del model a través de l'equació suggereix la terminologia que pretenem establir.

Tanmateix, aquest exemple es pot experimentar amb nombres racionals positius. L'equació vinculada al model permetrà introduir els nombres racionals a partir dels racionals positius. No aprofundirem en aquesta recerca en aquest punt però sí que volem deixar les portes obertes a propostes i recerques que vagin en aquest sentit. En qualsevol cas el model té una equació associada, que en aquest cas no es limita als nombres enters. L'equació del model es planteja en $\mathbb{Q}_+$ i es resol en tots els casos en $\mathbb{Q}$.

L'equació del model concret de desplaçament anomenat de les temperatures es planteja en $\mathbb{Q}_+$ i es resol en $\mathbb{Q}$. Alguns autors plantegen aquest model en $\mathbb{N}$ però això no respon a la realitat que coneix l'alumne. Si a_2 indica la temperatura actual, $+x$ l'increment de temperatura i a_1 a la que arribem després de l'increment, aleshores l'equació $a_2 + x = a_1$ es correspon amb el model, es planteja en $\mathbb{Q}_+$ i es resol en tots els casos en $\mathbb{Q}$.

12.2.9 Sobre la potència de les equacions i la seva necessitat

Considerem un interrogant que neix d'una situació real i que no podem resoldre experimentalment amb facilitat però que sigui factible de modelar per una equació. Tota solució que puguem obtenir en el fenomen real serà també suggerida per l'equació però la situació inversa no es produeix. Mostrem a continuació un problema que s'inspira en un de proposat per PÓLYA (1981, Vol. 1, pp. 139-140) però que modifiquem pel fet que l'enunciat original té pretensions diferents.

Problema 12.2.1 *El capità d'un vaixell va tenir el seu primer fill quan va fer* 21 *anys. A partir d'aleshores va tenir un fill cada any. Determineu l'edat del capità i la quantitat de fills que té sabent que el producte d'ambdós nombres és* 2016.

Recollim en una taula l'edat que va tenint el capità a partir dels 21 anys i la quantitat de fills que té per cadascuna d'elles:

edat	21	22	23	24	$\cdots$	x
quantitat de fills	1	2	3	4	$\cdots$	$x-20$

El producte dels dos nombres cercats ens condueix a l'equació $x(x-20) = 2016$, que té dues solucions: $x_1 = 56$ i $x_2 = -38$. La traducció d'aquestes solucions al fenomen real[9] conclou que x_2 es descarta. Tot i així, el desig de donar-li interpretació condueix a argumentar que si s'hagués mantingut el comportament, aleshores 38 anys abans que nasqués el capità també es complia aquesta relació.

La interpretació de la solució negativa utilitza l'expressió «s'hagués mantingut el mateix comportament». En el fons estem fent ús del *principi de permanència de les lleis formals* (p. 87) sense fer-ho explícit. La resolució de l'equació proporciona una solució que es pot interpretar en el fenomen real i que respon al problema inicial. L'equació té però una altra solució la interpretació de la qual requereix forçar l'argumentació en el fenomen real. Tal com diu d'Alembert: «El álgebra

[9] La solució $x_1 = 56$ de l'equació es tradueix al fenomen real dient que el capità té 56 anys i 36 fills. La solució $x_2 = -38$ habitualment es descarta perquè el capità va tenir el primer fill quan va fer 21 anys. Tot i així, la voluntat de donar-li interpretació pot conduir a dir que, si amb anterioritat a tenir el primer fill s'hagués mantingut el mateix comportament, aleshores 38 anys abans de que nasqués el capità ja es complia aquesta relació i el màxim responsable del vaixell estava pendent de tenir 58 fills.

es generosa, a menudo da más de lo que se le pide», citat per GONZÁLEZ *et al.* (1990, p. 27). Més acusada es presenta aquesta mateixa situació en l'exemple següent:

Problema 12.2.2 *Disposem de dos recipients. Un d'ells és un cub de costat desconegut. L'altra és un ortoedre on un costat coincideix amb el del cub, l'altra mesura* 15 *decímetres i el tercer* 1 *decímetre. Omplim el cub d'aigua i deixem buit l'altra recipient. A continuació aboquem l'aigua continguda en el cub dins de l'altra recipient fins omplir-lo. Realitzada aquesta operació queden* 4 *litres en el recipient cúbic. Quan mesura el costat del cub?*

La modelització de la situació que planteja el problema condueix a l'equació $x^3 - 15x = 4$. L'enunciat planteja un interrogant que neix i viu en el món real, però l'equació que modelitza el fenomen viu dins la matemàtica.

Rafael Bombelli s'adonà que l'equació $x^3 - 15x - 4 = 0$ no es podia resoldre fent ús de l'expressió general que permet resoldre tota cúbica de la forma $x^3 + px + q = 0$, que és la següent:

$$x = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \frac{p}{3\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}}$$

Tanmateix s'adonà que aquesta cúbica té una arrel real[10]. Acceptar el treball amb nombres complexos condueix a les tres solucions reals següents: $x_1 = 4$, $x_2 = -2 + \sqrt{3}$ i $x_3 = -2 - \sqrt{3}$. L'equació que modelitza el fenomen té tres solucions reals, però només una d'elles permet donar resposta al problema. El fenomen empíric frena la interpretació de les altres dues en el cas que ens ocupa, és a dir, l'equació del model aporta més informació que la que s'obté experimentalment.

De manera anàloga es comporten les equacions que modelitzen les situacions que es plantegen en la introducció del nombre enter a través de models concrets. Si ens mantenim dins dels models aleshores amb nombres naturals o racionals positius, segons el model que ens ocupi, en tenim prou per donar resposta a la

[10] L'enunciat del problema 12.2.2 (p. 546) ha estat redactat amb la intenció que la modelització del fenomen conduís a l'equació $x^3 - 15x - 4 = 0$. La proposta ha nascut de reflexions prèvies i de l'exposició de PLA CARRERA (2006, p. 411) i PLA CARRERA (2003, p. 73-81).

situació plantejada. És l'equació vinculada al model la que ens permet introduir noves solucions que poden ser interpretades en el fenomen real però que brollen de l'equació. L'exposat fins aquest moment sembla que fa evident considerar l'equació vinculada al model. Molt més quan el nombre negatiu s'introdueix per, posteriorment, donar suport a l'àlgebra elemental. Potser la matemàtica escolar podria facilitar una introducció consecutiva o simultània del nombre negatiu i de l'àlgebra elemental.

12.2.10 Introducció de l'estructura multiplicativa

La introducció del nombre enter quan es limita exclusivament als models concrets pretén donar sempre resposta fent ús del sentit comú i mai considera l'equació vinculada al model concret. L'exposat mostra preguntes que neixen dins del model i que es responen fent ús del sentit comú quan és possible i, a través de l'equació del model i de l'extensió als enters de les propietats obtingudes en el treball amb nombres naturals, quan el sentit comú per sí sol no pot donar resposta. Entenem que la traducció d'un model concret a la seva equació vinculada no consisteix en un abandonament del sentit comú, tot el contrari, la matemàtica també es basa en el sentit comú, però un sentit comú d'un ordre superior. La incorporació de les equacions (àlgebra elemental) en la introducció del nombre enter respecta el tractament a través de models concrets en un inici i els dóna suport allà on els models per sí sols no poden donar resposta.

Producte d'un enter per un nombre

Si en el model concret dels ascensors volem interpretar el valor de $(-4)\cdot 2$, l'equació $a_2 + x = a_1$ és insuficient. Estenent als nombres enters la definició de producte de nombres naturals tenim que $(-4)\cdot 2 = (-4) + (-4)$. La notació admesa i justificada anteriorment pel model ens permet identificar (-4) amb el quart soterrani. Sumar (-4) té el mateix comportament que restar 4. En l'apartat anterior hem vist que restar 4 té l'efecte de baixar quatre plantes indicant-nos que anirem al vuitè soterrani i que el resultat de l'operació és -8. Per tant, $(-4)\cdot 2 = (-4) + (-4) = (-4) - 4 = -8$. Multiplicar per 2 té l'efecte de sumar dues vegades el nombre pel qual estem multiplicant, però si pretenem multiplicar per (-2) la interpretació anterior presenta dificultats.

Considerem ara una situació anàloga fent ús del model de guanys i pèrdues[11]. $(-4)\cdot 2$ es pot interpretar com deure quatre euros dues vegades, és a dir, $(-4)\cdot 2 = (-4) + (-4) = -8$. Considerem ara les unitats que permeten vincular aquest càlcul aritmètic amb el model concret: $(-4€)\cdot 2 = (-4€) + (-4€) = -8€$.

El producte que estem introduint a través del model concret no és una operació interna. Amb aquest tipus d'exemples tenim els nombres enters amb la suma (operació interna) i un producte de quantitats d'euros per un nombre que indica quantitat de vegades, és a dir, un producte per escalars (operació externa). Aconseguim, per tant, associar el conjunt dels nombres enters més amb una estructura similar a l'espai vectorial que no pas amb l'estructura d'anell, que és el que es pretén aconseguir. Per tant, el producte de nombres enters no és una qüestió que sorgeixi dels models concrets, i molt menys que s'hi pugui donar resposta a través d'ells.

Aquesta operació és el producte d'un nombre, que fa referència a una quantitat d'euros, per un altre nombre, que fa referència a la quantitat de vegades que cal sumar el nombre anterior. No és una operació interna i s'adiu més a un producte per escalars, que en el cas que ens ocupa són nombres naturals. Sense que sovint sigui explicitat, el conjunt de nombres enters amb la suma i el producte per nombres naturals facilita un ensenyament que suggereix en l'alumne una estructura més propera a un espai vectorial on els escalars són nombres naturals, en lloc de l'estructura d'anell que a llarg termini és el que es pretén aconseguir.

No descartem que aquesta sigui una bona manera d'introduir el producte de nombres enters. Tanmateix, potser l'ensenyament hauria de continuar donant la possibilitat d'interpretar el producte de dos enters qualssevol. Amb aquest enfocament es pretén aconseguir que el producte de nombres enters no es limiti a interpretar un dels factors com un escalar que indiqui la quantitat de vegades que cal sumar l'altre factor. Tal com mostra Cid (2003, p. 8) hi ha propostes d'introducció del nombre negatiu que no es preocupen de descontextualitzar el coneixement matemàtic construït del model concret emprat. La reflexió exposada en aquest apartat fa palesa la necessitat de fer-ho.

[11] El que es pretén mostrar tot seguit es pot aconseguir amb el model concret dels ascensors però considerem que és més entenedor amb el model de guanys i pèrdues.

Producte de nombres enters

El producte de nombres enters que en el cas anterior interpretava un factor com un escalar, ara es pren enter. És a dir, els escalars que eren nombres naturals, ara es prenen enters. Convertir el producte en una suma deixa de ser una extensió del producte de nombres naturals. Arribat aquest punt són diversos els camins que es poden seguir. Molts miren de recolzar-se en la realitat empírica, altres en aspectes més formals.

Hom entendrà que és fàcil que l'alumne vegi en l'ensenyament del nombre negatiu dificultats que obstaculitzen el seu aprenentatge. Pel producte de nombres enters és difícil buscar respostes que provinguin exclusivament d'un model concret en el qual a vegades no té sentit ni tan sols la pregunta[12]. GALLARDO (2002) fent referència a una aportació de GLAESER (1981, pp. 323-324), destaca que el signe « $-$ » i els nombres negatius, entesos com a quantitats negatives, poden produir ja en l'estructura additiva importants dificultats de comprensió en l'alumne:

> [...] For instance, assume we are trying to determine de value of a number x which, added to 100, gives 50. Algebra tells us that: $x+100 = 50$, and that: $x = -50$, showing that the quantity x is equal to 50, and that instead of being added to 100, it must be subtracted from that number. Consequently, the problem should have been stated in the following way: Find the quantity x which, subtracted from 100, gives 50. Thus, we would have: $100 - x = 50$, and $x = 50$. The *negative* form for x would then no longer exist. Thus, the *negative* quantities really show the calculation of positive quantities assumed in a wrong position. The minus sign found in front of a quantity is meant to rectify and correct a mistake in the hypothesis, as clearly shown by the above example.
>
> (GALLARDO, 2002, p. 172)

[12]No té sentit en el model concret de guanys i pèrdues el producte de dos nombres que representen quantitat d'euros i, en canvi, el producte com una operació interna en els nombres enters és el que es pretén aconseguir.

La introducció del producte de nombres negatius és una tasca difícil. L'instrument metodològic d'aquesta recerca presentat en el capítol 7 (p. 241) mira de proposar un entorn d'aprenentatge, a través de la resolució de problemes, que a partir d'un treball experimental condueixi cap a la introducció constructiva o axiomàtica del nombre enter. Són diverses les introduccions del producte de nombres enters i de nombres negatius que es poden consultar en la literatura especialitzada. Per al lector interessat en el tema que busqui una recopilació de propostes recomanem l'article publicat per PETERSON (1972) en el qual s'en mostra una síntesi: recta numèrica, carreteres o peatges, futbol, ascensors, factures i xecs (guanys i pèrdues), projectors, patrons o regularitats, gràfics, circuits elèctrics, partícules carregades, propietat distributiva i procés deductiu.

Les estratègies que tingui el docent a l'hora d'introduir el producte de nombres negatius, l'atenció als coneixements previs dels estudiants a qui es dirigeixi l'ensenyament i les precisions que brollin del currículum vigent són ingredients decisius per establir els objectius corresponent als estils d'ensenyament que es vulguin implementar.

> Sometimes, if the student is not very alert, or at least not very persistent, the question can be «settled» by the analogy of a «double negative» in grammar. Here, the instructor merely notes, for example, that the statements «John has a dog» and «It is not the case that John does not have a dog» both make the same claim. It is then suggested that the two negatives in the latter statement simply «cancel out,» thus producing a claim that is the equivalent of the former, «positive» assertion. But, as one author remarks, «While this is a neat analogy designed to help young minds retain an important bit of knowledge, it really proves nothing» VERGARA (1959, p. 136).
>
> (VERNON THOMAS SARVER, 1986, p. 178)

12.2.11 Equacions i geometria per a l'estructura multiplicativa

L'estructura additiva es pot introduir, tal com hem vist en aquest capítol, a partir de models concrets de desplaçament vinculats a equacions del tipus $a_2 + x = a_1$, on a_2 i a_1 són inicialment nombres naturals o racionals positius, segons el model emprat. Per analogia és raonable preguntar-se si l'estructura multiplicativa es pot introduir a través de situacions vinculades a equacions de la forma $a_2 \cdot x = a_1$, on a_2 i a_1 són inicialment nombres naturals o racionals positius. Tot seguit mostrem un tractament que considerem té un fort valor il·lustratiu de com en virtut de la teoria genètica (veure la pàgina 66) es pot reduir l'entorn d'aprenentatge al cas commensurable i es pot emprar nombres i geometria conjuntament per introduir l'estructura multiplicativa del nombre enter o del nombre negatiu pel cas racional.

Les equacions des d'un punt de vista geomètric

DESCARTES (1999, p. 14) mostra com es pot realitzar el producte de dos segments que nosaltres utilitzarem pel cas commensurable. Fixada una unitat, la proporcionalitat entre els costats homòlegs de triangles semblants, és a dir el teorema de Thales pel cas commensurable, podem construir a partir dels segments a_1 i a_2 el segment x que compleix la relació $a_2 \cdot x = a_1$ (fig. 12.1, p. 551), és a dir, la solució de l'equació que ens proposàvem resoldre.

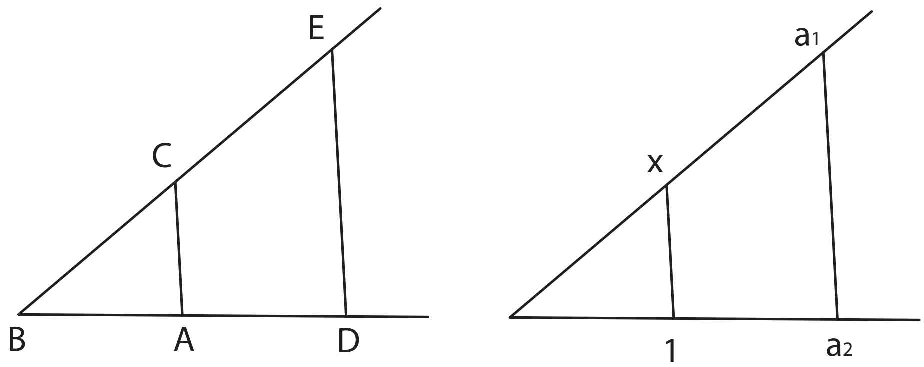


Figura 12.1: $\frac{BC}{BA} = \frac{BE}{BD}$ $\qquad$ $\frac{x}{1} = \frac{a_1}{a_2}$

En conseqüència, la representació dels nombres enters o racionals en la recta numèrica permet atendre, des d'un punt de vista geomètric, la resolució de l'equació $a_2 \cdot x = a_1$. Inicialment ens ocupem de resoldre l'equació amb nombres naturals o racionals positius, tot seguit estendrem la resolució tot requerint nombres enters o racionals. Tal com destaca PLA CARRERA (1998*b*, p. 19) aquest principi de generalitat va portar els algebristes del Renaixement a admetre els nombres negatius, nombres que no provenen de mesurar longituds de segments, fet pel qual probablement van passar desapercebuts als grecs. En el tractament següent suposem introduïts els nombres enters, acordada la terminologia per denotar-los, atesa també l'estructura additiva i la seva representació en la recta numèrica. Pel tractament dels nombres racionals considerem atesos també els aspectes anteriors, és a dir, introduïts els nombres racionals a partir dels racionals positius, acordada la terminologia per denotar-los, l'estructura additiva i la seva representació gràfica en la recta numèrica.

De les reflexions de COFMAN (1981), sintetitzades a partir de la pàgina 103, es deriva que escollida una unitat, un origen i un sentit els nombres commensurables amb la unitat es poden representar tal com es pot veure en les figures 12.2 (p. 553), 12.3 (p. 554) i 12.4 (p. 555).

Més concretament, si $a_1 > 0$ i $a_2 < 0$ aleshores $x < 0$ (fig. 12.2, p. 553), si $a_1 < 0$ i $a_2 > 0$ aleshores $x < 0$ (fig. 12.3, p. 554) i si $a_1 < 0$ i $a_2 < 0$ aleshores $x > 0$ (fig. 12.4, p. 555).

Els entorns d'aprenentatge que es desprenen d'aquestes reflexions es poden dirigir a la introducció del nombre enter però també permeten la introducció del nombre racional. Val a dir que hi ha propostes inductives que cerquen patrons a partir de representacions geomètriques tal com mostren, per exemple, PETERSON (1972, p. 400) i ARCAVI i BRUCKHEIMER (1981, p. 32). Tanmateix, el tractament atès per nosaltres requereix la familiarització de l'alumne amb el teorema de Thales pel cas commensurable.

Des del tractament experimental i conjectural, potenciant l'observació i la intuïció de l'alumne, fins a la consolidació, el teorema de Thales ha estat tractat de diferents maneres en la matemàtica escolar. Entre les diferents aproximacions a la semblança que presenta ESCUDERO (2005), la proposta exposada s'adiu amb la que ell anomena relació intrafigural. Es caracteritza pel fet que la correspondència entre els elements d'una figura i de la seva semblant no contempla la transformació d'una en l'altra. Hem optat per ella en virtut que els alumnes a l'ensenyament secundari no estan massa familiaritzats amb els moviments en el pla. Són diverses les consideracions d'Escudero que fan referència a l'ensenyament d'aquest contingut i que reprendrem en les conclusions de la recerca, si s'escau.

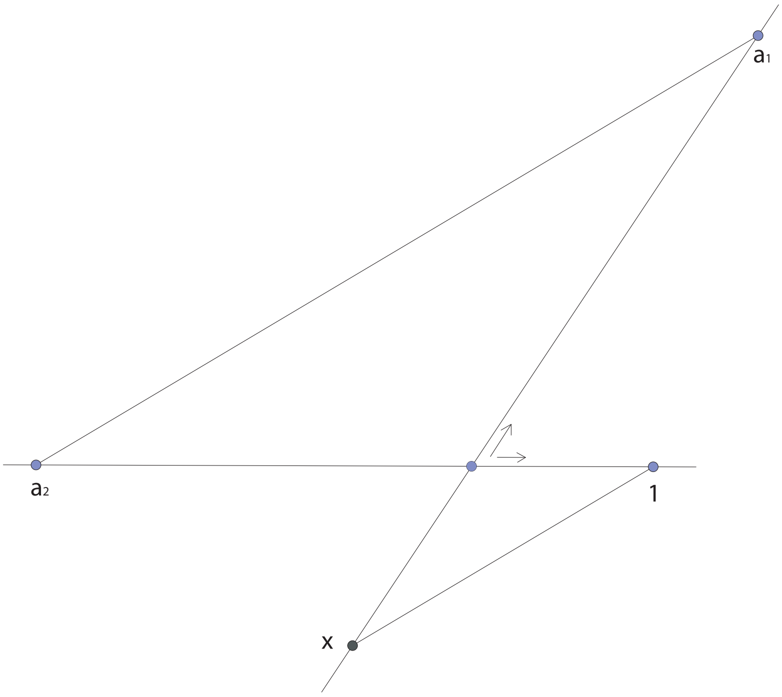


Figura 12.2: En virtut del teorema de Thales pel cas commensurable tenim que $\frac{a_2}{1} = \frac{a_1}{x}$. La fletxa emprada en el gràfic indica el sentit que hem escollit com a positiu. Si $a_1 > 0$ i $a_2 < 0$ aleshores $x < 0$.

El teorema de Thales pel cas commensurable

Hi ha diferents propostes d'introducció del teorema de Thales, per exemple les ateses per PESCADOR (1997, 2002, 2003). Tot i així volem mostrar tot seguit un tractament que es limita al cas commensurable però que permet arribar al resultat desitjat.

La barreja de geometria i nombres és intencionada i s'ajusta a allò que defensen, entre d'altres, Rey Pastor i Puig Adam i que anomenem mètode cíclic (p. 177). El que mostrem tot seguit és un esquema que adequadament desenvolupat i tractat pot esdevenir una unitat didàctica per a la introducció del teorema de Thales pel cas commensurable. Si el mostrem és perquè, des del nostre punt de vista, facilita una aproximació i una reflexió sobre el què és la matemàtica que considerem participa de manera rellevant en la formació dels estudiants.

És fàcil, i digne de ser experimentat, negociar amb els alumnes que una recta

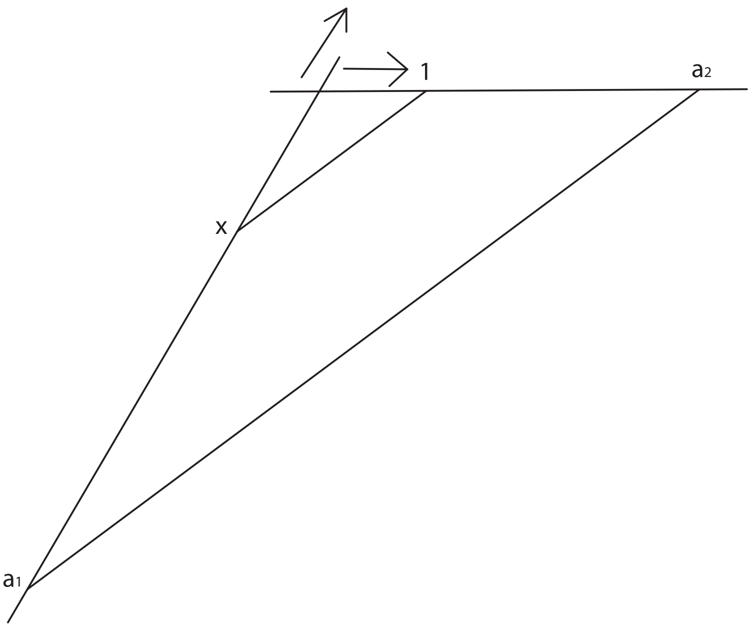


Figura 12.3: En virtut del teorema de Thales pel cas commensurable tenim que $\frac{a_2}{1} = \frac{a_1}{x}$. La fletxa emprada en el gràfic indica el sentit que hem escollit com a positiu. Si $a_1 < 0$ i $a_2 > 0$ aleshores $x < 0$.

que talla dues rectes paral·leles fa els angles alterns iguals, els angles exteriors iguals als interiors i oposats, i la suma dels angles interiors pel mateix costat iguals a dos rectes. De fet aquesta propietat la prenem com a punt de partida tot atenent que no té perquè ser així[13]. La transparència i claredat amb la que l'estudiant veurà l'esmentada propietat és la que ens condueix a acceptar-la com a certa ja com a punt de partida.

Prenem dues rectes r i s secants i, fixada una unitat i un origen, marquem sobre una d'elles els punts P_1, P_2, P_3, P_4 que es corresponen amb la representació dels nombres 1, 2, 3, 4 sobre la recta r. Les rectes t_1, t_2, t_3, t_4 tallen s en els punts B_1, B_2, B_3, B_4. Rectes paral·leles a r per aquests darrers punts tallen les rectes

[13]La proposició 29 del llibre I dels *Elements* d'Euclides diu: «Una recta que talla dues rectes paral·leles fa els angles alterns iguals, els angles exteriors iguals als interiors i oposats, i la suma dels angles interiors pel mateix costat iguals a dos rectes». La proposició 30 diu: «Les rectes paral·leles a una recta donada també són paral·leles entre sí». Proposició 34: «Els costats i angles oposats d'un paral·lelogram són iguals un a l'altre i les diagonals bisequen l'àrea». Hi ha diverses publicacions que recullen l'esmentada obra d'Euclides com EUCLIDES (1954) o EUCLIDES (1996). Tanmateix, en l'espai web http://www.euclides.org també hi és disponible i és on hem fet la consulta (EUCLIDES, 2003-2008).

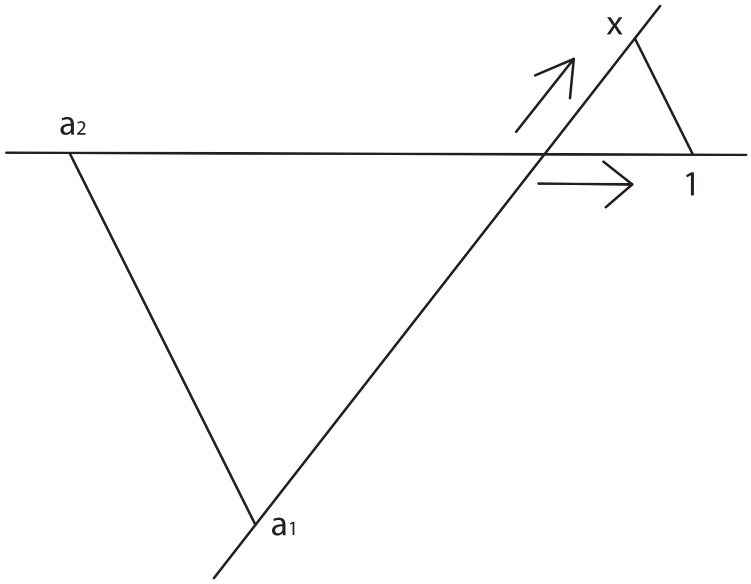


Figura 12.4: En virtut del teorema de Thales pel cas commensurable tenim que $\frac{a_2}{1} = \frac{a_1}{x}$. La fletxa emprada en el gràfic indica el sentit que hem escollit com a positiu. Si $a_1 < 0$ i $a_2 < 0$ aleshores $x > 0$.

t_i en punts C_2, C_3, C_4. En virtut de la proposició 34 dels Elements els segments $\overline{B_1C_2}$, $\overline{B_2C_3}$, $\overline{B_3C_4}$, etc., són iguals i mesuren la unitat.

En virtut de les proposicions 29 i 30 dels Elements, que tal com hem apuntat anteriorment arriben a l'alumne de ben segur com a veritats indubtables,tenim que els angles $\angle B_{i+1}B_iC_{i+1}$ són iguals ja que coincideixen amb els angles $\angle B_iP_iP_{i+1}$ que, d'acord amb les mateixes proposicions són iguals. Sota el mateix punt de partida els angles $\angle B_iC_{i+1}B_{i+1}$ també són iguals. Així tenim que els triangles $\triangle B_iC_{i+1}B_{i+1}$ tenen tots el costat B_iC_{i+1} igual, l'angle $\angle B_{i+1}B_iC_{i+1}$ igual i també l'angle $\angle B_iC_{i+1}B_{i+1}$ també igual. Pel segon criteri d'igualtat de triangles, anomenat criteri ACA per diversos autors[14], tenim que els segments $\overline{B_1B_{i+1}}$ són tots iguals. En conseqüència tenim que el segment $\overline{OP_n}$ mesura n unitats i que el

[14] DE MATEMÀTIQUES DE L'INSTITUT D'ESTUDIS CATALANS (2002, p. 172) diu: «**Criteri** ACA**.** Dos triangles són iguals si tenen iguals, respectivament, un costat i els seus dos angles contigus». Considerem que val la pena destacar que aquest criteri d'igualtat de triangles consisteix en prendre com a punt de partida la quarta proposició del primer llibre dels Elements d'EUCLIDES (2003-2008): Proposició 4. Si dos triangles tenen dos costats respectius iguals, i tenen els angles compresos iguals, aleshores també tenen les bases iguals, els triangles són iguals, i els angles restants són iguals, concretament els oposats als costats iguals.

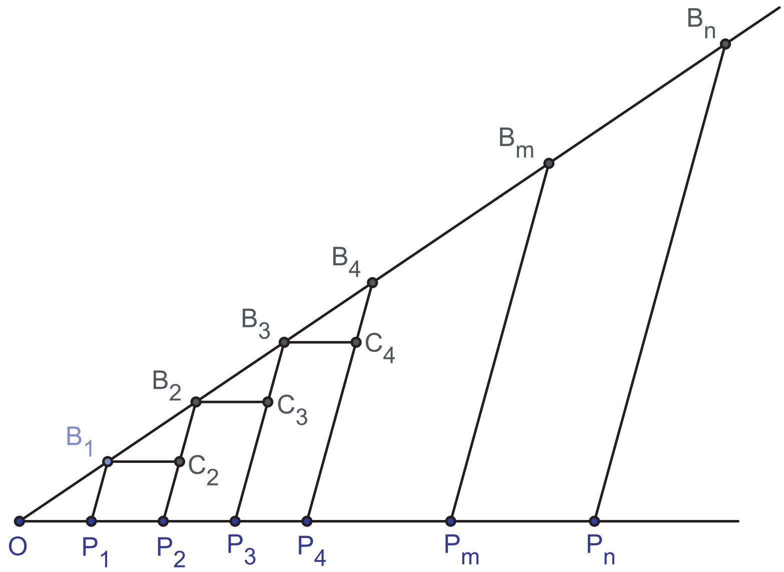


Figura 12.5: Proporcionalitat dels costats homòlegs en els triangles semblants pel cas commensurable.

segment $\overline{OT_n}$ mesura ny unitats on y és la longitud de qualsevol segment $\overline{B_iB_{i+1}}$, ja que tots ells són iguals.

Tal com hem vist els triangles $\triangle OP_iB_i$ tenen els angles iguals, fet que ens condueix a anomenar-los semblants. Si considerem el triangle $\triangle OP_nB_n$ sabem que el segment $\overline{OP_n}$ mesura n i que el segment $\overline{OT_n}$ mesura ny. Si considerem el triangle $\triangle OP_mB_m$ sabem que el segment $\overline{OP_m}$ mesura m i que el segment $\overline{OT_m}$ mesura my. Com que $\frac{my}{ny} = \frac{m}{n}$ tenim la proporcionalitat dels costats homòlegs dels triangles semblants. En aquest tractament hem considerat n i m unitats sobre la recta r. De manera anàloga es pot veure la proporcionalitat dels costats dels triangles semblants pel cas commensurable.

Referències

ARCAVI, A.; BRUCKHEIMER, M. (1981): «How shall we teach the multiplication of negative numbers?» *Mathematics in School, 10*(5), 31-33.

BOOTH, L. (1984): *Algebra: children's strategies and errors: a report of the* *strategies and errors in secondary mathematics project*. Windsor, Reino Unido: NFER-Nelson.

BRUNO, A. (1997): «La enseñanza de los números negativos: aportaciones de una investigación». *Números, 29*, 5-18.

— (2001): «La enseñanza de los números negativos: formalismo y significado». *La Gaceta de la Real Sociedad Matemática Española, 4*(2), 415-427.

BRUNO, A.; MARTINON, A. (1996): «Números negativos: sumar = restar». *UNO, 10*, 123-133.

CID, E. (2000): «Obstáculos epistemológicos en la enseñanza de los números negativos». *Actas del XV Jornadas del Seminario Interuniversitario de Investigación en Didáctica de las Matemáticas, Boletín del SI-IDM, 10. Celebrado en Cangas do Morrazo (Pontevedra), los días 7, 8 y 9 de Abril de 2000. Disponible en* http://www.ugr.es/ jgodino/siidm/boletin10.htm.

— (2002): «Los modelos concretos en la enseñanza de los números negativos». *Zaragoza: Actas de las X Jornadas para el Aprendizaje y Enseñanza de las Matemáticas, 2*, 529-542.

— (2003): *La investigación didáctica sobre los números negativos: estado de la cuestión*. Universidad de Zaragoza. Pre-publicaciones del seminario matemático "García de Galdeano".

COFMAN, J. (1981): «Operations with negative numbers». *The Mathematics Teacher, 94*, 18-20.

DESCARTES, R. (1999): *La Geometria*. Barcelona: Institut d'Estudis Catalans. Traducció de Josep Pla i Pelegrí Viader.

ESCUDERO, I. (2005): «Un análisis del tratamiento de la semejanza en los documentos oficiales y textos escolares de matemáticas en la segunda mitad del siglo XX». *Enseñanza de las Ciencias, 23*(3), 379-392.

EUCLIDES (1954): *Los Elementos de Euclides y la crítica antigua y moderna: libros I-IV; Federico Enriques*. Madrid: C.S.I.C, Instituto Jorge Juan.

— (1996): *Elementos*. Madrid: Gredos.

— (2003-2008): «Los elementos de Euclides, 300 aC.». Blog *www.euclides.org*.

FISCHBEIN, E. (1987): *Intuition in science and mathematics: an educational approach*. Dordrecht, Holland: D. Reidel Publishing Company.

FREUDENTHAL, H. (1983): *Didactical phenomenology of mathematical structures*. Dordrecht, Holanda: D. Reidel Publishing Company.

GALLARDO, A. (1996): «Qualitative analysis in the study of negative numbers». *Valencia: Proceedings of the 20th International Conference of PME, 2*, 377-384.

GARDNER, M. (1977): «Juegos matemáticos. La noción de número negativo y lo arduo que resulta entenderla». *Investigación y Ciencia, 11*, 102-106.

GASCON, J. (1993): «Desarrollo del conocimiento matemático y análisis didáctico: del patrón de análisis-síntesis a la génesis del lenguaje algebraico». *Recherches en Didactique des Mathématiques, 13*(3), 295-332.

GLAESER, G. (1981): «Epistémologie des nombres relatifs». *Recherches en Didactique des Mathématiques, 2*(3), 303-346.

GONZÁLEZ, J.L.; *et al.* (1990): *Números enteros*. Madrid: Síntesis.

INSTITUT D'ESTUDIS CATALANS, Societat Catalana de Matemàtiques (2002): *Sessions de preparació per a l'Olimpíada Matemàtica: 2002*. Barcelona: Societat Catalana de Matemàtiques.

JOHNSON, D.R. (1986): «Making -x meaningfull». *Mathematics teacher, 79*(7), 507-510.

KLEIN, F. (1927-1931): *Matemática elemental desde un punto de vista superior*. Madrid: [s.n.].

LINCHEVSKI, L.; WILLIAMS, J. (1999): «Using intuition from everyday life in 'filling' the gap in children's extension of their number concept to include the negative numbers». *Educational Studies in Mathematics, 39*(1-3), 131-147.

MOLAS, C.; PÉREZ, J. (1990): «El naixement dels nombres complexos». *Barcelona: Butlletí de la Societat Catalana de Matemàtiques, 5*, 37-66.

PEACOCK, G. (1830): *A treatise on algebra*. London.

— (1842): *A treatise on algebra*. London. Reimpressió. New York: Scripta Matemática (1940).

PESCADOR, P. (1997): «Demostración del teorema de Tales, por métodos elementales». *Boletín (Sociedad Puig Adam de Profesores de Matemáticas), 47*, 22-29.

— (2002): «Una demostración breve del teorema de Tales». *Boletín (Sociedad Puig Adam de Profesores de Matemáticas), 60*, 55-57.

— (2003): «Otra demostración del teorema de Tales». *Boletín (Sociedad Puig Adam de Profesores de Matemáticas), 64*, 84-86.

PETERSON, J.C. (1972): «Fourteen different strategies for multiplication of integers or why (-1)x(-1)=(+1)». *The Arithmetic Teacher, 19*(5), 396-403.

PLA CARRERA, J. (1998): *Damunt les espatlles dels gegants*. Barcelona: Edicions la Magrana.

— (2003): «Una història breu de la matemàtica». *Barcelona: Butlletí de la Societat Catalana de Matemàtiques, 18*(1), 47-129.

— (2006): *Introducció a la metodologia de la matemàtica*. Barcelona: Publicacions i edicions de la Universitat de Barcelona.

PÓLYA, G. (1981): *Mathematical discovery: on understanding, learning, and teaching problem solving*. New York: Wiley.

REY PASTOR, J.; PI CALLEJA, P.; TREJO, A. (1969): *Análisis matemático. Volumen I: Análisis algebraico, teoría de ecuaciones y cálculo infinitesimal de una variable*. Buenos Aires: Kapelusz.

VERGARA, W.C. (1959): *Mathematics in Everyday Things*. New York: Harper Brothers.

VERNON THOMAS SARVER, Jr. (1986): «Why does a negative times a negative produce a positive?» *Mathematics Teacher, 79*(3), 178-180.

Part IV

Annexos

Índex dels annexos

Annex I. Qüestionaris diagnòstics

En la realització de la recerca s'han realitzat tres qüestionaris diagnòstics. Amb ells es pretén recollir informació relativa al coneixement de l'alumne sobre el nombre negatiu que permeti delimitar l'acció de l'experimentació a l'aula i les estratègies de recollida de dades.

.1 Qüestionari 0

Les activitats que presentem en aquest annex pretenem descriure els encerts i els encerts i els errors que realitzen els alumnes davant d'unes tasques rutinàries amb nombres negatius. Alhora volem copsar en aquest primer moment quin model concret és el que l'alumne escull quan se li demana que proposi una activitat que involucri nombres enters.

Instrument de recollida de dades

A1) L'ordre dels nombres enters

Ordena els següents nombres de major a menor:

a) $+2, -3, -8, +3, 0, -2.$

b) $-5, -2, 9, -10, -21, +22.$

A2) La suma de nombres enters

Calcula:

a) $(+5) + (-8) =$

b) $(-7) + (-2) =$

c) $(-5) + (+7) =$

d) $(+4) + (-7) =$

e) $(+7) + (-3) =$

f) $(-11) + (+7) =$

g) $(-3) + (-3) =$

h) $(-7) + (+7) =$

i) $(-17) + 12 =$

j) $(-57) + 68 =$

A3) El producte de nombres enters

Calcula:

a) $(-4) \cdot (+10) =$

b) $(-2) \cdot (+5) =$

c) $(+10) \cdot (-4) =$

d) $(+2) \cdot (-5) =$

e) $(+4) \cdot (-10) =$

f) $(+3) \cdot (+6) =$

B4) Sobre les activitats vinculades als nombres negatius

Escriu l'enunciat d'un problema sobre nombres negatius.

.2 Qüestionari 1

Amb el qüestionari que presentem en aquest annex pretenem aproximar-nos al coneixement de les dificultats i els errors que presenten els alumnes de primer curs de batxillerat (16-17 anys) davant del nombre negatiu.

En el disseny del qüestionari hem pres com a referència l'exposat per IRIARTE *et al.* (1991) en l'article que té per títol «Obstáculos en el aprendizaje de los números enteros». L'any 1991 els autors van dirigir l'esmentat instrument de recollida de dades a estudiants de vuitè curs d'Educació General Bàsica i de l'Escola Universitària de Magisteri. Centren l'interès en dos objectius: l'anàlisi de les dificultats dels alumnes que provenen d'un tractament real i d'un tractament formal.

En la primera d'elles es pretén cercar informació sobre com el coneixement dels alumnes dels nombres enters a partir de models concrets dificulta la seva construcció. En la segona part la cerca pretén examinar les dificultats que suposen per a la construcció dels enters de la imposició de formalismes apartats del sentit comú de l'alumne. En el qüestionari que mostrem tot seguit els les referències denotades per la lletra A fan referència al primer interès, les denotades per la lletra B al segon.

Qüestionari

Dades personals	
Nom i cognoms	
Curs i grup	

Amb aquest qüestionari es pretén obtenir informació que ajudi a millorar la qualitat de les classes de matemàtiques. Et preguem que responguis amb la màxima sinceritat i profunditat tot allò que et demanem.

A1) Pots trobar una situació real en la que tingui sentit -(-3)?

A2) Pots trobar un nombre que sumat a 5 doni 2?

A3) És possible trobar un múltiple de 5 menor que 3 i diferent de zero?

A4) És possible trobar un nombre que restat de 7 doni 10?

A5) És correcta la següent divisió? Dividend= 3, divisor= 4, quocient= 1 i residu= -1

A61) Quin és el nombre major en una unitat a -3?

A62) En la llista dels 40 principals, el disc preferit per Joan estava 3 llocs més avall del que havia estat la setmana anterior. L'antiga posició era la 3, quina és la nova?

A7) -7 graus a Moscú, -3 a Budapest. Si algú hagués viatjat de Moscú a Budapest, hauria notat una pujada o una baixada de temperatura?

A8) Si a és positiu i b és negatiu, $a - b$ és un nombre positiu.

B111) En Pere té 5 bales més que en Joan i en Joan té 3 bales més que l'Enric. Sabent que en Pere té 26 bales, quantes bales té l'Enric?

B112) L'ordinador de l'Eva va costar 120 euros més que el de l'Alexandre. El de l'Eva va costar 520 euros, quant va costar el de l'Alexandre?

B121) La Sara va gastar ahir en llaminadures 8 euros més que avui. Ahir va gastar 35 euros. Quants n'ha gastat avui?

B122) El senyor Ruiz té 56 anys i el seu fill 29. Quant l'edat del pare és el doble de la del fill?

B13) Quin nombre precedeix en 7 unitats a -3?

B31) Quin nombre sumat a 5 dóna 3?

B32) Pots trobar un múltiple de 5 menor que 3 i diferent de zero?

B33) Quin nombre restat de 7 dóna 10?

.3 Qüestionari 2

El qüestionari que presentem tot seguit està inspirat en les aportacions de BRUNO i MARTINON (1994*a*). Els autors focalitzen l'atenció en l'ensenyament del nombre enter a través de models concrets i proposen activitats relacionades amb els models tenir-deure, nivell del mar, temperatura, temps i carreteres. Els problemes condueixen a interpretar els nombres com estats o com variacions i provoquen la combinació d'ambdós: suma de dos estats per obtenir un estat, suma d'un estat i una variació per obtenir un estat, suma de dues variacions per obtenir una variació, diferència de dos estats per obtenir una variació i diferència de dos estats per obtenir una comparació. De manera sintètica simbolitzem estat i variació fent ús de la primera lletra de cadascun d'aquests dos mots. Els fonaments de l'ensenyament del nombre negatiu basat en models concrets es pot consultar en la síntesi exposada en el marc teòric de la present recerca (p. 56).

- Temperatura

  La temperatura a Valle Guerra és de 14 graus sobre zero i a Izaña la temperatura és de 3 graus sota zero. Què té que passar a Izaña perquè la temperatura sigui la mateixa que la de Valle Guerra?

- Temperatura

  A Valle Guerra la temperatura va pujar 4 graus pel matí i va disminuir 9 graus per la tarda. Quina ha estat la variació de la temperatura al llarg del dia?

- Guanys i pèrdues

  La Sònia té 200 euros al banc i deu a una amiga 260 euros. Quina és la seva situació econòmica?

- Nivell del mar

  Un submarinista està 5 metres sobre el nivell del mar i baixa 6 metres més. Quina és la seva posició després d'aquest descens?

- Temps

  Si un home va néixer l'any 56 abans de Crist i va morir l'any 17 després de Crist. Quants anys va viure?

- Carretera

  Un cotxe està situar en el quilòmetre 6 d'una carretera i es mou 5 quilòmetres cap a l'esquerra. En quin quilòmetre es troba el cotxe després d'aquest moviment?

Amb aquest instrument de recollida de dades pretenem aproximar-nos al coneixement de les dificultats i els errors que presenten els alumnes de primer curs de batxillerat (16-17 anys) davant del nombre negatiu. Entenem que els èxits, així com les dificultats i errors, que trobarà l'alumne en la fase experimental posterior poden tenir causes que estiguin arrelades en l'aprenentatge previ de l'estudiant. Donat que en l'actualitat l'ensenyament i l'aprenentatge de la matemàtica a través de models concrets és la pràctica generalitzada, es fa necessari el coneixement de la informació que pretenem obtenir.

Annex II. Instruments de recollida de dades

Finalitzada la diagnosi inicial i els primers tractaments amb el problema dels nombres consecutius es va iniciar la intervenció a l'aula per a la introducció deductiva del nombre enter. En aquests annex es recullen els instruments de recollida d'informació emprats.

.1 Instrument 1.1

1

Dades personals	
Nom i cognoms	
Curs i grup	

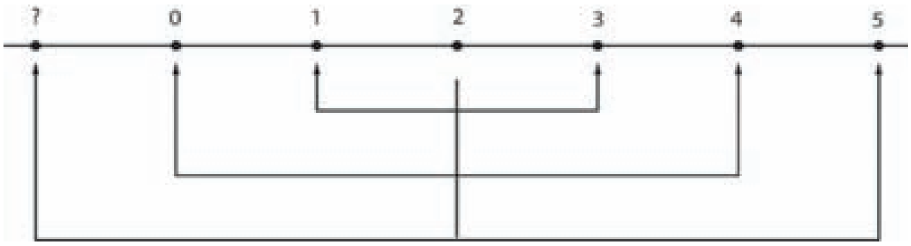
Heu conjecturat que la suma de nombres naturals consecutius mai és una potència de 2. Considerem ara els nombres naturals que no són potències de 2; sempre es poden escriure com a suma de nombres naturals consecutius? Raona la resposta.

.2 Instrument 1.2

2

Dades personals	
Nom i cognoms	
Curs i grup	

Mirem d'escriure el 14 com a suma de nombres consecutius. Sabem que 14=2·7=2+2+2+2+2+2+2. D'aquests set sumands en prenem un i el deixem estàtic en el centre de la suma. Tot seguit prenem dos sumands més i, mentre un d'ells l'incrementem en una unitat, l'altre el disminuïm en una; la suma no varia. Sobre un altre parell de sumands incrementem un d'ells en dues unitats i l'altre el disminuïm en dues; la suma tampoc varia. Amb el darrer parell de sumands incrementem un dels nombres en tres unitats i l'altra el disminuïm també en tres. La representació sobre la recta numèrica permet visualitzar la impossibilitat d'aquesta descomposició amb nombres naturals.
Tanmateix, no podem en els nombres naturals disminuir en tres unitats el 2. Et demanem que escullis una notació per fer referència a aquest nou nombre. Cal que argumentis la teva proposta.



.3 Instrument 1.3

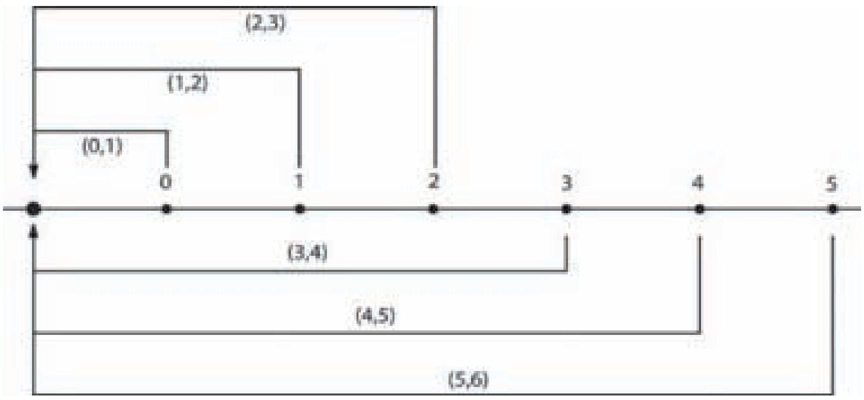
3

Dades personals	
Nom i cognoms	
Curs i grup	

Els parells (0,1), (1,2), (2,3), ... fan referència a una mateixa posició i, per tant, podem convenir que representen un mateix nombre, que no és natural. Pots explicar que tenen en comú aquests parells?

De la mateixa manera els parells (3,4), (4,5), (5,6), ... també fan referència a una mateixa posició. Pots explicar que tenen en comú aquests parells?

Considerem dos parells de la forma (a,b) i (c,d). Podries trobar alguna relació entre a, b, c i d que permeti caracteritzar quan els dos parells representen una mateixa posició i, per tant, un mateix nombre?



.

.4 Instrument 2.1

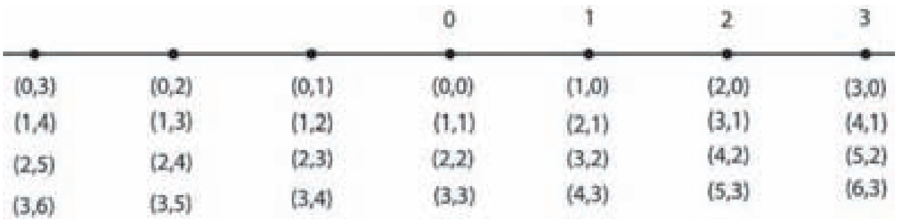
4

Dades personals	
Nom i cognoms	
Curs i grup	

El nombre natural 1 ocupa la mateixa posició en la recta numèrica que el nombre enter representat pels parells (1,0), (2,1), (3,2), etc.

Considerem ara el nombre natural 9. Escriu diversos parells representants del nombre enter que ocupa la mateixa posició que el nombre natural 9.

Considerem ara un nombre natural n. Escriu diversos parells representants del nombre enter que ocupa la mateixa posició que el nombre natural n.



.5 Instrument 2.2

5

Dades personals	
Nom i cognoms	
Curs i grup	

1. Tot nombre natural a es correspon amb el nombre enter representat pel parell $(a,0)$. Alhora tot nombre natural c es correspon amb el nombre enter representat pel parell $(c,0)$. Et demanem que trobis un parell que representi el nombre enter que és suma dels dos nombres enters representats pels parells esmentats. Raona la resposta.

2. Considerem ara els nombres enters representats pels parells (a,b) i (c,d) , amb $a \geq b$ i $c \geq d$. Et demanem que trobis un parell que representi el nombre enter que és la suma dels dos nombres enters representats pels parells esmentats. Raona la resposta.

3. Considerem els nombres enters representats pels parells (a,b) i (c,d) . Ara els dos nombres enters no necessàriament es corresponen amb nombres naturals. Com ho faries per definir la seva suma? Pot ser que el resultat de la suma depengui dels representants escollits? Raona les respostes

.

.6 Instrument 2.3

6

Dades personals	
Nom i cognoms	
Curs i grup	

1. Considerem, per exemple, el nombre natural 7 que es correspon amb el nombre enter representat pel parell $(7,0)$. Alhora considerem el nombre enter $(0,7)$, que no es correspon amb cap nombre natural. En calcular la suma d'aquests dos nombres enters obtenim el nombre enter nul, és a dir, $(7,0)+(0,7)=(7,7)=(0,0)$.
   Quan sumem el nombre enter $(0,7)$ observem que es comporta com si restéssim set. Des del teu punt de vista, aquest comportament justifica que a partir d'ara decidim escriure simplificadament -7 per fer referència al nombre enter representat pel parell $(0,7)$? Expliqueu el vostre punt de vista.

2. Escriviu de manera simplificada els nombres enters representats pels parells següents:
   a. $(0,5)=$
   b. $(1,9)=$
   c. $(5,0)=$
   d. $(5,4)=$
   e. $(0,0)=$

.

.7 Instrument 3.1

7

Dades personals	
Nom i cognoms	
Curs i grup	

1. Calculeu les següents sumes de nombres enters expressant els resultats en forma de parells:

   $(a,0)+(b,0)=$

   $(0,a)+(0,b)=$

   $(a,0)+(0,b)=$

2. Calculeu les mateixes sumes de l'apartat anterior expressant el resultat en forma simplificada:

   $(a,0)+(b,0)=$

   $(0,a)+(0,b)=$

   Si $a \geq b$: $(a,0)+(0,b)=$

   Si $a < b$: $(a,0)+(0,b)=$

3. Escrivim de manera simplificada a per fer referència al nombre enter $(a,0)$ i, tal com hem acordat, $-a$ per fer referència al nombre enter $(0,a)$. Calculeu les següents sumes donant el resultat de manera simplificada:

   $(a,0)+(b,0)=$

   $(0,a)+(0,b)=$

   Si $a \geq b$: $(a,0)+(0,b)=$

   Si $a < b$: $(a,0)+(0,b)=$

.

.8 Instrument 3.2

9

Dades personals	
Nom i cognoms	
Curs i grup	

El nombre 15 admet 4 descomposicions com a suma de nombres consecutius:

15=15
15=7+8
15=1+2+3+4+5
15=4+5+6

Això és així admetent que tot nombre és suma d'un consecutiu, el mateix nombre.

1. Quantes descomposicions com a suma de nombres consecutius admet el nombre 6? Escriu-les.

2. Quantes descomposicions com a suma de nombres consecutius admet el nombre 30? Escriu-les.

3. Estudia quantes descomposicions com a suma de nombres consecutius admet un nombre natural n qualsevol.

.

.9 Instrument 4.1

10

Dades personals	
Nom i cognoms	
Curs i grup	

1. Tot nombre natural a es correspon amb el nombre enter representat pel parell (a,0) . Alhora tot nombre natural c es correspon amb el nombre enter representat pel parell (c,0) . Et demanem que trobis un parell que representi el nombre enter que és producte dels dos nombres enters representats pels parells esmentats. Raona la resposta.

2. Considerem ara els nombres enters representats pels parells (a,b) i (c,d) , amb a≥b i c≥d. Et demanem que trobis un parell que representi el nombre enter que és el producte suma dels dos nombres enters representats pels parells esmentats. Raona la resposta.

3. Considerem els nombres enters representats pels parells (a,b) i (c,d) . Ara els dos nombres enters no necessàriament es corresponen amb nombres naturals. Com ho faries per definir el seu producte? Pot ser que el resultat del producte depengui dels representants escollits? Raona les respostes

.10 Instrument 4.2

11

Dades personals	
Nom i cognoms	
Curs i grup	

1. Suposant $a \geq 0$ i $b \geq 0$, calculeu el producte dels següents nombres enters expressant els resultats en forma de parells:

$(a,0) \cdot (b,0) =$

$(a,0) \cdot (0,b) =$

$(0,a) \cdot (b,0) =$

$(0,a) \cdot (0,b) =$

2. Suposant $a \geq 0$ i $b \geq 0$, calculeu els mateixos productes de l'apartat anterior expressant el resultat en forma simplificada:

$a \cdot b = (a,0) \cdot (b,0) =$

$a \cdot (-b) = (a,0) \cdot (0,b) =$

$(-a) \cdot b = (0,a) \cdot (b,0) =$

$(-a) \cdot (-b) = (0,a) \cdot (0,b) =$

Annex III. Qüestionaris de valoració

Finalitzada l'experimentació a l'aula a través del problema dels nombres consecutius vam extreure informació sobre la percepció de l'alumne respecte del problema i dels seus assoliments. Per aconseguir-ho vam emprar els quatre qüestionaris que mostrem tot seguit.

.1 Qüestionari de valoració 1.1

Qüestionari

1

Dades personals	
Nom i cognoms	
Curs i grup	

Q1. Es comprèn amb claredat el que demana l'enunciat?

(encercla l'opció que més respon al que penses)

2-1

Gens	Poc	Bastant	Molt

Q2. Que l'enunciat del problema demani concretament per nombres naturals et resulta:

(encercla l'opció que més respon al que penses)

2-1

Gens habitual	Poc habitual	Bastant habitual	Molt habitual

Q3. El primer tractament que has donat al problema ha estat experimental?

2-2

(encercla l'opció que correspongui)

Sí	No

Q4. Per quina de les opcions següents has optat?

(encercla l'opció que més respon al que penses)

2-2

a)	Escriure diversos nombres naturals com a suma de consecutius.
b)	Sumar nombres consecutius i observar els resultats.
c)	

Q5. T'has adonat de quins són els nombres naturals que no es poden escriure com a suma de nombres consecutius?

(encercla l'opció que més respon al que penses)

2-3

a)	Sí, he vist que són les potències de 2
b)	No, no me n'he adonat
c)	

Q6. T'has adonat que tot nombre senar es pot escriure com a suma de dos nombres consecutius?

(encercla l'opció que més respon al que penses)

2-3

Sí	Posa alguns exemples
No	

Q7. A partir de l'experiència has descobert que les potències de 2 són els nombres naturals que no es poden escriure com a suma de nombres consecutius. Creus que aquest resultat experimental ens dona garantia de que sempre serà cert?

(encercla l'opció que més respon al que penses)

2-4

Gens de seguretat	Poca seguretat	Bastant segur que sempre serà cert	Segur que sempre serà cert

Q8. Consideres necessari buscar arguments que consolidin aquest resultat?

(encercla l'opció que més respon al que penses)

2-4

Sí, cal donar solidesa a aquest resultat	No és necessari buscar cap argument perquè segur que és cert

.2 Qüestionari de valoració 1.2

Q9. El 4, 8 i 16 no es poden escriure com a suma de nombres consecutius, però, les altres potències de 2, és a dir, 32, 64, 128, 256, 512, 1024, 2048, 4096, 8192, ... Si ens basem en els resultat experimentals:

(encercla l'opció que més respon al que penses)

2-4

Segur que tampoc es poden escriure com a suma de nombres consecutius	Bastant segur que tampoc es poden escriure com a suma de nombres consecutius	Bastant segur que n'hi ha algun que es pot escriure com a suma de nombres consecutius	Segur que n'hi ha algun que es pot escriure com a suma de nombres consecutius

Q10. El tractament algebraic permet veure que la suma de nombres consecutius mai és una potència de 2. Valora la dificultat d'aquest raonament.

(encercla l'opció que més respon al que penses)

2-5

Molt fàcil	Fàcil	Difícil	Molt difícil

Q11. Explica les dificultats que veus en el tractament algebraic.

2-5

Q12. La descomposició factorial permet veure que tot nombre que no és una potència de 2 es pot escriure com a suma de nombres consecutius. Valora la dificultat d'assolir aquest descobriment.

En cas de haver-ho resolt, creus que ho hauries pogut descobrir per tu mateix?

(encercla l'opció que més respon al que penses)

2-6

Molt fàcil	Fàcil	Difícil	Molt difícil

Q13. La descomposició factorial del nombre que volem escriure com a suma de consecutius permet decidir la quantitat de descomposicions possibles. Valora la dificultat.

(encercla l'opció que més respon al que penses)

2-6

Molt fàcil	Fàcil	Difícil	Molt difícil

Q14. Com que 15=3·5 tenim les següents descomposicions:

15=3·5=3+3+3+3+3=1+2+3+4+5
15=3·5=5+5+5=4+5+6

Valora la dificultat d'aquest raonament.

(encercla l'opció que més respon al que penses)

2-6

Molt fàcil	Fàcil	Difícil	Molt difícil

Q15. Com que 105=3·5·7 tenim per cada producte una descomposició: 105=3·35, 105=5·21, 105=7·15. Valora la dificultat d'aquest raonament.

(encercla l'opció que més respon al que penses)

2-6

Molt fàcil	Fàcil	Difícil	Molt difícil

.3 Qüestionari de valoració 2.1

Qüestionari

2

Dades personals	
Nom i cognoms	
Curs i grup	

Q1. La representació en la recta numèrica emprada en les descomposicions del 14 com a suma de consecutius, et facilita o et dificulta la comprensió del problema?

(encercla l'opció que més respon al que penses)

1-1

Facilita molt	Facilita	Dificulta	Dificulta molt

Q2. La terminologia (2,3) s'utilitza per fer referència a un nou nombre. La primera coordinada del parell indica el nombre natural de partida i la segona la quantitat de posicions que ens desplacem cap a l'esquerra. Aquesta terminologia et facilita o et dificulta la comprensió de la descomposició?

(encercla l'opció que més respon al que penses)

1-2

Facilita molt	Facilita	Dificulta	Dificulta molt

Q3. Anomenem nombres enters al conjunt de tots els nombres representats pels parells ordenats. El fet que tot nombre enter estigui representat per més d'un parell és:

(encercla l'opció que més respon al que penses)

1-2

Molt fàcil de comprendre	Fàcil de comprendre	Difícil de comprendre	Molt difícil de comprendre

Q4. Que el nombre enter representat pel parell (a,b) on a $\geq$ b també estigui representat pel parell (a-b,0) és:

(encercla l'opció que més respon al que penses)

1-2

Molt fàcil de comprendre	Fàcil de comprendre	Difícil de comprendre	Molt difícil de comprendre

Q5. Que el nombre enter representat pel parell (a,b) on a $\geq$ b es correspongui amb el nombre natural a-b és:

(encercla l'opció que més respon al que penses)

1-2

Molt fàcil de comprendre	Fàcil de comprendre	Difícil de comprendre	Molt difícil de comprendre

Q6. Que el nombre enter (a,b) on a<b també estigui representat pel parell (0,b-a) és:

(encercla l'opció que més respon al que penses)

1-2

Molt fàcil de comprendre	Fàcil de comprendre	Difícil de comprendre	Molt difícil de comprendre

Q7. Que el nombre enter (a,b) on a<b no es correspongui amb cap nombre natural és:

(encercla l'opció que més respon al que penses)

1-2

Molt fàcil de comprendre	Fàcil de comprendre	Difícil de comprendre	Molt difícil de comprendre

Q8. Si (a,b) representa un nombre enter amb a $\geq$ b, considerar (a-b,0) el seu representant és:

(encercla l'opció que més respon al que penses)

1-2

Molt fàcil d'acceptar	Fàcil d'acceptar	Difícil d'acceptar	Molt difícil d'acceptar

.4 Qüestionari de valoració 2.2

Q9. Si (a,b) representa un nombre enter amb b $\geq$ a, considerar (0,b-a) el seu representant és:

(encercla l'opció que més respon al que penses)

1-2	Molt fàcil d'acceptar	Fàcil d'acceptar	Difícil d'acceptar	Molt difícil d'acceptar

Q10. Acceptar que a cada nombre natural a li correspon un nombre enter representat pel parell (a,0) és:

(encercla l'opció que més respon al que penses)

1-3	Molt fàcil d'acceptar	Fàcil d'acceptar	Difícil d'acceptar	Molt difícil d'acceptar

Q11. Acceptar que hi ha nombres enters (a,b) on a<b als que no es correspon cap nombre natural és:

(encercla l'opció que més respon al que penses)

1-3	Molt fàcil d'acceptar	Fàcil d'acceptar	Difícil d'acceptar	Molt difícil d'acceptar

Q12. Acceptar que dos nombres enters (a,b) i (c,d) són iguals si a+d=b+c és:

(encercla l'opció que més respon al que penses)

1-2	Molt fàcil d'acceptar	Fàcil d'acceptar	Difícil d'acceptar	Molt difícil d'acceptar

Q13. Tot nombre natural «a» es correspon amb el nombre enter representat pel parell (a,0) i tot nombre natural b amb l'enter representat pel parell (b,0). Definir la suma d'aquests nombres enters com (a,0)+(b,0)=(a+b,0) és:

(encercla l'opció que més respon al que penses)

1-4	Molt fàcil d'acceptar	Fàcil d'acceptar	Difícil d'acceptar	Molt difícil d'acceptar

Q14. Considerem dos nombres enters representats pels parells (a,b) amb a $\geq$ b i (c,d) amb c $\geq$ d. Considerem els següents parells que els representen (a-b,0) i (c-d,0). Definim, tal com hem fet en la qüestió anterior, la suma de nombres enters així:

(a,b)+(c,d)=(a-b,0)+(c-d,0)=(a-b+c-d,0)=(a+c,b+d)

Això és:

(encercla l'opció que més respon al que penses)

1-4	Molt fàcil d'acceptar	Fàcil d'acceptar	Difícil d'acceptar	Molt difícil d'acceptar

Q15. Comprovar que l'operació (suma de nombres enters) que hem definit no depèn del representant escollit és:

(encercla l'opció que més respon al que penses)

1-4	Molt fàcil d'acceptar	Fàcil d'acceptar	Difícil d'acceptar	Molt difícil d'acceptar

Creus que la comprovació amb casos concrets és suficient per justificar que la suma no depèn del representant escollit?

.5 Qüestionari de valoració 3.1

Qüestionari

3

Dades personals	
Nom i cognoms	
Curs i grup	

Q1. El comportament de la suma de dos nombres enters ens ha conduït a acceptar que sumar a un nombre enter representat pel parell (a,0) un altre nombre enter representat pel parell (0,b) amb $a \geq b$ té un efecte equivalent a restar el nombre natural b del nombre natural a. Això és:

(encercla l'opció que més respon al que penses)

1-5	Molt fàcil d'acceptar	Fàcil d'acceptar	Difícil d'acceptar	Molt difícil d'acceptar

Q2. El comportament de la suma de nombres enters ens ha conduït a la notació −a per fer referència al nombre enter representat pel parell (0,a). Això és:

(encercla l'opció que més respon al que penses)

1-5	Molt fàcil d'acceptar	Fàcil d'acceptar	Difícil d'acceptar	Molt difícil d'acceptar

Q3. El comportament de la suma de dos nombres enters suggereix la notació +a per fer referència al nombre enter representat pel parell (a,0). Això és:

(encercla l'opció que més respon al que penses)

1-5	Molt fàcil d'acceptar	Fàcil d'acceptar	Difícil d'acceptar	Molt difícil d'acceptar

Q4. La notació simplificada ens permet simbolitzar per «-a» el nombre enter representat pel parell (0,a) i per «+a» o «a» l'enter representat pel parell (a,0). Així, l'escriptura a pot fer referència al nombre natural a i també al nombre enter (a,0). Això és:

(encercla l'opció que més respon al que penses)

1-5	Molt fàcil d'acceptar	Fàcil d'acceptar	Difícil d'acceptar	Molt difícil d'acceptar

Q5. Tal com hem vist en la qüestió anterior a pot fer referència a un nombre natural o al corresponent nombre enter. Com que pels enters hem estès les propietats dels naturals, s'operaran de la mateixa manera tant els enters positius com els naturals. Això és:

(encercla l'opció que més respon al que penses)

1-5	Molt fàcil d'acceptar	Fàcil d'acceptar	Difícil d'acceptar	Molt difícil d'acceptar

Q6. Com que (a,0)+(0,a)=0 tenim que (0,a) es comporta com si restéssim (a,0). En conseqüència, si denotem el nombre enter representat pel parell (a,0) per «a» o «+a», és raonable denotar el nombre enter representat pel parell (0,a) per «−a». Això és:

(encercla l'opció que més respon al que penses)

1-5	Molt fàcil d'acceptar	Fàcil d'acceptar	Difícil d'acceptar	Molt difícil d'acceptar

.6 Qüestionari de valoració 3.2

Q7. Com que (a,0) representa el nombre enter que es correspon amb el nombre natural a i (b,0) representa el nombre enter que es correspon amb el nombre natural b, la suma d'enters positius es comporta com la suma de nombres naturals. Això és:

(encercla l'opció que més respon al que penses)

1-6	Molt fàcil d'acceptar	Fàcil d'acceptar	Difícil d'acceptar	Molt difícil d'acceptar

Q8. Si acceptem denotar per a el nombre enter positiu representat pel parell (a,0) i per «b» el nombre enter positiu representat pel parell (b,0), escriure a+b per fer referència a la suma d'aquests dos nombres enters és:

(encercla l'opció que més respon al que penses)

1-6	Molt fàcil d'acceptar	Fàcil d'acceptar	Difícil d'acceptar	Molt difícil d'acceptar

Q9. Com que restar un nombre enter (a,0) es comporta com sumar el seu oposat, és a dir com sumar (0,a), tenim que (b,0)–(a,0)=(b,0)+(0,a)=(b,a)=(b-a,0) si b $\geq$ a.
En la notació simplificada tenim b-a=b+(-a). Això és:

(encercla l'opció que més respon al que penses)

1-6	Molt fàcil d'acceptar	Fàcil d'acceptar	Difícil d'acceptar	Molt difícil d'acceptar

Q10. En general acceptem que (b,0)-(a,0)=(b,0)+(0,a)=(b,a)
El resultat és (b,a)=(b-a,0) si b $\geq$ a ; (b,a)=(0,a-b) si b < a
En notació simplificada tenim: b-a = b-a si b ? a ; b-a = -(a-b) si b < a
Això és:

(encercla l'opció que més respon al que penses)

1-6	Molt fàcil d'acceptar	Fàcil d'acceptar	Difícil d'acceptar	Molt difícil d'acceptar

Q11. Per sumar dos nombres enters negatius apliquem la definició i tenim:
(0,a)+(0,b)=(0,a+b)
Amb la notació simplificada ho expressem així:
(–a)+(–b)=–(a+b)
Això és:

(encercla l'opció que més respon al que penses)

1-6	Molt fàcil d'acceptar	Fàcil d'acceptar	Difícil d'acceptar	Molt difícil d'acceptar

Q12. Per restar dos nombres enters negatius convertim la resta en una suma atenent que restar un enter té el mateix efecte que sumar el seu oposat:
(0,a)–(0,b)=(0,a)+(b,0)
En notació simplificada això és:
(–a)–(–b)=(–a)+b

(encercla l'opció que més respon al que penses)

1-6	Molt fàcil d'acceptar	Fàcil d'acceptar	Difícil d'acceptar	Molt difícil d'acceptar

.7 Qüestionari de valoració 4.1

Qüestionari

4

Dades personals	
Nom i cognoms	
Curs i grup	

Q1. Per restar a un nombre enter negatiu un nombre enter positiu apliquem la definició, atenent que restar un enter té el mateix efecte que sumar el seu oposat:
(0,b) – (a,0)=(0,b)+(0,a)=(0,a+b)
En notació simplificada tenim:
(–b)–a=(–b)+(–a)=–(a+b)

(encercla l'opció que més respon al que penses)

1-6

Molt fàcil d'acceptar	Fàcil d'acceptar	Difícil d'acceptar	Molt difícil d'acceptar

Q2. Per restar a un nombre enter positiu un nombre enter negatiu apliquem la definició, atenent que restar un nombre enter té el mateix efecte que sumar el seu oposat tenim:
(a,0)–(0,b)=(a,0)+(b,0)=(a+b,0)
En la notació simplificada:
a–(–b)=a+b

(encercla l'opció que més respon al que penses)

1-6

Molt fàcil d'acceptar	Fàcil d'acceptar	Difícil d'acceptar	Molt difícil d'acceptar

Q3. Denotem per «–a» el nombre enter representat pel parell (0,a). Sabem que (a,0)+(0,a)=(a,a)=(0,0). En la notació simplificada a+(-a)=0.
També tenim que (0,a)–(0,a)=(0,a)+(a,0)=(a,a)=(0,0). En la notació simplificada tenim que (–a)–(–a)=0 i, per tant, –(–a) es comporta com si suméssim «a». En conseqüència tenim que –(–a)=a.
Això és:

(encercla l'opció que més respon al que penses)

1-5

Molt fàcil d'acceptar	Fàcil d'acceptar	Difícil d'acceptar	Molt difícil d'acceptar

Q4. En la representació en la recta numèrica (a,0) està oposat a (0,a) respecte de l'origen, és a dir, respecte del nombre enter representat per (0,0), per tant, direm que a i (–a) són oposats l'un de l'altre. Alhora, com que –(–a)=a tenim que –(–a) és l'oposat d'a. Això és:

(encercla l'opció que més respon al que penses)

1-5

Molt fàcil d'acceptar	Fàcil d'acceptar	Difícil d'acceptar	Molt difícil d'acceptar

Q5. L' enter representat pel parell (0,2) és un nombre que en sumar-lo al nombre enter representat pel parell (2,0) dóna (0,0). Així doncs, sumar el nombre (0,2) té el mateix efecte que restar el nombre (2,0). Si denotem el nombre enter (2,0) per +2 o per 2, aleshores és raonable denotar el nombre enter (0,2) per –2. Això és:

(encercla l'opció que més respon al que penses)

1-5

Molt fàcil d'acceptar	Fàcil d'acceptar	Difícil d'acceptar	Molt difícil d'acceptar

.8 Qüestionari de valoració 4.2

Q6. Siguin (a,0) i (b,0) parells representants de dos nombres enters positius. Definim el producte de nombres enters per similitud amb els nombres naturals.
(a,0)·(b,0)=(a·b,0). Això és:

(encercla l'opció que més respon al que penses)

1-7	Molt fàcil d'acceptar	Fàcil d'acceptar	Difícil d'acceptar	Molt difícil d'acceptar

Q7. Siguin (a,b) i (c,d) parells que representen dos nombres enters positius, és a dir, dels quals sabem que a ≥ b i c ≥ d. Per multiplicar-los prenem els representants canònics i operem segons la definició mostrada en la qüestió anterior:
(a,b)·(c,d)=(a-b,0)·(c-d,0)=((a-b)·(c-d),0)=(ac-ad-bc+bd,0)=(ac+bd,ad+bc).Això és:

(encercla l'opció que més respon al que penses)

1-7	Molt fàcil d'acceptar	Fàcil d'acceptar	Difícil d'acceptar	Molt difícil d'acceptar

Q8. Tal com hem exposat en la qüestió anterior, el producte de dos nombres enters positius és (a,b)·(c,d)=(ac+bd,ad+bc)
Acceptem aquesta definició per tots els nombres enters. Això és:

(encercla l'opció que més respon al que penses)

1-7	Molt fàcil d'acceptar	Fàcil d'acceptar	Difícil d'acceptar	Molt difícil d'acceptar

Q9. Que el producte de dos nombres enters no depengui del representant escollit és:

(encercla l'opció que més respon al que penses)

1-7	Molt fàcil d'acceptar	Fàcil d'acceptar	Difícil d'acceptar	Molt difícil d'acceptar

Q10. Sobre les regles dels signes: (+)·(+)=(+)
Siguin (a,0) i (b,0) parells representants de dos nombres enters positius.
(a,0)·(b,0)=(a·b+0·0,a·0+0·b)=(a·b,0). En notació simplificada a·b=a·b
El producte de dos nombres positius és un nombre positiu. Això és:

(encercla l'opció que més respon al que penses)

1-7	Molt fàcil d'acceptar	Fàcil d'acceptar	Difícil d'acceptar	Molt difícil d'acceptar

Q11. Sobre les regles dels signes: (+)·(–)=(–)
Siguin (a,0) i (0,b) parells representants d'un nombre enter positiu i d'un de negatiu.(a,0)·(0,b)=(a·0+0·b,a·b+0·0)=(0,a·b). En notació simplificada a·(–b)= –a·b
El producte d'un enter positiu per un de negatiu és un de negatiu. Això és:

(encercla l'opció que més respon al que penses)

1-7	Molt fàcil d'acceptar	Fàcil d'acceptar	Difícil d'acceptar	Molt difícil d'acceptar

Q12. Sobre les regles dels signes: (–)·(–)=(–)
Siguin (0,a) i (0,b) parells representants de dos nombres enters negatius.
(0,a)·(0,b)=(0·0+a·b,0·b+a·0)=(a·b,0). En notació simplificada (–a)·(-b)= a·b
El producte de dos nombres enters negatius és un enter positiu. Això és:

(encercla l'opció que més respon al que penses)

1-7	Molt fàcil d'acceptar	Fàcil d'acceptar	Difícil d'acceptar	Molt difícil d'acceptar

Annex IV. Exemplificació de la introducció deductiva i de la constructiva

En aquest annex ens proposem exemplificar la introducció deductiva i la constructiva, tal com s'esdevé del tractat en el marc teòric (p. 83). Per fer-ho escollim dos exemples amb la pretensió que fossin el més senzills possible. En el present apartat mostrem un tractament en el qual no ens proposem generar un material que pugui ser implementat a les aules. En el capítol dedicat a la concreció metodològica de la fase empírica de la recerca (p. 241) sí que fem l'esmentada adaptació amb les consideracions adients.

Mètode deductiu per a l'adjunció de -1 a $\mathbb{N}$; $\mathbb{N}[-1]$

Suposem que tenim el conjunt del nombres naturals amb el zero, que denotem per $\mathbb{N}$, i volem adjuntar-hi un nou nombre pel mètode deductiu que permeti donar solució a l'equació $1 + x = 0$.

Sobre $\mathbb{N}$ tenim l'estructura additiva que compleix les propietats commutativa i associativa; disposem d'element neutre però no d'element simètric. Alhora disposem de l'estructura multiplicativa que compleix les propietats commutativa i associativa; sí que disposem d'element neutre però no d'element simètric.

Volem adjuntar a $\mathbb{N}$ un nou nombre α que compleix la lligadura $1 + \alpha = 0$.

- Estenem l'estructura additiva que tenim sobre $\mathbb{N}$ al nou conjunt que s'esdevé d'adjuntar el nou nombre i obtenim $\mathbb{N}[\alpha] = \{a + \alpha : a \in N\}$

- En virtut de l'estructura additiva que tenim sobre $\mathbb{N}$ i que estenem al conjunt numèric que es desprèn d'adjuntar-hi α, és a dir $\mathbb{N}[\alpha] = \{a + \alpha : a \in N\}$, tenim que:

  $1 + \alpha = 0$

  Sumant a ambdós membres 1 obtenim $2 + \alpha = 1$

  ...

  Sumant a ambdós membres $k - 1$ obtenim $k + \alpha = k - 1$

  De l'exposat es desprèn que aquest nou nombre α quan el sumem es comporta com si restéssim 1. Admès α ens proposem escollir una notació per ell. Donat que α és un nou nombre que quan el sumem es comporta com si restéssim 1, sembla raonable denotar-lo per -1.

- En virtut de l'estructura multiplicativa que tenim sobre $\mathbb{N}$ i que estenem a $\mathbb{N}[\alpha]$ tenim:

  $1 + \alpha = 0$

  Multiplicant ambdós membres de la igualtat per 2 obtenim $2+2\cdot\alpha = 0$

  ...

  Multiplicant ambdós membres de la igualtat per k obtenim $k+k\cdot\alpha = 0$

  ...

  Multiplicant ambdós membres de la igualtat per α obtenim $\alpha + \alpha \cdot \alpha = 0$

  Per la llei cancel·lativa de l'addició[15] en $\mathbb{N}$ tenim que si $\alpha + 1 = 0$ i $\alpha + \alpha \cdot \alpha = 0$ aleshores $\alpha \cdot \alpha = 1$.

$\mathbb{N}[\alpha] = \{a + b \cdot \alpha : a, b \in N\}$ on α compleix la lligadura $1 + \alpha = 0$ és un nou conjunt numèric que té per suma l'extensió de la suma en $\mathbb{N}$ i per producte l'extensió del producte en $\mathbb{N}$.

[15] La llei cancel·lativa de l'addició en $\mathbb{N}$ diu que si a, b i c pertanyen a $\mathbb{N}$ i sabem que $a+b = a+c$ aleshores $b = c$ tal com mostra, entre d'altres, Rey Pastor *et al.* (1969, p. 21).

Respecte de l'addició α és un nombre que es comporta com si restéssim 1, fet que suggereix anomenar-lo -1. De l'extensió de l'estructura multiplicativa es desprèn que, tal com hem vist, $k{\cdot}\alpha$ és un nombre que es comporta com si restéssim k, fet que ens condueix a denotar-lo per $-k$. També hem vist que $\alpha \cdot \alpha = 1$ i, en conseqüència, de l'exposat es desprenen les conegudes regles de l'aritmètica dels nombres enters.

Mètode constructiu per a l'adjunció de -1 a $\mathbb{N}$; $\mathbb{N}[-1]$

Suposem que tenim el conjunt dels nombres naturals amb el zero, que denotem per $\mathbb{N}$, i volem adjuntar-hi un nou nombre pel mètode constructiu que permet donar solució a l'equació $1 + x = 0$. En el cas que ens ocupa tenim $\mathbb{N} = \{(a, b) : a, b \in N \quad i \quad a \geq b\}$. Fer referència a cada nombre natural per un parell ordenat és possible amb diferents representants per cadascun d'ells: $a = (a{+}k, k)$ per tot $k \in \mathbb{N}$. Així, dos parells (a, b) i (c, d) representen un mateix nombre si $a + d = b + c$.

- Sobre $\mathbb{N}$ tenim l'estructura additiva que compleix les propietats commutativa i associativa; disposem d'element neutre però no d'element simètric.

  Si $a = (a{+}k, k)$ per tot $k \in \mathbb{N}$ i $b = (b{+}t, t)$ per tot $t \in \mathbb{N}$, sabem que $a+b = (a{+}b{+}r, r)$ per tot $r \in \mathbb{N}$ per tal que el parell resultant representi la suma dels dos nombres naturals a i b prèviament coneguda. Prenent el representat d'$a{+}b$ amb $r = k{+}t$ tenim $a{+}b = (a{+}b{+}k{+}t, k{+}t) = (a + k, k) + (b + t, t)$. En conseqüència prenent dos nombres naturals representats pels parells (a, b) i (c, d), sabem que $(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$.

  L'equació $x + 1 = 0$ no té solució en $\mathbb{N}$ i la voluntat de resoldre-la requereix l'acceptació d'un nou nombre. Expressada amb parells ordenats l'equació que ens proposem resoldre és $(a, b) + (1 + k, k) = (t, t)$, que sumant es converteix en $(a + 1 + k, b + k) = (t, t)$. La igualtat es donarà quan $a + 1 + k + t = b + k + t$, és a dir, quan $x = (a, a + 1)$. Aquest parell no representa cap nombre natural i, quan el sumem, es comporta com si restéssim 1.

- Sobre $\mathbb{N}$ disposem d'una estructura multiplicativa que compleix les propietats commutativa i associativa; sí que disposem d'element neutre però no d'element simètric.

  Prenem els nombres naturals representats per $n = (n+k, k)$ per tot $k \in \mathbb{N}$ i $m = (m+t, t)$ per tot $t \in \mathbb{N}$. Considerem els seus representants canònics i els multipliquem per tal d'obtenir el resultat conegut, és a dir, $n \cdot m = (n, 0) \cdot (m, 0) = (n \cdot m, 0)$. El mateix procediment fem quan dos naturals venen donats pels parells genèrics (a, b) i (c, d). $(a, b) \cdot (c, d) = (a - b, 0) \cdot (c - d, 0) = ((a - b) \cdot (c - d), 0)$[16] $= (ac + bd - ad - bc, 0) = (ac + bd, ad + bc)$.

De l'estructura additiva es desprèn la notació que hom utilitza habitualment per als nombres enters. La traducció a aquesta notació de les propietats que neixen del model constructiu ens condueix al contingut curricular corresponent.

Mètode deductiu per a l'adjunció del zero a $\mathbb{N}^*$

Considerem el conjunt dels nombres naturals sense el zero, que denotem per $\mathbb{N}^*$, i volem adjuntar-hi un nombre que permet donar solució a l'equació $1 + x = 1$. Sobre $\mathbb{N}^*$ tenim l'estructura additiva que compleix les propietats commutativa i associativa; no disposem d'element neutre ni de simètric. Alhora disposem d'una estructura multiplicativa que compleix les propietats commutativa i associativa; sí que disposem d'element neutre però no d'element simètric.

Volem adjuntar a $\mathbb{N}^*$ un nou nombre α que dóna solució a l'equació $1 + x = 1$ i que, per tant, té la lligadura $1 + \alpha = 1$.

- En virtut de l'estructura additiva que tenim sobre $\mathbb{N}^*$ i que estenem a $\mathbb{N} = \mathbb{N}^* \cup \{\alpha\}$ tenim:

  $1 + \alpha = 1$

  Sumant 1 a ambdós membres de la igualtat obtenim $2 + \alpha = 2$

[16] Aquesta igualtat es pot justificar sense cap tractament algebraic tal com es pot consultar en l'apartat que comença a la pàgina 72.

...

Sumant $k-1$ a ambdós membres de la igualtat obtenim

$$k + \alpha = k \tag{1}$$

Per tant, aquest nou nombre α deixa invariant qualsevol altre per la suma. És el que anomenem un element neutre de l'addició.

- En virtut de l'estructura multiplicativa que tenim sobre $\mathbb{N}^*$ i que estenem a $\mathbb{N} = \mathbb{N}^* \cup \{\alpha\}$ tenim que:

  $1 + \alpha = 1$

  Multiplicant per 2 obtenim $2 + 2 \cdot \alpha = 2$

  ...

  Multiplicant per k a ambdós membres de la igualtat obtenim

$$k + k \cdot \alpha = k \tag{2}$$

Per la llei cancel·lativa de l'addició[17] en $\mathbb{N}^*$ de (1, p. 603) i (2, p. 603) tenim $k \cdot \alpha = \alpha$. Aquest nou nombre α compleix la lligadura $1 + \alpha = 1$ i té la propietat que $k \cdot \alpha = \alpha$ per qualsevol k de $\mathbb{N}^*$. L'afegim a $\mathbb{N}^*$ obtenint $\mathbb{N} = \mathbb{N}^* \cup \{\alpha\}$,

Multiplicant $1 + \alpha = 1$ per α tenim $\alpha + \alpha \cdot \alpha = \alpha$. En virtut novament de la llei de cancel·lació tenim que $\alpha \cdot \alpha = \alpha$. Així, $k \cdot \alpha = \alpha$ per qualsevol $k \in \mathbb{N} = \mathbb{N}^* \cup \{\alpha\}$.

Adjuntar a $\mathbb{N}^*$ el nombre α amb la lligadura $1 + \alpha = 1$ ha requerit fer ús de l'estructura additiva i de la multiplicativa. Respecte de la terminologia hom anomena $\mathbb{N} = \mathbb{N}^*[\alpha] = \mathbb{N}^* \cup \{\alpha\}$ on les estructures additiva i multiplicativa són les que es deriven d'estendre a aquest nou conjunt numèric les que teníem en $\mathbb{N}^*$.

[17]La llei cancel·lativa de l'addició en $\mathbb{N}^*$ diu que si a, b i c pertanyen a $\mathbb{N}^*$ i sabem que $a + b = a + c$ aleshores $b = c$ tal com mostra, entre d'altres, en Rey Pastor *et al.* (1969, p. 21).

Annex V. Taules de resultats de la valoració dels alumnes

RESULTATS GLOBALS	Q1	Q2	Q3	Q4	Q5	Q6	Q7	Q8	Q9	Q10	Q11	Q12	Q13	Q14	Q15
TOTAL DE 1	0	4	45	18	38	41	3	42	8	2	2	6	7	17	11
TOTAL DE 2	3	25	5	29	10	9	9	8	34	21	21	27	34	30	32
TOTAL DE 3	29	14	0	3	2	0	32	0	7	26	26	16	7	3	7
TOTAL DE 4	18	7	0	0	0	0	6	0	1	1	1	1	2	0	0
TOTAL DE 5	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
TOTAL DE RESPOSTES	50	50	50	50	50	50	50	50	50	50	50	50	50	50	50
TOTAL DE 1	0,0%	8,0%	90,0%	36,0%	76,0%	82,0%	6,0%	84,0%	16,0%	4,0%	4,0%	12,0%	14,0%	34,0%	22,0%
TOTAL DE 2	6,0%	50,0%	10,0%	58,0%	20,0%	18,0%	18,0%	16,0%	68,0%	42,0%	42,0%	54,0%	68,0%	60,0%	64,0%
TOTAL DE 3	58,0%	28,0%	0,0%	6,0%	4,0%	0,0%	64,0%	0,0%	14,0%	52,0%	52,0%	32,0%	14,0%	6,0%	14,0%
TOTAL DE 4	36,0%	14,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	12,0%	0,0%	2,0%	2,0%	2,0%	2,0%	4,0%	0,0%	0,0%
TOTAL DE 5	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%
TOTAL DE RESPOSTES	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%

Figura 6: Resultats globals del primer qüestionari de valoració.

RESULTATS PER GRUP	Q1	Q2	Q3	Q4	Q5	Q6	Q7	Q8	Q9	Q10	Q11	Q12	Q13	Q14	Q15
TOTAL 1 DE A	0	2	19	12	21	18	1	19	3	0	0	5	5	10	7
TOTAL 2 DE A	3	12	4	9	2	5	4	4	16	5	5	11	15	12	14
TOTAL 3 DE A	15	7	0	2	0	0	16	0	3	18	18	6	2	1	2
TOTAL 4 DE A	5	2	0	0	0	0	2	0	1	0	0	1	1	0	0
TOTAL 5 DE A	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
TOTAL DE A	23	23	23	23	23	23	23	23	23	23	23	23	23	23	23
TOTAL 1 DE B	0	2	26	6	17	23	2	23	5	2	2	1	2	7	4
TOTAL 2 DE B	0	13	1	20	8	4	5	4	18	16	16	16	19	18	18
TOTAL 3 DE B	14	7	0	1	2	0	16	0	4	8	8	10	5	2	5
TOTAL 4 DE B	13	5	0	0	0	0	4	0	0	1	1	0	1	0	0
TOTAL 5 DE B	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
TOTAL DE B	27	27	27	27	27	27	27	27	27	27	27	27	27	27	27
TOTAL 1 DE A	0,0%	8,7%	82,6%	52,2%	91,3%	78,3%	4,3%	82,6%	13,0%	0,0%	0,0%	21,7%	21,7%	43,5%	30,4%
TOTAL 2 DE A	13,0%	52,2%	17,4%	39,1%	8,7%	21,7%	17,4%	17,4%	69,6%	21,7%	21,7%	47,8%	65,2%	52,2%	60,9%
TOTAL 3 DE A	65,2%	30,4%	0,0%	8,7%	0,0%	0,0%	69,6%	0,0%	13,0%	78,3%	78,3%	26,1%	8,7%	4,3%	8,7%
TOTAL 4 DE A	21,7%	8,7%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	8,7%	0,0%	4,3%	0,0%	0,0%	4,3%	4,3%	0,0%	0,0%
TOTAL 5 DE A	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%
TOTAL DE A	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%
TOTAL 1 DE B	0,0%	7,4%	96,3%	22,2%	63,0%	85,2%	7,4%	85,2%	18,5%	7,4%	7,4%	3,7%	7,4%	25,9%	14,8%
TOTAL 2 DE B	0,0%	48,1%	3,7%	74,1%	29,6%	14,8%	18,5%	14,8%	66,7%	59,3%	59,3%	59,3%	70,4%	66,7%	66,7%
TOTAL 3 DE B	51,9%	25,9%	0,0%	3,7%	7,4%	0,0%	59,3%	0,0%	14,8%	29,6%	29,6%	37,0%	18,5%	7,4%	18,5%
TOTAL 4 DE B	48,1%	18,5%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	14,8%	0,0%	0,0%	3,7%	3,7%	0,0%	3,7%	0,0%	0,0%
TOTAL 5 DE B	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%
TOTAL DE B	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%

Figura 7: Resultats per grups del primer qüestionari de valoració.

RESULTATS PER GÈNERE	Q1	Q2	Q3	Q4	Q5	Q6	Q7	Q8	Q9	Q10	Q11	Q12	Q13	Q14	Q15
TOTAL 1 DE H	0	2	23	12	19	21	0	21	4	0	0	2	2	7	5
TOTAL 2 DE H	1	12	2	12	6	4	6	4	18	11	11	14	16	16	16
TOTAL 3 DE H	15	7	0	1	0	0	15	0	3	13	13	8	5	2	4
TOTAL 4 DE H	9	4	0	0	0	0	4	0	0	1	1	1	2	0	0
TOTAL 5 DE H	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
TOTAL DE H	25	25	25	25	25	25	25	25	25	25	25	25	25	25	25
TOTAL 1 DE D	0	2	22	6	19	20	3	21	4	2	2	4	5	10	6
TOTAL 2 DE D	2	13	3	17	4	5	3	4	16	10	10	13	18	14	16
TOTAL 3 DE D	14	7	0	2	2	0	17	0	4	13	13	8	2	1	3
TOTAL 4 DE D	9	3	0	0	0	0	2	0	1	0	0	0	0	0	0
TOTAL 5 DE D	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
TOTAL DE D	25	25	25	25	25	25	25	25	25	25	25	25	25	25	25
TOTAL 1 DE H	0,0%	8,0%	92,0%	48,0%	76,0%	84,0%	0,0%	84,0%	16,0%	0,0%	0,0%	8,0%	8,0%	28,0%	20,0%
TOTAL 2 DE H	4,0%	48,0%	8,0%	48,0%	24,0%	16,0%	24,0%	16,0%	72,0%	44,0%	44,0%	56,0%	64,0%	64,0%	64,0%
TOTAL 3 DE H	60,0%	28,0%	0,0%	4,0%	0,0%	0,0%	60,0%	0,0%	12,0%	52,0%	52,0%	32,0%	20,0%	8,0%	16,0%
TOTAL 4 DE H	36,0%	16,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	16,0%	0,0%	0,0%	4,0%	4,0%	4,0%	8,0%	0,0%	0,0%
TOTAL 5 DE H	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%
TOTAL DE H	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%
TOTAL 1 DE D	0,0%	8,0%	88,0%	24,0%	76,0%	80,0%	12,0%	84,0%	16,0%	8,0%	8,0%	16,0%	20,0%	40,0%	24,0%
TOTAL 2 DE D	8,0%	52,0%	12,0%	68,0%	16,0%	20,0%	12,0%	16,0%	64,0%	40,0%	40,0%	52,0%	72,0%	56,0%	64,0%
TOTAL 3 DE D	56,0%	28,0%	0,0%	8,0%	8,0%	0,0%	68,0%	0,0%	16,0%	52,0%	52,0%	32,0%	8,0%	4,0%	12,0%
TOTAL 4 DE D	36,0%	12,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	8,0%	0,0%	4,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%
TOTAL 5 DE D	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%
TOTAL DE D	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%

Figura 8: Resultats per gènere del primer qüestionari de valoració.

RESULTATS PER GRUP I GÈNERE	Q1	Q2	Q3	Q4	Q5	Q6	Q7	Q8	Q9	Q10	Q11	Q12	Q13	Q14	Q15
TOTAL 1 DE HA	0	0	9	8	9	9	0	8	2	0	0	2	2	5	5
TOTAL 2 DE HA	1	5	1	1	1	1	2	2	8	3	3	5	7	5	5
TOTAL 3 DE HA	6	5	0	1	0	0	6	0	0	7	7	2	0	0	0
TOTAL 4 DE HA	3	0	0	0	0	0	2	0	0	0	0	1	1	0	0
TOTAL 5 DE HA	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
TOTAL DE HA	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10
TOTAL 1 DE HB	0	2	14	4	10	12	0	13	2	0	0	0	0	2	0
TOTAL 2 DE HB	0	7	1	11	5	3	4	2	10	8	8	9	9	11	11
TOTAL 3 DE HB	9	2	0	0	0	0	9	0	3	6	6	6	5	2	4
TOTAL 4 DE HB	6	4	0	0	0	0	2	0	0	1	1	0	1	0	0
TOTAL 5 DE HB	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
TOTAL DE HB	15	15	15	15	15	15	15	15	15	15	15	15	15	15	15
TOTAL 1 DE DA	0	2	10	4	12	9	1	11	1	0	0	3	3	5	2
TOTAL 2 DE DA	2	7	3	8	1	4	2	2	8	2	2	6	8	7	9
TOTAL 3 DE DA	9	2	0	1	0	0	10	0	3	11	11	4	2	1	2
TOTAL 4 DE DA	2	2	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0
TOTAL 5 DE DA	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
TOTAL DE DA	13	13	13	13	13	13	13	13	13	13	13	13	13	13	13
TOTAL 1 DE DB	0	0	12	2	7	11	2	10	3	2	2	1	2	5	4
TOTAL 2 DE DB	0	6	0	9	3	1	1	2	8	8	8	7	10	7	7
TOTAL 3 DE DB	5	5	0	1	2	0	7	0	1	2	2	4	0	0	1
TOTAL 4 DE DB	7	1	0	0	0	0	2	0	0	0	0	0	0	0	0
TOTAL 5 DE DB	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
TOTAL DE DB	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12
TOTAL 1 DE HA	0,0%	0,0%	90,0%	80,0%	90,0%	90,0%	0,0%	80,0%	20,0%	0,0%	0,0%	20,0%	20,0%	50,0%	50,0%
TOTAL 2 DE HA	10,0%	50,0%	10,0%	10,0%	10,0%	10,0%	20,0%	20,0%	80,0%	30,0%	30,0%	50,0%	70,0%	50,0%	50,0%
TOTAL 3 DE HA	60,0%	50,0%	0,0%	10,0%	0,0%	0,0%	60,0%	0,0%	0,0%	70,0%	70,0%	20,0%	0,0%	0,0%	0,0%
TOTAL 4 DE HA	30,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	20,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	10,0%	10,0%	0,0%	0,0%
TOTAL 5 DE HA	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%
TOTAL DE HA	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%
TOTAL 1 DE HB	0,0%	13,3%	93,3%	26,7%	66,7%	80,0%	0,0%	86,7%	13,3%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	13,3%	0,0%
TOTAL 2 DE HB	0,0%	46,7%	6,7%	73,3%	33,3%	20,0%	26,7%	13,3%	66,7%	53,3%	53,3%	60,0%	60,0%	73,3%	73,3%
TOTAL 3 DE HB	60,0%	13,3%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	60,0%	0,0%	20,0%	40,0%	40,0%	40,0%	33,3%	13,3%	26,7%
TOTAL 4 DE HB	40,0%	26,7%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	13,3%	0,0%	0,0%	6,7%	6,7%	0,0%	6,7%	0,0%	0,0%
TOTAL 5 DE HB	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%
TOTAL DE HB	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%
TOTAL 1 DE DA	0,0%	15,4%	76,9%	30,8%	92,3%	69,2%	7,7%	84,6%	7,7%	0,0%	0,0%	23,1%	23,1%	38,5%	15,4%
TOTAL 2 DE DA	15,4%	53,8%	23,1%	61,5%	7,7%	30,8%	15,4%	15,4%	61,5%	15,4%	15,4%	46,2%	61,5%	53,8%	69,2%
TOTAL 3 DE DA	69,2%	15,4%	0,0%	7,7%	0,0%	0,0%	76,9%	0,0%	23,1%	84,6%	84,6%	30,8%	15,4%	7,7%	15,4%
TOTAL 4 DE DA	15,4%	15,4%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	7,7%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%
TOTAL 5 DE DA	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%
TOTAL DE DA	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%
TOTAL 1 DE DB	0,0%	0,0%	100,0%	16,7%	58,3%	91,7%	16,7%	83,3%	25,0%	16,7%	16,7%	8,3%	16,7%	41,7%	33,3%
TOTAL 2 DE DB	0,0%	50,0%	0,0%	75,0%	25,0%	8,3%	8,3%	16,7%	66,7%	66,7%	66,7%	58,3%	83,3%	58,3%	58,3%
TOTAL 3 DE DB	41,7%	41,7%	0,0%	8,3%	16,7%	0,0%	58,3%	0,0%	8,3%	16,7%	16,7%	33,3%	0,0%	0,0%	8,3%
TOTAL 4 DE DB	58,3%	8,3%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	16,7%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%
TOTAL 5 DE DB	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%
TOTAL DE DB	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%

Figura 9: Resultats per grup i gènere del primer qüestionari de valoració.

RESULTATS GLOBALS	Q1	Q2	Q3	Q4	Q5	Q6	Q7	Q8	Q9	Q10	Q11	Q12	Q13	Q14	Q15
TOTAL DE 1	6	4	19	13	10	12	20	7	9	21	17	13	13	4	17
TOTAL DE 2	28	27	25	26	31	29	20	33	30	27	24	32	32	26	27
TOTAL DE 3	16	19	5	9	7	8	9	9	10	1	9	4	5	19	5
TOTAL DE 4	0	0	1	2	2	1	1	1	1	1	0	1	0	1	1
TOTAL DE 5	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
TOTAL DE RESPOSTES	50	50	50	50	50	50	50	50	50	50	50	50	50	50	50
TOTAL DE 1	12,0%	8,0%	38,0%	26,0%	20,0%	24,0%	40,0%	14,0%	18,0%	42,0%	34,0%	26,0%	26,0%	8,0%	34,0%
TOTAL DE 2	56,0%	54,0%	50,0%	52,0%	62,0%	58,0%	40,0%	66,0%	60,0%	54,0%	48,0%	64,0%	64,0%	52,0%	54,0%
TOTAL DE 3	32,0%	38,0%	10,0%	18,0%	14,0%	16,0%	18,0%	18,0%	20,0%	2,0%	18,0%	8,0%	10,0%	38,0%	10,0%
TOTAL DE 4	0,0%	0,0%	2,0%	4,0%	4,0%	2,0%	2,0%	2,0%	2,0%	2,0%	0,0%	2,0%	0,0%	2,0%	2,0%
TOTAL DE 5	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%
TOTAL DE RESPOSTES	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%

Figura 10: Resultats globals del segon qüestionari de valoració.

RESULTATS PER GRUP	Q1	Q2	Q3	Q4	Q5	Q6	Q7	Q8	Q9	Q10	Q11	Q12	Q13	Q14	Q15
TOTAL 1 DE A	4	2	7	5	5	6	6	3	3	7	6	8	3	1	9
TOTAL 2 DE A	13	9	12	12	12	12	12	13	12	14	12	12	17	9	12
TOTAL 3 DE A	6	12	3	4	4	4	4	6	7	1	5	2	3	12	1
TOTAL 4 DE A	0	0	1	2	2	1	1	1	1	1	0	1	0	1	1
TOTAL 5 DE A	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
TOTAL DE A	23	23	23	23	23	23	23	23	23	23	23	23	23	23	23
TOTAL 1 DE B	2	2	12	8	5	6	14	4	6	14	11	5	10	3	8
TOTAL 2 DE B	15	18	13	14	19	17	8	20	18	13	12	20	15	17	15
TOTAL 3 DE B	10	7	2	5	3	4	5	3	3	0	4	2	2	7	4
TOTAL 4 DE B	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
TOTAL 5 DE B	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
TOTAL DE B	27	27	27	27	27	27	27	27	27	27	27	27	27	27	27
TOTAL 1 DE A	17,4%	8,7%	30,4%	21,7%	21,7%	26,1%	26,1%	13,0%	13,0%	30,4%	26,1%	34,8%	13,0%	4,3%	39,1%
TOTAL 2 DE A	56,5%	39,1%	52,2%	52,2%	52,2%	52,2%	52,2%	56,5%	52,2%	60,9%	52,2%	52,2%	73,9%	39,1%	52,2%
TOTAL 3 DE A	26,1%	52,2%	13,0%	17,4%	17,4%	17,4%	17,4%	26,1%	30,4%	4,3%	21,7%	8,7%	13,0%	52,2%	4,3%
TOTAL 4 DE A	0,0%	0,0%	4,3%	8,7%	8,7%	4,3%	4,3%	4,3%	4,3%	4,3%	0,0%	4,3%	0,0%	4,3%	4,3%
TOTAL 5 DE A	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%
TOTAL DE A	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%
TOTAL 1 DE B	7,4%	7,4%	44,4%	29,6%	18,5%	22,2%	51,9%	14,8%	22,2%	51,9%	40,7%	18,5%	37,0%	11,1%	29,6%
TOTAL 2 DE B	55,6%	66,7%	48,1%	51,9%	70,4%	63,0%	29,6%	74,1%	66,7%	48,1%	44,4%	74,1%	55,6%	63,0%	55,6%
TOTAL 3 DE B	37,0%	25,9%	7,4%	18,5%	11,1%	14,8%	18,5%	11,1%	11,1%	0,0%	14,8%	7,4%	7,4%	25,9%	14,8%
TOTAL 4 DE B	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%
TOTAL 5 DE B	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%
TOTAL DE B	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%

Figura 11: Resultats per grups del segon qüestionari de valoració.

RESULTATS PER GÈNERE	Q1	Q2	Q3	Q4	Q5	Q6	Q7	Q8	Q9	Q10	Q11	Q12	Q13	Q14	Q15
TOTAL 1 DE H	2	3	11	10	7	9	11	4	4	12	7	10	7	1	10
TOTAL 2 DE H	15	14	10	8	13	11	9	15	15	11	13	13	16	11	11
TOTAL 3 DE H	8	8	3	6	4	5	5	5	5	1	5	2	2	13	3
TOTAL 4 DE H	0	0	1	1	1	0	0	1	1	1	0	0	0	0	1
TOTAL 5 DE H	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
TOTAL DE H	25	25	25	25	25	25	25	25	25	25	25	25	25	25	25
TOTAL 1 DE D	4	1	8	3	3	3	9	3	5	9	10	3	6	3	7
TOTAL 2 DE D	13	13	15	18	18	18	11	18	15	16	11	19	16	15	16
TOTAL 3 DE D	8	11	2	3	3	3	4	4	5	0	4	2	3	6	2
TOTAL 4 DE D	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	0	1	0
TOTAL 5 DE D	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
TOTAL DE D	25	25	25	25	25	25	25	25	25	25	25	25	25	25	25
TOTAL 1 DE H	8,0%	12,0%	44,0%	40,0%	28,0%	36,0%	44,0%	16,0%	16,0%	48,0%	28,0%	40,0%	28,0%	4,0%	40,0%
TOTAL 2 DE H	60,0%	56,0%	40,0%	32,0%	52,0%	44,0%	36,0%	60,0%	60,0%	44,0%	52,0%	52,0%	64,0%	44,0%	44,0%
TOTAL 3 DE H	32,0%	32,0%	12,0%	24,0%	16,0%	20,0%	20,0%	20,0%	20,0%	4,0%	20,0%	8,0%	8,0%	52,0%	12,0%
TOTAL 4 DE H	0,0%	0,0%	4,0%	4,0%	4,0%	0,0%	0,0%	4,0%	4,0%	4,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	4,0%
TOTAL 5 DE H	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%
TOTAL DE H	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%
TOTAL 1 DE D	16,0%	4,0%	32,0%	12,0%	12,0%	12,0%	36,0%	12,0%	20,0%	36,0%	40,0%	12,0%	24,0%	12,0%	28,0%
TOTAL 2 DE D	52,0%	52,0%	60,0%	72,0%	72,0%	72,0%	44,0%	72,0%	60,0%	64,0%	44,0%	76,0%	64,0%	60,0%	64,0%
TOTAL 3 DE D	32,0%	44,0%	8,0%	12,0%	12,0%	12,0%	16,0%	16,0%	20,0%	0,0%	16,0%	8,0%	12,0%	24,0%	8,0%
TOTAL 4 DE D	0,0%	0,0%	0,0%	4,0%	4,0%	4,0%	4,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	4,0%	0,0%	4,0%	0,0%
TOTAL 5 DE D	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%
TOTAL DE D	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%

Figura 12: Resultats per gènere del segon qüestionari de valoració.

RESULTATS PER GRUP I GÈNERE	Q1	Q2	Q3	Q4	Q5	Q6	Q7	Q8	Q9	Q10	Q11	Q12	Q13	Q14	Q15
TOTAL 1 DE HA	1	2	5	4	3	5	5	2	1	5	2	6	3	0	5
TOTAL 2 DE HA	6	2	2	3	5	3	4	5	5	3	6	3	6	3	3
TOTAL 3 DE HA	3	6	2	2	1	2	1	2	3	1	2	1	1	7	1
TOTAL 4 DE HA	0	0	1	1	1	0	0	1	1	1	0	0	0	0	1
TOTAL 5 DE HA	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
TOTAL DE HA	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10
TOTAL 1 DE HB	1	1	6	6	4	4	6	2	3	7	5	4	4	1	5
TOTAL 2 DE HB	9	12	8	5	8	8	5	10	10	8	7	10	10	8	8
TOTAL 3 DE HB	5	2	1	4	3	3	4	3	2	0	3	1	1	6	2
TOTAL 4 DE HB	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
TOTAL 5 DE HB	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
TOTAL DE HB	15	15	15	15	15	15	15	15	15	15	15	15	15	15	15
TOTAL 1 DE DA	3	0	2	1	2	1	1	1	2	2	4	2	0	1	4
TOTAL 2 DE DA	7	7	10	9	7	9	8	8	7	11	6	9	11	6	9
TOTAL 3 DE DA	3	6	1	2	3	2	3	4	4	0	3	1	2	5	0
TOTAL 4 DE DA	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	0	1	0
TOTAL 5 DE DA	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
TOTAL DE DA	13	13	13	13	13	13	13	13	13	13	13	13	13	13	13
TOTAL 1 DE DB	1	1	6	2	1	2	8	2	3	7	6	1	6	2	3
TOTAL 2 DE DB	6	6	5	9	11	9	3	10	8	5	5	10	5	9	7
TOTAL 3 DE DB	5	5	1	1	0	1	1	0	1	0	1	1	1	1	2
TOTAL 4 DE DB	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
TOTAL 5 DE DB	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
TOTAL DE DB	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12
TOTAL 1 DE HA	10,0%	20,0%	50,0%	40,0%	30,0%	50,0%	50,0%	20,0%	10,0%	50,0%	20,0%	60,0%	30,0%	0,0%	50,0%
TOTAL 2 DE HA	60,0%	20,0%	20,0%	30,0%	50,0%	30,0%	40,0%	50,0%	50,0%	30,0%	60,0%	30,0%	60,0%	30,0%	30,0%
TOTAL 3 DE HA	30,0%	60,0%	20,0%	20,0%	10,0%	20,0%	10,0%	20,0%	30,0%	10,0%	20,0%	10,0%	10,0%	70,0%	10,0%
TOTAL 4 DE HA	0,0%	0,0%	10,0%	10,0%	10,0%	0,0%	0,0%	10,0%	10,0%	10,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	10,0%
TOTAL 5 DE HA	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%
TOTAL DE HA	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%
TOTAL 1 DE HB	6,7%	6,7%	40,0%	40,0%	26,7%	26,7%	40,0%	13,3%	20,0%	46,7%	33,3%	26,7%	26,7%	6,7%	33,3%
TOTAL 2 DE HB	60,0%	80,0%	53,3%	33,3%	53,3%	53,3%	33,3%	66,7%	66,7%	53,3%	46,7%	66,7%	66,7%	53,3%	53,3%
TOTAL 3 DE HB	33,3%	13,3%	6,7%	26,7%	20,0%	20,0%	26,7%	20,0%	13,3%	0,0%	20,0%	6,7%	6,7%	40,0%	13,3%
TOTAL 4 DE HB	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%
TOTAL 5 DE HB	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%
TOTAL DE HB	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%
TOTAL 1 DE DA	23,1%	0,0%	15,4%	7,7%	15,4%	7,7%	7,7%	7,7%	15,4%	15,4%	30,8%	15,4%	0,0%	7,7%	30,8%
TOTAL 2 DE DA	53,8%	53,8%	76,9%	69,2%	53,8%	69,2%	61,5%	61,5%	53,8%	84,6%	46,2%	69,2%	84,6%	46,2%	69,2%
TOTAL 3 DE DA	23,1%	46,2%	7,7%	15,4%	23,1%	15,4%	23,1%	30,8%	30,8%	0,0%	23,1%	7,7%	15,4%	38,5%	0,0%
TOTAL 4 DE DA	0,0%	0,0%	0,0%	7,7%	7,7%	7,7%	7,7%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	7,7%	0,0%	7,7%	0,0%
TOTAL 5 DE DA	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%
TOTAL DE DA	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%
TOTAL 1 DE DB	8,3%	8,3%	50,0%	16,7%	8,3%	16,7%	66,7%	16,7%	25,0%	58,3%	50,0%	8,3%	50,0%	16,7%	25,0%
TOTAL 2 DE DB	50,0%	50,0%	41,7%	75,0%	91,7%	75,0%	25,0%	83,3%	66,7%	41,7%	41,7%	83,3%	41,7%	75,0%	58,3%
TOTAL 3 DE DB	41,7%	41,7%	8,3%	8,3%	0,0%	8,3%	8,3%	0,0%	8,3%	0,0%	8,3%	8,3%	8,3%	8,3%	16,7%
TOTAL 4 DE DB	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%
TOTAL 5 DE DB	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%
TOTAL DE DB	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%

Figura 13: Resultats per grup i gènere del segon qüestionari de valoració.

RESULTATS GLOBALS	Q1	Q2	Q3	Q4	Q5	Q6	Q7	Q8	Q9	Q10	Q11	Q12
TOTAL DE 1	13	11	19	16	10	8	21	23	9	4	11	7
TOTAL DE 2	31	34	27	29	32	34	27	21	32	27	31	34
TOTAL DE 3	6	4	3	4	8	8	2	4	6	17	7	8
TOTAL DE 4	0	1	1	1	0	0	0	0	2	2	1	1
TOTAL DE 5	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
TOTAL DE RESPOSTES	50	50	50	50	50	50	50	48	49	50	50	50
TOTAL DE 1	26,0%	22,0%	38,0%	32,0%	20,0%	16,0%	42,0%	47,9%	18,4%	8,0%	22,0%	14,0%
TOTAL DE 2	62,0%	68,0%	54,0%	58,0%	64,0%	68,0%	54,0%	43,8%	65,3%	54,0%	62,0%	68,0%
TOTAL DE 3	12,0%	8,0%	6,0%	8,0%	16,0%	16,0%	4,0%	8,3%	12,2%	34,0%	14,0%	16,0%
TOTAL DE 4	0,0%	2,0%	2,0%	2,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	4,1%	4,0%	2,0%	2,0%
TOTAL DE 5	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%
TOTAL DE RESPOSTES	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%

Figura 14: Resultats globals del tercer qüestionari de valoració.

RESULTATS PER GRUP	Q1	Q2	Q3	Q4	Q5	Q6	Q7	Q8	Q9	Q10	Q11	Q12
TOTAL 1 DE A	5	4	5	3	3	2	7	6	5	2	4	2
TOTAL 2 DE A	13	14	16	15	14	15	15	14	12	9	12	12
TOTAL 3 DE A	5	4	1	4	6	6	1	3	4	10	6	8
TOTAL 4 DE A	0	1	1	1	0	0	0	0	2	2	1	1
TOTAL 5 DE A	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
TOTAL DE A	23	23	23	23	23	23	23	23	23	23	23	23
TOTAL 1 DE B	8	7	14	13	7	6	14	17	4	2	7	5
TOTAL 2 DE B	18	20	11	14	18	19	12	7	20	18	19	22
TOTAL 3 DE B	1	0	2	0	2	2	1	1	2	7	1	0
TOTAL 4 DE B	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
TOTAL 5 DE B	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
TOTAL DE B	27	27	27	27	27	27	27	25	26	27	27	27
TOTAL 1 DE A	21,7%	17,4%	21,7%	13,0%	13,0%	8,7%	30,4%	26,1%	21,7%	8,7%	17,4%	8,7%
TOTAL 2 DE A	56,5%	60,9%	69,6%	65,2%	60,9%	65,2%	65,2%	60,9%	52,2%	39,1%	52,2%	52,2%
TOTAL 3 DE A	21,7%	17,4%	4,3%	17,4%	26,1%	26,1%	4,3%	13,0%	17,4%	43,5%	26,1%	34,8%
TOTAL 4 DE A	0,0%	4,3%	4,3%	4,3%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	8,7%	8,7%	4,3%	4,3%
TOTAL 5 DE A	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%
TOTAL DE A	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%
TOTAL 1 DE B	29,6%	25,9%	51,9%	48,1%	25,9%	22,2%	51,9%	68,0%	15,4%	7,4%	25,9%	18,5%
TOTAL 2 DE B	66,7%	74,1%	40,7%	51,9%	66,7%	70,4%	44,4%	28,0%	76,9%	66,7%	70,4%	81,5%
TOTAL 3 DE B	3,7%	0,0%	7,4%	0,0%	7,4%	7,4%	3,7%	4,0%	7,7%	25,9%	3,7%	0,0%
TOTAL 4 DE B	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%
TOTAL 5 DE B	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%
TOTAL DE B	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%

Figura 15: Resultats per grups del tercer qüestionari de valoració.

RESULTATS PER GÈNERE	Q1	Q2	Q3	Q4	Q5	Q6	Q7	Q8	Q9	Q10	Q11	Q12
TOTAL 1 DE H	7	4	8	6	6	4	10	12	5	2	6	3
TOTAL 2 DE H	16	18	14	15	14	15	15	10	16	13	15	18
TOTAL 3 DE H	2	2	2	3	5	6	0	2	3	9	3	3
TOTAL 4 DE H	0	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
TOTAL 5 DE H	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
TOTAL DE H	25	25	25	25	25	25	25	24	25	25	25	25
TOTAL 1 DE D	6	7	11	10	4	4	11	11	4	2	5	4
TOTAL 2 DE D	15	16	13	14	18	19	12	11	16	14	16	16
TOTAL 3 DE D	4	2	1	1	3	2	2	2	3	8	4	5
TOTAL 4 DE D	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0
TOTAL 5 DE D	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
TOTAL DE D	25	25	25	25	25	25	25	24	24	25	25	25
TOTAL 1 DE H	28,0%	16,0%	32,0%	24,0%	24,0%	16,0%	40,0%	50,0%	20,0%	8,0%	24,0%	12,0%
TOTAL 2 DE H	64,0%	72,0%	56,0%	60,0%	56,0%	60,0%	60,0%	41,7%	64,0%	52,0%	60,0%	72,0%
TOTAL 3 DE H	8,0%	8,0%	8,0%	12,0%	20,0%	24,0%	0,0%	8,3%	12,0%	36,0%	12,0%	12,0%
TOTAL 4 DE H	0,0%	4,0%	4,0%	4,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	4,0%	4,0%	4,0%	4,0%
TOTAL 5 DE H	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%
TOTAL DE H	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%
TOTAL 1 DE D	24,0%	28,0%	44,0%	40,0%	16,0%	16,0%	44,0%	45,8%	16,7%	8,0%	20,0%	16,0%
TOTAL 2 DE D	60,0%	64,0%	52,0%	56,0%	72,0%	76,0%	48,0%	45,8%	66,7%	56,0%	64,0%	64,0%
TOTAL 3 DE D	16,0%	8,0%	4,0%	4,0%	12,0%	8,0%	8,0%	8,3%	12,5%	32,0%	16,0%	20,0%
TOTAL 4 DE D	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	4,2%	4,0%	0,0%	0,0%
TOTAL 5 DE D	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%
TOTAL DE D	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%

Figura 16: Resultats per gènere del tercer qüestionari de valoració.

RESULTATS PER GRUP I GÈNERE	Q1	Q2	Q3	Q4	Q5	Q6	Q7	Q8	Q9	Q10	Q11	Q12
TOTAL 1 DE HA	3	2	2	2	3	2	4	4	3	2	3	1
TOTAL 2 DE HA	5	5	7	4	3	3	6	5	4	2	3	5
TOTAL 3 DE HA	2	2	0	3	4	5	0	1	2	5	3	3
TOTAL 4 DE HA	0	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
TOTAL 5 DE HA	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
TOTAL DE HA	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10
TOTAL 1 DE HB	4	2	6	4	3	2	6	8	2	0	3	2
TOTAL 2 DE HB	11	13	7	11	11	12	9	5	12	11	12	13
TOTAL 3 DE HB	0	0	2	0	1	1	0	1	1	4	0	0
TOTAL 4 DE HB	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
TOTAL 5 DE HB	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
TOTAL DE HB	15	15	15	15	15	15	15	14	15	15	15	15
TOTAL 1 DE DA	2	2	3	1	0	0	3	2	2	0	1	1
TOTAL 2 DE DA	8	9	9	11	11	12	9	9	8	7	9	7
TOTAL 3 DE DA	3	2	1	1	2	1	1	2	2	5	3	5
TOTAL 4 DE DA	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0
TOTAL 5 DE DA	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
TOTAL DE DA	13	13	13	13	13	13	13	13	13	13	13	13
TOTAL 1 DE DB	4	5	8	9	4	4	8	9	2	2	4	3
TOTAL 2 DE DB	7	7	4	3	7	7	3	2	8	7	7	9
TOTAL 3 DE DB	1	0	0	0	1	1	1	0	1	3	1	0
TOTAL 4 DE DB	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
TOTAL 5 DE DB	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
TOTAL DE DB	12	12	12	12	12	12	12	11	11	12	12	12
TOTAL 1 DE HA	30,0%	20,0%	20,0%	20,0%	30,0%	20,0%	40,0%	40,0%	30,0%	20,0%	30,0%	10,0%
TOTAL 2 DE HA	50,0%	50,0%	70,0%	40,0%	30,0%	30,0%	60,0%	50,0%	40,0%	20,0%	30,0%	50,0%
TOTAL 3 DE HA	20,0%	20,0%	0,0%	30,0%	40,0%	50,0%	0,0%	10,0%	20,0%	50,0%	30,0%	30,0%
TOTAL 4 DE HA	0,0%	10,0%	10,0%	10,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	10,0%	10,0%	10,0%	10,0%
TOTAL 5 DE HA	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%
TOTAL DE HA	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%
TOTAL 1 DE HB	26,7%	13,3%	40,0%	26,7%	20,0%	13,3%	40,0%	57,1%	13,3%	0,0%	20,0%	13,3%
TOTAL 2 DE HB	73,3%	86,7%	46,7%	73,3%	73,3%	80,0%	60,0%	35,7%	80,0%	73,3%	80,0%	86,7%
TOTAL 3 DE HB	0,0%	0,0%	13,3%	0,0%	6,7%	6,7%	0,0%	7,1%	6,7%	26,7%	0,0%	0,0%
TOTAL 4 DE HB	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%
TOTAL 5 DE HB	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%
TOTAL DE HB	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%
TOTAL 1 DE DA	15,4%	15,4%	23,1%	7,7%	0,0%	0,0%	23,1%	15,4%	15,4%	0,0%	7,7%	7,7%
TOTAL 2 DE DA	61,5%	69,2%	69,2%	84,6%	84,6%	92,3%	69,2%	69,2%	61,5%	53,8%	69,2%	53,8%
TOTAL 3 DE DA	23,1%	15,4%	7,7%	7,7%	15,4%	7,7%	7,7%	15,4%	15,4%	38,5%	23,1%	38,5%
TOTAL 4 DE DA	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	7,7%	7,7%	0,0%	0,0%
TOTAL 5 DE DA	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%
TOTAL DE DA	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%
TOTAL 1 DE DB	33,3%	41,7%	66,7%	75,0%	33,3%	33,3%	66,7%	81,8%	18,2%	16,7%	33,3%	25,0%
TOTAL 2 DE DB	58,3%	58,3%	33,3%	25,0%	58,3%	58,3%	25,0%	18,2%	72,7%	58,3%	58,3%	75,0%
TOTAL 3 DE DB	8,3%	0,0%	0,0%	0,0%	8,3%	8,3%	8,3%	0,0%	9,1%	25,0%	8,3%	0,0%
TOTAL 4 DE DB	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%
TOTAL 5 DE DB	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%
TOTAL DE DB	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%

Figura 17: Resultats per grup i gènere del tercer qüestionari de valoració.

RESULTATS GLOBALS	Q1	Q2	Q3	Q4	Q5	Q6	Q7	Q8	Q9	Q10	Q11	Q12
TOTAL DE 1	9	13	14	13	13	19	5	7	21	24	20	13
TOTAL DE 2	31	33	24	29	30	28	31	35	26	23	25	29
TOTAL DE 3	9	3	12	7	7	2	13	8	3	2	4	7
TOTAL DE 4	1	1	0	1	0	1	1	0	0	1	1	1
TOTAL DE 5	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
TOTAL DE RESPOSTES	50	50	50	50	50	50	50	50	50	50	50	50
TOTAL DE 1	18,0%	26,0%	28,0%	26,0%	26,0%	38,0%	10,0%	14,0%	42,0%	48,0%	40,0%	26,0%
TOTAL DE 2	62,0%	66,0%	48,0%	58,0%	60,0%	56,0%	62,0%	70,0%	52,0%	46,0%	50,0%	58,0%
TOTAL DE 3	18,0%	6,0%	24,0%	14,0%	14,0%	4,0%	26,0%	16,0%	6,0%	4,0%	8,0%	14,0%
TOTAL DE 4	2,0%	2,0%	0,0%	2,0%	0,0%	2,0%	2,0%	0,0%	0,0%	2,0%	2,0%	2,0%
TOTAL DE 5	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%
TOTAL DE RESPOSTES	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%

Figura 18: Resultats globals del quart qüestionari de valoració.

RESULTATS PER GRUP	Q1	Q2	Q3	Q4	Q5	Q6	Q7	Q8	Q9	Q10	Q11	Q12
TOTAL 1 DE A	3	3	3	4	4	7	3	4	5	5	4	4
TOTAL 2 DE A	12	17	11	13	14	16	11	11	15	15	15	15
TOTAL 3 DE A	7	2	9	5	5	0	8	8	3	2	3	3
TOTAL 4 DE A	1	1	0	1	0	0	1	0	0	1	1	1
TOTAL 5 DE A	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
TOTAL DE A	23	23	23	23	23	23	23	23	23	23	23	23
TOTAL 1 DE B	6	10	11	9	9	12	2	3	16	19	16	9
TOTAL 2 DE B	19	16	13	16	16	12	20	24	11	8	10	14
TOTAL 3 DE B	2	1	3	2	2	2	5	0	0	0	1	4
TOTAL 4 DE B	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0
TOTAL 5 DE B	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
TOTAL DE B	27	27	27	27	27	27	27	27	27	27	27	27
TOTAL 1 DE A	13,0%	13,0%	13,0%	17,4%	17,4%	30,4%	13,0%	17,4%	21,7%	21,7%	17,4%	17,4%
TOTAL 2 DE A	52,2%	73,9%	47,8%	56,5%	60,9%	69,6%	47,8%	47,8%	65,2%	65,2%	65,2%	65,2%
TOTAL 3 DE A	30,4%	8,7%	39,1%	21,7%	21,7%	0,0%	34,8%	34,8%	13,0%	8,7%	13,0%	13,0%
TOTAL 4 DE A	4,3%	4,3%	0,0%	4,3%	0,0%	0,0%	4,3%	0,0%	0,0%	4,3%	4,3%	4,3%
TOTAL 5 DE A	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%
TOTAL DE A	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%
TOTAL 1 DE B	22,2%	37,0%	40,7%	33,3%	33,3%	44,4%	7,4%	11,1%	59,3%	70,4%	59,3%	33,3%
TOTAL 2 DE B	70,4%	59,3%	48,1%	59,3%	59,3%	44,4%	74,1%	88,9%	40,7%	29,6%	37,0%	51,9%
TOTAL 3 DE B	7,4%	3,7%	11,1%	7,4%	7,4%	7,4%	18,5%	0,0%	0,0%	0,0%	3,7%	14,8%
TOTAL 4 DE B	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	3,7%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%
TOTAL 5 DE B	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%
TOTAL DE B	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%

Figura 19: Resultats per grups del quart qüestionari de valoració.

RESULTATS PER GÈNERE	Q1	Q2	Q3	Q4	Q5	Q6	Q7	Q8	Q9	Q10	Q11	Q12
TOTAL 1 DE H	4	6	8	6	8	10	5	6	13	14	13	9
TOTAL 2 DE H	16	17	10	15	13	14	13	15	11	8	7	10
TOTAL 3 DE H	4	1	7	3	4	1	6	4	1	2	4	5
TOTAL 4 DE H	1	1	0	1	0	0	1	0	0	1	1	1
TOTAL 5 DE H	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
TOTAL DE H	25	25	25	25	25	25	25	25	25	25	25	25
TOTAL 1 DE D	5	7	6	7	5	9	0	1	8	10	7	4
TOTAL 2 DE D	15	16	14	14	17	14	18	20	15	15	18	19
TOTAL 3 DE D	5	2	5	4	3	1	7	4	2	0	0	2
TOTAL 4 DE D	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0
TOTAL 5 DE D	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
TOTAL DE D	25	25	25	25	25	25	25	25	25	25	25	25
TOTAL 1 DE H	16,0%	24,0%	32,0%	24,0%	32,0%	40,0%	20,0%	24,0%	52,0%	56,0%	52,0%	36,0%
TOTAL 2 DE H	64,0%	68,0%	40,0%	60,0%	52,0%	56,0%	52,0%	60,0%	44,0%	32,0%	28,0%	40,0%
TOTAL 3 DE H	16,0%	4,0%	28,0%	12,0%	16,0%	4,0%	24,0%	16,0%	4,0%	8,0%	16,0%	20,0%
TOTAL 4 DE H	4,0%	4,0%	0,0%	4,0%	0,0%	0,0%	4,0%	0,0%	0,0%	4,0%	4,0%	4,0%
TOTAL 5 DE H	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%
TOTAL DE H	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%
TOTAL 1 DE D	20,0%	28,0%	24,0%	28,0%	20,0%	36,0%	0,0%	4,0%	32,0%	40,0%	28,0%	16,0%
TOTAL 2 DE D	60,0%	64,0%	56,0%	56,0%	68,0%	56,0%	72,0%	80,0%	60,0%	60,0%	72,0%	76,0%
TOTAL 3 DE D	20,0%	8,0%	20,0%	16,0%	12,0%	4,0%	28,0%	16,0%	8,0%	0,0%	0,0%	8,0%
TOTAL 4 DE D	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	4,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%
TOTAL 5 DE D	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%
TOTAL DE D	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%

Figura 20: Resultats per gènere del quart qüestionari de valoració.

RESULTATS PER GRUP I GÈNERE	Q1	Q2	Q3	Q4	Q5	Q6	Q7	Q8	Q9	Q10	Q11	Q12
TOTAL 1 DE HA	2	2	3	3	4	5	3	4	4	4	4	4
TOTAL 2 DE HA	4	7	3	5	4	5	2	2	5	3	2	3
TOTAL 3 DE HA	3	0	4	1	2	0	4	4	1	2	3	2
TOTAL 4 DE HA	1	1	0	1	0	0	1	0	0	1	1	1
TOTAL 5 DE HA	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
TOTAL DE HA	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10
TOTAL 1 DE HB	2	4	5	3	4	5	2	2	9	10	9	5
TOTAL 2 DE HB	12	10	7	10	9	9	11	13	6	5	5	7
TOTAL 3 DE HB	1	1	3	2	2	1	2	0	0	0	1	3
TOTAL 4 DE HB	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
TOTAL 5 DE HB	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
TOTAL DE HB	15	15	15	15	15	15	15	15	15	15	15	15
TOTAL 1 DE DA	1	1	0	1	0	2	0	0	1	1	0	0
TOTAL 2 DE DA	8	10	8	8	10	11	9	9	10	12	13	12
TOTAL 3 DE DA	4	2	5	4	3	0	4	4	2	0	0	1
TOTAL 4 DE DA	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
TOTAL 5 DE DA	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
TOTAL DE DA	13	13	13	13	13	13	13	13	13	13	13	13
TOTAL 1 DE DB	4	6	6	6	5	7	0	1	7	9	7	4
TOTAL 2 DE DB	7	6	6	6	7	3	9	11	5	3	5	7
TOTAL 3 DE DB	1	0	0	0	0	1	3	0	0	0	0	1
TOTAL 4 DE DB	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0
TOTAL 5 DE DB	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
TOTAL DE DB	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12
TOTAL 1 DE HA	20,0%	20,0%	30,0%	30,0%	40,0%	50,0%	30,0%	40,0%	40,0%	40,0%	40,0%	40,0%
TOTAL 2 DE HA	40,0%	70,0%	30,0%	50,0%	40,0%	50,0%	20,0%	20,0%	50,0%	30,0%	20,0%	30,0%
TOTAL 3 DE HA	30,0%	0,0%	40,0%	10,0%	20,0%	0,0%	40,0%	40,0%	10,0%	20,0%	30,0%	20,0%
TOTAL 4 DE HA	10,0%	10,0%	0,0%	10,0%	0,0%	0,0%	10,0%	0,0%	0,0%	10,0%	10,0%	10,0%
TOTAL 5 DE HA	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%
TOTAL DE HA	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%
TOTAL 1 DE HB	13,3%	26,7%	33,3%	20,0%	26,7%	33,3%	13,3%	13,3%	60,0%	66,7%	60,0%	33,3%
TOTAL 2 DE HB	80,0%	66,7%	46,7%	66,7%	60,0%	60,0%	73,3%	86,7%	40,0%	33,3%	33,3%	46,7%
TOTAL 3 DE HB	6,7%	6,7%	20,0%	13,3%	13,3%	6,7%	13,3%	0,0%	0,0%	0,0%	6,7%	20,0%
TOTAL 4 DE HB	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%
TOTAL 5 DE HB	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%
TOTAL DE HB	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%
TOTAL 1 DE DA	7,7%	7,7%	0,0%	7,7%	0,0%	15,4%	0,0%	0,0%	7,7%	7,7%	0,0%	0,0%
TOTAL 2 DE DA	61,5%	76,9%	61,5%	61,5%	76,9%	84,6%	69,2%	69,2%	76,9%	92,3%	100,0%	92,3%
TOTAL 3 DE DA	30,8%	15,4%	38,5%	30,8%	23,1%	0,0%	30,8%	30,8%	15,4%	0,0%	0,0%	7,7%
TOTAL 4 DE DA	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%
TOTAL 5 DE DA	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%
TOTAL DE DA	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%
TOTAL 1 DE DB	33,3%	50,0%	50,0%	50,0%	41,7%	58,3%	0,0%	8,3%	58,3%	75,0%	58,3%	33,3%
TOTAL 2 DE DB	58,3%	50,0%	50,0%	50,0%	58,3%	25,0%	75,0%	91,7%	41,7%	25,0%	41,7%	58,3%
TOTAL 3 DE DB	8,3%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	8,3%	25,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	8,3%
TOTAL 4 DE DB	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	8,3%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%
TOTAL 5 DE DB	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%
TOTAL DE DB	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%

Figura 21: Resultats per grup i gènere del quart qüestionari de valoració.

Part V

Bibliografia general

Bibliografia general

ACKOFF, R.L. (1953): *The Design of Social Research*. Chicago: University of Chicago.

ALCALÁ, M. (2002): *La construcción del lenguaje matemático*. Barcelona: Editorial Graó.

ALONSO, I. (2003): «El problema matemático y su proceso de resolución. Una perspectiva desde la teoría del procesamiento de la información». *II Conferencia Internacional "Problemas Pedagógicos de la Educación Superior"*. Universidad Central "Marta Abreu"de Las Villas. Cuba.

ALSINA, C.; *et al.* (1980): *Didàctica dels nombres enters a l'EGB*. Barcelona: Rosa Sensat.

ARCAVI, A. (1999): «... y en matemáticas, los que instruimos ¿qué construimos?» *Números, 38*, 39-56.

ARCAVI, A.; BRUCKHEIMER, M. (1981): «How shall we teach the multiplication of negative numbers?» *Mathematics in School, 10*(5), 31-33.

ARMENDÁRIZ, M.; AZCÁRATE, C.; DEULOFEU, J. (1993): «Didáctica de las matemáticas y psicología». *Infancia y aprendizaje, 92-93*, 77-100.

ARNAL, J.; RINCÓN, D.; LATORRE, A. (1992): *Investigación educativa. Fundamentos y metodología*. Barcelona: Labor.

ARNDT, A. B. (1983): «A-lkhwarizmi». *Mathematics Teacher, 76*(9), 668-670.

BELL, A. (1982): «Looking at children and directed numbers». *Mathematics teaching, 100*, 66-72.

— (1986): «Enseñanza por diagnóstico. Algunos problemas sobre números enteros». *Enseñanza de las Ciencias, 4*(3), 199-208.

BELL, E. (1965): *Men of Mathematics*. New York: Simon and Schuster.

BELTRÁN, M. (1988): *Ciencia y sociología*. Madrid: Centro de Investigaciones Sociológicas.

BOMBELLI, R. (1966): *L'Algebra*. Milano: Feltrinelli.

BOOTH, L. (1984): *Algebra: children's strategies and errors: a report of the strategies and errors in secondary mathematics project*. Windsor, Reino Unido: NFER-Nelson.

BOREL, E.; DRACH, J. (1895): *Introduction a l'étude de la Théorie des Nombres et de l'Algèbre Supérieure*. París: Librairie Nony.

BOSCO, J. (1994): «Jugando en la clase con números». *UNO, 1*, 95-99.

BOYER, C.B. (1986): *Historia de la matemática*. Madrid: Alianza, D.L.

BROUSSEAU, G. (1983): «Les obstacles épistémologiques et les problèmes en mathématiques». *Recherches en Didactique des Mathématiques, 4*(2), 165-198.

— (1996): «La didàctica de les matemàtiques en la formació del professorat». *Barcelona: Butlletí de la Societat Catalana de Matemàtiques, 11*(1), 33-45.

BRUNO, A. (1997): «La enseñanza de los números negativos: aportaciones de una investigación». *Números, 29*, 5-18.

— (2001): «La enseñanza de los números negativos: formalismo y significado». *La Gaceta de la Real Sociedad Matemática Española, 4*(2), 415-427.

BRUNO, A.; MARTINON, A. (1994*a*): «Contextos y estructuras en el aprendizaje de los números negativos». *SUMA, 16*, 9-18.

— (1994*b*): «La recta en el aprendizaje de los números negativos». *SUMA, 18*, 39-48.

— (1996*a*): «Números negativos: sumar = restar». *UNO, 10*, 123-133.

— (1996*b*): «Números negativos: una revisión de investigaciones». *UNO, 9*, 98-108.

CAMPISTROUS, L. y Rizo, C. (1998): *Aprende a resolver problemas aritméticos*. Ciudad de la Habana (Cuba): Pueblo y Educación.

CARDANO, G. (1968): *The Great art: the rules of algebra*. Massachusetts: The MIT Press.

CARR, K.; KATTERNS, B. (1984): «Does the number line help?» *Mathematics in School, 13*(4), 30-34.

CARRAHER, T.N. (1990): «Negative numbers without the minus sign». *México: Proceedings XIV PME*. 223-229.

CASTELNUOVO, E. (1973): *Didáctica de la matemática moderna*. México: Trillas.

CID, E. (2000): «Obstáculos epistemológicos en la enseñanza de los números negativos». *Actas del XV Jornadas del Seminario Interuniversitario de Investigación en Didáctica de las Matemáticas, Boletín del SI-IDM, 10. Celebrado en Cangas do Morrazo (Pontevedra), los días 7, 8 y 9 de Abril de 2000. Disponible en* http://www.ugr.es/ jgodino/siidm/boletin10.htm.

— (2002): «Los modelos concretos en la enseñanza de los números negativos». *Zaragoza: Actas de las X Jornadas para el Aprendizaje y Enseñanza de las Matemáticas, 2*, 529-542.

— (2003): *La investigación didáctica sobre los números negativos: estado de la cuestión*. Universidad de Zaragoza. Pre-publicaciones del seminario matemático "García de Galdeano".

CODINA, R.; *et al.* (1992): *Fer matemàtiques*. Barcelona-Vic: Publicacions de la Universitat de Barcelona, Publicacions de la Universitat Autònoma de Barcelona, EUMO Editorial.

COFMAN, J. (1981): «Operations with negative numbers». *The Mathematics Teacher, 94*, 18-20.

COLERA, J.; GAZTELU, I.; GARCÍA, J.E. (2003): *Matemàtiques 2*. Barcelona: Barcanova.

COLTHARP, F.L. (1966): «Introducing the integers as ordered pairs». *School Science and Mathematics, 66*(5), 277-282.

COURANT, R.; ROBBINS, H. (1979): *¿Qué es la matemática?* Madrid: Aguilar.

CROWLEY, M.L.; DUNN, K.A. (1985): «On multiplying negative numbers». *Mathematics Teacher, 78*(4), 252-256.

D'ALEXANDRIA, Diofant (1974): *Aritmètica*. Stutgardiae: B.G. Teubneri.

DAVIS, P. (1974): *Matemáticas en el mundo moderno: El número*. Madrid: Blume. Seleccions de Scientific American. Títol original: Mathematic in the modern world.

DECRET 179/2002 (2002): «Ordenació dels ensenyaments de l'educació secundària obligatòria». Diari Oficial de la Generalitat de Catalunya 3670 de 4.7.2002.

DECRET 143/2007 (2007): «Ordenació dels ensenyaments de l'educació secundària obligatòria». Diari Oficial de la Generalitat de Catalunya 4915 de 29.6.2007.

DECRET 142/2008 (2008): «Ordenació dels ensenyaments de batxillerat». Diari Oficial de la Generalitat de Catalunya 5183 de 29.7.2008.

DEDEKIND, R. (1998): *¿Qué son y para qué sirven los números? y otros escritos sobre los fundamentos de la matemática*. Madrid: Alianza Editorial, Ediciones de la Universidad Autónoma de Madrid.

DESCARTES, R. (1999): *La Geometria*. Barcelona: Institut d'Estudis Catalans. Traducció de Josep Pla i Pelegrí Viader.

DUVAL, R. (1999): *Semiosis y pensamiento humano. Registros semióticos y aprendizajes intelectuales*. Cali, Colombia: Universidad del Valle y Peter Lang S.A.

ERNEST, P. (1985): «The number line as a teaching aid». *Educational Studies in Mathematics, 16*, 411-424.

ESCUDERO, I. (2005): «Un análisis del tratamiento de la semejanza en los documentos oficiales y textos escolares de matemáticas en la segunda mitad del siglo XX». *Enseñanza de las Ciencias, 23*(3), 379-392.

EUCLIDES (1954): *Los Elementos de Euclides y la crítica antigua y moderna: libros I-IV; Federico Enriques*. Madrid: C.S.I.C, Instituto Jorge Juan.

— (1996): *Elementos*. Madrid: Gredos.

— (2003-2008): «Los elementos de Euclides, 300 aC.». Blog *www.euclides.org*.

FERMAN, G.S.; LEVIN, J. (1979): *Investigación en Ciencias Sociales*. México: Limusa.

FIBONACCI, L. (2002): *Fibonacci's Liber abaci*. New York: Springer. A translation into modern English of Leonardo Pisano's Book of calculation by Laurence Sigler.

FISCHBEIN, E. (1987): *Intuition in science and mathematics: an educational approach*. Dordrecht, Holland: D. Reidel Publishing Company.

FLETCHER, T.J. (1976): «Talking of directed numbers». *Mathematical Education for Teaching, 2*(3), 3-13.

FREUDENTHAL, H. (1973): *Mathematics as an educational task*. Dordrecht, Holanda: D. Reidel Publishing Company.

— (1983): *Didactical phenomenology of mathematical structures*. Dordrecht, Holanda: D. Reidel Publishing Company.

GALBRAITH, M.J. (1974): «Negative numbers». *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 5*, 83-90.

GALLARDO, A. (1996): «Qualitative analysis in the study of negative numbers». *Valencia: Proceedings of the 20th International Conference of PME*, *2*, 377-384.

— (2002): «The extension of the natural-number domain to the integers in the transition from aritmetic to algebra». *Educational Studies in Mathematics, 49*(2), 171-192.

GARCÍA, J.A. (2002*a*): «La didáctica de las matemáticas: una visión general». *Red Telemática Educativa Europea*.

GARCÍA, F.C. (2002*b*): «El álgebra de la lógica». *Apuntes de historia de las matemáticas*, *1*(2), 47-54.

GARDNER, M. (1977): «Juegos matemáticos. La noción de número negativo y lo arduo que resulta entenderla». *Investigación y Ciencia, 11*, 102-106.

GASCON, J. (1993): «Desarrollo del conocimiento matemático y análisis didáctico: del patrón de análisis-síntesis a la génesis del lenguaje algebraico». *Recherches en Didactique des Mathématiques, 13*(3), 295-332.

GLAESER, G. (1981): «Epistémologie des nombres relatifs». *Recherches en Didactique des Mathématiques, 2*(3), 303-346.

GÓMEZ, B. (1998): *Numeración y cálculo*. Madrid: Síntesis.

— (1999): «Cambios en las nociones de número, unidad, cantidad y magnitud». *Lugo: IX Jornadas para el Aprendizaje y Enseñanza de las Matemáticas,* 91-95.

— (2001): *La justificación de la regla de los signos en los libros de texto: ¿Por qué menos por menos es más?*, capítulo 18. Granada: Universidad de Granada. 257-275.

GONZÁLEZ, J.; JIMÉNEZ, M.; BRIALES, F. (1989): «Aproximación a los números enteros a partir de una escalera». *SUMA, 2*, 29-33.

GONZÁLEZ, J.L.; *et al.* (1990): *Números enteros*. Madrid: Síntesis.

GONZÁLEZ MARÍ, J. (1995): *El campo conceptual de los números naturales relativos*. Tesi Doctoral, Universidad de Granada.

GRAWITZ, M. (1975): *Métodos y técnicas en las ciencias sociales*. Barcelona: Hispano Europea.

GUTIÉRREZ, S. (2005): «Hamilton: La liberación del álgebra». *SUMA*, *49*, 95-99.

GUZMÁN, M. DE (1991*a*): «El paper del matemàtic enfront els problemes de l'educació matemàtica». *Barcelona: Butlletí de la Societat Catalana de Matemàtiques, 6*, 13-21.

— (1991*b*): *Para pensar mejor*. Barcelona: Labor.

— (1992): «Tendències innovadores en educació matemàtica». *Barcelona: Butlletí de la Societat Catalana de Matemàtiques (2a etapa), 7*, 7-34.

— (1994): «El papel del matemático en la educación matemática». *Actas del VIII Congreso Internacional de Educación Matemática*.

HALMOS, P. (1980): «The heart of the mathematics». *Washington: American Mathematical Monthly, 87*, 519-524.

— (2006): «Com cal escriure en matemàtiques». *Barcelona: Butlletí de la Societat Catalana de Matemàtiques, 21*(1), 53-79.

HANKEL, H. (1867): *Theorie der Komplexen Zahlsysteme*. Leipzig.

HATIVA, N.; COHEN, D. (1995): «Self learning of negative number concepts by lower division elementary students through solving computer-provided numerical problems». *Educational Studies in Mathematics, 28*(4), 401-431.

HAVENHILL, W.P. (1969): «Though this be madness...» *Arithmetic Teacher, 16*, 606-608.

HERNÁNDEZ, J. (1991): «L'ofici de matemàtic i l'ensenyament de les matemàtiques». *Barcelona: Butlletí de la Societat Catalana de Matemàtiques, 6*, 42-53.

HERNÁNDEZ, R.; FERNÁNDEZ, C.; BAPTISTA, P. (2003): *Metodología de la investigación*. México, D.F.: McGraw-Hill.

HILBERT, D. (1993): *Fundamentos de las matemáticas*. México: Servicios Editoriales de la Facultad de Ciencias de la Universidad Nacional Autónoma de México. Selección e introducción de Carlos Álvarez y Luis Felipe Segura; traducción directa del alemán y notas de Luis Felipe Segura.

INSTITUT D'ESTUDIS CATALANS, Societat Catalana de Matemàtiques (2002): *Sessions de preparació per a l'Olimpíada Matemàtica: 2002*. Barcelona: Societat Catalana de Matemàtiques.

IRIARTE, M.; JIMENO, M.; VARGAS-MACHUCA, I. (1991): «Obstáculos en el aprendizaje de los números enteros». *SUMA, 7*, 13-18.

JANVIER, C. (1983): «The understanding of directed numbers». *Montreal: Proceedings of the 15th Annual Conference of the North American Chapter of PME*. 295-300.

JOHNSON, D.R. (1986): «Making -x meaningfull». *Mathematics teacher, 79*(7), 507-510.

KÜCHEMANN, D. (1980): «Children's understanding of integers». *Mathematics in School, 9*, 31-32.

— (1981): «Positive and negative numbers». Hart, K. M. (ed). *Children's Understanding of Mathematics 11-16. London: John Murray*. 82-87.

KIERAN, C. (1985): «The equation-solving errors of novice and intermediate algebra students». *Utrecht: Proceedings of the 9th International Conference of PME, 1*, 141-146.

KLEIN, F. (1927-1931): *Matemática elemental desde un punto de vista superior*. Madrid: [s.n.].

KRULIK, S.; RUDNICK, J. (1989): *Problem solving: a handbook for teachers*. Boston: Allyn and Bacon.

— (1994): «La reflexión: estrategias para razonar y resolver problemas». *Reston (USA): Arithmetic Teacher, 41*(6), 334-338.

LAGRANGE, J.L. (1898): *Lectures on Elementary Mathematics*. Chicago: The Open Court Publishing Company. Translated by Thomas J. McCormack.

— (1974): *Oeuvres*. New York: Readex Microprint.

LAKATOS, I. (1979): *Proofs and refutations: the logic of mathematical discovery*. Cambridge: Cambridge University Press.

LINCHEVSKI, L.; WILLIAMS, J. (1999): «Using intuition from everyday life in 'filling' the gap in children's extension of their number concept to include the negative numbers». *Educational Studies in Mathematics, 39*(1-3), 131-147.

LÉONARD, F.; SACKUR, C. (1990): «Connaissances locales et triple approche, une méthodologie de recherche». *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *10*(2-3), 205-240.

LURIA, A.R.; TSVETKOVA, LS. (1981): *La resolución de problemas y sus transtornos*. Barcelona: Fontanella.

MASON, J.; BURTON, L.; STACEY, K. (1988): *Pensar matemáticamente*. Barcelona: Labor.

MILAZZO, F.; VACIRCA, V. (1983): «La struttura moltiplicativa dei numeri relativi: osservazioni storico-didattiche». *Archimede, 35*(1/2), 78-83.

MOLAS, C.; PÉREZ, J. (1990): «El naixement dels nombres complexos». *Barcelona: Butlletí de la Societat Catalana de Matemàtiques, 5*, 37-66.

MURRAY, J.C. (1985): «Children's informal conceptions of integer arithmetic». *Utrecht: Proceedings of the 9th International Conference of PME*, *1*, 147-153.

NCTM (1972): *Números enteros*. México: Trillas. National Council of Teachers of Mathematics.

— (1989): *Curriculum and evaluation standards for school mathematics*. The Council, Reston, VA. National Council of Teachers of Mathematics.

ORTON, A. (1990): *Didáctica de las Matemáticas*. Madrid: Morata, S.A. i M.E.C.

PASCUAL, E.; *et al.* (1994): *Diccionari de la llengua catalana*. Barcelona: Enciclopèdia Catalana.

PEACOCK, G. (1830): *A treatise on algebra*. London.

— (1842): *A treatise on algebra*. London. Reimpressió. New York: Scripta Matemática (1940).

PEANO, G. (1979): *Los Principios de la aritmética*. Oviedo: Pentalfa.

PEÑAS, M. (2003): «Los números enteros y la calculadora: una experiencia de reflexión sobre la práctica». *UNO, 32*, 109-118.

PESCADOR, P. (1997): «Demostración del teorema de Tales, por métodos elementales». *Boletín (Sociedad Puig Adam de Profesores de Matemáticas), 47*, 22-29.

— (2002): «Una demostración breve del teorema de Tales». *Boletín (Sociedad Puig Adam de Profesores de Matemáticas), 60*, 55-57.

— (2003): «Otra demostración del teorema de Tales». *Boletín (Sociedad Puig Adam de Profesores de Matemáticas), 64*, 84-86.

PETERSON, J.C. (1972): «Fourteen different strategies for multiplication of integers or why (-1)x(-1)=(+1)». *The Arithmetic Teacher, 19*(5), 396-403.

PHILLIPS, B.S. (1971*a*): *Social Research: Strategy and Tacits*. New York: McMillan.

PHILLIPS, E.R. (1971*b*): «Negative number x negative number gives positive number: An understandable proof for high school students». *School Science and Mathematics, 71*(9), 797-800.

PIAGET, J. (1975): *Introducción a la epistemología genética*. Buenos Aires: Paidós.

PLA I CARRERA, J. (1983): *Las Matemáticas: una historia de sus conceptos*. Barcelona: Montesinos, DL.

— (1998*a*): «Arquimedes i Descartes; el mètode com un canvi de llenguatge». *Barcelona: Butlletí de la Societat Catalana de Matemàtiques, 13*(2), 35-84.

— (1998*b*): *Damunt les espatlles dels gegants*. Barcelona: Edicions la Magrana.

— (2003): «Una història breu de la matemàtica». *Barcelona: Butlletí de la Societat Catalana de Matemàtiques, 18*(1), 47-129.

— (2006): *Introducció a la metodologia de la matemàtica*. Barcelona: Publicacions i edicions de la Universitat de Barcelona.

PÓLYA, G. (1966*a*): *Matemáticas y razonamiento plausible*. Madrid: Tecnos.

— (1966*b*): «Teaching us a lesson». The Mathematical Association of America: MAA Video Classics.

— (1981): *Mathematical discovery: on understanding, learning, and teaching problem solving*. New York: Wiley.

— (1987): *Cómo plantear y resolver problemas*. México: Trillas.

— (2002*a*): «The goals of mathematical education: part one». *Mathematics Teaching, 181*, 6-7.

— (2002*b*): «The goals of mathematical education: part two». *Mathematics Teaching, 181*, 42-44.

POINCARÉ, H. (1974): *Matemáticas en el mundo moderno: La creación matemática*. Madrid: Blume. Seleccions de Scientific American. Títol original: Mathematic in the modern world.

PONS, R. (1973): *Matemàtica. 7º Educación General Básica*. Barcelona: Teide.

PUIG ADAM, P. (1956): *Didáctica matemática eurística: 30 lecciones activas sobre temas de enseñanza media*. Madrid: Instituto de Formación del Profesorado de Enseñanza Laboral.

— (1960): *La Matemática y su enseñanza actual*. Madrid: Ministerio de Educación Nacional.

PUJOL, R. (2006): «La matemàtica a través de la resolució de problemes. Una invitació a la participació i a la creativitat a l'aula». Report tècnic, llicència d'estudis concedida pel Departament d'Ensenyament.

PUJOL, R.; ARIAS, J. María; MAZA, I. (1999): *Estadística*. Barcelona: Casals.

PUJOL, R.; BIBILONI, Ll.; DEULOFEU, J. (2007): «Del treball conjectural al rigor: la resolució de problemes als ulls de l'alumne». *Biaix, 26*, 66-80.

REY PASTOR, J. (1976): *Elementos de análisis algebraico*. Madrid: Biblioteca Matemática.

REY PASTOR, J.; PI CALLEJA, P.; TREJO, A. (1969): *Análisis matemático. Volumen I: Análisis algebraico, teoría de ecuaciones y cálculo infinitesimal de una variable*. Buenos Aires: Kapelusz.

REY PASTOR, J.; PUIG ADAM, P. (1933): *Metodología y didáctica de la matemática elemental*. Madrid: A. Marzo.

RIBEIRO, R. (1996): «Las cuatro operaciones con enteros a través de los juegos». *UNO, 7*, 37-59.

ROJANO, T. (2002): «Mathematics learning in the junior secondary school: Students' access to significant mathematical ideas». *Handbook of International Research in Mathematics Education*, *1*, 143-163.

RUIZ, J.I. (1999): *Metodología de la investigación cualitativa*. Bilbao: Universidad de Deusto.

SÁNCHEZ, E. (1991): «Introducción al número negativo a través del análisis de juego de problemas creativos y de fenómenos de azar». *Epsilon, 19*, 55-58.

SCHOENFELD, A. (1985): *Mathematical problem solving*. Orlando: Academic Press.

SCHUBRING, G. (1988): «Discussions épistémologiques sur le statut des nombres négatifs et leur répresentation dans les manuels allemands et français de mathématiques entre 1795 et 1845. Actes du premier colloque franco-allemand de didactique des mathématiques et de l'informatique». *Grenoble: La Pensée Sauvage Editions*, 137-145.

SEMADENI, Z. (1984): «A principle of concretazation permanence for the formation of arithmetical concepts». *Educational Studies in Mathematics, 15*, 379-395.

SICKLICK, F.P. (1975): «Patterns in integers». *The Mathematics Teacher, 68*(4), 290-292.

SIERRA, R. (1994): *Técnicas de investigación social : teoría y ejercicios*. Madrid: Paraninfo.

SKEMP, R. (1980): *Psicología del aprendizaje de las matemáticas*. Madrid: Morata.

SMITH, D. (1900): *The teaching of elementary mathematics*. New York: The Macmillan Company.

SMOGORZHEVSKI, A.S. (1978): *Acerca de la geometría de Lobachevski*. Moscú: MIR.

SNELL, K.S (1970): «Integers. Introduction of directed numbers». *The Mathematical Gazette, 54*(388), 105-109.

SOTOS, M. (2004): «¿En qué piensa el alumnado cuando decimos número?» *UNO, 37*, 93-104.

SPENCER, H. (1874-1875): *Principes de psychologie*. París: Germer Baillière.

STREEFLAND, L. (1996): «Negative numbers: Reflections of a learning researcher». *The Journal of Mathematical Behavior, 15*(1), 57-77.

TOMÁS, M. (1990): «Los problemas aritméticos de la enseñanza primaria. Estudio de dificultades y propuesta didáctica». *Educar, 17*, 119-140.

UNESCO (2005): *Educación para Todos. El imperativo de la calidad*. París: UNESCO. Informe de Seguimiento de la EPT en el Mundo 2005.

VALLS, X. (1990): «Algunes consideracions sobre la resolució d'un problema». *Educar, 17*, 93-103.

VERGARA, W.C. (1959): *Mathematics in Everyday Things*. New York: Harper Brothers.

VERNON THOMAS SARVER, Jr. (1986): «Why does a negative times a negative produce a positive?» *Mathematics Teacher, 79*(3), 178-180.

VILA, A. (1997): «La resolució de problemes de matemàtiques a l'educació secundària obligatòria: Elaboració d'un material transversal, gestió de la classe i avaluació». Report tècnic, llicència d'estudis concedida pel Departament d'Ensenyament.

— (2001): *Resolució de problemes de matemàtiques: identificació, origen i formació dels sistemes de creences en l'alumnat. Alguns efectes sobre l'abordatge dels problemes*. Tesi Doctoral, Universitat Autònoma de Barcelona. Bellaterra.

WHITMAN, N. (1992): «Multiplying integers». *The Mathematics Teacher, 85*(1), 34-51.

ZERO, Grup (1980*a*): *Els nombres enters*. Barcelona: ICE de la UAB.

— (1980*b*): «Los números enteros en 7º de EGB». *Cuadernos de Pedagogía, 64*, 14-17.