

UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA

*Tesis Doctoral*

**Desarrollo de un modelo numérico 3D en  
elementos finitos para las ecuaciones de  
Navier-Stokes. Aplicaciones  
oceanográficas.**

Manuel Augusto Maidana

Co-directores:

Dr. Manuel Espino Infantes<sup>1</sup>      Dr. Jorge Blasco Lorente<sup>2</sup>

©2007

<sup>1</sup>Dept. d'Enginyeria Hidràulica, Marítima i Ambiental

<sup>2</sup>Dept. de Matemàtica Aplicada I

Nombre y Apellido: Manuel Augusto Maidana  
Dirección: Laboratori d'Enginyeria Marítima  
Edifici D-1, Campus Nord, Despatx 103,  
c/ Jordi Girona 1-3,  
08034 Barcelona, Espanya  
Teléfono: +34 93 401 73 92  
E-mail: [augusto.maidana@upc.edu](mailto:augusto.maidana@upc.edu)  
Web: <http://www.upc.es/ciirc>

*“A Lidia, mis padres y hermanos”*





# Índice

<b>Resumen</b>	<b>vi</b>
<b>Introducción</b>	<b>vi</b>
<b>Lista de símbolos</b>	<b>vi</b>
<b>Lista de figuras</b>	<b>xxiii</b>
<b>Lista de tablas</b>	<b>xxvii</b>
<b>1 Ecuaciones de Gobierno</b>	<b>1</b>
1.1 Conservación de la masa e incompresibilidad . . . . .	1
1.2 Conservación de la cantidad de movimiento . . . . .	3
1.2.1 Un sistema de referencia rotante . . . . .	4
1.2.2 Parámetro de Coriolis . . . . .	5
1.2.3 Sistema de coordenadas y plano de referencia . . . . .	7
1.3 La aproximación de Boussinesq . . . . .	7
1.4 Fricción molecular . . . . .	9
1.5 Tensiones turbulentas de Reynolds . . . . .	10
1.6 Coeficientes de difusión horizontal y vertical . . . . .	13
1.7 Superficie libre y gradientes de densidad . . . . .	15
1.8 Ecuaciones a resolver . . . . .	17
1.9 Condiciones de contorno e iniciales . . . . .	18
1.10 Formulación débil . . . . .	20
<b>2 Aproximación numérica</b>	<b>23</b>
2.1 Integración temporal . . . . .	23
2.2 Discretización espacial . . . . .	26
2.3 Estabilización de la Presión . . . . .	29
2.4 Forma matricial de las ecuaciones . . . . .	31
2.5 Esquema de resolución numérica . . . . .	36
<b>3 Validación y aplicación</b>	<b>39</b>
3.1 Flujo en una cavidad cúbica . . . . .	39
3.2 Flujo sobre un escalón 3D . . . . .	48
3.3 Flujo de Taylor-Couette . . . . .	51
3.4 Vórtice geostrófico . . . . .	56
3.5 Fluido estratificado . . . . .	60
3.6 Canal convergente con fondo liso . . . . .	64

## Índice

3.7	Canal con fondo rugoso . . . . .	66
3.8	Espiral de Ekman . . . . .	68
3.9	Delta del río Ebro . . . . .	73
<b>4</b>	<b>Superficie libre</b>	<b>81</b>
4.1	Sobre-elevación de la superficie libre debida al viento . . . . .	82
4.2	Agitación en un tanque confinado . . . . .	86
<b>5</b>	<b>Epílogo</b>	<b>91</b>
5.1	Conclusiones . . . . .	91
5.2	Futuras líneas de trabajo . . . . .	93
	<b>Bibliografía</b>	<b>95</b>
	<b>Apéndices</b>	<b>105</b>

# Resumen

En esta tesis se ha desarrollado y validado un modelo tridimensional de circulación costera en elementos finitos capaz de simular una región limitada del océano. La escala de longitud de las aplicaciones pueden ser del orden del ancho de la plataforma continental o menores y la escala de tiempo entre el período de las ondas de las mareas y de las ondas debidas al viento.

La formulación del modelo, denominado HELIKE, está basada en las tres componentes de la ecuación de Navier-Stokes (no-hidrostáticas) y tiene en cuenta las dos componentes de la aceleración de Coriolis, (componentes normal y tangencial a la superficie terrestre), gradientes de densidad, turbulencia (valores constantes o modelos de turbulencia como Smagorinsky, Munk-Anderson o Pacanowski-Philander), fricción con fondo, tensión de viento y superficie libre. Pudiéndose también utilizar el modelo en fondos con batimetrías irregulares (fondo no-horizontal).

Los modelos tridimensionales no-hidrostáticos como el desarrollado en esta tesis están bien planteados para dominios con contorno abierto. Esto es muy importante en el modelado de mesoescala donde el modelado de la pequeña, pero relevante, velocidad vertical es importante y los contornos abiertos son inevitables. La formulación no-hidrostática tiene fundamentalmente importancia cuando la escala horizontal del movimiento se hace comparable con su escala vertical y no se pueda desprestigiar la velocidad vertical como *p. ej.* se da el caso en la circulación sobre fondos abruptos, convección en el océano abierto, *etc.*

El uso combinado de una discretización espacial por el método de los elementos finitos y el uso de mallas no-estructuradas proveen al modelo una gran flexibilidad para adaptarse a la complicada geometría de la línea de costa y del fondo marino. Además de la posibilidad de realizar refinamientos de la malla sobre áreas de mayor interés y aplicar las condiciones de contorno apropiadas para cada caso.

La técnica de estabilización de la presión (PGP) empleada para estabilizar la solución en elementos finitos permite que formulaciones mixtas como las ecuaciones de Navier-Stokes utilicen igual interpolación para ambas variables velocidad-presión y que cumplan con la condición de Ladyzhenskaya-Babuska-Brezzi (LBB), también conocida como “*inf-sup*”.

El método de integración temporal implícito empleado para resolver las ecuaciones de Navier-Stokes no-hidrostáticas mediante un esquema monolítico, en concreto mediante el método implícito de Euler hacia atrás, permite alcanzar pasos de tiempo relativamente grandes al eliminar la restricción de estabilidad conocida como el criterio de Courant-Friedrichs-Levy (CFL).

## Resumen

Se utiliza la ecuación cinemática para calcular la elevación de la superficie libre, sin recurrir al promediado vertical y con un coste computacional relativamente pequeño.

Los resultados numéricos presentados en esta tesis demuestran la aplicabilidad, precisión, robustez y eficiencia del modelo para problemas tanto de ingeniería de costas como de oceanografía física.

# Abstract

In this thesis a finite element model was developed, named HELIKE, for the numerical simulation of three-dimensional, turbulent, non-hydrostatic, free-surface flows like those arising in the study of the motion of water in coastal regions. The kinematic free-surface equation is used to compute the surface elevation, without resorting to vertical averages. The model developed here incorporates surface wind stress, bottom friction, Coriolis acceleration, the baroclinic term to take in account the density gradients, and it is applicable to irregular bottom topographies. A pressure stabilization technique is employed to stabilize the finite element solution. Numerical results confirm the accuracy, robustness and applicability of the proposed method.



# Introducción

La rotación terrestre y el viento, entre otros factores impulsores, introducen en el océano estratificado una enorme cantidad de energía cinética que se manifiesta en los movimientos de mesoescala (10 – 100 km de longitud), en forma de giros y sinuosas corrientes. Los flujos tridimensionales asociados a estos movimientos varían con el tiempo y están caracterizados por velocidades horizontales del orden de  $U = 0,1 - 1$  m/s, una gran diferencia entre las escalas de longitud horizontal y vertical  $L \gg D$  y números de Rossby entre  $R_0 = \frac{U}{Lf} = 10^{-1} - 10^{-2}$ , donde  $f$  es el parámetro de Coriolis (Marshall *et al.*, 1997).

El interés de esta tesis se halla en simular dichos movimientos para una región limitada del océano, considerando importante resolver los flujos costeros de pequeña escala para problemas que revisten un gran interés práctico, dentro de las diferentes disciplinas de la ingeniería civil, como son la ingeniería oceanográfica, de costas, portuaria, medioambiental, *etc.* Con ese objetivo se planteó el desarrollo de un modelo oceánico costero que pudiera ser aplicado a la resolución de problemas hidrodinámicos, con una escala de longitud típica del orden del ancho de la plataforma continental o más corta (hasta los centenares de metros), y la escala de tiempo entre el período de las ondas de las mareas y de las ondas debidas al viento (décimas de minuto). En una etapa previa a la formulación del modelo, se deben realizar varias elecciones fundamentales, entre ellas la selección de los procesos físicos particulares que se incluirán en la formulación (ver *p. ej.* Arcilla, 1989), la elección de la forma de las ecuaciones de gobierno, la elección de la discretización en tiempo y espacio, *etc.* Con ese objetivo, a continuación se introducirán algunas de las consideraciones de diseños más importantes en el desarrollo del modelo.

Los movimientos turbulentos del océano contienen escalas energéticamente activas que se extienden desde la escala de la circulación general hacia abajo, del orden de 0,01 – 10 km en horizontal y alguna decenas de metros en vertical. Entre estas escalas ocurren interacciones importantes, como así también entre la gran cantidad de fenómenos físicos que estas contienen. Todo esto hace que exista un gran número de modelos numéricos diferentes ajustados para cada tipo de problema específico y a una determinada escala. La creación de un modelo general es muy complejo y constituye un desafío formidable, debido a la cantidad de factores a tener en cuenta en su desarrollo, como son *p. ej.* la estabilidad, precisión y eficiencia, siendo esta última probablemente una de las más importantes. Sin embargo, hasta el presente todos estos factores no pueden ser optimizados simultáneamente por lo que continúa la búsqueda de métodos nuevos.

Por eficiencia y simplicidad, los modelos numéricos de circulación general del océano, conocidos por sus siglas en inglés como OGCM, los modelos oceánicos utilizados para el estudio del clima y los modelos costeros están basados en aproximaciones de las ecuaciones de Navier-Stokes incompresibles. Generalmente, los dos primeros modelos utilizan las ecuaciones primitivas hidrostáticas (3D en velocidad y 2D en presiones), para el modelado tridimensional de gran escala de la dinámica de los océanos (ver *p. ej.* Iskandarani *et al.*, 2003; Danilov *et al.*, 2004; Blumberg y Mellor, 1987; Oey y Mellor, 1993; Haidvogel *et al.*, 2000). Los modelos costeros sin embargo, utilizan las ecuaciones bidimensionales de aguas someras conocidas como (2D-SWE), para el estudio de estuarios bien mezclados y poco profundos, zonas costeras y lagos (ver *p. ej.* Backhaus, 1985; Zienkiewicz y Ortíz, 1995; Espino *et al.*, 1998; Macías *et al.*, 1999; Maidana *et al.*, 2002; Espino *et al.*, 2007; Dawson y Proft, 2004; Ortíz *et al.*, 2006). En ambos casos se utiliza la hipótesis hidrostática y por consiguiente la ecuación de movimiento vertical se reduce al balance hidrostático. En los modelos tridimensionales hidrostáticos, la velocidad vertical se obtiene a partir de la ecuación de continuidad.

La circulación global del océano y sus grandes giros debidos al viento ( $L \sim 1000$  km) son descritas en detalle y con bastante precisión por estas dos aproximaciones, como lo son también los vórtices geostroáficos y los anillos asociados con sus inestabilidades hidrodinámicas ( $L \sim 10 - 100$  km). Sin embargo, entre los 10 y 0,01 km, cuando la escala horizontal del movimiento se hace comparable con su escala vertical  $L \approx D$ , ya no se puede despreciar la velocidad vertical y por lo tanto se ha de tener en cuenta también la componente no-hidrostática de la presión. Hay muchos fenómenos importantes en el océano, *p. ej.* flujos sobre fondos abruptos, ondas de corto período, turbulencia inducida por viento o flotación en la capa superficial bien mezclada del océano (en escalas  $< 1$  km), fuertes gradientes de densidad, convección en el océano abierto (Jones y Marshall, 1993), *etc.*, los cuales son fundamentalmente no-hidrostáticos. Esto es computacionalmente costoso, lo cual a menudo disuade a los modeladores de utilizar las ecuaciones no-hidrostáticas, pero cuando los efectos no-hidrostáticos son importantes, estos no pueden ser estudiados utilizando los más económicos, computacionalmente hablando, modelos hidrostáticos.

Con este propósito y gracias al acelerado incremento de la potencia de cálculo de los ordenadores, en la última década se han desarrollado modelos 3D no-hidrostáticos a partir de las ecuaciones de Navier-Stokes incompresibles, teniendo en cuenta las tres componentes de las ecuaciones de movimiento e integrando la ecuación de continuidad a lo largo de la dirección vertical, conservando así el campo de velocidades tridimensional. A esta última aproximación, una extensión de los modelos 2D, se la denomina modelo tridimensional de las ecuaciones de aguas someras (3D-SWE).

Los modelos no-hidrostáticos, requieren que se calcule el campo de presiones tridimensional utilizando algún procedimiento, generalmente iterativo. Para ello, algunos modelos numéricos introdujeron la presión no-hidrostática, calculando una presión relacionada con la ecuación de Poisson. Las técnicas numéricas empleadas en la resolución de la ecuación de Poisson para la presión se conocen como la familia de métodos SIMPLE (métodos semi-implícitos que vinculan con la ecuación de la presión): SIMPLE (Patankar y Spalding, 1972); SIMPLER, (Patankar, 1980); SIMPLEC, (van Doormaal y Raithby, 1984) o los métodos de pasos fraccionados (Casulli, 1999; Stansby y Zhou, 1998; Stansby, 1997; Zang



*et al.*, 1994). Los métodos SIMPLE necesitan múltiples iteraciones por cada paso de tiempo hasta que el campo de presiones estimado converja. Habitualmente los métodos de paso fraccionado se emplean para separar las presiones en sus componentes hidrostática y no-hidrostática, para luego resolverlas secuencialmente. En el primer paso se desprecia las contribuciones no-hidrostáticas de la presión y la velocidad, mientras que en el segundo paso, las velocidades son corregidas al incluir los términos de presión no-hidrostáticos. Puesto que estas aproximaciones descomponen la solución, pueden introducir errores por descomposición. Stelling y Zijlema (2003), introdujeron un método nuevo basado en la corrección de la presión, el cual no introduce un error de descomposición. Una alternativa diferente que se sigue en esta tesis y que también fue empleada por Labeur y Pietrzak (2005), resuelve las ecuaciones no-hidrostáticas completas mediante un esquema monolítico, en concreto mediante el método implícito de Euler hacia atrás. Los métodos implícitos permiten alcanzar pasos de tiempo relativamente grandes al eliminar la restricción de estabilidad conocida como el criterio de Courant-Friedrichs-Levy (CFL), mejorando así la precisión y eficiencia del modelo al evitar una gran cantidad de iteraciones en el proceso de avance temporal asociado con un gasto computacional excesivo.

A diferencia de los modelos tridimensionales hidrostáticos, los modelos tridimensionales no-hidrostáticos cuentan con las tres componentes de la ecuación de movimiento y están bien planteadas para dominios con contorno abiertos (Mahadevan *et al.*, 1996). Estos atributos son importantes en el modelado de mesoescala donde el modelado de la pequeña pero relevante velocidad vertical es importante, y los contornos abiertos son inevitables.

El primer modelo de circulación general del océano (OGCM) fue creado por Bryan (1969). La discretización espacial de este modelo fue basada sobre una malla estructurada y un esquema en diferencias finitas. Desde entonces, han sido muchos los avances al primer modelo de Bryan, pero la gran mayoría de los modelos actuales, aún están basados en el método de las diferencias finitas. Esto se debe principalmente a la simplicidad inherente a las mallas estructuradas (Haidvogel y Beckmann, 1999). Recientemente, se ha desarrollado una menos tradicional y más avanzada aproximación para su utilización en los modelos de circulación general y costeros (ver *p. ej.* Le Provost *et al.*, 1994; Myers y Weaver, 1995; Lynch *et al.*, 1996; Maidana *et al.*, 2002; Espino *et al.*, 2007). Estos modelos numéricos, están basados en el método de los elementos finitos. Este método, usado principalmente en ingeniería, puede ser una interesante alternativa al método de las diferencias finitas.

El método de los elementos finitos se asienta sobre un marco matemáticamente riguroso, basado en una formulación en residuos ponderados, lo cual permite una precisa definición de nociones tales como el error, rango de convergencia y condiciones de estabilidad. Las condiciones de contorno de tipo Neumann son fácilmente aplicadas debido a que estas entran directamente en la formulación débil del problema, sin ninguna otra imposición o aproximación (Myers y Weaver, 1995).

Un tema crítico para aplicar el método de los elementos finitos en oceanografía es encontrar la combinación apropiada del tipo de elemento finito para la velocidad y presión. Esta combinación debería representar el flujo geofísico correctamente y no permitir la existencia de modos computacionales espúreos. Debido al carácter mixto de los problemas de flujo incompresible, la condición de incompresibilidad impone ciertas restricciones en la elección de los espacios

de aproximación de la velocidad y la presión. Para obtener una solución numéricamente estable y convergente, se han desarrollado combinaciones de elementos velocidad-presión cuyos espacios verifican la condición “*inf-sup*” de Ladyzhenskaya-Babuška-Brezzi (ver Brezzi y Fortin, 1991). Sin embargo, se observó que las formulaciones estabilizadas resultan más eficientes que las combinaciones de elementos estables (Norburn y Silvester, 1998). En estas formulaciones se introducen términos adicionales en el problema discreto, deducidos de maneras muy diversas, que aumentan la estabilidad de la solución numérica. La técnica de estabilización de la presión adoptada en esta tesis está basada en una proyección del gradiente de la presión (PGP) (Codina y Blasco, 1997, 2000*a,b*; Blasco y Codina, 2001).

En cuanto a la cuestión fundamental de satisfacer la continuidad de la masa en forma local, a trozos y/o global, esta elección se verá reflejada con el tipo específico de elemento seleccionado. Habitualmente el método de elementos finitos conserva la masa globalmente, localmente lo hace utilizando el método de residuos ponderados para cada nodo. Esto no es un problema siempre que los métodos se usen consistentemente sobre todas las ecuaciones.

En algún momento del pasado, la elección del método de discretización (diferencias finitas, elementos finitos o volúmenes finitos) determinaba el tipo de malla computacional (cuadrados estructurados, triángulos no-estructurados y cuadriláteros). Sin embargo, ahora la elección es mucho más amplia cuando todos los métodos han utilizado con éxito ambos tipos de malla, tanto estructuradas como no-estructuradas (Casulli y Walters, 2000). Por ello, la consideración real a tener en cuenta es obtener la resolución apropiada de la importante variabilidad topográfica de cada problema. Para ello, se adoptan las mallas no-estructuradas, debido a su habilidad para resolver la geometría complicada y multi-escala de los entornos costeros. Esta clase de mallas es atractiva por diferentes razones. Principalmente porque permite representar mucho más fácilmente dominios irregulares. Esto es muy útil en oceanografía costera, donde son numerosas las líneas de costas irregulares, los estrechos y las islas. Las características de la mesoescala están a menudo localizadas, el uso de una malla no estructurada permite conseguir una alta resolución en las regiones de interés, gracias a un refinamiento conveniente de la malla.

Muchos de los modelos nuevos de circulación con malla no-estructurada siguen la filosofía de ser no-estructurados en la horizontal pero estructurados en la vertical, independientemente de si utilizan coordenadas- $z$  o coordenadas- $\sigma$ , o si están implementados en diferencias finitas, elementos finitos o volúmenes finitos. Por ejemplo, un sistema de coordenadas- $z$  geopotencial fue adoptado en el modelo UnTrim (Casulli y Walters, 2000), y el modelo ELCIRC (Zhang *et al.*, 2004; Baptista *et al.*, 2005) usa una formulación similar a la aproximación de UnTrim. Mientras que fue adoptado un sistema en coordenadas- $\sigma$  (se adapta al terreno) en los modelos en elementos finitos de Lynch *et al.* (1996); Chacón Rebollo y Rodríguez Gómez (2004); Danilov *et al.* (2004); Chacón Rebollo y Rodríguez Gómez (2005), y una representación generalizada que se adapta al terreno fue adoptado por Iskandarani *et al.* (2003). Una versión no-hidrostática del modelo UnTrim ha sido desarrollado por Casulli y Zanolli (2002). Ellos demostraron que descomponiendo el procedimiento de resolución en una parte hidrostática y no-hidrostática, en combinación con una coordenada- $z$  en la vertical, dan resultados eficientes en el caso de flujos cuasi-hidrostáticos. Sin embargo, en el caso donde el flujo es no-hidrostático y se trabaja con geometrías

complejas puede ser ventajoso usar una aproximación completamente tridimensional. Por todo ello, se han adoptado para el modelo desarrollado en esta tesis mallas tridimensionales completamente no-estructuradas. El modelo FINEL3D (Labeur y Pietrzak, 2005) utiliza directamente elementos tetraédricos alineados verticalmente sobre una malla de triángulos, mientras que Danilov *et al.* (2004) lo hace a partir de la descomposición de elementos prismáticos triangulares. Las mallas computacionales que se utilizaron aquí son un mosaico creado a partir de una malla de triángulos no-estructurada en horizontal, la proyección de sus nodos (vértices) en la vertical sobre el fondo irregular dan lugar a prismas triangulares, que luego se descomponen en elementos prismáticos triangulares de caras no-horizontales. Esta configuración permite su utilización en batimetrías altamente irregulares y sobre taludes escarpados. Las líneas verticales de la malla deben ser paralelas al vector gravedad, a fin de evitar circulaciones espúreas, causadas por el error de truncamiento como se muestra en King *et al.* (1974). Por esta razón, otros elementos 3D tales como el tetraedro pueden introducir serios errores (Walters, 2006). La principal razón para adoptar esta aproximación es que se adaptan con gran precisión a las características topográficas del fondo marino. Esto permite mucha flexibilidad en la configuración de la malla vertical, por ejemplo, refinando cerca de características de interés sin tener que recurrir a las coordenadas híbridas (ver *p. ej.* Pietrzak *et al.*, 2002).

Para las simulaciones de flujos con superficie libre, una de las cuestiones principales es expresar numéricamente el movimiento del contorno o de las ondas de gravedad de la interfase aire-agua (superficie libre). Por su naturaleza, las ondas de gravedad superficiales son dispersivas; eso es, ondas con diferentes frecuencias viajan a diferentes velocidades. Las ondas de gravedad superficiales viajan a velocidades de entre  $10^2 - 10^3$  veces más grandes que las del fluido mismo. Generalmente, la altura de superficie libre se puede calcular de dos maneras diferentes, la primera alternativa es emplear la condición de contorno cinemática de la superficie libre, mientras que la segunda alternativa es utilizar directamente la ecuación de superficie libre. La altura de superficie libre puede ser razonablemente tratada como una función univaluada de la posición horizontal. Para ello, varios métodos han sido exitosamente incorporados a las ecuaciones de Navier-Stokes, *p. ej.* el método “Marker-And-Cell” (MAC) (Park *et al.*, 1999), el método de volumen de fluido (VOF) (Hur y Mizutani, 2003), y el método arbitrariamente Lagrangiano-Euleriano (ALE) (Hodges y Street, 1999). Generalmente, estos métodos son capaces de resolver problemas complejos en los que interviene la superficie libre (*p. ej.* rotura de olas), pero su aplicación esta limitada por su alto coste computacional y estrictos requerimientos de estabilidad. La condición de estabilidad sobre la velocidad de las ondas de gravedad superficiales puede ser evitada asumiendo la hipótesis de tapa rígida, conocida en inglés como “*rigid lid*”. Sin embargo, la aproximación de tapa rígida no permite la propagación de ondas de superficie y de esta manera no se podrían simular *p. ej.*, las corrientes debidas a las mareas. Por eficiencia computacional y simplicidad, los modelos han tendido a cubrir una pequeña parte del espectro de ondas, tales como los modelos basados en las ecuaciones de agua somera. Peregrine (1967) fue el primero en extender estas ecuaciones para obtener un modelo débilmente dispersivo usando las ecuaciones de Boussinesq. Investigaciones más recientes, han extendido estas ecuaciones para incluir la no-linealidad y ondas débilmente dispersivas (Wei *et al.*, 1995; Lynett, 2002). La idea básica con las ecuaciones de Boussinesq es resolver la ecuación de movimiento vertical

para determinar la presión y luego calcular los gradientes de presión horizontal por inclusión en la ecuación de movimiento horizontal. Este procedimiento da como resultado un sistema de ecuaciones que se parece a las ecuaciones de aguas someras, pero que contienen términos de corrección de alto orden. Sin embargo, su aplicación trae asociado un sobre-coste computacional significativo, de aproximadamente un orden de magnitud para tiempos de cálculo elevados (Walters, 2005). Debido a esto, Walters (2005) sigue un método alternativo, conserva la ecuación de movimiento vertical con la presión no-hidrostática y las promedias en vertical para producir un sistema de ecuaciones que es similar a las ecuaciones de agua someras, pero con los términos de presión no-hidrostáticos. Este método, muy competitivo a la hora de examinar las ondas superficiales dispersivas, utiliza en su afán de alcanzar mayor eficiencia una aproximación de simple capa promediada verticalmente, lo cual deja fuera de consideración la dinámica interna. Para evitar esto último, se pueden resolver directamente las ecuaciones de Navier-Stokes no-hidrostáticas completas sin promediarlas verticalmente, ya sea utilizando coordenadas- $\sigma$  (Lin y Li, 2002) o coordenadas- $z$  (Stelling y Zijlema, 2003; Casulli, 1999; Casulli y Zanolli, 2002), siendo esta última la forma que finalmente se adopta en esta tesis. Para ello, se resuelve la ecuación bidimensional de la altura de superficie libre y se integran numéricamente los términos que involucran el gradiente de presión de la superficie libre, mientras que se trata los demás términos implícitamente. Los modelos no-hidrostáticos de esta clase no pueden simular problemas en los cuales la superficie libre se aleje mucho de la horizontal (superficies con pendientes próximas a la vertical o invertidas), pero siguen perfectamente los movimientos de la superficie libre con un costo computacional relativamente pequeño y han sido ampliamente aplicados en otros modelos (Mahadevan *et al.*, 1996; Casulli, 1999; Namin *et al.*, 2001; Li y Fleming, 2001; Lin y Li, 2002; Chen, 2003).

Para finalizar esta introducción, solo cabe añadir que esta tesis está organizada en capítulos, en cuyos contenidos se agrupan las etapas fundamentales del desarrollo del modelo numérico HELIKE: formulación, validación y aplicación. De esta manera los capítulos abarcan desde las consideraciones físicas del modelo y las ecuaciones de gobierno (Capítulo 1), hasta la discretización, estabilización y formulación matricial (Capítulo 2), pasando por los casos de validación y aplicación con “*rigid-lid*” (Capítulo 3), y con superficie libre (Capítulo 4). En el epílogo se formulan las conclusiones de la tesis y se listan las futuras líneas de trabajo (Capítulo 5).

# Agradecimientos

En primer lugar quiero agradecer a la Universidad Nacional de Nordeste (UNNE), Argentina, por haberme dado la oportunidad de comenzar mis estudios de doctorado. A la “Universitat Politècnica de Catalunya” (UPC) por haberme acogido entre sus alumnos y al Laboratorio de Ingeniería Marítima (LIM) por haberme dado un lugar entre los suyos y haberme financiado en los momentos más difíciles. También debo agradecer muy especialmente a mis padres y hermanos por haberme estimulado y dado el ánimo suficiente para continuar mi formación lejos de mi país, familiares y amigos. A Lidia por haberme dado soporte y alentado a continuar a lo largo de todos estos años. Al equipo GiD, Quique, Miguel, Jorge y Abel por el esfuerzo puesto en el desarrollo de un nuevo generador de mallas para HELIKE, en la ayuda prestada para la programación de la interfase GiD-HELIKE y por brindarme su amistad y compañerismo. También tengo que agradecer a todos los chicos del LIM que de alguna manera han colaborado y ayudado a gestar esta tesis. Finalmente quiero agradecer a mis directores Manuel y Jordi por guiarme hasta el final de este arduo camino que transitamos juntos.



# Lista de símbolos

$\mathbf{u}$	Vector de velocidad relativa a unos ejes fijos sobre la Tierra . . . . .	1
$u, v, w$	Componentes $x, y, z$ del vector velocidad . . . . .	1
$P$	Presión dinámica . . . . .	1
$\rho$	Densidad del agua de mar . . . . .	1
$\eta$	Altura de superficie libre . . . . .	1
$t$	Variable tiempo . . . . .	1
$x, y, z$	Coordenadas espaciales . . . . .	1
$D$	Derivada total . . . . .	2
$\partial$	Derivada parcial . . . . .	2
$\nabla \cdot$	Operador de divergencia . . . . .	2
$c_s$	Velocidad del sonido . . . . .	3
$F$	Fuerza . . . . .	3
$m$	Masa . . . . .	3
$a$	Aceleración . . . . .	3
$\nabla$	Operador gradiente . . . . .	3
$\mathbf{g}_f$	Vector de la fuerza gravitacional al centro de la Tierra . . . . .	3
$g$	Fuerza gravitacional terrestre . . . . .	3
$I$	Sistema de ejes fijos en el espacio (Inercial) . . . . .	4
$R$	Sistema de ejes en rotación solidario con la Tierra (Rotante) . . . . .	4
$\boldsymbol{\omega}_T$	Velocidad angular de rotación terrestre . . . . .	4
$\hat{\mathbf{u}}$	Vector de velocidad relativa a unos ejes fijos en el espacio . . . . .	4
$\mathbf{d}$	Vector distancia al centro de la Tierra (radio terrestre) . . . . .	4
$\times$	Operador producto vectorial . . . . .	4
$\mathbf{g}$	Vector de gravedad efectiva normal a la superficie terrestre . . . . .	5
$\phi$	Latitud terrestre . . . . .	5
$\boldsymbol{\omega}_x, \boldsymbol{\omega}_y, \boldsymbol{\omega}_z$	Componentes del vector de rotación terrestre $\boldsymbol{\omega}_T$ . . . . .	5
$f$	Parámetro de Coriolis (comp. normal a la superficie terrestre) . . . . .	6
$b$	Parámetro de Coriolis (comp. tangente a la superficie terrestre) . . . . .	6
$\mathbf{k}$	Vector de los parámetros de Coriolis . . . . .	6
$\rho_0$	Densidad media del agua del mar (densidad de referencia) . . . . .	8
$\rho'$	Fluctuaciones de la densidad del agua del mar . . . . .	8
$p$	Presión cinemática . . . . .	9
$\propto$	Operador de comparación: "proporcional a" . . . . .	9
$\tau$	Tensiones . . . . .	9
$\mu$	Coefficiente de viscosidad dinámica molecular . . . . .	9
$\mathbf{F}_v$	Vector de fuerza debido a fricción molecular . . . . .	9
$\nu$	Coefficiente de viscosidad cinemática molecular . . . . .	10
$\langle \rangle$	Operador de promediado temporal (velocidad media del flujo) . . . . .	10
'	Representa a los términos turbulentos . . . . .	10

## Lista de símbolos

$\Delta$	Operador laplaciano.....	11
$\boldsymbol{\tau}$	Tensor de tensiones.....	11
$\nu_H$	Viscosidad cinemática turbulenta horizontal.....	12
$\nu_V$	Viscosidad cinemática turbulenta vertical.....	12
$\nu$	Viscosidad cinemática turbulenta.....	13
$C_{m_0}$	Coeficiente adimensional de viscosidad de Smagorinsky.....	14
$\Delta x, \Delta y$	Paso de la malla utilizada en la discretización espacial.....	14
$D_T$	Magnitud de deformación del tensor de velocidades.....	14
$Ri$	Número de Richardson.....	14
$\nu_{0p}, f_p, n_p$	Parámetros de Pacanowski y Philander.....	15
$\nu_{bp}, \alpha_p$	Parámetros de Pacanowski y Philander.....	15
$\nu_{max}$	Viscosidad cinemática turbulenta vertical máxima.....	15
$N$	Frecuencia de Brunt-Väisälä.....	15
$M$	Gradiente de las velocidades horizontales $u$ y $v$ .....	15
$\nu_b$	Viscosidad cinemática turbulenta vertical de referencia.....	15
$\nu_{0m}, f_m$	Parámetros de Munk y Anderson.....	15
$\alpha_m, n_1$	Parámetros de Munk y Anderson.....	15
$\varsigma$	Variable de integración para el término baroclínico.....	16
$q$	Presión no-hidrostática.....	16
$p_{atm}$	Presión atmosférica.....	16
$\nabla_H$	Operador gradiente horizontal extendido a 3D.....	16
$\Omega$	Dominio tridimensional.....	17
$\mathbb{R}^n$	Espacio de $n$ dimensiones.....	17
$S$	Superficie libre.....	17
$\mathcal{H}$	Profundidades (Batimetría).....	17
$T$	Tiempo total de simulación.....	17
$\Gamma$	Contornos del dominio tridimensional.....	18
$\Gamma_s$	Contorno superior del dominio tridimensional (Superficie libre).....	19
$\Gamma_b$	Contorno inferior del dominio tridimensional (Fondo).....	18
$\Gamma_l$	Contornos laterales del dominio tridimensional.....	19
$\mathbf{n}$	Vector unitario normal al contorno.....	19
$n_x, n_y, n_z$	Componentes del vector unitario.....	19
$C_b$	Coeficiente de Chezy.....	19
$\tau_b^x, \tau_b^y$	Componentes horizontales de la fricción con fondo.....	19
$\tau_s^x, \tau_s^y$	Componentes horizontales de la tensión de viento.....	19
$\rho_a$	Densidad del aire.....	19
$C_s$	Coeficiente adimensional de arrastre del viento.....	19
$U_{10}, V_{10}$	Componentes de la velocidad del viento a 10 m de altura.....	19
$\Gamma_{in}$	Contornos con flujos de entrada.....	19
$\Gamma_{wall}$	Contornos de pared sólida.....	19
$\Gamma_{out}$	Contornos con flujos de salida.....	19
$\mathbf{u}_{in}$	Valor prescrito de la velocidad de entrada.....	19
$\mathbf{u}^0$	Velocidad inicial de divergencia nula.....	19
$\eta^0$	Altura de superficie libre inicial.....	19
$\mathbf{H}^1(\Omega)$	Espacio de Sobolev de orden 1 vectorial.....	20
$L^2(\Omega)$	Espacio de Lebesgue.....	20
$H^1(S)$	Espacio de Sobolev de orden 1.....	20
$\mathbf{n}_\nu$	$= (\nu_H n_x, \nu_H n_y, \nu_V n_z)$ .....	20
$\tilde{\mathbf{u}}$	Función de peso para la ecuación de movimiento.....	20
$\tilde{u}, \tilde{v}, \tilde{w}$	Función de peso para las comp. de las ecuac. de movimiento.....	20



$V$	Espacio de funciones para la ecuación de movimiento.....	20
$\tilde{q}$	Función de peso para la ecuación de continuidad.....	21
$Q$	Espacio de funciones para la ecuación de continuidad.....	21
$\tilde{\mu}$	Función de peso para la ecuación de superficie libre.....	21
$M$	Espacio de funciones para la ecuación de superficie libre.....	21
$\Delta t$	Incremento o paso de tiempo.....	25
$n$	Paso de tiempo anterior.....	25
$N$	Número total de pasos de tiempo.....	25
$T$	Tiempo total de simulación.....	25
$\Omega_h$	Partición del dominio $\Omega$ .....	27
$h$	Tamaño de la malla.....	27
$\Sigma_h$	Partición de la superficie $\Gamma_s$ .....	27
$K$	Elemento de la partición $\Omega_h$ (malla).....	27
$\hat{K}$	Elemento de referencia.....	27
$F_K$	Transformación elemental.....	27
$\hat{T}$	Simplex de vértices $(0, 0)$ , $(1, 0)$ y $(0, 1)$ en $\mathbb{R}^2$ .....	27
$R_1$	Producto tensorial de polinomios de primer grado.....	27
$P_1$	Polinomio de primer grado.....	27
$\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}$	Variables de referencia.....	27
$V_h$	Espacio de funciones MEF para la aprox. de la velocidad.....	28
$Q_h$	Espacio de funciones MEF para la aprox. de la presión.....	28
$M_h$	Espacio de funciones MEF para la aprox. de la alt. de superficie libre..	28
$C^0$	Función de continuidad de orden 0.....	28
$F_T$	Transformación lineal.....	28
$S_1$	Polinomio de primer grado para la superficie.....	28
$\mathbf{r}$	Proyección del gradiente ponderado de la presión discreta $\nabla q$ .....	30
$R_h$	Espacio de funciones para la aprox. de la PGP.....	30
$\tilde{s}_h$	Función de peso para la ec. de la proy. del grad. de la presión.....	30
$\alpha_K$	Parámetro de estabilización elemental.....	30
$h_K$	Tamaño del elemento $K$ .....	31
$V_K$	Velocidad característica en el elemento $K$ .....	31
$c_1, c_2$	Constantes de estabilización elementales.....	31
$m$	Paso de tiempo $n$ o $n + 1$ según sea el caso.....	31
$N_i$	Funciones de forma 3D en los nodos del dominio $\Omega$ .....	31
$\tilde{N}_i$	Funciones de forma 2D en los nodos de la superficie libre $\Gamma_s$ .....	31
$Np_{Vol}$	Número total de nodos en el dominio $\Omega$ .....	31
$Np_{Sup}$	Número total de nodos en la superficie libre $\Gamma_s$ .....	31
$\mathbf{X}$	Vector de valores nodales para la velocidad.....	33
$\mathbf{U}, \mathbf{V}, \mathbf{W}$	Vectores de valores nodales para las componentes de la velocidad.....	33
$\mathbf{P}$	Vector de valores nodales para la presión.....	33
$\mathbf{R}$	Vector de valores nodales para la PGP.....	33
$\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2, \mathbf{R}_3$	Vectores de valores nodales para las componentes de la PGP.....	33
$\mathbf{S}$	Vector de valores nodales para la densidad.....	33
$\mathbf{E}$	Vector de valores nodales para la altura de superficie libre.....	33
$\mathbf{M}_{3D}$	Matriz de masa tridimensional.....	34
$\tilde{\mathbf{M}}$	Matriz de masa para la componente $f$ del término de Coriolis.....	34
$\hat{\mathbf{M}}$	Matriz de masa para la componente $b$ del término de Coriolis.....	34
$\check{\mathbf{M}}$	Matriz de masa para la componente de fricción con fondo.....	34
$\mathbf{C}_{3D}(\mathbf{X}^m)$	Matriz tridimensional de términos convectivos.....	34
$\mathbf{L}_{3D}$	Matriz tridimensional de rigidez de los términos difusivos.....	34

## Lista de símbolos

<b><math>\mathbf{G}_{3D}</math></b>	Matriz gradiente .....	34
<b>F</b>	Matriz de términos barotrópicos .....	34
<b>B</b>	Matriz de términos baroclínicos .....	34
<b><math>\bar{\mathbf{T}}</math></b>	Vector de tensión de viento .....	34
<b>D</b>	Matriz de divergencia .....	34
<b><math>\mathbf{L}_{\alpha,3D}</math></b>	Matriz laplaciana, ponderada a nivel elemental por $\alpha_K$ .....	34
<b><math>\mathbf{D}_\alpha</math></b>	Matriz de divergencia, ponderada a nivel elemental por $\sqrt{\alpha_K}$ .....	34
<b><math>\mathbf{G}_\alpha</math></b>	Matriz gradiente, ponderada a nivel elemental por $\sqrt{\alpha_K}$ .....	34
<b>M</b>	Matriz de masa de los elementos tridimensionales del dominio .....	35
<b><math>\mathbf{C}(X^m)</math></b>	Matriz de los términos convectivos .....	35
<b>L</b>	Matriz de rigidez de los términos difusivos .....	35
<b><math>\mathbf{G}_1, \mathbf{G}_2, \mathbf{G}_3</math></b>	Componentes de la matriz gradiente .....	35
<b><math>\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2</math></b>	Componentes de la matriz del término barotrópico .....	35
<b><math>\mathbf{B}_1, \mathbf{B}_2</math></b>	Componentes de la matriz del término baroclínico .....	35
<b><math>\mathbf{D}_1, \mathbf{D}_2, \mathbf{D}_3</math></b>	Componentes de la matriz de divergencia .....	35
<b><math>\mathbf{L}_\alpha</math></b>	Matriz laplaciana de la ecuación de continuidad modificada .....	35
<b><math>\mathbf{D}_{1,\alpha}, \mathbf{D}_{2,\alpha}, \mathbf{D}_{3,\alpha}</math></b>	Componentes de la matriz de divergencia (ec. de continuidad modif.) ..	35
<b><math>\mathbf{G}_{1,\alpha}, \mathbf{G}_{2,\alpha}, \mathbf{G}_{3,\alpha}</math></b>	Componentes de la matriz gradiente de la ecuación de la PGP .....	35
<b><math>\bar{\mathbf{M}}</math></b>	Matriz de masa de los elementos bidimensionales de la superficie .....	35
<b><math>\bar{\mathbf{C}}(X^m)</math></b>	Matriz de términos convectivos de la ecuación de superficie libre .....	35

# Lista de figuras

1.1	Definición del sistema cartesiano local de referencia sobre la Tierra.	2
1.2	La figura muestra cómo la aceleración gravitacional ( $\mathbf{g}_f$ ) se reduce a la aceleración debida a la gravedad ( $\mathbf{g}$ ) paralela a la vertical local a la superficie terrestre al restarle la fuerza centrípeta ( $\boldsymbol{\omega}_T \times (\boldsymbol{\omega}_T \times \mathbf{d})$ ). Nótese que el tamaño de la aceleración centrípeta está exagerado, su magnitud es $(\omega_T^2 r \cos \phi)$ y actúa perpendicularmente al eje de rotación.	4
1.3	La aceleración de Coriolis está compuesta por una componente normal a la superficie terrestre $f = 2\boldsymbol{\omega}_T \sin(\phi)$ y una componente tangencial a la superficie terrestre $b = 2\boldsymbol{\omega}_T \cos(\phi)$ .	6
1.4	Esquema de los procesos físicos oceanográficos y sus rangos de escalas espacial y temporal aproximados.	7
1.5	Configuración del plano tangente a la superficie terrestre, denominado “Plano- $f$ ”, en el cual se considera constante el parámetro de Coriolis en el centro del área.	8
1.6	Las tensiones en un fluido isotrópico confinado entre dos planos infinitos, cuando el plano superior se desliza con respecto al plano inferior, son proporcionales a la deformación del fluido.	9
1.7	Esquema de la altura de superficie libre y profundidad referidos al plano de referencia.	16
2.1	Elementos finitos utilizados en la discretización espacial 3D, tetraédros (4 nodos), hexaédros (8 nodos) y prismas triangulares (6 nodos).	27
2.2	Columnas de elementos prismáticos de caras no-planas a generados a partir de la malla de triángulos no-estructurada de la superficie.	28
3.1	Geometría y condiciones de contorno para el problema de flujo en cavidad cúbica.	40
3.2	Solución numérica estacionaria en $x = 0,5$ y $z = 0,5$ para el problema de flujo en cavidad cúbica de Jiang <i>et al.</i> (1994).	41
	(a) Tabla de valores de la componente $u$ de la velocidad.	41
	(b) Representación gráfica del perfil de velocidades.	41
3.3	Malla 3D para el problema de flujo en cavidad cúbica con 5355 nodos y 4480 elementos hexaédricos.	42
3.4	Comparación entre la solución numérica de Jiang <i>et al.</i> (1994) y la del modelo HELIKE.	43

(a)	$Re = 400$ . . . . .	43
(b)	$Re = 1000$ . . . . .	43
3.5	Distribución de velocidades para $Re = 400$ . . . . .	44
(a)	$x = 0,5$ . . . . .	44
(b)	$y = 0,5$ . . . . .	44
(c)	$z = 0,5$ . . . . .	44
3.6	Distribución de presiones para $Re = 400$ . . . . .	45
(a)	$x = 0,5$ . . . . .	45
(b)	$y = 0,5$ . . . . .	45
(c)	$z = 0,5$ . . . . .	45
3.7	Distribución de velocidades para $Re = 1000$ . . . . .	46
(a)	$x = 0,5$ . . . . .	46
(b)	$y = 0,5$ . . . . .	46
(c)	$z = 0,5$ . . . . .	46
3.8	Distribución de presiones para $Re = 1000$ . . . . .	47
(a)	$x = 0,5$ . . . . .	47
(b)	$y = 0,5$ . . . . .	47
(c)	$z = 0,5$ . . . . .	47
3.9	Dimensiones del dominio y parámetros geométricos para el problema del flujo sobre un escalón 3D. . . . .	48
3.10	Malla de 7065 nodos y 5248 elementos hexaédricos para el problema de flujo sobre un escalón 3D. . . . .	49
3.11	Visualización de las iso-superficies del campo de velocidades para diferentes valores del número de Reynolds y con el modelo de turbulencia de Smagorinsky. . . . .	50
(a)	$Re = 200$ . . . . .	50
(b)	$Re = 400$ . . . . .	50
(c)	$Re = 600$ . . . . .	50
(d)	$Re = 800$ . . . . .	50
(e)	$Re = 1000$ . . . . .	50
(f)	Smagorinsky . . . . .	50
3.12	Puntos de separación primaria $X_1$ y secundaria del flujo $X_2, X_3$ para el problema de flujo sobre un escalón 3D. . . . .	50
3.13	Sistema de coordenadas y geometría del dominio para el flujo de Couette. . . . .	51
3.14	Solución analítica del campo de velocidades para el flujo de Taylor-Couette. . . . .	52
3.15	Sistema de ejes fijos. . . . .	53
3.16	Malla de 4752 y 4096 elementos hexaédricos para el problema de flujo de Couette. . . . .	53
3.17	Sistema de ejes en rotación. . . . .	54
3.18	Solución numérica del campo de velocidades para el sistema de ejes en rotación. . . . .	54
3.19	Comparación entre la solución analítica y la numérica para ejes fijos y en rotación. . . . .	55
(a)	Velocidades . . . . .	55
(b)	Presiones . . . . .	55
3.20	Sentido y dirección de la circulación en superficie. . . . .	56
3.21	Esquema de un vórtice anticiclónico. . . . .	57
3.22	Esquema del dominio computacional. . . . .	57

3.23	Malla computacional. . . . .	58
3.24	Perfil de velocidades geostróficas ( $\blacklozenge$ ) y numéricas ( $\blacktriangle$ ). . . . .	59
3.25	Distribución de densidades. . . . .	61
3.26	Malla de 775 nodos y 960 elementos prismáticos triangulares. . . . .	62
3.27	Iso-superficies de la presión $q$ para los cuatro casos planteados. . . . .	63
	(a) Caso 1 . . . . .	63
	(b) Caso 2 . . . . .	63
	(c) Caso 3 . . . . .	63
	(d) Caso 4 . . . . .	63
3.28	Distribución de la presión “ $q_i$ ” para los cuatro casos planteados. . . . .	63
3.29	Dimensiones del dominio y condiciones de contorno para el problema del canal con fondo liso. . . . .	64
3.30	Malla de 3255 nodos y 2400 elementos hexaédricos para el problema del canal con fondo liso. . . . .	64
3.31	Detalles de las velocidades paralelas al fondo para el problema del canal con fondo liso. . . . .	65
3.32	Perfil de velocidades en la sección de salida para el problema del canal con fondo liso. . . . .	65
3.33	Dimensiones del dominio y condiciones de contorno para el problema del canal con fondo rugoso. . . . .	66
3.34	Malla de 3255 nodos y 2400 elementos hexaédricos para el problema del canal con fondo rugoso. . . . .	66
3.35	Distribución parabólica del perfil de velocidades alcanzado para el estado estacionario en la salida del canal con fondo rugoso. . . . .	67
3.36	Espiral de Ekman. . . . .	69
3.37	Océano de profundidad infinita. . . . .	71
	(a) Comparación entre las velocidades horizontales de la solución analítica de la espiral de Ekman ( $\text{—}$ ) y las obtenidas de la simulación numérica ( $\blacklozenge$ ). . . . .	71
	(b) Distribución tridimensional de las velocidades obtenidas de la simulación numérica ( $\text{→}$ ). . . . .	71
3.38	Océano de profundidad finita. . . . .	72
	(a) Comparación entre las velocidades horizontales de la solución analítica de la espiral de Ekman para $H = 100$ m ( $\blacklozenge$ ), $H = D/2$ ( $\blacktriangle$ ) y $H = D/3$ ( $\square$ ) y las obtenidas de la simulación numérica ( $\text{—}$ ). . . . .	72
	(b) Distribución tridimensional de las velocidades obtenidas de la simulación numérica para $H = 100$ m ( $\text{→}$ ), $H = D/2$ ( $\text{→}$ ) y $H = D/3$ ( $\text{→}$ ). . . . .	72
3.39	Ubicación geográfica y batimetría del delta del río Ebro. . . . .	73
3.40	Malla tridimensional no-estructurada de 20978 nodos y 79763 elementos tetraédricos. . . . .	74
3.41	Delta del río Ebro: campo de velocidades superficiales inducidos por viento proveniente del Norte. . . . .	76
3.42	Delta del río Ebro: Iso-superficies del módulo de la velocidad. . . . .	77
3.43	Configuración tridimensional del área de estudio. . . . .	78
	(a) Esquema 3D de la plataforma y talud. . . . .	78
	(b) Campo de velocidades para $z = 0, 150, 300, 450$ y $600$ m. . . . .	78
3.44	Delta del río Ebro: trayectorias seguidas por algunas partículas. . . . .	79

## Lista de figuras

4.1	Dimensiones del dominio computacional y condiciones de contorno.	83
4.2	Malla tridimensional no-uniforme de 7665 nodos y 12800 elementos prismáticos triangulares. . . . .	83
4.3	Valores nodales de la altura de superficie libre a lo largo de “ $x$ ” para $y = 0,5; z = 0$ en el problema de sobre-elevación de la superficie libre debida a viento y la recta de regresión lineal . . .	84
4.4	Velocidades para el estado estacionario en $y = 0,5$ para el problema de sobre-elevación de la superficie libre debida a viento. . .	85
4.5	Dimensiones del dominio computacional y condiciones de contorno.	86
4.6	Malla tridimensional de 5555 nodos y 8000 elementos prismáticos triangulares. . . . .	87
4.7	Comparación entre la solución de la teoría lineal de ondas (—) y los resultados numéricos (×) para diferentes relaciones de $t/T$ para el problema de agitación. . . . .	88
4.8	Secuencia temporal tridimensional de la evolución de la altura de superficie libre para $t = 15, 30, 60, 90, 120, 140$ s, donde se exageró la escala vertical 200 veces a los efectos de una mejor visualización.	89
(a)	$t = 15$ s . . . . .	89
(b)	$t = 30$ s . . . . .	89
(c)	$t = 60$ s . . . . .	89
(d)	$t = 90$ s . . . . .	89
(e)	$t = 120$ s . . . . .	89
(f)	$t = 140$ s . . . . .	89
B.1	Ubicación de las zonas de rastreo de HELIKE. . . . .	114

# Lista de tablas

2.1	Algoritmo de resolución del sistema de ecuaciones. . . . .	37
3.1	Tabla de valores de los puntos de separación del flujo de las zonas primaria y secundaria para el problema de flujo sobre un escalón 3D. . . . .	50
3.2	Distribución de densidades. . . . .	58
3.3	Velocidades geostróficas. . . . .	59
3.4	Cuatro formulaciones posibles para la presión. . . . .	60
3.5	Solución analítica de las cuatro formulaciones de la presión. . . .	61
3.6	Resultados de la simulación para los cuatro casos planteados. . .	62





# Capítulo 1

## Ecuaciones de Gobierno

“La naturaleza obra sin maestros”  
*Hipócrates, 460-377 a.C.*  
Médico griego.

Las variables básicas que caracterizan el estado del océano son las velocidades  $\mathbf{u} = (u, v, w)$ , la presión  $P$ , la densidad  $\rho$  y la altura de superficie libre  $\eta$ , todas ellas dependen del tiempo  $t$  y de las coordenadas espaciales  $(x, y, z)$ , excepto la altura de la superficie libre que es función de  $(x, y)$  y  $t$ . Las componentes de la velocidad  $\mathbf{u} = (u, v, w)$  se corresponden con las direcciones de los ejes coordenados del sistema cartesiano local de referencia sobre la Tierra. Los ejes están dirigidos “ $x$ ” longitudinalmente hacia el Este, “ $y$ ” latitudinalmente hacia el Norte y “ $z$ ” normal a la superficie terrestre hacia el exterior (ver figura (1.1)). Las ecuaciones en derivadas parciales que describen la relación entre dichas variables se deducen a partir de los principios físicos de conservación de la masa y de la cantidad de movimiento.

### 1.1 Conservación de la masa e incompresibilidad

El principio de conservación de la masa puede ser expresado de la siguiente manera (ver Pönd y Pickard, 1983, *pág.* 18),:

$$\partial_t \rho + \partial_x(\rho u) + \partial_y(\rho v) + \partial_z(\rho w) = 0 \quad (1.1)$$

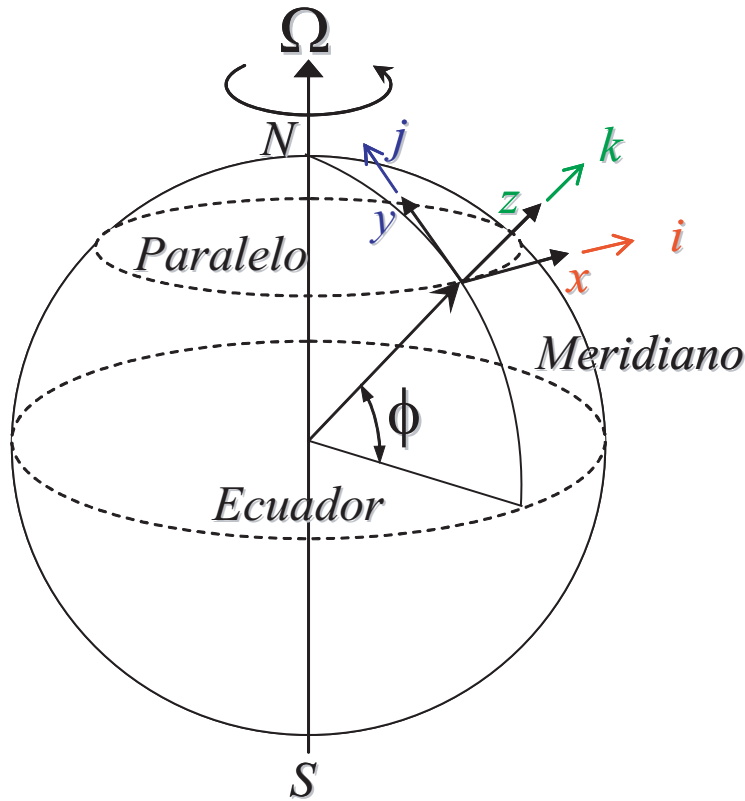


Figura 1.1: Definición del sistema cartesiano local de referencia sobre la Tierra.

Si se opera matemáticamente con los términos de la ecuación (1.1) y se reemplaza  $\partial_t \rho + u \partial_x \rho + v \partial_y \rho + w \partial_z \rho$  por su derivada material  $D_t \rho$ , la ecuación de continuidad puede ser escrita en forma abreviada como:

$$1/\rho D_t \rho + \nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (1.2)$$

siendo  $D_t = \partial_t + \mathbf{u} \cdot \nabla$  la derivada material y  $\nabla \cdot \mathbf{u} = \partial_x u + \partial_y v + \partial_z w$  la divergencia de la velocidad. La ecuación (1.2) expresa el hecho de que la masa se conserva y establece la relación entre el cambio de densidad y volumen. El primer término de la ecuación representa la razón de cambio de densidad por unidad de tiempo, mientras que el segundo término representa la razón de cambio de volumen para una partícula de fluido en movimiento. En la ecuación (1.2) se asume que la distribución de las densidades es variable en el fluido, lo cual es importante para aplicaciones en el océano donde la densidad del agua no es homogénea. Los efectos de la presión e intercambio de calor no afectan apreciablemente a la masa de una partícula de fluido, como si lo hacen los efectos del intercambio de salinidad (Pönd y Pickard, 1983). Si se asume que una partícula de fluido intercambia iguales cantidades de masa de sal y agua, la ecuación (1.2) da la relación correcta entre el cambio de densidad y de volumen. No obstante, en la mayoría de los casos lo más probable es que el mismo número de moléculas de

## 1.2. Conservación de la cantidad de movimiento

---

agua sean reemplazadas por iones de sal; la masa se incrementa, pero el volumen no disminuye en la misma proporción en que lo hace en la ecuación (1.2). De todas maneras este efecto es lo suficientemente pequeño en el océano como para que se lo pueda ignorar haciendo  $1/\rho D_t \rho = 0$  y se asume entonces que el volumen de una partícula de fluido es constante, por lo cual se lo puede considerar como un fluido incompresible. En estas circunstancias la ecuación de conservación de la masa (1.2) se convierte efectivamente en conservación del volumen:

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (1.3)$$

Además los flujos con velocidades mucho menores que la velocidad del sonido en el agua ( $c_s = 1.500 \text{ m/s}$ ) se comportan como si el fluido fuera incompresible, aunque esta simplificación implique no poder resolver aquellos problemas relacionados con medios compresibles como la propagación de ondas acústicas en el agua. Algo más a tener en cuenta es que la ecuación (1.3) no asume que el flujo sea estacionario, pero sin embargo la variación temporal de la densidad no aparece explícitamente en la ecuación de continuidad, aún cuando el flujo sea no-estacionario.

## 1.2 Conservación de la cantidad de movimiento

La ecuación de conservación de la cantidad de movimiento se obtiene al aplicar la segunda ley de Newton  $F = m \times a$  a una partícula de fluido. Este principio dice que si “una fuerza resultante  $F$  actúa sobre un cuerpo de masa  $m$ , el cuerpo adquirirá una aceleración  $a$  que es producto de la resultante de todas las fuerzas que actúen sobre ella”, como p. ej.  $a = (\text{Presión} + \text{Gravedad} + \dots)/m$ .

Utilizando este principio, una descripción Euleriana del movimiento y un sistema de referencia inercial, se puede escribir la ecuación del movimiento para un fluido no viscoso en función de las velocidades y la presión:

$$D_t \mathbf{u} = -1/\rho \nabla P + \mathbf{g}_f \quad (1.4)$$

donde  $D_t \mathbf{u} = \partial_t \mathbf{u} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}$  es la derivada material de la velocidad (la derivada temporal más la derivada convectiva de la velocidad),  $\nabla P$  el gradiente de la presión y  $\mathbf{g}_f$  un vector que apunta al centro de la Tierra y que contiene a la fuerza gravitacional terrestre  $g^1$ .

No obstante, siendo el tema de interés la circulación oceánica de mesoescala, se tienen que tener en cuenta otros aspectos. Estos son por ejemplo, la presencia de la rotación terrestre que introduce la fuerza de Coriolis, la propiedad de los campos de densidades del océano que admite la aplicación de la aproximación de Boussinesq y las dimensiones del área de estudio que permite la elección del sistema de coordenadas a emplear. Todos estos aspectos serán tratados a continuación.

---

<sup>1</sup>La “Ley de la Gravitación Universal” de Newton establece que la magnitud de la fuerza de atracción gravitatoria entre dos cuerpos esta dada por  $g = GM_1 M_2/d^2$ . Dicha fuerza actúa a lo largo de la línea que une los centros de masas  $M_1$  y  $M_2$  que se hallan separados por una distancia  $d$ , siendo  $G$  una constante de gravitación universal cuyo valor es  $6,67 \times 10^{-11} \text{ Nm}^2/\text{kg}^2$ . Esta expresión es válida solamente para dos masas cuyos tamaños son relativamente pequeñas comparadas con  $d$  o para dos esferas cuya distribución radial de densidades son simétricas. Estas condiciones son satisfechas lo suficientemente bien en el caso de la Tierra y cualquier otro objeto ubicado sobre su superficie.

### 1.2.1 Un sistema de referencia rotante

El hecho de usar un sistema de referencia en rotación, como es la Tierra girando sobre su propio eje, genera aceleraciones que deben ser tenidas en cuenta. La transformación de un sistema de ejes fijos en el espacio a otro sistema rotante y fijo sobre la Tierra (Pönd y Pickard, 1983), puede ser expresada matemáticamente de la siguiente manera:

$$(D_t \dot{\mathbf{u}})_I = (D_t \mathbf{u})_R + 2\boldsymbol{\omega}_T \times \mathbf{u} + \boldsymbol{\omega}_T \times (\boldsymbol{\omega}_T \times \mathbf{r}) \quad (1.5)$$

Los subíndices  $I$  y  $R$  en la ecuación anterior se refieren a los sistemas de referencia inercial (ejes fijos en el espacio) y rotante (ejes fijos sobre la Tierra), respectivamente. Sobre el lado derecho de la ecuación (1.5), el primer término  $(D_t \mathbf{u})_R$  es la aceleración relativa a los ejes fijos sobre la Tierra, el segundo término  $2\boldsymbol{\omega}_T \times \mathbf{u}$  es la aceleración de Coriolis y el tercer término  $\boldsymbol{\omega}_T \times (\boldsymbol{\omega}_T \times \mathbf{d})$  es la aceleración centrípeta necesaria para hacer que un cuerpo gire alrededor del eje terrestre con la velocidad angular  $\boldsymbol{\omega}_T$ . Los otros símbolos son  $\dot{\mathbf{u}}$  la velocidad relativa a los ejes fijos en el espacio,  $\mathbf{u}$  la velocidad relativa a los ejes fijos sobre la Tierra,  $\mathbf{d}$  el vector distancia de un cuerpo desde el centro de la Tierra,  $\boldsymbol{\omega}_T$  es el vector de la velocidad de rotación angular terrestre cuya magnitud es un día sidéreo  $7,292 \times 10^{-5} \text{ rad/s}$  (un día sidéreo = 23 h 56 min 4 s = 86164s) y  $\times$  es el operador del producto vectorial. Eliminando el subíndice  $R$  y reemplazando  $(D_t \dot{\mathbf{u}})_I$  por la ecuación (1.4), la ecuación del movimiento de un fluido no viscoso en un sistema de referencia en rotación fijo a la Tierra esta dada por:

$$D_t \mathbf{u} = -1/\rho \nabla P - 2\boldsymbol{\omega}_T \times \mathbf{u} + \mathbf{g}_f - \boldsymbol{\omega}_T \times (\boldsymbol{\omega}_T \times \mathbf{d}) \quad (1.6)$$

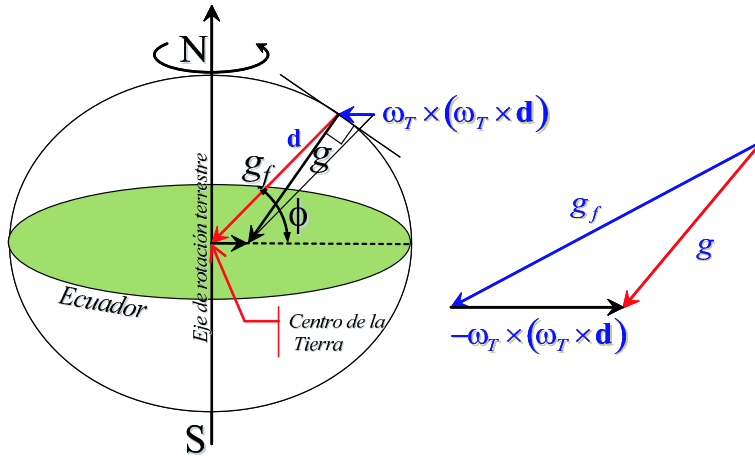


Figura 1.2: La figura muestra cómo la aceleración gravitacional ( $\mathbf{g}_f$ ) se reduce a la aceleración debida a la gravedad ( $\mathbf{g}$ ) paralela a la vertical local a la superficie terrestre al restarle la fuerza centrípeta ( $\boldsymbol{\omega}_T \times (\boldsymbol{\omega}_T \times \mathbf{d})$ ). Nótese que el tamaño de la aceleración centrípeta está exagerado, su magnitud es  $(\omega_T^2 r \cos \phi)$  y actúa perpendicularmente al eje de rotación.

En esta ecuación, el término de la izquierda es la aceleración relativa a la Tierra y los términos de la derecha son las fuerzas actuantes por unidad de

## 1.2. Conservación de la cantidad de movimiento

masa o las aceleraciones debidas a estas fuerzas. La transformación al nuevo sistema de ejes fijos sobre la Tierra simplemente agrega otro dos términos nuevos, el término de aceleración de Coriolis  $-2\boldsymbol{\omega}_T \times \mathbf{u}$  y el término negativo de la aceleración centrípeta, también llamado aceleración centrífuga  $-\boldsymbol{\omega}_T \times (\boldsymbol{\omega}_T \times \mathbf{d})$ , mientras que los términos de la ecuación (1.4) no han sido alterados. Como se muestra en la figura (1.2), los cuerpos en contacto con la Tierra adquieren como aceleración centrípeta una parte de la aceleración de la gravedad  $\mathbf{g}_f$  (el máximo valor de  $\boldsymbol{\omega}_T \times (\boldsymbol{\omega}_T \times \mathbf{d})$  es de tan solo el 0,3% de  $\mathbf{g}_f$ ). La diferencia  $\mathbf{g}_f - \boldsymbol{\omega}_T \times (\boldsymbol{\omega}_T \times \mathbf{d})$  se denomina aceleración debida a la gravedad y es igual a la aceleración de la gravedad  $\mathbf{g}$  que adquiere un cuerpo que cae libremente cerca de la Tierra en la ausencia de fricción.

$$\mathbf{g} = \mathbf{g}_f - \boldsymbol{\omega}_T \times (\boldsymbol{\omega}_T \times \mathbf{d}) \quad (1.7)$$

En la superficie de la Tierra  $\mathbf{g}$  solo depende de la posición geográfica; hay un máximo en los Polos (donde la aceleración centrípeta desaparece y  $\mathbf{g}_f$  es también un máximo porque el radio polar (6357 km) es ligeramente menor que el radio ecuatorial (6378 km)) y un mínimo en el Ecuador (donde la aceleración centrípeta es un máximo y  $\mathbf{g}_f$  es un mínimo). Sin embargo como la variación de  $\mathbf{g}$  desde el Polo al Ecuador es de solamente el 0,5% se desprecia, como así también se desprecian las pequeñas variaciones de la profundidad en el océano que introducen ligeras diferencias de longitud en el radio terrestre. Finalmente se toma  $\mathbf{g} = (0, 0, g)$ , siendo  $g$  constante e igual a  $9,81 \text{ m/s}^2$  (Pönd y Pickard, 1983). Nótese que la componente de la aceleración de la gravedad sólo aparecerá en la tercera componente “z” de la ecuación del movimiento, que por definición es tomada paralela a la dirección local de esta aceleración. Aparece con el signo menos porque la aceleración es hacia abajo mientras la dirección tomada por el eje “z” positivo es hacia arriba.

Teniendo en cuenta estas consideraciones y la ecuación (1.7), se multiplican ambos términos de la ecuación (1.6) por  $\rho$  y se reordenan los términos para obtener finalmente la ecuación del movimiento para un fluido inviscido en rotación como:

$$\rho(D_t \mathbf{u} + 2\boldsymbol{\omega}_T \times \mathbf{u}) = -\nabla P - \rho \mathbf{g} \quad (1.8)$$

### 1.2.2 Parámetro de Coriolis

En el sistema de referencia establecido el vector de rotación terrestre  $\boldsymbol{\omega}_T$  se puede representar como la suma de las componentes normal  $\boldsymbol{\omega}_z$  y tangente a la superficie terrestre  $\boldsymbol{\omega}_y$ , en las direcciones “z” e “y” respectivamente, no teniendo componente en la dirección “x” (ver figura (1.3)):

$$2\boldsymbol{\omega}_T = 2\boldsymbol{\omega}_T \cos(\phi)j + 2\boldsymbol{\omega}_T \sin(\phi)k =: \boldsymbol{\omega}_y j + \boldsymbol{\omega}_z k$$

donde  $\phi$  es la latitud terrestre. Desarrollando el producto vectorial  $2\boldsymbol{\omega}_T \times \mathbf{u}$  se obtienen las ecuaciones de movimiento conveniente formuladas para cada una de sus componentes:

$$\begin{aligned} x : \quad & \rho(D_t u + 2\boldsymbol{\omega}_y w - 2\boldsymbol{\omega}_z v) = -\partial_x P \\ y : \quad & \rho(D_t v - 2\boldsymbol{\omega}_x w + 2\boldsymbol{\omega}_z u) = -\partial_y P \\ z : \quad & \rho(D_t w + 2\boldsymbol{\omega}_x v - 2\boldsymbol{\omega}_y u) = -\partial_z P - \rho g \end{aligned} \quad (1.9)$$

donde los términos con componentes  $\omega_x$  se eliminan por ser esta componente nula.

Se definen por conveniencia el parámetro de Coriolis  $f$  y su recíproco  $b$  como:

$$f = 2\omega_z = 2\omega_T \sin(\phi) \quad (1.10a)$$

$$b = 2\omega_y = 2\omega_T \cos(\phi) \quad (1.10b)$$

Reemplazandolas en (1.9) quedan de la siguiente manera :

$$x : \rho(D_t u - f v + b w) = -\partial_x P \quad (1.11a)$$

$$y : \rho(D_t v + f u) = -\partial_y P \quad (1.11b)$$

$$z : \rho(D_t w - b u) = -\partial_z P - \rho g \quad (1.11c)$$

Mahadevan *et al.* (1996), aconseja retener para las ecuaciones no-hidrostáticas, la componente de la aceleración de Coriolis normal a la superficie terrestre que surge a partir de la componente tangencial “ $b$ ” del parámetro de Coriolis, comúnmente despreciadas en los modelos hidrostáticos. Esta componente de la aceleración de Coriolis es un término dominante en la ecuación de movimiento vertical (1.11c) y esta en equilibrio con el gradiente de la presión no-hidrostática vertical, de manera semejante al equilibrio geostrófico existente entre las componentes horizontales de la presión y la aceleración de Coriolis. Cualquier diferencia entre los mismos daría lugar a aceleraciones verticales en el fluido.

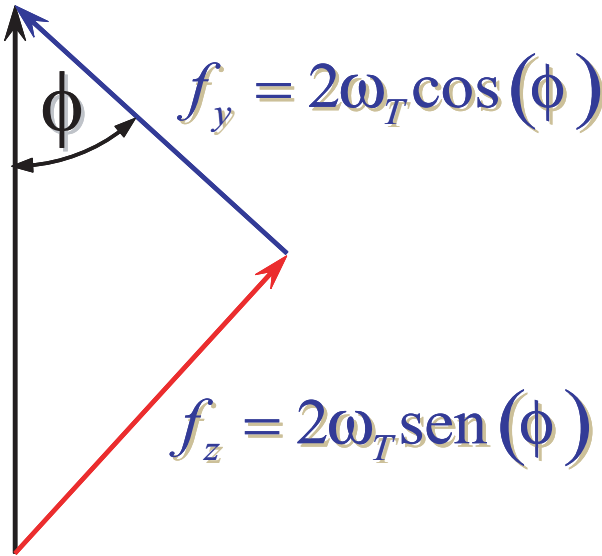


Figura 1.3: La aceleración de Coriolis está compuesta por una componente normal a la superficie terrestre  $f = 2\omega_T \sin(\phi)$  y una componente tangencial a la superficie terrestre  $b = 2\omega_T \cos(\phi)$ .

Introduciendo el vector  $\mathbf{k} = (0, b, f)$  se pueden escribir las ecuaciones del movimiento (1.11) en forma vectorial como:

$$\rho(D_t \mathbf{u} + \mathbf{k} \times \mathbf{u}) = -\nabla P - \rho \mathbf{g} \quad (1.12)$$

### 1.3. La aproximación de Boussinesq

#### 1.2.3 Sistema de coordenadas y plano de referencia

Si se quisiera considerar, por ejemplo, la circulación general de los océanos a gran escala las coordenadas cartesianas no serían las más apropiadas y se deberían usar coordenadas esféricas para tener en cuenta la curvatura de la superficie terrestre y la variación del parámetro de Coriolis con la latitud. Pero si la proyección horizontal del área de estudio considerada no es muy grande, como se pretende en esta tesis, se puede trabajar sobre un plano tangente a la esfera terrestre y usar un sistema de coordenadas cartesianas sin que los errores se hagan apreciables.

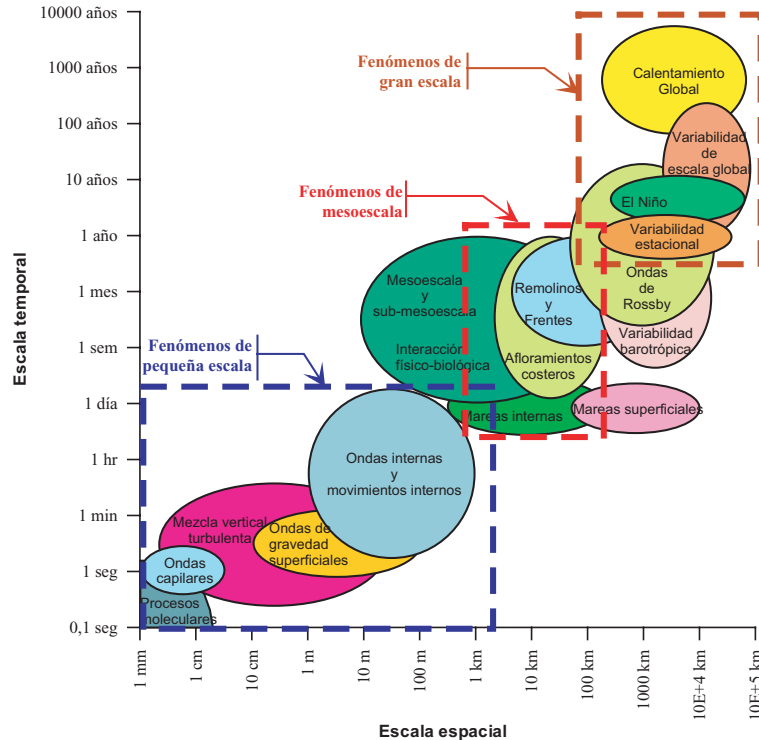


Figura 1.4: Esquema de los procesos físicos oceanográficos y sus rangos de escalas espacial y temporal aproximados.

Para fenómenos de escalas relativamente pequeñas comprendidas dentro de lo que se pretenden estudiar aquí y que se denomina generalmente en oceanografía como “*mesoescala*” (ver figura (1.4)), con un desarrollo latitudinal aproximado entre 1 y 100 km, se considera un plano tangente a la superficie terrestre denominado “Plano- $f$ ”, en el cual se considera constante el valor del parámetro de Coriolis en el centro del área y se utiliza un sistema de coordenadas cartesianas, ver figura (1.5).

### 1.3 La aproximación de Boussinesq

En el océano la densidad del agua de mar varía, pero no mucho, alrededor de un valor medio. Las fluctuaciones de la densidad dentro de la cuenca de un

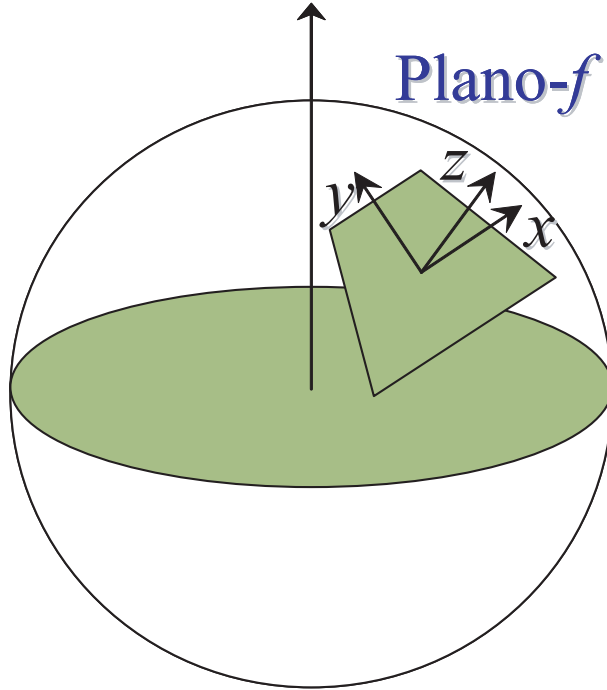


Figura 1.5: Configuración del plano tangente a la superficie terrestre, denominado “Plano- $f$ ”, en el cual se considera constante el parámetro de Coriolis en el centro del área.

océano son muy pequeñas; aún en los estuarios donde el agua dulce de los ríos eventualmente pasa a ser agua salada, la diferencia de densidad relativa es menor a un 2% (Roisin, 1994, *pág.* 37). La mayor parte de la variación de la densidad ocurre en la dirección vertical y puede ser atribuida a los efectos de la presión hidrostática. Solo una pequeña parte de dicha variación corresponde a los efectos de la flotabilidad. Esto hace justificable asumir en la mayoría de las veces que la densidad del fluido no se aparta mucho de un valor medio de referencia  $\rho_0$ . Por lo tanto se puede descomponer la densidad en dos partes:

$$\rho(x, y, z, t) = \rho_0 + \rho'(x, y, z, t) \text{ siendo } \rho' \ll \rho_0 \quad (1.13)$$

donde  $\rho_0$  representa la densidad media del agua de mar y  $\rho'$  son las pequeñas fluctuaciones relacionadas con la estratificación del agua del mar debidas a la temperatura, salinidad y presión.

La aproximación de Boussinesq consiste en despreciar  $\rho'$  en el término de la izquierda de la ecuación (1.12), considerando solo la densidad media de referencia  $\rho_0$ , a diferencia del término del lado derecho de la ecuación donde multiplica a la gravedad  $\rho \mathbf{g}$ , en que se conservan ambos términos de la ecuación (1.13). En este término, en el que se tiene en cuenta el peso del fluido que causa el incremento de la presión con la profundidad y se denomina *término de flotabilidad*, sin embargo, no se puede despreciar  $\rho'$  en comparación con  $\rho_0$  como se hizo anteriormente.

Físicamente, esto implica que la conservación de la masa se ha conver-



## 1.4. Fricción molecular

tido en conservación del volumen (Roisin, 1994; de Szoeke y Samelson, 2002). Siempre que se considere la densidad casi uniforme, el volumen es una buena aproximación para la masa. Esta aproximación, introduce un pequeño error en el lado izquierdo de la ecuación de movimiento (1.12), no obstante esto, no produce una considerable pérdida de la precisión (Roisin, 1994). Otra de las implicaciones de esta simplificación es la eliminación de las ondas de sonido del campo de aplicaciones de este modelo. La ecuación del movimiento con la aproximación de Boussinesq, introduciendo también por conveniencia la presión cinemática del fluido como  $p = P/\rho_0$ , puede escribirse entonces como:

$$D_t \mathbf{u} + \mathbf{k} \times \mathbf{u} + \nabla p = -\rho/\rho_0 \mathbf{g} \quad (1.14)$$

## 1.4 Fricción molecular

Se deben tener en cuenta también la fricción molecular dentro del fluido y las diferencias de velocidades dentro del mismo. Las tensiones debidas a la fricción molecular están relacionadas con la velocidad de corte  $\tau_{zx} \propto u/h$  o  $\tau_{zx} = \mu \partial_z u$ , donde  $\mu$  es el coeficiente de viscosidad molecular, el cual es una propiedad del fluido (ver figura (1.6)) (Mellor, 1996).

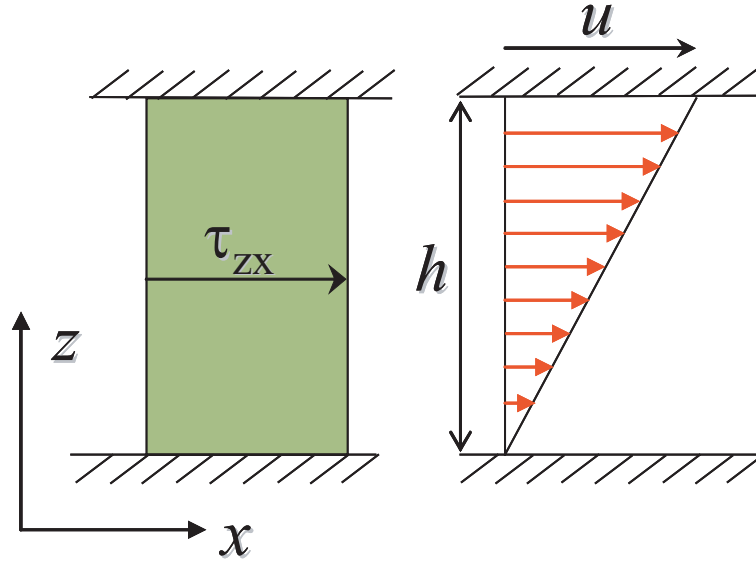


Figura 1.6: Las tensiones en un fluido isotrópico confinado entre dos planos infinitos, cuando el plano superior se desliza con respecto al plano inferior, son proporcionales a la deformación del fluido.

De esta manera el efecto de la fricción molecular puede ser expresado en función de la velocidad y se puede escribir la fuerza de fricción  $\mathbf{F}_v$  por unidad de masa como:

$$\mathbf{F}_v = \nu(\partial_{xx} \mathbf{u} + \partial_{yy} \mathbf{u} + \partial_{zz} \mathbf{u}) \quad (1.15)$$

siendo  $\nu = \mu/\rho_0$  la viscosidad cinemática molecular función de la salinidad, la temperatura y la presión  $\nu = \nu(S, T, p)$  del agua. Para su uso en oceanografía, en las derivadas de la expresión (1.15), se asumió que el fluido era incompresible para poder despreciar las derivadas cruzadas muy pequeñas respecto a las derivadas que se han conservado.

Las componentes de la ecuación del movimiento para un fluido viscoso, reemplazando el término  $D_t \mathbf{u}$  en la ecuación (1.14) por su derivada material  $D_t = \partial_t + \mathbf{u} \cdot \nabla$  e incorporando el término de fricción molecular quedan de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \partial_t u + u \partial_x u + v \partial_y u + w \partial_z u - f v + b w + \partial_x p &= \nu (\partial_{xx} u + \partial_{yy} u + \partial_{zz} u) \\ \partial_t v + u \partial_x v + v \partial_y v + w \partial_z v + f u + \partial_y p &= \nu (\partial_{xx} v + \partial_{yy} v + \partial_{zz} v) \\ \partial_t w + u \partial_x w + v \partial_y w + w \partial_z w - b u + \partial_z p &= \nu (\partial_{xx} w + \partial_{yy} w + \partial_{zz} w) - \rho / \rho_0 g \end{aligned} \quad (1.16)$$

## 1.5 Tensiones turbulentas de Reynolds

Las ecuaciones (1.16) aplicadas a la velocidad instantánea de un fluido describen con una excelente aproximación el comportamiento de los fluidos como por ejemplo el agua de los océanos. No obstante, los movimientos reales del mar son generalmente turbulentos, y como la turbulencia se manifiesta en una escala temporal muy pequeña no es práctico resolver estas ecuaciones instantáneas. Con el fin de obtener un sistema ecuaciones promediadas en el tiempo más apropiadas para tratar la velocidad media del flujo y no la turbulencia se descompone, de acuerdo con la ecuación (1.17), el campo de velocidades del fluido  $\mathbf{u}$  en dos partes. La primera de ellas,  $\langle \mathbf{u} \rangle$  es la que se desea describir en detalle y representa la velocidad media de la circulación; esta formada por el flujo de media y gran escala. La segunda parte,  $\mathbf{u}'$ , representa la turbulencia (fluctuaciones de la velocidad en una escala de tiempo más pequeña), la cual no es directamente de interés excepto en la medida en que esta afecte a la velocidad media del flujo. Parte del problema conceptual surge inmediatamente aquí, pero no hay una forma completamente lógica de decidir como afecta esta descomposición y si un movimiento se considera como parte de la velocidad media del flujo o de la turbulencia. Así pues:

$$\mathbf{u} = \langle \mathbf{u} \rangle + \mathbf{u}' \quad (1.17)$$

donde los signos  $\langle \rangle$  tienen el significado de un operador en términos de promediado temporal.

De la misma manera que se efectuó la descomposición de la velocidad en la ecuación (1.17) se hace también para la otra variable del problema, la presión:

$$p = \langle p \rangle + p' \quad (1.18)$$

Se puede escribir el promediado de la primera componente de la ecuación del movimiento en la escala de la turbulencia haciendo uso de las descomposiciones para la velocidad (1.17), la presión (1.18) y de la condición de incompresibilidad (ver Apéndice 5.2):

$$\begin{aligned} \partial_t \langle u \rangle + \langle u \rangle \partial_x \langle u \rangle + \langle v \rangle \partial_y \langle u \rangle + \langle w \rangle \partial_z \langle u \rangle - f \langle v \rangle + b \langle w \rangle + \partial_x \langle p \rangle = \\ v (\partial_{xx} \langle u \rangle + \partial_{yy} \langle u \rangle + \partial_{zz} \langle u \rangle) - \partial_x \langle u' u' \rangle - \partial_y \langle v' u' \rangle - \partial_z \langle w' u' \rangle \end{aligned} \quad (1.19)$$

## 1.5. Tensiones turbulentas de Reynolds

La ecuación (1.19) para  $\langle u \rangle$  está escrita enteramente en términos de la velocidad media del flujo, con la importante excepción de los tres últimos términos nuevos de la derecha. Aunque  $u', v', w'$  tienen de promedio cero (ver Apéndice 5.2), las fluctuaciones del flujo de movimiento las cuales son una función cuadrática de las fluctuaciones de la velocidad, no desaparecen necesariamente cuando se promedian. Estos términos nuevos representan el efecto de las fluctuaciones de la velocidad o “*turbulencia*” sobre la velocidad media del flujo y es equivalente a una tensión  $\tau_{xy}$  que actúa sobre esta redistribuyéndola. El promediado de las ecuaciones que describen la circulación en términos de estos campos de tensiones, suprimiendo la notación  $\langle \rangle$ , se escribe:

$$\begin{aligned} \partial_t u + u \partial_x u + v \partial_y u + w \partial_z u - f v + b w + \partial_x p = \\ v(\partial_{xx} u + \partial_{yy} u + \partial_{zz} u) + 1/\rho_0(\partial_x \tau_{xx} + \partial_y \tau_{xy} + \partial_z \tau_{xz}) \end{aligned} \quad (1.20a)$$

$$\begin{aligned} \partial_t v + u \partial_x v + v \partial_y v + w \partial_z v + f u + \partial_y p = \\ v(\partial_{xx} v + \partial_{yy} v + \partial_{zz} v) + 1/\rho_0(\partial_x \tau_{yx} + \partial_y \tau_{yy} + \partial_z \tau_{yz}) \end{aligned} \quad (1.20b)$$

$$\begin{aligned} \partial_t w + u \partial_x w + v \partial_y w + w \partial_z w - b u + \partial_z p = \\ v(\partial_{xx} w + \partial_{yy} w + \partial_{zz} w) + 1/\rho_0(\partial_x \tau_{zx} + \partial_y \tau_{zy} + \partial_z \tau_{zz}) - \rho/\rho_0 g \end{aligned} \quad (1.20c)$$

A partir de ahora se sobreentenderá que las velocidades se refieren únicamente a las velocidades medias del flujo. Las ecuaciones del movimiento (1.20) que consideran las tensiones debidas a fricción se denominan ecuaciones de Reynolds y se pueden escribir vectorialmente como:

$$\partial_t \mathbf{u} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} + \mathbf{k} \times \mathbf{u} + \nabla p = -\rho/\rho_0 \mathbf{g} + v \Delta \mathbf{u} + 1/\rho_0 \nabla \cdot \boldsymbol{\tau} \quad (1.21)$$

siendo  $\Delta$  el operador laplaciano y  $\boldsymbol{\tau}$  el tensor de tensiones:

$$\boldsymbol{\tau} = \begin{bmatrix} \tau_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \tau_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \tau_{zz} \end{bmatrix} \quad (1.22)$$

donde las tensiones que aparecen en el tensor (1.22) están dadas por:

$$\begin{aligned} \tau_{xx} &= -\rho_0 \langle u'u' \rangle \\ \tau_{yy} &= -\rho_0 \langle v'v' \rangle \\ \tau_{zz} &= -\rho_0 \langle w'w' \rangle \\ \tau_{xy} &= \tau_{yx} = -\rho_0 \langle u'v' \rangle \\ \tau_{xz} &= \tau_{zx} = -\rho_0 \langle u'w' \rangle \\ \tau_{yz} &= \tau_{zy} = -\rho_0 \langle v'w' \rangle \end{aligned} \quad (1.23)$$

Estas tensiones (1.23), las cuales aparecen como un resultado natural del promediado de cada componente de la ecuación de movimiento, son las llamadas “**Tensiones de Reynolds**”. Las tensiones de Reynolds aparecen a partir de la descomposición del campo de velocidades en velocidad media del flujo y a la velocidad de la turbulencia. Estas no representan nuevos mecanismos físicos sobre el nivel de la dinámica de fluidos fundamental, sino que son la consecuencia directa de la decisión de referirse enteramente sobre la dinámica de la circulación media no turbulenta. La mayor dificultad que se plantea ahora

es como especificar las tensiones de Reynolds, únicamente en términos de las velocidades medias del flujo, para que las ecuaciones (1.21) representen un juego cerrado de ecuaciones. Una de las formas más comunes y también de las más simple de tratarla es imaginando que el movimiento turbulento actúa sobre la velocidad media del flujo de una manera que imita la forma en la cual el movimiento molecular afecta el flujo macroscópico. Es decir, se asume que las tensiones de Reynolds dependen en forma lineal de las derivadas espaciales de las velocidades medias del flujo. Los fluidos que se comportan de esta manera, entre ellos el agua, son llamados fluidos newtonianos y responden a un modelo sencillo para las tensiones que conforman el tensor de tensiones simétrico (1.23) (ver Pönd y Pickard, 1983). Se tiene entonces:

$$\begin{aligned}
 \tau_{xx} &= 2\rho_0\nu_H\partial_x u \\
 \tau_{yy} &= 2\rho_0\nu_H\partial_y v \\
 \tau_{zz} &= 2\rho_0\nu_V\partial_z w \\
 \tau_{xy} &= \tau_{yx} = \rho_0\nu_H(\partial_x v + \partial_y u) \\
 \tau_{xz} &= \tau_{zx} = \rho_0\nu_V\partial_z u + \rho_0\nu_H\partial_x w \\
 \tau_{yz} &= \tau_{zy} = \rho_0\nu_V\partial_z v + \rho_0\nu_H\partial_y w
 \end{aligned} \tag{1.24}$$

siendo  $\nu_H$  y  $\nu_V$  los llamados coeficientes de viscosidad turbulenta horizontal y vertical respectivamente (viscosidad cinemática).

Reemplazando las tensiones de (1.24) en la ecuación (1.20a), aplicando el teorema de Schwarz que permite cambiar el orden de las derivadas y teniendo en cuenta la condición de divergencia nula ( $\partial_x u + \partial_y v + \partial_z w = 0$ ) se tiene:

$$\begin{aligned}
 \partial_t u + u\partial_x u + v\partial_y u + w\partial_z u - fv + bw + \partial_x p = \\
 v(\partial_{xx} u + \partial_{yy} u + \partial_{zz} u) + (\partial_x(\nu_H\partial_x u) + \partial_y(\nu_H\partial_y u) + \partial_z(\nu_V\partial_z u))
 \end{aligned} \tag{1.25a}$$

Operando de la misma manera para las otras dos componentes de la ecuación del movimiento (1.20) éstas quedan:

$$\begin{aligned}
 \partial_t v + u\partial_x v + v\partial_y v + w\partial_z v + fu + \partial_y p = \\
 v(\partial_{xx} v + \partial_{yy} v + \partial_{zz} v) + (\partial_x(\nu_H\partial_x v) + \partial_y(\nu_H\partial_y v) + \partial_z(\nu_V\partial_z v))
 \end{aligned} \tag{1.25b}$$

$$\begin{aligned}
 \partial_t w + u\partial_x w + v\partial_y w + w\partial_z w - bu + \partial_z p = -\rho/\rho_0 g \\
 + v(\partial_{xx} w + \partial_{yy} w + \partial_{zz} w) + (\partial_x(\nu_H\partial_x w) + \partial_y(\nu_H\partial_y w) + \partial_z(\nu_V\partial_z w))
 \end{aligned} \tag{1.25c}$$

No hay *a priori* una razón para que los coeficientes de viscosidad turbulenta horizontal  $\nu_H$  y vertical  $\nu_V$  sean idénticos. Además, la anisotropía existente entre las escalas espaciales horizontal y vertical de la circulación general en el océano sugiere que no puede esperarse que la mezcla de movimiento en las dos direcciones sea la misma. Por lo cual se pueden escribir las componentes de la ecuación de Navier-Stokes a partir de las ecuaciones (1.25a), (1.25b) y (1.25c), como:

$$\begin{aligned}
 \partial_t u + u\partial_x u + v\partial_y u + w\partial_z u - fv + bw + \partial_x p = \\
 \partial_x((v + \nu_H)\partial_x u) + \partial_y((v + \nu_H)\partial_y u) + \partial_z((v + \nu_V)\partial_z u)
 \end{aligned} \tag{1.26a}$$

$$\partial_t v + u\partial_x v + v\partial_y v + w\partial_z v + fu + \partial_y p = \tag{1.26b}$$

## 1.6. Coeficientes de difusión horizontal y vertical

$$\begin{aligned} & \partial_x((v + \nu_H) \partial_x v) + \partial_y((v + \nu_H) \partial_y v) + \partial_z((v + \nu_V) \partial_z v) \\ & \partial_t w + u \partial_x w + v \partial_y w + w \partial_z w - bu + \partial_z p = \\ & -\rho/\rho_0 g + \partial_x((v + \nu_H) \partial_x w) + \partial_y((v + \nu_H) \partial_y w) + \partial_z((v + \nu_V) \partial_z w) \end{aligned} \quad (1.26c)$$

La forma de estas ecuaciones son idénticas a las componentes de la ecuación ordinaria de Navier-Stokes con una viscosidad efectiva de  $(\nu + \nu)$ . El modelo es entonces equivalente a la idea de que las fluctuaciones turbulentas producen tensiones, las cuales pueden ser parametrizadas incrementando el valor de la viscosidad por encima del valor de la viscosidad molecular. Esto explica la mayor eficiencia del suavizado sobre el movimiento del flujo no turbulento a través del gradiente promediado del movimiento, debido al transporte de grandes masas de fluidos más bien que de moléculas. Se puede asumir además con toda seguridad que ambos,  $\nu_H$  y  $\nu_V$  son mucho mayores que la viscosidad molecular  $\nu$  en (1.26), por eso que de aquí en adelante los términos proporcionales a la viscosidad molecular serán ignorados para modelar la circulación general (Pönd y Pickard, 1983), quedando entonces las componentes de la ecuación de Navier-Stokes como:

$$\begin{aligned} \partial_t u + u \partial_x u + v \partial_y u + w \partial_z u - fv + bw + \partial_x p = \\ \partial_x(\nu_H \partial_x u) + \partial_y(\nu_H \partial_y u) + \partial_z(\nu_V \partial_z u) \end{aligned} \quad (1.27a)$$

$$\begin{aligned} \partial_t v + u \partial_x v + v \partial_y v + w \partial_z v + fu + \partial_y p = \\ \partial_x(\nu_H \partial_x v) + \partial_y(\nu_H \partial_y v) + \partial_z(\nu_V \partial_z v) \end{aligned} \quad (1.27b)$$

$$\begin{aligned} \partial_t w + u \partial_x w + v \partial_y w + w \partial_z w - bu + \partial_z p = \\ -\rho/\rho_0 g + \partial_x(\nu_H \partial_x w) + \partial_y(\nu_H \partial_y w) + \partial_z(\nu_V \partial_z w) \end{aligned} \quad (1.27c)$$

Por lo tanto, la ecuación de Navier-Stokes en forma vectorial se puede expresar como:

$$\begin{aligned} \partial_t \mathbf{u} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} + \mathbf{k} \times \mathbf{u} + \nabla p = -\rho/\rho_0 \mathbf{g} \\ + (\partial_x(\nu_H \partial_x \mathbf{u}) + \partial_y(\nu_H \partial_y \mathbf{u}) + \partial_z(\nu_V \partial_z \mathbf{u})) \end{aligned} \quad (1.28)$$

Las estimaciones realizadas en el océano de  $\nu_H$  y  $\nu_V$  indican que estas varían considerablemente. Estas estimaciones sugieren valores entre  $10^1$  a  $10^4$   $\text{m}^2/\text{s}$  para  $\nu_H$ , mientras que se han dado estimaciones similarmente amplias del orden de  $10^{-4}$  a  $10^{-1}$   $\text{m}^2/\text{s}$  para  $\nu_V$  (Pedlosky, 1987).

## 1.6 Coeficientes de difusión horizontal y vertical

Uno de los problemas más complejo en la modelización oceanográfica es la adecuada parametrización de los procesos de difusión horizontal y vertical de “*momentum*” (cantidad de movimiento). En los modelos numéricos, estos procesos se representan mediante los coeficientes de turbulencia horizontal  $\nu_H$  y vertical  $\nu_V$ . Los valores para estos dos parámetros se calculan a partir de un determinado esquema de turbulencia. La selección del esquema más adecuado es a menudo una tarea muy ardua, debido a que esto depende específicamente del

tipo de proceso físico que caracteriza al área de estudio (*p. ej.* mareas, termoclinas, frentes, *etc.*), de la resolución vertical del modelo y de la cantidad de tiempo de CPU disponible. Por esta razón, una gran variedad de parametrizaciones de la turbulencia con un substancial rango de complejidad han sido desarrollados y validados en la literatura (alguna de ellas son *p. ej.* Large *et al.*, 1994; Mellor y Yamada, 1974, 1982), desde las más simples formulaciones algebraicas hasta esquemas de clausura turbulenta de segundo orden con ecuaciones de transporte adicional para la turbulencia. De este amplio abanico de esquemas de turbulencia, se han implementado hasta el momento para esta tesis, solamente dos de las posibles aproximaciones del parámetro de difusión turbulenta horizontal  $\nu_H$ . En la primera de ellas se considera la forma más simple de parametrizar la difusión turbulenta horizontal  $\nu_H$ , asignando a dicho coeficiente un valor constante en tiempo y espacio, mientras que en la segunda, la magnitud de  $\nu_H$  se obtiene a partir de la parametrización de Smagorinsky (1963). Esta se formula para el caso de una resolución numérica de las ecuaciones de la siguiente manera:

$$\nu_H = C_{m_0} \Delta x \Delta y D_T \quad (1.29)$$

siendo  $C_{m_0}$  un coeficiente adimensional de viscosidad de Smagorinsky,  $\Delta x, \Delta y$  los tamaños en “*x*” e “*y*” de la discretización horizontal que se utilice para resolver numéricamente la ecuación (1.29), mientras que:

$$D_T^2 = (\partial_x u)^2 + (\partial_y v)^2 + 1/2(\partial_y u + \partial_x v)^2$$

donde  $D_T$  es la magnitud de deformación del tensor de velocidades. La magnitud del parámetro adimensional  $C_{m_0}$  se puede determinar empíricamente. Smagorinsky (1993), proporciona una fuente de teorías para la elección de  $C_{m_0}$  con turbulencia tridimensional homogénea e isotrópica. El rango sugerido es  $0, 1 \leq C_{m_0} \leq 0, 2$ , siendo el parámetro utilizado por defecto en el modelo  $C_{m_0} = 0, 1$ .

La viscosidad de Smagorinsky se incrementa para regiones donde la tensión de corte horizontal se hace importante como ocurre cerca de los contornos, mientras que se reduce en regiones con velocidades bajas como son las regiones del interior de los océanos, así como también en regiones donde el tamaño de la malla computacional disminuye. Generalmente, esta aproximación produce suficiente viscosidad para aquellas regiones donde las velocidades de las corrientes son altas, sin embargo puede tener una tendencia a sub-disipar en las regiones más tranquilas (Griffies y Hallberg, 2000).

De la misma manera, como se hizo con el coeficiente de viscosidad turbulenta horizontal, se puede asumir también un valor constante en tiempo y espacio para el coeficiente de difusión turbulenta vertical  $\nu_V$ . Adicionalmente, se ha implementado dos diferentes formulaciones algebraicas en función del número de Richardson que determina la estabilidad de la capa de fluido.

La primera de las formulaciones es la de Pacanowski y Philander (1981):

$$\nu_V = \nu_{0p} f_p^{n_p} (Ri) + \nu_{bp} \quad (1.30a)$$

$$f_p(Ri) = (1 + \alpha_p Ri)^{-1} \quad (1.30b)$$

El número de Richardson  $Ri$  expresa la razón entre las fuerzas de flotación y las fuerzas inerciales :

## 1.7. Superficie libre y gradientes de densidad

---

$$Ri = N^2/M^2 \quad (1.31)$$

donde  $N^2$  es la frecuencia de oscilaciones verticales, llamada también frecuencia de estratificación o de Brunt-Väisälä (Roisin, 1994):

$$N^2 = -\frac{g}{\rho_0} \frac{\partial \rho}{\partial z} \quad (1.32)$$

y  $M^2$  esta definida por el gradiente de las velocidades horizontales  $u$  y  $v$  como:

$$M^2 = \left( \frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 + \left( \frac{\partial v}{\partial z} \right)^2 \quad (1.33)$$

A fin de evitar que la turbulencia se haga demasiado grande en el caso de que la estratificación sea inestable ( $Ri < 0$ ), se impone como límite para  $f_p$  la siguiente condición :

$$\nu_V/\nu_{0p} \approx f_p^{n_p} < \nu_{max} \quad (1.34)$$

Por defecto se utilizan para esta formulación los valores de los parámetros  $\nu_{0p} = 10^{-2}$ ,  $n_p = 2$ ,  $\alpha_p = 5$ ,  $\nu_{bp} = 10^{-4}$  y  $\nu_{max} = 3$ . Tomando para estos valores el límite superior de  $\nu_V$  el valor de 0,03.

Esta formulación fue desarrollada principalmente para aplicaciones oceánicas a escala global (Semtner y Chervin, 1988) y tiene la ventaja de ser menos sensitivo a la resolución vertical que otros modelos de cierre turbulento más avanzados. En la ausencia de estratificación el coeficiente toma valores uniformes, lo cual hace al esquema menos apto para el estudio de mareas y circulación inducida por vientos.

La segunda de las formulaciones es la formulación empírica y más clásica propuesta por Munk y Anderson (1948):

$$\nu_V = \nu_{0m} f_m (Ri) + \nu_b \quad (1.35a)$$

$$f_m (Ri) = (1 + \alpha_m Ri)^{-n_1} \quad (1.35b)$$

donde  $\nu_b$  es un valor de referencia del coeficiente de viscosidad turbulenta vertical. De forma análoga a la formulación anterior, se considera para este caso el siguiente límite superior:

$$f_m < \nu_{max} \quad (1.36)$$

En tanto que se toman por defecto los valores de  $\nu_{0m} = 0,06$ ,  $\alpha_m = 10$ ,  $n_1 = 0,5$  y  $\nu_{max} = 3$ . Nótese también que en ambas formulaciones, los valores de  $\nu_{0p}$ ,  $\nu_{bp}$ ,  $\nu_{0m}$  y  $\nu_b$  son expresados en las mismas unidades que  $\nu_V$ , por ejemplo en  $m^2/s$ .

## 1.7 Superficie libre y gradientes de densidad

La presión  $p(x, y, z, t)$  en las ecuaciones (1.27a)-(1.27c) puede ser descompuesta en la suma de sus componentes hidrostáticas y no-hidrostática, (ver Casulli, 1999). La componente hidrostática de la presión de un fluido, se puede determinar a partir de la componente vertical de la ecuación del movimiento (1.27c),

despreciando el término de aceleración convectiva, de Coriolis y de aceleración viscosa. De esta manera, la presión  $p(x, y, z, t)$  puede ser expresada como:

$$p(x, y, z, t) = p_{atm}(x, y, t) + g[\eta(x, y, t) - z] + g \int_z^\eta (\rho - \rho_0)/\rho_0 d\zeta + q(x, y, z, t) \quad (1.37)$$

siendo el primer término del lado derecho de la ecuación anterior la presión atmosférica, el segundo y tercer término representan las contribuciones barotrópicas y baroclínicas a la presión hidrostática, respectivamente, donde  $\eta(x, y, t)$  es la altura de superficie libre relativa a la altura de referencia  $z = 0$ , correspondiente al nivel medio del mar (ver figura (1.7)) y finalmente  $q(x, y, z, t)$  es la presión no-hidrostática.

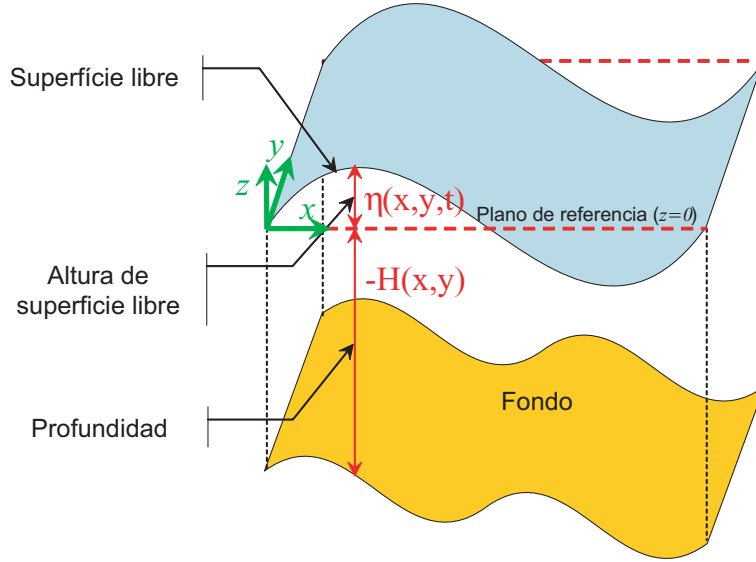


Figura 1.7: Esquema de la altura de superficie libre y profundidad referidos al plano de referencia.

Derivando las componentes de la presión  $p(x, y, z, t)$  dados por la ecuación (1.37) para cada una de las variables espaciales  $(x, y, z)$  y reemplazándolos por sus términos respectivos  $\partial_x p$ ,  $\partial_y p$  y  $\partial_z p$  en cada una de las ecuaciones (1.27a), (1.27b) y (1.27c) y considerando además que  $p_{atm} = 0$  se obtiene la siguiente ecuación:

$$\partial_t \mathbf{u} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} + \mathbf{k} \times \mathbf{u} + \nabla q - \partial_x (\nu_H \partial_x \mathbf{u}) - \partial_y (\nu_H \partial_y \mathbf{u}) - \partial_z (\nu_V \partial_z \mathbf{u}) = -g \nabla_H \eta - g \nabla_H \left[ \int_z^\eta (\rho - \rho_0)/\rho_0 d\zeta \right] \quad (1.38)$$

siendo  $\nabla_H = (\partial_x, \partial_y, 0)$  el operador gradiente horizontal extendido a 3D. Sobre la derecha de la ecuación (1.38), aparecen dos nuevos términos, de izquierda a derecha, el término barotrópico (superficie libre) y el término baroclínico (gradientes de densidad), sin embargo desaparece el término de flotabilidad y el



## 1.8. Ecuaciones a resolver

---

término de presión pasa de representar la presión hidrostática a representar la presión no-hidrostática.

Las ondas que se desplazan sobre aguas poco profundas, como así también las agitaciones de baja amplitud y otros movimientos de la superficie libre en los cuales la superficie no se aleja demasiado de la horizontal como es el caso de las mareas, pueden ser descritos por la altura de la superficie libre  $\eta$ . La evolución temporal de la altura es gobernada por la ecuación cinemática:

$$\partial_t \eta + u \partial_x \eta + v \partial_y \eta = w \quad (1.39)$$

donde  $(u, v, w)$  son las velocidades del fluido en las direcciones  $(x, y, z)$  calculadas por la ecuación (1.38). Esta ecuación es una expresión matemática que refleja el hecho de que la superficie se mueve junto con el fluido.

La mayoría de los modelos para problemas de flujo incompresible con superficie libre existentes, (ver *p. ej.* Mahadevan *et al.*, 1996; Casulli y Zanolli, 2002; Lin y Li, 2002; Yuan y Wu, 2004; Deponti *et al.*, 2006; Lee *et al.*, 2006, entre otros) integran verticalmente la ecuación de continuidad (1.3) a lo largo de cada columna del fluido y utilizan la condición cinemática (1.39) para derivar una ecuación de superficie libre verticalmente promediada; sin embargo, en esta tesis se resuelve directamente la ecuación (1.39) tal cual es, sin ninguna otra aproximación. La resolución numérica de esta ecuación presenta la ventaja de no ser afectada por los errores debidos a la presencia de una suave compresibilidad numérica en la solución discreta, resultando en un esquema robusto y con un requerimiento de memoria relativamente pequeño, debido a que se deben almacenar solamente los valores de la altura para un número determinado de posiciones horizontales, dado por la discretización de la superficie libre (2D). Los valores de la altura de superficie libre para cada uno de estos puntos de la superficie libre calculados por medio de la ecuación cinemática (1.39) serán posteriormente introducidos explícitamente a través del primer término  $-g \nabla_H \eta$  en la derecha de la ecuación (1.38).

## 1.8 Ecuaciones a resolver

El sistema de ecuaciones que gobierna la dinámica del océano que consideraremos se puede plantear matemáticamente en un dominio tridimensional  $\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / (x, y) \in S, -\mathcal{H}(x, y) < z < 0\}$ , limitado superiormente por un conjunto poligonal, abierto y acotado  $S \subset \mathbb{R}^2$  la superficie libre e inferiormente por una función no negativa  $\mathcal{H} : S \rightarrow \mathbb{R}$  la batimetría (profundidad del fondo), como:

$$\begin{aligned} & \partial_t \mathbf{u} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} + \mathbf{k} \times \mathbf{u} + \nabla q \\ & - \partial_x (\nu_H \partial_x \mathbf{u}) - \partial_y (\nu_H \partial_y \mathbf{u}) - \partial_z (\nu_V \partial_z \mathbf{u}) = \\ & - g \nabla_H \eta - g \nabla_H \left[ \int_z^\eta (\rho - \rho_0) / \rho_0 d\zeta \right] \quad \text{en } \Omega \times (0, T) \end{aligned} \quad (1.40a)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad \text{en } \Omega \times (0, T) \quad (1.40b)$$

$$\partial_t \eta + u \partial_x \eta + v \partial_y \eta = w \quad \text{en } S \times (0, T) \quad (1.40c)$$

siendo  $T$  un tiempo final dado.

El problema aquí considerado consiste en hallar para cada instante de tiempo  $t \in (0, T)$ , el campo de velocidades  $\mathbf{u}(x, y, z, t) = (u, v, w)$  y la presión no-hidroestática  $q(x, y, z, t)$  del fluido en cada punto  $(x, y, z) \in \Omega$ , así como también la altura de la superficie libre  $\eta(x, y, t)$  en cada punto  $(x, y) \in S$ , que sean solución del sistema de ecuaciones dado por las ecuaciones (1.40). Se considera aquí un modelo de tipo diagnóstico en densidades, por lo cual la distribución de las densidades  $\rho$  se supone conocida en cada punto del espacio  $(x, y, z)$  y en cada instante de tiempo  $t$ . El problema planteado en (1.40) se puede escribir en componentes como:

$$\partial_t u + u\partial_x u + v\partial_y u + w\partial_z u - fv + bw + \partial_x q - \partial_x(\nu_H \partial_x u) \quad (1.41a)$$

$$- \partial_y(\nu_H \partial_y u) - \partial_z(\nu_V \partial_z u) = -g\partial_x \eta - g\partial_x \left[ \int_z^\eta (\rho - \rho_0)/\rho_0 d\zeta \right]$$

$$\partial_t v + u\partial_x v + v\partial_y v + w\partial_z v + fu + \partial_y q - \partial_x(\nu_H \partial_x v) \quad (1.41b)$$

$$- \partial_y(\nu_H \partial_y v) - \partial_z(\nu_V \partial_z v) = -g\partial_y \eta - g\partial_y \left[ \int_z^\eta (\rho - \rho_0)/\rho_0 d\zeta \right]$$

$$\partial_t w + u\partial_x w + v\partial_y w + w\partial_z w - bu + \partial_z q - \partial_x(\nu_H \partial_x w) \quad (1.41c)$$

$$- \partial_y(\nu_H \partial_y w) - \partial_z(\nu_V \partial_z w)$$

$$\partial_x u + \partial_y v + \partial_z w = 0 \quad (1.41d)$$

$$\partial_t \eta + u\partial_x \eta + v\partial_y \eta = w \quad (1.41e)$$

## 1.9 Condiciones de contorno e iniciales

El sistema de ecuaciones en derivadas parciales (1.40) debe complementarse con condiciones de contorno e iniciales adecuadas para conformar un problema de valores iniciales y de contorno que conduzcan a una solución única (problema bien planteado). Para ello se necesita prescribir únicamente condiciones de contorno sobre la normal y las dos componentes tangentes al contorno en velocidad o tensión. Estas condiciones deben, reflejar los principales fenómenos físicos que afectan al flujo a través de la frontera del dominio  $\Omega$ , para ello se prescriben cantidades físicas relevantes sobre todos los contornos del dominio tridimensional incluyendo el fondo y la superficie libre. La frontera del dominio  $\Gamma = \partial\Omega$  se asume que será una superficie cerrada y suficientemente regular (Lipschitz continua) y que puede descomponerse en  $\partial\Omega = \Gamma_s \cup \Gamma_b \cup \Gamma_l$ , siendo:

$$\begin{aligned} \Gamma_s &= S \times 0 && \text{(Superficie)} \\ \Gamma_b &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / (x, y) \in S, -\mathcal{H}(x, y) = z\} && \text{(Fondo)} \\ \Gamma_l &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / (x, y) \in \partial S, -\mathcal{H}(x, y) \leq z \leq 0\} && \text{(Frontera lateral)} \end{aligned}$$

Las condiciones de contorno para las ecuaciones de movimiento pueden ser expresadas de la siguiente manera:

En el fondo del dominio  $\Gamma_b$  se considera que el flujo de masa que atraviesa el mismo es nulo y no se tienen en cuenta efectos de la porosidad. Por lo cual se emplea la siguiente condición de contorno cinemática para el fondo impermeable:

$$w + u\partial_x \mathcal{H} + v\partial_y \mathcal{H} = 0 \text{ en } \Gamma_b \quad (1.42)$$

## 1.9. Condiciones de contorno e iniciales

Así mismo se considera que la fricción con el fondo debida a la rugosidad del mismo es una función lineal de la velocidad horizontal:

$$\begin{aligned} \nu_H n_x (\partial_x u, \partial_x v) + \nu_H n_y (\partial_y u, \partial_y v) + \nu_V n_z (\partial_z u, \partial_z v) = \\ (\tau_b^x, \tau_b^y) := C_b(u, v) \text{ en } \Gamma_b \end{aligned} \quad (1.43)$$

siendo  $\mathbf{n} = (n_x, n_y, n_z)$  un vector unitario normal al contorno  $\Gamma_b$  hacia el exterior,  $C_b$  es el coeficiente de Chézy en función de la rugosidad del fondo y cuyo valor es siempre positivo,  $\tau_b^x, \tau_b^y$  son las componentes horizontales de la fricción con fondo.

En la superficie libre  $\Gamma_s$  se considera la fricción horizontal debida al viento prescribiendo las tensiones tangenciales de la siguiente manera:

$$\nu_V (\partial_z u, \partial_z v) = (\tau_s^x, \tau_s^y) := \rho_a / \rho_0 C_s (U_{10}^2 + V_{10}^2)^{1/2} (U_{10}, V_{10}) \text{ en } \Gamma_s \quad (1.44)$$

donde  $\tau_s^x, \tau_s^y$  son las componentes horizontales de la fricción de viento,  $\rho_a$  es la densidad del aire ( $1,3 \text{ kg/m}^3$ ),  $C_s$  es un coeficiente adimensional de arrastre del viento que depende de la rugosidad terrestre y de la velocidad del viento de referencia y  $(U_{10}, V_{10})$  es la velocidad horizontal del viento a una altura de referencia de 10 m sobre el nivel del mar. Además, se impone una condición de tensión normal nula sobre la superficie  $\Gamma_s$ .

$$\nu_V \partial_z w = 0 \text{ en } \Gamma_s \quad (1.45)$$

Finalmente, de acuerdo a las diferentes condiciones físicas del problema, se pueden aplicar diferentes condiciones de contorno sobre las fronteras laterales que no se intersectan entre ellas, se pueden expresar como  $\Gamma_l = \Gamma_{in} \cup \Gamma_{wall} \cup \Gamma_{out}$ . Estas secciones se corresponden con contornos con flujos de entrada:

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_{in} \text{ en } \Gamma_{in} \quad (1.46)$$

donde  $\mathbf{u}_{in}$  es un valor prescrito (la velocidad de entrada).

Contornos de pared sólida: Se especifica la condición de impermeabilidad imponiendo que la velocidad normal a la pared sea nula aún cuando el fluido se podrá deslizar sin tensión tangencial sobre la pared.

$$n_x u + n_y v = 0 \text{ en } \Gamma_{wall} \quad (1.47)$$

donde  $(n_x, n_y)$  son la componentes horizontales de la normal al contorno.

Contornos con flujos de salida:

$$\nu_H n_x \partial_x \mathbf{u} + \nu_H n_y \partial_y \mathbf{u} = 0 \text{ en } \Gamma_{out} \quad (1.48)$$

Las condiciones iniciales para los problemas transitorios permiten asignar para un instante  $t = 0$  y para todo el dominio  $\Omega$  un campo de velocidades tal que:

$$\mathbf{u}(x, y, z, 0) = \mathbf{u}^0(x, y, z), \forall (x, y, z) \in \Omega \quad (1.49a)$$

donde  $\mathbf{u}^0$  es un campo de velocidades inicial de divergencia nula. De la misma manera, se puede imponer una condición inicial en  $t = 0$  para la altura de superficie libre  $\eta^0$ , sobre la superficie  $S$ :

$$\eta(x, y, 0) = \eta^0(x, y), \forall (x, y) \in S \quad (1.49b)$$

Como una consecuencia del hecho de que no aparezcan derivadas temporales de la presión en las ecuaciones de gobierno (1.40), no se necesita imponer condiciones iniciales para la presión del fluido. Cuando se impone una condición de tipo Dirichlet sobre todo el contorno, la presión esta presente solo por su gradiente en la ecuación (1.40a), por lo tanto está determinada únicamente salvo una constante aditiva arbitraria. En este caso, es usual imponer la presión promedio o el valor de la presión en un punto para definir únicamente el campo de presiones.

## 1.10 Formulación débil

Los métodos variacionales, y en particular el Método de los elementos Finitos mediante el que se aproximará el problema continuo definido por las ecuaciones (1.40), las condiciones de contorno (1.42)-(1.48) y las condiciones iniciales (1.49), consideran la forma débil de las ecuaciones diferenciales a resolver. Al solo efecto de introducir dicha forma débil y por simplicidad en la exposición, se supondrá a partir de ahora que  $\Gamma_l = \Gamma_{in}$  and  $\mathbf{u}_{in} = 0$ , es decir que en todo el contorno lateral se impondrá únicamente la condición Dirichlet homogénea. En este caso, la velocidad  $\mathbf{u}$ , la presión  $q$  del fluido y la altura de superficie libre  $\eta$ , las cuales son la solución débil de (1.40), pertenecen respectivamente a los espacios funcionales siguientes :

$$\begin{aligned} V &:= \{ \tilde{\mathbf{u}} = (\tilde{u}, \tilde{v}, \tilde{w}) \in \mathbf{H}^1(\Omega) / \tilde{\mathbf{u}} = 0 \text{ en } \Gamma_{in}, \tilde{w} + \tilde{u}\partial_x \mathcal{H} + \tilde{v}\partial_y \mathcal{H} = 0 \text{ en } \Gamma_b \} \\ Q &:= L^2(\Omega) \\ M &:= H^1(S) \end{aligned}$$

La forma débil de la ecuación de movimiento (1.40a) se obtiene multiplicando dicha ecuación por una función de peso (test)  $\tilde{\mathbf{u}} = (\tilde{u}, \tilde{v}, \tilde{w}) \in V$ , e integrando en el dominio  $\Omega$ . Al integrar por partes los términos difusivos mediante la fórmula de Green<sup>2</sup> para bajar el grado de las derivadas y disminuir así la regularidad de las funciones de forma, aparecen también integrales sobre el contorno. Si en estas integrales se introducen las condiciones de contorno (1.43), (1.44) y (1.45), se obtienen las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \partial_t \mathbf{u} \tilde{\mathbf{u}} d\Omega + \int_{\Omega} (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} \tilde{\mathbf{u}} d\Omega + \int_{\Omega} (\mathbf{k} \times \mathbf{u}) \tilde{\mathbf{u}} d\Omega + \int_{\Omega} \nabla q \tilde{\mathbf{u}} d\Omega \\ & + \int_{\Omega} (\nu_H \partial_x \mathbf{u} \partial_x \tilde{\mathbf{u}} + \nu_H \partial_y \mathbf{u} \partial_y \tilde{\mathbf{u}} + \nu_V \partial_z \mathbf{u} \partial_z \tilde{\mathbf{u}}) d\Omega = \\ & - g \int_{\Omega} \nabla_H \eta \tilde{\mathbf{u}} d\Omega - g \int_{\Omega} \nabla_H \left[ \int_z^{\eta} (\rho - \rho_0) / \rho_0 d\zeta \right] \tilde{\mathbf{u}} d\Omega \\ & + \int_{\Gamma_s} (\tau_s^x \tilde{u} + \tau_s^y \tilde{v}) d\Gamma_s + \int_{\Gamma_b} (\tau_b^x \tilde{u} + \tau_b^y \tilde{v}) d\Gamma_b + \int_{\Gamma_b} \mathbf{n}_\nu \cdot \nabla w \tilde{w} d\Gamma_b \end{aligned} \quad (1.50a)$$

donde  $(\tau_b^x, \tau_b^y)$  por (1.43) y  $(\tau_s^x, \tau_s^y)$  está dada por (1.44) y la notación utilizada es  $\mathbf{n}_\nu = (\nu_H n_x, \nu_H n_y, \nu_V n_z)$ .

<sup>2</sup>  $\iint_{\Omega} \phi \partial_x \varphi dx dy dz = - \iint_{\Omega} \partial_x \phi \varphi dx dy dz + \int_{\Gamma} n_x \phi \varphi d\Gamma$

## 1.10. Formulación débil

La forma débil de la ecuación de continuidad (1.40b), por otra parte, se obtiene multiplicándola por una función de test escalar  $\tilde{q} \in Q$  e integrando en  $\Omega$ , dando lugar a:

$$\int_{\Omega} (\nabla \cdot \mathbf{u}) \tilde{q} \, d\Omega = 0 \quad (1.50b)$$

La forma débil de la ecuación de superficie libre (1.40c), es escrita para una función de test arbitraria  $\tilde{\mu} \in M$ , como:

$$\int_{\Gamma_s} \partial_t \eta \tilde{\mu} \, d\Gamma_s + \int_{\Gamma_s} u \partial_x \eta \tilde{\mu} \, d\Gamma_s + \int_{\Gamma_s} v \partial_y \eta \tilde{\mu} \, d\Gamma_s = \int_{\Gamma_s} w \tilde{\mu} \, d\Gamma_s \quad (1.50c)$$

Escribiendo en componentes la forma débil de las ecuaciones (1.50a), (1.50b) y (1.50c) se pueden escribir entonces como:

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \partial_t u \tilde{u} \, d\Omega + \int_{\Omega} (u \partial_x u + v \partial_y u + w \partial_z u) \tilde{u} \, d\Omega + \int_{\Omega} (bw - fv) \tilde{u} \, d\Omega \\ & + \int_{\Omega} \partial_x q \tilde{u} \, d\Omega + \int_{\Omega} (\nu_H \partial_x u \partial_x \tilde{u} + \nu_H \partial_y u \partial_y \tilde{u} + \nu_V \partial_z u \partial_z \tilde{u}) \, d\Omega \\ & = -g \int_{\Omega} \partial_x \eta \tilde{u} \, d\Omega - g \int_{\Omega} \partial_x \left[ \int_z^\eta (\rho - \rho_0) / \rho_0 \, d\zeta \right] \tilde{u} \, d\Omega \\ & + \int_{\Gamma_s} \tau_s^x \tilde{u} \, d\Gamma_s + \int_{\Gamma_b} \tau_b^x \tilde{u} \, d\Gamma_b \end{aligned} \quad (1.51a)$$

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \partial_t v \tilde{v} \, d\Omega + \int_{\Omega} (u \partial_x v + v \partial_y v + w \partial_z v) \tilde{v} \, d\Omega + \int_{\Omega} fu \tilde{v} \, d\Omega \\ & + \int_{\Omega} \partial_y q \tilde{v} \, d\Omega + \int_{\Omega} (\nu_H \partial_x v \partial_x \tilde{v} + \nu_H \partial_y v \partial_y \tilde{v} + \nu_V \partial_z v \partial_z \tilde{v}) \, d\Omega \\ & = -g \int_{\Omega} \partial_y \eta \tilde{v} \, d\Omega - g \int_{\Omega} \partial_y \left[ \int_z^\eta (\rho - \rho_0) / \rho_0 \, d\zeta \right] \tilde{v} \, d\Omega \\ & + \int_{\Gamma_s} \tau_s^y \tilde{v} \, d\Gamma_s + \int_{\Gamma_b} \tau_b^y \tilde{v} \, d\Gamma_b \end{aligned} \quad (1.51b)$$

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \partial_t w \tilde{w} \, d\Omega + \int_{\Omega} (u \partial_x w + v \partial_y w + w \partial_z w) \tilde{w} \, d\Omega - \int_{\Omega} bu \tilde{w} \, d\Omega \\ & + \int_{\Omega} \partial_z q \tilde{w} \, d\Omega + \int_{\Omega} (\nu_H \partial_x w \partial_x \tilde{w} + \nu_H \partial_y w \partial_y \tilde{w} + \nu_V \partial_z w \partial_z \tilde{w}) \, d\Omega \\ & = \int_{\Gamma_b} (n_x \nu_H \partial_x w + n_y \nu_H \partial_y w + n_z \nu_V \partial_z w) \tilde{w} \, d\Gamma_b \end{aligned} \quad (1.51c)$$

$$\int_{\Omega} \partial_x u \tilde{q} \, d\Omega + \int_{\Omega} \partial_y v \tilde{q} \, d\Omega + \int_{\Omega} \partial_z w \tilde{q} \, d\Omega = 0 \quad (1.51d)$$

$$\int_{\Gamma_s} \partial_t \eta \tilde{\mu} \, d\Gamma_s + \int_{\Gamma_s} u \partial_x \eta \tilde{\mu} \, d\Gamma_s + \int_{\Gamma_s} v \partial_y \eta \tilde{\mu} \, d\Gamma_s = \int_{\Gamma_s} w \tilde{\mu} \, d\Gamma_s \quad (1.51e)$$



## Capítulo 2

# Aproximación numérica

“Las matemáticas son el alfabeto con el cual Dios ha escrito el universo”  
*Galileo Galilei, 1564-1642*  
Físico y astrónomo italiano.

Una vez se han deducido las ecuaciones de gobierno, condiciones de contorno y condiciones iniciales para problemas de modelado oceánico costero, en este capítulo se realizará la aproximación numérica de las mismas, empezando por la integración temporal de las ecuaciones en forma débil (1.51), mediante un método implícito, el método de Euler hacia atrás (*“Backward Euler”*). Posteriormente se realizará la discretización espacial de las ecuaciones mediante el método de los elementos finitos (MEF), se estabilizará la presión mediante la proyección del gradiente de la presión (PGP), se obtendrá la forma matricial de las ecuaciones y finalmente se diseñará el algoritmo que se implementará en un código numérico denominado HELIKE, escrito en el lenguaje de programación FORTRAN 95.

### 2.1 Integración temporal

El sistema de ecuaciones (1.51) representa un problema de evolución en el tiempo, cuya aproximación requiere un esquema adecuado de integración temporal. En el uso de modelos numéricos convencionales con un esquema de integración temporal explícita, hay una restricción conocida como el criterio de

Courant-Friedrichs-Levy (CFL), el cual impone un límite máximo sobre el paso de tiempo que puede ser usado en un modelo con un tamaño de malla y una profundidad máxima dadas. Esta condición de estabilidad está relacionada con la velocidad de propagación de las ondas libres de gravedad superficiales. Si se excede el criterio CFL, aparecen generalmente inestabilidades. Sin embargo, el criterio CFL puede ser excedido cuando se utiliza una resolución semi-implícita o totalmente implícita, pero esto puede conducir a errores de fase para la propagación de mareas. En modelos costeros o de plataforma continental, el criterio de CFL esta relacionado en la horizontal con el movimiento barotrópico y el paso de tiempo está por consiguiente relacionado a la máxima profundidad en el modelo. En la vertical, sin embargo, está relacionada con la difusión del movimiento por el término de viscosidad turbulenta vertical; esto hace que el término de difusión vertical sea siempre discretizado usando un método implícito o semi-implícito (Jones, 2002). Similares problemas pueden ocurrir con la fricción con fondo en aguas someras y requiere el uso de soluciones implícitas, particularmente en modelos que utilicen una aproximación funcional en la vertical (Davies y Aldridge, 1993). También pueden aparecer problemas cuando el paso de tiempo excede al tiempo de transporte del movimiento (la velocidad máxima de la corriente). Para movimientos baroclínicos, sin embargo la velocidad de propagación de las ondas internas es significativamente más lenta que de las ondas libres de gravedad superficiales. Se toma ventaja de este hecho descomponiendo el cálculo de los modos barotrópicos y baroclínicos mediante métodos de paso fraccionado, conocidos como “*splitting*” para reducir el coste computacional.

Los esquemas de integración temporal utilizados por los modelos varían ampliamente de acuerdo a una revisión del estado del arte, como lo demuestran también las revisiones realizadas por los otros autores como Jones (2002) y Griffies *et al.* (2000). Algunos modelos están asociados con los modelos estándares, por ejemplo el POM (Blumberg y Mellor, 1987) que utiliza un esquema “*leapfrog*” con la posibilidad del modo de fraccionamiento (“*splitting*”). El OS-MOM (Røed y Shi, 1999) tiene un esquema “*leapfrog*” con un filtro Asselin. El modelo de Xing y Davies (1996) hace un fraccionamiento del tiempo entre el flujo barotrópico y baroclínico y utiliza un esquema implícito para la difusión vertical del movimiento y la densidad. HAMSOM (Backhaus, 1985) es generalmente semi-implícito sincrónico aunque hay otras opciones, el nivel del esquema implícito puede variar desde Crack-Nicholson a completamente implícito.

Los modelos oceánicos no-hidrostáticos como el que se pretende discretizar aquí, generalmente utilizan como esquema de integración temporal un método de paso fraccionado (ver *p. ej.* Casulli y Zanolli, 2002; Koçyigit *et al.*, 2002; Lin y Li, 2002). En esta clase de métodos, cada paso de tiempo es descompuesto en un número de sub-pasos, generalmente dos (se pueden citar entre otros trabajos Casulli y Cattani, 1994; Blasco *et al.*, 1998; Guermond y Quartapelle, 1998; Casulli y Stelling, 1998, y sus referencias). La presión se descompone, como en la ecuación (1.37), en la contribución hidrostática y no-hidrostática; en el primer paso se desprecia la presión no-hidrostática, en las ecuaciones de movimiento (1.51a)-(1.51c), y se obtiene un campo provisional de velocidades. En el segundo paso se corrige el campo provisional de velocidades incluyendo los términos del gradiente de la presión no-hidrostática, los cuales se calculan de tal manera que en el campo de velocidades resultante se conserve la masa, de forma tanto local como global, utilizando la condición de divergencia



## 2.1. Integración temporal

nula. Aunque esta descomposición permite calcular la corrección de la presión no-hidrostática a partir de las velocidades reduciendo el costo computacional, introduce un error debido a esta descomposición de la presión. No obstante, para asegurar su convergencia, tanto los métodos de paso fraccionado como los métodos mixtos necesitan aproximaciones estables de la velocidad-presión (Guermond y Quartapelle, 1998).

Como una aproximación alternativa a estos métodos, se considerará aquí una aproximación monolítica basada en el método implícito de Euler hacia atrás para la integración temporal de las ecuaciones (1.51), en el cual la velocidad y la presión son calculadas simultáneamente (un método de pasos de tiempo monolítico similar fue utilizado en Labeur y Pietrzak (2005)). No obstante el método utilizado, la altura de superficie libre es tratada explícitamente en las ecuaciones (1.51a) y (1.51b), de manera tal de evitar que las dimensiones del sistema de ecuaciones en forma discreta resultante no se incremente significativamente. La altura de la superficie libre es actualizada al final del paso de tiempo utilizando el nuevo campo de velocidades recién calculado, integrando (1.51e) implícitamente una vez más mediante el método de Euler hacia atrás; un tratamiento similar para la altura de superficie libre se empleó en (Deponti *et al.*, 2006). El resto de los términos de las componentes de la ecuación de movimiento (1.51a)-(1.51c) son tratados implícitamente excepto el término convectivo (no lineal), el cual es linealizado usando el valor de la velocidad en el paso de tiempo anterior como velocidad convectiva; esta es una simple aproximación de primer orden, la cual es incondicionalmente estable y de primer orden de precisión en el tamaño del paso de tiempo, lo cual es consistente con la precisión del método. Además, debido al carácter diagnóstico del modelo desarrollado aquí, se supone conocido el valor de la densidad en cada instante de tiempo y para cada nodo de la malla.

De esta manera, dado un paso de tiempo  $\Delta t > 0$  y asumiendo conocida una aproximación  $\mathbf{u}^n$  de la velocidad y una aproximación  $\eta^n$  de la superficie libre en el tiempo  $t_n = n\Delta t$  (donde  $n \in \{0, \dots, N\}$ ,  $N = [T/\Delta t]$ , siendo  $T$  el tiempo final de simulación), se obtienen una nueva velocidad  $\mathbf{u}^{n+1}$  y presión  $p^{n+1}$  en  $t_{n+1}$  a partir de las siguientes ecuaciones:

$$(\mathbf{u}^{n+1} - \mathbf{u}^n)/\Delta t + (\mathbf{u}^n \cdot \nabla)\mathbf{u}^{n+1} + \mathbf{k} \times \mathbf{u}^{n+1} + \nabla q^{n+1} \quad (2.1a)$$

$$\begin{aligned} & - \partial_x(\nu_H^{n+1}\partial_x\mathbf{u}^{n+1}) - \partial_y(\nu_H^{n+1}\partial_y\mathbf{u}^{n+1}) - \partial_z(\nu_V^{n+1}\partial_z\mathbf{u}^{n+1}) = \\ & - g\nabla_H\eta^n - g\nabla_H \left[ \int_z^n (\rho^{n+1} - \rho_0)/\rho_0 d\zeta \right] \quad \text{en } \Omega \end{aligned}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u}^{n+1} = 0 \quad \text{en } \Omega. \quad (2.1b)$$

Nótese que el término convectivo se ha linealizado, tomando como velocidad convectiva el valor en el paso de tiempo anterior. Con la velocidad  $\mathbf{u}^{n+1}$  y presión  $p^{n+1}$  calculadas anteriormente se obtiene una nueva aproximación  $\eta^{n+1}$  de la altura de superficie libre al final del paso de tiempo  $t_{n+1}$ , a partir de:

$$(\eta^{n+1} - \eta^n)/\Delta t + u^{n+1}\partial_x\eta^{n+1} + v^{n+1}\partial_y\eta^{n+1} = w^{n+1} \quad \text{en } \Gamma_s. \quad (2.1c)$$

La forma débil del problema semi-discreto (2.1a)-(2.1c) consiste en encontrar  $\mathbf{u}^{n+1} = (u^{n+1}, v^{n+1}, w^{n+1}) \in V$ ,  $q^{n+1} \in Q$  y  $\eta^{n+1} \in M$  tal que, para todas las funciones de test  $\tilde{\mathbf{u}} = (\tilde{u}, \tilde{v}, \tilde{w}) \in V$ ,  $\tilde{q} \in Q$  y  $\tilde{\mu} \in M$ :

$$\int_{\Omega} \frac{1}{\Delta t} (\mathbf{u}^{n+1} - \mathbf{u}^n) \tilde{\mathbf{u}} d\Omega + \int_{\Omega} (\mathbf{u}^n \cdot \nabla)\mathbf{u}^{n+1} \tilde{\mathbf{u}} d\Omega \quad (2.2a)$$

$$\begin{aligned}
& + \int_{\Omega} (\mathbf{k} \times \mathbf{u}^{n+1}) \tilde{\mathbf{u}} \, d\Omega + \int_{\Omega} \nabla q^{n+1} \tilde{\mathbf{u}} \, d\Omega \\
& + \int_{\Omega} (\nu_H^{n+1} \partial_x \mathbf{u}^{n+1} \partial_x \tilde{\mathbf{u}} + \nu_H^{n+1} \partial_y \mathbf{u}^{n+1} \partial_y \tilde{\mathbf{u}} + \nu_V^{n+1} \partial_z \mathbf{u}^{n+1} \partial_z \tilde{\mathbf{u}}) \, d\Omega = \\
& - g \int_{\Omega} \nabla_H \eta^n \tilde{\mathbf{u}} \, d\Omega - g \int_{\Omega} \nabla_H \left[ \int_z^n (\rho^n - \rho_0) / \rho_0 \, d\zeta \right] \tilde{\mathbf{u}} \, d\Omega \\
& + \int_{\Gamma_s} (\tau_s^x \tilde{u} + \tau_s^y \tilde{v}) \, d\Gamma_s + \int_{\Gamma_b} (\tau_b^x u^{n+1} \tilde{u} + \tau_b^y v^{n+1} \tilde{v}) \, d\Gamma_b \\
& + \int_{\Gamma_b} \mathbf{n}_\nu \cdot \nabla w^{n+1} \tilde{w} \, d\Gamma_b \\
& \int_{\Omega} (\nabla \cdot \mathbf{u}^{n+1}) \tilde{q} \, d\Omega = 0 \tag{2.2b}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \int_{\Gamma_s} \frac{1}{\Delta t} (\eta^{n+1} - \eta^n) \tilde{\mu} \, d\Gamma_s + \int_{\Gamma_s} u^{n+1} \partial_x \eta^{n+1} \tilde{\mu} \, d\Gamma_s + \\
& \int_{\Gamma_s} v^{n+1} \partial_y \eta^{n+1} \tilde{\mu} \, d\Gamma_s = \int_{\Gamma_s} w^{n+1} \tilde{\mu} \, d\Gamma_s \tag{2.2c}
\end{aligned}$$

## 2.2 Discretización espacial

El problema semi-discreto (2.1a)-(2.1c) debe aproximarse en el espacio mediante algún método numérico adecuado. La gran mayoría de los modelos hidrodinámicos no-hidrostáticos existentes emplean el método de las diferencias finitas para la aproximación espacial (ver *p. ej.* Casulli y Zanolli, 2002; Koçyigit *et al.*, 2002; Lin y Li, 2002; Stelling y Zijlema, 2003). El “*Método de los Elementos Finitos*” (MEF) sin embargo, ha sido menos utilizado a pesar de que Fix (1975), desde los primeros tiempos de la modelización oceánica ha demostrado que tiene propiedades muy atractivas. Dichas propiedades como son la de conservación de la energía, común a todos los métodos variacionales para la resolución de ecuaciones diferenciales, el tratamiento natural de las condiciones de contorno y la flexibilidad en la triangulación a la hora de utilizar mallas no estructuradas, se complementaron muy bien con la aparición y mayor disponibilidad de los superordenadores. Teniendo esto en cuenta Le Provost *et al.* (1978) sugirió el MEF como una interesante alternativa al método de las diferencias finitas (MDF), más ampliamente utilizado hasta entonces.

Las grandes ventajas que supone, la facilidad en el uso de mallas no-estructuradas, además de las buenas propiedades de aproximación a la solución que posee el MEF, mencionadas por (Danilov *et al.*, 2004) y analizadas por Pain *et al.* (2005), influyó en la elección del MEF como método de discretización espacial. La utilización de mallas no-estructuradas se hace indispensable a la hora de obtener mallas computacionalmente asequibles y que permitan a su vez una representación precisa de la gran cantidad de escalas y altamente compleja geometría, debidas a las sutiles características topográficas que poseen los mares y océanos. Dichas características, como son la existencia de estrechos, taludes escarpados y la presencia de islas, *etc.*, dificultan el empleo de mallas en diferencias finitas con una asequible resolución espacial homogénea.

Se considerarán aquí, por lo tanto, elementos finitos tridimensionales para

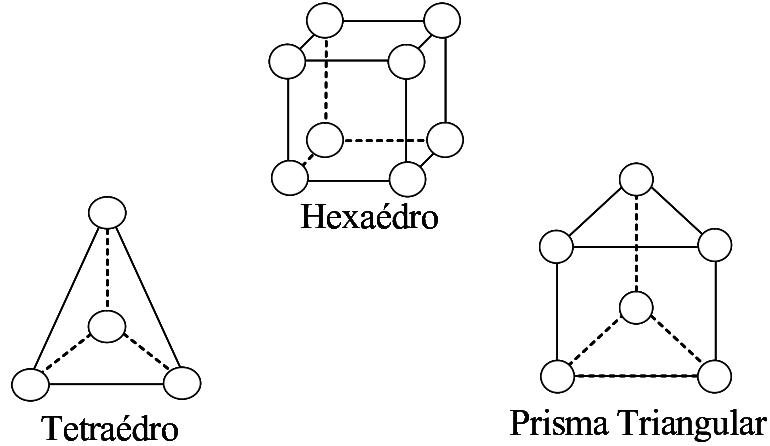


Figura 2.1: Elementos finitos utilizados en la discretización espacial 3D, tetraédros (4 nodos), hexaédros (8 nodos) y prismas triangulares (6 nodos).

la discretización espacial del dominio  $\Omega$  (ver figura 2.1), haciendo que  $\Omega_h$  sea una partición del dominio  $\Omega$ , de tamaño  $h > 0$ , generalmente en elementos de tipo tetraédricos o hexaédricos para problemas con superficie libre de tipo “*rigid-lid*” y, en los casos en que se utilicen los términos barotrópicos o baroclínicos, en elementos prismáticos de base triangular. En estos casos la discretización espacial del dominio  $\Omega$  se realiza a partir de una malla bidimensional no estructurada  $\Sigma_h$  de la superficie  $\Gamma_s$  constituida por elementos triangulares que se proyectan verticalmente sobre el fondo formando columnas (ver figura 2.2). Estas columnas a su vez se descomponen en un número arbitrario de elementos prismáticos, generando así una malla tridimensional en la cual la cantidad de elementos por columnas no necesita ser la misma para toda la malla. Las caras laterales de los elementos prismáticos generados son perfectamente verticales mientras que sus caras superior o inferior no son necesariamente horizontales. Este tipo de malla posee una gran flexibilidad a la hora de ajustar la malla a la compleja geometría de la línea de costa y de la batimetría. Asumimos además que todos los elementos  $K \in \Omega_h$  son imagen de un elemento de referencia  $\hat{K}$  mediante transformaciones  $F_K : \hat{K} \rightarrow K$  afines para tetraédros o isoparamétricas para hexaédros y prismas. En el caso de elementos prismáticos de base triangular, cada elemento  $K \in \Omega_h$  es la imagen del prisma de referencia  $\hat{K} := \hat{T} \times [-1, 1]$  donde  $\hat{T}$  es el simplex<sup>1</sup> de vértices  $(0, 0)$ ,  $(1, 0)$  y  $(0, 1)$  en  $\mathbb{R}^2$ , por una transformación  $F_K$ , la cual es un producto tensorial de un polinomio de primer grado en  $(\hat{x}, \hat{y})$  y un polinomio de primer grado en  $\hat{z}$ :

$$F_K : \hat{K} \rightarrow K \text{ con } F_K \in R_1 := P_1((\hat{x}, \hat{y})) \otimes P_1(\hat{z})$$

Las incógnitas del problema, velocidad  $\mathbf{u}$ , presión  $q$  y altura de superficie libre  $\eta$  se aproximan por funciones de elementos finitos que son continuas en  $\Omega$  y polinomiales dentro de cada elemento  $K$  cuando son expresadas en las variables de referencia  $(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z})$ . Se prestara especial atención a los casos de igual interpolación para la velocidad y la presión, en el cual ambas variables

<sup>1</sup>Simplex es la envoltura convexa de un conjunto de  $(n + 1)$  puntos independientes afines en un espacio euclidiano de dimensión  $n$  o mayor.

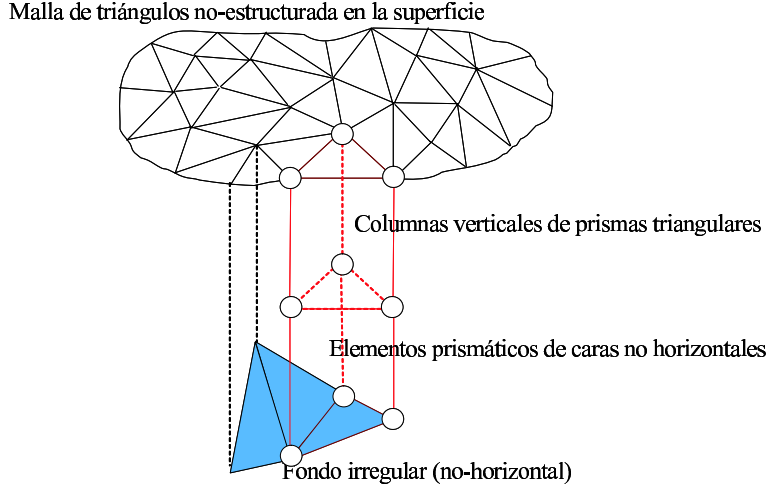


Figura 2.2: Columnas de elementos prismáticos de caras no-planas a generados a partir de la malla de triángulos no-estructurada de la superficie.

se aproximan por interpolación en los nodos de la misma malla tridimensional mediante polinomios del mismo grado; la altura de superficie libre sin embargo es aproximada mediante polinomios lineales sobre la malla bidimensional de triángulos  $\Sigma_h$  de la superficie  $\Gamma_s$ . Los espacios de las funciones de elementos finitos para la aproximación de la velocidad, la presión y la altura de superficie libre son respectivamente:

$$\begin{aligned} V_h &:= \left\{ \tilde{\mathbf{u}}_h \in V \quad / \forall K \in \Omega_h, \tilde{\mathbf{u}}_{h|K} = \hat{\mathbf{u}}_K \circ F_K^{-1}, \hat{\mathbf{u}}_K \in (R_1)^3 \right\} \\ Q_h &:= \left\{ \tilde{q}_h \in C^0(\Omega) \quad / \forall K \in \Omega_h, \tilde{q}_{h|K} = \hat{q}_K \circ F_K^{-1}, \hat{q}_K \in R_1 \right\} \\ M_h &:= \left\{ \tilde{\mu}_h \in C^0(\Gamma_s) / \forall T \in \Sigma_h, \tilde{\mu}_{h|T} = \hat{\mu}_K \circ F_T^{-1}, \hat{\mu}_K \in S_1 \right\} \end{aligned}$$

donde  $F_T : \hat{T} \rightarrow T$  indica la transformación lineal de  $\hat{T}$  en  $T$ . En estas expresiones, también se empleó la siguiente notación:

$$S_1 := P_1((\hat{x}, \hat{y})).$$

La aproximación de Galerkin estándar al problema (2.1) mediante el MEF consiste en hallar  $\mathbf{u}_h^{n+1} = (u_h^{n+1}, v_h^{n+1}, w_h^{n+1}) \in V_h$ ,  $q_h^{n+1} \in Q_h$  y  $\eta_h^{n+1} \in M_h$  tal que, para todas las funciones de peso  $\tilde{\mathbf{u}}_h = (\tilde{u}_h, \tilde{v}_h, \tilde{w}_h) \in V_h$ ,  $\tilde{q}_h \in Q_h$  y  $\tilde{\mu}_h \in M_h$ :

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \frac{1}{\Delta t} (\mathbf{u}_h^{n+1} - \mathbf{u}_h^n) \tilde{\mathbf{u}}_h \, d\Omega + \int_{\Omega} (\mathbf{u}_h^n \cdot \nabla) \mathbf{u}_h^{n+1} \tilde{\mathbf{u}}_h \, d\Omega \\ & + \int_{\Omega} (\mathbf{k} \times \mathbf{u}_h^{n+1}) \tilde{\mathbf{u}}_h \, d\Omega + \int_{\Omega} \nabla q_h^{n+1} \tilde{\mathbf{u}}_h \, d\Omega \\ & + \int_{\Omega} (\nu_H^{n+1} \partial_x \mathbf{u}_h^{n+1} \partial_x \tilde{\mathbf{u}}_h + \nu_H^{n+1} \partial_y \mathbf{u}_h^{n+1} \partial_y \tilde{\mathbf{u}}_h + \nu_V^{n+1} \partial_z \mathbf{u}_h^{n+1} \partial_z \tilde{\mathbf{u}}_h) \, d\Omega = \\ & - g \int_{\Omega} \nabla_H \eta_h^n \tilde{\mathbf{u}}_h \, d\Omega - g \int_{\Omega} \nabla_H \left[ \int_z^\eta (\rho_h^n - \rho_0) / \rho_0 \, d\zeta \right] \tilde{\mathbf{u}}_h \, d\Omega \end{aligned} \quad (2.3a)$$

### 2.3. Estabilización de la Presión

$$\begin{aligned}
& + \int_{\Gamma_s} (\tau_s^x \tilde{u}_h + \tau_s^y \tilde{v}_h) d\Gamma_s + \int_{\Gamma_b} (\tau_b^x u_h^{n+1} \tilde{u}_h + \tau_b^y v_h^{n+1} \tilde{v}_h) d\Gamma_b \\
& + \int_{\Gamma_b} \mathbf{n}_\nu \cdot \nabla w_h^{n+1} \tilde{w}_h d\Gamma_b \\
& \int_{\Omega} (\nabla \cdot \mathbf{u}_h^{n+1}) \tilde{q}_h d\Omega = 0 \tag{2.3b}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \int_{\Gamma_s} \frac{1}{\Delta t} (\eta_h^{n+1} - \eta_h^n) \tilde{\mu}_h d\Gamma_s + \int_{\Gamma_s} u_h^{n+1} \partial_x \eta_h^{n+1} \tilde{\mu}_h d\Gamma_s \\
& + \int_{\Gamma_s} v_h^{n+1} \partial_y \eta_h^{n+1} \tilde{\mu}_h d\Gamma_s = \int_{\Gamma_s} w_h^{n+1} \tilde{\mu}_h d\Gamma_s \tag{2.3c}
\end{aligned}$$

El tratamiento del término barotrópico (superficie libre) en el lado derecho de la ecuación (2.3a) requiere especial cuidado. Este término involucra integrales de volumen de productos de las derivadas de las funciones de forma bidimensionales (superficie) y las funciones de peso tridimensionales (volumen). El cálculo de estas integrales se realiza en forma elemental, como es usual en el método de los elementos finitos, esto es factible gracias a que los elementos se ordenan y almacenan en columnas verticales.

Como se dijo anteriormente en la sección 1.7, respecto a la ecuación cinemática (1.39), esta se calcula para los nodos de la superficie libre  $\Gamma_s$ , por lo que las variables  $\eta_h^{n+1}$ ,  $\bar{u}_h^{n+1}$ ,  $\bar{v}_h^{n+1}$  y  $\bar{w}_h^{n+1}$  de la ecuación (2.3c) se refieren únicamente a los nodos de la malla ubicados sobre dicha superficie.

### 2.3 Estabilización de la Presión

La resolución numérica del problema anterior (2.3) presenta numerosas dificultades, puede dar lugar a diferentes tipos de inestabilidad en la solución numérica. En primer lugar, la ecuación de movimiento (2.3a) hereda las dificultades numéricas de los problemas de convección-difusión en los problemas con convección dominante (Brooks y Hughes, 1982), en segundo lugar, la presencia del término de Coriolis puede dar lugar también a inestabilidades en problemas con velocidades de rotación elevadas (Codina y Soto, 1997). Sin embargo, para el rango de valores de los diferentes parámetros que se utilizan en las situaciones a las que se pretende aplicar el modelo, estas dificultades no suelen aparecer y resulta innecesario el uso de técnicas específicas de estabilización de la convección y la rotación. La condición de incompresibilidad (2.3b), sin embargo, impone ciertas restricciones en la elección de los espacios de aproximación de la velocidad y la presión que impiden, en particular, el empleo de igual interpolación para ambas variables. Estas restricciones son debidas al carácter mixto de los problemas de flujo incompresible (Brezzi y Fortin, 1991): para obtener una solución numérica estable y convergente dichos espacios deben verificar la condición de Ladyzhenskaya-Babuška-Brezzi (LBB), también conocida como “*inf-sup*” (ver Brezzi y Fortin, 1991). Se han desarrollado combinaciones de elementos velocidad-presión que cumplen dicha condición (Brezzi y Falk, 1991), pero se ha observado que las formulaciones estabilizadas, como las de Bochev *et al.* (1998); Brezzi y Douglas (1988); Chacón Rebollo (1998); Douglas, Jr. y Wang (1989); Franca y Frey (1992); Franca y Hughes (1993), resultan más eficientes que los pares de elementos estables (ver Norburn y Silvester, 1998). En estas formula-

ciones se introducen términos adicionales en el problema discreto, deducidos de maneras muy diversas, que aumentan la estabilidad de la solución numérica. La técnica de estabilización de la presión que se usa aquí está basada en una proyección del gradiente de la presión (PGP). Dicha técnica fue estudiada previamente en el contexto del problema de Stokes (Codina y Blasco, 1997) y de la ecuación de Navier-Stokes incompresible estacionaria (Codina y Blasco, 2000a; Codina *et al.*, 2001) y no estacionaria (Blasco y Codina, 2001; Codina y Blasco, 2000b). Posteriormente se demostró que en algunos casos este método puede deducirse también mediante el concepto de subescalas ortogonales (Codina, 2000).

La idea principal de este método consiste en la introducción, como nueva variable del problema, de la proyección ortogonal del gradiente de la presión discreta sobre el espacio (de dimensión finita) de funciones de aproximación mediante elementos finitos; se modifica entonces la ecuación de continuidad discreta (2.3b) de manera consistente añadiéndole la divergencia de la diferencia entre el gradiente de la presión y su proyección, ponderada en cada elemento por parámetros algorítmicos adecuados. Se ha demostrado que este método permite el empleo de igual interpolación en elementos finitos para la velocidad y la presión en la resolución de problemas de flujo incompresible. El espacio donde se determinara la proyección del gradiente de la presión  $\mathbf{r}^{n+1}$ , definido sobre la misma malla de elementos finitos que la velocidad y la presión, es la siguiente:

$$R_h := \left\{ \tilde{s}_h \in (C^0(\Omega))^3 / \forall K \in \Omega_h, \tilde{s}_h|_K = \hat{\mathbf{s}}_K \circ F_K^{-1}, \hat{\mathbf{s}}_K \in (R_1)^3 \right\}$$

Se define entonces la nueva ecuación introducida como la proyección ortogonal  $\mathbf{r}_h^{n+1} = (r_1^{n+1}, r_2^{n+1}, r_3^{n+1})$  en  $L^2(\Omega)$  del gradiente de la presión discreta  $\nabla q_h^{n+1}$ , ponderada a nivel de cada elemento  $K$  por un parámetro  $\sqrt{\alpha_K}$ , sobre el espacio de funciones de aproximación  $\tilde{s}_h$  en la norma  $L^2(\Omega)$  y puede ser escrita de la siguiente manera:

$$\int_{\Omega} \mathbf{r}_h^{n+1} \tilde{s}_h d\Omega - \sum_{K \in \Omega_h} \int_K \sqrt{\alpha_K} \nabla q_h^{n+1} \tilde{s}_h d\Omega = 0 \quad (2.4a)$$

donde:

- $\mathbf{r}^{n+1}$ : es la proyección del gradiente ponderado de la presión discreta  $\nabla q^{n+1}$ .
- $\alpha_K$ : es un parámetro de estabilización elemental.
- $\int_K$ : es la integral a nivel de cada elemento del dominio  $\Omega$ .
- $K$ : son los elementos de la malla.

Por otra parte, la ecuación de continuidad modificada se puede escribir de la siguiente manera en forma débil:

$$\int_{\Omega} (\nabla \cdot \mathbf{u}_h^{n+1}) \tilde{q}_h d\Omega + \sum_{K \in \Omega_h} \int_K \alpha_K \nabla q_h^{n+1} \nabla \tilde{q}_h d\Omega - \sum_{K \in \Omega_h} \int_K \sqrt{\alpha_K} \mathbf{r}^{n+1} \nabla \tilde{q}_h d\Omega = 0 \quad (2.4b)$$

## 2.4. Forma matricial de las ecuaciones

Los coeficientes de estabilización  $\alpha_K$  se determinan mediante las fórmulas habituales de otros métodos de estabilización (Franca y Hughes, 1993); en nuestro caso, es suficiente calcularlos mediante la expresión siguiente:

$$\alpha_K = \left( c_1 \frac{\nu}{h_K^2} + c_2 \frac{V_K}{h_K} + \frac{1}{\Delta t} \right)^{-1}, \quad \forall K \in \Omega_h \quad (2.5)$$

en la cual  $h_K$  es el tamaño del elemento  $K$ ,  $V_K$  es una velocidad característica en  $K$ , y  $c_1$  y  $c_2$  son constantes cuyos valores adecuados para elementos lineales y bilineales son  $c_1 = 12$  y  $c_2 = 2$  (Franca y Hughes, 1993).

## 2.4 Forma matricial de las ecuaciones

A los fines de obtener la forma matricial del sistema de ecuaciones (2.3a), (2.4b), (2.4a) y (2.3c), se aproximan las variables del problema  $u_h^m$ ,  $v_h^m$ ,  $w_h^m$ ,  $q_h^m$ ,  $\rho_h^m$ ,  $r_{1,h}^m$ ,  $r_{2,h}^m$ ,  $r_{3,h}^m$  y  $\eta_h^m$  (donde  $m$  pueden ser el paso de tiempo  $n$  o  $n+1$  según sea el caso), de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} u_h^m &= \sum_{i=1}^{NpVol} u_i^m N_i, & v_h^m &= \sum_{i=1}^{NpVol} v_i^m N_i, & w_h^m &= \sum_{i=1}^{NpVol} w_i^m N_i, \\ q_h^m &= \sum_{i=1}^{NpVol} q_i^m N_i, & \rho_h^m &= \sum_{i=1}^{NpVol} \rho_i^m N_i, & r_{1,h}^m &= \sum_{i=1}^{NpVol} r_{1,i}^m N_i, \\ r_{2,h}^m &= \sum_{i=1}^{NpVol} r_{2,i}^m N_i, & r_{3,h}^m &= \sum_{i=1}^{NpVol} r_{3,i}^m N_i, & \eta_h^m &= \sum_{i=1}^{NpSup} \eta_i^m \bar{N}_i, \end{aligned}$$

siendo,  $N_i$  las funciones de forma 3D en los nodos del dominio  $\Omega$ ,  $\bar{N}_i$  las funciones de forma 2D en los nodos de la superficie libre  $\Gamma_s$ , mientras que  $(u_i^m, v_i^m, w_i^m)$  son las componentes nodales de la velocidad,  $q_i^m$  las presiones nodales,  $\rho_i^m$  las densidades nodales,  $(r_{1,i}^m, r_{2,i}^m, r_{3,i}^m)$  las componentes nodales de la proyección del gradiente de la presión,  $\eta_i^m$  las alturas nodales de la superficie libre y  $NpVol$  y  $NpSup$  el número total de nodos en el dominio  $\Omega$  y en la superficie libre  $\Gamma_s$ , respectivamente.

Si se aplica el método de Galerkin tomando las funciones de peso iguales a la función de forma, empleando al mismo tiempo igual interpolación para todas las variables del problema de acuerdo a las posibilidades del método se obtiene que  $\tilde{u}_h = \tilde{v}_h = \tilde{w}_h = \tilde{q}_h = \tilde{s}_h = N_i$  y  $\mu_h = \bar{N}_i$ . Se pueden escribir las ecuaciones (2.3a), (2.4b), (2.4a) y (2.3c) en componentes, sin imponer aún las condiciones de contorno de tipo Dirichlet (1.42) y (1.46) que se impondrán posteriormente mediante operaciones matriciales al ensamblar la matriz del sistema “velocidad-presión”, utilizando el sub-índice  $i$  para la función de forma,  $j$  para la función de peso y la notación de Einstein<sup>2</sup> de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} &\int_{\Omega} u_i^{n+1} (N_i N_j) d\Omega + \Delta t \int_{\Omega} u_k^n (N_i \partial_x N_k N_j) u_i^{n+1} d\Omega \\ &+ \Delta t \int_{\Omega} v_k^n (N_i \partial_y N_k N_j) u_i^{n+1} d\Omega + \Delta t \int_{\Omega} w_k^n (N_i \partial_z N_k N_j) u_i^{n+1} d\Omega \end{aligned}$$

<sup>2</sup>Notación de Einstein: Los índices repetidos en una expresión indican suma sobre todos los posibles valores del índice.

$$\begin{aligned}
& + \Delta t b \int_{\Omega} w_i^{n+1} (N_i N_j) d\Omega - \Delta t f \int_{\Omega} v_i^{n+1} (N_i N_j) d\Omega \\
& + \Delta t \int_{\Omega} q_i^{n+1} (\partial_x N_i N_j) d\Omega + \Delta t \int_{\Omega} \nu_H^n (\partial_x N_j \partial_x N_i) u_i^{n+1} d\Omega \\
& + \Delta t \int_{\Omega} \nu_H^n (\partial_y N_j \partial_y N_i) u_i^{n+1} d\Omega + \Delta t \int_{\Omega} \nu_V^n (\partial_z N_j \partial_z N_i) u_i^{n+1} d\Omega = \\
& + \int_{\Omega} u_i^n (N_i N_j) d\Omega - \Delta t g \int_{\Omega} \eta_i^n (\partial_x \bar{N}_i N_j) d\Omega \\
& - \Delta t g / \rho_0 \int_{\Omega} (N_j) \left[ \int_z^\eta \rho_i^{n+1} (\partial_x N_i) d\zeta \right] d\Omega \\
& + \Delta t \int_{\Gamma_s} \tau_s^x (N_j) d\Gamma_s + \Delta t \int_{\Gamma_b} C_b (N_i N_j) u_i^{n+1} d\Gamma_b \tag{2.6a}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega} v_i^{n+1} (N_i N_j) d\Omega + \Delta t \int_{\Omega} u_k^n (N_i \partial_x N_k N_j) v_i^{n+1} d\Omega \\
& + \Delta t \int_{\Omega} v_k^n (N_i \partial_y N_k N_j) v_i^{n+1} d\Omega + \Delta t \int_{\Omega} w_k^n (N_i \partial_z N_k N_j) v_i^{n+1} d\Omega \\
& + \Delta t f \int_{\Omega} u_i^{n+1} (N_i N_j) d\Omega + \Delta t \int_{\Omega} q_i^{n+1} (\partial_y N_i N_j) d\Omega \\
& + \Delta t \int_{\Omega} \nu_H^n (\partial_x N_j \partial_x N_i) v_i^{n+1} d\Omega + \Delta t \int_{\Omega} \nu_H^n (\partial_y N_j \partial_y N_i) v_i^{n+1} d\Omega \\
& + \Delta t \int_{\Omega} \nu_V^n (\partial_z N_j \partial_z N_i) v_i^{n+1} d\Omega = \\
& + \int_{\Omega} v_i^n (N_i N_j) d\Omega - \Delta t g \int_{\Omega} \eta_i^n (\partial_y \bar{N}_i N_j) d\Omega \\
& - \Delta t g / \rho_0 \int_{\Omega} (N_j) \left[ \int_z^\eta \rho_i^{n+1} (\partial_y N_i) d\zeta \right] d\Omega \\
& + \Delta t \int_{\Gamma_s} \tau_s^y (N_j) d\Gamma_s + \Delta t \int_{\Gamma_b} C_b (N_i N_j) v_i^{n+1} d\Gamma_b \tag{2.6b}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega} w_i^{n+1} (N_i N_j) d\Omega + \Delta t \int_{\Omega} u_k^n (N_i \partial_x N_k N_j) w_i^{n+1} d\Omega \\
& + \Delta t \int_{\Omega} v_k^n (N_i \partial_y N_k N_j) w_i^{n+1} d\Omega + \Delta t \int_{\Omega} w_k^n (N_i \partial_z N_k N_j) w_i^{n+1} d\Omega \\
& - \Delta t b \int_{\Omega} u_i^{n+1} (N_i N_j) d\Omega + \Delta t \int_{\Omega} q_i^{n+1} (\partial_z N_i N_j) d\Omega \\
& + \Delta t \int_{\Omega} \nu_H^n (\partial_x N_j \partial_x N_i) w_i^{n+1} d\Omega + \Delta t \int_{\Omega} \nu_H^n (\partial_y N_j \partial_y N_i) w_i^{n+1} d\Omega \\
& + \Delta t \int_{\Omega} \nu_V^n (\partial_z N_j \partial_z N_i) w_i^{n+1} d\Omega = \\
& + \int_{\Omega} w_i^n (N_i N_j) d\Omega \\
& + \Delta t \int_{\Gamma_b} w_i^{n+1} (n_x \nu_H^n \partial_x N_i + n_y \nu_H^n \partial_y N_i + n_z \nu_V^n \partial_z N_i) N_j d\Gamma_b \tag{2.6c}
\end{aligned}$$



## 2.4. Forma matricial de las ecuaciones

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega} u_i^{n+1} (\partial_x N_i N_j) d\Omega + \int_{\Omega} v_i^{n+1} (\partial_y N_i N_j) d\Omega + \int_{\Omega} w_i^{n+1} (\partial_z N_i N_j) d\Omega \\
& + \sum_{K \in \Omega_h} \left[ \alpha_K \int_K ((\partial_x N_i \partial_x N_j) + (\partial_y N_i \partial_y N_j) + (\partial_z N_i \partial_z N_j)) q_i^{n+1} d\Omega \right] \\
& - \sum_{K \in \Omega_h} \left[ \sqrt{\alpha_K} \int_K (r_{1,i}^{n+1} (N_i \partial_x N_j) + r_{2,i}^{n+1} (N_i \partial_y N_j) + r_{3,i}^{n+1} (N_i \partial_z N_j)) d\Omega \right] = 0
\end{aligned} \tag{2.6d}$$

$$\int_{\Omega} r_{1,i}^{n+1} (N_i N_j) d\Omega = \sum_{K \in \Omega_h} \sqrt{\alpha_K} \int_K q_i^{n+1} (\partial_x N_i N_j) d\Omega \tag{2.6e}$$

$$\int_{\Omega} r_{2,i}^{n+1} (N_i N_j) d\Omega = \sum_{K \in \Omega_h} \sqrt{\alpha_K} \int_K q_i^{n+1} (\partial_y N_i N_j) d\Omega \tag{2.6f}$$

$$\int_{\Omega} r_{3,i}^{n+1} (N_i N_j) d\Omega = \sum_{K \in \Omega_h} \sqrt{\alpha_K} \int_K q_i^{n+1} (\partial_z N_i N_j) d\Omega \tag{2.6g}$$

$$\begin{aligned}
& \int_{\Gamma_s} \eta_i^{n+1} (\bar{N}_i \bar{N}_j) d\Gamma_s \\
& + \Delta t \int_{\Gamma_s} u_i^{n+1} (N_i \partial_x \bar{N}_k \bar{N}_j) \eta_k^{n+1} d\Gamma_s + \Delta t \int_{\Gamma_s} v_i^{n+1} (N_i \partial_y \bar{N}_k \bar{N}_j) \eta_k^{n+1} d\Gamma_s = \\
& + \Delta t \int_{\Gamma_s} w_i^{n+1} (N_i \bar{N}_j) d\Gamma_s + \int_{\Gamma_s} \eta_i^n (\bar{N}_i \bar{N}_j) d\Gamma_s
\end{aligned} \tag{2.6h}$$

La formulación matricial del problema discreto anterior resulta entonces en el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\left[ \mathbf{M}_{3D} + \Delta t (\mathbf{C}_{3D} (\mathbf{X}^n) + f \tilde{\mathbf{M}} + b \hat{\mathbf{M}} + C_b \check{\mathbf{M}} + \mathbf{L}_{3D}) \right] \mathbf{X}^{n+1} \tag{2.7a}$$

$$+ \Delta t \mathbf{G}_{3D} \mathbf{P}^{n+1} = \mathbf{M}_{3D} \mathbf{U}^n - \Delta t \left[ g \mathbf{F} \mathbf{E}^n + \frac{g}{\rho_0} \mathbf{B} \mathbf{S}^{n+1} - \bar{\mathbf{T}} \right]$$

$$\mathbf{D} \mathbf{X}^{n+1} + \mathbf{L}_{\alpha,3D} \mathbf{P}^{n+1} = \mathbf{D}_{\alpha} \mathbf{R}^{n+1} \tag{2.7b}$$

$$\mathbf{M}_{3D} \mathbf{R}^{n+1} = \mathbf{G}_{\alpha} \mathbf{P}^{n+1} \tag{2.7c}$$

$$\left[ \bar{\mathbf{M}} + \Delta t \bar{\mathbf{C}} (\mathbf{X}^{n+1}) \right] \mathbf{E}^{n+1} = \bar{\mathbf{M}} (\Delta t \mathbf{W}^{n+1} + \mathbf{E}^n) \tag{2.7d}$$

Las variables del problema, velocidad, presión, gradiente de la presión, densidad y altura de la superficie libre, cuyos super-índices hacen referencia al paso de tiempo en que serán evaluados, fueron introducidas en la formulación matricial a través de los vectores de valores nodales indicados a continuación:

$$\mathbf{X} = [\mathbf{U}, \mathbf{V}, \mathbf{W}]$$

$$\mathbf{U} = [u_1, u_2, u_3, \dots, u_{N_{Vol}}]$$

$$\mathbf{V} = [v_1, v_2, v_3, \dots, v_{N_{Vol}}]$$

$$\mathbf{W} = [w_1, w_2, w_3, \dots, w_{N_{Vol}}]$$

Vectores de valores nodales para la velocidad.

$$\mathbf{P} = [q_1, q_2, q_3, \dots, q_{N_{Vol}}]$$

Vector de valores nodales para la presión.

$\mathbf{R} = [\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2, \mathbf{R}_3]$	
$\mathbf{R}_1 = [r_{11}, r_{12}, r_{13}, \dots, r_{1N_{Vol}}]$	Vectores de valores nodales para la proyección del gradiente de la presión.
$\mathbf{R}_2 = [r_{21}, r_{22}, r_{23}, \dots, r_{2N_{Vol}}]$	
$\mathbf{R}_3 = [r_{31}, r_{32}, r_{33}, \dots, r_{3N_{Vol}}]$	
$\mathbf{S} = [\rho_1, \rho_2, \rho_3, \dots, \rho_{N_{Vol}}]$	Vector de valores nodales para la densidad.
$\mathbf{E} = [\eta_1, \eta_2, \eta_3, \dots, \eta_{N_{Sup}}]$	Vector de valores nodales para la altura de superficie libre.

La notación utilizada en la formulación matricial es la siguiente:

$\mathbf{M}_{3D} = \begin{bmatrix} \mathbf{M} & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{M} & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{M} \end{bmatrix}$	Matriz de masa tridimensional.
$\tilde{\mathbf{M}} = \begin{bmatrix} 0 & -\mathbf{M} & 0 \\ \mathbf{M} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	Matriz de masa para la componente $f$ del término de Coriolis.
$\hat{\mathbf{M}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \mathbf{M} \\ 0 & 0 & 0 \\ -\mathbf{M} & 0 & 0 \end{bmatrix}$	Matriz de masa para la componente $b$ del término de Coriolis.
$\check{\mathbf{M}} = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{M}} & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{M} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	Matriz de masa para la componente de fricción con fondo.
$\mathbf{C}_{3D}(\mathbf{X}^m) = \begin{bmatrix} \mathbf{C}(\mathbf{X}^m) & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{C}(\mathbf{X}^m) & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{C}(\mathbf{X}^m) \end{bmatrix}$	Matriz de términos convectivos.
$\mathbf{L}_{3D} = \begin{bmatrix} \mathbf{L} & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{L} & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{L} \end{bmatrix}$	Matriz de rigidez de los términos difusivos.
$\mathbf{G}_{3D} = \begin{bmatrix} \mathbf{G}_1 \\ \mathbf{G}_2 \\ \mathbf{G}_3 \end{bmatrix}$	Matriz gradiente.
$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} \mathbf{F}_1 \\ \mathbf{F}_2 \\ 0 \end{bmatrix}$	Matriz de términos barotrópicos.
$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_1 \\ \mathbf{B}_2 \\ 0 \end{bmatrix}$	Matriz de términos baroclínicos.
$\bar{\mathbf{T}} = \begin{bmatrix} \bar{T}_x \\ \bar{T}_y \\ 0 \end{bmatrix}$	Vector de tensión de viento.
$\mathbf{D} = [\mathbf{D}_1 \quad \mathbf{D}_2 \quad \mathbf{D}_3]$	Matriz de divergencia.

## 2.4. Forma matricial de las ecuaciones

---

$$\mathbf{L}_{\alpha,3D} = \begin{bmatrix} \mathbf{L}_\alpha & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{L}_\alpha & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{L}_\alpha \end{bmatrix}$$

Matriz laplaciana, ponderada a nivel elemental por los coeficientes  $\alpha_K$ .

$$\mathbf{D}_\alpha = [ \mathbf{D}_{1,\alpha} \quad \mathbf{D}_{2,\alpha} \quad \mathbf{D}_{3,\alpha} ]$$

Matriz de divergencia, ponderada a nivel elemental por los coeficientes  $\sqrt{\alpha_K}$ .

$$\mathbf{G}_\alpha = \begin{bmatrix} \mathbf{G}_{1,\alpha} \\ \mathbf{G}_{2,\alpha} \\ \mathbf{G}_{3,\alpha} \end{bmatrix}$$

Matriz gradiente, ponderada a nivel elemental por los coeficientes  $\sqrt{\alpha_K}$ .

mientras que la notación introducida en la misma es la siguiente:

$$[\mathbf{M}]_{ji} = \int_{\Omega} N_i N_j d\Omega,$$

Matriz de masa de los elementos tridimensionales del dominio.

$$\begin{aligned} [\mathbf{C}(X^m)]_{jk} &= u_i^m \int_{\Omega} N_i \partial_x N_k N_j d\Omega \\ &+ v_i^m \int_{\Omega} N_i \partial_y N_k N_j d\Omega \\ &+ w_i^m \int_{\Omega} N_i \partial_z N_k N_j d\Omega \end{aligned}$$

Matriz de los términos convectivos.

$$\begin{aligned} [\mathbf{L}]_{ji} &= \int_{\Omega} \nu_H \partial_x N_j \partial_x N_i d\Omega \\ &+ \int_{\Omega} \nu_H \partial_y N_j \partial_y N_i d\Omega \\ &+ \int_{\Omega} \nu_V \partial_z N_j \partial_z N_i d\Omega, \end{aligned}$$

Matriz de rigidez de los términos difusivos.

$$[\mathbf{G}_1]_{ji} = \int_{\Omega} \partial_x N_i N_j d\Omega,$$

$$[\mathbf{G}_2]_{ji} = \int_{\Omega} \partial_y N_i N_j d\Omega,$$

$$[\mathbf{G}_3]_{ji} = \int_{\Omega} \partial_z N_i N_j d\Omega,$$

Componentes de la matriz gradiente.

$$[\mathbf{F}_1]_{ji} = \int_{\Omega} \partial_x \bar{N}_i N_j d\Omega,$$

$$[\mathbf{F}_2]_{ji} = \int_{\Omega} \partial_y \bar{N}_i N_j d\Omega,$$

Componentes de la matriz del término barotrópico.

$$[\mathbf{B}_1]_{ji} = \int_{\Omega} N_j \left[ \int_z^\eta \partial_x N_i d\zeta \right] d\Omega,$$

$$[\mathbf{B}_2]_{ji} = \int_{\Omega} N_j \left[ \int_z^\eta \partial_y N_i d\zeta \right] d\Omega,$$

Componentes de la matriz del término baroclínico.

$$[\mathbf{D}_1]_{ji} = \int_{\Omega} \partial_x N_i N_j d\Omega,$$

$$[\mathbf{D}_2]_{ji} = \int_{\Omega} \partial_y N_i N_j d\Omega,$$

$$[\mathbf{D}_3]_{ji} = \int_{\Omega} \partial_z N_i N_j d\Omega,$$

Componentes de la matriz de divergencia.

$$\begin{aligned} [\mathbf{L}_\alpha]_{ji} &= \sum_K \alpha_K \int_K \partial_x N_i \partial_x N_j d\Omega \\ &+ \sum_K \alpha_K \int_K \partial_y N_i \partial_y N_j d\Omega \\ &+ \sum_K \alpha_K \int_K \partial_z N_i \partial_z N_j d\Omega \end{aligned}$$

Matriz laplaciana de la ecuación de continuidad modificada.

$$[\mathbf{D}_{1,\alpha}]_{ji} = \sum_K \sqrt{\alpha_K} \int_K N_i \partial_x N_j d\Omega,$$

$$[\mathbf{D}_{2,\alpha}]_{ji} = \sum_K \sqrt{\alpha_K} \int_K N_i \partial_y N_j d\Omega,$$

$$[\mathbf{D}_{3,\alpha}]_{ji} = \sum_K \sqrt{\alpha_K} \int_K N_i \partial_z N_j d\Omega,$$

Componentes de la matriz de divergencia de la ecuación de continuidad modificada.

$$[\mathbf{G}_{1,\alpha}]_{ji} = \sum_K \sqrt{\alpha_K} \int_K \partial_x N_i N_j d\Omega,$$

$$[\mathbf{G}_{2,\alpha}]_{ji} = \sum_K \sqrt{\alpha_K} \int_K \partial_y N_i N_j d\Omega,$$

$$[\mathbf{G}_{3,\alpha}]_{ji} = \sum_K \sqrt{\alpha_K} \int_K \partial_z N_i N_j d\Omega,$$

Componentes de la matriz gradiente de la ecuación de la proyección del gradiente de la presión.

$$[\bar{\mathbf{M}}]_{ji} = \int_{\Gamma_s} \bar{N}_i \bar{N}_j d\Gamma_s,$$

Matriz de masa de los elementos bidimensionales de la superficie.

$$\begin{aligned} [\bar{\mathbf{C}}(X^m)]_{jk} &= u_i^m \int_{\Gamma_s} \bar{N}_i \partial_x \bar{N}_k \bar{N}_j d\Gamma_s \\ &+ v_i^m \int_{\Gamma_s} \bar{N}_i \partial_y \bar{N}_k \bar{N}_j d\Gamma_s \end{aligned}$$

Matriz de términos convectivos de la ecuación de superficie libre.

## 2.5 Esquema de resolución numérica

Como consecuencia del hecho de que se tomó como velocidad convectiva el valor en el paso de tiempo anterior, el problema planteado en forma matricial en (2.7) es lineal pero el gradiente de la presión está acoplado con la velocidad y la presión a través de la ecuación (2.7b). Debido a esto, para la resolución numérica del sistema de ecuaciones para la velocidad, presión y gradiente de

- |  |
|--|
| <p>0. Calcular <math>\mathbf{M}</math>, <math>\mathbf{M}_{3D}</math>, <math>\tilde{\mathbf{M}}</math>, <math>\hat{\mathbf{M}}</math>, <math>\check{\mathbf{M}}</math>, <math>\bar{\mathbf{M}}</math>, <math>\mathbf{L}</math>, <math>\mathbf{G}_{3D}</math>, <math>\mathbf{F}</math>, <math>\mathbf{B}</math>, <math>\bar{\mathbf{T}}</math>, <math>\mathbf{D}</math>, <math>\mathbf{L}_\alpha</math>, <math>\mathbf{D}_\alpha</math> y <math>\mathbf{G}_\alpha</math> y ensamblar la matriz del sistema (2.8c).</p> <p>I. Calcular <math>\mathbf{C}(\mathbf{X}^n)</math>, <math>\mathbf{M}_{3D} \mathbf{U}^n</math>, <math>\mathbf{F} \mathbf{E}^n</math>, <math>\mathbf{B} \mathbf{S}^{n+1}</math> y ensamblar la matriz del sistema (2.8a)-(2.8b).</p> <p>II. Inicializar <math>\mathbf{R}_0^{n+1} = \mathbf{R}^n</math> e <math>i = 0</math>.</p> <p>III. Calcular <math>\mathbf{D}_\alpha \mathbf{R}_i^{n+1}</math>.</p> <p>IV. Resolver para <math>(\mathbf{X}_{i+1}^{n+1}, \mathbf{P}_{i+1}^{n+1})</math>.</p> <p>V. Calcular <math>\mathbf{G}_\alpha \mathbf{P}_{i+1}^{n+1}</math>.</p> <p>VI. Resolver para <math>\mathbf{R}_{i+1}^{n+1}</math>.</p> <p>VII. <math>\ \mathbf{X}_{i+1}^{n+1} - \mathbf{X}_i^{n+1}\  &lt; \text{TOL. VELOCIDAD ?}</math><br/> <math>\ \mathbf{P}_{i+1}^{n+1} - \mathbf{P}_i^{n+1}\  &lt; \text{TOL. PRESIÓN ?}</math><br/> <math>\ \mathbf{R}_{i+1}^{n+1} - \mathbf{R}_i^{n+1}\  &lt; \text{TOL. GRADIENTE DE LA PRESIÓN ?}</math></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• NO: Actualizar <math>(\mathbf{X}_i^{n+1}, \mathbf{P}_i^{n+1}, \mathbf{R}_i^{n+1})</math>, <math>i \rightarrow i + 1</math> y volver a III.</li> <li>• SI: Actualizar <math>(\mathbf{X}^n, \mathbf{P}^n, \mathbf{R}^n)</math>.</li> </ul> <p>VIII. Calcular <math>\bar{\mathbf{C}}(\mathbf{X}^{n+1})</math>, <math>\bar{\mathbf{M}} \mathbf{W}^{n+1}</math>, <math>\bar{\mathbf{M}} \mathbf{E}^n</math> y ensamblar la matriz del sistema (2.8d).</p> <p>IX. Resolver para <math>\mathbf{E}^{n+1}</math>, <math>n \rightarrow n + 1</math> y volver a I.</p> |
|--|

Tabla 2.1: Algoritmo de resolución del sistema de ecuaciones.

presión se utiliza un esquema iterativo basado en el método de Gauss-Seidel por bloques, ver tabla (2.1). Este consiste en un esquema iterativo en el cual se calculan la velocidad y la presión suponiendo conocido el gradiente de la presión, el cual se actualiza al final de la iteración. Como ya se expuso anteriormente en este capítulo, el carácter diagnóstico del modelo hace que se suponga conocido el valor de la densidad en cada instante de tiempo y para cada nodo de la malla  $\mathbf{S}^{n+1}$ . Si el subíndice  $i$  designa la variable correspondiente en la iteración  $i$ -ésima, este método puede escribirse de la siguiente forma:

$$\left[ \mathbf{M}_{3D} + \Delta t (\mathbf{C}_{3D}(\mathbf{X}^n) + f \tilde{\mathbf{M}} + b \hat{\mathbf{M}} + C_b \check{\mathbf{M}} + \mathbf{L}_{3D}) \right] \mathbf{X}_{i+1}^{n+1} \quad (2.8a)$$

$$+ \Delta t \mathbf{G}_{3D} \mathbf{P}_{i+1}^{n+1} = \mathbf{M}_{3D} \mathbf{U}^n - \Delta t \left[ g \mathbf{F} \mathbf{E}^n + \frac{g}{\rho_0} \mathbf{B} \mathbf{S}^{n+1} - \bar{\mathbf{T}} \right]$$

$$\mathbf{D} \mathbf{X}_{i+1}^{n+1} + \mathbf{L}_{\alpha,3D} \mathbf{P}_{i+1}^{n+1} = \mathbf{D}_\alpha \mathbf{R}_i^{n+1} \quad (2.8b)$$

$$\mathbf{M}_{3D} \mathbf{R}_{i+1}^{n+1} = \mathbf{G}_\alpha \mathbf{P}_{i+1}^{n+1} \quad (2.8c)$$

Este esquema se inicializa haciendo la proyección del gradiente de la presión  $\mathbf{R}_0^{n+1} = \mathbf{R}^n$ . Una vez conocida la velocidad  $\mathbf{X}^{n+1}$  se obtiene una nueva

aproximación  $\mathbf{E}^{n+1}$  de la altura de superficie libre al final del paso de tiempo  $t_{n+1}$ , a partir de:

$$\left[ \bar{\mathbf{M}} + \Delta t \bar{\mathbf{C}}(\mathbf{X}^{n+1}) \right] \mathbf{E}^{n+1} = \bar{\mathbf{M}} (\Delta t \mathbf{W}^{n+1} + \mathbf{E}^n) \quad (2.8d)$$

La matriz del sistema “velocidad-presión” se calcula una sola vez en cada paso de tiempo, ya que permanece constante durante la iteración  $i$ . La matriz de masa  $\mathbf{M}$  del sistema para  $\mathbf{R}_{i+1}^{n+1}$  puede aproximarse por su matriz aglutinada diagonal (“*lumped*”), o se puede utilizar ésta como preconditionador para resolver el sistema con matriz consistente mediante el método del gradiente conjugado.

La convergencia del sistema iterativo se define en términos del error relativo en la norma euclídea de los vectores nodales de las variables correspondientes.

## Capítulo 3

# Validación y aplicación de la versión “*rigid-lid*” del modelo HELIKE

“El único error real es aquel del que no aprendemos nada”

*John Powell, 1834-1902*

Geólogo y etnólogo estadounidense.

La falta o escasa cantidad de datos disponibles dificultan la validación de los modelos numéricos en problemas reales. Sumado a esto, los problemas reales poseen generalmente una mayor complejidad geométrica y una gran cantidad de fenómenos físicos que interaccionan entre ellos haciendo más difícil el estudio y comprensión de los mismos. Como una alternativa diferente, para la validación del modelo HELIKE utilizaremos algunos de los problemas de referencia más estudiados en la literatura, que con frecuencia son utilizados para la validación de los modelos numéricos del estado del arte.

### 3.1 Flujo en una cavidad cúbica

Un problema de referencia muy conocido es el flujo en una cavidad cúbica inducido por una condición de contorno constante y homogénea para la

velocidad sobre la superficie, denominada en inglés “*cavity-flow*”. En términos del desarrollo del código numérico, la aplicación del modelo numérico a este problema es bastante fácil y directo debido a la simplicidad de la geometría del cubo. No obstante, este problema retiene una importante cantidad de fenómenos físicos que se manifiestan en las múltiples regiones de re-circulación en los vértices y esquinas de la cavidad dependiendo directamente del número de Reynolds. En la literatura, es posible encontrar diferentes aproximaciones numéricas aplicadas a este problema de flujo en cavidad (ver *p. ej.* Freitas *et al.* (1985); Freitas y Street (1988); Ku *et al.* (1987); Iwatsu *et al.* (1989); Kato *et al.* (1990); Hafez y Soliman (1991); Jiang *et al.* (1994)). Sin embargo a pesar de que este problema ha sido extensamente estudiado en forma numérica, todavía hay algunos puntos en los cuales no hay coincidencia. Un dato de interés de los numerosos estudios es que diferentes soluciones numéricas del problema de flujo en cavidad dan los mismos resultados para  $Re \leq 1000$ , pero comienzan a desviarse unos de otros para  $Re$  mayores. Teniendo esto en cuenta, como primer caso de validación de la estabilización del modelo numérico tridimensional se realizará la comparación entre los valores obtenidos para el estado estacionario por el modelo HELIKE con los valores obtenidos por Jiang *et al.* (1994) para los números de Reynolds  $Re = 400$  y  $Re = 1000$ .

Jiang *et al.* (1994) utiliza un método en elementos finitos con una estabilización por mínimos cuadrados (LSFEM) para la resolución de las variables del problema velocidad-presión-vorticidad. Considera el problema simétrico al plano  $z = 0,5$  (ver figura 3.1), por lo cual sólo utiliza la mitad del dominio y una malla de 65000 elementos trilineales hexaédricos dispuestos en  $50 \times 52 \times 25$  elementos por cada dimensión. Teniendo en cuenta que en la medida en que se aumenta la cantidad de elementos de la malla se incrementa la precisión numérica alcanzada por la solución, se puede considerar que la alta resolución de la malla utilizada por Jiang *et al.* (1994) puede ser un buen punto de referencia para efectuar esta validación. Los valores que obtuvo para la componente  $u$  de la velocidad en  $x = 0,5$  y  $z = 0,5$  para los valores del número de Reynolds  $Re = 400, 1000$  y su representación se pueden ver en la figura 3.2 (a) y (b).

El dominio de este problema es un cubo unidad  $\Omega = [0, 1]^3$  en cuyos contornos se impone una velocidad nula  $u = v = w = 0$  excepto sobre la cara superior  $y = 1$  en la cual se impone la velocidad  $u = 1$  y  $v = w = 0$ ,

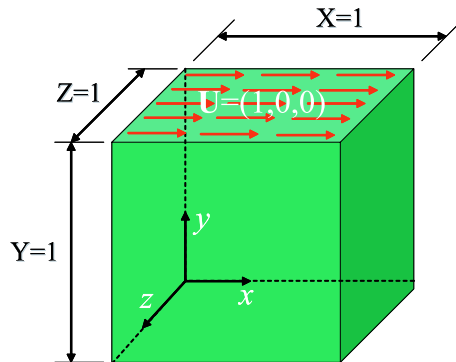


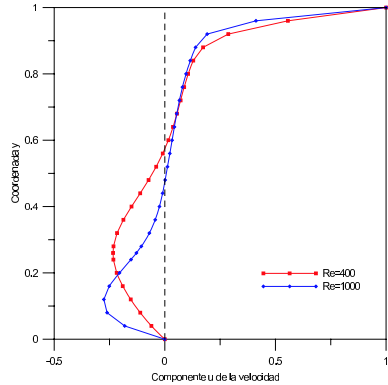
Figura 3.1: Geometría y condiciones de contorno para el problema de flujo en cavidad cúbica.



### 3.1. Flujo en una cavidad cúbica

$y$	$Re$	
	400,0	1000,0
1,00	1,0000	1,0000
0,96	0,5563	0,4119
0,92	0,2868	0,1912
0,88	0,1730	0,1389
0,84	0,1285	0,1148
0,80	0,1052	0,0959
0,76	0,0875	0,0798
0,72	0,0714	0,0661
0,68	0,0550	0,0540
0,64	0,0369	0,0432
0,60	0,0159	0,0328
0,56	-0,0092	0,0224
0,52	-0,0391	0,0120
0,48	-0,0734	0,0015
0,44	-0,1113	-0,0099
0,40	-0,1505	-0,0242
0,36	-0,1872	-0,0435
0,32	-0,2159	-0,0701
0,28	-0,2319	-0,1063
0,26	-0,2341	-0,1284
0,24	-0,2324	-0,1528
0,20	-0,2176	-0,2049
0,16	-0,1903	-0,2512
0,12	-0,1540	-0,2754
0,08	-0,1111	-0,2611
0,04	-0,0608	-0,1812
0,00	0,0000	0,0000

(a) Tabla de valores de la componente  $u$  de la velocidad.



(b) Representación gráfica del perfil de velocidades.

Figura 3.2: Solución numérica estacionaria en  $x = 0,5$  y  $z = 0,5$  para el problema de flujo en cavidad cúbica de Jiang *et al.* (1994).

aunque todas son condiciones de tipo Dirichlet (ver figura 3.1). Para resolver este problema con HELIKE se impone también el valor de la presión  $p = 0$  en el último nodo de la malla para definir el campo de presiones. Se utiliza una malla cartesiana refinada sobre todos los contornos de  $14 \times 20 \times 16$  elementos trilineales hexaédricos y 5355 nodos (ver figura 3.3). A pesar de que el efecto del número de nodos de la malla sobre la precisión de solución numérica es importante en la medida que el número de Reynolds se incrementa, se utiliza en ambos casos para  $Re = 400$  y  $Re = 1000$  la misma malla con el fin de reiniciar el cálculo a partir del número de Reynolds anterior.

Partiendo del fluido en estado de reposo no es posible alcanzar la convergencia a la solución del sistema lineal de ecuaciones mediante los métodos iterativos, que requieren un menor esfuerzo computacional que los métodos directos. Esto es debido a que el error relativo entre la aproximación inicial y la solución obtenida en el paso de tiempo anterior es muy grande. Por lo tanto para buscar una estimación inicial lo suficientemente próxima a la solución y asegurar de esta manera la convergencia de los métodos iterativos se recurre a los métodos directos. En este caso para la resolución del sistema lineal de ecuaciones velocidad-presión y del sistema de proyección del gradiente de la presión se utilizó el método directo LU con almacenamiento en columnas (“*sky-*

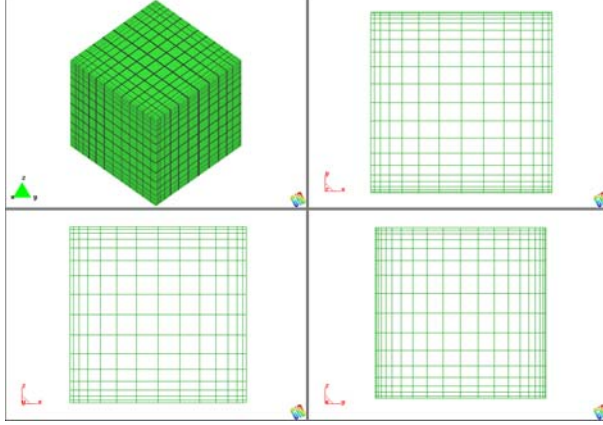


Figura 3.3: Malla 3D para el problema de flujo en cavidad cúbica con 5355 nodos y 4480 elementos hexaédricos.

line”). De esta manera se efectuaron 10 pasos de tiempo con un incremento  $\Delta t = 0,03$  s empleando un tiempo de cálculo (CPU) de 836,63 s. El coeficiente de estabilización utilizado en esta simulación fue  $\alpha = 12$  y para obtener un número de Reynolds  $Re = 400$  se utilizó un coeficiente de viscosidad turbulenta  $\nu = \nu_H = \nu_V = 2,5 \times 10^{-3}$  m<sup>2</sup>/s. En una segunda etapa y a partir de la solución anterior se utilizó el método iterativo BCGStab con preconditionamiento (Left ILUT) para la resolución del sistema velocidad-presión, mientras que se utilizó una matriz de masa aglutinada para el sistema del gradiente de la presión hasta alcanzar la convergencia final para  $Re = 400$  con una tolerancia del estado estacionario de  $\epsilon_s = 10^{-5}$  en 935 pasos de tiempo y un tiempo de cálculo de 3803,59 segundos. La tolerancia del método de resolución iterativo fue de  $\epsilon_i = 10^{-5}$ . Dentro de cada paso de tiempo se exigió, para el desacoplamiento con la PGP, una tolerancia de  $\epsilon_g = 10^{-6}$ . A partir de la solución para  $Re = 400$ , la última etapa empleó un tiempo de cálculo de 4910,36 segundos para efectuar 1280 pasos de tiempo antes de hallar la convergencia a la solución estacionaria para  $Re = 1000$ . En todas las etapas y en cada paso de tiempo, se realizaron dos iteraciones de PGP. Para  $Re = 1000$  se utilizaron los siguientes valores del coeficientes de viscosidad turbulenta  $\nu = \nu_H = \nu_V = 1,0 \times 10^{-3}$  m<sup>2</sup>/s.

Las figuras 3.4 (a) y (b) muestran los perfiles de velocidad de la componente  $u$  en  $(x = 0,5; z = 0,5)$  para  $Re = 400$  y  $Re = 1000$  junto con los resultados del trabajo de Jiang *et al.* (1994) para su comparación. Con el fin de cuantificar la precisión de la solución obtenida respecto a este último trabajo, se calculó la norma  $L^2$  del error de las velocidades nodales, a lo largo de la línea central, respecto a la solución tomada como referencia.

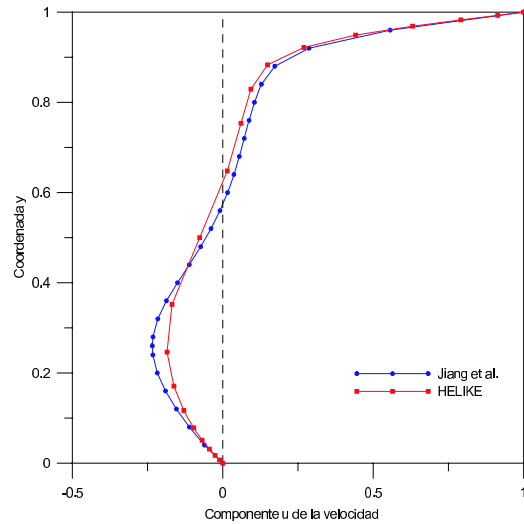
$$\epsilon_r = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N (u_e(i) - u_c(i))^2}{\sum_{i=1}^N u_e(i)}} \quad (3.1)$$

siendo:

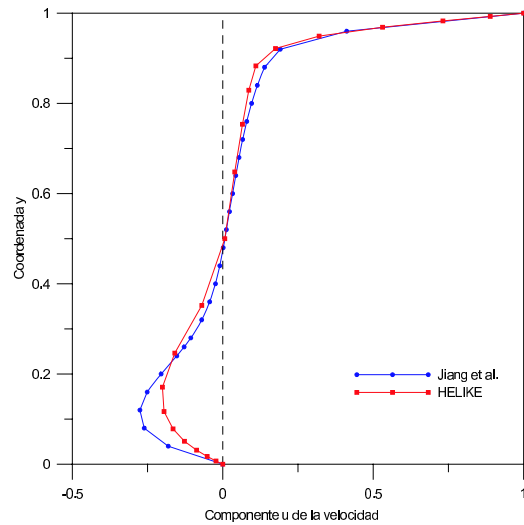
- $u_e$  la solución tomada como referencia de Jiang *et al.* (1994).
- $u_c$  la solución calculada por el modelo HELIKE.

### 3.1. Flujo en una cavidad cúbica

Debido a la gran diferencia de densidad en la discretización entre las mallas se interpoló la solución de referencia sobre los nodos de nuestra malla para obtener finalmente un error relativo de  $\epsilon_r = 0.053269186$  para  $Re = 400$  y  $\epsilon_r = 0.106640177$  para  $Re = 1000$ .



(a)  $Re = 400$



(b)  $Re = 1000$

Figura 3.4: Comparación entre la solución numérica de Jiang *et al.* (1994) y la del modelo HELIKE.

La distribución de velocidades y presiones en los planos medios  $x = 0, 5$ ,  $y = 0, 5$  y  $z = 0, 5$  para  $Re = 400$  se pueden observar en las figuras 3.5 y 3.6, mientras que para  $Re = 1000$  se pueden observar en las figuras 3.7 y 3.8. Estos resultados muestran una buena correlación con los valores obtenidos por Jiang *et al.* (1994).

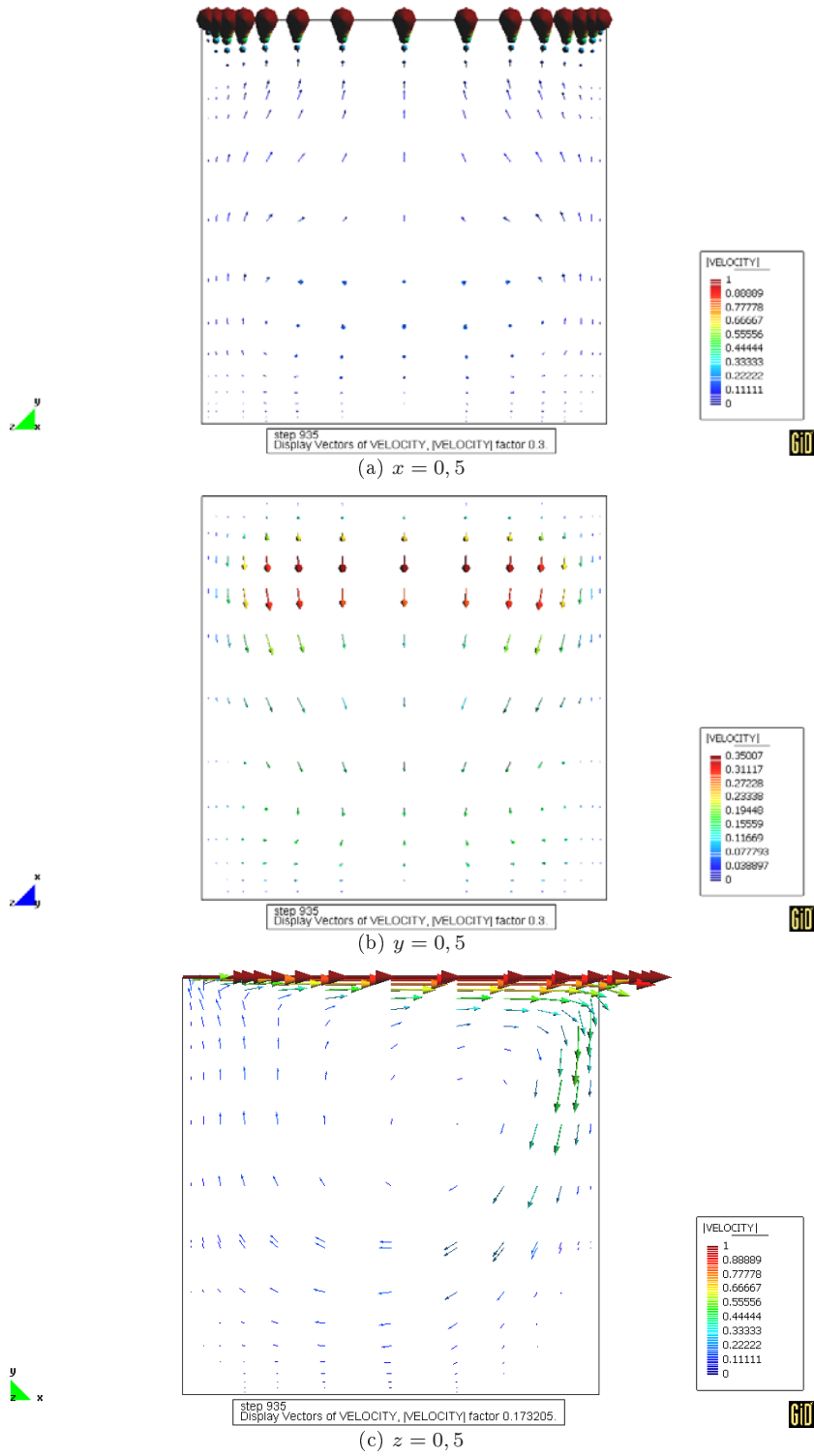


Figura 3.5: Distribución de velocidades para  $Re = 400$ .

### 3.1. Flujo en una cavidad cúbica

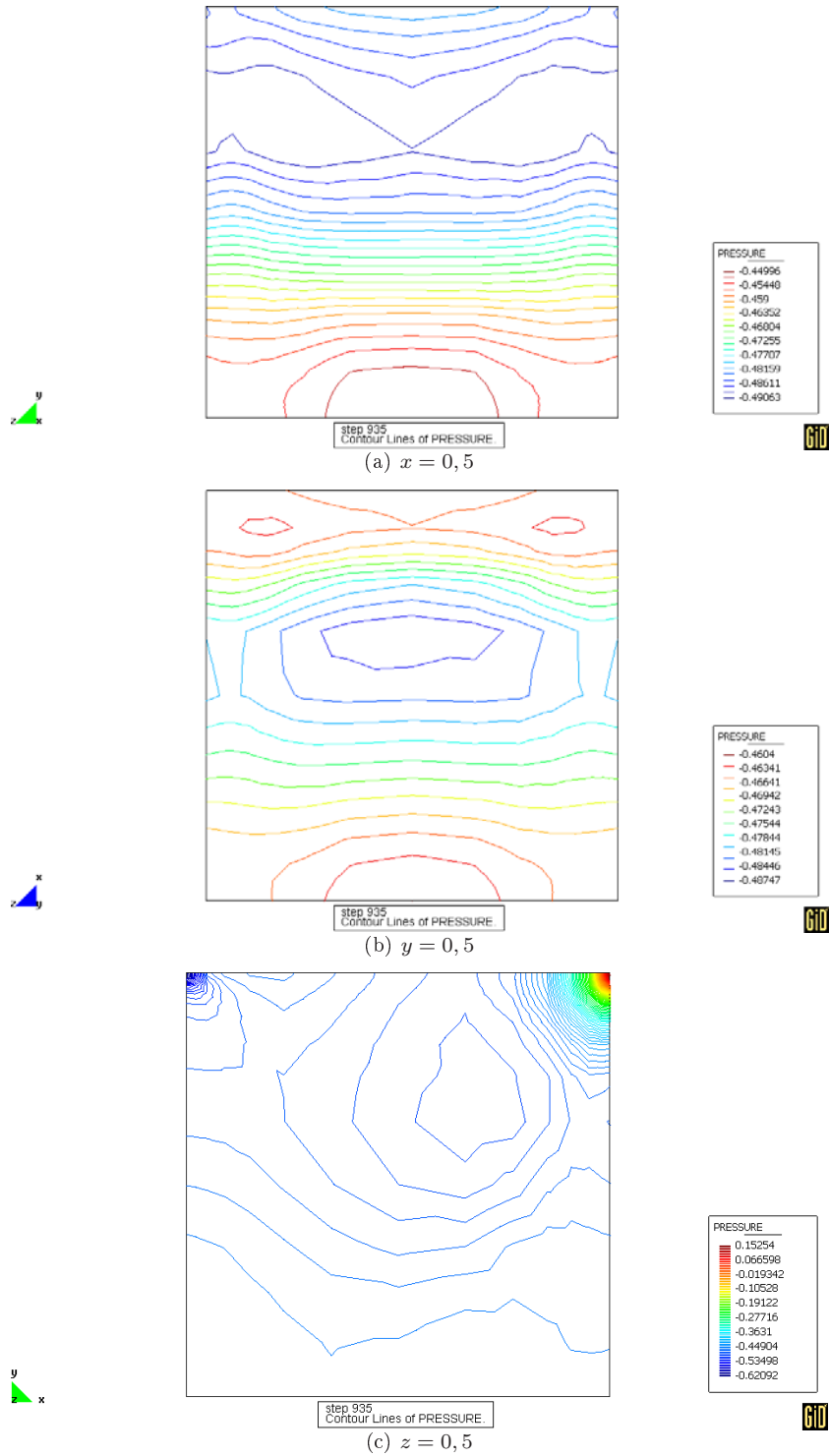


Figura 3.6: Distribución de presiones para  $Re = 400$ .

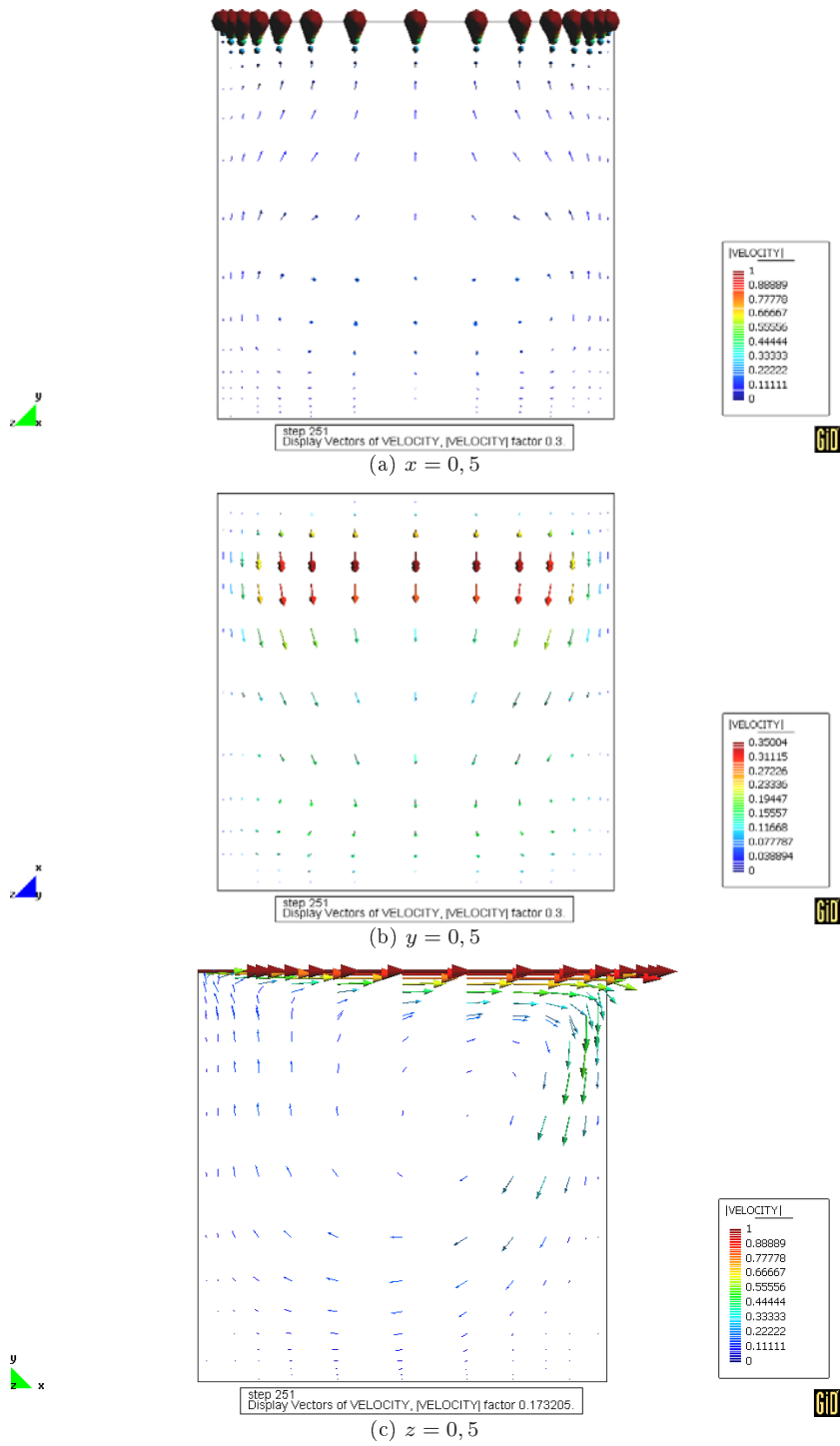


Figura 3.7: Distribución de velocidades para  $Re = 1000$ .

### 3.1. Flujo en una cavidad cúbica

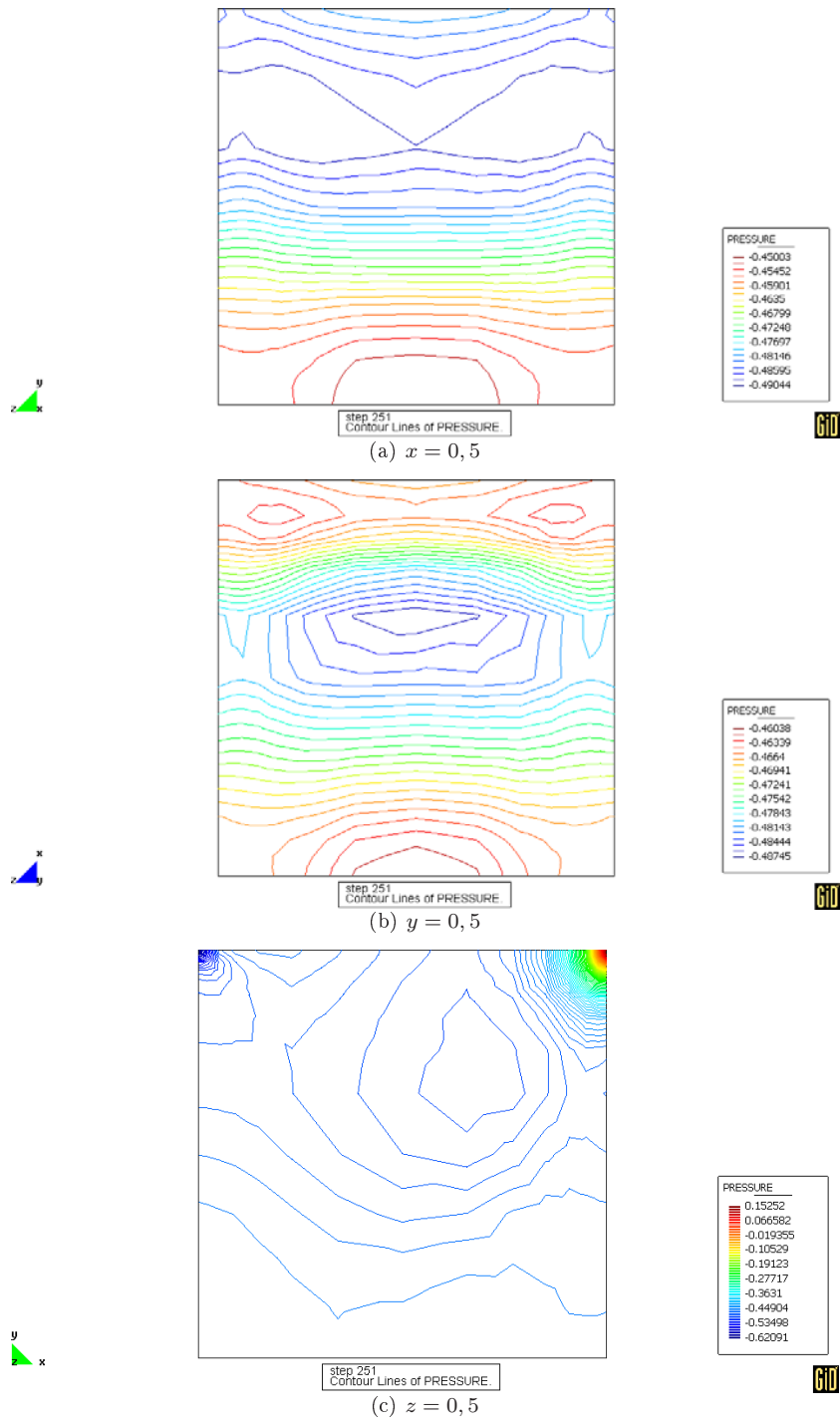


Figura 3.8: Distribución de presiones para  $Re = 1000$ .

### 3.2 Flujo sobre un escalón 3D

El problema del flujo sobre un escalón, denominado en ingles “*backward-facing step*”, considera el movimiento de un fluido viscoso contenido entre dos planos con un brusco cambio de sección a cierta distancia del extremo. En la figura 3.9 se muestran las dimensiones del dominio considerado así como también los parámetros geométricos para este problema. Se fija la altura del escalón en  $h = 1$  y se toma la arista del escalón como el origen del sistema de coordenadas. El fluido se mueve desde el canal de entrada de altura  $\alpha h = 1$  y fluye en dirección al canal de salida  $(1 + \alpha)h$ . En este estudio tomamos  $\alpha = 1$ , dando una razón de expansión (entrada/salida) de  $1 + 1/\alpha = 2$ . La longitud de entrada  $L_i$  y salida  $L_o$  deben ser lo suficientemente largas como para que los resultados sean independientes de este parámetro.

Tomando  $L_i = h$  es suficiente para el rango de valores del número de Reynolds entre 200 – 1000 que se estudió aquí de acuerdo con los trabajos de Kaiktsis *et al.* (1991); Williams y Baker (1997); Barkley *et al.* (2002). La longitud necesaria  $L_o$  varía con el número de Reynolds, Barkley *et al.* (2002) encontraron como valores aceptables para este rango los comprendidos entre  $15h \leq L_o \leq 55h$ , adoptándose en este caso  $L_o = 38h$  y un ancho de  $A = 1$ . Las condiciones de contorno impuestas son las siguientes, en el contorno de entrada ( $x = -L_i, 0 \leq y \leq \alpha h, 0 \leq z \leq 1$ ) se impuso un perfil parabólico de velocidades  $u = 4y(\alpha h - y)/(\alpha h)^2, v = w = 0$ . A lo largo del escalón y en todas las paredes del canal se impuso una condición de tipo Dirichlet homogénea ( $u = v = w = 0$ ). En el contorno de salida ( $x = L_o, -h \leq y \leq \alpha h, 0 \leq z \leq 1$ ) se impuso una condición natural (tipo Neumann) para la velocidad, lo cual marca una diferencia respecto al problema anterior.

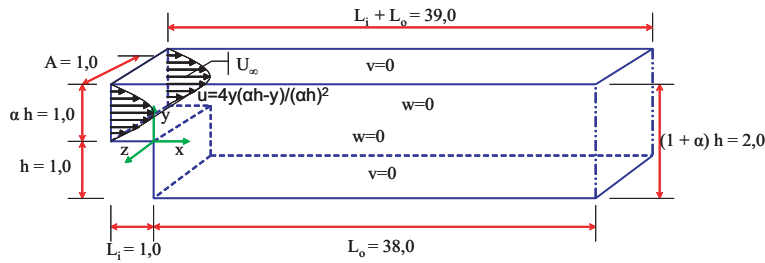


Figura 3.9: Dimensiones del dominio y parámetros geométricos para el problema del flujo sobre un escalón 3D.

Como se puede apreciar en la figura 3.10, la malla empleada para este problema esta compuesta por 7065 nodos y 5248 elementos hexaédricos.

En la literatura aparecen diferentes maneras de adimensionalizar este problema, tomando diferentes valores para las escalas de referencia  $L_{ref}$  y  $U_{ref}$ . La altura del escalón  $h$  es una escala de longitud natural para definir la geometría del problema y medir cantidades como los puntos de separación del flujo aguas abajo del escalón, siendo la elección más común para  $L_{ref}$  por lo que este valor se adopta. Para la velocidad de referencia  $U_{ref}$  se adopta la máxima velocidad sobre la línea central aguas arriba del escalón  $U_\infty$ . Una vez definidas las escalas



### 3.2. Flujo sobre un escalón 3D

---

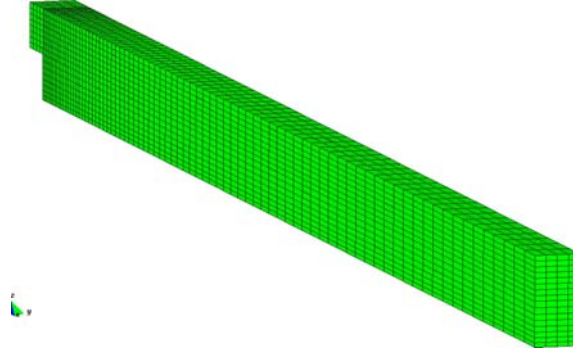


Figura 3.10: Malla de 7065 nodos y 5248 elementos hexaédricos para el problema de flujo sobre un escalón 3D.

de referencia para este problema se puede calcular el número de Reynolds como:

$$Re = \frac{U_{\infty} h}{\nu}$$

En la figura 3.11 se pueden apreciar las líneas de igual velocidad de la corriente para los valores del número de Reynolds  $Re = 200, 400, 600, 800, 1000$ , calculados con los valores de referencia adoptados  $L_{ref} = 1\text{ m}$  y  $U_{ref} = 1\text{ m/s}$  y los coeficientes de viscosidad turbulenta  $\nu = \nu_H = \nu_V$  para los respectivos números de Reynolds. Finalmente se muestran las iso-superficies de velocidades para el modelo de turbulencia de Smagorinsky.

Los valores de la longitud de separación primaria  $X_1$  (ver figura 3.12) calculados para números de Reynolds menores que  $Re = 400$  están de acuerdo con los datos experimentales de Armaly *et al.* (1983), aunque estos valores experimentales fueron calculados con un factor de expansión de 1, 94 y no 2. La zona de separación secundaria  $X_1 - X_2$  aparece por primera vez entre el número de Reynolds 200 y 400, de acuerdo con lo descrito en Armaly *et al.* (1983)  $\simeq Re = 300$ . Para números de Reynolds mayores la longitud de separación primaria no está de acuerdo con los valores de las medidas experimentales porque el flujo experimental es tridimensional debido a las perturbaciones producidas por la rugosidad de las paredes, efecto bien documentado en Williams y Baker (1997). No obstante, nuestros resultados están generalmente de acuerdo con los resultados obtenidos de otros estudios numéricos bi-dimensionales y tri-dimensionales en este régimen. Hemos utilizado para comparar los valores obtenidos por Gartling (1990) y Barkley *et al.* (2002) de los puntos de separación primaria y secundaria del flujo  $X_1$ ,  $X_2$  y  $X_3$  para  $Re = 600$  (ver tabla 3.1) con los valores calculados por el modelo desarrollado en esta tesis. La mayor diferencia entre los valores hallados por Gartling (1990) y Barkley *et al.* (2002) y las del modelo HELIKE se encontró para el punto  $X_2$ .

Para esta simulación con  $Re = 600$  se utilizó un coeficiente de turbulencia constante de  $\nu_H = \nu_V = 1,6666 \times 10^{-3}\text{ m}^2/\text{s}$ . Se resolvieron la matrices del sistema velocidad presión y de la proyección del gradiente de la presión mediante un método directo LU con almacenamiento en columnas y un incremento del paso de tiempo de  $\Delta t = 1\text{ s}$ . Las tolerancias para la formulación y el estado estacionario fueron de  $10^{-6}$  y  $10^{-5}$ , respectivamente. Alcanzándose la convergencia para el estado estacionario en 1345 pasos de tiempo.

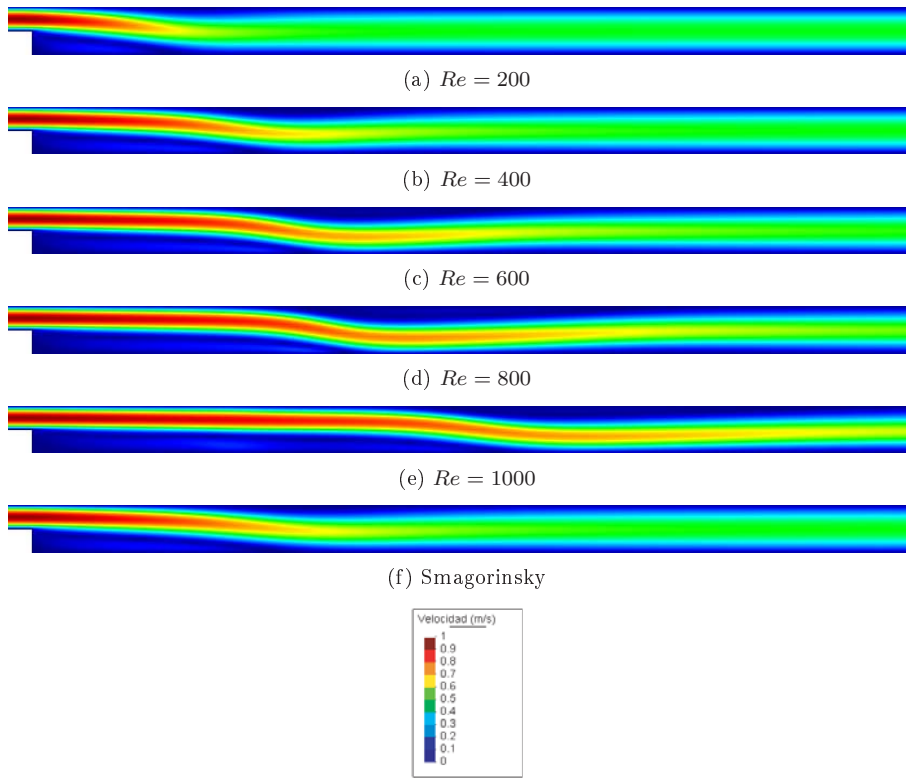


Figura 3.11: Visualización de las iso-superficies del campo de velocidades para diferentes valores del número de Reynolds y con el modelo de turbulencia de Smagorinsky.

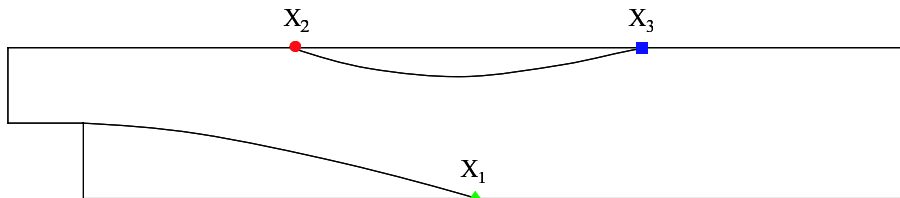


Figura 3.12: Puntos de separación primaria  $X_1$  y secundaria del flujo  $X_2, X_3$  para el problema de flujo sobre un escalón 3D.

Autor	$X_1$	$X_2$	$X_3$
Gartling (1990)	12,2	9,7	21,0
Barkley <i>et al.</i> (2002)	11,91	9,5	20,6
HELIXE	12,4	11,4	20,4

Tabla 3.1: Tabla de valores de los puntos de separación del flujo de las zonas primaria y secundaria para el problema de flujo sobre un escalón 3D.

### 3.3 Flujo de Taylor-Couette

Para la validación del término de Coriolis, consideramos el conocido problema del flujo de Taylor-Couette. En nuestro caso, este problema consistirá en conocer la distribución de velocidades de un fluido newtoniano de viscosidad cinemática  $\nu = \nu_H = \nu_V = 0,1$  contenido en el anillo entre dos cilindros concéntricos de longitud  $L = 2$  y de radios interior  $a = 1$  y exterior  $b = 2$ ; el cilindro exterior está en reposo ( $\Omega_2 = 0$ ), mientras que el cilindro interior rota en sentido antihorario con una velocidad angular  $\Omega_1 = 0,19635$ .

Se definen entonces los siguientes parámetros adimensionales: la relación de radios  $\xi = a/b = 0,5$ , la relación de aspecto  $\lambda = L/(b - a) = 2$ , el número de Reynolds  $Re = \Omega_1 a(b - a)/\nu = 1,9635$  y finalmente el número de Ekman  $Ek = \nu/\Omega_1(b - a)^2 = 0,509$  (ver figura 3.13). Una solución de las ecuaciones del movimiento puede obtenerse asumiendo que las velocidades tienen en todo lugar la dirección azimutal  $\theta$  y que tanto la velocidad como la presión son independientes de  $\theta$  y de  $z$  en coordenadas cilíndricas polares (ver Tritton, 1988, pág. 107-109). Estas suposiciones se basan en la simetría cilíndrica del problema.

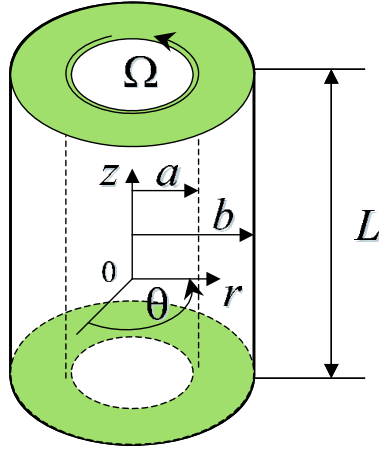


Figura 3.13: Sistema de coordenadas y geometría del dominio para el flujo de Couette.

La ecuación de continuidad  $\partial u_\theta / \partial \theta = 0$  es automáticamente satisfecha por estas suposiciones y las componentes azimutal y radial de la ecuación de Navier-Stokes se convierten así en:

$$\frac{d^2 u_\theta}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{du_\theta}{dr} - \frac{u_\theta}{r^2} = 0 \quad (3.2a)$$

$$\frac{\rho u_\theta^2}{r} = -\frac{dp}{dr} \quad (3.2b)$$

Las condiciones de contorno resultan ser las siguientes:

$$u(a) = \Omega_1 a = 0,19635 \quad \text{en } r = a \quad (3.3a)$$

$$u(b) = \Omega_2 b = 0 \quad \text{en } r = b \quad (3.3b)$$

La solución  $u_\theta$  cuando el flujo permanece enteramente azimutal es la siguiente:

$$u_\theta = Ar + \frac{B}{r} \quad (3.4a)$$

donde los coeficientes  $A$  y  $B$  son:

$$A = (\Omega_2 b^2 - \Omega_1 a^2) / (b^2 - a^2) = -6,545 \times 10^{-2}$$

$$B = (\Omega_1 - \Omega_2) a^2 b^2 / (b^2 - a^2) = 0,392699$$

mientras que la presión es:

$$p_\theta = A^2 \frac{r^2}{2} + 2AB \ln(r) - \frac{B}{2r^2} \quad (3.4b)$$

La figura 3.14 muestra la solución analítica para el flujo de Taylor-Couette presentada anteriormente.

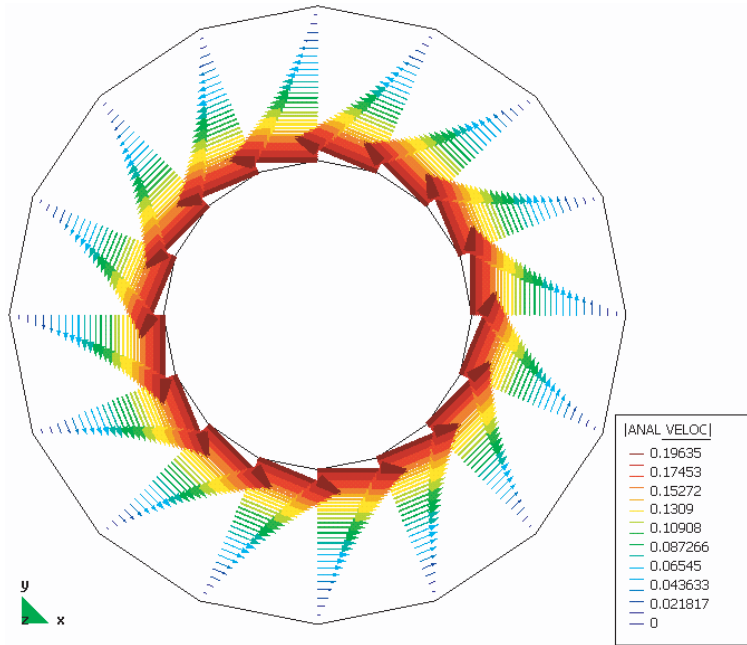


Figura 3.14: Solución analítica del campo de velocidades para el flujo de Taylor-Couette.

En primer lugar se reprodujo numéricamente el problema de Taylor-Couette descrito anteriormente. Se consideró para ello un sistema de ejes fijos solidario con el cilindro exterior que se encuentra en reposo, mientras que el cilindro interior rotaba en sentido antihorario (ver figura 3.15).

Para llevar a cabo la simulación se utilizó una malla de elementos hexaédricos formada por  $32 \times 16 \times 4$  elementos en las direcciones  $r$ ,  $\theta$  y  $z$  respectivamente (ver figura 3.16). Para los contornos interior y exterior se impusieron condiciones de contorno de tipo Dirichlet, mientras que en las fronteras  $z = 0$  y  $z = 2$  se impusieron condiciones Neumann en  $x$  e  $y$ , y Dirichlet homogénea en  $z$ .

### 3.3. Flujo de Taylor-Couette

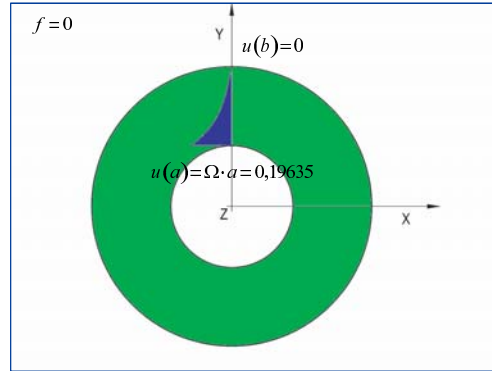


Figura 3.15: Sistema de ejes fijos.

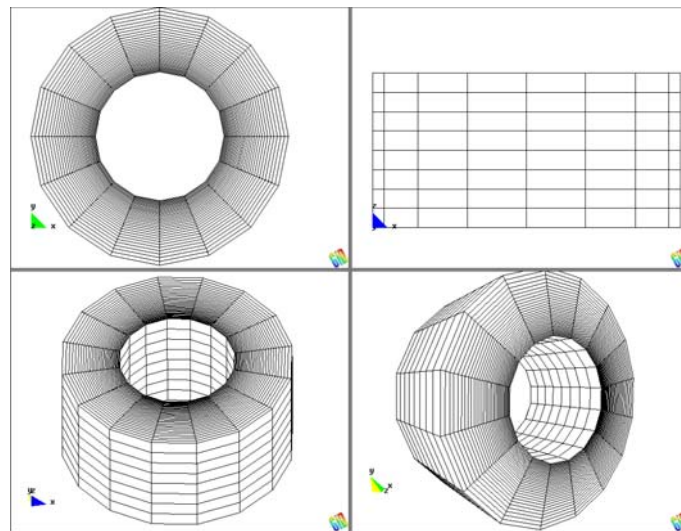


Figura 3.16: Malla de 4752 y 4096 elementos hexaédricos para el problema de flujo de Couette.

La solución numérica obtenida en este caso resulta indistinguible de la solución analítica de la figura 3.14. Dicha solución se obtuvo en 102 pasos de tiempo de tamaño  $\Delta t = 0,1$ , hasta alcanzar el estado estacionario con una tolerancia de  $10^{-4}$  en el error relativo. Para resolver los sistemas de ecuaciones lineales velocidad-presión y gradiente de la presión, se utilizaron los métodos iterativos FGMRES y CGNR, respectivamente, con preconditionador *left ILUT*.

A continuación se resolvió el problema con un sistema de ejes en rotación solidario con el cilindro exterior. Esta vez el cilindro interior está en reposo, mientras que el cilindro exterior rota en sentido horario con una velocidad  $u(b) = -0,392699$ , siendo el parámetro de Coriolis  $f = 2\Omega_1 \sin(\phi) = 0,392699$ , para  $\Omega_1 = 0,19635$  y  $\phi = 90$  (ver figura 3.17).

La solución numérica del campo de velocidades del fluido contenido entre los cilindros para el sistema de ejes en rotación solidario con el cilindro exterior se puede ver en la figura 3.18.

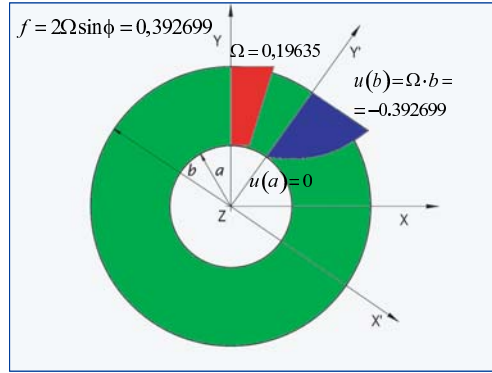


Figura 3.17: Sistema de ejes en rotación.

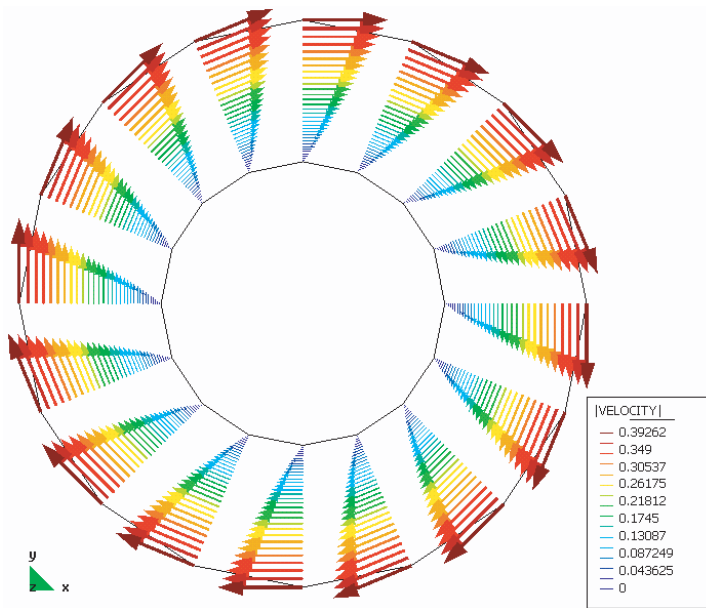
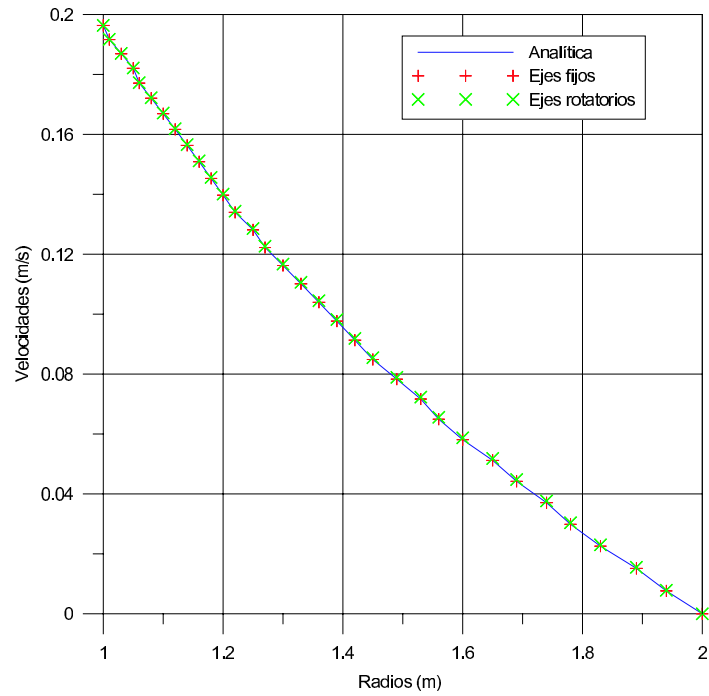


Figura 3.18: Solución numérica del campo de velocidades para el sistema de ejes en rotación.

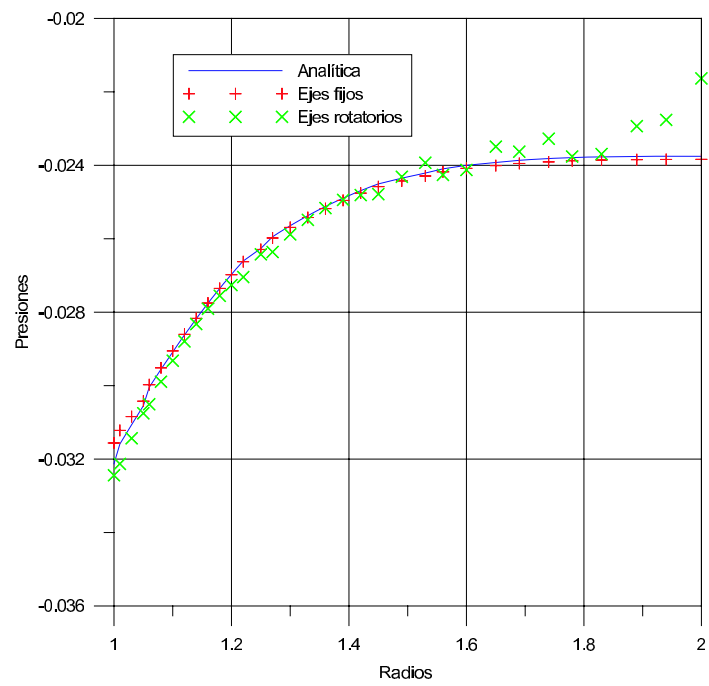
Para poder comparar las dos soluciones anteriores restamos al resultado del último caso la velocidad de rotación de los ejes  $\Omega \times r$ . En la figura 3.19 (a) se muestran los perfiles radiales de velocidad en  $\theta = 90^\circ$  y  $z = 1$ , obtenidos en ambos casos junto con la solución analítica (3.4a). Se observa un ajuste excelente en ambos casos.

En la figura 3.19 (b) se muestran los perfiles radiales de la presión en  $\theta = 90^\circ$  y  $z = 1$ , calculados para los sistemas con ejes fijos y en rotación junto con la solución analítica (3.4b). Se observa nuevamente un buen ajuste en ambos casos, especialmente para ejes fijos. Para el caso con el sistema de ejes en rotación, este resultado se obtiene luego de sustraer de la presión calculada el término  $1/2\Omega^2 r^2$ , que genera la aceleración centrífuga  $\nabla (1/2\Omega^2 r^2)$ , no implementada.

### 3.3. Flujo de Taylor-Couette



(a) Velocidades



(b) Presiones

Figura 3.19: Comparación entre la solución analítica y la numérica para ejes fijos y en rotación.

### 3.4 Vórtice geostrófico

La fricción del viento sobre la superficie libre del mar no solamente causa movimiento horizontal del agua sino también produce movimiento vertical. El efecto sobre la circulación superficial del agua de un viento anticiclónico en el hemisferio norte es mostrado en la figura 3.20. Bajo estas condiciones, como muestra la figura 3.21, la superficie libre del mar se eleva en el centro del giro, mientras que el transporte de Ekman (el movimiento promediado de la capa superior del mar afectada por la fricción del viento) se produce a  $90^\circ$ , a la derecha de la dirección del viento, causando convergencia en la superficie del agua y un sumidero en el centro del vórtice. Esto provoca que las líneas de igual densidad, antes paralelas debido a la estratificación del mar, desciendan como consecuencia del transporte vertical del agua menos densa de la superficie hacia el fondo.

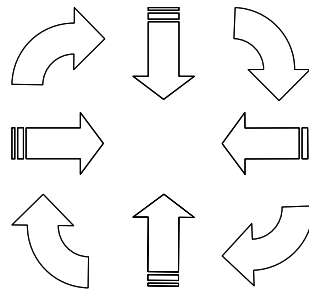


Figura 3.20: Sentido y dirección de la circulación en superficie.

Como resultado de esta disposición de las isopícnas, aparece la fuerza del gradiente de la presión horizontal. Esta actuará en forma radial desde el exterior hacia el centro del vórtice, desde la región de más alta presión (debidas a las mayores densidades) a la región de más baja presión. Bajo condiciones estacionarias, la fuerza del gradiente de la presión será balanceada por la fuerza de Coriolis y en este caso una corriente geostrófica fluirá en el mismo sentido que la corriente inducida por el viento, intentando restablecer el equilibrio.

El problema así planteado presenta dos componentes, una componente llamada barotrópica y la otra baroclínica. La primera debida al gradiente de la presión horizontal, provocado por la diferencia de altura de la superficie libre del agua y la segunda debida también al gradiente de la presión horizontal, pero en este caso por la diferencias de densidad. Esta última componente puede ser calculada por medio del método geostrófico (ver Pönd y Pickard, 1983, *pág.* 76-77), con el que contrastaremos el resultado del modelo. El método geostrófico para el cálculo de corrientes tiene en cuenta la distribución de la densidad en el océano, generalmente calculadas a partir de medidas de temperatura y salinidad, más fáciles de obtener que medidas de las corrientes directamente (las corrientes en el mar no son estacionarias y presentan altas fluctuaciones en velocidad y dirección). El método presenta algunas simplificaciones o desventajas, como la imposibilidad de calcular la componente barotrópica de la corriente, pero puede ser muy útil cuando es usado en forma paralela con otra información. En efecto, la mayoría de nuestro conocimiento sobre las corrientes oceánicas de gran escala (o corrientes generales del océano) ha sido obtenido de esta manera.



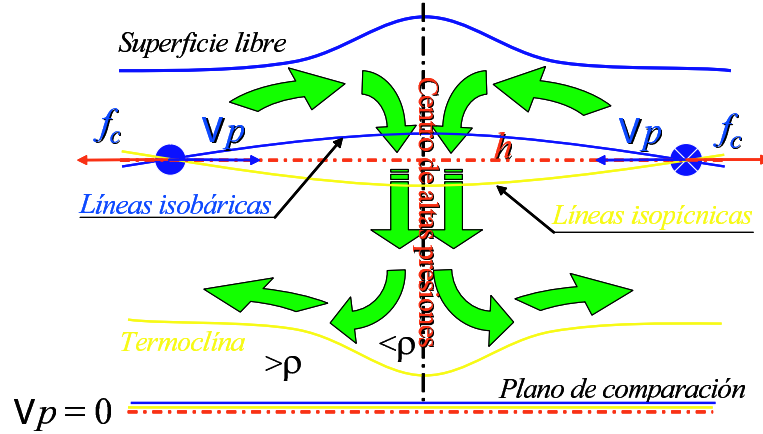


Figura 3.21: Esquema de un vórtice anticiclónico.

Se resolvió este problema reemplazando el término de gravedad  $-\rho/\rho_0g$  de la tercer componente de la ecuación de movimiento (ver ecuación (1.27c)) por  $-(\rho - \rho_0)/\rho_0$  para tener en cuenta la componente baroclínica de la presión. El dominio de estudio tenía un diámetro de  $166,6 \text{ km}$  y una profundidad total de  $2000 \text{ m}$  (ver figura 3.22). La malla se construyó de manera tal que las coordenadas verticales de los nodos, coincidieran con las profundidades de densidad conocida en dos estaciones (una central y otra exterior), separadas  $50 \text{ km}$  entre ellas (ver tabla 3.2). Las densidades para los nodos entre dichas estaciones y los primeros  $1000 \text{ m}$  de profundidad, fueron interpoladas linealmente y en forma radial sobre la estación central. Las densidades entre los  $1000$  y  $2000 \text{ m}$  de profundidad, fueron consideradas constantes e igual a  $1027,78 \text{ kg/m}^3$ , mientras que entre los radios de  $50$  y  $75 \text{ km}$  del exterior, se consideró por cada profundidad, igual al valor de la densidad en la estación Exterior. Esta distribución de densidades es muy común con la de un vórtice de mesoescala característico que se desprende de la corriente del Golfo (ver Bearman, 2001, *pág.* 37-38). Las condiciones de contorno utilizadas fueron, para el fondo y contorno vertical exterior, condición Dirichlet homogénea  $u = v = w = 0$ , mientras que en la superficie libre se restringió la velocidad vertical  $w = 0$  y se empleó una condición de flujo libre en las demás direcciones (condición tipo Neumann).

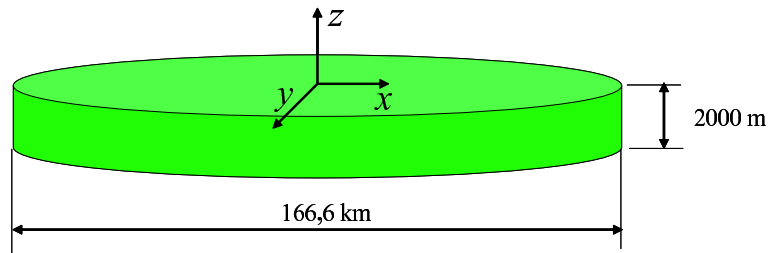


Figura 3.22: Esquema del dominio computacional.

Se utilizó para el cálculo una malla estructurada de  $4246$  nodos y  $3780$  elementos prismáticos triangulares de  $6$  nodos (ver figura 3.23). El coeficiente de

estabilización empleado fue  $\alpha_0 = 12$  y el número de puntos de gauss por elemento se tomó igual a 6. Los parámetros físicos utilizados en este caso fueron, velocidad angular de la tierra  $\omega = 7,3 \times 10^{-5} \text{ rad/s}$ , latitud  $\phi = 41,6823^\circ$ , aceleración de la gravedad  $g = 9,81 \text{ m/s}^2$  y la densidad de referencia  $\rho_0 = 1025,34 \text{ kg/m}^3$ .

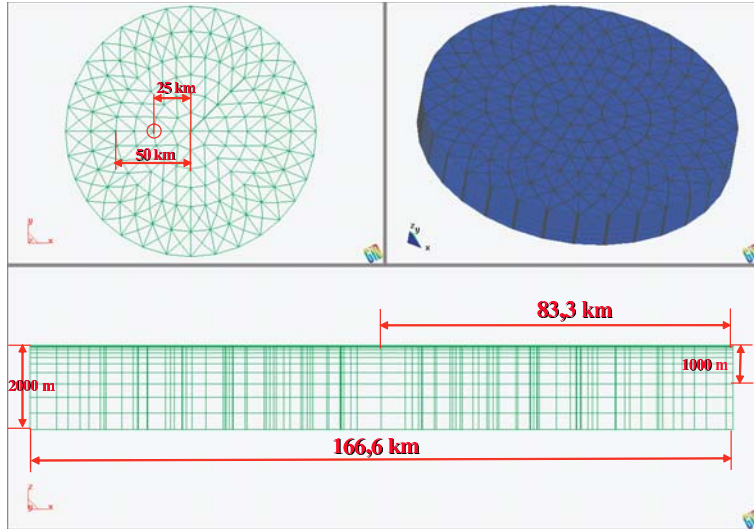


Figura 3.23: Malla computacional.

Prof. (m)	Densidad (Estación Central)	Densidad (Estación Exterior)
0	1026,88	1026,56
25	1026,88	1026,61
50	1026,88	1026,81
75	1026,89	1026,83
100	1026,88	1026,89
150	1026,88	1027,06
200	1026,90	1027,19
300	1027,02	1027,41
400	1027,32	1027,58
600	1027,61	1027,71
800	1027,73	1027,74
1000	1027,77	1027,78

Tabla 3.2: Distribución de densidades.

El uso de un esquema implícito en el sistema velocidad-presión, le confiere al modelo estabilidad numérica incondicional, permitiendo el empleo de pasos de tiempo arbitrariamente grandes. Debido a esto y al interés para este caso en alcanzar el estado estacionario, se utilizaron 3 intervalos con pasos de tiempo diferentes. En los primeros 800 pasos de tiempo se empleó un  $\Delta t = 10$  en el segundo y tercer intervalos de 100 pasos de tiempos, los incrementos fueron de  $\Delta t = 0,1 \text{ s}$  y  $\Delta t = 0,01 \text{ s}$ , respectivamente. Se resolvió este problema partiendo del fluido en reposo, hasta arribar en el tercer intervalo al estado estacionario sin hallar dificultad numérica alguna, con una tolerancia para el estado estacionario de  $10^{-3}$ . La tolerancia para la formulación se tomó igual a  $10^{-4}$ . El primer paso de tiempo se realizó con un método directo (LU), pasándose luego a utilizar el BiCGSTAB para el sistema velocidad presión y el método de los Gradientes

### 3.4. Vórtice geostrófico

Conjugados para la proyección del gradiente de la presión hasta finalizar el cálculo. La tolerancia utilizada para los métodos iterativos fue de  $10^{-5}$ .

El perfil de velocidades transversales a la sección, entre las estaciones central y exterior, y en un punto medio entre estas (círculo rojo de la figura 3.23), fueron calculadas por Pönd y Pickard (1983) mediante el método geostrófico (ver tabla 3.3). Esta velocidad, representada con color azul en la figura 3.24, es comparada a los resultados numéricos obtenidos por el modelo, representados en amarillo. Los resultados muestran una aproximación aceptable teniendo en cuenta las simplificaciones realizadas en ambos casos, principalmente teniendo en cuenta que el método geostrófico considera el flujo transversal a una sección, cuando aquí se resuelve el problema en forma tridimensional.

Prof. (m)	Velocidades geostróficas
0	0,26
25	0,27
50	0,28
75	0,29
100	0,29
150	0,28
200	0,24
300	0,17
400	0,11
600	0,03
800	0,005
1000	0

Tabla 3.3: Velocidades geostróficas.

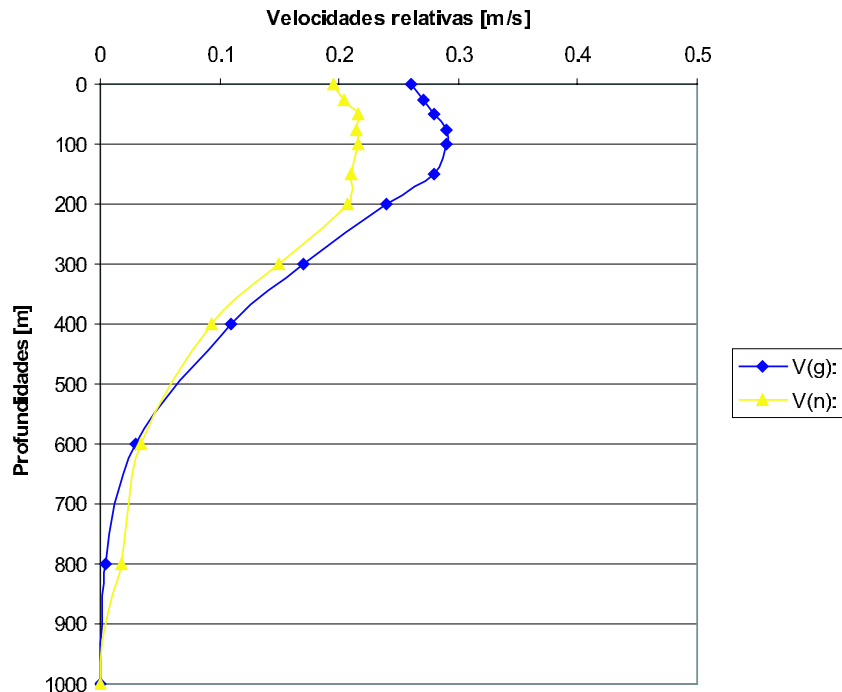


Figura 3.24: Perfil de velocidades geostróficas (◆) y numéricas (▲).

### 3.5 Fluido estratificado

La validación de la presión se realizó para las cuatro formulaciones diferentes de la presión (combinaciones posibles entre los términos barotrópico y baroclínico) que figuran en la tabla 3.4.

Caso	Términos de la Ec. de Navier-Stokes
1	Baroclínico: No Barotrópico: No
2	Baroclínico: No Barotrópico: Si
3	Baroclínico: Si Barotrópico: No
4	Baroclínico: Si Barotrópico: Si

Tabla 3.4: Cuatro formulaciones posibles para la presión.

Partiendo de un campo de velocidades nulo  $\mathbf{u} = 0$  en las ecuaciones de movimiento (1.27), la tercer componente de la ecuación de movimiento (1.27c) queda:

$$\frac{\partial p}{\partial z} = -\frac{\rho}{\rho_0}g \quad (3.5)$$

si consideramos además una variación lineal de la densidad

$$\rho(z) = \rho_0 - \gamma z \quad (3.6)$$

donde:

- $\rho_0 = 1025,3 \text{ kg/m}^3$ : Densidad de referencia en la superficie.
- $\gamma = 500$ : Coeficiente de variación lineal de las densidades.

se puede obtener la solución analítica para la presión.

Por otro lado, la presión  $p$  de la ecuación (3.5) se puede descomponer, de la misma manera que se hizo en la ecuación (1.37), pero haciendo además  $p_{atm}(x, y, t) = 0$  y  $\eta(x, y, t) = 0$  en los términos hidrostático, baroclínico y no-hidrostático, respectivamente:

$$p(x, y, z, t) = -gz + g \int_z^{\eta} \frac{(\rho - \rho_0)}{\rho_0} d\zeta + q(x, y, z, t) \quad (3.7)$$

Se calcula luego una nueva presión  $\bar{p}$ , como la resultante de sacar fuera de la presión  $q_i$  (valor de la presión calculada para cada una de los casos de la tabla 3.4) los términos en que se descompone la presión  $p$  (ecuación (3.7)) y sumarla a  $q_i$ .

Posteriormente se puede calcular el término de gravedad  $T_i$  para cada una de las formulaciones planteadas en la tabla 3.4 reemplazando la presión  $\bar{p}$  obtenida anteriormente en la ecuación (3.5) y despejando  $\partial_z q_i$ :

1.  $p = \bar{p} = q_1 \Rightarrow T_1 = -\frac{\rho}{\rho_0}g.$

### 3.5. Fluido estratificado

$$2. \bar{p} = -gz + q_2 \Rightarrow T_2 = -\frac{\rho - \rho_0}{\rho_0} g.$$

$$3. \bar{p} = g \int_z^{\eta} \frac{(\rho - \rho_0)}{\rho_0} d\zeta + q_3 \Rightarrow T_3 = -g.$$

$$4. \bar{p} = -gz + g \int_z^{\eta} \frac{(\rho - \rho_0)}{\rho_0} d\zeta + q_4 \Rightarrow T_4 = 0.$$

Finalmente, reemplazando en la ecuación (3.8) los términos de gravedad  $T_i$  y la función de variación lineal (3.6) por  $\rho$  cuando sea necesario, se puede hallar la solución analítica para cada uno de los casos planteados resolviendo la siguiente ecuación diferencial:

$$\frac{\partial q_i}{\partial z} = T_i \quad (3.8)$$

La solución analítica de la presión para cada uno de los cuatro casos planteados en la tabla 3.4 se muestra en la tabla 3.5:

Caso	Solución analítica "q <sub>i</sub> "
1	$-gz + \frac{\gamma g}{2\rho_0} z^2$
2	$\frac{\gamma g}{2\rho_0} z^2$
3	$-gz$
4	0

Tabla 3.5: Solución analítica de las cuatro formulaciones de la presión.

Para resolver numéricamente este problema se empleó un dominio cúbico de dimensiones unitarias conteniendo un fluido estratificado con una distribución lineal de densidades (3.6) en función de la profundidad "z" (ver figura 3.25). Se fijó la velocidad normal nula para todos los contornos mediante una condición de tipo Dirichlet homogénea:

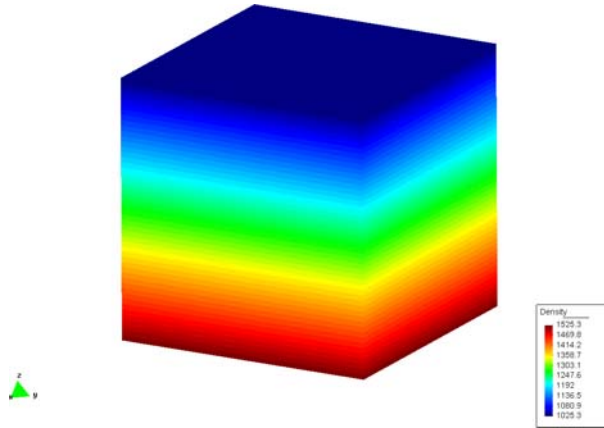


Figura 3.25: Distribución de densidades.

Se fijó el valor de la presión  $q = 0$  en el último nodo de la malla para definir el campo de presiones, se tomó la aceleración de la gravedad  $g = 9,81 \text{ m/s}^2$ , el incremento de paso de tiempo  $\Delta t = 1 \text{ s}$  y tolerancia para el estado estacionario

$10^{-5}$ . Se discretizó el dominio mediante una malla uniforme de 775 nodos y 960 elementos prismáticos triangulares (ver figura 3.26).

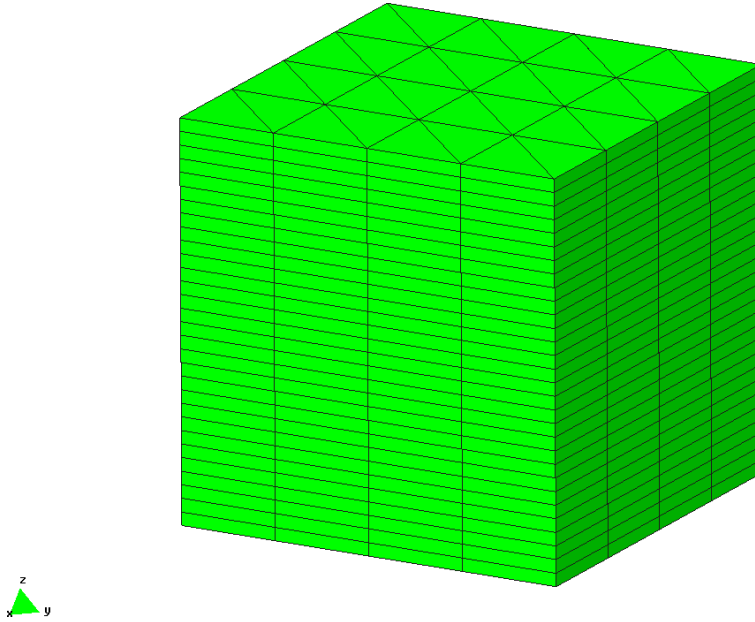


Figura 3.26: Malla de 775 nodos y 960 elementos prismáticos triangulares.

La distribución de presiones resultante, el número de paso de tiempo y el tiempo de cálculo (CPU) de cada simulación se pueden apreciar en la tabla 3.6. En la última simulación (caso 4) debido a la manera en que se estima la convergencia, mediante el error relativo entre soluciones consecutivas y que en este caso son nulas tanto la velocidad como la presión, sólo se realizó el primer paso de tiempo al no hallarse la convergencia.

Caso	Presión "q"	N° de pasos de tiempo	CPU
1	Hidrostática + Baroclínica	10	1' 23''
2	Baroclínica	6	0' 53''
3	Hidrostática	7	1' 02''
4	No-hidrostática	1	0' 22''

Tabla 3.6: Resultados de la simulación para los cuatro casos planteados.

Los campos de presiones resultantes de las simulaciones para cada uno de los casos, obtenidos directamente sin ningún tipo de post-proceso se representan en la figura 3.27. El campo de velocidades para todos los casos son del orden de  $\approx 10^{-5}$ .

Como se puede apreciar claramente en la figura 3.28, los valores de la solución numérica obtenida para cada caso se ajusta exactamente a su solución analítica.

### 3.5. Fluido estratificado

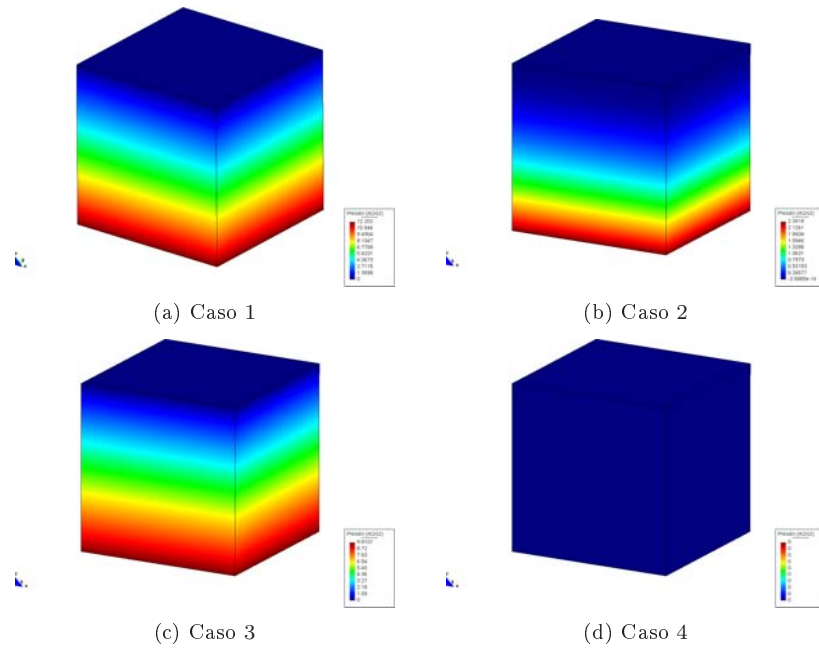


Figura 3.27: Iso-superficies de la presión  $q$  para los cuatro casos planteados.

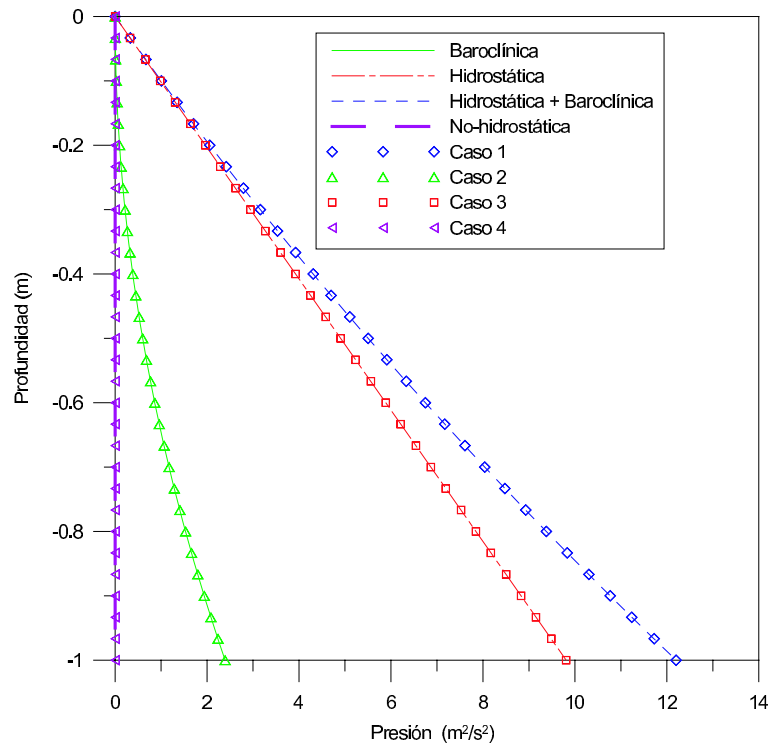


Figura 3.28: Distribución de la presión " $q_i$ " para los cuatro casos planteados.

### 3.6 Canal convergente con fondo liso

El objetivo de este problema fue validar la condición de contorno cinemática planteada en la ecuación (1.42) para simular el fondo impermeable, considerando que el flujo de masa que atraviesa el mismo es nulo. En primer lugar se resuelve el problema sin tener en cuenta la rugosidad del fondo, el que posteriormente se añadirá en el caso del “Canal con fondo rugoso” en la sección siguiente. Como se puede apreciar en la figura 3.29 se diseñó un canal de dos tramos; en el primer tramo de la izquierda (entrada) la sección permanece constante, mientras que en el segundo (salida) el fondo se eleva generando un plano inclinado. Las longitudes de los dos tramos del canal convergente son iguales  $L_1 = L_2 = 5\text{ m}$  y en total hacen una longitud de  $L = 10\text{ m}$  con un ancho de  $A = 1\text{ m}$ . La altura del primer tramo del canal es constante  $H = 1\text{ m}$ , mientras que en el segundo tramo la altura disminuye hasta  $H_2 = 0,5\text{ m}$  al final del tramo, alcanzando sólo la mitad de la sección de entrada.

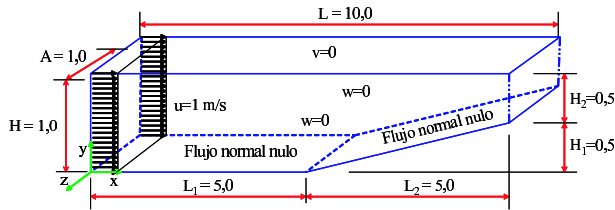


Figura 3.29: Dimensiones del dominio y condiciones de contorno para el problema del canal con fondo liso.

La malla generada para la resolución numérica del problema está formada por 3255 nodos y 2400 elementos hexaédricos (ver figura 3.30). En la boca del canal se fijó la velocidad en  $u = 1\text{ m/s}$  y  $v = w = 0$  como condición de contorno de tipo Dirichlet, mientras que en el otro extremo del canal en la sección de salida se dejó una condición de flujo libre de tipo Neumann homogénea. En la pared superior y laterales, se fijó a cero la velocidad normal al contorno mediante una condición de tipo Dirichlet dejando libre las otras dos direcciones (tipo Neumann homogénea), finalmente en ambos tramos del fondo del canal se impuso la condición a validar de flujo normal nulo para fondo no-horizontal sin tener en cuenta la fricción tangente.

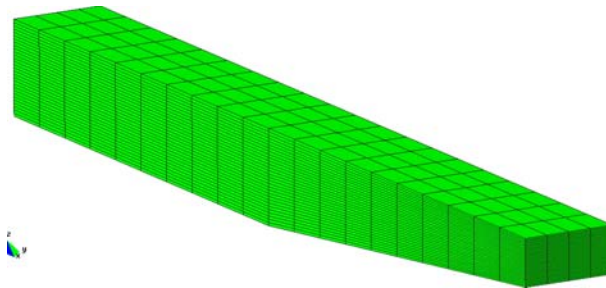


Figura 3.30: Malla de 3255 nodos y 2400 elementos hexaédricos para el problema del canal con fondo liso.



### 3.6. Canal convergente con fondo liso

Se llevó a cabo la simulación con un coeficiente de viscosidad  $\nu_H = \nu_V = 1,0 \times 10^{-2} m^2/s$  y una tolerancia para el estado estacionario de  $10^{-5}$ . Se empleó un tiempo de cálculo (CPU) de 594,48 s para efectuar 77 pasos de tiempo con un incremento  $\Delta t = 0,1 s$ . Se utilizó el método directo LU para resolver las matrices del sistema lineal de ecuaciones velocidad-presión y de la proyección del gradiente de la presión.

En la figura 3.31 se pueden apreciar detalles de las velocidades del flujo calculadas sobre el fondo en perfecta coincidencia con el mismo, demostrando la validez de la condición de contorno de flujo nulo sobre contornos no-horizontales.

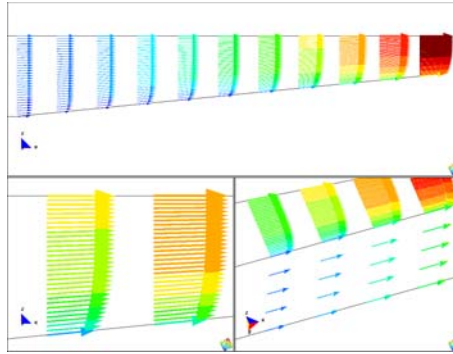


Figura 3.31: Detalles de las velocidades paralelas al fondo para el problema del canal con fondo liso.

Como una manera más de comprobar el buen funcionamiento de la condición de contorno impermeable, además de verificar el paralelismo entre las velocidades del flujo y el fondo, se comprobó la conservación del volumen comparando los valores de los caudales de entrada ( $Q_1 = 1 m^3/s$ ) y de salida del canal ( $Q_2 = 1,00002 m^3/s$ ), obteniéndose un error relativo de tan sólo  $\epsilon_{rel} = 0,00249\%$ . En la figura 3.32 se puede observar el perfil de velocidades obtenido de la simulación numérica.

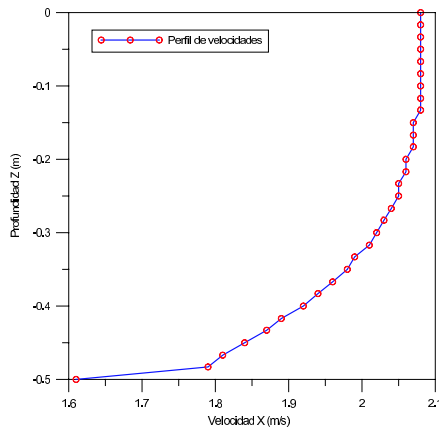


Figura 3.32: Perfil de velocidades en la sección de salida para el problema del canal con fondo liso.

### 3.7 Canal con fondo rugoso

En este problema a diferencia del problema anterior se considera la fricción con el fondo debida a la rugosidad del mismo. Como se puede ver en la ecuación (1.43) se supone una relación lineal entre la fricción de fondo y la velocidad próxima al mismo. Para parametrizar la rugosidad del fondo en esta expresión se utiliza el coeficiente de Chézy  $C_b$ . El dominio de estudio en este caso tiene una longitud de  $L = 10\text{ m}$ , un ancho de  $A = 1\text{ m}$  y la altura del canal es constante  $H = 1\text{ m}$ . En la figura 3.33 se pueden apreciar las condiciones de contorno utilizadas para este caso, en la boca del canal se fijó la velocidad en  $u = 1\text{ m/s}$  y  $v = w = 0$  como condición de contorno de tipo Dirichlet, mientras que en el otro extremo del canal en la sección de salida se dejó una condición de flujo libre de tipo Neumann homogénea. En las cuatro paredes se fijó a cero la velocidad normal al contorno mediante una condición de tipo Dirichlet dejando libre las otras dos direcciones (tipo Neumann homogénea), excepto en el fondo que se impuso la condición de fricción con fondo  $(\tau_b^x, \tau_b^y) := C_b(u, v)$  sobre las componentes horizontales de la velocidad.

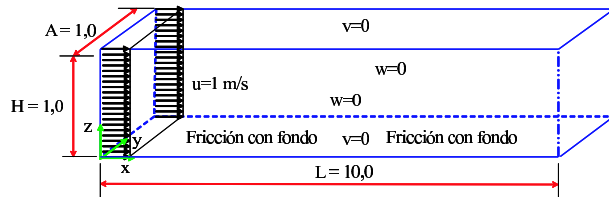


Figura 3.33: Dimensiones del dominio y condiciones de contorno para el problema del canal con fondo rugoso.

En la figura 3.34 se puede apreciar la malla computacional de 3255 nodos dispuestos en  $20 \times 4 \times 30$  elementos que hacen un total de 2400 elementos hexaédricos trilineales.

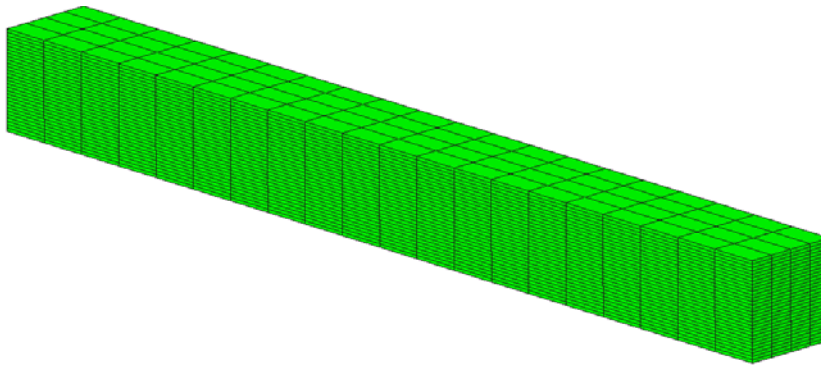


Figura 3.34: Malla de 3255 nodos y 2400 elementos hexaédricos para el problema del canal con fondo rugoso.

### 3.7. Canal con fondo rugoso

Los parámetros utilizados en la resolución numérica de este problema son el coeficiente de Chézy, que para este caso se le asigna el valor  $C_b = 0,001 \text{ kgm}^{-2}\text{s}^{-1}$ , y los coeficientes de viscosidad  $\nu_H = \nu_V = 1,0 \times 10^{-2} \text{ m}^2/\text{s}$ . El tiempo de simulación para este caso fue de  $232,89 \text{ s}$  alcanzándose la tolerancia al estado estacionario de  $10^{-5}$  en 27 pasos de tiempo con un incremento  $\Delta t = 1 \text{ s}$ . Se utilizó el método directo LU para resolver las matrices del sistema lineal de ecuaciones velocidad-presión y de la proyección del gradiente de la presión.

En la figura 3.35 se puede apreciar la distribución parabólica del perfil de velocidades alcanzado para el estado estacionario en la salida del canal. También

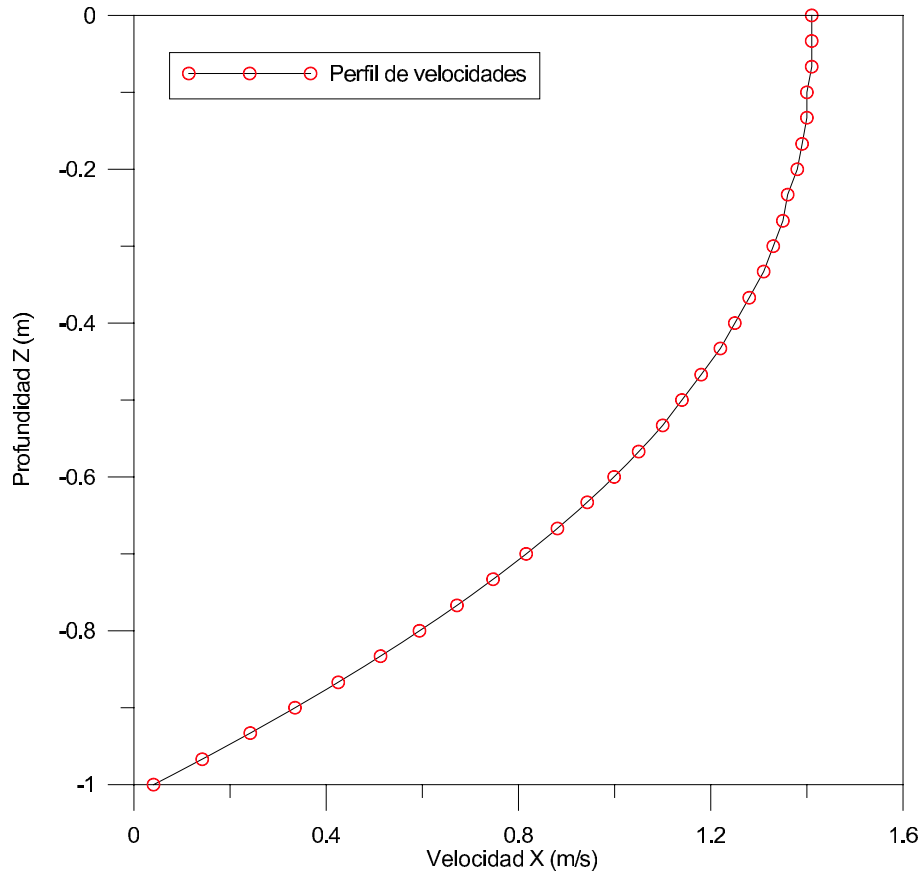


Figura 3.35: Distribución parabólica del perfil de velocidades alcanzado para el estado estacionario en la salida del canal con fondo rugoso.

en este caso se comprobó el cumplimiento de la conservación del volumen para verificar el buen funcionamiento de la fricción con fondo. Se compararon los valores de los caudales de entrada ( $Q_1 = 1 \text{ m}^3/\text{s}$ ) y de salida del canal ( $Q_2 = 0,99995 \text{ m}^3/\text{s}$ ), obteniéndose un error relativo muy bajo de  $\epsilon_{rel} = 0,00525\%$ .

### 3.8 Espiral de Ekman

Para estudiar el efecto de la tensión friccional en la superficie del océano debido al viento soplando sobre ella, Ekman asumió la siguientes suposiciones (ver Pönd y Pickard, 1983, pág. 75-78):

1. Sin contornos.
2. Profundidad infinita.
3. Coeficiente de viscosidad turbulenta vertical ( $\nu_V$ ) constante.
4. Un viento de velocidad constante soplando durante un tiempo prolongado.
5. Densidad constante (fluido homogéneo) y el nivel de la superficie libre horizontal, tal que los gradientes de la presión horizontal sean nulos  $\partial_x p = \partial_y p = 0$ , puesto que la densidad sólo depende de la presión,  $p$ . *ej.* condición barotrópica y por lo tanto no hay flujo geostrofico.
6. Parámetro de Coriolis ( $f$ ) constante,  $p$ . *ej.* aproximación del plano- $f$ .

Las ecuaciones del movimiento se convierten entonces en las ecuaciones de Ekman:

$$f v_E + \nu_V \frac{\partial^2 u_E}{\partial z^2} = 0 \quad (3.9a)$$

$$-f u_E + \nu_V \frac{\partial^2 v_E}{\partial z^2} = 0 \quad (3.9b)$$

Asumiendo que el viento sopla en la dirección  $y$ , las soluciones a las ecuaciones de Ekman son:

$$u_E = \pm V_0 \cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{D_E} z\right) \exp\left(\frac{\pi}{D_E} z\right) \quad (3.10a)$$

$$v_E = V_0 \sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{D_E} z\right) \exp\left(\frac{\pi}{D_E} z\right) \quad (3.10b)$$

siendo:

- $V_0 = \frac{\sqrt{2}\pi\tau_{yn}}{D_E\rho|f|}$  la corriente superficial total de Ekman.
- $\tau_{yn}$  la magnitud de la tensión del viento sobre la superficie (proporcional al cuadrado de la velocidad del viento y actuando en la dirección del viento, ver ecuación (1.44)).
- $|f|$  la magnitud del parámetro de Coriolis  $f$ .
- $D_E = \pi(2\nu_V/|f|)^{\frac{1}{2}}$  la profundidad de Ekman o influencia friccional.

Estas soluciones se pueden interpretar como:

- a** En la superficie del mar, cuando  $z = 0$ , la solución se hace  $u = \pm V_0 \cos(45^\circ)$ ,  $v = V_0 \sin(45^\circ)$ . Esto significa que la corriente en superficie fluye a  $45^\circ$  a la derecha de la dirección del viento en el hemisferio norte (figura 3.36) y a la izquierda en el hemisferio sur.

### 3.8. Espiral de Ekman

- b Bajo la superficie, donde  $z$  es diferente de cero, la velocidad de la corriente total  $V_0 \exp(\pi z/D_E)$  se hace más pequeña cuando la profundidad se incrementa; además, a medida que  $z$  se va haciendo más negativa, la dirección va cambiando en sentido horario en el hemisferio norte y antihorario en el hemisferio sur.
- c La dirección de la corriente para la profundidad  $z = -D_E$  se hace opuesta a la dirección de la corriente en la superficie y su velocidad ha caído a  $\exp(-\pi) = 0,04$  de la misma. La profundidad  $D_E$  es tomada generalmente como la profundidad efectiva de la corriente inducida por el viento, la capa de Ekman. Visto en planta, los extremos de los vectores de corrientes forman una espiral decreciente llamada la “*espiral de corriente de Ekman*”.

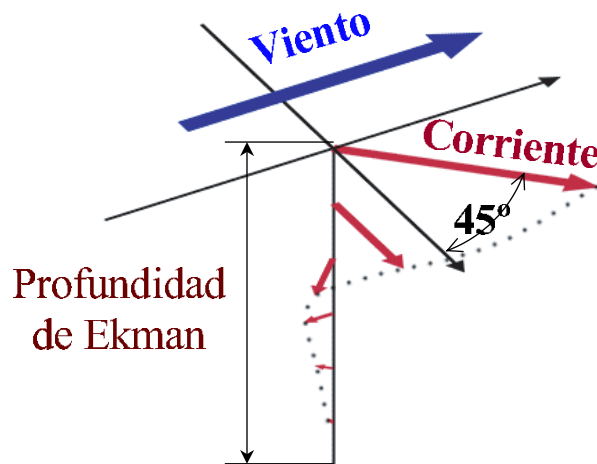


Figura 3.36: Espiral de Ekman.

En la resolución numérica del problema de la espiral de Ekman se utilizó un dominio computacional cúbico de dimensiones  $100 \times 100 \times 100$  m, para el cual se generó una malla estructurada de  $4 \times 4 \times 4$  con 225 nodos y 128 elementos hexaédricos de 8 nodos (tipo  $Q1$ ). El coeficiente de estabilización empleado fue  $\alpha_0 = 12$  y el número de puntos de Gauss por elemento se tomó igual a 8. Las condiciones de contorno impuestas fueron: asumiendo que el viento sopla sobre la superficie libre a lo largo de la dirección  $y$ , una tensión de viento horizontal  $\tau_s = \rho_a/\rho_0 C_S |W_{10}| W_{10}$ . Además se restringió la velocidad vertical (condición Dirichlet homogénea  $w = 0$  o de “*rigid lid*”). Para los contornos laterales y el fondo se empleó una condición de flujo libre (Condición Neumann).

Los parámetros físicos utilizados para este caso fueron, latitud  $\phi = 45^\circ$ , aceleración de la gravedad  $g = 9,81 \text{ m/s}^2$ , los coeficientes de viscosidad turbulenta horizontal y vertical fueron  $\nu_H = 10^3 \text{ m}^2/\text{s}$  y  $\nu_V = 10^{-2} \text{ m}^2/\text{s}$ , respectivamente.

El uso de un esquema implícito en el sistema velocidad-presión, le confiere al modelo estabilidad numérica incondicional, permitiendo el empleo de

pasos de tiempo arbitrariamente grandes. Para alcanzar el estado estacionario se utilizó 800 intervalos con pasos de tiempo  $\Delta t = 0,001 s$ . Se resolvió este problema partiendo del fluido en reposo, hasta llegar al estado estacionario con una tolerancia de  $10^{-3}$ . La tolerancia para la formulación se tomo igual a  $10^{-4}$ . El método de resolución del sistema de ecuaciones lineales velocidad-presión y proyección del gradiente de la presión utilizado fue el método directo LU y el método de los Gradientes Conjugados (GC). La tolerancia utilizada para el método iterativo fue de  $10^{-5}$ .

En las figuras 3.37 se muestran los resultados obtenidos de la simulación numérica para fondo infinito, observándose un ajuste aceptable con la solución analítica del mismo problema.

La solución analítica de la espiral de Ekman para fondo finito en función de la profundidad  $H$  se puede escribir de acuerdo a Egorov (1983) de la siguiente manera:

$$u_E = A \sinh(a(H-z)) \cos(a(H-z)) \quad (3.11a)$$

$$- B \cosh(a(H-z)) \sin(a(H-z)) \quad (3.11b)$$

$$v_E = A \cosh(a(H-z)) \sin(a(H-z)) \quad (3.11c)$$

$$+ B \sinh(a(H-z)) \cos(a(H-z)) \quad (3.11d)$$

donde los parámetros  $A$  y  $B$  son:

$$A = \frac{\tau_v D \cosh(aH) \cos(aH) + \sinh(aH) \sin(aH)}{\mu \pi \cosh(2aH) + \cos(2aH)} \quad (3.11e)$$

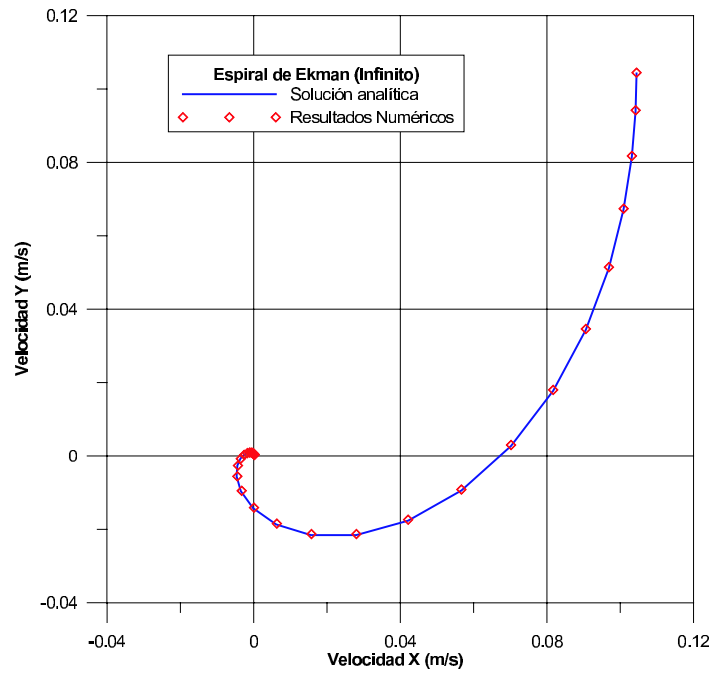
$$B = \frac{\tau_v D \cosh(aH) \cos(aH) - \sinh(aH) \sin(aH)}{\mu \pi \cosh(2aH) + \cos(2aH)} \quad (3.11f)$$

siendo:

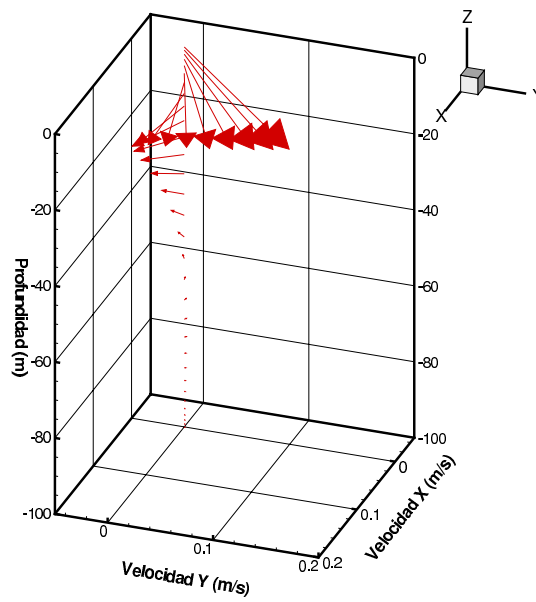
- $D = \frac{\pi}{a}$
- $a = \sqrt{\frac{\omega \sin(\phi)}{\alpha \mu}}$
- $\alpha = \frac{1}{\rho}$
- $\phi$  latitud
- $\omega$  Velocidad de rotación terrestre
- $\mu$  Viscosidad dinámica
- $\tau_v$  Tensión debida al viento
- $\rho_0$  Densidad de referencia del agua de mar
- $\nu = \frac{\mu}{\rho_0}$  Viscosidad cinemática.

En la figura 3.38 se muestran los resultados obtenidos de la simulación numérica para un dominio con fondo finito de  $H = 100 m$ ,  $H = D/2 m$  y  $H = D/3 m$ , observándose también para estos casos un ajuste excelente con la solución analítica del problema.

### 3.8. Espiral de Ekman

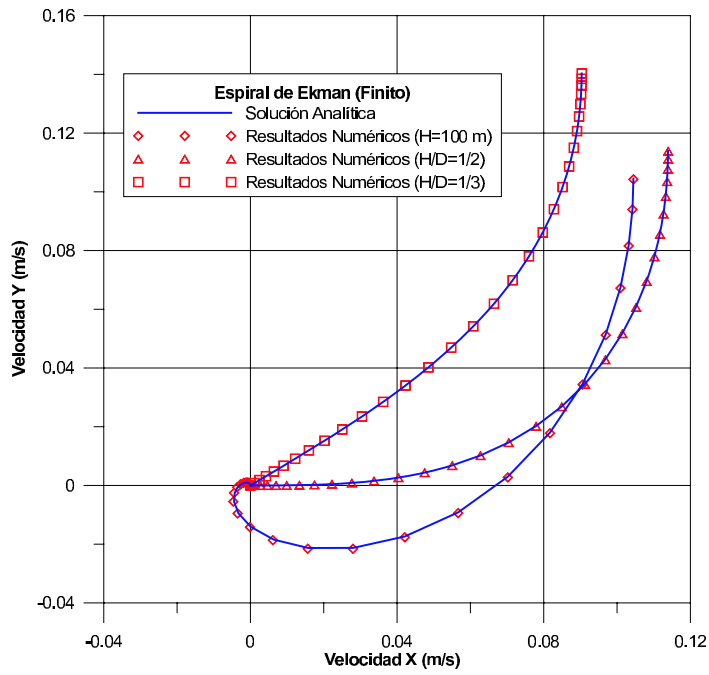


(a) Comparación entre las velocidades horizontales de la solución analítica de la espiral de Ekman (—) y las obtenidas de la simulación numérica (◇).

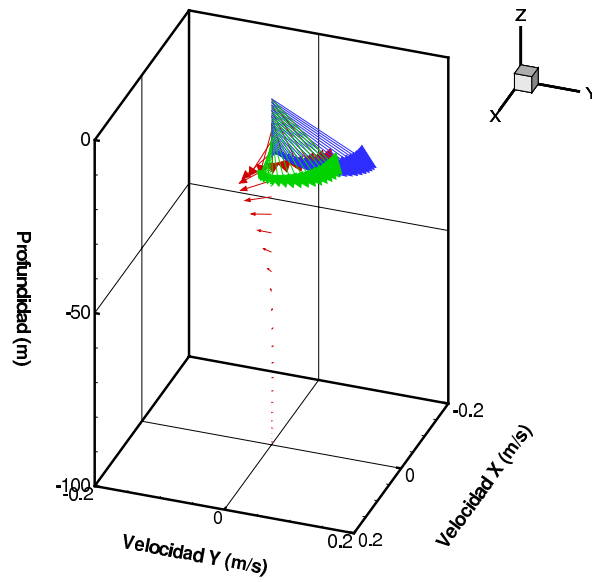


(b) Distribución tridimensional de las velocidades obtenidas de la simulación numérica (→).

Figura 3.37: Océano de profundidad infinita.



(a) Comparación entre las velocidades horizontales de la solución analítica de la espiral de Ekman para  $H = 100$  m ( $\diamond$ ),  $H = D/2$  ( $\triangle$ ) y  $H = D/3$  ( $\square$ ) y las obtenidas de la simulación numérica ( $\rightarrow$ ).



(b) Distribución tridimensional de las velocidades obtenidas de la simulación numérica para  $H = 100$  m ( $\rightarrow$ ),  $H = D/2$  ( $\rightarrow$ ) y  $H = D/3$  ( $\rightarrow$ ).

Figura 3.38: Océano de profundidad finita.



## 3.9 Delta del río Ebro

Este problema de aplicación consiste en simular la circulación inducida por el viento sobre la plataforma continental en la zona que rodea al delta del río Ebro. El delta del río Ebro está localizado en la zona de transición entre una plataforma continental estrecha al norte (10 km de ancho) y una plataforma más amplia al sur (50 – 60 km de ancho). Dichas características topográficas constituyen un caso ideal de validación para el modelo HELIKE, teniendo en cuenta la gran complejidad geométrica del problema (línea de costa y batimetría). El dominio considerado en este estudio se encuentra ubicado en el Noreste del litoral español y se extiende de Norte a Sur desde el Cabo Salou a las Islas Columbretas. Los límites del área de estudio lo constituyen: al Norte un transecto perpendicular a la línea de costa a la altura del Cabo Salou, al Sur un transecto que pasa por las Islas Columbretas, al Este la isobata de 600 m y al Oeste la línea de orilla (ver en la figura 3.39 el mapa de ubicación y la batimetría del área de estudio).

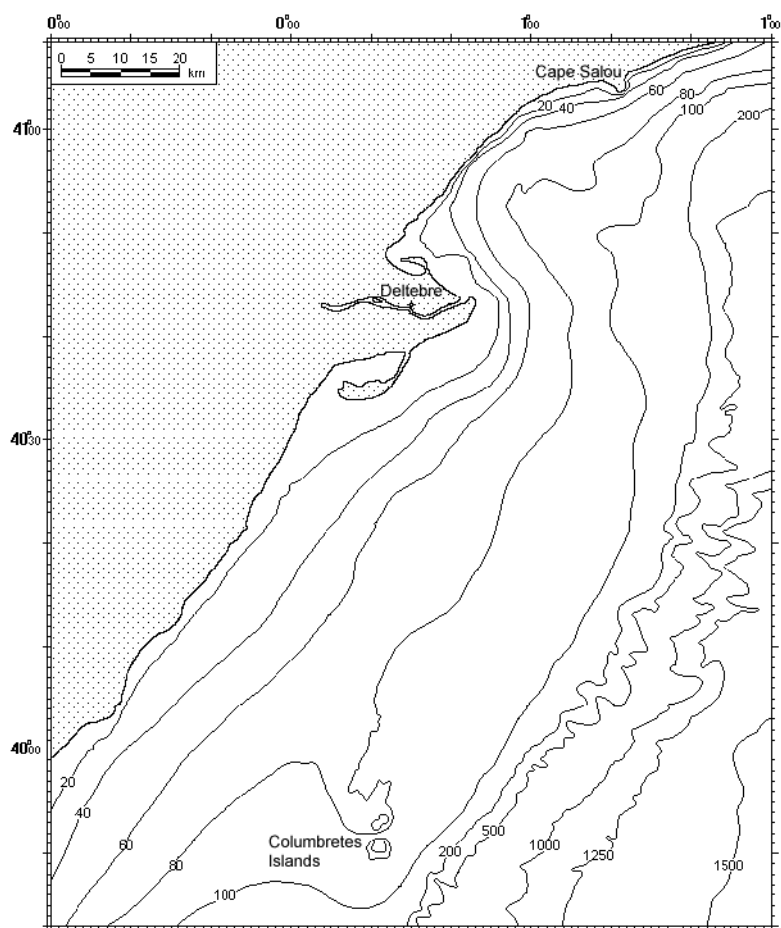


Figura 3.39: Ubicación geográfica y batimetría del delta del río Ebro.

La malla no-estructurada tridimensional utilizada para este problema cuenta con 79763 elementos tetraédricos y 20978 nodos que se adaptan perfectamente a la complicada geometría del contorno del dominio (ver figura 3.40).

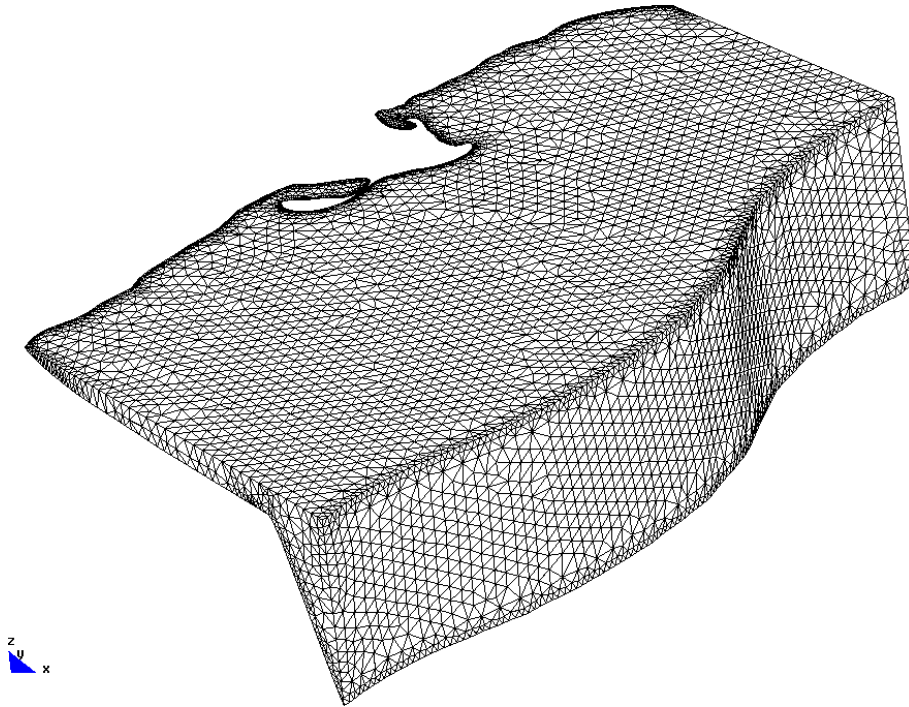


Figura 3.40: Malla tridimensional no-estructurada de 20978 nodos y 79763 elementos tetraédricos.

Siendo el objetivo del estudio numérico la circulación inducida por viento, en este caso no se consideró la descarga del río Ebro y como consecuencia de ello no se tuvo en cuenta los gradientes de densidad, por lo cual se utilizó una distribución de densidades homogénea con un valor de  $\rho = 1025,34 \text{ kg/m}^3$ . Se impuso una tensión de viento sobre el contorno superior para un evento de viento característico proveniente del Norte, muy frecuente en el área de estudio, cuyo valor promediado de la velocidad es de  $8 \text{ m/s}$  en una dirección de  $341.72^\circ$  respecto al norte y en sentido horario (ver Maidana *et al.* (2002)). Los parámetros físicos utilizados para simular la tensión de viento sobre la superficie libre fueron la densidad del aire  $\rho_a = 1,3 \text{ kg/m}^3$  y el coeficiente de arrastre  $C_s = 0,0014$  (adimensional) (ver ecuación (1.44)). En los contornos de mar abierto del Norte y del Sur se dejó libre con una condición natural para el flujo de tipo Neumann homogénea y una condición sin deslizamiento, de pared sólida de tipo Dirichlet homogénea sobre los contornos de línea de costa. Como una manera de reproducir numéricamente la presencia de una corriente de talud sobre el límite exterior de la plataforma continental, se impuso a lo largo de la misma una velocidad de  $0,1 \text{ m/s}$  tangente a la isobata de  $600 \text{ m}$  variando linealmente con la profundidad, como una condición de contorno de tipo Dirichlet. Además, se fijó a cero la velocidad normal al contorno del fondo a los efectos de

especificar la condición de flujo nulo a través del fondo impermeable. En cambio se utilizó la relación lineal entre la tensión de fondo y la velocidad próxima al mismo (ver ecuación (1.43)), para simular la fricción con fondo empleando un coeficiente de Chézy homogéneo  $C_b = 1,0 \times 10^{-7} \text{ kg/m}^2\text{s}$ . Los coeficientes de viscosidad turbulenta horizontal y vertical utilizados para este caso fueron  $\nu_H = 6,0 \times 10^2 \text{ m}^2/\text{s}$  y  $\nu_V = 1,0 \times 10^{-3} \text{ m}^2/\text{s}$ . Las constantes físicas utilizadas para el cálculo de los parámetros de Coriolis fueron las siguientes, latitud  $41^\circ N$  y velocidad de rotación angular terrestre  $\omega_T = 7,292 \times 10^{-5} \text{ s}^{-1}$  de tal manera que los parámetros de Coriolis resultantes fueron  $f = 9,568 \times 10^{-5} \text{ s}^{-1}$  y  $b = 1,1 \times 10^{-4} \text{ s}^{-1}$ .

Partiendo del fluido en reposo, se efectuaron 5 pasos de tiempo empleando el método directo (LU) para resolver la matriz del sistema velocidad-presión. Una vez obtenida una estimación inicial lo suficientemente próxima a la solución como para asegurar la convergencia de los métodos iterativos se emplearon los métodos FGMRES y Gradientes Conjugados (CG) con preconditionamiento (Left ILU) para resolver los sistemas velocidad-presión y gradiente de la presión, respectivamente. Se utilizó para toda la simulación un paso de tiempo de 3600 s y se necesitaron 591 pasos de tiempo para alcanzar la solución estacionaria con una tolerancia de  $10^{-4}$  en la norma  $L^\infty$  de la diferencia relativa entre las soluciones nodales de pasos de tiempo consecutivos.

En la figura 3.41 se muestra el campo de velocidades estacionario obtenido de la simulación numérica para la superficie del mar. Como se puede apreciar en la figura, las corrientes marinas superficiales son arrastradas por el viento en aguas poco profundas sobre la plataforma continental generalmente hacia la costa en dirección SO, mientras que sobre el talud la corriente se alinean con las isobatas en dirección S-SO.

La figura 3.42 muestra las iso-superficies del módulo de la velocidad estacionaria, en la cual se puede observar que los máximos valores del módulo de la velocidad se encuentran localizados en las proximidades de la línea de costa del delta del río Ebro en aguas someras, donde los efectos de la circulación inducida por el viento se hacen más evidentes. Sin embargo, el módulo de la velocidad decrece hacia el otro extremo de la plataforma en aguas abiertas, en la medida en que la profundidad aumenta, para finalmente pasar a formar parte de la corriente de talud a lo largo del límite exterior de la plataforma continental. El rango de velocidades de la corriente superficial en las proximidades del delta del río Ebro se mantienen dentro del límite generalmente establecido del 3% de la velocidad del viento (ver Stumpf *et al.* (1993)), para este caso es de  $0,24 \text{ m/s}$ .

En la figura 3.43 se pueden apreciar un esquema tridimensional de la batimetría del área de estudio y una serie de cortes a distintas profundidades donde se observa la variación en dirección y velocidad de las corrientes debidas al viento en función de la profundidad y de la batimetría. En la superficie y sobre la plataforma se ve claramente la influencia del viento, mientras que a mayor profundidad y sobre el talud la dirección de las velocidades se alinean claramente con las isobatas.

En la figura 3.44 se puede observar el comportamiento de las trayectorias trazadas por varias partículas en su paso por el área de estudio. Como se puede apreciar claramente, aquellas partículas que inician su recorrido sobre el talud de la plataforma continental se mueven casi paralelas al contorno exterior coincidente con la isobata de  $600 \text{ m}$  y en el sentido de la corriente de talud. Sin embargo aquellas que inician su recorrido sobre la plataforma muestran un

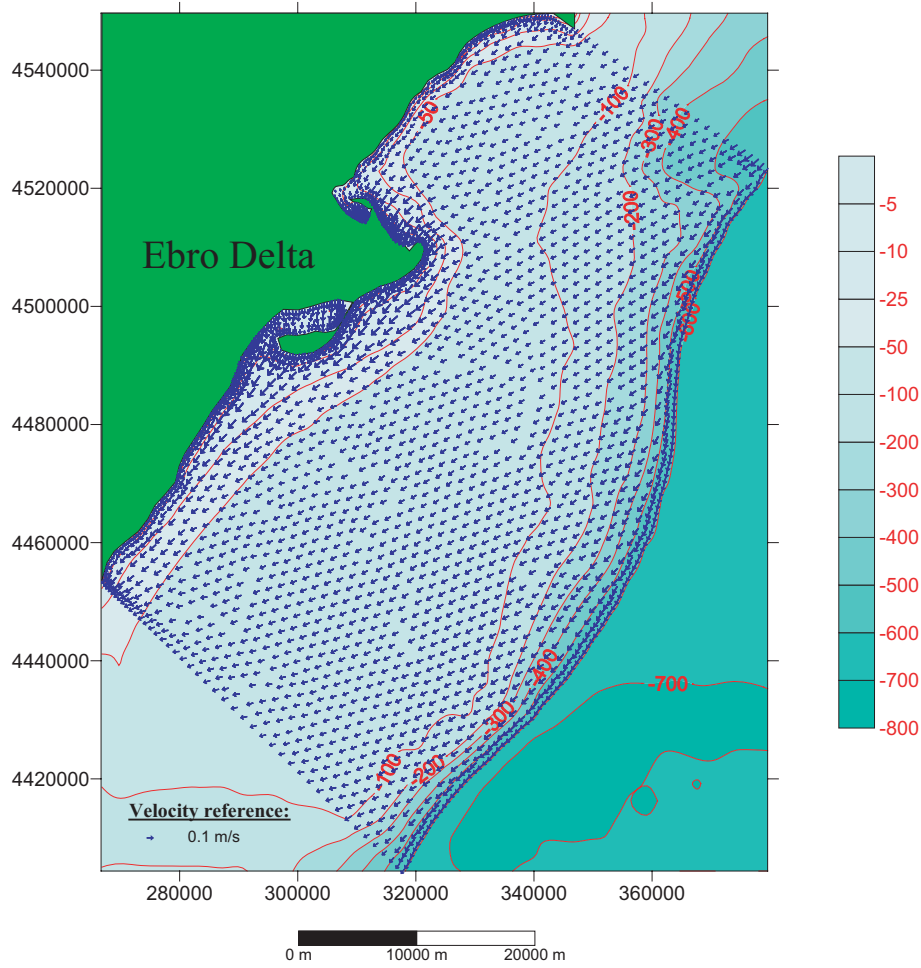


Figura 3.41: Delta del río Ebro: campo de velocidades superficiales inducidos por viento proveniente del Norte.

comportamiento un tanto diferente, influenciadas directamente por el efecto del viento, son arrastradas contra la línea de costa. En las figuras 3.40, 3.42 y 3.44 se exageró 50 veces la escala vertical a los efectos de una mejor visualización.

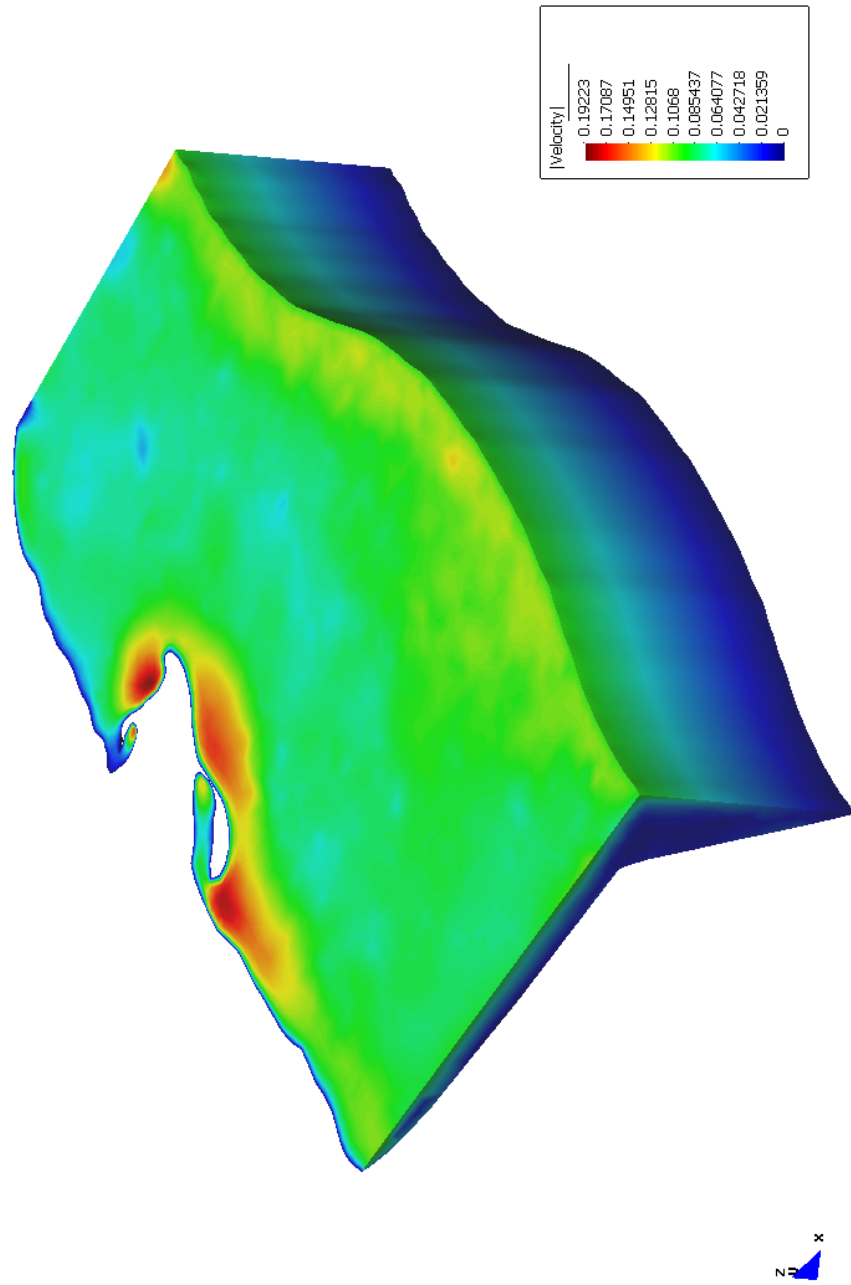
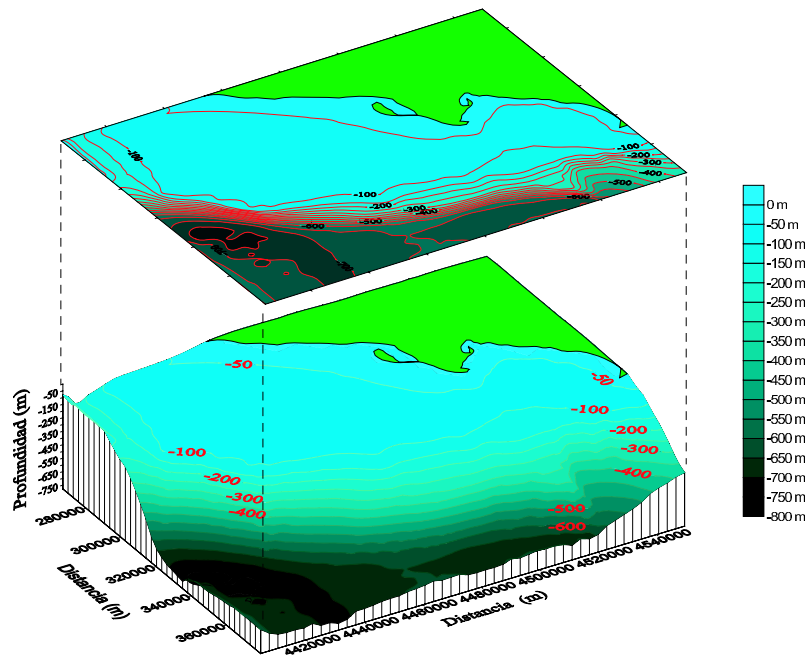
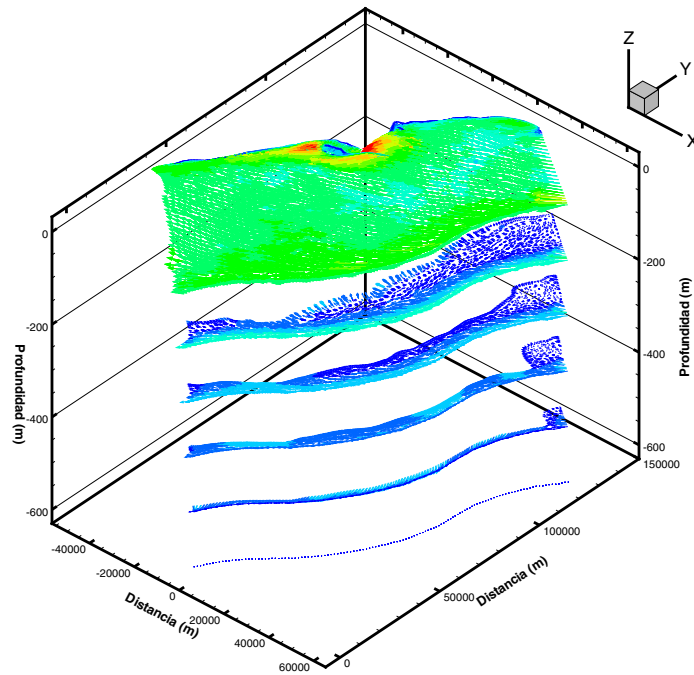


Figura 3.42: Delta del río Ebro: Iso-superficies del módulo de la velocidad.



(a) Esquema 3D de la plataforma y talud.



(b) Campo de velocidades para  $z = 0, 150, 300, 450$  y  $600$  m.

Figura 3.43: Configuración tridimensional del área de estudio.

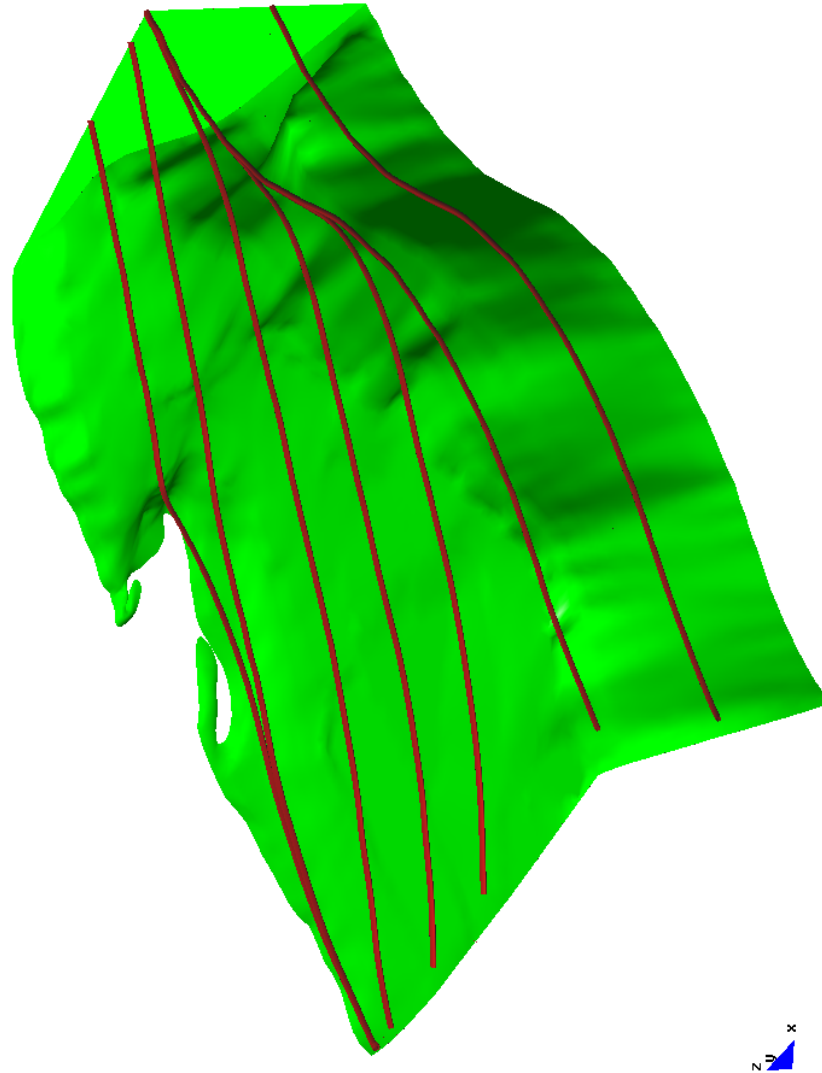


Figura 3.44: Delta del río Ebro: trayectorias seguidas por algunas partículas.





## Capítulo 4

# Validación y aplicación de la versión completa del modelo HELIKE con superficie libre

“Lo más incomprensible del Universo es que sea comprensible”

*Albert Einstein, 1879-1955*  
Físico y matemático alemán.

Las ondas de superficie han sido una fuente de interés desde los primeros tiempos, actualmente la mayor presencia del hombre en las áreas costeras ha generado la necesidad de modelos para evaluar los efectos de las mismas en el rango de periodos desde las ondas capilares de viento a las mareas. Sin embargo, la aproximación de tapa rígida (*“rigid-lid”*) utilizada hasta aquí, no permite la propagación real de ondas de superficie y de esta manera los flujos con superficie libre como *p. ej.* las corrientes de mareas no podrían ser simulados. La implementación de una condición de contorno en la superficie no sólo implicaría una descripción más precisa del flujo sino también no introducir errores en el campo de velocidades vertical como lo hace la aproximación de *“rigid lid”*. Este capítulo está dedicado a la validación del modelo HELIKE en problemas de flujos con superficie libre.

## 4.1 Sobre-elevación de la superficie libre debida al viento

Cuando nos referimos a la sobre-elevación del nivel del mar en la costa, generalmente nos referimos a la sobre-elevación generada por una severa tormenta de viento, fenómeno denominado en inglés con el término “*wind set-up*”. Físicamente, la atmósfera actúa sobre el mar de dos maneras diferentes, por un lado, las diferencias de la presión atmosférica inducen fuerzas que actúan verticalmente sobre la superficie del mar y se transmiten inmediatamente a toda la columna de agua. Por el otro lado las fuerzas debidas a la tensión de viento paralelas a la superficie del mar controlan la transferencia del movimiento hacia las profundidades. Sin embargo, con frecuencia no se pueden diferenciar los efectos del viento y de la presión atmosférica en una tormenta. En la configuración más simple, para una velocidad del viento  $U_{10}$  soplando en la dirección “ $x$ ” a lo largo de un canal de profundidad constante  $H$ , el efecto estacionario de la tensión de viento sobre la pendiente de la superficie libre  $d\eta/dx$  se puede escribir como (ver Pugh, 1987, *pág.* 198-199):

$$\frac{d\eta}{dx} = \frac{C_s \rho_a U_{10}^2}{g \rho_0 H} \quad (4.1)$$

de manera que para un canal de longitud  $L$  la sobre-elevación de la superficie libre  $S_\eta$  será:

$$S_\eta = \frac{C_s \rho_a U_{10}^2 L \cos(\beta)}{g \rho_0 H} \quad (4.2)$$

donde:

- $S_\eta$ : Sobre-elevación de la superficie libre ( $m$ ).
- $C_s$ : Coeficiente de arrastre (adimensional).
- $\rho_a$ : Densidad del aire ( $kg/m^3$ ).
- $\rho_0$ : Densidad de referencia del agua de mar ( $kg/m^3$ ).
- $g$ : Aceleración de la gravedad ( $m/s^2$ ).
- $H$ : Profundidad ( $m$ ).
- $U_{10}$ : Velocidad del viento (a  $10 m s.n.m.$ ).
- $L$ : Distancia sobre la que sopla el viento ( $m$ ).
- $\beta$ : Ángulo del viento respecto de la costa ( $\perp \Rightarrow \beta = 0$ ).

Esta expresión destaca el hecho de que el efecto del viento incrementa la sobre-elevación del nivel del mar de forma inversamente proporcional a la profundidad del mar y por consiguiente podría ser más relevante cuando el viento sopla sobre extensas regiones costeras de aguas poco profundas.

Se resuelve este problema numéricamente sobre un canal de longitud  $L = 1 m$ , un ancho  $A = 0,2 m$  y una profundidad  $H = 0,2 m$  (ver figura 4.1).

#### 4.1. Sobre-elevación de la superficie libre debido al viento

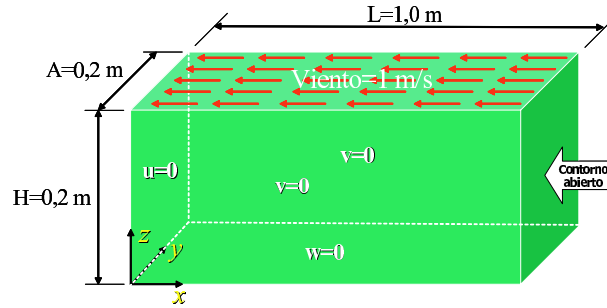


Figura 4.1: Dimensiones del dominio computacional y condiciones de contorno.

Se utilizó para ello una malla no-uniforme de  $4 \times (40 \times 4 \times 20)$  elementos prismáticos triangulares por cada dirección “ $x, y, z$ ” (ver figura 4.2). Esta malla se generó a partir de una malla de superficie compuesta de 40 subdivisiones iguales en la dirección “ $x$ ” (dirección en la cual sopla el viento) y 4 subdivisiones en la dirección “ $y$ ”, y a continuación cada uno de los 160 rectángulos resultantes se descomponen por sus diagonales en 4 triángulos. En la dirección vertical “ $z$ ” se consideran 20 capas no-uniformes de elementos que se estrechan en la proximidad de la superficie y el fondo. Quedando finalmente la malla conformada por 7665 nodos y 12800 elementos prismáticos triangulares.

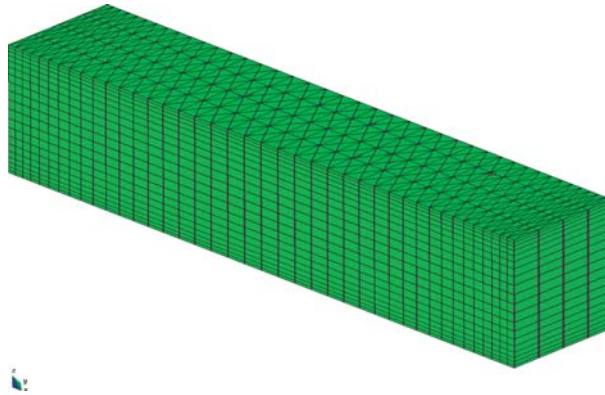


Figura 4.2: Malla tridimensional no-uniforme de 7665 nodos y 12800 elementos prismáticos triangulares.

En este problema se utilizaron valores de los parámetros físicos de manera tal que la ecuación (4.2) se halle directamente en función de la relación geométrica  $L/H$ , obteniéndose así una sobre-elevación de la superficie libre de  $S_\eta = 5 m$ . Por lo tanto, los valores de los parámetros físicos tomados para la resolución numérica de este problema fueron  $C_s = 1$ ,  $\rho_a = 1 kg/m^3$ ,  $\rho_0 = 1 kg/m^3$ ,  $g = 1 m/s^2$  y la dirección del viento normal a la línea de costa  $\beta = 0$  con una velocidad  $U_{10} = 1 m/s$ . Así también, se utilizaron valores uniformes del coeficiente de viscosidad turbulenta horizontal y vertical  $\nu_H = \nu_V = 1 m^2/s$ , mientras que se despreciaron para este problema la fuerza de Coriolis y la fricción con fondo.

A partir de un estado inicial con el fluido en reposo y su correspondiente altura de superficie libre horizontal, se alcanzó la solución estacionaria en 313

pasos de tiempo y un incremento de  $\Delta t = 10\text{ s}$  con una tolerancia al estado estacionario de  $10^{-4}$  para el máximo valor de la norma Euclídea de los vectores nodales de la velocidad, presión y gradiente de la presión.

La figura 4.3 muestra el perfil de la altura de superficie libre para el estado estacionario a lo largo de la línea central del canal  $y = 0,5\text{ m}$ . En la figura se puede apreciar un comportamiento casi lineal, en concordancia con la predicción teórica. A partir del análisis de regresión lineal para los 41 valores nodales de la altura de superficie libre, se obtuvieron los parámetros  $A = 5,057513171$  y  $B = 5.124235122$  de la recta de regresión  $z = -Ax + B$  con un coeficiente de correlación de 0,993301 y una desviación media cuadrática de 0,0195969. Finalmente, se extrapola sobre la recta la altura de superficie libre para  $x = -0,5$  obteniéndose una sobre-elevación de  $z_\eta = 5,057513168\text{ m}$ , con un error relativo de  $\epsilon_r = 1,15\%$  con respecto al valor teórico dado por la ecuación (4.2).

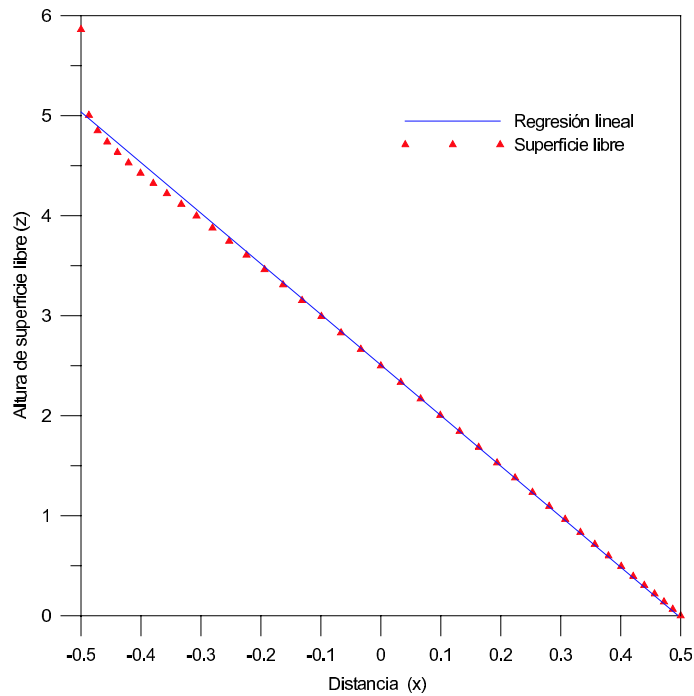


Figura 4.3: Valores nodales de la altura de superficie libre a lo largo de “ $x$ ” para  $y = 0,5; z = 0$  en el problema de sobre-elevación de la superficie libre debida a viento y la recta de regresión lineal

En la figura 4.4, se muestra la distribución de velocidades para el estado estacionario sobre la sección para  $y = 0,5\text{ m}$ , donde se puede apreciar que la velocidad máxima alcanzada es de  $0,07\text{ m/s}$ . Para evitar la aparición de oscilaciones en el campo de velocidades (ver Koçyigit *et al.* (2002)), en este problema es necesaria la utilización de una formulación no-hidrostática como el desarrollado en esta tesis. En esta figura se puede ver claramente la ausencia de oscilaciones y un suave cambio de la dirección de la velocidad en las proximidades de los contornos verticales.

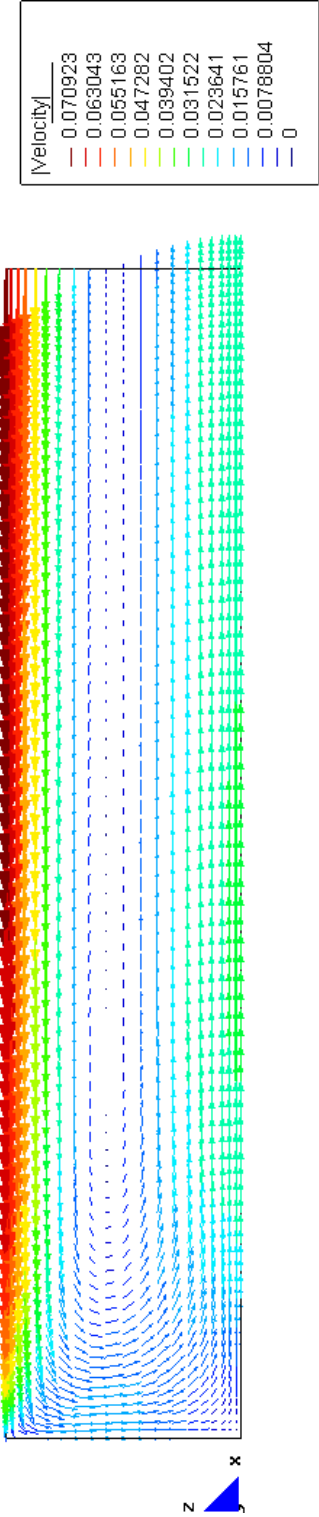


Figura 4.4: Velocidades para el estado estacionario en  $y = 0, 5$  para el problema de sobre-elevación de la superficie libre debida a viento.

## 4.2 Agitación en un tanque confinado

Las bruscas oscilaciones del nivel del mar es uno de los riesgos naturales más comunes que puede afectar a puertos, lagos, bahías y estuarios. Cuando las ondas superficiales son atrapadas en entornos cerrados, como *p. ej.* un puerto, el nivel del agua asciende y desciende alternativamente en los extremos del puerto con un flujo horizontal mínimo (puntos denominados anti-nodos), mientras que en el centro del puerto (nodos) el nivel del agua permanece constante y el movimiento horizontal del agua es mayor. De esta manera, grandes oscilaciones en un puerto pueden estrellar barcos contra las muelles del puerto o lanzarlos fuera del agua. Existe también el peligro cuando el nivel del mar desciende demasiado en los extremos de que los barcos sean embarrancados sufriendo daños en su casco.

Entre los diferentes escenarios posibles de oscilación del nivel del mar en puertos, el problema definido en inglés como “*sloshing*” (Lin y Li, 2002) es probablemente el más difícil de resolver dado que son excitados una infinita cantidad de modos. Para simular este problema se empleó un tanque de longitud  $L = 1\text{ m}$  en la dirección “ $x$ ” y un ancho de  $A = 0,2\text{ m}$  en la dirección “ $y$ ” (ver figura 4.5). La profundidad de la columna de agua en reposo se fijó en  $H = 0,2\text{ m}$ , así como también el desnivel inicial de la altura de superficie libre entre sus extremos de  $\Delta S = 0,001$  en la dirección vertical “ $z$ ”.

Inicialmente el fluido se encuentra en reposo, pero una vez que el fluido comienza a moverse bajo los efectos de la gravedad aparecen un infinito número de modos de ondas estacionarias en el tanque.

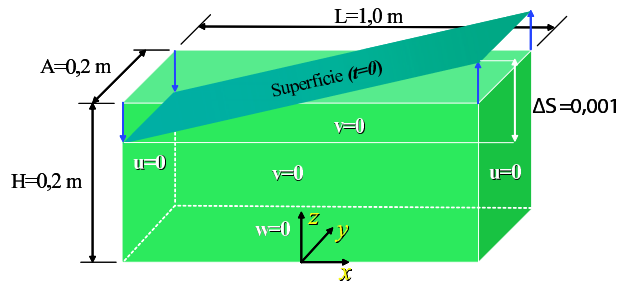


Figura 4.5: Dimensiones del dominio computacional y condiciones de contorno.

La teoría lineal de ondas permite expresar la altura de la superficie libre para este problema como:

$$\eta(x, t) = \sum_{m=1}^{\infty} A_m \sin(k_m x) \cos(\omega_m t) \quad (4.3)$$

donde:

- $k_m = \frac{(2m+1)\pi}{L}$ : Número de onda del modo  $m$ -ésimo.
- $\omega_m = \sqrt{gk_m \tanh(k_m H)}$ : Frecuencia del modo  $m$ -ésimo.
- $A_m = \frac{(-1)^m SL}{(2m+1)^2 \pi^2}$ : Amplitud de onda del modo  $m$ -ésimo.

## 4.2. Agitación en un tanque confinado

Para resolver numéricamente este problema se empleó una malla uniforme de  $100 \times 8 \times 10$  elementos prismáticos triangulares en cada dirección “ $x, y, z$ ” (figura 4.6), obteniéndose de esta manera una malla de 5555 nodos y 8000 elementos. Normales a los contornos laterales y al fondo se impuso una condición de flujo nulo, siendo que para este problema se despreciaron la fuerza de Coriolis, tensión de viento, fricción con fondo y difusión ( $\nu_H = \nu_V = 0$ ) el único parámetros físicos utilizado fue la aceleración de la gravedad  $g = 9,81 \text{ m/s}^2$ . Además, a los efectos de conseguir una evolución precisa de la altura de superficie libre para los dos períodos de tiempo  $T$  en que se efectuó la simulación (donde  $T = 2\pi/\omega_1 = 1,5160 \text{ s}$  es el modo fundamental o período de la onda para  $m = 1$ ), se utilizó un incremento del paso de tiempo de tan sólo  $\Delta t = 10^{-4} \text{ s}$ .

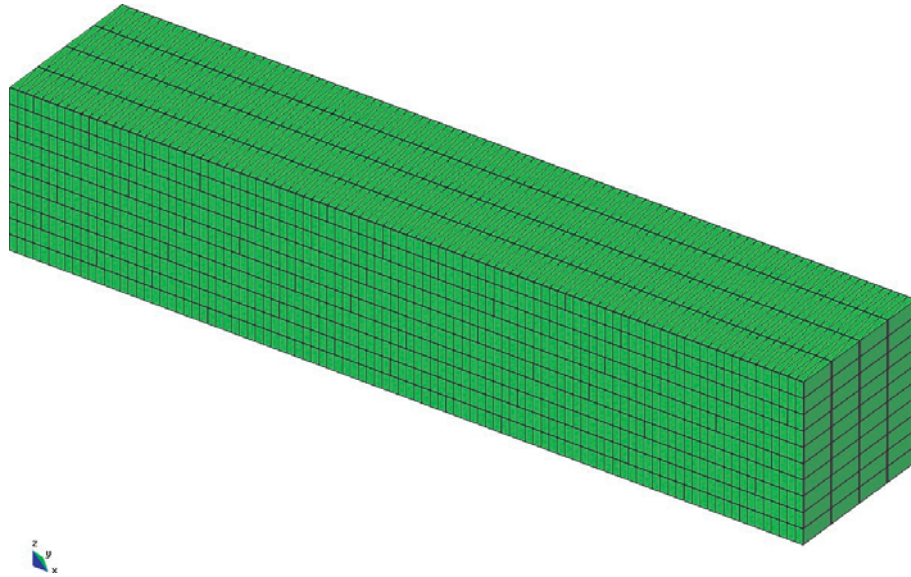


Figura 4.6: Malla tridimensional de 5555 nodos y 8000 elementos prismáticos triangulares.

En la figura 4.7 se muestra una comparación entre el perfil de la superficie libre para  $y = 0, 5$  y  $z = 0$  obtenida numéricamente de la simulación y la solución resultante de la teoría lineal de ondas (ecuación (4.3)) para los primeros 40 modos. En esta figura, similar al encontrado en el trabajo de Lin y Li (2002) en que se muestra en ordenadas la relación entre la altura de superficie libre y la profundidad del agua en reposo  $z/H$  y en abscisas la relación entre la distancia al centro de la malla y la profundidad  $x/H$ . En dicha figura se puede apreciar el muy buen ajuste conseguido por el modelo HELIKE para cada relación  $t/T$ , demostrando de esta manera la capacidad del modelo propuesto de reproducir de forma precisa la compleja evolución de las ondas de gravedad superficiales.

En la figura 4.8 se pueden observar una secuencia temporal de la evolución de la superficie libre tridimensional para  $t = 15, 30, 60, 90, 120, 140 \text{ s}$ , donde se exageró la escala vertical 200 veces a los efectos de conseguir una mejor visualización. En esta figura se pueden apreciar perturbaciones sobre la superficie libre, numéricamente muy bien reproducidas, debidas a los efectos de los modos de altas frecuencias.

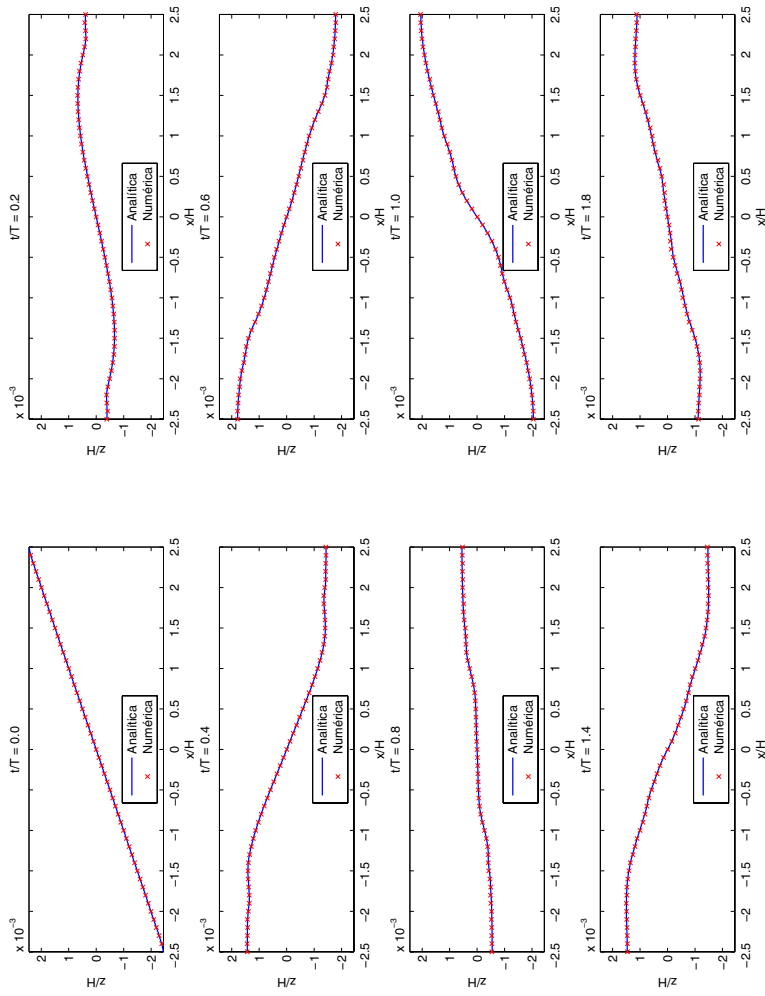


Figura 4.7: Comparación entre la solución de la teoría lineal de ondas (—) y los resultados numéricos (×) para diferentes relaciones de  $t/T$  para el problema de agitación.



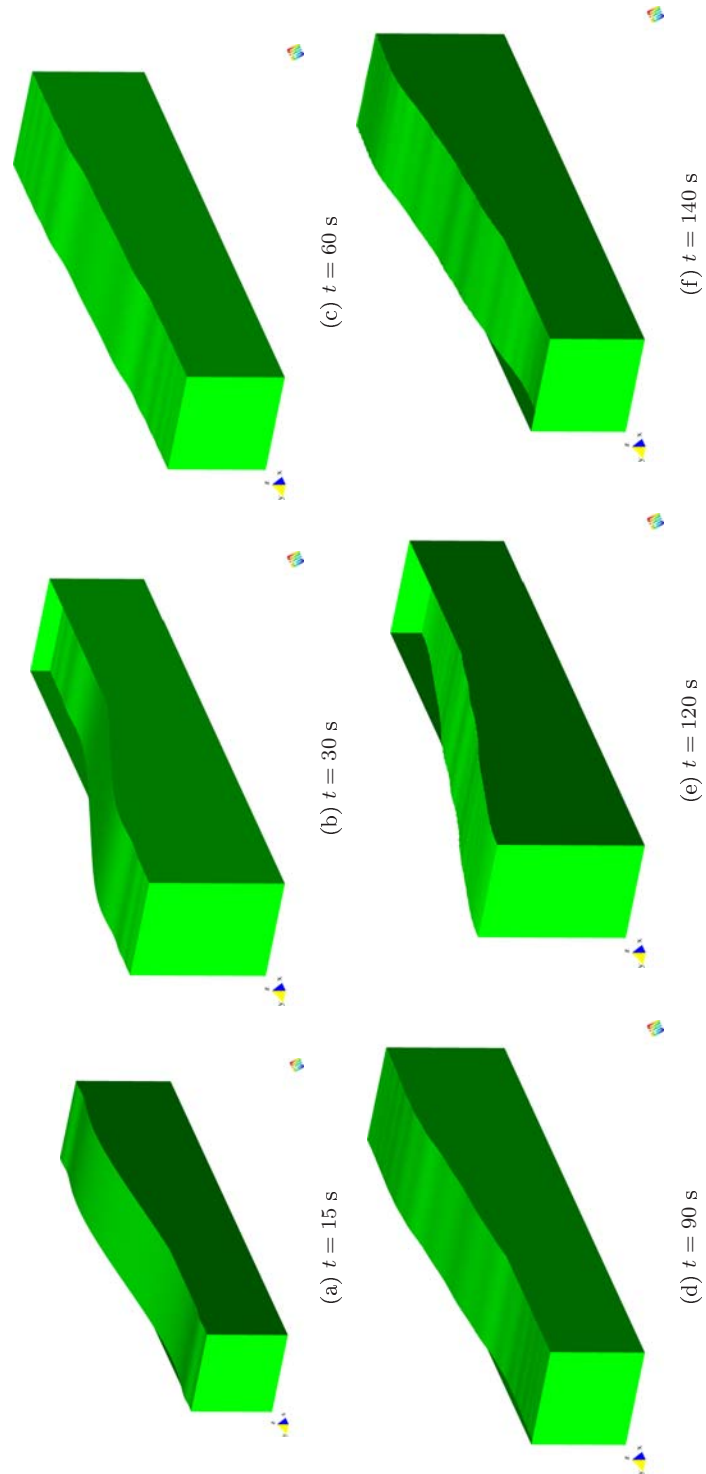


Figura 4.8: Secuencia temporal tridimensional de la evolución de la altura de superficie libre para  $t = 15, 30, 60, 90, 120, 140$  s, donde se exageró la escala vertical 200 veces a los efectos de una mejor visualización.



# Capítulo 5

## Epílogo

“Dios no juega a los dados”  
*Albert Einstein, 1879-1955.*  
Físico y matemático alemán.

### 5.1 Conclusiones

Motivado por la complejidad geométrica de la línea de costa y la topografía del fondo del mar, el objetivo de esta tesis fue el desarrollo y validación de un modelo de circulación costera en elementos finitos que debía ser capaz de simular una región limitada del océano. Para ello, se llevó a cabo un detallado análisis de los modelos disponibles en la literatura y se desarrollaron las ecuaciones matriciales de un modelo no-hidrostático con superficie libre y término baroclínico. Este desarrollo finalmente condujo al resultado principal de esta tesis, una versión del modelo HELIKE (Hydrodynamical ocean modeL based on Incompressible navier-stokes Equations) desarrollada por el autor, las comprobaciones de su habilidad para simular procesos geofísicos relevantes y aplicaciones.

El uso combinado de una discretización espacial por el método de los elementos finitos y el uso de mallas no-estructuradas proveen al modelo una gran flexibilidad para adaptarse a la complicada geometría de la línea de costa y la batimetría del mar. Le concede también la posibilidad de realizar refinamientos de la malla sobre áreas de mayor interés y de aplicar las condiciones de contorno

apropiadas para cada caso. El modelo posee otras ventajas inherentes exclusivamente al uso del método de los elementos finitos que se asienta en un marco matemáticamente riguroso basado en una formulación en residuos ponderados. Estas ventajas podrían ser *p. ej.* tener una precisa definición de nociones tales como el error, rango de convergencia y condiciones de estabilidad, conservar la masa localmente y globalmente, o que las condiciones de contorno de tipo Neumann son fácilmente aplicadas debido a que estas entran directamente en la formulación débil del problema, sin ninguna otra imposición o aproximación.

La técnica de estabilización de la presión (PGP) empleada para estabilizar la solución en elementos finitos permite que formulaciones mixtas como las ecuaciones de Navier-Stokes utilicen igual interpolación para ambas variables velocidad-presión.

El método de integración temporal implícito empleado para resolver las ecuaciones de Navier-stokes no-hidrostáticas mediante un esquema monolítico, en concreto mediante el método implícito de Euler hacia atrás, permite alcanzar pasos de tiempo relativamente grandes al eliminar la restricción de estabilidad conocida como el criterio de CFL. Mejorando así la precisión y eficiencia del modelo al evitar una gran cantidad de iteraciones en el proceso de avance temporal asociado con un gasto computacional excesivo.

A diferencia de los modelos tri-dimensionales hidrostáticos, los modelos tridimensionales no-hidrostáticos como el desarrollado en esta tesis cuenta con las tres componentes de la ecuación de movimiento y está bien planteada para dominios con contorno abierto. Esto es muy importante en el modelado de mesoescala donde el modelado de la pequeña, pero relevante, velocidad vertical es importante y los contornos abiertos son inevitables. La formulación no-hidrostática tiene fundamentalmente importancia cuando la escala horizontal del movimiento se hace comparable con su escala vertical y no se pueda despreciar la velocidad vertical como *p. ej.* se da el caso en la circulación sobre fondos abruptos, convección en el océano abierto, *etc.*

Se ha demostrado que resolver directamente la ecuación de superficie libre como una función univaluada de la posición horizontal es una alternativa válida que sigue perfectamente los movimientos de la superficie libre con un coste computacional relativamente pequeño cuando ésta no se aleja demasiado de la horizontal como es el caso de la sobre-elevación debido al viento o las mareas.

Se ha validado el modelo para un conjunto de términos y condiciones de contorno imprescindibles para la simulación tridimensional de la circulación de zonas costeras como son los términos en los que intervienen la fuerza de Coriolis, los gradientes de densidad y la turbulencia a través de parámetros como  $\nu_H$  y  $\nu_V$  o modelos de turbulencia como Smagorinsky, Munk-Anderson o Pacanowski-Philander; condiciones de contorno de pared sólida (Dirichlet homogénea), flujos de entrada (Dirichlet) y salida (Neumann), fricción con fondo, fondo no-horizontal, tensión de viento y superficie libre.

Finalmente, los resultados numéricos presentados en esta tesis demuestran la aplicabilidad, precisión, robustez y eficiencia del modelo para problemas tanto de ingeniería de costas como de oceanografía física. Previsiblemente, los modelos tri-dimensionales costeros no-hidrostáticos en elementos finitos y mallas no-estructuradas como el presentado aquí, jugarán un importante papel en el futuro del modelado de la circulación costera y oceánica.

## 5.2 Futuras líneas de trabajo

Una vez llegado a esta fase del desarrollo de una versión del modelo de circulación costera HELIKE y con el objetivo de generalizar y ampliar la base física del mismo, se abren para el futuro del modelo varias líneas interesantes de trabajo como podrían ser las siguientes:

- Superficie libre implícita: la implementación del término de superficie libre en forma implícita daría la posibilidad de utilizar incrementos del paso de tiempo más grandes.
- Ecuación de transporte: la implementación de la ecuación de transporte de masa o convección-difusión sería un paso fundamental en el desarrollo de un modelo de circulación costera general que sea capaz de tratar problemas como *p. ej.* la estratificación en estuarios, plumas de ríos o dispersión de contaminantes, *etc.* El desarrollo de esta ecuación permitirá pasar de tener un modelo diagnóstico a tener un modelo pronóstico para la densidad, transportando la temperatura y salinidad y actualizando la ecuación de estado  $\rho = \rho(T, S)$ .
- Cierres turbulentos: la implementación de modelos de turbulencias más apropiados para condiciones de simulación más específicos como *p. ej.* zonas de rompientes, fuertes gradientes de estratificación, *etc.*
- Modelos de transporte de sedimentos: el hecho de contar con un módulo de transporte de sedimentos permitirá abordar el problema de la evolución morfodinámica del fondo costero. Este aspecto es de gran importancia en zonas de rotura del oleaje donde el transporte sedimentario es muy importante.
- Propagación de oleaje: desde el punto de vista de la ingeniería de costas la simulación de la propagación y rotura del oleaje es de suma importancia para problemas como la circulación inducida por la rotura del oleaje, agitación, difracción y reflexión del oleaje en puertos, estabilidad y diseño de estructuras costeras y portuarias, *etc.*
- Paralelización: La gran cantidad de recursos computacionales que demandan la resolución numérica de problemas de dinámica de fluidos geofísicos con una alta resolución espacial hacen indispensable disponer de códigos de análisis en paralelo. Actualmente el uso de ordenadores en paralelo con una arquitecturas de memoria compartida o distribuida están muy extendidos y son cada día más asequibles (clústers, super-ordenadores, *etc.*).
- Otros temas pueden ser asimilación de datos y oceanografía operacional.
- Aplicaciones varias en ingeniería medioambiental, de costas y oceanografía física.



# Bibliografía





- ARCILLA, A. S. 1989 Hydrodynamic analysis of the surf zone. *International Journal for Numerical Methods in Engineering* **27** (1), 87–101.
- ARMALY, B. F., DURST, F., PEREIRA, J. C. F. Y SCHOENUNG, B. 1983 Experimental and theoretical investigation of backward-facing step flow. *Journal of Fluid Mechanics* **127**, 473–496.
- BACKHAUS, J. O. 1985 A three-dimensional model for the simulation of shelf sea dynamics. *Deutsche Hydrographische Zeitschrift* **38**, 165–187.
- BAPTISTA, A. M., ZHANG, Y., CHAWLA, A., ZULAUF, M., SEATON, C., MYERS, E. P., KINDLE, J., WILKIN, M., BURLA, M. Y TURNER, P. J. 2005 A cross-scale model for 3D baroclinic circulation in estuary-plume-shelf systems: II. Application to the Columbia River. *Continental Shelf Research* **25** (7-8), 935–972.
- BARKLEY, D., GOMES, M. G. M. Y HENDERSON, R. D. 2002 Three-dimensional instability in flow over a backward-facing step. *Journal of Fluid Mechanics* **473**, 167–190. ISSN 0022-1120.
- BEARMAN, G. (ed.) 2001 *Ocean circulation*. Butterworth-Heinemann and The Open University. 2da. Edición. Prepared by an open university course team.
- BLASCO, J. Y CODINA, R. 2001 Space and time error estimates for a first order, pressure stabilized finite element method for the incompressible Navier-Stokes equations. *Applied Numerical Mathematics* **38**, 475–497.
- BLASCO, J., CODINA, R. Y HUERTA, A. 1998 A fractional-step method for the incompressible Navier-Stokes equations related to a predictor-multicorrector algorithm. *International Journal for Numerical Methods in Fluids* **28**, 1391–1419.
- BLUMBERG, A. F. Y MELLOR, G. L. 1987 *A description of a three-dimensional coastal ocean circulation model*. In: *Three-dimensional Coastal Ocean Models, Coastal and Estuarine Sciences Series*, vol. 4. Washington, DC: American Geophysical Union. N. S. Heaps.
- BOCHEV, P., CAI, Z., MANTEUFFEL, T. A. Y MCCORMICK, S. F. 1998 Analysis of velocity-flux first-order system least-squares principles for the Navier-Stokes equations: Part I. *SIAM Journal on Numerical Analysis* **35** (3), 990–1009.
- BREZZI, F. Y DOUGLAS, J. 1988 Stabilized mixed methods for the Stokes problem. *Numerische Mathematik* **53** (1), 225–235.

- BREZZI, F. Y FALK, R. S. 1991 Stability of higher-order Hood-Taylor methods. *SIAM Journal on Numerical Analysis* **28**, 581–590.
- BREZZI, F. Y FORTIN, M. 1991 *Mixed and hybrid finite element methods*, Springer series in Computational Mathematics, vol. 15. Springer-Verlag.
- BROOKS, A. Y HUGHES, T. 1982 Streamline Upwind/Petrov-Galerkin formulations for convection dominated flows with particular emphasis on the incompressible Navier-Stokes equations. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* **32**, 199–259.
- BRYAN, K. 1969 A numerical method for the study of the circulation of the world ocean. *Journal of Computational Physics* **4**, 347–376.
- CASULLI, V. 1999 A semi-implicit finite difference method for non-hydrostatic, free surface flows. *International Journal for Numerical Methods in Fluids* **30**, 425–440.
- CASULLI, V. Y CATTANI, E. 1994 Stability, accuracy, and efficiency of a semi-implicit method for three-dimensional shallow water flow. *Computers & Mathematics with Applications* **27** (4), 99–112.
- CASULLI, V. Y STELLING, G. 1998 Numerical simulation of 3D quasi-hydrostatic, free-surface flows. *Journal of Hydraulic Engineering* **124** (7), 678–686.
- CASULLI, V. Y WALTERS, R. A. 2000 An unstructured grid, three-dimensional model based on the shallow water equations. *International Journal for Numerical Methods in Fluids* **32**, 331–348.
- CASULLI, V. Y ZANOLLI, P. 2002 Semi-implicit numerical modelling of nonhydrostatic free-surface flows for environmental problems. *Mathematical and Computer Modelling* **36**, 1131–1149.
- CHACÓN REBOLLO, T. 1998 A term by term stabilization algorithm for finite element solution of incompressible flow problems. *Numerische Mathematik* **79** (2), 283–319.
- CHACÓN REBOLLO, T. Y RODRÍGUEZ GÓMEZ, D. 2004 A stabilized space-time discretization for the primitive equations in oceanography. *Numerische Mathematik* **98**, 427–475.
- CHACÓN REBOLLO, T. Y RODRÍGUEZ GÓMEZ, D. 2005 A numerical solver for the primitive equations of the ocean using term-by-term stabilization. *Applied Numerical Mathematics* **55**, 1–31.
- CHEN, X. 2003 A fully hydrodynamic model for three-dimensional, free-surface flows. *International Journal for Numerical Methods in Fluids* **42** (9), 929–952.
- CODINA, R. 2000 Stabilization of incompressibility and convection through orthogonal sub-scales in finite element methods. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* **190**, 1579–1599.

- CODINA, R. Y BLASCO, J. 1997 A finite element formulation for the Stokes problem allowing equal velocity-pressure interpolation. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* **143** (3-4), 373–391.
- CODINA, R. Y BLASCO, J. 2000a Analysis of a pressure-stabilized finite element approximation of the stationary Navier-Stokes equations. *Numerische Mathematik* **87** (1), 59–81.
- CODINA, R. Y BLASCO, J. 2000b Stabilized finite element method for the transient Navier-Stokes equations based on a pressure gradient projection. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* **182** (3-4), 277–300.
- CODINA, R., BLASCO, J., BUSCAGLIA, G. C. Y HUERTA, A. 2001 Implementation of a stabilized finite element formulation for the incompressible Navier-Stokes equations based on a pressure gradient projection. *International Journal for Numerical Methods in Fluids* **37** (4), 419–444.
- CODINA, R. Y SOTO, O. 1997 Finite element solution of the Stokes problem with dominating Coriolis force. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* **142** (3-4), 215–234.
- DANILOV, S., KIVMAN, G. Y SCHRÖTER, J. 2004 A finite-element ocean model: principles and evaluation. *Ocean Modelling* **6**, 125–150.
- DAVIES, A. M. Y ALDRIDGE, J. N. 1993 A numerical model study of parameters influencing tidal currents of the Irish Sea. *Journal of Geophysical Research* **98**, 7049–7067.
- DAWSON, C. Y PROFT, J. 2004 Coupled discontinuous and continuous Galerkin finite element methods for the depth-integrated shallow water equations. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* **193**, 289–318.
- DEPONTI, A., PENNATI, V. Y DE BIASE, L. 2006 A fully 3D finite volume method for incompressible Navier-Stokes equations. *International Journal for Numerical Methods in Fluids* **52** (6), 617–638.
- VAN DOORMAAL, J. P. Y RAITHBY, G. D. 1984 Enhancements of the SIMPLE method for predicting incompressible fluid flows. *Numerical Heat Transfer* **7**, 147–163.
- DOUGLAS, JR., J. Y WANG, J. P. 1989 An absolutely stabilized finite element method for the Stokes problem. *Mathematics of Computation* **52** (186), 495–508.
- EGOROV, N. 1983 *Oceanografía Física*. Vneshtorgizdat, MIR, Moscow.
- ESPINO, M., MAIDANA, M. A., SÁNCHEZ-ARCILLA, A. Y LAMORENA, A. G. 2007 Hydrodynamics in the Huelva estuary. Tidal model calibration using field data. *Journal of Waterway, Port, Coastal & Ocean Engineering* .
- ESPINO, M., SÁNCHEZ-ARCILLA, A. Y GARCÍA, M. A. 1998 Wind-induced mesoscale circulation off the Ebro delta, NW Mediterranean: a numerical study. *Journal of Marine Systems* **16**, 235–251.

- FIX, G. J. 1975 Finite element model for ocean circulation problems. *SIAM Journal of Applied Mathematics* **29**, 371–387.
- FRANCA, L. P. Y FREY, S. L. 1992 Stabilized finite element methods: II. The incompressible Navier-Stokes equations. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* **99** (2-3), 209–233. Issn = 0045-7825, pages = 209–233, doi = [http://dx.doi.org/10.1016/0045-7825\(92\)90041-H](http://dx.doi.org/10.1016/0045-7825(92)90041-H), publisher = Elsevier Sequoia S. A., address = Lausanne, Switzerland, Switzerland,.
- FRANCA, L. P. Y HUGHES, T. J. R. 1993 Convergence analyses of Galerkin least-squares methods for symmetric advective-diffusive forms of the Stokes and incompressible Navier-Stokes equations. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* **105**, 285–298.
- FREITAS, C. J. Y STREET, R. L. 1988 Non-linear transient phenomena in a complex recirculating flow - a numerical investigation. *International Journal for Numerical Methods in Fluids* **8**, 769–802. ISSN 0271-2091.
- FREITAS, C. J., STREET, R. L., FINDIKAKIS, A. N. Y KOSEFF, J. R. 1985 Numerical simulation of three-dimensional flow in a cavity. *International Journal for Numerical Methods in Fluids* **5**, 561–575.
- GARTLING, D. K. 1990 A test problem for outflow boundary conditions - flow over a backward-facing step. *International Journal for Numerical Methods in Fluids* **11** (7), 953–967.
- GRIFFIES, S. M., BÖNING, C., BRYAN, F. O., CHASSIGNET, E. P., GERDES, R., HASUMI, H., HIRST, A., TREGUIER, A.-M. Y WEBB, D. 2000 Developments in ocean climate modelling. *Ocean Modelling* **2**, 123–192.
- GRIFFIES, S. M. Y HALLBERG, R. W. 2000 Biharmonic friction with a Smagorinsky viscosity for use in large-scale eddy-permitting ocean models. *Monthly Weather Review* **128**, 2935–2946.
- GUERMOND, J. L. Y QUARTAPELLE, L. 1998 On stability and convergence of projection methods based on pressure Poisson equation. *International Journal for Numerical Methods in Fluids* **26**, 1039–1053.
- HAFEZ, M. Y SOLIMAN, M. 1991 Numerical solution of the incompressible navier-stokes equations in primitive variables on unstaggered grids. In *IN: AIAA Computational Fluid Dynamics Conference. Technical Papers (A91-40701 17-34)*., pp. 368–379.
- HAIIDVOGEL, D. B., ARANGO, H. G., HEDSTROM, K., BECKMANN, A., MALANOTTE-RIZZOLI, P. Y SHCHEPETKIN, A. F. 2000 Model evaluation experiments in the North Atlantic basin: simulations in nonlinear terrain-following coordinates. *Dynamics of Atmospheres and Oceans* **32** (3-4), 239–281.
- HAIIDVOGEL, D. B. Y BECKMANN, A. 1999 *Numerical ocean circulation modeling. In: Series on Environmental Science and Management*. Imperial College Press.

- HODGES, B. R. Y STREET, R. L. 1999 On simulation of turbulent nonlinear free-surface flows. *Journal of Computational Physics* **151** (2), 425–457.
- HUR, D.-S. Y MIZUTANI, N. 2003 Numerical estimation of the wave forces acting on a three-dimensional body on submerged breakwater. *Coastal Engineering* **47** (3), 329–345.
- ISKANDARANI, M., HAIDVOGEL, D. B. Y LEVIN, J. C. 2003 A three-dimensional spectral element model for the solution of the hydrostatic primitive equations. *Journal of Computational Physics* **186** (2), 397–425.
- IWATSU, R., ISHII, K., KAWAMURA, T., KUWAHARA, K. Y HYUN, J. M. 1989 Numerical simulation of three-dimensional flow structure in a driven cavity. *Fluid Dynamics Research* **5**, 173–189. (ISSN 0169-5983).
- JIANG, B.-N., LIN, T. L. Y POVINELLI, L. A. 1994 Large-scale computation of incompressible viscous flow by least-squares finite element method. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* **114** (3-4), 213–231.
- JONES, H. Y MARSHALL, J. 1993 Convection with rotation in a neutral ocean: A study of open-ocean deep convection. *Journal of Physical Oceanography* **23**, 1009–1039.
- JONES, J. E. 2002 *Oceanography and Marine Biology: An Annual Review. Coastal and shelf-sea modelling in the european context*, vol. 40. Taylor and Francis. Aberdeen Univesity Press. R. N. Gibson and Margaret Barnes and R. J. A. Atkinson, Editors.
- KAIKTSIS, L., KARNIADAKIS, G. E. Y ORSZAG, S. A. 1991 Onset of three-dimensionality, equilibria, and early transition in flow over a backward-facing step. *Journal of Fluid Mechanics* **231**, 501–528.
- KATO, Y., KAWAI, H. Y TANAHASHI, T. 1990 Numerical flow analysis in a cubic cavity by the gsmac finite-element method : In the case where the reynolds numbers are 1000 and 3200. *JSME international journal. Ser. 2, Fluids engineering, heat transfer, power, combustion, thermophysical properties* **33** (4), 649–658.
- KING, I. P., NORTON, W. R. Y ICEMAN, K. R. 1974 *A finite element model for two-dimensional flow. In: Finite Element in Flows Problems*. University o Alabama at Hunstville (UAH) Press, Hunstville Alabama. J.T. Oden et al.
- KOÇYIGIT, M. B., FALCONER, R. A. Y LIN, B. 2002 Three-dimensional numerical modelling of free surface flows with non-hydrostatic pressure. *International Journal for Numerical Methods in Fluids* **40**, 1145–1162.
- KU, H. C., HIRSH, R. S. Y TAYLOR, T. D. 1987 A pseudospectral method for solution of the three-dimensional incompressible navier-stokes equations. *Journal of Computational Physics* **70** (2), 439–462.
- LABEUR, R. J. Y PIETRZAK, J. D. 2005 A fully three dimensional unstructured grid non-hydrostatic finite element coastal model. *Ocean Modelling* **10** (1-2), 51–67.

- LARGE, W. G., MCWILLIAMS, J. C. Y DONEY, S. C. 1994 Oceanic vertical mixing: a review and a model with a non-local boundary layer parameterization. *Reviews of Geophysics and Space Physics* **32**, 363–403.
- LE PROVOST, C., BERNIER, C. Y BLAYO, E. 1994 A comparison of two numerical methods for integrating a quasi-geostrophic multilayer model of ocean circulations: finite element and finite difference methods. *Journal of Computational Physics* **110**, 341–359.
- LE PROVOST, C., G., R. Y PONCET, A. 1978 Numerical modeling of the harmonic constituents of the tides, with application to the English Channel. *Journal of Physical Oceanography* **11**, 1123–1138.
- LEE, J. W., TEUBNER, M. D., NIXON, J. B. Y GILL, P. M. 2006 A 3-D non-hydrostatic pressure model for small amplitude free surface flows. *International Journal for Numerical Methods in Fluids* **50** (6), 649–672.
- LI, B. Y FLEMING, C. A. 2001 Three-dimensional model of Navier-Stokes equations for water waves. *Journal of Waterway, Port, Coastal, and Ocean Engineering* **127** (1), 16–25.
- LIN, P. Y LI, C. W. 2002 A  $\sigma$ -coordinate three-dimensional numerical model for surface wave propagation. *International Journal for Numerical Methods in Fluids* **38**, 1045–1068.
- LYNCH, D. R., IP, J. T. C., NAIMIE, C. E. Y WERNER, F. E. 1996 Comprehensive coastal circulation model with application to the gulf of Maine. *Continental Shelf Research* **16**, 875–906.
- LYNETT, P. ANF LIU, P. 2002 *A numerical study of submarine-landslide-generated waves and run-up*, , vol. 458. Proceedings of the Royal Society of London A.
- MACÍAS, J., PARÉS, C. Y CASTRO, M. J. 1999 Improvement and generalization of a finite element shallow-water solver to multi-layer systems. *International Journal for Numerical Methods in Fluids* **38**, 1045–1068.
- MAHADEVAN, A., OLIGER, J. Y STREET, R. 1996 A non-hydrostatic mesoscale ocean model. Part I: Well-posedness and scaling. *Journal of Physical Oceanography* **26**, 1868–1880.
- MAIDANA, M. A., NAUDIN, J., ESPINO, M., GARCIA, M. A. Y SÁNCHEZ-ARCILLA, A. 2002 Feasibility and usefulness of steady-state calculations of the mean circulation in the vicinity of the Ebro mouth. Model tests against field data. *Continental Shelf Research* **22** (2), 229–245.
- MARSHALL, J., HILL, C., PERELMAN, L. Y ADCROFT, A. 1997 Hydrostatic, quasi-hydrostatic, and nonhydrostatic ocean modeling. *Journal of Geophysical Research* **102**, 5733–5752.
- MELLOR, G. L. 1996 *Introduction to Physical Oceanography*. Am. Inst. Phys. Press, 500 Sunnyside Boulevard, Woodbury N.Y. 11797-2999.

- MELLOR, M. G. Y YAMADA, T. 1974 A hierarchy of turbulence closure models for planetary boundary layers. *Journal of Atmospheric Sciences* **31**, 1791–1806.
- MELLOR, M. G. Y YAMADA, T. 1982 Development of a turbulence closure model for geophysical fluid problems. *Reviews of Geophysics and Space Physics* **20**, 851–875.
- MUNK, W. H. Y ANDERSON, E. R. 1948 Notes on a theory of the thermocline. *Journal of Marine Research* **7** (3), 276–295.
- MYERS, P. G. Y WEAVER, A. J. 1995 A diagnostic barotropic finite-element ocean circulation model. *Journal of Atmospheric and Oceanic Technology* **12**, 511–526.
- NAMIN, M. M., LIN, B. Y FALCONER, R. A. 2001 An implicit numerical algorithm for solving non-hydrostatic free-surface flow problems. *International Journal for Numerical Methods in Fluids* **35** (3), 341–356. Cardiff School of Engineering, Cardiff University, Cardiff, U.K.
- NORBURN, S. Y SILVESTER, D. 1998 Stabilised vs. stable mixed methods for incompressible flow. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* **166**, 131–141.
- OEY, L.-Y. Y MELLOR, G. 1993 Subtidal variability of estuarine outflow, plume, and coastal current: A model study. *Journal of Physical Oceanography* **23** (1), 164–171.
- ORTÍZ, P., ZIENKIEWICZ, O. C. Y SZMELTER, J. 2006 Hydrodynamics and transport in estuaries and rivers by the CBS finite element method. *International Journal for Numerical Methods in Engineering* **66** (10), 1569–1586.
- PACANOWSKI, R. C. Y PHILANDER, S. G. . H. 1981 Parameterization of vertical mixing in numerical models of tropical oceans. *Journal of Physical Oceanography* **11**, 1443–1451.
- PAIN, C. C., PIGGOT, M. D., GODDARD, A. J. H., FANG, F., GORMAN, G. L., MARSHALL, D. P., EATON, M. D., POWER, P. W. Y DE OLIVEIRA, C. R. E. 2005 Three-dimensional unstructured mesh ocean modelling. *Ocean Modelling* **10**, 5–33. Elsevier.
- PARK, J.-C., KIM, M.-H. Y MIYATA, H. 1999 Fully non-linear free-surface simulations by a 3D viscous numerical wave tank. *International Journal for Numerical Methods in Fluids* **29** (6), 685–703.
- PATANKAR, S. V. 1980 *Numerical Heat Transfer and Fluid Flow*. MacGraw-Hill: New York.
- PATANKAR, S. V. Y SPALDING, D. B. 1972 A calculation procedure for heat, mass and momentum transfer in three-dimensional parabolic flows. *International Journal of Heat and Mass Transfer* **15**, 1787–1806.
- PEDLOSKY, J. 1987 *Geophysical Fluid Dynamics*. Springer. 2nd. Edition.

- PEREGRINE, D. H. 1967 Long waves on a beach. *Journal of fluid mechanics* **27**, 815–827.
- PIETRZAK, J., JAKOBSON, J. B., BURCHARD, H., JACOB VESTED, H. Y PETERSEN, O. 2002 A three-dimensional hydrostatic model for coastal and ocean modelling using a generalised topography following co-ordinate system. *Ocean Modelling* **4** (2), 173–205.
- PÖND, S. Y PICKARD, G. L. 1983 *Introductory Dynamical Oceanography*. Pergamon Press.
- PUGH, D. T. 1987 *Tides, Surges and Mean Sea-Level. A Handbook for Engineers and Scientists*. John Wiley & Sons.
- RØED, L. P. Y SHI, X. B. 1999 A numerical study of the dynamics and energetics of cools filaments, jets and eddies off the Iberian Peninsula. *Journal of Geophysical Research* **104** (29), 817–841.
- ROISIN, B. C. 1994 *Introduction to Geophysical Fluid Dynamics*. Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey 07632. Dartmouth College.
- SEMTNER, A. J. Y CHERVIN, R. M. 1988 A simulation of the global ocean circulation with residual eddies. *Journal of Geophysical Research* **93**, 15502–15522.
- SMAGORINSKY, J. 1963 General circulation experiments with the primitive equation: I. The basic experiment. *Monthly Weather Review* **91**, 99–164.
- SMAGORINSKY, J. 1993 *Large Eddy Simulation of Complex Engineering and Geophysical Flows. Some historical remarks on the use of nonlinear viscosities*. Cambridge University Press. B. Galperin and S. A. Orszag (Eds.).
- SOTER, S., BLACKWELDER, P., HOOD, T., ALVAREZ-ZARIKIAN, C., KATSONOPOULOU, D. Y TZIAVOS, C. 2001 Environmental analysis of cores from the Helike delta, gulf of Corinth, Greece. *Journal of Coastal Research* **17** (1), 95–106.
- SOTER, S. Y KATSONOPOULOU, D. 1999 Occupation horizons found in the search for the ancient Greek city of Helike. *Geoarchaeology* **14** (6), 531–563.
- STANSBY, P. K. 1997 Semi-implicit finite volume shallow-water flow and solute transport solver with  $k - \epsilon$  turbulence model. *International Journal for Numerical Methods in Fluids* **25**, 285–313.
- STANSBY, P. K. Y ZHOU, J. G. 1998 Shallow water flow solver with non-hydrostatic pressure: 2D vertical plane problems. *International Journal for Numerical Methods in Fluids* **28**, 541–563.
- STELLING, G. Y ZIJLEMA, M. 2003 An accurate and efficient finite-difference algorithm for non-hydrostatic free-surface flow with application to wave propagation. *International Journal for Numerical Methods in Fluids* **43**, 1–23.
- STUMPF, R. P., GELFENBAUM, G. Y PENNOCK, J. R. 1993 Wind and tidal forcing of a buoyant plume, Mobile-Bay, Alabama. *Continental Shelf Research* **13** (11), 1281–1301.



- DE SZOEKE, R. A. Y SAMELSON, R. M. 2002 The duality between the Boussinesq and non-Boussinesq hydrostatic equations of motion. *Journal of Physical Oceanography* **32** (7), 2194–2203.
- TRITTON, D. J. 1988 *Physical fluid dynamics*. Clarendon Press. 2nd. Edition. Oxford Science Publications.
- WALTERS, R. A. 2005 Coastal ocean models: two useful finite element methods. *Continental Shelf Research* **25**, 775–793.
- WALTERS, R. O. 2006 Design considerations for a finite element coastal model. *Ocean Modelling* **15**, 90–100.
- WEI, G., KIRBY, J. T., GRILLI, S. T. Y SUBRAMANYA, R. 1995 A fully nonlinear Boussinesq model for surface waves. Part I. Highly nonlinear unsteady waves. *Journal of Fluid Mechanics* **294**, 71–92.
- WILLIAMS, P. T. Y BAKER, A. J. 1997 Numerical simulations of laminar flow over a 3d backward-facing step. *International Journal of Numerical Methods in Fluids* **24** (11), 1159–1183.
- XING, J. Y DAVIES, A. M. 1996 Processes influencing the internal tide, its higher harmonics, and tidally induced mixing on the Malin-Hebrides shelf. *Progress in Oceanography* **38**, 155–204.
- YUAN, H. Y WU, C. H. 2004 A two-dimensional vertical non-hydrostatic  $\sigma$  model with an implicit method for free-surface flows. *International Journal for Numerical Methods in Fluids* **44**, 811–835.
- ZANG, Y., L., S. R. Y R., K. J. 1994 A non-staggered grid, fractional step method for time dependent incompressible Navier-Stokes equations in curvilinear coordinates. *Journal of Computational Physics* **114**, 18–33.
- ZHANG, Y., BAPTISTA, A. M. Y MYERS, E. P. 2004 A cross-scale model for 3D baroclinic circulation in estuary-plume-shelf systems: I. Formulation and skill assessment. *Continental Shelf Research* **24** (18), 2187–2214.
- ZIENKIEWICZ, O. C. Y ORTÍZ, P. 1995 A split-characteristic based finite element model for the shallow water equations. *International Journal for Numerical Methods in Fluids* **20**, 1061–1080.



# Apéndices



# Tensiones de Reynolds

A fin de obtener un sistema de ecuaciones promediadas en el tiempo más apropiadas para tratar la velocidad media del flujo y no la turbulencia, se descompone el campo de velocidades  $\mathbf{u}$  del fluido en dos partes. La primera de ellas  $\langle \mathbf{u} \rangle$  representa la velocidad media de la circulación, mientras que la segunda parte  $\mathbf{u}'$  representa la turbulencia.

$$\mathbf{u} = \langle \mathbf{u} \rangle + \mathbf{u}', \quad (1)$$

donde los signos  $\langle \rangle$  tienen el significado de un operador en términos de promediado temporal, considerando por ejemplo el promediado de la velocidad  $\mathbf{u}$  se tiene:

$$\langle \mathbf{u} \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T \mathbf{u} dt = \frac{[\mathbf{u}(T) - \mathbf{u}(0)]}{T}, \quad (2)$$

siendo  $T$  el período de tiempo sobre el que se efectúa el promediado. De la misma manera que el campo de velocidades, se descompone el campo de presiones  $p$  en dos partes. La primera representa la presión media  $\langle p \rangle$  del fluido, mientras que la segunda representa las fluctuaciones de la presión  $p'$  debidas a los efectos de la turbulencia:

$$p = \langle p \rangle + p'. \quad (3)$$

Por otra parte, si se aplica el operador de promediado temporal a la velocidad media del flujo  $\langle \mathbf{u} \rangle$ :

$$\langle \langle \mathbf{u} \rangle \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T \langle \mathbf{u} \rangle dt = \frac{1}{T} \langle \mathbf{u} \rangle \cdot T = \langle \mathbf{u} \rangle \quad (4)$$

y a las fluctuaciones de la velocidad  $\mathbf{u}'$ :

$$\langle \mathbf{u}' \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T \mathbf{u}' dt = \langle \mathbf{u}' \rangle = 0. \quad (5)$$

Como consecuencia de esto, aplicando el operador de promediado temporal sobre la descomposición de la velocidad (1) queda  $\langle \langle \mathbf{u} \rangle + \mathbf{u}' \rangle$ .

Tomando por ejemplo, la primera componente de la ecuación de movimiento:

$$\partial_t u + u \partial_x u + v \partial_y u + w \partial_z u - f v + b w = -\partial_x p + \nu (\partial_{xx} u + \partial_{yy} u + \partial_{zz} u). \quad (6)$$

Se sustituyen en la ecuación (6) las velocidades y la presión por su descomposición, ecuaciones (1) y (3) respectivamente:

$$\begin{aligned} & \left[ \partial_t + (\langle u \rangle + \hat{u}) \partial_x + (\langle v \rangle + \hat{v}) \partial_y + (\langle w \rangle + \hat{w}) \partial_z \right] (\langle u \rangle + \hat{u}) - \\ & \quad f (\langle v \rangle + \hat{v}) + b (\langle w \rangle + \hat{w}) = \\ & \quad - \partial_x (\langle p \rangle + \hat{p}) + v \left( \partial_{xx} (\langle u \rangle + \hat{u}) + \partial_{yy} (\langle u \rangle + \hat{u}) + \partial_{zz} (\langle u \rangle + \hat{u}) \right). \end{aligned}$$

Una vez desarrollados los términos de la ecuación anterior:

$$\begin{aligned} & \partial_t \langle u \rangle + \langle u \rangle \partial_x \langle u \rangle + \langle v \rangle \partial_y \langle u \rangle + \langle w \rangle \partial_z \langle u \rangle - f \langle v \rangle + b \langle w \rangle = + \\ & \left[ \partial_t \hat{u} + \hat{u} \partial_x \langle u \rangle + \langle u \rangle \partial_x \hat{u} + \hat{v} \partial_y \langle v \rangle + \langle v \rangle \partial_y \hat{v} + \hat{w} \partial_z \langle w \rangle + \langle w \rangle \partial_z \hat{w} - f \hat{v} + b \hat{w} \right] \\ & - \partial_x \langle p \rangle + v (\partial_{xx} \langle u \rangle + \partial_{yy} \langle u \rangle + \partial_{zz} \langle u \rangle) - \hat{u} \partial_x \hat{u} - \hat{v} \partial_y \hat{u} - \hat{w} \partial_z \hat{u} + \\ & \left[ -\partial_x \hat{p} + v (\partial_{xx} \hat{u} + \partial_{yy} \hat{u} + \partial_{zz} \hat{u}) \right], \end{aligned} \quad (7)$$

se realiza entonces el promediado temporal de la ecuación (7). Como resultado de esta operación, se conservan únicamente los términos que dependen de las componentes de la velocidad media del flujo según la ecuación (4) y los tres términos de la aceleración convectiva que incluyen las componentes de la fluctuación de la velocidad. Los restantes términos, que contienen una única componente de la fluctuación de la velocidad, se anulan de acuerdo a la ecuación (5). Por lo tanto la primera componente de la ecuación del movimiento queda:

$$\begin{aligned} & \partial_t \langle u \rangle + \langle u \rangle \partial_x \langle u \rangle + \langle v \rangle \partial_y \langle u \rangle + \langle w \rangle \partial_z \langle u \rangle - f \langle v \rangle + b \langle w \rangle = \\ & \quad - \partial_x \langle p \rangle + v (\partial_{xx} \langle u \rangle + \partial_{yy} \langle u \rangle + \partial_{zz} \langle u \rangle) \\ & \quad - \underbrace{(\langle \hat{u} \partial_x \hat{u} \rangle + \langle \hat{v} \partial_y \hat{u} \rangle + \langle \hat{w} \partial_z \hat{u} \rangle)}_{\text{Términos turbulentos}}. \end{aligned} \quad (8)$$

Estos últimos tres términos nuevos representan el efecto de las fluctuaciones de la velocidad sobre el flujo medio. Nótese que estos términos salen a partir de los términos no-lineales de la ecuación de movimiento. La naturaleza no-lineal de estas ecuaciones y los efectos friccionales de la turbulencia sobre el flujo medio están relacionados. Los términos no lineales dan lugar a efectos turbulentos (Tensiones de Reynolds) sobre el flujo medio y dan expresiones explícitas para estos términos en función de las fluctuaciones de la velocidad.

Los términos turbulentos se reescriben matemáticamente como  $\langle \hat{u} \hat{u} \rangle$ ,  $\langle \hat{u} \hat{v} \rangle$ ,  $\langle \hat{u} \hat{w} \rangle$ , *etc.*, para que puedan ser calculados. Se utiliza para ello la ecuación de continuidad de volumen para fluidos incompresibles:

$$\partial_x u + \partial_y v + \partial_z w = 0. \quad (9)$$

Se reemplazan luego las velocidades por su descomposición de acuerdo a la ecuación (1):

$$\partial_x (\langle u \rangle + \hat{u}) + \partial_y (\langle v \rangle + \hat{v}) + \partial_z (\langle w \rangle + \hat{w}) = 0. \quad (10)$$

Si se efectúa el promediado temporal de la misma, se observa que la condición de incompresibilidad afecta tanto a la velocidad media del flujo como a la

turbulencia:

$$\underbrace{(\partial_x \langle u \rangle + \partial_y \langle v \rangle + \partial_z \langle w \rangle)}_{\nabla \cdot \langle \mathbf{u} \rangle = 0} + \underbrace{(\partial_x u' + \partial_y v' + \partial_z w')}_{\nabla \cdot \mathbf{u}' = 0} = 0. \quad (11)$$

Por lo tanto la velocidad total, la velocidad media y la turbulencia, todas satisfacen la continuidad de volumen.

Finalmente, se suma  $u'(\nabla \cdot \mathbf{u}')$  a los términos turbulentos, el cual es cero y no cambia su valor, sólo su forma matemática:

$$u' \partial_x u' + v' \partial_y u' + w' \partial_z u' + \underbrace{u'(\partial_x u' + \partial_y v' + \partial_z w')}_{\nabla \cdot \mathbf{u}' = 0} = 0. \quad (12)$$

Desarrollando el término agregado y reagrupándolos de la siguiente manera:

$$(u' \partial_x u' + u' \partial_x u') + (v' \partial_y u' + u' \partial_y v') + (w' \partial_z u' + u' \partial_z w'), \quad (13)$$

se puede escribir el promediado de la primera componente de la ecuación del movimiento en la escala de la turbulencia, llamada también Ecuación de Reynolds de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \partial_t \langle u \rangle + \langle u \rangle \partial_x \langle u \rangle + \langle v \rangle \partial_y \langle u \rangle + \langle w \rangle \partial_z \langle u \rangle - f \langle v \rangle + b \langle w \rangle = \\ -\partial_x \langle p \rangle + \nu (\partial_{xx} \langle u \rangle + \partial_{yy} \langle u \rangle + \partial_{zz} \langle u \rangle) \\ - \underbrace{(\partial_x \langle u'u' \rangle + \partial_y \langle v'u' \rangle + \partial_z \langle w'u' \rangle)}_{\text{Tensiones de Reynolds}}. \end{aligned} \quad (14)$$

La ecuación (14) para  $\langle u \rangle$ , está escrita enteramente en términos de la velocidad media del flujo, con la importante excepción de los tres últimos términos de la derecha. Aunque de acuerdo con la ecuación (5) tienen de promedio cero, las fluctuaciones del flujo de movimiento las cuales son una función cuadrática de las fluctuaciones de la velocidad, no desaparecen necesariamente cuando se promedian. Estos términos nuevos representan el efecto de las fluctuaciones de la velocidad o “*turbulencia*” sobre la velocidad media del flujo y es equivalente a una tensión que actúa sobre esta redistribuyéndola.





# ¿Porque HELIKE?

HELIKE es el acrónimo de las siguientes palabras:

---

H y d r o d y n a m i c a l  
o c E a n  
m o d e L b a s e d o n  
I n c o m p r e s s i b l e  
n a v i e r - s t o K e s  
E q u a t i o n s

---

## ¿ Qué fué HELIKE?

Hubo una gran ciudad griega que llevaba ese nombre y que se hundió en las aguas del golfo de Corinto de un día para el otro. Fue en 373 antes de Cristo (a.C.), pocas décadas antes de que Platón (429–347 a.C.) narrase la historia de la Atlántida en sus diálogos “*Timeo y Critias*”, cuando un terremoto y un tsunami acabaron con HELIKE. Era la capital de la Liga Aquea, compuesta entonces por doce ciudades griegas. Su santuario a Poseidón (Dios del mar y de los maremotos) únicamente era superado en popularidad por el de Delfos, y tenía colonias en Asia Menor y el sur de Italia. En su día, la catástrofe se achacó —como en el caso de la Atlántida— a la ira de Poseidón por que los habitantes de HELIKE no habían regalado la estatua de bronce del dios a los colonos de Asia Menor o no les habían dejado usarla como molde para una propia. Al desastre de HELIKE hicieron referencia, entre otros, Pausanias y Ptolomeo, y, aunque los arqueólogos la han buscado durante décadas (Soter y Katsonopoulou, 1999), no se la encontró hasta hace poco. Lo hicieron Dora Katsonopoulou, de la Sociedad HELIKE, y Steven Soter, del Museo Americano de Historia Natural, en el verano de 2001 (Soter *et al.*, 2001).

Después de años de rastreo del subsuelo marino en el golfo de Corinto, el proyecto HELIKE acabó dando frutos gracias a que Katsonopoulou releyó los textos clásicos y concluyó que el poros en el que los autores decían que se había hundido la ciudad no sólo podía ser el mar, sino también una laguna interior;

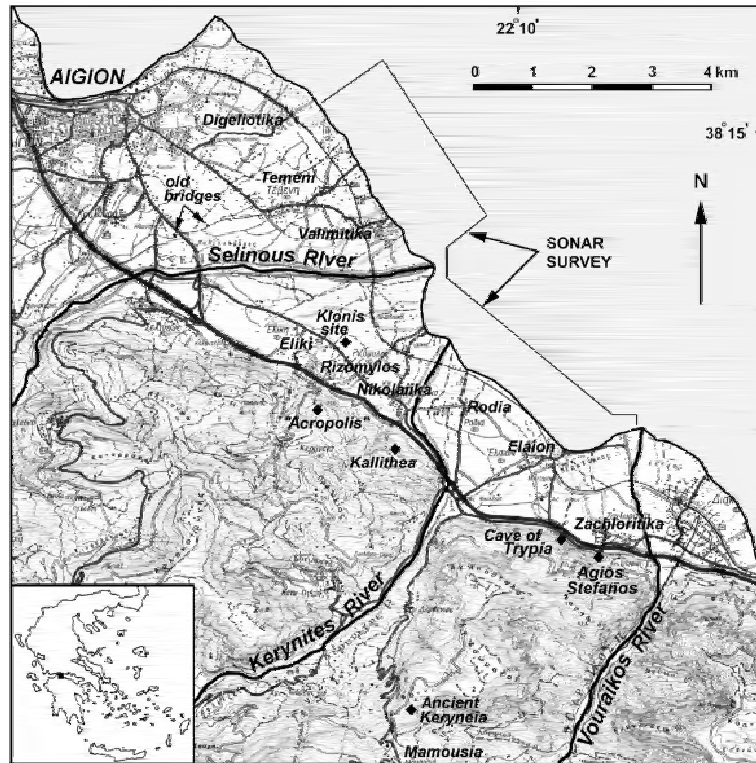


Figura B.1: Ubicación de las zonas de rastreo de HELIKE. Los diamantes (◆) representan antiguos emplazamientos (Escala 1:50.000). Tomado del trabajo de Soter y Katsonopoulou (1999).

aunque hoy no existe en la región nada parecido a una laguna. A un kilómetro tierra adentro y a tres metros bajo tierra cerca de la población de Rizomylos, los investigadores hallaron los restos de una ciudad del siglo IV a.C., debajo de una fina capa de arcilla con conchas de moluscos acuáticos. Lo más sorprendente es que, a 150 metros de la HELIKE clásica, los arqueólogos descubrieron una mucho más antigua —de entre 2600 y 2300 a.C.— que ya era una ciudad importante y mantenía contactos con la Troya de la época. Esta HELIKE de la Edad del Bronce, desconocida hasta ahora, también tuvo un final trágico y fue sepultada en el agua por un terremoto y un tsunami, como su sucesora.

¿Se inspiró Platón en la HELIKE clásica a la hora de destruir la Atlántida? Es posible que sí, que la proximidad temporal del hecho —ha ocurrido en el año 373 a.C., en plena vida del filósofo— y el recuerdo de una gran ciudad griega castigada por Poseidón, y borrada del mapa de la noche a la mañana, le sirvieran de materia prima para un bello relato legendario. Pero eso nunca se sabrá con certeza.