
UNIVERSITAT AUTÒNOMA DE BARCELONA
DEPARTAMENT DE DIDÀCTICA DE LES MATEMÀTIQUES I
LES CIÈNCIES EXPERIMENTALS

TESI DOCTORAL

**RESOLUCIÓ DE PROBLEMES DE MATEMÀTIQUES:
IDENTIFICACIÓ, ORIGEN I FORMACIÓ
DELS SISTEMES DE CREENCES
EN L'ALUMNAT. ALGUNS EFECTES SOBRE
L'ABORDATGE DELS PROBLEMES**

Presentada per: ANTONI VILA CORTS

**Directors: M.LUZ CALLEJO DE LA VEGA
JORDI DEULOFEU PIQUET**

Bellaterra, març de 2001

A la Mercè,
al Xavi,
a la Júlia

*"...l'educació consisteix a ensenyar a les persones
no allò que han de pensar, sinó a pensar"
(Calvin Coolidge)*

*"...el mestre que ensenya sense inspirar al seu
deixeble el desig d'aprendre, pica en ferro fred"
(Horace Mann)*

*"...no es cava amb el mànec de l'aixada, però el
mànec ajuda a cavar" (proverbi bantú)*

AGRAÏMENTS

Són moltes les persones que han fet que aquest estudi pogués arribar a un final. Des d'aquestes pàgines, voldria deixar constància d'elles, i del meu sincer agraïment.

Agraïments especials a M.Luz Callejo i a Jordi Deulofeu per com han jugat el seu paper de directors de la recerca: no només m'han facilitat el seu suport científic, d'experiència, i de recursos, immensos tots ells, sinó també el seu suport personal incondicional, d'ànims i d'amistat, que en tants moments són fins i tot més importants que els primers.

El meu agraïment també a la Dra. Carmen Azcárate i als Drs. Josep M. Fortuny i Vicent Ferreres, per les seves valuoses aportacions en la fase final de l'estudi, i als Drs. Alan Bishop, Paulo Abrantes, Ken Clements i a les Dres. Pearla Neshet i Guida d'Abreu per les orientacions en la fase en la que aquest estudi només s'estava dissenyant. Per suposat, un agraïment als membres del tribunal, per haver acceptat jutjar aquest treball, malgrat (en tinc la constància) en alguns casos haurà suposat un fort esforç personal.

No vull oblidar-me de tots els professors i professores que en diferents moments del treball m'han brindat la seva ajuda i col·laboració. A la Dra. M.LLuïsa Gironde, companya en tants projectes, per haver estat disposada a efectuar el treball de «jutge extern» en diferents fases del disseny; als companys i amics Claudi Aguadé, Josep Creus, Montserrat Juanpere, Prudenci López, Dolors LLinaires, Josep M.LLort, Leonci de Manuel i Àngel Xifré, per les seves valuoses aportacions com a «jutges externs» i pel seu constant suport, en especial en la fase final; al bon amic David Barba, pel seu bon criteri, pels seus assessoraments i per la seva contínua disposició a «donar un cop de mà»; als companys i amics Agustí Tena i Mercè Santandreu, que em varen facilitar enormement tota la tasca de recollida de dades amb els seus alumnes, tant en la validació dels instruments com en la recollida definitiva.

Evidentment no puc oblidar mostrar un molt fort agraïment als 61 alumnes que es varen prendre molt seriosament la tasca que els vaig demanar. I molt especialment als protagonistes «en singular» del treball: a LA, futura artista; JR, futur capellà; a MG, futura metgessa; a CG, futur filòleg; a IM, futura psicòloga; a LL, que malgrat he indagat, no he pogut seguir-li la pista; a OL, futura dissenyadora; i a MB, futura matemàtica. A tots ells, moltes gràcies per la seva paciència i col·laboració.

Però molt especialment, vull deixar constància que aquest estudi no hagués estat possible sense la col·laboració total per part de la meva família, la Mercè, el Xavi i la Júlia, que al llarg de tant de temps, i més especialment en la part final de l'estudi, m'han alliberat de tasques i responsabilitats familiars, m'han comprès en aquells moments que semblava que els ignorés i han aguantat els humors imprevisibles que l'acumulació de feina i els terminis m'ocasionaven. I si és possible un agraïment especialment especial, aquest seria per a Mercè Chiapella, la meva dona, que a banda del que acabo de dir, en la seva qualitat de professora universitària de l'àrea de psicologia social, i de professional dels estudis d'opinió pública i de mercat, ha estat la *companya d'investigació*: ha validat instruments de recerca, ha validat aspectes del marc teòric, ha estat qui ha pres part en molts dels processos de triangulació de les interpretacions de la informació qualitativa, ha llegit i rellegit molts dels capítols per tal de veure'n la coherència i la claredat, m'ha fet recomanacions de presentació,... Sense ella, més que mai, aquest hagués estat un projecte inacabat.

ÍNDEX

I.	INTRODUCCIÓ	pg.1
II.	MARC TEÒRIC	pg. 11
II.1.	MARCS DE L'ESTUDI: RESOLUCIÓ DE PROBLEMES A L'ESCOLA I CREENCES DE L'ALUMNAT	pg.12
II.2.	LA RESOLUCIÓ DE PROBLEMES EN EDUCACIÓ MATEMÀTICA (RP)	pg.17
II.2.1.	Línies d'Investigació en RP	pg.17
II.2.2.	La idea de problema i de resolució de problemes en Educació Matemàtica. Diferents perspectives	pg.22
II.2.3.	Tipus de problemes	pg.33
II.2.4.	Fases a considerar en la resolució d'un problema	pg.40
II.2.5.	Aspectes que intervenen en el procés de RP	pg.41
II.2.6.	Síntesi	pg.58
II.3.	CREENCES I SISTEMES DE CREENCES DE L'ALUMNAT ENTORN A LES MATEMÀTIQUES EN GENERAL I A LA RP EN PARTICULAR	pg.61
II.3.1.	Línies d'investigació en creences de l'alumnat	pg.61
II.3.2.	Els termes <i>creença</i> i <i>sistemes de creences</i>	pg.64
II.3.3.	Un marc per estudiar les creences	pg.73
II.3.4.	Formació i desenvolupament de creences	pg.82
II.3.5.	Identificació de creences que tenen relació amb l'efectivitat en RP	pg.85
II.3.6.	Treballs preliminars propis	pg.92
II.3.7.	Síntesi	pg.99
II.4.	ASPECTES ESPECÍFICS ENTORN ALS QUALS FARÀ LES SEVES APORTACIONS EL PRESENT ESTUDI	pg.102
III.	DISSENY DE LA INVESTIGACIÓ.	pg.105
III.1.	MARC METODOLÒGIC	pg.106
III.1.1.	Consideracions metodològiques generals	pg.106
III.1.2.	Característiques metodològiques dels antecedents d'investigacions sobre creences de l'alumnat	pg.111
III.1.3.	Opcions de plantejament general preses en el present treball	pg.113
III.1.4.	Esquema general del desenvolupament de l'estudi	pg.116

III.2.	DISSENY DELS INSTRUMENTS DE RECERCA PER A LA IDENTIFICACIÓ, ORIGEN I FORMACIÓ DEL SISTEMA DE CREENCES	pg.118
III.2.1.	Disseny dels criteris organitzadors de la informació. Procés d'elaboració de les categoritzacions prèvies	pg.118
III.2.2.	Disseny dels instruments de recollida de dades per a l'estudi de les creences entorn a la RP en l'alumnat.	pg.137
III.2.3.	Disseny dels instruments de síntesi i/o interpretació de la informació i de presentació d'aquesta	pg.145
III.2.4.	Síntesi	pg.161
III.3.	DISSENY DELS INSTRUMENTS DE RECERCA PER A L'ANÀLISI DE L' ABORDATGE DELS PROBLEMES	pg.163
III.3.1.	Disseny dels criteris organitzadors. de la informació	pg.163
III.3.2.	Disseny dels instruments de recollida de dades	pg.165
III.3.3.	Síntesi	pg.174
III.4.	DESCRIPCIÓ DE LA POBLACIÓ ESTUDIADA I PROCÉS DE RECOLLIDA DE DADES	pg.175
III.4.1.	Població inicial i Població estudiada. Grup	pg.175
III.4.2.	Dades descriptives del Grup	pg.176
III.4.3.	Selecció dels casos estudiats	pg.178
III.4.4.	Recollida de dades en el Grup i dels Casos	pg.179
III.5.	CRITERIS PRESOS EN CONSIDERACIÓ PER AL RIGOR DEL PRESENT TREBALL	pg.180
IV.	ANÀLISI DELS RESULTATS OBTINGUTS. ESTUDI DEL GRUP	pg.183
IV.1.	VARIABLES INDEPENDENTS DE L'ESTUDI. MÉS CARACTERÍSTIQUES DEL GRUP	pg.186
IV.2.	IDENTIFICACIÓ DE CREENCES EN EL GRUP	pg.192
IV.2.1.	Creences sobre l'objecte «Problema de Matemàtiques»	pg.192
IV.2.2.	Creences sobre la naturalesa de l'activitat de RP	pg.244
IV.2.3.	Creences sobre l'aprenentatge de la RP	pg.290
IV.2.4.	Creences sobre les atribcions de l'èxit-fracàs en la RP	pg.313
IV.3.	ANÀLISI DE L' ABORDATGE DELS PROBLEMES NO ESTÀNDARD PROPOSATS	pg.334
IV.3.1.	Estudi del problema P1	pg.337
IV.3.2.	Estudi del problema P2	pg.343
IV.3.3.	Estudi del problema P3	pg.350
IV.3.4.	Estudi del problema P4	pg.356
IV.3.5.	Estudi del problema P5	pg.359
IV.3.6.	Estudi del problema P6	pg.364
IV.3.7.	Síntesi quantitativa de l'anàlisi de l'abordatge als problemes proposats	pg.369
IV.4.	CONCLUSIONS PARCIALES	pg.374

V.	ANÀLISI DELS RESULTATS OBTINGUTS. ESTUDI DE CASOS	pg.397
	V.1. EL CAS DE LA	pg.400
	V.2. EL CAS DE JR	pg.418
	V.3. EL CAS DE MG	pg.436
	V.4. EL CAS DE CG	pg.454
	V.5. EL CAS DE IM	pg.471
	V.6. EL CAS DE LL	pg.490
	V.7. EL CAS DE OL	pg.507
	V.8. EL CAS DE MB	pg.526
	V.9. ANÀLISI GLOBAL DELS CASOS	pg.544
VI.	CONCLUSIONS I IMPLICACIONS DE L'ESTUDI	pg.611
	VI.1. CONCLUSIONS	pg.612
	VI.1.1. Conclusions quant a la identificació dels sistema de creences entorn a la resolució de problemes	pg.613
	VI.1.2. Conclusions quant a la relació entre els esquemes d'actuació en l'abordatge a problemes no estàndard i els sistemes de creences	pg.621
	VI.1.3. Conclusions quant a l'origen i formació dels sistemes de creences	pg.625
	VI.2. IMPLICACIONS	pg.630
VII.	REFERÈNCIES BIBLIOGRÀFIQUES	pg.639
	ÍNDIX DETALLAT	pg.655

BLOC I
INTRODUCCIÓ. PROBLEMÀTICA A ABORDAR. FINALITATS
DE L'ESTUDI

".. i l'ensenyament, que hauria de ser abans que res formació de l'educand, esdevé preparació, que no és el mateix, sinó gairebé tot el contrari" (P.Puig Adam, 1960)

És **propòsit del present treball** identificar elements que ens permetin descriure els sistemes de creences de l'alumnat de 1er d'ESO d'un centre educatiu, alhora que identificar també elements que ens permetin elaborar hipòtesis explicatives de l'origen i formació d'aquestes creences; paral·lelament ens plantejarem també l'anàlisi de les accions desenvolupades per aquest alumnat quan aborda problemes no estàndard i establirem relacions entre aquestes i els sistemes de creences identificats.

Quina és la motivació i en general la gènesi d'aquest propòsit? quina problemàtica pretén abordar? on cal emmarcar-la? des de quina perspectiva teòrica? sota quines hipòtesis de treball? a partir de quines aproximacions inicials? sobre quina població se centra l'estudi? com acotarem aquest propòsit? Les properes pàgines donaran resposta a algunes d'aquestes preguntes i només faran esbós d'altres, en tant en quant només el disseny de l'estudi, descrit en posteriors capítols, és qui hi donarà resposta.

Un dels aspectes que assumim que dóna rellevància a una recerca en el camp de l'educació matemàtica, des de la perspectiva de l'autor del present treball com a professor d'ensenyament secundari, és la seva **aplicabilitat** i la seva **proximitat a la problemàtica de l'aula**, més encara estem amb aquells autors que entenen que **investigar** és una activitat sistemàtica i planificada que té per finalitat proporcionar informació per a la presa de decisions amb vista a millorar o innovar en educació. D'una banda és en aquest context i amb aquesta finalitat que la gènesi del treball pren el seu caràcter; d'altra banda, és obvi que qualsevol treball sorgeix d'una sèrie de circumstàncies i influències que configuren els interessos i el pensament del seu autor.

Així, la ja llarga experiència dia-a-dia dins l'aula, ens ha portat a percebre unes problemàtiques, unes dificultats, d'entre les quals algunes han atret més els nostres interessos: per la seva magnitud, freqüència o extensió, o també per la confluència d'aspectes com el fet de ser compartides per altres companys, o per la direcció donada a la formació permanent o pels assessoraments rebuts. Una de les conseqüències, malgrat en cap moment hem deixat de considerar que la funció principal del mestre és la docent, ha estat que aquestes problemàtiques percebudes esdevingueren **interessos de recerca** per a un equip de mestres i professors universitaris de didàctica i organització escolar¹. I és sota un model que en certa manera podríem considerar de mestre-investigador² que s'efectuen les primeres aproximacions: compartíem la idea entorn a que la tasca docent comporta una enorme dificultat si no va acompanyada d'un coneixement crític i reflexiu de la pròpia pràctica.

Aquests interessos de recerca, al llarg del temps, es van acotant, van sent abordats i tancats els uns, reformulats els altres, abandonats uns altres. Alhora, els papers docent i investigador es constitueixen en *status* més fermes i per tant més delimitables, malgrat mai han deixat d'anar junts: és així que es conforma d'una banda una **línia de recerca** en un marc i model d'investigació en certa manera més formal que aquell inicialment

¹ p.e. ens remontaríem a Vila, Ferreres i altres (1989; 1992c), a Vila, (1992a) o a Vila i Juanpere (1992b)

² i utilitzem aquest terme (González i Latorre, 1987) més com una «manera de parlar» d'un model de treball desenvolupat, que volguent caracteritzar de forma precisa i estricta la tasca feta

assumit i alhora una **línia paral·lela d'innovació a l'aula**, ambdues en el camp de la resolució de problemes³.

PROBLEMÀTICA GENÈRICA QUE S'ABORDA

La «realitat del dia a dia» ens mostra una àmplia i inabastable casuística de dificultats, de bloquejos i d'errors comesos i/o observats en l'alumnat d'educació secundària obligatòria (ESO) en resoldre problemes de matemàtiques. Voler-los categoritzar de forma exhaustiva fins i tot podria estar mancat de sentit; tanmateix, i en part definits només per extensió, ens volem referir a una determinada tipologia d'errors, dificultats o bloquejos freqüents entre aquest alumnat, que agrupem en els següents grans blocs:

- **incoherències** en donar resposta a determinats problemes de matemàtiques que se'ls ha proposat en el context escolar, incoherències en les quals aventurem que difícilment caurien en enfrontar-se a situacions semblants en el seu context quotidià;
- els **bloquejos** d'alguns nens i nenes que, malgrat haver «demostrat» tenir una certa (o fins i tot alta) competència en determinats coneixements matemàtics, no reconeixen la necessitat del seu ús en situacions simples sorgides fora del context «classe de matemàtiques» o fins i tot en el mateix context escolar davant de situacions no estàndards.

Un cop superada la temptació d'imputar aquests errors/bloquejos o bé exclusivament a la manca de reflexió, interès o concentració de l'alumnat, o bé a la simplista autculpa de no haver treballat a classe situacions no estàndard, cal avançar en dos sentits:

- des de quines **perspectives** podem analitzar aquests errors/bloquejos i per tant en certa manera preveure'ls?
- és possible algun tipus **d'intervenció didàctica** que pugui incidir-hi?

Malgrat en ella mateixa aquesta problemàtica és prou important, és més greu encara en tant en quant durant els darrers anys la bibliografia sobre educació matemàtica ha volgut posar l'èmfasi en la resolució de problemes, la qual cosa ens crea una fractura entre la bibliografia entorn a «allò desitjable» i la realitat de cada dia.

EXEMPLES PARADIGMÀTICS D'ERRORS ALS QUALS ENS REFERIM I PRIMERES PREGUNTES FORMULADES

Volem fer referència a alguns d'aquests exemples d'errors, corresponents a problemes/activitats molt simples, la qual cosa creiem que centra l'atenció en l'error i no en l'exemple en ell mateix; en qualsevol cas escollim aquests d'entre molts possibles pel fet d'haver estat referenciats bibliogràficament.

Una experiència molt coneguda i de la qual se n'ha fet molta difusió és la de l'IREM de Grenoble (1980), en la qual, plantejada a uns alumnes de 7 a 9 anys⁴ la següent qüestió⁵:

³ Vila (1993ab,1994b,1995b) com a treballs de recerca en aquesta línia i Vila, Ferreres i altres (1992c) i Vila (1994a, 1998a, 2000) com a reflexions per a la innovació paral·leles

Qüestió 1.- En un vaixell hi ha 26 corders i 10 cabres. Quina és l'edat del capità?

es va observar que dels 97 nens i nenes als quals va ser proposada, 76 varen «aconseguir» calcular l'edat del capità a partir de les dades donades. Des de la perspectiva de l'anomenat *contracte didàctic*, Chevallard (1988) en fa un interessant i exhaustiu estudi. Paral·lelament, des de la perspectiva de les idees (*sistema de creences*) que l'alumnat s'ha anat formant ens preguntem: aquests nens i nenes creien que estaven davant d'un *problema*? què *creuen* que han de fer quan es troben amb una *pregunta escolar* absurda?

Molt directament relacionat amb aquest problema tenim el següent exemple (recollit a Vila, 1998b) on, en una determinada classe, a tots els nens i nenes (6 anys) se'ls proposa per escrit que responguin a:

Qüestió 2.- Si un nen té 7 llapis i li'n prenen 7, podrà escriure?

i un determinat nen afirma que "*això dependrà de si té bolígrafs o retoladors...*", resposta que no només no és admesa sinó que és entesa com una mena de rebel·lia. Quatre anys després, quan a aquest nen se li recordà aquella anècdota, afirmà: "*quin problema més beneït, clar que no podrà escriure!*". En cadascun dels dos moments, quin propòsit va suposar aquest alumne que hi havia en el problema i en el professor/a?

Reforçant aquestes reflexions, en treballs anteriors presentem altres exemples en la mateixa línia, la majoria d'ells referits a alumnat de 12 a 16 anys, en els quals cap preguntar-se a què s'associa la idea de *resoldre problemes*.

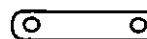
Una font molt important per obtenir i analitzar errors d'aquest tipus són les anomenades "avaluacions externes", i ho són no només per la seva extensió en població i ressò bibliogràfic, sinó també per un aspecte metodològic: l'alumnat s'enfronta a situacions proposades per professorat aliè, i en conseqüència a situacions per a les quals no hi ha estat ensinistrat *ad hoc*. Així, en el desenvolupament de la segona edició del *National Assessment of Educational Progress* (NAEP), als Estats Units, es va proposar la següent qüestió⁶

*Qüestió 3.*En Miquel té un joc de construccions que conté*

60 peces llargues com aquesta



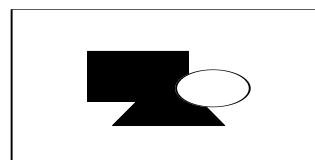
60 peces curtes com aquesta



60 cargols per connectar com aquest



Quantes formes com la següent podrà construir en Miquel ?



S'observa com només el 3% de l'alumnat de 9 anys i el 24% de

⁴ malgrat sigui una edat molt inferior a la de l'alumnat objecte del present estudi, l'exemple és paradigmàtic per la rellevància de l'autor i del seu ressò

⁵ de moment utilitzarem el terme «qüestió» per no haver d'entrar encara en la molt important i llarga discussió entorn a què és un «verdader problema»; serà precisament un punt important del marc teòric

⁶ referenciada per Gaulin (1982)

l'alumnat de 13 anys troba que la resposta correcta és 12. Estem ara davant d'un *problema no rutinari* on cal una mica de reflexió inicial. L'alumnat contempla la possibilitat que en resoldre problemes li «calgui» efectuar unes petites anàlisis qualitatives abans d'executar qualsevol pla de resolució?

A l'estat espanyol, en l'informe de les proves corresponents al *Tercer Estudi Internacional de Matemàtiques i Ciències (TIMSS)*⁷ sobre alumnat de 13-14 anys, es referencia el següent exemple:

Qüestió 4.- Les tres cinquenes parts de l'alumnat d'una classe són noies. Si afegim a aquesta classe 5 noies i 5 nois, quina afirmació és certa?

- a. hi ha més noies que nois*
- b. hi ha igual nombre de nois que de noies*
- c. hi ha més nois que noies*
- d. amb la informació donada no es pot saber si hi ha més nois o noies*

i s'observa que un de cada 6 alumnes opta per l'opció D.

UNA PERSPECTIVA QUE AGREUJA AQUEST PANORAMA: LA TEÒRICA IMPORTÀNCIA QUE ES DÓNA A LA RESOLUCIÓ DE PROBLEMES

Els errors anteriorment esmentats i exemplificats són en ells mateixos prou rellevants com per justificar-ne una anàlisi. Tanmateix, hi ha un aspecte que n'agreuja la transcendència en tant en quant determina una gran fractura entre la situació real i la situació teòricament desitjada: tant una anàlisi del Disseny Curricular Base del Departament d'Ensenyament (1992), com qualsevol altra anàlisi que efectués sobre algun dels grans Projectes Curriculars i Informes dels darrers anys, ens situaria la Resolució de Problemes com a nucli fonamental del procés d'ensenyament/aprenentatge de les matemàtiques; per tant estem en un panorama en el que la bibliografia de les darreres dècades dóna a la resolució de problemes un paper cabdal en l'educació matemàtica, centrant sobre aquella el focus d'aquesta, i d'altra banda la realitat «del dia a dia» xoca frontalment amb aquests plantejaments.

Malgrat fem referència a "la bibliografia (...)" és obvi que no tot el professorat té la mateixa idea de què és la matemàtica i en què consisteix el treball matemàtic. Tanmateix sí que hi ha un cert consens teòric en alguns aspectes generals. Només a manera de contextualització ens plantegem revisar molt breument algunes de les respostes més generalment consensuades bibliogràficament entorn a preguntes com: què són les matemàtiques? què es pretén amb l'educació matemàtica? quin paper hi juguen els problemes? les quals seran abordades de forma simultània.

En primer lloc, dir que estem amb els qui pensen que l'esforç de la comunitat matemàtica de representar millor què són les matemàtiques i d'il·lustrar l'activitat matemàtica, dirigint-ho a un col·lectiu de lectors no necessàriament professionals ni de les matemàtiques ni de l'educació matemàtica, ha estat molt notable en les darreres dècades (p.e. Davis i Hersh, 1981, 1986, versions castelleses: 1988; Pimm, 1987, versió castellana: 1990; Paulos, 1988, versió castellana: 1990; Lakatos, 1978).

⁷ López i Moreno (1997)

En aquest treball assumirem la idea de Lakatos (1978) quan entén les **matemàtiques** com una *activitat humana* que tanca en ella mateixa una dialèctica de *conjectures, refutacions i demostracions*, fins arribar a l'establiment d'una *conclusió*. Malgrat sigui reiteratiu, considerem de gran importància remarcar on es posa l'èmfasi: les matemàtiques, des d'aquesta perspectiva, no són les conclusions en elles mateixes sinó l'activitat que porta a establir-les.

Però, com ja anticipàvem, aquest consens bibliogràfic o teòric, dista de ser "*la realitat del dia a dia*", la qual cosa ja ens fa palesa la fractura a la que abans ens referíem. És important fer notar la molt extesa visió de les matemàtiques com una disciplina estàtica i limitada, la qual cosa, com indica Romberg (1991, pg.325), és un greu problema en tant en quant algunes de les persones que mantenen aquestes opinions influeixen sovint en les decisions de les matemàtiques escolars.

Paral·lelament, durant els darrers 35 anys, la comunitat educativa s'ha esforçat a definir les matemàtiques escolars i fer un esbós dels trets d'un currículum que reflecteixi les necessitats socials. Són nombrosos els documents que ens relacionen les fites a assolir.

Ja a 1965, Buck⁸ donava resposta a la següent pregunta: «*a banda de la seva importància tecnològica, quins són els valors educatius de les matemàtiques?*», i ho feia mitjançant 6 fites, de les quals en destaquem

fita 1: proporcionar una comprensió de la interacció entre les matemàtiques i la realitat

fita 3: demostrar que les matemàtiques són una activitat humana (...)

fita 5: demostrar que és important preguntar «per què?» (...)

A 1980, fa vint anys, en el document *An Agenda for Action*, l'NCTM afirma en la seva ja famosa recomanació 1:

"La Resolució de Problemes hauria de ser el focus de les matemàtiques escolars dels anys 80" (N.C.T.M., 1980, pg 1)

concretant aquesta recomanació general en 6 accions a dur a terme:

1. El currículum de matemàtiques hauria de ser organitzat entorn a la resolució de problemes
2. La definició i el llenguatge de la resolució de problemes en matemàtiques haurien de ser desenvolupats i ampliat per tal d'incloure un ampli rang d'estratègies, processos i modes de presentació que abracin tot el potencial de les aplicacions matemàtiques
3. El professorat de matemàtiques hauria de crear ambients de classe en els quals pugui sorgir la resolució de problemes
4. S'hauria de desenvolupar materials curriculars apropiats per a ensenyar a resoldre problemes a tots els nivells
5. Els programes de matemàtiques dels anys 80 haurien d'implicar l'alumnat en resolució de problemes presentant aplicacions a tots els nivells

⁸ citat per Romberg (1991), pg.370

6. Els investigadors haurien de donar prioritat en els anys 80 a les investigacions sobre la naturalesa de la resolució de problemes i les vies efectives d'aconseguir resolutors de problemes

Posteriorment, a 1989 i en el marc d'un nou document, els "*Estándares Curriculares y de Evaluación para la Educación Matemática*", l'NCTM proposa els següents cinc objectius generals per a l'alumnat:

1. aprendre a valorar les matemàtiques
2. adquirir confiança en l'aptitud pròpia
3. adquirir la capacitat de resoldre problemes matemàtics
4. aprendre a comunicar-se matemàticament
5. aprendre a raonar matemàticament

arribant a afirmar de forma clara que

"La Resolució de Problemes, en el seu sentit més ampli, significa pràcticament el mateix que l'ús de les matemàtiques" (N.C.T.M., 1989)

Malgrat el reconeixement d'aquesta transcendència, aquest mateix document ens mostra la seva preocupació per la «realitat de cada dia a l'aula». Així, continua amb el següent comentari:

"Des d'aquest punt de vista, la resolució de problemes significa molt més que l'aplicació de tècniques específiques per a la resolució de diferents tipus d'enunciats" (N.C.T.M., 1989)

i en general es proposa l'abandó de la pràctica tradicional de resumir els resultats matemàtics desitjats en forma de destreses, conceptes i aplicacions, i demanant que aquests formin part de fites més generals de la resolució de problemes i de la comunicació.

Enmig dels dos anteriors documents, a Europa, concretament a Gran Bretanya, l'informe Cockcroft (1982) enumera quatre fites declarades com a responsabilitat del professorat que es corresponen de forma coherent amb les cites anteriorment esmentades.

En el marc descrit, un dels autors que més explícitament ha fet referència a aquest important paper de la Resolució de Problemes és Schoenfeld (1991a i 1992), qui apunta la conveniència no tant de parlar d'ensenyar a resoldre problemes sinó d'ensenyar a **pensar matemàticament**, entenent que *pensar matemàticament* consisteix a modelitzar, simbolitzar, abstraure i aplicar idees matemàtiques a un ampli rang de situacions. En aquest marc, els problemes jugarien el paper essencial de "*punt de sortida de les discussions matemàtiques*", i es col·loca en primer pla els processos característics de l'activitat matemàtica (d'alt nivell cognitiu), pel damunt de les rutines algorísmiques (de baix nivell cognitiu).

La lectura d'aquests documents portarien a pensar que la comunitat educativa matemàtica ha acumulat un considerable cos de coneixements entorn a l'ensenyament i l'aprenentatge de la resolució de problemes. Tanmateix, no és així. Lester (1994, pg.661) afirma que si bé es pot dir amb seguretat que des de la publicació de *l'Agenda*,

la resolució de problemes és del que més s'ha escrit, també és possiblement del que menys s'ha entès; a la vegada que l'acord entre la comunitat de professors a admetre que és prioritari l'objectiu d'instruir en la capacitat de resoldre problemes ve acompanyat per admetre també que una altra cosa completament diferent és prendre les decisions per assolir aquest objectiu.

PRIMERES APROXIMACIONS A LA PROBLEMÀTICA PLANTEJADA

Ja en treballs preliminars⁹, als quals farem referència durant el present estudi, va ser abordada aquesta problemàtica sota un enfocament **d'anàlisi exploratòria** i amb un **repte**:

És possible algun tipus d'intervenció didàctica que incideixi positivament en aquestes dificultats de l'alumnat?

En aquests treballs, i arran de les primeres consultes de la bibliografia (especialment, Abrantes, 1994; Callejo, 1994; Gil, 1988; Grupo Cero, 1987; Lester, 1987; Schoenfeld, 1985a, 1987, 1992; Thompson, 1992 i Woods, 1987) sobre el tema, es va sorgir d'una hipòtesi de treball que va condicionar les decisions sobre el marc teòric i l'enfocament metodològic a escollir. Aquesta **hipòtesi de treball** va ser:

*en gran part, l'origen d'aquestes dificultats de l'alumnat és extern a les seves pròpies capacitats i potencialitats d'aprenentatge i es pot anar a buscar en determinades **creences** d'aquests, les quals, a la vegada, tenen el seu origen en alguns aspectes del context escolar en el qual han estat instruïts, en especial en l'ambient general de les situacions d'aprenentatge dissenyades i desenvolupades pel professorat (**gestió de la classe, naturalesa de les activitats**) i en els diferents papers que s'ha donat a la resolució de problemes*

L'enfocament donat a aquestes anàlisis exploratòries consistia en l'estudi sobre tres àmbits: el professorat, l'alumnat i el material treballat a classe. Els resultats d'aquests treballs varen permetre acotar la problemàtica, donar llum a moltes preguntes, deixar-ne obertes d'altres i formular-ne moltes més. En qualsevol cas, el present treball és la **continuació natural** d'aquelles anàlisis exploratòries, reprenent-ne els mateixos propòsits generals, els mateixos reptes com a docents, però centrant-nos només en **l'alumnat**, reformulant i acotant els objectius sense perdre la visió general (*què, per què, com*), la qual cosa ens permetrà una major **precisió, riquesa i profunditat** en l'anàlisi i la interpretació dels resultats, i consegüentment una **major i més precisa aportació en el marc teòric i metodològic on es mourà**.

⁹ Vila (1993a; 1995a)

FINALITATS DEL TREBALL. POBLACIÓ ESTUDIADA

Les conclusions d'aquestes anàlisis exploratòries, com hem dit, ens han portat a considerar rellevant la problemàtica abordada, encertada la perspectiva d'anàlisi (marc teòric) i adequat el propòsit definit. Alhora ens han portat a considerar la següent **presa de decisions**:

- a) Mantenir el **dobte àmbit** d'estudi del marc teòric: resolució de problemes de matemàtiques i creences de l'alumnat.
- b) Plantejar l'estudi en la línia de l'aprofundiment del **paper de les creences** en la RP, en l'atenció a aspectes que tenen relació amb la instrucció, i en la interrelació dels aspectes cognitius, afectius i del context.
- c) Efectuar un plantejament metodològic que integri tècniques **quantitatives** i tècniques **qualitatives**.
- d) Efectuar un estudi en dos àmbits d'observació: un **estudi d'un grup** ampli d'alumnes (concretament 61) i alhora un **estudi de casos**, o sigui amb més profunditat sobre un nombre més reduït d'alumnat (concretament 8).
- e) Centrar l'estudi sobre **l'alumnat de 1er d'ESO**. Es tracta d'alumnat de relativament curta edat, la qual cosa fa que calgui precisar molt més la planificació de l'estudi i el disseny dels instruments de recerca, especialment en la fase de recollida de dades. Tanmateix, d'una banda guanyem en diversitat en la tipologia d'alumnat (provenen d'escoles de primària diferents); però molt especialment, guanyem temps: si reprenem el repte que ens motiva en el treball (el disseny d'intervencions didàctiques) i considerem un dels aspectes recollits bibliogràficament i ja copsats en els treballs preliminars, la lentitud dels efectes de qualsevol tipus d'intent de modificació de creences, és només en curtes edats que podem començar.
- f) Centrar l'estudi sobre el **conjunt de l'alumnat d'un centre educatiu**. En tant en quant mantenim el propòsit alhora identificatiu, explicatiu i relacional, ens importa més la profunditat que l'extensió, més la comprensió que la generalització, més el conjunt d'un sol context (ja complex i divers en ell mateix) que la consideració de variables demogràfiques i personals diverses.
- g) Excloure d'aquest conjunt d'alumnat aquells que tenen algun tipus de **necessitat educativa especial**, en tant en quant, malgrat la seva problemàtica és altament rellevant, cabdal i també prioritària en l'educació matemàtica, s'aparta del propòsit i de la problemàtica abordada.

Cadascuna d'aquestes decisions preses serà exhaustivament justificada i emmarcada al llarg de la present memòria.

El conjunt de les decisions preses i l'assumpció d'hipòtesis de treball esmentades ens porten a formular la **finalitat de l'estudi** en els següents termes¹⁰:

Objectiu General 1: *Identificar elements significatius i caracteritzadors del sistema de creences entorn a l'activitat de resolució de problemes en el conjunt de l'alumnat de 1er d'ESO estudiat.*

Objectiu General 2: *Analitzar la relació entre el sistema de creences identificat en l'alumnat estudiat i les accions desenvolupades durant l'abordatge de la resolució de problemes no estàndard*

Objectiu General 3: *Identificar aspectes rellevants que incideixin en l'origen i formació del sistema de creences*

El desenvolupament i concreció d'aquests Objectius Generals necessiten d'una banda d'un **Marc Teòric General** on centrar l'estudi, en el qual precisarem els termes i les opcions de model teòric considerades, i on s'emmarcaran i concretaran les aportacions del present treball. Aquest Marc, com hem dit, considerarà dos grans àmbits: la resolució de Problemes de Matemàtiques i l'Estudi de les Creences de l'alumnat, i seran l'objecte a desenvolupar en el **Bloc II** de la present memòria.

Un següent pas, ha estat el **Disseny Metodològic de la Investigació**: les opcions i consideracions metodològiques generals, l'assumpció d'un marc teòric propi que desenvolupi de forma coherent el marc teòric general, el disseny de cadascun dels instruments de recerca, la descripció acurada de la població a estudiar,... seran els aspectes que centraran el **Bloc III** de la present memòria.

L'anàlisi dels resultats es desenvoluparà en els **Blocs IV i V**, i les seves **conclusions** i implicacions didàctiques seran explicitades en el **Bloc VI**.

¹⁰ formulem les finalitats de l'estudi atenent a les qüestions a les quals Pérez Gómez (1983) considera que ha de respondre una recerca en educació: (a) què passa dins l'aula? (b) per què passa? (c) què signifiquen aquests esdeveniments i quines conseqüències tenen? (pàg.98)

**BLOC II.
MARC TEÒRIC**

- II.1. MARCS DE L'ESTUDI: RESOLUCIÓ DE PROBLEMES A L'ESCOLA I CREENCES DE L'ALUMNAT**
- II.2. LA RESOLUCIÓ DE PROBLEMES EN EDUCACIÓ MATEMÀTICA**
- II.3. CREENCES I SISTEMES DE CREENCES DE L'ALUMNAT ENTORN A LES MATEMÀTIQUES EN GENERAL I A LA RP EN PARTICULAR**
- II.4. ASPECTES ESPECÍFICS ENTORN ALS QUALS FARÀ LES SEVES APORTACIONS EL PRESENT ESTUDI**

II.1. MARCS DE L'ESTUDI: RESOLUCIÓ DE PROBLEMES A L'ESCOLA I CREENCES DE L'ALUMNAT

Aquest treball pretén fer les seves aportacions en el gran marc general que vindria definit per la **Resolució de Problemes de Matemàtiques a l'escola** i per les **Creences de l'alumnat**.

Quant a la rellevància d'aquest marc general, volem novament insistir en l'èmfasi que la bibliografia¹ ha posat en la resolució de problemes com a focus de les matemàtiques escolars en els processos de reforma a seguir. Paral·lelament, també s'ha fet esment de l'estreta relació entre la resolució de problemes (RP) i la pròpia activitat matemàtica, sent identificades ambdues per molts autors.

Amb la finalitat de precisar l'ampli marc en el que inicialment ens movem, en un primer ordre d'acotació, el que fa referència a l'**àmbit d'observació dels processos a estudiar**, se'n plantegen dos, en cap cas contraposats. D'una banda, com indica Puig (1996) recolzant-se en Mayer i Resnick i Glasser²:

"Despresa dels determinatius «de matemàtiques» i «en els sistemes educatius», la resolució de problemes pot arribar a identificar-se amb el pensament i la cognició" (pg.11)

posant de manifest la necessitat i rellevància d'un determinat àmbit d'observació: el centrat en els **processos de l'individu** (la sèrie d'estudis de Schoenfeld, p.e. 1985a, 1987a, 1989ab, 1992 entre d'altres, o Callejo, 1991; Carrillo, 1996; i Puig, 1996 al nostre país). En qualsevol cas, és important precisar que ens estem referint només a l'individu/resolutor i als problemes en tant en quant estan immersos en el **marc escolar**.

D'altra banda, i posant un èmfasi molt més gran en aquesta darrera precisió, Lester (1994), parlant sobre l'estat de la qüestió quant a la recerca sobre RP, posa l'èmfasi en la necessitat de més recerca sobre instrucció en RP, centrant-ho en la necessitat de l'estudi de grups-classe sencers i posant de manifest la rellevància d'un nou àmbit d'observació: **la classe** com a espai on esdevenen processos que ultrapassen la complexitat d'una suma de n processos individuals.

És en aquesta línia on apareix el màxim nivell de complexitat en la recerca en ensenyament-aprenentatge (Koehler i Grouws, 1992): estem parlant del fet que l'estudi dels processos a l'aula contempen tant la conducta de l'alumnat com la conducta del professorat, alhora en estreta relació entre ells; i sobre els resultats de la recerca de les quals incideixen fortament aspectes com les seves característiques personals, els coneixements, les interrelacions, les actituds, les creences, les conseqüències de les seves conductes,... alhora també en estretes relacions entre ells.

El present estudi, amb una visió eclèctica, es mourà a cavall entre ambdós àmbits d'observació: **l'estudi d'un grup** (en un sentit ampli, no restringit al de grup-classe,

¹ i remarquem el fet de que considerem que aquest èmfasi és principalment bibliogràfic

² que arriben a afirmar que "...l'aspecte principal de la intel·ligència és la capacitat de resoldre problemes (...)" (Puig, 1996; pg.11)

però sí al mateix context escolar i de nivell educatiu, i en el qual es definirà quins seran els processos a observar-hi, o el que és el mateix: el nivell de complexitat de la recerca) i **l'estudi de casos**, és a dir un estudi en profunditat d'un nombre reduït d'individus. Aquests dos àmbits d'observació seran descrits en el bloc III.

Per tant, en el present treball prendran rellevància els tres personatges que ens descriu Puig (1996), en tant en quant ens centrem en la RP en l'àmbit escolar: problema, alumne, professor. Tanmateix, a manera de crítica que compartim, Callejo i Carrillo (1998) troben a faltar un quart element (que no personatge): el context en el qual es proposa el problema o la RP. Aquests personatges conformarien de forma il·lustrativa un triangle d'interrelació que tindria els tres personatges en els seus tres vèrtexs i el context en el centre, ja definit a Vila (1995a) i assumit en el present treball. Tornant al marc d'anàlisi proposat per Puig (1996) el present estudi es desenvolupa en el que ell anomena **escenari local** (les classes de problemes que s'estudien³) i en un **nivell III** (nivell on intervenen tots tres personatges), malgrat calgui fer una precisió seguint la mateixa metàfora que ell introdueix en el seu estudi: el professor és en escena i ha intervingut com un dels protagonistes principals, però en aquell moment no intervé.

En un segon ordre d'acotació, quant al mode en què es desenvoluparà l'estudi, i tornant al marc descrit per Puig, el present estudi farà les seves aportacions en un **món de problemes** que considerem que es pot inscriure en un dels cinc que descriu (en una relació que no pretén ser exhaustiva sinó il·lustrativa). En aquest *món*

"els problemes de matemàtiques són vistos des dels processos matemàtics i es resolen en situacions d'ensenyament la intenció de les quals és l'adquisició d'aquests processos" (pg.14)

És molt important reproduir i adaptar dues precisions que el propi Puig fa. En primer lloc pel terme processos entén allò que altres autors com per exemple Bell anomena *estratègies generals*, i que creiem que coincideix amb el terme *processos* que autors com Mason, Burton i Stacey (1982) adopten. En segon lloc, posem especial èmfasi en la precisió que fa entorn al fet que aquest *món* té un pobre reflex en els sistemes escolars; amb la qual cosa es vol remarcar que no té per què ser aquesta la visió o situació d'ensenyament amb la qual l'alumnat estudiat ha resolt els problemes, sinó des de la qual s'analitzen en el present estudi.

En un altre ordre d'aspectes, cal precisar **des de quins dominis s'abordarà l'estudi**. Quan des de la perspectiva de la didàctica es parla de RP ens podem situar en tres plans amb estretes interrelacions entre ells i alhora no compartimentables: el *cognitiu*, l'*afectiu* i el del *context socio-cultural*. Com veurem a continuació, l'estudi de les creences que es planteja en el present estudi, se situarà de forma simultània i en diferents punts estretament connectats dels tres plans esmentats.

En el caràcter clarament **cognitiu** de l'activitat de resolució de problemes, ja esmentat a l'inici del capítol, hi podem destacar dos tipus de coneixements (seguint la síntesi de Callejo, 1994): la *base de coneixements* i els *metaconeixements*.

³ malgrat la finalitat darrera del present estudi és efectuar aportacions per a l'organització general del currículum de matemàtiques, que Puig anomena *escenari global*; de fet Puig ja precisa que "*qualsevol model de competència que es postuli en el sistema escolar porta incorporat unes intencions que corresponen a l'escenari global*" (pg.19)

De forma explícita, autors com Garofalo i Lester (1985) o Schoenfeld (en especial 1985a, 1987a i 1992) distingeixen com a principals aspectes de la metacognició els coneixements i les creences entorn als fenòmens cognitius, d'una banda, i la *regulació* i el *control* d'aquests actes cognitius de l'altra.

D'altra banda, Schoenfeld (1992), aprofundeix en l'intent de recerca de fonts d'explicació de la conducta dels resolutors, la qual cosa el porta a la categorització d'allò que ell anomena «*aspectes de la cognició*» (que va més enllà del que ell mateix, en treballs anteriors anomenava «*components del coneixement i la conducta*»). És en aquesta hipòtesi de treball de Schoenfeld quant al **paper explicatiu de les creences**, que el present estudi pren rellevància.

En qualsevol cas, aquest caràcter cognitiu no pot venir encotillat per una relació precisa i tancada de processos cognitius, com fa notar McLeod (1989a), alhora que defensa la idea que

"aquests processos cognitius involucrats en la RP estan particularment exposats a les influències del domini afectiu" (pg.24)⁴

amb la qual cosa establim ja punts de contacte amb el segon pla esmentat: **l'afectiu**. En aquesta mateixa línia Lester (1987) critica als qui es conformen a atribuir de forma exclusiva als aspectes cognitius les dificultats en RP. Són precisament McLeod i Adams (1989) uns dels qui primer han començat a aportar treballs sobre la importància d'aquest domini en el camp de la RP, i és també recentment que s'han començat a elaborar els primers models d'ensenyament que en tenen present la seva influència (p.e. Mason, Burton i Stacey 1982).

Quant a la necessitat i rellevància de **l'estudi de les creences de l'alumnat**, McLeod (1993 i 1994 respectivament) és explícit:

"Abans que els estudiants es converteixin en eficients resolutors de problemes, han de canviar les seves creences" (pg.762)

"Seria útil que més estudis centrats en les qüestions afectives tinguessin forts lligams sobre altres temes relacionats amb la millora de la pràctica de l'educació matemàtica." (pg.644)

Finalment, quant al tercer pla des del qual es pot estudiar la RP, el **context**, partim com Gómez Chacón (1998a) del supòsit que

"indagar la relació afectiva envers la matemàtica i la motivació per l'aprenentatge, demana una base àmplia de comprensió del context socio-cultural, dins i fora de l'àmbit escolar, que influeix en els professors i estudiants" (pg.11)

⁴ en particular esmenta com a aspectes *cognitius* especialment exposats a les influències del domini *afectiu*: la memòria i processos de representació, al paper de la consciència, al paper de la metacognició i al paper dels automatismes. Fins i tot analitza la relació important existent entre les estratègies de resolució de problemes i el domini afectiu

Com ens afirma a continuació, nombrosos estudis afirmen la importància del context socio-cultural en la construcció d'actituds, valors, creences, etc.

I des d'una **perspectiva eclèctica**, en la que ens centrarem i que engloba aspectes dels tres plans esmentats, autors com Pehkonen i Törner (1996b) interrelacionen un ampli conjunt de factors (motivació, experiències anteriors, coneixements matemàtics, necessitats com a estudiants de matemàtiques) que afecten la conducta de RP de l'alumnat, interrelacionant entre ells via creences i concepcions de l'alumnat (jugant el paper de filtre), i en part fruit de creences matemàtiques a la societat.

Assumint òbviament la rellevància de l'estudi de les creences, Pehkonen i Törner (1996b) ens concreten els aspectes anteriors afirmant que:

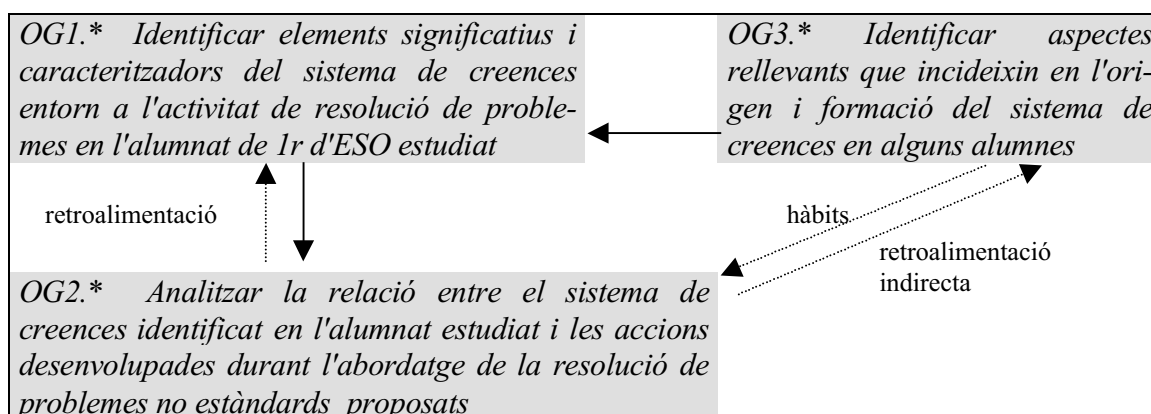
"En el camp dels sistemes de creences, sembla que hi ha quatre grans aspectes d'especial interès:

- 1) *identificar i descriure creences en el sistema de creences d'un individu*
- 2) *influències dels sistemes de creences matemàtiques*
- 3) *naixement i desenvolupament de sistemes de creences matemàtiques*
- 4) *condicions per al canvi de sistemes de creences matemàtiques"* (pg.106)

aspectes sobre els quals directament o indirectament el present estudi farà aportacions.

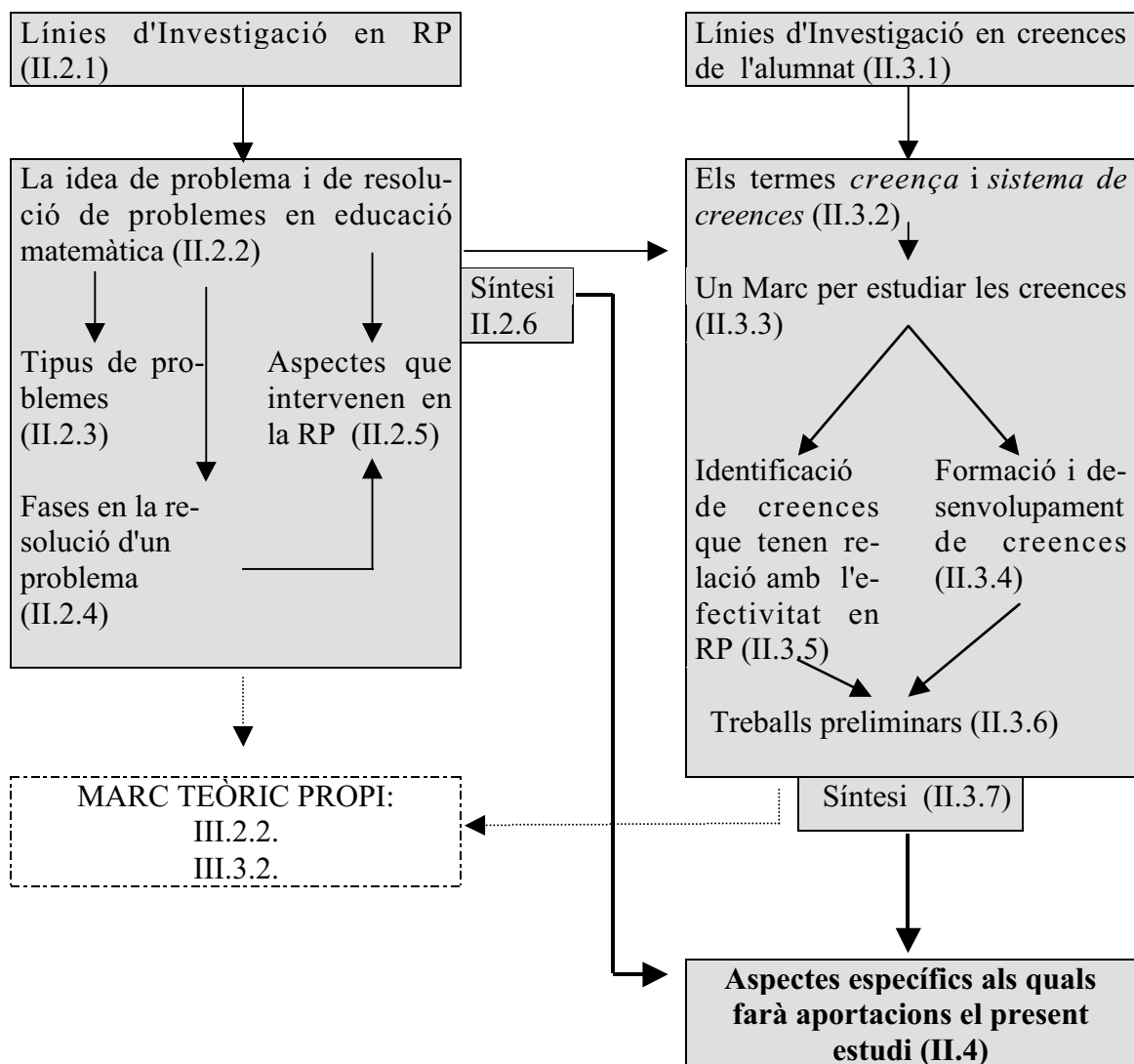
L'esquema ii.1.1 ens il·lustrarà la relació que establirem i que pretendrem contemplar en el desenvolupament del present estudi quant als 3 objectius generals descrits a la introducció, i que aquí reproduïm. Les fletxes del tipus (→) ens indiquen les relacions òbvies que la pròpia definició dels objectius comporta; tanmateix el marc teòric ens portarà a considerar noves relacions, descrites amb les fletxes del tipus (⇨).

Esquema ii.1.1.- Relació entre els objectius generals del present estudi



El següent mapa il·lustra l'estructura del present bloc II.

Mapa del bloc II. MARC TEÒRIC



II.2. LA RESOLUCIÓ DE PROBLEMES EN EDUCACIÓ MATEMÀTICA

En relació al primer dels dos grans marcs en els que es desenvoluparà el present estudi, la *resolució de problemes de matemàtiques* a l'escola, aquest capítol se centrarà només en els aspectes que li són més rellevants: en primer lloc situar-lo en les línies d'investigació en RP; en segon lloc, analitzar diferents visions de la idea de *problema* i de *resolució de problemes* que han pres cos en relació a perspectives i enfocaments diversos, la qual cosa ens permetrà sistematitzar l'estudi que efectuarem sobre l'alumnat; a continuació, i en estreta relació a aquestes visions, es farà una descripció breu de diferents tipologies de problemes i criteris per establir-les, alhora que es descriuran les fases per les quals es desenvolupa la RP; finalment farem una breu descripció del marc d'interrelació d'aspectes que intervenen en el procés de RP per tal de donar el seu lloc i paper a les *creences*, les quals seran abordades específicament en el capítol següent.

II.2.1. LÍNIES D'INVESTIGACIÓ EN RESOLUCIÓ DE PROBLEMES

És propòsit d'aquest capítol fer un breu recorregut per les diferents tendències, perspectives i **interessos de recerca** en els darrers anys sobre aquest tema de cabdal interès, la qual cosa pot donar llum sobre la rellevància del present estudi.

En primer lloc, creiem important remarcar que la *resolució de problemes de matemàtiques (RP) en el marc escolar* és un camp d'estudi relativament recent, i amb una importància també relativament recent, malgrat la seva rellevància històrica. Lester (1994), en una interessant revisió de l'estat de la recerca en RP durant el període 1970-1994, utilitzant com a indicadors els articles publicats al *Journal for Research in Mathematics Education*, es recolza en Kilpatrick qui a 1969 caracteritzava la literatura sobre RP en matemàtiques en aquell moment com a atèdrica, no-sistemàtica i descoordinada, interessada gairebé de forma exclusiva en els problemes verbals estandarditzats dels llibres de text i restringida a la quantificació de les conductes en RP.

També Schoenfeld (1985b) fonamenta la seva opinió de qualificar de *recent* (i a la vegada de *potent*) la Resolució de Problemes, quant a moviment dins de l'ensenyament de la matemàtica, en un seguit d'arguments. D'una banda, a l'informe publicat per l'*Educational Studies in Mathematics* (maig-agost 1978), elaborat per l'ICMI amb el títol de "*Changes in Mathematics Education Since the Late 1950's - Ideas and Realisation*", el terme *Resolució de Problemes* no és utilitzat en el sentit en què avui se'l coneix. D'altra banda, al congrés ICME-4 (Berkeley, 1980) va abordar la resolució de problemes en un sol dels seus grups de treball, grup anomenat precisament "*Aspectes poc habituals en els programes*"⁵. Tanmateix, la importància donada a la RP en els

⁵ Quant a la coherència entre aquesta poca rellevància en la investigació i el paper anecdòtic de la RP dins l'aula, en un altre article, Schoenfeld (1991a) també ens fa un recorregut ràpid per algunes tendències entorn a l'educació matemàtica i llurs conseqüències sobre la idea del terme «problema». Així, en la

congressos ICME-5 (Adelaida, 1984) i ICME-6 (Budapest, 1988) són una prova de la rellevància adquirida en molt pocs anys

Nou anys més tard de fer la crítica anterior, Kilpatrick (1978) feia una crida a ampliar la concepció i els camps d'estudi. I ja a 1985 manifestava que s'havia produït un important canvi (Kilpatrick, 1985), i en feia una revisió; en ella distingeix **quatre perspectives** diferents sota les quals s'havia abordat fins aleshores el paper que juga el problema i els seus processos de resolució en la literatura de recerca en educació matemàtica:

- a) Des de la perspectiva psicològica es veu la idea de problema com a *activitat*, en qualsevol cas, però, lligada al *subjecte*, normalment motivat.
- b) Des de la perspectiva sòcio-antropològica el problema és vist com una tasca pròpia d'una situació de transacció, entenent l'aula de matemàtiques com una situació social construïda en comú per tots els participants, on l'alumnat i el professorat interpreta cadascú accions i intencions.
- c) Des de la perspectiva matemàtica, on entén el problema com a *construcció*; des d'aquesta perspectiva s'entén que tota la matemàtica és creada en un procés de formulació i resolució de problemes;
- d) Des de la perspectiva pedagògica, la paraula clau seria la de *vehicle*, vehicle des d'un doble vessant: curricular (paper dels problemes en l'educació matemàtica) i didàctic (com ensenyar a resoldre problemes).

En qualsevol cas, Kilpatrick (1985) considera que l'entrada en el domini de la RP és deguda als treballs en problemes verbals, i cita, com a contribució rellevant, la classificació feta per Polya (1981) des d'una perspectiva pedagògica, malgrat en general fa una crítica a l'excessiva dependència cap als seus treballs durant molts anys. Al següent capítol es tornarà sobre aquestes quatre perspectives.

En el PME de Montreal, Lester (1987) exposa i revisa un seguit de qüestions (associades cadascuna d'elles a una línia de treball o treball concret en RP) que li serveixen per establir una mena d'estat de la qüestió aleshores. Aquestes qüestions i la sèrie de treballs als qui fa referència són:

- a) per què serveix el coneixement inert⁶ ? (K.M.Hart)
- b) què significa tenir èxit en resolució de problemes? (Gurtner)
- c) quant important és tenir «*good sense*» del què saps? (DeGuire)
- d) tenim un «*inner teacher*» que dirigeix els nostres aprenentatges? (Hirabayashi i Shigematsu)
- e) hi ha alguna *força directiva* en resolució de problemes? (Schultz i L.Hart)
- f) per què la metacognició és tan difícil d'estudiar? (Garofalo, Kroll i Lester)

primera meitat del segle, en un marc educatiu amb uns curricula estables i «avorrits», on es valorava la memorització dels fets, conceptes i procediments, els problemes quedaven reduïts a una «activitat mecànica». A la dècada dels 60, després d'una renovació centrada en l'abstracció i en un marc estructuralista, el fracàs és cada vegada més palpable i s'observa com els alumnes no entenen les abstraccions i es perden habilitats bàsiques; en qualsevol cas, es tornava a la realització d'execucions rutinàries i algorísmiques. Com a conseqüència d'aquest fracàs, es retorna a les anomenades «qüestions bàsiques». Malgrat això, s'observa que els alumnes no són capaços de fer «matemàtiques pensades» ni per tant de resoldre problemes. A finals de la dècada dels 70 la resolució de problemes, com a tal, no apareix en els curricula

⁶ *inert knowledge*, en la versió original

Una tasca semblant efectua Vale⁷, aportant la seva relació:

- a) processos usats per l'alumnat (Kantowski, Lee, Putt)
- b) models d'ensenyament en RP (Charles y Lester, Fernandes, Kantowski)
- c) la influència del treball en grup a la RP (Schoenfeld; Noddings)
- d) la RP en els programes de formació de professorat (Charles i Lester)

Gil i altres (1988) consideren que la literatura sobre «*resolució de problemes de llapis i paper*» mostra essencialment dues orientacions teòriques: l'associada a l'observació de com els resolen els *experts* i la que es podria etiquetar d'*algorísmica* (la formació de les accions mentals «*etapa per etapa*», intentant explícitament transformar els problemes en situacions estàndards que puguin resoldre's mitjançant operacions rutinàries)

Anys més tard Lester (1994) planteja les **4 àrees sobre les quals s'ha produït un major progrés en la recerca**, formulant-les també com a preguntes:

- a) *Què fa que un problema sigui difícil per als estudiants?* Aquest corrent de recerca, molt freqüent entre els anys 1970 i 1980, emfasitzava la classificació dels tipus de problemes i l'estudi de les variables de la tasca i va tenir la seva fita en el treball de Goldin i McClintock l'any 1979, treball que en certa manera va tancar aquesta línia de recerca, la qual es va reconduir vers l'estudi de les interaccions entre les variables de la tasca i les característiques dels resolutors.
Lester considera que actualment hi ha un cert consens a admetre que la dificultat dels problemes no està tant en funció de les variables de la tasca com en característiques del resolutor com trets (p.e. capacitats de visualització), disposicions (p.e. creences i actituds) o experiències anteriors (p.e. instrucció prèvia, familiaritat amb determinats tipus de problemes).
- b) *En què es diferencien els bons i dolents resolutors?* La identificació de característiques dels bons resolutors⁸, com a línia de recerca, s'inicia a finals dels anys 70 amb estrets lligams amb el ràpid desenvolupament de la ciència cognitiva i la intel·ligència artificial. La sèrie inicial de treballs de Schoenfeld (1985a, 1987) n'és un dels exemples paradigmàtics.
Tanmateix, Lester recolzant-se en Lesh, crida l'atenció sobre el fet que determinant amb precisió les maneres en les quals els experts resolen els problemes i instruint d'aquestes maneres als novells en curts espais de temps pot no tenir com a resultat les conseqüències desitjades.
- c) *Què sabem sobre l'ensenyament de la RP?* Lester creu que malgrat els molts missatges ambigus⁹ de la literatura sobre recerca en RP, s'ha avançat en el tema i fins i tot relaciona un seguit d'aspectes que poden donar-se com a acceptats; tanmateix, considera que fins a meitat dels 80 les recerques sobre instrucció en RP estaven excessivament centrades en la instrucció per desenvolupar i usar estratègies i destreses heurístiques o amb potencial

⁷ que citem de Contreras (1999), pàg.52

⁸ Lester (1994) inclou en aquesta línia també tots els treballs en la línia d'«èxit-fracàs» o «experts-novells»

⁹ de fet fa una clara crítica sobre la separació recerca - programes d'instrucció

heurístic¹⁰. En aquesta línia, Callejo (1991), basant-se en Burkhardt i Schoenfeld, considera que els projectes d'aprenentatge en RP giren al voltant de tres elements: la pràctica, l'adquisició de coneixements de mètodes generals de RP o d'heurístics particulars i la reflexió sobre les tasques (pròpies i/o alienes), la qual cosa recolza l'opinió de Lester i ens porta al quart punt.

- d) *És la metacognició la força directiva¹¹ en RP?* En resposta, Lester afirma que les primeres referències al paper de la metacognició en la RP¹² ja criden l'atenció sobre la importància d'aquest *relliscós* constructe i consideren les accions metacognitives com una força directiva en la RP, i amb influències sobre les conductes cognitives en totes les fases del procés de resolució. A partir d'aquí es produeix una forta i productiva corrent de recerca en aquesta línia, per a finals dels 80 no només continuar considerant aquest paper a la metacognició sinó també lligams amb un ampli rang d'aspectes no-cognitius.

Tanmateix, Lester (1994) considera que malgrat durant el període 1970-1990 el camp de la RP ha estat molt productiu quant a recerca, a partir de principis dels 90 el tema **està perdent interès**, i en dóna quatre possibles explicacions citades textualment (pg.667):

- 1) *altres qüestions atrauen l'atenció fora de la RP (p.e. creences, aspectes socio-culturals, aplicacions, avaluació,...);*
- 2) *ensem que ja ho sabem tot sobre RP, la qual cosa és criticada per Lester;*
- 3) *el constructivisme ha reemplaçat la RP com a «ideologia» dominant en la recerca sobre educació matemàtica;*
- 4) *la RP és encara més complexa que el que potser havíem pensat.*

Des de la nostra perspectiva considerem cabdal aquest darrer punt cabdal; tanmateix estem amb Callejo i Carrillo (1998) quan manifesten la seva disconformitat al respecte, i sobretot en el tercer punt, argumentant-ho en què es tracta més d'un canvi de perspectiva (en tant en quant el coneixement metacognitiu actua d'enllaç) que d'un canvi de centre d'atenció.

Malgrat les seves pròpies evidències, Lester (1994) argumenta que és massa aviat per disminuir l'atenció sobre aquest camp de recerca, i ho argumenta a partir de la comparació (amb sorprenent punts de coincidència) entre els temes que ell havia considerat uns anys abans (1980) com a necessitats d'aprofundiment o clarificació i els que anys després Schoenfeld (1992) considera que encara ho estan.

En aquest treball, Schoenfeld fa referència a la necessitat d'una major claredat en el significat dels termes, del perfeccionament dels mètodes de recerca, a la importància de la comprensió de les interaccions entre els aspectes de l'activitat de RP, a la necessitat de millorar els instruments d'avaluació en RP, del paper del control i del paper de les creences i afectes en la RP, i a la necessitat de major atenció als aspectes relacionats amb la instrucció.

¹⁰ usem aquests termes en el sentit de Puig (1996)

¹¹ *driving forces* en l'original

¹² Lester cita uns manuscrits de Lesh i de Silver de l'any 1982 i també un treball de Schoenfeld de 1982

Aquesta necessitat de **més recerca sobre la instrucció en RP**, també és esmentada per Lester (1994):

"Vull acabar plantejant tres qüestions relacionades amb la instrucció de RP, perquè tenim una urgent necessitat de facilitar al professorat més bons documents informatius sobre l'ensenyament de les matemàtiques «via problem solving».

Qüestió 1.- El paper del professor en una classe «Problem-Centered»

(...)

Qüestió 2.- Què passa actualment a les classes «Problem-Centered»?

Diversos autors (Biddle, Grouws, Silver) constataren l'absència de descripcions adequades de què passa actualment a la classe (...)

Qüestió 3.- Recerques on el focus està en els grups i les classes senceres, més que sobre individus concrets.

Moltes de les recerques en RP de matemàtiques s'han centrat en els processos de pensament usats pels «individus» quan resolen problemes o quan reflexionen sobre els seus esforços en RP. Tanmateix, quan el nostre interès està sobre la instrucció a classe, hauríem de posar l'atenció als grups i les classes senceres (...)" (pg.672)

Quant a la recerca en RP a l'estat espanyol en els darrers anys, a banda dels ja esmentats treballs de Callejo, Carrillo i Puig, destaquem els treballs de Fayos (1996), Zorroza (1994) i Cobo (1998), en el marc dels processos cognitius, el darrer d'ells estudiant a més la interacció entre alumnes; també els treballs de Gascón (1989), en el marc de l'heurística, i de Corbalán (1997) sobre els jocs d'estratègia a l'aula; els treballs que estudien la relació entre els processos de resolució de problemes dels alumnes i diferents aspectes de la instrucció (Plata, 1998; Hernández, 1996). I en un camp proper al de l'educació matemàtica, com és el de la didàctica de les ciències experimentals, destaquem els treballs de Varela (1993), Reyes (1991) i Ramírez (1990) sobre la RP des d'una perspectiva d'activitats d'investigació.

Voldríem acabar aquest apartat fent-nos ressò d'una problemàtica que es percep en la comunitat educativa en general, i en molts col. lectius de professors en particular. Ens referim al fet de la **distància** que hi ha entre el fet que la RP hagi estat i continuï estant (amb els matisos anteriorment esmentats) un focus de recerca i el fet que aquestes recerques hagin influït poc en la pràctica escolar habitual¹³. I aquesta distància és més greu (que no més gran) si considerem l'actual major pes atorgat per la societat als processos enfront a la informació simple i el fet que els currículums oficials fan insistent referència¹⁴ a l'important paper de la RP en l'educació matemàtica¹⁵.

Creiem que l'explicació a aquesta distància a la que fèiem referència l'hem d'anar a buscar en els dos protagonistes: els recercadors i el professorat.

En referència als primers protagonistes, els recercadors, hem fet precisament un

¹³ en aquesta afirmació ens recolzem per exemple en Gil (1988), Lester (1994), Carrillo (1996) i Contreras (1999), tanmateix no volem separar-ho de la problemàtica general al respecte, que ultrapassa l'àmbit de la RP

¹⁴ voldríem afegir com a crítica que només fan insistent referència

¹⁵ creiem conseqüència no volguda (però esperada per autors com Gaulin, 1982) de recomanacions d'importants informes com *l'Agenda for Action* (NCTM, 1980)

recorregut que ens ha mostrat la no unanimitat, fins recentment, en la forma d'abordar la idea de problema i de RP, i del seu paper en l'educació matemàtica; també ens ha mostrat la multiplicitat de perspectives d'anàlisi que ha provocat necessàriament una comunió lenta en els aspectes a consensuar,... També creiem que cal no separar aquesta crítica de la problemàtica genèrica entorn a la **distància investigació - aula**. En aquest sentit fem nostra la crítica de Callejo (1999):

"Un altre punt que diferencia a docents i investigadors és la seva motivació quan realitzen una investigació; en el primer cas acostuma a ser la millora de la seva pràctica o la seva pròpia capacitat a través del propi procés d'investigació, per tant té un vessant d'aplicació directa; tanmateix, els investigadors busquen a vegades que les seves investigacions els donin prestigi acadèmic, estant la seva preocupació principal en què el plantejament metodològic sigui impecable en detriment de la significativitat del problema; així mateix, no sempre existeix la preocupació per la utilitat dels resultats" (pg.11)

Quant al segon protagonista de la distància investigació - implementació a l'aula, el professorat, creiem que la rellevància dels aspectes estudiats i finalment amb alt grau de consens xoquen frontalment amb la molt forat inèrcia professional (dels docents, de les administracions educatives,...). Ens estem referint per exemple a les influències negatives que determinades concepcions del professorat han tingut sobre les orientacions i decisions preses¹⁶.

II.2.2. LA IDEA DE PROBLEMA I DE RESOLUCIÓ DE PROBLEMES EN EDUCACIÓ MATEMÀTICA. DIFERENTS PERSPECTIVES

Schoenfeld (1992), en una revisió bibliogràfica molt interessant sobre les idees de «problema» i de «resolució de problemes», afirma entre altres aspectes que la literatura sobre resolució de problemes de matemàtiques és difícil d'interpretar per què no només aquests termes han tingut diferents significats, sinó que fins i tot els han tingut de vegades contradictoris, idea que ja havien anticipat altres autors (p.e. Lester, 1980; Silver, 1985).

Puig (1996) dóna una explicació a aquest fet:

"Aquesta varietat de significats (...) és ineludible per la varietat de disciplines que els examinen, d'àmbits en què s'examinen i de punts de vista que s'adopten per a tal fi" (pàg.21)

Tanmateix, en tant en quant també ens presenta en el seu treball una interessantíssima revisió del terme atenent al seu marc d'anàlisi, Puig té molt d'interès a precisar que:

"El que pretenem fer aquí no és tancar una discussió sobre el que és realment un problema (perquè en la nostra opinió tal afirmació no té sentit) sinó

¹⁶ ens remetem a recents estudis com per exemple Contreras (1999), Carrillo (1996), Vila (1995a)

plantejar com la disciplina, l'àmbit i el punt de vista són responsables de la diversitat dels significats que estan en ús per a «problema» i «resolució de problemes» (pàg. 21)

Quant al present treball, aquesta diversitat de significats adquireix una importància afegida: la seva transferència a l'aula. D'una banda ens referim als diferents significats i usos que la tradició docent ha donat als termes *problema* i *RP*, i que seran abordats en el present capítol. D'altra banda, als diferents significats i usos que n'ha assumit l'alumnat i l'origen d'aquests, que seran abordats en el capítol següent, i que són el centre d'anàlisi del present treball.

En aquest sentit, o sigui més en referència a la tradició docent que a la revisió bibliogràfica, Callejo (1994) apunta que el terme *Problema* ha esdevingut una espècie de

"«calaix de sastre» que reuneix activitats que es proposen als estudiants perseguint diferents finalitats i la resolució de les quals exigeix aplicar diferents coneixements, habilitats i capacitats que normalment formen part de la programació de Matemàtiques" (pàg.22)

I relacionant ambdós marcs (tradició/pràctica docent i literatura sobre educació matemàtica) Gaulin (1982) feia una crítica dura a les recomanacions del NCTM (1980)¹⁷ abans esmentades, crítica que se centrava en les seves característiques «*vagues i excessivament generals*», i que creiem que va anticipar una realitat que considerem evident¹⁸:

"En primer lloc, es tracta d'una vertadera «recomanació-paraigües». Sens dubte, en un esperit de compromís i per raons estratègiques, ha estat formulada en termes ambigus i molt generals. És així que aquesta recomanació pot aixoplugar aparentment tota mena d'interpretacions de l'expressió «centrar l'ensenyament de les matemàtiques sobre la resolució de problemes», entre altres les cinc interpretacions abans esmentades:

- a) posar l'èmfasi sobre els «exercicis escrits»;*
- b) posar l'èmfasi sobre la utilització de problemes presentant aplicacions realistes;*
- c) posar l'èmfasi sobre la utilització de problemes no rutinaris;*
- d) posar l'èmfasi sobre un ensenyament explícit d'estratègies generals de resolució de problemes;*
- e) posar l'èmfasi sobre l'ensenyament de les matemàtiques a través dels problemes.*

(...) la primera recomanació de la NCTM és font d'equívocs i, en ella mateixa, de confusió i no en facilitarà la implantació durant els propers anys" (pàg.47)

És per tant només amb aquesta perspectiva final (la transferència d'aquests significats a l'aula, prenent com a hipòtesis de treball les crítiques anteriors) que en el present apartat incorporarem una revisió bibliogràfica dels termes «problema» i «resolució de

¹⁷ "An Agenda for Action", que com hem dit podrien representar el punt d'inflexió històric en la rellevància de la RP

¹⁸ i estudiada en el nostre sistema educatiu (Contreras, 1999; Vila, 1995a)

problemes», revisió força freqüent en la literatura sobre RP¹⁹. Amb tal fi, i tenint present els marcs del present estudi definits a II.1, considerem especialment clarificadors els nivells I, II i III d'anàlisi que distingeix Puig (1996) descrits també al capítol II.1, i seguirem l'organització d'aquest. Tanmateix, a instàncies de Callejo i Carrillo (1998), incorporarem a aquests un quart element: el context en el qual es proposen els problemes.

II.2.2.1. DEFINICIONS QUE CONSIDEREN EL PROBLEMA DE FORMA INDEPENDENT AL RESOLUTOR

Una de les més clàssiques definicions de *problema* o de «*resoldre un problema*» és la que dona Polya (1965)²⁰ afirmant que

"resoldre un problema consisteix a trobar un camí allà on prèviament no es coneixia tal, trobar una sortida per a una situació difícil, per a vèncer un obstacle, assolir un objectiu desitjat, que no pot ser immediatament assolit per mitjans adequats"

presentant-nos una idea en certa manera *absoluta* de problema, no dependent del resolutor (idea que posteriorment reprèn en alguna de les seves classificacions de problemes) la qual cosa la situaria en el Nivell I d'anàlisi, segons l'esquema de Puig (1996). Malgrat això, anys després, el mateix Polya (1981)²¹, utilitzant uns termes molt pedagògics ens explica què és un problema en una línia molt propera a l'exposada en el paràgraf anterior, però que ja fa referència a la relativitat que incorpora la presència del resolutor (per tant més proper a un Nivell II d'anàlisi):

"Generalment, un desig pot comportar un problema o no. Si el desig suggereix a la meua ment de forma immediata, sense cap dificultat, una acció òbvia que permet aconseguir l'objecte desitjat, no hi ha problema. Si, tanmateix, no se m'acut cap acció, tenim un problema. En conseqüència, tenir un problema significa buscar de forma conscient alguna acció apropiada per aconseguir un fi clarament concebut, però que no es pot aconseguir de forma immediata. Resoldre un problema significa trobar aquesta acció"

De fet aquestes definicions històriques independents del resolutor són un reflex de la tradició grega i del segle XVII i XVIII (Puig, 1996; Lorenzo, 1996).

En l'àmbit de la Intel·ligència Artificial ens trobem alguna definició de problema que, malgrat estigui estretament relacionada amb aquelles que provenen de la perspectiva psicològica, a la que farem referència en el proper capítol, considera la idea de problema lligada només a l'activitat i que per tant és independent del fet que *algú* conegui un dels camins-solució²².

¹⁹ Com a revisions bibliogràfiques extenses i sistemàtiques, des de perspectives d'anàlisi diferents, ens remetem a Schoenfeld (1992), Puig (1996) i Carrillo (1996)

²⁰ és important remarcar que l'obra en la seva versió original en anglès data de 1945

²¹ 1962-65 (2 volums) en la seva versió original

²² p.e. la deguda a Banerji i citada per Puig, 1996, pàg.25

II.2.2.2. LA IDEA DE PROBLEMA DES DE LA PERSPECTIVA PSICOLÒGICA: S'INCORPORA LA DEPENDÈNCIA AL RESOLUTOR

Com hem esmentat a II.2.1, Kilpatrick (1985) considera que des de la perspectiva **psicològica** es veu la idea de problema com a *activitat*, en qualsevol cas, però lligada al *subjecte* (normalment, motivat); Puig (1996) va més lluny encara i afirma que des d'aquesta perspectiva el que dóna el caràcter de problema està del costat del subjecte. En resum podríem dir que es parla d'un *subjecte que té un problema*, i no tant de quines situacions o tasques han de considerar-se problemes.

En aquests termes, doncs, no es distingeix la idea de *problema de matemàtiques* de la idea general de *problema* en la vida dels subjectes, i per suposat tampoc es distingeix la resolució de problemes específica de l'àmbit educatiu. Diversos autors coincideixen en què una de les definicions més clàssiques és la que dóna Brownell²³ l'any 1942:

"La resolució de problemes es refereix a) tan sols a tasques conceptuals o perceptives, b) la naturalesa de les quals el subjecte és capaç de comprendre gràcies a la seva naturalesa original, a un aprenentatge previ, o a l'organització de la tasca, però c) per a les quals, en aquell moment, desconeix qualsevol camí directe de realització. d) El subjecte experimenta perplexitat davant la situació problemàtica, però no experimenta total confusió (...). La resolució del problema resulta ser el procés mitjançant el qual el subjecte es desprèn del seu problema (...). Definits així, es poden pensar els problemes com si ocupessin un territori intermedi en un continu que s'extén des dels «enigmes» en un extrem fins a les situacions completament familiars i comprensibles a l'altre" (pg.416)

Dins aquesta perspectiva general, la idea de problema pot venir formulada segons la teoria psicològica en la qual s'emmarca. Així, els mateixos autors ens referencien a Greeno definint què és un problema per al **conductisme**, ens concreta quina era la naturalesa *d'allò que no se sap fer* o quina és la *font de perplexitat* que en general esmenta Brownell:

"(...) es presenta un problema quan la resposta que és necessària per a aconseguir una fita és menys forta que altres respostes, o quan es requereixen diverses respostes i és poc probable que totes elles puguin ser executades" (pg.239)

En aquest mateix gran context podem considerar l'amplíssima bibliografia que tracta la resolució de problemes des de l'enfocament del **processament de la informació** que considera que la resolució de problemes és una aptitud cognitiva complexa que caracteritza una de les activitats humanes més intel·ligents (Newell i Simon, 1972; Chi i Glaser, 1986). Definicions clàssiques des d'aquesta perspectiva són la de Hayes (1980):

"Sempre que hi ha una escletxa entre on un està en aquest moment i on un vol estar, i un no sap com trobar el camí per creuar-la, un té un problema" (pàg.1)

i la de Mayer (1983):

²³ definició que trobem referenciada a Puig (1996), Carrillo (1996) i Contreras (1999)

"En poques paraules, qualsevol definició de «problema» hauria de consistir en les tres idees següents: 1) el problema està actualment en un cert estat, però 2) es desitja que estigui en un altre estat, i 3) no hi ha una manera òbvia i directa de realitzar el canvi" (pàg.5)

Per tant, des d'aquesta perspectiva, novament ens trobem dos factors importants que influeixen en la resolució dels problemes: la naturalesa de la tasca i el tipus de coneixements que aporten al problema les persones (Chi i Glaser, 1986). Però continuen estan excloses les consideracions que fan referència al professorat i al context en el qual són proposades les tasques.

L'enfocament del processament de la informació fa referència bàsicament als problemes com a objecte genèric; malgrat això també es troben treballs que fan referència concreta a la *resolució de problemes de matemàtiques*; per exemple per a Dias²⁴ un problema de matemàtiques és

"un projecte personal, una tasca, una situació:

- *que l'alumne desitja resoldre i desenvolupar;*
- *per a la qual l'alumne no coneix cap procés que li permeti trobar la solució de forma immediata;*
- *que exigeix la construcció d'aquell procés per part de l'alumne;*
- *en l'activitat de resolució de la qual n'estan involucrats conceptes, procediments o teories matemàtiques" (pg.102)*

Malgrat les aportacions de Newell i Simon són cabdals des de la perspectiva metodològica (Schoenfeld, 1992), aquest plantejament teòric limita enormement el *camp de problemes* considerats i sobre els quals es pot treballar, però és que a la vegada engloba també uns problemes que quedaran fora de l'àmbit del present treball: per exemple problemes molt complexos però molt estructurats, com els denominats puzzles o enigmes, els jocs lògics, els criptogrames o fins i tot problemes d'escacs (Callejo, 1994)

Des d'una perspectiva **cognitivista**, com ja hem esmentat abans, «pensar» és sovint considerat gairebé com a sinònim de «*solucionar problemes*» (Garret, 1988). En aquesta línia d'identificació, Garret (1988) prefereix parlar d'«*enfrentar-se a problemes*» que de «*resoldre problemes*», afirmant que aquesta denominació descriu més fidelment l'activitat, sense implicar la necessitat de l'acte final de la solució. En aquest marc ens presenta també la identificació «*resolució de problemes / pensament creatiu*», considerant aquest com un pas molt més enllà del «*pensament productiu*» (considera acte *productiu* trobar la solució d'un problema)

De manera semblant, Mayer (1983) afirma que:

"Hi ha moltes definicions de pensament, resolució de problemes i cognició, però aquest llibre utilitzarà els tres termes de forma intercanviable sobre la base d'una definició única i general, comú als tres" (pàg.6)

²⁴ citat per Carrillo (1996), pg.100

Una altra identificació sovint esmentada des de l'àmbit de la psicologia cognitiva és la de resolució de problemes i intel·ligència (Chi i Glaser, 1986).

Com hem dit, els treballs desenvolupats des de la perspectiva psicològica se centren exclusivament en les referències a la tasca proposada (que no exactament en el contingut) i al subjecte. El fet que implícitament hom suposi en la majoria dels casos que aquesta tasca (sempre referint-nos al context escolar) és proposada externament (normalment pel professor) no situa aquests treballs fora del Nivell II d'anàlisi, on ja hem esmentat que Puig no *elimina* el professor sinó que el situa *fora d'escena*. Tanmateix des de la nostra perspectiva això només té interès momentàniament i no de forma permanent com fan els esmentats treballs.

Finalment, volem deixar nova constància que aquestes identificacions «*problema - tasca d'un subjecte*» o «*resoldre problemes - pensar*»²⁵ prendran especial rellevància en l'anàlisi de les creences objecte del present estudi, en tant en quant sovint acaben esdevenint *tòpics* buits del rellevant significat que la literatura els atorga.

Tanmateix, de les idees esmentades en el present epígraf, assumim en el present treball com a molt adients al món de problemes en el qual desitjaríem desenvolupar l'estudi i les aportacions, la forta associació²⁶ «**resolució de problemes / pensament creatiu**», en els termes de Garret, i el terme «**enfrentar-se a problemes**»

II.2.2.3. LA IDEA DE PROBLEMA DES DE LA PERSPECTIVA TRADICIONAL DE L'EDUCACIÓ MATEMÀTICA: L'ÈMFASI EN LA DICOTOMIA EXERCICI-PROBLEMA

En centrar-nos en la literatura específicament relacionada amb l'educació matemàtica, podem considerar que aquesta englobaria les altres tres perspectives de les quals ens parlava Kilpatrick (1985) i a les quals fèiem referència a II.2.1: la *curricular* (*sòcio-antropològica*, en els termes de Kilpatrick, que se centra en el paper de la RP en l'ensenyament de la matemàtica), la de la *matemàtica* (*problema com a construcció de la pròpia matemàtica*) i la *didàctica* (*problema com a vehicle*). En totes tres poden, i de fet així ho fan de forma rellevant, intervenir els tres personatges (problema-alumne-professor).

Tanmateix ens trobem amb que les definicions que més sovint trobem en aquests treballs insisteixen en que l'existència de dificultats no és una característica intrínseca d'una situació, però en centren la dependència en els coneixements i experiències del resolutor, mantenint-nos en el Nivell II d'anàlisi.

En una clàssica definició de Lester (1980) ja apareix aquesta idea; ens diu que un problema és

"una situació que un individu o un grup volen resoldre, i per a la qual no disposen d'un camí ràpid i dret que els porti a la solució"

²⁵ per utilitzar aquest terme en la línia de Garret (1988) de forma que representi tota la complexitat d'actes de tipus cognitiu a la qual s'ha fet referència

²⁶ que no *identificació* com propugna Garret (1988)

entenent doncs que la resolució ha de ser desitjada per l'individu o grup, d'altra manera la situació no pot ser considerada problema. En aquesta mateixa línia està la definició de Krulik i Rudnik (1980):

"un problema és una situació quantitativa o no, que demana una solució, per a la qual els individus implicats no coneixen mitjans o camins evidents per a obtenir-la"

En la definició que donava Kantowski l'any 1974, una altra de les definicions considerades clàssiques citada sovint per diferents autors²⁷,

"Un problema és una situació que difereix d'un exercici en què el resolutor no té un procediment o algorisme que el condueixi amb certesa a una solució" (pg.1)

observarem de forma paradigmàtica una constant en els intents de caracteritzar la idea de *problema* centrats en l'àmbit de l'educació matemàtica: els intents de caracteritzar-la com a **contraposició a la idea d'exercici** associant a la idea d'exercici l'existència de procediment o algorisme que ens condueix a una solució, pressuposant-ne un caràcter mecànic i immediat, i reservant la idea contrària a la idea de *problema*.

En aquesta mateixa línia, però aportant argumentacions més riques, Schoenfeld (1985a) ens afirma que:

"Ser un problema no és una propietat inherent d'una tasca matemàtica. Més aviat és una relació entre l'individu i la tasca el que fa de la tasca un problema per a aquella persona. La paraula problema s'usa aquí en el seu sentit relatiu, com una tasca que és difícil per a l'individu que està intentant resoldre-ho. Més encara, aquesta dificultat ha de ser un «embolic» intel.lectual més que de càlcul (...). Per tal d'enunciar les coses més formalment, si un té accés a un esquema de solució per a una tasca matemàtica, aquesta tasca és un exercici i no un problema" (pàg.74)

Un altre aspecte que amb molta insistència ens trobem és l'intent de caracteritzar-la en referència al **conjunt de coneixements de l'alumne**, sempre però de forma molt lligada a la contraposició exercici-problema. Per exemple, Gaulin (1982) distingeix entre *problemes rutinaris* (exercicis) i *problemes no rutinaris* en els següents termes:

"la diferència entre un exercici i un «vertader problema»²⁸ és relativa. Allò que per a alguna persona constitueix un problema no rutinari pot molt bé ser un simple exercici per a una altra; tot depèn dels coneixements i experiències anteriors de l'alumnat" (p.40)

Goldin (1982), amb la finalitat d'analitzar un seguit de definicions sobre la idea de problema i sobre la diferència entre *exercici* i *problema*, va construir una escala on situar els *salts* d'una idea a l'altra. Aquesta escala, dins d'un continu, contenia els següents punts-referència:

²⁷ com Puig (1996) i Carrillo (1996)

²⁸ Gaulin prefereix utilitzar aquest terme per tal de fugir del terme «problema» com a calaix de sastre

- 1) es sap la resposta;
- 2) es té un procediment per arribar a la resposta, se sap que es té i se sap descriure el procediment abans d'executar-lo;
- 3) Ídem, però no se sap descriure;
- 4) Ídem, però no s'està segur que el procediment sigui l'adequat, o de quin dels procediments que es tenen és l'adequat;
- 5) no es té cap procediment per al problema.

Aquesta idea també és presentada en la següent definició també de Kantowski (1980):

"Un problema és una situació per a la qual l'individu que s'enfronta a ella no té un algorisme que garanteixi una solució. El coneixement rellevant d'aquesta persona ha de ser aplicat d'una nova forma per tal de resoldre el problema"

en la que fa explícita la idea **d'aplicació** del coneixement en una forma no mecànica. Aquesta idea és sovint recollida, en alguns casos de forma molt explícita (Carl, 1989):

"la resolució de problemes és el procés d'aplicació dels coneixements prèviament adquirits a situacions noves i no familiars" (pg.471)

que ens cita Carrillo (1996), o com el mateix Carrillo es pronuncia en afirmar que:

"El concepte de problema ha d'associar-se a l'aplicació significativa (no mecànica) del coneixement matemàtic a situacions no familiars, la consciència de tal situació, l'existència de la dificultat a l'hora d'enfrontar-se a ella i la possibilitat de ser resolta aplicant l'esmentat coneixement" (pg.101)

En qualsevol cas, hi ha total unanimitat a admetre la relativitat d'aquests termes, en tant en quant depèn del resolutor. En aquesta línia, Gil (1988) considera la idea d'«*llindar de problematicitat*», introduïda per Elshout, diferent per a cada persona i per damunt del qual es pot dir que una situació constitueix un vertader problema per a les persones (o la persona) en qüestió.

La insistència a definir la idea de problema «enfront a» la idea d'*exercici*, i en particular el paper que juguen els coneixements previs de l'alumnat, té un èmfasi per a nosaltres excessiu i poc rellevant si només considerem com a personatges en escena el problema i l'alumne, malgrat les intencions educatives del professorat hi siguin implícites. En la mateixa línia, manifestem el biaix important²⁹ que es produeix en identificar en aquest context la resolució de problemes amb l'*aplicació* dels coneixements matemàtics: la frontera entre l'aplicació significativa i la pura il·lustració és difosa i fàcil de traspasar, malgrat es tracti de dos pols d'un continu clarament diferenciats en els seus extrems.

Aquesta dicotomia i aquestes identificacions no poden anar separades de l'anàlisi del **paper de la resolució de problemes** en l'educació matemàtica, necessitant considerar tant el paper del professorat com la situació o context en el qual són proposats els problemes. Recolzant aquesta idea, Gascón (1992)³⁰ afirma que:

²⁹ o excessiva simplificació d'una qüestió enormement complexa

³⁰ en un molt interessant treball, Gascon (1992) descriu i interpreta algunes de les formes d'entendre tant la resolució de problemes com la seva funció en l'ensenyament de les matemàtiques, i ho fa en referència a un conjunt de models epistemològics implícits

"sota el mateix principi (...) es propugnen, dissenyen i realitzen activitats docents molt diferents i, fins i tot, contradictòries: no és el mateix, per exemple, utilitzar els problemes per motivar la introducció dels conceptes que fer-los servir com a estratègia didàctica perquè l'alumne arribi a dominar un mètode de resolució" (pg.10)

Així, matisant en aquesta línia la identificació anteriorment esmentada per ell mateix, Carrillo (1996) afirma que la resolució de problemes

"és un procés, o una estratègia metodològica o un tipus d'aprenentatge,... que va més enllà de la simple distinció entre problema i exercici" (pg.104)

Resumint, el fet de decidir on es marca la diferència/salt³¹ entre les idees d'exercici i de problema és el que delimita la diferència (en qui la traça) entre un paper tradicional de «problemes d'aplicació/il·lustració», problema-motivació (com exemplificava Gascon) i altres propostes lligades a diferents concepcions de la RP en particular i de l'educació matemàtica en general (Contreras, 1999; Vila, 1995a; Gascon, 1992).

II.2.2.4. LA IDEA DE PROBLEMA EN L'EDUCACIÓ MATEMÀTICA ATENENT TAMBÉ AL SEU PAPER

En relació a la crítica dels paràgrafs anteriors, ens interessa ara aprofundir una mica més en aquesta doble línia, d'una banda de continuar relacionant la idea de problema amb els coneixements i experiències previs de l'alumnat i diferenciant-la de la idea d'exercici, i d'altra banda acabant de fer intervenir tots els personatges implicats en l'escena³²:

Així, Polya (1981) va proposar una classificació³³ dels *problemes* en relació als **coneixements i a les experiències prèvies** dels alumnes, però fent referència (i posem èmfasi en aquesta característica) també a la **situació en la qual aquests són proposats**:

- a) els *problemes* en els quals la regla que cal aplicar salta a la vista, perquè acaba de ser presentada o estudiada a classe;
- b) els *problemes* en els quals cal escollir la regla que cal aplicar, regla que es va treballar a classe recentment;
- c) els *problemes* en els quals cal escollir una combinació de regles prèviament estudiades;
- d) els *problemes* en els quals cal investigar: es tracta de problemes la resolució dels quals exigeix una combinació original de regles i l'ús del raonament plausible.

³¹ la «línia divisòria» que diu Puig (1996)

³² a més, recordem que en el present estudi s'ha assumit (veure II.1) que els problemes de matemàtiques seran vistos des dels processos matemàtics i resolent-se en situacions d'ensenyament, la intenció de les quals és l'adquisició d'aquests processos, la qual cosa significa un pronunciament en la línia de les darreres argumentacions

³³ en el fons no es tracta pròpiament d'una classificació sinó més aviat d'un intent de posar de relleu diferents significats del terme (Contreras, 1999, pg.56)

La idea de relativitat esmentada de Gaulin en l'epígraf anterior, i que tant Polya com Goldin ens presenten en forma *d'escala*, és molt més precisada (categoritzada) per Callejo (1994) quan apunta la necessitat de distingir entre les idees de **problema rutinari** i **problema no rutinari**, ja anticipats per Gaulin, atenent sempre a quatre aspectes:

- a) el comportament que ha de seguir l'alumne per arribar a la solució;
- b) l'objectiu que persegueix el professor quan els proposa;
- c) els temps a utilitzar;
- d) la dimensió afectiva.

Tornant novament a les quatre perspectives des de les quals Kilpatrick (1985) considera que s'ha abordat la idea de problema, i considerant-les en tota la riquesa i amplitud que ell descriu, és obvi que els aspectes anteriors hi estan també implícitament presents.

Per al nivell III, Puig (1996) proposa una definició operativa que pretén donar compte del fet que el problema es presenta en una situació escolar i que, per tant, és el professor el qui el planteja a l'alumne, que no és un simple resolutor i que aquest ha de donar-li al professor la solució:

"un problema escolar de matemàtiques és una tasca de contingut matemàtic, l'enunciat de la qual és significatiu per a l'alumne a qui s'ha plantejat, que aquest desitja abordar, i per a la qual no ha produït significat" (pàg. 31)

Per tal de precisar aquesta definició, fem notar la transcendència d'un seguit de termes. En primer lloc, el mateix Puig posa èmfasi en el fet que «l'alumne desitgi abordar el problema», per tal de fugir d'aspectes que, malgrat siguin importants, ell no considera rellevants en l'àmbit del seu estudi (p.e. la motivació, l'inconscient). En segon lloc, el terme «significatiu» és introduït per tal d'excloure del context educatiu els «enigmes». I finalment, la frase «per a la qual no ha produït significat» intenta englobar totes les formes d'acabar un problema que acostumen a presentar-se en els sistemes educatius, entre les quals Puig ens cita (pg.31), a part de l'obtenció d'un resultat, l'explotació del problema amb finalitats epistèmiques (mitjançant revisió-extensió), l'obtenció de resultats que anomenarem incoherents o ingenus (però amb la convicció que són correctes), o fins i tot l'entrega de la tasca parcialment realitzada³⁴.

Tornant a reprendre l'excessiu reduccionisme de la dicotomia exercici-problema, Abrantes (1996), després de fer una breu revisió del terme problema, ens planteja una recent ampliació de perspectives que considera que definitivament superen aquest reduccionisme en la literatura: es comença a relacionar la RP amb activitats com exploració de contextos, formulació-reformulació de problemes, interpretació-clarificació,... sorgint així la idea de «situació problemàtica» (Borasi, 1986³⁵)

³⁴ Amb menys precisió, però amb més simplicitat Puig i Cerdán (1988) ens defineixen la **resolució d'un problema** com "l'activitat mental desplegada pel resolutor des del moment en què se li presenta un problema, assumeix que ho és i vol resoldre'l, fins que dona per acabada la tasca" (pàg.21)

En aquesta definició convé centrar l'èmfasi en els mateixos aspectes:

* en primer lloc, un *problema* només es pot considerar com a tal en la mesura en la qual l'individu implicat (el resolutor) l'accepti com a *problema*, i

* en segon lloc, donar per acabada la tasca no implica necessàriament haver «obtingut la solució».

³⁵ malgrat Puig (1996) en fa una dura crítica, creiem que metodològica, emmarcant-la més aviat en una *actitud propagandística* de Borasi

Autors com Schoenfeld (1992) proposen un pas més enllà, i consideren que el principal objectiu de la RP és «*pensar matemàticament*». En aquesta línia, cal col·locar en primer pla processos característics de l'activitat matemàtica com formular/provar conjectures, argumentar, usar procediments de naturalesa metacognitiva,... Aquest plantejament potencia el terme «*investigacions*», sobre el qual Ernest (1991) ens dóna una interessant metàfora: resoldre un problema, en el sentit usual del terme, és trobar un camí cap a una destinació determinada; tanmateix en una investigació, el que constitueix l'objectiu és el viatge, i no la destinació.

Això ens portaria cap a una caracterització de **problema**, que compartim i assumim, entesa com a «*eina per afavorir el pensament matemàtic*». I en aquests termes, preferim referir-nos com Abrantes (1996) a «*la creació d'un ambient de resolució de problemes a l'aula*» i a allò que ell anomena «*Resolució de Problemes com a ambient i com a naturalesa de les activitats d'aprenentatge*». En aquest model de treball a l'aula la RP no hauria de ser ni una categoria d'activitats diferenciades a l'aula, ni un recurs de motivació externa, ni una eina d'aplicació de coneixements, sinó que la RP ha d'esdevenir un context, i la classe de matemàtiques un lloc on totes les propostes de treball constitueixin situacions problemàtiques on cal explorar i fer despertar diverses formes de raonament i processos com experimentar, discutir, conjecturar, justificar,... Evidentment Abrantes ens està parlant de la RP com a organitzadora de l'aula, o sigui, la RP a la vegada com a objectiu, metodologia i contingut.

En aquesta mateixa línia, Deulofeu (2000) afirma que:

"hem d'intentar que les activitats matemàtiques que proposem als nostres alumnes siguin potencialment generadores d'un autèntic treball matemàtic (...) que potenciïn la interacció en l'alumne, el predisposin a voler fer allò que se li proposa, afavoreixin la discussió i el treball conjunt (...) per això crec que totes les activitats proposades haurien de tenir dos components complementaris: l'acció i la reflexió" (pg.40)

Finalment, atenent d'una banda a la rellevància que en el present estudi pren la consideració tant de la tasca, com del resolutor/alumne, com del professor, com del context en el qual és proposada la primera, i atenent també al món de problemes en el qual es vol fer l'aportació, assumim com a pròpia en el present treball la definició de M.Luz Callejo (1994) quant a la idea de **problema de matemàtiques** i la naturalesa de la seva **resolució**:

"es reservarà el terme «problema» per a designar una situació [plantejada amb finalitat educativa] que planteja una qüestió matemàtica el mètode de solució de la qual no és immediatament accessible al [alumne/resolutor] que intenta [resoldre-la] perquè no disposa d'un algorisme que relacioni les dades i la incògnita o les dades i la conclusió, i ha de, per tant, buscar, investigar, establir relacions, implicar els seus afectes, etc... per fer front a una situació nova" (pg.24)³⁶

³⁶ les paraules entre [...] són petites adaptacions nostres, la qual cosa creiem que en cap cas altera la idea de Callejo en donar la versió original

definició que creiem que recull els aspectes d'altres definicions que considerem rellevants per al marc del present estudi, no presenta les omissions esmentades en altres i elimina d'altres ambigüitats.

En tant en quant aquesta definició és del tot coherent amb la que dona Puig (1996), es pot assumir d'aquest la distinció que fa dels termes *resultat*, *solució* i *resolució*:

*"usarem el terme **resultat** per a indicar el que contesta a la pregunta del problema, ja sigui un número, una fórmula, una expressió algebraica, una construcció geomètrica, una derivació lògica, etc... El terme **solució** l'usarem per a indicar la presentació final del conjunt de passos que condueixen de les dades a la incògnita o de la hipòtesi a la conclusió. Finalment usarem el terme **resolució** per a indicar el conjunt de les accions del resolutor durant el procés, que poden conduir a obtenir a la solució o no" (pg.34)*

Tanmateix, la complexitat de la casuística fa que el propi Puig (1996) precisi que no sempre es pot distingir entre resultat i solució, en tant en quant a vegades coincideixen, o també en tant en quant a vegades el que el professor demana és el resultat i altres vegades és la solució.

Per tal d'acabar de precisar el terme, a diferència del que especifica Puig, sí que considerarem problemes de matemàtiques alguns jocs, passatemps o trencaclosques (seguint a Callejo i Carrillo, 1998): aquells en els quals en el procés de resolució s'hi impliquen processos³⁷ generals rellevants per a l'aprenentatge de les matemàtiques, malgrat els coneixements³⁸ matemàtics implicats siguin escassos o fins i tot nuls o *amagats*.

Paral·lelament, i per tal d'evitar confusió en els termes, quan ens referim al terme «problema» com aquell «calaix de sastre» de múltiples i contradictoris significats, ho farem sota el nom de «**problema/qüestió**»³⁹, o simplement «*qüestió*»; de vegades fins i tot ens referirem a ell utilitzant denominacions més específiques i més adients a aquella referència concreta (p.e. *exercici, activitat de classe,...*)

II.2.3. TIPUS DE PROBLEMES

Evidentment són molts els criteris que ens poden permetre classificar les diferents tipologies de problemes, en alguns dels quals ens veiem obligats a admetre el terme *problema* en el seu sentit més ampli (*problema/qüestió*, com dèiem) en algunes de les categories. Tanmateix no totes són d'interès en el present treball, i ens centrarem en aquelles que complementen les idees de l'apartat anterior.

³⁷ en el sentit més ampli, des de perspectives diferents com Bishop (1988), Mason i altres (1982) o Schoenfeld (1991a)

³⁸ considerant aquest terme reduït als coneixements de tipus *temàtic*, tant algorísmic com conceptual

³⁹ en concret ens referim a qualsevol pregunta que és plantejada pel professor, per un material didàctic o per un alumne, amb la finalitat genèrica d'obtenir-ne algun tipus de resposta.

II.2.3.1. UNA CLASSIFICACIÓ DE POLYA I LES CLASSIFICACIONS CENTRADES EN LA DICOTOMIA EXERCICI-PROBLEMA

Aquesta clàssica classificació de Polya (1965 i 1981) recollint la distinció abans esmentada dels antics grecs (teorema, problema) ens parla de «problemes de provar» i de «problemes de trobar», sent paradigmàtica d'una classificació on només intervenen les característiques del problema, de forma independent al resolutor i al professor que el proposa (nivell I).

La finalitat d'un problema de *trobar* és, valgui la redundància, trobar (construir, produir, obtenir, identificar,...) un determinat objecte, la *incògnita* del problema, de forma que satisfaci la *condició* del problema que relaciona la incògnita amb les *dades*. La finalitat d'un problema de *provar* és decidir quan una determinada afirmació és certa o falsa, provar-la o refutar-la; en aquest cas cal eliminar el dubte sobre una afirmació matemàtica, la qual consta d'*hipòtesis* i de *conclusions*. Tanmateix, el mateix Polya apunta la relativitat d'aquestes categories de problemes, apuntant que fins i tot un mateix problema pot transformar-se d'un tipus a l'altre en el decurs d'una resolució.

D'altra banda, des de la perspectiva de l'educació matemàtica i en relació a la dicotomia *exercici-problema*, ja hem esmentat la indubtable rellevància d'aquesta confrontació, però també les seves limitacions. També s'apuntava la relativitat del terme i fins i tot hem apuntat els criteris que es podien tenir en compte per tal de considerar aquesta relativitat.

A Vila (1995a) s'apuntava els efectes negatius sobre l'aprenentatge de l'alumnat que aquesta esbiaixada dicotomia podien tenir, en tant en quant només es consideressin com a factors de la relativitat els aspectes formals de la tasca i/o els coneixements previs de l'alumnat. Contreras (1999) també posa l'èmfasi en aquests efectes negatius, conseqüència de que el professorat només consideri els problemes com a vehicle per a aplicar (paper que definirem com a *il·lustratiu*) i per a poder provar que es coneix un determinat concepte, fet, mètode o procediment rutinari (paper que definirem com a *acreditatiu* de la RP). Malgrat això, la majoria de les classificacions se centren només en aquests dos personatges, no deixant de tenir per això interès o utilitat de forma genèrica.

Una de les clàssiques que sí que incorpora de forma implícita el paper del professorat (malgrat considerem que l'èmfasi es posa de part del resolutor) és la de Butts (1980), que distingeix entre:

- a) exercicis de *reconeixement*, en els quals el resolutor només ha de buscar en la seva memòria el resultat;
- b) exercicis *algorísmics*, en els quals el resolutor ha d'executar un algorisme de forma automàtica;
- c) problemes *d'aplicació*, en els quals el resolutor coneix un procediment per a resoldre el problema i ha de justificar que aquest procediment és adequat per a obtenir la seva solució;
- d) problemes de *recerca*, en els quals el resolutor ha de crear un procediment de solució;
- e) *situacions problemàtiques*, en l'enunciat de les quals no s'ha precisat què és el que cal fer i aquesta és la primera tasca del resolutor

D'altra banda, Borasi (1986) ens parla *d'exercicis, problemes verbals, enigmes, prova d'una conjectura, problemes de la vida real, situacions problemàtiques i situacions*, on les diferències entre aquestes categories s'establirien en funció d'aspectes com l'existència de context, el tipus de formulació, les solucions i els mètodes d'abordatge. Aquesta classificació és més propera al nostre nivell d'anàlisi, però molt poc operativa.

Una classificació també molt propera a aquestes, que inclou el paper del professorat i referència al context, però molt més operativa i que assumirem en el present treball quant a **l'anàlisi dels problemes/qüestions**, és la que efectua Blanco (1993) aportant exemples que la clarifiquen o defineixen per extensió:

- a) *Exercicis de reconeixement*. Es pretén resoldre, reconèixer o recordar un factor específic, una definició o una proposició d'un teorema.
- b) *Exercicis algorísmics o de repetició*. Poden ser resolts amb un procés algorísmic. En ells es tracta de reforçar alguna expressió matemàtica determinada o potenciar habilitats de càlcul.
- c) *Problemes de traducció simple o complexa*. Estan formulats en un context concret i la resolució dels quals suposa una traducció de l'enunciat, oral o escrit, a una expressió matemàtica. En l'enunciat del problema apareix tota la informació necessària per a la seva resolució i acostuma, implícitament, a indicar l'estratègia a seguir.
- d) *Problemes de processos*. Es diferencien dels anteriors en què la forma de càlcul no apareix clarament delimitada, donant-se la possibilitat de conjecturar diferents camins per tal de trobar la solució. Aquest tipus de problemes intenta exemplificar els processos inherents a la seva solució. Ajuden a desenvolupar estratègies de comprensió, planificació i de solució de problemes. En el seu enunciat no apareix una estructura clara que possibiliti la traducció fàcil a una expressió matemàtica.
- e) *Problemes sobre situacions reals*. Es tracta de plantejar activitats el més proper possible a situacions reals que requereixin l'ús d'habilitats, conceptes i processos matemàtics. Malgrat no siguin típicament matemàtics en considerar altres tipus d'informació, les matemàtiques juguen un paper preponderant per a trobar la solució. El mètode d'aproximació a aquests tipus de problemes acostuma a suposar tres passes principals: la creació d'un model matemàtic de la situació, l'aplicació de tècniques matemàtiques al model i la traducció a la situació real per tal d'analitzar la seva validesa.
- f) *Problemes d'investigació matemàtica*. Estan directament relacionats amb continguts matemàtics, les proposicions dels quals poden no contenir cap estratègia per a representar-los, i suggereixen la recerca d'algun model per trobar la solució.
- g) *Problemes de puzzles*. Es pretén mostrar el potencial recreatiu de les matemàtiques. Obliguen a flexibilitzar la forma d'atacar un problema i a considerar diverses perspectives, ja que normalment el context i la formulació que es fan d'aquests problemes acostumen a ser enganyoses. Possiblement no suposi la seva solució necessàriament processos matemàtics i sí que puguin resoldre's mitjançant una «idea feliç».

Molt més simple és la classificació en la qual insisteix Pehkonen (1991), afirmant que la diferenciació més important

"...és la divisió entre problemes oberts i tancats. Aquesta distinció es refereix al grau d'exactitud de la descripció de les situacions de sortida i arribada. En un problema tancat, ambdues situacions estan tancades, o sigui exactament explicades en la tasca. Si la situació de sortida i/o d'arribada són obertes (és a dir, no tancades), aleshores tenim un problema obert" (pàg.1)

II.2.3.2. CLASSIFICACIONS SEGONS LA FINALITAT AMB LA QUAL ES PROPOSEN ELS PROBLEMES

Amb la finalitat de precisar el llenguatge, d'operativitzar l'anàlisi dels problemes des de la perspectiva del seu paper a l'aula i de concretar les propostes d'intervenció associades al present estudi, assumirem una classificació que està fonamentada d'una banda en els intents de confrontar les idees d'exercici i de problema, però d'altra banda, i principalment, des de la perspectiva de la finalitat amb la qual són proposats els problemes.

D'aquesta operativització s'exclouen, per exemple, tant aquelles preguntes que són formulades pel professor només des d'un punt de vista retòric (no es dona temps de respondre, i potser ni d'entendre què és el que es demana; només és «una manera de parlar»), com aquelles que poden ser plantejades a l'inici d'una Unitat Didàctica amb l'única finalitat de «convèncer» l'alumne d'unes determinades mancances de coneixements que caldrà aprendre (però no a partir de la resolució d'aquella pregunta).

Poden ser considerades classificacions d'aquesta naturalesa les de Gaulin (1982) i Borasi (1986) esmentades en el capítol anterior, i també les d'Abrantes (1989) i Carrillo (1995)

En el present treball, per a l'anàlisi dels problemes des d'aquesta perspectiva, es distingiran **cinc tipus de problemes / qüestions** (Vila, 1995a); aquests cinc tipus rebran el nom de: *exercicis, qüestions pràctiques, problemes no contextualitzats, situacions problema i problemes d'estratègia*. Aquests diferents tipus seran caracteritzats a continuació, d'una banda, com hem dit, a partir de la *finalitat* que persegueix el professor en proposar-los o fer-los proposar, i d'altra banda s'acompanyaran d'altres *característiques* que ens poden permetre identificar-los en un material didàctic donat; també se'n donaran exemples en cada cas. No es farà referència en cap cas a les implicacions didàctiques que comporta l'ús d'aquestes diferents tipologies de qüestions.

Exercicis

Els **exercicis** són proposats amb la finalitat de mecanitzar/automatitzar determinats procediments presentats a l'aula o ajudar a la comprensió de determinats conceptes.

<i>Exemple-tipus 1.-</i>	<i>Determina el màxim comú divisor de 30 i 18</i>
<i>Exemple-tipus 2.-</i>	<i>Efectua $(1 - 3^{-2}) \cdot (4 - 9^2)$</i>
<i>Exemple-tipus 3.-</i>	<i>Determina el terme general de la progressió 3, -1, -5, -9, ...</i>

Característiques:

- Els enunciats contenen indicis prou clars dels procediments que s'espera que siguin utilitzats (o bé paraules clau, o bé algun referent fàcilment identificable, o bé són presentats en el context o Unitat Didàctica en el qual cal desenvolupar el procés de resolució).
- Els enunciats són *precisos* i *concisos*.
- L'enunciat proposa l'obtenció d'un *únic nivell de resposta*.
- No són proposats de forma aïllada, sinó dins d'una *col·lecció repetitiva o jerarquizada*.

Qüestions pràctiques

Les **qüestions pràctiques** (també les anomenarem *problemes contextualitzats matemàticament*)⁴⁰ són proposades estretament relacionades amb coneixements matemàtics i tenen com a finalitat fixar aquests coneixements⁴¹ mitjançant una connexió amb la vida real o amb una *pseudo-aplicació* de les matemàtiques (a la vida real, a les pròpies matemàtiques, a les altres ciències, ...). A la pràctica, esdevenen *il·lustracions* dels procediments matemàtics.

Exemple-tipus 1.- Si el preu d'un objecte és de 1500 pta més el 16% d'IVA i tu només disposes de 1200 pta, quin percentatge de descompte t'haurien d'aplicar per tal que el poguessis pagar?

Exemple-tipus 2.- Determina quines són les fraccions equivalents a les que s'obtenen de sumar 1 al seu numerador i 2 al seu denominador.

Exemple-tipus 3.- Si 3 kg de patates i 5 kg de sucre costen 650 pta i d'altra banda 5 kg de patates i 3 kg de sucre costen 400 pta, quin és el preu de les patates i del sucre?

Característiques:

- Els enunciats són *verbals*.
- Els enunciats també contenen *indicis* prou clars dels procediments que s'espera que siguin utilitzats; aquests indicis acostumen a ser: algun referent fàcilment identificable, o bé el context en el qual són presentats (*standardització*, Vila 1995a).
- Són proposats durant el desenvolupament de la Unitat Didàctica en la qual han estat presentats els procediments necessaris per a la resolució, i normalment immediatament després d'aquestes presentacions (*contextualització matemàtica*, Vila 1995a).
- Acostumen a formar part de llistes o relacions.

⁴⁰ en aquesta categoria entrarien els problemes «d'aplicació pura» esmentats en l'apartat anterior

⁴¹ De fet no només es pretén que s'automatitzi una sèrie de tècniques sinó també que s'apreguin alguns procediments com per exemple la traducció del llenguatge verbal a l'aritmètic o algebraic, o la planificació de l'ordre en que la tasca ha de ser resolta.

Problemes no contextualitzats matemàticament

Els **Problemes no contextualitzats matemàticament** són proposats als alumnes amb la finalitat de facilitar un ús *significatiu* dels coneixements matemàtics presentats a l'aula. Les diferències amb les *qüestions pràctiques* són relatives: depenen de la situació concreta on són proposades. Totes dues posen l'èmfasi en els coneixements matemàtics a utilitzar, però mentre les *qüestions pràctiques* podríem dir que comporten «l'aplicació» d'uns determinats procediments matemàtics (que com hem dit, sovint esdevenen il·lustracions), els *problemes no contextualitzats* comporten «l'ús» d'un saber matemàtic en general.

<i>Exemple-tipus 0.- (en determinades circumstàncies o contextos de classe, els tres exemples anteriors)</i>
<i>Exemple-tipus 1.- En comprar un objecte, importa que primer t'apliquin el descompte i després l'IVA o bé t'ho apliquin a l'inrevés?</i>
<i>Exemple-tipus 2.- Donades dues paral·leles, construeix un hexàgon regular que tingui dos vèrtexs sobre cadascuna d'elles.</i>
<i>Exemple-tipus 3.- Al diari X ha sortit publicada la següent notícia: "Durant el mes passat va augmentar el nombre d'aturats en 10.000 persones més". Al mateix temps, en el diari Y ha sortit publicada la següent notícia: "Durant el mes passat va disminuir la taxa d'atur". És possible tot això?</i>

Característiques:

- A diferència de les *qüestions pràctiques*, els *problemes no contextualitzats* acostumen a admetre més d'un procediment de resolució.
- Els *problemes no contextualitzats* són proposats fora de la Unitat Didàctica on són presentats els procediments matemàtics que hi estan implicats, o bé són proposats dins però necessiten més d'un camp de procediments, o bé les *estratègies generals* necessàries són més transcendents en el procés de resolució que els propis coneixements matemàtics implicats.
- També a diferència de les *qüestions pràctiques*, els *problemes no contextualitzats* «reclamen» una *argumentació* (a la qual s'hi dóna importància) del procés de resolució seguit.
- Els *problemes no contextualitzats* acostumen a ser singulars, i per tant rarament formen part de relacions o llistes de qüestions, o bé, si en formen part, no hi ha cap tipus de relació entre ells (ni en context ni en contingut).
- En la resolució dels *problemes no contextualitzats*, els *processos* i *estratègies* de tipus intel·lectual hi juguen un paper transcendent.

Situació problema

Quan el professor proposa una **situació problema**, pretén que els alumnes *construeixin* (Gil, 1988) els coneixements o els *processos* (Schoenfeld, 1991) matemàtics necessaris per a resoldre el problema. O sigui, aquí el problema es constitueix en finalitat en ell mateix, és el motor per encetar un nou camp de coneixement o aprofundir en un ja conegut. No es busca tant la *funcionalitat* sinó la *construcció* del saber.

<i>Exemple-tipus 1.- Quantes diagonals té un polígon?</i>

Exemple-típus 2.- Què podria costar a l'Ajuntament de Reus la decisió de plantar d'arbres l'Avinguda dels Països Catalans?

Exemple-típus 3.- (El clàssic problema de la partida inacabada)

Característiques:

- Les *situacions problema* són proposades abans de les presentacions/formulacions/sintetitzacions/construccions dels coneixements matemàtics implicats en la resolució.
- Mai formen part d'una llista, la *singularitat* és essencial.
- Els enunciats de les *situacions problema* acostumen a ser *imprecisos, oberts, ...*

Problemes d'estratègia

Amb els **problemes d'estratègia** es pretén centrar la finalitat del treball en l'elaboració d'*estratègies intel·lectuals*⁴² que puguin ser útils en un ampli rang de situacions. No és tant important la *construcció d'un saber* sinó l'*elaboració i explicitació* de l'estratègia seguida.

Exemple-típus 1.- Quants quadrats (sigui quina sigui la seva orientació) es poden construir en un determinat geoplà ?

Exemple-típus 2.- Hi ha una estratègia guanyadora en el "joc del 31"?

Característiques:

- En els *problemes d'estratègia* els continguts matemàtics necessaris per resoldre'ls són a l'abast de gran part de l'alumnat.
- La riquesa de la solució recau en l'explicitació i argumentació del procediment de resolució
- Acostumen a ser *singulars*
- En els enunciats dels *problemes d'estratègia* hi ha una certa proposta de «repte» (Lester, 1980; Deulofeu, 1999⁴³) per al resolutor.

Arran d'aquestes definicions, és evident que només es poden considerar **problemes** en els termes descrits anteriorment a II.2.2.5 les qüestions que aquí hem anomenat *Problemes No Contextualitzats matemàticament, Situacions Problema i Problemes d'Estratègia*, excloient explícitament, d'acord amb Schoenfeld (1985b) les *Qüestions Pràctiques*.

⁴² en el seu sentit més ampli del terme, ara ens referirem tant a les eines heurístiques com a les destreses generals amb potencial heurístic (Puig, 1996)

⁴³ en aquest sentit, Deulofeu aposta per una component lúdica en els següents termes: "*les recreacions emfasitzen la idea de repte que s'amaga en la resolució de qualsevol problema i permeten incidir sobre aspectes relacionats amb la resolució de problemes, com les autorestriccions, les interpretacions abusives o els implícits del llenguatge verbal que estan darrere dels enunciats, les falses intuïcions i les paradoxes, les particularitzacions i generalitzacions i també la reflexió sobre els conceptes matemàtics presents en el currículum i la pràctica de procediments, tant tècniques com estratègies*" (pg.93)

II.2.4. FASES A CONSIDERAR EN LA RESOLUCIÓ D'UN PROBLEMA

La literatura sobre la descripció de les *fases* que poden ser distingides en el procés de resolució d'un problema és abundant i amb antecedents molt antics. Ja Wallas l'any 1926⁴⁴ ens descrivia les quatre etapes de *l'acte creatiu: familiarització, incubació, inspiració i verificació*.

Dewey l'any 1910 ⁴⁵ descriu les següents fases en el *procés de resolució d'un problema real qualsevol*: identificació de la situació problemàtica; definició precisa del problema; anàlisi medis-finalitat, pla de resolució; assumpció de les conseqüències; avaluació de la solució, supervisió, generalització.

Considerant ja els problemes matemàtics, Polya (1965) descriu les següents quatre *fases en la resolució d'un problema matemàtic*: comprensió del problema, disseny d'un pla, execució del pla, verificació de la solució obtinguda. Hi ha unanimitat a precisar que aquesta descripció és bàsicament introspectiva, que descriu les accions desenvolupades per un *resolutor ideal*, o sigui aquell resolutor que sempre avança directament cap a la solució final del problema, sense necessitat d'abandonar o de refer cap camí iniciat.

En canvi Schoenfeld (1985a) descriu minuciosament les petites conductes i accions desenvolupades per *subjects reals*. Aquestes conductes varen ser englobades en allò que ell anomena *esquemes d'anàlisi del comportament del resolutor*. Alhora indicava que no existien fases perfectes, o en altres paraules que les fases no tenien necessàriament un caràcter lineal; en qualsevol cas, i atenent a aquestes precisions, distingeix: anàlisi i comprensió, disseny-planificació, exploració, execució i verificació.

A diferència de les anteriors descripcions, Mason, Burton i Stacey (1982) descriuen el procés de resolució de problemes donant importància cabdal a *allò que se sent*: els estats afectius, d'ànim, emocionals, ... En aquesta descripció fa referència a uns processos (particularització, generalització, conjeturació), a unes fases (abordatge, atac, revisió) i a uns estats, i no és tant un model descriptiu o analític sinó un model d'ajuda instruccional (Callejo, 1994)

En qualsevol cas, compartim de Carrillo (1996) la idea de que:

"no existeixen fases perfectes i el nucli més important de la qüestió no està tant en l'etiquetatge com en la concepció de la provisionalitat de l'estat en el que es troba el resolutor en relació a les fases del problema"

Concebent les fases

"com a estats pels quals es passa i als quals es pot tornar al llarg del procés de resolució" (pg.134)

⁴⁴ citat per M.L.Callejo (1994), p.25

⁴⁵ citat per Puig i Cerdán (1988)

Així doncs, atenent a aquesta terminologia, en el present treball ens centrarem en la *fase d'abordatge* (Mason, Burton i Stacey, 1982) que l'entenen com tota aquella activitat mental encaminada a

- familiaritzar-se, comprendre i assimilar el missatge,
- aclarir els propòsits fites i tipus de respostes que s'han de produir,
- seleccionar, repassar i reposar idees, coneixements,... que de forma immediata venen al cap a mesura que s'entra en matèria

Segons aquests autors, en aquesta fase es poden (seria agosarat dir "s'acostumen a") desenvolupar (segons els problemes i els resolutors, en cada cas) algunes de les següents accions (en la pròpia idea de la fase, ja hi ha implícites un conjunt d'accions): organitzar la informació, ampliar la informació, elaborar i contrastar conjectures, definir termes i relacions, introduir una representació i/o una notació,...

Aquesta fase en certa manera equivaldria a les fases d'Identificació, Comprensió, Planificació i Exploració (parcialment⁴⁶) que descriu amb detall Carrillo (1996).

II.2.5. ASPECTES QUE INTERVENEN EN EL PROCÉS DE RP

En relació directa a l'efectivitat en RP, Lester (1985) formulava les següents tres preguntes clau:

1. *Què fa l'individu, correctament i incorrectament, durant la resolució de problemes?*
2. *Què hauria de ser capaç de fer?*
3. *Com pot millorar-se l'habilitat individual en resolució de problemes?*
(pg.44)

En un pla paral·lel a aquest, nosaltres voldríem reproduir (adaptant, interpretant) preguntes que han estat sovint formulades en la recerca en l'àmbit de la RP:

1. què fa que l'alumne faci el que fa?
2. quins orígens tenen i quins efectes poden produir aquests aspectes?
3. què podríem fer al respecte per ajudar l'alumnat?.

Són essencialment les dues primeres preguntes les que ens mouen en la present recerca, i indirectament (però evidentment és la que justifica qualsevol plantejament nostre d'investigació) la tercera. En el present apartat seran abordades.

⁴⁶ aquesta darrera fase només és considerada en tant en quant es prenen les primeres decisions.

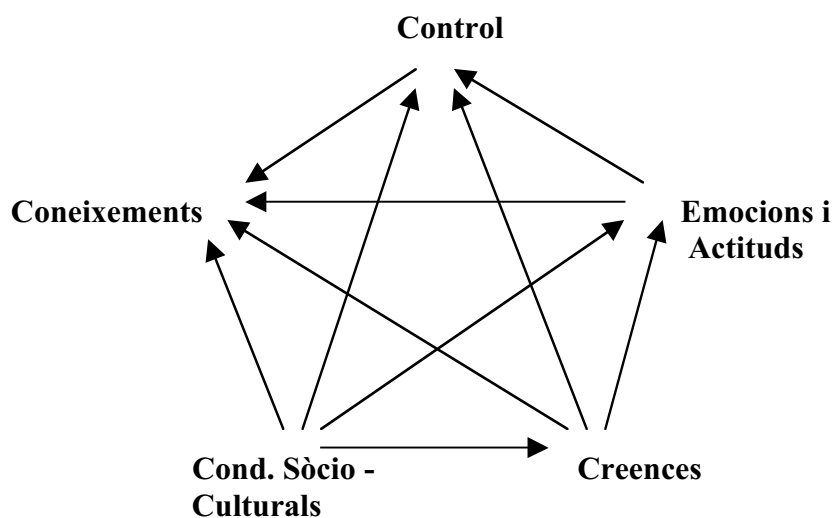
II.2.5.1. FACTORS QUE INFLUENCIEN ELS RESULTATS DE LA RP

El mateix Lester (1987), més en la línia d'aquestes darreres preguntes, feia referència als factors que influenciaven els resultats de la RP i distingia cinc categories interdependents: *els coneixements, el control, els afectes, les creences*⁴⁷ i *les condicions socio-culturals*.

D'una banda és sobre aquesta interdependència entre les cinc categories sobre la qual Lester reclama més recerca. Tanmateix, amb una clara visió del paper cabdal que juguen les creences en el conjunt del rendiment en RP dels individus en general i de l'alumnat en particular, Lester està molt proper a Schoenfeld en allò que fa referència al *paper explicatiu* que aquest dona a les creences i en general a les quatre (1985a) o cinc (1992) components que ell distingeix⁴⁸.

A l'esquema ii.2.1 hem efectuat una interpretació de la interrelació que Lester apunta entre aquestes cinc categories, la qual cosa ressalta el paper cabdal que hi juguen les *creences*.

Esquema ii.2.1. Interpretació de la Interdependència entre les cinc categories que segons Lester influencien els resultats de la RP⁴⁹



En aquest esquema tractem d'il·lustrar la idea de Lester entorn a que el desenvolupament, la comprensió i l'ús de les idees i tècniques matemàtiques es desenvolupen en *situacions culturals*, i que les influències d'aquestes es deixen sentir en qualsevol de les altres quatre categories.

Lester, que ens especifica que utilitza el terme *creences* en la mateixa línia que Schoenfeld (1985a), considera que aquestes donen forma a *les actituds i les emocions* i dirigeixen les decisions preses durant l'activitat matemàtica.

⁴⁷ Lester es refereix als afectes entenent-los com les emocions i les actituds; recordem que ja a II.1 hem seguit a McLeod (1992) entenent que el domini afectiu inclou no només aquestes sinó també les creences

⁴⁸ paper i components als quals hem fet breu referència a II.1 i que detallarem en el proper epígraf

⁴⁹ el sentit de les fletxes indica una influència directa

Més específicament, Lester ens inclou en la categoria de **l'afecte** d'una banda *actituds* com la *motivació*, *l'interès*, la *confiança*, la *perseverança*, el *gust per assumir riscos*, la *tolerància a l'ambigüitat* i la *resistència a la finalització prematura* i d'altra banda *emocions* en el seu sentit més ampli. En aquests termes, defensa les idees de que les emocions i les accions cognitives interactuen de forma important i de que el rendiment d'un individu desenvolupant tasques matemàtiques està molt influenciat pels factors afectius.

Per **control**, Lester entén la classificació i subseqüent assignació de recursos disponibles per a enfrontar-se amb èxit a situacions matemàtiques. Això inclou *decisions executives* entorn a la *planificació*, *avaluació*, *gestió* i *regulació*. Segons Lester, aquesta categoria està directament influenciada per les condicions socio-culturals, per les emocions i les actituds i per les creences; però a la vegada dirigeix la manera en la qual són utilitzats els coneixements.

Finalment, sota el nom de **coneixements**, Lester inclou l'ampli rang de recursos que pot utilitzar l'individu; en particular explicita els següents: fets i definicions, algorismes, heurístics⁵⁰, i la multitud de rutines (no algorismes, procediments) que concentra l'individu quan es refereix a tasques matemàtiques. El gràfic ens il·lustra l'opinió de Lester quant a que sobre la utilització d'aquests coneixements (capacitat on rau la mesura de l'eficiència) és on influeixen tota la resta d'aspectes.

Aquest plantejament general de factors que incideixen en el rendiment en RP d'un alumne, plantejament en el que intervenen aspectes dels tres dominis considerats, ens ve sintetitzat per Callejo (1994) en els següents termes:

"per a resoldre un problema és necessari conèixer el camp específic al qual es refereix el problema, saber regular i controlar els esmentats coneixements i enfrontar-s'hi amb les actituds matemàtiques adequades. Aquesta tasca intel·lectual està impregnada d'emocions que estan presents de forma diversa al llarg del procés de resolució i de bloquejos cognitius, afectius i socio-culturals. Però el context en el que es proposen habitualment els exercicis i els problemes en l'àmbit escolar genera en els estudiants conviccions que no són les més adequades per a resoldre problemes" (pg.47)

Aquesta visió no és, o si més no, no ha estat universal. A la pregunta de què necessita un individu per a resoldre problemes, Kilpatrick (1985) considerava que:

1. *Un bon bagatge organitzat de coneixements entorn al contingut*
2. *Un bon bagatge de procediments per a representar i transformar el problema*
3. *Un sistema que controlï i guiï la selecció de coneixements i procediments* (pg.7)

Malgrat el tercer punt podria ser considerat com una mena de «calaix de sastre» que englobés o sobre el qual incidissin els cinc aspectes anteriorment esmentats per Lester, o la idea global sintetitzada per M.L.Callejo, trobem a faltar explícitament referències a

⁵⁰ ja hem esmentat que Schoenfeld (1985a, 1992) no inclou els heurístics en la mateixa categoria que la resta de coneixements que esmenta Lester, que ell anomena explícitament *recursos* (1985) o *base de coneixements* (1992)

aspectes fora del camp de la cognició. Aquesta mateixa mancança la trobem en altres plantejaments o models (Ellerton i Clements, 1991; Pozo, 1994).

En tant en quant no és objectiu del present estudi l'anàlisi dels processos de RP d'una forma global (ens centrem en les primeres passes i les primeres decisions del procés), no es pretén tampoc abordar de forma global ni profunda una revisió bibliogràfica (enormement extensa) sobre la globalitat de les preguntes ni dels aspectes anteriors, preguntes que d'altra banda cal entendre-les més com a motor d'investigació que com a objecte de resposta.

D'altra banda, a les properes pàgines tornarem a abordar aquesta idea dels múltiples, complexos i interdependents aspectes que intervenen en el procés de RP, i ho farem des de la perspectiva de la **cognició-afecte-context** que creiem enriqueix la compartimentació i excessiva simplificació descrita per Lester.

II.2.5.2. COGNICIÓ, AFECTE I CONTEXT

Com dèiem, la bibliografia ens remet a tres plans o dimensions estretament relacionats des dels quals es pot abordar l'estudi de la RP: el cognitiu, l'afectiu i el del context.

El caràcter clarament **cognitiu** de l'activitat de resolució de problemes, ja ha estat esmentat a l'inici del capítol i alhora recollit àmpliament en les definicions presentades en apartats anteriors.

D'altra banda, els més recents treballs de Schoenfeld (1992), entre d'altres aportacions, fan referència als «*aspectes de la cognició*» (enlloc dels «*components del coneixement i la conducta*» com ell mateix anomenava en treballs anteriors, 1985a, 1987a); aquests aspectes són: *coneixement de base, estratègies de resolució de problemes, gestió i control, creences i afectes i finalment pràctica*, sobre els quals hi tornarem en posteriors epígrafs. Com diu Puig (1996), Schoenfeld dona un *paper explicatiu* a aquests aspectes:

"cada element que introdueix (en el decurs del temps i de les seves investigacions) pot veure's com el resultat d'un intent d'explicar per què els elements anteriors són incapaçs de donar compte de per què els resolutors no tenen èxit en resoldre problemes" (pg.43)

En particular, seguint també Schoenfeld, quan un alumne disposa d'un bon bagatge de coneixements i estratègies i es té un bon control del que es fa, l'única cosa que permet explicar el fracàs és el seu sistema de creences, la qual cosa ens introdueix en la necessitat de l'estudi d'aquests. Tanmateix ens sumem a l'observació de Puig (1996) quan diu que malgrat aquestes categories tenen la finalitat explicativa que pretenen, algunes d'elles difícilment poden ser considerades «*aspectes de la cognició*».

En qualsevol cas, aquest centre d'atenció sobre fonts d'explicació de la conducta de «*resolutors reals*», es diferencia en especial del de Polya, la voluntat del qual és (Puig, 1996) explorar cadascuna de les maneres d'actuar d'un «*resolutor ideal*», acumulant així diferents *trets de conducta competent*, amb la intenció de representar-los després com una *guia per a l'acció*.

D'una forma més sintètica, es pot dir que quan un subjecte s'enfronta a la resolució d'un problema tracta d'accedir als coneixements que té relacionats en algun sentit amb la situació proposada, els selecciona i veu la manera d'utilitzar-los en el problema (Callejo, 1994). En tant en quant doncs ha de *recuperar* alguns dels coneixements de què disposa i ha de *gestionar* la manera d'usar-los, Callejo sintetitza, basant-se en diferents autors, dos tipus de coneixements: **la base de coneixements i els metaconeixements**. Aquesta darrera síntesi en dues categories cal entendre-la més com dos plans paral·lels (metafòricament: la prestatgeria d'una banda i el catàleg organitzat i amb orientacions d'ús⁵¹ de l'altra), amb elements que es corresponen exactament (i s'interconnecten) en els dos plans, però també amb elements amb fortes disfuncions de correspondència. Com a resultat d'explicar aquesta idea, en properes pàgines també justificarem les diferències en alguns termes observades en la bibliografia.

Com ja en fèiem referència en el gràfic ii.2.1, sembla haver unanimitat quant a la rellevant influència dels **aspectes afectius** en l'èxit i en el fracàs en la RP en particular i sobre l'aprenentatge de les matemàtiques en general, tant en la literatura sobre educació matemàtica (McLeod, 1989ab, 1992; Mason, Burton, Stacey, 1982; Lester, 1987; Lester, Garofalo, Kroll, 1989; Guzmán, 1995; Gómez-Chacón, 1997a; Callejo, 1994; Adams, 1986) com en el simple intercanvi de parers quotidià entre el professorat.

En concret, Lester, Garofalo i Kroll (1989) postulen que el fracàs d'un individu en resoldre un problema, quan en canvi té els necessaris coneixements, es deriva de la presència de factors metacognitius i no cognitius que inhibeixen l'apropiada utilització d'aquest coneixement; posteriorment concreten que aquests aspectes són: afectes⁵² i actituds, creences, control i factors contextuals. I recordant l'esmentat gràfic, aquests aspectes no incideixen tots de la mateixa manera ni per la mateixa via en el rendiment.

Altres autors, a banda d'estar d'acord amb aquest postulat afegeixen consideracions en positiu: la detecció d'aquests factors hauria de ser el primer pas per a contrarestar la seva influència amb efectivitat (Gómez-Chacón, 1997b); més encara, aquest hauria de ser el punt de sortida de la reforma de les classes de matemàtiques (McLeod, 1993).

Tanmateix, Lester, Garofalo i Kroll (1989) fan una petita crítica al fet que la gran majoria dels recercadors en RP han restringit llurs investigacions als aspectes cognitius dels resultats.

Quant a la visió del professorat, que postulàvem que estava d'acord amb la importància dels factors afectius⁵³, sembla persistir tanmateix la creença de que si es desenvolupen objectius cognoscitius es desenvoluparan també de manera recíproca les actituds afectives corresponents. Gómez-Chacón (1997b) indica que aquesta relació no és tan bijectiva:

⁵¹ diferenciant clarament aquest terme del terme "manual d'ús"

⁵² recordem que Lester habitualment identifica afectes i emocions, a diferència de l'assumpció que estem fent de entendre-ho d'acord amb McLeod

⁵³ Lester, Garofalo i Kroll (1989) creuen que molts bons professors de matemàtiques estaran ràpidament d'acord en que l'èxit o el fracàs de l'alumnat en RP sovint és molt un tema d'autoconfiança, motivació, perseverança, i molts altres aspectes no cognitius

"es desenvolupen les actituds afectives quan es brinda a l'alumnat les adequades experiències d'aprenentatge que incorporen de forma explícita aquesta dimensió. Pel que respecta a programes de matemàtiques, ens trobem encara en una etapa tan primitiva que l'expressió d'objectius sobre creences, emocions i actituds amb prou feines té significat per a nosaltres" (pg. 8)

Molt recentment s'ha desenvolupat amb força el terme «*intel·ligència emocional*» (p.e. Goleman, 1996) adoptant una visió més àmplia de la intel·ligència i definint-se en els següents termes:

"Qüestió de la intel·ligència social que involucra habilitat per a manejar els nostres propis sentiments i els sentiments dels altres, discriminant entre ells i usant aquesta informació com a guia del nostre pensament i accions" ⁵⁴

En la línia anterior, i en aquest marc, es pot dir que la persona *alfabetitzada emocionalment* en matemàtiques és aquella que ha desenvolupat la seva intel·ligència emocional en aquest context i que ha assolit una forma d'interactuar en aquest àmbit, que té molt en compte els sentiments i les emocions; l'alfabetització emocional engloba habilitats tals com el control dels impulsos i fòbies en relació a l'assignatura, que permet desenvolupar la necessària atenció per què s'assoleixi l'aprenentatge, l'autoconsciència, la motivació, l'entusiasme, la perseverança, l'empatia, l'agilitat mental, etc... (Gómez-Chacón, 1997b).

També, i amb la finalitat de desenvolupar un model de treball en RP a l'aula, Mason, Burton i Stacey (1982) afirmen que els factors que influeixen en el grau d'efectivitat del raonament matemàtic són d'una banda, evidentment, *el coneixement dels continguts matemàtics*, però en els altres dos vèrtexs d'un hipotètic triangle equilàter situaríem també *la competència en l'ús dels processos d'investigació matemàtica* (conjecturar, particularitzar, generalitzar, comunicar,...) i *la confiança en el domini dels estats emocionals i psicològics*

Com a conseqüència d'aquesta importància creixent de la dimensió afectiva (amb les reserves i matisacions que hem estat esmentant) en l'ensenyament i aprenentatge de la matemàtica, aquest és un tema prioritari de recerca actualment (McLeod, 92, 94; Koehler i Grouws, 1992). Tanmateix, és recent: deu anys endarrere Mandler (1989) criticava que si bé d'una banda dels aspectes afectius era del que més se'n parlava, era del que menys s'investigava. McLeod (1992) ho veu degut, entre d'altres, a la influència del conductisme en la psicologia de l'educació; fins i tot els molt més recents estudis en el marc de la ciència cognitiva i la intel·ligència artificial tenen una certa tendència a excloure els aspectes afectius de les seves consideracions. És en el camp de la psicologia social on es troben els primers intents substancials de recerca en el domini afectiu (p.e. Fishbein i Ajzen, 1975) i més recentment i amb molta força en el camp de la psicologia cognitiva (p.e. Mandler, 1989), i d'ells s'extén al camp de l'educació matemàtica en general i de la resolució de problemes en particular (autors com Reyes⁵⁵, Kulm, Aiken, Adams; o Gómez-Chacón, a l'estat espanyol). I és McLeod a finals dels 80 i principalment en la dècada dels 90, que pren com a base les idees de Mandler, qui pot ser considerat però el precursor d'aquest camp d'estudi en l'educació matemàtica.

⁵⁴ definició deguda a Salovey i Mayer citada per Gómez-Chacón (1997b), pg. 19

⁵⁵ després L.E.Hart

Com a recent domini d'estudi que és, una de les dificultats amb que ens trobem és la reconceptualització encara oberta, i en particular i com a conseqüència aspectes com la no unicitat del significat dels termes o la pròpia definició del domini afectiu. Quant al primer aspecte, podem citar exemples com el fet que Mandler (1989) explicita que utilitza a vegades el terme *emocions* com a sinònim d'*afectes*⁵⁶, en tant en quant a vegades li interessa donar una dimensió d'*intensitat*; o Hart (1989a) que fa referència a la diferència entre els mateixos termes utilitzats en l'àmbit de la psicologia o en el de l'educació matemàtica; o la mateixa autora quan afirma que fins i tot en el mateix camp un mateix terme pot fer referència a fenòmens diferents⁵⁷. En resum, McLeod (1992) afirmava que la clarificació de la terminologia per al domini afectiu deixava encara molta tasca a la recerca.

Quant a la definició, ens referirem al *domini afectiu* en la idea de McLeod (1992):

"un ampli rang de creences, sentiments i estats d'ànim que són normalment considerats com quelcom diferent de la pura cognició" (pg. 576)

D'acord també amb McLeod, inclourem com a descriptors específics d'aquest domini *les creences, les actituds i les emocions*

Voldríem posar èmfasi en un aspecte ja esmentat: **l'estreta relació entre els dominis cognitiu i afectiu**, sobre els quals hi ha un important acord a **no separar-los** (McLeod, 1989a; Gómez-Chacón, 1997b). En suport d'aquesta idea McLeod (1992) afirma que no hi ha resposta afectiva en absència d'avaluació cognitiva; o, des de la perspectiva inversa, que la major part de les respostes emocionals s'originen en una interrupció dels plans de resolució de problemes o en una discrepància entre les expectatives i els esdeveniments reals (McLeod, 1993). Esmenta un seguit de punts de connexió importants entre ambdós dominis, entre els quals destaca molt especialment la metacognició; així per exemple, la decisió de perseverar en el camí d'una possible solució pot estar influenciada per l'ansietat o la confiança; els processos d'emmagatzament i recuperació d'informació poden estar afectats, menys, per les emocions.

En qualsevol cas, en aquests darrers anys el canvi de tendències en la recerca de l'ensenyament i aprenentatge de les matemàtiques té com a característiques més significatives l'interès creixent pel *context social i cultural* de les classes de matemàtiques (Gómez-Chacón, 1997a, 1998a; McLeod, 1989b; Bishop, 1988). Cal buscar-ne l'origen en el fet que la consideració de les matemàtiques com un fenomen cultural (Bishop, 1988) representa una alternativa, com afirma Gómez-Chacón (1998a), a la visió tradicional d'aquesta disciplina com un coneixement lliure de valors i deslligat de la cultura, que proporciona proposicions universalment vertaderes i que per tant qualsevol ésser racional, de qualsevol procedència i en qualsevol moment històric pot reconèixer.

En el gràfic ii.2.1 ja es reflecteix la idea de Lester (1987) quant al paper rellevant que tenen les *condicions socio-culturals* en l'efectivitat de la RP: influeixen directament sobre cadascuna de les altres categories que hi són considerades (creences, emocions/actituds, control i utilització dels coneixements) i també a través d'unes

⁵⁶ identificació que també hem esmentat d'altres autors (Lester, Garofalo)

⁵⁷ posa l'exemple de l'ansietat (emoció intensa - resposta afectiva)

influeixen indirectament en les altres. En un altre moment, Lester, Garofalo i Kroll (1989) posen molt d'èmfasi en la importància dels *factors contextuals* en la RP.

Abans de continuar és important precisar amb quin significat s'utilitzarà el terme «*context*». L'Enciclopèdia Catalana en dona dues accepcions:

- a) *conjunt de circumstàncies que envolten i expliquen un esdeveniment, una situació, un individu, etc...*
- b) *part d'un text que enclou, precedeix o segueix un mot o passatge*

Aquesta darrera accepció és l'estretament relacionada a l'ús que farem del terme *context* referint-nos a l'enunciat del problema.

Malgrat semànticament no siguin llunyans els significats, en qualsevol altre cas, i per tant en tot allò que correspon a l'objectiu d'aquest epígraf, farem referència a la primera de les accepcions. Tanmateix, és evident que aleshores el terme es converteix en un «calaix de sastre» en el que cada component té entitat pròpia en ell mateix. És així, que habitualment farem referència al terme *context* acompanyat, com ja hem fet en els paràgrafs anteriors, de qualificatius o determinants que ens ajudin a acotar el seu significat particular, així parlarem de *context social, cultural, escolar, familiar, personal*, però també de *context en el qual és proposat un problema*, o de *context al qual fa referència un problema*.

Tanmateix, Gómez-Chacón (1998a) fa una conceptualització del terme *context* més àmplia i complexa a la vegada que la descrita per l'Enciclopèdia Catalana:

"Ens sembla important posar èmfasi en el fet que el context està determinat per la relació entre les coses que s'enllacen i entreteixeixen i que fan que el tot tingui sentit. L'utilitzarem en parlar de l'escola, de les classes de matemàtiques com a «context social» en el que es produeix el procés d'ensenyament / aprenentatge, i com a «context personal» que construeix l'estudiant, és a dir, en un sentit general com una certa relació entre els objectes i el seu entorn, com una estructura en la qual els seus components s'entreteixeixen i adquireixen sentit en funció de la totalitat" (pg.20)

És per això, que entre altres, Gómez-Chacón distingeix entre *situació*⁵⁸ i *context*⁵⁹, distinció que malgrat compartim ja hem afirmat que no farem en el present treball.

L'àmbit en el qual es desenvolupa el present estudi no exclou, d'entrada, cap de les concrecions del terme *context* abans esmentades; així per exemple es posarà èmfasi a obtenir informació del *context* familiar i personal de l'alumnat estudiat, a la vegada que és indubtable que el *context* socio-econòmic de l'alumnat és un condicionant important en l'efectivitat en general en el rendiment escolar i en el rendiment matemàtic en particular. Tanmateix, en tant en quant té aspectes sobre els quals es poden prendre més decisions, ens centrarem especialment en el **context socio-cultural**, entenent-lo en el marc anteriorment esmentat (Bishop, 1988; Gómez-Chacón, 1998a)

⁵⁸ en referència a l'entorn en el qual s'ofereix l'activitat a l'alumne

⁵⁹ en referència al producte de la seva construcció personal

I és en aquest marc del context socio-cultural que Callejo (1994) hi distingeix tres aspectes amb fortes influències sobre el procés i el rendiment en RP:

- a) El conjunt d'eines que, sense ser específicament matemàtiques, es relacionen amb l'activitat matemàtica. Aquí el terme cultura és entès en la seva concepció antropològica. De forma paradigmàtica, Callejo situaria en aquest àmbit d'estudi l'anomenada «etnomatemàtica», l'autor més rellevant de la qual és D'Ambrosio.
- b) Els aspectes relacionats amb el fet que l'educació formal en matemàtiques té lloc a l'escola, com a institució, en la qual el discurs es regeix per unes regles diferents de les del discurs habitual, i on les pràctiques tenen una inèrcia i uns implícits. Aquest àmbit d'estudi és a la vegada divers i s'ha desenvolupat sota diversos enfocaments, malgrat creiem que enormement convergents. Així, en ell hi cabria d'una banda, com ens especifica Callejo, la «*pragmàtica del qüestionament escolar*» (Adda, 1985); d'altra banda creiem que també hi cabria considerar els darrers estudis de Schoenfeld on introdueix aspectes relacionats amb la *pràctica* (Schoenfeld, 1989b, 1992); i criem també que és en aquest àmbit d'estudi Gómez-Chacón (1998a) fa referència a recents estudis que aborden la perspectiva de la cultura escolar i la cultura de l'aula, citant a autors com Lerman, Pintex o Nickson.
- c) La inculturació matemàtica, o valors i actituds matemàtiques compartides per la comunitat matemàtica (Schoenfeld, 1992; Bishop, 1988)

Sota una perspectiva diferent, amb menys intent de categorització que l'anterior, però també amb un intent de considerar els aspectes que cal tenir en compte per a un aprenentatge des de la perspectiva socio-cultural i des de la perspectiva de l'estudiant com a actor social, Gómez-Chacón (1998a) reclama treballar i integrar les següents tres aproximacions fent referència en cada cas a línies d'investigació en aquest àmbit:

- a) Investigacions que desenvolupen una aproximació socio-cultural a la instrucció, tenint en compte, entre d'altres aspectes les «pràctiques» culturals tant de les llars dels estudiants com de les aules, per tal d'entendre i facilitar el seu aprofitament escolar. Com afirma Gómez-Chacón, des d'aquesta aproximació es concep l'aula com una comunitat potencial d'aprenentatge que té lloc a través d'intercanvis i cooperació.
- b) Estudis sobre comunitats d'aula en les quals la matemàtica és construïda socialment. Aquestes comunitats⁶⁰ es caracteritzen pel compromís dels estudiants en discussions matemàtiques sobre problemes oberts; la comunicació i la negociació de significats són el centre del que significa «fer matemàtiques a classe». Malgrat això, Gómez-Chacón puntualitza que estudis recents destaquen el dissortadament extès comportament d'allò que Schoenfeld (1991b) anomena «*suspension of sense-making*», argumentant que l'escolarització pot ser en realitat la causa d'aquest comportament matemàtic sense sentit. Estretament lligat a aquesta aproximació...
- c) Investigacions que documenten les discontinuïtats de la matemàtica a l'escola i a la vida quotidiana. Aquí inclouríem els treballs d'Abreu (1995) de Carraher, Carraher i Schliemann, (1988), i altres treballs citats per Gómez-Chacón com els de Lave, Nunes, Saxe, Schoenfeld i Millroy;

⁶⁰ Gómez-Chacón (1998a) ens cita treballs de Cobb, Yackel, Wood, Schoenfeld i Civil

aquestes investigacions descriuen com la gent aprèn i usa les matemàtiques en situacions fora del context escolar. Alguns d'aquests treballs, com ens descriu Gómez-Chacón, documenten com les persones tenen èxit en la resolució de problemes de la vida quotidiana, inventant-se els seus propis mètodes, les seves estratègies informals, i tanmateix també estableixen el baix nivell d'execució de tasques similars realitzades en el context escolar.

A continuació desenvoluparem breument alguns dels aspectes esmentats fins ara, que resulten ser més rellevants per a la finalitat del present estudi.

A) BASE DE CONEIXEMENTS

La *base de coneixements* és el conjunt de coneixements que estan disponibles en la memòria del subjecte per a ser utilitzats. Schoenfeld (1985a), al qual hi fa referència sota la denominació de *recursos*, inclou explícitament: fets, procediments i tècniques. Tanmateix altres autors (Lester, 1987; Lester, Garofalo i Kroll, 1989; Callejo, 1994) inclouen en aquesta categoria les *estratègies heurístiques* (o més genèricament *heurístics*). Posteriorment, en acotar aquests termes, veurem que el fet que s'hi considerin o no, cal veure'l en el conjunt del plantejament dels aspectes de la cognició, i aleshores esdevé un aspecte d'irrellevant discussió.

Sobre com s'adquireix i s'utilitza el coneixement matemàtic és sobre el que més s'ha investigat en educació matemàtica (Lester, 1987; pg.258) i "*és indubtable que moltes deficiències en resolució de problemes poden ser atribuïdes a l'existència de sistemes conceptuals inestables*".

Tanmateix, estem davant d'un aspecte d'alta complexitat. Si observem novament el gràfic ii.2.1 de l'inici de l'apartat, Lester (1987) deixa clar que la utilització dels coneixements és precisament la categoria, de les cinc que destaca, sobre la qual totes i cadascuna de les altres quatre hi influeix de forma directa. En el capítol II.3 farem especial incidència sobre la influència de les creences en aquesta utilització dels coneixements.

Tanmateix, tant en el disseny dels instruments de recerca com en l'anàlisi de la informació recollida en el present estudi, s'ha fet una reducció del significat atorgat al terme «coneixements matemàtics», que arran dels paràgrafs anteriors òbviament no compartim, però que ha estat motivada per l'intent d'unificar vocabulari amb l'alumnat i de poder distingir de forma separada aspectes que enriqueixin l'estudi; així doncs, en aquell marc, ens referirem al terme «*coneixements matemàtics*» exclusivament als que fan referència als aspectes conceptuals, factuais o procedimentals de tipus algorísmic.

B) METACONEIXEMENTS

És òbviament important que l'alumnat *sàpiga / sàpiga fer / faci*, però no podem oblidar la necessitat i conveniència de que també *reflexioni sobre què sap / sap fer / fa*. És així que en analitzar els modes de resoldre problemes o en dirigir l'aprenentatge de l'alumnat, entrem en el terreny de la *metacognició*.

La definició històrica de Flavell⁶¹ entorn al terme **metacognició**⁶²

"la metacognició es refereix al coneixement personal dels propis processos i productes cognitius o qualsevol cosa relacionada amb ells, com les característiques de la informació o les dades rellevants per a l'aprenentatge... La metacognició es refereix, entre altres coses, a la supervisió activa conseqüent regulació i orquestració d'aquests processos en relació amb els objectes cognitius o dades en els quals es repengen, usualment al servei d'alguna fita o objectiu concret" (pg.232)

recull els dos aspectes que s'hi distingeixen (Garofalo i Lester, 1985):

- el coneixement i suposicions entorn als fenòmens cognitius, i
- regulació i control de les accions cognitives

En el primer aspecte s'inclouria tot allò que una persona **coneix i creu (creences)** entorn a les seves pròpies habilitats i recursos cognitius en relació a l'execució de tasques específiques (Callejo, 1994). A la vegada Lester (1985) hi distingeix tres tipus de categories:

- *personals o del subjecte* (coneixements entorn a un mateix sobre els seus coneixements, capacitats, limitacions,...),
- *de la tasca* (sobre els propòsits i requeriments de les tasques, graus de dificultat) i
- *de l'estratègia* (coneixements d'estratègies cognitives generals o específiques que ajudin a la comprensió, organització, planificació, execució i avaluació).

És indubtable la influència d'aquests aspectes sobre la utilització dels coneixements matemàtics i sobre el seu conjunt ens centrarem de forma especial en el present estudi.

Quant al segon aspecte, la **regulació i el control**, es refereixen a les decisions⁶³ que es prenen per a tractar de comprendre la naturalesa d'un problema i resoldre'l. Callejo (1994), desenvolupant idees sintèticament presentades per Lester (1987), inclou entre aquestes decisions: la selecció de continguts, la planificació d'accions, la selecció d'estratègies apropiades per a dur a terme un pla, la presa de decisions per a millorar aquest pla, avaluar la validesa d'aquest pla i en cas necessari, la revisió o abandó dels plans o estratègies inadequats. En resum, Lester afirma clarament que el control dirigeix les maneres en les quals són utilitzats els coneixements.

En un clar paral·lelisme amb Lester, Schoenfeld (1987a) estableix 3 components metacognitius:

- coneixement dels propis processos de pensament,
- control del procés i
- creences

⁶¹ citada per Carrillo (1996)

⁶² *forces directives*, com diu per exemple Lester (1987) o *força impulsora de l'activitat intel·lectual* que Lester (1994) cita de Silver

⁶³ *decisions executives*, com anomena Lester (1987)

la qual cosa li serveix per detallar i precisar la definició de Flavell.

D'altra banda Lester (1994) i Carrillo (1996) fan referència a estudis (p.e. Shigematsu) on s'introdueix el terme "*inner teacher*", pràcticament identificant-lo amb la metacognició. En discrepància, Hart associaria aquest terme al que ella anomena "*monitor*" i el seu paper a la "*monitorització*", que podria ser associada a l'*activitat metacognitiva*, faltant però el *coneixement metacognitiu* (que d'altra banda identifica amb les *creences*). En aquesta línia, Puig (1996), arran dels treballs de Schoenfeld ens parla del "*gestor*" (que ens el defineix per les seves funcions) i Mason, Burton i Stacey (1982) fan referència al "*gestor intern*".

Schoenfeld (1992) afirma que falta una adequada caracterització de la metacognició i del control: no es disposa de models teòrics del què és el control i de com funciona; no se sap, per exemple, si el control és un domini dependent o independent, i quins podrien ser els mecanismes que lliguen les decisions de control al domini del coneixement.

En qualsevol cas, sembla admetre's que la diferència entre la conducta d'un novell i la d'un expert quan resolen problemes se situa habitualment en el pla metacognitiu: en la manera d'usar els coneixements, la forma de dirigir els esforços i la presa de decisions al llarg del procés de resolució (Callejo, 1994; Gil, 1988; Chi i Glaser, 1986).

Sense menysprear cap dels aspectes que intervenen i/o incideixen en el procés de RP, Callejo i Carrillo (1998) consideren que

"la metacognició és el que té més possibilitats de perdurar fins i tot després del període escolar; així, desenvolupar estratègies metacognitives és desenvolupar individus reflexius i avançar en nivell de qualitat en la formació intel·lectual" (pg. 11)

C) HEURÍSTICS

Un aspecte especialment rellevant en la RP són els *heurístics*. Creiem que en primer lloc cal precisar la terminologia. Així, Puig (1996) ens descriu el significat que dóna al terme *heurístic* en el context de la definició que dóna al terme *heurística*⁶⁴:

"el que és propi de l'heurística és l'estudi dels modes de comportament en resoldre problemes i els medis que s'utilitzen en el procés de resoldre'ls que són independents del contingut i que no suposen garantia de que s'obtingui solució, i qualificarem per tant d'«heurístics» a aquests modes i medis" (pg.38)

Carrillo (1996), utilitzant paraules de Schoenfeld, considera que un *heurístic* és

"una insinuació o suggeriment general o estratègia, independent de qualsevol tòpic particular o matèria d'estudi, que ajuda al resolutor a aproximar-se i comprendre un problema i ordenar eficientment els seus recursos per a resoldre'l" (pg.9)

⁶⁴ malgrat és un àmbit en el que no entra el present estudi, ens serveix de porta d'entrada a la resta de termes

Veiem doncs que Carrillo i Puig no utilitzen el terme *heurístics* amb exactament el mateix significat; malgrat no porti controvèrsia, efectivament no hi ha unanimitat en el seu ús i concreció. En aquest sentit considerem especialment interessants i clarificadorres les definicions que Puig (1996; pg.44 i següents) dóna dels termes:

- *eina heurística*
- *suggeriment heurístic*
- *destresa amb potencial heurístic*

en tant en quant desglossen el terme «heurístic» de Schoenfeld.

Reprement la discussió entorn a si els *heurístics* formen part o no de la base de coneixements, cal fer una menció especial a la seva naturalesa. A diferència de qualsevol altre element dels coneixements, les *estratègies heurístiques* no són prescriptives, sinó descriptives (Schoenfeld, 1985a). Això vol dir, sintetitzant l'extensa i aclaridora explicació de Callejo (1994; pg.49-50), que mentre un cop seleccionat un algorisme aquest porta de forma intrínseca les condicions de la seva aplicació, les estratègies només descriuen una manera general de procedir; per tant, aplicar una estratègia suposa prendre un seguit de decisions afegides, com per exemple: en primer lloc seleccionar-la, per a continuació decidir quina versió utilitzar-ne, fer-ne l'adequada adaptació al problema, reprendre continuadament la relació amb el problema original,...

Aquesta complexa naturalesa, situa d'una forma singular les estratègies heurístiques en els plans que hem anomenat base de coneixements i metaconeixements, distingint-se de la resta de coneixements (recursos), que com ja hem dit també tenen (o seria bo que tinguessin) la seva correspondència en el pla metacognitiu.

Finalment, i en tant en quant en el present treball ens centrem en la fase d'abordatge, i atenent a l'equivalència esmentada amb les fases que Carrillo (1996) distingeix, a continuació esmentem una selecció dels heurístics⁶⁵ que aquest autor relaciona de forma exhaustiva, acompanyats d'accions que els són pròpies o pertinents

- Organitzar la informació
 - imaginar mentalment la solució
 - rellegir l'enunciat
 - seleccionar el material adequat
 - disposar d'un model manipulatiu
 - dibuixar un diagrama
- Exemplificar
 - posar exemples
 - examinar casos especials
- Expressar en altres termes
 - formular amb altres paraules
 - introduir notació adequada
- Temptejar
- Partir del què se sap; aprofundir en les condicions del problema
- Explorar problemes similars
- Conjecturar

⁶⁵ entesos en els termes de Schoenfeld

D) EMOCIONS I ACTITUDS

Ja hem esmentat que, d'acord amb McLeod (1992), inclourem com a descriptors específics del domini afectiu *les creences, les actituds i les emocions*.

En el capítol II.3 es reprendran i es desenvoluparan aquestes idees, especialment les que fan referència a les creences (i en particular la seva relació amb les actituds). En qualsevol cas, notem aquí que McLeod reserva el terme *emocions* per a significar els afectes més viscerals, respostes intenses i de curta durada⁶⁶; i assumirem també la idea d'*actitud* com una predisposició positiva o negativa que determina les intencions d'una persona i influeix en el seu comportament sobre la qual sembla haver un important consens.

En referència a les característiques d'aquests descriptors, quant a *l'estabilitat*, McLeod (1992) considera que les *creences* i les *actituds* són generalment estables, però les *emocions* poden canviar molt ràpidament. I quant a la *intensitat*, d'una banda fa referència a les «fresques» creences entorn a les matemàtiques i a les «fresques» actituds relacionades amb el gust o rebuig a les matemàtiques i d'altra banda a les «calentes» reaccions emocionals o les frustracions en la resolució de problemes no estàndard. Una altra característica que les diferencia, és la importància del component *cognitiu* que els és intrínseca: per exemple les *creences* tenen una component cognitiva important, i per tant es desenvolupen i romanen durant molt de temps; tanmateix les *emocions* involucren una component cognitiva molt petita (la *valoració*) i poden aparèixer i desaparèixer molt ràpidament.

En els estats afectius McLeod (1989a) destaca un seguit de característiques que, adaptades, seran desenvolupades en el bloc III: *magnitud i direcció, durada, nivell de consciència i nivell de control*.

La simplificació dels descriptors del domini afectiu proposada per McLeod (1992), acceptada de forma molt general, admet però altres perspectives menys sintètiques. Així, per exemple alguns autors⁶⁷ fan referència a *actituds, creences, apreciacions, gustos i preferències, emocions, sentiments i valors*. El mateix McLeod (1992), en un altre moment, descriu els següents **conceptes relacionats amb el domini afectiu**:

- *confiança* (una de les variables més importants que influeixen en l'aprenentatge)
- *autoconcepte*⁶⁸
- *autoeficàcia*
- *ansietat matemàtica*

⁶⁶ en aquesta mateixa línia es pronuncien Salovey i Mayer, en cita de Gómez-Chacón (1997b, pg.19) afirmant que les emocions són "respostes organitzades més enllà de la frontera dels sistemes psicològics, incloent lo fisiològic, cognitiu, motivacional i el sistema experiencial. Les emocions sorgeixen en resposta a un esdeveniment, intern o extern, que té una càrrega de significat positiva o negativa per a l'individu. Les emocions es poden distingir del concepte d'estat d'ànim, generalment aquestes són més curtes i més intenses"

⁶⁷ per exemple Gómez-Chacón (1997b) recolzant-se en diferents autors

⁶⁸ hi tornarem en el capítol II.3, en parlar de les *creences*, a l'igual que les *atribucions*

- atribucions causals
- atribucions d'esforç i habilitat
- incapacitat d'aprendre
- motivació

I fent referència a respostes afectives, descriu: *ansietat, confiança, frustració i satisfacció*

E) ASPECTES RELACIONATS AMB EL CONTEXT ESCOLAR ON ES PROPOSEN I RESOLEN ELS PROBLEMES

Reprement el fet cabdal que l'educació formal en matemàtiques té lloc a l'escola com a institució, i que aquesta té un discurs i unes pràctiques que es regeixen per unes regles, una inèrcia i uns implícits, voldríem desenvolupar algunes de les disfuncions i discontinuïtats escola - vida quotidiana a les quals fem referència en pàgines anteriors.

Així, en primer lloc, les diferències que Adda (1985), en el marc de la **pragmàtica del qüestionament escolar**, senyala entre els pressupostos de la comunicació habitual i els pressupostos de les qüestions matemàtiques escolars interfereixen, i per tant condicionen, clarament en les respostes dels alumnes. Callejo (1994) les recull així:

"* *mentre que en qüestionament habitual «la qüestió no és absurda» (...) en el qüestionament escolar «la qüestió pot ser absurda»(...);*

* *mentre que en el qüestionament habitual «qui interroga acostuma a ignorar la resposta (...) i la qüestió pot no tenir fins i tot resposta», en el qüestionament escolar «encara que la qüestió sigui difícil té segurament una resposta i qui interroga la coneix (...);*

* *en el qüestionament escolar «de la resposta depèn una avaluació (...) i la qüestió serveix segurament per avaluar quelcom. (...) Mentre que en una qüestió normal l'interrogador ha de buscar informació sobre el tema de la qüestió, aquí l'interrogador busca una informació sobre l'interrogat»;*

* *en el qüestionament escolar «la qüestió es refereix a un nivell escolar, a un programa» i en general, d'una banda «totes les dades s'han d'utilitzar» i d'altra banda les dades són suficients per trobar la solució del problema i freqüentment aquesta solució és única" (pàg.42-43)*

Com veurem posteriorment en el capítol II.3, aquests aspectes incideixen de forma clau i directa en les *creences* de l'alumnat, sent alguns d'ells creences ja en elles mateixes.

Tanmateix, Neshier (1980) manifesta el seu convenciment de que en part aquestes diferències són inevitables, en tant en quant és pràcticament impossible que un *problema aritmètic escolar* (PAE) reflecteixi, ni que sigui de forma parcial i deformada, un problema quantitatiu real: donat que els PAE són una versió simplificada dels problemes quantitatius reals es converteixen en un *estereotip*⁶⁹, la realitat dels quals és la de l'aula i no la del món. En particular els enunciats queden estereotipats principalment per dues característiques (Neshier, 1980):

⁶⁹ admetrem la definició que d'aquest terme dóna la Gran Enciclopèdia Catalana: «dit de la frase, l'expressió, preestablerta, feta d'una manera fixa, la qual hom usa sense haver de discórrer per a formar-la en cada cas»

- a) la interpretació semàntica està impregnada del llenguatge de la instrucció i no tant pel món d'experiències del nen;
- b) a diferència dels textos narratius, en l'enunciat del problema "no es permeten esdeveniments" que no estiguin explícitament presentats en el text.

Gómez-Chacón (1998a; pg.15) citant a Lester i Nunes, afegeix als aspectes anteriors dos més, des d'una nova perspectiva: **la finalitat de la tasca**

"a) els problemes de les situacions quotidianes estan enclavats en un context real que és significatiu i motivador per al resolutor i imbuïts en l'activitat genuïna de resolució de problemes

b) les matemàtiques que s'usen fora de l'escola són una tasca al servei d'una finalitat més àmplia, i no una finalitat en ella mateixa, com és el cas de l'escola"

Tanmateix, Gómez-Chacón (1998a; pg.15) fa una lectura positiva d'aquestes diferències entre les *pràctiques* de dins i fora de l'escola, i manifesta que el professorat les hauria de tenir en compte, considerant que

"sense les experiències matemàtiques de la vida quotidiana, l'aprenentatge escolar és únicament «aprenentatge per aprenentatge». Els estudiants necessiten construir i formalitzar a l'escola els coneixements matemàtics adquirits en situacions quotidianes així com l'ajuda oportuna per a generalitzar els seus esquemes"

En la mateixa línia, Deulofeu (2000) afirma que les activitats d'ensenyament-aprenentatge:

"...han de tenir una part de treball de l'alumne on aquest construeixi alguna cosa i també, necessàriament, una part de reflexió/discussió sobre allò que s'ha fet i el seu significat" (pg.40)

Reprement l'opinió de Schoenfeld (1991b) entorn a la «*suspension of sense-making*»⁷⁰, volem relacionar-hi estretament els aspectes que fan referència a l'**estandardització de les situacions**⁷¹ on són proposats els problemes⁷². És aquesta l'explicació que el mateix Schoenfeld (1989b) dona a un «*catàleg d'horrors*»⁷³, (en paraules seves) que prèviament ell mateix ha mostrat: els rituals de les classes dia-a-dia, provocant que aquest «*sense-making*» quedi estretament contextualitzat al microcosmos cultural determinat per les pràctiques escolars.

En estudis i treballs propis anteriors (Vila, 1998b, 1995a, 1993ab), es va analitzar la complexa relació que es produïa entre una pràctica escolar *estandarditzada* en la RP i les disfuncions a les que fèiem esment en paraules de Gómez-Chacón (1998a).

Aquesta estandardització pot fer referència d'una banda al caràcter estereotipat dels problemes (Callejo, 1998), del qual ja n'hem parlat, i d'altra banda també de forma

⁷⁰ el terme «*sense-making*», que és sovint utilitzat en els darrers treballs de Schoenfeld, és traduït habitualment per «*la búsqueda del sentit*», tanmateix seguirem utilitzant el terme original en anglès

⁷¹ entenent el terme «situació» en els termes de Gómez-Chacón (1998a)

⁷² o «*grading practices*» com diuen Lester, Garofalo i Kroll (1989)

⁷³ aquest «catàleg» o relació d'errors paradigmàtics estaria en la mateixa línia que els que hem presentat a la introducció de la present memòria

complementària al model de pràctica docent que hem anomenat «*reducció dels problemes a no-problemes*» (Deulofeu, 2000; Vila, 2000; Vila, 1995a), model que inscrivíem en la tradició conductista⁷⁴, que relacionàvem amb la visió del professorat que "*posa el centre d'atenció en els continguts matemàtics però emfasitzant l'execució*" (Kuhs i Ball, 1986) i que definim pel model de treball a l'aula «*cos de coneixements elaborats - exercicis de consolidació - aplicació a la resolució de problemes*»⁷⁵.

L'anàlisi, centrat en l'efectivitat en la resolució de problemes que contenen elements que els convertien en no estàndards, o bé proposats en situacions de classe no estàndard⁷⁶, va establir que si bé hi ha una relació clara del tipus causa-efecte (estandardització, en el sentit ampli - no efectivitat, en el sentit ampli també), aquesta relació és altament complexa en tant en quant els elements que conformen la cultura escolar són molt més que la suma de les activitats proposades i les explicacions o indicacions donades pel professorat. En qualsevol cas, fins i tot alumnes amb un altíssim rendiment acadèmic patien bloquejos insuperables que tenien la seva explicació en aquesta estandardització (Vila, 1993a)

En la mateixa línia, Schoenfeld (1989b) relaciona determinats errors d'incoherència amb la implementació dels famosos *quatre-passos-a-seguir*⁷⁷ en la RP: llegir el problema, seleccionar els nombres i les operacions rellevants, efectuar les operacions, escriure el resultat.

Formant part de l'explicació d'aquests bloquejos i d'aquests errors, Callejo (1994) fa referència als *fenòmens paràsits* dels quals parla Adda:

- associar automàticament a un algorisme un cert tipus de qüestions aparentment anàlogues
- associar un problema al context de classe en el qual es proposa, intentant aplicar allò darrer que s'ha après
- suposar una gradació de dificultats quan es proposen varies qüestions successives

En el capítol II.3, en parlar de les creences, reprendrem aquests aspectes cabdals que un cop i un altre veiem que interrelacionen les creences i el context. En aquesta línia Gómez-Chacón (1998b, 2000) posa l'èmfasi en la **necessitat d'articular afecte i context**, sent especialment necessari clarificar com els valors i les creences influeixen en la selecció dels coneixements i en les circumstàncies i en les condicions per què es dongui l'aprenentatge.

⁷⁴ "el nen aprèn per imitació de la conducta del professor a través d'una seqüència de tasques jeràrquicament estructurades" (Puig i Cerdán, 1988; pg.198)

⁷⁵ model definit aquí amb una gran i potser excessiva simplificació, detallat i analitzat a Vila (1995a), que serà reprès a II.3.6

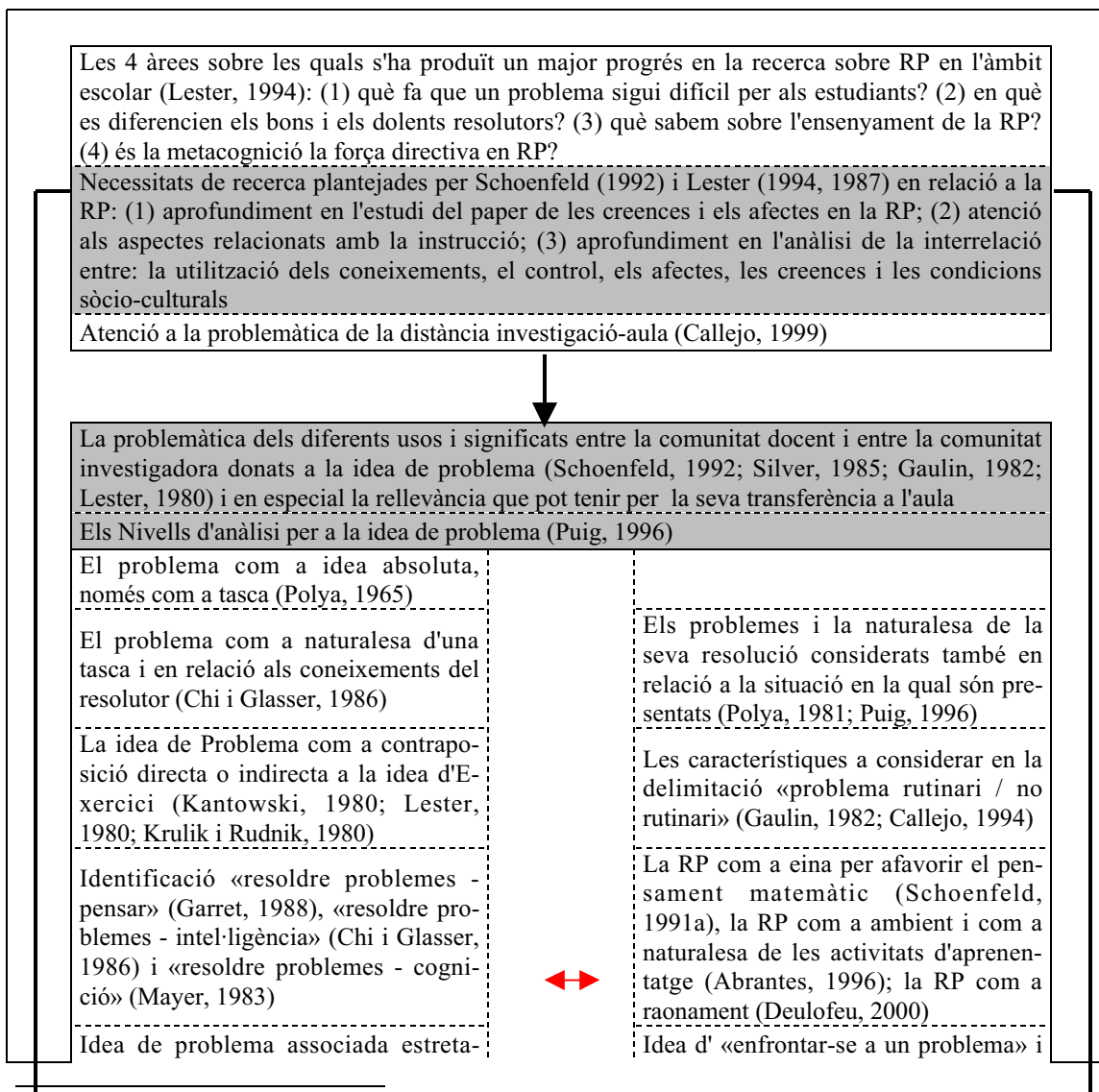
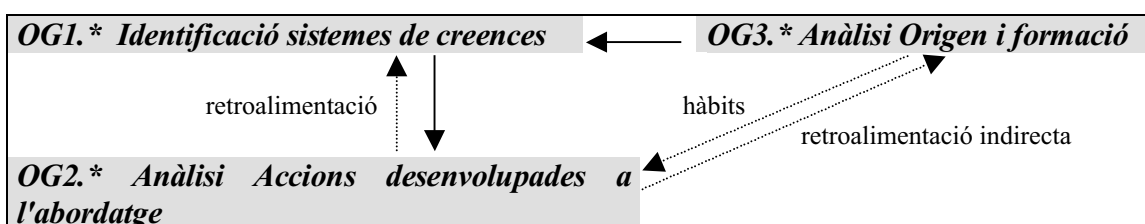
⁷⁶ per la pròpia naturalesa de l'estudi, amb un recercador extern

⁷⁷ aquests quatre-passos són utilitzats per Schoenfeld com a exemplificació/simplificació i alhora crítica d'un model de pràctica escolar que és bàsicament el que en paràgrafs anteriors hem esmentat com a «reducció dels problemes a no-problemes» (Vila, 1995a)

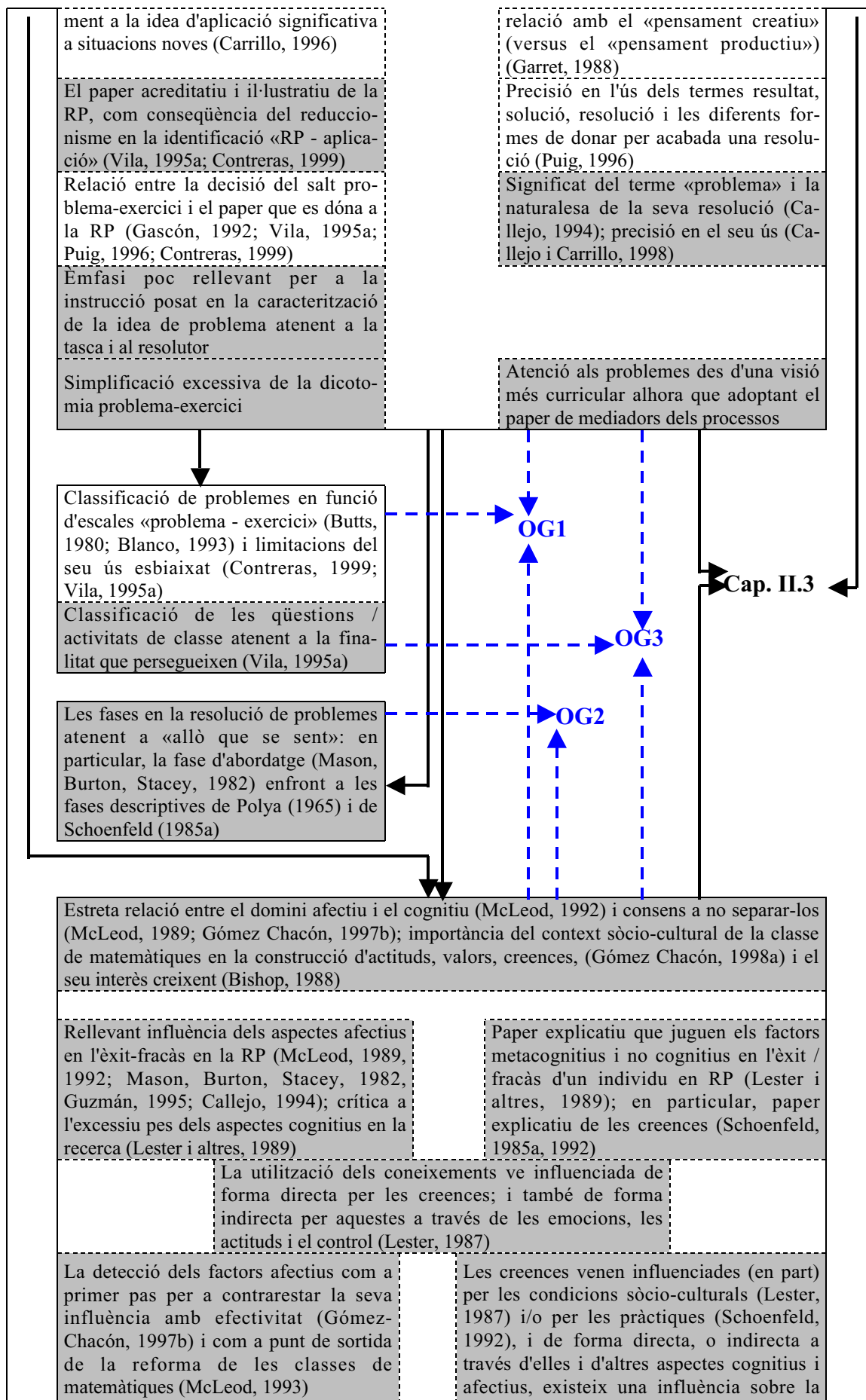
II.2.6. SÍNTESI

El següent gràfic-esquema ens sintetitza els aspectes o les referències més rellevants que seran considerats en el marc de la Resolució de problemes en Educació Matemàtica per al desenvolupament del present estudi, alhora que es relacionaran amb les aportacions que s'hi faran.

Esquema ii.2.2.- Relació entre els objectius generals i el marc considerat en Resolució de Problemes en Educació Matemàtica⁷⁸



⁷⁸ els objectius estan redactats de forma sintètica mitjançant termes clau; es pot consultar II.1



utilització dels coneixements (Lester, 1987)	
Influència dels aspectes relacionats amb el fet que l'educació formal en matemàtiques té lloc en la institució escolar (Callejo, 1994; Gómez-Chacón, 1998a)	
Fonamentació teòrica bàsica del domini afectiu en els primers estudis de Mandler (1989) i Fishbein i Ajzen (1975)	La diferència entre la conducta d'un expert i la d'un novell se situa en el pla metacognitiu (Chi i Glasser, 1986; Gil, 1988; Callejo, 1994)
Definició del domini afectiu, i dels seus descriptors específics; en particular inclusió de les creences (McLeod, 1992)	Conceptualització en el camp de la metacognició (Garofalo i Lester, 1985; Schoenfeld, 1987a) la qual és encara insuficient (Schoenfeld, 1992).
La <i>intel·ligència emocional</i> , com a visió més àmplia d'aquesta (Goleman, 1996)	Categories que es distingeixen en les creences com a component metacognitiu (Lester, 1985) i categories de decisions que s'inclouen en els aspectes relacionats amb la regulació i el control (Callejo, 1994; Lester, 1987)
Precisió en l'ús dels termes <i>emoció</i> i <i>actitud</i> (McLeod, 1992)	Consideració del terme <i>heurístic</i> en el sentit ampli de Schoenfeld (1985) i l'inventari de Carrillo (1996) en referència a la fase d'abordatge
Idees d' <i>estabilitat</i> , <i>intensitat</i> (McLeod, 1992), <i>magnitud i direcció</i> , <i>nivell de consciència i nivell de control</i> (McLeod, 1989) de les creences, emocions i actituds	
Presença en consideració de conceptes que es relacionen amb el domini afectiu: <i>confiança</i> , <i>autoconcepte</i> , <i>atribució</i> , <i>motivació</i> , <i>frustració</i> , <i>satisfacció</i> (McLeod, 1992)	
Reconceptualització i acotació de l'ús del terme <i>context</i> (Gómez-Chacón, 1998a)	La discontinuïtat de la matemàtica a l'escola i la vida quotidiana (Gómez-Chacón, 1998a)
La pragmàtica del qüestionament escolar (Adda, 1985); els <i>fenòmens paràsits</i> d'Adda com a explicació de bloquejos originats en la pràctica escolar (Callejo, 1994)	Els aspectes relacionats amb la pràctica (Schoenfeld, 1989b), i amb la « <i>suspension of sense-making</i> » (Schoenfeld, 1991b)

II.3. CREENCES I SISTEMES DE CREENCES DE L'ALUMNAT ENTORN A LES MATEMÀTIQUES EN GENERAL I A LA RP EN PARTICULAR

Al llarg del capítol II.2 s'ha fet contínua referència al paper rellevant que tenen les *creences* en l'èxit o fracàs en RP; alhora que s'ha considerat les creences tant des de la perspectiva de la *cognició* com del *domini afectiu*, afegint una estreta relació amb les condicions del *context socio-cultural* en les quals es produeix l'aprenentatge. D'altra banda, els diferents usos i significats que la tradició docent i la recerca han donat al terme «*problema de matemàtiques*» ja hem dit que prenen especial rellevància en el present estudi precisament «via les creences»: la seva transferència a l'aula.

En aquest capítol reprendrem de forma específica el seu estudi, l'estructura del qual serà en primer lloc dibuixar els trets bàsics de les línies d'investigació en *creences*, per a continuació abordar les diferents aproximacions als termes *creença* i *sistema de creences*, precisant-ne el seu ús; en el següent apartat es presentarà un marc on estudiar les creences, i finalment aquest marc es concretarà en els aspectes d'estudi de la formació i desenvolupament de les creences i la seva identificació, fent especial esment als resultats dels treballs preliminars al present estudi.

II.3.1. LÍNIES D'INVESTIGACIÓ EN CREENCES DE L'ALUMNAT

Durant els darrers anys els processos de pensament de l'alumnat han estat estudiats de forma intensiva. I en particular, els investigadors han fet notar, com ja hem esmentat a II.2.5, que les creences dels alumnes podrien ser una clau per al coneixement de la seva conducta, i en particular en matemàtiques, produint-se així una **recent** i forta corrent de recerca en aquesta direcció. Tanmateix, a l'estat espanyol, malgrat les recerques relacionades amb les creences del professorat o dels estudiants per a professors conformen una línia de treball rellevant en el conjunt⁷⁹, quant a estudis de creences de l'alumnat considerem que la producció és notablement inferior, destacant però especialment el treball de Gómez-Chacón (1997a).

Les primeres referències a *creences* (com a terme o constructe genèric) les trobem en estudis del camp de la psicologia social⁸⁰ en els anys cinquanta, en estreta relació amb el camp de la cognició, però completament fora del camp de l'educació i de les teories de l'aprenentatge. Durant els anys 60 es potencia aquesta línia de treball en l'àmbit de la Intel·ligència Artificial. I ja en els anys 70, sense sortir del camp de la **psicologia social**, són els treballs de Fishbein i Ajzen (p.e. 1975) i d'Abelson (1979), entre d'altres, els qui donen rellevància a les *creences* com a àmbit de recerca específic; malgrat aquests treballs romanen fora de l'àmbit educatiu explícit, en certa manera podríem considerar que, a diferència dels anteriors, entren a considerar indirectament el *domini afectiu*, en tant en quant les *creences* són lligades a les *actituds*.

⁷⁹ a banda de les ja esmentades de Carrillo (1996) i Contreras (1999), cal destacar el treball de Llinares (1989) al qual farem importants referències, i també els de Flores (1995) i Martínez (1994)

⁸⁰ Morales i altres (1994) citen treballs d'Asch i Festinger

En el camp de l'educació matemàtica, i en tant en quant durant els anys 70 i 80 la recerca en RP ha estat molt influenciada per les teories i mètodes de la *ciència cognitiva*, McLeod (1994) veu que en el **marc de la metacognició** les *creences de l'alumnat* han començat a prendre un paper important com a aspecte que influeix fortament en els resultats; en aquest punt ens podríem remetre al *paper explicatiu* que les *creences* juguen en els resultats de la RP, que esmentàvem de Schoenfeld en el capítol II.2, i en general als treballs esmentats a II.2.5. Tanmateix, i com ja hem esmentat, el mateix McLeod (1992, 1989a) ens apunta que aquestes recerques obvien el domini afectiu en el qual també considerem les *creences*, i l'obvien per influències i tradicions derivades de la psicologia conductista d'una banda i dels treballs de Polya d'altra banda.

En aquesta mateixa línia crítica es pronuncia Norman (1987)⁸¹ quan explicita la seva insatisfacció amb la **perspectiva tradicional del processament de la informació**, en tant en quant considera que les disciplines bàsiques de la ciència cognitiva tendeixen a ignorar que l'ésser humà és un «animal social», que interactua amb altres individus, amb l'entorn i amb ell mateix. El resultat, segons Norman, és que si bé aleshores s'havia produït un considerable progrés en algunes àrees, hi havia també una certa esterilitat en el conjunt degut a que:

"l'organisme analitzat es concep com un intel·lecte pur, que es comunica amb els altres a través d'un diàleg lògic, les percepcions, records i pensaments del qual són exactes, i que raona a través dels problemes ben formulats amb què es troba cada dia. Desgraciadament, aquesta descripció no s'ajusta a la nostra conducta real" (pg. 316)

Norman acaba aquesta crítica afirmant que

"existeix quelcom més en la intel·ligència humana que el sistema cognitiu pur, i que una ciència de la cognició no pot ignorar aquests altres aspectes" (pg.318)

Com a conseqüència senyala dotze problemes sobre els quals considera que s'hauria de centrar l'atenció i els focus de recerca, dotze problemes que considera que no són independents ni són d'igual importància els uns que els altres. Demana també que sobre ells s'aprofiti la riquesa interdisciplinària que acompanya de forma inherent la ciència cognitiva. Entre aquests problemes, Norman (1987) destaca **l'estudi dels sistemes de creences**, considerats per ell com

"«la línia divisòria» entre el camp tradicional de la ciència cognitiva (l'estudi del coneixement) i els camps dels qui estudien les interaccions dels éssers humans en el món real: antropòlegs, psicòlegs socials i sociòlegs" (pg. 329)

i sobre l'estudi dels quals manifestava moltes expectatives:

"sospito que descobrirem que la major part de la nostra conducta està determinada per aquests sistemes" (pg. 330)

⁸¹ és important precisar que el treball original en anglès és de 1981 i que fa referència al terme *creences* en una visió genèrica, no només lligada al camp de l'educació matemàtica

En aquesta mateixa línia es manifesten Silver (1985) i Schoenfeld (1985a) centrant-se en l'àmbit concret de les influències sobre la RP. En particular Silver inclou les *creences* en una relació de 10 aspectes infrarepresentats i necessitats de recerca en l'àmbit de la RP.

És així que a finals dels anys 70 i durant els anys 80, en el camp de la **psicologia cognitiva**, s'han desenvolupat ja treballs entorn a les *creences* amb lligams estrets amb les *emocions* i les *actituds* i en el camp de l'educació en general i de l'educació matemàtica en particular⁸². Paral·lelament, s'han desenvolupat treballs des d'una perspectiva antropològica, com els d'Andrade⁸³, on es posa en evidència que les *creences* i les *emocions* són «útils» tant a la memòria com a la cognició.

Entre aquesta literatura es troben recerques/treballs sobre *creences de l'alumnat entorn a les matemàtiques*⁸⁴, però són altres tipus de *creences* les que assumeixen el paper central en la **recerca en creences en el domini afectiu**. McLeod (1994) fa referència, en aquesta línia, a les recerques sobre *creences de l'alumnat entorn a un mateix*, en particular sobre la confiança sobre l'aprenentatge de les matemàtiques (sovint considerada com a actitud), autoconcepte, autoeficàcia, atribucions causals, el propi èxit i una gran varietat de variables motivacionals.

També en aquest període és on es desenvolupen treballs sobre la relació entre les *creences* i les interaccions de l'alumnat i el professorat a la classe de matemàtiques (Hart, 1989b) i sobre la relació entre les *creences* i l'aprenentatge matemàtic fora de l'entorn escolar (Carraher, Carraher i Schliemann, 1987).

Reprement l'important paper de les *creences* en la RP, sobre el qual hi ha coincidència unànime en aquests moments, Pehkonen i Törner (1996b) es qüestionen «*per què investigar sobre les creences matemàtiques?*» sintetitzant la resposta en dos punts:

"el coneixement de les concepcions⁸⁵ de l'alumnat proporciona una oportunitat als professors, (1) de comprendre millor el pensament i les accions de l'alumnat, i (2) suport a l'aprenentatge dels alumnes. Ambdós punts ajudaran al professorat a organitzar millor el seu ensenyament en relació a la visió matemàtica dels alumnes" (pg.103)

Posteriorment concreten que:

"En el camp dels sistemes de creences, sembla que hi ha quatre grans aspectes d'especial interès:

- 1) identificar i descriure creences en el sistema de creences d'un individu*
- 2) influències dels sistemes de creences matemàtiques*
- 3) naixement i desenvolupament de sistemes de creences matemàtiques*
- 4) condicions per al canvi de sistemes de creences matemàtiques"* (pg.106)

⁸² McLeod (1992) cita com a exemples rellevants en l'àmbit educatiu en general els treballs de Mandler; Kagan; Ortony, Clore i Collins; Snow i Farr; i en l'àmbit de l'educació matemàtica en particular a Bassarear; Goldin; McLeod i Adams

⁸³ McLeod (1992), que el cita, considera que precisament aquest enfocament antropològic és el que es necessita per estudiar més i més a fons la relació entre els sistemes de creences i els factors afectius

⁸⁴ per exemple els ja citats de Schoenfeld, Silver i D'Andrade

⁸⁵ en properes pàgines abordarem les diferències i solapaments en l'ús dels termes *creences* i *concepcions*

Una mostra de la complexitat de l'àmbit és la que ens citen en el marc del seu interessant treball de reconceptualització Pehkonen i Törner (1996b): en un treball anterior havien intentat organitzar la literatura dels darrers anys sobre recerca en *creences* (en general, no només de l'alumnat). El seu intent volia centrar-se en dos criteris:

- a) ubicar en les quatre categories anteriors els treballs/articles,
- b) classificar-lo alhora segons el personatge (alumne, professor, material del professor, opinió pública, administració escolar i organitzacions de professors)

Aquest intent va fracassar degut en primer lloc a qüestions de quantitat de recerca; en segon lloc la pròpia naturalesa de l'àmbit de recerca va deixar ràpidament obsolet el marc de classificació, tant per qüestions d'exhaustivitat de categories⁸⁶, com d'escassetat de criteris (només dos), com d'ambigüitat dels descriptors⁸⁷.

II.3.2. ELS TERMES «CREENÇA» I «SISTEMA DE CREENCES»

Sobre el terme «*creença*», en principi deslligat de l'àmbit de l'educació matemàtica i en el marc de la psicologia social i de la psicologia cognitiva, podem distingir diferents aproximacions que es mouen en marcs teòrics no necessàriament convergents. Ja entrant en l'àmbit concret de les *creences* en el camp de l'educació matemàtica, Pehkonen i Törner (1996b) mostren un cert desconcert en afirmar que sembla com si els investigadors sovint assumissin que els lectors saben què són les *creences*. L'única unanimitat es presenta en l'acceptació que la *creença* està a la frontera entre *l'afecte* i la *cognició*. Com a conseqüència d'aquesta vaga definició del concepte, els investigadors sovint han formulat la seva pròpia definició de *creença*, amb la qual cosa han pogut fins i tot entrar en contradicció amb altres⁸⁸.

En aquest apartat pretenem mostrar els aspectes més rellevants d'algunes d'aquestes visions (les més consensuades i coherents entre elles), dins i fora del camp de l'educació matemàtica, del terme «*creences*», acotar-lo, i acotar també l'altre terme central del present estudi: «*sistema de creences*», alhora que precisarem ambdós en relació a altres termes propers.

⁸⁶ p.e. els autors comparen el caràcter continu de l'àmbit amb el caràcter discret de la categorització

⁸⁷ p.e. quan es parla d'alumnes, les moltes tipologies d'aquests (ja només quant a nivells educatius) porten a no poder englobar-los tots en una sola

⁸⁸ En termes semblants es pronuncia Carrillo (1996), afirmant que aquest és un camp propici per a la transgressió de les fronteres que delimiten un concepte en relació als altres. I relaciona els següents termes que han estat utilitzats indistintament en múltiples ocasions: *creences*, *concepcions*, *representació*, *imatge mental*, *teoria implícita*, *constructe*, *model*, *sistema de creences*, *mapes cognitius*, *perspectiva*, *ideologia*, etc.. Davant l'aparent necessitat de «posar ordre», Carrillo cita a Bodin com un intent frustrat de tal empresa, el qual afirma haver-se rendit a l'evidència: "*s'han desenvolupat nombroses formes de parlar d'un mateix objecte i per això els camps semàntics es superposen exactament*".

D'altra banda, Furingueti (1996) intenta tancar la qüestió afirmant que aquesta varietat terminològica és deguda a qüestions/dificultats idiomàtiques; tanmateix estem amb Contreras (1999) quan considera ingènua aquesta explicació

II.3.2.1. DIFERENTS APROXIMACIONS AL TERME «CREENCES»

Fora del camp de l'educació matemàtica, ens centrarem en dues perspectives que podríem considerar les de més ampli ressò, totes dues en el camp de la psicologia social: la que relaciona estretament les *creences* amb les *actituds* i la que es mou en el camp de l'Interaccionisme Simbòlic. Finalment farem referència a la bibliografia específica d'educació matemàtica.

A) APROXIMACIÓ DES DE LA PSICOLOGIA SOCIAL: ACTITUDS / CREENCES

En la recerca bibliogràfica efectuada en aquest camp, és difícil trobar definicions explícites del terme «*creença*»; tanmateix les referències implícites al terme o les explícites relacionant-la amb el terme «*actitud*» són nombroses. Més encara, el terme «*creences*» no apareix deslligat del terme «*actituds*».

Així, quan Gairín (1986) sintetitza els elements essencials que habitualment s'accepten com a característiques de *l'actitud*⁸⁹, ho fa en aquests termes:

- a) *l'actitud* és una predisposició a l'acció;
- b) es forma i es pot modificar, malgrat es considera com una disposició relativament estable;
- c) és un principi d'organització mental en relació a un objecte o situació;
- d) aquesta relació s'efectua d'acord a una polaritat afectiva;

I és en referència al tercer apartat, on dona el paper a les *creences*⁹⁰. Més encara, en tant en quant es distingeix habitualment i amb gran consens tres components en les *actituds* (cognitiva, afectiva i *comportamental*)⁹¹ interactuant les tres entre elles, també hi ha una certa unanimitat en assignar un **paper rellevant a les creences en el component cognitiu de l'actitud**. Així Gairín (1986) en fa referència en els següents termes parlant del component cognitiu:

"en ella es referencia la idea o representació mental que tenim sobre l'objecte de l'actitud i a ella pertanyen fonamentalment els conjunts d'opinions, creences, categories, atributs i conceptes" (pg.60)

⁸⁹ Gairín (1986) assumeix la següent definició històrica **d'actitud** que pren d'Allport: "*actitud és un estat mental i nerviós de disposició adquirit a través de l'experiència, que exerceix una influència o dinàmica sobre les respostes de l'individu a tota classe d'objectes o situacions amb els quals es relaciona*" (pg. 54)

⁹⁰ en reforç d'aquesta idea remarquem que Gairín (1986, pg.49) havia citat també la definició de Rockeach d'actitud: *és una organització relativament duradera en creences entorn a un objecte o a una situació que predisposen a la persona per a respondre d'una determinada forma*; o la de Mann: *és l'organització que té un individu quant als seus sentiments, creences i predisposicions, a comportar-se de la manera en què ho fa*

⁹¹ en el marc d'aquest consens, i en l'àmbit de l'educació matemàtica, Hart (1989a) fa referència a aquestes tres components caracteritzant-les en els següents termes: cognitiva (que es manifesta en les creences subjacents en l'esmentada actitud), afectiva (que es manifesta en els sentiments d'acceptació o de rebuig de la tasca o de la matèria) i intencional (tendència a un cert tipus de comportament)

Una altra referència explícita a la relació entre els termes *creença* i *actitud*, sent novament la primera subsidiària de la segona, ens la dona Morales i altres (1994):

"Les respostes que la persona emet enfront a l'objecte de l'actitud són susceptibles d'una triple classificació, segons predominin en elles els elements d'informació-creences, afectius o d'intenció-conducta. Tanmateix, malgrat aquests elements són diferents entre ells, tots comparteixen quelcom: la disposició avaluativa enfront a l'objecte" (pg.500)

I reforçant també la connexió entre ambdós termes per la via del component cognitiu de les *actituds*, Morales (1994) analitzant el *model jeràrquic* de Rosenberg i Hovland, afirma que per caracteritzar el component cognitiu de les *actituds* s'examinen la seva *diferenciació* (nombre de creences que usa una persona en pensar en un objecte actitudinal) i la seva *integració* (consistència avaluativa de les creences, és a dir el grau amb que comparteixen la seva avaluació de l'objecte).

Vista la relació que planteja la psicologia social entre les *creences* i les *actituds*, òbviament cal preguntar-se aleshores si les *creences* són «simplement» el component cognitiu de les *actituds*. En resposta a aquesta pregunta Morales (1994), recolzant-se en autors com Lingle i Ostrom, afirma que, malgrat l'*actitud* es basi en les *creences* que conformen el component cognitiu, aquest és diferent d'elles. La prova que el component cognitiu de l'*actitud* és diferent de les *creences* la troba en què l'*actitud* exerceix una influència sobre la percepció de l'objecte i les respostes cap a ell que les *creences*, per elles mateixes, no poden exercir. L'*actitud* resulta ser un *tema* o marc cognitiu, amb un rol organitzador de la informació i de les respostes cognitives relatives a l'objecte de l'*actitud*.

Tanmateix no hi ha gran consens en aquesta qüestió; així Gairín (1986) afirma que no resulta fàcil establir la distinció conceptual entre *creença* com a informació sobre un objecte i *actitud* com a avaluació sobre ell. En suport d'aquesta dificultat, cita a Rokeach afirmant que l'*actitud* no seria més que una organització de *creences* interrelacionades entorn d'un focus comú que té propietats afectives i cognitives; la distinció conceptual, si existeix, estaria en funció del nivell de representació: l'*actitud* seria una constel·lació o organització de *creences*.

En aquest marc de les *actituds*, Gairín (1986, pg.74-75) ens distingeix el terme *creença* d'altres que hi estan estretament relacionats:

- a) **Creença-opinió.** Mentre l'*opinió* fa referència al concepte format sobre una realitat, la *creença* suposa la conformitat i assentament ferm d'aquesta realitat.
- b) **Creença-estereotip.** Els *estereotips* es caracteritzen per ser percepcions anticipades, rígides, falses o falsejades, en la majoria dels casos carregades d'afectivitat negativa.

En qualsevol cas, Gairín assumeix recolzant-se en diferents autors que la *creença* seria la categoria que englobaria tota la informació que el subjecte té sobre l'objecte, i per tant en ella quedarien englobats els conceptes com *idea*, *opinió*, *informació*, *estereotip* i tot allò que estigui relacionat amb l'àmbit del coneixement.

B) APROXIMACIÓ DES DE LA TEORIA DE L'INTERACCIONISME SIMBÒLIC

Per tal d'entendre plenament aquesta aproximació, a la qual només farem breu referència, és interessant ressenyar en primer lloc les principals idees que sustenten aquesta teoria de *l'Interaccionisme Simbòlic* (IS):

- La conducta humana és imprevisible i indeterminada. Les persones creen constantment significats i procediments per adequar la seva conducta.
- L'adaptació de l'home al medi ambient s'ha fonamentat en la creació de símbols verbals i no-verbals i en la modificació d'aquests en funció de les diferents situacions de comunicació. Cal que les definicions siguin compartides.
- La conducta o actuació és el resum dels comportaments manipulats per la situació (quan ho fa? com ho fa?).

En aquest marc, LLinares (1992), en un estudi sobre alumnes per a ser futurs professors de matemàtiques, utilitza l'IS com a perspectiva que proporciona una fonamentació als estudis de les *creences epistemològiques*. Aquest autor ens explica que l'IS es caracteritza per tres premisses:

- *"l'ésser humà orienta els seus actes cap a les coses en funció d'allò que signifiquen per a ell;*
- *el significat d'aquestes coses es deriva de, o sorgeix com a conseqüència de, la interacció social;*
- *els significats es manipulen i modifiquen mitjançant un procés interpretatiu desenvolupat per la persona en enfrontar-se amb les coses amb les que es troba."* (pg.59).

Això li suggereix que els significats que els individus atribueixin als objectes sobre els quals s'articula la seva formació i la seva pràctica futura constitueixen el centre sobre el qual gravitaran les seves accions, sempre dins de les limitacions contextuals en les que es trobin. LLinares (1992), citant a Blummer, un dels teòrics de l'IS, afirma que la *interpretació* és un procés formatiu en el qual els *significats* són utilitzats i revisats com a instruments per a l'orientació i formació de l'acte. Així, el *significat* determina la manera en què una persona veu l'objecte, la manera en què està disposada a actuar amb respecte al mateix i la forma en la qual està disposada a parlar d'ell.

C) EL TERME «CREENÇA» EN L'ÀMBIT ESPECÍFIC DE RECERCA EN EDUCACIÓ MATEMÀTICA

Com hem esmentat al principi de l'apartat, estem d'acord amb Pehkonen i Törner (1996b) a efectuar sobre la bibliografia específica de recerca en educació matemàtica les següents crítiques:

- a) d'una banda, les referències al terme *creença* són ambigües, quan no són només referències implícites, i difícilment assumeixen el paper d'una definició formal i explícita;

- b) d'altra banda, el terme creença és presentat habitualment o bé com a «confrontació a» (coneixement, actitud,...) o com a component explicativa de determinades conductes, tots ells aspectes rellevants als quals ja hem fet referència en anteriors apartats.

En aquesta línia per exemple Thompson (1992) confronta implícitament el terme *creença* al terme coneixement, en tant en quant considera que les *creences* poden ser mantingudes amb diferents graus de convenciment, no tenen perquè ser consensuades, la disputabilitat està associada a elles i sovint es mantenen o es justifiquen per raons que no tenen criteris que comportin cànons d'evidència.

O també Hart (1989a), que usa el terme *creença* per tal de reflectir certs tipus de judicis entorn a un conjunt d'objectes (conceptes matemàtics), i el relaciona i diferencia alhora explícitament del terme *actitud*, afirmant que reserva el terme «*actitud cap a un objecte*» per al conjunt format per la reacció emocional cap a l'objecte, el comportament cap a l'objecte i les *creences entorn a l'objecte*.

Hart, citant a Colby, afirma també que les *creences* són ens teòrics no observables, postulats per a justificar certes relacions observables en la conducta humana. El concepte així explicitat té una component interactiva entre l'individu i l'objecte de la *creença*. Recordem que des de la psicologia, el terme «*creença*» pot ser subjectat a la teoria de les actituds, com ja hem dit, donat que en moltes definicions *d'actitud* el *model-de-tres-components* utilitza el component creença.

En el treball de Pehkonen i Törner (1996b) trobem altres autors que defineixen o utilitzen el terme *creença* amb una certa relació amb les *actituds*. És el cas de Bassarear que veu les *actituds* i les *creences* en pols oposats d'una dimensió bipolar i de Grigutsch (que va elaborar el terme alemany «*mathematisches Weltbild*», comparable al terme anglès «*mathematical world view*» de Schoenfeld (1985a), quan aquest parla de *sistema de creences*) que va elaborar aquest terme i el va fonamentar teòricament en la teoria de les actituds.

En la mateixa línia de caracterització incompleta o implícita, Lester, Garofalo i Kroll (1989) expliquen que les *creences* constitueixen el coneixement subjectiu de l'individu sobre ell mateix, sobre les matemàtiques, sobre la RP i sobre els temes tractats en el plantejament de problemes. McLeod (1992) defineix creença també en termes de les experiències subjectives, coneixements subjectius (imatges) de l'estudiant i del professor.

Ponte (1994) entén les creences com a veritats personals i intransferibles de cadascú, que deriven de l'experiència o la fantasia, i que contenen una forta component afectiva i de valoració.

En el present treball utilitzarem el terme *creences* com l'entén Schoenfeld (1992):

"els coneixements/interpretacions (understanding) i sentiments d'un individu que donen forma a la manera en què aquest conceptualitza i s'implica en el seu comportament matemàtic" (pg.358)

Aquesta definició, malgrat li pugui ser parcialment aplicada la crítica de l'inici de l'epígraf, creiem que recull simultàniament les dues idees que considerem cabdals en el terme: integra aspectes cognitius i afectius i alhora incorpora la influència que les creences exerceixen sobre el comportament matemàtic.

En qualsevol cas, en el marc del Second MAVI-Workshop, i arran de la manca d'univocitat del terme *creences*, es proposen les següents caracteritzacions del terme⁹²:

- les *creences* tenen diferents graus de consciència;
- les *creences* estan lligades a situacions;
- quelcom és més *coneixement* i menys *creença* quant menys paper juguen els afectes;
- cal dirigir-se cap a concepcions més dinàmiques de les *creences*, no tan estàtiques;
- més que de *creences* bàsiques, hauríem de parlar de creences primitives;
- *afectes*, *creences* i *coneixements* són tres conjunts dels quals no hom sap com són les seves inclusions i interseccions; un model a plantejar és el de les *creences* com a conjunt amb part comuna amb els altres dos, sent aquests dos disjunts.

II.3.2.2. EL TERME «SISTEMA DE CREENCES» I LA SEVA RELACIÓ I DIFERÈNCIA AMB EL TERME «SISTEMA DE CONEIXEMENTS»

Quant al terme «*sistema de creences*», ha estat elaborat per tal de suplir algunes de les moltes mancances de la definició del terme «*creença*»: en principi es pot pensar que les creences d'un individu formaran la seva pròpia estructura, i en el cas de l'ensenyament de les matemàtiques ens dóna més informació que les creences de forma aïllada.

Tanmateix, novament tant Thompson (1992) com Abelson (1979) es queixen del seu ús lliure per part dels recercadors, sense aportar-ne cap explicació, i de la manca d'acord en aquest ús.

Així, per exemple Schoenfeld (1985a), que també prefereix parlar de *sistema de creences* més que de *creença*, dóna la següent definició:

"one's mathematical worlds view, the perspective with which one approaches mathematics and mathematical tasks" (pg.45)

En ella Schoenfeld ha incorporat un altre terme que en certa manera podem considerar sinònim d'aquest: «*view*»; aquest terme anglès o la traducció no del tot literal de «*visió de les matemàtiques*» de vegades és usada per alguns autors com a sinònim de *sistema de creences*

En qualsevol cas, una definició històrica és la de Rokeach (1968), qui considera que un *sistema de creences* és quelcom que:

⁹² citades per Carrillo (1996, pg.31)

"representa dins d'ell, d'una forma organitzada psicològicament, malgrat no necessàriament lògica, totes i cadascuna de les incomputables creences personals entorn a la realitat física i social" (pg.2)

Aquesta definició presenta dues de les característiques essencials que assumim en el significat de *sistema de creences*: en primer lloc és una «suma» de [totes les] creences; però en segon lloc, és «més» que la suma, en tant en quant la seva *organització* hi aporta «valor afegit». I per tant és amb aquesta precisió que assumirem la definició.

Una descripció molt gràfica per tal d'il·lustrar aquest terme ens la donen Pehkonen i Törner (1996b) quan afirmen que el *sistema de creences* d'un individu està enredat amb el seu sistema de coneixements d'una manera que sembla "un plat d'espaguetis": si intentes considerar un punt de forma separada (i tires d'ell), possiblement acabaràs estirant de tot. Sense sortir del significat d'aquesta metàfora, ens citen a Underhill que ens parla de «*teixit de creences*» («*web of beliefs*»).

Des d'una visió no del tot coincident, Green (1971) afirma que la noció de *sistema de creences* és una *metàfora per a examinar i descriure com estan organitzades les creences d'un individu* i considera que el *sistema de creences* d'una persona està caracteritzat per la *forma en què creu i no tant pel què creu*. Recolzant-se en aquesta idea Thompson (1992) considera convenient, al menys des d'un punt de vista estructural, imaginar un *sistema de creences* de forma semblant al que recordem d'una estructura cognitiva en un domini conceptual particular. Com a tal, doncs, el *sistema de creences* és dinàmic de naturalesa, experimenta canvis i reestructuracions en comparar els individus les avaluacions de les seves *creences* amb les seves experiències. És en aquest sentit que Green també prefereix parlar de *sistema de creences* que de *creences* aïllades.

Tanmateix, a aquesta idea de Green que assumirem en el present treball ens hi referirem sota el nom *d'estructura del sistema de creences*, idea que reprendrem en posteriors apartats.

En la mateixa línia de relacionar el terme amb altres que li són propers semànticament o amb tradició d'ús, és important indicar que en la bibliografia de recerca entorn a les creences del professorat⁹³ o de futurs docents apareixen termes com *perspectiva*, *ideologia*, *teories implícites*,... (tots ells en relació a l'activitat educativa) als quals es dóna un significat proper al de sistema de creences. En qualsevol cas, són termes als quals no ens referirem en el present estudi, exceptuant el terme *perspectiva*, del qual en farem l'ús de llenguatge habitual.

D'altra banda, el *sistema de creences* té molt en comú amb el *sistema de coneixements*, per això val la pena emfasitzar els trets distintius. En aquest sentit Abelson (1979), en una referència ja clàssica, ens dóna set trets que estan necessàriament interrelacionats i per tant cap d'ells és definitori en ell mateix:

- Tret n.1: Els elements d'un *sistema de creences* no estan *consensuats*. O sigui, els elements d'un sistema poden ser molt diferents dels d'un altre, malgrat facin referència al mateix camp. En aquest sentit Abelson fa una observació important en forma de pregunta: *un sistema de creences és «conscient» que té*

⁹³ aquesta és una constant que té el seu interès remarcar: és en relació al professorat i no en relació a l'alumnat que la bibliografia és més diversa i confusa

alternatives? D'altra banda, la diferència semàntica entre *creença* i *coneixement* porta la connotació de *disputabilitat*. Finalment, i en el mateix tret, cal notar que el *sistema de creences* té una component de *dins-fora*: des de dins un *sistema de creences* compartit en un col·lectiu, el coneixement científic pot ser vist com un *sistema de creences*.

- **Tret n.2:** Els *sistemes de creences* estan preocupats en part per l'existència o inexistència de certes entitats conceptuals. És en aquestes entitats on normalment s'organitzen les categories en els *sistemes de creences*, i per tant juguen un paper que no és el típic en un *sistema de creences*.
- **Tret n.3:** Els *sistemes de creences* sovint inclouen representacions de «*mons alternatius*», el *món com és* i el *món com seria*. El món ha de ser canviat per assolir un estat ideal. Els factors han de ser eliminats per tal d'eliminar les deficiències.
- **Tret n.4:** El *sistema de creences* depèn molt fortament de components avaluatius i afectius. Dos aspectes doncs que cal distingir-hi: cognitius i motivacionals. Així les polaritats tenen una forta influència organitzadora en el sistema.
- **Tret n.5:** És probable que els *sistemes de creences* incloguin una quantitat substancial de material *episòdic* provinent de les experiències d'altres persones.
- **Tret n.6:** El conjunt de continguts inclosos en un *sistema de creences* és sovint altament «*obert*». No està clar on dibuixar les fronteres.
- **Tret n.7:** En les *creences* pot haver diferents graus de certesa. El *creient* pot ser un defensor apassionat o, en l'altre extrem, creure més probable un punt de vista.

II.3.2.3. EL TERME «CONCEPCIÓ» I LA SEVA RELACIÓ AMB «CREENÇA»

Si la proximitat semàntica d'una banda, i l'ús i abús d'altra banda, dels termes *creença*, *sistema de creences* i *coneixement* han fet necessària una acotació dels mateixos en el present estudi, la confusió dels termes *creença* (belief) i *concepció* (conception) és encara més gran.

En primer lloc és important remarcar que les referències clàssiques al terme *concepció* (en relació a l'alumnat) **es troben associades a conceptes concrets**, i històricament a partir d'Ausubel (1968) consideren la *concepció*⁹⁴ com a punt de partida de l'aprenentatge de l'alumnat; així, gran part dels estudis de *concepcions de l'alumnat* fan referència a objectes matemàtics rellevants que es mouen en el camp conceptual. En aquest marc, es diferencien els termes «*concept definition*» i «*concept image*» utilitzats per Tall i Vinner (1981) o apareixen els termes «*operational conception*» i «*structural conception*» utilitzats per Sfard (1991) o el d' *objet mental* per Freudenthal (1983).

En aquesta línia, Sfard (1991) contraposa el terme *concepció* al terme *concepte* afirmant:

"la paraula «concepte» (a vegades substituïda per "noció") serà esmentada cada vegada que una idea matemàtica sigui tractada en la seva forma «oficial» (com a constructe teòric dins «de l'univers formal del coneixement ideal»); al conjunt sencer de representacions internes i associacions evocades pel concepte

⁹⁴ o *preconcepció*, o *teories ingènues* o *concepcions errònies*, segons la seva naturalesa

o la rèplica del concepte a l'interior, subjectiu "univers del coneixement humà", ens hi referirem com a «concepció»" (pg.3)

Tanmateix, en el marc dels estudis sobre el pensament de l'alumnat apareixen també (pocs) estudis on és utilitzat el terme *concepció* amb significats no associats a un concepte, per exemple associat a la naturalesa de les matemàtiques o de la resolució de problemes. Aquest fet **no implica però una generalització a objectes matemàtics** de caràcter no conceptual del terme abans descrit. Així per exemple, Abrantes (1994) utilitza el terme *concepció* (*concepcao*) com a traducció de l'original anglès «*belief*»⁹⁵ (creença). Borasi (1990) també utilitza indistintament els termes «*belief*» i «*conception*», malgrat sovint (però no sempre) l'utilitza en contextos diferents: així, per exemple parla de «*student's conceptions of the nature of mathematics*» i de «*mathematical beliefs*». Woods (1987) utilitza el terme «*misconception*» com a sinònim de *creença errònia*. Contreras (1999) ens esmenta altres estudis en aquesta línia d'utilització del terme *concepció* sobre la resolució de problemes o la naturalesa de la matemàtica (Carpenter, Lesh, Schoenfeld) o estudis relacionats amb components actitudinals (Silver, McLeod); tanmateix és important precisar que Contreras (1999) quan parla de les «*student' beliefs*» ho tradueix com a «*concepcions de l'alumnat*» (pg.17).

Per tant podem concloure que el terme *concepció*, en relació per exemple a la resolució de problemes (objecte del nostre estudi), no és utilitzat de forma rellevant (en termes de freqüència) en la bibliografia d'estudis sobre l'alumnat, sent *creença* o *sistema de creences* els termes que podríem anomenar «estàndard» (p.e. els treballs de Frank, 1985, 1988; Garofalo, 1989; Gómez-Chacón, 1998b, 2000; Hart, 1989a; Lester, 1980, 1985, 1994; Lester, Garofalo i Kroll, 1989; Malmivuori, 1996; McLeod, 1989ab, 1992; Pehkonen i Törner, 1996ab; Schoenfeld, 1985a, 1987a, 1989ab, 1992; Törner i Pehkonen, 1996).

Però és en el marc dels estudis sobre el pensament del professorat on abunda més la bibliografia sobre l'estudi de les seves *concepcions*, i és en aquests estudis específics o en successives reconceptualitzacions de l'àmbit, on creiem que més es dona la confusió o l'ús indistint dels termes «*creença - concepció*» i especialment «*sistema de creences - concepció*».

Quant al primer d'aquests aspectes, autors com Carrillo (1996) en el seu estudi sobre les concepcions del professorat entorn a la matemàtica i el seu ensenyament, expliciten la utilització indistinta dels termes *concepció* i *creença* (pg.33), inclinant-se però pel primer d'ells. També Thompson (1992), malgrat diferència a nivell teòric entre «*belief*» i «*conception*», utilitza indistintament qualsevol dels dos termes, i en algunes ocasions els utilitza fins i tot conjuntament. En anteriors treballs (Thompson, 1984) utilitza també indistintament, a part dels dos anteriors, els termes *visió* i *preferències*.

Quant al **solapament entre el significat** (parcial, però important) que nosaltres hem atorgat al terme *sistema de creences* i el que tradicionalment s'ha atorgat al terme *concepció* el podem observar en les següents definicions d'aquesta (no del tot coincidents):

"...una estructura mental més general, abraçant creences, significats, conceptes, proposicions, regles, imatges mentals i preferències" (Thompson, 1992, pg.130)⁹⁶

⁹⁵ ho explicita així, pg. 172

⁹⁶ la qual cosa fa pensar que considera les *concepcions* en un sentit molt ampli, o les *creences* com una subclasse de les *concepcions*

"Entendrem les concepcions com un marc organitzatiu de naturalesa metacognitiva, implícit en el pensament del subjecte i difícilment observables, que incideixen sobre les seves creences i determinen la seva presa de decisions" (Contreras, 1999, pg.22)

"Les concepcions són els esquemes subjacents d'organització de conceptes, que tenen essencialment naturalesa cognitiva" (Ponte, 1994, pg.199)

"[la concepció d'un professor entorn a la matemàtica és...] el conjunt de creences i posicionaments sobre la matemàtica que suposa l'investigador que té el professor, després de l'anàlisi de les seves opinions i de les respostes a preguntes sobre la seva pràctica respecte a temes relatius a la naturalesa de la matemàtica" (Carrillo, 1996, pg.29)

En qualsevol cas, creiem que aquest solapament és més degut a la tradició d'ús que no pas a la superposició semàntica dels termes *creença*, *sistema de creences* i *concepció*. Tanmateix, en el present estudi obviarem l'ús del terme *concepció* en relació amb l'alumnat, i utilitzarem els termes *creença*, *sistema de creences* i *estructura del sistema de creences* en la forma descrita en pàgines anteriors, considerant que cobreixen suficientment l'abast de l'estudi i no crearan confusió.

II.3.3. UN MARC PER ESTUDIAR LES CREENCES

Una característica negativa de l'emergent emfasització de la recerca sobre *creences* ha estat durant un temps el fet de la **manca d'un marc teòric consistent**. Així, McLeod (1992) apunta que fins aleshores, i malgrat intents tímids⁹⁷

"les dades han estat organitzades de diferents maneres en diferents estudis, on cada recercador ha optat per explicar les influències de les creences en cada context particular (...) Malgrat cadascun d'aquests enfocaments ha contribuït al nostre coneixement de quant importants són les creences per a l'ensenyament i aprenentatge de les matemàtiques, s'ha posat poc èmfasi a proporcionar una estructura global per a l'estudi de les creences en educació matemàtica" (pg.579)

aportant a continuació ell mateix una primera estructura global que serà esmentada en aquest apartat, i encetant a la vegada un període en el qual es treballa en aquesta línia de reconceptualització (Pehkonen i Törner, 1996ab).

⁹⁷ cita a Rokeach i D'Andrade

II.3.3.1. DE LES CREENCES DE L'ALUMNAT A LES ACCIONS DESENVOLUPADES

Com hem esmentat repetidament, la hipòtesi que mou el present treball i sobre la qual se centra la recerca és el fet consensuat recentment en la literatura sobre recerca en educació matemàtica entorn a que les creences dels alumnes podrien ser una clau per al coneixement de la seva conducta en matemàtiques i una font d'explicació de les seves dificultats. Pehkonen i Törner (1996b; pg.102) ens dona les següents explicacions quant als seus efectes:

"les creences poden tenir un poderós impacte sobre com els nens aprenen i usen les matemàtiques, i per tant, poden ser un obstacle a l'efectiu aprenentatge de les matemàtiques. Els alumnes que tenen unes creences rígides i negatives de les matemàtiques i el seu aprenentatge fàcilment es convertiran en aprenents passius, emfasitzaran el record més que la comprensió en l'aprenentatge."

A) PERSPECTIVA GENÈRICA DES DE LA PSICOLOGIA SOCIAL: LES ACTITUDS COM A VARIABLES PREDICTORES DE LA CONDUCTA?

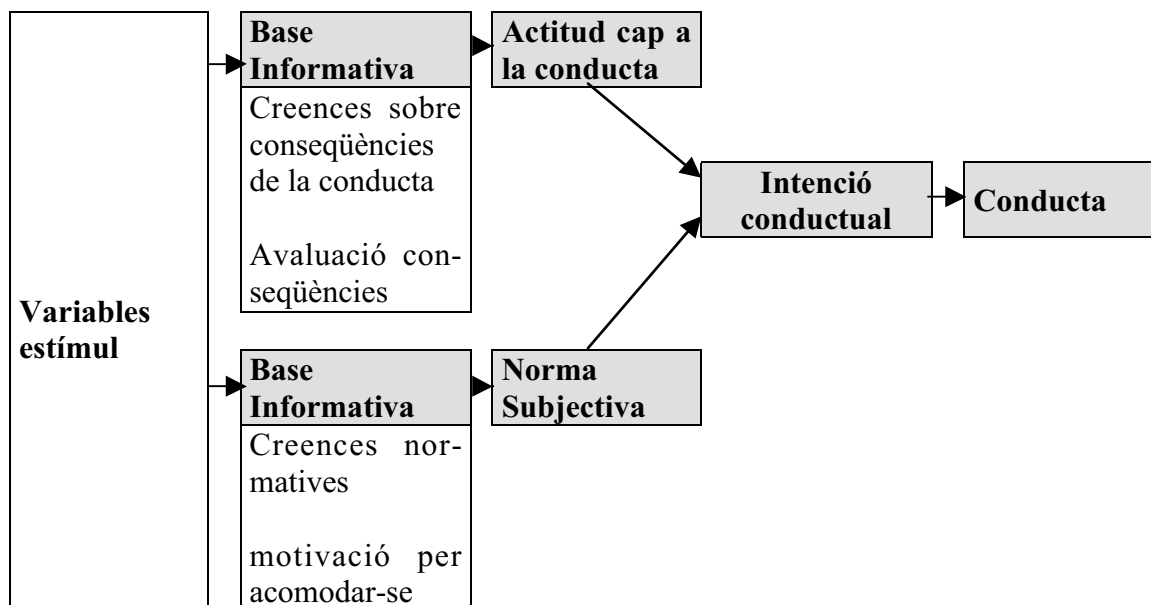
Seguint els arguments anteriors, i tornant al camp de la psicologia social, hem de connectar novament *creences* i *actituds*; de fet, un dels interessos de l'estudi d'actituds recau precisament en el supòsit que aquestes predisposen a l'acció. Però, com diu Gairín (1986), admetre algun tipus de relació mediatitzadora de *l'actitud* respecte a la *conducta* suposaria obrir la possibilitat de predir conducta i d'altra banda admetre la personalitat de la persona enfront a la realitat exterior.

El mateix Gairín argumenta les **discrepàncies entre actitud i conducta** en quatre punts que resumim així:

- a) l'actitud no prediu conducta perquè no provoca conducta;
- b) moltes actituds diferents tenen relació amb el mateix acte de conducta;
- c) moltes vegades tenim actituds «intel.lectualitzades» que no tenen cap relació amb l'acció; en aquest cas no té sentit esperar coherència entre creences, sentiments i conducta real;
- d) en tant en quant la conducta és «pública» i les actituds «privades», es poden mantenir les conductes mentre les actituds canvien.

És així doncs que alguns autors senyalen l'actitud només com un element més dels determinants de la conducta. Per exemple, Fishbein i Ajzen (1975) consideren la funció de la **intenció** que sota determinades circumstàncies mediatitza la relació actitud-conducta. Amb més precisió, aquests ens parlen del model d'acció raonada: l'actitud més la **norma social subjectiva** (pressió social que la persona percep en el seu entorn proper), que és funció de les **creences normatives** (en virtut de les quals la persona estima la probabilitat que la seva conducta resulti o no acceptable per a aquelles persones l'opinió de les quals acostuma a tenir molt en compte), determinen la intenció de la persona cap a la conducta. L'esquema ii.3.1 ens representa aquest model.

Esquema ii.3.1. Síntesi del model de l'acció raonada de Fishbein i Ajzen (extret de Morales, 1994)



D'aquest model, considerem rellevant per al present estudi la consideració de les *creences normatives* i la *norma social*, que seran repeses en el bloc III.

Tanmateix, trobem a faltar en aquest model la consideració explícita d'un molt ampli i canviant conjunt d'altres variables, principalment de tipus metacognitiu i de tipus afectiu.

Més recentment, Morales (1994) ens introdueix creences de naturalesa i tipologia diferents que com veurem al bloc III seran adaptades per al disseny del present estudi. En particular entén que l'actitud cap a la conducta es considera funció de les *creences conductuals* que manté la persona, i que "*multiplicant la força de la creença (és a dir, el grau de certesa amb què es manté) per la intensitat del caràcter positiu o negatiu del resultat s'obté un producte que indica la direcció en què aquesta creença concreta orienta a la persona cap a l'objecte de l'actitud*" (pg.515). En particular, *l'actitud cap a la conducta* la defineix com la suma ponderada de *creences avaluatives* (conductuals) entorn a les conseqüències de realitzar la conducta en qüestió. Qualsevol *creença avaluativa* conté un element d'*expectativa* (de que l'execució de la meua conducta produirà aquella conseqüència) i un element de *valor* (bondat o maldat de tal conseqüència), estant els elements d'expectativa i valor combinats de forma multiplicativa (expectativa x valor)

Reprenent el model de Fishbein i Ajzen, Morales també afirma que en la intenció de realitzar determinades conductes influeix també el *control percebut*. Aquest es basa en les *creences de control*, en funció de les quals "*la persona estableix si posseeix o no les capacitats o recursos necessaris per tal de dur a terme la conducta i si existeixen les oportunitats adequades. Cada creença de control es multiplica per l'efecte facilitador o inhibidor del recurs o l'oportunitat de que es tracti, i la suma de tots els productes dona lloc al control percebut. La introducció de l'element de control percebut afegeix un sumand a la llista proposada pel model de l'acció raonada. La intenció és ara igual a l'actitud més la norma subjectiva més el control percebut. Si abans l'acció es descrivia*

com a raonada, ara es pot qualificar de **planificada**. Existeix evidència empírica que mostra que incorporar el control percebut millora el pronòstic de la intenció" (pg.516).

A manera de resum, encara que incomplet, volem citar novament a Morales (1994) que defineix el terme «**hàbits**» com les accions que, per haver-se realitzat moltes vegades, s'han convertit en automàtiques, per a continuació afirmar que⁹⁸

"Creences, actituds, decisions o intencions i hàbits conformen diferents estructures cognitives per representar el coneixement que la persona té de la conducta. Les creences són les estructures que contenen la informació més detallada sobre l'acció.

Les actituds representen la seva avaluació global.

Les decisions o intencions constitueixen una integració d'actituds i creences.

Els hàbits representen la informació sobre l'acció en forma procedimental i inclouen informació sobre com portar-la a terme.

La diferència entre decisió o intenció i hàbit està en el caràcter deliberat de la primera i automàtic de la segona. L'hàbit no requereix esforç conscient, pot passar desapercebut i pot actuar al mateix temps que altres processos. Això no passa amb la intenció" (pg.520)

B) LA RELACIÓ DE LES CREENCES DE L'ALUMNAT AMB LA SEVA CONDUCTA MATEMÀTICA A L'AULA

Les creences i l'aprenentatge semblen formar un cercle: les experiències dels alumnes en l'aprenentatge de les matemàtiques influeixen i formen les seves creences; d'altra banda, les creences tenen conseqüències sobre com actuaran els alumnes en situacions d'aprenentatge de matemàtiques. És indubtable (Pehkonen i Törner, 1996) que la manera com les matemàtiques són ensenyades a classe formaran, pas a pas, la visió dels alumnes sobre les matemàtiques.

En aquest marc, Pehkonen i Törner (1996b) distingeixen quatre aspectes rellevants:

- les creences matemàtiques com a *sistema regulador*,
- les creences matemàtiques com a *indicador*,
- les creences matemàtiques com a «*inertia force*»⁹⁹,
- el caràcter *prognòstic* del sistema de creences matemàtiques, entès com una conseqüència dels anteriors aspectes.

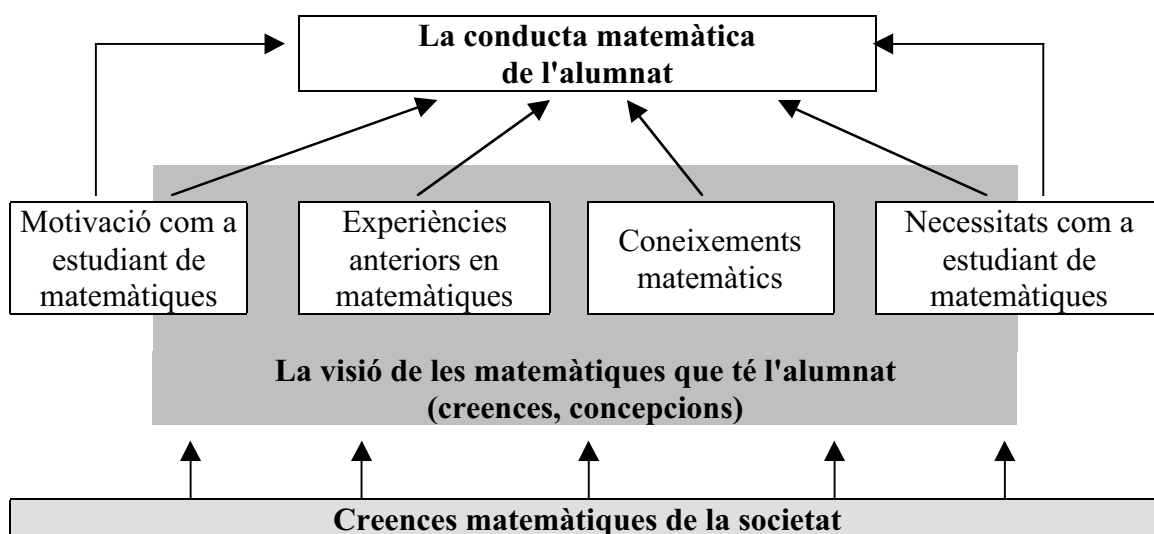
Així, en primer lloc consideren que les creences matemàtiques d'un individu, el seu "*view of mathematics*", formen un **sistema regulador** de la seva estructura de coneixement, i és dins d'aquest marc que l'individu pot actuar i pensar. D'altra banda, aquest marc influeix fortament el seu rendiment matemàtic.

Concretant aquest caràcter regulador de les creences, Frank (1985) ens senyala alguns factors que afecten la conducta de RP dels alumnes, exposant-los via creences i que Pehkonen i Törner il·lustren en el següent gràfic:

⁹⁸ els subratllats són nostres

⁹⁹ mantenim el terme original anglès

Gràfic ii.3.2. Factors que afecten la conducta matemàtica de l'alumnat (Pehkonen i Törner, 1996b, adaptat de Frank, 1985)



Així, les creences juguen un paper central com a factor de fons en el pensament i les accions dels alumnes. Les creences matemàtiques d'un alumne actuen com a filtre que influencia gairebé tots els seus pensaments i accions referents a les matemàtiques. Les experiències matemàtiques prèvies d'un alumne l'influencien al nivell de les seves creences (sovint inconscientment). Quan utilitza els seus coneixements matemàtics, les seves creences hi estan altament involucrades. En contrast amb això, la motivació i les necessitats d'un alumne no sempre estan connectades amb les seves creences matemàtiques. A més, hi ha moltes creences matemàtiques de la societat, potser mites (matemàtiques = càlcul), que també influeixen la conducta matemàtica de l'alumne via el seu sistema de creences.

En resum, l'alumne actua dins d'una molt complexa xarxa d'influències: el professor/a de matemàtiques, la classe de matemàtiques, els amics, els pares, els parents, altres professors d'altres matèries amb la seva visió de les matemàtiques i del seu e/a.

En qualsevol cas, en aquesta línia estem plenament en el terreny de la metacognició en els termes de Schoenfeld (1987a) o Lester, Garofalo i Kroll (1989).

Quant al segon dels aspectes abans esmentats per Pehkonen i Törner (1996b), les creences juguen el paper **d'indicador** d'aspectes no directament observables. En el cas concret de l'alumnat, ens permeten inferir sobre la seva experiència escolar i en general sobre el propi sistema escolar.

Quant a l'**aspecte inercial** (amb connotació negativa) al qual fan referència, posen com exemple que si un alumne té una visió rígida de com són ensenyades les matemàtiques, aleshores qualsevol altre enfocament el confondrà.

II.3.3.2. ESTRUCTURA DEL SISTEMA DE CREENCES

En tant en quant el sistema de creences, com hem dit, és un conjunt organitzat, les creences dels individus formen grups, no estan mai en completa independència les unes de les altres; més encara, tendim a ordenar les nostres creences en petites agrupacions (Green, 1971). En pàgines anteriors hem precisat que aquesta organització que Green considera inherent al propi sistema de creences (fins al punt de no distingir el conjunt de la seva organització) és el que considerem (definim) en el present estudi com a *estructura del sistema de creences*.

És aleshores que sorgeix la pregunta clau: *quines característiques estructurals té aquesta organització?* Els intents de resposta poden donar llum a dos aspectes també clau:

- a) aquestes estructures poden oferir explicacions a les diferents maneres d'actuar posteriors;
- b) per a qualsevol canvi de creences cal tenir clares les interrelacions entre elles, ja que l'experiència ens fa veure que les creences no canvien dràsticament.

En suport d'aquesta darrera idea, estem amb Cooney (1998) quan afirma que la capacitat d'un individu per a reestructurar el seu context té molt a veure amb l'estructura amb la qual manté les creences i coneixements.

Abordant la pregunta clau anterior, Green (1971) va identificar **tres dimensions** de sistemes de creences: *caràcter quasi-lògic, centralitat psicològica i estructura de clusters*.

La primera de les característiques, *estructura quasi-lògica*, reprèn l'observació de que una creença mai està sostinguda en total independència de la resta de creences, i que algunes creences estan relacionades amb altres de la mateixa manera que les causes estan relacionades amb les conclusions. Més concretament, parlarem de *creences primàries* i *creences derivades*. Tanmateix la qualificació de primària/derivada no és intrínseca a cada creença: una creença pot ser primària en un context o sobre un objecte/circumstància (i per tant derivar-se'n creences) i a l'hora ser derivada d'unes altres en altres circumstàncies.

És important també precisar que aquestes creences no tenen perquè guardar coherència (consistència) entre elles (Abelson, 1979), la qual cosa és precisament un aspecte que diferencia, hem dit, el sistema de creences del sistema de coneixements. Entorn a aquesta possible inconsistència, Carrillo (1996) recolzant-se en Schutz, manté que un individu pot considerar la vàlida simultània d'afirmacions que de fet són incompatibles entre elles, la qual cosa no origina necessàriament una falàcia lògica.

La segona dimensió (*centralitat psicològica*) està relacionada amb el grau de convicció amb el qual les creences són sostingudes o amb la seva força psicològica. Segons Green, les creences en el sistema poden ser vistes com a *centrals* o *perifèriques*: les centrals són les sostingudes més fortament i les perifèriques són les susceptibles de ser

canviades o examinades¹⁰⁰. Aquesta dimensió és inexistent en els sistemes de coneixement.

En aquesta dimensió Cooney (1998) fa referència a l'existència de creences que són mantingudes fins i tot en contra de l'evidència¹⁰¹, o sense considerar aquesta, o de forma separada a les raons o canons. Aquestes creences són anomenades per ell «*nonevidentially*»¹⁰². Cooney conclou que aquestes creences no poden ser modificades simplement introduint les raons evidents.

Green (1971) considera que la *primacia lògica* i la *centralitat psicològica* són dimensions *ortogonals*, argumentant que són diferents característiques o propietats de les creences: p.e. una creença pot ser lògicament derivada i també psicològicament central, o pot ser lògicament primària i psicològicament perifèrica.

La tercera dimensió fa referència al fet que les creences estan tancades en *clusters de creences*, més o menys aïllats els uns dels altres i amb interrelacions amb altres conjunts. Aquesta característica pot explicar algunes de les inconsistències dels sistemes de creences que abans hem esmentat que es presenten (Törner i Pehkonen, 1996b; LLinares, 1992), en tant en quant les creences es mantenen en *clusters* més o menys aïllats, però protegits entre ells impedit-ne la relació. És a dir, fins i tot es poden mantenir creences *psicològicament centrals* oposades entre elles, sense que això suposi cap conflicte, arribant-se a expressar l'"*escut de protecció*" com una altra creença (LLinares, 1992).

En un marc molt diferent a allò anteriorment descrit, el de l'Interaccionisme Simbòlic (IS) que LLinares (1992) va desenvolupar i utilitzar en el seu estudi, se'ns proposa descriure les cognicions dels individus a través de la Teoria d'esquemes, considerant els esquemes com a xarxes organitzades de conceptes i les seves relacions. LLinares es repenja en Shavelson per identificar alguns esquemes (guions, escenaris i esquemes proposicionals) que poden ajudar a clarificar l'estudi dels processos cognitius i els defineix com:

"Guions: estructures de coneixement concret estereotipat que s'adquireixen a través de rutines quotidianes, aquests esquemes resumeixen informació sobre l'experiència diària, establint relacions temporals.

Els escenaris representen l'organització del coneixement sobre els llocs i escenaris del procés d'ensenyament, és a dir, el coneixement del professor de les persones i objectes en el context aula descrits a través de relacions espaials.

Els esquemes proposicionals no estan derivats de la interacció pràctica-coneixement del professor, sinó de la possessió de determinades nocions derivades del significat adscrit a "objectes relatiu" al seu futur treball professional arrelades a la seva experiència prèvia." (pg.60-61)

Des d'aquesta perspectiva teòrica, LLinares (1992) utilitza en el seu estudi la Teoria dels Constructes Personals de Kelly, com a aproximació a l'estructura dels significats i les creences. Des d'aquest plantejament, la gent s'entén a ella mateixa i al seu entorn,

¹⁰⁰ aquesta idea havia estat anteriorment presentada per Rokeach (1968)

¹⁰¹ hem traduït el terme *evidence*, com a *evidència*, però volem emfasitzar-hi la connotació d'existència d'elements de *justificació*, d'*argumentació* que considerem que Cooney dona al terme

¹⁰² mantenim el terme original anglès

anticipant eventualitats futures per mitjà de la construcció de models de prova i l'avaluació d'aquests models mitjançant criteris personals.

Finalment, i en aquest marc de propostes, LLinares (1992), des del punt de vista de l'estructura de les creences, va considerar els constructes psicològics:

- *Idees nucli*. Principis i idees a través de les quals es repenja i articula el sistema conceptual de l'estudiant per a professor. Són punts de suport que justifiquen les característiques de les possibles accions a classe.
- *Raons*. Declaracions que poden repenjar l'establiment de les Idees Nucli o les connecten amb les Perspectives.
- *Perspectives d'acció*. Descripció d'una acció desitjable per a la consecució d'uns objectius derivats de les Idees Nucli.

Com es veurà en el bloc III, aquests constructes han estat considerats indirectament en el disseny d'alguns dels instruments de recerca del present estudi, en tant en quant són un pas, des del punt de vista tant teòric com metodològic, cabdal més enllà del marc de Green (1971). Tanmateix, l'edat de l'alumnat objecte de l'estudi ens ha desaconsellat la seva consideració fidel.

II.3.3.3. CATEGORIES DE CREENCES

Un altre aspecte rellevant és la categorització-marc dels estudis sobre creences. Entorn a la complexitat d'aquesta categorització, ja hem fet esment anteriorment de l'intent sense èxit de Pehkonen i Törner. Tanmateix, sense voler abastar la seva amplitud, diferents autors han donat aquest marc de referència en l'estudi de les creences de l'alumnat.

Schoenfeld (1985a; pg.15) parla per exemple de creences entorn a

- a) a un mateix
- b) al context
- c) al tema
- d) les matemàtiques

Els mateixos Pehkonen i Törner (1996b, pg.102), fent referència al *sistema de creences matemàtiques*, o «visió de les matemàtiques» ("*An individual's view of mathematics*" en termes seus o de Schoenfeld), consideren també 4 grans categories principals:

- a) creences entorn a les matemàtiques,
- b) creences entorn a un mateix dins les matemàtiques,
- c) creences entorn a l'ensenyament de les matemàtiques,
- d) creences entorn a l'aprenentatge de les matemàtiques.

Tanmateix, els mateixos autors indiquen que aquestes categories poden ser dividides en elements més petits. Per exemple, la categoria "*creences entorn a les matemàtiques*" comprèn un ampli espectre de creences: p.e. *creences entorn a la naturalesa de les matemàtiques*, i *creences sobre el subjecte de les matemàtiques*; també, *creences sobre la naturalesa de les tasques matemàtiques*, *creences sobre els orígens del coneixement*

matemàtic¹⁰³, i creences referents a les relacions entre matemàtiques i el món empíric (matemàtiques aplicades) són d'aquest grup.

Remuntant-nos als antecedents, en primera instància McLeod (1989b) distingia dues grans categories de creences en l'alumnat, utilitzant també, a l'igual que Schoenfeld i Pehkonen i Törner, com a **indicador de categoria l'objecte de creença**¹⁰⁴:

- a) creences entorn a les matemàtiques com a disciplina;
- b) creences entorn a ells mateixos i a la seva relació amb la matemàtica.

En la primera gran categoria, McLeod considera que el domini afectiu no hi és involucrat de forma rellevant, malgrat sí que forma una part important del context en el qual es desenvolupa aquest. Les recerques i treballs de Schoenfeld (1985a, 1989ab) i de Silver (1985) se centren precisament en les creences entorn a les matemàtiques i la seva influència en la RP. Un àmbit de recerca emergent en aquesta categoria és el que fa referència a les diferències pel gènere.

Tanmateix, en la segona gran categoria McLeod hi considera una gran component afectiva i una estreta relació amb les nocions de metacognició, autoregulació i autoconsciència. Alhora hi inclou creences relacionades amb la confiança (l'autoconfiança en la capacitat d'aprenentatge matemàtic juga un paper especial en les actituds matemàtiques dels estudiants; Malmivuori, 1996), l'autoconcepte (Gómez-Chacón, 1997b, hi inclou entre d'altres l'interès en matemàtiques i els interessos amb matemàtiques, la motivació i el plaer associat amb les matemàtiques, l'eficiència en matemàtiques, la potència o debilitat dels temes,... i considera que tenen una forta influència en la perspectiva de la matemàtica) i l'atribució causal de l'èxit o el fracàs (en les quals descriu explícitament les dimensions interna/externa, estabilitat i controlabilitat de l'agent causal, les quals seran repeses en el bloc III).

Pocs anys després, McLeod (1992) afegeix dues categories més a les dues anteriors:

- c) creences entorn a l'ensenyament de les matemàtiques;
- d) creences entorn al context social.

En referència a la primera, i evidentment en el cas concret de l'alumnat, considera que les recerques han aportat molt poc fins aleshores. Quant a la segona, en particular fa referència a les normes socials, a la influència de la família, especificant en qualsevol cas que es tracta d'una nova àrea de treball.

Tornant novament al marc proposat per LLinares (1992) repenjan-se en Harvey, aquest considera tres categories (constructes psicològics) i les seves relacions entre ells, per a descriure les creences i la seva organització en els individus. A diferència dels anteriors, aquestes categories no fan referència a l'objecte de creença, sinó a la seva **pròpia naturalesa**:

- *Domini*, definida com l'embolcall i compromisos personals de la creença establerta. Aquesta component s'inferiria de l'ús d'afirmacions que descriuen eleccions personals, decisions i accions (és a dir, el contingut de la creença) .

¹⁰³ aquestes primeres categories són precisament les que aporta Borasi (1990) en el seu treball

¹⁰⁴ els mateixos criteris i semblants categories són els proposats per Garofalo (1989), pg. 502

- *Raons*, són els arguments que acompanyen l'elecció de la creença establerta i formen la connexió entre les creences i les accions a l'aula. Aquesta component s'inferia de l'ús dels termes "perquè" i "com", que expliquen la importància de la creença.
- *Pràctica aplicada*, descriu la transferència individual de les creences a la pràctica..

La utilització d'aquests components, per LLinares (1992), ajuda a descriure les creences individuals i a realitzar les comparacions entre els sistemes conceptuals dels estudiants.

Finalment, un tercer criteri de categorització de les creences, que també serà utilitzat en el present estudi, és el que presenten Fishbein i Ajzen (1975) atenent a l'**origen de les creences**. Aquest criteri ens porta a distingir-ne tres naturaleses diferents, malgrat novament tornem a trobar una estreta interrelació:

- *creences descriptives*: són les que provenen de l'observació directa, i sobre tot de l'experiència resultant de mantenir un contacte personal amb els objectes; aquestes creences es conserven amb certesa màxima, en estar validades contínuament per les experiències; acostumen a tenir un pes privilegiat en les actituds dels individus;
- *creences inferencials*: aquestes poden haver-se assolit mitjançant relacions prèviament apreses o mitjançant l'ús de sistemes formals de codificació; en qualsevol cas, la base de la creença inferencial és sempre alguna classe de creença descriptiva;
- *creences informatives*: provenen d'informacions procedents dels demés.

II.3.4. FORMACIÓ I DESENVOLUPAMENT DE LES CREENCES

Sembla haver un amplíssim consens a admetre que les creences entorn a les matemàtiques (en general, i qualsevol subcategoria en particular) i a l'ensenyament de les matemàtiques són una **conseqüència de la pràctica escolar** (Abrantes, 1994; Frank, 1988; Garofalo, 1989; McLeod, 1993; Puig, 1996; Schoenfeld, 1992, 1989b). En particular, Puig (1996) considera que per a un alumne un problema de matemàtiques és

"la conseqüència de les pràctiques escolars pròpies de la seva història escolar, de manera que qualsevol cosa que en una classe de matemàtiques ha estat qualificada de problema i assignada com a tasca com a tal contribueix a constituir el que després l'alumnat identifica com a problemes" (pg.311)

O més en general, Schoenfeld (1992) sintetitza que

*"1. els alumnes extreuen les seves creences sobre la matemàtica formal (el seu sentit d'aquesta disciplina) en gran part de les seves experiències a l'aula;
2. les creences dels alumnes s'adapten al seu comportament de manera que tenen conseqüències extraordinàriament poderoses (i moltes vegades negatives)"* (pg.359)

Tanmateix, creiem que no és tant una relació causa-efecte com més aviat una estreta **relació de retroalimentació** mútua. En aquest sentit, enllaçaríem d'una banda amb tot el conjunt de disfuncions i discontinuïtats entre la matemàtica escolar i l'activitat matemàtica fora de l'escola, i d'altra banda amb l'estandardització dels contextos on es proposa RP, aspectes tots dos, junt amb altres, tractats a II.2.5.2 en parlar del complex entreteixit d'aspectes del context socio-cultural que, a través de les creences, influeixen en la utilització dels coneixements matemàtics. Concretament veurem en el proper apartat algunes creences identificades per alguns autors que aniran estretament lligades a pràctiques escolars observades o inferides, en especial un estudi de Schoenfeld (1992); o el treball de Frank (1988), en el qual els alumnes estudiats només resolien problemes no rutinaris com a «feina extra»¹⁰⁵.

En aquesta categoria de factors propis de la pràctica escolar que influeixen en la formació del sistema de creences (en qualsevol de les categories esmentades a II.3.3) es podria incloure aspectes com

- a) La naturalesa de les tasques desenvolupades.
- b) La pròpia organització escolar.
- c) Les experiències especialment gratificants o frustrants.
- d) Les relacions de tot tipus que es produeixen durant el procés escolar (amb el professorat, entre l'alumnat, el clima de l'aula,...).
- e) Els propis sistemes de creences del professorat (Thompson, 1992; Carrillo, 1996; Contreras, 1999); tanmateix, resultats d'anteriors estudis (Vila, 1995a) ens porten a concloure que la incidència d'aquests no és directa sobre l'alumnat sinó a través de la pràctica escolar implementada, amb la qual no té perquè haver-hi una consonància total.
- f) La discontinuïtat entre les matemàtiques escolars i les de la vida quotidiana.

Tanmateix, malgrat manifestar un acord total i absolut amb aquesta forta influència de la pràctica escolar en la formació i desenvolupament de les creences (en particular aquelles referides a les matemàtiques i al seu ensenyament, com concreten els autors esmentats), creiem que són més els factors que directament o indirectament incideixen en aquesta formació. Ens referim tant a **factores externs al sistema escolar** (Gómez-Chacón, 1998b, 2000) (influència de pares i familiars, d'amics, de mites socials o creences socials,...) com a **factores de la pròpia personalitat** que «*predisposen a*».

Guzmán (1995; pg.76) fa referència concreta als *mites socials*, o a la *saviesa popular*, en termes de que

"són les modes, les formes específiques de pensar prevalents en el nostre ambient que ens influeixen de maneres molt subtils entrant a formar part de la nostra estructura mental de tal manera que, sense sentir-ho, ens fan actuar segons esquemes que no són sempre els més efectius ni són els que probablement adoptaríem si haguéssim d'inventar-nos-els nosaltres mateixos"

En el fons es tracta de «*consells del sentir ambiental*» que, encara sent fonamentalment «sans», en ocasions poden convertir-se en obstacles (Guzmán, 1995). Per tant estem

¹⁰⁵ estudis propis anteriors (Vila, 1993a, 1995a) porten a conclusions coincidents

parlant de creences que són mantingudes per l'alumnat en tant en quant formen part (s'originen en) d'aquesta saviesa popular, sent deformades (o adaptades) i esdevenint alhora font de bloquejos. Guzmán exemplifica les següents:

- *busca la resposta correcta*; pressuposant l'existència i unicitat d'aquesta;
- *això no és lògic*; supervalorant aquest vessant del raonament matemàtic;
- *segueix les normes*;
- *cal ser pràctics*.

Aquests factors externs i de personalitat, i d'altres, junt amb els que fan referència als derivats de la pràctica escolar, seran explicitats en el bloc III i considerats en el present estudi.

En tant en quant ja hem esmentat repetidament la necessitat de no separar els dominis afectiu i cognitiu, Gómez-Chacón (1997b; pg.14) ens il·lustra en el gràfic ii.3.3 les teories de Mandler i McLeod entorn a com els factors afectius influeixen en l'aprenentatge de les matemàtiques i alhora entorn a com les actituds es consoliden en creences i com les emocions estan influenciades pel sistema de creences.

Gràfic ii.3.3. Diagrama interpretatiu sobre la teoria de Mandler i McLeod, extret de Gómez-Chacón, 1997b

