Tesi doctoral

INTERPRETACIÓN MATEMÁTICA SITUADA DE UNA PRÁCTICA ARTESANAL

Miquel Albertí Palmer

Direcció: Dra. Núria Gorgorió i Solà

Departament de Didàctica de les Matemàtiques i les Ciències Experimentals
Facultat de Ciències de l'Educació

U.A.B.

2007

Agradecimientos

Un único nombre figura como autor de esta tesis, pero no habría sido posible sin la ayuda, ánimo y confianza de quienes me apoyaron en su realización. Sin el apoyo y paciencia de Pilar no sólo el método Kira-kira nunca habría sido documentado ni confirmado, sino que muy probablemente nunca habría conocido a quienes lo aplican.

Debo agradecer a Núria, la directora del trabajo, su aprecio sin reservas por una propuesta tan insólita como es la realización de un doctorado en un contexto tan lejano de nuestra cultura y sociedad. Eso es propio de quienes disfrutan de una visión *open minded* del conocimiento. Su criterio ha sido crucial en la orientación, desarrollo y construcción de las ideas que sustentan esta obra y ha evitado su dispersión. Gracias también a Ken y Bill por su interés y comentarios.

Nada de lo que puede leerse en estas páginas se habría escrito sin la hospitalidad y amabilidad del pueblo toraja. Mi amigo Rasyid merece una mención especial por ser quien me introdujo a esa cultura. Mi sincero reconocimiento a los artesanos, esencia de la investigación. Sobre todo, gracias a Yobel, Rois, Martheen, Seber y Sampe.

Parte del trabajo se ha desarrollado merced al acceso que algunos compañeros me han facilitado a los recursos tecnológicos del centro donde trabajo. Por ello doy las gracias a Rosa, Félix y Gloria, pero muy especialmente a Francesc por su ayuda en la edición de los documentos audio visuales.

Índice

INTRODUCCIÓN

Esta tesis trata de la existencia de matemáticas fuera del ámbito académico y fuera de la cultura occidental. Si todas las culturas han sido capaces de desarrollar diversos tipos de conocimiento con relación a campos compartidos como la filosofía, la organización social, la arquitectura, la medicina, la gastronomía y las artes (literatura, danza, música, pintura, etc.), no es descabellado pensar que también puedan haber desarrollado diversos tipos de conocimiento matemático. De ser así, se plantea la cuestión de cómo identificar esas matemáticas vernáculas propias de una cultura que D'Ambrosio (1985) llamó Etnomatemáticas. He ahí el núcleo de esta tesis: identificar matemáticas en un ámbito extra académico y extra occidental. Pero no van a identificarse las matemáticas de toda una cultura particular, sino las de una actividad artesanal práctica de una cultura.

El contexto socio cultural de la práctica artesanal objeto de este trabajo será el de la ornamentación arquitectónica toraja de la isla de Sulawesi, en Indonesia. Un rasgo distintivo del pueblo toraja es su arquitectura. Sus casas y graneros tradicionales son únicos en el mundo y constituyen un signo de identidad. Las fachadas de esas casas y graneros de madera se decoran con multitud de diseños grabados directamente en ellas. Su grado de perfección supera la habilidad personal y artística hasta el punto que resulta difícil explicarse su existencia sin el uso de reglas y tecnología que la garanticen. Y esos dos aspectos, las reglas y la tecnología, son indicadores del quehacer matemático.

No nos interesa el significado que las creencias y la mitología toraja dan a los grabados, sino el modo en que se hacen y se conciben para averiguar qué hay de matemático tanto en el proceso de elaboración como en el propósito y explicaciones de sus autores. Destacamos pues los tres aspectos principales de toda producción humana: la obra en sí misma (el producto elaborado), el proceso de su elaboración (tecnología y estrategias) y el plan previo (propósito y explicaciones) que garantice el resultado deseado. Será en esos aspectos donde se centrará la investigación en busca de matemáticas.

También el investigador deberá elaborar un plan que le permita lograr su objetivo. Puesto que busca matemáticas, es evidente que su idea de lo que son las matemáticas determinará tanto la forma de buscar como la identificación de lo que encuentre.

Como la mayor parte de los licenciados en Matemáticas en la década de 1980 mi educación matemática se basó en una severa transferencia de conocimiento. Pero cuando al poco de mi licenciatura comencé mi labor como docente observé que transferir lo que me habían enseñado y hacerlo como yo lo había aprendido (definición, teorema, demostración, ejemplo, ejercicio) no solo falseaba el origen del conocimiento matemático, construido a base de pruebas y refutaciones, como puso de manifiesto Lakatos (1994), sino que pasaba por alto un aspecto fundamental como es la experimentación y que Polya (1988) había señalado ya mucho antes. Tuve que readaptar mi conocimiento y la manera de exponerlo para que mis alumnos no confundiesen comprender con creer y viesen que asumir los fracasos es el primer paso para superarlos y extraer de ellos un éxito que conduzca a la resolución de un problema. Así me hice educador matemático constructivista.

Desde Euclides el desarrollo de las matemáticas se ha basado en la demostración, en el razonamiento deductivo guiado por la lógica, aunque nadie se haga matemático por una cuestión razonada y lógica. La lógica, por sí misma, no lleva a ninguna parte. Es como saber conducir. No es la habilidad de conducción la que guía el automóvil, sino la voluntad del conductor. Las intuiciones, los intereses (a menudo relacionados con la política y con las otras ciencias), la experiencia de aventurarse en terrenos desconocidos y la imperiosa necesidad de resolver un problema son los factores que orientan el desarrollo del conocimiento matemático.

¿Cuántas veces, especialmente en las últimas décadas, no se ha atribuido a la demostración un nuevo resultado que había sido ideado, intuido o experimentado, por un ordenador? ¿Qué era la geometría fractal antes de la existencia de programas informáticos que permitieran la iteración funcional y la representación gráfica hasta niveles antes jamás imaginados? Hemos de admitir que grandes avances matemáticos se han producido gracias al uso de esa herramienta tan poderosa y que su uso constituye un rasgo distintivo entre la actividad matemática contemporánea y la pasada. La lógica de una demostración es una herramienta de ratificación y validación, no un foco generador de conocimiento matemático. El trabajo con ordenador ha elevado hasta cotas altísimas la importancia del carácter experimental de las matemáticas.

Esto nos lleva a considerar dos aspectos que serán cruciales en este trabajo. Por un lado, la situación en la que se produce conocimiento matemático. El conocimiento se desarrolla siempre en un contexto determinado y dependiente de una serie de circunstancias, lo que para Lave (1988), Rogoff (1984) y Wenger (1999) es una ‘situación’. Esto es así incluso cuando dicho conocimiento se generaliza a contextos en un principio considerados abstractos. En tal caso, la situación se ha despojado de la realidad, pero sigue habiendo una situación. Por otro lado, el papel mediador que juegan las herramientas en el desarrollo del conocimiento matemático según Wertsch (1995) y Abreu (2000) y que protagonizan la situación. El ordenador es un ‘cluster’ de herramientas, pero antes que él lo fueron –y lo son todavía hoy tanto en el aula como fuera de ella (la calculadora, la regla, el compás, el lápiz, la escuadra, el cartabón, el nivel, las tijeras, la cuerda, un guijarro, etc). No hacen falta herramientas muy sofisticadas para realizar grandes descubrimientos matemáticos, pero muchos habrían sido imposibles sin su participación.

Pensemos en una herramienta, por simple que sea, y reflexionemos unos instantes en los conceptos matemáticos que pueden relacionarse con su forma, función y manejo. ¿Cuántas veces aprender matemáticas no pasa por aprender a manejar correctamente un artefacto? ¿Cuántas veces hemos aprendido y aprenden con más claridad nuestros alumnos algunas cuestiones matemáticas mediante el manejo de determinados artefactos?

Podrá parecer que el grado de precisión con la que se puede obtener en el ordenador la solución de un problema es insuperable. Ciertamente es así en la mayoría de problemas, pero en el curso de este trabajo se pondrá de manifiesto que el grado de precisión con el que se resuelve un problema matemático real puede ser tan grande como se quiera aún utilizando adecuadamente una herramienta muy sencilla. Tanto, que provocaría risa en muchos programadores informáticos. Queda clara pues la importancia crucial que tiene el contexto (determinado por la situación, herramientas y las personas que las utilizan) en el desarrollo de conocimiento matemático.

Llegado a este punto el lector se preguntará por qué el trabajo se centra en la labor de unos artesanos del otro lado del planeta, concretamente de la cultura Toraja, en la isla de Sulawesi (Indonesia). La respuesta es sencilla: fui, vi, reflexioné y aprendí. Y lo que aprendí fue algo totalmente nuevo e inesperado que mis colegas también valoraron. Eso hizo que me plantease seriamente la posibilidad de realizar una investigación sobre él.

Lo que descubrí fue actividad matemática en un ámbito real mucho menos artístico de lo que parece al principio. El de la realidad es otro tema principal de este trabajo. Percibimos lo que llamamos realidad a través de los sentidos y después de que nuestros procesos mentales hayan interpretado sus señales. Vemos mediante modelos mentales y llamamos realidad no a la realidad misma sino a la que es, ya de por sí, una interpretación particular de la realidad (Schoenfeld, 2001). Nos referimos a una realidad que suponemos común cuando, en realidad, es particular de cada uno.

¿Cómo encontrar matemáticas en la realidad? La perspectiva constructivista del conocimiento matemático relaciona las matemáticas con la actividad. Las matemáticas no están en los libros. En los libros se recogen los resultados y queda constancia escrita del modo en que se justifican. Sin embargo, no siempre se documenta fielmente el modo en que se obtuvieron. Buscar matemáticas en la realidad es como pasar a la cocina de un restaurante. Una cosa son los platos que se presentan en la mesa y otra el lío, las prisas, los salpicones y los errores cometidos por los cocineros detrás de la puerta que separa la cocina del comedor. Para encontrar matemáticas siguiendo esa idea hay que pringarse los dedos, quemarse a menudo y perder la paciencia cada dos por tres. ¿Dónde está la cocina matemática de una cultura? Prácticamente en todas partes. Bishop (1991) seleccionó seis universales de actividad matemática: contar, medir, diseñar, localizar, jugar y explicar. Este trabajo se centra en uno de ellos, diseñar, aunque indirectamente aludirá a otros.

El objetivo primigenio de mis investigaciones en Sulawesi era encontrar matemáticas, pero de éste primer interés se han ido derivando otros que ahora considero indispensables y que se expondrán en su momento. Uno de ellos es ofrecer un método para identificar matemáticas en una realidad ajena al ámbito social y cultural del investigador. Los problemas que eso acarrea serán discutidos en su momento, pero valga decir que la distancia entre su realidad cultural y la del objeto de su observación facilita una perspectiva más objetiva y que esa distancia se irá reduciendo a medida que el observador profundiza en la investigación.

El método de identificación de matemáticas desarrollado aquí será muy útil a la hora de valorar el conocimiento matemático de una persona, especialmente si el educador parte de una perspectiva constructivista. Además, le servirá para no correr el riesgo de confundir lo que es una identificación matemática con una 'proyección matemática', aspecto a tener muy en cuenta a la hora de diseñar actividades de aprendizaje basadas en la relación de las matemáticas con la realidad. No será esta la única implicación para la educación matemática de esta Tesis, se le añadirán otras en las que se ofrecerán contextos nuevos, reales y prácticos, para viejos conceptos y procesos matemáticos en diferentes niveles educativos: primaria, secundaria, bachillerato y universidad.

No espere el lector encontrar en el contexto de trabajo de los artesanos toraja demostraciones formales concretadas en la manipulación lógica de símbolos escritos ni una axiomática apriorística de la que se deduzcan resultados mediante la aplicación de las proposiciones de la lógica formal. El de los artesanos toraja de Sulawesi es un ámbito austero, pero en el que, sin embargo, encontraremos rigor y precisión, en el que se desarrollan respuestas nuevas a viejos problemas y en el que se usan artefactos específicos para lograr objetivos bien determinados. Se tratarán situaciones en las que además veremos aplicaciones (ahora estoy realizando una 'proyección' desde mi perspectiva occidental) de teoremas geométricos euclidianos.

Conozco mis limitaciones. No soy psicólogo ni pretendo serlo. De ahí que la mayor parte del peso de este trabajo recaiga en lo que soy: el ámbito matemático y educativo. Inevitablemente me veré obligado a realizar incursiones en la Psicología, pero serán tímidas y procuraré basar las afirmaciones correspondientes en las opiniones de sus especialistas y profesionales.

El lector habrá observado que el término ‘matemáticas’ se ha escrito con minúscula. No es un error. El motivo es evitar la corriente asociación que el término ‘Matemáticas’, escrito con mayúscula, tiene con el mundo académico occidental y por la que se considera la materia un producto cultural suyo. Escribiéndolo con minúscula se pretende dar a entender que las matemáticas son ‘un fenómeno pan cultural: es decir, existen en todas las culturas’ (Bishop, 1991: 37).

1

CONTEXTO, PLANTEAMIENTO Y OBJETIVOS DE LA INVESTIGACIÓN

1.1 LOS TORAJA DE SULAWESI

Indonesia, además de ser el país más oriental y meridional del sudeste asiático, es también el más vasto archipiélago del mundo (Fig. 1.1). Sus más de 17.000 islas conectan el océano Índico con el Pacífico y representan un enlace natural discontinuo, entre Asia y Australia.

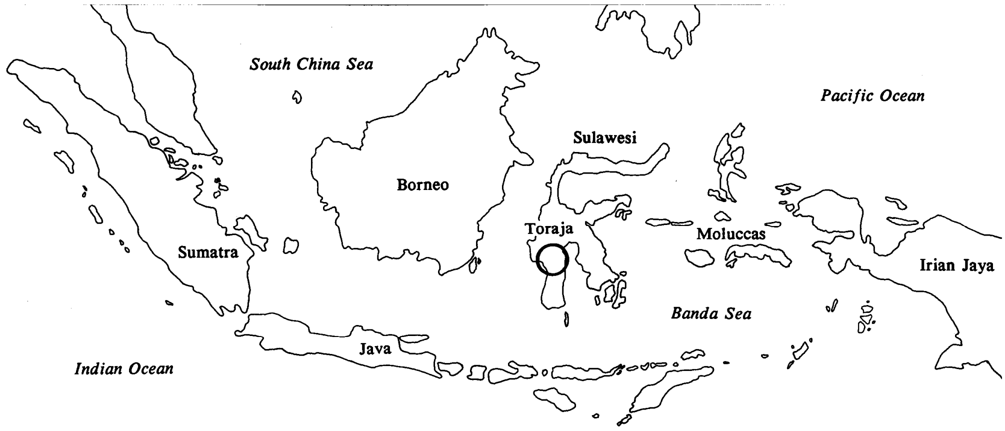


Figura 1.1 Indonesia

La isla de Sulawesi, llamada Célebes por los portugueses, es una de las más extensas y, sin duda, la de perfil más curioso. En la región montañosa que rodea el valle del río Sa'dan (Fig. 1.2) viven los toraja.

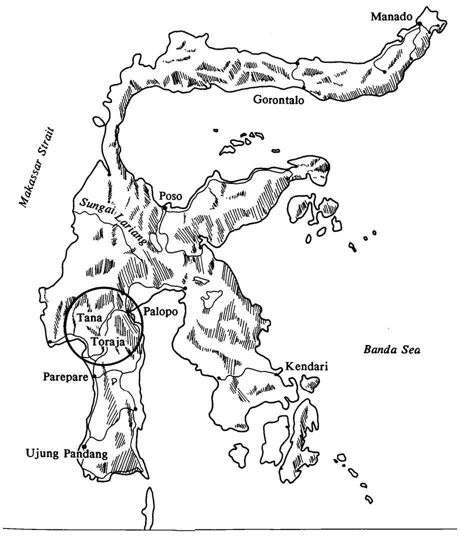


Figura 1.2 Sulawesi y Tana Toraja

El acceso a la región resultaba muy difícil hasta hace tan sólo unas décadas, pero hoy en día las comunicaciones terrestres han mejorado bastante y se tardan sólo nueve horas en recorrer los 328 Km. que separan Makale, la capital de Tana Toraja, de Makassar, el centro económico y administrativo de toda la isla.

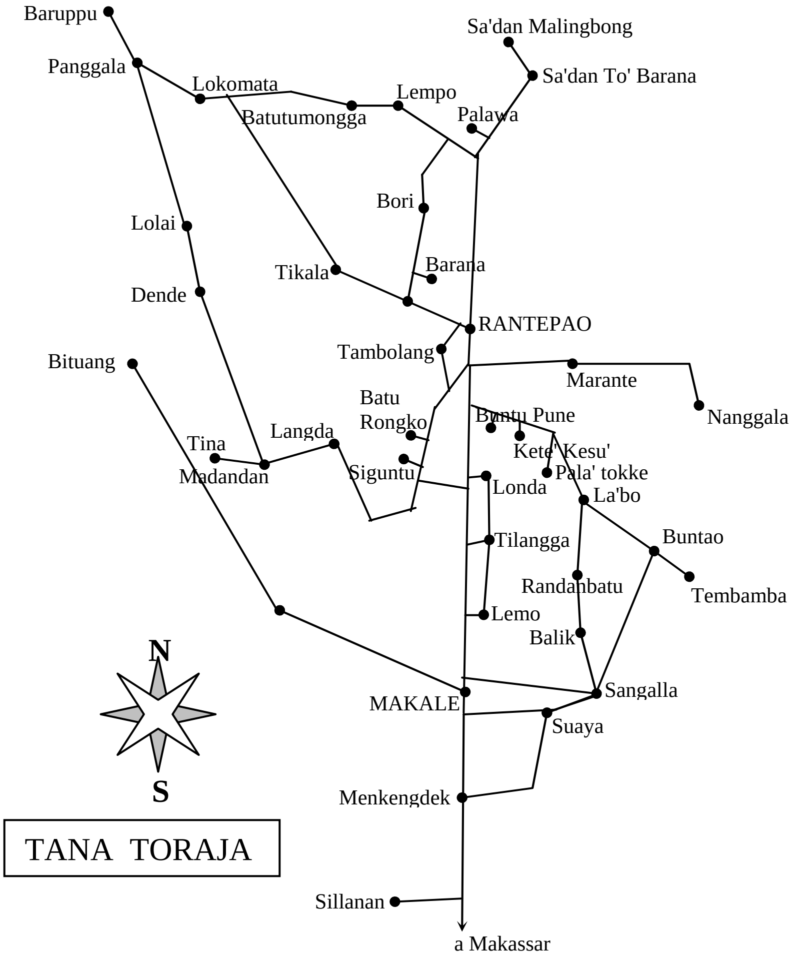


Figura 1.3 Poblaciones más importantes de Tana Toraja conectadas por carretera

El clima de Sulawesi es tropical, pero la altitud de las tierras toraja suaviza las temperaturas y facilita la variedad de cultivos entre los que destacan el arroz y el café.

Las localidades más grandes de la región son Makale y Rantepao, aunque la población (unas 350.000 personas) se distribuye en incontables y diminutos pueblos diseminados por toda la zona (Fig. 1.3). La lengua toraja es de familia austronesia y carece de escritura.

A causa de su inaccesibilidad la zona permaneció oculta para el mundo occidental hasta comienzos del siglo XX, aunque la ocupación holandesa de Indonesia había empezado tres siglos antes. El control ejercido por los jefes de cada lugar era de alcance reducido, local, y las disputas frecuentes no favorecían la concepción de una identidad común. Según Bigalke (1981), el sentido de identidad colectiva comenzó sólo tras la toma de control del área por parte de los holandeses a principios del s.XX. Una unificación que para Nooy-Palm (1979: 8) fue favorecida por la unión de fuerzas entre los reinos toraja para defenderse.

Antes que eso, el contacto de los toraja con el exterior se reducía a los intercambios comerciales con sus vecinos de la costa: los bugis y los makassar. Algunos de estos contactos eran pacíficos, relacionados con el comercio, los matrimonios interculturales entre la elite y el pago de tributos de los habitantes de las tierras altas a los de les tierras bajas, pero otros eran claramente hostiles, ya que los toraja se defendían contra el ataque y la invasión (Hollan y Wellenkamp, 1996: 7).

A finales del s. XIX, los contactos con el exterior aumentaron cuando los bugis y los makassar se interesaron por el arroz y los esclavos de Tana Toraja. La inestabilidad también creció a causa del intercambio de armas.

Los holandeses llegaron en 1906 trayendo consigo el cristianismo, las escuelas y la medicina moderna. Cuando abandonaron el país en 1942 Indonesia pasó a manos del dominio japonés mientras duró la segunda guerra mundial, hasta 1945. Entonces los holandeses retomaron el poder brevemente, hasta 1949, año en que Indonesia logró la independencia. Sin embargo, Indonesia considera 1945 como el de su liberación y no reconoce el breve reinado de cuatro años atribuido a los holandeses en los libros de Historia occidentales.

Pese a que el cristianismo protestante fue introducido en la región, los toraja conservaron su religión animista y sus rituales basados en las creencias en los antepasados o *Aluk To Dolo*. Entre esos rituales destacan por su importancia los de carácter funerario, los relacionados con la construcción de casas tradicionales y los de fertilidad y prosperidad. Hoy en día la mayoría de los toraja se declaran católicos protestantes, pero continúan creyendo y practicando rituales animistas ancestrales. Dado que sus vecinos de las tierras bajas, los bugis y los makassar, y la práctica totalidad de Sulawesi es musulmana, Tana Toraja es ahora una isla cristiana en medio de un océano musulmán.

La llegada del cristianismo y los cambios políticos en todo el país afectaron las costumbres sociales tradicionales, pero no provocaron su completa desaparición:

> Tradicionalmente, cuando las costumbres y las normas eran más rígidas, la sociedad toraja estaba estratificada en personas de clase noble, mediana y baja. Con la introducción del cristianismo y la adopción por parte de Indonesia de un sistema político democrático, la esclavitud fue abolida. Pese a ello, incluso hoy en día en algunos lugares, aparecen esclavos que realizan sus funciones hereditariamente. Algunos de ellos todavía están ligados a sus amos, mientras que otros se han liberado mediante la educación u otros medios. (Sandarupa, 1986: 29).

Actualmente, la mayoría de los niños y niñas toraja están escolarizados y pueden ir a la escuela elemental que suele estar cerca de su pueblo. En cambio, las escuelas secundarias se localizan en los pueblos más grandes o en las ciudades. La educación en Tana Toraja, entendida desde una perspectiva occidental y cristiana, comenzó en 1913 (Nooy-Palm, 1988). Se inició así un proceso de conversión al cristianismo a gran escala que favoreció la emancipación de esclavos, pero sin afectar la estructura social subyacente. Los misioneros establecieron tres niveles educativos que bajo pequeñas variaciones continúan vigentes todavía. La educación elemental en la escuela primaria dura seis años (6-12). La secundaria se divide en dos bloques de tres años; el primero (secundaria elemental), es común (12-15); y, el segundo (secundaria superior), diversificado (15-18). Después, el estudiante puede acceder a la universidad. Sandarupa no dice que todo el mundo esté obligado a ir a la escuela, sino que 'se anima a todos que vayan' (1996: 8). Pero habla de hace diez años atrás y no de ahora. Ahora las cosas han cambiado e ir a la escuela elemental es obligatorio en Indonesia para todo el mundo de edades inferiores a los 15 años. Por un lado, esto ha permitido que las clases sociales inferiores disfruten de una consideración social que antes no tenían. Por otro, ahora hay muchos jóvenes que una vez acabada su educación secundaria salen de Tana Toraja para estudiar en las universidades de Makassar, Jakarta (capital del país) u otras ciudades de Java. Éstos acaban por quedarse allí y regresan a su tierra sólo para atender los funerales de sus familiares.

Dos aspectos fundamentales de la educación pasados por alto por Sandarupa son el profesorado y la lengua de transmisión de conocimientos. La lengua de escolarización ha sido y continua siendo el bahasa indonesio, el idioma oficial del país. Quien hará de intérprete en varias de las conversaciones mantenidas con la gente local, A. Rasyid Pasabuan, nacido en 1970, manifestó que el inicio de su educación elemental, entre 1976 y 1978, se desarrolló en la lengua toraja para poder aprender el indonesio mínimo necesario y atender las explicaciones de las asignaturas, que se impartían en esta lengua. Está claro que difícilmente podía ser de otro modo porque la inmensa mayoría del profesorado no era nativo como ponen de relieve Hollan y Wellenkamp, aunque refiriéndose a unas décadas anteriores:

> Most of the respondents, however, completed at least a few years of elementary school. Nene'na Limbong attended a Dutch-run school for one of his three years of education, Ambe'na Toding went to a school administrated by the japanise during Wold War II, and many of the rest attended regional schools that at the time were often staffed mainly by non-Toraja Christians from Manado in northern Sulawesi or from Ambon, a small island to the east of Sulawesi. (Hollan y Wellenkamp, 1996: 92).

Los entrevistados a los que aluden Hollan y Wellenkamp fueron escolarizados en las décadas posteriores a la segunda guerra mundial, entre 1945 y 1965, aproximadamente.

Desde entonces hasta ahora las cosas han cambiado un poco, pero hemos de tener en cuenta esto en relación con la época de escolarización de los artesanos que intervendrán en este trabajo. Los artesanos que más adelante intervendrán nacieron en la década de 1970. Su educación académica, cuando existió, no sobrepasó el nivel elemental y se desarrolló antes de 1990.

Si hay un rasgo con el que puede identificarse de inmediato la cultura toraja es su Arquitectura. Se trata de una opinión compartida también por los nativos:

> ... cuando uno viaja por tierras toraja puede ver dos tipos de casa: el primer tipo es la casa de estilo moderno que utiliza hormigón o la casa que se parece a las casas bugis o makassar, construidas sobre postes. El segundo tipos es la casa de estilo tradicional, el Tongkonan (una casa familiar)' (Sandarupa, 1986: 59).

La casa tradicional o *Tongkonan* se considera sede del venerado antepasado que la fundó y es también el centro alrededor del que giran y se desarrollan los quehaceres cotidianos y las ceremonias en loor de los antepasados. En su investigación sobre los Sa'dan Toraja, Waterson (1995) confiesa que le resultó imposible comprender su sistema de parentesco sin concebir las casas como eje de este sistema.

Los orígenes de esta construcción se sitúan en la mitología toraja de la creación y tiene una importancia capital en todos los aspectos de la vida, no tanto como morada sino como centro social y religioso de linaje (Nooy-Palm, 1988).

El tongkonan es una construcción robusta hecha de madera y bambú y en la que no se usan clavos ni triangulación alguna en su estructura, lo que facilita su desmantelamiento y traslado a otro lugar si es necesario. Consta de tres niveles bien diferenciados: el inferior es el establo, un espacio rectangular abierto, sin paredes, encerrado por los pilares (entre 20 y 30) sobre los que se levanta el edificio; en el nivel intermedio está la vivienda, que suele dividirse en tres partes o estancias, una de las cuales se reserva para la cocina; y el nivel superior viene a ser el desván.

Inconfundible en el *tongkonan*, lo que lo caracteriza, es su tejado con forma de silla de montar (Fig. 1.4). Originalmente, el extremo de la cubierta apenas superaba el techo del habitáculo de la casa y sobresalía de la planta de la construcción a modo de porche. Hoy en día se ha exagerado tanto su concavidad que ha acabado por convertirse en una prominencia ornamental. Esos tejados curvos no son un fenómeno único en Indonesia, también se dan en la cultura Batak, en Sumatra, y 'sus orígenes se remontan a la edad de bronce de la tradición Dong-Son del sudeste asiático' (Heine-Geldern, 1935: 319). Las cuatro fachadas del tognkonan están decoradas con un sinfín de grabados ornamentales.

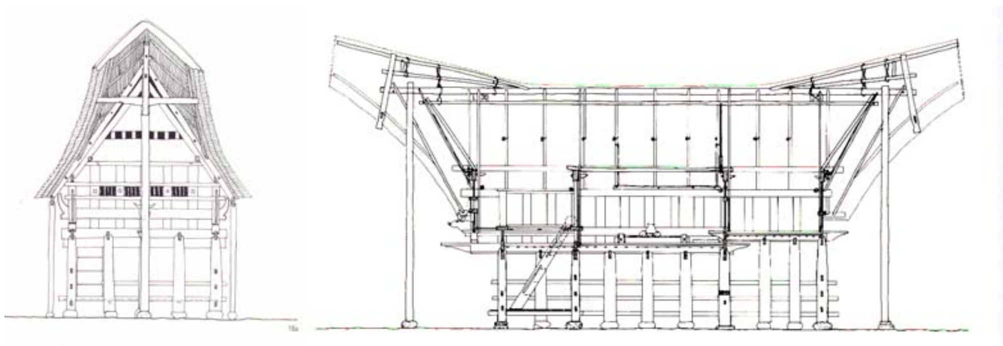


Figura 1.4 Fachadas Norte y Oeste de un Tongkonan toraja según Nooy-Palm (1988: 70)

El arroz ha sido y es todavía el alimento fundamental de la inmensa mayoría de las sociedades del sudeste asiático hasta el punto de ser considerado símbolo de prosperidad. Se guarda en el granero o *Alang-alang* (Fig. 1.5). Éste se parece tanto a la casa tradicional (tongkonan) que se le puede describir como una copia reducida de aquel que además sirve para desarrollar otras funciones sociales prácticas. Para Nooy-Palm (1988: 38), el granero y la casa forman una unidad en la que el granero es un reflejo en miniatura de la casa. Pero puesto que su objetivo primordial es guardar la cosecha y no la de vivienda, el granero presenta diferencias significativas en relación con la casa. Sandarupa (1986: 66) destaca que los graneros se construyan sobre troncos de palmera redondos y lisos para evitar que las ratas puedan subir por ellos y acceder al arroz. Estos pilares se separen del suelo con una plataforma de madera que sirve para sentarse cuando se reúne la familia. Ahí es también donde se deposita el cadáver del difunto durante un funeral. Igual que las casas, los graneros se disponen en batería, pero mirando hacia el sur, es decir, encarados a la casa. La importancia del granero se refleja en el hecho de que también se decora con grabados tan exquisitos y tan profusamente como la casa. Esto es así hasta el punto de que 'las mismas reglas concernientes al rango social determinan la cantidad de grabados permitidos en los graneros y en las casas' (Waterson, 1997: 59).

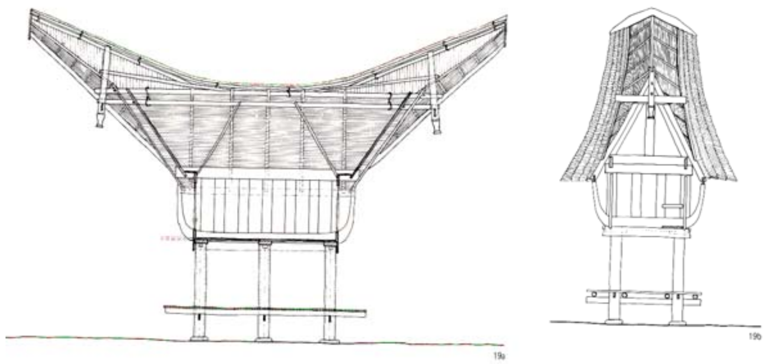


Figura 1.5 Fachadas Norte y Oeste de un granero toraja según Nooy-Palm (1988: 108)

Hay casas toraja que tienen más de un siglo de antigüedad, como la del pueblo de Buntu Pune, de la que Sandarupa (1986: 74) afirma fue construida a principios del siglo XX. Pero Schefold (1988) habla de casas mucho más antiguas todavía relacionando la forma de la casa tradicional toraja con su antigüedad de acuerdo con tres épocas: las que tienen unas décadas; las que tienen hasta 150 años; y las que tienen hasta 350.

La antigüedad puede estar relacionada con los diseños ornamentales en un sentido muy importante. Nooy-Palm dice que el nombre de diseños es, aproximadamente, de unos 200 y que ‘las casas más antiguas tienen diseños más simples’ (1988: 42). Esto es algo que puede verse aún, pero cada vez menos. Las casas más antiguas suelen tener las fachadas norte y sur mucho más decoradas que las otras dos y, en efecto, los diseños que presentan no son demasiado elaborados como ocurre en el antiguo tongkonan de Kete’Kesu analizado por Sandarupa (op. cit.: 87-89). Las fachadas este y oeste de esa casa fueron decoradas con grabados menos elaborados. Unos diseños realizados con series de líneas rectas paralelas y otros basados en la circunferencia.

El origen de la talla de las fachadas puede estar en la antigua ‘costumbre de *vestir* el tongkonan con telas sagradas de colores para la celebración de algunos rituales, la colorista ornamentación de la fachada aparecería entonces como una extensión perenne de esa costumbre’ (Haüser-Schaüblin, 1985: 77). Hauser-Schaüblin considera la posibilidad de que las formas de los diseños labrados se correspondan o deriven de aquellos presentes en las telas que, por cierto, fueron importadas de la India por medio de los holandeses y los comerciantes *bugis*. Esto comenzaría hace unos 300 años, pero la correspondencia entre los diseños toraja y los de esas telas indias no está nada clara: ‘los diseños de éstas a menudo no muestran semejanzas con los diseños toraja’ (Schefold, 1988: 73).

En lo que sí coinciden Hauser-Schaüblin (1985: 77) y Schefold (1988: 73) es en que los cambios introducidos a lo largo del tiempo se relacionan con un interés social de perfección, mejora y prestigio.

En *El orden en los diseños simbólicos*, apéndice de *Vida y muerte en Toraja*, Sandarupa (1986: 82) habla de la talla de los diseños simbólicos conocidos como *passura'*. Afirma que el término proviene de la raíz *sura'* (escribir) y que *passura'* vendría a ser un sistema de escritura equivalente al que usan los vecinos *bugis* en las hojas de palmera. En el diccionario toraja-indonesio de Tammu y Van der Veen (1972: 392) encontramos que en un contexto artístico el prefijo *Pa'* recibe el significado de *jang dirupakan*, o sea, 'el cual representa a', por lo que cada *passura'* o diseño concreto constituye una representación simbólica del objeto o entidad al que se refiere. Por tanto, si no de una auténtica escritura, estamos hablando al menos de un sistema de representación.

La ornamentación de la casa forma parte de su ritual de construcción y debería desarrollarse siguiendo las etapas sucesivas que dicho ritual establece. Sin embargo, la vida cada vez más moderna hace que actualmente las cosas no sean tan estrictas. El siguiente esquema (Fig. 1.6) corresponde a la división cultural en secciones de la fachada Norte de un antiguo tongkonan de Kete' Kesu' que todavía permanece en pie.

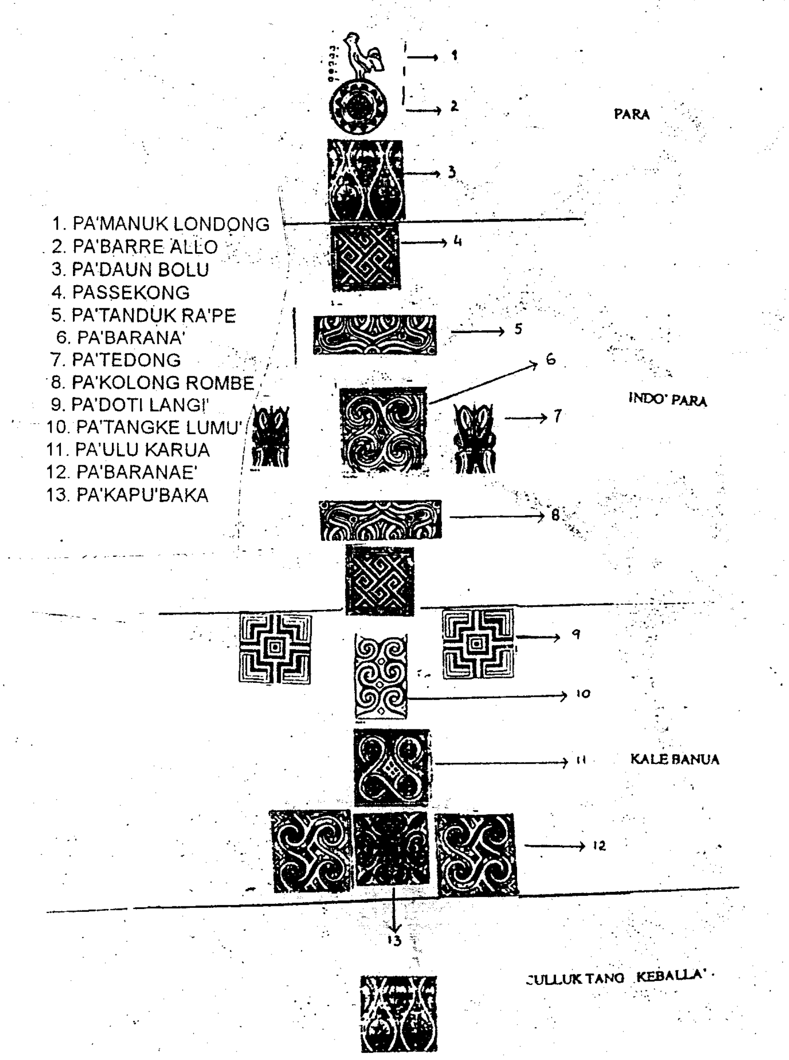


Figura 1.6 Secciones de la fachada Norte de un tongkonan (Sandarupa, 1986: 89)

Se observa como la fachada se divide en cuatro niveles: *Para*, la zona superior, triangular y prominente; *Indo' para*, la zona central; *Kale banua*, el cuerpo de la casa; y *Sulluktang keballa'*, la parte inferior de la fachada. Los dos niveles superiores representan el mundo superior y el cielo, los niveles inferiores representan la tierra y el inframundo. Además de esto, la sección Este de la fachada norte de la casa se asocia con los rituales de la vida, mientras que la sección Oeste se asocia con los de la muerte (Fig. 1.7).

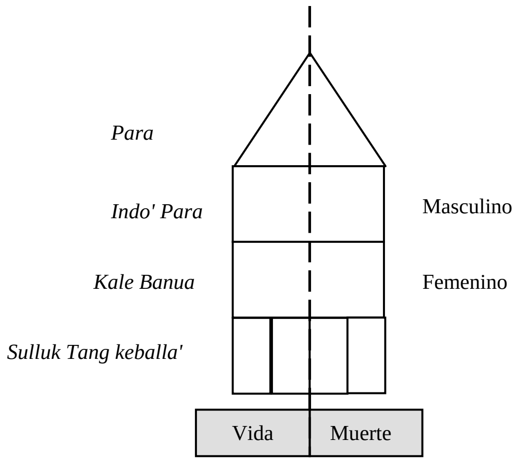


Figura 1.7 Las diferentes secciones de las fachadas Norte y Sur del tongkonan

Esta opinión es también la de Waterson: ‘el Norte es el domino de *Puang Matua*, el ‘ancestral señor’ del cielo y deidad principal creadora del ser humano; el Sur es la dirección de la vida futura; el Este es la dirección de la vida, del sol naciente, de las deidades y de los rituales de afirmación; mientras que el Oeste se asocia con la muerte, los rituales funerarios y los antepasados en su forma difunta’ (Waterson, 1997: 94).

Los grabados expresan aspectos sociales, religiosos y cosmogónicos de la cultura toraja, como las oposiciones binarias entre cielo y tierra, la dualidad de géneros masculino / femenino, la vida y la muerte, el ritual del Este y del Oeste, sociedad y religión (Sandarupa, 1986: 87). También se plasman en ellos rasgos de la vida social en lo que constituye una documentación escrita de toda una serie de conocimientos transmitidos así de una generación a la siguiente. La relación directa entre los grabados y la cultura y sociedad toraja es un hecho crucial destacado no sólo por Sandarupa, sino también por Lumowah (1985: 61), Nooy-Palm (1988: 42) y Sande (1991: 3).

Aunque la función principal de los grabados es la decoración arquitectónica (casas y graneros tradicionales), también se realizan en la arquitectura y elementos de carácter funerario (ataúdes y tumbas) y en los más diversos objetos elaborados para surtir a la industria turística de la región.

Los cuatro colores con los que se pintan los grabados también se asocian con las cuatro direcciones cardinales: el blanco con el Norte, el amarillo con el Este, el rojo con el Oeste, y el negro con el Sur. (Waterson, op. cit.)

Algunos ejemplos concretos pueden darnos una idea de la riqueza simbólica de los diseños. Según Sandarupa, *Pa' daun bolu* representa la hoja de *betel*, el principal ingrediente de la ofrenda para los dioses del inframundo durante un ritual; *Pa' sekong* y *Pa' tanduk ra'pe* son símbolos de la masculinidad; en cambio, *Pa' doti langi'* se asocia con la feminidad; *Pa' ulu karua* hace referencia a la relación matrimonial y a la organización del parentesco de un sistema bilateral que cuenta los antepasados masculinos y femeninos hasta los bisabuelos (ocho, en total); el *Pa' kapu' baka* alude a la unidad de los miembros de la familia (este diseño representa materiales preciosos recogidos en un cesto cerrado); *Pa' tangke lumu'* representa las relaciones sociales horizontales con otras personas; *Pa' baranae* representa las relaciones verticales en las que la gente es clasificada en tres clases sociales: nobles, medios y plebeyos.

1.2 OBJETIVOS DE LA INVESTIGACIÓN

El trabajo gira en torno a un eje central: la identificación de matemáticas en una actividad desarrollada en un ambiente cultural específico fuera del occidental y al margen del mundo académico institucional. Por tanto, un aspecto crucial a considerar será el práctico. Cualquier práctica puede leerse, es decir, interpretarse, desde la perspectiva matemática, pero la cuestión radica en cómo se efectúa esa lectura y en qué situaciones y elementos de la práctica se basa. Los objetivos de esta tesis son:

A. Identificar matemáticas en una actividad práctica elaborando para ello un método con el que llevar a cabo esa identificación.
B. Concretar la idea de práctica matemática.
C. Identificar situaciones de posible aprendizaje y ofrecer contextos nuevos, reales y prácticos para conceptos matemáticos fundamentales en distintos niveles educativos.

Esos objetivos se abordan en el contexto particular de la ornamentación arquitectónica toraja. El carácter artesanal de dicha práctica hará que sus resultados puedan extrapolarse a prácticas artesanales semejantes.

El primero de dichos objetivos es doble, pues primero hay que desarrollar un método para identificar matemáticas y luego llevarlo a la práctica. Eso dará lugar a la que se denominará interpretación matemática situada: IMS. La idea es construir la IMS de la práctica artesanal toraja y basar en ella la identificación de matemáticas de esa práctica.

El segundo objetivo pretende ofrecer un reflexión teórica derivada de la aplicación de la IMS que contribuya a aclarar la idea de lo que significa ‘hacer matemáticas’. La cuestión se enfocará desde la perspectiva de lo que significa resolver matemáticamente un problema y en la que jugarán un papel destacado las herramientas y artefactos utilizados por los autores de la práctica.

Por último, las implicaciones que la identificación de matemáticas tiene para la enseñanza y el aprendizaje son enormes. Una vez desarrollado un método que facilite su identificación, la IMS, estaremos en disposición de plantear actividades de enseñanza y aprendizaje situadas en contextos nuevos.

Esos objetivos se resumen en tres preguntas capitales:

P1. ¿Cómo identificar matemáticas en una práctica?

P2. ¿Qué es una práctica matemática?

P3. ¿Cuáles son las implicaciones para la educación matemática de la identificación de matemáticas en una práctica?

El contexto de trabajo no será una práctica cualquiera, sino la de los artesanos toraja dedicados a la ornamentación arquitectónica. El método para identificar matemáticas se planteará a partir de un marco teórico basado en una filosofía matemática y en una teoría del aprendizaje. Mediante dicho método se analizará la práctica objeto de la investigación, pero al final de la misma podrá ser revisado y, si procede, modificado por los resultados que produzca su aplicación a la actividad artesanal toraja. Por tanto, no se desarrollará en un laboratorio matemático occidental para luego aplicarse, sino que se genera, teje y reconstruye a lo largo del estudio *in situ* de esa práctica. De hecho, sus orígenes están en el trabajo previo a esta tesis ya mencionado. También será así en lo concerniente a la idea de práctica matemática. En este sentido el trabajo es constructivista y refleja con fidelidad su desarrollo: surge de la reflexión teórica y de la *praxis*, no de un planteamiento apriorístico y formal. Sin la práctica, no existiría.

Que el objeto de estudio, la práctica artesanal toraja, sea tan ajeno a los mundos académico y cultural occidentales tiene ciertos inconvenientes que serán tratados en su momento, pero también goza de la ventaja de ser nuevo y de carecer por tanto de los prejuicios propios que afectarían a una investigación sobre algo más cercano y familiar.

Según los antropólogos, en la Arquitectura toraja se dan multitud de niveles simbólicos. Las cosas no son sólo ellas mismas, significan y representan algo más, ya sea la concepción del cosmos, la veneración por los antepasados, el rango social o el parentesco y las relaciones familiares. La casa es morada, pero por encima de todo es símbolo y símbolo de símbolos.

Por lo que se refiere a los grabados ornamentales, también encontramos varios niveles simbólicos, dos de ellos de gran importancia aquí. Por un lado, el grabado documenta aspectos sociales de la cultura toraja. Por otro, la representación se concreta en la talla de una figura, normalmente un elemento o rasgo característico de la flora o fauna locales, como hojas de betel, ramas de musgo, plantas que crecen en los campos de arroz, cabezas de búfalo, gallos, etc. El elemento representado determina el nombre que recibe el grabado, pero su significado no es el que el nombre le da. Una voluta labrada en la madera puede reproducir la voluta de un helecho, pero ya no representa el helecho que la inspiró, sino que la forma del helecho, extraída de su contexto natural, ha sido transformada en un símbolo con el que representar un aspecto de la vida social toraja. La abstracción de esa forma y el significado que se le atribuye en ese contexto nuevo crean el símbolo, lo que supone una forma de escritura, como decía Sandarupa, y algo más, algo de gran valor matemático, un proceso de abstracción.

1.3 CRÓNICA DEL PROYECTO

Mi educación matemática, desde la elemental a la universitaria, se desarrolló según el ambiente propio de las décadas de los años setenta y primeros ochenta. En aquel ámbito, especialmente el universitario, las Matemáticas (aquí sí tengo que escribir el término con mayúscula) se presentaban como la manipulación lógica de una serie de axiomas que generaban resultados, es decir, teoremas siguiendo un desarrollo estructurado en definición-teorema-demostración-ejemplo-ejercicio. La relación de los matemáticos con el mundo real y con los profesionales de otras disciplinas se ilustraba con la frase que corría por los pasillos de la facultad: ‘Los amigos de los matemáticos son los matemáticos.’

Desde los inicios de mi labor como educador matemático a mediados de los años ochenta pude constatar que la reproducción en el aula de la metodología de enseñanza con la que yo había sido educado no sólo no funcionaba, sino que tergiversaba la realidad. Las matemáticas eran algo más que axiomas, definiciones y teoremas. Éstos y éstas nunca constituyen el punto de partida del proceso, sino el final.

Mientras tanto viajé a países cuyas bases culturales no eran las occidentales, aunque todos ellos habían soportado la colonización occidental. Fruto de esos viajes fueron una serie de artículos matemáticos en los que el observador se planteaba cuestiones matemáticas relacionadas con su propia experiencia: ya fuese yendo en metro en Barcelona, reflexionando sobre la arena del Sahara, atravesando el Ganges en Benarés, viendo los trigales manchegos desde un tren, viajando en autobús por Sulawesi o contemplando una isla sobre el horizonte. En estos trabajos el observador realizaba modelizaciones matemáticas cuyo objetivo era comprender lo que veía o vivía. El resultado era doble. Por una parte, las matemáticas ofrecían una explicación plausible de los interrogantes que la experiencia planteaba; por otra, se generaba nuevo conocimiento matemático a partir de ellas.

Pero fue en julio de 1997 cuando viví mi primera experiencia matemática en sentido inverso, en la que no era yo quien aplicaba matemáticas en lo observado o vivido, sino que eran los nativos del lugar quienes hablaban o hacían matemáticas (al menos eso me pareció entonces). Mi primer encuentro de este tipo fue con Sarji, un maestro de escuela de Antiga, un pequeño pueblo de la isla de Bali. Sarji me explicó un método de multiplicación digital documentado por Ifrah (1987) en distintos lugares del mundo, pero no en Indonesia.

Tras ese viaje vi las cosas de otro modo. Mi interés pasó de centrarse en mis propias disquisiciones a centrarse en lo que hacía la gente local. Cuando un año más tarde visité de nuevo Sulawesi su arquitectura y los grabados que la ornamentan ya no me parecieron tan artísticos. Al contrario, me daba la impresión de que serían muy difíciles de realizar, por no decir imposibles, sin la intervención de las matemáticas.

Había experimentado un cambio. Si como profesor había transferido mi protagonismo al del alumno preocupándome más por cómo aprendía que cómo transmitirle lo que yo sabía, ahora transfería el protagonismo de mis interpretaciones matemáticas del viaje a los conocimientos de la gente local. En lugar de aplicar gratuitamente mis conocimientos a la experiencia me preguntaba qué había de matemáticas en ella. Entonces comencé la búsqueda de información sobre esa perspectiva opuesta en la que los protagonistas de la actividad matemática eran las personas del lugar, no el visitante. Esto me llevó al conocimiento de una vertiente antropológica y educativa de las matemáticas desarrollada a partir de la segunda mitad de los años ochenta por D'Ambrosio (1985): las Etnomatemáticas. Mis primeras experiencias con Sarji y otras vividas en la región de Tana Toraja, en la isla de Sulawesi, aparecerían más tarde en un artículo: *Les matemàtiques des d'una perspectiva cultural: Etnomatemàtiques* (Albertí, 2002).

En 1999 comenté a la Dra. Carmen Azcárate, del Departamento de Didáctica de las Matemáticas y las Ciencias Experimentales de la U.A.B., mi interés sobre la cuestión. Ella me recomendó dirigirme a la Dra. Núria Gorgorió para plantearle la posibilidad de llevar a cabo una investigación etnomatemática relacionada con la obra artesanal de los grabadores toraja de Sulawesi. Para el verano del año 2000 ya había más que intuido que la actividad artesanal toraja se relacionaba con las matemáticas porque había descubierto algo allí que ni yo ni mis colegas matemáticos occidentales conocíamos. Poco después, durante la celebración del *Congrès d'Educació Matemàtica*, celebrado en Mataró en julio de 2000, su presidente, el Dr. K. Clements, me transmitió su interés en el tema y me animó a hacer un doctorado.

Así que en octubre de 2001 inicié el Programa de Doctorado en Didáctica de las Matemáticas y las Ciencias Experimentales en la Universitat Autònoma de Barcelona (U.A.B.), presentando el trabajo de investigación dirigido por la Dra. Núria Gorgorió i Solà, en abril de 2005: *Les matemàtiques com a pilar d'una manifestació cultural: l'ornamentació arquitectònica del poble Toraja de Sulawesi*.

En la sesión de *Suficiencia Investigadora* posterior a la presentación de aquel trabajo, e imprescindible para abordar la realización de una tesis, quedó claro que ésta sería una revisión, profundización y ampliación del trabajo precedente. Los aspectos más importantes por los que este trabajo amplía el anterior son:

Primero, fundamenta el enfoque del análisis y la posterior identificación de matemáticas en un elemento crucial de la actividad artesanal toraja como es el hecho de que los grabados se realicen sobre retículas. Este es un aspecto en el que no se había profundizado en el trabajo anterior.

Segundo, incorpora un estudio sobre los artefactos utilizados por los artesanos que había quedado pendiente. Se plantea desde diferentes perspectivas: física (cómo son), funcional (para qué se han construido y para qué se usan) y operativa (cómo se utilizan). El uso de artefactos en una práctica puede ser indicio de actividad matemática y su manejo está estrechamente relacionado con el desarrollo cognitivo de quienes los manejan.

Tercero, la identificación de matemáticas se hará, como en el trabajo anterior, en base a la interacción de la modelización matemática con la estructuración de la práctica en tres niveles. Esto será revisado en profundidad con intención de elaborar un método para la identificación de matemáticas del que se derivará la que llamaremos *Interpretación Matemática Situada* de una práctica artesanal y que da título a esta tesis. A partir de ella se desprenderán las implicaciones didácticas del trabajo.

Cuarto, la perspectiva didáctica. Tanto los artefactos como la IMS proporcionan resultados de gran utilidad para la enseñanza y el aprendizaje matemáticos a todos los niveles. Sobre todo por lo que respecta a la identificación de contextos reales donde situar conocidos conceptos matemáticos, como en el sentido de obtener nuevo conocimiento matemático a partir de contextos prácticos.

1.4 APORTACIONES DE LA INVESTIGACIÓN

La principal aportación de esta tesis está relacionada con la metodología de investigación y consiste en un método para identificar matemáticas en una práctica y que recibirá el nombre de interpretación matemática situada (IMS). Se basa en la estructuración de la práctica en tres niveles de aproximación: la obra-acabada (producto), la obra-en-curso (proceso de elaboración) y la obra-explicada (propósito y explicaciones de los artesanos). Las interpretaciones matemáticas (IM) desarrolladas sobre las situaciones observadas en cada nivel, ya sean una figuras talladas, acciones del artesano, estrategias resolutivas o ideas, deberán ser confirmadas al exponerlas a los otros dos niveles de la práctica. De no ser confirmadas, se modificarán hasta superar los tres niveles establecidos. Sólo entonces una IM se convertirá en IMS. Al gestarse a base de conjeturas y de confirmaciones o refutaciones, la IMS será el colofón de una aproximación científica a la práctica en cuyo desarrollo se aprecian rasgos propios de la idea del conocimiento científico de Kuhn (1970), Popper (1962, 1994) y del conocimiento matemático de Polya (1988) y Lakatos (1994). No resulta difícil ver en la IMS los componentes de análisis de la acción de Werstch (1995): acto, escena, agente, agencia y propósito.

Este trabajo aporta también una reflexión al concepto de práctica matemática que refuerza la idea de práctica de Scribner, especialmente por lo que se refiere a las 'acciones recurrentes e interrelacionadas dirigidas a objetivos' (Scribner, 2000: 293) y al domino del conocimiento y tecnología necesarios. Consideraremos la actividad práctica consistente en la resolución de situaciones o problemas que, a su vez, pueden reducirse a la solución de situaciones o problemas auxiliares más asequibles. Puesto que no todas las situaciones de una práctica tienen porqué ser matemáticas, hablaremos más de situaciones matemáticas de una práctica que de práctica matemática. Una situación será calificada como matemática si su resolución es matemática de acuerdo con la clasificación de las soluciones que plantearemos y que depura la dicotomía entre las soluciones analíticas y analógicas propuesta por Davis y Hersh (1988).

Entre las resoluciones toraja a los problemas que su actividad plantea destaca el método Kira-kira. Se trata de un procedimiento recurrente y no euclidiano de los artesanos toraja para dividir un segmento en partes iguales, un problema geométrico fundamental a la hora de trazar la retícula de un diseño. Este método representa una aportación al conocimiento etnomatemático que hasta hoy no ha sido documentado en obras especializadas en las que se aborda la cuestión como son las de Beskin (1976), Kotovski (1980), Vilenkin (1984) o Euclides (1991). Tampoco Courant y Robbins (1996) mencionan tal procedimiento al tratar la cuestión de dividir un segmento en dos partes iguales (Courant y Robbins, op. cit.: 145-146) ni al referirse a las construcciones únicamente con un listón (Courant y Robbins, op. cit.: 196-198).

De la naturaleza recurrente del método Kira-kira se desprende una forma particular de resolución matemática. Dado un problema P, llamaremos resolución matemático-experimental al cuarteto {P; G, r-V, M} formado por el problema P y tres procedimientos. El primero de ellos, G, es un procedimiento generador de soluciones; el segundo, r-V, es un procedimiento verificador cuantificado (con $r \in [0,1]$); por último, M, es un procedimiento de mejora de la solución obtenida.

No es de extrañar que considerando una práctica en base a las situaciones que debe solventar, una aportación de esta tesis sea la de apoyar la teoría del desarrollo de conocimiento situado de Lave (1988), Rogoff (1990) y Wenger (1990). El artesano no trabaja encima de una mesa, en planos horizontales, sino verticales, aplicándose a los paneles verticales de la casa o granero tradicionales ya ensamblados. En esas condiciones es imposible aplicar el procedimiento euclidiano y académico para dividir un segmento en partes iguales. El método Kira-kira no es académico. La educación académica de los artesanos toraja no supera la elemental. Sus resoluciones no son académicas, sino que proceden de sus antepasados. Pero, en cualquier caso, solamente la teoría del conocimiento situado puede explicar su origen.

La investigación aporta una nueva comunidad de práctica en el sentido de Wenger (1999) al mundo etnomatemático: la comunidad de los grabadores toraja de Sulawesi.

Tanto el método Kira-kira como otros aspectos matemáticos de la práctica toraja confirman el papel mediador jugado por la tecnología en el conocimiento matemático de quienes la manejan, lo que confirma. En este sentido, esta tesis confirma ese papel de las herramientas que investigadores como Rogoff y Lave (1984), Pontecorvo, Resnick y Säljo (1997), Abreu (2000) y Scribner (2002) han destacado.

Alangui y Barton (2002) prefieren evitar el término matemáticas en la investigación etnomatemática por los prejuicios que esa palabra genera. La idea fundamental de sus QRS-system y NUC-mathematics es la de ‘sistema’. Una aportación de esta tesis en ese sentido es la de relacionar el sistema de producción de toda práctica con un sistema conceptual cuantificado en el que cabe hallar, si las hay, matemáticas. El sistema de producción implica un sistema conceptual implícito merecedor del calificativo ‘matemático’ si es reglamentado, general, cuantificado y cerrado. Según eso podemos hablar de la ornamentación arquitectónica toraja como un sistema reticular tácitamente cuantificado (SRTC).

Se aporta así mismo una clasificación de los grabados toraja en base a su grupo de isometría 1-d y 2-d. Si bien existen grabados correspondientes a los 7 grupos de simetría en friso (1-d), entre los planos (2-d) no los hay que sean invariantes a rotaciones de 60º ni 120º.

Una aportación alude a la educación matemática. En el curso de la elaboración de la IMS de la ornamentación arquitectónica toraja se pondrá de manifiesto que una persona puede saber más de lo que hace o de lo que escribe en un papel y que sin interpelación directa se corre el riego de declarar ignorante al sabio e incompetente al capaz. En este sentido, la IMS puede resultar de gran ayuda al educador matemático a la hora de plantear actividades matemáticas a sus estudiantes basadas en hechos o fenómenos reales. La IMS le impedirá caer en proyecciones matemáticas a la hora de interpretar fenómenos reales y prácticos.

1.5 ESTRUCTURA DE LA MEMORIA

Se ha pretendido que el índice de esta memoria refleje su estructura. En el capítulo 1 que ahora concluye se han presentado el contexto social y cultural de la investigación, el planteamiento y objetivos de este trabajo y un avance de sus aportaciones.

El capítulo 2, titulado *matemáticas y educación matemática*, está dedicado al marco teórico. La primera parte hace referencia a las filosofías de las matemáticas. La segunda, a las del aprendizaje. En la tercera se plantea también una primera reflexión sobre la idea de práctica matemática. La cuarta abre algunos interrogantes sobre el sentido y las paradojas que surgen del hecho de que un investigador occidental realice una investigación fuera de su ámbito académico y cultural. El capítulo termina con una aplicación del marco teórico al objeto de investigación para mostrar cuáles serán las perspectivas filosóficas, tanto por lo que respecta a lo que son las matemáticas como a su enseñanza y aprendizaje, desde las que se abordará la investigación.

El capítulo 3 se refiere a la metodología. Tras una revisión crítica de trabajos realizados por otros investigadores, la cuestión de cómo identificar matemáticas conduce al diseño y elaboración del método a aplicar. Ya se ha anticipado en el apartado anterior que se trata de un método basado en una aproximación y estructuración científica de la práctica. De hecho, son esa estructuración en obra-acabada, obra-en-curso y obra-explicada y el modo de abordarla para desarrollar interpretaciones matemáticas relacionadas con cada nivel lo que determina la metodología de investigación. De ahí que el análisis del producto se base en al visualización, el análisis del proceso en la observación y el del propósito y explicaciones en la interpelación a los artesanos. Todo ello obliga a efectuar una documentación de cada caso en el medio apropiado.

Los capítulos 4, 5 y 6 forman el bloque correspondiente a la presentación, análisis de datos y resultados directamente relacionados con el objeto de investigación. De acuerdo con la estructuración de la práctica planteada en el capítulo anterior, en este capítulo 4 se estudian los grabados, en el capítulo 5 se analiza el proceso de su elaboración, y en el 6 los propósitos y explicaciones de sus autores. Cada uno de esos capítulos se desarrolla en base a una misma estructura: antecedentes, presentación de datos, análisis y resultados.

En el capítulo 7 se aborda el estudio de las herramientas usadas por los artesanos y se analiza su papel como mediadoras cognoscitivas en el ámbito matemático desde la perspectiva cultural.

El capítulo 8, titulado *Interpretación matemática situada de la ornamentación arquitectónica toraja*, recupera los resultados de los capítulos 4, 5 y 6 junto con la idea fundamental de actividad matemática consistente en resolver problemas. Los considerados problemas geométricos principales de la práctica ornamental toraja sirven para depurar la dicotomía de soluciones analíticas o analógicas propuesta por Davis y Hersh (1988) y elaborar una clasificación más acorde con la realidad práctica artesanal. La investigación pone de manifiesto que algunos detalles de la IMS deben ser revisados antes de formular la IMS de la ornamentación arquitectónica toraja

En el capítulo 9 recogen las conclusiones del trabajo ofreciendo respuestas a los objetivos de la investigación planteados en el capítulo 1 al mismo tiempo que se revisa el marco teórico. Se incluyen también varias propuestas de ampliación de la investigación.

Finalmente, el capítulo 10 contiene las implicaciones que este trabajo tiene para la didáctica de las matemáticas en sus cuatro niveles educativos: primaria, secundaria, bachillerato y universidad. Se ofrecen propuestas para desarrollar contenidos propios de cada uno de esos niveles.

2

MATEMÁTICAS
Y
EDUCACIÓN MATEMÁTICA

2.1 FILOSOFÍAS Y EPISTEMOLOGÍAS DE LAS MATEMÁTICAS

Tal y como se explicó en la introducción el término *matemáticas* se escribirá con minúscula. En este apartado se analizarán diferentes perspectivas filosóficas de las matemáticas, prácticamente todas procedentes precisamente de un ámbito académico y occidental en el que el término se ha escrito siempre con mayúscula. Por tanto, será más coherente y fiel con la realidad escribir Matemáticas así, con mayúscula, cuando hablemos de filosofías que las consideran un producto occidental y de su entorno académico institucional. El lector observará como poco a poco la 'M' disminuye de tamaño hasta adoptar la dimensión adecuada.

Otro aspecto a tener en cuenta por lo que a las filosofías matemáticas se refiere es la clara distinción entre las que podríamos llamar *interiores* y *exteriores*. Las filosofías interiores son las desarrolladas por los matemáticos profesionales. En ellas manifiestan su concepción de lo que son las Matemáticas. Éstos son o fueron antes matemáticos que filósofos. En el caso de las filosofías exteriores, o bien el filósofo no es matemático o bien es antes filósofo que matemático.

2.1.1 El carácter falible y experimental de las matemáticas

La perspectiva euclidiana presenta las Matemáticas como un viaje por junglas en las que las autopistas de la lógica conducen al destino. Sigue el camino y alcanzarás la meta. Todo aquel que se haya enfrentado a un problema matemático serio sabe lo difícil que puede llegar a ser dar el más nimio paso adelante y la frustración que uno siente al verse atascado y obligado a rendirse. En tales situaciones, ¿nos libera la lógica del atolladero? No. La lógica formal no es creativa ni construye autopista. Tampoco lo explica todo ni convence de todo: 'la fórmula 2+2=4 se puede demostrar como un teorema de un sistema axiomático formal, pero su fuerza y convicción derivan de un modelo físico como es coleccionar monedas o guijarros' (Hersh, 1997: 224).

Es más, la lógica formal que facilita esa demostración formal a la que se refiere Hersh es muy posterior a la recolección de guijarros y a su agrupamiento en un conjunto de cardinal cuatro. En un nivel de conocimiento próximo al ámbito universitario, Courant y Robbins (1996) ponen de manifiesto también el papel poco creativo de la aplicación de las reglas de la lógica en el desarrollo de conocimiento matemático al mismo tiempo que valoran la experimentación, la intuición y la analogía:

> It should be remarked that although the principle of mathematical induction suffices to *prove* ths formula (5) once this formula has been written down, the proff gives no indication of how this formula was arrived at in the first place ...The fact that the proof of a theorem consists in the application of certain simple rules of logic does not dispose of the creative element in mathematics, which lies in the choice of the possibilities to be examined. The question of the origin of the *hypotesis* (5) belongs to a domain in which no very general rules can be given; experiment, analogy, and constructive intuition play their part here. (Courant y Robbins, 1996: 15).

La vertiente empírica del quehacer matemático fue enfatizada por Polya: 'Sí, la Matemática tiene dos caras; es la ciencia rigurosa de Euclides, pero es también algo más. La Matemática presentada a la manera euclidiana parece una ciencia sistemática, deductiva; pero la matemática en proceso parece una ciencia experimental, inductiva. Ambos aspectos son tan viejos como la misma ciencia matemática' (Polya, 1988: vii).

Será precisamente ese 'algo más' ligado a la práctica y tan vejo como las propias Matemáticas el que resultará crucial en este trabajo[1]. Fue ese 'algo más', es decir, el carácter inductivo y experimental de las matemáticas, lo que permitió a Lakatos (1994) afirmar que el conocimiento matemático era falible y que las matemáticas constituían una ciencia casi empírica, perspectiva acorde con la idea del desarrollo del científico de Popper (1994).

La visión más humanista de las matemáticas las considera un producto histórico, social y cultural. Es una perspectiva relacionada con las filosofías científicas de Kuhn (1970) y Popper (1962, 1994), el naturalismo de Kitcher (1988) y el constructivismo social de Ernest (1991).

Efectivamente, muchos de los resultados matemáticos preparados por el matemático en su cocina son elaborados del mismo modo que las teorías científicas. Mediante 'pruebas y refutaciones' (Lakatos, 1994) el matemático se abre camino en la jungla, sortea obstáculos y concreta, paso a paso, contra ejemplo a contra ejemplo, su teoría, sus teoremas. También a menudo esa teoría se presenta y justifica por una cadena de razonamientos lógicos impecables conformando que a los ojos de la sociedad conforman una autopista exacta, y segura hacia la conclusión. Pero ese itinerario fue trazado con la intuición y la experimentación e ideado con la lógica de la falibilidad poniendo a prueba afirmaciones para confirmarlas o refutarlas. No es ésta una lógica formal, pero sí deductiva.

> Real life proof is informal, in whole or in part. A piece of formal argument –a calculation- is meaningful only to complete or verify some informal reasoning. The formal-logic picture of proof is a topic for study in logic rather than a truthful picture of real-life mathematics… The passage from informal to formalized theory must entail loss of meaning or change of meaning. (Hersh, op. cit.: 57)

[1] Obsérvese como el propio Polya parece escribir el término matemáticas con mayúscula o minúscula según conviene.

Eso es lo que cabe esperar de un trabajo como el presente cuyo foco de atención es una actividad de la vida real.

Me interesan las filosofías interiores de las Matemáticas por lo cuenta para cada una de ellas como conocimiento matemático. Tradicionalmente, se han distinguido tres corrientes principales: platonismo, formalismo y constructivismo, aunque el nivel de clasificación puede precisarse más y distinguir el estructuralismo, logicismo, intuicionismo, convencionalismo y ficcionalismo. Todas estas epistemologías giran en torno al ámbito más formal de las Matemáticas, pero hoy en día ya no se entiende el conocimiento matemático separado de su carácter humanista. Se incorporan así concepciones antes consideradas ajenas al propio pensamiento matemático y que ahora lo relacionan con su aspecto social, cultural e histórico. En mi opinión esta apertura proviene, en gran medida, de la importancia de la educación. El problema de la transmisión de conocimiento y de cómo se gesta su aprendizaje se ha hecho lo suficientemente importante como para afectar las concepciones que de las Matemáticas tienen los propios matemáticos. Ernest (1991) y Sierpinska y Lerman (1996) muestran los paralelismos y contrastes entre las epistemologías de las Matemáticas y las de la educación matemática. La militancia en una u otra epistemología filosófica depende de la tarea que realiza quien la sustenta. Adoptar una visión más abierta que contemple la importancia de los aspectos sociales, culturales e históricos no cierra puertas, sino que las abre ampliando su alcance.

2.1.2 Filosofías interiores: platonismo, formalismo, estructuralismo y constructivismo

El *platonismo* otorga existencia real a los objetos matemáticos en el mundo de las ideas, más allá del tiempo y del espacio físico material. El matemático platónico ve las Matemáticas como un sistema de verdades existentes eterna e independientemente de su existencia humana. La tarea del matemático consiste en descubrirlas. Muchos matemáticos que no se consideran platónicos admiten haberlo sido en alguna etapa de su vida.

Desde el *formalismo* se consideran las Matemáticas como símbolos y expresiones formales que pueden manipularse y combinarse siguiendo unas reglas que pueden ser las de la lógica u otras. Se llega a nuevos resultados aplicando las reglas del juego a toda una serie de axiomas establecidos de antemano. Que estas expresiones formales tengan o no significado no es algo que preocupe al matemático formalista; para él, las Matemáticas no tienen sujeto.

Es fácil declararse formalista tras años de saber contar, calcular y resolver problemas. Hersh atribuye a Frege una posición formalista basada en una afirmación de éste último que pongo en duda: 'Surely the empty set exists -we all have encountered it!' (Frege citado por Hersh, op. cit.: 13). No estoy de acuerdo. ¿Quiénes son ese 'nosotros' de los que habla Frege? El conjunto vacío es consecuencia de una estrategia lógica mediante la que el sistema axiomático de la teoría de conjuntos gana consistencia y la unión e intersección de conjuntos adquieren el rango de operaciones cerradas. La expresión 'conjunto vacío' es un emparejamiento verbal, de entrada, contradictorio. El concepto de conjunto proviene de la agrupación de elementos o unidades y a una agrupación de nadas le faltan los elementos o unidades necesarios para caracterizar un conjunto. Además, ¿cómo y dónde puede encontrarse un conjunto sin elementos? Sólo en la mente de aquellos que han elaborado procedimientos de abstracción suficientemente sofisticados como para llegar a inventárselo. Yo no encontré el conjunto vacío. Me lo presentaron, nunca lo he visto y me costó lo mío creérmelo. Algo similar ocurre con la expresión 0!=1.

La raíz de los conceptos matemáticos está en el mundo sensible. La corriente formalista puede resultar coherente con el trabajo del matemático formal, pero hace falta adentrarse en la abstracción y olvidarse por completo del camino que conduce a ella para ver así las Matemáticas. Lakatos fue muy crítico con la escuela formalísta de les Matemáticas y algunos de sus representantes. Acusaba al formalismo de desconectar la filosofía de las Matemática de la Historia de les Matemáticas y de negar la condición de Matemáticas a la mayoría de cosas que normalmente se habían considerado como tales (Lakatos, 1994).

El *estructuralismo* ve les Matemáticas como la ciencia de los patrones y las estructuras. A diferencia del formalismo, las Matemáticas pueden tener un sujeto. Integrante del grupo *Bourbaki*, Anglin considera que 'Dieudonné profesaba una epistemología estructuralista de les Matemáticas en el sentido de interacción y comparación de patrones' (Anglin, 1995: 52).

El propio Dieudonné confiesa no sentirse muy convencido con relación a las justificaciones sociológicas que otros ven en el porqué de las Matemáticas, aparte de la necesidad de disponer de un cierto nivel social en el que se disponga de tiempo libre para reflexionar y resolver problemas. Justifica gran parte de la investigación matemática en el hecho universal, observable en todos los países y épocas, de la curiosidad natural e innata del ser humano que le impulsa a resolver adivinanzas (Dieudonné, 1984). Desconozco a qué países y épocas se refería Dieudonné, pero en cualquier caso, ¿qué sentido tiene plantearse y resolver adivinanzas al margen de un entorno social y cultural como es el del juego? Es la sociedad la que da sentido a la adivinanza. Dieudonné se dirige a quienes puedan criticar su opinión:

> Para los interesados en el asunto, vaya este problemita: en 1796, al joven Gauss, que tenía por entonces dieciocho o diecinueve años, se le metió en la cabeza encontrar una construcción del polígono regular de diecisiete lados con regla y compás. A quien me explique por qué el medio social de las pequeñas cortes alemanas del siglo XVIII, en el que Gauss vivía, hubo de llevarle inevitablemente a preocuparse por la construcción del polígono regular de diecisiete lados, a quien me lo explique, bueno, la daré una medalla de chocolate. Bien, procuremos ser serios y volvamos a la cuestión de saber qué pone en marcha a las matemáticas.' (Dieudonné, 1984: 177)

La respuesta es bien sencilla: el reto, el prestigio y, también, el premio. Él mismo está dispuesto a recompensar a quien se lo explique. El reto, el prestigio y el premio son rasgos que incitan a la actividad y la participación.

Davis y Hersh (1988) definen con precisión lo que es el *constructivismo*: considera que los números naturales son el resultado de una intuición fundamental y que sólo tienen significado y existencia real aquellos objetos matemáticos que pueden construirse mediante procedimientos finitos a partir de ciertos objetos primitivos. Que esta es una afirmación difícil de mantener desde el punto de vista histórico, pedagógico y antropológico se da cuenta Hersh (op. cit.). Pese a ello, me interesa el constructivismo porque también defiende que 'no hay Matemáticas sin matemáticos y que los objetos matemáticos sólo existen en el pensamiento del matemático, no en un mundo platónico independiente de la mente humana' (Apèry, 1984: 222).

2.1.3 Filosofías exteriores: naturalismo, constructivismo social, etnomatemáticas y la perspectiva histórica-socio-cultural

Desde las filosofías exteriores se ven las cosas con una distancia suficientemente amplia como para incluir al matemático en el ángulo de mira. El *naturalismo* de Kitcher pone un poco las cosas en su sitio. Los axiomas de una teoría ya no son su principio, sino el resultado de un proceso de sistematización:

> Contemporary mathematical knowledge results .... through a chain of interpractice transitions, all of which are rational... Each generation transmits to its successor its own practice. In each generation, the practice is modified by the creative workers in the field. If the result is knowledge, then the new practice emerged from the old by a rational interpractice transition. (Kitcher, 1988: 299).

Por medio de la crítica, la comunidad matemática valida este conocimiento (Hersh, op. Cit.) cuyos orígenes encontramos en la práctica primitiva, empírica, y en experiencias perceptivas de situaciones donde la gente manipula su entorno (Kitcher, op. Cit.). Por tanto, la vertiente naturalista permite aventurar la posibilidad de hallar conocimiento matemático en actividades no directamente ligadas al ámbito académico y en las que la Psicología tendrá algo que decir. Siendo así, ni Hersh (op. Cit.) ni yo comprendemos que Kitcher diga que las Matemáticas se aprenden en la escuela a no ser que considere sólo como Matemáticas las del ámbito académico. Sin embargo, si la práctica y la experiencia perceptiva del entorno representan el origen del conocimiento matemático, éste comienza a ser adquirido por quien lleva a cabo la práctica. Tal vez la cuestión esté en la idea de práctica, por lo que encontramos un primer motivo para concretar el significado de *práctica matemática*.

La práctica matemática a la que se refiere Kitcher se caracteriza por el lenguaje, las perspectivas meta matemáticas, las cuestiones aceptadas, las afirmaciones aceptadas y los razonamientos aceptados (Hersh, op. Cit.). Una práctica semejante, ¿sólo puede llevarse a cabo en la escuela? La escuela proporciona un lugar, un espacio y un tiempo para reflexionar sobre aquello que vivimos y sobre nuestro entorno. ¿Acaso Kitcher piensa que sin esta reflexión facilitada por la escuela y sin la guía de un profesor no hay aprendizaje posible y que aquello derivado de prácticas y experiencias no merece el calificativo de conocimiento matemático mientras no se llegue a un cierto nivel de abstracción? Creo que Kitcher se refiere a las matemáticas institucionalizadas que, según él, sólo la educación académica puede ofrecer y que culminan en la actividad llevada a cabo por los matemáticos profesionales investigadores.

Sierpinska y Lerman (1996) opinan que la idea de práctica matemática relativiza el problema del conocimiento matemático tanto histórica como culturalmente. En efecto, si el conocimiento se deriva de las prácticas, diferentes prácticas pueden conducir a diferentes conocimientos matemáticos. Y las prácticas diferentes se producen no sólo en épocas diferentes de la misma historia, también en mismos momentos de historias distintas, como por ejemplo en otras culturas diferente de la propia. Una visión que nos aproxima a la idea de las matemáticas como fenómeno pan cultural del que hablaba Bishop y al que me referí en el Prólogo para explicar la inicial minúscula del término *matemáticas*.

La filosofía matemática de Ernest, el *constructivismo social*, se basa en que las matemáticas son una construcción social y un producto cultural falible como cualquier otro y cuyas bases para su justificación residen en su carácter empírico. Se trata de una perspectiva cercana a la de Polya, Lakatos y Davis y Hersh coherente además con la filosofía del conocimiento científico de Popper. Crítica con las filosofías absolutistas, las presuposiciones del Constructivismo Social son la existencia de una realidad física (experiencia sensible del mundo) y de una realidad social en la que juega un papel fundamental el lenguaje:

> In summary, the social constructivist thesis is that objective knowledege of mathematics exists in and through the social world of human action, interactions and rules, supported by individuals' subjective knowledge of mathematics (and language and social life), which need constant re-creation. Thus, subjective knowledge recreates objective knowledge, without the latter being reducible to the former. (Ernest, 1991: 83)

De acuerdo con los aspectos sociales de la filosofía que subscribe, Ernest tiene que ocuparse también de la educación matemática. Según el *Constructivismo Social* el conocimiento no se recibe de modo pasivo, sino que es construido activamente por el sujeto mediante una ‘función cognoscitiva que es adaptativa y que sirve para la organización del mundo sensible, no para descubrir una realidad ontológica’ (von Glasersfeld, 1989: 182).

Estamos ante una epistemología en la que el conocimiento matemático y la educación matemática caminan de la mano y en la que el aprendizaje de este conocimiento puede tener un carácter particular determinado por el sujeto y la sociedad o cultura a la que pertenece. Esto abre una puerta a la visión del constructivismo social en otras sociedades y culturas distintas de aquella en la que esta filosofía se ha desarrollado.

Lo cierto es que los filósofos han acabado por reconocer que más allá de Occidente hay algo más que exotismo, calor y playas paradisíacas. En *La experiencia matemática* (Davis y Hersh, 1988), se incluía un apartado titulado *¿Dónde encontrar matemáticas?* Ocupaba media página y, de hecho, la única localización de Matemáticas en todo el volumen hacía referencia a las aplicaciones prácticas de la materia en otras disciplinas: en el mercado, la guerra, la economía, y en otras ciencias. Es decir, Matemáticas que se aplican 'en' otros campos, Matemática que van 'a', pero no matemáticas 'en' otros campos, entornos o contextos ni matemáticas que vienen ‘de’. Menos aún matemáticas en otros entornos sociales y culturales que no sean los aceptados y validados por los historiadores de les Matemáticas de prestigio como la antigua Mesopotamia, el Egipto antiguo, la Grecia antigua, el mundo árabe antiguo, el mundo indio antiguo y el mundo chino antiguo. Nunca en otros mundos, sociedades y culturas presentes, actuales y vivas.

Los historiadores de las Matemáticas[2] (Boyer, 1986; Collette, 1985; Rey y Pastor, 1985) coinciden en que la existencia de conocimiento matemático se remonta a épocas tan remotas como los orígenes del lenguaje. Épocas en las que no había lo que hoy en día conocemos como civilización y, menos aún, cultura occidental. Luego, si consideramos que los esfuerzos de la especie humana para el establecimiento de sistemas de numeración constituyeron los inicios de la actividad matemática e, incluso, que 'los orígenes de esta

[2] Aquí la inicial debe ser mayúscula.

materia son más antiguos que el arte de la escritura' (Boyer, 1986: 24), deberemos concluir que no sólo fuera de nuestra cultura se han hecho matemáticas, sino mucho antes que ella.

El prefijo *etno* suele relacionarse con la antropología. La relación entre matemáticas y antropología no es reciente, aunque:

> ... la mayoría de los antropólogos eran limitados en sus capacidades matemáticas y raramente han planteado cuestiones relevantes. Ideas en las que se hubiese podido investigar con más profundidad o documentar más específicamente por alguien con interés matemático, pueden haber pasado desapercibidas ...' (Ascher y Ascher, 1986: 34).

Los inicios de las Etnomatemáticas se sitúan en los trabajos de Zalavsky (*Africa Counts*, 1973), Ascher y Ascher (*The Code of the Quipu*, 1981) y Lancy (*Cross-cultural Studies in Cognition and Mathematics*, 1983), pero diversos autores como Gerdes (1996) y también Frankestein y Powell (1997) consideran a Ubiratan D'Ambrosio su padre intelectual. Es él, D'Ambrosio, quien concreta el concepto y acuña el término para distinguir entre:

> ... las matemáticas académicas, aquellas que se enseñan y se aprenden en las escuelas, y las Etnomatemáticas, aquellas practicadas por grupos culturales identificables, como sociedades nacionales o tribales, grupos de trabajo, niños de un intervalo de edad, clases profesionales, y así sucesivamente. Su identidad depende en gran parte de los focos de interés, de la motivación, y de ciertos códigos y argot que no pertenecen al reino de las matemáticas académicas.' (D'Ambrosio, 1985: 16).

A diferencia de la perspectiva de Ascher y Ascher (1986), quienes en sus primeros trabajos iban más en la línea de relacionar conceptos matemáticos primitivos con gentes de pueblos iletrados, no se trata de relacionar las Etnomatemáticas con los países subdesarrollados, ni con el tercer mundo, ni con sociedades culturales más o menos primitivas. Tampoco es que las matemáticas de fuera de nuestra cultura se llamen Etnomatemáticas. Es que en todo el mundo, antes, ahora y mañana, podemos encontrar comunidades cuyos individuos realizan actividades matemáticas: campesinos, obreros de la construcción, técnicos en electrodomésticos, contables, tatuadores (Albertí, 2002). Borba (1990) llega más lejos aún al observar que 'las matemáticas producidas por los matemáticos profesionales pueden considerarse también como una forma de Etnomatemática, ya que son producidas por un grupo cultural identificable y porque no son las únicas matemáticas que se han producido' (Borba, op. Cit.: 265).

Se trata de matemáticas no formalizadas, en bruto, para las que D'Ambrosio reclama un *status*, un reconocimiento. Puede darse el caso de que las prácticas escolares reemplacen dichas prácticas por otras equivalentes que sí disfrutan del estatus matemático (D'Ambrosio, 1986).

Curiosamente, quince años más tarde, Hersh (1997), reafirmando y ampliando las opiniones compartidas con Davis anteriormente, propone una perspectiva humanista en sintonía con la de Ernest y a la que llama *histórica-socio-cultural*. Llega hasta el punto de incluir una breve sección de Etnomatemáticas que gira en torno a la obra de M. Ascher, compatriota suya, y que cierra con comentarios esperanzadores:

> There's a lesson for the philosophy of mathematics. Mathematics as an abstract deductive system is associated with our culture. But people created mathematical ideas long before there were abstract deductive systems. Perhaps mathematical ideas will be here after abstract deductive systems have had their day and passed on.' (Hersh, 1997: 232)

Desafortunadamente, el contenido del apartado acaba ahí, pasando por alto autoridades destacadas en la materia como D'Ambrosio, Bishop, Gerdes y Zalavsky. Hersh no sale de casa.

2.1.4 Filosofía matemática desde la que se enfoca la investigación

Un observador matemático platónico consideraría los grabados toraja matemáticamente ricos por sí mismos, un elogio de los objetos matemáticos ideales. El uso de matemáticas en su elaboración sería menos valorado que su armonía numérico-geométrica.

En el capítulo 1 se ha visto que los grabados toraja que ornan las casas y graneros tradicionales representan aspectos de carácter social (clase, parentesco, relaciones entre miembros de la comunidad, confianza) y su disposición a lo largo y ancho de las fachadas obedece una concepción cosmogónica del mundo. Desde la perspectiva platónica tendría sentido plantearse si consideran las formas que tallan, muchas de ellas inspiradas por la botánica de su entorno, como interpretaciones imperfectas de formas ideales. Pero no es esto lo que interesa, sino cómo las hacen y se aseguran que sean como quieren, cómo las conciben y generan, pero no en relación a un ideal perfecto, sino práctico. Tampoco interesa averiguar qué grado de existencia otorgan a los elementos geométricos de sus diseños, si es más verdadera una voluta tallada o la de un folículo vegetal retorcido.

La filosofía formalista de las matemáticas no tiene cabida en el contexto toraja. Esa cultura no tiene lengua escrita ni se le conocen símbolos de ningún tipo que no sean los de los grabados. Por ahora plantearse que éstos puedan relacionarse con expresiones lógicas formales resulta, por decirlo de algún modo, demasiado arriesgado.

En cambio, no parece tan arriesgado preguntarse por las relaciones estructurales de sus diseños, como por ejemplo la de los grupos de isometrías del plano. Cabe la posibilidad de que los nombres con que se designa cada grabado esté relacionado, no sólo con la forma, sino con la disposición e isometrías que presenta, aunque no tenga porque corresponderse ni con la idea ni con el nombre que un matemático occidental le daría en base a los grupos de simetría del plano. Algo así podría quedar claro si la nomenclatura local distinguiese entre dos diseños elaborados con la misma figura elemental, pero desarrollados de modo distinto. Tomemos para discutir el caso tres diseños que no son toraja (Fig. 2.1):

⇓ ⇑ ⇓ ⇑ ⇓ ⇑ ⇓ ⇑ ⇓ ⇑ ⇓

⇐ ⇒ ⇐ ⇒ ⇐ ⇒ ⇐ ⇒ ⇐ ⇒

⎛ ⎞ ⎝ ⎠ ⎛ ⎞ ⎝ ⎠ ⎛ ⎞ ⎝ ⎠ ⎛ ⎞

Figura 2.1 Tres diseños unidimensionales (no son toraja).

El primero y el segundo se han construido con el mismo motivo fundamental, pero siguiendo patrones estructurales diferentes. Ambos permanecen invariantes bajo reflexiones verticales y giros de 180º. Se distinguen en la simetría horizontal que posee el segundo y de la que carece el primero. Para el tercer diseño se ha tomado otro motivo, pero estructuralmente es idéntico al primero por lo que respecta a su riqueza isométrica. Si los grabadores toraja opinasen que el primero y el tercer de esos diseños tienen algo en común, habría que averiguar qué es lo que ven de común en ellos y si el nombre que les dan manifiesta esa similitud o, en su caso, diferencia. En tal caso podríamos pensar que se enfatiza la semejanza estructural más allá de la figurativa.

También debemos considerar la situación opuesta: ¿considerarían los grabadores toraja que los dos diseños de más abajo (Fig. 2.2) son diferentes? En caso afirmativo, ¿qué es lo que los diferencia y cómo lo expresan?

˥ ˥ ˥ ˥ ˥ ˥ ˥

L L L L L L L

Figura 2.2 Dos diseños unidimensionales (no son toraja).

¿Cuál sería la respuesta de los artesanos toraja a cuestiones planteadas desde la filosofía *constructivista*? Por ejemplo: ¿consideráis que las volutas labradas en la madera acaban o comienzan en un punto límite? ¿Acaso se trata de un círculo? Ya se trate de uno u otro caso, ¿los consideráis determinables y/o localizables tras un número finito de giros? Si la respuesta a esta última pregunta es negativa, ¿significa esto que, de hecho, ese punto o círculo no existen?

Pese a que el trabajo de los artesanos no se ajuste a la práctica matemática del naturalismo kitcheriano, constituye una práctica en la que conocimiento matemático puede estar presente. Se hace difícil creer que los grabados puedan ser tal y como son sin usar matemáticas, por lo que aventuro la posibilidad de que la actividad práctica llevada a cabo por sus autores constituya un ámbito tanto de aplicación como de generación de conocimiento matemático.

Que las matemáticas usadas por los toraja (si resulta que al final esto es así) sean un producto social y cultural no está claro por ahora, pero puede intuirse la posibilidad de una respuesta afirmativa dada la importancia de la función social y cultural que desempeña su obra según se ha expuesto en el capítulo 1. Otra cosa es de dónde provienen y cómo se han podido elaborar estas matemáticas. No es imposible que parte de ellas hayan venido de fuera, de lo que en occidente se llama Dibujo Técnico, y que llegaran a la región de Tana Toraja con la colonización holandesa. Pero del hecho que haya casas y graneros adornados mucho antes de que los holandeses penetrasen en la región debemos pensar que, al menos una parte de ese conocimiento matemático (si es que existe) sea autóctono. De ser así, un tema interesante y que sobrepasa el alcance de esta investigación sería dilucidar qué conocimiento es local y cuál es extranjero.

Sierpinska y Lerman (1996) plantean una dicotomía entre los programas euclidianos y los casi empíricos o sociológicos con relación a la tarea de los profesores de matemáticas. En el segundo se enmarca este trabajo. Las matemáticas a las que nos referiremos aquí son aquellas que se identifican con la práctica y que Sierpinska y Lerman agrupan bajo el epígrafe *matematizar*. En este sentido, seguimos el camino que Bishop señala con los seis universales de actividad matemática: contar, localizar, medir, diseñar, jugar y explicar (Bishop, 1991). Si en una determinada práctica se realiza alguna de esas actividades, dicha práctica puede albergar conocimiento matemático que, de ser así, se explicitaría en la forma en que los autores de esa actividad cuentan, localizan, miden, diseñan, juegan o explican.

De ahí el sentido de la búsqueda de matemáticas extramuros. La escuela no es el único foco de conocimiento matemático. Buscar matemáticas no se reduce a examinar expresiones formales de teoremas que sus autores han demostrado mediante razonamientos lógicos impecables, sino que debe ampliarse a la observación del uso de matemáticas para resolver problemas en ámbitos no formalizados y más cotidianos como, por ejemplo, el laboral. La identificación y documentación de este conocimiento, conocer hasta qué punto quienes lo usan son conscientes de poseerlo y emplearlo, cómo lo han adquirido y en qué medida la práctica y su contexto lo han influenciado son cuestiones clave del aprendizaje matemático.

Mi educación fue platónica, conductista y estructuralista. Tener que enseñar matemáticas me hizo constructivista como educador, pero todo ello forma parte de las matemáticas. Si alguien se inclina por un camino más que por otro se debe también a lo que se dedica.

Aún considerando varias vertientes, la perspectiva filosófica de las matemáticas desde la que se enfoca este trabajo considera las matemáticas como un producto social y cultural que, además de ciencia sistemática y deductiva, es también aquel 'algo más' al que se refería Polya, es decir, una ciencia con una faceta experimental. Los problemas son previos a los conceptos, teoremas y axiomas que más tarde regirán futuros desarrollos matemáticos. Las matemáticas las hacen las personas y no son un conjunto platónico de ideas que los mortales descubrimos poco a poco a lo largo del tiempo. Esta investigación se enfoca desde el Constructivismo Social de Ernest, pero considerando sus raíces sociales y culturales y extendiéndolo más allá de las fronteras académica y occidental. Podríamos llamarlo *Constructivismo Social Etnomatemático*.

2.2 FILOSOFÍAS DEL APRENDIZAJE

> Mathematics educators are generally less interested in studying grounds for the validity of mathematical knowledge than in explaining the processes of grow of mathematical knowledge... Mathematics educators are also interested in observing and explaining the processes of mathematical discovery in the making[3], both in expert mathematicians and students. Ultimately, as practitioners, they research ways of provoking such processes in teaching' (Sierpinska y Lerman, 1996: 829).

Es verdad que el interés de los educadores matemáticos se centra en los procesos de aprendizaje y enseñanza, pero difícilmente podrá alguien provocar procesos semejantes en sus estudiantes si no sabe cómo identificar matemáticas, dónde localizarlas y comprender lo identificado. Y los sujetos de interés del educador matemático no tienen porqué reducirse a matemáticos y estudiantes, sino ampliarse a todo aquel participante en prácticas en las que esté involucrado el conocimiento matemático, sea en la forma que sea. Esto supone considerar sujetos ajenos a su entorno académico y cultural.

Según Bruner (1966) el profesor debe animar a los estudiantes a descubrir por ellos mismos y su tarea consiste en traducir apropiadamente, esto es, de acuerdo con el estado de comprensión de los alumnos, la información que han de aprender. Estamos ante una perspectiva constructivista de la enseñanza, pero ante un aprendizaje estructural. Los

[3] ¿No recuerda esto a Polya? (la nota es mía).

aspectos constructivos señalados por Bruner se orientan hacia a la instrucción. Se preocupa más de cómo transmitir que de cómo se aprende.

El punto central del constructivismo, basado en ideas de Bruner y Piaget, es cómo aprende la gente. El aprendizaje se ve como un proceso mediante el que un individuo construye su conocimiento enfrentándose a problemas y retos de su entorno, no acumulando información ni gracias a capacidades innatas heredadas. Ahí ve Fischbein la conexión entre matemáticas y Psicología:

> To learn mathematics means to construct mathematics. Mathematical activity is essentially a constructive process. The student learns mathematics not by absorbing concepts, definitions, theorems and proofs but by constructing them trhough his or her own intellectual efforts. But individuals usually do not do all these things by responding to their own problems and by resorting to their own natural intellectual means. Our natural behavior is adapted to the concrete reality in which we live and not to formal conctructs governed by formal definitions and rules. ... What he or she gets by the constructive process is a personal involvement leading to a genuine insight, a genuine intuitive understanding of the respective concepts and procedures' (Fischbein, 1990: 7-8).

La enseñanza se convierte en ayuda al desarrollo de esa construcción. El profesor enseña a los estudiantes ayudándoles a desarrollar procesos cognitivos y a valerse por sí mismos. Les enseña a aprender en un contexto interactivo del que también él forma parte y en el que participa activamente.

De acuerdo con Miguel de Guzmán (1991) las Matemáticas son también una forma peculiar de explorar la realidad que permite relacionar diversas experiencias reales con áreas del conocimiento matemático: multiplicidad (número y aritmética), espacio (geometría), símbolos (álgebra), cambio y causalidad determinista (cálculo), incertidumbre en la causalidad múltiple e incontrolable (probabilidad y estadística), estructura formal del pensamiento (lógica matemática). La de M. de Guzmán es una clasificación de entornos matemáticos no muy diferente de la planteada por Bishop, aunque proviene 'de arriba', de las Matemáticas institucionalizadas y con mayúscula. Sin embargo, constituye una forma de exploración fundamental para la concepción constructivista de la educación matemática que enfatiza el sentido humanista de la asignatura y que permite liberar un poco a la actividad matemática del reducto académico. Tenemos ahí el vehículo que nos llevará a la construcción de aprendizaje:

> ... el principal objetivo de cualquier realización matemática, y también de las matemáticas escolares, es contribuir a dar sentido al mundo que nos rodea. En este contexto la noción constructivista une la concepción de la naturaleza de las Matemáticas con la concepción de los procesos de aprendizaje' (Armendáriz, Azcárate y Deulofeu, 1993: 88).

Eso sólo es posible si la filosofía matemática del profesor considera su materia como una creación humana para interpretar el mundo y no un conjunto platónico de objetos y teoremas descubiertos a lo largo del tiempo. Partiendo como partimos del Constructivismo Social ampliado (etnomatemático) de Ernest, estamos en el buen camino.

2.2.1 Individuo, sociedad, cultura y procesos de aprendizaje

Las personalidades más influyentes en la concepción constructivista del desarrollo cognitivo han sido Piaget y Vygotsky. La epistemología genética de Piaget (1970) tiene como objeto de estudio el desarrollo cognitivo del niño. Su sistema se basa en estructuras cognitivas correspondientes a diferentes estadios de desarrollo. Piaget distingue cuatro estadios que van desde el más elemental, la etapa senso-motriz, hasta la más abstracta en la que tienen lugar las operaciones formales. Dichas estructuras cognitivas cambian durante el proceso de adaptación en el que se asimila y acomoda: asimilar supone interpretar los acontecimientos mediante estructuras cognitivas ya existentes; acomodar significa cambiar una estructura para dar sentido al entorno. El desarrollo cognitivo consiste en una constante adaptación al entorno, en una sucesión de asimilaciones y acomodaciones que, pese a corresponder se con determinados intervalos de edad del niño, pueden variar entre individuos.

La piagetiana es pues una perspectiva constructivista del aprendizaje que puede facilitarse proporcionando actividades y situaciones que pongan a los aprendices ante retos que requieran asimilación y acomodación. Cada una de estas actividades deberá tener en cuenta el estadio de desarrollo cognitivo del niño en relación a su madurez.

Sin embargo, Piaget no da un papel suficientemente relevante a quienes forman parte del entorno del niño y se ocupa más del individuo. En cambio, para Vygotsky (1978), la interacción social juega un papel fundamental en el desarrollo cognitivo. El grado de habilidad que el niño puede desarrollar con la ayuda o guía amplía el alcance de lo que puede conseguir por sí solo dando lugar a la llamada *Zona de Desarrollo Próximo* (ZDP). Un completo desarrollo cognitivo no puede lograrse sin interacción social[4].

Según Vygotsky, los conceptos científicos se construyen de arriba a abajo, al contrario de los conceptos espontáneos, que se crean de abajo hacia arriba. Los conceptos científicos, elaborados y refinados a lo largo de la historia, no son interiorizados por el individuo fácilmente, sino que se transforman en procesos mentales ínter actuantes con

[4] Aplicando este principio a la presente investigación, puede afirmarse que: (1) una investigación seria no puede pasar por alto la interacción social sin riesgo de obtener interpretaciones incompletas; (2) la ZDP también afecta al investigador, ya que ‘con ayuda o guía amplía el alcance de lo que puede hacer por sí solo’.

funciones intelectuales. Al principio son abstractos, pero mediante la aplicación a fenómenos situados adquieren significación. En este sentido su desarrollo es descendente. En cambio, los conceptos espontáneos se construyen desde abajo y ligados a las situaciones, son ricos en significado, pero demasiado locales y desligados unos de otros[5].

Las investigaciones sobre cognición llevadas a cabo antes del último cuarto del siglo XX tuvieron lugar en el contexto de laboratorio, pero desde entonces se ha ido dando una importancia creciente al papel jugado por el contexto en las actividades cognitivas: ‘La influencia de observaciones inter culturales ha puesto de manifiesto como gente que muestra dificultades para lograr una habilidad particular en el laboratorio es capaz de evidenciarla de forma espontánea en sus actividades cotidianas’ (Rogoff, 1984). ¿Cómo se explica esto?

2.2.2 El conocimiento matemático situado

El estudio en el laboratorio aísla al individuo de su entorno, tanto físico como social, y, a menudo, cultural. Tampoco tiene en cuenta la importancia del contexto particular de los problemas que plantea. Rogoff (1984), Lave (1988) y Wenger (2001), entre otros, han puesto de manifiesto el papel clave que el contexto y la práctica cotidianas juegan en el desarrollo cognitivo. Rogoff (1988) concreta el carácter crucial que diferencia los procesos mentales ligados a una práctica determinada de aquellos ligados al ámbito académico propios del laboratorio:

> En las situaciones cotidianas, el pensamiento está al servicio de la acción. En lugar de usar perspectivas formales para resolver problemas, la gente se las ingenia para encontrar soluciones oportunas y satisfactorias. En otras palabras, el pensamiento cotidiano no es ilógico o poco riguroso, sino que es sensible y efectivo en el manejo del problema práctico. En muchos casos, el enfoque más sistemático y preciso puede muy bien resultar en una acción práctica menos efectiva.... La resolución efectiva de problemas prácticos puede provenir del uso de conocimiento tácito disponible en el escenario relevante más que de la confianza en proposiciones explícitas. (Rogoff, 1984: 7).

O sea, que la solución teórica de un problema práctico suele no ser la mejor solución práctica del problema. La solución práctica debe ajustarse al contexto de la situación real. En los problemas y actividades prácticas la efectividad es objetivo primordial. He aquí uno de los aspectos que la investigación restringida al laboratorio ha pasado por alto. El otro es que en les prácticas desarrolladas hasta ahora en el laboratorio o en la escuela la sociedad y la cultura apenas han estado representadas.

---

[5] Quizá sea éste el mayor problema de conocimiento situado, avanzar y trascender su propia ‘situacionalidad’. ¡De ahí la necesidad de la escuela!

Lave traslada la investigación al mundo cotidiano para explicar cómo conceptos y habilidades matemáticas dependen de la interacción del individuo con el entorno social y cultural en el que se desarrolla la actividad práctica:

> La cognición observada en la práctica cotidiana se distribuye extendiéndose, no partiéndose, entre la mente, el cuerpo, la actividad y los entornos organizados culturalmente (en los que se incluyen otros actores). El apoyo empírico para esta proposición ha surgido de investigaciones recientes que exploraban la práctica de las matemáticas en una serie de entornos comunes. Estos estudios convergen hacia la idea de que la actividad matemática puede adoptar formas diferentes en situaciones diferentes (Lave, 1988).

Según Lave (1990), el contexto, la interacción social y la cultura en la que se desarrolla la actividad son aspectos cruciales del aprendizaje. El conocimiento es *situado* y no debería presentarse de manera abstracta desligándolo de sus componentes decisivos como solía hacerse hasta hace poco en las aulas. Evidentemente, los antecedentes de la teoría del conocimiento situado hay que buscarlos en los trabajos de Vygotsky, pero Lave y, sobre todo, Wenger (1999) concretan más el papel de la interacción social ligándola al contexto propio de la actividad. Así surge el concepto de comunidad de práctica. Dentro de una sociedad uno puede identificar grupos de gente formados para llevar a cabo una misma tarea. Quienes integran esos grupos comparten unos métodos y conocimientos que los caracterizan y distinguen de otros. Una *comunidad de práctica* consiste en un grupo de personas que interactúan y se comprometen en realizar una práctica. Tres son los aspectos por los que se caracteriza una comunidad de práctica: el compromiso mutuo que determina la interacción de los miembros de la comunidad, la empresa común que pone a la gente a trabajar con un objetivo y el continuo desarrollo y mantenimiento del repertorio compartido de procedimientos, técnicas, argot, herramientas, formas, símbolos, acciones, conceptos, etc. (Wenger, 1999).

2.2.3 Los artefactos como mediadores de la cognición

Cuando hablemos de ‘artefacto’, ‘herramienta’, ‘utensilio’ nos referiremos a objetos físicos que permiten a quien los usa dar forma al producto de su actividad, como, por ejemplo, una regla o un compás. No caben bajo esa consideración los sistemas simbólicos como los sistemas de cálculo o notación simbólica. ‘La historia socio cultural proporciona herramientas para la actividad cognitiva y para las prácticas que permiten alcanzar las soluciones apropiadas a los problemas’ (Rogoff y Lave, 1984: 4).

‘Las herramientas son la base para llevar a cabo la actividad socialmente organizada que, a su vez, es la base para el desarrollo de nuevos funcionamientos mentales y actividades en el mundo' (Clancey, 1995). Además, modelan y permiten la continuidad o evolución de un modo concreto de comprender el mundo. Abreu señala su valor en el escenario donde tienen lugar las interacciones cara a cara, esto es, en micro-contextos: 'Sin duda las herramientas son uno de los aspectos más importantes del macro-contexto y deben tenerse en cuenta para comprender las acciones en micro-contextos' (Abreu, 2000: 4).

Desde finales de la década de los ochenta muchos psicólogos evolutivos han mostrado un creciente interés en el estudio de la cognición como actividad en los contextos socio culturales (Cole, 1995; Lave, 1988; Saxe, 1990; Rogoff, 1990; Werstch, 1991). Es en tales contextos donde los recursos culturales locales, como por ejemplo los artefactos para dibujar o medir, articulan el pensamiento de quienes los manejan. Esto es algo que, al menos desde una perspectiva cognitiva vygotskyana, puede interpretarse como que el pensamiento de los usuarios está mediado por las herramientas de las que les provee su cultura. El estudio del aspecto cultural del contexto ha mostrado lo acertada que es dicha interpretación. Algunos autores incluso consideran que este papel mediador se ha convertido en un 'sello de las teorías situadas de la cognición' (Pontecorvo, Resnick y Säljö, 1997).

Entre las unidades de análisis señaladas por Engeström y Cole (1997) respecto a la práctica está la idea de acción mediada desarrollada por Werstch y otros colegas (1995) para el estudio de la investigación socio cultural: 'Instead of assuming that individuals, acting alone, are the agents of actions, the appropriate designation of agent is "individual operating with mediational means.' (Wertsch, 1995: 64). Los agentes de las acciones se conciben como individuos que operan con medios 'mediadores' que conforman el funcionamiento mental y la acción como un aspecto característico de un marco socio cultural (Werstch, 1995: 64). Los individuos y los medios son el centro del enfoque, ya que interesa la forma en que ambos interactúan, es decir, cómo los artefactos median en la cognición matemática de sus usuarios, cómo influyen en su aprendizaje, y cómo su pensamiento condiciona las decisiones sobre si usar o no ciertos artefactos.

Wertsch amplía su idea especificando cuáles son los componentes de análisis de la acción: acto, escena, agente, agencia y propósito. De hecho, el propósito es un componente ya indicado por Bishop con relación a la abstracción de una actividad. El propósito de una acción, lo que se quiere hacer, es el componente principal de toda acción o actividad humana y deberá jugar, por tanto, una papel muy relevante a la hora de analizar una práctica.

Analizando los rasgos físicos de una herramienta, porqué se construye, cuál es su función, cómo se maneja y cuáles son los productos de su empleo nos acercamos a la mente del usuario: 'el análisis de herramientas específicas para representar ideas matemáticas proporciona una útil percepción del modo en el que éstas estructuran la forma de pensar'

(Abreu, 2000: 6). Abreu (op.cit.) también presenta una forma posible de estructurar el análisis de las herramientas como mediadoras cognoscitivas. Desde la perspectiva cultural del contexto sugiere analizar el modo en que:

(a) Las herramientas culturales están lógicamente organizadas.
(b) Herramientas específicas limitan el aprendizaje y resolución de problemas.
(c) Prácticas sociales específicas exigen el uso de ciertas herramientas.
(d) Se utilizan antiguas herramientas en contextos nuevos.

Este modo de análisis puede resultar de gran utilidad a la hora de estudiar el papel de las herramientas del objeto de este trabajo, qué conocimiento matemático se deriva de ellas y relacionarlas con la forma de pensar de quienes las usan.

2.2.4 Filosofía del aprendizaje desde la que se enfoca la investigación

Las razones por las que la educación matemática, concretamente los procesos de aprendizaje, toca a este trabajo ya han sido expuestas anteriormente y hacen especial referencia a la interacción entre la praxis o tarea práctica propia del artesano y los procedimientos e ideas matemáticas usadas por él, explícita o implícitamente. Por tanto, tanto el contexto como la ejecución práctica del trabajo son rasgos primordiales que deben tenerse en cuenta en el análisis de posibles situaciones de aprendizaje.

Sólo es posible abordar semejante tarea desde la perspectiva constructivista del aprendizaje. Y más concretamente, desde la perspectiva del *aprendizaje situado* que, lejos de pasar por alto los elementos del contexto cultural y práctico propios de la actividad como son las estrategias seguidas en la elaboración del producto y las funciones y el manejo de utensilios, focaliza en esos factores el análisis cognoscitivo de cada situación.

2.3 FILOSOFÍA DE LA PRÁCTICA

2.3.1 La práctica

Preguntándose por el significado de 'situación', idea fundamental en la perspectiva del conocimiento situado, Engeström y Cole supeditan este concepto a la idea de práctica: 'So the notion of situadness leads to the primacy of practice- a whole new landscape for the study of cognition' (Engeström y Cole, 2002: 301). Scribner entiende como práctica:

> ... una actividad construida socialmente y organizada en torno a ciertos objetos comunes; una práctica comprende dominios de conocimiento necesarios y tecnologías determinadas que incluyen sistemas de símbolos. Una práctica se compone de acciones recurrentes e interrelacionadas dirigidas a objetivos; los que participan en una práctica dominan su conocimiento y tecnología y adquieren las habilidades mentales y manuales necesarias para aplicarlas en la consecución de los objetivos de las acciones.' (Scribner, 2002: 293)

He ahí los componentes fundamentales de la práctica: autores, procedimientos, tecnología y objetivo. Se echa en falta en esta concepción considerar el lenguaje de la práctica, tanto aquel con el que los autores se comunican entre sí como el propio, característico y exclusivo de su actividad. Participar en la práctica supone adquirir los conocimientos y habilidades necesarias. Para ello es imprescindible llevar a cabo un proceso de aprendizaje vehiculado, esto es, mediado, por las acciones, procedimientos, artefactos y lenguaje simbólico utilizados. De ahí el interés de la práctica como objeto de estudio de procesos de aprendizaje. En este sentido cabe destacar la adquisición de 'habilidades mentales' de las que habla Scribner. Dichas habilidades en su conjunto pueden muy bien constituir un *sistema conceptual* asociado a la práctica en cuestión.

Nuestro concepto de práctica se enmarca en uno más general como es el contexto socio cultural (académico, formal, cotidiano, artesano, etc.) en el que se desenvuelve y constituye. En toda sociedad surge una cultura en la que se desarrollan prácticas con el fin de satisfacer las necesidades de la gente. Cada práctica se compone de situaciones o problemas que resolver y en cuya resolución a menudo es necesario superar otras situaciones o problemas auxiliares. Y así sucesivamente hasta completar el objetivo propuesto por el ámbito socio cultural:

Situación Principal > Sit. Aux. [1] > Sit. Aux. [2] > ... > Sit. Aux. [n] > Objetivo

Esa estructura de resolución se parece mucho al modo en que en matemáticas se resuelven los problemas, delegando o reduciendo lo difícil a lo fácil, lo complicado a lo sencillo. Además de manifestar la estructura lógica interna de la práctica, esa estructura puede ser de gran utilidad para la investigación puesto que es en cómo se plantean y se resuelven las situaciones de la práctica donde uno espera hallar matemáticas.

Por tanto, entendemos una práctica como una actividad socio cultural en la que se resuelven situaciones con un objetivo bien determinado y por medio de unos conocimientos necesarios y específicos.

2.3.2 Soluciones y formulaciones matemáticas de situaciones en una práctica

¿Qué es una práctica matemática? En una práctica puede haber situaciones que nada tengan que ver con las matemáticas. No hablaremos pues de práctica matemática, sino de situaciones matemáticas de una práctica. La cuestión es pues: ¿qué hace que una situación merezca el calificativo de matemática? Recordando que las matemáticas las hacen las personas, son las personas las que hacen matemática una situación al resolverla matemáticamente. ¿Y qué tiene que hacer una persona para resolver matemáticamente una situación?

Como se ha manifestado (Apdo. 2.1.4) la filosofía matemática que orienta este trabajo es la del *Constructivismo Social* de Ernest ampliado con la perspectiva *etnomatemática* de D'Ambrosio. Esta filosofía 'exterior' enfatiza el carácter social y cultural de la disciplina, pero desde el punto de vista 'interior' otorgamos una valor primordial al carácter experimental de las matemáticas, aquel 'algo más diferente de la ciencia rigurosa de Euclides' aludido por Polya (1988). Gracias a este punto de vista tiene sentido plantear la idea de situación matemática en una práctica.

Hay quienes opinan que atravesar un umbral o esbozar a mano alzada el cruce de dos carreteras ya son situaciones matemáticas porque conllevan conceptualizaciones y representaciones espaciales propias de las matemáticas y que, por tanto, quienes así actúan están planteando y resolviendo matemáticamente una situación. Pero si así fuese esta Tesis no tendría ningún sentido. ¡Toda situación sería matemática!

En la resolución matemática de una situación se tiene que ser consciente de lo que se hace y porqué. Hay que pensar, pero no de cualquier forma. Lo primero es plantear matemáticamente la situación. Y eso se hace transformando el interrogante del problema a una cuestión simple, pero primordial en matemáticas, y que acostumbra a no ser tan fácil de responder como parece de entrada:

¿Cuánto?

Luego hay que responderla en base a referencias lo más objetivas, rigurosas e impersonales posibles. Y si la respuesta es independiente de la misma situación en la que se plantea la cuestión, mejor que mejor. Esto aleja la resolución del carácter artístico y del gusto y habilidad personales. En cambio, un enfoque tecnológico nos acerca a las soluciones matemáticas con sus herramientas y técnicas e impersonales, rigurosas, objetivas y, a menudo, cuantificadas. Aunque para nosotros el rasgo fundamental de las matemáticas resida en la cuantificación, esto no significa que la respuesta a la pregunta deba ser absolutamente precisa o darse de una determinada forma. Recordemos que Euclides no define el ángulo recto como aquel que tiene 90º, sino como el que divide uno llano en dos iguales. También puede definirse la perpendicularidad en términos de simetría. Un segmento es ortogonal a otro si la reflexión que tiene como eje de simetría al primero superpone el reflejo del segundo sobre sí mismo (Fig. 2.3).

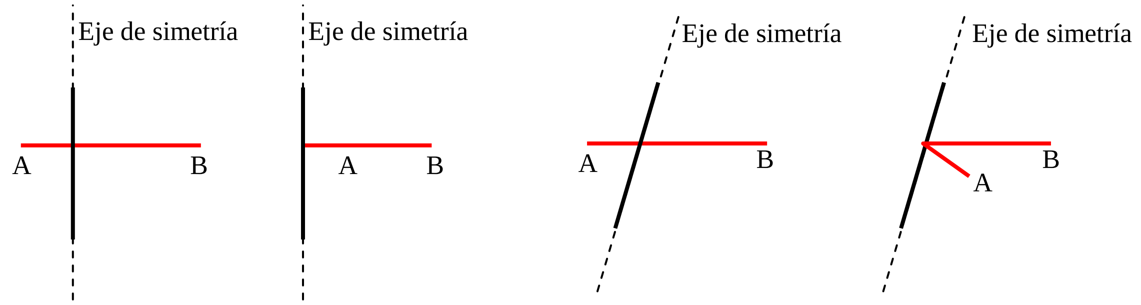


Figura 2.3 Perpendicularidad y simetría

Aquí la cuantificación está presente en la coincidencia del reflejo sobre sí mismo. Esto no debe incitarnos a pensar que las situaciones y soluciones dignas de llamarse matemáticas deben ser complicadas. Hay situaciones y resoluciones matemáticas pueden resultar sencillas y cotidianas (Tabla 2.1).

Soluciones matemáticas
Contar con los dedos las siete cabezas de un rebaño.
Atravesar una puerta por su punto medio argumentando que esto es así gracias a la equidistancia visual con la que se perciben sus dinteles.
Llamar *Dosquinas* a esas figuras dibujadas a mano alzada porque poseen dos esquinas: ⊥ ↓ [N
Decidir que e^{π} es mayor que π^{e} comparando las expresiones decimales de los resultados obtenidos en una calculadora.
Pese a trazar a mano alzada la mediatriz de un segmento ofrecer una explicación que justifique la corrección del resultado y que lo haría perfecto en caso de disponer de la tecnología apropiada.
Decidir que el punto doblado de un cordel tirante determina su punto medio si ambos extremos coinciden.

Tabla 2.1

La solución matemática formal e institucional se caracteriza por ser:

- Rigurosa: calificable como correcta o incorrecta.
- Reproducible en otras situaciones similares generando el mismo resultado.
- Objetiva (independiente del autor).
- Justificada mediante la demostración argumentada en la lógica formal.

Como se ve, en la idea de solución matemática defendida aquí la demostración formal no es imprescindible. De hecho, la demostración formal y rigurosa no ha estado siempre presente en actividades que los historiadores de las matemáticas consideran como matemáticas. Grandes matemáticos como Fermat no se caracterizaron precisamente por su rigor.

Nuestra perspectiva matemática otorga un papel muy relevante al carácter experimental y a la lógica deductiva de la que hablamos (Apdo. 2.1.1, p. 42), por lo que modificamos ese último aspecto:

- Justificada mediante la argumentación lógico-deductiva y en la que la experimentación puede jugar un papel preponderante.

En esa línea de pensamiento Davis y Hersh (1988) distinguen entre *matemáticas analógicas* y *matemáticas analíticas*. Las matemáticas analógicas, de verificación es experimental, son fáciles, rápidas, no utilizan, o apenas lo hacen, símbolos propios del ámbito académico. Se basan en la intuición, la comprensión y el ‘ojo clínico’, estando ‘al alcance de casi todos quienes se desenvuelven en un mundo de relaciones espaciales y entre la tecnología cotidiana’ (Davis y Hersh, op. Cit.: 223). Las matemáticas analíticas, de verificación razonada, son difíciles y fatigosas, con predomino de lo simbólico y para las que se necesita una preparación específica. Su fiabilidad se basa en la verificación de la comunidad matemática: ‘... mientras que tal vez sea imposible verificar intuiciones ajenas, sí es posible, aunque difícil, comprobar sus demostraciones’ (Davis y Hersh, op. Cit.: 223). Los autores ofrecen diversos ejemplos de cada tipo y comparan unas con otras:

> No existen razones apriorísticas para preferir uno de los dos tipos por lo que a precisión y facilidad de obtención de resultados se refiere. En los casos en que se disponga de soluciones de ambos tipos es muy de desear que ambas concuerden. ... En el mundo real, cuando sea preciso construir modelos o sistemas materiales, las soluciones analíticas, por buenas que sean, han de ser cuidadosamente ajustadas.’ (Davis y Hersh, op. Cit.: 225)

Davis y Hersh se dan cuenta de que en el mundo real y práctico priman intereses distintos a los del laboratorio matemático. Algo, por otra parte, destacado ya por Rogoff (véase el Apdo. 2.2.2, p. 56). Vale la pena celebrar la coincidencia entre filósofos, matemáticos y psicólogos del aprendizaje.

Además del papel destacado que, según hemos mencionado antes, juegan las herramientas y su manejo, y puesto que una solución no puede ser matemática sin una justificación de su resultado, los componentes fundamentales de toda explicación, es decir, el lenguaje, la argumentación y los conceptos que en ellos se manipulan, constituyen otros indicativos a rastrear a la hora de identificar matemáticas.

2.3.3 Localización de matemáticas

¿Dónde hay matemáticas? ¿Dónde se hacen? Desde el punto de vista tradicional, a quien busque matemáticas se le recomendará visitar escuelas, universidades, bibliotecas y, quizá, preguntar a las autoridades académicas competentes, pero los estudios interculturales han dejado claro lo corto de miras que es ese punto de vista. Puesto que las matemáticas son más que teoremas y demostraciones y hay que tener en cuenta su carácter experimental, el campo de búsqueda es vasto.

Según los historiadores la geometría surgió alrededor de la desembocadura del río Nilo, en Egipto, y como respuesta a los estudios de prevención de las crecidas que inundaban las plantaciones de los márgenes de la desembocadura. Había que resolver problemas en los que se precisaba medir y calcular. Sea o no un mito, lo importante de la leyenda es que muestra cómo comienza la actividad matemática. Uno empieza a hacer matemáticas cuando mide, calcula y basa sus decisiones en esas medidas y cálculos, no en signos que ve en las nubes o en las entrañas de un animal sacrificado. Las medidas y los cálculos son referencias importantes porque son objetivos, independientes de quien las toma y los efectúa. Si a partir de ellos los egipcios de hace milenios podían prever lo que iba a suceder, cuándo iba a suceder y, una vez ocurrido el desastre, restituir las lindes de las zonas anegadas a sus dueños, nos daremos cuenta de la extraordinaria importancia y poder de la geometría. Desde luego, sería ingenuo pensar que solamente en Egipto se realizaban tales actividades.

Hace ya seis décadas, Murdoch (1945) habló en un trabajo titulado *El común denominador de las culturas* de productos culturales comunes a todos los pueblos. A partir de ese trabajo y de estudios interculturales llevados a cabo durante el último cuarto del siglo XX por Ascher (1984), Gay y Cole (1967), Gerdes (1986), Lancy (1983), Lean (1986), Oswalt (1976) y Zalavsky (1973), entre otros, y él mismo, Bishop (1991) establece seis universales de actividad matemática comunes en todas las culturas: contar, medir, localizar, diseñar, jugar y explicar. Por tanto, considerando las matemáticas como un producto cultural, tiene sentido plantearse la posibilidad de que el carácter de ese producto difiera de una cultura a otra (Bishop, 1991).

Todas las culturas han desarrollado un lenguaje con el que comunicarse, pero sus símbolos, gramática, sintaxis y modos de escritura son bien diferentes entre muchas de ellas.

Los dos primeros universales de Bishop son fundamentales, sin ellos los otros resultan prácticamente imposibles. Contar y medir han tenido y tienen una importancia capital. Los individuos de la gran mayoría de las culturas se han iniciado en las matemáticas aprendiendo a contar y medir usando partes de su propio cuerpo. De hecho, estos dos universales forman la pareja básica en la que encuentran cabida el número y la cantidad, ya sea discreta o continua. Localizar y diseñar se relacionan con la concepción del espacio y la geometría. Jugar y explicar remiten más a la comunicación y a la relación social. La explicación es esencial para saber el porqué de las cosas, para comunicar ideas y para justificarlas. Por tanto, estos seis universales pueden agruparse en tres parejas relacionadas con el entorno social (jugar, explicar), espacial (localizar, diseñar) e individual (contar, medir).

Los universales de Bishop proporcionan una primera respuesta a la cuestión de dónde localizar matemáticas. Puede haber matemáticas allí donde se lleve a cabo alguna de esas seis actividades. En contra de esta afirmación puede argumentarse que a menudo se realizan actividades en las que se actúa de forma mecánica e inconsciente. En efecto, es así, pero si se profundiza en el análisis hasta conocer cómo se ha aprendido a actuar mecánicamente y cómo se justifica el resultado que se obtiene, llegaremos hasta un punto en el que alguien sí que tuvo que ser consciente de lo que hacía y de porqué y cómo llegó a idear aquello que se aplica.

2.3.4 Diseñar: una actividad matemática universal

La regularidad y el orden son rasgos comunes de los productos humanos ornamentados que cuando se observan en la naturaleza a menudo son tomados como indicios de la existencia de una mente responsable de establecer ese orden (Gombrich, 1984). Los diseños abstractos y geométricos se usan a menudo en la ornamentación porque son infrecuentes en la naturaleza, como consideran Boas (1986) y Gombrich (1984), pero la causa podría estar también en el hecho de que las abstracciones, simplificaciones de la realidad, sean más fáciles de crear con tecnología sencilla. Es difícil pensar en un objeto ordenado, riguroso, regular, simétrico y equilibrado sin un plan para construirlo, sin una intención de hacerlo de ese modo y sin papel alguno de las matemáticas.

Como ya se ha observado, gran parte de la ornamentación arquitectónica toraja procede de abstracciones de formas naturales a las que la cultura otorga significados concretos. Es razonable esperar encontrar cierta actividad matemática más relacionada con el proceso de la talla que con su producto.

Los ornamentos de las fachadas de las casas y graneros tradicionales toraja remiten directamente a uno de los seis universales de actividad matemática propuestos por Bishop en 1991: diseñar. Que esta actividad está relacionada con ideas matemáticas ya se aprecia en las acepciones que el verbo *diseñar* y el sustantivo *diseño* encontramos en los diccionarios (Tabla 2.2).

	Pompeu Fabra (1991)	D.R.A.L.E. (1992)	Seco, Andrés, Ramos (1999)
Dissenyar	Fer el disseny d'alguna cosa.	Hacer un diseño.	1. Hacer el dibujo o boceto de algo que ha de fabricarse después. 2. Idear o dar forma a algo, esp. a un proyecto.
Disseny	1. Dibuix en què s'assenyalen tan sols línies principals, els contorns, d'un objecte. 2. Representació gràfica i càlcul de les dimensions d'un objecte a fi de fer-ne possible la fabricació. 3. Conjunt de qualitats formals d'un objecte, esp. fabricat en sèrie, relatives a la seva estètica i utilitats.	1. Traza, delineación, de un edificio o de una figura. 2. Descripcción o bosquejo de alguna cosa, hecho por palabras. 3. Disposición de manchas, colores o dibujos que caracterizan exteriormente a diversos animales o plantas. 4. Proyecto, plan, diseño urbanístico. 5. Concepción original de un objeto u obra destinados a la producción en serie. 6. Forma de cada uno de estos objetos.	1. Acción de diseñar. Tb su efecto. También la actividad correspondiente.

Tabla 2.2

Bishop considera que la estructuración del espacio ha sido muy importante en el desarrollo de ideas matemáticas y distingue dos tipos muy diferentes de estructuración que originan diferentes tipos de ideas geométricas: localizar y diseñar. Si la actividad de localizar destaca los aspectos topográficos y cartográficos del entorno, la de diseñar trata de las conceptualizaciones de objetos y artefactos y conduce a la idea fundamental de forma (Bishop 1999: 42).

Un aspecto a tener en cuenta del diseño es el descrito en los diccionarios como fabricación en serie. Lo que se pretende con la fabricación en serie es la producción de grandes cantidades de productos idénticos, de repeticiones independientes del autor, o sea, la posibilidad de realizar copias lo más parecidas posibles de un original y un método que haga factible su sistematización. Cuando se contempla un casa toraja y se observa que no sólo la misma figura se repite idéntica en un mismo grabado, sino en otros grabados de otros puntos de la misma fachada e incluso en diferentes casas de distintos lugares, resulta muy difícil explicar esas copias sin un método riguroso y sistemático de elaboración.

Por otra parte, la definición del diccionario de lo que es un artesano también enfatiza este aspecto: ‘persona que ejercita un arte u oficio meramente mecánico’ (D.R.A.L.E., 1992). Evidentemente, una manera de lograr productos idénticos es mediante la repetición sistemática y rigurosa de las tareas con las que se produce uno, es decir, aplicar los mismos pasos a y con los mismos objetos. Volvemos otra vez a la importancia de la aplicación de estrategias y al uso de artefactos con funciones específicas que garanticen la homogeneidad de producción. El trabajo del artesano acabará siendo automático, pero en la eficacia de ese automatismo encontraremos los indicadores conocimiento y aprendizaje matemáticos.

De hecho, lo matemáticamente importante del diseño no está en el producto en sí, sino antes, en los esbozos previos, si los hay, de la decoración que va a tallarse en la madera y en el proyecto o representación mental que se tiene de lo que se va a hacer. En el caso de los artesanos toraja, dado que muchos de sus grabados están inspirados en formas naturales de su entorno, esto supone realizar abstracciones del mundo físico y real. Esto es lo que nos conduce a los ámbitos de las matemáticas y de la educación: ‘Lo que es importante para nosotros en la educación matemática es el plan, la estructura, la forma imaginada, la relación espacial percibida entre objeto y propósito, la forma abstracta y el proceso de abstracción.’ (Bishop 1999: 61).

Uno de los elementos que contribuyen decisivamente en ese proceso de abstracción y, por consiguiente, de generación de conocimiento es el manejo de herramientas. En sí mismas son objetos abstractos en cuanto a construcciones hechas con materiales (pertenecientes o no al entorno) que tienen una función bien determinada y que los relaciona con el producto de su uso, a menudo con un concepto matemático: regla y recta, compás y circunferencia, escuadra y perpendicularidad, etc. Volvemos a hacer hincapié en el papel de los artefactos como mediadores de la cognición en el curso de cualquier actividad práctica.

Se distinguen claramente tres niveles en la actividad de diseñar. Primero, la realización del producto, el grabado realizado por el artesano. Segundo, el esbozo o dibujo previo, ya sea hecho a lápiz sobre papel o con un programa informático en la pantalla de un monitor, que sirve para anticipar el resultado y ahorrar tiempo y material optimizando así la eficacia. Y tercero, la concepción previa al esbozo, la idea o representación mental de lo que quiere hacerse. Antes de hacerlo, hay que imaginárselo y querer hacerlo de una manera determinada. Se necesita tener un propósito y elaborar un plan. Esos tres niveles forman lo que podríamos llamar núcleo de la práctica artesana y se convertirán más adelante en el foco de interés de la investigación.

Ninguno de los seis universales de actividad matemática de Bishop, en mayor o menor grado, puede llevarse a cabo de un modo completamente independiente de los otros. Diseñar es un buen ejemplo de ello. No debería sorprendernos que para salvar la distancia que separa el proyecto del grabado terminado hiciese falta contar, localizar, medir, diseñar (dentro del diseño) y explicar. Un gran abanico de sectores en los que buscar matemáticas y aprendizaje matemático se abre ante nosotros.

2.4 ESTUDIOS TRANSCULTURALES

2.4.1 Éxitos y dificultades

Hace ya tiempo que la investigación antropológica puso de manifiesto que las diferencias culturales conducen a diferentes formas de pensar (Greenfield y Bruner, 1969), aunque los primeros estudios realizados en culturas no occidentales estaban demasiado influidos por la perspectiva local (occidental) como para que produjesen resultados mínimamente objetivos. En 1971, Michael Cole y otros colegas estudiaron la tribu *Kpelle* de África occidental sometiéndolos a unos tests de CI desarrollados en occidente y que no se habían adaptado, sino simplemente traducido. El resultado fue que las respuestas de los Kpelle a problemas de clasificación y que a ellos les parecían ingeniosas eran consideradas estúpidas por los investigadores occidentales y al revés. Los Kpelle asociaban las cosas con relación a la función que desempeñaban en lugar de hacerlo con relación a las categorías más abstractas de occidente. Por ejemplo, manzana se relacionaba con comida y no con fruta, una asociación sin duda derivada de la necesidad de conseguir alimento propia de la dura realidad cotidiana africana, muy distinta de la europea. Los resultados del estudio sobre los Kpelle mostraron la necesidad de ‘cuestionarnos si verdaderamente tiene sentido la simple traducción de pruebas occidentales para aplicarlas a otras culturas’ (Sternberg, 1999: 12).

Des de entonces han pasado varias décadas y, afortunadamente, los occidentales hemos aprendido de nuestros errores. Las cosas han cambiado hasta el punto de poder asegurar que, considerando la perspectiva etnomatemática de D'Ambrosio, los estudios cognitivos de Piaget, Vygotsky y otros fueron estudios 'etno' pese a realizarse en el seno de la propia cultura. Un carácter ‘etno’ intro cultural que plantea una pregunta interesante: ¿hasta qué punto es coherente investigar procesos de desarrollo cognoscitivo en una cultura ajena a la occidental mediante técnicas desarrolladas en occidente?

Desde la concepción constructivista del conocimiento, la investigación empírica sobre cultura y desarrollo cognoscitivo ha estado influenciada, principalmente, por Piaget y Vygotsky. Según Saxe (1991), los estudios inter culturales basados en el enfoque piagetiano han revelado semejanzas y diferencias inter culturales y la cuestión de si estas diferencias reflejan la inapropiada adaptación del método a diferentes contextos culturales o constituyen verdaderas diferencias de desarrollo conceptual ha sido objeto de considerable discusión. Además, la investigación piagetiana sobre interacción social se ha basado demasiado en el laboratorio y no ha tenido en cuenta la influencia del contexto en la interacción. Lo que sí parece haber confirmado la investigación inter cultural piagetiana es la tesis constructivista de la universalidad de los procesos autorregulados.

La observación de Saxe es compartida por otros autores como Greenfield y Bruner, quienes opinan que Piaget admite el papel de la influencia ambiental sólo por una cuestión de forma y que los experimentos permanecen confinados a niños de la Europa occidental, habitualmente, de clase media (Greenfield y Bruner, 1969). Esto explicaría la afirmación de Ginsburg (1986): 'Piaget nunca entendió realmente el papel del entorno sociocultural. Vygotsky, sí'. Por tanto, basar un estudio inter cultural en la perspectiva piagetiana supone pasar por alto un aspecto crucial como es el contexto ambiental.

Vygotsky no consideró directamente las prácticas culturales en sus escritos, pero los investigadores influenciados por él han subrayado el papel de les prácticas para analizar las relaciones entre cultura y cognición (Saxe, 1991). En este sentido, los estudios de aire vygotskiano mejoran los piagetianos, siempre y cuando pretendan abarcar los aspectos culturales que tanto Piaget como Vygotsky pasaron por alto.

Saxe se plantea un método de investigación para comprender mejor la interacción entre procesos socioculturales y de desarrollo cognoscitivo, una perspectiva que distingue e enfoque piagetiano del de Vygotsky tratando ‘el desarrollo cognoscitivo en un nivel de análisis en el que la actividad en el contexto sociocultural es un foco crucial y donde dichos procesos se analizan con relación a estas actividades contextualizadas. A diferencia del enfoque vygotskyano, ‘esta perspectiva se interesa por un análisis sistemático de la cognición matemática integrando desarrollo cognoscitivo y perspectivas socio históricas’ (Saxe, 1991: 14).

Lo que se quiere comprender es cómo los artefactos y las formas de organización social, ambos productos socio históricos, interaccionan y se relacionan con las construcciones intelectuales del niño. La solución propuesta por Saxe relaciona la construcción vygotskyana de los conceptos científicos y espontáneos: '... en la interacción entre el descenso de los conceptos científicos y el ascenso de los conceptos espontáneos podemos hallar enlaces intrínsecos entre el individuo y la historia social, una mezcla entre lo individual y lo histórico-social' (Saxe, 1991). Lógico y coherente es tener en cuenta aspectos como estos si la perspectiva matemática desde la que se enfoca una investigación se basa en caracteres sociales, culturales e históricos.

2.4.2 Crítica y contra crítica de las perspectivas anteriores

Bishop ha sido criticado por Zevenbergen en relación a la existencia de matemáticas en las prácticas culturales:

> Zevenbergen criticised Bishop for saying there is a lot of mathematics in traditional dance movement. She said: 'The dance movements have spiritual significance for locals. They are intended to be seen from a particular cultural perspective. Therefore it is an insult and culturally very insensitive, to impose the western mathematicians' perspective on them'. Highly questionable. But, nevertheless, needs careful consideration. (Clements, 2000, comunicación personal, Anexo A: I-II).

En mi opinión, una cosa es que tanto los gestos de los bailarines como sus movimientos y disposición en el espacio donde se desarrolla la danza sigan pautas de simetría y otra cosa es que una danza determinada resulte imposible sin ella. Una cosa es el baile en una discoteca y otra danza coreografiada, occidental o no, tradicional o no. La coreografía es un modo de organizar, coordinar, cohesionar, relacionar y de evitar la dispersión de un grupo de bailarines. Evidentemente, el motivo de una danza puede ser de carácter religioso, espiritual, pero en cuanto los movimientos y disposición de quienes la ejecutan es organizada y articulada adquiere un carácter práctico nada espontáneo. Si la coreografía obliga a sus danzantes a formar determinadas figuras en el espacio, o a ser un número determinado o a ejecutar sus pasos y gestos de cierta forma, la coreografía se convierte en una expresión de su espiritualidad. El fin de la danza no será nunca la simetría ni la cuantificación, pero esos aspectos constituirán un medio para alcanzar el objetivo genuino del baile: la alabanza de la divinidad. Más aún si desproveyendo al baile de su simetría lo destruimos. Al fin y al cabo, ¿no son las divinidades más perfectas que los hombres? ¿En qué radica pues su perfección? Desde luego, no en el azar, el desorden y el caos.

La que llamaré *paradoja de Millroy* se refiere a la investigación etnomatemática:

> If ethnomathematics is the study of the different kinds of mathematics in different cultural groups and it is impossible to recognise and describe anything without using one's own frame of reference then how can anyone schooled in the formal conventional mathematics identify any form of mathematics other than that wich resembles conventional mathematics.' (Millroy, 1992).

En cierto sentido, la contra crítica se hace en el capítulo siguiente, pero en otro repito lo que ya dije al inicio de este trabajo. Insisto ahora en que cuando hable de identificar matemáticas me referiré a la identificación de conocimiento matemático de mi propia cultura y no a conocimiento que las personas de la cultura objeto de estudio puedan considerar como matemático. En todo caso, deberían ser ellos, los toraja, los responsables de decidir si consideran como matemático su conocimiento, aunque esto les supusiera un serio problema puesto que su idea de lo que son matemáticas sin duda proviene del colonialismo occidental y deberían llamarlas de otra manera. Pero el investigador es libre de interpretar, reconocer e identificar en todo el mundo aquello que conozca e incluso admitir que otro colega suyo, cultural y académicamente, pueda identificar algo diferente.

Hay una contradicción subyacente en el hecho de realizar una investigación lejos de la cultura y sociedad del investigador cuando éste dice rechazar la imposición colonial. El investigador pretende llevar a cabo la tarea con técnicas y herramientas fundamentadas en teorías desarrolladas en su mundo. ¿No contradice esto su espíritu opositor al colonialismo tecnológico, cultural, político, económico y social? ¿Cómo osa adaptar esas teorías occidentales a las manifestaciones culturales de otro mundo? Pero como ya dije, esta tesis es fruto precisamente de un proceso de aprendizaje personal fuera de mi sociedad y cultura. No voy a estudiar la ornamentación arquitectónica toraja para decir a los artesanos cómo deben hacer las cosas. Tampoco para corregirles ni para introducir en su labor herramientas, procesos, teoremas, conceptos o ideas. La propia comunidad artesanal debe ser responsable de ello y cambiar sólo si ella misma así lo desea.

3

IDENTIFICAR MATEMÁTICAS

3.1 ANTECEDENTES DE LA IDENTIFICACIÓN DE ACTIVIDAD MATEMÁTICA EN CONTEXTOS PRÁCTICOS

Es una persona quien va a identificar matemáticas. El conocimiento matemático no es tangible, sino algo que poseen las personas y que se manifiesta en las acciones, estrategias y procedimientos que siguen para lograr correcta y eficazmente los objetivos de las actividades que realizan en su vida cotidiana. Una manifestación más evidente en los seis universales de actividad matemática propuestos por Bishop en 1991.

Ascher (1991), Gerdes (1988) y Zalavsky (1973) han relacionado el conocimiento matemático con diversas prácticas artesanales de culturas no occidentales similares al objeto de investigación de este trabajo. Gerdes se refiere a ese conocimiento, desvinculado además del ámbito académico local, llamándolo *oculto* o *congelado*:

> Although, probably, most of the mathematical knowledge of formely colonised peoples has been lost, one may try to identify, reconstruct, and thereby 'unfreeze' the mathematical thinking which is hidden or frozen in old techniques (like, for example, basket making)' (Gerdes, 1996: 114).

Considero que un término más apropiado para el conocimiento matemático del que habla Gerdes sería *asociable* o, mejor aún, *modelizable*. El motivo de esta afirmación se irá aclarando en las siguientes páginas. Veamos ahora como algunos investigadores relacionan lo que observan con su propio conocimiento matemático:

1. Sobre un juego practicado por diferentes grupos étnicos de América del Norte, Ascher (1991) realiza un estudio probabilístico que muestra la estrecha relación entre las puntuaciones asignadas a los diversos sucesos del juego y las probabilidades matemáticas de cada uno.
2. En el ámbito práctico de la arquitectura mozambiqueña, Gerdes (1988) relaciona el quinto postulado de Euclides con el procedimiento seguido para construir la base rectangular de una casa.
3. Ascher, Gerdes y Zalavsky analizan y clasifican los diseños decorativos elaborados por distintas culturas africanas con relación a los grupos de isometrías del plano. Gerdes, incluso, va más lejos y asocia el teorema de Pitágoras con la simetría de giro de 90º de algunos diseños (1994).

¿Puede llamarse identificar matemáticas a lo que hacen Ascher, Gerdes y Zalavsky? En el caso de Ascher, las proporciones numéricas que determinan las probabilidades son, de entrada, occidentales en un doble sentido. Por un lado, lo es relacionar cada suceso con una proporción numérica. Por otro, lo es el cómputo de los sucesos y su distinción entre las clases de los posibles y los favorables. La cuestión aquí sería averiguar en qué se basaron los nativos para determinar las puntuaciones asignadas a los diferentes sucesos del juego.

¿Quiere decirnos Gerdes que el método usado por sus compatriotas para construir ese rectángulo demuestra que ya conocen el postulado de las paralelas? ¿Acaso se lo preguntó a ellos?

La ornamentación vernácula con diseños geométricos de telas, armas, objetos y utensilios de uso cotidiano, ¿muestra que los nativos clasificacan sus adornos de acuerdo con las isometrías del plano? ¿Se les ha preguntado su opinión? ¿En qué se basa Gerdes para afirmar que un diseño conlleva el teorema de Pitágoras?

En mi opinión, en todos estos casos, los investigadores relacionan lo observado, una realidad práctica, con su propio conocimiento matemático. Como hemos visto, éste puede ir desde el análisis probabilístico hasta el teorema de Pitágoras pasando por el axioma más delicado y controvertido de la geometría euclidiana. La probabilidad, la geometría euclidiana y el teorema de Pitágoras forman parte del conocimiento matemático del observador. Es él quien establece relaciones. A eso se le llama modelización matemática.

En este sentido, las expresiones *matemáticas ocultas* y *matemáticas congeladas* no son las más adecuadas. Algo oculto o congelado ya existe. Lo que hacen Ascher, Gerdes y Zalavsky es asociar matemáticas a lo observado sin saber si lo observado ya las contiene. De este modo lo observado les resulta comprensible, explicable y adquiere sentido. Pero así no descubrirán jamás las matemáticas vernáculas que verdaderamente se ocultan tras el objeto de sus observaciones.

El modelo de Gerdes, por ejemplo, es el instrumento mediante el que él mismo da sentido al procedimiento de construcción de un rectángulo y gracias al que él justifica el éxito del procedimiento. Así atribuye a los nativos una concepción del rectángulo similar a la de su modelo y concluye que los autores de la construcción usan un determinado axioma en sus quehaceres diarios. Pero esta idea sólo está asociada o relacionada con el método de construcción del rectángulo usado por parte de los artesanos mozambiqueños. Se trataría de un concepto matemático *descongelado* o *visible* si los autores mismos responsables de la obra le explicasen porqué lo hacen así y no de otra manera, cómo lo han desarrollado y aprendido, cómo lo justifican.

Y no sólo eso en lo respectivo a la parte del axioma del modelo, también podemos cuestionar lo referente al concepto de rectángulo. ¿Sabemos ya que los artesanos son conscientes de que un rectángulo tiene cuatro lados y que forman ángulos rectos? ¿Cuál es su método para trazar un segmento perpendicular a otro? ¿Usarán el procedimiento del observador, probablemente el euclidiano dada su educación matemática occidental, u otro distinto? ¿Su idea del ángulo recto es la nuestra? ¿Su idea de lo que es el paralelismo y la perpendicularidad se corressponden con las nuestras? ¿Cómo llaman a las cosas que hacen? Si supiésemos las respuestas a todas estas preguntas muy probablemente debería revisarse el modelo.

Fioriti (1999) señala el papel relevante que la modelización matemática ha de desarrollar en la investigación etnomatemàtica:

> Modelizar con ayuda de la Matemática podría ser tomado como un medio para unir las ideas matemàticas y el conocimiento práctico del campo profesional. El proceso de modelización está presente en el trabajo y en él intervienen conocimientos propios del trabajo y conocimientos matemáticos que juntos llevan a los obreros a enfrentarse con el problema pràctico a resolver. Haciendo eso las Matemàticas no se reducen sólo a una actividad de teorización y ayudan a considerar al aprendizaje situado como aprendizaje matemático' (Fioriti, op. Cit.: 91).

El investigador efectúa modelizaciones (interpretaciones) y en ellas basa la búsqueda de matemáticas. Por lo tanto, sin una confirmación de lo interpretado no puede afirmar haber hallado el contenido de su interpretación.

3.2 MODELIZACIÓN MATEMÁTICA DE OBJETOS, PROCESOS Y CONCEPTOS: ¿LECTURAS O PROYECCIONES?

Una vez situados ante una actividad capaz de albergar matemáticas, ya sea explícita o implícitamente, ¿cómo llevar a cabo la identificación? Evidentemente, toda identificación pasa por la mente del observador de dicha actividad, por lo que su conocimiento matemático resulta determinante. Quien no sabe matemáticas no puede identificarlas. Quien sólo sepa sumar, restar, multiplicar y dividir, tampoco podrá detectar nada que no sea eso. El conocimiento matemático del observador determina y limita el conocimiento identificable. Sin embargo, no debemos pasar por alto que en situaciones nuevas el investigador, tratando de comprender lo que observa, desarrolle procesos de aprendizaje y genere nuevo conocimiento.

Pero incluso en el caso de que el observador sea matemático, no vale cualquiera. Un matemático formalista no verá matemáticas en ninguna de las seis actividades universales de Bishop. Ni tan siquiera se le ocurriría buscar matemáticas en ellas. Fuera del ámbito académico universitario no encontrará sistemas formales, ni tiras de símbolos que se combinan para producir nuevos teoremas. Por eso la búsqueda de matemáticas fuera de ámbitos académicos sólo tiene sentido desde una perspectiva matemática como la adoptada.

Supongamos que un matemático así está a punto de iniciar la investigación. ¿Cómo sabe que en lo que ve u observa hay matemáticas? Ante todo es imprescindible e inevitable relacionar lo que observa con su propio conocimiento matemático para comprehender lo que observa. Esto supone transformar los objetos y procesos observados en objetos y procesos matemáticos mediante su propio bagaje cultural, lo que se conoce como modelización matemática:

> ... the term 'mathematical model' -usually abbreviated to 'model' -will be used for any complete and consistent set of mathematical equations which trhough to correspond to some other entity, its prototype. The prototype may be a physical, biological, social, psychological or conceptual entity, perhaps even another mathematical model, ...' (Aris, 1978: 1).

La concepción de Aris deja claro que se admite la posibilidad de modelizar cualquier cosa. Según Tíjonov cuatro son las etapas que caracterizan el estudio de los fenómenos mediantre un modelo matemático (Tíjonov, 1993):

1. Enunciar las leyes que ligan los objetos fundamentales del modelo matemático.
2. Investigar los problemas matemáticos a los que conduce el modelo.
3. Averiguar si el modelo satisface o no el criterio práctico.
4. Analizar y modernizar el modelo como consecuencia de la acumulación de datos con relación a los fenómenos que se estudian.

Al tratar la cuestión de la modelización matemática en la educación, White (2001) distingue hasta siete etapes, pero no difieren sustancialmente de las propuestas por Tíjonov:

1. Problema del mundo real.
2. Hacer suposiciones.
3. Plantear el problema matemático.
4. Resolver el problema matemático.
5. Interpretar la solución.
6. Verificar el modelo.
7. Informar, explicar, predecir.

El proceso de modelización matemática refleja el carácter científico con el que se construye cada modelo y reproduce el esquema de prueba y refutación de Lakatos. Cada modelización se prueba de nuevo para ser confirmada o refutada. En este último caso deberá ser modificada.

Carr (1989), Lowe (1989), Swetz y Hartzler (1991) y White (1994) han destacado el papel que puede desarrollar la modelización como estrategia de aprendizaje y enseñanza en el aula y el hecho de que mientras la modelización matemática ha tenido una historia tan extensa como las mismas matemáticas, no se puede decir lo mismo de la historia de la modelización matemática por lo que respecta al currículum de la escuela secundaria (White, 2001).

En cualquier caso, las siete etapas del proceso de modelización propuestas por White adolecen de dos puntos fundamentales que también echo de menos en la clasificación de Tíjonov (Albertí, 2002a: 112-113):

1. [-1] Quien observa ha de adoptar, durante o después de la observación, un estado que podríamos llamar 'Enfoque Matemático'.
2. [0] Los objetos que intervienen en el fenómeno deberán ser modelizados en objetos matemáticos (puntos geométricos, números) antes de enunciar ley alguna que los relacione.

El observador tiene que estar alerta y preparado para ver o detectar matemáticas. La modelización efectuada no será tampoco objetiva, sino dependiente del observador. No se excluye la posibilidad de que dos observadores distintos puedan realizar diferentes interpretaciones e identifiquen diferentes matemáticas pese a pertenecer a la misma cultura. Sea como sea, el modelo matemático desarrollado por el investigador etnomatemático representa su punto de partida. No dispone de nada más. Y es el fruto de toda una serie de reflexiones. Con el modelo intenta comprender y explicar lo observado. Pero, ¿es su modelo el apropiado? Es decir, ¿ha interpretado correctamente lo que ha visto? ¿Cómo saberlo?

Hemos llegado al planteamiento de la cuestión principal para la identificaciós de matemáticas: ¿Existe correspondencia alguna entre los procesos cognitivos desarrollados por el investigador y los de quienes llevan a cabo la actividad observada que los generó?

Una respuesta afirmativa esa pregunta supondría la confirmación del modelo matemático desarrollado, pero ¿cómo llevar a cabo la confirmación? Sólo hay un modo de saber si la interpretación es apropiada: interrogar a quienes realizan la actividad. Son los propios autores quienes dirán sí o no, quienes confirmarán o no lo que el observador ha interpretado. Se plantean pues dos problemas metodológicos cruciales. El primero, referente a la lengua local, hablada y/o escrita, que muy probablemente sea incomprensible para el investigador. El otro, referente a las formas de expresión y a la dificultad que todos tenemos, occidentales o no, para expresar sincera y fielmente lo que pensamos y que en el ámbito matemático está ligado a un lenguage bastante particular. Como el otro, también este es un problema de traducción, pero a nivel académico. El investigador debe hacerse entender. Una cosa es traducir palabras como polígono, recta, perpendicular, mitad y triple al indonesio o al toraja; otra es traducir estos términos a alguien que quizá nunca los ha oído ni utilizado. Retomaremos la cuestión al final del capítulo. Ahora quiero centrarme en un aspecto concreto del proceso de modelización matemática.

Al realizar interpretaciones matemáticas de objetos o fenómenos se corre el riesgo de asignar matemáticas donde tal vez no las haya. Al hecho de asignar matemáticas a un fenómeno real desconociendo la pertinencia de dicha asignación se le llamará *proyección matemática*. Por ejemplo, ¿consideramos el siguiente diseño (Fig. 3.1) como portador de conocimiento matemático?

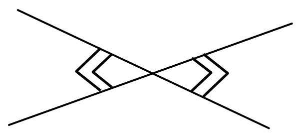


Figura 3.1

Un observador mínimamente culto matemáticamente lo describiría como dos segmentos o rectas secantes sobre las que se han dibujado un par de esquinas idénticas. Esa repetición de la misma señal podría hacernos pensar en que lo que se indica del mismo modo debe ser similar. ¿Nos induciría eso a creer que esas esquinas resaltan ángulos y que, por el hecho de estar adornados del mismo modo, tienen que ser iguales? Es decir, ¿manifiesta ese diseño que *los ángulos opuestos determinados por dos segmentos que se cortan son iguales*. Esta propiedad de la geometría euclidiana suele representarse con un dibujo ligeramente distinto (Fig. 3.2).

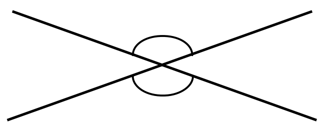


Figura 3.2

Quizá el diseño anterior sí provoque en la mente del matemático occidental la asociación mental mencionada, pero la misma idea puede expresarse con un ritmo cromático (Fig. 3.3).

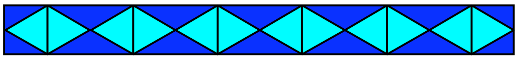


Figura 3.3

En lugar de señales, ahora los ángulos opuestos coincidentes se han pintado del mismo color: los agudos, de aguamarina; los obtusos, de azul oscuro. El resultado es un diseño de lo más corriente. ¿realmente pensamos en que los ángulos opuestos son iguales al contemplar el dibujo?

Por lo tanto, ¿qué matemáticas hay *per se* en un diseño? Ninguna. Desde nuestra filosofía matemática, el significado matemático que el observador otorga a un detalle embellecedor (señal) y/o a una alternancia de color (ritmo cromático) es un significado que su propio carácter matemático impone en la obra. Actuando así el observador no *lee* matemáticas, las *proyecta*.

Las matemáticas no están en una figura y esa figura no representará ningún conocimiento matemático mientras éste no se haga explícito en su proceso de elaboración o con una explicación del autor. Después, la figura actuará, en el mejor de los casos, como un icono activador de asociaciones mentales por las que la relacionaremos con un determinado aspecto, objeto, concepto o teorema matemático. Pero será *a posteriori*, no *a priori*. Nos encontramos ante un error cometido por algunos educadores matemáticos, quienes consideran que están transmitiendo conocimiento cuando contagian al alumno el ánsia de efectuar proyecciones matemáticas.

Entonces, ¿de qué sirve y qué justifica la descripción matemática de un diseño? La descripción matemática de una obra resulta pertinente y de gran utilidad porque plantea cuestiones sobre su origen. Un diseño geométrico puede inducir a pensar en el uso de matemáticas en su realización. De una proyección matemática no se desprende la existencia de matemáticas, pero sirve para plantear y orientar su búsqueda.

Un ejemplo excelente de esto lo tenemos al comparar el grabado toraja llamado *Pa' Sekong* con el fondo de la imagen de *San Carlomagno* en la catedral de Girona, en Catalunya (Ilustraciones 1, 2 y 3 al final de este capítulo).

Conceptualmente, ambos diseños son iguales, basados en la misma idea o *leitmotiv*, pero se distinguen en el trato de esa idea. El segundo es más artístico, poco riguroso. En cambio, el *Pa' Sekong* es todo lo contrario. Sus segmentos son rectilíneos y forman ángulos idénticos todos ellos, siendo unos paralelos o los otros casi perpendiculares. Con sólo contemplarlos uno intuye la participación de algún tipo de tecnología en su elaboración. Y no sólo eso, también un plan, un propósito de hacer las cosas así y una estrategia que condujese al resultado deseado. Desde luego, nada de esto ocurre en el otro caso. Son tales el rigor y precisión del *Pa' Sekong* toraja que difícilmente se explica su existencia sin geometría, sin cuantificación espacial. Ahora bien, nuestra opinión es que no basta con verlo, que todo eso que acabamos de decir es una proyección basada en la contemplación y que hace falta observar el proceso de talla y conocer el propósito de sus autores para confirmarlo todo. Sólo entonces podremos asegurar que hemos identificado matemáticas.

No sólo de la contemplación de una obra pueden derivarse proyecciones matemáticas, también de la observación de un proceso. Supongamos que un artesano, en algún momento de su trabajo, hiciese lo siguiente (Fig. 3.4).

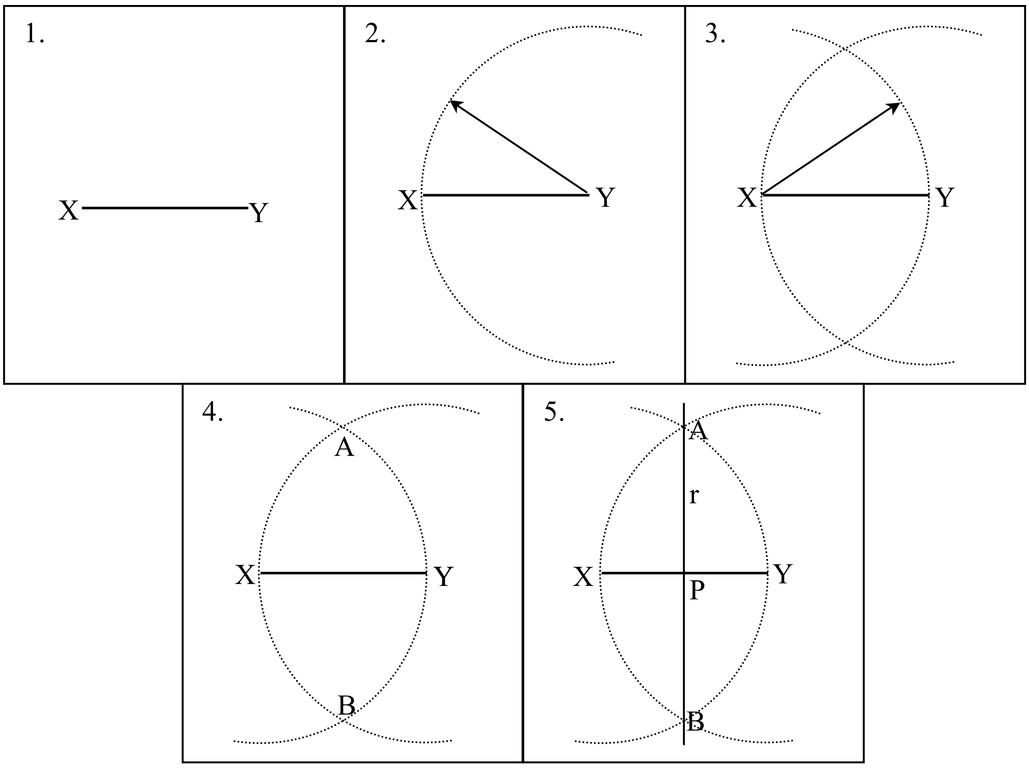


Figura 3.4 Etapas del proceso euclidiano para dividir un segmento en dos partes iguales

Las conclusiones son que la recta AB es perpendicular al segmento XY y que la intersección de AB con XY determina el punto P que divide XY en dos partes iguales. El método seguido muestra la construcción euclidiana tanto del punto medio de un segmento como de su perpendicular y figura en los *Elementos* (Euclides, Libro I, proposiciones 10 y 11).

¿Puede afirmarse entonces que el autor de esta construcción hace matemáticas? Aún siendo testigos del procedimiento deberíamos interrogarle. El proceso muestra conocimiento, rigor y lógica, pero aunque el autor afirmase que siguiendo esos pasos siempre se obtendrá el resultado correcto, ¿cómo saber qué guia su pensamiento? ¿Cuál es su propósito? ¿Desea la perpendicularidad o reproduce el procedimiento de forma automática sin preocuparse por las características geométricas del resultado? El autor podría pertenecer a una cultura y sociedad en la que el sentimiento religioso y la superstición estén todavía presentes en el pensamiento cotidiano y determinen muchas decisiones. ¿Cómo saber si ésta solución al trazado de la mediatriz de un segmento no obedece a un ritual mágico? ¿Es capaz de explicar el resultado obtenido?

Pero supongamos que el autor sabe y es consciente de lo que quiere hacer y nos dice que la línea AB debe ser ortogonal a XY por su mitad y que ante la pregunta de porqué es así abre el compás abarcando la longitud XP. Luego, sin modificar esta apertura, lo aplica sobre PY. *¡Mira, coinciden!* – grita. Después, toma una escuadra y comprueba que también el ángulo en P es recto. Este comportamiento ya no es automático. Quizá desconozca los motivos lógico-formales y axiomáticos en los que se basa la demostración euclidiana, pero justifica las cosas de modo experimental no exento de lógica. Una lógica no formal pero sí deductiva. ¿Acaso no es lógico justificar las cosas en la realidad práctica? Esa solución se aproximaría al tipo de solución matemática que Davis y Hersh (1988) llamaban analógica.

Ahora bien, aún en tal caso o en el caso de que la solución fuese púramente automática y el artesano sólo aplicase un procedimiento mecánico aprendido, ¿quién lo ideó y cómo se lo transmitió? El automatismo es un hilo del que tirar para descubrir las raíces matemáticas de su éxito. Remontándonos en el tiempo debió haber alguien, si es que no lo hay ahora, que desarrolló el procedimiento y justificase su eficacia. Subir tan alto remontando el río a contracorriente no se aventura nada fácil en culturas que no han dejado documentos escritos.

Respecto al propósito de una situación, en su trabajo sobre el conocimiento geométrico *oculto* en la práctica de los obreros de la construcción argentinos, Fioriti y Gorgorió (2001) aseguran haber identificado un procedimiento para construir ángulos menores que 90º basado en el concepto de tangente (op. Cit.: 430). Basan su afirmación en el método seguido por los autores de la obra para construir ángulos menores o iguales que 45º. Uno de esos autores, Eduardo, se lo explica ayudándose de un esbozo (Fig. 3.5).

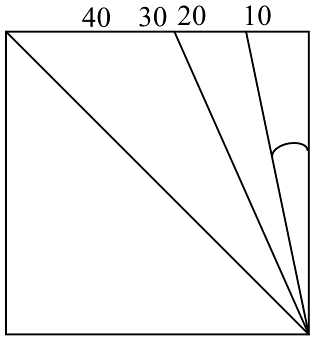


Figura 3.5 Ángulos y tangentes según los obreros argentinos (Fioriti, 1999)

Su explicación muestra que el autor sabe que la diagonal proporciona un ángulo de 45º. Después asegura que '..., entonces de acuerdo con los grados que vos le quieras dar acá a 10, a 20, 30 40 o los 45º' (Fioriti, 1999: 45). Estas medidas de 10, 20, 30 i 40 se señalan como indica el dibujo anterior y, a continuación, se unen los puntos determinados con el vértice inferior de la derecha. Eduardo concluye: '... Ahí le vas dando los grados que vos quieras' (op. Cit.: 45). A Fioriti le 'Parece que este procedimiento se basa en el concepto de tangente trigonométrica. Si bien no se sabe la medida del lado del cuadrado que usa Eduardo se puede inferir por el dibujo que sería 50. Si así fuera los valores obtenidos de la división serían muy próximos a los de las tangentes de los ángulos de 10º, 20º, 30º i 40º ' (op. Cit.: 45).

¿Tan próximos? El ángulo formado por el lado con el segmento correspondiente al valor 10 es arctg(1/5)= 11,31º, pero la pregunta es qué ángulo piensa el autor que se determina así. ¿Es el de 11,31º? ¿Es el de 10º? ¿Quizá el de 45º/4=11,25º? Si el lado del cuadrado fuese 100 e hiciese una señal en 10, ¿qué ángulo creería el autor haber obtenido? He aquí un caso en el que, pese a disponer de la explicación de quien usa un cierto método no tenemos todavía demasiado claro su propósito. El modelo de Fioriti es el concepto de tangente trigonométrica, però en mi opinión este modelo matemático está aún pendiente de ser validado. Mientras no lo sea deberemos considerarlo una proyección matemática.

Encontramos otras proyecciones matemáticas en las obras de historia de las matemáticas. Según Boyer (1986: 134), algunos historiadores, como Cooloidge y Zeuthen, al observar que Menecmo (s. -IV) obtuvo algunas propiedades de las secciones cónicas mediante el uso de lo que ahora llamamos coordenadas, han defendido la idea de que ya se conocía en cierto modo la geometría analítica. Un poco exagerado.

Luego tanto en situaciones procedimentales como en situaciones explicativas se corre el riesgo de realizar proyecciones matemáticas por lo que un aspecto metodológico crucial de esta investigación será el modo de validar los modelos matemáticos desarrollados. En el apartado siguiente se concreta la manera de hacerlo.

3.3 DISEÑO DE UN MÉTODO PARA LA IDENTIFICACIÓN DE ACTIVIDAD MATEMÁTICA EN UNA PRÁCTICA

3.3.1 Las matemáticas como sistema: QRS-system y NUC-mathematics

En la investigación etnomatemática, Alangui y Barton (2002) proponen no usar el término *matemáticas* para evitar preconcepciones. Ya que las matemáticas se caracterizan en que las referencias para tomar decisiones son de tipo numérico y cuantitativo y que las relaciones entre las cosas también son cuantificadas:

> We prefer, when speaking of the subject of ethnomathematical investigation, to use a phrase which does not contain any reference to mathematics. We talk about a *QRS-system*, that is, any systematic approach to understanding and communicating aspects of our quantitative, relational and spatial realities' (Alangui y Barton, op. cit.: 10).

Como la idea del sistema QRS no queda del todo aclarada, formulé al propio Barton la pregunta siguiente: Given a system of techniques and/or procedures, which are the aspects by which it can be referred as a QRS-system? Su respuesta:

> The idea of using 'QRS-system' was to make as broad as possible the possible activities or ideas that could be included. I regard ethnomathematics having one of its main objectives the expansion of what can be legitimately regarded as mathematics. By the way, I have a new expression for 'mathematics' when referring to the restricted set of activities. That is 'NUC-mathematics' –that stands for "near-universal conventional mathematics". However to fully answer your question, I need to say that 'QRS-system' is itself shorthand for 'a system of meaning that makes sense of the quantitative, relational or spatial aspects of the world' and you could add 'as perceived by a particular individual or group'. Thus the important thing about it is that it is a 'system of meaning'. So the defining componend of this is 'system'. Whatever you wish to bring under this name must, it is true, be about quantitative, relational or spatial things, but they may be broadly interpreted. More important is to show that it is a system. This is more difficult to define. I like to be able to show that it is a system that is generalisable, can be discussed in the abstract (i.e. away from the physical manifestation of the practice), and that it has its own symbols or technical vocabulary. You may think of other conditions you would like to impose. I suspect that carvings does meet these requirements. (Barton, 2004, comunicación personal, Anexo A: III-IV).

Un modo de comprender el *sistema* de Barton es concebirlo como la red conceptual y operativa mediante la que los productos elaborados por una comunidad de práctica acaban existiendo y siendo como se quiere que sean. El sistema QRS es la urdimbre, física y mental, que teje la obra. En la elaboración del producto intervienen la comunicación y la tecnología, pero también, y este es el punto primordial, toda una serie de técnicas y estrategias en las que se basan el buen uso y eficacia de la tecnología. Las técnicas y estrategias relacionadas con la cuantificación configuran el sistema de significado que da sentido a los aspectos cuantitativos, relacionales y espaciales del mundo. Por ejemplo, jo puedo dibujar seis formas redondeadas en un espacio limitado sin usar matemáticas (Fig. 3.6).

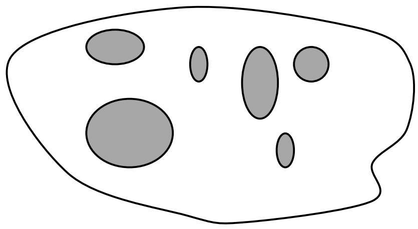


Figura 3.6

Pero si quiero construir seis círculos idénticos y situarlos en puntos bien concretos de un rectángulo de 1.5 pulgadas por 2.5 pulgadas, es decir, si quiero dar forma precisa al espacio y objetos que en él van a figurar, tengo que hacer matemáticas (Fig. 3.7).

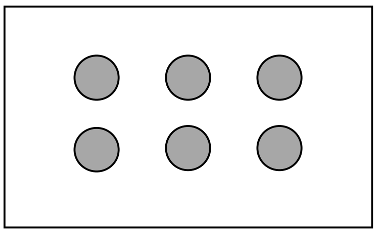


Figura 3.7

Necesito conceptos (ángulo recto, paralelismo, perpendicularidad, rectángulo, circunferencia y círculo) y teoremas, esto es, procesos objetivos que me garanticen el resultado deseado (construcción del ángulo recto, división de un segmento en partes iguales) y la tecnología que permita su aplicación (lápiz, regla, compás o, como en presente caso, de un programa informático dotado de herramientas de dibujo). También es posible substituir aluno de los pasos anteriores por cálculos (dividir un número entre tres y otro entre cuatro). Pero al final lo más importante aquí es que decido en base a la cuantificación, cuestión impersonal y bastante objetiva: situo los centros de seis círculos idénticos en los puntos que la división de la longitud y anchura de un rectángulo en tres y cuatro partes iguales, respectivamente, determinan.

Esos conceptos, teoremas y, si es el caso, procesos de cálculo, junto con el hecho de tomar decisiones basándose en los resultados que se derivan de ellos, nada arbitrarios, desproveen al producto de carácter artístico y constituyen un sistema de significado basado en la cuantificación. Si quiero reproducir el mismo diseño en un lugar distinto no tengo más que volver a aplicar el sistema para obtener el mismo resultado, lo que lo hace general y fácil de transmitir, único pero compartible precisamente por ser objetivo, al alcance de todos. Ésta es una concepción de las matemáticas y de la práctica matemática acorde con las descritas en el capítulo anterior.

La definición lingüística del diccionario ayuda a concretar la idea general de lo que constituye un sistema: (1) Conjunto de reglas o principios sobre una materia racionalmente enlazados entre sí; (2) Conjunto de cosas que ordenadamente relacionadas entre sí contribuyen a determinado objeto. (R.A.L.E., 1992: 1888)

Un conjunto de reglas racionalmente conectadas que tienen un objetivo. El sistema resuelve problemas. En matemáticas tenemos sistemas axiomáticos, sistemas de ecuaciones, sistemas de referencia, sistemas de numeración. Todos ellos sirven para resolver problemas. Dado un problema, se traduce su enunciado al lenguaje del sistema, se resuelve en él y, después, la solución es traducida de nuevo al ámbito original. Esto es lo que ocurre con los sistemas de ecuaciones. Tenemos un problema cotidiano, lo transformamos en un sistema de ecuaciones (con su simbología algebraico-numérica) y aplicamos las reglas del sistema para resolverlo. Una vez obtenida la solución, ésta es interpretada en los términos del contexto original.

En toda práctica artesanal existen unos mecanismos prácticos de producción basados en una serie de reglas y pautas secuenciadas temporalmente. Entiendo que son éstos mecanismos productivos los que generan un sistema conceptual en la mente de quienes lo aplican, los artesanos, basado en las abstracciones mentales de las reglas prácticas de los mecanismos o sistema (también podría llamársele así) de producción. Éste es el sistema que hay que sacar a la luz. Que su carácter sea más o menos matemático está en correspondencia con el papel desempeñado por la cuantificación.

De ahí que cualquier intento de identificación de matemáticas deba pasar ineludiblemente por visualizar la obra, observar el proceso de trabajo y conversar con los autores. Además, evidentemente, de reflexionar sobre los datos recogidos.

Así se concreta la identificación de matemáticas: averiguando si existe un sistema cuantificativo conceptual de la ornamentación arquitectónica toraja explicitando cuáles son sus reglas y conceptos en base a rasgos tan fundamentalmente matemáticos como cuantificación, rigor, objetividad, precisión, generalización (si no es general no es sistema) abstracción y simbología (si es que hay alguna).

3.3.2 Estructuración de la práctica

El comportamiento de los autores, qué hacen, cómo y con qué lo hacen, constituye un espejo de su pensamiento:

> El pensamiento se relaciona con la acción en formas que facilitan la reconstrucción psicológica del conocimiento y de las operaciones que intervienen en la realización de una tarea. Si podemos lograr algún tipo de análisis riguroso de las tareas que implican operaciones externas, podríamos entonces empezar a considerar como dichos análisis podrían funcionar como modelos para la comprensión de las tareas cognoscitivas cuyas operaciones son promordialmente internas.' (Scribner, 2002: 292)

Lo externo es reflejo de lo interno. Analizando lo externo, es decir, desarrollando modelos de lo visible (acciones) podemos hacernos una idea de lo invisible (pensamiento). En nuestro caso, dichas interpretaciones, esos modelos de los que habla Scribner, serán modelos matemáticos de hechos y objetos reales presentes en la práctica. Desde nuestra perspectiva, el rigor de un análisis que interpreta lo externo para inferir lo interno, sólo se sostiene validando esos modelos y para ello es imprescindible la interpelación con los autores. Sólo entonces sabremos si nuestra interpretación de sus acciones, ideas y propósitos es correcta.

El 'proceso' es un aspecto fundamental del aprendizaje constructivista. En *How to solve it* Pólya habla de 'elaborar un plan' para resolver un problema. Bishop ensalza el hecho de tener un 'plan' como fundamental en toda actividad matemática. Debemos aproximarnos pues al objeto de investigación profundizando sobre los que consideraremos sus tres niveles fundamentales: objetual, procedimental y explicativo. El nivel objetual hace referencia a los diseños y las figuras que los forman; el nivel procedimental se centra en el proceso de elaboración; y el nivel explicativo se refiere a los propósitos, ideas y explicaciones de sus autores y responsables. Nos referiremos a esos tres niveles de aproximación a una práctica como obra-acabada, obra-en-curso y obra-explicada.

Obra-acabada: ¿Qué se ha hecho?

Son los grabados en sí, ya terminados. Un objeto tangible en el que ya no interviene nadie. Dentro de la obra-acabada se pueden distinguir también cuatro niveles més: la casa o granero tradicionales donde se realizan los grabados, una fachada de esas construcciones, un grabado concreto y una figura específica de su diseño.

Obra-en-curso: ¿Cómo se hace?

Se entiende aquí todo el proceso de ejecución, desde el instante en que el grabador se sitúa ante la madera lisa hasta que concluye su tarea. Protagonizan la obra-en-curso las técnicas, estrategias y herramientas que utiliza el artesano, el contexto de trabajo y los términos y símbolos con los que pueda referirse a su obra y comunicarse con otros colegas, sean o no de su equipo. También los diseños y esbozos realizados previamente al inico de la talla.

Obra-explicada: ¿Cuál era el propósito y cómo se explica el resultado?

La constituyen los propósitos, justificaciones e ideas de los artesanos. Por ejemplo, si en un momento determinado de la obra-en-curso se observa que el grabador traza un segmento paralelo a otro siguiendo un estrategia determinada, dicha estrategia forma parte de la obra-en-curso, pero el propósito de paralelismo, este concepto y las explicaciones del autor sobre el resultado, si es que se demuestra que era ésta su voluntad, pertenecen a la obra-expplicada.

El examen de cada nivel y su documentación deberán adecuarse a su contenido. El análisis de la *obra-acabada* se basará en la visualización, *in situ* y/o de la documentación visual (fotografías). En cambio, no basta con ver y fotografiar diferentes instantes de la *obra-en-curso*, se hace imprescindible observar cómo se hacen los grabados para describir, interpretar y documentar el proceso. Mejor aún acompañar esas observaciones con documentos audiovisuales. Finalmente, conocer la *obra-explicada* es imposible sin interpelar a los autores, por lo que deberán documentarse también con notas, audio y vídeo sus opiniones (Tabla 3.1).

	PRÁCTICA		
Nivel	*Obra-acabada*	*Obra-en-curso*	*Obra-explicada*
Pregunta	¿Qué es?	¿Cómo se hace?	¿Que se pretende? ¿Cómo se explica?
Aproximación	Visualización de los grabados	Observación del proceso	Interpelación a los autores

Tabla 3.1

3.3.3 La interpretación matemática situada (IMS)

Esos tres niveles de profundización representan el eje del proceso de validación de los modelos matemáticos que van a desarrollarse con relación a toda una serie de situaciones en el curso de esta investigación y que darán lugar a lo que llamaremos interpretación matemática situada (IMS). Dicha IMS será la que regirá la identificación de matemáticas. Para su elaboración comencemos realizando una serie de observaciones:

1. Las matemáticas que un observador relaciona con un objeto, un procedimiento o una explicación de los que una o más personas son responsables constituyen una

modelización matemática del objeto, procedimiento o explicación observados que llamaremos *interpretación matemática* (IM).

2. Mientras un modelo o interpretación matemática no sea confirmado no se afirmará que se han identificado matemáticas en el objeto, procedimiento o explicación. En tal caso, es decir, cuando la interpretación no es confirmada o es refutada, ese modelo o interpretación representa una *proyección matemática* del observador sobre lo observado. Sus matemáticas serán vinculadas con el objeto, procedimiento o explicación. La identificación de matemáticas queda sometida a la confirmación de las interpretaciones desarrolladas.
3. Sólo si una interpretación es confirmada, las matemáticas vinculadas pasan a llamarse manifiestas y a formar parte de la IMS.
4. La confirmación de cada interpretación ha de efectuarse en todos los otros niveles de la obra distintos de aquel en el que fue desarrollada. Una interpretación ligada a un objeto deberá confirmarse a nivel procedimental y explicativo; una interpretación ligada a los procedimientos, se confirmará en los niveles explicativo y objetual; y una ligada al nivel explicativo, en el procedimental y objetual.
5. Aquella interpretación matemática ya confirmada y elaborada en base a los tres niveles de la obra (producto, proceso y explicación) y los componentes de cada nivel (contenido del producto, estrategias y tecnología del proceso, lenguaje y bases de la justificación de la explicación) se llamará *Interpretación Matemática Situada* (IMS) del problema o situación en cuestión.
6. Sólo aquellas matemáticas de la IMS que se correspondan directamente con la situación, es decir, directamente confirmadas, serán las que llamaremos identificadas en ella. Por tanto, una IMS puede albergar más matemáticas de las que se identifican. Por ejemplo, las desarrolladas por el investigador para comprender sus observaciones. Éstas serán matemáticas de la interpretación matemática, pero noformarán parte de la interpretación matemática situada (IMS) de la práctica.

Estamos enfocando el análisis de una práctica artesanal de modo científico, aplicando el procedimiento en que se construyen las teorías científicas en términos de Popper y Lakatos: partiendo de la filosofia de que nuestras afirmaciones son falibles y no demostrables las ponemos a prueba. Hablamos de IMS cuando una afirmación a superado varias confirmaciones, pero somos conscientes de que la IMS será confirmada, no demostrada.

Supongamos que se han trazado dos circunferencias (Fig. 3.8):

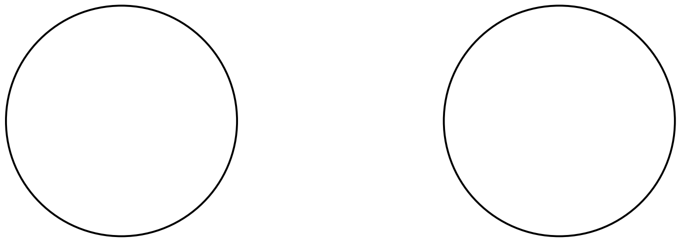


Figura 3.8

La interpretación o modelo más plausible para el matemático en base a su visualización del objeto sería decir que se trata de dos circunferenncias idénticas (mismo radio). Pero si tuviésemos la oportunidad de ver cómo se han construído, podríamos darnos cuenta de que la de la izquierda se trazó con un compás, mientras que la de la derecha se hizo perfilando sobre el papel el borde de una taza boca abajo. Entonces, el modelo previo sigue siendo válido para la figura izquierda, pero no para la derecha. La circunferencia izquierda se basa en el radio determinado por la apertura del compás. Sin embargo, el radio es inxistente en la figura derecha. Ésta se ha elaborado reproduciendo la curvatura de otro objeto mediante perfilado. Su perfecta redondez se deriva de la que tenía la taza, una idea relacionada con el concepto de curvatura constante que posee la circunferencia, no con el radio. Por tanto, deberemos modificar el modelo de la circunferencia de la derecha. Esto nos llevará a plantear diferentes cuestiones a los autores para ver hasta qué punto eran conscientes de lo que hacían y pretendían hacer.

En el ámbito académico, esto será de gran utilidad para diseñar sesiones y situaciones de aprendizaje orientadas a la asimilación de ideas matemáticas concretas. Si queremos que nuestros estudiantes vean la circunferencia como una curva de curvatura constante, ¿deberemos centrarnos en el radio?

Supongamos ahora que nos encontramos ante un diseño como el siguiente (Fig. 3.9).

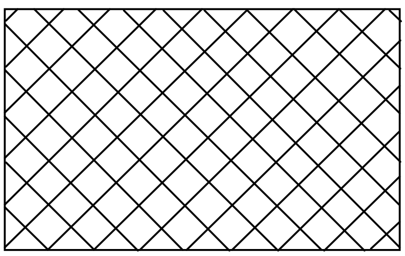


Figura 3.9

Basándome en la visualización puedo describirlo como un rectángulo en el que se han trazado dos haces inclinados de rectas paralelas, perpendiculares entre sí, y formando 45º con la base del rectángulo. Esta descripción conlleva implícita una modelización matemática, conceptual y procedimental, del diseño. Puedo imaginar cómo lo haría yo, pero no cómo lo han hecho sus autores. Así que, por ahora, las matemáticas de mi interpretación del diseño son vinculadas, no manifiestas.

El modelo debe ser validado primero en el nivel procedimental. Para ello es necesario observar cómo se realiza. Supongamos pues que tenemos la oportunidad de ver cómo se realiza el diseño. El artesano coge un lápiz y una regla y traza con ella una línea recta y horizontal cuya longitud no podemos precisar porque desde nuestra posición no podemos ver dónde detiene la punta del lápiz. Luego toma una escuadra, sitúa su vértice en un extremo del segmento trazado y señala con el lápiz un pequeño fragmento de su perpendicular. Repite lo mismo en el otro extremo de la línea. Después toma la regla y traza dos verticales desde esos vértices. Su longitud de nuevo nos resulta invisible. Ya tiene construído el rectángulo. Ahora toma la medida de su lado corto y señala esa longitud sobre los lados largos y desde la izquierda. Con la regla une el vértice superior izquierdo con la señal practicada en el lado inferior. Hace lo mismo con el vértice inferior izquierdo y la señal en el lado superior. Finalmente, adosando la regla a éstas últimas líneas va trazando rectas hasta completar los dos haces de paralelas, primero uno y luego el otro. El grosor de la regla ddetermina su equidistancia.

La observación permite mejorar el modelo corrigiendo lo que no se corresponda con el proceso de ejecución para así adaptarlo a la realidad de la situación. De hacerse el diseño anterior como se ha descrito se confirmarían la rectitud de líneas, la perpendicularidad y el paralelismo en base a las herramientas utilizadas, pero esos conceptos deberían ser validados todavía por el propio artesano. Estaríamos en el buen camino, aunque no definitivo. Sin embarrgo, el ángulo de 45º no aparece por ningún lado y, al menos de momento, deberíamos excluírlo del modelo. Matemáticamente, decir que las diagonales de un cuadrado forman 45º con sus lados es sinónimo de decir que las diagonales son las bisectrices de sus vértices. El artesano ha trazado las diagonales, pero ¿sabe que forman esos 45º con los lados? ¿Sabe que dividen los ángulos de sus vertices en dos partes? ¿Cuál era su propósito?

Esas son cuestiones para la obra-explicada. Un modelo, pese a ajustarse a un procedimiento, puede no ajustarse a un propósito. Se hace imprescindible interrogar al autor. Más aún teniendo en cuanta que quien ejecuta las acciones puede que no sea consciente de lo que hace y actúa de forma mecánica, sin pensar qué hace, reproduciendo un trabajo rutinario eficaz. Cualquier apuede realizar el diseño anterior sin tener ni idea de que el ángulo formado por ambos haces de paralelas es recto.

3.4 ORGANIZACIÓN, MEDIOS Y DIFICULTADES DEL TRABAJO DE CAMPO

La obra de los grabadores toraja es fácil de contemplar a lo largo y ancho de la región. Multitud de poblados con casas tradicionales y graneros salpican las colinas y valles. Aparte de algunos más aislados, acceder a la mayoría de poblaciones no es demasiado complicado y su gente se sienti lo bastante orgullosa como para apreciar el interés de un extranjero.

En cuanto a la observación del proceso, los talleres donde se lleva a cabo el trabajo suelen localizarse cerca de una carretera secundaria o un camino, como ocurre con los que hay cerca de Kete' Kesu, To' Marurung y Kampung Barana. Raramente los hay en una localidad mayor como es el caso del de Martheen Madoi, en Rantepao o el de Bolu.

Pese a que la observación visual de la arquitectura no representa ningún problema, la especial idiosincrasia local hace que sea conveniente adoptar algunas medidas antes de intentar observar el proceso o de tener una entrevista con los responsables. Uno no puede dejarse caer de buenas a primeras delante de un grupo de artesanos esperando que respondan sus preguntas para una vez acabada la entrevista largarse como sinada. Conviene aproximarse sucesivamente, mejor si se tiene un primer contacto con el grupo, sobre todo con el artesano jefe. De lo contrario, conviene repetir la visita para hablar con él. Una vez hechas las presentaciones, siempre hablando con sinceridad, poco a poco y de forma respetuosa, habrá que amoldarse a la sincera hospitalidad toraja y tomar de buena gana el té o café extraordinariamente dulces a los que seremos invitados. Tampoco estará mal visto pasar lentamente la mirada por el cielo, admirar el grosor del bambú y mantener algunos intervalos de silencio como si la última intención de la visita no fuese otra que imitar a los búfalos que pacen por los alrededores. Antes de consumir las bebidas obsequiaremos unos cigarrillos de clavo de especia a nuestros anfitriones y entonces, entre calada y calada, comenzaremos a concretar nuestras intenciones. Corremos el riesgo de que pasada la mañana resulte que aquellos con los que estábamos hablando no sean el grupo de trabajo que creíamos, sino cuatro tipos reunidos para pasar el rato, no para trabajar. Eso puede evitarse si nos acompaña alguien de la zona que haga de intérprete y pueda dilucidar de antemano si quienes nos reciben son quienes parecen ser. El papel más valioso del intérprete, incluso más que el hecho de traducir la conversación, es la de romper el hielo y abrir la puerta al diálogo. Además, yendo acompañados mostramos respeto a todos, tanto a quienes nos reciben como a quien nos acompaña y a nosotros mismos.

Roto el hielo aparece el problema de la comunicación. En Tana Toraja se habla toraja, la lengua local que tradicionalmente no ha tenido escritura. El idioma oficial del país es el bahasa indonesio y ésta es la lengua de la educación formal en las escuelas de todo el país y también en las de Tana Toraja. Niños y niñas, cuando están escolarizados, aprenden en indonesio, no en su lengua materna. De hecho, como ya comentamos en la introducción (cap.I) cuando un crío entre en la escuela elemental sus maestros le hablan en toraja para que pueda aprender el indonesio, pero las materias se imparten después en indonesio.

Los artesanos son gente toraja. Hablan y se comunican entre ellos con esa lengua, por lo que contar con la participación de un intérprete local parece, al menos de entrada, imprescindible.

Como ya se ha comentado, el intérprete no sólo ayuda en la comunicación verbal, sino que también facilita la accesibilidad a los lugares donde se realiza la actividad y la acogida al recien llegado. Establece un puente por el que transitará la relación. Pero tiene sus inconvenientes. No es suficiente hablar correctamente las dos lenguas, es fundamental tener en cuenta otros problemas. Uno se deriva del rango y/o entorno social del intérprete y del entrevistado. Otro es el lenguaje particular de la investigación, en este caso el matemático. Habitualmente, el término matemàticas se relaciona con problemas difíciles, pero al mismo tiempo inspira respeto por quien se dedica a ellas (una visión muy M-atemática). Un intérprete puede tener muy buen conocimiento de la lengua, pero no tiene porqué conocer el lenguaje específico y especializado de las matemáticas. Habrá que tenerlo presente en el planteamiento de las cuestiones. Por otra parte, en un ámbito verbal desconocido puede ser difícil distinguir entre lo que dice el entrevistado y lo que traduce el intérprete ¿Cómo saber si éste no incorpora en la traducción ideas y términos propios que él, y no el entrevistado, considera necesarios para la traducción?

La cuestión econòmica no es un problema menor. Sin gastos no hay investigación. Por suerte la amabilidad de los artesanos ha sido insuperable, mostrando una atención y paciencia encomiables con las pretensiones del investigador. Eso hace que uno se olvide del dinero invertido en la búsqueda y que acabaría siendo difícil de contabilizar.

3.5 ORGANIZACIÓN Y PRESENTACIÓN DE DATOS

Los tres niveles de profundización determinan la organización y presentación de datos, por lo que no se seguirá un orden cronológico, sino que se hará de acuerdo con la estructuración de la obra: obra-acabada, obra-en-curso y obra-explicada.

Forman los datos de la obra-acabada una extensa serie de fotografías y varias filmaciones audiovisuales. Una parte de esta documentación fotogràfica acompañará el texto del capítulo correspondiente.

En determinadas situaciones cuesta discernir qué datos corresponden a la obra-en-curso y a la obra-explicada porque en el transcurso de una observación pueden aparecer aspectos intencionales y los artesanos pueden manifestar cosas sin haber sido interpelados.

Observaciones *(Obra-en-curso)*	año	Interpelaciones *(Obra-explicada)*
	1999	Martheen y Lea (10.08.1999)
Tiku (10.08.1999)		
		Sampe Pamunu (11.08.1999)
Rombe' (12.01.2000)	2000	
		Leo (13.01.2000)
Leo (14.01.2000)		
Yobel (20.01.2000) Leo y Yobel (20.01.2000)		
Yobel (21.01.2000)		Martheen y Leo (21.01.2000)
		Rombe' (24.01.2000)
		Yobel (25.01.2000)
Seber (20.08.2000)		
Seber (21.08.2000)		
Seber (21.08.2000)		
Seber (22.08.2000)		
Anton (22.08.2000)		
Anton (23.08.2000)		
Medi (23.08.2000)		
	2003	Yobel (10.08.2003)
		Yobel (12.08.2003)
Ajudante de Yobel (12.08.2003)		Yobel (12.08.2003)
	2004	Rois (30.12.2004)
	2005	Salle (02.01.2005)
		Salle (05.01.2005)
		Rois y Salle (05.01.2005)
		Salle (06.01.2005)

Tabla 3.2

Del mismo modo, en el transcurso de una interpelación pueden darse aspectos procedimentales, como para explicar una intención, que se asociarían a la obra-en-curso.

Para no confundir al lector, los datos relacionados con estos dos niveles se organizan y presentan según la intención con la que se plantearon. Si el objectivo del encuentro con un artesano fue observarlo mientras trabajaba, los datos recogidos se incluyen en la obra-en-curso. Si el objectivo del encuentro fue conversar con él y preguntarle, los datos correspondientes forman parte de la obra-explicada.

La tabla anterior (Tabla 3.2) es un índice cronológico de los datos recogidos sobre la obra-en-curso y la obra-explicada en la que se recopilan todas las sesiones de observación e interpelación realizadas con los artesanos toraja. En el capítulo 5 se presentarán y analizarán las observaciones correspondientes en la obra-en-curso (columna izquierda). Después, en el capítulo 6, se hará lo mismo con relación a la obra-explicada (columna derecha).

4

LOS GRABADOS TORAJA

De acuerdo con la estructura de la práctica planteada, en este capítulo se aborda el estudio de los grabados, es decir, el producto de la ornamentación arquitectónica toraja y al que se ha convenido en llamar la obra-acabada de esa práctica artesanal.

La cuestión se enfoca a partir de la visualización de los grabados ya realizados con el objeto de determinar cuáles su contenido y relacionarlo con las matemáticas. Evidentemente, las interpretaciones que aquí se desarrollen constituirán proyecciones matemáticas, pero señalarán el camino a seguir por las observaciones posteriores con relación al proceso de talla.

4.1 ANTECEDENTES, DOCUMENTACIÓN DE LA INVESTIGACIÓN Y ANÁLISIS DE DATOS

Prácticamente la totalidad de la bibliografía sobre los grabados ornamentales de la arquitectura toraja forma parte de obras de temática arquitectónica. Acceder a esa bibliografía no ha resultado nada fácil porque muchas de las obras más valiosas, especialmente aquellas basadas en investigaciones asociadas al *Royal Tropical Institute* de Amsterdam, se publicaron hace ya varias décadas y se han agotado. Pese a ello, se han podido rescatar algunos ejemplares que han beneficiado este trabajo.

Las obras en las que se habla específicamente de la obra-acabada, es decir, de los grabados, ya fueron mencionadas en el capítulo 1. Son los de Lumowah (1985), Marampa (1992), Nooy-Palm (1988), Sandarupa (1986) y Sande (1991).

El trabajo de Lumowah (1985) forma parte de una serie dedicada a la arquitectura vernácula indonesia de las diferentes regiones del país por lo que los grabados son tratados sólo por encima. El autor abre el capítulo que les dedica explicando que los grabados o *Passura'* se relacionan con la vida y la concepción toraja del mundo, después comenta las imágenes en blanco y negro de 14 grabados informando del nombre que recibe cada uno, explica la representación figurativa que contiene y su significado con relación a la sociedad y cultura torajas (Lumowah, op. Cit.: 61-73).

Marampa (1992) recopila las costumbres sociales y culturales más relevantes y vistosas de los toraja bajo el epígrafe de *A Guide to Toraja*. Ni los grabados ni la arquitectura son uno de los temas tratados, aunque los menciona y reproduce imágenes de algunos.

Nooy-Palm (1988) dedica un apartado completo a los grabados (pp. 41-43) y afirma que el número de diseños ronda los 200. Acompaña el texto una reproducción de 28 diseños de los que expone su significado figurativo, es decir, aquello que se supone que representan las formas y figuras del grabado. Observa también que en las casas más antiguas prácticamente carecen de decoración y que si la tienen se reduce a tallas de barras verticales y paralelas (Nooy-Palm, op. cit.: 42).

El apéndice A de la obra *Vida y muerte en Toraja* de Sandarupa (1996: 82-89) está dedicado a la arquitectura y los grabados. Su título, *Torajan Architecture: Order in Symbolic Designs*, es sugerente por contener dos términos interesantes desde el punto de vista matemático: ‘orden’ y ‘simbólicos’. Además de explicar el significado figurativo del nombre y la significación social y cultural de cada diseño con relación a la vida y concepciones toraja del mundo, Sandarupa también habla del modo riguroso en que se distribuyen los grabados en las fachadas. El orden es un concepto de gran valor matemático. Mantenerlo supone obedecer reglas, cosa que nos acerca al rigor.

El de Sande (1991) es un librito que recoge reproducciones bastante imprecisas de 67 diseños de los que también se explica el nombre y significación social y cultural (op. cit.: 2-72). Como en las obras anteriores, la explicación del nombre de cada grabado consiste en la traducción al inglés del nombre toraja y en relacionar las formas y figuras del diseño con las formas naturales (vegetales o animales) del entorno. A diferencia de los demás, Sande no escribe el término *Pa’* con apóstrofe, sino que lo substituye por la letra q: *Paq*. Tampoco separa ese término de la primera palabra del nombre del diseño: en lugar de *Pa’ Sekong*, él escribe *Paqsekong*. Además, tanto el texto como algunos dibujos padecen de errores e imprecisiones que ponen en duda su fiabilidad.

Además de esas obras de carácter antropológico, cultural y arquitectónico, el diccionarioa de Tammu i van der Veen (1972) es una obra ingente que relaciona la lengua toraja con el bahasa indonesio. Y lo hace exactamente en este sentido, del toraja al indonesio, no en el contrario. La obra está agotada, pero en un librería de Rantepao (Tana Toraja) se pudo encontrar una fotocopia del original. Contiene términos que relacionan los grabados (*Pa’ Ssura*) con los significados que se les atribuyen en las otras obras.

La documentación fotográfica, tanto la correspondiente a este como a los demás capítulos, es obra del autor y se distribuye en una serie de láminas al final de cada capítulo. A ellas corresponden las ilustraciones referenciadas en el texto. Pero no sólo la imagen estática documenta la obra-acabada. Los dos primeros cortes el Anexo D (DVD: Ukiran Toraja) titulados *Marurung* y *Lempo* muestran una perspectiva en movimiento de la arquitectura toraja y de su ornamentación. De algunos detalles muy importantes de los diseños que ahí se recogen se hablará más adelante en este mismo capítulo.

El análisis de datos relacionados con los grabados, o sea, con la obra-acabada, se basa en la visualización y se efectuará de fuera hacia adentro. Primero, se estudiará su ubicación y distribución en las casas y graneros. A continuación, se estudiará el contenido de los grabados, los elementos y figuras que forman sus diseños. Finalmente, se analizarán los conceptos geométricos evocados en ellos.

4.2 UBICACIÓN Y DISPOSICIÓN DE LOS GRABADOS EN LAS CASAS Y GRANEROS TRADICIONALES

Las ilustraciones 1-11 (Láminas al final de este capítulo) y las filmaciones Marurung y Lempo del Anexo D (DVD: Ukiran toraja) muestran como son la casa tradicional toraja o *tongkonan* y el granero para el arroz o *alang-alang*. Sus paredes se erigen ensamblando grandes piezas de madera produciendo en las fachadas toda una serie de módulos o espacios en los que se tallan los grabados. La mayoría de esos módulos son rectangulares. Sin embargo, puesto que la parte superior de las fachadas Norte y Sur de todas las edificaciones es triangular, los grabados que las ocupan se enmarcan en espacios con forma de paralelogramo, trapecio o triángulo.

Se aprecia también que los grabados no se cuelgan de las paredes, sino que están labrados en ellas. Y no exclusivamente en las fachadas, también en algunos pilares, travesaños y otros elementos de la construcción.

En cuanto a la distribución de los grabados, tanto en casas como en graneros, se observa que en fachadas opuestas (Norte/Sur y Este/Oeste) se tallan los mismos diseños (Ilustraciones 2-5 y Anexo D: Ukiran toraja: Marurung). Su distribución obedece al eje de simetría vertical central (Fig. 4.1) de cada fachada.

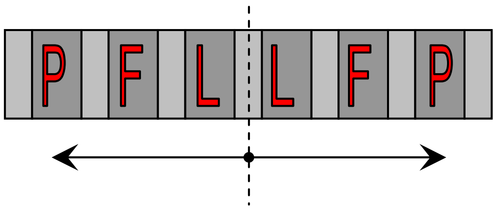


Figura 4.1

Algunos graneros presentan grabados tallados con simetría especular (Ilustraciones 2-5 al final de este capítulo). El eje vertical de la fachada no sólo lo es en cuanto a la distribución, sino también en cuanto al contenido. Dos grabados equidistantes de ese eje son homólogos, uno el reflejo del otro (Fig. 4.2). Ese rasgo parece exclusivo de los graneros, ya que no se observa en ninguna casa tradicional.

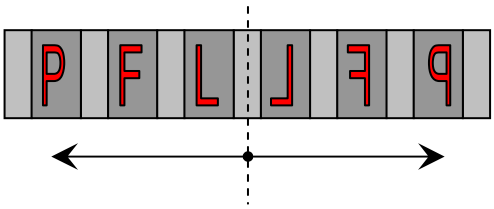


Figura 4.2

El sistema que determina la ubicación de los grabados parece obedecer el patrón cultural mencionado por Sandarupa (1986: 89) según el que la fachada de la casa se dividía en cuatro zonas horizontales (*Para*, *Indo Para*, *Kale Banua* y *Sulluk Tang Keballa*) y dos verticales (vida y muerte), separadas precisamente por un eje de simetría central vertical. Eso determina una partición de la fachada en una serie de módulos formando una retícula modular jerarquizada tanto en las casas como en los graneros (Fig. 4.3-4.6).

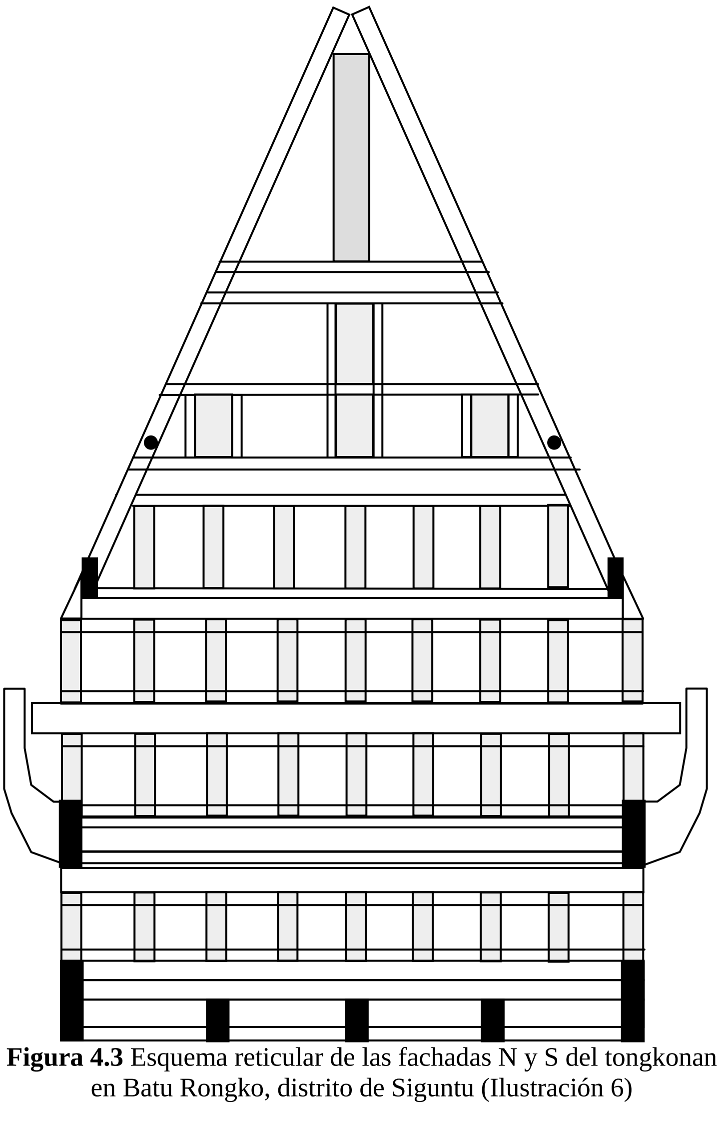


Figura 4.3 Esquema reticular de las fachadas N y S del tongkonan en Batu Rongko, distrito de Siguntu (Ilustración 6)

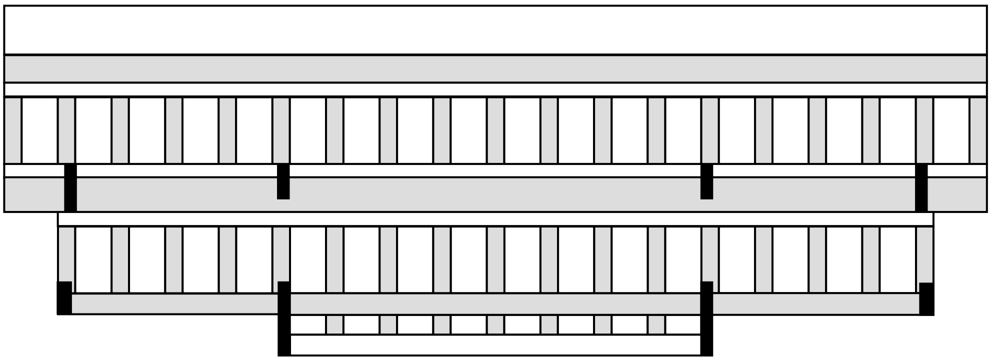


Figura 4.4 Esquema reticular de las fachadas E y O del tongkonan en Batu Rongko, distrito de Siguntu (Ilustraciones 7 y 8)

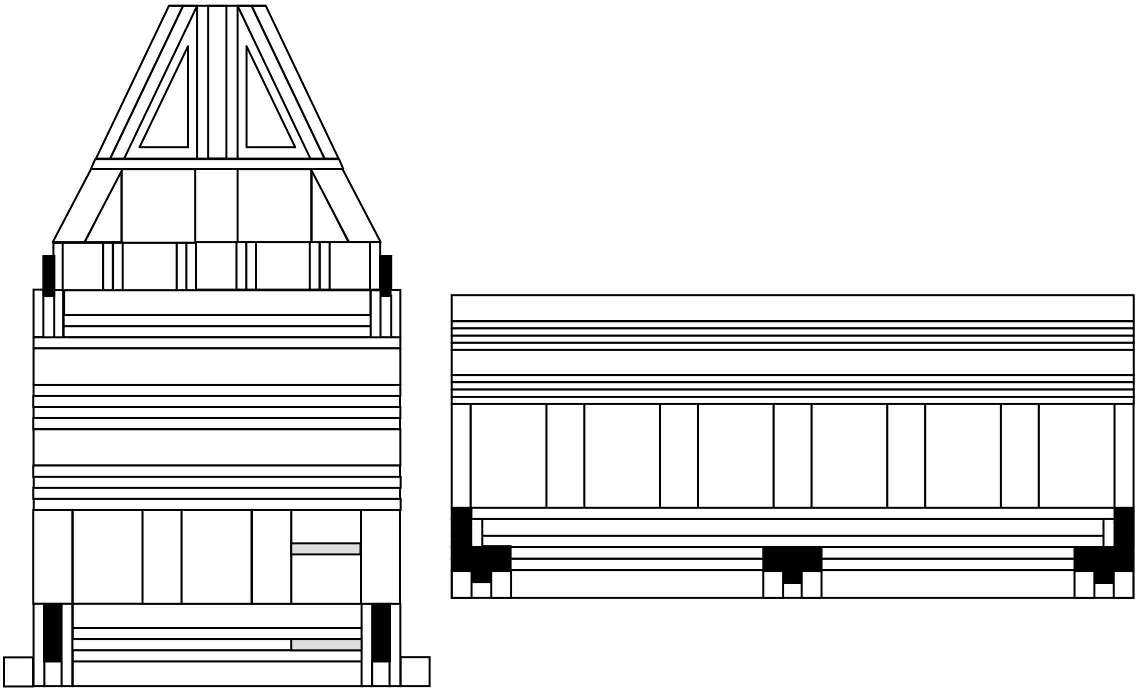


Figura 4.5 Esquemas reticulares de las fachadas S/N (a la izquierda) y E/O (a la derecha) de un granero en el distrito de Palawa

4.3 INTERPRETACIÓN MATEMÁTICA DEL CONTENIDO DE LOS GRABADOS

4.3.1 Características espaciales: dimensión y vinculación al marco

Entre los grabados los hay unidimensionales, bidimensionales y tridimensionales. Los primeros orlan una sección de la fachada u otro grabado, separan secciones distintas de una misma fachada, decoran un pilar o un travesaño, o separan grabados consecutivos. Estos diseños consisten en la translación sistemática de un motivo en una dirección que puede ser circular. Los diseños bidimensionales ocupan los recintos principales de las fachadas. Sus diseños se basan en la repetición sistemática, idéntica o con variaciones, de un motivo fundamental en dos direcciones.

La tridimensionalidad de una figura plana es un efecto de percepción visual. Uno debe aprender a 'ver' las tres dimensiones de una figura dibujada sobre un plano. Descontando los grabados figurativos de animales como los gallos en las fachada norte de la casa o los cerdos y figuras humanas labradas en lugares escondidos del granero, pocos diseños responden a la idea de tridimensionalidad. Son aquellos en los que la interrupción de líneas por otras se hace mediante superposiciones como ocurre con una representación en el plano de un nudo en el espacio. Es el caso del diseño llamado *Pa' kapu baka* (Ilustración 1, grabado situado más a la derecha en la fila central de la imagen).

Pocos diseños parecen haberse realizado como si los márgenes del espacio que los encierra fuese su marco. Los llamaremos diseños *vinculados al marco*. Constan, generalmente, de una figura única sometida al perfil del recinto que la rodea. Ese marco no intercepta ningún elemento o línea del diseño, como ocurre en algunos de la ilustración 11. Pero en la inmensa mayoría de grabados 2-d los lados del recinto que ocupan cortan las figuras o líneas del diseño. El cuadrado o rectángulo ya no es marco, sino una ventana abierta al vasto campo en el que el diseño se desarrolla sin límite (Ilustraciones 9-16). Tales diseños *desvinculados del marco* parecen expandirse en el plano infinito[1].

4.3.2 Formas talladas: diseños lineales y poligonales

La bibliografía sobre los grabados muestra que sus figuras y motivos son de inspiración natural. Una breve ojeada a los diseños basta para darnos cuenta de que los toraja han simplificado y abstraído en formas geométricas parte de la flora y fauna de su entorno. Apenas hay diseños realmente figurativos que reproduzcan con cierto grado de fidelidad la realidad. Es el caso de los grabados con forma animal en los que se representan figuras humanas, cerdos, gallos (*Pa' manuk Londong*, Ilustraciones 9 y 13) o el búfalo (*Pa' tedong*, Ilustración 22). Éste último se representa en una especie de caricatura intercalándose entre grabados consecutivos de una misma hilera de la fachada, tanto en casas como en graneros (Ilustraciones 1, 4, 9-11).

[1] Esta interpretación plantea la cuestión de si los artesanos toraja conciben la recta y el plano como entidades espaciales infinitas.

En las representaciones de las formas naturales del entorno que, de hecho, son los diseños se encuentran toda una serie de objetos geométricos identificables según la concepción de la geometría euclidiana. Las líneas pueden clasificarse como rectilíneas y curvilíneas. Hay líneas poligonales (Ilustraciones 9 y 16-18), hay curvas circulares (Ilustraciones 14, 21 y 29) y hay volutas (Ilustraciones 9-12). Cuando una línea conecta otras dos líneas o figuras suele hacerlo con suavidad, tangencialmente (Ilustraciones 21 y 26).

Entre las figuras se distinguen polígonos, círculos, sectores circulares y otras figuras mixtas. Los polígonos tienen ángulos rectos (Ilustraciones 11, 15, 16, 17, 23). Hay polígonos regulares (prácticamente sólo cuadrados) e irregulares (rectángulos y paralelogramos). También los hay cóncavos y convexos. No se ha encontrado más que un diseño con hexágonos, además irregulares, como los que encierran las cruces del segundo y quinto diseños en la hilera superior de la fachada Oeste de un granero (Ilustración 4).

Apenas hay diseños con triángulos. Los únicos que han podido documentarse son varios triángulos rectángulos encajados y de lados paralelos (semejantes) en la fachada Norte del tongkonan de Batu Rongko (Ilustración 6). Pero este caso parece anecdótico y su objeto rellenar un resquicio espacial. Donde sí aparecen triángulos es en el coloreado de los diseños, como sucede en el grabado central de la ilustración 15.

En muchos grabados las figuras de su diseño parecen haberse creado mediante la unión de unidades espaciales mínimas y por las que tales figuras adquieren su perfil poligonal (Ilustraciones 16 y 17).

Los círculos y arcos circulares suelen estar divididos en sectores de igual tamaño (Ilustraciones 13 y 14). La dirección del desarrollo de un diseño no es siempre rectilínea, también los hay que se desarrollan siguiendo la circunferencia (Ilustración 29). Rara es la presencia de otras figuras de aire verdaderamente artístico que no sean las reproducciones de animales ya mencionadas.

4.3.3 Conceptos geométricos evocados en los diseños

Prestando atención a la manera en que las líneas y figuras configuran cada diseño el observador matemático relaciona lo que ve con conceptos geométricos. En este sentido decimos que los elementos de un diseño evocan conceptos matemáticos. Tal vez fueron esos conceptos los que gobernaron la mano del artesano o quizá sean éstos los conceptos que el artesano adquiere como fruto de su trabajo. Sea como sea, esas evocaciones son modelizaciones matemáticas de lo que el observador contempla y aunque tollas ellas acabasen por confirmarse al estudiar la obra-en-curso y la obra-explicada, ahora no son más que proyecciones matemáticas que sirven de punto de arranque para la investigación. Si un diseño evoca un concepto matemático lo que hay que averiguar es si se corresponde con la realidad, o sea, si se han hecho las cosas de acuerdo con el concepto evocado por la visualización.

Dos conceptos geométricos muy evidentes en los grabados son el paralelismo y la perpendicularidad de segmentos. A veces los segmentos son paralelos a los lados del cuadrilátero que encierra el diseño; en otras, no. Esto plantea la pregunta de cómo logra el artesano ese paralelismo u ortogonalidad. Por ejemplo, en la ilustración 9 aparece el grabado llamado *Pa' sekong* en tres ocasiones. Los de los laterales tallados en recintos con forma de paralelogramo; el otro, el central, realizado en un recinto rectangular. ¿Cómo se construyeron sus segmentos paralelos y perpendiculares? ¿Cómo se garantizó el paralelismo y perpendicularidad las ilustraciones 17 y 18?

Pero el paralelismo no se reduce a los segmentos, también encontramos curvas que se dirían trazadas con ese propósito. Las curvas paralelas de la ilustración 21 parecen tener origen circular, ya que en ese grabado se observan varios círculos concéntricos que quizá fueron trazados con la ayuda de un compás. Pero, ¿cómo se hicieron las volutas paralelas de la ilustración 12?

Ya se ha observado que las curvas de la ilustración 21 conectan suavemente, acatando así la proposición nº. 12 de los principios para el arreglo de la forma y el color en las artes decorativas: 'All junctions of curved lines with curved or curved lines with straight should be tangential to each other. Natural law. Oriental practice in accordance with it' (Jones, 1910: 9).

El espacio remanente entre dos volutas a menudo se decora con multitud de pequeñas incisiones que evocan la idea de segmento normal a una curva, enfatizando de este modo el paralelismo de sus originales (Ilustraciones 19, 21 y 25).

Los ojos del búfalo representado en el diseño llamado *Pa' Tedong* se sitúan en la misma horizontal y equidistantes del eje de simetría de su rostro, lo que constituye una caso de simétrico de un punto con respecto a un segmento (Ilustración 22).

Los grabados están pintados con cuatro colores: negro, rojo, amarillo y blanco. En algunos diseños parece haberse aplicado el color siguiendo un ritmo cromático concreto. Los 16 sectores circulares de la ilustración 13 se han pintado alternando los colores negro, rojo y amarillo:

Negro: $\{2k-1\}$ $k \in N$, $k \leq 8$ (sectores impares)

Rojo: $\{2 \cdot (2k-1)\}$ $k \in N$, $k \leq 4$

Amarillo: $\{4 \cdot k\}$ $k \in N$, $k \leq 4$

Muchas figuras parecen hechas con recortes de otras que son recombinados y ensamblados de modo diferente, como en la ilustración 24. Tales deconstrucciones y recombinaciones de los elementos de una figura incitan a pensar en las isometrías del plano y en que existe algo subyacente y oculto en los grabados que permite y facilita este procedimiento.

Apenas hay casos de homotecia. Puesto que los módulos en que quedan subdivididas las fachadas son cuadrados, rectángulos o paralelogramos, no hay demasiado ámbito para desarrollar homotecias. El único caso detectado es el de los diseños unidimensionales que se labran a lo largo del travesaño que hay en la parte inferior de los graneros (Ilustración 27) y que acostumbra a ser un grabado dilatado verticalmente en sus extremos por la forma del travesaño.

Existen grabados en los que se aprecian los trazos de unas líneas blancas ajenas al propio diseño y que sin parecen ser las de la retícula que el artesano uso como referencia. Esto se aprecia claramente en el *Pa' sule tang* de la ilustración 21 y en algunos grabados de las fachadas de casas y graneros tradicionales (Anexo D: Ukiran toraja: Marurung, Lempo). La siguiente (Fig. 4.7) es la reproducción de la retícula visible en el *Pa' sule tang* mencionado.

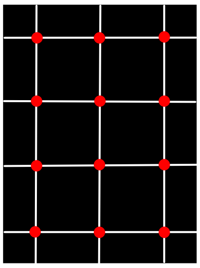


Figura 4.7

Que los centros de los 12 círculos idénticos de este diseño se hallen precisamente sobre las intersecciones de esta malla de rectas hace pensar que la ubicación de los elementos se rige por esa malla y que en su correcto trazado reside el rigor y equilibrio de la distribución. La retícula referencial sería ese elemento subyacente y oculto al que se aludió anteriormente que explicaría además el rigor y precisión, tanto de de las figuras que conforman el diseño como de su ubicación.

Preguntarse cómo se construye una retícula conduce al problema de la división del espacio en partes iguales. Se diría que la retícula de la figura anterior se realizó dividiendo los dos lados horizontales en 6 partes iguales; y los verticales, en 8. Eso proporcionó al artesano una serie de pares de puntos homólogos en los lados opuestos del rectángulo:

6=1+2+2+1, 8=1+2+2+2+1. Uniendo con segmentos ambos puntos de cada par se construye la retícula, estructura sostén del diseño.

La división de un recinto en una serie de partes iguales parece ser un problema frecuente en la ornamentación toraja. La mayoría de círculos presentan divisiones o construcciones basadas en su división en una potencia de 2: 8 (Ilustraicón 9), 16 (Ilustración 13) y 32 (Ilustración 14). Que el número de particiones sean potencias de 2 remite a una idea recurrente: la mitad de la mitad. Pero hay casos en los que el número de particiones es también múltiplo de 3, como ocurre con los 24 sectores en los que aparece dividido el círculo de la zona triangular (llamada *Para*) del tongkonan de Batu Rongko (Ilustración 6). Otros rectángulos y círculos orlando grabados aparecen también divididos en muchísimas partes, pero su cantidad irregular no parece obedecer a pautas tan rigurosas como en los casos anteriroes (Ilustración 29).

Tanto las teselaciones del plano como los diseños de forma=fondo son corrientes y no se reducen a casos de figuras poligonales, también los hay de perfil curvo. El fondo y la forma del diseño en la ilustración 18 son iguales. El de la ilustración 28 es una teselación del plano con una forma circular.

Aquellos conceptos relacionados con las transformaciones del plano que conservan las distancias (translaciones, giros y reflexiones) son tan frecuentes que aparecen prácticamente en todos los diseños. Se diría que es mediante las isometrías del plano que los artesanos desarrollan sus ideas o motivos fundamentales, ya que cada diseño parece elaborado en base a una figura fundamental que se reproduce siguiendo una o dos direcciones y cuyas variaciones se reducen a giros y reflexiones.

4.4 INTERPRETACIONES MATEMÁTICAS DE LA OBRA-ACABADA

4.4.1 Interpretación natural de la geometría de los grabados

Los diseños se tallan en superficies planas y presentan puntos, segmentos, ángulos (agudos, obtusos y rectos), círculos y sectores circulares, curvas (circunferencias, volutas), polígonos regulares e irregulares, cóncavos y convexos, paralelismo de segmentos y de curvas, perpendicularidades, etc. Todos estos elementos y conceptos geométricos son propios y característicos de la geometría euclidiana del plano. El investigador comprende, interpreta y da sentido a lo que contempla, la obra-acabada, percibiéndola como una plasmación de la primera geometría en la que fue educado. Su interpretación le lleva a imaginar que los segmentos y círculos presentes en los grabados han sido realizados también con las herramientas euclidianas (regla y compás). Ahora bien, puesto que desconoce por ahora los procedimientos artesanales, ese carácter euclidiano que atribuye a los grabados es todavía una proyección matemática, un modelo que le sirve de interpretación, pero que está pendiente de ser confirmado.

Así que cuando decimos que la geometría de los grabados es al euclidiana nos referimos a que sus objetos geométricos y los conceptos que evocan son euclidianos. Pero nada sabemos todavía del modo en que fueron construidos y desarrollados. La geometría euclidiana se basa en un conjunto de definiciones, postulados y nociones comunes de las que se derivan proposiciones. ¿Hasta qué punto el conocimiento y la labor artesanal torajas responden a esa estructura?

Ésta primera interpretación de la geometría de los grabados es la más natural en el punto en que nos encontramos. La llamaremos *Interpretación euclidiana de la geometría de los grabados toraja*. Deberá ser confirmada o refutada observando el proceso de talla y escuchando las explicaciones de los artesanos, la obra-en-curso y la obra-explicada.

4.4.2 Interpretación isométrica de los diseños toraja

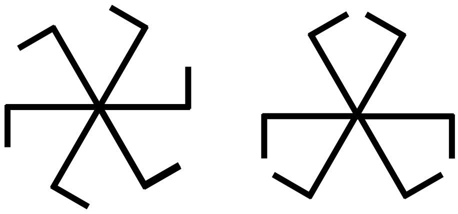
Este apartado va un poco más allá de lo que son elementos y conceptos geométricos. Ahora la atención se centra en el diseño como un todo, esto es, en cómo se transforma y gestiona la repetición de su motivo o figura fundamental. Por lo visto hasta aquí, las isometrías del plano parecen gobernar esos desarrollos y transformaciones en los que segmentos, circunferencias y otras curvas, el paralelismo y la perpendicularidad y otros conceptos geométricos sirven a una finalidad superior. Si antes el interés estaba en si los vértices de un polígono eran rectos o no, ahora lo importante es el lugar que ocupa cada figura con relación a las otras, qué comparten y qué las diferencia, cómo se organizan, qué cohesiona y equilibra el diseño. Según la observación de los grabados, la obra-acabada, las pautas que determinan todo eso son:

- Repetición sistemática de un motivo en diferentes puntos del plano.
- Ubicación de las copias del motivo fundamental en puntos bien determinados.
- Conservación del tamaño de las copias.
- Únicas variaciones aplicables: isometrías del plano (translaciones, giros y reflexiones).

Las transformaciones que dejan invariante un diseño sin alterar su forma ni tamaño forman su grupo de simetría. En el plano existen tres tipos principales de grupos de isometría. Los puntuales son diseños que no siguen ninguna dirección, como los de los rosetones. Los unidireccionales se desarrollan en una dirección, como los diseños en franja o cenefa, también llamados frisos. Los diseños bidireccionales se extienden en el plano según dos direcciones, como los del papel pintado.

El grupo de simetría de una figura plana se llama puntual o de Leonardo si es un grupo finito y si existe un punto de la figura, llamado centro, que queda fijo para todos los elementos del grupo (transformaciones). El teorema de Leonardo afirma que 'los únicos grupos puntuales de simetría de Leonardo son los grupos cíclicos C_n o los grupos diédricos D_n, para enteros $n \geq 1$' (Alsina y Trillas, 1984: 147).

Así, las figuras con grupo de simetría cíclico no presentan ejes de reflexión. En cambio, sí que los tienen aquellas con grupo de simetría diédrico. Por ejemplo, las dos formas de la figura 4.8 tienen grupo de simetría puntual. La figura A es invariante a un giro de 60º y su grupo será C_6 porque 360º/60º=6. La figura B, además de permanecer invariante a un giro de 120º, presenta también simetría axial según ocho radios que forman ángulos de 120º. Su grupo será D_3.



A B

Figura 4.8

En los grabados toraja hallamos figuras de grupos cíclicos y diédricos relacionados con la división del círculo en 2, 4 y 8 partes, pero nunca relacionados con giros de 60º o 120º. Por ejemplo, los gallos de la ilustración 9 se posan sobre una figura D_8; las volutas cuadradas de la ilustración 11 son C_4; en la ilustración 16 aparecen figuras D_4 y C_4; la figura del *Pa' erong* (Ilustración 26) es C_2.

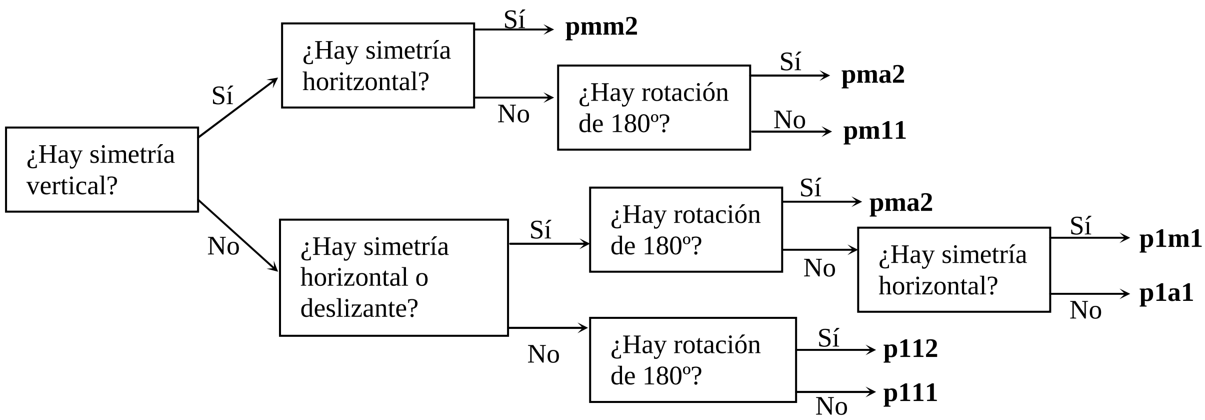
De forma similar puede hablarse de los grupos de simetría de diseños en friso (unidirecionales o 1-d) y en papel pintado (bidireccionales o 2-d). Los teoremas referentes a los grupos de isometría afirman que existen 7 grupos de simetría distintos para los diseños en friso (Alsina y Trillas, op. cit.: 151-154) y 17 para los del papel pintado (op. Cit.: 157-162).

Tanto la nomenclatura como la clasificación se complican a medida que el número de grupos aumenta. Utilizaremos la nomenclatura abreviada de la *Unión Cristalográfica*

Internacional. Fueron los cristalógrafos los primeros en echar de menos un estudio profundo de las isometrías. Se usan cuatro símbolos: p _ _ _.

El primero [p] es la inicial de periódico. El segundo símbolo indica si el friso presenta simetría axial vertical; en caso afirmativo, este segundo símbolo es [m] (la inicial de ‘mirror’); en caso contrario, será [1]. El tercer símbolo indica si hay simetría axial horizontal; si la hay, es [m]; si no la hay es [1]; y si lo que hay es una reflexión deslizante (reflexión seguida de una translación a lo largo del eje horizontal) el símbolo es [a]. Por último, el cuarto símbolo señala lo invariante del diseño con relación a un giro de 180º, el único que puede haber. En caso afirmativo, el símbolo es [2]; en caso negativo, es [1].

Con objeto de facilitar el proceso de clasificación de un diseño podemos utilizar una adaptación del diagrama en árbol elaborado por Washburn y Crowe (1988):



La franja de flechas de más abajo (Fig. 4.9) es invariante a reflexiones verticales realizadas según los ejes señalados (líneas de puntos verticales). El diseño no posee simetría horizontal, pero sí deslizante porque si se arrastra a izquierda o derecha tras haber efectuado esa reflexión queda como estaba al comienzo. También es invariante a giros de 180º con centros en los puntos marcados. Por tanto, su grupo de simetría es *pma2*:

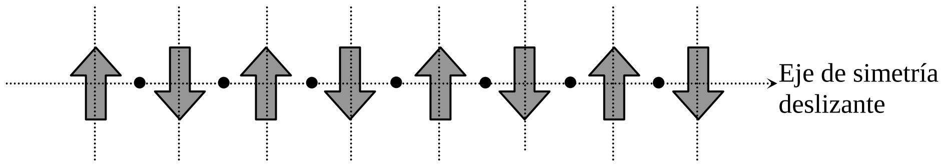
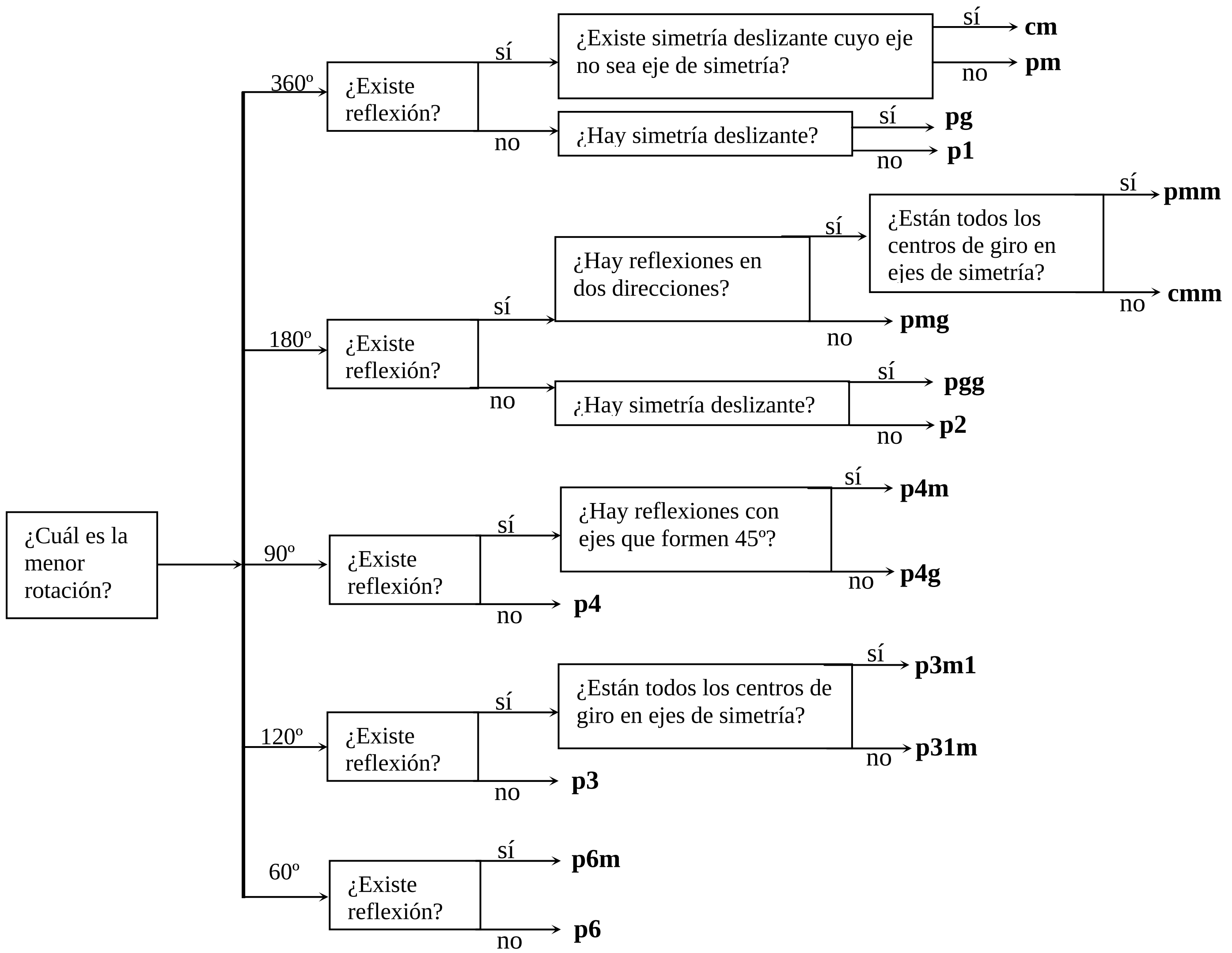


Figura 4.9

Entre los grabados toraja encontramos diseños correspondientes a los 7 grupos de simetría, como se muestra en las láminas *Grupos de simetría 1-d de los grabados toraja* al final de este capítulo. Incluso existen fachadas en las que figuran todos ellos, como es el caso de la fachada norte del tongkonan de Batu Rongko (Ilustración 6).

Para los diseños 2-d o 'de papel pintado', la nomenclatura es parecida al caso de los frisos. La letra p y tres símbolos más indicarán la presencia de simetrías axiales, deslizantes o de giro. Por lo que se refiere al procedimiento para identificar el grupo de simetría correspondiente a un diseño bidireccional usaremos también una adaptación del diagrama de cuestiones elaborado por Washburn y Crowe (1988):



La identifican de los grupos de simetría bidimensionales correspondiente a los grabados se recoge en las láminas *Grupos de simetría 2-d de los grabados toraja*, justo al final del capítulo.

Después de visitar incontables aldeas toraja a lo largo de todos sus distritos no se identifican diseños invariantes a giros de 60º o 120º, por lo que no parece que existan grabados con grupo de simetría *p3, p3m1, p31m, p6* ni *p6m*. De hecho, el triángulo equilátero no aparece en ningún grabado. Tampoco se identifica ningún diseño del grupo *pmg*, aunque ese grupo de simetría está presente en la disposición de los bambús que forman el tejado de las casas y graneros.

En este sentido, hay algunos diseños un tanto especiales que parecen realizados superponiendo varios en una amalgama peculiar y rica en simetrías, como sucede en el grabado de la ilustración 24 cuyo grupo de simetría es *p1*. En efecto, el único giro bajo el que permanece invariante es el de 360º, no posee ninguna reflexión y tampoco simetría deslizante. Pero aislando del diseño los grupos de figuras que son iguales y sin tener en cuenta su color, sólo su forma, encontraríamos grupos de simetría pg, *pm* (la serie de figuras blancas y simétricas) y *pmg* (unidas a su 'reflejo' deslizado y que está pintado de rojo).

La clasificación de los grabados según su grupo de simetría constituye una interpretación matemática de la organización, disposición y relación entre los motivos y figuras que conforman cada diseño. El investigador no puede nombrar los grabados basándose en otras referencias culturales que no sean las suyas. Por eso es lógico que la simetría articule su lenguaje y le permita llevar a cabo una clasificación. Cada diseño recibe un código por encima de aspectos formales o cromáticos, aunque eso no impida que dos diseños distintos a los ojos del observador reciban el mismo nombre.

Esta *Interpretación Isométrica* incorpora conceptos y relaciones geométricas (ángulo, giro, reflexión con respecto a una recta o segmento, translación, reflexión deslizante). Para confirmarlo es necesario averiguar si los artesanos conciben y relacionan los elementos de sus diseños de esta manera. Es gracias a esa interpretación que se plantean cuestiones relevantes de cara a la observación del proceso de talla: ¿distinguen los artesanos entre grabados unidimensionales y bidimensionales?, ¿es posible que el nombre toraja que según los antropólogos tienen todos los grabados refleje algún aspecto de su grupo de simetría?, ¿hablan de giros y reflexiones axiales? El lenguaje juega aquí un papel protagonista, por lo que la búsqueda de respuestas va más allá de la obra-en-curso y alude también a la obra-explicada.

4.4.3 Interpretación arquimediana de las volutas

Entre las figuras y formas geométricas más corrientes en los grabados están las volutas (Ilustración 12). A primera vista, se trata de curvas muy rigurosas que dejan entre sí una franja, también en espiral, de amplitud constante. Su forma es tan perfecta que la primera interpretación que vamos a desarrollar se inspira en el uso de alguna herramienta o artefacto para su construcción.

En el ámbito del Dibujo Técnico occidental existen las llamadas *falsas espirales*. Son volutas elaboradas a partir de un polígono regular (Fig. 4.10) desde cuyos vértices se trazan arcos circulares de la misma amplitud que el ángulo del vértice y de radio creciente a cada paso en una unidad determinada por la longitud del lado.

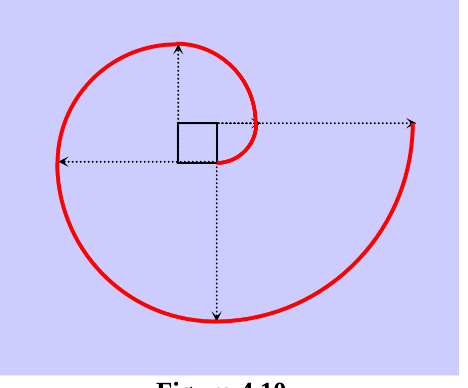


Figura 4.10

Pero los ojos de donde surgen las volutas toraja ni son poligonales ni presentan vestigio alguno de haberse realizado a partir de polígono alguno. Por tanto, una interpretación basada en esa idea sólo es plausible en el caso más sencillo de todos: el polígono de dos lados, o sea, el segmento. La interpretación consistiría en trazar una serie de semicircunferencias, cada una de radio una unidad mayor que la precedente y tomando como unidad la longitud del ojo (Fig. 4.11).

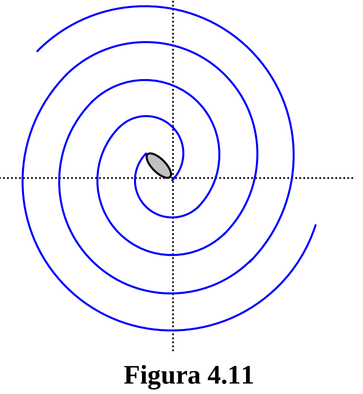


Figura 4.11

Pero no es éste el aspecto de las volutas toraja, por lo que tenemos que excluir essta posibilidad. Tal vez esas curvas estén más cerca de las espirales de Arquímedes cuyas ecuaciones paramétricas conoce el investigador: $(t\cdot\cos t,\ t\cdot\operatorname{sen} t)$, $t\in[0,t_0]$. Comparemos su aspecto (Fig. 4.12) con el de las espirales toraja (se omiten los ejes de coordenadas para facilitar la visualización). Las instrucciones para su construcción con el programa *Maple* son las siguientes:

```
> with(plots):
> esp1:=[x*cos(x),x*sin(x),x=0..6*Pi]:
> esp2:=[-x*cos(x),-x*sin(x),x=0..6*Pi]:
> plot({esp1,esp2},scaling=constrained,axes=none);
```

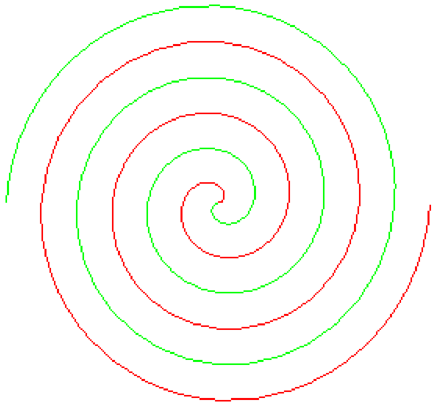


Figura 4.12

Incorporando a este gráfico el ojo de la voluta se aprecia que el resultado es prácticamente idéntico a la curva labrada en la madera (Fig. 4.13).

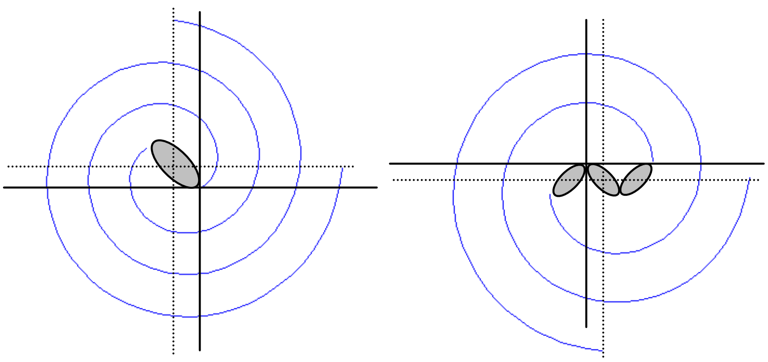


Figura 4.13

Las de la izquierda son dos espirales arquimedianas (t·cos(t), t·sen(t)), una girada 180º con respecto a la otra, con origen en la intersección de las líneas de puntos y se muestran a partir del momento en que su pendiente es ortogonal a la dirección señalada por el mata, colocado aquí en la bisectriz del vértice de la cuadrícula (45º). Esto significa que el primer punto visible de la espiral sea aquel en el que su pendiente vale 1. Esto nos conduce a una ecuación que el programa Maple resuelve:

$$m(t)=\frac{y'(t)}{x'(t)}=\frac{\sin(t)+t\cos(t)}{\cos(t)-t\sin(t)}=1 \Leftrightarrow tg(t)=\frac{1-t}{1+t} \Rightarrow t=2.709730131$$

Las espirales de la derecha se han trazado del mismo modo, sólo que añadiendo el ojo triple y a partir del punto en el que la pendiente es infinita: $m=\infty \Leftrightarrow t\cdot tg(t)=1 \Leftrightarrow t=3.455751919$.

Las espirales aquimedianas podrían constituir un modelo, una interpretación matemática, de esas volutas que, evidentemente, debería ser validado más adelante. Pero mirando más detenidamente la imagen de esas espirales veremos que, además de ser espirales, lo son de una forma rigurosa en el sentido de que no se abren o cierran de cualquier manera, sino que vuelta tras vuelta conservan la amplitud. Se diría que son espirales paralelas a sí mismas. ¿Verifica la espiral de Arquímedes esta propiedad? No, las espirales arquimedianas no son auto paralelas[2], aunque tienden a serlo a medida que la curva se aleja del punto de partida (Albertí, 2003). En efecto, una curva [x(t),y(t)] y su paralela (Fig. 4.14) se relacionan por la normal común:

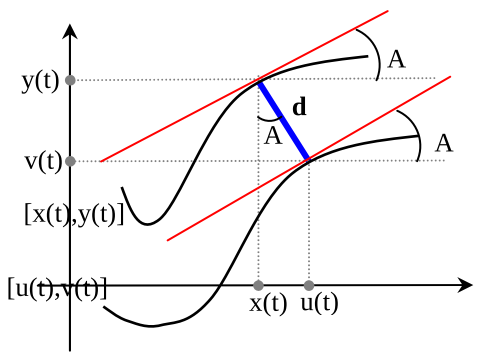


Figura 4.14

La pendiente m(t) en un punto P(t)=[t·cost,t·sint] es $m(t)=\frac{y'(t)}{x'(t)}=\frac{t+tgt}{1-t\cdot tgt}$.

[2] Ésta es una propiedad que le investigador nunca se había planteado antes hasta ahora, que desconocía y que tampoco se le había hecho observar a lo largo de sus tres etapas educativas: elemental, secundaria o unversitaria.

La espiral sería autoparalela, paralela a sí misma, si el vector $\overrightarrow{P_0P}$ formado entre puntos de igual pendiente (Fig. 4.15) fuera ortogonal a su vector tangente $\overrightarrow{T} = (1, m)$:

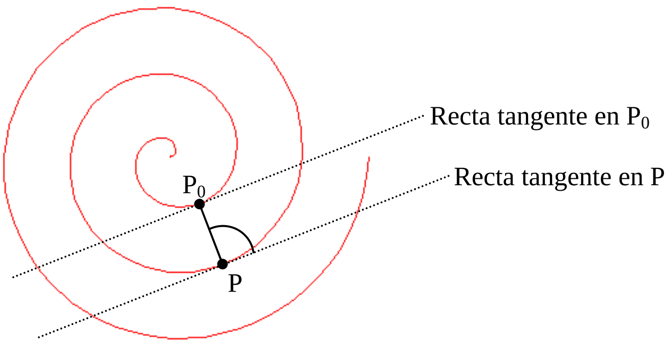


Figura 4.15

Pero entonces su producto escalar sería nulo: $t_0 \cdot \cos t_0 - t \cdot \cos t = -m \cdot t_0 \cdot \sin t_0 + m \cdot t \cdot \sin t$. Y puesto que $\cos t = \frac{1}{\sqrt{1+tg^2\, t}} = \frac{1+mt}{\sqrt{(1+m^2)(1+t^2)}}$ y $\sin t = \frac{tg\, t}{\sqrt{1+tg^2\, t}} = \frac{m-t}{\sqrt{(1+m^2)(1+t^2)}}$, la igualdad anterior equivale a $t=\pm t_0$. Por tanto, únicamente habrá paralelismo entre P(t) y sí mismo (solución obvia) y entre P(t) y P(-t), o sea, entre P y su "opuesto diametralmente", como es el caso de t=pi/4 y t_0=-pi/4. Por tanto, la espiral de Arquímedes no es paralela a sí misma y, en consecuencia, tampoco lo serán dos espirales de Arquímedes giradas 180º.

Los ojos del diseño evitan al artesano una labor imposible como es labrar fragmentos de voluta de curvatura cada vez mayor.

Esas interpretaciones, aunque de modo implícito, también incorporan un modo de construir las volutas. Las expresiones con las que se han generado los gráficos anteriores, x=t·cos(t) e y=t·sin(t), dicen que cada espiral es el resultado de una correspondencia funcional que asocia a valor de t un punto del plano. Además, el ordenador no representa todos los puntos, también actúa aproximadamente al conectar con segmentos rectilíneos un número finito de ellos. ¿Podemos considerar ésas interpretaciones apropiadas a su realidad? ¿Es así cómo se crean y surgen de la madera tallada las volutas?

Podría ser que en realidad esas volutas fueran fruto de la espontaneidad y que al artesano que las trazó le salieran así de bien y equidistantes. De momento, mantendremos en pie la *Interpretación arquimediana de las volutas toraja*, un modelo que queda pendiente validar a raíz de cómo se hagan en la obra-en-curso y de cómo se justifiquen en la obra-explicada.

4.4.4 Interpretación reticular de los diseños

Ya se observó anteriormente que algunos grabados (Ilustración 21: *Pa' sule tang*) presentan vestigios de una retícula en la que pudo referenciarse el diseño. Esto conducirá al planteamiento de un problema geométrico como es la división del espacio en varias partes iguales. ¿Cómo lo haría yo? Si tuviese que enfrentarme al problema de trazar esa retícula, mi solución seguiría los pasos siguientes:

1. Coger un lápiz y una regla milimetrada.
2. Medir la longitud, L, y la anchura, A, del rectángulo en el que se tallaría el diseño.
3. Dividir el resultado de la anchura, su valor numérico, entre 6 (A/6) y la longitud entre 8 (L/8).
4. Señalar tres puntos sobre los dos lados horizontales del rectángulo correspondientes a A/6, 2·A/6, 2·A/6 y A/6.
5. Repetir lo mismo para los lados verticales con L/8, 2·L/8, 2·L/8, 2·L/8 y L/8.
6. Luego uniría, con ayuda de la regla, los puntos homólogos de cada lado para obtener la retícula.

Por una parte, considerar esos trazos claros y rectilíneos como ajenos al diseño en sí y asignarles una función estructural como es la de servir de base referncial al diseño constituye ya una *Interpretación reticular de los diseños toraja*. Por otra, el modo descrito por lo que a su trazado se refiere es una *Interpretación procedimental de medida y cálculo para el trazado de la retícula*. ¿Lo harán así los artesanos toraja?

4.5 RECAPITULACIÓN DE RESULTADOS SOBRE LA OBRA-ACABADA Y CUESTIONES RELEVANTES PARA LA OBRA-EN-CURSO

La bibliografía referente a los grabados (la obra-acabada) con la que se abrió este capítulo ponía de manifiesto que cada grabado recibe un nombre específico que lo distingue de los demás y cuyo origen parece estar en las formas naturales que representa. En este sentido, las figuras de los grabados son abstracciones y simplificaciones de la realidad natural toraja. También quedó claro que los grabados poseen una gran significación social y cultural.

Esta importancia es resaltada por el lugar tan destacado en el que se muestran los grabados (arquitectura) y en el modo en que se concreta esa manifestación (partición y reticulado simétrico de las fachadas según la concepción toraja del mundo). La documentación fotográfica corrobora que la ubicación de los grabados sigue normas de simetría, a veces, incluso, llevada hasta el extremo de ser especular. Por tanto, la ornamentación arquitectónica toraja constituye verdaderamente una manifestación trascendental de esa cultura.

Los documentos fotográficos y audiovisuales muestran que los grabados no se cuelgan de las fachadas de las casas y graneros, sino que se han tallado en ellas. Cada fachada se compone de varias piezas ensambladas y encajadas unas en otras. La cuestión ahora es si los grabados se realizan antes o después del ensamblaje. El estudio de la obra-en-curso debe responder a esta pregunta.

La *Interpretación euclidiana de los grabados* incorpora implícitamente conceptos propios de la geometría euclidiana del plano: punto, segmento, recta, círculo, giro, ortogonalidad, paralelismo, ángulo, sector y toda una serie de estrategias y procedimientos que garanticen esas propiedades. Estas estrategias y procedimientos deberán hacerse ostensibles observando la obra-en-curso.

¿Conciben los artesanos toraja el plano y la recta como a espacios ilimitados e infinitos? Según la idea de proyección matemática desarrollada en el capítulo 3, un diseño o dibujo no expresan por sí solos matemáticas. Puesto que no queremos proyectar matemáticas, sino leerlas, y pese a que la desvinculación de un diseño con el perfil que lo limita incita a pensar que es así, debemos esperar al análisis de la obra-en-curso y de la obra-explicada para saber si ese modelo, esa interpretación, es apropiada al pensamiento de los artesanos. Mientras tanto, cualquier interpretación es proyectiva.

Una pregunta interesante se plantea: ¿cómo se determina la forma del espacio en el que se talla un diseño? Como hemos visto esos espacios son cuadriláteros, en su inmensa mayoría rectangulares. Pero, ¿quién los construye? ¿El artesano grabador o el arquitecto de la casa? ¿Cómo se determina también la forma triangular de la parte superior de las fachadas de la casa y el granero que da lugar a diseños en paralelogramos?

En la *Interpretación isométrica de los grabados* pesan más la organización y la relación entre figuras de un mismo diseño. Se han identificado diseños unidimensionales correspondientes a los 7 grupos de isometría posibles. En cambio, de los 17 grupos de isometría bidimensionales sólo se han identificado diseños cuyos grupo de simetria se relacionan con giros de 360º (obvio), 90º y 180º, y, entre éstos, no se ha identificado ninguno del tipo *pmg*. Después de recorrer multitud de aldeas y poblados de la región no se ha identificado ninguno relacionado con giros de 60º ni de 120º. No existen pues grabados con grupos de simetría de los tipos *p3, p6, p3m1, p31m, p6m*. Tampoco se ha encontrado en ningún grabado elemento geométrico o figurativo alguno con ángulos de 30º, 60º o 120º. A qué causas obedece esto supone una cuestión interesante. ¿Acaso los artesanos no saben construir un triángulo equilátero? ¿Tal vez sus creencias les impiden dibujarlo?

La pertinencia de la *Interpretación isométrica* dejará de ser una proyección matemática cuando sea validada. Y un modo de hacerlo es averiguar si el nombres de un diseño guarda relación con su simetría. Antes ya se ha mencionado que los nombres suelen referirse a la representación figurativa, por lo que nos sentimos tentados de afirmar que no reflejan la interpretación isométrica. Pero observemos un detalle. Podria suceder que los artesanos toraja no tuviesen en su vocabulario nombres específicos equivalentes a los que el observador occidental tiene para nombrar los rasgos propios de la simetría y entonces, quizá, el nombre recibido por un grabado – aunque fuese el nombre, pongamos por caso, de una planta –, lo recibiese, no a causa de la forma de la planta, sino de la simetría que ésta posee. El único modo de averiguarlo es interpelando a los autores y responsables de los grabados, lo que compete a la obra-explicada.

La *Interpretación arquimediana* de las volutas ya ha dado su primer fruto: la ampliación de conocimiento matemático para el investigador, quien desconocía que la espiral de Arquímedes fuese auto paralela y que sólo adquiere dicha propiedad en el infinito. La perfección de la talla de las volutas hace pensar que los artesanos siguen un método especial para su construcción. ¿Tal vez se trate de uno semejante a lo que en Dibujo Técnico se conocen como falsas espirales y que consiste en trazar un polígono, por ejemplo un cuadrado, y rodearlo con arcos de 90º de amplitud cada vez mayores hasta obtener una espiral suave y continua? ¿Quieren los artesanos hacer las volutas auto paralelas como parecen ser? En caso afirmativo, ¿cómo se aseguran el resultado? ¿Es arte o es geometría?

Ya se observó también que esa interpretación de las volutas implicaba una relación funcional que muy probablemente no se dé en la práctica toraja. Entonces habrá que modificar esa interpretación o elaborar una nueva.

La *Interpretación reticular* y la *Interpretación procedimental del trazado de la retícula*, además de incidir en el tema de la estructuración y orden del espacio, abren un aspecto muy interesante como es el de la cuantificación. La retícula determina un número de partes en cada diseño que, a su vez, parece proceder de un número determinado de partes en cada lado del espacio rectangular que lo encierra. Aunque las partes de la malla resultante no sean todas iguales, se diría que están hechas en base a una unidad común como sucedía en el *Pa' sule tang* (Ilustración 21). ¿Cómo se logra esto? La observación del proceso de talla será crucial para conocer un aspecto que se entrevé muy importante en esta práctica artesanal.

Como se ve, el análisis de la obra-acabada ha facilitado el desarrollo de cinco interpretaciones matemáticas fundamentales de las se plantean un sinfín de preguntas relevantes para la observación de la obra-en-curso y la interpelación referente a la obra-explicada. Imposible responderlas todas. Intentaremos al menos aproximarnos a las respuestas de las que son objetivo de esta investigación.

5

EL PROCESO DE GRABADO

Observando la obra-en-curso veremos cómo se hacen los grabados. El objetivo principal es buscar indicios de actividad matemática y ver si las interpretaciones matemáticas desarrolladas sobre la obra-acabada son confirmadas o no. Debemos tener presente que, aunque así fuese, no sería suficiente para tomarlas como definitivas, pues de acuerdo con nuestra estructuración de la obra y con el concepto de *interpretación matemática situada* planteada en el capítulo 3, ninguna interpretación será definitiva mientras no haya pasado por la interpelación de los autores, la obra-explicada. Lo que podemos lograr ahora es afianzar las interpretaciones realizadas.

Con relación a la *Interpretación euclidiana de la geometría de los grabados* se trata de ver cómo se trazan sus elementos (segmentos, paralelas, perpendiculares, circunferencias, etc.), qué métodos o estrategias se siguen, qué herramientas se usan y cómo se manejan. Pero respecto al propósito del artesano y a la terminología con la que se refiere a esos elementos habrá que esperar a la interpelación.

El carácter de la *Interpretación isométrica* no es tan procedimental, sino conceptual, por lo que su validación se pospone al análisis de la obra-explicada.

En cuanto a la *Interpretación arquimediana de las volutas*, observar el proceso de talla es fundamental y debería proporcionar pistas claras sobre su confirmación o refutación.

Durante la observación del proceso de grabado esperamos ver si, como parece, los diseños se elaboran en base a una retícula referencial apenas visible en los grabados ya terminados (¿oculta por la pintura?). De confirmarse, la *Interpretación reticular* resultaría adecuada. Lo más importante sería entonces conocer cómo se construyen esas retículas.

5.1 ANTECEDENTES SOBRE EL PROCESO DE GRABADO

No existe documentación escrita sobre la forma en que se hacen los grabados. En ninguna de las obras mencionadas anteriormente, ni en las de los antropólogos occidentales que han investigado en la región, ni en las de los nativos, se explica el proceso de talla. En enero de 2001 los profesores Dr. Ambo Takko y Dr. Hamka Naping, del Departamento de Antropología, y el Dr. Nirwan Ilyas, del Departamento de Matemáticas, todo ellos de la *Universitas Hassanuddin* de Makassar en Sulawesi, manifestaron al investigador su desconocimiento sobre la existencia de publicaciones e investigaciones, no ya que relacionasen el conocimiento matemático con la cultura toraja, sino con ninguna otra cultura de Sulawesi. La búsqueda en Internet también resultó infructuosa.

5.2 OBSERVACIONES

El centro de atención de la obra-en-curso está en las acciones de la gente, la labor artesanal. La recogida de datos debería comenzar situando las personas que llevan a cabo el trabajo, pero esto se hará cuando se hable con ellas, en la obra-explicada. Las observaciones se abren con una ficha de datos referentes a cuándo y dónde tuvo lugar, el nombre, edad y localidad de nacimiento del artesano que la protagoniza, el nombre del intérprete (caso de haberlo) y las imágenes (fotografías o video) documentales.

El observador de la obra-en-curso no puede formular preguntas a los artesanos de buenas a primeras, y menos usando su lenguaje matemático. Cuando hablamos de observación entendemos que se trata de una observación realizada sin intervención del observador o que éste interviene lo menos posible (a no ser que sea requerido por el intérprete que le acompaña o por el propio artesano). Su papel se reduce a documentar lo que observa. Aquellas observaciones en las que el investigador interviene voluntaria y directamente formarán parte de la obra-explicada. Pese a todo, es imposible que un acontecimiento semejante se desarrolle en absoluto silencio sin que haya la más mínima interacción verbal, tanto con quien hace las presentaciones, el intérprete, como con quien la protagoniza, el artesano. Como se verá, uno no puede presentarse en un taller, saludar a los presentes, apuntar lo que ve en una libreta y largarse diciendo adiós. Sólo se actúa así en un laboratorio. Que el observador muestre interés por el objeto de observación y por lo que hace el artesano, lejos de dificultar la tarea, la favorece, pues el aprecio es una muestra de respeto y valoración de la actividad.

Debemos tener en cuenta también que los artesanos no esperaban la llegada del investigador para ponerse a trabajar. Mucho más a menudo de lo que le hubiese gustado a éste se encontraba con que lo que más le interesaba ver ya se había realizado. Y al contrario, a veces podían pasar días sin que apareciesen los artesanos, pues tenían cuestiones más importantes que atender como son los ritos funerarios característicos de su cultura.

A continuación se presentan las observaciones. El lector recordará que, como ya se dijo al final del capítulo 3, pese a seguir un orden cronológico, no se hicieron antes las observaciones y después las interpelaciones a sus autores, sino que unas y otras se alternaron en el tiempo. De acuerdo con lo manifestado entonces las observaciones que se analizarán ahora son las que aparecen en la columna izquierda de la tabla 3.2 (Apdo. 3.5, p. 93). Esa columna se reproduce a continuación y constituye el índice de las observaciones del proceso de elaboración de los grabados.

Observaciones (Obra-en-curso)	año
Tiku (10.08.1999)	1999
Rombe' (12.01.2000)	2000
Leo (14.01.2000)	
Yobel (20.01.2000) Leo y Yobel (20.01.2000)	
Yobel (21.01.2000)	
Seber (20.08.2000)	
Seber (21.08.2000)	
Seber (21.08.2000)	
Seber (22.08.2000)	
Anton (22.08.2000)	
Anton (23.08.2000)	
Medi (23.08.2000)	
Ayudante de Yobel (12.08.2003)	2003

Las observaciones se numeran correlativamente y tienen como título el nombre del artesano autor de la tarea.

5.2.1 Tiku

Artesano: Tiku (unos 30 años)
Lugar: To' Marurung (distrito de Buntao')
fecha: 10.08.1999
Intérprete: Nadie
Imágenes: Ilustraciones 1-9 (láminas al final de este capítulo)

Tiku trabaja en la parte triangular superior de la fachada sur de un granero (Ilustración 1). La pieza entera, de madera y resultado del ensamblaje de otras, se sostiene de pie sobre el suelo, por lo que el artesano realiza su tarea en vertical. El resto del cuerpo del granero, en otra parte del taller (Ilustración 4) ya está montado y tallado, aunque sus grabados todavía no han sido coloreados. Los diseños se han labrado sobre la madera pintada de negro, por lo que el vaciado aparece de color claro. Al observarlos de cerca se aprecian en todos y cada uno de ellos los trazos brillantes de unos segmentos formando la malla de una retícula. Es evidente que el artesano la ha tomado como referencia, especialmente los puntos de sus intersecciones (Ilustraciones 2 y 3).

Para trazar un largo segmento paralelo a otro utiliza un listón de bambú más corto que éste. Lo desliza sobre él varias veces hasta completar su longitud trazando a cada paso un fragmento del segmento total. Hace el trazo con la punta de un compás, rascando la madera pintada de negro. El segmento final aparece como resultado de la hilera de segmentos consecutivos bien alineados (Fig. 5.1), cada uno encadenado al anterior (Ilustración 5).

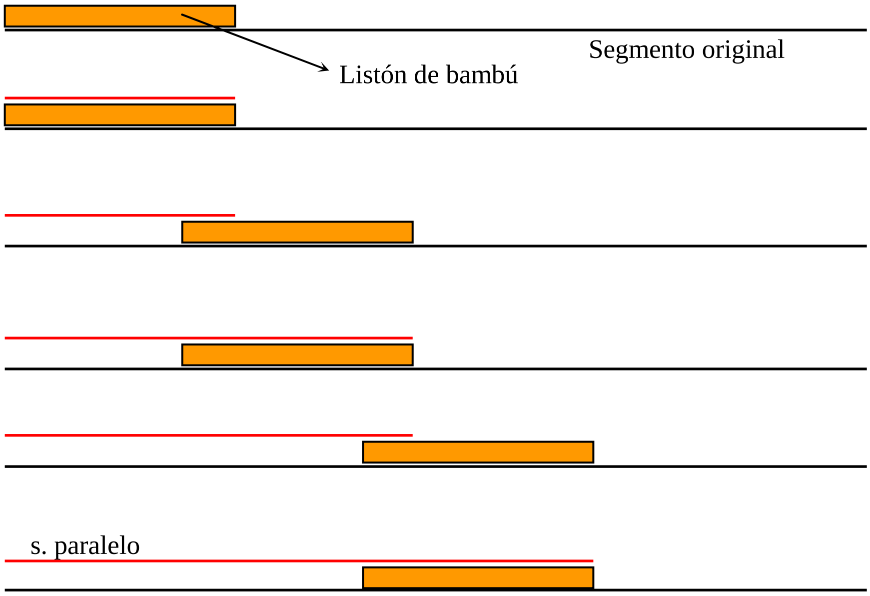


Figura 5.1

Una vez terminadas las paralelas, dibuja volutas con un lápiz y a mano alzada (Ilustración 6) que después talla con una gubia (Ilustración 7) y, por último, perfila con una navaja (Ilustración 8).

Análisis e interpretación

Tiku traza una recta paralela a otra del mismo modo que lo habría hecho yo al no disponer de una regla lo bastante larga para hacerla de una tirada. Desconozco si la perfección de las volutas se debe a alguna referencia que toma o tan sólo es producto de su habilidad y experiencia.

En todos los diseños tallados, todavía sin colorear, se observa una malla de líneas rectas a modo de retícula y cuyas intersecciones parecen determinar la posición y forma de las figuras. Esas retículas, cuadrículas en ocasiones, me remiten a la idea de sistema de referencia cartesiano, aunque, de momento, ignoro si la posición de las figuras talladas se cuantifica con algún tipo de ‘coordenadas’. En cualquier caso eso hace entrever que las cosas se hacen con rigor y orden.

Se identifican dos tipos de retículas. Unas, con pocas líneas y en cuyas intersecciones parecen situarse los elementos del diseño (Ilustración 3). Otras (Ilustración 2), muy finas y construidas con la superposición perpendicular de un par de haces de segmentos paralelos determinando las unidades espaciales mínimas con las que se forman las figuras del diseño.

Tiku perfila las volutas con una navaja, suavizando así su aspecto final. El artesano desarrolla su trabajo aplicándose a los paneles verticales de la fachada ya ensamblada.

El inventario de las herramientas utilizadas por Tiku es el siguiente: lápiz, listón de bambú completamente lisos (sin ninguna subdivisión en unidades), compás de dos agujas, gubia, mazo y navaja (Ilustración 9). Las situaciones-problema a las que se ha enfrentado se recogen en la Tabla 5.1.

Artesano: TIKU		
Problema	Herramientas	Solución
Trazar un segmento	Lápiz Listón bambú	Perfilar listón
Trazar una recta	Lápiz Listón bambú	La recta como serie de segmentos consecutivos y en la misma dirección
Trazar un segmento paralelo a otro	Lápiz Listón bambú	Perfilar ambos lados del listón
Trazar una voluta	Lápiz	Mano alzada

Tabla 5.1

5.2.2 Rombe’

Artesano: Rombe' (de Kete' Kesu, 10 años de experiencia)
Lugar: To' Marurung (distrito de Buntao').
Fecha: 12.01.2000
Intérprete: Nadie
Imágenes: Ilustraciones 10-16 (láminas al final de este capítulo)
Apuntes: Anexo B: XVI

La ilustración 10 muestra un diseño ya esbozado por Rombe’ en el que se aprecia una retícula y los perfiles de las figuras que configurarán el grabado. Rombe’ trabaja en vertical sobre una de las fachadas de un granero ya ensamblado y totalmente pintado de negro. Dispone de lápiz, listones de bambú, compás metálico de dos agujas, gubias, mazo y navaja. También dispone una regla metálica de 1m. de longitud milimetrado (Ilustración 11) que usa para trazar grandes segmentos como los del espacio rectangular que encierra el diseño, pero no para trabajar en su interior. Ahí emplea listones de bambú sin división alguna.

Con su regla mido las dimensiones del rectángulo del grabado: 30cm.x50cm. Los lados de cada módulo de la retícula miden 5cm. El resultado es impecable y la retícula es, de hecho, una cuadrícula (Ilustración 12)[1].

En otro rectángulo ya tiene trazadas varias líneas (Fig. 5.2) de un nuevo diseño (Anexo B: XVI).

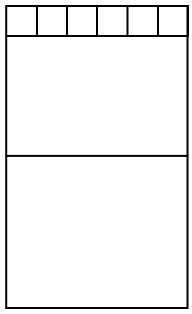


Figura 5.2

Le observo mientras intercala más líneas rectas entre éstas. Coge el compás y toma, aproximadamente, 'a ojo' y sin medirla, la mitad de la distancia entre dos de las paralelas ya dibujadas. Después, con centro en un punto (que yo diría escogido al azar) de una de las rectas traza dos pequeños arcos de circunferencia con el radio tomado (la mitad de la distancia entre las ya paralelas). Un arco por encima de su centro, el otro por debajo. Repite la misma operación en dos puntos más de la misma recta que también me parecen elegidos al azar (Fig. 5.3).

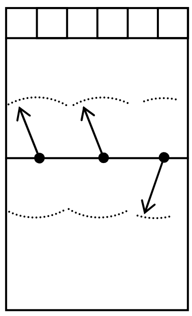


Figura 5.3

[1] Quien aparece en la fotografía no es Rombe', sino su ayudante.

A continuación, con el listón de bambú traza un segmento que toque a los tres arcos superiores (segmento tangente, en lenguaje occidental) y otro igual para los tres inferiores. El resultado son dos paralelas a la recta original (Fig. 5.4).

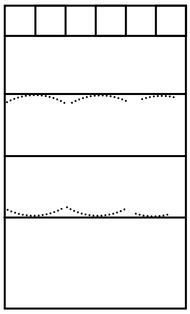


Figura 5.4

La retícula del diseño se completa con una serie de segmentos verticales y horizontales uniendo determinados puntos de los lados opuestos del rectángulo (Fig. 5.5).

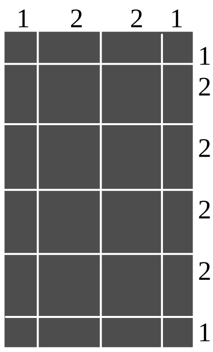


Figura 5.5

La *ratio* de esa retícula es 6/10=3/5. Finalmente, con el lápiz hace unas marcas ovales en las intersecciones de la retícula. *Mata* – dice al trazarlas (en bahasa indonesio *mata* significa ojo). Ésos ojos del diseño son todos iguales, pero señalan las direcciones alternativas de las bisectrices en cada intersección de la retícula (Fig. 5.6).

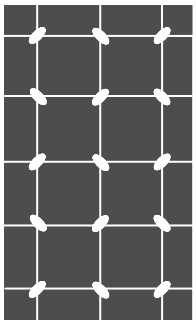


Figura 5.6

Acto seguido, con lápiz y a mano alzada, esboza las volutas de un diseño del que ya tenía hecha la retícula (Ilustraciones 13-16). Me pregunto si las volutas han de cortar la retícula en puntos concretos, como, por ejemplo, mantener la equidistancia entre los sucesivos cortes de la curva con la línea horizontal de la retícula. Se lo pregunto en inglés acompañando con gestos mis palabras, pero no logro nada. Rombe' no habla inglés (aparte de 'hello' y 'goodbye'). Insisto de nuevo, pero ahora usando mis conocimientos pueriles de bahasa indonesio. Le pregunto, a mi manera, si la proporción entre el primer y segundo cortes de la voluta con la horizontal de la retícula deben estar en proporción 1,5:1, que es la que a mí me parece haber. Me sorprende que su respuesta sea afirmativa, pero tras unos momentos de reflexión me doy cuenta de que no significa nada. Conozco el carácter indonesio por el que ante una pregunta que incluye la respuesta posible como la que le he formulado, la tendencia generalizada es responder afirmativamente. He cometido un error garrafal.

Veo claro que si quiero avanzar en la investigación deberé acompañarme de un intérprete. Le pregunto si puedo volver otro día con un amigo nativo para observar su trabajo y hacerle algunas preguntas sobre los grabados. Dice que sí.

<u>Análisis e interpretación</u>

Rombe' trabaja también en To' Marurung, pero no en el mismo taller que Tiku. Igual que él lleva a cabo su tarea sobre la fachada vertical ya montada del granero. Previamente a la talla construye una retícula a lápiz que divide el campo del grabado en zonas bien determinadas y precisas. Para esta distribución espacial Rombe' usa una metodología mixta que combina conceptos y procedimientos imprecisos basados en la estimación visual (tomar a ojo la mitad de un segmento como radio de una circunferencia) con otros más rigurosos basados en técnicas geométricas que me resultan familiares (el segmento paralelo a uno dado como aquel cuyos puntos equidistan del primero y traza de la paralela como la tangente común a varios arcos circulares). Observemos que dicha paralela, pese a verificar la propiedad deseada, es decir, que equidista del segmento original, no se ha construido siguiendo el procedimiento euclidiano descrito en la proposición nº. 31 del Libro I de los *Elementos*. Un par de arcos le habrían bastado a Rombe' para determinar la paralela.

Esas técnicas se acercan a mi conocimiento matemático geométrico y a los procedimientos que yo conozco como propios del Dibujo Técnico y cuya eficacia se justifica matemáticamente. De los métodos que por ahora considero poco rigurosos e imprecisos sorprende su extraordinaria eficacia. Por lo visto los artesanos tienen muy buen 'ojo'. ¿Habrá sido educada su mirada? ¿Basará sus decisiones ‘a ojo’ en alguna referencia o proceder invisible a mis ojos occidentales?

El trazo tan correcto de las volutas parece ser una cuestión de habilidad y práctica, un arte, aunque en su trazado de la voluta, Rombe’ – igual que hacía Tiku –, parece buscar la referencia del auto paralelismo dejando una franja de amplitud constante. Las volutas siempre se originan en el ‘mata’ u ojo dibujado en un punto de intersección de la retícula.

Las herramientas de Rombe’ son las mismas usadas por Tiku, salvo la gran regla milimetrada. Los problemas a los que se ha enfrentado Rombe’ son (Tabla 5.2) los siguientes.

Artesano: ROMBE’		
Problema	Herramientas	Solución
Trazar un segmento	Lápiz Listón bambú	Perfilar listón
Trazar un segmento paralelo a otro	Compás Lápiz Listón bambú	1.Trazar varios arcos circulares en puntos distintos del segmento original. 2.Trazar la tangente común a dichos arcos.
Trazar una voluta	Lápiz	Mano alzada

Tabla 5.2

5.2.3 Leo

Artesano: Leo (26 años, de Kampung Balik, distrito de Sangalla')
Lugar: Taller de Martheen Madoi (Rantepao)
Fecha: 14.01.2000
Intérprete: Nadie
Imágenes: Ilustración 17
Apuntes: Anexo B: XVIII

Leo trabaja a las órdenes de Martheen Madoi, constructor de casas y graneros tradicionales de Rantepao. Martheen dispone de regla milimetrada, pero Leo no lo usa, utiliza listones de bambú sin subdivisiones sobre los que hace marcas con lápiz correspondientes a las medidas que necesita y que toma sobre la fachada o parte del diseño ya hecho. Luego las transporta donde las necesita. De manera sintética y con mucha rapidez divide en partes iguales el lado del recinto rectangular destinado a un diseño. Lo ha hecho tan rápido que no me ha dado tiempo a verlo bien. Para ello ha usado un compás metálico de dos agujas, abriéndolo y cerrándolo. ¿Cómo ha logrado tener éxito en tan poco tiempo?

Toda su labor la desarrolla en vertical, en los paneles ya ensamblados de la fachada de un granero. Presto atención a las volutas. A diferencia de Rombe', Leo las talla directamente, sin haberlas esbozado antes. Sólo usa la gubia y el mazo. Las que hace ahora son las del diseño llamado *Pa' Tangke Lumu'*, en un rectángulo negro donde ya hay trazada un retícula con 'ojos' triples en sus intersecciones (Ilustración 17). Las retículas se trazan con lápiz que brilla destacando sobre el fondo negro.

Tengo la oportunidad de observar que la distancia entre dos paralelas consecutivas de los finos haces de segmentos de un *Pa' Sekong* realizado por Leo está determinada por el grosor del listón de bambú.

Además de Leo hay otros hombres que cortan las piezas de madera con maquinaria moderna que luego ensamblan formando otra fachada. Leo se aplica a los paneles rectangulares del granero ya montados cuyas dimensiones y forma no determina él, sino la sierra mecánica y los parámetros de la arquitectura tradicional.

<u>Análisis e interpretación</u>

Leo maneja las mismas herramientas que Tiku y Rombe'. Comparte con sus colegas algunas técnicas como la de usar listones de bambú para trasladar longitudes de un sitio a otro, determinar particiones de segmentos y trabajar sobre paneles verticales. Me sorprende su éxito a la hora de dividir segmentos en partes iguales. Interpreto que sus aperturas y cierres del compás obedecían a la búsqueda de la apertura justa correspondiente a la fracción del segmento a dividir.

Artesano: LEO		
Problema	Herramientas	Solución
División de un segmento en 2 partes iguales	Compás	Por aproximaciones sucesivas
Trazar una voluta	Gubia Mazo	Mano alzada

Tabla 5.3

5.2.4 Yobel (01)

Artesano: Yobel (24 años, de Kampung Tambunan, distrito de Sangalla')

Lugar: Taller de Martheen Madoi (Rantepao)

Fecha: 20.01.2000
Intérprete: Nadie
Imágenes: Ilustraciones 18-28
Apuntes: Anexo B: XIX

Yobel, que también trabaja para Martheen Madoi, me dice que sólo ha ido a la escuela elemental y que aprendió el oficio de un anciano. Me lo dice en bahasa indonesio, lengua que yo hablo cada vez mejor. Lleva 10 años trabajando como grabador. Aparece en la ilustración 18, ante la fachada de un tongkonan tallada por él (segundo por la derecha, con tocado). El de la izquierda es Martheen Madoi, quien me ofreció la oportunidad de observar el proceso de talla.

Además de las herramientas observadas hasta ahora (lápiz, compás metálico de dos agujas, listones de bambú, gubias, mazo y navaja), Yobel usa también compases de bambú. El instrumento consiste en un pequeño listón de bambú perforado a intervalos regulares. Éste listón se clava en la pared por un extremo. Se introduce la punta del lápiz por uno de sus agujeros y, moviéndolo, su punta dibuja sobre la madera un arco de circunferencia con centro en el extremo clavado. Yobel lo utiliza para hacer los círculos correspondientes al esquema geométrico del grabado llamado *Pa' Tedong* y que representa la cabeza de un búfalo (Ilustraciones 19-24).

En el granero donde trabaja Yobel hay toda una serie de diseños reticulados. Alguno presenta retícula triangular (Ilustración 25), mientras que otros (Ilustraciones 26 y 27), aunque distintos, se han elaborado sobre la misma retícula (Fig. 5.7).

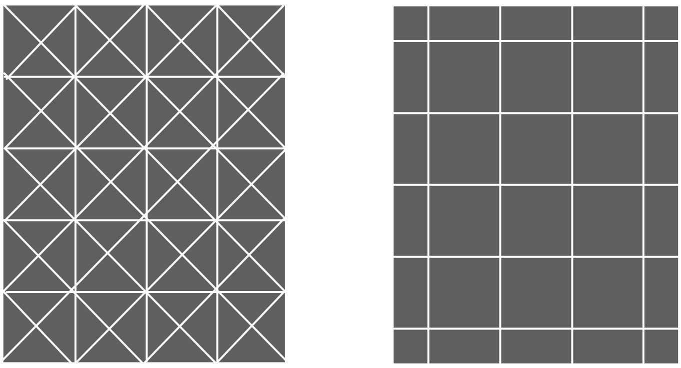

25 26 y 27

Figura 5.7

Esos diseños comparten la misma *ratio*: 4/5. También hay diseños unidimensionales (Fig. 5.8) con retículas muy finas (Ilustración 28).

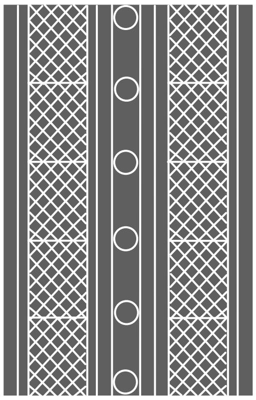


Figura 5.8

Al preguntarle por las perforaciones equidistantes practicadas en el listón de bambú de su compás responde que las señales pueden distar 1cm. ó 2cm. o *kira-kira* (se lleva la mano al frente para indicarme que lo tienen todo en la cabeza). Martheen me dirá en otro momento que la expresión *kira-kira* significa 'aproximadamente'.

Para dividir la anchura de un panel rectangular en tres partes iguales, usa un listón de bambú. Hace varias pruebas que yo diría tanteos 'a ojo' hasta que da con la solución que considera como buena. Procede de la manera siguiente (Fig. 5.9-11).

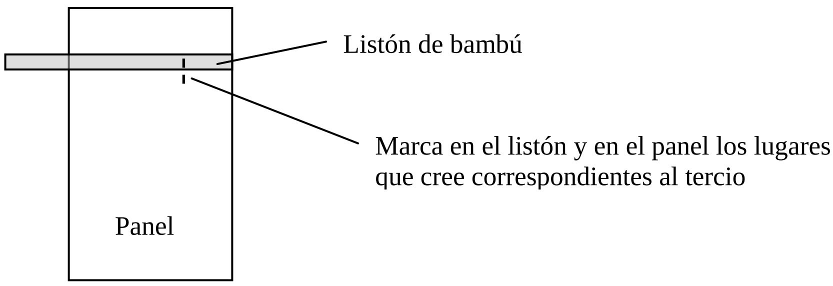


Figura 5.9

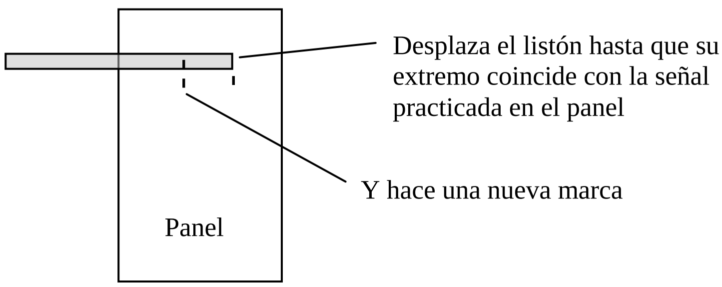


Figura 5.10

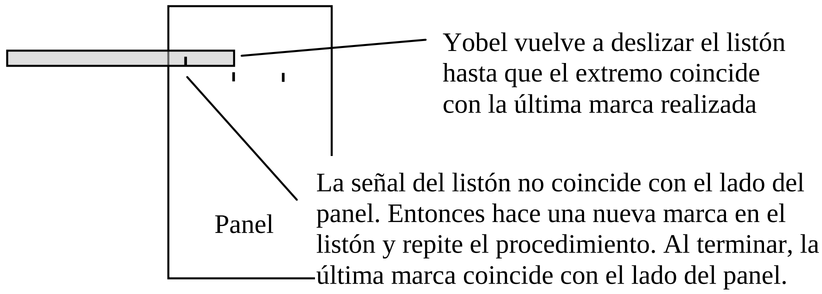


Figura 5.11

Le pregunté porqué no empleaba una regla graduada (las hay disponibles y baratas). *Así también va bien* – respondió. Se le veía muy hábil en todo lo que hacía logrando superar las situaciones con eficacia y rapidez. No parecía interesado en cambiar de método o en usar tecnología más avanzada y precisa.

Para construir otra retícula, Yobel, siempre usando el listón de bambú, traza primero las diagonales del rectángulo uniendo los vértices opuestos y luego las perpendiculares a los lados que pasan por la intersección de las diagonales. Pero esas perpendiculares a los lados, sus mediatrices, las hace ‘a ojo’. A mi entender, su verticalidad, horizontalidad u ortogonalidad son imprecisas, aunque mi ojo sería incapaz de distinguirlas de las exactas.

Análisis e interpretación

Yobel manifiesta que su educación académica fue elemental y que el oficio de artesano lo aprendió de un anciano. Se trata de un hecho de gran importancia que permite aventurar el carácter extra académico y extra occidental de los procedimientos artesanales.

Yobel usa las mismas herramientas que los demás y trabaja en vertical, pero también utiliza una herramienta no vista hasta ahora: el compás de bambú. A diferencia del compás estándar, el compás de bambú no se colapsa, no se abre ni se cierra. Su radio, además de permanecer fijo, es siempre visible. Al trazar una circunferencia con un compás de bambú uno ve que, en todo momento, cada uno de sus puntos está firmemente ligado al centro. La longitud del listón determina el radio máximo.

El uso de este instrumento peculiar para el investigador puede tener implicaciones importantes de cara al papel mediador de las herramientas en la cognición matemática y por las que es posible imaginar una concepción de círculo y circunferencia distintas de las habituales.

De hecho, el compás de bambú resulta muy práctico en esa actividad artesana, ya que una vez perforado, el radio queda fijo y se pueden hacer otras circunferencias con el mismo sin tener que volver de nuevo sobre casos anteriores. En un compás estándar el radio se pierde porque se abre y cierra con mucha facilidad. Ésta característica del compás de bambú es excelente si pensamos que en una casa tradicional han de realizarse entre 30 y 40 *Pa' Tedongs* y que todos deben ser iguales.

Las fotografías de la realización de un *Pa' Tedong* muestran que, pese a tratarse de un diseño figurativo, también éste se realiza sobre un esquema geométrico subyacente.

Las diagonales trazadas en diferentes paneles empiezan y terminan en esquinas opuestas de los rectángulos o cuadrados donde se han hecho. Esos vértices actúan de referencia visual para su trazado. Ocurre lo mismo con las verticales y horizontales, que se trazan 'a ojo', pero con la referencia rigurosa del punto de corte de las diagonales.

Rombe' también tomó a ojo la mitad de la distancia entre dos segmentos e, igual que Yobel buscando el tercio, tuvo un acierto espectacular. ¿No será que, además de tener buen ojo, siguen una pauta para corregir sus errores? Si la iteración del proceso conduce a un resultado más preciso significa que a cada paso se mejora la estimación. Más aún si consideramos el hecho de que dos aplicaciones sucesivas del proceso le han bastado a Yobel para lograr su objetivo. ¿Cuáles son las causas de la rapidez de su éxito? Una vez el artesano comprueba que ha cometido un error en su estimación, ¿cómo y en base a qué lo corrige? Evidentemente el trabajo artesanal admite un margen de tolerancia. En la realidad de la práctica, el error indetectable no existe. Pero aún así los artesanos no se conforman con cualquier estimación. De lo contrario, la primera sería dada como buena. Mi interpretación de ese modo de actuar es que los artesanos quieren obtener cierta precisión y que para alcanzarla modifican sus estimaciones mejorándolas según un plan premeditado.

Artesano: YOBEL (01)		
Problema	Herramientas	Solución
Trazar una circunferencia	Compás bambú (lápiz+listón)	Girar el lápiz en torno al extremo fijo del listón
Determinación del centro de un rectángulo	Listón de bambú Lápiz	Punto de intersección de las diagonales
Trazar las mediatrices de los lados de un rectángulo	Listón bambú Lápiz	Perfilando el listón en situación vertical u horizontal por el punto de corte de las diagonales
División de un segmento en 3 partes iguales	Listón bambú	Por aproximaciones sucesivas

Tabla 5.4

Esa división de un segmento en partes iguales es el hecho más sorprendente hasta ahora, pues se trata de un procedimiento nada familiar con el de mi cultura matemática en la que la cuestión se resuelve con rigor aplicando el método euclidiano. Esa solución nada afín con mi cultura matemática me remite a las ideas de Alangui y Barton (2002), su aspecto experimental no simbólico evoca a Polya (1945) y el hecho de que la estimación parezca ser corregida a cada prueba (confirmada o refutada) remite a Lakatos (1994).

5.2.5 Leo y Yobel

Artesanos:	Leo y Yobel
Lugar:	Taller de Martheen Madoi (Rantepao)
Fecha:	20.01.2000
Intérprete:	Nadie (bahasa indonesio)
Imágenes:	Ilustraciones 29-30
Apuntes:	Anexo B: XX

Leo y Yobel trabajan juntos en un ataúd de madera de paredes convexas. La flexibilidad del bambú permite que los listones se adapten a ese tipo de superficie y que Yobel pueda trazar sobre ella líneas rectas que, en la realidad tridimensional, son helicoides (Ilustración 29). En el ataúd se harían tres grabados bidimensionales orlados por otros unidimensionales. El espacio central está destinado al diseño llamado *Pa' Sekong*. El investigador no tiene la oportunidad de ver cómo se efectúa la partición en tres partes iguales. Cuando llega al lugar de trabajo la faena ya ha comenzado y los dos artesanos están preparando el campo para el grabado central, el *Pa' Sekong*.

La retícula de este diseño, muy fina, se construye trazando dos haces de segmentos, cada haz paralelo a una diagonal del recinto rectangular casi cuadrado (por lo que la retícula no es perfectamente ortogonal) y de amplitud igual al grosor del listón de bambú. Antes de labrar la madera, Leo señala con una goma de borrar el camino a seguir por la gubia (Ilustración 30).

<u>Análisis e interpretación</u>

Ambos artesanos colaboran compartiendo instrumental y técnicas. Entre ellos hablan toraja y parecen entenderse perfectamente, no sólo por lo que se refiere a la conversación, también en las tareas.

Artesano: LEO y YOBEL		
Problema	Herramientas	Solución
Trazar un haz de segmentos paralelos y equidistantes	Listón bambú Lápiz	Adosar reiterada y sucesivamente el listón a un segmento ya trazado y perfilarlo con el lápiz. La distancia entre segmentos consecutivos es la amplitud del listón

Tabla 5.5

5.2.6 Yobel (02)

Artesano: Yobel
Lugar: Taller de Martheen Madoi (Rantepao)
Fecha: 21.01.2000
Intérprete: Nadie (bahasa indonesio)
Imágenes: Ilustración 31
Apuntes: Anexo B: XXI-XXV

El 21.01.2000 Yobel comienza a trabajar en la tabla que me quiere obsequiar. Yo escogí los diseños que debería realizar. A los nombres que yo ya conocía fui añadiendo aquellos que veía en el tongkonan que él ya había tallado. A cada uno que yo le señalaba Yobel decía su nombre y yo lo incorporaba a la lista. Al final serían 18 diseños.

Cuando llego al taller, Yobel ya tiene la tabla preparada y bien asegurada con clavos que la sujetan verticalmente (Fig. 5.12). Su longitud es de 80cm., pero su lado izquierdo es un poco más ancho (39.1cm.) que el derecho (38.6cm.). Ya se ha trazado un esquema reticular doble con los 18 campos para los diseños:

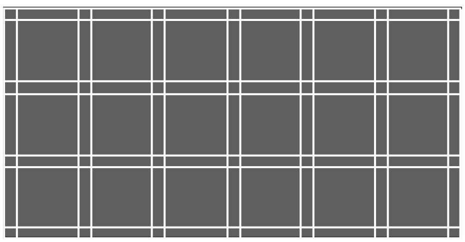


Figura 5.12

Es una pena haberme perdido el proceso de construcción de esta retícula. Compruebo que la anchura de sus líneas dobles coincide con el grosor del listón de bambú que utiliza. También compruebo que los 18 espacios donde va a tallar los diseños no son todos perfectamente cuadrados ni completamente idénticos[2]. El punto medio del lado inferior de la tabla coincide exactamente con el punto medio de la línea doble vertical central, pero en el lado superior el punto medio está un par de milímetros desviado hacia la izquierda. Los recintos para los diseños son similares y casi cuadrados, pero no idénticos ni cuadrados perfectos. Las dimensiones de los cuatro que hay en las cuatro esquinas son: (1): 11.7cm.x11.6cm., (13): 11.7cm.x11.1cm., (6): 11.5cm.x11.5cm. y (18): 11.5cm.x11.8cm.

Pa' Barre Allo (Fig. 5.13). Traza las dos diagonales del recinto superior izquierdo que, este sí, es cuadrado (11,6cm. x 11,6cm.). Con centro en el punto de corte traza, ayudándose del compás de bambú, sucesivas circunferencias concéntricas y aproximadamente equidistantes. Toma los radios arbitrariamente, sin una referencia visible. Acto seguido traza, también de manera aproximada ('a ojo'), una vertical y una horizontal por el centro. Obtiene así una partición del espacio y de cada círculo en 8 partes aproximadamente iguales ('a ojo'):

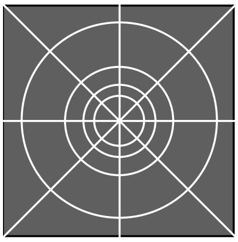


Figura 5.13

Después hace múltiples divisiones de los arcos de circunferencia intercalando nuevos radios que extiende hasta los límites del rectángulo. También los hace 'a ojo', dejando toda una serie de sectores de amplitud similar, pero no idéntica. Finalmente, completa la talla con algunos adornos que realzan la partición en 4 y 8 partes.

Pa' Tedong. El campo para este diseño no es exactamente cuadrado: 11,75cm. x 11,6cm., aunque el error es tan sólo de 1,5mm. Para reducir un poco la anchura del recinto Yobel talla junto a cada uno de sus lados verticales decoraciones suplementaria. Entonces, Yobel reproduce en este espacio restante los pasos seguidos en la elaboración anterior de este mismo diseño (Obs. 5.2.4). La partición del rectángulo en dos partes verticales iguales la hace también 'a ojo' y con la referencia de la intersección de las diagonales, pero le queda perfecta.

[2] Es posible que las dimensiones de la tabla sean las de un rectángulo de longitud doble (2A) que la anchura (A) y que la razón por la que los 18 recintos no son cuadrados estuviese en los márgenes dobles realizados con el listón. La proporción entre la longitud (L) y la anchura (A) de la tabla para

Pa' Tangke Lumu' (Fig. 5.14). El tercer diseño empieza con la construcción de la retícula referencial. Yobel aplica el mismo procedimiento que para dividir un segmento en 3 partes iguales (Obs. 5.2.4). Lo hace por aproximaciones sucesivas, corrigiendo a cada paso las estimaciones incorrectas efectuadas en el paso anterior. Lo llama 'kira-kira'.

Primero divide el lado horizontal superior del recinto (casi un cuadrado perfecto) en dos partes iguales. Obtiene la solución exacta (6cm. es la mitad de 12cm.) con una rapidez increíble. Luego busca el tercio de la primera mitad de la misma forma. De nuevo el resultado es exacto: 2cm. A continuación hace lo mismo en el lado vertical izquierdo (11,6cm.) obteniendo como resultado un punto situado en 5,9cm.

Partiendo de esos puntos atraviesa el rectángulo con verticales y horizontales para crear la retícula. Puesto que sus intersecciones con la base y con el lado derecho las ha realizado 'a ojo', el resultado es que en los puntos homólogos en la base se hallan a 2.1cm., 6.2cm. y 10.25 cm. de la esquina izquierda en lugar de estar a 2cm., 6cm. y 10cm. Tampoco los tercios del lado vertical izquierdo le quedan tan 'perfectos', pues actúa muy deprisa y a menudo traza líneas con el listón sin que éste se apoye completamente en la tabla: 2.1cm., 5.9cm. y 9.75cm. en lugar de 1.93cm., 5.8cm. y 9.67cm.

No es raro que uno de sus extremos esté en el aire todavía cuando Yobel tira una línea a toda velocidad. Aún así da por bueno el resultado y sigue adelante señalando los 'mata', los ojos del diseño:

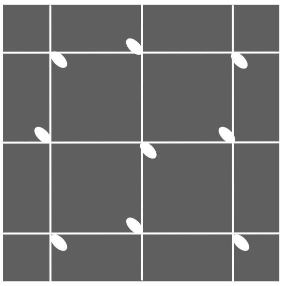


Figura 5.14

Por último, antes de iniciar la talla esboza a mano alzada las volutas. Todas ellas comienzan en los ojos señalados.

Pa' Tangke Lumu' di Tokke (Fig. 5.15). Con el lápiz y el listón de bambú toma longitudes del diseño anterior y las traslada al cuarto campo de la tabla señalando en él los mismos puntos

que esos 18 rectángulos resulten cuadrados con un listón de grosor m es: L/A=1+3m/A. Esto sólo es posible en un caso absurdo (A=3m., L=6m.) en el que los márgenes anulan los módulos de la retícula.

que en el recinto anterior y construyendo una retícula idéntica. Sólo la disposición de los ojos del diseño es diferente:

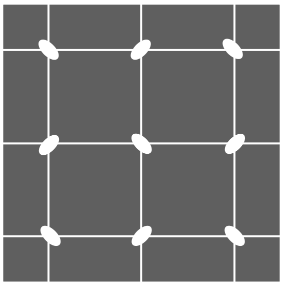


Figura 5.15

Ya no tenemos más tiempo. Mañana vendré a recoger la tabla terminada (Ilustración 31). Al entregármela, Yobel cita todos los grabados (de izquierda a derecha y de arriba a abajo):

(1) Pa’ Barre Allo. (2) Pa’ Tedong. (3) Pa’ Tangke Lumu’. (4) Pa’ Tangke Lumu’ di Tokke. (5) Pa’ Tangke Lumu’ di Sempa. (6) Pa’ Sule Tang. (7) Pa’ Kapu’ Baka. (8) Pa’ Erong. (9) Pa’ Sekong. (10) Pa’ Bulingtong si Teba. (11) Pa’ Baranae. (12) Pa’ Sirring Menonok. (13) Pa’ Bulingtong. (14) Pa’ Baba Gandang. (15) Pa’ Buku Paria. (16) Pa’ Barana. (17) Pa’ Sekong Pandi. (18) Pa’ Sepu Tarongkong.

<u>Análisis e interpretación</u>

Yobel nombra todos los diseños, lo que confirma lo ya dicho por Marampa (1992), Nooy-Palm (1988), Sande (1991) y Sandarupa (1986).

Hace todo el trabajo de forma sintética, sin cuantificar las medidas que toma, pero referenciándolas en determinados puntos geométricos. Así, el centro de las circunferencias del *Pa’ Barre Allo* está en la intersección de las diagonales, el trazo de segmentos verticales y horizontales se basa en la referencia visual, ‘a ojo’. En cambio, los radios de los círculos del diseño no son tan precisos, aunque parecen obedecer una intención de equidistancia.

A la hora de tallar el *Pa’ Tedong* en un campo casi cuadrado, lo que hace es reducir su ancho hasta transformarlo en un rectángulo introduciendo franjas decorativas laterales. Imagino que es consciente de que si no lo hiciese la cabeza del animal quedaría desproporcionada, excesivamente ancha. Sin embargo, esa reducción no parece obedecer una pauta rigurosa cuyo resultado sea un rectángulo geométricamente semejante a otros diseños iguales ya realizados. La reducción es imprecisa y no se basa en aspectos geométricos. No he visto a Yobel efectuar ningún cálculo escrito; mental, no lo sé.

Para construir la retícula referencial del *Pa' Tangke Lumu'*, el tercer diseño de la tabla, Yobel divide antes en dos partes iguales los lados del espacio rectangular. Aplica un método que interpreto como similar al de la observación 5.2.4 cuando dividió un segmento en tres partes iguales. Aprovechando las palabras del artesano lo llamaré *Método kira-kira*. Mi interpretación de lo que le he visto hacer es la siguiente:

1. Toma un listón de bambú y lo adosa al lado superior del recinto situando su extremo izquierdo justo encima del extremo izquierdo del lado del recinto.
2. Hace una marca en el listón que él considera, a ojo, correspondiente al punto medio del lado.
3. Hace otra marca en el punto homólogo del lado de recinto.
4. Desliza el listón hacia la derecha hasta que su extremo izquierdo se sitúa al par de la marca realizada en el lado del recinto.
5. Puesto que la marca del listón no coincide exactamente con el extremo derecho del lado del recinto, hace una nueva señal en el listón entre la que ya hay y el extremo derecho del lado del recinto.
6. Devuelve el listón a su posición original y hace sobre el lado del recinto una marca homóloga a la última hecha en el listón.
7. Desliza otra vez el listón hacia la derecha hasta hacer coincidir su extremo izquierdo con la última señal practicada en el lado del recinto.
8. Ahora sí que la última señal hecha en el listón cae justo al par del extremo derecho del lado del recinto.
9. La última señal se toma como punto medio del lado.

Su partición del espacio destinado al Pa' tangke lumu' no ha sido absolutamente perfecta y precisa por dos motivos. Primero, porque no ha señalado en el lado inferior del recinto los puntos homólogos del superior. Segundo, porque ha actuado con suma rapidez e imprecisión a la hora de trazar las líneas de la retícula.

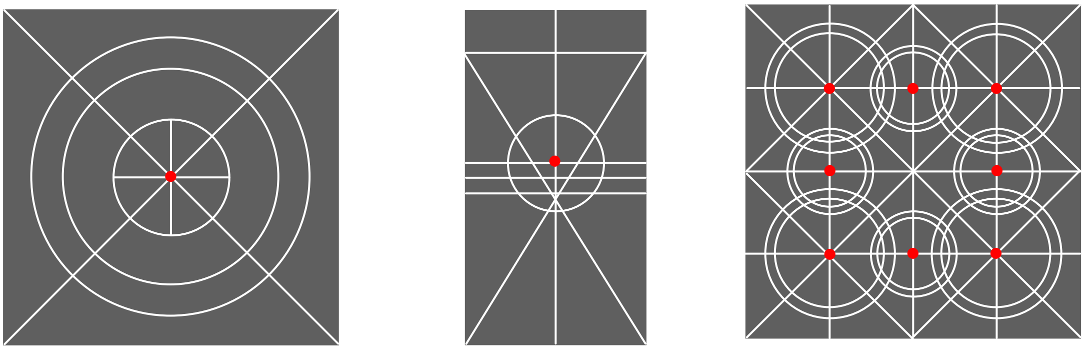
Los grabados se realizan por fases: (i) márgenes, (ii) retícula, (iii) esquema geométrico, (iv) ojos, (v) esbozo, (vi) talla y (vii) coloreado. El grabado comienza delimitando rigurosamente el recinto mediante el trazo de márgenes en sus cuatro lados que impiden que el diseño comience justo en el borde del recinto al que está destinado. Es el mismo en los cuatro lados e igual al grosor de un listón de bambú, aproximadamente de un centímetro o centímetro y medio. Luego se construye una retícula referencial del diseño. Ésta consiste en una malla de rectas rigurosa trazadas con herramientas y determinada por aspectos objetivos del campo delimitado por los márgenes (vértices, diagonales, mediatrices, etc.). Puede tener muchas o pocas líneas, ser sencilla o compleja, más o menos fina. Las retículas más finas están formadas por dos haces de rectas paralelas ortogonales o casi ortogonales cuya amplitud es la del listón de bambú con la que se han trazado. Como puede apreciarse (Ilustración 31), éstas retículas más finas crean unidades espaciales mínimas (cuadraditos, rectángulos o paralelogramos) que debidamente asociadas generan las figuras del diseño.

Que diseños distintos compartan la misma retícula nos acerca a la idea de sistema en un doble sentido. Por un lado, al sistema de producción de los grabados. La retícula facilita y asegura una correcta, rigurosa y objetiva elaboración y reproducción. Por otro lado, nos aproxima al sistema geométrico conceptual y procedimental, ya que para su construcción el artesano debe resolver situaciones o problemas geométricos. El sistema productivo necesario e imprescindible en la actividad práctica genera un sistema abstracto de ideas en el que entrevemos ya una importancia capital de la geometría.

Una vez construida la retícula, es corriente añadirle otras líneas adicionales (rectas o circulares) que, sin formar parte de ella, sirven de referencia y guía a los elementos y figuras del diseño. Ésas líneas y las de la retícula forman lo que llamaremos *esquema geométrico* del diseño. El siguiente paso, si procede, es señalar los ojos (*mata*) del diseño en determinadas intersecciones de la retícula y cuya función principal es la de referenciar el origen de las volutas. A diferencia de los centros de las circunferencias, los *mata* no son puntuales, sino alargados, determinando una dirección cercana a la bisectriz de la malla reticular. La orientación de dicha inclinación parece relacionarse con la forma y simetría que va a tener el diseño, aunque la retícula sea la misma (véanse las similitudes y diferencias entre el *Pa' Tangke Lumu'* y el *Pa' Tangke Lumu' di Toke*). Por último, antes de iniciar la talla de la madera, puede realizarse un esbozo a mano alzada (sin herramientas) de las figuras.

Las finas retículas de los diseños nº. 9, 12, 17 y 18 se han construido a partir de las direcciones de las diagonales del recinto, pero poniendo el listón de bambú de manera que no toque con el mismo filo los dos extremos de la diagonal (véase más abajo).

Yobel ha construido sus diseños sobre las siguientes retículas y esquemas geométricos (Fig. 5.16-5.19). Los puntos destacados corresponden a los centros de circunferencias trazadas con el compás de bambú.



1 2 7

Figura 5.16 Esquemas geométricos: 1-*Pa' barre allo*, 2-*Pa' tedong*, 3-*Pa' kapu baka*

Esos tres esquemas geométricos se basan en retículas sencillas (Fig. 5.17).

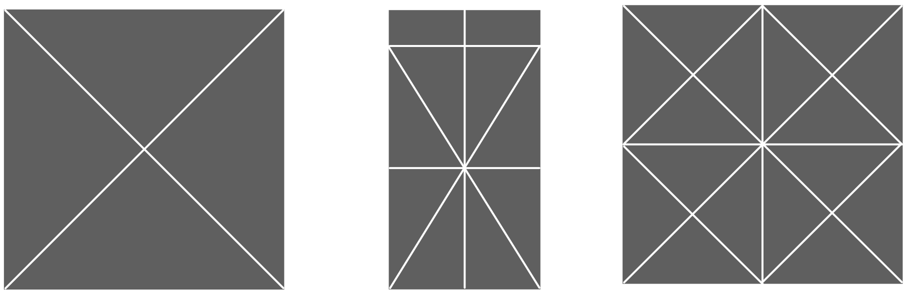
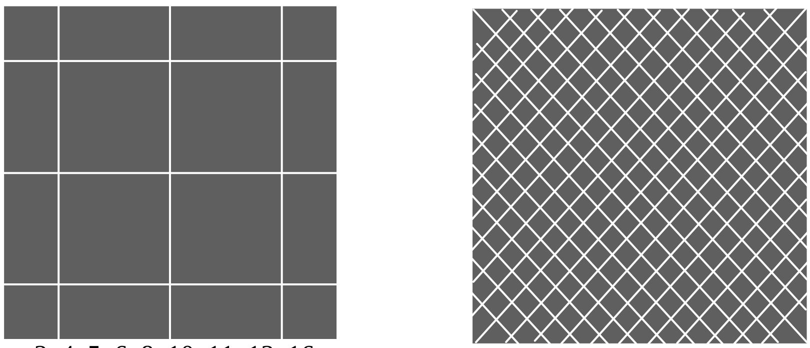


Figura 5.17 Retículas: 1-*Pa' barre allo*, 2-*Pa' tedong*, 3-*Pa' kapu baka*

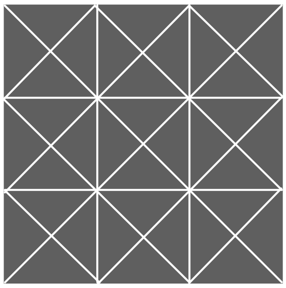
Otras retículas presentes en la tabla son[3] las siguientes (Fig. 5.18), algunas compartidas por distintos diseños.



3, 4, 5, 6, 8, 10, 11, 13, 16 9, 12, 17,18

Figura 5.18

[3] Obsérvense la forma en la que se dispuso el listón de bambú sobre las diagonales para determinar las direcciones los haces de paralelas en la más fina de las retículas.


14

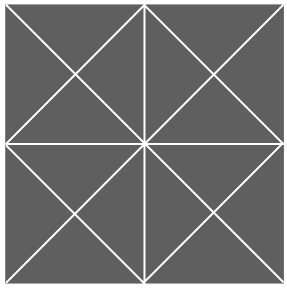

15

Figura 5.19

Se observan particiones del espacio del grabado, ya sea en columnas o en filas, derivadas de la división de un segmento en 2, 3, 4, 6, 8 y un número indeterminado de partes iguales. Las nuevas situaciones a las que se ha enfrentado Yobel son (Tabla 5.6):

Artesano: YOBEL (02)		
Problema	Herramientas	Solución
Trazo de una serie de circunferencias concéntricas	Compás bambú (lápiz + listón)	Variar el radio conservando el centro
División de un círculo centrado en un cuadrado en 8 partes iguales	Listón bambú Lápiz	Trazar las diagonales y las mediatrices del cuadrado que lo contiene
Determinación de la sexta parte de un segmento		Por aproximaciones sucesivas: 1.Se determina el punto medio. 2.Se determina el tercio de la mitad del segmento.
Determinar el punto medio del lado de un rectángulo	Listón bambú Lápiz	Trazar la vertical (u horizontal) por el punto de corte de las diagonales
Traza de volutas	Lápiz	A mano alzada

Tabla 5.6

5.2.7 Seber (01)

Artesano: Seber (27 años, de Randan Batu, kel. Buntu La'bo', kec. Sanggalangi)
Lugar: To' Marurung (distrito de Buntao')
Fecha: 20.08.2000
Intérprete: Nadie (bahasa indonesio)
Imágenes: Ilustraciones 32-34
Apuntes: Anexo B: XXVII-XXVIII

Seber (Ilustración 32) lleva ocho años en el oficio. Sin que yo se lo pregunte me informa de que lo aprendió de su abuelo, no en la escuela, y que su abuelo lo aprendió de otro anciano. Usa lápiz, listones de bambú, compás de dos agujas y tijeras oxidadas como si fuesen un compás, gubias, mazo y navaja. Dispone, además, de una escuadra de carpintero cuya parte metálica incorpora una regla milimetrada. Pero no usa la escuadra para trazar perpendiculares en un diseño ni para medir con su regla longitud alguna.

Tampoco usa la regla milimetrada para tomar medidas y llevarlas de un sitio a otro, para eso emplea un listón de bambú o las tijeras. Ahora se aplica en un diseño que llama *Pa' Bulu Londong*. El diseño se realiza sobre una retícula (Fig. 5.20) que ya tiene trazada (Ilustración 33) cuya mitad superior es, de hecho, una cuadrícula:

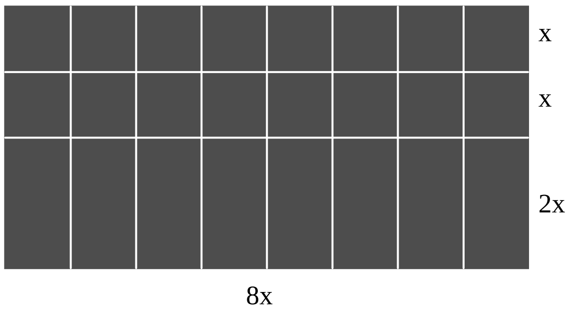


Figura 5.20

Completa su esquema geométrico (Fig. 5.21) con el trazo de algunas líneas auxiliares referenciadas en vértices de la cuadrícula:

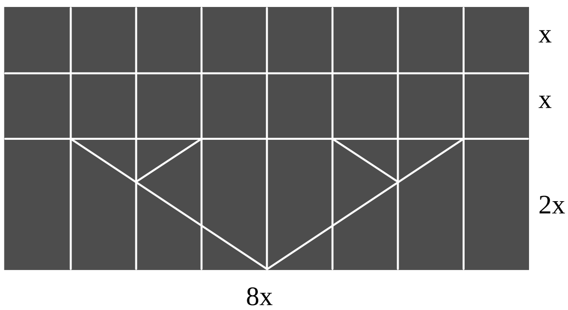


Figura 5.21

Otro grabado, el *Pa' Bulu Londong di Kampassu'*, es una variante del anterior. Su retícula y esquema geométrico (Fig. 5.22) también:

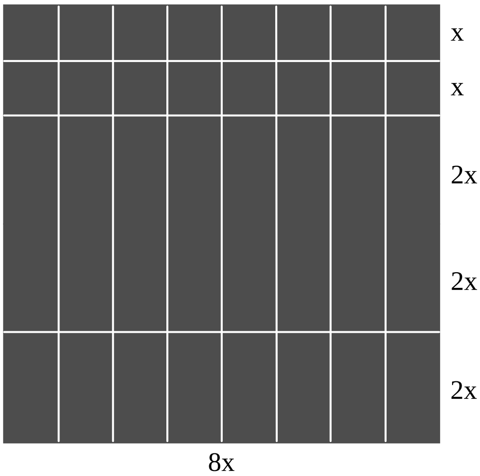


Figura 5.22

El esquema geométrico construido sobre ella es bastante riguroso, completándose con una semicircunferencia centrada en el punto medio de la base del campo y de radio igual a dos módulos cuadrados de la retícula. Luego añade cinco semicircunferencias más concéntricas con la anterior y de radios decrecientes ‘a ojo’ (Fig. 5.23).

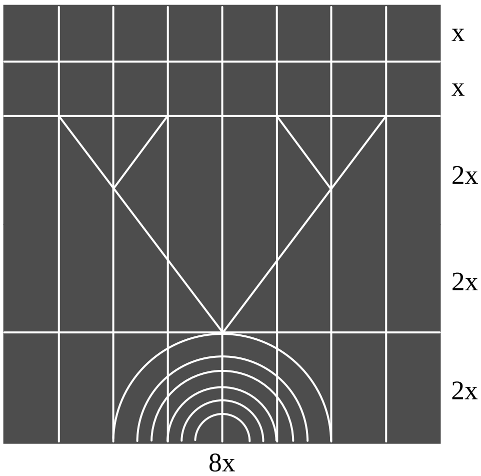


Figura 5.23

Seber lleva a cabo toda la faena en vertical, aplicándose a las paredes del granero. Tengo la oportunidad de observar la construcción del sistema reticular del diseño *Pa' Kapu Baka*. El espacio donde va a hacerse es cuadrado. Seber comienza trazando sus diagonales, pero para dividir el lado en dos partes iguales no usa la escuadra ni el listón de bambú, sino el compás:

a. Tras clavar una aguja del compás en el extremo izquierdo del lado a dividir en dos partes lo abre hasta abarcar una distancia que le parece correspondiente a la mitad del la longitud del lado y hace allí una pequeña marca.

b. Después levanta el compás y pone la aguja que estaba clavada en el extremo justo encima de la señal que acaba de practicar. Así puede valorar si la otra aguja coincide con el extremo derecho del lado. Como no es el caso, modifica un poco la apertura del compás y vuelve a repetir el proceso.

c. Al finalizar la repetición del proceso obtiene un resultado que da como bueno.

He aquí (Fig. 5.24) la retícula del esquema geométrico resultante(Ilustración 34).

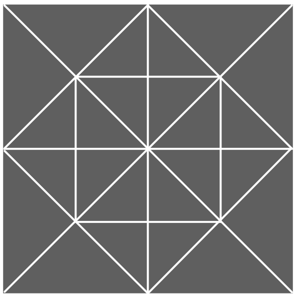


Figura 5.24

<u>Análisis e interpretación</u>

Como Yobel, Seber no aprendió lo que hace en la escuela, sino de su abuelo. Además de las herramientas usadas por otros artesanos, da un nuevo uso a un instrumento impropio de ese contexto como son las tijeras. Las tijeras están hechas para cortar, pero también son dos navajas unidas en un eje móvil cuyos extremos afilados rascan la madera dejando un fino surco labrado en ella. Ahí reside su utilidad. Y eso no es todo. Las tijeras de Seber están oxidadas, por lo que resultan difíciles de abrir y cerrar, son apenas colapsables. En este sentido se parecen al compás de bambú de Yobel. Seber no emplea ningún compás de bambú y, como los demás artesanos, también trabaja aplicándose a las paredes verticales del granero ya ensamblado.

El esquema geométrico del *Pa' Bulu Londong* es particular. Seber no ha tomado ninguna medida para hacerlo. Pese a no calcular ni cuantificar por escrito o verbalmente (mentalmente, no lo sé), cada elemento del grabado tiene un lugar en el que situarse. Desde mi perspectiva, y mediante el cálculo trigonométrico, conociendo las dimensiones de los lados del campo del diseño podrían cuantificarse las localizaciones de sus intersecciones y los ángulos formados por sus líneas. En esta ocasión el esquema geométrico sí es cuadrado y las unidades de sus módulos proceden de la partición de la altura en 8=2+2+2+1+1 partes.

Tanto Seber como su ayudante usan también el método que llamé *kira-kira* para dividir un segmento en partes iguales.

Los esquemas geométricos de Yobel y Seber para el diseño *Pa' kapu baka* son similares, pero no idénticos. En los puntos situados sobre las mediatrices del recinto Seber traza tres circunferencias concéntricas (Yobel trazaba siempre dos). Además, Seber se conforma con el cuadrado interior para determinarlos y no prolonga sus lados hasta los del recinto como hacía Yobel.

Artesano: SEBER (01)		
Problema	Herramientas	Solución
Trazo de una semicircunferencia	Compás metálico Lápiz	Girar el compás sobre un extremo
División de un segmento en 2 partes iguales	Compás metálico	Por aproximaciones sucesivas

Tabla 5.7

5.2.8 Seber (02)

Artesano: Seber
Lugar: To' Marurung (distrito de Buntao')
Fecha: 21.08.2000
Intérprete: Nadie (bahasa indonesia)
Imágenes: Ilustraciones 35-37
Apuntes: Anexo B: XXIX-XXX

Hoy Seber trabaja en el diseño *Pa' poyah mundan*. Para su esquema geométrico tiene que dibujar circunferencias iguales y equidistantes a lo largo de un segmento que ha trazado con la ayuda del listón de bambú.

Empieza con una circunferencia C_1 con centro sobre el segmento trazado (Fig. 5.25).

Figura 5.25

Con el mismo radio traza otra circunferencia C_2 en un punto de la recta que considera apropiado (Fig. 5.26).

Figura 5.26

Con el compás toma la distancia entre los centros de ambas circunferencias y con una punta en el centro de C_2 hace una marca sobre la recta con la otra punta. Ése será el centro de la tercera circunferencia C_3. Vuelve sobre C_1 para tomar su radio con el compás y traza una nueva circunferencia con centro en la marca realizada (Fig. 5.27).

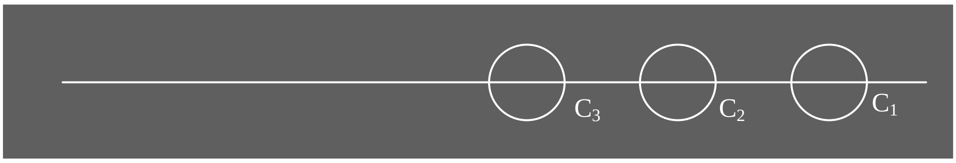


Figura 5.27

El diseño se completa (Fig. 5.28) con el trazo de tres circunferencias concéntricas con las anteriores y cuyos radios difieren, aparentemente, en una unidad determinada ‘a ojo’, sin que Seber haya calculado o determinado en base a una referencia ostensible.

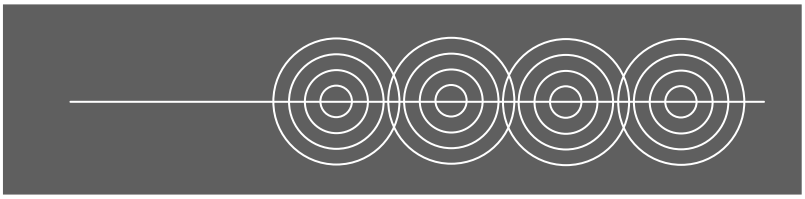


Figura 5.28

Finalmente, traza parejas de tangentes comunes a las dos circunferencias interiores de grupos consecutivos (Fig. 5.29).

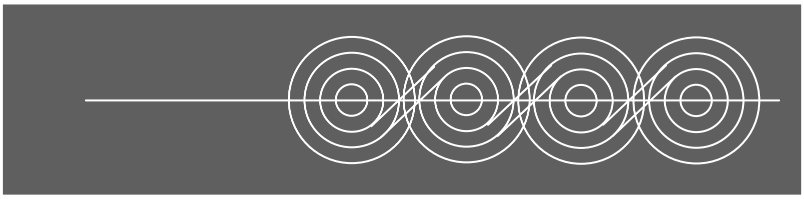


Figura 5.29

Seber aparece en la ilustración 35 tallando esas tangentes comunes ya esbozadas con la punta de su compás-tijera. La ilustración 36 muestra el diseño ya terminado, listo para ser coloreado.

Seber es muy riguroso en lo que respecta al trazado de las volutas, su ubicación en las intersecciones de las líneas de la retícula, la dirección de su inicio y su amplitud constante (Ilustración 37).

<u>Análisis e interpretación</u>

Aparecen aquí varios conceptos geométricos no vistos hasta ahora: circunferencias concéntricas, segmentos tangentes a dos circunferencias y sucesión equidistante de objetos.

Tampoco hay cuantificación explícita, pero sí una forma rigurosa de situar las cosas como la estrategia para garantizar la equidistancia entre los grupos de circunferencias concéntricas. En cambio, cada tangente común a dos circunferencias se traza aproximadamente, no se utiliza el método euclidiano para trazar la tangente exterior a un círculo de la proposición nº. 17 de los *Elementos*. De hecho, ante el hecho de encontrar procedimientos rigurosos con otros que lo son menos, cabe plantearse por qué. ¿Acaso podrían hacerse las cosas a la manera euclidiana? Si las paralelas, perpendiculares, tangentes exteriores y divisiones de segmentos en partes iguales se hiciesen según se dicta en *Los Elementos*, ¿serían posibles los grabados?

La perfección de alguna de las volutas trazadas por seber (Ilustración 32) hace pensar en que sus referencias son algo más que las de un artista.

Artesano: SEBER (02)		
Problema	Herramientas	Solución
Trazar una recta	Listón bambú Lápiz	La recta como serie de segmentos consecutivos y en la misma dirección
Construir una serie de circunferencias equidistantes	Compás metálico	La equidistancia de los centros determina la de las circunferencias
Tangente común entre dos circunferencias	Listón bambú Lápiz	Por aproximaciones sucesivas

Tabla 5.8

5.2.9 Seber (03)

Artesano: Seber.

Lugar: To' Marurung (distrito de Buntao')

Fecha: 21.08.2000

Intérprete: Nadie (bahasa indonesio)

Imágenes: No

Apuntes: No

Al concluir el esquema geométrico de un *Pa' Tedong* (la cara de un búfalo) Seber ha de situar los ojos del animal. Al punto donde pone el primero de los ojos lo llamará P y está a la izquierda del segmento vertical que divide en dos el semblante del animal (Fig. 5.30).

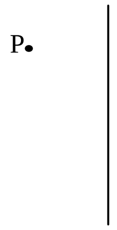


Figura 5.30

Luego escoge un punto sobre ése eje vertical al que llamaré Q, y que yo diría elegido arbitrariamente. Tomándolo como centro traza un arco de circunferencia con centro en Q y radio QP (Fig. 5.31).

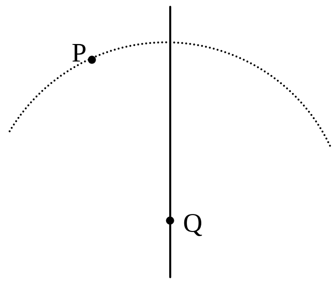


Figura 5.31

Sobre otro punto del mismo eje al que llamaré T, y que también diría escogido arbitrariamente, traza otro arco circular con centrado en él y de radio TP (Fig. 5.32).

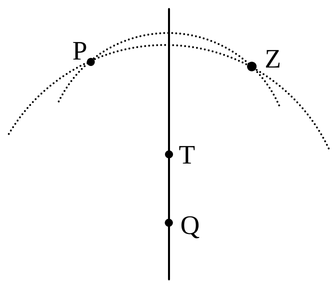


Figura 5.32

Ambos arcos se cortan en dos puntos. Uno es el punto P, donde estaba el primer ojo del búfalo. Sobre el otro punto, Z, sitúa el segundo. Le pregunto quién le enseñó a hacerlo así y si, tal vez, lo aprendió en la escuela. Seber responde que se lo enseñó su abuelo, que no lo aprendió en la escuela.

Análisis e interpretación

El procedimiento explicado por Seber para situar el segundo ojo del búfalo es impecable desde el punto de vista de la geometría euclidiana. La justificación del resultado reside en demostrar que ese segundo ojo (le llamaré Z) se halla en la perpendicular al eje de la cara y a la misma distancia de ésta perpendicular que el otro ojo.

En efecto, los triángulos PQZ y PTZ son isósceles porque tienen dos lados iguales: QP=QZ, en el primero; TP=TZ, en el segundo. La altura divide la base de ambos en dos partes iguales, pero dado que la altura es el eje de la cara del búfalo, Z y P están a la misma distancia de ése eje. Por otra parte, la altura es ortogonal a la base y, por tanto, ortogonal a la línea donde se sitúan los dos ojos del animal.

¿Cabía esperar una explicación semejante por parte de Seber? ¿O quizá le parecería a él evidente el resultado? ¿Es la confianza del matemático occidental producto de esa argumentación o producto de su intuición por la que el resultado se le antoja evidente? Recordemos a Hersh (1997) y seamos sinceros: ¿qué nos convence de que 2+2=4, una demostración formal o lo que vemos?

Me parece extraordinario que Seber diga que ese procedimiento para situar el punto simétrico de otro con respecto de una recta se lo enseñara su abuelo en lugar de aprenderlo en la escuela. ¡Menudos abuelos hay en Tana Toraja! Estamos ante un problema nuevo (Tabla 5.9).

Artesano: SEBER (03)		
Problema	Herramientas	Solución
Simétrico de un punto respecto de un segmento	Compás metálico	Intersección de dos arcos circulares de distinto radio y distinto centro que pasan por el punto original

Tabla 5.9

5.2.10 Seber (04)

Artesano: Seber

Lugar: To' Marurung (distrito de Buntao')

Fecha:	22.08.2000
Intérprete:	Nadie (bahasa indonesio)
Imágenes:	No
Apuntes:	Anexo B: XXXI-XXXV

Seber se ocupa de un *Pa' Sekong* en el espacio con forma de paralelogramo (Fig. 5.33) determinado por el tablón adosado a la izquierda de la parte triangular de la fachada sur del granero:

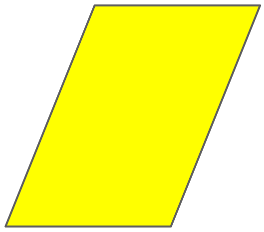


Figura 5.33

La retícula del *Pa' Sekong* es muy fina y formada por dos haces (más o menos) perpendiculares de segmentos paralelos. Para su construcción, sigue el siguiente procedimiento. Con un listón de bambú toma la medida de la base de ese paralelogramo (Fig. 5.34), pero sin cuantificarla.

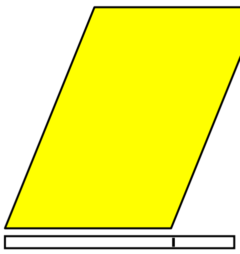


Figura 5.34

Después coloca el listón vertical (verticalmente ‘a ojo’) en un punto de la base de manera que la marca hecha en el listón coincide con el lado izquierdo inclinado del paralelogramo (Fig. 5.35).

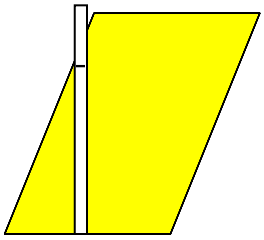


Figura 5.35

Hace una señal en ese punto del paralelogramo situando el listón horizontal (horizontalmente ‘a ojo’) sobre ella para trazar una línea recta horizontal que atraviesa todo el paralelogramo (Fig. 5.36).

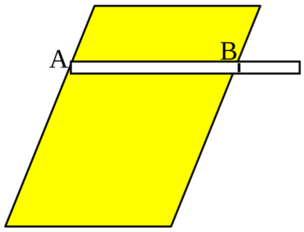


Figura 5.36

La diagonal mayor del nuevo paralelogramo construido determina una de las dos direcciones de la retícula del diseño (Fig. 5.37).

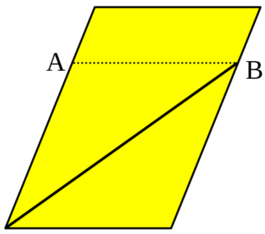


Figura 5.37

Pero dicha diagonal no se traza de forma cualquiera. En lugar de unir los vértices opuestos del nuevo paralelogramo con el mismo filo del listón (Fig. 5.38), lo que hace es ponerlo de forma que cada vértice toque un filo distinto (Fig. 5.39).

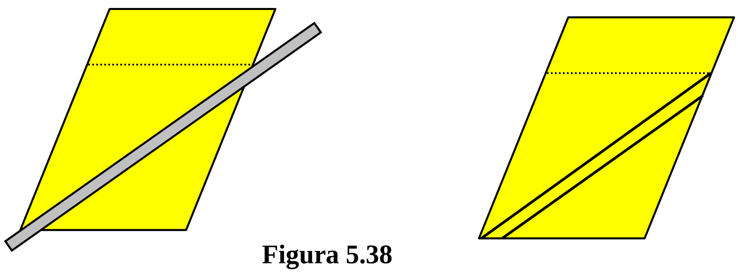


Figura 5.38

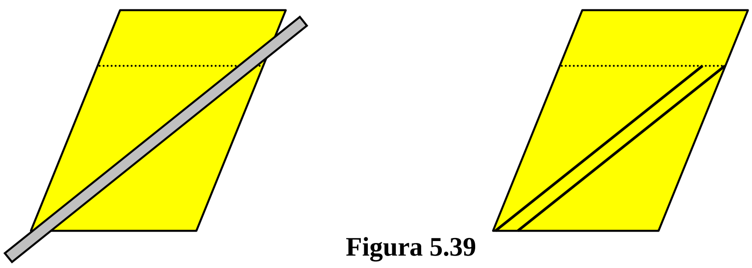


Figura 5.39

Para la dirección del otro haz de paralelas Seber coloca el listón en el vértice superior izquierdo del paralelogramo pequeño y traza un segmento que corta la diagonal anterior en un ángulo que yo diría recto 'a ojo' (Fig. 5.40).

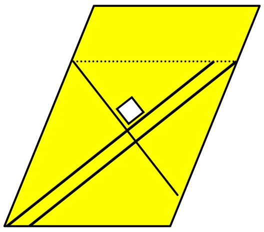


Figura 5.40

Finalmente, completa la retícula adosando paralelas a cada una de esas dos direcciones cuya equidistancia viene determinada por el grosor del listón de bambú.

Análisis e interpretación

Me pregunto porqué Seber lo hace así si, al fin y al cabo, ese proceder no garantiza la ortogonalidad de la retícula. Seber podría haber tomado otras referencias. La más sencilla quizá sería la primera de las que acabamos de mencionar basada en las diagonales del paralelogramo original. Pero resulta que el ángulo agudo del paralelogramo es arctan(7/3)=66.8º puesto que pude medir la altura y base del triángulo isósceles que lo determinan[4]. La retícula no sería ortogonal (Fig. 5.41).

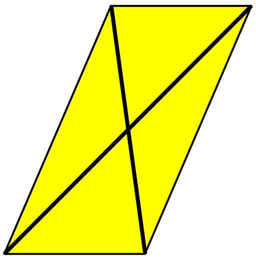


Figura 5.41

Vuelve a ponerse de manifiesto el hecho de buscar referencias geométricas visibles y objetivas para trazar las retículas y para situar y delinear trazos fundamentales de las figuras del diseño. Continúa sin haber cuantificación explícita y evidente de longitudes, ángulos y proporciones. De las observaciones analizadas hasta aquí se desprende que la cuantificación está presente, aunque de modo tácito, en el paralelismo, en la perpendicularidad y en la división de segmentos en partes iguales.

[4] Que ésta es la inclinación del paralelogramo se conoce gracias a la información facilitada por el constructor Martheen Madoi. En el curso de mi observación del trabajo de Seber pude medir el triángulo rectángulo de la

La Tabla 5.10 recoge esa situación superada por Seber.

Artesano: SEBER (04)		
Problema	Herramientas	Solución
Trazar un haz de segmentos paralelos y equidistantes	Listón bambú Lápiz	Adosar reiterada y sucesivamente el listón a un segmento ya trazado y perfilarlo con el lápiz. La distancia entre segmentos consecutivos es la amplitud del listón
Trazar un segmento perpendicular a otro	Listón bambú Lápiz	La ortogonalidad entre ambos se determina ‘a ojo’

Tabla 5.10

5.2.11 Anton (01)

Artesano:	Anton (de unos 25 años, colega de Seber)
Lugar:	To' Marurung (distrito de Buntao')
fecha:	22.08.2000
Intérprete:	Nadie (bahasa indonesio)
Imágenes:	No
Apuntes:	Anexo B: XXX

Hace cinco años que Anton trabaja como grabador. Está haciendo un *Pa' Tedong*, pero en lugar de hacer la cabeza del búfalo circular como he visto hasta ahora, Anton actúa de otro modo. Ya tiene trazadas dos perpendiculares, una vertical y otra horizontal (que yo llamaré p y q), justo en medio del recinto del diseño. Ahora traza dos paralelas equidistantes a la recta p, una por encima y otra por debajo a las que llamaré r y s (Fig. 5.42). Su equidistancia deriva del grosor del listón.

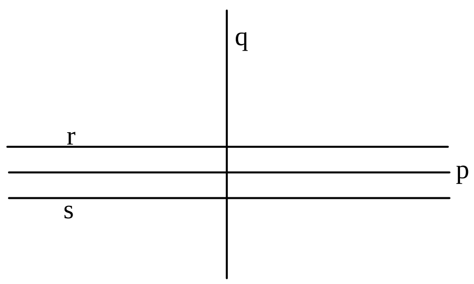


Figura 5.42

zona que da lugar al paralelogramo en cuestión: 140cm.x57cm. Para que la proporción fuese 7/3, la base debería

Las paralelas r y s determinan dos puntos R y S sobre q: $R = r \cap q$ y $S = s \cap q$ (Fig. 5.43).

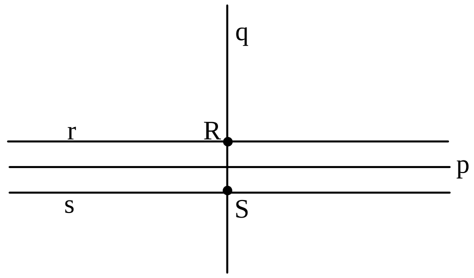


Figura 5.43

Con centro en R y S traza dos circunferencias de igual radio (Fig. 5.44), pero mucho mayor que la distancia RS.

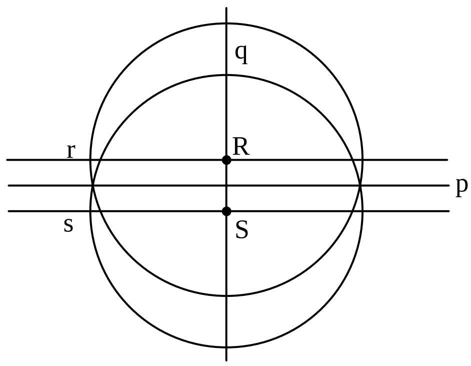


Figura 5.44

Los puntos de corte de estas dos circunferencias con la recta p determinan la forma de la cara del búfalo. Poniendo una punta del compás sobre $S = s \cap q$ con la otra hace dos marcas sobre la recta s, una a cada lado de la recta q (Fig. 5.45). He ahí los ojos del animal.

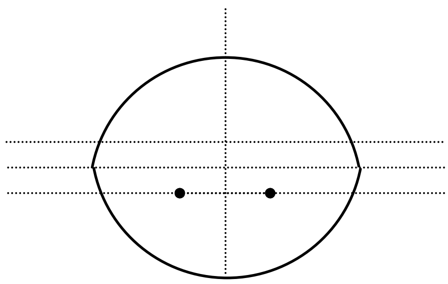


Figura 5.45

<u>Análisis e interpretación</u>

Anton trabaja en vertical. A la hora de realizar el diseño llamado *Pa' Tedong* no se conforma con dar al rostro forma circular, como sucedía en otros casos, sino que realiza un complicado esquema basado en la intersección de dos circunferencias y tres paralelas. Tampoco

---

medir 60cm. y no 57cm. Véase el Anexo B (pp. 31-35).

cuantifica explícitamente lo que hace, pero cada elemento del diseño se ubica con relación al andamio geométrico construido.

No sigue los pasos de Seber para colocar los ojos del búfalo. Los señala sobre la recta s ortogonal (a ojo) a la recta p y equidistantes (de manera precisa) de la recta q. Por tanto, el propósito de (lo que el observador occidental llama) simetría es evidente. La equidistancia con la que Anton sitúa los ojos del búfalo es precisa, no la determina ‘a ojo’.

A veces da la impresión de que los artesanos son muy rigurosos en determinadas acciones y, en cambio, en otras no lo son tanto. Se diría que saben más de lo que muestran. Las situaciones resueltas por Anton son las siguientes (Tabla 5.11).

Artesano: ANTON (01)		
Problema	Herramientas	Solución
Trazar un segmento paralelo a otro	Listón bambú Lápiz	Adosar el listón al segmento ya trazado y perfilarlo con el lápiz
Trazar un segmento perpendicular a otro	Listón bambú Lápiz	La ortogonalidad entre ambos se determina ‘a ojo’
Trazar una circunferencia	Compás metálico	Girar el compás en torno al extremo clavado
Simétrico de un punto respecto de un segmento	Listón bambú Compás metálico	Trazar ‘a ojo’ la perpendicular al segmento que pase por el punto X. El simétrico es el diametralmente opuesto a P en la circunferencia con centro en el corte Y de las perpendiculares y radio XY.

Tabla 5.11

La solución de Anton para hallar el simétrico difiere de la de Seber, pero no carece de cierto aire euclidiano por lo que respecta al uso del compás[5].

5.2.12 Anton (02)

Artesano: Anton
Lugar: To' Marurung (distrito de Buntao')
Fecha: 23.08.2000
Intérprete: Nadie (bahasa indonesio)
Imágenes: No
Apuntes: Anexo B: XXX

[5] Véase la Proposición 12 del Libro I (Euclides, op. cit.: 215).

Al día siguiente Anton trabaja (en vertical, como todos los artesanos hasta ahora) en un *Pa' Erong*. Para construir su retícula Anton ha de dividir el lado superior del rectángulo en 6 partes iguales. Abre el compás ‘a ojo’ y averigua si la longitud del lado corresponde a 6 pasos del instrumento. Como no es el caso, modifica la abertura hasta lograr su objetivo. Logra el resultado deseado en un par de iteraciones más del proceso.

Una vez señalados los puntos correspondientes a esas seis unidades, traza las paralelas al lado del rectángulo de modo similar al seguido por Rombe’, sólo que en lugar de tres, dibuja dos arcos circulares en puntos distintos del segmento original (Fig. 5.46).

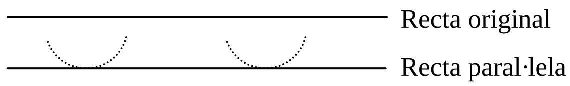


Figura 5.46

Al final, la retícula de ese diseño realizado por Anton es la misma que la elaborada por Rombe’ y Yobel y se basa en la división del recinto rectangular en 6x8 cuadrados agrupados verticalmente en 1+2+2+1 y horizontalmente en 1+2+2+2+1. Tras señalar los 'mata' del diseño esboza las volutas a mano alzada y con gran habilidad.

<u>Análisis e interpretación</u>

Anton también usa, como se observó hacer a Leo, Yobel y Seber, el método *kira-kira*. Pero a diferencia de Yobel, no efectúa una partición en 6 partes indirecta. No lo divide primero en 2 partes y luego cada mitad en 3, sino que realiza una partición directa en 6.

El método seguido por Anton para trazar las paralelas es el mismo que el observado en Rombe’. Los problemas que le he visto solventar son los siguientes (Tabla 5.12).

Artesano: ANTON (02)		
Problema	Herramientas	Solución
División de un segmento en 6 partes iguales	Compás metálico	Por aproximaciones sucesivas
Trazar un segmento paralelo a otro	Compás metálico Listón bambú Lápiz	Tangente común a dos arcos circulares de igual radio centrados en 2 puntos distintos del segmento original
Trazar una voluta		A mano alzada

Tabla 5.12

5.2.13 Medi

Artesano:	Medi (joven aprendiz que trabaja con Anton y Seber)
Lugar:	To' Marurung (distrito de Buntao')
Fecha:	23.08.2000
Intérprete:	Nadie (bahasa indonesio)
Imágenes:	No
Apuntes:	Anexo B: XXXI

Mientras era testimonio de la actividad de Anton, un aprendiz que me observaba a mi, Medi, me explica algo referente a las figuras del *Pa' Erong* que talla Anton sin que yo se lo haya preguntado. Me dice que son todas iguales. Pero a la hora de puntualizar que también los son aquellos que yo diría girados 180º, Medi lo expresa de otra manera. Con el pulgar de una mano apunta hacia la izquierda y con el pulgar de la otra hacia la derecha. Segundos después abre las manos y las planta encima del diseño, una junto a la otra, para luego abrirlas y separarlas hasta mucho más allá de los límites del rectángulo.

<u>Análisis e interpretación</u>
En mi opinión la relación principal entre las figuras del diseño *Pa' Erong* es la relación de reflexión deslizante existente entre aquellas que aparecen visualmente distintas y la simetría de giro de 180º que posee cada una de ellas. Medi no me habla de giros. Sus pulgares apuntan dos direcciones horizontales opuestas (izquierda y derecha). Aunque también podría hacerlo no señala arriba y abajo. En sus gestos interpreto como muy posible que no sea el giro la relación que el ve en esas figuras, sino la dirección. Para él una va hacia un lado y la otra hacia el otro. Tal vez esa idea suya esté enraizada en el hecho de trabajar en vertical y de hacerlo directamente en las fachadas ya montadas que no pueden ser giradas como lo sería una pieza pequeña de madera o de metal encima de una mesa.

Teniendo en cuenta que el grupo de simetría de ese diseño es *pgg* y que además de permanecer invariable bajo rotaciones de 180º, también permanece invariable a reflexiones deslizantes de ejes ortogonales. Tal vez la interpretación correcta de lo que quiere expresar Medi sea éste último aspecto. De sus palabras y gestos es plausible concluir que es consciente de esa relación.

Al juntar sus manos sobre el grabado y luego extenderlas hacia fuera, Medi me está dejando claro que aquello que se ve podría continuarse indefinidamente en todas direcciones y extenderse más allá de los límites que el recinto del panel impone. El diseño está claramente desvinculado del marco que lo encierra. El marco del grabado es una ventana y la superficie en la que se desarrolla el diseño es el plano infinito. Esto confirma la distinción entre diseños vinculados al marco y diseños desvinculados de él. Evidentemente, esto no significa que los vinculados no pueden también extenderse más allá de sus límites.

Las situaciones a las que hace referencia Medi son de tipo conceptual (Tabla 5.13).

Artesano: MEDI		
Concepciones	Herramientas	Solución
Espacio y alcance del desarrollo de un diseño		El plano es infinito
Giro		
Reflexión	Señales Gesticulación	Confirmada

Tabla 5.13

5.2.14 Ayudante de Yobel

Artesano:	Ayudante de Yobel
Lugar:	To' Marurung (distrito de Buntao')
Fecha:	12.08.2003
Intérprete:	Nadie (bahasa indonesio)
Imágenes:	No
Apuntes:	Anexo B: XLII

El ayudante es un joven instruido por Yobel. No es un principiante, se le ve hábil. Trabaja en la fachada Este de un granero. En esta fachada hay varios *Pa' Tedong* con la retícula siguiente (Fig. 5.47).

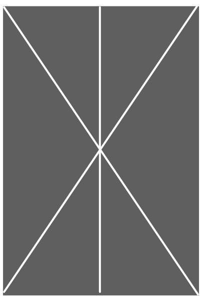


Figura 5.47

Me pregunto si para la vertical que parte el rectángulo en dos partes iguales también ha usado el procedimiento kira-kira de Yobel. Le observo con atención cuando se dispone a comenzar otro diseño igual.

Coge el lápiz y un listón de bambú y traza las dos diagonales del rectángulo. Luego pone el listón vertical (a ojo) en el punto de corte de ambas diagonales y traza la línea que faltaba.

Análisis e interpretación

También realiza su tarea en vertical. La mediatriz vertical del rectángulo lo es aproximadamente, a ojo. Pasa por la intersección de las diagonales, pero su verticalidad, su perpendicularidad a los lados horizontales del panel (o paralelismo a los verticales) no es precisa, sino aproximada por su percepción visual. De su actuación puede inferirse que sabe que el punto de intersección de las diagonales está en medio del rectángulo. Probablemente Medi sea consciente de esto, pero quizá no de la explicación matemática que de este resultado daríamos en occidente. En cualquier caso, nos encontramos de nuevo ante referencias correctas y objetivas en pos del rigor: ésa vertical será el eje de simetría del rostro del búfalo.

Las siguientes son las situaciones resueltas por el ayudante de Yobel (Tabla 5.14).

Artesano: AYUDANTE de Yobel		
Problemas	Herramientas	Solución
Determinación del punto medio de un segmento	Listón bambú Lápiz	Trazar la vertical por el punto de corte de las diagonales del rectángulo

Tabla 5.14

5.3 REVISIÓN DE LAS INTERPRETACIONES MATEMÁTICAS BASADAS EN LA OBRA-ACABADA

Tras las observaciones efectuadas del proceso de grabado conviene revisar las interpretaciones matemáticas planteadas en el capítulo 4 a partir de su visualización. Es decir, la interpretación euclidiana de su geometría, la interpretación isométrica, la interpretación reticular y la interpretación arquimediana de las volutas.

5.3.1 Interpretación euclidiana de la geometría de los grabados

La *Interpretación euclidiana de la geometría de los grabados* fue desarrollada a raíz de la observación visual de la obra-acabada.

Una vez estudiada la obra-en-curso, vemos que, en efecto, muchas situaciones a las que se enfrentan los artesanos toraja en el curso de su labor son verdaderos problemas matemáticos de ámbito geométrico. Muchos de ellos se corresponden con postulados y proposiciones de los *Elementos* de Euclides (Tabla 5.15).

Situación geométrica toraja	***Observación***	***Elementos*** (Euclides)
Trazar un segmento y prolongarlo en línea recta.	Tiku	Postulados 1 y 2 (Libro I)
Trazar una circunferencia.	Yobel (01), Seber (01 y 02), Anton (01)	Postulado 3 (Libro I)
Trazar circunferencias concéntricas.	Yobel (02)	
Determinar el centro de un rectángulo.	Yobel (02)	
Dividir un segmento en 2 partes iguales.	Leo, Seber (01), Ayudante Yobel	Proposición 10 (Libro I)
Dividir un segmento en 3 partes iguales.	Yobel (01)	Proposiciones 9, 10 (Libro VI)
Dividir un segmento en 6 partes iguales.	Yobel (02), Antón (02)	
Dividir un círculo en 8 partes iguales.	Yobel (02)	
Trazar la perpendicular a un segmento.	Seber (04)	Proposición 12 (Libro I)
Trazar la mediatriz de un segmento.	Yobel (01), Yobel (02)	Proposición 11 (Libro I)
Trazar la paralela a una recta.	Tiku, Leo y Yobel, Seber (04), Antón (01 y 02)	Proposición 31 (Libro I)
Trazar la tangente a una circunferencia.	Rombe', Seber	Proposición 17 (Libro III)
Trazar la tangente común a dos circunferencias.	Rombe', Seber (02), Anton	
Inscribir un círculo en un cuadrado.		Proposición 8 (Libro IV)
Simétrico de un punto con respecto a una recta.	Seber (03), Anton (01)	
Trazar una voluta	Tiku, Rombe', Leo, Yobel (02)	

Tabla 5.15

Por lo visto hasta ahora ningún artesano toraja resuelve dichas situaciones siguiendo los procedimientos euclidianos. Trazan paralelas, perpendiculares y mediatrices a ojo, basando en su capacidad visual la precisión del resultado y en la referencia de la forma del recinto ya construido. También dividen un segmento en partes iguales por lo que parecen ser aproximaciones sucesivas (*método kira-kira*) y lo mismo puede decirse del trazo de la tangente común a dos circunferencias.

Difícil asegurar si los artesanos parten de supuestos semejantes a los postulados euclidianos. Su actividad es real y práctica, no imaginaria. Desde luego, en un contexto como el suyo se ponen en duda los tres primeros postulados de los *Elementos* (Euclides, 1991: 197):

1. Postúlese trazar una línea recta desde un punto cualquiera hasta un punto cualquiera.
2. Y prolongar continuamente una recta finita en línea recta.
3. Y describir un círculo con cualquier centro y distancia.

Tiku puso en práctica el segundo postulado, pero ¿podría hacer lo que hizo y prolongar la paralela hasta el infinito? No. Tampoco en la realidad de la práctica podría trazar un círculo arbitrariamente grande.

De hecho, los principios geométricos (teoremas) que fundamentan la labor de los artesanos son:

T1. Si *r* es paralela a *s* y *s* es paralela a *t*, entonces *r* es paralela a *t*.
T2. El punto de intersección de las diagonales de un rectángulo equidista de sus lados opuestos.
T3. La tangente exterior a dos circunferencias del mismo radio es paralela a la recta que pasa por sus centros.

Boyer (1986) matiza la interpretación del tercer postulado con relación al carácter colapsable del compás euclidiano: '... el postulado no se interpreta en el sentido de permitir el uso del compás para transportar una distancia igual a un segmento sobre otro segmento separado más largo, a partir de uno de sus extremos.' (Boyer, 1986: 147). Sin embargo, transportar una distancia es posible a partir de una interpretación más estricta del tercer postulado, como expresa y valora Vega en la Introducción a *Los Elementos*: '... el compás se colapsa cuando se levantan sus dos pies, de modo que no sirve para transportar segmentos; pero la solución de los problemas I, 1-3 muestra que este recurso es superfluo y que los postulados se bastan para trasladar segmentos determinados –esta suficiencia da un toque de elegancia al método euclídeo-' (Euclides, 1991: 53).

Los postulados euclidianos impiden el transporte directo de segmentos, aunque ésta función es realizable indirectamente a partir de ellos. En cambio, el transporte directo es una función primordial tanto de los compases como de los listones toraja, lo que supone una diferencia destacada entre los procedimientos toraja y los euclidianos. Yobel (Obs. 5.2.4), dispone de un compás no colapsable – el de bambú – y el óxido de las tijeras que Seber usa por compás (Obs. 5.2.7) hace que ese artefacto tampoco lo sea. A diferencia del compás euclidiano, los artesanos toraja disponen de compases no colapsables.

Por tanto, la regla y el compás torajas, aunque iguales a la regla y compás euclidianos, tienen funciones diferentes y hacen geometría práctica y real en la que resulta imposible unir dos puntos cualesquiera con un segmento (postulado 1) ni trazar círculos con radio verdaderamente arbitrario (postulado 3). La interpretación euclidiana de la geometría de los grabados se corresponde con el resultado, con los elementos geométricos construidos en los diseños, pero no con los métodos de elaboración ni con la función de sus herramientas. Se destacan aquí dos aspectos culturales eñalados por Abreu (2000). Uno alude a la función que desempeñan las herramientas y por las que son organizadas lógicamente. El otro, hace referencia al uso de antiguas herramientas en contextos nuevos. En este caso, más para el investigador que para el artesano.

Por tanto, el estudio de la obra-en-curso, no sólo no confirma la *Interpretación euclidiana de la geometría de los grabados* desarrollada a partir del estudio de la obra-acabada, sino que, ateniéndonos a sus procedimientos, la refuta e invalida. Se hace necesario desarrollar una nueva interpretación.

Para ello hay una serie de aspectos cruciales a tener en cuenta. Primero, que todo el trabajo se lleva a cabo en vertical, directamente en la fachada ya ensamblada de la casa o granero. Además, ésas superficies no son lisas, sino que presentan escalones a diferentes niveles como consecuencia del ensamblaje. ¿Qué herramientas podrían sostenerse ahí? El compás de bambú es una de ellas. Por otra parte, la precisión del artesano no tiene que ser microscópica, con que el error sea inapreciable visualmente ya es suficiente. Por tanto, el contexto de trabajo determina en parte el rigor y precisión con la que se resuelve cada situación. De ahí que un supuesto primario o *postulado* de la geometría de los grabados toraja sea la capacidad de trazar la vertical y la horizontal por un punto dado. Los márgenes verticales y horizontales del campo rectangular del grabado facilitan mucho esa tarea, pero también lo permite la capacidad visual humana. Más aún, si ésta ha sido educada en la práctica de la labor.

Con relación al problema de dividir un segmento en partes iguales que los artesanos resuelven aplicando el método *kira-kira* del que aún desconocemos sus referencias íntimas, cabe plantearse si en una pared vertical podría aplicarse el procedimiento euclidiano, aquel que se enseña en la educación matemática secundaria en nuestro país. La respuesta es claramente negativa. Los toraja solventan la situación con éxito y de forma realmente factible. El contexto real de trabajo exige otras herramientas y otros procedimientos.

Una interpretación geométrica fiel con la realidad de los grabados toraja debe tener en cuenta los siguientes aspectos observados:

(1) el contexto de trabajo y la situación particular de cada caso, características fundamentales del desarrollo cognoscitivo según Lave (1988), Rogoff (1984) y Wenger (1999).

(2) el papel desempeñado por las herramientas en el proceso de elaboración, más cuando éstas son o poseen funciones distintas al compás y regla euclidianos, ha sido muy enfatizado por Abreu (2000).

(3) el carácter analógico, experimental y senso-motriz que, según Davis y Hersh (1988), Polya (1945) y nosotros planteamos en el capítulo III, tienen las soluciones toraja.

Aunque todavía no cerrada, pues queda pendiente el análisis de la obra-explicada, la *Interpretación euclidiana de los grabados toraja* es invalidada. A partir de ahora, considerando las resoluciones de situaciones matemáticas observadas y a la espera de más resultados, la interpretación matemática de la geometría de los grabados se llamará *Interpretación euclidiana senso-motriz de los grabados toraja*.

Se trata de una interpretación en la que priman las resoluciones que Davis y Hersh (1988) catalogaban como soluciones matemáticas analógicas.

5.3.2 Interpretación isométrica de los diseños

La confirmación de esta interpretación debía posponerse a la realización de la obra-explicada, pero disponemos ya de alguna información que apunta hacia una respuesta negativa. Como ya se ha señalado, de las manifestaciones hechas por Medi (Obs. 5.2.13) parece bastante claro que el artesano no piensa en giros, sino en simetrías y direcciones. El artesano destacó la relación por dirección entre dos figuras situadas a diferente altura, lo que podemos interpretar como una reflexión deslizante. Pero no mencionó la isometría de giro de 180º presente en todas las figuras del grabado (en lenguaje técnico, grupo C_2). Todo ello no favorece demasiado la interpretación isométrica.

Ahora bien, precisamente por eso el modelo isométrico puede ser útil para identificar ideas de los artesanos y atisbar el modo en que conciben su obra. Al menos, Medi parece ser consciente de una de las características isométricas del *Pa' Erong*. Por tanto, aunque finalmente sea rechazado, un modelo gratuito puede representar también una puerta a los aspectos cognoscitivos de quienes llevan a cabo una actividad práctica. La gratuidad de una interpretación impedirá identificar matemáticas, pero puede plantear cuestiones interesantes para la cognición matemática.

La clasificación de algunos diseños en base a su grupo de simetría puede ser distinta si se hace antes o después de ser coloreados. Haciéndolo cuando nada más se ha labrado la madera detectamos sólo las isometrías de la forma. Puesto que los colores blanco, rojo y amarillo se aplican en ciertos fragmentos de las figuras, el grupo de isometría de un grabado ya terminado puede ser distinto de aquel que está por pintar. Cuando hablemos de *Interpretación isométrica de los diseños* nos referiremos a los diseños totalmente terminados, ya pintados.

5.3.3 Interpretación reticular de los diseños

La interpretación de que todos los diseños se elaboran con referencia a una retícula ha quedado confirmada observando la obra-en-curso. De hecho, en la ornamentación arquitectónica toraja hay dos niveles de reticulado. El primero, el de la fachada de la casa o granero donde se tallan los grabados, es cultural y arquitectónico. El segundo, el de cada grabado, es puramente geométrico.

Que la retícula remite a las matemáticas se pone de manifiesto en una de sus acepciones, tanto del término *retículo* como del término *retícula*:

> Retícula: Conjunto de hilos o líneas que se ponen en un instrumento óptico para precisar la visual.
>
> Retículo: Conjunto de dos o más hilos o líneas cruzadas que se ponen en el foco de ciertos instrumentos ópticos y sirve para precisar la visual o efectuar medidas muy delicadas. (R.A.L.E., 1992: 1788).

Esta definición nos permite tomar como retícula las dos diagonales cruzadas en un rectángulo. Pero en el contexto en el que estamos, esas definiciones lingüísticas no acaban de definir realmente el modo en que debe entenderse la retícula de un grabado. Las funciones estructurales de la retícula y su uso en el mundo del diseño se destacan en la siguiente definición:

> Una retícula consiste en un conjunto determinado de relaciones basadas en la alineación, que actúan como guías para la distribución de los elementos en todo el formato. Cada retícula contiene las mismas partes básicas, con independencia del grado de complejidad que alcance. Cada parte cumple una función determinada; estas partes pueden combinarse en función de las necesidades, o bien omitirse de la estructura general, ...’ (Samara, 2004: 24)

Según Samara (op. Cit.: 25) las partes de una retícula son:

Márgenes: espacios negativos entre el borde del formato y el contenido, que rodean y definen la zona ‘viva’ en la que pueden disponerse la tipografía y las imágenes.

Columnas: alineaciones verticales que crean divisiones horizontales entre los márgenes.

Líneas de flujo: alineaciones que rompen el espacio dividiéndolo en bandas horizontales. Guían el ojo a través del formato y pueden utilizarse para imponer paradas adicionales y crear puntos de inicio para el texto o las imágenes.

Módulos: unidades individuales de espacio separados por intervalos regulares que, cuando se repiten en el formato, crean columnas y filas.

Zonas espaciales: grupos de módulos que, en su conjunto, forman campos claramente identificables.

Marcadores: indicaciones de posición para texto subordinado o repetido a lo largo del documento, como los números de página.

Samara distingue varios tipos de retícula (op. Cit.: 26-29):

Retícula de bloque: la más sencilla, su estructura de base es un área grande y rectangular que ocupa la mayor parte de la página.

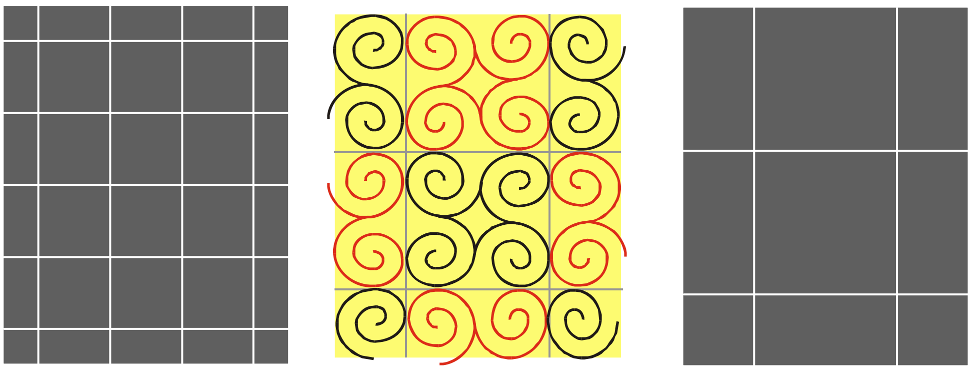
Retícula de columnas: lo que su nombre indica.

Retícula modular: retícula de columnas con gran número de líneas de flujo horizontales que subdividen las columnas en filas, creando una matriz de celdas denominadas módulos.

Retícula jerárquica: la que no encaja en las categorías anteriores, más basadas en la disposición intuitiva de alineaciones que en intervalos repetidos y regulares.

Samara se refiere a las retículas que determinan campos en los que disponer información tipográfica con o sin imágenes, no al mundo del diseño sin palabras. Pero aún así nos es útil su clasificación porque nos permite apreciar ciertos detalles importantes.

El reticulado de una fachada de casa o granero y el de un grabado son esencialmente distintos. El primero se ajusta perfectamente a la idea de retícula modular en la que la información, en este caso grabados, se ubican en los módulos determinados por la retícula. Pero los módulos de un grabado no tienen por qué corresponderse con aquellos que su retícula referencial ha creado en el recinto. Por ejemplo, en la ilustración 27 (láminas al final del capítulo) la retícula referencial que sirve de base a la construcción del diseño coexiste con otra de tipo figurativo determinada por las cruces gamadas en espiral (Fig. 5.48).



Retícula referencial Retícula figurativa

Figura 5.48

Lo cierto es que en los grabados la retícula desempeña una función de sostén o armazón y no de distribución. Y aún así, unas sirven para determinar puntos esenciales del diseño, como los centros de circunferencias y orígenes de volutas en sus intersecciones, mientras que otras determinan la forma misma de las figuras del diseño, como aquellas que son más finas y presentan dos haces de paralelas ortogonales. Distinguiremos, por tanto, entre las que son *retículas figurativas* (prácticamente todas aquellas más finas con un par de haces de rectas ortogonales) y las que no (las demás). En las primeras una serie de módulos se combinan para formar las figuras del diseño. Las segundas sirven para disponer en el espacio los elementos fundamentales de las figuras del diseño: centros de circunferencias, ojos de volutas, etc.

Los módulos de las retículas de los grabados no tienen la misma función que los de las fachadas de las casas y graneros. Éstas son retículas jerárquicas por motivos culturales y arquitectónicos en las que sus módulos crean los recintos en los que se realizan los grabados. Son *retículas modulares jerárquicas continentes*. En cambio, las de los diseños son retículas de armazón. Importan más sus intersecciones que sus módulos. En ellas se crea una estructura vertebradora del diseño y que sirve de referencia a sus elementos fundamentales. Ésa estructura actúa en el espacio como un verdadero sistema de referencia, aunque por ahora no parezca que sus intersecciones estén asociadas numéricamente. No parece ser un sistema de coordenadas como lo entiende el matemático occidental. Su construcción se basa en problemas geométricos puramente matemáticos como son el trazo de paralelas, perpendiculares y diagonales y la división de un segmento en partes iguales. Ahí si que interviene la cuantificación que determinará la ratio modular del sistema referencial, casi siempre: $(1+2m+1)\cdot(1+2n+1)$. Las llamaremos *retículas modulares vertebradoras*. Indagar en su elaboración supone ir al núcleo matemático de la actividad artesana.

Fachada: retícula modular jerárquica continente
Grabado: retícula modular vertebradora (figurativa o no)

De la retícula proviene la estructura del grabado, su rigor, precisión y proporción. Queda por ver cómo se construye ese *sistema de referencia* tan poderoso.

5.3.4 Interpretación de medida y cálculo para el trazado de la retícula: el método Kira-kira

La *Interpretación de medida y cálculo para la construcción de la retícula* ha sido refutada observando la obra-en-curso, el proceso de grabado. Los artesanos no miden y calculan una división numérica para determinar fracciones de los lados del rectángulo para situar las líneas de una retícula. Encuentran el punto medio y tercio de un segmento mediante lo que se dirían aproximaciones sucesivas. El éxito extraordinario de su tarea (rapidez y precisión) hace pensar en la existencia de una estrategia que guíe sus pasos. A continuación se interpretan sus acciones como si fuese el investigador quien tuviese que resolver la situación.

<u>El procedimiento toraja para dividir un segmento en dos partes iguales</u>

La siguiente es una descripción de lo observado en la obra-en-curso por lo que se refiere al procedimiento seguido por los grabadores a la hora de dividir un segmento en dos partes iguales. Le llamaremos *Método Kira-kira*. Partimos de un segmento (de color negro), un listón de bambú (dorado) y un lápiz para hacer marcas sobre uno y otro. Más adelante hablaré de lo que creo que piensa el artesano cuando aplica ése procedimiento. A continuación paso a describir lo que yo le vi hacer:

1. Adosa el listón de bambú al segmento que quiere dividirse en dos partes:

2. Hace una marca con el lápiz en un punto sobre el segmento que visualmente parezca corresponder al punto medio del segmento. También marca su homólogo en el listón:

3. Desliza el listón hacia la derecha hasta que su extremo izquierdo coincide con la marca practicada en el segmento:

4. Si la señal hecha en el listón coincide con el extremo derecho del segmento, la partición es correcta. De lo contrario, ha de corregirse el exceso o defecto del error. Para ello se hace otra señal sobre el listón entre el extremo del segmento y la que ya hay en el listón:

5. Para ver si ésta última marca es correcta, devuelve el listón a su posición inicial:

6. Y practica una nueva marca, homóloga suya, en el segmento:

7. Repite ahora el tercer paso para ver si ha acertado:

8. Si no es así, hará otra señal que corrija el error cometido en la última estimación y repite otra vez el proceso hasta lograr que el error sea imperceptible visualmente.

El artesano no toma ninguna unidad sobre el listón. Tampoco lo substituye por reglas milimetradas que fácilmente tiene a su alcance en cualquier tienda de la localidad. Sin embargo, por el modo en que practica señales sobre él nos inclinamos a pensar que la concepción que tiene el artesano de un segmento (o recta) es la de un continuo de puntos, ya que a cada marca del lápiz sobre un lado del recinto del grabado o sobre una línea de la cuadrícula de su diseño le corresponde una única señal sobre el listón de bambú. Eso determina una correspondencia 1-1, punto a punto, entre los de uno y otro objeto.

Sobre el método Kira-kira practicado con el listón de bambú:

(1) Dividir un segmento AB en dos partes iguales significa hallar un punto M sobre él tal que AB/2=AM. Para los artesanos significa encontrar otro segmento tal que su doble coincida con el primero. Es decir, dado el segmento AB, su solución al problema consiste en buscar un segmento AM tal que 2·AM=AB. Ambas cosas son equivalentes, pero conceptualmente distintas.

(2) El trabajo del artesano es sintético, no usa ninguna medida cuantificada numéricamente. Con sólo un par de iteraciones consigue estimaciones excelentes, inapreciables visualmente. Esto plantea una primera pregunta fundamental. Si la corrección de una estimación errónea se hiciese de cualquier manera, *al tun-tún*, sin obedecer pauta alguna, al azar, ¿se alcanzaría el éxito? Por la eficacia observada me inclino a pensar que no y que el *método Kira-kira* incluye alguna referencia invisible por la que la sucesión de estimaciones se acerque cada vez más a la solución.

<u>Primera justificación de su éxito: el azar</u>

Si la corrección se hace al azar, el resultado es mejor que el anterior, pues cualquier punto está más cerca del punto medio de un segmento que sus extremos. Por tanto, la corrección realizada al azar en la estimación de un punto medio está más cerca de la solución.

Sea L la longitud del segmento que hay que dividir en dos partes iguales. Sea x_0 la primera estimación del punto medio y supongamos que $2x_0<L$ (Fig. 5.49).

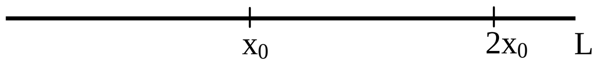


Figura 5.49

Para la segunda estimación x_1 se toma un poco mayor que x_0, es decir, $x_1=x_0+\varepsilon$, con $0<\varepsilon<L-2x_0$. Para que esta segunda aproximación sea mejor que la primera debe verificarse que $|L-2x_1|<L-2x_0$. O sea: $2x_0-L<L-2x_1<L-2x_0$.

La segunda de estas desigualdades siempre se cumple porque $x_1>x_0$. La primera desigualdad se verifica si:

$$2(x_0+x_1)<2L$$

$$x_0+x_1<L$$

$$2x_0+\varepsilon<L, \text{ siendo } x_1=x_0+\varepsilon$$

$$\boxed{\varepsilon < L - 2x_0}$$

Por tanto, si la corrección se hace aumentando x_0 en menos de $L-2x_0$, es decir, del error cometido en la primera estimación, se consigue una aproximación mejor que la primera.

Esto significa que incluso eligiendo un punto al azar del intervalo abierto $(2x_0,L)$ se obtendrá un valor $x_1=x_0+\varepsilon$ más próximo a L/2. Lo mismo sucedería si fuese $2x_0>L$. Luego el azar mejora la estimación del punto medio de un segmento realizada ‘a ojo’: *¡El azar se encamina hacia el punto medio!*

Ahora bien, ¿significa eso que la sucesión de estimaciones converja tan de prisa como parece hacerlo en manos de los artesanos toraja? Las matemáticas occidentales dicen que toda sucesión de números creciente o decreciente que esté acotada es convergente. El azar nos acerca al punto medio, pero la sucesión resultante podría incluso no converger hacia él o tardar siglos en hacerlo. Pero si los artesanos logran una aproximación suficientemente buena quizá sea porque el modo en que se corrigen no está gobernado por el azar, o, al menos, no exclusivamente.

Por otra parte, ¿qué ocurre en el caso en que el segmento tenga que dividirse en tres partes y no en dos? ¿También el azar puede ser útil? ¿Y en un caso más general aún? Analicemos la más general de las situaciones, aquélla en que el segmento se divide en N partes iguales. Supongamos que $Nx_0<L$ (Fig. 5.50).

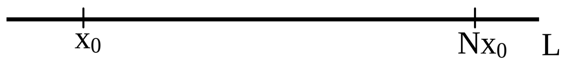


Figura 5.50

Para que la segunda estimación $x_1=x_0+\varepsilon$ sea mejor que la primera debe verificarse que $|L-Nx_1|<L-Nx_0$. Es decir, $Nx_0-L<L-Nx_1<L-Nx_0$. La segunda desigualdad siempre se cumple porque $x_1>x_0$, ya que ε se toma del intervalo (Nx_0,L). La primera desigualdad se cumple si:

$$N(x_0+x_1)<2L$$

$$x_0+x_1<2L/N$$

$$2x_0+\varepsilon<2L/N, \text{ siendo } x_1=x_0+\varepsilon$$

$$\varepsilon<2L/N-2x_0$$

$$\boxed{\varepsilon < \frac{2}{N}\left(L - Nx_0\right)}$$

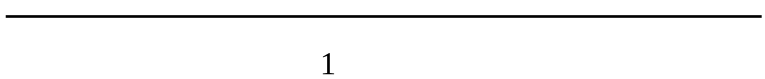
Como antes, lo mismo sucede si $N\cdot x_0>L$. En el caso particular de dividir un segmento en N=3 partes iguales, si la corrección se hace aumentando x_0 en menos de los 2/3 del error, el resultado será una aproximación mejor que la primera. Pero eso ya no es azaroso. El azar sólo es útil en el caso de la división en dos partes.

Éstas reflexiones matemáticas puede que no sean un reflejo de la realidad, pero inspiran una nueva interpretación del método Kira-kira, de lo que piensa el artesano al corregir el error cometido para mejorar su siguiente estimación.

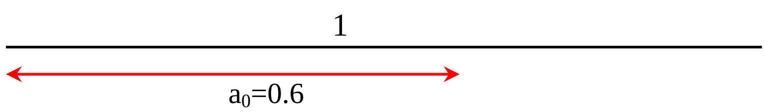
<u>Segunda justificación: reduccionismo *polyano*</u>

La siguiente es una nueva interpretación del método kira-kira para dividir un segmento en dos partes iguales que después se extenderá al caso general de N partes.

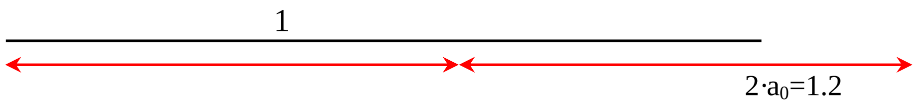
Tenemos un segmento de una unidad de longitud queremos dividir en dos partes iguales:



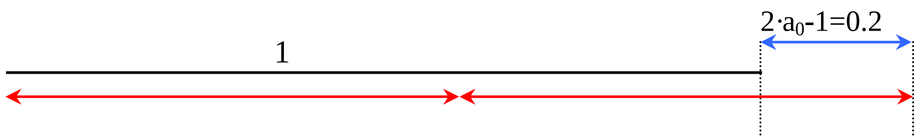
Efectuamos una estimación 'a ojo' de la que su mitad: a_0. Supongamos que $a_0=0.6$:



Comprobemos si la estimación es acertada comparando $2\cdot f(0)$ con el segmento:

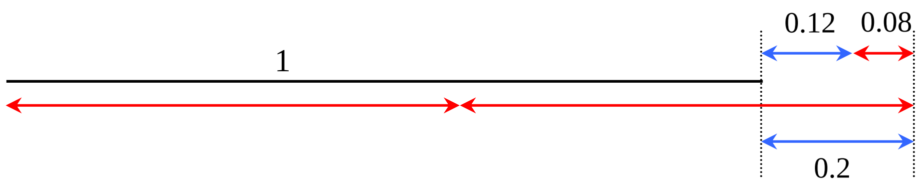


Nos hemos excedido. Llegamos ahora al punto crucial de esta nueva interpretación. Lo que interpreto que hace el artesano llegado a este punto es dividir en dos partes iguales, y también ‘a ojo’, el fragmento sobrante, el error cometido:

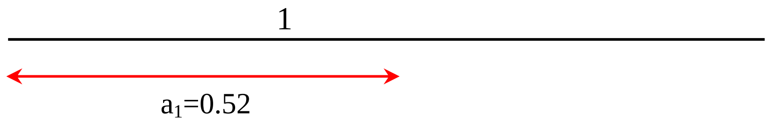


Aplicamos a ésta división el mismo porcentaje de error que al comienzo. En la práctica, probablemente no sea así. Lo más seguro es que el error cometido al dividir ‘a ojo’ un segmento tan pequeño sea menor que en uno largo, pero mantendremos el mismo porcentaje de error para ponernos en el peor de los casos. La esencia consiste pues en corregir el error buscando precisamente el punto medio del error cometido. La ventaja es que el problema se ha simplificado mucho al reducir la situación a un segmento mucho más pequeño. Recordemos las palabras de Polya hablando de la resolución de problemas: Si no sabes cómo resolverlo, quizá sepas resolver un caso parecido o más sencillo (Polya, 1988, p. xvi). Nuestra situación ha pasado de buscar el punto medio de un segmento de longitud 1 a otra de buscar el punto medio de un segmento de longitud 0.2. Aún manteniendo el mismo porcentaje de error que al principio, ¿lograremos acercarnos a la solución?

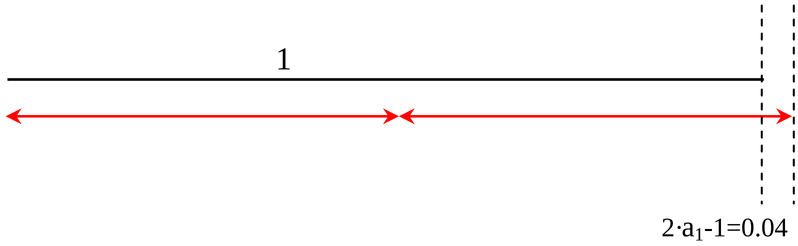
Efectuemos la división del exceso. Al estimar el punto medio de 1, obtuvimos $a_0=0.6$. Proporcionalmente, al estimar el punto medio de 0.2 obtenemos $0.6\cdot 0.2=0.12$.



Esto quiere decir que la siguiente estimación se obtiene restando 0.08=0.2-0.12 de la primera: 0.6-0.08=0.52. Es decir: $a_1=1-a_0+a_0\cdot[2\cdot a_0-1]=1+2\cdot[a_0^2-a_0]=0.52$.



Valoremos el resultado de esta segunda estimación a_1:



¡¡Un error por exceso de tan sólo el 4% en dos pasos cuando al inicio el error cometido era del 20%!! Repitiendo de nuevo el proceso: $a_2=1-a_1+a_0\cdot[2\cdot a_1-1]= a_0\cdot[3-6\cdot a_0+4\cdot a_0^2]=0.504$.

¡¡Un error de 0.504-0.5=0.004, cuatro milésimas, el 0.8%!! Si el segmento fuese de 40cm., una longitud parecida a la que deben enfrentarse los artesanos toraja, en un par de iteraciones de este proceso lograrían una precisión del 0.8% (20.16cm.), con un error de poco más de milímetro y medio. Y esto partiendo de que un porcentaje de error en la estimación muy exagerado, del 20%. Con un porcentaje de error más realista, en torno al 10%, el resultado sería 20.04cm., un cuarto de milímetro de error. ¡Inapreciable! La punta del lápiz es más gruesa.

Más adelante hablaremos del nivel de precisión de la visión humana. A continuación profundizaremos en el hecho de que los porcentajes de error en cada una de las iteraciones de nuestra interpretación del método Kira-kira sean del 20%, 4% y 0.8%. ¿Una serie exponencial?

<u>Recurrencia y convergencia del método Kira-kira</u>

Los términos de la sucesión producida por la aplicación del método Kira-kira son:

$$\begin{cases} a_0 = a \\ a_{n+1} = (1-a) + a_n(2a-1) \end{cases}$$

Puesto que el punto de intersección de la bisectriz del primer cuadrante (y=x) con la recta y=(2a-1)x+(1-a) es P=(1/2, 1/2) y que la pendiente 2·a-1 de ésta última es positiva y menor que 1 al haber tomado así las cosas, el proceso iterativo converge hacia el valor 1/2. Por ejemplo, para a=0.6 y a=0.9 (Fig. 5.51).

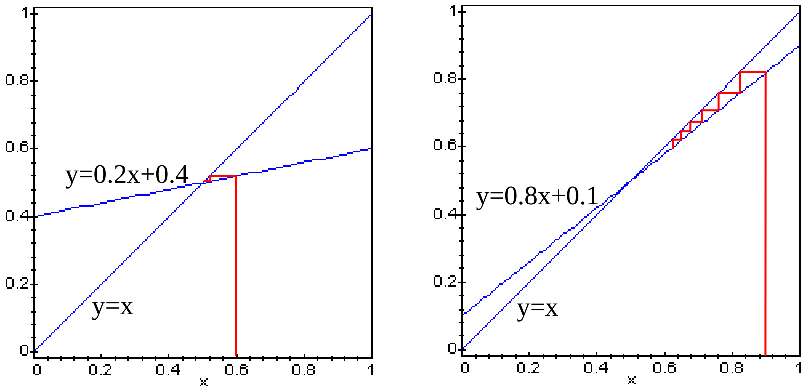


Figura 5.51

Vemos que la convergencia es más rápida en el primer caso porque la recta asociada (y=0.2x+0.4) tiene menor pendiente que la asociada al segundo (y=0.8x+0.1). En el primero, el valor de la primera estimación (a=0.6) está muy cerca de la solución; en el segundo, queda muy lejos (a=0.9). La estimación inicial determina el pendiente y la velocidad de convergencia.

Disponer de una expresión cerrada del proceso permitirá apreciar mejor el carácter de la convergencia de la sucesión. Es fácil comprobar que la diferencia entre dos términos consecutivos es: $a_{n+1}-a_n=(a_n-a_{n-1})(2a-1)$. Y ver que:

$a_1-a_0=a_1-a=(a-1)(2a-1)$

$a_2-a_1=(a_1-a_0)(2a-1)=(a_1-a)(2a-1)=(a-1)(2a-1)^2$

$a_3-a_2=(a_2-a_1)(2a-1)=(a-1)(2a-1)^2(2a-1)= (a-1)(2a-1)^3$

...

$a_{n+1}-a_n=(a-1)(2a-1)^{n+1}$

Y entonces: $$a_n=\frac{1+(2a-1)^{n+1}}{2} \qquad (1/2\leq a\leq 1)$$

Si la estimación inicial *a*, en lugar de larga, se queda corta, el proceso se aplica de forma simétrica. Es nos lleva a considerar que si a<1/2, entonces 1/2<1-a<1 y también 2·(1-a)-1=1-2·a>0. Podemos aplicar el caso 1/2<a<1 al caso 1/2<1-a<1 y escribir en general:

$$\boxed{a_n = \frac{1+|2a-1|^{n+1}}{2}} \qquad (0 \leq a \leq 1)$$

Obtenemos una sucesión exponencial decreciente con límite 1/2.

Generalización a la división de un segmento en N partes iguales

Esta interpretación se amplia de forma natural al caso general de la partición de un segmento en N partes iguales. La cuestión es ahora confirmarla. Para ello deberemos estar seguros de que los artesanos piensan así las cosas, si éste es verdaderamente su propósito. No me refiero a que efectúen un análisis matemático tan formal como el expuesto, cosa absurda en su contexto, sino averiguar si piensan las cosas como aquí se han pensado. Es decir, si para dividir un segmento en 2, 3 ó N partes iguales corrigen sus estimaciones buscando siempre la mitad, el tercio o la enésima parte del error cometido.

Ya observamos que varios artesanos efectuaban particiones en 2, 3 y 6 partes siguiendo el método Kira-kira. La división en 6 partes que practicó Yobel fue indirecta (6=2·3). En cambio, la que realizó Antón fue directa. ¿Corregía Yobel sus estimaciones buscando la mitad o el tercio del error cometido? ¿Hacía lo propio Anton con relación al sexto?

El método Kira-kira resulta muy útil para trabajar en vertical como hacen los grabadores. También es eficaz porque en la práctica resulta más rápido que tomar medidas y realizar operaciones aritméticas con ellas. A menudo las medidas no serían exactas, aún disponiendo de reglas, ¿qué decimales se tomarían en la medida y en el resultado del cálculo?

5.3.5 Interpretación arquimediana de las volutas: espirales paso a paso

La observaciones del proceso de grabado muestran que la *Interpretación arquimediana de las volutas* desarrollada a partir de la obra-acabada no es válida. En el proceso de talla se aprecia que la realidad de esas curvas está mucho más cerca de una poligonal de surcos rectilíneos o segmentos generada por la incisión en la gubia en la madera. Las volutas no son el resultado de una relación funcional punto a punto, sino de una relación instante-segmento producto del golpe de maza y del surco labrado por la gubia. También parece que el artesano las talle con el propósito de que sean paralelas unas con otras y, como consecuencia de ello, paralelas a sí mismas, auto paralelas (véase el Anexo E: E55-59). Todo eso contradice doblemente la interpretación arquimediana, pues las espirales de Arquímedes ni son paralelas ni las volutas se labran punto a punto, sino segmento a segmento, siendo esencialmente poligonales.

Vamos a desarrollar a continuación una nueva interpretación más ajustada al proceso de talla que llamaremos *Interpretación paso a paso de las volutas* que elaboraremos mediante *Geometría de Tortuga*. Al fin y al cabo, las acciones del artesano al grabar la madera y el efecto que produce el golpe de maza sobre la gubia se parecen mucho al camino recorrido por la tortuga en un plano.

Espirales paso a paso

El proceso de grabado pone de manifiesto como las volutas proceden de una poligonal de segmentos que talla la gubia. Esto remite a la geometría de tortuga en la que una pequeña criatura que existe en el plano matemático o, mejor aún, en la pantalla de un ordenador reacciona al recibir una serie de órdenes sencillas (Abelson y diSessa, 1986). Estos comandos son avanzar o retroceder un número de pasos y girar a izquierda o derecha un número determinado de grados.

La tortuga del artesano toraja no es una criatura de ficción matemática, es la gubia que gobierna. Su geometría se relaciona con la geometría ideal de la tortuga que Abelson y diSessa describen y que facilitará una modelización más acorde con la realidad: la gubia del maestro toraja es una representación real, tangible, del bichito invisible que actúa en la pantalla del ordenador. La línea tallada es su rastro. De este modo la geometría de tortuga proporciona un modelo matemático de las líneas talladas más apropiado a su realidad que el modelo funcional anterior. Aprovechándome de la onomatopeya toraja con la que se inicia el nombre de todos los diseños, le llamaré el modelo 'paso a paso' y consistirá en representar una línea tallada mediante una serie de instrucciones del tipo avanza, gira a la derecha y/o gira a la izquierda: [For i to n do Forwd(r_i);TurnLeft(x_i);od;].

Expresión en la que r_i es la longitud del paso, x_i el ángulo de giro tras cada paso en relación con la horizontal[1], y n>0 el número de pasos efectuados. Según los diferentes valores de n, r_i y x_i el resultado puede ser desde un segmento (x_i=0) o un punto (r=0) hasta una poligonal en espiral abriéndose o cerrándose.

Para tallar una circunferencia ordenaríamos al animalito virtual: avanza un paso, gira 1º a la izquierda, y repítelo todo hasta 360 veces: [for i to 360 do Forwd(1); TurnLeft(1); od;]. La tortuga no dibuja una circunferencia, sino un polígono regular de 360 lados. Puesto que un paso equivale en realidad a 0.25mm., el resultado es prácticamente indistinguible de

[1] Podría tomarse cualquier otra referencia. Sobre esto los artesanos toraja también tendrían algo que decir.

una circunferencia. Ocurre lo mismo con las circunferencias talladas en los grabados. Primero se traza mediante un compás, con un centro y un radio, y después se talla. Y así la circunferencia tallada es en realidad un polígono adaptado a la curva que trazó el compás.

Hay cuatro maneras elementales de producir espirales: manteniendo un giro constante aumentando o disminuyendo el paso y conservar el paso aumentando o disminuyendo el giro. Entre éstas un modo fácil de generar poligonales en espiral que parezcan auto paralelas es conservar un paso constante (por ejemplo r_i=r=20) y disminuir el giro. Por ejemplo, x_i=360º/(i+1). O sea: [Forwd(20);TurnLeft(360/(i+1));od;] (Fig. 5.52).

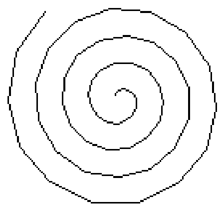


Figura 5.52

Esto plantea algunas cuestiones interesantes: ¿Cuáles son las coordenadas de los vértices de una poligonal semejante? Dada una poligonal así situada en el origen de coordenadas, ¿dónde se sitúa su paralela a distancia d girada 180º?

<u>Líneas poligonales auto paralelas</u>

Analicemos una poligonal de paso r_n y argumento x_n, siendo x_n el ángulo de giro entre dos pasos consecutivos. La tortuga inicia su camino mirando hacia el norte (Fig. 5.53).

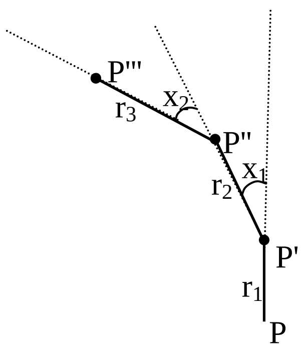


Figura 5.53

Tomando $x_0=0$ y origen de coordenadas en el punto inicial de la poligonal, P=(0,0), el enésimo punto trazado será:

$P'=(0, r_1)$

$P''=(0, r_1)+r_2\cdot(-\mathrm{sen}x_1,\cos x_1)=(-r_2\cdot\mathrm{sen}x_1, r_1+r_2\cdot\cos x_1)$

$P'''=[-r_2\cdot\mathrm{sen}x_1-r_3\cdot\mathrm{sen}(x_1+x_2), r_1+r_2\cdot\cos x_1+r_3\cdot\cos(x_1+x_2)]$

$$P^n=\sum_{k=1}^{n} r_k\cdot\left(-\mathrm{sen}\sum_{i=0}^{k-1}x_i,\cos\sum_{i=0}^{k-1}x_i\right),\ n\geq 1$$

Dos poligonales paralelas XY y X'Y' tienen sus segmentos paralelos e idénticos los ángulos de sus vértices correspondientes (Fig. 5.54).

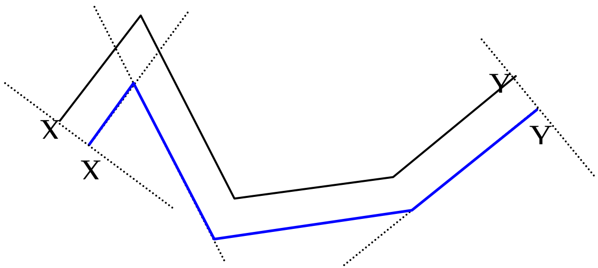


Figura 5.54

Sean r_i y x_i las longitudes de los segmentos y los argumentos de los vértices de la poligonal XY (Fig. 5.55).

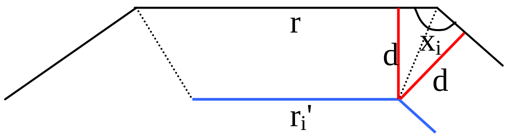


Figura 5.55

Vemos que la relación entre los valores r_i' y x_i' correspondientes a X'Y' es:

$$\mathrm{tg}\frac{x_i}{2}=\frac{d}{\frac{r_i-r_i'}{2}} \Rightarrow r_i'=r_i+2d\cot\frac{x_i}{2}$$

Luego dada una poligonal como for i to n do Forwd(r_i);TurnLeft(x_i);od; su poligonal paralela a distancia d será:

$$\text{for i to n do Forwd}(r_i+2d\cot\frac{x_i}{2});\text{TurnLeft}(x_i);\text{od;}$$

Volutas paso a paso: poligonales espirales auto paralelas

Con relación al problema de dónde ubicar la copia girada 180º de una poligonal en espiral con origen en (0,0) para crear dos volutas paralelas, nos restringiremos al caso de poligonales auto paralelas. Por ejemplo, la de paso r_i=i y argumento x_i=pi/m, con m entero. En una poligonal así los segmentos P_iP_{i+1} y $P_{i+m}P_{i+m+1}$ son paralelos y las coordenadas de su n-ésimo vértice son:

$$x_n = -\sum_{i=1}^{n} i\cdot \mathrm{sen}\,\frac{(i-1)\pi}{m} \qquad\qquad y_n = \sum_{i=1}^{n} i\cdot \cos\frac{(i-1)\pi}{m}$$

Si el inicio de la copia está en $Q^0=(Q_x,Q_y)$ y Q^n es su n-ésimo vértice, el punto Q^m será el punto medio del segmento P^0P^{2m} y los vectores $\overrightarrow{Q^mQ^0}$ y $\overrightarrow{P^0P^m}$ serán iguales (Fig. 5.56).

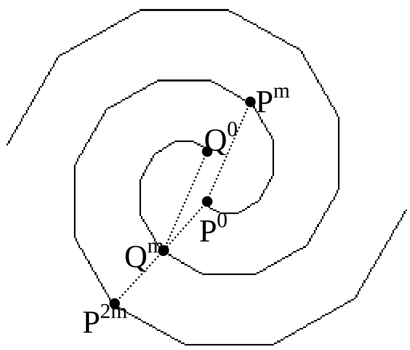


Figura 5.56

Tenemos que: $\begin{cases} Q^0 - Q^m = P^m - P^0 \\ P^{2m} - P^0 = 2\cdot(Q^m - P^0) \end{cases}$. Por tanto:

$$Q_x = x_m + \frac{x_{2m}}{2} = -\sum_{i=0}^{m-1} i\cdot \mathrm{sen}\,\frac{(i-1)\pi}{m} - \frac{1}{2}\sum_{i=0}^{2m-1} i\cdot \mathrm{sen}\,\frac{(i-1)\pi}{m}$$

$$Q_y = y_m + \frac{y_{2m}}{2} = \sum_{i=0}^{m-1} i\cdot \cos\frac{(i-1)\pi}{m} + \frac{1}{2}\sum_{i=0}^{2m-1} i\cdot \cos\frac{(i-1)\pi}{m}$$

Para x_i=10º (m=18) y r_i=i/2, la copia girada 180º ha de situarse en Q=(-5.71502617,-32.41152392):

```
> for i to 54 do Forwd(i/2);TurnLeft(10);od;
> PenUp();SetPosition(-5.71502617,-32.41152392);PenDown();
> for i to 54 do Forwd(i/2);TurnLeft(10);od;
> FullScreen();
```

Una vez trazada la primera voluta, la tortuga abandona el plano (el artesano toraja levanta la gubia) y vuela hasta el punto (-5.71502617,-32.41152392) para iniciar la misma poligonal. Esta copia se traza tras una rotación de 180º: 54·10º=540º y 540º-360º=180º. Acabadas las volutas, se han añadido a este gráfico los ejes del sistema de coordenadas en el que se han representado (rectas de puntos) y los ejes de la cuadrícula de referencia (líneas continuas) del grabado (Fig. 5.57).

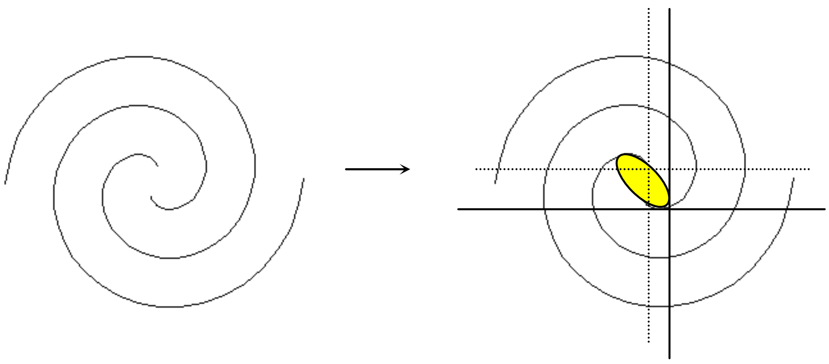


Figura 5.57

La interpretación 'paso a paso' tiene en cuenta aspectos pasados por alto en la interpretación arquimediana. Por eso es más fiel con la realidad.

El propósito de auto paralelismo, por el momento aparente, con el que los artesanos tallan las volutas justifica que la interpretación de su obra sea una poligonal en espiral del tipo 'for i to n do Forwd(i);TurnRight(x);od;' porque así se genera una poligonal en espiral auto paralela.

Aún cuando el propósito del artesano sea tallar una auto paralela es posible que la realidad física y práctica le impidan lograr un resultado mejor. Pero profundizar más en la interpretación supondría tener en cuenta concepciones e intenciones no visibles de los autores de los grabados. Conocerlas es imposible sin hablar con quienes las toman.

La validación de esta nueva interpretación que llamaremos *Interpretación paso a paso de las volutas* se pospone al estudio de la obra-explicada.

5.3.6 Interpretación de la ortogonalidad sesgada

Otra solución factible para construir la retícula sesgada, similar a la que realizada por Seber en la observación 5.2.10 y que le habría garantizado la ortogonalidad de los dos haces de rectas paralelas, habría sido situar la longitud de la base del paralelogramo sobre uno de sus lados inclinados y tirar desde su extremo una paralela a la base para construir así un rombo. Puesto que las diagonales del rombo son perpendiculares, el problema estaría resuelto.

Otra posibilidad todavía, aunque no garante de ortogonalidad, es colocar el listón como él, pero en lugar de trazar ‘a ojo’ una perpendicular a la diagonal mayor del paralelogramo resultante, como a mi me pareció que hacía, trazar la otra diagonal de éste nuevo paralelogramo (Fig. 5.58).

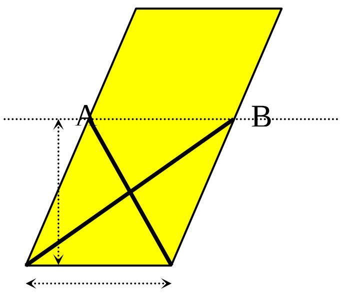


Figura 5.58

Ésas diagonales no son perpendiculares, pero debido a la inclinación del paralelogramo original están más cerca de los 90º que las de éste.

No descarto por completo que Seber tomase realmente ésta referencia y que a mi se me escapase verlo. De hecho, es posible que sea yo el único que desea la ortogonalidad de la retícula porque eso fue lo que me pareció ver, es decir, que yo vi que era perpendicular ‘a ojo’. Así que existe la duda de qué ojo ve las cosas, si el suyo o el mío. Otro motivo más por el que no podemos pasar por alto la interpelación con los autores de una obra artesanal. Admito incluso la posibilidad de que pusiera el listón de manera que su extremo derecho cayese encima del vértice opuesto de A y que yo no me diese cuenta al estar más preocupado de la intersección que del extremo. Ésta será nuestra interpretación matemática de la ortogonalidad sesgada, que es proviene de las diagonales del rombo.

5.4 RECAPITULACIÓN Y NUEVOS FACTORES RELEVANTES PARA LA INVESTIGACIÓN.

5.4.1 Resultados relacionados con la obra-en-curso

La forma de las tablas donde se labran los diseños viene determinada de antemano por la particular arquitectura toraja. Tanto las fachadas de las casas tradicionales como las de los graneros se erigen ensamblando piezas de madera. De su forma y del ensamblaje surgen los recintos rectangulares para ser grabados. En su conjunto el resultado es un reticulado modular de las fachadas, tanto las de la casa tradicional como las del granero. Los lados rectilíneos, paralelos y ortogonales con los que se ha cortado cada pieza del ensamblaje constituyen una excelente referencia para el artesano. Prácticamente todos los grabados se realizan en recintos rectangulares y los que no lo son, como los determinados por la zona superior triangular de las fachadas norte y sur, son paralelogramos.

Los grabados no se tallan sobre tablas dispuestas encima de mesas para luego colgarse en las fachadas. Se labran directamente en la fachada y en otros lugares de la construcción. El trabajo artesano se hace en vertical. Ésta particularidad compartida por todos los artesanos observados mientras trabajaban afecta definitivamente a los procedimientos y herramientas que usan. ¿Cómo sostener en el aire una escuadra y un cartabón para llevar a cabo la división euclidiana de un segmento en partes iguales? ¿Cómo hacerlo si, además, las fachadas no son planos lisos, sino que presentan diferentes niveles? Los procedimientos artesanales deben ser efectivos en el contexto en el que se aplican. De hacerse a la manera euclidiana no sólo se tardaría mucho tiempo en hacer los grabados, algunos resultarían imposibles y la tarea una auténtica locura.

La simetría ordena, organiza y equilibra una obra. En pos de ella que los artesanos toraja se interesan por un alto grado de precisión en su trabajo y lo sistematizan con procedimientos rigurosos para obtener los mismos resultados en diferentes lugares usando las mismas herramientas. Determinadas situaciones a las que se enfrentan están gobernadas por la cuantificación. La rectitud, 'circularidad', paralelismo y perpendicularidad son ejemplos de cuantificación para el matemático occidental, quien relaciona esas propiedades con los valores numéricos de un ángulo: rectitud = misma dirección o pendiente constante, paralelismo = misma pendiente o mismo ángulo, perpendicularidad = ángulo recto, un cuarto de giro, 90º. Pero los artesanos no hacen mención explícita de ello en el curso de su tarea. ¿Lo harán cuando la expliquen?

Donde sí hay una evidente manifestación de la cuantificación es en la construcción de retículas. El artesano es consciente de que para ellos debe dividir segmentos en una serie bien determinada de partes iguales. La situación a la que se enfrenta es un problema geométrico de peso y la estrategia que utiliza, el método *Kira-kira*, además de conducirle a la solución, es riguroso, objetivo y se fundamenta en la resolución de situaciones particulares cada vez más sencillas (segmentos cada vez más pequeños). Éste es un método recurrente basado en la convergencia de una sucesión de puntos sobre un segmento hacia la solución deseada. De confirmarse la interpretación matemática expuesta en este capítulo estaríamos ante el hecho más sorprendente y valioso hallado hasta ahora en la investigación: la resolución no euclidiana mediante recurrencia de un problema euclidiano.

Todos esos aspectos, búsqueda de la simetría, rigor, precisión, recurrencia y objetividad junto con la capacidad de calificar la obra como correcta o incorrecta nos acercan al pensamiento matemático.

Que los diseños se basen en una retícula explica la extraordinaria perfección de la obra y constituye un recurso tecnológico por el que los diseños toraja se alejan del contexto artístico. Por el contrario, eso supone una nueva aproximación a las matemáticas.

¿Existe actividad matemática en la práctica artesanal toraja? ¿Cuándo y dónde la hay? Hasta ahora hemos podido observar procedimientos matemáticos cuyo carácter, recordando a Davis y Hersh (1988), podríamos calificar de analógico: traza de paralelas y perpendiculares, simétricos de un punto con respecto de una recta, paralela a un recta dada, etc. Ese tipo de analogía está basada, sobre todo, en referencias visuales y en la experimentación.

Pero por encima de todas las situaciones afrontadas por los artesanos destacamos la de dividir un segmento en partes iguales. Éste es el problema principal de la actividad e indispensable para el trazado de las retículas. Los artesanos resuelven esa situación de un modo aparentemente informal, aunque con un éxito inexplicablemente formal, es decir, preciso. ¿De dónde viene su éxito? La interpretación matemática del método Kira-kira ofrece una explicación que deberá ser validada o invalidada por los propios artesanos al estudiar la obra-explicada. La verdad es que su método facilita mucho el trabajo en un contexto en el que las medidas exactas, el cálculo y los procedimientos euclidianos no harían más que dificultarlo. A diferencia de Tales y Euclides, los toraja no necesitan apoyarse en el plano sobre el que trabajan para dividir un segmento en partes iguales. Tampoco necesitan construir ninguna figura adicional. Su método podría aplicarse incluso a segmentos situados en el techo.

Para resolver este y los demás problemas los artesanos comparten toda una serie de herramientas: lápiz, listones de bambú, compás de agujas, gubia, maza y navaja. Un caso especial es el compás de bambú. A diferencia de los otros artefactos, éste sólo es usado por Yobel. Esos artefactos y el modo en que se usan afectan la cognición matemática de quien los maneja. Este papel mediador es un aspecto crucial del aprendizaje matemático. Los artesanos paren no querer utilizar ni calculadores ni reglas milimetrados fácilmente disponibles. También se ha observado que el uso dado a algunas herramientas no es propio del de la geometría euclidiana. ¿Significa todo eso que su geometría no es, de hecho, la euclidiana? Al menos desde una perspectiva procedimental, hemos considerado que sí. Su geometría es situada. Produce y trabaja con elementos e ideas euclidianos (puntos, rectas, circunferencias, el plano, paralelismo, perpendicularidad, simetría, etc.), pero no los elabora del mismo modo.

Las volutas, por lo que hemos averiguado hasta aquí ni son arquimedianas ni son falsas espirales. Se hacen a mano alzada, sin utilizar herramienta alguna, pero según parece con el propósito de hacerlas auto paralelas. Tampoco son el resultado de una relación funcional punto a punto, sino, en todo caso, punto (instante) a segmento (surco labrado por la gubia). Esto ha motivado la interpretación paso a paso basada en la geometría de tortuga.

Con el fin de resumir y organizar la información obtenida, se muestran a continuación dos tablas de datos relacionadas con la obra-en-curso.

La primera de ellas (Tabla 5.16) hace referencia a las herramientas utilizadas por los artesanos.

HERRAMIENTAS	**Regla**	**Listón bambú**	**Lápiz**	**Compás**	**Compás bambú**	**Escuadra**	**Gubia Mazo**	**Navaja**
Tiku		*	*	*			*	*
Leo		*	*	*			*	*
Yobel		*	*		*		*	*
Rombe'	*1	*	*	*			*	*
Seber		*	*	*2		*3	*	*
Anton		*	*	*			*	*
Ayud. Yobel		*	*	*			*	*

Tabla 5.16

1: Sí, pero sólo para los márgenes del espacio del grabado.

2: Sí, porque utiliza las tijeras como compás.

3: Sí, pero no para trazar perpendiculares.

Los asteriscos indican afirmativamente que a aquella persona le corresponde el aspecto señalado, ya sea con respecto a la herramienta empleada o con respecto al método seguido. Los espacios en blanco corresponden pues a la ausencia de datos documentados, no a la negación del aspecto correspondiente. Por ejemplo, puedo intuir que Yobel sabe usar el compás estándar metálico de dos agujas, pero dado que en ninguna ocasión de la obra-en-curso se le ha visto manejarlo y que es el único artesano al que se ha observado manejando el compás de bambú, hay que dejar vacía su casilla. El caso de Medi es parecido. Pese a ser compañero de trabajo de Seber y Anton, es lógico pensar que use sus mismas herramientas, pero como no he sido testigo de ello no se le incluye en la tabla. Lo mismo puede decirse de las estrategias para resolver situaciones.

La segunda tabla hace referencia a los aspectos procedimentales observados (Tabla 5.17). Tres aspectos cruciales no incluidos en esas tablas son compartidos por todos los artesanos. Uno, que todos trabajan en vertical. Dos, que ninguna calcula o escribe números de ningún tipo. Tres, que todos trazan una retícula en el campo del diseño a tallar antes de empezar su labor y que sirve de referencia a las figuras del grabado.

MÉTODOS	**Kira-kira**	**Verticales ‘a ojo’**	**Horizontales ‘a ojo’**	**Paralelas listón**	**Paralelas compás**	**Ortogonales compás**	**Ortogonales ‘a ojo’**
Tiku				*			
Leo	* 1			*			
Yobel	*	*	*	*			*
Rombe'					*		
Seber	*	*	*	*			*
Anton	* 1		*	*	*		
Ayud. Yobel		*					

Tabla 5.17

1: Leo aplica el método kira-kira con listón y con compás; a Anton sólo le vi hacerlo con compás.

5.4.2 Artefactos y cognición matemática

Mediante la observación del proceso de grabado podemos elaborar un inventario de las herramientas fundamentales usadas por los artesanos:

- Lápiz.
- Listón de bambú.
- Compás: metálico de dos agujas y de bambú.

- Gubia.
- Maza.
- Navaja.

Se hace imprescindible estudiar tanto su forma como su manejo si queremos tener una idea de cómo conciben los artesanos las formas que tallan, es decir, analizar su papel mediador en la cognición de quienes las manejan.

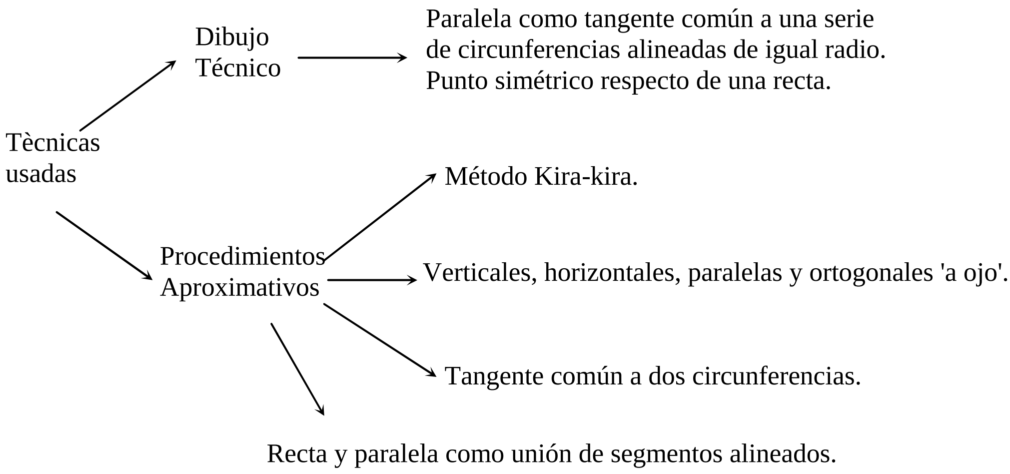
Dada la amplitud de un análisis semejante y puesto que las explicaciones de los artesanos pueden darnos algunas pistas sobre el objeto de su uso posponemos dicho análisis a las interpelaciones a los artesanos.

5.4.3 Interpretación de las soluciones toraja a los problemas geométricos planteados en el proceso de grabado

Partiendo de la consideración de que las soluciones euclidianas son analíticas, ¿cómo deberían clasificarse las soluciones de los artesanos toraja? De buenas a primeras, se diría que analógicas. Pero el análisis de la obra-en-curso ha puesto de manifiesto que la cosa no es tan sencilla porque Seber (Obs. 5.2.9) conoce la solución analítica (euclidiana) para determinar el simétrico de un punto con respecto de una recta, aunque, sin embargo, no parece usarla en su trabajo. Eso prueba que la práctica artesanal se rige por unos parámetros diferentes que los de la actividad matemática institucional de lápiz, papel y/o ordenador. Sin embargo el trazo del segmento paralelo a otro mediante la tangente común a una serie de arcos de circunferencia a cargo de Rombe’ (Obs. 5.2.2) y Anton (Obs. 5.2.12) son mucho más lógico-deductivas o razonadas.

Aún considerándolas analógicas, no todas las soluciones toraja son iguales ni tienen el mismo grado de rigor. En este preciso momento deberíamos clasificarlas todas como *automáticas*, pues desconocemos todavía qué piensa el artesano, pero un aspecto evidente en muchas de ellas es el papel que desarrolla el sentido de la vista. Tanto para la traza de paralelas como perpendiculares y, sobre todo, en la aplicación del método Kira-kira, la vista se convierte en un instrumento de precisión. También las articulaciones del brazo, ya que permiten el trazo de líneas verticales y horizontales bastante rectilíneas siempre que su longitud no sea excesiva. Por tanto, una solución ‘a ojo’ es, en realidad, una solución *senso-motriz*. Su rigor, precisión y objetividad derivados del carácter universal de los sentidos involucrados en ellas. En otras las capacidades sensoriales son substituidas y/o reforzadas por herramientas, lo que daría lugar a una solución *técnica*.

El siguiente es un resumen provisional de las soluciones toraja:



Como se ha señalado antes, no podemos hablar de razonamiento en las soluciones toraja mientras no se haya producido interpelación alguna con los artesanos. Tampoco sabemos, aunque intuimos, hasta que punto la experiencia justifica sus resultados. Pero de confirmarse nuestra interpretación del método Kira-kira, es muy posible que ambos aspectos estén presentes en dicho procedimiento recurrente.

5.4.4 Cuestiones relevantes para la obra-explicada

Las interpretaciones deberán ser confirmadas o refutadas y, en este caso, revisadas tras interpelar a los artesanos (obra-explicada):

1. Interpretación euclidiana senso-motriz de la geometría de los grabados.
2. Interpretación isométrica de los grabados.
3. Interpretación del método Kira-kira.
4. Interpretación paso a paso de las volutas.
5. Clasificación del carácter de las soluciones toraja.
6. Aprendizaje de los artesanos.
7. Construcción de la retícula ortogonal sesgada.

Hablar con los artesanos sobre su trabajo permitirá conocer de su propia voz cómo conciben y piensan muchas de las cosas que hacen e introducirá un aspecto fundamental de toda actividad humana que no ha aparecido hasta ahora: la comunicación. ¿En qué lengua se comunican los artesanos y se refieren a su trabajo? ¿Utilizan algún simbolismo específico oral o escrito? Esto será fundamental para enriquecer la interpretación euclidiana situada de la geometría de los grabados y para ver si su nomenclatura refleja algún aspecto de su simetría.

El método Kira-kira se desarrolló para determinar el punto medio de un segmento, pero recordemos que Yobel (Obs. 5.2.4) dividió un segmento en tres partes de esa manera. Interesa averiguar si también las generalizaciones naturales de nuestra interpretación se corresponden con los pensamientos del artesano. A la hora de dividir un segmento en tres partes iguales, ¿busca el artesano el tercio del error cometido para corregir su estimación? ¿Qué ocurre si el listón de bambú o la abertura del compás son excesivamente cortos? ¿Cómo se modifica entonces la estrategia? Evidentemente, la lista de preguntas no tiene fin y no será posible responder a todas las preguntas.

En cuanto a las volutas queremos saber si el artesano las talla con el propósito de que sean auto paralelas y de si usa alguna estrategia oculta hasta ahora.

También nos interesa conocer cómo garantiza el artesano la perpendicularidad de las finas retículas sesgadas (las que no lo son tienen la perpendicularidad de los márgenes del recinto del grabado). ¿Reside el origen de su ortogonalidad en la aproximación visual, como pareció que hacía Seber (Obs. 5.2.10) o existe alguna otra referencia?

Acabamos de abrir una clasificación de las soluciones toraja a los problemas geométricos que se les plantean que debe ser cerrada, como no puede ser de otro modo, una vez realizado el estudio y análisis de la obra-explicada. Eso contribuirá decisivamente a concretar la idea de situación matemática en una práctica.

Un aspecto de gran importancia en este trabajo es lo avanzado por Yobel (Obs. 5.2.4) y Seber (Obs. 5.2.9) referente a al carácter no académico de su aprendizaje, incluso, en el caso de Seber, de procedimientos propios de la geometría euclidiana. ¿Significa esto que todas las técnicas y métodos que usan las aprenden fuera de la escuela?

Los artesanos comparten herramientas y métodos con diferencias poco significativas. Leo y Yobel (Obs. 5.2.5) se entienden perfectamente cuando han de trabajar juntos. Parecen compartir, además de herramientas y procedimientos, el mismo lenguaje. ¿Estamos ante la *comunidad de práctica* de los artesanos toraja?

Si una cosa queda clara después del análisis del proceso de grabado es que la ornamentación arquitectónica toraja es mucho menos artística de lo que quizá uno cree al verla por primera vez.

6

PROPÓSITO
Y
EXPLICACIONES DE LOS GRABADORES

Los procedimientos observados en el proceso de grabado (obra-en-curso) parecen obedecer propósitos determinados de antemano, pero sólo mediante la interpelación podemos conocer qué piensan realmente quienes los ponen en práctica.

Por otra parte, y dada nuestra aproximación a la práctica artesanal, se hace imprescindible estudiar las explicaciones de los artesanos para confirmar o modificar las interpretaciones matemáticas desarrolladas. Las cuestiones más destacadas sobre cada una de ellas han cerrado el capítulo anterior.

De forma análoga a cómo se ha hecho en la obra-en-curso, las conversaciones e interpelaciones referentes a la obra-explicada se presentarán con una ficha de datos en la que, además de la información sobre el o los interpelados, también se hará constar la presencia o ausencia del intérprete.

Las interpelaciones, como ya se advirtió, y pese a seguir un orden cronológico, no se realizaron posteriormente a las observaciones expuestas en el capítulo anterior. El orden cronológico general de todas las actividades llevadas a cabo con artesanos se recogen en la tabla 3.2 que concluye el capítulo 3. Ahora la atención se centra en la columna derecha de aquella tabla y que se reproduce a continuación:

año	Interpelaciones *(Obra-explicada)*
1999	Martheen y Lea (10.08.1999)
	Sampe Pamunu (11.08.1999)
2000	Leo (13.01.2000)
	Martheen y Leo (21.01.2000)
	Rombe’ (24.01.2000)
	Yobel (25.01.2000)
2003	Yobel (10.08.2003)
	Yobel (12.08.2003)
	Yobel (12.08.2003)
2004	Rois (30.12.2004)
2005	Salle (02.01.2005)
	Salle (05.01.2005)
	Rois y Salle (05.01.2005)
	Salle (06.01.2005)

6.1 ANTECEDENTES SOBRE LA OBRA-EXPLICADA

Los únicos documentos relacionados con la obra-explicada tienen carácter puramente antropológico y fueron mencionados antes al tratar la obra-en-curso (Cap. 5). Aluden a la distribución y significado de los grabados, por lo que algunas ideas referentes al propósito se pueden intuir fácilmente, como, por ejemplo, el interés de la simetría. Pero ninguna de esas obras habla de procesos o técnicas de ejecución. Menos aún de ideas matemáticas relacionadas con ella.

6.2 PRIMERAS DIFICULTADES

En un principio, la recogida de información se planteó de forma sistemática. Situando las personas que llevaban a cabo la tarea, cuál era su objetivo y quién de ellas era la que poseía, si es que era así, un mayor rango. La serie de preguntas siguiente se redactó a con tal fin:

1. ¿Quién es el jefe?
2. ¿Cuántas personas forman el equipo de trabajo?
3. Nombres, edades, direcciones y tiempo en la profesión.
4. Nivel académico formal.
5. Objetivos del trabajo.
6. Tiempo previsto de ejecución.
7. Distribución de las tareas.
8. Tipos de materiales (maderas) utilizados.
9. Herramientas usadas.
10. ¿Quién decide los diseños a realizar?

Pero eso fue sólo ‘en principio’. Al final, las cosas fueron de otro modo y la particular idiosincrasia de la realidad toraja acabó imponiéndose. Ya en las primeras conversaciones, con intérprete, se hizo evidente que no podía plantearse el encuentro planteando todas esas cuestiones sin inspirar recelos en aquellos a quienes iban dirigidas. Más aún teniendo en cuenta que el investigador no disfrutaba del apoyo de ninguna institución o asociación académica, ni nacional (indonesia) ni extranjera (catalana o española), y que la conversación debería llevarse a cabo solamente gracias a la buena voluntad de los interpelados.

Por otro lado, pocas visitas bastaron para ver que las respuests a las cuestiones 2, 5, 7 y 9 se obtenían directamente de la observación. Las cuestiones 6 y 8, aunque irrelevantes para la investigación, se plantearon, sobre todo, como prueba de respeto e interés por aspectos que muy probablemente los artesanos valoraban: el tiempo y el material con el que se trabaja. El tiempo de ejecución previsto afecta directamente al beneficio económico y a la responsabilidad de cumplir los plazos establecidos; la madera no suele ser barata, a menudo resulta difícil abastecerse de ella[1] y es un material muy valorado por quienes la manipulan.

Con relación a aspectos generales de los diseños, algunas preguntas que parecieron, ‘en principio’, relevantes fueron:

1. ¿Cuál es el diseño más antiguo? ¿Qué antigüedad tienen los que hacen?
2. ¿Son fijos o pueden variar de un pueblo y/o autor a otro?
3. ¿Hay alguno del que el artesano en cuestión sea el autor?
4. ¿Se ubican siempre en el mismo lugar de la casa y/o granero?
5. ¿Los de las fachadas paralelas de la construcción tienen que ser iguales? ¿Han de corresponderse como las palmas de las manos?
6. ¿El número de diseños es fijo? ¿Es siempre el mismo en una construcción?
7. ¿Los paneles tienen siempre las mismas dimensiones y forma?
8. ¿Alguno tiene forma triangular?
9. ¿Se hacen como dice Sande? ¿Su libro contiene alguno erróneo?
10. ¿La simetría de algunos diseños tiene un significado especial?
11. ¿Hay diseños que ya no se hacen? ¿Por qué?

También ‘en principio’, y por lo que respecta a determinados diseños:

1. ¿El *Pa' Sule Tang* del libro de Marampa (1992: 52) es correcto?
2. ¿Qué constituye el fondo y la forma de un diseño?
3. ¿Se admiten variaciones sobre un tema o motivo?
4. ¿Hay algún diseño relacionado con algún número o propiedad numérica?
5. ¿Es consciente de que determinados diseños, pese a estar encerrados en un rectángulo, son extensibles a todo el plano?
6. ¿Podría establecer alguna relación entre determinados dibujos, ya sea por semejanza de forma o por otros motivos?

[1] Más tarde sabría que no procede de la región, sino de otra parte de la isla de Sulawesi, concretamente de los bosques que hay en la parte central de la isla: Sulawesi Tengah.

Pero, como se ha dicho, todo eso fue ‘en principio’. En las dos primeras conversaciones mantenidas con responsables de la obra (Sampe Pamunu y Martheen Madoi) la realidad y el contexto se impusieron. Algunas cuestiones que para mi habían tenido sentido mientras reflexionaba sobre el tema me parecieron después inadecuadas e, incluso, carentes de sentido. A partir de ese momento las cuestiones de carácter general pasaron a tener una importancia secundaria.

Con relación al aprendizaje de los grabadores:

1. ¿Dónde y quién enseña a realizar los diseños? ¿En la escuela se enseña nada relacionado con ellos? ¿Se les pone como ejemplo en clase de Matemáticas[2]? ¿Consideran necesarios conocimientos de matemáticas para hacerlos?
2. ¿Qué lenguaje se habla en la escuela? ¿Y en casa?
3. ¿Se utiliza el conocimiento escolar en el trabajo artesano? ¿Cuál y de qué forma? Y al revés, ¿el conocimiento artesano se usa en la escuela? ¿Cuál y de qué forma?

Demasiadas preguntas, demasiado complejas y demasiado alejadas de lo que la investigación se proponía. La ingenuidad del investigador se hacía evidente. Una cosa es preparar una batería de preguntas que se escriben en la pantalla de un ordenador y otra distinta comunicarte con gente que vive a 13.000km. y a la que ves y que te ve como llegado de otro planeta.

Si añadimos a eso las dificultades que se expondrán mas adelante con respecto a la pura comunicación verbal, con a sin la presencia de un intérprete, todo se complica sobremanera.

Así que esos cuestionarios fueron útiles como guía, pero una vez inmerso en la realidad había que adaptarse al contexto y a lo que en el desarrollo de cada situación pudiese comprenderse. Pese a la intención de formular preguntas concretas ya escritas, como en el caso del encuentro con Sampe Pamunu, algunas fueron modificadas porque durante la interpelación hubo evidentes síntomas de incomprensión y problemas de traducción. No veo problema alguno en preguntar a cualquiera lo que sea, pero la incomprensión de la pregunta por parte de la persona que es cuestionada puede provocar malestar, un sentimiento injustificado de ignorancia y dar al traste con lo que se pretende.

[2] El término debe ir en mayúscula en esta pregunta porque fuera de occidente, la idea que se tiene de las matemáticas está muy influenciada por el colonialismo occidental en el que era propio pensar esa disciplina con mayúscula.

6.3 INTERPELACIONES A LOS ARTESANOS

A continuación se recogen los resultados de las conversaciones e interpelaciones mantenidas con grabadores y responsables del trabajo. Cada conversación se titula con el nombre del artesano protagonista del encuentro.

Sólo algunas de esas conversaciones fueron grabadas en una cinta de audio y otras en video. No siempre se disponía de los recursos tecnológicos necesarios propios del siglo XXI en occidente. Del resto se aportan pruebas documentales en apuntes de campo y fotografías. En todas las ocasiones, el investigador, igual que se hizo en las observaciones de la obra-en-curso, solicitaba antes el permiso del artesano para interrogarle, grabar su voz o sacarle fotografías. En este aspecto, les estoy muy agradecido. Su amabilidad y simpatía, además de extraordinarias, fueron, y eso vale mucho más, sinceras.

6.3.1 Martheen y Lea

Interpelados:	Martheen Madoi, constructor[3] (de Kampung Ton'a, distrito de La'bo)
	Lea, artesano (de Kampung Ba'tang, distrito de Kete'Kesu)
Lugar:	Taller de Martheen Madoi, en Rantepao
Fecha:	10.08.1999
Intérprete:	Martheen (en inglés)
Imágenes:	Ilustración 1 (láminas al final de este capítulo)
Apuntes:	Anexo B: I-IX

Marthen Madoi es el jefe, pero no del grupo de grabadores, sino de todo el taller y almacen de carpintería dedicado a la construcción de casas y graneros tradicionales. Me explica que todo lo necesario para esas edificaciones se hace aquí, desde los pilares hasta el tejado. Me informa de que la parte de la casa destinada a la vivienda y aquella del granero donde se guardará el arroz se fabrican, se ensamblan y se decoran aquí con los diseños correspondientes; después se desmontan y se trasladan para ser ensamblados de nuevo en su emplazamiento definitivo.

Lea es el *maestro artesano*[4] y maneja listones de bambú, compás metálico de dos agujas, lápiz, navaja, gubias y mazo, pero no usa reglas milimetradas. Trabaja en las fachadas verticales de un granero ya montado (Ilustración 1).

[3] Martheen ya ha aparecido antes en su taller se desarrollaron varias observaciones de la obra-en-curso.
[4] Así lo llama Martheen.

Le pregunto a Martheen cuál es el diseño más antiguo. Como respuesta le ordena a Lea que lo haga. Éste le obedece grabando sobre un pedazo de madera cuatro barras verticales y paralelas. Martheen dice que se llama *Pa' Sussu*. Le pregunto si tienen que ser exactamente cuatro las barras. Responde que no, que pueden ser muchas más. El segundo diseño, según Martheen, es el *Pa' Barre Allo*; y el tercero, el *Pa' Tedong*. En total, afirma, hay 128. Relaciona el órgano sexual femenino con el diseño llamado *Pa' Tangke Lumu'*.

Martheen asegura que se utilizan cuatro colores para pintar los grabados y atribuye significados particulares a cada uno de ellos:

Amarillo – responsabilidad
Rojo – sangre
Blanco – huesos
Negro – muerte

Afirma también que cada grabado posee un significado especial más allá de su nombre. Algunos se refieren a la prosperidad, otros a la confianza, otros a las relaciones sociales, etc.

Según Marthen los diseños se comienzan a dibujar por la esquina inferior izquierda. Tanto Martheen como Lea afirman rotundamente que el diseño reproducido por Marampa (1992: 52) es incorrecto (véase el Anexo B: II).

El nombre que ambos le dan es *Pa' sule tang*. Les indico un diseño prácticamente idéntico, sólo que simétrico, que hay en la fachada del granero que está tallando Lea. Me aseguran que ése sí es correcto porque es simétrico. En cambio, el del libro no. La versión correcta según ellos es la reproducida en el Anexo B (V). Martheen me avisa de que hay que ir con cuidado, pues un diseño mal hecho pude traer mala suerte a la familia.

Por lo que respecta al libro de J. S. Sande, Martheen y Lea se lo miran con interés y se prestan a corregir algunos que, a su modo de ver, son erróneos (Anexo B: VI-IX):

- El nº. 1 y el nº. 2 tienen los nombres permutados. El primero es el *Pa' Barre Allo*; el segundo, el *Pa' Ne' Limbongan*.
- El nº. 4 presenta un error (evidente) de diseño en la esquina superior izquierda.
- También el nº. 18A presenta errores en la parte central de cada espiral cuadrada.

Análisis e interpretación

Las herramientas manejadas por Lea son las mismas que utilizan los demás artesanos. También trabaja en vertical.

Tanto él como Martheen consideran incorrecto el diseño de Marampa. Su versión de ese *Pa' Sule Tang* muestra simetría horizontal. Esto concuerda con un aspecto característico de las matemáticas, el poder calificar un resultado como correcto o incorrecto de modo objetivo. Algo impropio del ámbito artístico. Es más, la corrección, al menos en este caso, parece vinculada con la simetría. Sin embargo, el *Pa' Sule Tang* de autor desconocido que aparece en la ilustración 21 al final del capítulo 4 tampoco presenta simetría vertical ni horitzontal ni de giro.

Se confirma que cada grabado recibe un nombre particular y que posee un significado relacionado con aspectos sociales de la vida. En eso Martheen coincide con Marampa (1992), Sandarupa (1986), Sande (1991) y Nooy-Palm (1988). El que Martheen dice ser el diseño más antiguo es también el más simple. Sólo aparece en casas tradicionales muy antiguas, como en las fachadas Este y Oeste del antiguo tognkonan de Kete' Kesu descrito por Sandarupa (1986) y en otros muy viejos que permanecen todavía en pie. Sus líneas rectas, verticales y equidistantes las ha tallado Lea 'a ojo'. Sin esbozo alguno, sólo con gubia y mazo.

Martheen dice que hay 128 diseños. Resulta sorprendente que sean precisamente 2^7. Ésta es una afirmación insólita hasta ahora. Aunque él afirma que la talla de un grabado se inicia por la esquina inferior izquierda del recinto, las observaciones de la obra-en-curso muestran que no es así. Hay que pasar por alto esa información.

Cabe señalar que en el curso de la conversación, Lea prácticamente no ha abierto la boca. No habla inglés, pero Martheen sí. Martheen ha actuado todo el tiempo como jefe y ha sido él y no el artesano quien ha respondido a mis preguntas. No quiero decir que sus respuestas hayan sido inadecuadas, pero demasiado a menudo se anticipaba a las palabras de Lea, quien parecía demasiado sumiso a la voz de su patrón.

6.3.2 Sampe Pamunu'

Interpelado:	Sampe Pamunu, de unos 50 años (artesano ya retirado)
Lugar:	Taller de To' Marurung.
Fecha:	11.08.1999
Intérprete:	Rasyid Pasabuan (en inglés)
Imágenes:	Ilustraciones 2-3 (láminas al final de este capítulo)
Apuntes:	Anexo B: VIII-XV

Después de observar a Tiku (Obs. 5.2.1) pasé un rato mirando la actividad del taller. Había un par de jóvenes que también tallaban grabados, pero parecían principiantes porque labraban los diseños más sencillos. Con las cuatro palabras que entonces conocía de indonesio pregunté a los presentes si podría regresar la mañana siguiente acompañado de un amigo toraja (Tiku no sabía inglés y apenas hablaba indonesio). No pusieron ninguna pega a mi solicitud.

Así que al día siguiente volví acompañado de Rasyid, quien me traduciría del toraja al inglés las palabras de Tiku. Fue entonces cuando supe el nombre del artesano con el que había hablado y de qué pueblo era. Pero hoy Tiku está enfermo, sólo trabajan los dos jóvenes aprendices y responderá a mis preguntas quien más tarde se identificará como patrón y supervisor experto del grupo de trabajo: Sampe Pamunu’ (Ilustración 2).

Tengo un cuestionario preparado con una serie de preguntas a formular. Yo pregunto en inglés a Rasyid y él traduce la cuestión a Sampe en toraja, éste le contesta y Rasyid me traduce su respuesta de nuevo al inglés. La interpelación se desarrolla según la siguiente descripción (P: pregunta, R: respuesta). Las contestaciones de Sampe que me devuelve Rasyid figuran en cursiva. Nada más acabadas las presentaciones y explicado el motivo de mi visita inicio la interpelación:

P: ¿Quiénes forman el grupo de trabajo? ¿De dónde son? ¿Qué edad y experiencia tienen?
R: Lo forman varias personas, todas de Kesu', en el distrito de Sanggalangi. Tiku es de Kampung To'na, creo que tiene unos 30 años y lleva 20 como grabador. Sampe Pamunu’, el patrón (de unos 50 años) es de Boronan y será quien nos informe. Además, también trabajan un par de chicos aprendices.

P: ¿Graban casas y graneros exclusivamente?
R: *Graban tanto casas como graneros.*

P: El trabajo actual, ¿para qué es?
R: *Es para un granero de arroz.*

P: ¿Qué tipo de madera utilizan?
R: *La madera es del tipo ‘solo’ y ‘uru’.*

P: ¿Cuál es el tiempo de ejecución de un diseño?

R: *La duración de la tarea depende del número de trabajadores. Hoy Tiku está enfermo, pero también son tres. Un diseño puede acabarse en dos días.*

P: ¿Y el trabajo entero?
R: *La obra puede completarse en sesenta, si son tres personas.*

P: ¿Quién decide los diseños a realizar?
R: *El propietario de la casa o granero es quien decide los diseños que se han de grabar. Los hay de tres clases: alta, mediana y baja. El que están haciendo ahora corresponde a la clase alta. Hoy en día es el que más se hace. Hoy en día la gente ya no se lo mira tanto a la hora de escoger los diseños, no se preocupa tanto de ello como antes.*

P: ¿Son fijos los diseños o varían de un autor y/o pueblo a otro?
R: *Los diseños son siempre los mismos. Un diseño determinado se hará igual aquí que en otro lugar de Tana Toraja, sólo variará su ubicación en las fachadas de la casa o granero. El Pa' Tedong corresponde a todas las clases sociales y figura siempre en todas las casas y graneros. El Pa' Kapu' Baka también es común de todas las clases. Siempre se usan los mismos cuatro colores: negro, blanco, rojo y amarillo.*

P: ¿Las medidas de los paneles son siempre las mismas?
R: *No. Pueden ser mayores o menores. Si se reduce o aumenta, se mantienen las proporciones.*

(Esta última frase incluye la palabra ‘proporciones’ que es interpretación mía de las gesticulaciones de Sampe y Rasyid para explicarme la respuesta. Ellos no hablan de proporciones, soy yo quien así se lo expreso a Rasyid. Él está de acuerdo con el término que he usado, pero ¿sabe realmente a lo que me refiero?)

P: ¿Con relación al tema o motivo fundamental, se admiten variaciones?
R: *No.*

Me refería a si un diseño concreto y ya determinado admite variaciones o si ha de hacerse siempre igual.

P: ¿Quién lo ideó?

R: *Sampe nos cuenta la leyenda de una joven a quien la primera menstruación sorprendió sentada sobre un tronco. El hilo de sangre impregnó la madera en una curva que le sugirió la idea de tallarla. Fue un hombre quien realizó la tarea. Eso dio lugar al diseño básico, el Pa' Tangke Lumu'. Representa el órgano sexual femenino. Nos indica cuál es en una de las fachadas del granero que están tallando.*

(El motivo fundamental de ese diseño es una voluta. Más que al órgano sexual femenino, la figura básica del *Pa' Tangke Lumu'* recuerda a unos ovarios. Tal vez fue eso lo que Sampe quiso decir.)

P: Las espirales y los círculos presentes en los diseños, ¿tienen algo que ver con el número 8? ¿Por qué no aparece el número 7?
R: *Las espirales y círculos no tienen nada que ver con el número 8. No hay grabados relacionado con el número 7.*

Esas cuestiones eran pertinentes porque según Sande (1991: 11) hay diseños relacionados con el número 8 y con la forma de la cifra que representa esa cantidad dada la importancia que tiene en el sistema de parentesco toraja. Sande también afirma que el número 7 posee significación especial en la filosofía toraja (op. Cit.: 11).

P: El diseño reproducido en el librito de Marampa, ¿es correcto o está equivocado?
R: *És correcto, no hay ningún error en el trazo blanco.*

Resulta muy interesante lo que hace Sampe para ilustrar su respuesta cuando le muestro el librito de Marampa abierto por la página 52 (Anexo B: II) en la que aparece el *Pa' sule tang* del que hablé con Martheen y Lea (Int. 6.3.1). En la parte inferior de la p. 53 dibuja un fragmento del *Pa' Sule Tang*. Pero no me demuestra nada porque no contradice el dibujo en cuestión. Por tanto, no sé si lo que quiere es demostrarme que sabe cómo hacerlo o qué.)

P: ¿Cuántos diseños diferentes conoce?
R: *No lo sabe. "Yo no los cuento, tan sólo los hago!"*

Según Sampe los diseños se hacen todavía como aparecen en el libro, pero algunos están equivocados y comenta algunos errores *in situ*.

Sampe señala y nombra unos cuantos grabados de la fachada Oeste del granero (Fig. 61).

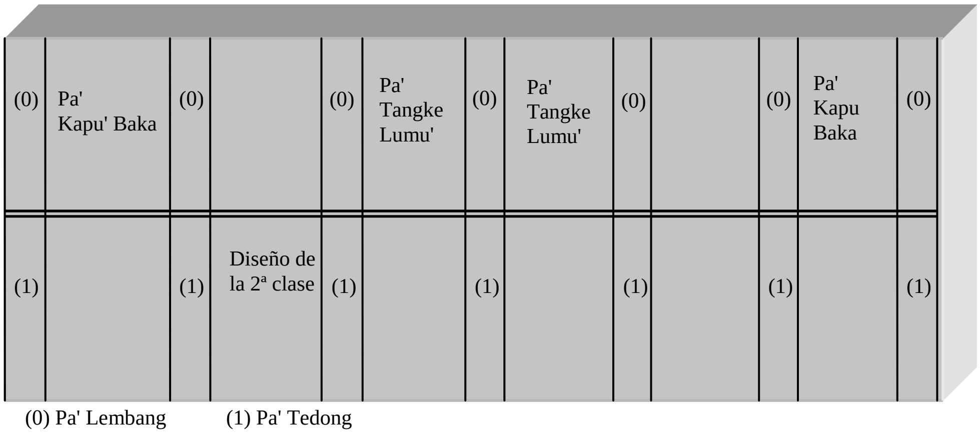


Figura 6.1

<u>Análisis e interpretación</u>

Durante la entrevista hubo momentos delicados, incómodos. Por eso no se profundizó en algunos aspectos tanto como al investigador le hubiese gustado. Sampe se mostraba receloso, con desconfianza, su actitud era la de estar siempre en guardia. El intérprete, Rasyid, también. Al principio pensé que esa tensión era causada por la diferencia de status social, pero luego caí en la cuenta de que las razones podían ser de tipo religioso. Sampe, como la mayoría de los artesanos toraja es cristiano. Rasyid, en cambio, pertenece a la minoría musulmana de la región. Así que era un musulmán quien tenía el honor de traducir las palabras de un cristiano a un occidental. Y además las preguntas no hacían referencia a un posible negocio o encargo de trabajo, sino al propio trabajo artesano. El hielo sobre el que se desarrolló la entrevista no acabó de derretirse del todo, por lo que llegado el momento de formular preguntas más técnicas relativas a la cuantificación se hicieron evidentes algunos problemas en la traducción de términos matemáticos. No quise insistir en hurgar en la herida y desvié el tema de atención. Por eso no se plantearon.

Mientras hablábamos pude ver como los jóvenes ayudantes de Tiku trabajaban aplicándose a las paredes verticales del granero.

Según Sampe a cada clase social le corresponden unos determinados grabados, pero los hay comunes a las tres, como el *Pa' Tedong* y el *Pa' Kapu Baka*. Esto confirma las tesis de Marampa (1992), Sandarupa (1986), Sande (1991) y Nooy-Palm (1988) con relación a la significación social que tienen los grabados y que cada uno recibe un nombre particular.

Parece que los artesanos trabajan en pequeños grupos y a las órdenes del grabador más experimentado que instruye a los principiantes. Él es quien da el visto bueno a la tarea.

Sampe asegura que los grabados se hacen igual en todas partes. Lo cierto es que las diferencias observadas entre los diseños son mínimas y muy probablemente obedezcan a un resquicio de libertad por el que el artesano pueda dar a su trabajo un aire personal. En cualquier caso, eso favorece la idea de que hay acuerdo entre diferentes artesanos por lo que se refiere a un sistema de ejecución por el que el producto de su labor se parece tanto. Eso nos acerca de nuevo a la idea ya anticipada en el capítulo 5 de que los grabadores toraja constituyen una *comunidad de práctica* en el sentido de Wenger (1999).

Entre los diseños citados por Sampe, cabe observar que ha señalado dos con el mismo nombre, *Pa' Lembang*, pese a que uno era unidimensional y el otro bidimensional (Ilustración 3). No creo que eso indique que Sampe no distingue entre uno y otro tipo de grabados, pero que ambos reciban el mismo nombre no apoya la *Interpretación Isométrica* porque el nombre no los distingue.

La proporcionalidad al aumentar o disminuir el tamaño de un grabado se conserva, pero la respuesta de Sampe a esa cuestión debe ser explicada. La expresión 'se mantienen las proporciones' era mía. Con ella pretendía traducir en un texto las gesticulaciones de Sampe y Rasyid. La verdad es que, pese a su afirmación, las proporciones pueden no mantenerse.

Me explico. Hemos visto en la obra-en-curso que lo más corriente es que los diseños se hagan en espacios rectangulares. ¿Qué sucede al aplicar la misma técnica para trazar una retícula en un espacio pequeño que en uno grande? Por ejemplo, si hacemos una retícula (1+2+2+1)·(1+2+2+2+1) en un rectángulo de ratio 3:4 a partir de la partición de los lados en 6 y 8 partes y trazamos en ella una circunferencia, obtenemos (Fig. 6.2):

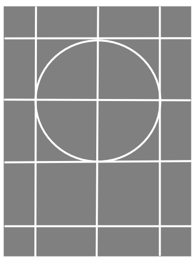


Figura 6.2

Si reproducimos lo mismo en otro rectángulo mayor, el resultado será proporcional al anterior sólo cuando las dimensiones de ambos rectángulos lo sean, es decir, si la ratio de éste último es también 3:4. Pero en el caso de un cuadrado, por ejemplo, la aplicación de la misma técnica produce resultados distintos, no proporcionales, con la circunferencia transformada en una elipse (Fig. 6.3).

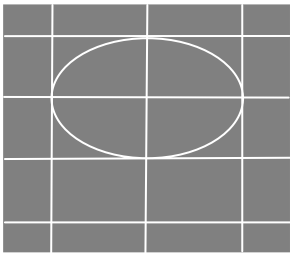


Figura 6.3

Por tanto, cuando Sampe asiente a mi expresión de 'se mantienen las proporciones' no debe interpretarse que las ratios de las retículas sen conservan. Su asentimiento no hace realmente referencia a la idea de proporcionalidad, sino al hecho de que el grabado se altera conforme se altera su recinto. Pienso que Sampe y Rasyid han tomado mi expresión 'son proporcionales' como sinónimo de 'son parecidos porque se realizan aplicando la misma estrategia' y que las diferencias que presentan son causadas por la diferencia de forma entre los rectángulos originales. No hay motivos para pensar que conozca las razones numéricas de dicha alteración. Una interpretación más apropiada es que el sistema de trazado es similar, es decir, que el proceso a aplicar es el mismo en ambos casos, aun cuando el apsecto final sea ligeramente distinto.

Cuando realiza el esbozo del *Pa' Sule Tang* usa una pequeña regla milimetrada de plástico que traía consigo. No toma ninguna medida, obvia sus divisiones en centímetros y milímetros usándola de manera sintética. La regla es para él un listón de plástico. El rectángulo y la cuadrícula que traza sobre sus rodillas son bastante imprecisos (Anexo B: XII). Su esbozo no demuestra nada ni contradice el dibujo de Marampa. Quizá no comprendió mi pregunta.

Que Sampe diga que el número 8 no tiene nada que ver con los diseños contradice lo afirmado por Sande (1991). Además, algunas imprecisiones que yo veía en ese libro las han confirmado Sampe, Martheen y Lea. En este sentido, el ojo occidental y oriental han visto lo mismo y sus respectivas mentes han interpretado lo que han visto de forma similar. Todo eso hace que la obra de Sande no pueda ser tomada como una referencia sólida.

La respuesta de Sampe a la pregunta de cuántos diseños conoce muestra bien a las claras que el investigador matemático parte de una perspectiva muy distinta a la suya. A los matemáticos nos preocupa mucho la cantidad. Por eso y por lo manifestado por Martheen en la conversación anterior la pregunta era pertinente. Martheen aseguró que había 128 diseños. A Sampe no le importa cuántos grabados hay. Más tarde supe que Martheen fue uno de los primeros guías turísticos locales de la zona y que tras dejar ese empleo, se hizo constructor. Como nativo, conoce bien su cultura. Como constructor me demostró que conocía bien su trabajo y detalles de su arquitectura. Pero no ha sido artesano. Por tanto, no podemos dar la misma relevancia a su opinión que a la de Sampe.

6.3.3 Leo

Interpelado:	Leo[5] (26 años), de Kampung Balik, distrito de Sangalla'.
Lugar:	Taller de Kampung Barana', distrito de Tikala.
Fecha:	13.01.2000
Intérprete:	Rasyid (en inglés)
Imágenes:	Ilustraciones 4-6
Apuntes:	Anexo B: XVII

Había encontrado ese taller por casualidad y pregunté a quienes trabajaban si podía visitarlo acompañado de un amigo local para hablar con el artesano. Muy amablemente aceptaron mi propuesta. Regresé con Rasyid un par de días después. Leo (tallando) y Rasyid (en primer plano) aparecen en la ilustración 4. Según Leo, el granero que está terminando de tallar corresponde a una familia de la clase media y los nombres de los grabados en la parte inferior de la fachada Este (véase la imagen anterior) son los siguientes (Fig. 6.4). El asterisco corresponde al *Pa' Tedong*:

Pa' Buling-tong Si Teba	*	*Pa' Lulun Paku*	*	*Pa' Batang Lau*	*	*Pa' Batang Lau*	*	*Pa' Lulun Paku*	*	*Pa' Buling-tong Si Teba*

Figura 6.4

Leo no trabaja con reglas aunque en el taller las hay a su disposición. Lo hace todo con listones de bambú. Yo tomo una de las reglas y la aplico a los lados del panel de los grabados: 30cm.x48cm. La retícula que hay en ellos es de 6x8 módulos, por lo que no es exactamente cuadrada: 5cm.x6cm. Formulo a Leo algunas preguntas:

– Sobre las volutas, ¿qué toma como referencia para hacerlas? ¿Círculos tal vez?
  Ninguna. Las hace a vista, 'equilibradas'. No usa círculos.
– El grosor entre las sucesivas vueltas debe ser el mismo?
  (Sin respuesta.)
– ¿Usan el método de *probar y volver a probar* para hallar la mitad de un lado[6]?

[5] Se trata del método Kira-kira del que ya se ha hablado en el capítulo 5.

Sí.

– ¿Cuál es la figura y cuál es el fondo de un diseño?

(Sin respuesta).

– ¿Dónde y de quién aprendiste a hace los grabados?

Aprendí de un anciano, no en la escuela. Sólo fui a la escuela cuando era pequeño.

<u>Análisis e interpretación</u>

También en esta ocasión hay dificultades en la traducción y comprensión de mis preguntas. O no las he sabido plantear bien a Rasyid (mi intérprete), él no las ha traducido con suficiente claridad o Leo no ha entendido lo que se le preguntaba.

Leo tiene nombre para todos los diseños. Aprendió el oficio de un anciano. Ya son varios los artesanos que han manifestado lo mismo, por lo que el aprendizaje no parece ser de tipo académico.

Leo usa listones de bambú, compás de dos agujas, lápiz, gubias y mazo. No emplea reglas milimetradas que tiene al alcance de la mano. Usa el método al que llamé *Kira-kira* que más tarde llamaría Kira-kira para dividir en partes iguales los lados del rectángulo de un grabado y trazar su retícula. Para que éste fuese cuadrícula la altura del rectángulo debería haber sido de 50cm y no de 48cm.

6.3.4 Leo y Martheen Madoi

Interpelado:	Leo
Lugar:	‘Oficina’ del taller de Martheen Madoi, en Rantepao.
Fecha:	21.01.2000
Intérprete:	Martheen (en inglés)
Grabación:	Anexo C (audio CD: Track 01)
Apuntes:	Anexo B: XXIII

Leo está trabajando ahora para Martheen Madoi, en Rantepao. Yo quería saber algunas cosas por boca de Leo, pero no habla inglés. Martheen hará de traductor y la conversación se grabará en una cinta de audio. Más abajo se transcribe esa grabación.

En cursiva aparecen las respuestas de Martheen. De hecho, deberían ser las de Leo, ya que la tarea de Martheen debía restringirse a traducir, pero no fue así y, como se verá, en la mayor parte de la conversación él mismo responde a mis preguntas ofreciendo opiniones

[6] Esta pregunta alude al método *Kira-kira*, pero entonces todavía no se había desarrollado ninguna interpretación suya ni se sabía que algún artesano lo llamara así.

personales e interpretaciones sin dejar hablar a Leo. Por eso creo necesario incluirle en la trascripción.

Se observará que a menudo uso expresiones en inglés no del todo correctas gramaticalmente. En ocasiones faltan artículos, en otras la forma verbal que acompaña un pronombre personal no es la correcta. Pero lo hago para favorecer la comunicación. Téngase en cuenta que el inglés de Martheen no es muy académico (el mío tampoco) y que acostumbra a usar infinitivos y gerundios. Es corriente entre los indonesios porque ni en indonesio ni en toraja, su lengua materna, no hay ni declinaciones ni formas verbales relacionadas con el pasado, presente o futuro, sino que se usa el infinitivo. El tiempo al que se alude se sobreentiende por el contexto de la conversación.

El investigador (M) abre la charla que acaba prácticamente por convertirse en un diálogo con Martheen (T) porque quita a Leo todo el protagonismo que debería haber tenido (Anexo C: Track 01):

Interpelación	**Observaciones y comentarios (M)**
M: I want to ask. When they make a carving, they don't use never centimeter?	
Martheen se lo pregunta a Leo y después me responde:	
T: *Just use the compare. Use like a little wooden or timber and then they can measure how ...*	Martheen dice *use the compare*, pero no es que confunda *compare* con *compass*. Se refiere a usar la comparación. Una expresión más correcta gramaticalmente sería: *they just use comparing with*.
	Martheen se queda suspendido en busca de una palabra. Yo se la encuentro.
T y M: … long.	
T: *And they divided by ... sometimes.*	
M: By hand, no?	
T: *By hand. Only like this ...*	
M: Ah, like this. Ya. But not centimeter?	
T: *No. They don't use the centimeter.*	
M: Oh, ya.	

T: *This is like comparing also. Just comparing ... He is able than another people. Normally, another people use centimeter.*	Las observaciones prueban que las cosas no son así. Ningún artesano las usa. ¿Qué hace a Leo ser más capaz que otros? Creo que Martheen tan sólo elogia a su empleado. Con el término *comparing* Martheen se refiere al hecho de transportar distancias y al Kira-kira.
M: Normally?	
T: *Ya. I think he is able than his friends.*	
M: He doesn't want?	
T: *Ya. Because if he uses the centimeter, always brings centimeters, bring the ...*	
M: … compass?	
T: *Ya, compass.*	
M: He doesn't use compass.	
T: *No. He uses ...*	Martheen busca la palabra. Yo se la encuentro.
M: The bamboo.	
T: *He uses the bamboo and then put inside to see how large the timber.*	
M: And the people who taught him, taught him without centimeter?	
T: *No, just it's his decission.*	
M: Ah, his decission!	Así que Leo no quiere utilizar tecnología 'más avanzada'.
T: *Ya.*	
M: Because he wants to do it like this.	
T: *No appointed. Ya. No appointed by somebody. For example, I don't ask him you put 20 cm.*	
M: He doesn't want. Only traditional.	

T: *Ya. By feeling. Just by feeling. I think that is more ...*

No creo que Leo compare medidas 'by feeling'. Martheen se refiere a los aspectos sintéticos de la geometría, a la ausencia de la cuantificación en las medidas y a que el artesano debe basar sus decisiones en razones que él desconoce. Martheen acaba la frase buscando de nuevo otro término.

M: … artistic.

T: *Ya. Artistic. Really. Artis is coming from the heart. By feeling, by eye ...*

'By eye' se acerca más a mi idea de cómo se hacen las cosas.

Puesto que en este momento le planteo una cuestión irrelevante y demasiado compleja, la transcripción se interrumpe durante unos minutos.

Más tarde quiero saber si tienen algún término específico para referirse a las paralelas.

M: Another question:

If I make a line like this …,

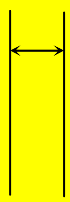
Trazo un segmento vertical.

and then like this …,

Trazo otro paralelo al anterior.

from here to here …, from here to here …, from here to here …, same distance, no?

Señalo a Martheen varias parejas de puntos equidistantes y homólogos de cada segmento:



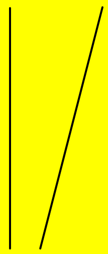
T: *Ya.*

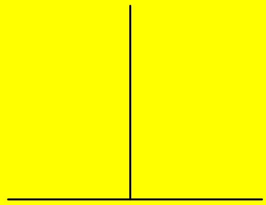
M: How does he calls to these lines?

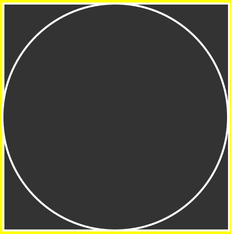
T: *Does he call?*

M: The name. If from here same distance, from here to here. I mean, different like this ...

Ahora trazo dos segmentos no paralelos:

	
T: *Ah! Ya, ya ...*	
M: Has a special name?	
T: *In Toraja, we say 'siam barra', special name.*	Martheen habla del par paralelas, pero se lo he preguntado a Leo.
M: Like this? What does it mean in english?	
T: *It's parallel.*	
M: Parallel.	
T: *Ya.*	
M: And like this, how do you call it?	Me refiero ahora al par de segmentos no paralelos.
T: *We call ... 'Si ta datang'. Because here is ..., up is open and the down is closed.*	Interesante que lo exprese así. ¿Quiere esto decir que es consciente de que si los segmentos se prolongasen indefinidamente por la parte inferior acabarían encontrándose y por arriba no?
M: So, you call it ...	
T: *'Si ta datang' or 'si penum puang'.*	
M: What does it mean?	
T: *Different straight. One to the East, one to the West, or one to the North, one to the South.*	Martheen dice *different straight*, pero creo que a lo que se refiere en realidad es a que tienen *diferent direction*.
M: And ... 'si penum puang'?	
T : *The meaning is 'same power'.*	
M: But same power here or here?	
T: *Here.*	Señala las paralelas.
M: When like this …How he calls?	Trazo dos segmentos ortogonales:

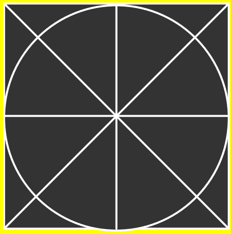
	
T: *One is horizontal, and one...*	Martheen no encuentra el término. Le ayudo.
M: Vertical.	
T: *That's mean… This is different position. Ya. So, in Toraja, we call ...*	Martheen conversa ahora con Leo, pero yo acabo interviniendo porque me interesa saber la opinión del artesano.
M: Apa namanya? Tidak ada nama untuk itu? (¿Qué nombre? ¿No hay nombre para esto?)	Le pregunto directamente a Leo qué nombre recibe, si hay alguno para esto. Pero es Martheen quien vuelve a responder:
T: *We say 'siku'.* M: What is the meaning of *siku*?	
T: *The 'siku', it's mean one vertical and horizontal, 'siku-siku'.*	Leo asiente.
M: Ah, siku-siku.	No es exactamente como me dice Martheen. En lengua toraja, 'siku' significa codo (eso lo sabría gracias a Rasyid). En indonesio cuando un substantivo se repite representa el plural. Así, *bunga* es flor y *bunga bunga* son flores. En lengua toraja, en cambio, la repetición de un término representa un sucedáneo o algo similar al término solo. Así, *tau* es persona y *tau-tau* es muñeco. Por tanto, *siku-siku* es un sucedáneo del codo e indica perpendicularidad.
M: Another question. When they make *Pa' barre Allo*, they make sometimes like this…	Dibujo un cuadrado y después inscribo un círculo en él:



T: *In the square.*

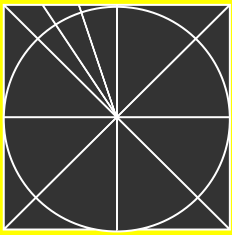
M: And then make like this: ... satu, dua, tigah, ..., delapan. Eight.
(Y luego hacen así: uno, dos, tres, …, ocho. Ocho)

Trazo ‘a ojo’ y sin regla las dos diagonales del cuadrado y las dos mediatrices de los lados, una vertical y otra horizontal. Eso divide la figura en ocho partes iguales:



M: But sometimes, here ...

En una de esas divisiones trazo dos líneas más a ojo provocando la aparición de tres nuevos sectores circulares:



T: *Take another.*

M: Not another, but three. I mean, like this… : satu, dua, tigah (un, dos, tres). How they make it? They make it kira-kira or ...

Existen en la región diseños con particiones del círculo en 24 partes iguales, como en el tongkonan de Batu Rongko (Ilustración 6 al final del capítulo 4). Deseo saber cómo se realizan, si se hacen kira-kira o tomando alguna referencia concreta. Por eso señalo a Leo las tres partes de uno de los sectores.

T: *Ya. Just kira-kira and then just for interest ... because ... there's in the geographia ... there is symbol north, east, south, west, ... after that more ... until 37, no 36.*

	Martheen se anticipa otra vez a Leo. Relaciona los cuatro puntos cardinales con las sucesivas divisiones. Pero 36=4·9. ¿Se hacen divisiones en 9 partes?
M: Ya. But here eight. If you make two parts, sixteen. And then, even another two parts, 32. No more.	Trato ahora de que Martheen comprenda que las sucesivas particiones en dos partes producen divisiones en 8, 16 y 32.
T: *No more. Straighting.*	¿Tal vez se había equivocado y ahora ve que no puede haber más que 32? ¿Qué quiere decir con *straighting*?
M: Every two, each.	
T: *In between. In between two ... relation.*	Parece que las sucesivas particiones provienen de dividir en dos partes la sección precedente. No lo hace explícito, pero cuando dice 'in between' creo que se refiere justamente a la mitad.
M: Ini, *Pa' barre allo*, sampai tigah puluh dua. (Aquí, en el Pa' Barre Allo, hasta 32)	Me dirijo nuevamente a Leo llamando *Pa' barre allo* a mi diseño.
	Pero Martheen se le anticipa otra vez más:
T: *Ya, sometimes. Deepends on the personal to do this ... Because many types the people ... The arts doing ...*	
M: But, if I want to make eight, I go like this: 1, 2, 3, ... , 8. But if I want to make sixteen, how can he do it?	Quiero saber qué procedimiento se sigue para efectuar la partición.
T: *Take more.*	
M: He. I want to know him ...	Ahora Martheen habla con Leo y es éste quien delante de mi realiza la partición 'a ojo'. Por eso le digo:
M: Ah. Kira-kira.	
T: *Kira-kira. In the meedle we take ...*	
L: *Satu, dua, tigah, ..., enambelas!* (Un, dos, tres, ..., dieciséis!)	Por fin Leo acaba abriendo la boca y cuenta los sectores resultantes:

M: Kira-kira.	
T: *Kira-kira. Sometimes, if the owner of the house has more big relations, they can put like this. It's mean, just simple, not so many. I mean, like the government of the large country, for example, a lot of, I mean ...*	Martheen vuelve a hablar:
M: Contacts.	Y relaciona esa cantidad con cuestiones sociales.

Un rato después de acabada la conversación Martheen me habla de la educación de Leo. Lo hace delante de él, seguramente porque Leo no entiende inglés:

T: *He doesn't past in the elementary.*

M: Only elementary.

T: *Just the third or fourth. After that go away because in Toraja we're prepared to be farmers. Because father always says help me, come and follow and help me everyday.*

M: Into the ricefield.

T: *Ya.*

Por la edad de Leo (26 años), eso significa que dejó la escuela elemental antes de 1986.

También pregunté a Martheen si se hacían grabados con triángulos. Me respondió que no, que el triángulo no era bueno y que lo mejor era el ángulo recto:

- *No good, no balanced! Better square.*

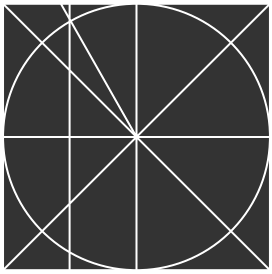
Análisis e interpretación

El desarrollo de la conversación pone de manifiesto que las cuestiones deberían haberse planteado mejor y que Martheen ha monopolizado la interpelación. Leo apenas ha abierto la boca y el papel de Martheen no ha sido el de traductor, ha acabando siendo él el interpelado.

Pienso que el hecho de que Martheen sea el patrón de Leo, no con relación a los grabados, sino porque es quien le ha contratado para hacerlos, afecta demasiado cualquier entrevista en la que él esté presente. El hecho de que Leo no hable inglés no hace sino empeorar las cosas. Nunca discute a su jefe ninguna opinión, al menos ante mi presencia. En cambio, Martheen se las discute a él. Por otra parte, el observador no debería haber intervenido tanto ni anticipar algunas respuestas.

Aún teniendo en cuenta esas dificultades, se confirma el tratamiento sintético de la geometría y el rechazo a utilizar tecnología más avanzada y fácilmente disponible y que, probablemente, obligaría a los artesanos a calcular.

Tenía la esperanza de que el tercio del sector circular se trazase con la ayuda de la mediatriz de un radio del círculo inscrito, como se ilustra en la Fig. 6.5. En efecto, la intersección de la mediatriz de un radio horizontal del círculo inscrito en el cuadrado con la circunferencia proporciona precisamente un ángulo de 60º, ya que se determina así un triángulo rectángulo de hipotenusa doble longitud que uno de sus catetos. Pero Leo no hacía así las cosas.



La división del círculo en 4 partes viene determinada por las cuatro mediatrices de los lados del cuadrado circunscrito. Para la división en 8 se añaden las dos diagonales. Y para dividirlo en 16 lo que se hace es intercalar 'a ojo', no ya mediatrices, sino bisectrices de los últimos ángulos construidos.

Les he dibujado un par de paralelas verticales. Podría pensarse que el nombre de 'siam barra' alude a su verticalidad y no a su paralelismo, pero no lo considero así. Lo mismo podría pensarse del otro par que no son paralelas: ¿no tienen poder porque no son paralelas o porque una se aparta de la verticalidad de la otra? La cuestión no reside en la verticalidad, sino en la dirección.

Las aproximaciones 'a ojo' también parecen aplicarse a los ángulos, pero no el método Kira-kira. Así se desprende de la partición del sector circular en dos, cuatro, ocho y más partes iguales. Pero queda por saber si se toma alguna referencia para realizar la división, como por ejemplo si lo que dividen es el ángulo o su arco circular correspondiente.

Leo no acabó la escuela elemental. Parece que todos aquellos que se dedican a esta profesión ha aprendido el oficio al margen del ámbito académico.

Poco a poco va creciendo el lenguaje geométrico vernáculo (toraja) con el que los artesanos se refieren a las figuras que tallan con el que se pone de manifiesto que los artesanos realmente son conscientes de toda una serie de conceptos geométricos:

Barra:	segmento
Barre allo:	circunferencia (‘allo’=Sol, ‘segmento circular’)
Siku-siku:	perpendicular (codo: ‘siku’)
Siam barra:	paralela
Si ta’ datang:	no paralela (‘ta’=’tidak’=no, ‘datang’=venir, no coinciden/intersecan)
Penum puang :	no paralela

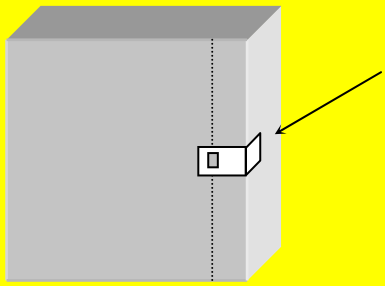
6.3.5 Rombe’

Interpelado:	Rombe’ (el mismo observado en el capítulo 5)
Lugar :	To' Marurung (distrito de Buntao')
Fecha:	24.01.2000
Intérprete:	Rasyid (en inglés)
Imágenes:	Ilustración 7
Grabación:	Anexo C (audio CD: Track 02)
Apuntes:	Anexo B: XXVI

En esta interpelación Rasyid vuelve a hacer de intérprete. Como en el caso anterior de Martheen con Leo, y aunque aquí no sucede tanto, se verá como la tarea del intérprete sobrepasa en algunas ocasiones los límites que tenía asignados. Por eso se incluye su voz en la siguiente trascripción de la grabación. Yo (M) formulo las preguntas en inglés y Rasyid se las traduce a Rombe’ (R). Así que bajo la inicial ‘R’ correspondiente a Rombe’ pueden esconderse a veces las opiniones de Rasyid. Pero no hay peligro de confusión. Indicaré cuando sea necesario qué corresponde a la traducción de las palabras de Rombe’ y qué corresponde a la opinión personal del intérprete. Mientras no diga lo contrario, se trata de traducciones (Anexo C: Track 02):

Interpelación	**Observaciones y comentarios (M)**
M: To make the carvings, they use compass like this. This one.	Señalo un compás de dos agujas que tiene Rombe'. Rasyid responde sin preguntarle a Rombe’:
R: *Oh, ya.* **M**: But, also they use bamboo compass. **R**: *Ya.* **M**: No. Ask him.	
	Quiero que sea Rombe’ quien responda. Rasyid se lo pregunta y me dice:

R: *They use both.* **M**: Both.	
	Rasyid vuelve a hablar con Rombe'.
M: Do they use the compass to make carving like this?	Me refiero a las volutas. Cuando digo *carving like this* señalo con mi índice las volutas de un grabado que hay junto a nosotros. Quiero saber si el artesano toma alguna referencia circular en su trazado. Rasyid se lo pregunta y me responde:
R: *Yes, between ... the ...*	La respuesta es afirmativa, pero sus gestos al acabar la frase me dan a entender que Rombe' no responde lo que yo planteaba. Yo hablo de las volutas del motivo fundamental de un diseño, pero Rasyid, señalando dos puntos de ése diseño mientras pronuncia las palabras *between ... the ...* lo que hace es indicarme una distancia. Me inclino a pensar que la respuesta de Rombe' no se refiere a las volutas, sino a otro aspecto del diseño o de los diseños en general, como al hecho de usar el compás para tomar distancias entre puntos. Parece que al menos uno de ellos (¿com saberlo?) ha interpretado mi pregunta de otra manera. Quizá Rasyid ha entendido *like these* en lugar de *like this* y ha traducido a Rombe' la cuestión en plural y no en singular, por lo que una pregunta sobre un detalle particular se ha convertido en general. También es posible que, pese a la correcta traducción, haya sido Rombe' quien no la ha interpretado como debiera. También puede haber sido culpa mía al hablar a Rasyid de *carving* (interpretando él el grabado entero) en lugar de *motive*. Intervengo para avenirme a la que creo es su interpretación:
M: To take distance. **R**: *Here, distance, and here, in the middle.* **M**: Oh, ya. So, they usually, but ask to him then. Do they usually move one distance to another place with the compass?	
R: *Ya. I think they do it like this. If ... here and they want to make it here, they have to measure again here.* **M**: From here again. **R**: *Ya.* **M**: And this they do it with a compass.	Obsérvese que Rasyid empieza diciendo *I think*. ¿Pero quién es '*I*'? ¿Es Rasyid o es Rombe'? Si es Rombe', ¿por qué Rasyid no ha dicho *He thinks*? Si Rasyid dice *I think*, no será que incluye en la traducción sus propias opiniones? ¿No será que él mismo elabora una explicación para

R: *Ya. They do it with the compass.*	entender lo que Rombe' le explica o lo que yo quiero preguntar? ¿No será esa la explicación del propio Rasyid?
	Rasyid habla con Rombe' de nuevo.
M: What does he say? **R**: *This, he will make a paralel line.*	No sé si la expresión *línea paralela* es de Rasyid o de Rombe'.
M: Oh, ya?	Rombe' dispone de un pequeño trozo de bambú doblado de forma que se adapte a la esquina del panel en el que está trabajando. La pieza está perforada para introducir la punta del lápiz de modo que al deslizar todo el artilugio por la esquinase traza una paralela: 
M: But, this is cut by machine.	Me refiero a que el marco del recinto donde va a tallarse el diseño ha sido cortado a máquina y que como consecuencia de ello presenta una esquina tan perfectamente rectilínea.
R: *It depends. Normally they use traditional caft, but nowadays sometimes people… they use machine to make it faster.. and simple..*	Es Rasyid quien responde, no Rombe'.
M: Ya. Just a moment.	
M: But this, when they want to make a parallel. When they have to make a carving on the wall of a granary, they usually divide the place of the carving in three or four parts. How do they make it?	
	Rasyid se lo pregunta y me dice:
R: *He also do it. I mean, they have to divide into several.* **M**: Ya. How they make to divide?	
	Hablan.
R: *Because there are different. Sometimes there is a ... rectangle ...*	Interpreto que Rasyid se refiere a las formas

square, ya?	rectangulares o cuadradas donde se realizan los grabados.
M: Like this? **R**: *Like a ...*	Señalo de nuevo el que está a nuestro lado. Vuelven a hablar.
R: *He uses this ... and then, after that ...* **M**: Ya. But I mean, if he has to make three parts, how he knows the length of each part?	
R: *Ah. How he knows where to put the ... He said they use also ... here ... like they put here ... and they try here ... and then they ...*	Rasyid comienza a entenderme.
M: But, how do they know if it is here or maybe here or maybe here?	Señalo a Rasyid diferentes puntos del lado horizontal de la tabla destinada al diseño. Si han de dividirlo en tres partes, hay que saber dónde situar los dos puntos que determinan la partición.
R: *Ooooh!*	Por fin Rasyid comprende lo que estoy preguntando e interpela a Rombe'.
R: *He must measure this in total.*	¿Es eso realmente, medir, lo que ha hace Rombe' o lo que haría el propio Rasyid? Continuo:
M: In centimeter? **R**: *Ya ...* **M**: Ask.	Se lo pregunta a Rombe'.
R: *Not really centimeter, but put just like ... an approx ...*	Efectivamente, era Rasyid y no Rombe' quien pensaba la frase anterior: *He must measure this in total*. Él habría medido, no el artesano.
M: Aproximatedly.	Por fin aparece el término *aproximación*.
R: *Ya, aproximatedly. I mean, they measure this first and then, it depends. If they want to make four parts, then they divide it into four parts. So, just like a ... I mean, they measure and then divide into four parts. Ya.*	Rasyid vuelve a usar el término medir (*measure*), pero no se trata exactamente de eso porque la longitud en cuestión no es cuantificada. Consiste en tomar la longitud en un compás o en un listón de bambú para transportarla a otro lugar. No interviene ningún valor numérico.

El mismo Rasyid acaba encontrando una explicación a lo que no comprendía. No me está traduciendo lo que le ha dicho Rombe'. Se está explicando el fenómeno (que quizá sí le ha explicado el artesano) a sí mismo.

Retomo la palabra:

M: They divide a ...
R: *Ya ...*
M: If it is in centimeter, they divide the number in two or in four or three ...
R: *Ya.*

Pienso que eso no se lo ha dicho Rombe' porque al principio de su explicación no aparecían los centímetros. Tal vez Rasyid se lo explica así también a causa del término *divide*, que puede interpretarse como un cálculo a efectuar. Seguramente él busca una explicación que lo satisfaga y que me satisfaga a mi. Con la división numérica parece haberla hallado.

Continuo:

M: But, if it's not centimeter, they take another length. For instance, maybe ... if they take this and, if they have, line like this in three parts, they have to take three, no?
R: *Ya.*
M: You mean this.
R: *Ya.*
M: They make a calculation.

¡Justo lo que pensaba! Eso es lo que haría Rasyid y probablemente lo que habría hecho yo según mi primera interpretación (expuesta en el capítulo anterior), pero nunca he visto que un artesano escribiese número alguno ni que hiciese cálculos.

Rasyid, leyendo mis pensamentos, matiza ahora sus palabras:

R: *Calculation, ya ... But rough calculation, ya? Just ...*
M: Kira-kira?
R: *Kira-kira. Ya. Prekiraan we call it.*
M: Oh.

He dicho *kira-kira* porque Rasyid no sabía cómo decírmelo. Hasta ese momento él desconocía que yo supiese el significado de *kira-kira*. El término *perkiraan* refleja la idea: estimar.

M: Before starting, they make ... division ... Let's say ... like this ... maybe several ... And then they make also like this. But, if they have to make parallel line here. How do they make it? I mean here ...

Ahora quiero saber si Rombe' hace siempre las paralelas como le vi hacerlas antes (Obs. 5.2.2). Acompaño la pregunta señalando las intersecciones de la retícula del diseño junto a nosotros y la paralela al borde del rectángulo que lo encierra.

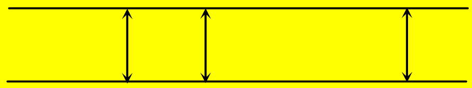
Hablan.

R: *They measure.*
M: What do they measure?
R: *They measure ...*

Hablan, pero yo acabo por insistir en bahasa:

M: Tetapi kalau ini terus dan saya mau satu lagi ini terus juga, dari sini ke sini sama dari sini ke sini, sama dari sini ke sini, sama dari sini ke sini ... Anda bekerja dengan kompas juga?
(Pero si esta ha de ser recta y yo quiero otra recta también aquí, desde aquí hasta aquí ha de ser igual que desde aquí hasta aquí, igual que desde aquí hasta aquí, igual que desde aquí hasta aquí ... ¿Lo trabajas también con el compás?)

Intento hacer comprender a Rombe', aprovechando la retícula, que entre dos paralelas se conserva la distancia. Por eso le indico con mis dedos parejas de puntos homólogos equidistantes:



La cuestión es si usa el compás para realizar la construcción.

Y, en efecto, entre ambos (ahora Rombe' sí que se muestra muy activo en la explicación) me describen el método anteriormente documentado (Obs. 5.2.2).

M: Dimana belajar itu? Di sekolah atau dari orang tua?
(¿Dónde estudiaste esto? ¿En la escuela o de un anciano?)

Rombe' me responde directamente:

– *Dari orang tua.* (De un anciano)

Hablan entre ellos y Rasyid me dice:

R: *Study by living. No school of this.*
M: But did he went to elementary school?

Hablan ...

R: *SD, elementary. He didn't study secondary school.*

SD son las siglas de *Sekolah Dasar*, le escuela elemental en Indonesia.

hablan ...

R: *Ya. It's incredible because he doesn't know how to read and he ...*
M: He doesn't know how to read!

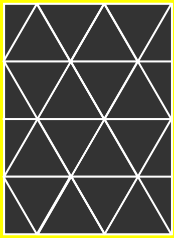
Hablan de nuevo y Rasyid dice:

R: *Because some people don't know how to read, but he can do this!*

¿Cómo es posible? ¡Es increíble! Si Rombe' fue a la escuela elemental, ¿cómo es que no sabe leer?

M: But this is much more difficult!	Diciendo esto expreso al artesano mi admiración. No quiero decir realmente que una cosa sea más difícil que le otra.
R: *Ya. Because just compare to ... former time ... the people of Toraja never been to school, but they already know how to make this. So, they use primitive method.*	Esta observación de Rasyid es extraordinaria. Siendo así, ¿de dónde vino el conocimiento usado por los artesanos toraja? Occidente no puso sus pies en la región hasta los primeros años del siglo XX. Hay casas tradicionales grabadas que tienen más de tres siglos de antigüedad (Schefold, 1988). Yo aprecio la eficacia:
M: Ya. But it works! **R**: *Ya. And it works!* **M**: So, can you ask to him if he thinks that Mathematics is necessary to make this? **M**: I want to know his opinion.	
	Hablan y Rasyid me dice:
R: *He says: I think mathematics is important to make this because people need a lot of measurement. But, ... I think they use also perkiraan, the kira-kira, to make it more simple, to make it not so complicated. I think like in mathematics, is, if you divide something, there is an aprox., no?*	El primer *I think* es de Rombe', pero el segundo y el tercero son de Rasyid. Quiere decir, en el fondo, que se trata de hacer asequible y abordable la tarea en el contexto real y práctico. Continúo:
M: Ya., because you want to make it in the real world you must take it approximatedly. **R**: *Ya. This's wat I mean. So, they also use approximation: perkiraan.* **R**: *Because sometimes depends on the surface of the wood. Maybe sometimes the wood, already, maybe, before start to ... already less, ... tolerance. I think sometimes there is in the machine also tolerance ...0,000... So, in this case perkiraan, no?* **M**: I understand.	

R: *I think you understand.*	
M: And one more question. If I have line like this and I want to make a perpendicular, I mean, same here, same here, ... I mean ... this, straight against this, this like this, how they do it?	
	Cuando digo *straight against this* me refiero a la perpendicular de un segmento *contra* otro. Y como no quiero usar el término perpendicular, cuando digo *this like this* me refiero a que el ángulo a uno y otro lado de la intersección son iguales. Estoy preguntando cómo trazar una perpendicular a un segmento por un punto concreto.
	Hablan ...
R: *He said ...*	
	Me explica el método euclidiano de cómo hacerlo con el compás: uniendo los puntos de intersección de dos arcos de circunferencia trazados desde dos puntos diferentes del segmento, pero equidistantes al punto señalado, un por encima de él y otro por debajo. Se trata del método resumido en la figura 3.4 (véase también el Anexo B: XXVI).
	La explicación la hace Rasyid, pero Rombe' también interviene en ella. Realizan un esbozo del procedimiento en un papel. No me cabe duda de que el artesano sabe como hacerlo.
R: *He said they use ... this. I ever studied when I was in elementary school. When you like to make line practical ... They do it and also I do it.*	Yo dudo mucho que Rombe' use realmente ese método en su trabajo. Cuando le observe trazar líneas en una retícula (observación 2.2) no vi que lo utilizase. Rasyid sí que lo aprendió en la escuela.
	Le digo a Rombe':
M: Bagus. Bagus sekalih. Betul! (Bien, muy bien. ¡Correcto!) Ya. Good.	
M: Can you ask him if he knows some carving in triangle shape, not square? I mean, when they make carving they usually divide like this, in squares or rectangles, but never like this?	
	Indico a Rasyid las retículas de algunos diseños hechos por Rombe' y le hago un esbozo de una retícula construida con triángulos equiláteros:



M: Never in triangles, never?

Me interesa averiguar si Rombe' hace alguna porque eso podría confirmar la existencia de diseños relacionados con isometrías de giro de 60º y/o 120º, algo nunca visto por ahora.

R: *He said: possible sometime he make the carving with this system, but only when square.*

Es de valorar el término *system* usado por Rasyid, aunque quizá no lo dijo Rombe'.

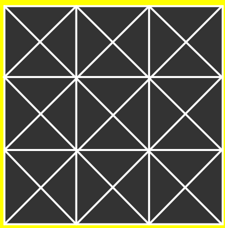
M: Ah, ya.
R: *Square, ya.*
M: And this, they make diagonal.
R: *Ya. Diagonal, ya.*
M: Like this, no?
R: *Ya.*
M: Ini, no? (Aquí, no?)
This gives the center of the square. Ini di tengah. (Aquí en medio).

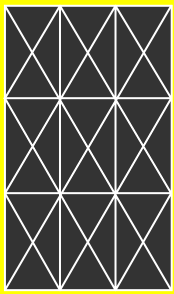
¿Qué significa *square*? ¿Se refiere a la forma cuadrada o rectangular del recinto en el que se construye la retícula?

Señalo en un diseño con retícula cuadrada (retícula) la intersección de las diagonales de uno de sus módulos.

R: *But only when square. But if rectangle, not possible.*
M: Ya.

No es eso a lo que yo me refería. ¿Qué significa que si es rectángulo no es posible? La retícula puede hacerse en ambos casos:





¿Se refiere Rombe' a que en el segundo caso los triángulos no serán todos iguales? El centro del rectángulo también viene determinado por sus diagonales.

Análisis e interpretación

Rasyid hace de intérprete, pero como sucedía con Martheen introduce demasiados pensamientos propios en sus traducciones. A veces es difícil saber si es él o Rombe’ el autor de los pensamientos que expresa. En algunas ocasiones me queda más claro gracias a mis escasos conocimientos de indonesio.

A eso hay que añadir algunas dificultades de interpretación relacionadas con el inglés. El término 'divide' puede haber sido malinterpretado. Además de 'seccionar' puede entenderse como el cálculo de una división entre dos números. De ahí que Rasyid acabe por interpretar su propia versión del fenómeno en lugar de traducirme los pensamientos de Rombe’.

Los artesanos no miden (no cuantifican longitudes en base a una unidad de medida) ni calculan explícitamente. El listón de bambú y el compás les permiten comparar y tomar longitudes, saber si una longitud medida es mayor, menor o igual que otra, pero no delegan esa comparación en un sistema numérico. Su geometría es sintética. En este aspecto resta por ver qué sucede con el método Kira-kira. Si ahí las cosas ocurriesen según nuestra última interpretación estaríamos ante un método que establece una proporción cuantificada. Quizá no sepamos cuántas unidades de longitud tiene un segmento, pero sí si es la mitad, el tercio o la cuarta parte de otro. Todo dependerá de cómo se corrija el error en las estimaciones Kira-kira.

Por el momento los artesanos no calculan explícitamente. Resuelven problemas que nosotros diríamos de cuantificación mediante aproximaciones sucesivas que eluden el planteamiento en términos simbólicos, sin escritura.

La observación de Rasyid con respecto a la educación de Rombe' es extraordinaria y atañe al corazón de este trabajo: *Because just compare to ... former time ... the people of Toraja never been to school, but they already know how to make this. So, they use primitive method.* El hecho es que parecen convivir diferentes tipos de técnicas. Por una parte Rombe’ conoce el procedimiento euclidiano para trazar una perpendicular a un segmento (Euclides, libro I, props. 1 y 11), pero en su práctica cotidiana usa el método Kira-kira. Antes de que los holandeses llegasen a la región en 1905 y de que instaurasen su sistema de escolarización, ¿qué métodos se usaban para grabar las casas y graneros tradicionales? ¿Fueron esas técnicas euclidianas desarrolladas en Tana Toraja antes de la llegada de los colonizadores occidentales? ¿O vinieron con ellos desde Europa y pasaron a formar parte de la educación académica? De ser así, ¿cómo es que los artesanos lo aprendieron de ancianos y no en la escuela? Estas son cuestiones para la Antropología.

La retícula triangular que Rombe’ declara sólo aplicable a cuadrados, como es el caso del *Pa’ Bulingtong* tallado por Yobel (Ilustración 25, láminas al final del Cap. 5), no es que no sea posible de hacer en rectángulos, sino que, de hecho, se hace, como lo prueba la ilustración 6 (láminas al final de este capítulo). En éste diseño se aprecia el trazo de las diagonales de los seis rectángulos. Interpreto pues que la ‘imposibilidad’ manifestada por Rombe’ no hace referencia a la geometría, sino a que o bien él hace diseños como el anterior de otro modo o que en el caso rectangular los triángulos no serían todos iguales.

Sea como sea, parece bastante segura la inexistencia de diseños basados en triangulaciones que no procedan del trazo de las diagonales del cuadrado o rectángulo. En ningún momento se le ocurrió a Rombe’ explicarme cómo construir (euclidianamente o no) un triángulo equilátero. Al no trazzarse semejantes triángulos en los grabados, no existen diseños con simetría de giro de 60º o 120º.

El papel jugado por los intérpretes induce dudas y confusión. Difícilmente se ciñen a la traducción objetiva. Rasyid se ha mostrado menos cohibido con Rombe’ de lo que pareció ante Sampe Pamunu’. Rombe’ y Rasyid son más o menos de la misma edad y mostraron más camaradería pese a que aquel es cristiano. Tal vez sean también de clase social similar. Sampe Pamunu’ tenia edad como para ser su padre y una actitud menos simpática.

Durante la interpelación no me ha parecido observar ningún problema de comprensión por parte de Rombe’ con relación al lenguaje geométrico utilizado. De la conversación no puedo sacar un glosario de términos en toraja, pero está claro que el artesano se mueve en una mar de conceptos geométricos entre los que figuran el paralelismo y la perpendicularidad, la circunferencia, rectángulos, cuadrados, triángulos, diagonales, etc.

Dadas las dificultades que plantean los intérpretes y que mis conocimientos de bahasa indonesio han aumentado, de ahora en adelante realizaré mis interpelaciones en bahasa indonesio y sin intérprete.

6.3.6 Yobel (01)

Interpelado:	Yobel, de Kampung Tambunan, Sangalla.
Lugar:	To’ Marurung.
fecha:	25.01.2000
Intérprete:	Nadie (bahasa indonesi)
Imágenes:	No
Apuntes:	Anexo B: XXXVI

Hoy muestro a Yobel dos dibujos míos con volutas similares al *Pa’ Tangke Lumu’*, pero modificados de tal forma que presentan simetría de giro (Anexo B: XXXVI). Uno posee grupo de simetría *p3*, invariante a giros de 120º. El grupo de simetría del otro es *p6*, invariante a giros de 60º. He trazado ambos sobre retículas de triángulos equiláteros más o menos perfectos. Pregunto a Yobel si existe algún grabado toraja parecido a ellos. Su respuesta es negativa.

Análisis e interpretación

Yobel confirma la inexistencia de diseños con simetrías de giro de 60º o 120º, algo ya intuido tras recorrer incontables localidades de la región. Esto significa que entre los grabados toraja sólo cabe esperar hallar 12 de los 17 grupos de isometría posibles en diseños bidimensionales.

6.3.7 Yobel (02)

Interpelado:	Yobel, de Kampung Tambunan, Sangalla.
Lugar:	To’ Marurung.
Fecha:	12.08.2003
Intérprete:	Nadie (bahasa indonesio)
Imágenes:	Ilustraciones 8 y 9
Apuntes:	Anexo B: XLI

Quiero averiguar si Yobel talla las volutas con propósito de auto paralelismo. Pero no se lo voy a plantear directamente así, sino que me basaré en una idea equivalente como es la de que el ancho de la franja que determinan sea constante. Y puesto que desconozco los términos ‘ancho’ y ‘grosor’ en indonesio lo que hago es seguir con el pulgar y el índice una voluta ya tallada por él de un diseño. Eso sí, manteniendo la distancia entre las puntas de ambos dedos para indicarle el grosor. Como tomo parte activa en la interpelación no puedo tomar apuntes directamente. Mientras recorro la voluta, le pregunto: *Itu, sama?* (Eso, ¿igual?)

Me responde afirmativamente y me lo demuestra tallando las volutas del *Pa' Tangke Lumu' di Supik* (Ilustración 8). Al hacerlo, además de ver el propósito de paralelismo, observo que Yobel, habiendo tallado un pequeño fragmento de una de las dos volutas que parten del mismo *mata* (ojo), la abandona para tallar una parte de la otra sirviéndose de la abandonada como referente. Y así, ambas curvas se crean una a otra, siendo una la versión girada 180º de la otra. Las dos trazadas con propósito de paralelismo, dejando una franja entre ellas de grosor constante, y, por tanto, paralelas a sí mismas, auto paralelas.

Cuando inicia la talla de otro diseño (Ilustración 9), en el que las volutas han de hacerse muy pegadas, a distancia nula, le pregunto si tiene algún nombre para referirse a eso. Para entendernos le dibujo en un papel dos pares de curvas para que las observe y pueda comprender de lo que le estoy hablando (Fig. 6.6).

Figura 6.6

Su respuesta es negativa.

<u>Análisis e interpretación</u>

Las volutas se tallan con el propósito de paralelismo, aunque Yobel no tiene término para referirse a esa propiedad geométrica. Ni ha pronunciado una palabra en toraja (aunque yo no la hubiese comprendido) ni ha compuesto una expresión en indonesio similar a ‘misma distancia’ o nada parecido. Labrando las curvas que me ha puesto de ejemplo me ha mostrado además que ese grosor, la distancia entre volutas paralelas, puede ser nulo.

Que yo no hable toraja y Yobel no hable inglés no ha impedido la comunicación. Nos hemos entendido. Mi indonesio es básico, pero no muy diferente del suyo. Su lengua materna es el toraja y en ella se comunica diariamente. El poco indonesio que conoce, como la mayoría de la gente de la región, lo aprendió en la escuela elemental. Así que nuestro nivel de indonesio es muy similar y a la hora de expresarnos hemos de buscar expresiones sinónimas sencillas. Gracias a eso nos hemos entendido.

6.3.8 Yobel (03)

Interpelado:	Yobel, de Kampung Tambunan, Sangalla.
Lugar:	To’ Marurung.
fecha:	10.08.2003
Intérprete:	Nadie (bahasa indonesio)
Imágenes:	Ilustración 10
Apuntes:	Anexo B: XXXVII

En una visita a la localidad de Randan Batu acompañado de Yobel éste me muestra un tongkonan tallado por él. Yobel nombra cada diseño mientras me los señala con el dedo. Tomo nota de los situados en las fachadas Este y Oeste de la construcción (Anexo B: XXXVII).

El diseño que el llama *Pa' Bulingtong di Kampassu* (Ilustración 10) yo lo habría emparentado con otro llamado *Pa' Sule Tang* (Ilustración 21, al final del Cap. 1) y así se lo indico. Pero Yobel niega esa relación e insiste en su asociación. Incluso apunta con su índice partes concretas del diseño que determinan sus semejanzas con el *Pa' Bulingtong* (Ilustración 20, al final del Cap. 1) y con las que no estoy muy de acuerdo.

Análisis e interpretación

El grupo de isometría del *Pa' Bulingtong di Kampassu* es *pg*. Si el *Pa' Sule Tang* se extendiese, su grupo de simetría sería *cm*. De la interpelación a Yobel podemos sacar tres conclusiones importantes. La primera, que el investigador ha caído en su propia trampa al no relacionar grabados en base a su simetría, sino en base a la figuración. La segunda, que la relación entre grabados para la gente local no es la misma que para el investigador occidental. Y tercera, que los nombres de los grabados no reflejan su simetría. Esto invalida definitivamente la *Interpretación isométrica de los grabados* desarrollada por el investigador en el capítulo 4. Se trata de una proyección matemática plausible y posible que, sin embargo, permite clasificar los grabados y plantear cuestiones muy relevantes con relación a la cognición geométrica de quienes los realizan.

Tras mi visita con Yobel a la localidad de Randan Batu, en el distrito de Sangalla', le pregunté a Rasyid por el significado del término usado por el artesano para describir el diseño mencionado: *di kampassu*. Rasyid no conocía el significado. El término tampoco aparece así en el diccionario de Tammu y Van der Veen. El que sí aparece es *Kampa*, el significado del cual es extensión, ampliación. Uno puede ver en el *Pa' Bulingtong di Kampassu* una ampliación del *Pa' Bulingtong*, aunque más que una verdadera ampliación, de lo que se trata en realidad es de una versión más detallada del *Pa' Bulingtong*. A mi modo de ver el término tiene se relaciona con el compás, ya que para elaborar los círculos del diseño se necesita ese artefacto. Recordemos que Seber llamó *Pa' bulu londong di kampassu'* a la versión ampliada del *Pa' bulu londong* y que dicha ampliación consistía en la incorporación de varios semicírculos para los que se requería la participación del compás (Obs. 5.2.7). En cualquier caso, la nomenclatura no alude a la isometría. La *Interpretación isométrica de los grabados* no se corresponde con la realidad.

6.4 REPLANTEAMIENTO: INTERPELACIONES ACTIVAS

La experiencia es un grado sólo alcanzable por sí misma. En las interpelaciones precedentes el investigador no siempre controló la situación. Más a menudo de lo deseado artesanos e intérpretes le llevaron por donde no deseaba. A consecuencia de ello y como mis conocimientos de bahasa indonesio habían mejorado decidí prescindir de intérpretes y hablar directamente con los artesanos. También me propuse concretar más las interpelaciones en dos sentidos. Por una parte, prepararía con más rigor las observaciones e interpelaciones centrándolas en la búsqueda de respuestas a tres cuestiones concretas:

(1) Volutas. Aparte de segmentos y circunferencias ésas son las curvas más frecuentes en los grabados. Los segmentos se trazan con listones de bambú, las circunferencias con compases. Las volutas no se trazan con artefacto alguno, pero el artesano toma la referencia del paralelismo en su trazado. ¿Existe alguna otra referencia a considerar? ¿Por qué la voluta tiene ojo y la circunferencia no?

(2) Método Kira-kira. Hay que averiguar cómo corrige el artesano sus estimaciones al buscar el punto medio, tercio, o el que sea de un segmento. Puesto que los grabados se hacen con retícula y que lo fundamental de su construcción es la división de un segmento en partes iguales, ésta es sin duda una cuestión capital de la investigación.

(3) Perpendicularidad de las retículas sesgadas. Las retículas más finas y sesgadas de algunos diseños están formadas por un par de haces de rectas paralelas, cada haz perpendicular o casi perpendicular al otro. Su paralelismo proviene del grosor del listón de bambú con el que se han trazado, pero desconocemos aún de dónde procede su estricta ortogonalidad cuando la poseen. ¿Obedece el artesano alguna pauta que no sea la de su capacidad visual?

Por otra parte, me mantendré más firme durante las interpelaciones y jugaré un papel más activo en ellas, implicándome en la situación abordada. Eso hará que algunas de las interpelaciones a plantear sean distintas de las realizadas hasta ahora.

A esas nuevas interpelaciones que se van a llevar a cabo las llamaremos *interpelaciones activas* y son fruto de ese replanteamiento (Tabla 6.1, más adelante). En ellas aparecen nuevos interpelados, aunque hay que aclarar un detalle. Cuando a finales de 2004 regresé a la región, busqué al artesano Yobel en el taller de To’ Marurung donde solía trabajar. Quienes encontré allí aseguraron no conocer a nadie llamado así. Mi decepción fue enorme porque tampoco había podido localizar otros artesanos con los que había hablado antes. Había visitado ya varias veces el taller de Kampung Barana’ donde encontré a Leo por primera vez, pero permanecía cerrado a cal y canto. No parecía desarrollarse en él actividad alguna. El taller-serrería de Martheen Madoi, en Rantepao, estaba vacío, no había ningún tongkonan ni alang-alang en construcción. El taller junto a To Marurung donde estuve con Rombe’ y Seber varias veces había sido desmantelado. Ahora me daba cuenta de que había dos tipos de talleres. Unos eran fijos. A ellos llevaban o en ellos se construían las casas y graneros y acudían los artesanos a trabajar. Otros eran improvisados. Tras construirse la casa o granero en uno de los anteriores los habían trasladado junto a su ubicación definitiva y era allí donde el artesano hacía su trabajo.

Puesto que el taller de Leo seguía cerrado y el de Rombe’ y Seber habían desaparecido, insistí en buscar a Yobel. A estas alturas no podía empezar de nuevo presentándome a otros artesanos desconocidos y reiniciar un proceso de acercamiento que me habría llevado muchísimo más tiempo del que disponía. ¿Cómo iba a presentarme a un desconocido y preguntarle: *Oye, ¿cómo corriges la estimación del método Kira-kira*?

Volví a To’ Marurung y pregunté otra vez por Yobel. Nadie le conocía, pero cuando se lo describí alguien pronunció otro nombre: Salle. Me dijeron que no estaba, que trabajaba en Makale. Más tarde sabría que Yobel no era siquiera su nombre de pila y que Salle era el nombre familiar con el que sus amigos le conocían. Por tanto, Salle es Yobel. Cuando fui a Kampung Tambunan tampoco me resultó fácil encontrarle. Ese pueblo diminuto no aparece en ningún mapa. Por fin, un artesano dijo conocerle: Rois. Me dijo que Salle y él eran hermanastros y que habían aprendido a tallar de su abuelo paterno. Efectivamente, Salle estaba trabajando en Makale y no regresaría en varios días, pero como Rois me dijo que Salle le había hablado de mí aproveché la confianza que eso me daba para plantearle algunas cuestiones. Decidí que con Rois indagaría en las volutas y las retículas sesgadas y dejaría las cuestiones del método Kira-kira para Salle[1] (ex-Yobel). Pero eso será más tarde. Ahora retrocedemos un poco en el tiempo hasta situarnos en el verano de 2003, cuando Yobel era todavía Yobel.

6.4.1 Yobel

Interpelado:	Yobel
Lugar:	To’ Marurung
Fecha:	12.08.2003
Intérprete:	Nadie (bahasa indonesio)
Imágenes:	Ilustración 11
Apuntes:	Anexo B: XXXVIII-XLI

[1] Usaré el nombre de Salle para referirme a Yobel a partir del Apdo. 6.4.3.

Yobel trabaja en la fachada norte de un granero en la que quedan todavía recintos negros vírgenes de tallas y de retículas. Voy a utilizar uno de ellos para plantear a Yobel la cuestión primordial del método Kira-kira relacionado con la división de un segmento en dos partes iguales.

Tomo un listón de bambú de los usados por Yobel y sus ayudantes y lo pongo horizontal (de color blanco en las figuras siguientes) sobre el recinto (Fig. 6.7).

Figura 6.7

Lo sostengo así con la mano izquierda mientras le pido a Yobel el lápiz que tiene entre sus dedos e inicio la siguiente interpelación (Y: Yobel; M: investigador).

M: *Kalau saya mau tulis di tengah tempatnya, dimana?* (Si yo quiero escribir en medio de este recinto, ¿dónde lo hago?)
Y: *Kira-kira*. (Aproximadamente)
M: *Ya, kira-kira. Di situ?* (Claro, aproximadamente. ¿Aquí?)

Hago una marca en el panel negro y luego trazo su homóloga en el listón. La marca del panel debería dividir su anchura en dos partes, pero realizo mi estimación intencionadamente mal exagerando el error (Fig. 6.8) para poder formular la pregunta que me interesa.

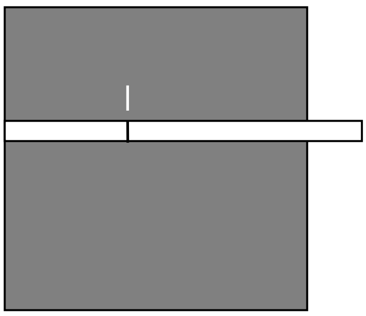


Figura 6.8

M: *Sekarang, bambú di sini.* (Ahora, el bambú hacia aquí).

Deslizo el listón hacia la derecha hasta que su extremo izquierdo coincide con la marca del panel (Fig. 6.9):

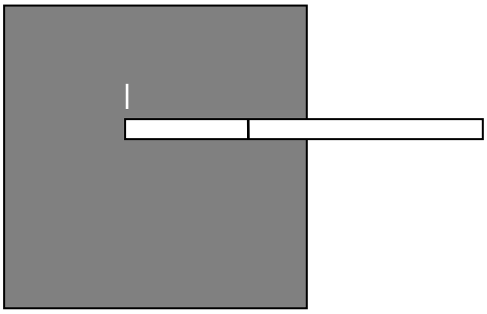


Figura 6.9

Y: *Ya!* (Sí!).
M: *Kalau tulis di bambu sama-sama ini, betul!* (Si lo escrito en el bambú igual que aquí –le señalo el borde del panel–, ¡correcto!).
Y: *Ya!* (Sí!).

Todo eso ya lo sabía, pero ahora llegamos al punto crucial.

M: *Kalau tidak sama?* (¿Y si no coincide?)
Y: *Kalau tidak, tulis kira-kira sedikit lagi.* (Si no, escribe aproximadamente una poco más).
M: *Ya. Tetapi, dimana?* (Sí. Però, ¿dónde?)
Y: *Sedikit. Di sini.* (Una poco. Aquí).

Yobel me coge el lápiz de la mano y hace una marca un poco más a la derecha de la que hay en el bambú (Fig. 6.10), pero no justo en medio del defecto como yo esperaba:

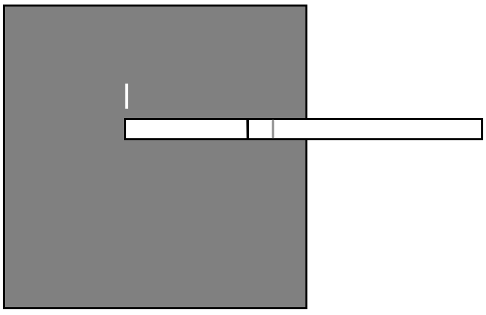


Figura 6.10

Y: *Sekarang, kembali lagi.* (Ahora, volvemos a empezar otra vez).

Devuelvo el listón a su posición inicial y Yobel hace en el panel una señal homóloga a la última practicada en el lístón (Fig. 6.11):

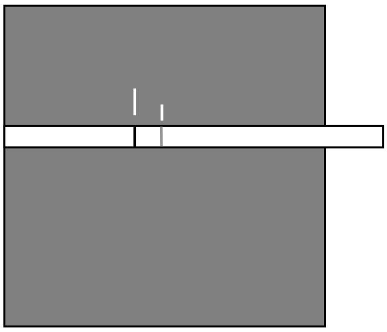


Figura 6.11

Luego deslizo el listón hacia la derecha hasta que su extremo izquierdo coincide con la segunda marca del panel (Fig. 6.12):

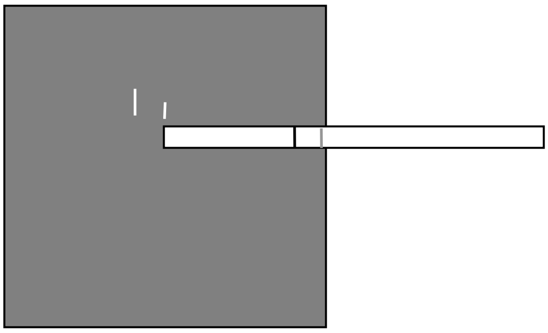


Figura 6.12

La comprobación muestra que la aproximación no ha sido suficientemente buena, pero él me dice que ya la daría como correcta. (Téngase en cuanta que el error mostrado en las figuras incluidas aquí no se corresponde con la realidad, no son representaciones a escala de lo que hicimos entonces. Un eror de un par de milímetros no importa demasiado a nivel práctico). Sin que se lo pregunte, Yobel dice:

Y: *Kalau mau empat atau tiga, sama-sama juga.* (Si quieres cuatro o tres, también lo mismo.)
M: *Di kira-kira?* (¿Mediante kira-kira?)
Y: *Ya!* (Sí!)

Ahora él toma las herramientas y divide aproximadamente en dos partes la primera de las mitades anteriores (Fig. 6.13):

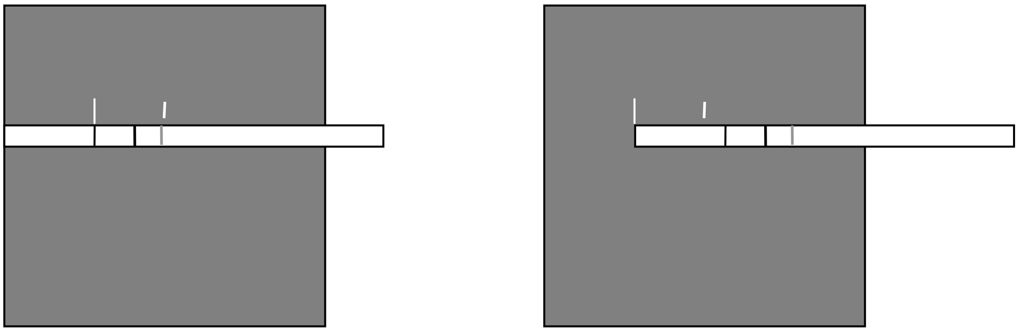


Figura 6.13

Justo antes de que haga la marca para corregir el exceso de su estimación, pregunto:

M: *Tulis dimana?* (¿Dónde escribes?)
Y: *Sedikit kurang.* (Un poco menos.)
M: *Ya. Tetapi dimana?* (Sí. Però, ¿dónde?)
M: *Di sini?* (¿Aquí? –y pongo mi uña en un punto del listón)
M: *Atau di sini?* (¿O aquí? – y pongo la uña en otro lugar)
M: *Atau dimana?* (¿Dónde sino?)

Me da la impresión de que Yobel piensa que soy imbécil al no darme cuenta de dónde tiene que hacerse la marca. Tal vez por eso acaba gritando:

Y: *Di tengah!* (¡En medio!)
M: Di tengah dimana? (¿En medio de dónde?)

Sin duda debe estar convencido de que soy idiota.

Y: *Di tengah di situ!* (¡En medio de ahí!)

Yobel me indica la marca [a] del panel y la marca [b] del listón (Fig. 6.14):

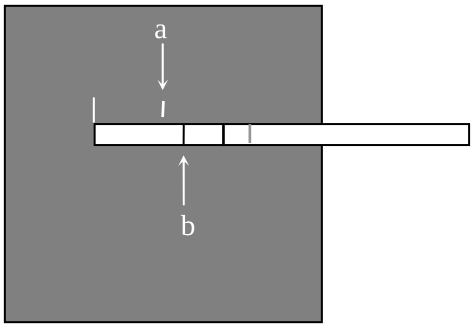


Figura 6.14

M: *Di tengah di sini dan di sini?* (¿En medio de aquí –y le señalo el punto a_1 del panel– y de aquí? –y le señalo el punto b del listón–)
Y: *Ya!* (Sí!)

Le invito a que él mismo haga la marca. La traza en el listón, justo en medio [a] y [b] (Ilustración 11). La comprobación posterior corrobora que ése punto es el correcto.

Análisis e interpretación

El éxito de la división del segmento en dos partes iguales se logra con un par de iteraciones del método Kira-kira. De entrada, parece confirmarse que la corrección de la estimación se efectúa buscando el punto medio del error cometido. ¿Podemos concluir que eso valida la *Interpretación del método Kira-kira*? Nos asaltan algunas dudas todavía. Cierto es que Yobel acabó gritándome *¡Di tengah!* (¡En medio!), pero ¿significa esto que Yobel tenía el propósito de escoger el punto medio del exceso o defecto de su estimación? Evidentemente, en el desarrollo de esa experiencia conjunta entre artesano e investigador, y sin que éste se lo dijese, Yobel ha expresado por sí mismo cuál era la mejor referencia para optimizar su estimación: el punto medio del error cometido. Pero, ¿cómo asegurar que ya la tenía antes en su cabeza y no se le ha ocurrido mientras el investigador se lo planteaba?

Por otra parte, la experiencia sólo alude al caso de la división en dos partes, ¿qué hay de la división en tres? La división en cuatro partes es muy significativa porque en lugar de buscar el cuarto del error, lo que ha hecho el artesano es dividir en dos la mitad anterior. Es decir, en lugar de L/4, lo que ha hecho ha sido (L/2)/2. Esto nos da un algoritmo recurrente para la división en N partes iguales cuando N es potencia de dos.

Pongámonos en el pero de los casos y supongamos que el artesano se dio cuenta de que tenía que buscar la mitad del durante esa experiencia. Eso demostraría que en determinados contextos un ligero empujón, tan sólo una invitación a la reflexión sobre lo que uno hace de forma mecánica, resulta muy útil y necesario (a veces imprescindible) para favorecer el desarrollo de procesos cognoscitivos: Recordemos a Vygotsky: la diferencia entre lo que uno puede hacer solo y lo que es capaz de hacer acompañado pone de manifiesto la importancia de la interacción social en los procesos de aprendizaje, aspecto crucial del constructivismo social y de la ZDP de Vygotsky (1978).

Aún poniéndonos en el mejor de los casos y dando por validada nuestra interpretación del método Kira-kira, hay que indagar más en él por loo que se refiere a particiones que no sean potencias de dos. Tal vez entonces podamos despejar las dudas de si el artesano pensaba las cosas así antes de su encuentro con el investigador.

6.4.2 Rois

Interpelado:	Rois (32 años, artesano casi retirado)
Lugar :	Kampung Tambunan (distrito de Sangalla)
Fecha:	30.12.2004
Intérprete:	Nadie (bahasa indonesio)
Imágenes:	Ilustración 12
Apuntes:	Anexo B: XLIII-XLIV

Buscando a Yobel en Kampung Tambunan me encuentré con Rois, de quien ya dije que era hermanastro de Salle (Yobel). Rois es también artesano experimentado que está dejando ya el oficio. Quiero preguntarle sobre varias cuestiones. Para empezar deseo saber si los *mata* de un diseño deben trazarse como me parece, o sea, siguiendo la dirección de la bisectriz de los vértices de la retícula. Para ello dibujo a Rois cuatro *mata* distintos (Fig. 6.15) y le pregunto que me señale los que considere trazados correctamente:

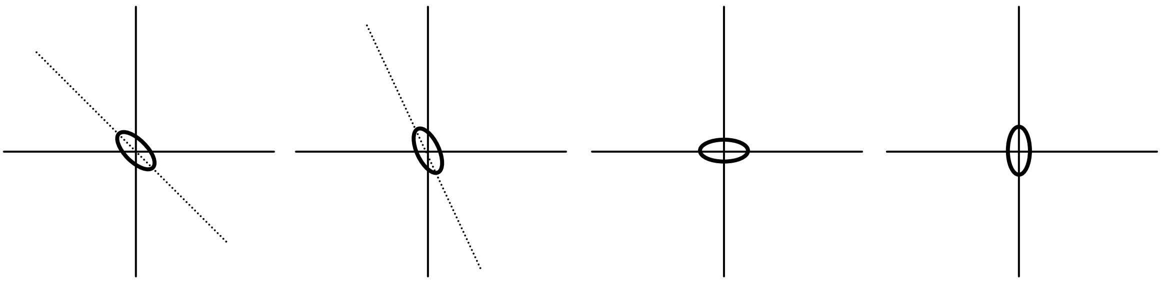


Figura 6.15

Rois sólo señala uno de los cuatro, el situado más a la izquierda (véase el Anexo B: XLIII). Quiero saber también si, como aventuré tras contemplar la obra-acabada y observar la talla de volutas en la obra-en-curso, la voluta debe iniciar su recorrido con una dirección ortogonal a la del *mata*. Para ello dibujo ahora tres inicios de voluta distintos (Fig. 6.16) y le pido a Rois que me señale los que considere correctos:

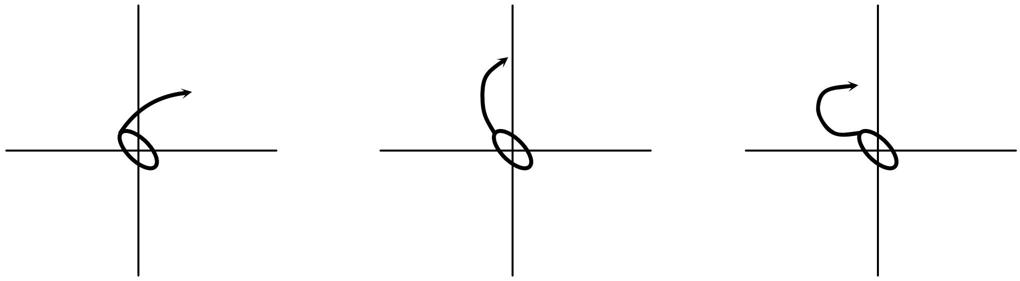


Figura 6.16

De las tres posibilidades, Rois señala las dos de la izquierda. Le pregunto después por las finas retículas sesgadas presentes en muchos diseños, como el *Pa' Sekong*. Recordando cómo la trazó Seber en el recinto con forma de paralelogramo en la parte superior de la fachada sur de un granero (Obs. 5.2.10) deseo averiguar si lo correcto es hacerla ortogonal y, en tal caso, cómo la construiría Rois.

Para ello trazo dos retículas finas a mano alzada, con una evidentemente mucho más ortogonal que la otra (Anexo B: XLIV) y le pregunto si alguna de ellas es la correcta. La que es ortogonal la califica como *betul* (correcto); la que no es ortogonal, la califica de *salah* (equivocado). Al preguntarle por la forma de trazarla él mismo esboza unas líneaas auxiliares en el paralelogramo que he trazado en el papel al mismo tiempo que pronuncia unas palabras:

-*Silang. Di kasih lurus*.

Yo las anoto junto a la figura. Su significado es: 'En cruz. Dale recto'. La figura resultante (Fig. 6.17, Anexo B: XLIV) es una versión imprecisa de la que reproduzco aquí:

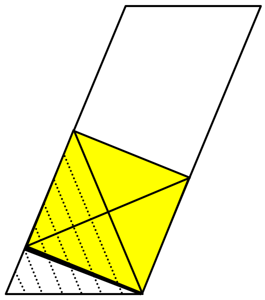


Figura 6.17

Por la figura y por sus palabras interpreto que desde la esquina inferior derecha del paralelogramo hay que trazar un segmento que intercepte el otro lado inclinado con ángulo recto. Por la figura formada por las líneas auxiliares interpreto que de lo que se trata es de inscribir un cuadrado en el paralelogramo. Sus diagonales ortogonales determinarían las direcciones de los dos haces de paralelas de la retícula. La conversación se ve interrumpida porque Rois debe atender a su mujer e hijos.

Cuando regresa le pregunto si cuando su abuelo le enseño a tallar (hace un rato él mismo me lo ha comunicado) le escribía nada. Rois responde negativamente. Me pone como ejemplo que su abuelo le enseñó a el *Pa' Kapu Baka* (véase su esquema geométrico en la ilustración 34, Cap. 5) y que al trazar su retícula (no es Rois quien usa ese término, sino yo) las diagonales del cuadrado – que él llama *silang* –, determinan las mitades de los lados y así sucesivamente.

También me informa de que fue su abuelo quien le enseñó el método *Kira-kira*. Le pregunto qué sucede si el listón de bambú no llega a cubrir la mitad del segmento a dividir en dos partes. Su respuesta es:

– *Kalau pendek, tidak bisa. Tidak bagus!*
(‘Si es corto, no se puede. ¡No vale!’)

A la pregunta de si utiliza el método Kira-kira para dividir un ángulo – por ejemplo un cuarto de círculo –, en partes iguales, responde negativamente (Anexo B: XLIV). En el círculo no utiliza el método como en los segmentos, sino que lo hace ‘a ojo’, aproximadamente, dividiendo el ángulo desde el centro.

Sobre las figuras del diseño *Pa' Erong* Rois me dice que unas miran al este y otras al Oeste y establece el sentido según las correspondientes fachadas del granero.

<u>Análisis e interpretación</u>

Rois confirma que el ojo de la voluta apunta la dirección de la bisectriz del vértice de la retícula. Es decir, la mitad del ángulo recto (45º). Se traza por estimación visual. La curva de la voluta se inicia pariendo del ojo según ésa dirección, la de la bisectriz, o bien perpendicularmente a ella. Esto confirma el arranque de la curva de la *Interpretación paso a paso para la talla de las volutas*.

Por lo que respecta a la construcción de la retícula sesgada, queda claro el propósito de perpendicularidad. De las palabras de Rois se aventura que dicha ortogonalidad es la de las diagonales del cuadrado inscrito entre las paralelas inclinadas del paralelogramo. Pero ese detalle deberá ser confirmado. Por ahora sólo está confirmado el propósito, no la explicación.

La educación de Rois tampoco fue académica, sino que fue instruido en el oficio por su abuelo, el mismo maestro que tuvo Salle (Yobel). Ese aprendizaje se llevó a cabo sin expresiones escritas ni simbología alguna.

Las intersecciones de las sucesivas diagonales y mediatrices trazadas en un cuadrado (el recinto para el diseño *Pa' kapu baka*) proporcionan puntos que dividen en mitades, cuartos, octavos, …, 2^N partes los lados del cuadrado. Es decir, los cortes de las diagonales señalan por donde deben pasar las mediatrices, éstas el camino de las nuevas diagonales, y así sucesivamente.

Rois confirma que la perspectiva cultural afecta el modo en que se aprecia la forma y organización figurativa de un diseño. Igual que Medi (Obs. 5.2.13) relaciona las figuras del *Pa' erong* según su simetría de reflexión deslizante y no con respecto a su simetría de giro de 180º.

6.4.3 Salle (01)

La siguiente observación fue planteada para validar de manera procedimental la interpretación del método Kira-kira. Se trataba de ver con más cuidado y de grabar en video, para disponer así de una prueba documental, la aplicación del procedimiento a la hora de dividir un segmento en partes iguales.

Para ello encargué a salle la talla de otra tabla con muchos diseños, pero diciéndole esta vez que no empezase el traabajo mientras yo no estuviese presente y que filmaría el proceso. Estuvo de acuerdo.

Artesano:	Salle (ex Yobel)
Lugar:	Kampung Tambunan (Randan Batu, distrito de Sanggalla)
Fecha:	02.01.2005
Intérprete:	Nadie (bahasa indonesio)
Imágenes:	Ilustración 13
Grabación:	Anexo D: DVD (Ukiran Toraja: Yobel 2ª talla)

Me interesaba sobre todo ell inicio de la tarea para poder observar cómo distribuía los recintos para los grabados. La talla tendría 18 grabados distribuidos en tres filas y seis columnas (3x6). Todo el proceso, desde la preparación de las herramientas hasta la completa realización de los dos primeros diseños está grabado en vídeo-DVD (Anexo F: Ukiran Toraja: Yobel 2ª talla).

A mi llegada salle ya ha pintado de negro la tabla, pero antes de empezar afila la gubia de canal angular. Luego busca un listón de bambú para usarlo como regla. En la filmación no se aprecia, pero veo que Salle busca uno bastante largo, desestimando otros más cortos. La película muestra como salle (S) perfila con navaja los bordes del listón. Mientras lo hace, yo (M) le pregunto:

M: *Ini, kurang kurang sampai dimana?* (Aquí, ¿hasta dónde le quitas?)
S: *Ini... Kira-kira ini.* (Aquí ... aproximadamente.)
M: *Kira-kira.* (Aproximadamente).
S: *Ya. Panjang.* (Sí. Largo)
M: *Ini. Kalau ini, yang terus.* (Aquí. Aquí ha de ser recto.)

Me refiero a que al mirarme el listón desde un extremo (y así lo enfoco con la cámara) ha de verse rectilíneo.

S: *Ya!* (Sí!)
M: *Ya!* (Sí!)
S: *Mistar.*

No me entero de lo que ha dicho.

M: *Kira-kira.*(Aproximadamente).
S: *Mistar ini.* (Esto es una regla.)
M: *Apa itu?* (¿Qué es eso?)
S: *Mistar!* (¡Regla!)
M: *Mistar?* (¿Regla?)
S: *Ya!* (Sí!)
M: *Ya!* (Sí!)

Enfoco el listón desde su extremo para comprobar su rectitud.

Después, Salle precisa el espacio rectangular de la tabla trazando los cuatro márgenes. Su grosor es el del listón (Fig. 6.18).

Figura 6.18

Lo hace sobre el panel inclinado, apoyado en un travesaño del tecdhado q1ue hay junto a la casa. Pero antes de comenzar la faena, la pone vertical y la clava bien sujeta. Mientras lo hace yo le hago alguna observación:

***M**:* *Apa lebih bagus?* (¿Es mejor así?)

Me refiero a si es mejor trabajar con la madera de pie que tumbada como estaba antes.

***S**:* *Apa?* (¿Qué?)
***M**:* *Kerja di sini.* (Trabajas así.)
***S**:* *Ya! (Sí!)*
***M**:* *Di sini, tidak bagus?* (¿Así, no va bien?)

Mientras pronuncio la palabra 'así' de mi pregunta muevo la mano en un plano horizontal para indicarle que la cuestión hace referencia a si trabajar en horizontal no va bien. Por desgracia, y puesto que soy yo mismo el que, con la otra mano, toma las imágenes, mi gesto no aparece en pantalla. Pero él sí que lo ve:

***S**:* *Ya. Susa itu.* (Sí. Asá es difícil.)

salle se refiere al plano horizontal que le he señalado.

***M**:* *Susa?* (¿Difícil?)
***S**:* *Ya.* (Sí.)
***M**:* *Mengapa susa?* (¿Por qué es difícil?)
***S**:* *Ke anu itu.*(Para eso.)

No sabe qué decirme o cómo explicarse. De hecho, el término 'susa' que él ha utilizado podría traducirse como 'incómodo'.

***S**:* *Kalau begini ... ah!* (En cambio así ... ¡bien!)
***M**:* *Begini?* (¿Así?)

S: *Ya!* (Sí!)

M: *OK!* (¡De acuerdo!)

A continuación, Salle coge el listón de bambú y se toma unos instantes de reflexión ante la tabla. Después, pone el listón horizontal ajustando un extremo al perfil trazado a lápiz que hay junto al borde derecho de la tabla. Mientras tanto, y aunque apareciendo apenas un instante en pantalla, considera un serrucho metálico cuyo filo rectilíneo tiene incorporada una regla milimetrada. Pero lo deja. Enfoco la herramienta por un momento para dejar constancia de que un instrumento de medida tan preciso y tan al alcance ha sido rechazado, pero como Salle inicia ya la división de la longitud de la tabla en partes iguales, pospongo un primer plano del serrucho para más tarde.

Salle usa de nuevo el procedimiento kira-kira, pero no exactamente del mismo modo que le había visto hacer. Las imágenes no recogen absolutamente todo lo que hace. He aquí la descripción:

Comienza ajustando el listón al margen vertical derecho de la tabla (Fig. 6.19). En las figuras dibujaré ese listón con un grosor exagerado para seguir el proceso con mayor claridad:

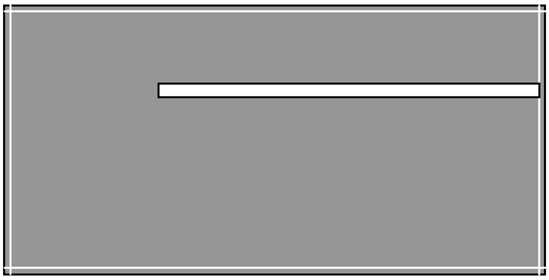


Figura 6.19

Después hace una marca en la madera correspondiente a lo que yo interpreto como punto medio de su longitud (Fig. 6.20).

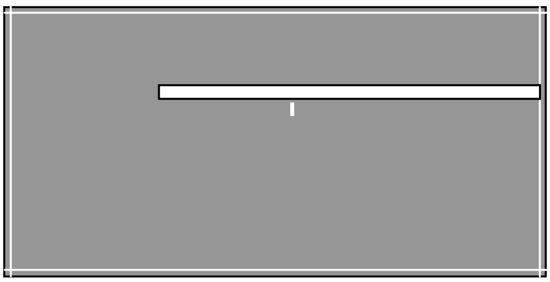


Figura 6.20

Mientras lo hace me dice:

***S**: Kira-kira itu.* (Eso aproximadamente.)

A continuación desliza el listón hacia la izquierda hasta que su extremo derecho coincide con la señal hecha en la tabla. Después, marca sobre el listón la línea del lado izquierdo de la tabla (Fig. 6.21):

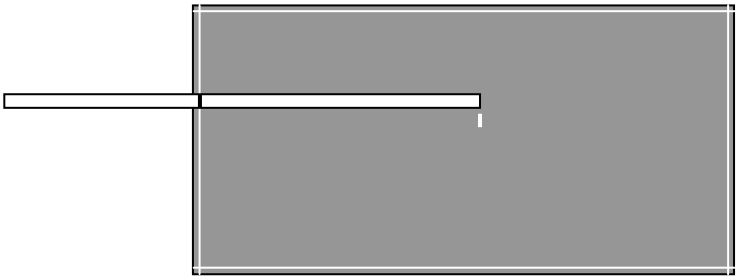


Figura 6.21

Luego devuelve el listón a su posición original (Fig. 6.22):

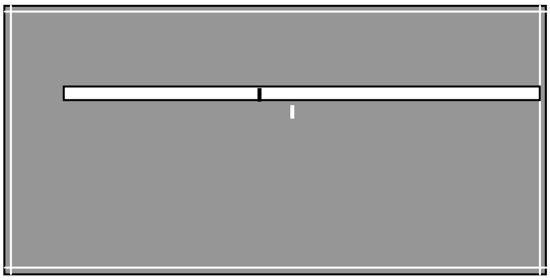


Figura 6.22

Y entonces hace una nueva marca en la tabla, justo en medio de esas dos (en blanco, Fig. 6.23). Y también señala en el listón la homóloga de la que acaba de hacer en la tabla:

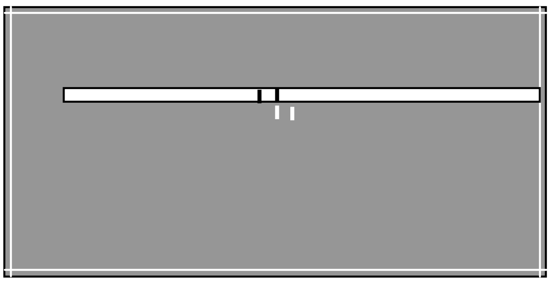


Figura 6.23

Finalmente, comprueba que la división es correcta deslizando de nuevo el listón hacia la izquierda de modo que su extremo derecho se sitúa sobre la última señal practicada (Fig. 6.24).

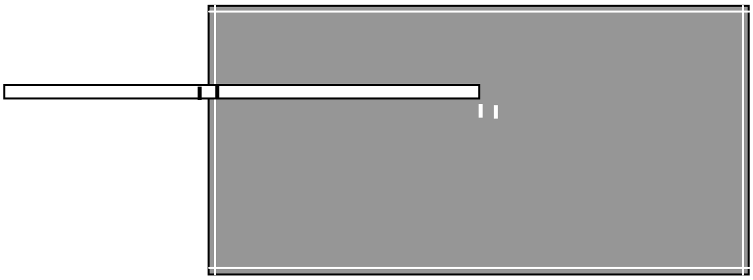


Figura 6.24

Al ver que la marca homóloga del listón coincide con el lado izquierdo del rectángulo, exclama:

***S**: Ya. Pas itu!* (Sí. ¡Se ajusta eso!)

No sale en imagen, pero también adosa el listón al lado inferior del rectángulo para marcar ahí el punto medio del que tiene en el listón. Hecho esto, traza una línea por ambos puntos y que será la que divida el rectángulo en dos partes iguales, lo que para el investigador occidental es la mediatriz vertical de la tabla (Fig. 6.25).

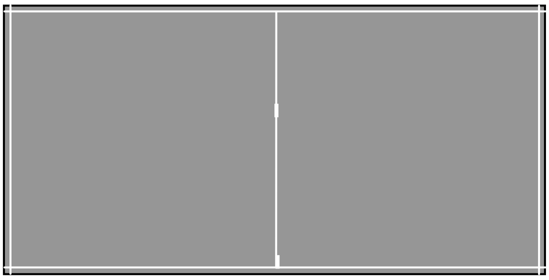


Figura 6.25

Después sitúa el listón en posición vertical, centrado sobre la línia trazada y hace varias marcas, una en medio del ancho del listón y dos en la tabla, a cada lado del listón (Fig. 6.26):

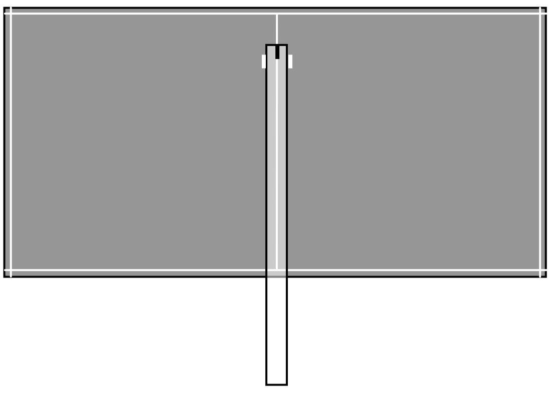


Figura 6.26

A continuación abate el listón y señala dos puntos homólogos, uno sobre él y otro sobre la tabla, ambos correspondientes a la línea vertical central de ésta (amplio las dimensiones del listón para ver bien lo que hace, Fig. 6.27):

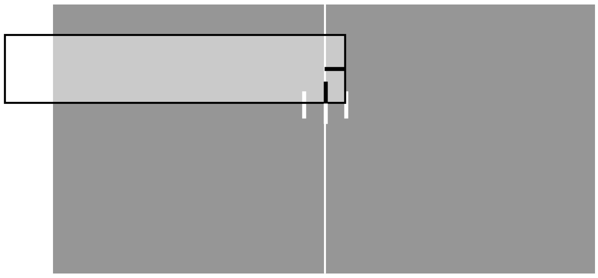


Figura 6.27

Acto seguido traslada el listón a la parte inferior de la línea central y, conservando la coincidencia entre la última señal hecha en él con la línea vertical, marca en la tabla la homóloga de la que hay en el listón (Fig. 6.28):

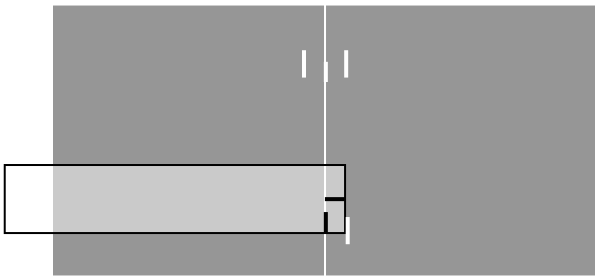


Figura 6.28

Por último, alinea un lado del listón vertical con las dos marcas a la derecha de la divisoria de la tabla para trazar dos verticales más, una a cada lado del bambú:

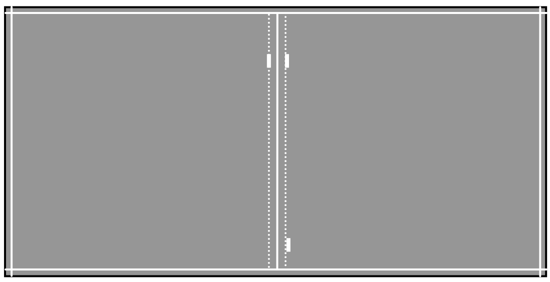


Figura 6.29

Indico a salle las dos rayas que acaba de hacer:

***M**:* *Ini, di tengah*. (Esto, en medio.)

***S**:* *Ya. Di tengah.* (Sí. En medio.)

***M**:* *Di tengah. Ya.* (En medio. Sí.)

***Y**:* *Di tengah itu.*(Eso está en medio.)

Salle manifiesta su propósito inmediato:

***S**:* *Ini di bagi tiga lagi.* (Esto ha de dividirse en rtes partes más.)

Se refiere a una de las dos mitades que han quedado en la tabla.

***M**:* *Bagi tiga lagi.* (Dividirlo en tres más.)

***S**:* *Ya.*(Sí.)

Ahora Salle se refiere a la otra mitad:

***S**:* *Ini di bagi tiga juga.* (Y aquí también ha de dividirse en tres más.)

***M**:* *Ini di bagi tiga juga.* (Aquí también en tres más.)

***S**:* *Ini, enam semua.* (Aquí, seis en total.)

***M**:* *Enam semua.* (Seis en total.)

Observo a Salle que primero ha efectuado la partición en dos partes:

***M**:* *Dulu, tulis di tengah.* (Antes, marcas en la mitad.)

***S**:* *Ya.* (Sí.)

La observación es importante porque son 18 los diseños a realizar. La disposición será pues de 3x6, tres filas y seis columnas. Para dividir la longitud de la tabla en 6 partes Salle podría haber empezado dividiéndola primero en tres y luego en dos cada tercio, pero la ha partido primero en dos y ahora dividirá en tres partes cada mitad. Se dispone a efectuar ésa división en la mitad derecha. La tarea no le resulta tan fácil. En la película se aprecia como deberá repetir el proceso hasta cinco veces.

Las dos primeras veces lo hace en la msima zona de la tabla, pero sin éxito. La tercera repetición la lleva a cabo más arriba, buscando un espacio más libre de marcas. Al ver que el resultado es incorrecto, Salle confirma el error diciendo[2]:

***S**:* *Kurang. Kurang itu*. (Corto. Se queda corto.)

Cuando ven que el cuarto intento vuelve a ser incorrect, Salle y su hermanastro (Rois), quien conntemplaba la evolución del trabajo, exclaman: -*Kondi'*. (Corto)[3].

Me doy cuenta de que la cuestión le resulta difícil, mucho más complicada que la división en dos partes que acaba de realizar. Le pregunto:

***M**:* *Bagus, atau ..?* (Está bien o ...?)
***S**:* *Nepe. Belum nepe.* (Está cerca. Pero no lo suficiente.)
***R**:* *Belum bagus.* (Todavía no está bien).

Al fin, Salle obtiene la partición deseada al rehacer el procedimiento por quinta vez en la parte inferior de la tabla, cosa que confirma exclamando:

***S**:* *Pas!*. (¡Se ajusta!)

Lugo traza las franjas verticales que dividen esa mitad derecha en tres partes iguales. Repite lo mismo para la mitad izquierda, aunque con las medidas correctas que ya ha registrado en el listón. Al terminar la parte izquierda, salle comprueba que el resultado es lo suficientemente bueno, tanto por lo que se refiere a la partición horizontal como vertical. Ya sólo le queda trazar las líneas dobles horizontales para completar los 18 recintos (Fig. 6.30).

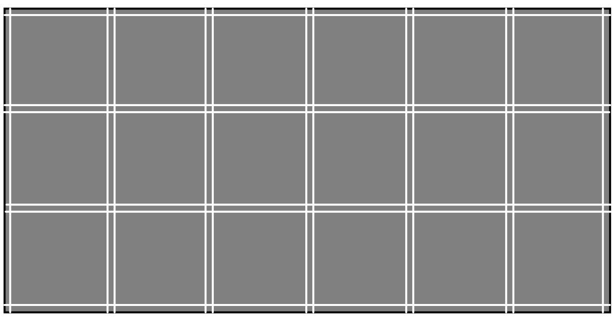


Figura 6.30

[2] Eso se oye muy bajito en la grabación.
[3] Los términos *Kondi'* y *Nepe* pronunciados por Salle y Rois no son indonesios, sino toraja. La traducción es de Rasyid Pasabuan.

Los diseños que ocuparan esos 18 espacios son (de izquierda a derecha y de arriba abajo):

1. Pa’ Tangke Lumu’.
2. Pa’ Tangke Lumu’ di to’ke.
3. Pa’ Tangke Lumu’ di supik.
4. Pa’ Lulun paku.
5. Pa’ Tedong tumuru.
6. Pa’ Erong.
7. Pa’ Sule tang.
8. Pa’ Bulingtong.
9. Pa’ Bulingtong si teba.
10. Pa’ Baranae.
11. Pa’ Barana.
12. Pa ‘ Baba gandang.
13. Pa’ Kapu baka.
14. Pa’ Buku paria.
15. Pa’ Daun bolu.
16. Pa’ Lembang.
17. Pa’ Sepu.
18. Pa’ Sekong pandi.

La filmación muestra todo el proceso de talla del primero de ésos diseños y que ocupará la esquina superior izquierda: *Pa’ Tangke Lumu’*.

Para construir su retícula Salle divide en tres partes iguales el ancho del recinto y luego cada tercio en dos. A diferencia de lo mucho que tardó en lograr la partición en tres partes de la tabla entera, ahora el éxito es inmediato. Y trabaja tan deprisa que no me da tiempo a ver cómo corrige sus estimaciones. La retícula queda trazada en un *pis pas* (Fig. 6.31):

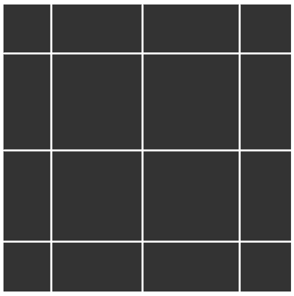


Figura 6.31

A continuación esboza las volutas del grabado. El proceso es el mismo que el descrito en la observación 5.2.6.

Acabado el segundo diseño, el *Pa' Tangke Lumu' di Tokke*, su hermanastro Rois le substituirá en la talla del siguiente: *Pa' Tangke Lumu' di Supik*. Rois es algo mayor que Salle y aprendió a tallar unos años antes que él. Lleva 12 años labrando la madera.

<u>Análisis e interpretación</u>

Salle comienza el trabajo buscando un listón lo suficientemente largo como para cubrir al menos la mitad de la tabla. Eso concuerda con lo dicho antes por Rois (6.4.1).

Los instantes de reflexión que se toma Salle previos a la acción son de una importancia capital. Salle piensa cómo hacer su trabajo, no se limita a reproducir un mecanismo aprendido. De lo contrario, no le haría falta reflexionar. Aunque la tarea del artesano tenga mucho de mecánica y sea precisamente ese aspecto el que la haga factible (de otro modo sería inacabable), su reflexión indica que está ante una situación nueva y que urde el modo de resolverla. Ésta es una parte esencial de la actividad matemática.

¿En qué pensaba Salle? Una vez visto todo el proceso creo que sus reflexiones se orientaban a resolver el problema de la división de la tabla en seis partes iguales. Al final no se decidió por realizar la que antes llamamos una *partición directa* en 6 partes iguales y que realizó Antón en la observación 5.2.12, sino que optó por llevar a cabo una de las dos posibles *particiones indirectas* dividiendo primero en 2 partes y luego en 3:

$$\frac{1}{6} = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)}{3}$$

Desconocemos las razones que le llevaron a escoger dicha opción.

Para su trabajo Salle disponía de tecnología más avanzada como un serrucho con regla, pero desestima su uso y prefiere el listón de bambú. Los centímetros y milímetros no parecen servirle o quiere evitarlos. ¿Acaso le obligarían a calcular? ¿Sabe calcular?

La aplicación del método Kira-kira en la división de la tabla en dos partes pone de manifiesto que su propósito llegado el momento de corregir el error es buscar el punto medio del error cometido, en este caso por exceso. Lo prueba que ponga la punta del lápiz tocando la marca izquierda hecha en el listón y deslice el lápiz hacia la marca derecha, deteniéndose justo en medio del segmento que ambas determinan.

Obsérvese que el procedimiento seguido, aunque equivalente al de otras ocasiones, no es idéntico al seguido en aquellas. No desliza el listón y divide la diferencia qu ele queda en un extremo de la tabla, sino que actúa de manera que el error cometido aparece delante de él, en medio de la tabla. Una posible explicación a su modo de actuar podría estar en las dimensiones de la tabla, cuya longitud es de un metro aproximadamente.

Parece que las líneas rectas verticales y horizontales son trazadas a ojo sólo cuando las distancias son pequeñas. Aquí no es así. De un vistazo no se abarca toda la tabla. Quizá por eso Salle asegura la verticalidad.

La división en tres partes iguales de la mitad derecha se le hace muy difícil a Salle. Al principio pensé que eso desmontaba mi teoría de la búsqueda del tercio del error cometido en la estimación (generalización del método Kira-kira). Si le salió bien la mitad, ¿por qué no el tercio?, me preguntaba. Ahora pienso que el problema no estaba ahí, sino en otra causa. Creo que la tarea se le complica sobremanera porque los tres tercios no deben quedar delimitados por dos líneas simples, sino dobles. Cada línea doble correspondiente al grosor del listón de bambú. El resultado ha de ser este (Fig. 6.32):

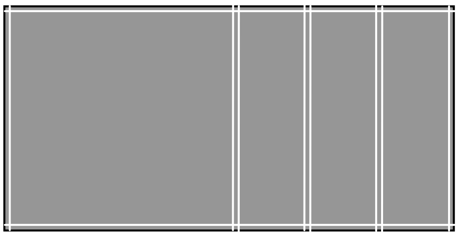


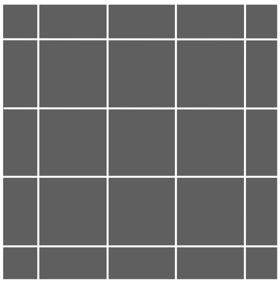
Figura 6.32

Por tanto, si el grosor del listón es *a*, el espacio de amplitud *x* ha de quedar dividido en tres columnas de amplitud:

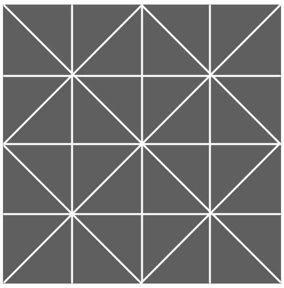
$$\frac{x - 2a}{3}$$

Eso dificulta el proceso y salle ha de aplicar el método kira-kira hasta en cinco ocasiones. Tantas que no deberíamos considerarlo una aplicación exacta del método, puesto que la situación a resolver es otra distinta. Puesto que la tabla tiene una longitud el doble que su anchura, la división en dos partes proporciona dos cuadrados. La división de la longitud de cada uno de ellos en tres partes proporciona también una división de su anchura en otras tantas. ¿Sería eso en lo que pensaba Salle?

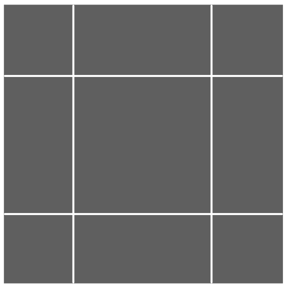
Las siguientes son las nuevas retículas que encontramos en esa tabla tallada por Salle (Fig. 6.33 y 6.34).



Pa’ Tangke Lumu’ di supik (3)

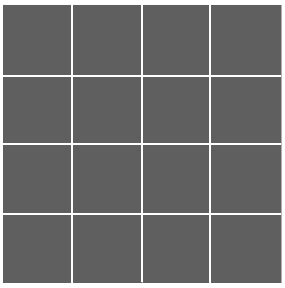


Pa’ Tedong tumuru (5)
Pa’ Kapu baka (13)

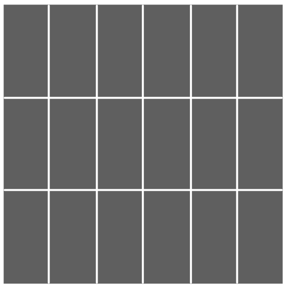


Pa’ Barana (11)

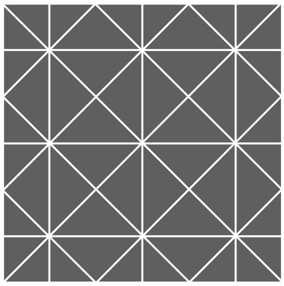
Figura 6.33



Pa’ Buku paria (14)



Pa’ Daun bolu (15)



Pa’ Lembang (16)

Figura 6.34

Las retículas restantes coinciden con las trazadas por Yobel (pre salle) y que ya fueron expuestas en las observaciones del capítulo V. Cabe destacar que la retícula del *Pa’ Tangke lumu’* es compartida por 9 diseños: 1, 2, 4, 6, 7, 8, 9, 10 y 12. Un par de ellos son de la familia del *Pa’ Tangke lumu’* (1, 2); otro par de la del *Pa’ Bulingtong* (8, 9). Entre los demás (4, 6, 7, 10 y 12) podemos encontrar semejanzas figurativas con el motivo fundamental del *Pa’ Tangke lumu’*.

Desde una perspectiva global, pienso que Salle ha resuelto un problema matemático consistente en dividir el espacio rectangular de la tabla en 18 partes iguales, cada una de ellas separada de las demás por un margen determinado. Su resolución pasa por una cuantificación del espacio y un procedimiento de resolución. Salle no escribe, pero es evidente que calcula mentalmente. Es consciente de que 3·6=18 y de que, al comenzar la división de la longitud de la madera 6=2·3. Análogamente, más tarde, llegada la hora de construir la retícula del *Pa’ Tangke Lumu’* también es consciente de que 6=3·2. La solución de la situación pasa por una cuantificación tácita, no expresada con símbolos (ni locales ni occidentales), pero de la que hay un vestigio escrito en las marcas practicadas en latabla y en el listón de bambú efectuadas mediante la aplicación de un método eficaz y objetivo.

6.4.4 Salle (02)

Esta interpelación activa se planteó con el propósito de validar o invalidar de una vez por todas la *Interpretación del método Kira-kira*. Averiguar si la referencia tomada por el artesano al aplicar el procedimiento Kira-kira para dividir un segmento en dos partes iguales consiste en buscar el punto medio del error cometido significa que él mismo lo exprese así. En la interpelación el investigador se pondrá en la piel del artesano, pero no de una manera representativa e imaginaria propia de interpelaciones anteriores. Ahora tomará parte activa en el proceso imitando la tarea del artesano y usando sus artefactos: lápiz y listón de bambú. Transformado en aprendiz, el investigador interpelará al grabador no ya desde fuera de la situación, como si de un espectador se tratase, sino desde dentro de la situación, involucrado en ella. Desde esa posición interpelará para conocer qué referencias debe tomar. Estando las herramientas en manos del investigador, el artesano se verá obligado a hablar. Tal vez así sea más probable que manifieste sus propósitos.

Lo que haré será actuar como si fuese yo quien tuviese que realizar la partición de un segmento en dos partes. Para la ocasión la partición se efectuó en un tablón de madera que yo mismo tomé de entre restos de serrín esparcidos por el suelo. La experiencia fue filmada por Pilar (P) e intervienen en ella Salle (S) y el investigador (M). Véase la grabación audiovisual en el Anexo D (DVD: Ukiran Toraja: Yobel’s Di bagi dua).

Artesano:	Salle (ex Yobel)
Lugar:	Kampung Tambunan (Randan Batu, distrito de Sanggalla)
Fecha:	05.01.2005
Intérprete:	Nadie (bahasa indonesio)
Grabación:	Anexo F: DVD (Ukiran Toraja: Yobel di Bagi dua)

M: *Anda bikin dengan itu. Ini, no? Kalau saya mau tulis di tangah ini ... Saya bikin ... ini, ya?* (Tu lo haces con eso. Así, ¿no? Si yo quiero escribir en medio de aquí ... Lo hago ... aquí, ¿de acuerdo?)

Y con el lápiz trazo una línea recta usando el listón de bambú.

***P**: No creo que se vea la raya, eh?*

La imagen no es lo suficientemente buena y corremos el riesgo de que la raya a lápiz no aparezca con claridad. Decido cambiar de ubicación para que la grabación tenga mejor calidad. Y vuelvo a trazar una raya de lado a lado de la madera:

***M**: Kalau ini. Kalau saya mau tulis di tangah di sini ... Anda bikin.. dulu kira-kira.*

(Si lo hago aquí. Si yo quiero escribir en medio de aquí ... Tu lo haces ... antes aproximadamente.)

***S**: Ya!* (Sí)

***M**: Mungkin ... Ini. Ini.* (Quizá ... Aquí. Aquí.)

Hagoo una marca en el listón y otra homóloga de ésta en la tabla. Las hago mal adrede porque no quiero que mi primera estimación del punto medio sea demasiado buena. De lo contrario, no tendría mucho que preguntar a Salle y precisamente lo que quiero es que él me corrija y me diga cómo debo rectificar mis errores.

***M**: Nanti ... ini di sini.* (Después, esto aquí.)

Entonces deslizo el listón hasta que su extremo coincide con la marca hecha en la tabla. Para que la estimación del punto medio fuese correcta, la señal del listón debería coincidir con el extremo de la madera (Fig. 6.35). Pero no es el caso:

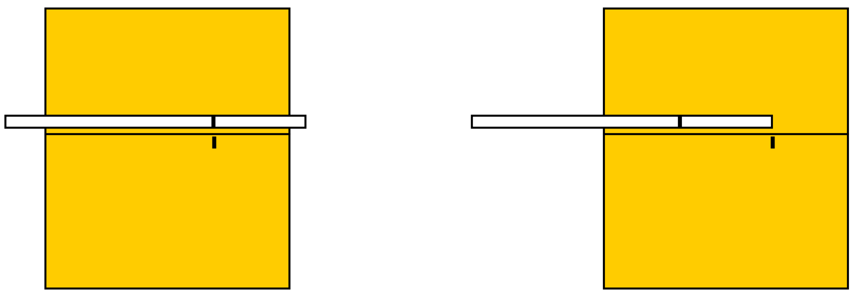


Figura 6.35

***M**:* *Tetapi ini tidak bagus*. (Pero así no está bien.)
***S**:* *Ya. Tidak bagus itu.*(Sí. Eso no está bien.)
***M**:* *Sekarang, dimana tulis?* (Y ahora, ¿dónde escribo?)
***S**:* *Begini.* (Así.)

Salle me coge de las manos el lápiz y el listón, pero en lugar de responder a mi pregunta, lo que hace es trazar márgenes en los lados de la tabla con el grosor del listón. Luego toma la longitud de la línea ya trazada (ancho de la tabla) para determinar un espacio cuadrado. Yo veo que no ha comprendido y le digo que se espera:

***M**:* *Tungu, tungu. Tetapi...* (Espera, espera. Pero...)

Él, ni caso, a lo suyo. Incluso me dice que soy yo quien tiene que esperar:

***S**:* *Ya. Tungu!* (Sí. ¡Espera!)

Cuando acaba de construir el cuadrado, dice:

***S**:* *Kira-kira, di bagi bagi tiga ini*. (Aproximadamente, dividiré esto en tres partes.)
***M**:* *Di bagi tiga?* (¿Lo dividirás en tres?)
***S**:* *Ya. Kira-kira.* (Sí. Aproximadamente.)
***M**:* *Tetapi, kalau di bagi dua?* (Pero, ¿si tuvieras que dividirlo en dos?)
***S**:* *Bisa juga di bagi dua.* (También se puede dividir en dos.)
***M**:* *Bagaimana?* (¿Cómo?)
***S**:* *Kalau di bagi dua ini, kita ambil di tengah* . (Si se ha de dividir en dos partes, cogemos la mitad.)

Y Salle marca en el listón y en la tabla los puntos correspondientes a lo que debería ser su mitad (Fig. 6.36):

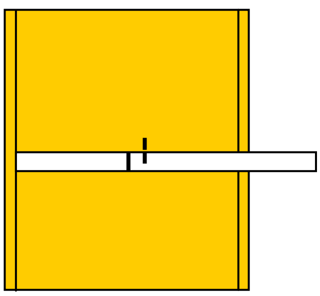


Figura 6.36

Obsérvese que en el listón ya hay una marca, la hecha antes por mi. Las señales de Salle no quedan tan visibles.

M: *Kita Kira-kira?* (¿Lo hacéis aproximadamente?)

S: *Kira-kira, kita kasih sama dengan ini.* (Aproximadamente. Le damos lo mismo que aquí.)

Salle señala ambas mitades para indicarme que cada parte debe ser igual a la otra. Cuando traslada el listón hacia la izquierda se observa en la imagen que la marca mayor del listón (la que había hecho yo) casualmente coincide con el margen hecho a lápiz por él (Fig. 6.37):

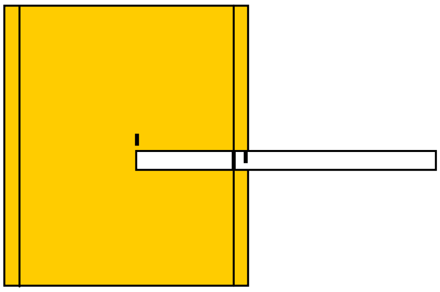


Figura 6.37

Le cojo el listón de las manos y lo deslizo hacia el otro lado para ver si la estimación es buena o no. Pero me equivoco y en lugar de hacer coincidir la marca hacha por él sobre la tabla con su homóloga del listón, las que hago coincidir son la de la tabla con la mía. Gracias a este error, el extremo del listón no cae encima del margen y la división es incorrecta (Fig. 6.38). Así se lo observo a Salle:

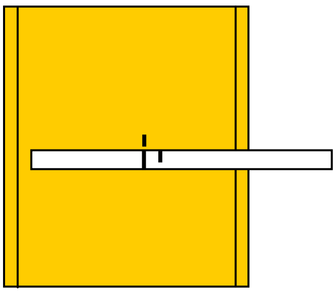


Figura 6.38

M: *Ya. Tetapi, kalau ini ... tidak sama.* (Sí, pero así ... no és igual.)

Salle está de acuerdo:

S: *Ya. Tidak sama.* (Sí. No coincide.)
M: *Sekarang?* (¿Y ahora?)
S: *Di usaha supaya sama. Sama itu.* (Hay que traabajar más de manera que sean iguales. Ambos iguales.)

Le invito a hacerlo:

M: *Tetapi Bikin itu. Bikin.* (Pero hazlo. Haz.)
S: *Ya.* (Sí).
S: *Ini. Kalau begini tidak sama itu.* (Aquí. Si lo hago así no son iguales.)

Mientras dice eso Salle vuelve a señalar con el lápiz las dos marccas anteriores (casi invisibles porque las había hecho presionando poco el lápiz). Una está en la madera; la otra, en el listón de bambú. Comprueba lo que ha anticipado, que no será correcta la partición, trasladando el listón al otro lado de la madera (Fig. 6.39):

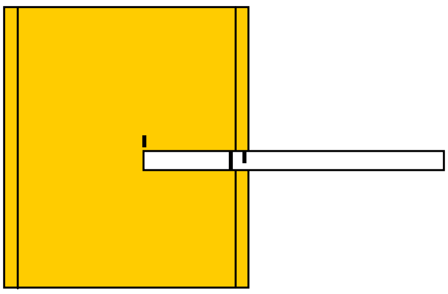


Figura 6.39

La marca más pequeña debería haber caído encima del margen para que la partición fuese correcta.

S: *Kita ulang lagi. Supaya sama.* (Repetimos otra vez. Haciendo que sean iguales.)

Salle lleva el listón a la izquierda para hacer la corrección pertinente. Las marcas pequeñas, una en la tabla y la otra del listón vuelven a coincidir (Fig. 6.40):

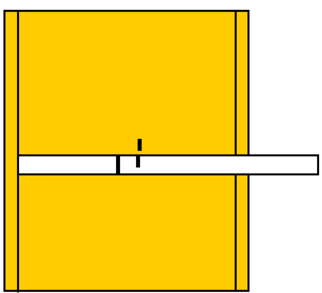


Figura 6.40

M: *Satu lagi.* (Otra vez.)

S: *Satu lagi.* (Otra vez.)

M: *Tetapi, anda sekarang ... Dimana tulis?* (Pero, tu ahora ... ¿dónde escribes?)

Le pregunto dónde practicar la nueva marca porque quiero que sea él quien lo diga. Pero resulta evidente que la traza justo en medio de la que del segmento definido por la mayor del listón y la de la tabla (Fig. 6.41):

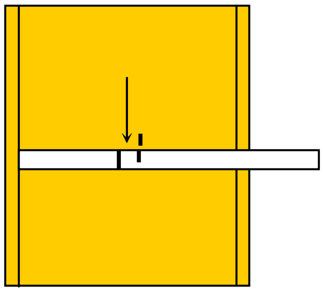


Figura 6.41

S: *Kira-kira di sini. Supaya bagus.* (Aproximadamente aquí. Haciendo que quede bien.)

Salle comprueba después que la corrección es buena. Y lo que hace a continuación es indicarme los inicios de la talla del diseño *Pa' Tangke Lumu'*. Supongo que interpretando que yo quiero saber cómo se hace todo. Me explica los puntos donde van los *mata*, los ojos de las volutas, y cómo se divide el espacio para trazar ahí la retícula del diseño. Incluso empieza a esbozar las volutes. Pero se me está yendo por las ramas. No es eso lo que quiero averiguar ahora.

Quiero validar mi interpretación del método Kira-kira. Y con lo que le he visto hacer y lo que me ha dicho no tengo bastante. No puede validarse el modelo sin dejar bien claro que su propósito es corregir la estimación buscando la mittad del error cometido. Mientras no me lo diga él, la interpretación no es válida.

Dejo que continue con lo que hace hasta que me armo de valor para insistirle de nuevo. Para ello le doy la vuelta a la madera (en ése lado de la tabla ya hay demasiado lío de líneas) y trazo una recta de lado a lado.

M: *Saya mau di bagi tiga.* (Yo la quiero dividir en tres partes.)

S: *Ya. Bagi tiga.* (Sí. Dividirla en tres.)

***M**:* *Tidak di bagi dua. Kalau di bagi tiga, bagaimana bikin?* (No dividirla en dos. Si la quiero dividir en tres, ¿cómo lo hago?)

Salle vuelve a cogerme el listón y de nuevo traza los márgenes de la tabla como antes. La verda es que los bordes de la madera son muy irregulares, nada rectilíneos:

***S**:* *Karena ini di kasih urus di dalam, dulu. Tidak sama kainepapan.* (Para hacerlo hay que organizar antes el espacio. No es lo mismo.)

Una vez dibujados los márgenes, salle continúa:

***S**:* *Kalau di bagi tiga itu, kita ambil di sini. Ya. Bisa juga di bagi empat.* (Si hay que dividirlo en tres partes, hemos de coger aquí. Sí. También se puede dividir en cuatro partes.)

Salle se refiere al interior del espacio delimitado por los márgenes trazados, no a la tabla en sí. Vuelve a ir a la suya hablándome de divisiones en cuatro partes. Pero esta vez no me voy a rendir. Insisto:

***M**:* *Ya. Kalau di bagi tiga, bagaimana?* (Ya. Si ha de dividirse en tres, ¿cómo se hace?)
***S**:* *Ya. OK. Kalau di bagi tiga, kita usaha supaya ini sama semua tiga di dalam.* (Sí. De acuerdo. Si ha de dividirse en tres, hemos de hacerlo hasta que en total haya tres iguales dentro.)

Salle está enfrente de mí. Las siguientes figuras reproducen fielmente la posición de la tabla tal y como aparece en pantalla, es decir, que la derecha de salle es mi izquierda y viceversa. La parte superior de la tabla en estas páginas es la parte superior con la que la veo yo, pero es la inferior para Salle.

Comienza haciendo una marca en el listón y otra homóloga en la madera de la que es su primera estimación del tercio (Fig. 6.42):

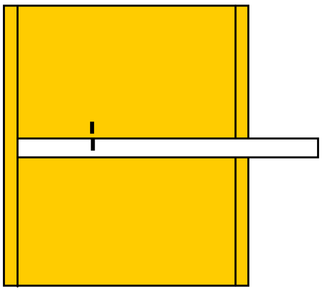


Figura 6.42

M: *Ini kira-kira.* (Esto aproximadamente.)

S: *Kira-kira.* (Aproximadamente.)

M: *Ya. Ini.* (Sí. Aquí.)

Desliza el listón hacia la derecha de la imagen (su izquierda) hasta que el extremo derecho del bambú coincide con la marca en la tabla y hace otra señal en ella (Fig. 6.43), la que correspondería a los dos tercios del total:

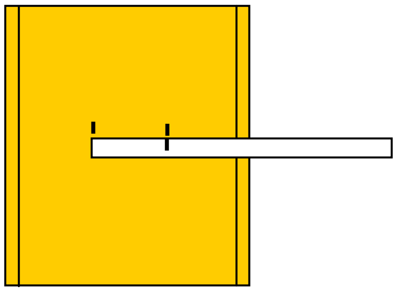


Figura 6.43

Finalmente, desliza el listón hasta situar su extremo sobre ésta última marca en la tabla. Entonces, la marca del listón cae justo encima del margen derecho de la madera. La división le ha salido perfecta (Fig. 6.44):

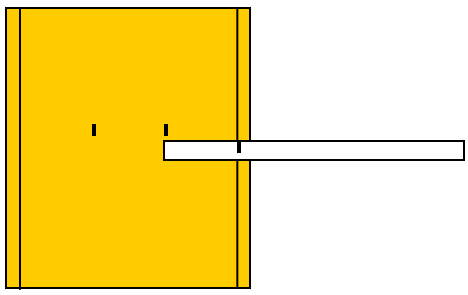


Figura 6.44

Él se alegra, pero yo me siento decepcionado. ¡No hay error que corregir!

S: *Ya. Pas! Sudah pas!* (Sí. ¡Exacto! ¡Ya se ajusta!)

M: *Sudah Bagus sekalih!* (¡Ya queda excelente!)

S: *Ya. Sudah Pas!* (Sí. ¡Ya es lo bastante ajustado!)

Nada más terminar, salle vuelve a lo suyo y se dispone a hacer una vertical que pase por alguno de los puntos señalados. Pero esta vez no estoy dispuesto a rendirme. Vuelvo a interrumpirlo. Cojo el lápiz y el bambú para hacer delante de él una división en tres partes imprecisa. Mi aproximación se va demasiado lejos. Al trasladar el listón, me salgo del espacio (Fig. 6.45):

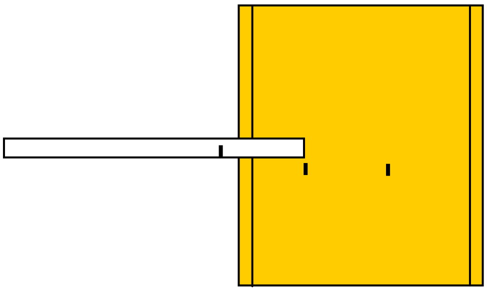


Figura 6.45

Se lo digo:

***M**:* *Tetapi, terlalu jauh!* (Pero, ¡demasiado lejos!)

***S**:* *Tidak baik itu.* (Eso no está bien.)

***M**:* *Tidak bagus.* (No lo está.)

***S**:* *Di usaha supaya sama semua itu.* (Ha de hacerse de manera que sean todos iguales.)

***M**:* *Ya. Semua.* (Sí. Todos.)

***S**:* *Ya. Semua.* (Sí. Todos).

***M**:* *Kalau ini terlalu jauh, ...* (Si éste está demasiado lejos ...)

***S**:* *Kita kurangnya lagi.* (Le hemos de quitar más.)

***M**:* *Dimana sekarang?* (¿Dónde ahora?)

***Y**:* *Di kurangnya lagi. Ulang lagi di sini.* (Un poco menos. Vuelve a repetirlo.)

***M**:* *Ulang lagi.* (Repetirlo otra vez.)

***Y**:* *Ya. Di kurangnya lagi ini yang tempatnya ...* (Sí. Quítale un poco más de manera que los espacios ...)

***M**:* *Kurang.* (Menos.)

***S**:* *Ya. Kurang.* (Sí. Menos.)

***M**:* *Tetapi berapa kurang?* (Pero, ¿cuánto menos?)

***Y**:* *Tidak apa apa. Kita kasih anu itu supaya sama ini ... Sama semua itu.*(No importa. Le vas quitando hasta hacerlos todos iguales aquí ... Todos han de ser iguales.)

***M**:* *Ya. Kira-kira di sini mungkin?* (Sí. Aproximadamente aquí quizá?)

Salle corrige un poco mi estimación:

***S**:* *Ya. Mungkin di situ.* (Sí. Quizá allí.)

***M**:* *Di situ?* (¿Allí?)

***S**:* *Ya. OK. Ya.* (Sí. De acuerdo. Sí.)

***M**:* *Ini. Ini.* (Aquí. Aquí.)

***Y**:* *Ya.* (Sí.)

Cuando hago la comprobación vuelvo a decepcionarme. ¡La partición vuelve a ser correcta!

***M**:* *Ya. Sudah.* (Sí. Listo.)

***S**:* *Sudah itu.* (Eso ya está.)

***M**:* *Sudah itu.* (Eso ya está.)

***S**:* *Sudah bagus itu.* (Ya está bien así.)

Después de eso salle realiza otra partición en tres partes iguales. Pero sin tomar referencias claras. De su modo de proceder sólo puedo decir que quita o añade un poco a sus errores, como si me mostrará cómo solventar un caso incorrecto. Interpreto sus acciones como propias del ensayo y error. No puedo decir que busque el tercio del defecto o exceso de su estimación. De hecho, necesita varias repeticiones del proceso para lograr un ressultado aceptable. Me parece que Salle es impreciso adrede y que quiere hacerme ver que quitando o añadiendo ‘poquitos’ también se llega a buen puerto. Yo vuelvo a insistir:

***M**:* *Kalau di bagi dua?* (¿ Y si ha de dividirse en dos partes?)

***S**:* *Sama itu.* (Se hace igual.)

***M**:* *Sama. Tetapi, kalau di bagi tiga, ... lebih susa?* (Igual. Pero, si lo has de dividir en tres, ... ¿es más difícil?)

***S**:* *Ya. Susa.* (Sí. Es difícil.)

***M**:* *Susa. Di bagi dua?* (Difícil. ¿Y al dividirlo en dos?)

***S**:* *Tidak Susa.* (No es difícil.)

Si le resulta más fácil la división en dos partes que la división en tres[4], por algo será. Le invito a que él mismo haga una partición en dos partes.

---

[4] Ésta dificultad no estará en el procedimiento Kira-kira, sino en el hecho de que es más difícil estimar el tercio que la mitad de un segmento. La dificultad es senso-motriz, no conceptual.

M: *Tidak susa. Bisa bikin ini ... di bagi dua lagi? Anda.* (No es difícil. Puedes hacerlo aquí ... ¿otra división en dos partes? Tú.)

Salle no pone inconvenientes y accede a mi petición. Incluso no realiza una, sino dos particiones en dos partes iguales. En una se queda corto, en la otra se pasa. En ambos casos corrige sus errores de forma similar a como los ha corregido en el caso de tres, quitando o añadiendo un poquito. Yo me pregunto por qué no lo hace como ya le vi hacer antes (observación anterior), tomando claramente la referencia del punto medio del error cometido. Posiblemente me esté mostrando que en el caso de dos partes también se puede proceder igual que en el de tres, quitando o añadiendo poquito a poco.

Le he visto ser mucho más eficaz en un montón de ocasiones. ¿No será que quiere mantener oculta la clave que busco? Insisto por última vez:

M: *Ya. Tetapi dulu anda* ... (Sí. Pero antes tu ...)

Y cogiendo de nuevo el lápiz y el listón cruzo la tabla con otra línea recta. La paciencia de quien graba la experiencia comienza a agotarse. Salle y yo estamos en el suelo, con la tabla entre nosotros. La cámara enfoca cenitalmente desde lo alto. Quien la maneja debe adoptar una postura incómoda que ya dura demasiado:

P: *Ya me estoy cansando de estar así.*
M: *Ya acabo.*
M: *Kalau mungkin di sini.* (Si quizá aquí.)
P: *Marcar fuerte, eh!*

Hago las marcas correspondientes a una partición en dos partes iguales, una en el listón y otra, su homóloga, en la tabla.

S: *Ya.* (Sí.)
M: *Ini kurang.* (Esto es corto.)
S: *Ya. Kurang.* (Sí. Es corto.)

Mi estimación se ha quedado corta (Fig. 6.46):

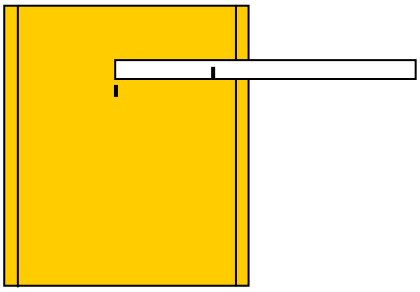


Figura 6.46

M: *Tetapi anda bikin ... tidak sama ini ... bikin lain ...* (Pero tu lo has hecho ... no así ... de una altra manera ...)

Tengo en mente la clara referencia tomada por Salle en la primera división que ha hecho en dos partes iguales.

S: *Yang mana?* (¿De cuál?)
M: *Yang ini. Di tengah. Ingat?* (La de aquí. En medio. ¿Te acuerdas?)

Me quedo bloqueado porque no sé cómo conseguir que Salle diga lo que quiero oir. Doy la vuelta a la tabla y le muestro el llugar donde él había hecho la primera división en dos partes iguales, allí donde había tomado la referencia del punto medio del error.

M: *Dulu, di sini.* (Antes, aquí.)
M: *Ini di bagi dua.* (Aquí has dividido en dos partes.)
M: *Tapi anda bikin ini tidak sama di sini.* (Pero lo has hecho diferente de aquí.)

Y enseño a Salle el otro lugar.

S: *Yang mana?*(¿De qué manera?)

No puedo decirle de qué modo lo ha hecho:

M: *Tidak tahu, tetapi tidak sama.* (No lo sé, però no fue igual.)
M: *Kalau saya bikin ... ya ... ini...* (Si yo quiero hacerloo ... sí ... aquí ...)
S: *Ya.* (Sí.)

M: *Sekarang...* (Ahora ...)

S: *Kurang.* (Corto.)

M: *Kurang.* (Corto.)

S: *Ya.* (Sí.)

M: *Tetapi, dimana tulis sekarang?* (Però, ¿dónde escribir ahora?)

S: *Di tambah lagi sedikit.* (Aumentalo un poco más.)

M: *Tetapi ...* (Pero ...)

S: *Di ulang lagi itu.* (Repítelo otra vez.)

M: *Sedikit lagi?* (¿Un poquito más?)

Y: *Ya. Sedikit.* (Sí. Un poquito.)

M: *Sampai dimana?* (¿Hasta dónde?)

S: *Sampai kira-kira ... ini di bagi dua nanti.* (Aproximadamente hasta ... que esto quede dividido en dos partes después.)

M: *Ini di bagi dua?* (¿Esto en dos partes?)

S: *Ya. Yang lebih itu di bagi dua.* (Sí. Lo que sobra dividido en dos partes.)

S: *Ya. Ya. Dari sini sampai di sini di bagi dua.* (Sí. Sí. Desde aquí hasta aquí dividido en dos partes.)

Cuando dice 'aquí', Salle se refiere a la marca del listón y al margen de la tabla (Fig. 6.46).

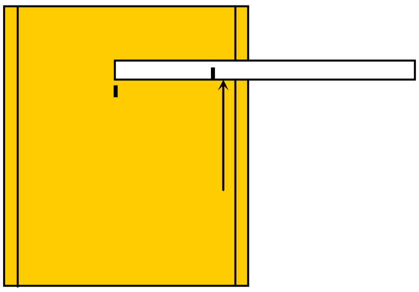


Figura 6.46

M: *Di bagi dua?* (¿Dividido en dos partes?)

S: *Ya.* (Sí.)

M: *Ah, ya! Bagus sekalih! Di bagi dua.* (¡Ah, sí! ¡Muy bien! Dividido en dos partes.)

La grabación termina aquí, pero antes de abandonar el lugar pregunté a Salle[5]:

***M*:** *Dari siapa belajar itu?* (¿De quién aprendiste eso?)
***S*:** *Dari orang tua.* (De un anciano.)
***M*:** *Dan orang tua itu, dari siapa belajar?* (Y ése anciano, ¿de quién lo aprendió?)
***S*:** *Dari orang tua juga. Sampai di atas!* (De un anciano también. ¡Así hasta arriba!)

Análisis e interpretación

El propio Salle ha confirmado la *Interpretación del método Kira-kira* del investigador al expresar que corrige el error cometido en cada estimación buscando el punto medio del exceso o defecto. Aún así considero necesario hacer algunas observaciones.

Si en la interpelación 6.4.1 desarrollada antes con él (como Yobel) se planteó la posibilidad de que cayese en la referencia del punto medio en el curso de la interpelación, ¿por qué no pensar lo mismo en esta ocasión? Creo que hay motivos para pensar que no es así. Entonces Yobel respondió literalmente la pregunta que yo le hacía. Le pregunté ‘dónde’ hacer la marca y su respuesta fue ‘en medio’. Ahora le he preguntado ‘hasta dónde’ había que corregir el error. Pero su respuesta no ha sido ‘hasta en medio’, sino que ha ido mucho más allá ofreciendo una solución de carácter general: ‘Lo que sobra dividido en dos partes iguales’. Lo que sobra no es una solución literal, no se refiere al pequeño defecto concreto resultante en dicha experiencia, sino a cualquier defecto o exceso en cualquier otra situación similar. Su respuesta es general. Por eso interpreto que su propósito responde a nuestra *Interpretación del método Kira-kira*.

Quizá la clave estuvo en preguntarle ‘hasta dónde’ hacer la marca en lugar de ‘dónde’ hacerla como le pregunté antes. Pero también es posible que el problema fuese el exceso de celo por su parte. En el mundo profesional un aspecto a tener muy en cuenta es la competitividad. Los diferentes grupos de artesanos comparten muchas cosas (herramientas, estrategias, nomenclatura de los grabados, lugares de trabajo, etc.). ¿Significa eso que lo comparten absolutamente todo sin ningún problema? No tendría nada de extraño que algunos secretos se mantuviesen ocultos para mantener el puesto o que al menos no se desvelaran sin más con el fin de ayudar a la supervivencia del grupo artesanal. Pienso que Salle, como y ahe mencionado en el curso de la interpelación, ha pretendido ser impreciso porque en otras ocasiones su éxito ha sido espectacular, tanto en la división en dos como en tres partes. Ha acabado por rendirse a mi insistencia. Por lo que se refiere a la partición de un segmento en dos partes iguales, ¡Salle lo piensa como yo lo pienso!

[5] No tengo prueba documental de esas cuestiones y respuestas.

Salle afirma que división en dos partes es más fácil que la división en tres. Puesto que Yobel hacía divisiones en cuatro partes dividiendo en dos las primeras mitades (Interpelación 6.4.1), las divisiones en cuatro partes constituyen una aplicación indirecta del método Kira-kira:

$$\frac{1}{4} = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)}{2}$$

En cuanto a la división de un segmento en tres partes iguales, y pese a que salle muestra una gran precisión en su estimación, ¿podemos afirmar que, en caso de error, lo corrige buscando el tercio del exceso o defecto? De ser así, estaríamos ante la generalización del método Kira-kira.

Merece especial atención la importancia que da Salle a la delimitación rigurosa del espacio. Yo estaba dispuesto a efectuar la división directamente sobre la tabla de bordesw irregulares. Lo primero que hace él es traz márgenes rectilíneos que facilitarán la precisiópn de la tarea. Esto permite distinguir con precisión las etapas fundamentales de la ejecución de un grabado a cargo del artesano, partiendo del recinto rectangular delimitado por el ensamblaje de las piezas que forman la fachada de la casa o granero:

1. Pintar de negro el recinto del grabado.
2. Trazo de los márgenes.
3. Construcción de la retícula.
4. Trazo de otras líneas auxiliares.
5. Trazo de los *mata* (ojos de las volutas).
6. Esbozo de algunas figuras.
7. Talla de las figuras.
8. Perfilado a navaja.
9. Coloreado del diseño.
10. Limpieza de la superficie.

6.4.5 Rois y Salle

Interpelados:	Rois y Salle (Yobel)
Lugar :	Kampung Tambunan (distrito de Sangalla)
Fecha:	05.01.2005
Intérprete:	Nadie (bahasa indonesio)

Apuntes: Anexo D (DVD: Yobel 2ª talla, 2 minutos antes de acabar el corte)

Después que Rois acabase el tercer diseño de la tabla que había empezado Salle decidí preguntarles por la fina retícula sesgada que suele aparecer en las secciones con forma de paralelogramo en la parte triangular de las fachadas sur y norte de los graneros para el arroz. Quiero averiguar si la retícula y, por tanto, las líneas del grabado tallado, deben ser ortogonales y cómo garantiza el artesano su perpendicularidad.

Comienzo trazando en una madera próxima al lugar donde nos hallamos un par de paralelas sesgadas (Fig. 6.47) similares a los perfiles de dicha zona del granero:

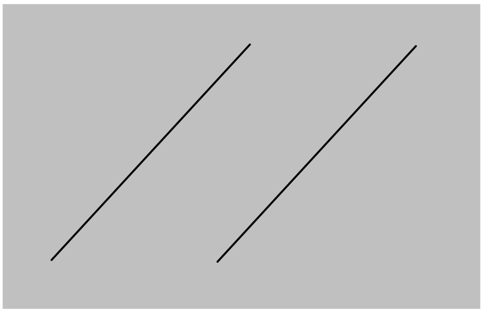


Figura 6.47

M: *Ya. Kalau ini, kalau di lumbung. Kalau mau bikin Pa' Sekong di tempat ini ...*
(Sí. Si esto, en el granero. Si quiero hacer un Pa' Sekong en este sitio ...)

Y mientras hablo completo el paralelogramo (Fig. 6.48):

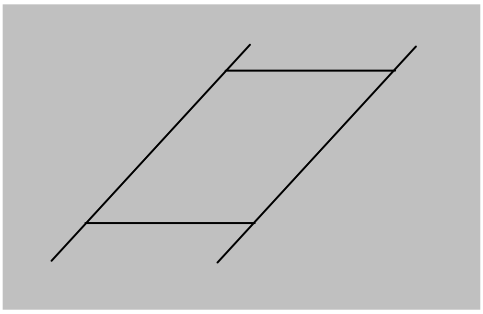


Figura 6.48

Es Rois quien interviene primero:

R: *Ya.*(Sí)

M: *Kalau yang ini …*(Si lo hago así ...)

Y trazo un segmento *s* ortogonal a un lado del paralelogramo (Fig. 6.49):

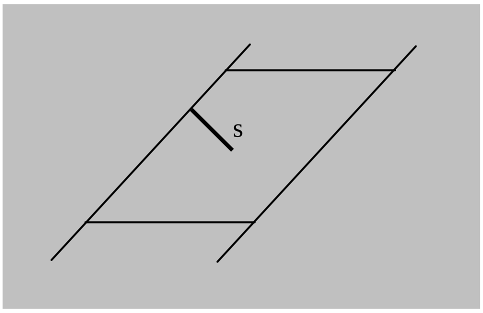


Figura 6.49

M: ... *¿atau?* …(... o ...)

Y trazo otro segmento *s'* (Fig. 6.50) que no es ortogonal al lado del paralelogramo:

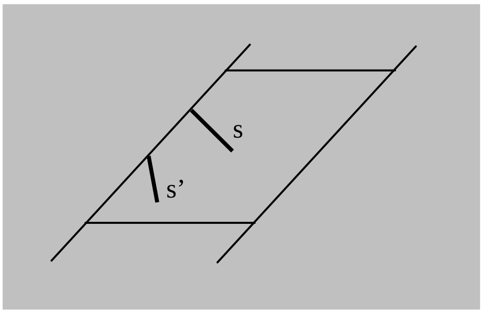


Figura 6.50

M: *Ini tidak bagus.* (Este no está bien.)

Digo esto señalando a Rois el segmento x.

R: *Tidak bagus!* (No está bien.)

M: *Siapa bagus? Apa?* (¿Quién está bien? ¿Cómo?)

R: *Begini kalau mau di kasih bagus ini. di ambil di sini di kasih rata duluh. Baru di ukur di sininya di ukur di atas lagi. Kalau sama di sini, sama …* (Así si lo quieres hacer bien aquí antes has de conseguir que la longitud de éste de aquí sea también la del de arriba.)

Rois completa sus explicaciones trazando un segmento desde el vértice inferior derecho del paralelogramo (A) que incide en ángulo recto sobre el lado opuesto (Fig. 6.51):

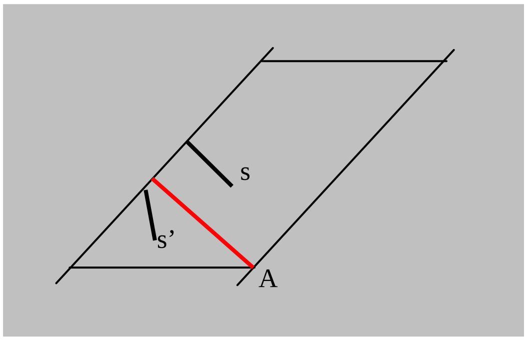


Figura 6.51

Por tanto, lo que ha trazado es una altura del paralelogramo. Rois indica claramente que éste segmento es el que se toma como base para la ocnstrucción posterior:

R: *Kalau sama di sini, sama ...* (Si es igual aquí, igual ...)

Rois traza en el aire, encima del paralelogramo, un cuadrilátero. Salle le interrumpe:

S: *Segi empat!* (¡Cuadrilátero!)
R: *Segi empat!* (¡Cuadrilátero!)
M: *Segi empat!* (¡Cuadrilátero!)
R/S : *Ya!* (¡Sí!)
M: *Ah, ya!* (¡Ah, sí!)

Creo darme cuenta de lo que pretenden y Rois lo confirma al completar el cuadrado inscrito en el paralelogramo y trazar sus diagonales (Fig. 6.52):

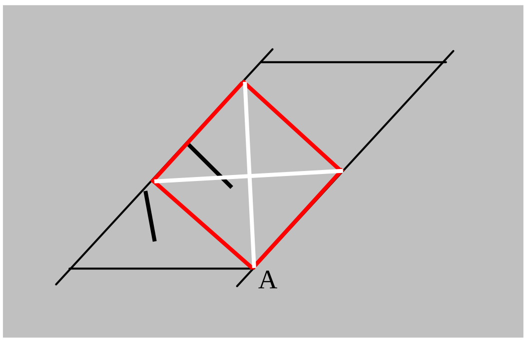


Figura 6.52

R: *Baru di ambil silangya begini.*(Deben cruzarse así.)
M: *Ah, ya.* So, ini, kalau empat, ... ini … (Ah, sí. Aquí, si son cuatro, … aqui,…)
S : *Sama.* (Iguales.)

M: *Sama ini, sama ini, sama* ...(Igual que este, igual que este, igual ...)

R/S: *Sama.* (Iguales.)

M: *Ya! Dan ... ini sampai di sini* ...(Sí. Y ... desde aquí hasta aquí ...)

R: *Bisa di kasih temus di sini. Di ambil begini.* (Puedes Trazarlo así. Hazlo así.)

Y Rois traza una serie de paralelas en el paralelogramo tomando como referencia la diagonal más vertical (Fig. 6.53):

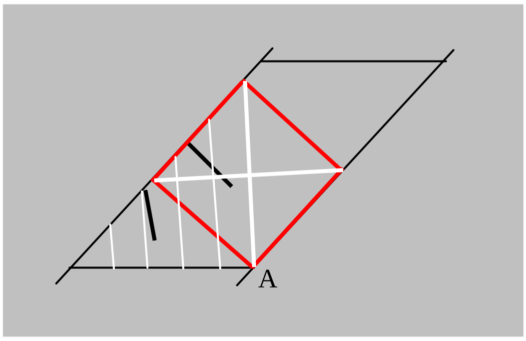


Figura 6.53

Rois deja bien claro el papel de referencia jugado por ésa diagonal en el trazado de un haz de la retícula:

R: *Inikan dasar.* (Así trazas la fundamental.)

S: *Dasar itu.*(Ésa es la base.)

M: *Dasar*. (Base.)

R: *Ya.*(Sí.)

S: *Segi empat.*.(Cuadrilátero.)

R: *Bisa ini sudut di* ... (Puedes en este ángulo de aquí...)

Rois acaba trazando las paralelas del otro haz basadas en la otra diagonal (Fig. 6.54):

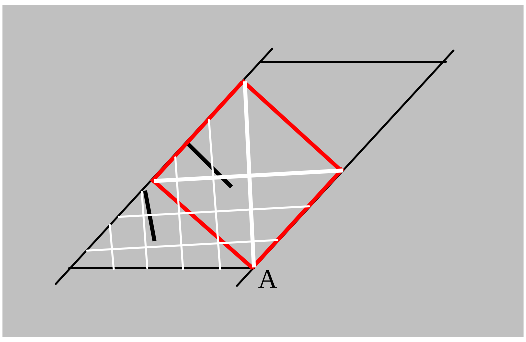


Figura 6.54

***R**:* *Baru di buat di sini.* (Hasta hacerlo llegar aquí.)

Es decir, hasta colmar el ángulo inferior izquierdo del paralelogramo.

***M**:* *Ya! Tapi kalau ... itu ... atau ini …*(Sí. Pero si ... eso ... o esto ...)

Insisto en saber si lo correcto es lo perpendicular. Trazo dos intersecciones de segmentos (Fig. 6.55), una de ellas es una cruz (intersección ortogonal), la otra no:

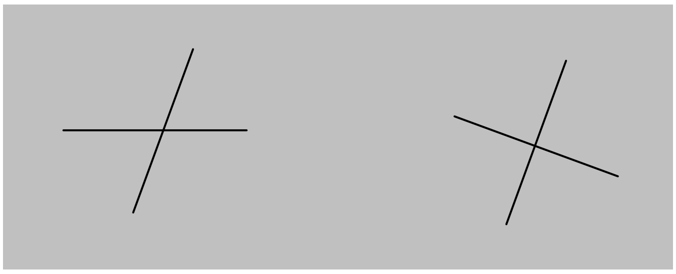


Figura 6.55

***M**:* *Ini atau ini? Semua.* (¿Éste –señalo el primero- o éste? –señalo el segundo. Todos –digo indicando las líneas del paralelogramo trazadas por Rois para que comprendan que me refiero a todas las de la retícula.)

Como callan, completo mis diseños con algunas líneas adicionales (Fig. 6.56) para que vean más claramente a qué me refiero:

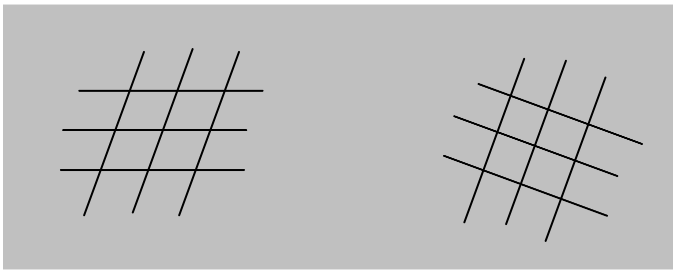


Figura 6.56

Habla Rois:

***R**:* *Inikan beda.* (Éste es diferente.)

No entiendo lo que dice:

***R**:* *Kan be ...* (Distin ...)

***R**:* *Beda kalau di sini..* (Distinto de este –Rois señala el haz de segmentos ortogonales.)

Inikan tidak sa ... anu ... miring ini dan di sini ... (Éste no es igu ... esto ... más inclinado aquí que ahí.)

***S**:* *Kalau … Kalau miring ini kita kasih begini.* (Si ... Si es inclinado –el del paralelogramo- lo hacemos así.)

***M**:* *Ya.* (Sí.)

***R**:* *Tidak bagus kalau miring.* (No está bien si es inclinado.)

***S**:* *Begini.* (Así.)

***M**:* *Ah, kalau ini tidak bagus.* (Ah, si queda así no está bien.)

***R**:* *Tidak bagus kalau miring begini.* (No está bien si queda inclinado como ése.)

***M**:* *Kalau ini?* (¿Y si queda así? –pregunto señalando el haz ortogonal)

***R**:* *Bagus!* (¡Bien!)

***M**:* *Bagus!* (¡Bien!)

Kalau ini ... Namaya itu. (Si es como este, ¿qué nombre tiene?)

No parecen comprenderme.

***M**:* *Kalau ini?* (¿Si es así? – y trazo en el aire un cruz virtual)

***R**:* *Pa' Sepu.* (Pa' Sepu – Rois cita el nombre de uno de los grabados que se realizan con esa retícula)

***M**:* *Ya. Tapi ... kalau tulis ini ... apa namanya ini ?* (Sí. Pero ... si trazo esto – y hago una cruz- ... ¿cómo se llama?)

***R**:* *Garis dasar.* (Línea perpendicuar.)

***M**:* *Garis dasar.* (Línea perpendicular.)

***R**:* *Ya.* (Sí.)

***M**:* *Seperti ... siku-siku.* (Como ... codo-codo.)

***S**:* *Ya. Siku-siku.* (Sí. Codo-codo.)

***M**:* *Kalau siku-siku … ¿ini …* (Si es perpendicular ... ¿ésta –y señalo la retícula ortogonal-.)

Me interrumpe Salle:

***S** :* *Sama juga.* (Igual también – e indica que es igual a la cruz, lo que me indica que se están fijando en los ángulos de las intersecciones.)

***M**:* *... atau ini?* (... ¿o ésta? – señalo la otra retícula.)
***R**:* *Di sini, di sini.* (Aquí, aquí –señalándome a ortogonal)
***M**:* *Di sini.* (Aquí.)
***R/S**:* *Ya.* (Sí.)
***M**:* *Ini bagus.* (Esta es correcta.)
***R**:* *Itu bagus.* (Ésa es correcta.)
***M**:* *Itu tidak bagus.* (Aquella no es correcta.)
***R**:* *Tidak bagus.* (No es correcta.)
***M**:* *Ya. So, ini siku-siku.* (Sí. Esto debe ser perpendicular.)

Queda claro que el segmento trazado por Rois y sobre el que se ha construido el cuadrado y, después, la retícula debe ser perpendicular al otro lado del paralelogramo, una de sus alturas:

***S**:* *Ya, siku.*(Sí, perpendicular.)
***M**:* *Ya, ya. Saya tidak lupa.* (Sí, sí. No lo olvidaré.)

<u>Análisis e interpretación</u>

En el ámbito académico indonesio, *segi empat* significa cuadrilátero, *persegi panjang* es rectángulo y *bujursangkar* o simplemente *persegi* es cuadrado (Harahap y Negoro, 1998). De estas figuras, sólo en el cuadrado y en el rombo se cumple la propiedad de que las diagonales son perpendiculares. Ni Salle ni Rois hablan de *layang-layang* o rombo, pero al referirse al cuadrilátero construido como *segi empat*, no como *persegi*, y destacar el hecho de que tiene los cuatro lados iguales sin señalar sus ángulos rectos (no mencionan nada sobre *siku-siku*), no es descabelado tomar por buena su expresión e interpretar que se basan en el siguiente teorema geométrico para explicar la ortogonalidad de esos segmentos:

Las diagonales de un rombo son perpendiculares.

Sin embargo, atendiendo al carácter riguroso de esta investigación, no podemos pasar por alto el hecho de que el primer lado de este cuadrilátero se ha trazado ortogonalmente al que a la postre sería el segundo. Además, los dos segmentos de partida eran paralelos, por lo que los cuatro lados son, al final, ortogonales (Fig. 6.57):

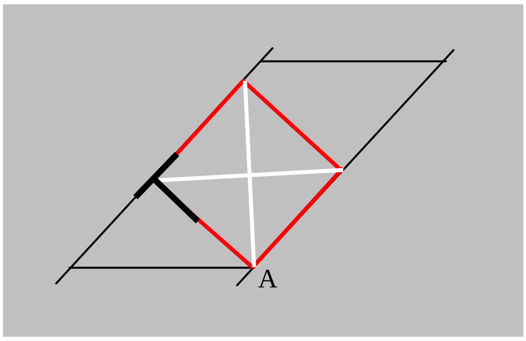


Figura 6.57

Por tanto, estamos en disposición de concluir que los artesanos conocen un caso particular del teorema anterior:

Las diagonales de un cuadrado son perpendiculares.

La confirmación del caso general, el del rombo, no está confirmado.

Por otra parte, y de forma similar a la interpretación del término *segi empat*, en el ámbito académico indonesio *garis dasar* no significa perpendicular. Su traducción literal sería 'línea fundamental' o 'línea de base'. La *Ensiklopedia Matematika* de Negoro y Harahap (1998, p. 111-117) recoge diversos nombres para rectas y segmentos especiales: *garis* (recta), *garis bilangan* (segmento, intervalo), *garis bagi* (bisectriz), *garis berat* (mediana), *garis tinggi* (altura), *garis-garis sejajar* (líneas paralelas) y *garis tegak lurus* (perpendicular). Al hablar de *garis dasar* puede interpretarse que Rois y Salle se refieren a la perpendicular de un segmento, a la que talvez consideren 'línea fundamental' o 'línea hacia la base'. Sin embargo, y puesto que antes han utilizado ya el adjetivo *dasar* para referirse a la cruz, es decir, a la intersección ortogonal de las diagonales, como base del sistema de construcción de la retícula, es más apropiado interpretar que cuando dicen *garis dasar* al ver mi dibujo de una intersección de dos segmentos perpendiculares aluden a ambas, a la cruz misma y a su ortogonalidad, como base del reticulado.

En cualquier caso, la perpendicularidad de la retícula fina de muchos de los diseños toraja es la perpendicularidad de un cuadrado inscrito en el recinto del diseño. De esta manera la retícula pasa a ser una *cuadrícula*.

6.4.6 Salle

Al día siguiente regresé a recoger la tabla ya terminada y aproveché para preguntarle sobre la división en tres partes iguales. Tenía miedo de agotar su paciencia porque la de ayer fue una sesión larga en la que me había mostrado muy persistente, quizá en exceso. Pero no sabía si dispondría de más ocasiones. Así que armándome de valor le señalo una línea horizontal de la retícula del diseño en el que está trabajando y le pregunto:

M: *Kalau di bagi tiga ini, bagaimana bikin itu?* (Si esto hay que dividirlo en tres partes, ¿cómo ha de hacerse?)

S: *Sama itu.* (Igual.)

M: *Ya. Tetapi, kalau di bagi dua, bikin kira-kira.* (sí. Pero, si lo divides en dos, lo haces aproximadamente.)

S: *Ya. Kira-kira.*(Sí. Aproximadamente.)

M: *Ya. Dan yang lebih itu di bagi dua. Tetapi, kalau di bagi tiga?* (Sí. Y lo que sobra se divide en dos. Pero, ¿y si hay que dividirlo en tres?)

S: *Sama. Yang lebih itu di bagi tiga juga! Kalau empat, bisa di bagi empat juga. Sama semua.* (Igual. Lo que sobra se divide en tres partes también. Si es en cuatro, puedes dividir también en cuatro. Todo igual.)

Antes de irme fui testigo de la construcción de la fina retícula de un *Pa' Sekong*. Salle, ayudándose de un listón de bambú, trazó primero los márgenes del espacio rectangular. Luego dibujó un segmento desde el vértice superior derecho hasta un punto, indeterminado para mi, del lado vertical izquierdo y otro segmento que lo cortaba en un ángulo que a mi me pareció recto. Finalmente, fue añadiendo paralelas a ambos segmentos equidistantes según la anchura del listón de bambú. Así completó la retícula (Fig. 6.58) que serviría de base al grabado:

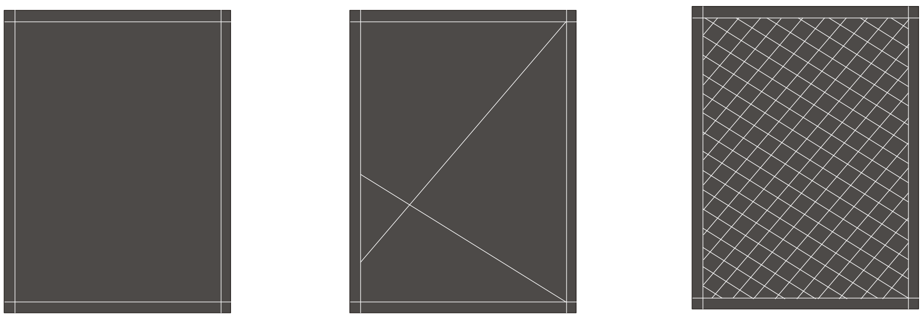


Figura 6.58

Antes de que empezase a labrar las líneas del diseño, le pregunté si las rectas debían ser ortogonales. Como su respuesta fue afirmativa, coloqué un vértice de mi cuaderno de notas justo encima de una de las intersecciones de la retícula y le hice observar que no era este el caso[6]. 'Es aproximadamente recto', dijo, y, acto seguido, hizo lo siguiente. Ajustó el listón de bambú a la base del rectángulo y señaló en él la medida correspondiente a su anchura, después puso el listón sobre un lado vertical del rectángulo e hizo una señal homóloga. Repitió la misma operación en el otro lado vertical y unió ambos puntos con un segmento. Terminó trazando las diagonales de este cuadrado (Fig. 6.59) y afirmando que eran 'siku-siku', es decir, ortogonales:

Figura 6.59

Le pregunté porqué lo eran. - *Pon el cuaderno encima*, me dijo. Lo hice, y al ver que los vértices coincidían, sentenció: -*lo son*. Su hermanastro, Rois, corroboró la sentencia.

Análisis e interpretación

Aunque no poseo una prueba documental como para el caso de la división en dos partes, Salle me confirma la correspondiente versión del método Kira-kira a la división de un segmento en tres partes iguales y, además, su generalización natural a la división en N partes. Esto justifica el increíble éxito del artesano. Considero que la dificultad que atribuye Salle a la división en tres partes iguales se debe a que resulta más difícil estimar el tercio de un segmento que su punto medio. En la experiencia ha tenido más suerte de lo habitual y ha acertado a la primera.

Pese a lo que afirma con respecto a la aplicación del método kira-kira a la partición en cuatro partes, en la interpelación 6.4.1 Yobel (pre Salle) no realizó la división buscando el cuarto del error cometido en la estimación, sino que partió en dos cada una de las mitades previas. Lo cierto es que no parecen existir retículas cuyos número de módulos en filas o columnas sea múltiplo de otros números distintos a 2 y 3. No hay filas con 5 ó 7 módulos. Lo más corriente es que tengan 2, 3, 4, 6 u 8.

[6] El lector puede hacer lo mismo con la retícula de la figura.

Los artesanos no justifican sus resultados con demostraciones, sino en la efectividad práctica. Una prueba formal no les habría servido para mejorar el resultado. Salle podría haber construido la retícula perfectamente ortogonal, haciéndola cuadrícula. Pero si mi análisis de su conocimiento sólo se hubiese basado en la visualización del resultado y en la observación del proceso habría cometido un grave error. Salle sabía más de lo que ambas cosas (obra-acabada y obra-en-curso) mostraban. No basta con analizar el resultado ni observar el proceso, resulta imprescindible interpelar a su autor. Un artesano puede saber más de lo que hace:

> *El análisis tenía que abarcar todas las etapas de la actividad, desde la observación visual de la 'obra-acabada', pasando por la observación de la 'obra-en-curso' y hasta llegar a la interpelación de los autores, a la 'obra-en-proyecto'*[7] (Albertí, 2005).

[7] La obra-en-proyecto de entonces es ahora la obra-explicada.

partes. Esto justifica el increíble éxito del artesano. Considero que la dificultad que atribuye Salle a la división en tres partes iguales se debe a que resulta más difícil estimar el tercio de un segmento que su punto medio. En la experiencia ha tenido más suerte de lo habitual y ha acertado a la primera.

Pese a lo que afirma con respecto a la aplicación del método kira-kira a la partición en cuatro partes, en la interpelación 6.4.1 Yobel (pre Salle) no realizó la división buscando el cuarto del error cometido en la estimación, sino que partió en dos cada una de las mitades previas. Lo cierto es que no parecen existir retículas cuyos número de módulos en filas o columnas sea múltiplo de otros números distintos a 2 y 3. No hay filas con 5 ó 7 módulos. Lo más corriente es que tengan 2, 3, 4, 6 u 8.

Los artesanos no justifican sus resultados con demostraciones, sino en la efectividad práctica. Una prueba formal no les habría servido para mejorar el resultado. Salle podría haber construido la retícula perfectamente ortogonal, haciéndola cuadrícula. Pero si mi análisis de su conocimiento sólo se hubiese basado en la visualización del resultado y en la observación del proceso habría cometido un grave error. Salle sabía más de lo que ambas cosas (obra-acabada y obra-en-curso) mostraban. No basta con analizar el resultado ni observar el proceso, resulta imprescindible interpelar a su autor. Un artesano puede saber más de lo que hace:

> *El análisis tenía que abarcar todas las etapas de la actividad, desde la observación visual de la 'obra-acabada', pasando por la observación de la 'obra-en-curso' y hasta llegar a la interpelación de los autores, a la 'obra-en-proyecto'*[1] (Albertí, 2005).

6.5 RECAPITULACIÓN DE RESULTADOS Y REVISIÓN DE LAS INTERPRETACIONES MATEMÁTICAS

Sampe Pamunu y Martheen Madoi confirman lo mencionado por Lumowah (1985), Nooy-Palm (1988), Sandarupa (1986) y Sande (1991) con relación al simbolismo y a la significación social de los grabados. En ellos se representan aspectos de rango y de relaciones sociales entre los toraja que son 'escritos' (utilizo aquí el significado del término local *Pa' ssura*) en las fachadas de las casas y graneros tradicionales. La relación entre la ornamentación arquitectónica y cultura torajas es incuestionable.

[1] La obra-en-proyecto de entonces es ahora la obra-explicada.

Algunos comentarios de Martheen Madoi, como la existencia de 128 grabados distintos y que los diseños comiencen a tallarse por una esquina determinada, no pueden tenerse en cuenta porque no se corresponden con lo observado en la obra-en-curso y porque además él no es artesano.

Los intérpretes pueden distorsionar las interpelaciones. Si Martheen apenas dejó hablar a Leo, Rasyid introdujo en su traducción opiniones e interpretaciones personales. Ha sido fundamental que el investigador y los artesanos pudiesen comunicarse directamente, aunque fuese en una lengua que ni uno ni otros dominan por completo. Que interpelado e interpelados compartan un mismo nivel de su conocimiento ha beneficiado la investigación.

La tabla 6.2 recopila datos personales de todos los grabadores observados e interpelados. Los espacios vacíos no significan negación alguna, sino ausencia de datos. Por ejemplo, Sampe Pamunu' era un artesano de unos 50 años ya retirado. Si los artesanos más jóvenes no han pasado de la escolarización elemental (hasta los 12 años), es poco probable que Sampe, adolescente en la década de 1960, estudiase niveles superiores.

ARTESANO	Nacido en	Localidad	Años de experiencia	Educación académica	¿De quién aprendió el oficio?
Tiku	1969	Kampung To'na	20		
Leo	1974	Kampung Balik		Elemental	Anciano
Yobel / Salle	1976	Kampung Tambunan	10	Elemental	Anciano
Rombe'		Kete' Ke'su	10	Elemental	Anciano
Seber	1973	Randan Batu	8	Elemental	Anciano
Anton	1975		5		
Medi					
Ajudante Yobel					de Yobel
Sampe Pamunu'	1950		retirado		
Lea		Kampung Ba'tang			
Rois	1974		12	Elemental	Anciano

Tabla 6.2

Las técnicas usadas por los artesanos no se aprenden en la escuela y muestran poco interés en la tecnología más sofisticada que tienen a su alcance. No calculan explícitamente, aunque sí mentalmente, sobre todo a la hora de construir la retícula en la que se basan todos los diseños. Ahí sí interviene la cuantificación de forma explícita pues el trazado de la retícula pasa por la resolución del que es el principal problema geométrico al que se enfrenta el artesano: la división de un segmento en partes iguales.

Esa división no se lleva a cabo con cálculos, sino de forma geométrica y sintética, aplicando un método recurrente convergente hacia la solución que hemos llamado método Kira-kira. Su éxito se basa en la capacidad visual humana y consiste en hacer que el error disminuya hasta hacerse invisible. Eso hace que el procedimiento sea finito. La *Interpretación del método Kira-kira* ha sido confirmada.

Situación geométrica toraja	***Observación***	***Elementos*** (Euclides)
Trazar un segmento y prolongarlo en línia recta.	Tiku	Postulados 1 y 2 (Libro I)
Trazar una circunferencia.	Yobel, Seber, Anton	Postulado 3 (Libro I)
Trazar circunferencias concéntricas.	Yobel	
Determinar el centro de un rectángulo.	Yobel, Rois	
Dividir un segmento en 2 partes iguales.	Kira-kira (compás): Leo, Seber Kira-kira (listón): Yobel	Proposición 10 (Libro I)
	Mediatriz: Ayudante Yobel	
Dividir un segmento en 3 partes iguales.	Kira-kira (listón): Yobel	Proposiciones 9, 10 (Libro VI)
Dividir un segmento en 6 partes iguales.	Kira-kira directo (compás): Anton Kira-kira indirecto (listón): Yobel	
Dividir un círculo en 8 partes iguales.	Yobel	
Trazar la perpendicular a un segmento desde un punto exterior a éste.	Seber	Proposición 12 (Libro I)
Trazar la perpendicular a un segmento desde un punto situado sobre él.	Rombe'	Proposiciones 1 y 11 (Libro I)
Trazar la mediatriz de un segmento.	Yobel , Ayudante Yobel	Proposición 11 (Libro I)
Trazar la paralela a una recta.	Tiku, Leo y Yobel, Seber, Antón, Lea	Proposición 31 (Libro I)
Trazar la tangente a una circunferencia.	Rombe', Seber	Proposición 17 (Libro III)
Trazar la tangente común a dos circunferencias.	Rombe', Seber	
Inscribir un círculo en un cuadrado.	Yobel	Proposición 8 (Libro IV)
Simétrico de un punto con respecto a una recta.	Seber, Antón	
Trazar una voluta	Tiku, Rombe', Leo, Yobel	
Inscribir un cuadrado en un paralelogramo.	Rois, Salle (Yobel)	

Tabla 6.3

Los resultados de las interpelaciones a los artesanos amplían las situaciones a las que los artesanos toraja deben enfrentarse y resolver en el curso de su trabajo. Retomamos pues la tabla 5.15 correspondiente a las *Situaciones geométricas toraja* del capítulo 5 para completarla con esos nuevos resultados (Tabla 6.3). Las filas sombreadas indican una nueva incorporación, ya sea a causa de haber añadido un problema a la primera columna, un artesano a la columna central o una proposición euclidiana en la columna derecha.

Igual que en las observaciones 5.2.9 (Seber), 5.2.2 (Rombe’) y 5.2.12 (Anton), la interpelación 6.3.5 (Rombe’) pone de manifiesto que los artesanos conocen algunos procedimientos exactos y finitos de resolución propios de la geometría euclidiana que el investigador relaciona con el Dibujo Técnico. Sin embargo, no los usan para resolver sus situaciones.

Se distinguen aquí procedimientos diversos. Hay métodos exactos y otros inexactos. Entre los primeros los hay puros y mixtos. En los puros no interviene el ojo y son, es este sentido, más objetivos; en los mixtos, en cambio, se compaginan estrategias visuales con estrategias puras. Entre los procedimientos inexactos se distinguen aquellos basados únicamente en la capacidad visual de los aproximativos en los que se aplica un procedimiento de corrección. Deben distinguirse también aquellos que son usados por los artesanos de los que, pese a ser conocidos, no se utilizan y que aparecen sombreados en la tabla siguiente (Tabla 6.4).

PROCEDIMIENTOS ARTESANALES TORAJA			
Exactos		*Inexactos*	
Puros	*Mixtos*	*Aproximativos*	*Visuales*
Centro de un rectángulo	Mediatriz de los lados de un rectángulo	Prolongación de un segmento	Traza de verticales
Punto simétrico con respecto a un segmento	Paralelas con compás	Tangente común a 2 circunferencias	Traza de horizontales
Perpendicular a un segmento por un punto situado sobre él	Inscribir un cuadrado en un paralelogramo	División Kira-kira de un segmento en partes iguales	Traza de perpendiculares
	Perpendicular a un segmento por un punto exterior		Traza de paralelas
			Traza de volutas
			Bisectriz de un vértice

Tabla 6.4

También pueden completarse ahora la tabla de datos correspondientes a los artefactos utilizados por los artesanos (Tabla 6.5). Los instrumentos necesarios para realizar un grabado son: lápiz, listón de bambú, compás de bambú, gubias, mazo, navaja, piedra para afilarla y pintura de cuatro colores (negra, blanca, roja y amarilla).

HERRAMIENTAS	**Regla**	**Listón bambú**	**Lápiz**	**Compás metálico**	**Compás bambú**	**Escuadra**	**Gubia y mazo**	**Navaja**
Tiku		*	*	*			*	*
Leo		*	*	*			*	*
Yobel / Salle		*	*		*		*	*
Rombe'	*1	*	*	*			*	*
Seber		*	*	*2		*3	*	*
Anton		*	*	*			*	*
Aj. Yobel		*	*	*			*	*
Lea		*	*	*			*	*
Sampe Pamunu’		*	*					
Rois		*	*		*		*	*

Tabla 6.5

1: Sí, pero sólo para los márgenes del espacio del grabado.

2: Sí, porque utiliza las tijeras como compás.

3: Sí, pero no para trazar perpendiculares.

Todos los artesanos trabajan siempre aplicándose a las tablas en posición vertical. ¿Cómo aplicar entonces el método euclidiano para dividir un segmento en partes iguales? La escuadra y el cartabón no se sostendrían en las paredes. Menos aún en aquellas partes de las fachadas inclinadas más de 90º, como la parte triangular superior. Trabajando en las fachadas ya ensambladas se necesitan procedimientos factibles y eficaces, muy prácticos. El método Kira-kira es uno de ellos, ya sea aplicado con listón de bambú o con compás. A Leo le ví hacerlo con el compás, pero no alcanzaba la solución tan deprisa como Yobel.

Muy interesante es la cuestión planteada por Rasyid durante la interpelación a Rombe’ (6.3.5). Si en la región ya se decoraban las cases con grabados antes de que llegasen los holandeses y todavía hoy hay artesanos que apenas saben leer y escribir, ¿de dónde ha salido todo ese conocimiento? Por ahora la única explicación plausible la encontramos en la teoría del conocimiento situado de Lave y Wenger (1990).

6.5.1 Interpretación euclidiana senso-motriz de la geometría de los grabados

Las interpelaciones vuelven a poner de manifiesto que los procedimientos artesanales toraja no son los euclidianos pese a que algunos de éstos son conocidos por los artesanos, como los explicados por Seber (Obs. 5.2.9) y Rombe' (Inter. 6.3.5).

En el trabajo artesanal priman la eficacia y la factibilidad, por lo que los grabadores optan por simplificar su labor. Al fin y al cabo, lo que va a calibrar el error va a ser el ojo. Por tanto, el error que el ojo no detecta, no existe. La visión humana delimita el nivel de precisión. El ojo es un excelente calibrador de la verticalidad, horizontalidad, el punto medio y la bisectriz, por lo que los grabadores toraja basan en él el trazado de ése tipo de puntos y líneas. Además. el ojo se estimula por el cúmulo de señales, como las intersecciones de una retícula o los vértices de un polígono. En el sentido universal de la vista los artesanos hallan un modo objetivo y riguroso (hasta los límites de la percepción visual) de hacer las cosas.

Todo ello hace de la geometría de los grabados una geometría euclidiana situada del plano cuyos procedimientos no euclidianos sí producen elementos euclidianos.

Muchas de sus soluciones se construyen sobre esa capacidad sensorial. Y aunque desde la perspectiva de Davis y Hersh (1988) no pueden ser tomadas como analíticas, pues carecen de expresiones simbólicas, su carácter analógico es más riguroso y objetivo de lo que parece de entrada porque está referenciado. Por tanto, la distinción entre soluciones matemáticas analíticas y analógicas no resulta suficientemente satisfactoria para caracterizar las soluciones artesanales toraja. La *Interpretación euclidiana situada* inspira la discusión sobre este asunto que será tratado en el capítulo siguiente y también el análisis posterior del papel mediador jugado por las herramientas, fundamentales en los procedimientos de resolución, en la cognición matemática.

Desde la perspectiva *interior* de las matemáticas (Apdo. 2.1.2) la geometría toraja es constructivista, pues se caracteriza por construir sus elementos mediante procesos finitos. No basta con la existencia intangible.

Los teoremas fundamentales de esa geometría son:

T1. El paralelismo es una propiedad transitiva.

T2. Las mediatrices de los lados de un rectángulo pasan por la intersección de sus diagonales.

T3. La tangente exterior a dos circunferencias del mismo radio es paralela a la recta que pasa por sus centros.

T4. Las diagonales de un cuadrado son perpendiculares.

La justificación de esos teoremas hay que buscarla en la práctica experimental, más próximas a las soluciones matemáticas analógicas que analíticas.

6.5.2 Interpretación isométrica de los grabados

De algunos comentarios hechos por los artesanos durante las observaciones y de algunas interpelaciones se desprende que la *Interpretación isométrica de los grabados*, un recurso que permite al investigador captar la organización de los elementos que los configuran, no pasa de ser una mera interpretación. Pero no es una interpretación situada porque no refleja el modo en que sus autores, los artesanos, los conciben.

En efecto, los términos con los que se nombran los grabados los relacionan con elementos del entorno natural, social y cultural torajas, no con las isometrías del plano. Incluso existen grabados que ésa interpretación consideraría unidimensionales cuyo nombre no los distingue de su predecesor (Int. 6.3.2: Sampe Pamunu'). Sus términos no aluden a invarianzas bajo translaciones, giros o reflexiones. Dos figuras que la interpretación isométrica relacionaría por reflexión axial o que cuyos aspectos distinguiría por la ausencia de invarianza a giros de 180º, el grabador las relaciona según una perspectiva direccional (izquierda-derecha, arriba-abajo, Norte-Sur, Este-Oeste, etc.). Algo a lo que no contribuye precisamente el hecho de llevar a cabo el trabajo directamente en las fachadas, que no pueden ser puestas boca abajo como si de un papel sobre una mesa se tratara.

Yobel (Int. 6.3.6) corrobora la ausencia de grabados invariantes a giros de 60º y 120º por lo que queda descartada su existencia. En los grabados toraja prima el ángulo recto.

La interpretación isométrica tampoco se ajusta a la perspectiva del investigador. Cuando éste la planteó puso de manifiesto que merced a ese modelo él mismo comprendería mejor los grabados. Pero ante Yobel (Int. 6.3.8) el investigador ha quedado en evidencia. Igual que el artesano no basa en las isometrías del plano las similitudes y diferencias que aprecia en los grabados, sino en la figuración. Las relaciones isométricas constituyen una auto proyección del investigador. Un excelente ejercicio, tal vez, pero no válido para interpretar su modo de percibir la obra.

Para lo que se ha mostrado útil dicha interpretación ha sido para indagar en el modo en que conciben su obra los autores. Pese a su gratuidad, ese modelo podría plantear investigaciones interesantes sobre la concepción que tienen los artesanos de las isometrías del plano.

6.5.3 Interpretación paso a paso (de tortuga) las volutas

De lo manifestado por Yobel (Int. 6.3.7) se confirma el propósito de que las dos volutas que parten del mismo ojo sean paralelas una a la otra y, por tanto, paralelas a sí mismas, auto paralelas. Rois (Int. 6.4.2) confirma también la posibilidad de que el arranque de la voluta forma ángulo recto o llano con su ojo siendo la dirección de éste la de la bisectriz del ángulo recto. Esto valida la *Interpretación pasa a paso de la talla de volutas* y la acerca más a nuestra idea de interpretación matemática situada puesto que incorpora todos los elementos que intervienen en su elaboración:

- Obra-acabada: aspecto final de curvas paralelas con arranque de 45º.
- Obra-en-curso: artefactos usados en su elaboración (gubia, maza y navaja) y su manejo (geometría de tortuga y poligonales de segmentos que la navaja suaviza en una curva derivable).
- Obra-explicada: propósito y explicaciones del artesano (auto paralelismo, arranque de 45º o 135º determinado por un ojo que señala la bisectriz del ángulo recto).

La validación del modelo muestra que el investigador ha sido capaz de adaptarse a la realidad del objeto de su observación, modificando su modelo a medida que profundizaba en su estudio. Es a raíz de la validación sucesiva de los aspectos de su modelo que las preguntas que éste plantea, como el paralelismo de curvas y la curva como límite derivable de poligonales, toman sentido y significación. Hay una retroalimentación continua (*feedback*) entre los diferentes estadios de desarrollo de la interpretación-modelo y el planteamiento de cuestiones pertinentes y relevantes para la investigación.

6.5.4 Interpretación del método Kira-kira

Las observaciones de la obra-en-curso y las interpelaciones de la obra-explicada muestran que el procedimiento kira-kira para dividir un segmento en partes iguales es corriente entre los artesanos toraja, aunque alguno no lo aplique utilizando el listón de bambú, sino el compás. La interpelación 6.3.9 hecha a Yobel tenía como objetivo validar la *Interpretación del método Kira-kira* para la división de un segmento en dos partes iguales. El resultado ha sido cuestionado por el propio investigador al plantearse la duda de si el artesano ha dado con la referencia adecuada precisamente en el curso de la interpelación.

Ésta es una duda difícil de dilucidar en cualquier interrogación, pues al preguntar hacemos que el interrogado se ponga en guardia y reflexione sobre el objeto de la cuestión antes de ofrecer su respuesta. ¿Cómo saber si su respuesta es lo que ya sabía o es consecuencia de esa súbita reflexión?

Las interpelaciones planteadas tras el replanteamiento del apartado 6.3 ayudan a evitar las proyecciones matemáticas. Las interpelaciones 6.4.3 y 6.4.4 confirman la interpretación del método Kira-kira. Esto supone el hallazgo más rico de la investigación, ya que se trata de un procedimiento recurrente no euclidiano para resolver un problema característico de la geometría euclidiana y de alcance general, pues resuelve la división de un segmento en N partes iguales. Los artesanos aplican ése método directamente cuando el número de partes N en los que se ha de dividir el segmento es 2 ó 3 y que realizan aplicaciones indirectas cuando se trata de múltiplos. Por ejemplo, para N=4 dividiendo primero en 2 partes y luego cada mitad en otras 2 (Yobel, Int. 6.4.1); o, para N=6, dividiendo primero en 2 y luego cada mitad en 3 o al revés (Salle, Int. 6.4.3). Observé a Anton dividir de forma directa un segmento en N=6 partes iguales con suma rapidez, pero no pude apreciar en base a qué referencia corrigió el error cometido. En cualquier caso, ya sea de forma directa en 6 partes, por lo que no podemos confirmar con rotundidad la aplicación general absoluta a cualquier número entero de partes. De hecho, las retículas de los grabados toraja no acostumbran a tener 5 ó 7 partes. Por tanto, damos por confirmado el método para N=2,3,4,6 y 8.

Análogamente al caso de la partición en dos partes (Apdo. 5.3.2), la expresión cerrada para los términos a_n de la sucesión de estimaciones convergentes hacia el punto que divide en N partes un segmento de longitud L, siendo *a* la estimación inical, es:

$$\boxed{a_n = \frac{L + \left| N \cdot a - L \right|^{n+1}}{N}} \quad (0 \leq a \leq L)$$

Más valioso resulta todo eso teniendo en cuenta que constituye el paso crucial de la construcción de un elemento fundamental en la ornamentación arquitectónica como son las retículas.

6.5.5 Interpretación de la ortogonalidad sesgada

Se confirma una de las interpretaciones planteadas en el apartado 5.3.6. La construcción de la retícula sesgada se basa en la aplicación de un teorema geométrico elemental. Gracias a él

Salle y Rois justifican la ortogonalidad de los haces de segmentos. Ahora bien, ¿cómo justifican el teorema? Salle ha mostrado como su justificación puede ser experimental al comprobar la perpendicularidad *in situ* mediante un instrumento, la esquina de un cuaderno haciendo de escuadra, del que se sabe o da por sentado que posee ángulos rectos. La justificación es también instrumental.

De todos modos eso no elimina la cuestión de cómo llegó a fraguarse ese conocimiento en el artesano o en aquel que se lo transmitió.

6.5.6 Educación de los artesanos

Los artesanos aprenden su oficio fuera de la escuela. Instruidos por los más expertos (ancianos, abuelos y otros artesanos más experimentados) su aprendizaje abarca los procedimientos seguidos en su actividad. Se da el hecho sorprendente de que incluso procedimientos propios de la geometría euclidiana (simétrico de un punto con respecto a una recta, perpendicular a un segmento) también son transmitidos por abuelos o ancianos.

La educación matemática vigente hoy en día en las escuelas elementales de Tana Toraja sigue el modelo matemático imperante en occidente hasta hace unas décadas. En este sentido, su concepción de las matemáticas es academicista, rígida y formal. No es de extrañar que Rombe' considere que no hace matemáticas.

6.5.7 La comunidad de práctica de los grabadores toraja

Se pone de manifiesto que los artesanos trabajan en pequeños grupos, generalmente formados por un experto y uno o dos aprendices. Sus objetivos son comunes: adornar las construcciones tradicionales. Salvo pequeñas diferencias (compás de bambú), también son comunes los métodos y herramientas que manejan. En su trabajo hablan la lengua local (bahasa toraja), citan los grabados del mismo modo y son capaces de colaborar (Leo y Yobel, Obs. 5.2.5). Por lo que interpretamos que comparten también el mismo argot, especialmente el término *kira-kira*. De todo ello cabe considerarlos una comunidad de práctica.

6.5.8 Un obstáculo en el camino hacia la IMS: el argot

En el capítulo 3 se definió la interpretación matemática situada de una práctica como aquella que se desarrollase en base a los aspectos fundamentales de la práctica en cuestión y que estructuramos en obra-acabada (el producto elaborado), obra-en-curso (el proceso de elaboración) y obra-explicada (las justificaciones y propósitos de los artesanos).

Todos esos aspectos han sido tratados en profundidad menos uno. Se trata de un aspecto fundamental en toda actividad humana, pero que aquí vamos a tener que dejar de lado por una imposibilidad insalvable. Estamos hablando de la lengua, el argot, en que los artesanos se refieren a su trabajo y se comunican entre sí. Como ya se ha observado los grabadores toraja no hablan inglés. Han sido gracias a unos escasos conocimientos del bahasa indonesio que artesanos e investigador han podido comunicarse con cierta fluidez. Pero su lengua materna y con la que trabajan y se comunican es el bahasa toraja, una lengua que todavía no habla el investigador (aparte de cuatro o cinco palabras cordiales).

De las observaciones e interpelaciones se entrevé la existencia de un vocabulario autóctono (toraja) con el que los grabadores se refieren a sus elementos geométricos. Unos pocos de esos términos han aparecido a lo largo de este capítulo y del capítulo anterior.

7

ARTEFACTOS
Y COGNICIÓN MATEMÁTICA

Las herramientas se constituyen en vehículo transmisor del rigor y precisión que uno quiere dar a su trabajo. Con su ayuda el artesano supera los obstáculos, por lo que son un elemento principal del modo en que se resuelve una situación. Para que la IMS sea verdaderamente situada debe incorporar el estudio de los aspectos cognitivos derivados de los artefactos utilizados en la práctica.

Las observaciones de la obra-en-curso (Cap. 5) y las interpelaciones a los artesanos (Cap. 6) han puesto de manifiesto que los artefactos toraja (Ilustración 1, al final de este capítulo) se organizan en cuatro grupos: (1) lápiz y listón de bambú; (2) compases; (3) gubia y mazo; (4) navaja.

Para analizar el papel mediador que tienen las herramientas en el conocimiento matemático atenderemos a los primeros de los aspectos destacados por Abreu (2000) con relación a las herramientas culturales. Por una parte, el modo en que las herramientas culturales están lógicamente organizadas. Por otra, el modo en que herramientas específicas limitan la resolución de problemas.

Ambos aspectos ya han protagonizado este trabajo. Si el primero de ellos remite a la cuestión de cómo son las herramientas, cómo se organizan y qué ideas matemáticas conllevan; el segundo plantea su potencial en cuanto a la resolución de problemas. En un sentido las herramientas permiten hacer más y mejor aquello que se hace sin ellas, pero al mismo tiempo fuerzan a quien las maneja a formas más o menos encorsetadas de actuar y resolver las situaciones a las que se enfrenta. Según ese plan se examinan a continuación los utensilios toraja.

7.1 HERRAMIENTAS DE LOS GRABADORES TORAJA

7.1.1 Lápiz y listón de bambú

El lápiz y el listón de bambú se utilizan en pareja para trazar segmentos rectilíneos, para tomar medidas y para transportarlas a diferentes lugares. La rectitud del listón procede de las propiedades naturales del bambú. Cuando un trozo de caña de bambú entre dos nudos consecutivos se secciona longitudinalmente de un golpe, se obtienen dos mediacañas con filos asombrosamente rectilíneos. En caso de que el resultado no sea suficientemente perfecto, el artesano tratará de arreglarlo como puede verse en el vídeo referente a la validación del método Kira-kira.

¿Qué se hace con el lápiz? ¿Y con el listón? El análisis del compás de bambú, pese a estar construido con un listón de ese material, se reserva para el apartado siguiente. Se trata de un compás, no de una regla. Las siguientes son las acepciones lingüísticas de lápiz y regla:

Según el diccionario un lápiz es una 'barrita de grafito encerrada en un cilindro o prisma de madera y que sirve para escribir o dibujar' (R.A.L.E., 1992). Y así es el lápiz que usan los artesanos toraja, exactamente iguales que los occidentales. Algunos, incluso, están decorados con motivos propios de la industria publicitaria norteamericana. También su uso coincide con lo expresado por el diccionario, especialmente por lo que se refiere a dibujar o hacer marcas, pero los artesanos no los usan para escribir. No anotan símbolos ni números en ningún momento de su trabajo.

Una regla es un 'instrumento de madera, metal u otra materia rígida, por lo común de poco grueso y de figura rectangular, que sirve principalmente para trazar líneas rectas, o para medir la distancia entre dos puntos' (R.A.L.E., 1992). El listón de bambú se utiliza como regla para trazar líneas rectas, aunque es ligeramente flexible, una propiedad que no recoge el diccionario, pero muy corriente hoy en día de las reglas de plástico que manejan los estudiantes de todo el planeta. En cambio, el listón no se usa para medir distancias, carece de sección graduada en centímetros y milímetros como es propio de las reglas escolares. El artesano registra una longitud determinada en el listón para transportarla a otro lugar sin saber cuál es exactamente su medida pues no dispone ni usa ninguna unidad de medida como patrón.

El lápiz en contacto con una superficie determina un punto que al ser movido por la mano se pone en movimiento dejando un vestigio continuo. Entonces aparece la curva como resultado de ese punto en movimiento. También se usa el lápiz para establecer una correspondencia entre puntos homólogos correspondientes a los extremos de una longitud o distancia.

¿Cómo debemos considerar el listón de bambú que actúa como soporte del registro de dicha correspondencia? ¿Cómo un conjunto discreto de puntos o como un fragmento del continuo que es la recta real matemática? Basándonos en la actividad del artesano y en el hecho de que dado un punto cualquiera sobre un segmento puede señalar un homólogo suyo sobre el listón, uno podría verse tentado de afirmar que el listón es un continuo, un fragmento de la recta real. Pero recordemos que aparte del registro de marcas homólogas y del trazo de líneas rectas, el listón sólo se usa para señalar las sucesivas estimaciones hacia una fracción del total de un segmento dado. Estimaciones que, a su vez, se obtienen por división natural (dos, tres, cuatro partes) del residuo sobrante o restante y cuyo límite es alcanzado gracias a la limitada capacidad de la visión humana. Puesto que, evidentemente, ésta no puede distinguir un racional de un irracional y que el objetivo del artesano es la búsqueda de una fracción entera del total, concluimos que el listón de bambú representa un modelo para Q, el conjunto de números racionales. No hay motivos ni situación alguna en la geometría toraja que invite a pensar de otro modo. Esto no quiere decir que la concepción de los artesanos no sea la del continuo. Si se les hubiese interpelado con respecto a esto podrían haber respondido afirmativamente, pero lo que decimos es que del modo en que se utiliza el listón no puede concluirse otra cosa que no sea una consideración racional del listón. El artesano puede dar como buena una partición en dos tres o cuatro partes iguales, pero no puede basar en los mismos parámetros una partición irracional. En una palabra, que la geometría de los grabados toraja carece de un problema cuya solución precise una solución irracional. La tabla 7.1 recoge las características del lápiz y el listón.

HERRAMIENTA	**Características físicas**	**¿Para qué se usa?**	**Características de uso**
Lápiz	-barra de grafito enfundada en un tubo de madera.	-Señalar puntos. -Trazar líneas con o sin el apoyo de otras herramientas.	-Eficaz sobre cualquier inclinación: horizontal, vertical o invertida.
Listón de bambú	-Ligeramente flexible. -Rectilíneo. -Perfil rectangular.	-Trazar líneas rectas. -Trazar rectas de mayor extensión que su propia longitud conectando una serie de segmentos en la misma dirección. -Registrar y trasladar longitudes. -Aplicar el método Kira-kira.	-Sirve como superficie donde registrar las longitudes que se toman.

Tabla 7.1: Lápiz y listón de bambú

7.1.2 Compases

¿Qué es un compás? ¿Para qué se utiliza? Se emplea para dibujar circunferencias y arcos y, probablemente, para trazar la mediatriz de un segmento. ¿Para qué más podría emplearse? Cuando intentamos encontrar las posibles respuestas a estas preguntas quienes pertenecemos a una cultura occidental pensamos en un compás concreto. De hecho, pensamos en el compás estándar de metal occidental del cual encontramos definiciones en los diccionarios:

> Un instrumento formado por dos piernas agudas, unidas en su extremidad superior por un eje o clavillo para que pueda abrirse o cerrarse que sirve para trazar curvas regulares y tomar distancias. (Diccionario R.A.L.E., 1992)

> Instrumento para trazar arcos de circunferencia, tomar distancias, etc.[1] (Diccionario Pompeu Fabra, 1991)
>
> Instrumento para trazar arcos de circunferencia y también para tomar distancias, que consiste en dos ramas o brazos unidos por una de sus extremidades, generalmente con un pasador.[2] (Enciclopèdia Catalana, 1976)
>
> Un instrumento para dibujar círculos y arcos y medir distancias entre puntos, consistente en dos brazos ligados por una unión articulada.[3] (Diccionario Oxford: Pearsall, 1999)

En un compás occidental los dos brazos tienen extremos distintos, uno acabado en una aguja y el otro en una punta de lápiz. El primero sirve para fijar el instrumento en una posición que se convierte en el centro del arco o circunferencia trazados, el segundo crea una línea en la superficie cuando todo el artefacto gira alrededor del extremo fijo. El segmento invisible entre los extremos de ambos brazos determina el radio de la circunferencia trazada. Esta circunferencia surge del movimiento en el espacio tridimensional de un triángulo virtual establecido por ese segmento imaginario y los dos brazos. Rara vez uno de estos brazos será el eje de rotación de todo el artefacto, ya que esto sólo ocurrirá cuando el brazo de la aguja esté perpendicular a la superficie y el brazo del lápiz sea más largo.

Seguramente el lector o lectora habrá tomado alguna vez una distancia con un compás occidental, pero, ¿ha medido algo con él? A diferencia de las definiciones de los diccionarios de la R.A.L.E. y del Pompeu Fabra, el diccionario Oxford habla de 'medir' con el compás, el mismo compás occidental. Si ha medido alguna vez algo con el compás, ¿cuál fue el resultado de la medición? Los compases no son reglas. Algunos tienen una pieza curva añadida marcada con divisiones en grados donde se puede leer la medida del ángulo abierto entre los brazos. Pero los compases no miden longitudes. Lo que seguramente quiere decir el diccionario Oxford es lo que otros sí especifican, es decir, que un compás puede emplearse para tomar una distancia y situarla en otra ubicación. Este es el uso euclidiano del compás[4].

Hasta aquí se han descrito las características del compás occidental estándar sin un soporte visual, sólo verbalmente. Se puede observar fácilmente cuántas ideas matemáticas son necesarias para crear una descripción precisa de este artefacto. La definición del diccionario de un compás se centra en dos aspectos fundamentales de cualquier herramienta: su descripción física y su uso. Siempre podemos tener una definición lingüística de una

[1] Traducción del original en catalán.
[2] Traducción del original en catalán.
[3] Traducción del original en inglés.
[4] ¿A qué se referirá el 'etc.' presente en la definición del diccionario Pompeu Fabra?

herramienta, pero creemos que los conceptos y las ideas generadas al usarla constituyen su aspecto más importante.

¿Qué diría que es un compás de bambú? La palabra compás probablemente le llevará a pensar en el compás metálico occidental que puedes imaginar hecho de bambú, quizá con los brazos unidos por una cuerda. ¿Qué diría si le dijesen que el compás de bambú se emplea para trazar circunferencias y que está compuesto por tres piezas, siendo una de ellas un clavo o aguja? El producto del compás, una circunferencia, y la 'aguja' son otras coincidencias con el compás en el que piensas. Probablemente creería que la aguja se utiliza para situar el centro del arco a dibujar. ¿Y qué pensaría si supiera que un compás de bambú tiene dos brazos? Seguramente pensaría, como cualquier occidental, que es una versión en bambú del compás corriente que conoce.

Un compás de bambú consta de tres elementos: un listón de bambú, un clavo o aguja, y un lápiz. Pero sería difícil visualizar cómo se pueden disponer esas piezas en un compás si no tuvieras la oportunidad de ver cómo se usa esta herramienta. Este compás se crea clavando en una pared un pequeño listón de bambú por uno de sus extremos. Introduciendo la punta de un lápiz a través de un orificio realizado en el otro extremo del listón y moviéndolo sobre el plano vertical (a izquierda y derecha, arriba y abajo) se traza un arco circular.

Las características físicas del compás de bambú encajan con las definiciones occidentales de compás dadas por los diccionarios: tiene dos brazos (el listón de bambú y el lápiz) con una unión articulada. También se ajusta al hecho de dibujar arcos y circunferencias. En cambio, no se usa para trasladar distancias, una práctica muy relevante desde el punto de vista matemático como se pone de manifiesto en un diccionario matemático: 'Instrumento de dibujo que permite trazar circunferencias y, sobretodo, trasladar distancias' (Bouvier y George, 1984).

El artefacto occidental más parecido al compás de bambú es el llamado *compás de vara*, que consiste en una 'regla con una punta fija en uno de sus extremos y otra movible a lo largo de ella, y sirve para trazar curvas de gran diámetro' (Espasa-Calpe, Diccionario manual ilustrado de la lengua española, 1989: 391). El compás de vara y el de bambú son similares en cuanto a las características físicas y de funcionamiento. Sin embargo, hay dos diferencias muy destacas. Con el de vara se dibujan grandes circunferencias; con el de bambú, pequeñas. El de vara resulta inutilizable en planos verticales; el de bambú es perfecto en ellos.

Los artesanos toraja utilizan listones de bambú para trasladar distancias, pero esto no ocurre con el compás de bambú (Albertí, 2005). Puesto que dicho instrumento se usa exclusivamente para trazar arcos y circunferencias y quienes lo usan le llaman compás, nosotros también lo llamaremos así.

Entonces, si es un compás, ¿qué lo diferencia del estándar? Hay dos diferencias principales. La primera, el radio del compás estándar es invisible, implícito, mientras que, por el contrario, en el de bambú es visible, explícito. La segunda, si cambia el ángulo entre los brazos del compás estándar la circunferencia trazada cambia de radio, pero la dibujada con un compás de bambú conserva su radio aunque se modifique el ángulo entre sus dos brazos (Fig. 7.1):

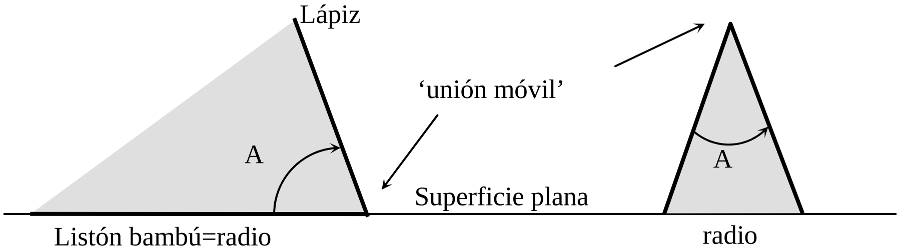


Figura 7.1: Triángulos implícitos en el compás de bambú y en el estándar

Los grabadores toraja también emplean otro compás estándar: el de dos puntas. En él cada uno de sus extremos puede ser centro de la circunferencia. Las circunferencias trazadas con este compás ya no están dibujadas, sino rayadas en la superficie de madera. Esta propiedad de centros intercambiables parece ser la razón principal por la que un grabador utilice unas viejas tijeras oxidadas como compás. Por una parte, ambos extremos son iguales, acaban en punta y rayan la madera, cualquiera de los dos sirve de centro. Por otro, su oxidación, característica también compartida por la inmensa mayoría de los compases metálicos empleados en la región, las hace muy valiosas, ya que resultan difíciles de abrir o cerrar por lo que una vez elegido un radio éste no se perderá con facilidad.

Este compás sirve además para trazar de una vez un par de segmentos paralelos a uno dado (Ilustración 2, al final del capítulo) si se usa de modo apropiado (Fig. 7.2):

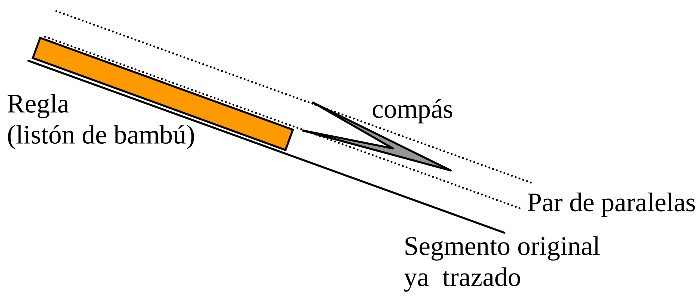


Figura 7.2: Cómo trazar de una vez con el compás dos paralelas a un segmento dado

La tabla 7.2 resume los principales aspectos de esos tres artefactos. Consideramos el compás de dos agujas como estándar.

COMPASES TORAJA	**Características físicas**	**¿Para qué se usa?**	**Características de uso**
Estándar (lápiz)	-Dos brazos. -Colapsable.	-Trazar circunferencias. -Tomar longitudes. -Dividir un segmento en partes iguales: el método Kira-kira.	-El extremo de la aguja es el centro de la circunferencia. -Determina un triángulo. -Radio invisible. -Radio variable. -La variación del ángulo de sus brazos implica variación en el resultado.
Estándar (agujas)	-Dos brazos. -Colapsable.	-Trazar circunferencias. -Tomar longitudes. -Dividir un segmento en partes iguales: el método Kira-kira. -Trazar paralelas dobles a un segmento dado.	-El extremo de la aguja es el centro de la circunferencia. -Determina un triángulo. -Radio invisible. -Radio variable. -La variación del ángulo de sus brazos implica variación en el resultado.
Bambú	-Dos brazos. -No colapsable.	-Trazar circunferencias.	-Determina un triángulo. -Radio visible. -Radio fijo. -La variación del ángulo de sus brazos no implica variación en el resultado.

Tabla 7.2: Compases toraja

Estas herramientas no se usan en superficies de madera horizontales, sino en las verticales de las fachadas de las casas y graneros tradicionales toraja. Es más, también se utilizan para decorar las superficies convexas de objetos cilíndricos como recipientes de bambú o ataúdes. Todas ellas producen arcos circulares y este es el motivo principal de su uso, pero no el único. Los artesanos toraja también utilizan los compases estándar, pero no el de bambú, para dividir un segmento en partes iguales siguiendo el método llamado Kira-kira (Albertí, 2005) y que vamos a exponer a continuación. Este papel no tiene equivalente en la cultura occidental. El uso occidental de un compás incluye su participación en el proceso de división de un segmento en dos partes iguales, pero se trata de un procedimiento euclidiano, no de uno recurrente como sucede con el compás estándar toraja. Se plantea una cuestión interesante: la utilización del compás estándar en el método kira-kira para dividir un segmento en partes iguales, ¿es una versión adaptada del uso del listón de bambú en ese procedimiento o es al revés?

Para dividir un segmento en dos partes iguales con un compás estándar siguiendo el método Kira-kira seguido de los artesanos toraja el primer paso es hacer una estimación a_1

del que parece ser (a ojo) el punto medio del segmento, tomar esa longitud abriendo el compás y hacer en el segmento la señal correspondiente (Fig. 7.3):

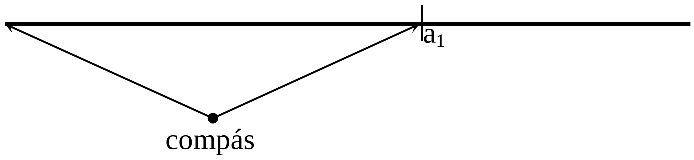


Figura 7.3

Acto seguido se averigua si se ha cometido algún error en la estimación trasladando la medida tomada en el compás para ver si su doble, es decir, el segmento de longitud $2 \cdot a_1$, coincide con el extremo del segmento. Si coincide, la partición es correcta. De lo contrario, deberá corregirse. Para ello el artesano busca la mitad entre el extremo del segmento a dividir y la punta del compás. Abre o cierra su ángulo aumentando o disminuyendo, según el caso, la longitud que determina (Fig. 7.4). Y puesto que lo hace buscando el punto medio del error cometido, el nuevo valor a_2 pretende ser el punto medio entre P y Q:

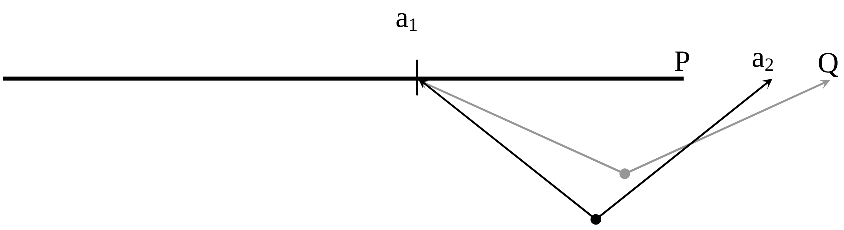


Figura 7.4

A diferencia de aquellos artesanos que hacen lo mismo con listones de bambú, el grabador que usa el compás hace esa segunda estimación a_2 en el aire, no tiene donde registrarla. Una vez hecha, devuelve el utensilio a su posición inicial, sin cerrarlo, para señalar el nuevo resultado a_2 de su estimación sobre el segmento (Fig. 7.5):

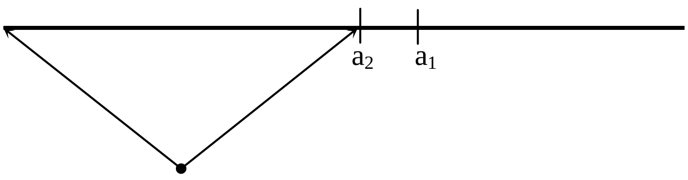


Figura 7.5

Tras ello deberá averiguar si esta nueva estimación determina precisamente el punto medio del segmento. Valorará el error cometido trasladando el compás hacia la derecha y, si es pertinente, efectuar otra corrección del mismo modo que antes, esto es, buscando la mitad del error cometido (Fig. 7.6):

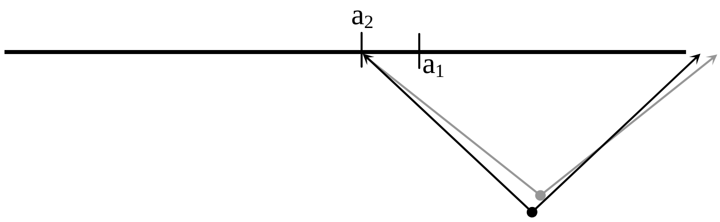


Figura 7.6

Se obtiene la tercera estimación, a_3, y también se señala en el segmento (Fig. 7.7):

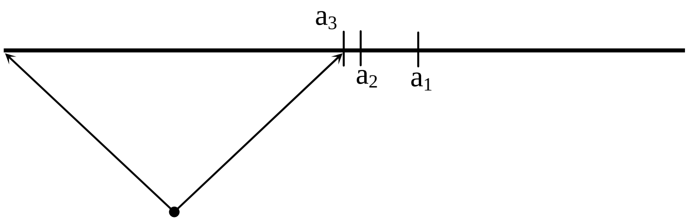


Figura 7.7

Este proceso va aplicándose indefinidamente hasta que el último error cometido (Fig. 7.8), o bien es nulo, o bien resulta imperceptible a los ojos de quien lo sigue:

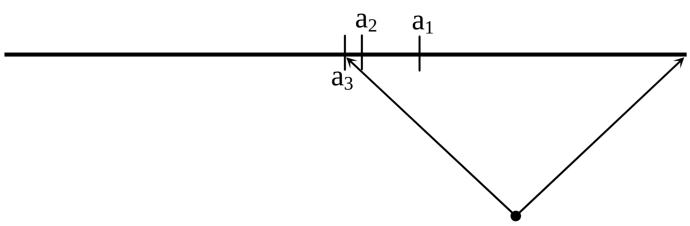


Figura 7.8

Si el segmento a dividir debe serlo en tres partes, la corrección de cada estimación se hará buscando el tercio del error cometido. Lo mismo vale para el caso de una partición en N partes iguales. Así piensan los artesanos toraja cuando utilizan ese método recurrente llamado Kira-kira para resolver este problema matemático fundamental el análisis matemático del cual demuestra que proporciona una sucesión exponencial convergente hacia su punto medio, tercio, etc. (Albertí, 2005).

El problema del compás, como ya se observó anteriormente, es que no hay registro de las correcciones del error, se hacen en el aire. Sin duda eso influye en la rapidez con la que se alcanza la solución.

7.1.3 Gubia y mazo

Las herramientas usadas para tallar son dos: una gubia de hierro y una maza de madera que la golpea sin deformarla. A cada golpe de la maza, la gubia labra un surco más o menos largo, más o menos profundo, según la fuerza del impacto y el ángulo de incidencia de la gubia contra la tabla.

Una gubia es un ‘formón de mediacaña, delgado, que usan los carpinteros y otros artífices para labrar superficies curvas’(Diccionario R.A.L.E., 1992). Lo cierto es que la mediacaña mencionada en el diccionario es un ángulo en el caso de las gubias de los grabadores toraja (véase en el Anexo F: Salle 2ª talla, como el artesano la afila al inicio de la grabación). Pero sí hay coincidencia en el uso.

Un mazo es ‘un martillo grande de madera’ (Diccionario R.A.L.E., 1992). Los mazos que emplean los grabadores suelen estar hechos de una sola pieza de madera, la parte más fina haciendo de mango y dejando la más gruesa para golpear.

ARTEFACTO	**Características físicas**	**¿Para qué se usa?**	**Características de uso**
Gubia	-Formón en ángulo. -Metálica.	-Para labrar la madera.	-Produce un pequeño surco rectilíneo. -Las curvas labradas son, en realidad, poligonales.
Mazo	-Madera.	-Para golpear la gubia.	-Su golpe determina la dirección, profundidad y longitud del surco labrado.

Tabla 7.3: Gubia y mazo

7.1.4 Navaja

La calidad de la madera en la que se hacen los grabados hace que la curva tallada sea bastante suave pese a que su realidad íntima sea la de una poligonal, pero esto no impide que los perfiles se suavicen con una navaja, ya sea con objeto de embellecer el resultado o para eliminar estas esquinas. La definición de navaja del diccionario no es la más apropiada aquí, por lo que tomamos como referente la de cuchillo, aunque mantendremos el término navaja por ser más propio del lenguaje artesanal.

Un cuchillo es un ‘instrumento para cortar formado por una hoja de metal de un corte solo y con mango’ (Diccionario R.A.L.E., 1992). Si el perfilado a navaja embellece la curva es porque la suaviza o, como diría el investigador matemático, la hace derivable.

La tabla 7.4 recoge características de la navaja:

ARTEFACTO	**Características físicas**	**¿Para qué se usa?**	**Características de uso**
Navaja	-Filo metálico acabado en punta con el otro extremo enfundado en un mango de madera.	-Perfilar curvas talladas. -Trazar cortes que limiten la acción de la gubia.	-La punta de la navaja secciona los ángulos que deja la gubia al labrar la madera. -Hace que el acabado de las curvas labradas sea mucho más suave.

Tabla 7.4: Navaja

7.2 LAS HERRAMIENTAS TORAJA COMO MEDIADORAS COGNITIVAS

7.2.1 Organización lógica de las herramientas culturales

<u>Lápiz y listón de bambú</u>

El lápiz puede actuar solo, gobernado por la mano. El contacto del lápiz con la superficie en la que se apoya determina y traza un punto. Al mover la mano la punta del instrumento deja un rastro vestigio del movimiento de aquel punto sobre el plano. Aparece una línea de dirección variable según el capricho de quien maneja el lápiz. Cada instante en que la mano aparta el lápiz de la superficie en contacto el vestigio queda interrumpido, la línea discontinua. El ángulo de incidencia del artefacto sobre la superficie en la que se aplica es irrelevante para el resultado.

El listón de bambú no actúa solo, siempre sirve de apoyo al lápiz determinando la dirección que debe seguir haciendo de regla. El rastro del lápiz refleja su perfil. Si el borde del listón no es realmente rectilíneo, la línea trazada tampoco lo será. El artesano es el que da forma al listón, aunque éste, gracias a una propiedad natural del bambú, al ser cortado se desprende ya con perfiles muy rectilíneos. Ésa propiedad y la de su abundancia son sin duda los motivos por los que se le prefiere por encima de otras maderas o materiales. Así que la función del listón como regla es la de determinar una dirección, no la de medir (Fig. 7.9).

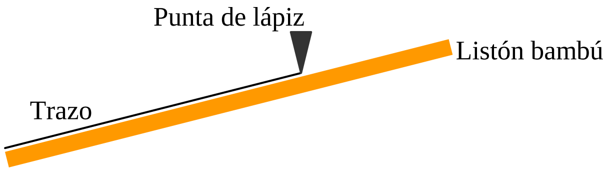


Figura 7.9: El lápiz y el listón en acción

El artesano no cuantifica en el listón las medidas que toma. Sólo las transporta. Ésta es su otra función, la de registro documental. Una función en la que se establece una correspondencia 1-1 entre el listón y el segmento al que se acopla. Cada punto de un segmento se corresponde con su homólogo en el otro. Las marcas que el grabador practica en el segmento móvil (el listón) reproducen las señaladas en el fijo (margen de un diseño) y al revés. Y no sólo entonces, también cuando se traza una línea recta con él, pues el lápiz no hace sino seguir, punto a punto, 1-1, el borde del listón. En ambos casos la correspondencia es biyectiva y en ella se pone de manifiesto el carácter universal de la magnitud que llamamos longitud, siendo ésta independiente del origen (cómo se trazó), trazado (dibujo a lápiz, corte a navaja o labrado por la gubia) y localización en el espacio del segmento en cuestión.

Compases

Lo que realmente hace quien usa un compás estándar es girar un triángulo virtual alrededor de un eje de rotación implícito y, casi siempre, invisible. Esto ya se ha afirmado antes al describir el compás estándar como herramienta. Ahora ampliaremos esta cuestión.

Cuando se emplea adecuadamente este compás se alza en un triángulo isósceles sobre el plano cuyo ángulo característico determina la longitud del radio. El plano que contiene este triángulo alzado no será necesariamente perpendicular al plano que contiene la circunferencia trazada y ésta, teóricamente, incluso sería la misma aunque el triángulo yaciese sobre el plano de ella. Realmente, y para dominar mejor la herramienta, ese triángulo (el compás) se manejará con cierta inclinación. De otro modo sería difícil girarlo, dado el funcionamiento del pulgar, el índice y la mano entera.

Su llamamos O al punto en el que se unen los dos brazos del compás, se pueden distinguir dos acciones diferentes al trazar una circunferencia. El primer caso (Fig. 7.10, izquierda) es el más habitual y corresponde al uso adecuado de este artefacto. Se tiene que rotar toda la herramienta, así el punto O describe una circunferencia diferente de la trazada por el lápiz del compás. En el segundo caso (Fig. 7.10, derecha) el brazo de la aguja del compás se convierte en el eje de rotación y el punto O describe la circunferencia más pequeña posible, esto es, un punto. Así, este punto O es el centro de rotación de la herramienta. Pero esto ocurre sólo si el brazo de la aguja se mantiene perpendicular al plano y el otro brazo es más largo que éste.

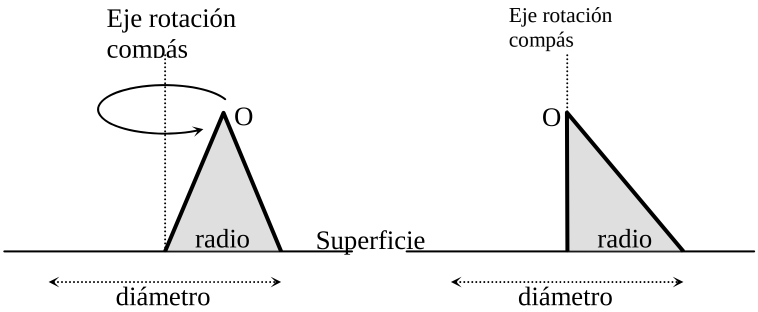


Figura 7.10: Vista horizontal de un compás estándar en acción

Cuando se utiliza un compás de bambú se introduce el lápiz en un pequeño agujero practicado en un extremo del listón de bambú mientras se fija el otro con una aguja. Para trazar el arco de una circunferencia el lápiz debe moverse junto con el listón, el radio. Así se traza la curva en la madera como si fuera en el papel. Al igual que sucede con otros compases no es necesario que el lápiz se mantenga perpendicular al plano de trazado, inclinándolo un poco se obtiene el mismo resultado (Fig. 7.11).

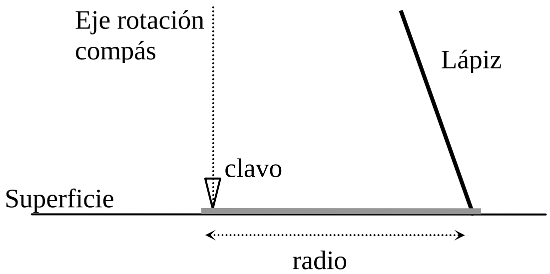


Figura 7.11: Vista horizontal de un compás de bambú activo

Por su característico radio visible podemos afirmar que la definición de circunferencia como ‘el lugar geométrico de los puntos equidistantes a un punto dado tomado como centro’ no sólo es apropiada para este compás, sino que también es la descripción de su producto.

Es más, la concepción del círculo como ‘la zona o superficie barrida por el radio’ también es una descripción literal de lo que hace la herramienta, en concreto el listón de bambú al rotar en torno al punto donde está anclado. El rastro dejado por el lápiz es la frontera entre lo que barre el radio y lo que no, el límite del círculo. Lo que nos aproxima a la concepción matemática del círculo, es decir, la superficie limitada por una circunferencia.

Esta relación entre el producto y su definición es más estrecha en este compás que en el estándar, donde el radio es invisible y lo girado no es realmente el radio, sino un triángulo en el espacio. Manejando un compás de bambú uno ve y hace lo esencial de lo que se concibe, la circunferencia. Por un lado, se ve como surge una circunferencia de un conjunto de puntos que están a la misma distancia fija (dada por la longitud del listón de bambú) de otro punto fijo (dado por la aguja). Por otro lado, se ve como la mano del usuario acompaña el radio creando una circunferencia.

Los compases euclidianos son colapsables, cada vez que se los aparte de su lugar los brazos se cierran y el radio se pierde. Puesto que esto no ocurre con el compás de bambú, hay que tomarlo como un compás no colapsable y, por tanto, declararlo como herramienta no euclidiana en este sentido. Ésta propiedad lo hace adecuado para utilizar cuando se tienen que producir muchas copias de la misma circunferencia en distintos momentos. En las paredes de un granero se tienen que tallar unos 20 diseños llamados *Pa' Tedong* basados en la misma circunferencia. Una vez elegido un radio para el primero, ya está tomado para el resto. Sólo algunos se realizarán el mismo día, ya que acabar el trabajo puede llevar semanas. ¡El radio en el listón de bambú permanecerá para siempre!

Además, el radio tomado en el compás de bambú es un segmento siempre perpendicular a la línea que traza el lápiz en cada momento. Y como el listón, de hecho, es un pequeño rectángulo, su borde próximo al lápiz es también un pequeño segmento visible siempre paralelo a la línea trazada por éste. Por tanto, no sólo el radio es visible, sino también la paralela y la perpendicular a cada pequeño fragmento de curva trazado (Fig. 7.12). Ambas perspectivas relacionan la circunferencia con su tangente y su perpendicular en cada punto, invocando así las ideas de curva envolvente y evoluta.

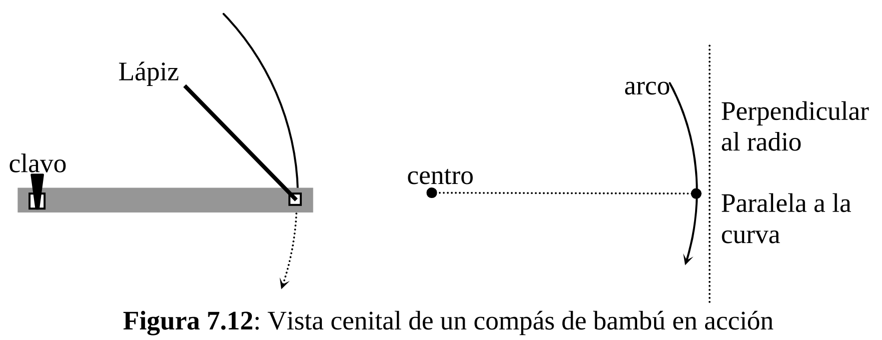


Figura 7.12: Vista cenital de un compás de bambú en acción

<u>Gubia y mazo</u>

La gubia y el mazo son inseparables. Una no tiene sentido sin el otro. A cada golpe del segundo la primera labra un surco rectilíneo que se mantendrá así mientras la gubia no cambie de dirección. Si, entre golpe y golpe, el artesano gira la gubia, la línea resultante es una curva. Pero no una curva perfecta, sino una poligonal de pequeños surcos o segmentos con perfiles imperfectos y distintos. La parte interior de esos surcos presenta esquinas como las de un polígono, mientras que el lado exterior es dentada (Ilustración 3).

Sucede así por dos motivos. Primero, porque la madera se desgaja abriéndose un poquito más allá del punto alcanzado por la punta de la gubia. Segundo, porque al girar la gubia para cambiar de dirección ésta recorta la parte interior haciendo desaparecer todas las astillas de esta parte, pero no las de la otra. Las del lado exterior permanecerán formando una línea en diente de sierra (Fig. 7.13).

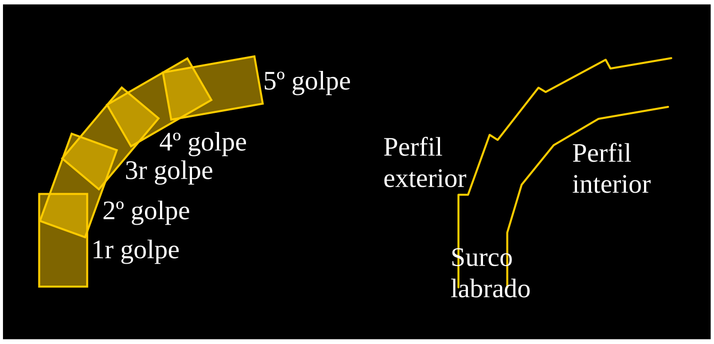


Figura 7.13: Rastro de la gubia sobre la madera

<u>Navaja</u>

La navaja, recortando las esquinas producidas en los márgenes del surco labrado, mejoran el aspecto final de las curvas talladas haciéndolas más suaves, sin picos, derivables. En el caso de que la línea tallada sea rectilínea eso no es necesario, pues no se produce ninguna esquina.

7.2.2 Artefactos y resolución de problemas

<u>Lápiz y listón de bambú</u>

Con el lápiz y el listón de bambú se resuelven tres problemas fundamentales de la ornamentación arquitectónica toraja: se trazan líneas rectas, se trasladan longitudes y se divide un segmento en partes iguales (método Kira-kira).

El primero de estos problemas es el mismo que se resuelve en occidente con esas mismas herramientas. El segundo es más propio del compás. Y el tercero es un uso nuevo y desconocido hasta ahora por el investigador.

Ambos artefactos se usan también sobre las superficies convexas de los ataúdes (véase la ilustración 29, al final del Cap. 5). La flexibilidad del bambú facilita ese uso. De este modo las líneas 'rectas' determinadas por el listón dejan de serlo y se convierten en hélices sobre un cilindro.

Compases

El compás estándar de aguja también es útil para una tarea específica que no realizan los grabadores toraja. A pesar de que no hay una talla toraja basada en un sistema de circunferencias en el que cada una de ellas pasa por el centro de la contigua, lo mencionamos aquí para ilustrar como una tarea puede ser fácil o difícil dependiendo de la herramienta utilizada para realizarla. Cuando se va a trazar este sistema de circunferencias, la propiedad de los centros intercambiables resulta bastante útil en la práctica porque permite dibujar dos de esas circunferencias a la vez cambiando los papeles de ambos extremos con aguja. El punto de inicio (X) y el punto final (Y) de una circunferencia con centro en O se convierten en el centro (X=Y) de la próxima circunferencia con el mismo radio r que comienza y acaba en O (Fig. 7.14).

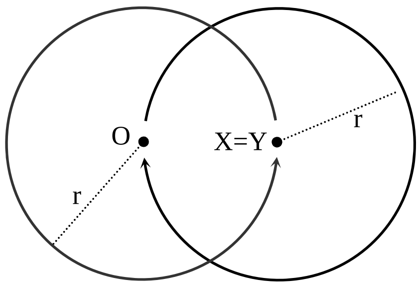


Figura 7.14: Un par de circunferencias trazadas ‘a la vez’

Con un compás así no es necesario pensar en cuál de los dos brazos se tomará como centro ni preocuparse por la rotura de la punta del lápiz.

El uso de un compás semejante, ya sea con dos puntas de lápiz o de dos agujas metálicas agilizaría sobremanera el trazado de haces de paralelas en las retículas finas, pero no se ha observado a ningún artesano que lo hiciese así.

Gracias a su flexibilidad, el compás de bambú crea verdaderas circunferencias en superficies ligeramente convexas. No ocurre así con los otros compases (Fig. 7.15).

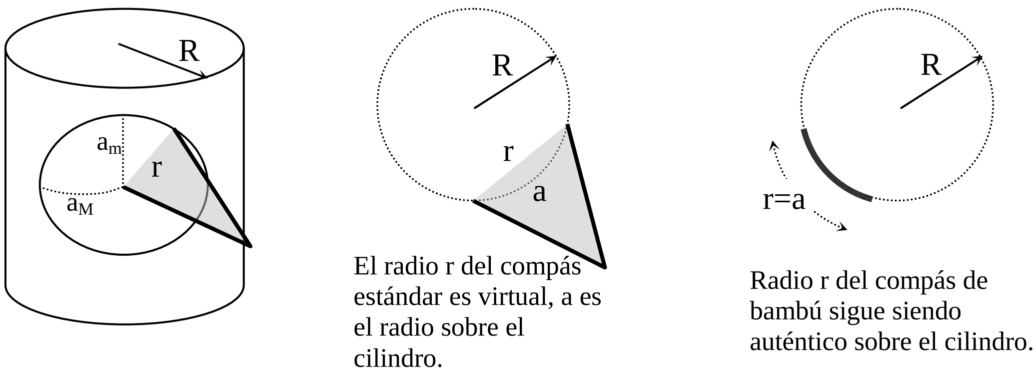


Figura 7.15: Compases actuando sobre superficies convexas

Cuando se usa en una superficie convexa de radio R, el compás estándar con radio r no crea una circunferencia en la superficie, sino una curva cerrada con unos radios reales a_m=r (el más corto) y a_M=R·arcsen[r/(2R)] (el más largo). Este no es el caso del compás de bambú con listón de longitud r, el cual siempre creará una circunferencia de radio r sobre una superficie ligeramente convexa. Pero este compás no suele usarse sobre ese tipo de superficies. En la ilustración 4 se aprecia el resultado de trabajar con el compás estándar sobre una superficie convexa.

Gubia y mazo

Al igual que el lápiz y el listón, también la gubia y el mazo se utilizan sobre superficies convexas produciendo líneas helicoidales labradas de origen poligonal. Pero ahora su origen poligonal no se reduce al caso bidimensional, sino tridimensional. La línea tallada es poligonal con relación a la superficie convexa, pero lo es también con relación a su curvatura.

Navaja

La navaja embellece la voluta porque elimina los vértices y ángulos de su origen poligonal que la alejan de su aspecto suave (derivable). No es necesaria en segmentos rectilíneos que se labran al realizar diseños como el *Pa' sekong*, ya que si la gubia no cambia de dirección no se producen esos vértices y esquinas.

7.2.3 Uso limitado de ciertas herramientas en ciertas prácticas sociales

Los grabadores toraja no parecen interesados en artefactos tecnológicos más avanzados disponibles en la región. Todos ellos pueden conseguir compases metálicos occidentales como los que utilizan sus hermanos en las escuelas locales. También pueden obtener reglas divididas en milímetros, calculadoras, etc. Cuando se les pregunta sobre la precisión y eficiencia de su trabajo consideran que hay cierta tolerancia respecto al error cometido. Una tolerancia derivada de las limitaciones de la visión humana. Su trabajo es bastante bueno para sus propósitos y admiten con sinceridad que no lo quieren complicar (Albertí, 2005). Entonces, ¿por qué deberían estar interesados en cambiar su tecnología o metodología de trabajo para hacer una tarea que ya es satisfactoria según sus criterios?

7.2.4 Antiguas herramientas en nuevos contextos

¿Cuáles son herramientas antiguas y cuáles son los contextos nuevos? ¿Quién las considera antiguas o nuevos? El contexto es completamente nuevo para el investigador y antiguo para los artesanos. ¿Qué herramientas pueden parecer antiguas a aquel? Probablemente todas, pero entre ellas destacaría dos. Por la utilidad y eficacia que dan los artesanos a una herramienta de aspecto tan primitivo, el listón de bambú. Por su forma, novedad y eficacia en paneles verticales, el compás de bambú.

Pero entre los compases, viejas herramientas, hay un uso que el investigador considera nuevo. El compás también se utiliza para aplicar el método Kira-kira, algo muy distinto de los que es un uso euclidiano de ese artefacto. El compás de bambú no se usa con este fin y el listón de bambú, además de ser usado como regla para trazar segmentos, también se utiliza para trasladar distancias a la hora de dividir un segmento en partes iguales aplicando también el método kira-kira. Cuando el listón se usa de esa forma, ¿deberíamos llamarlo de otra forma? En nuestra cultura geométrica euclidiana dicha propiedad pertenece al compás, no a la regla. Por tanto, para ser exactos, deberíamos llamar compás al segmento de bambú que actúa en el kira-kira dado su uso en ese procedimiento.

Las diferentes herramientas sugieren una cognición distinta, pero la misma herramienta empleada de forma diferente con un propósito distinto o en diferente contexto también sugiere distintas cogniciones. Los artesanos toraja prefieren una herramienta a otra según la situación, es decir, su eficiencia práctica (precisión, economía de tiempo y de gastos) en el contexto de su trabajo. Eso también se aplica a la preferencia por el método kira-kira. Algunos lo hacen con un listón de bambú, otros con el compás estándar. Ambos resultados son tan perfectos y precisos que es imposible distinguir cuál se hizo con cada herramienta. Pero como señala Albertí (2005), los grabadores que se dedican al kira-kira con compases estándar deben corregir sus cálculos en el aire, no tienen un soporte físico en el que anotar los valores estimados. Tarde o temprano lo consiguen, pero necesitan una o dos iteraciones más que aquellos que aplican el método utilizando el listón de bambú donde pueden anotar sus estimaciones. Escribir ayuda a optimizar el éxito.

7.2.5 Nuevo contexto, nuevas herramientas, nuevos usos

No es el carácter artesano lo que hace que el contexto en el que se desarrolla la ornamentación arquitectónica toraja sea nuevo para la perspectiva occidental, sino determinadas condiciones de trabajo y situaciones o problemas a resolver en él.

El rasgo más característico es que la tarea se lleve a cabo en paneles verticales, lo que obliga a utilizar algunas herramientas que no se caigan (compás de bambú) y, sobre todo, procedimientos que no precisen el juego de más de dos herramientas (a diferencia del método euclidiano para dividir un segmento en partes iguales).

Y si los artesanos toraja manejan herramientas desconocidas (nuevas) para el investigador occidental como listones y compases de bambú, otras conocidas en occidente, a causa de la numerosa repetición de ciertas figuras, deben modificar su aspecto. Es lo que ocurre con los compases toraja, ni el de bambú ni el metálico de doble aguja se colapsan. Esto es de gran ayuda a la hora de repetir hasta cuarenta o más circunferencias idénticas en as fachadas de un granero o casa tradicionales, como ocurre con el diseño llamado *Pa' Tedong*. Además, el contexto y los procedimientos obligan a nuevos usos de artefactos conocidos en occidente, siendo el más llamativo el uso del compás metálico en la división Kira-kira de un segmento en partes iguales. Todo ello tiene lugar fuera del ámbito académico escolar existente en la región.

7.3 LAS HERRAMIENTAS COMO MEDIADORES COGNITIVOS

No tenemos acceso directo a la mente de los artesanos toraja, pero sí a las representaciones y utensilios que manejan. Ni lo uno ni lo otro son su pensamiento, pero son al menos un vehículo que lo articula y refleja, en ambos sentidos. Prácticamente son el único elemento tangible del que disponemos para dilucidar formas de pensar y en las que fundamentar una interpelación. De ahí que 'el análisis de herramientas específicas para representar ideas matemáticas suponga una excelente aproximación al modo en que las herramientas estructuran el modo de pensar de una persona.' (Abreu, 2000: 6).

Las propiedades lógicas inherentes a las características estructurales, físicas y procedimentales de los artefactos toraja están vinculadas a las estrategias que utiliza la gente para pensar y resolver una situación. El análisis de las herramientas efectuado ofrece una percepción del modo en que las herramientas estructuran el pensamiento de los grabadores. Se ha basado en tres cuestiones principales: ¿qué se hace?, ¿cómo se hace?, ¿qué se quiere hacer o resolver?

En las tablas siguientes (Tablas 7.5-7.8) cada artefacto utilizado por los grabadores toraja se relaciona con ideas matemáticas. Destacamos ahí los aspectos cognitivos de las herramientas.

Artefacto	**Hechos observables**	**Concepciones relacionadas**
Lápiz	-Punto sobre el plano/superficie.	-La línea (curva o recta) como resultado del movimiento de un punto sobre un plano o superficie.
Listón bambú	-Dirección sobre el plano o superficie. -El lápiz transfiere la forma del listón.	-Línea recta sobre el plano. -Línea recta sobre una superficie convexa: hélice. -La recta/hélice como serie de segmentos o fragmentos de hélice en una dirección. -La recta/hélice como un continuo de puntos.
Lápiz y listón		-Correspondencia 1-1 entre los puntos del listón y los del segmento al que se acopla o de la línea trazada por el lápiz.

Tabla 7.5: Lápiz y listón como mediadores cognitivos

Compás	**Hechos observables**	**Concepciones de la circunferencia relacionadas (en el plano)**	
		Directas	Indirectas
Estándar (lápiz, agujas)	-Radio invisible como lado implícito de un triángulo.	-Conjunto de puntos determinado por el vértice de un triángulo que gira alrededor de uno de sus vértices.	-Conjunto de puntos equidistantes de otro fijo.
Bambú	-Radio siempre visible como segmento rotando alrededor de un extremo fijo. -Radio siempre perpendicular a la línea que traza el lápiz. -El borde del extremo móvil del listón de bambú siempre paralelo a la línea que traza el lápiz.	-Conjunto de puntos equidistantes de uno fijo.	-La línea siempre perpendicular a un segmento dado que gira sobre uno de sus extremos. -Circunferencia relacionada con la tangente y la perpendicular en cada uno de sus puntos, evocando las ideas de curvas evolventes y evolutas.

Tabla 7.6: Compases toraja y cognición matemática

Artefacto	**Hechos observables**	**Concepciones relacionadas**
Gubia y mazo	-Rectángulo ‘infinitesimal’ sobre el plano/superficie.	-Correspondencia 1-1 entre cada golpe de maza y el surco labrado por la gubia. -La curva como poligonal. -La curva como resultado visible y palpable de una variación direccional.

Tabla 7.7: Gubia y mazo como mediadores cognitivos

Artefacto	Hechos observables	Concepciones relacionadas
Navaja	-Segmento 'infinitesimal' sobre el plano/superficie.	-La curva como suavización de una poligonal.

Tabla 7.8: Navaja como mediadora cognitiva

El concepto de circunferencia como lugar geométrico de puntos equidistantes a uno dado realmente describe lo que se necesita hacer si se realiza con un compás de bambú y es una interpretación directa del objeto a crear (el radio es visible). Así, la primera interpretación matemática (IM_1=circunferencia) sigue siendo válida y apropiada. No ocurre lo mismo con la circunferencia creada empleando un compás estándar y hay que modificar la interpretación matemática (IM_2=circunferencia como producto del giro sobre un plano de un triángulo girando en el espacio).

¿Cuál es el propósito del grabador? Él sabe realmente que está trazando una circunferencia y que cada punto se halla a la misma distancia del centro (Albertí, 2005). Sin embargo, no tenemos pruebas de si piensan en el aspecto virtual o invisible del radio en el caso del compás estándar. Por tanto, la IM_2 está validada en el caso del compás de bambú, pero todavía no en lo que se refiere al compás estándar. En el caso del bambú, la IM_2 se convierte en IMS (interpretación matemática situada) del trazo de una circunferencia. Esta metodología ilustra las ventajas e inconvenientes de usar diferentes compases que potencian o limitan el pensamiento matemático requerido en contextos específicos (Nunes y Bryant, 1996).

Por lo que respecta al listón de bambú, una posible segunda interpretación después de observar la aplicación del método Kira-kira sería IM.01=[segmento de la recta real]. Sin embargo, como ya hemos observado anteriormente, no existe evidencia alguna que nos lleve a pensar que el artesano concibe el segmento trazado como el matemático occidental concibe los suyos. Sin duda, y puesto que el método Kira-kira lo confirma, podemos hablar de un segmento de puntos racionales. Pero no reales. Ahora bien, del modo en que el grabador maneja el lápiz siguiendo el perfil del listón para practicar en él una marca hace pensar que el artesano concibe su segmento como un continuo. Y entonces estamos en la idea de un continuo de racionales. No debe sorprendernos. Ésa idea reinó en el mundo occidental durante siglos cuando no se conocían los irracionales y las dudas perduraron durante siglos después. Por tanto, nuestro modelo es que el artesano concibe el segmento o la recta como un continuo de puntos sin intersticios. Así que la IM que desarrolla el investigador con respecto a la idea que tiene al artesano del segmento es que lo considera un continuo, aunque el investigador sabe que el sistema toraja no va más allá de los puntos racionales.

De forma parecida podemos hablar de las volutas: el artesano sabe que su origen está en las poligonales de segmentos diminutos, aunque quizá no haya caído en ese detalle y su conocimiento es tácito a ese respecto. Le sería muy útil poner nombre a las cosas. La asignación de nomenclatura obliga a reflexionar sobre aquello que se quiere nombrar. Éste es un aspecto educativo crucial: tratando de nombrar las cosas aprendemos de ellas y sobre el modo en que las concebimos.

Lo que sí está claro es que el artesano sabe que sus volutas son auto paralelas y que comienzan con una inclinación determinada por su voluntad. Me atrevería a decir incluso que conoce la imposibilidad de mantener el paralelismo hasta la intersección de la retícula de la que emanan y que es esa dificultad la que obliga a construir el ojo de la voluta.

De nuestro análisis no debe inferirse que afirmamos que los artesanos toraja piensan en evolutas o tangentes en cada punto de una circunferencia. Hasta ahora, todavía no sabemos si piensan de este modo. Lo que es realmente valioso en el análisis matemático profundo de una herramienta es que proporciona cuestiones relevantes a desarrollar en posteriores investigaciones. Sobre todo nos preguntamos ¿qué es lo primero, la herramienta o el pensamiento? ¿Los grabadores toraja piensan como lo hacen porque tienen esos compases o los tienen porque piensan de ese modo?

En cualquier caso, de lo expuesto se deduce que las definiciones de compás registradas en los diccionarios occidentales mencionados no se ajustan a la realidad del contexto de los artesanos toraja. Por un lado, se usan compases (como el de bambú) que no verifican las características físicas de aquellos (estándar) que inspiraron las descripciones del diccionario. Por otro, se usan para hacer cosas distintas de aquellas para las cuales los compases occidentales suelen utilizarse. Luego, tanto de sus características físicas como de su uso y manejo, dichas definiciones deberían ser revisadas.

El compás de bambú facilita algunas tareas difíciles como trabajar en planos verticales, permite la construcción de una verdadera circunferencia sobre un superficie ligeramente convexa y su carácter no colapsable resulta muy útil a la hora de trazar una serie de circunferencias con el mismo radio. Nuestro estudio sobre los compases toraja muestra que la resolución de un problema puede verse afectada por las herramientas presentes en el medio. La presencia de un artefacto, por ejemplo un tipo concreto de compás, puede transformar una tarea difícil en una fácil o viceversa. No obstante, ¿cuáles son las consecuencias a largo plazo del uso exclusivo de ciertas herramientas por parte de un grupo concreto? ¿Limita esto su progreso? ¿Salvaguarda una forma concreta de hacer y de pensar?

Probablemente la respuesta a las dos últimas preguntas sea afirmativa y está relacionada con la forma en la que las prácticas sociales específicas limitan el uso de determinadas herramientas. El sistema de trabajo de los artesanos toraja es eficaz, pero probablemente sólo lo será mientras no interaccione con otros objetivos diferentes de aquellos para los cuales fue desarrollado.

7.4 ETNOMATEMÁTICAS Y EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Los grabadores toraja son una comunidad de práctica cerrada, su conocimiento reside y se ha desarrollado fuera de la escuela (Albertí, 2005). Las escuelas deberían fomentar el cambio y nuevos objetivos, y fomentar la interacción entre las matemáticas académicas y las nativas (etno). Sus métodos nativos han sobrevivido hasta ahora debido a la ausencia de esta interacción y de interrelaciones con otros contextos. Esto podría explicar el rechazo y la falta de interés en el uso de herramientas tecnológicamente más avanzadas y disponibles en la región.

¿Qué sucedería si diéramos compases toraja a nuestros estudiantes? ¿Descubrirían que es posible emplearlos para dividir un segmento en partes iguales? ¿Observarían que la circunferencia trazada con un compás de bambú en una superficie convexa verdaderamente lo es? Realmente, dependería del desafío del problema. Probablemente, serían reacios a usar el compás de bambú para trabajar en una mesa, pero apreciarían su valor para dibujar en una pared. De hecho, cuando el primer autor mostró una versión en plástico de un compás de bambú a sus estudiantes les sorprendió el radio visible.

Los profesores de matemáticas deben fomentar el cambio respecto al contexto y la perspectiva. Lo que es de gran interés en el uso del compás es comprender la circunferencia y el círculo y su relación con el radio, pero después de alcanzar esas ideas, el profesor debe dirigir la atención de sus estudiantes a otros rasgos no tan evidentes como los señalados en la tabla 2 respecto a la relación existente entre la circunferencia como curva y la paralela y perpendicular en cada uno de sus puntos. Haciendo esto el profesor ayudaría a sus alumnos a ver algo que posiblemente no observarían por sí mismos, introduciéndoles así en un pensamiento matemático más avanzado.

El compás toraja estándar se usa para hacer cosas que no se hacen en la cultura occidental. Una de ellas es la partición de un segmento en n partes. En la cultura matemática académica occidental la división de un segmento en n partes se basa en la proporcionalidad de los triángulos y se hace con regla y escuadra o con regla y cartabón, sin compás. Sólo la división euclidiana de un segmento en dos partes requiere la participación del compás, pero incluso en este caso, el procedimiento toraja está lejos de parecerse al euclidiano.

Los carpinteros de Catalunya tienen listones y compases. Cuando el segundo autor ha preguntado a algunos cómo dividirían un segmento en partes iguales su respuesta ha sido que lo medirían y dividirían su longitud entre el número de partes. Ésta fue la primera IM desarrollada por el primer autor referente al proceso kira-kira (Albertí, 2006).

8

IMS DE LA ORNAMENTACIÓN ARQUITECTÓNICA TORAJA

Desde el inicio del trabajo ya se observó que toda práctica está hecha de situaciones o problemas a resolver. Por eso resulta tan importante la resolución de problemas, porque es en el modo en que un artesano supera una dificultad donde la investigación debe indagar por la existencia, uso, creación e identificación de conocimiento matemático.

Antes de hacer explícita la IMS de la ornamentación arquitectónica toraja reflexionemos sobre los aspectos de resolución de problemas que caracterizan el trabajo de los artesanos. Su necesidad es poder hacer las cosas en la realidad de la práctica, algo que está un poco alejado de los teoremas de existencia y de las demostraciones formales, pero no por ello exento de rigor, precisión, cuantificación, lógica e independencia del autor. Estudiemos pues cómo se resuelven los problemas geométricos a los que se enfrenta el artesano.

8.1 RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

8.1.1 Reduccionismo polyano

Según Polya (1988) cuatro son las fases principales en la resolución de un problema: (i) comprender el problema; (ii) elaborar un plan; (iii) llevarlo a cabo; y (iv) examinar la solución y revisar el método. Evidentemente, 'es estúpido responder una pregunta que no se comprende' (Polya, op. cit., pp. 6). Sin comprensión uno no puede abordar la segunda etapa, esto es, desarrollar un plan de resolución. Para ello es necesario saber qué se pregunta, conocer los datos e identificar las condiciones que el problema impone. Sólo entonces tendremos 'un plan, o habremos esbozado al menos, qué cálculos, operaciones o construcciones hay que ejecutar para obtener lo desconocido' (Polya, op. cit., p. 8). Desarrollar un plan se convierte en la más importante de las fases y ésa capacidad de elaborarlos en la más valiosa de las habilidades.

Una estrategia muy útil para elaborar un plan y que fue muy destacada por Polya está directamente relacionada con la idea de resolución analógica señalada por Davis y Hersh y a la que me referiré aquí como *reduccionismo polyano*: '¿Conoces un problema relacionado? ... Si no puedes resolver el problema propuesto intenta resolver antes alguno de relacionado' (Polya, op. Cit., pp. 9-10). Esta es la idea fundamental de la analogía y también la del método Kira-kira de los artesanos toraja. Resuelven el problema principal de dividir un segmento en partes iguales recurriendo a versiones más sencillas del mismo, cada reducción más fácil que la anterior hasta que se hace evidente y lo que hay que dividir en dos o tres partes es un segmento diminuto. Y no sólo eso, sino que cada paso del plan no se lleva a cabo sin una verificación práctica del resultado provisional obtenido. Un recurso carente de demostración matemática formal, pero tremendamente riguroso y lógico. '¿Puedes averiguar si el paso es correcto? Pero, ¿puedes también demostrar que lo es?' (Polya, 1945, pp. 12-13). La demostración del artesano El artesano verifica que el paso es correcto comprobando experimentalmente que la suma de sus estimaciones, la última marca a_k practicada en el listón de bambú, cumple que $2 \cdot a_k = L$ o $3 \cdot a_k = L$.

Verificaciones no exentas de lógica ni de rigor cuya importancia también es destacada por Polya (op. cit., pp. 14-15) y que una vez muestran la eficacia del plan invitan a la aplicación generalizada: '¿Puedes usar el resultado o el método en otros problemas?' (Polya, op. cit., p. 16). En el caso que nos ocupa es evidente que sí, lo que nos acerca a la idea de la existencia de un *sistema operativo* poderoso y eficaz.

8.1.2 Soluciones matemáticas analíticas y analógicas

Davis y Hersh distinguen entre soluciones matemáticas analíticas y analógicas. En las primeras prima lo simbólico, la fórmula y la argumentación racional lógica, resultando difíciles y pesadas; en las segundas prima lo experimental, son asequibles y carentes casi por completo de símbolos (Davis y Hersh, 1988). ¿Pero qué habría sido de la ornamentación arquitectónica si se hubiese tenido que desarrollar mediante soluciones analíticas? Sencillamente, no habría existido. Es lógico pensar que en una práctica artesana como es el caso que nos ocupa predominen las soluciones analógicas. También es lógico que los autores del trabajo busquen soluciones analógicas. Lejos de ser un contratiempo, esto ha supuesto una ventaja para la investigación. Las soluciones analíticas son propias del ámbito académico occidental, las analógicas son más afines con el ámbito vernáculo y extra académico. Al fin y al cabo, transformar una solución analógica en analítica es una de las tareas del matemático académico. La perspectiva científica que nos orienta considera que para todo aquello que funciona en la práctica existe una interpretación teórica que lo justifica.

La argumentación se articula mediante el lenguaje, conceptos y propiedades, y el razonamiento lógico. Que una solución no sea analítica no significa que no sea lógica. Al contrario, en general, las soluciones analógicas pueden resultar muy lógicas al huir de lo estereotipado que podrían resultar ciertos planteamientos analíticos en determinados contextos. Una escopeta con mira telescópica es un arma (herramienta) mucho más avanzada tecnológicamente que un matamoscas, pero cuando el objetivo es matar una mosca coger la escopeta resulta ridículo. Es lógico dar algo por bueno si es eficaz, fácil de reproducir, económico, cuya tecnología necesaria se encuentra disponible y, otro aspecto de gran valor, fácil de transmitir (enseñar).

Que una solución sea analógica no impide que puede ofrecerse una justificación argumentada o que no pueda ser tomada como solución matemática. Tanto es así que una vez efectuada la investigación se hace evidente la necesidad de revisar la dicotomía entre soluciones analíticas y analógicas planteada por Davis y Hersh (1988). Una perspectiva más realista es la de elaborar una clasificación transitoria de las soluciones a un problema cuyo tránsito, aunque no continuo, parta de la más inconsciente e irracional de las soluciones y llegue a la más racional y fundamentada en nuestro sistema lógico.

Esta graduación no va de lo malo a lo bueno, sino de lo irracional a lo racional. En el mundo matemático en el que nos movemos, prima lo segundo, por lo que las soluciones intermedias que más basadas estén en la racionalización más próximas estarán de poder ser clasificadas como matemáticas. Por el contrario, las más irracionales se alejan demasiado de nuestra pretensión y no serán matemáticas en absoluto. Estas soluciones podrían ser muy valoradas en el mundo artístico, por ejemplo. Pero el lector ya habrá observado lo lejos que está la ornamentación arquitectónica toraja de ello.

8.2 PROBLEMAS ELEMENTALES DE LA ORNAMENTACIÓN ARQUITECTÓNICA TORAJA

Para resolver problemas los artesanos disponen de herramientas de las que se han asegurado antes que van a funcionar como es debido. Por ejemplo, Salle (Int. 6.4.3, Anexo D: Yobel 2ª talla) revisa y afila el ángulo metálico de las gubias antes de comenzar la talla. También se asegura que el listón de bambú que usará como regla sea bien rectilíneo. Y lo logra mediante percepción visual y experimentación. Recordémosle al inicio de la filmación mirándose un largo listón de bambú desde uno de sus extremos. Puesto que un segmento visto desde un extremo se percibe como un punto o como un segmento extraordinariamente diminuto resulta fácil valorar su rectitud y corregirla si es preciso. Esto es lo que hace Salle. El listón acaba siendo rectilíneo gracias al carácter senso-motriz y experimental de las acciones que lleva a cabo el artesano.

En los siguientes análisis de soluciones a los problemas toraja se parte de la suposición de que los problemas y soluciones por las que un artefacto es cómo es no deben tenerse en cuenta en la solución principal del problema.

8.2.1 Trazar un segmento por un punto dado

Los pasos son los siguientes (Fig. 8.1):

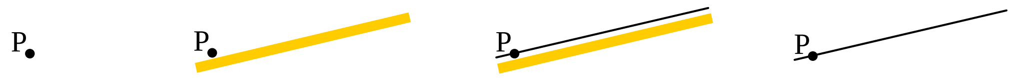


Figura 8.1

Esta solución es puramente *vicaria*, ya que la rectitud del segmento resultante proviene directamente de la rectitud del listón.

8.2.2 Prolongar un segmento en una recta

Es lo que hizo Tiku en la primera de las observaciones (Obs. 5.2.1). Para llevar a cabo la prolongación basta con añadir un nuevo paso a la solución anterior adaptando el listón de bambú, no al punto, sino al segmento trazado con el fin de mantener su dirección y facilitar así que el vestigio del lápiz no presente interrupción ni esquina alguna. Esto significa que al carácter vicario del trazo del segmento hay que añadir el aspecto experimental (basado también en la percepción visual) por el que el artesano determina si el resultado es correcto o no. Para prolongar aún más el segmento basta con repetir (iterar) el último paso tantas veces como se desee o necesite. Por tanto, la prolongación de un segmento es vicaria, experimental e iterante. De hecho, es doblemente vicaria, porque la iteración se referencia en la rectitud del último segmento trazado. Sin embargo, y puesto que el problema principal aquí ya no es la rectitud de cada segmento, sino la rectitud de la ampliación, la solución tiene un carácter eminentemente *experimental* e *iterante*.

8.2.3 Trazar una circunferencia

Esta situación se distingue de las anteriores porque no interviene el aspecto experimental en el sentido de que el resultado no es corregido. El artesano confía absolutamente en el artefacto utilizado, ya sea el compás de bambú o el metálico estándar. Una vez trazada la circunferencia el artesano no la observa para ver si ha quedado bien o no. Estamos ante otra solución *vicaria*.

8.2.4 Determinar el centro de un rectángulo

Primero se trazan ambas diagonales (Fig. 8.2):

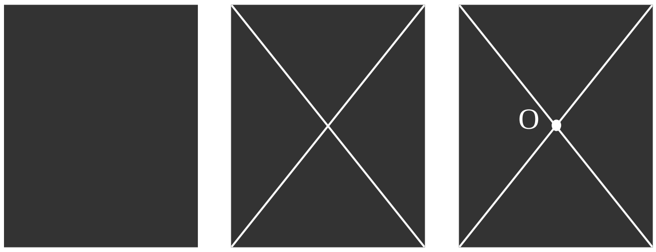


Figura 8.2

Su punto de intersección está justo en medio del espacio rectangular. De hecho ésa es la referencia que utilizarán varios grabadores para dividir los lados en dos partes iguales. Es decir, que la mediatriz pasa por la intersección de las diagonales. ¿Es ésta una solución *visual*? Nuestra interpretación es que el artesano no justifica el resultado en base a la igualdad de los triángulos resultantes aunque, evidentemente, él también pueda verlos así, sino en base a la simetría axial de la figura resultante. La simetría determina el punto medio de una figura. En este sentido, se trata de una solución *visual* y *experimental*.

8.2.5 Trazar la mediatrices vertical y horizontal de un rectángulo

El trazado de mediatrices no se hace de forma euclidiana, aunque algún artesano manifieste conocer el modo euclidiano de hacerlo (Rombe', Int. 6.3.5). Las mediatrices que deben trazarse son verticales y horizontales, ya que los recintos rectangulares destinados a los grabados también lo son. Y puesto que las fachadas de casas y graneros no son planos lisos, sino que presentan diferentes niveles, la resolución euclidiana sería difícilmente factible al necesitar superficie lisa por encima y debajo del segmento sobre el que va a trazarse la mediatriz.

Quizá por eso el artesano confía en su entrenada percepción visual y traza las mediatrices vertical y horizontal del modo descrito anteriormente. Eso sí, siempre fijando de forma precisa al menos uno de los puntos por los que debe pasar, generalmente el punto de corte de las diagonales del rectángulo del grabado (Fig. 8.3):

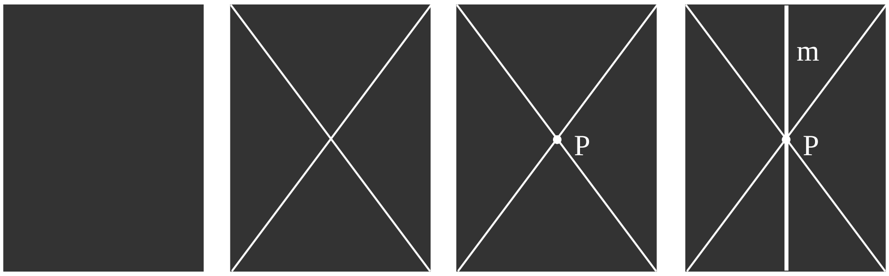


Figura 8.3

El trazo de las dos diagonales es una solución vicaria, ya que su rectitud procede de la de los listones usados. Determinar el punto P de intersección de las diagonales tampoco será considerada un solución senso-motriz. Ahora bien, la justificación de que este punto está en medio del rectángulo, en el sentido de que por él debe pasar la mediatriz de los lados, es de tipo experimental (recordemos a Rois justificando este hecho mostrándome que la distancia de P a cada lado vertical era la misma). Por último, trazar ‘a ojo’ y con el listón una vertical que pase por P, también es una solución vicaria (su rectitud es la del listón) y experimental, puesto que si la vertical aparece sesgada será corregida visualmente. Por tanto, la solución del problema es senso-motriz, vicaria y experimental. Pero dado que la cuestión fundamental aquí no es la rectitud de la mediatriz, sino que esté en su justo sitio, los caracteres fundamentales de la solución son el *visual*, por el que la línea es vertical, y el *experimental* que la sitúa en medio.

8.2.6 Inscribir un círculo en un cuadrado

Se determina primero el centro del cuadrado. La distancia del centro al punto medio del lado determina el radio, generalmente ‘a ojo’ (Fig. 8.4), aunque pueden haberse trazado también las mediatrices.

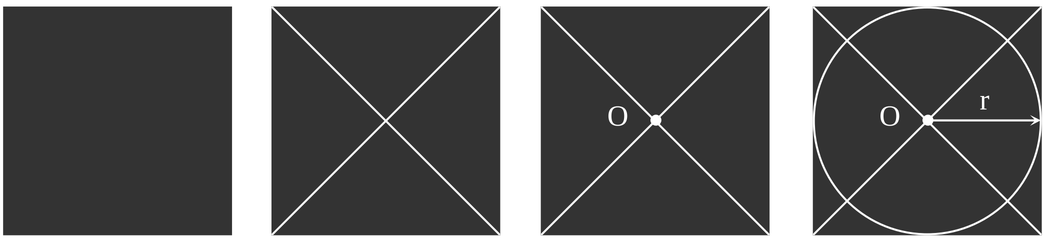


Figura 8.4

Puesto que el quid de la cuestión no está en la circunferencia, sino en el argumento que justifica su centro y su radio, estamos ante una solución *visual* y *experimental*, pero también *argumentada*.

8.2.7 Trazar la paralela a un segmento dado

Tenemos dos soluciones distintas para el mismo problema. Por un lado, la solución de Tiku (Obs. 5.2.1) hace uso exclusivo del listón de bambú, que es deslizado repetidamente sobre la recta o segmento original para construir su copia paralela. Si la prolongación de un segmento supone extenderse en la unidimensionalidad de la línea, el trazo de una paralela supone una apertura a las dos dimensiones del plano. Es fácil darse cuenta de que la solución del artesano es, como la anterior, *vicaria*, *experimental* e *iterante*.

Otra solución (Fig. 8.5) es la de Rombe’ (Obs. 5.2.2) y Anton (Obs. 5.2.12):

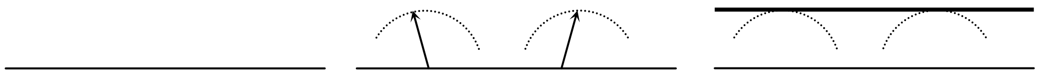


Figura 8.5

Se trata de una solución *visual* por cuanto la tangente común a ambos arcos circulares se determina así. Los radios son los determinados por determinados segmentos de la retícula.

Pero también es *argumentada* puesto que se basa en tres ideas claves. Una, que los puntos de la paralela equidistan de la original; dos, que bastan un par de puntos para determinarla; y tres, que no importa cuáles sean. Además, otro aspecto que hace que esta solución se fuertemente argumental es el hecho de que Rombe’ no comprobase experimentalmente la corrección del resultado dándolo por bueno de inmediato.

8.2.8 Trazar la tangente común a dos circunferencias

Lo hizo Seber (Obs. 5.2.8) sin seguir el método euclidiano, muy laborioso sobre el plano e impracticable en el contexto artesanal. De nuevo la rectitud de la tangente trazada es vicaria de la del listón, pero aquí lo importante es que esa línea sea tangente a ambas circunferencias. Seber la trazó inclinando el listón hasta que éste determinaba un punto de contacto con cada una de las circunferencias. Si tocaba un punto de una, pero ninguno o dos de la otra, variaba la inclinación.

De la misma forma que se ha trazado esta versión de la situación (Fig. 8.6) con las herramientas de Word Dibujo:

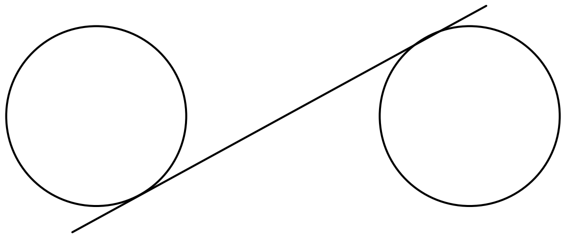


Figura 8.6

Se trata de una solución *experimental* y *aproximativa*, ya que el error puede corregirse en base a la referencia visual objetiva.

La solución es más rápida si el listón gira sobre el punto medio de los centros de ambas circunferencias (teniendo en cuenta que son del mismo tamaño). Por simetría, la solución deberá pasar por él. No pude documentar que Seber lo hiciese así o que su solución tuviese como referencia esa idea.

8.2.9 Trazar una voluta

Aquí no hay un modelo a seguir como al trazar un segmento ni un artefacto que determine la forma de la voluta como en una circunferencia. La voluta toraja adquiere su forma del propósito de auto paralelismo con la que es trazada por el artesano. Su capacidad visual le permite calibrar a cada golpe el grosor constante de la franja determinada por la curva; un grosor, por cierto, gobernado por la capacidad motriz de sus articulaciones. Estamos ante una solución *visual, motriz* y *experimental*.

8.2.10 Simétrico de un punto con respecto de un segmento

Ése es el problema a resolver para situar correctamente los ojos del búfalo en el grabado llamado *Pa' tedong*. En la práctica se hace y se corrige el resultado 'a ojo', una solución *visual* y *experimental*. Pero Seber (Obs. 6.2.7) sabía cómo hacerlo siguiendo un argumento geométrico más riguroso. La explicación de dicho argumento se correspondería con una solución demostrada.

Anton (Obs. 5.2.11) resolvió la situación de forma muy práctica, aunque rigurosa. Su método fue el siguiente (Fig. 8.7): (1) trazar 'a ojo' la perpendicular al segmento que pase por el punto; (2) situar el compás en el punto de intersección de las dos perpendiculares; (3) tomar en el compás la distancia hasta el punto original; (4) trazar un arco sobre la perpendicular al otro lado de la intersección; (5) el punto obtenido es la solución:

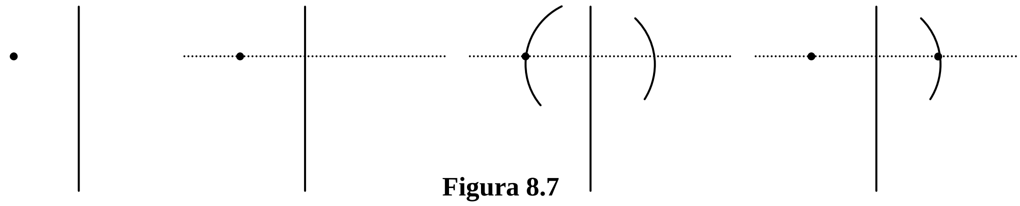


Figura 8.7

8.2.11 Trazar una retícula sesgada ortogonal (cuadrícula)

Muchos grabados se construyen sobre ese tipo de retícula. Es el caso del *Pa' sekong*, *Pa' sepu*, *Pa' sampa doti* y sus variantes. Las últimas interpelaciones a Salle y Rois han mostrado cómo puede trazarse una retícula sesgada verdaderamente ortogonal de dos modos distintos. Ambos se basan en el hecho conocido por los artesanos de que las diagonales del cuadrado son perpendiculares. La situación del trazado de la retícula en un recinto con forma de paralelogramo se resolvía descomponiendo el problema en una serie de situaciones o problemas previos: (a) Trazar la altura del paralelogramo en el que se ha de realizar el diseño; (b) Inscribir en el paralelogramo un cuadrado de lado igual a la altura de aquel; (c) Trazar las diagonales del cuadrado inscrito; y (d) Trazar las paralelas a cada diagonal y equidistantes según el grosor del listón de bambú.

Salle justificó la perpendicularidad de esos haces de paralelas experimentalmente, comprobando que la esquina de mi cuaderno (haciendo de él una escuadra) se ajustaba al ángulo de intersección. Lo mismo hacemos al trazar un segmento con regla. Si en un caso el trazo rectilíneo del lápiz se justifica por la forma de la regla, en el otro la ortogonaidad se justifica por la forma de la esquina ortogonal. Ambas soluciones son *experimentales*, *visuales* y *argumentadas.*

8.3 EL PROBLEMA CAPITAL DE LA ORNAMENTACIÓN ARQUITECTÓNICA TORAJA

La división de un segmento en N partes iguales debe ser tomado como el problema principal de la práctica artesanal toraja. El motivo que justifica tal consideración está claro pues en él se basa la construcción de la retícula referencial de la inmensa mayoría de los grabados.

Los valores que puede tomar N en el enunciado no son cualesquiera. En realidad, no se dividen segmentos en 5, 7 o 15 partes. Generalmente otras divisiones visibles en las retículas de algunos diseños se obtienen a partir de éstas. Por ejemplo, las 8 ó 10 unidades tomadas en lados verticales proceden de la división efectuada en el lado horizontal, generalmente más corto, dividido antes. Así que el método suele aplicarse de modo directo a divisiones en 2 y 3 partes y pasar al modo indirecto para números mayores como hizo Yobel/Salle (6=2·3, 4=2·2). Sin embargo, Anton dividió un segmento en 6 partes directamente.

Tampoco se aplica el método con el mismo artefacto. Yobel/Salle y Rois lo hacen con el listón de bambú, mientras que Leo, Seber y Anton lo hacían con el compás metálico de doble aguja.

La solución del método Kira-kira incorpora aspectos *visuales, experimentales, recurrentes* y *argumentales*. Es una solución visual porque cada estimación se hace mediante capacidad visual; es experimental porque la validez de cada estimación es comprobada sobre el segmento a dividir; es recurrente porque reduce un problema complejo a una versión del mismo más sencilla mediante la reiterada aplicación del mismo procedimiento, por lo que la cuestión de dividir un segmento grande se delega en la de dividir un segmento cada vez más diminuto; y es argumental porque el artesano obra en base a ésas consideraciones y sabe que lo que hay que hacer es dividir el resto en tantas partes iguales como se pretende dividir el segmento entero.

8.3.1 El método Kira-kira: un algoritmo de la división

Pero si en algún procedimiento la capacidad visual humana juega un papel instrumental preponderante es en la aplicación del método Kira-kira para la división de un segmento en partes iguales. Los grabadores toraja no resuelven este problema siguiendo el modo euclidiano, sino que lo hacen *kira-kira*, es decir, aproximadamente. Pero eso que ellos llaman *aproximadamente* no es hacerlo *al tuntún*, sino que consiste en la aplicación de un procedimiento recurrente que va reduciendo el error cometido a cada estimación hasta hacerlo imperceptible visualmente.

No es el azar el que guía los pasos del artesano, sino la reiterada reducción del problema a uno cada vez más sencillo. Una idea cuyo carácter *polyano* ya fue destacado (Apdo. 5.3.1). La búsqueda de la mitad o del tercio de un segmento se reduce a un problema equivalente, pero más fácil y asequible, como es buscar la mitad o el tercio de un segmento mucho más corto. A diferencia de los procedimientos euclidianos éste es un método recurrente cuya iteración proporciona una sucesión de marcas convergentes hacia la solución. Cada una de esas marcas registradas en el listón de bambú guía la siguiente estimación, lo que no ocurre cuando el método se aplica con el compás, cuyas correcciones se hacen en el aire, sin soporte donde registrarlas. En nuestra opinión, eso es lo que lo hace más lento, menos eficaz.

Pero tanto usando un listón de bambú como un compás, las decisiones del artesano se basan en una capacidad sensorial del ser humano: la vista. Ahí residen las bases experimentales que justifican el método y determinan su precisión. Un estudio sobre el error cometido en la estimación visual del punto medio de los lados de una hoja tamaño DIN A4 (segmentos de 21cm. y 30cm., aprox.) planteado a estudiantes de secundaria (ni expertos ni artesanos) reveló que no sobrepasa el 4% en más del 75% de los individuos (Albertí, 2005). Cuando se planteó la interpretación del método Kira-kira en el Apdo. 5.3.2 se hizo partiendo del supuesto de que el error era del 20%. ¡No es raro que los artesanos logren su objetivo con tanta rapidez!

Podemos buscar una versión numérica del método equivalente a la geométrica. Supongamos que tenemos que dividir 19 entre 5. El primer paso consiste en hacer una estimación. Tomemos, por ejemplo, el valor 2. Ahora hay que reproducir este valor 5 veces y valorar la diferencia del resultado con el total de 19:

$$5\cdot 2 = 10 < 19$$

El error cometido, el resto, es: $19-10=9$. Y ahora hay que dividir ése 9 en 5 partes. Tomemos, por ejemplo (kira-kira), el valor 1. Entonces: $5\cdot 1=5<9$.

El error cometido es: $9-5=4$. Ése 4 hay que dividirlo en 5 partes. Tomemos el valor 0,4 (kira-kira): $5\cdot 0{,}4=2<4$.

El error es: $4-2=2$. Dividamos 2 en 5 partes. Tomemos, kira-kira, el valor 0,4. Entonces: $5\cdot 0{,}4=2$.

El error se hace nulo: $2-2=0$. Hemos terminado. El resultado de la división es:

$$19:5=2+1+0{,}4+0{,}4=3{,}8$$

No es el algoritmo de la división estándar que solemos utilizar. En el estándar el resto debe ser siempre menor que el divisor. Aquí no es necesario e incluso puede ser negativo. Dividamos, por ejemplo, 7 entre 5. Comencemos tomando el valor 2: $7=5\cdot 2-3$. El resto es negativo (-3), pero no importa. Continuamos dividiendo ahora -3 entre 5. Tomemos el valor $-0{,}5$. Entonces: $-3=-0{,}5\cdot 5-0{,}5$. Y ahora dividimos $-0{,}5$ entre 5. Tomemos $-0{,}1$ y tenemos que: $-0{,}5=-0{,}1\cdot 5+0$. La división es exacta y hemos acabado. He aquí el resultado final de la división:

$$7:5=2–0,5–0,1=1,4$$

No es la división estándar, pero es una forma de dividir. Permite iniciar el proceso en un valor cualquiera, no precisamente en uno que proporcione un resto de valor entero maximal menor que el dividendo y el divisor. ¿Dónde está pues la semejanza entre ese algoritmo recurrente que es el método Kira-kira y el algoritmo de la división que aprendimos en la escuela? Supongamos que al dividir L entre n obtenemos un cociente a_1 y un resto r_1:

$$L=a_1\cdot n+r_1 \Leftrightarrow \frac{L}{n}=a_1+\frac{r_1}{n}$$

Por tanto, la división de L entre n se reduce a encontrar un entero a_1 y delegar la tarea dividiendo el resto r_1 generado por a_1. Eso es lo que hace el método Kira-kira, pero la cosa no se acaba ahí porque el proceso continúa. ¿Qué significa dividir r_1 entre n? Lo mismo que dividir L entre n, es decir, hallar un entero a_2 y un resto r_2 tales que: $r_1=a_2\cdot n+r_2$. O sea:

$$\frac{r_1}{n}=a_2+\frac{r_2}{n}$$

De donde obtenemos que: $\frac{L}{n}=a_1+a_2+\frac{r_2}{n}$ y, continuando el proceso hasta k veces:

$$\frac{L}{n}=\sum_{i=1}^{k}a_i+\frac{r_k}{n} \qquad (*)$$

Puesto que no es necesario que todo los a_i sean positivos, teóricamente puede suceder que el proceso no converja. Pero la realidad es que la capacidad visual evita que los restos sean excesivos. Y no sólo eso, sino que los hace cada vez más pequeños y la suma de los a_i acaba por acercarse al valor L/n. Tengamos en cuenta que en la división tradicional el resto debe ser menor que el cociente. La capacidad visual del artesano no puede garantizar esto, pero sí garantiza que el resto, por defecto o por exceso, sea menor que el segmento original L. Es decir:

$$L=a_1\cdot n+r_1 \text{ , con } r_1 < L$$
$$r_1=a_2\cdot n+r_2 \text{ , con } r_2 < r_1$$
$$r_2=a_3\cdot n+r_3 \text{ , con } r_3 < r_2$$

...

$$r_k=a_{k+1}\cdot n+r_{k+1}\text{ , con } r_{k+1} < r_k$$

De manera que la sucesión $\{|r_k|\}_{k\in N}$ es decreciente, acotada inferiormente por 0 y superiormente por L. Por tanto, converge. Y si converge absolutamente, converge. En la práctica, la convergencia se obtiene:

(1) Corrigiendo el error buscando su fracción enésima.
(2) Procurando que los términos a_i sean todos positivos. De esta manera la suma de sus términos, la suma Σa_i en (*), crece a medida que reiteramos el proceso. Al ser L/n un valor constante, el cociente r_k/n en (*) debe hacerse cada vez menor.
(3) Mediante la corrección mínima que en la realidad de la práctica puede realizar el artesano y que no tiene igual en el ámbito matemático del continuo de la recta. En el continuo R de la recta real puede construirse una sucesión de infinitos términos entre dos puntos infinitamente próximos. En la práctica esto no es posible, ya que la capacidad visual humana ve como uno solo dos puntos que disten menos de un cuarto de milímetro. Además, el grosor de un lápiz, aproximadamente 0,5 mm., impide hacer marcas consecutivas sobre un segmento a distancias inferiores a ésa.

El primero de ellos (1) ya ha sido tratado extensamente a lo largo de este trabajo y constituye la esencia de la *Interpretación matemática del método Kira-kira*.

El segundo (2) se justifica fácilmente, ya que si todos los términos a_i son positivos su suma crece a medida que reiteramos el proceso. Y como el valor L/n permanece constante, el cociente r_k/n se hace cada vez más pequeño.

El tercero (3) merece especial consideración. Como decía Salle (Int. 6.4.4), el error puede corregirse ‘dando o quitando un poquito’ a la estimación precedente. Reflexionemos unos instantes sobre esa idea suponiendo que el error cometido al estimar el tercio de un segmento de longitud 1 es el siguiente (Fig. 8.8):

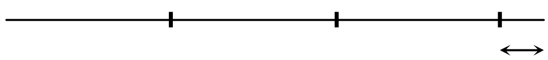


Figura 8.8

Al corregir el error ‘dándole un poquito’ vamos creando una serie de marcas en sucesión creciente y acotada (todas menores que 1, la longitud del segmento). Aplicando un teorema fundamental del análisis de la recta real, la conclusión es que existe límite. Pero de la realidad matemática no se infiere que ése límite sea el tercio, sino que puede ser cualquier valor comprendido entre la primera estimación y el valor 1 del segmento (acordémonos del número e, límite de una sucesión creciente y acotada por 3, pero cuyo límite es mucho menor que 3). En matemáticas el crecimiento, el 'poquito que se le puede dar', puede ser tan ínfimo que al final no nos hayamos separado apenas del punto de partida. Sin embargo, la realidad práctica es otra cosa porque la punta del lápiz tiene un grosor mínimo p que determina la variación mínima de la corrección. El artesano no va a hacer una marca que no pueda distinguir de otra, el 'poquito' que le da a cada estimación es al menos p. Por tanto, la sucesión de marcas avanza a paso p o mayor, es decir, en una sucesión de tantas p como etapas tiene el proceso iterativo aplicado. Existe un múltiplo de p que al ser añadido a la primera estimación a acaba sobrepasando la unidad, la longitud total del segmento:

$$\exists k \in N: \ a + (k - 1) \cdot p \leq 1 \leq a + k \cdot p$$

Ambas estimaciones, a+(k-1)·p ó a+k·p, difieren del tercio en menos de p, por loo que son ya lo suficientemente buenas. La velocidad de convergencia en este caso puede que no sea demasiado rápida, pero el método así aplicado es factible y constituye una variante de nuestra interpretación original. La llamaremos *Interpretación progresiva del método Kira-kira*.

El método Kira-kira es geométrico y carece de expresiones simbólicas, pero sus aspectos cuantificativo, recurrente y algorítmico lo hacen mucho más analítico de lo que pueda parecer en un principio. La versión numérica que acabamos de mostrar inspira nuestra *Interpretación del método Kira-kira como un algoritmo de la división*.

8.3.2 El método Kira-kira: un proceso recurrente

¿Es imprescindible utilizar símbolos para hacer matemáticas? Desde la perspectiva analógica, no; desde la perspectiva analítica, sí (Davis y Hersh, 1988). Pero, ¿cuánto menos analítico es el método Kira-kira de los toraja que la versión analítica desarrollada por el investigador? ¿En qué se distinguen la una de la otra? El método toraja es lógico, pues se basa en simplificar el problema paso a paso hasta hacerlo tan sencillo que resulte evidente, esto es, dividir en dos o tres partes un segmento minúsculo que muy buen puede no exceder del grosor de la punta del lápiz con el que se trabaja. También es experimental, pues la realidad práctica de la experiencia determina la precisión, corrección y validez de la solución.

La recurrencia es una estrategia de resolución característica de las matemáticas y se basa en dos ideas principales: en la simplificación sucesiva del problema original y en la auto semejanza procedimental. Ambas ideas son fundamentales en la resolución de problemas. Un solución recurrente consiste en resolver un problema mediante la resolución de casos más sencillos o accesibles del mismo problema. Y esos casos más simples también son reducidos a otros más sencillos todavía. Así sucesivamente hasta que el más reducido de los problemas sea tan fácil que su solución sea obvia, ya conocida o prácticamente inmediata de obtener. A partir de dicha solución se obtendrá la solución del problema original.

He aquí en qué consiste el método Kira-kira. La solución obtenida por recurrencia conduce a la solución del problema original. Los motivos por los que es necesario buscar versiones más sencillas y accesibles del problema original hay que buscarlos en la tecnología disponible y accesible, pero también en la factibilidad real y práctica del cometido. En el método Kira-kira la solución original se obtiene como suma de las soluciones parciales obtenidas en cada etapa.

> …, hemos utilizado cierta terminología básica de la recursividad, … Meter significa suspender las operaciones relativas a la tarea que se tiene entre manos, sin olvidar el punto en que se está, y emprender otra tarea. De esta última se dice, usualmente, que está ubicada ‘en un nivel más bajo’ que la anterior. Sacar significa lo opuesto, completar las operaciones correspondientes al primer nivel, reasumiéndolas en el punto exacto donde fueron suspendidas, y ascendiendo para ello un nivel. Ahora bien, ¿cómo recordar en qué punto se estaba en cada diferente nivel? La respuesta es: mediante el almacenamiento de la información en una pila. En consecuencia, una pila es un tablero (el listón de bambú del artesano) que nos indica cosas tales como, 1) dónde quedó suspendida cada tarea terminada (dirección de retorno, en la jerga técnica); 2) cuáles son los hechos que deben ser conocidos a propósito del punto de interrupción (enlaces variables, en la misma jerga). Cuando uno se saca de vuelta hacia arriba para reasumir una tarea, la pila se encarga de restablecer el contexto correspondiente, eliminando toda confusión u olvido posibles (Hofstadter, 1987, p. 142).

Al aplicar el método Kira-kira el artesano se ‘mete’ en el problema posponiendo las operaciones relativas que tiene entre manos. Es decir, delega una división imprecisa en otra más profunda. Eso sí, ‘sin olvidar el punto en el que se está’. Para no olvidarlo el artesano hace una marca en el bambú y en el segmento a dividir. Tantas señales, tantas iteraciones del proceso. La última señal, la última iteración. Pero en lugar de nombrar o enumerar sucesivamente dichas señales con a, b, c, d, … o bien 1, 2, 3, 4, …, lo que hace el artesano es corregir su error de forma creciente o decreciente. De este modo sabe que la última señal es la que está más a la derecha o a la izquierda de todas las que ha ido practicando, cosa que no sucedería si hubiese hecho las correcciones alternativamente y su convergencia tuviese que ser alternada, saltando de un lado a otro de la solución. La ‘pila’ del artesano en la que se almacena la información es el listón de bambú en el que registra sus estimaciones. He ahí la desventaja de aplicar el método con un compás. Entonces las correcciones deben hacerse en el aire y no hay almacenamiento de información. Sin duda eso ralentiza la eficacia de la aplicación.

El método Kira-kira es un proceso recurrente, no iterativo:

> In the iterative case, the program variables provide a complete description of the state of the process at any point. If we stopped the computation between steps, all we would need to do resume the computation is to supply the interpreter with the values of the three program variables. Not so with the recursive process. In this case there is somo additional ‘hidden’ information, maintained by the interpreter and not contained in the program variables, which indicate ‘whre the process is’ in negotiating the chain of deferred operations. The longer the chain, the more information must be maintained (http://mitpress.mit.edu/sicp/full-text/sicp/book/node15.html).

Esos aspectos recurrentes y algorítmicos del método Kira-kira y su convergencia hacia la solución deseada lo hacen muy valioso en lo que se refiere a la educación matemática.

8.4 RESOLUCIONES MATEMÁTICAS DE UN PROBLEMA PRÁCTICO

8.4.1 Transición de las soluciones analógicas a las analíticas

Después de observar cómo los artesanos toraja resuelven los problemas que su actividad les plantea, proponemos la siguiente clasificación de las soluciones a un problema. Aunque no se haga explícito, tenemos en mente el ámbito geométrico del contexto en el que se ha desarrollado la investigación.

Solución espontánea: realizada sin ningún propósito o voluntad o de la que no puede averiguarse cuál es. Por ejemplo, ante la cuestión de señalar un punto sobre una hoja de papel, una respuesta espontánea sería hacerlo ‘sin ton ni son’, al ‘azar’. No nos referimos aquí al azar matemático de una calculadora u ordenador, sino al capricho personal y del que el azar, ahora sí, 'matemático' sería un modelo excelente.

Solución senso-motriz: su producto se basa en las capacidades sensitivas y motoras del cuerpo humano como son la visión, el tacto, el oído o el movimiento circular de las articulaciones de las extremidades (dedos, mano, brazo), etc. Gracias a esas capacidades podemos trazar un línea bastante recta a mano alzada (si no es muy larga) o podemos señalar 'a ojo' el punto central de una hoja de papel.

Corresponde también a este tipo de solución señalar el punto central de una hoja de papel como aquel en el que se cortan las líneas que conectan dos vértices opuestos trazadas a mano alzada. Obsérvese que aquí no hay ninguna justificación de porqué ese punto responde la pregunta. Simplemente se trazan esas líneas referenciadas visualmente y, ya que proporcionan una intersección, se la elige como solución sin otro motivo que su resaltada presencia. No se argumenta aquí porqué el punto de corte de las diagonales se halla justo en medio del rectángulo de papel.

Esta solución aporta algo de lo que carece la espontánea. Por el hecho de compartir todas las personas los mismos sentidos y capacidades motoras, es más general y objetiva de lo que en un principio parece además de evidenciar un propósito, un plan.

Solución automática: se caracteriza por la existencia de un método de producción de resultados, aunque su aplicación es meramente automática e inconsciente. Se ajustarían a este tipo de soluciones los procedimientos propios del Dibujo Técnico como el trazado de la perpendicular a un segmento siguiendo el procedimiento euclidiano. Puede llevarse a cabo con total éxito desconociendo los motivos que garantizan su resultado. La base de esa actuación son la reproducción mecánica e imitativa carente de toda reflexión. El porqué salen así las cosas no interesa al autómata, es cosa de otros.

A pesar de todo, la eficacia y éxito de la solución automática sugieren la existencia de una argumentación y su conocimiento por parte de quien o quienes idearon tal automatismo y que quienes lo aplican desconozcan. Paradójicamente, su mecánica ignorante la hace más rigurosa y objetiva que la solución senso-motriz. Más aún si, como suele ocurrir en los casos de automatismos, intervienen en ella herramientas y acciones específicas. Éstas herramientas y acciones se constituyen en indicios sobre los que indagar una argumentación además de facilitar su reproducción sistemática.

Es en la justificación de la resolución donde aparece el carácter matemático de la solución. Las siguientes soluciones incorporan justificaciones, sino propias, al menos afines a las justificaciones matemáticas como son la cuantificación, la experimentación y la argumentación, todas basadas en aspectos y elementos impersonales y objetivos.

La solución analítica se basa en la demostración, por lo que siempre es argumentada. Es el paradigma de la actividad matemática occidental:

Solución demostrada: incorpora representaciones simbólicas o fórmulas de elementos de la práctica mediante las que esos elementos son manipulados y relacionados según una axiomática y unas reglas de manipulación de símbolos o lógica. La justificación se convierte en demostración. Ésta es la solución típica del matemático profesional occidental, la solución M-atemática institucional.

Sin embargo, también hay soluciones analógicas argumentadas y aunque su argumentación lógica no utilice notación simbólica o se base en la experimentación no por ello dejan de ser soluciones matemáticas si sus referencias son objetivas y se basan, sobre todo, en la cuantificación. Entre las soluciones analógicas argumentadas distinguimos:

Solución experimental: se justifica en la *praxis* de la realidad. El resultado es válido porque funciona. A la pregunta de porqué un resultado se toma como solución, la respuesta es: ‘porque funciona’. Alguien traza dos segmentos que se cortan siguiendo una determinada estrategia. Al preguntarle por qué son perpendiculares, su respuesta es: *Compruébalo tu mismo. Coge esta escuadra y ponla encima de la esquina de la figura. ¿Ves?, coincide, ¡son perpendiculares!*[1]

Esta justificación no está exenta de lógica. Para la solución se dispone de un mecanismo de verificación definitivo como es la realidad y que, por cierto, más a menudo de lo que parece utilizan los matemáticos más profesionales y formales, sólo que su realidad no es física. Luego, también a menudo, pretenden hacer creer que sus resultados son ‘puramente’ teóricos y están por encima de la *praxis*. La justificación experimental gana rigor, objetividad (independencia del autor pues otros pueden corroborarla o denostarla) y generalización a medida que se la experimentación crece. Comprobar un resultado de forma experimental no sólo es algo muy lógico, sino que decisivo. Tanto, que provocar la revisión de argumentaciones lógicas tenidas por impecables. Por tanto, la experimentación no debe verse como un contrario de la lógica, más bien como la base de su fundamento.

Solución razonada: su razón obedece a la cuantificación y a la lógica informal. Por ejemplo, señalar sobre una línea una serie de puntos que la dividan en cinco partes. Si éstas pueden ser desiguales, la solución se reduce a contar hasta cuatro y hacer cuatro señales sobre la línea, una por cada punto. Pero si las partes deben ser iguales, la solución, además

[1] Esta justificación no está exenta de lógica. Dispone de un mecanismo de verificación de la solución infalible como es la realidad y que, por cierto, más a menudo de lo que parece utilizan los matemáticos más profesionales y formales, sólo que su realidad no es física. Luego, también a menudo, pretenden hacer creer que sus resultados son ‘púramente’ teóricos y están por encima de la *praxis*.

de cuantificada, debe incorporar una estrategia o método que garantice y justifique el resultado. Dicha estrategia se desarrollará en base a otras referencias y que incorpora, aunque de modo implícito, una sucesión de acciones y resultados que podemos tomar como micro causas y micro consecuencias de todo el proceso.

Por ejemplo, una solución razonada sería señalar el centro de una hoja de papel en el punto de corte de las mediatrices de los lados argumentando que ésta es la solución correcta porque su intersección está a la vez en la mitad de la longitud y en la mitad de la anchura del rectángulo de papel. En la resolución razonada puede intervenir la experimentación, pero no ya como justificante único, como sucedía en la solución experimental, sino como complemento al razonamiento. Inspirándonos en la clasificación de Davis y Hersh recapitulamos la clasificación de las soluciones de una situación en una práctica. No consideraremos la espontánea como solución verdadera de un problema, ya que de este tipo de solución no pueden conocerse en qué se fundamenta ni qué la produce (Tabla 8.1):

<table>
<tr><td colspan="4">SOLUCIÓN MATEMÁTICA</td></tr>
<tr><td>No deductiva
(no argumentada)</td><td colspan="3">Deductiva
(argumentada)</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Vicaria
(instrumental)</td><td colspan="2">Analógica
(no formalizada)</td><td>Analítica
(formalizada)</td></tr>
<tr><td>Experimental</td><td>Senso-motriz</td><td>Demostrada</td></tr>
</table>

Tabla 8.1

Obsérvese como la presencia de los factores característicos de la solución matemática analítica más formal e institucionalizada se acentúan al recorrer las diferentes soluciones: *Espontánea, Senso-motriz, Automática, Experimental, Razonada, Demostrada*.

8.4.2 Resolución matemática de un problema

El método Kira-kira inspira la siguiente reflexión sobre lo que supone y en qué consiste resolver un problema. Desde la perspectiva matemática tradicional en la que un resultado o bien es correcto o bien es incorrecto, resolver un problema P significa que:

- Se dispone de un procedimiento A que aplicado al problema proporciona una solución: s=A(P).

- Se dispone de un procedimiento B que aplicado a la solución permite averiguar si ésta es correcta o no: B(s)=V (verdadero), B(s)=F (falso).
- Si la solución es incorrecta, es decir, B(s)=F, se dispone de un procedimiento C que corrige la solución obtenida: C(s)=s’ y B(s’)=V.
- Una vez se ha visto que B(s’)=V el problema está resuelto. La solución es s’.

En el ámbito científico experimental las cosas son diferentes, los procedimientos no son tan definitivos, las cosas no están bien o están mal, sino que pueden estar suficientemente bien o mal. Por eso en un contexto práctico y científico cercano a la perspectiva de Polya y Lakatos, la resolución de un problema matemático se obtiene con grandes dosis de experimentación científica (Polya, 1945) y tras una serie pruebas y refutaciones (Lakatos, 1978) que conducen a la solución. Desde estas perspectivas más realistas, la solución de un problema se obtiene por aproximaciones sucesivas. Así, resolver un problema P significa que:

- Se dispone de un procedimiento A que aplicado al problema proporciona una solución: s=A(P).
- Se dispone de un procedimiento B que aplicado a la solución permite averiguar si ésta es correcta o no. Los valores de éste procedimiento B no son 0 y 1 como antes, sino que se mueven en el intervalo continuo y cerrado [0, 1], con B(s)=1 (correcto), B(s)=0 (incorrecto). Existe un valor crítico $r \in [0, 1]$ que determina la validez o el rechazo de la solución:

$$
\begin{array}{lcl}
B(s)>r & \Rightarrow & s \text{ aceptada} \\
B(s)<r & \Rightarrow & s \text{ rechazada}
\end{array}
$$

- Si una solución no es válida (B(s)<r) se dispone de un procedimiento C que la mejora: C(s)=s’ y B(s’)>B(s).
- Se da como buena una solución cuando los procedimientos A (obtención), B (verificación) y C (corrección) proporcionan una solución s_n que no puede ser mejorada y para la que $B(s_n)>r$.

Esto resume el método experimental de resolución. Si, además, tanto el planteamiento del problema como los procedimientos generadores de la solución son objetivos (independientes de quién los aplica), cuantificados (expresados mediante cantidades) y articulados con lógica y/o experimentación, estamos ante un planteamiento matemático y ante un procedimiento matemático de resolución de un problema.

El método Kira-kira para dividir un segmento en N partes iguales cumple esas premisas:

- Procedimiento A. Consiste en la estimación visual de la primera solución s. No es el azar, aunque, como ya vimos en el capítulo V, el azar sería útil como procedimiento A en el caso de la división en dos partes iguales.
- Procedimiento B. Consiste en verificar si la solución s obtenida con el procedimiento A es lo bastante buena. Para ello se comprueba si N·s=L, siendo L la longitud del segmento. El valor crítico r correspondiente está ahora determinado por la capacidad visual: si L–N·s es imperceptible visualmente, la solución es lo bastante buena y se da como correcta. De lo contrario es invalidada.
- Procedimiento C. Consiste en mejorar la solución mediante la aplicación del procedimiento A a una versión reducida P’ del problema P original y cuyo planteamiento ha sido originado por la solución invalidada s. Es decir, C=A(P’).

A modo de recapitulación, podemos reformular la resolución matemática de un problema dando nombres más apropiados a cada una de los procedimientos que la facilitan.

Para un problema P se dispone de al menos tres procedimientos (G, V, M), todos ellos objetivos (independientes de quien los aplica), lógicos (razonados) y cuantificados (guiados y sometidos a la cantidad).

El procedimiento G *genera* la primera solución s al aplicarse al problema P: G(P)=s. El procedimiento V *verifica* la validez de la solución. En el caso más simple, 1=verdadero y 0=falso. Si V(s)=1, el problema está resuelto.

Si V(s)=0, disponemos de un procedimiento M que *mejora* la solución s: M(s,P)=s’.

Ya hemos observado que en el ámbito matemático tradicional los valores 0 y 1 no admiten término medio, pero en el ámbito experimental y práctico las soluciones aproximadas pueden ser hasta ineludibles y los valores 0 y 1 deben ampliarse hasta abarcar todo el intervalo [0, 1]. En tal caso, el procedimiento de verificación V se somete a un valor crítico $c_0 \in (0, 1)$ determinante de la validez de una solución. En tal caso llamaremos V_r a dicho procedimiento.

De ahí que en la práctica, la resolución de un problema no sea inmediata como sucede en la geometría euclidiana y pase por una serie de etapas en las que cada vez nos acercamos a la solución ideal y que puede concluir sin que ésta se alcance aunque sepamos que existe.

Las dimensiones del papel en el que está impreso este trabajo son un buen ejemplo de ello. Su proporción debería ser √2=1.41421356..., pero como este valor escapa a cualquier tecnología nos conformamos con una aproximación:

$$\frac{297\,\text{mm.}}{210\,\text{mm.}} = 1{,}4\overline{142857} \approx 1{,}4142135623730950488016 88... \cong \sqrt{2}$$

Llamaremos *procedimiento resolutivo matemático-experimental* al cuarteto formado por el problema P y tres procedimientos, G (generador), r-V (r-verificador, con $r \in [0, 1]$) y M (mejora), tales que al ser aplicados al problema proporcionan una solución que el sistema da como suficientemente buena u óptima: {P; G, r-V, M}.

Todo eso hace del método Kira-kira un procedimiento bastante riguroso, objetivo, lógico y, sobre todo, matemático.

8.5 INTERPRETACIÓN MATEMÁTICA SITUADA (IMS) DE LA ORNAMENTACIÓN ARQUITECTÓNICA TORAJA

8.5.1 Revisión del concepto de IMS

El concepto de *interpretación matemática situada* (IMS) se desarrolló sobre una estructuración de la práctica artesanal en tres niveles de aproximación: obra-acabada, obra-en-curso y obra-explicada. El estudio realizado en cada uno de esos niveles ha producido una serie de resultados determinantes para la investigación. Pero también ha mostrado que no han sido tan suficientes como se esperaba porque en la búsqueda de respuestas y validaciones de los modelos desarrollados por el investigador se ha hecho patente que éste ha penetrado en un nivel distinto a los tres anteriores.

Mediante la visualización se ha interpretado la obra-acabada, mediante la observación se ha podido ver cómo se hacía la obra-en-curso, y mediante la interpelación se ha conocido la obra-explicada. Sin embargo, en la última parte del capítulo dedicado a la obra-explicada ha quedado claro que no basta con preguntar o, dicho de otro modo, que en una actividad práctica, no basta con verbalizar las cuestiones que se plantean. El método Kira-kira nunca habría sido validado si el investigador no hubiese adoptado el papel de aprendiz, tratando de usar las herramientas del artesano, y dejando que éste le instruya *in situ* cómo hacer las cosas. La interpelación se transforma en situación. El investigador se ha *situado* en la práctica para obtener resultados. Así fue como se validó la interpretación del método Kira-kira.

Hay que depurar por tanto el modo de enfocar la obra-explicada y distinguir entre la simple interpelación y la interpelación situada, ésas a las que antes llamamos interpelaciones activas (Apdo. 6.4). Es decir:

Obra-acabada: Interpretación basada en la visualización.
Obra-en-curso: Interpretación basada en la observación.
Obra-acabada: Interpretación basada en la interpelación simple (interrogación)
y en la interpelación situada (participación e instrucción).

8.5.2 El sistema reticular tácitamente cuantificado (SRTC) de la ornamentación arquitectónica toraja

Las etapas de elaboración de un grabado ya fueron esbozadas anteriormente (Apdo. 6.4.4):

a. Inicio: pintar de negro el espacio rectangular al que está destinado el grabado.
b. Trazo de los márgenes del grabado. Su grosor igual al del listón de bambú.
c. Trazo de la retícula.
d. Trazo de otras líneas auxiliares que completan, junto con la retícula el esquema geométrico del diseño.
e. Talla (si procede) de los *mata*, los ojos de las volutas
f. Esbozo opcional y a mano alzada de líneas.
g. Talla del diseño.
h. Perfilado a navaja.
i. Coloración del grabado.
j. ‘Lavado’ del grabado con pintura negra que cubre la retícula y los excedentes de color.

También conocemos las herramientas más comunes necesarias para su elaboración: lápiz, listón de bambú, compás (estándar o de bambú), gubia, mazo y navaja.

La ornamentación arquitectónica toraja se desarrolla en base a un sistema merecedor del calificativo de matemático, sobre todo por tres aspectos. Primero, porque su producto se elabora aplicando reglas y procedimientos lógicos, rigurosos y objetivos (independientes de quien los aplica). Segundo, porque la base referencial de todos los diseños está en las retículas divisorias y organizadoras del espacio. Y tercero, porque dichas retículas se construyen mediante una resolución más analítica que analógica de un problema geométrico relativo a la cuantificación en un doble sentido (cantidad de módulos y ángulo recto de sus líneas). Por supuesto, lo que tiene de analítico ésta resolución no hay que buscarlo en los símbolos, fórmulas o cálculos escritos para obtenerla. Está en las mentes de los artesanos. ¿Acaso no pueden se mudas las matemáticas?

El que llamaremos *Sistema Asimbólico Reticular Cuantificado* de la ornamentación arquitectónica toraja (SARC) posee las siguientes características:

Es un *sistema*. Las dos primeras acepciones lingüísticas del término *sistema* son: ‘conjunto de reglas o principios sobre una materia racionalmente enlazados entre sí’, ‘conjunto de cosas que ordenadamente relacionadas entre sí contribuyen a determinado objeto’ (R.A.L.E., 1992: 1888). En el ámbito matemático, la definición de Bouvier y George en su diccionario de alto calado formal no disipa dudas. Según esos autores, el término *sistema* es ‘utilizado en ciertos casos como sinónimo de familia; por ejemplo, en la expresión *sistema de vectores libre*’ (Bouvier y George, 1984: 763), y dan varios ejemplos populares como ‘sistema de ecuaciones’, ‘sistema de numeración’, ‘sistema de referencia’, etc.

Definen éste último sistema como ‘la base de *elementos* a partir de los cuales se define un sistema de coordenadas’(Bouvier y George, 1984: 763), remitiendo la definición de sistema de coordenadas a la de sistema de referencia cartesiano y que consiste en un ‘Triplete (O, i, j) donde (i, j) es una base de R^2’ (Bouvier y George, 1984: 117).

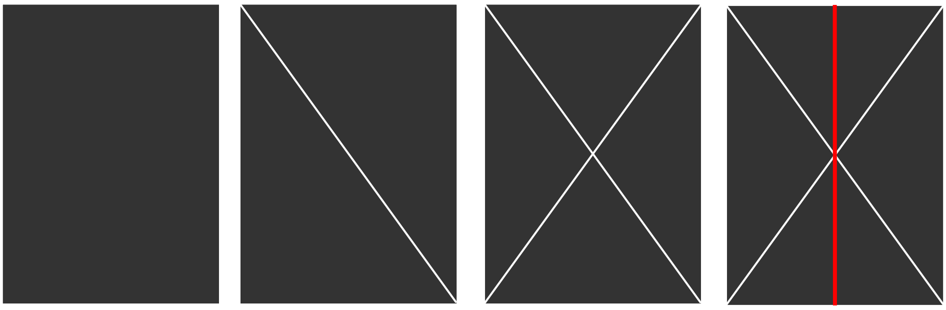
En el ámbito etnomatemático el *sistema*, como resultado de la organización y combinación de ideas matemáticas, puede ser más valioso que las propias ideas: ‘To us, mathematical ideas include those involving number, logic, spatial configuration and, more significant, the combination or organization of these into systems and structures.’ (Ascher & Ascher, 1997,: 25).

En el caso que nos ocupa son importantes las dos acepciones lingüisticas del término anteriores porque distinguen, por decirlo así, entre *sistema operativo* y *sistema de producción*. El sistema de producción es tangible, visible y su estructura se levanta sobre la secuenciación temporal. El sistema productivo toraja se estructura en las etapas de elaboración de un grabado, los procedimientos y herramientas usados en el proceso. El sistema operativo se basa en los aspectos universales del sistema de producción, es una abstracción suya, una versión teórica desligada de la realidad práctica en la que los artesanos se desenvuelven con procedimientos y herramientas. Si en el sistema de producción un compás traza una circunferencia sobre una tabla, en el sistema operativo la circunferencia es una serie de puntos equidistantes del centro. Un sistema se alimenta del otro.

Desde la perspectiva matemática nos interesa el sistema operativo y abstracto en el que se organizan las ideas matemáticas. Y este sistema es el de la geometría toraja. Una geometría euclidiana situada cuyo producto es obtenido mediante procedimientos no euclidianos. Este sistema geométrico basado en la experiencia y en la capacidad visual humana opera sobre puntos, segmentos, circunferencias y volutas para obtener paralelismo, perpendicularidad, equidistancia y simetría. En el análisis de la obra-en-curso y de la obra-explicada se expusieron ya las reglas y rigurosas, fijas, generales, lógicas y objetivas (independientes de quien las aplica) que darán al producto el aspecto que tiene.

Las reglas de este sistema son las que caracterizan su *Geometri Perkiraan*. Por ejemplo, ¿qué hace el artesano para trazar la mediatriz del lado de un rectángulo? Aplicar una serie de reglas lógicas y hacer uso de los postulados de su geometría:

1. Un postulado toraja establece la posibilidad de trazar ‘a ojo’ la vertical u horizontal por un punto dado.
2. Para aplicarlo en el trazo de la mediatriz vertical de un rectángulo debe obtener antes el punto por donde tiene que pasar.
3. Puede obtenerlo de dos formas: (a) como intersección de las diagonales del rectángulo en cuestión; (b) dividiendo Kira-kira el lado en dos partes iguales
4. Si lo hace del primer modo (Fig. 8.9) determinará primero el punto por donde tiene que pasar como intersección de las diagonales. Luego aplicará el postulado. Y el resultado quedará garantizado por el teorema (experimental) que afirma que esa vertical pasa por el punto medio de los lados que intercepta. Además, como el punto está justo en medio del rectángulo los problemas visuales no son tan graves porque el lado superior e inferior quedan más cerca, justo a la mitad de distancia que en el caso anterior.



Solución (a)

Figura 8.9

5. Si lo hace de la segunda forma (Fig. 8.10), el paso siguiente a la aplicación del método Kira-kira será introducir el postulado, aunque el artesano puede también asegurarse el resultado si considera que el lado inferior del recinto está demasiado lejos como para abarcarlo de un vistazo. En tal caso señalará también el punto medio del lado inferior del rectángulo (la medida sintética correspondiente ya ha sido obtenida por kira-kira en el listón de bambú) y unir después ambos puntos medios.

Solución (b)

Figura 8.10

Es un sistema *cerrado*. Esta propiedad es una característica fundamental de todo sistema. Llamamos así a la capacidad de un sistema para resolver los problemas que él mismo plantea, es decir, para resolverlos con las mismas reglas que lo forman. En este sentido, la resolución euclidiana al problema del trazado de la mediatriz de un segmento no constituiría una solución del sistema toraja. Por tanto, y pese a conocerla, el hecho de que Rombe' no la aplique no hace sino confirmar el sistema.

Es *reticular*. Todos los diseños se realizan con referencia a una retícula que determina dónde se ubican las figuras de cada grabado, de qué manera se relacionan y la mayor parte de su forma. Además, el hecho de que con una misma retícula se elaboren distintos grabados, algunos muy similares, otros no tanto, enfatiza el carácter *universal* de este recurso y del que el grabado obtiene su rigor.

Entre las retículas más comunes están la que se construye dividiendo en 2x3=6 partes el lado superior del recinto y que da lugar a [1+2+2+1] columnas, y la retícula fina y sesgada. Con la primera se realizan, por lo menos, los grabados siguientes: Pa’ Tangke lumu’, Pa’ Tangke lumu’ di toke, Pa’ Tangke lumu’ di supik, Pa’ Lulun paku, Pa’ Bulingtong, Pa’ bulingtong si teba, Pa’ Baranae, Pa’ Erong, Pa’ Sule tang, Pa ‘ Baba gandang. Con la segunda se hacen: Pa’ Sekong, Pa’ Sekong pandi, Pa’ Sepu, Pa’ Sepu tarongkong, Pa’ Repo.

Es *cuantificado*. La retícula referencial se construye mediante la resolución de un problema geométrico fundamental como es la división de un segmento en partes iguales. Esta cuantificación determina la proporción modular entre el largo y ancho del grabado. Observemos en este punto que hay diseños cuyo problema de cuantificación no está en ´la cantidad de módulos determinados por la retícula, sino en la ortogonalidad y paralelismo de sus líneas, como ocurre en el caso del *Pa’ Sekong*. Las observaciones del proceso de grabado y las interpelaciones a los artesanos han puesto de manifiesto que los artesanos calculan mentalmente.

Es *asimbólico* (tácito). No utiliza símbolos ni escritura alguna para representar elementos o procesos de su trabajo. Tampoco para realizar cálculos, aunque los que tienen que hacer no sean excesivamente complicados. El único registro documental de lo que hacen es el que queda en los listones de bambú. Ahí permanecen las longitudes tomadas y las particiones definitivas.

Es matemático porque el sistema resuelve problemas geométricos planteados en base a la cuantificación espacial. Las resoluciones tienes un fuerte componente experimental que las acercan a la analogía, pero en algunos casos hay un marcado carácter analítico, como es la resolución mediante un algoritmo recurrente y lógico del punto que divide un segmento en varias y determinadas partes iguales y cuyo fruto es una solución tan precisa como se desee.

Alangui y Barton se referían a un QRS-system como un ‘systematic approach to understanding and communicating aspects of our quantitative, relational and spatial realities’ (Alangui y Barton, 2002). Desde luego, el enfoque (approach) de los artesanos toraja es sistemático (systematic). Y no sólo en el sentido de entender y comunicar aspectos de nuestras realidades cuantificativas, relacionales y espaciales, sino en el sentido opuesto por el que esas realidades son comprendidas y aprehendidas mediante aspectos cuantificativos, de relación y espacio.

Tras el estudio de la actividad artesanal toraja veo ciertas similitudes entre el enfoque de las *NUC-mathematics* (Barton, 2004) y las soluciones matemáticas analógicas de Davis y Hersh (1988). En lo analógico está ese carácter ‘convencional’ al que alude Barton en su caracterización de las matemáticas-NUC: ‘near universal conventional mathematics’ y que según Barton abrevian una expresión más extensa: ‘a system of meaning that makes sense of the quantitative, relational or spatial aspects of the world’ (Barton, 2004). Más adelante, el propio Barton reconocía que la dificultad estaba en demostrar que eso constituía un *sistema*: ‘More important is to show that is a system’ y enumeraba algunas de las características por las que él considera que algo merecía ser tomado como tal: generalizable, posible de discutir en abstracto (fuera de la manifestación física de la práctica) y poseedor de su propio vocabulario técnico y simbólico.

Como hemos observado, el sistema toraja es asimbólico y, por ahora, desconocemos cuál es su verdadero vocabulario técnico porque la lengua de esta investigación ha sido el bahasa indonesio y no el toraja, que es la lengua en la que los artesanos desarrollan y comunican su trabajo. Lo que sí ha quedado claro es que los artesanos poseen un vocabulario técnico en la lengua oficial del país, el bahasa indonesio, y que se desenvuelven con comodidad al hablar de cuadrados, perpendiculares, números y otros conceptos matemáticos. Por tanto, sin duda trabajan con un vocabulario técnico, aunque el único que conocemos no sea al que Barton se refería como ‘propio’ porque no es el de su lengua materna.

Aparte de esta salvedad, no hay duda de que las características del sistema toraja que hemos expuesto en las páginas precedentes verifica los postulados de Barton y que coincidimos en sus expectativas: ‘I suspect carvings does meet these requirements’. Una buena manera de referirnos a las matemáticas toraja sería destacar su aspecto natural, crudo y asimbólico: *NUDE-mathematics*.

8.5.3 IMS de la ornamentación arquitectónica toraja: *Geometri perkiraan*

La IMS desarrollada por el investigador sobre la práctica artesanal de los grabadores toraja ha sido escrita con símbolos y justificada con cálculos. Es analítica. Las soluciones artesanas tienen un carácter fuertemente analógico, están basadas en la experiencia (visual y práctica) y no recurren al manejo de símbolos representantes de los elementos tangibles de su trabajo. Luego, si bien la IMS de la que es autor el investigador está situada en la práctica estudiada, y si como decimos incorpora una parte de conocimiento matemático inexistente en la práctica, la cuestión que se plantea ahora es la de separar uno y otro para sacar a la luz las matemáticas de la IMS que sí están en la práctica. La respuesta se obtiene recordando la definición de IMS. Sólo aquel conocimiento matemático validado por el artesano será el que podrá justificarse como propio de su práctica.

Las matemáticas identificadas en la ornamentación arquitectónica toraja son las relativas a su geometría euclidiana situada que llamaré *Geometri Perkiraan* (geometría pro aproximación) destacando su papel experimental e iterante propio de su SRTC. Sus elementos son:

Postulados. Los dos postulados fundamentales no euclidianos son: (1) La posibilidad de trazar la vertical y la horizontal por un punto determinado; (2) La precisión de una construcción geométrica está limitada por la capacidad visual.

Objetos. Puntos, líneas (segmento, recta, curva, circunferencia, espiral), figuras (triángulo, rectángulo, cuadrado, polígono regular e irregular, plano, círculo, sector).

Conceptos. el punto como intersección de dos segmentos o líneas, paralelismo y perpendicularidad de segmentos y curvas (circunferencias y volutas), mediatriz de un segmento, simétrico de un punto con respecto de un segmento, tangente a una o dos circunferencias, límite (la curva como límite de una poligonal, el punto medio, tercio, etc. de un segmento como límite de una sucesión de puntos en el método Kira-kira).

Teoremas. (1) El paralelismo de rectas y segmentos es transitivo (retículas finas sesgadas); (2) La tangente exterior común a dos circunferencias del mismo radio es paralela a la recta que pasa por sus centros (trazo de una paralela); (3) Las diagonales de un cuadrado son perpendiculares (ortogonalidad de los haces de paralelas de las retículas sesgadas); (4) Toda sucesión decreciente de términos positivos tiene límite cero.

Procesos. Trazo de segmentos con listón (regla), trazo de circunferencias con compás (metálico o de bambú), trazo ‘a ojo’ de la vertical y horizontal por un punto dado, trazo de las diagonales para determinar el centro de un rectángulo, trazo de segmentos ortogonales sesgados, trazo visual de la tangente común a dos circunferencias y, el que consideramos como resultado más valioso de toda la investigación, un algoritmo recurrente para dividir un segmento en partes iguales al que hemos llamado método kira-kira.

9

CONCLUSIONES

Este capítulo dedicado a la redacción y recapitulación de conclusiones se abre más abajo recordando las cuestiones fundamentales que determinaban los objetivos de la investigación. Puede decirse que todo el trabajo desarrollado ha consistido en realizar un *examen* a una actividad práctica centrando la atención en sus elementos más significativos: producto elaborado, proceso de elaboración, estrategias aplicadas, tecnología utilizada y autores del trabajo. Sin embargo, el examen no es evaluador ni calificador. No se trataba de calificar a los artesanos. Se trataba de examinar su actividad práctica como lo haría un buscador de diamantes, iniciando la búsqueda desde un conocimiento de ese metal precioso y previendo que no va a estar esperándole tras el cristal de un escaparate con forma de talla poliédrica de caras lisas y perfectamente pulidas, sino en un estado más natural. Probablemente mezclado con otros minerales menos valiosos y que harán que la identificación no sea ni inmediata ni sencilla.

La indagación empezó contemplando los grabados toraja en las fachadas de las casas y graneros tradicionales. El equilibrio, simetría y rigor geométrico de sus figuras resultaban difíciles de explicar sólo en base a la habilidad artesana de sus autores. Más allá de su belleza artística, esa perfección figurativa hacía pensar en la intervención de ideas matemáticas en su elaboración.

El buscador de diamantes debe conocer esa piedra preciosa si quiere hallarlo donde nunca ha estado. ¿Qué son las matemáticas? Este trabajo se ha enfocado desde una perspectiva que considera las matemáticas como construcción social de una cultura. Al *Constructivismo social* de Ernest se le añadió el calificativo *etnomatemático* para dejar claro que nuestro punto de partida ve las matemáticas como una construcción social propia de cualquier sociedad y cultura y que no es un producto socio cultural exclusivamente desarrollado en Occidente (Apdo. 2.1.4).

Si ese era el enfoque que tildamos de *exterior* (Apdo. 2.1.3), en cuanto a las filosofías *interiores* (Apdo. 2.1.2) coincidíamos con Polya (1945) en que las matemáticas son una ciencia y, por tanto, incorporan experimentación, y son también algo más que la rigurosa ciencia de Euclides (Apdo. 2.1.1). De hecho, la ciencia rigurosa a la que se refiere Polya es el resultado de todo un proceso y que acabó siendo plasmada en un documento que recopila toda una serie de resultados (teoremas) y procedimientos para alcanzarlos (demostraciones).

Pero como ya se explicó en el capítulo 2, las matemáticas no son sólo ‘algo más’, también son *anteriores* a la ciencia euclidiana, por lo que el alcance de las matemáticas va más allá del academicismo y del mundo occidental. Las matemáticas traspasan las fronteras académicas, sociales y culturales para convertirse en algo verdaderamente universal. Y es precisamente desde el ámbito universal que tiene sentido considerar la posibilidad de que una sociedad y cultura particulares puedan desarrollar unas matemáticas propias. Las matemáticas a les que D'Ambrosio (1985) llamó Etnomatemáticas.

Recordemos que el término matemáticas se ha escrito con minúscula y que ha substituido a la expresión 'conocimiento matemático'. El motivo era la adhesión a la observación de Bishop (1991) con respecto al fenómeno pan cultural de las matemáticas y reflejar las ideas subyacentes manifestadas en los párrafos anteriores y al mismo tiempo, como ya se manifestó al inicio del trabajo, evita al lector ciertas connotaciones occidentales a las que una 'eme' mayúscula incita. Por otro lado, la expresión 'conocimiento matemático' resulta demasiado formal y puede producir interpretaciones erróneas. El conocimiento matemático seria el resultado final de un proceso. Va desde la identificación de matemáticas hasta la validación, justificación y asentamiento de esas matemáticas como integrantes del conocimiento de una sociedad y cultura. Y eso es algo que sobrepasa los límites de este trabajo, puesto que las matemáticas de las que se ha hablado aquí no son las que conocen, creen conocer o consideran como tales los artesanos toraja. Ya en el capítulo 1 quedó claro que las matemáticas serían las relacionadas con la educación, sociedad y cultura del investigador.

9.1 RESPUESTAS A LAS CUESTIONES DE LA INVESTIGACIÓN

La investigación se concretaba con el planteamiento de tres cuestiones principales (Cap. 1), la primera de ellas, doble:

A. Identificar matemáticas en una actividad práctica (A2) elaborando para ello un método con el que llevar a cabo esa identificación (A1).

La segunda pretendía ofrecer un reflexión teórica con el fin de aclarar y concretar la idea de lo que significa 'hacer matemáticas':

B. Concretar la idea de práctica matemática.

Por último, estudiar las implicaciones que la identificación de matemáticas y el método desarrollado para llevarla a cabo pueda tener para la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas:

C. Identificar situaciones de posible aprendizaje y ofrecer contextos nuevos, reales y prácticos para conceptos matemáticos fundamentales en distintos niveles educativos.

Estos objetivos se resumían en tres preguntas principales: ¿Cómo identificar matemáticas en una práctica? ¿Qué es una práctica matemática? ¿Cuáles son las implicaciones para la educación matemática de la identificación de matemáticas en una práctica? Lo siguientes apartados responden esas preguntas.

9.1.1 ¿Cómo identificar matemáticas en una práctica?

La llamada *Interpretación Matemática Situada* (IMS) fue desarrollada y presentada en el capítulo 3 como método para identificar matemáticas en una práctica. En el caso de este trabajo la práctica ha sido de tipo artesanal, es decir, una actividad en la que una persona cambia y da forma a elementos de su entorno en base a unos objetivos concretos y mediante la manipulación y manejo de herramientas y artefactos.

Se partió de la idea de que toda interpretación matemática basada únicamente en la visualización constituye en realidad una *proyección matemática* del observador sobre el objeto observado (Apdo. 3.2). Puesto que la perspectiva filosófica que orienta la investigación considera las matemáticas como algo más que sus resultados o teoremas, en la identificación de matemáticas son de capital importancia – mucho más que el resultado o producto finalizado de la actividad artesana – , el proceso de su elaboración, el propósito que lo guía y las explicaciones de sus autores. Por tanto, es imprescindible considerar y examinar esos tres factores de la práctica (producto, proceso y explicaciones) si queremos obtener de la investigación un resultado que merezca llamarse ‘identificación de matemáticas en un práctica’.

Pese a esto, nada impide entrever que un objeto sea difícilmente posible sin utilizar matemáticas. Viendo la perfección de los grabados toraja y la existencia de copias idénticas en diferentes localizaciones uno ve muy difícil de explicar que puedan hacerse sin obedecer determinadas pautas, estrategias o procedimientos objetivos y sin manejar artefactos apropiados. Por tanto, las proyecciones matemáticas, aunque yermas en cuanto a la identificación de matemáticas, son útiles porque permiten el planteamiento de cuestiones a indagar. De ahí que la indagación se desarrolle como suelen hacerlo los modelos matemáticos de fenómenos reales: mediante el enunciado de teorías que deberán ser comprobadas, es decir, confirmadas o rechazadas. En este último caso el enunciado deberá modificarse para adaptarse a la realidad de la situación que lo generó.

En un principio, la IMS se estructuró (Apdo. 3.3.2) en tres niveles atendiendo a los factores principales mencionados anteriormente: la *obra-acabada*, en la que se visualizan los grabados ya terminados; la *obra-en-curso*, donde se observa cómo y con qué se realiza el trabajo; y la *obra-explicada*, en la que se interpela a los autores.

Pero eso fue a priori. A lo largo del planteamiento y desarrollo de las interpelaciones realizadas en el capítulo 6 se vio que tampoco era suficiente preguntar al artesano. A veces la comprensión verbal no era todo lo clara que debiera ser. Para explicarse mejor y poder plantear las cuestiones sin ningún tipo de duda, el investigador acabó entablando el diálogo en bahasa indonesio primero y, después, poniéndose en la piel del artesano tomando sus herramientas. Es decir, situándose en el problema con los mismos medios que el grabador disponía. Así surgieron las interpelaciones activas del capítulo 6. Sin ellas la interpretación matemática del método Kira-kira nunca hubiese sido confirmada. Por tanto, esto significa que en al estructuración de la práctica artesana correspondiente a la obra-explicada debe distinguirse la simple interpelación de la interpelación activa en la que el investigador es, de hecho, instruido en la tarea. Los resultados obtenidos lo son por *situación*. Esto quiere decir que la investigación ha modificado la estructuración inicial de la práctica (Apdo. 8.5.1):

<table>
<tr><th colspan="3">PRÁCTICA ARTESANAL</th></tr>
<tr><td>Estructura</td><td colspan="2">Base de la interpretación</td></tr>
<tr><td>Obra-acabada</td><td colspan="2">Visualización</td></tr>
<tr><td>Obra-en-curso</td><td colspan="2">Observación</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Obra-explicada</td><td rowspan="2">Interpelación</td><td>Simple</td></tr>
<tr><td>Situada
(Participación e instrucción)</td></tr>
</table>

Un detalle importante hay que destacar. La investigación se ha llevado a cabo gracias al uso de dos idiomas, el inglés y el bahasa indonesio. Este último es la lengua oficial de todo el país y que la gente local aprende en la escuela elemental, pero la lengua materna de los artesanos y con las que se comunican entre ellos es el bahasa toraja. Aunque el toraja comparte algunos términos con el indonesio, no es lo mismo. El indonesio permitió al investigador lograr resultados que de otro modo no se habrían obtenido con el uso exclusivo del inglés y pese a la intervención de intérpretes. Por eso la IMS de la ornamentación arquitectónica toraja se ha elaborado sin tener en cuenta la relación existente entre la lengua local, el bahasa toraja, y la práctica artesana. Éste del lenguaje local es el único aspecto que impide declarar como completa y definitiva la IMS y que sin duda debería protagonizar las futuras investigaciones.

Los estudios antropológicos de tipo social han mostrado que la arquitectura y ornamentaciones toraja no son una cuestión caprichosa. La arquitectura tradicional toraja no solamente construye casas y graneros, también representa en ellos la concepción del mundo y de la vida que tienen los toraja. La ornamentación no sólo embellece las construcciones. Los grabados tienen significados que van más allá de lo que representan las figuras talladas, pues pueden considerarse un modo de *escribir* y documentar aspectos sociales, sobre todo de clase y relación, de la comunidad toraja (Bigalke, 1981; Haüser-Schaüblin, 1985; Lumowah, 1985; Nooy-Palm, 1979; Sandarupa, 1986).

La aplicación de la IMS a la práctica artesanal que realiza esa manifestación cultural que es la ornamentación arquitectónica toraja ha producido toda una serie de resultados entre los que destacan:

1. Los diseños se realizan sobre una retícula rigurosamente construida. De ahí la consideración de *Sistema reticular tácitamente cuantificado* (Cap. 8). El adjetivo *tácito* corrobora una afirmación de Rogoff expuesta al comienzo (Apdo. 2.2.2): 'La resolución efectiva de problemas prácticos puede provenir del uso de conocimiento tácito disponible en el escenario relevante más que de la confianza en proposiciones explícitas' (Rogoff, 1984: 7).
2. Es en la construcción de esa retícula donde los artesanos llevan a cabo la mayor parte de su actividad matemática, sobre todo a la hora de dividir un segmento en partes iguales (método Kira-kira) y trazar segmentos paralelos y perpendiculares.

   Dividir es una actividad matemática que en occidente llevamos a cabo mediante la aplicación de un algoritmo a representaciones simbólicas de la cantidad (cifras). La aplicación del algoritmo se detiene o continúa según la precisión deseada, lo que significa reducir el resto de la división en mayor o menor medida. Lo mismo hace el artesano toraja cuando aplica el método Kira-kira. Divide longitudes. Y, de hecho –como ya se dijo en el capítulo 8 al habar de su procedimiento–, lo que hace no es distinto de 'nuestra' división simbólica cifrada. Su resultado no sería mejor si utilizase símbolos convencionales, locales o foráneos. La división es tan perfecta y precisa como requiere su trabajo práctico, determinada por la capacidad visual humana. Para lograrlo le basta con registrar en un listón las estimaciones que a cada paso optimiza.

3. La serie de situaciones matemáticas a los que se enfrenta el grabador en el curso de su tarea (Apdo. 8.2 y 8.3) son:

- Trazar un segmento y prolongarlo en una recta.
- Trazar una circunferencia.
- Determinar el centro de un rectángulo.
- Trazar las mediatrices de un rectángulo.
- Inscribir un círculo en un cuadrado.
- Trazar la paralela a un segmento dado.
- Trazar la tangente común a dos circunferencias.
- Trazar una voluta.
- Determinar el simétrico de un punto con respecto a un segmento.
- Trazar una retícula sesgada ortogonal.
- División de un segmento en partes iguales (el llamado problema capital de la ornamentación arquitectónica toraja).

4. El uso de resultados o teoremas:

- El paralelismo de rectas verifica la propiedad transitiva.
- La tangente exterior común a dos circunferencias del mismo radio es paralela a la recta que pasa por sus centros.
- Las diagonales de un cuadrado son ortogonales. Su justificación es de tipo experimental.
- Las mediatrices de los lados de un rectángulo pasan por el punto de intersección de sus diagonales. Según el investigador (efectuando ahora una afirmación inferida por la investigación, pero proyectada) reside en la simetría de la figura resultante al dibujar las dos diagonales. La simetría determina mitades.

5. Las resoluciones de situaciones mediante procedimientos no euclidianos (aún cuando algunos procedimientos euclidianos sí son conocidos por algunos de los artesanos) y con el manejo de herramientas específicas, algunas de ellas también de uso corriente en occidente (compás

metálico) y otras vernáculas (listón y compás de bambú). En ninguna de esas resoluciones interviene la medida cuantificada y una de ellas (la división de un segmento en partes iguales) se hace por recurrencia.

6. El uso y manejo de herramientas, algunas ya conocidas en occidente, otras no (listón y compás de bambú) a las que se dan funciones no euclidianas. En ciertos procedimientos el listón actúa como el compás euclidiano. Por otro lado, el compás de bambú no se colapsa y no se usa para transportar longitudes.

7. El trabajo en planos verticales. Eso impide la resolución de problemas mediante la aplicación de procedimientos euclidianos, como usar regla y escuadra o regla y cartabón para dividir un segmento en partes iguales.

Por todo ello la IMS ha servido de base a la identificación de conocimiento matemático en la ornamentación arquitectónica toraja. El proceso de identificación de esas ideas matemáticas se ha hecho siguiendo un itinerario paralelo al de la modelización matemática de un fenómeno al mismo tiempo que ha ido confirmándose según el patrón científico de teoría-prueba-confirmación / refutación propio de las ideas de Kuhn (1970), Popper (1994), Polya (1988) y Lakatos (1994). De la contemplación de la obra-acabada (los grabados) se obtienen interpretaciones matemáticas (modelos, teorías, conjeturas) de su contenido figurativo y del modo en que ese contenido se distribuye en cada panel. Esas primeras interpretaciones han sido confirmadas o refutadas, modificadas o no, después observando la obra-en-curso (el proceso de grabado). Por último, se acude a los autores del trabajo (los artesanos) para escuchar cuál es su propósito y qué explicaciones ofrecen de lo que hacen. Sólo cuando una interpretación ha sido confirmada en las tres fases y ha sido corroborada por los artesanos se da como válida y es declarada como integrante de la IMS de la práctica artesanal. El resumen es el siguiente.

Las primeras interpretaciones matemáticas (IM) se desarrollaron a raíz de la contemplación de los grabados:

(i) Interpretación euclidiana de la geometría de los grabados (Apdo. 4.4.1).
(ii) Interpretación isométrica de los diseños (Apdo. 4.4.2).
(iii) Interpretación arquimediana de las volutas (Apdo. 4.4.3).

(iv) Interpretación reticular de los diseños, que incorporaba un procedimiento de medida y cálculo para la división de un segmento en partes iguales (Apdo. 4.4.4).

(v) Interpretación de la retícula sesgada (Apdo. 5.3.6).

El camino recorrido experimentado por esas interpretaciones originales ha sido diverso (Tabla 9.1).

	Obra-acabada	Obra-en-curso	Obra-explicada
Geometría	IM euclidiana (Apdo. 4.4.1)	IM euclidiana senso-motriz (Apdo. 5.3.1)	IM euclidiana situada (Apdo. 6.5.1)
Simetrías	IM isométrica (Apdo. 4.4.2)	IM casi rechazada (Apdo. 5.3.2)	IM rechazada (Apdo. 6.5.2)
Volutas	IM arquimediana (Apdo. 4.4.3)	IM paso a paso (de tortuga) (Apdo. 3.5)	IM confirmada en sus aspectos no analíticos (Apdo. 6.5.3)
Retículas	IM medida y cálculo (Apdo. 4.4.4)	IM método Kira-kira (Apdo. 5.3.4)	IM confirmada (n=2,3,4,6,8) (Apdo. 6.5.4)
Ortogonalidad sesgada		IM Ortogonalidad sesgada: diagonales rombo (Apdo. 5.3.6)	IM confirmada en el caso particular del cuadrado (Apdo. 6.5.5)

Tabla 9.1

Incluso una IM rechazada como la isométrica no ha sido estéril. Ha resultado útil para confirmar la existencia de grabados correspondientes a los 7 grupos de isometrías en friso (unidimensionales) y la de 11 de los 17 grupos de isometrías del plano (bidimensionales). La ausencia de grabados con grupo de simetría relacionado con giros de 60º y 120º obedece a causas culturales. Esa interpretación ha servido también útil para indagar el modo en que los autores relacionan las formas que tallan.

La IMS de la ornamentación arquitectónica toraja se ha llamado *Geometri perkiraan* para reconocer el carácter visual, experimental y aproximativo de la ornamentación arquitectónica toraja.

Precisamente en el método Kira-kira para la construcción de retículas se basó la idea de que todos los mecanismos, ideas y estrategias de los grabadores toraja constituyen un sistema, no sólo de producción, sino de conocimiento, muy parecido al que Barton y Alangui

(2002) llamaron *QRS-system* o *NUC-mathematics* y que en capítulo 8 se convino en llamar *Sistema reticular tácitamente cuantificado (SRTC) de la ornamentación arquitectónica toraja*. Sus características principales son:

- REGLAMENTADO. Basado en una serie de reglas y procedimientos rigurosos y objetivos (independientes del autor).
- GENERAL. Todos los diseños se realizan sobre una retícula vertebradora (en muchos casos la misma es compartida por distintos diseños).
- CUANTIFICADO. La construcción de la retícula se fundamenta en cuestiones de cuantificación (paralelismo, perpendicularidad y división de un segmento en partes iguales).
- CERRADO. Capaz de resolver los problemas que el mismo sistema plantea.

Recordemos que, según lo observado en el capítulo anterior, las versiones analíticas desarrolladas por el investigador no pertenecen a dicho sistema.

9.1.2 ¿Qué es una práctica matemática?

Lo que hace matemática a una práctica es el modo en que se solucionan los problemas que dicha práctica plantea. Y una resolución matemática, como ya dejamos claro en el capítulo II pasa por la cuantificación. El estudio del proceso de grabado y las interpelaciones a los artesanos demuestran que la ornamentación arquitectónica toraja no se caracteriza precisamente por la cuantificación de las medidas en base a una unidad de longitud. Pero esto no significa ausencia de cuantificación. Más bien, al contrario. El paralelismo y la perpendicularidad son cuantificaciones implícitas, aunque bien es verdad que los artesanos toraja, y me atrevo a decir que como la inmensa mayoría de la gente en todo el mundo, ven la perpendicularidad como una cuestión de simetría más que como la mitad de un ángulo llano. De lo que no hay duda ninguna es que la construcción de las retículas referenciales de los diseños sí se basan en la cuantificación y que esta es bien explícita, si no escrita, sí verbalmente. Así que, como ya se ha dicho en el apartado anterior, es en el trazado de las retículas donde se asienta el *intríngulis* matemático de la cuestión.

En el apartado 2.2 se planteó la dicotomía entre las soluciones matemáticas de tipo analítico y analógico propuestas por Davis y Hersh (1988). No era muy de esperar que los artesanos toraja resolviesen sus problemas aplicando fórmulas y realizando planteamientos formales de sus situaciones. Por eso no se encuentran soluciones estrictamente analíticas en sus resoluciones. Pero el método Kira-kira tiene unas particularidades que lo hacen diferente de todos los demás procedimientos observados. Resuelve un problema incluido en los Elementos de Euclides en una situación práctica y real en la que la aplicación del método euclidiano resulta impracticable (en planos verticales) y, además, mediante la construcción de una sucesión de marcas convergentes hacia la solución con tanta precisión como se desee. Se trata de un método recurrente cuya IMS no hace sino transcribir en un lenguaje más formal cada uno de los pasos del artesano. Aunque no sea una solución analítica pura es mucho más que una solución analógica. Esta ambigüedad fue la que motivó, en gran parte, deshacer la dicotomía entre soluciones analíticas y analógicas y proponer una clasificación transitoria entre ambas. De ahí la depuración de las soluciones analógicas en toda una serie de soluciones (Apdo. 8.1.3) que van desde la más absoluta inconsciencia y espontaneidad hasta el análisis y abstracción más puros: espontánea, senso-motriz, automática (puramente instrumental), experimental, razonada y demostrada. La solución del método Kira-kira, división y convergencia tácitas pero reales, abarca aspectos experimentales y de razonamiento para situarse en la antesala de la demostración.

Reproducimos aquí (Tabla 9.2) la tabla referente a la clasificación de las soluciones matemáticas de una situación en una práctica elaborada en el apartado 8.4.1:

<table>
<tr><td colspan="4">SOLUCIÓN MATEMÁTICA</td></tr>
<tr><td>No deductiva
(no argumentada)</td><td colspan="3">Deductiva
(argumentada)</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Vicaria
(instrumental)</td><td colspan="2">Analógica
(no formalizada)</td><td>Analítica
(formalizada)</td></tr>
<tr><td>Experimental</td><td>Senso-motriz</td><td>Demostrada</td></tr>
</table>

Tabla 9.2

Una solución matemática aquella es lógico-deductiva y se basa en la cuantificación, pero no tiene porqué ser necesariamente formalizada ni analítica. No diremos si una práctica es o no es matemática, lo que diremos es si contiene situaciones merecedoras de tal calificativo. Para ello nos remitiremos a la idea de lo que acabamos de declarar como solución matemática. Desde luego, la IMS de la práctica artesanal de la ornamentación arquitectónica toraja ha mostrado que dicha práctica alberga situaciones merecedoras de considerarse matemáticas puesto que se superan mediante soluciones matemáticas lógico-deductivas.

El análisis del procedimiento toraja para dividir un segmento en partes iguales ha proporcionado también la caracterización de las resolución recurrente de una situación. Hemos llamado *procedimiento resolutivo matemático-experimental* (Apdo. 8.4.2) al cuarteto formado por un problema o situación P y tres procedimientos, G (generador), r-V (r-verificador, con $r \in [0, 1]$) y M (mejora), tales que al ser aplicados al problema proporcionan una solución que el sistema da por buena: {P; G, r-V, M}.

9.2 LAS HERRAMIENTAS COMO MEDIADORES COGNITIVOS

En el estudio realizado en el capítulo 7 referente a las características de las herramientas usadas en la ornamentación arquitectónica toraja se ha señalado su papel mediador en la cognición de quienes las manejan. Si la función de un artefacto es hacer realidad la idea de quien lo gobierna, el resultado que produce y el modo en que se manipula es un camino hacia las ideas de quien la utiliza.

Mediante el análisis de las herramientas planteado desde la perspectiva de Abreu (2000) hemos visto como cada una de ellas contribuye a la consolidación de determinados conceptos matemáticos, tanto derivados de su forma y composición física como de su manipulación.

En efecto, tras el análisis de sus características físicas, de para qué se usan y destacar las características de su manejo (Apdo. 7.1) se estableció una relación entre los artefactos y la cognición matemática que fue concretada en tres tablas correspondientes a los cuatro grupos en los que organizamos los artefactos (Apdo. 7.2): lápiz y listón de bambú; compases; gubia y mazo; y navaja. Las tablas 9.3-9.6 sintetizan aquel estudio.

	Ideas matemáticas relacionadas
Lápiz	-La línea como resultado del movimiento de un punto sobre una superficie.
Listón bambú	-Segmento sobre un plano. -Curva rectilínea sobre una superficie (hélice). -La recta / hélice como unión de segmentos / fragmentos helicoidales en una misma dirección. -La recta / hélice como un continuo de puntos.
Lápiz y listón	-Correspondencia 1-1 entre los puntos del listón y los del segmento al que se acopla o de la línea que traza el lápiz al perfilarlo.

Tabla 9.3

	Ideas matemáticas relacionadas	
	Circunferencia (directa)	Circunferencia (indirecta)
Compás estándar (lápiz, agujas)	-Conjunto de puntos determinado por el vértice de un ángulo que gira en el espacio alrededor de un vértice.	-Conjunto de puntos equidistantes de uno fijo.
Compás bambú	-Conjunto de puntos equidistantes de uno fijo.	-Curva en todo punto perpendicular al radio y equidistante del centro, evocando las ideas de curvas evolventes y evolutas.

Tabla 9.4

	Concepciones relacionadas
Gubia y mazo	-Correspondencia 1-1 entre cada golpe de maza y el surco labrado por la gubia. -La curva como poligonal. -La curva como resultado de la variación direccional.

Tabla 9.5

	Concepciones relacionadas
Navaja	-La curva como versión derivable (suave) de una poligonal.

Tabla 9.6

A lo largo de la investigación se ha puesto de manifiesto como determinadas prácticas sociales limitan el uso de ciertas herramientas (Abreu, 2000). Los artesanos toraja tienen al alcance de la mano reglas milimetradas y calculadoras, pero no las utilizan. De las observaciones e interpelaciones se deduce que existe cierto rechazo a ‘complicarse la vida’ adaptándose al uso de nuevas tecnologías cuando las ya conocidas producen los resultados pretendidos. Usar calculadores supondría efectuar cálculos y eso supondría cuantificar de forma precisa todas las longitudes. Para el grabador eso, más que agilizar el trabajo, lo demoraría y complicaría en exceso.

Lo mismo puede decirse de las resoluciones de carácter más euclidiano que conocen algunos artesanos (Seber, Obs. 5.2.9; Rombe’, Int. 6.3.5) y que tampoco son aplicadas en beneficio de otras estrategias menos elegantes a los ojos occidentales.

El compás de bambú es toda una novedad para el investigador occidental. Es además la única herramienta por la que se distinguen los artesanos. Curiosamente, los que usan el compás de bambú (Yobel/Salle y su hermanastro Rois), y además de aprender del mismo anciano, aplican el método Kira-kira con listones de bambú. Los demás aplican el método con el compás metálico de dos agujas.

Por una parte, y desde la perspectiva del investigador occidental, hallamos aquí un uso nuevo para una vieja herramienta como es el compás estándar. Por otra, el compás de bambú es una herramienta nueva cuyo uso produce un objeto geométrico de sobra conocido: la circunferencia. La única herramienta occidental similar al compás de bambú toraja es tal vez el llamado ‘compás de vara’, aunque su uso sea para trazar grandes círculos y nunca en paneles verticales, sino horizontales.

Hay un aspecto de especial relevancia en el que las herramientas juegan un papel y distinto del que las relaciona con la cognición y por el que la geometría toraja se ajusta a la filosofía interior constructivista de las matemáticas. Al artesano no le valen resultados de existencia, debe construir todo lo que produce y debe hacerlo mediante procesos finitos. La limitada capacidad visual hace que los errores que corrige disminuyan hasta hacerse invisibles y, por tanto, la aplicación del método Kira-kira, no sólo se completa con un número finito de pasos, sino que éstos son muy pocos y hacen la tarea factible. Intervienen ahí la visión humana, el lápiz y el listón de bambú, éste último como soporte donde registrar las estimaciones.

Los aspectos cognitivos ligados a las ideas matemáticas encapsuladas en las herramientas toraja son de enorme importancia para la educación matemática. Pero para destacarlos y ampliarlos es necesario ir más allá, salir del micro-contexto en el que se mueven:

> Tools matter; they stand between the user and the phenomenon to be modelled, and shape activity structures. Recognising that tool-mediation is subject to its user’s participation in a practice does not mean that we can ignore what the tool was designed for: the structural facets of the tool are at least as important as what is done with them. The tools of an environment encapsulate mathematical relationships in some sense: but these relationships lie dormant until they are mobilised, and it is in their mobilisation that meanings are created (Hoyles y Noss, 2004: 340-341).

Sin duda la educación académica y formal debe tener algo que decir al respecto. Se trata de un línea de investigación más próxima a los trabajos de Gerdes (1988, 1994, 1996) y que, según nuestra perspectiva debe acometer la gente local.

Las implicaciones de este trabajo para la didáctica de las matemáticas obedecen a tres aspectos fundamentales. Uno, descubrir nuevos contextos en los que situar conceptos matemáticos fundamentales. Dos, ver como la praxis determina el carácter de una solución.

Y tres, aprovechar el papel que como mediadoras cognitivas desarrollan las herramientas manejadas por los artesanos.

En el capítulo anterior se ha visto como las nuevas situaciones planteadas en el seno de la actividad artesanal toraja facilitan nuevas contextualizaciones para viejos y cruciales conceptos matemáticos.

El estudio de la obra-en-curso ha puesto de manifiesto que en una actividad práctica manda la praxis y que algunos aspectos no tan importantes en el ámbito académico son aquí de una importancia capital. Es el caso de la factibilidad y facilidad de las acciones encaminadas hacia el éxito de la tarea, como resolver problemas trabajando en paneles verticales y no sobre mesas horizontales o utilizar herramientas que no dificulten la reproducción de copias exactas, como el compás de bambú que no colapsa. Es el caso de la economía del tiempo y de los materiales y artefactos, que cuestan dinero. También la cuestión de la precisión, que no siendo perfecta puede darse como suficientemente correcta cuando el error cometido es indetectable por la visión humana.

Todo eso hace que ante dos soluciones a un mismo problema se opte por la más fácil y factible, la menos complicada, y se rechace aquella que, aunque produciendo un resultado absolutamente preciso suponga un cambio de perspectiva y un nuevo aprendizaje para resolver situaciones que ya se domina.

En este sentido, el éxito y la eficacia de la práctica artesana tradicional suponen también un fracaso en cuanto a la ampliación y desarrollo de su conocimiento. Lo que sale perfecto ya no puede mejorarse. El conocimiento se transmite de generación en generación, pero no crece porque no se enfrenta a situaciones nuevas. A tradición se encarga de que los problemas a resolver sean siempre los mismos.

Tanto los matemáticos como los educadores profesionales de las instituciones académicas deben asumir el reto de formalizar y ampliar dicho conocimiento autóctono estudiando posibles actualizaciones y aplicaciones a situaciones nuevas propias de la vida y mundo contemporáneos, prácticas y teóricas. Sólo así dejará de relacionarse con el pasado y lo anecdótico para tener el lugar y consideración merecidas en las sociedad y cultura presentes.

9.3 LA IMS COMO GENERADORA DE NUEVO CONOCIMIENTO MATEMÁTICO

Mediante la *Interpretación isométrica* de los grabados el investigador comprende el modo en que se organiza la distribución y variación del motivo fundamental de cada diseño. Las herramientas conceptuales para desarrollar ese modelo ya las conocía de entrada y formaban parte de su entorno cultural matemático: isometrías del plano (translaciones, giros y reflexiones) y las representaciones simbólicas que conforman la nomenclatura de los grupos de isometrías.

Con la *Interpretación paso a paso* el investigador capta la esencia de las volutas talladas de manera directamente ligada al proceso de talla. Las herramientas matemáticas de ese modelo fueron el concepto de función, la espiral arquimediana, la *Geometría de Tortuga*, les series trigonométricas, la derivada y el paralelismo de curvas.

La *Interpretación del método Kira-kira* para dividir un segmento en partes iguales y construir a partir de aquí la retícula de un diseño maneja otras herramientas conceptuales como las sucesiones, los algoritmos recurrentes, las funciones exponenciales y el concepto de límite.

Por tanto, el propio conocimiento matemático del investigador ha sido suficiente para interpretar y explicar los diversos fenómenos involucrados con la realidad artesanal toraja.

En Occidente, la *Interpretación isométrica* no representa ninguna novedad. Son corrientes y conocidos los trabajo en los que se elaboran modelos parecidos para clasificar los diseños decorativos de determinadas culturas, como son los de Ascher (1991), Gerdes (1988) y Zalavsky (1979).

Tampoco la *Interpretación paso a paso* tiene nada especialmente significativo para Occidente. Este modelo constituye, sobre todo, un ejercicio de fidelidad a la realidad por el que el investigador se acredita a sí mismo y delante de sus colegas al verse capaz de adaptar y ampliar sus conocimientos matemáticos para comprender la nueva realidad en la que se ve inmerso.

La *IMS del método Kira-kira* también ha aportada nuevo conocimiento matemático al investigador, pero en esta ocasión también a otros colegas de su entorno matemático y educativo occidentales. Muchos de ellos así se lo han reconocido[1]. Además, no se ha hallado documentación referente a semejante método para dividir un segmento en partes iguales. No figura en una obra especializada como la de Beskin (1976) sobre la división de un segmento en una razón dada, ni en la de Kostovski (1984) sobre las construcciones geométricas con compás y en las que se trata el problema de dividir un segmento en N y en 2^N partes iguales (pp. 21-33), ni en ninguna de las aplicaciones de métodos por aproximaciones sucesivas aplicados a algunos problemas prácticos que figuran en la obra de Vilenkin (1984). Tampoco

[1] Ninguno de los matemáticos y / o profesores de matemáticas a los que hasta hoy he comentado este procedimiento, y son muchos, lo conocían.

Courant y Robbins (1996) hablan de un procedimiento semejante cuando tratan el problema de dividir un segmento en dos partes iguales (Courant y Robbins, op. cit.: 145-146) ni en las construcciones únicamente con un listón (Courant y Robbins, op. cit.: 196-198). No se menciona el caso en tratados de Dibujo Técnico. Menos aún en libros de texto correspondientes de nuestro país (ESO) ni en su equivalente en Indonesia (SLTP).

En este sentido el procedimiento *Kira-kira* representa conocimiento matemático nuevo para Occidente. No debe entenderse esto como una nueva aplicación práctica de antiguo conocimiento como es la división de dos números naturales y en la que la división numérica se aplica a la división geométrica. Ocurre justamente lo contrario. El punto de partida es la división geométrica y la división numérica que el investigador desarrolló en el capítulo 7 fue una interpretación, una traducción simbólica analítica del procedimiento original geométrico. Desde el punto de vista de la geometría griega anterior a nuestra era eso no es novedoso, pero sí lo es que el método sea recurrente.

¿Y qué decir del conocimiento matemático desarrollado por el investigador? En el curso de la investigación ha llevado a cabo toda una serie de procesos cognoscitivos que le han permitido desarrollar nuevo conocimiento matemático. Esto ha sucedido, sobre todo, en dos casos: en la *Interpretación paso a paso* de las volutas y en la *Interpretación del método Kira-kira*. El investigador desconocía que las espirales arquimedianas no fuesen auto paralelas y que, sin embargo, tendiesen a serlo a medida que se alejan del centro. El investigador tampoco había trabajado jamás con geometría de tortuga ni se había planteado buscar la expresión analítica de la paralela a una curva y que le ha obligado a profundizar en el estudio del Cálculo Diferencial. Desconocía el *Método Kira-kira* por completo. Tanto lo expuesto con relación al desarrollo del modelo (Cap. 6) como las reflexiones posteriores (Cap. 8) sobre la partición de un segmento en partes iguales mediante recurrencia suponen conocimiento matemático nuevo para el investigador. Un conocimiento desarrollado en un contexto particular y a raíz de una representación mental de la situación en la que se incluían tanto los procesos como los artefactos manejados por los grabadores. El investigador ha experimentado en primera persona lo que defienden las teorías del conocimiento situado.

Ahora bien, siendo rigurosos deberíamos llamarlo *indirectamente situado*, ya que se basó en una representación mental y no en la implicación directa[2], real y práctica, en la situación. Por tanto, este aspecto refuerza las teorías del conocimiento matemático situado en un sentido indirecto.

[2] Recordemos que el modelo Kira-kira fue desarrollado mucho antes de la interpelación activa que lo validó.

Entre los diversos tipos de aprendizaje social que distinguen los psicólogos se hallan la imitación y el aprendizaje vicario. El aprendizaje por imitación consiste en la repetición de lo observado: ‘Si un sujeto –el modelo- ejecuta un acto y al mismo tiempo refuerza al que lo observa, el acto del modelo se convierte en un refuerzo secundario para el observador, que precisamente por ello tiende a repetirlo.’ (Pinillos, 19: 341). Más adelante, sobre la imitación, Pinillos opina que ‘... a través de ella, respuestas genuinamente nuevas son adquiridas y ejecutadas de pronto, sin necesidad de haber sido ensayadas antes’ (op. Cit.: 343). El aprendizaje del investigador no ha sido de este tipo. Ha observado, pero no ha imitado a quienes observaba. En lugar de eso ha realizado procesos mentales que le han conducido a desarrollar respuestas que le permitiesen explicar lo observado. El aprendizaje del investigador no se ha producido por imitación.

El aprendizaje vicario funciona de forma diferente: ‘El niño que aprende a evitar los cuchillos porque ha visto cortase un dedo a otro niño, no necesita darse un tajo personalmente para adquirir la correspondiente conexión entre el estímulo y la respuesta.’ (Pinillos, op. Cit.: 343). La imitación no es necesaria, el aprendizaje vicario se corresponde con un nivel de abstracción superior en el que el individuo elabora lo observado y relaciona causas y efectos sin tomar parte directa en lo que observa. Así aprendió el investigador.

El aprendizaje vicario forma parte de cualquier proceso de aprendizaje en el que un interlocutor expone, explica o desarrolla una actividad. Como, por ejemplo, resolver un problema en una pizarra. La educación matemática del investigador, acostumbrado a exposiciones ‘magistrales’ pueden haber favorecido la investigación porque ha aplicado en el ámbito artesano mecanismos similares a los aplicados en las aulas universitarias. Observar y elaborar, éstos son los procesos esenciales de una observación no participante ni imitativa que a partir de ahora llamaremos *observación vicaria*.

9.4 LA IMS COMO CONDUCTORA DE UNA INVESTIGACIÓN ETNOMATEMÁTICA

La interpretación matemática situada (IMS) se convierte en un instrumento de gran utilidad para abordar una investigación etnomatemática por diversos motivos.

Primero, como medio con el que el investigador aprehende y se hace consciente de la realidad que tiene delante.

Segundo, como elemento para validar la capacidad del propio investigador, no sólo ante sí mismo, también ante otros miembros de la comunidad matemática y educativa de la que forma parte.

Tercero, como fuente de planteamiento de cuestiones relevantes para la investigación. En lugar de investigar a capricho, la investigación etnomatemática debería someterse a los modelos o interpretaciones matemáticas desarrollados por quien la lleva a cabo. Será eso lo que dará sentido a lo que se busca. Así ha sucedido en este trabajo. De entrada no había una justificación clara para el acierto con el que los artesanos toraja partían los lados de un rectángulo. Pero la interpretación matemática desarrollada, una explicación plausible, ha acabado por confirmarse. De no haberla desarrollado, ¿cómo habría sabido el investigador qué preguntar al artesano?

9.5 LOS ARTESANOS TORAJA: UNA COMUNIDAD DE PRÁCTICA

El aprendizaje de los artesanos no es académico. Aprendieron el oficio y sus procedimientos de sus antepasados. El origen de ese conocimiento hay que situarlo fuera de la escuela, es decir, en la práctica y contexto particulares de su labor. Solamente las teorías del conocimiento situado de Lave (1988) puede explicar su origen, por lo que este trabajo refuerza esa teoría.

Los artesanos comparten contexto de trabajo, herramientas, procedimientos e, incluso –aunque no haya sido este el punto más investigado –, argot. Todo eso hace de los grabadores toraja una comunidad de práctica en la se pone en juego un conocimiento matemático vernáculo: etnomatemático.

9.6 AMPLIACIÓN DE LA INVESTIGACIÓN

El problema de la comunicación verbal no es insalvable aun cuando la lengua local con la que se comunican quienes son objeto de estudio sea desconocida por el investigador. Este trabajo ha sido posible gracias a que los conocimientos de la lengua oficial del país por parte del investigador y por parte de quienes interpelada se situaban a un nivel similar. Pero evidentemente eso ha limitado la riqueza de resultados. La ambiciosa IMS no será definitivamente situada mientras no incorpore un aspecto tan importante como es el lingüístico. He ahí la primera ampliación de la investigación:

(1) Hacer que la IMS sea verdaderamente situada incorporando el estudio del argot propio de los grabadores toraja y que se produce en la lengua local, el bahasa toraja.

Una cuestión que se planteará en las implicaciones didácticas (Cap. 10) es la de importar artefactos y estrategias a la educación matemática occidental. Es de desear que esta incorporación sea tutelada y estudiada para analizar sus posibles consecuencias, ya sean éstas beneficiosas o perjudiciales:

(2) Investigador la forma y el modo de implementar en la educación matemática occidental algunos de los aspectos mencionados en este trabajo analizando los efectos y potencial cognoscitivo de tal semejante importación cultural.

Otro modelo, la Interpretación Isométrica abre también nuevas expectativas pese a haber sido refutada:

(3) Profundizar en la vertiente del modelo isométrico para estudiar la relación entre esa interpretación y la forma en que los artesanos conciben sus diseños.

Antes dijimos que no era nuestra intención determinar qué y cómo debían los toraja aprender ciertos conceptos matemáticos y que la responsabilidad de su educación debe recaer en la gente local. Aun así, las posibilidades de incorporar los resultados de esta investigación a la educación local toraja deben tenerse en cuenta:

(4) Innovación educativa local (en Tana Toraja). La incorporación de determinados aspectos matemáticos identificados en este trabajo a los programas académicos de la educación secundaria local mostraría como esta materia forma parte de la cultura local. Evitando, eso sí, la introducción de aspectos matemáticos occidentales estereotipados que no hubiesen sido situados en la ornamentación arquitectónica.

10

IMPLICACIONES DIDÁCTICAS

10.1 IMPLICACIONES DE LA IMS EN LA EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Este capítulo está dedicado a las implicaciones de la *Interpretación Matemática Situada* (IMS) en la didáctica de las matemáticas occidental. Las implicaciones de la IMS en la educación matemática local de Tana Toraja son evidentes y de gran potencial. Podría desarrollarse toda una tesis doctoral sobre la cuestión siguiendo la línea de los trabajos de Gerdes realizados en Mozambique hace una década o dos. Pero esa tarea no corresponde al educador matemático occidental. Es la gente toraja quien debe decidir qué y cómo aprender. Según la perspectiva defendida a lo largo de este trabajo cualquier intervención en la didáctica local constituiría una forma de colonialismo.

Hablaremos de las implicaciones de la IMS en dos vertientes principales. Desde la perspectiva del educador, valoraremos primero la forma en que la IMS permite identificar contextos de aprendizaje matemático. Luego veremos como afectan sus resultados al diseño de actividades de enseñanza-aprendizaje. Y, por último, abordaremos un aspecto delicado, pero de gran importancia, como es el de la evaluación del conocimiento matemático de una persona. Desde la perspectiva de la innovación didáctica se planteará la importación a la educación matemática occidental del procedimiento Kira-kira para dividir un segmento en partes iguales y la incorporación de otros problemas geométricos toraja con el fin de transformar sus soluciones analógicas experimentales y senso-motrices en soluciones argumentadas y demostradas.

10.1.1 La IMS y la identificación de contextos de aprendizaje

El papel de la práctica y el contexto han sido destacados por Lave (1988), Rogoff (1984) y Abreu (2000). La *Interpretación Matemática Situada* (IMS) de una actividad práctica señala contextos de posible aprendizaje matemático, el conocimiento matemático identificado mediante ella misma, la IMS. En el caso que nos ocupa, el contexto se sitúa fuera del entorno académico y fuera del mundo occidental. Una vez dentro del contexto general de la ornamentación arquitectónica toraja, vemos que existen determinadas situaciones o problemas cuya resolución pasa por procesos de aprendizaje supeditados a un objetivo preciso, al manejo de artefactos y a la aplicación de estrategias bien determinadas.

El aprendiz de artesano no sólo aprende la habilidad necesaria para gobernar listones de bambú, compases y gubias. También adquiere innumerables nociones matemáticas en lo que es una doble abstracción. Sus representaciones son abstracciones de las formas de su entorno natural de la misma manera en que conceptualmente él abstrae ideas y formas geométricas de aquellas que representa. Quien se convierte en grabador acaba inmerso en un proceso de aprendizaje que le llevan a asimilar conceptos y estrategias matemáticas para resolver los problemas a los que deberá enfrentarse (Apdo. 6.4.4).

En general, conviene distinguir entre las traducciones simbólicas de las soluciones matemáticas analógicas de los artesanos toraja y sus versiones analíticas. Ambas han sido elaboradas por el investigador, pero sólo las primeras son dignas de formar parte de la IMS de la ornamentación arquitectónica toraja. Las interpretaciones analíticas de las soluciones matemáticas analógicas son útiles para la didáctica porque permiten contextualizar en el mundo real y práctico conceptos procesos matemáticos hasta ahora propios del mundo abstracto o, al menos, mostrar nuevos contextos en los que desarrollarlos. Esto significa profundizar en la modelización matemática del mundo real.

10.1.2 La IMS y el diseño de actividades de enseñanza-aprendizaje

La base del constructivismo es que el alumno construya su propio conocimiento. Dado un determinado concepto o proceso matemático, el profesor prepara una o varias actividades didácticas con el fin de situar al alumno ante un problema cuya resolución requiera el desarrollo de ése concepto o proceso. La actividad facilitará al estudiante la re-creación y adquisición de esos conceptos y procedimientos nuevos para el estudiante. Pero para que el estudiante no se sienta demasiado alejado de los retos a los que va a enfrentarse, para que su aprendizaje sea coherente y esté relacionado con su entorno social y cultural, lo ideal es que los problemas planteados a menudo procedan del mundo real y práctico. De esta manera logra, además, mostrarle que las matemáticas sirven para algo y residen casi en cualquier actividad humana.

Es muy corriente hoy en día que con la excusa de que las matemáticas están y se usan en todas partes se planteen situaciones estereotipadas en las que la existencia de conocimiento matemático constituya más una proyección que una lectura. Cuando eso ocurre, en lugar de enseñar a elaborar conocimiento, lo que se enseña es a leer las cosas de una determinada forma. Lo que debiera ser constructivismo se convierte en conductismo. El remedio puede ser muchísimo peor que la enfermedad y conducir al alumno y al profesor a callejones sin salida propios de quien pretende cazar moscas con un rifle. ¿Qué situaciones ofrecer al estudiante para que sobre ellas construya un determinado conocimiento matemático? La IMS responde a esta cuestión: aquellas situaciones en las que dicho conocimiento matemático haya sido identificado. En el caso que nos ocupa de la ornamentación arquitectónica toraja se han identificado toda una serie de problemas geométricos muchos de los cuales fueron tratados en *Los Elementos* de Euclides.

Quizá el alumno no tenga que tallar una madera en su vida, pero sí es muy probable que tenga que colgar un póster de su músico favorito en la pared de su habitación. ¿Cómo lo hará si quiere una distribución equilibrada? ¿Cómo determinará el punto medio de esa pared? ¿Cómo lo hará si va a colgar dos pósteres y los quiere equidistantes? ¿Deberíamos invitarle a aplicar las matemáticas escolares realizando la construcción euclidiana con regla, compás, escuadra y cartabón? ¿O tal vez sería más apropiado sugerirle el procedimiento toraja? En este último caso, hablar de punto medio o tercio, de sucesión, de convergencia, de límite, de recurrencia no será gratuito, sino que estará plenamente justificado, pues todo ello forma parte de la solución toraja al problema. He ahí el valor de la IMS en el planteamiento de actividades de aprendizaje matemático coherentes con el conocimiento que se quiere transmitir. No lo sería, por ejemplo, hablar del axioma de las paralelas a la hora de construir una retícula para un diseño puesto que esa cuestión no ha sido identificada. La cuestión que se plantea es:

> *¿Cómo plantear situaciones de enseñanza y aprendizaje matemático si no sabemos cómo identificar conocimiento matemático en el curso de una actividad o no sabemos distinguir una proyección matemática de una lectura matemática?*

La IMS marca un camino a seguir para identificar conocimiento matemático. Y no sólo en una actividad artesanal, sino en cualquiera. Para ello hay que analizar el producto de dicha actividad, el proceso de cómo se desarrolla y, por encima de todo, interrogar a su autor. Sin este último requisito no existe IMS de tal actividad. Eso es de vital importancia si no queremos caer en la preparación de actividades de enseñanza y aprendizaje supuestamente matemático y que muy bien podrían ser meras proyecciones estereotipadas cuyo resultado no será otro que la confusión y el rechazo del alumno.

10.1.3 La IMS en la evaluación de la competencia matemática de una persona

Todo proceso de enseñanza y aprendizaje concluye con una evaluación. Es el colofón a una serie de experiencias didácticas desarrolladas con el objetivo de que el alumno adquiera los conocimientos que se supone debe adquirir. La evaluación se basa en todo el proceso llevado a cabo con el profesor, en las interpelaciones entre profesor y alumno, en el interés de éste por las actividades que se le plantean y también, así es hoy en día en nuestro país, en la realización de pruebas escritas llamadas exámenes. Ahí el alumno se queda solo y debe responder por sí mismo y sin ayuda a una serie de cuestiones generalmente muy relacionadas con las que ha llevado a cabo con sus compañeros y profesor. Se acabó el diálogo, se acabó la jerga particular de cada cual. El profesor, que hasta entonces había valorado muy diversas capacidades del estudiante, ahora debe valorar y calificar un documento escrito en el que se supone queda registrado el conocimiento de su alumno.

Esta tesis y la IMS elaborada son, de hecho, un examen a los artesanos toraja responsables de la ornamentación arquitectónica. Pero si algo ha quedado claro es que no es suficiente evaluar el conocimiento basándose en la obra-acabada, sino que resulta imprescindible analizar la obra-en-curso y, sobre todo, la obra-explicada. No olvidemos que los artesanos saben más de lo que muestra su trabajo e incluso de lo que hacen aún haciéndolo de forma ostensiblemente incorrecta. Salle sabía cómo trazar una retícula sesgada ortogonal aunque las que presentaban sus diseños y la que realizaban en el momento en que fue interpelado no lo era. Si no le hubiese interrogado habría asegurado que desconocía cómo construirla. Si mi criterio para decidir sobre su trabajo se hubiese basado única y exclusivamente en su talla (obra-acabada) y en lo que hacía (obra-en-curso) lo habría suspendido. Tuve que preguntarle directamente para darme cuenta de que sabía más.

Lo mismo puede ocurrir con el examen de un alumno aquí, en occidente. También él puede saber más de lo escrito. Sin preguntarle directamente no podemos tener una idea clara y fiel de la realidad de su conocimiento y corremos el riesgo de calificarle de incompetente cuando en realidad puede que no sea así.

Y no sólo eso. Algunos educadores matemáticos deberían reflexionar sobre las interpretaciones que realizan de los escritos de sus estudiantes. Por ejemplo, en la *Jornada de treball* sobre *Les competències bàsiques de l'àmbit matemàtic* celebrada el 19 de octubre de 2005 y organizada por la *Direcció General d'Ordenació i Innovació Educativa* de la *Generalitat de Catalunya* se hicieron públicos algunos análisis de las resoluciones de los estudiantes a varios de las cuestiones y problemas planteados. Uno de los problemas era el siguiente:

> *Dissabte vindran a la festa de la classe, entre familiars, mestres i alumnes, 81 persones. Cal preparar taules de sis persones. Quantes taules hem de preparar?*[1]

La respuesta de un estudiante fue:

---

[1] El sábado vendrán a la fiesta de la clase, entre familiares, maestros y alumnos, 81 personas. Hace falt preparar mesas de seis personas. ¿Cuántas mesas hemos de preparar?

6	***36***	***69***
12	***42***	***75***
18	***48***	***81***
24	***54***	
30	***60***	
	63	

Y la explicación de la ponente, la profesora M. Luisa Girondo, de la *Universitat Rovira i Virgili* de Barcelona, fue que el estudiante se había equivocado contando (Anexo A: V). La interpretación de la profesora Girondo era que había comenzado contando de seis en seis y que al llegar al 60 se había equivocado, saltando a 63. A partir de ahí había llegado al final, 81, y dado la solución correcta de 14 mesas.

Tal vez lo que se esperaba del alumno era la realización de un cálculo, dividir 81 entre 6, para obtener que 81=6·13+3 y ver que se necesitarían 14 mesas. La respuesta anterior no se obtuvo así, pero hay otra interpretación posible y no tiene nada que ver con el error cometido al contar. ¿Por qué iba a equivocarse el niño entre el 60 y el 63 si ni antes ni después lo hizo? Es muy posible que hubiese contado en sentido ascendente primero (6, 12, 18, 24,... , 72, 78, 84) y que al ver que el resultado no coincidía con 81 iniciase el recuento descendente (81, 75, 69, 63,...). En tal caso optó por quedarse en el 63 como podría haberlo hecho en otro valor. Tal vez fue ésa la respuesta escrita que entregó a sus correctores. En tal caso, no hubo error y, además, no sólo dio la respuesta correcta, sino que ofreció también la distribución: en cada mesa habría 6 personas, excepto una en la que habría tres. Posiblemente no quiso que esas 3 personas se quedaran al final y les reservó una mesa central.

La conclusión no es que ésta última interpretación sea más válida que a anterior. La conclusión es que sin preguntar directamente al niño no sabremos jamás cuál fue su modo de pensar y con qué mecanismos mentales resolvió el problema.

Otro caso del que se habló en las mismas jornadas fue el referido por las profesoras Montserrat Torra y Tana Serra con relación al análisis de resultados y orientaciones para el profesorado. Una de las situación-problema planteadas era sobre el *cálculo con tiempo controlado*. Una de ellas consistía en calcular multiplicaciones con números acabados en cero:

Càlcul amb temps controlat (3)
25 × 100 = 0’25
80 × 300= 0’80
1.500 : 100 =15’00
4.000 : 20 = 400’0

Según M. Torra, refiriéndose a éstas respuestas de un niño, ‘En cambio, aquí lo interpreta todo como divisiones’ (Anexo A: VI). Discrepo de esta interpretación. Si para el niño se tratase de divisiones, ¿por qué no divide 8 entre 3 en la segunda línea? ¿Por qué no divide 4 ó 40 entre 2 en la cuarta? Lo que hace el niño es simplemente correr la coma tantos lugares hacia la izquierda en el número de la izquierda como ceros tiene el número de la derecha. Que éste último comience por 1, 3 ó 2 le trae sin cuidado. No divide, mueve la coma. Y si asocia mover la coma hacia la izquierda con la división, ¿por qué no distingue el significado del símbolo ‘×’? ¿Acaso no sabe que representa el producto?

¿Hay que considerar que esos niños son incompetentes matemáticos? Creo que no. En el primer caso, la distribución en mesas de 81 críos, no hay duda de la competencia del estudiante. El único pero es que no ha respondido según las expectativas. En el segundo caso, las incompetencias simbólica y operativa son manifiestas, pero significa esto que ese chaval sea un incompetente matemático. De nuevo estamos ante un aspecto crucial de la evaluación del conocimiento de una persona y que ha sido de capital importancia en este trabajo. Sin interpelar corremos serios riesgos. De ahí la importancia de tratar la evaluación de una persona como se ha tratado la de los artesanos toraja, mediante la IMS. Declarando como incorrecto aquello que no se sabe cómo interpretar se corre el riesgo de calificar de incompetentes a personas que pueden ser muy competentes.

Antes de concluir este apartado quiero llamar la atención sobre otro aspecto que compete cada vez más a la educación occidental y muy especialmente a nuestro país. El educador matemático debe ser capaz de interpretar matemáticamente una situación no sólo como se dijo antes, para elaborar actividades que ofrecer a sus estudiantes, sino también para reconocer estrategias matemáticas originales, autóctonas, vernáculas, etnomatemáticas ajenas a su propia cultura y academicismo que hay en día pueden traer los jóvenes inmigrantes de otras partes del planeta.

¿Qué haría un profesor de matemáticas si un estudiante resolviese la división de un segmento en partes iguales utilizando el método Kira-kira en lugar del método euclidiano basado en el teorema de Tales, y usando una tira de papel (substituta del listón de bambú) en lugar de escuadra y cartabón? ¿Lo rechazaría porque no se ajusta a la metodología trabajada en el aula? ¿O trataría de comprenderlo desarrollando una explicación matemática más formal como la IMS que se generó en el capítulo 6? Sin duda debería optar por la segunda opción, lo que le supondría asumir un reto profesional como educador y como matemático.

Quizá el lector piense que el método Kira-kira nos queda todavía muy lejos porque apenas hay estudiantes indonesios (menos aún toraja) en nuestras aulas. Pero es muy posible que se haya topado con estudiantes de países lejanos que usan métodos de cálculo digital, y no sólo para sumar, también para multiplicar. ¿Son ineptos porque utilizan las manos? Si se miran las manos para calcular la tarea del educador es analizar el motivo de los resultados correctos y explicárselos al alumno si éste los desconoce. Como dice Abreu refiriéndose a las investigaciones sobre el papel del contexto en las resoluciones de problemas matemáticos: ‘este tipo de investigaciones proporcionan una herramienta que permite al profesorado actuar como etnógrafos del estudio de las mentes de los alumnos para intentar entender las estrategias que éstos usan, así como sus creencias sobre el desarrollo apropiado de la acción’ (Abreu, 2000: 147). A lo que puede añadirse que el profesorado debe buscar y explicar mediante su conocimiento y lenguaje académico esas estrategias con el fin de enriquecer su propia cultura y la de su alumnado.

La educación del educador es un tema complejo en el que intervienen la Sociología, Pedagogía y Psicología, pero el presente trabajo muestra que no hay educador matemático sin matemáticas.

10.2 IMPLICACIONES DE LA IMS EN LA INNOVACIÓN DIDÁCTICA OCCIDENTAL

El objetivo principal de la innovación didáctica matemática de la perspectiva constructivista es ajustar los contenidos y la forma de transmisión del conocimiento matemático a los tiempos que corren ofreciendo al estudiante situaciones que le involucren directamente en ese conocimiento. Más concretamente, y desde la perspectiva del aprendizaje matemático situado, se trata de que las actividades, problemas o situaciones planteadas al estudiante alberguen aquellos conceptos, ideas y procedimientos que se pretenden enseñar. Pero no de forma estereotipada, como ya se ha dicho anteriormente, sino del modo más natural posible. Situar un problema es hallar un contexto en el que tal problema sea protagonista. Eso es lo que ocurre con la ornamentación arquitectónica toraja. Es una práctica artesanal en cuyo desarrollo han de resolverse multitud de situaciones geométricas para lograr el objetivo, para que el trabajo esté bien hecho.

Dando la vuelta al calcetín, es decir, razonando a la inversa, ésa práctica nos ofrece la posibilidad de contextualizar realmente, sin gratuidad, toda una serie de conceptos y procedimientos matemáticos. Un estudiante de la etapa educativa matemática más elemental ya es capaz de darse cuenta de que en la práctica artesana estudiada, simplemente contemplando los grabados ya terminados, se necesitan trazar paralelas, perpendiculares, circunferencias, etc. Por tanto, el primer paso está dado: el alumno ve que las matemáticas tienen un lugar muy destacado en ese contexto porque de otro modo, el resultado no existiría. A continuación se van a plantear algunas situaciones matemáticas propias de la práctica toraja adaptándolas a cuatro niveles educativos concretos: la Educación Primaria, la Educación Secundaria Obligatoria (ESO), el Bachillerato y la Educación Universitaria.

En tales situaciones juegan un papel destacado las herramientas necesarias para su elaboración. El manejo de artefactos constituye un mediador cognitivo por el que el alumno se aproxima a determinados conceptos y procesos, lo que será más destacado en la etapa correspondiente a la educación primaria y en la secundaria que, evidentemente, en la Universidad. Pero en cualquier caso, y como se habrá comprobado a lo largo de este trabajo, la IMS enfatiza también una actividad matemática primordial hoy en día como es el de la *modelización*. A nivel universitario un mazo y una gubia pueden parecer instrumentos muy primitivos de los que no se puede sacar nada que no sean golpes y heridas, pero el reto no consiste en manejarlos, sino en elaborar un modelo matemático lo más fiel posible a su manejo y a su producto.

Los problemas cruciales de la ornamentación arquitectónica toraja y la correspondiente etapa educativa idónea para su introducción son:

Educación primaria

P1: Concepción de la circunferencia trazada con compás de bambú.

P2: Identificación de figuras y fondos (su complementario) destacando aquellos casos en que fondo=forma, identificación de conceptos geométricos fundamentales (paralelismo, perpendicularidad, isometrías del plano: traslaciones, giros y reflexiones).

Educación secundaria obligatoria (ESO)

P1: La intersección de diagonales y las mediatrices de los lados de un rectángulo. ¿Por qué el punto de intersección de las diagonales de un rectángulo está sobre las mediatrices de cada uno de los lados?

P2: La perpendicularidad de las diagonales de un cuadrado. ¿Por qué son ortogonales las diagonales de un cuadrado?
P3: Construcción de una retícula doble[2] de m·n módulos (celdas) de margen o intersticio de amplitud x en un rectángulo de anchura a y longitud b. (Yobel tuvo dificultades en trazarla para b=2·a, m=3, n=6, x=amplitud del listón de bambú.)
P4: División no euclidiana de un segmento en partes iguales. Introducción a las sucesiones y a la recurrencia como estrategia de resolución de problemas.
P4: Conocimiento interdisciplinar del entorno cultural mediante la exploración e identificación en la Arquitectura local de isometrías unidimensionales y bidimensionales. Clasificación con notación simbólica pertinente.

Bachillerato
P1: Sucesión, límite y recurrencia en la aplicación del método Kira-kira (listón de bambú).
P2: Trigonometría de la poligonal de segmentos.

Educación universitaria
P1: Modelo matemático del método Kira-kira.
P2: Modelos matemáticos para las volutas: la curva como límite de una poligonal, curvas paralelas y auto paralelas (mazo y gubia).
P3: De las series trigonométricas a las series de Fourier.

De todos estos problemas trataremos uno en profundidad en cada etapa educativa.

10.2.1 Educación primaria (EPRI)

En el capítulo VII se observaron las diferencias entre las características cognitivas de la circunferencia trazada con un compás estándar tradicional occidental y la trazada con un compás de bambú. El aspecto más relevante es que manejando un compás de bambú el niño ve cómo es un segmento, el radio, el que mediante rotación alrededor de uno de sus extremos, determina la forma de la línea resultante. La circunferencia es producto de ese radio tangible, rígido y visible en todo momento. Puesto que a cada instante cada uno de sus puntos equidista del centro de rotación la definición de circunferencia como línea cuyos puntos equidistan de otro llamado centro no sólo es una definición apropiada del resultado,

[2] Retícula doble se refiere a dos retículas desplazadas entre sí y cuyos módulos o celdas están separados por intersticios o franjas de pequeña anchura.

sino que también es su descripción literal. Estamos ante un ejemplo extraordinario de artefacto actuando como mediador cognitivo y en el que la relación establecida entre él (el artefacto), la acción que realiza quien lo gobierna (manejo) y el fruto de todo ello (la circunferencia) no puede ser más estrecha.

10.2.2 Educación secundaria obligatoria (ESO)

El paralelismo, la perpendicularidad y la división de un segmento en partes iguales son problemas clave de la geometría en cuyos primeros planteamientos juega un papel destacado la intuición y la capacidad visual. Gracias a ello los profesores de matemáticas somos capaces de trazar unos ejes de coordenadas en una pizarra 'aceptablemente' ortogonales y señalar una serie de unidades aceptablemente 'iguales' sobre ambos, tanto en el vertical (eje de ordenadas) como en el horizontal (eje de abscisas).

Uno de los objetivos clave de la educación matemática académica en la ESO es lograr que el estudiante domestique su intuición y experiencia. Que se fíe de ambas, pero que vaya supeditando sus conclusiones y decisiones al razonamiento. Que las considere con cautela lógica. Esto significa potenciarlas mediante una educación de su pensamiento. La intuición es muy valiosa e útil en matemáticas, pero uno debe saber controlar sus intuiciones, reflexionar sobre ellas y tratar de justificarlas con el razonamiento. Sólo así podrá apoyarse en aquellas más plausibles. El juez definitivo no puede ser la intuición, sino el razonamiento. Ésta es la perspectiva matemática preponderante en el ámbito académico y la que difícilmente puede lograrse fuera de él. La experimentación y la intuición van de la mano, son la cocina de las matemáticas (recordando a Polya), un trampolín hacia la solución del problema. Pero antes hay que asegurarse de que hay agua en la piscina.

¿Qué valor educativo pueden tener las soluciones toraja a la hora de trazar verticales y horizontales? Imaginemos un estudiante de que ante el problema de trazar paralelas y perpendiculares opta por una solución aproximada 'más o menos' correcta como la de los artesanos toraja. En tal caso la labor del educador es cuestionar dicha solución, pero no para resaltar su buen o mal ojo, su buen o mal resultado, sino para evaluarla con relación al problema planteado. En el planteamiento del problema hay implícito el grado de precisión admisible. No es lo mismo trazar un segmento ortogonal al determinado por dos puntos de un sistema de coordenadas bien cuantificado que hacerlo sobre una pared o en la pizarra de un aula. Sería ridículo exigir la misma precisión en ambos casos. La virtud de un método impreciso no hay que buscarla en su imprecisión, sino en el mecanismo o estrategia de mejora. Si el estudiante resolvió el problema de forma ostensiblemente imprecisa, ¿qué haría para mejorar la solución? ¿En qué basaría su mejora?

El valor del proceder toraja correspondiente al trazado ‘a ojo’ de verticales y horizontales está en las referencias objetivas y geométricas de las que se ayudan para asegurarse un buen resultado. No todo se hace a ojo, no todo el rigor se delega en la capacidad visual y / o habilidad experimental del artesano. ¿Para qué sino trazar las diagonales de un cuadrado o rectángulo previamente a las mediatrices de sus lados? Para referenciar sus estimaciones y lograr soluciones más rigurosas. Pero, ¿cuáles son los argumentos que justifican el resultado? O sea, ¿por qué el punto de intersección de las diagonales está en medio del cuadrado? Una posible justificación para el matemático occidental puede ser que los triángulos obtenidos trazando las diagonales son, además de isósceles, idénticos y que, por tanto, sus alturas también son iguales. De ahí que su intersección equidiste de cada uno de los lados paralelos del rectángulo, siendo precisamente la altura dicha distancia. Pero los toraja no lo ven así, sino que para ellos la cuestión está en la simetría de la figura resultante. Y la simetría determina puntos medios.

El tratamiento de esta cuestión en el ámbito académico occidental mostrará al estudiante vea que la geometría del rectángulo se reduce a la del triángulo y que prácticamente la totalidad de las justificaciones geométricas del plano pasan por su estudio. Por otra parte, la cuestión es fácilmente generalizable y se puede pasar del cuadrado al rectángulo, de éste al paralelogramo, de ahí al trapecio, y, finalmente a un cuadrilátero cualquiera. ¿En qué casos se verifica el teorema?

El método Kira-kira para dividir un segmento en partes iguales supone una perspectiva completamente distinta al método euclidiano enseñado no sólo en España (ESO), también en Indonesia (SLTP):

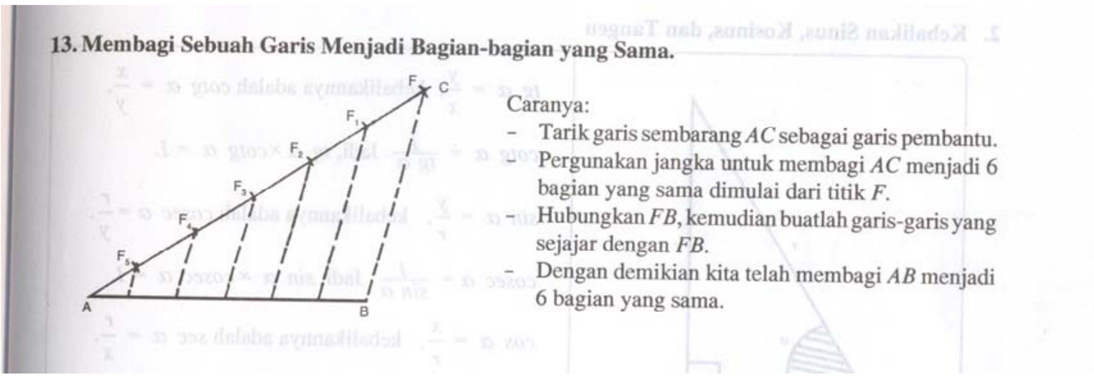


Figura 10.1: División de un segmento en partes iguales (Negoro y Harahap, 1998: 477)

Y esta es la ilustración que acompaña la resolución del problema en un texto catalán de segundo curso de la E.S.O.:

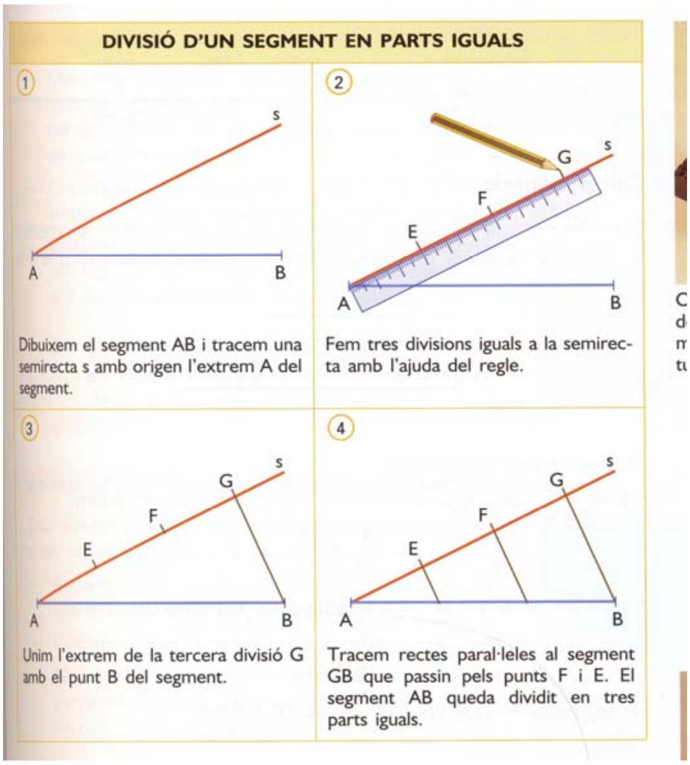


Figura 10.2: División de un segmento en partes iguales

(Bartomeu, Besora, Capella, Jané y Guiteras, 2001: 78)

El método toraja, no euclidiano, permite resolver el problema en situaciones donde Euclides resulta inefectivo, como en una pared o en un techo. Al fin y al cabo los matemáticos debemos ser críticos con nosotros mismos. Lo que vale sobre una mesa no tiene porque resultar práctico debajo de ella (techo) o en ingravidez donde escuadras y cartabones no se mantienen en su sitio. El método toraja supone un cambio de perspectiva resolutiva muy útil hoy en día y en la que se basan la inmensa mayoría de los cálculos operativos de los ordenadores, esto es, en la recurrencia y el cálculo por aproximaciones sucesivas, pero convergentes.

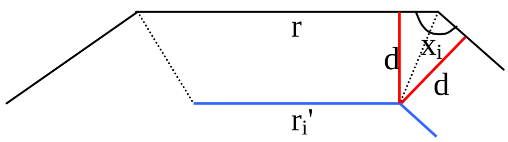
¿Cómo calculan los programas matemáticos, ya sean *Maple*, *Derive*, *Mathematica*, centenares o miles de cifras de números como $\sqrt{2}$, e y π? Pues enarbolando un fórmula cuya reiterada aplicación al último término calculado produce una sucesión de números convergentes, cada vez más próximos al número en cuestión. Esto es precisamente lo que hace el método Kira-kira para buscar la mitad y el tercio de un segmento. Un argumento moderno elaborado con el instrumental más primitivo. Un logro del entendimiento humano útil para resolver una situación práctica y real en la que podemos contextualizar conceptos como sucesión y límite. La introducción de ese procedimiento en los contenidos de matemáticas en la ESO serviría para presentar al alumno ideas muy potentes y actuales en las matemáticas de hoy en día como son los algoritmos recurrentes y las aproximaciones sucesivas hacia un valor concreto determinado por una sucesión convergente. Así es como funciona la mayor parte del harware operativo de un ordenador. Evidentemente, el análisis de la convergencia y los mecanismos que permiten su optimización superan mucho esta etapa educativa y deberían ser pospuestos a etapas educativas superiores.

10.2.3 Bachillerato

El estudiante de Bachillerato se las ve ya con conceptos más sofisticados y complejos. Conceptos formados por la amalgama de otros conceptos y en los que también intervienen procesos. Esto es así hasta el punto de que algunos han sido llamados *proceptos* (Tall, 1988) como es el caso del concepto de derivada.

La idea de número racional subyacente a la aplicación del método Kira-kira también podría ser considerada un *procepto*. Si en el concepto de derivada intervienen las ideas de variación (simple, media e instantánea), proporcionalidad, sucesión, límite y convergencia, en el método Kira-kira aparecen algunas ideas comunes a ésas: estimación, sucesión, convergencia, límite, optimización del error, división y recurrencia. El método Kira-kira proporciona un contexto real y práctico excelente donde situar los conceptos de sucesión, límite y recurrencia aparte de las tradicionales contextualizaciones interiores propias del ámbito académico como son las sucesiones de números naturales dadas por su término general o la fórmula de una función. Dividiendo un segmento según el procedimiento Kira-kira el estudiante ve que eso del límite sirve para resolver un problema real y práctico.

Otros problemas relacionados con la ornamentación toraja a incorporar en el Bachillerato están muy ligados entre sí y se refieren al estudio de una propiedad geométrica fundamental como es el paralelismo, pero no de rectas y segmentos, sino de curvas, algo que el estudiante de Bachillerato nunca se ha planteado. Primero se estudiarían las curvas poligonales (no derivables) y las reglas trigonométricas subyacentes en ellas y que determinan su paralelismo:



$$\operatorname{tg}\frac{x_i}{2} = \frac{d}{\frac{r_i - r_i'}{2}} \Rightarrow r_i' = r_i + 2d\cot\frac{x_i}{2}$$

Luego se abordaría la cuestión para las curvas derivables en las que podemos trabajar con el concepto de derivada[3]. Ya sea en versión paramétrica en la que la curva (u(t), v(t)) es paralela a distancia d de la curva (x(t), y(t)):

$$\begin{cases} u(t) = x(t) + d\cdot \sin\left(\operatorname{arctg}\dfrac{y'(t)}{x'(t)}\right) \\ v(t) = y(t) - d\cdot \cos\left(\operatorname{arctg}\dfrac{y'(t)}{x'(t)}\right) \end{cases}$$

O en versión funcional, en la que la curva (x(t), y(t)) es paralela a la gráfica (t, f(t)) de la función y=f(t):

$$x(t) = t - \frac{d\cdot f'(t)}{\sqrt{1+f'(t)^2}} \qquad y(t) = f(t) + \frac{d}{\sqrt{1+f'(t)^2}}$$

En las volutas toraja encontramos un contexto real en el que situar el paralelismo de curvas, aunque hay contextos más cercanos como son las comunicaciones terrestres (caminos, carreteras, autopistas y vías de ferrocarril).

10.2.4 Educación universitaria

El de la modelización matemática es un problema destacado del mundo científico actual, ya sea con relación al propio ámbito científico como en otros ámbitos de carácter más social. Que esto es así se pone de manifiesto desde las universidades como desde la educación secundaria. Entre las opiniones de los primeros encontramos la de Juan Luis Vázquez Suárez, catedrático de Matemática Aplicada de la Universidad Autónoma de Madrid: 'las matemáticas del siglo XXI están muy relacionadas con el mundo exterior' (Salomone, 2006, p.: 23), quien refiriéndose a los nuevos problemas del siglo que acaba de comenzar destaca las simulaciones para la industria y la tarea de modelizar: '¿cómo modelizar las interacciones entre las proteínas y una célula?... Hemos empezado a describir el mundo por lo más pequeño, los átomos, y por lo más grande, las galaxias y el universo. Pero aún no sabemos modelizar a escala intermedia, las interacciones.' (Salomone, op. Cit., p. 24). Por su parte, Enrique Zuazua Iriondo, relaciona el laboratorio matemático con 'una sala de simulación numérica' y señala que 'los matemáticos a menudo funcionamos por analogías' (Salomone, op. Cit., p. 24). Jesús Sanz Serna, rector de la Universidad de Valladolid, apunta un rasgo

[3] Durante el curso 2002-2003 dirigí un trabajo de investigación a alumnos de Bachillerato sobre curvas paralelas.

especial: ‘Las matemáticas del colegio no tienen que ver con las de verdad’ (Salomone, op. Cit., p. 26). David Nualart, catedrático e la Universidad de Barcelona habla mucho de modelizar y de modelos, como, por ejemplo, ’modelizar el comportamiento de los precios de las acciones en bolsa’ (Salomone, op. Cit., p. 26).

Esto es algo que también ha sido puesto de manifiesto en varias jornadas para la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, como la existencia de un grupo temático sobre ‘modelizar la realidad’ de las tres últimas JAEM celebradas en nuestro país.

Desde el ámbito educativo, ya en el capítulo 2 fueron consideradas las voces de varias autoridades en la materia que destacaban el papel que debía jugar la modelización, no ya en la universidad, sino en etapas previas como la educación secundaria y el Bachillerato.

Por tanto, la modelización matemática debe ser tenida muy en cuenta hoy en día. A nivel universitario buscar modelos de una actividad artesanal significa además profundizar en el campo cognitivo por cuanto dichos modelos, si han sido desarrollados en base a una IMS como la descrita, representan un reflejo plausible de la concepción de la tarea artesana. Modelizando un objeto, un proceso y / o una explicación trascendemos el objetivo primario de la modelización apuntando rasgos cognitivos tanto de los autores del objeto, proceso o explicación y de nosotros mismos.

De esta forma el planteamiento de buscar modelos matemáticos fieles a la realidad artesanal de los grabadores toraja introducirá al estudiante universitario en la geometría de tortuga, en la idea de curva como límite de una poligonal, en las curvas paralelas y auto paralelas, en las espirales, en las series trigonométricas (Albertí, 2003). Todo ello a partir de algo tan simple como son los golpes de una mazo sobre una gubia. Para empezar, una pregunta interesante es el estudio de bajo qué condiciones, la espiral poligonal realizada con geometría de tortuga:

For i to n do Forwd(r_i);TurnLeft(x_i);od;

converge hacia un punto, un segmento o un polígono y de qué tipo; incluso, una circunferencia. Lo mismo podemos plantearnos sobre el enésimo vértice de una poligonal en versión general y analítica, lo que representa un contexto real y práctico para las series trigonométricas y que nos acerca al estudio de las series de Fourier:

$$P^n = \sum_{k=1}^{n} r_k \cdot \left(-\operatorname{sen} \sum_{i=0}^{k-1} x_i , \cos \sum_{i=0}^{k-1} x_i \right), \ n \geq 1$$

Nada impide tampoco plantear esas cuestiones en el ámbito de la variable compleja y estudiar bajo qué condiciones una poligonal con k-ésimo paso de longitud f(k) y cuyo ángulo de giro es α acaba trazar un ciclo cerrado y retorna al punto de partida:

$$\sum_{k=1}^{n} f(k)e^{ik\alpha} = 0$$

En la educación universitaria el alumno tiene que empezar un proceso de reflexión sobre los fundamentos de las matemáticas. Una manera de introducirse en las raíces de un concepto tan importante como es el de límite de una sucesión puede ser abordar el análisis filosófico matemático del método Kira-kira y contrastarlo con algunos axiomas y teoremas ya dados por sentados en el Cálculo. Por ejemplo, en la siguiente dirección.

Como ya se vio en el capítulo 8, la aplicación del método Kira-kira para dividir un segmento de longitud L en n partes iguales puede hacerse de tal modo que cada resto de la sucesión de restos $\{r_i\}$ obtenida sea menor que su precedente y, evidentemente, menor que el segmento original:

$$L > r_i > r_{i+1} > 0$$

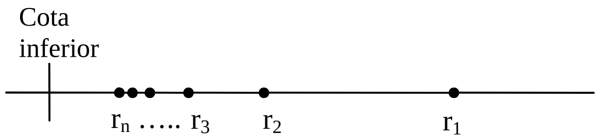
Por tanto, la sucesión de restos está acotada y es decreciente. Para el matemático occidental, el teorema que afirma que toda sucesión monótona (creciente o decreciente) y acotada es convergente justifica la convergencia de esos restos hacia un límite, un número real que estará comprendido entre 0 y L. Es decir, hacia un segmento de longitud positiva y menor que L. Ése teorema es fundamental en el estudio de las sucesiones y puede verse una demostración en Rudin (1974: 54-60). La cuestión que se plantea ahora es: ¿por qué confiar más en el teorema que en la realidad práctica? ¿De dónde procede la fuerza del teorema?

Estudiando la demostración de Rudin nos damos cuenta de que el camino a recorrer para la demostración está, como es lógico, formado por una serie de razonamientos encadenados. El enunciado dice: *Teorema: Supongamos que $\{s_n\}$ es monótona. $\{s_n\}$ converge si, y sólo si es acotada* (Rudin, op. Cit.: 59).

Rudin comienza demostrando que si la sucesión crece (análogamente se haría si decreciese) entonces es converge hacia el extremo superior s del campo de variabilidad E de la sucesión (Rudin, op. Cit.: 60). La analogía indica que para el caso decreciente, como es el de los restos del método Kira-kira, el límite estará en el extremo inferior de ese campo de variabilidad. ¿De dónde proviene la existencia de dicho extremo superior o inferior? La existencia viene garantizada por un teorema previo:

Teorema: Sea E un conjunto no vacío de números reales, acotado superiormente. Existe un extremo superior. (Rudin, op. Cit.: 23).

Este teorema remite a su vez a otro anterior y que Rudin atribuye a Dedekind (Rudin, op. Cit.: 21). Así van aclarándose las cosas porque el camino de retroceso nos lleva hasta la definición de número real basada en las *Cortaduras* de Dedekind. En ellas basa Rudin el sistema de los números reales. Llegamos así a la cuestión crucial. ¿Dónde enraizamos nuestra confianza en el teorema que afirma que toda sucesión decreciente y acotada es convergente, en el concepto de cortadura de Dedekind o en la intuición de que una serie de marcas trazadas sobre una línea, cada una a la izquierda de la anterior (decrecientes) y para las que existe una barrera infranqueable a su izquierda (la cota) tiene que acabar por detenerse?



BIBLIOGRAFÍA

ABELSON, H. y DI SESSA, A. (1986): *Geometría de tortuga*. El ordenador como medio de exploración de las matemáticas. Ediciones Anaya Multimedia. Madrid.

ABREU, G. de (1993): *The relationship between home and school mathematics in a farming community in rural Brazil*. Tesis doctoral. Cambridge. Cambridge University Press.

ABREU, G. de (2000): "Relationships between Macro and Micro Socio-Cultural Contexts: Implications for the Study of Interacctions in the Mathematics Classroom". En *Educational Studies in Mathematics*, 41, pp. 1-29. Kluwer Academic Publishers. Netherlands.

ALANGUI, W. y BARTON, B. (2002). A Methodology for Ethnomathematics, en de Monteiro, M. (ed.): *Proceedings of Second International Conference on Ethnomathematics (ICEM2),* CD Rom, Ouro Preto, Brazil: Lyrium Comunacacão Ltda.

ALBERTÍ, M. (2002a): *Kepala kelapa o de cómo salvar discontinuidades y picos.* Actas de las X Jornadas para el Aprendizaje y Enseñanaza de las Matemáticas (JAEM) organizadas por la Federación Española de Profesores de Matemáticas (FESPM). Palacián, E. y Sancho, J. (editores). ICE de la Universidd de Zaragoza.

ALBERTÍ, M. (2002b): *Les Matemàtiques des d'una perspectiva cultural: Etnomatemàtiques.* Revista BIAIX, nº. 20, pp. 26-34. FEEMCAT. Girona.

ALBERTÍ, M. (2003): *Pa' Tangke Lumu': realidad lejana, matemática cercana.* Actas de las XI Jornadas para el Aprendizaje y Enseñanaza de las Matemáticas (JAEM) organizadas por la Federación Española de Profesores de Matemáticas (FESPM). Islas Canarias. Consejería de Educación, Cultura y Deportes del Gobierno de Canarias.

ALBERTÍ, M. (2005): *Les Matemàtiques com a pilar d'una manifestació cultural: l'ornamentació arquitectónica del poble toraja de Sulawesi.* Trabajo de investigación de Doctorado en Didáctica de las Ciencias y de las Matemáticas dirigido por la Dra. Núria Gorgorió. UAB.

ALBERTÍ, M. (2005): *Jumlah.* Revista SUMA, nº. 50, pp. 47-52. Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas (FESPM). Madrid.

ALBERTÍ, M. y GORGORIÓ, N. (2006): "Etnomatemáticas y cognición situada: cuestión de ingenios", en Goñi, J. M. (coordinador): *Matemáticas e Interculturalidad*, pp. 25-47. Editorial Graó. Barcelona.

ALSINA, C. y TRILLAS, E. (1984): *Lecciones de Álgebra y Geometría*. *Curso para estudiantes de Arquitectura*. Editorial Gustavo Gili, SA. Barcelona.

ANGLIN, W. S. (1995): *The Invisible Art: An Introduction to the Philosophy of Mathematics*. Unpublished manuscript, Concordia University. Montréal.

APÈRY, R. (1984): "Matemática constructiva", en Dieudonné, J.; Loi, M. y Thom, R. (directores): *Pensar la Matemática.* Seminario de Filosofía y Matemática de la Ecole

Normale Supérieure de París. Textos preparados y anotados por F. Guénard y G. Lelíèvre. Tusquets Editores. Barcelona.

ARMENDÁRIZ, M. V. G.; AZCÁRATE, C. y DEULOFEU, J. (1993): *Didáctica de las Matemáticas y Psicología*. Revista Infancia y Aprendizaje, nº. 62-63, pp. 77-99. Universidad de Barcelona.

ARIS, R. (1979): *Mathematical Modelling Techniques.* Dover Publications Inc. New York.

ASCHER, M. (1991): *Ethnomathematics. A multicultural view of mathematucal ideas.* Chapman & Hall/CRC.

ASCHER, M. y ASCHER, R. (1986): "Ethnomathematics", en Powell, A. B. y Frankenstein, M. (eds., 1997): *Ethnomathematics. Challenging Eurocentrism in Mathematics education.* State University of New York. 1997.

BARTOMEU, C.; BESORA, J.; CAPELLA, T.; JANÉ, À. y GUITERAS, J. M. (2001): *Matemàtiques 2n ESO: Dels nombres als Símbols*. Editorial McGraw-Hill. Barcelona.

BESKIN, (1976): *División de un segmento en la razón dada*. Lecciones populares de matemáticas. Editorial MIR. Moscú.

BIGALKE, T. W. (1981): *A Social History of Tana Toraja.* Tesis doctoral. University of Wisconsin. Madison.

BIGALKE, T. W. (2005): *Tana Toraja: a Social History of an Indonesian People.* Singapore University Press. Singapore.

BISHOP, A. J. (1999): *Enculturación matemática. La educación matemática desde una perspectiva cultural.* Ediciones Paidós Ibérica. Barcelona. Versión castellana del original inglés de 1991.

BLISS, J. y LIGHT, P. (eds.) (2001): *Learning Sites: Social and Technological Contexts for Learning.* Elsevier Science.

BORBA, M. (1997): "Ethnomathematics and Education", en Powell, A. B. y Frankenstein, M. (eds.): *Ethnomathematics. Challenging Eurocentrism in Mathematics education.* State University of New York.

BOUVIER, A. y George, M. (1984): *Diccionario de Matemáticas*. Dirección de F. Le Lionnais. Versión española del original francés de 1979. Editorial Alal. Madrid.

BOYER, C. (1986): *Historia de la Matemática.* Alianza editorial. Madrid.

BRUNER, J. (1966): *Towards a Theory of Instruction.* Cambridge, MA: Harvard University Press.

CARR, A. (1989): “Teaching Mathematical Modelling”. En Blane, D. y Evans, M. (eds.): *Mathematical modelling for the senior years*, pp. 66-71. Parkville: The Mathematical Association of Victoria.

CLANCEY, W. J. (1995): “A Tutorial on Situated Learning”. En Self, J. (ed.): *Proceedings of the International Conference on Computers and Education*, pp. 59-70. Charlottesville, VA: AACE.

CLEMENTS, M. A. y ELLERTON, N. F. (1998): "Transforming the International Mathematics Education Research Agenda". En Sierpinska, A. y Kilpatrick, J. (eds.): *Mathematics Education as a Research Domain: A Search for Identity*. An ICMI study. Kluwer Academic Publishers.

COLE, M. (1995): “Culture and cognitive development: from cross-cultural research to creating systems of cultural mediation”. En *Culture & Psychology,* vol. 1, nº. 1, pp. 25-54. SAGE Publications.

COLE, M. (1996): *Cultural Psycology*. Harvard University Press.

COLLETTE, J. P. (1985): *Historia de las Matemáticas*. Siglo XXI de España editores. Madrid.

COURANT, R. y ROBBINS, H. (1996): *What is Mathematics ? An elementary approach to ideas and methods*. Revisión de I. Stewart. Oxford University Press.

D'AMBROSIO, U. (1985): “Ethnomathematics and its Place in the History and Pedagogy of mathematics”. En Powell, A. B. y Frankenstein, M. (eds., 1997): *Ethnomathematics. Challenging Eurocentrism in Mathematics education.* State University of New York.

DAVIS, P. y HERSH, R. (1988): *Experiencia matemática.* Editorial Labor y Ministerio de Educación y Ciencia. Barcelona.

DIENES, Z. (1970): *Mathematics Through the Senses, Games, Dance and Art.* Nfer Nelson.

DIEUDONNÉ, J. (1984): “Matemáticas vacías y Matemáticas significativas”. En Dieudonné, J. y Thom, R. (directores): *Pensar la Matemática.* Seminario de Filosofía y Matemàtica de la Ecole Normale Supérieure de París. Textos preparados y anotados por F. Guénard y G. Lelíèvre. Tusquets Editores. Barcelona.

ECO: U. (1999): *Kant y el Ornitorrinco*. Versión castellana del original italiano de 1997. Editorial Lumen. Barcelona.

ENCICLOPÈDIA CATALANA (ed., 1976): *Enciclopèdia Catalana*. Reimpresión corregida del original de 1973. Enciclopèdia catalana, SA. Barcelona.

ENGESTRÖM, Y. y COLE, M. (1997): “Situated Cognition: in Search of an Agenda”. En Kirshner, D. y Whitson, J. A. (eds.). *Situated Cognition: Social, Semiotic and Psychological Perspectives,* pp. 301-309. London: Lawrence Erlbaum Associates.

ERNEST, P. (1991): *The Philosophy of Mathematics Education.* London: The Falmer Press.

ERNEST, P. (1998): *Social Constructivism as a Philosophy of Mathematics.* Albany: New York: Suny Press.

EUCLIDES (1991): *Elementos.* Introducción de Luís Vega. Traducción y notas de María Luísa Puertas Castaños. Editorial Gredos. Madrid.

FABRA, P. (1991): *Diccionari Manual de la Llengua Catalana*. Institut d'Estudis Catalans. Editorial Edhasa. Barcelona.

FIORITI, G: (1999): *Conocimiento geométrico de los obreros de la construcción: conocimiento situado versus conocimiento escolar*. Trabajo de Investigación de Doctorado en Didáctica de las Ciencias y de las Matemáticas dirigido por la Dra. Núria Gorgorió. UAB.

FISCHBEIN, E. (1990): "Mathematics and Cognition". En Nesher, P. y Kilpatrik, J. (eds.): *A Research Synthesis by the International Group for the Psychology of Mathematics Education.* ICMI Study Series. Cambridge University Press.

GERDES, P. (1994): *African Pythagoras. A study in culture and mathematics education.* Instituto Superior Pedagógico. Mozambique.

GERDES, P. (1996): "Ethnomathematics and Mathematics Education". En Bishop et al. (eds.): *International Handbook of Mathematical Education*, pp. 909-943. Kluwer Academic Publishers.

GERDES, P. (1988): "On Culture, Geometrical Thinking and Mathematics Education". En Powell, A. B. y Frankenstein, M. (eds., 1997): *Ethnomathematics.Challenging Eurocentrism in Mathematics education.* State University of New York. 1997.

GERDES, P. (1997): "Survey of current work in Ethnomathematics". En Powell, A. B. y Frankenstein, M. (eds.): *Ethnomathematics.Challenging Eurocentrism in Mathematics education.* State University of New York.

GLASERSFELD, E. Von (1989): "Constructivism in Education". En Husen, T. y Postlethwaite, N. (eds.): *International Encyclopedia of Education* (Supplementary Vol.), pp. 162-162. Oxford: Pergamon.

GOMBRICH, E. H. (1999): *El sentido del orden. Estudio sobre la psicología de las artes decorativas*. Editorial Debate. Barcelona. Versión castellana del original inglés de 1979.

GREENFIELD, P. y BRUNER, J. (1969): "Culture and Cognitive Growth". En Goslin, D. (ed.): *Handbook of socialization. Theory and research*. Chicago. Rand Mc Nally.

GUZMÁN, M. de (1991): *Para Pensar Mejor*. Editorial Labor. Barcelona.

HARARAP, B. y NEGORO, ST. (1998): *Ensiklopedia Matematika*. Ed. Ghalia Indonesia. Anggota IKAPI. Jakarta.

HAÜSER-SCHAÜBLIN, B. (1985): "Blockbauten der Sa'dan Toraja; Materialien zur Geshichte der Tiraja ufgrung von früheren Hausformen". En Marschall, W. (ed.): *Der grosse Archipel; Schweizer ethnologische Forschungen in Indonesien. Ethnologica Helvetica,* Vol. 10, pp. 59-82. Schweizerische Ethnologische Gelleschaft. Berna.

HEINE-GELDERN, R. (1935): "The Archaelogy and Art of Sumatra". En Loeb, E. M. (ed.): *Sumatra: Its History and People*, pp. 305-331. Viena.

HERSH, R. (1997): *What is Mathematics, Really?* Oxford University Press. New York.

HOFSTADTER, D. R. (1987): *Godel, Escher, Bach. Un eterno y grácil bucle.* Tusquets editores. Barcelona.

HOLLAN, D. W. y WELLENKAMP, J. C. (1994): *Contentment and suffering. Culture and experience in Toraja.* Columbia University Press. New York.

HOWSON, A. G.; KEITEL, C. y KILPATRICK, J. (1981): *Curriculum development in Mathematics.* Cambridge University Press.

HOYLES, C. y NOSS, R. (2004): "What can digital techonologies take from and bring to research in mathematics education". En Bishop, J. A. et al. (eds.): *Second International Handbook of Mathematics Education*, pp. 323-349. Kluwer Academic Publishers.

JONES, O. (2001): *The Grammar of Ornament.* Reimpresión del original publicado por Bernard Quartich en 1910. L'Aventurine. París.

KIS-JOVAK, J. I.; NOOY-PALM, H.; SCHEFOLD, R. y SCHULZ-DORNBURG, U. (1988): *Banua Toraja: Changing patterns in architecture and symbolism among the Sa'dan Toraja. Sulawesi. Indonesia.* Royal Tropical Institute. Amsterdam.

KITCHER, P. (1988): "Mathematical Naturalism". En Aspray, W. y Kitcher, P. (eds.): *History and Philosophy of Modern Mathematics*. Minnesota studies in the Philosophy of Science, Volume XI. University of Minnesota Press, Minneapolis.

KLINE, M. (1974): *Why Johnny can't add: The Failure of the New Mathematics.* Random House.

KOTOVSKI, A. N. (1980): *Construcciones geométricas mediante un compás.* Lecciones populares de Matemáticas. Editorial MIR. Moscú.

KUHN, T.S. (1970): *The Structure of Scientific Revolutions*. Second edition. University of Chicago Press. Chicago.

LAKATOS, I. (1994): *Pruebas y Refutaciones. La lógica del descubrimiento matemático.* Alianza Universidad. Madrid. Versión castellana del original inglés de 1978.

LAVE, J. (1988): *Cognition in Practice. Mind, Mathematics and Culture in Every day Life.* Cambridge University Press. Cambridge.

LAVE, J. y ROGOFF, B. (1984): *Everyday Cognition: Its Development in Social Context*. Harvard University Press. Cambridge, Massachusetts.

LAVE, J. y WENGER, E. (1990): *Situated Learning. Legitimate Peripherial Participation.* Cambridge University Press. Cambridge.

LEAN, G. (1992): *Counting Systems of Papua New Guinea and Oceania*. Tesis doctoral. Papua New Guinea University of Technology. Lae.

LOWE, I. (1989): *Mathematics at Work: Modelling Your World.* Vol. 1 y 2. Canberra: Australian Academy of Science.

LUMOWAH, B. (1985): *Anjungan Sulawesi Selatan. Tongkonan (Rumah Adat Toraja).* Aksara Baru. Jakarta.

MARAMPA, A. T. (1992): *A guide to Toraja.* Editor: A. T. Marampa. Rantepao.

MILLROY, W. (1992): "An ethnografic study of the mathematical ideas of a group of carpenters". En NCTM (National Council of Teachers of Mathematics): *Journal for research in Mathematics Education Monograph*, nº. 5. Virginia.

MURDOCH, G. P. (1945): "The Common Denominator of Cultures". En Linton, R. (comp.): *The Science of Man in the World Crisis*. Columbia, New York.

NOOY-PALM, H. (1979): "The Sa'dan-Toraja: a Study of Their Social Life and Religion". En Nijhoff, M. (ed.): *Organization, Symbols and Beliefs,* Vol 1. The Hague.

NUNES, T. y BRYANT, P. (1996): *Children Doing Mathematics.* Oxford: Blackwell.

PEARSALL, J. (ed., 1999): *The Concise Oxford Dicctionary*. Tenth edition. Oxford University Press. New York.

PINILLOS, J.L. (1981): *Principios de Psicologia*. Alianza Universidad. Madrid.

PIAGET, J. (1970): *The Science of Education and the Psychology if the Child.* New York: Grossman.

PONTECORVO, C.; RESNICK, L.B. y SÄLJO, R. (1997): "Discourse, tools and reasoning". En Resnick, L. B.; Pontecorvo, C.; Säljo, R. y Burge, B. (eds.): *Discourse, Tools and Reasoning: Essays on Situated Cognition*. Springer and Nato Scientific Affairs Division, New York.

POLYA, G. (1988): *How to Solve It. A New Aspect of Mathematical Method.* Pinceton Science Library. University Press. New Jersey. Reedición del original de 1945.

POPPER, K. (1962): *La Lógica de la Investigación Científica*. Editorial Tecnos. Madrid. Versión española del original inglés de 1960.

POPPER, K. (1994): *Conjeturas y refutaciones: El desarrollo del conocimiento cientifico*. Editorial Paidós. Barcelona. Versión española de original inglés de 1965.

POWELL, A. B. y FRANKENSTEIN, M. (1997): *Ethnomathematics. Challenging Eurocentrism in Mathematics education.* State University of New York.

ROGOFF, B. (1990): *Apprenticeship in Thinking: Cognitive Development in Social Context.* Oxford University Press. New York.

R.A.L.E. (Real Academia de la Lengua Española, 1992): *Diccionario de la Lengua Española*. Vigésimo primera edición. Editorial Espasa Calpe. Madrid.

REY PASTOR, J. y BABINI, J. (1985): *Historia de la matemática*. Editorial Gedisa. Barcelona.

RUDIN, W. (1974): *Principios de Análisis Matemático*. Ediciones de Castillo, SA. Madrid.

SALOMONE, M. (2005): "Cerebros al cuadrado". En *Ciencia [04]*, pp. 21-26, de EP[S]. Diario El País, 13-11-2005. Barcelona.

SAMARA, T. (2004): *Diseñar con y sin retícula*. Editorial Gustavo Gili. Barcelona. Versión castellana del original inglés de 2002.

SANDARUPA, S. (1986): *Life and death in Toraja.* 21 Computer. Ujung Pandang.

SANDE, J. S. (1991): *Toraja in carvings.* Editor: J. S. Sande. Ujung Pandang.

SAXE, G. (1991): *Culture and Cognitive Development: Studies in Mathematical Understanding.* University of California. Los Angeles.

SAXE, G.B. (1990): *Culture and cognitive development: studies in mathematics understanding.* Hillsdale, N.J.: Lawrence Erlbaum Associates.

SCRIBNER, S. (2002): "La mente en acción: una aproximación funcional al pensamiento". En Cole, M.; Engeström, Y. y Vásquez, O. (eds.): *Mente, Cultura y Actividad*. Traducción del original inglés de 1997 por Carlos Eduardo González Hernández. Revisión técnica de Francisco Pérez Cota. Oxford University Press.

SIERPINSKA, A. y LERMAN, S. (1996): "Epistemologies of mathematics and of Mathematics Education". En Bishop, A. J. et al. (eds.): *International Handbook of Mathematics Education*, pp. 827-876. Kluwer Academic Publishers. Netherlands.

STERNBERG, R. J. (1999): "La medición de la Inteligencia". En *Inteligencia Viva*. Temas, nº. 17. Revista Investigación y Ciencia. Prensa Científica, SA. Barcelona.

SWERTZ, F. y HARTZLER, J.S. (1991): *Mathematical Modelling in the Secondary School Curriculum: A Resource Guide of the Secondary School Curriculum.* N.C.T.M. Reston Virginia.

TAMMU, J. y VAN DER VEEN, H. (1972): *Kamus Toradja-Indonesia.* Jajasan Perguruan Kristen Toradja. Rantepao.

TÍJONOV, A. N. (1993): *Enciclopedia de las Matemáticas.* Dirigida por I. M. Vinográdov. Editorial MIR / Rubiñós-1860, S.A. Moscú / Madrid.

VILENKIN, N.Y. (1984): *Método de Aproximacions Sucesivas.* Segunda edición. Editorial MIR. Moscú.

VYGOTSKY, L. S. (1978): *Mind in Society.* Cambridge, MA. Harvard University Press.

WALKERDINE, V. (1997): "Difference, Cognition, and Mathematics Education". En Powell, A. B. y Frankenstein, M. (eds.): *Ethnomathematics. Challenging Eurocentrism in Mathematics education.* State University of New York.

WASHBURN, D. K. y CROWE, D. W. (1988): *Symmetries of Culture: Theory and of Plane Pattern Analysus*. University of Washington Press. Seattle.

WATERSON, R. (1995): "Houses and hierarchies in island Southeast Asia". En Carsten, J. y Hugh-Jones, S. (eds.): *About the house. Lévi Strauss and beyond.* Cambridge University Press.

WATERSON, R. (1997): *The Living House. An Anthropology of Architecture in South-East Asia.* Cthames and Hudson. London.

WENGER, E. (1999): *Communities of Practice: Learning, Meaning and Identity*. Cambridge University Press.

WERTSCH, J. V. (1993): *Voices of the mind: A Sociocultural Approach to Mediated Action.* Harvard University Press.

WERTSCH, J. V. (1995): "Sociocultural research in the copyright age". En *Culture & Psychology,* vol. 1, num. 1, pp. 81-102. SAGE Publications.

WHITE, A. (1994): "Managing the Modelling Process in the Secondary Classroom". En Rasmussen, D. y Bessey, K. (eds.) : *Mathematics without Limits*, pp. 442-446. Brunswick Melbourne: M.A.V.

WHITE, A. (2001): *Mathematical Modelling and the General Mathematics Syllabus.* University of Western Sydney, Nepean.

ZALAVSKY, C. (1979): *Africa counts. Number and pattern in african cultures*. Lawrence Hill Books. Chicago.