

UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA
ESCOLA TÈCNICA SUPERIOR D'ENGINYERIA INDUSTRIAL DE BARCELONA



TESI DOCTORAL

Aportació a l'estudi de la reducció de vibracions
residuals en transitoris de moviment generats
mitjançant accionaments de cinemàtica no lineal

EDUARD LORES GARCIA

2017



Departament d'Enginyeria
Mecànica



UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA

Aportació a l'estudi de la reducció de vibracions residuals en transitoris de moviment generats mitjançant accionaments de cinemàtica no lineal

Doctorand

Eduard Lores-Garcia

Directors

Dra. Lluïsa Jordi Nebot

Dr. Joaquim M. Veciana Fontanet

Tesi presentada per a obtenir el títol de Doctor per la
Universitat Politècnica de Catalunya

Barcelona, 2017

*Si en franquejar una muntanya en la direcció d'una estrella,
el viatger es deixa absorbir massa pels problemes de l'escalada,
s'arrisca a oblidar quina és l'estrella que el guia.*

Antoine de Saint-Exupéry

M'agradaria fer explícit el meu agraïment a totes les persones i entitats que, d'alguna manera o altra, han fet possible la realització d'aquest treball:

als directors d'aquesta tesi, per la seva ajuda, dedicació i confiança mostrada en aquest treball

al departament d'Enginyeria Mecànica de la Univesitat Politècnica de Catalunya i a l'empresa HP Inc., per totes les facilitats que m'han donat durant aquests darrers sis anys

als meus pares Lluís i Begonya, a la meva germana Mònica i a la resta de familiars i amics pel seu suport incondicional

a la meva parella Anna, per estar sempre al meu costat

Índex

Resum	xi
Resumen	xiii
Abstract	xv
1 Introducció	1
1.1 Motivació de l'estudi	1
1.2 Objectius	3
1.3 Estructura de la tesi doctoral	3
2 Estat de l'art	5
2.1 Definició de lleis de moviment per a minimitzar vibracions residuals	5
2.1.1 Generació de senyals d'entrada per convolució amb un tren d'impulsos en sistemes lineals (<i>Input shaping</i>)	6
2.1.2 Generació de senyals d'entrada per convolució amb un tren d'impulsos en sistemes no lineals	12
2.1.3 Generació de senyals d'entrada per convolució de polsos en el domini temporal en sistemes lineals	13
2.1.4 Filtratge digital del senyal de comanda	16
2.1.5 Inversió de la dinàmica del sistema	18
2.1.6 Sèries trigonomètriques	18
2.2 Control actiu de vibracions	19
2.2.1 Control actiu realimentat (<i>feedback control</i>)	19
2.2.2 Control actiu per avançament o prealimentat (<i>feedforward control</i>)	20
2.3 Cinemàtica inversa en configuracions de punt mort	21
3 Eines de disseny i caracterització	23
3.1 Continuitat en un punt en funcions d'una variable	23
3.1.1 Continuitat	23

3.1.2	Criteris de continuïtat en un punt	24
3.2	Eines de disseny de lleis de moviment	24
3.2.1	Corbes de Bézier no paramètriques	25
3.3	Capacitat dels actuadors elèctrics convencionals	32
3.4	Eines de caracterització de vibracions	34
3.4.1	Transformada de Laplace i transformada de Fourier	35
3.4.2	Relació entre les transformades de Laplace i de Fourier	38
3.4.3	Propietats i aplicació de les transformades	39
3.4.4	Resposta dels sistemes lineals	39
3.4.5	Representació gràfica de la funció de resposta freqüencial	40
3.4.6	Resposta a una entrada sinusoidal	41
3.4.7	Resposta impulsional	42
3.4.8	Resposta temporal a una excitació arbitrària. Integral de convolució	43
3.4.9	Relació entre la resposta freqüencial i la resposta impulsional	44
3.5	Característiques del sistema vibratori	45
3.5.1	Sistema amb excitació per la base	45
3.5.2	Sistema amb inèrcia governada	46
4	Caracterització del sistema d'estudi	49
4.1	Problemàtica de la cinemàtica inversa en mecanismes amb punts morts	50
4.2	Estudi cinemàtic en configuracions de punt mort	53
4.2.1	Anàlisi de velocitats	53
4.2.2	Anàlisi d'acceleracions	56
4.2.3	Validació dels resultats	60
5	Definició de lleis de moviment en l'entorn d'un punt mort	63
5.1	Condicions de continuïtat de la llei de moviment	64
5.1.1	Condicions de continuïtat de la llei de moviment obtinguda a partir de la convolució d' $u_a(t)$ amb un tren d'impulsos	64
5.1.2	Condicions de continuïtat de la llei de moviment obtinguda a partir de la convolució d' $u_a(t)$ amb un pols	68
5.2	Definició de lleis de moviment basades en el mètode de convolució amb un tren d'impulsos	73
5.3	Definició de lleis de moviment basades en el mètode de convolució amb un pols	77
6	Experimentació	81
6.1	Muntatge experimental	81
6.1.1	Conjunt mecànic	81
6.1.2	Sistema de control. Captació de dades	84
6.2	Assajos experimentals	85
6.2.1	Capacitat de l'actuador elèctric	85
6.2.2	Sèrie 1	86
6.2.3	Sèrie 2	87
6.2.4	Sèrie 3	88
6.2.5	Sèrie 4	89

7	Conclusions i extensions	91
7.1	Conclusions	91
7.2	Aportacions	93
7.3	Extensions	93
	Bibliografia	100
A	Càlcul del valor del numerador de l'acceleració dependent \ddot{q}^d en un punt mort	101
B	Càlcul de la primera i segona derivada de la matriu ϕ_q^d respecte al temps en una configuració de punt mort	105

Resum

Les màquines i els mecanismes, habitualment, poden presentar un comportament vibratori en el seu funcionament ja que estan formades per sòlids deformables de massa no negligible i unions no rígides. Aquest comportament vibratori es pot posar de manifest per a excitacions transitòries provocades tant per forces externes com per moviments d'inèrcies internes. Normalment, aquest tipus de vibracions segueixen presents en acabar el transitori, i poden influir negativament en el funcionament correcte del sistema. Les oscil·lacions romanents en el sistema un cop ha finalitzat l'excitació transitòria s'anomenen vibracions residuals.

En l'actualitat, les tècniques de reducció de vibracions residuals en sistemes oscil·latoris es poden dividir en dos grans grups: els que tracten d'incidir directament en la llei de moviment ja sigui modificant-la prèviament o de manera adaptativa en temps real, i els basats en el control actiu de vibracions.

D'altra banda, l'accionament que mou una màquina requereix generalment d'una relació de transmissió no unitària per tal d'adequar el parell –o força– i la velocitat de l'actuador amb el moviment de la càrrega. Amb l'objectiu d'aconseguir la relació desitjada, es pot pensar en l'ús d'elements amb cinemàtica lineal –o molt aproximadament lineal– com, per exemple, engranatges, corretges o cadenes. No obstant, els engranatges i les cadenes introdueixen jocs en el sistema que poden dificultar-ne el control i el bon funcionament. A més a més, aquest fet pot provocar l'excitació no controlada d'alguns dels modes propis vibratoris de la màquina, la qual cosa dificulta la reducció de les vibracions residuals. Pel que respecte a les corretges, afegeixen una rigidesa addicional prou baixa com per a introduir un mode propi vibratori rellevant quant al control d'aquesta dinàmica no desitjada.

Una alternativa possible per a evitar els inconvenients esmentats és fer ús de mecanismes de barres d'un grau de llibertat de cinemàtica no lineal i amb moviment pla que actuïn al voltant d'una configuració de punt mort. Aquesta opció permet reduir notablement els jocs introduïts en el sistema i aconseguir elevades relacions de transmissió, però comporta l'estudi en detall de la cinemàtica inversa al voltant d'aquestes configuracions.

En aquesta tesi doctoral, es proposa la generació de senyals d'excitació o control en sistemes mecànics per a minimitzar l'aparició de vibracions residuals. La transmissió de moviment del sistema d'estudi es realitza mitjançant accionaments de cinemàtica no lineal d'un grau de llibertat amb moviment pla. En general, en mecanismes de transmissió de cinemàtica lineal –o gairebé lineal– la llei de moviment desitjada a la sortida de l'accionament és pràcticament idèntica al senyal de comanda o d'entrada al control corresponent. En el desenvolupament proposat, però, com s'utilitza una transmissió amb cinemàtica no lineal al voltant de configuracions de punt mort, el senyal de comanda o d'entrada a l'accionament i la llei de moviment resultant difereixen notablement.

Per una altra part, la viabilitat del disseny del senyal de comanda de l'accionament, per a poder ser reproduït mitjançant actuadors elèctrics convencionals, depèn, en gran mesura, de les condicions de continuïtat de la llei de moviment a l'inici, al final i en el pas per les configuracions singulars. El desenvolupament dut a terme es basa en la resolució de les indeterminacions resultants de l'anàlisi de la cinemàtica inversa per mitjà de la regla de L'Hôpital per tal d'obtenir les relacions de continuïtat entre el senyal de comanda i la llei de moviment resultant. Per a la reducció de vibracions residuals, s'empren els mètodes coneguts actualment amb les restriccions que comporta el fet que hi hagi punts morts en el rang de funcionament del mecanisme.

Els sistemes vibratoris considerats són els que es poden modelitzar com a sistemes lineals discrets d'un grau de llibertat i que es poden descriure amb equacions de moviment de paràmetres constants. Amb la finalitat de reduir les vibracions residuals d'aquests sistemes, el mètode presentat utilitza, com a funcions base, corbes de Bézier no paramètriques.

Finalment, es comprova la validesa del mètode a partir d'assajos experimentals. El muntatge consta d'un accionament format per un servomotor de corrent continu (DC), un mecanisme de transmissió de pistó-biela-manovella i un pèndol com a sistema oscil·latori, l'eix de rotació del qual es mou solidari amb el pistó. En primer lloc, es valida experimentalment la continuïtat C^n mínima que ha de complir un senyal de comanda per a poder ser reproduït mitjançant un actuator elèctric convencional. Posteriorment, es realitzen quatre sèries d'experiments cadascuna de les quals consta de dos assajos. En el primer, es defineix una llei de moviment que compleix les condicions necessàries per a passar per una configuració de punt mort de l'accionament. En el segon assaig, es modifica aquest senyal per tal de reduir les vibracions residuals del pèndol. La bondat en els resultats obtinguts en els assajos valida l'estudi analític proposat.

Resumen

Las máquinas y mecanismos, habitualmente, pueden presentar un comportamiento vibratorio en su funcionamiento ya que están formadas por sólidos deformables de masa no despreciable y uniones no rígidas. Este comportamiento vibratorio se puede poner de manifiesto para excitaciones transitorias provocadas tanto por fuerzas externas como por movimientos de inercias internas. Normalmente, este tipo de vibraciones siguen presentes al terminar el transitorio, y pueden influir negativamente en el funcionamiento correcto del sistema. Las oscilaciones remanentes en el sistema una vez ha finalizado la excitación transitoria se conocen con el nombre de vibraciones residuales.

En la actualidad, las técnicas de reducción de vibraciones residuales en sistemas oscilatorios se pueden dividir en dos grandes grupos: los que tratan de incidir directamente en la ley de movimiento ya sea modificándola previamente o de manera adaptativa en tiempo real, y los basados en el control activo de vibraciones.

Por otro lado, el accionamiento que mueve una máquina requiere generalmente una relación de transmisión no unitaria para adecuar el par –o fuerza– y la velocidad del actuador con el movimiento de la carga. Con el objetivo de conseguir la relación deseada, se puede pensar en el uso de elementos de cinemática lineal –o aproximadamente lineal– como, por ejemplo, engranajes, correas o cadenas. No obstante, los engranajes y las cadenas introducen juegos en el sistema que pueden dificultar su control y su buen funcionamiento. Además, este hecho puede provocar la excitación no controlada de algunos de sus modos propios vibratorios, lo que dificulta la reducción de las vibraciones residuales. Con respecto a las correas, añaden una rigidez adicional suficientemente baja como para introducir un modo propio vibratorio relevante en cuanto al control de las vibraciones residuales.

Otra alternativa posible es hacer uso de mecanismos de barras de un grado de libertad de cinemática no lineal y con movimiento plano que actúen alrededor de una configuración de punto muerto. Esta opción permite reducir notablemente los juegos introducidos en el sistema y conseguir elevadas relaciones de transmisión, pero implica el estudio en detalle de la cinemática inversa alrededor de estas configuraciones.

En esta tesis doctoral, se propone la generación de señales de excitación o control en sistemas mecánicos para minimizar la aparición de vibraciones residuales. La transmisión de movimiento del sistema de estudio se realiza mediante accionamientos de cinemática no lineal de un grado de libertad con movimiento plano. En general, en mecanismos de transmisión de cinemática lineal –o casi lineal– la ley de movimiento deseada en la salida del accionamiento es prácticamente idéntica a la señal de entrada al control correspondiente. En el desarrollo propuesto, no obstante, como se utiliza una transmisión con cinemática no lineal alrededor de una configuración de punto muerto, la señal de control o de entrada al accionamiento y la ley de movimiento resultante difieren notablemente.

Por otro parte, la viabilidad del diseño de la señal de control del accionamiento, para poder ser reproducida mediante actuadores eléctricos convencionales, depende, en gran medida, de las condiciones de continuidad de la ley de movimiento en el inicio, final y en el paso por estas configuraciones singulares. El desarrollo realizado se basa en la resolución de las indeterminaciones resultantes del análisis de la cinemática inversa por medio de la regla de L'Hôpital para obtener las relaciones de continuidad entre la señal de control y la ley de movimiento resultante. Para la reducción de vibraciones residuales, se utilizan los métodos conocidos actualmente imponiendo las restricciones que conlleva el hecho de que haya puntos muertos en el rango de funcionamiento del mecanismo.

Los sistemas vibratorios considerados en esta tesis son los que se pueden modelizar como sistemas lineales discretos de un grado de libertad y que se pueden describir mediante ecuaciones de movimiento de parámetros constantes. Con la finalidad de reducir las vibraciones residuales de estos sistemas, el método presentado en esta tesis utiliza, como funciones base, curvas de Bézier no paramétricas.

Finalmente, se comprueba la validez del método a partir de ensayos experimentales. El montaje consta de un accionamiento formado por un servomotor de corriente continua (DC), un mecanismo de transmisión de pistón-biela-manivela y un péndulo como sistema oscilatorio, cuyo eje de rotación se mueve solidario con el pistón. En primer lugar, se valida experimentalmente la continuidad C^n mínima que tiene que cumplir una señal de control para poder ser reproducida mediante un actuador eléctrico convencional. Posteriormente, se realizan cuatro series de experimentos cada una de las cuales consta de dos ensayos. En el primero, se define una ley de movimiento que cumple las condiciones necesarias para pasar por una configuración de punto muerto del accionamiento. En el segundo ensayo, se modifica esta señal para reducir las vibraciones residuales del péndulo. La bondad en los resultados obtenidos en los ensayos valida el estudio analítico propuesto.

Abstract

Machines and mechanisms can usually exhibit a vibratory behavior during operation since they are formed by deformable solids of non-negligible mass and non-rigid joints. This oscillatory behavior can be shown for transient excitations caused by both external forces and internal inertia movements. Normally, this kind of vibrations are still present even after the end of the transient, and can negatively influence the correct operation of the system. Remaining oscillations in the system once the transient excitement has finished are called residual vibrations.

Nowadays, residual vibration techniques in oscillatory systems can be divided in two different groups: the ones that try to influence directly into the motion law, either modifying it previously or in an adaptative form in real time, and the ones based on the active control of vibrations.

On the other hand, the drive that moves a machine generally requires a non-unitary transmission ratio in order to adjust the torque –or force– and the speed of the drive with the movement of the load. With the objective of achieving the desired ratio, one may think about using elements with lineal kinematics –or roughly linear– such as, for example, gears, belts or chains. However, gears and chains introduce plays in the system that may hinder its control and its correct operation. In addition, this fact may produce the uncontrolled excitation of some of its own vibration modes, which makes it difficult to reduce residual vibrations. Regarding belts, they add an additional stiffness low enough to introduce a relevant vibration mode as regards the control of residual vibrations.

Another possible solution is to use one degree of freedom bar mechanisms with non-linear kinematics and planar motion that works around a dead point configuration. This option allows to notably reduce the plays introduced in the system and achieve high transmission ratios, but implies the study in detail of the inverse kinematics around these configurations.

In this dissertation the generation of excitation or control signals in mechanical systems in order to minimize the appearance of residual vibrations is proposed. The transmission

of the motion is carried out through one degree of freedom non-linear kinematic drives with planar motion. In general, in linear kinematic transmission mechanisms –or roughly linear–, the desired motion law at the output of the drive is nearly the same than the input signal to the corresponding control. In the proposed development, however, as non-linear kinematics transmissions are used near dead point configurations, the control signal of the drive and the resulting motion law differ considerably.

On the other hand, the feasibility of control signal design of the drive depends to a great extent on the conditions of continuity of the motion law at the beginning, ending and passing through these singular configurations. The development performed is based on the resolution of the resultant indeterminacies of the inverse kinematic analysis through the use of L'Hôpital's rule to obtain the continuity relations between the control signal and the resulting law of motion. For the reduction of residual vibrations, currently known methods are used imposing the restrictions that entails the existence of dead points in the operating range of the mechanism.

The oscillatory systems considered in this thesis are those that can be modeled as discrete linear systems of one degree of freedom and that can be described by equations of motion with constant parameters. In order to reduce the residual vibrations of these systems, the method presented in this thesis uses, as base functions, non-parametric Bézier curves.

Finally, the validity of the method is verified based on experimental tests. The test bench consists of a drive formed by a direct current servomotor (DC), a transmission mechanism of a piston-slider-crank mechanism and a pendulum as an oscillating system, whose rotation axis moves in conjunction with the piston. First of all, the minimal continuity C^n required for a control signal in order to be performed by electrical conventional actuators is experimentally confirmed. Thus, four series of experiments are performed each of which consists of two tests. In the first one, a law of motion that meets the necessary conditions to pass through a dead point configuration of the drive is defined. In the second test, this signal is modified in order to reduce the residual vibrations of the pendulum. The goodness in the results validates the analytical study proposed.

Nomenclatura

a, b, c, d	rang de robustesa d'un <i>Input Shaper</i>
a, k	valor escalar
a_i, b_i	coeficient i -èssim d'una equació diferencial
a_i, c_i	coeficient i -èssim d'un polinomi
$a_{i,n}$	element i, n de la matriu adj (ϕ_q^d) evaluada en el punt mort
\mathbf{a}_j^*	fila j -èssima de la matriu adjunta de ϕ_q^d
a_k, b_k, c_k	coeficient del terme k -èssim d'una sèrie de Fourier
$b(\cdot), c(\cdot)$	funció que descriu una corba de Bézier
\mathbf{b}_i	punt de control i -èssim d'una corba de Bézier
b_i, c_i	ordenada de Bézier i -èssima
$b_{\text{màx}}, b_{\text{mín}}$	ordenades màxima i mínima d'una corba de Bézier
b_1, b_2	coeficients d'un polinomi
c	constant d'esmoreïment
$d_{i,j}$	element i, j de la matriu $\dot{\phi}_q^d$ evaluada en el punt mort
f	freqüència
f, g, h	funció genèrica
f_d	freqüència d'oscil·lació
f_i	valor i -èssim que pren la freqüència

f_{mcd}	màxim comú divisor de les freqüències a anul·lar
f_{rel}	freqüència relativa adimensional d'un sistema vibratori
f_0	freqüència pròpia
\hat{f}_0	estimació de la freqüència pròpia
g	grau d'una corba de Bézier
$h(t), h_s(t), h_v(t), h_a(t)$	resposta impulsional d'un sistema
$h_{i,j}$	element i, j de la matriu ϕ_q^d evaluada en el punt mort
k	constant de rigidesa
\mathbf{k}	vector fila
k_i	component i -èssim de \mathbf{k}
l, l_1, l_2, l_3, l_4, r	longituds d'un mecanisme
l_p	longitud d'un pèndol
m	graus de llibertat d'un sistema
m	massa
m	nombre de coordenades independents d'un sistema
m, n	ordre d'una equació diferencial
\mathbf{m}	vector columna
m_i	component i -èssim d' \mathbf{m}
n	grau d'un polinomi
n	nombre de coordenades dependents d'un sistema
n	nombre de graus de llibertat vibratori d'un sistema
n	nombre de polsos
n_i	ordre de la corba de Bézier i -èssima
p	nombre de pols d'un motor de corrent altern síncron
p	nombre de punts de control d'una corba de Bézier
\mathbf{q}	vector de coordenades generalitzades
\mathbf{q}^d	vector de coordenades dependents
$q^d(t)$	evolució temporal de la coordenada dependent

q^i	coordenada independent del sistema
\mathbf{q}^i	vector de coordenades independents
$q^i(t)$	evolució temporal de la coordenada independent
q_k	coordenada generalitzada k -èssima
$q_k(t)$	lleï de moviment de la coordenada generalitzada k -èssima
q_{1i}, q_{1f}	valors de la coordenada q_1 en les configuracions inicial i final del mecanisme, respectivament
s	variable independent de domini no unitari en corbes de Bézier
s, s'	variable complexa en la transformada de Laplace
$s_{i\text{màx}}, s_{i\text{mín}}$	valor màxim i mínim del domini de definició i de la variable s
s_0, s_1	límit inferior i superior, respectivament, del domini de la variable independent s
$s_{1,2}$	pols del sistema en el domini de Laplace
t	temps
t_a	duració del senyal $u_a(t)$
t_f	temps que tarda el sistema a assolir el règim estacionari
t_i	duració del pols i -èssim
t_{pm}	instant de temps en que el mecanisme es troba en una configuració de punt mort
t_t	temps de transició
t_0	instant temporal
u	paràmetre del domini unitari $[0,1]$
$u_a(t)$	senyal auxiliar d'una lleï de moviment
$u_b(t)$	senyal que conté les propietats necessàries per tal de reduir les vibracions residuals d'un sistema oscil·latori
v	velocitat de translació
v_f	velocitat final de translació
x	variable independent
x, y	coordenades genèriques
$x(t)$	senyal d'entrada d'un sistema

$x_c(t)$	senyal de comanda
$x_i(t)$	senyal d'entrada i -èssim d'un sistema
x_p	amplitud d'un senyal d'excitació $x(t)$ harmònic
$x_p(t)$	senyal d'entrada perfilat
x_r	terme r -èssim d'un senyal discret
x_0	punt d'estudi de la variable x
x_0	valor numèric de referència d'una magnitud
$y(t)$	senyal de resposta d'un sistema
y_i	senyal de resposta i -èssim d'un sistema
y_p	amplitud d'un senyal de resposta $y(t)$ harmònic
$y_\tau(t)$	senyal de resposta o de sortida d'un sistema a un impuls situat a $t = \tau$
A	amplitud d'un senyal
A_d	amplitud d'un pols
A_i	amplitud del senyal i -èssim
A_Σ	amplitud de la vibració residual
A_\uparrow	amplitud de la vibració residual a una entrada impuls unitari
$B_i^n(u)$	polinomi de Bernstein i -èssim de grau n
C_n^i	coeficient i -èssim d'un polinomi de Bernstein de grau n
E_x	energia associada al senyal $x(t)$
$F(t)$	força
$F(\omega)$	transformada de Fourier d'un senyal de força $F(t)$
$F_p(t)$	força primària
$F_s(t)$	força secundària
$H(s)$	transformada de Laplace d' $h(t)$
$H(\omega)$	funció de resposta freqüencial
$H(\omega)$	mòdul de la funció de resposta freqüencial $H(\omega)$
I	magnitud d'un impuls

I	matriu identitat
$I(\omega)$	transformada de Fourier d'un senyal de corrent $i(t)$
I_i	magnitud de l'impuls i -èssim
I_r	inèrcia del sistema reduïda a l'eix motor
I_G	inèrcia reduïda al centre de gravetat
J	matriu jacobiana
K_v	constant de voltatge d'un motor de corrent continu
M	massa
N	nombre de termes d'una transformada discreta de Fourier
P	percussió d'una força $F(t)$
$P(\omega)$	transformada de Fourier d'un senyal de pressió $p(t)$
$P_x(t)$	potència associada al senyal $x(t)$
R	vector columna
S	matriu quadrada
T, T_0	període
T_d	període d'oscil·lació
T_p	duració de la corba de Bézier
$U(t)$	senyal de comanda de voltatge d'un actuator
$U(\omega)$	transformada de Fourier d'un senyal de voltatge $u(t)$
$U_a(f)$	transformada de Fourier d' $u_a(t)$
$U_b(f)$	transformada de Fourier d' $u_b(t)$
$V(\omega)$	transformada de Fourier d'un senyal de velocitat $v(t)$
$X(f), X(\omega)$	transformada de Fourier d' $x(t)$
$X(s)$	transformada de Laplace d' $x(t)$
$X_i(f)$	transformada de Fourier d' $x_i(t)$
X_k	terme k -èssim de la transformada discreta de Fourier d'un senyal discret x
$Y(s)$	transformada de Laplace d' $y(t)$

$Y(\omega)$	admitància d'un sistema
$Y(\omega)$	transformada de Fourier d' $y(t)$
$Z(\omega)$	impedància d'un sistema
α	coordenada dependent
α	part real dels límits d'integració genèrics en una transformada de Laplace
α, λ, μ	valor escalar
$\delta(t)$	funció impuls o delta de Dirac
ζ	raó d'esmoreïment
$\hat{\zeta}$	estimació de la raó d'esmoreïment
θ	orientació del pèndol respecte la recta vertical que passa pel seu eix de rotació
θ, τ	variable temporal auxiliar
φ	angle de fase
$\varphi(\omega_i)$	argument d'una funció de resposta freqüencial $H(\omega)$ en ω_i
φ_k	angle de fase del terme k -èssim d'una sèrie de Fourier
$\phi(\mathbf{q})$	vector d'equacions geomètriques d'enllaç
$\phi_i(\mathbf{q})$	equació geomètrica d'enllaç i -èssima
ϕ_q	matriu jacobiana del sistema d'equacions geomètriques d'enllaç
ϕ_q^d	matriu jacobiana del sistema d'equacions geomètriques d'enllaç referida a les coordenades dependents
ϕ_q^i	matriu jacobiana del sistema d'equacions geomètriques d'enllaç referida a les coordenades independents
$\phi_{q_k}^i$	element k -èssim de ϕ_q^i evaluat en el punt mort
$\left(\phi_q^i\right)^d$	matriu de derivades parcials de la matriu ϕ_q^i respecte al vector de coordenades dependents $\dot{\mathbf{q}}^d$
$\left(\ddot{\phi}_q^d\right)_1$	terme de velocitats dependents de la matriu $\ddot{\phi}_q^d$
$\left(\ddot{\phi}_q^d\right)_2$	terme d'acceleració independent de la matriu $\ddot{\phi}_q^d$
$\left(\ddot{\phi}_q^d\right)_3$	terme d'acceleracions dependents de la matriu $\ddot{\phi}_q^d$

ψ	fase inicial de posició
ω	frequència angular
ω_d	frequència angular d'oscil·lació
ω_i	valor i -èssim que pren la freqüència angular
ω_0	frequència angular pròpia
$\text{adj}(\cdot)$	matriu adjunta de (\cdot)
$\text{arg}[(\cdot)]$	argument de (\cdot)
$\text{det}(\cdot)$	determinant de la matriu (\cdot)
$\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$	límit de la funció $g(x)$ en el punt x_0
$\text{mod}[(\cdot)], (\cdot) $	mòdul de (\cdot)
$\text{tr}(\cdot)$	traça de la matriu (\cdot)
$\text{Im}[(\cdot)]$	part imaginària de (\cdot)
$\text{Re}[(\cdot)]$	part real de (\cdot)
$\text{TF}[(\cdot)]$	Transformada de Fourier del senyal (\cdot)
$\text{TF}^{-1}[(\cdot)]$	inversa de la transformada de Fourier del senyal (\cdot)
$\text{TL}[(\cdot)]$	Transformada de Laplace del senyal (\cdot)
$\Delta(\cdot)$	variació de la magnitud (\cdot)
$\%VR$	percentatge de vibració residual
$(\cdot)!$	factorial de (\cdot)
$(\cdot)^{(n)}$	n -èssima derivada temporal de (\cdot)
$(\cdot)^+$	valor de (\cdot) per la dreta
$(\cdot)^-$	valor de (\cdot) per l'esquerra
$(\cdot)^T$	transposada de (\cdot)
$\dot{(\cdot)}$	primera derivada temporal de (\cdot)
$\ddot{(\cdot)}$	segona derivada temporal de (\cdot)
$\dddot{(\cdot)}$	tercera derivada temporal de (\cdot)
$\overset{\cdot\cdot\cdot}{(\cdot)}$	quarta derivada temporal de (\cdot)
$(\cdot)'$	primera derivada de (\cdot) respecte al paràmetre

$(\cdot)''$	segona derivada de (\cdot) respecte al paràmetre
$(\cdot)'''$	tercera derivada de (\cdot) respecte al paràmetre
$(\cdot) _{\text{pm}}$	valor de (\cdot) en el punt mort
$(\cdot)^{-1}$	inversa de la matriu (\cdot)
$(\cdot) \otimes (\cdot)$	convolució de dos senyals (\cdot)

Capítol 1

Introducció

Aquesta tesi doctoral, que porta per títol *Aportació a l'estudi de la reducció de vibracions residuals en transitoris de moviment generats mitjançant accionaments de cinemàtica no lineal*, s'emmarca en l'àmbit de la mecànica de vibracions i de la cinemàtica de mecanismes. En el primer cas, s'inclou dins l'estudi de les vibracions residuals i com reduir-les mitjançant la modificació del senyal d'entrada que governa el sistema –senyal de comanda. D'altra banda, també s'agrupa dins de l'anàlisi cinemàtica de mecanismes amb configuracions singulars, tipus punt mort, dins del seu rang de funcionament, i la resolució de la cinemàtica inversa en aquestes configuracions específiques.

En aquest capítol s'exposa, en primer lloc, la motivació que ha dut a terme la realització d'aquest estudi. A continuació, es descriuen els objectius a assolir, els quals delimiten l'abast de la investigació realitzada. Finalment, es defineix l'estructura de la tesi doctoral amb una breu descripció del contingut de cada capítol.

1.1 Motivació de l'estudi

Durant el funcionament de màquines i mecanismes, es poden produir excitacions transitòries provocades tant per forces externes com per moviments d'inèrcies internes. Aquestes excitacions poden posar de manifest el comportament vibratori del sistema. Les oscil·lacions generades durant el transitori poden, fins i tot, continuar quan el moviment ja ha acabat, la qual cosa pot influir negativament en el funcionament correcte del sistema. Les oscil·lacions romanents en el sistema un cop ha finalitzat l'excitació transitòria s'anomenen vibracions residuals. En la Figura 1.1 es posa de manifest la generació d'aquest tipus de vibracions en la resposta del sistema $y(t)$ una vegada ha finalitzat la llei de moviment $x(t)$.

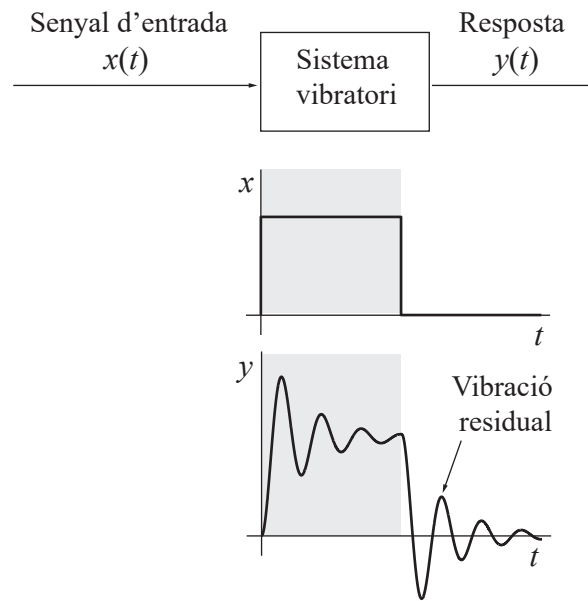


Figura 1.1: Senyal d'entrada $x(t)$ i resposta $y(t)$ del sistema

Algunes de les aplicacions industrials que poden veure compromesa la seva funció a causa d'aquestes oscil·lacions residuals, ja sigui per requerir un major temps d'estabilització del sistema o bé per la pèrdua de precisió, són, per exemple, el palpador d'una màquina de mesura per coordenades o el moviment de la càrrega d'una grua.

D'altra banda, l'accionament que mou una màquina requereix generalment una relació de transmissió no unitària per tal d'adequar el parell –o força– i la velocitat de l'actuador amb el moviment de la càrrega. Amb l'objectiu d'aconseguir la relació desitjada, es pot pensar en l'ús d'elements amb relació de transmissió sensiblement constant com, per exemple, engranatges, corretges o cadenes. El principal avantatge d'aquesta opció és que, en tractar-se de sistemes amb cinemàtica lineal –o molt aproximadament lineal–, la relació entre els paràmetres d'entrada i de sortida del sistema és relativament fàcil de trobar. Ara bé, en el cas dels engranatges i cadenes, els jocs que s'introdueixen en el sistema poden dificultar-ne el control i el seu bon funcionament. A més a més, aquest fet pot provocar l'excitació no controlada d'alguns dels seus modes propis vibratoris, la qual cosa dificulta la reducció de les vibracions residuals [68]. Finalment, les corretges presenten l'inconvenient que afegeixen un element elàstic entre l'actuador i la càrrega, fet que en dificulta el control. En alguns casos, per a resoldre aquests problemes, es poden utilitzar mecanismes de barres amb moviment pla d'un grau de llibertat que actuïn al voltant d'una configuració de punt mort. Aquesta alternativa permet reduir notablement els jocs introduïts en el sistema i aconseguir elevades relacions de transmissió. Ara bé, aquests mecanismes presenten els inconvenients de la no linealitat de la seva cinemàtica i de la indeterminació de la cinemàtica inversa en les configuracions de punt mort. Això fa que aquesta opció sigui poc utilitzada.

En aquesta tesi doctoral es proposa aportar coneixement a la reducció de vibracions residuals quan els sistemes lineals vibratoris són governats mitjançant accionaments de

cinemàtica no lineal amb moviment pla i configuracions de punt mort dins del seu rang de funcionament. Aquest fet comporta l'estudi en detall de la cinemàtica inversa en configuracions de punt mort i la seva resolució amb la finalitat d'obtenir lleis de moviment fabricables fent ús d'actuadors elèctrics convencionals. Pel que fa a la reducció de vibracions residuals, s'empraran els mètodes coneguts actualment amb les restriccions que comporta el fet que hi hagi punts morts en el rang de funcionament del mecanisme.

1.2 Objectius

L'objectiu principal d'aquesta tesi és la definició de lleis de moviment amb la finalitat de reduir les vibracions residuals d'un sistema oscil·latori –modelitzat com a un sistema lineal i amb paràmetres constants– d'un grau de llibertat vibratori governat a través d'un accionament de cinemàtica no lineal (Figura 1.2). Es considera que l'evolució temporal del sistema es comanda mitjançant un actuator elèctric convencional. El mètode que es proposa és genèric i vàlid per a qualsevol mecanisme de barres amb moviment pla d'un grau de llibertat amb configuracions de punt mort dins del seu rang de funcionament.

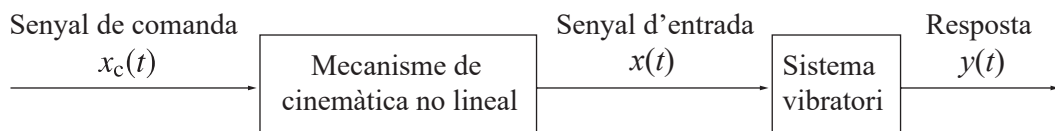


Figura 1.2: Diagrama de blocs del sistema d'estudi de la tesi doctoral

Els objectius específics necessaris per tal de desenvolupar aquesta tesi són:

1. Determinar el grau de continuïtat mínim de la llei de moviment $x(t)$ de la coordenada que conté el punt mort en el seu rang de funcionament perquè el senyal de comanda $x_c(t)$ pugui ser realitzable mitjançant un actuator elèctric convencional.
2. Validar les conclusions de l'estudi del grau de continuïtat obtingudes en el punt anterior mitjançant simulacions.
3. Determinar lleis de moviment de posició i velocitat en l'entorn d'un punt mort per a reduir vibracions residuals mitjançant alguns dels mètodes existents en l'actualitat.
4. Dissenyar un banc d'assaig i comprovar la validesa dels resultats obtinguts mitjançant la realització d'assajos experimentals.

1.3 Estructura de la tesi doctoral

El contingut de la tesi doctoral s'estructura en set capítols els quals, amb excepció del primer, es descriuen breument a continuació.

En el capítol 2 s'exposa l'estat actual dels mètodes utilitzats per a: *i*) reduir vibracions residuals en sistemes oscil·latoris i *ii*) resoldre el problema de la cinemàtica inversa en configuracions de punt mort. En el primer cas, es fa esment tant de les tècniques que modifiquen prèviament el senyal temporal amb l'objectiu d'evitar la generació de vibracions

residuals com dels mètodes corresponents al control actiu de vibracions. Aquest darrer cas, tot i tenir com a finalitat el mateix objectiu, queda força allunyat de l'abast de la tesi i, per tant, se'n fa únicament una breu referència. Pel que fa al problema de la cinemàtica inversa en configuracions de punt mort, s'exposen els principals procediments que s'utilitzen en l'actualitat per a trobar-ne una solució numèrica.

El capítol 3 conté les principals eines i mètodes que s'utilitzen en el desenvolupament de la tesi. Primerament, es fa una breu menció del concepte de continuïtat i s'especifiquen els criteris per tal que una funció d'una variable sigui contínua en un punt. Tot seguit, s'exposen les corbes de Bézier com a base per al disseny de lleis de moviment en mecanismes. Partint de la hipòtesi que els mecanismes són governats mitjançant actuadors elèctrics convencionals, s'estudia també en aquest apartat el grau de continuïtat C^n mínim del senyal de comanda $x_c(t)$ per a ser fabricable mitjançant aquest tipus d'actuadors. Finalment, es detallen les eines que s'utilitzen per a caracteritzar vibracions mecàniques en sistemes lineals i es descriu el sistema vibratori d'estudi. A mode d'exemple, s'exposen els casos en què l'accionament excita el sistema oscil·latori per la base o bé mitjançant el moviment d'alguna de les seves inèrcies.

L'anàlisi en detall de la cinemàtica inversa en configuracions de punt mort es du a terme en el capítol 4, el qual es divideix en dos apartats. En el primer, es descriu la problemàtica de la cinemàtica inversa en aquestes configuracions en mecanismes de barres de cinemàtica no lineal d'un grau de llibertat. En el segon, es defineixen les condicions de continuïtat C^n que ha de complir la llei de moviment $x(t)$ de la coordenada que conté el punt mort per a poder ser reproduïda mitjançant actuadors elèctrics convencionals que controlen l'evolució temporal d'una altra coordenada $x_c(t)$, diferent d'aquesta. Per tal de validar els resultats obtinguts, es realitzen simulacions numèriques en alguns sistemes d'un grau de llibertat.

En el capítol 5 es determinen quin tipus de lleis de moviment de desplaçament $x(t)$ i velocitat $\dot{x}(t)$ de la coordenada que conté el punt mort es poden realitzar al voltant d'aquesta configuració singular amb la finalitat de reduir les vibracions residuals del sistema oscil·latori. Aquesta anàlisi utilitza corbes de Bézier com a base per al disseny de les lleis de moviment.

La descripció del banc d'assaig construït i la presentació dels resultats experimentals s'exposen en el capítol 6. En primer lloc, es descriu detalladament el muntatge experimental. Aquest apartat inclou també una explicació del disseny mecànic i del sistema de control utilitzat. Finalment, es presenten els assajos experimentals i els resultats obtinguts.

Les conclusions d'aquesta tesi s'exposen en el capítol 7 i s'estructuren segons els objectius descrits en el present capítol. També s'inclouen en aquest apartat les aportacions que es consideren més rellevants. Per a acabar, es proposen una sèrie d'extensions i futures línies d'investigació relacionades amb l'àmbit de la tesi.

Capítol 2

Estat de l'art

En aquest capítol s'analitzen les tècniques utilitzades en l'actualitat tant per a reduir vibracions residuals en sistemes oscil·latoris com per a definir lleis de moviment en mecanismes al voltant d'un dels seus punts morts. En el primer cas, els mètodes es poden dividir en dos grans grups: els que tracten d'incidir directament en la llei de moviment i els basats en el control actiu de vibracions. D'aquests últims, només se'n fa una breu menció, ja que queden allunyats de la temàtica d'aquesta tesi. En el cas de la definició de lleis de moviment al voltant d'un punt mort, s'exposen els principals mètodes per tal de resoldre el problema de la cinemàtica inversa en aquestes configuracions.

2.1 Definició de lleis de moviment per a minimitzar vibracions residuals

En aquest apartat, es recopilen les tècniques més rellevants que permeten reduir vibracions residuals en la resposta $y(t)$ del sistema oscil·latori mitjançant la modificació del senyal d'entrada $x(t)$ (Figura 2.1).

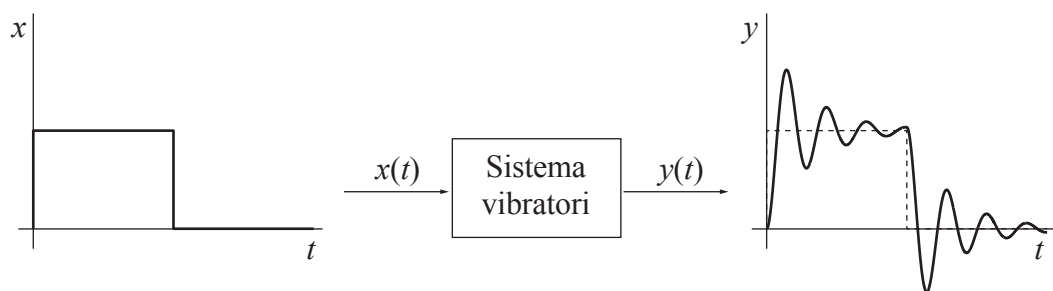


Figura 2.1: Esquema del sistema d'estudi

Els treballs en aquest camp es poden classificar en diverses línies d'investigació. El primer, i segurament el més important, fa referència al perfilat de senyals d'entrada per convolució temporal amb un tren d'impulsos en sistemes lineals. El segon fa referència a aquesta mateixa tècnica, però aplicada a sistemes no lineals. El tercer fa servir la convolució temporal per a generar senyals d'entrada a partir de polsos. En quart lloc, s'exposa la tècnica del filtratge del senyal de comandament en el rang de freqüències desitjat. Tot seguit, es fa referència a la tècnica que crea lleis de moviment mitjançant la inversió de la dinàmica del sistema. Finalment, s'exposa la generació de senyals d'entrada per mitjà de sèries trigonomètriques.

2.1.1 Generació de senyals d'entrada per convolució amb un tren d'impulsos en sistemes lineals (*Input shaping*)

Inicis del perfilat de senyals d'entrada

O.J.M. Smith [57] va ser el primer a proposar un mètode de cancel·lació de vibracions residuals en sistemes d'un grau de llibertat vibratori mitjançant l'entrada de dos impulsos decalats un cert temps entre ells (Figura 2.2 a)).

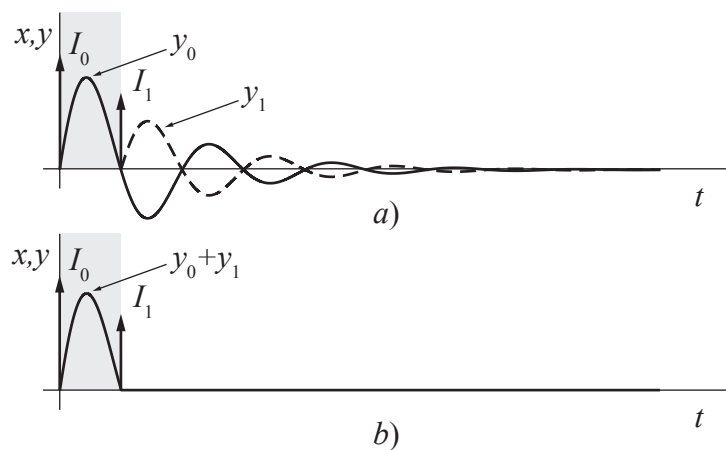


Figura 2.2: a) Respostes y_0 i y_1 a dos impulsos decalats un cert temps; b) Resposta total $y_0 + y_1$

Tal i com s'observa en la Figura 2.2 b), les oscil·lacions generades pel primer impuls $I_0\delta(t)$ són cancel·lades per la resposta del sistema al segon impuls $I_1\delta(t)$. Ara bé, per a una cancel·lació completa, aquest segon impuls ha d'estar decalat un cert temps (concretament la meitat del període d'oscil·lació T_d) i ha de tenir la magnitud adequada. Aquesta seqüència de dos impulsos es coneix com a *Zero Vibration Shaper (ZV)* i es pot utilitzar com a base per a construir senyals d'entrada que eliminin les vibracions residuals dels sistemes d'estudi. Per a dissenyar comandaments realitzables, n'hi ha prou en realitzar el producte de convolució en el domini temporal entre la seqüència d'impulsos i el senyal d'entrada $x(t)$. La duració del nou senyal perfilat $x_p(t)$, en el domini temporal, s'incrementa en $T_d/2$ (Figura 2.3).

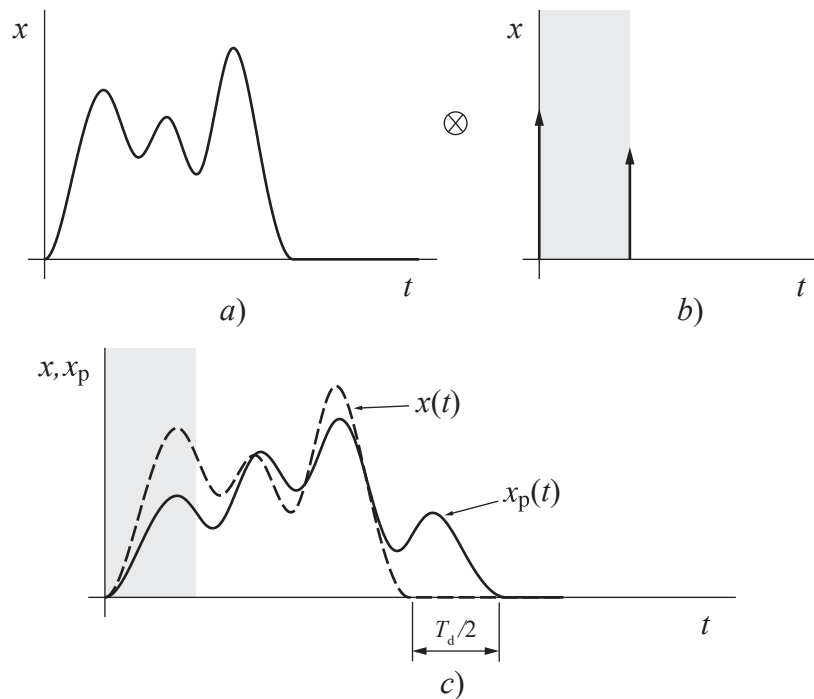


Figura 2.3: a) Senyal d'entrada $x(t)$; b) Seqüència d'impulsos; c) Senyals $x(t)$ i $x_p(t)$

Robustesa en el perfilat de senyals d'entrada

Per a poder realitzar comandes d'entrada que anul·lin les vibracions residuals del sistema, és imprescindible conèixer la seva freqüència pròpia f_0 i la raó d'esmoreïment ζ . En la realitat però, el que es coneix d'ambdós paràmetres són les seves estimacions (\hat{f}_0 i $\hat{\zeta}$). Es diu que un mètode és robust davant la incertesa dels paràmetres del sistema si, per a petits errors en la seva estimació, el nivell de vibracions residuals segueix sent pràcticament nul.

D'altra banda, Singer [47] demostra que per molt gran que pugui ser la incertesa en l'estimació de la raó d'esmoreïment ζ no té una influència significativa en el nivell de vibracions residuals. És a dir, errors en l'estimació del valor de la raó d'esmoreïment ζ no tenen tanta influència com errors en l'estimació de la freqüència pròpia f_0 . Per tant, a l'hora d'estudiar si un mètode és robust davant la incertesa dels seus paràmetres, es pot fer la simplificació de considerar només la freqüència pròpia \hat{f}_0 .

Per a estudiar la robustesa del mètode, Singer [47] i Singer i Seering [48] defineixen el percentatge de vibració residual:

$$\%VR = \frac{A_{\Sigma}}{A_{\uparrow}} \cdot 100 \quad (2.1)$$

Aquests autors defineixen l'amplitud de la vibració residual A_{Σ} com el valor de l'envolupant de la resposta del sistema just en l'instant on s'aplica l'últim impuls (Figura 2.4).

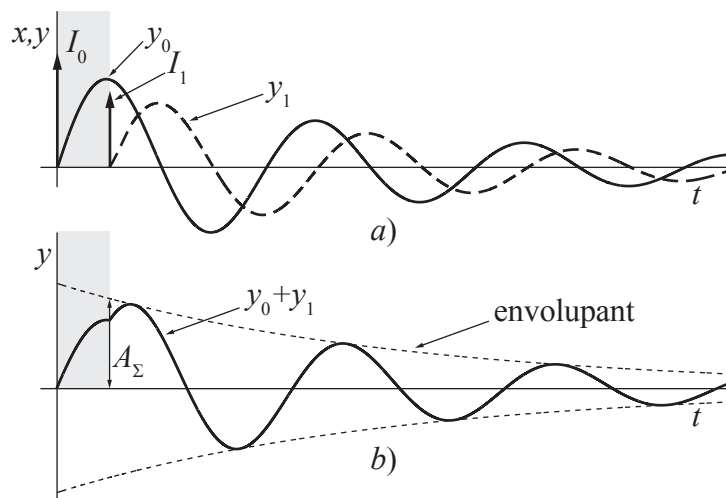


Figura 2.4: a) Respostes y_0 i y_1 a dos impulsos decalats un cert temps; b) Resposta total $y_0 + y_1$ i la seva envelopant

El resultat anterior es pot expressar percentualment si es divideix pel valor A_\uparrow de l'envelopant de la resposta del sistema a un únic impuls de magnitud $(I_0 + I_1)$ aplicat en $t = 0$ (Figura 2.5) i es multiplica per 100 (equació 2.1).

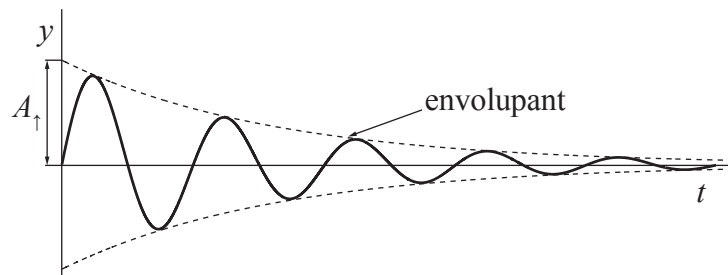


Figura 2.5: Resposta del sistema a un impuls unitari aplicat en $t = 0$ i la seva envelopant

La Figura 2.6 mostra el percentatge de vibració residual d'un ZV Shaper en funció de la relació de la freqüència estimada \hat{f}_0 i la pròpia del sistema f_0 . En l'eix de les ordenades, es representa el percentatge de vibració residual, mentre que en l'eix de les abscisses es posa de manifest la relació entre ambdues freqüències (f_0 i \hat{f}_0) d'un sistema qualsevol. Tal i com s'observa, per a petits errors en l'estimació de f_0 ($\approx \pm 6\%$), s'aconsegueixen petites vibracions residuals (de l'ordre del 10%). A mesura que augmenta l'error en l'estimació d' f_0 , el percentatge de vibració residual creix notablement. Es diu, doncs, que el ZV Shaper és un mètode poc robust enfront de la variació dels paràmetres del sistema.

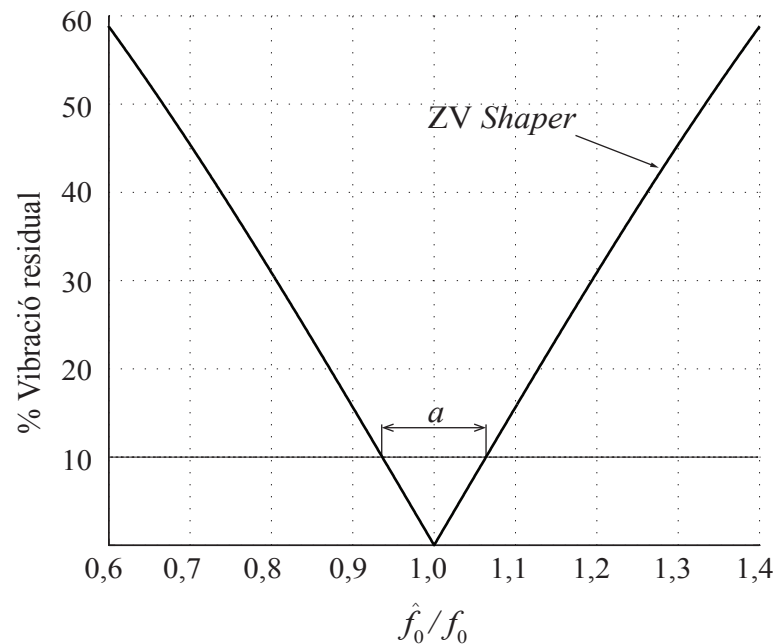


Figura 2.6: Robustesa del ZV Shaper en front a l'estimació de la freqüència pròpia f_0 per a un sistema amb $\zeta = 0$

Robustesa en la pròpia llei de moviment

Singer [47] i Singer i Seering [48] proposen millorar la robustesa del ZV Shaper. Aquesta nova tècnica consisteix a afegir un impuls més a la seqüència de dos impulsos esmentada anteriorment, decalat un cert temps i d'una certa amplitud. El tren d'impulsos resultant, si s'afegeix un impuls, es coneix com a *Zero Vibration and Derivative Shaper* (ZVD). Aquesta nova seqüència és més robusta que el tren de dos impulsos ZV ($b \gg a$), tal i com es mostra en la Figura 2.7. En el cas que se n'afegeixin dos, el tren d'impulsos rep el nom de *Zero Vibration Derivative and Derivative* (ZVDD). Si per contra se n'afegeixen tres, la seqüència es coneix com a ZVDDD, i així successivament. Per cada impuls addicional, s'augmenta la robustesa del mètode amb l'inconvenient que la duració de la seqüència s'allarga cada vegada $T_d/2$. En la Figura 2.7 es mostra com, per a un cert nivell de vibració residual permès, el tren de quatre impulsos ZVDD permet un marge d'error més gran que el ZV i el ZVD enfront de l'estimació de la freqüència pròpia f_0 del sistema vibratori ($c \gg b \gg a$).

Singhose *et al.* [52] presenten un procediment alternatiu per a ampliar la robustesa del tren d'impulsos ZVD sense augmentar la duració de la seqüència. Es tracta de limitar a un cert valor les vibracions residuals a la freqüència pròpia \hat{f}_0 del sistema. D'aquesta manera, s'obté un mètode de tres impulsos amb major robustesa que el ZV i el ZVD ($d \gg b \gg a$), tal i com es mostra en la Figura 2.7. Aquesta nova tècnica es coneix com a *Extra Insensitive Shaper* (EI).

Singer i Seering [49] i Singhose *et al.* [51] exposen un mètode similar a l'EI en el qual, a part de limitar a un cert valor les vibracions residuals, s'especifica també el nivell de

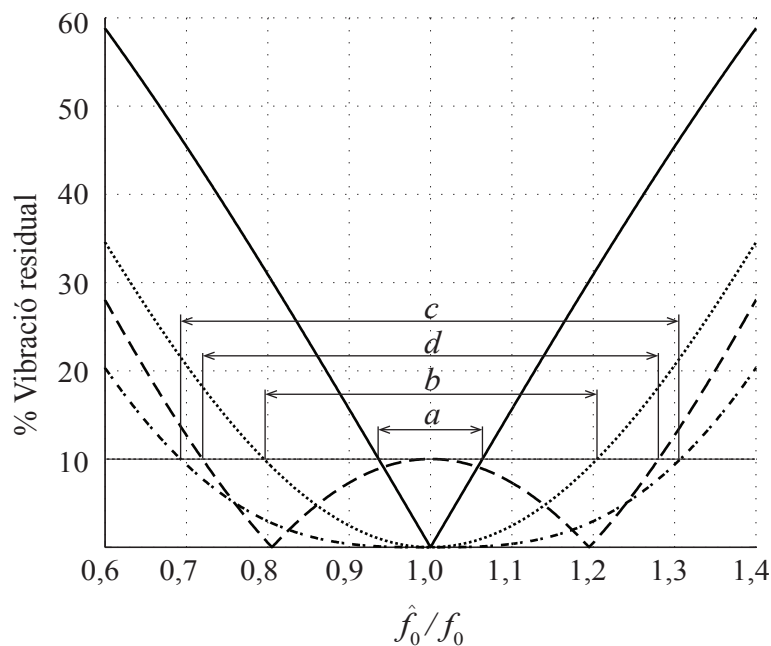


Figura 2.7: Comparació de la robustesa d'un tren de dos (— ZV), tres (..... ZVD, - - - EI) i quatre (- - - - ZVDD) impulsos enfront de l'estimació de f_0 per a un sistema amb $\zeta = 0$

robustesa desitjat. Un cop es defineixen ambdós paràmetres, es generen i resolen una sèrie de restriccions que permeten obtenir el tren d'impulsos desitjat. Aquest tren d'impulsos rep el nom de *Specified-Insensitivity Shaper (SI)*.

Robustesa adaptativa

Els mètodes adaptatius augmenten la robustesa del *ZV Shaper* a través de la lectura de la resposta del sistema mitjançant sensors. Si es coneix el senyal d'entrada i es llegeix el senyal de sortida es poden estimar, a partir de certs algorismes, els paràmetres f_0 i ζ . El fet d'utilitzar aquesta tècnica permet obtenir bons resultats amb seqüències d'impulsos que, a priori, són poc robustes (per exemple el *ZV Shaper*) i disminuir, per tant, el temps d'aplicació de la comanda d'entrada. Aquest mètode resulta de gran ajuda en sistemes on el valor de f_0 pot canviar entre moviments, com per exemple en el cas d'una grua considerada com a sistema lineal d'un grau de llibertat. Els algorismes adaptatius poden tenir un enfocament indirecte (Tzes i Yurkovich [62], Bodson [11], Pereira *et al.* [41]) si es calculen explícitament els paràmetres \hat{f}_0 i $\hat{\zeta}$, o bé directe (Rhim i Book [43]) si l'algorisme no requereix del seu càlcul.

Tzes i Yurkovich [62] utilitzen un mètode basat en la transformada de Fourier de la resposta del sistema. Aquest procés, però, requereix uns càlculs computacionals molt elevats i necessita bastants períodes per a obtenir amb prou precisió els paràmetres del sistema. Bodson [11] presenta un algorisme simple, fàcil d'implementar en temps real que permet conèixer els paràmetres del sistema a cada instant de temps. Ara bé, la posició final del sistema no està garantida a no ser que s'actualitzi l'algorisme entre moviments. Pereira *et al.* [41] proposen una identificació algebraica que permet identificar, en un període de

temps inferior a $T_d/2$ i durant el moviment del sistema, els paràmetres \hat{f}_0 i $\hat{\zeta}$ sense que l'algoritme necessiti condicions inicials de l'estat del sistema. Tot i això, la convergència de la raó d'esmoreïment en sistemes reals quan és petita, la qual cosa succeeix en molt casos on no existeix un sistema explícit d'esmoreïment, queda compromesa per la relació entre el senyal i el soroll de la mesura [64].

Rhim i Book [43] mostren un algoritme en el domini temporal que, en comptes de reduir la incertesa entorn dels paràmetres del sistema, redueix directament les vibracions residuals. Els coeficients d'aquest algoritme es recalculen després de cada moviment. En el seu cas utilitzen, com a base, un filtre OATF (*Optimal Arbitrary Time-delay Filter*).

Rhim i Book [44] comparen la influència del soroll en els mètodes directes i indirectes aplicats en el domini temporal. En aquest estudi es demostra que els mètodes directes són menys sensibles a aquesta pertorbació.

Generació de senyals d'entrada per a sistemes de més d'un mode propi vibratori

Hyde i Seering [26] fan extensibles els mètodes presentats en [57], [47] i [48] a sistemes en els quals és necessària la cancel·lació de les vibracions residuals associades a diversos modes propis vibratoris. Per a cadascun dels n graus de llibertat vibratori es calcula una seqüència d'impulsos ZV que l'anulli. Tot seguit, es fa el producte de convolució en el domini temporal de les n seqüències i s'obté així un tren d'impulsos que redueix la vibració residual de manera simultània (Figura 2.8). Tal i com succeeix en el cas d'un grau de llibertat, la comanda d'entrada final serà el resultat de la convolució temporal entre la seqüència d'impulsos i el senyal d'entrada $x(t)$. S'ha de tenir en compte que la duració del resultat d'aquest producte anirà augmentant a mesura que es desitgin reduir les vibracions associades a cada mode propi. En la pràctica, però, no se n'acostumen a cancel·lar més de dos, ja que l'amplitud de moviment en graus de llibertat superiors acostuma a ser petita.

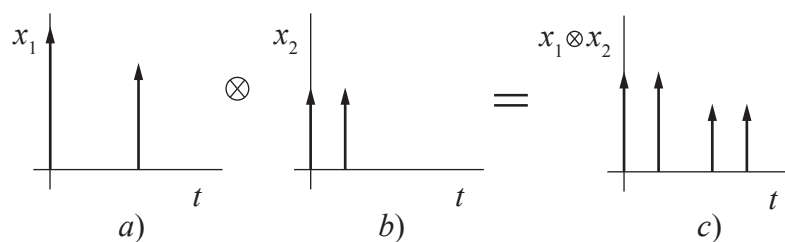


Figura 2.8: Convolució de dues seqüències d'impulsos ($n = 2$) a) i b) donant com a resultat el tren d'impulsos c)

Singh i Heppler [50] proposen un altre mètode per a anul·lar vibracions residuals en sistemes en els quals s'ha de tenir en compte més d'un mode propi. Aquests autors aprofiten la periodicitat en el domini freqüencial d'un tren d'impulsos de manera que, si la seqüència d'impulsos cancel·la una freqüència f_0 determinada també cancel·larà els seus múltiples $2f_0, 3f_0, \dots$ etcètera. Ara bé, això només pot servir si la relació entre modes és racional. Aquesta tècnica consisteix en cancel·lar, mitjançant dos impulsos (o bé tres si es vol augmentar la robustesa enfront de variacions dels paràmetres del sistema), un pseudomode de vibració que té per freqüència el màxim comú divisor de les freqüències dels modes propis

a anul·lar. Així doncs, en molts casos, es redueix significativament el temps d'execució del mètode proposat per Hyde i Seering [26].

Perfilat de senyals d'entrada per a l'optimització del temps de maniobra

Singhose *et al.* [53] permeten impulsos negatius en les seqüències exposades en [57], [47] i [48]. Aquest fet permet disminuir el temps d'execució de la comanda d'entrada, però cal limitar l'amplitud dels impulsos per a evitar arribar a valors molt alts en el senyal d'entrada perfilat $x_p(t)$.

Hong *et al.* [24], [25] presenten un mètode que disminueix el temps d'execució del tren de dos impulsos en sistemes d'un grau de llibertat vibratori. Es tracta de dissenyar un tren de tres impulsos a partir de dos graus de llibertat vibratoris: un real i l'altre virtual. La freqüència pròpia del grau de llibertat virtual s'utilitza per a ajustar la durada de la comanda.

2.1.2 Generació de senyals d'entrada per convolució amb un tren d'impulsos en sistemes no lineals

Els mètodes de perfilat de senyals d'entrada exposats en l'apartat anterior funcionen únicament si el sistema vibratori té un comportament lineal. En cas contrari, els procediments anteriors no poden ser aplicats directament. Tot i que la majoria de la literatura es centra en casos lineals, alguns autors (Stergiopoulos i Tzes [59], Stergiopoulos *et al.* [58], Smith *et al.* [56], Kozak *et al.* [29] i Blackburn *et al.* [10], entre d'altres) han intentat establir els fonaments per a implementar les tècniques explicades amb anterioritat en sistemes no lineals.

Stergiopoulos i Tzes [59] presenten un estudi per al cas concret d'un pèndol. Els autors linealitzen l'equació de moviment del sistema per a qualsevol dels seus punts de treball. Així doncs, poden estimar els paràmetres \hat{f}_0 i $\hat{\zeta}$ del sistema en tot moment. D'acord amb aquesta publicació, els paràmetres del ZV *Shaper* es poden calcular de tres maneres diferents: utilitzant els valors de \hat{f}_0 i $\hat{\zeta}$ quan el sistema es troba en l'estat inicial; prenent com a referència els valors d'ambdós paràmetres en l'estat final del moviment; o bé a partir d'un model adaptatiu que els actualitza a cada instant. En tots els estudis realitzats, el model adaptatiu és el que obté sempre millors resultats. Per tant, aquests autors consideren convenient l'ús de mètodes adaptatius quan el sistema d'estudi presenta no linealitats.

Stergiopoulos *et al.* [58] analitzen el cas d'una grua la qual, a mesura que avança horitzontalment, pot moure la càrrega verticalment. A partir de la linealització de l'equació de moviment de la càrrega, s'implementen dues configuracions ZV per a eliminar les vibracions residuals: la primera utilitza els valors dels paràmetres característics \hat{f}_0 i $\hat{\zeta}$ en l'estat inicial del moviment; la segona, en canvi, utilitza un mètode adaptatiu que permet anar actualitzant el ZV durant els moviments. Es demostra també en aquest cas que, sigui quin sigui el moviment de la càrrega, la tècnica adaptativa és molt més eficaç.

Smith *et al.* [56] estudien el cas concret d'un sistema en el qual la seva freqüència pròpia varia linealment amb la posició. En la seva publicació, enuncien que el percentatge

de vibracions residuals és únicament funció del factor adimensional f_{rel} calculat com el quocient entre la variació del valor de freqüència pròpia del sistema entre els estats inicial i final del moviment, i la mitjana de les freqüències d'ambdós punts. A més a més, es comparen tres models ZV diferents: el primer utilitza la freqüència pròpia \hat{f}_0 que tindrà el sistema en l'estat final del moviment assumint esmorteïment nul ($\hat{\zeta} = 0$); el segon calcula els valors d'ambdós paràmetres a partir d'optimitzar les vibracions residuals per a un cert moviment; finalment, el tercer model es basa en el principi de conservació de l'energia. Un cop feta la comparació, s'observa com el model energètic és el que dona més bons resultats.

Kozak et al. [29] apliquen les tècniques explicades en l'apartat anterior a manipuladors amb motors lineals un cop linealitzades les equacions de moviment. En aquesta publicació, es demostra que utilitzar la mitjana dels valors de la freqüència pròpia en els estats inicial i final del moviment ajuda a disminuir considerablement les vibracions residuals del sistema. Fent servir el mètode de prova i error es poden determinar uns paràmetres característics \hat{f}_0 i $\hat{\zeta}$ que anul·lin quasi completament aquestes vibracions.

Blackburn et al. [10] presenten un ZV per a compensar la vibració radial i tangencial al moviment de gir d'una càrrega suspesa en una grua torre. Un ZV tradicional introdueix dos impulsos en la direcció tangencial del moviment. Ara bé, en moviments circulars, a causa de la rotació, aquests dos impulsos no estan alineats i, per tant, el segon impuls no pot cancel·lar perfectament la resposta del sistema al primer. En conseqüència, és necessari, en moviments circulars, afegir una seqüència de dos impulsos en la direcció radial per tal que la direcció resultant del primer impuls sigui la mateixa que la del segon i tenir, així, una cancel·lació completa. Aquesta nova tècnica redueix significativament les vibracions residuals en la direcció de gir de la grua.

2.1.3 Generació de senyals d'entrada per convolució de polsos en el domini temporal en sistemes lineals

Inicis de la convolució de polsos en el domini temporal

Veciana [66] i Veciana i Cardona [67] proposen un mètode per a eliminar vibracions residuals mitjançant la utilització de polsos en sistemes amb esmorteïment nul. No obstant això, es demostra que aquest mètode també dona bons resultats en sistemes amb raons d'esmorteïment baixes (entre 0 i 0,1). Aquesta tècnica parteix de l'article publicat per Meckl i Seering [34] en el qual es demostra que, per a sistemes vibratoris amb raons d'esmorteïment nul·les, contingut freqüencial nul del senyal d'entrada $x(t)$ a la freqüència pròpia del sistema f_0 , implica vibracions residuals nul·les. Així doncs, per a reduir les vibracions residuals que corresponen al grau de llibertat vibratori amb freqüència f_0 , defineixen un pols de duració $t_1 = 1/f_0$ de manera que $|\text{TF}[x_1(t)]|_{f=f_0} = |X_1(f_0)| = 0$ (Figura 2.9). A diferència de [57], [47] i [48], els senyals obtinguts, per a entrades de curta durada ($\approx T_0 \div 1,5T_0$), resulten adequats en termes de monotonia de la llei de moviment.

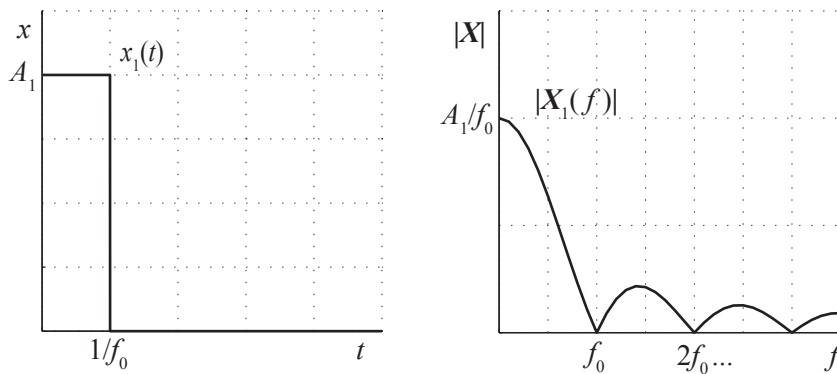


Figura 2.9: Puls temporal de duració $1/f_0$ i el seu contingut freqüencial

Robustesa en la convolució de polsos en el domini temporal

A Veciana [66] i Veciana i Cardona [67], es presenten dos procediments per a augmentar la robustesa del mètode proposat enfront de la variació dels paràmetres del sistema. El primer mètode consisteix en l'obtenció del senyal $x_1(t)$ per mitjà del producte de convolució de dos polsos auxiliars (Figura 2.10 a): el primer pols, d'amplitud arbitrària i duració $1/f_0$; el segon, d'amplitud també arbitrària i de duració múltiple del primer (n/f_0 amb $n = 1, 2, \dots$). En la Figura 2.10 b) es posa de manifest aquest increment de robustesa.

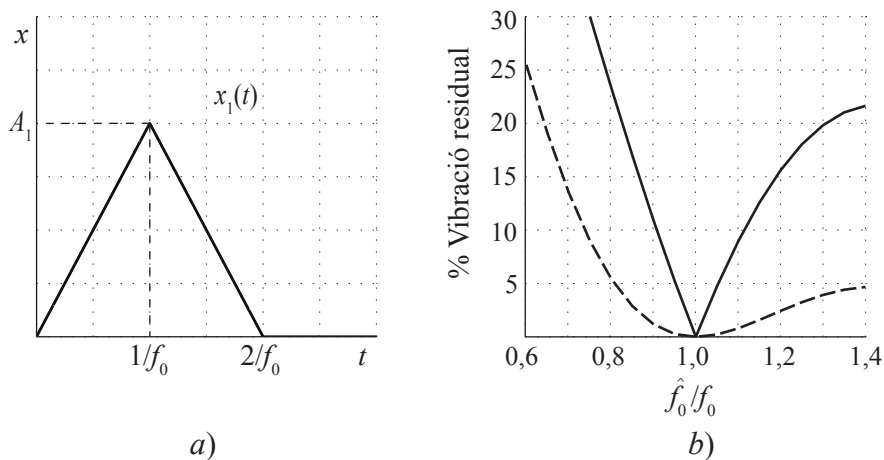


Figura 2.10: a) Producte de convolució de dos polsos de duració $1/f_0$ cadascun ($n = 1$); b) Comparació de la robustesa d'un pols (—) i del senyal obtingut a partir de realitzar el producte de convolució, en el domini temporal, de dos polsos de la mateixa duració (---), per a un sistema amb $\zeta = 0$

El segon procediment que permet augmentar la robustesa d'aquest mètode consisteix a generar el senyal $x_1(t)$ a partir de dos polsos de durada $1/(f_0 + \Delta f)$ i $1/(f_0 - \Delta f)$, amb Δf petit. La duració final del senyal $x_1(t)$ és, aproximadament, $2/f_0$, tal i com s'observa en la Figura 2.11 a)).

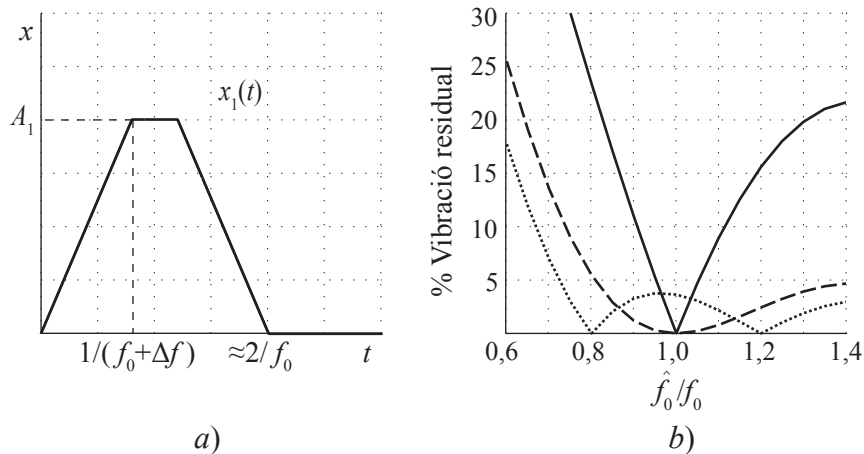


Figura 2.11: a) Producte de convolució de dos polsos de duracions $1/(f_0 + \Delta f)$ i $1/(f_0 - \Delta f)$; b) Comparació de la robustesa d'un pols (—) i del senyal obtingut a partir de realitzar el producte de convolució, en el domini temporal, de dos polsos de la mateixa duració (---) i de dos polsos de duracions $1/(f_0 + \Delta f)$ i $1/(f_0 - \Delta f)$ (.....), per a un sistema amb $\zeta = 0$

Convolució de polsos en el domini temporal per a sistemes de més d'un grau de llibertat vibratori

A Veciana [66] i Veciana i Cardona [67], s'exposen dos mètodes per a reduir vibracions residuals en sistemes on s'han de tenir en compte més d'un grau de llibertat vibratori. El primer, de forma anàloga a Hyde i Seering [26], consisteix a definir un senyal $x_1(t)$ obtingut a partir del producte de convolució d' n polsos, cadascun d'ells amb una durada $t_{1i} = 1/f_i$, amb $i = 0, \dots, n - 1$. De la mateixa manera que en els casos anteriors, per a fixar dos requeriments funcionals, s'obté $x(t)$ mitjançant el producte de convolució del senyal $x_1(t)$ amb un pols $x_2(t)$ de duració i amplitud determinades per a assolir aquests requeriments. Per tant, si el sistema té n graus de llibertat vibratoris, $x(t)$ s'obté a partir de la convolució temporal d' $n + 1$ polsos. La segona tècnica presentada en aquestes publicacions mostra com reduir el temps d'execució del mètode anterior. A tal efecte, s'aprofita el fet que un pols qualsevol definit amb contingut freqüencial nul a f_0 , també té contingut freqüencial nul a $2f_0, 3f_0, \dots$. Així doncs, si s'utilitza un pols de duració $1/f_{mcd}$, on f_{mcd} és el màxim comú divisor de les freqüències a anul·lar, aquest reduirà a la vegada les vibracions residuals de totes les freqüències considerades.

Convolució de polsos en el domini temporal per a sistemes amb qualsevol valor de ζ

Veciana i Cardona [68] presenten un mètode similar a [66] i [67] però vàlid en sistemes amb qualsevol valor d'esmoreïment. Aquesta tècnica es basa en les publicacions de Singh i Heppler [50], Bath i Miu [5] i Bath et al. [6], en les quals es demostra que la condició necessària i suficient per tal que un senyal cancel·li vibracions residuals és que els zeros de la transformada de Laplace del senyal incloguin els pols del sistema. El mètode que proposen Veciana i Cardona consisteix en generar un senyal $x(t)$ a partir del producte d'un pols $u_b(t)$ amb una exponencial negativa $e^{-\zeta 2\pi f_0 t}$. La duració del pols $u_b(t)$ s'ajusta amb l'objectiu que tingui contingut freqüencial nul a la freqüència d'oscil·lació f_d del sistema, mentre que l'exponencial negativa té en compte l'esmoreïment (Figura 2.12).

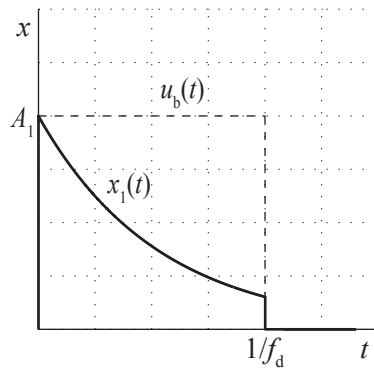


Figura 2.12: Senyal $x_1(t)$ obtingut a partir del producte d'un pols de duració $1/f_d$ amb una exponencial negativa

Per a cancel·lar n modes propis vibratoris, es calculen per separat n funcions que suprimeixin cadascun dels n graus de llibertat a reduir. Així doncs, la funció x_i amb $i = 1, \dots, n$ anul·larà la vibració residual del mode i . Per tant, $x(t)$ s'obindrà a partir del producte de convolució $x_1 \otimes x_2 \otimes \dots \otimes x_i \otimes \dots \otimes x_n$. És important esmentar que aquest mètode es pot estendre a qualsevol senyal $u_b(t)$ tal que el seu contingut freqüencial sigui nul a f_d .

D'altra banda, la tècnica presentada en aquesta publicació permet també reduir vibracions residuals en aplicacions on cal assolir dos requeriments funcionals simultàniament. En aquest cas, el senyal $x(t)$ vindrà definit per qualsevol de les dues expressions següents:

$$x(t) = A [u_b(t) \otimes u_a(t)] e^{-\zeta 2\pi f_0 t} \quad (2.2)$$

$$x(t) = A [u_b(t) \otimes e^{-\zeta 2\pi f_0 t}] u_a(t) \quad (2.3)$$

on $u_a(t)$ té una duració t_a i és una funció positiva definida en un rang de temps finit. D'aquesta forma, si la transformada de Fourier de $u_b(t)$ val zero en $f = f_d$, el valor del producte de convolució $u_b(t) \otimes u_a(t)$ també serà nul, ja que $\text{TF}[u_b(t) \otimes u_a(t)] = U_b(f)U_a(f)$.

2.1.4 Filtratge digital del senyal de comanda

La tècnica del filtratge digital del senyal de comanda consisteix a eliminar o reduir el contingut freqüencial del senyal d'entrada al sistema d'estudi en les freqüències corresponents als seus graus de llibertat vibratoris (Figura 2.13). Aquest filtratge es pot realitzar mitjançant l'ús de filtres tipus FIR (*Finite Impulse Response*) o bé tipus IIR (*Infinite Impulse Response*).

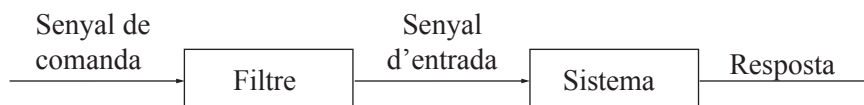


Figura 2.13: Esquema del filtratge del senyal de comanda

Autors com Singhose et al. [54] i Vaughan [55], entre d'altres, presenten estudis en els quals comparen l'efectivitat dels mètodes basats en el tren d'impulsos presentats en 2.1.1 i dels filtres digitals. Abans de procedir a l'estudi d'aquestes publicacions, és important remarcar les diferències essencials d'ambdues tècniques. Els filtres digitals són trens d'impulsos que garanteixen la reducció de l'amplitud mitjana de la vibració a la freqüència de disseny, però no garanteixen què passa amb la vibració en un tram concret en el domini temporal. La metodologia *Input shaping*, tot i tractar-se també d'un conjunt d'impulsos, està orientada exclusivament a fer que la vibració residual de la resposta del sistema, després del transitori, sigui nul·la. D'acord amb Singh i Heppler [50], Bath i Miu [5] i Bath et al. [6], la condició necessària i suficient per a obtenir un moviment $y(t)$ amb vibració residual nul·la és que el mòdul de la Transformada de Laplace de la comanda d'entrada $x(t)$ sigui nul en els pols del sistema ($|\text{TL}[x(t)]|_{s_{1,2}} = 0$, sent $s_{1,2} = -\zeta 2\pi f_0 \pm j2\pi f_d$). Aquesta condició es compleix en el cas del ZV i ZVD (i els seus derivats ZVDD, ZVDDD...), ja que són trens d'impulsos que garanteixen vibració residual nul·la. Pel que fa als mètodes EI i SI, en canvi, com que es dissenyen permetent un cert rang de vibració residual, aquesta condició no es compleix. Per la seva banda, els filtres digitals es dissenyen per a reduir l'amplitud d'una banda de freqüències fins a un cert percentatge, i això no garanteix que es compleixi la condició necessària i suficient exposada prèviament. Per tant, mitjançant la tècnica del filtratge digital del senyal de comanda, no es poden obtenir, generalment, lleis de moviment amb vibració residual nul·la.

Singhose et al. [54] publiquen un estudi on comparen l'efectivitat dels mètodes basats en trens d'impulsos i dels filtres digitals (FIR, IIR) per a un sistema lineal d'un grau de llibertat. Per a dur a terme aquest estudi s'utilitzen tres criteris: duració del filtre o del tren d'impulsos, vibració residual un cop ha finalitzat el transitori i robustesa del mètode. De l'estudi realitzat, els autors n'extreuen tres conclusions:

1. La duració de les seqüències d'impulsos és molt més curta que la dels filtres. Així doncs, el sistema assolirà l'estat estacionari abans si s'aplica un tren d'impulsos.
2. Les seqüències d'impulsos produeixen menys vibracions residuals que els filtres.
3. Els trens d'impulsos són més robustos davant les incerteses dels paràmetres del sistema.

Singhose i Vaughan [55] presenten un estudi amb el qual demostren la bondat dels mètodes EI i SI exposats en l'apartat 2.1.1 enfront de la tècnica del filtratge digital utilitzant filtres tipus FIR. Per a realitzar aquesta comparació, aquests autors es basen en resultats gràfics en els quals es representa la magnitud de la transformada de Fourier del filtre o del tren d'impulsos en funció de la freqüència. Singhose i Vaughan asseguren que, si el valor de la transformada de Fourier en les freqüències de disseny és zero o propera a aquest valor, l'amplitud de la vibració residual serà també nul·la o molt petita. Ara bé, això només és cert per a sistemes amb esmorteïment nul ja que, només per a aquest cas concret, es compleix que $\text{TL}[x(t)]|_{j2\pi f_0} = \text{TF}[x(t)]|_{f_0} = 0$. Així doncs, totes les conclusions presentades en aquesta publicació només poden ser aplicades, estrictament, a sistemes amb esmorteïment nul. Els autors demostren que, per a aquest tipus de sistemes, la metodologia del tren d'impulsos, a part de ser més fàcil d'implementar, introdueix menys increment en la duració del senyal de comanda i, per tant, assoleix abans la condició de vibració residual nul·la.

2.1.5 Inversió de la dinàmica del sistema

La tècnica de la inversió de la dinàmica del sistema consisteix en el càlcul de la comanda d'entrada a partir de conèixer la sortida desitjada. Primerament es modelitza la dinàmica del sistema. Tot seguit s'inverteixen les equacions dinàmiques. S'especifica llavors la sortida desitjada i es calcula, en conseqüència, el senyal d'entrada necessari per a generar aquella resposta en el sistema.

Bayo [7] calcula el senyal de comanda a partir de resoldre la inversió de la dinàmica del sistema en el domini freqüencial a partir de la Transformada de Fourier. Tot i obtenir bons resultats, aquest mètode requereix uns càlculs computacionals molt elevats per a passar del domini temporal al freqüencial.

D'altra banda, Singer i Seering [48] descriuen els inconvenients més importants d'aquesta tècnica:

1. S'ha de seleccionar una trajectòria. Si la trajectòria és impossible de seguir, la inversió del sistema no dona un resultat útil.
2. Es necessita un model detallat del sistema, i això no sempre és possible.
3. La inversió del sistema no és robusta en front a les variacions dels paràmetres del sistema.
4. L'ús d'aquest mètode implica una penalització en la durada del moviment.

Bayo [8] presenta en la seva publicació un algoritme iteratiu que permet calcular el parell d'entrada necessari a la manovella per tal que l'extrem lliure de la biela assoleixi una posició determinada. L'ús de l'algoritme transformada ràpida de Fourier (FFT) i la necessitat d'iterar per a obtenir la solució final, no permeten que el sistema pugui ser controlat en temps real.

2.1.6 Sèries trigonomètriques

Meckl i Seering [35] utilitzen una funció de comanda formada per la suma de sinus i cosinus. Els paràmetres d'aquesta funció d'entrada $x(t)$ es calculen de manera que el temps t_f que tarda el sistema a assolir el règim estacionari sigui mínim i que redueixi també el contingut freqüencial en les freqüències properes a la freqüència pròpia del sistema f_0 . Per a minimitzar el contingut freqüencial al voltant d' f_0 , els autors desenvolupen una funció objectiu. Per a demostrar l'efectivitat del seu mètode, avaluen la resposta d'un sistema d'un grau de llibertat vibratori. Els resultats mostren que, tot i tenir un 10% d'error en l'estimació de la freqüència pròpia f_0 , s'obtenen vibracions residuals pràcticament nul·les. La durada del senyal de comanda és únicament un 20% més del que ho seria havent aplicat un pols. L'inconvenient principal d'aquesta tècnica és que s'obtenen lleis de moviments amb arrissat.

2.2 Control actiu de vibracions

El control actiu de vibracions té com a finalitat la reducció de les vibracions d'un sistema mitjançant la modificació de la seva resposta. D'acord amb Fuller *et al.* [22], els components més importants del control actiu són: un sensor per a mesurar vibracions, un controlador electrònic per a modificar convenientment el senyal del sensor i, finalment, un actuador que governa directament el sistema mecànic i que és capaç de modificar-ne la resposta. En funció de com es faci aquesta cancel·lació, es poden distingir dos tipus de controls: el control actiu realimentat (*feedback control*) i el control actiu per avançament o prealimentat (*feedforward control*). Ambdós mètodes s'exposen a continuació.

2.2.1 Control actiu realimentat (*feedback control*)

El control actiu realimentat és útil en sistemes en els quals la força excitadora $F_p(t)$ ni és coneguda, ni pot ser mesurada directament a través de sensors (Figura 2.14). En aquest cas, el sistema de control actua en funció de la resposta $y(t)$ mesurada pel sensor. Per tant, el controlador no comença a actuar fins que no ha rebut els primers senyals de resposta.

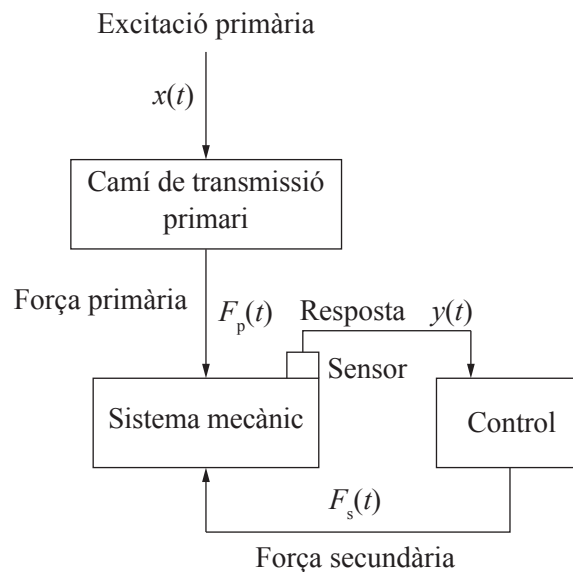


Figura 2.14: Elements bàsics d'un control actiu amb realimentació (*feedback control*)

Magee i Book [33] combinen aquest tipus de control amb els mètodes exposats a 2.1.1 per tal de reduir les vibracions residuals d'un robot articulat situat en un dels extrems d'una biga llarga i esvelta. D'altra banda, Khulief [30] utilitza el control actiu realimentat per a eliminar les vibracions que produeix una biga en girar.

2.2.2 Control actiu per avançament o prealimentat (*feedforward control*)

Alguns autors citats en l'apartat 2.1 consideren els mètodes de definició de lleis de moviment per a minimitzar vibracions residuals com a tècniques de control prealimentat. En aquest apartat, però, es considera el control actiu prealimentat com aquell que, coneixent la pertorbació incident en el sistema, s'hi avança per tal de minimitzar-ne les vibracions residuals (Figura 2.15).

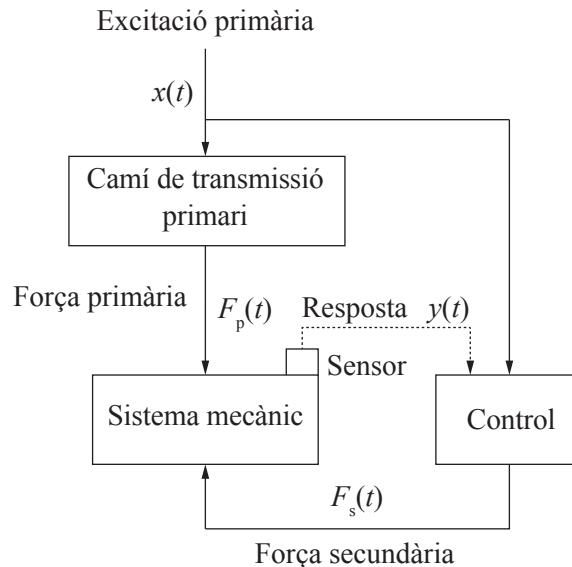


Figura 2.15: Elements bàsics d'un control actiu amb prealimentació (*feedforward control*)

Aquest tipus de control s'utilitza en sistemes en els quals es coneix perfectament la força primària $F_p(t)$. Segons Fuller *et al.* [22], això pot succeir típicament en dues situacions:

1. Quan l'excitació primària $x(t)$ és determinista. En conseqüència, es pot conèixer en qualsevol punt de l'espai i en qualsevol instant de temps la força primària $F_p(t)$.
2. Quan l'excitació primària $x(t)$ es propaga a través d'una estructura mecànica. Per tant, es pot mesurar, mitjançant un sensor, la pertorbació incident $F_p(t)$ en el sistema.

Jinzenji *et al.* [27], per exemple, utilitzen el control actiu per avançament per a compensar pertorbacions exteriors que introdueixen acceleracions angulars i vibracions en discs durs. Burdisso *et al.* [13], d'altra banda, compensen excitacions sísmiques aplicades a estructures d'edificis a través d'algoritmes adaptatius combinats amb aquest tipus de control.

2.3 Cinemàtica inversa en configuracions de punt mort

El disseny de lleis de moviment en màquines i mecanismes ha estat àmpliament estudiat en àrees de recerca com l'enginyeria mecànica o l'enginyeria de control. Sovint, la relació de transmissió entre la coordenada de l'actuador, controlada per l'usuari, i la coordenada que descriu el moviment desitjat, és constant (politja i corretja, cadena d'engrenatges, pinyó i cremallera, etc.)(Figura 2.16). En aquest cas, les restriccions i limitacions per a realitzar qualsevol perfil temporal vénen donades per l'actuador o el sistema de control. Quan la cadena de transmissió es realitza mitjançant un mecanisme de barres, és necessari també fer front a limitacions addicionals, com per exemple les configuracions singulars de la coordenada que descriu el moviment desitjat dins del seu rang de funcionament [9]. La coordenada que defineix el moviment de l'actuador, però, no acostuma a presentar singularitats.

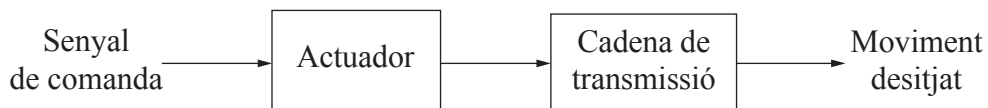


Figura 2.16: Diagrama de blocs del sistema d'estudi

En l'estudi de la cinemàtica de mecanismes de barres amb moviment pla, la mobilitat es pot descriure per mitjà d'un conjunt de coordenades generalitzades i velocitats generalitzades. Les coordenades que descriuen les configuracions del mecanisme s'anomenen coordenades generalitzades. El conjunt mínim de coordenades generalitzades per a definir completament l'estat del mecanisme són les coordenades independents, mentre que la resta es coneixen com a coordenades dependents. En el cas d'un mecanisme pla amb un grau de llibertat, hi ha únicament una coordenada independent. Generalment, l'objectiu de l'usuari és dissenyar una evolució temporal d'aquesta coordenada per mitjà d'una llei de moviment. D'aquesta manera, la cinemàtica inversa es pot utilitzar per a calcular el senyal de comanda de l'actuador. Tanmateix, si aquesta coordenada conté configuracions de punts morts dins del seu rang de funcionament, la cinemàtica inversa comporta indeterminacions algebraïques en aquests estats del mecanisme. Les tècniques que es presenten a continuació tenen com a finalitat la resolució numèrica d'aquesta indeterminació. Aquests mètodes es basen en aproximacions al voltant del punt mort per tal que la llei de moviment pugui ser realitzada.

Per a trobar una solució vàlida de la cinemàtica inversa al voltant d'un punt mort, Whitney [71] suggereix utilitzar la pseudoinversa de la matriu jacobiana J del sistema mecànic. El major inconvenient d'aquest mètode és la seva poca estabilitat al voltant de configuracions de punt mort. Balestrino et al. [4] i Wolovich i Elliot [72] proposen utilitzar la transposada de J en comptes de la seva inversa la qual, d'acord a Buss [14], és una bona aproximació si s'escala per un valor escalar α suficientment petit. Una altra aproximació és la que es coneix com a *Damped Least-squares* (DLS), introduïda per Nakamura i Hanafusa [36] i Wampler [70]. Aquesta tècnica introdueix un factor k per tal d'assegurar que existeix una solució al voltant de la configuració de punt mort, permetent que la coordenada independent es desviï de la trajectòria de referència. Hi ha hagut diferents autors que han presentat mètodes amb l'objectiu de trobar un valor apropiat per a k ([36],[32],[19],[20],[18],[46]

i [15]). D'altra banda, altres tècniques similars al mètode DLS s'exposen a Xiang et al. [73] i Sugihara [60].

Un altre enfocament per a resoldre el problema de la cinemàtica inversa es basa en la tècnica de seguiment de la trajectòria en l'espai nul presentat per Nenchev [37] i Nenchev i Uchiyama [39]. Aquest mètode, basat en el treball de Kieffer [28] i conegut com a *Singularity Consistent* (SC), proposa reparametritzar la trajectòria de la coordenada independent al voltant d'un punt mort. La idea principal consisteix a parametritzar el seu camí amb una funció $g(\alpha)$ suavitzada, on α és tractada com una coordenada dependent. Nenchev et al. [38] demostren analíticament l'equivalència entre el mètode SC i la tècnica de la matriu adjunta de la matriu jacobiana J utilitzada per Tchoń i Dulęba [61] i Senft i Hirzinger [45].

Altres mètodes per a resoldre la indeterminació present en un punt mort són els basats en xarxes neuronals ([3], [23]), els quals presenten principalment dos problemes: l'elecció del tipus de xarxa neuronal i la generació adequada de dades amb la finalitat d'alimentar la xarxa. Aristidou i Lasenby [2] suggereixen un mètode heurístic anomenat *Forward And Backward Reaching Inverse Kinematics* (FABRIK), el qual utilitza l'última posició calculada de les coordenades dependents per tal de trobar-ne els seus futurs valors. La tècnica coneguda com a *Feedback Inverse Kinematics* (FIK) presentada per Pechev [40] utilitza un llaç de realimentació amb la finalitat de minimitzar la diferència entre els valors real i de comanda de velocitat. Finalment, Vargas [63] introdueix l'algoritme *Filtered Inverse* (FI), el qual estima dinàmicament la inversa de la matriu jacobiana J .

Capítol 3

Eines de disseny i caracterització

En aquest capítol es presenten les principals eines i mètodes que s'utilitzen en el desenvolupament de la tesi. Primerament es fa una breu menció del concepte de continuïtat i s'especifiquen els criteris perquè una funció d'una variable sigui contínua en un punt. Tot seguit, s'exposen les corbes de Bézier com a base per al disseny de lleis de moviment. A continuació, es descriu el grau de continuïtat C^n mínim que el senyal de comanda ha de complir per tal de ser realitzat mitjançant un actuator elèctric convencional. Finalment, es detallen les eines que s'utilitzen per a caracteritzar vibracions mecàniques en sistemes lineals i es descriu el sistema vibratori d'estudi.

3.1 Continuïtat en un punt en funcions d'una variable

En aquest apartat es defineix la continuïtat d'una funció d'una variable en un punt, així com algunes propietats que són útils per a descriure-la. Els conceptes exposats s'han extret del llibre Aguiló et al. [1].

3.1.1 Continuïtat

Es diu que la funció $g(x)$ és contínua en x_0 si:

1. $g(x_0)$ existeix i està definit, de forma que x_0 es troba en el domini de g .
2. Existeixen els seus límits laterals $\lim_{x \rightarrow x_0^-} g(x)$ i $\lim_{x \rightarrow x_0^+} g(x)$.
3. El valor dels límits laterals és el mateix i coincideix amb el valor de la funció en el punt x_0 , $\lim_{x \rightarrow x_0^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} g(x) = g(x_0)$.

Si no es compleix alguna de les condicions anteriors, la funció g no és contínua en x_0 .

3.1.2 Criteris de continuïtat en un punt

Siguin g i h dues funcions definides i contínues en x_0 . Si es suposa que $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = g(x_0)$ i

$\lim_{x \rightarrow x_0} h(x) = h(x_0)$, llavors:

1. $\lambda g + \mu h$ és contínua en x_0 i $\lim_{x \rightarrow x_0} (\lambda g(x) + \mu h(x)) = \lambda g(x_0) + \mu h(x_0)$, amb λ i μ constants.
2. $g \cdot h$ és contínua en x_0 i $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)h(x) = g(x_0)h(x_0)$.
3. Si $h(x) \neq 0$ per a tot x , llavors el quocient $\frac{g}{h}$ és continu en x_0 i es compleix que $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g(x)}{h(x)} = \frac{g(x_0)}{h(x_0)}$.

3.2 Eines de disseny de lleis de moviment

Un dels objectius d'aquesta tesi és la definició de lleis de moviment al voltant d'un punt mort. Aquestes lleis de moviment es poden definir mitjançant la utilització de funcions polinòmiques definides sobre la base monomial o bé fent ús de corbes de Bézier no paramètriques. La informació que es mostra en aquest apartat s'ha extret íntegrament de Cardona i Clos [16], Farin [21] i Reyes [42].

Un polinomi $b(u)$ de grau n s'expressa en la base de monomis o canònica $(1, u, u^2, u^3, \dots)$ com:

$$b(u) = a_0 + a_1u + a_2u^2 + \dots + a_nu^n \quad (3.1)$$

on a_i són els coeficients del polinomi en la base de monomis. Aquesta base no resulta recomanable en la definició de corbes per trams pels següents motius:

1. Problemes d'estabilitat numèrica, especialment quan n és elevat. Petits errors en el càlcul dels coeficients donen origen a grans variacions del valor de la funció fora de l'entorn $u = 0$ i a discontinuïtats en les unions.
2. Els coeficients a_i no tenen cap significat geomètric. Una modificació d'un coeficient no produeix cap efecte intuïtiu en la forma de la funció $b(u)$.
3. La imposició de condicions de continuïtat en la unió entre dues corbes no és trivial, ja que involucra tots els coeficients d'una d'elles, inclòs en el cas de continuïtat C^0 .

Els problemes esmentats es solucionen si s'empren els anomenats *polinomis de Bernstein*, els quals constitueixen també una base. Les corbes en base de Bernstein s'anomenen corbes de Bézier. El disseny de lleis de moviment mitjançant aquest tipus de corbes s'exposa a continuació.

3.2.1 Corbes de Bézier no paramètriques

En aquest apartat es descriuen les corbes de Bézier no paramètriques com una alternativa a la utilització de funcions polinòmiques definides sobre la base monomial. Aquestes corbes són funcions polinòmiques definides sobre la base dels polinomis de Bernstein.

Funcions base. Polinomis de Bernstein

Sobre un domini unitari, els polinomis de Bernstein de grau n són:

$$B_i^n(u) = C_n^i u^i (1-u)^{n-i} \quad i = 0, \dots, n \quad \text{on} \quad C_n^i = \frac{n!}{i!(n-i)!} \quad (3.2)$$

A la Figura 3.1 es mostren els polinomis de Bernstein de graus 1, 2 i 3, així com els monomis fins a grau 3.

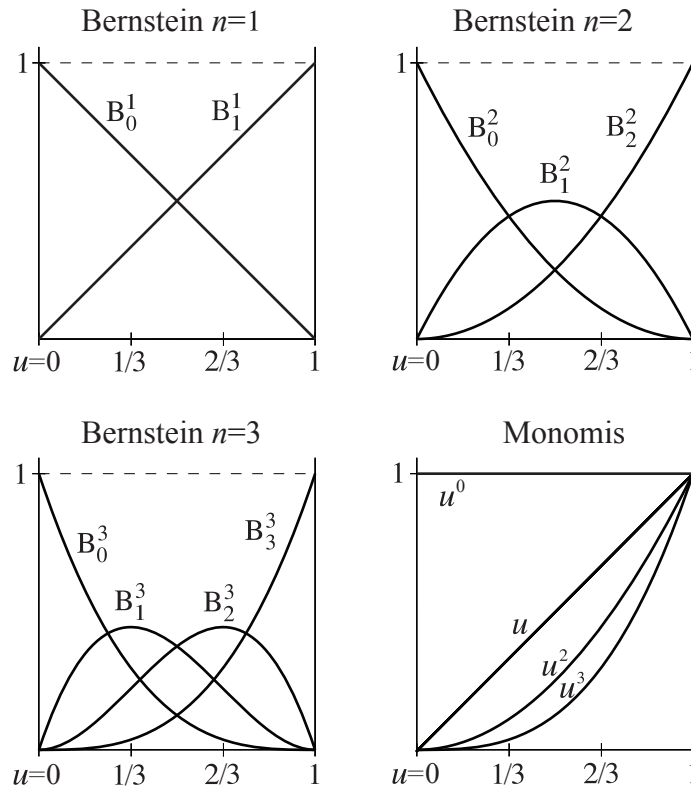


Figura 3.1: Polinomis de Bernstein de graus $n = 1, 2$ i 3 i monomis fins a grau 3

Les principals propietats d'aquest tipus de polinomis són:

1. Satisfan la fórmula recursiva:

$$B_i^n(u) = (1-u)B_i^{n-1}(u) + uB_{i-1}^{n-1}(u) \quad i = 0, \dots, n \quad (3.3)$$

amb

$$B_0^0 = 0; \quad B_{-1}^n(u) = 0 \quad (3.4)$$

2. Són una partició de la unitat:

$$\sum_{i=0}^n B_i^n(u) = 1 \quad (3.5)$$

3. Són positius:

$$B_i^n(u) \geq 0, \quad u \in [0, 1] \quad (3.6)$$

4. Tenen un comportament simètric respecte als dos extrems de l'interval de definició:

$$B_i^n(u) = B_{n-i}^n(1 - u) \quad (3.7)$$

5. A cada extrem només hi ha un polinomi de valor no nul.

6. Presenten un màxim per a l'abscissa i/n .

7. Constitueixen una base numèricament estable.

Punts de control

Les corbes de Bézier $b(u)$ poden ser tant paramètriques com no paramètriques, amb $u \in [0, 1]$. En el primer cas, u és el paràmetre i pot representar, per exemple, una corba en 3D on $b(u)$ és un vector de tres components. Si en canvi u representa la variable de l'eix d'abscisses del gràfic de la corba $b(u)$ es diu que la corba és no paramètrica. D'altra banda, aquest tipus de corbes es poden classificar també en racionals –si l'expressió es defineix mitjançant el quocient de dos polinomis– o bé irracionals, quan aquesta queda definida a partir d'un polinomi algebraic. Per a l'aplicació que es considera en aquesta tesi, s'estudien únicament les corbes de Bézier no paramètriques i no racionals, ja que les corbes racionals no aporten cap avantatge significatiu i, en canvi, augmenten considerablement la seva complexitat de càlcul.

Una corba de Bézier $b(u)$ de grau n s'expressa en la base de Bernstein com:

$$b(u) = \sum_{i=0}^n b_i B_i^n(u) \quad u \in [0, 1] \quad (3.8)$$

on els $n+1$ coeficients b_i s'anomenen *ordenades de Bézier*. El gràfic de la corba $b(u)$ s'anomena *corba de Bézier no paramètrica*. Per a cada ordenada b_i es defineix un punt \mathbf{b}_i de coordenades $(i/n, b_i)$ anomenat *punt de control* i el conjunt dels punts de control defineixen el que s'anomena *polígon de control de la corba*.

A l'expressió 3.8 el polinomi $B_i^n(u)$ es pot interpretar com la influència de b_i a la corba $b(u)$. Aquesta influència és màxima a $u = i/n$, ja que $B_i^n(u)$ hi presenta un màxim. Això fa

que la representació gràfica de la corba $b(u)$ tendeixi a ser propera al polígon de control (Figura 3.2), i si es desplaça verticalment un punt de control –es modifica l’ordenada b_i corresponent– la corba presenta la modificació més acusada a l’entorn d’aquest punt.

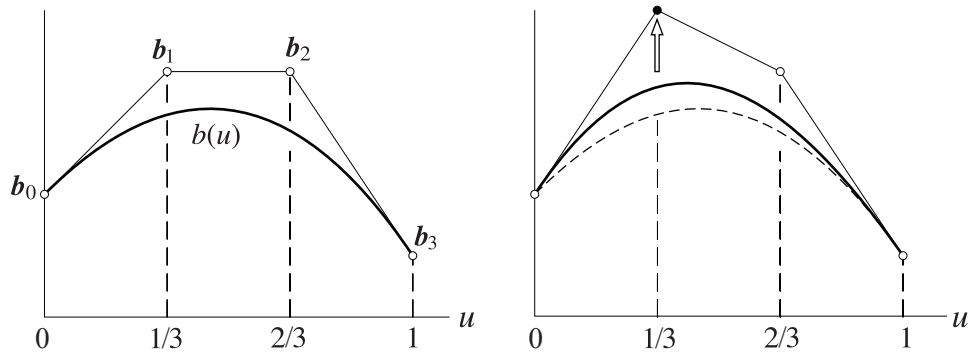


Figura 3.2: Corba de Bézier no paramètrica de grau $n = 3$. Influència del punt b_i

Aquesta propietat i les següents donen un significat geomètric a les ordenades de Bézier que facilita el disseny i la modificació interactiva d’una corba de Bézier:

1. La corba passa pels punts extrems b_0, b_n i és tangent al polígon de control en aquests punts.
2. La corba es troba tancada dins el domini convex dels punts de control (Figura 3.3). El polígon de control permet establir una caixa contenedora dins la qual es pot assegurar que es troba la corba.
3. Precisió lineal. Si tots els punts de control estan sobre una recta, la corba de Bézier és precisament aquesta recta.
4. Disminució de variacions. Segons aquesta propietat, el nombre d’interseccions de la corba amb una recta és menor o igual que el nombre d’interseccions de la recta amb el polígon de control.
5. Invariància en front de transformacions afins. Això permet girar, traslladar o escalar la corba aplicant transformacions únicament al polígon de control.

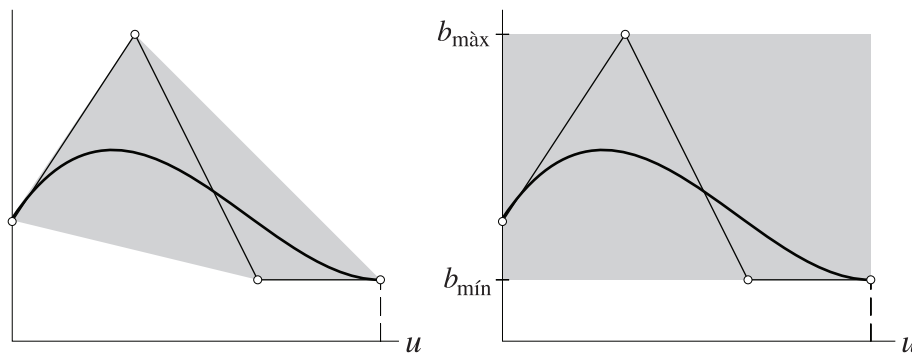


Figura 3.3: Domini convex i caixa contenedora d’una corba de grau $n = 3$

A més, resulta interessant observar els casos particulars següents (Figura 3.4):

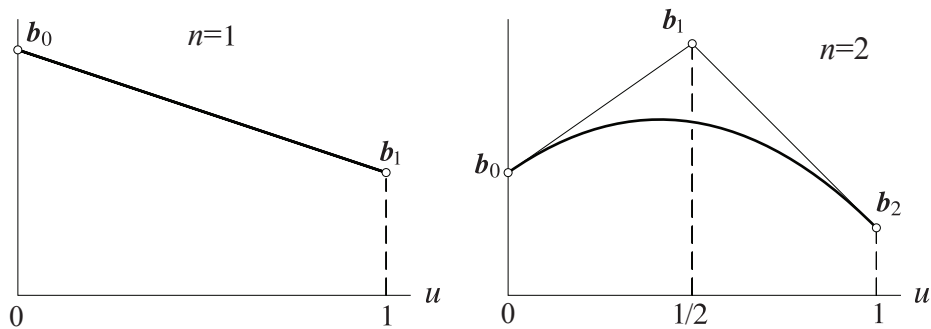


Figura 3.4: Corbes de Bézier no paramètriques de graus $n = 1, 2$

1. $n = 1$; segment rectilini d'extremes b_0, b_1 .
2. $n = 2$; segment parabòlic d'extremes b_0 i b_2 , amb tangents en aquests punts que es tallen a b_1 .

Derivació i integració d'una corba de Bézier no paramètrica

La derivada $b'(u)$ respecte a l'argument u d'un polinomi $b(u)$ de grau n és un polinomi de grau $n - 1$ tal que

$$b'(u) = \frac{db(u)}{du} \quad (3.9)$$

A la base de Bernstein, es pot comprovar que els coeficients b'_i de la derivada s'obtenen com

$$b'_i = n(b_{i+1} - b_i) \quad i = 0, \dots, n - 1 \quad (3.10)$$

i la corba $b'(u)$ s'expressa com

$$b'(u) = \sum_{i=0}^{n-1} b'_i B_i^{n-1}(u) \quad u \in [0, 1] \quad (3.11)$$

En la Figura 3.5 es presenta com exemple la derivada d'una corba cúbica ($n = 3$) que és una corba parabòlica. Aquesta última s'ha representat amb una escala reduïda 3 vegades per a l'eix d'ordenades. De l'expressió 3.10 es dedueix que, en el procés d'integració,

$$b_{i+1} = b_i + \frac{b'_i}{n} \quad (3.12)$$

essent b'_i les ordenades de Bézier de la funció de partida, b_i les ordenades de la funció integrada i n l'ordre d'aquesta. Per a definir la constant d'integració es pot prendre un valor concret per a una coordenada; el més senzill és b_0 .

La utilització de les corbes de Bézier per tal de definir una funció $b(s)$ de la variable independent s entre s_0 i s_1 , $s \in [s_0, s_1]$, i el fet que les corbes de Bézier $b(u)$ es defineixen en un domini unitari $u \in [0, 1]$, fa que usualment s'utilitzi el canvi de variable lineal

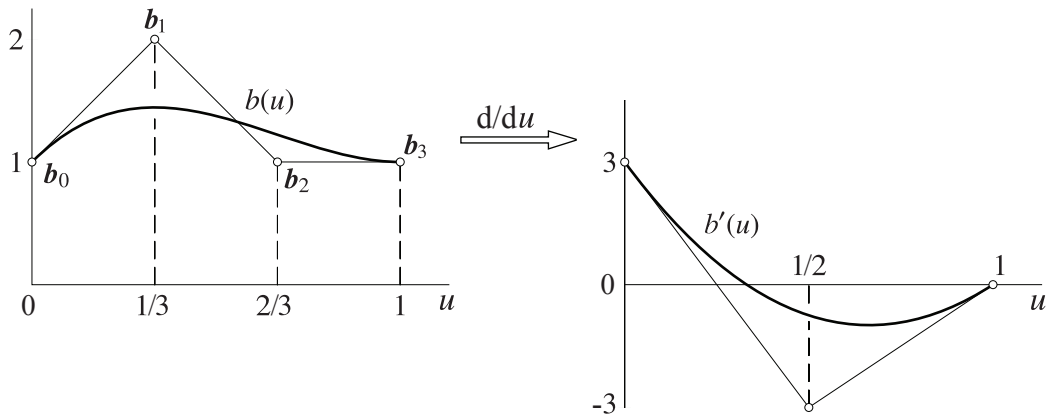


Figura 3.5: Derivada d'una corba de Bézier no paramètrica de grau $n = 3$

$$u = \frac{s - s_0}{s_1 - s_0} \quad (3.13)$$

Amb aquest canvi de variables, la relació entre la derivada $b'(u(s))$ respecte a $u(s)$ i la derivada $b'(s)$ respecte a s és

$$b'(s) = b'(u(s))u'(s) = \frac{b'(u(s))}{s_1 - s_0} \quad (3.14)$$

Imposició de condicions de continuïtat

L'expressió 3.10 posa de manifest que les derivades r -èssimes en els extrems $u = 0$, $u = 1$ només depenen dels $r + 1$ punts de control més propers, és a dir, a $u = 0$ només depèn dels coeficients b_0, \dots, b_r , i a $u = 1$ dels coeficients b_{n-r}, \dots, b_n .

La imposició de condicions de continuïtat r -èssima en la unió entre dues corbes resulta, doncs, molt més senzilla en la base de Bernstein que en la base de monomis, ja que només es veuen involucrats $r + 1$ coeficients de cada corba.

En el cas particular d'unió d'una corba de Bézier amb una recta, per a aconseguir continuïtat C^r respecte al paràmetre s n'hi ha prou que els $r + 1$ punts de control més propers a la unió es trobin sobre la prolongació de la recta (Figura 3.6).

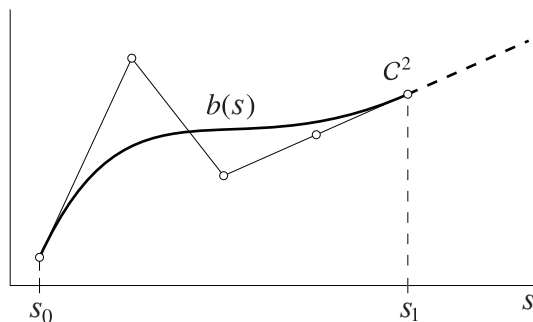


Figura 3.6: Unió C^2 d'una recta amb una corba de Bézier

En el cas més general, es planteja determinar la corba de Bézier que s'uneix amb continuïtat C^r amb una altra corba coneguda (Figura 3.7). Si la corba coneguda és de Bézier $-b(s)$, d'ordre n_1 i interval de definició Δs_1 – les derivades respecte a s en el punt d'unió es poden trobar de manera recurrent utilitzant l'expressió 3.10 i tenint en compte que les corbes de Bézier passen pels punts de control extrems. Per exemple, si la unió es fa amb l'últim punt d'aquesta corba:

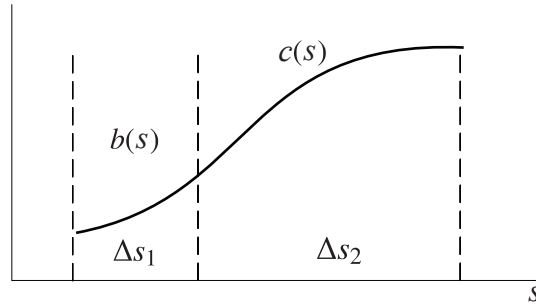


Figura 3.7: Unió de 2 trams de corbes de Bézier

$$\begin{aligned}
 b_n & & b(s_{\text{màx}}) &= b_n \\
 b'_{n-1} &= (b_n - b_{n-1}) n_1 & b'(s) \Big|_{s_{1\text{màx}}} &= b'(u) \Big|_{u+1} \frac{1}{\Delta s_1} = b'_{n-1} \frac{1}{\Delta s_1} \\
 b''_{n-2} &= (b'_{n-1} - b'_{n-2}) (n_1 - 1) & b''(s) \Big|_{s_{1\text{màx}}} &= b''_{n-2} \frac{1}{(\Delta s_1)^2} \\
 \vdots & & \vdots &
 \end{aligned} \tag{3.15}$$

Conegudes aquestes derivades, les ordenades de Bézier c_i de la corba de Bézier $-c(s)$, ordre n_2 i interval de definició Δs_2 – que empalma amb la continuïtat C^r amb la primera es poden trobar a partir de l'expressió 3.12 i tenint en compte que les corbes de Bézier passen pels punts extrems

$$\begin{aligned}
 c_0 &= b_n, \quad c_1 = c_0 + \frac{c'_0}{n_2}, \quad c_2 = c_1 + \frac{c'_1}{n_2}, \quad \dots \\
 c'_0 &= c'(u) \Big|_{u=0} = c'(s) \Big|_{s_{2\text{mín}}} \Delta s_2 = b'(s) \Big|_{s_{1\text{màx}}} \Delta s_2 = b'_{n-1} \frac{\Delta s_2}{\Delta s_1}, \quad c'_1 = c'_0 + \frac{c''_0}{n_2 - 1}, \quad \dots \\
 c''_0 &= b''(s) \Big|_{s_{1\text{màx}}} (\Delta s_2)^2 = b''_{n-2} \left(\frac{\Delta s_2}{\Delta s_1} \right)^2, \quad \dots \\
 \vdots &
 \end{aligned} \tag{3.16}$$

Com a casos particulars en unir dues corbes de Bézier:

1. Si es vol continuïtat C^1 només cal que els dos últims punts de control del primer tram estiguin alineats amb els dos primers del segon tram –les corbes de Bézier en els extrems són tangents al polígon de control.
2. Si les dues corbes de Bézier són del mateix ordre i estan definides en el mateix interval ($n_1 = n_2$ i $\Delta s_1 = \Delta s_2$), les ordenades de Bézier respectives guarden la relació:

$$\begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & -4 & 1 & 0 & 0 \\ 8 & -12 & 6 & -1 & 0 \\ 16 & -32 & 24 & -8 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} b_n \\ b_{n-1} \\ b_{n-2} \\ b_{n-3} \\ b_{n-4} \end{pmatrix} \quad (3.17)$$

Exemple de disseny de llei de velocitats

En l'exemple de la Figura 3.8 es mostra la definició de la llei de velocitats $b(u)$ d'engedada d'un carro portaeines d'una màquina de control numèric, que ha de passar de velocitat nul·la a velocitat constant v_f i per a la qual es desitja que la continuïtat en l'acceleració sigui C^1 . També s'hi mostren les successives derivades d'aquesta llei.

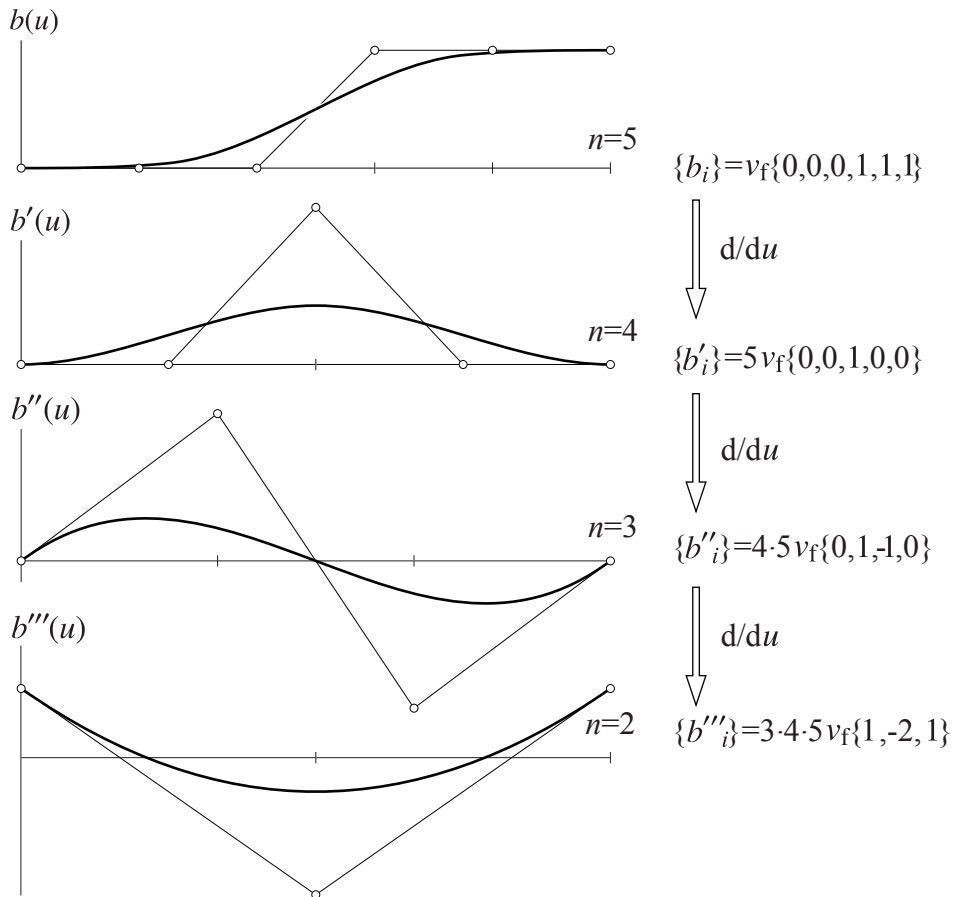


Figura 3.8: Llei de velocitat d'engedada d'un carro portaeines i derivades successives

Per a garantir la continuïtat C^1 en l'acceleració, és necessària una continuïtat C^2 en la velocitat, és a dir, el polígon de control ha de tenir 3 punts sobre les rectes de velocitat nul·la i velocitat constant v_f . Per tant, el grau mínim del polinomi que defineix la llei de velocitat és $n = 5$.

3.3 Capacitat dels actuadors elèctrics convencionals

En aquest apartat s'analitza la continuïtat C^n mínima que el senyal de comanda ha de complir per tal de ser realitzat, amb una precisió raonable, mitjançant un actuator elèctric convencional. Amb aquesta finalitat, s'estudien les limitacions causades per les discontinuïtats en posició, velocitat i acceleració. En aquest estudi no s'inclou una anàlisi quantitativa detallada de la capacitat dels actuadors, és a dir, que no es considera el rang de freqüències en el qual l'actuator és capaç de respondre, tot i que es fa referència al seu ordre de magnitud. Com a exemple, s'estudia el senyal de comanda de la coordenada generalitzada q_1 del mecanisme de barres presentat en la Figura 4.2.

En actuadors elèctrics convencionals com els servomotors de corrent continu (DC) amb escombretes, i servomotors síncrons d'imants permanents sense escombretes (AC i DC), la constant de temps elèctrica i el temps de difusió magnètica són de l'ordre de milisegons [12]. Per tant, si es suposa una entrada graó com a senyal de comanda, es pot obtenir un parell estacionari i, en conseqüència, una acceleració estacionària després d'un temps de transició t_t d'un ordre semblant. Amb l'objectiu d'analitzar aquest efecte, es suposa que la coordenada q_1 segueix una llei de moviment temporal com la que es presenta en l'equació 3.18 (Figura 3.9 a)):

$$q_1(t) = \begin{cases} 0 & -\infty < t \leq t_0^- \\ b_1 t & t_0^+ \leq t < +\infty \end{cases} \quad \dot{q}_1(t) = \begin{cases} 0 & -\infty < t \leq t_0^- \\ b_1 & t_0^+ \leq t < +\infty \end{cases} \quad (3.18)$$

$$\ddot{q}_1(t) = \begin{cases} 0 & -\infty < t < t_0^- \\ b_1 \delta(t) & t_0^- \leq t \leq t_0^+ \\ 0 & t_0^+ < t < +\infty \end{cases}$$

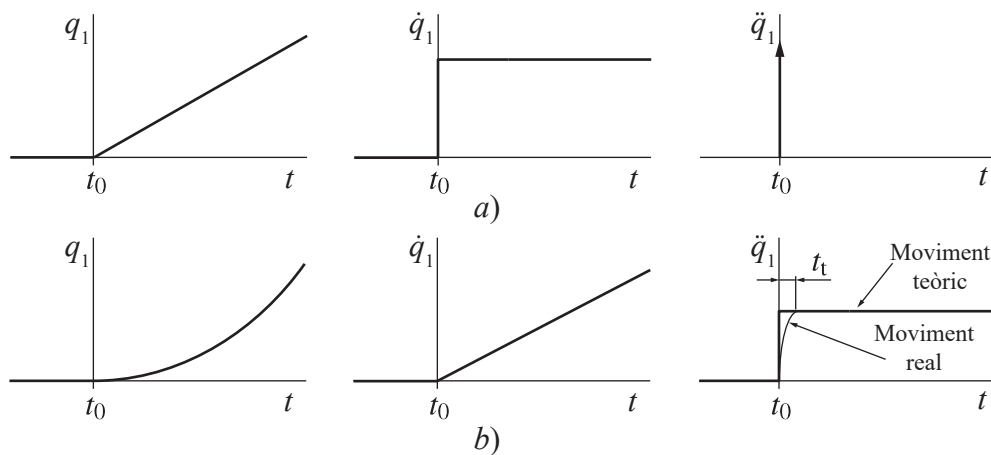


Figura 3.9: Senyal de comanda amb una discontinuïtat en a) la velocitat \dot{q}_1 i b) l'acceleració \ddot{q}_1

on t_0^- i t_0^+ són els instants de temps just abans i després de començar el moviment, respectivament. El paràmetre b_1 fa referència al coeficient del polinomi genèric de la llei de moviment de $q_1(t)$. Aquest tipus de moviment és C^0 i implica un impuls d'acceleració (equació 3.18). Encara que aquest perfil temporal es pot aproximar físicament a un parell

percussiu, la majoria d'actuadors elèctrics convencionals no són capaços d'executar-lo. A continuació, es considera el senyal de comanda de la Figura 3.9 b) (equació 3.19):

$$\begin{aligned}
 q_1(t) &= \begin{cases} 0 & -\infty < t \leq t_0^- \\ b_2 t^2 & t_0^+ \leq t < +\infty \end{cases} & \dot{q}_1(t) &= \begin{cases} 0 & -\infty < t \leq t_0^- \\ 2b_2 t & t_0^+ \leq t < +\infty \end{cases} \\
 \ddot{q}_1(t) &= \begin{cases} 0 & -\infty < t \leq t_0^- \\ 2b_2 & t_0^+ \leq t < +\infty \end{cases}
 \end{aligned} \tag{3.19}$$

A diferència del cas anterior, aquest perfil d'acceleració es pot realitzar amb més o menys precisió passat un cert temps de transició de t_t mil·lisegons, si es tenen en compte les constants de temps indicades prèviament. La precisió del moviment dependrà del rang de freqüències en el qual l'actuador és capaç de respondre, ja que aquest actuarà com a filtre passabaixos del senyal de comanda. En general, d'acord amb [66], per a motors de corrent continu amb potències de fins a 500 W, les freqüències de tall en buit es troben entre 5 Hz i 15 Hz per a motors amb nucli estàndard (Figura 3.10), i poden arribar fins a freqüències de 30 Hz en motors anomenats *coreless* (rotor sense nucli).

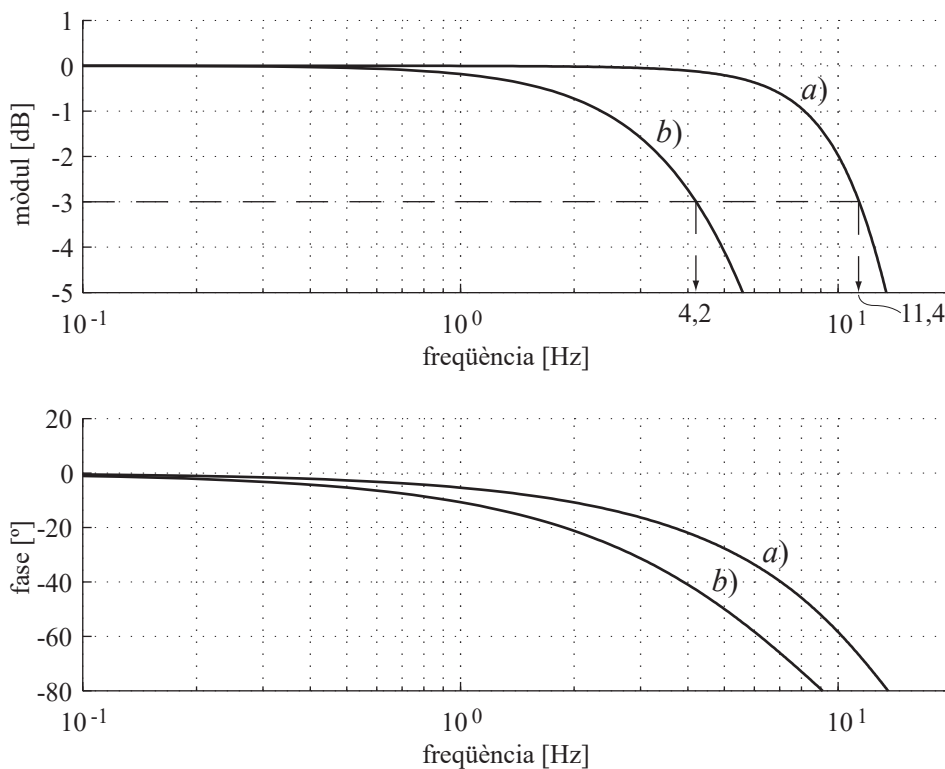


Figura 3.10: Resposta freqüencial del motor *Dunkermotoren* GR 80x80 (dB referits a $1/K_v$, amb $K_v = 67 \cdot 10^{-3}$ V/(rad/s)) per als casos: a) motor girant en buit, i b) motor amb càrrega reduïda a l'eix del motor de $I_r = 3200 \cdot 10^{-7}$ kg · m² [66]

D'altra banda, els motors síncrons d'imants permanents (sense escombretes amb alimentació DC o AC) poden respondre bé en rangs de freqüència de valor triple que els de corrent continu amb nucli estàndard (Figura 3.11). Per tant, tots aquests motors tenen capacitat per a seguir senyals de comanda amb continguts freqüencials inferiors a les freqüències indicades, segons les inèrcies involucrades, però mai per sobre d'aquestes.

Conseqüentment, i donats els rangs de freqüències habituals que es donen en el control de moviment d'inèrcies, es considera acceptable proposar la hipòtesi que els actuadors elèctrics convencionals poden realitzar qualsevol senyal de comanda que sigui, com a mínim, C^1 .

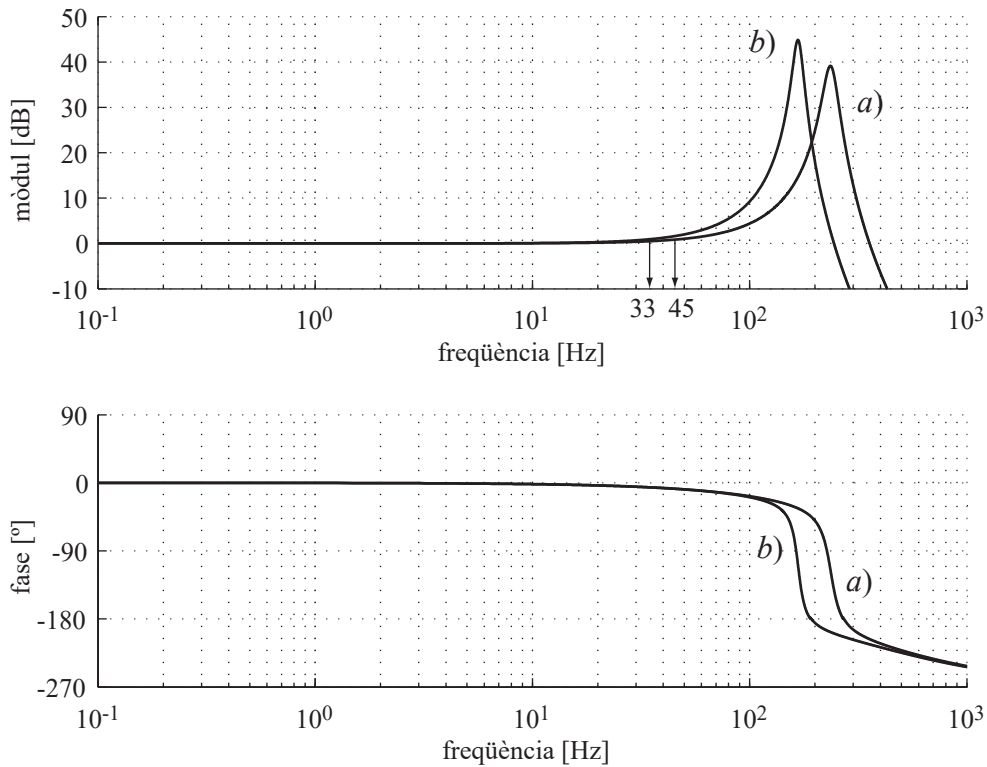


Figura 3.11: Resposta freqüencial del motor Mavilor BLS 40 (dB referits a $2/p$, amb $p = 8$) per als casos: a)) motor girant en buit, i b) motor amb càrrega reduïda a l'eix del motor de $I_r = 24 \cdot 10^{-7} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ [66]

3.4 Eines de caracterització de vibracions

Per a estudiar el comportament d'un sistema lineal amb coeficients constants cal resoldre el sistema d'equacions diferencials ordinàries lineals que descriu el seu comportament. Per a facilitar la resolució d'aquest tipus de sistemes s'han posat a punt dues transformacions de funcions: la *transformada de Laplace* –TL– i la *transformada de Fourier* –TF–, cadascuna amb una transformació directa i inversa que permet restituir la funció inicial. Aquestes transformades permeten l'algebrització d'expressions integro-diferencials. La informació exposada en aquest subapartat s'ha extret de forma íntegra de Cardona i Jordi [17].

En l'àmbit de les vibracions, les funcions que usualment descriuen l'evolució temporal de magnituds físiques –desplaçament, força...– sovint són experimentals i solen anomenar-se senyals. Els senyals experimentals rarament es poden expressar mitjançant funcions analítiques; aquest fet, junt amb la facilitat d'implementació numèrica i d'interpretació de la transformada de Fourier, fan que la transformada de Laplace quedi més lligada a l'estudi analític dels sistemes i les seves propietats –càlcul operacional– i la transformada

de Fourier s'associa a l'anàlisi de senyals i a l'estudi experimental de sistemes –anàlisi freqüencial o espectral.

3.4.1 Transformada de Laplace i transformada de Fourier

La transformada de Laplace transforma una funció $x(t)$ del temps, funció en el domini temporal, en una funció complexa $X(s)$ de variable complexa s , i la seva inversa fa el pas contrari. La parella de transformades, directa i inversa, es defineixen com:

$$X(s) = \text{TL}[x(t)] = \int_0^{\infty} x(t)e^{-st} dt \quad (3.20)$$

$$x(t) = \text{TL}^{-1}[X(s)] = \frac{1}{2\pi j} \int_{\alpha-j\infty}^{\alpha+j\infty} X(s)e^{st} ds \quad (3.21)$$

Per tal que existeixin, calen unes condicions que les funcions descriptives de l'evolució de les magnituds físiques, en principi, compleixen:

1. Si tenen discontinuïtats, han de ser finites i en nombre finit.
2. Ha d'existir algun valor α tal que $\int_0^{\infty} |x(t)|e^{-\alpha t} dt < \infty$.

La transformada inversa requereix una integral, en el pla complex, al llarg d'una línia paral·lela a l'eix imaginari que talla a l'eix real a $\text{Re}[s] = \alpha$ i que s'estén de $-\infty$ a $+\infty$. En molts casos, es pot emprar la transformada de Laplace sense haver de recórrer a l'ús d'aquesta integral de línia ja que, si es compleix el lema de Jordan, es pot substituir aquesta integral de línia per una integral en un contorn tancat que es pot avaluar mitjançant la teoria de residus. De tota manera, aquest procés ofereix dificultats i en qualsevol cas redueix o inclús anul·la els avantatges operacionals associats a la transformada de Laplace si no es disposa d'una taula de funcions associades $x(t) \leftrightarrow X(s) = \text{TL}[x(t)]$ i es fa ús de les seves propietats.

La transformada de Fourier transforma una funció $x(t)$ del temps, funció en el domini temporal, en una funció complexa $X(f)$ de la freqüència, funció en el domini freqüencial, i la seva inversa fa el pas contrari. La transformada de Fourier dóna lloc a l'anàlisi espectral o freqüencial de senyals. De fet, es pot considerar una extensió de les *Sèries de Fourier* per a funcions periòdiques, $x(t) = x(t+T)$ amb $T \neq 0$ el període. Per a aquestes funcions cal recordar:

$$\begin{aligned} x(t) &= a_0 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cos\left(\frac{2\pi}{T}kt\right) + b_k \sin\left(\frac{2\pi}{T}kt\right) \right) = c_0 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} c_k \cos\left(\frac{2\pi}{T}kt + \varphi_k\right) = \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left(a_k \cos\left(\frac{2\pi}{T}kt\right) + b_k \sin\left(\frac{2\pi}{T}kt\right) \right) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \cos\left(\frac{2\pi}{T}kt + \varphi_k\right) \end{aligned} \quad (3.22)$$

amb

$$a_k = \frac{1}{T} \int_0^T x(t) \cos\left(\frac{2\pi}{T}kt\right) dt \quad (3.23)$$

$$b_k = \frac{1}{T} \int_0^T x(t) \sin\left(\frac{2\pi}{T}kt\right) dt \quad (3.24)$$

$$c_k = \sqrt{a_k^2 + b_k^2} \quad (3.25)$$

$$\varphi_k = -\arctan\left(\frac{b_k}{a_k}\right) \quad (3.26)$$

Per a un senyal $x(t)$ la transformada de Fourier i la seva inversa es defineixen com:

$$X(f) = \text{TF}[x(t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-j2\pi ft} dt \quad (3.27)$$

$$x(t) = \text{TF}^{-1}[X(f)] = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f)e^{j2\pi ft} df \quad (3.28)$$

La transformada de Fourier rep també el nom d'*Integral de Fourier* i es pot obtenir a partir de la sèrie de Fourier fent tendir el període T a ∞ , no amitjanant –dividint per T – per a l'obtenció dels coeficients a_k i b_k i utilitzant la notació complexa per a representar conjuntament el sinus i el cosinus.

Existeixen diverses versions en la definició de la transformada de Fourier que condueixen a expressions diferents de la presentada:

1. Si la variable d'integració de la transformada inversa és ω en lloc de f aleshores apareix el factor $1/(2\pi)$ que pot quedar dividint la transformada inversa, la transformada directa o repartit entre ambdues en forma de $1/\sqrt{2\pi}$.
2. La unitat imaginària pot representar-se com i o com j . Es pren j lligant amb el criteri dels fasors que giren en sentit antihorari ($e^{aj} = \cos \alpha + j \sin \alpha$).
3. El signe de l'exponent en la transformada directa pot ser negatiu, com en la definició presa, o positiu. Aquest canvi de signe té com a conseqüència un canvi de signe de la part imaginària de la transformada.
4. Aquestes variacions només afecten en el cas de quedar-se com a resultat de l'estudi la transformada directa de Fourier o una conseqüència d'aquesta, com per exemple la resposta freqüencial. Si es fan servir amb coherència ambdues transformades, per a passar del domini temporal al freqüencial i tornar al temporal, no hi ha diferència de resultats.

Per tal que existeixin, també cal que els senyals compleixin unes determinades condicions:

1. Si tenen discontinuïtats han de ser finites i en nombre finit.
2. S'ha de complir que $\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)| dt < \infty$ o $\int_{-\infty}^{+\infty} (x(t))^2 dt < \infty$.

La potència d'un senyal s'associa al seu quadrat, $P_x(t) = (x(t))^2$, i la seva energia a la integral d'aquesta:

$$E_x = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)^2 dt \quad (3.29)$$

Això fa que, en principi, la integral de Fourier només sigui aplicable a funcions que descriuen transitoris d'energia finita. Emprant, però, la funció *Impuls* o *Delta de Dirac*, $\delta(t)$, la transformada de Fourier és aplicable a funcions periòdiques i quasiperiòdiques (superposició de funcions periòdiques de períodes que no són múltiples enters d'un mateix període fonamental, és a dir, superposició de funcions periòdiques no harmòniques entre elles). Cal recordar que la funció delta de Dirac $\delta(t)$ es defineix com:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) dt = 1 \quad \text{i} \quad \delta(t) = 0 \quad \forall t \neq 0 \quad (3.30)$$

Aquesta funció, que és la derivada generalitzada de la funció graó unitari, no és una verdadera funció en el sentit matemàtic usual ja que no està definida per a cada valor de t . S'utilitza freqüentment per a representar distribucions.

En l'àmbit de les vibracions algunes transformades de Fourier interessants són:

$$\text{TF}[\cos(2\pi f_1 t)] = (1/2)[\delta(f - f_1) + \delta(f + f_1)] \quad (3.31)$$

$$\text{TF}[\sin(2\pi f_1 t)] = (1/2)[- \delta(f - f_1) + \delta(f + f_1)]j \quad (3.32)$$

$$\text{TF}[\cos(2\pi f_1 t + \varphi)] = (1/2) [e^{j\varphi} \delta(f - f_1) + e^{-j\varphi} \delta(f + f_1)] \quad (3.33)$$

$$\text{TF}[\delta(t)] = 1 \quad (3.34)$$

Transformada discreta de Fourier

La transformada Discreta de Fourier té entitat pròpia en l'estudi de senyals discretitzats en el temps, mostrejats a intervals regulars i descrits mitjançant una sèrie de N valors i es pot considerar una aproximació numèrica de la transformada (contínua) de Fourier. Es defineix com:

$$X_k = \frac{1}{N} \sum_{r=1}^N x_r e^{-j2\pi(k-1)(r-1)/N} \quad k = 1, \dots, N \quad (3.35)$$

$$x_r = \sum_{k=1}^N X_k e^{j2\pi(k-1)(r-1)/N} \quad r = 1, \dots, N \quad (3.36)$$

L'any 1965 J.W. Cooley i J.W. Tukey van publicar l'algorisme de la Transformada Ràpida de Fourier –FFT– per al càlcul numèric de la transformada Discreta de Fourier. Aquest algorisme redueix el nombre d'operacions respecte al càlcul directe de les expressions anteriors. Així, si N és una potència entera de 2 el nombre d'operacions passa de ser proporcional a N^2 a ser proporcional a $N \log_2 N$. Per exemple, si $N = 2^{10}$ la relació en el nombre d'operacions és $N/\log_2 N = 102,4$. Aquest algorisme va suposar una revolució en l'estudi, sobretot experimental, de les vibracions, que és l'estudi dels sistemes lineals, i en l'anàlisi de senyals. És encara l'algorisme més utilitzat en el processat digital de senyals –DSP–. Gràcies a aquest algorisme (i a l'augment de les potències de càlcul), s'ha avançat i assolit un alt nivell en tècniques com el manteniment preventiu-predictiu de màquines i instal·lacions, on es preveu quan una màquina pot fallar i així poder programar el seu manteniment o la seva reparació, de manera que el perill i la incidència econòmica siguin mínims.

3.4.2 Relació entre les transformades de Laplace i de Fourier

De manera formal es passa de la transformada de Laplace a la de Fourier amb la substitució $s \leftrightarrow j\omega$, però de fet hi ha diferències profundes en la seva utilització acurada: límits de les integrals i condicions d'existència.

1. Quan la transformació directa de Fourier és possible i $x(t) = 0 \quad \forall t < 0$, aquesta coincideix amb la de Laplace simplement substituint s per $j\omega$.
2. Si $x(t)$ s'anul·la per a valors de $t \leq t_0$ (amb t_0 positiu o negatiu) i es compleix la condició de convergència de la transformada directa de Fourier aleshores:

$$X(\omega) = e^{-j\omega t_0} \text{TF}[x(t - t_0)] \quad (3.37)$$

3. Si $x(t)$ no s'anul·la per a tots els valors de $t < t_0$, amb t_0 negatiu, però es compleix la condició de convergència de la transformada directa de Fourier es pot procedir de la següent forma:

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt = \int_0^{+\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt + \int_{-\infty}^0 x(t) e^{-j\omega t} dt \quad (3.38)$$

Fent primer el canvi $t = \tau$ en el segon sumand i, a continuació, els canvis $j\omega = s$ i $-j\omega = s'$

$$\begin{aligned} X(\omega) &= \int_0^{+\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt + \int_0^{+\infty} x(-\tau) e^{j\omega \tau} d\tau = \\ &= \int_0^{+\infty} x(t) e^{-st} dt + \int_0^{+\infty} x(-\tau) e^{-s'\tau} d\tau = X_t(s = j\omega) + X_{-\tau}(s' = -j\omega) \end{aligned} \quad (3.39)$$

Així doncs, $X(\omega)$ es pot determinar com a suma de la transformada de Laplace, amb s substituïda per $j\omega$, de $x(t)$ suposada nul·la per a $t < 0$ i de la transformada de Laplace, amb s' substituïda per $-j\omega$, de $x(-\tau)$ suposada nul·la per a $\tau < 0$.

3.4.3 Propietats i aplicació de les transformades

En ambdues transformades, les dues propietats bàsiques per a la seva utilització en la resolució de sistemes lineals d'equacions diferencials ordinàries (EDO) amb coeficients constants són:

1. Derivació:

$$\text{TF}[x(t)] = X(\omega) \rightarrow \text{TF}[\dot{x}(t)] = j\omega X(\omega) \quad (3.40)$$

$$\text{TL}[x(t)] = X(s) \rightarrow \text{TL}[\dot{x}(t)] = sX(s) - x(0) \quad (3.41)$$

2. Linealitat:

$$\text{TF}[x(t) + y(t)] = \text{TF}[x(t)] + \text{TF}[y(t)] \quad (3.42)$$

$$\text{TF}[a x(t)] = a \text{TF}[x(t)] \quad (3.43)$$

$$\text{TL}[x(t) + y(t)] = \text{TL}[x(t)] + \text{TL}[y(t)] \quad (3.44)$$

$$\text{TL}[a x(t)] = a \text{TL}[x(t)] \quad (3.45)$$

3.4.4 Resposta dels sistemes lineals

Un sistema amb sortida (o resposta) $y(t)$ que respon a una entrada (o excitació) $x(t)$ es diu que és lineal amb coeficients constants si ambdues funcions estan relacionades per una equació diferencial lineal amb coeficients constants de la forma:

$$a_n \frac{d^n x}{dt^n} + \dots + a_1 \frac{dx}{dt} + a_0 x = b_m \frac{d^m y}{dt^m} + \dots + b_1 \frac{dy}{dt} + b_0 y \quad (3.46)$$

Cal indicar que si els coeficients fossin funció de t el sistema també seria lineal, i es compliria el principi de la superposició, però aleshores el comportament del sistema i el seu estudi serien diferents, i més complicats.

Es suposa que el sistema descrit per l'equació anterior és passiu, per al qual si no hi ha entrada, després d'un temps suficientment llarg, la sortida serà negligible; en definitiva, que l'escorament és positiu i els transitoris s'esvaeixen.

Admetent l'existència de les transformades de Fourier d' $x(t)$ i d' $y(t)$, es pot aplicar aquesta transformació als dos membres de l'equació diferencial i, fent ús de les propietats de derivació i de linealitat vistes, s'obté:

$$\left(a_n(j\omega)^n + \dots + a_1(j\omega) + a_0\right)X(\omega) = \left(b_m(j\omega)^m + \dots + b_1(j\omega) + b_0\right)Y(\omega) \quad (3.47)$$

Al quocient entre la transformada de Fourier de la resposta o sortida $Y(\omega)$ i la transformada de Fourier de l'entrada o excitació $X(\omega)$ se l'anomena funció de resposta freqüencial $H(\omega)$:

$$H(\omega) = \frac{Y(\omega)}{X(\omega)} = \frac{a_n(j\omega)^n + \dots + a_1(j\omega) + a_0}{b_m(j\omega)^m + \dots + b_1(j\omega) + b_0} \quad (3.48)$$

De manera semblant, si s'utilitza la transformada de Laplace suposant condicions inicials nul·les s'obté la funció de transferència $H(s)$:

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{a_n s^n + \dots + a_1 s + a_0}{b_m s^m + \dots + b_1 s + b_0} \quad (3.49)$$

La funció de resposta freqüencial no és única; es pot generalitzar per a qualsevol sistema lineal i per a qualsevol parella entrada-sortida.

Dues funcions de resposta freqüencial molt utilitzades en mecànica, acústica i electricitat són la impedància $Z(\omega)$ i la seva inversa, l'admitància $Y(\omega)$. La impedància relaciona

1. Mecànica: Força/velocitat $Z(\omega) = F(\omega)/V(\omega)$
2. Acústica: Pressió/velocitat $Z(\omega) = P(\omega)/V(\omega)$
3. Electricitat: Tensió/corrent $Z(\omega) = U(\omega)/I(\omega)$

3.4.5 Representació gràfica de la funció de resposta freqüencial

La funció de resposta freqüencial com a valor complex que depèn de la freqüència es pot representar com (Figura 3.12):

1. Diagrama de Bode (*a*): gràfics independents del mòdul i de l'argument d' $H(\omega)$ en funció de la freqüència.
2. Diagrama d'Argand (*b*): gràfics independents de la part real i de la part imaginària de $H(\omega)$ en funció de la freqüència.
3. Diagrama de Nyquist (*c*): corba definida per $H(\omega)$ en el pla complex amb la freqüència com a paràmetre.

En les representacions de Bode i d'Argand, les escales poden ser lineals o logarítmiques. Les escales logarítmiques de freqüències es poden expressar en logaritme decimal o en logaritme binari, de base 2. En el primer cas, s'introdueix el concepte de dècada, multiplicar per deu la freqüència, i en el segon cas, usual en acústica, s'introdueix el concepte d'octava. Una freqüència és l'octava d'una altra si és doble d'aquesta.

L'escala logarítmica de l'amplitud sovint s'expressa en dB. El valor numèric d'una magnitud x expressat en dB referits a x_0 (valor de referència) és $20 \log(x/x_0)$.

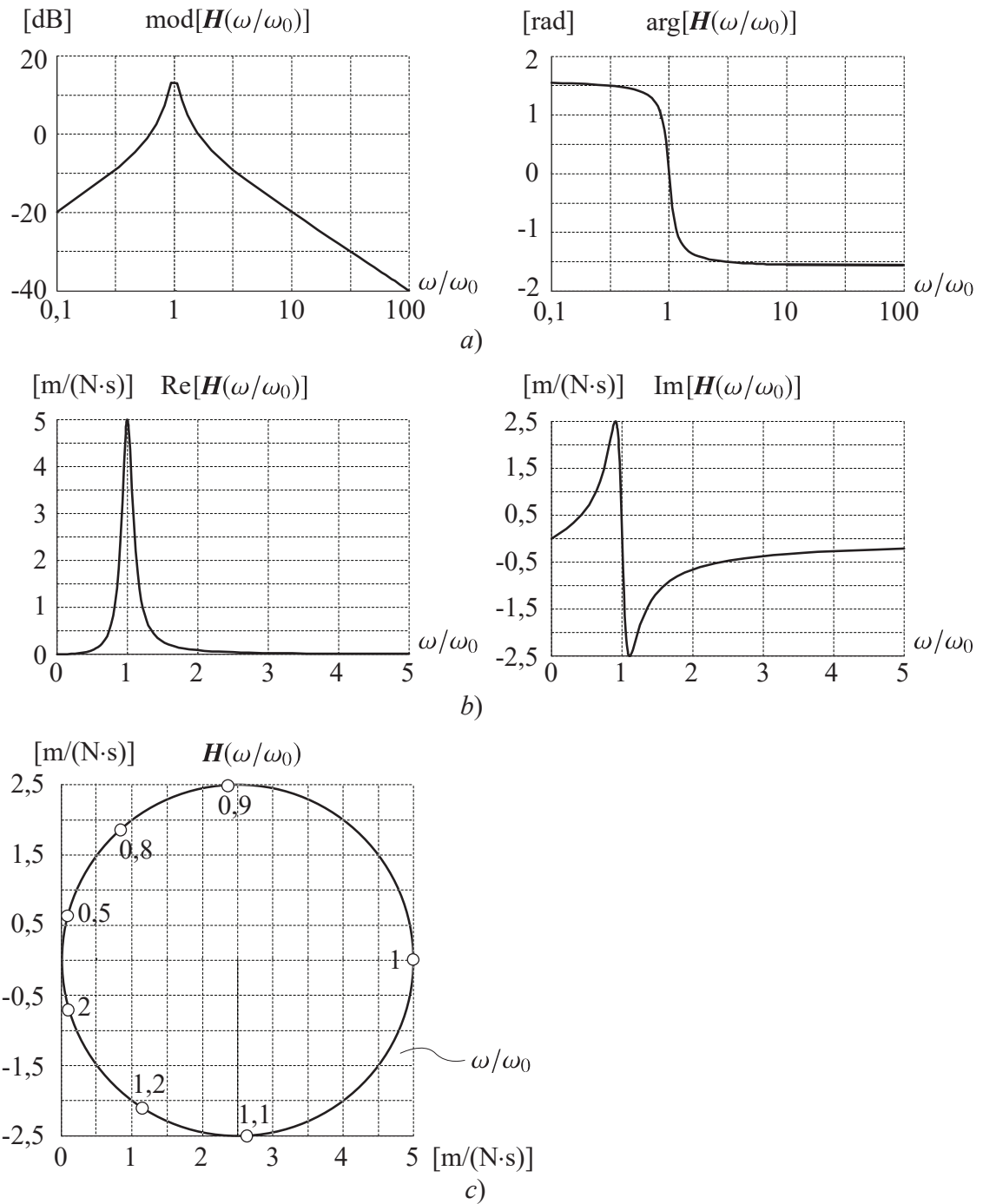


Figura 3.12: Resposta freqüencial: Diagrames a) de Bode, b) d'Argand i c) de Nyquist

3.4.6 Resposta a una entrada sinusoidal

L'estudi de la resposta $y(t)$ d'un sistema lineal a una excitació sinusoidal com la de l'equació 3.50 es pot fer a partir de la seva funció de resposta freqüencial.

$$x(t) = x_p \cos(2\pi f_1 t) = x_p \cos(\omega_1 t) \quad (3.50)$$

En aquest cas serà útil escriure-la de manera que quedin explícits el seu mòdul i el seu argument $\mathbf{H}(\omega) = H(\omega)e^{j\varphi(\omega)}$. Cal també tenir en compte que, com es pot deduir de la seva definició, $\mathbf{H}(\omega) = \mathbf{H}^*(-\omega)$ i per tant $H(\omega) = H(-\omega)$ i $\varphi(\omega) = -\varphi(-\omega)$. Així, recordant la transformada de Fourier de la funció cosinus:

$$\begin{aligned} Y(\omega) &= \mathbf{H}(\omega)\mathbf{X}(\omega) = x_p\pi [\mathbf{H}(\omega_1)\delta(\omega - \omega_1) + \mathbf{H}(-\omega_1)\delta(\omega + \omega_1)] = \\ &= x_pH(\omega_1)\pi \left[e^{j\varphi(\omega_1)}\delta(\omega - \omega_1) + e^{-j\varphi(\omega_1)}\delta(\omega + \omega_1) \right] \end{aligned} \quad (3.51)$$

d'on

$$y(t) = H(\omega_1)x_p \cos(\omega_1 t + \varphi(\omega_1)) \quad (3.52)$$

Així doncs, si l'excitació és sinusoidal, l'amplitud de la resposta és el producte de l'amplitud de l'excitació pel mòdul de la resposta freqüencial per a la freqüència de l'excitació, $y_p = H(\omega_1)x_p$. La resposta està desfasada respecte a l'entrada un angle igual a l'argument de la resposta freqüencial per a la freqüència de l'excitació.

3.4.7 Resposta impulsional

Per a un sistema lineal passiu de coeficients constants amb una entrada $x(t)$ i una sortida $y(t)$, es defineix la seva resposta impulsional $h(t)$ com el quocient entre la resposta a un impuls, a partir de condicions inicials nul·les, i la magnitud d'aquest. Una excitació impulsional es representa mitjançant la funció delta de Dirac de valor igual a la integral de l'excitació, que dura un temps τ que tendeix a zero:

$$x(t) = I\delta(t) \quad (3.53)$$

amb

$$I = \int_{\tau} x(t)dt \quad (3.54)$$

Si l'entrada és una força, un impuls es pot entendre com una força molt gran aplicada durant un temps τ molt petit de manera que la integral

$$P = \int_{\tau \rightarrow 0} F(t)dt \quad (3.55)$$

és finita. P s'anomena percussió de $F(t)$ i es diu que en aplicar una percussió a un sistema aquest sofreix una batzegada, fenomen instantani en el qual es produeix una modificació de la velocitat però no de la posició. L'increment de velocitat causat per la percussió es determina a partir del teorema de la quantitat de moviment

$$\Delta(mv) = \int F(t)dt = P \quad (3.56)$$

d'on $\Delta v = P/m$.

Just després de la batzegada, el sistema passa a oscil·lar lliurement. Així doncs, la resposta a un impuls de força es correpon al moviment lliure a partir de les condicions inicials de

desplaçament nul i de velocitat l'adquirida durant la batzegada, $y(0) = 0$, $\dot{y}(0) = P/m$. Amb aquestes condicions inicials el moviment lliure és:

$$y(t) = \frac{P}{m\omega_d} e^{-\zeta\omega_0 t} \sin(\omega_d t) \quad (3.57)$$

amb

$$\zeta = \frac{c}{2\sqrt{mk}} \quad (3.58)$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (3.59)$$

$$\omega_d = \omega_0 \sqrt{1 - \zeta^2} \quad (3.60)$$

i per tant la resposta impulsional en aquest cas és:

$$h(t) = \frac{y(t)}{P} = \frac{1}{m\omega_d} e^{-\zeta\omega_0 t} \sin(\omega_d t) \quad (3.61)$$

En els sistemes passius, la resposta, a partir del repòs en la configuració d'equilibri i considerant condicions inicials nul·les, no comença fins que s'inicia l'excitació i en conseqüència $h(t) = 0$ per a $t < 0$.

3.4.8 Resposta temporal a una excitació arbitrària. Integral de convolució

Una funció $x(t)$ es pot considerar com un tren (o una successió) d'impulsos de valor $x(\tau)d\tau$ situats a $t = \tau$; de manera intuïtiva es pot veure en la Figura 3.13, a més:

$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\delta(t - \tau)d\tau \quad (3.62)$$

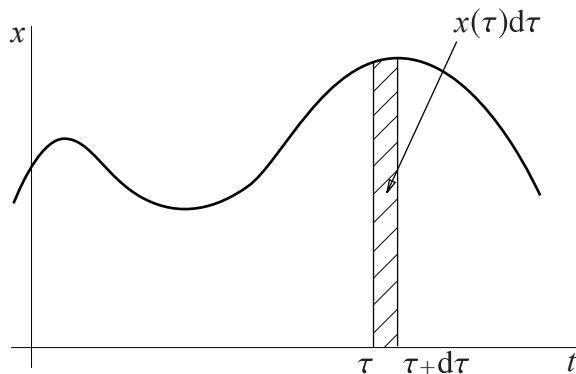


Figura 3.13: Impuls de valor $x(\tau)d\tau$, del senyal $x(t)$

Si l'excitació d'un sistema lineal passiu $x(t)$ es considera formada per una successió d'impulsos, la seva resposta temporal és la superposició de les respostes a cadascun dels

impulsos de l'excitació. Per a un impuls situat a $t = \tau$, la resposta és $y_\tau(t) = h(t - \tau)x(\tau)d\tau$, per a $t > \tau$, i $y_\tau(t) = 0$, per a $t < \tau$, en tractar-se d'un sistema passiu. La resposta total en l'instant t és la superposició de les respostes als impulsos $x(\tau)d\tau$ existents des que s'inicia l'excitació a partir del repòs –es pren des de $-\infty$ per a garantir que es recull tota l'excitació– fins a t :

$$y(t) = \int_{-\infty}^t h(t - \tau)x(\tau)d\tau \quad (3.63)$$

Aquesta expressió s'anomena *Integral de convolució* o alternativament *Integral de Duhamel* o *Integral de Green*.

Si l'excitació comença a $t = 0$, $x(t) = 0$ per a $t < 0$, la integral de convolució s'escriu:

$$y(t) = \int_0^t h(t - \tau)x(\tau)d\tau \quad (3.64)$$

Una altra versió de la integral de convolució s'obté tenint en compte que $h(t - \tau) = 0$ per a $\tau > t$ i per tant el límit superior de la integral es pot fer ∞ :

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t - \tau)x(\tau)d\tau \quad (3.65)$$

Altres versions s'obtenen simplement fent el canvi de variable d'integració $\theta = t - \tau$.

Aquesta integral de convolució és la mateixa que apareix en el producte de convolució o integral de convolució associat a les transformades de Fourier i de Laplace. Per a la transformada de Fourier, i de manera semblant per a la transformada de Laplace, admetent l'existència de les transformades de les funcions temporals implicades, es verifica:

$$\text{TF}[y(t) \cdot x(t)] = Y(\omega) \otimes X(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} Y(\omega - \varphi)X(\varphi)d\varphi \quad (3.66)$$

$$\text{TF}^{-1}[\mathbf{H}(\omega) \cdot \mathbf{X}(\omega)] = h(t) \otimes x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t - \tau)x(\tau)d\tau \quad (3.67)$$

Aquesta última expressió coincideix amb les trobades anteriorment però no està condicionada que la funció d'excitació sigui d'energia finita i, per tant, és aplicable sigui quina sigui l'excitació.

3.4.9 Relació entre la resposta freqüencial i la resposta impulsional

Si s'excita un sistema de resposta impulsional $h(t)$ amb un impuls $x(t) = I\delta(t)$ la seva resposta temporal és $y(t) = Ih(t)$. Per altra banda, la transformada de Fourier de l'excitació és $\mathbf{X}(\omega) = I$ i la transformada de la resposta és $\mathbf{Y}(\omega) = I\text{TF}[h(t)]$, de manera que la resposta freqüencial és:

$$H(\omega) = \frac{Y(\omega)}{X(\omega)} = \frac{ITF[h(t)]}{I} = TF[h(t)] \quad (3.68)$$

Així doncs, la transformada de Fourier de la resposta impulsional és la resposta freqüencial. Cal notar que, per als sistemes passius, la resposta impulsional és sempre un transitori d'energia finita i, conseqüentment, es compleix la condició d'existència de la seva transformada de Fourier.

3.5 Característiques del sistema vibratori

El sistema d'estudi que es considera en aquesta tesi està format per un sistema d'un grau de llibertat vibratori governat a través d'un accionament de cinemàtica no lineal. A mode d'exemple, en aquest apartat s'estudien els casos en què l'accionament excita el sistema oscil·latori per la base o bé mitjançant alguna de les seves inèrcies. D'altra banda, per tal de poder reduir les vibracions residuals del sistema oscil·latori mitjançant l'ús de les tècniques exposades en 2.1.1 i 2.1.3, es considera que el seu comportament vibratori es pot modelitzar com un sistema discret amb comportament lineal en el seu rang de funcionament i amb paràmetres constants en les equacions de moviment que el descriuen (equació 3.69). Les respostes impulsional s'han extret en ambdós casos de [69].

$$m\ddot{y} + c\dot{y} + ky = f(q^i) \quad (3.69)$$

3.5.1 Sistema amb excitació per la base

La Figura 3.14 mostra un sistema genèric d'un grau de llibertat vibratori excitat per la base mitjançant un mecanisme de pistó-biela-manovella. La configuració del sistema en un cert instant de temps es defineix mitjançant les coordenades q_1 , q_2 i q_3 i la resposta y del sistema oscil·latori. El comportament no rígid de la unió entre l'accionament de cinemàtica no lineal i el grau de llibertat vibratori es descriu mitjançant una unió molla-amortidor representat a través d'una rigidesa k i un esmorteïment c , ambdós de valor constant.

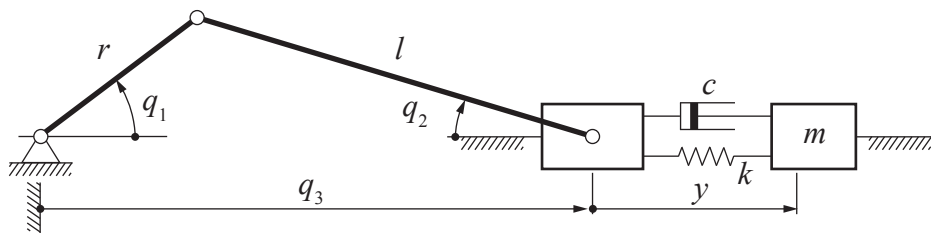


Figura 3.14: Sistema d'un grau de llibertat amb excitació per la base

L'equació de moviment del sistema exposat en la Figura 3.14 s'expressa d'acord amb l'equació 3.70:

$$m\ddot{y} + c\dot{y} + ky = c\dot{q}_3 + kq_3 \quad (3.70)$$

L'expressió anterior es pot reescriure tenint en compte les equacions 3.58 i 3.59:

$$\ddot{y} + 2\zeta\omega_0\dot{y} + \omega_0^2y = 2\zeta\omega_0\dot{q}_3 + \omega_0^2q_3 \quad (3.71)$$

Per tal de poder obtenir la resposta del sistema oscil·latori en funció de la coordenada q_3 que conté el punt mort, es calcula la seva resposta impulsional. En aquest cas, es pren com a entrada la velocitat $\dot{q}_3(t)$ i, com a sortides, la posició $y(t)$, velocitat $\dot{y}(t)$ i acceleració $\ddot{y}(t)$ de la massa m :

$\dot{q}_3(t)$	Resposta impulsional
$y(t)$	$h_s(t) = -\frac{1}{\cos\psi}e^{-\zeta\omega_0t} \cos(\omega_d t + \psi) + 1$
$\dot{y}(t)$	$h_v(t) = \frac{\omega_0}{\cos\psi}e^{-\zeta\omega_0t} \sin(\omega_d t + 2\psi)$
$\ddot{y}(t)$	$h_a(t) = \frac{\omega_0^2}{\cos\psi}e^{-\zeta\omega_0t} \cos(\omega_d t + 3\psi) + 2\zeta\omega_0\delta(t)$

Taula 3.1: Resposta impulsional d'un sistema d'un grau de llibertat amb excitació per la base per a una entrada velocitat

amb:

$$\psi = \arctan\left(\frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}\right) \quad (3.72)$$

En conseqüència, en el cas del mecanisme de la Figura 3.14, la posició, velocitat i acceleració de la massa m es calcularan d'acord amb les equacions 3.73, 3.74 i 3.75, respectivament:

$$y(t) = \int_{-\infty}^t \dot{q}_3(\tau)h_s(t-\tau)d\tau \quad (3.73)$$

$$\dot{y}(t) = \int_{-\infty}^t \dot{q}_3(\tau)h_v(t-\tau)d\tau \quad (3.74)$$

$$\ddot{y}(t) = \int_{-\infty}^t \dot{q}_3(\tau)h_a(t-\tau)d\tau \quad (3.75)$$

3.5.2 Sistema amb inèrcia governada

En aquest apartat es descriu el comportament d'un sistema d'un grau de llibertat amb inèrcia governada (Figura 3.15). De forma anàloga al cas anterior, es considera que l'estat del sistema ve determinat per l'evolució temporal de la coordenada q_1 de la manovella controlada a través d'un actuator elèctric. D'altra banda, es fan servir les mateixes coordenades que en l'exemple anterior per a descriure la configuració del sistema.

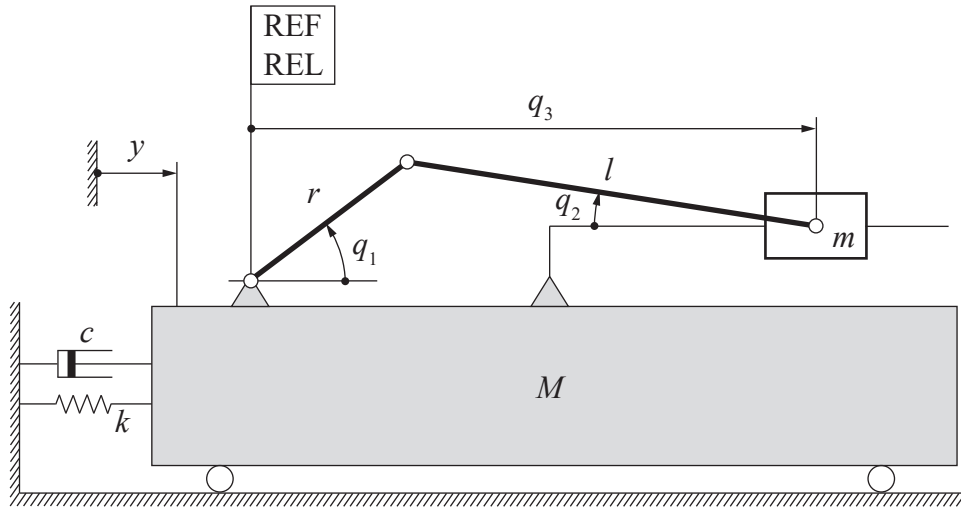


Figura 3.15: Sistema d'un grau de llibertat amb inèrcia governada

L'equació de moviment del sistema exposat en la Figura 3.15 es descriu en l'equació 3.76:

$$(m + M)\ddot{y} + c\dot{y} + ky = -m\ddot{q}_3 \quad (3.76)$$

L'equació anterior es reescriu considerant les equacions 3.58 i 3.59:

$$\ddot{y} + 2\zeta\omega_0\dot{y} + \omega_0^2y = -\frac{m}{m + M}\ddot{q}_3 \quad (3.77)$$

amb:

$$\zeta = \frac{c}{2\sqrt{(m + M)k}} \quad (3.78)$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{(m + M)}} \quad (3.79)$$

Amb l'objectiu d'obtenir la resposta del sistema oscil·latori en funció de la coordenada que conté el punt mort, es calcula la seva resposta impulsional. De la mateixa forma que en l'apartat anterior, es pren com a entrada la velocitat $\dot{q}_3(t)$ i, com a sortides, la posició $y(t)$, velocitat $\dot{y}(t)$ i acceleració $\ddot{y}(t)$ de la massa m :

$\dot{q}_3^i(t)$	Resposta impulsional
$y(t)$	$h_s(t) = -\frac{m}{m + M} \frac{1}{\cos \psi} e^{-\zeta\omega_0 t} \cos(\omega_d t + \psi)$
$\dot{y}(t)$	$h_v(t) = \frac{m}{m + M} \left(\frac{\omega_0}{\cos \psi} e^{-\zeta\omega_0 t} \sin(\omega_d t + 2\psi) - \delta(t) \right)$
$\ddot{y}(t)$	$h_a(t) = \frac{m}{m + M} \left(\frac{\omega_0^2}{\cos \psi} e^{-\zeta\omega_0 t} \cos(\omega_d t + 3\psi) - \dot{\delta}(t) \right)$

Taula 3.2: Resposta impulsional d'un sistema amb inèrcia governada per a una entrada velocitat

Per tant, en el cas d'un sistema amb inèrcia governada, la posició $y(t)$, velocitat $\dot{y}(t)$ i acceleració $\ddot{y}(t)$ de la massa m es poden calcular aplicant les equacions 3.73, 3.74 i 3.75, considerant com a respostes impulsional $h_s(t)$, $h_v(t)$ i $h_a(t)$ les exposades en la Taula 3.2.

Capítol 4

Caracterització del sistema d'estudi

Les hipòtesis fetes en el desenvolupament d'aquest estudi porten a la caracterització del sistema emprat en base a tres elements que el componen, tal i com es mostra en la Figura 4.1: l'actuador i la seva caracterització, en el marc d'aquest treball, feta en l'apartat 3.3, la cadena de transmissió –en aquest estudi és un mecanisme de cinemàtica no lineal amb configuracions de punt mort dins del seu rang de funcionament– i el sistema vibratori, el qual s'ha descrit en l'apartat 3.5.

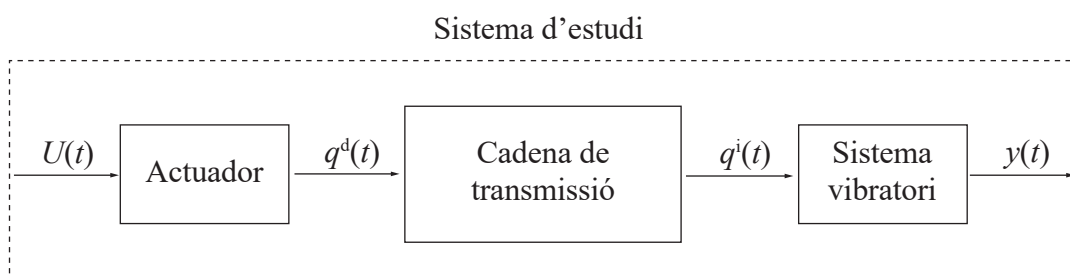


Figura 4.1: Parts considerades en el sistema d'estudi

La definició de lleis de moviment que inclouen un punt mort en el seu domini de funcionament implica, en primer lloc, complir totes les condicions cinemàtiques d'aquesta configuració singular i, en segon lloc, la fabricabilitat de la llei de moviment per part de l'actuador que controla una coordenada q^d diferent a la coordenada independent en la que s'ha descrit la llei de moviment $q^i(t)$. En aquest capítol s'estudia la viabilitat d'aquesta llei de moviment en base a la continuïtat C^n necessària que ha de tenir per a poder ser reproduïda per actuadors elèctrics convencionals (d'acord amb l'apartat 3.3). Per tal de validar els resultats obtinguts, es realitzen simulacions numèriques d'un quadrilàter articulat (Figura 4.2) i un mecanisme de pistó-biela-manovella (Figura 4.3). El contingut d'aquest capítol s'ha extret de Lores *et al.* [31].

4.1 Problemàtica de la cinemàtica inversa en mecanismes amb punts morts

L'estat mecànic d'un mecanisme d' m graus de llibertat es pot descriure mitjançant un conjunt d' $n+m$ coordenades generalitzades $\mathbf{q} = \{q_1, q_2, \dots, q_n, \dots, q_{n+1}, \dots, q_{n+m}\}^T$ i velocitats generalitzades $\dot{\mathbf{q}} = \{\dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_n, \dots, \dot{q}_{n+1}, \dots, \dot{q}_{n+m}\}^T$. El grup de variables geomètriques \mathbf{q} defineix totes les possibles configuracions del mecanisme, mentre que les seves derivades temporals $\dot{\mathbf{q}}$ i $\ddot{\mathbf{q}}$ determinen la seva distribució de velocitats i acceleracions. El conjunt mínim d' m coordenades per a descriure la configuració del mecanisme s'anomenen coordenades independents $\mathbf{q}^i = \{q_{n+1}, \dots, q_{n+m}\}^T$. D'altra banda, les n coordenades restants es coneixen com a coordenades dependents $\mathbf{q}^d = \{q_1, q_2, \dots, q_n\}^T$. En el cas d'un mecanisme pla d'un grau de llibertat ($m = 1$), hi ha una única coordenada independent q^i . Generalment, aquesta coordenada s'utilitza, mitjançant una llei de moviment en el domini temporal, per a definir el moviment del mecanisme. Si l'actuador es controla a través d'una coordenada que no sigui la independent, es pot utilitzar la cinemàtica inversa per a calcular el seu senyal de comanda. No obstant això, aquest càlcul presenta problemes quan la coordenada independent es troba en una configuració de punt mort dins del seu rang de funcionament. En realitat, aquest problema no deixa de ser una indeterminació algebraica. Un exemple d'un mecanisme pla d'un grau de llibertat amb punts morts és el mecanisme de barres que es mostra en la Figura 4.2 a), on $\mathbf{q} = \{q_1, q_2, q_3\}^T$. En aquest cas, la coordenada generalitzada q_3 presenta un punt mort quan $q_1 = q_2$ (Figura 4.2 b)).

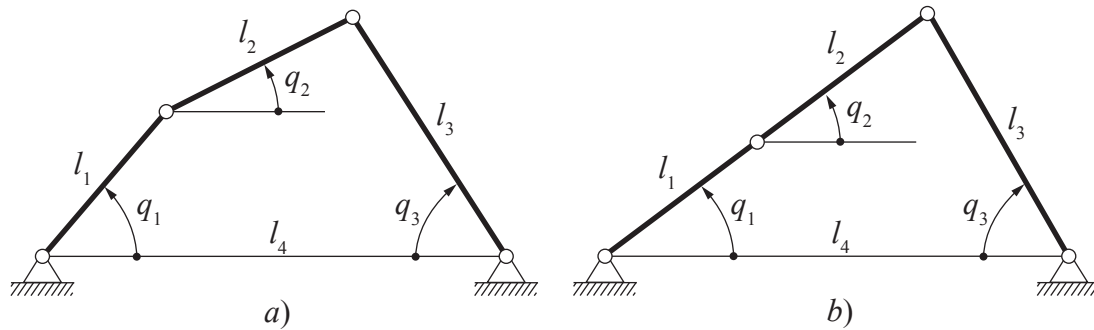


Figura 4.2: a) Mecanisme de barres descrit amb tres coordenades generalitzades q_1, q_2 i q_3 ; b) Configuració de punt mort per a q_3

En un mecanisme pla d'un grau de llibertat, en general, la relació entre les $n+1$ coordenades generalitzades s'obté de les $\phi_i(\mathbf{q})$ equacions geomètriques d'enllaç del mecanisme:

$$\boldsymbol{\phi}(\mathbf{q}) = \begin{Bmatrix} \phi_1(\mathbf{q}) \\ \vdots \\ \phi_n(\mathbf{q}) \end{Bmatrix} = 0 \quad (4.1)$$

D'acord amb Cardona i Clos [16], es deriva l'equació 4.1 respecte al temps per tal de calcular les velocitats generalitzades $\dot{\mathbf{q}}$:

$$\boldsymbol{\phi}_q \dot{\mathbf{q}} = 0 \quad (4.2)$$

on ϕ_q es coneix com a matriu jacobiana del sistema d'equacions geomètriques d'enllaç i, que per a un mecanisme d'un grau de llibertat ($m = 1$), té la següent forma:

$$\phi_q = \begin{bmatrix} \frac{\partial \phi_1(\mathbf{q})}{\partial q_1} & \cdots & \frac{\partial \phi_1(\mathbf{q})}{\partial q_{n+1}} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial \phi_n(\mathbf{q})}{\partial q_1} & \cdots & \frac{\partial \phi_n(\mathbf{q})}{\partial q_{n+1}} \end{bmatrix} \quad (4.3)$$

A continuació, es separen els termes de les coordenades dependents i independents de l'equació 4.2:

$$\phi_q^d \dot{q}^d + \phi_q^i \dot{q}^i = 0 \quad (4.4)$$

$$\dot{q}^d = -\phi_q^{d-1} \phi_q^i \dot{q}^i = -\frac{\text{adj}(\phi_q^d)}{\det(\phi_q^d)} \phi_q^i \dot{q}^i \quad (4.5)$$

amb:

$$\phi_q^d = \begin{bmatrix} \frac{\partial \phi_1(\mathbf{q})}{\partial q_1} & \cdots & \frac{\partial \phi_1(\mathbf{q})}{\partial q_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial \phi_n(\mathbf{q})}{\partial q_1} & \cdots & \frac{\partial \phi_n(\mathbf{q})}{\partial q_n} \end{bmatrix} \quad (4.6)$$

$$\phi_q^i = \begin{bmatrix} \frac{\partial \phi_1(\mathbf{q})}{\partial q^i} \\ \vdots \\ \frac{\partial \phi_n(\mathbf{q})}{\partial q^i} \end{bmatrix} \quad (4.7)$$

Quan un mecanisme es troba en una configuració de punt mort per a la seva coordenada generalitzada independent q^i , la velocitat \dot{q}^i corresponent té un valor nul independentment del moviment de la resta del mecanisme. Per tant, amb l'objectiu d'obtenir una solució per a les coordenades generalitzades dependents \dot{q}^d diferent de zero, cal que el determinant de ϕ_q^d sigui també nul. Com a conseqüència d'aquesta indeterminació 0/0, el valor de \dot{q}^d no es pot calcular numèricament a partir de l'equació 4.5. En el cas del mecanisme que es mostra en la Figura 4.2, la relació entre les coordenades generalitzades q_1, q_2 i q_3 s'obté a partir de les equacions geomètriques d'enllaç:

$$\phi(\mathbf{q}) = \phi(q_1, q_2, q_3) = \begin{Bmatrix} \phi_1(q_1, q_2, q_3) \\ \phi_2(q_1, q_2, q_3) \end{Bmatrix} = 0 \quad (4.8)$$

En aquest cas, la matriu jacobiana del sistema d'equacions geomètriques d'enllaç serà:

$$\phi_q = \begin{bmatrix} \frac{\partial \phi_1(q_1, q_2, q_3)}{\partial q_1} & \frac{\partial \phi_1(q_1, q_2, q_3)}{\partial q_2} & \frac{\partial \phi_1(q_1, q_2, q_3)}{\partial q_3} \\ \frac{\partial \phi_2(q_1, q_2, q_3)}{\partial q_1} & \frac{\partial \phi_2(q_1, q_2, q_3)}{\partial q_2} & \frac{\partial \phi_2(q_1, q_2, q_3)}{\partial q_3} \end{bmatrix} \quad (4.9)$$

Si es considera que q_3 és la coordenada independent q^i , i q_1 i q_2 són tractades com a coordenades dependents q^d , l'equació 4.4 es pot reescriure com:

$$\boldsymbol{\phi}_q^d \{\dot{q}_1, \dot{q}_2\}^T + \boldsymbol{\phi}_q^i \dot{q}_3 = 0 \quad (4.10)$$

Per tant:

$$\begin{Bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \end{Bmatrix} = -\frac{\text{adj}(\boldsymbol{\phi}_q^d)}{\det(\boldsymbol{\phi}_q^d)} \boldsymbol{\phi}_q^i \dot{q}_3 \quad (4.11)$$

Pel que respecta a les acceleracions \ddot{q}^d , es pot aplicar un desenvolupament similar derivant l'equació 4.2 respecte al temps:

$$\dot{\boldsymbol{\phi}}_q \dot{\boldsymbol{q}} + \boldsymbol{\phi}_q \ddot{\boldsymbol{q}} = 0 \quad (4.12)$$

Es tornen a separar els termes corresponents a les coordenades dependents i independents:

$$\dot{\boldsymbol{\phi}}_q \dot{\boldsymbol{q}} + \boldsymbol{\phi}_q^d \ddot{\boldsymbol{q}}^d + \boldsymbol{\phi}_q^i \ddot{q}^i = 0 \quad (4.13)$$

$$\ddot{\boldsymbol{q}}^d = -\boldsymbol{\phi}_q^{d-1} [\boldsymbol{\phi}_q^i \ddot{q}^i + \dot{\boldsymbol{\phi}}_q \dot{\boldsymbol{q}}] = -\frac{\text{adj}(\boldsymbol{\phi}_q^d)}{\det(\boldsymbol{\phi}_q^d)} [\boldsymbol{\phi}_q^i \ddot{q}^i + \dot{\boldsymbol{\phi}}_q \dot{\boldsymbol{q}}] \quad (4.14)$$

amb:

$$\dot{\boldsymbol{\phi}}_q = \frac{d}{dt} \{\boldsymbol{\phi}_q\} = \begin{bmatrix} \frac{d}{dt} \left\{ \frac{\partial \phi_1(\boldsymbol{q})}{\partial q_1} \right\} & \cdots & \frac{d}{dt} \left\{ \frac{\partial \phi_1(\boldsymbol{q})}{\partial q_{n+1}} \right\} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{d}{dt} \left\{ \frac{\partial \phi_n(\boldsymbol{q})}{\partial q_1} \right\} & \cdots & \frac{d}{dt} \left\{ \frac{\partial \phi_n(\boldsymbol{q})}{\partial q_{n+1}} \right\} \end{bmatrix} \quad (4.15)$$

Quan la coordenada independent q^i es troba en una de les seves configuracions de punt mort, el valor del numerador de l'equació 4.14 és nul (veure Apèndix A). Anàlogament al cas del càlcul de les velocitats $\dot{\boldsymbol{q}}^d$, la indeterminació algebraica present en l'equació 4.14 no permet el càlcul del valor de les acceleracions $\ddot{\boldsymbol{q}}^d$. En conseqüència, les equacions 4.5 i 4.14 no permeten utilitzar la llei de moviment de la coordenada independent q^i per tal de monitoritzar la cinemàtica del mecanisme en aquesta configuració específica. En el mecanisme de barres que es mostra en la Figura 4.2, les acceleracions $\{\ddot{q}_1, \ddot{q}_2\}^T$ es poden calcular com:

$$\begin{Bmatrix} \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2 \end{Bmatrix} = -\frac{\text{adj}(\boldsymbol{\phi}_q^d)}{\det(\boldsymbol{\phi}_q^d)} \left[\boldsymbol{\phi}_q^i \ddot{q}_3 + \dot{\boldsymbol{\phi}}_q \{\dot{q}_1, \dot{q}_2, \dot{q}_3\}^T \right] \quad (4.16)$$

4.2 Estudi cinemàtic en configuracions de punt mort

Aquest apartat té com a finalitat definir el grau de continuïtat C^n mínim que la llei de moviment de la coordenada independent d'un mecanisme d'un grau de llibertat ha de complir, en presència de punts morts, per a poder ser reproduïda mitjançant actuadors elèctrics convencionals. Els mecanismes que es consideren són aquells que no presenten redundàncies i les seves unions estan formades per parells cinemàtics inferiors. Aquest estudi es duu a terme resolent la indeterminació algebraica presentada en l'apartat 4.1. L'anàlisi contempla l'estudi de la velocitat i l'acceleració de les coordenades dependents basat en la llei de moviment descrita per l'evolució temporal de la coordenada independent. Per a una millor comprensió del desenvolupament de la solució genèrica, tots els resultats es particularitzen per al mecanisme pistó-biela-manovella que es presenta en la Figura 4.3 a) quan es troba en la configuració de punt mort de la coordenada independent q_3 descrita en la Figura 4.3 b).

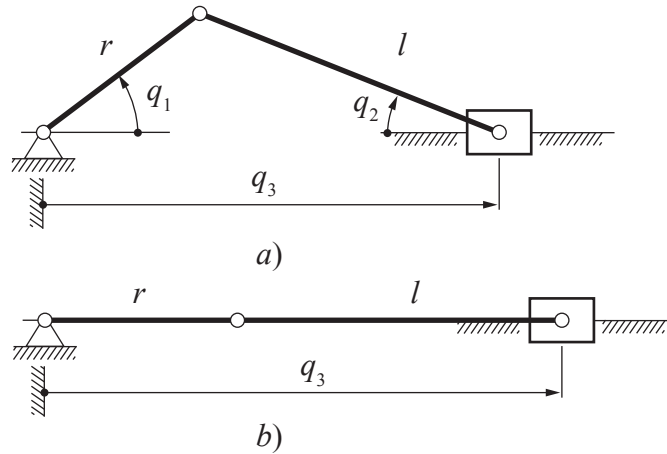


Figura 4.3: Mecanisme de pistó-biela-manovella en a) una configuració qualsevol i b) un punt mort de la coordenada independent q_3

4.2.1 Anàlisi de velocitats

Tal i com s'exposa en l'equació 4.5, el valor de les n velocitats \dot{q}^d de les coordenades dependents és directament proporcional a la velocitat \dot{q}^i de la coordenada independent. En la configuració de punt mort, aquesta velocitat generalitzada \dot{q}^i té un valor nul, independentment del moviment de la resta del mecanisme. Per tal de trobar una solució per al vector de velocitats dependents al voltant d'un punt mort $\dot{q}^d|_{\text{pm}}$ diferent de zero, el determinant de la matriu ϕ_q^d també ha de valdre zero. Aquest fet implica una indeterminació algebraica del tipus 0/0 en el càlcul de \dot{q}^d en aquesta configuració:

$$\dot{q}^d|_{\text{pm}} = \lim_{q^i \rightarrow \text{pm}} \left(-\frac{\text{adj}(\phi_q^d)}{\det(\phi_q^d)} \phi_q^i \dot{q}^i \right) = \frac{0}{0} \quad (4.17)$$

La indeterminació que es mostra en l'equació 4.17 es pot resoldre aplicant la regla de L'Hôpital considerant $\dot{q}^i = 0$:

$$\begin{aligned}
 \dot{\mathbf{q}}^d|_{\text{pm}} &= \lim_{q^i \rightarrow \text{pm}} \left(- \frac{\frac{d}{dt} \left(\text{adj}(\boldsymbol{\phi}_q^d) \boldsymbol{\phi}_q^i \dot{q}^i \right)}{\frac{d}{dt} \left(\det(\boldsymbol{\phi}_q^d) \right)} \right) = \\
 &= \lim_{q^i \rightarrow \text{pm}} \left(- \frac{\frac{d}{dt} \left(\text{adj}(\boldsymbol{\phi}_q^d) \right) \boldsymbol{\phi}_q^i \dot{q}^i + \text{adj}(\boldsymbol{\phi}_q^d) \left\{ \dot{\boldsymbol{\phi}}_q^i \dot{q}^i + \boldsymbol{\phi}_q^i \ddot{q}^i \right\}}{\frac{\partial}{\partial \mathbf{q}} \left(\det(\boldsymbol{\phi}_q^d) \right) \dot{\mathbf{q}}} \right) = \\
 &= \lim_{q^i \rightarrow \text{pm}} \left(- \frac{\frac{d}{dt} \left(\text{adj}(\boldsymbol{\phi}_q^d) \right) \boldsymbol{\phi}_q^i \dot{q}^i + \text{adj}(\boldsymbol{\phi}_q^d) \left\{ \dot{\boldsymbol{\phi}}_q^i \dot{q}^i + \boldsymbol{\phi}_q^i \ddot{q}^i \right\}}{\left\{ \frac{\partial}{\partial \mathbf{q}^d} \left(\det(\boldsymbol{\phi}_q^d) \right), \frac{\partial}{\partial q^i} \left(\det(\boldsymbol{\phi}_q^d) \right) \right\} \left\{ \dot{\mathbf{q}}^d, \dot{q}^i \right\}^T} \right) = \\
 &= - \frac{\text{adj}(\boldsymbol{\phi}_q^d) \boldsymbol{\phi}_q^i \ddot{q}^i}{\frac{\partial}{\partial \mathbf{q}^d} \left(\det(\boldsymbol{\phi}_q^d) \right) \dot{\mathbf{q}}^d} \Big|_{\text{pm}}
 \end{aligned} \tag{4.18}$$

Amb la finalitat de trobar una solució a l'equació 4.18, s'introdueix la següent notació:

$$\dot{\mathbf{q}}^d|_{\text{pm}} = - \frac{\mathbf{m} \ddot{\mathbf{q}}^i}{\mathbf{k} \dot{\mathbf{q}}^d} \Big|_{\text{pm}} \tag{4.19}$$

on:

$$\mathbf{m} = \{ m_1 \quad m_2 \quad \dots \quad m_n \}^T = \text{adj}(\boldsymbol{\phi}_q^d) \boldsymbol{\phi}_q^i \Big|_{\text{pm}} \tag{4.20}$$

$$\mathbf{k} = \{ k_1 \quad k_2 \quad \dots \quad k_n \} = \frac{\partial}{\partial \mathbf{q}^d} \left(\det(\boldsymbol{\phi}_q^d) \right) \Big|_{\text{pm}} \tag{4.21}$$

La solució genèrica per a la component j -èssima del vector $\dot{\mathbf{q}}^d$ és:

$$\dot{q}_j|_{\text{pm}} = - \frac{m_j}{k_1 \dot{q}_1 + k_2 \dot{q}_2 + \dots + k_j \dot{q}_j + \dots + k_n \dot{q}_n} \ddot{q}^i \Big|_{\text{pm}} \tag{4.22}$$

Per tant, el quocient entre dues velocitats \dot{q}_j i \dot{q}_k val:

$$\frac{\dot{q}_j}{\dot{q}_k} \Big|_{\text{pm}} = \frac{m_j}{m_k} \Big|_{\text{pm}} \tag{4.23}$$

Si es combinen les equacions 4.22 i 4.23 es troba, finalment, la següent solució genèrica:

$$\dot{q}_j|_{\text{pm}} = \sqrt{-\frac{m_j^2}{\mathbf{k} \mathbf{m}}} \ddot{q}^i \Big|_{\text{pm}} \tag{4.24}$$

O bé, en notació vectorial:

$$\dot{q}^d|_{\text{pm}} = m \sqrt{\frac{-\ddot{q}^i}{km}} \Big|_{\text{pm}} \quad (4.25)$$

En el cas del pistó-biela-manovella que es considera en aquest estudi:

$$\phi(q_1, q_2, q_3) = \left\{ \begin{array}{l} \phi_1(q_1, q_2, q_3) \\ \phi_2(q_1, q_2, q_3) \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} r \sin q_1 - l \sin q_2 \\ -r \cos q_1 - l \cos q_2 + q_3 \end{array} \right\} = 0 \quad (4.26)$$

amb ϕ_q^d i ϕ_q^i definides d'acord amb les equacions 4.6 i 4.7, respectivament:

$$\phi_q^d = \begin{bmatrix} r \cos q_1 & -l \cos q_2 \\ r \sin q_1 & l \sin q_2 \end{bmatrix} \quad (4.27)$$

$$\phi_q^i = \left\{ \begin{array}{l} 0 \\ 1 \end{array} \right\} \quad (4.28)$$

En conseqüència, en la configuració de punt mort que es mostra en la Figura 4.3 b):

$$m = \{ l \quad r \}^T \quad (4.29)$$

$$k = \{ rl \quad rl \} \quad (4.30)$$

Així doncs, les velocitats \dot{q}_1 i \dot{q}_2 valdran:

$$\dot{q}_1|_{\text{pm}} = \sqrt{-\frac{l}{r(r+l)} \ddot{q}_3} \quad (4.31)$$

$$\dot{q}_2|_{\text{pm}} = \sqrt{-\frac{r}{l(r+l)} \ddot{q}_3} \quad (4.32)$$

En absència de bifurcacions, les funcions que defineixen les equacions geomètriques d'enllaç són sempre contínues i diferenciables dins del rang de configuracions accessibles del mecanisme. Així doncs, el terme $m_j^2/(km)$ tindrà un valor finit i determinat. D'altra banda, d'acord amb l'equació 4.25, les velocitats de les coordenades dependents són proporcionals a l'arrel quadrada de l'acceleració de la coordenada independent en la configuració de punt mort. Per tant, assumint que un actuator elèctric convencional és capaç de realitzar qualsevol senyal de comanda amb una continuïtat mínima C^1 , l'acceleració \ddot{q}^i de la coordenada independent ha de ser contínua al voltant d'aquest punt (C^0). Així doncs, la llei de moviment descrita per l'evolució temporal de la coordenada independent q^i ha de ser, com a mínim, C^2 . En cas contrari, si la continuïtat és menor, les velocitats de les coordenades dependents \dot{q}^d canviaran instantàniament entre dos valors diferents i provocarà que el moviment no sigui possible de realitzar-se mitjançant aquests actuadors.

4.2.2 Anàlisi d'acceleracions

L'anàlisi d'acceleracions que s'exposa a continuació es desenvolupa a partir de l'equació 4.14. Quan la coordenada independent es situa al voltant d'un dels seus punts morts, el numerador d'aquesta equació tendeix a zero (veure Apèndix A). Per tant, apareix una altra indeterminació algebraica del tipus 0/0 en el càlcul de \ddot{q}^d , la qual es resol aplicant una altra vegada la regla de L'Hôpital:

$$\ddot{q}^d|_{\text{pm}} = \lim_{q^i \rightarrow \text{pm}} \left(-\frac{\frac{d}{dt} \left(\text{adj}(\phi_q^d) [\phi_q^i \ddot{q}^i + \dot{\phi}_q \dot{q}^i] \right)}{\frac{d}{dt} \left(\det(\phi_q^d) \right)} \right) =$$

$$\lim_{q^i \rightarrow \text{pm}} \left(-\frac{\frac{d}{dt} \left(\text{adj}(\phi_q^d) \right) [\phi_q^i \ddot{q}^i + \dot{\phi}_q \dot{q}^i] + \text{adj}(\phi_q^d) \left[\dot{\phi}_q^i \ddot{q}^i + \phi_q^i \ddot{q}^i + \ddot{\phi}_q \dot{q}^i + \dot{\phi}_q \ddot{q}^i \right]}{\left\{ \frac{\partial}{\partial q^d} \left(\det(\phi_q^d) \right), \frac{\partial}{\partial q^i} \left(\det(\phi_q^d) \right) \right\} \{ \dot{q}^d, \dot{q}^i \}^T} \right) \quad (4.33)$$

Si es separen els termes relacionats amb les coordenades dependents i independents i s'imposa $\dot{q}^i = 0$:

$$\ddot{q}^d|_{\text{pm}} = -\frac{\frac{d}{dt} \left(\text{adj}(\phi_q^d) \right) \left[\phi_q^i \ddot{q}^i + \dot{\phi}_q^d \dot{q}^d \right] + \text{adj}(\phi_q^d) \left[2\dot{\phi}_q^i \ddot{q}^i + \phi_q^i \ddot{q}^i + \ddot{\phi}_q^d \dot{q}^d + \dot{\phi}_q^d \ddot{q}^d \right]}{\frac{\partial}{\partial q^d} \left(\det(\phi_q^d) \right) \dot{q}^d} \Bigg|_{\text{pm}} \quad (4.34)$$

on (veure les equacions B.7 i B.9 de l'Apèndix B per a les equacions 4.36 i 4.37):

$$\dot{\phi}_q^i|_{\text{pm}} = \frac{\partial}{\partial q^d} \left(\phi_q^i \right) \dot{q}^d|_{\text{pm}} = \left(\phi_q^i \right)^d \dot{q}^d|_{\text{pm}} \quad (4.35)$$

$$\dot{\phi}_q^d|_{\text{pm}} = \sum_{k=1}^n \left(\frac{\partial}{\partial q_k} \left(\phi_q^d \right) \dot{q}_k \right) \Bigg|_{\text{pm}} \quad (4.36)$$

$$\ddot{\phi}_q^d|_{\text{pm}} = \sum_{l=1}^n \left(\sum_{k=1}^n \left(\frac{\partial}{\partial q_k} \left(\frac{\partial}{\partial q_l} \left(\phi_q^d \right) \right) \dot{q}_k \right) \dot{q}_l + \frac{\partial}{\partial q_l} \left(\phi_q^d \right) \ddot{q}_l \right) + \frac{\partial}{\partial q^i} \left(\phi_q^d \right) \ddot{q}^i \Bigg|_{\text{pm}} \quad (4.37)$$

Per tal de facilitar la notació, la matriu $\ddot{\phi}_q^d|_{\text{pm}}$ es divideix en tres matrius:

$$\left(\ddot{\phi}_q^d \right)_1|_{\text{pm}} = \sum_{l=1}^n \left(\sum_{k=1}^n \left(\frac{\partial}{\partial q_k} \left(\frac{\partial}{\partial q_l} \left(\phi_q^d \right) \right) \dot{q}_k \right) \dot{q}_l \right) \Bigg|_{\text{pm}} \quad (4.38)$$

$$\left(\ddot{\phi}_q^d \right)_2|_{\text{pm}} = \frac{\partial}{\partial q^i} \left(\phi_q^d \right) \ddot{q}^i \Bigg|_{\text{pm}} \quad (4.39)$$

$$\left(\ddot{\phi}_q^d \right)_3|_{\text{pm}} = \sum_{k=1}^n \left(\frac{\partial}{\partial q_k} \left(\phi_q^d \right) \ddot{q}_k \right) \Bigg|_{\text{pm}} \quad (4.40)$$

Reagrupant termes en l'equació 4.34:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial q^d} \left(\det(\phi_q^d) \right) \dot{q}^d \ddot{q}^d + \text{adj}(\phi_q^d) \left(\ddot{\phi}_q^d \right)_3 \dot{q}^d + \text{adj}(\phi_q^d) \dot{\phi}_q^d \ddot{q}^d \Big|_{\text{pm}} = \\ & - \left(\frac{d}{dt} \left(\text{adj}(\phi_q^d) \right) \left[\phi_q^i \ddot{q}^i + \dot{\phi}_q^d \dot{q}^d \right] + \text{adj}(\phi_q^d) \left[2 \left(\phi_q^i \right)^d \dot{q}^d \ddot{q}^i + \phi_q^i \ddot{q}^i + \left(\left(\ddot{\phi}_q^d \right)_1 + \left(\ddot{\phi}_q^d \right)_2 \right) \dot{q}^d \right] \right) \Big|_{\text{pm}} \end{aligned} \quad (4.41)$$

Amb la finalitat de veure la dependència entre les acceleracions de les coordenades dependents \ddot{q}^d i el moviment de la coordenada independent q^i , es reescriuen les equacions 4.35, 4.36 i 4.38 tenint en compte les equacions 4.23, 4.24 i 4.25:

$$\dot{\phi}_q^i \Big|_{\text{pm}} = \left(\phi_q^i \right)^d m \sqrt{\frac{-\ddot{q}^i}{km}} \Big|_{\text{pm}} \quad (4.42)$$

$$\dot{\phi}_q^d \Big|_{\text{pm}} = \sum_{k=1}^n \left(\frac{\partial}{\partial q_k} \left(\phi_q^d \right) m_k \right) \sqrt{\frac{-\ddot{q}^i}{km}} \Big|_{\text{pm}} \quad (4.43)$$

$$\left(\ddot{\phi}_q^d \right)_1 \Big|_{\text{pm}} = \sum_{l=1}^n \left(\sum_{k=1}^n \left(\frac{\partial}{\partial q_k} \left(\frac{\partial}{\partial q_l} \left(\phi_q^d \right) \right) m_k \right) m_l \right) \frac{-\ddot{q}^i}{km} \Big|_{\text{pm}} \quad (4.44)$$

Es reescriu també l'equació 4.41 considerant les equacions 4.21, 4.25, 4.39, 4.40, 4.42, 4.43 i 4.44. Per al càlcul de la derivada de la matriu adjunta de ϕ_q^d respecte al temps, es fa ús de l'equació 4.43, únicament reemplaçant ϕ_q^d per $\text{adj}(\phi_q^d)$:

$$\begin{aligned} km\ddot{q}^d + \text{adj}(\phi_q^d) \left[\sum_{k=1}^n \left(\frac{\partial}{\partial q_k} \left(\phi_q^d \right) \ddot{q}_k \right) m + \sum_{k=1}^n \left(\frac{\partial}{\partial q_k} \left(\phi_q^d \right) m_k \right) \ddot{q}^d \right] \Big|_{\text{pm}} = \\ - \left[m \sqrt{\frac{km}{-\ddot{q}^i}} \ddot{\ddot{q}}^i + R\ddot{q}^i \right] \Big|_{\text{pm}} \end{aligned} \quad (4.45)$$

amb el vector $\mathbf{R}|_{\text{pm}}$:

$$\begin{aligned} \mathbf{R}|_{\text{pm}} = \sum_{k=1}^n \left(\frac{\partial}{\partial q_k} \left(\text{adj}(\phi_q^d) \right) m_k \right) \left[\phi_q^i - \frac{1}{km} \sum_{k=1}^n \left(\frac{\partial}{\partial q_k} \left(\phi_q^d \right) m_k \right) m \right] + \\ \text{adj}(\phi_q^d) \left[2 \left(\phi_q^i \right)^d - \frac{1}{km} \sum_{l=1}^n \left(\sum_{k=1}^n \left(\frac{\partial}{\partial q_k} \left(\frac{\partial}{\partial q_l} \left(\phi_q^d \right) \right) m_k \right) m_l \right) + \frac{\partial}{\partial q^i} \left(\phi_q^d \right) \right] m \Big|_{\text{pm}} \end{aligned} \quad (4.46)$$

Reagrupant termes:

$$\ddot{q}^d \Big|_{\text{pm}} = -S^{-1} \left[m \sqrt{\frac{km}{-\ddot{q}^i}} \ddot{\ddot{q}}^i + R\ddot{q}^i \right] \Big|_{\text{pm}} = -\frac{\text{adj}(S)}{\det(S)} \left[m \sqrt{\frac{km}{-\ddot{q}^i}} \ddot{\ddot{q}}^i + R\ddot{q}^i \right] \Big|_{\text{pm}} \quad (4.47)$$

amb la matriu $S|_{\text{pm}}$ definida d'acord amb l'equació 4.48:

$$S|_{\text{pm}} = kmI + \text{adj}(\phi_q^d) \left[\begin{array}{cccc} \frac{\partial}{\partial q_1} (\phi_q^d) m & \frac{\partial}{\partial q_2} (\phi_q^d) m & \cdots & \frac{\partial}{\partial q_n} (\phi_q^d) m \end{array} \right] + \sum_{k=1}^n \left(\frac{\partial}{\partial q_k} (\phi_q^d) m_k \right) \Big|_{\text{pm}} \quad (4.48)$$

on I és la matriu identitat d' n files i n columnes. Segons l'apartat 4.2.1, la llei de moviment de la coordenada independent ha de ser, com a mínim, C^2 . Això implica que l'acceleració \ddot{q}^i ha de ser contínua al voltant del punt mort. D'acord amb l'equació 4.47, el càlcul de les acceleracions \ddot{q}^d de les coordenades dependents pot diferir considerablement si l'acceleració \ddot{q}^i de la coordenada independent val zero o qualsevol valor finit, ja que apareix en el denominador d'aquesta equació. Aquestes dues possibilitats s'analitzen a continuació assumint que el determinant de la matriu S és diferent de zero.

Acceleració $\ddot{q}^i \neq 0$

Quan el mecanisme s'apropa a una configuració de punt mort amb una acceleració de la coordenada independent \ddot{q}^i diferent de zero, l'acceleració de les coordenades dependents \ddot{q}^d es pot calcular directament a partir de l'equació 4.47. Com que els actuadors elèctrics convencionals poden realitzar senyals de comanda de continuïtat C^1 , no hi ha cap requeriment addicional pel que fa a la sobreacceleració $\ddot{\ddot{q}}^i$, sempre que tingui un valor finit. Així doncs, si $\ddot{q}^i \neq 0$, la llei de moviment de la coordenada independent ha de ser, com a mínim, C^2 .

En el cas del mecanisme pistó-biela-manovella considerat en aquest estudi:

$$S|_{\text{pm}} = \begin{bmatrix} r^2l + 3r^2 & 2r^2 \\ 2r^2l & 3r^2l + r^2 \end{bmatrix} \quad (4.49)$$

$$R|_{\text{pm}} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (4.50)$$

I, per tant:

$$\ddot{q}_1|_{\text{pm}} = -\frac{l\ddot{q}_3}{3\sqrt{-\ddot{q}_3}rl(r+l)} \quad (4.51)$$

$$\ddot{q}_2|_{\text{pm}} = -\frac{r\ddot{q}_3}{3\sqrt{-\ddot{q}_3}rl(r+l)} \quad (4.52)$$

Acceleració $\ddot{q}^i = 0$

D'acord amb l'equació 4.47, quan el mecanisme es situa al voltant d'un punt mort amb una acceleració \ddot{q}^i nul·la, el valor de la sobreacceleració $\ddot{\ddot{q}}^i$ també ha de ser nul. En cas contrari, les acceleracions \ddot{q}^d de les coordenades dependents tendiran a infinit. A més a

més, com que $\ddot{q}^i = 0$, les velocitats \dot{q}^d també són nul·les (equació 4.25). En conseqüència, per tal de conèixer el valor exacte del vector \ddot{q}^d quan $\dot{q}^d = \dot{q}^i = \ddot{q}^i = \ddot{q}^i = 0$, s'aplica la regla de L'Hôpital a l'equació 4.33:

$$\ddot{q}^d|_{\text{pm}} = \lim_{\dot{q}^i \rightarrow \text{pm}} \left(- \frac{\frac{d}{dt} \left(\frac{d}{dt} (\text{adj}(\phi_q^d)) [\phi_q^i \ddot{q}^i + \dot{\phi}_q \dot{q}^i] + \text{adj}(\phi_q^d) [\dot{\phi}_q^i \ddot{q}^i + \phi_q^i \ddot{q}^i + \ddot{\phi}_q \dot{q}^i + \dot{\phi}_q \dot{q}^i] \right)}{\frac{d}{dt} \left(\left\{ \frac{\partial}{\partial q^d} (\det(\phi_q^d)), \frac{\partial}{\partial q^i} (\det(\phi_q^d)) \right\} \{ \dot{q}^d, \dot{q}^i \}^T \right)} \right) \quad (4.53)$$

Si es separen ara els termes referents a les coordenades generalitzades dependents i independents i s'imposa $\dot{q}^d = \dot{q}^i = \ddot{q}^i = \ddot{q}^i = 0$:

$$\ddot{q}^d|_{\text{pm}} = - \frac{\text{adj}(\phi_q^d) [\phi_q^i \ddot{q}^i + 2\ddot{\phi}_q \dot{q}^i]}{\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial}{\partial q^d} (\det(\phi_q^d)) \dot{q}^d \right)} \Bigg|_{\text{pm}} = - \frac{\text{adj}(\phi_q^d) [\phi_q^i \ddot{q}^i + 2\ddot{\phi}_q \dot{q}^i]}{\frac{d}{dt} (k\dot{q}^d)} \Bigg|_{\text{pm}} \quad (4.54)$$

Si es considera l'equació 4.37 i que $\dot{q}^d = 0$:

$$(k\ddot{q}^d) \ddot{q}^d + 2\text{adj}(\phi_q^d) \sum_{k=1}^n \left(\frac{\partial}{\partial q_k} (\phi_q^d) \ddot{q}_k \right) \ddot{q}^d \Bigg|_{\text{pm}} = -m\ddot{q}^i|_{\text{pm}} \quad (4.55)$$

La relació entre el valor de les components j -èsima i k -èsima del vector \ddot{q}^d s'obté derivant l'equació 4.5 respecte al temps i aplicant dues vegades la regla de L'Hôpital, tenint en compte que $\dot{q}^i = \ddot{q}^i = \ddot{q}^i = 0$:

$$\frac{\ddot{q}_j}{\ddot{q}_k} \Bigg|_{\text{pm}} = \frac{m_j}{m_k} \Bigg|_{\text{pm}} \quad (4.56)$$

Aleshores, per a la component j -èsima del vector acceleració \ddot{q}^d es compleix:

$$km \frac{\ddot{q}_j}{m_j} \ddot{q}^d + 2\text{adj}(\phi_q^d) \sum_{k=1}^n \left(\frac{\partial}{\partial q_k} (\phi_q^d) m_k \right) m \left(\frac{\ddot{q}_j}{m_j} \right)^2 \Bigg|_{\text{pm}} = -m\ddot{q}^i|_{\text{pm}} \quad (4.57)$$

Finalment:

$$\ddot{q}_j|_{\text{pm}} = \sqrt{\frac{-m_j^3 \ddot{q}^i}{kmm_j + 2a_{j*} \sum_{k=1}^n \left(\frac{\partial}{\partial q_k} (\phi_q^d) m_k \right) m}} \Bigg|_{\text{pm}} \quad (4.58)$$

on a_{j*} és la j -èsima fila de la matriu $\text{adj}(\phi_q^d)$. Així doncs, l'acceleració de cadascuna de les n coordenades dependents és proporcional a l'arrel quadrada de \ddot{q}^i . D'acord amb l'apartat 3.3, els actuadors elèctrics convencionals poden realitzar moviments amb una discontinuïtat en l'acceleració. Per tant, \ddot{q}^i pot tenir qualsevol valor finit, però no és necessari que sigui una funció contínua en el punt mort. En conseqüència, si $\ddot{q}^i = 0$, la llei de moviment de la coordenada independent ha de ser, com a mínim, C^3 , amb \ddot{q}^i necessàriament zero.

En el cas del pistó-biela-manovella en la configuració de punt mort que es mostra en la Figura 4.3 b):

$$\ddot{q}_1|_{\text{pm}} = \sqrt{\frac{-l}{3r(r+l)}} \ddot{q}_3 \quad (4.59)$$

$$\ddot{q}_2|_{\text{pm}} = \sqrt{\frac{-r}{3l(r+l)}} \ddot{q}_3 \quad (4.60)$$

4.2.3 Validació dels resultats

Un cop definit el grau de continuïtat mínim C^n necessari per a la llei de moviment $q^i(t)$, es presenten les simulacions realitzades amb l'objectiu de verificar els resultats obtinguts. Els mecanismes que s'estudien són el quadrilàter articulat i el pistó-biela-manovella exposats en les Figures 4.2 i 4.3, respectivament. En el primer cas, els valors de les longituds emprades són $l_1 = 0,075$ m, $l_2 = 0,175$ m, $l_3 = 0,1$ m i $l_4 = 0,175$ m. Respecte al pistó-biela-manovella, els valors utilitzats són $r = 0,75$ i $l = 0,175$. En ambdós casos es pren q_3 com a coordenada independent q^i . Es considera en totes les simulacions realitzades que els mecanismes passen pel punt mort en l'instant de temps $t = t_{\text{pm}}$.

Per tal de comprovar les condicions de continuïtat descrites en els apartats 4.2.1 i 4.2.2, s'analitzen dues situacions. La primera mostra la influència del valor de la sobreacceleració \ddot{q}^i de la coordenada independent quan la seva acceleració \dot{q}^i és nul·la en la configuració de punt mort. La segona part de la simulació considera una evolució temporal de l'acceleració \ddot{q}^i diferent de zero al voltant del punt mort. La llei de moviment de la coordenada independent q_3 es mostra en l'equació 4.61:

$$q_3(t) = \begin{cases} -c_4 t^4 + c_3 t^3 - c_2 t^2 + c_1 t + c_0 & -\infty < t < t_{\text{pm}} \\ -c_4 t^4 - c_3 t^3 - c_2 t^2 + c_1 t + c_0 & t_{\text{pm}} \leq t < +\infty \end{cases} \quad (4.61)$$

on els valors de les constants c_0 , c_1 , c_2 , c_3 i c_4 , exposats en la Taula 4.1, depenen del cas simulat i del mecanisme utilitzat.

	Quadrilàter articulat			Pistó-biela-manovella		
	$\ddot{q}_3(t_{\text{pm}}) = 0$	$\ddot{q}_3(t_{\text{pm}}) = 0$	$\ddot{q}_3(t_{\text{pm}}) \neq 0$	$\ddot{q}_3(t_{\text{pm}}) = 0$	$\ddot{q}_3(t_{\text{pm}}) = 0$	$\ddot{q}_3(t_{\text{pm}}) \neq 0$
	$\ddot{\ddot{q}}_3(t_{\text{pm}}) \neq 0$	$\ddot{\ddot{q}}_3(t_{\text{pm}}) = 0$	$\ddot{\ddot{q}}_3(t_{\text{pm}}) \neq 0$	$\ddot{\ddot{q}}_3(t_{\text{pm}}) \neq 0$	$\ddot{\ddot{q}}_3(t_{\text{pm}}) = 0$	$\ddot{\ddot{q}}_3(t_{\text{pm}}) \neq 0$
c_0	2,25	2,25	2,25	2	2	2
c_1	0	0	0	0	0	0
c_2	0	0	0,5	0	0	0,5
c_3	0,563	0	0,563	0,5	0	0,5
c_4	0	0,563	0	0	0,5	0

Taula 4.1: Valors dels paràmetres c_0 , c_1 , c_2 , c_3 i c_4 per a totes les simulacions. Unitats en SI

Acceleració $\ddot{q}^i = 0$

Quan el mecanisme s'aproxima a una configuració de punt mort per a la coordenada independent q^i amb una acceleració \ddot{q}^i nul·la, la sobreacceleració \ddot{q}^i també ha de ser zero. En cas contrari, d'acord amb l'equació 4.47, l'acceleració \ddot{q}^d de les coordenades dependents tendirà a infinit i, en conseqüència, el moviment no serà fabricable mitjançant actuadors elèctrics convencionals, tal i com es mostra en les Figures 4.4 i 4.5. En el primer cas (Figura 4.4), l'acceleració \ddot{q}_3 val zero en el moment en què el mecanisme es troba en el punt mort. No obstant, el valor absolut de la sobreacceleració \ddot{q}_3 en aquesta configuració és diferent de zero en ambdós mecanismes. Per tant, el valor de les acceleracions \ddot{q}_1 i \ddot{q}_2 tendeix a infinit. D'altra banda, si es modifica la llei de moviment q_3 per tal que la sobreacceleració \ddot{q}_3 sigui també nul·la en l'instant de temps $t = t_{pm}$ (Figura 4.5), les acceleracions \ddot{q}_1 i \ddot{q}_2 , tot i presentar una discontinuïtat, tenen un valor finit el qual es pot calcular a partir de l'equació 4.58. Així doncs, aquesta llei de moviment és realitzable amb els actuadors esmentats anteriorment.

Acceleració $\ddot{q}^i \neq 0$

A diferència dels dos casos presentats amb anterioritat, l'acceleració \ddot{q}_3 té un valor finit diferent de zero quan el mecanisme aconsegueix la configuració de punt mort (Figura 4.6). Així doncs, el valor de les acceleracions \ddot{q}_1 i \ddot{q}_2 es pot obtenir fent ús de l'equació 4.47, independentment del valor de la sobreacceleració \ddot{q}_3 . En aquest cas, i atenent a la caracterització dels actuadors tractats en aquest treball, aquestes lleis de moviment sempre seran realitzables.

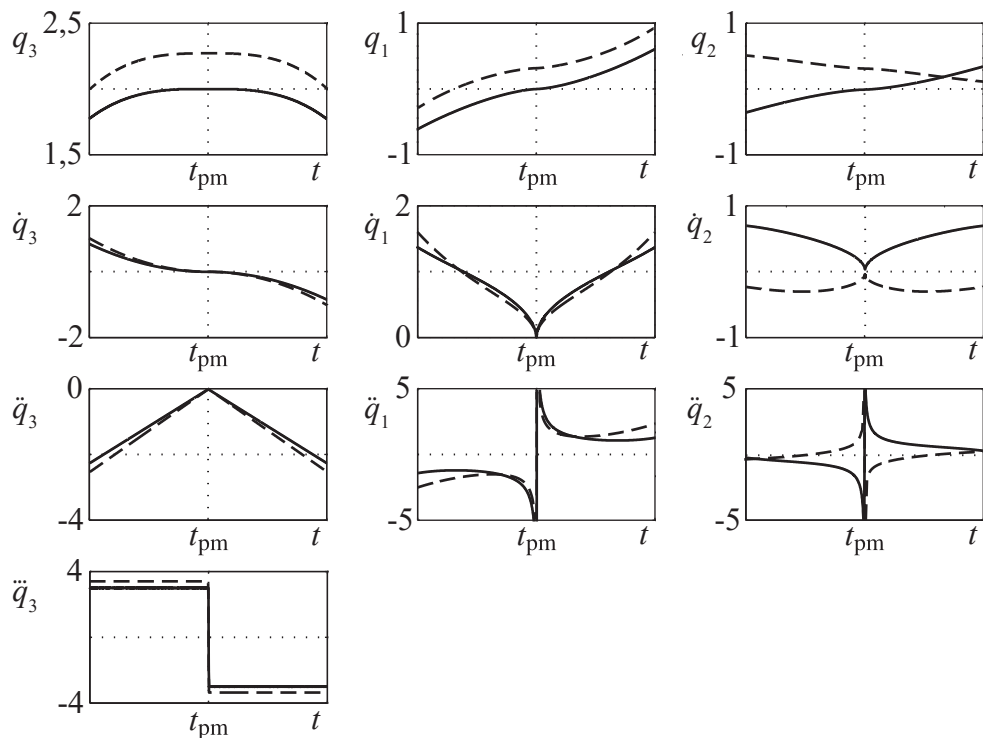


Figura 4.4: Llei de moviment de q_3 amb $\ddot{q}_3(t_{pm}) = 0$ i $\ddot{q}_3(t_{pm}) \neq 0$ per al pistó-biela-manovella (—) i el quadrilàter articulat (- - -). Unitats en SI

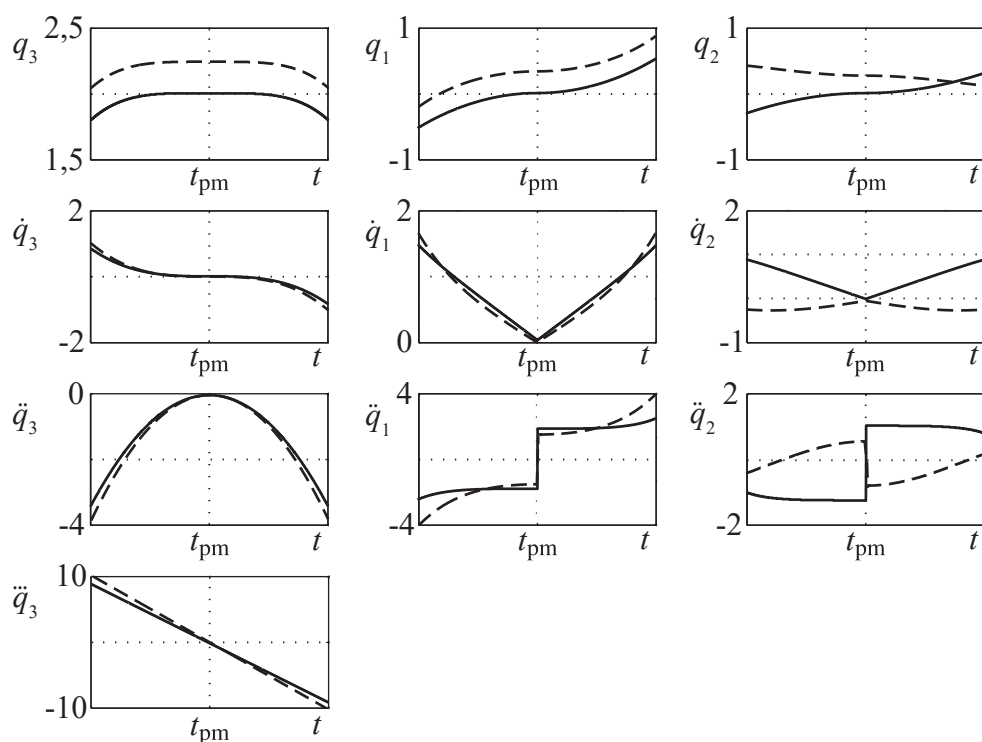


Figura 4.5: Llei de moviment de q_3 amb $\ddot{q}_3(t_{pm}) = 0$ i $\ddot{q}_3(t_{pm}) = 0$ per al pistó-biela-manovella (—) i el quadrilàter articulat (---). Unitats en SI

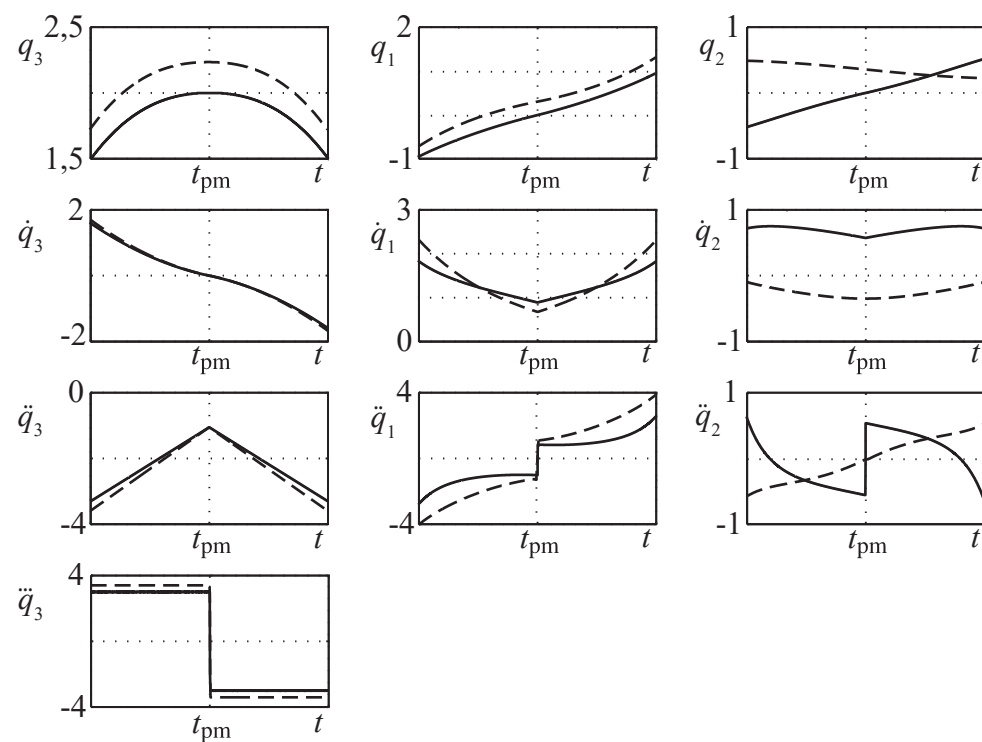


Figura 4.6: Llei de moviment de q_3 amb $\dot{q}_3(t_{pm}) \neq 0$ i $\ddot{q}_3(t_{pm}) \neq 0$ per al pistó-biela-manovella (—) i el quadrilàter articulat (---). Unitats en SI

Capítol 5

Definició de lleis de moviment en l'entorn d'un punt mort

En aquest capítol es defineix quin tipus de lleis de moviment de desplaçament i velocitat de la coordenada independent q^i es poden realitzar al voltant d'un punt mort amb la finalitat de reduir les vibracions residuals de la resposta $y(t)$ del sistema oscil·latori (Figura 4.1). De manera genèrica, es contempen moviments de vaivé de la coordenada independent q^i on el punt mort es troba dins del rang del moviment. No s'inclou la definició de lleis de moviment per mitjà de l'acceleració ja que aquesta magnitud física pot prendre, en principi, qualsevol valor finit quan el mecanisme es troba al voltant d'un punt mort i, per tant, la seva evolució temporal no permet de forma intuïtiva definir en quin instant de temps el mecanisme passa per una d'aquestes configuracions. L'anàlisi que es contempla en aquest capítol es duu a terme tenint en compte les hipòtesis i condicions de continuïtat exposades en el capítol 4. L'estudi utilitza, com a funcions $u_a(t)$, corbes de Bézier no paramètriques de duració T_p , grau g i p punts de control, les quals són C^∞ en el seu domini. La continuïtat de la corba de Bézier en els seus extrems dependrà de la posició i la quantitat de punts de control, tal i com s'exposa en l'apartat 3.2.1. Les Figures 5.1 *a*) i *b*) mostren un exemple per a les lleis de moviment de desplaçament i velocitat, respectivament. Es considera, en ambdós casos, que el mecanisme passa pel punt mort en l'instant de temps $t = t_{pm}$.

Amb la finalitat de reduir les vibracions residuals del senyal de resposta $y(t)$, es consideren els mètodes de generació de senyals de comanda per convolució amb un tren d'impulsos i per convolució de polsos en el domini temporal en sistemes lineals, exposats en els apartats 2.1.1 i 2.1.3, respectivament (equacions 5.1 i 5.2).

$$q^i(t) = A (u_a(t) \otimes u_b(t)) \quad (5.1)$$

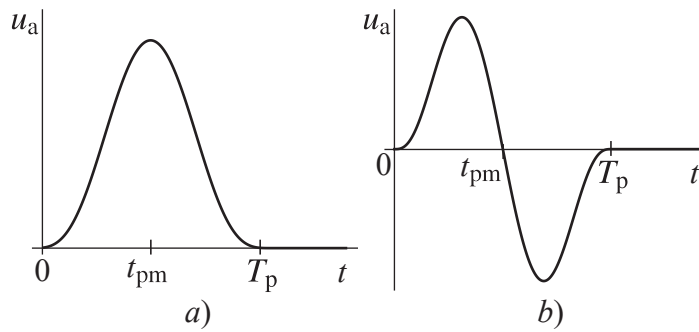


Figura 5.1: Exemples de senyal de a) desplaçament i b) velocitat

$$q^i(t) = A (u_a(t) \otimes u_b(t)) e^{-\zeta 2\pi f_0 t} \quad (5.2)$$

on A té un valor constant per tal de complir amb un requeriment funcional del sistema, és a dir, condicions definides per l'usuari respecte a la funció que ha de realitzar el mecanisme. Per exemple, en les equacions 5.1 i 5.2, el paràmetre A permetria definir el desplaçament màxim assolit pel mecanisme durant el moviment. D'altra banda, per a definir lleis de moviment de velocitat, les expressions són anàlogues substituint $q^i(t)$ per $\dot{q}^i(t)$.

En tots els casos d'estudi es suposa que es coneix amb prou precisió tant la freqüència pròpia f_0 del sistema oscil·latori com la seva raó d'esmoreïment ζ i, per tant, s'utilitzen dos impulsos d'amplituds I_0 i I_1 separats mig període d'oscil·lació en el cas 2.1.1 i un únic pols de duració el període d'oscil·lació i d'amplitud A_d per al cas 2.1.3 (equacions 5.3 i 5.4, respectivament).

$$u_b(t) = I_0 \delta(t) + I_1 \delta(t - 1/(2f_d)) \quad (5.3)$$

$$u_b(t) = \begin{cases} 0 & t \leq 0 \\ A_d & 0 < t \leq 1/f_d \\ 0 & 1/f_d < t \end{cases} \quad (5.4)$$

5.1 Condicions de continuïtat de la llei de moviment

En aquest apartat es defineixen les condicions que ha de complir el perfil temporal $u_a(t)$ amb l'objectiu que el senyal perfilat de la coordenada independent q^i , obtingut a partir de les equacions 5.1 i 5.2, mantingui el mateix grau de continuïtat C^n . Per a dur a terme aquest estudi es considera un senyal $u_a(t)$ com el de la Figura 5.1 a). Els resultats obtinguts també són extrapolables per a corbes de Bézier com la de la Figura 5.1 b). Durant l'anàlisi no s'inclou la constant A ja que, d'acord amb l'apartat 3.1.2, no influeix en la continuïtat de la llei de moviment.

5.1.1 Condicions de continuïtat de la llei de moviment obtinguda a partir de la convolució d' $u_a(t)$ amb un tren d'impulsos

L'estudi de la continuïtat del producte de convolució d' $u_a(t)$ amb un tren d'impulsos com el de l'equació 5.3 contempla dues situacions diferenciades. La primera quan la duració

T_p del senyal $u_a(t)$ és menor que el temps $1/(2f_d)$ de separació entre els impulsos del senyal $u_b(t)$. La segona té en compte que T_p és major o igual a $1/(2f_d)$. A continuació s'estudien ambdós casos.

Continuïtat quan $T_p < 1/(2f_d)$

La Figura 5.2 mostra els diferents trams del producte de convolució d' $u_a(t)$ amb el tren d'impulsos $u_b(t)$ de l'equació 5.3. Cadascun d'aquests trams es defineix analíticament en l'equació 5.5.

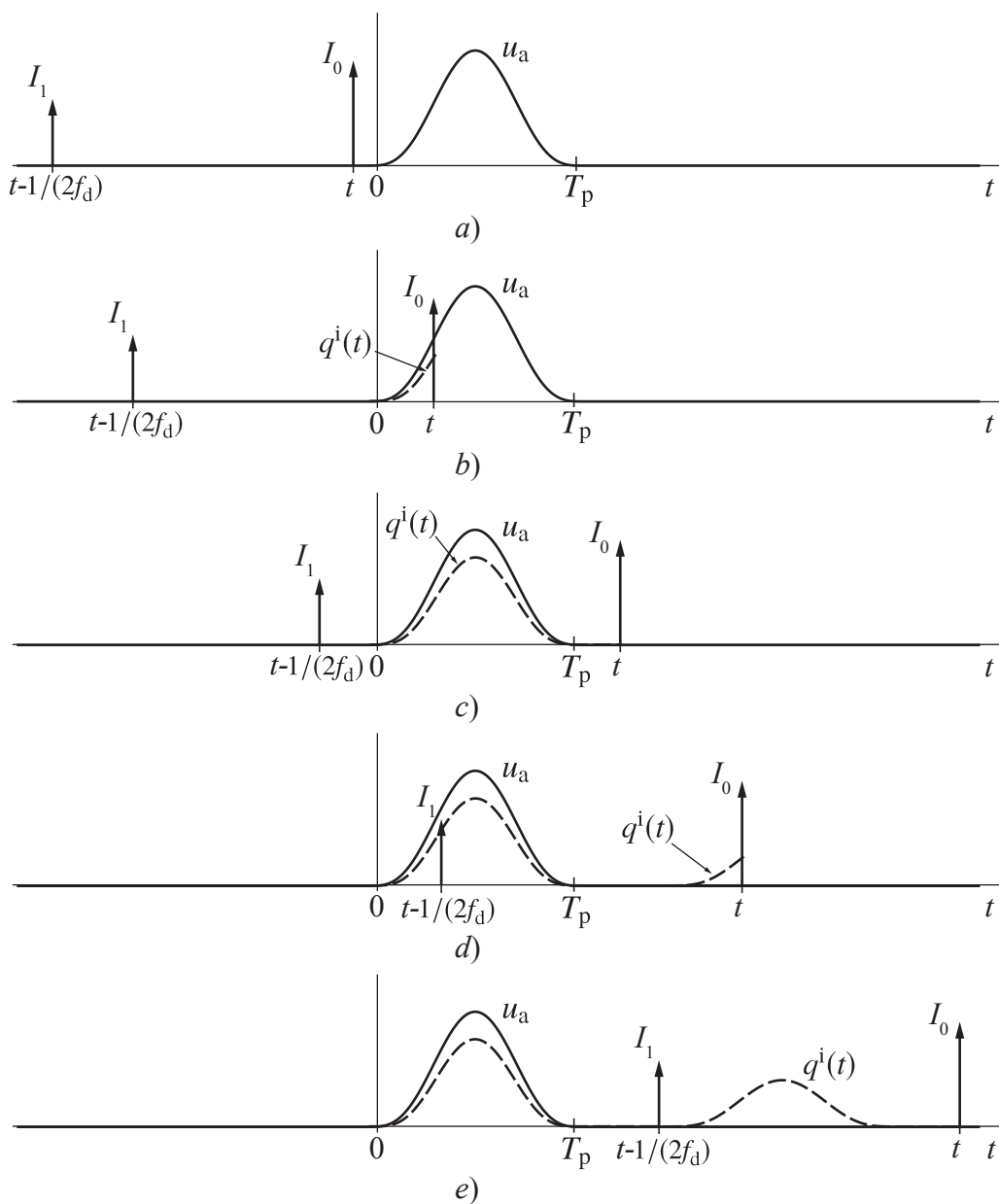


Figura 5.2: Producte de convolució $u_a(t) \otimes u_b(t)$ quan T_p és menor que la separació $1/(2f_d)$ del tren d'impulsos

$$q^i(t) = \begin{cases} 0 & t \leq 0 \\ I_0 u_a(t) & 0 < t \leq T_p \\ 0 & T_p < t \leq 1/(2f_d) \\ I_1 u_a(t - 1/(2f_d)) & 1/(2f_d) < t \leq T_p + 1/(2f_d) \\ 0 & T_p + 1/(2f_d) < t \end{cases} \quad (5.5)$$

Per a analitzar el grau de continuïtat C^n de $q^i(t)$ respecte al senyal $u_a(t)$ es calcula la seva n -èsima derivada derivant l'equació 5.5 respecte al temps¹.

$$q^i(t)^{(n)} = \begin{cases} 0 & t \leq 0 \\ I_0 u_a(t)^{(n)} & 0 < t \leq T_p \\ 0 & T_p < t \leq 1/(2f_d) \\ I_1 u_a(t - 1/(2f_d))^{(n)} & 1/(2f_d) < t \leq T_p + 1/(2f_d) \\ 0 & T_p + 1/(2f_d) < t \end{cases} \quad (5.6)$$

A continuació, d'acord amb l'apartat 3.1.2, s'imposa que la funció $q^i(t)$ i les seves primeres n derivades $\dot{q}^i(t), \ddot{q}^i(t), \dots, q^{i(n)}(t)$ siguin contínues en els instants de temps $t = 0$, $t = T_p$, $t = 1/(2f_d)$ i $t = T_p + 1/(2f_d)$.

$$\begin{aligned} 0 = I_0 u_a(0^+) & \quad t = 0 \\ I_0 u_a(T_p^-) = 0 & \quad t = T_p \\ 0 = I_1 u_a(0^+) & \quad t = 1/(2f_d) \\ I_1 u_a(T_p^-) = 0 & \quad t = T_p + 1/(2f_d) \end{aligned} \quad (5.7)$$

⋮

$$\begin{aligned} 0 = I_0 u_a(0^+)^{(n)} & \quad t = 0 \\ I_0 u_a(T_p^-)^{(n)} = 0 & \quad t = T_p \\ 0 = I_1 u_a(0^+)^{(n)} & \quad t = 1/(2f_d) \\ I_1 u_a(T_p^-)^{(n)} = 0 & \quad t = T_p + 1/(2f_d) \end{aligned} \quad (5.8)$$

En conseqüència, per tal que el senyal resultant $q^i(t)$ sigui C^n , cal que $u_a(t)$ sigui C^n en el seu domini de definició i que tant $u_a(t)$ com les seves primeres n derivades comencin i acabin en zero.

Continuïtat quan $T_p \geq 1/(2f_d)$

De forma anàloga al cas anterior, la Figura 5.3 presenta el producte de convolució d' $u_a(t)$ amb $u_b(t)$. L'expressió analítica per a cada tram es defineix en l'equació 5.9.

$$q^i(t) = \begin{cases} 0 & t \leq 0 \\ I_0 u_a(t) & 0 < t \leq 1/(2f_d) \\ I_0 u_a(t) + I_1 u_a(t - 1/(2f_d)) & 1/(2f_d) < t \leq T_p \\ I_1 u_a(t - 1/(2f_d)) & T_p < t \leq T_p + 1/(2f_d) \\ 0 & T_p + 1/(2f_d) < t \end{cases} \quad (5.9)$$

¹Tant en l'equació 5.6 com en les equacions 5.10, 5.15 i 5.19 s'inclouen els punts d'unió entre trams, ja que en l'estudi es considera que la funció $q^i(t)$ és contínua C^n i derivable en aquests instants de temps.

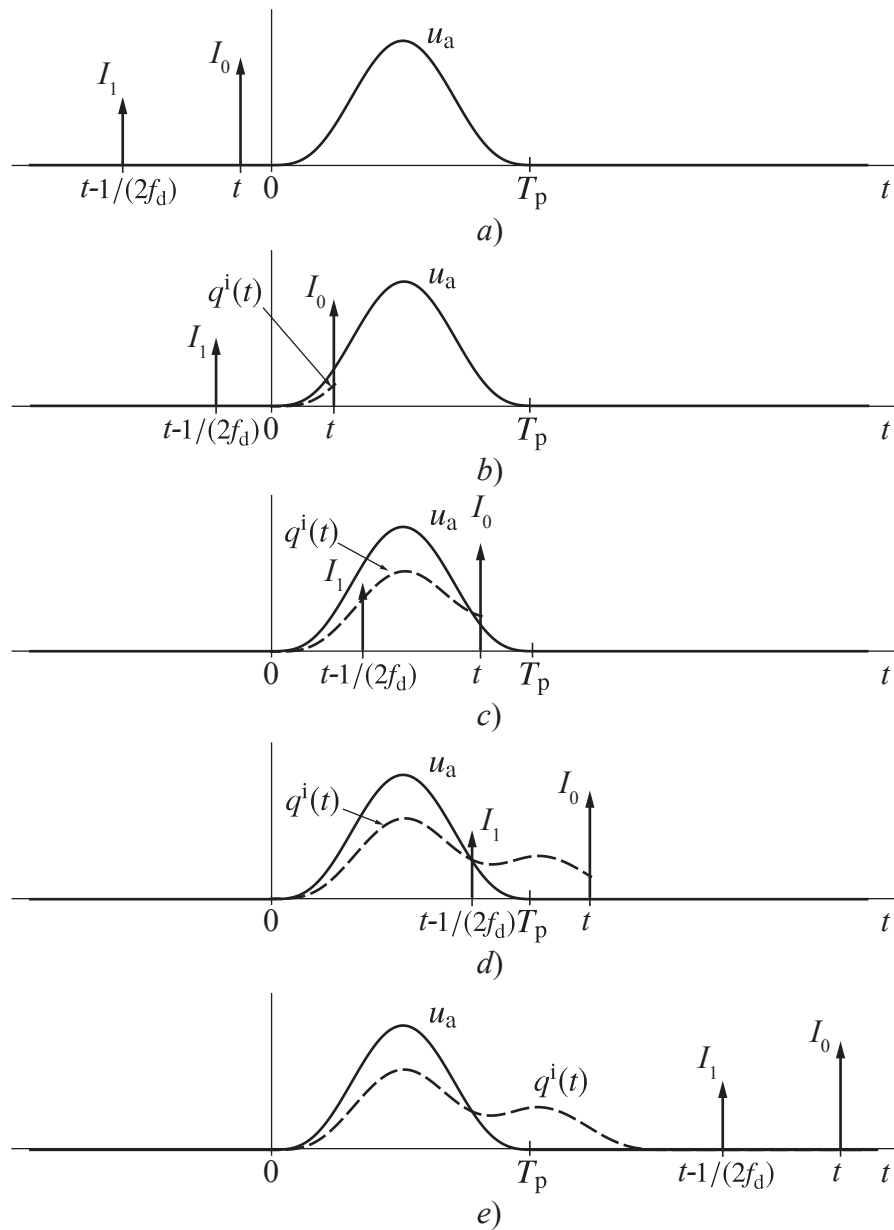


Figura 5.3: Producte de convolució $u_a(t) \otimes u_b(t)$ quan T_p és major o igual a la separació $1/(2f_d)$ del tren d'impulsos

Amb la finalitat d'analitzar el grau de continuïtat C^n de $q^i(t)$ es deriva l'equació 5.9 respecte al temps².

$$q^i(t)^{(n)} = \begin{cases} 0 & t \leq 0 \\ I_0 u_a(t)^{(n)} & 0 < t \leq 1/(2f_d) \\ I_0 u_a(t)^{(n)} + I_1 u_a(t - 1/(2f_d))^{(n)} & 1/(2f_d) < t \leq T_p \\ I_1 u_a(t - 1/(2f_d))^{(n)} & T_p < t \leq T_p + 1/(2f_d) \\ 0 & T_p + 1/(2f_d) < t \end{cases} \quad (5.10)$$

²Veure nota a peu de pàgina 66.

S'imposa, a continuació, que tant la funció $q^i(t)$ com les seves primeres n derivades $\dot{q}^i(t), \ddot{q}^i(t), \dots, q^{i(n)}(t)$ siguin contínues en els instants de temps $t = 0, t = 1/(2f_d), t = T_p$ i $t = T_p + 1/(2f_d)$.

$$\begin{aligned}
 0 &= I_0 u_a(0^+) & t &= 0 \\
 I_0 u_a(1/(2f_d)^-) &= I_0 u_a(1/(2f_d)^+) + I_1 u_a(0^+) & t &= 1/(2f_d) \\
 I_0 u_a(T_p^-) + I_1 u_a(T_p^- - 1/(2f_d)) &= I_1 u_a(T_p^+ - 1/(2f_d)) & t &= T_p \\
 I_1 u_a(T_p^-) &= 0 & t &= T_p + 1/(2f_d)
 \end{aligned} \tag{5.11}$$

⋮

$$\begin{aligned}
 0 &= I_0 u_a(0^+)^{(n)} & t &= 0 \\
 I_0 u_a(1/(2f_d)^-)^{(n)} &= I_0 u_a(1/(2f_d)^+)^{(n)} + I_1 u_a(0^+)^{(n)} & t &= 1/(2f_d) \\
 I_0 u_a(T_p^-)^{(n)} + I_1 u_a(T_p^- - 1/(2f_d))^{(n)} &= I_1 u_a(T_p^+ - 1/(2f_d))^{(n)} & t &= T_p \\
 I_1 u_a(T_p^-)^{(n)} &= 0 & t &= T_p + 1/(2f_d)
 \end{aligned} \tag{5.12}$$

Com que el senyal $u_a(t)$ és C^∞ ,

$$\begin{aligned}
 u_a(1/(2f_d)^-) &= u_a(1/(2f_d)^+) \\
 u_a(T_p^- - 1/(2f_d)) &= u_a(T_p^+ - 1/(2f_d)) \\
 &\vdots \\
 u_a(1/(2f_d)^-)^{(n)} &= u_a(1/(2f_d)^+)^{(n)} \\
 u_a(T_p^- - 1/(2f_d))^{(n)} &= u_a(T_p^+ - 1/(2f_d))^{(n)}
 \end{aligned} \tag{5.13}$$

i, per tant, per tal que $q^i(t)$ tingui continuïtat C^n , és necessari que el senyal $u_a(t)$ sigui C^n en el seu domini de definició i que tant $u_a(t)$ com les seves primeres n derivades comencin i acabin en zero.

5.1.2 Condicions de continuïtat de la llei de moviment obtinguda a partir de la convolució d' $u_a(t)$ amb un pols

Anàlogament a l'apartat anterior, s'estudia la continuïtat de la llei de moviment $q^i(t)$ obtinguda mitjançant les equacions 5.2 i 5.4. Primerament, s'analitza la continuïtat de $q^i(t)$ en funció del producte de convolució $u_a(t) \otimes u_b(t)$, essent $u_b(t)$ un pols de duració $1/f_d$ i d'amplitud A_d . Aquest estudi té en compte els casos en què $T_p < 1/f_d$ i $T_p \geq 1/f_d$. Finalment, s'analitza la influència de l'exponencial negativa $e^{-\zeta 2\pi f_0 t}$.

Continuïtat quan $T_p < 1/f_d$

En la Figura 5.4 es pot observar gràficament la convolució temporal $u_a(t) \otimes u_b(t)$. D'altra banda, l'equació 5.14 defineix analíticament, per a cada tram, l'expressió de la llei de moviment $q^i(t)$ resultant d'aquest producte.

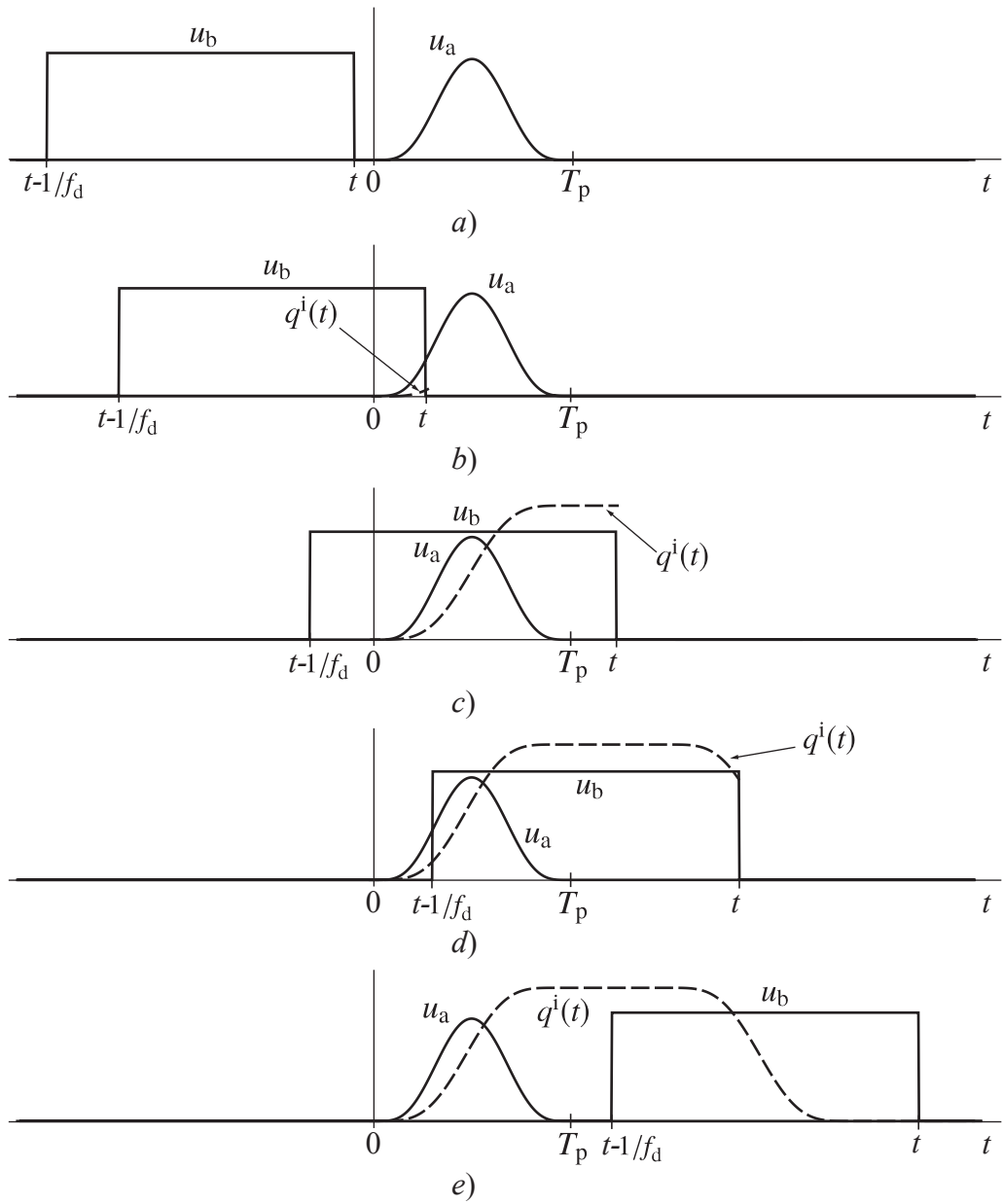


Figura 5.4: Producte de convolució $u_a(t) \otimes u_b(t)$ quan T_p és menor a la duració $1/f_d$ del pols

$$q^i(t) = \begin{cases} 0 & t \leq 0 \\ A_d \int_0^t u_a(\tau) d\tau & 0 < t \leq T_p \\ A_d \int_0^{T_p} u_a(\tau) d\tau & T_p < t \leq 1/f_d \\ A_d \int_{t-1/f_d}^0 u_a(\tau) d\tau & 1/f_d < t \leq T_p + 1/f_d \\ 0 & T_p + 1/f_d < t \end{cases} \quad (5.14)$$

Tot seguit, es deriva l'equació 5.14 respecte al temps³.

$$q^i(t)^{(n)} = \begin{cases} 0 & t \leq 0 \\ A_d u_a(t)^{(n-1)} & 0 < t \leq T_p \\ 0 & T_p < t \leq 1/f_d \\ -A_d u_a(t - 1/f_d)^{(n-1)} & 1/f_d < t \leq T_p + 1/f_d \\ 0 & T_p + 1/f_d < t \end{cases} \quad (5.15)$$

S'imposa que el valor de la funció $q^i(t)$ i les seves primeres n derivades $\dot{q}^i(t), \ddot{q}^i(t), \dots, q^i(t)^{(n)}$ sigui el mateix tant per l'esquerra com per la dreta en els instants de temps $t = 0$, $t = T_p$, $t = 1/f_d$ i $t = T_p + 1/f_d$.

$$\begin{aligned} 0 &= A_d \int_0^{0^+} u_a(\tau) d\tau & t = 0 \\ A_d \int_0^{T_p^-} u_a(\tau) d\tau &= A_d \int_0^{T_p} u_a(\tau) d\tau & t = T_p \\ A_d \int_0^{T_p} u_a(\tau) d\tau &= A_d \int_0^{T_p} u_a(\tau) d\tau & t = 1/f_d \\ A_d \int_{T_p^-}^{T_p} u_a(\tau) d\tau &= 0 & t = T_p + 1/f_d \end{aligned} \quad (5.16)$$

⋮

$$\begin{aligned} 0 &= A_d u_a(0^+)^{(n-1)} & t = 0 \\ A_d u_a(T_p^-)^{(n-1)} &= 0 & t = T_p \\ 0 &= -A_d u_a(0^+)^{(n-1)} & t = 1/f_d \\ -A_d u_a(T_p^-)^{(n-1)} &= 0 & t = T_p + 1/f_d \end{aligned} \quad (5.17)$$

D'acord amb les expressions anteriors, si es vol que la llei de moviment $q^i(t)$ sigui C^n , és necessari que el senyal $u_a(t)$ sigui C^{n-1} en el seu domini de definició i que tant $u_a(t)$ com les seves $n - 1$ primeres derivades comencin i acabin en zero.

Continuïtat quan $T_p \geq 1/f_d$

La Figura 5.5 mostra el producte de convolució $u_a(t) \otimes u_b(t)$ quan la duració T_p del senyal $u_a(t)$ és major o igual a la duració $1/f_d$ del pols. En l'equació 5.18 s'exposa, per a cada tram, l'expressió de la llei de moviment $q^i(t)$.

³Veure nota a peu de pàgina 66.

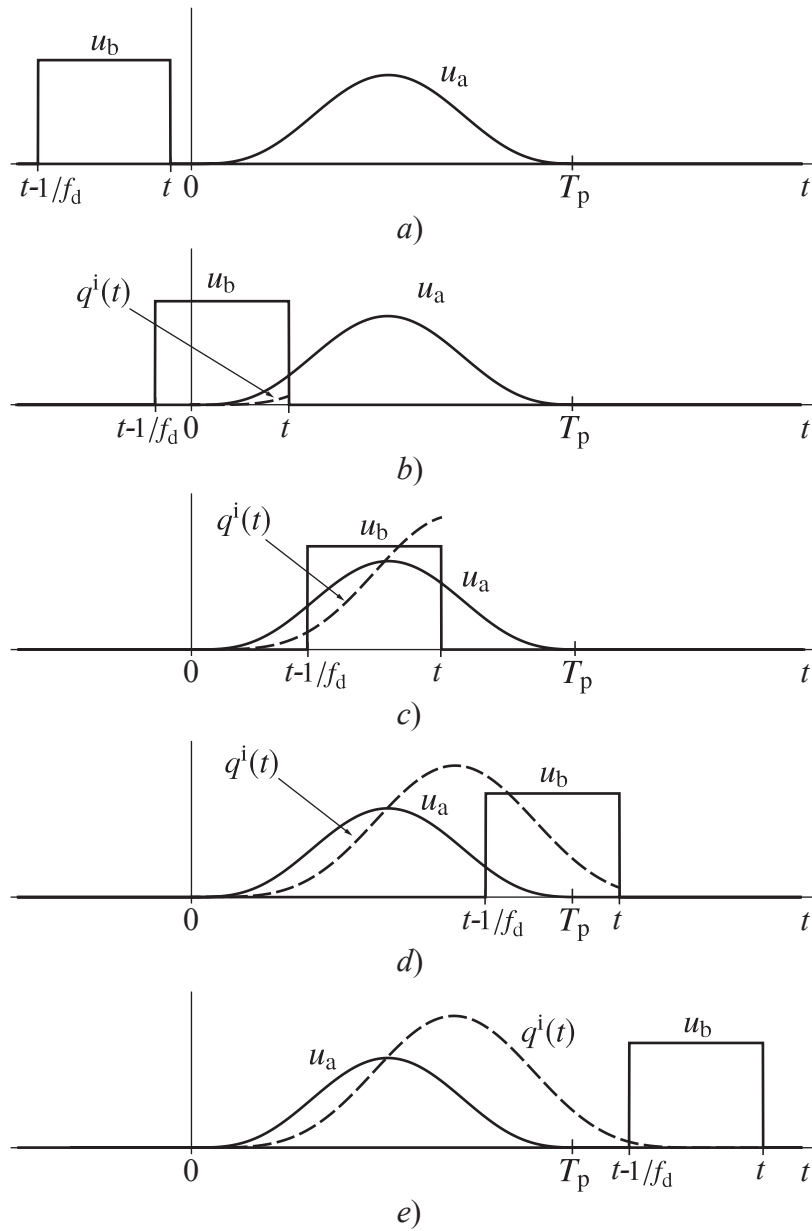


Figura 5.5: Producte de convolució $u_a(t) \otimes u_b(t)$ quan T_p és major o igual a la duració $1/f_d$ del pols

$$q^i(t) = \begin{cases} 0 & t \leq 0 \\ A_d \int_0^t u_a(\tau) d\tau & 0 < t \leq 1/f_d \\ A_d \int_{t-1/f_d}^t u_a(\tau) d\tau & 1/f_d < t \leq T_p \\ A_d \int_{t-1/f_d}^{T_p} u_a(\tau) d\tau & T_p < t \leq T_p + 1/f_d \\ 0 & T_p + 1/f_d < t \end{cases} \quad (5.18)$$

A continuació, es deriva l'equació 5.18 respecte al temps⁴.

$$q^i(t)^{(n)} = \begin{cases} 0 & t \leq 0 \\ A_d u_a(t)^{(n-1)} & 0 < t \leq 1/f_d \\ A_d \left(u_a(t)^{(n-1)} - u_a(t - 1/f_d)^{(n-1)} \right) & 1/f_d < t \leq T_p \\ -A_d u_a(t - 1/f_d)^{(n-1)} & T_p < t \leq T_p + 1/f_d \\ 0 & T_p + 1/f_d < t \end{cases} \quad (5.19)$$

S'imposa que el valor de la funció $q^i(t)$ i les seves primeres n derivades $\dot{q}^i(t), \ddot{q}^i(t), \dots, q^{i(n)}(t)$ sigui el mateix tant per l'esquerra com per la dreta en els instants de temps $t = 0, t = 1/f_d, t = T_p$ i $t = T_p + 1/f_d$.

$$\begin{aligned} 0 &= A_d \int_0^{0^+} u_a(\tau) d\tau & t = 0 \\ A_d \int_0^{(1/f_d)^-} u_a(\tau) d\tau &= A_d \int_{(1/f_d)^+} u_a(\tau) d\tau & t = 1/f_d \\ A_d \int_{T_p^-} u_a(\tau) d\tau &= A_d \int_{T_p^+} u_a(\tau) d\tau & t = T_p \\ A_d \int_{T_p^- - 1/f_d} u_a(\tau) d\tau &= A_d \int_{T_p^+ - 1/f_d} u_a(\tau) d\tau & t = T_p + 1/f_d \end{aligned} \quad (5.20)$$

⋮

$$\begin{aligned} 0 &= A_d u_a(0^+)^{(n-1)} & t = 0 \\ A_d u_a((1/f_d)^-)^{(n-1)} &= A_d \left(u_a((1/f_d)^+)^{(n-1)} - u_a(0^+)^{(n-1)} \right) & t = 1/f_d \\ A_d \left(u_a(T_p^-)^{(n-1)} - u_a(T_p^- - 1/f_d)^{(n-1)} \right) &= -A_d u_a(T_p^+ - 1/f_d)^{(n-1)} & t = T_p \\ -A_d u_a(T_p^-)^{(n-1)} &= 0 & t = T_p + 1/f_d \end{aligned} \quad (5.21)$$

Com que el senyal $u_a(t)$ és C^∞ ,

$$\begin{aligned} \dot{u}_a((1/f_d)^-) &= \dot{u}_a((1/f_d)^+) \\ \dot{u}_a(T_p^- - 1/f_d) &= \dot{u}_a(T_p^+ - 1/f_d) \\ &\vdots \\ u_a((1/f_d)^-)^{(n-1)} &= u_a((1/f_d)^+)^{(n-1)} \\ u_a(T_p^- - 1/f_d)^{(n-1)} &= u_a(T_p^+ - 1/f_d)^{(n-1)} \end{aligned} \quad (5.22)$$

i, per tant, si la llei de moviment $q^i(t)$ ha de ser C^n , és necessari que el senyal $u_a(t)$ sigui C^{n-1} en el seu domini de definició i que tant $u_a(t)$ com les seves $n - 1$ primeres derivades comencin i acabin en zero.

⁴Veure nota a peu de pàgina 66.

Continuïtat d'una funció contínua multiplicada per una exponencial negativa

D'acord amb els criteris de continuïtat que s'exposen en l'apartat 3.1.2, com que la funció $e^{-\zeta 2\pi f_0 t}$ és C^∞ en tot el domini temporal, no influeix en el grau de continuïtat C^n del senyal $q^i(t)$, independentment dels valors de T_p i $1/f_d$. En conseqüència, si la funció resultant del producte de convolució $u_a(t) \otimes u_b(t)$ és C^n , la llei de moviment exposada en l'equació 5.2 també ho serà.

5.2 Definició de lleis de moviment basades en el mètode de convolució amb un tren d'impulsos

En aquest apartat s'especifiquen, de forma genèrica, les principals característiques de les lleis de moviment de desplaçament $q^i(t)$ i velocitat $\dot{q}^i(t)$ per tal de reduir les vibracions residuals de la coordenada $y(t)$ del sistema oscil·latori al voltant de la posició de punt mort $q^i|_{\text{pm}}$ quan la llei de moviment s'obté per mitjà de la convolució temporal amb un tren d'impulsos (Figura 4.1 i equació 5.1). Amb l'objectiu de realitzar aquest estudi s'utilitzen, com a exemple de senyals $u_a(t)$, les corbes de Bézier de la Figura 5.1 amb el mínim grau de continuïtat C^n necessari. El grau g i els p punts de control d'aquestes corbes s'ajusten en cada situació d'acord amb les conclusions obtingudes en el capítol 4 i l'apartat 5.1. És important recordar que, si $q^i(t)$ és C^n , $\dot{q}^i(t)$ serà C^{n-1} . La Taula 5.1 mostra els requeriments necessaris per tal que $q^i(t)$ i $\dot{q}^i(t)$ siguin realitzables mitjançant actuadors elèctrics convencionals.

Continuïtat de la llei de moviment resultant	$q^i(t) \rightarrow C^2$ $\dot{q}^i(t) \rightarrow C^1$	$q^i(t) \rightarrow C^3$ $\dot{q}^i(t) \rightarrow C^2$
Continuïtat del senyal de partida	$q^i(t) \rightarrow u_a(t)$ ha de ser C^2 $\dot{q}^i(t) \rightarrow u_a(t)$ ha de ser C^1	$q^i(t) \rightarrow u_a(t)$ ha de ser C^3 $\dot{q}^i(t) \rightarrow u_a(t)$ ha de ser C^2
Requeriments en el punt mort	$q^i(t_{\text{pm}}) = q^i _{\text{pm}}$ $\dot{q}^i(t_{\text{pm}}) = 0$ $\ddot{q}^i(t_{\text{pm}}) \neq 0$	$q^i(t_{\text{pm}}) = q^i _{\text{pm}}$ $\dot{q}^i(t_{\text{pm}}) = 0$ $\ddot{q}^i(t_{\text{pm}}) = 0$ $\dddot{q}^i(t_{\text{pm}}) = 0$

Taula 5.1: Requeriments perquè les lleis de moviment $q^i(t)$ i $\dot{q}^i(t)$ obtingudes mitjançant les equacions 5.1 i 5.3 siguin realitzables

Lleis de moviment de desplaçament i velocitat quan $T_p < 1/(2f_d)$

En les Figures 5.6 i 5.7 es pot observar l'exemple d'una llei de moviment de desplaçament $q^i(t)$ i una altra de velocitat $\dot{q}^i(t)$, respectivament. En ambdós casos, el moviment comença i acaba en el mateix punt per a la coordenada independent $q^i(t)$. El paràmetre A s'utilitza per a escalar convenientment el producte de convolució de l'equació 5.1 de forma que el mecanisme passi per la configuració de punt mort en l'instant de temps $t = t_{pm}$ en funció de la seva posició inicial $q^i|_{pm}$ (equació 5.23). També es pot obtenir aquest paràmetre limitant la velocitat màxima $\dot{q}^i|_{m\grave{a}x}$ que es vol assolir al llarg de la trajectòria (equació 5.24). D'altra banda, amb l'objectiu de reduir les vibracions residuals del sistema oscil·latori, s'observa com la llei de moviment resultant es compon de dos moviments separats un cert temps.

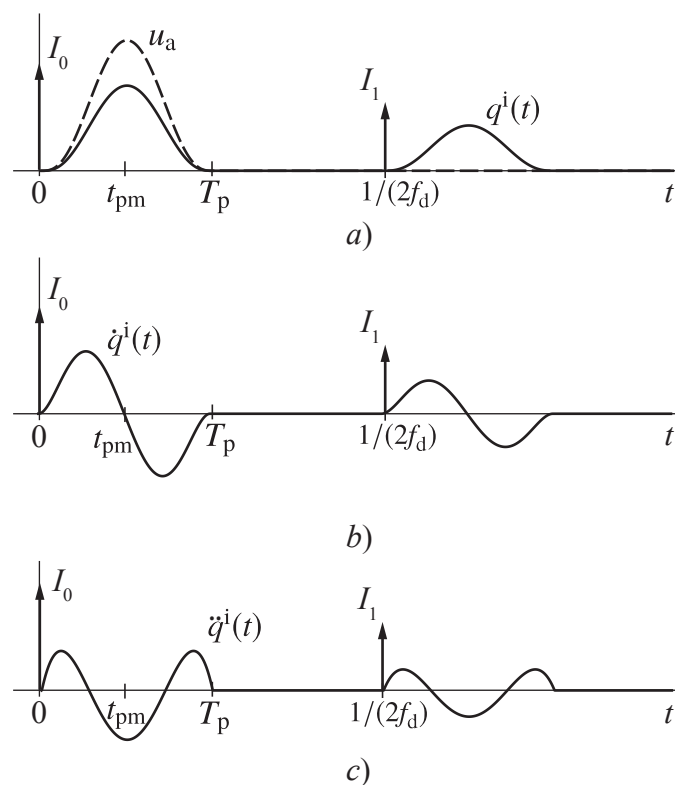


Figura 5.6: Exemple de llei de moviment $q^i(t)$, contínua C^2 amb $g=6$, $p=7$ i $\zeta = 0, 1$

$$q^i|_{pm} - q^i(0) = AI_0 \text{m\grave{a}xim}(u_a(t)) \quad (5.23)$$

$$\dot{q}^i|_{m\grave{a}x} - \dot{q}^i(0) = AI_0 \text{m\grave{a}xim}(\dot{u}_a(t)) \quad (5.24)$$

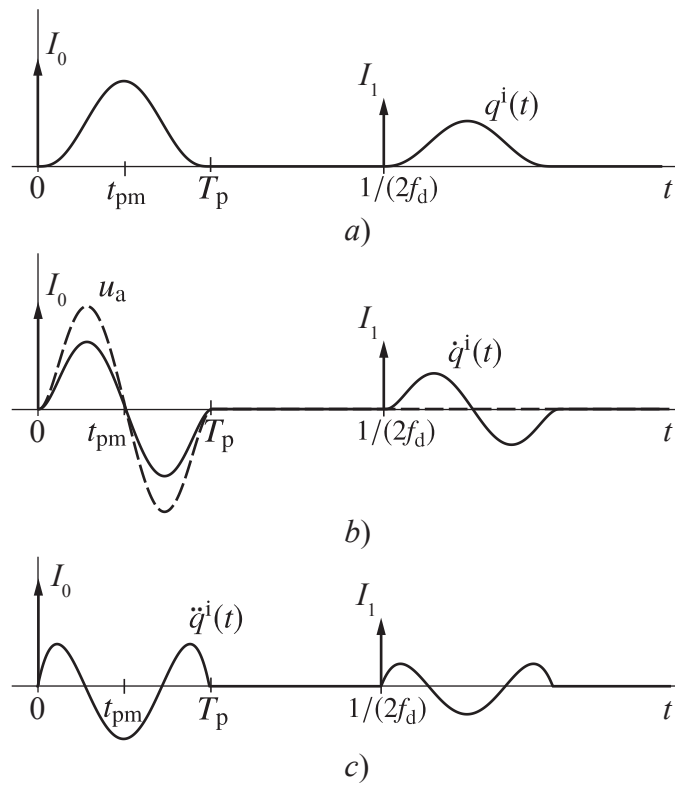


Figura 5.7: Exemple de llei de moviment $\dot{q}^i(t)$, contínua C^1 amb $g=5$, $p=6$ i $\zeta = 0, 1$

Lleis de moviment de desplaçament i velocitat quan $T_p \geq 1/(2f_d)$

Tal i com es mostra en les Figures 5.8 i 5.9, el moviment realitzat per les lleis de moviment $q^i(t)$ i $\dot{q}^i(t)$ també comença i acaba en la mateixa posició per a la coordenada independent. De forma anàloga al cas anterior, el paràmetre A s'utilitza per a escalar adequadament el producte de convolució $u_a(t) \otimes u_b(t)$ de manera que el mecanisme passi per la configuració de punt mort $q^i|_{pm}$ en l'instant de temps $t = t_{pm}$ o bé per tal de no superar la velocitat límit $\dot{q}^i|_{m\grave{a}x}$ (equacions 5.25 i 5.26). En aquest tipus de llei de moviment, el senyal no presenta el moviment residual mostrat en el cas anterior.

$$q^i|_{pm} - q^i(0) = A \text{m\grave{a}xim} (u_a(t) \otimes u_b(t)) \quad (5.25)$$

$$\dot{q}^i|_{m\grave{a}x} - \dot{q}^i(0) = A \text{m\grave{a}xim} (\dot{u}_a(t) \otimes u_b(t)) \quad (5.26)$$

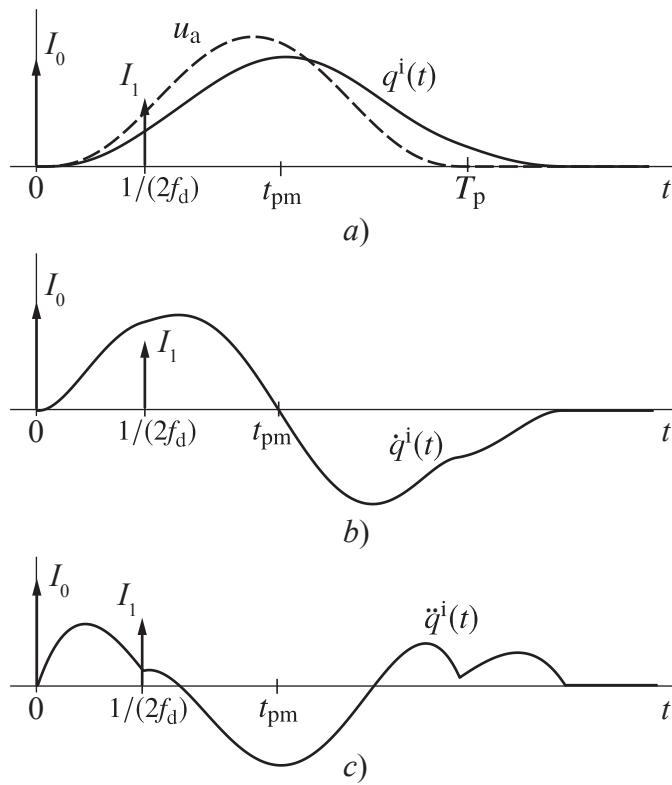


Figura 5.8: Segon exemple de llei de moviment $q^i(t)$, contínua C^2 amb $g=6$, $p=7$ i $\zeta = 0, 1$

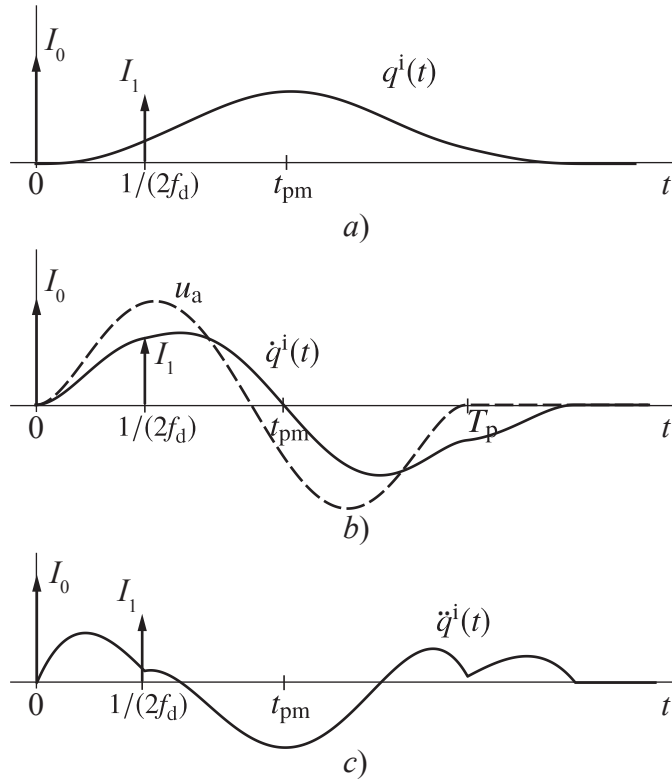


Figura 5.9: Segon exemple de llei de moviment $q^i(t)$, contínua C^1 amb $g=5$, $p=6$ i $\zeta = 0, 1$

5.3 Definició de lleis de moviment basades en el mètode de convolució amb un pols

Anàlogament a l'apartat anterior, s'estudien les característiques que han de tenir les lleis de moviment de desplaçament $q^i(t)$ i velocitat $\dot{q}^i(t)$ per a reduir les vibracions residuals d' $y(t)$ a partir de les equacions 5.2 i 5.4. Amb la finalitat de simplificar l'anàlisi, es suposa $A_d = 1$. La Taula 5.2 presenta els principals requeriments per tal que ambdues lleis de moviment siguin realitzables mitjançant actuadors elèctrics convencionals.

Continuïtat de la llei de moviment resultant	$q^i(t) \rightarrow C^2$ $\dot{q}^i(t) \rightarrow C^1$	$q^i(t) \rightarrow C^3$ $\dot{q}^i(t) \rightarrow C^2$
Continuïtat del senyal de partida	$q^i(t) \rightarrow u_a(t)$ ha de ser C^1 $\dot{q}^i(t) \rightarrow u_a(t)$ ha de ser C^0	$q^i(t) \rightarrow u_a(t)$ ha de ser C^2 $\dot{q}^i(t) \rightarrow u_a(t)$ ha de ser C^1
Requeriments en el punt mort	$q^i(t_{pm}) = q^i _{pm}$ $\dot{q}^i(t_{pm}) = 0$ $\ddot{q}^i(t_{pm}) \neq 0$	$q^i(t_{pm}) = q^i _{pm}$ $\dot{q}^i(t_{pm}) = 0$ $\ddot{q}^i(t_{pm}) = 0$ $\dddot{q}^i(t_{pm}) = 0$

Taula 5.2: Requeriments perquè les lleis de moviment $q^i(t)$ i $\dot{q}^i(t)$ obtingudes mitjançant les equacions 5.2 i 5.4 siguin realitzables

Lleis de moviment de desplaçament i velocitat quan $T_p < 1/f_d$

Les Figures 5.10 i 5.11 mostren les lleis de moviment $q^i(t)$ i $\dot{q}^i(t)$ obtingudes a partir del producte de convolució d' $u_a(t)$ amb el pols de l'equació 5.4. En el primer cas, s'observa com la posició de la coordenada independent $q^i(t)$ és la mateixa tant al principi com al final del moviment. En el segon cas, el mecanisme assoleix una configuració diferent al finalitzar-lo, sempre que l'esmoreïment no sigui nul⁵. La segona llei de moviment també comporta que el mecanisme es trobi parat en el punt mort entre els instants de temps T_p i $1/f_d$. El paràmetre A es pot calcular d'acord amb les equacions 5.27 i 5.28.

$$q^i|_{pm} - q^i(0) = A \text{màxim} [(u_a(t) \otimes u_b(t)) e^{-\zeta 2\pi f_0 t}] \quad (5.27)$$

$$\dot{q}^i|_{m\grave{a}x} - \dot{q}^i(0) = A \text{màxim} [(\dot{u}_a(t) \otimes u_b(t)) e^{-\zeta 2\pi f_0 t}] \quad (5.28)$$

⁵En sistemes amb $\zeta = 0$, el factor $e^{-\zeta 2\pi f_0 t}$ de l'equació 5.2 val la unitat i, per tant, el producte de convolució no queda escalat per una exponencial negativa. Aquest fet provoca que l'àrea positiva i negativa de la llei de moviment $\dot{q}^i(t)$ sigui la mateixa i, en conseqüència, que el valor de la coordenada independent $q^i(t)$ sigui el mateix tant al principi com al final del moviment.

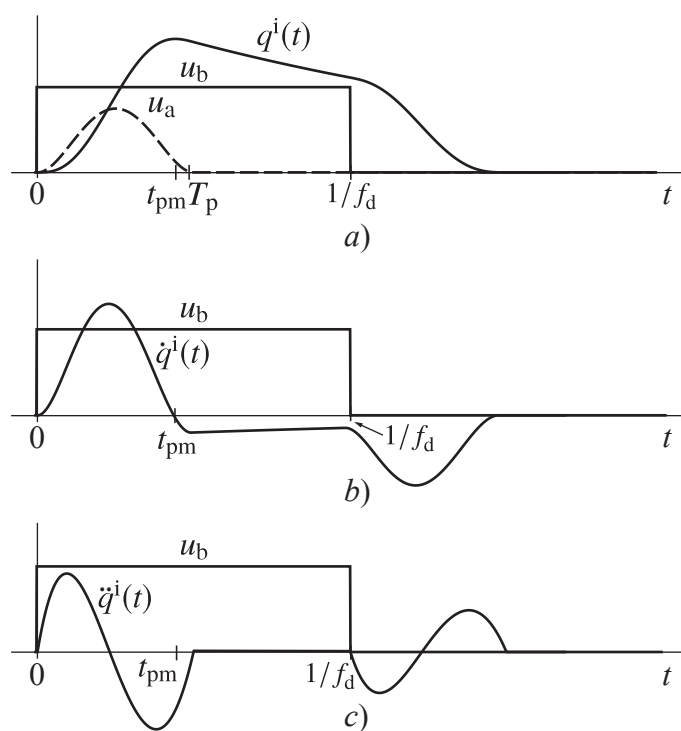


Figura 5.10: Exemple de llei de moviment $q^i(t)$, contínua C^2 amb $g=4$, $p=5$ i $\zeta = 0,1$

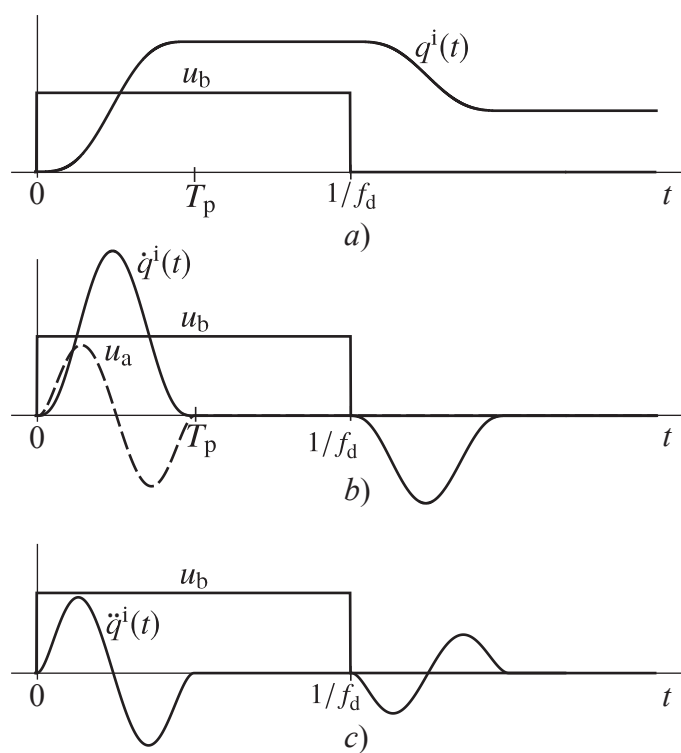


Figura 5.11: Exemple de llei de moviment $q^i(t)$, contínua C^2 amb $g=5$, $p=6$ i $\zeta = 0,1$

Lleis de moviment de desplaçament i velocitat quan $T_p \geq 1/f_d$

Les Figures 5.12 i 5.13 presenten les lleis de moviment $q^i(t)$ i $\dot{q}^i(t)$ quan $T_p \geq 1/f_d$. En la primera figura, el mecanisme comença i acaba en la mateixa posició pel que fa a la coordenada independent $q^i(t)$. En la segona, en canvi, la posició inicial i final d'aquesta coordenada és diferent⁶. El paràmetre A es pot calcular considerant les equacions 5.27 i 5.28.

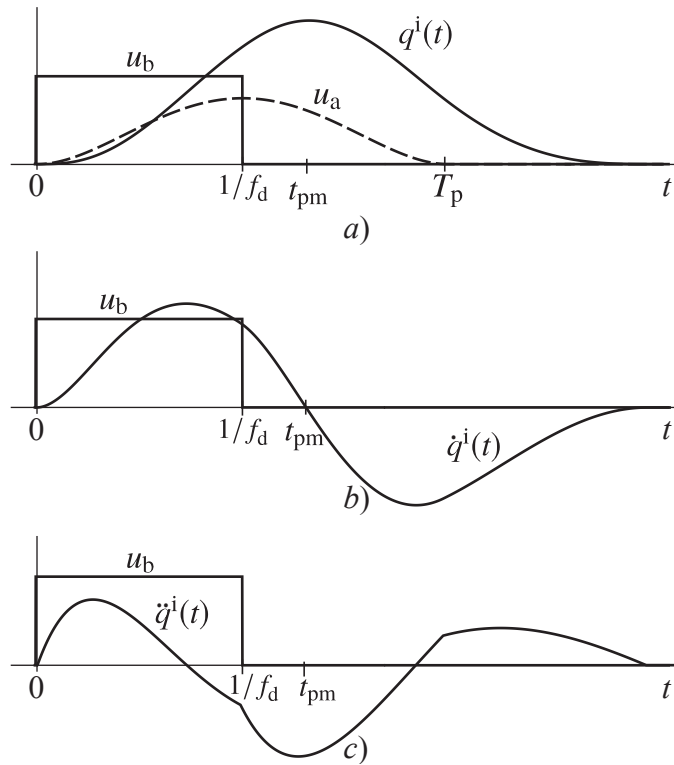


Figura 5.12: Segon exemple de llei de moviment $q^i(t)$, contínua C^2 amb $g=4$, $p=5$ i $\zeta = 0,1$

⁶Veure nota a peu de pàgina 77.

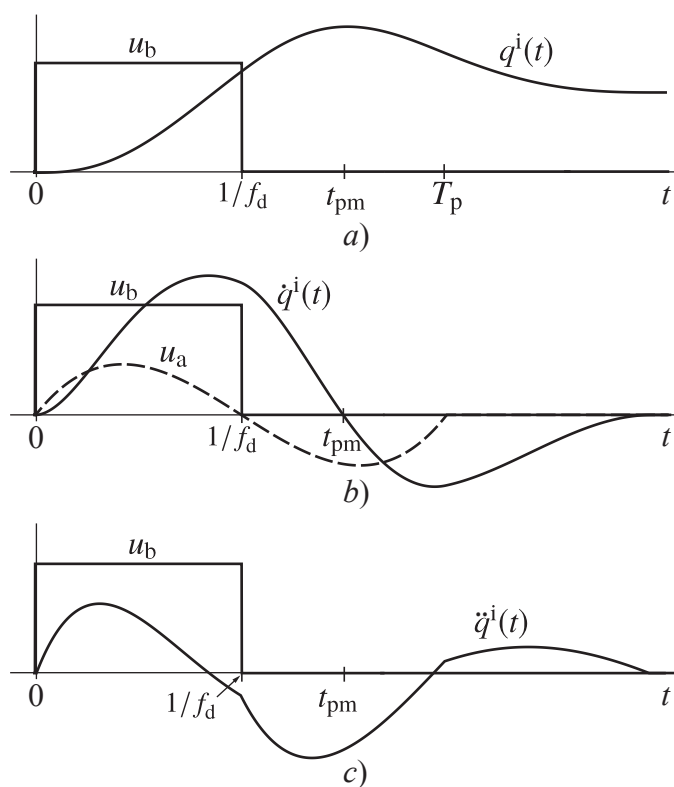


Figura 5.13: Segon exemple de llei de moviment $\dot{q}^i(t)$, contínua C^1 amb $g=3$, $p=4$ i $\zeta = 0, 1$

Capítol 6

Experimentació

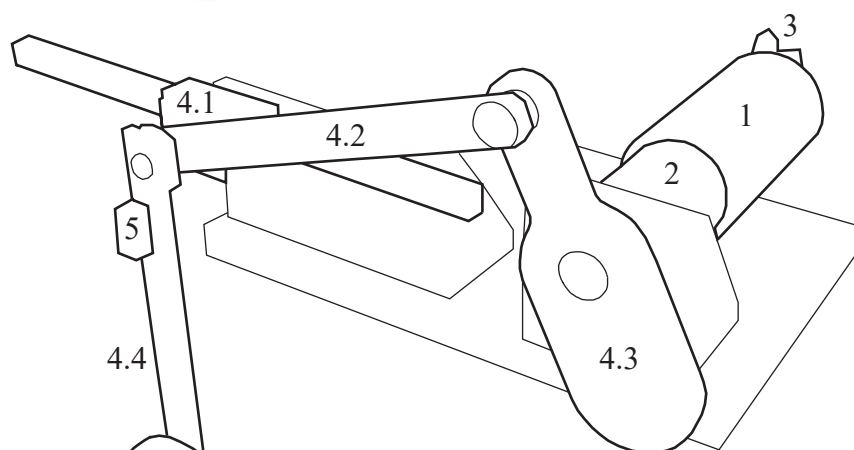
En els capítols 4 i 5 es determinen les característiques que ha de complir la llei de moviment de la coordenada independent q^1 al voltant d'un punt mort amb la finalitat de reduir les vibracions residuals de la resposta $y(t)$ del sistema oscil·latori. Amb la finalitat de provar la validesa de les conclusions obtingudes en ambdós apartats s'exposen, a continuació, els assajos experimentals duts a terme. En primer lloc, es descriu el muntatge experimental que s'ha dissenyat i construït amb una descripció del disseny mecànic i del sistema de control utilitzat. Seguidament, s'exposen els assajos experimentals realitzats que permeten analitzar la capacitat de l'actuador elèctric que controla el moviment del mecanisme i validar la bondat de les lleis de moviment emprades.

6.1 Muntatge experimental

En aquest apartat es descriu el muntatge experimental utilitzat per a validar les conclusions obtingudes en els capítols 4 i 5. Es presenta, en primer lloc, el conjunt mecànic i la seva modelització. En segon lloc, es descriu el sistema emprat per tal de controlar i captar dades experimentals.

6.1.1 Conjunt mecànic

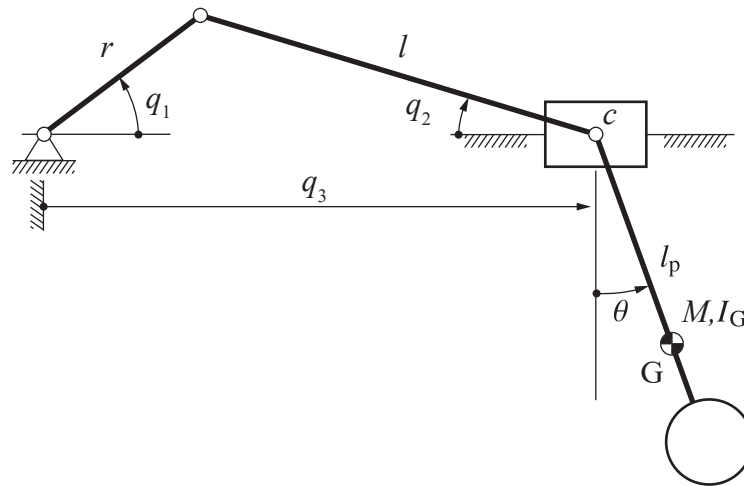
En la Figura 6.1 es mostra el mecanisme que s'ha prototipat per a realitzar els assajos experimentals. El sistema està format per un motor de corrent continu amb escombretes amb el seu corresponent reductor d'engranatges, un mecanisme de pistó-biela-manovella i un pèndol, l'eix de rotació del qual es mou solidari amb el pistó.



- 1 - Motor de corrent continu
- 2 - Reductor d'engranatges
- 3 - Codificador incremental
- 4 - Conjunt mecànic
 - 4.1 Pistó
 - 4.2 Biela
 - 4.3 Manovella
 - 4.4 Pèndol
- 5 - Giròscop

Figura 6.1: Descripció del conjunt mecànic

L'estat mecànic del sistema es defineix a partir de les coordenades generalitzades q_1 , q_2 , q_3 i de la coordenada θ (Figura 6.2). Per a poder descriure les lleis de moviment necessàries per a la reducció de vibracions residuals, es pren q_3 com a coordenada independent q^i . Les coordenades dependents q_1 i q_2 defineixen l'evolució temporal dels angles formats per la manovella i la biela respecte la recta horitzontal que uneix l'articulació fixa de la manovella i l'eix de rotació del pèndol, respectivament. Finalment, θ descriu l'oscil·lació del pèndol respecte la recta vertical que passa pel seu eix de rotació.


Figura 6.2: Modelització del conjunt mecànic

D'acord amb [65], l'equació de moviment del sistema de la Figura 6.2 és:

$$\left(Ml_p^2 + I_G\right) \ddot{\theta} + c\dot{\theta} + Mgl_p \sin \theta = -Ml_p \ddot{q}_3 \cos \theta \quad (6.1)$$

Per a petites oscil·lacions al voltant de $(\theta, \dot{\theta}) = (0, 0)$, l'equació 6.1 es pot linealitzar mitjançant un desenvolupament en sèrie de Taylor:

$$\left(Ml_p^2 + I_G\right) \ddot{\theta} + c\dot{\theta} + Mgl_p \theta = -Ml_p \ddot{q}_3 \quad (6.2)$$

Aquesta es pot expressar en forma canònica segons:

$$\ddot{\theta} + 2\zeta\omega_0\dot{\theta} + \omega_0^2\theta = -\frac{\omega_0^2}{g}\ddot{q}_3 \quad (6.3)$$

amb:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{Mgl_p}{Ml_p^2 + I_G}} \quad (6.4)$$

$$\zeta = \frac{c}{2\sqrt{Mgl_p(Ml_p^2 + I_G)}} \quad (6.5)$$

L'evolució temporal de la coordenada dependent q_1 es comanda mitjançant un sistema de control digital proporcional-integral (PI), emprant un codificador incremental situat en l'eix del motor (realimentació del control). El motor utilitzat en aquest muntatge és d'escombretes amb imants permanents. D'altra banda, la resposta θ del sistema oscil·latori es mesura per mitjà del giròscop situat en el pèndol. La resta de paràmetres del sistema es defineixen en la Taula 6.1.

Paràmetre	Valor
r	0,075 m
l	0,195 m
l_p	0,168 m
M	0,575 kg
I_G	$2,4 \cdot 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$
c	$2,1 \cdot 10^{-3} \text{ (N} \cdot \text{m)/(rad/s)}$
f_d	1,135 Hz
T_d	0,881 s
ζ	0,008

Taula 6.1: Paràmetres principals del muntatge experimental

6.1.2 Sistema de control. Captació de dades

El sistema de control és l'element encarregat de fer que l'actuador segueixi amb fidelitat el senyal de comanda introduït per l'usuari que, en aquest cas, correspon a una llei de moviment del rotor del motor. En la Figura 6.3 es representen esquemàticament els elements que el componen:

1. PC amb sistema operatiu *Windows XP*® amb *Matlab*® i *Simulink*® on, a més a més, s'ha incorporat la utilitat *Real-Time Windows Target*® que permet fer el control a temps real a través de la targeta d'adquisició de dades, ambós de la companyia *The MathWorks*®.
2. Targeta d'adquisició de dades multifunció PCI-6036E de *National Instruments*®, la qual consta de setze entrades analògiques senzilles (o bé vuit diferencials) amb resolució de 16 bits i una freqüència de mostratge de 200 kHz, dues sortides analògiques de 16 bits de resolució amb una freqüència de mostratge de 10 kHz, vuit entrades/sortides digitals i dos comptadors de 24 bits.
3. Amplificador MSA-12-80 per a motors de corrent continu amb escombretes de la marca *Galil*, per a potències fins a 2 kW de pic (pot alimentar voltatges fins a 80 V i 12 A en funcionament continu amb pics fins a 25 A), amb modulació de l'ample de pols (*PWM*) a 36 kHz i amb una resposta dinàmica fins a 2,5 kHz.
4. Font d'alimentació de corrent continu FA-350 de la marca *Blausonic*, estabilitzada i curtcircuitable, amb un voltatge de sortida de 30 V i una intensitat nominal de 5 A.
5. Codificador digital HEDS 5540 de la marca *Agilent* amb 500 polsos per volta, dos senyals en quadratura més un senyal d'índex. La seva resposta dinàmica pot arribar a 100 kHz.
6. Interfície codificador-comptadors per al comptatge digital dels passos del codificador, fet amb un circuit biestable SN74HC74N tipus D, amb una resposta dinàmica de 71 MHz.

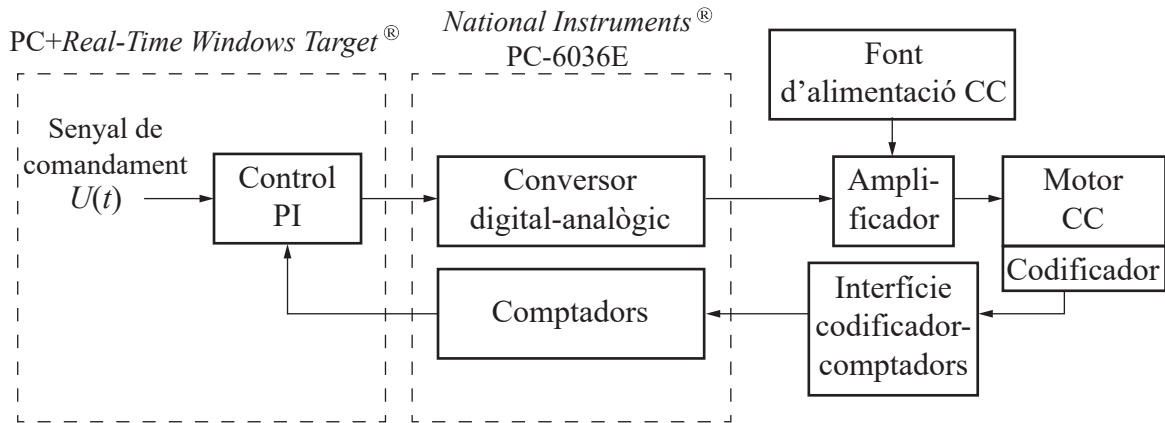


Figura 6.3: Esquema dels elements que formen el sistema de control

D'altra banda, per a la captació de dades, s'utilitza el giròscop ADXRS300 de la marca *Analog Devices*, amb un rang operatiu de $\pm 300^\circ/\text{s}$, sensibilitat de $5\text{mV}/(^\circ/\text{s})$ i freqüència de tall de 40 Hz.

6.2 Assajos experimentals

Un cop definit el muntatge es realitzen els assajos experimentals. El primer valida les hipòtesis descrites en l'apartat 3.3 pel que fa a la capacitat dels actuadors elèctrics convencionals. A continuació, es realitzen quatre sèries experimentals cadascuna de les quals consta de dos assajos. En el primer, es defineix una llei de moviment $\dot{q}^i(t)$ en base a un senyal $u_a(t)$ que compleix les condicions de continuïtat exposades en els capítols 4 i 5. Aquesta primera llei de moviment permet passar per un punt mort però no reduir les vibracions residuals del sistema oscil·latori. Per tal de reduir-les, en el segon assaig, es defineix una nova llei de moviment $q^i(t)$ en base al senyal $u_a(t)$ anterior convolucionat amb un tren d'impulsos en les dues primeres sèries (equació 5.1), i amb un pols multiplicat per una exponencial negativa (equació 5.2) en les dues últimes. Tots els senyals obtinguts a partir del codificador incremental es filtren mitjançant un filtre FIR Gaussià d'ordre 10 i de freqüència de tall de 50 Hz.

6.2.1 Capacitat de l'actuador elèctric

En aquest apartat es comprova la resposta de l'actuador elèctric utilitzat en el muntatge experimental quan s'introdueix un pols de voltatge com a senyal de comanda $U(t)$. Amb l'objectiu d'introduir un pols el més acurat possible, es prescindeix del control, ja que aquest actua com a filtre, i es treballa en configuració de llaç obert (Figura 6.4). Durant l'execució del senyal de comanda es monitoritza la rotació $q_1(t)$ del rotor del motor a través del codificador incremental. Per a obtenir la seva velocitat $\dot{q}_1(t)$ i acceleració $\ddot{q}_1(t)$ angular es deriva el senyal $q_1(t)$ (Figura 6.5).

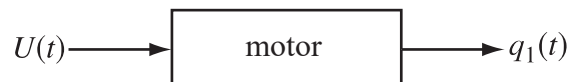


Figura 6.4: Diagrama de blocs del primer experiment

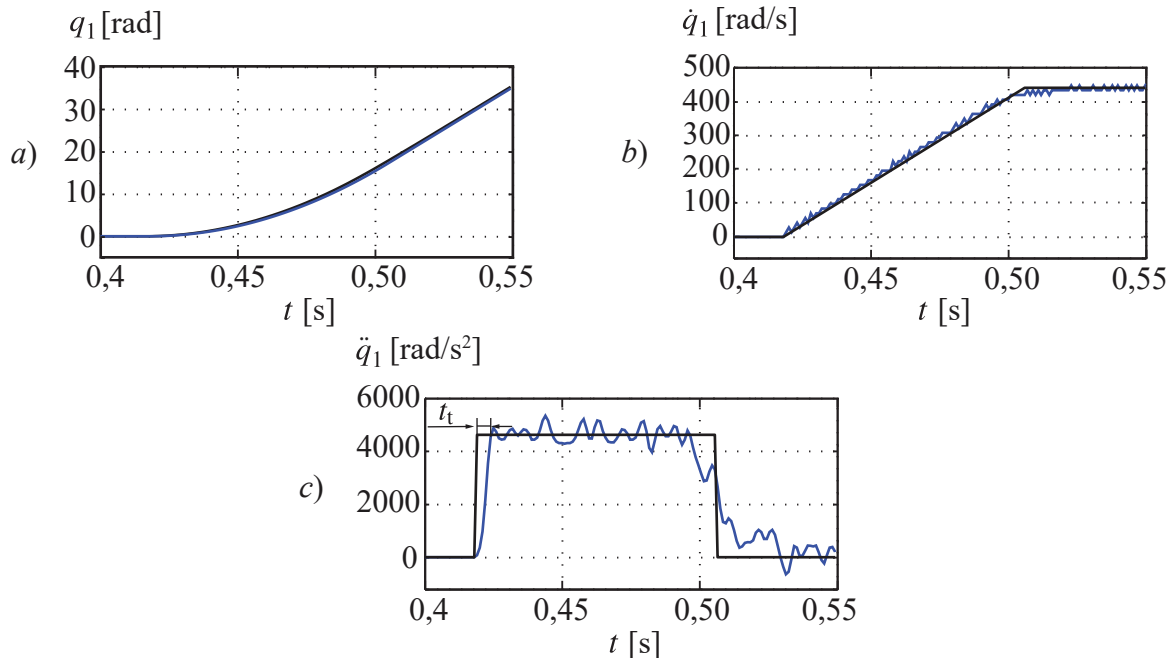


Figura 6.5: Senyal ideal (—) i resposta experimental (—) de l'actuador elèctric a una entrada graó de voltatge

D'acord amb la Figura 6.5, el temps t_t de retard en la resposta del motor respecte al senyal de comanda $U(t)$ és d'aproximadament 5 ms. En conseqüència, i en base al fet que les constants de temps dels sistemes mecànics són, en general, d'un ordre de magnitud superior, es pot donar com a vàlida la hipòtesi que els actuadors elèctrics convencionals són capaços de reproduir un senyal de comanda amb continuïtat C^1 , tal i com s'exposa en l'apartat 3.3.

6.2.2 Sèrie 1

En la primera sèrie es desitja reduir les vibracions residuals del pèndol amb una llei de moviment que passi per una configuració de punt mort del mecanisme pistó-biela-manovella mitjançant un senyal $u_a(t)$ de duració $T_p = 0,35$ s, similar a l'exposada en la Figura 5.6. La corba de Bézier que s'utilitza per al senyal $u_a(t)$ és la que es mostra en l'equació 6.6. Prenent com a coordenades les descrites en la Figura 6.2, en ambdós assajos, el mecanisme parteix d'una configuració en la qual $q_{1i} = 0,785$ rad i finalitza el moviment quan $q_{1f} = -0,785$ rad. En la Figura 6.6 a) es mostra la velocitat angular $\dot{\theta}(t)$ del pèndol quan el senyal de comanda del motor és directament el senyal $u_a(t)$. En aquest cas, el pèndol no deixa d'oscil·lar tot i haver finalitzat la llei de moviment $\dot{q}_1(t)$. Finalment, si es fa la convolució temporal d'aquest senyal amb un tren d'impulsos com el de l'equació 5.3, el pèndol es troba en repòs quan acaba el moviment del mecanisme pistó-biela-manovella (Figura 6.6 b)).

$$u_a(t) = 20b_3 \left(\frac{t}{T_p}\right)^3 \left(1 - \frac{t}{T_p}\right)^3 \quad (6.6)$$

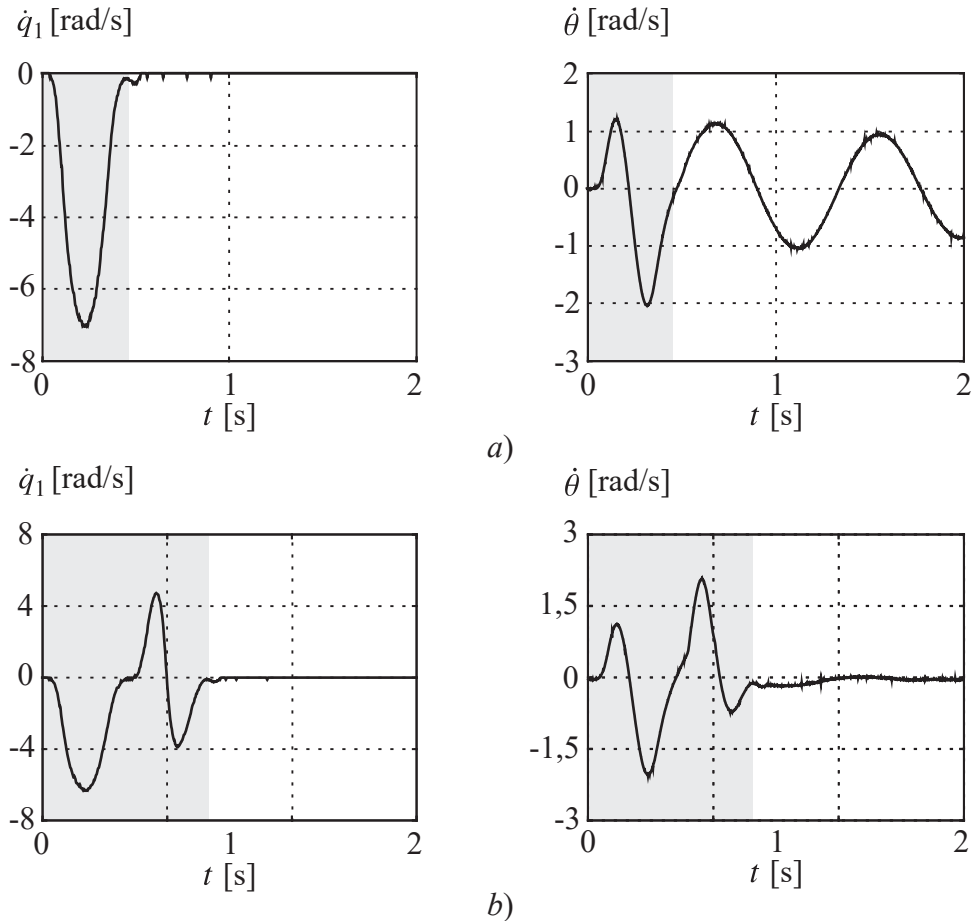


Figura 6.6: Llei de moviment de la manovella $\dot{q}_1(t)$ i velocitat angular del pèndol $\dot{\theta}(t)$ de la primera sèrie experimental quan a) $q_1(t) = u_a(t)$ i b) $q_1(t) = A(u_a(t) \otimes u_b(t))$

6.2.3 Sèrie 2

En aquest cas es pretén reduir les vibracions residuals del sistema oscil·latori mitjançant un pols de duració $T_p = 1,2$ s similar al de la Figura 5.8. En aquesta sèrie es torna a utilitzar l'equació 6.6 com a base de la llei de moviment. El mecanisme parteix d'una configuració en la qual $q_{1i} = 2,793$ rad i finalitza el moviment quan $q_{1f} = -2,793$ rad. En la Figura 6.7 a) es mostra la resposta $\dot{\theta}(t)$ quan el senyal de comanda és directament la corba de Bézier de l'equació 6.6. Tal i com es pot observar, el pèndol segueix oscil·lant tot i que el mecanisme pistó-biela-manovella es trobi en repòs. D'altra banda, si es fa la convolució temporal d'aquest senyal amb un tren d'impulsos, s'observa com el pèndol deixa d'oscil·lar en finalitzar la llei de moviment $\dot{q}_1(t)$ (Figura 6.7 b)).

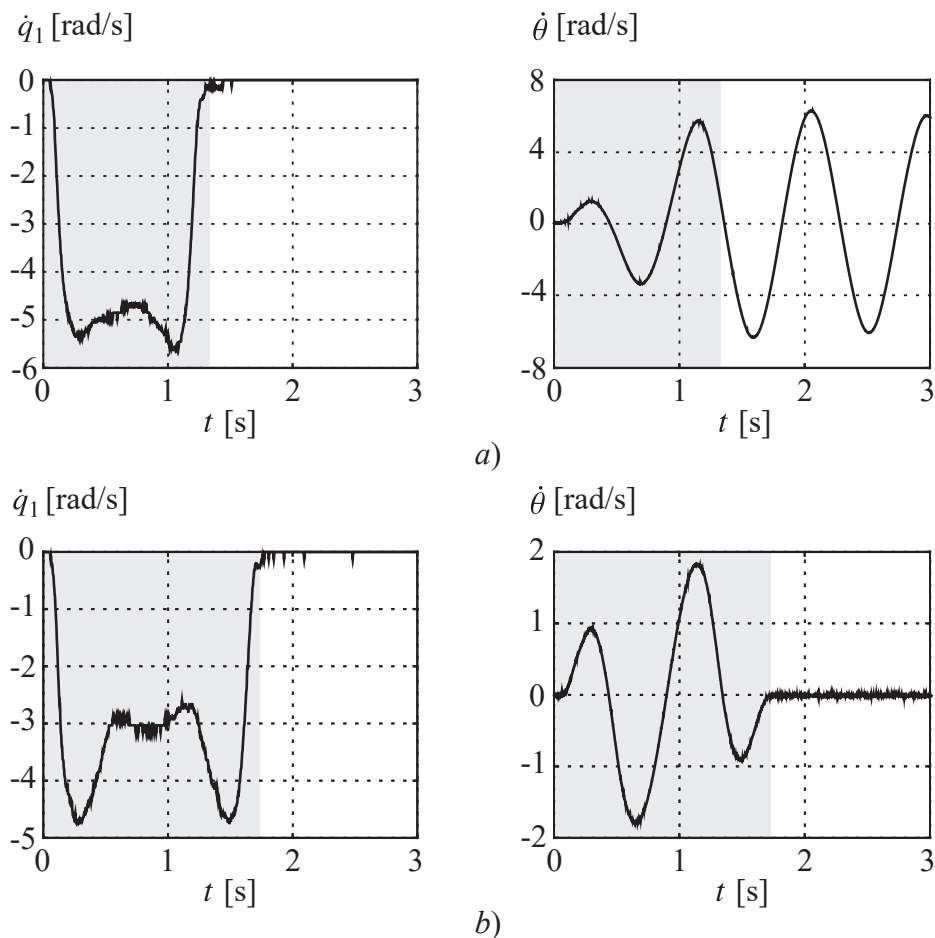


Figura 6.7: Llei de moviment de la manovella $\dot{q}_1(t)$ i velocitat angular del pèndol $\dot{\theta}(t)$ de la segona sèrie experimental quan a) $q_1(t) = u_a(t)$ i b) $q_1(t) = A(u_a(t) \otimes u_b(t))$

6.2.4 Sèrie 3

En aquest assaig es considera un pols de duració $T_p = 0,35$ s. Per tal de reduir les vibracions residuals del pèndol, es decideix fer la convolució temporal de la corba de Bézier definida en l'equació 6.7 amb el pols de l'equació 5.4. El moviment resultant s'aproxima al que es mostra en la Figura 5.10. En aquest cas, l'orientació inicial de la manovella és $q_{1i} = 1,396$ rad. En acabar el moviment, la seva orientació final q_{1f} passa a ser de $-1,396$ rad. De forma anàloga al cas anterior, quan s'utilitza la corba de Bézier de l'equació 6.7 com a llei de moviment de la manovella, s'observa com el pèndol segueix oscil·lant tot i haver acabat el moviment del mecanisme (Figura 6.8 a)). Ara bé, quan es fa la convolució temporal d'aquesta corba amb el pols de l'equació 5.4 i es multiplica per una exponencial negativa (equació 5.2), el pèndol es queda en repòs al mateix temps que el mecanisme acaba el moviment.

$$u_a(t) = 6b_2 \left(\frac{t}{T_p} \right)^2 \left(1 - \frac{t}{T_p} \right)^2 \quad (6.7)$$

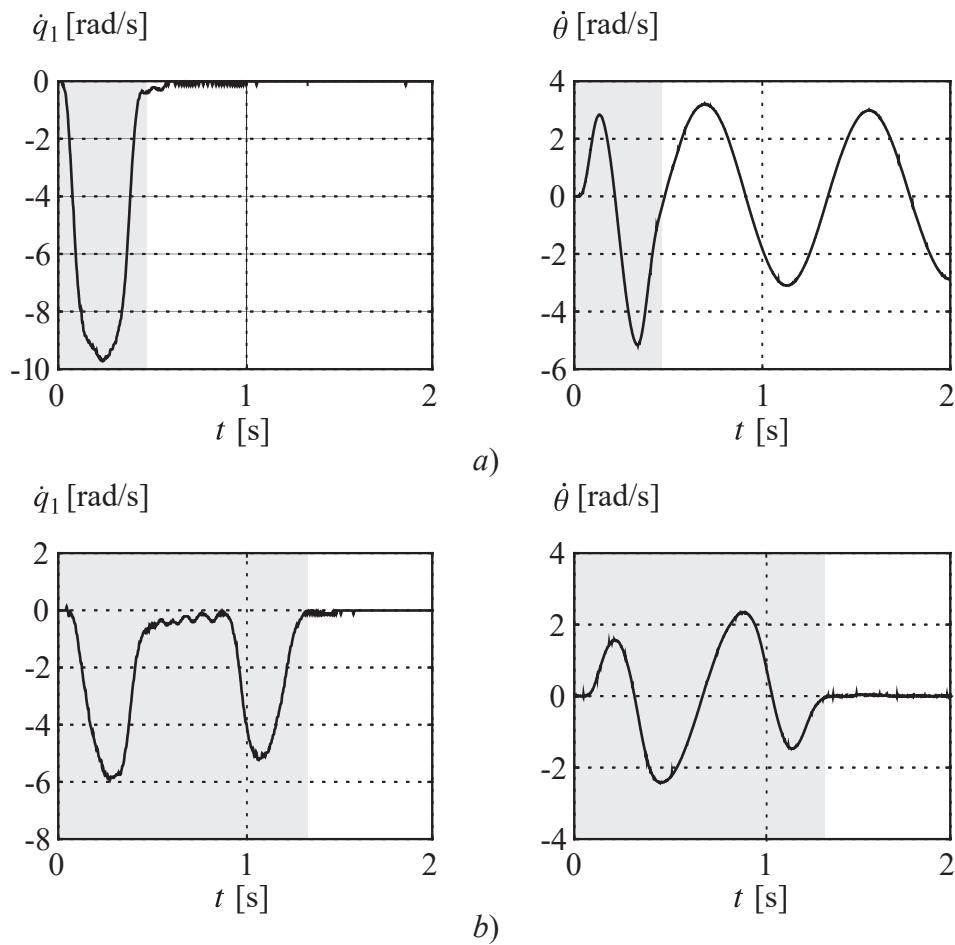


Figura 6.8: Llei de moviment de la manovella $\dot{q}_1(t)$ i velocitat angular del pèndol $\dot{\theta}(t)$ de la tercera sèrie experimental quan a) $q_1(t) = u_a(t)$ i b) $q_1(t) = A(u_a(t) \otimes u_b(t)) e^{-\zeta 2\pi f_0 t}$

6.2.5 Sèrie 4

La duració del pols T_p que es considera en aquest cas és d'1 s. Anàlogament a la sèrie anterior, s'utilitza la corba de Bézier de l'equació 6.7 com a senyal $u_a(t)$. La llei de moviment resultant és similar a la que es mostra en la Figura 5.12. Les orientacions inicial i final del mecanisme són $q_{1i} = 2,967$ rad i $q_{1f} = -2,967$ rad, respectivament. Com succeeix en els casos anteriors, quan la llei de moviment únicament contempla el senyal $u_a(t)$, el pèndol segueix oscil·lant en haver finalitzat la llei de moviment $\dot{q}_1(t)$ (Figura 6.9 a)). D'altra banda, quan es fa la convolució temporal del senyal de l'equació 6.7 amb un pols multiplicat per una exponencial negativa com en l'equació 5.2, la llei de moviment $\dot{q}_1(t)$ resultant redueix les vibracions residuals del pèndol.

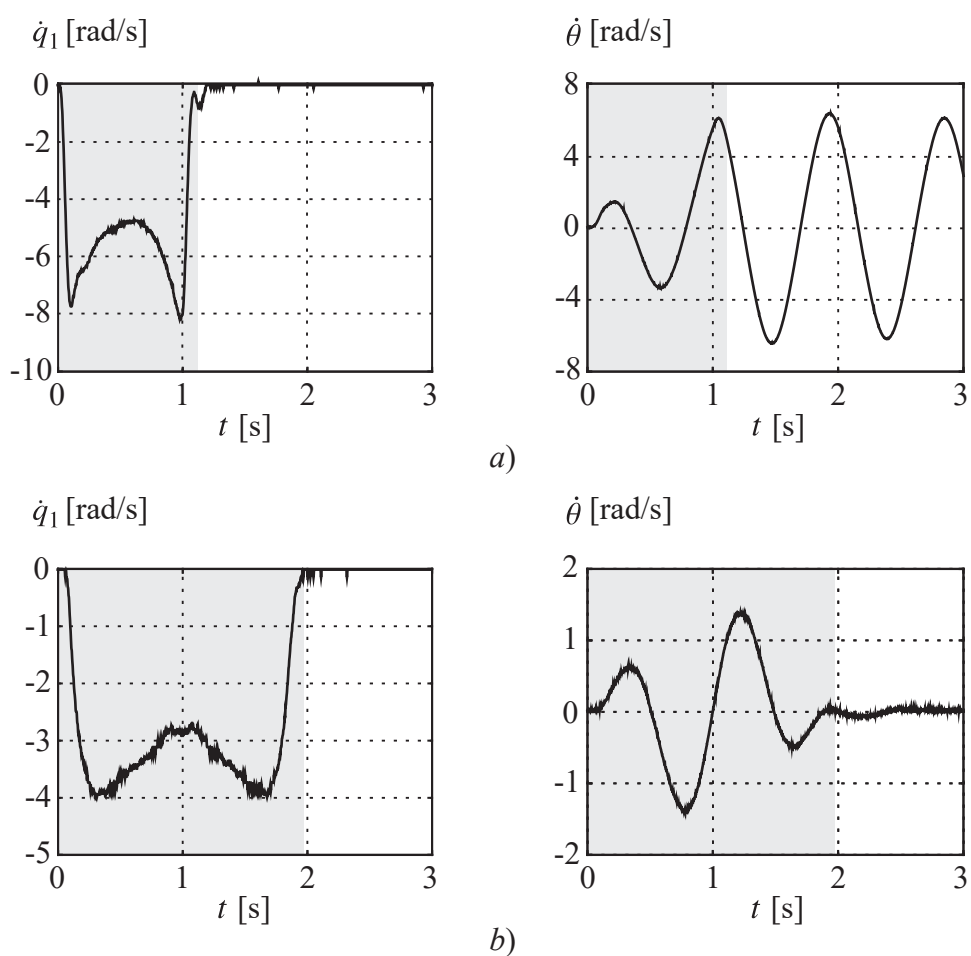


Figura 6.9: Llei de moviment de la manovella $\dot{q}_1(t)$ i velocitat angular del pèndol $\dot{\theta}(t)$ de la quarta sèrie experimental quan a) $q_1(t) = u_a(t)$ i b) $q_1(t) = A(u_a(t) \otimes u_b(t)) e^{-\zeta 2\pi f_0 t}$

Capítol 7

Conclusions i extensions

En aquest capítol es presenten les conclusions més destacades i les aportacions més rellevants que s'han obtingut en realitzar aquesta tesi d'acord amb el seu objectiu principal exposat en el capítol 1. D'altra banda, s'hi inclouen també una sèrie d'extensions i línies de recerca per a futures investigacions.

7.1 Conclusions

En aquest apartat es descriuen les conclusions més importants d'aquest treball estructurades segons els objectius exposats en l'apartat 1.2.

En primer lloc i en base als estudis d'altres autors, s'han proposat unes hipòtesis de treball per a definir la continuïtat C^n mínima que el senyal de comanda ha de complir per a poder ser realitzat, amb una presició raonable, mitjançant un actuador elèctric convencional. Amb aquesta finalitat, s'han estudiat les limitacions causades per les discontinuïtats en posició, velocitat i acceleració. No obstant, no s'ha considerat el rang de freqüències en el qual l'actuador és capaç de respondre, tot i que s'ha fet una breu referència al seu ordre de magnitud. D'acord amb l'estudi dut a terme, s'ha considerat acceptable proposar la hipòtesi que els actuadors elèctrics convencionals poden realitzar qualsevol senyal de comanda que descriu l'evolució temporal d'una coordenada i que sigui, com a mínim, C^1 .

En el capítol 4 s'ha definit el grau de continuïtat C^n mínim que la llei de moviment de la coordenada independent d'un mecanisme d'un grau de llibertat, en presència de punts mort, ha de complir per a poder ser reproduïda mitjançant actuadors elèctrics convencionals quan aquests governen una coordenada diferent (coordenada dependent), tenint en compte la conclusió formulada en el paràgraf anterior. Aquest estudi s'ha dut a terme derivant i aplicant la regla de L'Hôpital al sistema d'equacions geomètriques d'enllaç del

mecanisme per tal de descriure la relació entre la velocitat i l'acceleració de les coordenades dependents i les magnituds cinemàtiques de la coordenada independent. L'anàlisi realitzada determina que, en aquest context, la continuïtat mínima necessària per a l'evolució temporal de la coordenada independent, en una configuració de punt mort, ha de ser C^2 quan l'acceleració de la coordenada independent és diferent de zero, i C^3 quan aquesta és nul·la. Per a aquest últim cas, el valor de la sobreacceleració ha de ser necessàriament també nul.

En l'últim apartat del capítol 4 es verifiquen les conclusions obtingudes pel que fa a la continuïtat C^n mínima necessària de la llei de moviment de la coordenada independent en presència de punts morts. Aquesta validació s'ha realitzat mitjançant simulacions per a dos mecanismes d'un grau de llibertat: un quadrilàter articulat i un pistó-biela-manovella. S'observa com, en ambdós casos, si el mecanisme es troba en una configuració de punt mort amb una acceleració de la coordenada independent nul·la, el valor de la sobreacceleració d'aquesta coordenada també ha de ser nul. Si no es compleix aquesta condició, les acceleracions de la resta de coordenades tendiran a infinit. D'altra banda, si aquest assoleix alguna d'aquestes configuracions amb una acceleració de la coordenada independent diferent de zero, el valor de les velocitats i acceleracions de les altres coordenades és finit.

En el capítol 5 s'han definit lleis de moviment de posició i velocitat genèriques a l'entorn d'un punt mort per a reduir vibracions residuals fent ús de dos dels mètodes existents en la literatura: convolució del senyal de comanda amb un tren d'impulsos o amb un pols multiplicat per una exponencial negativa. En aquest cas s'han utilitzat, com a senyal base, corbes de Bézier no paramètriques. L'anàlisi ha demostrat que per a lleis de moviment de posició, si es fa ús del tren d'impulsos, el senyal base ha de ser C^2 si l'acceleració de la llei de moviment és diferent de zero en el punt mort, o bé C^3 si en passar per aquesta configuració l'acceleració és nul·la. Per a lleis de moviment de velocitat, les condicions de continuïtat del senyal base han de ser C^1 i C^2 , respectivament.

En el cas en què s'empri la tècnica del pols multiplicat per una exponencial negativa com a mètode de reducció de vibracions residuals, i per a lleis de moviment de posició, la corba de Bézier utilitzada com a base de la llei de moviment ha de ser C^1 si el mecanisme passa per un dels seus punts morts amb una acceleració diferent de zero, o bé C^2 si aquesta magnitud cinemàtica té un valor finit no nul en aquesta configuració. En l'estudi realitzat també es demostra com aquests resultats són vàlids independentment de la duració del senyal base en relació amb el període d'oscil·lació del sistema vibratori.

Per tal de validar les conclusions obtingudes en els capítols 4 i 5, s'ha dissenyat i construït un banc d'assaig. Aquest muntatge experimental consta d'un motor de corrent continu d'escombretes i amb imants permanents amb un reductor amb trens epicicloïdals, un mecanisme de pistó-biela-manovella i un pèndol, l'eix de rotació del qual es mou solidari amb el pistó. El pèndol actua com a sistema oscil·latori al qual cal reduir les vibracions residuals.

En primer lloc s'ha validat experimentalment la hipòtesi descrita en l'apartat 3.3, la qual defineix que els actuadors elèctrics convencionals poden reproduir senyals de comanda

amb continuïtat mínima C^1 . A tal efecte, s'ha connectat el motor en buit a una font d'alimentació en configuració de llaç obert i s'ha introduït un pols d'acceleració com a senyal de comanda.

Finalment, s'han realitzat quatre sèries d'experiments. En cadascun d'ells s'han generat dues lleis de moviment. La primera es basa en una corba de Bézier que compleix les condicions de continuïtat necessàries amb la finalitat de poder passar per una configuració de punt mort. La segona, en canvi, parteix de la primera però, a més a més, permet reduir les vibracions residuals del sistema oscil·latori. A tal efecte, s'utilitza la tècnica del tren d'impulsos en els dos primers assajos i el mètode del pols multiplicat per una exponencial negativa en els dos últims. En tots els experiments s'observa com, independentment de la duració de la llei de moviment en relació amb la freqüència d'oscil·lació del pèndol, la segona llei de moviment redueix significativament les vibracions residuals del pèndol una vegada el mecanisme ha arribat a la seva posició final.

7.2 Aportacions

A continuació es descriuen les aportacions que es consideren més rellevants derivades de la investigació desenvolupada.

1. Proposta d'una hipòtesi de treball sobre la continuïtat mínima C^n necessària per tal que un senyal de comanda pugui ser reproduït mitjançant actuadors elèctrics convencionals.
2. Desenvolupament analític i obtenció de la continuïtat mínima C^n necessària de la llei de moviment de la coordenada independent, en presència de punts morts, per tal que el senyal de comanda que governa una coordenada diferent (coordenada dependent), sigui fabricable mitjançant actuadors elèctrics convencionals.
3. Estudi analític de l'efecte resultant sobre la continuïtat C^n d'un senyal transitori quan aquest es convoluciona temporalment amb: *i*) un tren d'impulsos, *ii*) un pols rectangular i *iii*) un pols rectangular multiplicat per una exponencial negativa.
4. Desenvolupament d'un mètode genèric que permet generar lleis de moviment de posició i velocitat a partir de corbes de Bézier per a passar per un punt mort i reduir vibracions residuals al mateix temps.

7.3 Extensions

En aquest apartat es proposen una sèrie d'extensions i línies de recerca per a futures investigacions.

1. Estudi de l'existència d'una indeterminació en el càlcul de les acceleracions de les coordenades dependents en una configuració de punt mort.
2. Ús de senyals base alternatius per tal de generar lleis de moviment com, per exemple, les corbes B-spline.

3. Anàlisi i comparació dels mètodes actuals de reducció de vibracions residuals específics per a sistemes oscil·latoris no lineals.
4. Extensió del mètode proposat en aquesta tesi a sistemes vibratoris amb n graus de llibertat.

Bibliografia

- [1] Aguiló, F., Barguilla, J., Garriga, E. i Miralles, A., *Aprenentatge de Càlcul-I, successions, continuïtat i derivació*, Edicions UPC, ISBN 84-8301-631-1, 2002.
- [2] Aristidou, A. i Lasenby, J., *FABRIK: a fast, iterative solver for the inverse kinematics problem*, Graphical Models, pàgines 243-260, 2011.
- [3] Assal, S.F.M., Watanabe, K. i Izumi, K., *Neural Network-Based Kinematic Inversion of Industrial Redundant Robots Using Cooperative Fuzzy Hint for the Joint Limits Avoidance*, IEEE/ASME Trans. on Mechatronics, Vol. 11, Núm. 5, pàgines 593-603, 2006.
- [4] Balestrino, A., De Maria, G. i Sciavicco, L., *Robust control of robotic manipulators*, Proceedings of the 9th IFAC World Congress, Vol. 5, pàgines 2435-2440, 1984.
- [5] Bath, S. P. i Miu, D. K., *Precise Point-to-Point Positioning Control of Flexible Structures*, ASME Journal of Dynamic Systems, Measurement and Control, Vol. 112, Núm. 4, pàgines 667-674, 1990.
- [6] Bath, S. P., Tanaka, M. i Miu, D. K., *Experiments on Point-to-Point Position Control of Flexible Beam Using Laplace Transform Technique-Part1: Open-Loop*, ASME Journal of Dynamic Systems, Measurement and Control, Vol. 113, pàgines 432-437, 1991.
- [7] Bayo, E., *A Finite Element Approach to Control the End-Point Motion of a Single-Link Flexible Robot*, Journal of Robotic Systems, Vol. 4, Núm. 1, pàgines 63-75, 1987.
- [8] Bayo, E., *Computed Torque for the Position Control of Open-Chain Flexible Robots*, Proceedings of the IEEE International Conference on Robotics and Automation, Vol. 1, pàgines 316-321, 1988.
- [9] Bennett, C., Dunne, J. F., Trimby, S. i Richardson, D., *Engine cylinder pressure reconstruction using crank kinematics and recurrently-trained neural networks*, Mechanical Systems and Signal PROCESSING, Vol. 85, pàgines 126-145, 2017.

- [10] Blackburn, D., Singhose, W., Kitchen, J., Patrangenaru, V., Lawrence, J., Kamoi, T. i Taura, A., *Command Shaping for Nonlinear Crane Dynamics*, Journal of Vibration and Control, Vol. 16, Núm. 4, pàgines 477-501, 2010.
- [11] Bodson, M., *An Adaptive Algorithm for the Tuning of Two Input Shaping Methods*, Automatica, Vol. 34, pàgines 771-776, 1998.
- [12] Brauer, J. R., *Magnetic actuators and sensors*, John Wiley and Sons, 2006.
- [13] Burdisso, R. A., Suarez, L. E., Fuller, C. R., *Adaptive Feedforward Control of Structures Subjected to Seismic Excitations*, First US/China/Japan Workshop on Structural Control, 1992.
- [14] Buss, S. R., *Introduction to Inverse Kinematics with Jacobian Transpose, Pseudoinverse and Damped Least Squares methods*, IEEE Journal of Robotics and Automation, 2004.
- [15] Buss, R. and Kim, Jin-Su, *Selectively damped least squares for inverse kinematics*, Journal of Graphics Tools, Vol. 10, Núm. 3, pàgines 37-49, 2004.
- [16] Cardona, S. i Clos, D., *Teoria de màquines*, Edicions UPC, ISBN 84-8301-367-3, 2000.
- [17] Cardona, S. i Jordi, L., *Vibracions Mecàniques: Excitació arbitrària de sistemes lineals amb coeficients constants*, UPC Departament d'enginyeria mecànica.
- [18] Chiaverini, S., *Estimate of the two smallest singular values of the jacobian matrix: applications to damped least-squares inverse kinematics*, Journal of Robotic Systems, Vol. 10, Núm. 8, pàgines 991-1008, 1993.
- [19] Chiaverini, S., Egeland, O. i Kanestrom, K., *Achieving user-defined accuracy with damped least-squares inverse kinematics*, Advanced Robotics, Vol. 1, pàgines 672-677, 1991.
- [20] Deo, A. S., i Walker, I. D., *Robot Subtask Performance with Singularity Robustness using Optimal Damped Least-Squares*, IEEE International Conference on Robotics Automation, Vol. 3, pàgines 434-441, 1992.
- [21] Farin, G. E., *Curves and Surfaces for CAGD*, Estats Units d'Amèrica: Academic Press Inc., 1997.
- [22] Fuller, C. R., Elliott, S. J. i Nelson, P. A., *Active Control of Vibration*, Regne Unit: Academic Press Limited, 1997.
- [23] Hasan, A. T., Isa, M. A. A., Al-Assadi, H. i Azlan Mat Isa, A., *Neural Networks? Based Inverse Kinematics Solution for Serial Robot Manipulators Passing Through Singularities*, INTECH Open Access Publisher, 2011.
- [24] Hong, Seong-Wook, Park, Sang-Won i Singhose, W. E., *A method of input shaper design for residual vibration reduction using virtual mode concept*, ICSV15 International Congress on Sound and Vibration, pàgines 1712-1719, 2008.

- [25] Hong, Seong-Wook, Seo, Yong-Kyu i Singhose, W. E., *A New Command Shaper Design for Residual Vibration Reduction in Flexible Systems Using Artificial Mode Constraints*, IACSIT International Journal of Engineering and Technology, Vol. 5, Núm. 2, 2013.
- [26] Hyde, J. M. i Seering, W. P., *Using Input Command Pre-Shaping to Suppress Multiple Mode Vibration*, Proceedings of the 1991 IEEE International Conference on Robotics and Automation, pàgines 2604-2609, 1991.
- [27] Jinzenji, A., Sasamoto, T., Aikawa, K., Yoshida, S. i Aruga, K., *Acceleration Feed-forward Control Against Rotational Disturbance in Hard Disk Drives*, IEEE Transactions on Magnetics, Vol. 37, Núm. 2, pàgines 888-893, 2001.
- [28] Kieffer, J., *Manipulator inverse kinematics for untimed end-effector trajectories with ordinary singularities*, International Journal of Robotics Research, Vol. 11, Núm. 3, pàgines 225-237, 1992.
- [29] Kozak, K., Ebert-Uphoff, I. i Singhose, W., *Locally Linearized Dynamic Analysis of Parallel Manipulators and Application of Input Shaping to Reduce Vibrations*, Transactions of the ASME, Vol. 126, pàgines 156-168, 2004.
- [30] Khulief, Y. A., *Vibration supression in rotating beams using active modal control*, Journal of Sound and Vibration, Vol. 242, Núm. 4, pàgines 681-699, 2001.
- [31] Lores, E., Jordi L. i Veciana, J. M., *Feasibility of motion laws for planar one degree of freedom linkage mechanisms at dead point configurations*, Mechanical Systems and Signal Processing, Vol. 98, pàgines 834-851, 2018.
- [32] Maciejewski, A.A. i Klein, C.A., *Numerical Filtering for the Operation of Robotic Manipulators through Kinematically singular configurations*, Journal of Robotic Systems, Vol. 5, Núm. 6, pàgines 527-552, 1988.
- [33] Magee, D. P. i Book, W. J., *Filtering micro-manipulator wrist commands to prevent flexible base motion*, Proceedings of the 1995 American Control Conference, Vol. 1, pàgines 924-928, 1997.
- [34] Meckl, Peter H. i Seering, Warren P., *Minimizing Residual Vibration for Point-to-Point Motion*, Journal of Vibration, Acoustics, Stress and Reliability in Design, Vol. 107, pàgines 378-382, 1985.
- [35] Meckl, Peter H. i Seering, Warren P., *Reducing Residual Vibration is Systems with Uncertain Resonances*, IEEE International Conference on Robotics and Automation, pàgines 73-76, 1987.
- [36] Nakamura, Y. i Hanafusa, H., *Inverse kinematic solution with singularity robustness for robot manipulator control*, ASME Journal of dynamic systems, measurement and control, Vol. 108, pàgines 163-171, 1986.
- [37] Nenchev, D.N., *Tracking Manipulator trajectories with ordinary singularities: a null spacebased Approach*, The International Journal of Robotics Research, Vol. 14, Núm. 4, pàgines 399-404, 1995.

- [38] Nenchev, D.N., Tsumaki, Y., Uchiyama, M., Senft, V. i Hirzinger, G., *Two approaches to singularity consistent motion of nonredundant robotic mechanisms*, IEEE International Conference on Robotics and Automation, Vol. 2, pàgines 1883-1890, 1996.
- [39] Nenchev, D.N. i Uchiyama, M., *Singularity-Consistent path tracking: A null space based approach*, IEEE International Conference on Robotics and Automation, Vol. 3, pàgines 2482-2489, 1995.
- [40] Pechev, A. N., *Inverse kinematics without matrix inversion*, IEEE International Conference on Robotics and Automation, pàgines 2005-2012, 2008.
- [41] Pereira, E., Trapero, J. R., Díaz, I.M. i Feliu, V., *Adaptative input shaping for manoeuvring flexible structures using an algebraic identification technique*, Automatica, Vol. 45, pàgines 1046-1051, 2009.
- [42] Reyes, G., *Tècniques de Diseño Geomètrico Asistido por Ordenador para Mecanismos Leva-Palpador*, Espanya: Tesi Doctoral UPC, 2000.
- [43] Rhim, S. i Book, W. J., *Adaptive Command Shaping Using Adaptive Filter Approach in Time Domain*, Proc. American Control Conference, pàgines 81-85, 1999.
- [44] Rhim, S. i Book, W. J., *Noise effect on adaptive command shaping methods for flexible manipulator control*, IEEE Transaction on Control System Technology, Vol. 9, Núm. 1, pàgines 84-92, 2001.
- [45] Senft, V i Hirzinger, G., *Redundant motions of non-redundant robots ? a new approach to singularity treatment*, IEEE International Conference on Robotics and Automation, pàgines 1553-1558, 1995.
- [46] Siciliano, B. i Egeland, O., *Review of damped least-sauqres inverse kinematics with experiments on an industrial robot manipulator*, IEEE Transactions on Control Systems Technology, Vol. 2, Núm. 2, pàgines 123-134, 1994.
- [47] Singer, Neil C., *Residual Vibration Reduction in Computer Controlled Machines*, Mechanical Engineering, Ph. D. thesis, MIT Artificial Intelliegence Laboratory, Technical Report 1030, 1988.
- [48] Singer, N. C. i Seering, W.P., *Preshaping Command Inputs to Reduce System Vibration*, Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control, Transaction of the ASME, Vol. 112, pàgines 76-82, 1990.
- [49] Singer, N. C. i Seering, W.P., *An Extension of Command Shaping Methods for Controlling Residual Vibration Using Frequency Sampling*, Proc. IEEE International Conference on Robotics and Automation, pàgines 800-805, 1992.
- [50] Singh, T. i Heppler, G. R., *Shaped Input Control of a System With Multiple Modes*, Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control, Vol. 115, Núm. 3, pàgines 341-347, 1993.

- [51] Singhose, W. E., Seering, W. P. i Singer, N. C., *Input Shaping for Vibration Reduction with Specified Insensitivity to Modeling Errors*, Proceedings of the 1996 Japan-USA Symposium on Flexible Automation, pàgines 307-313, 1996.
- [52] Singhose, W. E., Seering, W. P. i Singer, N. C., *Shaping Inputs to Reduce Vibration: A Vector Diagram Approach*, Proc. IEEE Int. Conf. on Robotics and Automation, pàgines 922-927, 1990.
- [53] Singhose, W. E., Seering, W. P. i Singer, N.C., *Design and Implementation of Time-Optimal Negative Input Shapers*, ASME Winter Annual Meeting, 1994.
- [54] Singhose, W. E., Singer, N.C. i Seering, W. P., *Comparison of Command Shaping Methods for Reducing Residual Vibration*, Proceedings of the 1995 European Control Conference, pàgines 1126-1131, 1995.
- [55] Singhose, W. E. i Vaughan, J., *Reducing Vibration by Digital Filtering and Input Shaping*, IEEE Transactions on Control Systems Technology, Vol. 19, Núm. 6, pàgines 1410-1420, 2011.
- [56] Smith, J. Y., Kozak, K. i Singhose, W. E., *Input Shaping for a Simple Nonlinear System*, Proceedings of the American Control Conference, Vol. 1, pàgines 821-826, 2002.
- [57] Smith, O. J. M., *Posicast Control of Damped Oscillatory Systems*, Proceedings of the IRE, Vol. 45, Núm. 9, pàgines 1249-1255, 1957.
- [58] Stergiopoulos, J., Konstantopoulos, G. i Tzes, A., *Experimental Verification of an Adaptive Input Shaping Scheme for Hoisting Cranes*, Proceedings of the 17th Mediterranean Conference on Control and Automation, pàgines 730-735, 2009.
- [59] Stergiopoulos, J. i Tzes, A., *Adaptive Input Shaping for Nonlinear Systems: A Case Study*, Proceedings of the 13th Mediterranean Conference on Control and Automation, pàgines 188-193, 2005.
- [60] Sugihara, T., *Solvability-Unconcerned Inverse Kinematics by the Levenberg-Marquardt Method*, IEEE Transactions on Robotics, Vol. 27, Núm. 5, pàgines 984-991, 2011.
- [61] Tchoń, K. i Duleba, I., *On inverting singular kinematics and geodesic trajectory generation for robot manipulators*, Journal of Intelligent and Robotic Systems, Vol. 8, Núm. 3, pàgines 325-359, 1993.
- [62] Tzes, A. i Yurkovich, S., *An Adaptive Input Shaping Control Scheme for Vibration Suppression in Slewing Flexible Structures*, IEEE Transactions on Control Systems Technology, Vol. 1, pàgines 114-121, 1993.
- [63] Vargas, L. V., Leite, A. C. i Costa, R. R., *Kinematic control of robot manipulators using filtered inverse*, 21st Mediterranean Conference on Control and Automation, pàgines 27-33, 2013.

- [64] Veciana, J. M., Cardona, S. i P. Català, *Modified adaptive input shaping for maneuvering cranes using a feedback MEM gyroscope with null drift*, International Journal of Precision Engineering and Manufacturing, Vol. 16, Núm. 9, pàgines 1911-1917, 2015.
- [65] Veciana, J. M. i Cardona, S., *Estimació d'estats i de paràmetres en sistemes mecànics*, ISBN 978-84-695-7171-2, 2013.
- [66] Veciana, J. M., *Reducció de vibracions residuals en moviments transitoris. Definició de lleis de moviment per mitjà de corbes B-Spline*, Departament de Mecànica, Tesis Doctoral, UdG Universitat de Girona, GI-1626-2007, 2007.
- [67] Veciana, J. M. i Cardona, S., *Residual vibration reduction in low damping systems. Generation of regular piecewise algebraic polynomial inputs*, Journal of Vibroengineering, Vol. 13, Núm. 4, pàgines 739-753, 2011.
- [68] Veciana, J. M. i Cardona, S., *Residual Vibration Reduction in Mechanical Systems: A Time-domain Approach*, International Journal of Precision Engineering and Manufacturing, Vol. 13, Núm. 8, pàgines 1327-1339, 2012.
- [69] Veciana, J. M. i Cardona, S., *Vibracions mecàniques, respostes impulsional i freqüencial de sistemes d'un grau de llibertat vibratori*, ISBN 978-84-693-1715-0, 2010.
- [70] Wampler, C. W., *Manipulator inverse kinematic solutions based on vector formulations and damped least-squares methods*, IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics, Vol. 16, pàgines 93-101, 1986.
- [71] Whitney, D. E., *Resolved motion rate control of manipulators and human prostheses*, IEEE Transactions on man-machine systems, Vol. 10, Núm. 2, pàgines 47-53, 1969.
- [72] Wolovich, W. A. i Elliot, H., *A computational technique for inverse kinematics*, IEEE Conference on Decision and Control, pàgines 1359-1363, 1984.
- [73] Xiang, J., Zhong, C. i Wei, W., *General-weighted least-norm control for redundant manipulators*, IEEE Transactions on Robotics, Vol. 26, Núm. 4, pàgines 660-669, 2010.

Apèndix A

Càlcul del valor del numerador de l'acceleració dependent \ddot{q}^d en un punt mort

En l'apartat 4.1 s'afirma que el numerador de l'equació 4.14 val zero quan el mecanisme es troba en una configuració de punt mort per a la coordenada independent q^i :

$$\text{adj}(\phi_q^d) [\phi_q^i \ddot{q}^i + \dot{\phi}_q^i \dot{q}^i] \Big|_{\text{pm}} = 0 \quad (\text{A.1})$$

Aquesta afirmació es pot demostrar si es separen els termes referents a les coordenades generalitzades dependents i independents de l'equació A.1, d'acord amb les equacions 4.6 i 4.7 i imposant $\dot{q}^i = 0$:

$$\text{adj}(\phi_q^d) [\phi_q^i \ddot{q}^i + \dot{\phi}_q^i \dot{q}^i + \dot{\phi}_q^d \dot{q}^d] \Big|_{\text{pm}} = \text{adj}(\phi_q^d) [\phi_q^i \ddot{q}^i + \dot{\phi}_q^d \dot{q}^d] \Big|_{\text{pm}} \quad (\text{A.2})$$

Si es substitueix ara l'equació 4.18 en l'equació A.2:

$$\text{adj}(\phi_q^d) \left(\phi_q^i \ddot{q}^i - \dot{\phi}_q^d \frac{\text{adj}(\phi_q^d) \phi_q^i \dot{q}^i}{\frac{d}{dt} (\det(\phi_q^d))} \right) \Big|_{\text{pm}} = 0 \quad (\text{A.3})$$

Es reescriu l'equació A.3:

$$\left(\text{adj}(\phi_q^d) \phi_q^i - \frac{\text{adj}(\phi_q^d) \dot{\phi}_q^d \text{adj}(\phi_q^d)}{\frac{d}{dt} (\det(\phi_q^d))} \phi_q^i \right) \Big|_{\text{pm}} = 0 \quad (\text{A.4})$$

D'acord amb la fòrmula de Jacobi, l'equació A.4 es pot reescriure com:

$$\left(\text{adj}(\phi_q^d) \phi_q^i - \frac{\text{adj}(\phi_q^d) \dot{\phi}_q^d \text{adj}(\phi_q^d)}{\text{tr}(\text{adj}(\phi_q^d) \dot{\phi}_q^d)} \phi_q^i \right) \Big|_{\text{pm}} = 0 \quad (\text{A.5})$$

on $\text{tr}(\cdot)$ és la traça de la matriu entre claus. Com que el determinant de la matriu ϕ_q^d val zero quan el mecanisme es troba en un punt mort, almenys una de les columnes d'aquesta matriu és una combinació lineal de les altres $n-1$ equacions. Per tant, en general, la matriu ϕ_q^d es pot escriure com:

$$\phi_q^d \Big|_{\text{pm}} = \left[\begin{array}{cccc} h_{1,1} & h_{1,2} & \cdots & h_{1,n} \\ h_{2,1} & h_{2,2} & \cdots & h_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ h_{n-1,1} & h_{n-1,2} & \cdots & h_{n-1,n} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{array} \right] \Big|_{\text{pm}} \quad (\text{A.6})$$

Així doncs, la matriu adjunta de ϕ_q^d serà:

$$\text{adj}(\phi_q^d) \Big|_{\text{pm}} = \left[\begin{array}{cccc} 0 & \cdots & 0 & a_{1,n} \\ 0 & \cdots & 0 & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_{n,n} \end{array} \right] \Big|_{\text{pm}} \quad (\text{A.7})$$

D'altra banda, les matrius ϕ_q^i i $\dot{\phi}_q^d$ valen, de forma genèrica:

$$\phi_q^i = \left\{ \begin{array}{c} \phi_{q_1}^i \\ \vdots \\ \phi_{q_n}^i \end{array} \right\} \quad (\text{A.8})$$

$$\dot{\phi}_q^d = \left[\begin{array}{ccc} d_{1,1} & \cdots & d_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ d_{n,1} & \cdots & d_{n,n} \end{array} \right] \quad (\text{A.9})$$

Substituint les equacions A.7, A.8 i A.9 a A.5:

$$\left\{ \begin{array}{c} a_{1,n} \phi_{q_n}^i \\ a_{2,n} \phi_{q_n}^i \\ \vdots \\ a_{n,n} \phi_{q_n}^i \end{array} \right\} - \frac{\left[\begin{array}{cccc} 0 & \cdots & 0 & a_{1,n} \sum_{i=1}^n (a_{i,n} d_{n,i}) \\ 0 & \cdots & 0 & a_{2,n} \sum_{i=1}^n (a_{i,n} d_{n,i}) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_{n,n} \sum_{i=1}^n (a_{i,n} d_{n,i}) \end{array} \right]}{\sum_{i=1}^n (a_{i,n} d_{n,i})} \left\{ \begin{array}{c} \phi_{q_1}^i \\ \phi_{q_2}^i \\ \vdots \\ \phi_{q_n}^i \end{array} \right\} \Big|_{\text{pm}} = 0 \quad (\text{A.10})$$

Simplificant l'equació A.10:

$$\left. \begin{pmatrix} a_{1,n}\phi_{q_n}^i \\ a_{2,n}\phi_{q_n}^i \\ \vdots \\ a_{n,n}\phi_{q_n}^i \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a_{1,n}\phi_{q_n}^i \\ a_{2,n}\phi_{q_n}^i \\ \vdots \\ a_{n,n}\phi_{q_n}^i \end{pmatrix} \right|_{\text{pm}} = 0 \quad (\text{A.11})$$

En conseqüència, el numerador de l'equació 4.14 val zero quan el mecanisme es troba en una configuració de punt mort.

Apèndix B

Càlcul de la primera i segona derivada de la matriu ϕ_q^d respecte al temps en una configuració de punt mort

Durant el desenvolupament de l'estudi cinemàtic d'acceleracions (apartat 4.2.2), es necessita la derivada segona de la matriu ϕ_q^d respecte al temps en funció de les coordenades generalitzades q^d i q^i i les seves derivades temporals. Aquesta relació es pot trobar derivant l'equació 4.6 respecte al temps:

$$\dot{\phi}_q^d = \frac{d}{dt} \{\phi_q^d\} = \begin{bmatrix} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \phi_1(\mathbf{q})}{\partial q_1} \right) & \cdots & \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \phi_1(\mathbf{q})}{\partial q_n} \right) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \phi_n(\mathbf{q})}{\partial q_1} \right) & \cdots & \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \phi_n(\mathbf{q})}{\partial q_n} \right) \end{bmatrix} \quad (\text{B.1})$$

D'acord amb la regla de la cadena:

$$\dot{\phi}_q^d = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial \mathbf{q}} \left(\frac{\partial \phi_1(\mathbf{q})}{\partial q_1} \right) \dot{\mathbf{q}} & \cdots & \frac{\partial}{\partial \mathbf{q}} \left(\frac{\partial \phi_1(\mathbf{q})}{\partial q_n} \right) \dot{\mathbf{q}} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial}{\partial \mathbf{q}} \left(\frac{\partial \phi_n(\mathbf{q})}{\partial q_1} \right) \dot{\mathbf{q}} & \cdots & \frac{\partial}{\partial \mathbf{q}} \left(\frac{\partial \phi_n(\mathbf{q})}{\partial q_n} \right) \dot{\mathbf{q}} \end{bmatrix} \quad (\text{B.2})$$

Si es separen ara els termes relacionats amb les coordenades dependents i independents:

$$\dot{\phi}_q^d = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial \mathbf{q}^d} \left(\frac{\partial \phi_1(\mathbf{q})}{\partial q_1} \right) \dot{q}^d & \cdots & \frac{\partial}{\partial \mathbf{q}^d} \left(\frac{\partial \phi_1(\mathbf{q})}{\partial q_n} \right) \dot{q}^d \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial}{\partial \mathbf{q}^d} \left(\frac{\partial \phi_n(\mathbf{q})}{\partial q_1} \right) \dot{q}^d & \cdots & \frac{\partial}{\partial \mathbf{q}^d} \left(\frac{\partial \phi_n(\mathbf{q})}{\partial q_n} \right) \dot{q}^d \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial q^i} \left(\frac{\partial \phi_1(\mathbf{q})}{\partial q_1} \right) \dot{q}^i & \cdots & \frac{\partial}{\partial q^i} \left(\frac{\partial \phi_1(\mathbf{q})}{\partial q_n} \right) \dot{q}^i \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial}{\partial q^i} \left(\frac{\partial \phi_n(\mathbf{q})}{\partial q_1} \right) \dot{q}^i & \cdots & \frac{\partial}{\partial q^i} \left(\frac{\partial \phi_n(\mathbf{q})}{\partial q_n} \right) \dot{q}^i \end{bmatrix} \quad (\text{B.3})$$

Es rescriu la matriu $\dot{\phi}_q^d$:

$$\dot{\phi}_q^d = \begin{bmatrix} \left\{ \frac{\partial}{\partial q_1} \left(\frac{\partial \phi_1(\mathbf{q})}{\partial q_1} \right) \cdots \frac{\partial}{\partial q_n} \left(\frac{\partial \phi_1(\mathbf{q})}{\partial q_1} \right) \right\} \dot{q}^d & \cdots & \left\{ \frac{\partial}{\partial q_1} \left(\frac{\partial \phi_1(\mathbf{q})}{\partial q_n} \right) \cdots \frac{\partial}{\partial q_n} \left(\frac{\partial \phi_1(\mathbf{q})}{\partial q_n} \right) \right\} \dot{q}^d \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \left\{ \frac{\partial}{\partial q_1} \left(\frac{\partial \phi_n(\mathbf{q})}{\partial q_1} \right) \cdots \frac{\partial}{\partial q_n} \left(\frac{\partial \phi_n(\mathbf{q})}{\partial q_1} \right) \right\} \dot{q}^d & \cdots & \left\{ \frac{\partial}{\partial q_1} \left(\frac{\partial \phi_n(\mathbf{q})}{\partial q_n} \right) \cdots \frac{\partial}{\partial q_n} \left(\frac{\partial \phi_n(\mathbf{q})}{\partial q_n} \right) \right\} \dot{q}^d \end{bmatrix} + \frac{\partial}{\partial q^i} (\phi_q^d) \dot{q}^i \quad (\text{B.4})$$

Reagrupant termes:

$$\dot{\phi}_q^d = \frac{\partial}{\partial q_1} (\phi_q^d) \dot{q}_1 + \cdots + \frac{\partial}{\partial q_n} (\phi_q^d) \dot{q}_n + \frac{\partial}{\partial q^i} (\phi_q^d) \dot{q}^i \quad (\text{B.5})$$

Per tant:

$$\dot{\phi}_q^d = \sum_{k=1}^n \left(\frac{\partial}{\partial q_k} (\phi_q^d) \dot{q}_k \right) + \frac{\partial}{\partial q^i} (\phi_q^d) \dot{q}^i \quad (\text{B.6})$$

Si s'imposa $\dot{q}^i = 0$ en la configuració de punt mort:

$$\dot{\phi}_q^d \Big|_{\text{pm}} = \sum_{k=1}^n \left(\frac{\partial}{\partial q_k} (\phi_q^d) \dot{q}_k \right) \Big|_{\text{pm}} \quad (\text{B.7})$$

Per al càlcul de la segona derivada de la matriu ϕ_q^d respecte al temps, es deriva l'equació B.6:

$$\ddot{\phi}_q^d = \sum_{l=1}^n \left(\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial}{\partial q_l} (\phi_q^d) \right) \dot{q}_l + \frac{\partial}{\partial q_l} (\phi_q^d) \ddot{q}_l \right) + \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial}{\partial q^i} (\phi_q^d) \right) \dot{q}^i + \frac{\partial}{\partial q^i} (\phi_q^d) \ddot{q}^i \quad (\text{B.8})$$

El terme $d/dt \left(\partial/\partial q_l (\phi_q^d) \right)$ es pot substituir per l'equació B.7, únicament reemplaçant la matriu ϕ_q^d per l'expressió $\partial/\partial q_l (\phi_q^d)$. Si es considera que $\dot{q}^i = 0$, l'expressió final per al càlcul de la matriu $\ddot{\phi}_q^d$ en un punt mort és:

Apèndix B. Càlcul de la primera i segona derivada de la matriu ϕ_q^d respecte al temps en una configuració de punt mort

$$\ddot{\phi}_q^d \Big|_{\text{pm}} = \sum_{l=1}^n \left(\sum_{k=1}^n \left(\frac{\partial}{\partial q_k} \left(\frac{\partial}{\partial q_l} (\phi_q^d) \right) \dot{q}_k \right) \dot{q}_l + \frac{\partial}{\partial q_l} (\phi_q^d) \ddot{q}_l \right) + \frac{\partial}{\partial q^i} (\phi_q^d) \ddot{q}^i \Big|_{\text{pm}} \quad (\text{B.9})$$

